



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA  
DE MÉXICO

---

---

FACULTAD DE CIENCIAS

CARACTERIZACIÓN DE UN PROPULSOR TIPO  
HALL PARA UN MICROSATÉLITE

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

FÍSICO

PRESENTA:

ERNESTO REYNOSO REYES

TUTOR:

DR. JORGE ALFREDO FERRER PÉREZ

CIUDAD UNIVERSITARIA

CDMX 2016





Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



*Dedicado a todos aquellos  
hombres, mujeres y niños  
que han encontrado, y cultivado,  
la semilla de la curiosidad en sus vidas.*



# Agradecimientos

Agradezco a la Facultad de Ciencias por brindarme los cursos que forjaron las bases científicas con las que analicé y realicé el presente trabajo.

Agradezco enormemente a mi asesor de tesis, el Dr. Jorge Alfredo Ferrer Pérez, quien me ayudó a ver un camino claro hacia mis inquietudes académicas, me proporcionó las piedras con las cuales comencé a construir éste camino, y no ha dejado que nada me desilusione con respecto a mis sueños.

También agradezco al Dr. Carlos Romo Fuentes por su apoyo incondicional y humanidad en la labor del ingeniero y docente.

Al M.I. Eric Tejada Malpica, por su apoyo, amistad, y acceso a su trabajo, labor y conocimientos.

A la Unidad de Alta Tecnología de la UNAM (UAT) y el Laboratorio Nacional de Ingeniería Espacial y Automotriz (LNIEA) en Juriquilla, Querétaro, por abrirme las puertas y hacerme accesibles sus conocimientos e instalaciones.



# Índice general

Agradecimientos	III
Lista de figuras	VII
Lista de tablas	IX
Nomenclatura	XI
<b>1. INTRODUCCIÓN GENERAL</b>	<b>1</b>
<b>2. PROPULSIÓN ELÉCTRICA</b>	<b>5</b>
2.1. Fundamentos de Propulsión Espacial . . . . .	5
2.1.1. Introducción Histórica sobre la Propulsión . . . . .	5
2.1.2. Bases Teóricas sobre la Propulsión . . . . .	8
2.2. Propulsión Eléctrica versus Propulsión Química . . . . .	11
2.3. Métodos de Propulsión Eléctrica . . . . .	14
<b>3. TEORÍA DE PLASMAS</b>	<b>19</b>
3.1. Ionización . . . . .	19
3.2. Definición de un Plasma . . . . .	20
3.3. Velocidad térmica . . . . .	25
3.4. Longitud de Debye . . . . .	26
3.5. Frecuencia del Plasma . . . . .	29
3.6. Parámetro del Plasma . . . . .	33
3.7. Frecuencia del Ciclotrón . . . . .	33
3.8. Velocidad de Deriva . . . . .	38
3.9. Camino Libre Medio . . . . .	40
3.10. El plasma como un fluido . . . . .	42
<b>4. EFECTO HALL</b>	<b>45</b>
4.1. Efecto Hall en una lámina de material conductor . . . . .	45
4.2. Efecto Hall en un gas ionizado . . . . .	47

<b>5. PROPULSOR HALL</b>	<b>51</b>
5.1. Descripción del propulsor Hall . . . . .	51
5.2. Principio de operación y componentes del propulsor . . . . .	52
5.2.1. Cátodo . . . . .	52
5.2.2. Circuito magnético . . . . .	55
5.2.3. Canal de descarga . . . . .	56
5.2.4. Propelente . . . . .	58
5.3. Teoría general y relaciones básicas . . . . .	60
5.3.1. Empuje . . . . .	63
5.3.2. Impulso específico . . . . .	69
5.3.3. Eficiencia . . . . .	71
<b>6. CARACTERIZACIÓN DE UN PROPULSOR HALL</b>	<b>75</b>
6.1. Requerimientos de la misión y valores propuestos para el diseño del propulsor . . . . .	75
6.2. Construcción y manufactura del propulsor Hall . . . . .	76
6.3. Consideraciones tomadas para la caracterización . . . . .	79
6.4. Caracterización . . . . .	82
6.4.1. Teoría de plasmas . . . . .	83
6.4.2. Efecto Hall . . . . .	86
6.4.3. Parámetros del propulsor . . . . .	87
6.5. Análisis de resultados . . . . .	93
<b>7. CONCLUSIONES Y TRABAJO A FUTURO</b>	<b>97</b>
7.1. Conclusiones . . . . .	97
7.2. Trabajo a futuro . . . . .	98
<b>A. Fuerza de Lorentz y ecuaciones de Maxwell</b>	<b>101</b>
<b>B. Problemas demostrativos</b>	<b>107</b>
B.1. Primer problema . . . . .	107
B.2. Segundo problema . . . . .	110
<b>C. Propagación de Incertidumbres</b>	<b>113</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>115</b>

# Índice de figuras

2.1. “Flechas de fuego” (Huo Jian) para la defensa de Kai Fung Foo, 1232. . . . .	6
2.2. “Le train de projectiles pour la Lune” por Henri de Montaut para “De la Terre à la Lune Trajet direct en 97 heures” de Jules Gabriel Verne, 1868. . . . .	7
2.3. Clasificación de los sistemas de propulsión. . . . .	12
2.4. Rangos de parámetros de rendimiento típicos para varios sistemas de propulsión. . . . .	13
2.5. Velocidad de escape como función de la aceleración típica de los vehículos propulsados. . . . .	13
2.6. Ilustración de la geometría de un resistojet y de un arcjet. . . . .	15
2.7. Ilustración de la geometría y operación de un propulsión iónico mallado. . . . .	16
2.8. Ilustración de la geometría básica de un propulsor Hall. . . . .	16
2.9. Ilustración de la geometría y operación de un propulsor MPD. . . . .	17
3.1. Dos regiones de plasma separadas por una distancia $r$ . . . . .	21
3.2. Distribución de velocidades de Maxwell en una dimensión. . . . .	22
3.3. Electrodo introducidos en un plasma. . . . .	26
3.4. Configuraciones de carga dentro de un plasma eléctricamente neutro. . . . .	31
3.5. Movimiento de una partícula cargada dado un campo magnético homogéneo. . . . .	38
3.6. Giroradio de un ión y un electrón. . . . .	40
4.1. Efecto Hall en una lámina de material conductor. . . . .	46
5.1. Vista transversal de un propulsor Hall. . . . .	51
5.2. Vista transversal y vista superior del propulsor Hall. . . . .	52
5.3. Figura descriptiva de un cátodo típico. . . . .	53
5.4. Vista del cátodo mostrando sus principales componentes. . . . .	54
5.5. Diversas configuraciones del circuito magnético. . . . .	56
5.6. Distribución de los diferentes voltajes en el propulsor Hall. . . . .	58

5.7.	Diversos tipos de propelentes utilizados en propulsores Hall. . .	60
5.8.	Esquema de un corte transversal del propulsor Hall mostrando las direcciones de los campos electromagnéticos. . . . .	64
5.9.	Semiángulo de divergencia del haz de iones. . . . .	67
6.1.	Diagrama de la cámara de descarga construída. . . . .	77
6.2.	Cámara de descarga diseñada del propulsor prototipo. . . . .	77
6.3.	Mediciones de campo magnético al circuito magnético diseñado. . . . .	78
6.4.	Fotografía del cátodo BHC-1500 de la compañía Busek Co. a utilizar. . . . .	79
6.5.	Fotografía del propulsor Hall BHC-1500 de Busek acoplado al cátodo BHC-1500 de la misma compañía. . . . .	80
6.6.	Perfil de temperatura de electrones del propulsor BHT-200. . . . .	81
6.7.	Relación entre potencia de descarga e impulso específico para varios propelentes . . . . .	94
6.8.	Modelos de eficiencia para propulsores eléctricos . . . . .	95
7.1.	Perfil de potencial en un propulsor Hall obtenido por simulación PIC. . . . .	99
B.1.	Diagrama del canal de descarga de un propulsor Hall con dimensiones definidas. . . . .	107

# Índice de cuadros

5.1. Características de propelentes potenciales para el propulsor Hall.	59
6.1. Requerimientos de la misión. . . . .	75
6.2. Valores propuestos para cumplir los requerimientos de la misión	76
6.3. Valores calculados por Tejada, E. A. para cumplir los requerimientos de la misión . . . . .	76
6.4. Medidas importantes dentro de la cámara de descarga y sus incertidumbres asociadas . . . . .	77
6.5. Propiedades físicas del tantalio (Ta) y del acero inoxidable 304 .	78
6.6. Especificaciones técnicas y operacionales del cátodo hueco BHC-1500 y el propulsor. . . . .	79
6.7. Densidad de plasma propuesta y temperatura de iones y electrones tomadas del trabajo de Beal . . . . .	81
6.8. Parámetros del cátodo hueco BHC-1500 en el trabajo de Beal. .	82
6.9. Constantes físicas utilizadas. . . . .	82
6.10. Cálculo de thrust (en mN) considerando el ángulo de divergencia del haz y el porcentaje de ionización sencilla. . . . .	90
6.11. Cálculo del Isp (en s) considerando el aprovechamiento másico y el porcentaje de ionización sencilla. . . . .	91
6.12. Cálculo de la eficiencia total considerando todos los términos de eficiencia. . . . .	93
6.13. Parámetros del propulsor que resultaron diferentes del trabajo de Tejada, E. . . . .	93
7.1. Densidad de plasma, temperatura de iones y electrones propuestas	98



# Nomenclatura

## Letras griegas y símbolos

$\alpha$	Factor de corrección del empuje por segundas ionizaciones
$\alpha_m$	Corrección para la eficiencia másica considerando las dobles ionizaciones
$\Delta V$	Diferencia de potencial eléctrico (“Voltaje”)
$\Delta v$	Diferencia de velocidad requerida para hacer una maniobra orbital
$\varnothing$	Diámetro
$\epsilon$	Permitividad eléctrica total
$\epsilon_0$	Permitividad eléctrica del vacío (equivalente a $8,854 \times 10^{-12}$ F/m)
$\epsilon_r$	Permitividad eléctrica relativa
$\eta_0$	Eficiencia de utilización eléctrica
$\eta_b$	Eficiencia de aprovechamiento de corriente
$\eta_e$	Eficiencia eléctrica
$\eta_{m*}$	Eficiencia másica considerando la corrección de dobles ionizaciones
$\eta_m$	Eficiencia de utilización de propelente
$\eta_T$	Eficiencia total
$\eta_V$	Eficiencia de aprovechamiento de voltaje
$\Gamma$	Parámetro del plasma
$\gamma$	Factor de corrección del empuje total
$\lambda$	Camino libre medio
$\lambda_D$	Longitud de Debye

$\mu$	Movilidad
$\mu$	Permeabilidad magnética total
$\mu_0$	Permeabilidad magnética en el vacío (equivalente a $1,256 \times 10^{-6}$ N/A <sup>2</sup> )
$\mu_{\perp}$	Movilidad transversal
$\mu_r$	Permeabilidad magnética relativa
$\nu$	Frecuencia de colisiones
$\nu_{ab}$	Frecuencia de colisiones entre las especies a y b
$\Omega$	Parámetro Hall para plasmas
$\Omega_{as}$	Ángulo sólido
$\omega_c$	Frecuencia de ciclotrón o “girofrecuencia”
$\Omega_e$	Parámetro Hall para electrones
$\omega_e$	Frecuencia de ciclotrón de los electrones
$\omega_i$	Frecuencia de ciclotrón de los iones
$\omega_p$	Frecuencia del plasma
$\phi$	Potencial electrostático
$\Phi_p$	Flujo de partículas del propelente
$\pi$	Número “pi” (Cociente entre la longitud de una circunferencia y el diámetro de la misma)
$\rho$	Densidad de carga
$\rho_H$	Resistividad Hall
$\rho_L$	Densidad de carga libre
$\sigma$	Sección transversal
$\sigma_{en}$	Sección transversal de colisiones coulombianas entre electrones y átomos neutros
$\sigma_g$	Sección transversal geométrica
$\tau$	Tiempo promedio entre colisiones con partículas neutras
$\theta_d$	Semiángulo de divergencia promedio del haz de iones
$\Theta_H$	Ángulo Hall

$\theta_R$	Ángulo de desviación dada una dispersión de Rutherford
$\varphi$	Fase arbitraria para la cual el movimiento comienza

**Letras romanas**

<b>T</b>	Fuerza de empuje (Thrust)
<b>T<sub>m</sub></b>	Fuerza de empuje considerando segundas ionizaciones
$\vec{A}$	Vector de superficie
$\vec{a}$	Aceleración
$\vec{B}$	Campo de inducción magnética
$\vec{D}$	Desplazamiento eléctrico
$\vec{E}$	Campo eléctrico
$\vec{F}$	Fuerza
$\vec{F}_e$	Fuerza sobre los electrones
$\vec{F}_i$	Fuerza sobre los iones
$\vec{F}_L$	Fuerza de Lorentz
$\vec{H}$	Campo magnético
$\vec{J}$	Densidad de corriente
$\vec{J}_H$	Densidad de corriente Hall
$\vec{J}_l$	Densidad de corriente libre
$\vec{l}$	Vector de longitud de arco
$\vec{p}$	Cantidad de momento
$\vec{v}$	Velocidad
$\vec{v}^*$	Velocidad de una partícula cualquiera
$\vec{v}_\perp$	Componente de la velocidad perpendicular al campo magnético
$\vec{v}_\parallel$	Componente de la velocidad paralela al campo magnético
$\vec{v}_{ac}$	Componente variable en el tiempo de la componente de velocidad perpendicular al campo magnético
$\vec{v}_a$	Velocidad de las partículas de especie a
$\vec{v}_b$	Velocidad de las partículas de especie b

$\vec{v}_E$	Velocidad de deriva
$\vec{v}_k$	Velocidad de la k-ésima partícula
$A$	Área
$a$	Magnitud de la aceleración
$A_e$	Área por la cual salen los iones para formar el haz de plasma
$B$	Magnitud del campo de inducción magnética
$C$	Curva cerrada alrededor de una superficie $S$
$c$	Velocidad de la luz en el vacío
$d$	Espesor del conductor
$DL$	Pérdida por descarga (“Eficiencia de producción de iones”)
$E$	Magnitud del campo eléctrico
$e$	Carga elemental del electrón en valor absoluto
$E_0$	Campo eléctrico inicial dado por la corriente de portadores de carga dentro de un material
$E_{c0}$	Energía cinética inicial
$E_{ce}$	Energía cinética de los electrones
$E_{cXe}$	Energía cinética de los iones de xenón
$E_c$	Energía cinética
$E_e$	Energía de los electrones
$E_H$	Campo eléctrico Hall
$F$	Magnitud de la fuerza
$f_\theta$	Cantidad de fuerza de empuje aprovechada dado el semiángulo de divergencia promedio del haz de iones
$F_C$	Magnitud de la fuerza de Coulomb
$F_c$	Fuerza de colisiones
$f_c$	Frecuencia de ciclotrón en Hz
$f_e$	Frecuencia de ciclotrón de los electrones en Hz
$f_i$	Frecuencia de ciclotrón de los iones en Hz

$F_L$	Magnitud de la fuerza de Lorentz
$F_P$	Fuerza debida al gradiente de presión
$g$	Aceleración de la gravedad
$I$	Intensidad de corriente eléctrica
$I^{++}$	Intensidad de corriente provocada por los iones de xenón doblemente ionizados
$I^+$	Intensidad de corriente provocada por los iones de xenón ionizados una sólo vez
$I_b$	Corriente neta del haz de iones
$I_H$	Intensidad de corriente Hall
$I_i$	Intensidad de corriente de los iones que forman el haz de propulsión
$I_{sp}$	Impulso específico
$J$	Magnitud de la densidad de corriente
$J_H$	Magnitud de la densidad de corriente Hall
$J_i$	Densidad de corriente de iones
$K_B$	Constante de Boltzmann (equivalente a $1,38 \times 10^{-23}$ J/K)
$L$	Dimensiones del sistema
$l$	Longitud del conductor
$L_c$	Longitud del canal de descarga
$L_S$	Longitud axial del solenoide
$m$	Masa
$m_0$	Masa de la nave propulsada sin considerar el propelente
$m_{ef}$	Masa efectiva
$m_e$	Masa del electrón (equivalente a $9,109 \times 10^{-31}$ kg)
$m_i$	Masa del ión
$m_k$	Masa de la k-ésima partícula
$m_{pa}$	Masa del propelente expulsado por el ánodo
$m_{pc}$	Masa del propelente expulsado por el cátodo

$m_p$	Masa del propelente
$m_t$	Masa total de la nave propulsada
$m_{Xe}$	Masa de los iones de xenón
$N$	Número de vueltas en un solenoide
$n$	Densidad de partículas
$N_D$	Parámetro del plasma
$n_e$	Densidad de electrones
$n_i$	Densidad de iones
$n_n$	Densidad de átomos neutros
$P$	Presión
$p$	Magnitud de la cantidad de momento
$P_0$	Potencia de entrada del propulsor requerida para lograr el haz de iones
$P_b$	Potencia del haz de iones
$P_d$	Potencia de descarga
$P_d$	Potencia necesaria para la producción de iones
$P_e$	Presión de electrones
$P_{in}$	Potencia eléctrica total de entrada (“Input power”)
$P_{jet}$	Potencia de empuje cinético (“jet power”)
$P_k$	Potencia del “keeper” del cátodo
$P_{mag}$	Potencia utilizada para generar el campo magnético
$P_T$	Potencia total de entrada
$Q$	Distribución de carga eléctrica
$q$	Carga eléctrica
$q_e$	Carga del electrón (equivalente a $-1,602 \times 10^{-19}$ C)
$q_k$	Carga eléctrica de la k-ésima partícula
$q_{Xe}$	Carga de los iones de xenón
$R$	Radio promedio del canal de descarga

$r$	Radio
$r_1$	Radio de una partícula de prueba de una cierta naturaleza
$r_2$	Radio de una partícula de prueba de otra cierta naturaleza
$r_c$	Radio de Larmor, radio de ciclotrón o “giroradio”
$R_e$	Radio externo de la cámara de descarga
$r_e$	Radio de Larmor de los electrones
$R_H$	Parámetro Hall
$R_i$	Radio interno de la cámara de descarga
$r_i$	Radio de Larmor de los iones
$S$	Superficie gaussiana que encierra a una distribución de carga
$T$	Temperatura
$t$	Tiempo
$T_{\perp}$	Temperatura asociada a la componente de la velocidad perpendicular a un campo magnético $\mathbf{B}$
$T_{\parallel}$	Temperatura asociada a la componente de la velocidad paralela a un campo magnético $\mathbf{B}$
$T_{eV}$	Temperatura en unidades de eV
$T_e$	Temperatura de los electrones
$T_i$	Temperatura de los iones
$u$	Velocidad de las partículas en una distribución de Maxwell
$U_i$	Energía de ionización
$V$	Volumen
$v$	Magnitud de la velocidad
$V_b$	Voltaje neto por el cual están acelerados los iones
$V_c$	Voltaje del cátodo
$V_d$	Voltaje de descarga
$v_{ex}$	Velocidad de escape
$v_E$	Magnitud de la velocidad de deriva

$v_e$	Magnitud de la velocidad de arrastre
$V_H$	Voltaje Hall
$v_{Te}$	Velocidad térmica de los electrones
$v_{Ti}$	Velocidad térmica de los iones
$v_T$	Velocidad térmica
$v_{Xe}$	Velocidad de los iones de xenón
$w$	Anchura del canal de descarga
$x$	Posición en la dirección del eje X
$y$	Posición en la dirección del eje Y
$z$	Posición en la dirección del eje Z
$Z_1$	Carga eléctrica de la partícula dispersada
$Z_2$	Carga eléctrica de la partícula objetivo (“target”)

## Capítulo 1

# INTRODUCCIÓN GENERAL

La necesidad del humano por conocer su mundo, su universo y el funcionamiento de éste lo ha llevado a una revolución industrial masiva, pues en relativamente poco tiempo se ha logrado un avance tecnológico brutal. Otro motor que ha provocado éste avance tecnológico ha sido la necesidad de sostener una sociedad que gasta una cantidad enorme de energía, principalmente de origen fósil. El combustible fósil es finito y está agotándose a un paso exponencial, además de que la mayor parte de tecnología está construida en base a ésta fuente energética; por tanto se ha tenido que buscar la mayor eficiencia posible en todas las actividades humanas.

Un paso importante en el progreso humano ha sido la carrera espacial y la tecnología espacial. Vislumbrar los misterios del universo (algunos de ellos) se ha logrado tanto con la construcción caótica de paradigmas que conforman la base de conocimientos de la astronomía como con el intento de alcanzar a éstos misterios de una forma instrumental y tecnológica.

Ya sea que por medios económicos, políticos, militares o sociales se apresuró la carrera espacial. Ésta tuvo un significado romántico y esperanzador para todos los astrónomos, astrofísicos, tecnólogos y para la mayoría de la gente. Y éste significado sensible está dado en gran parte por las innumerables posibilidades de progreso científico, descubrimiento y una ganancia de conciencia sobre nuestro universo, tal cual como lo planteó Giordano Bruno hace más de cuatrocientos años.

La carrera espacial llevó a la raza humana a un progreso tecnológico y científico tremendo, y abrió las puertas para el desarrollo tecnológico espacial de hoy en día. Las aplicaciones de la tecnología espacial son vastas y cada vez más numerosas. Desde localización satelital por GPS y telecomunicaciones, hasta estudios

de los efectos del viento solar sobre la magnetósfera terrestre. Se pueden encontrar aplicaciones sociales, militares, científicas, políticas, tecnológicas e incluso artísticas.

La piedra angular de la tecnología, desarrollo e investigación espacial es el satélite artificial. Este artefacto consiste en un conjunto de subsistemas, como el de control térmico, el de telemetría y comando, el de control de altitud, el de generación de potencia, el de propulsión, o el de carga útil, cada uno con una función específica. El satélite se lanza al espacio por medio de un cohete y se despliega a una determinada altitud dentro o fuera de la atmósfera donde desempeña la misión para la cual fue construido.

El impulso que necesita un cohete para salir al espacio es bastante grande, pues debe alcanzar la velocidad de escape de la tierra. Esto lo logra básicamente por la propulsión química. El satélite debe moverse también al estar en el medio interplanetario, ya sea para alejarse del planeta Tierra o bien para mantener o modificar una órbita alrededor de ésta o algún cuerpo celeste. Para realizar estas maniobras satelitales no se utiliza la propulsión química, pues se perdería mucho combustible en poco tiempo, en cambio se utiliza la propulsión eléctrica, la cual da mayor impulso específico aunque menor empuje.

A diferencia del caso de la propulsión química, donde gases muy calientes son producidos por reacciones químicas y son expulsados por una tobera. Para la propulsión eléctrica, se utilizan partículas cargadas que son aceleradas por un campo eléctrico y luego son expulsadas a velocidades decenas de veces mayores que aquellas con propulsión química. La propulsión eléctrica resulta atractiva para fines económicos y científicos por los costos de lanzamiento, menor carga de combustible y largos tiempos de misión debidos al ahorro de combustible.

Uno de los dispositivos más utilizados para generar propulsión eléctrica es el propulsor Hall, sobre el cual se ha realizado mucha investigación y se ha logrado un gran desarrollo en los últimos cincuenta años ya que produce un alto impulso específico, es decir, menos consumo de combustible por masa propulsada. Estos dispositivos se utilizan usualmente en satélites geoestacionarios para su inserción y mantenimiento en órbita. En 2003 la Agencia Espacial Europea (ESA) lanzó el primer satélite impulsado por un propulsor Hall más allá de la órbita GEO (en inglés “geosynchronous earth orbit”). Éste satélite (SMART-I) llegó a orbitar la luna [4].

A pesar de ser un propulsor muy utilizado, pues se han lanzado exitosamente más de 200 propulsores Hall en los satélites rusos y soviéticos desde 1971 [13],

se tienen dudas teóricas sobre cómo se comportan de manera exacta los iones y electrones dentro del propulsor. El xenón utilizado como combustible es ionizado en forma de plasma, y éste plasma interactúa con los campos magnéticos y eléctricos generados en el propulsor, lo que crea problemas de geometría con los campos, en las dimensiones y en los materiales de los componentes del propulsor; resultando un problema complejo que depende de muchas variables. Se han hecho numerosas simulaciones numéricas para tratar de entender con precisión el funcionamiento del propulsor Hall.

El objetivo de ésta tesis es caracterizar un propulsor Hall para un microsatélite mexicano. Esta caracterización permitirá entender lo mejor posible, y de forma concreta, la física involucrada en el propulsor Hall. Con esto se pretende que la República Mexicana alcance un mayor desarrollo tecnológico y una mayor independencia tecnológica a nivel mundial, generar tecnología espacial mexicana e iniciar una base de datos de información técnica espacial en el país.

La intención de implementarlo en un microsatélite (satélites con una masa de 10 a 100 kg), se debe a que éstos son mucho más baratos de construir y de lanzar y se pueden producir en un tiempo mucho más corto. Además de que producir varios de éstos da la posibilidad de formar constelaciones satelitales, las cuales son sistemas de satélites que interactúan entre sí y que tienen alcances tecnológicos y de investigación equivalentes a los de satélites convencionales con masa mayor a los 1000 kg.

La tesis está dividida en 7 capítulos diferentes. En el primero se da una introducción general al tema de la tesis y su importancia.

En el **Capítulo 2** se da una introducción a la propulsión espacial, su historia, las ventajas de la propulsión eléctrica frente a la propulsión química, así como los distintos tipos de propulsión eléctrica.

Posteriormente en el **Capítulo 3** se da una breve introducción a la teoría de plasmas, se muestra su importancia en el propulsor Hall y se definen algunos parámetros importantes en la física de plasmas como son la longitud de Debye, la frecuencia del plasma, la velocidad térmica, el camino libre medio, entre otros tópicos.

En el **Capítulo 4** se presenta el efecto Hall, el cual le da el nombre al propulsor y es imprescindible para entender su funcionamiento.

Los fundamentos del propulsor Hall son explicados en el **Capítulo 5**, sus prin-

cipales características, operación, el empuje, el impulso específico, la eficiencia; las diferentes partes del propulsor Hall, características del propelente utilizado, el canal de descarga, la forma, magnitud e importancia del campo magnético en su interior y un pequeño compendio de modelos numéricos que se han utilizado para entender el funcionamiento del propulsor.

Como culmen se presentan los resultados del caso práctico sobre la caracterización del propulsor Hall estudiado y analizado en el **Capítulo 6**.

Finalmente en el **Capítulo 7** se presentan las conclusiones generales a partir de la caracterización del propulsor Hall así como también se presentan los siguientes pasos a dar para la profundización y el aprovechamiento de éste trabajo.

## Capítulo 2

# PROPULSIÓN ELÉCTRICA

### 2.1. Fundamentos de Propulsión Espacial

#### 2.1.1. Introducción Histórica sobre la Propulsión

La propulsión se refiere al o los mecanismos necesarios para generar la suficiente energía para lanzar algo, o para que algo se lance a sí mismo. La palabra propulsión viene del latín “propulsus”, que significa “apartar” o “rechazar”.

Las bases teóricas de la propulsión nacen con Sir Isaac Newton y su construcción de la mecánica en el Principia Mathematica (1687). Fueron después analizadas con mucho más detalle a principios del siglo XX por Konstantin Tsiolkovsky.

Los primeros en armar cohetes de propulsión fueron los Chinos por el año 970. A éste dispositivo se le llamaba “Huo Jian” (flecha de fuego) y su invención está acreditada a Feng Jishen. Inicialmente fue inventada por cuestiones de diversión y recreación como el primer “fuego artificial”, posteriormente se descubrió que podía tener amplias aplicaciones militares.

Éste dispositivo estaba construido a partir de un tubo hecho de bambú, con un orificio, y el cuál se rellenaba con pólvora. Al descubrir su potencial destructivo se utilizó contra los invasores mongoles en 1232 y japoneses en 1275. Se puede ver una representación gráfica en la Fig. 2.1



Figura 2.1: Los chinos ahuyentaron a los invasores mongoles con las “flechas de fuego” (Huo Jian) para la defensa de Kai Fung Foo, prefectura de Kaifeng, China, en 1232 [20].

Posteriormente el cohete se difundió por todo el mundo gracias a los árabes, cultura que sirvió como nexo tecnológico y de conocimientos entre Asia y Europa [24].

El primer relato imaginado escrito sobre un viaje propulsado al espacio fue publicado en 1865 por Julio Verne, titulado “De la Tierra a la Luna” (*“De la Terre à la Lune Trajet direct en 97 heures”*). En éste relata un viaje hacia la luna por el disparo de un cañón gigante, el Columbiad (véase curioso el dato de que la ubicación geográfica del Columbiad, Tampa, Florida, es cercana al Kennedy Space Center de la NASA, construido 100 años después de la publicación de Julio Verne, en Cabo Cañaveral, lugar por excelencia de lanzamientos espaciales). Se puede ver una ilustración de la edición original del libro de 1868 en la siguiente Fig. 2.2

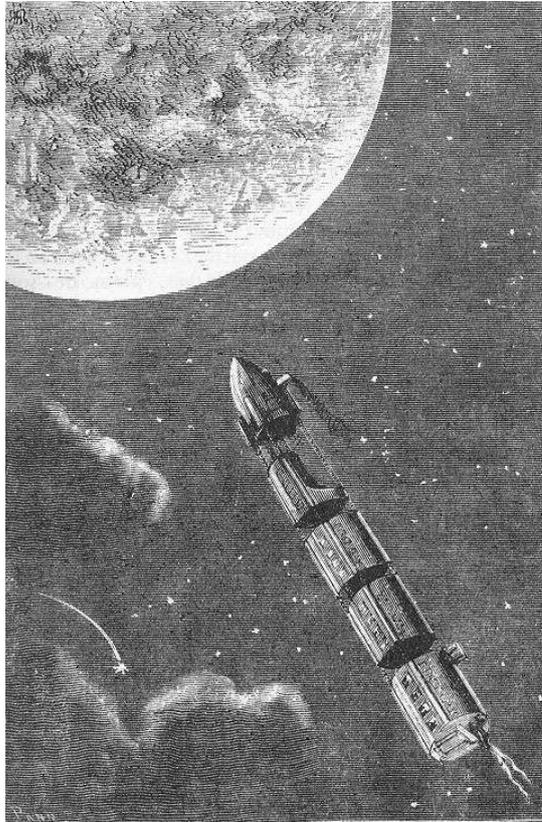


Figura 2.2: “Le train de projectiles pour la Lune” por Henri de Montaut para la edición del 31 de julio de 1868 de “De la Terre à la Lune Trajet direct en 97 heures” de Jules Gabriel Verne. Imagen de dominio público [26].

Físicamente era imposible construir un cañón con la suficiente potencia como para que con un sólo impulso una persona pudiera llegar a la luna. No fue sino hasta 1903 cuando el ruso Konstantin Eduardovich Tsiolkovsky publicó el artículo “La Exploración Espacial por medio de Dispositivos a Reacción” donde describió a detalle la relación entre el combustible de un cohete, las velocidades necesarias para salir al espacio y la masa total del cohete, a ésta relación se le llama “Ecuación de Tsiolkovsky”. También fue el primero en idear el concepto de cohetes “multi-etapa” y describir los cohetes de combustible líquido. Él nunca probó dispositivos experimentales, su trabajo fue puramente teórico. El que desarrolló los primeros dispositivos de propulsión espacial fue el estadounidense Robert Goddard, diseñó y patentó cohetes de combustible líquido, cámaras de combustión, toberas e incluso giroscopios; y lanzó el primer cohete de combustible líquido en 1926, impulsado por oxígeno líquido y gasolina. El tercer hombre moderno más influyente en el vuelo espacial fue el austro-húngaro Hermann Oberth, el cual publicó su tesis doctoral “El Cohete hacia los Planetas”

(“Die Rakete zu den Planetenräumen”), la cual fue rechazada por la Universidad de Heidelberg, él decidió publicarla como un libro, el cual se convirtió en un Best-Seller e impulsó a que muchos aficionados se interesaran en los cohetes y se formaran muchas sociedades de cohetes en Alemania. Con la fiebre espacial el famoso director de cine austriaco Fritz Lang se inspiró e hizo la película “Mujer en la Luna” (“Frau im Mond”), comisionando en 1929 a Hermann Oberth para construir un modelo de nave espacial para la película, así como un lanzamiento de un cohete como promoción para la película. Así la compañía cinematográfica UFA financió los experimentos de Oberth sobre cohetes de combustible líquido; no se terminó el cohete para la premier de la película, pero la película fue un éxito y resultó en aún más conmoción para los aficionados a la cohetaría y al vuelo espacial [24].

Después de la 1a Guerra Mundial, el Tratado de Versalles, impedía a Alemania construir artillería de largo alcance, así que los alemanes aprovecharon para investigar sobre cohetes. Los que tenían mayores conocimientos sobre cohetes eran las sociedades de aficionados, y llegaron con Wernher Von Braun, el cual les ayudó a construir el V-2 (Vergeltungswaffe 2) para finales de la 2a Guerra Mundial, que fue el primer misil de medio alcance, pero capaz de llevar una ojiva nuclear desde el oeste de Francia hasta Nueva York. Dada ésta tecnología, los estadounidenses y los soviéticos empezaron una carrera para capturar personal clave así como tomar posesión de cualquier resto de V-2. Von Braun y su equipo se retiraron a Estados Unidos donde podía continuar su investigación sobre el Saturn-V. Por otra parte los rusos tomaron la mayor parte de la información y restos del V-2 con los cuales experimentaron, gracias a Sergei Korolev y Valentin Glushko, quienes guiaron la investigación, se logró lanzar el primer satélite al espacio “Sputnik” en 1957, así como también al primer hombre en el espacio Yuri Gagarin en 1961. Estados Unidos ganó la carrera espacial llevando al primer hombre a la luna el 20 de junio del año 1969. Después de la carrera espacial se han hecho muchas misiones, las cuales han consistido principalmente en fotografías espaciales orbitando la tierra y la luna, toma de muestras de piedras y polvo en la luna, medición de campos eléctricos, magnéticos y viento solar en el espacio, de telecomunicaciones y últimamente de GPS y geolocalización. Y la base de propulsión interplanetaria ha sido principalmente, desde los años 60’s, la propulsión eléctrica.

### 2.1.2. Bases Teóricas sobre la Propulsión

La base de la propulsión es la 3a Ley de Newton, a cada acción corresponde una reacción con la misma magnitud y dirección opuesta, y ésto va unido íntimamente también con la conservación de momento, pues la propulsión de un

cohete se basa en perder parte de su masa para ganar velocidad. Para un estado inicial con masa  $m_1$  y velocidad  $v_1$ , al perder masa y aumentar la velocidad a un estado posterior con masa  $m_2$  y velocidad  $v_2$ , el momento se debe conservar de la siguiente forma:

$$m_1 v_1 = m_2 v_2 \quad (2.1)$$

La fuerza con la que el cohete saldrá impulsado se puede calcular por el cambio de momento con respecto al tiempo como:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = m \left( \frac{d}{dt}\vec{v} \right) + \vec{v} \left( \frac{d}{dt}m \right) = m\vec{a} + \vec{v}\dot{m} \quad (2.2)$$

En la Ec. (2.2) el primer término de la suma corresponde a la 2a Ley de Newton, mientras que el segundo término de la suma sólo existe si el objeto en movimiento tiene una masa que cambia con respecto al tiempo.

En los sistemas propulsores, para medir la fuerza de empuje ( $\mathbf{T}$  de “thrust” en inglés) se utiliza la salida de masa del propelente  $m_p$  y la velocidad de escape del propelente  $v_{ex}$  (“exhaust velocity”). La fuerza de empuje está dada por la siguiente expresión:

$$\mathbf{T} = -v_{ex} \frac{dm_p}{dt} = -v_{ex} \dot{m}_p \quad (2.3)$$

Otra cantidad de interés es el impulso específico, el cuál es una medida de la eficiencia de la fuerza de empuje  $\mathbf{T}$  éste se define como el cociente entre la fuerza de empuje y la tasa de consumo del propelente por:

$$I_{sp} = \frac{\mathbf{T}}{\dot{m}_p g} \quad (2.4)$$

Donde  $g$  es la aceleración de la gravedad. Sustituyendo la Ec. (2.3) en la Ec. (2.4) se obtiene el impulso específico para cualquier propulsor:

$$\boxed{I_{sp} = \frac{v_{ex}}{g}} \quad (2.5)$$

La masa total de una nave espacial está dada por dos términos:

$$m_t(t) = m_0 + m_p$$

Donde  $m_0$  es la masa de la nave, es decir, su estructura, carga útil, etc. Si se analiza el cambio de la masa total de la nave, se tendrá:

$$\frac{dm_t(t)}{dt} = \frac{d}{dt} (m_0 + m_p) = \frac{dm_p}{dt} \quad (2.6)$$

Esto es porque la masa  $m_0$  no cambia en el tiempo, mientras que la masa del propelente sí lo hace.

Sustituyendo la Ec. (2.6) en la Ec. (2.3), e igualando con la 2a Ley de Newton, se obtiene:

$$m_t \frac{dv}{dt} = -v_{ex} \frac{dm_t}{dt}$$

Que puede escribirse como:

$$dv = -v_{ex} \frac{dm_t}{m_t}$$

Integrando sobre una trayectoria donde se pasa de una velocidad inicial  $v_i$  a una velocidad final  $v_f$ , así como de una masa inicial  $m_0 + m_p$  a una masa final  $m_0$  se obtiene:

$$\int_{v_i}^{v_f} dv = -v_{ex} \int_{m_0+m_p}^{m_0} \frac{dm_t}{m_t}$$

Resulta:

$$v_i - v_f = v_{ex} \ln \left( \frac{m_0}{m_0 + m_p} \right)$$

Y de ahí se obtiene la ecuación de Tsiolkovsky:

$$\boxed{m_0 = (m_0 + m_p) \exp \left( \frac{-\Delta v}{v_{ex}} \right)} \quad (2.7)$$

Y la diferencia de velocidades puede ser escrita como:

$$\Delta v = (I_{sp} \cdot g) \ln \left( \frac{m_0 + m_p}{m_0} \right) \quad (2.8)$$

Así también, la Ec. (2.7) se puede escribir en términos de la masa de propelente necesaria:

$$m_p = m_0 \left[ \exp \left( \frac{\Delta v}{v_{ex}} \right) - 1 \right] = m_0 \left[ \exp \left( \frac{\Delta v}{I_{sp} \cdot g} \right) - 1 \right] \quad (2.9)$$

[12]

Así con éstas formulas es posible calcular la masa de combustible  $m_p$  necesaria para lograr un  $\Delta v$  suficiente para realizar la maniobra orbital deseada en la misión espacial.

## 2.2. Propulsión Eléctrica versus Propulsión Química

Hay diversos tipos de propulsión, y toda esta variedad existe por las diferentes necesidades que se han tenido dentro de las misiones espaciales. Mientras que la propulsión química da mucha fuerza de empuje, pero poco impulso específico; la propulsión eléctrica ofrece poco empuje pero mucho impulso específico. A

continuación en la Fig. 2.3, se presenta un mapa conceptual con la clasificación de los diversos sistemas de propulsión.

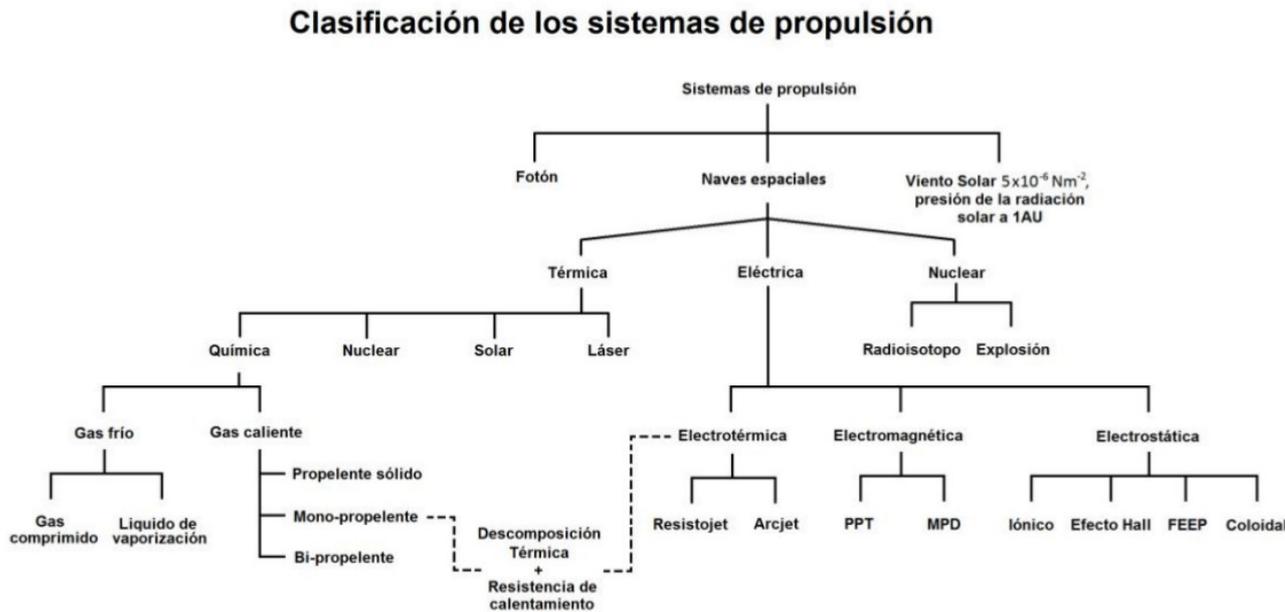


Figura 2.3: Clasificación de los sistemas de propulsión [25].

Los sistemas de propulsión más comúnmente utilizados son los químicos, los eléctricos y los nucleares. En especial se utilizan los sistemas de propulsión químicos para propulsar cohetes al espacio, pues la propulsión química es la que mayor empuje ofrece. La propulsión eléctrica se utiliza típicamente para realizar maniobras orbitales satelitales que requieren de mucha precisión, y la propulsión nuclear suele utilizarse para misiones espaciales donde se busca llegar a distancias donde la luz del sol no puede aportar energía al satélite y deben generarse cantidades grandes de energía con poca masa.

Así también se presenta en la Fig. 2.4 un esquema con parámetros de rendimiento típicos para varios sistemas de propulsión, se puede así comparar éstos valores de forma cuantitativa.

Engine Type	Specific Impulse <sup>a</sup> (sec)	Maximum Temperature (°C)	Thrust-to-Weight Ratio <sup>b</sup>	Propulsion Duration	Specific Power <sup>c</sup> (kW/kg)	Typical Working Fluid	Status of Technology
Chemical—solid or liquid bipropellant	200–468	2500–4100	10 <sup>-2</sup> – 100	Seconds to a few minutes	10 <sup>-1</sup> – 10 <sup>3</sup>	Liquid or solid propellants	Flight proven
Liquid monopropellant	194–223	600–800	10 <sup>-1</sup> – 10 <sup>-2</sup>	Seconds to minutes	0.02–200	N <sub>2</sub> H <sub>4</sub>	Flight proven
Resistojet	150–300	2900	10 <sup>-2</sup> – 10 <sup>-4</sup>	Days	10 <sup>-3</sup> – 10 <sup>-1</sup>	H <sub>2</sub> , N <sub>2</sub> H <sub>4</sub>	Flight proven
Arc heating—electrothermal	280–1200	20,000	10 <sup>-4</sup> – 10 <sup>-2</sup>	Days	10 <sup>-3</sup> – 1	N <sub>2</sub> H <sub>4</sub> , H <sub>2</sub> , NH <sub>3</sub>	Flight proven
Electromagnetic including pulsed plasma (PP)	700–2500	—	10 <sup>-6</sup> – 10 <sup>-4</sup>	Weeks	10 <sup>-3</sup> – 1	H <sub>2</sub>	Flight proven
Hall effect	1000–1700	—	10 <sup>-4</sup>	Weeks	10 <sup>-1</sup> – 5 × 10 <sup>-1</sup>	Xenon	Flight proven
Ion—electrostatic	1200–5000	—	10 <sup>-6</sup> – 10 <sup>-4</sup>	Months	10 <sup>-3</sup> – 1	Xenon	Several have flown
Solar heating	400–700	1300	10 <sup>-3</sup> – 10 <sup>-2</sup>	Days	10 <sup>-2</sup> – 1	H <sub>2</sub>	In development

Figura 2.4: Rangos de parámetros de rendimiento típicos para varios sistemas de propulsión [23].

Y en la Fig. 2.5 se presenta una gráfica comparativa donde se muestra el cociente entre empuje y peso del vehículo contra la velocidad de escape efectiva. Aquí vienen incluidos diversos tipos de propulsores.

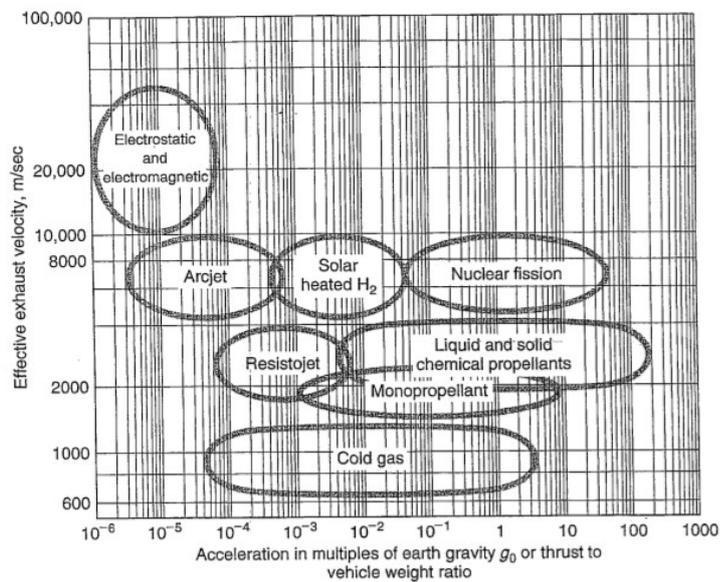


Figura 2.5: Velocidades de escape como función de las aceleraciones típicas de los vehículos propulsados. Las regiones indican valores de rendimiento aproximados para diferentes tipos de sistemas de propulsión. La masa del vehículo incluye el sistema de propulsión y se asume que la carga útil no se encuentra a bordo [23].

El cociente entre empuje y peso del vehículo se puede interpretar como la cantidad de empuje en Newtons necesaria para acelerar un Newton de peso del vehículo. Se puede ver que el sistema de propulsión que requiere menos empuje para mover al vehículo es la propulsión eléctrica, mientras que los sistemas de propulsión química son los que requieren más empuje.

La velocidad de escape puede interpretarse como el cociente entre empuje y flujo másico del propelente, es decir, la cantidad de empuje obtenido por cada partícula de propelente que es expulsada por la tobera. Se puede ver que la propulsión eléctrica tiene aquí una ventaja única sobre los propulsores químicos, y es su velocidad de escape muy alta.

Imagínese una misión espacial a la que se debe llevar una carga útil de 500 kg logrando una maniobra orbital que requiere un  $\Delta v$  de 5 km/s. Si se utiliza un propulsor químico con una velocidad de escape típica de 3 km/s, con un Isp típico de 306 s, utilizando la Ec. (2.9), se necesitará una masa de propelente de 2147 kg. Pero utilizando un propulsor iónico (el cual también es electrostático como el propulsor Hall) con una velocidad de escape típica de 30 km/s, con un Isp típico de 3060 s, sólo se necesitarán 91 kg de propelente, lo cual es cerca de 24 veces menos masa de propelente requerida teniendo una velocidad de escape 10 veces mayor [12].

### 2.3. Métodos de Propulsión Eléctrica

La propulsión eléctrica fue concebida primeramente por Robert Goddard en 1906 e independientemente descrita por Tsiolkovsky en 1911. Muchos conceptos de propulsión eléctrica fueron incluidos en la literatura de Hermann Oberth en 1929 [12].

El primer propulsor eléctrico del mundo fue ideado en 1929 por Valentin Glushko (principal ingeniero de motores de cohetes soviético durante la carrera espacial) en el “Gas Dynamic Laboratory” en Leningrado, Rusia, el cual funcionaba de una manera similar a los cohetes de propulsión química, salvo que en lugar de hacer reacciones químicas para provocar explosiones dentro de la cámara de combustión, se usan descargas eléctricas muy energéticas que ionizan el propelente y por medio de altos voltajes expulsan el material por la tobera generando fuertes impulsos. No se generaba tanta fuerza de empuje como con la propulsión química pero sí bastante más impulso específico [24].

El primer análisis sistemático de los sistemas de propulsión eléctrica fue hecho

por Ernst Stuhlinger en su libro “Ion Propulsion for Space Flight” en 1964, y la física de los propulsores eléctricos fue descrita de una forma detallada por Robert Jahn en 1968 [12]. A partir de los años 60’s se ha aprovechado el gran impulso específico de la propulsión eléctrica para realizar misiones espaciales, pues a pesar de no proporcionar un empuje grande, el impulso específico alcanzado sirve de manera excepcional en el entorno espacial donde permite alcanzar  $\Delta v$ ’s lo suficientemente grandes como para llegar a la luna, Marte, e incluso permite pensar en viajes interestelares para un futuro.

Los propulsores eléctricos se pueden clasificar en tres tipos esenciales. Esta clasificación está basada en los diferentes métodos para producir el empuje del propulsor. Los tres tipos son: “Electrotérmicos”, “Electrostáticos” y “Electromagnéticos”.

Los **eléctrotérmicos** consisten en que la potencia eléctrica es utilizada para calentar el propelente y expulsarlo a través de la tobera, los más típicos son el resistojet y el arcjet (Fig. 2.6). Ofrecen un impulso específico moderadamente mayor a los propulsores químicos.

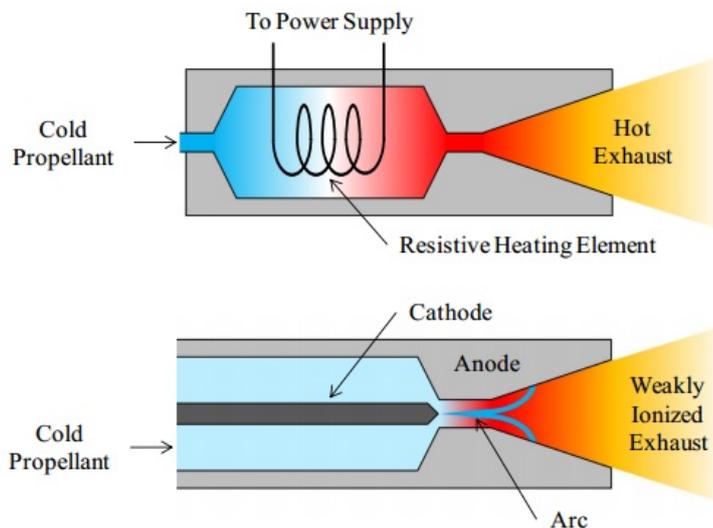


Figura 2.6: En la parte superior se presenta una ilustración de la geometría de un resistojet, mientras que en la parte inferior se presenta el arcjet [11].

Los **electrostáticos** funcionan de tal manera que el propelente es ionizado por diferentes medios y acelerado aplicando un alto potencial eléctrico. Los más utilizados son el propulsor iónico (Fig. 2.7) y el propulsor Hall (Fig. 2.8). Es capaz

de producir muy altos impulsos específicos pero fuerzas de empuje pequeñas ( $\mu\text{N}$ - $\text{N}$ ), las cuales también ayudan a tener un mejor control en el movimiento del satélite, permitiendo misiones espaciales donde se requiere una gran precisión.

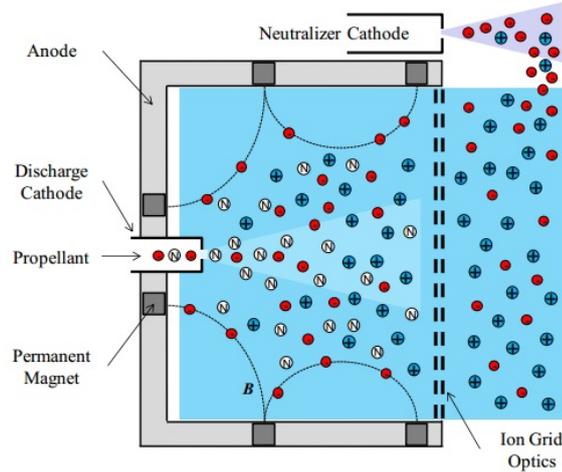


Figura 2.7: Ilustración de la geometría y operación de un propulsor iónico mallado [11].

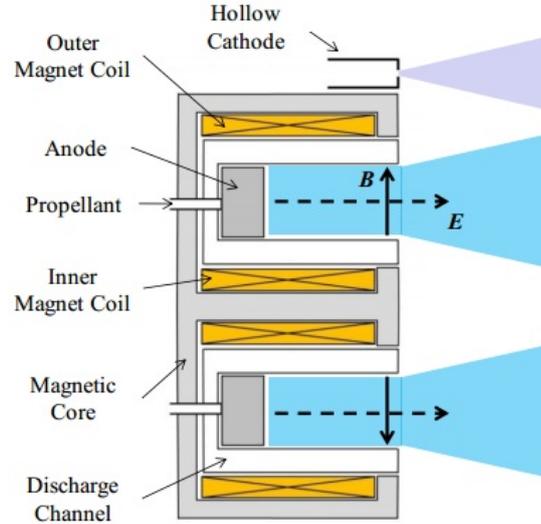


Figura 2.8: Ilustración de la geometría básica de un propulsor Hall [11].

En el caso de los propulsores **electromagnéticos**, el propelente es ionizado por diferentes medios y acelerado por campos eléctricos, magnéticos, o la combinación entre ellos (Fig. 2.9). Éstos propulsores generan muy altos impulsos

específicos ( $\approx 2500$  s) así como también generan fuerzas de empuje mucho más altas que los propulsores electrostáticos (N-kN) [24].

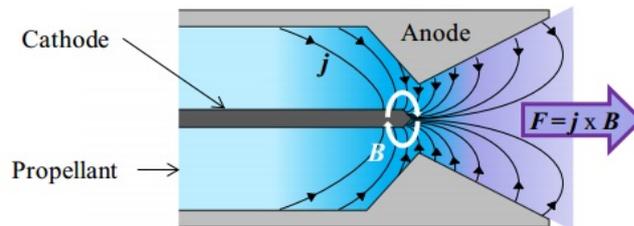


Figura 2.9: Ilustración de la geometría y operación de un propulsor magnetoplasmadinámico (MPD), también llamado propulsor de fuerza de Lorentz [11].

Por los valores típicos de impulso específico que requieren las misiones espaciales con microsátélites, así como por la baja potencia requerida, los de tipo electrostático resultan una muy buena opción de estudio, investigación y desarrollo.



## Capítulo 3

# TEORÍA DE PLASMAS

### 3.1. Ionización

Quizás en algunos libros de texto o programas de televisión se escucha que cerca del 99 % de la materia visible en el universo está en forma de plasma, es decir, en la forma de un gas electrificado con sus átomos disociados en iones positivos y electrones negativos. A plena luz del día en la vida cotidiana realmente no se puede percibir esto, pues la mayor parte de cosas en la Tierra están en un estado de equilibrio térmico; los árboles, las piedras, etc. Son pocos los ejemplos de plasma que se pueden ver en la vida cotidiana, como un relámpago en una tormenta eléctrica, una lámpara de neón o una aurora boreal.

Pero generalmente uno no está consciente de que la mayor parte de materia en el universo está fuera de la tierra, y se puede ver todas las noches en la probablemente infinita cantidad de estrellas en el cielo, entre ellas el Sol.

La cantidad de ionización esperada para un gas en equilibrio térmico está dada por la ecuación de Saha, la cual está dada por:

$$\frac{n_i}{n_n} \approx 2,4 \times 10^{21} \frac{T^{3/2}}{n_i} \exp\left(\frac{-U_i}{K_B T}\right) \quad (3.1)$$

Donde  $n_i$  es la densidad de átomos ionizados por metro cúbico, y  $n_n$  la densidad de átomos neutros,  $T$  es la temperatura del gas en grados Kelvin,  $K_B$  es la constante de Boltzmann (equivalente a  $1,38 \times 10^{-23}$  J/K), y  $U_i$  es la energía de ionización del gas, es decir la mínima cantidad de energía para remover el electrón más externo de un átomo.

Para aire ordinario a temperatura ambiente se puede tomar  $n_n \approx 3 \times 10^{25} \text{ m}^{-3}$ ,  $T \approx 300 \text{ K}$ , y  $U_i = 14.5 \text{ eV}$  (para el nitrógeno que es el elemento más abundante en la atmósfera), se obtiene que la razón de ionización es tremendamente baja:  $n_i/n_n \approx 10^{-122}$ . Por lo tanto la ionización prácticamente no se da en las condiciones naturales de la atmósfera dentro de la Tierra.

El significado físico de la ecuación de Saha se analiza a continuación. Un átomo es ionizado cuando sufre una colisión de suficiente energía como para soltar uno de sus electrones. En un gas frío tales colisiones ocurren poco frecuentemente, pues el átomo debe estar acelerado a una energía mucho mayor que la promedio en el gas por medio de una serie de colisiones favorables. El factor exponencial en la ecuación de Saha expresa el hecho de que el número de átomos con alta velocidad cae exponencialmente con  $U_i/K_B T$ . Una vez que el átomo ha sido ionizado, éste permanece cargado hasta que encuentre a un electrón, pues éste se recombinará fácilmente con el átomo ionizado volviéndolo neutral de nuevo. La tasa de recombinación claramente depende de la densidad de electrones, la cual equivale a  $n_i$ . Y ésta es la razón por la cual el plasma existe en el medio interestelar, pues hay un valor muy bajo de  $n_i$  (un átomo ionizado por centímetro cúbico aproximadamente), por lo tanto la tasa de recombinación es muy baja y permite la existencia de plasma [10].

### 3.2. Definición de un Plasma

Aunque un plasma es siempre un gas ionizado, no puede llamársele plasma a cualquier gas ionizado. Se puede definir a un plasma de la siguiente manera:

“Un plasma es un gas cuasineutral de partículas cargadas y neutras las cuales exhiben un comportamiento colectivo” [10].

El término de “cuasineutralidad” se verá a más detalle en el siguiente subcapítulo, tanto la cuasineutralidad como el comportamiento colectivo se pueden resumir en los criterios denotados por las ecuaciones que se verán a detalle en los siguientes subcapítulos, y con respecto al comportamiento colectivo se puede decir lo siguiente.

Considérense las fuerzas que actúan sobre una molécula de aire. Como la molécula es neutral, no hay fuerzas electromagnéticas netas sobre ella, y la fuerza de gravedad es despreciable. La molécula se mueve libremente hasta que haga una colisión con otra molécula, y estas colisiones controlarán el movimiento de la partícula. Una fuerza macroscópica aplicada al gas neutro, como las ondas

de sonido generadas por un altavoz, es transmitida a los átomos por igual por medio de colisiones. Pero en un plasma la situación es muy diferente; mientras se mueven las partículas (que en éste caso están cargadas), éstas pueden generar concentraciones locales de cargas positivas o negativas, y a su vez generar campos eléctricos, así también como corrientes eléctricas y a su vez campos magnéticos; éstos campos afectan el movimiento de otras partículas cargadas más lejanas.

Es decir, el comportamiento colectivo consiste en que cualidades particulares microscópicas de muchas partículas son capaces de reflejarse en propiedades y comportamientos macroscópicos.

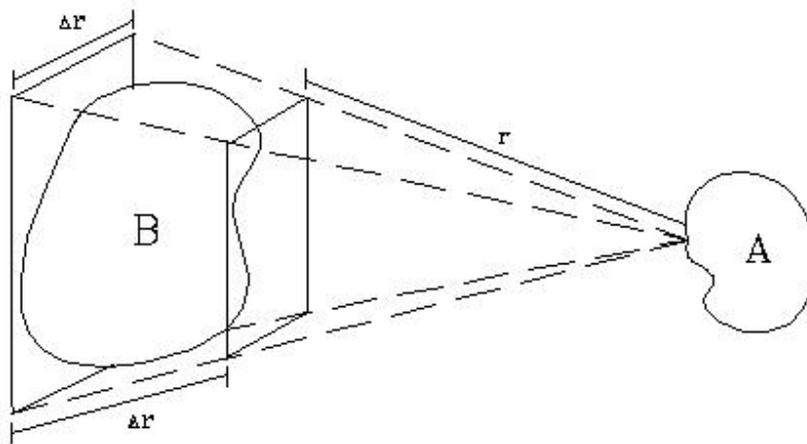


Figura 3.1: Dos regiones de plasma (A y B) separadas por una distancia  $r$  [10].

Considérese ahora el efecto mutuo entre dos regiones de plasma (A y B) ligeramente cargadas y separadas a una distancia  $r$ . La fuerza Coulombiana entre cada partícula contenida dentro de A y B disminuye como  $1/r^2$ , sin embargo, para un ángulo sólido dado (es decir  $\Delta r/r = \text{constante}$ ), el volumen de partículas de plasma en B que puede afectar a A aumenta como  $r^3$  (Fig. 3.1). Por lo tanto, los elementos de plasma ejercen fuerzas Coulombianas entre ellos con un factor de  $r$ , es decir, se afectan entre así a larga distancia. Es ésta fuerza Coulombiana a distancia la que le da al plasma un gran repertorio de movimientos posibles. Por “comportamientos colectivos” se debe entender a que los movimientos ocurren no sólo en condiciones locales sino también en el estado del plasma en regiones lejanas también.

Un gas en equilibrio térmico tiene partículas que se mueven a diversas velocidades y en todas direcciones, la distribución más probable para estas velocidades es conocida como la distribución de Maxwell, ésta distribución se expresa, en

una dimensión, como:

$$f(u) = A \exp\left(\frac{-\frac{1}{2}mu^2}{K_B T}\right) \quad (3.2)$$

Donde  $f(u)du$  es el número de partículas por metro cúbico con velocidad entre  $u$  y  $u + du$ ,  $\frac{1}{2}mu^2$  es la energía cinética y  $K_B$  es la constante de Boltzmann. Ésta distribución se puede representar gráficamente por la siguiente Fig. 3.2:

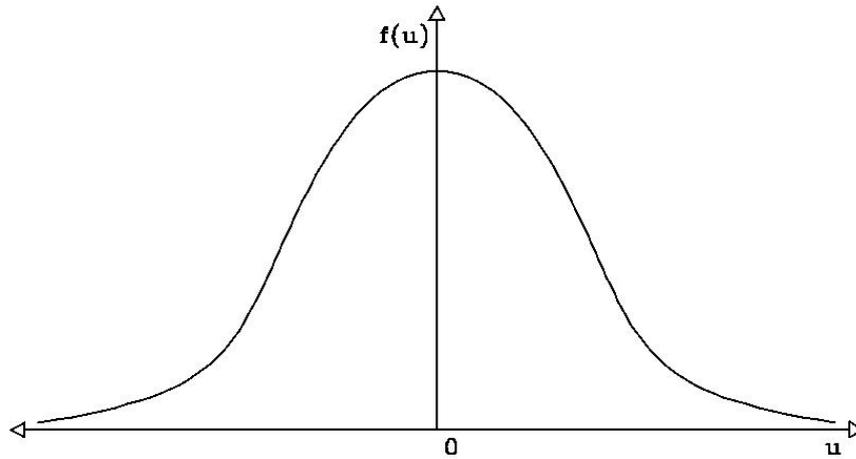


Figura 3.2: Distribución de velocidades de Maxwell en una dimensión [10].

La densidad de partículas (partículas por metro cúbico)  $n$  está dada por:

$$n = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)du \quad (3.3)$$

Y la constante  $A$  de la Ec. (3.2) está dada por:

$$A = n \sqrt{\frac{m}{2\pi K_B T}} \quad (3.4)$$

El ancho de la distribución está caracterizado por la constante  $T$ , a la cual se le llama temperatura. El exacto significado de  $T$  se obtiene calculando la energía cinética promedio de las partículas en ésta distribución por medio de:

$$\langle E_c \rangle = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} m u^2 f(u) du}{\int_{-\infty}^{\infty} f(u) du} \quad (3.5)$$

Haciendo las sustituciones:  $v = \sqrt{\frac{2K_B T}{m}}$ ,  $y = \frac{u}{v}$  en la Ec. (3.2) se obtiene:

$$f(u) = A \exp\left(\frac{-u^2}{v^2}\right) \quad (3.6)$$

Sustituyendo la Ec. (3.6) en la Ec. (3.5) resulta que:

$$\langle E_c \rangle = \frac{\frac{1}{2} m A v^3 \int_{-\infty}^{\infty} y^2 \exp(-y^2) dy}{A v \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-y^2) dy} \quad (3.7)$$

Resolviendo la integral del numerador por partes, cancelando las integrales, y revirtiendo las sustituciones que se tenían, se obtiene:

$$\boxed{\langle E_c \rangle = \frac{1}{2} K_B T} \quad (3.8)$$

Como el gas está en equilibrio térmico se tendrá un caso análogo también en las dos direcciones faltantes, así, para el caso 3-Dimensional se tiene a la distribución de Maxwell como:

$$f(u, v, w) = A_3 \exp\left(\frac{-\frac{1}{2} m (u^2 + v^2 + w^2)}{K_B T}\right) \quad (3.9)$$

Donde:

$$A_3 = n \left( \frac{m}{2\pi K_B T} \right)^{\frac{3}{2}} \quad (3.10)$$

De manera análoga, la energía cinética promedio estará dada por:

$$\langle E_c \rangle = \frac{\iiint_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} A_3 m (u^2 + v^2 + w^2) \exp \left( \frac{-\frac{1}{2} m (u^2 + v^2 + w^2)}{K_B T} \right) dudvdw}{\iiint_{-\infty}^{\infty} A_3 \exp \left( \frac{-\frac{1}{2} m (u^2 + v^2 + w^2)}{K_B T} \right) dudvdw} \quad (3.11)$$

Haciendo el procedimiento anterior de sustituciones, al ser simétrica la expresión de la energía para u, v y w, se obtiene un factor de 3, de tal forma que:

$$\langle E_c \rangle = \frac{3A_3 \int \frac{1}{2} m u^2 \exp \left( \frac{-\frac{1}{2} m u^2}{K_B T} \right) du \exp \left( \frac{-\frac{1}{2} m (v^2 + w^2)}{K_B T} \right) dv dw}{A_3 \int \exp \left( \frac{-\frac{1}{2} m u^2}{K_B T} \right) du \exp \left( \frac{-\frac{1}{2} m (v^2 + w^2)}{K_B T} \right) dv dw} \quad (3.12)$$

Análogamente se obtiene que la energía cinética promedio es:

$$\boxed{\langle E_c \rangle = \frac{3}{2} K_B T} \quad (3.13)$$

Por lo tanto equivale a  $\frac{1}{2} K_B T$  por cada grado de libertad. Como la temperatura T tiene una gran relación con la energía  $\langle E_c \rangle$ , suele hablarse de la temperatura de un plasma en unidades de energía.

Es interesante el hecho de que un plasma puede tener diversas temperaturas al mismo tiempo, esto ocurre aquellas veces en las que los iones y electrones tienen distribuciones de Maxwell diferentes, de ésta forma se tendrá temperatura para los iones  $T_i$  y temperatura para los electrones  $T_e$ . Y esto se puede presentar

debido a que la cantidad de colisiones entre los iones o entre los electrones consigo mismos sea mayor que la cantidad de colisiones entre los iones y electrones. De ésta forma cada especie estará en su propio equilibrio térmico, pero el plasma puede no durar lo suficiente para que ambas temperaturas se igualen.

Cuando se tiene un campo magnético  $\mathbf{B}$ , incluso para una sola especie, por ejemplo los iones, se pueden tener también dos temperaturas. Esto es porque las fuerzas que actúan sobre un ión a lo largo del campo  $\mathbf{B}$  serán diferentes, debido a la fuerza de Lorentz, a aquellas que actúan perpendicularmente a  $\mathbf{B}$ . Así las componentes de la velocidad paralela a  $\mathbf{B}$  y perpendicular a  $\mathbf{B}$  pertenecerán a dos distribuciones de Maxwell distintas con temperaturas asociadas  $T_{\parallel}$  y  $T_{\perp}$  [10].

### 3.3. Velocidad térmica

La distribución de Maxwell-Boltzmann se puede representar entonces por la función:

$$f(u) = \sqrt{\left(\frac{m}{2\pi K_B T}\right)^3} 4\pi u^2 \exp\left(-\frac{mu^2}{2K_B T}\right) \quad (3.14)$$

La velocidad térmica del plasma se puede obtener calculando la velocidad promedio de las partículas, es decir, el valor esperado de la distribución de velocidades por medio de la siguiente Ec. (3.15)

$$v_T = \langle u \rangle = \int_0^{\infty} u f(u) du \quad (3.15)$$

Así sustituyendo la Ec. (3.14) en la Ec. (3.15), se obtiene:

$$v_T = 4\pi \sqrt{\left(\frac{m}{2\pi K_B T}\right)^3} \int_0^{\infty} u^3 \exp\left(-\frac{mu^2}{2K_B T}\right) du$$

Resolviendo la integral se obtiene finalmente que la velocidad térmica se encuentra dada por:

$$v_T = \sqrt{\frac{8K_B T}{\pi m}} \quad (3.16)$$

### 3.4. Longitud de Debye

Imagínese que se introducen dos esferas metálicas conectadas a una batería dentro de un plasma, de manera que se pueda producir un campo eléctrico dentro del plasma como se ve en la siguiente figura:

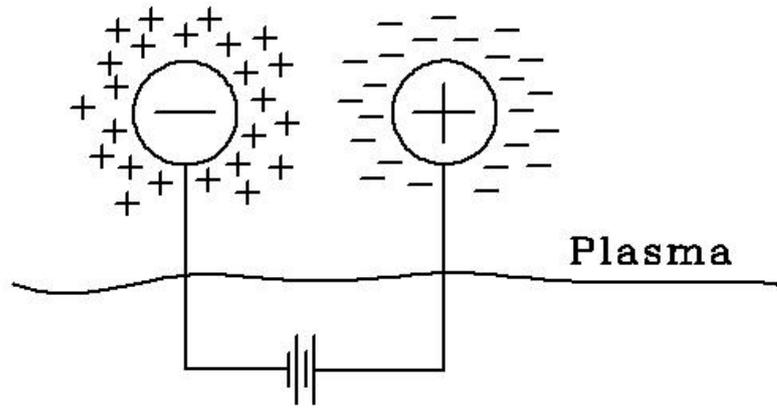


Figura 3.3: Electrodo introducidos en un plasma [10].

Las esferas atraerán partículas a cada carga opuesta, es decir, se formará una nube de electrones alrededor de la esfera cargada positivamente, y se formará una nube de iones alrededor de la esfera cargada negativamente.

Habrá justo el mismo número de cargas tanto en cada esfera como en cada nube de partículas circundantes; es decir, será perfecto el blindaje y no habrá campos eléctricos presentes en el plasma fuera de las nubes de carga.

Aquellas partículas que se encuentren en las orillas de las nubes sentirán un débil campo eléctrico hacia las esferas cargadas, pero tendrán la suficiente energía térmica para escapar del pozo de potencial electrostático creado por cada esfera cargada.

Por lo tanto se dice que la orilla de la nube ocurre en el radio en el que la

energía potencial electrostática es aproximadamente igual a la energía térmica  $K_B T$  de las partículas.

Para calcular el grosor de tal nube de carga se debe considerar un cierto potencial  $\phi_0$  a una distancia  $x = 0$  de la superficie de la esfera cargada, y se tendrá que calcular la función  $\phi(x)$ . Por tanto se utilizará la ecuación de Poisson para una dimensión, tomando la aproximación de que  $m_i/m_e$  (masa del ión entre masa del electrón) es bastante grande como para que la inercia de los iones evite que éstos se muevan de manera significativa en la escala temporal del experimento. Así resulta la ecuación:

$$\epsilon_0 \nabla^2 \phi = \epsilon_0 \frac{d^2 \phi}{dx^2} = -q_e (n_i - n_e) \quad (3.17)$$

La densidad de partículas en un lugar muy lejano de la esfera cargada ( $n_\infty$ ) será equivalente a la densidad de iones, es decir  $n_\infty = n_i$ .

En presencia de una energía potencial  $q\phi$ , la función de distribución de electrones resultará como:

$$f(u) = A \exp \left( \frac{-\frac{1}{2} m u^2 + q\phi}{K_B T_e} \right) \quad (3.18)$$

Lo que dice ésta ecuación es que en las regiones donde sea mayor el potencial eléctrico habrá menos partículas, esto es porque no todas las partículas tienen suficiente energía para llegar a las regiones de alto potencial.

Integrando la Ec. (3.18) sobre  $u$ , haciendo  $q = -q_e$ , y notando que  $n_e(\phi \rightarrow 0) = n_\infty$ , se puede ver que:

$$n_e = n_\infty \exp \left( \frac{q_e \phi}{K_B T_e} \right) \quad (3.19)$$

Sustituyendo  $n_i$  y  $n_e$  en la Ec. (3.17) se obtiene:

$$\epsilon_0 \frac{d^2 \phi}{dx^2} = q_e n_\infty \left\{ \left[ \exp \left( \frac{q_e \phi}{K_B T_e} \right) \right] - 1 \right\} \quad (3.20)$$

En la región en la que  $\left| \frac{q_e \phi}{K_B T_e} \right| \ll 1$ , se puede expandir la exponencial en una serie de Taylor de la siguiente manera:

$$\epsilon_0 \frac{d^2 \phi}{dx^2} = q_e n_\infty \left[ \frac{q_e \phi}{K_B T_e} + \frac{1}{2} \left( \frac{q_e \phi}{K_B T_e} \right)^2 + \dots \right] \quad (3.21)$$

En los límites de la nube donde  $\left| \frac{q_e \phi}{K_B T_e} \right|$  puede ser grande no hay simplificaciones posibles, afortunadamente éste límite no contribuye mucho al grosor de la nube pues el potencial cae muy rápido en la región. Así pues sólo se tomarán los términos lineales de la Ec. (3.21), es decir:

$$\epsilon_0 \frac{d^2 \phi}{dx^2} = n_\infty \frac{q_e^2}{K_B T_e} \phi \quad (3.22)$$

Se define así la longitud de Debye como:

$$\lambda_D = \left( \frac{\epsilon_0 K_B T_e}{n q_e^2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.23)$$

Y así la solución de la Ec. (3.22) como:

$$\phi(x) = \phi_0 \exp \left( \frac{-|x|}{\lambda_D} \right) \quad (3.24)$$

La longitud de Debye representa el grosor de la nube de carga, se puede ver que mientras la densidad de partículas aumenta, la longitud de Debye disminuye, pues cada capa externa tiene más y más electrones. Así también la longitud de Debye crece con  $K_B T_e$ . Otra observación importante es que es la temperatura de electrones  $T_e$  aquella que define la longitud de Debye, pues los electrones crean el blindaje de Debye; al ser menos masivos que los iones, se mueven creando un exceso o déficit de carga negativa.

Se pueden utilizar las siguientes formas prácticas de la Ec. (3.23); para la temperatura T en grados Kelvin:

$$\lambda_D = 69 \left( \frac{T}{n} \right)^{\frac{1}{2}} m \quad (3.25)$$

Y para la energía  $K_B T$  en eV:

$$\lambda_D = 7430 \left( \frac{K_B T}{n} \right)^{\frac{1}{2}} m \quad (3.26)$$

La cuasineutralidad se puede definir entonces bajo el concepto de Longitud de Debye. Si las dimensiones  $L$  del sistema en el que está inmerso el plasma son mucho más grandes que la longitud de Debye  $\lambda_D$  del plasma, entonces cualquier concentración de carga que surja dentro del plasma, o potencial externo que sea introducido al sistema, generará un blindaje de Debye a una distancia corta comparada con  $L$ , dejando al bulto de plasma libre de potenciales eléctricos o campos eléctricos grandes. Fuera del blindaje, mientras el potencial electrostático disminuye,  $n_i$  y  $n_e$  son prácticamente iguales; y un pequeño cambio en la carga eléctrica dentro del plasma puede generar potenciales del orden de  $K_B T/q_e$ . En éstas condiciones el plasma es “cuasineutro”, es decir, se tienen densidades de iones y electrones prácticamente iguales, con diferencias numéricas proporcionales a  $10^{-6}$ , y se puede definir a “ $n$ ” como la “densidad del plasma” denotada por:  $n_i \simeq n_e \simeq n$ . Por lo tanto el plasma es neutro en cuanto a su carga eléctrica promedio, pero no lo suficientemente neutro como para no presentar fuerzas electromagnéticas colectivas [10].

Así un criterio requerido para que un gas ionizado sea plasma es que:

$$\boxed{\lambda_D \ll L} \quad (3.27)$$

### 3.5. Frecuencia del Plasma

Para comenzar a hablar sobre otros tópicos sobre el plasma es necesario introducir nuevos conceptos como lo son el campo eléctrico “ $\vec{E}$ ”, la inducción magnética “ $\vec{B}$ ”, el desplazamiento eléctrico “ $\vec{D}$ ”, el campo magnético “ $\vec{H}$ ”, densidad de carga “ $\rho$ ” y densidad de corriente “ $\vec{J}$ ”.

Éstos conceptos se tratan con cuidado en el apéndice A para llegar a la columna vertical del trabajo que es la fuerza de Lorentz (Ec. A.17).

De la fuerza de Lorentz se puede sacar una ecuación que dé la aceleración de cada partícula en el plasma, dada por:

$$\frac{d\vec{v}_k}{dt} = \frac{q_k}{m_k} \left( \vec{E} + \vec{v}_k \times \vec{B} \right) \quad (3.28)$$

Ésta ecuación permitiría, a partir de conocer a detalle los campos eléctrico y magnético, así como las condiciones iniciales, determinar la posición y velocidad de cada partícula en el plasma. Sin embargo, el movimiento de las partículas del plasma provocarán acumulaciones de carga y densidades de corriente, las cuales afectarán de nuevo a los campos eléctricos y magnéticos.

Una de las propiedades fundamentales del plasma es su tendencia a permanecer eléctricamente neutro, y que cualquier pequeño cambio local de su neutralidad resultante de la separación de cargas genera campos eléctricos y éstos jalan a los electrones a sus posiciones originales. La inercia resultante de éstas fuerzas eléctricas hacen que los electrones oscilen alrededor de la región inicialmente cargada. Como éstas oscilaciones son a muy altas frecuencias, en un promedio temporal la cuasineutralidad se conserva. A continuación se explicará éste fenómeno.

Considérese un estado inicial estacionario en el que se tiene una densidad de electrones uniforme que se neutraliza con la equivalente densidad de iones  $n_e = n_i = n$ . También asúmase que el plasma es “frío”, es decir que el movimiento térmico de los electrones e iones es despreciado [Fig. 3.4 a)]. Posteriormente se perturba el sistema transfiriendo un grupo de electrones de una cierta región A a otra región B, dejando así la región A cargada positivamente y la región B cargada negativamente, dando paso así a un campo eléctrico emergente desde la región A hacia la región B, éste campo eléctrico dará paso a una fuerza Coulombiana entre ambas regiones dada por la Ec. (A.2), como los electrones son mucho más ligeros que los iones se puede asumir que éstos se moverán mucho más rápido que los iones, por lo tanto se puede considerar que el movimiento de los iones es despreciable [Fig. 3.4 b)]. La fuerza Coulombiana actuará para acercar los iones con los electrones, por lo tanto los electrones se acelerarán hacia los iones. Con la aceleración ganarán inercia en la dirección de la región A hasta salirse de ésta región a una región C, la cual ahora estará cargada negativamente, dejando a la región A cargada positivamente [Fig. 3.4 c)], ésta

nueva configuración de cargas provocará un campo eléctrico desde la región A a la región B, lo cual producirá una fuerza de Coulomb en sentido opuesto que acelerará a los electrones desde la región C a la región A, con la inercia que se tenía los electrones regresarán de nuevo a la región B, cargándola negativamente y repitiendo el ciclo [Fig. 3.4 d)]. Éste proceso de oscilación de los electrones alrededor de los iones se repetirá infinitamente si no hay ninguna amortiguación en el sistema.

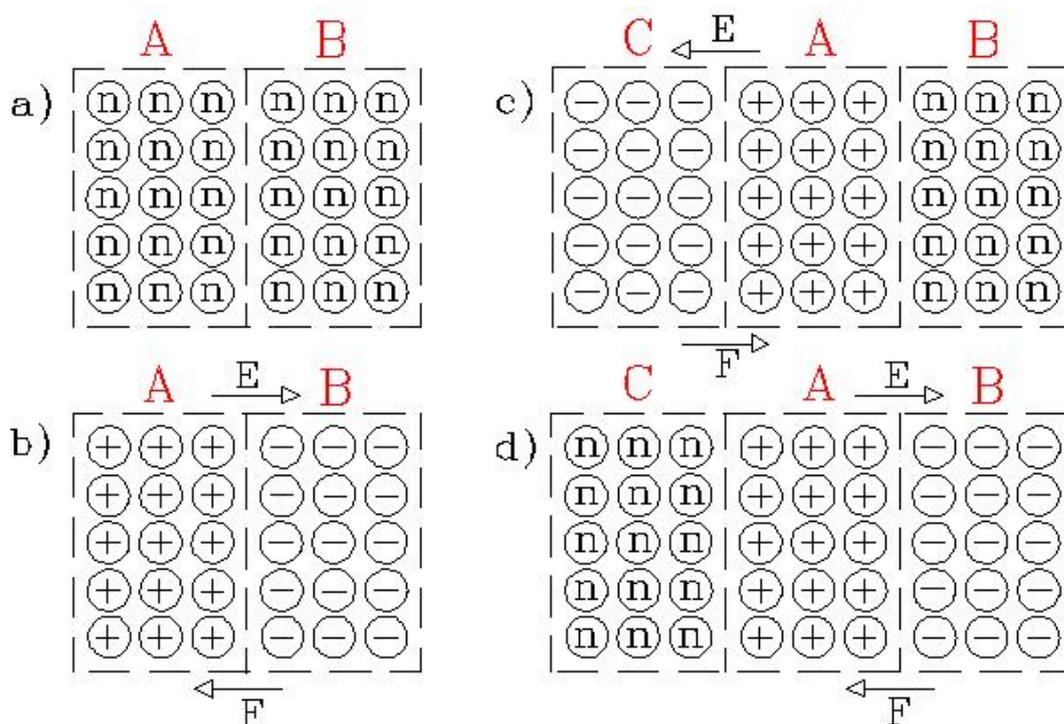


Figura 3.4: Configuraciones de carga en las regiones A, B y C dentro de un plasma eléctricamente neutro.

Con respecto a la frecuencia de ésta oscilación, es lógico pensar que la fuerza eléctrica de restitución dependerá de la cantidad de carga desplazada, es decir, la carga del electrón  $q_e$  multiplicada por la densidad de electrones  $n_e$  oscilando. Así también, al depender la inercia de un objeto de su masa, la inercia del electrón depende de su masa  $m_e$ , por lo tanto la frecuencia de oscilación debe depender de éste parámetro también [15].

La ecuación de movimiento para un electrón en presencia de un campo eléctrico en la dirección  $x$  está dada por:

$$m_e \frac{d^2 x}{dt^2} = q_e E_x \quad (3.29)$$

Considerando la ley de Gauss [Ec. (A.4)] aplicada a una superficie cerrada rectangular  $S$ . Si la densidad de electrones en equilibrio es  $n_e$ , se tendrá que la carga desplazada  $Q$  deberá ser  $Q = Ax n_e q_e$ , donde  $A$  es el área transversal de la superficie  $S$  y  $x$  es el desplazamiento de los electrones. Por lo tanto, sustituyendo éste resultado en la ley de Gauss se obtiene que, del lado izquierdo de la Ec. (A.4):

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = -AE_x$$

Y del lado derecho de la Ec. (A.4):

$$\frac{Q}{\epsilon_0} = \frac{Ax n_e q_e}{\epsilon_0}$$

Y por lo tanto, al igualar ambos lados de la ecuación, y despejar el campo eléctrico, se obtiene:

$$E_x = -\frac{x n_e q_e}{\epsilon_0} \quad (3.30)$$

Sustituyendo éste resultado en la Ec. (3.29), resulta que:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_p^2 x = 0 \quad (3.31)$$

Que es la ecuación del oscilador armónico donde  $\omega_p$  (la frecuencia natural de oscilación) corresponde a la frecuencia del plasma, que equivale, según el despeje realizado para obtener la Ec. (3.31), a:

$$\boxed{\omega_p = \sqrt{\frac{n_e q_e^2}{\epsilon_0 m_e}}} \quad (3.32)$$

### 3.6. Parámetro del Plasma

El blindaje de Debye es un concepto totalmente colectivo, y se necesita una densidad grande de partículas en la nube de carga; pues si hubiera pocas partículas en la nube de carga el concepto de blindaje de Debye ya no sería un concepto estadísticamente válido. Por lo tanto se convierte en una necesidad conocer la cantidad de partículas atrapadas dentro de la longitud de Debye, a este volumen se le llama “Esfera de Debye”, a partir de la Ec. (3.25) se puede calcular la cantidad de partículas dentro de la esfera de Debye ( $N_D = n \left(\frac{4}{3}\pi\lambda_D^3\right)$ ), el número de partículas en la esfera de Debye, llamado también “Parámetro del plasma” (conocido tanto por  $N_D$  como por  $\Gamma$ ) está dado por la siguiente ecuación:

$$N_D = 1,376055 \times 10^6 \left(\frac{T^{\frac{3}{2}}}{n^{\frac{1}{2}}}\right) \quad (3.33)$$

Donde  $T$  va en grados Kelvin [10].

Así también, adicionalmente a la Ec. (3.27), también aparece un nuevo criterio para que un gas ionizado sea plasma, y es que la densidad de partículas dentro de la esfera de Debye sea muy grande, para así presentar el comportamiento colectivo y estadístico característico del plasma:

$$\boxed{N_D \gg 1} \quad (3.34)$$

### 3.7. Frecuencia del Ciclotrón

A continuación el caso en que una partícula cargada se encuentra bajo la influencia de un campo magnético estático y uniforme, sin ningún campo eléctrico. Tomando la Ec. (A.17), pero haciendo  $\vec{E} = 0$ , y utilizando que la fuerza es el

producto de la masa por el cambio de velocidad con respecto al tiempo (2a ley de Newton), se tendrá la siguiente ecuación:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = q (\vec{v} \times \vec{B}) \quad (3.35)$$

Haciendo producto punto de la velocidad con la ecuación anterior, se obtiene:

$$\vec{v} \cdot m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{v} \cdot q (\vec{v} \times \vec{B})$$

Introduciendo la velocidad de la extrema izquierda a la derivada, y resolviendo el producto punto del lado derecho de la ecuación anterior, queda que:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{mv^2}{2} \right) = 0$$

Donde  $v = |\vec{v}|$ .

Por lo tanto el producto  $\frac{mv^2}{2}$ , que equivale a la energía cinética, se mantendrá constante con respecto al tiempo. Ésto debido a que la fuerza de Lorentz siempre es perpendicular a la dirección del movimiento, por tal razón el lado derecho de la ecuación anterior resulta 0.

Ahora se considerará que la velocidad de la partícula tiene una componente paralela al campo magnético y otra componente perpendicular al campo magnético, tales que la suma de cada uno de ellos resulta el vector velocidad de la partícula  $\vec{v} = \vec{v}_{\parallel} + \vec{v}_{\perp}$ . Sustituyendo ésto en la Ec. (3.35) se obtiene:

$$\frac{d\vec{v}_{\parallel}}{dt} + \frac{d\vec{v}_{\perp}}{dt} = \frac{q}{m} (\vec{v}_{\perp} \times \vec{B})$$

La cual se puede separar en dos ecuaciones, una correspondiente a la parte paralela y la otra a la perpendicular. Como la velocidad paralela es paralela al campo magnético  $\vec{B}$ , resultan las siguientes dos ecuaciones.

Para la parte paralela al campo magnético:

$$\frac{d\vec{v}_{\parallel}}{dt} = 0$$

Y de ahí se obtiene que la velocidad de la partícula, paralela al campo  $\vec{B}$ , será constante con respecto al tiempo.

Para la parte perpendicular al campo magnético:

$$\frac{d\vec{v}_{\perp}}{dt} = \frac{q}{m} (\vec{v}_{\perp} \times \vec{B})$$

La cual es una ecuación prácticamente idéntica a la Ec. (3.35), por lo tanto se puede concluir que la magnitud de la velocidad perpendicular es constante y que el campo magnético no afecta para nada la velocidad de las partículas que van en dirección a lo largo del campo magnético  $B$ .

Ahora, considerando un campo magnético en dirección axial  $z$ , tal que  $\vec{B} = B\hat{z}$ , así también considerando que la velocidad de la partícula se puede descomponer en 3 direcciones:  $x$ ,  $y$  y  $z$ . Así la Ec. (3.35), al igual que en el caso anterior, se puede separar en sus diferentes direcciones.

Para la dirección  $x$  se tendrá:

$$m \frac{dv_x}{dt} = qBv_y \quad (3.36)$$

Para la dirección  $y$ :

$$m \frac{dv_y}{dt} = -qBv_x \quad (3.37)$$

Y para la dirección axial  $z$ :

$$m \frac{dv_z}{dt} = 0$$

Ésta última resulta cero porque la dirección de la partícula es la misma que el campo magnético.

Ahora, al obtener la segunda derivada de las Ecs. (3.36) y (3.37), se tiene:

$$\frac{d^2 v_x}{dt^2} + \omega_c^2 v_x = 0 \quad (3.38)$$

$$\frac{d^2 v_y}{dt^2} + \omega_c^2 v_y = 0 \quad (3.39)$$

Donde  $\omega_c$  corresponde a la frecuencia de ciclotrón o “girofrecuencia”.

$$\boxed{\omega_c = -\frac{qB}{m}} \quad (3.40)$$

Las soluciones de las Ecs. (3.38) y (3.39), y la velocidad axial, están dadas por:

$$v_x = v_{\perp} \cos(\omega_c t + \varphi) \quad (3.41)$$

$$v_y = v_{\perp} \operatorname{sen}(\omega_c t + \varphi) \quad (3.42)$$

$$v_z = v_{\parallel} \quad (3.43)$$

Donde  $\varphi$  es una fase arbitraria para la cual el movimiento comienza. Las primeras dos ecuaciones corresponden a funciones de movimiento armónico, mientras que en dirección  $z$  la velocidad es constante. También se puede notar que

se cumple que  $v_{\perp} = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$ . Éstos resultados representan que una partícula cargada inmersa en un campo magnético en dirección axial va a empezar a moverse de forma armónica circular alrededor del eje  $z$ , siempre con la fuerza de Lorentz apuntando hacia el centro del movimiento circular. Para calcular el radio del círculo formado por el movimiento sólo se requiere igualar la fuerza de Lorentz con la fuerza centrípeta, de tal forma que:

$$-\frac{mv_{\perp}^2}{r} = qv_{\perp}B$$

Por lo tanto:

$$\boxed{r_c = -\frac{mv_{\perp}}{qB} = \frac{v_{\perp}}{\omega_c}} \quad (3.44)$$

El cual es el llamado radio de Larmor, radio de ciclotrón, o “giroradio”.

Es de interés notar que el radio de ciclotrón también se puede obtener al integrar las Ecs. 3.41 y 3.42 observando que las ecuaciones de trayectoria en los ejes  $X$  e  $Y$  formarán un movimiento circular (dados los comportamientos ondulatorios de las trayectorias en los ejes  $X$  e  $Y$ ) con un radio equivalente al radio de Larmor.

Por lo general éste radio de Larmor se calcula a partir de la velocidad térmica, pues ésta velocidad es la velocidad promedio con la que viajan las partículas dentro del plasma en cualquier dirección, al viajar en dirección perpendicular al campo magnético es cuando surge la frecuencia de ciclotrón. Escribiéndose también como:

$$\boxed{r_c = -\frac{mv_T}{qB} = \frac{v_T}{\omega_c}} \quad (3.45)$$

Es importante notar que la frecuencia de ciclotrón no depende de la velocidad o la energía cinética, sino únicamente de la intensidad del campo magnético. Partículas con más energía orbitan en círculos con mayor radio completando cada vuelta en el mismo tiempo que partículas con menos energía orbitando en círculos de menor radio. Una forma útil de escribir la frecuencia de ciclotrón (para el electrón) en Hz ( $f_c$ ) es la siguiente:

$$f_c = \frac{\omega_c}{2\pi} \simeq 2,8 \times 10^{10} B \quad (3.46)$$

Donde  $B$  es la magnitud del campo magnético (en Teslas) en el cual la partícula cargada está [15].

Por lo tanto, si hay un campo magnético presente, la partícula cargada del plasma tendrá un movimiento circular alrededor del eje por el cual tiene su dirección el campo magnético, con una frecuencia correspondiente a la frecuencia del ciclotrón (o “girofrecuencia”) y con un radio correspondiente al radio de Larmor (o “giroradio”). Así el movimiento de la partícula cargada se verá como se presenta a continuación:

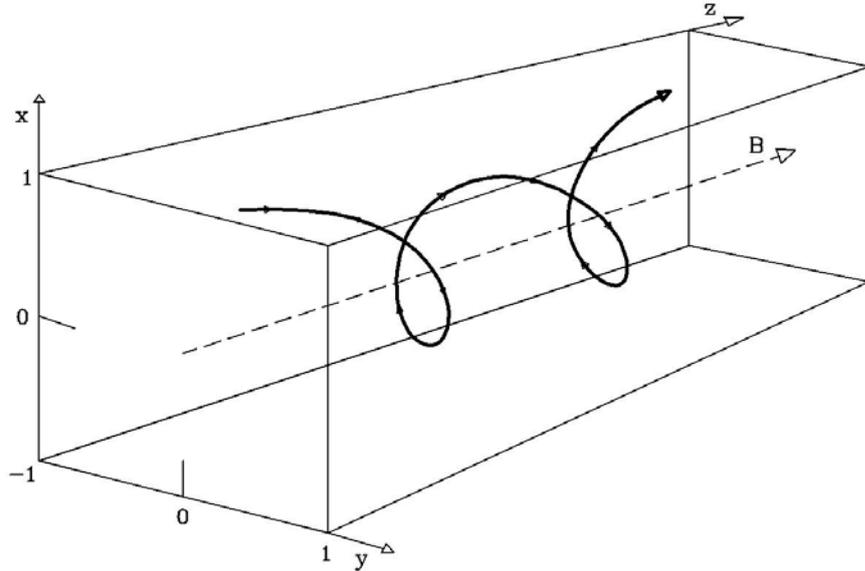


Figura 3.5: Movimiento de una partícula cargada dado un campo magnético homogéneo [15].

### 3.8. Velocidad de Deriva

Cuando hay presentes tanto campo eléctrico como magnético (y ambos son perpendiculares entre sí) se tendrá un arrastre del centro de guía alrededor del cual se presenta el giro de la partícula dentro de los campos. Se considerará nuevamente un campo magnético axial en dirección  $z$  de la forma:  $\vec{B} = B\hat{z}$ , pero ahora tomando un campo eléctrico en dirección  $x$  tal que:  $\vec{E} = E\hat{x}$ . Por otra parte, se separarán la velocidad de la partícula en sus componentes paralela y perpendicular al campo magnético de tal forma que:  $\vec{v}(t) = \vec{v}_\perp(t) + v_z(t)\hat{z}$ . Por lo

tanto la ecuación de movimiento en dirección perpendicular al campo magnético será, sustituyendo éstos valores en la Ec. (A.17):

$$m \frac{d\vec{v}_\perp}{dt} = q \left( E\hat{x} + \vec{v}_\perp \times B\hat{z} \right) \quad (3.47)$$

Se busca una solución de la forma:

$$\vec{v}_\perp(t) = \vec{v}_E + \vec{v}_{ac}(t) \quad (3.48)$$

Donde  $\vec{v}_E$  corresponde a una velocidad constante, que no cambia con el tiempo. Y  $\vec{v}_{ac}(t)$  es la velocidad cambiante en el tiempo.

Sustituyendo la Ec. (3.48) en la Ec. (3.47) se obtiene:

$$m \frac{d\vec{v}_{ac}}{dt} = q \left( E\hat{x} + \vec{v}_E \times B\hat{z} + \vec{v}_{ac} \times B\hat{z} \right) \quad (3.49)$$

Se puede ver que el lado izquierdo de la Ec. (3.49), junto con el último término del lado derecho, forman la ecuación que se estudió en el subcapítulo pasado, por lo que describen movimientos circulares armónicos a la frecuencia de ciclotrón. Así que si se escoge a  $\vec{v}_E$  de tal forma que se anulen los otros dos términos de la Ec. (3.49), se tendrá que:

$$E\hat{x} + \vec{v}_E \times B\hat{z} = 0$$

Por lo tanto, despejando a  $\vec{v}_E$ :

$$\boxed{\vec{v}_E = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{B^2}} \quad (3.50)$$

La cual se denomina “velocidad de deriva” y representa la velocidad perpendicular promedio. Curiosamente ésta no depende de la velocidad o masa de la partícula dentro de los campos. Imagínese dos partículas diferentes inmersas en

los mismos campos  $\vec{E}$  y  $\vec{B}$ , las cuales tendrían una masa mayor y una masa menor, la de masa mayor tendrá un mayor giroradio  $r_c$  y la de menor masa un menor giroradio, pero la de mayor masa tendrá una menor girofrecuencia  $\omega_c$  y la de menor masa tendrá mayor girofrecuencia; ambos efectos se cancelarán entre sí y darán la misma velocidad de deriva  $\vec{v}_E$  [15].

Por ejemplo, si se comparara el giroradio entre un electrón y un ión, se tendría algo como el siguiente esquema:

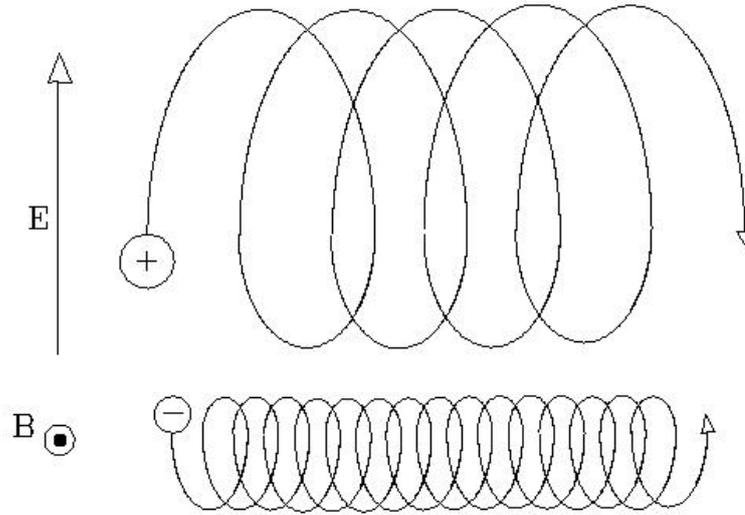


Figura 3.6: Giroradio de un ión y un electrón. A pesar de tener masa diferente, y un giroradio diferente (proporcional a la masa), ambos tienen la misma velocidad de deriva, ésta sólo depende del campo eléctrico y el campo magnético [15].

### 3.9. Camino Libre Medio

El tercer criterio con respecto a la definición de un plasma tiene que ver con las colisiones. Habrá sistemas donde se tengan gases ionizados, como los gases expulsados por un jet, pero que al tener muchas partículas cargadas colisionando con partículas neutras el movimiento del jet estará controlado por fuerzas hidrodinámicas y no por fuerzas electromagnéticas. Si se denota con “ $\omega_p$ ” a la frecuencia típica de las oscilaciones del plasma, y a “ $\tau$ ” como el tiempo promedio entre colisiones con partículas neutras, se podrá comprender así el tercer criterio para poder definir a un plasma, el cual estará dado por [10]:

$$\boxed{\omega_p \tau > 1} \quad (3.51)$$

La probabilidad de colisión entre las partículas está determinada por dos parámetros, los cuales son la densidad de partículas y la llamada «sección transversal». Imagínese una partícula de prueba, la cantidad de partículas con las que ésta partícula prueba puede colisionar dentro de un volumen  $V$  está dada por  $nV$ , donde  $n$  es la densidad de partículas. Si la partícula prueba es completamente sólida, sin interacciones electromagnéticas, se tendrá una sección transversal geométrica  $\sigma_g$  dada por:

$$\sigma_g = \frac{\pi}{4} \varnothing^2 \quad (3.52)$$

Donde  $\varnothing$  es el diámetro de la partícula prueba.

En cambio si se tienen partículas sólidas diferentes, de radios  $r_1$  y  $r_2$  respectivamente, se tendrá una sección transversal dada por una circunferencia de radio equivalente a la suma de los radios de las partículas en colisión:

$$\sigma_g = \pi (r_1 + r_2)^2 \quad (3.53)$$

Como en el plasma se tendrán partículas cargadas eléctricamente, no se podrá tomar ésa definición de sección eficaz, sino una que considere los efectos electromagnéticos. Para tal caso suele utilizarse la ecuación de dispersión de Rutherford dada por:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_{as}} = \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Z_1 Z_2 e^2}{4E_{c0}} \right) \frac{1}{\sin^4 \left( \frac{\theta_R}{2} \right)} \quad (3.54)$$

Ecuación que describe la probabilidad de que las partículas dispersadas incidan en un diferencial de ángulo sólido  $d\Omega_{as}$  siendo desviadas en un ángulo  $\theta_R$ .  $E_{c0}$  es la energía inicial de la partícula dispersada,  $e$  es la carga elemental del electrón (en valor absoluto) y  $Z_1$ ,  $Z_2$  representan la carga eléctrica de las partículas dispersadas y de la partícula objetivo (“target”) respectivamente.

La sección transversal efectiva (en metros cuadrados) para dispersión entre electrones y átomos neutros  $\sigma_{en}(T_e)$  para el xenón puede encontrarse a partir de un ajuste numérico de la sección transversal de dispersión entre electrones y átomos neutros promediada sobre una distribución de Maxwell de electrones dado por [12]:

$$\sigma_{en}(T_e) = 6,6 \times 10^{-19} \left[ \frac{\frac{T_{eV}}{4} - 0,1}{1 + \left(\frac{T_{eV}}{4}\right)^{1,6}} \right] \quad (3.55)$$

Donde  $T_{eV}$  es la temperatura de los electrones dada en eV.

A partir de la sección transversal se puede definir el camino libre medio por la siguiente ecuación:

$$\lambda = \frac{1}{n\sigma} \quad (3.56)$$

Y con ésta se puede definir así también la frecuencia de colisiones entre la partícula prueba con las de su alrededor como:

$$\nu = \frac{v}{\lambda} \quad (3.57)$$

Donde  $v$  es la velocidad de la partícula prueba [16]. Para ésta velocidad se utiliza la velocidad térmica dada por la Eq. (3.16).

### 3.10. El plasma como un fluido

Para hablar de una aproximación del plasma como un fluido se necesita considerar tres fuerzas dominantes en las partículas cargadas contenidas en un plasma.

Por una parte se tiene que los campos eléctricos y magnéticos van a afectar a las partículas cargadas por medio de la fuerza de Lorentz dada por la Ec. (A.17), por otro lado se tiene una fuerza debida al gradiente de presión dada por:

$$F_P = -\frac{\nabla P}{n} = -\frac{\nabla(nK_B T)}{n} \quad (3.58)$$

Donde la presión  $P$  está dada por  $P = nK_B T$ . Para plasmas con temperatura uniforme en el espacio la fuerza por gradiente de presión resulta:

$$F_P = -K_B T \frac{\nabla n}{n} \quad (3.59)$$

La tercera fuerza que se considerará va a ser la que surge de las colisiones entre diferentes partículas cargadas, pues en las colisiones habrá transferencia de momento. Así también deben considerarse las colisiones entre partículas cargadas y átomos neutros. Ésta fuerza está dada como:

$$F_c = -m \sum_{a,b} \nu_{ab} (\vec{v}_a - \vec{v}_b) \quad (3.60)$$

Donde  $\nu_{ab}$  es la frecuencia de colisiones entre las especies a y b.

Usando los tres términos de fuerza se puede escribir la ecuación de momento fluido para cada especie como:

$$\boxed{mn \frac{d\vec{v}}{dt} = mn \left[ \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right] = qn(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) - \nabla \cdot P - mn\nu(\vec{v} - \vec{v}^*)} \quad (3.61)$$

Donde la derivada convectiva se encuentra escrita explícitamente y el término de colisiones debe sumarse sobre todas las colisiones.

Ésta ecuación [Ec. (3.61)] ayuda a evaluar cómo el fluido de alguna especie se comporta en el plasma. Por ejemplo, véase como resulta la ecuación de fluido de movimiento de electrones.

Considerando en una sola dimensión, la ausencia de campos magnéticos y colisiones con otras especies. La Ec. (3.61) resultará:

$$mn_e \left[ \frac{\partial v_z}{\partial t} + (v \cdot \nabla) v_z \right] = qn_e E_z - \frac{\partial P_e}{\partial z} \quad (3.62)$$

Donde  $v_z$  es la velocidad de los electrones en la dirección  $z$  y  $P_e$  representa el término de presión de los electrones. Si se considera que la velocidad es parcialmente uniforme, y se desprecia la derivada convectiva, se obtiene:

$$m \frac{\partial v_z}{\partial t} = -q_e E_z - \frac{K_B T_e}{n_e} \frac{\partial n_e}{\partial z} \quad (3.63)$$

La masa de los electrones es suficientemente pequeña para que éstos reaccionen muy fácilmente a cambios de potencial, por lo tanto se puede considerar que tienen una inercia despreciable, por lo tanto la parte izquierda de la Ec. (3.63) va a cero. Considerando que una fuerza se puede expresar como el gradiente de un potencial, la Ec. (3.63) resultará como:

$$qE_z = q_e \frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{K_B T_e}{n_e} \frac{\partial n_e}{\partial z} \quad (3.64)$$

Integrando la Ec. (3.64) y resolviéndola para  $n_e$  se obtiene la relación de Boltzmann para electrones:

$$n_e = n_e(0) \exp\left(\frac{q_e \phi}{K_B T_e}\right) \quad (3.65)$$

Donde  $\phi$  es el potencial relacionado al potencial localizado en  $n_e(0)$ . La Ec. (3.65) también es conocida como «Ley barométrica», ésta relación establece que los electrones responderán a campos electrostáticos variando su densidad para preservar la presión en el sistema. Ésta ley barométrica es generalmente válida para el movimiento a lo largo del campo magnético y tiende a limitar el movimiento a través del campo magnético si el campo es débil y las colisiones son frecuentes [12].

## Capítulo 4

# EFECTO HALL

El efecto Hall fue descubierto en 1879 por el científico norteamericano Edwin Herbert Hall. Puede ser brevemente descrito como la diferencia de potencial a través de un conductor eléctrico que se forma cuando una corriente eléctrica fluye a través de dicho conductor y un campo magnético perpendicular atraviesa al conductor.

### 4.1. Efecto Hall en una lámina de material conductor

Imagínese una lámina de un material conductor, de un espesor « $d$ », en la cual, al ser de un material conductor, habitan electrones libres relacionados entre sí por el enlace metálico entre los átomos de la lámina.

Al hacer pasar una corriente eléctrica a través de la lámina, los electrones de la lámina se moverán en dirección contraria a la corriente eléctrica, es decir, de arriba hacia abajo. Pero al existir un campo magnético que atraviesa perpendicularmente la lámina, por la fuerza de Lorentz [Ec. (A.17)], los electrones se van a agolpar hacia el borde derecho de la lámina, cargándolo negativamente, y a su vez cargando positivamente el otro borde de la lámina. Ésta diferencia de carga entre los bordes de la lámina generará una diferencia de potencial entre los bordes. A ésta diferencia de potencial se le llama “Voltaje Hall”.

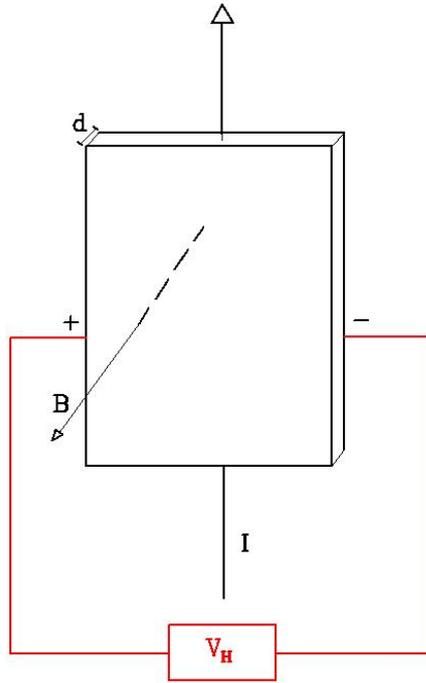


Figura 4.1: Lámina de material conductor a la cual se le induce un campo magnético atravesándola y por la cual conduce una corriente eléctrica. Por Efecto Hall se genera una diferencia de potencial dentro del material.

La derivación de éste voltaje Hall se obtiene por medio del siguiente desarrollo. Los electrones presentes en el material sienten una fuerza de Lorentz dada por la Ec. (A.17), al no tener campos eléctricos externos a la lámina se puede eliminar el término del campo eléctrico, resultando:

$$F_L = qv_E B \quad (4.1)$$

Donde  $q$  es la carga de los portadores de carga, en este caso electrones,  $v_e$  es la velocidad de arrastre de los electrones y  $B$  la intensidad del campo magnético aplicado. Así también habrá una fuerza eléctrica originada por la carga acumulada dada como:

$$F_C = qE_H = \frac{V_H}{l} q \quad (4.2)$$

Donde  $E_H$  es el campo eléctrico Hall,  $V_H$  es el voltaje Hall y  $l$  es la longitud del conductor (distancia entre ambos bordes de la lámina). Asumiendo un equilibrio entre ambas fuerzas se obtiene:

$$F_L = F_C$$

La velocidad de arrastre está dada por:

$$v_e = \frac{I}{nqld} \quad (4.3)$$

Donde  $I$  es la corriente aplicada a través del conductor,  $n$  es la densidad de portadores de carga y  $d$  el espesor del conductor, por tanto, sustituyendo la Ec. (4.3) en (4.1), e igualando (4.1) con (4.2) resulta:

$$\frac{V_H}{l} q = \frac{IB}{nld}$$

Por lo tanto la magnitud del potencial Hall  $V_H$  será [22]:

$$\boxed{V_H = \frac{IB}{nqd}} \quad (4.4)$$

Si se cuenta con campos eléctricos externos, y si éstos cuentan con una dirección diferente a la del campo eléctrico Hall, entonces el efecto Hall tendrá otras consecuencias y efectos. Éstas consecuencias y efectos no se estudiarán pues no es necesario hablar de ellos para entender el funcionamiento del propulsor Hall.

## 4.2. Efecto Hall en un gas ionizado

Existe otra cantidad interesante para éste tema, y es la cual ayudará a plantear al efecto Hall en un gas ionizado en lugar de una lámina de material conductor. Ésta cantidad es el llamado “Parámetro Hall”, y está definido [18] de la siguiente manera:

$$R_H = \frac{E_y}{J_x B} \quad (4.5)$$

Donde  $E_y$  se refiere al campo eléctrico transversal generado por el efecto Hall y  $J_x$  a la densidad de corriente generada por el flujo de portadores de carga que viajan en la dirección de la corriente eléctrica inicial inducida en el material.

Tomando en cuenta las magnitudes del problema descrito en la Fig. 4.1, y que la densidad de corriente  $J$  se representa como:  $J = \frac{I}{\bar{a}}$  se tendrá que la Ec. (4.5) tomará la siguiente forma:

$$R_H = \frac{E_H}{JB} = \frac{V_H d}{IB} = \frac{1}{nq} \quad (4.6)$$

Por lo tanto, a una mayor densidad de portadores de carga, menor será el parámetro de Hall, el cual es una cantidad adimensional. En un material conductor la densidad de portadores de carga es inmensa ( $\approx 4.5 \times 10^{15} \text{ cm}^{-3}$  [22]), por lo tanto se obtendrá un parámetro Hall muy pequeño, pero para un gas ionizado, el cual requiere muy poca densidad de partículas para lograr la ionización, se tendrá un parámetro Hall grande.

Como el caso del efecto Hall en un plasma es un caso particular, se suele denotar al parámetro Hall para plasmas como  $\Omega$ , y se define como:

$$\Omega = \frac{\omega_c}{\nu} = -\frac{qB}{m_e \nu} \quad (4.7)$$

Donde  $\omega_c$  es la frecuencia de ciclotrón que se obtuvo en la Ec. (3.40),  $\nu$  es la frecuencia de colisión entre electrones e iones dada por la Ec. (3.57) y  $m_e$  la masa del electrón.

Dentro de un medio donde está ocurriendo el efecto Hall se tendrá un campo eléctrico total equivalente a la suma del campo eléctrico inicial dado por la corriente de portadores de carga dentro del material con el campo Hall producido ( $E = E_0 + E_H$ ). Al ángulo formado entre la dirección del campo eléctrico total  $\vec{E}$  y la dirección del vector de densidad de corriente  $\vec{J}$  de los portadores de carga se le llama “ángulo Hall”, y su relación con el parámetro Hall es la siguiente:

$$\Omega = \tan(\Theta_H) \quad (4.8)$$

Otra cantidad que puede ser útil en el efecto Hall es la resistividad Hall, definida [18] como:

$$\rho_H = \frac{E_y}{j_x} = BR_H \quad (4.9)$$

Es decir, el cociente entre el campo eléctrico Hall transversal y densidad de corriente estará determinada sólo por el material (el cual cada uno tendrá su parámetro Hall característico) y el campo magnético aplicado. En un plasma, al estar definido el parámetro Hall de otra manera, la resistividad Hall para un plasma no se puede calcular con la Ec. (4.9).



## Capítulo 5

# PROPULSOR HALL

### 5.1. Descripción del propulsor Hall

Un propulsor Hall consiste básicamente en tres componentes: el cátodo, la cámara de descarga y el generador de campo magnético. La siguiente Fig. 5.1 muestra el esquema de la sección transversal de un propulsor Hall. Se puede apreciar que un canal de aislante cilíndrico encierra a la región de descarga. Las bobinas magnéticas inducen un campo magnético radial entre la pieza central y el camino del retorno de flujo al borde exterior. El cátodo de descarga es un cátodo externo hueco, y el ánodo es un anillo localizado en la base de la cavidad cilíndrica mostrada.

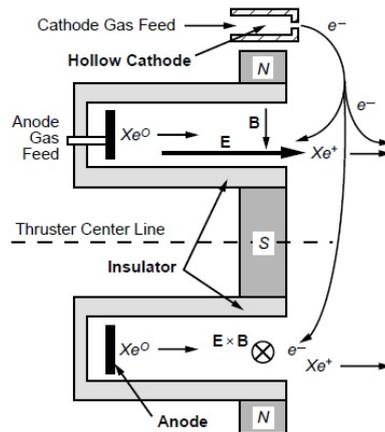


Figura 5.1: Vista transversal de un propulsor Hall, mostrando el campo magnético radial, el campo eléctrico axial, las polaridades magnéticas, el Xenon suministrado por el ánodo y los electrones expulsados por el cátodo [12].

## 5.2. Principio de operación y componentes del propulsor

El gas propelente es suministrado dentro del canal de descarga a través del ánodo y dispersado dentro del canal. Los electrones saldrán del cátodo e intentarán alcanzar el ánodo atravesando el campo magnético radial y transversal a ellos, lo cual reducirá su movilidad en la dirección axial e impedirá su flujo hacia el ánodo. Los electrones tenderán a moverse de manera espiral alrededor del eje del propulsor (como se ve también en la Fig. 5.2) en la dirección  $\vec{E} \times \vec{B}$  y representarán la corriente Hall de la cual el propulsor toma su nombre. Los electrones que forman la corriente Hall colisionarán fuertemente con los átomos del gas propelente ionizándolos. Los iones generados serán acelerados por el campo eléctrico que va del ánodo al cátodo y serán expulsados hacia el exterior del propulsor en forma de plasma. Una fracción de los electrones emitidos por el cátodo también saldrán del propulsor hacia el haz de iones para neutralizar la carga eléctrica positiva del plasma expulsado [12].

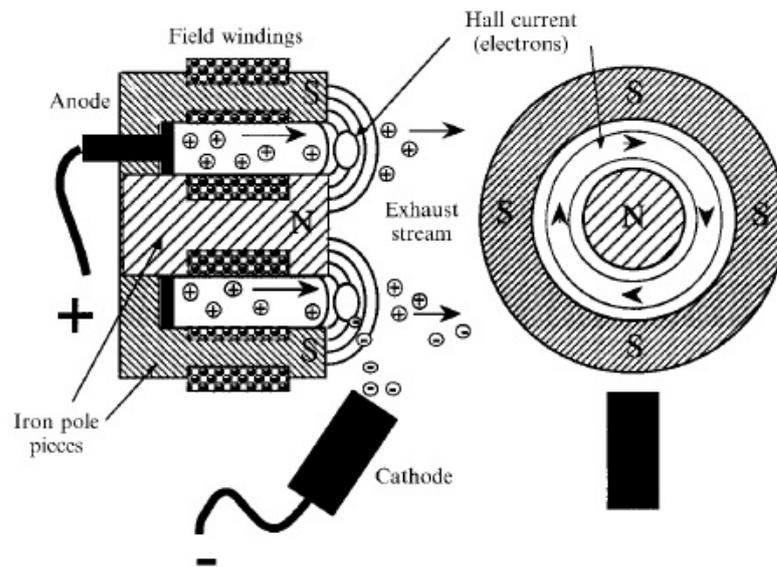


Figura 5.2: Vista transversal y vista superior del propulsor Hall mostrando ánodo y cátodo, iones acelerados y corriente Hall compuesta por electrones. Aquí no se muestran explícitamente los campos eléctrico y magnético, pero la posición de los ánodo y cátodo, y las polaridades magnéticas, dan la noción de la ubicación y dirección de los campos  $\vec{E}$  y  $\vec{B}$  [27].

### 5.2.1. Cátodo

Como se vió en el apartado anterior, el cátodo es el encargado de producir y emitir los electrones necesarios para el funcionamiento del propulsor Hall.

Una parte de los electrones viaja en dirección al ánodo, y al llegar al campo magnético transversal, se quedan atrapados, orbitando en las líneas de campo magnético a muy alta velocidad, colisionando con los átomos de propelente y provocando su ionización; la otra parte de los electrones viaja hacia el haz de iones, neutralizándolo y así evitando que la fuerte carga positiva del haz de iones expulsado pueda interferir con otros sistemas en el satélite u objeto propulsado.

El cátodo consiste en un refractario de forma tubular con un orificio en uno de sus extremos. El tubo tiene un inserto de forma cilíndrica que está colocado dentro del tubo y empujado hacia el extremo que tiene el orificio. El inserto es el que actúa como emisor de electrones, éste puede estar hecho de diversos materiales cuya función de trabajo es baja.

El tubo está envuelto en un material que le proporciona calor “heater” hasta elevar al inserto a temperaturas a las cuales por efecto termiónico se comenzarán a emitir electrones. En la siguiente Fig. 5.3 se puede ver la geometría del cátodo y sus partes.

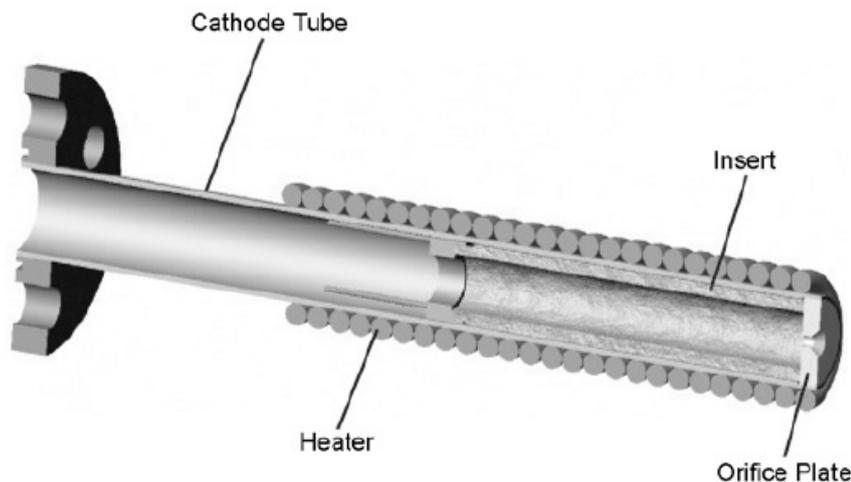


Figura 5.3: Vista transversal de un cátodo típico, se puede ver el inserto, el calentador (o “heater”) y el orificio de salida de los electrones [12].

Los electrones emitidos desde la parte interior del inserto ionizarán al gas inyectado por el cátodo y formarán un plasma de cátodo, de éste plasma de cátodo saldrán los electrones necesarios para el funcionamiento del propulsor Hall.

En el momento del encendido del cátodo el “heater” se enciende, provocando

la emisión de electrones dentro del cátodo mientras se suministra propelente dentro del cátodo, éste se ioniza y forma el plasma de cátodo, cuando se alcanza la ionización el “heater” se apaga, y el plasma de cátodo mantiene caliente el inserto manteniendo el efecto termiónico y la generación de electrones.

Otra parte importante del cátodo es el llamado “keeper”, el cual es una estructura metálica cilíndrica (parcialmente positiva comparada con el cátodo) la cual se coloca cubriendo el cuerpo del tubo del cátodo. El “keeper” mantiene al cátodo protegido de la erosión causada por el haz de iones del propulsor, así como también ayuda a mantener el calor del cátodo para mantener la emisión de electrones. Así también el “keeper” se conecta a una diferencia de potencial, el cual ayuda a expulsar a los electrones alojados dentro del cuerpo del cátodo. Se puede ver el “keeper” en la siguiente Fig. 5.4.

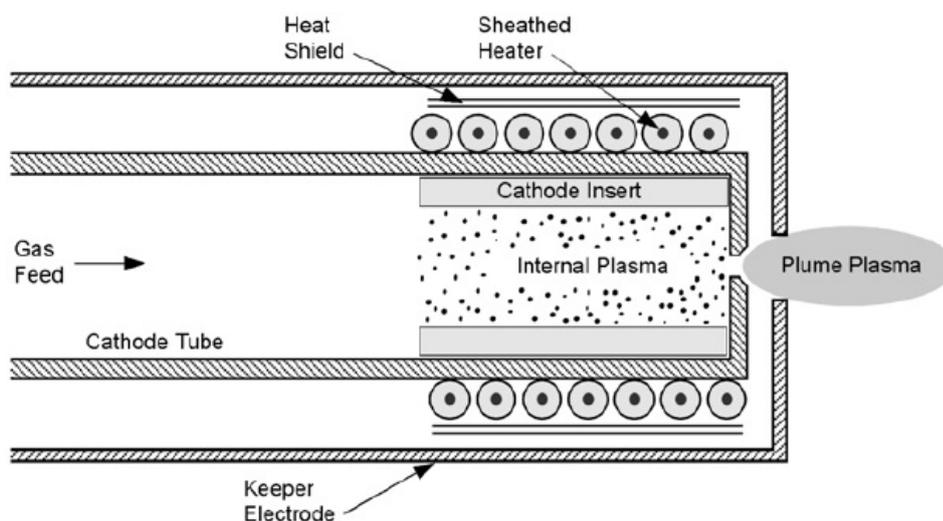


Figura 5.4: Vista del cátodo mostrando el tubo del cátodo, el “heater”, el “keeper”, el inserto y el orificio por el cual sale el plasma [12].

Los electrones requeridos para la descarga son emitidos por el cátodo. Esto significa que toda la corriente de descarga viaja por el orificio del cátodo, por lo tanto la densidad de corriente va a ser la más alta de todo el propulsor, y debe haber una densidad de plasma suficiente para transportar ésa corriente.

### 5.2.2. Circuito magnético

El circuito magnético es un sistema de componentes electromagnéticos los cuales generan un campo magnético tal que las líneas de campo trazan un camino cerrado. Éste circuito magnético es vital pues es quien genera el campo magnético radial que se va a necesitar para lograr el aprisionamiento de los electrones al acercarse hacia el ánodo.

Para crear el campo magnético radial que se necesita el circuito magnético va a estar compuesto por, ya sea, imanes permanentes, o electroimanes formados por bobinas.

El trabajo será enfocado en las bobinas pues el propulsor que se caracterizará en el siguiente capítulo es de bobinas.

Una bobina está conformada por un alambre conductor el cual se enrolla de forma tubular formando una pequeña espira por cada vuelta. Cuando la longitud de la bobina es bastante más grande que su diámetro, se le llama solenoide, el cual producirá un campo magnético uniforme y dependerá de la corriente eléctrica que pase a través de él.

El campo magnético a través de un solenoide está dado por:

$$B = \mu_0 \frac{NI}{L_S} \quad (5.1)$$

Donde  $N$  es el número de vueltas del solenoide,  $I$  es la corriente que pasa a través de él, y  $L_S$  es la longitud axial.

El circuito magnético se puede colocar en distintas configuraciones (Fig. 5.5). Estas configuraciones son simplemente para tener un acomodo más eficiente en el propulsor, hacerlo más compacto, o poder montar el circuito magnético más fácilmente.

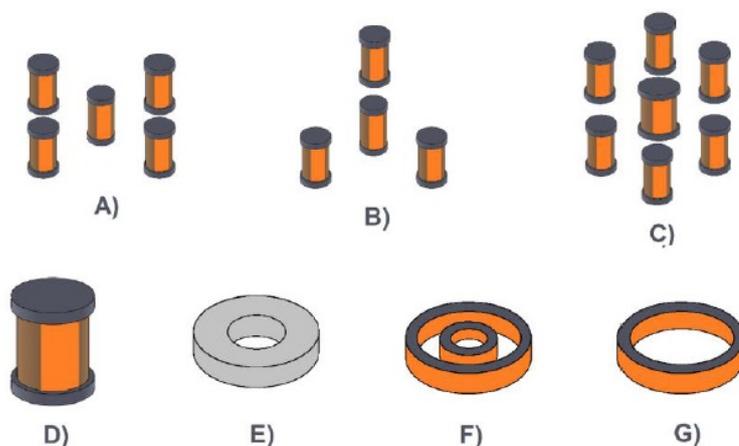


Figura 5.5: Diversas configuraciones del circuito magnético. A) Configuración clásica de 5 bobinas, B) Configuración 3 bobinas afuera y una al centro, C) Configuración de 6 bobinas afuera y una al centro, D) Solenoide en configuración “tandem”, E) Iman permanente, F) Configuración una bobina al centro y una circundante, G) Configuración de una bobina externa [25].

En las configuraciones A, B, C y F; se generan campos magnéticos que van de la bobina interior a las bobinas exteriores por la diferencia de polarización entre éstas, mientras que en las demás configuraciones el campo magnético radial simplemente se genera desde los extremos de la bobina hacia el centro (o viceversa) por la geometría de la bobina.

### 5.2.3. Canal de descarga

El canal de descarga es la zona donde ocurre la ionización del xenón, esta está determinada por las dimensiones del propulsor y suele tener paredes de un material metálico o de un material cerámico. Los propulsores con cámara de descarga con paredes metálicas son denominados TAL (“thruster with anode layer”), mientras que los propulsores con paredes cerámicas (los cuales son los más comunes y utilizados) son denominados HET (“Hall effect thruster”), SPT (“Stationary plasma thruster”) o “magnetic layer thruster”.

Los materiales con los que se construyen las cámaras de descarga son materiales dieléctricos muy resistentes a altas temperaturas y a densidades de corriente enormes. Los materiales más comúnmente utilizados son la alúmina ( $Al_2O_3$ ), el nitruro de boro (BN), el sílice ó dióxido de silicio ( $SiO_2$ ), o una aleación llamada BoroSil ( $BNSiO_2$ ) [25].

Las paredes de la cámara de descarga son sometidas a numerosas colisiones de electrones energéticos del plasma, así que éstas deben aguantar tales condiciones. Éstas colisiones van desgastando poco a poco las paredes internas de la cámara de descarga, y ésta erosión es la que determina principalmente la vida de un propulsor.

Otro factor importante que se presenta en la cámara de descarga es la distribución de potenciales, pues éstos determinarán la intensidad con la cual saldrán expulsados los iones del propulsor.

El voltaje al cual están el ánodo y cátodo en el propulsor no es precisamente el voltaje que será aprovechado en la corriente de iones expulsados del propulsor, pues parte del voltaje en el propulsor se utiliza en el “heater” y otra parte en el “keeper”.

El voltaje principal en el propulsor Hall corresponde al voltaje de descarga  $V_d$ , pero de éste voltaje principal se derivan otros dos voltajes importantes para la caracterización de nuestro propulsor. Uno de ellos es el voltaje al cuál está conectado el cátodo y sus componentes  $V_c$  y el otro será el voltaje por el cual los iones estarán acelerados  $V_b$ . El siguiente diagrama (Fig. 5.6) muestra como éstos voltajes están distribuidos en el propulsor Hall, así como da una noción de como intervienen en el funcionamiento del propulsor Hall.

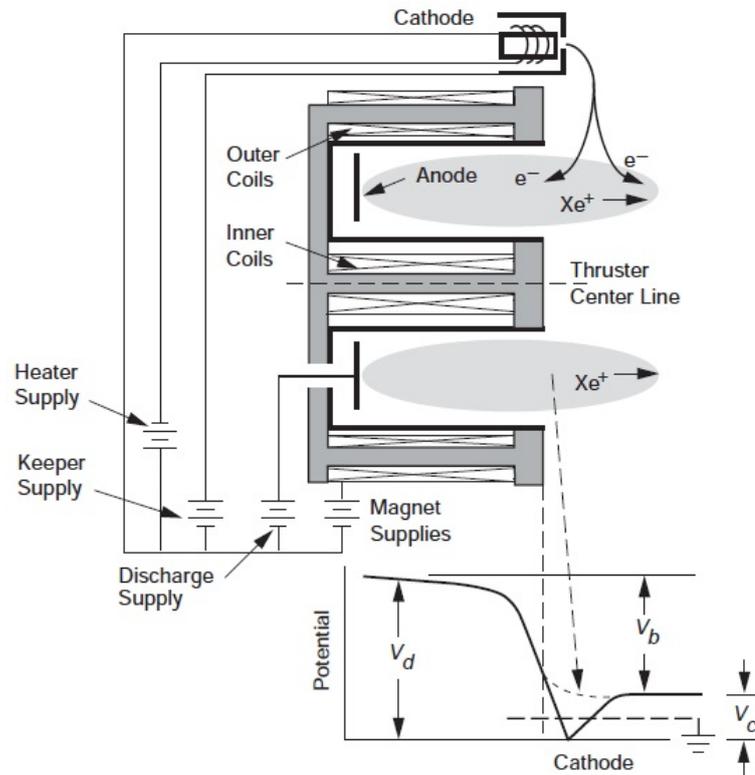


Figura 5.6: Distribución de los diferentes voltajes y su importancia en el propulsor Hall [12].

La relación entre los voltajes se considera [12] la siguiente:

$$V_b = V_d - V_c \quad (5.2)$$

#### 5.2.4. Propelente

El propelente utilizado por el propulsor se determina a partir de varios parámetros, principalmente se utilizan gases nobles pues tienen baja energía de ionización. Uno de los favoritos es el xenón, pues tiene un alto peso atómico, en estado natural es gaseoso, fácil de manipular, y fácil de aplicar al inyectarse dentro del propulsor.

Otros materiales utilizados como el yodo son más difíciles de manejar y se requiere calentarlos para hacerlos gaseosos, sin embargo el yodo tiene una masa atómica grande, baja energía de ionización, y es muy barato.

A continuación (Tab. 6.2) se muestra una tabla con los propelentes potenciales por sus propiedades, se debe mencionar que algunos de ellos no han sido probados dentro propulsores Hall.

Tabla 5.1: Características de propelentes potenciales para el propulsor Hall [25].

Propelente	Punto de fusión [°C]	Punto de ebullición [°C]	Energía de ionización [eV]	Masa atómica [uma]	Costo aproximado [dólares/kg]
Argón (Ar)	-189	-186	15.75991	39.948	6
Bismuto (Bi)	271.3	1559	7.287	208.98	9
Cadmio (Cd)	321.03	765	8.991	112.4	25
Cesio (Cs)	28.64	685	3.893	132.9	11000
Kriptón (Kr)	-157.2	-152.3	14	83.8	295
Magnesio (Mg)	650	1090	7.64572	24.3247	6
Mercurio (Hg)	-38.86	356.73	10.434	200.59	18
Xenón (Xe)	-111.9	-108.1	12.127	131.3	1200
Yodo (I)	113	182	10.44	126.9	83
Zinc (Zn)	420	907	9.39418	65.409	5

Se debe tomar en cuenta que mientras mayor masa atómica tenga un elemento, se obtendrá un mayor empuje. Y mientras menor masa atómica se tenga, el impulso específico  $I_{sp}$  será mayor. También se debe considerar que una condición para que sean utilizables es convertirlos a su estado gaseoso, y mientras mayor calor específico se tenga, más energía se necesitará para hacerlos gaseosos.

A continuación se muestran fotos de diversos propelentes funcionando en propulsores Hall (Fig 5.7).



Figura 5.7: Diversos tipos de propelentes utilizados en propulsores Hall [25].

### 5.3. Teoría general y relaciones básicas

Considérese un propulsor Hall con un canal de descarga de longitud  $L_c$  dentro del cual se tienen los campos eléctrico y magnético cruzados, y que la anchura del canal es  $w$ . Considérese también que el área de la cual salen los iones para formar el haz del plasma es  $A_e$ .

Los electrones que entran al canal del propulsor desde el cátodo exterior empiezan a moverse en forma espiral alrededor de las líneas de campo magnético radiales con un radio correspondiente al radio de Larmor dado por la Ec. (3.44). Si a la Ec. (3.44) se evalúa con la velocidad térmica de los electrones ( $v_T = \sqrt{\frac{8K_B T}{\pi m_e}}$ ) se obtiene la siguiente ecuación para el radio de Larmor de los electrones:

$$r_e = \frac{v_T}{\omega_c} = \frac{m_e}{q_e B} \sqrt{\frac{8K_B T_e}{\pi m_e}} = \frac{1}{B} \sqrt{\frac{8 m_e}{\pi q_e} T_{eV}} \quad (5.3)$$

Donde  $T_{eV}$  es la temperatura del electrón en eV.

Para un funcionamiento óptimo del propulsor Hall el radio de Larmor del electrón debe ser menor a la longitud del canal de descarga, de ésta forma los electrones serán magnetizados y su camino hacia el ánodo se interrumpirá. Por lo tanto una condición esencial del propulsor Hall es la siguiente:

$$\boxed{r_e = \frac{1}{B} \sqrt{\frac{8 m_e}{\pi q_e} T_{eV}} \ll L_c} \quad (5.4)$$

Otra de las condiciones importantes para un propulsor Hall es que los electrones orbiten muchas veces alrededor de una línea de campo magnético antes de que colisionen con un átomo neutro o un ion, ésta condición se refleja en el parámetro Hall del gas ionizado, el cual se vió en la Ec. (4.7) y está dada por:

$$\boxed{\Omega_e^2 = \frac{\omega_c^2}{\nu^2} \gg 1} \quad (5.5)$$

Para un electrón moviéndose en dirección hacia un campo magnético transversal, su movilidad transversal al campo magnético en términos de su movilidad a lo largo del campo magnético estará dada por:

$$\mu_{\perp} = \frac{\mu}{1 + \Omega_e^2} \quad (5.6)$$

Esto quiere decir que si se tiene un parámetro Hall alto, va a ser difícil que los electrones sigan su camino hacia el ánodo al haber llegado al campo magnético transversal.

Y una condición que debe cumplir el radio de Larmor de los iones  $r_i$  es que éste sea más grande que la longitud característica del canal de descarga, de ésta manera los iones pueden ser acelerados fuera del canal. Utilizando la velocidad

de los iones causada por la diferencia de potencial aplicada entre el cátodo y el ánodo y sustituyéndola en la Ec. (3.44), se obtiene la tercera condición del propulsor Hall.

$$\boxed{r_i = \frac{v_i}{\omega_c} = \frac{m_i}{q_e B} \sqrt{\frac{2q_e V_b}{m_i}} = \frac{1}{B} \sqrt{\frac{2m_i}{q_e} V_b} \gg L_c} \quad (5.7)$$

Donde  $V_b$  es el voltaje neto por el cual están acelerados los iones, en éste caso está dado en eV.

Otras cantidades que se pueden obtener de la física de plasmas para el propulsor Hall son por ejemplo la velocidad de deriva dada por la Ec. (3.50). La magnitud de la velocidad azimutal de los electrones atrapados en la deriva está dada por:

$$v_E = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{B^2} \approx \frac{E_z}{B_r} \quad (5.8)$$

La corriente azimutal de electrones crearán la llamada “corriente de Hall” dada por:

$$I_H = n_e q_e \left( \int_0^{L_c} v_E dz \right) w = n_e q_e \left( \int_0^{L_c} \frac{E}{B} dz \right) w \quad (5.9)$$

El campo eléctrico axial corresponde aproximadamente al voltaje de descarga dividido entre el grosor del plasma, es decir la longitud del canal, por lo tanto la corriente Hall resulta ser:

$$I_H \approx n_e q_e w \frac{V_d}{B} \quad (5.10)$$

Donde  $w$  es la anchura del canal de descarga.

La corriente de iones que abandonan el plasma del canal para formar el haz de iones a través del área  $A_e$  está dada aproximadamente por:

$$I_i = n_i q_i v_i A_e \approx n_i q_e \sqrt{\frac{2q_e V_d}{m_i}} 2\pi R w \quad (5.11)$$

Donde  $R$  es el radio promedio del canal de descarga. Como el plasma es cuasineutro se puede expresar a la corriente Hall como:

$$I_H \approx \frac{I_i}{2\pi R B} \sqrt{\frac{m_i V_d}{2q_e}} \quad (5.12)$$

De ésta forma se puede ver que incrementando la corriente del haz de iones, también la corriente Hall aumentará.

El empuje del propulsor Hall está dado por la siguiente ecuación:

$$\mathbf{T} = \int (\vec{J}_H \times \vec{B}) d\vec{A} \approx I_i \sqrt{\frac{m_i V_d}{2q_e}} \quad (5.13)$$

La primera igualdad de la Ec. (5.13) se explicará a continuación.

### 5.3.1. Empuje

Supóngase que el plasma del propulsor Hall es localmente cuasineutro ( $qn_i \approx qn_e$ ) en la región donde los iones son acelerados, y que en ésta región los campos eléctrico y magnético son uniformes. Utilizando una geometría cilíndrica (con eje axial  $z$  y eje radial  $r$ ) como la mostrada en la siguiente Fig. 5.8.

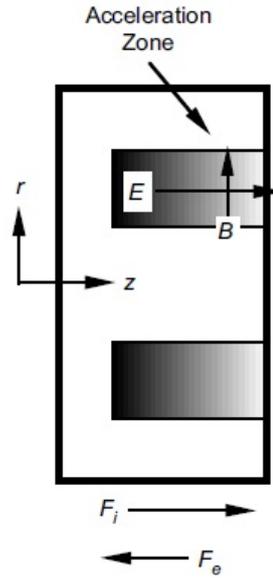


Figura 5.8: Esquema de un corte transversal del propulsor Hall mostrando las direcciones del campo eléctrico  $E$ , campo magnético  $B$ , fuerza sobre los iones  $\vec{F}_i$ , fuerza sobre los electrones  $\vec{F}_e$  y sistema coordenado  $r, z$  [12].

La fuerza sobre los iones del propelente dada por el campo eléctrico  $E$  será:

$$\vec{F}_i = 2\pi \iint qn_i \vec{E} r dr dz \quad (5.14)$$

Los electrones sentirán una fuerza por el campo eléctrico de la misma naturaleza y en sentido contrario por su carga negativa, pero los campos transversales  $\vec{E}$  y  $\vec{B}$  provocarán una deriva de los electrones [como se vió en la Ec. (3.50)], en la dirección  $\vec{E} \times \vec{B}$ , ésta deriva de electrones corresponde a la corriente Hall de la cual se habló en el capítulo 4. La deriva va a impedir su movimiento hacia dentro o fuera de propulsor en forma de fuerza de Lorentz, por lo tanto hará que se anule la fuerza que éstos sienten debido al campo eléctrico de la siguiente manera:

$$\vec{F}_e = -2\pi \iint qn_e \vec{E} r dr dz - 2\pi \iint q_e n_e v_E \times \vec{B} r dr dz = 0 \quad (5.15)$$

Donde  $v_E$  es la velocidad de deriva dada por los campos  $E$  y  $B$  transversales. La densidad de corriente se puede expresar como  $J = qnv$ , por lo tanto se tendrá

la siguiente equivalencia:

$$-2\pi \iint qn_e \vec{E} r dr dz = 2\pi \iint J_H \times \vec{B} r dr dz \quad (5.16)$$

Donde  $J_H = -qn_e v_e$  para los electrones que forman la corriente Hall con su velocidad correspondiente a la velocidad de arrastre.

Se puede igualar la Ec. (5.14) con la Ec. (5.16), y obtener así que la fuerza (por unidad de volumen) sobre los iones será de la siguiente forma:

$$\vec{F}_i = J_H \times \vec{B} \quad (5.17)$$

De ésta forma se puede apreciar que la fuerza debida a la corriente de Hall se transfiere al cuerpo del propulsor por medio de la fuerza de Lorentz de la forma  $\vec{F}_i = -\mathbf{T}$ , y por lo tanto la fuerza de empuje (“Thrust”) resulta:

$$\mathbf{T} = -J_H \times \vec{B} \quad (5.18)$$

[12]

La Ec. (2.3) habla de la fuerza de empuje para un propulsor en general, el flujo de masa del propelente  $\dot{m}_p$  en kg/s se puede definir como:

$$\dot{m}_p = \Phi_p m \quad (5.19)$$

Donde  $\Phi_p$  es el flujo de partículas de propelente (partículas/s) y  $m$  es la masa de la partícula. La potencia de empuje cinético (llamada “jet power”) está definida como:

$$P_{jet} = \frac{1}{2} \dot{m}_p v_{ex}^2 \quad (5.20)$$

Sustituyendo la Ec. (2.3) en la Ec. (5.20) se obtiene:

$$P_{jet} = \frac{\mathbf{T}^2}{2\dot{m}_p} \quad (5.21)$$

Es decir que si un propulsor mantiene su flujo de masa, y quiere aumentar su empuje, entonces deberá aumentar su potencia de empuje cinético.

Si se toma a la velocidad de escape del propulsor como la velocidad de los iones  $v_i$ , y se despeja de la definición de energía cinética  $E = \frac{1}{2}mv^2$ , se obtiene:

$$v_i = \sqrt{\frac{2qV_b}{m_i}} \quad (5.22)$$

Donde  $V_b$  es el voltaje neto por el cual los iones son acelerados. El flujo de masa iónica estará relacionado con la corriente del haz de iones  $I_b$  por la ecuación:

$$\dot{m}_i = \frac{I_b m_i}{q} \quad (5.23)$$

Sustituyendo las Ecs. (5.22) y (5.23) en la Ec. (2.3) se obtendrá la fuerza de empuje (en Newtons) en función del voltaje con el cual se aceleran los iones y de la corriente del haz de iones como:

$$\mathbf{T} = \sqrt{\frac{2m_i}{q}} I_b \sqrt{V_b} \quad (5.24)$$

Si el propelente es xenón se utiliza la relación  $\sqrt{2m_i/q} = 1,65 \times 10^{-3}$ , y el empuje, en mN, resulta:

$$\mathbf{T} = 1,65 I_b \sqrt{V_b} \quad (5.25)$$

Así resulta la fuerza de empuje para un haz de iones unidireccional, ionizado una sola vez, monoenergético. Todo lo cual, en general, no ocurre.

A continuación se analizarán las condiciones de unidireccionalidad y de ionización múltiple. El caso monoenergético no se estudiará en éste trabajo.

Si se considera que el haz de iones se abre al salir del propulsor, y que tiene una densidad de corriente de iones constante, se tendrá entonces:

$$f_{\theta} = \cos \theta_d$$

Donde  $\theta_d$  es el semiángulo de divergencia promedio del haz de iones (Fig. 5.9). Por ejemplo, si el haz de iones se abre con un semiángulo de  $15^\circ$ , entonces  $\cos \theta_d = 0,966$ , lo cual representa una pérdida de empuje del 3,4%.

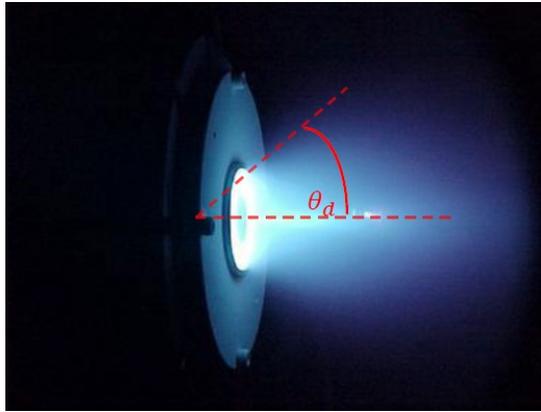


Figura 5.9: Imagen de un propulsor Hall operando en la cual se muestra el semiángulo de divergencia del haz de iones. Foto de propulsor tomada de [9] y modificada para señalar  $\theta_d$ .

Si el perfil de densidad de corriente no es constante, la corrección angular quedará como:

$$f_{\theta} = \frac{\int_0^r 2\pi r J_i(r) \cos \theta_d(r) dr}{I_b} \quad (5.26)$$

Donde  $J_i(r)$  corresponde a la densidad de corriente de iones como función del radio.

Si se quieren considerar segundas ionizaciones (las cuales por lo general ocurren) se deben incluir en el término de corriente del haz de iones de tal forma que la corriente de haz de iones corresponda a la suma de la corriente provocada por los iones de xenón ionizados una sola vez con la corriente provocada por los iones de xenón doblemente ionizados:

$$I_b = I^+ + I^{++} \quad (5.27)$$

Y en la fuerza de empuje se suman de la siguiente manera:

$$\mathbf{T}_m = I^+ \sqrt{\frac{2m_i V_b}{q}} + I^{++} \sqrt{\frac{m_i V_b}{q}} \quad (5.28)$$

Y factorizando se obtiene la siguiente forma reducida:

$$\mathbf{T}_m = I^+ \sqrt{\frac{2m_i V_b}{q}} \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{I^{++}}{I^+} \right) \quad (5.29)$$

El factor de corrección del empuje  $\alpha$  se define por el cociente entre la Ec. (5.29) y la Ec. (5.24) sustituyendo la Ec. (5.27) en la corriente de la Ec. (5.24).

$$\alpha = \frac{I^+ + \frac{1}{\sqrt{2}} I^{++}}{I^+ + I^{++}} \quad (5.30)$$

La corrección de empuje total  $\gamma$  se define por el producto entre  $\alpha$  y la corrección por divergencia del haz  $f_\theta$  [12].

$$\gamma = \alpha f_\theta \quad (5.31)$$

Y así el empuje corregido será el producto entre  $\gamma$  y el empuje que ya se había calculado, así resulta:

$$\mathbf{T} = \gamma \sqrt{\frac{2m_i}{q}} I_b \sqrt{V_b} \quad (5.32)$$

Y si se utiliza xenón como propelente, el empuje (en mN) simplemente resulta:

$$\mathbf{T} = 1,65 \gamma I_b \sqrt{V_b} \quad (5.33)$$

Por ejemplo, si se tiene un propulsor con un ángulo de divergencia de  $13^\circ$ , con una proporción del 10 % de átomos doblemente ionizados, se tendrá un parámetro  $\gamma = 0,948$ . Si el propulsor tiene una corriente de iones de xenón de 3 A a un potencial de 1800 V, se obtendrá un empuje de 199.2 mN.

### 5.3.2. Impulso específico

El impulso específico  $I_{sp}$  está definido en la Ec. (2.4), es una medida de eficiencia del propulsor y está definido por el cociente entre la fuerza de empuje y la tasa de consumo de propelente.

Para un propulsor alimentado por xenón el impulso específico puede expresarse por la Ec. (5.42) [12].

$$I_{sp} = 1,037 \times 10^6 \frac{\mathbf{T} [N]}{\Phi_p [cm^3/s]} = 1,02 \times 10^5 \frac{\mathbf{T} [N]}{\Phi_p [mg/s]} \quad (5.34)$$

La Ec. (2.5) sirve para obtener el impulso específico para cualquier propulsor. Sustituyendo en ésta la Ec. (2.3) para los iones (los cuales aportan principalmente el empuje al propulsor) se obtendrá:

$$I_{sp} = \frac{v_i \dot{m}_i}{g \dot{m}_p} \quad (5.35)$$

Ésta ecuación [Ec. (5.35)] sólo es válida considerando a  $v_i$  para un haz de iones unidireccional y monoenergético.

Para calcular la eficiencia de utilización de propelente se toma el cociente entre flujo másico ionizado y flujo másico del propelente:

$$\eta_m = \frac{\dot{m}_i}{\dot{m}_p} \quad (5.36)$$

Sustituyendo al flujo másico iónico por su correspondiente masa, carga y corriente de iones se obtiene:

$$\eta_m = \frac{I_b m_i}{q \dot{m}_p} \quad (5.37)$$

Como se hizo anteriormente con la fuerza de empuje, se debe considerar la corrección de eficiencia másica tomando en cuenta las dobles ionizaciones:

$$\eta_{m*} = \alpha_m \frac{I_b m_i}{q \dot{m}_p} \quad (5.38)$$

El término corregido corresponderá a la suma de los términos ionizado y doble ionizado, haciendo un desarrollo como el que se realizó para el empuje corregido, pero ahora para la eficiencia de utilización de masa, se obtendrá que  $\alpha_m$  resulta:

$$\alpha_m = \frac{I^+ + \frac{1}{2}I^{++}}{I^+ + I^{++}} \quad (5.39)$$

Nótese que éste término  $\alpha_m$  para el  $I_{sp}$  difiere del término  $\alpha$  para el Thrust pues la eficiencia másica del  $I_{sp}$  depende de la carga de manera lineal, mientras que el Thrust depende de la carga de manera cuadrática. Por tal motivo al evaluar en la corriente de iones doblemente ionizados (los cuales tienen el doble de carga que los iones ionizados una sola vez) se obtiene un factor  $\frac{1}{2}$  para el  $I_{sp}$  y un factor  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  para el Thrust.

Sustituyendo la Ec. (5.32) y la Ec. (5.38) en la Ec. (2.4) se obtendrá el impulso específico en términos del voltaje con el que se aceleran los iones y de la masa del ión.

$$I_{sp} = \frac{\gamma \eta_m}{g} \sqrt{\frac{2qV_b}{m_i}} \quad (5.40)$$

Evaluando en  $g$  y en  $q$  se obtiene el impulso específico para cualquier propelente:

$$I_{sp} = 5,77 \times 10^{-11} \gamma \eta_m \sqrt{\frac{V_b}{m_i}} \quad (5.41)$$

Para xenón se evalúa  $m_i$  en la masa atómica del xenón y resulta la siguiente Ec. (5.42) [12].

$$\boxed{I_{sp} = 123,58 \gamma \eta_m \sqrt{V_b}} \quad (5.42)$$

Si se regresa al ejemplo numérico utilizado en el empuje donde el ángulo de divergencia del haz de iones es de  $13^\circ$ , con 10 % de átomos doblemente ionizados, un  $\gamma = 0,948$ , y un 85 % de aprovechamiento de xenón a un potencial de 1800 V, se obtendrá un impulso específico aproximado de 4225 s.

### 5.3.3. Eficiencia

La eficiencia eléctrica está definida por el cociente entre la potencia del haz de iones producido  $P_b$  y la potencia total de entrada  $P_T$

$$\eta_e = \frac{P_b}{P_T} = \frac{I_b V_b}{P_0 + I_b V_b} \quad (5.43)$$

Donde  $P_0$  representa las demás formas de potencia de entrada del propulsor requerida para lograr el haz de iones.

Otra forma de potencia que va a requerir el propulsor es en la producción de iones, que va a influir en la pérdida por descarga (“Discharge Loss”), o también llamada eficiencia de producción de iones dada por la siguiente ecuación:

$$DL = \frac{P_d}{I_b} \quad (5.44)$$

Donde  $P_d$  representa la potencia necesaria para crear el haz de iones.

$DL$  tiene unidades de potencia sobre corriente (watt/ampere), lo cual es equivalente a energía necesaria sobre carga fundamental de cada ion de la corriente

de iones que forma al haz de propulsión (eV/ion). Mientras más pequeña sea  $DL$  habrá mejor rendimiento en el propulsor, pues se necesitará un menor voltaje y corriente para producir más iones para la corriente del haz. Por ejemplo, si se requiere una descarga con una corriente de 20 A y un voltaje de 25 V para producir una corriente de haz de electrones de 3 A, la pérdida por descarga será de  $(20 \text{ A})(25 \text{ V}) / 3 \text{ A} = 166.7 \text{ eV/ion}$ .

La eficiencia total de un propulsor eléctrico está definida por el cociente entre la potencia de empuje cinético “jet power” y la potencia eléctrica total de entrada en el propulsor “input power”.

$$\eta_T = \frac{P_{jet}}{P_{in}} \quad (5.45)$$

Sustituyendo la Ec. (5.21) en la Ec. (5.45) se obtiene:

$$\eta_T = \frac{\mathbf{T}^2}{2\dot{m}_p P_{in}} \quad (5.46)$$

Con la Ec. (5.46) se prefiere medir la eficiencia total de los propulsores Hall [12], pues fácilmente se puede conocer la potencia de entrada del dispositivo (“input power”), así como también el flujo másico inicial de propelente ( $\dot{m}_p$ ) y el empuje obtenido se puede calcular en un sistema al vacío sujetando al propulsor en un “thrust stand”, mientras que los parámetros del haz de iones (corriente y velocidad) son difícilmente medibles incluso dentro de sistemas al vacío.

Un método para calcular una eficiencia más precisa en un propulsor Hall es por medio de más factores de eficiencia, como lo son la eficiencia de utilización eléctrica  $\eta_0$ , eficiencia de aprovechamiento de corriente  $\eta_b$  y la eficiencia de aprovechamiento de voltaje  $\eta_V$ .

La eficiencia de utilización eléctrica se define por:

$$\eta_0 = \frac{P_d}{P_T} = \frac{P_d}{P_d + P_k + P_{mag}} \quad (5.47)$$

Donde  $P_d$  es la potencia de descarga,  $P_T$  es la potencia total en el propulsor,  $P_k$  es la potencia del “keeper” del cátodo, y  $P_{mag}$  es la potencia usada para generar el campo magnético con la bobina.

La eficiencia de aprovechamiento de corriente se define como:

$$\eta_b = \frac{I_b}{I_d} \quad (5.48)$$

Y la eficiencia de aprovechamiento de voltaje se define por:

$$\eta_V = \frac{V_b}{V_d} \quad (5.49)$$

Así, la eficiencia total se puede calcular con el producto:

$$\boxed{\eta_T = \gamma^2 \eta_b \eta_V \eta_0 \eta_m} \quad (5.50)$$



## Capítulo 6

# CARACTERIZACIÓN DE UN PROPULSOR HALL

El propulsor a caracterizar es el construido, diseñado y descrito en la referencia bibliográfica [25] por el equipo de investigación y desarrollo de la Unidad de Alta Tecnología (UAT) y del Laboratorio Nacional de Ingeniería Espacial y Automotriz (LNIEA). El propulsor Hall descrito se desarrolló con la intención de ser un propulsor de baja potencia (bajo consumo energético) y compacto, además de un bajo costo a diferencia de los propulsores comerciales, con una vida útil adecuada para satisfacer las necesidades de la misión espacial planeada para el propulsor.

### 6.1. Requerimientos de la misión y valores propuestos para el diseño del propulsor

Algunos de los requerimientos de la misión espacial pensada para el propulsor descrito son los siguientes:

Tabla 6.1: Requerimientos de la misión [25].

Masa por propulsar	76.2 kg (redondeada a 80 kg)
Órbita	helio-síncrona circular
Altura	686 km
Inclinación	98°
Presión	$10^{-6}$ Pa ( $10^{-8}$ Torr)
$\Delta v$	4.1117 km/s

El propulsor construido (“propulsor prototipo”) fue diseñado por el equipo de la UAT con base a varios propulsores comerciales Hall de baja potencia que cumplían con los requisitos de la misión (principalmente el BHT-200 de la compañía estadounidense Busek, y el HT-100 de la compañía europea Alta), y así el equipo de la UAT propuso los siguientes valores (Tab. 6.2) para el diseño del propulsor Hall, posteriormente el M.I. Tejada, E. del equipo de la UAT calculó otros valores (Tab. 6.3) a partir de los valores propuestos.

Tabla 6.2: Valores propuestos para cumplir los requerimientos de la misión [25].

$P_{in}$	200 W
$I_{sp}$	1300 s
$V_d$	300 V

Tabla 6.3: Valores calculados por Tejada, E. A. del equipo de la UAT a partir de la Tab. 6.2 para cumplir los requerimientos de la misión [25].

$v_{ex}$	12 753 m/s
$\eta_T$	42 %
$m_p$	22.0478 kg
$P_{jet}$	85.0453 W
$\dot{m}_p$	$1.0458 \times 10^{-6}$ kg/s
<b>T</b>	13.3 mN

## 6.2. Construcción y manufactura del propulsor Hall

A continuación en éste subcapítulo se presentará una recopilación del trabajo realizado por el equipo de la Unidad de Alta Tecnología sobre el propulsor Hall que se caracterizará en éste trabajo.

La cámara de descarga del propulsor prototipo fue construida a partir de nitruro de boro (NB), el cual es el material que se usa típicamente en la construcción de canales de descarga para propulsores Hall pues resiste temperaturas muy altas, algunas de las dimensiones de la cámara de descarga del propulsor construido fueron las siguientes:

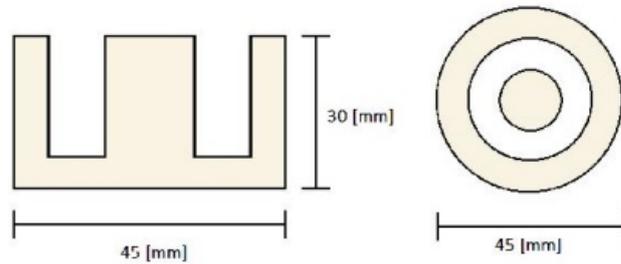


Figura 6.1: Diagrama de la cámara de descarga construída con algunas de sus dimensiones [25].

La cámara de descarga diseñada y manufacturada por el equipo de la UAT se muestra a continuación:

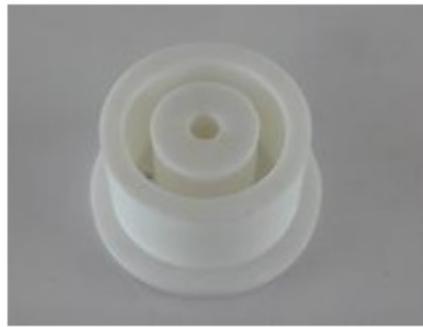


Figura 6.2: Cámara de descarga diseñada del propulsor prototipo [25].

Otras dimensiones importantes (Tab. 6.4) para el cálculo y caracterización del propulsor son las siguientes:

Tabla 6.4: Medidas importantes dentro de la cámara de descarga y sus incertidumbres asociadas [25].

Longitud del canal de descarga ( $L_C$ )	$(0.025\ 00 \pm 0.000\ 25)$ m
Anchura del canal de descarga ( $w$ )	$(0.005\ 50 \pm 0.000\ 25)$ m
Radio interno de la cámara de descarga ( $R_i$ )	$(0.011\ 250 \pm 0.000\ 125)$ m
Radio externo de la cámara de descarga ( $R_e$ )	$(0.016\ 750 \pm 0.000\ 279)$ m
Radio promedio de la cámara de descarga ( $R$ )	$(0.014\ 000 \pm 0.000\ 153)$ m

El circuito magnético (Fig. 6.3) fue diseñado utilizando alambre de acero al silicio (FeSi) conocido también como acero metálico. El campo magnético fue

medido por el Gaussmetro “Gaussmeter GM-2” de AlphaLab Inc., el campo magnético promedio generado por el circuito magnético medido (alrededor de la zona de ionización) fue de  $(217,5 \pm 2,175)$  Gauss, o en Teslas:

$$B = (0.021\,750\,0 \pm 0.000\,217\,5) \text{ T} \quad (6.1)$$

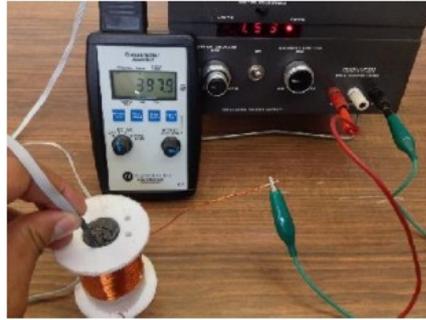


Figura 6.3: Mediciones de campo magnético al circuito magnético diseñado [25].

El ánodo se planeó manufacturarse utilizando Tantalio (Ta), el cual es fácilmente manipulable y no es muy costoso. Debido a cuestiones de tiempo y dificultad de conseguir el material el ánodo se hizo con acero inoxidable 304, el cuál es una aleación de hierro con un 18 % de cromo, 10 % de níquel y algunos otros metales, además de no ser ferromagnético. A continuación se presentará una tabla (Tab. 6.5) con algunas propiedades físicas del tantalio y del acero 304.

Tabla 6.5: Propiedades físicas del tantalio (Ta) [25] y del acero inoxidable 304 [2].

Material	Conductividad térmica [Wm <sup>-1</sup> K <sup>-1</sup> ]	Calor específico [Jkg <sup>-1</sup> K <sup>-1</sup> ]	Coefficiente de expansión térmica [μm m <sup>-1</sup> K <sup>-1</sup> ]	Punto de fusión [K]
Tantalio (Ta)	54.4	153	7.0	3269
Acero inoxidable 304	16.2	500	18.7	1673

El cátodo a su vez no fue manufacturado, pues su construcción, diseño y cuidado son muy complicados. Por lo tanto se utilizará un cátodo comercial de la marca Busek Co. modelo BHC-1500 (Fig. 6.4), el cual ha mostrado ser bastante eficiente y funcional bajo requerimientos comprendidos dentro de los de la misión [25].

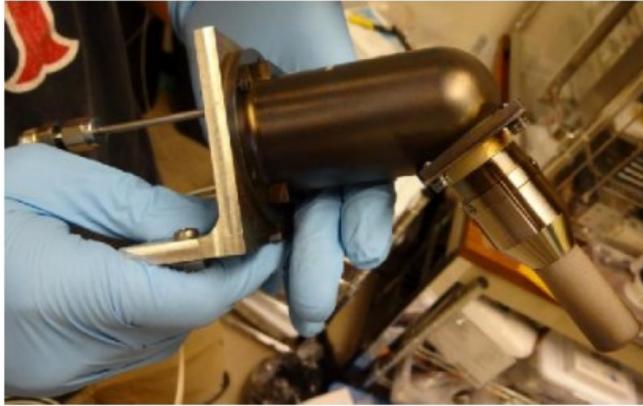


Figura 6.4: Fotografía del cátodo BHC-1500 (sostenido de la base que lo une al propulsor Hall) de la compañía Busek Co. a utilizar [25].

### 6.3. Consideraciones tomadas para la caracterización

Algunas de las especificaciones técnicas del cátodo BHC-1500, así como parámetros de funcionamiento para el propulsor, se han recopilado en la siguiente Tab. 6.6

Tabla 6.6: Especificaciones técnicas del cátodo hueco BHC-1500 y flujo de propelente al cual es activado el cátodo y el propulsor [19].

Diámetro del tubo del cátodo	3.2 mm
Material emisor	Tungsteno impregnado
Corriente del “heater” durante calentamiento	5 A
Corriente del “heater” durante ignición	7 A a 8 A
Corriente del “heater” después de la ignición	3 A
Voltaje del “keeper” modo de espera	50 V a 300 V
Voltaje del “keeper” después de la ignición	50 V
$\dot{m}_{pc}$ en modo de espera	0.05 mg/s (Xe)
$\dot{m}_{pc}$ en ignición	0.098 mg/s a 0.1474 mg/s (Xe)
$\dot{m}_{pa}$ en ignición	0.5898 mg/s a 0.8847 mg/s (Xe)
Tiempo de encendido	10 min a 30 min
Masa del cátodo	140 g

Como flujo de propelente en el propulsor  $\dot{m}_p$  se utilizarán los flujos promedios de propelente del ánodo y cátodo, con la relación  $\dot{m}_p = \dot{m}_{pa} + \dot{m}_{pc}$ , así resulta:

$$\boxed{\dot{m}_p = 0.859\,956 \times 10^{-6} \text{ kg s}^{-1}} \quad (6.2)$$

Hay dos parámetros fundamentales de teoría de plasmas que permitirán obtener muchos otros parámetros importantes para entender el comportamiento del plasma dentro del propulsor Hall: la temperatura de los electrones, y la densidad de partículas. Podría interesar la densidad de iones y de electrones por separado, pero al ser un plasma cuasineutro, se tiene que:  $n_i \approx n_e$ .

Ámbos parámetros son inaccesibles para éste trabajo, pues el propulsor construido [25] aún no ha sido puesto en operación, así como tampoco se cuenta aún con el equipo necesario para hacer las mediciones de temperatura de electrones y densidad de partículas dentro del propulsor, por lo tanto se tomarán resultados obtenidos en la caracterización de un propulsor BHT-200 de la compañía Busek Co., de un trabajo realizado como tesis doctoral de Brian Eric Beal [5] de la Universidad de Michigan. El propulsor construido y diseñado [25] por el equipo de la UAT se basó en gran parte en el propulsor BHT-200 y por esa cuestión se tomará para éste trabajo la temperatura de electrones e iones del trabajo de Beal.

Una foto del propulsor BHT-200 se presenta a continuación (Fig. 6.5), el cual está acoplado al cátodo hueco utilizado BHC-1500.



Figura 6.5: Fotografía del propulsor Hall BHT-200 de la compañía Busek Co. acoplado al cátodo BHC-1500 de la misma compañía [9].

A continuación se presentará el perfil de temperatura de electrones (Fig. 6.6) que se utilizará en éste trabajo, tomado del trabajo de Beal [5].

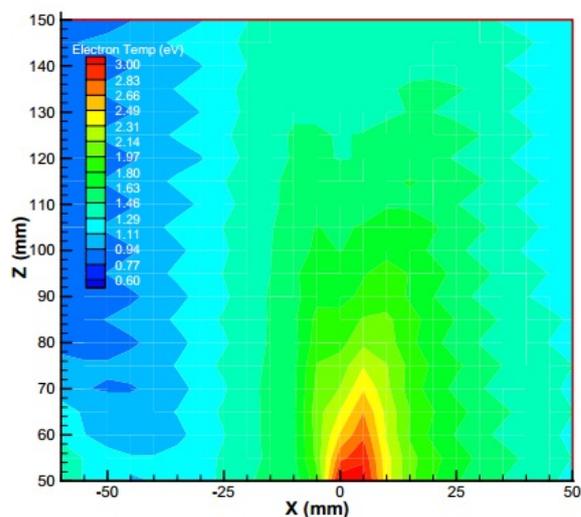


Figura 6.6: Perfil de temperatura de electrones del propulsor BHT-200 [5].

El valor tomado para la caracterización (Tab. 6.7) será un valor aproximado correspondiente a la zona de ionización en la salida de la cámara de descarga.

Para el valor de densidad de electrones en el plasma se ha tomado en consideración el rango de valores típicos de densidad de electrones en un plasma dentro de un propulsor Hall, el rango de valores típicos va de  $10^{17}$  a  $10^{18}$  partículas por cada metro cúbico [12] [3]. Así para éste trabajo se tomará un valor aleatorio dentro del rango.

Tabla 6.7: Densidad de plasma propuesta y temperatura de iones y electrones tomadas del trabajo de Beal [5].

Densidad de plasma ( $n \approx n_i \approx n_e$ )	$3.8 \times 10^{17} \text{ m}^{-3}$
Temperatura de electrones ( $T_e$ )	3 eV (34 813.6 K)
Temperatura de iones ( $T_i$ )	1 eV (11 604.5 K)

También se debe considerar que algunos de los parámetros del cátodo BHC-1500 que se presentaron en la Tab. 6.6 fueron tomados para cumplir ciertos requerimientos del trabajo del cual fueron extraídos [19], así como en el trabajo de Beal se utilizaron algunos parámetros diferentes a la Tab. 6.6, a continuación se presentan los parámetros del cátodo (Fig. 6.8) utilizados en el trabajo de Beal [5].

Tabla 6.8: Parámetros del cátodo hueco BHC-1500 en el trabajo de Beal [5].

Voltaje del cátodo ( $V_c$ )	20 V
Corriente del “keeper”	500 mA
Voltaje del “keeper”	13 V
$\dot{m}_p$	0.1 mg/s (Xe)

Como trabajo a futuro se realizarán mediciones de la temperatura de electrones y densidad de partículas para el propulsor construido y se compararán con los parámetros que se obtuvieron y presentan en el siguiente apartado.

A continuación, tomando en cuenta los valores propuestos para el diseño en [25], se calcularán todos los parámetros posibles con las ecuaciones deducidas en los capítulos anteriores de éste trabajo.

## 6.4. Caracterización

Debe mencionarse que los resultados obtenidos y presentados a continuación sólo toman en consideración las incertidumbres asociadas al campo magnético medido en la bobina, y a las dimensiones de la cámara de descarga. Mientras que los valores adaptados de temperatura de electrones, iones y densidad del plasma se tomaron como valores exactos. Y a su vez la masa del electrón, su carga, la constante de Boltzmann, el número de Avogadro, la permitividad del vacío, la masa del xenón y el radio del xenón se tomaron como constantes exactas también. Estas constantes se tomaron como se presenta a continuación en la Tab. 6.9.

Tabla 6.9: Constantes físicas utilizadas y sus valores respectivos.

Masa del electrón ( $m_e$ )	$9.109\,381\,88 \times 10^{-31}$ kg
Carga del electrón ( $q_e$ )	$-1.602\,176\,46 \times 10^{-19}$ C
Constante de Boltzmann ( $K_B$ )	$1.380\,650\,30 \times 10^{-23}$ m <sup>2</sup> kg s <sup>-2</sup> K <sup>-1</sup>
Número de Avogadro ( $N_A$ )	$6.022\,140\,86 \times 10^{23}$ mol <sup>-1</sup>
Permitividad del vacío ( $\epsilon_0$ )	$8.854\,187\,82 \times 10^{-12}$ A <sup>2</sup> s <sup>4</sup> m <sup>-3</sup> kg <sup>-1</sup>
Masa del xenón ( $m_{Xe}$ )	$2.180\,070\,45 \times 10^{-25}$ kg
Radio del xenón ( $r_{Xe}$ )	$1.08 \times 10^{-10}$ m

Todas las incertidumbres reportadas a continuación se calcularon de acuerdo a las ecuaciones y teoría presentada en el apéndice B.

### 6.4.1. Teoría de plasmas

El primer parámetro que se puede calcular, con la información presentada en el apartado anterior, es el promedio de la energía cinética en 3 dimensiones. La temperatura de electrones de 3 eV equivale a una temperatura de 34 813.6 K. Calculando a partir de la Ec. (3.13) se obtiene:

$$\langle E_c \rangle = 7.2098 \times 10^{-19} \text{ J} \quad (6.3)$$

Si se agarrara un corte transversal de la cámara de descarga, y se estudiara el plasma en esa región, bastaría con calcular el promedio de la energía cinética para dos dimensiones con la ecuación Ec. (3.13) que es equivalente a convertir la temperatura de electrones de 3 eV a Joules teniendo en cuenta la relación  $1 \text{ eV} = 1,602 \times 10^{-19} \text{ J}$ , por tanto se tendrá una energía cinética asociada a la temperatura de los electrones equivalente a:

$$E_c = 4.8065 \times 10^{-19} \text{ J} \quad (6.4)$$

Tomando ahora en cuenta la densidad de partículas en la región de ionización de  $n = 3,8 \times 10^{17} \text{ m}^{-3}$ , se puede calcular la longitud de Debye del plasma en esta región por medio de la Ec.(3.23), la cual resulta:

$$\lambda_D = 2.0887 \times 10^{-5} \text{ m} \quad (6.5)$$

Se puede ver entonces que se cumple el primer criterio para ionización del plasma descrito por la Ec. (3.27) ( $\lambda_D \lll L$ ), pues las dimensiones del sistema corresponden a  $L_C$  y  $w$  descritas en la Tab. 6.4, e incluso la más pequeña ( $w$ ) es casi 300 veces más grande que  $\lambda_D$ .

El siguiente parámetro calculable es la frecuencia del plasma  $\omega_p$ , utilizando la masa del electrón de  $m_e = 9.109\,388\,188 \times 10^{-31} \text{ kg}$  en la Ec. (3.32) se obtendrá:

$$\omega_p = 3.4776 \times 10^{10} \text{ rad s}^{-1} \quad (6.6)$$

Otro parámetro que se puede obtener de la temperatura de electrón y la densidad del plasma es el parámetro del plasma, el cual es adimensional y es posible calcularlo apartir de la Ec. (3.33), resultará:

$$\boxed{N_D = 14\,499.9797} \quad (6.7)$$

Se puede ver a partir de la Ec. (6.7) que se cumple bastante bien el segundo criterio de ionización del plasma descrito en la Ec. (3.34) ( $N_D \gg 1$ ).

Para calcular la frecuencia de ciclotrón o “girofrecuencia” de los electrones es necesario utilizar las Ecs. (3.40) y (3.46), utilizando el campo magnético promedio obtenido de  $(217,5 \pm 2,175)$  Gauss o  $(0,02175 \pm 0,0002175)$  Teslas se obtiene:

$$\boxed{\omega_e = (-3\,825\,433\,878 \pm 38\,254\,338) \text{ rad s}^{-1}} \quad (6.8)$$

$$\boxed{f_e = (-608\,836\,711 \pm 6\,088\,367) \text{ Hz}} \quad (6.9)$$

Así también se puede calcular la frecuencia de ciclotrón de los iones con las mismas ecuaciones, pero considerando que la masa de un ion de xenón es de:  $m_{Xe} = 2.18 \times 10^{-25}$  kg, por lo tanto las frecuencias de ciclotrón para los iones serán las siguientes:

$$\boxed{\omega_i = (15\,984.500\,89 \pm 159.845\,00) \text{ rad s}^{-1}} \quad (6.10)$$

$$\boxed{f_i = (2544.012\,329 \pm 25.440\,123) \text{ Hz}} \quad (6.11)$$

A continuación se obtendrá otro valor importante para plasmas el cual es la velocidad térmica de los electrones, para calcularla se utilizará la Ec. (3.16), obteniendo así:

$$\boxed{v_{Te} = 1\,159\,156.076 \text{ m s}^{-1}} \quad (6.12)$$

De igual forma se obtiene la velocidad térmica de los iones, considerando ahora la temperatura de iones en el plasma de 1eV (o 11604.5 K), resulta entonces:

$$\boxed{v_{Ti} = 1368.0118 \text{ m s}^{-1}} \quad (6.13)$$

Posteriormente se puede calcular el radio de ciclotrón, radio de Larmor o “giroradio”, de los electrones y de los iones con la Ec. (3.45). Se debe aclarar que la mayor velocidad que alcanzan los electrones es la velocidad térmica, por lo tanto es la velocidad utilizada para el cálculo del radio de Larmor de los electrones, sin embargo los iones alcanzan una velocidad mayor por la diferencia de potencial eléctrico que por su temperatura, por lo tanto el radio de ciclotrón de los iones se calculará a partir de la Ec. (5.7), los resultados son los siguientes:

$$\boxed{r_e = (0.000\ 303\ 013\ 000 \pm 0.000\ 003\ 030\ 129) \text{ m}} \quad (6.14)$$

$$\boxed{r_i = (1.199\ 239\ 243 \pm 0.011\ 992\ 392) \text{ m}} \quad (6.15)$$

Otro valor que se puede calcular es la velocidad de deriva, ésta por medio de la Ec. (3.50) y tomando el campo eléctrico por el cual están acelerados los iones como el cociente entre el potencial de descarga y la longitud de la cámara de descarga. Así se obtiene:

$$\boxed{v_E = (551\ 724.1379 \pm 7802.5576) \text{ m s}^{-1}} \quad (6.16)$$

En la zona de ionización los electrones se moverán a alta velocidad alrededor de la cámara de descarga colisionando con los átomos de xenón ionizándolos, aquí se tendrá que considerar la sección transversal entre los átomos neutros de xenón y los electrones. La sección transversal geométrica entre átomos de xenón y electrones será prácticamente la sección transversal geométrica de los átomos de xenón por sí solos. Utilizando el radio del átomo de xenón ( $1,08 \times 10^{-10} \text{ m}$ ) se tendrá que:

$$\boxed{\sigma_g = 3.6643 \times 10^{-20} \text{ m}^2} \quad (6.17)$$

Y para la sección transversal coulombiana entre los átomos neutros de xenón y los electrones se utilizará la Ec. (3.55), obteniendo así:

$$\boxed{\sigma_{en} = 2.630\ 13 \times 10^{-19} \text{ m}^2} \quad (6.18)$$

Nótese que la sección transversal coulombiana es más grande que la geométrica. Ocurre de ésta manera pues los electrones al acercarse a los átomos de xenón se desviarán estando aún lejos de éstos debido a las fuerzas electromagnéticas entre los electrones y átomos de xenón.

Por lo tanto, utilizando la densidad de plasma, se obtendrá el camino libre medio utilizando la Ec. (3.56), resultará:

$$\boxed{\lambda = 10.005\ 52 \text{ m}} \quad (6.19)$$

Y así se obtendrá la frecuencia de colisiones  $\nu$  por medio de la Ec. (3.57), resultando así:

$$\boxed{\nu = 115\ 851.6647 \text{ Hz}} \quad (6.20)$$

Y así el tiempo entre colisiones será:

$$\boxed{\tau = 8.631\ 73 \times 10^{-6} \text{ s}} \quad (6.21)$$

Por lo tanto también se cumple fácilmente el tercer criterio para ionización de un plasma denotado en la Ec. (3.51) ( $\omega_p \tau > 1$ ).

#### 6.4.2. Efecto Hall

En la configuración del propulsor Hall el voltaje Hall corresponderá al voltaje de descarga ( $V_H = V_d$ ), y lo que se obtendrá con la Ec. (4.4) será la corriente Hall que formarán los electrones alrededor del eje del propulsor, la cual será equivalente a:

$$\boxed{I_H = (4.618\,688\,0 \pm 0.214\,960\,9) \text{ A}} \quad (6.22)$$

También se podrá calcular el parámetro Hall de los electrones  $\Omega_e$ , el cuál es adimensional y deberá ser mucho mayor a 1 para ser un plasma, por medio de la Ec. (4.7) se obtiene:

$$\boxed{\Omega_e = 237\,005.161 \pm 2370.051} \quad (6.23)$$

Y es posible calcular el ángulo Hall por medio de la Ec. (4.8), obteniendo, en radianes y grados respectivamente:

$$\boxed{\Theta_H = (1.570\,792\,107 \pm 0.000\,000\,042) \text{ rad}} \quad (6.24)$$

$$\boxed{\Theta_H = (89.999\,758\,24 \pm 0.000\,002\,41)^\circ} \quad (6.25)$$

### 6.4.3. Parámetros del propulsor

Se vió en el capítulo 5 que se debía cumplir la condición de que el radio de ciclotrón del electrón fuera mucho más pequeño que la longitud del canal de descarga ( $r_e \ll L_c$ ), o que el cociente entre la longitud del canal de descarga y el radio de ciclotrón de los electrones sea mucho mayor a 1, se puede ver que:

$$\boxed{\frac{L_c}{r_e} = 82,5047 \gg 1} \quad (6.26)$$

Por lo tanto la condición de la Ec. (5.4) se cumple fácilmente. Ésta condición dice que los electrones al acercarse al ánodo darán muchas vueltas en un radio  $r_e$ , así el campo magnético los atrapará mucho antes de llegar al ánodo y se unirán a la corriente de electrones alrededor del canal de descarga.

También se debe de cumplir la condición descrita en la Ec. (5.5) ( $\Omega^2 = \frac{\omega_e^2}{\nu^2} \gg 1$ ), se puede ver que:

$$\boxed{\Omega^2 = 1.090\,33 \times 10^9 \gg 1} \quad (6.27)$$

Esta condición la cumple ampliamente y muestra que los electrones deben orbitar muchas veces alrededor de una línea de campo magnético con frecuencia de ciclotrón  $\omega_e$  antes de colisionar con un ion, y ésto se reflejará en la Ec. (5.6) en que la movilidad de los electrones en dirección transversal al campo magnético se reducirá drásticamente.

Otra de las condiciones que debe cumplir el propulsor es la descrita en la Ec. (5.7) ( $r_i \gg L_c$ ), en otras palabras, que el cociente entre el radio de ciclotrón de los iones y la longitud del canal de descarga sea mucho mayor a 1, se puede ver que:

$$\boxed{\frac{r_i}{L_c} = 47.9695 \gg 1} \quad (6.28)$$

Se cumple fácilmente. Ésta condición habla de que el radio de ciclotrón de los iones es tan grande que para completar una sola vuelta de radio  $r_i$  debe salirse del propulsor, por lo tanto los iones son expulsados a grandes velocidades.

También se puede calcular la corriente de iones que son expulsados del propulsor dada por la Ec. (5.11), se obtendrá así:

$$\boxed{I_i = (0.618\,529\,008 \pm 0.028\,917\,106) \text{ A}} \quad (6.29)$$

Se puede obtener también la velocidad de los iones al salir del propulsor, dada por la Ec. (5.22), la cual resulta ser:

$$\boxed{v_i = 19\,169.240\,74 \text{ m s}^{-1}} \quad (6.30)$$

Igualando las Ecs. (5.13) y (5.24) es posible obtener la corriente del haz de iones  $I_b$ , la cual corresponderá a:

$$\boxed{I_b = (0.564\,637\,15 \pm 0.035\,846\,41) \text{ A}} \quad (6.31)$$

El flujo de masa iónica se puede calcular con la Ec. (5.23)

$$\dot{m}_i = (7.682\,978\,72 \pm 0.487\,759\,69) \times 10^{-7} \text{ kg s}^{-1} \quad (6.32)$$

Y así se obtiene la eficiencia de utilización del propelente  $\eta_m$ , denotada por la Ec. (5.36), la cual resultará ser:

$$\eta_m = 0.8934 \pm 0.0567 \quad (6.33)$$

A partir de éste resultado también se puede obtener la velocidad de escape del propulsor, la cual resultará siendo el producto entre la velocidad de los iones expulsados y la eficiencia de aprovechamiento másica, así se obtiene:

$$v_{ex} = 17\,126.078\,56 \text{ m s}^{-1} \quad (6.34)$$

Y así definir la potencia de empuje cinético del haz (o “jet power”), por medio de la Ec. (5.20), se obtiene:

$$P_{jet} = 126.113\,76 \text{ W} \quad (6.35)$$

Es posible calcular una primera aproximación al empuje de nuestro propulsor [25] por medio de la Ec. (5.24), resulta:

$$\mathbf{T} = (0.014\,727\,6 \pm 0.000\,934\,9) \text{ N} \quad (6.36)$$

ó en miliNewtons:

$$\mathbf{T} = (14.7276 \pm 0.9349) \text{ mN} \quad (6.37)$$

Y se dice “primera aproximación” al empuje porque aún falta considerar algunos parámetros, como la apertura del haz de iones propulsados, y la cantidad de corriente de iones dada por ionizaciones sencillas y dobles ionizaciones.

Como el propulsor no está disponible aún para ponerse en operación, éstos valores no se pueden medir, sin embargo, se pueden tomar diversos valores parecidos a los reportados para micropropulsores para calcular fuerzas de empuje estimadas.

Los valores de ángulo medio de divergencia del haz de iones reportados van desde los  $10^\circ$  [12] y  $20^\circ$  [7], hasta los  $33^\circ$  y  $45^\circ$  [11]. Por lo tanto se harán estimaciones del empuje para valores de ángulo medio de divergencia del haz de iones desde  $10^\circ$  hasta  $45^\circ$  en intervalos de  $5^\circ$ .

Para el porcentaje de ionizaciones sencillas con respecto a ionizaciones dobles se tomarán valores reportados desde el 97.5 % [5], 90 % [12], hasta el 85 % [8], con intervalos de 2.5 % entre cada valor.

Así, utilizando las Ecs. (5.30, 5.31 y 5.32) se obtendrá la siguiente tabla de valores de empuje tomando en cuenta las pérdidas por divergencia del haz de iones y las pérdidas por dobles ionizaciones (6.10). También así se colorearán los valores de Thrust más cercanos al reportado en [25] de 13.3 mN a manera de “predicción” para estimar el porcentaje de ionización o el ángulo de divergencia del haz de iones que tendría el propulsor prototipo puesto en funcionamiento si los valores calculados en [25] fueran precisos.

Tabla 6.10: Cálculo de fuerza de empuje (en mN) considerando el ángulo medio de divergencia del haz de iones ( $\theta_d$ ) y el porcentaje de ionizaciones sencillas con respecto a dobles ionizaciones ( $I^+/I^{++}$ ).

$\theta_d \backslash I^+/I^{++}$	97.5 %	95 %	92.5 %	90 %	87.5 %	85 %
$10^\circ$	14.398	14.292	14.185	14.079	13.973	13.867
$15^\circ$	14.122	14.018	13.913	13.809	13.705	13.601
$20^\circ$	13.738	13.637	13.535	13.434	13.333	13.231
$25^\circ$	13.250	13.152	13.055	12.957	12.859	12.761
$30^\circ$	12.661	12.568	12.474	12.381	12.288	12.194
$35^\circ$	11.976	11.888	11.799	11.711	11.623	11.534
$40^\circ$	11.199	11.117	11.034	10.952	10.869	10.786
$45^\circ$	10.338	10.262	10.185	10.109	10.033	9.957

Por otra parte, para calcular una primera aproximación del impulso específico  $I_{sp}$  se utilizará la Ec. (5.35), obteniendo así:

$$I_{sp} = 1954.051\ 044\ \text{s} \quad (6.38)$$

Pero para calcular el impulso específico de una manera más precisa se necesitará el término gamma  $\gamma$  que se utilizó para el cálculo del empuje y que representa el producto entre las pérdidas dadas por la divergencia del haz de iones y las pérdidas por doble ionización. Para eso se utiliza la gamma promedio para ionizaciones sencillas del 97,5 % hasta el 85 %. Además de multiplicar por el término de eficiencia de aprovechamiento másico  $\eta_m$ . Utilizando así las Ecs. (5.37, 5.38, 5.39) y sustituyéndolas en la Ec. (5.40) se obtendrá la siguiente Tab. (6.11) de valores de impulso específico en segundos. Así como se hizo con el Thrust, a continuación también se mostrarán coloreados los valores más cercanos al reportado en [25].

Tabla 6.11: Cálculo del impulso específico (en s) considerando el aprovechamiento másico del propulsor ( $\eta_m$ ), el término de eficiencia gamma ( $\gamma$ ) y el porcentaje de ionizaciones sencillas con respecto a dobles ionizaciones ( $I^+/I^{++}$ ).

$\theta_d \backslash I^+/I^{++}$	97.5 %	95 %	92.5 %	90 %	87.5 %	85 %
10°	1706.666	1694.077	1681.488	1668.898	1656.309	1643.720
15°	1673.944	1661.596	1649.248	1636.900	1624.552	1612.204
20°	1628.482	1616.469	1604.457	1592.444	1580.432	1568.419
25°	1570.626	1559.040	1547.455	1535.869	1524.283	1512.697
30°	1500.817	1489.746	1478.675	1467.605	1456.534	1445.463
35°	1419.586	1409.114	1398.643	1388.171	1377.699	1367.228
40°	1327.551	1317.758	1307.965	1298.172	1288.380	1278.587
45°	1225.412	1216.373	1207.333	1198.294	1189.255	1180.216

Véase que todos los valores coloreados caen en un ángulo de divergencia del haz de iones de 40°, pero éste valor va en orden descendente mientras el porcentaje de ionización sencilla baja. Por lo tanto los valores más cercanos al  $I_{sp}$  reportado en [25] de 1300 s estarán en un ángulo de divergencia entre 40° y 45° para un porcentaje de ionización sencilla de 97,5 % a 92,5 %. Pero cuando el porcentaje de ionización sencilla está entre 90 % y 85 %, el ángulo de divergencia del haz de iones estará entre 35° y 40°.

El término de eficiencia eléctrica dado por la Ec. (5.43) resulta ser:

$$\boxed{\eta_e = 0.7057 \pm 0.0448} \quad (6.39)$$

La pérdida por descarga, o “eficiencia de producción de iones”, dada por la Ec. (5.44) será:

$$DL = (354.2097 \pm 0.1124) \text{ W A}^{-1} \quad (6.40)$$

La cual está en unidades de watt/Ampere, y es equivalente a eV/ion. Es decir, se necesitan aproximadamente 354 eV de energía para producir cada ion.

La eficiencia de utilización eléctrica  $\eta_0$  se calcula con la Ec. (5.47) apartir de la potencia del “keeper” en modo de operación (la cual es nula), y la potencia requerida para generar el campo magnético. En la medición del campo magnético generado por la bobina no se tomaron mediciones del voltaje o la corriente inducidas en la bobina, por lo tanto éste término de eficiencia no se considerará por el momento.

La eficiencia de aprovechamiento de corriente se calcula con la Ec. (5.48), resulta por lo tanto:

$$\eta_b = 0.8469 \pm 0.0537 \quad (6.41)$$

La eficiencia de aprovechamiento de voltaje, por medio de la Ec. (5.49), resulta:

$$\eta_V = 0.8333 \quad (6.42)$$

Para calcular la eficiencia total del propulsor es necesario utilizar el término de eficiencia gamma  $\gamma$ , el cual depende tanto del ángulo de divergencia del haz de iones, como del porcentaje de ionizaciones sencillas, así, utilizando la Ec. (5.50), se tendrán los siguientes valores posibles de eficiencia total del propulsor (Tab. 6.12). De manera análoga se muestran coloreados los valores de eficiencia total más cercanos al reportado en [25] de 42 %.

Tabla 6.12: Cálculo de la eficiencia total considerando el ángulo de divergencia del haz de iones  $\theta_d$ , el porcentaje de ionización sencilla ( $I^+/I^{++}$ ), la eficiencia de aprovechamiento de masa  $\eta_m$ , la eficiencia de aprovechamiento de corriente  $\eta_b$  y la eficiencia de aprovechamiento de voltaje  $\eta_V$ .

$\theta_d \backslash I^+/I^{++}$	97.5 %	95 %	92.5 %	90 %	87.5 %	85 %
10°	60.26 %	59.37 %	58.49 %	57.62 %	56.75 %	55.89 %
15°	57.97 %	57.12 %	56.27 %	55.43 %	54.60 %	53.77 %
20°	54.86 %	54.06 %	53.26 %	52.46 %	51.67 %	50.89 %
25°	51.03 %	50.28 %	49.54 %	48.80 %	48.07 %	47.34 %
30°	46.60 %	45.91 %	45.23 %	44.56 %	43.89 %	43.22 %
35°	41.69 %	41.08 %	40.47 %	39.86 %	39.27 %	38.67 %
40°	36.46 %	35.92 %	35.39 %	34.86 %	34.34 %	33.82 %
45°	31.06 %	30.61 %	30.15 %	29.70 %	29.26 %	28.81 %

## 6.5. Análisis de resultados

Algunos valores calculados en éste trabajo fueron ligeramente diferentes a los calculados por Tejada, E. A continuación (Tab. 6.13) se presentan aquellos valores que fueron distintos.

NOTA: en los valores presentados en la Tab. 6.13 de fuerza de empuje  $\mathbf{T}$ , impulso específico  $I_{sp}$ , velocidad de escape  $v_{ex}$ , potencia de empuje cinética  $P_{jet}$  y eficiencia total  $\eta_T$  se consideran la eficiencia de aprovechamiento de masa  $\eta_m$ , de corriente  $\eta_b$  y de voltaje  $\eta_V$  calculadas en el capítulo anterior, pero se considera un eficiencia gamma  $\gamma$  del 100 %.

Tabla 6.13: Parámetros del propulsor que resultaron diferentes del trabajo de Tejada, E.

Parámetros	Trabajo de Tejada, E.	Trabajo presente
$\dot{m}_p$ [kg/s]	$1.0458 \times 10^{-6}$	$0.8599 \times 10^{-6}$
$v_{ex}$ [m/s]	12753	17126.0785
$P_{jet}$ [W]	85.0453	126.1137
Empuje [mN]	13.3	14.727
$I_{sp}$ [s]	1300	1954.05
$\eta_T$	42 %	63.05 %

El término de eficiencia gamma  $\gamma$  determina en gran parte el desempeño del propulsor, y sólo contando con las mediciones precisas del ángulo de divergencia del haz de iones y del porcentaje de ionización sencilla frente a dobles ionización.

nes, se podrán calcular de manera precisa los parámetros anteriores.

Los valores (Tab. 6.13) resultan diferentes pues en éste trabajo se están tomando en cuenta más parámetros iniciales de los que se consideraron en el trabajo de Tejada, E., pues su trabajo fue principalmente de diseño y construcción. De ésta forma éste trabajo pretende extender y sustentar la validez del trabajo de Tejada, E.

Los parámetros que se tomaron en cuenta en éste trabajo que no se tomaron en el trabajo de Tejada, E. fueron los términos de eficiencia de aprovechamiento de masa, de corriente, de voltaje, así como las propiedades del plasma del propulsor y las dimensiones de la cámara de descarga.

En el trabajo de Tejada, E. no se calculó el impulso específico, pero si se propuso el valor de 1300 s para cumplir los requerimientos de la misión [25], y para proponerlo se basó en una gráfica (Fig. 6.7) de relación entre la potencia de descarga de un propulsor y su impulso específico para varios tipos de propelente. La gráfica es la siguiente:

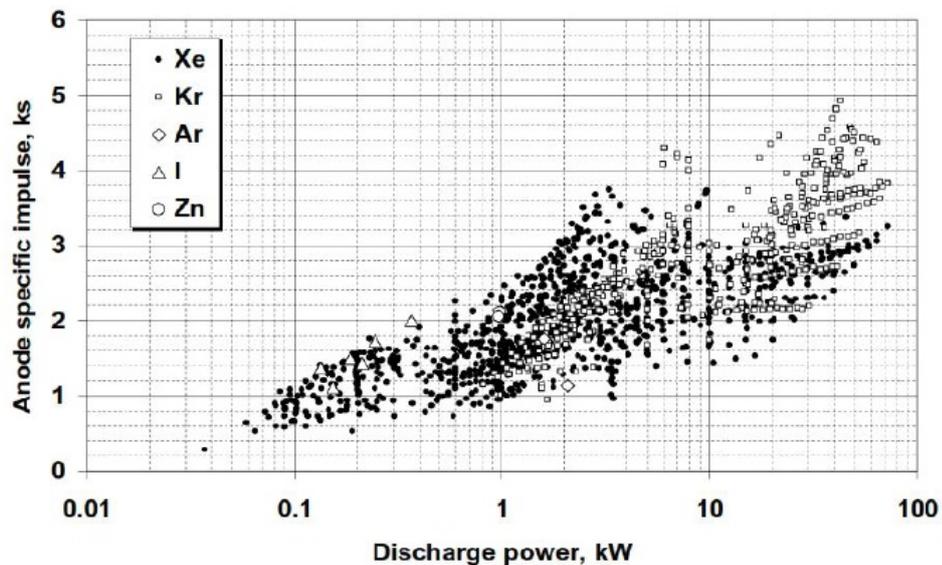


Figura 6.7: Relación entre potencia de descarga e impulso específico para varios propelentes [25] [1].

De ahí que a una potencia de descarga de 200 W, para xenón, se escogiera un impulso específico de 1300 s. A partir del impulso específico Tejada, E. utilizó

un modelo de eficiencia (Fig. 6.8) de propulsores eléctricos para utilización del xenón, donde la eficiencia total está dada por:

$$\eta_T = A + B \ln(I_{sp}) \quad (6.43)$$

Thruster System	Constants for models			
	A	B	C	D
H <sub>2</sub> Arcjet	--	--	5.0	0
NH <sub>3</sub> Arcjet	--	--	1.8	0
Ar Ion	-2.024	0.307	4490	-0.781
Ar Ion (MW <sub>e</sub> design)	--	--	0.49	0
Xe Ion	-1.776	0.307	123,100	-1.198
Hg Ion	-0.765	0.181	82,870	-1.136
Ar MPD (Lab version)	-0.591	0.126	7	0
H <sub>2</sub> MPD (2.5 MW <sub>e</sub> design)	--	--	0.17	0
Ar PIT	-1.99	0.32	7	0

Figura 6.8: Modelos de eficiencia para propulsores eléctricos [25] [14].

A partir de la eficiencia total Tejada, E. pudo calcular los demás parámetros.

Por lo tanto, al tomar diferentes caminos para llegar a los mismos parámetros, se obtuvieron distintos resultados.

Nótese también que los resultados obtenidos en éste trabajo con respecto a la física de plasmas dan una noción acertada del funcionamiento del propulsor Hall, pues éstos resultados corresponden totalmente con el funcionamiento real del propulsor Hall.

Por ejemplo, el ángulo Hall da la separación geométrica entre la dirección del campo eléctrico aplicado y la corriente Hall. En éste caso la corriente Hall es la corriente de electrones que circundan la cámara de descarga. El ángulo Hall resultó ser de 89.999 758°, es decir que la dirección del campo eléctrico es básicamente perpendicular a la corriente de electrones en el canal de descarga, lo cual tiene sentido físico y concuerda con la experimentación.

Por otro lado también se obtuvo que el radio de ciclotrón de los electrones es mucho más pequeño (82 veces) que la longitud de la cámara de descarga, por lo tanto los electrones que salgan del cátodo hacia el ánodo darán muchas vueltas sobre sí mismos antes de llegar al ánodo, y por lo tanto el campo magnético los atrapará y formarán parte de la corriente Hall de electrones.

También se obtuvo un parámetro Hall ( $\Omega = \frac{\omega_e}{\nu}$ ) del plasma bastante grande ( $\approx 2,36 \times 10^5$ ), lo cual significa que los electrones deben orbitar muchas veces alrededor de una línea de campo magnético con su respectiva frecuencia de ciclotrón antes de colisionar con un átomo neutro, es decir, quedarán atrapados en el campo magnético el suficiente tiempo como para ionizar el propelente.

Así también se cumplió la condición de que el radio de ciclotrón de los iones fuera mucho mayor (48 veces más grande) que la longitud de la cámara de descarga. Es decir, los iones no podrán ni siquiera completar una vuelta alrededor de su radio de ciclotrón dentro de la cámara de descarga y saldrán expulsados al exterior del propulsor a grandes velocidades, lo que generará el empuje del propulsor.

## Capítulo 7

# CONCLUSIONES Y TRABAJO A FUTURO

### 7.1. Conclusiones

La principal conclusión que sale de éste trabajo consiste en que la cámara de descarga con las dimensiones con las que fue diseñada y construída [25], con el circuito magnético construído, va a cumplir con los requerimientos para que un propulsor Hall pueda funcionar eficientemente y dentro de los rangos de operación típicos de un propulsor Hall para un microsatélite.

Éste trabajo resulta relevante porque en la realización de éste se hizo un buen compendio de la teoría de plasmas y propulsión eléctrica involucrada en el funcionamiento del propulsor Hall en lengua española, información la cual es bastante difícil de conseguir en español considerando la profundidad con la que se analiza en éste trabajo. Éste compendio de información podrá ser de mucha ayuda y utilidad para presentes y futuras generaciones en la comprensión del funcionamiento de éste tipo de propulsores.

Los resultados obtenidos en éste trabajo con respecto a la física de plasmas, y analizados en el subcapítulo anterior, tienen total sentido con la realidad. Por lo tanto, éste trabajo logra extender el conocimiento actual en el país sobre el funcionamiento del propulsor Hall asentando sus bases teóricas en la física de plasmas, así como los parámetros y rangos operacionales de éste tipo de propulsor.

Otro aporte importante de éste trabajo es que éste se realizó con la informa-

ción y experiencia reunida por la Unidad de Alta Tecnología (UAT) y el Laboratorio Nacional de Ingeniería Espacial y Automotriz (LNIEA), y no concluyó con la información tomada y analizada, sino que abre paso a mucho trabajo de investigación e innovación en el país.

El trabajo del M.I. Eric Tejada Malpica de la Unidad de Alta Tecnología es el primer intento de desarrollo de propulsión espacial Mexicana al diseñar por vez primera un propulsor prescindiendo de tecnología extranjera, mientras que éste trabajo pretende continuar y expandir el conocimiento de motores espaciales en la Nación tomando como una de las referencias principales el trabajo del M.I. Eric Tejada Malpica, y de ésta manera abrir el área de la tecnología aeroespacial en México.

Véase que los resultados obtenidos en éste trabajo e introducidos en la Tab. 6.13, al considerarse diversos valores de eficiencia para el parámetro gamma, los resultados de fuerza de empuje en la Tab. 6.10, de impulso específico en la Tab. 6.11 y de eficiencia total en la Tab. 6.12, generan un rango de valores operacionales en los que los valores obtenidos por Tejada, E. entran fácilmente. Por tanto ambos cálculos son válidos, y los cálculos hechos en éste trabajo tanto sustentan el propulsor diseñado [25], como ofrecen una valiosa base de datos sobre funcionamiento y rangos operacionales para micropropulsores de baja potencia ( $< 500$  Watts).

Por lo tanto éste trabajo logra apoyar el trabajo de Tejada, E., validando sus resultados, así como el mismo trabajo de Tejada, E., otorgó el análisis, requerimientos de la misión espacial y diseño del propulsor necesarios para que éste trabajo lograra sus alcances satisfactoriamente.

## 7.2. Trabajo a futuro

Los valores obtenidos en éste trabajo fueron resultado de considerar los valores (Tab. 7.1)

Tabla 7.1: Densidad de plasma, temperatura de iones y temperatura de electrones propuestas.

Densidad de plasma ( $n \approx n_i \approx n_e$ )	$3.8 \times 10^{17} \text{ m}^{-3}$
Temperatura de electrones ( $T_e$ )	3 eV (34 813.6 K)
Temperatura de iones ( $T_i$ )	1 eV (11 604.5 K)

Como trabajo a futuro queda pendiente hacer las mediciones de densidad de plasma y temperatura en el propulsor físico en modo de operación, repetir los cálculos, y verificar los resultados. De ésta manera se pueden utilizar las ecuaciones tal cual como se presentan en éste trabajo para calcular los parámetros de funcionamiento para cualquier otro propulsor Hall. Si los resultados difieren al haber tomado las mediciones se procederá a estudiar más consideraciones que se tengan que hacer para obtener la caracterización completa de éste u otros propulsores tipo Hall.

Para obtener el parámetro gamma  $\gamma$  de eficiencia se requiere conocer el ángulo de divergencia del haz de iones y el porcentaje de ionización sencilla frente a las dobles ionizaciones. Al operar el propulsor y contar con el equipo necesario se podrán medir éstas cantidades para obtener un resultado aún más preciso de la fuerza de empuje del propulsor  $\mathbf{T}$ , del impulso específico  $I_{sp}$ , la velocidad de escape  $v_{ex}$ , la potencia de empuje cinético  $P_{jet}$  y la eficiencia total  $\eta_T$ .

Con un mayor conocimiento del propulsor y equipo experimental también se buscarán hacer más pruebas de rendimiento del propulsor que no se consideraron en éste trabajo como lo son disipación de potencia en el propulsor, perfiles de densidad de plasma, de temperatura, de densidad de corriente, de campo magnético, porcentaje de átomos doblemente ionizados (por medio de selectores de masa), tiempos de enfriamiento y calentamiento del propulsor, y medición de la erosión de las paredes de la cámara de descarga dadas las colisiones de electrones.

Así también se buscarán hacer análisis teóricos más sofisticados de la naturaleza del propulsor Hall como son las simulaciones numéricas “PIC” (Particle In Cell), con las cuales se puede modelar el flujo del plasma en el propulsor y los campos magnéticos generados (Fig. 7.1). De ésta manera se podrán tener mejores estudios y análisis en comparaciones teórico-experimentales.

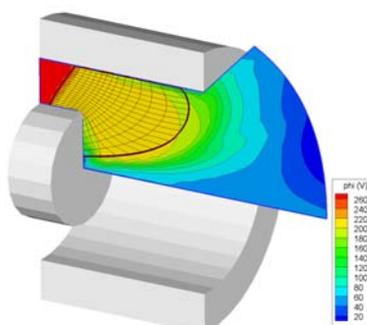


Figura 7.1: Perfil de potencial en un propulsor Hall obtenido por simulación PIC (Particle In Cell) [6].



## Apéndice A

# Fuerza de Lorentz y ecuaciones de Maxwell

Una partícula cargada tiene una carga eléctrica, la cual es atraída o repelida a otra partícula cargada, dependiendo de la orientación de la carga de cada una. Si ambas tienen la misma polaridad (+, + ó -, -) se alejarán entre sí, si ambas tienen polaridades opuestas una entre la otra (+, - ó -, +) se acercarán entre sí. La fuerza que las atrae o las repele es llamada fuerza de Coulomb, la cual es directamente proporcional a la magnitud de la carga de cada una de las partículas ( $q_1$  y  $q_2$ ) e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia “ $r$ ” entre ellas.

$$\vec{F} \propto \frac{q_1 q_2}{r^2} \quad (\text{A.1})$$

Y la fuerza generada en partículas cargadas va relacionada directamente con el campo eléctrico  $\vec{E}$  por la siguiente ecuación:

$$\vec{F} = q\vec{E} \quad (\text{A.2})$$

El concepto básico de ésta relación representa principalmente que una carga eléctrica es fuente de campo eléctrico, si se tienen muchas partículas cargadas se tendrá entonces una distribución de carga (con su respectiva densidad de carga  $\rho$ ), y esta generará un campo eléctrico que dependerá tanto de la magnitud de las cargas como de la geometría en que están ordenadas.

La relación entre el campo eléctrico  $\vec{E}$  y el desplazamiento eléctrico  $\vec{D}$  está

dada por:

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \quad (\text{A.3})$$

Donde  $\epsilon$  es la permitividad eléctrica total, y ésta equivale al producto entre la permitividad relativa y la permitividad del vacío ( $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$ ). La permitividad relativa es una cantidad que habla de la capacidad de polarización de un medio, dado así un campo eléctrico  $\vec{E}$  uniforme que atraviesa un medio dieléctrico, existe un desplazamiento eléctrico  $\vec{D}$  que depende de la permitividad eléctrica de cada punto del medio dieléctrico atravesado.

Así pues, la relación directa entre el campo eléctrico y una densidad de carga, está dada por la ley de Gauss en sus formas integral y diferencial:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad (\text{A.4})$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_L \quad (\text{A.5})$$

Donde  $S$  es una superficie gaussiana que encierra a una distribución de carga  $Q$ ,  $\vec{E}$  es el vector de campo eléctrico que entra o sale de la superficie cerrada (dependiendo de la polarización de la carga), y  $\vec{A}$  es el vector de superficie por el que atraviesa el campo eléctrico  $\vec{E}$ .  $\vec{D}$  será el vector de desplazamiento eléctrico correspondiente y  $\rho_L$  la densidad volumétrica de carga libre correspondiente a la distribución de carga total que se encuentra dentro del volumen gaussiano  $Q$ .

A continuación se hablará sobre el campo magnético. Una de las fuentes de campo magnético es el momento magnético de las partículas en un medio. Muchas de las partículas cargadas en un medio darán pequeñas vueltas, lo cual generará pequeñas corrientes eléctricas, y como se verá más adelante, las corrientes eléctricas generarán campos magnéticos asociados a los momentos magnéticos de éstas partículas. En el caso de tener materiales, dependiendo del tipo de material habrá una mayor o menor cantidad de partículas orientando su momento magnético en la misma dirección, mientras más sean éstas partículas, el objeto que componen generará un mayor o menor campo magnético.

Algo que se ha descubierto del campo magnético es que no existen monopolos

magnéticos, es decir, todas las configuraciones que se han encontrado han sido al menos dipolares, es decir que las líneas de flujo de campo magnético son las mismas en ambos extremos de un material magnético, entran y salen por igual del mismo objeto. Ésta propiedad está representada por la siguiente ecuación:

$$\boxed{\nabla \cdot \vec{B} = 0} \quad (\text{A.6})$$

La relación entre el vector de inducción magnética  $\vec{B}$ , y el campo magnético  $\vec{H}$  está dada por:

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad (\text{A.7})$$

Donde  $\mu$  corresponde a la permeabilidad magnética, y ésta equivale al producto entre la permeabilidad relativa y la permeabilidad del vacío ( $\mu = \mu_r \mu_0$ ). La permeabilidad relativa es una cantidad que representa la capacidad de un medio para dejar que un campo magnético  $\vec{H}$  entre dentro de él. Así, teniendo un campo magnético uniforme  $\vec{H}$  que atraviesa un medio, existirá un vector de inducción magnética  $\vec{B}$  diferente en cada punto del material donde la permeabilidad magnética cambie.

A partir de las definiciones de  $\epsilon_0$  y  $\mu_0$  puede ser de interés la siguiente relación con la velocidad de la luz en el vacío “ $c$ ”:

$$\epsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2} \quad (\text{A.8})$$

Si una partícula cargada se mueve, genera una corriente eléctrica, y ésta corriente eléctrica genera un campo magnético rotacional al flujo de la corriente. La relación entre la corriente eléctrica y el campo magnético está dada por la ley de Ampère:

$$\boxed{\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = I} \quad (\text{A.9})$$

Donde  $C$  es una curva cerrada alrededor de una superficie  $S$  que encierra a la corriente  $I$  creada por la partícula cargada en movimiento,  $d\vec{l}$  es el diferencial de curva  $C$ , y  $\vec{H}$  es el campo magnético generado por la corriente  $I$  que fluye a través de la superficie  $S$ .

Ahora bien, si se tienen muchas partículas cargadas moviéndose hacia una dirección, se tendrá una distribución de corriente con su respectiva densidad de corriente  $\vec{J}$ , la forma diferencial de la Ec. (A.9) estará dada como:

$$\boxed{\nabla \times \vec{H} = \vec{J}} \quad (\text{A.10})$$

Otra fuente de campo eléctrico es un campo magnético que varía en el tiempo, ya sea porque la intensidad varíe, o porque el área transversal que atravesase varíe. Ésta propiedad puede representarse por la ley de Faraday:

$$\boxed{\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{A}} \quad (\text{A.11})$$

Donde  $S$  es una superficie la cual atraviesa el campo magnético  $\vec{B}$ ,  $d\vec{A}$  es el diferencial de área de la superficie  $S$ ,  $C$  es la curva cerrada que circunda a  $S$ ,  $d\vec{l}$  es el diferencial de curva  $C$ , y  $\vec{E}$  es el campo eléctrico generado a causa del campo magnético  $\vec{B}$ . La forma diferencial resulta:

$$\boxed{\nabla \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}} \quad (\text{A.12})$$

Tiempo después James Clerk Maxwell unió todas éstas leyes de electromagnetismo y aportó un cambio en la ley de Ampère, pues otra fuente de campo magnético resultó ser un campo de desplazamiento eléctrico variando en el tiempo. Así a partir de las Ecs. (A.9 y A.10) surgió la ley de Ampère-Maxwell denotada por:

$$\boxed{\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \iint_S \left( \vec{J}_l + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S}} \quad (\text{A.13})$$

Donde  $S$  es una superficie que encierra a la densidad de corriente  $\vec{J}$  y al vector de desplazamiento eléctrico.  $C$  es una curva cerrada que delimita a  $S$ ,  $\vec{H}$  es el campo magnético producido por  $\vec{J}_l$  y  $\vec{D}$ ,  $dl$  es el diferencial de curva  $C$  y  $\vec{J}_l$  es la densidad de corriente libre, la cual no incluye las corrientes generadas por magnetización, pero si están consideradas en la variación temporal de  $\vec{D}$ . Y la forma diferencial resulta:

$$\boxed{\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}} \quad (\text{A.14})$$

Así se pueden observar las ecuaciones del electromagnetismo (llamadas típicamente ecuaciones de Maxwell), las cuales corresponden a las Ecs. (A.5, A.6, A.12, A.14)

Se utilizó la densidad de carga  $\rho$  y la densidad de corriente  $\vec{J}$ , pero no se definieron, a continuación su construcción:

$$\rho = \frac{1}{\Delta V} \sum_{\Delta V} q_k \quad (\text{A.15})$$

$$\vec{J} = \frac{1}{\Delta V} \sum_{\Delta V} q_k \vec{v}_k \quad (\text{A.16})$$

Y una cantidad sumamente importante en éste trabajo es la fuerza de Lorentz, la cual es la fuerza que siente una partícula cargada con una carga  $q$ , a una velocidad  $\vec{v}$ , dado un campo eléctrico  $\vec{E}$  y un campo magnético  $\vec{B}$ , y está representada por la siguiente ecuación:

$$\boxed{\vec{F}_L = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})} \quad (\text{A.17})$$

Es importante la dirección de la fuerza de Lorentz, pues estará determinada tanto por la dirección del campo eléctrico, como por la dirección de la partícula, como por la dirección del campo magnético.



## Apéndice B

# Problemas demostrativos

### B.1. Primer problema

Considerando un propulsor Hall con un canal de descarga con las siguientes dimensiones:

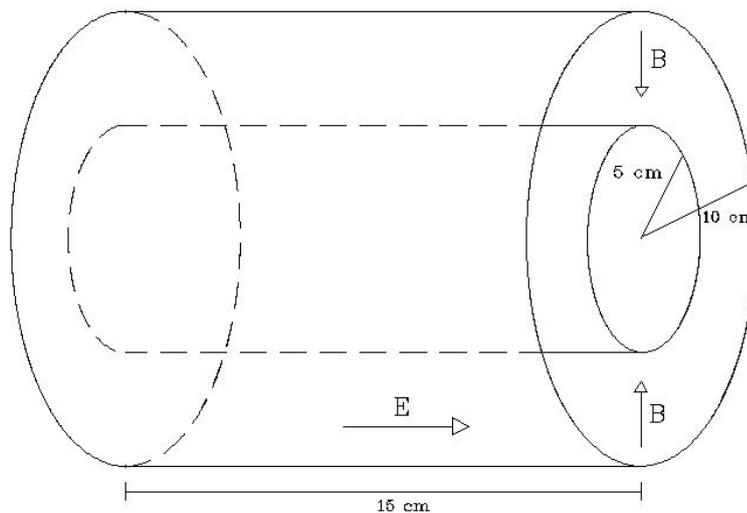


Figura B.1: Diagrama del canal de descarga de un propulsor Hall con dimensiones definidas [15].

Con un campo eléctrico entre ánodo y cátodo de 300 V, un campo magnético en dirección radial, los electrones dentro del canal de descarga con una energía de 15 eV, y la masa atómica del xenón siendo  $2,18 \times 10^{-25}$  kg.

Se calculará la amplitud del mínimo campo magnético necesario para que el

giroradio (radio de Larmor) sea 10 veces más pequeño que la dimensión radial de la cámara. Así también se calculará la velocidad de deriva de los electrones para ése campo magnético y su velocidad de salida. Así se comprobará que los iones de Xe no experimentarán deriva dentro del canal de descarga.

Por una parte se tiene que la masa del electrón es de:

$$m_e = 9.1 \times 10^{-31} \text{ kg}$$

Y la energía de los electrones es de:

$$E_e = 15 \text{ eV} \cdot \left( \frac{1.602177 \times 10^{-19} \text{ J}}{1 \text{ eV}} \right) = 2.403265 \times 10^{-18} \text{ J}$$

Calculando la energía cinética de los electrones:

$$E_{ce} = \frac{1}{2} m_e v^2$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{\frac{2E_{ke}}{m_e}} = \sqrt{\frac{2(2.403265 \times 10^{-18} \text{ J})}{9.1 \times 10^{-31} \text{ kg}}} = \sqrt{5.2819 \times 10^{12} \text{ m}^2/\text{s}^2}$$

$$\Rightarrow v = 2\,298\,238.695 \text{ m/s}$$

Si la dimensión radial del canal es de 5 cm, se necesita que el giroradio sea de 0.5 cm, este está dado apartir de la Ec. (3.44), despejando el campo magnético se tendrá que su magnitud estará dada por:

$$B = \frac{m_e v_{\perp}}{qr_c} = \frac{(9.1 \times 10^{-31} \text{ kg})(2\,298\,238.695 \text{ m/s})}{(1.6 \times 10^{-19} \text{ C})(0.005 \text{ m})}$$

$$\Rightarrow B = 2.61424 \times 10^{-3} \text{ T}$$

El campo eléctrico en el canal se considera uniforme, por lo tanto su magnitud estará dada por:

$$E = \frac{\Delta V}{L_c} = \frac{300 \text{ V}}{0.15 \text{ m}} = 2000 \text{ V/m}$$

Utilizando la ecuación de la velocidad de deriva [Ec. (3.50)], y notando que el campo eléctrico  $E$  es perpendicular al campo magnético  $B$  en cada punto dentro del canal de descarga, se puede obtener la velocidad de deriva:

$$v_E = \frac{E}{B} = \frac{2000 \text{ V/m}}{2.61424 \times 10^{-3} \text{ T}}$$

$$\Rightarrow v_E = 765040.7 \text{ m/s}$$

Asumiendo que una carga positiva iónica ( $+q_e$ ) es acelerada a través del potencial de 300 V, la energía cinética estará dada por:

$$E_{cXe} = (300 \text{ V})(q_e) = 300 \text{ eV} = 4.806531 \times 10^{-17} \text{ J}$$

Y su velocidad será:

$$v_{Xe} = \sqrt{\frac{2E_{kXe}}{m_{Xe}}} = \sqrt{\frac{2(4.806531 \times 10^{-17} \text{ J})}{2.2 \times 10^{-25} \text{ kg}}} = \sqrt{436957363.6 \text{ m}^2/\text{s}^2}$$

$$\Rightarrow v_{Xe} = 20903.525 \text{ m/s}$$

El giroradio para los iones de Xe será:

$$r_c = \frac{m_{Xe} v_{\perp Xe}}{q_{Xe} B} = \frac{(2.2 \times 10^{-25} \text{ kg})(20903.525 \text{ m/s})}{(1.6 \times 10^{-19} \text{ C})(2.61424 \times 10^{-3} \text{ T})}$$

$$\Rightarrow r_c = 10.9945 \text{ cm}$$

El cual se puede apreciar que es mucho más grande que las dimensiones de la cámara de descarga siendo ésta de 5 cm. Su giroradio es tan grande que antes de ejecutar un sólo giro su trayectoria saca a cada ión del canal de descarga, ya fuera no experimentan ningún campo eléctrico o magnético.

Debido a la gran masa de los iones de Xe, y el pequeño tamaño de la cámara, los iones se mueven independientemente del campo magnético [15].

## B.2. Segundo problema

Teniendo la misma configuración geométrica que en la Fig. B.1, pero contando con una diferencia de potencial de 250 V y un campo magnético de 2.5 mT.

a) ¿Cuál será la velocidad de salida de los iones de Xe y la velocidad de deriva para los electrones?

b) Si la eficiencia de ionización es del 90 %, ¿cuál debe ser la tasa de consumo de masa total del propulsor para alcanzar un empuje de 0.08 N?

c) ¿Cuál sería la tasa de flujo de masa equivalente si un cohete químico fuera usado en lugar del propulsor Hall? Asumir que la velocidad de salida máxima para un cohete químico es 6 km/s.

Respuestas:

a) La energía cinética de los iones de xenón para un potencial de 250 V será de:

$$E_{cXe} = (250V)(q_e) = 250 \text{ eV} \cdot \left( \frac{1.602177 \times 10^{-19} \text{ J}}{1 \text{ eV}} \right) = 4.0054425 \times 10^{-17} \text{ J}$$

$$\Rightarrow v_{Xe} = \sqrt{\frac{2E_{cXe}}{m_{Xe}}} = \sqrt{\frac{2(4.0054425 \times 10^{-17} \text{ J})}{2.2 \times 10^{-25} \text{ kg}}} = 19082.22043 \text{ m/s}$$

La velocidad de deriva de los electrones estará dada por:

$$v_E = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{B^2}$$

Al ser E uniforme dentro del canal de descarga:

$$E = \frac{\Delta V}{L_c} = \frac{250 \text{ V}}{0.15 \text{ m}} = 1666.66 \text{ V/m}$$

y al ser E perpendicular a B en todos lados:

$$\Rightarrow v_E = \frac{1666.66 \text{ V/m}}{0.0025 \text{ T}} = 666\,666.6 \text{ m/s}$$

b) Como se tiene una eficiencia de ionización del 90 %, la masa efectiva (aprovechable) será  $m_{ef} = (0,9) m$

El empuje (Thrust) estará dado por:

$$\mathbf{T} = \frac{dm_{ef}}{dt} \cdot v_{Xe} = 0.08 \text{ N}$$

$$\Rightarrow \frac{dm_{ef}}{dt} = \frac{0.08 \text{ N}}{v_{Xe}} = \frac{0.08 \text{ N}}{19\,082.220\,43 \text{ m/s}}$$

$$\Rightarrow \frac{d(0,9) m}{dt} = \frac{0.08 \text{ N}}{19\,082.220\,43 \text{ m/s}}$$

$$\Rightarrow \frac{dm}{dt} = \frac{0.08 \text{ N}}{(0,9) (19\,082.220\,43 \text{ m/s})} = 4.6582 \times 10^{-6} \text{ kg/s}$$

c) Si ahora se tiene una velocidad de salida de 6 km/s, el flujo másico será:

$$\frac{dm}{dt} = \frac{\mathbf{T}}{v_{ex}} = \frac{0.08 \text{ N}}{6000 \text{ m/s}} = 1.333 \times 10^{-5} \text{ kg/s}$$

## Apéndice C

# Propagación de Incertidumbres

Uno de los aspectos más importantes de la experimentación es la realización de mediciones, y muchas veces los resultados de un experimento dependen de la precisión con la cuál las mediciones se hacen. Y ésta precisión depende directamente del equipo de laboratorio utilizado. Así cada dispositivo de medición tendrá una incertidumbre asociada.

Se debe aclarar que no existen mediciones exactas, sino tan precisas como el equipo de medición lo permita. Y al hacer operaciones entre mediciones con sus incertidumbres asociadas se debe tomar en consideración la operación realizada para obtener la incertidumbre del resultado de la operación entre las mediciones.

Por ejemplo, si se obtienen dos mediciones con sus incertidumbres asociadas  $X = X_0 \pm \delta X$  y  $Y = Y_0 \pm \delta Y$ , al sumarlas se obtendrá:

$$\begin{aligned}Z &= X + Y \\Z &= (X_0 \pm \delta X) + (Y_0 \pm \delta Y) \\Z &= (X_0 + Y_0) \pm (\delta X + \delta Y)\end{aligned}$$

Y así por lo tanto se tendrá que la incertidumbre asociada a la suma  $Z$  de  $X$  y  $Y$  resultará ser:

$$\delta Z = \delta X + \delta Y$$

Haciendo un tratamiento similar pero ahora con la resta ( $Z = X - Y$ ), se

tiene que:

$$Z = Z_0 \pm \delta Z = (X_0 - Y_0) \pm (\delta X + \delta Y)$$

Y resultará en lo mismo:

$$\delta Z = \delta X + \delta Y$$

Se puede hacer un tratamiento similar para el producto y cociente de cantidades con una incertidumbre asociada [21].

Para calcular la incertidumbre asociada de operaciones más complicadas se suele utilizar en física experimental e ingeniería una fórmula que surge de la varianza [17], se calcula por medio de derivadas parciales y se presenta a continuación:

Si se tiene una función  $f(X, Y, Z, \dots)$  que depende de muchas variables, y cada variable tiene una incertidumbre asociada  $\delta X, \delta Y, \delta Z, \dots$ , la incertidumbre  $\delta f$  de la función  $f$  estará dada por la siguiente ecuación:

$$\delta f = \sqrt{\frac{\partial f^2}{\partial X} \delta X^2 + \frac{\partial f^2}{\partial Y} \delta Y^2 + \frac{\partial f^2}{\partial Z} \delta Z^2 + \dots} \quad (\text{C.1})$$

# Bibliografía

- [1] Ahedo, E., Gallardo, J. M. (2003). *Scaling down Hall thrusters*, IEPC.
- [2] *AISI Type 304 Stainless Steel*. ASM aerospace Specification Metals Inc. Recuperado el 15 de febrero de 2016 de: “<http://asm.matweb.com/search/SpecificMaterial.asp?bassnum=MQ304A>”
- [3] Andrenucci, M. (2008). *Hall Thrusters: Theoretical Aspects*. Advanced Course: “Electric Propulsion Concepts and Systems”. ESA/ESTEC, Noordwijk, Paises Bajos.
- [4] BBC News. *Probe crashes into Moon’s surface*. Septiembre 3, 2006. Recuperado el 22 de diciembre de 2015 de: “[news.bbc.co.uk/2/hi/science/nature/5309656.stm](http://news.bbc.co.uk/2/hi/science/nature/5309656.stm)”
- [5] Beal, B. E. (2004). *Clustering of Hall Effect Thrusters for High-Power Electric Propulsion Applications*. Tesis de doctorado. University of Michigan.
- [6] Brieda, L. (2012). *Multiscale Modeling of Hall Thrusters*. Tesis de doctorado. George Washington University.
- [7] Brophy, J. R., Barnett, J. W., Sankovic, J. M. y Barnhart, D. A. (1992). *Performance of the Stationary Plasma Thruster: SPT-100*. AIAA-92-3155, 28th Joint Propulsion Conference, Nashville, Tennessee, E.U.A.
- [8] Bundesmann, C., Tartz, M., Scholze, F., Scortecci, F., Gnizdor, R. Y., Neumann, H. (2010). *A closer look at a stationary plasma thruster (SPT-100D EM1)*. Leibniz-Institute of Surface Modification, Leipzig, Alemania.
- [9] BUSEK Advanced Space Propulsion. *Hollow Cathodes*. Recuperado el 15 de febrero de 2016 de “[http://www.busek.com/index\\_htm\\_files/70008509\\_revA.pdf](http://www.busek.com/index_htm_files/70008509_revA.pdf)”
- [10] Chen, F. F. (1984). *Introduction to Plasma Physics and Controlled Fusion. Volume 1: Plasma Physics*. New York, E.U.A.: Plenum Press.
- [11] Conversano, R. W. (2015). *Low-Power Magnetically Shielded Hall Thrusters*. Tesis de doctorado. University of California Los Angeles (UCLA).

- [12] Goebel, D. M. y Katz, I. (2008). *Fundamentals of Electric Propulsion: Ion and Hall Thrusters*. California Institute of Technology, Jet Propulsion Laboratory, E.U.A.: JPL Space Science and Technology Series.
- [13] Hall-effect thruster. (s.f.). En Wikipedia. Recuperado el 22 de diciembre de 2015, de “[https://en.wikipedia.org/wiki/Hall-effect\\_thruster](https://en.wikipedia.org/wiki/Hall-effect_thruster)”
- [14] Humble, R. W. (1995). *Space Propulsion Analysis and Design*. McGraw-Hill, E.U.A.
- [15] Inan, U. y Golkowski, M. (2011). *Principles of Plasma Physics for Engineers and Scientists*. Cambridge, U.K.: University Press.
- [16] Keidar, M. y Beilis, I. (2013). *Plasma Engineering: Applications from Aerospace to Bio- and Nanotechnology*. E.U.A.: Elsevier.
- [17] Ku, H. H. (1966). *Notes on the use of propagation of error formulas*. Journal of Research of the National Bureau of Standards. Section C: Engineering and Instrumentation. Washington, E.U.A. National Bureau of Standards.
- [18] Melissinos, A. C. (2003). *Experiments in Modern Physics*. University of Rochester, E.U.A.: Academic Press.
- [19] Micci, M. M. (2000). *Micropropulsion for Small Spacecraft: Volume 187 of Progress in astronautics and aeronautics*. Virginia, E.U.A.: AIAA (American Institute of Aeronautics and Astronautics, Inc.)
- [20] NASA Marshall Space Flight Center Collection. Reference no. MSFC-75-SA-4105-2C. Recuperado el 16 de enero de 2016 de “<http://nasaimages.lunaimaging.com>”
- [21] Oda, B. (1987). *Introducción al análisis gráfico de datos experimentales*. (3a ed.). Facultad de Ciencias, UNAM, México. Las Prensas de Ciencias.
- [22] Popovic, R. S. (1991). *Hall Effect Devices: Magnetic Sensors and Characterization of Semiconductors*. Bristol, U.K.: Adam Hilger.
- [23] Sutton, G. P. (2010). *Rocket Propulsion Elements*. New Jersey, E.U.A.: John Wiley Sons, Inc.
- [24] Tajmar, M. (2003). *Advanced Space Propulsion Systems*. Wien, Austria: Springer-Verlag.
- [25] Tejada, E. A. (2015). *Diseño y Construcción de un propulsor espacial para un microsatélite*. Tesis de maestría. Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM).
- [26] The Illustrated Jules Verne: De la Terre à la Lune (1864-65). Recuperado el 18 de enero del 2016 de “<http://jv.gilead.org.il/rpaul/De%20la%20terre%20à%20la%20lune/>”

- [27] Turner, M. J. L. (2001). *Rocket and Spacecraft Propulsion: Principles, Practice and New Developments*. (3a ed.). Leicester, U.K.: Springer-Praxis.