



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

**NUDOS, GRUPOS Y ORBITADAS HIPERBÓLICAS ARITMÉTICAS CUATERNIÓNICAS EN
LAS PRIMERAS 5 DIMENSIONES.**

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
DOCTOR EN CIENCIAS

PRESENTA:
JUAN PABLO DÍAZ GONZÁLEZ

DIRECTOR DE LA TESIS:
DR. SANTIAGO ALBERTO VERJOVSKY SOLÁ
INSTITUTO DE MATEMÁTICAS UNAM,
UNIDAD CUERNAVACA

MIEMBROS DEL COMITÉ TUTOR:
DR. JOSÉ ANTONIO SEADE KURI
INSTITUTO DE MATEMÁTICAS UNAM,
UNIDAD CUERNAVACA.

DR. MANUEL CRUZ LÓPEZ
FACULTAD DE MATEMÁTICAS,
UNIVERSIDAD DE GUANAJUATO.

MÉXICO, D. F. A 19 DE ABRIL DE 2016.



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Índice general

Índice general	I
Contenido General.	XIII
I. Geometrización de variedades.	1
§ 1. Geometrías en varias dimensiones.	1
§ 1.1. Geometrías homogéneas.	1
§ 2. Cinco modelos del espacio hiperbólico.	3
§ 2.1. Geodésicas y subespacios completos.	4
§ 2.2. Grupos de isometrías en bajas dimensiones.	5
§ 3. Estructuras geométricas en variedades.	5
§ 3.1. Variedades geométricas de curvatura constante.	6
§ 3.2. Variedades hiperbólicas.	6
§ 4. Introducción a las orbidades.	7
§ 5. Ejemplos básicos de orbidades.	9
II. Geometría hiperbólica cuaterniónica.	13
§ 1. Los números complejos y los cuaternios.	13
§ 1.1. Transformaciones de Möbius.	14
§ 1.2. Isometrías de $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^1$	16
§ 1.3. Isometrías de \mathbf{H}^3	17
§ 1.4. Isometrías hiperbólicas en el modelo del disco.	18
§ 1.5. Modelo hiperbólico del hemiespacio cuaterniónico.	20
§ 1.6. El subgrupo afín.	23
§ 1.7. Descomposición de Iwasawa.	23
§ 1.8. Subgrupo de isotropía de las isometrías de $\mathbf{H}_{\mathbb{H}}^1$ que fijan un punto.	24
§ 1.9. Traslaciones e inversión cuaterniónicas.	24
§ 2. Extensión de Poincaré a la quinta dimensión.	27
III. Grupos modulares en las primeras 5 dimensiones.	31
§ 1. El grupo modular y el espacio triángulos y de retículas en el plano.	31
§ 2. 7 grupos modulares kleinianos en bajas dimensiones.	31
§ 3. Subgrupos fuchsianos importantes.	32
§ 3.1. Subgrupos unitarios.	32
§ 3.2. Subgrupos afines.	33
§ 3.3. Subgrupos de congruencia.	36
§ 4. Grupo modular de Hurwitz y subgrupos afín y unitario.	36

IV. Dominios fundamentales para los grupos modulares.	41
§ 1. El dominio fundamental de la acción de un grupo.	41
§ 2. Kaleidoscopios hiperbólicos cuaterniónicos.	41
§ 2.1. Orbidades orientables malas.	45
§ 3. Un lema sobre cocompacidad.	47
§ 4. Dominios fundamentales y orbidades para las traslaciones y la inversión.	49
§ 5. Un dominio fundamental de $PSL(2, \mathfrak{L})$	50
§ 5.1. El grupo unitario.	50
§ 6. Un dominio fundamental para el grupo de Hurwitz $PSL(2, \mathfrak{H})$	51
§ 7. Propiedades de los dominios fundamentales.	53
§ 7.1. Teselaciones modulares.	55
§ 8. Un dominio fundamental de $PSL(2, \mathfrak{L})$ como un cono ideal sobre un dodecaedro rómico hiperbólico.	56
§ 9. Caracterización geométrica de los grupos modulares cuaterniónicos.	58
§ 10. Descomposición de Coxeter de los dominios fundamentales.	58
§ 11. Volumen de los dominios fundamentales	61
V. Presentación algebraica de los grupos modulares cuaterniónicos.	63
§ 1. Presentación del grupo modular de Lipschitz.	63
§ 2. Presentación algebraica del grupo modular de Hurwitz.	67
VI. Orbidades modulares cuaterniónicas.	71
§ 1. Las puntas de las orbidades.	71
§ 1.1. La estructura de las puntas.	73
§ 1.2. Las regiones gruesas y los espacios base de $\mathcal{O}_{\mathfrak{L}}^4$ y $\mathcal{O}_{\mathfrak{H}}^4$	74
§ 2. El locus singular de $\mathcal{O}_{\mathfrak{L}}^4$ y $\mathcal{O}_{\mathfrak{H}}^4$	74
§ 3. Modelos locales de las singularidades de las orbidades modulares.	74
§ 3.1. Loci singular de las orbidades modulares de Lipschitz y de Hurwitz.	76
§ 3.2. La estratificación del locus singular de Lipschitz.	77
§ 3.3. La estratificación del locus singular de Hurwitz.	79
§ 4. Las características de Euler de las orbidades modulares de Lipschitz y Hurwitz.	81
VII. Transformaciones de Lorentz.	83
§ 1. Descomposición de Iwasawa para el grupo de Lorentz $SO_+(4, 1)$	85
§ 2. El grupo de congruencia $\Gamma(2, \mathfrak{L})$ en el grupo de Lorentz.	85
§ 3. El grupo modular de Hurwitz $PSL(2, \mathfrak{H})$ en el modelo de Lorentz.	86
VIII. Cubrientes de Selberg y ejemplos de 4-variedades hiperbólicas .	87
§ 1. Un ejemplo por J. Ratcliffe y T. Tschantz de una 4-variedad hiperbólica.	88
§ 1.1. Cubrientes de Selberg en dimensión 5	88
IX. Topología de variedades hiperbólicas.	91
§ 1. Nudos y enlaces.	91
§ 1.1. Hiperbolicidad de complementos	91
§ 1.2. Historia de los nudos y enlaces hiperbólicos.	92
§ 2. Método para dibujar enlaces hiperbólicos.	94
§ 3. Estructuras hiperbólicas en complementos de nudos y enlaces.	95
§ 3.1. Los sólidos platónicos hiperbólicos ideales.	95
§ 3.2. Un poliedro hiperbólico con sus caras apareadas.	99
§ 3.3. Ciclos del pegado.	100

§ 4. Descomposición geométrica de variedades hiperbólicas. 101
 § 4.1. La parte delgada. 102
 § 4.2. La parte gruesa. 102
 § 5. Descomposición en asas. 102
 § 5.1. Asas. 103
 § 6. Descomposición en asas de una 3-variedad presentada como un complejo celular. . . 103
 § 6.1. Composición en asas de la variedad. 105
 § 6.2. Diagrama de una descomposición en asas. 105
 § 6.3. Movimientos de asas. 107
 § 7. 3-variedades hiperbólicas con frontera. 118
 § 7.1. 3-variedades compactas con frontera. 118
 § 7.2. Poliedros hiperideales. 118
 § 7.3. Método para obtener la forma de la frontera en 3-variedades hiperbólicas compactas. 119
 § 7.4. 3-variedades hiperbólicas compactas con frontera. 119
 § 8. 3-variedades con frontera no compactas. 125
 § 8.1. Hiperpoliedro fundamental. 125

X. Una 4-variedad hiperbólica cuaterniónica aritmética que es el complemento de un enlace de 5 toros anudados en la 4-esfera. 127

§ 1. Variedades hiperbólicas como complementos en dimensión 4. 127
 § 1.1. Condiciones de una n -variedad hiperbólica para ser un complemento. 127
 § 1.2. Complementos hiperbólicos en 4-variedades cerradas. 128
 § 2. El complemento hiperbólico de un enlace de 5 toros en la 4-esfera. 128
 § 3. Un kaleidoscopio hiperbólico ideal, regular y rectangular en dimensión 4. 129
 § 4. La identificación de las caras del politopo. 133
 § 4.1. Ciclos. 133
 § 5. Estudio de las cúspides. 134
 § 6. Descomposición en asas y cálculo de Kirby. 134
 § 7. Descomposición en Asas de dimensión 4. 135
 § 7.1. Asas. 135
 § 8. Cálculo de Kirby. 135
 § 9. Descomposición por asas. 135
 § 10. Diagrama del enlace de 5 toros en la 4-esfera. 136
 § 11. Geometrización del complemento del enlace en la 4-esfera. 136

Bibliografía 153

Abstract

Using the rings of Lipschitz and Hurwitz integers $\mathbb{H}(\mathbb{Z})$ and $\mathbb{H}ur(\mathbb{Z})$ in the quaternion division algebra \mathbb{H} (or domain), we define four arithmetic Kleinian discrete subgroups of $PSL(2, \mathbb{H})$ that are denoted by $PSL(2, \mathfrak{L})$, $PSL(2, \mathbb{H}(\mathbb{Z}))$, $PSL(2, \mathfrak{H})$ y $PSL(2, \mathbb{H}ur(\mathbb{Z}))$ and which are a generalization of the classical modular group $PSL(2, \mathbb{Z})$ which act properly and discontinuously on the hyperbolic plane $\mathbf{H}_{\mathbb{R}}^2 = \mathbf{H}_{\mathbb{C}}^1$.

We give a thorough study of Iwasawa's decomposition of hyperbolic isometries, related affine and unitary subgroups and their description by mean Lorentz transformations on the model of Lorentz-Minkowski hyperboloid of the hyperbolic space. Moreover, the Poincaré's extension of these Kleinian groups and their action in the five-dimensional hyperbolic space represented by using quaternions on the halfspace hyperbolic model.

The groups $PSL(2, \mathfrak{L})$ and $PSL(2, \mathfrak{H})$ are Kleinian subgroups of isometries acting properly and discontinuously on the hyperbolic 4-space $\mathbf{H}_{\mathbb{R}}^4 = \mathbf{H}_{\mathbb{H}}^1 := \{\mathbf{q} \in \mathbb{H} : \Re(\mathbf{q}) > 0\}$. Analogously the groups $PSL(2, \mathbb{H}(\mathbb{Z}))$ and $PSL(2, \mathbb{H}ur(\mathbb{Z}))$ are Kleinian subgroups of isometries of $\mathbf{H}_{\mathbb{R}}^5$.

We construct fundamental domains of the actions of these groups that are non-compact polytopes of hyperbolic finite volume and we determined the isotropy groups of fixed points. We described the geometry and topology of the 4-orbifolds $\mathbf{H}_{\mathbb{H}}^1/PSL(2, \mathfrak{L})$ and $\mathbf{H}_{\mathbb{H}}^1/PSL(2, \mathfrak{H})$ and 5-orbifolds $\mathbf{H}_{\mathbb{R}}^5/PSL(2, \mathbb{H}(\mathbb{Z}))$ and $\mathbf{H}_{\mathbb{R}}^5/PSL(2, \mathbb{H}ur(\mathbb{Z}))$ which are the quaternionic versions of the classic modular orbifold $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^1/PSL(2, \mathbb{Z})$ and are examples of hyperbolic arithmetical orbifolds of finite volume.

We find algebraic presentations which are finitely generated and presented of the quaternionic modular groups via the Cayley graphs associated with their actions. We show some Selberg's covers of the hyperbolic orbifolds corresponding to subgroups of finite index of the quaternionic modular groups. In particular we study hyperbolic 4-manifolds of finite volume with cusps whose sections are 3-tori. These hyperbolic arithmetic 4-manifolds are topologically the complement of links of 2-tori at the 4-sphere, in analogy with the complement of the Borromean rings at the 3-sphere.

Following W. Thurston in 2003 D. Ivanšić published a method that decides whether a non-compact orientable hyperbolic 3-manifold is the complement of a knot or link at the 3-sphere. If so, the method describes the class of isotopy of the knot or link by a diagram. But hyperbolic 3-manifolds are characterized with several invariants: orientability, compactness and existence of boundaries components and of the singularities (orbifolds), etc... In this thesis the method is generalized on the 8 types of orientable hyperbolic manifolds.

Finally the Ivanšić's method is generalized to the fourth dimension and is applied to an example of a hyperbolic 4-manifold known as a complement of a link of five 2-tori knotted at the differentiable standard 4-sphere to show diagrams of the isotopy class of the 2-link.

This example is the orientable double cover of the more symmetric hyperbolic non-compact 4-manifold of minimum volume of the 1171 discovered by J. Ratcliffe and S. Tschantz by studying hyperbolic arithmetic groups generated by side-pairings of a regular ideal right-angled hyperbolic 24-cell. Its topology as a complement was exhibited by D. Ivanšić.

Keywords: Quaternionic modular groups, arithmetic hyperbolic 4-manifolds and orbifolds, hyperbolic link and knot complements, diagrams of knotted surfaces, handle decomposition.

AMS subject classification: Primary 20H10, 57S30, 11F06. Secondary 30G35, 30F45.

Mathematics Subject Classification 2000: 57M25, 57M27, 57M50, 57Q45.

Resumen

Usando los anillos de enteros de Lipschitz $\mathbb{H}(\mathbb{Z})$ y el anillo de enteros de Hurwitz $\mathbb{H}ur(\mathbb{Z})$ en el álgebra de división (o dominio) de los cuaternios \mathbb{H} , se definen cuatro subgrupos discretos Kleinianos aritméticos de $PSL(2, \mathbb{H})$ que se denotan por $PSL(2, \mathfrak{L})$, $PSL(2, \mathbb{H}(\mathbb{Z}))$, $PSL(2, \mathfrak{H})$ y $PSL(2, \mathbb{H}ur(\mathbb{Z}))$ los cuales son una generalización del grupo modular clásico $PSL(2, \mathbb{Z})$ que actúa propia y discontinuamente en el plano hiperbólico $\mathbf{H}_{\mathbb{R}}^2 = \mathbf{H}_{\mathbb{C}}^1$.

Se hace un estudio de la descomposición de Iwasawa de las isometrías hiperbólicas, los subgrupos afines y su descripción mediante transformaciones de Lorentz en el modelo del hiperboloide de Lorentz-Minkowski del espacio hiperbólico. Más aún, de la extensión de Poincaré de estos grupos Kleinianos y su acción en el espacio hiperbólico 5-dimensional representado mediante el uso de los cuaternios en el modelo del hemiespacio.

Los grupos $PSL(2, \mathfrak{L})$ y $PSL(2, \mathfrak{H})$ son subgrupos Kleinianos de isometrías que actúan propia y discontinuamente en el 4-espacio hiperbólico $\mathbf{H}_{\mathbb{R}}^4 = \mathbf{H}_{\mathbb{H}}^1 := \{\mathbf{q} \in \mathbb{H} : \Re(\mathbf{q}) > 0\}$. Análogamente los grupos $PSL(2, \mathbb{H}(\mathbb{Z}))$ y $PSL(2, \mathbb{H}ur(\mathbb{Z}))$ son subgrupos Kleinianos de isometrías de $\mathbf{H}_{\mathbb{R}}^5$.

Se exhiben dominios fundamentales de las acciones de estos grupos que son politopos no compactos de volumen finito y se determinan los grupos de isotropía de los puntos fijos. Se describe la geometría y topología de las 4-orbitadas cocientes $\mathbf{H}_{\mathbb{H}}^1/PSL(2, \mathfrak{L})$ y $\mathbf{H}_{\mathbb{H}}^1/PSL(2, \mathfrak{H})$ y de las 5-orbitadas cocientes $\mathbf{H}_{\mathbb{R}}^5/PSL(2, \mathbb{H}(\mathbb{Z}))$ y $\mathbf{H}_{\mathbb{R}}^5/PSL(2, \mathbb{H}ur(\mathbb{Z}))$ las cuales son las versiones cuaterniónicas de la orbidad modular clásica $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^1/PSL(2, \mathbb{Z})$ y son ejemplos de orbitadas hiperbólicas aritméticas de volumen finito.

Se exhiben presentaciones algebraicas finitamente generadas y presentadas de los grupos modulares cuaterniónicos en términos de generadores y relaciones vía las gráficas de Cayley asociadas a la acción de estos grupos modulares. Se describen algunos cubrientes de Selberg de las orbitadas hiperbólicas cuaterniónicas que se corresponden con subgrupos de índice finito de los grupos modulares cuaterniónicos. En particular se estudian 4-variedades hiperbólicas cuaterniónicas de volumen finito con cúspides cuyas secciones son 3-toros. Estas 4-variedades hiperbólicas aritméticas son topológicamente el complemento de un enlace de 2-toros en la 4-esfera, en analogía con el complemento en la 3-esfera de los anillos Borromeanos.

Siguiendo el trabajo de W. Thurston D. Ivansić publicó un método que decide si una 3-variedad hiperbólica orientable no compacta es un complemento de un nudo o enlace en la 3-esfera. Si lo es, el método describe la clase de isotopía del enlace mediante un diagrama. Pero las 3-variedades hiperbólicas se caracterizan con varios invariantes: orientabilidad, compacidad y existencia de frontera y de singularidades (orbitadas), etc... En esta tesis se generaliza el método de Ivansic y se muestran ejemplos resueltos para los 8 tipos de 3-variedades hiperbólicas orientables.

Finalmente se generaliza a la cuarta dimensión el método presentado y se aplica en un ejemplo de una 4-variedad hiperbólica que se sabe es el complemento del enlace de cinco 2-toros anudados en la 4-esfera diferenciable estándar para mostrar diagramas de la clase de isotopía del 2-enlace.

Este ejemplo es el doble cubriente orientable de la más simétrica 4-variedad hiperbólica no compacta de volumen mínimo de las 1171 descubiertas por J. Ratcliffe y S. Tschantz mediante el estudio de grupos hiperbólicos aritméticos generados por apareamientos de lados de un poliedro 24-celdas hiperbólico ideal, convexo, rectangular y regular. Su topología como un complemento de toros anudados en la 4-esfera estándar diferenciable fue exhibida por D. Ivansić.

Keywords. Grupos modulares cuaterniónicos, 4-variedades y orbidades hiperbólicas aritméticas, complementos hiperbólicos de nudos y enlaces, diagramas de superficies anudadas, descomposición en asas.

AMS subject classification: Primary 20H10, 57S30, 11F06. Secondary 30G35, 30F45.

Mathematics Subject Classification 2000: 57M25, 57M27, 57M50, 57Q45.

Introducción

Desde el tiempo de Carl Friedrich Gauss, de Richard Dedekind y Felix Klein el grupo modular clásico $PSL(2, \mathbb{Z})$ y su acción propia y discontinua sobre el hemiplano hiperbólico (complejo) $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^1 := \{z \in \mathbb{C} : \Im(z) > 0\}$ ha jugado un rol central en diferentes ramas de las Matemáticas y la Física como la teoría de números, superficies de Riemann, curvas elípticas, geometría hiperbólica, cristalografía, teoría de cuerdas, entre otras.

Similarmente, los subgrupos discretos de $PSL(2, \mathbb{C})$ son muy importantes en la definición de latices para el estudio de 3-orbitadas hiperbólicas aritméticas (ver por ejemplo [43]). En particular $PSL(2, \mathbb{Z}[i])$ es llamado el *grupo de Picard* y es el grupo modular complejo sobre los enteros de Gauss $\mathbb{Z}[i] = \mathbb{C}(\mathbb{Z})$. Otro campo muy importante derivado del grupo modular es la teoría de formas modulares y formas automorfas en general (ver [10], [24], [44], [58]).

En esta tesis, se introducen generalizaciones en el álgebra de división (o dominio) de los cuaternios mediante los anillos de enteros cuaterniónicos de Lipschitz $\mathbb{H}(\mathbb{Z})$ y de Hurwitz $\mathbb{H}ur(\mathbb{Z})$ (ver [28] [29] [41]) del grupo aritmético modular $PSL(2, \mathbb{Z})$. Esto es, se estudia el grupo proyectivo especial lineal cuaterniónico $PSL(2, \mathbb{H})$ y un subgrupo especial que consiste de aquellos elementos de $PSL(2, \mathbb{H})$ que satisfacen cierta condición. Se les caracteriza como el grupo de isometrías hiperbólicas del espacio hiperbólico de dimensión 4 y 5, respectivamente. Se definen 4 subgrupos Kleinianos aritméticos que se denotan por $PSL(2, \mathfrak{L})$, $PSL(2, \mathbb{H}(\mathbb{Z}))$, $PSL(2, \mathfrak{H})$ y $PSL(2, \mathbb{H}ur(\mathbb{Z}))$.

Los grupos $PSL(2, \mathfrak{L})$ y $PSL(2, \mathfrak{H})$ actúan en la semi-recta cuaterniónica $\mathbf{H}_{\mathbb{H}}^1 := \{\mathbf{q} \in \mathbb{H} : \Re(\mathbf{q}) > 0\}$ con la métrica hiperbólica $\frac{d|q|^2}{\Re(\mathbf{q})^2}$ que es otra representación del 4-espacio hiperbólico real $\mathbf{H}_{\mathbb{R}}^4$. Esta representación del 4-espacio hiperbólico es posible debido a una caracterización reciente de las transformaciones lineales que dejan invariante el hemiespacio cuaterniónico $\mathbf{H}_{\mathbb{H}}^1$.

Los grupos $PSL(2, \mathbb{H}(\mathbb{Z}))$ y $PSL(2, \mathbb{H}ur(\mathbb{Z}))$ son subgrupos Kleinianos de isometrías de $\mathbf{H}_{\mathbb{R}}^5$.

Basados en esta representación matricial de las isometrías hiperbólicas de los espacios de dimensión 4 y 5 se hace un estudio de la correspondencia de estos grupos mediante la extensión de Poincaré usando la noción del determinante de Dieudonné. Además se generaliza la descomposición de Iwasawa de las isometrías hiperbólicas que es un teorema de factorización matricial. Se describen los subgrupos afines y unitarios.

Se estudia la representación mediante transformaciones de Lorentz de los grupos modulares de Lipschitz y Hurwitz correspondientes en los modelos del hiperboloide de los espacios hiperbólicos de Lorentz-Minkowski y la descomposición de Iwasawa correspondiente. Se describe un grupo de congruencias y un subgrupo principal de congruencias los cuales consisten de matrices Lorentzianas en $SO_+(4, 1)$ con coeficientes enteros.

Se muestran dominios fundamentales de las acciones de estos grupos que son politopos hiperbólicos no compactos de volumen finito y se determinan los grupos de isotropía de los puntos fijos. Más aún, se describen las teselaciones invariantes y se construyen las gráficas de Cayley asociadas a la acción de estos grupos modulares. Estas digráficas (o gráficas dirigidas) infinitas se utilizan para exhibir presentaciones algebraicas finitamente generadas y presentadas de los grupos modulares cuaterniónicos en términos de generadores y relaciones.

Una *orbitada (variedad) hiperbólica* es aquella que admite una métrica riemanniana geodésicamente completa de curvatura seccional constante -1. Su cubriente universal es el espacio hiperbólico n -dimensional \mathbf{H}^n y se tiene una representación del grupo fundamental como un subgrupo discreto

de isometrías hiperbólicas que actúa propia, (libre) y discontinuamente; es decir, *errantemente*. Las orbidades y las variedades hiperbólicas pueden tener volumen finito o infinito.

Se describe un detallado análisis de la geometría y topología de las 4-orbidades cocientes $\mathbf{H}_{\mathbb{H}}^1/PSL(2, \mathfrak{L})$ y $\mathbf{H}_{\mathbb{H}}^1/PSL(2, \mathfrak{S})$ y de las 5-orbidades cocientes $\mathbf{H}_{\mathbb{R}}^5/PSL(2, \mathbb{H}(\mathbb{Z}))$ y $\mathbf{H}_{\mathbb{R}}^5/PSL(2, \mathbb{H}ur(\mathbb{Z}))$ las cuales son las versiones cuaterniónicas de la orbidad modular clásica $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^1/PSL(2, \mathbb{Z})$ y son ejemplos de orbidades hiperbólicas aritméticas de volumen finito. Se enlistan los grupos de isotropía de las estratificaciones singularidades de las orbidades modulares introducidas. Estos resultados, además de su propia importancia geométrica e interés propio, tienen grandes consecuencias interdisciplinarias en muchos otros campos de investigación tales como la teoría de números y la teoría de representaciones.

Usando algunos resultados de Ratcliffe y Tschantz, se describen algunos cubrientes de Selberg de las orbidades hiperbólicas cuaterniónicas que se corresponden con subgrupos de índice finito de los grupos modulares cuaterniónicos. En particular se estudia una 4-variedad hiperbólica cuaterniónica orientable y no compacta pero de volumen finito con cinco cúspides cuyas secciones son 3-toros. Esta 4-variedad hiperbólica aritmética es topológicamente el complemento de un enlace de cinco 2-toros anudados en la 4-esfera, en analogía con el complemento en la 3-esfera de los anillos Borromeanos. Toda n -variedad hiperbólica M^n no compacta pero de volumen finito es topológicamente el interior de una n -variedad \bar{M}^n cuya frontera $\partial\bar{M}^n$ consiste de un conjunto finito y no vacío de $(n-1)$ -variedades euclidianas, cerradas y disjuntas que se pueden obtener al remover vecindades tubulares, regulares y abiertas en las puntas de M^n . Más aún, \bar{M}^n es un retracto fuerte por deformación de M^n .

Si ahora nos enfocamos en el caso 3-dimensional y suponiendo que la variedad ambiente N^3 es homeomorfa a \mathbb{S}^3 , se puede caracterizar la clase de isotopía del enlace A^1 que queda determinada a partir de la variedad hiperbólica $M^3 = N^3 - A^1$; ver [21], [62], [63]. Específicamente, siguiendo el trabajo de W. Thurston D. Ivanić mostró en [34] y en [35] un método que decide si una 3-variedad hiperbólica orientable no compacta es un complemento de un nudo o enlace en la 3-esfera. Si lo es, el método describe un diagrama regular que muestra la clase de isotopía de A^1 en \mathbb{S}^3 a partir de una descomposición en asas de una representación de la variedad hiperbólica M^3 como el complejo celular que se forma por un poliedro hiperbólico ideal de volumen finito con sus caras identificadas en parejas por isometrías respecto a la acción de una representación del grupo fundamental $\pi_1(M^3)$ en su cubriente universal \mathbf{H}^3 .

Pero las 3-variedades hiperbólicas se caracterizan con varios invariantes: orientabilidad, compacidad y existencia de frontera y de singularidades (orbidades), etc... En esta tesis se generaliza el método de Ivanić y se muestran ejemplos resueltos para los 8 tipos de 3-variedades hiperbólicas orientables. Más aún, se generaliza a la cuarta dimensión el método presentado y se aplica en un ejemplo particular exhibido por D. Ivanić en [32] de una 4-variedad hiperbólica que denotaremos por \mathcal{M}^4 y que se sabe es homeomorfa al complemento del enlace de cinco 2-toros anudados en la 4-esfera diferenciable estándar para mostrar diagramas de la clase de isotopía del 2-enlace.

Este ejemplo es el doble cubriente orientable de la más simétrica 4-variedad hiperbólica no compacta de volumen mínimo de las 1171 descubiertas por J. Ratcliffe y S. Tschantz mediante el estudio de grupos hiperbólicos aritméticos generados por apareamientos de lados de un poliedro 24-celdas hiperbólico ideal, convexo, rectangular y regular. Su topología como un complemento de toros anudados en la 4-esfera estándar diferenciable fue exhibida por D. Ivanić.

En [33] D. Ivanić, J. Ratcliffe y S. Tschantz encontraron once ejemplos más de 4-variedades hiperbólicas homeomorfas al complemento de enlaces de 2-toros y botellas de Klein en 4-esferas topológicas.

Esta docena de ejemplos son dobles cubrientes orientables de 4-variedades hiperbólicas no orientables de característica de Euler 1 (y por lo tanto, de volumen mínimo) de entre las 1049 que fueron exhibidas por J. Ratcliffe y S. Tschantz en [52] y que fueron construídas mediante el apareamiento

de los 24 lados octaedrales de un politopo convexo, ideal (no compacto pero de volumen finito), regular, rectangular y autodual en el espacio hiperbólico 4-dimensional \mathbf{H}^4 .

Estas 4-variedades hiperbólicas fueron usadas por J. Ratcliffe y S. Tschantz en [50] para construir ejemplos de 4-variedades aesféricas que son 4-esferas de homología. Incluso J. Ratcliffe las utiliza en [52] en el estudio cosmológico de instantones gravitacionales de curvatura constante.

La 4-variedad \mathcal{M}^4 es el doble cubriente de la 4-variedad hiperbólica M cuyo grupo de simetría tiene el mayor orden; es decir, M es la más simétrica de las 4-variedades no compactas de volumen mínimo. La demostración de que estas 4-variedades son complementos en una 4-variedad \mathcal{N}^4 homeomorfa a la 4-esfera se basó en un criterio acerca de sus grupos de homología y presentaciones de grupos para mostrar que \mathcal{N}^4 es simplemente conexa. Además, la característica de Euler de \mathcal{N}^4 es 2 y por la teoría de M. H. Freedman y F. Quinn, estas dos condiciones garantizan el homeomorfismo con \mathbf{S}^4 , ver [26].

En [34] D. Ivanšić demuestra que \mathcal{N}^4 es difeomorfa a la 4-esfera estándar diferenciable \mathbf{S}^4 (y no a una posible 4-esfera topológica con alguna estructura exótica diferenciable). La prueba de ello se basa en descomponer a \mathcal{N}^4 como un rompecabezas; esto es, en un conjunto finito de piezas, llamadas asas, que son homeomorfas a 4-bolas que se pegan diferenciablemente por su frontera. Mediante movimientos de asas se puede llevar esta presentación de \mathcal{N}^4 a la descomposición en asas canónica de la 4-esfera estándar diferenciable \mathbf{S}^4 , lo que garantiza el difeomorfismo. En este mismo artículo D. Ivanšić encuentra como una aplicación de este método en dimensión 3, un algoritmo que determina si una 3-variedad hiperbólica dada es homeomorfa al complemento de un enlace de circunferencias en \mathbf{S}^3 ; en cuyo caso, produce el diagrama del enlace por añadidura.

Estado del arte

De acuerdo a Lars V. Ahlfors [1] (ver también [42], [?]) fue Karl Theodor Vahlen quien en su artículo [?] introdujo en 1901 la idea de usar los números de Clifford para definir grupos de Möbius de matrices de 2 por 2 cuyos coeficientes son números de Clifford (matrices de Clifford) actuando en espacios hiperbólicos. En 1984 Ahlfors siguió la idea de Vahlen y consideró grupos de matrices de Clifford y dió las condiciones necesarias y suficientes para dejar invariante un semiespacio y su métrica hiperbólica correspondiente. En particular, en dimensión 4 Ahlfors dió condiciones en matrices de Clifford con coeficientes en los cuaternios \mathbb{H} para inducir transformaciones de Möbius que actúan como isometrías que preservan la orientación de un modelo de la geometría hiperbólica, el semiespacio de \mathbb{H} con su métrica de Poincaré. En 2009 Cinzia Bisi y Graziano Gentili reformularon las condiciones de Ahlfors utilizando a los cuaternios: $\bar{A}^t K A = K$ donde A es una matriz de 2 por 2 con coeficientes en \mathbb{H} y $K = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, donde \bar{A}^t es la matriz transpuesta del conjugado cuaterniónico de A . En [7] se demuestra que el grupo de matrices A que satisfacen esta condición (la cuál es equivalente a tres ecuaciones llamadas las *condiciones (BG)*) es isomorfo al grupo $Sp(1, 1)$ definido en [?].

Se recalca que las condiciones (BG) son equivalentes a las condiciones de Ahlfors pero son mucho más simples, muy eficientes y útiles. Los grupos que son generalizaciones del grupo modular clásico y el grupo de Picard han sido considerados antes por C. Maclachlan, P.L. Waterman y N.J. Wielenberg [?], N. W. Johnson y A. I. Weiss [?], en particular el grupo correspondiente a los enteros de Lipschitz es considerado y un dominio fundamental de este grupo se describe, sin embargo no se ofrecen demostraciones del hecho de que este politopo convexo ideal es un dominio fundamental y aquí se enuncia una demostración completa y detallada.

En [?] el grupo de Hurwitz es brevemente mencionado en un párrafo pero no se ofrece una descripción de algún dominio fundamental o de sus orbidades correspondientes. Los mismos comentarios aplican para el artículo [?] que han sido descubiertos esencialmente mediante métodos computacio-

nales. Por otro lado, el artículo [?] apela al teorema de Borel y Harish-Chandra [?] y nuestro punto de vista es directo y motivado por la demostración de J.P. Serre del teorema 1 página 78 en [58]. Aquí se han utilizado las condiciones (BG) para abordar las dificultades de la no conmutatividad de los cuaternios. Por otra parte en la presente tesis se describe un análisis detallado de la estratificación, así como la topología y la geometría de las orbidades modulares generalizadas asociadas. En [?] se da una presentación del grupo modular de Lipschitz usando los resultados de [?] (los cuáles son sólo para dimensión tres) acerca de grupos poliedrales y producto amalgamado de gráficas. Aquí se dan presentaciones y se dan demostraciones completas en términos de gráficas de Cayley que también se describen.

Ruth Kellerhalls en [?], usando los cuaternios, describe la descomposición de Margulis de 5-variedades hiperbólicas no compactas pero de volumen finito y da estimaciones de la longitud mínima de geodésicas cerradas.

Objetivo general.

El objetivo central de esta tesis doctoral consiste en estudiar las posibles generalizaciones de los grupos modulares hiperbólicos cuaterniónicos a espacios de dimensión 4 y 5, además de sus espacios cociente que son orbidades hiperbólicas no compactas de volumen finito. Estudiar la geometría hiperbólica de dimensión 4 y 5 bajo una representación cuaterniónica, en particular la representación de las isometrías.

Otro objetivo fundamental de esta tesis consiste en dibujar diagramas de una proyección regular que indique explícitamente la clase de isotopía del enlace \mathcal{A}^2 de cinco 2-toros anudados en \mathbf{S}^4 cuyo complemento admite una estructura hiperbólica, geodésicamente completa y aritmética.

Para ello se combinan los dos métodos que propone D. Ivanšić en [34] aplicados en la 4-variedad hiperbólica de Ratcliffe-Tschantz-Ivansic \mathcal{M}^4 que se sabe es el complemento de un enlace 5 toros en \mathbf{S}^4 con el fin de obtener un diagrama 3-dimensional de superficies quebradas.

De allí se puede obtener un diagrama del tipo de rollo de película de corte transversal que muestra una secuencia de enlaces de curvas.

Mas aún, al complemento de este enlace en \mathbf{S}^4 se le da una estructura de complejo CW hiperbólica geodésicamente completa mediante cortar el complemento con la forma del 4-politopo fundamental a través de subvariedades de Seifert. Además se puede calcular el grupo fundamental, los grupos abelianos de homología y el grupo de simetrías del enlace y obtener representaciones geométricas de los generadores y las relaciones para algunas presentaciones abstractas de estos grupos.

Finalmente mostrar otras propiedades geométrico-topológicas como encajes de subvariedades geodésicamente completas, subvariedades de área y volumen mínimo, empaquetado de horiesferas en el infinito, etc...

Contenido General.

En esta tesis se estudian nuevos ejemplos de grupos kleinianos y de 4-orbitadas hiperbólicas aritméticas. Además se estudia la topología de las variedades hiperbólicas. En particular 3-variedades y 3-orbitadas hiperbólicas no compactas con frontera.

- **Preliminares.** En el capítulo 0 se encuentra una introducción básica a la geometría, en especial la geometría hiperbólica y a la geometrización de variedades y orbitadas. Estos son los preliminares necesarios sobre el espacio hiperbólico y los espacios modelados en ellos.
- **Parte I. Grupos y orbitadas modulares cuaterniónicas.** Se estudia el grupo modular clásico $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$ y en el capítulo 3 se estudia el grupo modular de Picard $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C}(\mathbb{Z}))$. En el capítulo 4 se estudian los grupos modulares cuaterniónicos de Lipschitz y de Hurwitz. Finalmente en el capítulo 5 se estudia la extensión de Poincaré de los grupos modulares cuaterniónicos de Lipschitz y de Hurwitz actuando en el espacio hiperbólico de dimensión 5.
- **Parte II. Nudos y 3-orbitadas hiperbólicas, variedades con frontera incluso.** Se estudia la forma topológica de las 3-orbitadas hiperbólicas incluso aquellas que son 3-variedades con frontera, como complementos de enlaces de nudos y exteriores de gráficas en la 3-esfera. Una 3-orbitada puede ser compacta, tener frontera y singularidades. Por lo tanto existen 8 tipos de 3-orbitadas con estas propiedades y en la segunda parte se muestran ejemplos de cada uno.
- **Parte III. Un enlace hiperbólico en la 4-esfera.** Se estudia la clase de isotopía de un enlace de 5 toros en la 4-esfera que admite una estructura hiperbólica modelada en un politopo regular.

CAPÍTULO I

Geometrización de variedades.

Un deseo común de romper con la idea de realidad clásica,
y una exploración de nuevas formas de sugerir,
como se dice,
el mundo “no euclideo”.

Antoni Tàpies.

Dos tendencias alternantes.

Este primer capítulo consituye los preliminares geométricos. Se estudia el espacio hiperbólico en varias dimensiones. En particular, se describen cinco modelos analíticos para representar a los espacios hiperbólicos en las primeras cinco dimensiones reales y sus correspondientes subespacios geodésicos y grupos de isometrías. Además se estudian algunos subgrupos importantes de isometrías.

En este capítulo seguiremos las notas de geometría hiperbólica de Cannon, Floyd, Kenyon y Parry, así como el libro “Fundamentos de las variedades hiperbólicas” de Ratcliffe; ver [40] y [49], respectivamente.

§ 1. Geometrías en varias dimensiones.

Esta historia es acerca de la búsqueda de nuevos espacios en el imaginario donde concebir geometría. Al principio Euclides dibujó circunferencias como redondas sombras en la caverna y nos mostró el camino, Descartes marcó coordenadas, Euler y Gauss señalaron la diferencia entre lo local y lo global, lo intrínseco y lo extrínseco, Riemann concibió nuevas superficies al estilo cartográfico, Klein cerró la banda de Möbius y propuso una definición moderna de geometría, Poincaré modeló el infinito ideal en el espacio hiperbólico, Thurston conjeturó el juguetero taxonómico de las 3-variedades y Perelman lo demostró, siguiendo el plan de Hamilton, mediante el *fluir* de las métricas.

Algunas excelentes referencias para profundizar en el tema de variedades hiperbólicas son los libros de Alberto Verjovsky [64], R. Benedetti y C. Petronio [4], J. Ratcliffe [49] y W. Thurston [62] y [63].

§ 1.1. Geometrías homogéneas.

Los modelos de la geometría de espacios homogéneos e isotrópicos; es decir, aquellos que desde cualquier punto y en cualquier dirección se tiene la misma imagen, son la n -esfera \mathbf{S}^n , el n -espacio euclideo \mathbf{E}^n y el n -espacio hiperbólico \mathbf{H}^n . Éstas son las únicas n -variedades Riemannianas, conexas, simplemente conexas, geodésicamente completas y de curvatura seccional constante positiva, cero y negativa; respectivamente.

En esta sección se revisan los espacios que son los modelos donde podemos realizar las geometrías homogéneas. Cada modelo consiste de una subvariedad en \mathbb{R}^{n+1} equipada con una métrica riemanniana definida mediante su elemento de longitud.

Uno de los varios modelos analíticos de la geometría no-euclidea descubierta por Gauss, Lobachevskii y Bolyai (y desarrollada posteriormente por Beltrami y Poincaré) es el que la da nombre a la comúnmente llamada geometría hiperbólica: el modelo del hiperboloide.

Sea $\mathbf{E}^n := \{(x_1, \dots, x_n) : x_m \in \mathbb{R}, \text{ para toda } m \in \{1, \dots, n\}\}$ el *espacio euclideo* n-dimensional; este es el conjunto \mathbb{R}^n con la métrica euclidea $d_s = x_1^2 + \dots + x_n^2$.

Este modelo del espacio nos permite describir muy bien objetos físicos de proporciones semejantes a las nuestras, no diminutas ni enormes. Pero si consideramos la teoría de la relatividad entonces la velocidad de la luz debe permanecer constante desde un marco de referencia inercial. Un modelo del espacio-tiempo con esta geometría es el llamado *modelo de Minkowski* y es el mismo conjunto \mathbb{R}^n pero con una nueva norma que define una nueva noción de distancia. El cuadrado de la norma es $x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2 - x_n^2$.

El cono de luz es definido como el conjunto de puntos de norma 0. La distancia euclidea desde el origen de los puntos $(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n)$ en el cono de luz es el tiempo x_n .

Estas dos normas tienen asociado un producto interno: Se denota mediante un punto \cdot el producto interno euclideo y mediante un asterisco $*$ el producto interno no-euclideo.

El conjunto de puntos en \mathbf{E}^n equidistantes desde el origen (con distancia $r > 0$ al origen) es una *esfera* (de radio r). Sea

$$\mathbf{S}^{n-1} := \{(x_1, \dots, x_n) : x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1\} = \{x \in \mathbf{E}^n : x \cdot x = 1\}$$

la *esfera unitaria* (n-1)-dimensional en el espacio \mathbf{E}^n .

El conjunto de puntos en el espacio de Minkowski equidistantes desde el origen (con distancia $r > 0$ al origen) es un hiperboloide (de radio r). Sea

$$\mathbf{L}^n := \{(x_1, \dots, x_n) : x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2 + 1 = x_n^2\} = \{x \in \mathbb{R}^n : x * x = -1\}$$

el *espacio hiperbólico* (n-1)-dimensional en el espacio de Minkowski. Este modelo del espacio hiperbólico le da el nombre a la geometría pues es un hiperboloide de dos hojas que se identifican proyectivamente en una sola hoja. Este modelo del espacio hiperbólico puede ser considerado entonces como una esfera de radio imaginario $\mathbf{i} = \sqrt{-1}$ que nos permite estudiar el grupo de isometrías hiperbólicas como un grupo de matrices proyectivas..

El producto interno $*$ restringido a \mathbf{L}^n define una métrica riemanniana. Esto es, una función que asigna a cada punto $p \in \mathbf{L}^n$ un producto interno simétrico definido positivo en el espacio tangente en p , este producto interno varía diferenciablemente con el punto p .

Mediante este producto interno es posible definir varias nociones geométricas como la longitud $|x|$ de un vector x como $|x|^2 = x * x$, el ángulo θ entre dos vectores como $\cos(\theta) = \frac{x * y}{|x| * |y|}$, el elemento de longitud $ds = \sqrt{ds^2}$, el elemento de área dA, \dots . Es posible generalizar todas estas nociones a variedades y orbidades mediante la existencia de métricas riemannianas en cada una de sus cartas coordenadas que satisfacen ser invariantes bajo pullbacks de transición entre cartas que se intersectan.

Sea $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función suave, se define el pullback $f^*(ds^2)$ mediante la fórmula

$$f^*(ds^2)(u, v) = ds^2(Df(u), Df(v))$$

donde u y v son vectores tangentes en el punto p de \mathbb{R}^k y Df es la derivada que manda vectores tangentes a p a vectores tangentes a $x = f(p)$.

Si ds_1^2 y ds_2^2 son las métricas riemannianas en dos cartas de una variedad que se intersectan y si f es una función de transición entre las dos cartas, entonces $f^*(ds_2^2) = ds_1^2$. Por lo tanto, conceptos geométricos como la longitud de una curva o el área son invariantes bajo cambio de cartas.

§ 2. Cinco modelos del espacio hiperbólico.

La teoría de la geometría hiperbólica se puede construir independientemente con un sólo modelo pero la existencia de varios modelos aporta más elementos para la comprensión y el estudio. Cada modelo posee su propia métrica, geodésicas, isometrías, etc...

En esta sección se estudian 5 modelos analíticos del espacio hiperbólico. El subconjunto de \mathbb{R}^{n+1} que define a cada modelo se llama *dominio*. Ahora se estudian los dominios de cada modelo, la métrica hiperbólica asociada, sus subespacios geodésicamente completos y en especial, los grupos de isometrías.

A continuación se enumeran los cinco modelos del espacio hiperbólico n -dimensional, los dominios y sus métricas riemannianas correspondientes.

1. **H.**- El modelo del Hemiespacio.

$$\mathbf{H}^n = \{(1, x_2, \dots, x_{n+1}) : x_{n+1} > 0\};$$

$$ds_{\mathbf{H}^n}^2 = \frac{dx_2^2 + \dots + dx_{n+1}^2}{x_{n+1}^2}.$$

2. **I.**- El modelo del interior del disco.

$$\mathbf{I}^n = \{(x_1, \dots, x_n, 0) : x_1^2 + \dots + x_n^2 < 1\};$$

$$ds_{\mathbf{I}^n}^2 = 4 \frac{dx_1^2 + \dots + dx_n^2}{(1 - x_1^2 - \dots - x_n^2)^2}.$$

3. **J.**- El modelo del hemisferio.

$$\mathbf{J}^n = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) : x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1, x_{n+1} > 0\};$$

$$ds_{\mathbf{J}^n}^2 = \frac{dx_1^2 + \dots + dx_n^2}{x_{n+1}^2}.$$

4. **K.**- El modelo proyectivo de Klein.

$$\mathbf{K}^n = \{(x_1, \dots, x_n, 1) : x_1^2 + \dots + x_n^2 < 1\};$$

$$ds_{\mathbf{K}^n}^2 = \frac{dx_1^2 + \dots + dx_n^2}{1 - x_1^2 - \dots - x_n^2} + \frac{(x_1 dx_1 + \dots + x_n dx_n)^2}{(1 - x_1^2 - \dots - x_n^2)^2}.$$

5. **L.**- El modelo del hiperboloide.

$$\mathbf{L}^n = \{(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) : x_1^2 + \dots + x_n^2 - x_{n+1}^2 = -1, x_{n+1} > 0\};$$

$$ds_{\mathbf{L}^n}^2 = dx_1^2 + \dots + dx_n^2 - dx_{n+1}^2.$$

Estos 5 modelos representan analíticamente el mismo espacio hiperbólico; esto es, los 5 modelos son isométricamente equivalentes. Ahora se describen las isometrías entre ellos como subconjuntos de \mathbb{R}^{n+1} . Se considera el modelo **J** del hemisferio como un modelo central y se describe explícitamente la isometría entre algún modelo hiperbólico y **J**. Estas transformaciones pueden utilizarse para hacer el pullback de la métrica riemanniana y verificar que efectivamente son isometrías.

Los 5 modelos analíticos de la geometría hiperbólica son isométricamente equivalentes; más aún, se puede pasar de uno a otro por medio de isometrías llamadas *transformaciones de Cayley*. Del

modelo del hiperboloide \mathbf{L}^n se obtiene el modelo de Klein \mathbf{K}^n mediante una proyección central desde el origen. Del modelo de Klein se obtiene el modelo del hemisferio \mathbf{J}^n mediante una proyección ortogonal. Del modelo del hemisferio se obtiene el modelo del hemiespacio \mathbf{H}^n y el modelo de interior del disco \mathbf{I}^n mediante proyección estereográfica de la esfera unitaria a los subespacios definidos por \mathbf{H}^n y \mathbf{I}^n .

La isometría $\alpha : \mathbf{J} \rightarrow \mathbf{H}$ es una proyección central desde el punto $(-1, 0, \dots, 0)$:

$$\alpha(x_1, \dots, x_{n+1}) = \left(1, \frac{2x_2}{x_1 + 1}, \dots, \frac{2x_{n+1}}{x_1 + 1}\right).$$

La isometría $\beta : \mathbf{J} \rightarrow \mathbf{I}$ es una proyección central desde el punto $(0, \dots, 0, -1)$:

$$\beta(x_1, \dots, x_{n+1}) = \left(\frac{x_1}{x_{n+1} + 1}, \dots, \frac{x_n}{x_{n+1} + 1}, 0\right).$$

La isometría $\gamma : \mathbf{K} \rightarrow \mathbf{J}$ es una proyección vertical:

$$\gamma(x_1, \dots, x_n, 1) = (x_1, \dots, x_n, \sqrt{1 - x_1^2 - \dots - x_n^2}).$$

La isometría $\delta : \mathbf{L} \rightarrow \mathbf{J}$ es una proyección central desde el punto $(0, 0, \dots, -1)$:

$$\delta(x_1, \dots, x_{n+1}) = \left(\frac{x_1}{x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{x_{n+1}}, \frac{1}{x_{n+1}}\right).$$

Lo que geoméricamente se describe en un modelo (triángulos, poliedros, esferas, medidas de longitud, de volumen, angulares y demás) tiene una correspondencia isométrica en los demás. La geometría hiperbólica es pues multifacética. Todos los modelos hablan de la misma geometría pero cada uno la realiza concreta y explícitamente de manera diferente. La enorme ventaja está en que la interrelación nos acerca a una comprensión más clara y profunda de la geometría hiperbólica en sí.

§ 2.1. Geodésicas y subespacios completos.

Sea $\mathbf{E}^n := \{(x_1, \dots, x_{n+1}) : x_{n+1} = 0\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Las geodésicas del n -espacio euclideo \mathbf{E}^n , de la n -esfera \mathbf{S}^n y del espacio hiperbólico en el modelo del hiperboloide \mathbf{L}^n y del disco proyectivo \mathbf{K}^n se obtienen respectivamente mediante la intersección de n -hiperplanos euclideos que pasan por el origen.

Por lo tanto en \mathbf{E}^n las geodésicas son líneas rectas euclideas \mathbf{E}^1 , en \mathbf{S}^n son circunferencias \mathbf{S}^1 de radio máximo y en \mathbf{L}^n son hipérbolas de una sola hoja.

Cada uno de los modelos hiperbólicos representa como subconjuntos a las geodésicas de distinta manera: En \mathbf{K}^n las geodésicas son los segmentos de cuerda euclideos contenidos en una n -bola y los dos extremos de las geodésicas están en la esfera ideal unitaria \mathbf{S}^{n-1} . En \mathbf{J}^n las geodésicas son la intersección del hemisferio con planos ortogonales a su base ecuatorial. En \mathbf{I}^n las geodésicas son segmentos de circunferencias contenidos en una n -bola que intersectan ortogonalmente la frontera de \mathbf{I}^n .

A causa de tener un punto ideal especial, en \mathbf{H}^n las geodésicas son de dos tipos lo cual marca una diferencia con los cuatro modelos anteriores. En \mathbf{H}^n las geodésicas son semirectas y semicircunferencias ortogonales a la esfera ideal $\mathbf{S}_{\infty}^{n-1}$.

Dados $k+1$ puntos en un modelo geométrico \mathbf{X}^{n+1} , existe un subespacio $\mathbf{X}^k \subset \mathbf{X}^{n+1}$ geodésicamente completo que los contiene, donde $k = 0, \dots, n$. Esta manera es muy útil intuitiva y analíticamente hablando, para estudiar \mathbf{X}^n mediante subespacios \mathbf{X}^k , $k = 1, \dots, n-1$.

§ 2.2. Grupos de isometrías en bajas dimensiones.

El modelo del hiperboloide \mathbf{L}^n permite conocer que el grupo de isometrías del espacio hiperbólico n -dimensional es isomorfo a $O(n, 1)$. Sin embargo, en las dimensiones más bajas (hasta la quinta dimensión), es más conveniente representar el grupo de isometrías hiperbólicas como un subgrupo de matrices de 2×2 con coeficientes en los números reales, complejos y cuaternios.

Las isometrías de las geometrías homogéneas forman un grupo de Lie real. A saber,

$$\text{Iso}(\mathbf{S}^n) = O(n + 1);$$

$$\text{Iso}(\mathbf{E}^n) = \mathbf{E}^n \rtimes O(n);$$

$$\text{Iso}(\mathbf{H}^n) = \text{PO}(n, 1) = \text{Möb}(\mathbf{B}^n) = \text{Möb}(\mathbf{S}^{n-1}) = \mathbf{B}^n \rtimes O(n).$$

El grupo de isometrías hiperbólicas es isomorfo al grupo de transformaciones de Möbius en la esfera; esto es, el grupo generado por inversiones en subsferas de codimensión 1. Una isometría en el n -espacio hiperbólico \mathbf{H}^n queda completamente determinada por su acción en la esfera ideal \mathbf{S}^{n-1} , a esto se le conoce como la *extensión de Poincaré*. Por lo tanto, las isometrías hiperbólicas de dimensión $n+1$ incluyen a las isometrías de la n -esfera y del n -espacio euclideo. En dimensiones bajas tenemos además los siguientes isomorfismos:

$$\text{Iso}_+(\mathbf{H}^2) = \text{PSL}(2, \mathbb{R}), \text{Iso}(\mathbf{H}^2) = \text{PSL}(2, \mathbb{R}) \times \mathbb{Z}_2,$$

$$\text{Iso}_+(\mathbf{H}^3) = \text{PSL}(2, \mathbb{C}), \text{Iso}(\mathbf{H}^3) = \text{PSL}(2, \mathbb{C}) \times \mathbb{Z}_2.$$

Como los modelos geométricos forman una cadena de encajes completos también tenemos una cadena de grupos topológicos de isometrías de los modelos cuyos primeros 5 eslabones son:

$$\text{PSL}(2, \mathbb{R}) \subset \text{PSL}(2, \mathbb{C}) \subset \text{PO}(4, 1) \subset \text{PSL}(2, \mathbb{H}) \subset \dots$$

En la dimensión 2 y 4 se pueden considerar los modelos como subconjuntos del plano complejo \mathbb{C} y cuaterniónico \mathbb{H} , respectivamente. En la dimensión 3 y 5 estos planos se pueden pensar analíticamente como la frontera ideal.

§ 3. Estructuras geométricas en variedades.

Definición I.1. Una *estructura geométrica esférica, euclidea o hiperbólica* de una n -variedad M^n es la admisión de una métrica riemanniana tal que cualquier punto en M^n tiene una vecindad isométrica a un subconjunto abierto del n -espacio \mathbf{X}^n ; donde $\mathbf{X}^n = \mathbf{S}^n, \mathbf{E}^n$ o \mathbf{H}^n , respectivamente.

Por ejemplo, una n -variedad hiperbólica M^n es localmente isométrica al n -espacio hiperbólico \mathbf{H}^n ; es decir, para todo punto $x \in M^n$ existe un $\epsilon > 0$ y una vecindad de x en M^n isométrica a una bola hiperbólica de radio ϵ en \mathbf{H}^n .

Definición I.2. Una *n -variedad cubriente* de M^n es una n -variedad X^n y una transformación cubriente $c : X^n \rightarrow M^n$. Una variedad cubriente tiene m hojas si la transformación c es m a 1; esto es, por cada punto $x \in M^n$, la imagen $c(x)$ de x consiste de m puntos en X^n .

Una estructura geométrica en una n -variedad M^n induce el mismo tipo de geometría en variedades cubrientes, en particular en su cubriente universal que denotaremos por \widetilde{M}^n . Más aún, existe una isometría local llamada la *transformación desenvolvente*

$$D : \widetilde{M}^n \rightarrow \mathbf{X}^n,$$

definida al considerar pequeños subconjuntos abiertos en \widetilde{M}^n e identificarlos vía una isometría ϕ , con subconjuntos abiertos en \mathbf{X}^n . Elecciones arbitrarias de esta isometría ϕ determinan transformaciones desenvolventes que difieren por una composición con una isometría de \mathbf{X}^n .

Las variedades geométricas están determinadas principalmente por su grupo fundamental. La transformación desenvolvente produce un homomorfismo definido módulo conjugación del grupo fundamental de M^n que denotamos por $\pi_1(M^n)$ en $\text{Iso}(\mathbf{X}^n)$ llamado *representación asociada de holonomía* de la estructura geométrica:

$$\rho : \pi_1(M^n) \rightarrow \text{Iso}(\mathbf{X}^n).$$

Las transformaciones cubrientes de \widetilde{M}^n son conjugadas, vía D , a isometrías de \mathbf{X}^n .

Una n -variedad geométrica homogénea M^n se caracteriza por ser el espacio de órbitas \mathbf{X}^n/Γ donde $\Gamma = \rho(\pi_1(M^n))$ es una representación del grupo fundamental de la variedad M^n como un subgrupo de las isometrías de \mathbf{X}^n que satisface dos propiedades; en primer lugar es *discreto*, esto es, cada uno de sus elementos es un abierto o, equivalentemente, el elemento identidad es un abierto. Además Γ es *libre de torsión*, es decir, el subgrupo de isotropía en un punto x es isomorfo a la identidad: $\Gamma_x = \{g \in \Gamma : gx = x\} = \{1\}$. Por lo tanto, Γ actúa libre y discontinuamente, es decir errantemente, en \mathbf{X}^n , esto es, para todo $K \subset \mathbf{X}^n$ compacto, $|\{K \cap gK \neq \emptyset\}| < \infty$.

Dado un grupo errante Γ de isometrías de \mathbf{X}^n es posible obtener un poliedro fundamental de la acción mediante la técnica del poliedro de Dirichlet. Para ello es necesario considerar la órbita de un punto en \mathbf{X}^n . Se tiene que Γ deja invariante este conjunto, más aún, si se construyen esferas de radios pequeños centrados en los puntos que forman la órbita, Γ deja fijo este conjunto de esferas y bolas y de sus centros. Podemos considerar esferas de radios cada vez más grande pero hasta cierto límite donde las esferas se vuelven tangentes. Se tiene que Γ también dejará invariante el conjunto de los puntos de tangencia. Finalmente se puede extender esta construcción hasta obtener por cada punto en la órbita de un punto un conjunto convexo tal que la teselación de \mathbf{X}^n es invariante por Γ . Este convexo es un poliedro generado mediante la intersección de los hemiespacios con frontera las mediatrices que se obtienen entre los elementos de la órbita. La acción de Γ en las caras de este poliedro fundamental induce un apareamiento de sus caras.

§ 3.1. Variedades geométricas de curvatura constante.

Variedades esféricas.

Las variedades esféricas se generan por la acción de un grupo libre y discontinuo de $\text{Iso}(\mathbf{S}^n)$. Ya que la esfera es compacta, el grupo fundamental de una variedad esférica es un grupo finito. Ratcliffe (ver [49]) demuestra que en dimensión impar, todas las variedades esféricas son orientables y que las únicas variedades esféricas de dimensiones pares son las esferas y los espacios proyectivos. En particular, \mathbf{S}^4 y $\mathbb{R}\mathbf{P}^4$ son las únicas 4-variedades esféricas.

Variedades euclidianas.

Las variedades euclidianas se generan por la acción de un grupo libre y discontinuo en \mathbf{E}^n . Se sigue de los teoremas de Bieberbach que existe una cantidad finita de grupos de Bieberbach no isomorfos, y por lo tanto, una cantidad finita de n -variedades euclidianas. Además, todas ellas son cubiertas finitamente por el n -toro $T^n = \times_{i=1}^n \mathbf{S}^1$. En particular, existen dos superficies euclidianas cerradas: a saber, el toro y la botella de Klein, diez 3-variedades euclidianas cerradas de las cuales seis son orientables y setenta y cuatro 4-variedades euclidianas cerradas.

§ 3.2. Variedades hiperbólicas.

G. Mostow y G. Prasad demostraron que para $n > 2$, las n -variedades hiperbólicas compactas son *rígidas*, es decir, si una n -variedad admite una estructura hiperbólica, esta estructura es única. Ver [47] y [48]. Equivalentemente, si dos subgrupos errantes Γ y Υ de $\text{Iso}(\mathbf{H}^n)$ son isomorfos tal que las

n -variedades hiperbólicas \mathbf{H}^n/Γ y \mathbf{H}^n/Υ son de volumen finito, entonces Γ y Υ son conjugados en $\text{Iso}(\mathbf{H}^n)$; esto es, existe $\Lambda \subset \text{Iso}(\mathbf{H}^n)$ tal que $\Gamma = \Lambda\Upsilon\Lambda^{-1}$.

Como un corolario muy importante de este teorema se tiene que si una n -variedad, $n > 2$, admite una estructura hiperbólica geodésicamente completa de volumen finito, entonces los invariantes geométricos de la n -variedad son también sus invariantes topológicos.

Una n -variedad hiperbólica $M^n = \mathbf{H}^n/\Gamma$ es el espacio de órbitas de la acción de un subgrupo discreto y libre de torsión Γ de isometrías que actúa propia, libre y discontinuamente; es decir, errantemente, en el espacio hiperbólico n -dimensional \mathbf{H}^n . Una variedad hiperbólica puede o no ser compacta en cuyo caso su volumen puede o no ser finito. Si M^n es una variedad hiperbólica geodésicamente completa y no compacta aunque de volumen finito entonces M^n es el interior de una n -variedad compacta con frontera que denotaremos por \overline{M}^n y que llamaremos la *compactificación* de M^n . Como M^n es completa, cualquier componente en la frontera de \overline{M}^n es una $(n-1)$ -variedad euclídeana compacta, i. e. una $(n-1)$ -variedad que es el espacio de órbitas \mathbf{E}^{n-1}/K del $(n-1)$ -espacio euclídeano \mathbf{E}^{n-1} bajo la acción de un subgrupo K de sus isometrías discreto y libre de torsión, ver [3].

Cuando $n = 3$, M^3 es el interior de una 3-variedad compacta \overline{M}^3 cuya frontera consiste de toros y botellas de Klein. Si todos los componentes en la frontera son toros entonces M^3 es difeomorfa al complemento en una 3-variedad cerrada N^3 de un enlace de toros sólidos cerrados removidos, o lo que es equivalente, M^3 es difeomorfa al complemento de un enlace generado por los círculos $\mathbf{S}^1 \times \{0\}$, en el corazón de los toros sólidos $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{D}^2$ en N^3 .

§ 4. Introducción a las orbidades.

Definiciones básicas.

En esta sección se recuerdan algunos hechos básicos sobre orbidades (ver [8]).

Definición I.3. Una *orbidad* suave modelada en la variedad M es un espacio métrico topológico \mathcal{O} junto con una colección $\{(U_i, \tilde{U}_i, \phi_i, \Gamma_i\}_i$, llamada *atlas*, donde para cada i ,

1. U_i es un subconjunto abierto de \mathcal{O} ,
2. \tilde{U}_i es un subconjunto abierto de M ,
3. $\phi_i : \tilde{U}_i \rightarrow U_i$ es una transformación continua (llamada una *carta*) y
4. Γ_i es un grupo finito de difeomorfismos de \tilde{U}_i satisfaciendo las siguientes condiciones:
 - La unión de los abiertos \tilde{U}_i cubre \mathcal{O} .
 - Cada carta ϕ_i es un homeomorfismo entre \tilde{U}_i/Γ_i y U_i .
 - Las cartas son compatibles en el siguiente sentido: para cada $x \in \tilde{U}_i$ y $y \in \tilde{U}_j$ con $\phi_i(x) = \phi_j(y)$, existe un difeomorfismo ψ entre una vecindad V de x y una vecindad W de y tales que $\phi_j(\psi(z)) = \phi_i(z)$ para toda $z \in V$.

Definición I.4. El *grupo local* de \mathcal{O} en un punto $x \in \mathcal{O}$ es el grupo Γ_x definido como sigue: sea $x \in U$ y $\phi : \tilde{U} \rightarrow U$ una carta. Entonces Γ_x es el estabilizador de cualquier punto de $\phi^{-1}(x)$ bajo la acción de Γ .

Los grupos locales están bien definidos bajo isomorfismo y son isomorfos a subgrupos de $O(n)$.

Definición I.5. Si Γ_x es trivial, entonces se dice que x es *regular*, si no entonces x es *singular*. El *locus singular* de \mathcal{O} es el conjunto $\Sigma_{\mathcal{O}}$ de puntos singulares de \mathcal{O} .

Definición I.6. El *espacio base* de \mathcal{O} es el espacio topológico $|\mathcal{O}|$ obtenido de la orbifold \mathcal{O} .

Si (M, g) es un espacio suave homogéneo con respecto a la métrica Riemanniana g y si Γ es un grupo discreto de isometrías de M actuando propia y discontinuamente en M , entonces el espacio de órbitas M/Γ es una orbifold y la transformación canónica $p : M \rightarrow M/\Gamma$ proporciona un atlas natural de la orbifold. Esta es la definición de una *orbifold buena* modelada en la variedad homogénea (M, g) en el sentido de Thurston [62].

La característica de Euler.

Hay muchas propiedades de la geometría diferencial y topología de variedades que se generalizan para orbifolds. Por ejemplo, la característica de Euler de una variedad M triangulada (o de un complejo celular CW) se define como el número entero que se obtiene como la suma alternada del número de celdas y se denota por $\chi(M)$. Una propiedad fundamental de la característica de Euler es que es multiplicativa bajo cubiertas finitas; esto es, si $\tilde{M} \rightarrow M$ es un cubiertas de m hojas entonces

$$\chi(\tilde{M}) = m\chi(M)$$

Definición I.7. Sea \mathcal{O} una orbifold que admite una estratificación como una descomposición celular CW de tal forma que el grupo local de cada punto en una celda es constante. Si c es una celda, sea Γ_c el grupo local de c y $|\Gamma_c|$ su orden.

La característica de Euler de la orbifold \mathcal{O} es:

$$\chi^{orb}(\mathcal{O}) := \sum_c \frac{(-1)^{\dim c}}{|\Gamma_c|}.$$

La característica de Euler de una orbifold es un número racional y satisface una propiedad multiplicativa: Si $\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{O}$ es una orbifold \mathcal{M} cubriente de m hojas de \mathcal{O} , entonces

$$\chi(\mathcal{M}) = m\chi^{orb}(\mathcal{O}).$$

Espacios geométricos modelo.

Observación I.1. La mayoría de las orbifolds consideradas en esta tesis son orbifolds buenas modeladas en:

- \mathbb{R}^n , el n -espacio euclideo;
- \mathbb{S}^n , la esfera unitaria en \mathbb{R}^{n+1} con la métrica riemanniana estándar;
- $\mathbf{H}_{\mathbb{R}}^n$, el modelo de Siegel del hemiespacio en \mathbb{R}^n , con la métrica hiperbólica correspondiente. En particular $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^1 = \mathbf{H}_{\mathbb{R}}^2$ y $\mathbf{H}_{\mathbb{H}}^1 = \mathbf{H}_{\mathbb{R}}^4$ (con la métrica de Poincaré correspondiente) son los espacios hiperbólicos que pueden verse como hemiespacio de los elementos en \mathbb{K} ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ó $\mathbb{K} = \mathbb{H}$) con parte real positiva ó $\mathbf{B}_{\mathbb{K}}$ la bola unitaria en \mathbb{K} , con $\mathbb{K} = \mathbb{C}, \mathbb{H}$
- $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^n$ el espacio hiperbólico n -complejo con la métrica de Kobayashi correspondiente.
- $\mathbf{H}_{\mathbb{K}}^1 \times \cdots \times \mathbf{H}_{\mathbb{K}}^1$, el producto de n espacios hiperbólicos¹ con $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ ó $\mathbb{K} = \mathbb{H}$ con el producto riemanniano de métricas de Poincaré.

¹Notar que $\mathbf{H}_{\mathbb{K}}^1 \times \cdots \times \mathbf{H}_{\mathbb{K}}^1$ es una variedad homogénea pero no isotrópica.

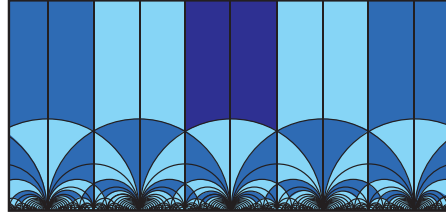


Figura 1.1. Un dominio fundamental y su teselación para la acción del grupo modular $PSL(2, \mathbb{Z})$ en el plano hiperbólico $\mathbf{H}_{\mathbb{R}}^2$.

Los espacios cociente \mathbb{R}^n/Γ (donde Γ es un subgrupo discreto de isometrías de \mathbb{R}^n actuando propia y discontinuamente) son las orbidades euclideanas; similarmente, \mathbf{S}^n/Γ donde Γ es un subgrupo finito de $SO(n+1)$ son las orbidades esféricas y \mathbf{H}^n/Γ son las orbidades hiperbólicas, donde Γ es un subgrupo finito de $SO(n+1, 1)$ y $\mathbf{H}_{\mathbb{R}}^n$ es el n -espacio hiperbólico real.

Tomando en cuenta las consideraciones previas, se tiene la siguiente

Proposición I.1. *Si Γ es un subgrupo discreto de isometrías en $\mathbf{H}_{\mathbb{H}}^1$, en $M := \mathbf{H}_{\mathbb{H}}^1/\Gamma$ es una 4-orbitada hiperbólica real geodésicamente completa. Si además Γ actúa libremente, entonces M es una 4-variedad hiperbólica real geodésicamente completa.*

En particular cualquier $M = \mathbf{H}_{\mathbb{H}}^1/\Gamma$ es llamada una *variedad hiperbólica 1-dimensional cuaterniónica*.

§ 5. Ejemplos básicos de orbidades.

Ahora se enlistan algunos ejemplos clásicos de orbidades, cuya construcción será necesaria en esta tesis.

1. **La orbitada modular real clásica.** Considere la acción por isometrías del grupo modular $PSL(2, \mathbb{Z})$ en el plano hiperbólico real $\mathbf{H}_{\mathbb{R}}^2 = \mathbf{H}_{\mathbb{C}}^1$.

Un dominio fundamental para la acción de $PSL(2, \mathbb{Z})$ es un triángulo con un vértice ideal y los otros dos vértices subtienden un ángulo de $\pi/3$. Este es el triángulo que Coxeter denotó por $\Delta(3, 3, \infty)$. Vea la figura 1. El grupo modular $PSL(2, \mathbb{Z})$ es un subgrupo del grupo de simetrías de una teselación regular de \mathbf{H}^2 cuyos mosaicos son copias congruentes del triángulo $\Delta(3, 3, \infty)$. La gráfica de Cayley permite encontrar una presentación del grupo $PSL(2, \mathbb{Z})$ en términos de 2 generadores y 2 relaciones:

$$PSL(2, \mathbb{Z}) \cong \langle a, b | a^2 = (ab)^3 = 1 \rangle \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}.$$

La orbitada cociente $\mathcal{O} := \mathbf{H}_{\mathbb{R}}^2/PSL(2, \mathbb{Z})$ tiene como espacio base el plano \mathbb{R}^2 y su locus singular $\Sigma_{\mathcal{O}}$ consiste de 2 puntos cónicos distinguidos. Los grupos locales de los puntos singulares son $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, estos son grupos de orden dos y tres y son representados como rotaciones hiperbólicas de ángulos π y $2\pi/3$, respectivamente. La característica de Euler de la orbitada modular es \mathcal{O} es $-\frac{1}{6}$. Por lo tanto, una superficie que sea un cubriente de Selberg es de orden un múltiplo de 6.

2. **La orbitada asociada al grupo de Picard-Gauss $PSL(2, \mathbb{C}(\mathbb{Z}))$.**

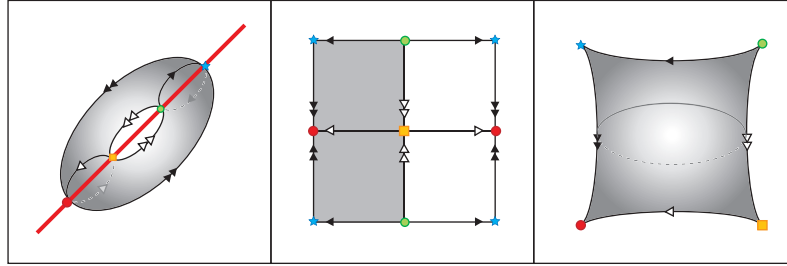


Figura 1.2. La superficie de Kummer es una almohada, esto es una 2-esfera con 4 puntos cónicos.

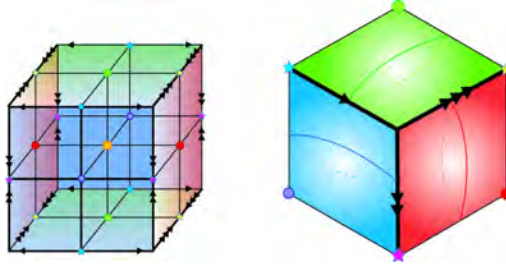


Figura 1.3. La 3-variedad de Kummer es un trípode con 3 almohadas unidas.

Considere la acción por isometrías del grupo de Picard-Gauss $PSL(2, \mathbb{C}(\mathbb{Z}))$ en el 3-espacio hiperbólico real $\mathbf{H}_{\mathbb{R}}^3$. La orbifold de Picard-Gauss es el espacio cociente $\mathcal{O} := \mathbf{H}_{\mathbb{R}}^3 / PSL(2, \mathbb{C}(\mathbb{Z}))$. El espacio base de \mathcal{O} es el 3-espacio \mathbb{R}^3 . Su locus singular $\Sigma_{\mathcal{O}}$ es el 1-esqueleto de una pirámide cuadrada cuyo ápice es un punto ideal. La característica de Euler de la orbifold \mathcal{O} es 0.

3. **Billar carambola** Para cada espacio euclidiano n -dimensional \mathbb{R}^n hay una teselación auto-dual y rectangular cuyas celdas son hipercubos y cuyo símbolo de Schäffi es $\{4, 3, \dots, 3, 4\}$. Existe un subgrupo Γ de sus simetrías generado por reflexiones en los lados de sus celdas hipercúbicas. El dominio fundamental de la acción de Γ en \mathbb{R}^n es una celda. El cociente $\mathcal{O} := \mathbb{R}^n / \Gamma$ es una orbifold euclidiana cuya forma es un hipercubo sólido. El espacio base de la orbifold \mathcal{O} es la n -bola. Más aún, $\Sigma_{\mathcal{O}}$ consiste de la frontera de la celda, ésta es el hipercubo $\{4, 3, \dots, 3\}$ en la $(n - 1)$ -esfera. Hay una estratificación de $\Sigma_{\mathcal{O}}$ y el grupo local de cada punto singular en el interior de los lados de $\{4, 3, \dots, 3\}$ es el grupo con dos elementos $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ cuyas representaciones consisten de una reflexión. Otros puntos en $\Sigma_{\mathcal{O}}$ son puntos esquinas rectangulares del mismo modo que en una mesa de billar de carambola.

La característica de Euler de la orbifold \mathcal{O} es 0. De hecho, la característica de Euler de una variedad euclidiana de cualquier dimensión es 0. Debido a la propiedad multiplicativa de la característica de Euler y al hecho de que una orbifold euclidiana tiene un cubriente que es una variedad euclidiana se sigue que la característica de Euler de una orbifold euclidiana compacta es 0.

4. **Superficie real de Kummer (una almohada).** Sea $\mathbf{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : |z_1| = |z_2| = 1\}$ el 2-toro. Sea τ la involución $\tau(z_1, z_2) = (\bar{z}_1, \bar{z}_2)$.

Entonces τ tiene puntos fijos $(1, 1), (1, -1), (-1, 1), (-1, -1)$. El espacio base de la orbifold cociente $\mathcal{O} := \mathbf{T}^2 / \tau$ es la 2-esfera \mathbb{S}^2 y el locus singular $\Sigma_{\mathcal{O}}$ consiste de 4 puntos cónicos distinguidos. El grupo local de cada punto singular es el grupo $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ con dos elementos cuyas representaciones consisten de una rotación de ángulo π . La característica de Euler de

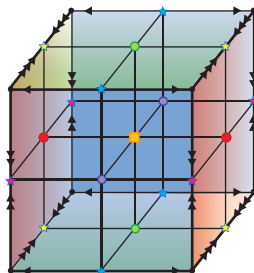


Figura 1.4. Identificaciones en la orbada de Kummer 3-dimensional.

la orbada \mathcal{O} es 0.

5. **n -orbada real de Kummer.** Sea

$$\mathbf{T}^n = \mathbb{S}^1 \times \cdots \times \mathbb{S}^1 = \{(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n : |z_1| = \dots = |z_n| = 1\}$$

el n -toro.

Sea τ la involución $\tau(z_1, \dots, z_n) = (\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_n)$. Entonces τ tiene 2^n puntos fijos $(\pm 1, \dots, \pm 1)$. Entonces el cociente $\mathcal{O} := \mathbf{T}^n / \tau$ es una orbada. El grupo de isotropía de cada punto singular es el grupo con dos elementos $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ cuyas representaciones consisten de una rotación

$$(z_1, \dots, z_n) \mapsto (-z_1, \dots, -z_n) = (\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_n).$$

Entonces en cada punto singular la orbada tiene una vecindad homeomorfa al cono sobre $\mathbf{P}_{\mathbb{R}}^{n-1}$. La característica de Euler de la orbada \mathcal{O} es 0.

6. **Toros reales con multiplicación conforme.** En analogía a la teoría clásica de variedades abelianas con multiplicación compleja se puede definir una multiplicación conforme en n -toros reales. Sea $\mathbf{T}^n(\Lambda) := \mathbf{T}^n / \Lambda$ el n -toro real correspondiente a la lattice $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$. Se dice que $\mathbf{T}^n(\Lambda)$ es un toro con *multiplicación conforme* si existe un automorfismo $A : \mathbf{T}^n \rightarrow \mathbf{T}^n$ que se levanta a un isomorfismo conforme de \mathbb{R}^n . El hecho de admitir un automorfismo conforme impone una serie de restricciones simétricas en la lattice Λ . Debido a un teorema clásico de Bieberbach (ver [5, 6, 68]) el número de variedades compactas y orbadas planas de una dimensión dada es finito se sigue que el grupo G de automorfismos conformes de un toro que admite una multiplicación conforme es finito. Entonces \mathbf{T}^n / G es una orbada plana. La característica de Euler de la orbada \mathbf{T}^n / G es 0.

CAPÍTULO II

Geometría hiperbólica cuaterniónica.

§ 1. Los números complejos y los cuaternios.

Definición II.1. Sea

$$\mathbb{C} := \{\mathbf{q} = x_0 + x_1\mathbf{i} \mid x_0, x_1 \in \mathbb{R}, \mathbf{i}^2 = -1\}$$

el campo de números *complejos* que los identificamos con el modelo del plano \mathbb{R}^2 con una operación adicional llamada multiplicación de manera que dados dos números complejos $\mathbf{p} = x_0 + x_1\mathbf{i}$, $\mathbf{q} = y_0 + y_1\mathbf{i}$, se tiene

$$\mathbf{pq} = (x_0y_0 - x_1y_1) + (x_0y_1 + x_1y_0)\mathbf{i}.$$

Sea \mathbb{H} el dominio no conmutativo de números llamados *cuaternios*:

$$\mathbb{H} := \{\mathbf{q} = x_0 + x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j} + x_3\mathbf{k} \mid x_n \in \mathbb{R}, \mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = -1, \mathbf{ij} = -\mathbf{ji} = \mathbf{k}\}.$$

que los identificamos con el modelo de un espacio vectorial real 4-dimensional \mathbb{R}^4 con una operación adicional llamada multiplicación de manera que dados dos cuaternios $\mathbf{p} = x_0 + x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j} + x_3\mathbf{k}$, $\mathbf{q} = y_0 + y_1\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + y_3\mathbf{k}$, se tiene

$$\begin{aligned} \mathbf{pq} = & (x_0y_1 - x_1y_1 - x_2y_2 - x_3y_3) + (x_0y_1 + x_1y_0 + x_2y_3 - x_3y_2)\mathbf{i} \\ & + (x_0y_1 + x_1y_0 + x_2y_3 - x_3y_2)\mathbf{j} + (x_0y_1 + x_1y_0 + x_2y_3 - x_3y_2)\mathbf{k}. \end{aligned}$$

La elección de las unidades canónicas imaginarias $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ no es la única posible; más aún, si se considera el conjunto de unidades imaginarias

$$\mathbb{S}_{\mathbb{H}} := \{\mathbf{q} \in \mathbb{H} : \mathbf{q}^2 = -1\}$$

y dos de sus elementos $I, J \in \mathbb{S}_{\mathbb{H}}$ tales que $J \perp I$, es posible repetir canónicamente todas las definiciones y argumentos que se sigan de $I, J, K := I \cdot J$ en lugar de $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k} = \mathbf{i} \cdot \mathbf{j}$. Sin embargo, para tener representaciones aritméticas basadas en los cuaternios es necesario elegir las unidades canónicas imaginarias $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$.

Si $\mathbf{q} = x_0 + x_1\mathbf{i} \in \mathbb{C}$ entonces el *conjugado* $\bar{\mathbf{q}} := x_0 - x_1\mathbf{i} \in \mathbb{C}$. Si $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{C}$ entonces $\overline{\mathbf{pq}} = \bar{\mathbf{p}} \bar{\mathbf{q}} = \bar{\mathbf{q}} \bar{\mathbf{p}}$. Si $\mathbf{q} = x_0 + x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j} + x_3\mathbf{k} \in \mathbb{H}$ entonces el *conjugado* $\bar{\mathbf{q}} := x_0 - x_1\mathbf{i} - x_2\mathbf{j} - x_3\mathbf{k} \in \mathbb{H}$. Si $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{H}$ entonces $\overline{\mathbf{pq}} = \bar{\mathbf{q}} \bar{\mathbf{p}}$.

Si $\mathbf{q} \in \mathbb{C}$ ó $\mathbf{q} \in \mathbb{H}$ entonces la norma de \mathbf{q} es $|\mathbf{q}|^2 := \mathbf{q} \cdot \bar{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^+$. Es importante recalcar que la multiplicación en \mathbb{C} es conmutativa, sin embargo en \mathbb{H} no lo es.

Enteros complejos y cuaterniónicos.

El conjunto de números enteros \mathbb{Z} es un subanillo discreto de los números reales \mathbb{R} . Para los anillos de los números complejos \mathbb{C} y de los números cuaternios \mathbb{H} se tienen las siguientes generalizaciones de este hecho.

Definición II.2. Un número complejo es un *entero de Gauss* si sus componentes, esto es su parte real y su parte imaginaria, son enteros. Los enteros de Gauss son cerrados bajo la suma y la multiplicación. El anillo de todos los enteros de Gauss se denota por $\mathbb{C}(\mathbb{Z})$ y es el conjunto de todos los números complejos con coeficientes enteros:

$$\mathbb{C}(\mathbb{Z}) := \{a + b\mathbf{i} \in \mathbb{C} : a, b \in \mathbb{Z}\}.$$

Un cuaternio es un *entero de Lipschitz* si sus cuatro componentes son enteros. El anillo de todos los cuaternios que son enteros de Lipschitz se denota por $\mathbb{H}(\mathbb{Z})$ y es el conjunto de cuaternios con coeficientes enteros:

$$\mathbb{H}(\mathbb{Z}) := \{a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k} \in \mathbb{H} : a, b, c, d \in \mathbb{Z}\}.$$

Un cuaternio es un *entero de Hurwitz* si sus cuatro componentes son o todos enteros, o todos son números racionales que en su forma reducida se expresan como el cociente entre un número entero impar en el numerador y un 2 en el denominador. El anillo de todos los cuaternios que son enteros de Hurwitz se denota por $\mathbb{H}ur$:

$$\mathbb{H}ur := \left\{ a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k} \in \mathbb{H} : a, b, c, d \in \mathbb{Z} \text{ ó } a, b, c, d \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2} \right\}.$$

Los enteros de Lipschitz $\mathbb{H}(\mathbb{Z})$ y los enteros de Hurwitz $\mathbb{H}ur$ son dos subanillos del anillo de cuaternios; esto es, cada uno es cerrado bajo multiplicación y suma. Como grupo aditivo $\mathbb{H}ur$ es abeliano y libre, con generadores $\frac{1}{2}(1 + \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$, \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} . Por lo tanto $\mathbb{H}ur$ forma una latice en \mathbb{R}^4 . Esta latice es conocida como \mathcal{F}_4 pues es la raíz del álgebra de Lie semisimple \mathcal{F}_4 . Los cuaternios de Lipschitz $\mathbb{H}(\mathbb{Z})$ forman una sublatice de $\mathbb{H}ur$ de índice 2.

§ 1.1. Transformaciones de Möbius.

Una matriz A de 2×2 con entradas en un dominio de números $\mathbb{X} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$, tiene *inversa derecha* (*izquierda*) si existe una matriz A^{-1} de 2×2 con entradas en el anillo de números \mathbb{X} tal que $AA^{-1} = \mathcal{I}$ ($A^{-1}A = \mathcal{I}$), donde \mathcal{I} es la matriz identidad de 2×2 . Si A tiene inversa derecha e izquierda decimos simplemente que A tiene *inversa* o equivalentemente, A es *invertible*. Sea $GL(2, \mathbb{X})$ el grupo de matrices 2×2 que son invertibles con entradas en un dominio de números $\mathbb{X} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$.

Definición II.3. Para cualquier $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL(2, \mathbb{X})$, la función real analítica asociada

$$F_A : \mathbb{X} \cup \{\infty\} \rightarrow \mathbb{X} \cup \{\infty\}$$

definida por

$$F_A(\mathbf{q}) = (a\mathbf{q} + b) \cdot (c\mathbf{q} + d)^{-1} \tag{II.1}$$

es llamada la *transformación lineal fraccional* o *transformación de Möbius asociada a A*. Sea $F_A(\infty) = \infty$ si $c = 0$, $F_A(\infty) = ac^{-1}$ si $c \neq 0$ y $F_A(-c^{-1}d) = \infty$.

Sea $\mathbb{F}_{\mathbb{X}} := \{F_A : A \in GL(2, \mathbb{X})\}$ el conjunto de transformaciones lineales fraccionales.

Las transformaciones de Möbius o fraccionales lineales son *homografías*, i. e. auto-difeomorfismos que preservan la orientación, y de hecho biholomorfismos de la línea proyectiva sobre un anillo, por ejemplo la línea proyectiva real $\mathbf{P}(\mathbb{R})$, la línea proyectiva compleja $\mathbf{P}(\mathbb{C})$ y la línea proyectiva cuaterniónica $\mathbf{P}(\mathbb{H})$ sobre los respectivos anillos de los números reales \mathbb{R} , complejos \mathbb{C} o sobre los cuaternios \mathbb{H} . Recuerde que la línea proyectiva real $\mathbf{P}(\mathbb{R})$ es topológicamente una circunferencia, la

línea proyectiva compleja $\mathbf{P}(\mathbb{C})$ es la esfera de Riemann $\mathbb{C} \cup \infty$ que es homeomorfa a una 2-esfera \mathbb{S}^2 y la línea proyectiva cuaterniónica $\mathbf{P}(\mathbb{H})$ es homeomorfa a una 4-esfera \mathbb{S}^4 .

Cuando el anillo \mathbb{X} es conmutativo, esto es si $\mathbb{X} = \mathbb{R}$ ó si $\mathbb{X} = \mathbb{C}$, entonces la transformación fraccional lineal $F_A : \mathbb{X} \cup \{\infty\} \rightarrow \mathbb{X} \cup \{\infty\}$ adquiere la forma racional clásica:

$$F_A(\mathbf{q}) = \frac{a\mathbf{q} + b}{c\mathbf{q} + d}$$

Las transformaciones de Möbius actúan libremente y transitivamente en ternas de puntos distintos en $\mathbf{P}(\mathbb{X})$.

A continuación se definen las transformaciones que son auto-difeomorfismos de $\mathbf{P}(\mathbb{X})$ y que invierten la orientación.

Definición II.4. Para cualquier $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL(2, \mathbb{X})$, la función real analítica asociada

$$\bar{F}_A : \mathbb{X} \cup \{\infty\} \rightarrow \mathbb{X} \cup \{\infty\}$$

definida por

$$\bar{F}_A(\mathbf{q}) = (a\bar{\mathbf{q}} + b) \cdot (c\bar{\mathbf{q}} + d)^{-1} \tag{II.2}$$

es llamada la *anti-transformación lineal fraccional o anti-transformación de Möbius asociada a A*. Sea $\bar{F}_A(\infty) = \infty$ si $c = 0$, $\bar{F}_A(\infty) = ac^{-1}$ si $c \neq 0$ y $\bar{F}_A(-\bar{d}c^{-1}) = \infty$.

Sea $\bar{\mathbb{F}}_{\mathbb{X}} := \{F_A : A \in GL(2, \mathbb{X})\}$ el conjunto de anti-transformaciones lineales fraccionales o de Möbius.

Cuando el anillo \mathbb{X} es conmutativo, por ejemplo si $\mathbb{X} = \mathbb{R}$ ó si $\mathbb{X} = \mathbb{C}$, entonces la anti-transformación de Möbius o lineal fraccional $F_A : \mathbb{X} \cup \{\infty\} \rightarrow \mathbb{X} \cup \{\infty\}$ adquiere la forma clásica:

$$F_A(\mathbf{q}) = \frac{a\bar{\mathbf{q}} + b}{c\bar{\mathbf{q}} + d}$$

Las anti-transformaciones de Möbius actúan libremente y transitivamente en ternas de puntos distintos en $\mathbf{P}(\mathbb{X})$.

Por ejemplo, la inversión que es la isometría de Cayley que manda el modelo \mathbf{H}^2 del plano hiperbólico $\mathbf{H}^1(\mathbb{C})$ al modelo \mathbf{I}^2 del interior del disco es

$$\mathbf{q} \mapsto \frac{\bar{\mathbf{q}} + \mathbf{i}}{\mathbf{i}\bar{\mathbf{q}} + 1}$$

Esta anti-transformación de Möbius o lineal fraccional está asociada a la matriz $\begin{pmatrix} 1 & \mathbf{i} \\ \mathbf{i} & 1 \end{pmatrix} \in GL(2, \mathbb{C})$.

La composición de dos anti-transformaciones de Möbius es una transformación de Möbius. Por lo tanto, transformaciones y anti-transformaciones de Möbius forman un grupo $Conf(\mathbf{P}(\mathbb{X}))$ que contiene al grupo de Möbius como un subgrupo de índice 2. Más aún, las reflexiones en líneas y las inversiones en esferas son dos tipo de anti-transformaciones de Möbius que generan a todo el grupo $Conf(\mathbf{P}(\mathbb{X}))$.

Sea $Conf(\mathbf{H}^1(\mathbb{C}))$ el subgrupo de $Conf(\mathbf{P}(\mathbb{C}))$ que consiste de todas las transformaciones que preservan el plano hiperbólico

$$\mathbf{H}^1(\mathbb{C}) = \{\mathbf{z} \in \mathbb{C} : \Re \mathbf{z} > 0\}.$$

Las transformaciones en $Conf(\mathbf{H}^1(\mathbb{C}))$ son de la forma:

$$\mathbf{q} \mapsto \frac{a\mathbf{q} + b}{c\mathbf{q} + d} \quad \text{y} \quad \mathbf{q} \mapsto \frac{a\bar{\mathbf{q}} + b}{c\bar{\mathbf{q}} + d}$$

donde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ y el determinante $ad - bc = 1$ en el primer caso que corresponde a una transformación y $ad - bc = -1$ en el segundo caso que corresponde a una anti-transformación. Las transformaciones de Möbius en $\text{Conf}(\mathbf{H}^1(\mathbb{C}))$ forman un subgrupo de índice 2 que es isomorfo a

$$PSL(2, \mathbb{R}) = SL(2, \mathbb{R}) / \pm \mathcal{I}.$$

Se dice que una terna de números distintos en $\mathbf{P}(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \cup \infty = \mathbb{S}^1$ es *positiva* si los números están orientados con el sentido de las manecillas del reloj. Por ejemplo, $0, 1, \infty$ es una terna positiva pero $0, -1, \infty$ no lo es.

El grupo $PSL(2, \mathbb{R})$ actúa libre y transitivamente en el conjunto de ternas positivas de $\mathbf{P}(\mathbb{R})$ de donde se obtiene que el grupo $\text{Conf}(\mathbf{H}^1(\mathbb{C}))$ es generado por las reflexiones en las líneas y las inversiones en circunferencias tales que ambas son ortogonales a $\partial\mathbf{H}^1(\mathbb{C})$. Componiendo reflexiones se obtienen todas las traslaciones horizontales $\mathbf{q} \mapsto \mathbf{q} + b$ donde $b \in \mathbb{R}$. Componiendo inversiones se obtienen todas las dilataciones $\mathbf{q} \mapsto \lambda \mathbf{q}$ donde $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$. Estas transformaciones junto a la inversión $\mathbf{q} \mapsto \frac{1}{\bar{\mathbf{q}}}$ mandan cualquier terna de puntos en $\partial\mathbf{H}^1(\mathbb{C})$ al $0, 1, \infty$. Es decir, son transitivas en triángulos hiperbólicos ideales.

§ 1.2. Isometrías de $\mathbf{H}_\mathbb{C}^1$

Proposición II.1. $\text{Isom}(\mathbf{H}^1(\mathbb{C})) = \text{Conf}(\mathbf{H}^1(\mathbb{C}))$.

Demostración. Los dos grupos son generados por inversiones en circunferencias y reflexiones a lo largo de líneas tales que son ortogonales a la frontera ideal $\partial\mathbf{H}^1(\mathbb{C})$. ■

En particular, podemos identificar el grupo de isometrías del plano hiperbólico que preservan orientación con el grupo proyectivo especial lineal real. Esto es,

$$\text{Isom}_+(\mathbf{H}^1(\mathbb{C})) = PSL(2, \mathbb{R}).$$

Esta representación analítica del grupo de isometrías del plano hiperbólico nos permite asociar invariantes algebraicos a las isometrías. Por ejemplo es posible identificar la geometría y dinámica de una isometría mediante la traza de una matriz en $PSL(2, \mathbb{R})$. Esto es,

Proposición II.2. Una isometría no trivial $A \in PSL(2, \mathbb{R})$ es *elíptica*, *parabólica* o *hiperbólica* si y sólo si $|\text{tr}A| < 2$, $|\text{tr}A| = 2$ ó $|\text{tr}A| > 2$, respectivamente.

Demostración. Sea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in PSL(2, \mathbb{R})$; esto es, $ad - bc = 1$. La transformación de Möbius asociada a A tiene un punto fijo $z \in \mathbb{C}$ si y sólo si

$$\frac{az + b}{cz + d} = z;$$

esto es

$$cz^2 + (d - a)z - b = 0.$$

Por lo tanto el discriminante de A es

$$\Delta = (d - a)^2 + 4bc = (d + a)^2 - 4 = \text{tr}^2 A - 4$$

La isometría asociada a A tiene un único punto fijo en $\mathbf{H}^1(\mathbb{C})$ si y sólo si $\Delta < 0$. Si $\Delta > 0$ se tienen dos puntos fijos en $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ y si $\Delta = 0$ sólo uno. ■

§ 1.3. Isometrías de \mathbf{H}^3

Se identifica $\mathbb{R}^3 = \mathbb{C} \times \mathbb{R} = \{(z, t) : z \in \mathbb{C}, t \in \mathbb{R}\}$.

Entonces $\mathbf{H}^3 = \{(z, t) : t > 0\}$ y se identifica $\mathbb{C} \times \{0\} = \mathbb{C}$. Cualquier isometría de \mathbf{H}^3 se extiende a una transformación conforme de la esfera de Riemann $\mathbf{P}_{\mathbb{C}}^1$ en la frontera ideal:

$$\partial\mathbf{H}^3 = \mathbb{C} \cup \{\infty\} = \mathbb{S}^2$$

e inversamente, una transformación conforme de la esfera de Riemann $\mathbf{P}_{\mathbb{C}}^1$ en la frontera ideal se extiende a una isometría de \mathbf{H}^3 . Por lo tanto,

$$Isom(\mathbf{H}^3) = Conf(\mathbf{P}_{\mathbb{C}}^1).$$

Esta biyección deviene del hecho de que ambos grupos son generados por reflexiones en líneas e inversiones en círculos. Se conoce como la *extensión de Poincaré*.

Además

$$Isom_+(\mathbf{H}^3) = Conf_+(\mathbf{P}_{\mathbb{C}}^1) = PSL(2, \mathbb{C}).$$

Por lo tanto podemos identificar la geometría de una transformación de Möbius mediante la traza de la matriz asociada.

Proposición II.3. *Una isometría no trivial $A \in PSL(2, \mathbb{C})$ es elíptica, parabólica o hiperbólica si y sólo si $trA \in (-2, 2)$, $trA = \pm 2$ ó $trA \in \mathbb{C} - (-2, 2)$.*

Demostración. Una matriz no trivial $A \in PSL(2, \mathbb{C})$ es conjugada a una de las siguientes matrices:

$$\pm \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda} \end{pmatrix}$$

para algún $\lambda \in \mathbb{C} - \{0\}$. Estas dos matrices representan las isometrías:

$$(z, t) \mapsto (z + 1, t), \quad (z, t) \mapsto (\lambda^2 z, |\lambda|^2 t).$$

En el primer caso $trA = \pm 2$ y A es una isometría parabólica con un punto fijo que es el punto al infinito ∞ . En el segundo caso A tiene un punto fijo en \mathbf{H}^3 si y sólo si $|\lambda| = 1$; esto es, $trA = \lambda + \lambda^{-1} \in (-2, 2)$. En este caso el punto fijo es $(0, 1)$. Si $|\lambda| \neq 1$ entonces se tienen dos puntos fijos en 0 y en el punto al infinito ∞ y por lo tanto A es una isometría hiperbólica. ■

El plano real $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2 := \{(\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_1) : \mathbf{q}_0, \mathbf{q}_1 \in \mathbb{R}\}$, el plano complejo $\mathbb{C} \times \mathbb{C} = \mathbb{C}^2 := \{(\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_1) : \mathbf{q}_0, \mathbf{q}_1 \in \mathbb{C}\}$ y el plano cuaterniónico $\mathbb{H} \times \mathbb{H} = \mathbb{H}^2 := \{(\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_1) : \mathbf{q}_0, \mathbf{q}_1 \in \mathbb{H}\}$ como espacios vectoriales sobre el campo de los números reales son isomorfos a \mathbb{R}^2 , \mathbb{R}^4 y \mathbb{R}^8 , respectivamente; por lo tanto los grupos $GL(2, \mathbb{C})$ y $GL(2, \mathbb{H})$ son isomorfos a subgrupos de $GL(4, \mathbb{R})$ y $GL(8, \mathbb{R})$. Usando esta identificación se define:

Definición II.5. Sean $SL(2, \mathbb{C}) := SL(4, \mathbb{R}) \cap GL(2, \mathbb{C})$,

$$PSL(2, \mathbb{C}) := PGL(2, \mathbb{C}) = GL(2, \mathbb{C}) / \{\lambda I\} = SL(2, \mathbb{C}) / \{\pm I\},$$

$$SL(2, \mathbb{H}) := SL(8, \mathbb{R}) \cap GL(2, \mathbb{H})$$

y

$$PSL(2, \mathbb{H}) := SL(2, \mathbb{H}) / \{\pm I\},$$

donde I denota a la matriz identidad de 2×2 .

El siguiente resultado se puede encontrar en [7]:

Teorema II.1. *El conjunto $\mathbb{F}_{\mathbb{X}}$ es un grupo con respecto a la operación composición \circ y la transformación*

$$\Phi : GL(2, \mathbb{X}) \rightarrow \mathbb{F}_{\mathbb{X}}$$

definida como $\Phi(A) = F_A$ es un anti-homomorfismo suprayectivo de grupos con $\ker(\Phi) = \{t\mathcal{I} : t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$. Más aún, la restricción de Φ al grupo especial lineal $SL(2, \mathbb{X})$ es suprayectiva y su kernel es $\{\pm\mathcal{I}\}$.

§ 1.4. Isometrías hiperbólicas en el modelo del disco.

Sea $\mathbf{B}_{\mathbb{X}}$ la bola abierta unitaria (de radio 1) en \mathbb{X} . Esto es $\mathbf{B}_{\mathbb{R}}$ es un intervalo abierto (sin sus dos puntos extremos) de longitud 2 centrado en el origen en \mathbb{R} , $\mathbf{B}_{\mathbb{C}}$ es un círculo abierto (sin la circunferencia de la frontera) centrado en el origen y de radio 1 en \mathbb{C} y $\mathbf{B}_{\mathbb{H}}$ es la 4-bola abierta unitaria en \mathbb{H} . Sea $\mathcal{M}_{\mathbf{B}_{\mathbb{X}}}$ el conjunto de *transformaciones lineales fraccionales de Möbius* que dejan invariante a $\mathbf{B}_{\mathbb{X}}$. Este es el conjunto

$$\mathcal{M}_{\mathbf{B}_{\mathbb{X}}} := \{F \in \mathbb{F}_{\mathbb{X}} : F(\mathbf{B}_{\mathbb{X}}) = \mathbf{B}_{\mathbb{X}}\}.$$

En [7] se tiene una caracterización interesante de estas transformaciones para el caso cuaterniónico $\mathbb{X} = \mathbb{H}$.

Teorema II.2. *Dada $A \in GL(2, \mathbb{H})$, entonces la transformación lineal fraccional $F_A \in \mathcal{M}_{\mathbf{B}_{\mathbb{H}}}$ si y sólo si existen $u, v \in \partial\mathbf{B}_{\mathbb{H}}$, $q_0 \in \mathbf{B}_{\mathbb{H}}$ (i.e., $|u| = |v| = 1$ y $|q_0| < 1$) tales que*

$$F_A(\mathbf{q}) = v(\mathbf{q} - q_0)(1 - \bar{q}_0\mathbf{q})^{-1}u \quad (\text{II.3})$$

para $\mathbf{q} \in \mathbf{B}$.

En particular, el anti-homomorfismo Φ definido en el teorema II.1 puede ser restringido a un anti-homomorfismo suprayectivo de grupos $\Phi : Sp(1, 1) \rightarrow \mathcal{M}_{\mathbf{B}_{\mathbb{H}}}$ cuyo kernel es $\{\pm\mathcal{I}\}$ donde $H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ y

$$Sp(1, 1) := \{A \in GL(2, \mathbb{H}) : {}^t \bar{A}HA = H\}.$$

.

Demostración. Aquí se da una demostración diferente de la que se encuentra en [7]; esta prueba se basa simplemente en la evaluación de las dimensiones reales de los parámetros involucrados en la descripción de F_A . Cuando $|\mathbf{q}| = 1$ se tiene $|F_A(\mathbf{q})| = 1$ y puesto que $|q_0| < 1$, F_A preserva $\mathbf{B}_{\mathbb{H}}$. Los elementos de la forma (2) son parametrizados por (u, v, q_0) con $|u| = |v| = 1$, y $|q_0| < 1$, i.e. como una variedad $\mathcal{M}_{\mathbf{B}_{\mathbb{H}}}$ es difeomorfa a $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3 \times \mathbf{B}_{\mathbb{H}}$ que depende de 10 parámetros reales. Por otro lado, el grupo de isometrías que preservan la orientación de $\mathbf{B}_{\mathbb{H}}$ con la métrica hiperbólica es difeomorfo a la variedad 10-dimensional $SO(4) \times \mathbf{B}_{\mathbb{H}} = \mathbb{S}^3 \times SO(3) \times \mathbf{B}_{\mathbb{H}}$ porque actúa simple y transitivamente en el haz tangente de $\mathbf{B}_{\mathbb{H}} = SO(4) \times \mathbf{B}_{\mathbb{H}}$. El kernel de Φ corresponde a las ternas $(1, 1, 0)$ y $(-1, -1, 0)$. ■

Como se observó, $\mathcal{M}_{\mathbf{B}_{\mathbb{H}}}$ depende de 10 parámetros reales. La compactificación $\widehat{\mathbb{H}} := \mathbb{H} \cup \{\infty\}$ de \mathbb{H} se identifica con \mathbb{S}^4 vía la proyección estereográfica. Los elementos de $\mathcal{M}_{\mathbf{B}_{\mathbb{H}}}$ actúan conformemente en la 4-esfera con respecto a la métrica estándar y al actuar preservan la orientación. Se concluye que

$$\mathcal{M}_{\mathbf{B}_{\mathbb{H}}} \subset \text{Conf}_+(\mathbb{S}^4),$$

donde $\text{Conf}_+(\mathbb{S}^4)$ es el grupo de difeomorfismos conformes que preservan la orientación de la 4-esfera \mathbb{S}^4 . Como variedad topológica diferenciable, $\text{Conf}_+(\mathbb{S}^4)$ es difeomorfa a $SO(5) \times \mathbf{H}_{\mathbb{R}}^5$ donde

$$\mathbf{H}_{\mathbb{R}}^5 = \{(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^5 : x_0 > 0\},$$

por lo que $\text{Conf}_+(\mathbb{S}^4)$ tiene dimensión real 15.

A continuación se da una descripción diferente de este grupo. Recuerde que \mathbb{S}^4 puede identificarse con la línea proyectiva cuaterniónica $\mathbf{P}_{\mathbb{H}}^1 \cong \mathbb{S}^4$. Este es el espacio de *líneas cuaterniónicas derechas* en \mathbb{H}^2 , i.e., subespacios de la forma

$$\mathcal{L}_{\mathbf{q}} := \{\mathbf{q}\lambda : \lambda \in \mathbb{H}\}, \quad \mathbf{q} \in \mathbb{H}^2 \setminus \{(0, 0)\}$$

donde \mathbb{H} es el espacio de cuaternios y $\mathbb{H}^2 = \mathbb{H} \times \mathbb{H} = \{(\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_1) : \mathbf{q}_0, \mathbf{q}_1 \in \mathbb{H}\}$. Observe que \mathbb{H}^2 es un módulo derecho sobre \mathbb{H} y la acción de $GL(2, \mathbb{H})$ en \mathbb{H}^2 conmuta con la multiplicación por la derecha, i.e. para cualquier $\lambda \in \mathbb{H}$ y $A \in GL(2, \mathbb{H})$ se tiene,

$$A \circ R_\lambda = R_\lambda \circ A$$

donde R_λ es la multiplicación a la derecha por $\lambda \in \mathbb{H}$. Entonces $GL(2, \mathbb{H})$ manda líneas cuaterniónicas derechas sobre líneas cuaterniónicas derechas, por lo que se define una acción de $GL(2, \mathbb{H})$ en $\mathbf{P}_{\mathbb{H}}^1$ que se identifica con \mathbb{S}^4 .

Cualquier $F_A \in \mathbb{F}$ se levanta canónicamente a un automorfismo \widetilde{F}_A de $\mathbf{P}_{\mathbb{C}}^3$, el 3-espacio proyectivo complejo y la transformación $\Psi : F_A \mapsto \widetilde{F}_A$ inyecta \mathbb{F} en el grupo proyectivo complejo $PSL(4, \mathbb{C}) := SL(4, \mathbb{C})/\{\pm \mathcal{I}\}$. Entonces (ver [1, 2]), se concluye que

$$\mathcal{M}_{\mathbf{B}_{\mathbb{H}}} \subset PSL(2, \mathbb{H}) := GL(2, \mathbb{H})/\{t\mathcal{I}, t \neq 0\} \simeq \text{Conf}_+(\mathbb{S}^4).$$

Se hace notar que la transformación

$$\mathbf{q} \mapsto \bar{\mathbf{q}}$$

es conforme y transforma la bola unitaria $\mathbf{B}_{\mathbb{H}}$ sobre ella misma pero invierte la orientación de $\mathbf{B}_{\mathbb{H}}$. Sea $\mathbb{M}_{\mathbf{B}_{\mathbb{H}}}$ el grupo de *transformaciones de Möbius extendidas* definidas como la unión de todas las transformaciones de Möbius $\mathcal{M}_{\mathbf{B}_{\mathbb{H}}}$ y todas las anti-transformaciones ϕ obtenidas como $\phi(\mathbf{q}) = F_A(\bar{\mathbf{q}})$ para algún $F_A \in \mathcal{M}_{\mathbf{B}_{\mathbb{H}}}$.

En [7] se define la *distancia de Poincaré* $d_{\mathbf{B}_{\mathbb{H}}}$ en la 4-bola $\mathbf{B}_{\mathbb{H}}$ mediante la razón cruzada cuaterniónica y está distancia coincide con la métrica hiperbólica estándar $\frac{4|d\mathbf{q}|^2}{(1-|\mathbf{q}|^2)^2}$; más aún, también se demuestra en [7] que

Proposición II.4. *La distancia de Poincaré $d_{\mathbf{B}_{\mathbb{H}}}$ en $\mathbf{B}_{\mathbb{H}}$ es invariante bajo la acción del grupo $\mathbb{M}_{\mathbf{B}_{\mathbb{H}}}$ de las transformaciones de Möbius extendidas.*

En otras palabras:

$$\mathbb{M}_{\mathbf{B}_{\mathbb{H}}} \cong \text{Isom}_{d_{\mathbf{B}_{\mathbb{H}}}}(\mathbf{B}_{\mathbb{H}}).$$

§ 1.5. Modelo hiperbólico del hemiespacio cuaterniónico.

Sea $\mathbf{H}_{\mathbb{H}}^1$ el modelo geométrico del espacio hiperbólico real 4-dimensional $\mathbf{H}_{\mathbb{R}}^4$ cuyo espacio base es el hemiespacio cuaterniónico

$$\mathbf{H}_{\mathbb{H}}^1 := \{\mathbf{q} \in \mathbb{H} : \Re(\mathbf{q}) > 0\} = \{(x_0, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^4 : x_0 > 0\},$$

al que se ha dotado con el elemento de métrica riemanniana hiperbólica dado por

$$(ds)^2 = \frac{(dx_0)^2 + (dx_1)^2 + (dx_2)^2 + (dx_3)^2}{x_0^2}$$

donde s mide la longitud a lo largo de curvas parametrizadas. Los espacios hiperbólicos $\mathbf{H}_{\mathbb{H}}^1$ y $\mathbf{H}_{\mathbb{R}}^4$ son isométricos, aunque las estructuras algebraicas (naturales) realizadas por los dos conjuntos son profundamente diferentes.

La bola unitaria $\mathbf{B}_{\mathbb{H}}$ en \mathbb{H} puede ser identificada con el hemisferio inferior de \mathbb{S}^4 y cualquier transformación $F_A \in \mathcal{M}_{\mathbf{B}_{\mathbb{H}}}$ es conforme y preserva la orientación de $\mathbf{B}_{\mathbb{H}}$, se concluye que (ver [1, 2])

$$\mathcal{M}_{\mathbf{B}_{\mathbb{H}}} \simeq \text{Conf}_+(\mathbf{H}_{\mathbb{H}}^1)$$

donde $\text{Conf}_+(\mathbf{H}_{\mathbb{H}}^1)$ representa el grupo de difeomorfismos conformes que preservan la orientación del modelo del hemiespacio hiperbólico cuaterniónico 1-dimensional.

Mediante la transformación de Cayley $\Psi : \mathbf{B}_{\mathbb{H}} \rightarrow \mathbf{H}_{\mathbb{H}}^1$ definida como $\Psi(\mathbf{q}) = (1 + \mathbf{q})(1 - \mathbf{q})^{-1}$ se puede mostrar explícitamente (ver [7]) que la 4-bola unitaria $\mathbf{B}_{\mathbb{H}}$ de \mathbb{H} es difeomorfa al hemiespacio $\mathbf{H}_{\mathbb{H}}^1$. Además se introduce una distancia de Poincaré en $\mathbf{H}_{\mathbb{H}}^1$ de manera que la transformación de Cayley $\Psi : \mathbf{B}_{\mathbb{H}} \rightarrow \mathbf{H}_{\mathbb{H}}^1$ es una isometría; más aún, la distancia de Poincaré en $\mathbf{H}_{\mathbb{H}}^1$ es invariante bajo la acción del grupo $\Psi \mathcal{M}_{\mathbf{B}_{\mathbb{H}}} \Psi^{-1} := \mathbb{M}_{\mathbf{H}_{\mathbb{H}}^1}$.

Definición II.6. Sea $\text{Isom}_+(\mathbf{H}_{\mathbb{H}}^1)$ el subgrupo de $PSL(2, \mathbb{H}) \subset \mathbb{M}_{\mathbf{H}_{\mathbb{H}}^1}$ cuyos elementos son asociados a las transformaciones lineales fraccionales que preservan $\mathbf{H}_{\mathbb{H}}^1$ y por lo tanto actúan como isometrías hiperbólicas en $\mathbf{H}_{\mathbb{H}}^1$. Por analogía con las notaciones previas sobre transformaciones de Möbius, también se puede escribir

$$\text{Isom}_+(\mathbf{H}_{\mathbb{H}}^1) = \mathcal{M}_{\mathbf{H}_{\mathbb{H}}^1} := \Psi \mathcal{M}_{\mathbf{B}_{\mathbb{H}}} \Psi^{-1}.$$

Éste es el subgrupo de transformaciones lineales fraccionales que preservan la orientación y transforman $\mathbf{H}_{\mathbb{H}}^1$ en sí mismo. Más aún, el grupo completo de isometrías de $\mathbf{H}_{\mathbb{H}}^1$ es

$$\text{Isom}(\mathbf{H}_{\mathbb{H}}^1) = \mathbb{M}_{\mathbf{H}_{\mathbb{H}}^1} := \Psi \mathbb{M}_{\mathbf{B}_{\mathbb{H}}} \Psi^{-1}.$$

Los grupos $\mathbb{M}_{\mathbf{H}_{\mathbb{H}}^1}$ y $\mathcal{M}_{\mathbf{H}_{\mathbb{H}}^1}$ actúan como transformaciones conformes en la frontera al infinito de $\mathbf{H}_{\mathbb{H}}^1$ que se identifica con la 3-esfera \mathbb{S}^3 y con la compactificación por un punto del 3-espacio euclideo $\mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$. Esto es

$$\partial \mathbf{H}_{\mathbb{H}}^1 = \mathbb{S}^3 = \{\mathbf{q} \in \mathbb{H} : \Re(\mathbf{q}) = 0\} \cup \{\infty\}.$$

El grupo $\mathcal{M}_{\mathbf{H}_{\mathbb{H}}^1}$ actúa como transformaciones que preservan la orientación. En otras palabras:

$$\mathcal{M}_{\mathbf{H}_{\mathbb{H}}^1} \cong \text{Conf}_+(\mathbb{S}^3),$$

$$\mathbb{M}_{\mathbf{H}_{\mathbb{H}}^1} \cong \text{Conf}(\mathbb{S}^3).$$

El siguiente teorema muestra tres conjuntos equivalentes que determinan las condiciones que caracterizan a la representación matricial cuaterniónica del grupo de isometrías hiperbólicas del modelo del hemiespacio $\mathbf{H}_{\mathbb{H}}^1$ encontradas por Bisi y Gentili (ver [7] nuevamente):

Teorema II.3. (Condiciones BG.) *El grupo $Isom_+(\mathbf{H}_{\mathbb{H}}^1)$ se puede caracterizar como el grupo inducido por las matrices en $PSL(2, \mathbb{H})$ que satisfacen una de las siguientes condiciones equivalentes:*

$$(BG) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} a, b, c, d \in \mathbb{H} : \bar{A}^t K A = K \right\} \text{ donde } K = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} a, b, c, d \in \mathbb{H} : \Re(a\bar{c}) = 0, \Re(b\bar{d}) = 0, \bar{b}c + \bar{d}a = 1 \right\}, \\ \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} a, b, c, d \in \mathbb{H} : \Re(c\bar{d}) = 0, \Re(a\bar{b}) = 0, a\bar{d} + b\bar{c} = 1 \right\}. \end{array} \right.$$

Proposición II.5. *Sean $a, b, c, d \in \mathbb{H}$ tales que*

$$a = a_0 + a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k},$$

$$b = b_0 + b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k},$$

$$c = c_0 + c_1\mathbf{i} + c_2\mathbf{j} + c_3\mathbf{k},$$

y

$$d = d_0 + d_1\mathbf{i} + d_2\mathbf{j} + d_3\mathbf{k}.$$

Entonces:

- $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in Isom_+(\mathbf{H}_{\mathbb{H}}^1)$ si y sólo si:

$$a_0c_0 + a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3 = 0,$$

$$b_0d_0 + b_1d_1 + b_2d_2 + b_3d_3 = 0,$$

$$b_0c_0 + b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3 + a_0d_0 + a_1d_1 + a_2d_2 + a_3d_3 = 1,$$

$$b_0c_1 - b_1c_0 + b_3c_2 - b_2c_3 + a_1d_0 - a_0d_1 + a_2d_3 - a_3d_2 = 0,$$

$$b_0c_2 - b_2c_0 + b_1c_3 - b_3c_1 + a_2d_0 - a_0d_2 + a_3d_1 - a_1d_3 = 0,$$

$$b_0c_3 - b_3c_0 + b_2c_1 - b_1c_2 + a_3d_0 - a_0d_3 + a_1d_2 + a_2d_1 = 0.$$

- En la representación del 3-espacio hiperbólico dada por

$$\mathbf{H}_{\mathbb{R}}^3 = \{(x_0, 0, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^4 : x_0 > 0\},$$

la matriz $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in Isom(\mathbf{H}_{\mathbb{R}}^3)$ si y sólo si:

$$a_0c_0 + a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3 = 0,$$

$$b_0d_0 + b_1d_1 + b_2d_2 + b_3d_3 = 0,$$

$$a_1c_0 - a_0c_1 + a_3c_2 - a_2c_3 = 0,$$

$$b_1d_0 - b_0d_1 + b_3d_2 - b_2d_3 = 0,$$

$$b_0c_0 + b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3 + a_0d_0 + a_1d_1 + a_2d_2 + a_3d_3 = 1,$$

$$a_0d_0 + a_1d_1 - a_2d_2 - a_3d_3 - b_0c_0 - b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3 = 0,$$

$$\begin{aligned}
b_0c_3 - b_1c_2 - a_0d_3 + a_1d_2 + a_2d_1 &= 0, \\
-b_2c_0 - b_3c_1 + a_2d_0 + a_3d_1 &= 0, \\
b_0c_2 + b_1c_3 - a_0d_2 - a_1d_3 &= 0, \\
b_0c_1 - b_1c_0 + a_2d_3 - a_3d_2 &= 0, \\
b_3c_2 - b_2c_3 + a_1d_0 - a_0d_1 &= 0, \\
a_3d_0 + b_2c_1 - b_3c_0 &= 0.
\end{aligned}$$

- En la representación del plano hiperbólico dada por

$$\mathbf{H}_{\mathbb{R}}^2 = \{(x_0, 0, x_2, 0) \in \mathbb{R}^4 : x_0 > 0\},$$

la matriz $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in Isom(\mathbf{H}_{\mathbb{R}}^2)$ si y sólo si:

$$\begin{aligned}
a_0c_0 + a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3 &= 0, \\
b_0d_0 + b_1d_1 + b_2d_2 + b_3d_3 &= 0, \\
a_1c_0 - a_0c_1 + a_3c_2 - a_2c_3 &= 0, \\
b_1d_0 - b_0d_1 + b_3d_2 - b_2d_3 &= 0, \\
b_0c_0 + b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3 + a_0d_0 + a_1d_1 + a_2d_2 + a_3d_3 &= 1, \\
a_0d_0 + a_1d_1 - a_2d_2 - a_3d_3 - b_0c_0 - b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3 &= 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_3c_0 - b_1c_2 - a_0d_3 + a_2d_1 &= 0, \\
-b_2c_0 - b_3c_1 + a_2d_0 + a_3d_1 &= 0, \\
b_0c_2 + b_1c_3 - a_0d_2 - a_1d_3 &= 0, \\
b_0c_1 - b_1c_0 + a_2d_3 - a_3d_2 &= 0, \\
b_3c_2 - b_2c_3 + a_1d_0 - a_0d_1 &= 0, \\
a_3d_0 + b_2c_1 - b_3c_0 &= 0.
\end{aligned}$$

Observación II.1. Como la única ambigüedad es un signo y por abuso del lenguaje, en lo que sigue se identificará una matriz de entradas cuaterniónicas que satisface las condiciones (BG) con la transformación de Möbius inducida.

Entre los elementos de $\mathcal{M}_{\mathbf{H}_{\mathbb{H}}^1}$ y de $\mathbb{M}_{\mathbf{H}_{\mathbb{H}}^1}$, las traslaciones, rotaciones e inversión serán de fundamental importancia en lo que sigue y más adelante se estudiarán específicamente en una sección dedicada a ello.

§ 1.6. El subgrupo afín.

Definición II.7. El *subgrupo afín* $\mathcal{A}(\mathbb{H})$ de $PSL(2, \mathbb{H})$ es el subgrupo maximal de $\mathcal{M}_{\mathbf{H}_{\mathbb{H}}^1}$ que deja fijo el punto al infinito ∞ en $\mathbf{H}_{\mathbb{H}}^1$. Explícitamente,

$$\mathcal{A}(\mathbb{H}) := \left\{ \begin{pmatrix} \lambda a & b \\ 0 & \lambda^{-1} a \end{pmatrix} \in PSL(2, \mathbb{H}) : |a| = 1, \lambda > 0, \Re(\bar{b}a) = 0. \right\}$$

Esto es, los elementos de $\mathcal{A}(\mathbb{H})$ son transformaciones de Möbius de la forma $\mathbf{q} \mapsto ((\lambda a)\mathbf{q} + b)(\lambda^{-1}a)^{-1}$.

El grupo $\mathcal{A}(\mathbb{H})$ es un grupo de Lie de dimensión 7. Cada matriz que pertenece a $\mathcal{A}(\mathbb{H})$ actúa como una transformación conforme en el *hiperplano al infinito*

$$\partial\mathbf{H}_{\mathbb{H}}^1 = \{\mathbf{q} \in \mathbb{H} : \Re(\mathbf{q}) = 0\}.$$

Se tiene que $\mathcal{A}(\mathbb{H})$ es el grupo de transformaciones conformes que preservan orientación actuando en el espacio de cuaternios imaginarios puros identificado con el hiperplano al infinito el cuál a su vez se identifica con \mathbb{R}^3 . Por lo tanto $\mathcal{A}(\mathbb{H}) = Conf_+(\mathbb{R}^3)$.

§ 1.7. Descomposición de Iwasawa.

En analogía con los casos real y complejo, se establece un teorema de factorización que es una generalización de la descomposición de Iwasawa de los elementos de $PSL(2, \mathbb{H})$ que satisfacen las condiciones (BG).

Proposición II.6. *Un elemento $M \in \mathcal{M}_{\mathbf{H}_{\mathbb{H}}^1}$ que es representado por la matriz $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de $PSL(2, \mathbb{H})$ tal que satisface las condiciones (BG), puede ser escrito en una forma única como sigue*

$$M = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \omega \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}, \tag{II.4}$$

donde $\lambda > 0$, $\Re(\omega) = 0$, $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ y $\Re(\alpha\bar{\beta}) = 0$.

Demostración. Se darán explícitamente las expresiones para α , β , λ y ω en términos de los cuaternios a, b, c , y d . De cálculos directos, se obtiene que $\lambda d = \alpha$ y $\lambda c = \beta$; entonces, de las ecuaciones $a = \lambda^2(d + \omega c)$ $b = \lambda^2(c + \omega d)$

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{|c|^2 + |d|^2}} \quad \text{and} \quad \omega = a\bar{c} + b\bar{d}.$$

Entonces, de las condiciones (BG) de la proposición II.3, se sigue que $\Re(\omega) = 0$ y $\Re(\alpha\bar{\beta}) = 0$. ■

El lema 4.3 en [7] implica que $PSL(2, \mathbb{H})$ está generado por las transformaciones $\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,

$\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & p^{-1} \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ con $b, p \in \mathbb{H}$ y $p \neq 0$.

§ 1.8. Subgrupo de isotropía de las isometrías de $\mathbf{H}_{\mathbb{H}}^1$ que fijan un punto.

El grupo afín es el subgrupo maximal de las isometrías que preservan la orientación de $\mathbf{H}_{\mathbb{H}}^1$ que fijan el punto ideal al infinito ∞ . Ahora estudiaremos los subgrupos de isometrías que fijan un punto en el interior de $\mathbf{H}_{\mathbb{H}}^1$.

Nótese que el conjunto de matrices en $\mathcal{M}_{\mathbf{H}_{\mathbb{H}}^1}$ que satisfacen las condiciones (BG) tiene dimensión real 10.

Sea $\mathcal{K} := \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{\mathbf{H}_{\mathbb{H}}^1} \right\}$ el subgrupo de matrices simétricas en $\mathcal{M}_{\mathbf{H}_{\mathbb{H}}^1}$. Para la matriz $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$ las condiciones $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ y $\Re(\alpha\bar{\beta}) = 0$ son equivalentes a las condiciones (BG) en la proposición II.3 y pueden también ser escritas como sigue:

$$\overline{\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Proposición II.7. 1. El grupo \mathcal{K} es un grupo de Lie compacto.

2. De hecho es un grupo compacto maximal de $\mathcal{M}_{\mathbf{H}_{\mathbb{H}}^1}$.

3. Más aún, \mathcal{K} es isomorfo al grupo ortogonal especial $SO(4)$.

4. El grupo \mathcal{K} representa precisamente al subgrupo de isotropía en $1 \in \mathbf{H}_{\mathbb{H}}^1$ de la acción de $PSL(2, \mathbb{H})$ por isometrías que preservan la orientación de $\mathbf{H}_{\mathbb{H}}^1$.

Demostración. Sea $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ una matriz que satisface las condiciones (BG) y fijan el cuaternio 1. Entonces $a + b = c + d$ ó $a - d = c - b$ y

$$|a - d|^2 = (c - b)(\bar{a} - \bar{d}) = c\bar{a} - c\bar{d} - b\bar{a} + b\bar{d}$$

$$|c - b|^2 = (a - d)(\bar{c} - \bar{b}) = a\bar{c} - a\bar{b} - d\bar{c} + d\bar{b}.$$

Entonces las condiciones (BG) implican:

$$|a - d|^2 + |c - b|^2 = (c\bar{a} + a\bar{c}) + (b\bar{d} + d\bar{b}) - ((c\bar{d} + d\bar{c}) + (b\bar{a} + a\bar{b})) = 0.$$

Finalmente, $|a - d|^2 = |c - b|^2 = 0$ implica que $a = d$ y $c = b$. Nuevamente debido a las condiciones (BG) se tiene que $\Re(\bar{a}b) = 0$ y $|a|^2 + |b|^2 = 1$. ■

Sea $\mathcal{D} := \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{\mathbf{H}_{\mathbb{H}}^1} \right\}$ el subgrupo de \mathcal{K} cuyos elementos son matrices diagonales en $\mathcal{M}_{\mathbf{H}_{\mathbb{H}}^1}$.

Entonces las condiciones (BG) implican que $|\alpha| = 1$.

La acción al infinito está dada por $\mathbf{q} \mapsto \alpha\mathbf{q}\bar{\alpha}$, la cual es la acción usual de $SO(3)$ sobre el espacio \mathbb{R}^3 que se identifica con el conjunto de cuaternios imaginarios puros.

Por lo tanto:

Corolario II.1. El grupo \mathcal{D} es isomorfo a $SO(3)$.

§ 1.9. Traslaciones e inversión cuaterniónicas.

En esta sección se investigan la clase de transformaciones lineales que juegan un rol crucial en la definición de los grupos modulares.

Traslaciones.

Una traslación es una aplicación $\tau_\omega : \mathbf{H}_{\mathbb{H}}^1 \rightarrow \mathbf{H}_{\mathbb{H}}^1$ definida como $\mathbf{q} \mapsto \mathbf{q} + \omega$.

Esta transformación racional es una isometría hiperbólica: pertenece a $\mathcal{M}_{\mathbf{H}_{\mathbb{H}}^1}$, si la matriz asociada

que es de la forma $\begin{pmatrix} 1 & \omega \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ en $GL(2, \mathbb{H})$ satisface las condiciones (BG) de la proposición **II.3**, i.e.

si el vector de traslación ω satisface $\Re(\omega) = 0$.

En general, cualquier traslación actúa sin puntos fijos y

$$\begin{pmatrix} 1 & \omega \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n =: \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & \omega \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 1 & \omega \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{n\text{-veces}} = \begin{pmatrix} 1 & n\omega \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

pues

$$\begin{pmatrix} 1 & \omega_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \omega_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \omega_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \omega_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \omega_1 + \omega_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En lo siguiente, se consideran traslaciones donde ω es la parte imaginaria de un entero de Lipschitz o de Hurwitz. Se hace hincapié en el hecho de que la parte imaginaria de un entero de Lipschitz es un entero de Lipschitz pero la parte imaginaria de un entero de Hurwitz no es necesariamente un entero de Hurwitz.

Definición II.8. Un cuaternio es un *entero imaginario de Lipschitz* si es la parte imaginaria de un cuaternio entero de Lipschitz, esto es un cuaternio cuya parte real es 0 y los otros tres componentes son todos enteros. El conjunto de todos los cuaternios imaginarios de Lipschitz se denota por $\Im\mathbb{H}(\mathbb{Z})$ y es

$$\Im\mathbb{H}(\mathbb{Z}) := \{b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k} \in \mathbb{H} : b, c, d \in \mathbb{Z}\}.$$

Definición II.9. Sea $\mathcal{T}_{\Im\mathbb{H}(\mathbb{Z})}$ el grupo de traslaciones cuyo vector traslación es un entero imaginario de Lipschitz, i.e. tales que $\mathbf{q} \mapsto \mathbf{q} + \omega$, donde $\omega = n_2\mathbf{i} + n_3\mathbf{j} + n_4\mathbf{k}$ y los coeficientes n_i son enteros; equivalentemente $\mathbf{q} \mapsto \mathbf{q} + \omega$ pertenece a $\mathcal{T}_{\Im\mathbb{H}(\mathbb{Z})}$ si y sólo si $\omega \in \Im\mathbb{H}(\mathbb{Z})$. Esto es,

$$\mathcal{T}_{\Im\mathbb{H}(\mathbb{Z})} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & \omega \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in PSL(2, \mathbb{H}) : \omega \in \Im\mathbb{H}(\mathbb{Z}), \Re(\omega) = 0 \right\}$$

El grupo $\mathcal{T}_{\Im\mathbb{H}(\mathbb{Z})}$ actúa libremente en $\mathbf{H}_{\mathbb{H}}^1$ como una representación del grupo libre abeliano con 3 generadores $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Un dominio fundamental es el siguiente conjunto

$$\{\mathbf{q} = x_0 + x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j} + x_3\mathbf{k} \in \mathbf{H}_{\mathbb{H}}^1 : |x_n| \leq 1/2, n = 1, \dots, 3\}.$$

Este conjunto será llamado la *chimenea* (Ver la figura 1 en la sección 5). Tiene dos puntas al infinito: una punta de volumen finito que es asintótica al punto en el infinito ∞ . La otra punta tiene volumen infinito.

Inversión cuaterniónica.

Ahora se considera la transformación lineal fraccional de $\mathbf{H}_{\mathbb{H}}^1$ definida como

$$T(\mathbf{q}) = \mathbf{q}^{-1} = \frac{\bar{\mathbf{q}}}{|\mathbf{q}|^2}$$

cuya matriz asociada es $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

En $\mathbf{H}_{\mathbb{H}}^1$ el único punto fijo de T es el 1, el otro punto fijo de T en \mathbb{H} es -1 que no pertenece a $\mathbf{H}_{\mathbb{H}}^1$. La transformación T corresponde a una involución, esto es, al componer T consigo misma se obtiene la identidad: $T^2(\mathbf{q}) = (\mathbf{q}^{-1})^{-1} = \mathbf{q}$. La matriz asociada a T también refleja este hecho:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

En la frontera ideal de $\mathbf{H}_{\mathbb{H}}^1$ los puntos 0 y ∞ son periódicos (de periodo 2) para T . Más aún T es una involución isométrica de $\mathbf{H}_{\mathbb{H}}^1$ porque satisface las condiciones (BG) de la proposición II.3. Explícitamente T es una inversión en \mathbb{S}^3 que produce la transformación antipodal sobre copias de \mathbb{S}^2 obtenida como intersección de \mathbb{S}^3 con un plano perpendicular al eje real. Más aún, T es una isometría que manda cualquier punto de una geodésica hiperbólica parametrizada por longitud de arco $\gamma(s)$, que pasa por 1 en el tiempo 0 (i.e. tal que $\gamma(0) = 1$), a su opuesto $\gamma(-s)$. En otras palabras, T es una simetría hiperbólica alrededor de 1. Finalmente, T deja invariante un hemisferio que es un hiperplano hiperbólico 3-dimensional

$$\Pi^3 := \{\mathbf{q} \in \mathbf{H}_{\mathbb{H}}^1 : |\mathbf{q}| = 1\}.$$

Más aún, cada punto de Π^3 diferente de 1 evaluado en T es periódico de periodo 2.

Definición II.10. Sea

$$\mathcal{C}^3 = \{\mathbf{q} = x_0 + x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j} + x_3\mathbf{k} \in \mathbf{H}_{\mathbb{H}}^1 : |\mathbf{q}| = 1, |x_n| \leq 1/2, n = 1, \dots, 3\}.$$

El conjunto \mathcal{C}^3 es un cubo hiperbólico regular en Π . Los ocho puntos de la forma $\frac{1}{2}(1 \pm \mathbf{i} \pm \mathbf{j} \pm \mathbf{k})$ son los vértices de \mathcal{C}^3 , están en Π y son periódicos de periodo 2 bajo la acción de T . Estos puntos (y el punto fijo 1) son los únicos puntos en Π^3 con coordenadas racionales. Más aún, estos ocho puntos son números enteros de Hurwitz pero no son números enteros de Lipschitz. El cubo hiperbólico \mathcal{C}^3 puede ser identificado como un cubo esférico en $\Pi \subset \mathbb{S}^3$ si se considera la métrica euclídeana. Este cubo jugará un rol importante en la descripción geométrica del dominio fundamental de los grupos de matrices cuaterniónicas que se introducirán más adelante.

La composición de traslaciones y la inversión.

Se observa que si $\tau_{\omega}(\mathbf{q}) := \mathbf{q} + \omega$, entonces $L_{\omega} := \tau_{\omega} \circ T$ corresponde a la matriz asociada

$$\begin{pmatrix} \omega & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \omega \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};$$

similarmente $R_{\omega} := T \circ \tau_{\omega}$ corresponde a la matriz asociada

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \omega \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Entonces R_{ω} está representado por intercambiar los elementos en la diagonal de la matriz que representa L_{ω} . Aquí se enlistan las matrices asociadas a las composiciones de L_{ω} donde $\omega = \pm\mathbf{i}, \pm\mathbf{j}, \pm\mathbf{k}$ ó $\omega = \pm\mathbf{i} \pm \mathbf{j}$, $\omega = \pm\mathbf{j} \pm \mathbf{k}$, $\omega = \pm\mathbf{i} \pm \mathbf{k}$, ó $\omega = \pm\mathbf{i} \pm \mathbf{j} \pm \mathbf{k}$. Todas las combinaciones posibles en la elección de los signos son permitidas en la siguiente tabla.

$\omega = \pm \mathbf{i}$ ó $\omega = \pm \mathbf{j}$ ó $\omega = \pm \mathbf{k}$, $\omega^2 = -1$	$\omega = \pm \mathbf{i} \pm \mathbf{j}$ ó $\omega = \pm \mathbf{i} \pm \mathbf{k}$ ó $\omega = \pm \mathbf{j} \pm \mathbf{k}$, $\omega^2 = -2$	$\omega = \pm \mathbf{i} \pm \mathbf{j} \pm \mathbf{k}$, $\omega^2 = -3$
$L_\omega^2 = \begin{pmatrix} 0 & \omega \\ \omega & 1 \end{pmatrix}$	$L_\omega^2 = \begin{pmatrix} -1 & \omega \\ \omega & 1 \end{pmatrix}$	$L_\omega^2 = \begin{pmatrix} -2 & \omega \\ \omega & 1 \end{pmatrix}$
$L_\omega^3 = \begin{pmatrix} \omega & 0 \\ 0 & \omega \end{pmatrix}$	$L_\omega^3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & \omega \end{pmatrix}$	$L_\omega^3 = \begin{pmatrix} -\omega & -2 \\ -2 & \omega \end{pmatrix}$
$L_\omega^4 = \begin{pmatrix} -1 & \omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix}$	$L_\omega^4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$L_\omega^4 = \begin{pmatrix} 1 & -\omega \\ -\omega & -2 \end{pmatrix}$
$L_\omega^5 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & \omega \end{pmatrix}$		$L_\omega^5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -\omega \end{pmatrix}$
$L_\omega^6 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$		$L_\omega^6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

El orden de L_ω depende de ω ; en particular, L_ω con $\omega = \pm \mathbf{i}, \pm \mathbf{j}, \pm \mathbf{k}$, tiene orden 6 pero cuando se restringe a los planos $\mathbf{H}_\mathbb{C}^1$ y $S_\omega := \{\mathbf{q} = x_0 + x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j} + x_3\mathbf{k} \in \mathbf{H}_\mathbb{H}^1 \mid x_\alpha = 0 \text{ si } \alpha \neq \omega, 0\}$, donde $\omega = \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$, tiene orden 3. Más aún $\mathbf{q}_0 \in \mathbf{H}_\mathbb{H}^1$ es un punto fijo para la transformación $L_\omega = \tau_\omega T$ (donde $\omega = 0, \pm \mathbf{i}, \pm \mathbf{j}, \pm \mathbf{k}$) si y sólo si \mathbf{q}_0 es una raíz de $\mathbf{q}^2 - \omega\mathbf{q} - 1 = 0$. Si $\omega = 0$ entonces sólo se tiene una raíz en $\mathbf{H}_\mathbb{H}^1$ (y por lo tanto un sólo punto fijo para T), que es $\mathbf{q}_0 = 1$. Si $\omega = \pm \mathbf{i}, \pm \mathbf{j}, \pm \mathbf{k}$, entonces es fácil verificar que si α y β son dos raíces de $\mathbf{q}^2 + \mathbf{q}\omega - 1 = 0$, se sigue que $\Re(\alpha + \beta) = 0$ ó $\Re(\alpha) = -\Re(\beta)$. Como una raíz de $\mathbf{q}^2 - \omega\mathbf{q} - 1 = 0$ es $\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\omega}{2}$, donde cualquier otra posible raíz β de la misma ecuación no estará en $\mathbf{H}_\mathbb{H}^1$. Un argumento similar aplica también para los puntos fijos de R_ω . En resumen, los únicos puntos fijos de T, L_ω y R_ω son $1, \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\omega}{2}$ y $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\omega}{2}$, respectivamente.

§2. Extensión de Poincaré a la quinta dimensión.

Como se ha visto antes la línea proyectiva cuaterniónica $\mathbf{P}_\mathbb{H}^1$ puede ser identificada con la esfera unitaria \mathbb{S}^4 en \mathbb{R}^5 y \mathbb{S}^4 es la frontera de la bola unitaria cerrada $\mathbf{D}^5 \subset \mathbb{R}^5$. Se identifica el interior de \mathbf{D}^5 con el modelo de la bola del 5-espacio hiperbólico $\mathbf{H}_\mathbb{R}^5$. Como $PSL(2, \mathbb{H})$ actúa conformemente en $\mathbb{S}^4 \cong \mathbf{P}_\mathbb{H}^1$, mediante el teorema de la extensión de Poincaré cada elemento $\gamma \in PSL(2, \mathbb{H})$ se extiende canónicamente a un difeomorfismo conforme de \mathbf{D}^5 cuya restricción a $\mathbf{H}_\mathbb{R}^5$ es una isometría $\tilde{\gamma}$ del disco abierto 5-dimensional \mathbf{B}^5 con la métrica de Poincaré. Recíprocamente, cualquier isometría de $\mathbf{H}_\mathbb{R}^5$ se extiende canónicamente a la frontera ideal $\mathbb{R}^4 \cup \{\infty\}$ como un elemento de $PSL(2, \mathbb{H})$. Entonces la transformación $\gamma \mapsto \tilde{\gamma}$ es un isomorfismo y $PSL(2, \mathbb{H}) = Isom_+ \mathbf{H}_\mathbb{R}^5$.

El modelo hiperbólico del semiespacio 5-dimensional $\mathbf{H}_\mathbb{R}^5$ puede ser representado como $\{(t, \mathbf{q}) \mid \mathbf{q} \in \mathbb{H}, t > 0\}$. La acción de $PSL(2, \mathbb{H})$ se extiende al semiespacio cerrado $\bar{\mathbf{H}}_\mathbb{R}^5 := \{(\mathbf{q}, t) \mid \mathbf{q} \in \mathbb{H}, t \geq 0\}$.

Proposición II.8. Sea $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in PSL(2, \mathbb{H})$, entonces su extensión de Poincaré está dada explícitamente en el modelo hiperbólico del semiespacio 5-dimensional $\mathbf{H}_{\mathbb{R}}^5$ como

$$\gamma(t, \mathbf{q}) = \left(t, \frac{1}{|c\mathbf{q} + d|^2 + |c|^2 t^2} \right) ((a\mathbf{q} + b)(\overline{c} + \bar{d}) + a\bar{c}t^2) \quad (\text{II.5})$$

Demostración. El lema 4.3 en [7] implica que $PSL(2, \mathbb{H})$ está generado por las transformaciones $\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & p^{-1} \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ con $b, p \in \mathbb{H}$ y $p \neq 0$. Un cálculo directo implica que cada una de esas transformaciones actúa conformemente en $\overline{\mathbf{H}}_{\mathbb{R}}^5$ y entonces actúa por isometrías en el modelo del hemiespacio $\mathbf{H}_{\mathbb{R}}^5$. La transformación cuando $t = 0$ corresponde a la acción de γ sobre \mathbb{H} . ■

Entonces se puede asumir que cualquier subgrupo discreto de $PSL(2, \mathbb{H})$ actúa conformemente en $\mathbb{S}^4 \cong \mathbf{P}_{\mathbb{H}}^1$ ó isométricamente en $\mathbf{H}_{\mathbb{R}}^5$ y generalizar la proposición I.1.

Proposición II.9. Sea $\Gamma \subset PSL(2, \mathbb{H})$ un subgrupo discreto actuando isométricamente sobre $\mathbf{H}_{\mathbb{R}}^5$. Entonces su acción es propia y discontinua. Entonces $M := \mathbf{H}_{\mathbb{R}}^5/\Gamma$ es una orbidad hiperbólica 5-dimensional geodésicamente completa. Si en adición Γ actúa libremente entonces M es una 5-variedad hiperbólica.

Ejemplos importantes de subgrupos discretos de $PSL(2, \mathbb{H})$ se obtienen cuando los coeficientes pertenecen al anillo de enteros de Lipschitz $\mathbb{H}(\mathbb{Z})$ o al anillo de enteros de Hurwitz $\mathbb{H}ur$ i.e. $PSL(2, \mathbb{H}(\mathbb{Z}))$ y $PSL(2, \mathbb{H}ur(\mathbb{Z}))$.

Proposición II.10. Los grupos $PSL(2, \mathbb{H}(\mathbb{Z}))$, $PSL(2, \mathcal{L})$, $PSL(2, \mathbb{H}ur(\mathbb{Z}))$ y $PSL(2, \mathfrak{H})$ son subgrupos discretos de $PSL(2, \mathbb{H})$. En particular sus extensiones de Poincaré actúan propiamente y discontinuamente en $\mathbf{H}_{\mathbb{R}}^5$. Sea

$$\mathcal{O}_{\mathbb{H}(\mathbb{Z})}^5 := \mathbf{H}_{\mathbb{R}}^5/PSL(2, \mathbb{H}(\mathbb{Z})) \text{ y } \mathcal{O}_{\mathbb{H}ur(\mathbb{Z})}^5 := \mathbf{H}_{\mathbb{R}}^5/PSL(2, \mathbb{H}ur(\mathbb{Z}));$$

estos cocientes son orbidades reales 5-dimensionales de volumen hiperbólico finito. Sin embargo las orbidades $\mathcal{O}_{\mathcal{L}}^5 = \mathbf{H}_{\mathbb{R}}^5/PSL(2, \mathcal{L})$ y $\mathcal{O}_{\mathfrak{H}}^5 = \mathbf{H}_{\mathbb{R}}^5/PSL(2, \mathfrak{H})$ son orbidades reales 5-dimensionales de volumen hiperbólico infinito.

Si se identifica $\mathbf{H}_{\mathbb{R}}^5$ con los pares (t, \mathbf{q}) donde $\mathbf{q} \in \mathbb{H}$ y $t > 0$, entonces un dominio fundamental $D(\mathbb{H}(\mathbb{Z}))$ del grupo modular cuaterniónico es el conjunto de pares (t, \mathbf{q}) tales que:

$$\mathbf{q} = x_0 + x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j} + x_3\mathbf{k}, \quad -1/2 \leq x_n \leq 1/2 \quad (n = 0, 1, 2, 3), \text{ y}$$

$$|\mathbf{q}|^2 + |t|^2 \geq 1.$$

Los modelos locales de los puntos singulares en esta orbidad se obtienen como los cocientes del 4-espacio hiperbólico \mathbf{B}^4 por la acción de un subgrupo discreto de isometrías hiperbólicas de la 3-esfera.

Sea $\mathbb{F}_0 \subset \mathbb{F}_{\mathbf{B}^4}$ el subgrupo de isometrías hiperbólicas del modelo de la bola hiperbólica que fijan el origen. El grupo \mathbb{F}_0 es isomorfo a $SO(4)$. Hay una acción ortogonal de $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$ sobre \mathbb{S}^3 dada por $\mathbf{q} \mapsto q_1^{-1}\mathbf{q}q_2$, para un par fijo $(q_1, q_2) \in \mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$. Esto define un homomorfismo de grupos de Lie $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3 \rightarrow SO(4)$ cuyo kernel es $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ y es generado por $(-1, -1)$. Entonces $SO(4)$ es isomorfo al producto central $\mathbb{S}^3 \times_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} \mathbb{S}^3$. Los subgrupos finitos de $SO(4)$ son, bajo conjugación, exactamente los subgrupos finitos de los productos centrales de dos grupos poliedrales binarios G_1 y G_2

$$G_1 \times_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} G_2 \subset \mathbb{S}^3 \times_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} \mathbb{S}^3$$

Los subgrupos finitos de $SU(2)$ han sido clasificados por Felix Klein [38] y son los grupos cíclicos de orden n ($n > 1$), los grupos diedrales binarios, el grupo tetraedral binario, el grupo octaedral binario y el grupo icosaedral binario. Sea Γ un subgrupo finito de \mathbb{F}_0 . Sea $r > 0$ y \mathbf{B}_r^4 la bola hiperbólica centrada en el origen de radio r . La bola \mathbf{B}_r^4 es invariante bajo la acción de Γ . Sea $\mathcal{O}(\Gamma, r) = \mathbf{B}_r^4/\Gamma$.

Definición II.11. Sean p y q dos enteros. Sea $\Gamma(p, q) \subset SU(2)$ el subgrupo cíclico generado por la transformación $T_{p,q}(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2) = (e^{2\pi i/p}\mathbf{z}_1, e^{2\pi i/q}\mathbf{z}_2)$. Este grupo es cíclico de orden el mínimo común múltiplo de p y q . Sea $\mathcal{O}(p, q, r)$ la orbidad $\mathcal{O}(\Gamma(p, q), r) = \mathbf{B}_r^4/\Gamma(p, q)$ como en el ejemplo 4. Si $\Gamma(G_1, G_2) \subset SO(4)$ es un subgrupo finito isomorfo a $G_1 \times_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} G_2$ entonces sea $\mathcal{O}((G_1, G_2), r)$ la orbidad $\mathbf{B}_r^4/\Gamma(G_1, G_2)$.

CAPÍTULO III

Grupos modulares en las primeras 5 dimensiones.

En este capítulo se estudia el grupo modular que modela la geometría del espacio de retículas en el plano \mathbb{R}^2 . El grupo modular es isomorfo y admite una representación geométrica como el grupo generado por dos tipos de isometrías, una de ellas es una involución a lo largo de una recta hiperbólica y el otro tipo consiste en traslaciones enteras. En este capítulo se enuncia una generalización concatenada de esta representación geométrica en las primeras 5 dimensiones mediante los números reales, los números complejos y los cuaternios. Además para cada grupo modular en cada dimensión se definen tres subgrupos importantes: el grupo unitario, el grupo afín y las familias de grupos de congruencia.

§ 1. El grupo modular y el espacio triángulos y de retículas en el plano.

En esta sección se define el grupo modular como el subgrupo generado por dos isometrías del plano hiperbólico $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^1$.

§ 2. 7 grupos modulares kleinianos en bajas dimensiones.

Definición III.1. El *grupo modular* $PSL(2, \mathbb{Z})$ es el subgrupo de isometrías del plano hiperbólico $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^1 = \mathbf{H}_{\mathbb{R}}^2$ generado por la inversión T y el subgrupo $\mathcal{T}_{\mathbb{S}\mathbb{C}(\mathbb{Z})}$ de las traslaciones tales que sus vectores de traslación son enteros de Gauss que son números complejos imaginarios puros. Este grupo de traslaciones es isomorfo al grupo $\mathcal{T}_{\mathbb{Z}}$ de traslaciones enteras, esto es tales que sus vectores de traslación son números enteros reales. Esto es,

$$PSL(2, \mathbb{Z}) := \langle T, \mathcal{T}_{\mathbb{S}\mathbb{C}(\mathbb{Z})} \rangle = \langle T, \mathcal{T}_{\mathbb{Z}} \rangle$$

Definición III.2. El *grupo modular de Picard-Gauss* es el subgrupo de isometrías de $\mathbf{H}_{\mathbb{R}}^3$ generado por la inversión T y el subgrupo de las traslaciones tales que sus vectores de traslación son enteros de Gauss. El grupo modular de Picard-Gauss se denota por $PSL(2, \mathbb{C}(\mathbb{Z}))$ y este subgrupo de traslaciones por $\mathcal{T}_{\mathbb{C}(\mathbb{Z})}$. Esto es,

$$PSL(2, \mathbb{C}(\mathbb{Z})) := \langle T, \mathcal{T}_{\mathbb{C}(\mathbb{Z})} \rangle$$

Definición III.3. El *grupo modular 4-dimensional de Verjovskiy-Lipschitz* es el subgrupo de isometrías de $\mathbf{H}_{\mathbb{H}}^1$ generado por la inversión T y el subgrupo de las traslaciones tales que sus vectores de traslación son enteros de Lipschitz con parte real, equivalentemente vectores de traslación que son cuaternios imaginarios puros que son enteros de Lipschitz. El grupo modular de 4-dimensional

de Verjovsky-Lipschitz se denota por $PSL(2, \mathfrak{L})$ y este subgrupo de traslaciones por $\mathcal{T}_{\mathfrak{S}\mathbb{H}(\mathbb{Z})}$. Esto es,

$$PSL(2, \mathfrak{L}) := \langle T, \mathcal{T}_{\mathfrak{S}\mathbb{H}(\mathbb{Z})} \rangle$$

Definición III.4. El *grupo modular 5-dimensional de Verjovsky-Lipschitz* es el subgrupo de isometrías de $\mathbf{H}_{\mathbb{R}}^5$ generado por la inversión T y el subgrupo de las traslaciones tales que sus vectores de traslación son enteros de Lipschitz. El grupo modular 5-dimensional de Verjovsky-Lipschitz se denota por $PSL(2, \mathbb{H}(\mathbb{Z}))$ y este subgrupo de traslaciones por $\mathcal{T}_{\mathbb{H}(\mathbb{Z})}$. Esto es,

$$PSL(2, \mathbb{H}(\mathbb{Z})) := \langle T, \mathcal{T}_{\mathbb{H}(\mathbb{Z})} \rangle$$

Observación III.1. Los dos grupos modulares $PSL(2, \mathbb{Z})$ y $PSL(2, \mathbb{C}(\mathbb{Z}))$, son subgrupos discretos de $PSL(2, \mathbb{R})$ y $PSL(2, \mathbb{C})$, respectivamente. Los dos grupos modulares $PSL(2, \mathfrak{L})$ y $PSL(2, \mathbb{H}(\mathbb{Z}))$ son subgrupos discretos de $PSL(2, \mathbb{H})$. Es importante enfatizar que el grupo modular 4-dimensional de Verjovsky-Lipschitz $PSL(2, \mathfrak{L})$ es un subgrupo propio del grupo modular 5-dimensional de Verjovsky-Lipschitz $PSL(2, \mathbb{H}(\mathbb{Z}))$; más aún, $PSL(2, \mathfrak{L})$ tiene elementos que son representados por matrices con enteros de Lipschitz $\mathbb{H}(\mathbb{Z})$ como entradas, pero en general un elemento arbitrario en $PSL(2, \mathbb{H}(\mathbb{Z}))$ no satisface las condiciones (BG) de la proposición 1.5 y por lo tanto no preserva $\mathbf{H}_{\mathbb{H}}^1$. Aunque sí preserva $\mathbf{H}_{\mathbb{R}}^5$ mediante la extensión de Poincaré.

§ 3. Subgrupos fuchsianos importantes.

Se consideran ahora tres subgrupos distinguidos de cada uno de los grupos modulares: el subgrupo unitario, el subgrupo afín y familias de grupos de congruencia.

§ 3.1. Subgrupos unitarios.

Definición III.5. 1. Sea \mathbb{Z}_u el grupo formado por las dos *unidades enteras* $\mathbb{Z}_u := \{\pm 1\} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

2. Sea $\mathbb{C}(\mathbb{Z})_u$ el grupo formado por las cuatro *unidades de los enteros de Gauss*, esto es, el conjunto de los cuatro enteros de Gauss de norma 1. Esto es

$$\mathbb{C}(\mathbb{Z})_u := \{\pm 1, \pm \mathbf{i} : \mathbf{i}^2 = -1\}.$$

3. Sea $\mathbb{H}(\mathbb{Z})_u$ el grupo formado por las ocho *unidades de Lipschitz*, es decir, el conjunto de los ocho enteros de Lipschitz de norma 1. Esto es

$$\mathbb{H}(\mathbb{Z})_u := \{\pm 1, \pm \mathbf{i}, \pm \mathbf{j}, \pm \mathbf{k} : \mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = \mathbf{ijk} = -1\}.$$

El grupo no abeliano $\mathbb{H}(\mathbb{Z})_u$ es usualmente llamado el *grupo cuaterniónico*. Sus elementos son los ocho vértices de un politopo convexo regular llamado la 16-celdas en la 3-esfera $\mathbb{S}^3 \subset \mathbb{H}$ debido a que tiene 16 caras tetraedrales. También se corresponden los elementos de $\mathbb{H}(\mathbb{Z})_u$ con los ocho baricentros de las caras de un hipercubo en la 3-esfera \mathbb{S}^3 llamado la 8-celdas.

Definición III.6. El *grupo unitario entero*, *grupo unitario de Gauss* y *grupo unitario de Lipschitz* que se denotan por $\mathcal{U}(\mathbb{Z})$, $\mathcal{U}(\mathbb{C}(\mathbb{Z}))$ y $\mathcal{U}(\mathbb{H}(\mathbb{Z}))$ respectivamente, son los subgrupos de $PSL(2, \mathbb{Z})$, $PSL(2, \mathbb{C}(\mathbb{Z}))$ y $PSL(2, \mathfrak{L})$ (recuerde que $PSL(2, \mathfrak{L}) \subset PSL(2, \mathbb{H}(\mathbb{Z}))$) cuyos elementos son inducidos por matrices diagonales de la forma

$$\begin{pmatrix} \mathbf{u} & 0 \\ 0 & \mathbf{u} \end{pmatrix},$$

donde \mathbf{u} es una unidad entera ($\mathbf{u} \in \mathbb{Z}_u$), una unidad de Gauss ($\mathbf{u} \in \mathbb{C}(\mathbb{Z})_u$) o una unidad de Lipschitz ($\mathbf{u} \in \mathbb{H}(\mathbb{Z})_u$), respectivamente. Esto es:

$$\begin{aligned} \mathcal{U}(\mathbb{Z}) &:= \left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{u} & 0 \\ 0 & \mathbf{u} \end{pmatrix} \in PSL(2, \mathbb{C}(\mathbb{Z})) : \mathbf{u} \in \mathbb{Z}_u \right\} = \{\mathcal{I}\}, \\ \mathcal{U}(\mathbb{C}(\mathbb{Z})) &:= \left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{u} & 0 \\ 0 & \mathbf{u} \end{pmatrix} \in PSL(2, \mathbb{C}(\mathbb{Z})) : \mathbf{u} \in \mathbb{C}(\mathbb{Z})_u \right\}, \\ \mathcal{U}(\mathbb{H}(\mathbb{Z})) &:= \left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{u} & 0 \\ 0 & \mathbf{u} \end{pmatrix} \in PSL(2, \mathfrak{L}) : \mathbf{u} \in \mathbb{H}(\mathbb{Z})_u \right\}. \end{aligned}$$

Estos conjuntos de matrices diagonales forman grupos con respecto a la operación multiplicación debido a que las matrices diagonales son cerradas bajo el producto:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{u} & 0 \\ 0 & \mathbf{u} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{w} & 0 \\ 0 & \mathbf{w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{uw} & 0 \\ 0 & \mathbf{uw} \end{pmatrix}.$$

El grupo unitario entero $\mathcal{U}(\mathbb{Z})$ es una manera muy rimbombante de llamar al grupo trivial que consiste únicamente de la matriz identidad. El grupo unitario de Gauss $\mathcal{U}(\mathbb{C}(\mathbb{Z}))$ es de orden 2 por lo que es isomorfo a $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. El grupo unitario de Lipschitz $\mathcal{U}(\mathbb{H}(\mathbb{Z}))$ es de orden 4 y es isomorfo a $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, pues $\mathbf{ij} = \mathbf{k}$; este grupo también es conocido como el *grupo de Klein*.

Un elemento en $\mathcal{U}(\mathbb{H}(\mathbb{Z}))$ representado como la transformación $D_{\mathbf{u}}$ asociada a la matriz $\begin{pmatrix} \mathbf{u} & 0 \\ 0 & \mathbf{u} \end{pmatrix}$, donde $\mathbf{u} = \mathbf{i}, \mathbf{j}$ ó \mathbf{k} , actúa en $\mathbf{H}_{\mathbb{H}}^1$ por conjugación con la regla $\mathbf{q} \mapsto \mathbf{uqu}^{-1}$. Más aún, actúa geoméricamente como una rotación de ángulo π cuyo eje es el plano hiperbólico geodésicamente completo

$$S_{\mathbf{u}} = \{x + y\mathbf{u} \mid x, y \in \mathbb{R}, x > 0\}.$$

La acción en $\mathbf{H}_{\mathbb{S}\mathbb{H}}^1$ de un elemento en $\mathcal{U}(\mathbb{C}(\mathbb{Z}))$ dado como la transformación $D_{\mathbf{u}}$ donde $\mathbf{u} = \mathbf{j}, \mathbf{k}$ es una reflexión en el plano hiperbólico geodésicamente completo $S_{\mathbf{u}}$. La acción en $\mathbf{H}_{\mathbb{R}}^3$ de la transformación $D_{\mathbf{u}}$ donde $\mathbf{u} = \mathbf{i}$ es una rotación alrededor de la geodésica conformada por los números reales positivos.

§ 3.2. Subgrupos afines.

Definición III.7. El *grupo afín entero* $\mathcal{A}(\mathbb{Z})$ es otra manera de llamar al subgrupo de traslaciones $\mathcal{T}_{\mathbb{Z}}$ de $PSL(2, \mathbb{Z})$ cuyos vectores de traslación son enteros. (recuerde que el grupo unitario entero $\mathcal{U}(\mathbb{Z})$ es trivial). Esto es

$$\mathcal{A}(\mathbb{Z}) := \mathcal{T}_{\mathbb{Z}} = \langle \mathcal{U}(\mathbb{Z}), \mathcal{T}_{\mathbb{Z}} \rangle.$$

El *grupo afín de Picard-Gauss* es el subgrupo de $PSL(2, \mathbb{C}(\mathbb{Z}))$ generado por el grupo unitario de Gauss $\mathcal{U}(\mathbb{C}(\mathbb{Z}))$ y el grupo de traslaciones $\mathcal{T}_{\mathbb{C}(\mathbb{Z})}$ cuyos vectores de traslación son enteros de Gauss. Esto es

$$\mathcal{A}(\mathbb{C}(\mathbb{Z})) := \langle \mathcal{U}(\mathbb{C}(\mathbb{Z})), \mathcal{T}_{\mathbb{C}(\mathbb{Z})} \rangle.$$

El *grupo afín 4-dimensional de Verjovsky-Lipschitz* es el subgrupo de $PSL(2, \mathfrak{L})$ generado por el grupo unitario de Lipschitz $\mathcal{U}(\mathbb{H}(\mathbb{Z}))$ y el grupo de traslaciones $\mathcal{T}_{\mathbb{S}\mathbb{H}(\mathbb{Z})}$ cuyos vectores de traslación son enteros imaginarios de Lipschitz. Esto es

$$\mathcal{A}(\mathfrak{L}) := \langle \mathcal{U}(\mathbb{H}(\mathbb{Z})), \mathcal{T}_{\mathbb{S}\mathbb{H}(\mathbb{Z})} \rangle.$$

El grupo afín 5-dimensional de Verjovsky-Lipschitz es el subgrupo de $PSL(2, \mathbb{H}(\mathbb{Z}))$ generado por el grupo unitario de Lipschitz $\mathcal{U}(\mathbb{H}(\mathbb{Z}))$ y el grupo de traslaciones $\mathcal{T}_{\mathbb{H}(\mathbb{Z})}$ cuyos vectores de traslación son enteros de Lipschitz. Esto es

$$\mathcal{A}(\mathbb{H}(\mathbb{Z})) := \langle \mathcal{U}(\mathbb{H}(\mathbb{Z})), \mathcal{T}_{\mathbb{H}(\mathbb{Z})} \rangle.$$

Es posible describir explícitamente los elementos de los grupos afines:

$$\mathcal{A}(\mathbb{Z}) = \mathcal{T}_{\mathbb{Z}} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in PSL(2, \mathbb{Z}) \right\}. \quad (\text{III.1a})$$

$$\mathcal{A}(\mathbb{C}(\mathbb{Z})) = \left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{u} & \mathbf{u}b \\ 0 & \mathbf{u} \end{pmatrix} \in PSL(2, \mathbb{C}(\mathbb{Z})) : \mathbf{u} \in \mathbb{C}(\mathbb{Z})_u, \Re(b) = 0 \right\} \quad (\text{III.2a})$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{u} & b\mathbf{u} \\ 0 & \mathbf{u} \end{pmatrix} \in PSL(2, \mathbb{C}(\mathbb{Z})) : \mathbf{u} \in \mathbb{C}(\mathbb{Z})_u, \Re(b) = 0 \right\}. \quad (\text{III.2b})$$

$$\mathcal{A}(\mathfrak{L}) = \left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{u} & \mathbf{u}b \\ 0 & \mathbf{u} \end{pmatrix} \in PSL(2, \mathfrak{L}) : \mathbf{u} \in \mathbb{H}(\mathbb{Z})_u, \Re(b) = 0 \right\} \quad (\text{III.3a})$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{u} & b\mathbf{u} \\ 0 & \mathbf{u} \end{pmatrix} \in PSL(2, \mathfrak{L}) : \mathbf{u} \in \mathbb{H}(\mathbb{Z})_u, \Re(b) = 0 \right\}. \quad (\text{III.3b})$$

$$\mathcal{A}(\mathbb{H}(\mathbb{Z})) = \left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{u} & b \\ 0 & \mathbf{u} \end{pmatrix} \in PSL(2, \mathbb{H}(\mathbb{Z})) : \mathbf{u} \in \mathbb{H}(\mathbb{Z})_u \right\}. \quad (\text{III.4a})$$

El grupo correspondiente al grupo afín entero $\mathcal{A}(\mathbb{Z})$ es isomorfo al grupo de traslaciones enteras $\mathcal{T}_{\mathbb{Z}}$ debido a que $\mathbb{Z}_u = \pm 1$.

Los subgrupos afines $\mathcal{A}(\mathbb{Z})$, $\mathcal{A}(\mathbb{C}(\mathbb{Z}))$, $\mathcal{A}(\mathfrak{L})$ y $\mathcal{A}(\mathbb{H}(\mathbb{Z}))$ son los subgrupos parabólicos maximales de $PSL(2, \mathbb{Z})$, $PSL(2, \mathbb{C}(\mathbb{Z}))$, $PSL(2, \mathfrak{L})$ y $PSL(2, \mathbb{H}(\mathbb{Z}))$, respectivamente.

Además se tienen las siguientes relaciones de pertenencia

1. $\mathcal{A}(\mathbb{Z}) \subset PSL(2, \mathbb{Z}) \cap \mathcal{A}(\mathbb{R})$,
2. $\mathcal{A}(\mathbb{C}(\mathbb{Z})) \subset PSL(2, \mathbb{C}(\mathbb{Z})) \cap \mathcal{A}(\mathbb{C})$,
3. $\mathcal{A}(\mathfrak{L}) \subset PSL(2, \mathfrak{L}) \cap \mathcal{A}(\mathbb{H})$ y
4. $\mathcal{A}(\mathbb{C}(\mathbb{Z})) \subset PSL(2, \mathbb{H}(\mathbb{Z})) \cap \mathcal{A}(\mathbb{H})$.

Más aún, los grupos afines $\mathcal{A}(\mathbb{Z})$, $\mathcal{A}(\mathbb{C}(\mathbb{Z}))$ y $\mathcal{A}(\mathfrak{L})$ dejan invariantes a las horiesferas que son los hiperplanos $S_c = \{\mathbf{q} \in \mathbf{H}_{\mathbb{H}}^1 : \Re(\mathbf{q}) = c\}$ y a las horibolas definidas como $B_c = \{\mathbf{q} \in \mathbf{H}_{\mathbb{H}}^1 : \Re(\mathbf{q}) > c\}$ donde c es un número real positivo. El grupo afín $\mathcal{A}(\mathbb{C}(\mathbb{Z}))$ deja invariantes las horibolas $S_c = \{(\mathbf{q}, t) \in \mathbf{H}_{\mathbb{R}}^5 : t = c\}$ y a las horibolas definidas como $B_c = \{(\mathbf{q}, t) \in \mathbf{H}_{\mathbb{H}}^1 : t > c\}$ donde c es un número real positivo.

El grupo $\mathcal{A}(\mathbb{C}(\mathbb{Z}))$ es generado por la isometría hiperbólica de $\mathbf{H}_{\mathbb{R}}^3$ asociada a la matriz $\begin{pmatrix} \mathbf{i} & 0 \\ 0 & \mathbf{i} \end{pmatrix}$.

El grupo $\mathcal{A}(\mathfrak{L})$ es generado por isometrías hiperbólicas de $\mathbf{H}_{\mathbb{H}}^1$ asociadas a las matrices

$$\begin{pmatrix} \mathbf{i} & 0 \\ 0 & \mathbf{i} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \mathbf{j} & 0 \\ 0 & \mathbf{j} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{u} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

donde $\mathbf{u} = \mathbf{i}, \mathbf{j}$ y \mathbf{k} . Esto debido a que $\mathbf{ij} = \mathbf{k}$.

El grupo $\mathcal{A}(\mathbb{H}(\mathbb{Z}))$ es generado por isometrías hiperbólicas de $\mathbf{H}_{\mathbb{R}}^5$ asociadas a las matrices

$$\begin{pmatrix} \mathbf{i} & 0 \\ 0 & \mathbf{i} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \mathbf{j} & 0 \\ 0 & \mathbf{j} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{u} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

donde $\mathbf{u} = 1, \mathbf{i}, \mathbf{j}$ y \mathbf{k} .

Observación III.2. La composición de la transformación representada por la matriz $\begin{pmatrix} \mathbf{u} & 0 \\ 0 & \mathbf{u} \end{pmatrix}$

donde $\mathbf{u} = \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$, y la inversión T es una transformación representada por la matriz $\begin{pmatrix} 0 & \mathbf{u} \\ \mathbf{u} & 0 \end{pmatrix}$.

Para estas transformaciones diagonales y su composición con T , el plano $S_{\mathbf{u}}$ y el hiperplano Π son subconjuntos invariantes en $\mathbf{H}_{\mathbb{H}}^1$ y tienen a 1 como un punto fijo.

Se tienen las siguientes propiedades:

1. La inversa de una matriz $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \in \mathcal{A}(\mathbb{H})$ es la matriz

$$\begin{pmatrix} a^{-1} & -a^{-1}bd^{-1} \\ 0 & d^{-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{A}(\mathbb{H}).$$

2. Si se consideran a los grupos unitarios de Picard-Gauss $\mathbb{C}(\mathbb{Z})_u$ y de Lipschitz $\mathbb{H}(\mathbb{Z})_u$, entonces las transformaciones

$$\mathcal{A}(\mathbb{C}(\mathbb{Z})) \rightarrow \mathbb{C}(\mathbb{Z})_u, \quad \begin{pmatrix} \mathbf{u} & \mathbf{ub} \\ 0 & \mathbf{u} \end{pmatrix} \mapsto \mathbf{u},$$

$$\mathcal{A}(\mathfrak{L}) \rightarrow \mathbb{H}(\mathbb{Z})_u, \quad \begin{pmatrix} \mathbf{u} & \mathbf{ub} \\ 0 & \mathbf{u} \end{pmatrix} \mapsto \mathbf{u}$$

y

$$\mathcal{A}(\mathbb{H}(\mathbb{Z})) \rightarrow \mathbb{H}(\mathbb{Z})_u, \quad \begin{pmatrix} \mathbf{u} & \mathbf{ub} \\ 0 & \mathbf{u} \end{pmatrix} \mapsto \mathbf{u}$$

son epimorfismos cuyo kernel son el grupo de traslaciones de enteros de Gauss $\mathcal{T}_{\mathbb{C}(\mathbb{Z})}$, el grupo de traslaciones de enteros imaginarios puros de Lipschitz $\mathcal{T}_{\mathfrak{H}(\mathbb{Z})}$ y el grupo de traslaciones de enteros de Lipschitz $\mathcal{T}_{\mathbb{H}(\mathbb{Z})}$, respectivamente.

Por lo tanto, se tiene la secuencias exactas

$$0 \longrightarrow \mathcal{T}_{\mathbb{C}(\mathbb{Z})} \longrightarrow \mathcal{A}(\mathbb{C}(\mathbb{Z})) \longrightarrow \mathcal{U}(\mathbb{C}(\mathbb{Z})) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow \mathcal{T}_{\mathfrak{H}(\mathbb{Z})} \longrightarrow \mathcal{A}(\mathfrak{L}) \longrightarrow \mathcal{U}(\mathbb{H}(\mathbb{Z})) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow \mathcal{T}_{\mathbb{H}(\mathbb{Z})} \longrightarrow \mathcal{A}(\mathbb{H}(\mathbb{Z})) \longrightarrow \mathcal{U}(\mathbb{H}(\mathbb{Z})) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

Estas secuencias exactas se escinden. Por lo tanto, el grupo afín de Gauss $\mathcal{A}(\mathbb{C}(\mathbb{Z}))$ es el producto semidirecto de $\mathcal{T}_{\mathbb{C}(\mathbb{Z})}$ por $\mathcal{U}(\mathbb{C}(\mathbb{Z}))$, el grupo afín 4-dimensional de Lipschitz $\mathcal{A}(\mathfrak{L})$ es el producto semidirecto de $\mathcal{T}_{\mathfrak{H}(\mathbb{Z})}$ por $\mathcal{U}(\mathbb{H}(\mathbb{Z}))$ y el grupo afín 5-dimensional de Lipschitz $\mathcal{A}(\mathbb{H}(\mathbb{Z}))$ es el producto semidirecto de $\mathcal{T}_{\mathbb{H}(\mathbb{Z})}$ por $\mathcal{U}(\mathbb{H}(\mathbb{Z}))$.

§ 3.3. Subgrupos de congruencia.

Sea $\mathcal{A}(2, \mathfrak{L})$ el subgrupo de índice finito de $\mathcal{A}(\mathfrak{L})$ generado por las 12 traslaciones

$$\{\tau_{\mathbf{u}+\mathbf{v}} \quad : \quad \mathbf{u} \neq \mathbf{v} \quad \text{y} \quad \mathbf{u}, \mathbf{v} = \pm \mathbf{i}, \pm \mathbf{j}, \pm \mathbf{k}\}.$$

De hecho sólo son necesarias las tres traslaciones $\tau_{\mathbf{i}+\mathbf{j}}, \tau_{\mathbf{i}+\mathbf{k}}$ y $\tau_{\mathbf{j}+\mathbf{k}}$ para generar al grupo $\mathcal{A}(2, \mathfrak{L})$ pero las doce traslaciones son importantes para describir su dominio fundamental (ver la subsección 10).

Entonces el grupo $\mathcal{A}(2, \mathfrak{L})$ consiste de los elementos correspondientes a las matrices en $PSL(2, \mathfrak{L})$ asociadas a las traslaciones de Lipschitz cuya forma general es

$$\tau_{x,y,z} = \begin{pmatrix} 1 & x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ tal que } x + y + z \equiv 0 \pmod{2}.$$

Definición III.8. Sea $\Gamma(2, \mathfrak{L})$ el subgrupo de $PSL(2, \mathfrak{L})$ generado por $\mathcal{A}(2, \mathfrak{L})$ y la inversión T .

Este grupo juega el rol del grupo de congruencia módulo dos y de hecho es un subgrupo de índice dos de $PSL(2, \mathfrak{L})$. Se corresponde con un subgrupo de transformaciones de Lorentz representadas por matrices con coeficientes enteros que serán particularmente importantes en la sección VII.1.

§ 4. Grupo modular de Hurwitz y subgrupos afín y unitario.

En analogía con la definición del grupo modular y de los grupos unitario y afín en el caso de los enteros de Lipschitz, se definen los grupos equivalentes para el caso de los enteros de Hurwitz.

Definición III.9. Sea $\mathbb{H}ur(\mathbb{Z})_u$ el grupo de las *unidades de Hurwitz* definido como

$$\mathbb{H}ur(\mathbb{Z})_u := \{\pm 1, \pm \mathbf{i}, \pm \mathbf{j}, \pm \mathbf{k}, \frac{1}{2}(\pm 1 \pm \mathbf{i} \pm \mathbf{j} \pm \mathbf{k}) : \mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = -1, \mathbf{ij} = \mathbf{k}\}$$

donde en los elementos de la forma $\frac{1}{2}(\pm 1 \pm \mathbf{i} \pm \mathbf{j} \pm \mathbf{k})$ las 16 posibles combinaciones de signos son consideradas.

Este grupo es conocido como el grupo *binario tetraedral*. Los 24 elementos de $\mathbb{H}ur(\mathbb{Z})_u$ son cuaternios unitarios que forman los vértices en la 3-esfera de un politopo convexo regular llamado la *24-celdas* que es una generalización de los sólidos platónicos en la cuarta dimensión. Las caras de la 24-celdas son 24 octaedros, en cada vértice inciden 6 octaedros y en cada arista inciden 3 octaedros. Estratificando a la 24-celdas en una descomposición de complejo celular se tienen 24 octaedros, 96 caras triangulares, 96 aristas y 24 vértices.

La 24-celdas admite una estructura hiperbólica como un politopo regular convexo ideal.

Definición III.10. El grupo *unitario de Hurwitz* $\mathcal{U}(\mathbb{H}ur(\mathbb{Z}))$ es el subgrupo de $PSL(2, \mathbb{H})$ cuyos elementos son las doce matrices diagonales de la forma

$$D_{\mathbf{u}} := \begin{pmatrix} \mathbf{u} & 0 \\ 0 & \mathbf{u} \end{pmatrix}$$

donde \mathbf{u} es una unidad de Hurwitz.

La aplicación del grupo de unidades de Hurwitz al grupo unitario de Hurwitz $\mathbb{H}ur(\mathbb{Z})_u \rightarrow \mathcal{U}(\mathbb{H}ur(\mathbb{Z}))$ dada por la regla $\mathbf{u} \mapsto D_{\mathbf{u}}$ es un epimorfismo cuyo kernel es $\{\mathcal{I}, -\mathcal{I}\}$, donde \mathcal{I} es la matriz identidad de 2×2 , por lo que dicha aplicación es de orden dos.

Cualquier matriz en $\mathcal{U}(\mathbb{H}ur(\mathbb{Z}))$ satisface las condiciones (BG). Por lo tanto es una isometría que preserva la orientación de $\mathbf{H}_{\mathbb{H}}^1$.

La acción en $\mathbf{H}_{\mathbb{H}}^1$ de un elemento en $\mathcal{U}(\mathbb{H}ur(\mathbb{Z}))$ es por conjugación y está dada como la transformación

$$D_{\mathbf{u}} : \mathbf{H}_{\mathbb{H}}^1 \rightarrow \mathbf{H}_{\mathbb{H}}^1$$

$$\mathbf{q} \mapsto \mathbf{u}\mathbf{q}\mathbf{u}^{-1}$$

asociada a la matriz $\begin{pmatrix} \mathbf{u} & 0 \\ 0 & \mathbf{u} \end{pmatrix}$. La acción es una rotación cuyo eje es el plano hiperbólico geodésicamente completo

$$S_{\mathbf{u}} = \{x + y\mathbf{u} \mid x, y \in \mathbb{R}, x > 0\}.$$

Si $\mathbf{u} = \mathbf{i}, \mathbf{j}$ ó \mathbf{k} es una rotación de ángulo π , si $\mathbf{u} = \frac{1}{2}(1 \pm \mathbf{i} \pm \mathbf{j} \pm \mathbf{k})$ es una rotación de ángulo $\frac{2\pi}{3}$. El grupo unitario de Hurwitz $\mathcal{U}(\mathbb{H}ur(\mathbb{Z}))$ es de orden 12 y de hecho, es isomorfo al grupo de isometrías que preservan la orientación de un tetraedro regular, este es un subgrupo de $SO(3)$. Todos estos subgrupos son grupos de rotaciones.

Definición III.11. El *grupo modular 4-dimensional de Verjovsky-Hurwitz* es el grupo generado por la inversión T , por las traslaciones $\mathcal{T}_{\mathfrak{S}\mathbb{H}ur(\mathbb{Z})}$ y por el grupo unitario de Hurwitz $\mathcal{U}(\mathbb{H}ur(\mathbb{Z}))$. Se denota al grupo modular 4-dimensional de Verjovsky-Hurwitz por $PSL(2, \mathfrak{H})$.

El *grupo modular 5-dimensional de Verjovsky-Hurwitz* es el grupo generado por la inversión T , por las traslaciones $\mathcal{T}_{\mathbb{H}ur(\mathbb{Z})}$ y por el grupo unitario de Hurwitz $\mathcal{U}(\mathbb{H}ur(\mathbb{Z}))$. Se denota al grupo modular 5-dimensional de Verjovsky-Hurwitz por $PSL(2, \mathbb{H}ur(\mathbb{Z}))$. Esto es

$$PSL(2, \mathbb{H}ur(\mathbb{Z})) := \langle T, \mathcal{U}(\mathbb{H}ur(\mathbb{Z})), \mathcal{T}_{\mathbb{H}ur(\mathbb{Z})} \rangle.$$

Claramente $\mathcal{U}(\mathbb{H}ur(\mathbb{Z}))$ contiene a $\mathcal{U}(\mathbb{H}(\mathbb{Z}))$ como un subgrupo pero $\mathcal{U}(\mathbb{H}ur(\mathbb{Z}))$ no está contenido en el grupo modular de Lipschitz $PSL(2, \mathbb{H}(\mathbb{Z}))$.

Proposición III.1. *Los grupos modulares 4-dimensional y 5-dimensional de Verjovsky-Lipschitz $PSL(2, \mathfrak{L})$ y $PSL(2, \mathbb{H}(\mathbb{Z}))$ son subgrupos de índice tres de los grupos modulares 4-dimensional y 5-dimensional de Verjovsky-Hurwitz $PSL(2, \mathfrak{H})$ y $PSL(2, \mathbb{H}ur(\mathbb{Z}))$, respectivamente.*

Demostración. Esto se sigue debido a que el orden del grupo $\mathcal{U}(\mathbb{H}(\mathbb{Z}))$ de transformaciones inducidas por las matrices diagonales con entradas en las unidades de Lipschitz es de índice tres en el grupo $\mathcal{U}(\mathbb{H}ur(\mathbb{Z}))$ de transformaciones inducidas por las matrices diagonales con entradas en las unidades de Hurwitz. ■

Definición III.12. El subgrupo *afín o parabólico 4-dimensional de Verjovsky-Hurwitz* $\mathcal{A}(\mathfrak{H})$ es el grupo generado por el grupo unitario de Hurwitz $\mathcal{U}(\mathbb{H}ur(\mathbb{Z}))$ y el grupo de traslaciones $\mathcal{T}_{\mathfrak{S}\mathbb{H}(\mathbb{Z})}$ de enteros imaginarios de Lipschitz. Esto es

$$\mathcal{A}(\mathfrak{H}) := \langle \mathcal{U}(\mathbb{H}ur(\mathbb{Z})), \mathcal{T}_{\mathfrak{S}\mathbb{H}(\mathbb{Z})} \rangle.$$

El subgrupo *afín o parabólico 5-dimensional de Verjovsky-Hurwitz* $\mathcal{A}(\mathbb{H}ur(\mathbb{Z}))$ es el grupo generado por el grupo unitario de Hurwitz $\mathcal{U}(\mathbb{H}ur(\mathbb{Z}))$ y el grupo de traslaciones $\mathcal{T}_{\mathbb{H}(\mathbb{Z})}$ de enteros de Lipschitz. Esto es

$$\mathcal{A}(\mathbb{H}ur(\mathbb{Z})) := \langle \mathcal{U}(\mathbb{H}ur(\mathbb{Z})), \mathcal{T}_{\mathbb{H}(\mathbb{Z})} \rangle.$$

Es posible describir explícitamente los elementos de los grupos afines 4-dimensional y 5-dimensional de Hurwitz:

$$\mathcal{A}(\mathfrak{H}) = \left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{u} & \mathbf{ub} \\ 0 & \mathbf{u} \end{pmatrix} \in PSL(2, \mathfrak{H}) : \mathbf{u} \in \mathbb{H}ur(\mathbb{Z})_u, \Re(b) = 0 \right\} \quad (\text{III.5a})$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{u} & b\mathbf{u} \\ 0 & \mathbf{u} \end{pmatrix} \in PSL(2, \mathfrak{H}) : \mathbf{u} \in \mathbb{H}ur(\mathbb{Z})_u, \Re(b) = 0 \right\}, \quad (\text{III.5b})$$

$$\mathcal{A}(\mathbb{H}ur(\mathbb{Z})) = \left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{u} & \mathbf{ub} \\ 0 & \mathbf{u} \end{pmatrix} \in PSL(2, \mathbb{H}ur(\mathbb{Z})) : \mathbf{u} \in \mathbb{H}ur(\mathbb{Z})_u, \Re(b) = 0 \right\} \quad (\text{III.6a})$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{u} & b\mathbf{u} \\ 0 & \mathbf{u} \end{pmatrix} \in PSL(2, \mathbb{H}ur(\mathbb{Z})) : \mathbf{u} \in \mathbb{H}ur(\mathbb{Z})_u, \Re(b) = 0 \right\}, \quad (\text{III.6b})$$

Se sigue de la definición que $PSL(2, \mathfrak{L}) \subset PSL(2, \mathfrak{H})$. Usando la transformación de Cayley $\Psi(\mathbf{q}) = (1 + \mathbf{q})(1 - \mathbf{q})^{-1}$ es posible representar las acciones (en términos de la multiplicación) de las unidades de Hurwitz sobre la 3-esfera unitaria \mathbb{S}^3 como rotaciones en $\mathbf{H}_{\mathbb{H}}^1$. Más aún, existe una correspondencia entre cada unidad de Hurwitz \mathbf{u} con una de las siguientes 24 matrices

$$P_{\mathbf{u}} := \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \mathbf{u} + 1 & \mathbf{u} - 1 \\ \mathbf{u} - 1 & \mathbf{u} + 1 \end{pmatrix} \in PSL(2, \mathfrak{H}).$$

Esta transformación está asociada a la rotación alrededor de 1 dada explícitamente por la fórmula

$$\mathbf{q} \mapsto ((\mathbf{u} + 1)\mathbf{q} + \mathbf{u} - 1)((\mathbf{u} - 1)\mathbf{q} + \mathbf{u} + 1)^{-1}. \quad (\text{III.7})$$

Esta manera de representar el grupo de las unidades de Hurwitz $\mathbb{H}ur(\mathbb{Z})_u$ en términos de matrices puede ser considerado como un modo de generalizar las matrices de Pauli. El subgrupo $\mathcal{P}(\mathbb{H}ur(\mathbb{Z})_u)$ de $PSL(2, \mathfrak{H})$ de orden 24 que consiste de las rotaciones de la forma III.7 es isomorfo a $\mathbb{H}ur(\mathbb{Z})_u$. Bajo la acción del grupo de unidades de Hurwitz $\mathbb{H}ur(\mathbb{Z})_u$ la órbita de 0 son las imágenes bajo la inversa de la transformación de Cayley Ψ de las 24 unidades de Hurwitz. Por lo tanto, el grupo $\mathcal{P}(\mathbb{H}ur(\mathbb{Z})_u)$ es un subgrupo del grupo de simetrías que preservan la orientación de la 24-celdas. Si se considera el grupo unitario de Hurwitz $\mathbb{H}ur(\mathbb{Z})_u$, entonces las transformaciones

$$\mathcal{A}(\mathfrak{H}) \rightarrow \mathbb{H}ur(\mathbb{Z})_u, \quad \begin{pmatrix} \mathbf{u} & \mathbf{ub} \\ 0 & \mathbf{u} \end{pmatrix} \mapsto \mathbf{u}$$

$$\mathcal{A}(\mathbb{H}ur(\mathbb{Z})) \rightarrow \mathbb{H}ur(\mathbb{Z})_u, \quad \begin{pmatrix} \mathbf{u} & \mathbf{ub} \\ 0 & \mathbf{u} \end{pmatrix} \mapsto \mathbf{u}$$

son epimorfismos cuyo kernel son el grupo de traslaciones de enteros imaginarios de Lipschitz y el grupo de traslaciones de enteros de Lipschitz.

Por lo tanto se tienen la secuencias exactas:

$$0 \rightarrow \mathcal{T}_{\mathfrak{H}(\mathbb{Z})} \rightarrow \mathcal{A}(\mathfrak{H}) \rightarrow \mathcal{U}(\mathbb{H}ur(\mathbb{Z})) \rightarrow 0$$

$$0 \rightarrow \mathcal{T}_{\mathbb{H}(\mathbb{Z})} \rightarrow \mathcal{A}(\mathbb{H}ur(\mathbb{Z})) \rightarrow \mathcal{U}(\mathbb{H}ur(\mathbb{Z})) \rightarrow 0$$

Estas secuencias exactas se escinden y los grupos afines de Verjovsky- Hurwitz $\mathcal{A}(\mathfrak{H})$ y $\mathcal{A}(\mathbb{H}ur(\mathbb{Z}))$ son isomorfos al producto semidirecto de los grupos de traslaciones $\mathcal{T}_{\mathfrak{H}(\mathbb{Z})}$ y de $\mathcal{T}_{\mathbb{H}(\mathbb{Z})}$ por $\mathcal{U}(\mathbb{H}ur(\mathbb{Z}))$, respectivamente.

El grupo $\mathcal{U}(\mathbb{H}(\mathbb{Z})) \subset \mathcal{U}(\mathbb{H}ur(\mathbb{Z}))$ es un subgrupo normal. Se tiene la secuencia exacta

$$0 \rightarrow \mathcal{U}(\mathbb{H}(\mathbb{Z})) \rightarrow \mathcal{U}(\mathbb{H}ur(\mathbb{Z})) \rightarrow \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \rightarrow 0$$

Definición III.13. Sean $\hat{\mathcal{U}}(\mathbb{H}(\mathbb{Z}))$ y $\hat{\mathcal{U}}(\mathbb{H}ur(\mathbb{Z}))$ los subgrupos maximales de $PSL(2, \mathfrak{L})$ y $PSL(2, \mathfrak{H})$ que fijan $1 \in \mathbf{H}_{\mathbb{H}}^1$. Más aún, estos subgrupos son también los subgrupos maximales que preservan al cubo \mathcal{C}^3 y al hiperplano hiperbólico Π^3 .

Se tiene la siguiente proposición como una consecuencia de los resultados previos:

Proposición III.2. *El grupo $\hat{\mathcal{U}}(\mathbb{H}(\mathbb{Z}))$ es el subgrupo generado por T y $\mathcal{U}(\mathbb{H}(\mathbb{Z}))$. El grupo $\hat{\mathcal{U}}(\mathbb{H}ur(\mathbb{Z}))$ es el subgrupo generado por T y $\mathcal{U}(\mathbb{H}ur(\mathbb{Z}))$. Esto es,*

$$\hat{\mathcal{U}}(\mathbb{H}(\mathbb{Z})) = \langle T, \mathcal{U}(\mathbb{H}(\mathbb{Z})) \rangle \quad \text{y} \quad \hat{\mathcal{U}}(\mathbb{H}ur(\mathbb{Z})) = \langle T, \mathcal{U}(\mathbb{H}ur(\mathbb{Z})) \rangle.$$

Más aún,

$$\hat{\mathcal{U}}(\mathbb{H}(\mathbb{Z})) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathcal{U}(\mathbb{H}(\mathbb{Z})) \quad \text{y} \quad \hat{\mathcal{U}}(\mathbb{H}ur(\mathbb{Z})) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathcal{U}(\mathbb{H}ur(\mathbb{Z})).$$

Demostración. Esto se sigue de que $T^2 = \mathcal{I}$ y T conmuta con todos los elementos de $\mathcal{U}(\mathbb{H}(\mathbb{Z}))$ y $\mathcal{U}(\mathbb{H}ur(\mathbb{Z}))$. ■

Observación III.3. Los grupos discretos $PSL(2, \mathfrak{L})$ y $PSL(2, \mathfrak{H})$, y los grupos $PSL(2, \mathbb{H}(\mathbb{Z}))$ y $PSL(2, \mathbb{H}ur(\mathbb{Z}))$ preservan los hemiespacios $\mathbf{H}_{\mathbb{H}}^1$ y $\mathbf{H}_{\mathbb{R}}^5$ y la métrica hiperbólica correspondiente, respectivamente; por tanto son ejemplos de *grupos kleinianos hiperbólicos 4- y 5-dimensionales* en el sentido de Henri Poincaré (ver el libro de M. Kapovich [36]).

CAPÍTULO IV

Dominios fundamentales para los grupos modulares.

En el capítulo anterior se estudian grupos representados por matrices cuyas entradas son cuaternios que actúan en espacios hiperbólicos modelados en subconjuntos de los cuaternios. En este capítulo se investigan sus dominios fundamentales y las orbidades generadas por los espacios cociente o espacios de órbitas correspondientes.

§ 1. El dominio fundamental de la acción de un grupo.

Se recuerdan algunos hechos básicos sobre acciones de grupos.

Definición IV.1. Dado un grupo Γ actuando continuamente en un espacio métrico Ω , un subconjunto \mathcal{D} de Ω es un *dominio fundamental* para Γ si para cada punto en Ω el subconjunto \mathcal{D} contiene exactamente un punto de sus imágenes bajo la acción de Γ . El subconjunto \mathcal{D} contiene exactamente un representante de cada una de las llamadas *órbitas* de Γ .

Hay varias maneras de escoger un dominio fundamental para la acción de un grupo de transformaciones de Ω . Un dominio fundamental generalmente sirve como una realización geométrica para el conjunto abstracto de representantes de las órbitas de la acción de un grupo discreto.

Típicamente, un dominio fundamental requiere ser un subconjunto conexo con alguna restricción en su frontera, por ejemplo, diferenciabilidad o linealidad (que la frontera sea un poliedro cuyos lados estén contenidos en subespacios geodésicamente completos). Una vez escogido un dominio fundamental las imágenes bajo la acción del grupo teselan con mucha simetría (el grupo de simetrías es isomorfo a Γ) el espacio Ω .

§ 2. Kaleidoscopios hiperbólicos cuaterniónicos.

En esta sección se investigan las propiedades geométricas de algunas variedades y orbidades hiperbólicas obtenidas como el espacio cociente de los espacios hiperbólicos en bajas dimensiones bajo la acción de ciertos subgrupos discretos de isometrías. Por ejemplo, los grupos generados por reflexiones en las caras de un poliedro convexo de volumen finito y los subgrupos de índice 2 que consisten de las isometrías que preservan la orientación. Recuerde que la composición de dos reflexiones es una rotación. Estas orbidades del mismo modo que los kaleidoscopios, son ciertos poliedros que satisfacen condiciones muy especiales en sus ángulos tales que las caras en su frontera actúan como espejos.

Una manera de construir ejemplos de variedades y orbidades hiperbólicas de volumen finito modeladas por elementos de un subgrupo de isometrías G consiste en considerar poliedros ideales convexos de volumen finito con un número finito de puntos ideales al infinito y con algunas caras identificadas en pares por elementos de G y otras caras que admitan una subdivisión en subcaras identificadas en pares por elementos de G .

Ahora vamos a construir ejemplos de orbidades hiperbólicas que son kaleidoscopios en las primeras cinco dimensiones.

Considere los politopos hiperbólicos ideales

$$\mathcal{P}^2 \subset \mathbf{H}_{\mathbb{R}}^2 = \mathbf{H}_{\mathbb{C}}^1, \quad \mathcal{P}^3 \subset \mathbf{H}_{\mathbb{R}}^3, \quad \mathcal{P}^4 \subset \mathbf{H}_{\mathbb{R}}^4 = \mathbf{H}_{\mathbb{H}}^1 \quad \text{y} \quad \mathcal{P}^5 \subset \mathbf{H}_{\mathbb{R}}^5$$

que se obtienen de la intersección de los hemi-espacios que contienen a 2 y que quedan determinados por el siguiente conjunto de hiperplanos hiperbólicos como su frontera:

$$\partial\mathcal{P}^2 = \begin{cases} \Pi^1 := \{\mathbf{q} \in \mathbf{H}_{\mathbb{C}}^1 : |\mathbf{q}| = 1\}, \\ \Pi_{-\frac{j}{2}}^1 := \{\mathbf{q} \in \mathbf{H}_{\mathbb{C}}^1 : \mathbf{q} = x_0 - \frac{1}{2}\mathbf{j}, x_0 > 0\}, \\ \Pi_{\frac{j}{2}}^1 := \{\mathbf{q} \in \mathbf{H}_{\mathbb{C}}^1 : \mathbf{q} = x_0 + \frac{1}{2}\mathbf{j}, x_0 > 0\}. \end{cases}$$

$$\partial\mathcal{P}^3 = \begin{cases} \Pi^2 := \{\mathbf{q} \in \mathbf{H}_{\mathbb{R}}^3 : |\mathbf{q}| = 1\}, \\ \Pi_{-\frac{j}{2}}^2 := \{\mathbf{q} \in \mathbf{H}_{\mathbb{R}}^3 : \mathbf{q} = x_0 - \frac{1}{2}\mathbf{j} + x_3\mathbf{k}, x_0 > 0, x_3 \in \mathbb{R}\}, \\ \Pi_{\frac{j}{2}}^2 := \{\mathbf{q} \in \mathbf{H}_{\mathbb{R}}^3 : \mathbf{q} = x_0 + \frac{1}{2}\mathbf{j} + x_3\mathbf{k}, x_0 > 0, x_3 \in \mathbb{R}\}, \\ \Pi_{-\frac{k}{2}}^2 := \{\mathbf{q} \in \mathbf{H}_{\mathbb{R}}^3 : \mathbf{q} = x_0 + x_2\mathbf{j} - \frac{1}{2}\mathbf{k}, x_0 > 0, x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}, \\ \Pi_{\frac{k}{2}}^2 := \{\mathbf{q} \in \mathbf{H}_{\mathbb{R}}^3 : \mathbf{q} = x_0 + x_2\mathbf{j} + \frac{1}{2}\mathbf{k}, x_0 > 0, x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}. \end{cases}$$

$$\partial\mathcal{P}^4 = \begin{cases} \Pi^3 := \{\mathbf{q} \in \mathbf{H}_{\mathbb{H}}^1 : |\mathbf{q}| = 1\}, \\ \Pi_{-\frac{i}{2}}^3 := \{\mathbf{q} \in \mathbf{H}_{\mathbb{H}}^1 : \mathbf{q} = x_0 - \frac{1}{2}\mathbf{i} + x_2\mathbf{j} + x_3\mathbf{k}, x_0 > 0, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}, \\ \Pi_{\frac{i}{2}}^3 := \{\mathbf{q} \in \mathbf{H}_{\mathbb{H}}^1 : \mathbf{q} = x_0 + \frac{1}{2}\mathbf{i} + x_2\mathbf{j} + x_3\mathbf{k}, x_0 > 0, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}, \\ \Pi_{-\frac{j}{2}}^3 := \{\mathbf{q} \in \mathbf{H}_{\mathbb{H}}^1 : \mathbf{q} = x_0 + x_1\mathbf{i} - \frac{1}{2}\mathbf{j} + x_3\mathbf{k}, x_0 > 0, x_1, x_3 \in \mathbb{R}\}, \\ \Pi_{\frac{j}{2}}^3 := \{\mathbf{q} \in \mathbf{H}_{\mathbb{H}}^1 : \mathbf{q} = x_0 + x_1\mathbf{i} + \frac{1}{2}\mathbf{j} + x_3\mathbf{k}, x_0 > 0, x_1, x_3 \in \mathbb{R}\}, \\ \Pi_{-\frac{k}{2}}^3 := \{\mathbf{q} \in \mathbf{H}_{\mathbb{H}}^1 : \mathbf{q} = x_0 + x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j} - \frac{1}{2}\mathbf{k}, x_0 > 0, x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}, \\ \Pi_{\frac{k}{2}}^3 := \{\mathbf{q} \in \mathbf{H}_{\mathbb{H}}^1 : \mathbf{q} = x_0 + x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j} + \frac{1}{2}\mathbf{k}, x_0 > 0, x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}, \end{cases}$$

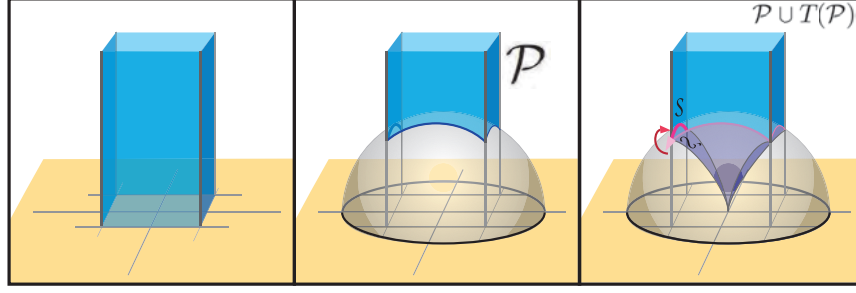


Figura 4.1. Figura esquemática de la chimenea que es un dominio fundamental del grupo parabólico $\mathcal{T}_{\mathbb{S}\mathbb{H}(\mathbb{Z})}$ (generado por las traslaciones τ_i , τ_j and τ_k), el politopo \mathcal{P}^4 y el politopo \mathcal{P}^4 y su inversión $T(\mathcal{P}^3)$. El plano horizontal representa a los cuaternios imaginarios puros que forman la frontera ideal $\partial\mathbf{H}_{\mathbb{H}}^1$ y sobre él está el hemiespacio de cuaternios con parte real positiva $\mathbf{H}_{\mathbb{H}}^1$.

$$\partial\mathcal{P}^5 = \left\{ \begin{array}{l} \Pi^4 := \{\mathbf{q} \in \mathbf{H}_{\mathbb{R}}^5 : |\mathbf{q}| = 1\}, \\ \Pi_{-\frac{1}{2}}^4 := \{(\mathbf{q}, t) \in \mathbf{H}_{\mathbb{R}}^5 : \mathbf{q} = \frac{1}{2} + x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j} + x_3\mathbf{k}, x_1, x_2, x_3, t \in \mathbb{R}, t > 0\}, \\ \Pi_{\frac{1}{2}}^4 := \{(\mathbf{q}, t) \in \mathbf{H}_{\mathbb{R}}^5 : \mathbf{q} = \frac{1}{2} + x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j} + x_3\mathbf{k}, x_1, x_2, x_3, t \in \mathbb{R}, t > 0\}, \\ \Pi_{-\frac{i}{2}}^4 := \{(\mathbf{q}, t) \in \mathbf{H}_{\mathbb{R}}^5 : \mathbf{q} = x_0 - \frac{1}{2}\mathbf{i} + x_2\mathbf{j} + x_3\mathbf{k}, x_0, x_2, x_3, t \in \mathbb{R}, t > 0\}, \\ \Pi_{\frac{i}{2}}^4 := \{(\mathbf{q}, t) \in \mathbf{H}_{\mathbb{R}}^5 : \mathbf{q} = x_0 + \frac{1}{2}\mathbf{i} + x_2\mathbf{j} + x_3\mathbf{k}, x_0, x_2, x_3, t \in \mathbb{R}, t > 0\}, \\ \Pi_{-\frac{j}{2}}^4 := \{\mathbf{q} \in \mathbf{H}_{\mathbb{R}}^5 : \mathbf{q} = x_0 + x_1\mathbf{i} - \frac{1}{2}\mathbf{j} + x_3\mathbf{k}, x_0, x_1, x_3, t \in \mathbb{R}, t > 0\}, \\ \Pi_{\frac{j}{2}}^4 := \{\mathbf{q} \in \mathbf{H}_{\mathbb{R}}^5 : \mathbf{q} = x_0 + x_1\mathbf{i} + \frac{1}{2}\mathbf{j} + x_3\mathbf{k}, x_0, x_1, x_3, t \in \mathbb{R}, t > 0\}, \\ \Pi_{-\frac{k}{2}}^4 := \{\mathbf{q} \in \mathbf{H}_{\mathbb{R}}^5 : \mathbf{q} = x_0 + x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j} - \frac{1}{2}\mathbf{k}, x_0, x_1, x_2 \in \mathbb{R}, t > 0\}, \\ \Pi_{\frac{k}{2}}^4 := \{\mathbf{q} \in \mathbf{H}_{\mathbb{R}}^5 : \mathbf{q} = x_0 + x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j} + \frac{1}{2}\mathbf{k}, x_0, x_1, x_2 \in \mathbb{R}, t > 0\} \end{array} \right.$$

Estos 4 politopos están contenidos en una cadena propiamente encajados:

$$\mathcal{P}^2 \subset \mathcal{P}^3 \subset \mathcal{P}^4 \subset \mathcal{P}^5$$

$$\partial\mathcal{P}^2 \subset \partial\mathcal{P}^3 \subset \partial\mathcal{P}^4 \subset \partial\mathcal{P}^5$$

Los primeros 3 politopos tienen un único vértice en el punto al infinito ∞ . Los vértices no ideales de \mathcal{P}^2 son los 2 puntos $\frac{1}{2}(\sqrt{3} \pm \mathbf{j}) \in \Pi^2$ que están en la semicircunferencia unitaria que es un hiperplano hiperbólico Π^1 en $\mathbf{H}_{\mathbb{R}}^2$. Los vértices no ideales de \mathcal{P}^3 son los 4 puntos $\frac{1}{2}(\sqrt{2} \pm \mathbf{j} \pm \mathbf{k})$ los cuales son los vértices de un cuadrado $\mathcal{C}^2 \subset \Pi^2$. Los vértices no ideales de \mathcal{P}^4 son los 8 puntos $\frac{1}{2}(1 \pm \mathbf{i} \pm \mathbf{j} \pm \mathbf{k})$ los cuales son los vértices del cubo $\mathcal{C}^3 \subset \Pi^3$ que fue definido anteriormente. Todos los vértices del politopo \mathcal{P}^5 son ideales y son el punto al infinito ∞ y los 16 puntos $\frac{1}{2}(\pm 1 \pm \mathbf{i} \pm \mathbf{j} \pm \mathbf{k}, 1)$ los cuales son los vértices del hipercono $\mathcal{C}^4 \subset \Pi$.

Los lados de los polítopos convexos \mathcal{P}^2 , \mathcal{P}^3 , \mathcal{P}^4 y \mathcal{P}^5 están contenidos en los hemisferios Π^1, Π^2, Π^3 y Π^4 y en los dos, cuatro, seis y ocho hiperplanos $\Pi_n^1, \Pi_n^2, \Pi_n^3, \Pi_n^4$, ($n = \frac{1}{2}, \frac{i}{2}, -\frac{i}{2}, \frac{j}{2}, -\frac{j}{2}, \frac{k}{2}, -\frac{k}{2}$) que son ortogonales a la frontera ideal y asintóticos al punto al infinito ∞ , respectivamente. Estos subespacios son hiperplanos hiperbólicos de codimensión 1 en sus dimensiones correspondientes que son geodésicamente completos.

El polígono hiperbólico \mathcal{P}^2 es un triángulo con un vértice ideal y dos reales, una arista compacta que es un segmento \mathcal{C}^1 y dos aristas no compactas que son rectas que unen el punto al infinito ∞ con alguno de los dos vértices finales de la arista compacta \mathcal{C}^1 .

El poliedro hiperbólico \mathcal{P}^3 tiene 4 vértices y 5 caras 2-dimensionales: una cara compacta que es el cuadrado \mathcal{C}^2 y 4 caras no compactas que son triángulos ideales con un vértice en el punto al infinito y cuyas bases son los cuatro aristas del cuadrado \mathcal{C}^2 . Más aún, \mathcal{P}^3 tiene 8 aristas (4 compactas y 4 aristas asintóticas al punto al infinito ∞).

El polítopo hiperbólico \mathcal{P}^4 tiene 8 vértices y 7 caras 3-dimensionales: una cara compacta que es el cubo \mathcal{C}^3 y seis caras no compactas que son pirámides cuyo ápice es el punto al infinito y cuyas bases son los seis cuadrados del cubo \mathcal{C}^3 . Más aún, \mathcal{P}^4 tiene veinte caras 2-dimensionales (6 cuadrados compactos y 14 triángulos con un vértice ideal) y veinte aristas (12 compactas y 8 aristas asintóticas al punto al infinito ∞).

El polítopo hiperbólico \mathcal{P}^5 tiene 17 vértices ideales y nueve caras no compactas 4-dimensionales: una cara que es el hipercubo \mathcal{C}^4 cuyos 16 vértices son ideales y ocho caras que son pirámides cuyo ápice es el punto al infinito ∞ y cuyas bases son los seis cubos ideales del hipercubo \mathcal{C}^4 . Más aún, \mathcal{P}^5 tiene veinte caras 2-dimensionales (6 cuadrados compactos y 14 triángulos con un vértice ideal) y veinte aristas (12 compactas y 8 aristas asintóticas al punto al infinito ∞).

Proposición IV.1. *La característica de Euler de los polítopos \mathcal{P}^n , $n = 2, 3, 4, 5$, es 0:*

- $\chi(\mathcal{P}^2) = c_0 - c_1 + c_2 = 2 - 3 + 1 = 0.$
- $\chi(\mathcal{P}^3) = c_0 - c_1 + c_2 - c_3 = 4 - 8 + 5 - 1 = 0.$
- $\chi(\mathcal{P}^4) = c_0 - c_1 + c_2 - c_3 + c_4 = 8 - 20 + 18 - 7 + 1 = 0.$
- $\chi(\mathcal{P}^5) = c_0 - c_1 + c_2 - c_3 + c_4 - c_5 = 0 - 48 + 56 - 9 + 1 = 0.$

Los 4 polítopos convexos \mathcal{P}^n , $n = 2, 3, 4, 5$, satisfacen las condiciones del teorema del poliedro de Poincaré, entonces el grupo generado por las reflexiones en los planos que pasan por las caras de \mathcal{P}^n es un grupo discreto de las isometrías hiperbólicas de $\mathbf{H}_{\mathbb{R}}^n$ que se denota por $G(n)$. El subgrupo de índice dos que se denota por $G(n)_+$ generado por la composición de un número par de reflexiones tiene como un dominio fundamental el polítopo convexo $\mathcal{P}^n \cup T(\mathcal{P})^n$. El grupo $G(n)_+$ es un subgrupo de $PSL(2, \mathbb{Z})$, $PSL(2, \mathbb{C}(\mathbb{Z}))$, $PSL(2, \mathfrak{L})$ y $PSL(2, \mathbb{H}(\mathbb{Z}))$ para $n = 2, 3, 4$ ó 5 , respectivamente, que consiste de isometrías que preservan la orientación de $\mathbf{H}_{\mathbb{R}}^n$.

Más adelante se demostrará que \mathcal{P}^2 es el dominio fundamental de la acción de $PSL(2, \mathbb{Z})$ en $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^1$. El poliedro \mathcal{P}^3 puede ser teselado por 2 copias del dominio fundamental de la acción de $PSL(2, \mathbb{C}(\mathbb{Z}))$ en $\mathbf{H}_{\mathbb{R}}^3$. El polítopo \mathcal{P}^4 puede ser teselado por 4 copias del dominio fundamental de la acción de $PSL(2, \mathfrak{L})$ y por 12 copias del dominio fundamental de la acción de $PSL(2, \mathfrak{H})$. El polítopo \mathcal{P}^5 puede ser teselado por 8 copias del dominio fundamental de la acción de $PSL(2, \mathbb{H}(\mathbb{Z}))$ y por 24 copias del dominio fundamental de la acción de $PSL(2, \mathbb{H}ur(\mathbb{Z}))$.

Los espacios cociente $\mathbf{H}_{\mathbb{R}}^n/G(n)$ son orbidades no orientables que son *buenas* en el sentido de Thurston (justo por definición como espacios cocientes). Más aún, la orbidad $\mathbf{H}_{\mathbb{R}}^n/G(n)$ es un kaleidoscopio de dimensión n . Como los polítopos \mathcal{P}^n son de volumen finito, las orbidades no orientables obtenidas son finitas y tienen estos mismos volúmenes. Imagine que se encuentra en el interior de $\mathbf{H}_{\mathbb{R}}^n/G(n)$,

para $n = 2, 3, 4$ ó 5 , entonces lo que usted ve son imágenes n -dimensionales muy similares a las teselaciones 3-dimensionales de Roice Nelson que se exhiben en las figuras 9 y 10.

La orbidad orientable $\mathbf{H}_{\mathbb{R}}^n/G(n)_+$ se obtiene de la doble pirámide $\mathcal{P}^n \cup T(\mathcal{P}^n)$ mediante identificar en pares las caras con un vértice ideal en el punto al infinito con las caras con un vértice ideal en el 0. Estas caras $(n - 1)$ -dimensionales se intersectan en las caras cuadradas del segmento, el cuadrado, el cubo ó el hipercubo $\mathcal{C}^{n-1} \subset \Pi^{n-1}$ y se identifican en pares mediante la acción de una rotación de ángulo $2\pi/3$ alrededor de los 2 vértices, las 4 aristas, los 6 planos, los 8 hiperplanos hiperbólicos que contienen a las caras de \mathcal{C}^{n-1} .

Esta orbidad es un kaleidoscopio n -dimensional para $n = 2, 3, 4$ ó 5 , respectivamente. El espacio base de esta orbidad es \mathbb{R}^n y el locus singular es el $(n - 2)$ -esqueleto del hipercubo \mathcal{C}^{n-1} unido al producto del $(n - 3)$ -esqueleto por \mathbb{R} .

§ 2.1. Orbidades orientables malas.

Considere las orbidades orientables $\mathcal{O}_{K^1}^2, \mathcal{O}_{K^2}^3, \mathcal{O}_{K^3}^4, \mathcal{O}_{K^4}^5$ obtenidas mediante identificar en pares las caras paralelas de \mathcal{P}^n con un vértice al infinito por las translaciones correspondientes $\tau_{\mathbf{i}}, \tau_{\mathbf{j}}$ y $\tau_{\mathbf{k}}$, y los puntos diametralmente opuestos del hipercubo \mathcal{C}^n mediante la inversión T . Estas orbidades tienen dimensión real n .

La orbidad $\mathcal{O}_{K^1}^2$ es exactamente la orbidad modular clásica. Pero si $n \neq 2$ las orbidades $\mathcal{O}_{K^{(n-1)}}^n$ son orbidades *malas* en el sentido de Thurston; esto es, no admiten una representación Klein-Clifford, esto es no existe un grupo G que actúe en un espacio X tal que ellas sean isométricas con el cociente de la acción X/G .

Sin embargo, las orbidades $\mathcal{O}_{K^{(n-1)}}^n$ son muy interesantes pues tienen como locus singular y retracto por deformación a las orbidades reales $(n - 1)$ -dimensionales de Kummer $K^{(n-1)}$.

Proposición IV.2. *Las orbidades $\mathcal{O}_{K^{(n-1)}}^n$ para $n = 2, 3, 4$ ó 5 , tienen las siguientes propiedades:*

1. La orbidad $\mathcal{O}_{K^{(n-1)}}^n$ tiene una sola cúspide al infinito.
2. La orbidad $\mathcal{O}_{K^{(n-1)}}^n$ tiene volumen finito.
3. la transformación $F : \mathcal{O}_{K^{(n-1)}}^n \times [0, 1] \rightarrow \mathcal{O}_{K^{(n-1)}}^n \times [0, 1]$ dada por $F([z_1, z_2, z_3], t), s) = ([z_1, z_2, z_3], t), (1 - s)t)$ está bien definida y es un retracto fuerte por deformación de $\mathcal{O}_{K^{(n-1)}}^n$ a la variedad real de Kummer $K^{(n-1)}$.
4. $\mathcal{O}_{K^{(n-1)}}^n - \{[z_1, z_2, z_3, 0] \in \mathcal{O}_{K^{(n-1)}}^n\} = \mathbf{T}^{(n-1)} \times (0, 1)$.
5. La orbidad $\mathcal{O}_{K^{(n-1)}}^n$ es simplemente conexa.
6. Los grupos de homología de $\mathcal{O}_{K^{(n-1)}}^n$ son:
 - $H_0(\mathcal{O}_{K^1}^2) = \mathbb{Z}, H_1(\mathcal{O}_{K^1}^2) = 0, H_2(\mathcal{O}_{K^1}^2) = 0.$
 - $H_0(\mathcal{O}_{K^2}^3) = \mathbb{Z}, H_1(\mathcal{O}_{K^2}^3) = 0,$
 $H_2(\mathcal{O}_{K^2}^3) = \mathbb{Z}^3 \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, H_3(\mathcal{O}_{K^2}^3) = 0.$
 - $H_0(\mathcal{O}_{K^3}^4) = \mathbb{Z}, H_1(\mathcal{O}_{K^3}^4) = 0,$
 $H_2(\mathcal{O}_{K^3}^4) = \mathbb{Z}^3 \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, H_3(\mathcal{O}_{K^3}^4) = H_4(\mathcal{O}_{K^3}^4) = 0.$
 - $H_0(\mathcal{O}_{K^4}^5) = \mathbb{Z}, H_1(\mathcal{O}_{K^4}^5) = 0, H_2(\mathcal{O}_{K^4}^5) = \mathbb{Z}^3 \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z},$
 $H_3(\mathcal{O}_{K^4}^5) = H_4(\mathcal{O}_{K^4}^5) = H_5(\mathcal{O}_{K^4}^5) = 0.$

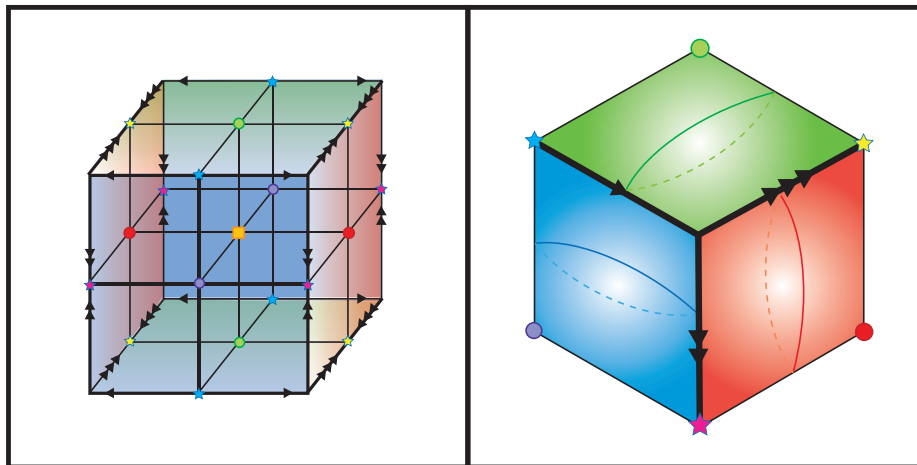


Figura 4.2. La frontera del cubo hiperbólico \mathcal{C}^3 con las identificaciones por la acción de la inversión T y de las traslaciones $\tau_{\mathbf{i}}$, $\tau_{\mathbf{j}}$ y $\tau_{\mathbf{k}}$ es una orbifold hiperbólica 3-dimensional de Kummer. La figura de la derecha es su locus singular: un ramo de tres copias de 2-esferas \mathbb{S}^2 (“almohadas”) pegadas a un trípode.

Demostración. El volume de $\mathcal{O}_{K^{(n-1)}}^n$ es una función racional de π por un teorema de Coxeter calculado explícitamente en [65]. Más aún, como un espacio topológico, $\mathcal{O}_{K^{(n-1)}}^n$ es homeomorfo a $\mathbf{T}^{(n-1)} \times [0, 1)/\mathfrak{t}$, donde

$$\mathbf{T}^{(n-1)} = \{(z_1, \dots, z_{(n-1)}) \in \mathbb{C}^{(n-1)} \mid |z_1| = \dots = |z_{(n-1)}| = 1\}$$

y $\mathfrak{t}((z_1, \dots, z_{(n-1)}), 0) = (\overline{z_1}, \dots, \overline{z_{(n-1)}}), 0$ tal que los correspondientes grupos de homología de $\mathcal{O}_{K^{(n-1)}}^n$ y de $K^{(n-1)}$ son isomorfos, i.e. $H_p(K^{(n-1)}) = H_j(\mathcal{O}_{K^{(n-1)}}^n)$ donde $p = 0, 1, 2, 3, 4, 5$. En particular, la orbifold de Kummer $K_{(n-1)}$ puede ser triangulada como una pseudovarietad compacta y no orientable. Por lo tanto, es claro que $H_0(\mathcal{O}_{K^3}) = \mathbb{Z}$, $H_3(\mathcal{O}_{K^3}) = 0$ y $H_4(\mathcal{O}_{K^3}) = 0$. Por otro lado, la orbifold K^{n-1} puede ser obtenida como un cociente del cubo

$$\mathcal{C}^n := \underbrace{[-1/2, 1/2] \times \dots \times [-1/2, 1/2]}_{(n-1)\text{-veces}}$$

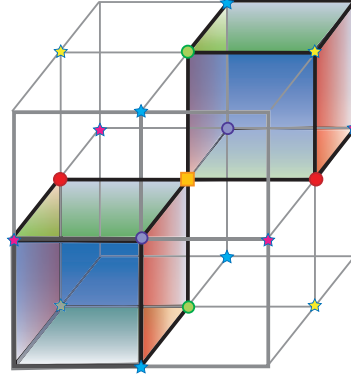
mediante identificar caras opuestas por traslaciones e identificar los puntos simétricos con respecto al origen, que es el baricentro del cubo \mathcal{C}^n . Esto es, las acciones de las traslaciones $\tau_{\mathbf{u}}$ y de T , respectivamente.

Después de esta identificación, la frontera del cubo \mathcal{C}^3 tiene el mismo tipo de homotopía de un ramo de tres copias de S^2 . La esfera redonda de \mathbb{R}^3 centrada en el origen y de radio $1/4$ realiza el cono A sobre el plano proyectivo real $\mathbf{P}_{\mathbb{R}}^2$. Sea B el complemento en K_3 del interior de A . Se puede retractar radialmente B a la frontera del cubo con las identificaciones. Observe que $A \cap B = \mathbf{P}_{\mathbb{R}}^2$. Entonces $K_3 = A \cup B$ con A contraíble y B homotópicamente equivalente a un ramo de tres 2-esferas. Se sigue del celebrado teorema de Seifert–Van Kampen que K_3 es simplemente conexo. Finalmente de la secuencia de Mayers–Vietoris:

$$\longrightarrow H_3(K_3) \longrightarrow H_2(A \cap B) \longrightarrow H_2(A) \oplus H_2(B) \longrightarrow H_2(K_3) \longrightarrow H_1(A \cap B) \longrightarrow 0;$$

Se tiene que:

$$H_2(A \cap B) = H_2(\mathbf{P}_{\mathbb{R}}^2) = 0,$$



$$H_1(A \cap B) = H_1(\mathbf{P}_{\mathbb{R}}^2) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z},$$

$$H_2(A) \oplus H_2(B) = H_2(B) = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z},$$

por lo que se obtiene la secuencia exacta

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \longrightarrow H_2(K_3) \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

Se concluye por lo tanto que $H_2(\mathcal{O}_{K^3}) = \mathbb{Z}^3 \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Finalmente, si removemos la variedad de Kummer K_3 se obtiene la estructura de la cúspide al infinito: El producto de un 3-toro por una semirecta $[0, \infty)$. ■

§ 3. Un lema sobre cocompacidad.

La siguiente proposición implica que las acciones de los grupos modulares que estamos considerando son cocompactas; esto es, que los dominios fundamentales (y por consiguiente las orbidades) son de volumen finito.

Lema. Sea $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in PSL(2, \mathbb{H})$ un elemento que satisface las condiciones (BG). Si $\mathbf{q} \in \mathbf{H}_{\mathbb{H}}^1$, entonces

$$\Re(\gamma(\mathbf{q})) = \frac{\Re(\mathbf{q})}{|\mathbf{q}c + d|^2} \quad (\text{IV.1})$$

Demostración. La acción de γ en un punto $\mathbf{q} \in \mathbf{H}_{\mathbb{H}}^1$ está determinada explícitamente por la regla

$$\begin{aligned} \gamma(\mathbf{q}) &= (a\mathbf{q} + b)(c\mathbf{q} + d)^{-1} \\ &= (a\mathbf{q} + b)(\overline{\mathbf{q}c} + \overline{d}) \left(\frac{1}{|\mathbf{q}c + d|^2} \right). \end{aligned}$$

Entonces, dado que para todo $\mathbf{p} \in \mathbb{H}$, $\Re(\mathbf{p}) = \frac{\mathbf{p} + \overline{\mathbf{p}}}{2}$ se tiene que :

$$\begin{aligned} \Re(\gamma(\mathbf{q})) &= \frac{(a\mathbf{q} + b)(\overline{\mathbf{q}c} + \overline{d}) + (c\mathbf{q} + d)(\overline{\mathbf{q}a} + \overline{b})}{2|\mathbf{q}c + d|^2} \\ &= \frac{|\mathbf{q}|^2 a\overline{c} + a\mathbf{q}\overline{d} + b\overline{\mathbf{q}c} + b\overline{d} + |\mathbf{q}|^2 c\overline{a} + c\mathbf{q}\overline{b} + d\overline{\mathbf{q}a} + d\overline{b}}{2|\mathbf{q}c + d|^2} \\ &= \frac{\Re(b\overline{\mathbf{q}c} + a\mathbf{q}\overline{d})}{|\mathbf{q}c + d|^2}. \end{aligned}$$

Sea $\mathbf{q} = x + yI$, donde $x > 0$, $y \in \mathbb{R}$ y $I^2 = -1$. Entonces $\bar{\mathbf{q}} = x - yI$ y

$$\begin{aligned} \Re(\gamma(\mathbf{q})) &= \frac{\Re(b(x - yI)\bar{c} + a(x + yI)\bar{d})}{|\mathbf{q}c + d|^2} \\ &= \frac{\Re(xb\bar{c} - ybI\bar{c} + xa\bar{d} + yaI\bar{d})}{|\mathbf{q}c + d|^2} \\ &= \frac{x + \Re(-ybI\bar{c} + yaI\bar{d})}{|\mathbf{q}c + d|^2} \\ &= \frac{x - ybI\bar{c} + ycI\bar{b} + yaI\bar{d} - ydI\bar{a}}{|\mathbf{q}c + d|^2} \\ &= \frac{x + y(-bI\bar{c} + cI\bar{b} + aI\bar{d} - dI\bar{a})}{|\mathbf{q}c + d|^2} \end{aligned}$$

Por otro lado, $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in PSL(2, \mathbb{H})$ y $\begin{pmatrix} 1 & I \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in PSL(2, \mathbb{H})$ satisfacen ambas las condiciones (BG), entonces

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & I \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & aI + b \\ c & cI + d \end{pmatrix} \in PSL(2, \mathbb{H})$$

y satisface las condiciones (BG). Estas condiciones implican que

$$(aI + b)(-I\bar{c} + \bar{d}) + (cI + d)(-I\bar{a} + \bar{b}) = 0,$$

Entonces

$$-aI^2\bar{c} + aI\bar{d} - bI\bar{c} + b\bar{d} - cI^2\bar{a} + cI\bar{b} - dI\bar{a} + d\bar{b} = 0.$$

Usando nuevamente las condiciones (BG) se tiene

$$aI\bar{d} - dI\bar{a} + cI\bar{b} - bI\bar{c} = 0.$$

Finalmente, se tiene

$$\Re(\gamma(\mathbf{q})) = \frac{t}{|\mathbf{q}c + d|^2} = \frac{\Re(\mathbf{q})}{|\mathbf{q}c + d|^2}.$$

■

Observación IV.1. Si se restringen las entradas en \mathbb{H} de las matrices en $PSL(2, \mathbb{H})$ al conjunto de enteros, de los enteros de Gauss, de los enteros de Lipschitz $\mathbb{H}(\mathbb{Z})$ y de los enteros de Hurwitz $\mathbb{H}ur(\mathbb{Z})$, entonces sólo hay un número finito de posibilidades c y d para los enteros y los enteros de Gauss, de Lipschitz y de Hurwitz respectivamente, de manera que $|\mathbf{q}c + d|$ sea menor que un número real dado, por lo tanto se tiene el siguiente corolario

Corolario IV.1. Para cualquier $\mathbf{q} \in \mathbb{H}$ se tiene

$$\sup_{\gamma \in PSL(2, \mathbb{X})} \Re(\gamma(\mathbf{q})) < \infty$$

donde $\mathbb{X} = \mathbb{Z}, \mathbb{C}(\mathbb{Z}), \mathfrak{L}, \mathfrak{H}, \mathbb{H}(\mathbb{Z}), \mathbb{H}ur(\mathbb{Z})$.

Este corolario es una condición necesaria para que las orbidades $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^1/PSL(2, \mathbb{Z})$ de dimensión 2, $\mathbf{H}_{\mathbb{R}}^3/PSL(2, \mathbb{C}(\mathbb{Z}))$ de dimensión 3, $\mathbf{H}_{\mathbb{H}}^1/PSL(2, \mathfrak{L})$ y $\mathbf{H}_{\mathbb{H}}^1/PSL(2, \mathfrak{H})$ de dimensión 4 y $\mathbf{H}_{\mathbb{R}}^5/PSL(2, \mathbb{H}(\mathbb{Z}))$ y $\mathbf{H}_{\mathbb{R}}^5/PSL(2, \mathbb{H}ur)$ de dimensión 5 tengan volumen finito.

§ 4. Dominios fundamentales y orbidades para las traslaciones y la inversión.

Tomando en cuenta las acciones de los generadores y el grupo afín. Se describe el dominio fundamental de los grupos modulares.

Traslaciones.

Un dominio fundamental de la acción en $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^1$ del grupo parabólico $\mathcal{T}_{\mathbb{Z}}$ generado por la traslación τ_j es la banda hiperbólica convexa de área infinita que es asintótica al punto al infinito. Esta banda se obtiene por la intersección de los hemiplanos que contienen 2 y que son determinados por las dos geodésicas hiperbólicas $\Pi_{\frac{j}{2}}^1$ y $\Pi_{-\frac{j}{2}}^1$.

Un dominio fundamental de la acción en $\mathbf{H}_{\mathbb{R}}^3$ del grupo parabólico $\mathcal{T}_{\mathbb{C}(\mathbb{Z})}$ generado por las dos traslaciones τ_j y τ_k , es la chimenea hiperbólica convexa de volumen infinito con un vértice al infinito. Esta chimenea se obtiene por la intersección de los hemi-espacios que contienen 2 y que son determinados por el conjunto de los hiperplanos hiperbólicos 2-dimensionales Π_n^2 , donde $n = \frac{j}{2}, -\frac{j}{2}, \frac{k}{2}, -\frac{k}{2}$.

Un dominio fundamental de la acción en $\mathbf{H}_{\mathbb{H}}^1$ del grupo parabólico $\mathcal{T}_{\mathbb{S}^3(\mathbb{Z})}$ generado por las traslaciones τ_i, τ_j y τ_k , es la chimenea hiperbólica convexa de volumen infinito con un vértice al infinito. Esta chimenea se obtiene por la intersección de los hemi-espacios que contienen 2 y que son determinados por el conjunto de los hiperplanos hiperbólicos 3-dimensionales Π_n^3 , donde $n = \frac{i}{2}, -\frac{i}{2}, \frac{j}{2}, -\frac{j}{2}, \frac{k}{2}, -\frac{k}{2}$.

Un dominio fundamental de la acción en $\mathbf{H}_{\mathbb{R}}^5$ del grupo parabólico $\mathcal{T}_{\mathbb{H}(\mathbb{Z})}$ generado por las traslaciones τ_1, τ_i, τ_j y τ_k , es la chimenea hiperbólica convexa de volumen infinito con un vértice en el punto al infinito. Esta chimenea se obtiene por la intersección de los hemi-espacios que contienen $((0,0,0,0), 2)$ y que son determinados por el conjunto de los hiperplanos hiperbólicos 4-dimensionales Π_n^4 , donde $n = 1, -1, \frac{i}{2}, -\frac{i}{2}, \frac{j}{2}, -\frac{j}{2}, \frac{k}{2}, -\frac{k}{2}$.

La orbidad hiperbólica 2-dimensional $\mathcal{O}_{\mathcal{T}_{\mathbb{Z}}}$ generada por la acción de $\mathcal{T}_{\mathbb{Z}}$ es un cilindro circular de área infinita. Tiene una cúspide (una punta de área finita) y un tubo (una punta de área infinita). Topológicamente la orbidad $\mathcal{O}_{\mathcal{T}_{\mathbb{Z}}}$ es homeomorfa a $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$.

La orbidad hiperbólica 3-dimensional $\mathcal{O}_{\mathcal{T}_{\mathbb{C}(\mathbb{Z})}}$ generada por la acción de $\mathcal{T}_{\mathbb{C}(\mathbb{Z})}$ es un cilindro de volumen infinito sobre el 2-toro. Tiene una cúspide (una punta de volumen finito) y un tubo (una punta de volumen infinito). Topológicamente la orbidad $\mathcal{O}_{\mathcal{T}_{\mathbb{C}(\mathbb{Z})}}$ es homeomorfa a $\mathbf{T}^2 \times \mathbb{R}$.

La orbidad hiperbólica 4-dimensional $\mathcal{O}_{\mathcal{T}_{\mathbb{S}^3(\mathbb{Z})}}$ generada por la acción de $\mathcal{T}_{\mathbb{S}^3(\mathbb{Z})}$ es un cilindro de volumen infinito sobre el 3-toro. Tiene una cúspide (una punta de volumen finito) y un tubo (una punta de volumen infinito). Topológicamente la orbidad $\mathcal{O}_{\mathcal{T}_{\mathbb{S}^3(\mathbb{Z})}}$ es homeomorfa a $\mathbf{T}^3 \times \mathbb{R}$.

Finalmente la orbidad hiperbólica 5-dimensional $\mathcal{O}_{\mathcal{T}_{\mathbb{H}(\mathbb{Z})}}$ generada por la acción de $\mathcal{T}_{\mathbb{H}(\mathbb{Z})}$ es un cilindro de volumen infinito sobre el 4-toro. Tiene una cúspide (una punta de volumen finito) y un tubo (una punta de volumen infinito). Topológicamente la orbidad $\mathcal{O}_{\mathcal{T}_{\mathbb{H}(\mathbb{Z})}}$ es homeomorfa a $\mathbf{T}^4 \times \mathbb{R}$.

Inversión.

Un dominio fundamental de la acción en $\mathbf{H}_{\mathbb{R}}^n$ de la inversión T es un hemi-espacio cuya frontera es el hiperplano hiperbólico

$$\Pi^{(n-1)} = \{\mathbf{q} \in \mathbf{H}_{\mathbb{R}}^n \mid |\mathbf{q}| = 1\}.$$

La orbidad 2-dimensional \mathcal{O}_T^2 tiene un sólo punto singular y es homeomorfo a un cono de ángulo cónico π .

La orbidad 3-dimensional \mathcal{O}_T^3 tiene un sólo punto singular y es homeomorfo al cono sobre el plano proyectivo real $\mathbf{P}_{\mathbb{R}}^2$.

La orbidad 4-dimensional \mathcal{O}_T^4 tiene un sólo punto singular y es homeomorfo al cono sobre el espacio proyectivo real $\mathbf{P}_{\mathbb{R}}^3$.

La orbidad 5-dimensional \mathcal{O}_T^5 tiene un sólo punto singular y es homeomorfo al cono sobre el espacio proyectivo real $\mathbf{P}_{\mathbb{R}}^4$.

§ 5. Un dominio fundamental de $PSL(2, \mathfrak{L})$

El grupo modular caterniónico de Lipschitz $PSL(2, \mathfrak{L})$ es generado por $\mathcal{T}_{\mathfrak{S}\mathbb{H}(\mathbb{Z})}$ y la inversión T . Entonces es posible elegir un dominio fundamental $\mathcal{P}_{\mathfrak{L}}^4$ que esté contenido en un conjunto convexo hiperbólico acotado por el hemisferio Π^3 y los seis hiperplanos que son ortogonales a la frontera ideal y pasan por el punto al infinito los cuales se han denotado por Π_n^3 donde $n = \frac{\mathbf{i}}{2}, -\frac{\mathbf{i}}{2}, \frac{\mathbf{j}}{2}, -\frac{\mathbf{j}}{2}, \frac{\mathbf{k}}{2}, -\frac{\mathbf{k}}{2}$. Esto es, es posible elegir un dominio fundamental $\mathcal{P}_{\mathfrak{L}}^4$ que esté contenido en \mathcal{P}^4 . Entonces el politopo $\mathcal{P}_{\mathfrak{L}}^4$ puede realizarse como un subconjunto del politopo construido por un cubo 3-dimensional \mathcal{C}^3 en el hemisferio Π^3 unido a una pirámide cúbica cuyo ápice es un vértice ideal que es el punto al infinito ∞ en el modelo hiperbólico $\mathbf{H}_{\mathbb{H}}^1$. Los vértices de \mathcal{C}^3 son los ocho puntos $(1/2, \pm 1/2, \pm 1/2, \pm 1/2)$.

§ 5.1. El grupo unitario.

El grupo unitario $\mathcal{U}(\mathfrak{L})$ es un subgrupo finito del grupo afín $\mathcal{A}(\mathfrak{L})$. La acción de $\mathcal{U}(\mathfrak{L})$ es por medio de rotaciones de ángulo π alrededor de los 3 ejes \mathbf{i}, \mathbf{j} y \mathbf{k} . Se divide por los planos coordinados el cubo \mathcal{C} en ocho cubos congruentes y la pirámide cúbica \mathcal{P}^4 en ocho pirámides cúbicas congruentes. Como en un tablero de ajedrez se etiquetan los cubos con dos símbolos, esto es, se colorean los cubos con dos colores: por ejemplo blanco y negro.

La acción de un elemento de la forma $\begin{pmatrix} \mathbf{u} & 0 \\ 0 & \mathbf{u} \end{pmatrix}$ del grupo unitario $\mathcal{U}(\mathfrak{L})$, donde $\mathbf{u} = \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$; es una rotación alrededor del eje \mathbf{u} . Este elemento identifica cuatro cubos (dos cubos blancos y dos negros) con otros cuatro cubos (dos blancos y dos negros) en \mathcal{C}^3 preservando la coloración.

Ahora se dará una descripción geométrica de la acción del grupo unitario $\mathcal{U}(\mathfrak{L})$ mediante su representación en el 3-toro

$$\mathbf{T}^3 := \{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3 : |z_1| = |z_2| = |z_3| = 1\}.$$

Se describe la acción del grupo unitario mediante la representación específica de sus elementos como automorfismo de \mathbf{T}^3 .

La representación de

$$\begin{pmatrix} \mathbf{i} & 0 \\ 0 & \mathbf{i} \end{pmatrix} \in \mathcal{U}(\mathfrak{L}) \quad \text{como} \quad F_{\mathbf{i}}(z_1, z_2, z_3) = (\overline{z_1}, \overline{z_2}, z_3) \quad \text{y}$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{j} & 0 \\ 0 & \mathbf{j} \end{pmatrix} \in \mathcal{U}(\mathfrak{L}) \quad \text{como} \quad F_{\mathbf{j}}(z_1, z_2, z_3) = (z_1, \overline{z_2}, \overline{z_3}).$$

La composición de $\begin{pmatrix} \mathbf{i} & 0 \\ 0 & \mathbf{i} \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} \mathbf{j} & 0 \\ 0 & \mathbf{j} \end{pmatrix}$ es $\begin{pmatrix} \mathbf{k} & 0 \\ 0 & \mathbf{k} \end{pmatrix}$ que es representada por el automorfismo de \mathbf{T}^3 como

$$F_{\mathbf{k}}(z_1, z_2, z_3) = (\overline{z_1}, z_2, \overline{z_3}).$$

Este ejemplo es una breve introducción a la multiplicación compleja (como la definida en ciertas curvas elípticas) sobre el 3-toro real \mathbf{T}^3 . Las aplicaciones $F_{\mathbf{i}}, F_{\mathbf{j}}$ y $F_{\mathbf{k}}$ son automorfismos conformes del 3-toro por las simetrías del cubo \mathcal{C}^3 y forma un grupo de orden 4 isomorfo a $\mathcal{U}(\mathfrak{L}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

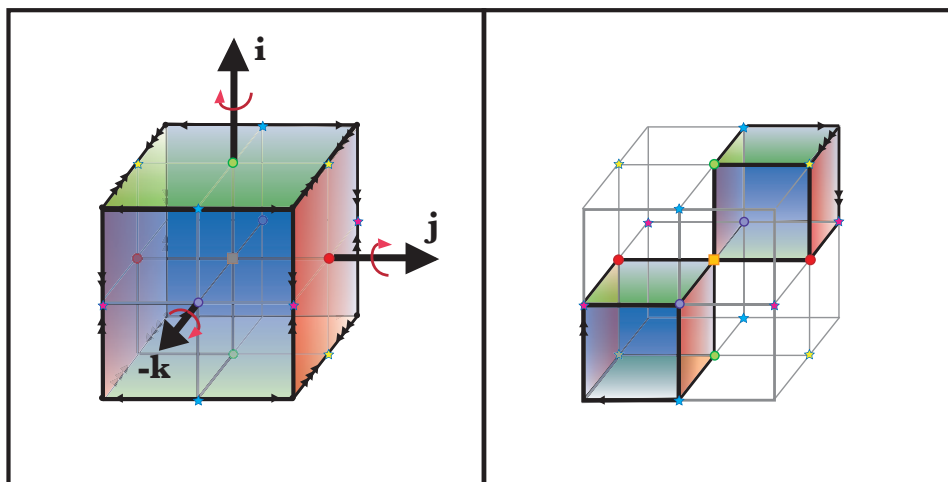


Figura 4.3. Izquierda: La acción de $U(\mathfrak{L})$ en el cubo \mathcal{C}^3 .

Derecha: Los dos cubos hiperbólicos \mathcal{C}_1^3 y \mathcal{C}_2^3 en el cubo \mathcal{C}^3 que forman la base de un dominio fundamental $\mathcal{P}_{\mathfrak{L}}^4$ de $PSL(2, \mathfrak{L})$.

Un dominio fundamental para el grupo de Lipschitz $PSL(2, \mathfrak{L})$.

El dominio fundamental $\mathcal{P}_{\mathfrak{L}}^4$ para la acción del grupo $PSL(2, \mathfrak{L})$ en $\mathbf{H}_{\mathbb{H}}^1$ es la unión de dos pirámides cúbicas cuyas bases son dos cubos, uno blanco y uno negro. Se pueden escoger cubos adyacentes para obtener un dominio fundamental conexo pero esto no es necesario para considerar un dominio fundamental. Más aún, la inversión T actúa identificando los cubos blancos con los cubos negros que son los respectivos cubos diametralmente opuestos en el hemisferio Π^3 . Entonces es posible escoger un dominio fundamental como la unión de dos pirámides cúbicas en \mathcal{P}^4 . Ver figura 4.3. Más adelante se describirán otros dominios fundamentales más adecuados para estudiar los subgrupos de isotropía y la teselación en $\mathbf{H}_{\mathbb{H}}^1$ alrededor de ciertos puntos singulares.

Definición IV.2. Sean \mathcal{C}_1^3 y \mathcal{C}_2^3 los dos cubos hiperbólicos en la división en 8 cubos de \mathcal{C}^3 por hiperplanos coordenados que contienen a los vértices $\frac{1}{2}(1+\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k})$ y $\frac{1}{2}(1-\mathbf{i}-\mathbf{j}-\mathbf{k})$, respectivamente. Sea $\mathcal{P}_{\mathfrak{L}}^4$ la unión de las dos pirámides cúbicas hiperbólicas cuyo ápice es un vértice ideal que es el punto al infinito ∞ y cuyas bases son los dos cubos \mathcal{C}_1^3 y \mathcal{C}_2^3 . Equivalentemente, los elementos en $\mathcal{P}_{\mathfrak{L}}^4$ son los puntos $\mathbf{q} = x_0 + x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j} + x_3\mathbf{k}$ en \mathcal{P}^4 tales que los números reales x_n tienen el mismo signo para todo $n = 1, 2, 3$.

Por lo tanto, el dominio fundamental $\mathcal{P}_{\mathfrak{L}}^4$ es un politopo convexo ideal de dimensión 4 y volumen hiperbólico finito. Su cúspide es cristalográfica, *i. e.* la sección de la cúspide es una 3-orbitad euclideana. Esta orbitad tiene un dominio fundamental formado por dos cubos cuyos lados son identificados por isometrías euclideanas. Más aún $\mathcal{P}_{\mathfrak{L}}^4$ es un politopo con 8 vértices y un vértice al infinito, veinte aristas 1-dimensionales, 18 caras 2-dimensionales, 7 caras 3-dimensionales y 2 caras maximales de dimensión 4 (el interior de los politopos que son pirámides cúbicas). Entonces la característica de Euler del dominio fundamental $\mathcal{P}_{\mathfrak{L}}^4$ es

$$\chi(\mathcal{P}_{\mathfrak{L}}^4) = 8 - 20 + 18 - 7 + 2 = 1.$$

§ 6. Un dominio fundamental para el grupo de Hurwitz $PSL(2, \mathfrak{H})$.

El análisis de un dominio fundamental $\mathcal{P}_{\mathfrak{H}}^4$ para el grupo modular de Hurwitz $PSL(2, \mathfrak{H})$ es análogo al realizado para el dominio fundamental de $PSL(2, \mathfrak{L})$. Se recuerda que $PSL(2, \mathfrak{H})$ es generado por

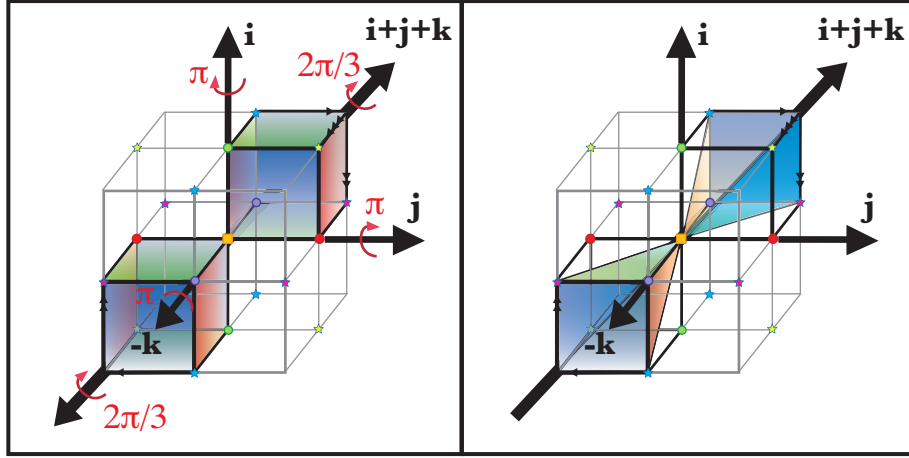


Figura 4.4. Izquierda: La acción de $U(\mathfrak{h})$ en el cubo \mathcal{C}^3 .

Derecha: las bases del dominio fundamental de $PSL(2, \mathfrak{h})$. Las dos pirámides hiperbólicas \mathcal{P}_1^3 y \mathcal{P}_2^3 en \mathcal{C}^3 que son las bases de un dominio fundamental $\mathcal{P}_{\mathfrak{h}}^4$ para $PSL(2, \mathfrak{h})$.

el grupo parabólico de traslaciones $\mathcal{T}_{\mathbb{H}(\mathbb{Z})}$, la inversión T y el grupo unitario de Hurwitz $\mathcal{U}(\mathfrak{h})$. De las descripciones previas acerca de los dominios fundamentales del grupo de traslaciones y del grupo de orden 2 generado por T se tiene que un dominio fundamental de $PSL(2, \mathfrak{h})$ es conmensurable con \mathcal{P}^4 , la pirámide sobre el cubo \mathcal{C}^3 . Más precisamente, \mathcal{P}^4 es invariante bajo $\mathcal{U}(\mathfrak{h})$ y por lo tanto el dominio fundamental de $PSL(2, \mathfrak{h})$ es el dominio fundamental en \mathcal{P}^4 de la acción de $\mathcal{U}(\mathfrak{h})$ sobre \mathcal{P}^4 . Más aún, como $\mathcal{U}(\mathfrak{L}) \subset \mathcal{U}(\mathfrak{h})$ se tiene que el dominio fundamental de $PSL(2, \mathfrak{h})$ es un subconjunto del dominio fundamental $\mathcal{P}_{\mathfrak{L}}^4$ de la acción de $PSL(2, \mathfrak{L})$. Finalmente, como $\mathcal{U}(\mathfrak{L})$ es un subgrupo de $\mathcal{U}(\mathfrak{h})$ de índice tres entonces $\mathcal{P}_{\mathfrak{h}}^4$ es una tercera parte de $\mathcal{P}_{\mathfrak{L}}^4$. Sea $\mathbf{u} \in \mathfrak{h}_{\mathbf{u}}$, entonces $D_{\mathbf{u}} \in \mathcal{U}(\mathfrak{h})$ es inducida por la matriz diagonal

$$D_{\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} \mathbf{u} & 0 \\ 0 & \mathbf{u} \end{pmatrix}$$

y actúa por conjugación: $\mathbf{q} \mapsto \mathbf{u}\mathbf{q}\mathbf{u}^{-1} = \mathbf{u}\mathbf{q}\bar{\mathbf{u}}$. Entonces si \mathbf{u} es una unidad de Hurwitz que no es una unidad de Lipschitz (*i.e.* $\mathbf{u} = \frac{1}{2}(\pm 1 \pm \mathbf{i} \pm \mathbf{j} \pm \mathbf{k})$) entonces la matriz $D_{\mathbf{u}}$ es de orden tres y geoméricamente es una rotación de ángulo $2\pi/3$ alrededor de la diagonal de \mathcal{C}^3 que contiene a \mathbf{u} ó $-\mathbf{u}$, pero solo uno tiene parte real positiva y entonces en $\mathbf{H}_{\mathbb{H}}^1$. Como $D_{\mathbf{u}} = D_{-\mathbf{u}}$ se puede suponer que $\Re(\mathbf{u}) = 1/2$. Se tiene $D_{\mathbf{u}}^2 = D_{\mathbf{u}^2} = D_{1-\mathbf{u}}$ (pues $\Re(\mathbf{u}) = 1/2 > 0$, $1-\mathbf{u}$ es una unidad de Hurwitz y $\Re(\mathbf{u}) = \Re(1-\mathbf{u}) > 0$).

El grupo de las unidades de Hurwitz $\mathcal{U}(\mathfrak{h})$ actúa transitivamente en las aristas de \mathcal{C}^3 . Entonces un dominio fundamental queda determinado por la elección de una arista de \mathcal{C}^3 . Por lo tanto un dominio fundamental convexo es la pirámide cuyo ápice es el vértice ideal al infinito ∞ con base el poliedro hiperbólico convexo con vértices los dos vértices de la arista, los dos baricentros de las caras cuadradas que tienen a la arista en común y 1.

Sin embargo, por su simetría se trabaja con un dominio fundamental no convexo.

Definición IV.3. Sean \mathcal{P}_1^3 y \mathcal{P}_2^3 las dos pirámides hiperbólicas 3-dimensionales con base cuadrada en $\mathcal{C}_1^3 \subset \mathcal{C}^3$ y $\mathcal{C}_2^3 \subset \mathcal{C}^3$, respectivamente, con ápice 1 y cuyas bases son los cuadrados en la frontera de \mathcal{C}^3 tales que sus vértices son los conjuntos

$$S := \{v_1 = \frac{1}{2}(1 + \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}), v_2 = \frac{1}{2}(\sqrt{2} + \mathbf{i} + \mathbf{k}), v_3 = \frac{1}{2}(\sqrt{2} + \mathbf{j} + \mathbf{k}), v_4 = \frac{1}{2}(\sqrt{3} + \mathbf{k})\}$$

y $T(S) := \{T(v_1), T(v_2), T(v_3), T(v_4)\}$, respectivamente.

Sea \mathcal{P}_5^4 la union de las dos pirámides hiperbólicas 4-dimensionales con ápice el vértice al infinito y bases las dos pirámides hiperbólicas 3-dimensionales \mathcal{P}_1^3 y \mathcal{P}_2^3 .

§ 7. Propiedades de los dominios fundamentales.

Ahora, siguiendo de cerca la demostración en el caso de $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^1$ dada por Serre en [58] (página 77), se demuestra que los politopos $\mathcal{P}_{\mathfrak{L}}^4$ y $\mathcal{P}_{\mathfrak{H}}^4$ satisfacen las propiedades que satisface un conjunto que es un dominio fundamental respecto a la acción de un grupo. Se pondrá énfasis en que los grupos a tratar son los grupos modulares cuaterniónicos $PSL(2, \mathfrak{L})$ y $PSL(2, \mathfrak{H})$.

Teorema IV.1. *Los politopos $\mathcal{P}_{\mathfrak{L}}^4$ y $\mathcal{P}_{\mathfrak{H}}^4$ son dominios fundamentales para las acciones de los grupos $PSL(2, \mathfrak{L})$ y $PSL(2, \mathfrak{H})$, respectivamente. Más aún, los dominios fundamentales $\mathcal{P}_{\mathfrak{L}}^4$ and $\mathcal{P}_{\mathfrak{H}}^4$ tienen las siguientes propiedades:*

1. Para cualquier $\mathbf{q} \in \mathbf{H}_{\mathbb{H}}^1$ existe $\gamma \in PSL(2, \mathfrak{L})$ (resp. $PSL(2, \mathfrak{H})$) tal que $\gamma(\mathbf{q}) \in \mathcal{P}_{\mathfrak{L}}^4$ (resp. $\mathcal{P}_{\mathfrak{H}}^4$).
2. Dos puntos \mathbf{q}, \mathbf{q}' de $\mathcal{P}_{\mathfrak{L}}^4$ (resp. $\mathcal{P}_{\mathfrak{H}}^4$) son congruentes módulo $PSL(2, \mathfrak{L})$ (resp. $PSL(2, \mathfrak{H})$) si existe $\gamma \in PSL(2, \mathfrak{L})$ (resp. $PSL(2, \mathfrak{H})$) tal que $\gamma(\mathbf{q}) = \mathbf{q}'$. Si dos puntos \mathbf{q}, \mathbf{q}' de $\mathcal{P}_{\mathfrak{L}}^4$ (resp. $\mathcal{P}_{\mathfrak{H}}^4$) son congruentes módulo $PSL(2, \mathfrak{L})$ (resp. $PSL(2, \mathfrak{H})$) entonces $\mathbf{q}, \mathbf{q}' \in \partial\mathcal{P}_{\mathfrak{L}}^4$ (resp. $\mathcal{P}_{\mathfrak{H}}^4$).
3. Si $|\mathbf{q}| > 1$ entonces $\gamma \in \mathcal{A}(\mathfrak{L})$ (resp. $\mathcal{A}(\mathfrak{H})$). Más aún, γ es una traslación por \mathbf{i}, \mathbf{j} ó \mathbf{k} o una composición de una de estas traslaciones con una rotación del grupo unitario $\mathcal{U}(\mathfrak{L})$ (resp. $\mathcal{U}(\mathfrak{H})$).
Si $|\mathbf{q}| = 1$ entonces $\gamma \in \mathcal{A}(\mathfrak{L})$ (resp. $\mathcal{A}(\mathfrak{H})$) o $\gamma = AT$ donde T es la inversión usual y $A \in \mathcal{A}(\mathfrak{L})$ (resp. $\mathcal{A}(\mathfrak{H})$).
4. Sea $\mathbf{q} \in \mathcal{P}_{\mathfrak{L}}^4$ (resp. $\mathcal{P}_{\mathfrak{H}}^4$) y $G_{\mathbf{q}} = \{g \in PSL(2, \mathfrak{L}) : g(\mathbf{q}) = \mathbf{q}\}$ (resp. $PSL(2, \mathfrak{H})$) el subgrupo estabilizador de \mathbf{q} en $PSL(2, \mathfrak{L})$ (resp. $PSL(2, \mathfrak{H})$). Entonces $G_{\mathbf{q}} = \{1\}$ si $\mathbf{q} \notin \partial\mathcal{P}_{\mathfrak{L}}^4$ (resp. $\partial\mathcal{P}_{\mathfrak{H}}^4$).

Demostración. Sea $\mathbf{q} \in \mathbf{H}_{\mathbb{H}}^1$. Por el corolario 6.2 existe $\gamma \in PSL(2, \mathfrak{L})$ (resp. $PSL(2, \mathfrak{H})$) tal que $\Re(\gamma(\mathbf{q}))$ es el número real máximo que se alcanza de esta forma. Existe $(n_1, n_2, n_3) \in \mathbb{Z}^3$ tal que el elemento $\mathbf{q}' = \tau_{\mathbf{i}}^{n_1} \tau_{\mathbf{j}}^{n_2} \tau_{\mathbf{k}}^{n_3} \gamma(\mathbf{q})$ es de la forma $\mathbf{q}' = x_0 + x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j} + x_3\mathbf{k}$ donde $|x_n| \leq \frac{1}{2}, n = 1, 2, 3$. El elemento \mathbf{q}' está en el dominio fundamental del grupo parabólico $\mathcal{T}_{\mathbb{S}\mathbb{H}(\mathbb{Z})}$.

Si $|\mathbf{q}'| < 1$, entonces el elemento $T\mathbf{q}' = (\mathbf{q}')^{-1}$ tiene una parte real estrictamente mayor que $\Re(\mathbf{q}') = \Re(\gamma(\mathbf{q}))$, lo que es una contradicción. Entonces $|\mathbf{q}'| \geq 1$, y $\mathbf{q}' \in \mathcal{P}_{\mathfrak{L}}^4$. Esto muestra que dado un elemento $\mathbf{q} \in \mathbf{H}_{\mathbb{H}}^1$ existe $\gamma \in PSL(2, \mathfrak{L})$ (resp. $PSL(2, \mathfrak{H})$) tal que $\gamma(\mathbf{q}) \in \mathcal{P}^4$.

Los elementos en $\mathcal{P}_{\mathfrak{L}}^4$ son los puntos $\mathbf{q} = x_0 + x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j} + x_3\mathbf{k}$ en \mathcal{P}^4 tales que los números reales x_n tienen el mismo signo para toda $n = 1, 2, 3$. La acción de un elemento $D_{\mathbf{u}}$, donde $\mathbf{u} = \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$, en el grupo unitario de Lipschitz $\mathcal{U}(\mathfrak{L})$ tiene la propiedad de dejar fijos a x_1 y x_n y cambiar los signos de los otros dos coeficientes.

La acción de un elemento $D_{\mathbf{u}}$, donde $\mathbf{u} = \frac{1}{2}(\pm 1 \pm \mathbf{i} \pm \mathbf{j} \pm \mathbf{k})$, en el grupo unitario de Hurwitz $\mathcal{U}(\mathfrak{H})$ tiene la propiedad de rotar en ángulos múltiplos de $2\pi/3$ las celdas de $\mathbf{Y}_{\mathfrak{H}}$ alrededor de la diagonal que pasa por \mathbf{u} y $-\mathbf{u}$ del cubo \mathcal{C}^3 .

Entonces es posible utilizar un elemento en $\mathcal{U}(\mathfrak{L})$ para tener un punto \mathbf{q}'' de la órbita de $\mathbf{q} \in \mathcal{P}_{\mathfrak{L}}^4$. En el caso de los enteros de Hurwitz se utiliza un elemento en $\mathcal{U}(\mathfrak{H})$ para tener un punto \mathbf{q}'' de la órbita de $\mathbf{q} \in \mathcal{P}_{\mathfrak{H}}^4$. Esto demuestra (1).

En otras palabras, la órbita de cualquier punto $\mathbf{q} \in \mathbf{H}_{\mathbb{H}}^1$ bajo la acción del grupo $PSL(2, \mathfrak{L})$ (resp. $PSL(2, \mathfrak{H})$) tiene un representante en $\mathcal{P}_{\mathfrak{L}}^4$ (resp. $\mathcal{P}_{\mathfrak{H}}^4$).

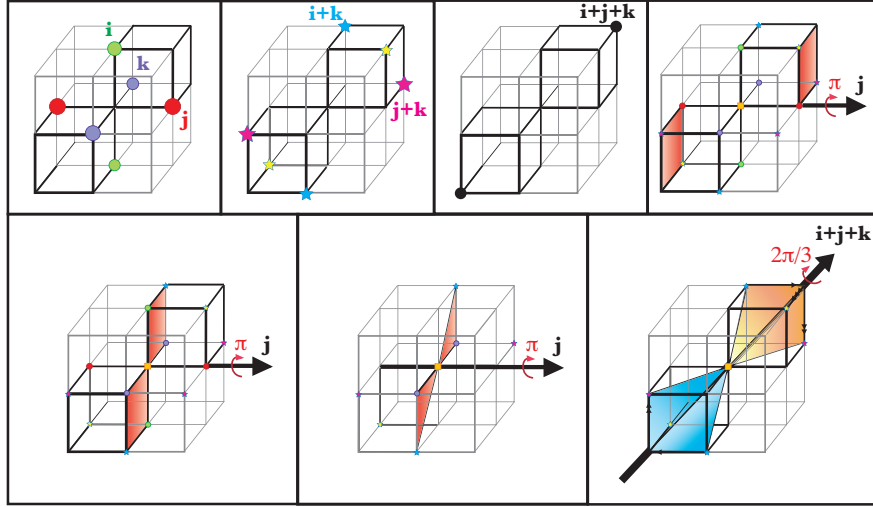


Figura 4.5. Puntos en \mathcal{C}^3 que son congruentes módulo $PSL(2, \mathfrak{L})$ y $PSL(2, \mathfrak{H})$. Línea superior: Puntos en \mathcal{C}^3 que son congruentes por traslaciones. A la derecha se muestra el caso de la composición de una traslación y la inversión T . Línea inferior: El caso de puntos en \mathcal{C}^3 congruentes mediante la acción de los grupos unitarios $\mathcal{U}(\mathfrak{L})$ y $\mathcal{U}(\mathfrak{H})$.

Sea $\mathbf{q} \in \mathcal{P}_{\mathfrak{L}}^4$ (resp. $\mathcal{P}_{\mathfrak{H}}^4$) y $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in PSL(2, \mathfrak{L})$ (resp. $PSL(2, \mathfrak{H})$) tales que $\gamma \neq \mathcal{I}$, donde \mathcal{I} es la matriz identidad en $PSL(2, \mathbb{H})$ y $\gamma(\mathbf{q}) \in \mathcal{P}_{\mathfrak{L}}^4$. Se supone que $\Re(\gamma(\mathbf{q})) \geq \Re(\mathbf{q})$, i.e. $|c\mathbf{q} + d| \leq 1$. Esto es claramente imposible si $|c| \geq 1$, dejando para estudiar sólo los casos $c = 0$ ó $|c| = 1$.

I) Si $c = 0$, se tiene que $|d| = 1$ y las condiciones BG implican que $\bar{a}d=1$ y $\bar{b}d + \bar{b}d = 0$. Se tienen dos casos:

I.1) Si $d = 1$, entonces $a = 1$ y $\Re(b) = 0$. Entonces

$$\gamma = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

donde $b = b_i \mathbf{i} + b_j \mathbf{j} + b_k \mathbf{k}$.

Si $\mathbf{q} = x_1 + x_i \mathbf{i} + x_j \mathbf{j} + x_k \mathbf{k} \in \mathcal{P}_{\mathfrak{L}}^4$ entonces

$$\gamma(\mathbf{q}) = \mathbf{q}' = x_1 + (x_i + b_i) \mathbf{i} + (x_j + b_j) \mathbf{j} + (x_k + b_k) \mathbf{k} \in \mathcal{P}_{\mathfrak{L}}^4.$$

I.1.1) Si $|b| = 1$ entonces $b = \pm \mathbf{i}, \pm \mathbf{j}, \pm \mathbf{k}$; y $\mathbf{q} = r - \frac{b}{2}$, donde $r \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$. Entonces \mathbf{q} está en la geodésica que une un baricentro de una cara cuadrada del cubo \mathcal{C}^3 en la base de \mathcal{P}^4 con el punto al infinito ∞ y por lo tanto $\mathbf{q}, \mathbf{q}' \in \partial \mathcal{P}_{\mathfrak{L}}^4$.

I.1.2) Si $|b| = 2$ entonces $b = \pm \mathbf{i} \pm \mathbf{j}, \pm \mathbf{i} \pm \mathbf{k}, \pm \mathbf{j} \pm \mathbf{k}$; y $\mathbf{q} = r - \frac{b}{2}$, donde $r \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$. Entonces \mathbf{q} está en la geodésica que une el punto medio de una arista del cubo \mathcal{C}^3 en la base de \mathcal{P}^4 con el punto al infinito ∞ y por lo tanto $\mathbf{q}, \mathbf{q}' \in \partial \mathcal{P}_{\mathfrak{L}}^4$.

I.1.2) Si $|b| = 3$ entonces $b = \pm \mathbf{i} \pm \mathbf{j} \pm \mathbf{k}$; y $\mathbf{q} = r - \frac{b}{2}$, donde $r \geq \frac{1}{2}$. Entonces \mathbf{q} está en la geodésica que une un vértice del cubo \mathcal{C}^3 en la base de \mathcal{P}^4 con el punto al infinito ∞ y por lo tanto $\mathbf{q}, \mathbf{q}' \in \partial \mathcal{P}_{\mathfrak{L}}^4$.

I.2) Si $d \neq 1$ entonces $d = a$ y $|a| = 1$. Se tienen dos subcasos:

I.2.1) Si $b = 0$ entonces

$$\gamma = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto \mathbf{q} está en el plano hiperbólico generado por 1 y a , además $\mathbf{q} \in \partial\mathcal{P}_{\mathfrak{L}}^4$.

I.2.2) If $b \neq 0$, entonces $\Re(b) = 0$, $|b| = 1$ por lo que $b = \pm\mathbf{i}, \pm\mathbf{j}, \pm\mathbf{k}$, pero $b \neq a$. Entonces

$$\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}.$$

Por lo que \mathbf{q} está en el plano hiperbólico generado por 1 y a , por lo que $\mathbf{q} \in \partial\mathcal{P}_{\mathfrak{L}}^4$.

II) Si $c \neq 0$, como $|\mathbf{q}| \geq 1$ entonces $d = 0$. Como $|c\mathbf{q}| \leq 1$ entonces $|c| = |\mathbf{q}| = 1$. Por lo tanto, $\mathbf{q} \in \partial\mathcal{P}_{\mathfrak{L}}^4$. Las condiciones BG implican que $\bar{b}c = 1$ y $a\bar{c} + \bar{a}c = 0$.

II.1) Si $c = 1$, entonces $b = 1$ y $\Re(a) = 0$. Entonces

$$\gamma = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

II.2) Si $c \neq 1$, entonces $c = \pm\mathbf{i}, \pm\mathbf{j}, \pm\mathbf{k}$ y $b = c$. Más aún $a = 0$ ó $|a| = 1$ y $\Re(a\bar{c}) = 0$. Entonces

$$\gamma = \begin{pmatrix} a & c \\ c & 0 \end{pmatrix}.$$

Para demostrar (3) suponga que $\mathbf{q} \in \text{Interior}(\mathcal{P}_{\mathfrak{L}})^4$. Sea $\gamma \in PSL(2, \mathfrak{L})$ (resp. $PSL(2, \mathfrak{L})$) $\gamma(\mathbf{q}) = \mathbf{q}$. Entonces existe $\epsilon > 0$ tal que $\mathbf{q} + \epsilon$ y $\gamma(\mathbf{q} + \epsilon) \in \text{Interior}(\mathcal{P}_{\mathfrak{L}}^4)$. Pero se deduce de (2) que $\mathbf{q} + \epsilon$ y $\gamma(\mathbf{q} + \epsilon)$ están en $\partial\mathcal{P}_{\mathfrak{L}}^4$ (resp. $\partial\mathcal{P}_{\mathfrak{J}}^4$) lo cual es una contradicción. Entonces el grupo de isotropía de los puntos en el interior del dominio fundamental $\mathcal{P}_{\mathfrak{L}}^4$ (resp. $\partial\mathcal{P}_{\mathfrak{J}}^4$) es trivial. ■

§ 7.1. Teselaciones modulares.

Si se usa el grupo $PSL(2, \mathfrak{L})$ para propagar $\mathcal{P}_{\mathfrak{L}}^4$ se obtiene una teselación de $\mathbf{H}_{\mathbb{H}}^1$ que se denota por $\mathbf{Y}_{\mathfrak{L}}$. La intersección de $\mathcal{P}_{\mathfrak{L}}^4$ y $\mathbf{Y}_{\mathfrak{L}}$ con cada uno de los planos totalmente geodésicos $S_{\mathbf{i}}^2, S_{\mathbf{j}}^2, S_{\mathbf{k}}^2$, donde

$$S_{\mathbf{u}}^2 := \{q = x_0 + x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j} + x_3\mathbf{k} \in \mathbf{H}_{\mathbb{H}}^1 \mid x_s = 0 \text{ si } s \neq \mathbf{u}, 0\},$$

donde $\mathbf{u} = \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$, da una copia de la cerradura del dominio fundamental clásico y la teselación generada por el grupo modular $PSL(2, \mathbb{Z})$ en el modelo del hemi-espacio de $\mathbf{H}_{\mathbb{R}}^2 = \mathbf{H}_{\mathbb{C}}^1$. Se hace notar que $S_{\mathbf{u}}^2$ es un conjunto *invariante* para $R_{\mathbf{u}}$ y $T_{\mathbf{u}}$ ($\mathbf{u} = \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$). Más aún, sea

$$S_{\mathbf{uv}}^3 := \{q = x_0 + x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j} + x_3\mathbf{k} \in \mathbf{H}_{\mathbb{H}}^1 \mid x_s = 0 \text{ si } s \neq \mathbf{u}, \mathbf{v}, 0\},$$

donde $\mathbf{u}, \mathbf{v} = \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$.

La intersección de $\mathcal{P}_{\mathfrak{L}}^4$ con cada uno de los subespacios 3-dimensionales geodésicos hiperbólicos $S_{\mathbf{ij}}^3, S_{\mathbf{jk}}^3, S_{\mathbf{ik}}^3$, da una copia de la cerradura del dominio fundamental de la acción del grupo de Picard $PSL(2, \mathbb{C}(\mathbb{Z}))$ para los enteros Gaussianos en el modelo del hemi-espacio de $\mathbf{H}_{\mathbb{R}}^3 = \mathbf{H}_{\mathbb{S}\mathbb{H}}^1$.

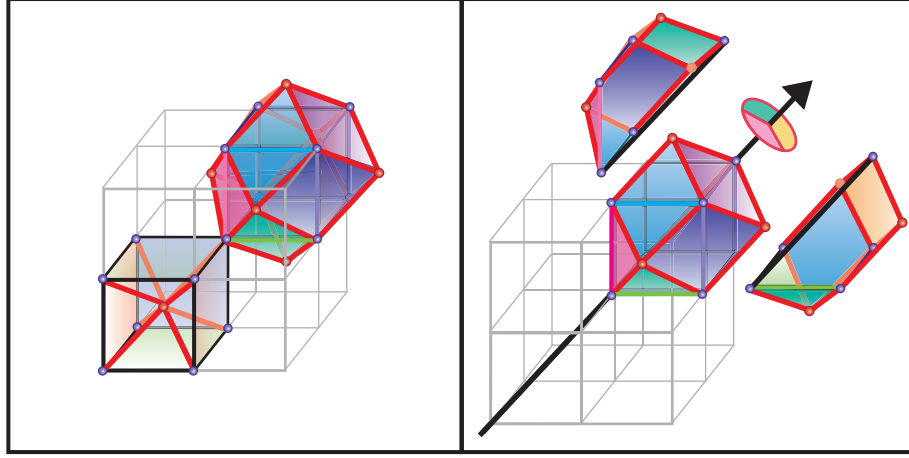


Figura 4.6. Un dominio fundamental $\mathcal{R}_{\mathcal{L}}^4$ para la acción del grupo $PSL(2, \mathcal{L})$ en $\mathbf{H}_{\mathbb{H}}^1$ es la pirámide sobre el dodecaedro rómbico \mathcal{R}^3 cuyo ápice es el punto al infinito. Un dominio fundamental $\mathcal{R}_{\mathcal{H}}^4$ para $PSL(2, \mathcal{H})$ es la pirámide sobre una tercera parte del dodecaedro rómbico \mathcal{R}^3 .

§ 8. Un dominio fundamental de $PSL(2, \mathcal{L})$ como un cono ideal sobre un dodecaedro rómbico hiperbólico.

Ahora se describe otro dominio fundamental del grupo modular que tiene que ver con un cono con ápice ideal sobre un dodecaedro rómbico hiperbólico el cual es convexo usando técnicas de “cortar y pegar”.

El dominio fundamental $\mathcal{P}_{\mathcal{L}}^4$ es la unión de dos pirámides ideales con vértice en el punto al infinito ∞ y cuyas bases son los dos cubos antipodales $\mathcal{C}_1^3 \subset \Pi^3$ y $\mathcal{C}_2^3 \subset \Pi^3$ de \mathcal{C}^3 . Por definición el cubo \mathcal{C}_1^3 contiene los vértices 1 y $v_1 = \frac{1}{2}(1 + \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$ y el cubo \mathcal{C}_2^3 contiene los vértices 1 y $v_1 = \frac{1}{2}(1 - \mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k})$. Ahora se divide uno de los cubos, por ejemplo \mathcal{C}_2^3 en seis pirámides cuadradas hiperbólicas contenidas en Π^3 cuyo ápice común es el baricentro de \mathcal{C}_2^3 y cuyas bases son las caras cuadradas de \mathcal{C}_2^3 .

Sean $P_{\mathbf{i}}^3, P_{\mathbf{j}}^3, P_{\mathbf{k}}^3$ las tres pirámides en \mathcal{C}_2^3 que contienen al vértice 1 y a los vértices $\frac{1}{2}(\sqrt{2} - \mathbf{j} - \mathbf{k})$, $\frac{1}{2}(\sqrt{2} - \mathbf{i} - \mathbf{k})$ y $\frac{1}{2}(\sqrt{2} - \mathbf{i} - \mathbf{j})$, respectivamente.

Sean $Q_{\mathbf{i}}^3, Q_{\mathbf{j}}^3, Q_{\mathbf{k}}^3$ las tres pirámides en \mathcal{C}_2^3 que no contienen al vértice 1 pero que sí contienen a los vértices $\frac{1}{2}(\sqrt{2} - \mathbf{j} - \mathbf{k})$, $\frac{1}{2}(\sqrt{2} - \mathbf{i} - \mathbf{k})$ y $\frac{1}{2}(\sqrt{2} - \mathbf{i} - \mathbf{j})$, respectivamente. Las pirámides $P_{\mathbf{i}}^3, P_{\mathbf{j}}^3, P_{\mathbf{k}}^3$ son permutadas por el elemento D_{v_1} en el grupo unitario de Hurwitz $\mathcal{U}(\mathcal{H})$ el cuál es una rotación de ángulo $2\pi/3$ alrededor del plano hiperbólico 2-dimensional $\{s + v_1 t \in \mathbf{H}_{\mathbb{H}}^1 : s, t > 0\}$. Entonces las pirámides $P_{\mathbf{i}}^3, P_{\mathbf{j}}^3$ y $P_{\mathbf{k}}^3$ son isométricas entre sí. Las tres pirámides $Q_{\mathbf{i}}^3, Q_{\mathbf{j}}^3$ y $Q_{\mathbf{k}}^3$ también son permutadas por $D_{v_1} \in \mathcal{U}(\mathcal{H})$ por lo que también son isométricas entre sí. Sin embargo $P_{\mathbf{u}}^3$ no es isométrica a $Q_{\mathbf{u}}^3$ para toda $\mathbf{u} = \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$.

Sea $\mathcal{Q}^3 = \mathcal{C}_1^3 \cup D_{\mathbf{i}}(P_{\mathbf{i}}^3) \cup D_{\mathbf{j}}(P_{\mathbf{j}}^3) \cup D_{\mathbf{k}}(P_{\mathbf{k}}^3)$ el poliedro hiperbólico convexo 3-dimensional contenido en Π^3 cuyo conjunto de vértices son los once puntos que son los ocho vértices de \mathcal{C}_1^3 y $\{D_{\mathbf{i}}(v_2), D_{\mathbf{j}}(v_2), D_{\mathbf{k}}(v_2)\}$ donde v_2 es el baricentro de \mathcal{C}_2^3 . Por lo tanto \mathcal{Q}^3 tiene doce caras triangulares y tres caras cuadradas.

Sea $\hat{\mathcal{R}}^3 = \mathcal{Q}^3 \cup \tau_{\mathbf{i}}D_{\mathbf{i}}(Q_{\mathbf{i}}^3) \cup \tau_{\mathbf{j}}D_{\mathbf{j}}(Q_{\mathbf{j}}^3) \cup \tau_{\mathbf{k}}D_{\mathbf{k}}(Q_{\mathbf{k}}^3)$ el poliedro hiperbólico convexo 3-dimensional con un vertice ideal que es el punto al infinito ∞ .

Las tres pirámides $D_{\mathbf{i}}(P_{\mathbf{i}}^3), D_{\mathbf{j}}(P_{\mathbf{j}}^3)$ y $D_{\mathbf{k}}(P_{\mathbf{k}}^3)$ están en Π^3 y las otras tres pirámides $\tau_{\mathbf{i}}D_{\mathbf{i}}(Q_{\mathbf{i}}^3), \tau_{\mathbf{j}}D_{\mathbf{j}}(Q_{\mathbf{j}}^3)$ y $\tau_{\mathbf{k}}D_{\mathbf{k}}(Q_{\mathbf{k}}^3)$ están contenidas en el hemiespacio hiperbólico definido por el conjunto $\{\mathbf{q} \in \mathbf{H}_{\mathbb{H}}^1 : |\mathbf{q}| >$

1}. Ellas forman un ángulo diedral de $2\pi/3$ con los dobleces de las tres caras cuadradas en \mathcal{Q}^3 . El poliedro hiperbólico $\hat{\mathcal{R}}^3$ tiene caras 24 triangulares, tres dobleces cuadrados y 14 vértices (los 8 vértices del cubo \mathcal{C}_1^3 y seis vértices para cada ápice de las pirámides de \mathcal{C}_2^3). La envolvente convexa de estos seis vértices es un octaedro no regular el cual es combinatoriamente equivalente al poliedro dual del cubo \mathcal{C}_1^3 . El poliedro $\hat{\mathcal{R}}^3$ se descompone en doce pirámides cuadradas y esta descomposición es combinatoriamente equivalente a la descomposición del dodecaedro rómbico. Ver las figuras 4.6 y 4.7.

El conjunto que consiste de las partes imaginarias del conjunto de vértices de \mathcal{C}_1^3 es

$$V_{\mathcal{C}_1^3} := \left\{ 0, \frac{\mathbf{i}}{2}, \frac{\mathbf{j}}{2}, \frac{\mathbf{k}}{2}, \frac{\mathbf{i} + \mathbf{j}}{2}, \frac{\mathbf{j} + \mathbf{k}}{2}, \frac{\mathbf{i} + \mathbf{k}}{2}, \frac{\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}}{2} \right\}.$$

El conjunto que consiste de las partes imaginarias del conjunto de vértices de $\hat{\mathcal{R}}^3$ es

$$V_{\hat{\mathcal{R}}^3} := V_{\mathcal{C}_1^3} \cup V_{O^3}$$

donde

$$V_{O^3} := \left\{ \frac{-\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}}{4}, \frac{\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}}{4}, \frac{\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}}{4}, \frac{3\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}}{4}, \frac{\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}}{4}, \frac{\mathbf{i} + \mathbf{j} + 3\mathbf{k}}{4} \right\}.$$

La envolvente convexa de $V_{\hat{\mathcal{R}}^3}$, $V_{\mathcal{C}_1^3}$ y V_{O^3} son poliedros Euclidianos que son un dodecaedro rómbico, un cubo regular y un octaedro regular, respectivamente.

Definición IV.4. Sea $\mathcal{R}_{\mathfrak{L}}^4$ el politopo no compacto 4-dimensional en $\mathbf{H}_{\mathbb{H}}^1$ el cual se obtiene mediante quitar el punto al infinito de la envolvente convexa del conjunto de puntos que consta de los catorce puntos que son los vértices de $\hat{\mathcal{R}}^3$ y el punto al infinito ∞ .

El politopo hiperbólico $\mathcal{R}_{\mathfrak{L}}^4$ es un cono ideal sobre el poliedro no convexo $\hat{\mathcal{R}}^3$ cuyo ápice es el punto al infinito ∞ .

A partir de estos resultados y observaciones previas se tiene

Proposición IV.3. El politopo $\mathcal{R}_{\mathfrak{L}}^4$ es un dominio fundamental convexo para la acción de $PSL(2, \mathfrak{L})$ en $\mathbf{H}_{\mathbb{H}}^1$.

Sea $\mathcal{R}_{1/3}^3 \subset \hat{\mathcal{R}}^3$ el poliedro hiperbólico que se forma como la intersección de $\hat{\mathcal{R}}^3$ con los dos hemiespacios hiperbólicos determinados por los dos hiperplanos hiperbólicos 3-dimensionales que intersectan al plano generado por v_1 y el eje positivo real con un ángulo diedral de $2\pi/3$. El poliedro $\mathcal{R}_{1/3}^3$ es no convexo y tiene siete caras: 3 rombos, 2 triángulos y 2 trapecoides.

Los vértices de $\mathcal{R}_{1/3}^3$ son los siguientes 8 puntos

$$1, \frac{1}{2}(1 + \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}), \sqrt{\frac{7}{16}} + \frac{3}{4}\mathbf{i}, \sqrt{\frac{7}{16}} + \frac{3}{4}\mathbf{j}, \\ \sqrt{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}(\mathbf{i} + \mathbf{j}), \sqrt{\frac{3}{4}} + \frac{1}{2}\mathbf{i}, \sqrt{\frac{3}{4}} + \frac{1}{2}\mathbf{j}, \sqrt{\frac{7}{8}} + \frac{1}{4}(\mathbf{i} + \mathbf{j}).$$

Se tiene que $\hat{\mathcal{R}}^3 = \mathcal{R}_{1/3}^3 \cup D_{v_1}(\mathcal{R}_{1/3}^3) \cup D_{v_1}^2(\mathcal{R}_{1/3}^3)$. Por lo tanto el volumen hiperbólico de $\mathcal{R}_{1/3}^3$ es una tercera parte del volumen de $\hat{\mathcal{R}}^3$.

Definición IV.5. Sea $\mathcal{R}_{\mathfrak{J}}^4$ el politopo no compacto 4-dimensional en $\mathbf{H}_{\mathbb{H}}^1$ que se obtiene al suprimir el punto al infinito de la envolvente convexa del conjunto de puntos que contiene a los ocho puntos que son los vértices de $\mathcal{R}_{1/3}^3$ y al punto al infinito ∞ .

El politopo $\mathcal{R}_{\mathfrak{J}}^4$ es un cono ideal sobre el poliedro no convexo $\mathcal{R}_{1/3}^3$ cuyo ápice es el punto al infinito. De los resultados previos se sigue que

Proposición IV.4. El politopo $\mathcal{R}_{\mathfrak{J}}^4$ es un dominio fundamental convexo para la acción de $PSL(2, \mathfrak{J})$ en $\mathbf{H}_{\mathbb{H}}^1$.

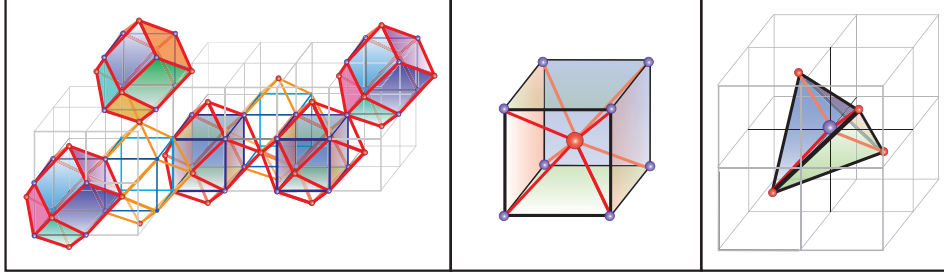


Figura 4.7. La teselación uniforme del 3-espacio Euclideano por dodecaedros romboidales. La aureola de los vértices de la teselación son de dos tipos: un cubo y un tetraedro.

§ 9. Caracterización geométrica de los grupos modulares cuaterniónicos.

Ahora, siguiendo de cerca la demostración dada por Serre en [58] (página 77), se obtiene el siguiente teorema fundamental que caracteriza al grupo modular cuaterniónico de Verjovsky-Lipschitz $PSL(2, \mathfrak{L})$ como el grupo de transformaciones cuaterniónicas de Möbius que se representan por matrices cuyas entradas son enteros de Lipschitz y que satisfacen las condiciones BG.

Teorema. *Cualquier elemento en $PSL(2, \mathbb{H}(\mathbb{Z}))$ que satisface las condiciones (BG) pertenece al grupo modular cuaterniónico de Verjovsky-Lipschitz $PSL(2, \mathfrak{L})$.*

Demostración. Sea $A \in PSL(2, \mathbb{H}(\mathbb{Z}))$ tal que satisface las condiciones BG. Sea $q = A(1)$ y $S \in PSL(2, \mathfrak{L})$ tal que $p := S(q) \in \mathcal{P}$. Entonces $(SA)(1) = p$ y por IV.1 se sigue que $SA \in \mathcal{A}(\mathfrak{L})$. Entonces $A \in \mathcal{A}(\mathfrak{L}) \subset PSL(2, \mathfrak{L})$. ■

Este teorema caracteriza completamente al grupo de transformaciones de Möbius con entradas en los enteros de Lipschitz que preservan al hemi-espacio cuaterniónico que se ha identificado con el espacio hiperbólico $\mathbf{H}_{\mathbb{H}}^1$.

Esta demostración puede ser adaptada *verbatim* para demostrar el siguiente teorema que caracteriza al grupo modular de Verjovsky-Hurwitz $PSL(2, \mathfrak{H})$.

Teorema. *Cualquier elemento en $PSL(2, \mathbb{H}ur(\mathbb{Z}))$ que satisface las condiciones (BG) pertenece al grupo modular cuaterniónico de Verjovsky-Hurwitz $PSL(2, \mathfrak{H})$.*

§ 10. Descomposición de Coxeter de los dominios fundamentales.

El politopo \mathcal{P}^4 y el dominio fundamental $\mathcal{P}_{\mathfrak{L}}^4$ correspondiente a la acción de $PSL(2, \mathfrak{L})$ sobre $\mathbf{H}_{\mathbb{H}}^1$ son ejemplos de *politopos de Coxeter* i.e. los ángulos entre sus caras llamados los *ángulos diedrales*, son submúltiplos de π . La geometría de la teselación hiperbólica en $\mathbf{H}_{\mathbb{H}}^1$ que es generada por las reflexiones en los lados de un politopo de Coxeter se codifica por estos ángulos. Se denotan como \mathbf{Y}^4 y $\mathbf{Y}_{\mathfrak{L}}^4$ a las dos teselaciones correspondientes al politopo \mathcal{P}^4 y al dominio fundamental $\mathcal{P}_{\mathfrak{L}}^4$. Debido a que $\mathcal{P}_{\mathfrak{L}}^4$ está contenido en \mathcal{P}^4 y más aún, debido a que se puede desenvolver a $\mathcal{P}_{\mathfrak{L}}^4$ mediante el grupo unitario de Lipschitz $\mathcal{U}(\mathfrak{L})$ en el politopo \mathcal{P}^4 , se tiene que el politopo $\mathcal{P}_{\mathfrak{L}}^4$ es conmensurable con \mathcal{P}^4 . Por lo tanto la teselación $\mathbf{Y}_{\mathfrak{L}}^4$ es conmensurable con la teselación \mathbf{Y}^4 . Para entender a estas teselaciones se ha considerado otra teselación en $\mathbf{H}_{\mathbb{H}}^1$ la cual es un refinamiento basado en la descomposición baricéntrica de \mathbf{Y}^4 cuyas celdas son todas isométricas entre sí a un 4-simplejo hiperbólico fijo el cual es un politopo de Coxeter y se denota por $\Delta_{\mathfrak{L}}^4$. Este 4-simplejo modelo tiene

un solo vértice ideal en el punto al infinito ∞ y ayuda a describir el grupo $PSL(2, \mathfrak{L})$ como un subgrupo de rotaciones de las simetrías de la teselación generada por las reflexiones hiperbólicas del 4-simplejo $\Delta_{\mathfrak{L}}^4$. Se denota por $\mathbf{Y}_{\Delta_{\mathfrak{L}}}^4$ a esta teselación refinada de $\mathbf{Y}_{\mathfrak{L}}^4$.

Se denota por $\mathbf{Y}_{\mathfrak{L}}^4$ y $\mathbf{Y}_{\mathfrak{H}}^4$ a las teselaciones de $\mathbf{H}_{\mathbb{H}}^1$ cuyas celdas son copias congruentes de los dominios fundamentales $\mathcal{P}_{\mathfrak{L}}^4$ y $\mathcal{P}_{\mathfrak{H}}^4$ de $PSL(2, \mathfrak{L})$ y $PSL(2, \mathfrak{H})$, respectivamente. La teselación $\mathbf{Y}_{\Delta_{\mathfrak{L}}}^4$ es un refinamiento de la teselación de $\mathbf{Y}_{\mathfrak{L}}^4$ la cual es a su vez un refinamiento de la teselación $\mathbf{Y}_{\mathfrak{L}}^4$ por lo tanto, ambas son refinamientos de la teselación \mathbf{Y}^4 .

Es importante describir a los grupos $PSL(2, \mathfrak{L})$ y $PSL(2, \mathfrak{H})$ como subgrupos de Coxeter de rotaciones de simetrías de la teselación generada por reflexiones hiperbólicas de $\Delta_{\mathfrak{L}}^4$.

Definición IV.6. Una *bandera completa* de un politopo 4-dimensional consiste de una secuencia (v, e, r, f) de k -caras de \mathcal{P}^4 , donde v es un vértice de la arista e , a su vez e es una arista de un doblez que es una cara 2-dimensional r y finalmente r también es una cara 2-dimensional de un poliedro que es una cara f del politopo \mathcal{P}^4 .

Se considera una bandera completa de la pirámide cúbica \mathcal{P}^4 en el modelo hiperbólico del hemiespacio $\mathbf{H}_{\mathbb{H}}^1$ con el vértice ideal en el punto al infinito ∞ y con base el cubo \mathcal{C}^3 . Sean A, B, C, D los baricentros de las k -caras de una bandera en el cubo \mathcal{C}^3 ; *i.e.* el baricentro del cubo \mathcal{C}^3 , un baricentro de alguna de las seis caras cuadradas de \mathcal{C}^3 , un punto medio de las cuatro aristas incidentes a este cuadrado y uno de los dos vértices en esta arista, respectivamente. Por ejemplo, sean

$$A = 1, \quad B = \frac{1}{2}(\sqrt{3} + \mathbf{i}), \quad C = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}(\mathbf{i} + \mathbf{j}) \quad \text{y} \quad D = \frac{1}{2}(1 + \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}),$$

como en la figura 4.8.

Sea $\Delta_{\mathfrak{L}}^4$ el 4-simplejo hiperbólico cuyos 4 vértices son A, B, C, D y con un vértice ideal que es el punto al infinito ∞ . $\Delta_{\mathfrak{L}}^4$ tiene cinco caras tetraedrales: un tetraedro compacto con vértices $\{A, B, C, D\}$ y cuatro tetraedros con un vértice ideal al ∞ . Más aún $\Delta_{\mathfrak{L}}^4$ tiene 10 triángulos (4 compactos y 6 con el vértice ideal ∞) y 10 aristas (6 compactas y 4 con un vértice ideal en ∞).

Los ángulos diedrales de las cinco caras 3-dimensionales de $\Delta_{\mathfrak{L}}^4$ se tienen alrededor de los 10 triángulos que forman los dobleces de $\mathcal{P}_{\mathfrak{L}}^4$.

La proyección ortogonal de $\Delta_{\mathfrak{L}}^4$ en la frontera ideal de $\mathbf{H}_{\mathbb{H}}^1$ es un tetraedro Euclideano 3-dimensional que se denota por $\Delta_{\mathfrak{L}}^e$. Los triángulos ideales asintóticos al ∞ de $\Delta_{\mathfrak{L}}^4$ tienen los mismos ángulos que los ángulos diedrales correspondientes de las aristas de $\Delta_{\mathfrak{L}}^e$. Los triángulos que no son incidentes en ∞ pero son incidentes en el centro A del cubo tienen ángulo diedral recto $\pi/2$ porque los hiperplanos 3-dimensionales que forman las caras de $\Delta_{\mathfrak{L}}^4$ que son incidentes en ∞ y A son ortogonales a la frontera ideal $\partial\mathbf{H}_{\mathbb{H}}^1$ y a la esfera unitaria Π^3 .

El tetraedro Euclideano $\Delta_{\mathfrak{L}}^e$ es el simplejo de Coxeter que se denota por $\Delta(4, 3, 4)$, ver [14]. La teselación euclideana cuyas celdas son copias isométricas del tetraedro cuyo símbolo de Coxeter es $\Delta(4, 3, 4)$ es un refinamiento obtenido mediante la subdivisión baricéntrica de la teselación clásica de cubos del 3-espacio euclideano cuyo símbolo de Schläfli es $\{4, 3, 4\}$.

Cada cubo se divide en 48 tetraedros isométricos a $\Delta(4, 3, 4)$. El símbolo de Schläfli de un cubo es $\{4, 3\}$. Este símbolo significa que las caras de un cubo son cuadrados con símbolo de Schläfli es $\{4\}$ y que la figura vertical de cada vértice es un triángulo equilateralo con símbolo de Schläfli $\{3\}$. El símbolo de Schläfli de la teselación $\{4, 3, 4\}$ del 3-espacio Euclideano significa que las celdas 3-dimensionales son cubos con símbolo de Schläfli $\{4, 3\}$ y que la figura vertical de cada vértice es un octaedro con símbolo de Schläfli $\{3, 4\}$.

Se pueden calcular los ángulos diedrales de $\Delta(4, 3, 4)$ mediante la teselación $\{4, 3, 4\}$. Los ángulos diedrales en las aristas AC, CB y DB son $\pi/2$ porque los tetraedros incidentes en estos triángulos son ortogonales. Los ángulos diedrales en AB y CD son $\pi/4$ porque hay ocho tetraedros alrededor

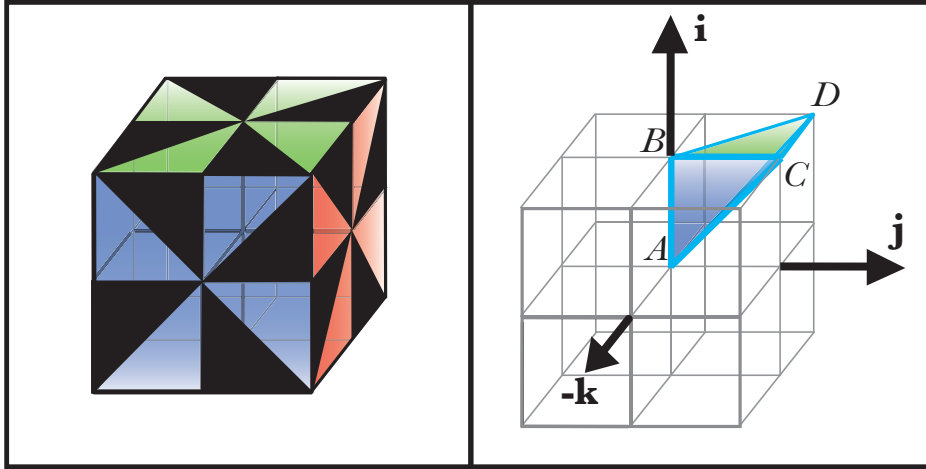


Figura 4.8. La descomposición de Coxeter en 48 tetraedros de un cubo en el 3-espacio Euclideo.

de estas aristas en $\{4, 3, 4\}$. Finalmente, el ángulo diedral en AD es $\pi/3$ porque hay seis tetraedros incidentes con el vértice D del cubo \mathcal{C} , dos tetraedros por cada cuadrado en la esquina del cubo. El ángulo diedral de $\Delta_{\mathcal{C}}^4$ en el triángulo BCD es el ángulo subtendido por la esfera unitaria Π^3 y el hiperplano $\Pi_{\frac{1}{2}}^3$ ($x_2 = 1/2$).

La intersección de las celdas de la teselación $\mathbf{Y}_{\mathcal{C}}^4$ con el plano hiperbólico 2-dimensional $\{\mathbf{q} = x_0 + x_1\mathbf{i} \in \mathbf{H}_{\mathbb{H}}^1\} = \mathbf{H}_{\mathbb{R}}^2$ es la teselación clásica 2-dimensional de los dominios fundamentales de la acción del grupo modular $PSL(2, \mathbb{Z})$. La teselación invariante de los dominios fundamentales de $PSL(2, \mathbb{Z})$ es una teselación regular cuyos mosaicos son copias congruentes de un triángulo con un vértice en el punto al infinito y dos vértices con ángulos de $\pi/3$. Entonces se puede ver que el ángulo diedral en BCD es $\pi/3$. Ver la figura 1.1.

En resumen, se enlistan los 10 ángulos diedrales de $\Delta_{\mathcal{C}}^4$:

$$\begin{aligned} \angle BCD &= \pi/3, & \angle AC\infty &= \pi/2, & \angle ABD &= \pi/2, \\ \angle AB\infty &= \pi/4, & \angle BD\infty &= \pi/2, & \angle ABC &= \pi/2, \\ \angle AD\infty &= \pi/3, & \angle BC\infty &= \pi/2, & \angle ACD &= \pi/2, \\ \angle CD\infty &= \pi/4, \end{aligned}$$

En orden para entender al grupo de Coxeter correspondiente a las simetrías de $\mathbf{Y}_{\Delta_{\mathcal{C}}^4}$ se busca el diagrama del grupo de Coxeter el cual es una gráfica con las aristas enumeradas que codifican la información de $\mathbf{Y}_{\Delta_{\mathcal{C}}^4}$ mediante los ángulos diedrales de $\Delta_{\mathcal{C}}^4$. Para obtener la gráfica que representa el diagrama de Coxeter se considera a la gráfica completa con cinco vértices y diez aristas. Los cinco vértices se corresponden con las cinco 3-caras f_1, \dots, f_5 , del simplejo 4-dimensional de Coxeter $\Delta_{\mathcal{C}}^4$ y las cinco aristas se corresponden con la intersección de dos caras de $\Delta_{\mathcal{C}}^4$. Se enumera a la arista cuyos puntos finales son f_n y f_m , $n \neq m$, con el número natural p si el ángulo diedral entre las caras f_n y f_m en $\Delta_{\mathcal{C}}^4$ es $2\pi/p$.

Si se eliminan las aristas enumeradas con 2, se tiene una gráfica camino con 5 vértices con los números 3, 4, 3, 4; ver [14]. De esta manera se identifica a $\Delta_{\mathcal{C}}^4$ con el 4-simplejo de Coxeter $\Delta(3, 4, 3, 4)$.

Definición IV.7. Sea $\Gamma_{\{3,4,3,4\}}$ el grupo hiperbólico Kleiniano de Coxeter generado por reflexiones en los lados de $\Delta_{\mathcal{C}}^4$.

La unión de los $6 \times 8 = 48$ simplejos isométricos a $\Delta_{\mathcal{C}}^4$ que son asintóticos al punto al infinito ∞ y cuyas bases están en el cubo \mathcal{C}^3 es el politopo \mathcal{P}^4 .

El dominio fundamental de Lipschitz $\mathcal{P}_{\mathfrak{L}}^4$ se obtiene como la union de $6 \times 2 = 12$ simplejos isométricos a $\Delta_{\mathfrak{L}}^4$ que son asintóticos al punto al infinito ∞ y cuyas bases están en los dos cubos \mathcal{C}_1^3 y \mathcal{C}_2^3 .

Como $PSL(2, \mathfrak{L})$ es un subgrupo de índice 3 de $PSL(2, \mathfrak{H})$ entonces el dominio modular de Hurwitz $\mathcal{P}_{\mathfrak{H}}^4$ se obtiene como la union de 4 simplejos isométricos a $\Delta_{\mathfrak{L}}^4$ que son asintóticos al punto al infinito ∞ y cuyas bases están en los dos cubos \mathcal{C}_1^3 y \mathcal{C}_2^3 .

Finalmente, aplicando $24 \times 48 = 1152$ elementos del grupo $\Gamma_{\{3,4,3,4\}}$ al simplejo $\Delta_{\mathfrak{L}}^4$ se propaga $\mathcal{P}_{\mathfrak{L}}^4$ para obtener un politopo convexo regular y rectangular, i.e. todos los ángulos diedrales son ángulos rectos. Este politopo es un mosaico de una teselación regular hiperbólica cuyo símbolo de Schläfli es $\{3, 4, 3, 4\}$. Ver la figura 5.1. En otras palabras la teselación hiperbólica ideal y rectangular correspondiente a la 24-celdas cuyo símbolo de Schläfli es $\{3, 4, 3\}$. Este politopo hiperbólico no compacto tiene volumen finito igual a $4\pi^2/3$, (ver [52]).

Se sintetizan estos resultados previos en el siguiente teorema

Teorema. *El grupo de Coxeter $\Gamma_{\{3,4,3,4\}}$ de volumen finito contiene como subgrupos a los grupos modulares cuaterniónicos $PSL(2, \mathfrak{L})$ y $PSL(2, \mathfrak{H})$. Más aún,*

$$PSL(2, \mathfrak{L}) \subset PSL(2, \mathfrak{H}) \subset \Gamma_{\{3,4,3,4\}}.$$

Se tienen los siguientes índices:

- $[\Gamma_{\{3,4,3,4\}} : PSL(2, \mathfrak{H})] = 4,$
- $[\Gamma_{\{3,4,3,4\}} : PSL(2, \mathfrak{L})] = 12$ y
- $[PSL(2, \mathfrak{H}) : PSL(2, \mathfrak{L})] = 3.$

§ 11. Volumen de los dominios fundamentales

La descomposición de Coxeter de la 24-celdas implica que el grupo completo de simetrías (aquellas que preservan la orientación y también las que la invierten) de la 24-celdas es de orden $24 \times 48 = 1152$. Con la acción de estas 1152 simetrías la 24-celdas puede ser dividida en 1152 simplejos congruentes donde cada uno de ellos es congruente al simplejo $\Delta_{\mathfrak{L}}^4$. Se conoce de [52] que el volumen de la 24-celdas hiperbólica rectangular es $4\pi^2/3$, por lo tanto el volumen de $\Delta_{\mathfrak{L}}^4$ es $(4\pi^2/3)$ dividido por 1152, esto es $(\pi^2/864)$. Se tiene la siguiente proposición

Proposición IV.5. *El volumen de $\mathcal{P}_{\mathfrak{L}}^4$ es $12(\pi^2/864) = \pi^2/72$.*

El volumen de $\mathcal{P}_{\mathfrak{H}}^4$ es $4(\pi^2/864) = \pi^2/216$.

CAPÍTULO V

Presentación algebraica de los grupos modulares cuaterniónicos.

En esta sección se da una descripción algebraica de los 6 grupos modulares $PSL(2, \mathbb{Z})$, $PSL(2, \mathbb{C}(\mathbb{Z}))$, $PSL(2, \mathfrak{L})$, $PSL(2, \mathfrak{H})$, $PSL(2, \mathbb{H}(\mathbb{Z}))$ y $PSL(2, \mathbb{H}_{ur}(\mathbb{Z}))$ en términos de generadores y relaciones pero siguiendo un método geométrico. Para este propósito, se usa la gráfica de Cayley asociada a los grupos discretos que se han construido a partir de la acción de sus generadores sobre la órbita de un punto regular (un punto en el interior cuyo grupo de isotropía consiste sólo de la identidad) de algún dominio fundamental.

Cada gráfica de Cayley es una telaraña del espacio hiperbólico y es posible leer las relaciones de los grupos asociados mediante los ciclos reducidos (o minimales) de la gráfica. Se han obtenido las siguientes presentaciones de los grupos modulares cuaterniónicos.

§ 1. Presentación del grupo modular de Lipschitz.

Recuerde que el grupo modular de Verjovsky-Lipschitz $PSL(2, \mathfrak{L})$ es generado por las tres traslaciones τ_i, τ_j, τ_k y por la inversión T . Mediante la gráfica de Cayley se obtiene la siguiente presentación finita del grupo $PSL(2, \mathfrak{L})$. En este teorema $[\cdot : \cdot]$ denota la relación de conmutatividad.

Teorema. *El grupo $PSL(2, \mathfrak{L})$ tiene la siguiente presentación:*

$$PSL(2, \mathfrak{L}) = \langle T, \tau_i, \tau_j, \tau_k \mid \mathfrak{R}_{\mathfrak{L}} \rangle,$$

donde $\mathfrak{R}_{\mathfrak{L}}$ es el conjunto de relaciones:

$$\mathfrak{R}_{\mathfrak{L}} := \left\{ \begin{array}{l} T^2, [\tau_i : \tau_j], [\tau_i : \tau_k], [\tau_k : \tau_j], \\ (\tau_i T)^6, (\tau_j T)^6, (\tau_k T)^6, \\ (\tau_i \tau_j T)^4, (\tau_i \tau_k T)^4, (\tau_j \tau_k T)^4, \\ (\tau_i \tau_j \tau_k T)^6, \\ (\tau_i T)^3 (\tau_j T)^3 (\tau_k T)^3, (\tau_i T)^3 (\tau_k T)^3 (\tau_j T)^3, \\ [(\tau_i T)^3 : T], [(\tau_j T)^3 : T], [(\tau_k T)^3 : T], \\ [(\tau_i T)^3 : \tau_i], [(\tau_j T)^3 : \tau_j], [(\tau_k T)^3 : \tau_k], \\ (\tau_u T)^3 \tau_w (\tau_u T)^3 \tau_w, \text{ donde } \mathbf{u}, \mathbf{w} \in \{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}, \mathbf{u} \neq \mathbf{w}. \end{array} \right.$$

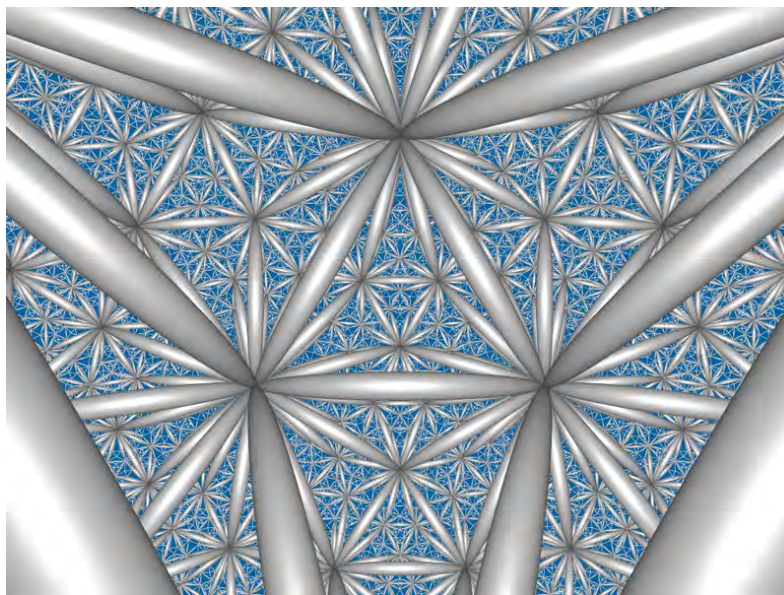


Figura 5.1. La teselación hiperbólica $\{3, 4, 4\}$.
Esta figura es cortesía de Roice Nelson [55]

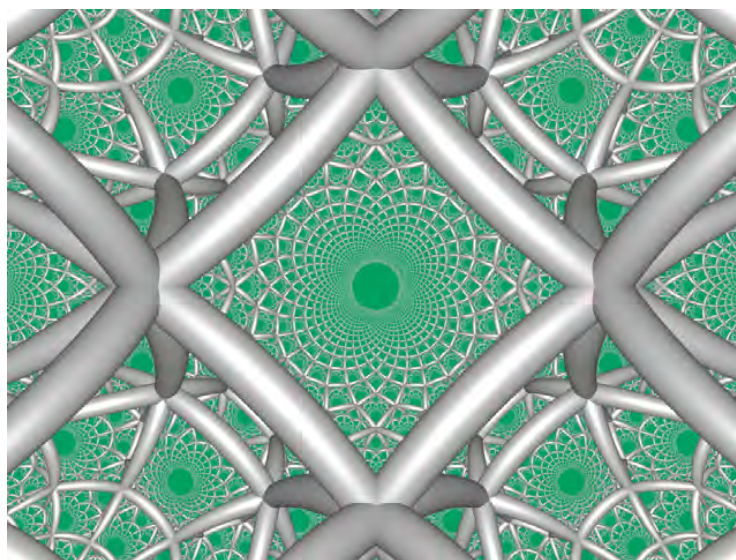


Figura 5.2. La teselación hiperbólica $\{4, 4, 3\}$
que es la teselación dual de $\{3, 4, 4\}$. Esta figura es cortesía de Roice Nelson [55] .

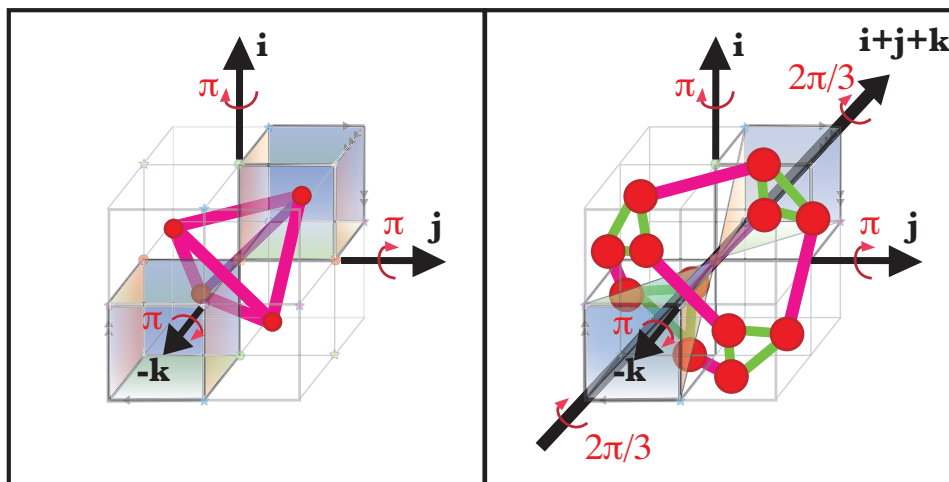


Figura 5.3. La subgráfica de Cayley de los grupos unitarios en las gráficas de Cayley de los grupos modulares cuaterniónicos $PSL(2, \mathfrak{L})$ y $PSL(2, \mathfrak{H})$. Las aristas en rojo corresponden a elementos de orden dos y las aristas en verde corresponden a elementos de orden tres.

Demostración. Sea $G_{\mathfrak{L}}$ la digráfica de Cayley asociada a la acción de $PSL(2, \mathfrak{L})$ en $\mathbf{H}_{\mathbb{H}}^1$ generada por las tres traslaciones τ_i, τ_j, τ_k y la inversión T . Para cada elemento en $PSL(2, \mathfrak{L})$ se tiene exactamente un vértice de la digráfica de Cayley $G_{\mathfrak{L}}$. Esto es, se tiene una correspondencia biyectiva entre el conjunto de vértices de $G_{\mathfrak{L}}$ y la órbita de un punto en el interior de una celda congruente a $\mathcal{P}_{\mathfrak{L}}^4$ en la teselación $Y_{\mathfrak{L}}^4$ (ver la sección § 10). Por ejemplo, el punto $\mathbf{q} = \frac{1}{3}(\sqrt{3} + \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}) \in \mathcal{P}_{\mathfrak{H}}^4 \subset \mathcal{P}_{\mathfrak{L}}^4$ es un punto regular de las acciones de $PSL(2, \mathfrak{L})$ y $PSL(2, \mathfrak{H})$.

Las aristas de $G_{\mathfrak{L}}$ son los segmentos orientados que unen un vértice correspondiente a un elemento del grupo $\gamma \in PSL(2, \mathfrak{L})$ con el vértice $g\gamma$ correspondiente al elemento del grupo que se obtiene por la acción de un generador g de $PSL(2, \mathfrak{L})$.

Por cada vértice de $G_{\mathfrak{L}}$ inciden una arista que inicia por cada generador en la presentación y una arista que termina por su inversa. Entonces en cada vértice de $G_{\mathfrak{L}}$ inciden el mismo número de aristas orientadas que inician y terminan en este vértice. Por lo tanto $G_{\mathfrak{L}}$ es una digráfica regular. Más aún, el número de aristas con un vértice en común es el doble que el número de generadores de $G_{\mathfrak{L}}$. En este caso es ocho.

El dominio fundamental $P_{\mathfrak{L}}^4$ de la acción de $PSL(2, \mathfrak{L})$ en $\mathbf{H}_{\mathbb{H}}^1$ es una pirámide cuyo ápice es el punto al infinito y cuya base es un par de cubos \mathcal{C}_1^3 y \mathcal{C}_2^3 en el hiperplano Π^3 que son simétricos con respecto al baricentro del cubo \mathcal{C}^3 que es el 1. Por cada cara 3-dimensional de $P_{\mathfrak{L}}^4$ se tiene una arista orientada de $G_{\mathfrak{L}}$. De hecho, $G_{\mathfrak{L}}$ es el 1-esqueleto de la teselación dual (en el sentido de Voronoi) en $\mathbf{H}_{\mathbb{H}}^1$ de $Y_{\mathfrak{L}}^4$ cuyas celdas son dominios fundamentales de $PSL(2, \mathfrak{L})$.

La teselación dual de $\{3, 4, 3, 4\}$ es la teselación regular cuyo símbolo de Schläfli es $\{4, 3, 4, 3\}$. Geométricamente las celdas son de $\{4, 3, 4, 3\}$ son horibolas cuya frontera son horiesferas teseladas por la acomodación clásica de cubos en \mathbb{R}^3 cuyo símbolo de Schläfli es $\{4, 3, 4\}$. El ángulo subtendido entre cada par de horibolas adyacentes es $2\pi/3$. Esta información se puede leer del último número en el símbolo $\{4, 3, 4, 3\}$.

El generador T es una involución por lo que satisface la relación $T^2 = 1$.

El subgrupo parabólico $\mathcal{T}_{\mathbb{S}\mathbb{Z}(\mathbb{H})}$ de $PSL(2, \mathfrak{L})$ tiene 3 generadores libres τ_i, τ_j y τ_k . Estos 3 generadores satisfacen las 3 relaciones de conmutatividad:

$$[\tau_i : \tau_j] = \tau_i \tau_j \tau_i^{-1} \tau_j^{-1} = 1,$$

$$[\tau_i : \tau_k] = \tau_i \tau_k \tau_i^{-1} \tau_k^{-1} = 1,$$

$$[\tau_k : \tau_j] = \tau_k \tau_j \tau_k^{-1} \tau_j^{-1} = 1.$$

Este grupo es isomorfo a $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. La gráfica de Cayley de $\mathcal{T}_{\mathbb{S}\mathbb{Z}(\mathbb{H})}$ es el 1-esqueleto de la teselación regular clásica $\{4, 3, 4\}$ de \mathbb{R}^3 cuyas celdas son cubos que se ha identificado con la horiesfera centrada en el punto al infinito de radio c . Esta horiesfera es el conjunto

$$\{\mathbf{q} \in \mathbf{H}_{\mathbb{H}}^1 : \Re(\mathbf{q}) = c\}.$$

Cada una de esas relaciones es un ciclo en la gráfica de Cayley $G_{\mathcal{L}}$ de orden 4. Geometricamente estos ciclos son cuadrados alrededor de los triángulos que forman las caras 2-dimensionales de las celdas que son congruentes a la 24-celdas $\{3, 4, 3\}$, de la teselación $\{3, 4, 3, 4\}$. Más aún, mediante la unión de estos cuadrados se forman cubos $\{4, 3\}$ en $G_{\mathcal{L}}$. Cada cubo es la aureola en $\{3, 4, 3\}$ de un vértice ideal de $\{3, 4, 3, 4\}$ y se une a otro cubo por la involución T . Entonces, en $G_{\mathcal{L}}$ se tienen copias como subgráficas del 1-esqueleto de $\{4, 3, 4\}$ para cada vértice ideal de $\{3, 4, 3, 4\}$.

La gráfica de Cayley $G_{\mathcal{L}}$ es el 1-esqueleto de la teselación dual $\mathbf{Y}_{\mathcal{L}}^{4*}$ de la teselación $\mathbf{Y}_{\mathcal{L}}^4$ de $\mathbf{H}_{\mathbb{H}}^1$ cuyas celdas se obtienen como subconjuntos de tetraedros por la subdivisión simétrica de las celdas de $\{3, 4, 3, 4\}$.

Las celdas asociadas a $G_{\mathcal{L}}$ son de dos tipos: las horibolas cuya frontera euclideana es teselada por $\{4, 3, 4\}$ y los politopos compactos hiperbólicos que devienen de la truncación de los vértices de $\mathcal{P}_{\mathcal{L}}^4$. Las relaciones de la presentación de $PSL(2, \mathcal{L})$ son los ciclos reducidos en la frontera de estos politopos. Esto aporta siete nuevas relaciones que involucran la involución T y cada uno de los otros tres generadores libres τ_i, τ_j y τ_k :

$$(\tau_i T)^6 = (\tau_j T)^6 = (\tau_k T)^6 = 1,$$

$$(\tau_i \tau_j T)^4 = (\tau_i \tau_k T)^4 = (\tau_j \tau_k T)^4 = (\tau_i \tau_j \tau_k T)^6 = 1.$$

Las primeras seis relaciones corresponden a los ciclos que son dodecágonos en $G_{\mathcal{L}}$ y que se obtienen mediante la bitruncación de las caras triangulares de la teselación regular $\{3, 4, 3, 4\}$. Corresponden a los grupos de isotropía de las caras cuadradas y las aristas de \mathcal{C}^3 . La última relación se puede leer mediante el polígono con 24 aristas correspondiente a los grupos de isotropía de los vértices de \mathcal{C}^3 . Finalmente se considera la acción del grupo unitario $\mathcal{U}(\mathcal{L})$. Este grupo divide a la pirámide \mathcal{P}^4 y el cubo 3-dimensional $\mathcal{C}^3 \subset \Pi^3$ que es la base de \mathcal{P}^4 , en ocho pirámides y ocho cubos, respectivamente. Entonces el dominio fundamental $\mathcal{P}_{\mathcal{L}}^4$ de $PSL(2, \mathcal{L})$ es la unión de dos pirámides. Se define el dominio fundamental $\mathcal{P}_{\mathcal{L}}^4$ de $PSL(2, \mathcal{L})$ como las dos pirámides cuyas bases son los dos cubos \mathcal{C}_1^3 y \mathcal{C}_2^3 diametralmente opuestos por 1.

El grupo unitario $\mathcal{U}(\mathcal{L})$ tiene orden 4. Entonces se tiene cuatro puntos en \mathcal{P}^4 como la órbita de un punto en $\mathcal{P}_{\mathcal{L}}^4$ por la acción de $\mathcal{U}(\mathcal{L})$. Se tiene una representación de este grupo en la gráfica de Cayley $G_{\mathcal{L}}$ como un tetraedro cuyos vértices son los elementos $(\tau_i T)^3, (\tau_j T)^3$ y $(\tau_k T)^3$ en $PSL(2, \mathcal{L})$ los cuales corresponden a D_i, D_j y D_k en $\mathcal{U}(\mathcal{L})$, respectivamente. Se tienen dos relaciones más de los lados triangulares de los tetraedros:

$$(\tau_i T)^3 (\tau_j T)^3 (\tau_k T)^3, (\tau_i T)^3 (\tau_k T)^3 (\tau_j T)^3.$$

Se tienen además las siguientes seis relaciones de conmutatividad:

$$[D_i : T], [D_j : T], [D_k : T],$$

$$[D_i : \tau_i], [D_j : \tau_j], [D_k : \tau_k],$$

y las siguientes seis relaciones de anticonmutatividad:

$$D_{\mathbf{u}}\tau_{\mathbf{w}}D_{\mathbf{u}}\tau_{\mathbf{w}} = 1$$

donde \mathbf{u} y \mathbf{w} son dos unidades diferentes en el conjunto $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$.

De esta manera se obtiene la presentación abstracta de $PSL(2, \mathfrak{L})$ enunciada en el teorema. ■

§ 2. Presentación algebraica del grupo modular de Hurwitz.

Ahora se da una presentación abstracta del grupo modular de Verjovsky-Hurwitz $PSL(2, \mathfrak{H})$ generado por tres traslaciones libres $\tau_{\mathbf{i}}, \tau_{\mathbf{j}}$ y $\tau_{\mathbf{k}}$, una inversión T y el grupo unitario de Hurwitz $\mathcal{U}(\mathfrak{H})$. Se recuerda que el grupo unitario de Hurwitz $\mathcal{U}(\mathfrak{H})$ es un grupo de orden 12 que es isomorfo al grupo tetraedral. Sean

$$\omega_{\mathbf{1}} = \frac{1}{2}(1 + \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}), \quad \omega_{\mathbf{i}} = \frac{1}{2}(1 + \mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}), \quad \omega_{\mathbf{j}} = \frac{1}{2}(1 - \mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}), \quad \omega_{\mathbf{k}} = \frac{1}{2}(1 - \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}).$$

Se recuerda también que $D_{\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} \mathbf{u} & 0 \\ 0 & \mathbf{u} \end{pmatrix}$, donde $\mathbf{u} \in \mathfrak{H}_u$. Se obtiene la siguiente presentación de $PSL(2, \mathfrak{H})$.

Teorema. *El grupo $PSL(2, \mathfrak{H})$ tiene la siguiente presentación:*

$$PSL(2, \mathfrak{H}) = \langle T, \tau_{\mathbf{i}}, \tau_{\mathbf{j}}, \tau_{\mathbf{k}}, D_{\omega_{\mathbf{1}}}, D_{\omega_{\mathbf{i}}}, D_{\omega_{\mathbf{j}}}, D_{\omega_{\mathbf{k}}} \mid \mathfrak{R}_{\mathfrak{H}} \rangle,$$

donde $\mathfrak{R}_{\mathfrak{H}}$ es el conjunto de relaciones:

$$\mathfrak{R}_{\mathfrak{H}} := \left\{ \begin{array}{l} T^2, [\tau_i : \tau_j], [\tau_i : \tau_k], [\tau_k : \tau_j], \\ (\tau_i T)^6, (\tau_j T)^6, (\tau_k T)^6, \\ (\tau_i \tau_j T)^4, (\tau_i \tau_k T)^4, (\tau_j \tau_k T)^4, \\ (\tau_i \tau_j \tau_k T)^6, \\ (\tau_i T)^3 (\tau_j T)^3 (\tau_k T)^3, (\tau_i T)^3 (\tau_k T)^3 (\tau_j T)^3, \\ [(\tau_i T)^3 : T], [(\tau_j T)^3 : T], [(\tau_k T)^3 : T], \\ [(\tau_i T)^3 : \tau_i], [(\tau_j T)^3 : \tau_j], [(\tau_k T)^3 : \tau_k], \\ D_u \tau_w D_u \tau_w, \text{ donde } \mathbf{u} \neq \mathbf{w} \text{ son unidades en el conjunto } \{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\} \\ [D_{\omega_1} : T], [D_{\omega_i} : T], [D_{\omega_j} : T], [D_{\omega_k} : T], \\ (D_{\omega_1})^3, (D_{\omega_i})^3, (D_{\omega_j})^3, (D_{\omega_k})^3, \\ D_{\omega_1} D_i D_{\omega_i} D_j D_{\omega_k} D_k, \\ D_k D_{\omega_k} D_i D_{\omega_j}^{-1} D_j D_{\omega_1}, \\ D_i D_{\omega_k} D_j D_{\omega_i} D_k D_{\omega_j}, \\ D_j D_{\omega_j}^{-1} D_k D_{\omega_i} D_i D_{\omega_1}. \end{array} \right.$$

Demostración. Sea $G_{\mathfrak{H}}$ la digráfica de Cayley asociada a la acción del grupo modular de Verjovsky-Hurwitz $PSL(2, \mathfrak{H})$ en $\mathbf{H}_{\mathbb{H}}^1$ generado por las tres traslaciones libres τ_i, τ_j y τ_k , la inversión T y cuatro elementos del grupo unitario de Hurwitz $\mathcal{U}(\mathfrak{H})$ asociados a rotaciones de orden 3.

Como $PSL(2, \mathfrak{L})$ es un subgrupo de $PSL(2, \mathfrak{H})$ y más aún todos los generadores de $PSL(2, \mathfrak{L})$ son generadores de $PSL(2, \mathfrak{H})$ se tienen las mismas trece relaciones de $PSL(2, \mathfrak{L})$ que forman el conjunto $\mathfrak{R}_{\mathfrak{L}}$ en el teorema § 1.

Para las últimas relaciones de $\mathfrak{R}_{\mathfrak{H}}$ es necesario considerar la acción del grupo unitario de Hurwitz $\mathcal{U}(\mathfrak{H})$. Este grupo divide a la pirámide \mathcal{P}^4 y al cubo \mathcal{C}^3 que es la base de \mathcal{P}^4 en 24 pirámides 4-dimensionales que son no compactas y cuyas bases son 24 pirámides 3-dimensionales compactas en \mathcal{C}^3 . Se define el dominio fundamental $\mathcal{P}_{\mathfrak{H}}^4$ del grupo $PSL(2, \mathfrak{H})$ como dos pirámides 4-dimensionales cuyas bases son dos pirámides 3-dimensionales diametralmente opuestas en \mathcal{C}^3 .

El grupo unitario de Hurwitz $\mathcal{U}(\mathfrak{H})$ tiene orden 12. Entonces se tienen doce puntos en \mathcal{P}^4 como la órbita de un punto en $\mathcal{P}_{\mathfrak{H}}^4$ por la acción de $\mathcal{U}(\mathfrak{H})$. Se tiene una representación de este grupo $\mathcal{U}(\mathfrak{H})$ en la gráfica de Cayley $G_{\mathfrak{H}}$ como un tetraedro truncado cuyas aristas son de dos tipos: (1) las aristas de tetraedro que se asocian a los elementos que son involuciones en $\mathcal{U}(\mathfrak{L}) \subset PSL(2, \mathfrak{L}) \subset PSL(2, \mathfrak{H})$ y (2) las aristas de las aureolas triangulares de los vértices del tetraedro que se asocian a los elementos de orden 3 en $\mathcal{U}(\mathfrak{H}) \subset PSL(2, \mathfrak{H})$. Ver la figura 5.3.

Se escoge un conjunto de siete generadores de $\mathcal{U}(\mathfrak{H})$ como generadores de $PSL(2, \mathfrak{H})$. Primero se escogen $D_i, D_j, D_k \in \mathcal{U}(\mathfrak{L}) \subset \mathcal{U}(\mathfrak{H})$. Estos tres elementos generan $\mathcal{U}(\mathfrak{L})$ y satisfacen las relaciones: $D_i = (\tau_i T)^3, D_j = (\tau_j T)^3$ y $D_k = (\tau_k T)^3$.

Se tienen además las siguientes siete relaciones de conmutatividad:

$$[D_{\mathbf{i}} : \tau_{\mathbf{i}}], [D_{\mathbf{j}} : \tau_{\mathbf{j}}], [D_{\mathbf{k}} : \tau_{\mathbf{k}}],$$

y las siguientes seis relaciones de anticonmutatividad:

$$D_{\mathbf{u}}\tau_{\mathbf{w}}D_{\mathbf{u}}\tau_{\mathbf{w}} = 1,$$

donde \mathbf{u} y \mathbf{w} son dos unidades diferentes en el conjunto $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$.

Ahora, se escogen cuatro generadores: $D_{\omega_1}, D_{\omega_i}, D_{\omega_j}$ y $D_{\omega_k} \in \mathcal{U}(\mathfrak{H})$ donde

$$\omega_1 = \frac{1}{2}(1 + \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}), \quad \omega_i = \frac{1}{2}(1 + \mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}),$$

$$\omega_j = \frac{1}{2}(1 - \mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}), \quad \omega_k = \frac{1}{2}(1 - \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}).$$

El cuaternio ω_1 es el único vértice de \mathcal{C}^3 cuyos coeficientes son todos positivos. Hay tres cuadrados de \mathcal{C}^3 que contienen a ω_1 como un vértice. Los tres cuaternios $\omega_i, \omega_j, \omega_k$ son los tres vértices opuestos de ω_1 en estos tres caras cuadradas de \mathcal{C}^3 . Más aún, los cuatro cuaternios $\omega_1, \omega_i, \omega_j, \omega_k$ son los vértices de un tetraedro regular en $\mathbf{H}_{\mathbb{H}}^1$. Ver las figuras 4. y 5.3.

Se tienen las siguientes cuatro relaciones:

$$(D_{\omega_1})^3 = (D_{\omega_i})^3 = (D_{\omega_j})^3 = (D_{\omega_k})^3 = 1.$$

Además, se tienen cuatro relaciones de conmutatividad:

$$[D_{\omega_1} : T], [D_{\omega_i} : T], [D_{\omega_j} : T], [D_{\omega_k} : T].$$

Finalmente se tienen las últimas cuatro relaciones, una por cada uno de las cuatro caras hexagonales del tetraedro truncado:

$$D_{\omega_1}D_{\mathbf{i}}D_{\omega_i}D_{\mathbf{j}}D_{\omega_j}D_{\mathbf{k}}D_{\omega_k} = D_{\mathbf{k}}D_{\omega_k}D_{\mathbf{i}}D_{\omega_i}^{-1}D_{\mathbf{j}}D_{\omega_j} = 1,$$

$$D_{\mathbf{i}}D_{\omega_k}D_{\mathbf{j}}D_{\omega_i}D_{\mathbf{k}}D_{\omega_j} = D_{\mathbf{j}}D_{\omega_j}^{-1}D_{\mathbf{k}}D_{\omega_k}D_{\mathbf{i}}D_{\omega_1} = 1.$$

De esta manera se obtiene la presentación abstracta de $PSL(2, \mathfrak{H})$ enunciada en el teorema. ■

Las presentaciones dadas no son las más eficientes. Es decir, es posible reducir el número de generadores y relaciones. Por ejemplo, para el grupo de Hurwitz se obtiene una presentación más simple con tres generadores al considerar las isometrías de $\mathbf{H}_{\mathbb{H}}^1$ correspondientes a las tres matrices:

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_{\mathbf{i}} = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{i} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad D_{\omega_1} = \begin{pmatrix} \omega_1 & 0 \\ 0 & \omega_1 \end{pmatrix}.$$

Con estos generadores, usando solamente $D_{\mathbf{i}} := (\tau_{\mathbf{i}}T)^3$ y D_{ω_1} , se tiene una presentación del grupo unitario de Hurwitz:

$$\mathcal{U}(\mathfrak{H}) = \langle D_{\mathbf{i}}, D_{\omega_1} \mid (D_{\mathbf{i}})^2 = (D_{\omega_1})^3 = (D_{\mathbf{i}}D_{\omega_1})^3 \rangle.$$

Esta es la presentación usual del grupo tetraedral. Es posible escribir los otros elementos en el grupo unitario de Hurwitz $\mathcal{U}(\mathfrak{H})$ como combinaciones de $D_{\mathbf{i}}$ and D_{ω_1} :

$$D_{\mathbf{k}} = D_{\omega_1}^2 D_{\mathbf{i}} D_{\omega_1}, \quad D_{\mathbf{j}} = D_{\mathbf{i}} D_{\omega_1}^2 D_{\mathbf{i}} D_{\omega_1},$$

$$D_{\omega_i} = D_{\mathbf{k}} D_{\omega_1}, \quad D_{\omega_j} = D_{\mathbf{i}} D_{\omega_1}, \quad D_{\omega_k} = D_{\mathbf{j}} D_{\omega_1}.$$

Las traslaciones τ_j y τ_k se obtienen mediante la conjugación por D_{ω_1} :

$$\tau_j = D_{\omega_1} \tau_i D_{\omega_1}^2, \quad \tau_k = D_{\omega_1}^2 \tau_i D_{\omega_1}.$$

Más aún, John R. Parker nos ha hecho notar que se puede obtener una presentación del grupo modular de Hurwitz con solo dos generadores: sean $A = D_{\omega_1} T$ y $B = \tau_i T$, entonces

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \omega_1 \\ \omega_1 & 0 \end{pmatrix} \quad y \quad B = \begin{pmatrix} \mathbf{i} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Se tiene que $A^6 = I = -B^6$ y

$$\begin{aligned} T &= -A^3, \\ \tau_i &= -BA^3, \\ \tau_j &= -A^4BA^5, \\ \tau_k &= -A^2BA, \\ D_{\omega_1} &= -A^4, \\ D_{\omega_i} &= A^2B^3A^2, \\ D_{\omega_j} &= B^3A^4, \\ D_{\omega_k} &= A^4B^3, \\ D_i &= B^3, \\ D_j &= A^4B^3A^2, \\ D_k &= A^2B^3A^4. \end{aligned}$$

CAPÍTULO VI

Orbidades modulares cuaterniónicas.

En este capítulo se estudia la geometría de las orbidades modulares cuaterniónicas $PSL(2, \mathfrak{L})$ y $PSL(2, \mathfrak{H})$. Se describen las puntas, los espacios base y el loci singular de las orbidades modulares cuaterniónicas. Más aún, se estudian los modelos locales de estas singularidades y los grupos de isotropía local. Finalmente se calculan las características de Euler de las orbidades.

Definición VI.1. Sean $\mathcal{O}_{\mathfrak{L}}^4 := \mathbf{H}_{\mathbb{H}}^1/PSL(2, \mathfrak{L})$ y $\mathcal{O}_{\mathfrak{H}}^4 := \mathbf{H}_{\mathbb{H}}^1/PSL(2, \mathfrak{H})$ la *orbidad modular cuaterniónica de Verjovsky-Lipschitz* y la *orbidad modular cuaterniónica de Verjovsky-Hurwitz*, respectivamente.

Estas orbidades $\mathcal{O}_{\mathfrak{L}}^4$ y $\mathcal{O}_{\mathfrak{H}}^4$ son hiperbólicas, no compactas, de dimensión real 4 y de volumen hiperbólico finito. Ambas tienen solo una punta y sus loci singulares tienen una sola componente conexa no compacta que se acumula a la cúspide al infinito.

Más aún, las orbidades $\mathcal{O}_{\mathfrak{L}}^4$ y $\mathcal{O}_{\mathfrak{H}}^4$ son difeomorfas a los espacios cocientes de sus dominios fundamentales $\mathcal{P}_{\mathfrak{L}}^4$ y $\mathcal{P}_{\mathfrak{H}}^4$ por la acción de los grupos modulares $PSL(2, \mathfrak{L})$ y $PSL(2, \mathfrak{H})$ sobre sus fronteras $\partial\mathcal{P}_{\mathfrak{L}}^4$ y $\partial\mathcal{P}_{\mathfrak{H}}^4$, respectivamente. Entonces estas orbidades tienen el mismo volumen que $\mathcal{P}_{\mathfrak{L}}^4$ y $\mathcal{P}_{\mathfrak{H}}^4$, respectivamente. Por la proposición 7.3 estos volúmenes son $\pi^2/72$ y $\pi^2/216$, respectivamente.

Cada una de las orbidades $\mathcal{O}_{\mathfrak{L}}^4$ y $\mathcal{O}_{\mathfrak{H}}^4$ tiene una sola punta porque sus dominios fundamentales $\mathcal{P}_{\mathfrak{L}}$ y $\mathcal{P}_{\mathfrak{H}}$ tienen una sola punta cada uno. Se estudia la estructura de las puntas y para ello se comienza con describir las secciones de sus puntas y sus partes delgadas y gruesas en el sentido de la descomposición de Margulis, ver [49] páginas (654–665).

§ 1. Las puntas de las orbidades.

Sea $r > 1$ un número real y sea \mathcal{E}_r^3 la *horiesfera centrada en el punto al infinito* en $\mathbf{H}_{\mathbb{H}}^1$ que consiste en el conjunto de puntos en \mathbb{H} cuya parte real es igual a r . Esto es

$$\mathcal{E}_r^3 := \{\mathbf{q} \in \mathbf{H}_{\mathbb{H}}^1 : \Re(\mathbf{q}) = r\}.$$

Para cualquier $r > 0$, la horiesfera \mathcal{E}_r^3 con la métrica inducida de $\mathbf{H}_{\mathbb{H}}^1$ es isométrica al 3-espacio euclideo \mathbb{R}^3 . Los grupos modulares afines $\mathcal{A}(\mathfrak{L})$ y $\mathcal{A}(\mathfrak{H})$ son los subgrupos maximales de $PSL(2, \mathfrak{L})$ y $PSL(2, \mathfrak{H})$ que dejan invariante cada una de las horiesferas \mathcal{E}_r^3 para cualquier $r > 0$. Más aún $\mathcal{A}(\mathfrak{L})$ y $\mathcal{A}(\mathfrak{H})$ son isomorfos a subgrupos discretos del grupo de isometrías euclidianas que preservan la orientación de \mathbb{R}^3 que se identifica con \mathcal{E}_r^3 .

El hecho de que $PSL(2, \mathfrak{L})$ es un subgrupo de índice 3 de $PSL(2, \mathfrak{H})$ implica la existencia de un epimorfismo $\pi : \mathcal{A}(\mathfrak{H}) \rightarrow \mathcal{A}(\mathfrak{L})$ cuyo kernel es $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

Sea $\mathcal{E}_{r, \mathfrak{L}}^3$ y $\mathcal{E}_{r, \mathfrak{H}}^3$ las intersecciones de los dominios fundamentales de los grupos modulares cuaterniónicos $PSL(2, \mathfrak{L})$ y $PSL(2, \mathfrak{H})$ con \mathcal{E}_r^3 , respectivamente. Entonces $\mathcal{E}_{r, \mathfrak{L}}^3$ y $\mathcal{E}_{r, \mathfrak{H}}^3$ son subconjuntos hiperbólicos de $\mathbf{H}_{\mathbb{H}}^1$ con volumen finito que son isométricos a poliedros euclidianos 3-dimensionales. En el caso de Lipschitz $\mathcal{E}_{r, \mathfrak{L}}^3$ consiste de un par de cubos que son simétricos con respecto al punto r , donde $r \in \mathbb{R} \cap \partial\mathcal{E}_{r, \mathfrak{L}}^3$. En el caso de Hurwitz $\mathcal{E}_{r, \mathfrak{H}}^3$ consiste de un par de pirámides cuadradas en

$\mathcal{E}_{r,\mathfrak{H}}^3$ que son simétricas con respecto al punto $r \in \mathbb{R} \subset \mathbb{H}$. Las proyecciones ortogonales a la frontera ideal de $\mathbf{H}_{\mathbb{H}}^1$ de $\mathcal{E}_{r,\mathfrak{L}}^3$ y $\mathcal{E}_{r,\mathfrak{H}}^3$ son las mismas que las proyecciones ortogonales de $\mathcal{P}_{\mathfrak{L}}$ y $\mathcal{P}_{\mathfrak{H}}$. Existe una aplicación cubriente $\pi_{\mathcal{E}} : \mathcal{E}_{r,\mathfrak{L}}^3 \rightarrow \mathcal{E}_{r,\mathfrak{H}}^3$ que es tres a uno.

Sean $\mathcal{S}_{r,\mathfrak{L}}^3 := \mathcal{E}_{r,\mathfrak{L}}^3/\mathcal{A}(\mathfrak{L})$ y $\mathcal{S}_{r,\mathfrak{H}}^3 := \mathcal{E}_{r,\mathfrak{H}}^3/\mathcal{A}(\mathfrak{H})$. Estos cocientes son orbidades euclidianas 3-dimensionales de volumen finito hiperbólico. Un par de dominios fundamentales para las acciones de los grupos afines correspondientes en \mathcal{E}_r^3 son los poliedros $\mathcal{E}_{r,\mathfrak{L}}^3$ y $\mathcal{E}_{r,\mathfrak{H}}^3$, respectivamente.

Las acciones de las restricciones de $PSL(2, \mathfrak{L})$ y $PSL(2, \mathfrak{H})$ en las fronteras $\partial\mathcal{E}_{r,\mathfrak{L}}^3$ y $\partial\mathcal{E}_{r,\mathfrak{H}}^3$, respectivamente dan apareamientos de lados de $\mathcal{E}_{r,\mathfrak{L}}^3$ y $\mathcal{E}_{r,\mathfrak{H}}^3$. Los cocientes de los apareamientos de lados en $\mathcal{E}_{r,\mathfrak{L}}^3$ y $\mathcal{E}_{r,\mathfrak{H}}^3$ son difeomorfos a $\mathcal{S}_{r,\mathfrak{L}}^3$ y $\mathcal{S}_{r,\mathfrak{H}}^3$, respectivamente.

Hay una aplicación cubriente de orbidades $\pi_{\mathcal{S}} : \mathcal{S}_{r,\mathfrak{L}}^3 \rightarrow \mathcal{S}_{r,\mathfrak{H}}^3$ que es tres a uno.

Una descripción conveniente de estas orbidades euclidianas es la siguiente: sea

$$\mathbf{T}^3 = \{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3 : |z_1| = |z_2| = |z_3| = 1\} = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$$

el 3-toro con su métrica euclidea estándar. El grupo de isometrías que preservan la orientación de \mathbf{T}^3 generado por las transformaciones $F_T, F_{\omega}, F_i, F_j, F_k$ dadas por las fórmulas: $F_T(z_1, z_2, z_3) = (\bar{z}_1, \bar{z}_2, \bar{z}_3)$, $F_{\omega}(z_1, z_2, z_3) = (z_2, z_3, z_1)$, $F_i(z_1, z_2, z_3) = (z_1, \bar{z}_2, \bar{z}_3)$, $F_j(z_1, z_2, z_3) = (\bar{z}_1, z_2, \bar{z}_3)$ y $F_k := F_j F_i$, es isomorfo al grupo $\hat{\mathcal{U}}(\mathfrak{H})$ generado por T y $\mathcal{U}(\mathfrak{H})$ (ver la definición 4.6 y la proposición 4.7). El grupo $\hat{\mathcal{U}}(\mathfrak{H})$ tiene como subgrupos $\hat{\mathcal{U}}(\mathfrak{L})$, $\mathcal{U}(\mathfrak{H})$ y $\mathcal{U}(\mathfrak{L})$. Estos subgrupos son generados por los conjuntos de transformaciones $\{F_T, F_i, F_j, F_k\}$, $\{F_{\omega}, F_i, F_j, F_k\}$, $\{F_{\omega}, F_i, F_j, F_k\}$ y $\{F_i, F_j, F_k\}$, respectivamente.

Para $r > 0$, $\mathbf{T}^3 \times \{r\}/\langle F_i, F_j, F_k \rangle$ es homeomorfa a la orbidad euclidea 3-dimensional $\mathcal{S}_{r,\mathfrak{L}}^3$. Como un espacio topológico $\mathcal{S}_{r,\mathfrak{L}}^3$ es homeomorfa a la 3-esfera \mathbb{S}^3 . Por otro lado $\mathbf{T}^3 \times \{0\}/\langle F_T, F_i, F_j, F_k \rangle$ es homeomorfo a la 3-bola cerrada \mathbf{B}^3 .

Sea $[(z_1, z_2, z_3)]$ la clase de equivalencia de las órbitas bajo las transformaciones $F_T, F_{\omega}, F_i, F_j, F_k$. Existe un retracto fuerte por deformación de $\mathcal{O}_{\mathfrak{L}}^4$ y $\mathcal{O}_{\mathfrak{H}}^4$ a las orbidades euclidianas $\mathcal{S}_{2,\mathfrak{L}}^3$ y $\mathcal{S}_{2,\mathfrak{H}}^3$, respectivamente. De hecho, como un espacio topológico $\mathcal{O}_{\mathfrak{L}}^4 := \mathbf{H}_{\mathbb{H}}^1/PSL(2, \mathfrak{L})$ es homeomorfo a $\mathbf{T}^3 \times [0, \infty)/\sim$, donde $\mathbf{T}^3 = \{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3 : |z_1| = |z_2| = |z_3| = 1\}$ y \sim es la relación de equivalencia dada por las órbitas de la acción de algunos grupos de difeomorfismos de \mathbf{T}^3 generados por el conjunto y subconjuntos de elementos F_T, F_i, F_j, F_k . Más aún $\mathbf{T}^3 \times \{r\}/\Gamma$ es homeomorfo a \mathbb{S}^3 para $r > 0$ y $\mathbf{T}^3 \times \{0\}/\Gamma$ es homeomorfo a \mathbf{B}^3 .

Los espacios base de las orbidades 3-dimensionales euclidianas $\mathcal{S}_{r,\mathfrak{L}}^3$ y $\mathcal{S}_{r,\mathfrak{H}}^3$ son homeomorfas a la 3-esfera \mathbb{S}^3 porque se obtienen mediante identificar dos bolas 3-dimensionales por sus fronteras las cuales son esferas 2-dimensionales (Lema de Alexander).

Los loci singulares de las orbidades 3-dimensionales euclidianas $\mathcal{S}_{r,\mathfrak{L}}^3$ y $\mathcal{S}_{r,\mathfrak{H}}^3$ son los 1-esqueletos de sus dominios fundamentales divididos por las acciones de los grupos correspondientes. Entonces, sus loci singulares son las dos gráficas que son el 1-esqueleto de un cubo y la gráfica en la figura 6.1, respectivamente. Todas las aristas del locus singular de $\mathcal{S}_{r,\mathfrak{L}}^3$ son etiquetadas con el número 2. Las etiquetas de las aristas del locus singular de $\mathcal{S}_{r,\mathfrak{H}}^3$ se muestran en la figura 6.1.

El locus singular de la sección de la cúspide de Lipschitz.

Todos los grupos de isotropía de los vértices en el dominio fundamental de $\mathcal{S}_{r,\mathfrak{L}}^3$ son isomorfos al grupo unitario de Lipschitz $\mathcal{U}(\mathfrak{L})$. Todos los grupos de isotropía de los puntos en las aristas del dominio fundamental de $\mathcal{S}_{r,\mathfrak{L}}^3$ son isomorfos al grupo $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ de orden 2. Los grupos de isotropía de las 6 caras 2-dimensionales y de las 2 caras 3-dimensionales son triviales. La orbidad $\mathcal{S}_{r,\mathfrak{L}}^3$ tiene 8 vértices, 12 aristas, 6 caras cuadradas y 2 caras cúbicas 3-dimensionales.

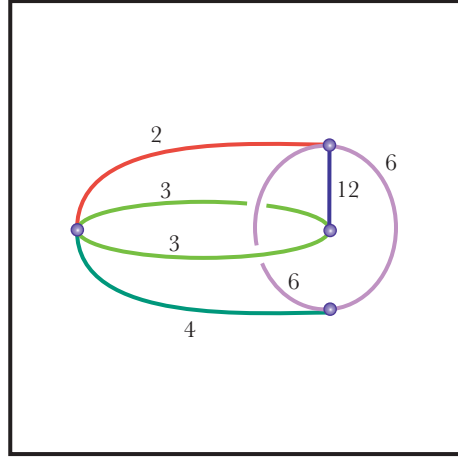


Figura 6.1. El locus singular de la sección de la cúspide de Hurwitz $\mathcal{S}_{r, \mathfrak{H}}^3$.

La característica de Euler¹ de la orbidad $\mathcal{S}_{r, \mathfrak{L}}^3$ es $8(\frac{1}{4}) - 12(\frac{1}{2}) + 6 - 2 = 0$.

El locus singular de la sección de la cúspide de Hurwitz.

Para $\mathcal{S}_{r, \mathfrak{H}}^3$ hay vértices en el dominio fundamental $\mathcal{E}_{r, \mathfrak{H}}^3$ de $\mathcal{S}_{r, \mathfrak{H}}^3$ con grupos de isotropía diferentes: $\mathcal{U}(\mathfrak{L})$ de orden 4 y $\mathcal{U}(\mathfrak{H})$ de orden 12. También las aristas tienen tres tipos de grupos de isotropía: el grupo trivial, $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. El centro r y los vértices $r + \frac{i+j+k}{2}$ y $r + \frac{-i-j-k}{2}$ de los cubos $\mathcal{E}_{r, \mathfrak{H}}^3$ tienen grupos de isotropía isomorfos al grupo unitario de Hurwitz $\mathcal{U}(\mathfrak{H})$. Los puntos $r + \frac{k}{2}$, $r - \frac{k}{2}$ y $r + \frac{i+k}{2}$, $r + \frac{-i-k}{2}$ y $r + \frac{j+k}{2}$ y $r + \frac{-j-k}{2}$ tienen grupos de isotropía isomorfos al grupo unitario de Lipschitz $\mathcal{U}(\mathfrak{L})$. Ver la figura 6.1.

Los puntos en las aristas de $\mathcal{E}_{r, \mathfrak{H}}^3$ que tienen a r como un vértice y los puntos $r + \frac{i+j+k}{2}$ y $r + \frac{-i-j-k}{2}$ como el segundo vértice tienen grupos de isotropía isomorfos a $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. Los puntos en las aristas de $\mathcal{E}_{r, \mathfrak{H}}^3$ que tienen a r como un vértice y a los puntos $r + \frac{j-k}{2}$, $r + \frac{i-k}{2}$, $r + \frac{-j+k}{2}$, $r + \frac{-i+k}{2}$ como el segundo vértice tienen grupo de isotropía trivial. Todos los puntos en las otras aristas de $\mathcal{E}_{r, \mathfrak{H}}^3$ tienen grupos de isotropía isomorfos a $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Los grupos de isotropía de las 5 caras 2-dimensionales y de las 2 caras cúbicas 3-dimensionales son triviales. La orbidad $\mathcal{S}_{r, \mathfrak{L}}^3$ tienen 4 vértices, 7 aristas, 4 caras triangulares y una cara cuadrada 2-dimensionales y 2 caras 3-dimensionales.

La característica de Euler de la orbidad $\mathcal{S}_{r, \mathfrak{H}}^3$ es $2(\frac{1}{12}) + 2(\frac{1}{4}) - 1 - 2(\frac{1}{3}) - 4(\frac{1}{2}) + 5 - 2 = 0$.

Observación VI.1. Como es de esperar, las características de Euler de las dos orbidades $\mathcal{S}_{r, \mathfrak{L}}^3$ y $\mathcal{S}_{r, \mathfrak{H}}^3$ se anulan puesto que ambas orbidades son compactas y euclideanas.

§ 1.1. La estructura de las puntas.

La familia infinita de orbidades euclideanas $\mathcal{S}_{r, \mathfrak{H}}^3$ consiste de orbidades que son homotéticas para todo $r > 1$. El volumen euclideo $V_{\mathfrak{H}}(r)$ decrece exponencialmente hacia 0 cuando $r \rightarrow \infty$. Lo mismo es cierto para la familia $\mathcal{S}_{r, \mathfrak{L}}^3$, $r > 1$ y el volumen correspondiente $V_{\mathfrak{L}}(r)$, debido a que $V_{\mathfrak{L}}(r) = 3V_{\mathfrak{H}}(r)$.

Las partes delgadas son cilindros abiertos sobre las secciones $\mathcal{S}_{r, \mathfrak{L}}^3$ y $\mathcal{S}_{r, \mathfrak{H}}^3$, respectivamente. Más precisamente, $\mathcal{S}_{r, \mathfrak{L}}^3$ y $\mathcal{S}_{r, \mathfrak{H}}^3$ separan $\mathcal{O}_{\mathfrak{L}}^4$ y $\mathcal{O}_{\mathfrak{H}}^4$, respectivamente, en dos componentes conexas con fronteras $\mathcal{S}_{r, \mathfrak{L}}^3$ y $\mathcal{S}_{r, \mathfrak{H}}^3$, respectivamente. Uno de los componentes es compacto y el otro es no compacto

¹Para la definición de la característica de Euler de una orbidad vea [27] y el primer capítulo de esta tesis.

pero con volumen hiperbólico finito. Usando la notación de Margulis, la parte compacta es la región *gruesa* y la parte no compacta es la región *delgada* de las orbidades correspondientes. Las regiones delgadas son orbidades no compactas que son difeomorfas a cilindros semiabiertos $\mathcal{Z}_{r,\mathfrak{L}}^4 := \mathcal{S}_{r,\mathfrak{L}}^3 \times [0, 1)$ y $\mathcal{Z}_{r,\mathfrak{H}}^4 := \mathcal{S}_{r,\mathfrak{H}}^3 \times [0, 1)$, respectivamente. Hay una aplicación cubriente de orbidades $\pi_{\mathcal{Z}} : \mathcal{Z}_{r,\mathfrak{L}}^4 \rightarrow \mathcal{Z}_{r,\mathfrak{H}}^4$ la cual es tres a uno.

§ 1.2. Las regiones gruesas y los espacios base de $\mathcal{O}_{\mathfrak{L}}^4$ y $\mathcal{O}_{\mathfrak{H}}^4$.

Cada uno de los espacios base de las orbidades modulares 4-dimensionales $\mathcal{O}_{\mathfrak{L}}^4$ y $\mathcal{O}_{\mathfrak{H}}^4$ tiene una sola punta. Las secciones de las puntas son las orbidades euclidianas 3-dimensionales $\mathcal{S}_{r,\mathfrak{L}}^3$ y $\mathcal{S}_{r,\mathfrak{H}}^3$ cuyos espacios base son homeomorfos a la 3-esfera \mathbb{S}^3 . Entonces las regiones delgadas de $\mathcal{O}_{\mathfrak{L}}^4$ y $\mathcal{O}_{\mathfrak{H}}^4$ son homeomorfas a la 4-bola \mathbf{D}^4 menos un punto, por ejemplo en su centro. Más aún cada una de las regiones gruesas de $\mathcal{O}_{\mathfrak{L}}^4$ y $\mathcal{O}_{\mathfrak{H}}^4$ es homeomorfa a la 4-bola \mathbf{D}^4 .

Cada uno de los espacios base de las 4-orbidades modulares $\mathcal{O}_{\mathfrak{L}}^4$ y $\mathcal{O}_{\mathfrak{H}}^4$ es homeomorfo a la 4-esfera \mathbb{S}^4 menos un punto. Entonces los espacios base de $\mathcal{O}_{\mathfrak{L}}^4$ y $\mathcal{O}_{\mathfrak{H}}^4$ son homeomorfos a \mathbb{R}^4 .

§ 2. El locus singular de $\mathcal{O}_{\mathfrak{L}}^4$ y $\mathcal{O}_{\mathfrak{H}}^4$.

Las caras 3-dimensionales de $\mathcal{P}_{\mathfrak{L}}^4$ y $\mathcal{P}_{\mathfrak{H}}^4$ son identificadas en pares mediante la acción de los generadores de los grupos modulares de Lipschitz y de Hurwitz, respectivamente. Sean $\Sigma_{\mathfrak{L}}^2$ y $\Sigma_{\mathfrak{H}}^2$ los loci singulares de $\mathcal{O}_{\mathfrak{L}}^4$ y $\mathcal{O}_{\mathfrak{H}}^4$, respectivamente. Estos son los esqueletos 2-dimensionales de sus dominios fundamentales $\mathcal{P}_{\mathfrak{L}}^4$ y $\mathcal{P}_{\mathfrak{H}}^4$. Entonces cada locus singular tiene un solo componente conexo y no es compacto.

El locus singular de Lipschitz $\Sigma_{\mathfrak{L}}^2$ es la union de un cubo 2-dimensional \mathcal{C}_{Σ} que se obtiene mediante identificar las fronteras de los cubos \mathcal{C}_1^3 y \mathcal{C}_2^3 en $\mathcal{C}^3 \subset \Pi^3$ por la acción del grupo $\hat{\mathcal{U}}(\mathfrak{L})$ y el cono no compacto sobre el 1-esqueleto de los lados 2-dimensionales de $\mathcal{P}_{\mathfrak{L}}^4$ que son asintóticos al punto al infinito ∞ .

El locus singular de Hurwitz $\Sigma_{\mathfrak{H}}^2$ es la union de la pirámide 2-dimensional \mathcal{P}_{Σ} que se obtiene mediante identificar las fronteras de la union de las dos pirámides \mathcal{P}_1^3 y \mathcal{P}_2^3 en $\mathcal{C}_1^3, \mathcal{C}_2^3 \subset \mathcal{C}^3 \subset \Pi^3$ por la acción del grupo $\hat{\mathcal{U}}(\mathfrak{H})$ y el cono no compacto sobre el 1-esqueleto de los lados 2-dimensionales de $\mathcal{P}_{\mathfrak{H}}^4$ que son asintóticos al punto al infinito ∞ .

§ 3. Modelos locales de las singularidades de las orbidades modulares.

En esta sección se estudian los modelos locales de las singularidades aisladas de las orbidades modulares $\mathcal{O}_{\mathfrak{L}}^4$ y $\mathcal{O}_{\mathfrak{H}}^4$.

Los modelos locales de las singularidades aisladas de $\mathcal{O}_{\mathfrak{L}}^4$ y $\mathcal{O}_{\mathfrak{H}}^4$ se obtienen como los cocientes de una 4-bola hiperbólica \mathbf{B}^4 por la acción de un subgrupo discreto de isometrías hiperbólicas que fijan su centro y su frontera que es una 3-esfera.

Sea $\mathbb{F}_0 \subset \mathbb{F}_{\mathbf{B}}$ el subgrupo de isometrías hiperbólicas de la 4-bola hiperbólica que fijan el centro de \mathbf{B} . Entonces \mathbb{F}_0 es el grupo de isometrías que preservan la orientación de la 3-esfera \mathbb{S}^3 y es isomorfo al grupo $\text{SO}(4)$.

Sea $\mathbf{B}^4 \subset \mathbb{H}$ el modelo del disco de $\mathbf{H}_{\mathbb{H}}^1$.

La frontera ideal de \mathbf{B}^4 es la 3-esfera unitaria

$$\mathbb{S}^3 = \{ \mathbf{q} = \alpha + \beta \mathbf{j} \in \mathbf{H}_{\mathbb{H}}^1 : \alpha, \beta \in \mathbf{C}, |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \}.$$

Sea

$$SU(2) := \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & -\bar{\beta} \\ \beta & \bar{\alpha} \end{pmatrix} : \alpha, \beta \in \mathbf{C}, |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \right\}$$

el *grupo unitario especial*. La 3-esfera es un grupo de Lie isomorfo a $SU(2)$. Un elemento $\mathbf{q} = \alpha + \beta \mathbf{j} \in \mathbb{S}^3$ corresponde al elemento $\begin{pmatrix} \alpha & -\bar{\beta} \\ \beta & \bar{\alpha} \end{pmatrix}$ en $SU(2)$.

Sea

$$f_{(u,v)} : \mathbf{B}^4 \rightarrow \mathbf{B}^4;$$

$$f_{(u,v)}(\mathbf{q}) \mapsto u\mathbf{q}v$$

donde $|u| = |v| = 1$. Se observa que $f_{(u,v)} \in SO(4)$ y $(u, v) \in \mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3 = SU(2) \times SU(2)$. Sea

$$\phi : SU(2) \times SU(2) \rightarrow SO(4);$$

$$(u, v) \mapsto f_{(u,v)}.$$

Dado que $SU(2) \times SU(2)$ es simplemente conexo pero el grupo fundamental de $SO(4)$ es $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ entonces el kernel de ϕ es el grupo con dos elementos que consiste de $(1, 1)$ y $(-1, -1)$.

Hay una acción ortogonal de $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$ en \mathbb{S}^3 dada por $\mathbf{q} \mapsto q_1^{-1}\mathbf{q}q_2$, para un par de cuaternios fijo $(q_1, q_2) \in \mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$. Esta acción define un homomorfismo de los grupos de Lie $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3 \rightarrow SO(4)$ cuyo kernel es $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ generado por $(-1, -1)$. Entonces $SO(4)$ es isomorfo al producto central $\mathbb{S}^3 \times_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} \mathbb{S}^3$. Los subgrupos finitos de $SO(4)$ son, bajo conjugación, exactamente los subgrupos finitos de los productos centrales de dos grupos poliedrales binarios G_1 y G_2

$$G_1 \times_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} G_2 \subset \mathbb{S}^3 \times_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} \mathbb{S}^3.$$

Los subgrupos finitos de $SU(2)$ fueron clasificados por Felix Klein en [38] y estos son: los grupos cíclicos de orden n ($n > 1$), los grupos diedrales binarios $\langle 2, 2, n \rangle$ de orden $4n$, el grupo tetraedral binario $\langle 2, 3, 3 \rangle$ de orden 24, el grupo octaedraal binario $\langle 2, 3, 4 \rangle$ de orden 48 y el grupo icosaedral binario $\langle 2, 3, 5 \rangle$ de orden 120. Estos son los *grupos poliedrales binarios*.

Sea Γ un subgrupo finito de \mathbb{F}_0 . Sea $r > 0$ y \mathbf{B}_r^4 la 4-bola hiperbólica centrada en el origen de radio r . La 4-bola \mathbf{B}_r^4 es invariante bajo la acción de Γ . Sea $\mathcal{O}^4(\Gamma, r) = \mathbf{B}_r^4/\Gamma$. Para todo $r > 0$ la orbidad $\mathcal{O}^4(\Gamma, r) := \mathbf{B}_r^4/\Gamma$ es equivalente, bajo reescalamiento de la métrica de la orbidad, a la orbidad fija $\mathbf{B}_\epsilon^4/\Gamma$ para ϵ suficientemente pequeño. Sea $\mathcal{O}^4(\Gamma) := \mathbf{B}_\epsilon^4/\Gamma$.

Definición VI.2. Sean p y q dos números enteros. Sea $\Gamma(p, q) \subset SU(2)$ el subgrupo abeliano generado por la transformación

$$T_{p,q}(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2) = (e^{2\pi i/p} \mathbf{z}_1, e^{2\pi i/q} \mathbf{z}_2).$$

El grupo $\Gamma(p, q)$ es isomorfo a $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$.

Sea $\mathcal{O}(p, q)$ la orbidad $\mathcal{O}^4(\Gamma(p, q), \epsilon) = \mathbf{B}_\epsilon^4/\Gamma(p, q)$. Si $\Gamma(G_1, G_2) \subset SO(4)$ es un subgrupo finito isomorfo a $G_1 \times_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} G_2$, donde G_1 y G_2 son los grupos poliedrales binarios entonces sea $\mathcal{O}(G_1, G_2) := \mathbf{B}_\epsilon^4/\Gamma(G_1, G_2)$. Si $G_k = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, donde $k = 1, 2$, entonces se escribe p en lugar G_k en la notación $\mathcal{O}(G_1, G_2)$. Si $G_k = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$, donde $k = 1, 2$, entonces se escribe (p, q) en lugar de G_k en la notación $\mathcal{O}(G_1, G_2)$.

§ 3.1. Loci singular de las orbidades modulares de Lipschitz y de Hurwitz.

Se describen los grupos locales y los modelos locales de los puntos singulares en el locus de la orbidad de Verjovsky-Lipschitz $\mathcal{O}_{\mathfrak{L}}^4$ y de la orbidad de Verjovsky-Hurwitz $\mathcal{O}_{\mathfrak{H}}^4$, respectivamente. Además se dan presentaciones finitas de grupos, dominios fundamentales, las gráficas de Cayley y un estudio profundo de sus 3-orbidades esféricas que forman las aureolas de los grupos asociados a los puntos singulares en el loci singular de $\mathcal{O}_{\mathfrak{L}}^4$ y de $\mathcal{O}_{\mathfrak{H}}^4$, respectivamente.

Se describen estratificaciones en las orbidades del conjunto de puntos singulares de $\mathcal{O}_{\mathfrak{L}}^4$ y de $\mathcal{O}_{\mathfrak{H}}^4$ de acuerdo a sus grupos de isotropía. Las listas de tipos de puntos singulares y sus correspondientes grupos de isotropía se pueden dividir en dos tipos de estratos: los compactos y los no compactos. Además estos dos tipos de estratos se pueden dividir de acuerdo a su dimensión.

Se da una lista de puntos en 11 estratos en el locus singular de Lipschitz $\Sigma_{\mathfrak{L}}^2$ de la orbidad $\mathcal{O}_{\mathfrak{L}}^4$ y 15 estratos en el locus singular de Hurwitz $\Sigma_{\mathfrak{H}}^2$ de la orbidad $\mathcal{O}_{\mathfrak{H}}^4$ cuyos elementos tienen grupos de isotropía isomorfos y se denotan estos grupos mediante Γ_k y Λ_m , donde $k = 1, \dots, 11$; $m = 1, \dots, 15$. El grupo de isotropía de un punto en un estrato no compacto en los loci singular $\Sigma_{\mathfrak{L}}^2$ ó $\Sigma_{\mathfrak{H}}^2$ es el grupo de isotropía de la acción del grupo afín de Lipschitz $\mathcal{A}(\mathfrak{L})$ y el grupo afín de Hurwitz $\mathcal{A}(\mathfrak{H})$, respectivamente. Los puntos singulares de la orbidad $\mathcal{O}_{\mathfrak{L}}^4$ que son estratos compactos están en la frontera de los cubos \mathcal{C}_1^3 y \mathcal{C}_2^3 . Los puntos singulares de la orbidad $\mathcal{O}_{\mathfrak{H}}^4$ que están en estratos compactos están en la frontera de las pirámides cuadradas \mathcal{P}_1^3 y \mathcal{P}_2^3 . Los estratos se caracterizan por la dimensión de los estratos correspondientes en la estratificación y por la propiedad del estrato de contener al punto 1 o no.

El punto $\mathbf{q} = \frac{1}{3}(\sqrt{3} + \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}) \in \mathcal{P}_{\mathfrak{H}}^4 \subset \mathcal{P}_{\mathfrak{L}}^4$ es un punto regular, es decir, su grupo de isotropía es trivial para las órbitas de $PSL(2, \mathfrak{L})$ y $PSL(2, \mathfrak{H})$. Se han considerado previamente a $\mathcal{P}_{\mathfrak{L}}^4$ y $\mathcal{P}_{\mathfrak{H}}^4$ como uniones de los conos no compactos sobre los cubos \mathcal{C}_1^3 y \mathcal{C}_2^3 y las pirámides \mathcal{P}_1^3 y \mathcal{P}_2^3 cuyos ápices son el punto al infinito, respectivamente. Sin embargo, para obtener los grupos de isotropía es mejor considerar nuevas regiones fundamentales $\tilde{\mathcal{P}}_{\mathfrak{L}}^4$ y $\tilde{\mathcal{P}}_{\mathfrak{H}}^4$ para las acciones de $PSL(2, \mathfrak{L})$ y $PSL(2, \mathfrak{H})$, respectivamente como sigue:

1. Sea $\tilde{\mathcal{P}}_{\mathfrak{L}}^4$ el bicono no compacto sobre el cubo \mathcal{C}_1^3 cuyos ápices son los puntos ideales 0 y el punto al infinito ∞ .
2. Sea $\tilde{\mathcal{P}}_{\mathfrak{H}}^4$ el bicono no compacto sobre la pirámide \mathcal{P}_1^3 cuyos ápices son los puntos ideales 0 y el punto al infinito ∞ .

Estos son biconos convexos sobre el cubo \mathcal{C}_1^3 y la pirámide \mathcal{P}_1^3 , cada uno con dos puntas. Estos politopos son dominios fundamentales para la acción de los grupos $PSL(2, \mathfrak{L})$ y $PSL(2, \mathfrak{H})$, respectivamente.

Observación VI.2. Las acciones de los grupos $PSL(2, \mathfrak{L})$ y $PSL(2, \mathfrak{H})$ sobre su nuevos dominios fundamentales $\tilde{\mathcal{P}}_{\mathfrak{L}}^4$ y $\tilde{\mathcal{P}}_{\mathfrak{H}}^4$ es equivalente a la acción de $G(3)$ sobre \mathcal{P}^4 descrita en la sección 5.1. Los grupos $PSL(2, \mathfrak{L})$ y $PSL(2, \mathfrak{H})$ actúan sobre $\tilde{\mathcal{P}}_{\mathfrak{L}}^4$ y $\tilde{\mathcal{P}}_{\mathfrak{H}}^4$ mediante rotaciones alrededor de las caras cuadradas 2-dimensionales del cubo \mathcal{C}_1^3 y de la pirámide \mathcal{P}_1^3 , respectivamente.

Para los estratos en $\Sigma_{\mathfrak{L}}^2$ ó $\Sigma_{\mathfrak{H}}^2$ que contienen a 1 es fácil calcular el grupo de isotropía como un subgrupo de $\hat{\mathcal{U}}(\mathfrak{L})$ ó de $\hat{\mathcal{U}}(\mathfrak{H})$. Para los estratos $\Sigma_{\mathfrak{L}}^2$ ó $\Sigma_{\mathfrak{H}}^2$ que no contienen a 1 se considera la órbita de 1 bajo la acción de los elementos en sus grupos de isotropía. Para cada punto \mathbf{p} en cualquiera de esos estratos 1 es un punto regular para la acción de su grupo de isotropía sobre la 3-esfera $\mathbb{S}_{r_0}^3(\mathbf{p})$, donde r_0 es la distancia desde \mathbf{p} hasta 1. Entonces la órbita de 1 está en correspondencia biunívoca con las regiones fundamentales del grupo de isotropía correspondiente actuando en la 3-esfera \mathbb{S}^3 . Las regiones fundamentales en \mathbb{S}^3 de los grupos de isotropía para cada uno de los estratos está en los loci singulares $\Sigma_{\mathfrak{L}}$ y $\Sigma_{\mathfrak{H}}$ se obtienen mediante dos 4-simplejos. Cada 4-simplejo tiene cinco

caras 3-dimensionales. Entonces los grupos de isotropía admiten presentaciones con menos de 5 generadores.

§ 3.2. La estratificación del locus singular de Lipschitz.

Se da una lista de 11 estratos en el locus singular de Lipschitz $\Sigma_{\mathfrak{L}}^2$. Para cada estrato se enlistan su grupo de isotropía Γ_k , $k = 1, \dots, 11$, se determina un dominio fundamental de la acción de su grupo de isotropía sobre la 3-esfera \mathbb{S}^3 y se da una descripción geométrica de la 3-orbitad esférica (o aureola esférica).

En la siguiente lista se considera la proyección canónica $\mathfrak{p} : \mathcal{C}^3 \rightarrow \mathcal{C}_{\Sigma}^3$. Es importante observar la figura 8 en cada caso.

Estratos no compactos.

Γ_1 **Ocho 1-celdas.** El 1-esqueleto del cono no compacto sobre los cubos \mathcal{C}_1^3 y $\mathcal{C}_2^3 \subset \mathcal{P}_{\mathfrak{L}}^4$ es un conjunto de ocho líneas abiertas en $\Sigma_{\mathfrak{L}}^2$ que se representan en $\mathcal{P}_{\mathfrak{L}}^4$ como

- a) la semirecta $\{\mathbf{q} : \mathbf{q} = r, r \in \mathbb{R}, r > 1\}$,
- b) las tres líneas $\mathbf{q} = r_1 \pm \mathbf{i}/2, r_1 \pm \mathbf{j}/2, r_1 \pm \mathbf{k}/2$, donde $r_1 > \frac{\sqrt{3}}{2}$,
- c) las tres líneas $\mathbf{q} = r_2 \pm (\mathbf{i}/2 + \mathbf{j}/2), r_2 \pm (\mathbf{i}/2 + \mathbf{k}/2), r_2 \pm (\mathbf{j}/2 + \mathbf{k}/2)$, donde $r_2 > \frac{\sqrt{2}}{2}$, y finalmente
- d) la línea $\mathbf{q} = r_3 \pm (\mathbf{i}/2 + \mathbf{j}/2 + \mathbf{k}/2)$, donde $r_3 > \frac{1}{2}$.

Estas ocho semilíneas se proyectan ortogonalmente, bajo la proyección natural $\mathcal{P}_{\mathfrak{L}}^4 \rightarrow \mathcal{C}^3$ mediante geodésicas asintóticas al punto al infinito, al baricentro del cubo $\mathcal{C}^3 \subset \mathcal{P}_{\mathfrak{L}}^4$, los baricentros de las caras cuadradas de \mathcal{C}^3 , los puntos medios de sus aristas y dos de sus vértices, respectivamente. Estas ocho semilíneas en $\mathcal{P}_{\mathfrak{L}}^4$ se proyectan a 8 semilíneas en $\mathcal{O}_{\mathfrak{L}}^4$. Sus grupos de isotropía local son isomorfos al grupo $\mathcal{U}(\mathfrak{L})$ de orden 4. Se define $\Gamma_1 = \mathcal{U}(\mathfrak{L}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ como el grupo de isotropía local de cuaternios en estas 8 semilíneas. El modelo local de los puntos singulares en este estrato es isométrico a la orbitad $\mathcal{O}(2, 2)$.

Γ_2 **Doce 2-celdas.** El 2-esqueleto del cono no compacto sobre los cubos \mathcal{C}_1^3 y \mathcal{C}_2^3 es un conjunto de doce triángulos con un vértice en el punto al infinito los cuales son los conjuntos formados por los cuaternios en $\mathcal{P}_{\mathfrak{L}}^4$ que se proyectan ortogonalmente sobre los cuaternios que son las aristas de \mathcal{C}_1^3 y \mathcal{C}_2^3 . Sus grupos de isotropía son isomorfos al grupo cíclico de orden 2 isomorfo a $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ y se define $\Gamma_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. El modelo local para los puntos singulares en este estrato es isométrico a la orbitad $\mathcal{O}(2)$.

Estratos compactos.

▪ 0-dimensionales.

Γ_3 **Una 0-celda.** El vértice común $v_1 = 1$ de \mathcal{C}_1^3 y \mathcal{C}_2^3 que es el baricentro del cubo \mathcal{C}^3 . Su grupo de isotropía es el grupo abeliano $\Gamma_3 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathcal{U}(\mathfrak{L}) \cong \hat{\mathcal{U}}(\mathfrak{L}) \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$ de orden 8 generado por la involución T y los elementos en el grupo unitario de Lipschitz $\mathcal{U}(\mathfrak{L})$. Si se toma una pequeña bola hiperbólica $\mathbf{B}_r(1)$ cuyo centro es $\mathbf{q} = 1$ y cuyo radio es r se obtiene que su frontera $\mathbb{S}_r^3(1)$ intersecta la teselación $\mathbf{Y}_{\mathfrak{L}}^4$ de $PSL(2, \mathfrak{L})$ en una teselación esférica por dieciseis tetraedros esféricos regulares y rectangulares de Coxeter. Estos tetraedros son las caras de un politopo convexo regular 4-dimensional que se conoce como la 16-celdas, es el politopo dual del hipercubo conocido como las 8-celdas. Estos politopos son dos de los seis politopos platónicos de dimensión 4; esto

es, politopos convexos regulares. La gráfica de Cayley de Γ_3 es el 1-esqueleto de un octaedro truncado en $\mathbb{S}_r^3(1)$. El modelo local para los puntos singulares en este estrato es isométrico a la orbidad $\mathcal{O}(2, (2, 2))$.

Γ_4 **Tres 0-celdas.** Los vértices v_2, v_3, v_4 de \mathcal{C}_Σ que son las imágenes bajo \mathfrak{p} de los 6 baricentros de las caras cuadradas del cubo \mathcal{C}^3 . El grupo de isotropía de estos vértices es isomorfo al grupo $\Gamma_4 = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ de orden 12. Es el grupo generado por $\tau_{\mathbf{u}}T$ y $TD_{\mathbf{v}}$ donde $\mathbf{u}, \mathbf{v} = \pm\mathbf{i}, \pm\mathbf{j}, \pm\mathbf{k}$ y $\mathbf{u} \neq \mathbf{v}$. El grupo Γ_4 deja invariante dos planos hiperbólicos ortogonales que se intersectan en el baricentro de las caras cuadradas del cubo; uno es el plano que contiene la cara y Γ_4 actúa en el como el grupo de orden 4 isomorfo a $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ (el grupo generado por $(\tau_{\mathbf{u}}T)^3$ y $TD_{\mathbf{v}}$ restringido a este plano), y el otro es su complemento ortogonal, y Γ_4 actúa en el como una rotación de orden 3 (el grupo generado por $(\tau_{\mathbf{u}}T)^2$ restringido a este plan). Los 12 puntos medios de las aristas se identifican en grupos de cuatro puntos mediante traslaciones con tres vértices singulares de $\mathcal{C}_\Sigma \subset \mathcal{O}_\xi^4$. El modelo local para los puntos singulares en este estrato es isométrico a la orbidad $\mathcal{O}(2, 6)$.

Γ_5 **Tres 0-celdas.** Los tres vértices v_5, v_6, v_7 de \mathcal{C}_Σ que son las imágenes bajo \mathfrak{p} de los 12 puntos medios de las aristas de \mathcal{C}^3 . El grupo de isotropía de estos vértices es isomorfo al grupo $\Gamma_5 = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ de orden 24. Es el grupo generado por $TD_{\mathbf{v}}$, $\tau_{\mathbf{u}+\mathbf{v}}T$, $(\tau_{\mathbf{v}}T)^2$ y $(\tau_{\mathbf{u}}T)^2$ donde $\mathbf{u}, \mathbf{v} = \pm\mathbf{i}, \pm\mathbf{j}, \pm\mathbf{k}$ y $\mathbf{u} \neq \mathbf{v}$. El grupo Γ_5 deja invariantes a dos planos hiperbólicos ortogonales que se intersectan en el punto medio de la arista del cubo; uno es el plano hiperbólico cuya frontera ideal es la línea generada por $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ y Γ_5 actúa en él como una rotación de orden 4 (el grupo generado por $\tau_{\mathbf{u}+\mathbf{v}}T$ restringido a este plano). El otro plano fijo es su complemento ortogonal y Γ_5 actúa en él como una rotación de orden 6 (el grupo generado por $D_{\mathbf{uv}}T$ y $(\tau_{\mathbf{u}}T)^2$ restringido a este plano). Los 12 puntos medios de las aristas del cubo se identifican en grupos de cuatro puntos mediante traslaciones con tres vértices singulares de $\mathcal{C}_\Sigma \subset \mathcal{O}_\xi^4$. El modelo local para estos puntos singulares en este estrato es isométrico a la orbidad $\mathcal{O}(4, 6)$.

Γ_6 **Una 0-celda.** El vértice v_8 de \mathcal{C}_Σ que es la imagen bajo \mathfrak{p} de los 8 vértices de \mathcal{C}^3 . El grupo de isotropía de este vértice es isomorfo al grupo $\Gamma_6 = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \times \langle 2, 3, 3 \rangle$ de orden 96 donde $\langle 2, 3, 3 \rangle$ es el grupo tetraedral binario de orden 24. Es el grupo generado por $\tau_{\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}}T$, $(\tau_{\mathbf{i}+\mathbf{j}}T)^2$, $(\tau_{\mathbf{i}+\mathbf{k}}T)^2$, $(\tau_{\mathbf{j}+\mathbf{k}}T)^2$, $(\tau_{\mathbf{u}}T)^2$ donde $\mathbf{u} = \pm\mathbf{i}, \pm\mathbf{j}, \pm\mathbf{k}$. El modelo local para el punto singular en este estrato es isométrico a la orbidad $\mathcal{O}((2, 2), \langle 2, 3, 3 \rangle)$.

■ 1-dimensional.

Γ_7 **Tres 1-celdas.** Los puntos de las tres aristas de \mathcal{C}_Σ que son incidentes con el baricentro de \mathcal{C}^3 tienen grupos de isotropía isomorfos a $\Gamma_7 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Si el punto está contenido en la arista de \mathcal{C}_1^3 que contiene 1 y $\sqrt{3} + \mathbf{u}/2$, entonces Γ_7 es el grupo generado por $(\tau_{\mathbf{u}}T)^3$ donde $\mathbf{u} = \pm\mathbf{i}, \pm\mathbf{j}, \pm\mathbf{k}$. El grupo Γ_7 deja invariantes al 2-plano hiperbólico generado por 1 y \mathbf{u} al hiperplano hiperbólico Π^3 . Más aún Γ_7 actúa como una rotación de orden 2 en Π . Los puntos de estas 6 aristas en \mathcal{C}_1^3 y \mathcal{C}_2^3 se identifican en pares y forman 3 aristas singulares en \mathcal{O}_ξ^4 incidentes con 1. El modelo local para los puntos singulares en este estrato es isométrico a la orbidad $\mathcal{O}(2, 2)$.

Γ_8 **Tres 1-celdas.** Los puntos de las seis aristas de \mathcal{C}_Σ que tienen un vértice en el baricentro de las caras cuadradas del cubo \mathcal{C}^3 y el otro vértice es el punto medio de una arista del cubo \mathcal{C}^3 . Su grupo de isotropía $\Gamma_8 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ es el grupo generado por $(\tau_{\mathbf{u}}T)^2$ y $D_{\mathbf{v}}T$ where $\mathbf{u}, \mathbf{v} = \pm\mathbf{i} \pm \mathbf{j} \pm \mathbf{k}$, $\mathbf{u} \neq \mathbf{v}$. El grupo Γ_8 deja invariante dos planos hiperbólicos ortogonales que se intersectan sólo en el vértice del cubo. Γ_8 actúa en un plano como una

rotación de orden 6 y como una rotación de orden 4 en el otro plano. Los puntos de las 6 aristas de \mathcal{C}^3 se identifican y forman 3 aristas singulares en $\mathcal{C}_\Sigma \subset \mathcal{O}_\Sigma^4$ que son incidentes con $1 \in \mathcal{C}_\Sigma$. El modelo local para los puntos singulares en este estrato es isométrico a la orbidad $\mathcal{O}(2, 3)$.

Γ_9 **Seis 1-celdas.** Los puntos de las tres aristas de \mathcal{C}_Σ que son incidentes con un vértice de \mathcal{C}^3 . Su grupo de isotropía $\Gamma_9 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ es el grupo generado por $(\tau_{\mathbf{u}}T)^3$ donde $\mathbf{u} = \pm \mathbf{i} \pm \mathbf{j} \pm \mathbf{k}$. El grupo Γ_9 deja invariantes dos planos hiperbólicos ortogonales que se intersectan en el vértice del cubo. Γ_9 actúa en un plano como una rotación de orden 6 y como una rotación de orden 2 en el otro. Los puntos de las 12 aristas de \mathcal{C}^3 se identifican y forman seis aristas singulares en \mathcal{O}_Σ^4 . El modelo local para los puntos singulares en este estrato es isométrico a la orbidad $\mathcal{O}(2, 6)$.

■ **2-dimensional.**

Γ_{10} **Tres 2-celdas.** Los puntos del interior de una cara cuadrada de \mathcal{C}_Σ que son incidentes con el baricentro de \mathcal{C}^3 . Su grupo de isotropía $\Gamma_{10} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ es el grupo generado por $D_{\mathbf{u}}T$, donde $\mathbf{u} = \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$. El grupo Γ_{10} actúa en un plano como una rotación de orden 2 alrededor de un plano hiperbólico 2-dimensional en Π^3 . Los puntos en los 6 cuadrados se identifican en pares con 3 2-celdas singulares en \mathcal{O}_Σ^4 . El modelo local para los puntos singulares en estos estratos es isométrico a la orbidad $\mathcal{O}(2)$.

Γ_{11} **Tres 2-celdas.** Los puntos del interior de una cara cuadrada de \mathcal{C}_Σ que no son incidentes con el baricentro de \mathcal{C}^3 . Su grupo de isotropía $\Gamma_{11} = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ es el grupo generado por $(\tau_u T)^2$, donde $u = \pm \mathbf{i}, \pm \mathbf{j}, \pm \mathbf{k}$. El grupo Γ_{11} deja invariante a dos planos hiperbólicos ortogonales que se intersectan en el punto en la cara cuadrada del cubo; uno es el plano que contiene a la cara y Γ_{11} actúa en él como una rotación de orden 3 y el otro plano es su complemento ortogonal y Γ_{11} actúa en él como la identidad. Los puntos en los 6 cuadrados se identifican en pares con 3 2-celdas singulares en \mathcal{O}_Σ^4 . El modelo local para los puntos singulares en este estrato es isométrico a la orbidad $\mathcal{O}(3)$.

§ 3.3. **La estratificación del locus singular de Hurwitz.**

Ahora se describe una estratificación de los puntos singulares de la orbidad modular de Hurwitz \mathcal{O}_Σ^4 de acuerdo a sus grupos de isotropía.

Se da una lista de 15 estratos en el locus singular de Hurwitz Σ_Σ^2 . Para cada estrato se enlista el grupo de isotropía Λ_k , $k = 1, \dots, 15$, se determina un dominio fundamental para su acción sobre \mathbb{S}^3 y se estudia en detalle la 3-orbidad esférica correspondiente (o aureola esférica).

En la siguiente lista se considera la proyección canónica $\mathfrak{p} : \mathcal{P}_d \rightarrow \mathcal{P}_\Sigma$ donde $d = 1, 2$.

De la misma forma que en el caso del locus singular de Lipschitz la lista de tipos de puntos singulares y sus correspondientes grupos de isotropía se puede dividir por la dimensión y la compacidad del estrato correspondiente en la estratificación. Los estratos no compactos tienen los mismos grupos de isotropía que sus 3-orbidades euclideanas respectivas que son la intersección de \mathcal{O}_Σ^4 con una horoesfera. La lista es la siguiente:

Estratos no compactos.

Λ_1, Λ_2 **Cinco 1-celdas.** El 1-esqueleto del cono no compacto sobre las pirámides \mathcal{P}_1^3 y \mathcal{P}_2^3 es el conjunto de cinco semirectas que se representan en \mathcal{P}_Σ^4 como

- a) la semirecta $\{\mathbf{q} \in \mathbf{H}_{\mathbb{H}}^1 : \mathbf{q} = r, r \in \mathbb{R}, r > 1\}$,
- b) la línea $\mathbf{q} = r_1 \pm \mathbf{k}/2$, donde $r_1 > \frac{\sqrt{3}}{2}$,

- c) las dos líneas $\mathbf{q} = r_2 \pm (\mathbf{i}/2 + \mathbf{j}/2), r_2 \pm (\mathbf{j}/2 + \mathbf{k}/2)$, donde $r_2 > \frac{\sqrt{2}}{2}$ y finalmente
d) la línea $\mathbf{q} = r_3 \pm (\mathbf{i}/2 + \mathbf{j}/2 + \mathbf{k}/2)$, donde $r_3 > \frac{1}{2}$.

Estas cinco semirectas se proyectan ortogonalmente, bajo la proyección natural $\mathcal{P}_5^4 \rightarrow \mathcal{C}^3$ por geodésicas asintóticas al punto al infinito, a los vértices de \mathcal{P}_1^3 : el baricentro del cubo \mathcal{C}^3 , los baricentros de cualquiera de las caras cuadradas de \mathcal{C}^3 , la mitad de dos de sus aristas y dos de sus vértices, respectivamente. Estas 5 semirectas en \mathcal{P}_5^4 se proyectan a 4 líneas abiertas en \mathcal{O}_5^4 . Sus grupos de isotropía son isomorfos para a) y d) al grupo abeliano de orden 8 isomorfo a $\mathcal{U}(\mathfrak{H})$ y para b) y c) al grupo diedral de orden 4 isomorfo a $\mathcal{U}(\mathfrak{L})$. Se obtiene $\Lambda_1 := \mathcal{U}(\mathfrak{L}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ y $\Lambda_2 := \mathcal{U}(\mathfrak{H}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ como los grupos de isotropía de los cuaternios en estas 5 semirectas. Los modelos locales para los puntos singulares en estos estratos son isométricos a las orbidades $\mathcal{O}(2, 2)$ y $\mathcal{O}(2, (2, 2))$, respectivamente.

Λ_3, Λ_4 **Ocho 2-celdas.** El 2-esqueleto del cono no compacto sobre la pirámide $\mathcal{P}_1^3 \subset \mathcal{P}_5^4$ es un conjunto de ocho triángulos con un vértice en el punto al infinito que son proyectados ortogonalmente sobre los cuaternios que forman las aristas de \mathcal{P}_1^3 y \mathcal{P}_2^3 . Los grupos de isotropía de los puntos en los cinco triángulos cuya base son las aristas de la base cuadrada de \mathcal{P}_1^3 y la arista que une 1 con el baricentro de una cara cuadrada de \mathcal{C}^3 son isomorfos al grupo cíclico $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Para puntos en la arista diagonal de \mathcal{P}_1^3 que une 1 con un vértice de \mathcal{C}^3 sus grupos de isotropía son isomorfos a $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. Para puntos en las dos aristas que unen 1 con los puntos medios de las aristas de \mathcal{C}^3 sus grupos de isotropía son isomorfos al grupo trivial, entonces estos puntos no son singulares. Se definen para estos seis estratos $\Lambda_3 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ y $\Lambda_4 = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. Los modelos locales para los puntos singulares en estos estratos son isométricos a las orbidades $\mathcal{O}(2)$ y $\mathcal{O}(3)$, respectivamente.

Estratos compactos.

▪ 0-dimensional.

- Λ_5 **Una 0-celda.** El vértice común $v_1 = 1$ de \mathcal{P}_1^3 y \mathcal{P}_2^3 que es el baricentro del cubo \mathcal{C}^3 . Su grupo de isotropía es el grupo abeliano $\Lambda_5 = \mathcal{U}(\mathfrak{H})$ de orden 24 generado por la involución T y los elementos en el grupo unitario de Hurwitz. El modelo local para los puntos singulares en este estrato es isométrico a la orbidad $\mathcal{O}(2, \langle 2, 3, 3 \rangle)$.
- Λ_6 **Una 0-celda.** El vértice v_2 de \mathcal{P}_Σ que es la imagen bajo \mathfrak{p} de los baricentros de 2 caras cuadradas opuestas del cubo \mathcal{C}^3 . El grupo de isotropía de este vértice es isomorfo al grupo $\Lambda_6 = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ de orden 12. Es el grupo generado por $\tau_{\mathbf{u}}T$ y $TD_{\mathbf{v}}$ donde $\mathbf{u}, \mathbf{v} = \pm\mathbf{i}, \pm\mathbf{j}, \pm\mathbf{k}$ y $\mathbf{u} \neq \mathbf{v}$. El modelo local para los puntos singulares en este estrato es isométrico a la orbidad $\mathcal{O}(2, 6)$.
- Λ_7 **Una 0-celda.** El vértice v_3 de \mathcal{P}_Σ que es la imagen bajo \mathfrak{p} de los 12 puntos medios de las aristas de \mathcal{C}^3 . El grupo de isotropía de este vértice es isomorfo al grupo $\Lambda_7 = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ de orden 24. Es el grupo generado por $TD_{\mathbf{v}}, \tau_{\mathbf{u}+\mathbf{v}}T, (\tau_{\mathbf{v}}T)^2$ and $(\tau_{\mathbf{u}}T)^2$ donde $\mathbf{u}, \mathbf{v} = \pm\mathbf{i}, \pm\mathbf{j}, \pm\mathbf{k}$ y $\mathbf{u} \neq \mathbf{v}$. El modelo local para los puntos singulares en este estrato es isométrico a la orbidad $\mathcal{O}(4, 6)$.
- Λ_8 **Una 0-celda.** El vértice v_4 de \mathcal{P}_Σ que es la imagen bajo \mathfrak{p} de los 8 vértices de \mathcal{C}^3 . El grupo de isotropía de este vértice es isomorfo al grupo $\Lambda_8 = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}) \times \langle 2, 3, 3 \rangle$ de orden 288 donde $\langle 2, 3, 3 \rangle$ es el grupo tetraedral binario de orden 24. Es el grupo generado por $D_\omega, \tau_{\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}}T, (\tau_{\mathbf{i}+\mathbf{j}}T)^2, (\tau_{\mathbf{i}+\mathbf{k}}T)^2, (\tau_{\mathbf{j}+\mathbf{k}}T)^2, (\tau_{\mathbf{u}}T)^2$ donde $\mathbf{u} = \pm\mathbf{i}, \pm\mathbf{j}, \pm\mathbf{k}$. El modelo local para los puntos singulares en este estrato es isométrico a la orbidad $\mathcal{O}((2, 6), \langle 2, 3, 3 \rangle)$.

▪ **1-dimensional.**

- Λ_9 **Una 1-celda.** Los puntos de las aristas de \mathcal{P}_Σ que son incidentes con el baricentro de \mathcal{C}^3 y el baricentro de las caras cuadradas de \mathcal{C}^3 . Sus grupos de isotropía son isomorfos a $\Lambda_9 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ que es el grupo generado por D_iT y D_jT . El modelo local para los puntos singulares en este estrato es isométrico a la orbidad $\mathcal{O}(2, 2)$.
- Λ_{10} **Dos 1-celdas.** Los puntos de las 2 aristas de \mathcal{P}_Σ que son incidentes con el baricentro de \mathcal{C}^3 y los puntos medios de las aristas de \mathcal{C}^3 . Sus grupos isotropía son isomorfos a $\Lambda_{10} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ que es el grupo generado por D_iT . El modelo local para los puntos singulares en este estrato es isométrico a la orbidad $\mathcal{O}(2)$.
- Λ_{11} **Una 1-celda.** Los puntos de la arista de \mathcal{P}_Σ que es incidente con el baricentro de \mathcal{C}^3 y el vértice de \mathcal{C}^3 . Sus grupos de isotropía son isomorfos a $\Lambda_{11} = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. El modelo local para los puntos singulares en este estrato es isométrico a la orbidad $\mathcal{O}(3)$.
- Λ_{12} **Dos 1-celdas.** Los puntos de las 2 aristas de \mathcal{P}_Σ que son incidentes con el baricentro de una cara cuadrada de \mathcal{C}^3 y el punto medio de sus aristas. Sus grupos de isotropía son isomorfos a $\Lambda_{12} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. El modelo local para los puntos singulares en este estrato es isométrico a la orbidad $\mathcal{O}(2, 3)$.
- Λ_{13} **Una 1-celda.** Los puntos de la arista de \mathcal{P}_Σ que son incidentes con un vértice de \mathcal{C}^3 y el punto medio de sus aristas. Sus grupos de isotropía son isomorfos a $\Lambda_{13} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$. El modelo local para los puntos singulares en este estrato es isométrico a la orbidad $\mathcal{O}(2, 6)$.

▪ **2-dimensional.**

- Λ_{14} **Una 2-celda.** Los grupos de isotropía de los puntos del interior de una cara cuadrada de \mathcal{P}_Σ son isomorfos a $\Lambda_{14} = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. El modelo local para los puntos singulares en este estrato es isométrico a la orbidad $\mathcal{O}(3)$.
- Λ_{15} **Dos 2-celdas.** Los grupos de isotropía de los puntos en el interior de los dos triángulos de \mathcal{P}_Σ que contienen a 1 y el baricentro de una cara cuadrada de \mathcal{C}^3 son isomorfos a $\Lambda_{15} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. El modelo local para los puntos singulares en este estrato es isométrico a la orbidad $\mathcal{O}(2)$.

§ 4. Las características de Euler de las orbidades modulares de Lipschitz y Hurwitz.

Usando los resultados previos sobre el orden de los grupos locales de cada estrato en el loci singular de las orbidades de Lipschitz y Hurwitz para obtener el siguiente teorema:

Teorema. *La características de Euler de las orbidades modulares de Verjovsky-Lipschitz y Verjovsky-Hurwitz son:*

$$\chi^{orb}(\mathcal{O}_{\mathfrak{L}}^4) = \frac{1}{96} \quad \text{y} \quad \chi^{orb}(\mathcal{O}_{\mathfrak{H}}^4) = \frac{1}{288},$$

respectivamente.

Demostración. La característica de Euler de las orbidades de Lipschitz y Hurwitz se pueden calcular mediante la suma alternada del número de estratos para cada dimensión en $\Sigma_{\mathfrak{L}}^2$ y en $\Sigma_{\mathfrak{H}}^2$ dividida por el orden del grupo de isotropía de un punto en cada estrato.

La orbidad modular de Lipschitz $\mathcal{O}_{\mathfrak{L}}^4$ tiene una estratificación como CW complejo con un vértice cuyo grupo de isotropía es de orden 8, otro vértice cuyo grupo de isotropía es de orden 96, tres vértices cuyo grupo de isotropía es de orden 12 y tres vértices cuyo grupo de isotropía es de orden 24. Además $\mathcal{O}_{\mathfrak{L}}^4$ tiene tres aristas cuyo grupo de isotropía es de orden 4, seis aristas cuyo grupo de isotropía es de orden 6, tres aristas cuyo grupo de isotropía es de orden 12 y ocho aristas cuyo grupo de isotropía es de orden 4. $\mathcal{O}_{\mathfrak{L}}^4$ tiene tres 2-celdas cuyo grupo de isotropía es de orden 2, tres 2-celdas cuyo grupo de isotropía es de orden 3 y doce 2-celdas cuyo grupo de isotropía es de orden 2. Finalmente $\mathcal{O}_{\mathfrak{L}}^4$ tiene seis 3-celdas y una 4-celda cuyos grupos de isotropía son triviales.

La orbidad modular de Hurwitz $\mathcal{O}_{\mathfrak{H}}^4$ tiene una estratificación como CW complejo con un vértice cuyo grupo de isotropía es de orden 12, un vértice cuyo grupo de isotropía es de orden 288 y dos vértices cuyo grupo de isotropía es de orden 24. $\mathcal{O}_{\mathfrak{H}}^4$ tiene una arista cuyo grupo de isotropía es de orden 2, una arista cuyo grupo de isotropía es de orden 3, tres aristas cuyo grupo de isotropía es de orden 4, dos aristas cuyo grupo de isotropía es de orden 6 y tres aristas cuyo grupo de isotropía es de orden 12. $\mathcal{O}_{\mathfrak{H}}^4$ tiene dos 2-celdas cuyo grupo de isotropía es trivial, seis 2-celdas cuyo grupo de isotropía es de orden 2 y tres 2-celdas cuyo grupo de isotropía es de orden 3. Finalmente $\mathcal{O}_{\mathfrak{H}}^4$ tiene cinco 3-celdas y una 4-celda cuyo grupo de isotropía es trivial. ■

Observación VI.3. Dado que existe una aplicación cubriente en las orbidades $\mathfrak{p}_{\mathfrak{L},\mathfrak{H}} : \mathcal{O}_{\mathfrak{L}}^4 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathfrak{H}}^4$ de orden 3 se obtiene, como es de esperar, que:

$$\chi^{\text{orb}}(\mathcal{O}_{\mathfrak{L}}^4) = 3\chi^{\text{orb}}(\mathcal{O}_{\mathfrak{H}}^4).$$

El volumen de una orbidad es el mismo que el volumen de su dominio fundamental. Entonces se ha calculado $\text{Vol}(\mathcal{O}_{\mathfrak{L}}^4) = 3\text{Vol}(\mathcal{O}_{\mathfrak{H}}^4)$ en la sección 7.1. Esto está relacionado al teorema de Gauss-Bonnet-Euler para orbidades.

CAPÍTULO VII

Transformaciones de Lorentz.

En este capítulo se estudian las relaciones entre los modelos hiperbólicos del hemiespacio y del hiperboloide de Lorentz–Minkowski. En particular, se estudian las transformaciones de Cayley que proporcionan isometrías de los modelos hiperbólicos. En particular se estudia la representación de $PSL(2, \mathbb{H})$ como transformaciones de Lorentz.

Una *matriz de Lorentz-Minkowski* M es una matriz 5×5 que satisface $M^t J M = J$ donde M^t es la matriz transpuesta de M y J es la matriz

$$J = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Se observa que el determinante de cualquier matriz de Lorentz-Minkowski M es ± 1 .

Ahora se describen los dos modelos hiperbólicos 4-dimensionales como subconjuntos en \mathbb{R}^5 : el modelo del hiperboloide

$$\mathbf{Lor} := \{(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^5 : x_0 > 0, x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = -1 + x_0^2\} \quad (\text{VII.1})$$

y el modelo del hemiespacio

$$\mathbf{H}^+ := \{(1, x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^5 : x_4 > 0\}.$$

Cada uno de estos modelos tiene su métrica completa correspondiente de curvatura constante -1 y se puede pasar de un modelo a otro mediante proyecciones explícitas llamadas *transformaciones de Cayley* (ver [40]).

Explícitamente, si $(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbf{Lor}$ entonces

$$\left(1, \frac{x_1}{x_0 + x_4}, \frac{x_2}{x_0 + x_4}, \frac{x_3}{x_0 + x_4}, \frac{1}{x_0 + x_4}\right) \in \mathbf{H}^+. \quad (\text{VII.2})$$

De hecho, $x_0 + x_4$ es positivo pues $x_4^2 - x_0^2 = (x_4 - x_0)(x_4 + x_0) = -(1 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) < 0$ y entonces $x_0 + x_4 > 0$ ó $x_4 - x_0 > 0$, pero el segundo caso es equivalente a $x_4 > x_0$ y puesto que x_0 es positivo, entonces $x_0 + x_4$ es positivo. En orden de demostrar que la función $\Phi_{\mathbf{Lor}, \mathbf{H}^+} : \mathbf{Lor} \rightarrow \mathbf{H}^+$

$$\Phi_{\mathbf{Lor}, \mathbf{H}^+}(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4) = \left(1, \frac{x_1}{x_0 + x_4}, \frac{x_2}{x_0 + x_4}, \frac{x_3}{x_0 + x_4}, \frac{1}{x_0 + x_4}\right)$$

es una función uno a uno, se demuestra que es invertible.

Por lo tanto, dado $(1, \mathbf{y}) = (1, y_1, y_2, y_3, y_4) \in \mathbf{H}^+$, si $|\mathbf{y}|^2 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2$, entonces se calcula que la inversa de $\Phi_{\mathbf{Lor}, \mathbf{H}^+}$ está dada por la fórmula:

$$\Phi_{\mathbf{Lor}, \mathbf{H}^+}^{-1}((1, y_1, y_2, y_3, y_4)) = \left(\frac{1 + |y|^2}{2y_4}, \frac{y_1}{y_4}, \frac{y_2}{y_4}, \frac{y_3}{y_4}, \frac{1 - |y|^2}{2y_4}\right) \in \mathbf{Lor} \quad (\text{VII.3})$$

porque

$$\Phi_{\mathbf{Lor}, \mathbf{H}^+} \left(\frac{1 + |y|^2}{2y_4}, \frac{y_1}{y_4}, \frac{y_2}{y_4}, \frac{y_3}{y_4}, \frac{1 - |y|^2}{2y_4} \right) = (1, y_1, y_2, y_3, y_4).$$

Para una matriz M la condición $M^t J M = J$ es equivalente a las condiciones (BG), por lo tanto

Proposición VII.1. *Las matrices de Lorentz-Minkowski está en correspondencia uno a uno con las matrices de $PSL(2, \mathbb{H})$ que satisface las condiciones (BG); i.e. el grupo de isometrías que preservan la orientación de $\mathbf{H}_{\mathbb{H}}^1$.*

También se recuerda que el grupo de isometrías de **Lor** es el grupo de transformaciones de Lorentz-Minkowski y el subgrupo de $PSL(2, \mathbb{H})$ de matrices que satisfacen las condiciones (BG) es isomorfo al grupo de isometrías de \mathbf{H}^+ .

Para la matriz asociada a la traslación general $\tau_{x,y,z} = \begin{pmatrix} 1 & x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ se tiene la siguiente representación de Lorentz

$$\mathfrak{T}(x, y, z) := \begin{pmatrix} 1 + \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2) & x & y & z & \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2) \\ x & 1 & 0 & 0 & x \\ y & 0 & 1 & 0 & y \\ z & 0 & 0 & 1 & z \\ -\frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2) & -x & -y & -z & 1 - \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2) \end{pmatrix}$$

Se hace notar que $\mathfrak{T}(x, y, z)\mathfrak{T}(x', y', z') = \mathfrak{T}(x + x', y + y', z + z')$.

La transformación de Lorentz correspondiente a $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ es la matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -J$$

Para $R = \begin{pmatrix} \sqrt{r} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{r}} \end{pmatrix}$ se tiene la representación de Lorentz

$$D(r) := \begin{pmatrix} \frac{1+r^2}{2r} & 0 & 0 & 0 & \frac{1-r^2}{2r} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1-r^2}{2r} & 0 & 0 & 0 & \frac{1+r^2}{2r} \end{pmatrix}$$

Definición VII.1. Si $B \in SO(4)$ se define

$$\widehat{B} := \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & & \\ 0 & & & B \end{array} \right). \quad (\text{VII.4})$$

Observación VII.1. El conjunto de matrices de la forma \widehat{B} puede ser visto como el subgrupo de $SO_+(4, 1)$ de matrices que fijan el punto $(1, 0, 0, 0, 0)$; este subgrupo es isomorfo a $SO(4)$.

§ 1. Descomposición de Iwasawa para el grupo de Lorentz $SO_+(4, 1)$.

Sea $SO_+(4, 1)$ el grupo de Lorentz-Minkowski. Este es el grupo de isometrías que preservan la orientación de la rama del hiperboloide **Lor** en VII.1. Usando la descomposición dada de Iwasawa del capítulo 3 se tiene la siguiente:

Proposición VII.2 (Descomposición de Iwasawa Lorentziana). *Dada $M \in SO_+(4, 1)$ existe una colección única de números reales $r, x, y, z \in \mathbb{R}, r > 0$ y una única matriz $B \in SO(4)$ tales que*

$$M = D(r)\mathfrak{T}(x, y, z)\widehat{B}. \quad (\text{VII.5})$$

§ 2. El grupo de congruencia $\Gamma(2, \mathfrak{L})$ en el grupo de Lorentz.

El grupo de congruencia $\Gamma(2, \mathfrak{L})$ corresponde, vía las transformaciones de Cayley (VII.2) y (VII.3), al subgrupo $\mathfrak{G}(2, \mathfrak{L}) \subset SO_+(4, 1)$ de transformaciones de Lorentz generadas por traslaciones $\mathfrak{T}(x, y, z)$ con $x, y, z \in \mathbb{Z}$ tal que $x + y + z \equiv 0 \pmod{2}$ y la matriz $-J$.

Sea $SO_+(4, 1, \mathbb{Z}) \subset SO_+(4, 1)$ el subgrupo de matrices de Lorentz con coeficientes enteros. Puesto que en el caso del grupo de congruencia $\Gamma(2, \mathfrak{L})$ la matriz de traslación $\mathfrak{T}(x, y, z)$ tiene coeficientes enteros, se tiene:

Proposición VII.3. *El grupo de congruencia $\mathfrak{G}(2, \mathfrak{L})$ es generado por matrices con coeficientes enteros, i.e., $\mathfrak{G}(2, \mathfrak{L}) \subset SO_+(4, 1, \mathbb{Z})$.*

Observación VII.2. Sea $\mathbf{Lor}(\mathbb{Z}) := \mathbf{Lor} \cap \mathbb{Z}^5$ el conjunto de puntos con coeficientes enteros que están en el hiperboloide de Lorentz-Minkowski, entonces la órbita de $(1, 0, 0, 0, 0)$ bajo la acción de $\mathfrak{G}(2, \mathfrak{L})$ está contenida en $\mathbf{Lor}(\mathbb{Z})$ por lo tanto este conjunto es infinito numerable.

Teorema. *El dominio fundamental de $\Gamma(2, \mathfrak{L})$ en $\mathbf{H}_{\mathbb{H}}^1$ es un politopo convexo no compacto de dimensión 4 y de volumen finito con 8 vértices reales que son los vértices $(\frac{1}{2})(1 \pm \mathbf{i} \pm \mathbf{j} \pm \mathbf{k})$ de un cubo regular y con 7 vértices ideales $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6$ y v_∞ donde $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ son los seis vértices $\pm \mathbf{i}, \pm \mathbf{j}, \pm \mathbf{k}$, de un octaedro regular e ideal y v_∞ es el punto al infinito ∞ .*

El grupo $PSL(2, \mathfrak{L})$ deja invariante a la teselación regular hiperbólica correspondiente a la 24-celda rectangular ideal con símbolo de Schläfli $\{3, 4, 3, 4\}$. Se recuerda que la 24-celda (o *icositetrachoro*¹) es un politopo convexo regular 4-dimensional, cuya frontera se compone de 24 caras octaedrales con seis caras incidentes en cada vértice y tres caras incidentes en cada arista. La 24-celdas tiene 96 caras triangulares, 96 aristas y 24 vértices.

Es posible dar un modelo hiperbólico (ideal) de la 24-celda al considerar la envolvente convexa de las imágenes de las 24 unidades de Hurwitz vía la transformación de Cayley $\Psi(\mathbf{q}) = (1 + \mathbf{q})(1 - \mathbf{q})^{-1}$. Las coordenadas en \mathbb{R}^4 de todas las unidades de Hurwitz se pueden obtener al considerar las 8 cuádruplas $(\pm 1, 0, 0, 0), (0, \pm 1, 0, 0), (0, 0, \pm 1, 0), (0, 0, 0, \pm 1)$ más las 16 cuádruplas $(\pm 1/2, \pm 1/2, \pm 1/2, \pm 1/2)$. El grupo de congruencia $\Gamma(2, \mathfrak{L})$ deja invariante la teselación regular generada por la 24-celda. Por lo tanto (ver [52]) se tiene el siguiente

Teorema. *El grupo $\mathfrak{G}(2, \mathfrak{L})$ contiene un subgrupo de índice finito cuyo dominio fundamental es la 24-celda. Entonces como se ve en [52], el grupo $\mathfrak{G}(2, \mathfrak{L})$ contiene 22 subgrupos que actúan libremente en **Lor** y cuyos cocientes son 4-variedades hiperbólicas orientables y de volumen finito.*

¹También llamado *octaplejo* (como nombre corto de octaedro complejo), *octacubo*, o *polioctaedro*.

§ 3. El grupo modular de Hurwitz $PSL(2, \mathfrak{H})$ en el modelo de Lorentz.

El álgebra de los cuaternios es isomorfa al álgebra real de matrices 4×4 generada por I_4, S_i, S_j, S_k , donde I_4 es la matriz identidad 4×4 y

$$S_i := \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_j := \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y

$$S_k := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Esto se sigue del hecho de que

$$S_i^2 = S_j^2 = S_k^2 = -I_4$$

y

$$S_i S_j = S_k, \quad S_j S_k = S_i, \quad S_k S_i = S_j.$$

En particular el grupo de las unidades de Hurwitz $\mathcal{U}(\mathbb{H}ur)$ consiste de 24 matrices especiales ortogonales:

$$\pm I_4, \pm S_i, \pm S_j, \pm S_k, \frac{1}{2}(\pm I_4 \pm S_i \pm S_j \pm S_k)$$

Todas las combinaciones posibles de los 16 signos están permitidas. Se observa que este grupo es isomorfo al grupo tetraedral binario.

Definición VII.2. Sea $\mathcal{U}(\mathfrak{H}, \mathbf{Lor}) \subset SO_+(4, 1)$ el grupo finito de orden 24 dado, usando VII.1, por las matrices de Lorentz:

$$\pm \widehat{I}_4, \pm \widehat{S}_i, \pm \widehat{S}_j, \pm \widehat{S}_k, \frac{1}{2}(\pm \widehat{I}_4 \pm \widehat{S}_i \pm \widehat{S}_j \pm \widehat{S}_k).$$

Observemos que la inversión T corresponde a $-\widehat{I}_4 \in \mathcal{U}(\mathfrak{H}, \mathbf{Lor})$ i.e. la matriz $-J$.

Proposición VII.4. En el modelo de Lorentz el grupo $PSL(2, \mathfrak{H})$ corresponde al subgrupo de $SO_+(4, 1)$, que se denota por $\Gamma_{\mathfrak{H}}$ y es generado por $\mathcal{U}(\mathfrak{H}, \mathbf{Lor})$ y las traslaciones $\mathfrak{T}(n, m, p)$ donde $n, m, p \in \mathbb{Z}$.

Como $PSL(2, \mathfrak{L}) \subset PSL(2, \mathfrak{H})$ se tiene un subgrupo correspondiente $\Gamma_{\mathfrak{L}} \subset \Gamma_{\mathfrak{H}}$ del grupo de Lorentz. El dominio fundamental de $\Gamma_{\mathfrak{H}}$ está contenido en el dominio fundamental de $\Gamma_{\mathfrak{L}}$ y entonces, como se ha visto anteriormente, el grupo $PSL(2, \mathfrak{L})$ deja invariante la teselación hiperbólica cuyas celdas son la 24-celdas rectangular.

CAPÍTULO VIII

Cubrientes de Selberg y ejemplos de 4-variedades hiperbólicas .

En este capítulo se estudian *cubrientes de Selberg*; esto es, variedades que son espacios cubrientes y que por lo tanto se corresponden con subgrupos libres de torsión y de índice finito. El grupo $PSL(2, \mathfrak{L})$ es un subgrupo de las simetrías de la teselación hiperbólica $\{3, 4, 3, 4\}$. Esto es un corolario de los resultados en el capítulo IV. Entonces el dominio fundamental $\mathcal{P}_{\mathfrak{L}}^4$ de la acción del grupo $PSL(2, \mathfrak{L})$ es commensurable con un politopo hiperbólico regular y convexo rectangular $\{3, 4, 3\}$ que es una celda del panel $\{3, 4, 3, 4\}$ (ver [49]). En otras palabras, existe una subdivisión finita de los politopos $\mathcal{P}_{\mathfrak{L}}^4$ y $\{3, 4, 3\}$ por politopos congruentes. Los 24 vértices de $\{3, 4, 3\}$ son:

$$0, \infty, \pm \mathbf{i}, \pm \mathbf{j}, \pm \mathbf{k}, \pm \mathbf{i} \pm \mathbf{j} \pm \mathbf{k}, \frac{1}{2}(\pm \mathbf{i} \pm \mathbf{j} \pm \mathbf{k}). \quad (\text{VIII.1})$$

Además de los puntos 0 y ∞ los otros vértices son los vértices de los poliedros concéntricos en la frontera ideal de $\mathbf{H}_{\mathbb{H}}^1$: las unidades forman seis vértices cuya envolvente convexa es un octaedro inscrito en la esfera unitaria. El resto de puntos son los 16 vértices de dos cubos que son simétricos respecto a la isometría T .

Se ha considerado al grupo parabólico $A(2, \mathfrak{L})$ que consiste de las doce traslaciones $\mathbf{q} \mapsto \mathbf{q} + \alpha$, donde $\alpha = \pm \mathbf{i} \pm \mathbf{j}, \pm \mathbf{i} \pm \mathbf{k}, \pm \mathbf{j} \pm \mathbf{k}$ (todas las combinaciones de signos son permitidas).

El dominio fundamental $\mathcal{P}_{A(2, \mathfrak{L})}$ de $A(2, \mathfrak{L})$ es una chimenea, un cono ideal cuyo ápice es el punto ideal ∞ y cuya base es un poliedro con 12 caras, una por cada punto (vector de traslación) en los generadores. Los vectores de traslación forman la envolvente convexa de un cuboctaedro cuyos 12 vértices están en los puntos medios de las aristas del cubo con vértices $\pm \mathbf{i} \pm \mathbf{j} \pm \mathbf{k}$. Para obtener el dominio fundamental $\mathcal{P}_{A(2, \mathfrak{L})}$ se considera el dominio de Dirichlet de $A(2, \mathfrak{L})$, que es el poliedro cuyas caras son las mediatrices (bisectores perpendiculares) de los 12 vectores de traslación y el origen 0. Este es un dodecaedro rómbico \mathcal{R}_d^3 cuyas caras consisten de 12 rombos isométricos. \mathcal{R}_d^3 es un poliedro convexo equilátero con dos tipos de vértices. El dodecaedro rómbico \mathcal{R}_d^3 tiene 6 vértices $\pm \mathbf{i}, \pm \mathbf{j}, \pm \mathbf{k}$ adyacentes a cuatro rombos y 8 vértices $\frac{1}{2}(\pm \mathbf{i} \pm \mathbf{j} \pm \mathbf{k})$ adyacentes a tres rombos.

La acción del grupo parabólico $A(2, \mathfrak{L})$ da una teselación uniforme de la frontera ideal de $\mathbf{H}_{\mathbb{H}}^1$ que se identifica con \mathbb{R}^3 . Esta teselación tiene un grupo de simetría transitivo en celdas, caras y aristas. Las celdas son dodecaedros rómbicos congruentes. Las aureolas de los vértices son de dos tipos: tetraedros y cubos.

Siguiendo un enfoque similar al utilizado por Selberg (ver [57]) y tomando en cuenta los cálculos hechos para la teselación de $\mathbf{H}_{\mathbb{H}}^1$, se consideran cubrientes singulares (finitos) de las orbidades $\mathcal{O}_{\mathfrak{L}}^4 = \mathbf{H}_{\mathbb{H}}^1/PSL(2, \mathfrak{L})$ y $\mathcal{O}_{\mathfrak{H}}^4 = \mathbf{H}_{\mathbb{H}}^1/PSL(2, \mathfrak{H})$.

El teorema de Selberg dice que existen cubrientes suaves de las orbidades $\mathcal{O}_{\mathfrak{L}}^4$ y $\mathcal{O}_{\mathfrak{H}}^4$.

Proposición VIII.1. *Los órdenes mínimos de cubrientes de Selberg de las orbidades $\mathcal{O}_{\mathfrak{L}}^4$ y $\mathcal{O}_{\mathfrak{H}}^4$ son 96 y 288.*

Demostración. Esto se sigue como un corolario del cálculo de la característica de Euler. ■

En 1999, J. Ratcliffe y T. Tschantz encontraron 1171 4-variedades hiperbólicas no compactas con característica de Euler 1 mediante el apareamiento de lados en un dominio fundamental $\{3, 4, 3\}$ de la teselación $\{3, 4, 3, 4\}$, ver [52]. En 2004, D. Ivancić demostró que la 4-variedad no orientable con el número 1011 en la lista de Ratcliffe y Tschantz, esta es la 4-variedad M_{1011} con el mayor de los órdenes de los grupos de simetría, es el complemento de cinco 2-toros euclídeos en una 4-variedad cerrada cuyo grupo fundamental es isomorfo a $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Más aún, el doble cubriente orientable \tilde{M}_{1011} de la 4-variedad M_{1011} es un complemento de cinco 2-toros en la 4-esfera [32]. En 2008 Ivancić demostró que esta 4-esfera tiene la misma topología que la 4-esfera diferenciable estándar y por lo tanto no es una 4-esfera exótica, ver [34]. En el capítulo X de esta tesis se proporcionan diagramas de este enlace que muestran su clase de isotopía.

§ 1. Un ejemplo por J. Ratcliffe y T. Tschantz de una 4-variedad hiperbólica.

En esta sección se estudia la hermosa construcción de una 4-variedad hiperbólica geodésicamente completa, no orientable y de volumen finito con seis cúspides cuyas secciones transversales son homeomorfas a $\mathbb{S}^1 \times \mathbf{K}^2$, donde \mathbf{K}^2 es la botella de Klein. Se considera la 4-bola unitaria abierta \mathbf{B}^4 de \mathbb{H} con la métrica de Poincaré (ver [49]). Sea \mathbf{C}_{24} el politopo convexo regular llamado la 24-celdas cuyos vértices son las unidades de Hurwitz. Hay 24 caras que son octaedros hiperbólicos regulares, rectangulares e ideales. Dada una cara F hay una cara opuesta $-F$ que es la cara diametralmente opuesta a F (la imagen de F bajo multiplicación por -1). Se identifica F con $-F$ mediante una composición que consiste de una reflexión con respecto al hiperplano que contiene a F seguido de multiplicación por -1 . Esta composición es una isometría hiperbólica que invierte la orientación y manda a \mathbf{C}_{24} sobre una celda congruente adyacente de la teselación determinada por la 24-celda. Este apareamiento de cada cara con su opuesta tiene el efecto de crear una 4-variedad hiperbólica no singular, no orientable y con 6 cúspides. El cubriente doble orientable es una 4-variedad hiperbólica. En 2005, Ratcliffe, Tschantz e Ivancić demostraron que existe una docena de ejemplos de 4-variedades hiperbólicas no orientables de esta lista de 1170 4-variedades cuyos cubrientes dobles orientables son complementos de cinco o seis superficies euclídeas (toros y botellas de Klein) en la 4-esfera, ver [33].

Ratcliffe demostró que tres de estos doce complementos pueden ser usados para construir 4-variedades aesféricas que son 4-esferas de homología mediante rellenados de Dehn (ver [50]).

B. Martelli y A. Kolpakov [45] encontraron una 4-variedad hiperbólica de volumen finito con una única cúspide. Este es el primer ejemplo de una 4-variedad con estas propiedades y fue obtenida mediante pegar 4 copias de la 24-celdas hiperbólica rectangular. Por otra parte, Slavich [?] encontró dos nuevos ejemplos de 4-variedades hiperbólicas no orientables y no compactas de volumen finito con una única cúspide y de volumen mínimo. Este par de 4-variedades se obtuvieron mediante pegar 2 copias de la 24-celdas hiperbólica rectangular. Finalmente, Slavich en [?] encontró una 4-variedad hiperbólica con frontera totalmente geodésica. La frontera sólo tiene un componente conexo que es una 3-variedad hiperbólica de volumen finito la cuál es el complemento de un enlace en la 3-esfera. Esta 4-variedad también se obtiene mediante pegar 2 copias de la 24-celdas hiperbólica rectangular.

En el siguiente capítulo se mostrará un procedimiento para encontrar la topología de 3-variedades hiperbólicas que después se generalizará para 4-variedades.

§ 1.1. Cubrientes de Selberg en dimensión 5

Por un teorema de Selberg (ver [57]) existen orbidades buenas que son cubrientes finitos de las

orbidades modulares cuaterniónicas de dimesnión 4 y 5

$$1. p_1 : \tilde{\mathcal{O}}_{\mathbb{H}(\mathbb{Z})}^5 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{H}(\mathbb{Z})}^5 := \mathbf{H}_{\mathbb{R}}^5 / \text{PSL}(2, \mathbb{H}(\mathbb{Z})),$$

$$2. p_2 : \tilde{\mathcal{O}}_{\mathbb{H}ur(\mathbb{Z})}^5 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{H}ur(\mathbb{Z})}^5 := \mathbf{H}_{\mathbb{R}}^5 / \text{PSL}(2, \mathbb{H}ur(\mathbb{Z})),$$

$$3. p_3 : \tilde{\mathcal{O}}_{\mathfrak{L}}^4 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathfrak{L}}^4 := \mathbf{H}_{\mathbb{H}}^1 / \text{PSL}(2, \mathfrak{L})$$

$$4. p_4 : \tilde{\mathcal{O}}_{\mathfrak{H}}^4 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathfrak{H}}^4 := \mathbf{H}_{\mathbb{H}}^1 / \text{PSL}(2, \mathfrak{H})$$

donde $\tilde{\mathcal{O}}_{\mathbb{H}(\mathbb{Z})}^5$ y $\tilde{\mathcal{O}}_{\mathbb{H}ur(\mathbb{Z})}^5$ son 5-variedades hiperbólicas y $\tilde{\mathcal{O}}_{\mathfrak{L}}^4$ y $\tilde{\mathcal{O}}_{\mathfrak{H}}^4$ son 4-variedades hiperbólicas. Las 4 son no compactas pero de volumen hiperbólico finito.

CAPÍTULO IX

Topología de variedades hiperbólicas.

La topología estudia la forma de los espacios, la forma global o local, la forma intrínseca y extrínseca bajo deformaciones continuas. Dos espacios son *homeomorfos* (misma forma global intrínseca) si existe una biyección continua entre ellos, con inversa continua. Dos espacios son *isotópicos* (misma forma global extrínseca) si se puede deformar uno continuamente en el otro mediante una función definida en su espacio ambiente. Por ejemplo el nudo trébol es homeomorfo al nudo ocho pero no son isotópicos.

§ 1. Nudos y enlaces.

Un *enlace* en una n -variedad cerrada y conexa N^n es la clase bajo deformaciones continuas (isotopías) de un encaje suave $k : A^{n-2} \rightarrow N^n$ de una colección finita A^{n-2} de $(n-2)$ -subvariedades inmersas en N^n . Si el enlace consta de un sólo componente se le conoce como *nudo*.

Un enlace es *dócil*, del inglés “tame”, si puede ser engrosado; es decir, existe una vecindad tubular regular de A^{n-2} o, equivalentemente, podemos extenderlo a un encaje regular de $A^{n-2} \times \mathbf{D}^2$ en N^n , donde \mathbf{D}^2 es el disco 2-dimensional. Todos los enlaces que se mencionan en esta tesis son dóciles.

Para estudiar el tipo de isotopía de un nudo o enlace se consideran diagramas regulares del encaje. También se considera el *complemento* del enlace $N^n - A^{n-2}$ o el *exterior* $\overline{N^n - A^{n-2}}$; esto es, remover de N^n una vecindad tubular regular cerrada o abierta de A^{n-2} , respectivamente. Ambas variedades tienen el mismo grupo fundamental. Una diferencia entre el complemento y el exterior de un enlace es que el complemento $N^n - A^{n-2}$ es una variedad no compacta y el exterior $\overline{N^n - A^{n-2}}$ es una variedad compacta con frontera $\mathbf{S}^1 \times A^{n-2}$. Dicho de otro modo, el enlace A^{n-2} en el complemento $N^n - A^{n-2}$ representa una punta en la variedad N^n y el enlace A^{n-2} en el exterior $\overline{N^n - A^{n-2}}$ representa un componente de la frontera de N^n .

§ 1.1. Hiperbolicidad de complementos

Dada una n -variedad cerrada N^n se dice que M^n es un *complemento* en N^n de codimensión 2 si existe un encaje de una $(n-2)$ -subvariedad cerrada A^{n-2} que tiene una vecindad tubular en N^n tal que $M^n = N^n - A^{n-2}$. Un *enlace hiperbólico* es un complemento que admite una métrica riemanniana completa de curvatura constante negativa, esto es, una estructura hiperbólica. Un *nudo hiperbólico* es un enlace hiperbólico que consta de un sólo componente.

Por definición, los nudos hiperbólicos poseen un aspecto dual: geometría y topología. La geometría hiperbólica local y global y las topologías del espacio ambiente N^n y del espacio encajado A^{n-2} , salvo homeomorfismos; y del encaje que anuda, salvo isotopía k .

Presentación de Wirtinger.

En dimensión 3, Wirtinger encontró una construcción para obtener una presentación del grupo fundamental $\pi_1(\mathbf{S}^3 - A)$ del complemento de un enlace a partir de un diagrama regular. Se tiene un generador por cada arco en el diagrama y una relación de cuatro letras por cada cruce del diagrama.

En esta tesis no se utiliza esta construcción pero se recalca que a partir de un diagrama regular de un enlace se obtiene una presentación del grupo fundamental de su complemento.

Más aún, si se tiene el encaje de una gráfica en \mathbb{S}^3 ; esto es, una gráfica anudada, se tiene una generalización del método de Wirtinger para encontrar una presentación del grupo fundamental de su complemento.

§ 1.2. Historia de los nudos y enlaces hiperbólicos.

Riley y Waldhausen mostraron en 1966 que es posible dar una estructura hiperbólica geodésicamente completa y de volumen finito a las 3-variedades no compactas que se obtienen como los complementos de ciertos nudos y enlaces de circunferencias encajadas en la 3-esfera \mathbb{S}^3 . Para ello Riley dibujó los diagramas de proyecciones regulares de algunos nudos y enlaces. Calculó presentaciones de los grupos fundamentales del complemento en \mathbb{S}^3 mediante el método de Wirtinger. Después encontró representaciones discretas y libres de torsión en el grupo de isometrías hiperbólicas del 3-espacio hiperbólico. Debido a un resultado de Waldhausen¹ con esta representación es posible garantizar que la 3-variedad hiperbólica es homeomorfa al complemento del nudo o del enlace en \mathbb{S}^3 . Diez años más tarde, Bill Thurston escribió unas notas acerca de la geometría y la topología de 3-variedades en donde se muestra como visualizar la estructura hiperbólica del complemento en \mathbb{S}^3 del nudo figura-ocho, del enlace de Whitehead (de dos componentes) y del enlace de anillos Borromeos (de tres componentes) a partir de dar una estructura hiperbólica de complejo celular lineal por pedazos que se obtiene mediante la identificación por isometrías de los lados de poliedros ideales (es decir, con los vértices en el infinito) en el 3-espacio hiperbólico \mathbf{H}^3 ; ver [62] y [63].

Este procedimiento también ha sido analizado por J. Ratcliffe en su libro [49] acerca de la fundación de las variedades hiperbólicas y por Francis [21] que elaboró una impresionante serie de dibujos acerca del complemento del nudo hiperbólico figura-ocho y de la fibración por circunferencias que atraviesan transversalmente una superficie homeomorfa a un toro menos un disco.

En este capítulo se analiza un método geométrico-topológico propuesto por D. Ivanišić en [34] para determinar si una 3-variedad hiperbólica no compacta pero de volumen finito es el complemento de un nudo o enlace de circunferencias anudadas en la 3-esfera y además, si éste es el caso, dibujar el diagrama de la clase de isotopía del enlace. Para describir el método vamos a usar como ejemplo el complemento de un enlace que es una subvariedad de un cubriente de Selberg de los grupos modulares cuaterniónicos. El nudo figura-ocho tiene la propiedad de que es el único nudo que tiene un diagrama alternante con cuatro cruces. En particular, es isotópico a la imagen que se produce cuando se le refleja en un espejo.

Los anillos borromeos tienen la propiedad de que si se elimina uno de los tres componentes del enlace entonces los otros dos componentes son isotópicos a circunferencias ajenas.

El complemento en \mathbb{S}^3 del nudo hiperbólico figura-ocho, del enlace de Whitehead y de los anillos borromeos son tres 3-variedades hiperbólicas con una, dos y tres puntas, respectivamente. Estas puntas corresponden a los componentes del nudo y de los enlaces que se han removido de la 3-variedad compacta ambiente, en este caso \mathbb{S}^3 .

El objetivo fundamental de este capítulo es visualizar la geometría y topología de estas 3-variedades hiperbólicas de volumen finito que son complementos. Se muestran cuatro maneras de presentarlas: el complemento del nudo o enlace en \mathbb{S}^3 que es una construcción puramente topológica, descomposiciones en asas pegadas por difeomorfismos, una estructura geométrica de complejo celular basada en identificar mediante isometrías los lados de poliedros y finalmente la estructura hiperbólica del

¹Si el grupo fundamental de una variedad hiperbólica es anti-isomorfo al grupo fundamental del complemento de un enlace en la 3-esfera entonces la variedad hiperbólica es homeomorfa al complemento. Un *anti-isomorfismo* entre dos grupos G y H es un isomorfismo de G al opuesto de H (o equivalentemente del opuesto de G a H).

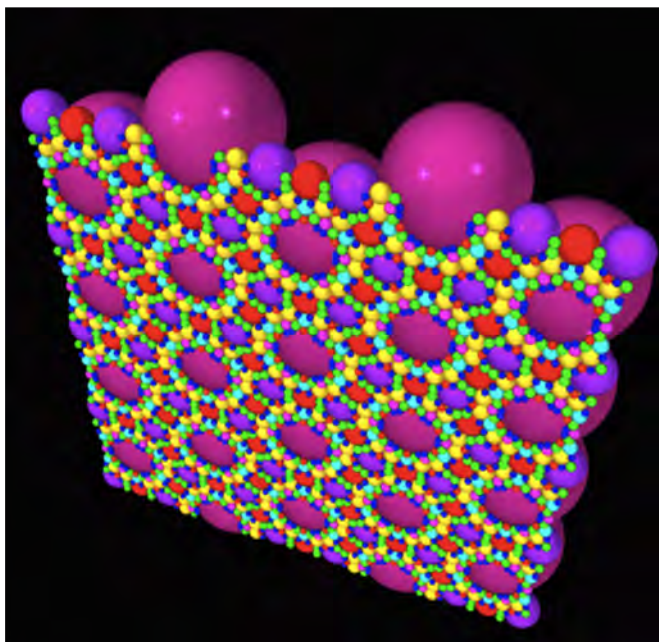


Figura 9.1. El mayor empaquetamiento de horiesferas que se obtiene de las regiones fundamentales asociadas a las representaciones del complemento del nudo en forma de ocho.

espacio cociente de la acción de un subgrupo discreto y libre de torsión del grupo de isometrías hiperbólicas. Se ha comenzado por la definición de variedad hiperbólica y ahora se explica brevemente el método que interrelaciona estas cuatro presentaciones.

Debido al teorema de rigidez de Mostow se tiene que si un nudo o enlace admite una estructura hiperbólica, entonces esta estructura es única. Por lo tanto los invariantes geométricos de la estructura hiperbólica se vuelven invariantes topológicos del nudo o enlace. Por ejemplo, el espectro de las longitudes de las geodésicas, el radio de inyectividad de las bolas hiperbólicas y el mayor empaquetamiento de horiesferas que se pueden obtener centradas en las puntas cuspidales. En la figura 9.1 se muestra un empaquetamiento de horiesferas que se obtiene de las regiones fundamentales asociadas a la representación del complemento del nudo en forma de ocho como dos tetraedros regulares ideales de los que se hablará más adelante.

§ 2. Método para dibujar enlaces hiperbólicos.

Una n -*orbidad hiperbólica* M^n es aquella que admite una métrica riemanniana de curvatura constante negativa. Luego, su cubriente universal es el espacio hiperbólico \mathbf{H}^n y su grupo fundamental admite una representación como un subgrupo kleiniano Γ discreto de isometrías hiperbólicas. Si la orbidad no tiene puntos singulares entonces es una *variedad* y en este caso su grupo fundamental admite una representación como un subgrupo libre de torsión.

Al considerar la región fundamental de la acción de Γ en el espacio hiperbólico \mathbf{H}^3 se obtiene una estructura como CW complejo geométrico de M^3 presentada como un poliedro hiperbólico P^3 con los lados 2-dimensionales identificados en parejas mediante isometrías hiperbólicas. Si M^3 es una 3-orbidad no compacta pero de volumen finito entonces el poliedro P^3 es un poliedro ideal; esto es con sus vértices en la esfera al infinito de \mathbf{H}^3 .

En cada vértice ideal de P^3 se considera una horibola suficientemente pequeña de manera que sólo interseque los lados de P^3 incidentes con este vértice ideal en el que se ha centrado la horibola. Se recorta la intersección con P^3 . El apareamiento hiperbólico de caras de P^3 induce un apareamiento euclideo de las aristas de los polígonos que se forman en la intersección de las horiesferas con P^3 llamados *aureolas* de los vértices ideales. De este modo, se obtiene la *parte gruesa* de M^3 que es una 3-orbidad compacta que denotamos por \bar{M}^3 .

La frontera de \bar{M}^3 son 2-orbidades cerradas euclideanas orientables. Si M^3 es una 3-variedad hiperbólica orientable entonces la frontera de \bar{M}^3 son superficies cerradas y por lo tanto son 2-toros; uno por cada ciclo de vértices ideales bajo la relación de equivalencia determinada por el apareamiento de lados. Por lo tanto, se pueden rellenar esos 2-toros al pegar 2-toros sólidos para obtener una 3-variedad cerrada N^3 y la 3-variedad hiperbólica M^3 es entonces el complemento de un enlace de circunferencias en N^3 y se puede escribir $M^3 = N^3 - K^1$.

Mediante recortar vecindades tubulares truncadas en las aristas truncadas y en los lados biselados de P^3 se obtiene una descomposición en asas (3-bolas con una regla de pegado) de \bar{M}^3 . Cada componente de la frontera de \bar{M}^3 es un 2-toro. Al rellenar las puntas de M^3 también es posible descomponer en asas a N^3 ; esto es, al pegar un toro sólido (expresado como la unión de una 2-asa y una 3-asa) pegado por la identidad en cada componente a la frontera. Un meridiano del 2-toro es la circunferencia donde añadir una 2-asa y un paralelo es una curva paralela e isotópica al corazón del toro sólido. Por lo tanto es isotópico al nudo que es un componente del enlace K^1 en N^3 cuyo complemento es \bar{M}^3 .

Dos descomposiciones en asas representan la misma 3-variedad si es posible pasar de una a la otra por medio de una secuencia finita de movimientos de asas. Luego, si N^3 es difeomorfa a la 3-esfera \mathbb{S}^3 entonces es posible eliminar asas en la descomposición de N^3 , además de isotopías y deslizamientos de asas, hasta obtener la descomposición estándar de \mathbb{S}^3 como la unión de dos 3-bolas pegadas por su frontera \mathbb{S}^2 que forman una 0-asa y una 3-asa. Si se ha ido tomando en cuenta la posición isotópica de los paralelos de los 2-toros componentes de la frontera de \bar{M}^3 en los diagramas de descomposición por asas en este proceso al final ha de quedar dibujado el diagrama clásico con las curvas cerradas simples isotópicas a los nudos componentes del enlace K^1 cuyo complemento en \mathbb{S}^3 es M^3 .

§ 3. Estructuras hiperbólicas en complementos de nudos y enlaces.

En esta sección se estudia la topología de variedades hiperbólicas y la geometrización de complementos de nudos y enlaces. En particular, se describen poliedros hiperbólicos fundamentales de las acciones de las representaciones de los grupos fundamentales de una 3-variedad que es una subvariedad geodésicamente completa de un cubriente de Selberg del grupo modular cuaterniónico de Verjovsky- Lipschitz, del nudo figura-ocho, del enlace de Whitehead de dos componentes y del enlace de los anillos borromeos de tres componentes. Además se estudia la estructura de complejo celular lineal por pedazos como el resultado del apareamiento por isometrías de los lados de los poliedros fundamentales.

§ 3.1. Los sólidos platónicos hiperbólicos ideales.

En el 3-espacio euclideo \mathbb{R}^3 considere la 2-esfera \mathbf{S}^2 y su interior, la 3-bola \mathbf{B}^3 , de radio 1 y centrada en el origen,

$$\mathbf{B}^3 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < 1\},$$

$$\mathbf{S}^2 = \partial\mathbf{B}^3 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}.$$

Los sólidos platónicos se representan en la notación de Schläfli por el símbolo $\{p, q\}$ formado por dos números enteros ordenados $p, q > 2$ tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} > \frac{1}{2}$. Esta desigualdad se puede obtener de muchas maneras (condiciones geométricas respecto a los ángulos diedrales de los poliedros, condiciones topológicas respecto de la regularidad de las incidencias de las aristas en los vértices, condiciones algebraicas respecto a los órdenes de los grupos de simetrías, etc...). El símbolo $\{p, q\}$ de la notación de Schläfli significa que las caras del poliedro son p -ángonos regulares y que en cada uno de sus vértices inciden q caras p -gonales (o equivalentemente q aristas).

Se tienen 5 sólidos platónicos $\{3, 3\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}, \{4, 3\}, \{5, 3\}$ que son el tetraedro, el octaedro, el icosaedro, el cubo y el dodecaedro, respectivamente. Estos poliedros son convexos y regulares.

Considere un octaedro \mathcal{O}^3 inscrito en la 2-esfera \mathbf{S}^2 . Por ejemplo, considere explícitamente el octaedro \mathcal{O}^3 formado por la envolvente convexa (esto es, el menor de los convexos), que contiene a los 6 vértices en la intersección de \mathbf{S}^2 con los 3 ejes coordenados.

Si se dota a \mathbf{B}^3 con la métrica riemanniana del modelo proyectivo del 3-espacio hiperbólico se obtiene un sólido platónico hiperbólico *ideal*, esto es inscrito en la esfera al infinito (con sus vértices en ella) y sus lados son geodésicamente completos dado que las geodésicas y planos hiperbólicos en este modelo proyectivo del espacio hiperbólico están representados en la intersección de líneas y planos euclidianos con la bola \mathbf{B}^3 . Dado que partimos de un poliedro euclideo regular, se obtiene un poliedro hiperbólico ideal regular, esto es porque los grupos de simetrías del poliedro euclideo y del poliedro hiperbólico son isomorfos y actúan transitivamente en sus vértices, sus aristas y sus caras. Por lo tanto, el ángulo diedral en cada punto de cada una de las aristas de los sólidos platónicos euclidianos y de los equivalentes hiperbólicos es el mismo en cada caso.

Ahora cambiamos de métrica. En el modelo conforme de la 3-bola del espacio hiperbólico, los vértices ideales de los poliedros son los mismos que en el modelo proyectivo, pero los lados cambian. Por ejemplo, los lados del octaedro hiperbólico \mathcal{O}^3 determinan ocho 2-esferas de radio 1 centradas en los puntos en \mathbb{R}^3 cuyas coordenadas tienen un cero y en las otras dos coordenadas un ± 1 . Los ocho centros de estas esferas son los vertices de un cubo inscrito en la 2-esfera ideal \mathbf{S}^2 . Las ocho 2-esferas son ortogonales a $\partial\mathbf{B}^3$, por lo tanto determinan hiperplanos hiperbólicos completamente geodésicos en \mathbf{B}^3 . Cualesquiera dos de estas 2-esferas euclidianas se intersectan ortogonalmente o son tangentes y el punto de tangencia está en $\partial\mathbf{B}^3$, o son disjuntas. Ver figura 9.2.

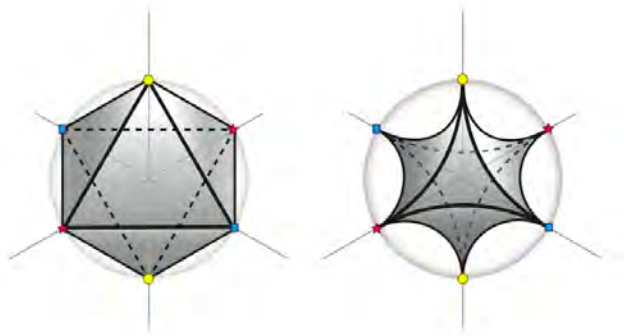


Figura 9.2. Un octaedro hiperbólico ideal \mathcal{O}^3 en los modelos proyectivo y conforme de la 3-bola \mathbf{B}^3 del 3-espacio hiperbólico.

A partir de los modelos proyectivo o conforme y mediante las isometrías de Cayley, se obtiene el modelo hiperbólico del semiespacio superior

$$\mathbf{H}^3 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_3 > 0\} \cup \{\infty\}$$

con la métrica $ds_{\mathbf{H}^3}^2 = \frac{dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2}{x_3^2}$. La frontera ideal del espacio hiperbólico $\partial_{\infty}\mathbf{H}^3$ que en los modelos de las 3-bolas es la 2-esfera $\mathbb{S}^2 = \partial\mathbf{B}^3$, se transforma por las isometrías de Cayley en la compactificación del plano por un punto $\mathbb{R}^2 \cup \infty$. Ver figura 9.3. Supóngase que el vértice ideal $(-1, 0, 0)$ de \mathcal{O}^3 en \mathbf{B}^3 se transforma en el punto al infinito ∞ en \mathbf{H}^3 . Los lados de \mathcal{O}^3 son ocho triángulos ideales que inciden en grupos de cuatro en cada vértice ideal. En particular, los 4 lados incidentes en ∞ forman una chimenea de base cuadrada ortogonal a la frontera ideal del espacio hiperbólico que se denota por $\partial_{\infty}\mathbf{H}^3$. Las aristas incidentes en ∞ son las 4 geodésicas hiperbólicas verticales que unen a ∞ con sus vértices adyacentes los cuales se han transformado en los 4 puntos ideales $(\pm 2, 0, 0)$ y $(0, \pm 2, 0)$ que forman un cuadrado en $\partial_{\infty}\mathbf{H}^3$. El vértice ideal $(1, 0, 0)$ de \mathcal{O}^3 opuesto a ∞ se transforma en el origen $(0, 0, 0)$ que es el baricentro de este cuadrado y a él inciden los 4 triángulos formados por las geodésicas de los lados del cuadrado y las que unen sus vértices a su baricentro. El ángulo diedral de cada arista de \mathcal{O}^3 es el mismo y es un ángulo recto $\pi/2$ que se puede obtener fácilmente mediante las aristas asintóticas a ∞ y el cuadrado en la base.

Resumiendo, \mathcal{O}^3 es un octaedro hiperbólico que es convexo, regular, rectangular, ideal y no compacto aunque de volumen finito.

El octaedro \mathcal{O}^3 forma un *kaleidoscopio* o *panal* hiperbólico; es decir, si se refleja \mathcal{O}^3 en cada uno de sus lados se obtiene un poliedro de mayor tamaño, formado por varias copias de \mathcal{O}^3 . Como el ángulo diedral de \mathcal{O}^3 es $\pi/2$, se pueden pegar 4 copias de \mathcal{O}^3 alrededor de una arista sin traslaparse y llenando por completo el espacio. Por lo tanto, si se continua reflejando *ad infinitum* en sus lados triangulares, el espacio hiperbólico \mathbf{H}^3 es enmosaicado; esto es, llenado completamente sin traslapar, mediante una infinidad de octaedros convexos, ideales, regulares y rectangulares isométricos a \mathcal{O}^3 . Ver figura 9.4 y 9.5. Este mosaico es un kaleidoscopio o panal regular hiperbólico 3-dimensional con infinitas células que se representan en la notación de Schläfli por $\{3, 4, 4\}$. Los vértices ideales de los octaedros asintóticos a ∞ se distribuyen en el plano $\partial_{\infty}\mathbf{H}^3$ como los vértices y baricentros del enmosaicado clásico por cuadrados (4 por cada vértice) de \mathbb{R}^2 que se representan en la notación de Schläfli por $\{4, 4\}$.

La construcción de estos panales regulares hiperbólicos es análoga para los demás sólidos platónicos euclidianos: el tetraedro, el cubo, el dodecaedro y el icosaedro que se denotan por $\{3, 3\}$, $\{4, 3\}$, $\{5, 3\}$, $\{3, 5\}$, respectivamente. Los panales regulares hiperbólicos asociados se denotan por $\{3, 3, 6\}$, $\{4, 3, 5\}$, $\{5, 3, 5\}$, $\{3, 5, 3\}$, respectivamente.

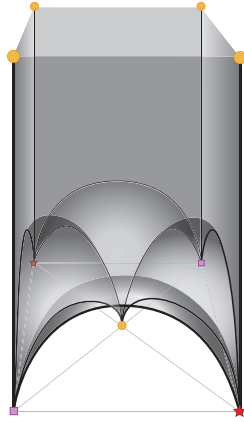


Figura 9.3. El octaedro \mathcal{O}^3 en el modelo hiperbólico del semiespacio superior \mathbf{H}^3 con uno de sus vértices ideales en el punto al infinito ∞ .

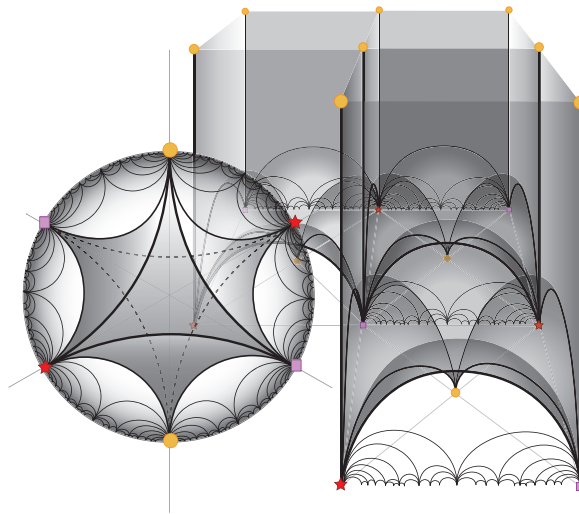


Figura 9.4. El poliedro \mathcal{Q}^3 es el mosaico del panel regular $\{3, 4, 4\}$.

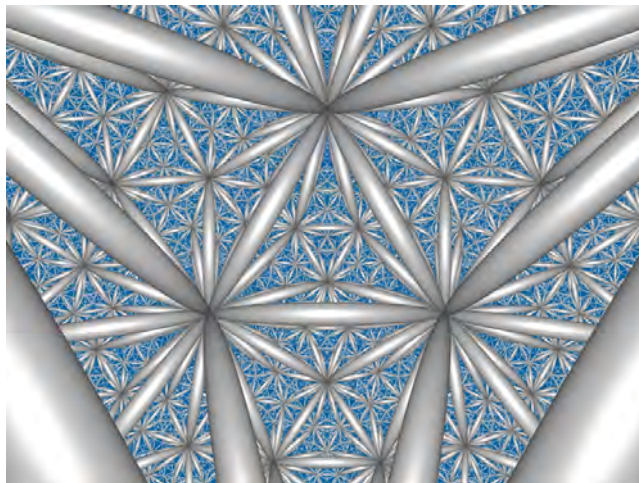


Figura 9.5. El poliedro \mathcal{Q}^3 es el mosaico del panel regular $\{3, 4, 4\}$.

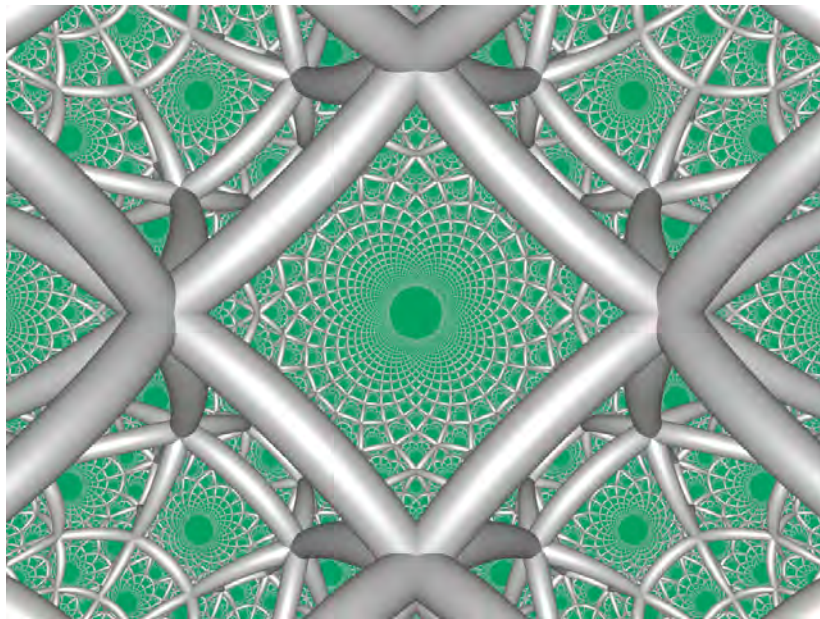


Figura 9.6. El panal regular dual $\{4, 4, 3\}$ del panal regular $\{3, 4, 4\}$.

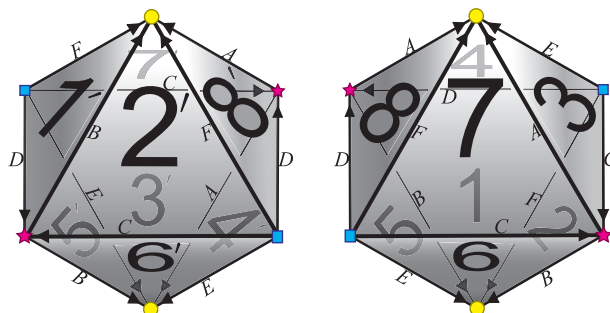


Figura 9.7. Los octaedros \mathcal{O}^3 y $\mathcal{O}^{3'}$ con sus lados identificados.

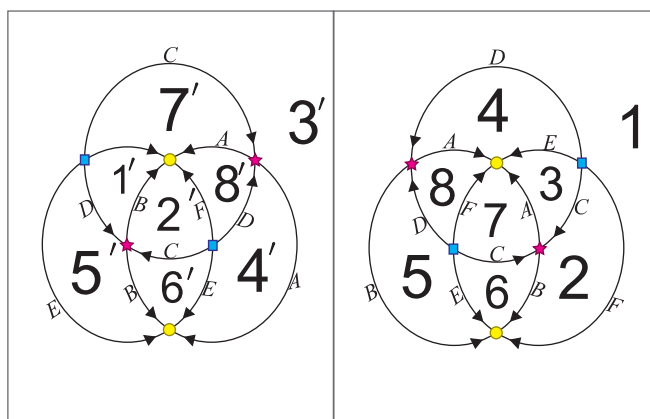


Figura 9.8. Proyección estereográfica (bajo isotopía) de los octaedros \mathcal{O}^3 y $\mathcal{O}^{3'}$ con sus lados identificados.

§ 3.2. Un poliedro hiperbólico con sus caras apareadas.

Sean \mathcal{O}^3 y $\mathcal{O}^{3'}$ dos octaedros hiperbólicos de $\{3, 4, 4\}$. A continuación se obtendrá una variedad hiperbólica como un complejo celular a partir de estos dos octaedros y la identificación de sus lados por parejas mediante isometrías hiperbólicas. El grupo fundamental de esta 3-variedad hiperbólica es isomorfo a un subgrupo de isometrías y de simetrías del panel hiperbólico regular $\{3, 4, 4\}$ que preserva el pegado de los lados.

Como regla de identificación de las k -caras, se etiquetan los lados, aristas y vértices de \mathcal{O}^3 y $\mathcal{O}^{3'}$ de acuerdo a la figura 9.7.

En la figura 9.8 se ha proyectado estereográficamente la frontera $\partial\mathcal{O}^3 = \mathbf{S}^2 = \partial\mathcal{O}^{3'}$ de los octaedros en dos planos $\mathbb{R}^2 \cup \infty$. Imagine que la figura 9.8 se encuentra en un plano \mathbb{R}^2 que es la frontera de dos semiespacios de \mathbb{R}^3 y que el semiespacio en donde usted se encuentra es el exterior de \mathcal{O}^3 y $\mathcal{O}^{3'}$ de manera que mira de frente a estos poliedros de forma topológicamente esférica que se han inflado mucho, infinitamente mucho en $\mathbb{R}^3 \cup \infty$.

Con el fin de trabajar solamente con un poliedro hiperbólico convexo, se identifica un par de lados de los dos octaedros rectangulares \mathcal{O}^3 y $\mathcal{O}^{3'}$. En la figura 9.9 se toman adyacentes en el panel $\{3, 4, 4\}$ los dos octaedros \mathcal{O}^3 y $\mathcal{O}^{3'}$, identificando los lados que se habían etiquetado con el número 8 para formar un poliedro convexo que llamaremos \mathcal{P}^3 .

Sea M^3 el complejo celular hiperbólico que proviene de identificar en parejas y mediante isometrías los lados de \mathcal{P}^3 como en la figura 9.9.

Para cada lado triangular $S^2 = 1, \dots, 8$ (ó $S^{2'} = 1', \dots, 8'$) de \mathcal{P}^3 ; existe una única isometría hi-

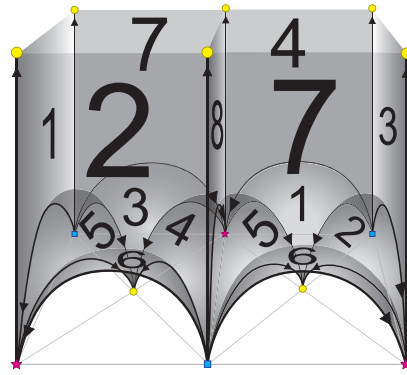


Figura 9.9. El poliedro \mathcal{P}^3 en el modelo del semiespacio hiperbólico con sus lados identificados.

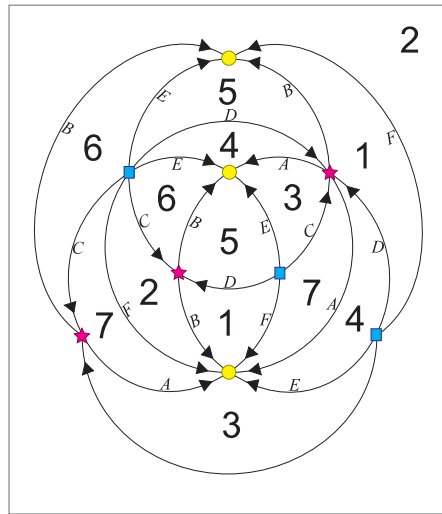


Figura 9.10. Proyección de la frontera $\partial\mathcal{P}^3 \cong \mathbf{S}^2$ en un plano $\mathbb{R}^2 \cup \infty$.

perbólica s (ó s^{-1} , respectivamente) que invierte la orientación de \mathbf{H}^3 y que manda $\mathcal{O}^{3'}$ en \mathcal{O}^3 y el lado $S^{2'}$ en S^2 (o manda \mathcal{O}^3 en $\mathcal{O}^{3'}$ y el lado $S^{2'}$ en S^2 , respectivamente). La isometría s deja invariante el panel $\{3, 4, 4\}$, además preserva el poliedro \mathcal{P}^3 y la identificación de sus lados.

En la figura 9.10 se ha proyectado radial y estereográficamente la frontera $\partial\mathcal{P}^3 \cong \mathbf{S}^2$ en un plano $\mathbb{R}^2 \cup \infty$. Además de haberse realizado algunas isotopías. Imagine otra vez que el semiespacio en donde se encuentra usted es el exterior de \mathcal{P}^3 .

§ 3.3. Ciclos del pegado.

El apareamiento de los lados de los octaedros \mathcal{O}^3 y $\mathcal{O}^{3'}$ determina una relación de equivalencia en el conjunto de todas las k -caras de \mathcal{P}^3 . Las clases de equivalencia se llaman k -ciclos del apareamiento.

Los 16 lados de \mathcal{O}^3 y $\mathcal{O}^{3'}$ forman los 14 lados triangulares ideales en \mathcal{P}^3 que se identifican por parejas formando 7 ciclos de lados los cuales se han enumerado en las figuras. La isometría que identifica a una pareja de lados invierte la orientación del poliedro \mathcal{P}^3 , por lo que el complejo celular M^3 que proviene de este apareamiento es orientable. Las 24 aristas de \mathcal{O}^3 y $\mathcal{O}^{3'}$ se identifican en grupos de 4 formando 6 ciclos de aristas que se han marcado por las letras A, \dots, F .

Dado que \mathcal{P}^3 es un poliedro hiperbólico rectangular y no tiene vértices reales, el apareamiento de lados de \mathcal{P}^3 es propio; esto es, alrededor de cada punto del poliedro \mathcal{P}^3 existe una vecindad en el complejo celular M^3 isométrica a una 3-bola en \mathbf{H}^3 .

Para los puntos en el interior del poliedro esto es obvio, para los puntos en el interior de las caras triangulares se tienen dos imágenes por cada punto bajo la acción del pegado de caras, esto es el apareamiento de caras. Por lo tanto se tiene media bola hiperbólica en cada una de las dos caras del poliedro que se identifican en una pareja. Para los puntos en el interior de las aristas del poliedro se tienen 4 imágenes por cada punto bajo la acción del pegado de caras, por lo tanto se tiene un gajo de orden $\frac{\pi}{2}$ de una bola hiperbólica en cada una de las caras del poliedro que se identifican en esta arista.

Debido a que en este caso los poliedros hiperbólicos no tienen vértices que no sean ideales ya se tiene que para cada punto existe una vecindad isométrica a una 3-bola hiperbólica. En el caso de trabajar con un poliedro hiperbólico con algunos vértices no ideales, esto se identificarán en ciclos de orden mayor a 2 al igual que las aristas y dependiendo de que poliedro se forma en la aureola de los vértices y aristas que se pegan en un sólo ciclo se puede obtener una estructura hiperbólica de curvatura constante. Si existen puntos en el poliedro que no tienen la misma curvatura que los demás puntos entonces el poliedro hiperbólico con este apareamiento de caras produce una orbidad hiperbólica.

Las vecindades en M^3 de algunos vértices y sus ciclos: en el interior de \mathcal{P}^3 , en sus lados y en sus aristas. Se muestran como gajos que tras identificarse por el apareamiento de lados de \mathcal{P}^3 , forman 3-bolas hiperbólicas.

Por lo tanto, M^3 admite una estructura como 3-variedad hiperbólica, orientable y no compacta pero de volumen finito.

§ 4. Descomposición geométrica de variedades hiperbólicas.

El apareamiento de los lados del poliedro fundamental \mathcal{P}^n de una n -variedad hiperbólica M^n induce una identificación de sus vértices ideales y genera en ellos una relación de equivalencia. Los ciclos o las clases de equivalencia se les llama *puntas cuspidales* de la n -variedad hiperbólica M^n .

Una propiedad muy interesante de las variedades hiperbólicas es el hecho de que pueden no ser compactas y aún así tener volumen finito. En este caso las puntas abiertas de las n -variedades deben ser un conjunto finito de *cúspides* hiperbólicas de volumen finito homeomorfas al producto $[0, \infty) \times \Sigma_{euc}$ de un semirayo $[0, \infty)$ y una $(n - 1)$ -variedad Euclideana cerrada Σ_{euc} llamada la *sección* de la cúspide cuya geometría es modelada en horiesferas que son subespacios de curvatura constante 0. Para el caso 3-dimensional, las únicas superficies cerradas que admiten una estructura geométrica Euclideana son el toro y la botella de Klein. Para el caso más general de 3-orbitadas con singularidades las secciones de las cúspides son algunas de las 2-orbitadas euclidianas asociadas a los 17 grupos cristalográficos que existen y actúan en el plano \mathbb{R}^2 .

Al conjunto de puntas de una n -variedad hiperbólica de volumen finito se le conoce como la *parte delgada*.

Por cada punta en M^n se elige una sección que delimita la cúspide con el componente en la frontera de una n -variedad compacta $\bar{M}^n \subset M^n$. La n -variedad \bar{M}^n se conoce como la *parte gruesa* de M^n . En el caso de n -variedades hiperbólicas M^n que son homeomorfas a complementos 2-codimensionales de un conjunto finito de $(n - 2)$ -variedades euclidianas L^{n-2} en n -variedades cerradas N^n , esto es $M^n = N^n - L^{n-2}$; se identifica a la parte gruesa \bar{M}^n con el exterior del enlace hiperbólico.

La union por la frontera de la parte delgada y la parte gruesa compone a M^n .

§ 4.1. La parte delgada.

Se puede ver en la figura 9.10 que en el ejemplo formado por 2 octaedros M^3 tiene 12 vértices ideales que se identifican en 3 puntas abiertas de 4 vértices ideales cada una y se han marcado en las figuras como un círculo, una estrella y un cuadrado.

Los componentes de la frontera de \bar{M}^3 se obtienen del apareamiento de las fronteras de vecindades en $\bar{\mathcal{P}}^3$ de sus vértices ideales. Sea $[v]$ la punta abierta de un vértice ideal v de \mathcal{P}^3 y sea Σ_v una horiesfera centrada en v , suficientemente pequeña como para que sólo intersecte los lados de \mathcal{P}^3 incidentes con v .

La *aureola* del vértice ideal v es el polígono euclideo que se obtiene en la intersección de \mathcal{P}^3 con Σ_v y se denota por $L(v)$. La clase de semejanza del polígono $L(v)$ no depende de la elección de la horiesfera Σ_v . Para cada punta $[v]$ de M^3 , considere que las horiesferas $\{\Sigma_u : u \in [v]\}$ son lo suficientemente pequeñas como para que las aureolas de los vértices ideales de \mathcal{P}^3 , sean polígonos disjuntos.

El apareamiento por isometrías hiperbólicas de los lados de \mathcal{P}^3 determina (por restricción) un apareamiento por isometrías euclidianas de los lados en las aureolas $L(v)$ de todos sus vértices ideales $v \in [v]$.

La *aureola*, o la *sección* de la cúspide, de la punta $[v]$ de M^3 es el espacio que se denota por $L[v]$ obtenido al identificar por isometrías euclidianas, los lados de las aureolas $\{L(u) : u \in [v]\}$. La aureola $L[v]$ es una superficie cerrada y dado que M^3 es una 3-variedad orientable (por la manera en la que se aparean los lados de \mathcal{P}^3), entonces $L[v]$ es un 2-toro euclideo. Más aún, la aureola $L[v]$ es geodésicamente completa dado que es compacta y se identifica propiamente por isometrías euclidianas, por lo tanto M^3 también es una variedad plana geodésicamente completa.

En la figura 9.11 se muestra explícitamente la estructura celular de las aureolas $L[v]$ de los ciclos de vértices ideales de \mathcal{P}^3 , estos son tres 2-toros que denotaremos por T_I^2, T_{II}^2 y T_{III}^2 .

§ 4.2. La parte gruesa.

Ahora vamos a truncar el poliedro \mathcal{P}^3 para obtener una 3-variedad compacta con frontera. Para cada uno de los vértices ideales de las tres cúspides $\{I, II, III\}$ de M^3 , se recortan de \mathcal{P}^3 su intersección con las horibolas abiertas y disjuntas cuyas fronteras son las aureolas de los vértices ideales de \mathcal{P}^3 . De esta manera se obtiene un poliedro compacto hiperbólico $\bar{\mathcal{P}}^3$ y un apareamiento de sus lados inducido por el apareamiento de los lados de \mathcal{P}^3 , que determinan un complejo celular \bar{M}^3 difeomorfo a la parte gruesa de M^3 . Más aún, M^3 es un retracto por deformación de \bar{M}^3 .

En nuestro ejemplo, \bar{M}^3 es una 3-variedad hiperbólica, compacta, orientable y con tres 2-toros en su frontera, uno por cada cúspide de M^3 . Por lo tanto, \bar{M}^3 es difeomorfo al complemento de tres toros sólidos abiertos en una 3-variedad cerrada N^3 ; en otras palabras, \bar{M}^3 es difeomorfo al exterior de un enlace de tres circunferencias en N^3 , una en el corazón $\mathbf{S}^1 \times \{0\}$ de cada toro sólido abierto $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{B}^2$. Más aún, como M^3 es difeomorfa al interior de \bar{M}^3 entonces M^3 es difeomorfa al complemento de un enlace A^1 de tres circunferencias en una 3-variedad cerrada N^3 , de manera que $M^3 = N^3 - A^1$.

§ 5. Descomposición en asas.

En esta sección se va a describir el hecho de que una 3-variedad hiperbólica M^3 es el complemento de un enlace en una 3-variedad cerrada N^3 . Además se mostrará que la 3-variedad N^3 y el enlace A^1 se pueden obtener a partir de M^3 . Para ello hay que rellenar mediante toros sólidos cada uno de los tres 2-toros que son componentes de la frontera de la 3-variedad compacta \bar{M}^3 .

D. Ivanić ha propuesto un método en [34] y [35] para obtener un diagrama de la clase de isotopía de los nudos o enlaces hiperbólicos en la 3-esfera. Comienza con una presentación del exterior del enlace A^1 que es la 3-variedad cerrada \bar{M}^3 equivalente a la estructura de complejo celular con la que se ha estado trabajando, como un poliedro hiperbólico ideal truncado por horibolas y una identificación de sus caras mediante isometrías hiperbólicas. Se trata de descomposición en asas: un método que presenta a una 3-variedad suave y compacta como una colección finita de 3-bolas cerradas con interiores disjuntos, pegadas entre sí por su frontera de manera semejante al clásico juego de armar rompecabezas. Para esta sección se pueden consultar las referencias [26] y [34].

§ 5.1. Asas.

Las piezas en esta descomposición son 3-bolas. Cada una de estas 3-bolas se factoriza como $h_j^3 = D^3 = D^j \times D^{3-j}$; donde $j \in \{0, 1, 2, 3\}$, y se puede pegar (o despegar) por $\partial D^j \times D^{3-j}$ a una 3-variedad compacta X^3 , mediante un encaje $\phi : \partial D^j \times D^{3-j} \rightarrow \partial X$. Una 3-bola cerrada h_j^3 con estas características de factorización y regla de pegado se le denomina j -asa 3-dimensional.

Las asas llevan un *índice* j que indica como se factoriza la 3-bola de manera que se puede escribir $h_j^3 = D^3 = D^j \times D^{3-j}$. Este índice es importante dado que la asa h_j^3 se puede pegar o despegar a la 3-variedad X^3 , a lo largo de la imagen, bajo el encaje ϕ , del espacio $\partial D^j \times D^{3-j} = S^{j-1} \times D^{3-j}$ que se conoce como la *región de pegado* de h_j^3 . A la esfera $S^{j-1} \times \{0\}$ se le conoce como la *esfera de pegado* de h_j^3 .

Al pegar una asa h_j^3 a una variedad compacta suave X^3 mediante ϕ , existe una única manera de suavizar las esquinas, por lo tanto se obtiene una variedad suave bien definida que se denota por $X^3 \cup_{\phi} h_j^3$. El tipo de difeomorfismo de $X^3 \cup_{\phi} h_j^3$ sólo depende de la clase de isotopía de ϕ ; es decir, es suficiente especificar el encaje ϕ bajo isotopías dado que una isotopía de dos encajes ϕ y ϕ' determina un difeomorfismo entre las variedades $X^3 \cup_{\phi} h_j^3$ y $X^3 \cup_{\phi'} h_j^3$.

La j -asa $h_j^3 = D^j \times D^{3-j}$ es la j -célula $D^j \times \{0\}$ engrosada para ser 3-dimensional, por esta razón a esta j -célula se le conoce como el *corazón* del asa. El corazón de una asa h_j^3 se engrosa 3-dimensionalmente al considerar el producto de cada uno de sus puntos con una $(3-j)$ -célula. En particular, a la $(3-j)$ -célula $\{0\} \times D^{n-j}$ y a la $(n-j-1)$ -esfera $\{0\} \times S^{n-j-1}$ se les denomina *cocorazón* y *cinturón* del asa h_j^3 , respectivamente.

Más aún, existe un retracts por deformación de $X^3 \cup_{\phi} h_j^3$ sobre $X^3 \cup_{\phi|_{S^{j-1} \times \{0\}}} S^{j-1} \times \{0\}$. Por lo tanto, en homotopía pegar una j -asa h_j^3 es lo mismo que pegar la j -célula que forma su corazón a una 3-variedad compacta X^3 .

Una descomposición en asas de una 3-variedad se puede modificar mediante isotopías en las transformaciones de pegado, hasta que las asas se peguen de modo que sus índices se formen en orden ascendente. Las asas del mismo índice pueden pegarse en cualquier orden o, incluso, simultáneamente.

De este modo se obtiene una secuencia de 3-variedades compactas al ir pegando las asas de manera que después de pegar todas las asas, se obtiene \bar{M}^3 .

§ 6. Descomposición en asas de una 3-variedad presentada como un complejo celular.

En esta sección vamos a describir explícitamente el método de D. Ivanić que describe una descomposición en asas a partir de la presentación de la parte gruesa \bar{M}^3 de una 3-variedad hiperbólica cocompacta M^3 como un complejo celular, esto es definida como un poliedro hiperbólico \mathcal{P}^3 en \mathbf{H}^3 cuyos lados se identifican en parejas por isometrías.

3-asas.

En primer lugar se engrosan los vértices reales, en nuestros ejemplos \mathcal{P}^3 sólo tiene vértices ideales y cuando se obtuvieron vértices reales se obtuvo una nueva estructura celular sólo con vértices ideales. Debido a ello pasaremos a estudiar las aristas.

2-asas.

Al trincar las vecindades de vértices ideales de \mathcal{P}^3 se truncan también las puntas de las aristas. Se engrosa cada una de las aristas que podemos denotar por $e_{i,j}$ en el poliedro truncado $\bar{\mathcal{P}}^3$ que proviene de una arista de \mathcal{P}^3 mediante vecindades tubulares $E_{i,j}$, ortogonales a la arista $e_{i,j}$, disjuntas y suficientemente pequeñas para no intersectar otras partes del poliedro \mathcal{P}^3 , de manera que el apareamiento de lados induce por restricción un apareamiento de los lados de $E_{i,j}$.

En nuestro ejemplo las 24 aristas de $\bar{\mathcal{P}}^3$ se dividen en 6 grupos de 4 aristas $e_{1,j}, \dots, e_{4,j}$ ó $e_{i,j}, i = 1, 2, 3, 4$; que se identifican en una sola arista e_j en \bar{M}^3 , donde $j = 1, \dots, 6$. Se recortan las 24 vecindades $E_{i,j}$ de $\bar{\mathcal{P}}^3$ para obtener un poliedro truncado $\bar{\mathcal{P}}_1^3$ en el espacio hiperbólico, con los lados y las aristas que provienen de \mathcal{P}^3 apareados y truncadas, respectivamente. Si las 4 vecindades $E_{1,j}, \dots, E_{4,j}$ de un ciclo de aristas se pegan entre ellas por sus lados, como gajos alrededor de la arista e_j , se forma un prisma difeomorfo a un cilindro sólido $E_j = E_{1,j} \cup \dots \cup E_{4,j} = D^2 \times D^1$ cuyo eje es la arista e_j en \bar{M}^3 y que se pega por su banda $\partial D^2 \times D^1 = S^1 \times D^1$ a las cuatro regiones correspondientes de $\bar{\mathcal{P}}_1^3$. Este cilindro y su manera de pegarse forma una 2-asa h_2^3 cuyo cocorazón es la arista e_j y cuyo cinturón son los dos puntos en los extremos de e_j . El corazón de h_2^3 es un 2-disco en la mediatriz de la arista y su región y esfera de pegado son la banda y una circunferencia en ella, respectivamente. De esta manera se obtiene una presentación de \bar{M}^3 descompuesto como 6 cilindros (2-asas) que se pegan por sus bandas a un poliedro $\bar{\mathcal{P}}_1^3$.

1-asas.

Ahora se engrosan cada uno de los lados $s_l, l = 1, \dots, 8, 1', \dots, 8'$; de $\bar{\mathcal{P}}_1^3$ que proviene de un lado de \mathcal{P}^3 mediante vecindades tubulares S_l , ortogonales a s_l , disjuntas y suficientemente pequeñas. e.g. los 16 lados de $\bar{\mathcal{P}}_1^3$ se identifican en 8 hexágonos en \bar{M}^3 .

Se recortan las 16 vecindades S_l de $\bar{\mathcal{P}}_1^3$ para obtener un poliedro bitruncado $\bar{\mathcal{P}}_0^3$ en el espacio hiperbólico, con los lados y las aristas que provienen de \mathcal{P}^3 truncados. Cada una de las 2 vecindades S_l y $S_{l'}$ de un ciclo de lados es un prisma. Al aparear el lado s_l con el lado $s_{l'}$, los dos prismas S_l y $S_{l'}$ se pegan entre sí formando un prisma del doble de tamaño, difeomorfo a un cilindro sólido $S = S_l \cup S_{l'} = D^1 \times D^2$ en \bar{M}^3 dividido por mitad por el lado s_l y que se pega por sus dos discos $\partial D^1 \times D^2 = S^0 \times D^2$ a las dos regiones correspondientes de $\bar{\mathcal{P}}_0^3$. Este cilindro y su manera de pegarse forma una 1-asa h_1^3 cuyo cocorazón es el lado s_l y cuyo cinturón es una circunferencia a su alrededor. El corazón de h_1^3 es un segmento de línea en la mediatriz del triángulo en el lado s_l y su región y esfera de pegado son los dos discos del cilindro h_1^3 y sus centros, respectivamente.

Por lo tanto, en dimensión 3 las 1-asas y las 2-asas son cilindros, la diferencia es que las 1-asas se pegan en dos 2-discos $S^0 \times D^2$ y las 2-asas se pegan en una banda o anillo $S^1 \times D^1$.

0-asas.

Lo que nos queda después de retirar todas las caras engrosadas de $\bar{\mathcal{P}}^3$ es el poliedro $\bar{\mathcal{P}}_0^3$ que forma la única 0-asa de \bar{M}^3 puesto que es homeomorfo a una 3-bola que se puede escribir como $D^0 \times D^3$ pegada por $\partial D^0 \times D^3 = \emptyset$; es decir, pegar una 0-asa es equivalente a tomar la unión disjunta con una 3-bola, las 0-asas son las únicas j -asas que tienen esta propiedad.

§ 6.1. Composición en asas de la variedad.

Para ensamblar a \bar{M}^3 es necesario pegar los cilindros que forman las 1-asas $h_1^3 = S_l$ en sus dos 2-discos a la superficie de la frontera de la 0-asa. De esta manera se obtiene una 3-variedad homeomorfa a una 3-bola con 8 1-asas, misma que se proyecta en un cuerpo con asas encajado en \bar{M}^3 bajo la identificación $\mathcal{P}^3 \rightarrow \bar{M}^3$.

Finalmente, al pegar las 2-asas, i.e. los 6 cilindros mediante bandas en la superficie de la frontera de este cuerpo con asas, se obtiene la 3-variedad \bar{M}^3 .

De esta manera se tiene el rompecabezas completo. Se descompone a la 3-variedad \bar{M}^3 como una colección finita de 3-bolas que se pegan por sus fronteras: una 0-asa a la que se le pegan 14 cilindros homeomorfos a 3-bolas, de los cuales 8 cilindros son 1-asas que se pegan por sus dos 2-discos y 6 cilindros son 2-asas que se pegan por sus bandas.

En el proceso de conversión de la presentación de una variedad como un poliedro cuyas caras se han identificado a su descomposición por asas se tiene que por cada k -cara de $\bar{\mathcal{P}}^3$ se obtiene una $(3 - k)$ -asa como un subconjunto de \bar{M}^3 difeomorfo a $D^{3-k} \times D^k$ pegada a \bar{M}^3 mediante $\partial D^{3-k} \times D^k$.

La 3-variedad \bar{M}^3 se descompone en asas como si fuese un rompecabezas cuyas piezas se pegan por su frontera con cierta regla. La descripción como complejo celular de \bar{M}^3 representa la regla del pegado del rompecabezas.

Usualmente un rompecabezas es de forma rectangular, esto es, homeomorfo a un 2-disco. Ahora estamos empezando a jugar con rompecabezas cuya forma es la de una 3-variedad hiperbólica con frontera. El poliedro $\bar{\mathcal{P}}^3$ y su apareamiento de lados es una presentación del rompecabezas en donde se han despegado algunas piezas para obtener una región convexa en \mathbf{H}^3 cuya frontera esta formada por la frontera de piezas que se identifican.

El poliedro $\bar{\mathcal{P}}^3$, el conjunto del poliedro $\bar{\mathcal{P}}_1^3$ con los 6 cilindros alrededor de las aristas y el conjunto del poliedro $\bar{\mathcal{P}}_0^3$ con los 14 cilindros son tres rompecabezas que arman la misma 3-variedad \bar{M}^3 . Este último rompecabezas es una descomposición en asas de \bar{M}^3 puesto que es una colección finita de piezas difeomorfas a 3-bolas expresadas como $D^{3-k} \times D^k$ y con interiores disjuntos que se pueden pegar o despegar entre sí a lo largo de $\partial D^{3-k} \times D^k$ mediante un encaje $\phi : \partial D^{3-k} \times D^k \rightarrow \partial X$, para obtener una secuencia de 3-variedades compactas mediante ir añadiendo las asas de tal manera que después de pegar todas las asas se obtiene \bar{M}^3 .

Esta misma descomposición en asas sirve para el complemento en la 3-esfera del enlace de Whitehead y de los anillos borromeos porque su región fundamental está basada en el mismo octaedro hiperbólico ideal rectangular. Para el complemento del enlace del nudo ocho se tiene otro poliedro en el lugar de $\bar{\mathcal{P}}^3$ y es una bpirámide triangular conformada por dos tetraedros hiperbólicos ideales de ángulo diedral $\pi/3$. Se trunca por horibolas y la intersección de horiesferas con las puntas de los tetraedros son triángulos equiláteros.

Al biselar cada tetraedro truncado se obtienen 6 gajos de ángulo $\pi/3$ y ellos conforman una 2-asa. Finalmente al rebanar los lados se obtienen 4 rebanadas que conforman dos 1-asas.

Por lo tanto, las descomposición en asas del complemento del nudo figura-ocho contiene 2 0-asas que provienen de una región fundamental de 2 tetraedros. De sus caras hay 4 1-asas y de sus aristas hay 2 2-asas. La característica de Euler es $2-4+2=0$.

§ 6.2. Diagrama de una descomposición en asas.

Es posible realizar un dibujo en el plano de un diagrama que contenga la información de la descomposición en asas de \bar{M}^3 y de N^3 , incluso que contenga la información de la isotopía del enlace $A^1 \subset N^3$.

El diagrama de una descomposición en asas es un dibujo en la frontera de la 0-asa $\partial \bar{\mathcal{P}}_0^3 = \mathbb{S}^2 = \mathbb{R}^2 \cup \infty$ que es la pieza base del rompecabezas para construir \bar{M}^3 y N^3 . En ella, se dibujan las

esferas y las regiones donde se pegan las demás asas de la descomposición que provienen de los lados y las aristas de $\bar{\mathcal{P}}^3$. Estas regiones son parejas de discos que son las tapas de los cilindros de las 2-asas y unos segmentos de línea entre estos 2-discos que al identificarse con la 1-asa, se unen sus extremos y forman curvas cerradas que son los cinturones de las 1-asas, respectivamente. Con esta información es posible caracterizar completamente la descomposición en asas de \bar{M}^3 y de N^3 . En primer lugar, una proyección central $p: \bar{\mathcal{P}}_0^3 \rightarrow \bar{\mathcal{P}}^3$ desde un punto en el interior de la 0-asa $\bar{\mathcal{P}}_0^3$ y hasta la frontera $\partial\bar{\mathcal{P}}^3 = \mathbf{S}^2 = \mathbb{R}^2 \cup \infty$.

Después se proyecta estereográficamente el poliedro $\bar{\mathcal{P}}^3$ en $\mathbb{R}^2 \cup \infty$ a partir de un punto en el interior de un lado, de manera que la proyección de las aristas; esto es, la gráfica del 1-esqueleto de $\bar{\mathcal{P}}^3$, forma un subconjunto compacto de \mathbb{R}^2 . El plano \mathbb{R}^2 donde se dibuja el diagrama divide a \mathbb{R}^3 en dos semiespacios, uno de ellos es el interior de $\bar{\mathcal{P}}_0^3$ y el otro es su exterior en donde se van a pegar las demás asas.

Las 1-asas $D^1 \times D^2$ provienen de engrosar los lados que forman una pareja de la identificación en $\bar{\mathcal{P}}^3$ y se pegan en dos círculos $\mathbb{S}^0 \times D^2$ en $\bar{\mathcal{P}}_0^3$ en los lados que se identifican. Sea L un lado de $\bar{\mathcal{P}}^3$, en el interior de L se dibuja un pequeño círculo que será una de las dos regiones donde se pega la 1-asa inducida por este lado. La otra región es un círculo que se dibuja en el interior del lado L' . Los círculos de los lados L y L' se identifican en el diagrama invirtiendo su orientación de tal manera que topológicamente se tiene el mismo resultado que pegar una 1-asa $D^1 \times D^2$ cuyos pies sean estos dos círculos $\partial D^1 \times D^2 = \mathbb{S}^0 \times D^2$. Se dibujan y se identifican círculos en el interior de cada lado de $\bar{\mathcal{P}}^3$. Uno de los círculos quedará a un extremo del dibujo de la proyección de las aristas en \mathbb{R}^2 .

Las 2-asas $D^2 \times D^1$ que induce engrosar las aristas se pegan alrededor de una banda $\mathbf{S}^1 \times D^1$. En el diagrama basta especificar las circunferencias $\mathbf{S}^1 \times \{0\}$ para poder pegar las 2-asas a $\bar{\mathcal{P}}_0^3$. En cada arista proyectada en \mathbb{R}^2 , se dibuja un arco transversal que une los círculos en el interior de los dos lados adyacentes. La unión de los arcos que están en el mismo ciclo de aristas forma la circunferencia donde se pega una 2-asa.

El diagrama de una descomposición por asas se corresponde con el 1-esqueleto del diagrama del poliedro dual \mathcal{P}_*^3 de \mathcal{P}^3 . Un vértice de \mathcal{P}_*^3 es el pie de una 1-asa que es el círculo en el interior de un lado de \mathcal{P}^3 . Una arista de \mathcal{P}_*^3 une dos lados adyacentes de \mathcal{P}^3 . A cada triángulo en la aureola de un vértice ideal de \mathcal{P}^3 le corresponde una sección de la frontera de \mathcal{P}_0^3 que forma un lado de \mathcal{P}_*^3 . Por lo tanto, por cada lado, cada arista y cada vértice ideal de \mathcal{P}^3 se tiene un vértice, una arista y un lado de \mathcal{P}_*^3 , respectivamente.

En cada uno de los toros que son componentes frontera de la 3-variedad se le pegan toros sólidos para obtener la 3-variedad cerrada N^3 . Un toro sólido se forma con dos asas: una 2-asa y una 3-asa. La circunferencia de pegado de la 2-asa es un meridiano del toro en la frontera del toro sólido y una curva que es un paralelo de este toro también es paralela al alma del toro sólido; por lo tanto es paralela al nudo que se obtiene en la 3-variedad N^3 .

A cada triángulo en la aureola de un vértice ideal le corresponde una sección de la frontera de \mathcal{P}_0 en la que se dibujan los meridianos y paralelos de los componentes en la frontera de \bar{M}^3 que nos indicarán donde añadir una 2-asa y dónde está la curva isotópica al nudo que es un componente del enlace hiperbólico.

Al trabajar con asas como bolas topológicas en lugar de poliedros rígidos se tienen permitidos algunos movimientos de las asas que nos permiten simplificar considerablemente la presentación de una variedad. En particular, si N^3 es difeomorfa a la 3-esfera \mathbf{S}^3 , entonces existe una presentación estándar muy sencilla de N^3 descompuesta en dos asas (una 1-asa y una 3-asa). Esta presentación corresponde con la clásica descripción de las esferas como dos hemisferios pegados en un ecuador. Si en cada componente frontera de \bar{M}^3 se pega un toro sólido $\mathbf{S}^1 \times D^2$ por su frontera $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1$ se obtiene una 3-variedad cerrada y orientable N^3 . En el caso en el que se tenga una 3-esfera (por ejemplo, si se verifica que N^3 es una 3-variedad simplemente conexa); entonces podemos encontrar

un homeomorfismo de M^3 con el complemento $\mathbf{S}^3 - A^1$ de un enlace A^1 , donde A^1 es la colección de los tres círculos $\mathbb{S}^1 \times \{0\}$ en el corazón de los toros sólidos añadidos.

Es posible obtener una descomposición en asas de N^3 a partir de una descomposición de \bar{M}^3 dado que, en términos de la teoría de asas, pegar un toro sólido $D^2 \times \mathbf{S}^1$ por el 2-toro en su frontera $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1$ a un componente de la frontera de \bar{M}^3 es lo mismo que añadirle una 2-asa y una 3-asa. La circunferencia de añadidura de la 2-asa puede ser cualquier curva cerrada simple no trivial en el 2-toro, por ejemplo una curva meridiano. Un paralelo es una curva isotópica al corazón del toro sólido y por lo tanto es isotópico al nudo que es un componente del enlace en N^3 .

Para cualquier 2-toro $T_i^2, i = 1, 2, 3$; que es un componente en la frontera $\bar{\mathcal{P}}^3$, se escogen dos curvas m_i y l_i que representen los generadores de $\pi_1(T_i^2) = \mathbb{Z}^2$. El meridiano m_i del toro sólido añadido es el círculo donde se pega la 2-asa. El paralelo l_i es isotópico al corazón del toro sólido T_i^2 , por lo tanto es isotópico al componente i del enlace hiperbólico A . En las figuras 9.11 a 9.19 se han dibujado los meridianos m_i con líneas delgadas y los paralelos l_i con líneas gruesas. Las curvas l_1, l_2 y l_3 no son círculos de pegado de 2-asas como los meridianos m_i , sólo curvas dibujadas en la superficie del cuerpo con asas cuya posición nos interesa guardar. En particular, los círculos de pegado de las 2-asas m_i pueden moverse por isotopías libremente sobre estas curvas l_i e incluso, pueden cruzarlas. Un cruce por un círculo de añadidura es un cruce bajo si la 2-asa correspondiente cancela una 1-asa que manda uno de los paralelos.

En el ejemplo, la descomposición por asas de \bar{M}^3 no tiene 3-asas pues \mathcal{P}^3 no tiene vértices reales y por lo tanto no tiene 3-asas. Sin embargo, cuando consideramos la descomposición de asas de N^3 , esto es, al pegarle 3 toros sólidos a los componentes de \bar{M}^3 , se añaden 3 3-asas y 3 2-asas para la descomposición de asas de N^3 .

La descomposición por asas de \bar{M}^3 tiene 1 0-asa, 7 1-asas, 6 2-asas y ninguna 3-asa pues \mathcal{P}^3 es conexo, tiene 14 caras triangulares ideales, tiene 24 aristas rectangulares de los dos octaedros \mathcal{O}^3 y \mathcal{O}'^3 que conforman a \mathcal{P}^3 y no tiene vértices reales. De lo anterior se concluye que la descomposición por asas de N^3 tiene 1 0-asa, 7 1-asas, 9 2-asas y 3 3-asas.

§ 6.3. Movimientos de asas.

A continuación se efectuarán movimientos de asas para simplificar la descomposición de N^3 . Básicamente son los tipos de movimientos de asas cuya acción no modifica la topología de la variedad descompuesta en asas: Estos son isotopías de curvas, deslizamiento de una asa en otra y cancelación o aparición de dos asas. Ver [26].

Es evidente que hacer isotopías de las esferas de pegado no cambian la topología de la variedad formada por el total de las asas pues no cambian la descomposición. Los otros dos movimientos si cambian la descomposición en asas pero no cambian la topología resultante. Se pueden desplazar las 1-asas a través de otras 1-asas. Se pasa un pie de una 1-asa a través de los pies de otra 1-asa. Siempre y cuando se lleve la información de una 1-asa (otras circunferencias de pegado de 2-asas o el paralelo de los nudos componentes de los enlaces buscados) en este procedimiento no se cambia la topología resultante.

La eliminación de asas se efectúa entre dos asas de índice consecutivo cuando estas dos asas se pegan de tal forma que entre ellas forman una 3-bola que se pega por un disco en su frontera a la frontera de una 3-variedad. Entonces el pegado de estas dos asas no cambia la topología de la variedad.

El proceso de la eliminación de asas puede realizarse a la inversa; esto es, se pueden añadir dos asas más a una descomposición de asas de manera que no se cambia la topología resultante.

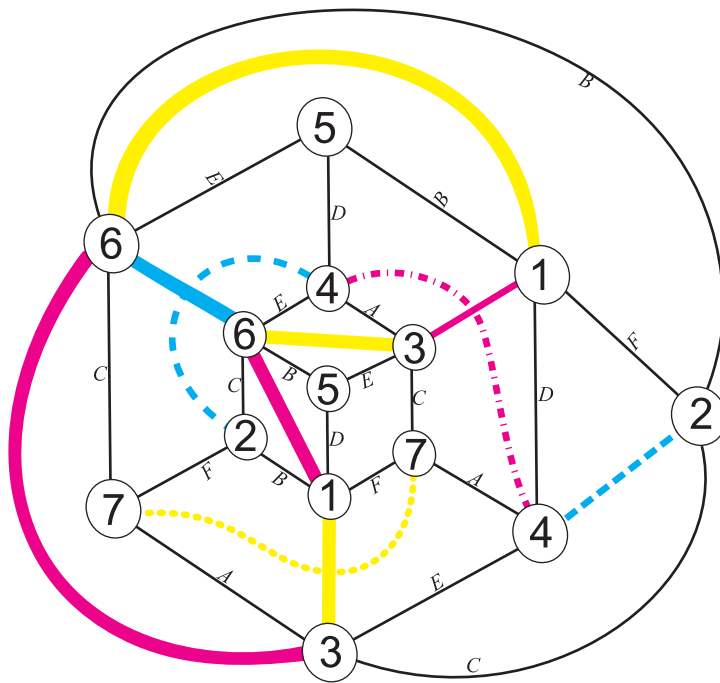


Figura 9.11. Diagrama 0. Diagrama de descomposición de asas de N^3 .

Diagrama 0.

Los círculos de añadidura m_1 (magenta) y m_2 (amarillo) unen solamente los pies de las 1-asas $4'4$ y $7'7$, respectivamente. Esto es, sin pasar por otras 1-asas ó 2-asas. Se recuerda que los paralelos no son círculos de añadidura por lo que no intervienen en la descomposición en asas. Por lo tanto, las correspondientes 2-asas de m_1 y m_2 cancelan las 1-asas 4 y 7. El diagrama 1 muestra la descomposición en asas que se obtiene después de la cancelación.

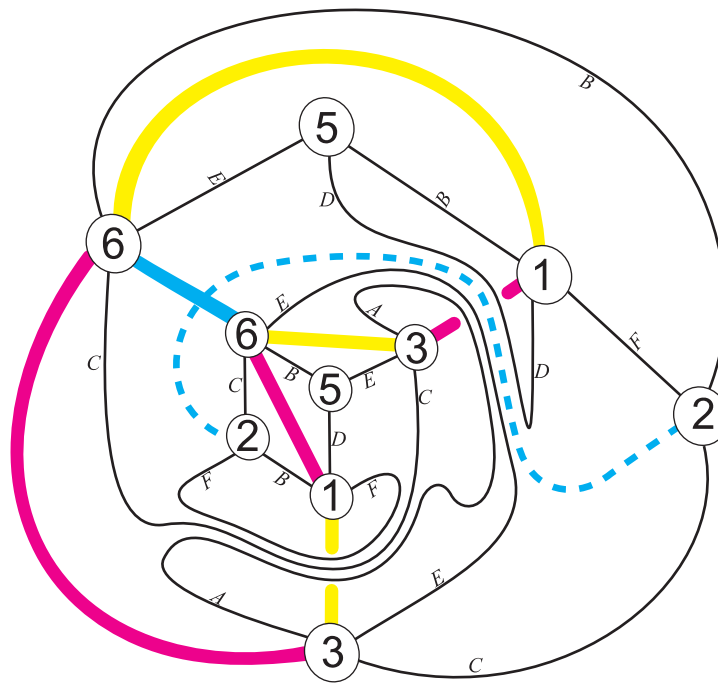


Figura 9.12. Diagrama 1.

Diagrama 1.

El círculo de añadidura m_3 (cian) une únicamente los pies de la 1-asa $2'2$. Para cancelar estas asas en el diagrama 2 se hace una simplificación. Se gira la parte central del diagrama 180° en el sentido de las manecillas del reloj de manera que quedan frente a frente los pies de la 1-asa 2. Además se realizan isotopías en los círculos de añadidura de algunas 2-asas, por ejemplo D y F .

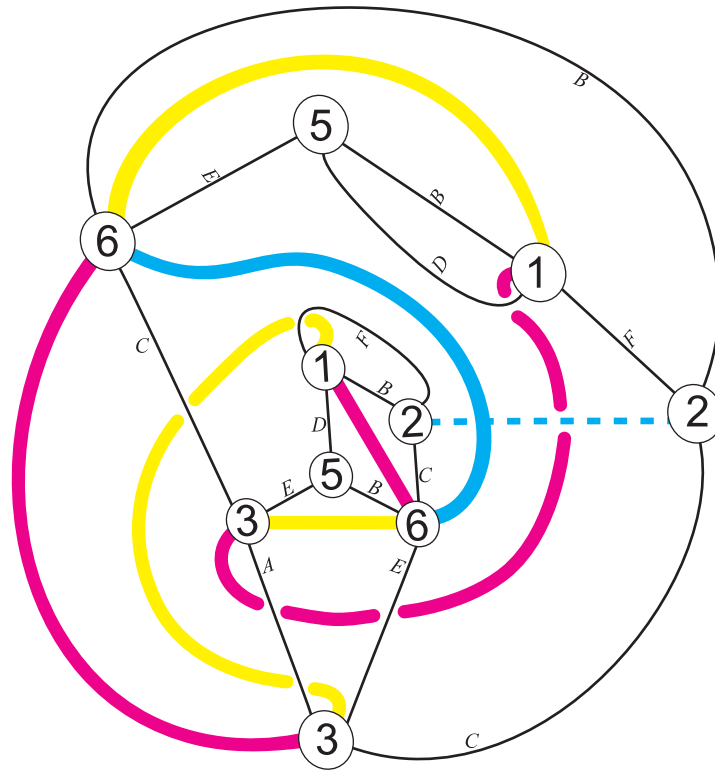


Figura 9.13. Diagrama 2.

Diagrama 2.

Después de la rotación central del diagrama los círculos de añadidura m_3 (cian) y A unen únicamente los pies de las 1-asas $2'2$ y $3'3$, respectivamente, por lo que se cancelan 2 pares de asas.

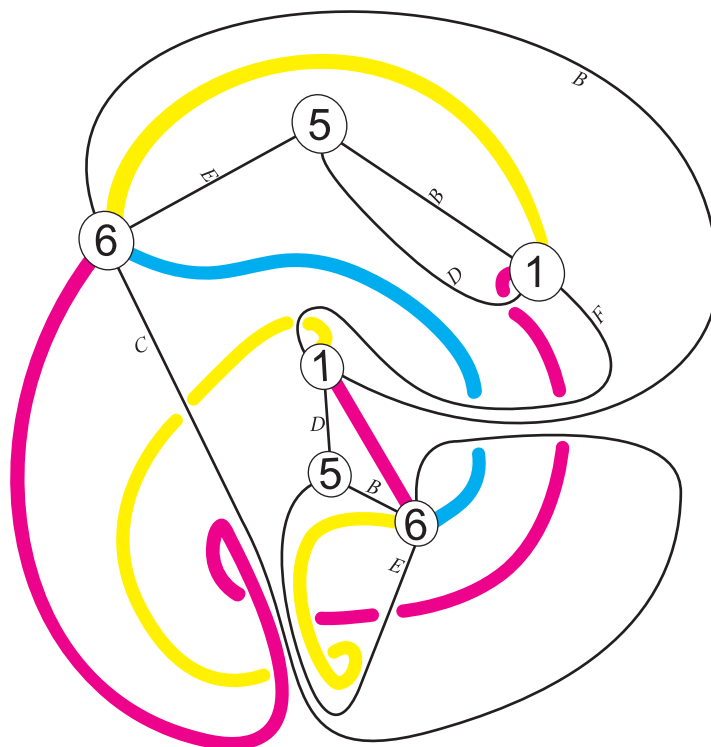


Figura 9.14. Diagrama 3.

Diagrama 3.

Los círculos de añadidura F y C unen únicamente los pies de las 1-asas $1'1$ y $6'6$. Para cancelar estas asas en el diagrama 4 se hace una simplificación. Se gira nuevamente la parte central del diagrama 120° en el sentido de las manecillas del reloj de manera que quedan frente a frente los pies de las 1-asas 1 y 6. Además se realizan isotopías en los paralelos amarillo y magenta deshaciendo dos bucles mediante una movida de Reidemeister de tipo 1.

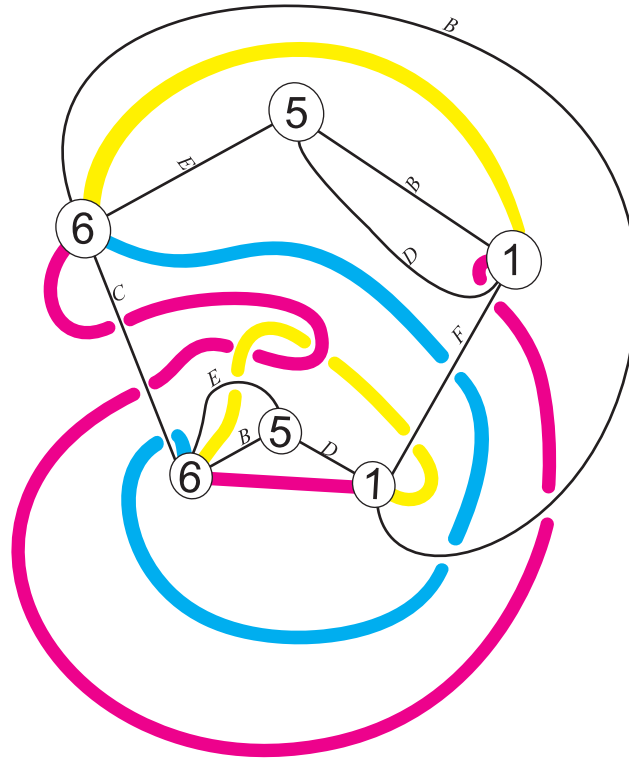


Figura 9.15. Diagrama 4.

Diagrama 4.

Después de la rotación central del diagrama, los círculos de añadidura F y C unen únicamente los pies de las 1-asas $1'1$ y $6'6$ por lo que se cancelan 2 pares de asas.

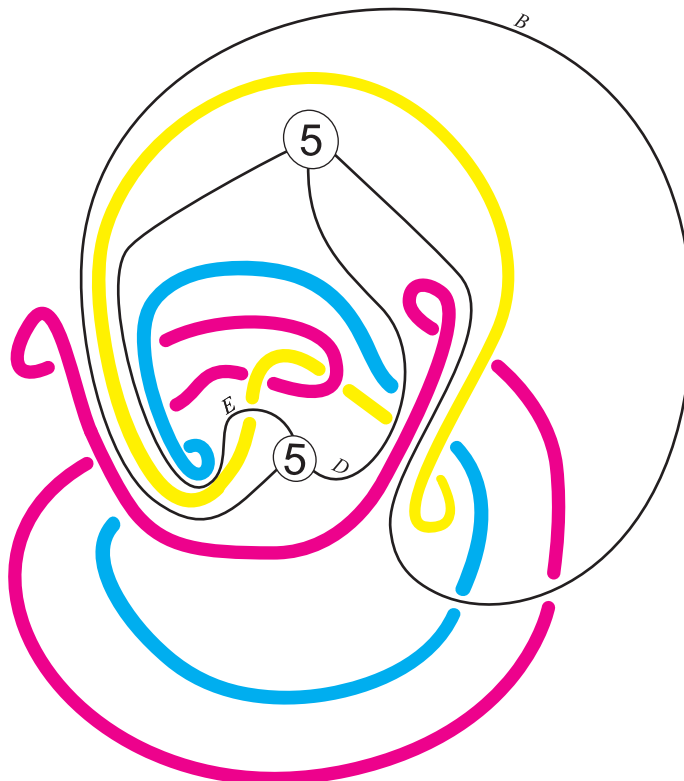


Figura 9.16. Diagrama 5.

Diagrama 5.

Los 3 círculos de añadidura B , D y E unen los pies de la última 1-asa $5/5$. Cualquiera de ellos cancela la 1-asa 5 , los otros 2 cancelan dos 3-asas. Se remueven entonces estos 3 círculos de añadidura de 2-asas y la única 1-asa de la descomposición dejando en el diagrama únicamente los tres paralelos de los tres toros sólidos que nos indican el tipo de isotopía de los tres componentes del enlace hiperbólico. Además se realizan isotopías en los tres paralelos deshaciendo cuatro bucles mediante una movida de Reidemeister de tipo 1.



Figura 9.17. Diagrama 6.

Diagrama 6.

En este diagrama ya no hay círculos de añadidura de 2-asas ni pies de 1-asas. Por lo tanto, tenemos el diagrama de la descomposición estándar de la 3-esfera que consiste en una 0-asa y una 3-asa. Sólo resta realizar isotopías a los tres paralelos a los componentes del enlace hiperbólico para simplificar su presentación. El componente magenta se mueve a la parte superior del diagrama.



Figura 9.18. Diagrama 7.

Diagrama 7.

Finalmente se realizan algunas isotopías para el diagrama de este enlace hiperbólico a una forma más simple.

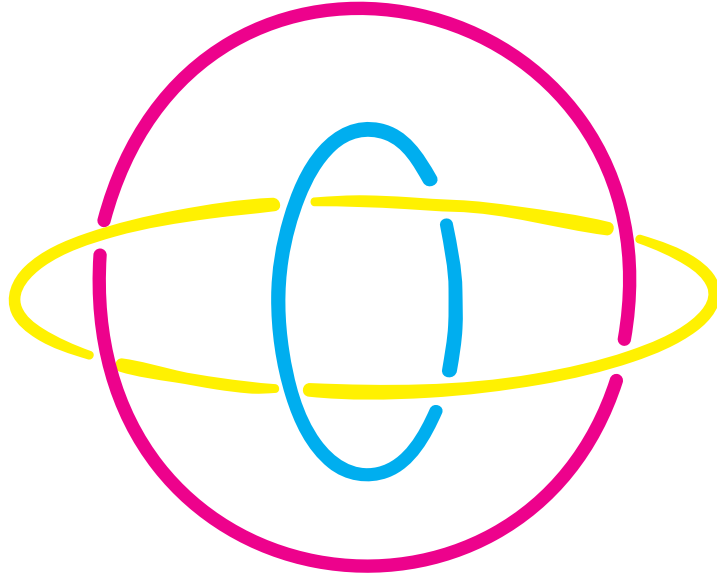


Figura 9.19. Diagrama 8.

Diagrama 8.

Los componentes del enlace hiperbólico se han simplificado en el diagrama con lo que es posible identificar este enlace.

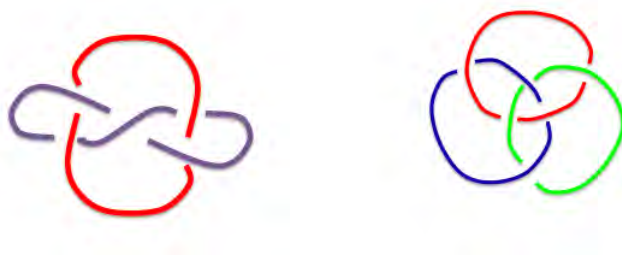


Figura 9.20. El enlace de Whitehead de 2 componentes y el enlace de los anillos de Borromeo de 3 componentes.

El complemento del nudo ocho, de los enlaces de Whitehead y borromeanos.

En sus notas [62] Bill Thurston describe como dar una estructura hiperbólica al complemento del nudo en forma de ocho y a los enlaces de Whitehead y de Borromeo.

El complemento del nudo en forma de ocho y el complemento del enlace de Borromeo se pueden descomponer en dos poliedros hiperbólicos ideales y regulares en los que se identifican sus caras por isometrías; estos poliedros son dos tetraedros y dos octaedros, respectivamente. Estos poliedros son celdas de los panales hiperbólicos regulares $\{3, 3, 6\}$ y $\{3, 4, 4\}$. El complemento del enlace de Whitehead se puede obtener con un solo octaedro.

§ 7. 3-variedades hiperbólicas con frontera.

En este capítulo se estudia la forma topológica de las 3-variedades hiperbólicas orientables con frontera geodésicamente completa.

La frontera de una 3-variedad hiperbólica cocompacta es una colección finita de superficies hiperbólicas geodésicamente completas. Más aún, si la 3-variedad es orientable se sigue del teorema de uniformización de Riemann-Koebe que cada uno de los componentes de la frontera son superficies hiperbólicas orientables que están clasificadas por su género; esto es, son esferas con g asas de la forma Σ_g^2 , donde $g > 1$.

Generalizando el hecho de que una 3-variedad hiperbólica orientable no compacta de volumen finito es homeomorfa al complemento de un enlace de nudos en alguna 3-variedad cerrada en este capítulo se estudia el hecho de que una 3-variedad hiperbólica orientable compacta con frontera puede ser homeomorfa al exterior de una gráfica anudada en alguna 3-variedad cerrada. Más aún, una 3-variedad hiperbólica orientable no compacta con frontera puede ser homeomorfa al exterior de una gráfica anudada en algún complemento de un enlace de nudos en alguna 3-variedad cerrada.

Para dar estructuras hiperbólicas al complemento de nudos se utiliza el hecho de que una vecindad regular de un nudo en una 3-variedad es homeomorfa a un 2-toro. Una superficie hiperbólica orientable Σ_g^2 es homeomorfa a una vecindad regular de una gráfica finita G encajada en alguna 3-variedad N^3 .

De manera general, si la gráfica anudada G es un árbol, entonces la superficie Σ es una 2-esfera. Si la gráfica G es un ciclo (o una unión finita de c ciclos) entonces la superficie Σ es un 2-toro (o una colección de c 2-toros) y el complemento del encaje de G es homeomorfo al complemento de un nudo (o enlace de c componentes) en una 3-variedad cerrada.

Si la gráfica G entonces la superficie es una unión de 2-toros y la 3-variedad $M^3 - L^1$ es el complemento de un enlace

§ 7.1. 3-variedades compactas con frontera.

En esta sección se estudia como se puede conocer la forma de una 3-variedad hiperbólica compactas con frontera. Se utiliza como ejemplo una 3-variedad compacta con frontera que aparece en las notas de Thurston, ver [62] y [63].

El trípode de Thurston.

§ 7.2. Poliedros hiperideales.

Un tetraedro muy pequeño en el espacio hiperbólico parece ser un tetraedro euclideo. Por ejemplo, considere un tetraedro regular inscrito en el modelo de la bola del espacio hiperbólico. Entonces el centro de la bola es el circuncentro del tetraedro, y por ser un tetraedro regular este punto también es su ortocentro, gravicentro e incentro. Considere las 4 rectas que unen este centro con los vértices del tetraedro. Para cada punto en esas rectas existe un tetraedro hiperbólico regular compacto que tiene este punto por vértice y sus demás vértices están en las otras 3 rectas.

Si el punto se toma muy cerca del centro de la bola el tetraedro obtenido es casi plano. Esto es, la geometría de este tetraedro hiperbólico y la geometría de un tetraedro euclideo regular no difieren mucho (por ejemplo, sus ángulos diedrales se parecen).

Si se consideran tetraedros de mayor tamaño los ángulos diedrales comienzan a hacerse más pequeños. En el caso del tetraedro regular ideal los ángulos diedrales son de $\pi/3$.

Y si se consideran ahora tetraedros incluso más grandes entonces ya no forman poliedros hiperbólicos de volumen finito. En este caso se obtienen *poliedros hiperideales*. Y estos son subconjuntos

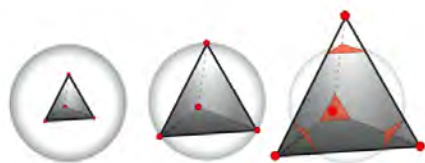


Figura 9.21. Tetraedros hiperbólicos compacto (izquierda), ideal (centro) e hiperideal (derecha).

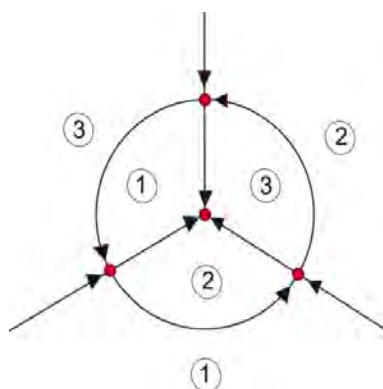


Figura 9.22. Proyección estereográfica de la frontera de la biperámide triangular con los lados apareados.

convexos que podemos representar en el modelo de la bola proyectiva de Klein del espacio hiperbólico como poliedros convexos cuyos vértices están afuera del modelo y de su frontera ideal tales que la intersección de cada una de las k -caras del poliedro con la bola es no vacía y la diferencia del poliedro con la bola es un conjunto de puntas formadas por un conjunto finito de vértices *hiperideales* y contenidas en las caras del poliedro que inciden en ellos. Estos son poliedros cuyas caras 2-dimensionales o están contenidas en la bola o la intersectan (en más de un punto). El tetraedro hiperbólico regular hiperideal tiene dos tipos de ángulos diedrales: rectos de $\pi/2$ y los de $\pi/6$. Las

§ 7.3. Método para obtener la forma de la frontera en 3-variedades hiperbólicas compactas.

Método para obtener la forma de la frontera.

§ 7.4. 3-variedades hiperbólicas compactas con frontera.

En [21], Fuji demuestra que si se tiene una 3-variedad compacta con frontera que se obtienen de identificar las caras de dos tetraedros hiperideales truncados entonces la frontera tiene que ser una superficie hiperbólica orientable de género dos. Luego clasifica los pegados bajo isometrías y homeomorfismo mediante la comparación del menor arco geodésico que inicia y termina ortogonalmente en la superficie frontera. De esta forma obtiene ocho tipos de pegado.

Existe una infinidad de 3-variedades hiperbólicas compactas y orientables que tienen por frontera una superficie de género 2. Sin embargo, como señala Fuji en su artículo,

Proposición IX.1. *Sólo dos de estas ocho 3-variedades compactas con frontera son exteriores de gráficas en la 3-esfera.*

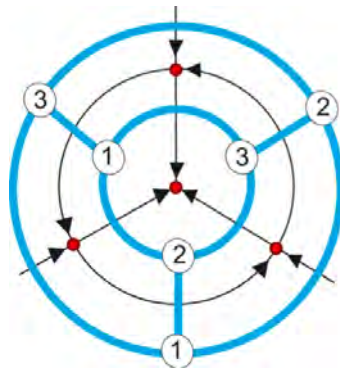


Figure 14. Proyección de circunferencias de pegado de las 2-asas uniendo los pies de las 1-asas.

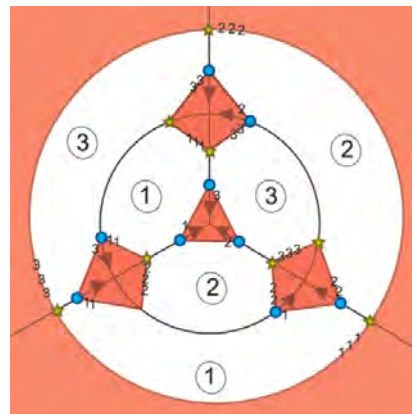


Figura 9.23. Proyección de circunferencias de pegado de las 2-asas uniendo los pies de las 1-asas.

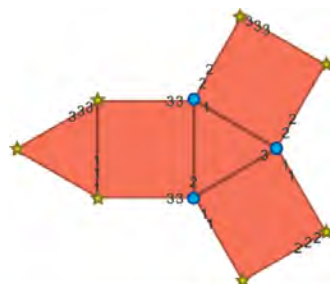


Figura 9.24. Proyección de circunferencias de pegado de las 2-asas uniendo los pies de las 1-asas.

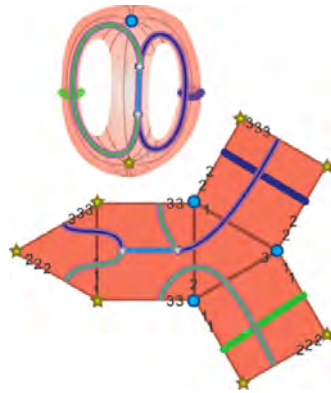


Figura 9.25. Proyección de circunferencias de pegado de las 2-asas uniendo los pies de las 1-asas.

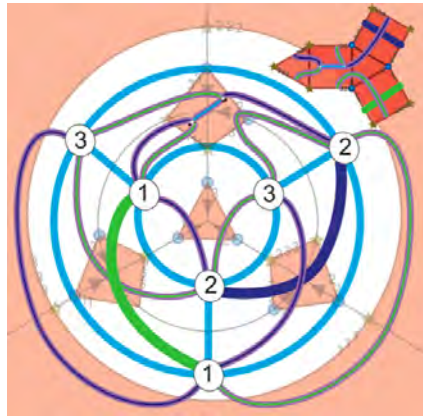


Figura 9.26. Proyección de circunferencias de pegado de las 2-asas uniendo los pies de las 1-asas.

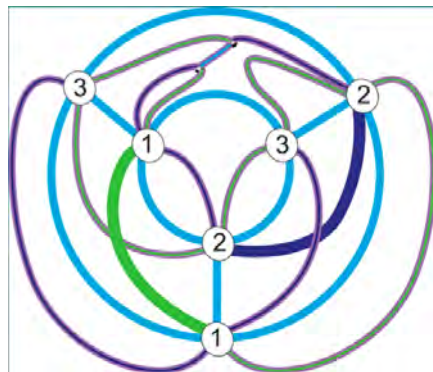


Figura 9.27. Diagrama 0.

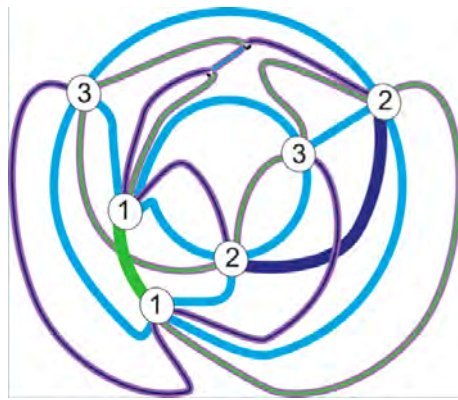


Figura 9.28. Diagrama 1.

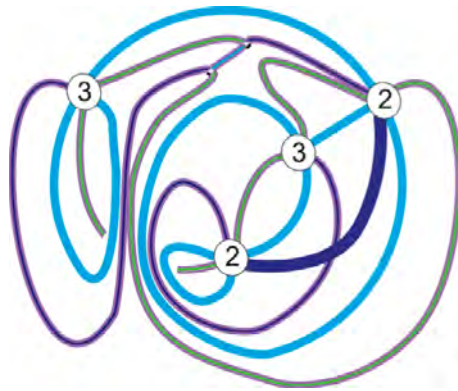


Figura 9.29. Diagrama 2.

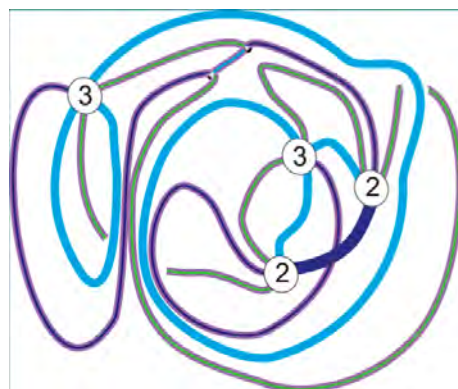


Figura 9.30. Diagrama 3.



Figura 9.31. Diagrama 4.



Figura 9.32. Diagrama 5.



Figura 9.33. Diagrama 6.



Figura 9.34. Diagrama 7.



Figura 9.35. Diagrama 8.



Figura 9.36. Diagrama 9.

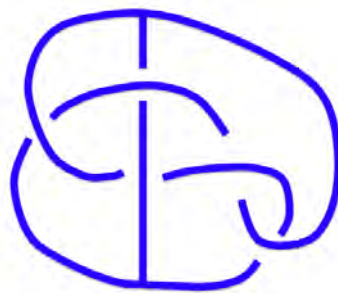


Figura 9.37. Diagrama 10.

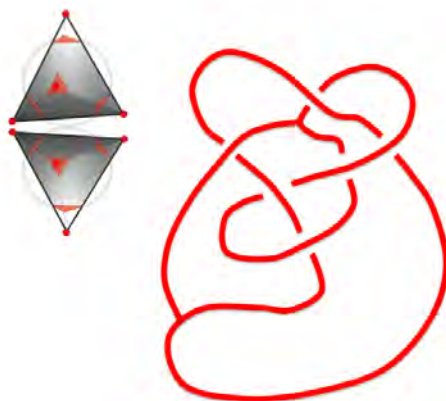


Figura 9.38. Otra gráfica theta anudada cuyo exterior en \mathbb{S}^3 es una 3-variedad hiperbólica compacta que se obtiene de identificar las caras de dos tetraedros hiperideales.

En la figura ?? se muestra la clase de isotopía de la otra gráfica theta anudada cuyo exterior en \mathbb{S}^3 es una 3-variedad hiperbólica compacta que se obtiene de identificar las caras de dos tetraedros hiperideales.

§ 8. 3-variedades con frontera no compactas.

Ahora se considera un ejemplo de una 3-variedad con frontera no compacta. Este ejemplo es de Fuji. Ver []. Esta 3-variedad tiene una punta y un componente frontera que es es una superficie de género 2.

§ 8.1. Hiperpoliedro fundamental.

Considere el modelo de la bola del 3-espacio hiperbólico. En un ecuador se inscribe un octágono regular. Considere la biperámide hiperideal regular con base en este octágono de manera que los ángulos diedrales de todos los lados triangulares sean rectos.

Al truncar los vértices hiperideales mediante planos hiperbólicos se obtienen dos prismas unidos por sus bases octagonales. Este poliedro hiperideal no compacto lo llamaremos \mathcal{P}^3 en esta sección. Los lados de \mathcal{P}^3 son 2 octágonos regulares rectangulares y 16 cuadriláteros. Se tienen 3 octágonos regulares rectangulares distinguidos en \mathcal{P}^3 : uno ideal y dos compactos.

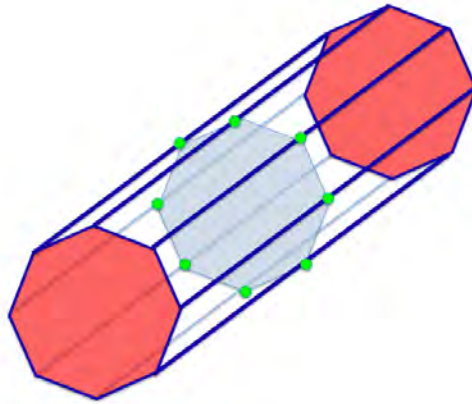


Figure 14. El poliedro fundamental de una 3-variedad hiperbólica no compacta con frontera.

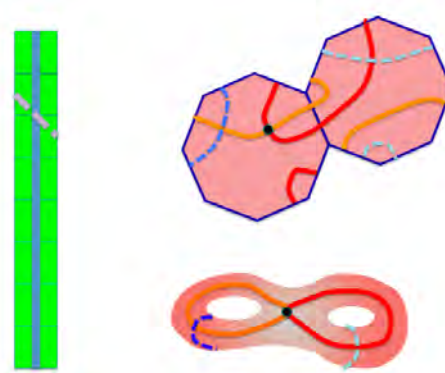


Figure 14. Las dos aureolas de las puntas de una 3-variedad hiperbólica no compacta con frontera. Una es un 2-toro y la otra es una superficie hiperbólica orientable de género dos.



Figure 14. Una gráfica ocho anudada cuyo exterior en el complemento de un círculo en \mathbb{S}^3 es una 3-variedad hiperbólica no compacta con frontera.

CAPÍTULO X

Una 4-variedad hiperbólica cuaterniónica aritmética que es el complemento de un enlace de 5 toros anudados en la 4-esfera.

§ 1. Variedades hiperbólicas como complementos en dimensión 4.

§ 1.1. Condiciones de una n -variedad hiperbólica para ser un complemento.

Toda 3-variedad hiperbólica geodésicamente completa y no compacta pero de volumen finito M^3 es homeomorfa al complemento $N^3 - A^1$ de un enlace de circunferencias A^1 encajado en alguna 3-variedad cerrada N^3 ; ver [1997T], [1978W]. Generalizando este hecho a variedades de dimensiones más altas, D. Ivanšić encontró en [1999I] las condiciones necesarias y suficientes para que una n -variedad hiperbólica M^n no compacta pero de volumen finito sea homeomorfa al complemento de un encaje de subvariedades A^{n-2} de codimensión 2 en alguna n -variedad cerrada N^n ; es decir, $M^n = N^n - A^{n-2}$.

Ivanšić estableció dos condiciones naturales que provienen de la geometría hiperbólica y de la topología de un complemento. En primer lugar, desde el punto de vista geométrico, observó que puesto que M^n es una n -variedad hiperbólica geodésicamente completa de volumen finito, la sección de cualquier cúspide debe ser una $(n-1)$ -variedad euclídeana cerrada. Esto es debido a que la sección de cualquier cúspide se modela geoméricamente en horiesferas que son métricamente equivalentes al $(n-1)$ -espacio euclídeano. Por otra parte, la sección de una cúspide es la frontera de una vecindad tubular de un componente del enlace A^{n-2} en N^n , por lo tanto debe ser un \mathbb{S}^1 -haz. Más aún, cualquier componente de A^{n-2} debe ser una $(n-2)$ -variedad euclídeana dado que las variedades euclídeanas son \mathbb{S}^1 -haces únicamente sobre variedades euclídeanas [1999I]; es decir, en dimensiones altas los componentes de nudos y enlaces hiperbólicos son necesariamente euclídeanos; i. e. las $(n-2)$ -subvariedades que forman los componentes de un enlace (o nudo si sólo es una) cuyo complemento en alguna n -variedad cerrada admite una estructura hiperbólica, admiten una estructura euclídeana única salvo transformaciones afines.

En dimensiones bajas, las superficies hiperbólicas no compactas de área finita son topológicamente el complemento de algunos puntos en superficies cerradas. En el caso 3-dimensional, las únicas superficies euclídeanas cerradas son el toro $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ y la botella de Klein $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$, ambas son \mathbb{S}^1 -haces. Por lo tanto, cualquier 3-variedad hiperbólica no compacta pero de volumen finito es difeomorfa al complemento de un nudo o enlace de circunferencias en alguna 3-variedad cerrada.

En dimensiones altas no es una regla ser un complemento, no todas las n -variedades hiperbólicas son homeomorfas a complementos de subvariedades en n -variedades cerradas para $n > 3$. Esto se debe a que existen $(n-1)$ -variedades euclídeanas que no son \mathbb{S}^1 -haces y a un resultado de Nimershiem quien demostró en [1998N] que cualquier $(n-1)$ -variedad euclídeana cerrada $M_E^{(n-1)}$ se realiza

como el componente frontera de una cúspide de alguna n -variedad hiperbólica; esto es, $M_E^{(n-1)}$ es la sección de una cúspide para alguna n -variedad hiperbólica. Por lo tanto, no cualquier n -variedad hiperbólica de volumen finito es un complemento de $(n - 2)$ -subvariedades.

§ 1.2. Complementos hiperbólicos en 4-variedades cerradas.

Otro resultado encontrado por Ivanišić en la dimensión 4 que contrasta con la dimensión 3 es la propiedad de que para cualquier 4-variedad cerrada N^4 , existen a lo más una cantidad finita de 4-variedades hiperbólicas no isométricas que son complementos en N^4 . Esto es un corolario como consecuencia de 3 proposiciones:

1. Si $M^4 = N^4 - A^2$ y denotamos por χ a la característica de Euler, entonces puesto que los componentes de A^2 son euclidianos se tiene que $\chi(A^2) = 0$ y por lo tanto $\chi(M^4) = \chi(N^4)$.
2. Teorema de Gauss-Bonnet: $\mathbf{Vol}(M^4) = 4\pi^2/3\chi(M^4)$. Es decir, todos los complementos hiperbólicos $M^4 = N^4 - A^2$ en una misma 4-variedad cerrada ambiente N^4 tienen el mismo volumen hiperbólico.
3. Teorema de Wang: Existe a lo más una cantidad finita de 4-variedades hiperbólicas con volumen menor que cualquier número dado.

En particular, existe a lo más una cantidad finita de nudos y enlaces de superficies anudadas en la 4-esfera \mathbb{S}^4 cuyos complementos admiten una estructura hiperbólica completa de volumen finito. La característica de Euler de cualquiera de estas posibles 4-variedades no compactas es 2.

§ 2. El complemento hiperbólico de un enlace de 5 toros en la 4-esfera.

En [52], Ratcliffe y Tschantz encontraron 1171 4-variedades hiperbólicas no compactas, geodésicamente completas, de volumen mínimo (o equivalentemente, por el teorema de Gauss Bonnet) cuya característica de Euler es 1. Solamente 22 son orientables.

Dada una 4-variedad no orientable M^4 , su *doble cubriente orientable* es la 4-variedad orientable \tilde{M}^4 tal que admite una involución (el grupo generado por esta involución es de orden 2) sin puntos fijos que invierte su orientación y M^4 es el cociente de \tilde{M}^4 bajo la acción de esta involución.

El doble cubriente orientable de las otras 1149 4-variedades fueron buenos candidatos para encontrar los primeros ejemplos de complementos hiperbólicos en \mathbb{S}^4 debido a que su característica de Euler es 2, la misma que \mathbb{S}^4 .

Si \tilde{M}^4 es el complemento de un enlace A^2 en alguna 4-variedad cerrada ambiente N^4 ; i.e. $\tilde{M}^4 = N^4 - A^2$, podemos caracterizar a N^4 rellenando por discos los componentes en la frontera de la compactificación \bar{M}^4 de \tilde{M}^4 . Las condiciones necesarias y suficientes para garantizar el homeomorfismo de la 4-esfera \mathbb{S}^4 con N^4 es que N^4 sea una 4-esfera homológica simplemente conexa; i. e. sus grupos de homología y su grupo fundamental sean isomorfos a los respectivos grupos de la 4-esfera. Una 4-variedad conexa, orientable y cerrada es una 4-esfera homológica si y sólo si su característica de Euler es 2 y su primer grupo de homología es trivial, ver [26]. Si se aplica este criterio, se obtiene que de las 1149 4-variedades no orientables, únicamente 49 cubrientes dobles orientables son candidatos a complementos de enlaces de 2-toros y botellas de Klein de 5 y 6 componentes.

En [32] D. Ivanišić encontró el primer ejemplo de un enlace hiperbólico en la cuarta dimensión que le fue comunicado por J. Ratcliffe. D. Ivanišić trabajó con la 4-variedad con el grupo de simetrías de mayor orden igual a 320, la que J. Ratcliffe y Tschantz habían enumerado 1011 en [52] y de la cual se expresaron diciendo: “Si uno iguala belleza con simetría, entonces esta 4-variedad es

la más hermosa (de su lista de 1171 4-variedades hiperbólicas)”, demostró que es homeomorfa al complemento de cinco 2-toros en una 4-variedad cuyo grupo fundamental es \mathbb{Z}_2 .

Además, D. Ivanšić mostró que para cualquier índice n , existen 4-variedades hiperbólicas que son cubrientes cíclicos y que son homeomorfos al complemento de un enlace de $4n + 1$ 2-toros en una 4-variedad cerrada, simplemente conexa y con característica de Euler igual a $2n$. En particular, su doble cubriente orientable es homeomorfo al complemento de cinco 2-toros en la 4-esfera. Este complemento hiperbólico en la 4-esfera es el tema central de esta parte de esta tesis. Se denotará a esta variedad por \mathcal{M}^4 , la imagen del encaje de 5 superficies toroidales en la 4-esfera \mathbf{S}^4 se denotará por \mathcal{A}^2 y se escribirá $\mathcal{M}^4 = \mathbf{S}^4 - \mathcal{A}^2$. Este enlace hiperbólico, tanto la 4-variedad no compacta \mathcal{M}^4 como la imagen del encaje \mathcal{A}^2 de los cinco 2-toros en \mathbf{S}^4 , se llamará *dirt*.

En esta parte de la tesis se dibuja un diagrama de la clase de isotopía del enlace dirt de cinco 2-toros anudados entre sí cuyo complemento en la 4-esfera \mathbf{S}^4 admite una estructura hiperbólica aritmética geodésicamente completa. Este diagrama es el primero hasta ahora conocido de un enlace hiperbólico en dimensión 4. El procedimiento utilizado es una versión 4-dimensional del método de D. Ivanšić descrito en [34] para determinar si una 3-variedad hiperbólica M^3 , no compacta pero de volumen finito, es el complemento de un enlace en la 3-esfera y si éste es el caso, dibujar el diagrama del enlace (Ver [62], [63], [21]).

En este capítulo se define la 4-variedad hiperbólica M^4 presentada de cuatro maneras distintas aunque equivalentes: como un espacio de órbitas de la acción propia, libre y discontinua de un subgrupo discreto de isometrías hiperbólicas en el 4-espacio hiperbólico, como un complejo celular que proviene del apareamiento de lados de dos poliedros hiperbólicos ideales, regulares y rectangulares, como descomposiciones en asas y como el complemento de un enlace de superficies euclidianas en la 4-esfera.

En la siguiente sección se describe el poliedro hiperbólico y se analizan los ciclos que provienen del apareamiento de sus lados.

§ 3. Un kaleidoscopio hiperbólico ideal, regular y rectangular en dimensión 4.

Los poliedros regulares son fascinantes porque se basan en su elaboración en los principios más simples, siguiendo un sencillo patrón con mucho orden y cuidado para elaborar complejas estructuras simétricas. Los primeros ejemplos construídos por el hombre datan 19,000 años de antigüedad y están tallados en piedra o contruídos en piel.

La descripción algebraica de la geometría como un sistema de coordenadas cartesianas dio la posibilidad de imaginar nuevos espacios y nuevas maneras de medir, es decir, nuevas geometrías. En esos nuevos mundos se descubrieron especímenes provistos de una belleza que un hombre limitado a la intuición 3-dimensional no había conocido antes.

La cuarta dimensión fue ampliamente estudiada en el siglo IXX por importantes matemáticos entre ellos Schläfli quien encontró los 6 politopos regulares convexos equivalentes a los sólidos platónicos 3-dimensionales. En el siglo XX Coxeter encontró y terminó de clasificar a los politopos regulares hiperbólicos, euclidianos y esféricos en cualquier dimensión.

Una definición poco conocida de los poliedros regulares es la de poseer la propiedad de tener 3 esferas concéntricas: inscrita, medio-inscrita y circunscrita.

El grupo de simetrías que preservan la orientación de un poliedro regular P es un subgrupo Γ_P del grupo de Lie de rotaciones de la 2-esfera $\mathbf{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ que se denota por $SO(3)$. Como grupo de Lie, $SO(3)$ es topológicamente una 3-variedad esférica homeomorfa al espacio proyectivo real

3-dimensional $\mathbb{R}\mathbf{P}^3$ cuyo grupo fundamental es \mathbb{Z}^2 . Por lo tanto, las matrices en $SO(3)$ que son los elementos de Γ_P , se corresponden biunívocamente con los elementos de un subconjunto discreto de puntos en $\mathbb{R}\mathbf{P}^3$ y con los elementos de un subconjunto discreto del doble de puntos en \mathbf{S}^3 .

En particular, el grupo de simetrías que preservan la orientación del tetraedro regular consta de 12 rotaciones en $SO(3)$ que corresponden a los 24 puntos en $\mathbf{S}^3 \subset \mathbb{R}^4$ cuyas cuatro coordenadas tienen dos ceros y dos ± 1 .

En la 4-bola de radio 1, centrada en el origen $\mathbf{B}^4 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 < 1\}$, considere las 24 3-esferas S_{****} de radio 1 centradas en estos 24 puntos. Para nombrarlas se especifica el centro de la esfera unitaria en la etiqueta $****$ que se compone de los símbolos $+$, $-$ ó 0 . Por ejemplo, S_{+-00} es la 3-esfera unitaria centrada en $(1, -1, 0, 0)$. Ver [32].

Estas 3-esferas son ortogonales a la frontera ideal del modelo conforme de la 4-bola del espacio hiperbólico que se denota por \mathbf{B}^4 ; por lo tanto, determinan hiperplanos completamente geodésicos. Cualesquiera dos de estas 3-esferas se intersectan ortogonalmente o son tangenciales con el punto de tangencia en $\partial\mathbf{B}^4$ o son disjuntas.

Sea \mathcal{Q}^4 el politopo hiperbólico convexo, regular, rectangular e ideal (no compacto pero de volumen finito) de 24 lados geodésicos que se obtiene como la intersección de los semiespacios que contienen el origen y cuya frontera son los hiperplanos definidos por la intersección de las 3-esferas S_{****} con el modelo hiperbólico \mathbf{B}^4 .

El lado de \mathcal{Q}^4 que está en la 3-esfera S_{****} también se ha denotado por S_{****} . De hecho, al proyectar a \mathcal{Q}^4 radialmente en la 3-esfera $\partial\mathbf{B}^4$, el baricentro del lado S_{****} es el punto $(*, *, *, *)$ en \mathbb{R}^4 .

Dos lados de \mathcal{Q}^4 se intersectan si y sólo si sus etiquetas tienen una entrada distinta de cero en la misma posición y las posiciones distintas de cero de las entradas restantes son diferentes. Dos lados son *asintóticos en el infinito*; es decir, en $\partial\mathbf{B}^4$ si y sólo si sus etiquetas tienen la misma entrada distinta de cero en una posición y la otra entrada distinta de cero opuesta, o si las posiciones donde tienen entradas distintas de cero son complementarias.

El politopo \mathcal{Q}^4 no tiene vértices reales pero tiene 24 vértices ideales que son:

$$\pm v_1 = v_{\pm 000} = (\pm 1, 0, 0, 0),$$

$$\pm v_2 = v_{0\pm 00} = (0, \pm 1, 0, 0),$$

$$\pm v_3 = v_{00\pm 0} = (0, 0, \pm 1, 0),$$

$$\pm v_4 = v_{000\pm} = (0, 0, 0, \pm 1)$$

y

$$v_{\pm\pm\pm\pm} = (\pm 1/2, \pm 1/2, \pm 1/2, \pm 1/2).$$

Un vértice ideal está en un lado S_{****} si su distancia euclídeana al punto $(*, *, *, *)$ es uno. Por lo tanto, en el caso de vértices cuya etiqueta tiene una entrada distinta de cero, un vértice está en un lado si y sólo si el lado tiene una entrada distinta de cero en la misma posición que el vértice. En el caso de vértices del tipo $v_{\pm\pm\pm\pm}$, un vértice está en un lado si y sólo si las entradas distintas de cero de la etiqueta del lado coinciden en la misma posición con las entradas de la etiqueta del vértice.

Por ejemplo, los lados S_{0-+0} y S_{+-00} se intersectan pero los lados S_{0-+0} y S_{0+0+} son disjuntos. Los seis vértices ideales del lado S_{0+0-} son: v_{0+00} , v_{000-} y $v_{\pm\pm\pm-}$. Los lados S_{0-+0} y S_{0--0} inciden en el vértice ideal $-v_2$ y los lados S_{0-+0} y S_{-00-} inciden en el vértice ideal v_{--+-} . El ángulo diedral es el mismo en cada punto de cada triángulo y de cada arista.

Por su construcción, el politopo convexo \mathcal{Q}^4 es un politopo regular dado que el grupo de simetrías del tetraedro actúa transitivamente en los lados de \mathcal{Q}^4 y por lo tanto, en sus 24 vértices ideales, sus 96 aristas y sus 96 caras triangulares. Se compone de 24 lados octaedrales, 96 caras triangulares, 96 aristas y 24 vértices. Inciden 6 octaedros en cada vértice, 3 octaedros alrededor de cada arista y una pareja en cada triángulo. Además, en cada vértice, inciden 12 triángulos y 8 aristas.

Los polígonos regulares y los n -simplejos tienen la singular propiedad de ser los únicos politopos autoduales, esto es, al intercambiar sus vértices por sus lados; y en general, sus caras de dimensiones k y $n - k$, se obtiene el mismo politopo regular bajo isometría. La única excepción es \mathcal{Q}^4 que topológicamente también es un politopo autodual. Debido a esta propiedad no se tiene un sólido platónico análogo en 3 dimensiones. Por su construcción, el poliedro 3-dimensional más parecido a \mathcal{Q}^4 es el dodecaedro romboidal cuyos lados son 12 rombos y sus vértices son los 14 vértices de un octaedro y de un cubo concéntricos. Sus aristas unen los vértices del cubo a los del octaedro de tal manera que se puede descomponer en un cubo y 6 pirámides de base cuadrada, una por cada vértice del octaedro. Al ensamblar nuevamente las pirámides por su base al cubo, las aristas del cubo y de la base de la pirámide forman una línea que divide a cada rombo por mitad pero no un doblez ni una arista del poliedro.

Las aristas de \mathcal{Q}^4 unen los 16 vértices de un hipercubo a los 8 vértices de su politopo dual, de tal manera que \mathcal{Q}^4 se puede descomponer en un hipercubo y 8 pirámides de base cúbica, una por cada vértice del hiperoctaedro. Al ensamblar nuevamente las pirámides por su base al hipercubo, los cuadrados del hipercubo y de la base de las pirámides forman unos 2-discos que dividen a cada octaedro de \mathcal{Q}^4 por mitad pero no un doblez ni una 2-cara de \mathcal{Q}^4 .

Otra manera de construir \mathcal{Q}^4 es mediante la rectificación del hiperoctaedro. La rectificación de un politopo significa recortar sus vértices hasta que el hiperplano de corte de un vértice interseque los puntos medios de las caras de codimensión 2 que inciden en este vértice. Los baricentros de los 24 cuadrados de un hipercubo forman los vértices de un politopo dual a \mathcal{Q}^4 .

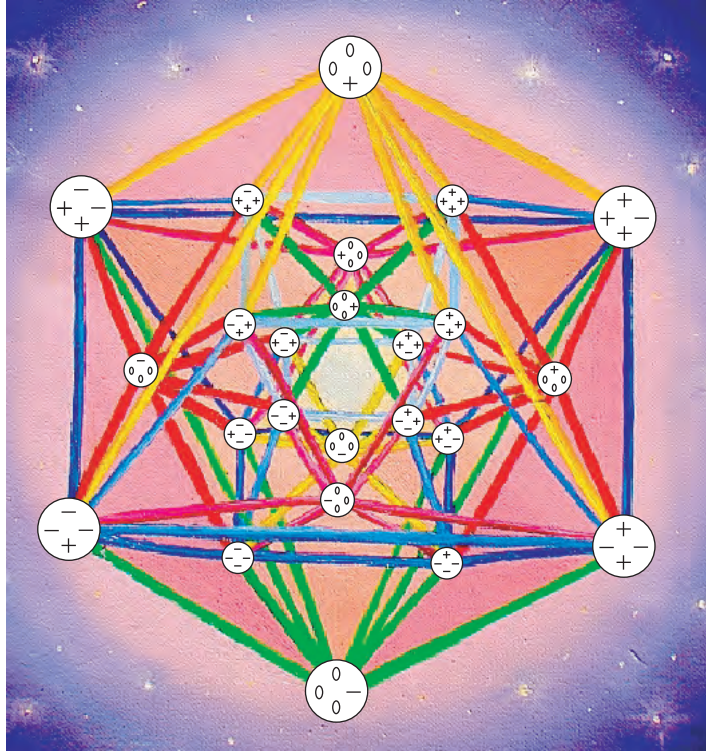


Figura 10.1 Isotopía rectilínea de la proyección estereográfica de la 24-celdas \mathcal{O}^4 con sus vértices etiquetados.

Considere que el vértice ideal $-v_1 = (-1, 0, 0, 0)$ de \mathcal{Q}^4 en \mathbf{B}^4 se ha transformado en el punto al infinito que se denota por ∞ , en el modelo hiperbólico del semiespacio superior $\mathbf{H}^4 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_4 > 0\}$ con la métrica $ds_{\mathbf{H}^4}^2 = \frac{dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2}{x_4^2}$. La transformación es la isometría estándar que es una función de Möbius $r : \mathbb{R}^4 \cup \infty \rightarrow \mathbb{R}^4 \cup \infty$ que manda el modelo de la 4-bola \mathbf{B}^4 en el modelo del semiespacio \mathbf{H}^4 .

Las aristas incidentes en ∞ son las 8 geodésicas hiperbólicas verticales que unen a ∞ con sus vértices adyacentes en \mathcal{Q}^4 los cuales se han transformado mediante r en 8 puntos que forman los vértices de un cubo en $\partial_{\infty}\mathbf{H}^4$ y dada la simetría de \mathcal{Q}^4 no de un paralelepípedo cualquiera. Más aún, los vértices ideales que no provienen de los ejes coordenados en \mathbf{B}^4 forman los 16 vértices de dos cubos concéntricos en el origen que es un hipercubo inscrito en \mathcal{Q}^4 .

Estos son:

$$\begin{aligned}
 rv_{++++} &= (2/3, 2/3, 2/3), rv_{+++ -} = (2/3, 2/3, -2/3), \\
 rv_{++ - +} &= (2/3, -2/3, 2/3), rv_{+ - ++} = (-2/3, 2/3, 2/3), \\
 rv_{- +++} &= (2, 2, 2), rv_{+ + - -} = (2/3, -2/3, -2/3), \\
 rv_{+ - + -} &= (-2/3, 2/3, -2/3), rv_{- + + -} = (2, 2, -2), \\
 rv_{+ - - +} &= (-2/3, -2/3, 2/3), rv_{- + - +} = (2/3, -2/3, 2/3), \\
 rv_{- - - -} &= (-, -, -), rv_{- - + +} = (-2, 2, 2), \\
 rv_{+ - - -} &= (-2/3, -2/3, -2/3), rv_{- + - -} = (2, -2, -2), \\
 rv_{- - + -} &= (-2, 2, -2), rv_{- - - +} = (-2, -2, 2).
 \end{aligned}$$

El vértice ideal $rv_1 = r(1, 0, 0, 0)$ de \mathcal{Q} , opuesto a $r(-v_1) = r(-1, 0, 0, 0) = \infty$ es el origen $(0,0,0,0)$. Las parejas de vértices en los ejes coordenados x_2, x_3 y x_4 se transforman en los 6 v ertices de un octaedro $r(\pm v_2) = (\pm 2, 0, 0)$, $r(\pm v_3) = (0, \pm 2, 0)$ y $r(\pm v_4) = (0, 0, \pm 2)$. En la figura ?? se muestra

la proyección vertical de \mathcal{Q} del semiespacio superior \mathbf{H}^4 al 3-espacio que es la frontera ideal $\partial\mathbf{H}^4$. En cada uno de los 8 vértices, de las 12 aristas y de las 6 caras cuadradas del cubo se ha proyectado una arista, un triángulo y un lado octaedral de \mathcal{Q}^4 . Por lo tanto, en la fig ?? aparecen 23 vértices, 88 aristas, 84 triángulos y 24 lados octaedrales.

El politopo \mathcal{Q}^4 forma un kaleidoscopio; es decir, si se refleja \mathcal{Q}^4 en cada uno de sus lados se obtiene un politopo de mayor tamaño, formado por varias copias de \mathcal{Q}^4 .

Cada uno de las celdas del panal infinito $\{3, 4, 3, 4\}$ es un 4-politopo isométrico a \mathcal{Q}^4 cuyos lados son 24 octaedros ideales que inciden en grupos de cuatro alrededor de cada triángulo. En particular, los lados incidentes en ∞ forman una chimenea cúbica ortogonal al 3-espacio \mathbb{R}_∞^3 que se identifica con la frontera ideal del espacio hiperbólico y se denota por $\partial_\infty\mathbf{H}^4$. Por lo tanto, el ángulo diedral en la teselación 4-dimensional hiperbólica en cada triángulo es recto.

Como el ángulo diedral de \mathcal{Q}^4 es $\pi/2$, se pueden ensamblar 4 copias de \mathcal{Q}^4 alrededor de una arista de tal manera que si se sigue reflejando *ad infinitum* en sus lados triangulares, el espacio hiperbólico \mathbf{H}^4 puede ser enmosaicado; esto es, llenado completamente sin traslapar, mediante una infinidad de politopos convexos, ideales, regulares y rectangulares isométricos a \mathcal{Q}^4 . Este mosaico es un politopo regular hiperbólico 4-dimensional con infinitas caras que se denota por $\{3, 4, 3, 4\}$. Sus vértices ideales se distribuyen en $\partial_\infty\mathbf{H}^4$ como los vértices del enmosaicado clásico por cubos de \mathbb{R}^3 que se denota por $\{3, 4, 4\}$.

§ 4. La identificación de las caras del politopo.

Sean \mathcal{Q}^4 y $\hat{\mathcal{Q}}^4$ dos politopos hiperbólicos adyacentes de la teselación $\{3, 4, 3, 4\}$. A continuación se obtendrá un complejo celular hiperbólico a partir de estos dos politopos y la identificación de sus lados por parejas. Como regla de pegado, se etiquetan los lados y las aristas de \mathcal{Q}^4 y $\hat{\mathcal{Q}}^4$ de acuerdo a la figura ?? en la que se ha proyectado estereográficamente la frontera $\partial\mathcal{Q}^4 = \partial\hat{\mathcal{Q}}^4 = \mathbf{S}^3$ de los octaedros en un espacio plano $\mathbb{R}^3 \cup \infty$.

Con el fin de trabajar solamente con un politopo hiperbólico convexo, se identifica un par de lados de los dos politopos \mathcal{Q}^4 y $\hat{\mathcal{Q}}^4$. Por ejemplo, en la figura ?? los dos politopos \mathcal{Q}^4 y $\hat{\mathcal{Q}}^4$ se toman adyacentes en el modelo del semiespacio de \mathbf{H}^4 , identificando los lados etiquetados con la letra H para formar un politopo convexo \mathcal{P}^4 . Para cada lado $S = A, \dots, L$ ó $S' = A', \dots, L'$ de \mathcal{P} ; existe una única isometría que invierte la orientación de \mathbf{H}^4 y que fija o manda $\hat{\mathcal{Q}}^4$ en \mathcal{Q}^4 y el lado S' en S ó manda \mathcal{Q} en $\hat{\mathcal{Q}}$ y el lado S' en S , respectivamente, de manera que se preserva el poliedro \mathcal{P} y la identificación de sus lados. Sea M^4 el complejo celular diferenciable (hiperbólico) que proviene de identificar en parejas y mediante isometrías los lados octaedrales de los dos politopos regulares y adyacentes \mathcal{Q} y $\hat{\mathcal{Q}}$ como en la figura ??.

§ 4.1. Ciclos.

El apareamiento de los lados determina una relación de equivalencia en el conjunto de todas las caras de \mathcal{P} . Las clases de equivalencia se llaman *ciclos* del apareamiento.

Al pegar dos 24-celdas en los politopos \mathcal{Q} y $\hat{\mathcal{Q}}$ se tienen en \mathcal{P} 46 octaedros ideales que se identifican por parejas formando 23 ciclos de lados que se han marcado por las letras de la A a la L. Los octaedros se identifican por parejas invirtiendo su orientación por lo que el complejo M^4 es orientable.

Las 24 aristas de \mathcal{Q} y $\hat{\mathcal{Q}}$ se identifican en grupos de 4 formando 6 ciclos de aristas que se han marcado por las letras A, \dots, F . Dado que \mathcal{P} es rectangular y no tiene vértices reales, el apareamiento de lados de \mathcal{P} es propio; esto es, alrededor de cada punto del poliedro \mathcal{P} existe una vecindad en el complejo celular M^3 isométrica a una 3-bola hiperbólica. Por lo tanto, M^3 es una 3-variedad hiperbólica, orientable y no compacta pero de volumen finito.

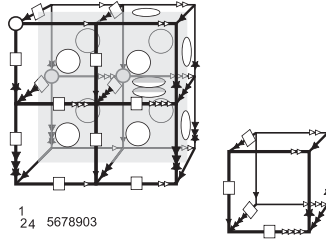


Figura 10.2. Las aureolas de Q^4 y su apreamiento para formar un 3-toro.

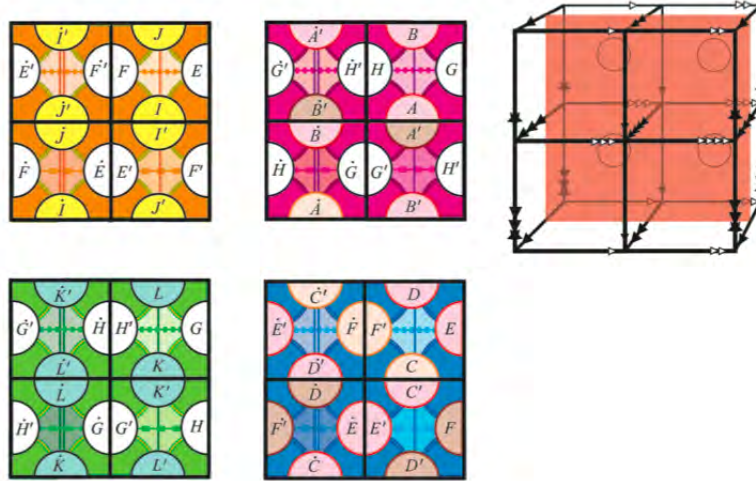


Figura 10.3. Diagrama 0.

§ 5. Estudio de las cúspides.

La figura que se forma al intersectar una horiesfera suficientemente pequeña centrada en un vértice de Q ; es decir su *figura vertical*, es un cubo. De la misma manera, la *aureola* que es la intersección de una horiesfera centrada en un vértice ideal v con los lados de Q^4 que son los hiperplanos que contienen a v , es un cubo. Intersecta seis lados que se intersectan entre sí en ángulos rectos o se intersectan sólo en v por lo que la intersección con la horiesfera son pares de planos paralelos que se intersectan en ángulos rectos; por la simetría de Q^4 , la aureola de v es un cubo y no un paralelepípedo rectangular cualquiera. Por ser Q^4 un politopo regular, en cada uno de sus vértices se obtiene la misma figura, un cubo euclideo.

§ 6. Descomposición en asas y cálculo de Kirby.

Una propiedad muy especial de la dimensión 4 es el hecho de que existen estructuras diferenciables exóticas, por ejemplo existe un continuo de espacios homeomorfos pero no difeomorfos a \mathbb{R}^4 . Los primeros ejemplos fueron encontrados por Robion Kirby y Michael Freedman utilizando los resultados de Simon Donaldson y completados por Clifford Taubes, ver [26].

La proposición de que no existen estructuras suaves exóticas en la 4-esfera S^4 ; es decir, 4-variedades homeomorfas pero no difeomorfas a S^4 , se conoce como la *conjetura suave de Poincaré*. En [32], Ivanišić mostró una 4-variedad hiperbólica homeomorfa a un complemento en una 4-variedad que es a su vez homeomorfa a la 4-esfera. La demostración de este hecho se basó en la topología de

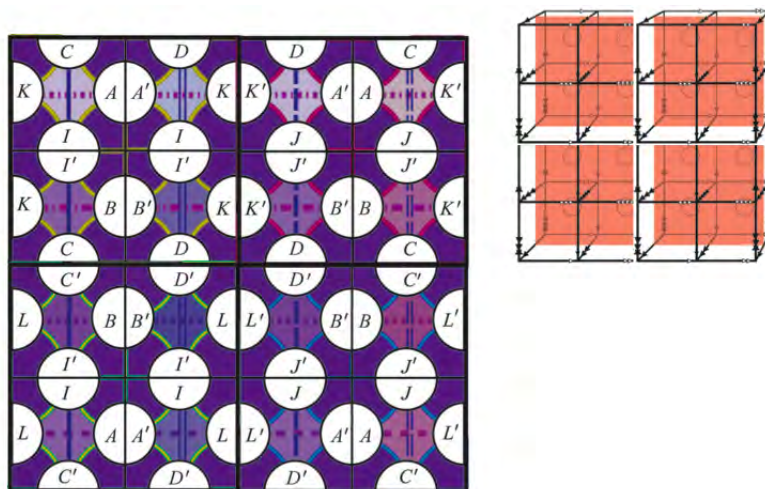


Figura 10.4. Diagrama 0.

sus cúspides (\mathbf{S}^1 -haces o, equivalentemente, vecindades tubulares regulares, de subvariedades euclidianas de codimensión 2 dóciles) y sus grupos fundamental y de homología. 4 años después, Ivanšić construyó una descomposición en asas a partir del complejo celular hiperbólico y simplificó mediante cálculo de Kirby, hasta obtener la descomposición en asas estándar diferenciable de \mathbf{S}^4 , ver [34].

En este capítulo se mostrará el cálculo hecho por Ivanšić, mismo que nos permitirá exhibir el diagrama del enlace de los cinco 2-toros anudados en \mathbf{S}^4 .

§ 7. Descomposición en Asas de dimensión 4.

Definición X.1. Una *descomposición en asas* de una 4-variedad M es una cadena

$$\emptyset = M_{-1} \subset M_0 \subset M_1 \subset M_2 \subset M_3 \subset M_4 = M;$$

donde cada M_i es un n -variedad con frontera, obtenida a partir de M_{m-1} al añadir algunas i -asas.

§ 7.1. Asas.

Una 0-asa es una 4-bola y la función de pegado es la unión disjunta. Una 1-asa se pega en dos 3-bolas disjuntas. Una 2-asa se pega por un toro sólido encajado en una 3-variedad lo que nos permite relacionar las descomposiciones en asas de 4-variedades con la teoría de nudos clásica.

§ 8. Cálculo de Kirby.

El cálculo de Kirby es un método de la topología geométrica para modificar enlaces en la 3-esfera.

§ 9. Descomposición por asas.

La descomposición en asas se obtiene al especificar las esferas añadidas de las 1-, 2- y 3-asas en ∂Q^4 y proyectándolas radialmente en $\mathbf{S}^3 \approx \mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$.

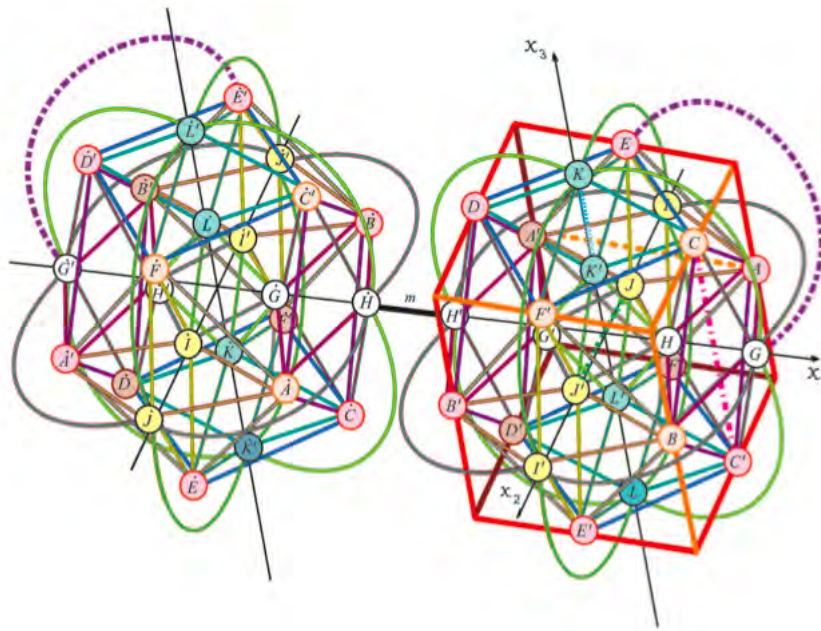


Figura 10.5. Diagrama 0.

Un par de asas con índice diferente de 1 pueden ser canceladas sin modificar el tipo de homeomorfismo de la variedad. Similarmente, pueden crearse pares de asas.

Dadas dos descomposiciones en asas de una 4-variedad suave, se puede obtener una de la otra por una secuencia finita de isotopías de la función de pegado y la creación y cancelación de pares de asas.

§ 10. Diagrama del enlace de 5 toros en la 4-esfera.

Comenzaremos con el diagrama de la descomposición en asas que proviene de la presentación de M como un apareamiento de lados por isometrías de un poliedro ideal P^4 en el espacio hiperbólico 4-dimensional \mathbf{H}^4 . Este diagrama y este método fueron descrito por D. Ivancić en [2008I] para mostrar que la 4-esfera topológica es difeomorfa a la 4-esfera estándar diferenciable \mathbf{S}^4 . El método para obtener una descomposición por asas de la 4-variedad consiste en engrosar cada ciclo de k -caras en P^4 para obtener una $(4 - k)$ -asa de la variedad M^4 .

En la siguiente sección mostraremos la forma de cada asa, después mostraremos el diagrama de Kirby proyectado en \mathbb{R}^3 de esta descomposición en asas de M^4 . Finalmente usaremos movimientos de asas para simplificar la descomposición de M^4 hasta obtener la descomposición de la 4-esfera estándar diferenciable.

§ 11. Geometrización del complemento del enlace en la 4-esfera.

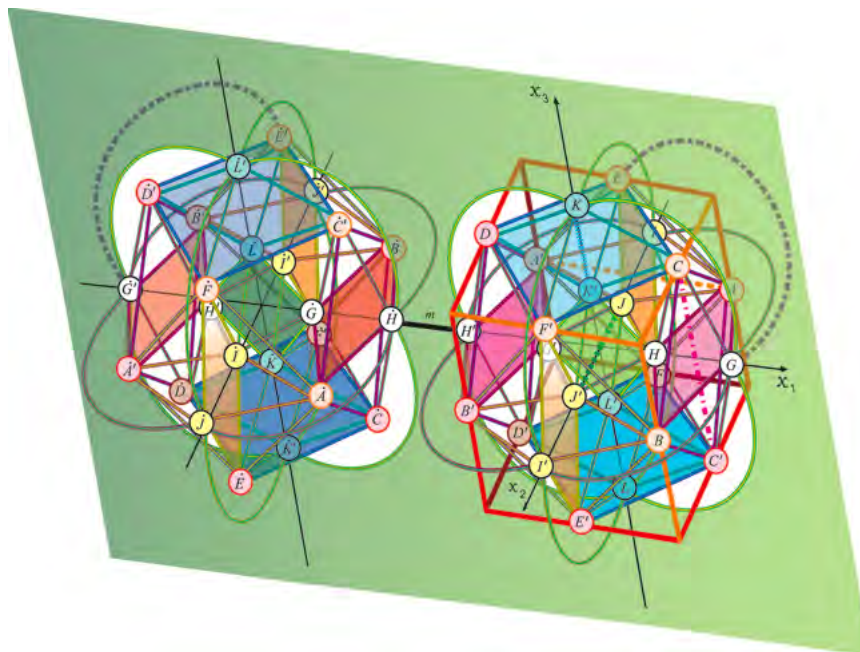


Figura 10.6. Diagrama 0.

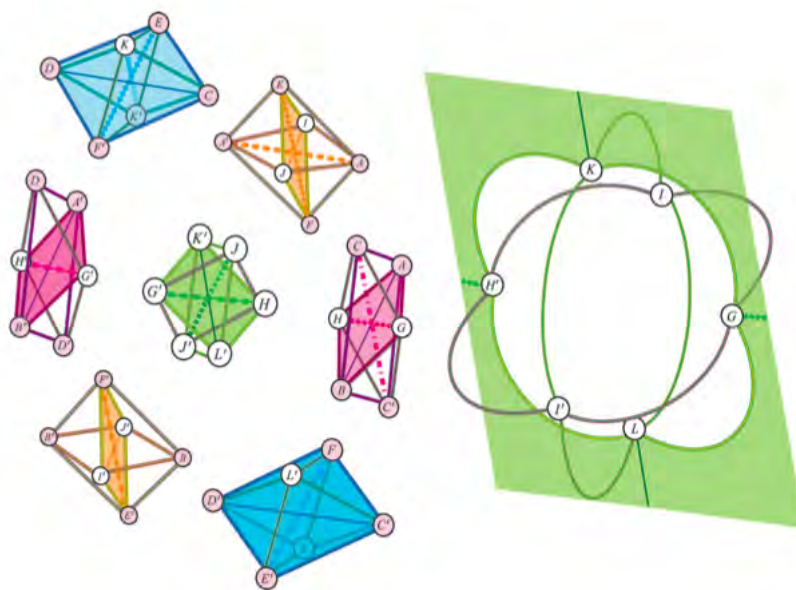


Figura 10.7. Diagrama 0.

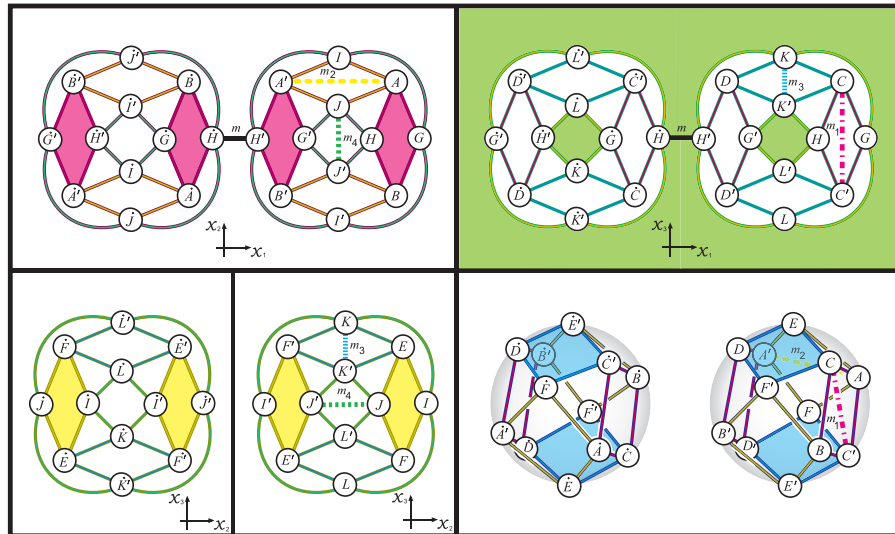


Figura 10.8. Diagrama 0.

Diagrama 0.

En el principio la descomposición en asas de S^4 consiste de veinticuatro 1-asas, cincuenta y cuatro 2-asas, treinta y cuatro 3-asas y cinco 4-asas. Los círculos de añadidura m_1 pasan por las 1-asas AA' .

0 – handles	$1 = 2 - 1$
1 – handles	24
2 – handles	$49 = 48 + 1$
3 – handles	$24 = 24 + 1 - 1$
4 – handles	0

0 – handl
1 – handl
2 – handl
3 – handl
4 – handl

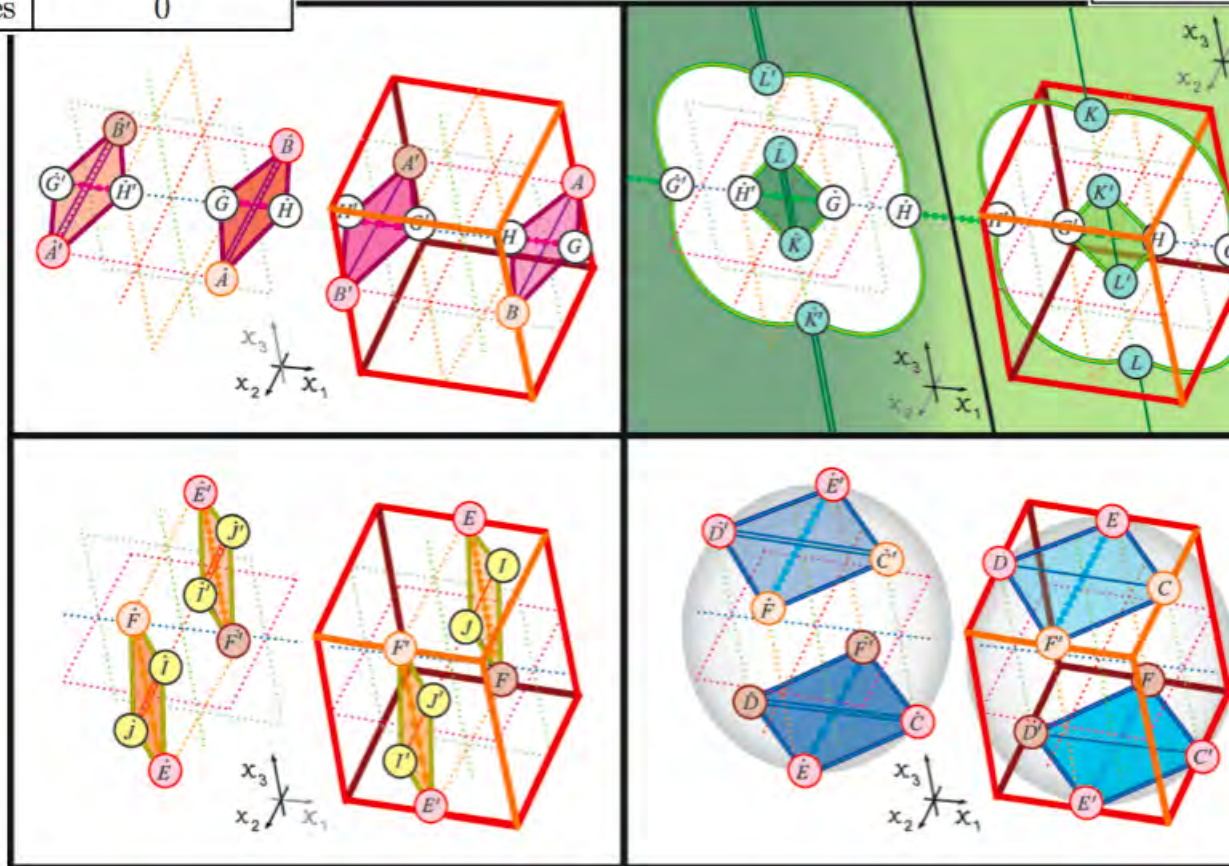


Figura 10.9. Diagrama 0.

Diagrama 1.

Las 2-asas cancelan a las 1-asas AA' .

X Una 4-variedad hiperbólica cuaterniónica aritmética que es el complemento de un enlace de 5 toros anudados en la 4-esfera.

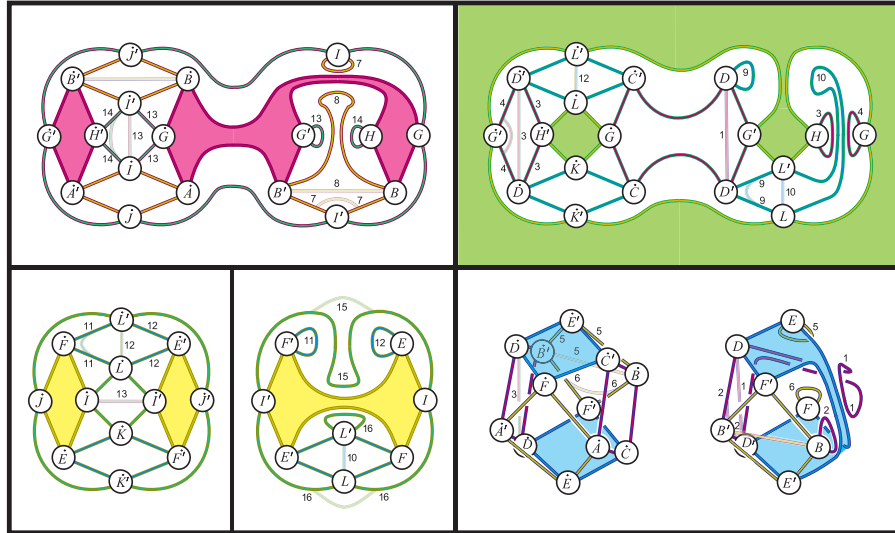


Figura 10.10. Diagrama 1.

Diagrama 2.

Los círculos de añadidura m_1 pasan por las 1-asas AA' .

0 – handles	1
1 – handles	19
2 – handles	49
3 – handles	34
4 – handles	5

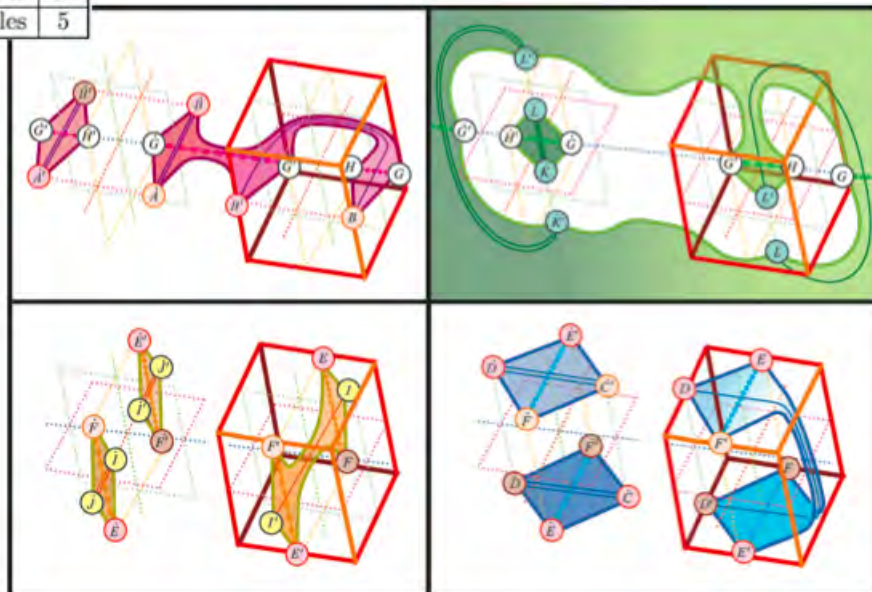


Figura 10.11. Diagrama 1.

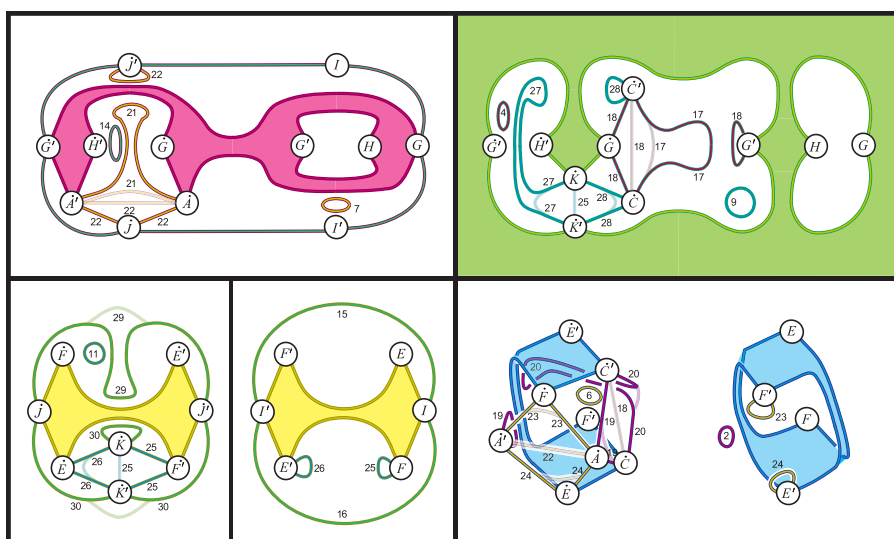


Figura 10.12. Diagrama 2.

X Una 4-variedad hiperbólica cuaterniónica aritmética que es el complemento de un enlace de 5 toros anudados en la 4-esfera.

0 – handles	1
1 – handles	12
2 – handles	35
3 – handles	27
4 – handles	5

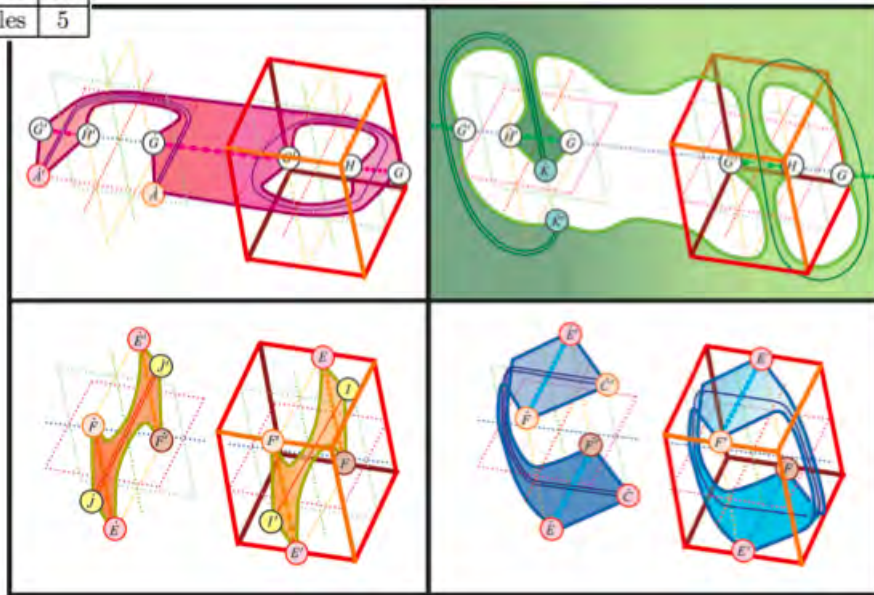


Figura 10.13. Diagrama 2.

Diagrama 3.

Los círculos de añadidura m_1 pasan por las 1-astas AA' .

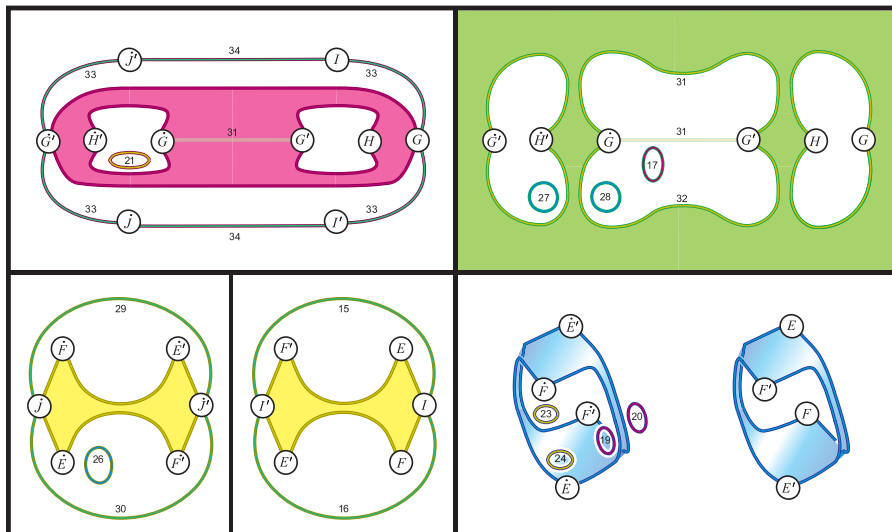


Figura 10.14. Diagrama 3.

Diagrama 4.

Los círculos de añadidura m_1 pasan por las 1-asas AA' .

X Una 4-variedad hiperbólica cuaterniónica aritmética que es el complemento de un enlace de 5 toros anudados en la 4-esfera.

144

0 – handles	1
1 – handles	9
2 – handles	23
3 – handles	18
4 – handles	5

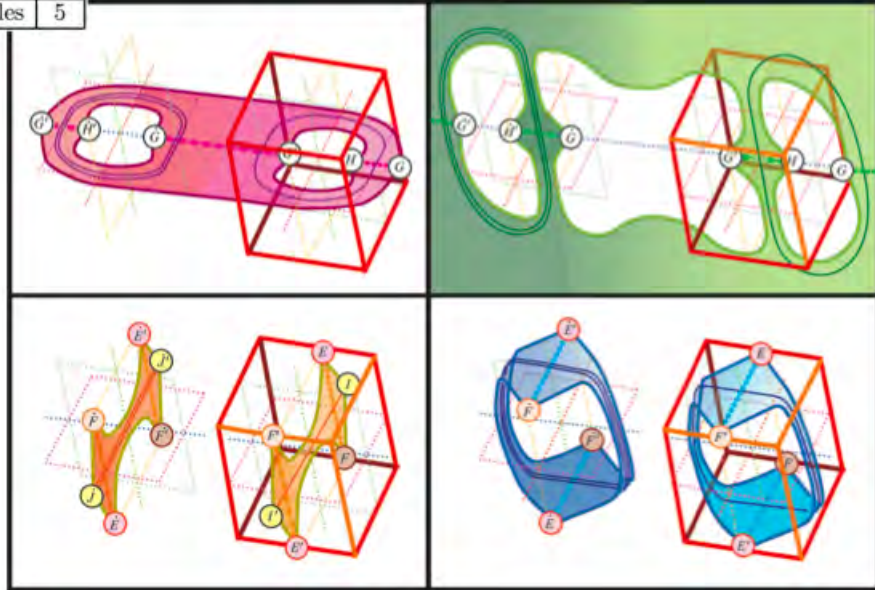


Figura 10.15. Diagrama 3.

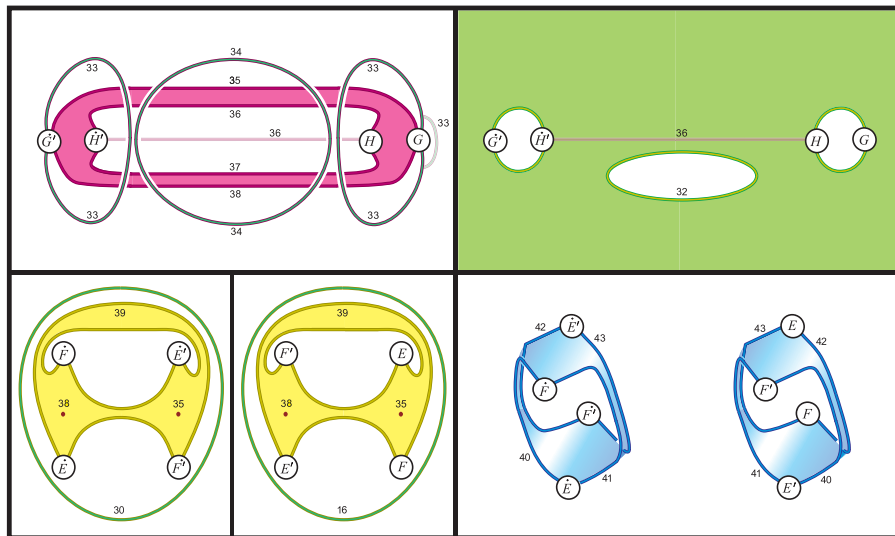


Figura 10.16. Diagrama 4.

0 – handles	1
1 – handles	6
2 – handles	15
3 – handles	13
4 – handles	5

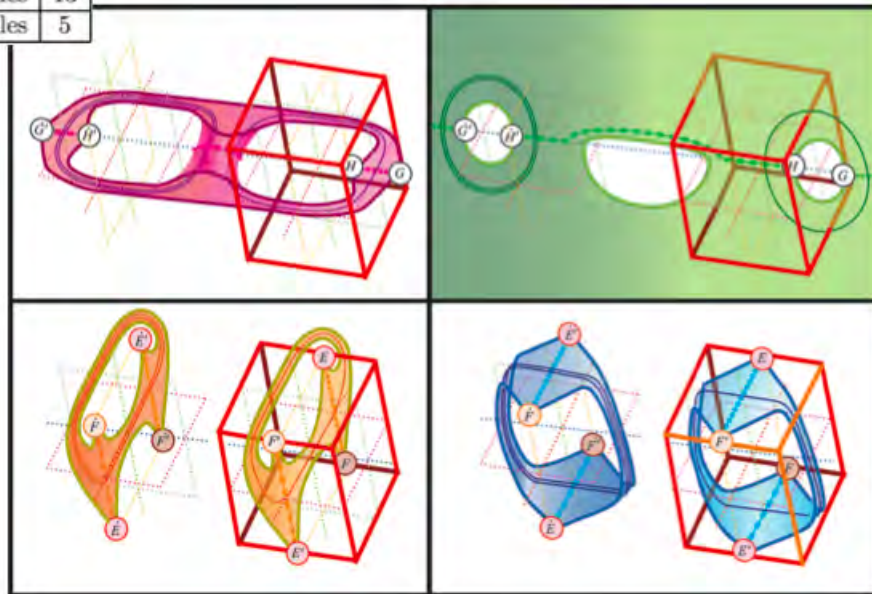


Figura 10.17. Diagrama 4.

Diagrama 5.

Los círculos de añadidura m_1 pasan por las 1-asas AA' .

X Una 4-variedad hiperbólica cuaterniónica aritmética que es el complemento de un enlace de 5 toros anudados en la 4-esfera.

146

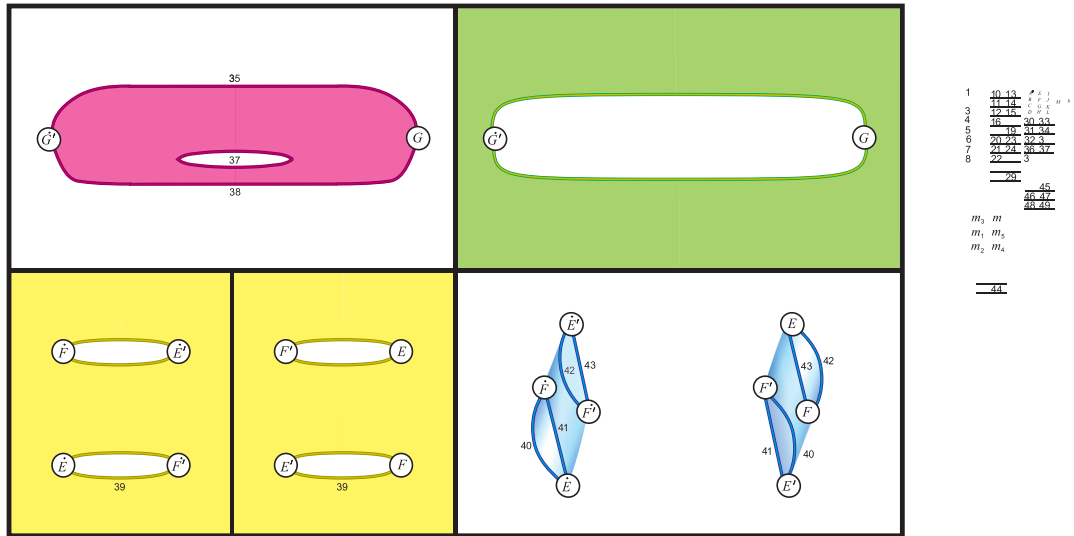


Figura 10.18. Diagrama 5.

Diagrama 6.

Los círculos de añadidura m_1 pasan por las 1-asas AA' .

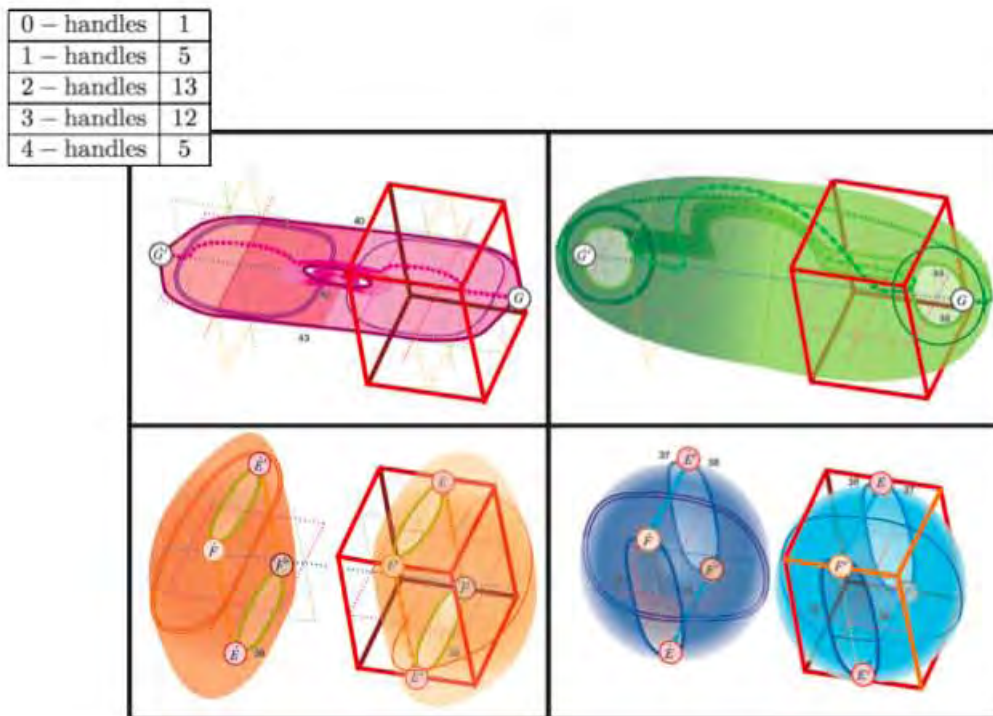


Figura 10.19. Diagrama 5.

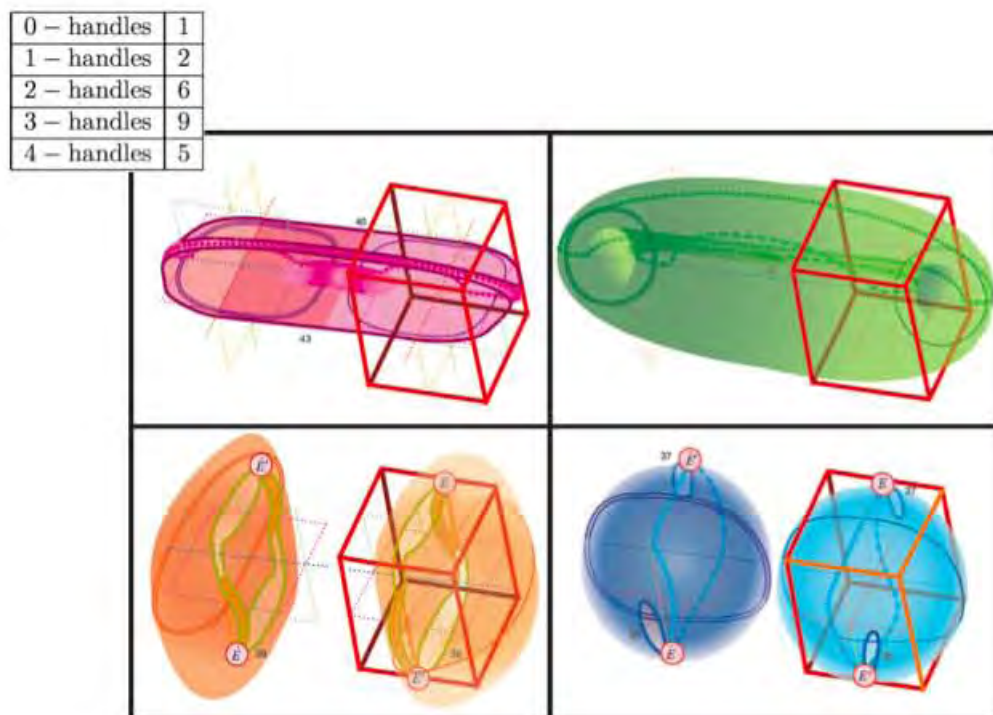


Figura 10.20. Diagrama 6.

X Una 4-variedad hiperbólica cuaterniónica aritmética que es el complemento de un enlace de 5 toros anudados en la 4-esfera.

0 – handles	1
1 – handles	1
2 – handles	4
3 – handles	7
4 – handles	5

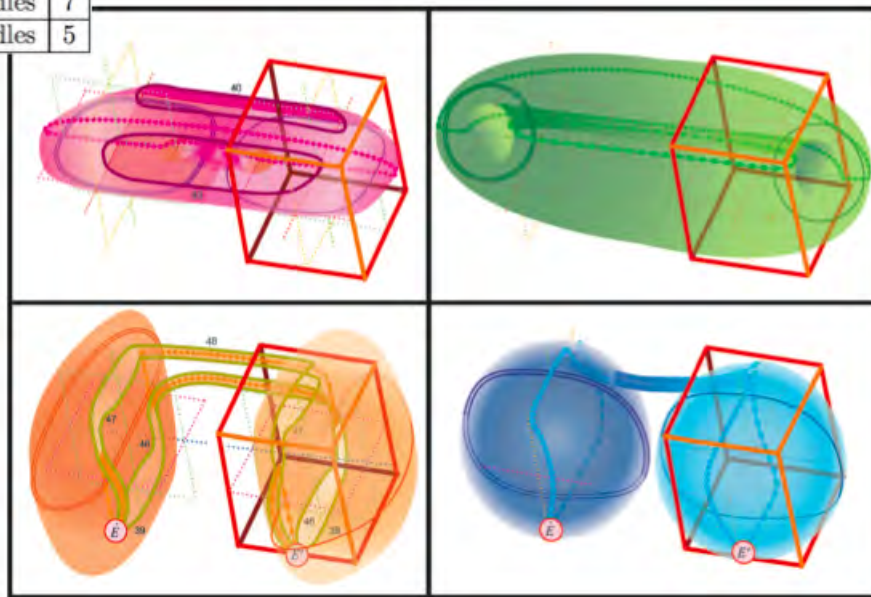


Figura 10.21. Diagrama 7.

Diagrama 7.

Los círculos de añadidura m_1 pasan por las 1-asas AA' .

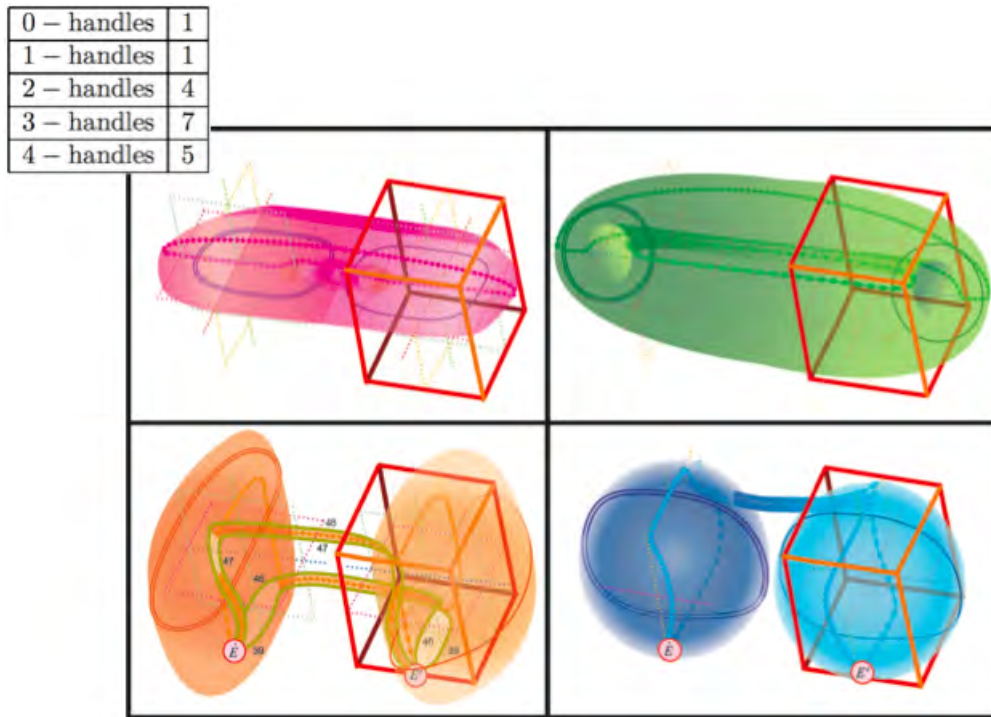


Figura 10.22. Diagrama 8.

Diagrama 8.

Los círculos de añadidura m_1 pasan por las 1-*asas* AA' .

X Una 4-variedad hiperbólica cuaterniónica aritmética que es el complemento de un enlace de 5 toros anudados en la 4-esfera.

0 – handles	1
1 – handles	1
2 – handles	4
3 – handles	7
4 – handles	5

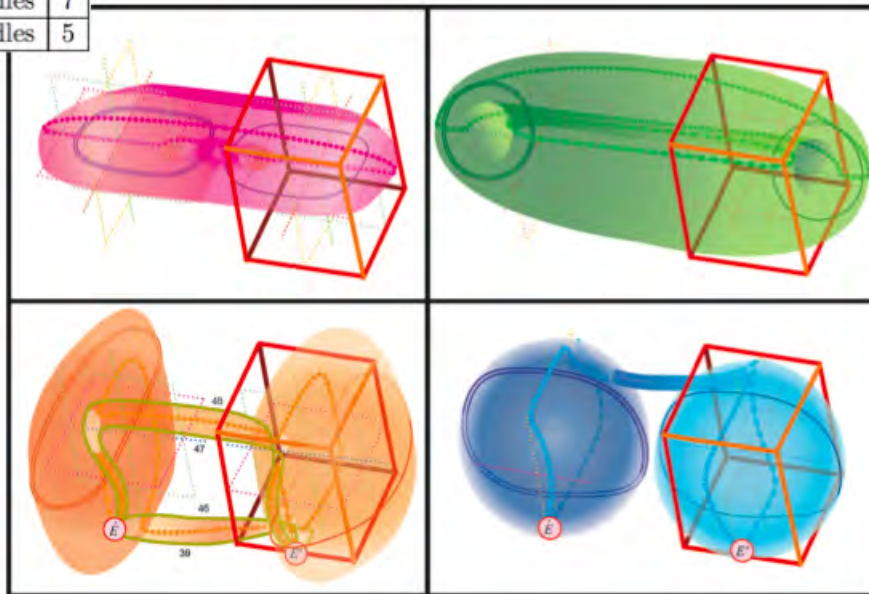


Figura 10.23. Diagrama 9.

Diagrama 9.

Los círculos de añadidura m_1 pasan por las 1-asas AA' .

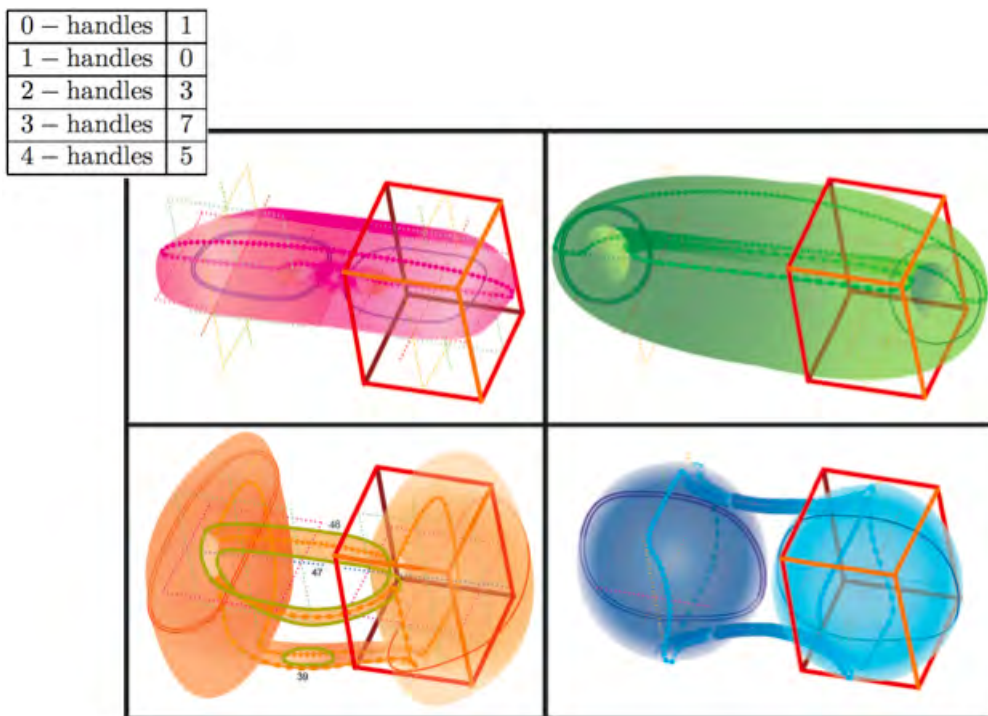


Figura 10.24. Diagrama 10.

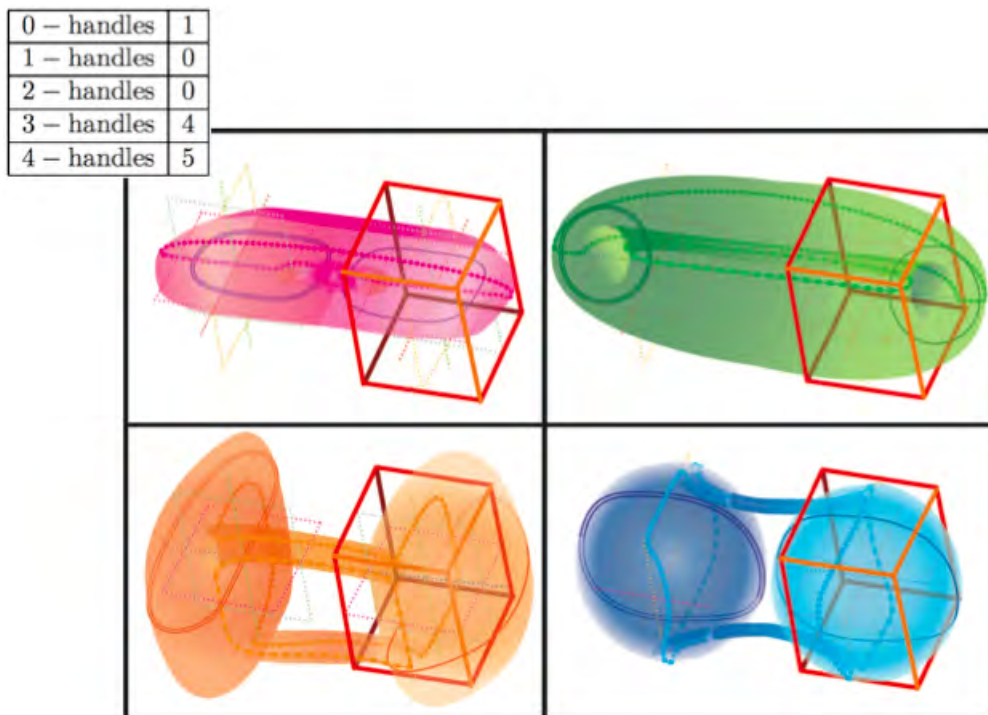


Figura 10.25. Diagrama 11.

X Una 4-variedad hiperbólica cuaterniónica aritmética que es el complemento de un enlace de 5 toros anudados en la 4-esfera.

0 – handles	1
1 – handles	0
2 – handles	0
3 – handles	0
4 – handles	1

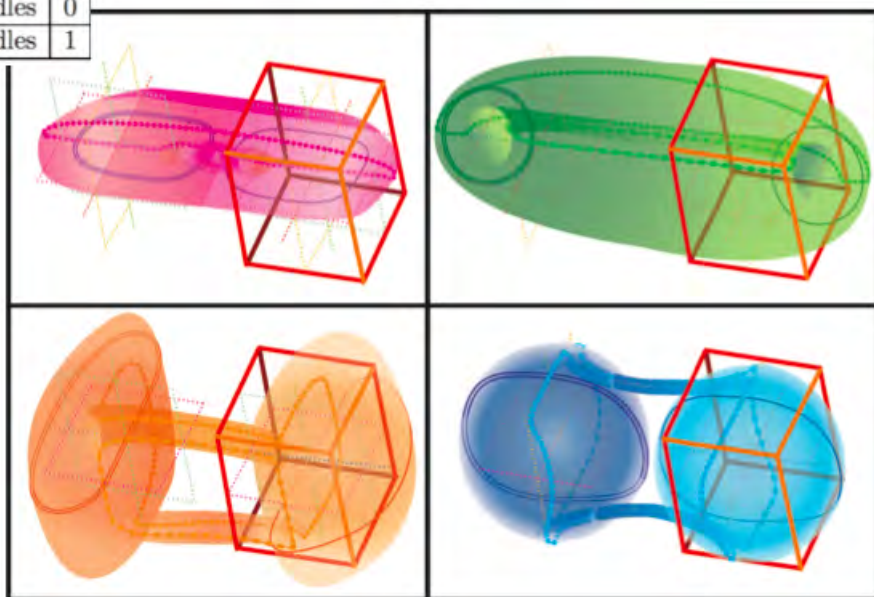


Figura 10.26. Diagrama 12.

Bibliografía

- [1] L.V. Ahlfors, **Möbius transformations and Clifford numbers** DIFFERENTIAL GEOMETRY AND COMPLEX ANALYSIS (I. Chavel, H.M. Farkas), Springer-Verlag, New York (1985), 65–74.
- [2] L.V. Ahlfors, **Möbius transformations in several dimensions** LECTURE NOTES, School of Mathematics, University of Minnesota, Minneapolis, (1981).
- [3] B. N. Apanasov. *Conformal geometry of discrete groups and manifolds*. de Gruyter Expositions in Mathematics 32, Walter de Gruyter & Co., Berlin (2000).
- [4] R. Benedetti, C. Petronio, **Lectures on hyperbolic geometry**, Springer, Heidelberg. (1991).
- [5] L. Bieberbach, *Über die Bewegungsgruppen der Euklidischen Rume I*, MATH. ANN. **70** (3), (1911), 297–336.
- [6] L. Bieberbach, *Über die Bewegungsgruppen der Euklidischen Rume II: Die Gruppen mit einem endlichen Fundamentalbereich*, MATH. ANN. **72** (3), (1912), 400–412.
- [7] C. Bisi, G. Gentili, *Möbius Transformations and the Poincaré Distance in the Quaternionic Setting* INDIANA UNIV. MATH. J. **58**(6) (2009), 2729–2764.
- [8] M. Boileau, S. Maillot, J. Porti, *Three-dimensional orbifolds and their geometric structures* PANORAMAS ET SYNTHESSES **15**(2003).
- [9] A. Borel, *Compact Clifford-Klein Forms of Symmetric Spaces* (1954), 111–122.
- [10] J.H. Bruinier, G. van der Geer, G. Harder, D. Zagier, *The 1-2-3 of modular forms* LECTURES FROM THE SUMMER SCHOOL ON MODULAR FORMS AND THEIR APPLICATIONS HELD IN NORDFJORDEID, (2004), Edited by Kristian Ranestad. Universitext. Springer-Verlag, Berlin, 2008.
- [11] B. Coan, C. Perng, *Factorization of Hurwitz Quaternions* INTERNATIONAL MATHEMATICAL FORUM, **7** (43) (2012), 2143–2156.
- [12] J.H. Conway, D.A. Smith **On Quaternions and Octonions: their Geometry, Arithmetic and Simmetry**, A.K. Pewters Ltd, (2003).
- [13] J.H. Conway, H. Burgiel, C. Goodman-Strass, **The Symmetries of Things**, Taylor & Francis, (2008).
- [14] H. S. M. Coxeter, *Discrete groups generated by reflections*, ANN. MATH. **35** (3) (1934), 588–621.
- [15] H. S. M. Coxeter, **Twelve Geometric Essays**. Southern Illinois University Press, Carbondale. **III**. (1968).
- [16] H. S. M. Coxeter, **Regular Complex Polytopes**. Second edition. Cambridge University Press, Cambridge. (1991).

- [17] M. Davis. *A hyperbolic 4-manifold*. Proc., Amer. Math. Soc. **93**, no. 2; (1985), 325–328.
- [18] J. De Loera, J. Rambau, F. Santos, **Triangulations. Structures for Algorithms and Applications**, ACM Springer, (2010).
- [19] D. B. A. Epstein, C. Petronio, *An exposition of Poincaré’s polyhedron theorem*, ENSEIGN. MATH. **40** (1994), 113–170.
- [20] B. Everitt. *3-manifolds from platonic solids*. Top. App. **138**, (2004), 253–263.
- [21] G.K. Francis, **A topological picturebook**, Springer, 1987.
- [22] M. Fuji. *Hyperbolic 3-manifolds with totally geodesic boundary which are decomposed into hyperbolic truncated tetrahedra*. Tokyo J. Math. **13**, 2 (1990), 353–373.
- [23] M. Fuji. *On totally geodesic boundaries of hyperbolic 3-manifolds*. Kodai Math. J. **15**, (1992), 244–257.
- [24] R. Fricke, F. Klein, **Vorlesungen ber die Theorie der automorphen Funktionen. Band 1: Die gruppentheoretischen Grundlagen. Band II: Die funktionentheoretischen Ausfhrungen und die Anwendungen**. (German) Bibliotheca Mathematica Teubneriana, Bnde 3, 4 Johnson Reprint Corp., New York; B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Stuttgart ,1965.
- [25] R. Gompf, A. Stipsicz. **4-Manifolds and Kirby Calculus**. Volume **20** in Graduate Studies in Mathematics, American Mathematical Society, Providence. (1999).
- [26] F. Hirzebruch, *Automorphe Formen und der Satz von Riemann–Roch*, SYMPOSIUM INTERNACIONAL DE TOPOLOGIA ALGEBRICA, Mexico, (1958), 129–144.
- [27] F. Hirzebruch, Th. Höfer, *On the Euler number of an orbifold*, MATH. ANN. 286, no.1-3, 255–260 (1990).
- [28] A. Hurwitz, *Über die Zahlentheorie der Quaternionen*. Gttinger Nachrichten, Math. Phys. Klasse, 1896, S. 313-340, Heft 4.
- [29] A.Hurwitz, **Vorlesungen ber die Zahlentheorie der Quaternionen** Berlin, 1919.
- [30] D. Ivanšić *Finite-volume hyperbolic 4-manifolds that share a fundamental polyhedron.*, (1997). arXiv:math.GT/9705217v1.
- [31] D. Ivanšić. *Embeddability of noncompact hyperbolic manifolds as complements of codimension-1 and -2 submanifolds*. Top. App. **120**, (2002), 211-236.
- [32] D. Ivanšić *Hyperbolic structure on a complement of tori in the 4-sphere.*, ADV. GEOM. **4** (1-2) (2004),119–139.
- [33] D. Ivanšić, J. Ratcliffe, S. Tschantz *Complements of tori and klein bottles in the 4-sphere that have hyperbolic structure*, ALGEBRAIC & GEOMETRIC TOPOLOGY. **5** (2005), 999–1026.
- [34] D. Ivanšić *On converting a side-pairing to a handle decomposition*, PREPRINT (2008).
- [35] D. Ivanšić *On identifying hyperbolic 3-manifolds as link complements in the 3-sphere*, Glasnik Matematički Vol. 48(68)(2013), 173–183.

- [36] M. Kapovich **Hyperbolic manifolds and discrete groups** BIRKHÄUSER, *Modern Birkhäuser classics*. (2001).
- [37] F. Klein, *Neue Beiträge zur Riemannschen Functionentheorie*, Math. Ann. **21** (1883), 141–218.
- [38] F. Klein, **Lectures on the icosahedron and the solution of equations of the fifth degree**, DOVER EDITIONS, (1956).
- [39] K. Kodaira, *On Kähler varieties of restricted types*, ANN. OF MATH., Princeton, **60**, (1954), 28–48.
- [40] S. Levy (Ed.), J.W. Cannon, W.J. Floyd, R. Kenyon, W.R. Parry *Hyperbolic geometry*, **Flavors of Geometry**, 31MSRI Publ., Cambridge Univ. Press, Cambridge, (1997), pp. 59–115.
- [41] R. Lipschitz, *Untersuchungen ber die Summen von Quadraten*, Bonn, 1886. Trad. franc. F. Molk: *Recherches sur la transformation, par des substitutions relles, d'une somme de deux ou de trois carrs en elle-mme*. Jour, de Math., IVe série, t. II, (1886).
- [42] D.D. Long, A. W. Reid. *On the geometric boundaries of hyperbolic 4-manifolds*. Geom. Topol. **4** (2000) 171–178.
- [43] C. Maclachlan, A. Reid, **The Arithmetic of Hyperbolic 3-Manifolds**, Graduate Texts in Mathematics, Vol. 219, Springer Verlag, (2003).
- [44] W. Magnus, **Noneuclidean tessellations and their groups**. Pure and Applied Mathematics, Vol. 61. Academic Press, New York-London, 1974.
- [45] B. Martelli, A. Kolpakov, *Hyperbolic 4-manifolds with one cusp*, Geom. Funct. Anal. Vol. **23**, (2013), 1903–1933.
- [46] G.D. Mostow. *Strong rigidity of locally symmetric spaces*. Annals of Mathematical Studies. Vol **78**. Princeton University Press. (1973).
- [47] B.E. Niemišhein. *All flat three-manifolds appear as cusps of hyperbolic four manifolds*. Topology and Its Appl. **90**, (1998), 109–133.
- [48] G. Prasad. *Strong rigidity of \mathbb{Q} -rank 1 lattices*. Invent Math. Vol **21**, (1973), 255–286.
- [49] J.G. Ratcliffe, **Foundations of hyperbolic geometry**. (Second edition), Graduate Texts in Mathematics Vol. 149, Springer Verlag (2006).
- [50] J.G. Ratcliffe, S.T. Tschantz, *Some examples of aspherical 4-manifolds that are homology 4-spheres*, TOPOLOGY **44(2)** (2005), 341–350.
- [51] J.G. Ratcliffe, S.T. Tschantz, *The volume spectrum of hyperbolic 4-manifolds*, EXPERIMENT. MATH. **9** (1), (2000), 101–125.
- [52] J.G. Ratcliffe, *Gravitational instantons of constant curvature.*, Classical Quantum Gravity, **15:9** (1998), 2613-2627.
- [53] B. Riemann. *Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen*, Abh. Ges. Wiss. Göttingen **13** (1867), 133–152.
- [54] R. Riley. *Discrete parabolic representations of link groups*. Mathematika, **22(2)** (1975), 141–150.
- [55] <https://plus.google.com/+RoiceNelson/posts>

- [56] J. Seade, A. Verjovsky, *Higher dimensional complex Kleinian groups*, MATH. ANN. **322** (2002), 279–300.
- [57] A. Selberg, *On Discontinuous Groups in Higher Dimensional Symmetric Spaces*, CONTRIBUTIONS TO FUNCTION THEORY. (1960), 147–164.
- [58] J. P. Serre, **A Course in Arithmetic**, Graduate Texts in Mathematics, Vol. 7, Springer Verlag, (1973).
- [59] S. Smale. *On the structure of manifolds*, Amer. J. Math. **84** (1962), 387–399.
- [60] E. Spanier, *The homology of Kummer manifolds*, Proc. Amer. Math. Soc. **7** (1956), 155–160.
- [61] C. Stoppato, *Regular Möbius Transformations of the space of Quaternions* ANN. GLOB. ANAL. GEOM. **39** (2011), 387–401.
- [62] W. Thurston, **Geometry and Topology of Three-Manifolds**, LECTURE NOTES, PRINCETON UNIVERSITY. (1980).
- [63] W. Thurston, **Three-dimensional geometry and topology**. Vol. 1. Edited by Silvio Levy. Princeton Mathematical Series, 35. Princeton University Press, Princeton, NJ. (1997).
- [64] A. Verjovsky. **Introducción a la geometría y variedades hiperbólicas**. Sexta escuela latinoamericana de matemáticas. Oaxtepec, Morelos. (1982).
- [65] È.B. Vinberg, *Volumes of non-Euclidean polyhedra*. RUS USPEKHI MAT. NAUK **48** no.2 (290), (1993), 17–46; translation in RUSSIAN MATH. SURVEYS **48** no. 2, (1993), 15–45.
- [66] F. Waldhausen. *On irreducible 3-manifolds which are sufficiently large*, Ann. of Math. **87**, (1968), 56–88.
- [67] N. Wielenberg. *The structure of certain subgroups of the Picard group*. Math. Proc. Cambridge Philos. Soc., 84(3) (1978), 427–436.
- [68] J. Wolf, **Spaces of Constant Curvature**, Publish or Perish (1974).