



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

POSGRADO CONJUNTO EN CIENCIAS  
MATEMÁTICAS UNAM-UMSNH

**DIMENSIÓN GEOMÉTRICA PARA FAMILIAS DEL GRUPO  
MODULAR DE SUPERFICIES**

**TESIS**

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE

**DOCTORA EN CIENCIAS MATEMÁTICAS**

PRESENTA

**ALEJANDRA TRUJILLO NEGRETE**

TUTOR PRINCIPAL:

**DR. DANIEL JUAN PINEDA**

Centro de Ciencias Matemáticas, UNAM Campus Morelia

MIEMBROS DEL COMITÉ TUTOR:

**Dr. Gerardo Raggi Cárdenas**

Centro de Ciencias Matemáticas

UNAM, Campus Morelia

**Dr. Abel Castorena Martínez**

Centro de Ciencias Matemáticas

UNAM, Campus Morelia

MORELIA, MICHOACÁN

MAYO 2016



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



*A mis padres:  
Ma. Francisca Negrete Aguiñaga  
Luis Trujillo Cardona*



# Agradecimientos

Quiero expresar mi más sincero agradecimiento a mi tutor, el Dr. Daniel Juan Pineda, por su guía durante el doctorado, por su paciencia, ayuda y motivación.

Le agradezco al Dr. John Guaschi por todo el apoyo brindado durante mi estancia en Caen.

A mis sinodales: Dra. Rita Jiménez Rolland, Dr. Noé Bárcenas Torres, Dr. John Guaschi, Dr. José Luis Cisneros Molina, Dr. Jorge Luis López López y Dr. Angel Cano Cordero, les agradezco por sus contribuciones en la redacción de esta tesis, las cuales han sido de gran importancia.

A mis padres maravillosos por su grande amor, por enseñarme con el ejemplo y por su apoyo incondicional.

A mis hermanos: Jesus, Ana , Claudia, Luis y Mary, aprecio cada momento con ustedes, les doy gracias por sus consejos, apoyo y amor.

Durante este trayecto en mi vida he conocido a grandes personas: Osvaldo, Enrique, Antonio, Elías, Angélica, Tadeo y Sergio, gracias por su amistad y apoyo.



# Índice general

<b>Capítulo 1</b>	<b>Espacios clasificantes para familias</b>	<b>1</b>
1.1	Preliminares . . . . .	1
1.2	Construcción de modelos . . . . .	3
1.3	Propiedad $M_{\mathcal{FIN}_G \subseteq \mathcal{VCY}_G}$ . . . . .	5
1.4	Condición (C) . . . . .	6
1.5	Dimensión geométrica . . . . .	7
<b>Capítulo 2</b>	<b>Modelos para <math>\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}</math></b>	<b>9</b>
2.1	Primer modelo . . . . .	10
2.2	Segundo Modelo . . . . .	14
2.2.1	Modelos para los conmensuradores . . . . .	15
2.2.2	El modelo . . . . .	17
<b>Capítulo 3</b>	<b>El grupo modular de una superficie</b>	<b>19</b>
3.1	Giros de Dehn . . . . .	20
3.2	Difeomorfismos pseudo-Anosov . . . . .	22
3.3	Clasificación de elementos en $\Gamma(S)$ . . . . .	24
3.4	Homomorfismos inducidos de inclusiones . . . . .	25
3.5	Subgrupos de Congruencia . . . . .	28
3.6	Sistema de reducción canónico . . . . .	29
<b>Capítulo 4</b>	<b>Conmensuradores</b>	<b>31</b>
4.1	Estabilizadores . . . . .	31
4.2	Normalizadores . . . . .	33
4.3	Condición (C) para $\Gamma(S)$ . . . . .	37
4.4	Descripción de los conmensuradores . . . . .	40
<b>Capítulo 5</b>	<b>Dimensión geométrica de <math>\Gamma(S)</math></b>	<b>43</b>
5.1	Resultados conocidos . . . . .	43
5.2	Dimensión geométrica . . . . .	45
5.3	Cotas para la dimensión geométrica . . . . .	47
<b>Capítulo 6</b>	<b>Grupo de trenzas de una superficie</b>	<b>51</b>
6.1	Espacios de Configuración . . . . .	52
6.2	Relación con el grupo modular de una superficie . . . . .	52
6.3	Dimensión geométrica . . . . .	53
	Bibliografía.....	55





# Introducción

Sea  $G$  un grupo discreto. Una colección  $\mathcal{F}$  de subgrupos de  $G$  es una familia si es cerrada bajo toma de subgrupos y conjugación. Un modelo para espacio clasificante  $E_{\mathcal{F}}G$  para una familia  $\mathcal{F}$  es un  $G$ -CW-complejo que es un objeto terminal en la categoría de  $G$ -CW-complejos con subgrupos de isotropía en  $\mathcal{F}$ . Estos espacios pueden ser vistos como invariantes del grupo, ya que propiedades del grupo se pueden reflejar en propiedades geométricas u homotópicas de  $E_{\mathcal{F}}G$ . Los espacios clasificantes para familias han sido muy estudiados y son importantes en varias áreas de matemáticas, tales como teoría de grupos, topología algebraica y geometría algebraica. Algunas referencias son [25], [29], [26] y [21].

Cuando la familia consiste del subgrupo trivial  $\mathcal{F} = \{1\}$ , el espacio  $E_{\{1\}}G$  es el cubriente universal de un espacio Eilenberg-MacLane de tipo  $K(G, 1) = BG$ , el cual es el espacio total del  $G$ -haz principal universal  $EG \rightarrow BG$ . Se denota por  $\underline{EG}$  al espacio clasificante de  $G$  para la familia de subgrupos finitos, el cual es llamado el espacio universal para  $G$ -acciones propias. El espacio clasificante de  $G$  para la familia de subgrupos virtualmente cíclicos es denotado por  $\underline{\underline{EG}}$ .

Uno de los motivos por el cual es importante el estudio de modelos para espacios clasificantes  $\underline{\underline{EG}}$  y sus propiedades de finitud es porque ellos aparecen en la Conjetura de Farrell-Jones acerca de la  $K$ -teoría algebraica de anillos de grupos. Esta Conjetura puede reducir el cálculo de la  $K$ -teoría del anillo del grupo al cálculo de cierta teoría de homología equivariante aplicada a esos espacios clasificantes  $\underline{\underline{EG}}$ . Esta conjetura implica otras conjeturas importantes, tales como la conjetura de Borel, la conjetura de Bass y la conjetura de Novikov. Una referencia para la conjetura de Farrell-Jones es [29].

En [21], Juan-Pineda y Leary dan un modelo para  $\underline{\underline{EG}}$ , para grupos que satisfacen ciertas condiciones, por ejemplo los grupos Gromov hiperbólicos las satisfacen. Cuando el grupo  $G$  actúa en un espacio CAT(0) propiamente por isometrías semi-simples, Farley da un modelo para  $\underline{\underline{EG}}$ , [11].

Siempre existe un modelo para  $E_{\mathcal{F}}G$ , pero podría ser de dimensión infinita. Una de las propiedades de finitud estudiada es la *dimensión geométrica de  $G$  para la familia  $\mathcal{F}$* , denotada  $\text{gd}_{\mathcal{F}}G$ , que es la dimensión mínima para el cual existe un modelo para  $E_{\mathcal{F}}G$ . Denotaremos por  $\text{gd}G$  cuando la familia es la de subgrupos finitos y por  $\underline{\underline{\text{gd}}}G$  cuando la familia es la de subgrupos virtualmente cíclicos.

Uno de los métodos usados para dar cotas para  $\text{gd}_{\mathcal{F}}G$  es el estudio de cohomología

de Bredon, ya que la dimensión cohomológica de Bredon  $cd_{\mathcal{F}}G$  para la familia  $\mathcal{F}$  coincide con  $gd_{\mathcal{F}}G$  cuando  $cd_{\mathcal{F}}G$  es mayor o igual a tres, este es un resultado de Lück y Meintrup [28]. Otro método empleado resulta de la construcción que dan Lück y Weiermann en [30], cuando se conoce que  $\underline{gd}G$  es finita y en este caso se necesita conocer los conmensuradores  $N_G[V]$  de los subgrupos virtualmente cíclicos infinitos  $V$  de  $G$  y encontrar cotas para  $gd_{\mathcal{G}[V]}N_G[V]$ , para cierta familia  $\mathcal{G}[V]$  de  $N_G[V]$ . El segundo método es el que usaremos en esta tesis.

Los grupos para los cuales daremos cotas para dimensión geométrica para la familia de subgrupos virtualmente cíclicos son los siguientes:

1. El grupo modular de una superficie, denotado por  $\Gamma(S - \mathcal{P})$ , donde  $S$  es una superficie orientable compacta y  $\mathcal{P}$  es un conjunto finito de puntos en el interior y  $\chi(S - \mathcal{P}) < 0$ ;
2. Para  $m \geq 3$ , el subgrupo de congruencia  $\Gamma_m(S - \mathcal{P}) \subset \Gamma(S - \mathcal{P})$ ;
3. Los grupos de trenzas puro y completo de una superficie,  $P_n(S)$  y  $B_n(S)$ , donde  $S$  es una superficie orientable compacta y  $\chi(S) - n < 0$ .

#### RESULTADOS CONOCIDOS:

1. El espacio de Teichmüller  $\mathcal{T}(S - \mathcal{P})$  es un modelo para  $\underline{E}\Gamma(S - \mathcal{P})$  por resultados de Kerckhoff, [24]. En [1], Aramayona y Martínez-Pérez prueban que  $\underline{gd}\Gamma(S - \mathcal{P})$  coincide con la dimensión cohomológica virtual  $vcd(\Gamma(S - \mathcal{P}))$ , la cual es calculada por Harer en [18]. En [9] Degrijse y Petrosyan demuestran que si  $g \geq 2$  y  $S_g$  es una superficie de género  $g$ , entonces  $\underline{gd}\Gamma(S_g) \leq 9g - 8$ , el método que ellos usan es con cohomológica de Bredon, ellos prueban que la dimensión cohomológica de Bredon para la familia de subgrupos virtualmente cíclicos  $\underline{c}(\Gamma(S_g))$  es menor que  $9g - 8$ .
2. Como el subgrupo  $\Gamma_m(S - \mathcal{P})$  es un subgrupo libre de torsión y de índice finito en  $\Gamma(S - \mathcal{P})$ ,

$$\underline{gd}\Gamma_m(S - \mathcal{P}) \leq \underline{gd}\Gamma(S - \mathcal{P}) = vcd(\Gamma(S - \mathcal{P})) = cd(\Gamma_m(S - \mathcal{P})).$$

3. Cuando la superficie  $S$  es distinta de la esfera,  $\underline{gd}P_n(S)$  y  $\underline{gd}B_n(S)$  son menores o iguales a  $2n$ , por resultados de Fadell y Neuwirth [12].

Esta tesis esta organizada de la siguiente forma: En el Capítulo 1 veremos los métodos dados en [30] y [11], además de una serie de resultados acerca de las dimensiones geométricas  $\underline{gd}G$  y  $\underline{gd}G$ . En el Capítulo 2 daremos dos modelos para  $\underline{E}(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})$ , con los métodos vistos en el Capítulo 1. El Capítulo 3 contiene material preliminar de los grupos  $\Gamma(S - \mathcal{P})$  y  $\Gamma_m(S - \mathcal{P})$ . En el Capítulo 4 describiremos (hasta índice finito) los normalizadores de elementos reducibles y veremos el siguiente resultado:

**Lema 1.** *Sea  $m \geq 3$  fijo. Sean  $S$  una superficie compacta orientable y  $\mathcal{P}$  un conjunto finito de puntos del interior con  $\chi(S - \mathcal{P}) < 0$ . Para cualquier subgrupo cíclico infinito  $C = \langle g \rangle$  de  $\Gamma(S - \mathcal{P})$  y  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $g^n \in \Gamma_m(S)$ , se tiene la siguiente igualdad*

$$N_{\Gamma(S - \mathcal{P})}[C] = N_{\Gamma(S - \mathcal{P})}(g^n),$$

donde  $N_{\Gamma(S - \mathcal{P})}[C]$  denota el conmensurador de  $C$  en  $\Gamma(S - \mathcal{P})$  y  $N_{\Gamma(S - \mathcal{P})}(g^n)$  es el normalizador del subgrupo cíclico  $\langle g^n \rangle$ . Además el subgrupo  $\langle g^n \rangle$  puede ser tomado como un cíclico maximal en  $\Gamma_m(S - \mathcal{P})$  (el cual es único).

En el Capítulo 5, usando la descripción de los conmensuradores demostraremos el siguiente:

**Teorema 2.** *Sea  $S$  una superficie orientable compacta y  $\mathcal{P}$  un conjunto finito de puntos del interior con  $\chi(S - \mathcal{P}) < 0$ . Entonces la dimensión geométrica  $\underline{\underline{\text{gd}}}\Gamma(S - \mathcal{P})$  es finita. Por lo tanto, el grupo  $\Gamma(S - \mathcal{P})$  admite un modelo para  $\underline{\underline{E}}\Gamma(\overline{S} - \mathcal{P})$  de dimensión finita.*

En la Sección 5.3 probaremos el siguiente resultado:

**Proposición 3.** *Sea  $S$  una superficie orientable compacta y  $\mathcal{P}$  un conjunto finito de puntos del interior con  $\chi(S - \mathcal{P}) < 0$ . Para  $m \geq 3$ , el grupo  $\Gamma(S - \mathcal{P})$  satisface que cualquier subgrupo cíclico infinito  $H$  de  $\Gamma_m(S - \mathcal{P})$  está contenido en un único subgrupo cíclico maximal  $H_{\max}$  de  $\Gamma_m(S - \mathcal{P})$ .*

De los resultados anteriores y los Teoremas 1.16 y 1.17, tenemos:

**Teorema 4.** *Sea  $S$  una superficie orientable compacta y  $\mathcal{P}$  un conjunto finito de puntos del interior con  $\chi(S - \mathcal{P}) < 0$ . Suponga que  $m \geq 3$ , entonces*

- (1)  $\underline{\underline{\text{gd}}}\Gamma_m(S - \mathcal{P}) \leq \text{vcd}(\Gamma(S - \mathcal{P})) + 1$ ;
- (2) Denote por  $[\Gamma(S - \mathcal{P}) : \Gamma_m(S - \mathcal{P})]$  el índice de  $\Gamma_m(S - \mathcal{P})$  en  $\Gamma(S - \mathcal{P})$ , entonces

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\text{gd}}}\Gamma(S - \mathcal{P}) &\leq [\Gamma(S - \mathcal{P}) : \Gamma_m(S - \mathcal{P})] \cdot \underline{\underline{\text{gd}}}\Gamma_m(S - \mathcal{P}) \\ &\leq [\Gamma(S - \mathcal{P}) : \Gamma_m(S - \mathcal{P})] \cdot (\text{vcd}(\Gamma(S - \mathcal{P})) + 1). \end{aligned}$$

Donde  $\text{vcd}(\Gamma(S - \mathcal{P}))$  denota la dimensión cohomológica virtual de  $\Gamma(S - \mathcal{P})$ .

Cabe mencionar que usamos diferentes técnicas para probar el Teorema 4, además de que la superficie puede tener frontera y puntos removidos. Las cotas para  $\underline{\underline{\text{gd}}}\Gamma(S_g)$  cuando la superficie es cerrada de género  $g \geq 2$  no han sido mejoradas, sin embargo probamos que para los subgrupos de índice finito  $\Gamma_m(S_g)$ , se tiene que  $\underline{\underline{\text{gd}}}\Gamma_m(S_g)$  difiere como máximo solo por uno con la dimensión  $\underline{\underline{\text{gd}}}\Gamma_m(S_g)$ , cuando  $m \geq 3$ .

Ya que en los resultados que probamos permitimos que la superficie pueda tener puntos removidos, esto nos permite dar cotas para los grupos de trenzas de una superficie. En el Capítulo 6 veremos la relación que tienen los grupos de trenzas  $B_n(S)$  de una superficie compacta  $S$  con el grupo modular  $\Gamma(S - \mathcal{P}_n)$ , donde  $\mathcal{P}_n$  contiene  $n$  puntos del interior de  $S$ . Cuando  $S$  es una superficie cerrada de género  $g \geq 2$ , el grupo de trenzas puras  $P_n(S)$  puede realizarse como subgrupo de  $\Gamma_m(S - \mathcal{P}_n)$ , entonces tenemos el siguiente:

**Corolario 5.** *Sea  $S$  una superficie cerrada orientable de género mayor o igual a 2. Entonces*

$$(i) \ \underline{\underline{\text{gd}}}P_n(S) \leq 2n + 1;$$

$$(ii) \ \underline{\underline{\text{gd}}}B_n(S) \leq (2n + 1)n!.$$

Para la esfera, de la relación que tienen  $\Gamma(\mathbb{S}^2 - \mathcal{P}_n)$  y  $B_n(\mathbb{S}^2)$ , se tiene que un modelo para  $\underline{\underline{E}}\Gamma(\mathbb{S}^2 - \mathcal{P}_n)$  es un modelo para  $\underline{\underline{E}}B_n(\mathbb{S}^2)$ , entonces se tienen las cotas del Teorema 4. Es un trabajo en curso [2], en el que damos mejores cotas para  $\underline{\underline{\text{gd}}}B_n(\mathbb{S}^2)$ . Además estamos construyendo un modelo explícito para  $\underline{\underline{E}}B_5(\mathbb{S}^2)$ , del cual queremos hacer cálculos de  $K$ -teoría usando la conjetura de Farrell-Jones.

Notación: En los Capítulos 3, 4 y 5 la superficie  $S$  puede tener puntos removidos. En el Capítulo 6,  $S$  será compacta sin puntos removidos. En la introducción hemos tomado la notación como en el Capítulo 6 por la comparación que hay con los grupos de trenzas.

# Capítulo 1

## Espacios clasificantes para familias

En este Capítulo definiremos espacios clasificantes para familias de un grupo discreto  $G$  con la versión de  $G$ -CW complejos, una referencia es [26]. En la Sección 1.1 daremos una introducción a espacios clasificantes para familias y veremos algunos ejemplos. En la Sección 1.2 se darán construcciones para  $\underline{EG}$  a partir de  $\underline{EG}$ , que son dadas en [30] y [11]. En las Secciones 1.3 y 1.4 veremos algunas consecuencias de las construcciones de la Sección 1.1 si el grupo satisface ciertas propiedades. Y en la Sección 1.5 veremos propiedades de la dimensión mínima para modelos de espacios clasificantes  $E_{\mathcal{F}}G$ .

### 1.1. Preliminares

En este Capítulo,  $G$  denotará un grupo discreto. Una familia  $\mathcal{F}$  de subgrupos de  $G$  es un conjunto de subgrupos de  $G$  el cual es cerrado bajo conjugación y bajo toma de subgrupos. Denotaremos a las siguientes familias como sigue:

$$\begin{aligned}\{1\} &= \{\text{subgrupo trivial}\}; \\ \mathcal{FIN}_G &= \{\text{subgrupos finitos de } G\}; \\ \mathcal{VCY}_G &= \{\text{subgrupos virtualmente cíclicos de } G\}; \\ \mathcal{ALL}_G &= \{\text{todos los subgrupos de } G\}.\end{aligned}$$

Sea  $H$  un subgrupo de  $G$  y  $\mathcal{F}$  una familia de subgrupos de  $G$ , denote por

$$\mathcal{F} \cap H = \{\text{subgrupos de } H \text{ en } \mathcal{F}\},$$

la familia de subgrupos de  $H$  inducida por  $\mathcal{F}$ .

Un  $G$ -CW-complejo  $X$  es un CW-complejo en el cual  $G$  actúa permutando las células. Un  $G$ -CW complejo es propio si cada grupo de isotropía es finito.

Denotaremos por  $\mathcal{C}_{\mathcal{F}}^G$  la categoría de  $G$ -CW-complejos con grupos de isotropía en

la familia  $\mathcal{F}$  y morfismos las clases de  $G$ -homotopía de  $G$ -aplicaciones.

**Definición 1.1.** Sea  $\mathcal{F}$  una familia de subgrupos de  $G$ . Un modelo para el *espacio clasificante*  $E_{\mathcal{F}}G$  de la familia  $\mathcal{F}$  es un  $G$ -CW-complejo  $X$  que es objeto terminal en la categoría  $\mathcal{C}_{\mathcal{F}}^G$ .

Es decir, si  $Y$  es un  $G$ -CW-complejo con grupos de isotropía en  $\mathcal{F}$ , entonces existe una  $G$ -aplicación  $Y \rightarrow X$ , la cual es única salvo  $G$ -homotopía. En particular dos modelos para  $E_{\mathcal{F}}G$  son  $G$ -homotópicamente equivalentes. Observe que dadas dos familias  $\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2$  de subgrupos de  $G$ , ya que  $E_{\mathcal{F}_1}G \in \mathcal{C}_{\mathcal{F}_2}^G$ , por definición de  $E_{\mathcal{F}_2}G$ , existe una  $G$ -aplicación

$$E_{\mathcal{F}_1}G \rightarrow E_{\mathcal{F}_2}G$$

la cual es única salvo  $G$ -homotopía.

Denotamos por  $\underline{E}G := E_{\mathcal{F}LN_G}G$ , llamado el  $G$ -CW-complejo universal para  $G$ -acciones propias. Análogamente, denotamos por  $\underline{\underline{E}}G := E_{\mathcal{V}\mathcal{C}\mathcal{Y}_G}G$ .

Sea  $B_{\mathcal{F}}G$  el cociente de la acción de  $G$  en  $E_{\mathcal{F}}G$ . En los casos particulares para la familia  $\mathcal{F}LN$  y  $\mathcal{V}\mathcal{C}\mathcal{Y}$  lo denotaremos por  $\underline{B}G$  y  $\underline{\underline{B}}G$  respectivamente. El siguiente Teorema está en [26, Thm. 1.9].

**Teorema 1.2** (Caracterización homotópica). *Sea  $\mathcal{F}$  una familia de subgrupos.*

(i) *Existe un modelo para  $E_{\mathcal{F}}G$  para cualquier familia  $\mathcal{F}$ .*

(ii) *Un  $G$ -CW-complejo  $X$  es un modelo para  $E_{\mathcal{F}}G$  si y sólo si el conjunto de puntos fijos*

$$X^H = \{x \in X \mid \forall h \in H, h \cdot x = x\}$$

*es contraíble si  $H \in \mathcal{F}$  y es vacío si  $H \in \mathcal{A}\mathcal{L}\mathcal{L}_G - \mathcal{F}$ .*

Note que si  $K$  es un subgrupo de  $G$ , restringiendo la  $G$ -acción en  $E_{\mathcal{F}}G$  a  $K$ , tenemos un  $K$ -CW-complejo, el cual es un modelo para  $E_{\mathcal{F} \cap K}K$ . Como caso particular, un modelo para  $\underline{E}G$  con la acción restringida a  $K$  es un modelo para  $\underline{E}K$ .

### Ejemplos 1.3.

1. Un modelo para  $E_{\mathcal{A}\mathcal{L}\mathcal{L}}G$  es  $G/G$ , el cual es  $G$ -homotópico a un punto. Entonces si  $F$  es un grupo finito, un modelo para  $\underline{E}F$  es un punto y si  $V$  es un grupo virtualmente cíclico un modelo para  $\underline{\underline{E}}V$  también es un punto.
2. Un modelo para  $E_{\{1\}}G$  coincide con un modelo para  $EG$ . El espacio  $EG$  es el cubriente universal de un espacio Eilenberg-MacLane  $BG = K(G, 1)$  para  $G$ .
3. De esta manera un modelo para  $E\mathbb{Z}^n$  es  $\mathbb{R}^n$ .

4. Sea  $\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}$  el producto semidirecto con respecto a  $\mathbb{Z} \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{Z})$ , el homomorfismo que envía al generador de  $\mathbb{Z}$  en el automorfismo  $-Id: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ . El grupo  $\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}$  es el grupo fundamental  $\pi_1(K)$  de la botella de Klein, es libre de torsión y actúa en  $\mathbb{R}^2$  por transformaciones cubrientes. Un modelo para  $E(\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z})$  es  $\mathbb{R}^2$ , ya que  $\mathbb{R}^2$  es contraíble, la acción es libre y propiamente discontinua.

## 1.2. Construcción de modelos

En esta Sección veremos dos formas de construir modelos para  $\underline{E}G$  a partir de un modelo para  $\underline{E}G$ , las referencias son [30] y [11].

W. Lück y Weiermann construyen un modelo para  $E_G G$  a partir de un modelo  $E_{\mathcal{F}} G$ , para familias  $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$  de subgrupos de  $G$ , [30]. Para las familias  $\mathcal{FLN}_G$  y  $\mathcal{VCY}_G$  la construcción es como sigue:

Se define una relación de equivalencia en el conjunto de subgrupos virtualmente cíclicos infinitos  $\mathcal{VC}_G^\infty = \mathcal{VCY}_G - \mathcal{FLN}_G$ :

Sean  $V, W \in \mathcal{VC}_G^\infty$ , entonces

$$V \sim W \iff |V \cap W| = \infty, \quad (1.1)$$

donde  $|\star|$  denota la cardinalidad del conjunto  $\star$ .

Denotamos por  $[\mathcal{VC}_G^\infty]$  al conjunto de clases de equivalencia bajo la relación anterior y como  $[V]$  la clase de equivalencia de  $V \in \mathcal{VC}_G^\infty$ . Para  $[H] \in [\mathcal{VC}_G^\infty]$ , sea

$$N_G[H] = \{g \in G \mid |g^{-1}Hg \cap H| = \infty\}, \quad (1.2)$$

el grupo de isotropía bajo la  $G$ -acción en  $[\mathcal{VC}_G^\infty]$  inducida por conjugación. Observe que  $N_G[H]$  es el conmensurador  $Comm_G[H]$ , donde

$$Comm_G[H] = \{g \in G \mid [H : gHg^{-1} \cap H] < \infty \text{ and } [gHg^{-1} : H \cap gHg^{-1}] < \infty\},$$

nos referiremos a  $N_G[H]$  como el conmensurador de  $H$  en  $G$ .

Definimos la siguiente familia de subgrupos de  $N_G[H]$  por

$$\mathcal{G}[H] := \{K \in \mathcal{VC}_{N_G[H]}^\infty : |K \cap H| = \infty\} \cup \mathcal{FLN}_{N_G[H]}. \quad (1.3)$$

**Teorema 1.4.** [30, Thm. 2.3] Sean  $\sim$  como antes e  $I$  un sistema completo de representantes  $[H]$  de  $G$ -órbitas en  $[\mathcal{VC}_G^\infty]$  bajo la  $G$ -acción inducida por conjugación. Se eligen modelos arbitrarios para  $N_G[H]$ -CW-modelos para  $\underline{E}N_G[H]$ ,  $E_{\mathcal{G}[H]}N_G[H]$  y un modelo arbitrario para  $\underline{E}G$ . Definimos a  $X$  como el  $G$ -CW-complejo por el



*G-pushout celular*

$$\begin{array}{ccc} \coprod_{[H] \in I} G \times_{N_G[H]} \underline{E}N_G[H] & \xrightarrow{i} & \underline{E}G \\ \downarrow \coprod_{[H] \in I} id_G \times_{N_G[H]} f_{[H]} & & \downarrow \\ \coprod_{[H] \in I} G \times_{N_G[H]} E_{\mathcal{G}[H]} N_G[H] & \longrightarrow & X \end{array}$$

tal que  $f_{[H]}$  es una  $N_G[H]$ -aplicación celular para todo  $[H] \in I$  e  $i$  es una inclusión de  $G$ -CW-complejos, o tal que toda aplicación  $f_{[H]}$  es una inclusión de  $N_G[H]$ -CW-complejos para todo  $[H] \in I$  e  $i$  es una  $G$ -aplicación celular. Entonces  $X$  es un modelo para  $\underline{E}G$ .

Las aplicaciones en el Teorema 1.4 vienen de la propiedad universal de espacios clasificantes para familias e inclusiones de familias de subgrupos.

En [11], Farley da otra construcción para un espacio clasificante  $E_{\mathcal{G}}G$  a partir del modelo  $E_{\mathcal{F}}G$ , para familias  $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$ .

**Definición 1.5.** Sean  $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$  familias de subgrupos de  $G$ . Decimos que un  $G$ -CW complejo  $X$  es un  $I_{\mathcal{G}-\mathcal{F}}G$ -complejo si

- (i) siempre que  $H \in \mathcal{G} - \mathcal{F}$ ,  $X^H$  es contraíble;
- (ii) siempre que  $H \notin \mathcal{G}$ ,  $X^H = \emptyset$ .

Observe que si todos los subgrupos de isotropía están en  $\mathcal{G}$ , entonces se cumple (ii). Como el subgrupo trivial no está en  $\mathcal{G} - \mathcal{F}$ ,  $X$  no es necesariamente contraíble.

Sean  $X, Y$   $G$ -CW complejos, la junta de  $X$  y  $Y$ , se define como el  $G$ -CW complejo obtenido de unir cada punto de  $X$  con cada punto de  $Y$  por un segmento, es decir, el cociente de  $X \times Y \times I$  con identificaciones  $(x, y_1, 0) \sim (x, y_2, 0)$  y  $(x_1, y, 1) \sim (x_2, y, 1)$ , para  $x, x_1, x_2 \in X$ ,  $y, y_1, y_2 \in Y$ . Denotamos este espacio por  $X * Y$ .

La  $G$ -acción en  $X * Y$  es como sigue: sean  $x \in X$ ,  $y \in Y$  y  $g \in G$ , entonces  $g$  envía el segmento  $[x, y]$  de  $x$  a  $y$ , al segmento  $[gx, gy]$ .

**Proposición 1.6.** [11, Prop. 2.4] Si  $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$  son familias de subgrupos de  $G$  y  $X$  es un  $I_{\mathcal{G}-\mathcal{F}}G$ -complejo, entonces la junta

$$E_{\mathcal{F}}G * X$$

es un modelo para  $E_{\mathcal{G}}G$ .

Esta construcción la usaremos en el Capítulo 2, para la construcción de uno de los modelos para  $\underline{E}(\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z})$ , dado en [23].

### 1.3. Propiedad $M_{FLN_G \subseteq \mathcal{VCY}_G}$

Para la construcción del Teorema 1.4, necesitamos conocer los conmensuradores  $N_G[H]$ , la siguiente propiedad simplifica la construcción dada en ese Teorema.

*Propiedad  $M_{FLN_G \subseteq \mathcal{VCY}_G}$ :* Todo subgrupo  $H \in \mathcal{VC}_G^\infty$  esta contenido en un único maximal  $H_{max} \in \mathcal{VC}_G^\infty$ .

Si  $H \in \mathcal{VC}_G^\infty$ , denotaremos por  $N_G(H)$  al normalizador de  $H$  en  $G$ . Note que el normalizador de la clase  $[H]$  es denotada con corchetes  $N_G[H]$ . Definimos

$$W_G(H) = N_G(H)/H.$$

El siguiente resultado es un Corolario del Teorema 1.4.

**Corolario 1.7.** [30, Cor. 2.10] *Sea  $G$  un grupo que satisface la propiedad  $M_{FLN_G \subseteq \mathcal{VCY}_G}$ . Denotamos por  $\mathcal{M}$  un sistema completo de representantes de clases de conjugación de subgrupos virtualmente cíclicos infinitos maximales de  $G$ . Consideremos el  $G$ -pushout celular*

$$\begin{array}{ccc} \coprod_{V \in \mathcal{M}} G \times_{N_G(V)} \underline{EN}_G(V) & \xrightarrow{i} & \underline{EG} \\ \downarrow \coprod_{V \in \mathcal{M}} id_G \times f_V & & \downarrow \\ \coprod_{V \in \mathcal{M}} G \times_{N_G(V)} \underline{EW}_G(V) & \longrightarrow & X \end{array}$$

donde  $\underline{EW}_G(V)$  es visto como un  $N_G(V)$ -CW-complejo por la proyección al cociente  $N_G(V) \rightarrow W_G(V)$ , las aplicaciones comenzando en la esquina superior izquierda son celulares e  $i$  es una inclusión de  $G$ -CW-complejos. Entonces  $X$  es un modelo para  $\underline{EG}$ .

#### Ejemplos 1.8.

1. El grupo  $G = \mathbb{Z}^n$  satisface la propiedad  $M_{FLN_G \subseteq \mathcal{VCY}_G}$ .
2. Los grupos Gromov-hiperbólicos satisfacen la propiedad  $M_{FLN_G \subseteq \mathcal{VCY}_G}$ , [8].
3. En la Proposición 5.7 demostramos que para  $m \geq 3$ , los subgrupos de congruencia  $\Gamma_m(S)$  de  $\Gamma(S)$  (Def. 3.1 y 3.18) satisfacen la propiedad  $M_{FLN_{\Gamma_m(S)} \subseteq \mathcal{VCY}_{\Gamma_m(S)}}$ , donde  $S$  es una superficie orientable compacta con un conjunto finito de puntos removidos del interior y  $\chi(S) < 0$ .

**Ejemplo 1.9.** Un grupo que no satisface la propiedad  $M_{FLN_G \subseteq \mathcal{VCY}_G}$  es el grupo  $G = \mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}$ , el cual tiene la siguiente presentación

$$G = \{s, t \mid sts^{-1} = t^{-1}\}.$$

Los subgrupos cíclicos infinitos  $\langle s \rangle$  y  $\langle st \rangle$  son diferentes y maximales en el conjunto  $\mathcal{VC}_G^\infty$ . Su intersección  $\langle s^2 \rangle$  es un subgrupo propio que no está contenido en un único maximal, entonces  $G$  no satisface  $M_{\mathcal{FIN}_G \subseteq \mathcal{VC}_G}$ . En el Capítulo 2 daremos dos construcciones de modelos para  $\underline{E}(\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z})$  a partir del modelo conocido para  $E(\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z})$  dado en Ejs. 1.3, la referencia es [23].

## 1.4. Condición (C)

La siguiente propiedad en un grupo  $G$  es útil para simplificar la descripción de los commensuradores del Teorema 1.4, los cuales estarán dados en términos de normalizadores de subgrupos cíclicos infinitos.

*Condición (C):*

$$\forall g, h \in G \text{ con } |h| = \infty, \text{ si } k, l \in \mathbb{Z} \text{ tal que } gh^k g^{-1} = h^l \implies |k| = |l|. \quad (1.4)$$

**Observación 1.10.** Sean  $H, K \in \mathcal{VC}_G^\infty$ ,  $C_H$  y  $C_K$  subgrupos cíclicos infinitos de  $H$  y  $K$  respectivamente. De la relación  $\sim$  definida en (1.1), observe que:

$$H \sim K \text{ si y solo si } C_H \sim C_K, \text{ y} \quad (1.5)$$

$$\begin{aligned} N_G[H] &= \{g \in G \mid |g^{-1}Hg \cap H| = \infty\} \\ &= \{g \in G \mid |g^{-1}C_Hg \cap C_H| = \infty\}. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Entonces  $[H] = [C_H]$  y  $N_G[H] = N_G[C_H]$ , para cualquier subgrupo cíclico infinito  $C_H \subseteq H$ .

Así que es igual si definimos la relación  $\sim$  en el conjunto  $\mathcal{IC}_G$  de subgrupos cíclicos infinitos de  $G$ . Dado  $C \in \mathcal{IC}_G$ , la familia  $\mathcal{G}[C]$  es

$$\mathcal{G}[C] = \{H \in \mathcal{VC}_{N_G[C]}^\infty \mid |H : H \cap C| < \infty\} \cup \mathcal{FIN}_{N_G[C]}.$$

**Lema 1.11.** [27, Lem. 4.2] *Si  $G$  satisface la condición (C) y  $C \in \mathcal{IC}_G$ . Se tiene la sucesión anidada de subgrupos*

$$N_G(C) \subseteq N_G(2!C) \subseteq N_G(3!C) \subseteq N_G(4!C) \subseteq \dots$$

donde  $k!C$  es el subgrupo de  $C$  dado por  $\{h^{k!} \mid h \in C\}$ , entonces

$$N_G[C] = \bigcup_{k \geq 1} N_G(k!C).$$

Notación: El subgrupo  $N_G[C]$  es el commensurador de  $C$  en  $G$  (normalizador de la clase  $[C]$ ). Y el normalizador del subgrupo  $C$  en  $G$  es denotado como  $N_G(C)$ .

**Ejemplos 1.12.**

1. Los grupos  $\text{CAT}(0)$  satisfacen la condición (C), [27].
2. En el Teorema 4.10 demostramos que el grupo modular  $\Gamma(S)$  (Def. 3.1), satisface la condición (C), donde  $S$  es una superficie orientable compacta con un conjunto finito de puntos removidos del interior y  $\chi(S) < 0$ .

**1.5. Dimensión geométrica**

En esta Sección recopilamos una serie de resultados acerca de dimensión geométrica para las familias  $\mathcal{FIN}_G$  y  $\mathcal{VCY}_G$ , los cuales usaremos en el Capítulo 5.

**Definición 1.13.** La mínima dimensión posible de modelos para  $E_{\mathcal{F}}G$  es llamada la *dimensión geométrica de  $G$  para la familia  $\mathcal{F}$*  y es denotado por  $\text{gd}_{\mathcal{F}}G$ . Cuando no existe un modelo de dimensión finita para  $E_{\mathcal{F}}G$ , decimos que  $\text{gd}_{\mathcal{F}}G$  es infinito.

Denote como  $\text{gd}G = \text{gd}_{\{1\}}G$ ,  $\underline{\text{gd}}G = \text{gd}_{\mathcal{FIN}_G}G$  y  $\underline{\underline{\text{gd}}}G = \text{gd}_{\mathcal{VCY}_G}G$ . Es bien conocido que para cualesquier grupos  $H_1, H_2$ :

$$\underline{\text{gd}}(H_1 \times H_2) \leq \underline{\text{gd}}H_1 + \underline{\text{gd}}H_2. \quad (1.7)$$

**Proposición 1.14.** [21, Prop. 4] *Sea  $G$  un grupo infinito virtualmente cíclico, entonces existe un modelo para  $\underline{E}G$  con un número finito de órbitas de células el cual es homeomorfo a  $\mathbb{R}$ .*

**Teorema 1.15.** [26, Thm. 5.16] *Sea  $1 \rightarrow H \rightarrow G \rightarrow K \rightarrow 1$  una sucesión exacta de grupos. Suponga que  $H$  tiene la propiedad de que para cualquier grupo  $\tilde{H}$  que contiene a  $H$  como subgrupo de índice finito, se tiene que  $\underline{\text{gd}}\tilde{H} \leq n$ . Suponga que  $\underline{\text{gd}}K \leq k$ , entonces  $\underline{\text{gd}}G \leq n + k$ .*

En [26, Ex. 5.26] Lück demuestra que grupos virtualmente policíclicos satisfacen la condición acerca de  $H$  en el Teorema 1.15, en particular  $\mathbb{Z}^n$  la satisface para cada  $n \in \mathbb{N}$ .

**Teorema 1.16.** [25, Thm. 2.4] *Suponga que  $H$  es un subgrupo de  $G$  de índice finito  $n$ , entonces  $\underline{\text{gd}}G \leq \underline{\text{gd}}H \cdot n$  y  $\underline{\underline{\text{gd}}}G \leq \underline{\underline{\text{gd}}}H \cdot n$ .*

El siguiente Teorema es acerca de grupos que satisfacen la propiedad de maximalidad, el cual es dado en [30, Sec. 5].

**Teorema 1.17.** *Sea  $G$  un grupo que satisface la propiedad  $M_{\mathcal{FIN}_G \subseteq \mathcal{VCY}_G}$ . Si se tiene que  $\underline{\underline{\text{gd}}}G < \infty$ , entonces*

$$\underline{\underline{\text{gd}}}G \leq \underline{\text{gd}}G + 1. \quad (1.8)$$

El siguiente Lema es acerca de grupos que satisfacen la condición (C), es dado en [27, Lem. 4.4].

**Lema 1.18.** *Sea  $n \in \mathbb{Z}$ . Suponga que  $G$  satisface la condición (C) y que existe un  $G$ -CW-modelo para  $\underline{E}G$  con  $\dim(\underline{E}G) \leq n$  y para todo  $C \in \mathcal{IC}_G$  existe un  $W_G(C)$ -CW-modelo para  $\underline{E}W_G(C)$  con  $\dim(\underline{E}W_G(C)) \leq n$ . Entonces existe un  $G$ -CW-modelo para  $\underline{\underline{E}}G$  con  $\dim(\underline{\underline{E}}G) \leq n + 1$ .*

# Capítulo 2

## Modelos para $\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}$

Como vimos en el Ejemplo 1.3,  $\mathbb{R}^2$  es un modelo para  $E(\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z})$ . En éste Capítulo daremos dos modelos para  $\underline{E}(\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z})$ , basados en las construcciones de la Sección 1.2. La referencia de este Capítulo es [23].

El grupo  $\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}$  tiene la siguiente operación: sean  $(n_1, m_1), (n_2, m_2) \in \mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}$ , entonces

$$(n_1, m_1)(n_2, m_2) = (n_1 + (-1)^{m_1}n_2, m_1 + m_2),$$

con inverso  $(n, m)^{-1} = ((-1)^{1-m}n, -m)$  y el elemento identidad es  $(0, 0)$ .

Note que  $\mathcal{FLN}_{\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}} = \{(0, 0)\}$  y  $\mathcal{VCY}_{\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}}$  es la familia de subgrupos cíclicos de  $\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}$ . Sea  $\mathcal{IC}_{\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}}$  el conjunto de subgrupos cíclicos infinitos de  $\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}$ , clasificaremos los subgrupos en  $\mathcal{IC}_{\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}}$ .

Para  $(t_1, t_2), (n, m) \in \mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}$  y  $k \in \mathbb{N}$  se tiene

$$\begin{aligned}(n, m)^k &= ([1 + (-1)^m + (-1)^{2m} + \dots + (-1)^{(k-1)m}]n, km); \\ (n, m)^{-k} &= ([-(-1)^{1-m} + (-1)^{1-2m} + \dots + (-1)^{1-km}]n, -km).\end{aligned}$$

Por lo tanto los subgrupos en  $\mathcal{IC}_{\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}}$  son de la siguiente forma:

$$\langle (n, 2m) \rangle = \{(kn, 2km) \mid k \in \mathbb{Z}\}, \quad \text{donde } (n, 2m) \neq (0, 0); \quad (2.1)$$

$$\langle (n, 2m + 1) \rangle = \{(n, 2m + 1)^k \mid k \in \mathbb{Z}\}, \quad \text{donde} \quad (2.2)$$

$$(n, 2m + 1)^k = \begin{cases} (0, k(2m + 1)), & \text{si } k \text{ es par} \\ (n, k(2m + 1)) & \text{si } k \text{ es impar.} \end{cases}$$

En la Figura 2.1 se representan estos subgrupos.

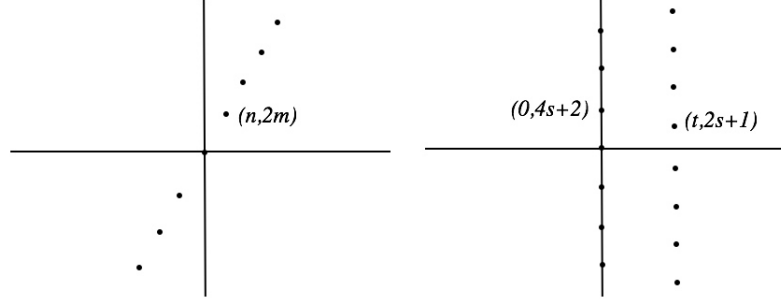


Figura 2.1: Los puntos representan los elementos del subgrupo generado por  $(n, 2m)$  a la izquierda y por  $(t, 2s + 1)$  a la derecha.

## 2.1. Primer modelo

En esta Sección daremos un modelo para  $\underline{E}(\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z})$ , la construcción se basa en algunos resultados de [11]. Para ello usaremos que  $\mathbb{R}^2$  es un modelo para  $E(\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z})$  y exhibiremos un espacio que es un modelo para  $I_{\text{vcy}_{\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}} - \{1\}_{\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}}}$ , por la Proposición 1.6, la junta de estos espacios es un modelo para  $\underline{E}(\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z})$ . El modelo para  $I_{\text{vcy}_{\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}} - \{1\}_{\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}}}$  es un subespacio del espacio de líneas de  $\mathbb{R}^2$ .

La acción de  $\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}$  en  $\mathbb{R}^2$  explícitamente es como sigue: si  $(n, m) \in \mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}$  y  $(t, r) \in \mathbb{R}^2$ , entonces

$$(n, m)(t, r) = (n + (-1)^m t, m + r). \quad (2.3)$$

El espacio  $\mathbb{R}^2$  con esta acción es un modelo para  $E(\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z})$ .

Sea  $\ell(a, b)$  la línea en  $\mathbb{R}^2$  determinada por  $a, b \in \mathbb{R}$  definida como

$$\ell(a, b) = \{(x, ax + b) \mid x \in \mathbb{R}\},$$

y denote por

$$\ell(\infty, b) = \{(b, y) \mid y \in \mathbb{R}\},$$

la cual esta determinada por  $b \in \mathbb{R}$ . Sea  $\mathcal{L}$  el espacio de líneas en  $\mathbb{R}^2$ , el cual es un espacio métrico con la siguiente distancia

$$d(\ell_1, \ell_2) = \begin{cases} k & \text{si } \ell_1 \text{ y } \ell_2 \text{ acotan una banda de ancho } k; \\ \infty & \text{si } \ell_1 \text{ y } \ell_2 \text{ no son paralelas.} \end{cases}$$

Entonces tenemos que

$$\mathcal{L} = \coprod_{a \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}} \mathbb{R}_a$$

donde  $\mathbb{R}_a = \{\ell(a, b) \mid b \in \mathbb{R}\}$  y la métrica en cada componente es dada por  $d$ .

Como la acción de  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  en  $\mathbb{R}^2$  manda líneas en líneas, esta acción induce una acción de  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  en  $\mathcal{L}$ . La acción es dada como sigue, sean  $(n, m) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  y  $\ell(a, b) \in \mathcal{L}$ ,

$$(n, m)\ell(a, b) = \ell((-1)^m a, b + m - (-1)^m a n), \quad \text{si } a \in \mathbb{R}; \quad (2.4)$$

$$(n, m)\ell(\infty, b) = \ell(\infty, n + (-1)^m b). \quad (2.5)$$

La siguiente definición es dada en [11], se define en general para el espacio de líneas geodésicas en espacios CAT(0).

**Definición 2.1.** Sean  $(n, m) \neq (0, 0)$  en  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ . Una línea  $\ell \subset \mathbb{R}^2$  es un *eje para*  $(n, m)$  si  $(n, m)\ell = \ell$  y  $(n, m)$  actúa por traslación en  $\ell$ . El espacio

$$\mathcal{A} = \{\ell \in \mathcal{L} \mid \ell \text{ es un eje para algún } (n, m) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} - (0, 0)\}.$$

es llamado el *espacio de ejes* de  $\mathbb{R}^2$ .

Por (2.5), todas las líneas  $\ell(\infty, b)$  son ejes. Y por (2.4) tenemos

$$\begin{aligned} (n, m)\ell(a, b) = \ell(a, b) \quad & \text{sii } \ell((-1)^m a, b + m - (-1)^m a n) = \ell(a, b); \\ & \text{sii } m \text{ es par y } a = \frac{m}{n}. \end{aligned}$$

Observe que si  $(n, m)$  fija  $\ell(a, b)$ , entonces  $(n, m)$  actúa en  $\ell(a, b)$  por traslación. Por tanto

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \{\ell(a, b) \in \mathcal{L} \mid a \in \mathbb{Q} \cup \infty, b \in \mathbb{R}\} \\ &= \coprod_{a \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}} \mathbb{R}_a \end{aligned} \quad (2.6)$$

donde  $\mathbb{R}_a = \{\ell(a, b) \mid b \in \mathbb{R}\}$  para  $a \in \mathbb{Q} \cup \infty$ .

**Lema 2.2.** *El espacio de ejes  $\mathcal{A}$  de  $\mathbb{R}^2$  es un  $I_{\text{VCY}_{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} - \{1\}_{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}}}(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})$ -complejo.*

*Demostración.* Si  $\ell(a, b) \in \mathcal{A}$ , denotaremos el grupo de isotropía por

$$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_{\ell(a, b)} = \{g \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid g \cdot \ell(a, b) = \ell(a, b)\}.$$

De la Definición 1.5, es suficiente mostrar que todos los grupos de isotropía  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_{\ell(a, b)}$  son cíclicos y que para cualquier  $H \in \mathcal{IC}_{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}}$ , el conjunto de puntos fijos

$$\mathcal{A}^H = \{x \in \mathcal{A} \mid h \cdot x = x \forall h \in H\}$$

es contraíble.

PARTE 1. *Subgrupos de isotropía:*



(i) Si  $a \in \mathbb{Q} - \{0\}$ , y  $b \in \mathbb{R}$ ,

$$(n, m) \in \mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}_{\ell(a,b)} \text{ sii } \ell((-1)^m a, b + m - (-1)^m a n) = \ell(a, b) \\ \text{ sii } m \text{ es par y } \frac{m}{n} = a.$$

Suponga que  $a = \frac{a_1}{a_2}$  con  $\text{mcd}(a_1, a_2) = 1$ , entonces

1. Si  $a_1$  es par,  $\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}_{\ell(a,b)} = \langle (a_2, a_1) \rangle \in \mathcal{VCY}_{\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}}$ .

2. Si  $a_1$  es impar,  $\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}_{\ell(a,b)} = \langle (2a_2, 2a_1) \rangle \in \mathcal{VCY}_{\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}}$ .

(ii) Ahora suponga que  $a = 0$  y  $b \in \mathbb{R}$ , como  $(n, m)\ell(0, b) = \ell(0, b + m)$ , entonces

$$\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}_{\ell(0,b)} = \langle (1, 0) \rangle \in \mathcal{VCY}_{\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}}.$$

(iii) Finalmente sea  $a = \infty$  y  $b \in \mathbb{R}$ , entonces

$$(n, m) \in \mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z} \in \mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}_{\ell(\infty,b)} \text{ sii } \ell(\infty, n + (-1)^m b) = \ell(\infty, b) \\ \text{ sii } n = (1 - (-1)^m)b.$$

Si  $m$  es par, se tiene  $n = 0$  y si  $m$  es impar,  $n = 2b$ , note que  $b \in \mathbb{R}$  y  $n \in \mathbb{Z}$ , entonces concluimos lo siguiente

1) si  $2b \in \mathbb{Z}$ ,

$$\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}_{\ell(\infty,b)} = \langle (0, 2) \rangle \cup \{(2b, 2m + 1) \mid m \in \mathbb{Z}\} \\ = \langle (2b, 1) \rangle \in \mathcal{VCY}_{\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}};$$

2) si  $b \in \mathbb{R}$  y  $2b \notin \mathbb{Z}$ ,

$$\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}_{\ell(\infty,b)} = \langle (0, 2) \rangle \in \mathcal{VCY}_{\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}}.$$

PARTE 2. *Conjunto de puntos fijos:*

Sea  $H = \langle (n, m) \rangle \in \mathcal{IC}_{\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}}$ , vea (2.1) y (2.2).

(i) Suponga que  $m$  es par, y  $n \neq 0$ , entonces  $H = \{(kn, km) \mid k \in \mathbb{Z}\}$ . Observe que

$$(kn, km)\ell(\infty, b) = \ell(\infty, kn + b),$$

como  $n \neq 0$ ,  $\ell(\infty, b) \notin \mathcal{A}^H$  para cada  $b \in \mathbb{R}$ .

Si  $a \neq \infty$ , tenemos

$$\ell(a, b) \in \mathcal{A}^H \text{ sii } (kn, km)\ell(a, b) = \ell(a, b), \forall k \in \mathbb{Z} \\ \text{ sii } \ell(a, b + km - kan) = \ell(a, b), \forall k \in \mathbb{Z} \\ \text{ sii } a = \frac{m}{n}, \text{ y } b \in \mathbb{R}.$$

Por tanto

$$\mathcal{A}^H = \mathbb{R}_{\frac{m}{n}},$$

el cual es contraíble.

(ii) Sea  $m \neq 0$  par y  $K = \langle (0, m) \rangle = \{(0, km) \mid k \in \mathbb{Z}\}$ . Como

$$(0, km)\ell(a, b) = \ell(a, b + 2km),$$

tenemos que  $\ell(a, b) \notin \mathcal{A}^K$  siempre que  $a \in \mathbb{Q}$ .

Por otra parte

$$(0, km)\ell(\infty, b) = \ell(\infty, b), \quad \forall k \in \mathbb{Z}, \text{ y } \forall b \in \mathbb{R}.$$

Por tanto,

$$\mathcal{A}^K = \mathbb{R}_{\infty},$$

el cual es contraíble.

(iii) Si  $m$  es impar y  $R = \langle (n, m) \rangle$ . Sean  $a \in \mathbb{Q}$  y  $b \in \mathbb{R}$ , por la acción

$$(n, m)\ell(a, b) = \ell(-a, b + m - an)$$

tenemos que  $(n, m)$  fija  $\ell(a, b)$  si y sólo si  $a = 0$  y  $b + m = b$ . Pero  $m$  es impar, entonces  $(n, m) \in R$  no fija a  $\ell(a, b)$  siempre que  $a \in \mathbb{Q}$ , y  $b \in \mathbb{R}$ .

Ahora sea  $a = \infty$  y  $b \in \mathbb{R}$ , entonces

$$\begin{aligned} \ell(\infty, b) \in \mathcal{A}^R & \text{ sii } \ell(\infty, n - b) = \ell(\infty, b) \\ & \text{ sii } b = \frac{n}{2}. \end{aligned}$$

Por tanto

$$\mathcal{A}^R = \{\ell(\infty, \frac{n}{2})\},$$

es el espacio con un punto en  $\mathbb{R}_{\infty}$ .

□

**Proposición 2.3.** *Un modelo para espacio clasificante para  $\mathcal{VCY}_{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}}$  del grupo  $\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}$  es*

$$\underline{E}(\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}) = \mathbb{R}^2 * \coprod_{a \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}} \mathbb{R}. \quad (2.7)$$

y el cociente por la acción es

$$\underline{B}(\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}) = K * \coprod_{a \in \mathbb{Q}^+ \cup \infty} \mathbb{S}^1. \quad (2.8)$$

*Demostración.* Como  $\mathbb{R}^2$  es un modelo para  $E(\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z})$ , del Lema 2.2 y la Proposición 1.6 se concluye (2.7). Por otro lado, (2.8) se sigue de la acción de  $\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}$  en  $\mathbb{R}^2$  y  $\mathcal{A}$ , ya que la acción de  $\mathbb{Z}$  en  $\mathcal{A}$  es por traslación.  $\square$

## 2.2. Segundo Modelo

En esta Sección daremos otro modelo para  $\underline{E}(\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z})$  basado en la construcción que dan Lück y Weiermann en [30], ver Sección 1.2. Este subgrupo no satisface la propiedad de maximales  $M_{\mathcal{FIN}_{\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}} \subset \mathcal{VCY}_{\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}}}$  (Ej. 1.9). De la relación de equivalencia dada en (1.1), daremos una lista con las clases de subgrupos en  $[\mathcal{IC}_{\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}}]$ .

De la clasificación de los subgrupos en  $\mathcal{IC}_{\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}}$  que dimos en (2.1) y (2.2) (ver Figura 2.1 para visualizar estos subgrupos), aplicando la relación de equivalencia  $\sim$  dada en (1.1), tenemos lo siguiente:

(i) Sea  $H = \langle(1, 0)\rangle$  y  $n \in \mathbb{Z} - \{0\}$ , como

$$\langle(n, 0)\rangle \subseteq \langle(1, 0)\rangle,$$

entonces

$$\langle(n, 0)\rangle \sim \langle(1, 0)\rangle.$$

De hecho esos son los únicos subgrupos de  $\mathcal{IC}_{\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}}$  que intersectan a  $H$  en un subgrupo infinito. Denotaremos esta clase por

$$[H] = [\langle(1, 0)\rangle] = [\langle(n, 0)\rangle], \quad \forall n \in \mathbb{Z} - \{0\}. \quad (2.9)$$

(ii) Sean  $n, m \in \mathbb{Z} - \{0\}$  fijos y

$$R = \langle(n, 2m)\rangle. \quad (2.10)$$

Observe que existe un subgrupo cíclico maximal  $R'$  que contiene a  $R$  y los subgrupos en  $\mathcal{IC}_{\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}}$  relacionados a  $R$  están contenidos en  $R'$ . Denote por  $[R]$  esta clase en  $[\mathcal{IC}_{\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}}]$ .

(iii) Observe que se tienen las siguientes inclusiones:

$$\begin{aligned} \langle(0, 2k)\rangle &\subseteq \langle(0, 2)\rangle, \quad \text{para cualquier } k \in \mathbb{Z} - \{0\}; \\ \langle(0, 2(2s+1))\rangle &\subseteq \langle(r, 2s+1)\rangle, \quad \text{para cualesquier } r, s \in \mathbb{Z}; \text{ y} \\ \langle(t, 2u+1)\rangle &\subseteq \langle(t, 1)\rangle \quad \text{para cualesquier } t, u \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

**Afirmación 2.4.**

$$\langle(n, 2m+1)\rangle \sim \langle(r, 2s+1)\rangle \quad \text{para cualesquier } n, m, r, s \in \mathbb{Z},$$

*Demostración.* Por las inclusiones anteriores tenemos las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} \langle\langle 0, 2(2m+1) \rangle\rangle &\sim \langle\langle 0, 2 \rangle\rangle \sim \langle\langle r, 1 \rangle\rangle, \text{ y} \\ \langle\langle n, 2m+1 \rangle\rangle &\sim \langle\langle n, 1 \rangle\rangle \sim \langle\langle 0, 2 \rangle\rangle \sim \langle\langle r, 1 \rangle\rangle \sim \langle\langle r, 2s+1 \rangle\rangle \end{aligned}$$

para cualesquier  $n, m, r, s \in \mathbb{Z}$ , como afirmamos.  $\square$

Denotemos esta clase por

$$[K] = [\langle\langle n, 2m+1 \rangle\rangle]. \quad (2.11)$$

Entonces en  $[\mathcal{IC}_{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}}]$  se tienen las clases  $[H]$ ,  $[K]$  y una cantidad numerable de clases de tipo  $[R]$ , tantas como subgrupos maximales de la forma  $\langle\langle n, 2m \rangle\rangle$ , con  $n, m \neq 0$ .

El grupo  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  actúa en  $[\mathcal{IC}_{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}}]$  por conjugación, las clases  $[H]$  y  $[K]$  son fijas por conjugación y las clases de tipo  $[R]$  son permutadas.

### 2.2.1. Modelos para los conmensuradores

Dado  $C \in \mathcal{IC}_{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}}$ , calcularemos los conmensuradores  $N_{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}}[C]$  y daremos modelos para  $E_{\mathcal{G}[C]}(N_{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}}[C])$  y  $E(N_{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}}[C])$ , con  $\mathcal{G}[C]$  definido en (1.3).

Sean  $(t_1, t_2), (n, m) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ , tenemos que

$$\begin{aligned} (t_1, t_2)(n, m)(t_1, t_2)^{-1} &= (t_1, t_2)(n, m)((-1)^{1-t_2}t_1, -t_2) \\ &= (t_1, t_2)(n + (-1)^m(-1)^{1-t_2}t_1, m - t_2) \\ &= (t_1 + (-1)^{t_2}[n + (-1)^{(m+1-t_2)}t_1], m) \\ &= ((-1)^{t_2}n + t_1 + (-1)^{m+1}t_1, m) \end{aligned} \quad (2.12)$$

1. Un modelo para  $E(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})$  es  $\mathbb{R}^2$  con la acción dada en (2.3) y un modelo para  $E(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})$  es  $\mathbb{R}^2$  con la acción por traslación.
2. (a) Sea  $[H] \in [\mathcal{IC}_{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}}]$ , donde  $H$  es como en (2.9). Por (2.12) tenemos que

$$(t_1, t_2)(1, 0)(t_1, t_2)^{-1} = ((-1)^{t_2}, 0),$$

entonces  $(t_1, t_2)H(t_1, t_2)^{-1} = H$  y por tanto

$$\begin{aligned} N_{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}}[H] &= \{g \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid |g^{-1}Hg \cap H| = \infty\} \\ &\cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Además

$$\begin{aligned} \mathcal{G}[H] &= \{D \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid D \in \mathcal{IC}_{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}}, \quad |D \cap H| = \infty\} \cup \{1\} \\ &= \mathcal{VCY}_H \end{aligned}$$

(b) Afirmamos que un modelo para  $E_{\mathcal{VCY}_H}(\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z})$  es  $\mathbb{R}$ . Definimos la acción de  $\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}$  en  $\mathbb{R}$  como sigue:

$$(t_1, t_2)x = t_2 + x, \quad (t_1, t_2) \in \mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Sea  $S \in \mathcal{VCY}_H$ , entonces  $S = \langle (n, 0) \rangle$  para algún  $n \in \mathbb{Z} - \{0\}$ . El  $S$ -conjunto de puntos fijos  $R^S = \mathbb{R}$  es contraíble.

Observe que cualquier punto  $x \in \mathbb{R}$  es fijo por  $(t_1, t_2)$  si y solo si  $t_2 = 0$ , entonces si  $S$  es un subgrupo de  $S$  que no está en  $\mathcal{VCY}_H$ , el  $S$ -conjunto de puntos fijos  $R^S$  es el conjunto vacío.

3. (a) Sea  $R = \langle (n, 2m) \rangle$ , con  $n, m \in \mathbb{Z} - \{0\}$  fijos y supongamos que  $R$  es maximal en  $\mathcal{IC}_{\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}}$ . Por (2.12) tenemos que

$$(t_1, t_2)(n, 2m)(t_1, t_2)^{-1} = ((-1)^{t_2}n, 2m).$$

entonces se tienen dos casos,

- i)  $(t_1, t_2)R(t_1, t_2)^{-1} = R$  ssi  $t_2$  es par ,
- ii)  $(t_1, t_2)R(t_1, t_2)^{-1} = \langle (-n, 2m) \rangle$  sii  $t_2$  es impar ,  
por tanto  $(t_1, t_2)R(t_1, t_2)^{-1} \cap R = \{1\}$ .

Concluimos que

$$N_{\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}}[R] = \{(t_1, 2t_2) \mid t_1, t_2 \in \mathbb{Z}\} \simeq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z},$$

$$\begin{aligned} \mathcal{G}[R] &= \{\langle (ln, 2lm) \rangle \mid l \in \mathbb{Z}\} \\ &= \mathcal{VCY}_R \end{aligned}$$

(b) Un modelo para  $E_{\mathcal{VCY}_R}(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})$  es  $\mathbb{R}$ : Observe que  $N_{\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}}[R] = N_{\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}}(R)$ , por tanto  $R$  es un subgrupo normal de  $N_{\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}}[R] = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  y se tiene la siguiente sucesión exacta

$$0 \rightarrow R \xrightarrow{i} \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \xrightarrow{\phi} \mathbb{Z} \rightarrow 0$$

donde  $i$  es la inclusión y  $\phi$  es la proyección sobre el cociente  $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})/R \cong \mathbb{Z}$ . Sea  $(t_1, t_2) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  y  $x \in \mathbb{R}$ , definimos la acción de  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  en  $\mathbb{R}$  como sigue:

$$(t_1, t_2) \cdot x = \phi(t_1, t_2) + x.$$

Tenemos  $\phi(t_1, t_2) + x = x$  sii  $(t_1, t_2) \in \ker \phi = R$ , por tanto los subgrupos de isotropía están en  $\mathcal{VCY}_R$ . Además,  $\mathbb{R}^R = \mathbb{R}$  es contraíble, y si  $S \notin \mathcal{VCY}_R$  se

tiene  $\mathbb{R}^S = \emptyset$ .

- 5 (a) Sea  $[K]$  como en (2.11). Sea  $(t_1, t_2) \in \mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}$  y  $m \in \mathbb{Z} - \{0\}$ . Por la ecuación (2.12) se sigue que

$$(t_1, t_2)(0, 2m)(t_1, t_2)^{-1} = (0, 2m).$$

Como  $[\langle(0, 2m)\rangle] = [K]$ , concluimos que

$$N_{\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}}[K] = \mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z},$$

$$\begin{aligned} \mathcal{G}[K] &= \{D \subset \mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z} \mid D \in \mathcal{F}, |D \cap K| = \infty\} \cup \{1\} \\ &= \{\langle(n, 2m + 1)\rangle \mid n, m \in \mathbb{Z}\} \cup \{1\}. \end{aligned}$$

- (b) Un modelo para  $E_{\mathcal{G}[K]}\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}$  lo definiremos como sigue:

Sabemos que  $\langle(n, 2m + 1)\rangle \subseteq \langle(n, 1)\rangle$  para cualquier  $n, m \in \mathbb{Z}$ . Sea  $K_n = \langle(n, 1)\rangle$  y tomamos un punto  $k_n$  por cada  $K_n$ . Observemos que para  $g = (t_1, t_2) \in \mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}$ ,  $gK_n g^{-1} = K_m$  con  $m = (-1)^{t_2}n + 2t_1$ , entonces  $\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}$  actúa permutando los subgrupos  $K_n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .

Sea  $X = \{k_n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ , definimos una acción de  $\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}$  en  $X$  como sigue:

$$g \cdot k_n = k_m \text{ sii } gK_n g^{-1} = K_m.$$

El  $\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}$ -conjunto  $X$  es un modelo para  $I_{\mathcal{G}[K]-\{1\}}$  ya que

$$g \cdot k_n = k_n \text{ sii } g \in N_{\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}}(K_n) = K_n.$$

Como un modelo para  $E(\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z})$  es  $\mathbb{R}^2$ , por la Proposición 1.6 concluimos que un modelo para  $E_{\mathcal{G}[K]}(\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z})$  es la junta  $X * \mathbb{R}^2$ .

### 2.2.2. El modelo

Aplicando el Teorema 1.4, de los modelos obtenidos en la Sección 2.2.1 y el hecho de que  $G \times_G Y \simeq Y$ , tenemos:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 \amalg \mathbb{R}^2 \amalg_{l \in I} (\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}) \times_{\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{i} & \mathbb{R}^2 \\ \downarrow p \amalg g \amalg_{k \in I} id \times_{\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}} f_i & & \downarrow \\ \mathbb{R} \amalg \{k_n\}_{n \in \mathbb{Z}} * \mathbb{R}^2 \amalg_{l \in I} (\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}) \times_{\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}} \mathbb{R} & \longrightarrow & \underline{\underline{E}}(\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}) \end{array} \quad (2.13)$$

donde  $I$  es un sistema completo de representantes de  $G$ -órbitas bajo conjugación de las clases de subgrupos del tipo  $[R] = [\langle(n, 2m)\rangle]$ , con  $(n, m) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  distinto de  $(0, 0)$ . Las aplicaciones son dados por la propiedad universal de espacios clasificantes para familias, aplicado a inclusiones de familias de subgrupos. Son como sigue:

1. La aplicación  $p: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  es la proyección sobre el eje  $y$ ,  $(t, s) \mapsto s$ . Como  $\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}$  actúa en el eje  $y$  de  $\mathbb{R}^2$  por traslación y la acción de  $\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}$  en  $\mathbb{R}$  es también por traslación, entonces  $p$  es una  $\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}$ -aplicación celular. Por definición  $p$  es única salvo  $G$ -homotopía.
2. La aplicación  $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \{k_n\}_{n \in \mathbb{Z}} * \mathbb{R}^2$  es la inclusión, porque la  $\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}$ -acción es la misma en  $\mathbb{R}^2$ .
3. Para  $l \in I$ ,  $f_l: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  es la aplicación cociente de  $\mathbb{R}^2$  por la línea que pasa por  $(n, 2m)$  y el origen, esta aplicación es  $\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}$ -equivariante.

# Capítulo 3

## El grupo modular de una superficie

En este Capítulo se darán algunos conceptos básicos en el estudio del grupo modular. En la Sección 3.1 veremos algunas propiedades de giros de Dehn. En la Sección 3.2 veremos la definición de difeomorfismo pseudo-Anosov y algunas propiedades. En la Sección 3.3 definiremos el complejo de curvas de una superficie y el Teorema de clasificación de Nielsen-Thurston. Y en las Secciones 3.6 y 3.4 veremos sistemas de reducción canónico y homomorfismos que servirán para dar una descripción de normalizadores de elementos en el Capítulo 4. Finalmente veremos el Teorema de descomposición de forma canónica para elementos del grupo. Algunas referencias son [10], [20] y [14].

Denotaremos por  $S$  a una superficie orientable compacta con un conjunto finito de puntos removidos del interior (perforaciones). La superficie  $S$  puede tener frontera, a menos que se indique que es sin frontera. Sea  $\text{Diff}^+(S, \partial S)$  el grupo de difeomorfismos de  $S$  que preservan la orientación y en la frontera  $\partial S$  son la identidad, con la operación dada por la composición. Dotamos  $\text{Diff}^+(S, \partial S)$  con la topología compacto-abierto.

**Definición 3.1.** El *grupo modular de  $S$*  es el grupo

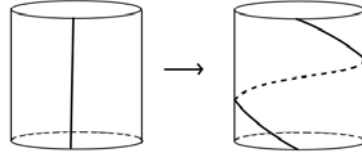
$$\Gamma(S) = \pi_0(\text{Diff}^+(S, \partial S))$$

Es decir, el grupo de clases de isotopía suave de elementos de  $\text{Diff}^+(S, \partial S)$ , donde las isotopías fijan puntualmente  $\partial S$ .

Si la superficie  $S$  tiene  $n$  perforaciones, hay un homomorfismo  $\Gamma(S) \rightarrow \Sigma_n$  sobre el grupo simétrico, que envía un elemento  $f \in \Gamma(S)$  a la correspondiente permutación de las perforaciones. Denotaremos el núcleo de este homomorfismo por  $P\Gamma(S)$ , llamado el *grupo modular puro de  $S$* .

De ahora en adelante supondremos que la característica de Euler de  $S$ ,  $\chi(S)$ , es menor que cero.



Figura 3.1: Giro de Dehn en  $A$ .

*Perforaciones vistas como puntos distinguidos:* Algunas veces es conveniente ver las perforaciones como puntos distinguidos de la superficie. En tal caso, sea  $S$  una superficie compacta orientable, y  $\mathcal{P}$  un conjunto de puntos del interior. Denotaremos por  $\text{Diff}^+(S, \partial S, \mathcal{P})$  al grupo de difeomorfismos de  $S$  que son la identidad en la frontera y dejan  $\mathcal{P}$  invariante como conjunto. Entonces  $\Gamma(S)$  es  $\text{Diff}^+(S, \partial S, \mathcal{P})$  módulo isotopías suaves que son la identidad en la frontera y dejan invariante  $\mathcal{P}$ .

### 3.1. Giros de Dehn

Los giros de Dehn son elementos muy importantes en el grupo modular  $\Gamma(S)$ , ya que aparecen en el conjunto de generadores de  $\Gamma(S)$ , ver [10] por ejemplo. Cuando la superficie  $S$  es orientable cerrada de género  $g$ , Dehn prueba que  $\Gamma(S)$  es generada por  $2g(g-1)$  giros de Dehn. Más tarde Lickorish prueba que  $\Gamma(S)$  es generado por  $3g-1$  giros de Dehn y finalmente Humphries prueba que son suficientes  $2g+1$  giros de Dehn. No veremos esos resultados, sin embargo los giros de Dehn aparecen como subgrupos de normalizadores de elementos reducibles en Sección 4.2, por lo que son indispensables en el desarrollo de la tesis.

Sea  $A \simeq \mathbb{S}^1 \times [0, 1]$ , el grupo  $\Gamma(A) \simeq \mathbb{Z}$ . Vemos al anillo  $A$  en  $\mathbb{R}^3$  con la orientación inducida. Sea

$$\begin{aligned} T: A &\rightarrow A \\ (\theta, t) &\mapsto (\theta - 2\pi t, t). \end{aligned}$$

Este difeomorfismo preserva la orientación y fija  $\partial A$ , la clase de isotopía de  $T$  genera  $\Gamma(A)$ . Ver Figura 3.1.

Una *curva cerrada*  $\mathbf{a}$  en  $S$  es una aplicación continua  $\mathbb{S}^1 \rightarrow S$ , la cual identificaremos con su imagen en  $S$ . Decimos que una curva cerrada es *simple* si la aplicación  $\mathbb{S}^1 \rightarrow S$  es inyectiva, ver Figura 3.2.

**Definición 3.2.** Sea  $\mathbf{b}$  es una curva cerrada simple (orientada) en  $S$ . Sea  $N$  una vecindad regular de  $\mathbf{b}$ , es decir,  $N$  es homeomorfa a  $\mathbf{b} \times (0, 1)$ , y elegimos un difeomorfismo  $\phi: A \rightarrow N$  que preserva la orientación. Obtenemos  $T_{\mathbf{b}}: S \rightarrow S$ , un

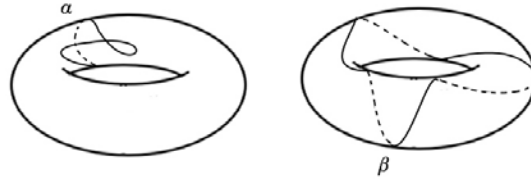


Figura 3.2: La curva  $\beta$  es simple y  $\alpha$  no lo es.

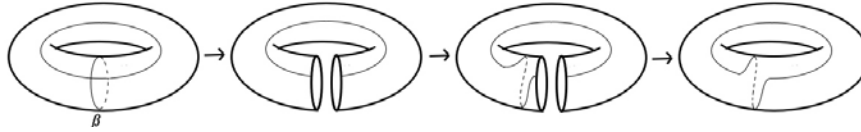


Figura 3.3: Giro de Dehn  $T_\beta$  en el toro.

difeomorfismo definido de la siguiente manera:

$$T_{\mathfrak{b}}(x) = \begin{cases} \phi \circ T \circ \phi^{-1}(x) & \text{si } x \in N; \\ Id & \text{si } x \in S - N. \end{cases}$$

llamado giro de Dehn por  $\mathfrak{b}$ . La clase de isotopía de  $T_{\mathfrak{b}}$  no depende en la elección de  $N$  ni de  $\phi$  y tampoco depende de la clase de isotopía de  $\mathfrak{b}$ . Si  $\beta$  es la clase de isotopía de  $\mathfrak{b}$ , denotaremos la clase de isotopía del giro de Dehn por  $\mathfrak{b}$  como  $T_\beta$ , el cual es un elemento bien definido de  $\Gamma(S)$  y lo llamaremos simplemente *giro de Dehn por  $\beta$* .

Otra forma de ver el giro de Dehn, como se muestra en la Figura 3.3 en el toro, es cortar por  $\beta$ , después dar el giro y finalmente pegar por la identidad.

Acerca de los giros de Dehn se tienen los siguientes resultados, como referencia ver Capítulo 3 de [10].

**Definición 3.3.** El *número de intersección geométrico* entre dos clases de isotopía  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  de curvas cerradas simples en  $S$  esta definido como el mínimo número de puntos de intersección entre curvas representantes de  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$ , es denotado como  $i(\alpha_1, \alpha_2)$ .

**Proposición 3.4.** Sean  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  clases de isotopía de curvas cerradas simples en  $S$  y sea  $f \in \Gamma(S)$ . Entonces

1.  $T_{\alpha_1} = T_{\alpha_2}$  si y solo si  $\alpha_1 = \alpha_2$ ,
2.  $T_{f(\alpha)} = fT_\alpha f^{-1}$ ,
3.  $f$  conmuta con  $T_{\alpha_1}$  si y sólo si  $f(\alpha_1) = \alpha_1$ ,
4.  $T_\alpha T_\beta = T_\beta T_\alpha$  si y solo si  $i(\alpha_1, \alpha_2) = 0$ .

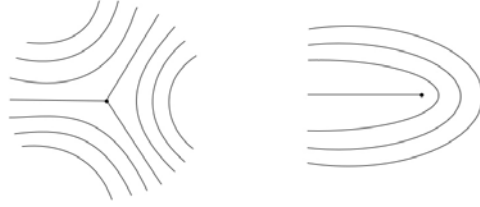


Figura 3.4: Se muestran vecindades de puntos singulares con 3 y 1 punta respectivamente.

## 3.2. Difeomorfismos pseudo-Anosov

Los elementos pseudo-Anosov son elementos básicos en  $\Gamma(S)$ , éstos tienen orden infinito y aparecen en la descomposición canónica de elementos de  $\Gamma(S)$  dada en el Teorema 3.27. En esta Sección veremos la definición de difeomorfismos pseudo-Anosov y algunas propiedades que tienen estos difeomorfismos, las cuales son un elemento clave para probar la Condición (C) (Teo. 4.10) para el grupo modular de una superficie. Ver [10] como referencia.

**SUPERFICIES CERRADAS.** Supondremos que la superficie  $S$  es cerrada.

**Definición 3.5.** Una *foliación singular*  $\mathcal{F}$  en  $S$  es una descomposición de  $S$  en una unión disjunta de subconjuntos de  $S$  llamados *hojas* de  $\mathcal{F}$ , y un conjunto finito de  $S$  llamados puntos singulares de  $\mathcal{F}$ , tal que las siguientes condiciones se cumplen:

- (1) Para cada punto no singular  $p \in S$  existe una carta suave de una vecindad de  $p$  a  $\mathbb{R}^2$  que manda hojas a segmentos horizontales. Las aplicaciones de transición entre cualesquiera dos cartas son aplicaciones suaves de la forma  $(x, y) \rightarrow (f(x, y), g(y))$ . Es decir, las aplicaciones de transición mandan líneas horizontales en líneas horizontales.
- (2) Las singularidades son sillas de montar con  $k$  puntas, con  $k \geq 3$ , es decir de tipo diferencial cuadrática holomorfa  $z^{k-2}dz^2$ . A la izquierda en la Figura 3.4 se muestra el caso con 3 puntas.

Sea  $\mathcal{F}$  una foliación en  $S$ . Un arco suave  $\alpha$  en  $S$  es *transverso* a  $\mathcal{F}$  si  $\alpha$  omite los puntos singulares de  $\mathcal{F}$  y es transverso a cada hoja de  $\mathcal{F}$  en cada punto en su interior. Sean  $\alpha, \beta$  arcos suaves transversos a  $\mathcal{F}$ . Una isotopía preserva-hoja de  $\alpha$  a  $\beta$  es una aplicación  $H: I^2 \rightarrow S$  tal que

- (i)  $H(I \times \{0\}) = \alpha$  y  $H(I \times \{1\}) = \beta$ ;
- (ii) Para cada  $t \in I$ ,  $H(I \times \{t\})$  es transverso a  $\mathcal{F}$ ;
- (iii)  $H(\{0\} \times I)$  y  $H(\{1\} \times I)$  cada uno está contenido en una sola hoja.

**Definición 3.6.** Una *medida transversa*  $\mu$  en una foliación  $\mathcal{F}$  es una función  $\mathcal{F}$  que asigna un número real positivo a cada arco suave transverso a  $\mathcal{F}$ , tal que  $\mu$  es invariante bajo isotopías preserva-hoja y  $\mu$  es regular con respecto a la medida de Lebesgue. La última condición significa que en cada punto de  $S$  se tiene una vecindad  $U$  y una carta suave  $U \rightarrow \mathbb{R}^2$  tal que la medida  $\mu$  es inducida por  $|dy|$  en  $\mathbb{R}^2$ .

**Definición 3.7.** Una *foliación con medida* en  $S$  es una foliación de  $S$  equipada con una medida transversa  $\mu$ . Decimos que dos foliaciones con medida son transversas si sus hojas son transversas fuera de las singularidades. Note que foliaciones con medida transversas tienen las mismas singularidades.

SUPERFICIES CON PERFORACIONES. Supondremos que la superficie  $S$  es cerrada y tiene un conjunto finito de perforaciones.

Una *foliación medible* en una superficie cerrada con perforaciones, se define como en una superficie cerrada, pero en las perforaciones se permiten singularidades con 1 punta (Figura 3.4).

**Definición 3.8.** Sea  $S$  una superficie cerrada con un conjunto finito  $\mathcal{P}$  de puntos removidos. Un difeomorfismo  $\phi: S \rightarrow S$  es llamado *pseudo-Anosov* si existe un par de foliaciones con medida  $(\mathcal{F}^s, \mu^s)$ ,  $(\mathcal{F}^u, \mu^u)$ , y un número real  $\lambda > 1$  tal que

$$(i) \quad \phi(\mathcal{F}^s, \mu^s) = (\mathcal{F}^s, \lambda^{-1}\mu^s); \text{ y } \phi(\mathcal{F}^u, \mu^u) = (\mathcal{F}^u, \lambda\mu^u).$$

(ii) las singularidades con 1 punta de esas foliaciones pertenecen a  $\mathcal{P}$ .

Las igualdades en (i) significan que  $\phi$  deja invariantes la foliaciones  $\mathcal{F}^s$  y  $\mathcal{F}^u$  y las medidas son escaladas;  $(\mathcal{F}^s, \mu^s)$  es llamada *foliación estable de  $\phi$* ,  $(\mathcal{F}^u, \mu^u)$  *foliación inestable de  $\phi$*  y  $\lambda$  es la *dilatación de  $\phi$* .

**Definición 3.9.** Sea  $S$  una superficie cerrada con un conjunto finito de perforaciones. Un elemento  $f \in \Gamma(S)$  es llamado pseudo-Anosov si tiene un difeomorfismo pseudo-Anosov en su clase.

Referencia para el siguiente Teorema es [14, Exposé 12].

**Teorema 3.10.** (*Unicidad de pseudo-Anosov*) Sea  $S$  una superficie cerrada con un conjunto finito de perforaciones. Dos difeomorfismos pseudo-Anosov en  $\text{Diff}^+(S)$  isotópicos son conjugados por un difeomorfismo en  $\text{Diff}^+(S)$  isotópico a la identidad.

**Definición 3.11.** Una foliación  $\mathcal{F}^s$  es *únicamente ergódica* si existe una única medida singular  $\mathcal{F}^s$ -invariante, salvo multiplicación por un escalar, es decir, si  $\nu$  es otra medida invariante bajo  $\mathcal{F}^s$ , existe un escalar  $a \in \mathbb{R}$  tal que  $\nu(T) = a\mu(T)$ , para cada transversal  $T$ .

El siguiente resultado puede verse en [14, Thm. 12.1] o [10, Thm. 14.16].

**Teorema 3.12.** (*Ergodicidad única*) Sea  $S$  una superficie cerrada con un conjunto finito de perforaciones. Las foliaciones estable e inestable de un difeomorfismo pseudo-Anosov en  $S$  son únicamente ergódicas.

Sea  $f \in \Gamma(S)$  pseudo-Anosov y  $\phi$  un difeomorfismo pseudo-Anosov en su clase con  $(\mathcal{F}_\phi^s, \mu_\phi^s)$  y  $(\mathcal{F}_\phi^u, \mu_\phi^u)$  las foliaciones estable e inestable respectivamente de  $\phi$  y  $\lambda_\phi$  la dilatación de  $\phi$ . Para  $n \in \mathbb{Z} - \{0\}$ ,

$$\begin{aligned}\phi^n(\mathcal{F}_\phi^s, \mu_\phi^s) &= (\mathcal{F}_\phi^s, \lambda_\phi^{-n} \mu_\phi^s), \\ \phi^n(\mathcal{F}_\phi^u, \mu_\phi^u) &= (\mathcal{F}_\phi^u, \lambda_\phi^n \mu_\phi^u).\end{aligned}\tag{3.1}$$

Entonces si  $n > 0$  (o  $n < 0$ ),  $(\mathcal{F}_\phi^s, \mu_\phi^s)$  y  $(\mathcal{F}_\phi^u, \mu_\phi^u)$  son las foliaciones estable e inestable (inestable y estable) respectivamente de  $\phi^n$  con dilatación  $\lambda_\phi^n$  (o  $\lambda_\phi^{-n}$ ).

**SUPERFICIES CON FRONTERA.** Si  $S$  es una superficie con frontera no vacía, decimos que  $f \in \Gamma(S)$  es pseudo-Anosov si  $f$  se restringe a un difeomorfismo pseudo-Anosov de la superficie cerrada con perforaciones obtenida al remover la frontera de  $S$ .

### 3.3. Clasificación de elementos en $\Gamma(S)$

Sea  $S$  una superficie compacta con un conjunto finito de puntos removidos del interior. El grupo  $\Gamma(S)$  actúa en el complejo de curvas, cuya definición daremos a continuación. Esta acción permite definir una clasificación de elementos de  $\Gamma(S)$ .

Decimos que una curva cerrada simple es *esencial* si no es homotópica a un punto, un punto marcado o una componente frontera.

**Definición 3.13.** El *complejo de curvas de  $S$* , denotado  $\mathcal{C}(S)$  es el complejo simplicial abstracto donde

- (i) Los vértices son las clases de isotopía de curvas cerradas esenciales simples, denotamos por  $V(S)$  el conjunto de vértices;
- (ii)  $\mathcal{C}(S)$  tiene un  $k$ -simplejo por cada  $(k+1)$ -tupla de vértices, de los cuales cada par tiene representantes disjuntos en sus correspondientes clases de isotopía.

El grupo modular actúa en  $V(S)$ , ya que  $f \in \Gamma(S)$  manda vértices en vértices,

$$f \cdot \alpha := f(\alpha)$$

de hecho manda simplejos en simplejos. Entonces se tiene una acción de  $\Gamma(S)$  en  $\mathcal{C}(S)$ . La *realización* de un simplejo es la unión de las curvas que representan sus vértices y son mutuamente disjuntas.

**Definición 3.14.** Un *sistema de reducción* para un elemento  $f \in \Gamma(S)$  es un simplejo  $\sigma$  del complejo de curvas tal que  $f(\sigma) = \sigma$ .

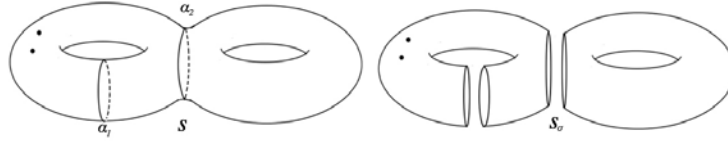


Figura 3.5: En la figura se muestran  $S$  y  $S_\sigma$ , con  $\sigma = \alpha_1 \cup \alpha_2$ .

**SUPERFICIES SIN FRONTERA.** Sea  $S$  una superficie orientable cerrada con un conjunto finito de puntos removidos.

**Definición 3.15.** Decimos que un elemento  $f \in \Gamma(S)$  es *reducible* si tiene sistema de reducción no vacío, y es irreducible de otra forma.

Elementos irreducibles de orden finito, llamados periódicos, son representados por difeomorfismos de orden finito (ver [19] y [24]) y elementos irreducibles de orden infinito son representados por difeomorfismos pseudo-Anosov. Se tiene la siguiente clasificación dada en [10, Thm. 13.2]:

**Teorema 3.16.** (CLASIFICACIÓN DE NIELSEN-THURSTON) *Sea  $S$  una superficie orientable cerrada de género  $g$  y  $n$  puntos removidos, con  $g, n \geq 0$ . Cada  $f \in \Gamma(S)$  es o periódico o reducible o pseudo-Anosov. Además elementos pseudo-Anosov no son periódicos ni reducibles.*

### 3.4. Homomorfismos inducidos de inclusiones

Sea  $S$  una superficie orientable cerrada con un conjunto finito de puntos removidos  $\mathcal{U}$ . En esta Sección definiremos homomorfismos que usaremos en el Teorema de la forma canónica de un elemento, que descompone a elementos reducibles (salvo una potencia). También usaremos estos homomorfismos para describir los normalizadores de elementos reducibles de  $\Gamma(S)$ .

Sea  $S'$  una subsuperficie compacta de  $S$  con un conjunto de perforaciones  $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{U}$ . La inclusión  $S' \rightarrow S$  induce un homomorfismo natural,

$$\eta_{S'}: \Gamma(S') \rightarrow \Gamma(S). \tag{3.2}$$

Si  $g \in \Gamma(S')$  y  $\psi \in \text{Diff}^+(S', \partial S')$  es un representante de  $g$ , definimos  $\eta_{S'}(g)$  como la clase de isotopía del difeomorfismo  $\tilde{\psi}$  que coincide con  $\psi$  en  $S'$  y es la identidad fuera de  $S'$ . Por definición, cualquier isotopía entre dos elementos en  $\text{Diff}^+(S', \partial S')$  define una isotopía entre los correspondientes elementos en  $\text{Diff}^+(S, \partial S)$ , por lo que  $\eta_{S'}$  esta bien definido.

**Teorema 3.17.** [10, Thm.3.18] *Sea  $S$  una superficie orientable cerrada con un conjunto finito  $\mathcal{U}$  de puntos removidos. Sea  $S'$  una subsuperficie compacta de  $S$  con un*

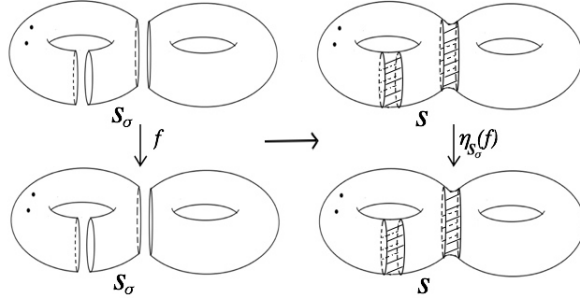


Figura 3.6: Se extiende a  $f$  como la identidad en las partes sombreadas.

conjunto finito de puntos removidos  $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{U}$ . Suponga que  $S'$  es distinta de un anillo cerrado y ninguna componente de  $S - S'$  es un disco abierto. Sea  $\eta_{S'}$  el homomorfismo inducido de la inclusión. Sean  $\tau_1, \dots, \tau_b$ , las clases de isotopía de las componentes frontera de  $S'$  que acotan discos 1-perforados en  $S - S'$  y sean  $\{\beta_1, \gamma_1\}, \dots, \{\beta_d, \gamma_d\}$  las parejas de componentes frontera de  $S'$  que acotan anillos en  $S - S'$ . Entonces el núcleo de  $\eta_{S'}$  es el grupo abeliano libre

$$\ker(\eta_{S'}) = \langle T_{\tau_1}, \dots, T_{\tau_b}, \dots, T_{\beta_1} T_{\gamma_1}^{-1}, \dots, T_{\beta_d} T_{\gamma_d}^{-1} \rangle.$$

En particular, si ninguna componente de  $S - S'$  es un anillo abierto, un disco abierto, o un disco 1-perforado, entonces  $\eta_{S'}$  es inyectiva.

*Cortando la superficie.* Sea  $\sigma \in \mathcal{C}(S)$ ,  $C$  su realización en  $S$  y  $N_\sigma$  una vecindad abierta regular de  $C$  en  $S$  ( $N_C$  es homeomorfa a  $C \times (0, 1)$ ). Denotamos por  $S_\sigma = S - N_\sigma$  y por  $S_1, \dots, S_k$  las componentes conexas de  $S_\sigma$ . En la Figura 3.5 se muestra un ejemplo de  $S_\sigma$  en el que  $\sigma = \alpha_1 \cup \alpha_2$ . De las inclusiones  $S_\sigma \rightarrow S$  y  $S_i \rightarrow S$  denotaremos por

$$\eta_{S_\sigma} : \Gamma(S_\sigma) \rightarrow \Gamma(S), \quad \eta_{S_i} : \Gamma(S_i) \rightarrow \Gamma(S), \quad (3.3)$$

los homomorfismos inducidos respectivamente. Luego por el Teorema 3.17 se tiene  $\ker(\eta_{S_\sigma}) = \langle T_{\beta_1} T_{\gamma_1}^{-1}, \dots, T_{\beta_r} T_{\gamma_r}^{-1} \rangle$ , donde  $\beta_i$  y  $\gamma_i$  son las dos componentes frontera de  $N_\sigma$  que son isotópicas a  $\alpha_i$  en  $S$ . Observe que cada componente conexa de  $S_\sigma$  tiene al menos una componente frontera (que viene de la vecindad de  $\sigma$ ), como elementos en  $\Gamma(S_\sigma)$  fijan puntualmente la frontera, entonces no permutan las componentes conexas de  $S_\sigma$ , por tanto  $\Gamma(S_\sigma) = \prod_{i=1}^k \Gamma(S_i)$ . De lo anterior concluimos que cualquier elemento en la imagen  $\eta_{S_\sigma}(\Gamma(S_\sigma))$  fija cada subsuperficie  $S_i$  de  $S$ .

*Tapando la frontera.* En cada componente frontera de  $S_\sigma$  pegamos un disco con una perforación y denotamos esa superficie por  $\widehat{S}_\sigma$  y a cada componente conexa de  $\widehat{S}_\sigma$  la denotaremos por  $\widehat{S}_i$ . En la Figura 3.7 se muestra un ejemplo.

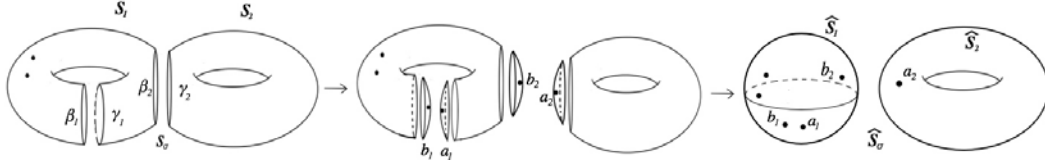


Figura 3.7: Tapando cada componente frontera con un disco 1-perforado.

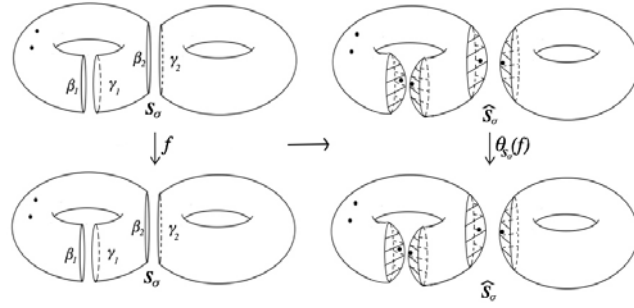


Figura 3.8: Se extiende a  $f$  como la identidad en las partes sombreadas.

Denotamos por

$$\theta_{S_\sigma} : \Gamma(S_\sigma) \rightarrow \Gamma(\widehat{S}_\sigma) \quad \text{y} \quad \theta_{S_i} : \Gamma(S_i) \rightarrow \Gamma(\widehat{S}_i), \quad (3.4)$$

a los homomorfismos inducidos por las inclusiones  $S_\sigma \rightarrow \widehat{S}_\sigma$  y  $S_i \rightarrow \widehat{S}_i$  para cada  $i$ , llamados *homomorfismos de encorche*. Por el Teorema 3.17,  $\ker(\theta_{S_\sigma}) = \langle T_{\beta_1}, \dots, T_{\beta_r}, T_{\gamma_1}, \dots, T_{\gamma_r} \rangle$ . Luego, la imagen  $\theta_{S_i}(\Gamma(S_i)) = \Gamma(\widehat{S}_i, \mathcal{Q}_i)$  es el subgrupo de  $\Gamma(\widehat{S}_i)$  que fija puntualmente los puntos removidos en  $\mathcal{Q}_i$  que vienen de componentes frontera de  $S_i$  al tapar las componentes frontera con discos con una perforación. Como elementos en  $\Gamma(S_\sigma)$  dejan fijas puntualmente las componentes frontera de  $S_\sigma$  y cada  $S_i$  tiene al menos una componente frontera, se tiene que elementos de  $\Gamma(S_\sigma)$  no permutan las superficies  $S_i$ , entonces  $\Gamma(S_\sigma) = \prod_{i=1}^k \Gamma(S_i)$ . Concluimos que  $\theta_{S_\sigma} = \prod_{i=1}^k \theta_{S_i}$ , entonces

$$\theta_{S_\sigma} : \Gamma(S_\sigma) \rightarrow \prod_{i=1}^k \Gamma(\widehat{S}_i, \mathcal{Q}_i). \quad (3.5)$$

donde  $\prod_{i=1}^k \Gamma(\widehat{S}_i, \mathcal{Q}_i)$  puede ser visto como el subgrupo de  $\Gamma(\widehat{S}_\sigma)$  que fija cada  $\widehat{S}_i$  y fija puntualmente los puntos removidos en  $\mathcal{Q} = \cup_{i=1}^k \mathcal{Q}_i$  de  $\widehat{S}_\sigma$ .

Como curvas cerradas esenciales no son isotópicas a componentes frontera se tiene que  $\mathcal{C}(S_i) = \mathcal{C}(\widehat{S}_i)$ . Note que  $f$  es pseudo-Anosov si y sólo si  $\theta_{S_i}(f)$  es pseudo-Anosov y  $g$  es reducible si y sólo si  $\theta_{S_i}(g)$  es reducible.



### 3.5. Subgrupos de Congruencia

Definiremos los subgrupos de congruencia de  $\Gamma(S)$ , que son subgrupos de índice finito de  $\Gamma(S)$  y veremos varias cualidades que tienen a continuación. En la Sección 5.3 daremos una cota para la dimensión geométrica para la familia de subgrupos virtualmente cíclicos y dicha cota nos dará una cota para el grupo entero  $\Gamma(S)$ .

Sea  $S$  una superficie orientable compacta con un conjunto finito de puntos removidos.

**Definición 3.18.** Sea  $m > 1$ , sea  $\psi: \Gamma(S) \rightarrow \text{Aut}(H_1(S, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}))$ , el homomorfismo natural definido por la acción de difeomorfismos en el grupo de homología de la superficie, definimos

$$\Gamma_m(S) = \ker \psi,$$

llamado subgrupo de congruencia de  $\Gamma(S)$ . Notemos que  $\Gamma_m(S)$  es un subgrupo de índice finito de  $\Gamma(S)$ .

**Definición 3.19.** Decimos que un *difeomorfismo*  $\psi \in \text{Diff}^+(S, \partial S)$  es *puro* si para alguna 1-variedad  $C$  (posiblemente vacía) de  $S$  la siguiente condición se satisface:

- (P)  $C$  es la realización de algún  $\sigma \in \mathcal{C}(S)$  o  $C$  es vacía;  $\psi$  fija  $C$ , no intercambia las componentes de  $S - C$ , e induce en cada componente de  $S - C$  un difeomorfismo isotópico a uno pseudo-Anosov o a la identidad.

Llamamos a un elemento  $f \in \Gamma(S)$  *puro* si la clase de isotopía de  $f$  contiene un difeomorfismo puro. Un subgrupo  $H \subseteq \Gamma(S)$  es llamado *puro* si todo  $h \in H$  es puro.

De los Corolarios 1.6 y 1.8 de [20], tenemos el siguiente resultado.

**Teorema 3.20.** *Sea  $S$  una superficie orientable cerrada con un número finito de puntos removidos. Si  $m \geq 3$ , el subgrupo  $\Gamma_m(S)$  es puro y libre de torsión.*

**Teorema 3.21.** [20, Thm. 1.2] *Sea  $S$  una superficie orientable cerrada con un número finito de puntos removidos y sea  $C$  una 1-subvariedad cerrada de  $S$  cuyas componentes no son homotópicamente triviales, y sea  $\phi: S \rightarrow S$  un difeomorfismo. Si  $\phi(C) = C$  y  $\phi_*: H_1(S, \mathbb{Z}_m) \rightarrow H_1(S, \mathbb{Z}_m)$  es el automorfismo identidad, entonces  $\phi$  deja invariante cada componente de  $C \cup \partial S$ , preserva sus orientaciones, preserva la orientación de  $S$ , y deja invariante cada componente de  $S - C$ .*

En el Teorema 3.21 no se requiere que el difeomorfismo  $\phi$  fije puntualmente las componentes frontera.

Desde ahora  $m$  será mayor o igual a 3. Entonces si  $f \in \Gamma_m(S)$  y  $\sigma \in \mathcal{C}(S)$  con  $f(\sigma) = \sigma$ , por el Teorema 3.21 se tiene que  $f$  fija cada uno de los vértices de  $\sigma$ .

### 3.6. Sistema de reducción canónico

Sea  $S$  una superficie orientable cerrada con un número finito de puntos removidos. Los sistemas de reducción de elementos reducibles son importantes, pero no son únicos. Definiremos sistema de reducción canónico, el cual es único, que nos ayudará a describir (salvo una potencia) los elementos en  $\Gamma(S)$  de forma canónica (Teorema 3.27).

**Definición 3.22.** Una clase de isotopía  $\alpha \in V(S)$  es llamada clase esencial de reducción para un subgrupo  $G \subseteq \Gamma_m(S)$  si satisface dos condiciones: (i)  $g(\alpha) = \alpha$  para cada  $g \in G$ ; (ii) si  $\beta \in V(S)$  y  $i(\alpha, \beta) \neq 0$ , entonces  $g(\beta) \neq \beta$  para algún  $g \in G$ . El conjunto de clases de reducción esenciales es un simplejo en  $\mathcal{C}(S)$ , el cual es llamado *sistema de reducción canónico para  $G$*  y es denotado como  $\sigma(G)$ . Se define en general para  $H \subset \Gamma(S)$  como  $\sigma(H) = \sigma(H \cap \Gamma_m(S))$  y para  $f \in \Gamma(S)$  se define  $\sigma(f) := \sigma(\langle f \rangle)$ .

Note que el sistema de reducción canónico de un elemento puro es la intersección de todos los sistemas de reducción  $\sigma$  que cumplen la condición (P) (de la definición de difeomorfismo puro), en este sentido, el sistema de reducción canónico es el sistema de reducción más pequeño que cumple (P). Por el Teorema 3.20, todo elemento  $f \in \Gamma(S)$  elevado a una potencia  $n \in \mathbb{N}$  es puro.

#### Ejemplos 3.23.

1. Los elementos pseudo-Anosov y los elementos periódicos tiene sistema de reducción canónico vacío [20].
2. El giro de Dehn  $T_\alpha$  tiene sistema de reducción canónico  $\sigma(T_\alpha) = \alpha$ .

Para los siguientes resultados ver: Corolario 7.12, Lemma 7.3 y Sec. 7.2 de [20].

**Lema 3.24.** *Sea  $S$  una superficie orientable cerrada con un conjunto finito de puntos removidos. Entonces elementos reducibles de  $\Gamma(S)$  tienen sistema de reducción canónico no vacío.*

**Lema 3.25.** *Sea  $S$  una superficie orientable cerrada con un conjunto finito de puntos removidos. Sean  $H, G$  subgrupos de  $\Gamma(S)$ .*

(i) *Si  $H \trianglelefteq G$  es de índice finito, entonces  $\sigma(G) = \sigma(H)$ ;*

(ii) *Si  $g \in \Gamma(S)$ , entonces  $\sigma(gGg^{-1}) = g\sigma(G)$ .*

**Lema 3.26.** *Sea  $S$  una superficie orientable cerrada con un conjunto finito de puntos removidos. Sean  $f, g \in \Gamma(S)$  tal que  $f^q = gf^p g^{-1}$  para algunos  $p, q \in \mathbb{Z} - \{0\}$ , entonces  $g\sigma(f) = \sigma(f)$ .*

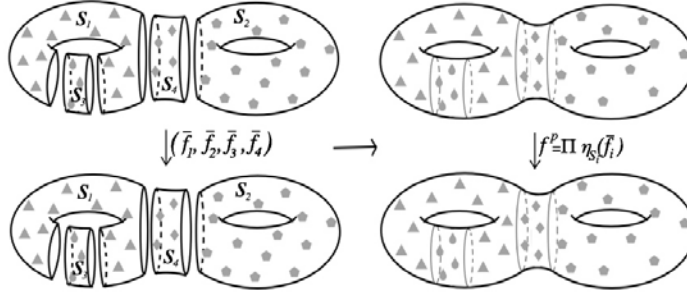


Figura 3.9: Ilustración de la forma canónica.

*Demostración.* Por hipótesis  $\sigma(f^q) = \sigma(gf^p g^{-1})$ , por el Lema 3.25

$$\sigma(f^q) = \sigma(f) \quad \text{y} \quad \sigma(gf^p g^{-1}) = \sigma(gfg^{-1}),$$

entonces  $\sigma(gfg^{-1}) = \sigma(f)$ . Y por el Lema 3.25  $\sigma(gfg^{-1}) = g\sigma(f)$ , por lo tanto  $g\sigma(f) = \sigma(f)$ .  $\square$

Cortando  $S$  por el sistema reducción canónico  $\sigma$  de un elemento en  $\Gamma(S)$  y aplicando el Teorema de clasificación de Nielsen-Thurston a cada subsuperficie de  $S_\sigma$  podemos obtener una descomposición del elemento, [10, Cor. 13.3].

**Teorema 3.27** (Forma canónica). *Sea  $f \in \Gamma(S)$  y  $\sigma = \sigma(f) = \alpha_1 \cup \dots \cup \alpha_r$  su sistema de reducción canónico. Sea  $S_\sigma = S_1 \cup \dots \cup S_k$  y  $N_\sigma$  como antes. Además suponga que la cerradura  $\overline{N_\sigma} = S_{k+1} \cup \dots \cup S_{k+r}$  es unión de vecindades cerradas disjuntas  $S_{k+i}$  de curvas representantes de los  $\alpha_i$ . Existe un representante  $\phi \in \text{Diff}^+(S)$  de  $f$  que permuta las subsuperficies  $S_i$ , entonces alguna potencia de  $\phi$  deja cada  $S_i$  invariante. De hecho, existe un entero  $p > 0$  tal que  $\phi^p(S_i) = S_i$  para toda  $i$  y*

$$f^p = \prod_{i=1}^{k+r} \eta_{S_i}(\overline{f}_i), \quad (3.6)$$

donde  $\overline{f}_i \in \Gamma(S_i)$  es o pseudo-Anosov o la identidad para  $1 \leq i \leq k$  y es una potencia del giro de Dehn en la curva  $\alpha_{i-k}$  para  $k+1 \leq i \leq k+r$ .

**Observación 3.28.** En (3.6), para  $1 \leq j \leq r$ ,  $\eta_{S_{j+k}}(\overline{f}_{j+k}) = T_{\alpha_j}^{n_j}$ , con  $n_j \in \mathbb{Z}$ . Además si  $f \in \Gamma_m(S)$ , por el Teorema 3.21 y porque  $\Gamma_m(S)$  es un subgrupo puro, siempre podemos tomar  $p = 1$ .

# Capítulo 4

## Commensuradores

El objetivo de este Capítulo es dar una descripción de los commensuradores de subgrupos cíclicos infinitos  $C$  de  $\Gamma(S)$  (Sección 4.4). Para ello, en la Sección 4.1 veremos estabilizadores de un simplejo  $\sigma \in \mathcal{C}(S)$ , lo que nos ayudará a describir los normalizadores de elementos reducibles de  $\Gamma(S)$  en la Sección 4.2. Y en la Sección 4.3 probaremos que  $\Gamma(S)$  cumple la Condición (C) definida en la Sección 1.4.

### 4.1. Estabilizadores

En esta Sección  $S$  denotará una superficie orientable cerrada, posiblemente con un conjunto finito de puntos removidos. Veremos una descripción de los estabilizadores  $\Gamma(S)_\sigma$ , la cual nos ayudará a ver cómo son los normalizadores de elementos reducibles en  $\Gamma(S)$ .

Sea  $\sigma \in \mathcal{C}(S)$ , con vértices  $\alpha_1, \dots, \alpha_r$  y  $S_\sigma = S_1 \cup \dots \cup S_k$  como en la Sección 3.4. Note que si  $S$  tiene género  $g$  y  $n$  puntos removidos, entonces  $\sigma \in \mathcal{C}(S)$  tiene a lo más  $3g - 3 + n$  vértices y  $S_\sigma$  tiene a lo más  $2g - 2 + n$  componentes  $S_i$ , ver [10].

Consideremos la acción de  $\Gamma(S)$  en el complejo de curvas  $\mathcal{C}(S)$ , denotemos el estabilizador de  $\sigma$  en  $\Gamma(S)$  por

$$\Gamma(S)_\sigma = \{g \in \Gamma(S) | g(\sigma) = \sigma\}.$$

Sea  $f \in \Gamma(S)_\sigma$  y  $C$  la realización de  $\sigma$  en  $S$ . Si  $F$  está en la clase de  $f$ ,  $F(C)$  es isotópica a  $C$ , por el Teorema de extensión de isotopías, podemos suponer que  $F$  fija  $C$ , entonces el difeomorfismo  $F$  determina un difeomorfismo  $S - C$ , que determina un elemento en  $\Gamma(S - C)$ . Como  $S - C$  es naturalmente homeomorfa a  $\widehat{S}_\sigma$ , existe un isomorfismo natural  $\Gamma(S - C) \simeq \Gamma(\widehat{S}_\sigma)$ . De esta forma se obtiene el siguiente homomorfismo, llamado homomorfismo de corte. Siguiendo esta notación se tiene la siguiente Proposición, dada en [20, Sec. 7.5] y en [10, Prop. 3.20].

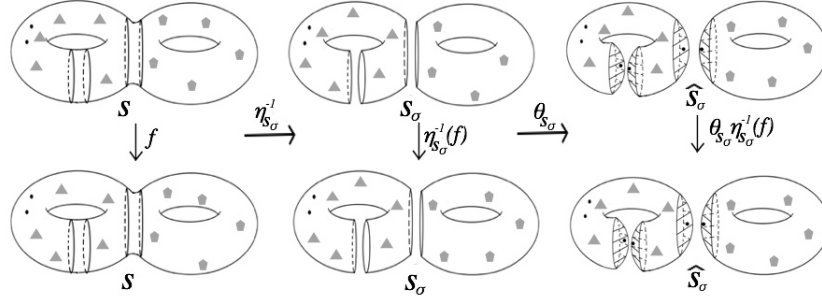


Figura 4.1: Se muestra el homomorfismo  $\rho_{\sigma,0}$  como la composición  $\theta_{S_\sigma} \eta_{S_\sigma}^{-1}$ .

**Proposición 4.1.** *Existe un homomorfismo bien definido*

$$\rho: \Gamma(S)_\sigma \rightarrow \Gamma(\widehat{S}_\sigma). \quad (4.1)$$

con núcleo el grupo abeliano libre  $\langle T_{\alpha_1}, \dots, T_{\alpha_r} \rangle$ .

Note que elementos de  $\Gamma(\widehat{S}_\sigma)$  pueden permutar las componentes conexas de  $\widehat{S}_\sigma$ . Restringiremos el homomorfismo  $\rho$  a dos subgrupos de índice finito de  $\Gamma(S)_\sigma$  tales que su imagen bajo  $\rho$  no permuta las componentes conexas de  $\widehat{S}_\sigma$ . Tal restricción es la composición de dos homomorfismos que dimos en la Sección 3.4.

Sea  $\Gamma(S)_\sigma^0$  el subgrupo de índice finito de  $\Gamma(S)_\sigma$  de elementos que fijan cada  $\alpha_i$  con orientación. Como  $f \in \Gamma(S)_\sigma^0$  fija la orientación de cada  $\alpha_i$ , preserva los lados de una vecindad regular de cada  $\alpha_i$  y por tanto fija cada  $S_i$ . La restricción  $\rho_{\sigma,0} = \rho_\sigma|_{\Gamma(S)_\sigma^0}$  corresponde a la composición

$$\rho_{\sigma,0} = \theta_{S_\sigma} \eta_{S_\sigma}^{-1},$$

donde  $\theta_{S_\sigma}: \Gamma(S_\sigma) \rightarrow \Gamma(\widehat{S}_\sigma)$  y  $\eta_{S_\sigma}: \Gamma(S_\sigma) \rightarrow \Gamma(S)$  fueron definidos en (3.4) y (3.3). El homomorfismo  $\rho_{\sigma,0}$  está bien definido ya que  $\ker(\eta_{S_\sigma}) \subseteq \ker(\theta_{S_\sigma})$ , ver la prueba de [10, Prop. 3.20]. Por tanto

$$\rho_{\sigma,0}: \Gamma(S)_\sigma^0 \rightarrow \prod_{i=1}^k \Gamma(\widehat{S}_i, \mathcal{Q}_i), \quad (4.2)$$

es sobreyectiva y  $\ker(\rho_{\sigma,0}) = \ker(\rho_\sigma)$ . En la Figura 4.1 se muestra un ejemplo de la composición, en la cual se puede apreciar que los giros de Dehn  $T_{\alpha_i}$  están en el núcleo.

Otro subgrupo de  $\Gamma(S)_\sigma$  es el subgrupo  $\Gamma_m(S)_\sigma$ , considerado por Ivanov en [20, Sec.7.5]. Por el Teorema 3.21, elementos en  $\Gamma_m(S)_\sigma$  fijan cada curva  $\alpha_i$  con orientación y cada subsuperficie  $S_i$ , entonces  $\Gamma_m(S)_\sigma \subseteq \Gamma(S)_\sigma^0$ , denotaremos por  $\rho_{\sigma,m} = \rho_{\sigma,0}|_{\Gamma_m(S)_\sigma}$ , entonces  $\rho_{\sigma,m}: \Gamma_m(S)_\sigma \rightarrow \prod_{i=1}^k \Gamma(\widehat{S}_i, \mathcal{Q}_i)$ . Además tenemos que  $\ker(\rho_{\sigma,m}) \simeq \mathbb{Z}^s$ , con  $s \leq r$ . Si  $g \in \Gamma_m(S)_\sigma$  y  $\rho_{\sigma,m}(g) = (g_1, \dots, g_k)$ , por definición de  $\rho_\sigma$

y como  $g$  es puro, cada  $g_i$  es puro, entonces la imagen  $\rho_{\sigma,m}(\Gamma_m(S)_\sigma)$  es un subgrupo puro de  $\prod_{i=1}^k \Gamma(\widehat{S}_i, \mathcal{Q}_i)$  y por tanto es libre de torsión, denotaremos este subgrupo por  $\prod_{i=1}^k \Gamma_i$ , donde  $\Gamma_i$  es la proyección de la imagen de  $\rho_{\sigma,m}$  sobre  $\Gamma(\widehat{S}_i, \mathcal{Q}_i)$ , entonces

$$\rho_{\sigma,m}: \Gamma_m(S)_\sigma \rightarrow \prod_{i=1}^k \Gamma_i. \quad (4.3)$$

La siguiente observación la usaremos en la prueba de Proposición 4.5, donde se da una descripción de centralizadores de elementos reducibles de  $\Gamma_m(S)$ . También la usaremos en las Proposiciones 5.7 y 4.12, donde se prueban propiedades claves para el cómputo de los commensuradores de subgrupos virtualmente cíclicos infinitos de  $\Gamma(S)$ .

**Observación 4.2.** Sea  $f \in \Gamma_m(S)$  con  $\sigma = \sigma(f)$ . Por la Observación 3.28, la forma canónica de  $f$  del Teorema 3.27 es

$$f = \prod_{i=1}^k \eta_{S_i}(\bar{f}_i) \prod_{j=1}^r T_{\alpha_j}^{m_j},$$

donde cada  $\bar{f}_i \in \Gamma(S_i)$  es la identidad o pseudo-Anosov.

Sea  $\rho_{\sigma,m}(f) = (f_1, \dots, f_k)$ . Observemos que  $f \in \Gamma_m(S)_\sigma$  y  $(\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_k) \in \eta_{S_\sigma}^{-1}(f)$ . Como  $\rho_{\sigma,m}(f) = \theta_{S_\sigma} \eta_{S_\sigma}^{-1}(f)$  y  $\rho_{\sigma,m}$  esta bien definida, entonces

$$\begin{aligned} (f_1, \dots, f_k) &= \theta_{S_\sigma}(\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_k) \\ &= (\theta_{S_1}(\bar{f}_1), \dots, \theta_{S_k}(\bar{f}_k)), \end{aligned}$$

entonces para cada  $i$ ,  $f_i = \theta_{S_i}(\bar{f}_i)$ , por tanto  $f_i$  es pseudo-Anosov o la identidad.

## 4.2. Normalizadores

En esta sección daremos una descripción de normalizadores en  $\Gamma(S)$  de subgrupos cíclicos infinitos de  $\Gamma_m(S)$  y  $\Gamma(S)$ , así como algunas propiedades que cumplen los normalizadores. Denotaremos por  $C_H(f)$  y  $N_H(f)$  el centralizador y el normalizador respectivamente del subgrupo  $\langle f \rangle$  en  $H$ .

**Teorema 4.3.** [31, Thm. 1] *Sea  $S$  una superficie orientable cerrada con un conjunto finito de puntos removidos. Sea  $f \in \Gamma(S)$  pseudo-Anosov. El centralizador  $C_{\Gamma(S)}(f)$  es una extensión finita de un grupo cíclico y el normalizador  $N_{\Gamma(S)}(f)$  contiene a  $C_{\Gamma(S)}(f)$  como subgrupo normal de índice 1 o 2.*

**Observación 4.4.** Con las hipótesis del Teorema 4.3, si  $m \geq 3$ , el grupo  $\Gamma_m(S)$  es libre de torsión para. Si  $f \in \Gamma_m(S)$  es pseudo-Anosov, entonces  $C_{\Gamma_m(S)}(f) = N_{\Gamma_m(S)}(f)$  es un subgrupo cíclico infinito.

Sea  $S$  una superficie orientable cerrada con un conjunto finito de puntos removidos. Sea  $f \in \Gamma_m(S)$  reducible y  $\sigma = \sigma(f)$  con vértices  $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ . Por el Lema 3.26,  $C_{\Gamma(S)}(f)$  y  $N_{\Gamma(S)}(f)$  son subgrupos del estabilizador  $\Gamma(S)_\sigma$ . Sea  $\Gamma(S)_\sigma^0$  el subgrupo de  $\Gamma(S)_\sigma$  que fija cada  $\alpha_i$  con orientación y  $\rho_{\sigma,0}$  como en (4.2), entonces

$$1 \longrightarrow \mathbb{Z}^r \longrightarrow \Gamma(S)_\sigma^0 \xrightarrow{\rho_{\sigma,0}} \prod_{i=1}^k \Gamma(\widehat{S}_i, \mathcal{Q}_i) \longrightarrow 1.$$

Denotaremos por  $C_{\Gamma(S)}(f)^0 = C_{\Gamma(S)}(f) \cap \Gamma(S)_\sigma^0$  y  $N_{\Gamma(S)}(f)^0 = N_{\Gamma(S)}(f) \cap \Gamma(S)_\sigma^0$ , subgrupos de índice finito de  $C_{\Gamma(S)}(f)$  y  $N_{\Gamma(S)}(f)$  respectivamente.

**Proposición 4.5.** *Sea  $S$  una superficie orientable cerrada con un conjunto finito de puntos removidos. Sea  $f \in \Gamma_m(S) - \{Id\}$  reducible con  $\sigma(f) = \sigma$  y sea  $\rho_{\sigma,0}(f) = (f_1, \dots, f_k)$ , entonces*

$$1 \longrightarrow \mathbb{Z}^r \longrightarrow C_{\Gamma(S)}(f)^0 \xrightarrow{\rho_{\sigma,0}} \prod_{i=1}^k C_{\Gamma(\widehat{S}_i, \mathcal{Q}_i)}(f_i) \longrightarrow 1. \quad (4.4)$$

y  $C_{\Gamma(S)}(f)^0$  tiene índice 1 o 2 en  $N_{\Gamma(S)}(f)^0$ .

*Demostración.* Escribimos  $f$  en su forma canónica como en (3.6),

$$f = \prod_{i=1}^k \eta_{S_i}(\bar{f}_i) \prod_{j=1}^r T_{\alpha_j}^{m_j},$$

por la Observación 4.2,

$$(f_1, \dots, f_k) = (\theta_{S_1}(\bar{f}_1), \dots, \theta_{S_k}(\bar{f}_k)), \quad (4.5)$$

donde cada  $f_i$  es la identidad o pseudo-Anosov. Sea  $g \in \Gamma(S)_\sigma^0$ , siguiendo el método del 3.27, como  $g$  fija cada subsuperficie  $S_i$  de  $S_\sigma$  y cada  $\alpha_i$  con orientación,  $g$  puede ser escrito como

$$g = \prod_{i=1}^k \eta_{S_i}(\bar{g}_i) \prod_{j=1}^r T_{\alpha_j}^{m_j},$$

con cada  $m_j \in \mathbb{Z}$ , pero  $\bar{g}_i$  puede ser reducible, periódico o pseudo-Anosov, para cada  $i$ . Podemos hacer como en la Observación 4.2 para  $g$ , entonces  $\rho_{\sigma,0}(g) = (g_1, \dots, g_k) = (\theta_{S_1}(\bar{g}_1), \dots, \theta_{S_k}(\bar{g}_k))$ .

Se tiene que

$$gfg^{-1} = \prod_{i=1}^k \eta_{S_i}(\bar{g}_i) \eta_{S_i}(\bar{f}_i) \eta_{S_i}(\bar{g}_i)^{-1} \prod_{j=1}^r T_{\alpha_j}^{m_j}, \quad (4.6)$$

entonces

$$f = gfg^{-1} \text{ si y solo si } \eta_{S_i}(\bar{f}_i) = \eta_{S_i}(\bar{g}_i) \eta_{S_i}(\bar{f}_i) \eta_{S_i}(\bar{g}_i)^{-1} \quad \forall i. \quad (4.7)$$

Ya que  $\eta_{S_i}(\bar{f}_i)$  es la clase de isotopía del difeomorfismo de  $S$  que coincide con  $\bar{f}_i$  en

$S_i$  y es la identidad fuera de  $S_i$ , tenemos que

$$\eta_{S_i}(\bar{f}_i) = \eta_{S_i}(\bar{g}_i)\eta_{S_i}(\bar{f}_i)\eta_{S_i}(\bar{g}_i)^{-1} \quad \forall i \quad \text{si y solo si} \quad \bar{g}_i\bar{f}_i\bar{g}_i^{-1} = \bar{f}_i \quad \forall i. \quad (4.8)$$

Luego, si  $\theta_{S_i}(\bar{g}_i)$  conmuta con  $\theta_{S_i}(\bar{f}_i)$ , entonces  $\bar{f}_i\bar{g}_i\bar{f}_i^{-1}\bar{g}_i^{-1}$  está en  $\ker \theta_{S_i}$ , el cual es el grupo abeliano generado por giros de Dehn de curvas isotópicas a componentes de  $\partial S_i$ . Pero al hacer la multiplicación  $\bar{f}_i\bar{g}_i\bar{f}_i^{-1}\bar{g}_i^{-1}$  los giros de Dehn en curvas isotópicas a componentes de  $\partial S_i$  se eliminan, entonces  $\bar{f}_i\bar{g}_i\bar{f}_i^{-1}\bar{g}_i^{-1} = Id_{S_i}$ , es decir,  $\bar{f}_i$  conmuta con  $\bar{g}_i$ . Entonces

$$\bar{g}_i\bar{f}_i\bar{g}_i^{-1} = \bar{f}_i \quad \forall i \quad \text{si y solo si} \quad \theta_{S_i}(\bar{f}_i) = \theta_{S_i}(\bar{g}_i)\theta_{S_i}(\bar{f}_i)\theta_{S_i}(\bar{g}_i)^{-1} \quad \forall i. \quad (4.9)$$

De (4.5), (4.7), (4.8) y (4.9), concluimos que

$$gf g^{-1} = f \quad \text{si y solo si} \quad g_i f_i g_i^{-1} = f_i \quad \forall i.$$

Ya que no hay restricciones para  $m_j$ , con  $j \in \{1, \dots, r\}$ , entonces se tiene la sucesión exacta (4.4).

Además, de la igualdad (4.6), si algún  $n_j \neq 0$ , entonces  $C_{\Gamma(S)}(f)^0$  coincide con  $N_{\Gamma(S)}(f)^0$ . Por otra parte, suponga que  $n_i = 0$  para toda  $i$ , entonces

$$f = \prod_{i=1}^k \eta_{S_i}(\bar{f}_i)$$

y  $\rho_{\sigma,0}(f) = (f_1, \dots, f_k)$ , donde cada  $f_i$  es la identidad o pseudo-Anosov. Luego  $\rho_{\sigma,0}(N_{\Gamma(S)}(f)^0) \subseteq \prod_{i=1}^k N_{\Gamma(\widehat{S}_i)}(f_i)$  y por el Teorema 4.3,  $C_{\Gamma(\widehat{S}_i)}(f_i)$  es de índice 1 o 2 en  $N_{\Gamma(\widehat{S}_i)}(f_i)$ , de lo que podemos concluir que  $C_{\Gamma(S)}(f)^0$  tiene índice 1 o 2 en  $N_{\Gamma(S)}(f)^0$ .  $\square$

De la Proposición 4.5 y el Teorema 4.3 tenemos:

**Proposición 4.6.** *Sea  $S$  una superficie orientable cerrada con un conjunto finito de puntos removidos. Sea  $f \in \Gamma_m(S) - \{Id\}$  reducible con  $\sigma(f) = \sigma$ . Suponga que  $\rho_{\sigma,0}(f) = (Id_{S_1}, \dots, Id_{S_a}, f_{a+1}, \dots, f_a)$ , donde  $f_i$  es pseudo-Anosov para  $i \in \{a+1, a+2, \dots, k\}$  (renombrando las componentes conexas de  $S_\sigma$  si es necesario). Entonces*

$$1 \longrightarrow \mathbb{Z}^r \longrightarrow C_{\Gamma(S)}(f)^0 \xrightarrow{\rho_\sigma} \prod_{i=1}^a \Gamma(\widehat{S}_i, \mathcal{Q}_i) \prod_{j=a+1}^k V_j \longrightarrow 1, \quad (4.10)$$

donde  $V_j$  es el centralizador de  $f_j$  en  $\Gamma(\widehat{S}_j, \mathcal{Q}_j)$ , el cual es virtualmente cíclico para toda  $j \in \{a+1, \dots, k\}$ .

**SUPERFICIES CON FRONTERA.** Si la superficie  $S$  tiene frontera no vacía, suponga que tiene  $b \neq 0$  componentes frontera  $\beta_1, \dots, \beta_b$ , sea

$$\theta_S: \Gamma(S) \rightarrow \Gamma(\widehat{S}),$$



el homomorfismo de encorche, con  $\ker(\theta_S) = \langle T_{\beta_1}, \dots, T_{\beta_b} \rangle \simeq \mathbb{Z}^b$ . Sea  $\mathcal{R}$  el subgrupo de puntos perforados de  $\widehat{S}$  que vienen de componentes frontera de  $S$ , entonces  $\theta_S(\Gamma(S)) = \Gamma(\widehat{S}, \mathcal{R})$  es el subgrupo de  $\Gamma(\widehat{S})$  que no intercambia los puntos de  $\mathcal{R}$ . Sea  $f \in \Gamma(S)$ , tenemos

$$1 \longrightarrow \mathbb{Z}^b \longrightarrow C_{\Gamma(S)}(f) \xrightarrow{\theta_S} C_{\Gamma(\widehat{S}, \mathcal{R})}(\theta_S(f)) \longrightarrow 1. \quad (4.11)$$

Esto se sigue del hecho de que si  $g \in \Gamma(S)$  es tal que  $\theta(g)$  conmuta con  $\theta(f)$ , entonces  $gfg^{-1}f^{-1} \in \ker \theta_S$ , pero el elemento  $gfg^{-1}f^{-1}$  no tiene giros de Dehn en curvas isotópicas a la frontera, por tanto  $gfg^{-1}f^{-1} = Id$ .

Observemos que elementos en  $\Gamma(S)$  dejan invariante una vecindad regular de la frontera  $\partial S$ . Entonces, si  $f$  tiene un giro de Dehn  $T_{\beta_i}^y$  con  $y \neq 0$ , entonces para cualquier  $g \in \Gamma(S)$ , se tiene que  $gfg^{-1}$  tiene la misma potencia del giro de Dehn  $T_{\beta_i}^y$ , por tanto

$$N_{\Gamma(S)}(f) = C_{\Gamma(S)}(f). \quad (4.12)$$

Y si  $f$  no tiene giros de Dehn en las curvas  $\beta_1, \dots, \beta_b$ , entonces

$$gfg^{-1} = f^{\pm 1} \quad \text{si y solo si} \quad \theta_S(g)\theta_S(f)\theta_S(g)^{-1} = \theta_S(f)^{\pm 1}.$$

Entonces

$$1 \longrightarrow \mathbb{Z}^b \longrightarrow N_{\Gamma(S)}(f) \xrightarrow{\theta_S} N_{\Gamma(\widehat{S}, \mathcal{R})}(\theta_S(f)) \longrightarrow 1. \quad (4.13)$$

Ahora veremos algunos resultados de normalizadores de subgrupos cíclicos infinitos en  $\Gamma(S)$ .

**Teorema 4.7.** [7, Thm. 6.1] *Sea  $S$  una superficie orientable compacta con un conjunto finito de puntos removidos. Sean  $G \subseteq \Gamma(S)$  un subgrupo puro. Si  $f, g \in G$  son tal que  $f^t = g^t$  para algún entero  $t \geq 1$ , entonces  $f = g$ .*

**Lema 4.8.** *Sea  $S$  una superficie orientable compacta con un conjunto finito de puntos removidos. Sea  $f \in \Gamma_m(S)$  y  $t \in \mathbb{Z} - \{0\}$ , entonces*

$$\begin{aligned} C_{\Gamma_m(S)}(f) &= C_{\Gamma_m(S)}(f^t), & C_{\Gamma(S)}(f) &= C_{\Gamma(S)}(f^t) \\ y \\ N_{\Gamma_m(S)}(f) &= N_{\Gamma_m(S)}(f^t), & N_{\Gamma(S)}(f) &= N_{\Gamma(S)}(f^t). \end{aligned}$$

*Demostración.* Suponga que  $t \geq 1$ . Como  $N_{\Gamma_m(S)}(f) \subseteq N_{\Gamma_m(S)}(f^t)$ , necesitamos probar la otra contención. Si  $h \in N_{\Gamma_m(S)}(f^t)$ ,

$$(hfh^{-1})^t = (f^t)^t$$

para algún  $i \in \{1, -1\}$ . Por el Teorema 3.20 el grupo  $\Gamma_m(S)$  es puro, luego  $f^i, hfh^{-1} \in \Gamma_m(S)$ , aplicando el Teorema 4.7 concluimos que

$$hfh^{-1} = f^i,$$

por tanto  $h \in N_{\Gamma_m(S)}(f)$ . Como  $\Gamma_m(S)$  es normal en  $\Gamma(S)$ , podemos usar el Teorema 4.7 de igual forma para probar que  $N_{\Gamma(S)}(f) = N_{\Gamma(S)}(f^t)$ . Tomando  $i = 1$ , tenemos la prueba para los centralizadores.  $\square$

**Lema 4.9.** *Sea  $S$  una superficie orientable compacta con un conjunto finito de puntos removidos. Sea  $\sigma \in \mathcal{C}(S)$  con vértices  $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ , y  $f = \prod_{i=1}^r T_{\alpha_i}^{n_i}$ , con  $n_i \in \mathbb{Z} - \{0\}$ , entonces  $N_{\Gamma(S)}(f) = N_{\Gamma(S)}(f^k)$ , para cualquier  $k \neq 0$ .*

*Demostración.* Sea  $g \in N_{\Gamma(S)}(f^k)$ , probaremos que  $g \in N_{\Gamma(S)}(f)$ . Por el Lema 3.25,  $g(\sigma) = \sigma$ , pero  $g$  puede permutar  $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ . Sea  $\delta \in \Sigma_r$  tal que  $g(\alpha_i) = \alpha_{\delta(i)}$  para toda  $i$ . Por los resultados acerca de giros de Dehn dados en la Sección 3.1 y porque  $f^{jk} = gf^k g^{-1}$ , para algún  $j \in \{1, -1\}$ , tenemos

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^r T_{\alpha_i}^{jkn_i} &= g \prod_{i=1}^r T_{\alpha_i}^{kn_i} g^{-1} \\ &= \prod_{i=1}^r T_{\alpha_{\delta(i)}}^{kn_i}, \end{aligned}$$

por lo que concluimos que  $jkn_i = kn_{\delta(i)} \forall i$ , entonces  $jn_i = n_{\delta(i)}$  para toda  $i$ . Por otra parte, tenemos que

$$\begin{aligned} gfg^{-1} &= g \prod_{i=1}^r T_{\alpha_i}^{n_i} g^{-1} \\ &= \prod_{i=1}^r T_{\alpha_{\delta(i)}}^{n_i}, \end{aligned}$$

como  $jn_i = n_{\delta(i)}$  entonces

$$gfg^{-1} = \prod_{i=1}^r T_{\alpha_{\delta(i)}}^{jn_{\delta(i)}} = f^j,$$

por lo tanto  $g \in N_{\Gamma(S)}(f)$ .  $\square$

### 4.3. Condición (C) para $\Gamma(S)$

Usaremos las propiedades de difeomorfismos pseudo-Anosov que dimos en la Sección 3.2 para probar la siguiente:

*Condición (C):*  $\forall g, h \in \Gamma(S)$  con  $|h| = \infty$  y  $k, l \in \mathbb{Z}$  tal que  $gh^k g^{-1} = h^l$ , entonces  $|k| = |l|$ .

Esta propiedad nos ayudará en el cómputo de los conmensuradores de subgrupos virtualmente cíclicos infinitos.

**Teorema 4.10.** *Sea  $S$  una superficie compacta orientable, posiblemente con un conjunto finito de puntos removidos del interior y  $\chi(S) < 0$ . El grupo  $\Gamma(S)$  satisface la condición (C).*

*Demostración.* **I.** La prueba para superficies sin frontera será dada en las Proposiciones 4.11 y 4.12, ya que elementos de orden infinito son reducibles o pseudo-Anosov. **II.** Si  $S$  tiene  $b$  componentes frontera. Sean  $h, g \in \Gamma(S)$  con  $|h| = \infty$  tales que  $gh^p g^{-1} = h^q$  para algunos  $p, q \in \mathbb{Z} - \{0\}$ . Sea

$$\theta_S: \Gamma(S) \rightarrow \Gamma(\widehat{S}),$$

el homomorfismo inducido de la inclusión  $S \rightarrow \widehat{S}$  como en (3.4), y por el Teorema 3.17,  $\ker(\theta_S) \simeq \mathbb{Z}^b$  el grupo abeliano libre generado en los giros de Dehn basados en las curvas isotópicas a las componentes frontera de  $S$ .

Observemos que  $\ker(\theta_S)$  es central en  $\Gamma(S)$ , entonces si  $h \in \ker(\theta_S)$  podemos concluir que  $p = q$ . Por otro lado si  $h \notin \ker(\theta_S)$ , aplicando  $\theta_S$ , tenemos

$$\theta_S(g)\theta_S(h)^p\theta_S(g)^{-1} = \theta_S(h)^q,$$

por el caso I el grupo  $\Gamma(\widehat{S})$  satisface la condición (C) y  $|\theta_S(h)| = \infty$ , por tanto concluimos que  $|p| = |q|$ .  $\square$

**Proposición 4.11.** *Sea  $S$  una superficie orientable cerrada, con un conjunto finito de puntos removidos y  $\chi(S) < 0$ . Sean  $h_1, \dots, h_r \in \Gamma(S)$  un número finito de clases pseudo-Anosov, supongamos que existen  $g_1, \dots, g_r \in \Gamma(S)$  y una permutación  $\gamma \in \Sigma_r$  tal que*

$$g_i h_i^p g_i^{-1} = h_{\gamma(i)}^q, \quad \forall i \in \{1, \dots, r\}, \quad (4.14)$$

para algunos  $p, q \in \mathbb{Z} - \{0\}$ , entonces  $|p| = |q|$ .

*Demostración.* Suponga  $p > 0$  y denote por  $I = \{1, \dots, r\}$ . Para cada  $i \in I$ , sea  $\phi_i$  difeomorfismo pseudo-Anosov en la clase  $h_i$ , por el Teorema 3.10, de unicidad de pseudo-Anosovs, existe  $\forall i \in I$   $G_i \in \text{Diff}^+(S)$  en la clase  $g_i$ , tal que  $G_i \phi_i^p G_i^{-1} = \phi_{\gamma(i)}^q$ . Sean  $(\mathcal{F}_i^s, \mu_i^s)$  y  $(\mathcal{F}_i^u, \mu_i^u)$  foliaciones estable e inestable de  $\phi_i$  con dilatación  $\lambda_i > 1$ , para  $i \in I$ .

Por (3.1), si  $n > 0$  ( $n < 0$ ),  $(\mathcal{F}_i^s, \mu_i^s)$  y  $(\mathcal{F}_i^u, \mu_i^u)$  son las foliaciones estable e inestable (inestable y estable) respectivamente de  $\phi_i^n$  con dilatación  $\lambda_i^n$  (o  $\lambda_i^{-n}$ ).

Suponga que  $q > 0$ . Siguiendo la prueba de [14, Lem. 16, Exp. 12],  $G_i$  envía la foliación (in)estable de  $\phi_i^p$  a la foliación (in)estable de  $\phi_{\gamma(i)}^q$ . Como las foliaciones son únicamente ergódicas, se tiene:

$$G(\mathcal{F}_i^s, \mu_i^s) = (\mathcal{F}_{\gamma(i)}^s, a\mu_{\gamma(i)}^s), \quad G(\mathcal{F}_i^u, \mu_i^u) = (\mathcal{F}_{\gamma(i)}^u, b\mu_{\gamma(i)}^u),$$

con  $ab = 1$ , (ver [31, Lem. 1]). Ya que se tiene

$$\begin{aligned}\phi_{\gamma(i)}^q(\mathcal{F}_{\gamma(i)}^s, a\mu_{\gamma(i)}^s) &= \phi_{\gamma(i)}^q(G(\mathcal{F}_i^s, \mu_i^s)) \\ &= G\phi_i^p G^{-1}(G(\mathcal{F}_i^s, \mu_i^s)) \\ &= G\phi_i^p(\mathcal{F}_i^s, \mu_i^s) \\ &= G(\mathcal{F}_i^s, \lambda_i^{-p}\mu_i^s) \\ &= (\mathcal{F}_\phi^s, \lambda_i^{-p}a\mu_\phi^s),\end{aligned}$$

en forma similar se hace con  $(\mathcal{F}_{\gamma(i)}^u, \mu_{\gamma(i)}^u)$ , entonces el difeomorfismo  $\phi_{\gamma(i)}^q$  tiene la misma dilatación que  $\phi_i^p$ . Entonces  $\lambda_i^q = \lambda_{\gamma(i)}^q$ ,  $\forall i \in I$ . Como  $\lambda_i > 1 \forall i$ ,  $\lambda_i^p$  tiene solo una  $q$ -ésima raíz real positiva, entonces

$$\lambda_i^{\frac{p}{q}} = \lambda_{\gamma(i)}, \quad \forall i \in I. \quad (4.15)$$

Si para algún  $i$ ,  $\gamma(i) = i$ , entonces  $p = q$ . Si  $\gamma(i) \neq i \forall i$ , sea  $n > 2$  el mínimo entero positivo tal que  $\gamma^n(1) = 1$ . De la igualdad (4.15) tenemos que

$$\lambda_{\gamma^a(1)}^{\frac{p}{q}} = \lambda_{\gamma^{a+1}(1)}, \quad a \in \{0, \dots, n\}, \quad (4.16)$$

por tanto,  $\lambda_1 = \lambda_1^{\left(\frac{p}{q}\right)^n}$ . Como  $\lambda_1 > 1$ , concluimos que  $p = q$ . Por otra parte, si  $q < 0$ , tenemos que  $\lambda_i^p = \lambda_{\gamma(i)}^{-q}$ , de manera similar podemos concluir que  $p = -q$ .  $\square$

**Proposición 4.12.** *Sea  $S$  una superficie orientable cerrada con un conjunto finito de puntos removidos y  $\chi(S) < 0$ . Sea  $f \in \Gamma(S)$  reducible tal que  $f^q = g^p g^{-1}$  para algún  $g \in \Gamma(S)$  y  $p, q \in \mathbb{Z} - \{0\}$ , entonces  $|q| = |p|$ .*

*Demostración.* Como  $\Gamma_m(S)$  es un subgrupo de índice finito en  $\Gamma(S)$ , podemos suponer que  $f \in \Gamma_m(S)$ . Denote por  $I = \{1, \dots, r\}$  y  $J = \{1, \dots, k\}$ .

Sea  $\sigma = \sigma(f)$ , suponga que  $\sigma$  tiene vértices  $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ . Por hipótesis y por el Lema 3.26,  $g\sigma = \sigma$ , entonces  $g \in \Gamma(S)_\sigma$ . Sea  $\rho_\sigma: \Gamma(S)_\sigma \rightarrow \Gamma(\widehat{S}_\sigma)$  como en el Teorema 4.1. CASO 1: Suponga que  $f \in \ker(\rho_\sigma)$ , es decir,  $f = \prod_{i=1}^r T_{\alpha_i}^{n_i}$ ; podemos suponer que  $\text{mcd}\{n_1, \dots, n_r\} = 1$ . Notemos que  $g$  puede permutar  $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ , sea  $\delta \in \Sigma_r$  tal que  $g(\alpha_i) = \alpha_{\delta(i)} \forall i \in I$ . Como los  $\alpha_i$ 's tienen realizaciones disjuntas en  $S$ , los giros de Dehn  $T_{\alpha_i}$  conmutan, además  $gT_{\alpha_i}g^{-1} = T_{g(\alpha_i)} = T_{\alpha_{\delta(i)}}$  (ver Sec. 3.1), entonces por hipótesis se tiene

$$\begin{aligned}\prod_{i=1}^r T_{\alpha_i}^{qn_i} &= g \prod_{i=1}^r T_{\alpha_i}^{pn_i} g^{-1} \\ &= \prod_{i=1}^r T_{\alpha_{\delta(i)}}^{pn_i},\end{aligned}$$

de donde concluimos que  $qn_i = pn_{\delta^{-1}(i)} \forall i \in I$ . Otra forma de verlo es:  $v_1 = (n_1, \dots, n_r)$ ,  $v_2 = (n_{\delta^{-1}(1)}, \dots, n_{\delta^{-1}(r)})$  en  $\mathbb{Z}^r$  y  $qv_1 = pv_2$ , entonces  $v_1$  y  $v_2$  deben estar sobre la misma línea en  $\mathbb{R}^r$ . Como  $v_2$  es obtenido al permutar las coordenadas de  $v_1$ ,

concluimos que  $v_1 = v_2$  o  $v_1 = -v_2$ , por tanto  $|p| = |q|$ .

CASO 2: Supongamos ahora que  $f \notin \ker(\rho)$ . Como  $f \in \Gamma_m(S)$ ,  $\rho_\sigma(f)$  fija cada subsuperficie  $\widehat{S}_j$  de  $\widehat{S}_\sigma$ . Para  $j \in J$ , sea  $\tilde{f}_j = \rho(f)|_{\widehat{S}_j}: \widehat{S}_j \rightarrow \widehat{S}_j$ . Note que  $\rho_\sigma(g)$  puede permutar las subsuperficies  $\widehat{S}_j$  de  $\widehat{S}_\sigma$ , sea  $\tilde{g}_j = \rho_\sigma(g)|_{\widehat{S}_j} \forall j \in J$  y  $\gamma \in \Sigma_k$  tal que  $\tilde{g}_j: \widehat{S}_j \rightarrow \widehat{S}_{\gamma(j)}$ ,  $\forall j \in J$ . Por hipótesis tenemos que  $\rho_\sigma(f)^q = \rho_\sigma(g)\rho_\sigma(f)^p\rho_\sigma(g)^{-1}$ , entonces

$$\tilde{g}_j \tilde{f}_j^p \tilde{g}_j^{-1} = \tilde{f}_{\gamma(j)}^q, \quad \forall j \in J. \quad (4.17)$$

Como  $f \in \Gamma_m(S)$  y  $\rho_\sigma(f) \neq Id$ , para algún  $l \in J$ ,  $\tilde{f}_l$  es pseudo-Anosov (ver la Observación 4.2). Sea  $n > 0$  el mínimo entero tal que  $\gamma^n(l) = l$ , de (4.17) se tiene

$$\tilde{g}_{\gamma^i(l)} \tilde{f}_{\gamma^i(l)}^p \tilde{g}_{\gamma^i(l)}^{-1} = \tilde{f}_{\gamma^{i+1}(l)}^q, \quad \forall i \in \{0, 1, \dots, n\}.$$

Entonces  $\tilde{f}_{\gamma^i(l)}$  es pseudo-Anosov para cada  $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ . Como  $\widehat{S}_l$  y  $\widehat{S}_{\gamma^i(l)}$  son homeomorfos  $\forall i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ , entonces podemos aplicar la Proposición 4.11, por tanto  $|p| = |q|$ .  $\square$

## 4.4. Descripción de los conmensuradores

Seguiremos la misma notación que en la Sección 1.2. Sea  $\mathcal{IC}_G$  el conjunto de subgrupos cíclicos infinitos de  $G$ , para  $C \in \mathcal{IC}_G$  sea  $[C]$  su clase.

**Lema 4.13.** *Sea  $S$  una superficie compacta orientable, posiblemente con un conjunto finito de puntos removidos del interior y  $\chi(S) < 0$ . Sea  $m \geq 3$  fijo. Sea  $C = \langle g \rangle \in \mathcal{IC}_{\Gamma(S)}$  y  $n \in \mathbb{N}$  el mínimo entero positivo tal que  $g^n \in \Gamma_m(S)$ . Entonces*

$$N_{\Gamma(S)}[C] = N_{\Gamma(S)}(g^n).$$

*Demostración.* Del Teorema 4.10,  $\Gamma(S)$  cumple la Condición (C), entonces por el Lema 1.11, tenemos que

$$N_{\Gamma(S)}(g) \subseteq N_{\Gamma(S)}(g^{2!}) \subseteq N_{\Gamma(S)}(g^{3!}) \subseteq \dots, \quad y \quad (4.18)$$

$$N_{\Gamma(S)}[C] = \bigcup_{k \geq 1} N_{\Gamma(S)}(g^{k!}).$$

Como  $g^n \in \Gamma_m(S)$ , por el Lema 4.8 tenemos que

$$N_{\Gamma(S)}(g^n) = N_{\Gamma(S)}(g^{n!}) = N_{\Gamma(S)}(g^{(n+k)!})$$

para cualquier  $k \geq 0$ , entonces la sucesión anidada de normalizadores (4.18) conver-

ge, de hecho

$$N_{\Gamma(S)}[C] = N_{\Gamma(S)}(g^{n!}) = N_{\Gamma(S)}(g^n).$$

□

**Observación 4.14.** En la Sección 5.3 veremos que al subgrupo  $\langle g^n \rangle$  del Lema 4.13 está contenido en único maximal  $\overline{C} \in \mathcal{IC}_{\Gamma_m(S)}$ , por tanto

$$N_{\Gamma(S)}[C] = N_{\Gamma(S)}(g^n) = N_{\Gamma(S)}(\overline{C}).$$

Una descripción para estos normalizadores fue dada en la Sección 4.2.



# Capítulo 5

## Dimensión geométrica de $\Gamma(S)$

Sea  $S$  una superficie orientable compacta con un conjunto finito de puntos removidos del interior y  $\chi(S) < 0$ . En la Sección 5.1 veremos resultados conocidos acerca de las dimensiones  $\underline{\text{gd}}\Gamma(S)$  y  $\underline{\underline{\text{gd}}}\Gamma(S)$ . En la Sección 5.2 probaremos que  $\Gamma(S)$  admite un modelo para  $\underline{\underline{E}}\Gamma(S)$  de dimensión finita, para ello usaremos la descripción de los conmensuradores de subgrupos cíclicos infinitos de  $\Gamma(S)$  dada en el Capítulo 4. En la Sección 5.3 probaremos que  $\underline{\underline{\text{gd}}}\Gamma_m(S) \leq \underline{\text{gd}}\Gamma_m(S) + 1$  y daremos una cota para  $\underline{\underline{\text{gd}}}\Gamma(S)$ .

### 5.1. Resultados conocidos

Sea  $S$  una superficie orientable compacta con un conjunto finito  $\mathcal{P}$  de puntos removidos del interior con  $\chi(S) < 0$ . Definiremos el espacio de Teichmüller  $\mathcal{T}(S)$ , el cual es un modelo para  $\underline{\underline{E}}\Gamma(S)$ .

Por una estructura hiperbólica en  $S$  entenderemos un difeomorfismo

$$\phi: S \rightarrow X,$$

donde  $X$  es una superficie con una métrica completa con área finita de curvatura constante  $-1$  y frontera totalmente geodésica (si es no vacía). Denotaremos a esta estructura hiperbólica como  $(X, \phi)$ . El difeomorfismo  $\phi$  es llamado la marca y  $X$  o  $(X, \phi)$  será una superficie hiperbólica con marca.

Dos estructuras hiperbólicas en  $S$ ,  $\phi_1: S \rightarrow X_1$  y  $\phi_2: S \rightarrow X_2$ , son homotópicas si existe una isometría  $I: X_1 \rightarrow X_2$  tal que las marcas  $I \circ \phi_1$  y  $\phi_2$  son homotópicas, es decir el siguiente diagrama conmuta salvo homotopía:

$$\begin{array}{ccc} & S & \\ \phi_1 \swarrow & & \searrow \phi_2 \\ X_1 & \xrightarrow{I} & X_2 \end{array}$$



Aquí las homotopías pueden mover puntos en la frontera de  $X_2$ . El *espacio de Teichmüller de  $S$*  es definido como el conjunto de clases de homotopía de estructuras hiperbólicas en  $S$ :

$$\mathcal{T}(S) = \{\text{estructuras hiperbólicas en } S\}/\text{homotopía.}$$

El conjunto de clases de homotopía de estructuras hiperbólicas en  $S$  es dotado de una topología, ver Capítulos 10 y 11 de [10]. Es bien conocido que el espacio de Teichmüller de una superficie compacta de género  $g$  y  $n$  puntos removidos del interior es homeomorfo al espacio euclideo de dimensión  $6g - 6 + 2n$ , como referencia ver [33].

El grupo modular  $\Gamma(S)$  actúa en el espacio de Teichmüller  $\mathcal{T}(S)$ : sea  $f$  en  $\Gamma(S)$ ,  $\psi$  un representante de  $f$  en  $\text{Diff}^+(S)$  (ver Cap. 3) y  $[(X, \phi)]$  la clase de homotopía de una estructura hiperbólica de  $S$ , entonces

$$f \cdot [(X, \phi)] = [(X, \phi \circ \psi^{-1})].$$

Esta acción es propiamente discontinua y se tiene que el espacio de Teichmüller  $\mathcal{T}(S)$  es un modelo para  $\underline{E}\Gamma(S)$  por resultados de Kerckhoff dados en [24]. En [1], Aramayona y Martínez-Pérez prueban que  $\text{gd}\Gamma(S)$  coincide con la dimensión cohomológica virtual  $\text{vcd}(\Gamma(S))$ . De donde se obtiene el siguiente:

**Corolario 5.1.** [1, Cor. 1.3] *Sea  $S$  una superficie orientable compacta con un número finito de puntos removidos del interior. Entonces existe un modelo cocompacto  $\underline{E}\Gamma(S)$  de dimensión igual a  $\text{vcd}(\Gamma(S))$ .*

La dimensión cohomológica virtual es calculada por Harer:

**Teorema 5.2.** [18, Thm. 4.1] *Sea  $S$  una superficie orientable compacta, de género  $g$ , con  $b$  componentes frontera y  $n$  puntos removidos del interior. Si  $2g + b + n > 2$ , entonces*

$$\text{vcd}(\Gamma(S)) = \begin{cases} 4g + 2b + n - 4 & \text{si } g, b + n > 0, \\ 4g - 5 & \text{si } n, b = 0, \\ 2b + n - 3 & \text{si } g = 0. \end{cases}$$

En [9] Degrijse y Petrosyan demuestran que para  $S$  una superficie de género  $g \geq 2$ ,  $\Gamma(S)$  admite un modelo  $(9g - 8)$ -dimensional para  $\underline{\underline{E}}\Gamma(S)$ , con  $g \geq 2$ . El cual se deduce de la siguiente:

**Proposición 5.3.** [9, Cor. 6] *Sea  $S$  una superficie cerrada, conexa, orientable, de género  $g \geq 2$ . Entonces la dimensión cohomológica de Bredon para la familia de subgrupos virtualmente cíclicos de  $\Gamma(S)$ ,*

$$\underline{\underline{c}}(\Gamma(S)) \leq 9g - 8.$$

## 5.2. Dimensión geométrica

Sea  $S$  una superficie compacta con un número finito de puntos removidos del interior y  $\chi(S) < 0$ . En la Sección 5.1 dimos resultados acerca de  $\underline{\text{gd}}\Gamma(S)$ , la cual coincide con la dimensión cohomológica virtual de  $\Gamma(S)$  [1]. Notemos que si  $G \subseteq \Gamma(S)$ , entonces  $\underline{\text{gd}}G \leq \underline{\text{gd}}\Gamma(S)$ . En esta Sección veremos que  $\underline{\text{gd}}\Gamma(S)$  es finita.

Para obtener un modelo para  $\underline{E}\Gamma(S)$  via la construcción de Lück y Weiermann, dada en el Teorema 1.4, es necesario tener modelos para  $\underline{E}N_{\Gamma(S)}[C]$  y  $E_{\mathcal{G}[C]}N_{\Gamma(S)}[C]$  para  $[C] \in [\mathcal{IC}_{\Gamma(S)}]$ .

**Observación 5.4.** Del Teorema 1.2, un modelo para  $E_{\mathcal{G}[C]}N_{\Gamma(S)}[C]$  es un  $N_{\Gamma(S)}[C]$ -CW complejo  $X$  tal que el  $H$ -conjunto de puntos fijos  $X^H$  es contractible para  $H \in \mathcal{G}[C]$  y es vacío cuando  $H \notin \mathcal{G}[C]$ .

Del Lema 4.13 y la Observación 4.14, podemos asumir que existe un único maximal  $\overline{C} \in \mathcal{IC}_{\Gamma_m(S)}$  tal que  $N_{\Gamma(S)}[C] = N_{\Gamma(S)}(\overline{C})$ . Sea  $W_{\Gamma(S)}(\overline{C}) = N_{\Gamma(S)}(\overline{C})/\overline{C}$  y la proyección  $p: N_{\Gamma(S)}(\overline{C}) \rightarrow W_{\Gamma(S)}(\overline{C})$ . Entonces un modelo para  $\underline{E}W_{\Gamma(S)}(\overline{C})$ , con la  $N_{\Gamma(S)}(\overline{C})$ -acción inducida de la proyección  $p$ , es un modelo para  $E_{\mathcal{G}[C]}N_{\Gamma(S)}[C]$ , para cualquier  $[C] \in [\mathcal{IC}_{\Gamma(S)}]$ .

**Teorema 5.5.** *Sea  $S$  una superficie orientable compacta, con un número finito de puntos removidos del interior y  $\chi(S) < 0$ . Entonces  $\underline{\text{gd}}\Gamma(S)$  es finita. Por lo tanto, el grupo  $\Gamma(S)$  admite un modelo para  $\underline{E}\Gamma(S)$  de dimensión finita.*

*Demostración.* Observe que es suficiente probar que para  $[C] \in \Gamma(S)$  se tiene  $\text{gd}_{\mathcal{G}[C]}N_{\Gamma(S)}[C] < \infty$ , ya que  $N_{\Gamma(S)}[C] \subseteq \Gamma(S)$  y por tanto  $\underline{\text{gd}}N_{\Gamma(S)}[C] \leq \underline{\text{gd}}\Gamma(S) < \infty$ .

I. *Suponga que  $S$  tiene frontera vacía.* Sea  $[C] \in [\mathcal{IC}_{\Gamma(S)}]$  con  $C = \langle f \rangle$ , por el Teorema de clasificación de Nielsen-Thurston,  $f$  es un elemento pseudo-Anosov o un elemento reducible.

(a) Si  $f$  es pseudo-Anosov, entonces  $N_{\Gamma(S)}[C]$  es virtualmente cíclico y  $\mathcal{G}[C]$  es la familia de todos los subgrupos de  $N_{\Gamma(S)}[C]$ , entonces un modelo para  $E_{\mathcal{G}[C]}N_{\Gamma(S)}[C]$  es un punto.

(b) Si  $f$  es reducible y  $f = \prod_{i=1}^r T_{\alpha_i}^{n_i}$ , con  $n_i \in \mathbb{Z} - \{0\}$ , donde  $\alpha_1, \dots, \alpha_r$  son los vértices de  $\sigma = \sigma(f)$ . Por el Lema 4.9, se tiene que  $N_{\Gamma(S)}(f) = N_{\Gamma(S)}(f^k)$  para cualquier  $k \neq 0$ , entonces  $N_{\Gamma(S)}[C] = N_{\Gamma(S)}(f)$ , y podemos suponer que  $\text{mcd}\{n_1, \dots, n_k\} = 1$ . Siguiendo la misma idea que en la Observación 5.4, un modelo para  $\underline{E}W_{\Gamma(S)}(f)$  con la acción inducida de la proyección  $N_{\Gamma(S)}(f) \rightarrow W_{\Gamma(S)}(f)$  es un modelo para  $E_{\mathcal{G}[C]}N_{\Gamma(S)}[C]$ . Probaremos que  $\underline{\text{gd}}W_{\Gamma(S)}(f)$  es finita.

Note que cualquier elemento  $g \in \Gamma(S)_\sigma^0$  conmuta con  $f$ , porque  $g$  fija cada  $\alpha_i$ , entonces  $\Gamma(S)_\sigma^0 \subseteq N_{\Gamma(S)}(f)$ . Además  $N_{\Gamma(S)}(f) \subseteq \Gamma(S)_\sigma$ , por tanto  $\Gamma(S)_\sigma^0$  es un subgrupo de índice finito de  $N_{\Gamma(S)}(f)$ , de hecho es normal, entonces

$$1 \longrightarrow \Gamma(S)_\sigma^0 \longrightarrow N_{\Gamma(S)}(f) \longrightarrow B \longrightarrow 1,$$

con  $B$  finito. Como  $f \in \Gamma(S)_\sigma^0$ ,

$$1 \longrightarrow \Gamma(S)_\sigma^0 / \langle f \rangle \longrightarrow N_{\Gamma(S)}(f) / \langle f \rangle \longrightarrow B \longrightarrow 1.$$

Por el Teorema 1.16, si probamos que  $\underline{\text{gd}}(\Gamma(S)_\sigma^0 / \langle f \rangle) < \infty$ , podremos concluir que  $\underline{\text{gd}}W_{\Gamma(S)}(f)$  es finita. De (4.2), como  $f \in \ker(\rho_{\sigma,0})$  tenemos

$$1 \longrightarrow \langle T_{\alpha_1}, \dots, T_{\alpha_r} \rangle / \langle f \rangle \longrightarrow \Gamma(S)_\sigma^0 / \langle f \rangle \longrightarrow \prod_{i=1}^k \Gamma(\widehat{S}_i, \mathcal{Q}_i) \longrightarrow 1,$$

como  $\langle T_{\alpha_1}, \dots, T_{\alpha_r} \rangle \simeq \mathbb{Z}^r$  y  $f$  es identificado con la  $r$ -ada  $(n_1, \dots, n_r) \in \mathbb{Z}^r$  via ese isomorfismo, el cociente  $\mathbb{Z}^r / \langle (n_1, \dots, n_r) \rangle \simeq \mathbb{Z}^{r-1}$ , porque  $\text{gcd}\{n_1, \dots, n_r\} = 1$ . Entonces

$$1 \longrightarrow \mathbb{Z}^{r-1} \longrightarrow \Gamma(S)_\sigma^0 / \langle f \rangle \longrightarrow \prod_{i=1}^a \Gamma(\widehat{S}_i, \mathcal{Q}_i) \longrightarrow 1,$$

aplicamos el Teorema 1.15 para concluir que  $\underline{\text{gd}}(\Gamma(S)_\sigma^0 / \langle f \rangle)$  es finito, por tanto  $\underline{\text{gd}}(W_{\Gamma(S)}(f))$  es finito.

(c) Ahora si  $f$  es reducible, y  $\rho(f)$  es no trivial. Como  $N_{\Gamma(S)}[C] = N_{\Gamma(S)}(f^n)$ , para algún  $n \neq 0$  tal que  $f^n \in \Gamma_m(S)$ , asumiremos que  $f \in \Gamma_m(S)$  y que  $C = \langle f \rangle$  es maximal en  $\mathcal{IC}_{\Gamma_m(S)}$ . Por la Observación 5.4, si probamos que  $\underline{\text{gd}}W_{\Gamma(S)}C < \infty$ , entonces  $\underline{\text{gd}}E_{g[C]}N_{\Gamma(S)}[C] < \infty$ .

Notemos que  $C_{\Gamma(S)}(f)^0 \trianglelefteq N_{\Gamma(S)}[C]$  con índice finito, entonces

$$1 \longrightarrow C_{\Gamma(S)}(f)^0 \longrightarrow N_{\Gamma(S)}(f) \longrightarrow F \longrightarrow 1,$$

con  $F$  finito. Como  $f \in \Gamma_m(S)$ ,  $f \in C_{\Gamma(S)}(f)^0$ , entonces

$$1 \longrightarrow C_{\Gamma(S)}(f)^0 / \langle f \rangle \longrightarrow N_{\Gamma(S)}(f) / \langle f \rangle \longrightarrow F \longrightarrow 1.$$

Por el Teorema 1.16, es suficiente probar que  $\underline{\text{gd}}(C_{\Gamma(S)}(f)^0 / \langle f \rangle) < \infty$ .

Sea  $\sigma = \sigma(f)$ , suponga que  $\alpha_1, \dots, \alpha_r$  son los vértices de  $\sigma$  y  $\rho_{\sigma,0}(f) = (f_1, \dots, f_k)$ . Renombrando las subsuperficies de  $S_\sigma$  tal que  $f_i = \text{Id}_{\Gamma(\widehat{S}_i)}$  para  $i \in \{1, \dots, a\}$  y  $f_j \in \Gamma(\widehat{S}_j, \mathcal{Q}_j)$  es pseudo-Anosov para  $j \in \{a+1, \dots, k\}$ , entonces por la Proposición 4.6 tenemos:

$$1 \longrightarrow \langle T_{\alpha_1}, \dots, T_{\alpha_r} \rangle \longrightarrow C_{\Gamma(S)}(f)^0 \xrightarrow{\rho_{\sigma,0}} \prod_{i=1}^a \Gamma(\widehat{S}_i, \mathcal{Q}_i) \prod_{j=a+1}^k V_j \longrightarrow 1,$$

donde  $V_j = C_{\Gamma(\widehat{S}_j, \mathcal{Q}_j)}(f_j)$  es virtualmente cíclico para cada  $j$ .

Denote por  $\Delta = \prod_{i=1}^a \Gamma(\widehat{S}_i, \mathcal{Q}_i) \prod_{j=a+1}^k V_j$ , entonces tenemos el siguiente homomor-

fismo

$$\begin{aligned}\psi: C_{\Gamma(S)}(f)^0 / \langle f \rangle &\rightarrow \Delta / \langle \rho_{\sigma,0}(f) \rangle \\ g \langle f \rangle &\mapsto \rho_{\sigma,0}(g) \langle \rho_{\sigma,0}(f) \rangle,\end{aligned}$$

el cual está bien definido porque  $\rho_{\sigma,0}(\langle f \rangle) = \langle \rho_{\sigma,0}(f) \rangle$  y es un homomorfismo sobreyectivo porque  $\rho_{\sigma,0}$  lo es. Luego,  $\ker \psi = \rho_{\sigma,0}^{-1}(\langle \rho_{\sigma,0}(f) \rangle) / \langle f \rangle$  es abeliano. Ahora veremos que  $\underline{\text{gd}}(\Delta / \langle \rho_{\sigma,0}(f) \rangle)$  es finito. Note que

$$\begin{aligned}\frac{\Delta}{\langle \rho_{\sigma,0}(f) \rangle} &= \frac{\prod_{i=1}^a \Gamma(\widehat{S}_i, \mathcal{Q}_i) \prod_{j=a+1}^k V_j}{\langle (Id_{\Gamma(\widehat{S}_1)}, \dots, Id_{\Gamma(\widehat{S}_a)}, f_{a+1}, \dots, f_k) \rangle} \\ &= \prod_{i=1}^a \Gamma(\widehat{S}_i, \mathcal{Q}_i) \times \frac{\prod_{j=a+1}^k V_j}{\langle (f_{a+1}, \dots, f_k) \rangle}.\end{aligned}$$

Como  $\langle f_j \rangle \leq V_j$  es de índice finito  $\forall j$ . Entonces si  $\check{f} = (f_{a+1}, \dots, f_k)$ ,

$$1 \longrightarrow \prod_{j=a+1}^k \langle f_j \rangle / \langle \check{f} \rangle \longrightarrow \prod_{i=a+1}^k V_j / \langle \check{f} \rangle \longrightarrow \prod_{i=a+1}^k F_j \longrightarrow 1,$$

con  $F_j$  finito para todo  $j$ , entonces

$$1 \longrightarrow \mathbb{Z}^{k-a-1} \longrightarrow \prod_{i=a+1}^k V_j / \langle \check{f} \rangle \longrightarrow \prod_{i=a+1}^k F_j \longrightarrow 1.$$

Por el Teorema 1.15,  $\underline{\text{gd}}(\prod_{i=a+1}^k V_j / \langle \check{f} \rangle)$  es finita. Entonces aplicando el Teorema 1.15 a la sucesión exacta definida por  $\psi$ , podemos concluir que

$$\underline{\text{gd}}(C_{\Gamma(S)}(f)^0 / \langle f \rangle) < \infty.$$

II. *Suponga que la superficie  $S$  tiene frontera no vacía.* Siguiendo en forma similar como en la Parte 1 (a), de (4.11), (4.12) y (4.13), aplicando Teorema 1.15, concluimos que  $\underline{\text{gd}}W_{\Gamma(S)}(C) < \infty$ . □

### 5.3. Cotas para la dimensión geométrica

En esta Sección probaremos que  $\Gamma_m(S)$  satisface la siguiente propiedad:

*Propiedad  $M_{\mathcal{FIN} \subseteq \mathcal{VCY}}$ :* Todo subgrupo  $H \in \mathcal{IC}_{\Gamma_m(S)}$  está contenido en un único  $H_{max} \in \mathcal{IC}_{\Gamma_m(S)}$  el cual es maximal en  $\mathcal{IC}_{\Gamma_m(S)}$ .

Donde  $\mathcal{IC}_{\Gamma_m(S)}$  denota el conjunto de subgrupos cíclicos infinitos de  $\Gamma_m(S)$ . Esta propiedad nos dará una cota para  $\underline{\text{gd}}\Gamma_m(S)$  y por tanto para  $\underline{\text{gd}}\Gamma(S)$ . Hacemos referencia a las Secciones 3.6, 3.4 y 4.1, para notación.

**Teorema 5.6.** [20, Lem. 8.7] Sea  $S$  una superficie orientable cerrada, con un conjunto finito de puntos removidos y  $\chi(S) < 0$ . Sea  $G$  un subgrupo de  $\Gamma_m(S)$ , con  $m \geq 3$ . Sea  $\sigma = \sigma(G)$  y suponga que  $\rho_\sigma(G) = \prod_{i=1}^k G_i$ , donde  $G_i$  denota la proyección de la imagen sobre  $\Gamma(\widehat{S}_i, \mathcal{Q}_i)$ . El grupo  $G$  es abeliano si y sólo si cada  $G_i$  es trivial o un grupo cíclico infinito.

**Proposición 5.7.** Sea  $S$  una superficie orientable compacta, posiblemente con un conjunto finito de puntos removidos del interior y  $\chi(S) < 0$ . Para  $m \geq 3$ , el grupo  $\Gamma_m(S)$  satisface la propiedad  $M_{\mathcal{FIN} \subseteq \mathcal{VCY}}$ .

*Demostración.* CASO I. Supongamos que  $S$  tiene frontera vacía. Como  $\Gamma_m(S)$  es libre de torsión para  $m \geq 3$ , entonces  $\mathcal{IC}_{\Gamma_m(S)} = \mathcal{VCY}_{\Gamma_m(S)} - \mathcal{FIN}_{\Gamma_m(S)}$  es el conjunto de subgrupos cíclicos infinitos de  $\Gamma_m(S)$ .

Es bien conocido que para superficies sin frontera  $S$ , elementos periódicos en  $\Gamma(S)$  tienen orden finito, entonces por el Teorema de clasificación de Nielsen-Thurston, cada elemento en  $\Gamma_m(S)$  es reducible o pseudo-Anosov.

Sea  $H = \langle f \rangle \in \mathcal{IC}_{\Gamma_m(S)}$ . Observe que si  $K = \langle k \rangle \in \mathcal{IC}_{\Gamma_m(S)}$  y  $H \subseteq K$ , entonces  $K$  es generado por una  $n$ -ésima raíz de  $f$  en  $\Gamma_m(S)$  para algún  $n \in \mathbb{Z} - \{0\}$  y por el Lema 4.8, se tiene que  $C_{\Gamma_m(S)}(K) = C_{\Gamma_m(S)}(H)$  luego  $K \subseteq C_{\Gamma_m(S)}(H)$ . De hecho probaremos que  $K$  esta contenido en un subgrupo abeliano libre de  $\Gamma_m(S)$ , como  $K$  es cualquier subgrupo en  $\mathcal{IC}_{\Gamma_m(S)}$  que contiene a  $H$ , concluiremos que existe un único maximal en  $\mathcal{IC}_{\Gamma_m(S)}$  que contiene a  $H$ .

(i) Si  $f$  es pseudo-Anosov, por el Teorema 4.3,  $C_{\Gamma_m(S)}(H) \in \mathcal{IC}_{\Gamma_m(S)}$ , entonces  $C_{\Gamma_m(S)}(H)$  es el único subgrupo maximal en  $\mathcal{IC}_{\Gamma_m(S)}$  que contiene  $H$ .

(ii) Ahora supongamos que  $f$  es reducible y  $\sigma = \sigma(f)$  es su sistema de reducción canónico, por el Lema 3.26,  $C_{\Gamma_m(S)}(H) \subseteq \Gamma_m(S)_\sigma$ . Supongamos que  $\sigma$  tiene vértices  $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ , sea  $S_\sigma = S_1 \cup \dots \cup S_k$  y  $\rho_{\sigma,m}$  es el homomorfismo sobreyectivo dado en (4.3),

$$\rho_{\sigma,m}: \Gamma_m(S)_\sigma \rightarrow \prod_{i=1}^k \Gamma_i,$$

donde  $\Gamma_i \subset \Gamma(\widehat{S}_i, \mathcal{Q}_i)$  es libre de torsión para toda  $i$  y  $\rho_{\sigma,m}$  tiene como núcleo un subgrupo abeliano libre de  $\langle T_{\alpha_1}, \dots, T_{\alpha_r} \rangle \simeq \mathbb{Z}^r$ , suponga que  $\ker(\rho_{\sigma,m}) \simeq \mathbb{Z}^s$ ,  $s \leq r$ . Observe que cada  $T_{\alpha_i}$  conmuta con  $f$ , en particular todo elemento de  $\ker(\rho_{\sigma,m})$  conmuta con  $f$ , si  $\rho_{\sigma,m}(f) = (f_1, \dots, f_k)$ , entonces

$$1 \longrightarrow \mathbb{Z}^s \longrightarrow C_{\Gamma_m(S)}(f) \xrightarrow{\rho_{\sigma,m}} \prod_{i=1}^k C_{\Gamma_i}(f_i) \longrightarrow 1,$$

y por la Observación 4.2, cada  $f_i$  es la identidad o pseudo-Anosov. Sea  $\rho_{\sigma,0}(k) = (k_1, \dots, k_r)$ , entonces se tiene

(a)  $\forall i, \quad k_i f_i = f_i k_i$ ,

(b)  $\forall i$ ,  $f_i$  es raíz  $n$ -ésima de  $k_i$  ya que  $f$  es raíz  $n$ -ésima de  $k$  y si  $f_j = Id$  para alguna  $j$ , entonces  $k_j = Id$ , porque cada  $\Gamma_j$  es libre de torsión.

Sea  $L = \{l_1, \dots, l_d\} \subseteq \{1, \dots, k\}$ , tal que  $l_i \in L$  si y sólo si  $f_{l_i}$  es pseudo-Anosov. Por el Teorema 4.3,  $C_{\Gamma_{l_i}}(f_{l_i})$  es cíclico infinito para cada  $l_i \in L$ . Vemos al grupo

$\prod_{j=1}^d C_{\Gamma_{l_j}}(f_{l_j})$  como subgrupo de  $\prod_{i=1}^k C_{\Gamma_i}(f_i)$ , poniendo el subgrupo trivial  $\{1\}$  en las coordenadas distintas de  $l_1, \dots, l_d$ , y tomamos su preimagen

$$G = \rho_{\sigma, m}^{-1}(\prod_{j=1}^d C_{\Gamma_{l_j}}(f_{l_j})) \subseteq \Gamma_m(S)_\sigma,$$

entonces tenemos

$$1 \longrightarrow \mathbb{Z}^s \longrightarrow G \xrightarrow{\rho_{\sigma, m}} \prod_{j=1}^d C_{\Gamma_{l_j}}(f_{l_j}) \longrightarrow 1,$$

Luego,  $G \subset \Gamma_m(S)$  y  $\prod_{j=1}^d C_{\Gamma_{l_j}}(f_{l_j}) \simeq \mathbb{Z}^d$ , aplicando el Teorema 5.6, concluimos que  $G$  es abeliano, y por construcción, para cualquier  $K \in \mathcal{IC}_{\Gamma_m(S)}$  tal que  $H \subseteq K$  se tiene que  $K \subset G$ . Como  $G$  es abeliano libre, se tiene que existe un único maximal en  $\mathcal{IC}_{\Gamma_m(S)}$  que contiene a  $H$ .

CASO II. Supongamos ahora que  $S$  tiene  $b \neq 0$  componentes frontera  $\beta_1, \dots, \beta_b$ . Sea

$$\theta_S: \Gamma(S) \rightarrow \Gamma(\widehat{S}),$$

el homomorfismo de encorche dado como en (3.4), tiene núcleo abeliano libre generado por  $T_{\beta_1}, \dots, T_{\beta_b}$ . Por definición del homomorfismo  $\theta_S$  tenemos que  $\theta_S(\Gamma(S)_m) \subseteq \Gamma(\widehat{S})_m$ . Como cada  $T_{\beta_i}$  actúa trivialmente en  $H_1(S, \mathbb{Z})$ , entonces  $\ker(\theta_S|_{\Gamma_m(S)}) = \ker(\theta_S)$ . Por lo que se tiene,

$$1 \longrightarrow \mathbb{Z}^b \longrightarrow \Gamma_m(S) \xrightarrow{\theta_S} \Gamma_m(\widehat{S}). \quad (5.1)$$

Es bien conocido que cuando  $S$  tiene frontera no vacía,  $\Gamma(S)$  es libre de torsión, entonces  $\mathcal{IC}_{\Gamma_m(S)} = \mathcal{VCY}_{\Gamma_m(S)} - \mathcal{FLN}_{\Gamma_m(S)}$  es el conjunto de subgrupos cíclicos infinitos de  $\Gamma_m(S)$ .

Suponga que  $A = \langle x \rangle \in \mathcal{IC}_{\Gamma_m(S)}$  y sea  $B = \langle y \rangle \in \mathcal{IC}_{\Gamma_m(S)}$  tal que  $A \subseteq B$ , entonces  $\theta_S(A) = \langle \theta_S(x) \rangle \subseteq \langle \theta_S(y) \rangle = \theta_S(B)$ . Como en el CASO I, veremos que  $B$  esta contenido en un grupo abeliano libre de  $\Gamma_m(S)$ .

Por el CASO I, tenemos que existe un subgrupo abeliano libre  $\overline{G}$  de  $\Gamma_m(\widehat{S})$  tal que si  $K \in \mathcal{IC}_{\Gamma(\widehat{S})}$  y  $\theta_S(A) \subseteq K$ , se tiene que  $K \subseteq \overline{G}$ . Sea  $G = \theta_S(\Gamma_m(S)) \cap \overline{G}$ , el cual también es abeliano libre porque  $\Gamma_m(\widehat{S})$  es libre de torsión, note que  $B \subseteq \theta_S^{-1}(G)$ , ya que  $y \in \theta_S^{-1}(\theta_S(y))$ .

Sean  $g_1, g_2 \in G$ ,  $\tilde{g}_1 \in \theta_S^{-1}(g_1)$  y  $\tilde{g}_2 \in \theta_S^{-1}(g_2)$ , como  $g_1$  y  $g_2$  conmutan, por definición de  $\theta_S$  debemos tener que  $\tilde{g}_1$  y  $\tilde{g}_2$  conmutan, por tanto  $\theta_S^{-1}(G)$  es abeliano libre. Hemos concluido que para cualquier  $B \in \mathcal{IC}_{\Gamma_m(S)}$  tal que  $A \subseteq B$ ,  $B$  esta contenido en un subgrupo abeliano libre, entonces existe un subgrupo maximal en  $\mathcal{IC}_{\Gamma_m(S)}$  que contiene a  $A$ . □

Finalmente podemos dar cotas para las dimensiones geométricas para la familia  $\mathcal{VCY}$  del grupo modular de una superficie y de sus grupos congruencia:

**Teorema 5.8.** *Sea  $S$  una superficie orientable compacta, con un número finito de puntos removidos del interior y  $\chi(S) < 0$ . Suponga que  $m \geq 3$ , entonces*

$$(1) \quad \underline{\underline{\text{gd}}}\Gamma_m(S) \leq \text{vcd}(\Gamma(S)) + 1;$$

(2) *Denote por  $[\Gamma(S) : \Gamma_m(S)]$  el índice de  $\Gamma_m(S)$  en  $\Gamma(S)$ , entonces*

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\text{gd}}}\Gamma(S) &\leq [\Gamma(S) : \Gamma_m(S)] \cdot \underline{\underline{\text{gd}}}\Gamma_m(S) \\ &\leq [\Gamma(S) : \Gamma_m(S)] \cdot (\text{vcd}(\Gamma(S)) + 1). \end{aligned}$$

Donde  $\text{vcd}(\Gamma(S))$  denota la dimensión cohomológica virtual de  $\Gamma(S)$ .

*Demostración.* Por el Teorema 1.17, la Proposición 5.7 y el Teorema 5.5, concluimos (1). Aplicando Teorema 1.16 tenemos (2).  $\square$

Del Teorema 1.4, tenemos el siguiente:

**Corolario 5.9.** *Si  $\mathcal{M}$  denota el conjunto de clases de conjugación de clases de subgrupos maximales en  $\mathcal{IC}_{\Gamma_m(S)}$ , un modelo para  $\underline{\underline{E}}\Gamma(S)$  es dado por el siguiente  $\Gamma(S)$ -pushout celular,*

$$\begin{array}{ccc} \coprod_{C \in \mathcal{M}} \Gamma(S) \times_{N_{\Gamma(S)}C} \underline{E}N_{\Gamma(S)}C & \xrightarrow{i} & \underline{E}\Gamma(S) \\ \downarrow \coprod_{C \in \mathcal{M}} \text{id}_{\Gamma(S)} \times_{N_{\Gamma(S)}C} f_C & & \downarrow \\ \coprod_{C \in \mathcal{M}} \Gamma(S) \times_{N_{\Gamma(S)}C} \underline{E}W_{\Gamma(S)}C & \longrightarrow & \underline{\underline{E}}\Gamma(S). \end{array}$$

Donde  $\underline{E}W_{\Gamma(S)}C$  es un  $N_{\Gamma(S)}(C)$ -CW-complejo por la acción de la proyección  $N_{\Gamma(S)}C \rightarrow W_{\Gamma(S)}(C)$ ,  $i$  es una inclusión y las aplicaciones  $f_C$  son celulares.

# Capítulo 6

## Grupo de trenzas de una superficie

Sea  $S$  una superficie y  $n \in \mathbb{N}$ . Fijamos  $\mathcal{P}$  un conjunto de  $n$  puntos distintos del interior de  $S$ . Ver [5] como referencia.

**Definición 6.1.** Una  $n$ -trenza geométrica en  $S$  es una colección  $\beta = \{\beta_1, \dots, \beta_n\}$  que consiste de  $n$  arcos  $\beta_i: [0, 1] \rightarrow S \times [0, 1]$ , para  $i = 1, \dots, n$ , llamadas cuerdas:

- (a) para  $i = 1, \dots, n$ ,  $\beta_i(0) = (x_i, 0)$  y  $\beta_i(1) \in \mathcal{P} \times \{1\}$ ;
- (b) para toda  $t \in [0, 1]$  y para toda  $i, j \in \{1, \dots, n\}$ ,  $i \neq j$ ,

$$\beta_i(t) \neq \beta_j(t)$$

(es decir, las cuerdas son disjuntas);

- (c) para toda  $t \in [0, 1]$  cada cuerda intersecta  $S \times \{t\}$  en exactamente un punto (es decir, las cuerdas son estrictamente monótonas con respecto a la  $t$ -coordenada).

Decimos que dos trenzas geométricas son equivalentes si existe una isotopía (que deja los puntos finales de las cuerdas fijos) de una a la otra a través de trenzas geométricas. Esto define una relación de equivalencia, y las clases de equivalencia son llamadas  $n$ -trenzas. Sea  $B_n(S)$  el conjunto de  $n$ -trenzas de  $S$ .

El producto de dos  $n$ -trenzas  $\gamma$  y  $\beta$  es la concatenación, definida por pegar los puntos finales de  $\gamma$  con los puntos finales de  $\beta$  (el intervalo  $I$  en cada caso se comprime al intervalo  $[0, 1/2]$ ). Esta operación no depende de la elección de las trenzas geométricas representantes y es asociativo. El elemento identidad  $Id$  de  $B_n(S)$  es la  $n$ -trenza que deja cada cuerda vertical y el inverso de una  $n$ -trenza  $\beta = \{(\beta_1(t), \dots, \beta_n(t))\}_{t \in [0, 1]}$  es la  $n$ -trenza  $\{(\beta_1(1-t), \dots, \beta_n(1-t))\}_{t \in [0, 1]}$ .

**Definición 6.2.** El grupo  $B_n(S)$  con esta operación es llamado el *grupo de  $n$ -trenzas de  $S$* .

Hay un homomorfismo  $B_n(S) \rightarrow \Sigma_n$  sobre el grupo simétrico, dado por la correspondiente permutación de los puntos en  $\mathcal{P}$ . Denotaremos al núcleo de este homomorfismo por  $P_n(S)$ , el cual es llamado el *grupo puro de  $n$ -trenzas*.



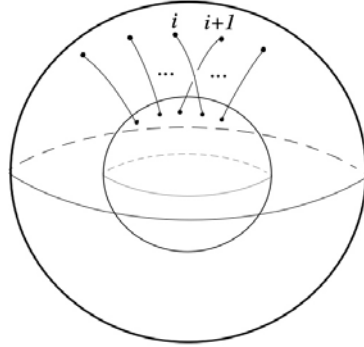


Figura 6.1: Se muestra una  $n$ -trenza en la esfera.

## 6.1. Espacios de Configuración

**Definición 6.3.** Sea  $S$  una superficie compacta. EL  $n$ -ésimo espacio de configuración de  $S$  es definido como sigue,

$$F_n(S) = \{(x_1, \dots, x_n) \in S^n \mid x_i \neq x_j \text{ for all } i, j \in \{1, \dots, n\}, i \neq j\}.$$

Dotamos a  $F_n(S)$  con la topología inducida por la topología producto del espacio  $S^n$ . El espacio  $F_n(S)$  es una variedad abierta conexa  $2n$ -dimensional.

Existe una acción natural libre del grupo simétrico  $\Sigma_n$  sobre  $F_n(S)$ , permutando las coordenadas. Denotaremos el cociente por la acción por  $D_n(S) = F_n(S)/\Sigma_n$ , puede ser pensado como el espacio de configuración de  $n$  puntos desordenados. La proyección  $p_n: F_n(S) \rightarrow D_n(S)$  es una aplicación cubriente regular [5, Prop. 1.1]. Además,

**Teorema 6.4.** [15] Sea  $n \in \mathbb{N}$ . Entonces

$$P_n(S) \simeq \pi_1(F_n(S)) \text{ and } B_n(S) \simeq \pi_1(D_n(S)).$$

**Proposición 6.5** ([34],[12]). Sea  $S$  una superficie compacta orientable. Entonces el grupo de trenzas  $P_n(S)$  y  $B_n(S)$  son libres de torsión si y solo si  $S$  es diferente de  $\mathbb{S}^2$ .

## 6.2. Relación con el grupo modular de una superficie

El grupo modular de una superficie está muy relacionado con el grupo de trenzas, una referencia es [6]. Sea  $S$  una superficie compacta orientable y  $\mathcal{P}$  un conjunto finito de  $n$  puntos distintos del interior de  $S$ .

Para el disco  $\mathbb{D}^2$ , se tiene el siguiente resultado.

**Teorema 6.6.** [5]  $B_n(\mathbb{D}^2) \simeq \Gamma(\mathbb{D}^2 - \mathcal{P})$ .

**Teorema 6.7** ([13],[17],[6],[12]). *Sea  $S$  una superficie compacta orientable distinta de  $\mathbb{S}^2$ . Sea  $n \geq 1$ , entonces se tienen las siguientes sucesiones exactas cortas:*

$$1 \longrightarrow B_n(S) \longrightarrow \Gamma(S - \mathcal{P}) \longrightarrow \Gamma(S) \longrightarrow 1. \quad (6.1)$$

$$1 \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \longrightarrow B_n(\mathbb{S}^2) \xrightarrow{\psi} \Gamma(\mathbb{S}^2 - \mathcal{P}) \longrightarrow 1. \quad (6.2)$$

### 6.3. Dimensión geométrica

Observe que si  $G$  es un grupo libre de torsión entonces  $\underline{E}G = EG$ , además  $EG$  es el cubriente universal de un espacio Eilenberg-MacLane  $K(G, 1)$ .

**Teorema 6.8.** [12] *Sea  $n \in \mathbb{N}$ . Suponga que  $S$  es una superficie compacta orientable diferente de  $\mathbb{S}^2$ . Entonces los espacios  $F_n(S)$  y  $D_n(S)$  son espacios Eilenberg-MacLane de tipo  $K(P_n(S), 1)$  y  $K(B_n(S), 1)$  respectivamente.*

Entonces si  $S$  es una superficie compacta orientable distinta de la esfera, de la Proposición 6.5 y el Teorema 6.8, tenemos modelos para  $EB_n(S)$  y  $EP_n(S)$ . Por tanto  $\text{gd}P_n(S) = \text{gd}B_n(S) \leq 2n$ .

Sea  $m \geq 3$  fijo. Cuando la superficie es cerrada el grupo de trenzas puro  $P_n(S)$  se realiza como un subgrupo de  $\Gamma_m(S - \mathcal{P})$ , entonces tenemos:

**Corolario 6.9.** *Sea  $S$  una superficie cerrada orientable de género  $\geq 2$ . Entonces tenemos*

$$(i) \quad \underline{\underline{\text{gd}}}P_n(S) \leq 2n + 1;$$

$$(ii) \quad \underline{\underline{\text{gd}}}B_n(S) \leq (2n + 1)n!.$$

*Demostración.* Sea  $m \geq 3$  fijo. Como  $P_n(S)$  se realiza como subgrupo de  $\Gamma_m(S - \mathcal{P})$ ,  $\underline{\underline{\text{gd}}}P_n(S) \leq \underline{\underline{\text{gd}}}\Gamma(S - \mathcal{P})$ , del Teorema 5.8, concluimos que  $\underline{\underline{\text{gd}}}P_n(S)$  es finita. Luego, por la Proposición 5.7,  $P_n(S)$  cumple la propiedad  $M_{\mathcal{F}IN_{P_n(S)} \subset \mathcal{V}CY_{P_n(S)}}$ , dada en la Sección 5.3. Aplicando el Teorema 1.17 concluimos que  $\underline{\underline{\text{gd}}}P_n(S) \leq \text{gd}P_n(S) + 1 \leq 2n + 1$ .

Ya que el índice de  $P_n(S)$  en  $B_n(S)$  es  $n!$ , por el Teorema 1.16 tenemos (ii).  $\square$

En el caso de la esfera, sea  $n \geq 4$ . De la sucesión exacta corta (6.2) y de [16, Prop. 12], un modelo para  $\underline{E}B_n(\mathbb{S}^2)$  es un modelo para  $\underline{E}\Gamma(\mathbb{S}^2 - \mathcal{P})$ , con la acción inducida por la proyección  $\psi: B_n(\mathbb{S}^2) \rightarrow \Gamma(\mathbb{S}^2 - \mathcal{P})$ . Las cotas que dimos en el Teorema 5.8 aplican en este caso. Sin embargo podemos dar mejores cotas y modelos más concretos. Es un trabajo en curso, en el cual queremos dar un modelo explícito para  $n = 5$ , con el cual se pueden hacer cálculos en K-teoría [2].



# Bibliografía

- [1] J. Aramayona and C. Martínez-Pérez. The proper geometric dimension of the mapping class group. *Algebraic and Geometry Topology* 14 (2014)217-227
- [2] J. Aramayona, D. Juan-Pineda and A. Trujillo-Negrete. Classifying spaces for the family of virtually cyclic subgroups of surface braids groups. Preprint.
- [3] E. Berkove, D. Juan-Pineda, Q. Lu. Algebraic K-theory of mapping class groups, *K-Theory* 32 (1), (2004), 83–100.
- [4] A. Bartels; Reich, Holger: On the Farrell-Jones conjecture for higher algebraic K-theory. *J. Amer. Math. Soc.* 18 (2005), no. 3, 501–545. MR2138135 (2006e:19004)
- [5] Birman, J. S. *Braids, Links, and Mapping Class Groups*, *Ann. of Math. Stud.* 82, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1974.
- [6] J. S. Birman. Mapping class groups and their relationship to braid groups. *Comm. Pure and Appl. Math.* 22 (1969), 213-238.
- [7] C. Bonatti and L. Paris. Roots in the mapping class groups. *Proc. Lond. Math. Soc.* (3) 98 (2009), no. 2, 471–503.
- [8] M. R. Bridson and A. Haefliger. *Metric spaces of non-positive curvature*. Springer-Verlag, Berlin, 1999. *Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 319*.
- [9] D. Degrijse and N. Petrosyan. Bredon cohomological dimension for groups acting on CAT(0)-spaces. *Group. Groups Geom. Dyn.* 9 (2015), no. 4, 1231–1265.
- [10] B. Farb and D. Margalit. *A primer on mapping class groups*. Princeton Mathematical Series, 49, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 2012.
- [11] D. Farley. Constructions of  $E_{\mathcal{VC}}$  and  $E_{\mathcal{FBC}}$  for groups acting on CAT(0) spaces. *Algebr. Geom. Topol.* 10(4), 2229-2250 (2010).
- [12] E. Fadell and L. Neuwirth. Configuration spaces. *Math. Scand.* 10 (1962),111-118.

- [13] E. Fadell and Van Buskirk. The braid groups of  $\mathbb{E}^2$  and  $\mathbb{S}^2$ , *Duke Math. J.* 29 (1962), 243-257.
- [14] A. Fathi, F. Laudenbach, V. Poénaru, Thurston's work on surfaces. Translated from the 1979 French original by Djun M. Kim and Dan Margalit. *Mathematical Notes*, 48. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2012.
- [15] R. H. Fox and L. Neuwirth. The braid groups, *Math. Scand.* 10(1962), 119-126.
- [16] D. L. Gonçalves and J. Guaschi. The classification of the virtually cyclic subgroups of the sphere braid groups. *Springer Briefs in Mathematics* (2013), 112pp.
- [17] M. E. Hamstrom. Homotopy groups of the space of homeomorphisms on 2-manifold. *Illinois J. Math.* 10 (1966), 563-573.
- [18] J. L. Harer. The virtual cohomological dimension of the mapping class group of an orientable surface. *Inventiones mathematicae*, 84, 157-176(1986) Springer-Verlag.
- [19] N. V. Ivanov. Mapping class groups. *Handbook of geometric topology*. 523-633, North Holland, Amsterdam, 2002.
- [20] N. V. Ivanov. Subgroups of Teichmüller Modular Groups. Translated from the Russian by E. J. F. Primrose and revised by the author. *Translations of Mathematical Monographs*, 115. American Mathematical Society, Providence, RI, 1992.
- [21] D. Juan-Pineda and I. J. Leary. On classifying spaces for the family of virtually cyclic subgroups. In *Recent developments in algebraic topology*, volume 407 of *Contemp. Math.*, pages 135-145. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2006.
- [22] D. Juan-Pineda and A. Trujillo-Negrete. Dimension for classifying spaces for the family of virtually cyclic subgroups in mapping class groups. Preprint.
- [23] D. Juan-Pineda and A. Trujillo-Negrete. Models for classifying spaces for  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ . Preprint.
- [24] S. P. Kerckhoff. The Nielsen realization problem. *Ann. of Math.* (2), 117(2):235-265, 1983.
- [25] W. Lück. The type of the classifying space for a family of subgroups. *Journal of Pure and Applied Algebra* 149 (2000) 177-203
- [26] W. Lück. Survey on classifying spaces for families of subgroups. In *infinite groups: geometric, combinatorial and dynamical aspects*, volume 248 of *Progr. Math.*, pages 269-322. Birkhäuser, Basel, 2005. arXiv:math/0312378
- [27] W. Lück. On the classifying space of the family of virtually cyclic subgroups for CAT(0)-groups, *Münster J. of Math.* 2 (2009), 201-214.

- [28] W. Lück and D. Meintrup. On the universal space for group actions with compact isotropy. Proc. of the conference "Geometry and Topology in Aarhus, (1998), 293-305
- [29] W. Lück and H. Reich. The Baum-Connes and the Farrell-Jones Conjectures in K- and L-Theory. Handbook of K-theory. Vol.1,2, pages 703-842. Springer, Berlin, 2005.
- [30] W. Lück., and M. Weiermann. On the classifying space of the family of virtually cyclic subgroups, Pure and Applied Mathematics Quarterly, Vol. 8 Nr. 2 (2012).
- [31] J. D. McCarthy. Normalizers and centralizers of pseudo-Anosov mapping classes. Preprint 1982. PhD. Thesis, Columbia University.
- [32] I. Nikolaev. Operator algebras and conjugacy problem for the pseudo-Anosov automorphisms of a surface. Pacific J. Math. 261 (2013), no. 2, 445–462.
- [33] A. Papadopoulos and G. Th  ret. On Teichmüller metrics and Thurston's asymmetric metric on Teichmüller space. In Handbook of Teichmüller Theory Vol. I. European Mathematical Society, IRMA Lectures in Mathematics and Theoretical Physics 11.
- [34] J. Van Buskirk. Braid groups of compact 2-manifolds with elements of finite order. Trans. Amer. Math. Soc. 122 (1966), 81-97.