



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO**

FACULTAD DE CIENCIAS

H-CICLOS Y H-CAMINOS EN DIGRÁFICAS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICO

P R E S E N T A:

HUGO RINCÓN GALEANA



**DIRECTOR DE TESIS:
DR. RICARDO STRAUZ SANTIAGO
2016**

Ciudad Universitaria, CDMX



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Hoja de Datos del Jurado

1.Datos del alumno	1.Datos del alumno
Apellido paterno	Rincón
Apellido materno	Galeana
Nombre(s)	Hugo
Teléfono	56 06 01 70
Universidad Nacional Autónoma de México	Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias	Facultad de Ciencias
Carrera	Matemáticas
Número de cuenta	306305773

2.Datos del tutor	2.Datos del tutor
Grado	Dr
Nombre(s)	Ricardo
Apellido paterno	Strausz
Apellido materno	Santiago

3.Datos del sinodal 1	3.Datos del sinodal 1
Grado	Dr
Nombre(s)	Mika
Apellido paterno	Olsen
Apellido materno	

4.Datos del sinodal 2	4.Datos del sinodal 2
Grado	Dr
Nombre(s)	Mucuy-kak del Carmen
Apellido paterno	Guevara
Apellido materno	Aguirre

5.Datos del sinodal 3	5.Datos del sinodal 3
Grado	Mat
Nombre(s)	Laura
Apellido paterno	Pastrana
Apellido materno	Ramírez

6.Datos del sinodal 4 6.Datos del sinodal 4

Grado Dr

Nombre(s) Ilán Abraham

Apellido paterno Goldfeder

Apellido materno Ortiz

7.Datos del trabajo escrito 7.Datos del trabajo escrito

Título H-Ciclos y H-Caminos en Digráficas

Subtítulo

Número de páginas 75

Año 2016

Agradecimientos

Dedico este espacio para agradecer a todas las personas que han formado una parte importante de mi formación académica. En particular quiero agradecer de manera especial a mi tutor, Ricardo Strausz Santiago por su guía en la realización de este trabajo así como por sus enseñanzas durante la licenciatura. También quisiera agradecer a los sinodales Ilán Abraham Goldfeder Ortiz, Mucuy-kak del Carmen Guevara Aguirre, Laura Pastrana Ramírez y Mika Olsen por sus observaciones, correcciones y hacer de éste un mejor trabajo.

Agradezco también a los profesores que mediante su ejemplo y trabajo han inspirado un gran gusto y pasión hacia las matemáticas y han sido fundamentales en mi formación. Agradezco de manera especial a Patricia Cortés Flores, José David Flores Peñaloza, José Guerrero Grajeda, Héctor Méndez Lango, Favio Ezequiel Miranda Perea, Ángel Tamariz Mascarúa, Laura Pastrana Ramírez, Isabel Puga Espinosa, César Alejandro Rincón Orta, Ernesto Rosales González y Ricardo Strausz Santiago.

Dedicatoria

A mi familia: Hortensia, Hugo Alberto, Alberto, Consuelo y Ciro.

A mis amigos: Daniel, Enrique, Axel, Erika y Marlene.

Finalmente a <https://www.wikipedia.org/> y <http://math.stackexchange.com/> por ayudarme a estudiar cuando no tenía apuntes.

Índice general

Introducción	12
1. Preliminares	13
1.1. Definiciones básicas	13
1.2. Tipos de Digráficas y Subdigráficas	15
1.3. Caminos, Trayectorias, Paseos y Conexidad	16
1.4. Resultados Básicos	18
2. Núcleos	25
2.1. Introducción Histórica	25
2.1.1. El problema de la toma de decisión personal	25
2.1.2. La solución al problema de la toma de decisión personal	26
2.1.3. El problema de toma de decisión grupal	26
2.2. Resultados Sobre Existencia de Núcleos en Digráficas	29
2.3. Teorema de Richardson	32
2.4. Digráficas Núcleo-Perfectas	36
3. Núcleos por Trayectorias Monocromáticas	39
3.1. Definiciones y Resultados Básicos	39
3.2. Desarrollo Histórico y Panorama de Resultados	41
4. H-núcleos por Trayectorias	51
4.1. Definiciones y Desarrollo Histórico	51
5. H-núcleos por Caminos	55
5.1. Definiciones y Primeros Resultados	55
5.2. Nuevos Resultados sobre H-Ciclos y H-Núcleos en Digráficas	57

Introducción

Sea D una digráfica. Un conjunto $N \subseteq V(D)$ es un núcleo de D si éste es independiente y absorbente. El concepto de núcleo fue introducido por Von Neumann y Oskar Morgenstern en [29] en el contexto de la Teoría de Juegos. Posteriormente se encontraron muchas e importantes aplicaciones de éste concepto (ver por ejemplo [3, 7, 4, 2]). Las aplicaciones han sido variadas y en áreas muy diversas, por ejemplo economía, teoría de juegos, ciencias de la computación, teoría de autómatas, entre otras.

Debido al gran interés y la utilidad en aplicaciones que ha tenido este concepto se han explorado interesantes generalizaciones del concepto de núcleo. Las más sobresalientes son el concepto de núcleo por trayectorias monocromáticas, el H -núcleo por trayectorias, el H -núcleo por caminos y los (k, l) -núcleos.

El desarrollo de la presente tesis está organizado como sigue:

- En el capítulo 2 se revisan los conceptos básicos y preliminares de la teoría general de gráficas y digráficas con el objeto de que el presente trabajo sea autocontenido y accesible en la mayor medida posible.
- En el capítulo 3 se expone el concepto de núcleo y se exponen algunos resultados básicos que nos llevan hasta el *Teorema de Richardson*. Éste afirma que si una digráfica no tiene ciclos dirigidos de longitud impar, entonces tiene núcleo. Se desarrolla también un breve contexto histórico del concepto y de los resultados.
- En el capítulo 4 se expone el concepto de m -coloración y núcleo por trayectorias monocromáticas, así como un breve desarrollo histórico y un panorama de resultados acerca de núcleos por trayectorias monocromáticas, entre ellos una generalización del Teorema de Richardson.
- En el capítulo 5 se expone el concepto de H -núcleo por trayectorias, su desarrollo

histórico y los resultados más relevantes ; entre ellos una generalización del Teorema de Richardson.

- En el capítulo 6 se explora el concepto de H -núcleo por caminos. Este concepto ha sido estudiado muy poco hasta ahora así que sólo se exponen pocos resultados. La parte más substancial de este capítulo son los **Teoremas 5.2.5, 5.2.6, 5.2.8, 5.2.11, 5.2.12**. En estos teoremas se hacen las siguientes afirmaciones:

- Si D es una digráfica H -coloreada en la que todo ciclo es un H ciclo, entonces tiene H -núcleo por caminos.
- Si D es una digráfica H -coloreada sin $H-C_3$ fuertemente arcoiris ni $H-P_3$ fuertemente arcoiris. Si existe $\{F_1, F_2\}$ una partición de $A(D)$ tal que todo ciclo contenido en $D_i = D[f_i]_{i \in \{1,2\}}$ es un H -ciclo y además todo H -camino está contenido en $D_1 \circ D_2$, entonces D tiene H -núcleo por caminos.
- Sean D y H digráficas. D una digráfica H -coloreada y $\mathcal{F} = \{F_1, \dots, F_n\}$ una partición de $F(D)$ tal que se cumplen las siguientes condiciones:
 - Todo ciclo dirigido contenido en $D_i = D[F_i]$ es un H -ciclo.
 - Todo H -camino está contenido en D_i para alguna i , $1 \leq i \leq n$
 - D no tiene $H-C_3$ ni $H-P_3$ fuertemente arcoiris.

Si $\mathcal{C}(\mathcal{F})$ no tiene ciclos dirigidos de longitud impar al menos 3 y además es fuertemente conexas, entonces D tiene H -núcleo.

- Si D es una digráfica H -coloreada sin $H-C_3$ ni $H-P_3$ arcoiris, entonces tiene H -núcleo por caminos.

Este trabajo es original y fue desarrollado en colaboración con mi asesor. Éstos resultados son los primeros que dan condiciones suficientes en la digráfica H -coloreada D para que D tenga H -núcleo por caminos. Generalizan los correspondientes resultados conocidos para la existencia de núcleos por trayectorias monocromáticas, los cuales a su vez ya generalizaban el *Teorema de Sands, Sauer y Woodrow*. Así mismo se obtiene una generalización parcial del Teorema de Richardson.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo se presentan las definiciones y los resultados básicos con respecto a digráficas. La finalidad es sentar los fundamentos teóricos necesarios para el resto de la tesis. Los conceptos y teoremas incluidos en esta sección pueden ser estudiados con amplitud en [2, 3, 4].

1.1. Definiciones básicas

Una *digráfica* D es una pareja $(V(D), F(D))$ tal que $V(D)$ es un conjunto finito *no vacío* de elementos, llamados vértices y $F(D) \subseteq V(D) \times V(D)$. A los elementos de $F(D)$ se les llama flechas. Nótese que de la definición de $F(D)$ se permiten flechas (v, v) las cuales llamaremos lazos. Diremos que D es *reflexiva* si todos sus vértices tienen un lazo.

El *orden* de D es la cardinalidad de $V(D)$. Se pueden tener dos o más flechas entre dos mismos vértices u, v ; en dado caso se dirá que las flechas que unen a los vértices u, v son *multiflechas* y que la digráfica D es una *multidigráfica*. Una *digráfica simple* es una digráfica que no es una multidigráfica y que además no tiene lazos. En general a menos que se indique lo contrario, las definiciones, proposiciones y teoremas hacen referencia a digráficas simples.

Sea D una digráfica. Diremos que dos vértices $u, v \in V(D)$ son *adyacentes* si (u, v) ó $(v, u) \in F(D)$.

Si $(u, v) \in F(D)$, diremos que u es su *vértice inicial* y que v es su *vértice final*. Para una flecha $(u, v) \in F(D)$ diremos que el vértice u es *adyacente hacia* el vértice v y que el vértice v es *adyacente desde* el vértice u .

Sean D una digráfica y $(u, v) \in F(D)$. Se dice que (u, v) es simétrica si $(v, u) \in F(D)$

y que (u, v) es asimétrica si $(v, u) \notin F(D)$. Sean D una digráfica y v un vértice de D . El *grado exterior* de v (también llamado *exgrado*), denotado por $\delta^+(v)$, es el número de flechas de D que tienen a v como vértice inicial. El *grado interior* de v (también llamado *ingrado*), denotado por $\delta^-(v)$, es el número de flechas de D que tienen a v como vértice final. El *grado* de v , denotado por $\delta(v)$, se define por $\delta^+(v) + \delta^-(v)$.

Sean D una digráfica y v un vértice de D . El conjunto de los *vecinos exteriores* de v se define como $\Gamma^+(v) = \{y \in V(D) \mid (v, y) \in F(D)\}$.

El conjunto de los *vecinos interiores* de v se define como $\Gamma^-(v) = \{y \in V(D) \mid (y, v) \in F(D)\}$.

El conjunto de los *vecinos exteriores de un subconjunto* S , $S \subseteq V(D)$, se define como

$$\bigcup_{v \in S} \Gamma^+(v).$$

El conjunto de los *vecinos interiores de un subconjunto* S , $S \subseteq V(D)$, se define como

$$\bigcup_{v \in S} \Gamma^-(v).$$

Sea D una digráfica. Para un subconjunto $S \neq \emptyset$ y $v \in V(D)$, una flecha $(u, v) \in F(D)$ es llamada una *Sv-flecha* siempre que $u \in S$. Simétricamente una flecha $(v, u) \in F(D)$ es llamada una *vS-flecha* siempre que $u \in S$.

Para S, K subconjuntos no vacíos de $V(D)$, una flecha $(u, v) \in F(D)$ es llamada una *SK-flecha* siempre que $u \in S$ y $v \in K$.

Dos digráficas D_1 y D_2 son *isomorfas*, denotado por $D_1 \cong D_2$ si existe $f : V(D_1) \rightarrow V(D_2)$ una función biyectiva, tal que $(u, v) \in F(D_1) \Leftrightarrow (f(u), f(v)) \in F(D_2)$.

Dos digráficas D_1 y D_2 son *iguales*, denotado por $D_1 = D_2$ si $V(D_1) = V(D_2)$ y $F(D_1) = F(D_2)$.

El *complemento* de una digráfica D , denotado por D^c , es la digráfica tal que $V(D^c) = V(D)$ y $F(D^c) = (V(D) \times V(D)) \setminus F(D)$.

Para una digráfica D con al menos una flecha, definimos su *digráfica de líneas* denotada por $L(D)$, como la digráfica tal que $V(L(D)) = F(D)$ y a es adyacente hacia b en $L(D)$ si y sólo si el vértice final de a es igual al vértice inicial de b en D .

1.2. Tipos de Digráficas y Subdigráficas

Dadas dos digráficas D y D' , se dice que D' es una *subdigráfica* de D si $V(D') \subseteq V(D)$ y $F(D') \subseteq F(D)$. Se denota por $D' \subseteq D$.

Sea D una digráfica, una digráfica D' es una *subdigráfica inducida* de D si $D' \subseteq D$ y $F(D')$ es máximo por contención.

Para $S \subseteq V(D)$ la *subdigráfica inducida por S* , denotada por $D[S]$, es la subdigráfica inducida de D que tiene $V(D[S]) = S$.

Una digráfica D' es una *subdigráfica generadora de D* si $D' \subseteq D$ y además $V(D') = V(D)$.

Para una digráfica D , se dice que $I \subseteq V(D)$ es un *conjunto independiente* si las únicas flechas en $D[I]$ son lazos.

$A \subseteq V(D)$ es un *conjunto absorbente*, si para cada $x \in V(D) \setminus A$, existe $y \in A$ tal que $(x, y) \in F(D)$.

N es un *núcleo* de D si N es independiente y absorbente.

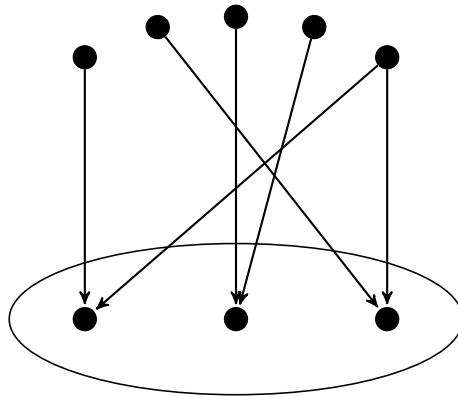


Figura 1.1: Un núcleo es un conjunto independiente y absorbente.

Una digráfica D es *bipartita* si existe una partición $P = \{V_1, V_2\}$ de $V(D)$ tal que $D[V_i]$ es un conjunto independiente para cada $i \in \{1, 2\}$.

Una digráfica D es *semicompleta* si para todo par $\{u, v\} \subseteq V(D)$ se tiene que $(u, v) \in F(D)$ ó $(v, u) \in F(D)$.

Una digráfica D es *transitiva* si para cualesquiera u, v, w vértices de D tales que $(u, v) \in F(D)$, $(v, w) \in F(D)$ se tiene que $(u, w) \in F(D)$.

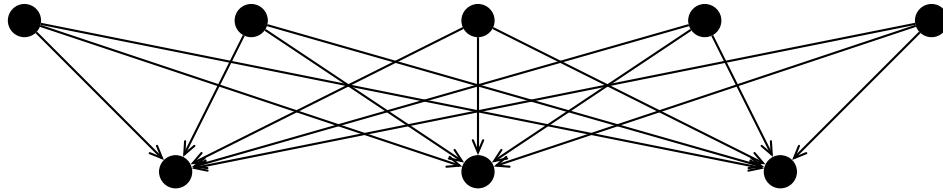


Figura 1.2: Una digráfica bipartita.

Una digráfica D es *simétrica* si todas sus flechas son simétricas.

Una digráfica D es *asimétrica* si todas sus flechas son asimétricas.

La *parte simétrica* de D denotada por $Sim(D)$ es la subdigráfica generadora de D tal que sus flechas son las flechas simétricas de D .

La *parte asimétrica* de D denotada por $Asim(D)$ es la subdigráfica generadora de D tal que sus flechas son las flechas asimétricas de D .

Un *torneo* es una digráfica semicompleta asimétrica.

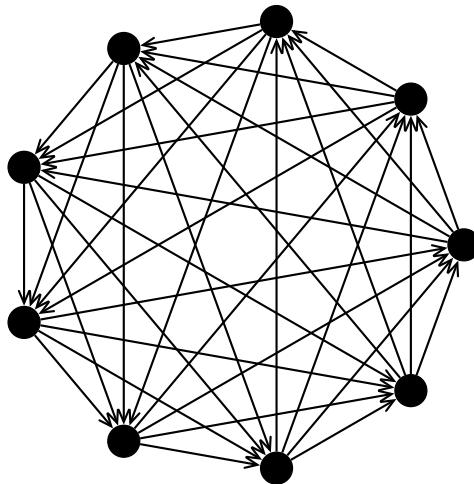


Figura 1.3: Un torneo de orden 9.

1.3. Caminos, Trayectorias, Paseos y Conexidad

Un *camino dirigido* en una digráfica D es una sucesión de vértices $C = (u_0, u_1, \dots, u_n)$ tal que $(u_i, u_{i+1}) \in F(D) \quad \forall i \in \{0, \dots, n-1\}$. La *longitud* del camino C , denotada por $l(C)$

es n . Un u_0u_n -camino dirigido es un camino dirigido que empieza en el vértice u_0 y termina en el vértice u_n .

Una *trayectoria dirigida* es un camino en el que no se repiten vértices.

Un *camino dirigido cerrado* es un camino dirigido que empieza y termina en el mismo vértice.

Un *ciclo dirigido* es un camino dirigido cerrado que no repite vértices salvo el primero y el último. Se denota por C_n al ciclo dirigido de longitud n .

Para un camino dirigido $C = (u_0, u_1, \dots, u_n)$ y $\{u_i, u_j\} \subseteq V(C)$, $i < j$, se denota por (u_i, C, u_j) al u_iu_j -camino dirigido $(u_i, u_{i+1}, \dots, u_{j-1}, u_j) \subseteq C$.

Para S, K dos subconjuntos no vacíos de $V(D)$, una uv trayectoria dirigida es una SK -trayectoria dirigida siempre que $u \in S$ y $v \in K$.

Una digráfica D es *unilateralmente conexa* si para cualquier par de vértices $\{u, v\} \subseteq V(D)$ existe una uv -trayectoria dirigida ó una vu -trayectoria dirigida en D .

Una digráfica D es *fuertemente conexa* si para cualquier par de vértices $\{u, v\} \subseteq V(D)$ existe una uv -trayectoria dirigida.

Una *componente fuertemente conexa* de una digráfica D es una subdigráfica inducida de D , máxima por contención con la propiedad de ser fuertemente conexa.

Notemos que si \mathcal{C} es la familia de las componentes fuertemente conexas de una digráfica D , entonces $V(D) = \bigcup_{C_i \in \mathcal{C}} V(C_i)$. Siempre que $i \neq j$ se tiene que $V(C_i) \cap V(C_j) = \emptyset$.

Una *componente fuertemente conexa terminal* D' de D es una componente fuertemente conexa de D tal que $\Gamma^+(V(D')) \subseteq V(D')$.

Una *componente fuertemente conexa inicial* D' de D es una componente fuertemente conexa de D tal que $\Gamma^-(V(D')) \subseteq V(D')$.

La *digráfica de condensación* de una digráfica D , denotada por D^* es la digráfica tal que $V(D^*) = \mathcal{C}$, donde \mathcal{C} es la familia de las componentes fuertemente conexas de D , y $(C_i, C_j) \in F(D^*)$ si y sólo si existe una $V(C_i)V(C_j)$ -flecha en D .

Sea D una digráfica. Se dice que $B \subseteq V(D)$ es un *conjunto dominante* si $\forall x \in V(D) \setminus B \exists y \in B$ tal que $(y, x) \in F(D)$.

Sea T un torneo. Se dice que $v \in V(T)$ es un *2-rey* si para todo $u \in V(T) \setminus \{v\}$ existe

una uv -trayectoria dirigida de longitud a lo más 2 en T .

Una digráfica D es *cuasitransitiva*, si $\forall u, v, w \in V(D)$ tales que $\{(u, v), (v, w)\} \subseteq F(D)$, entonces $(u, w) \in F(D)$ ó $(w, u) \in F(D)$.

Una digráfica D es *pretransitiva derecha*, si $\forall u, v, w \in V(D)$ tales que $\{(u, v), (v, w)\} \subseteq F(D)$, entonces $(u, w) \in F(D)$ ó $(w, v) \in F(D)$.

Una digráfica D es *pretransitiva izquierda* si $\forall u, v, w \in V(D)$ tales que $\{(u, v), (v, w)\} \subseteq F(D)$, entonces $(u, w) \in F(D)$ ó $(v, u) \in F(D)$.

Una digráfica D es *Hamiltoniana* si D contiene un ciclo dirigido Γ tal que $V(\Gamma) = V(D)$.

Sea D una digráfica. Una k -coloración de las flechas de D es una función $c : F(D) \rightarrow \{1, \dots, k\}$. Se dice que D es una digráfica m -coloreada si D tiene una m -coloración de sus flechas.

Dada una coloración, una trayectoria dirigida en D es llamada *monocromática* si todas sus flechas tienen asignado el mismo color.

En este trabajo se escribe *trayectoria monocromática* en vez de trayectoria dirigida monocromática.

Si $(u, v) \in F(D)$, se denota por $c((u, v))$ al color de esta.

Para un vértice $v \in V(D)$ se denota por $\xi(v)$ al conjunto de colores que están representados en las flechas que inciden en v .

Una digráfica D es 3-cuasitransitiva si siempre que (x, y) , (y, w) y $(w, z) \in A(D)$ con x, y, w, z vértices dos a dos diferentes se cumple una de dos:

- $(x, z) \in A(D)$.
- $(z, x) \in A(D)$.

Se dice que un torneo es torneo cíclico siempre que tiene al menos un ciclo dirigido hamiltoniano.

En un torneo cíclico K de orden 4 con (u, v, w, x, u) como un ciclo hamiltoniano se denotará por $K_t(u, v, w, x, u)$ o simplemente K_t a cualquier subdivisión de K donde al menos 3 flechas del ciclo dirigido hamiltoniano no están subdivididas.

1.4. Resultados Básicos

Teorema 1.4.1. Sean D una digráfica y $\{u, v\} \subseteq V(D)$. Todo uv -camino contiene como subsucesión una uv -trayectoria.

Demostración.

Se procederá por inducción sobre la longitud del uv -camino.

Sea \mathcal{C} un uv -camino. Si la longitud de \mathcal{C} es 1, entonces claramente es una uv trayectoria.

Ahora supóngase por hipótesis de inducción que todo uv -camino de longitud menor a n contiene una uv -trayectoria.

Sea $\mathcal{C} = (u_0, u_1, \dots, u_n)$ un uv -camino dirigido de longitud n . Se probará que \mathcal{C} contiene como subsucesión una uv trayectoria.

Si $\forall i \neq j \quad u_i \neq u_j$ entonces \mathcal{C} es una uv -trayectoria.

Si existe $0 \neq i < j \neq n$ tal que $u_i = u_j$, entonces considérese $\mathcal{C}' = (u_0, \dots, u_i, u_{j+1}, \dots, u_n)$. \mathcal{C}' es un uv -camino dirigido de longitud menor a n . Por hipótesis de inducción \mathcal{C}' contiene una uv -trayectoria dirigida T . Por lo tanto $T \subseteq \mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}$. \square

Teorema 1.4.2. *Si \mathcal{C} es un camino dirigido cerrado y $v \in V(\mathcal{C})$, entonces existe un ciclo dirigido contenido en \mathcal{C} que pasa por v*

Demostración.

Se procederá por inducción sobre la longitud del camino cerrado.

Sean \mathcal{C} un camino cerrado y $v \in V(\mathcal{C})$. Si la longitud de \mathcal{C} es 2, entonces \mathcal{C} es un ciclo dirigido de longitud 2 que pasa por v .

Supóngase por hipótesis de inducción que dado un camino dirigido cerrado de longitud menor a n y al menos 2, y un vértice v en él, entonces contiene un ciclo dirigido que pasa por v .

Sea $\mathcal{C} = \mathcal{C} = (u_0, u_1, \dots, u_n = u_0)$ un camino dirigido cerrado de longitud n , $v \in V(\mathcal{C})$ y supóngase sin pérdida de generalidad que $v = u_0$. Si $u_i \neq u_j \quad \forall i \neq j, i, j \notin \{0, n\}$, entonces \mathcal{C} es un ciclo dirigido que pasa por v .

Si existe $0 \neq i < j \neq n$ tal que $u_i = u_j$, entonces considérese $\mathcal{C}' = (u_0, \dots, u_i, u_{j+1}, \dots, u_n)$. \mathcal{C}' es un camino dirigido cerrado de longitud menor a n que pasa por v . Por hipótesis de inducción \mathcal{C}' contiene un ciclo dirigido Γ que pasa por v . Además $\Gamma \subseteq \mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}$. \square

Teorema 1.4.3. *Sea D una digráfica. Todo camino cerrado de longitud impar al menos 3 en D contiene un ciclo dirigido de longitud impar.*

Demostración.

Se procederá por inducción sobre la longitud del camino.

Sea \mathcal{C} un camino dirigido de longitud impar. Si la longitud de \mathcal{C} es 3, \mathcal{C} es un ciclo dirigido de longitud impar.

Supóngase por hipótesis de inducción que todo camino dirigido cerrado de longitud impar al menos 3 y menor que n contiene un ciclo dirigido de longitud impar.

Sea $\mathcal{C} = (u_0, u_1, \dots, u_n = u_0)$ un camino dirigido cerrado de longitud n . Si $u_i \neq u_j \quad \forall i \neq j; i, j \notin \{0, n\}$, entonces \mathcal{C} es un ciclo dirigido de longitud impar.

Si existe $0 \neq i < j \neq n$ tal que $u_i = u_j$, entonces considérese $\mathcal{C}_1 = (u_0, \dots, u_i, u_{j+1}, \dots, u_n)$ y $\mathcal{C}_2 = (u_i, u_{i+1}, \dots, u_j)$. Nótese que $l(\mathcal{C}_1) + l(\mathcal{C}_2) = l(\mathcal{C})$. Nótese que las longitudes de \mathcal{C}_1 y \mathcal{C}_2 no pueden ser ambas pares, ya que la longitud de \mathcal{C} es impar.

Caso 1

$l(\mathcal{C}_1)$ es impar y de longitud menor a n , entonces por hipótesis de inducción \mathcal{C}_1 contiene un ciclo dirigido de longitud impar.

Caso 2

$l(\mathcal{C}_2)$ es impar y de longitud menor a n , entonces por hipótesis de inducción \mathcal{C}_2 contiene un ciclo dirigido de longitud impar.

Por lo tanto \mathcal{C} contiene un ciclo dirigido de longitud impar. □

Teorema 1.4.4. *Si D es una digráfica tal que $\delta^+(v) \geq 1 \quad \forall v \in V(D)$, entonces D contiene un ciclo dirigido.*

Demostración.

Sea $T = (u_0, \dots, u_n)$ una trayectoria dirigida de longitud máxima en D . Como $\delta^+(u_n) \geq 1$, existe $v \in V(D)$ tal que $(u_n, v) \in F(D)$. $v \in V(T)$ ya que en otro caso (u_0, \dots, u_n, v) sería una trayectoria de longitud mayor a T , contradiciendo que T es de longitud máxima. Sea i tal que $u_i = v$. $T' = (u_i, u_{i+1}, \dots, u_n, v = u_i)$ es un ciclo dirigido ya que T es una trayectoria. □

Teorema 1.4.5. *Sea D una digráfica. D es fuertemente conexa si y sólo si existe un camino dirigido cerrado que pasa por todos los vértices de D .*

Demostración.

Sean D una digráfica fuertemente conexa y $\mathcal{C} = (u_0, \dots, u_n)$ un camino dirigido cerrado que pasa por la mayor cantidad de vértices de D . Supóngase que existe $v \in V(D) \setminus V(\mathcal{C})$. Como D es fuertemente conexa, existen \mathcal{C}_1 un u_0v -camino dirigido y \mathcal{C}_2 un vu_0 -camino dirigido. $\mathcal{C} \cup \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$ es un camino dirigido cerrado que incluye más vértices de D que \mathcal{C} , contradiciendo que \mathcal{C} tenía la mayor cantidad de vértices de D . Por lo que $V(D) = V(\mathcal{C})$.

Supóngase ahora que $\mathcal{C} = (u_0, \dots, u_n)$ es un camino dirigido cerrado que pasa por todos los vértices. Sean $a, b \in V(D)$. Sin pérdida de generalidad supóngase que $a = u_i$, $b = u_j$ $i < j$. (u_i, \mathcal{C}, u_j) es un ab -camino dirigido y $(u_j, \mathcal{C}, u_n = u_0, \mathcal{C}, u_i)$ es un ba -camino dirigido. \square

Teorema 1.4.6. *Si D es una digráfica fuertemente conexa sin ciclos dirigidos de longitud impar, entonces D es bipartita.*

Demostración.

Sea $\mathcal{C} = (u_0, \dots, u_n)$ un camino dirigido cerrado que incluye a todos los vértices de $V(D)$ (garantizamos su existencia por el **teorema 1.4.5**). Notemos que $l(\mathcal{C})$ es par, ya que en otro caso, por el **teorema 1.4.3**, \mathcal{C} incluiría un ciclo de longitud impar, contradiciendo las hipótesis.

Considérese $V_1 = \{u_i | i = 2k, k \in \{0, \dots, \frac{n}{2}\}\}$ $V_2 = \{u_i | i = 2k + 1, k \in \{0, \dots, \frac{n}{2} - 1\}\}$. Nótese que $V(\mathcal{C}) = V(D)$ y $V_1 \cup V_2 = V(\mathcal{C})$. También se tiene que $V_1 \neq \emptyset$, $V_2 \neq \emptyset$. Además supóngase que $V_1 \cap V_2 \neq \emptyset \Rightarrow \exists v = u_i = u_j$ tal que $i = 2r, j = 2s + 1$. Supóngase sin pérdida de generalidad que $i < j$, entonces $\mathcal{C}' = (u_i, u_{i+1}, \dots, u_j)$ es un camino dirigido de longitud impar y por el **teorema 1.4.3** \mathcal{C}' incluye un ciclo de longitud impar, contradiciendo las hipótesis. Por lo tanto $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ y se puede concluir que $P = \{V_1, V_2\}$ es una partición de $V(D)$.

Sean $u_r, u_s \in V_i$ $i \in \{1, 2\}$. $(u_r, u_s) \notin F(D)$ ya que en otro caso:

Caso 1: $r < s$.

$\mathcal{C}' = (u_s, u_{s+1}, \dots, u_n = u_0, u_1, \dots, u_r, u_s)$ es un camino dirigido de longitud impar, y por el **teorema 1.4.3** incluye un ciclo de longitud impar, contradiciendo las hipótesis.

Caso 2: $s < r$.

$\mathcal{C}' = (u_r, u_{r+1}, \dots, u_s, u_r)$ es un camino dirigido de longitud impar, y por el **teorema 1.4.3** incluye un ciclo de longitud impar, contradiciendo las hipótesis.

Por lo tanto se puede concluir que V_i $i \in \{1, 2\}$ es independiente y por lo tanto $P = \{V_1, V_2\}$ es una bipartición de D . \square

Teorema 1.4.7. *Sea D una digráfica transitiva. Si $u, v \in V(D)$ tales que existe una uv -trayectoria dirigida, entonces $(u, v) \in F(D)$.*

Demostración.

Sea T una uv -trayectoria de longitud mínima $T = (u = u_0, u_1, \dots, u_n = v)$. Si $l(T) = 1$ entonces $(u, v) \in F(D)$. Supóngase ahora que $l(T) > 1$. $u_1 \neq v$ ya que $l(T) > 1$, entonces como D es transitiva $(u_0, u_2) \in F(D)$ y $T' = (u_0, u_2, \dots, u_n = v)$ es una trayectoria de longitud menor a $l(T)$, contradiciendo que T era de longitud mínima. \square

Teorema 1.4.8. *Si D es una digráfica transitiva acíclica, entonces para cada $u \in V(D)$ con $\delta^+(u) > 0$, existe $w \in V(D)$ tal que $\delta^+(w) = 0$ y $(u, w) \in F(D)$.*

Demostración.

Sea $u \in V(D)$ y considérese $T_u = (u = u_0, \dots, u_n)$ una trayectoria de longitud máxima que inicia en u . $\delta^+(u_n) = 0$ ya que si existiera $v \in V(D)$ tal que $(u_n, v) \in F(D)$ se tendría que:

Caso 1: $v \in V(T)$

En este caso se formaría un ciclo en T_u contradiciendo la hipótesis que afirma que D es acíclica.

Caso 2: $v \in V(D) \setminus V(T)$

En este caso $T' = T \cup (u_n, v)$ es una trayectoria que inicia en u de longitud mayor a $l(T)$, contradiciendo que T era de longitud máxima.

Por el **teorema 1.4.7** y como D es transitiva, $(u, u_n) \in F(D)$ y además $\delta^+(u_n) = 0$. \square

Teorema 1.4.9. *Sea D una digráfica transitiva. Si D es fuertemente conexa, entonces D es completa. Es decir para $\forall u, v \in V(D)$, $(u, v) \in F(D)$.*

Demostración.

Sean $u, v \in V(D)$, como D es fuertemente conexa, existe una uv -trayectoria dirigida. Como D es transitiva, por el **teorema 1.4.7** $(u, v) \in F(D)$. \square

Teorema 1.4.10. *Sea D una digráfica transitiva, si D es asimétrica, entonces D es acíclica.*

Demostración.

Supóngase que D tiene un ciclo $\mathcal{C} = (v_0, \dots, v_n = v_0)$. Si $l(\mathcal{C}) = 2$, entonces D es simétrica, contradiciendo las hipótesis. Ahora considérese $T = (v_0, \dots, v_{n-1})$, la cual es una trayectoria dirigida en D . Por el **teorema 1.4.7** $(v_0, v_{n-1}) \in F(D)$, pero $v_0 = v_n$, por lo que se tiene que $(v_{n-1}, v_n) \in F(D)$ y $(v_n, v_{n-1}) \in F(D)$, contradiciendo que D es asimétrica. \square

Teorema 1.4.11. *Sea D una digráfica transitiva, F_i, F_j componentes fuertemente conexas de D . Si existe una $F_i F_j$ -flecha, entonces para cada $u \in F_i$ y para cada $v \in F_j$ $(u, v) \in F(D)$.*

Demostración.

Sea (a, b) la $F_i F_j$ -flecha. Nótese que por el **teorema 1.4.9** y dado que D es transitiva, F_i y F_j son completas. Ahora considérese $v \in F_j$, dado que $(a, b) \in F(D)$, F_j es completa y D es transitiva, se tiene que $(a, v) \in F(D)$. Ahora considérese $u \neq a \in F_i$, dado que F_i es completa $(u, a) \in F(D)$. Además como D es transitiva, se tiene que $(u, v) \in F(D)$. \square

Teorema 1.4.12. *Si D es una digráfica transitiva, entonces la digráfica de condensación de D es transitiva y acíclica.*

Demostración.

Sean D una digráfica transitiva y $\mathcal{C}^*(D)$ su digráfica de condensación. Supóngase que $\mathcal{C}^*(D)$ tiene un ciclo $C = (V_0, \dots, V_n)$. Ésto quiere decir que por cada componente fuertemente conexa V_i existe un vértice v_i tal que $(v_i, v_{i+1}) \in F(D)$. Además como cada V_i es fuertemente conexa existe un camino cerrado C_i que pasa por todos los vértices de V_i y que inicia en v_i . Considérese $C' = (v_0, C_0, v_1, C_1, \dots, v_i, C_i, \dots, v_{n-1}, C_{n-1}, v_n = v_0)$ un camino dirigido cerrado que pasa por todos los vértices de $\cup\{V_0, \dots, V_n\}$, en D . Ésto muestra que D es fuertemente conexa y contradice que C es un ciclo (ya que debe tener más de un vértice).

Sea $\mathcal{C}^*(D)$ la digráfica de condensación de D y supóngase que F_i, F_j, F_k son componentes fuertemente conexas de D y además existe una $F_i F_j$ -flecha y una $F_j F_k$ -flecha. Sea (a, b) la $F_i F_j$ -flecha y (c, d) la $F_j F_k$ -flecha. Por el **teorema 1.4.11** $(b, d) \in F(D)$, además como D es transitiva, $(a, d) \in F(D)$. Por lo tanto existe una $F_i F_k$ -flecha. Por lo tanto $\mathcal{C}^*(D)$ es transitiva. \square

Capítulo 2

Núcleos

En este capítulo se explorará con mayor detalle el concepto de núcleo, así como algunas de sus aplicaciones y algunos resultados. Como se mencionó en la introducción la finalidad de este capítulo es guiar las definiciones y los resultados hacia el *teorema de Richardson*.

2.1. Introducción Histórica

Sea D una digráfica un conjunto $N \subseteq V(D)$ es un núcleo de D si éste es independiente y absorbente. El concepto de núcleo en una digráfica fue introducido por John Von Neumann y Oskar Morgenstern en el contexto de la teoría de juegos[29]. Originalmente a un núcleo se le llamó solución. Neumann y Morgenstern querían encontrar principios matemáticos que definieran el comportamiento racional para el problema de la toma de decisión personal y posteriormente grupal. Los principios buscados debían ser muy generales, es decir, válidos en todas las situaciones. Tras un exhaustivo estudio, Neumann y Morgenstern llegaron a definir los postulados que caracterizarían a la solución de su problema. Así es como surge el concepto de solución. Veamos primero cómo resolvieron el problema de toma de decisión personal.

2.1.1. El problema de la toma de decisión personal

Supongamos que una persona desea tomar una decisión. Ésto significa elegir entre las diferentes opciones $a, b, c \dots$ de algún conjunto universo de opciones P , la mejor opción. Neumann y Morgenstern ofrecieron un modelo matemático del problema usando digráficas de la siguiente manera:

- Por cada opción se dibuja un vértice de la digráfica, es decir, $V(D) = P$.

- Si la persona que está tomando la decisión prefiere la opción a sobre la opción b , se dibuja la flecha (b, a) .

Se obtiene así una digráfica D que tiene las siguientes propiedades.

- D es transitiva, ya que si a es preferible a b y b es preferible a c , entonces a es preferible a c .
- D es asimétrica, de otra forma no se puede hablar de una preferencia verdadera de una opción sobre otra.
- D es acíclica, se sigue de la observación anterior y del **teorema 1.4.10**

2.1.2. La solución al problema de la toma de decisión personal

Neumann y Morgenstern observaron también que si la digráfica D definida anteriormente tiene un núcleo N , entonces la toma de decisión personal se reduce a elegir una opción en N . Ya que al ser N independiente, no hay una preferencia verdadera de una opción de N sobre otra, y al ser absorbente, todas las demás opciones que no están en N quedan eliminadas, puesto que hay al menos una en N que es preferible.

Teorema 2.1.1. *Toda digráfica transitiva y acíclica D tiene un núcleo único. Más aún, el conjunto de vértices de exgrado 0 es el único núcleo de D .*

Demostración.

Consideremos $N = \{v \in V(D) \mid \delta^+(v) = 0\}$. N es independiente y es absorbente ya que D es transitiva y acíclica (**teorema 1.4.8**). Ahora sea N' un núcleo de D . Notemos que como $\delta^+(N) = 0$, entonces $N \subseteq N'$. Ahora por el **teorema 1.4.8** si existiera $v \in N' \setminus N$, entonces existiría $w \in N$ tal que $(v, w) \in F(D)$ contradiciendo que N' es independiente. Por lo tanto $N' = N$. □

2.1.3. El problema de toma de decisión grupal

Supongamos que un grupo de n personas se junta para tomar una decisión. Ésto es elegir de un conjunto de opciones a, b, c, \dots la mejor. Nuevamente, Von Neumann y Morgenstern dieron un modelo matemático dentro de la teoría de digráficas para resolver este problema. Asociado a este problema definieron una digráfica D como sigue:

- Por cada opción se dibuja un vértice de la digráfica.
- Si existe un grupo de poder, dentro del grupo de personas que está tomando la decisión, capaz de imponer la preferencia de la opción a sobre la opción b , entonces se pone la flecha (b, a) en la digráfica D .

Notemos que:

- La digráfica D no necesariamente es transitiva, ya que no necesariamente es la misma facción la que impone las mismas preferencias siempre.
- La digráfica D es asimétrica.
- La digráfica D no necesariamente es acíclica.

Neumann y Morgenstern observaron que si la digráfica D tiene un núcleo, entonces la toma de decisión se puede restringir a elegir dentro de N , ya que por ser N independiente, se tiene que entre dos opciones diferentes $a, b \in N$ no hay un grupo de poder capaz de imponer la preferencia de una sobre la otra. Cualquier otra opción b fuera de N puede ser reemplazada por otra opción a dentro de N .

Von Neumann y Morgenstern observaron también que:

- No toda digráfica tiene núcleo (considérese C_3).
- Si una digráfica tiene núcleo, éste no necesariamente es único (considérese C_4).

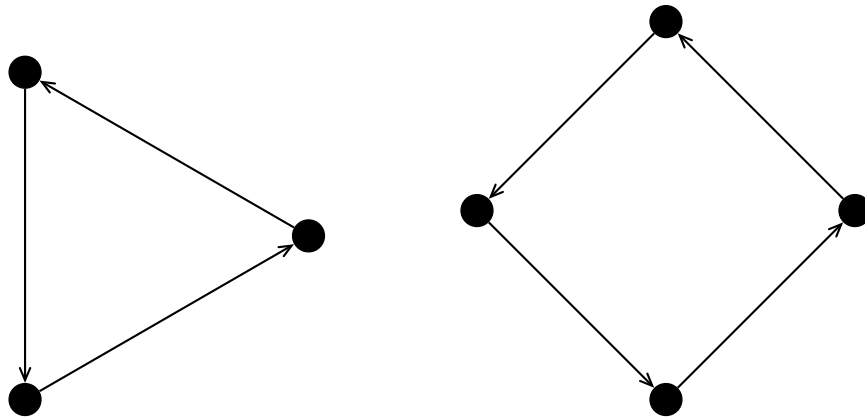


Figura 2.1: C_3 una digráfica sin núcleo(*izquierda*) y C_4 , una digráfica con más de un núcleo(*derecha*)

Ya que D es muy general y no tiene propiedades fuertes que decidan si tiene núcleo o no, resulta de interés saber si una digráfica dada tiene núcleo para poder resolver el problema de

toma de decisión grupal.

Posteriormente Claude Berge notó que el concepto de núcleo se podía aplicar a otros campos de estudio de las matemáticas y cambió la noción de solución y definió lo que hoy se conoce como el núcleo de una digráfica.

La teoría de núcleos es muy importante dentro de las matemáticas, debido a la gran cantidad de aplicaciones que tiene, no sólo en la teoría de juegos y toma de decisiones, sino también en lógica, juegos tipo Nym, listas de coloraciones por nombrar algunos campos.

Como no toda digráfica tiene núcleo y en caso de tener núcleo, éste no necesariamente es único, varios autores han buscado condiciones suficientes que garanticen la existencia de al menos un núcleo.

Entre los primeros investigadores en esta línea de trabajo podemos mencionar a:

- von Neumann [29].
- Morgenstern [29].
- Richardson [27].
- Berge [3].
- Neumann Lara [9].
- Duchet [6].
- Galeana-Sánchez [9].

En [5] V. Chvátal, demostró que el problema de decidir si una digráfica tiene núcleo es un problema NP-completo. En [8] Fraenkel, demostró que el problema sigue siendo NP-completo aún para digráficas planas tales que $\delta^+(v) \leq 2$, $\delta^-(v) \leq 2$, $\delta(v) \leq 3 \forall v \in V(D)$. Como el problema de decidir si una digráfica tiene núcleo es un problema NP-completo, varios investigadores han enfocado su investigación hacia ciertas familias de digráficas en particular, como por ejemplo, digráficas transitivas, digráficas cuasitransitivas [20], digráficas pretransitivas

[18], por citar algunas.

A continuación expondremos los resultados más significativos sobre la existencia de núcleos en digráficas.

2.2. Resultados Sobre Existencia de Núcleos en Digráficas

Teorema 2.2.1. *Si D es una digráfica completa, entonces cada vértice es un núcleo.*

Demostración.

Sea $v \in V(D)$. Nótese que dado que D es completa $\{v\}$ es absorbente e independiente. \square

Teorema 2.2.2. *Toda digráfica simétrica D tiene núcleo. Más aún, todo conjunto independiente máximo por contención S , es un núcleo en D .*

Demostración.

Sea S un conjunto independiente máximo por contención. S es absorbente, ya que $\forall v \in V(D) \setminus S$, $S \cup \{v\}$ no es independiente. Por lo tanto, como D es simétrica, existe una vS -flecha. Por lo tanto S es absorbente e independiente. \square

Teorema 2.2.3. *Toda digráfica transitiva y acíclica D tiene un núcleo único. Más aún, el conjunto de vértices de exgrado 0 es el único núcleo de D .*

Demostración.

Ver **Sección 2.1.2**. \square

Teorema 2.2.4. *Si D es una digráfica transitiva, entonces la digráfica de condensación de D tiene un núcleo. Más aún, el conjunto de las componentes fuertemente conexas terminales es el único núcleo de la condensación de D .*

Demostración.

Nótese que por el **teorema 1.4.12** $\mathcal{C}^*(D)$, la digráfica de condensación de D es transitiva y acíclica. Además por el **teorema 2.2.3** su único núcleo son las componentes fuertemente conexas terminales. \square

Teorema 2.2.5. *Toda digráfica transitiva D tiene núcleo.*

Demostración.

Caso 1. D es Fuertemente Conexa.

Demostración.

Nótese que por el **teorema 1.4.9** tenemos que D es completa y por el **teorema 2.2.1** D tiene núcleo. \square

Caso 2. D no es Fuertemente Conexa

Considérese $\mathcal{C} = \{S \subseteq D \mid S \text{ es una componente fuertemente conexa terminal}\}$. Considérese N obtenido de elegir un elemento de cada una de las componentes fuertemente conexas terminales.

N es independiente ya que las componentes fuertemente conexas son terminales, es decir, sus vértices únicamente tiene flechas hacia vértices dentro de la misma componente fuertemente conexa.

Nótese que \mathcal{C} es el núcleo de $\mathcal{C}^*(D)$, en particular es absorbente. Sea $v \in V(D) \setminus N$, $v \in V_i$ donde V_i es una componente fuertemente conexa. Si $V_i \notin \mathcal{C}$, como \mathcal{C} es absorbente, existe $W \in \mathcal{C}$ tal que $(V_i, W) \in F(\mathcal{C}^*(D))$. Además como D es transitiva, por el **teorema 1.4.11**, existe una (v, w) flecha donde $w \in N$ (recuérdese que por cada componente fuertemente conexa elegimos un elemento).

Ahora si $V_i \in \mathcal{C}$, por el **teorema 1.4.9** tenemos que V_i es completa y por lo tanto existe una (v, n) flecha donde $n \in N$. \square

Teorema 2.2.6. *Todo núcleo es un conjunto independiente máximo por contención.*

Demostración.

Supóngase que N es un núcleo y $N \subset N' \neq N$. Sea $v \in N' \setminus N$. Como N es absorbente por ser núcleo, existe una vN -flecha. Por lo tanto N' no es independiente. Por lo tanto N es independiente máximo por contención. \square

Teorema 2.2.7. *Todo núcleo es un absorbente mínimo por contención.*

Demostración.

Supóngase que N es un núcleo y $N' \subset N \neq N'$. Sea $v \in N \setminus N'$. Supóngase por contradicción que N' es absorbente. Entonces N' absorbe a $v \notin N$. Es decir, existe una vN' -flecha. Ésto contradice que N es independiente. \square

Teorema 2.2.8. [29] *Toda digráfica sin ciclos dirigidos tiene un único núcleo.*

Demostración.

Definimos los siguientes conjuntos:

$$D_0 = D.$$

$$N_0 = \{v \in V(D) \mid \delta^+(v) = 0\}.$$

$$M_0 = \{v \in V(D) \mid \exists v N_0\text{-flecha}\}.$$

$$D_{i+1} = D_i \setminus (N_i \cup M_i).$$

$$N_{i+1} = \{v \in V(D_{i+1}) \mid \delta^+(v) = 0\}.$$

$$M_{i+1} = \{v \in V(D_{i+1}) \mid \exists v N_{i+1}\text{-flecha}\}.$$

Nótese que $|D_i|$ es una sucesión estrictamente decreciente en \mathbb{N} , dado que si $D_i \neq \emptyset$ entonces $N_i \neq \emptyset$. Supóngase que $D_i \neq \emptyset$ y $N_i = \emptyset$, entonces en D_i , por el **teorema 1.4.4**, hay un ciclo dirigido, pero notemos que D_i es una subdigráfica inducida de D , que no tiene ciclos dirigidos. Dado que $|D_i|$ es estrictamente decreciente, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $|D_k| = 0$, k mínimo con esta propiedad.

Se mostrará que $N = \bigcup_{i=0}^{k-1} N_i$ es el único núcleo de D .

Primero se mostrará que N es independiente.

Sean $u, v \in N$. $u \in N_r$, $v \in N_s$ con $r, s \in \{0, \dots, k-1\}$. Si $r = s$, entonces $(u, v) \notin F(D_r)$ y $(v, u) \notin F(D_r)$, ya que son vértices de exgrado 0 en D_r . Ya que D_r es una subdigráfica inducida de D que tiene a u y a v en la que no son adyacentes, entonces tampoco son adyacentes en D .

Supóngase ahora que $r \neq s$ y sin pérdida de generalidad supongamos que $r < s$. Como $v \in N_s$, y $r < s$, entonces $v \notin M_r$, ya que si $v \in M_r$ entonces $v \notin D_{r+1}$ y por lo tanto $v \notin D_j \forall j > r$, contradiciendo que $v \in N_s$. Por lo tanto $(v, u) \notin F(D)$. Además en D_r $\delta^+(u) = 0$, por lo tanto $(u, v) \notin F(D_r)$, pero además D_r es una subdigráfica inducida de D que incluye a u y a v y que no incluye a (u, v) . Por lo tanto $(u, v) \notin F(D)$.

Ahora se mostrará que N es absorbente.

Recuérdese la observación de que $D_k = \emptyset$. Sea $v \in V(D)$, por la observación anterior y dadas las definiciones de D_i , $v \in N_s$ ó $v \in M_s$ para alguna $s \in \{0, \dots, k-1\}$, ya que de otra manera $v \in D_k = \emptyset$. Si $v \in M_s$, existe una $v N_s$ -flecha, y por lo tanto es absorbido por $N_s \subseteq N$ y por lo tanto por N .

Ahora se mostrará que N es el único núcleo de D .

Sea N' un núcleo de D . Nótese que dado que $\delta^+(N_0) = 0$, entonces $N_0 \subseteq N'$. Se mostrará además que $N_i \subseteq N' \forall i \in \{0, \dots, k-1\}$. Supóngase que $N_i \subseteq N' \forall i < s$. Considérese $\bigcup_{i=0}^{s-1} N_i \subseteq N'$, entonces como N' es independiente $\bigcup_{i=0}^{s-1} M_i \subseteq D \setminus N'$. Entonces $N' \setminus \bigcup_{i=0}^{s-1} N_i \cup M_i$ es un núcleo de D_s . Pero $\delta^+(N_s) = 0$ en D_s , ésto implica que $N_s \subseteq N' \setminus \bigcup_{i=0}^{s-1} N_i \cup M_i$. Ésto completa la inducción que muestra que $N_i \subseteq N'$ y por lo tanto $N \subseteq N'$. Se sigue ya sea del **teorema 2.2.6** o del **teorema 2.2.7** que $N = N'$. \square

2.3. Teorema de Richardson

Uno de los teoremas más importantes sobre la existencia de núcleos en digráficas es el **teorema de Richardson** que afirma que toda digráfica sin ciclos dirigidos de longitud impar tiene núcleo. A continuación desarrollaremos algunos conceptos y teoremas de los que se podrá concluir el teorema de Richardson. La prueba original de este teorema dada por Richardson contenía aproximadamente 30 páginas. La prueba que presentaremos a continuación fue obtenida por Victor Neumann.

Sea D una digráfica. Diremos que $S \subseteq V(D)$ es un seminúcleo de D si:

1. S es independiente.
2. Para cada flecha f que va de S a x (en virtud de la condición anterior, $x \in V \setminus S$), existe una flecha f' que va de x a S .

Claramente \emptyset es un seminúcleo.

Teorema 2.3.1. *Todo seminúcleo está contenido en un seminúcleo máximo por contención.*

Demostración.

Si D es finita, el teorema es claro. En caso contrario es consecuencia del siguiente lema y del lema de Zorn.

Sea S un seminúcleo de D . Considérese $\mathcal{S} = \{W \subseteq D \mid S \subseteq W, S \text{ es un seminúcleo de } D\}$. \mathcal{S} con la contención es un conjunto parcialmente ordenado dado que cualquier colección de conjuntos con la contención es un conjunto parcialmente ordenado.

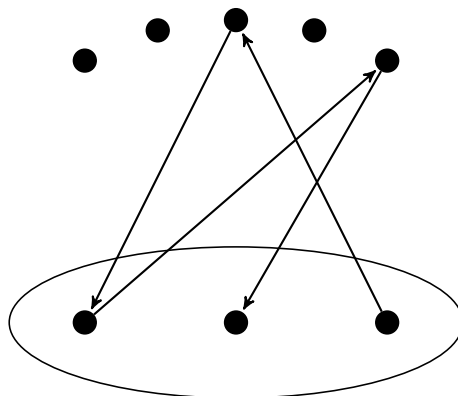


Figura 2.2: Un seminúcleo es un conjunto independiente y únicamente se pide que absorba a su vecindad exterior

Se usará el Lema de Zorn para mostrar que \mathcal{S} tiene elementos máximos.

Sea \mathcal{C} una cadena en \mathcal{S} . Considérese $T = \bigcup_{W \in \mathcal{C}} W$. Se mostrará a continuación que T es un seminúcleo de D que incluye a S .

Nótese primero que $S \subseteq T$ ya que para todo $W \in \mathcal{C}$, $S \subseteq W$.

Ahora se mostrará que T es independiente.

Sean $u, v \in V(T)$. $u \in W_i$, $v \in W_j$, sin pérdida de generalidad supóngase que $W_i \subseteq W_j$. Entonces $u, v \in W_j$, que es un seminúcleo de D y por lo tanto independiente, entonces $(u, v) \notin F(D)$ y $(v, u) \notin F(D)$. Por lo tanto T es independiente.

Ahora se mostrará que para cada flecha f que va de T a x , existe una flecha f' que va de x a T .

Sea $f = (v, x)$ una flecha que va de T a x . $v \in T$, entonces $v \in W_i \in \mathcal{C}$. Como W_i es un seminúcleo, entonces existe una flecha f' que va de x a $W_i \subseteq T$. f' es una flecha que va de x a T .

Por lo tanto T es un seminúcleo que contiene a S . En consecuencia T es una cota superior para \mathcal{C} .

Aplicando el lema de Zorn podemos concluir que \mathcal{S} tiene elementos máximos y por lo tanto S está contenido en un seminúcleo máximo por contención. \square

Teorema 2.3.2. Sea S un seminúcleo de D , $B = \{v \in V \setminus S \mid \text{no existe flecha de } v \text{ a } S\}$ y S' un seminúcleo de la subdigráfica $D[B]$ de D inducida por B .

Entonces $S \cup S'$ es un seminúcleo de D .

Demostración.

Se mostrará primero que $S \cup S'$ es independiente. Tanto S como S' son independientes. Además como $S' \subseteq B$ no existen flechas de S' a S . Supóngase por contradicción que existe una flecha de S a S' . Como S es seminúcleo, entonces también tiene que existir una $S'S$ flecha, lo que contradice la observación anterior.

Se mostrará ahora que si existe una flecha f que va de $S \cup S'$ a x , entonces existe una flecha f' de x a $S \cup S'$.

Supóngase que $f = (v, x)$.

Caso 1: $x \in B$

Como S' es un seminúcleo de $D[B]$, entonces existe f' una flecha de x a S' y por lo tanto de x a $S \cup S'$.

Caso 2: $x \notin B$

Como $x \notin B$ entonces existe f' una flecha de x a S y por lo tanto de x a $S \cup S'$.

□

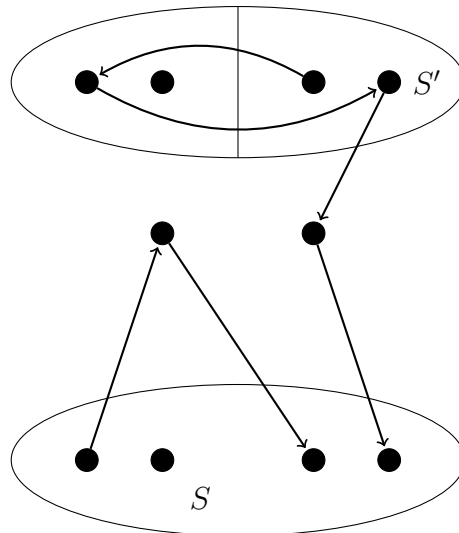


Figura 2.3: $S \cup S'$ es un seminúcleo en D

Teorema 2.3.3. Sea S un seminúcleo de D , $B = \{v \in V \setminus S \mid \text{no existe flecha de } v \text{ a } S\}$ y S' un núcleo de la subdigráfica $D[B]$ de D inducida por B . Entonces $S \cup S'$ es un núcleo de D .

Demostración.

Se mostrará primero que $S \cup S'$ es independiente. Tanto S como S' son independientes.

Además como $S' \subseteq B$ no existen flechas de S' a S . Supóngase por contradicción que existe una flecha de S a S' . Como S es seminúcleo, entonces también tiene que existir una $S'S$ flecha, lo que contradice la observación anterior.

Ahora se mostrará que $S \cup S'$ es absorbente.

Tomemos $v \in V(D)$ y supóngase que v no es absorbido por S . En este caso, $v \in B$ y es absorbido por S' que es núcleo de B . Por lo tanto $S \cup S'$ es absorbente y por lo tanto es un núcleo. \square

Teorema 2.3.4. *Si D es una digráfica tal que toda subdigráfica inducida posee un seminúcleo no vacío, entonces D tiene un núcleo.*

Demostración.

Sea S un seminúcleo no vacío de D máximo por contención y $B = \{v \in V \setminus S \mid \text{no existe flecha de } v \text{ a } S\}$. Se afirma que $B = \emptyset$ y por lo tanto S es núcleo de D . Si $B \neq \emptyset$, existiría un seminúcleo $S' \neq \emptyset$ de la subdigráfica $D[B]$ de D inducida por B . Entonces $S \cup S'$ sería un seminúcleo de D por el **teorema 2.3.2** que contendría propiamente a S , contradiciendo la maximalidad de S . \square

Teorema 2.3.5. *Si D es una digráfica finita que no posee ciclos impares, entonces D tiene un seminúcleo no vacío.*

Demostración.

Se considerarán dos posibles casos.

Caso 1: D es fuertemente conexa

Ya que D es fuertemente conexa y no posee ciclos impares, se sigue del **teorema 1.4.6** que D es bipartita. Sea $P = \{V_1, V_2\}$ una bipartición de D . Como D es fuertemente conexa, todo vértice tiene exgrado mayor o igual a 1 y entonces tanto V_1 como V_2 es un núcleo de D .

Caso 2: D no es fuertemente conexa

En este caso considérese una componente fuertemente conexa terminal C_1 . Como C_1 es fuertemente conexa y sin ciclos impares, se sigue del caso anterior que C_1 tiene un seminúcleo no vacío. Por ser C_1 una componente fuertemente conexa terminal, se sigue que dicho seminúcleo es un núcleo de D . \square

Teorema 2.3.6. [27] **Teorema de Richardson.**

Si D es una digráfica sin ciclos impares, entonces D tiene núcleo.

Demostración.

Se sigue inmediatamente del teorema anterior que toda subdigráfica inducida de D tiene un seminúcleo no vacío, además por el **teorema 2.3.4** se tiene que D tiene núcleo. \square

Han sido encontradas varias extensiones y variaciones del teorema de Richardson. Una de las más interesantes es la siguiente que fue obtenida de manera independiente por P.Duchet y H.Galeana y V. Neumann-Lara. Además este teorema es de gran utilidad en el estudio de generalizaciones de núcleos.

Teorema 2.3.7. *Si D es una digráfica finita tal que todo ciclo dirigido tiene al menos una flecha simétrica, entonces D tiene núcleo.*

Demostración.

Por el **teorema 2.3.4** basta demostrar que D tiene un seminúcleo no vacío. Se mostrará que D tiene un seminúcleo que consta de un único punto. Supóngase por contradicción que D no tiene un seminúcleo de un único punto. Considérese un vértice $v_0 \in V(D)$. Como v_0 no es un seminúcleo de D , entonces existe una (v_0, v_1) flecha en D y no una (v_1, v_0) flecha. De ésta forma podemos definir inductivamente los vértices $v_i, i \in \mathbb{N}$. Dado que D es finita, existen primeros $j, k, j < k$ tales que $v_j = v_k$. Entonces $C = (v_j, v_{j+1}, \dots, v_{k-1}, v_k)$ es un ciclo dirigido sin flechas simétricas, contradiciendo las hipótesis. \square

2.4. Digráficas Núcleo-Perfectas

Nótese que las condiciones para la existencia de núcleos consideradas hasta ahora implican propiedades de la digráfica que se heredan en la digráfica inducida. Es por eso que además de probar que dichas digráficas tienen núcleo, también lo tienen todas sus subdigráficas inducidas.

Como consecuencia de la observación anterior y los teoremas vistos en esta sección se tiene lo siguiente:

Una digráfica es *Núcleo-Perfecta* si todas sus subdigráficas inducidas tienen núcleo.

Teorema 2.4.1. *Si D es una digráfica completa, entonces D es núcleo-perfecta.*

Demostración.

Toda subdigráfica inducida de una digráfica completa es completa, además del **teorema 2.2.1** se tiene que D es núcleo-perfecta. \square

Teorema 2.4.2. *Toda digráfica simétrica D es núcleo-perfecta.*

Demostración.

Toda subdigráfica inducida de una digráfica simétrica es simétrica, además del **teorema 2.2.2** se tiene que D es núcleo-perfecta. \square

Teorema 2.4.3. *Toda digráfica transitiva y acíclica D es núcleo-perfecta.*

Demostración.

Toda subdigráfica inducida de una digráfica transitiva y acíclica es transitiva y acíclica, además del **teorema 2.2.3** se tiene que D es núcleo-perfecta. \square

Teorema 2.4.4. *Toda digráfica transitiva D es núcleo-perfecta.*

Demostración.

Toda subdigráfica inducida de una digráfica transitiva es transitiva, además del **teorema 2.2.5** se tiene que D es núcleo-perfecta. \square

Teorema 2.4.5. *Toda digráfica sin ciclos dirigidos D es núcleo-perfecta.*

Demostración.

Toda subdigráfica inducida de una digráfica sin ciclos dirigidos no tiene ciclos dirigidos, además del **teorema 2.2.8** se tiene que D es núcleo-perfecta. \square

Teorema 2.4.6. *Toda digráfica D en la que toda subdigráfica tiene un seminúcleo no vacío es núcleo-perfecta.*

Demostración.

Nótese que si T es una subdigráfica inducida de D y G una subdigráfica inducida de T , entonces G es una subdigráfica inducida de D y por lo tanto tiene seminúcleo no vacío. Entonces por el **teorema 2.3.4**, D es núcleo-perfecta. \square

Teorema 2.4.7. *Toda digráfica D sin ciclos dirigidos de longitud impar es núcleo-perfecta.*

Demostración.

Toda subdigráfica inducida de una digráfica sin ciclos dirigidos de longitud impar no tienen ciclos dirigidos de longitud impar, además del **teorema 2.3.6**, **teorema de Richardson** se tiene que D es núcleo-perfecta. \square

Teorema 2.4.8. *Toda digráfica D en la que todo ciclo dirigido tiene al menos una flecha simétrica es núcleo-perfecta.*

Demostración.

Sea C un ciclo en T una subdigráfica inducida de D . C es un ciclo de D y por lo tanto tiene una flecha simétrica. Por el **teorema 2.3.7** T tiene núcleo y por lo tanto D es núcleo-perfecta. \square

Capítulo 3

Núcleos por Trayectorias Monocromáticas

En éste capítulo presentaremos un resumen del desarrollo histórico del tema de núcleos por trayectorias monocromáticas y daremos un panorama de los resultados principales obtenidos en éste tema.

3.1. Definiciones y Resultados Básicos

Una digráfica D es m -coloreada, si sus flechas están coloreadas con m -colores.

D es *monocromática* si D es 1-coloreada.

En particular se dice que D es *bicolor* si D es 2-coloreada.

Sean D una digráfica m -coloreada y H una subdigráfica de D . Se dice que H es *monocromática* si todas las flechas de H tienen el mismo color.

Sean D una digráfica m -coloreada y H una subdigráfica de D . Se dice que D es *Casimocromática* si con a lo más una excepción todas sus flechas tienen el mismo color.

Sean D una digráfica m -coloreada y H una subdigráfica de D . Se dice que H es *Policromática* si H es al menos 3-coloreada.

Se define \vec{C}_3 *arcoiris* como el ciclo dirigido de orden 3 policromático.

Se define \vec{F}_3 *arcoiris* como la trayectoria de orden 3 policromática.

Sea D una digráfica m -coloreada, la *Cerradura por Colores de D* denotada por $C(D)$ es

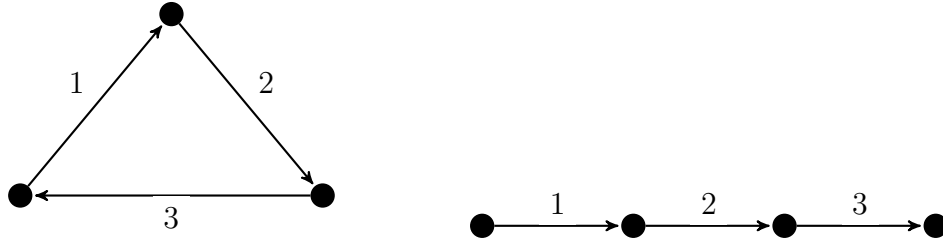


Figura 3.1: C_3 arcoiris (izquierda) y P_3 arcoiris (derecha)

la multidigráfica m -coloreada definida como sigue:

- $V(C(D)) = V(D)$
- $F(C(D)) = \{(u, v) \text{ de color } i \text{ siempre que existe una } uv\text{-trayectoria dirigida de color } i \text{ contenida en } D\}$

Sea D una digráfica m -coloreada. La digráfica de clases cromáticas de D , denotada por $\mathcal{C}(D)$, es la digráfica tal que:

- $V(\mathcal{C}(D)) = \{i \mid \text{ existe una flecha de color } i \text{ en } D\}$.
- $(i, j) \in F(\mathcal{C}(D))$ si y sólo si existen 2 flechas en D , digamos (u, v) y (v, w) tales que $color(u, v) = i$ y $color(v, w) = j$.

Sea D una digráfica m -coloreada. $I \subseteq V(D)$ es *Independiente por Trayectorias Monocromáticas* si para cualesquiera $u, v \in I$ $u \neq v$ no existe una trayectoria dirigida monocromática entre ellos.

Sea D una digráfica m -coloreada. $I \subseteq V(D)$ es *Absorbente por Trayectorias Monocromáticas* si para cada $z \in V(D) \setminus I$ existe una zI trayectoria dirigida monocromática en D .

Sea D una digráfica m -coloreada. $N \subseteq V(D)$ es *Núcleo por Trayectorias Monocromáticas de D* si es independiente por trayectorias monocromáticas y absorbente por trayectorias monocromáticas.

Sea D una digráfica m -coloreada y H una subdigráfica de D . Se dice que H es j -casimonocromática si con a lo más j excepciones todas sus flechas tienen el mismo color.

Sea D una digráfica m -coloreada y H una subdigráfica de D . Se dice que H es 2-débilmente casimonocromática si H es 2-casimonocromática y las dos posibles excepciones no forman una trayectoria dirigida.

Teorema 3.1.1. *Sea D una digráfica m -coloreada. N es un núcleo por trayectorias monocromáticas de D si y sólo si N es un núcleo de la cerradura de D .*

Demostración.

Consideremos N un núcleo por trayectorias monocromáticas de D . N es independiente en $C(D)$. Supongamos por contradicción que no lo es, entonces existen $u, v \in V(N)$ adyacentes en $C(D)$, pero ésto implica que existe una uv -trayectoria monocromática o una vu -trayectoria monocromática, contradiciendo que N es independiente por trayectorias monocromáticas por ser un núcleo por trayectorias monocromáticas. N es absorbente en $C(D)$. Consideremos $v \in V(D)$, como N es un núcleo por trayectorias monocromáticas, existe una vN -trayectoria monocromática, que corresponde a una vN -flecha en $C(D)$. Por lo tanto N es absorbente en $C(D)$. Por lo tanto N es núcleo en $C(D)$.

Supongamos que N es un núcleo de $C(D)$. Supongamos por contradicción que N no es independiente por trayectorias monocromáticas, es decir, que existen $u, v \in V(D)$ tales que existe una uv -trayectoria monocromática. Entonces, por definición $(u, v) \in F(C(D))$ contradiciendo que N es independiente.

Sea $v \in V(D)$ como N es un núcleo de $C(D)$, entonces existe una vN -flecha en $C(D)$ que corresponde a una vN -trayectoria monocromática en D . Por lo tanto N es absorbente por trayectorias monocromáticas. \square

Teorema 3.1.2. *Sea D una digráfica m -coloreada. Si $C(D)$ es núcleo-perfecta, entonces D tiene núcleo por trayectorias monocromáticas.*

Demostración.

Como $C(D)$ es núcleo-perfecta, en particular tiene núcleo, y por el **teorema 3.1.1** tenemos que D tiene núcleo por trayectorias monocromáticas. \square

3.2. Desarrollo Histórico y Panorama de Resultados

Considerando los resultados sobre la existencia de núcleos por trayectorias monocromáticas en digráficas m -coloreadas que hasta ahora se conocen, se puede notar que existe una importante línea de investigación orientada a determinar condiciones suficientes que aseguren la existencia de núcleo por trayectorias monocromáticas en digráficas m -coloreadas.

No toda digráfica m -coloreada tiene núcleo por trayectorias monocromáticas. Basta considerar a \vec{C}_3 arcoiris. Además en caso de que tal núcleo exista, no necesariamente es único:

considérese por ejemplo el ciclo dirigido de longitud 4 coloreado con 4 colores.

La investigación en éste tema se ha orientado a estudiar ciertas clases de digráficas y condiciones en ellas para la existencia de núcleos por trayectorias monocromáticas.

Las clases que hasta ahora se han considerado son principalmente torneos, digráficas bipartitas, digráficas k -partitas y digráficas cuasitransitivas.

La mayoría de las condiciones suficientes que se conocen hasta ahora piden la monocromaticidad o la casimonocromaticidad de pequeñas estructuras como son ciclos dirigidos de longitud 3, ciclos dirigidos de longitud 4 y subtorneos transitivos de orden 3.

Por otra parte también se ha estudiado la posible relación entre algunas operaciones en digráficas m -coloreadas y la existencia de núcleos por trayectorias monocromáticas (por ejemplo en la digráfica de líneas, la digráfica subdivisión de una digráfica m -coloreada y ciertos productos entre digráficas).

También se puede observar interés por relacionar éste concepto con algunas aplicaciones en teoría de juegos, autómatas y lenguajes de programación.

El primer resultado conocido sobre la existencia de núcleos por trayectorias monocromáticas en digráficas m -coloreadas es el siguiente teorema obtenido por Sands, Sauer y Woodrow en 1982 [28] el cual ahora es un resultado clásico y de gran impacto dentro del estudio de núcleos por trayectorias monocromáticas.

Teorema 3.2.1. [28] **Sands, Sauer, Woodrow(1982)** *Toda digráfica 2-coloreada sin trayectorias monocromáticas infinitas exteriores tiene un núcleo por trayectorias monocromáticas.*

Un caso particular de éste teorema que ha sido de gran importancia en el estudio de núcleos por trayectorias monocromáticas en torneos m -coloreados es el siguiente:

Teorema 3.2.2. [28] *Todo torneo finito 2-coloreado T posee un vértice v tal que para cada vértice w en $V(T) \setminus \{v\}$ existe una trayectoria dirigida monocromática de u hacia v .*

Sands, Sauer y Woodrow observaron que si se usan más de dos colores, entonces el teorema no necesariamente es cierto. Como ejemplo propusieron a \vec{C}_3 arcoiris.

A partir de éste ciclo se pueden construir torneos cuyas flechas estén coloreadas con $m \geq 4$ colores tal que no tenga núcleo por trayectorias monocromáticas. La construcción es la siguiente:

Considérese el ciclo dirigido de longitud 3 = (v_1, v_2, v_3, v_1) y supóngase sin pérdida de generalidad que $\text{color}(v_1, v_2) = 1$, $\text{color}(v_2, v_3) = 2$, $\text{color}(v_3, v_1) = 3$.

Se denota por C_3 a dicho ciclo con la coloración dada.

Sea T_m el torneo m -coloreado cuyas flechas están coloreadas como siguen:

Se agrega al ciclo C_3 un conjunto $\{v_4, \dots, v_m\}$ de nuevos vértices y el conjunto $\{(v_i, v_j) | i > j, m \geq i \geq 4\}$ de nuevas flechas.

Además $\text{color}(v_i, v_j) = i$ para cada $i \in \{4, \dots, m\}$.

T_m es un torneo m -coloreado que no tiene núcleo por trayectorias monocromáticas.

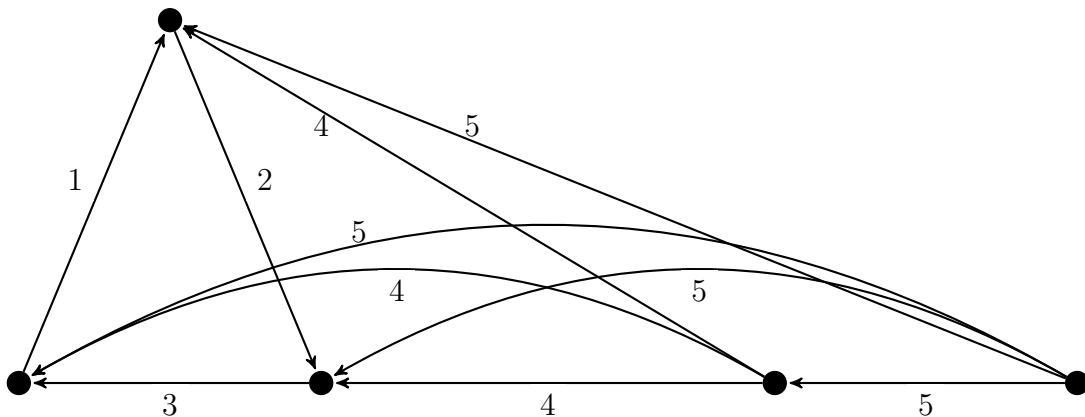


Figura 3.2: T_5 un torneo 5-coloreado sin núcleo por trayectorias monocromáticas

En el mismo artículo los autores plantearon el problema de decidir si un torneo 3-coloreado en el que todo ciclo dirigido de longitud 3 es casimonocromático, tiene o no núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas. Este problema aún permanece abierto.

Posteriormente en 1988 Shen Ming Gang [25] da una respuesta parcial a la pregunta planteada por Sands, Sauer y Woodrow con el siguiente teorema.

Teorema 3.2.3. [25] *Si T es un torneo m -coloreado con todo ciclo dirigido de longitud 3 casimonocromático y todo torneo transitivo de orden 3 es casimonocromático, entonces T tiene un núcleo por trayectorias monocromáticas.*

Demostración. Sea T un torneo con las hipótesis del teorema. Demostraremos que T tiene núcleo por trayectorias monocromáticas probando que la cerradura de T tiene núcleo, el resultado se sigue del **teorema 3.1.1**.

Para ésto, probaremos que cada ciclo dirigido de la cerradura de T tiene al menos una flecha simétrica y el resultado se seguirá del **teorema 2.3.7**.

Supongamos por contradicción que la cerradura de T tiene al menos un ciclo dirigido asimétrico. Sea $\Gamma = (z_0, z_1, \dots, z_n, z_0)$ un ciclo dirigido asimétrico de longitud mínima en la cerradura de T . Probaremos varias afirmaciones.

1. $\Gamma \subseteq T$. Ya que Γ es un ciclo dirigido asimétrico en $C(T)$, para cada $i \in \{0, \dots, n\}$, existe una $z_i z_{i+1}$ -trayectoria dirigida monocromática en T y no existe en T una $z_{i+1} z_i$ trayectoria dirigida monocromática. Como T es un torneo, debe existir una flecha entre z_i y z_{i+1} , pero hemos observado que no existe $z_{i+1} z_i$ -trayectoria dirigida monocromática, en particular $(z_{i+1}, z_i) \notin F(T)$, así que $(z_i, z_{i+1}) \in F(T)$. Por lo tanto $\Gamma \subseteq F(T)$.
2. Para cada $z_i, z_j \in V(\Gamma)$ que no son consecutivos en Γ , se tiene que: $(z_i, z_j) \in F(C(T))$ y $(z_j, z_i) \in F(C(T))$.
Ya que T es torneo, tenemos que $(z_i, z_j) \in F(T)$ ó $(z_j, z_i) \in F(T)$. Supongamos sin pérdida de generalidad que $(z_i, z_j) \in F(T)$ y que $i < j$. Se sigue claramente que $(z_i, z_j) \in F(C(T))$. Si $(z_j, z_i) \notin F(C(T))$ entonces $(z_j, z_{j+1}, \dots, z_i)$ es un ciclo asimétrico en la cerradura de T de longitud menor que la longitud de Γ , contradiciendo la elección de Γ . Por lo tanto $(z_j, z_i) \in F(C(T))$.
3. Γ no es monocromático.
Supongamos por contradicción que Γ es monocromático. Entonces $(z_1, z_2, \dots, z_n, z_0)$ es una $z_1 z_0$ trayectoria dirigida monocromática en T . Por lo tanto $(z_1, z_0) \in F(T)$ contradiciendo que Γ es un ciclo asimétrico de la cerradura de T .

Ya que Γ no es monocromático, en Γ existe al menos un cambio de color. Supongamos sin perder generalidad que (z_0, z_1) es de color 1 y que (z_1, z_2) es de color 2.

4. $(z_2, z_0) \notin F(T)$.

Supongamos por contradicción que $(z_2, z_0) \in F(T)$, entonces tenemos en T el triángulo dirigido (z_0, z_1, z_2, z_0) . Por hipótesis, éste es a lo más 2-coloreado. Por lo tanto (z_2, z_0) es de color 1 ó (z_2, z_0) es de color 2.

Si (z_2, z_0) es de color 1, entonces (z_2, z_0, z_1) es una z_2z_1 -trayectoria dirigida monocromática y por lo tanto $(z_2, z_1) \in F(C(T))$ contradiciendo que Γ es un ciclo asimétrico.

Si (z_2, z_0) es de color 2, entonces (z_1, z_2, z_0) es una z_1z_0 -trayectoria dirigida monocromática y por lo tanto $(z_1, z_0) \in F(C(T))$ contradiciendo que Γ es un ciclo asimétrico.

5. Existe una z_2z_0 -trayectoria dirigida monocromática en T de longitud al menos 2. Ésta afirmación se sigue directamente de las observaciones 2 y 4.

Sea $\alpha = (z_2 = w_1, w_2, \dots, w_m = z_0)$ una z_2z_0 -trayectoria dirigida monocromática de longitud al menos 2.

6. α no es de color 1.

Supongamos por contradicción que α es de color 1, entonces $\alpha \cup (z_0, z_1)$ es una z_2z_1 -trayectoria dirigida monocromática en T . Por lo que $(z_2, z_1) \in F(C(T))$. Contradiendo que Γ es un ciclo asimétrico en la cerradura de T . Por lo tanto α no es de color 1.

7. α no es de color 2.

Supongamos por contradicción que α es de color 2, entonces $(z_1, z_2) \cup \alpha$ es una z_1z_0 -trayectoria dirigida monocromática en T . Por lo tanto $(z_1, z_0) \in F(C(T))$. Contradiendo que Γ es un ciclo asimétrico en la cerradura de T . Por lo tanto α no es de color 2.

Se sigue de las dos afirmaciones anteriores que α es de un tercer color diferente de 1 y 2, digamos 3.

8. Para cada $j \in \{1, \dots, m\}$ la flecha entre z_1 y w_j no es de color 3.

Supóngase por contradicción que existe $k \in \{1, \dots, m\}$ tal que la flecha entre z_1 y w_k es de color 3.

Si la flecha va de z_1 a w_k , entonces $(z_1, w_k, w_{k+1}, \dots, w_m)$ es una z_1z_0 -trayectoria dirigida monocromática en T de color 3, por lo que $(z_1, z_0) \in F(C(T))$ contradiciendo que Γ es un ciclo asimétrico en la cerradura de T .

Si la flecha va de w_k a z_1 , entonces $(z_2 = w_1, w_2, \dots, w_k, z_1)$ es una $z_2 z_1$ -trayectoria dirigida monocromática de color 3 en T , por lo que $(z_2, z_1) \in F(C(T))$ contradiciendo que Γ es un ciclo asimétrico en la cerradura de T .

9. La flecha entre z_1 y w_k es de color 2 para toda $1 < k < m$.

Se probará esta afirmación por inducción sobre k .

Supongamos primero que $k = 2$. Ya que la subdigráfica de T inducida por $\{z_1, w_1, w_2\}$ es un ciclo dirigido de longitud 3 o un torneo transitivo de orden 3, se sigue de las hipótesis que debe ser a lo más 2-coloreado. Por lo tanto la flecha entre z_1 y w_2 debe ser de color 2 o de color 3. Se sigue de la afirmación anterior que no es de color 3, por lo tanto es de color 2.

Supongamos ahora que la flecha entre z_1 y w_i es de color 2 para toda $i < k$.

Probaremos que la flecha entre z_1 y w_k también es de color 2. Notemos que dado que la subdigráfica inducida por $\{z_1, w_{k-1}, w_k\}$ es un ciclo dirigido de longitud 3 o un torneo transitivo de orden 3, se sigue de las hipótesis que debe ser a lo más 2-coloreado. Por hipótesis de inducción la flecha entre z_1 y w_{k-1} es de color 2, la flecha entre w_{k-1} y w_k es de color 3, por lo tanto la flecha entre z_1 y w_k únicamente puede ser de color 2 o color 3. Sin embargo dada la observación anterior tenemos que debe ser de color 2. Ésto completa la inducción.

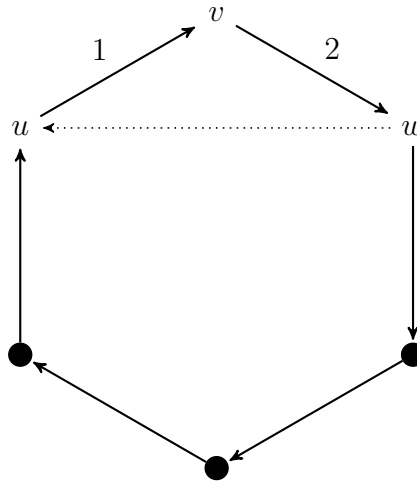


Figura 3.3: El ciclo asimétrico mínimo, la flecha punteada indica la trayectoria monocromática

De la última afirmación se sigue que la subdigráfica inducida por $\{z_1, w_{m-1}, w_m\}$ es un torneo transitivo de orden 3 o un ciclo de orden 3, en cualquier caso 3-coloreado, contradiciendo las hipótesis del teorema.

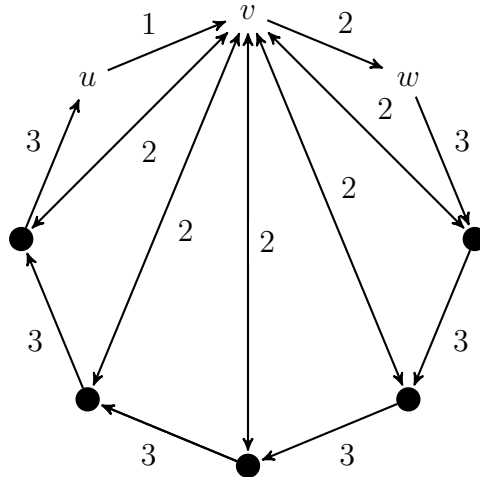


Figura 3.4: La trayectoria monocromática y los colores de las flechas hacia v obligan a que el último triángulo tenga todos los colores

Por lo tanto todo ciclo dirigido en la cerradura de T tiene al menos una flecha simétrica. \square

Teorema 3.2.4. *Si T es un torneo m -coloreado con todo ciclo dirigido de longitud 3 casi-monocromático y todo torneo transitivo de orden 3 es casimonocromático, entonces $C(T)$ es núcleo perfecta.*

Demostración.

Se sigue de la prueba del **teorema 3.2.3** en la que mostramos que todo ciclo dirigido de $C(T)$ tiene una flecha simétrica, y por el **teorema 2.4.8** tenemos que $C(T)$ es núcleo perfecta. \square

En [25] Shen Ming Gang prueba además que para $m \geq 5$, las hipótesis mencionadas en el **teorema 3.2.3** son justas, a saber demuestra los siguientes dos teoremas.

Teorema 3.2.5. *Para todo $m \geq 5$ existe un torneo m -coloreado que no tiene núcleo por trayectorias monocromáticas y todo ciclo dirigido de longitud 3 es casimonocromático.*

Teorema 3.2.6. *Para todo $m \geq 5$ existe un torneo m -coloreado que no tiene núcleo por trayectorias monocromáticas y todo torneo transitivo de orden 3 es casimonocromático.*

En ese mismo artículo se plantearon como problemas abiertos los casos en que $m = 3$ (es decir que si T es un torneo 3-coloreado tal que todo ciclo dirigido de longitud 3 es casi monocromático, entonces T tiene núcleo por trayectorias monocromáticas) y $m = 4$ (es decir que si T es un torneo 4-coloreado tal que todo ciclo dirigido de longitud 4 es casi monocromático,

entonces T tiene núcleo por trayectorias monocromáticas).

Para el caso $m = 4$ fue probado en el año 2004[17] por H.Galeana-Sánchez y R.Rojas el siguiente teorema:

Teorema 3.2.7. *Existe un torneo 4-coloreado tal que todo ciclo dirigido de longitud 3 es casimonocromático que no tiene núcleo por trayectorias monocromáticas.*

Hasta el momento el siguiente problema continúa abierto:

Problema

Demostrar la veracidad o falsedad de la siguiente afirmación:

Todo torneo 3-coloreado sin ciclos dirigidos 3-coloreados tiene núcleo por trayectorias monocromáticas.

Con técnicas parecidas a las usadas en el **teorema 3.2.3** se exploró la existencia de núcleos por trayectorias monocromáticas en algunas otras clases de digráficas y fueron obtenidos los siguientes resultados:

Teorema 3.2.8. [11, 12] *Sea T un torneo m -coloreado. Si todo ciclo dirigido de longitud 3 es monocromático, entonces la cerradura de T es núcleo perfecta.*

Teorema 3.2.9. [12] *Sea T un torneo m -coloreado. Si todo ciclo dirigido de longitud 3 y todo ciclo dirigido de longitud 4 contenido en T es casimonocromático, entonces la cerradura de T es núcleo perfecta.*

Teorema 3.2.10. *Si T es un torneo bipartito m -coloreado, tal que todo ciclo dirigido de longitud 4 es monocromático, entonces la cerradura de T es núcleo perfecta.*

Teorema 3.2.11. *Si T es un torneo k -partito m -coloreado, tal que todo ciclo dirigido de longitud 3 y todo ciclo dirigido de longitud 4 es monocromático, entonces la cerradura de T es núcleo perfecta.*

Teorema 3.2.12. [19] *Sea T un torneo tal que el número de colores asignado a las flechas que inciden en él es a lo más 2, y T no tiene C_3 arcoiris, entonces T es núcleo perfecto.*

Teorema 3.2.13. [20] *Sea D una digráfica cuasitransitiva m -coloreada. Si todo ciclo dirigido de longitud 3 es monocromático, entonces la cerradura de T es núcleo perfecta.*

Teorema 3.2.14. [23] *Sea T un torneo m -coloreado. Si para algún $s > 3$ todo ciclo dirigido de longitud s contenido en T es casimonocromático y todo ciclo dirigido contenido en T de longitud $l < s$ es a lo más 2-coloreado, entonces T tiene núcleo por trayectorias monocromáticas.*

Por otro lado, también se estudiaron algunas condiciones suficientes para que bajo ciertas operaciones de digráficas m -coloreadas con núcleo por trayectorias monocromáticas también se obtuvieran núcleos por trayectorias monocromáticas.

En 2010 se estudiaron condiciones para que el número de núcleos por trayectorias monocromáticas en una digráfica m -coloreada sea igual al número de núcleos por trayectorias monocromáticas de una cierta coloración de su digráfica de líneas [14].

También en [30] Y. Włoch probó condiciones suficientes y necesarias para la existencia de núcleos por trayectorias monocromáticas en un cierto producto que llamaron ‘La D -unión de digráficas.’

El resultado más reciente sobre la existencia de núcleos por trayectorias monocromáticas en digráficas m -coloreadas es el siguiente.

Teorema 3.2.15. *Sean D una digráfica m -coloreada y $\mathcal{C}(D)$ su digráfica de clases cromáticas. Si $\mathcal{C}(D)$ no tiene ciclos dirigidos de longitud impar al menos 3, entonces D tiene núcleo por trayectorias monocromáticas.*

Los siguientes teoremas fueron probados en 2011 [13].

En el capítulo 5 se explorarán generalizaciones parciales de éstos resultados.

Teorema 3.2.16. [13] *Si D es una digráfica m -coloreada tal que todo ciclo en D es monocromático, entonces D tiene un núcleo por trayectorias monocromáticas.*

Teorema 3.2.17. [13] *Sea D una digráfica finita m -coloreada. Supongamos que existe una partición $C = C_1 \cup C_2$ del conjunto de colores de D tal que todo ciclo en la subdigráfica $D[C_i]$ generada por las flechas con colores en C_i es monocromático. Supongamos más aún que D no tiene C_3 arcoiris ni P_3 arcoiris. Entonces D tiene un núcleo por trayectorias monocromáticas.*

Nótese que este último teorema implica el **teorema de Sands, Sauer y Woodrow (teorema 3.2.1)** en el caso de que D es una digráfica finita. Ésto es tomando como una partición cada uno de los dos colores. Todos los ciclos en cada clase de color son claramente monocromáticos y D no tiene C_3 ni P_3 arcoiris.

Teorema 3.2.18. [16] *Sea D una digráfica m -coloreada asimétrica 3-cuasitransitiva. Si todo ciclo dirigido de longitud 4 es monocromático y todo ciclo dirigido de longitud 3 es casimonocromático entonces D tiene núcleo por trayectorias monocromáticas.*

Teorema 3.2.19. [15] *Si T un torneo m -coloreado tal que todo ciclo dirigido de longitud 3 es a lo más 2-coloreado y todos los K_t son 2-casimonocromáticos, entonces T tiene núcleo por trayectorias monocromáticas.*

Teorema 3.2.20. [15] *Sea T un torneo m -coloreado tal que todo ciclo dirigido de longitud 3 es 1-casimonocromático y todo torneo cíclico de orden 4 es 2-débilmente casimonocromático. Entonces T tiene un núcleo por trayectorias monocromáticas.*

Claramente si D es una digráfica m -coloreada y $u, v \in V(D)$, sabemos que existe una uv -trayectoria dirigida monocromática si y sólo si existe un uv -camino dirigido monocromático. Por esta razón estudiar núcleos por trayectorias monocromáticas en digráficas m -coloreadas es equivalente a estudiar núcleos por caminos monocromáticos en digráficas m -coloreadas. Éste no es el caso cuando se consideran otro tipo de coloraciones y otro tipo de trayectorias como veremos en los capítulos siguientes.

Capítulo 4

H-núcleos por Trayectorias

4.1. Definiciones y Desarrollo Histórico

Desde que apareció el resultado de Sands, Sauer y Woodrow que afirma que toda digráfica 2-coloreada sin trayectorias infinitas exteriores tiene núcleo por trayectorias monocromáticas, varios autores han explorado generalizaciones de dicho resultado. En particular en [24] Linek y Sands consideraron colorear las flechas de un torneo T con los elementos de un conjunto parcialmente ordenado P y definen que una trayectoria $(v_1, \dots, v_n) \subseteq T$ es *monótona* si $color(v_i, v_{i+1}) \leq color(v_{i+1}, v_{i+2})$ en P para cada $i \in \{1, \dots, n-2\}$. Se preguntaron para cuáles conjuntos parcialmente ordenados P y para cuáles torneos T , el torneo coloreado con los elementos de P tiene un núcleo por trayectorias monótonas. Aclaremos ésto con la siguiente definición.

Definición 4.1.1. *Sea P un conjunto parcialmente ordenado y T un torneo cuyas flechas son coloreadas con los elementos de P . $N \subseteq V(T)$ es un **Núcleo por Trayectorias Monótonas** si se cumplen las dos siguientes condiciones.*

1. *Para cualesquiera $u, v \in N$ no existe una trayectoria dirigida monótona entre ellos.*
2. *Para cada $v \notin N$ existe una vN -trayectoria dirigida monótona.*

Posteriormente en [24] Linek y Sands propusieron otra extensión más del concepto de núcleo; propusieron reemplazar el conjunto parcialmente ordenado P por una digráfica H en la que todo vértice tiene un lazo y colorean las flechas del torneo T con los vértices de H . Considerando dicha coloración, ellos dicen que una trayectoria $(u_1, \dots, u_n) \subseteq T$ es una H -trayectoria si $(color(u_i, u_{i+1}), color(u_{i+1}, u_{i+2})) \in F(H)$ para cada $i \in \{1, \dots, n-2\}$. Definen

$t_c(H)$ como el entero positivo más pequeño tal que para cualquier coloración de las flechas de cualquier torneo T con los vértices de H existe un conjunto $S \subseteq V(T)$ de a lo más $t_c(H)$ vértices con la propiedad de que existe una H -trayectoria desde cualquier vértice en $T - S$ hacia algún vértice de S .

Nótese que en particular el teorema de Sands, Sauer y Woodrow afirma que $t_c(H) = 1$ cuando $H \cong 2K_1$.

Linek y Sands establecen el problema aún abierto de encontrar las digráficas H tales que $t_c(H) = 1$.

En [26] Reid estudió este problema obteniendo algunos resultados particulares cuando $H \in \{C_3, C_4, C_5\}$.

En [1] Arpin y Linek consideraron otra extensión del concepto $t_c(H)$ descrito arriba, con objeto de obtener generalizaciones del resultado de Reid proponiendo las siguientes definiciones.

Definición 4.1.2. Sean D y H digráficas. D sin lazos H posiblemente con lazos. Diremos que D es una digráfica H -coloreada si las flechas de D están coloreadas con los vértices de H , es decir, los colores de las flechas de D son elementos de $V(H)$.

Definición 4.1.3. Sean H una digráfica y D una digráfica H -coloreada. Un camino dirigido $c = (z_0, z_1, \dots, z_k) \subseteq D$ es un **H -camino** si $(color(z_0, z_1), \dots, color(z_{k-1}, z_k))$ es un camino en H . Es decir, para cada $i \in \{0, \dots, k-2\}$, $(color(z_i, z_{i+1}), color(z_{i+1}, z_{i+2}))$ es una flecha de H para cada i desde 0 hasta $k-2$.

Definición 4.1.4. Sean H una digráfica y D una digráfica H -coloreada. Una trayectoria dirigida $c = (z_0, z_1, \dots, z_k) \subseteq D$ es una **H -trayectoria** si $(color(z_0, z_1), \dots, color(z_{k-1}, z_k))$ es una trayectoria en H . Es decir, para cada $i \in \{0, \dots, k-2\}$, $(color(z_i, z_{i+1}), color(z_{i+1}, z_{i+2}))$ es una flecha de H para cada i desde 0 hasta $k-2$.

Definición 4.1.5. Sean H una digráfica y D una digráfica H -coloreada. $I \subseteq V(D)$ es **H -independiente por trayectorias** si para cada $u, v \in I$ no existe una H -trayectoria entre ellos.

Definición 4.1.6. Sean H una digráfica y D una digráfica H -coloreada. $A \subseteq V(D)$ es **H -absorbente por trayectorias** si para cada $x \in V(D) - A$ existe $y \in A$ tal que existe una

H-trayectoria en D de x a y .

Definición 4.1.7. Sean H una digráfica y D una digráfica H -coloreada. Un conjunto $N \subseteq V(D)$ es un H -núcleo por trayectorias si es H -independiente por trayectorias y H -absorbente por trayectorias.

El resultado más reciente que se conoce hasta ahora sobre la existencia de H -núcleos por trayectorias en digráficas H -coloreadas es el siguiente:

Teorema 4.1.1. [21] Sean H una digráfica y D una digráfica H -coloreada. Si todo ciclo dirigido de $\mathcal{C}(D)$ tiene un número impar de flechas en H^C (el complemento de H), entonces D tiene un H -núcleo por trayectorias.

Desde que Arpin y Linek dieron estas definiciones, notaron que no necesariamente todo uv H -camino contiene una uv H -trayectoria y que no necesariamente la concatenación de dos H -caminos es un H -camino. Así que es pertinente considerar también los conceptos análogos a los definidos arriba para H -caminos y explorar los resultados conocidos. Ésto se hará en el siguiente capítulo.

Capítulo 5

H-núcleos por Caminos

En este capítulo se presentan los conceptos básicos de H -núcleos por caminos y algunos resultados que se han obtenido. Este capítulo es la parte fundamental de la tesis, ya que incluye resultados originales realizados en colaboración con mi asesor.

5.1. Definiciones y Primeros Resultados

En [1] Arpin y Linek consideraron la siguiente extensión del concepto de núcleo.

Definición 5.1.1. Sean H una digráfica y D una digráfica H -coloreada. $I \subseteq V(D)$ es H -independiente por caminos si para cada par de vértices distintos en I , no existen H -caminos entre ellos en D .

Definición 5.1.2. Sean H una digráfica y D una digráfica H -coloreada. $A \subseteq V(D)$ es H -absorbente por caminos si para cada $x \in V(D) - A$ existe $y \in A$ tal que hay un H -camino de x hacia y en D .

Definición 5.1.3. Sean H una digráfica y D una digráfica H -coloreada. C es un H -ciclo si es un ciclo dirigido y además es un H -camino.

Definición 5.1.4. Sean H una digráfica y D una digráfica H -coloreada. Se define $\mathcal{C}_H(D)$, la H -cerradura por caminos de D como sigue:

$V(\mathcal{C}_H(D)) = V(D)$, $(u, v) \in A(\mathcal{C}_H(D))$ si existe un uv H -camino en D .

Definición 5.1.5. Sean H una digráfica y D una digráfica H -coloreada. $N \subseteq V(D)$ es un H -núcleo por caminos si N es H -independiente por caminos y es H -absorbente por caminos.

En [1] el trabajo de Arpin y Linek consistió principalmente en el estudio de las siguientes tres familias de digráficas que se definen como sigue:

Definición 5.1.6. Denotaremos por β_1 a la clase de digráficas H tales que para cualquier torneo finito T y cualquier H -coloración de T , T tiene un H -núcleo por caminos.

Definición 5.1.7. Denotaremos por β_2 a la clase de digráficas H tales que para cualquier multidigráfica D y cualquier H -coloración de D , existe un conjunto $S \subseteq V(D)$ tal que S es independiente y H -absorbente por caminos.

Definición 5.1.8. Denotaremos por β_3 a la clase de digráficas H tales que para cualquier multidigráfica D y cualquier H -coloración de D , D tiene un H -núcleo por caminos.

Arpin y Linek observaron que $\beta_3 \subseteq \beta_2 \subseteq \beta_1$.

En el mismo artículo ellos plantearon el problema de caracterizar cada una de estas clases de digráficas. Ellos observaron interesantes propiedades de estas clases de digráficas y de hecho obtuvieron el siguiente teorema con el que dan una caracterización de β_2 .

Teorema 5.1.1. *Los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. H está en β_2 .
2. H^C (H complemento) no tiene ciclos dirigidos impares.
3. H es generado por un cuasiorden cuyo cociente de orden parcial es una suma lineal de anticadenas con 1 y 2 elementos.

En el mismo artículo Arpin y Linek caracterizaron las digráficas de orden 2 que pertenecen a β_3 , también caracterizaron a todas las digráficas de orden 3 que pertenecen a β_3 excepto por 2 digráficas que no sabían si pertenecían o no a β_3 .

Posteriormente H. Galeana-Sánchez y R. Strausz [22] probaron que tales 2 digráficas no pertenecen a β_3 y dieron una completa caracterización de la familia β_3 de la siguiente manera.

Definición 5.1.9. Diremos que una digráfica D es bicompleta si el conjunto de vértices de D admite una partición en dos conjuntos A, B tal que:

1. $D[A]$ es una digráfica completa con lazos.
2. $D[B]$ es una digráfica completa con lazos.
3. Para cada $a \in A$ y para cada $b \in B$ $(a, b) \in F(D)$.

4. Pueden existir algunas flechas de B hacia A .

Nótese que toda digráfica completa con lazos es bicompleta.

Definición 5.1.10. Sea D una digráfica cuyo conjunto de vértices admite una partición $P = \{W_1, \dots, W_n\}$ tal que:

1. $D[W_i]$ es una digráfica completa con lazos para cada $i \in \{1, \dots, n\}$.
2. Para cada $i \neq j$ existe una $W_i W_j$ -flecha si y sólo si para cada $z \in W_i$ y para cada $x \in W_j$, $(z, x) \in F(D)$.

Entonces definimos la **contracción** de D como la digráfica F definida como sigue:

1. $V(F) = \{W_1, \dots, W_n\}$.
2. $(W_i, W_j) \in F(F)$ si y sólo si en D existe alguna $W_i W_j$ -flecha.

En este caso diremos que F es una contracción de D o que D puede ser contraída a F .

Teorema 5.1.2. $H \in \beta_3$ si y sólo si se satisface alguna de las siguientes dos condiciones:

1. H es bicompleta.
2. H puede ser contraída a $2 K_1$.

5.2. Nuevos Resultados sobre H-Ciclos y H-Núcleos en Digráficas

Hasta ahora no se han explorado condiciones suficientes sobre la digráfica D y la digráfica H para que dada una H -coloración de D , la digráfica D tenga un H -núcleo por caminos. En este capítulo se hace un primer intento por obtener condiciones suficientes sobre la digráfica D y la H -coloración de D para que D tenga un H -núcleo por caminos.

Primero se demuestra que si D es una digráfica H -coloreada tal que todo ciclo dirigido es un H -ciclo, entonces la digráfica D tiene un H -núcleo por caminos. Después se exploran digráficas cuyas flechas se pueden partir en clases cada una de las cuales tiene la propiedad de que cada ciclo dirigido es un H -ciclo y se dan condiciones suficientes para que tenga un H -núcleo por caminos.

Lema 5.2.1. *Sea D una digráfica H -coloreada tal que todo ciclo dirigido en D es un H -ciclo, entonces todo ciclo dirigido en $\mathcal{C}_H(D)$ tiene una flecha simétrica.*

Demostración. Supongamos por contradicción, que no es así. Sea $\gamma = (v_0, v_1, v_2, \dots, v_{n-1}, v_0)$ un ciclo dirigido de longitud mínima en $\mathcal{C}_H(D)$ sin flechas simétricas. Cada flecha (v_i, v_{i+1}) en γ corresponde (por definición de H -cerradura) a un H -camino en D .

Sean \mathcal{C}_i y \mathcal{C}_{i+1} los H -caminos dirigidos de longitud mínima contenidos en los H -caminos dirigidos que corresponden a las flechas (v_i, v_{i+1}) y (v_{i+1}, v_{i+2}) en $\mathcal{C}_H(D)$, respectivamente. \square

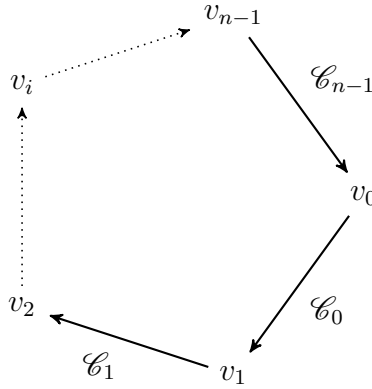


Figura 5.1: El H -ciclo γ y los H -caminos mínimos

Nota 5.2.2. $\forall i$ \mathcal{C}_i y \mathcal{C}_{i+1} no se intersectan

Demostración. Supongamos primero que \mathcal{C}_i y \mathcal{C}_{i+1} se intersectan. Sea v el primer vértice de \mathcal{C}_{i+1} que pertenece a \mathcal{C}_i . $(v = \mathcal{C}_{(i,j)}, \mathcal{C}_{(i,j+1)}, \mathcal{C}_{(i,\dots)}, v_{i+1}, \mathcal{C}_{(i+1,1)}, \mathcal{C}_{(i+1,\dots)}, \mathcal{C}_{(i+1,k)} = v)$ ¹ es un camino dirigido cerrado y por lo tanto contiene un ciclo dirigido γ_{i+1} que incluye a v_{i+1} . Dado que en D todo ciclo dirigido es un H -ciclo, γ_{i+1} es un H -ciclo.

Notemos ahora que en todo \mathcal{C}_i hay una única flecha que sale de v_i y una única flecha que llega a v_{i+1} . Supongamos por contradicción que hay otra, digamos $(v_i, \mathcal{C}_{(i,m)})$. Entonces $(v_i, \mathcal{C}_{(i,m)}, \mathcal{C}_{(i,m+1)}, \mathcal{C}_{(i,\dots)}, v_{i+1})$ es un H -camino dirigido más corto que \mathcal{C}_i . Ahora supongamos que hay otra flecha que llega a v_{i+1} , digamos $(\mathcal{C}_{(i,r)}, v_{i+1})$. Entonces $(v_i, \mathcal{C}_{(i,1)}, \mathcal{C}_{(i,\dots)}, \mathcal{C}_{(i,r)}, v_{i+1})$

¹En esta notación $\mathcal{C}_{(i,j)}$ representa al vértice j del camino i

es un H -camino dirigido más corto que \mathcal{C}_i .

Como γ_{i+i} incluye a v_{i+1} , y además está contenido en:

$$(v = \mathcal{C}_{(i,j)}, \mathcal{C}_{(i,j+1)}, \mathcal{C}_{(i,\dots)}, v_{i+1}, \mathcal{C}_{(i+1,1)}, \mathcal{C}_{(i+1,\dots)}, \mathcal{C}_{(i+1,k)} = v)$$

γ_{i+1} tiene la última flecha de \mathcal{C}_i y la primera flecha de \mathcal{C}_{i+1} . Además, por ser γ_{i+1} H -ciclo, ésto implica que $\mathcal{C}_i \cup \mathcal{C}_{i+1}$ es un H -camino.

Ahora como $\mathcal{C}_i \cup \mathcal{C}_{i+1}$ es un H -camino, entonces debe haber una (v_{i+2}, v_i) flecha en $\mathcal{C}_H(D)$, ya que en otro caso, por lo anterior, tendríamos que

$(v_0, v_1, \dots, v_i, v_{i+2}, v_{i+3}, \dots, v_{n-1})$ es un ciclo asimétrico de longitud menor en $\mathcal{C}_H(D)$.

Notemos que la v_{i+2}, v_i flecha corresponde a un H -camino dirigido en D . Llamemos \mathcal{C}'_{i+2} a uno de longitud mínima correspondiente a dicha flecha. Notemos que de \mathcal{C}'_{i+2} sale una única flecha (siguiendo el mismo argumento para \mathcal{C}_i que vimos anteriormente) de v_{i+2} .

Ahora, consideremos un camino dirigido de longitud mínima contenido en $\mathcal{C}_i \cup \mathcal{C}_{i+1}$ y llamémosle \mathcal{C}'_{i+1} . Nuevamente \mathcal{C}'_{i+1} tiene una única flecha que llega a v_{i+1} . Además es la misma flecha de \mathcal{C}_{i+1} , ya que habíamos visto anteriormente que a v_{i+1} llega una única flecha por \mathcal{C}_{i+1} .

Consideremos ahora el camino dirigido cerrado $\mathcal{C}'_{i+1} \cup \mathcal{C}'_{i+2}$. Dicho camino dirigido cerrado tiene un ciclo γ'_{i+1} que contiene a v_{i+1} . γ'_{i+1} es un H -ciclo que contiene a v_{i+1} y además está contenido en $\mathcal{C}'_{i+1} \cup \mathcal{C}'_{i+2}$. Como únicamente entra y sale una flecha de v_{i+1} (la última de \mathcal{C}'_{i+1} y la primera de \mathcal{C}'_{i+2} , ambas están en γ'_{i+1} . Recordemos además que la última flecha de \mathcal{C}'_{i+1} es la misma que la última flecha de \mathcal{C}_{i+1} . Ésto implica que $\mathcal{C}_{i+1} \cup \mathcal{C}'_{i+2}$ es un H -camino dirigido. Ésto implica que la flecha $(v_{i+1}, v_0) \in \gamma$ contradiciendo que no tiene flechas simétricas. \square

Nota 5.2.3. $\forall i \neq j$ \mathcal{C}_i no interseca a \mathcal{C}_j

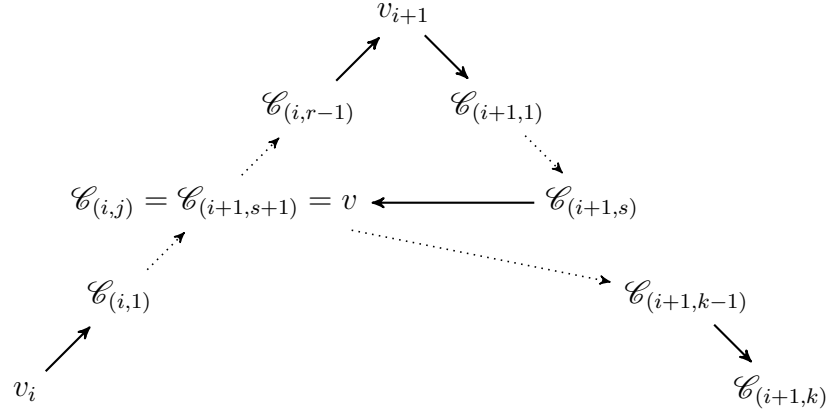


Figura 5.2: Los H -caminos \mathcal{C}_i y \mathcal{C}_{i+1} , y el camino cerrado que forman que incluye a v_{i+1}

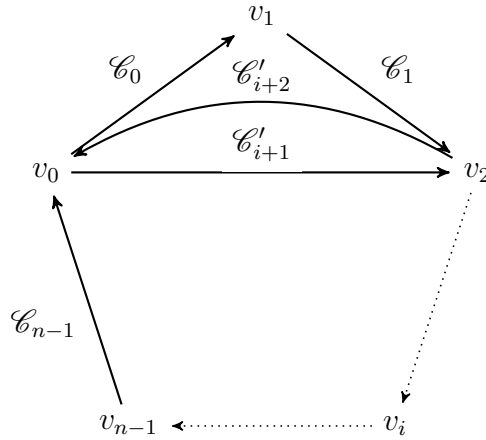


Figura 5.3: El H -ciclo γ y los H -caminos que encontramos con los ciclos

Demostración. Supongamos por contradicción que $\exists i \neq j$ tal que \mathcal{C}_i intersecta a \mathcal{C}_j . Definimos $\mathcal{E} = \{\mathcal{C}_i \mid \exists j, \mathcal{C}_i \cap \mathcal{C}_j \neq \emptyset\}$. $\mathcal{E} \neq \emptyset$ por hipótesis.

Para cada $\mathcal{C}_i \in \mathcal{E}$ definimos $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{N}$. $f(\mathcal{C}_i) = \min\{j \mid \mathcal{C}_i \cap \mathcal{C}_{i+j} \neq \emptyset\}$. Por la afirmación anterior podemos asegurar que $f \geq 2$.

Ahora consideremos un \mathcal{C}_i donde f alcanza su valor mínimo. Sea $k = f(\mathcal{C}_i)$.

Consideremos el conjunto de vértices $\mathcal{W} = \{v_i, v_{i+1}, \dots, v_{i+k}\}$ y sus respectivos H -caminos mínimos $\mathcal{W} = \{\mathcal{C}_i, \mathcal{C}_{i+1}, \dots, \mathcal{C}_{i+k}\}$.

Notemos que los únicos H -caminos que se intersectan en \mathcal{W} son \mathcal{C}_i y \mathcal{C}_{i+k} , ya que si

hubieran otros, ésto sería contradictorio con respecto al hecho que k es el mínimo de f .

Consideremos $v \in \mathcal{C}_{i+k} \cap \mathcal{C}_i$. Supongamos que $v = \mathcal{C}_{(i+k,j)} = \mathcal{C}_{(i,r)}$. Entonces $\mathcal{C}'_{i+k} = (\mathcal{C}_{(i,r)}, \mathcal{C}_{(i,r+1)}, \mathcal{C}_{(i,\dots)} \cup \mathcal{C}_{i+1} \cup \dots \cup \mathcal{C}_{(i+k,0)} \mathcal{C}_{(i+k,\dots)}, \mathcal{C}_{(i+k,j)})$ es un camino dirigido cerrado. \mathcal{C}'_{i+k} contiene un ciclo dirigido γ_{i+1} que incluye al vértice v_{i+1} . γ_{i+1} es H -coloreado, además incluye al vértice $v_{i+1} \in \mathcal{C}_{i+1}$, por lo que no intersecta a \mathcal{C}_{i+k} en ese punto. Por lo tanto γ_{i+1} incluye a la última flecha de \mathcal{C}_i y la primera de \mathcal{C}_{i+1} . Por lo tanto $\mathcal{C}_i \cup \mathcal{C}_{i+1}$ es un camino dirigido H -coloreado. Nos referimos a lo anterior para ver que por lo tanto $(v_0, \dots, v_i, v_{i+2}, \dots, v_{i+k}, \dots, v_{n-1})$ forma un ciclo asimétrico de longitud menor en $\mathcal{C}_H(D)$. \square

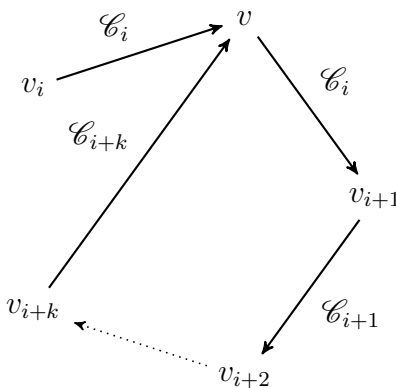


Figura 5.4: \mathcal{C}_i y \mathcal{C}_{i+k} al intersectarse forman un camino cerrado que incluye a v_{i+1}

Nota 5.2.4. Si $\forall i \neq j \mathcal{C}_i \cap \mathcal{C}_j = \emptyset$ entonces $\mathcal{C}_0 \cup \mathcal{C}_2 \cup \dots \cup \mathcal{C}_{n-1} \cup \mathcal{C}_0$ es un H -camino dirigido.

Demostración. Consideremos $\mathcal{C} = \mathcal{C}_0 \cup \mathcal{C}_2 \cup \dots \cup \mathcal{C}_{n-1} \cup \mathcal{C}_0$. consideremos $v_i \in \mathcal{C}$. Como \mathcal{C} es un camino cerrado, existe un ciclo γ_i que incluye a v_i . Además como los H -caminos dirigidos mínimos no se intersectan entre sí, γ_i incluye la última flecha de \mathcal{C}_{i-1} y la primera de \mathcal{C}_i . Por lo tanto $\mathcal{C}_{i-1} \cup \mathcal{C}_i$ es un H -camino dirigido. Inductivamente $\mathcal{C}_0 \cup \mathcal{C}_2 \cup \dots \cup \mathcal{C}_{n-1} \cup \mathcal{C}_0$ es un H -camino dirigido (repetiendo la demostración en cada vértice).

En particular tenemos un v_0, v_{n-1} H -camino, lo que nos induce una v_0, v_{n-1} flecha en $\mathcal{C}_H(D)$. Contradiciendo que $(v_0, \dots, v_{n-1}, v_0)$ es asimétrico. \square

Teorema 5.2.5. *Si D es una digráfica H -coloreada tal que todo ciclo dirigido es un H -ciclo, entonces D tiene un H -núcleo por caminos.*

Demostración. Consideremos $\mathcal{C}_H(D)$ la H -cerradura de D . Notemos que dado que $\mathcal{C}_H(D)$ tiene núcleo si y sólo si D tiene H -núcleo, basta demostrar que $\mathcal{C}_H(D)$ tiene núcleo. Ahora el teorema de Berge-Duchet (**teorema 2.3.7**) afirma que si D es una digráfica tal que todo ciclo dirigido tiene al menos una flecha simétrica, entonces D tiene núcleo. Por el lema anterior tenemos que todo ciclo de $\mathcal{C}_H(D)$ tiene una flecha simétrica, y por lo tanto núcleo. \square

Definición 5.2.1. *Sea D una digráfica H -coloreada.*

$\{F_1, F_2\}$ una partición de $A(D)$.

$S \subseteq V(D)$ es un H -seminúcleo módulo F_1 (respectivamente F_2) si

- S es H -independiente (para cualquier $u, v \in S$, $u \neq v$ no existe uv - H -camino entre ellos).
- Para cada $z \in V(D) \setminus S$ tal que existe Sz - H -camino contenido en $F_2 = D \setminus F_1$ existe un zS - H -camino.

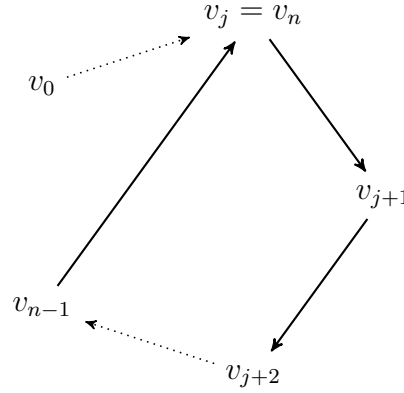
Teorema 5.2.6. *Sea D una digráfica H -coloreada y $\{F_1, F_2\}$ una partición de $A(D)$. $D_1 = D \setminus F_2$, $D_2 = D \setminus F_1$. Si todo ciclo contenido en D_2 es un H -ciclo, entonces D tiene un H -seminúcleo módulo F_1 no vacío con un único elemento.*

Demostración. Supongamos por contradicción que D no tiene H -seminúcleo módulo F_1 no vacío. Sea $v_0 \in V(D)$, como D no tiene H -seminúcleo módulo F_1 no vacío, entonces existe $v_1 \in V(D)$ tal que existe un v_0v_1 H -camino dirigido contenido en F_2 , pero tal que no existe un v_1v_0 H -camino dirigido. Inductivamente podemos considerar $v_2, \dots, v_i, \dots, v_{n-1}$, donde $v_n = v_j$ es el primer vértice en repetirse (se deben de repetir dado que $V(D)$ es finito).

Notemos también que $(v_j, v_{j+1}, \dots, v_n)$ es un ciclo asimétrico en $\mathcal{C}_H(D_2)$, y en D_2 todo ciclo dirigido es un H -ciclo, lo que contradice el Lema 5.1.1. \square

Definimos un conjunto $\mathcal{S} = \{S \subseteq V(D) \mid S \text{ es seminúcleo mód } F_1 \text{ no vacío}\}$. Si $\mathcal{S} \neq \emptyset$, definimos $D_{\mathcal{S}}$ como sigue:

- $V(D_{\mathcal{S}}) = \mathcal{S}$.


 Figura 5.5: El ciclo asimétrico en $\mathcal{C}_H(D_2)$

- $(S_1, S_2) \in F(D_{\mathcal{J}})$ si y sólo si para cada $s_1 \in S_1$ existe $s_2 \in S_2$ tal que $s_1 = s_2$ ó existe $s_1 s_2$ H -camino en D_1 y no hay $s_2 S_1$ H -camino en D .

Lema 5.2.7. $D_{\mathcal{J}}$ es acíclica

Demostración. Supongamos por contradicción que $D_{\mathcal{J}}$ tiene un ciclo $\gamma = (S_0, S_1, \dots, S_{n-1}, S_0)$.

Afirmación 5.2.1. Existe $i_0 \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ tal que para algún $z \in S_{i_0}$, $z \notin S_{i_0+1}$.

Demostración. Supongamos por contradicción que no, entonces para todo $i \in \{0, \dots, n-1\}$ y todo $z \in S_i$, tenemos que $z \in S_{i+1} \Rightarrow S_0 \subseteq S_1 \subseteq \dots \subseteq S_{n-1} \subseteq S_0 \Rightarrow S_0 = S_1 = \dots = S_{n-1}$. De esta forma resulta que $\gamma = (S_0)$ contradiciendo que es un ciclo. \square

Afirmación 5.2.2. Si existe $i_0 \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ tal que para algún $z \in S_{i_0}$ y algún $w \in S_{i_0+1}$ existe un zw H -camino, entonces existe $j_0 \neq i_0, j_0 \in \{1, \dots, n-1\}$ tal que $w \in S_{j_0}$ y $w \notin S_{j_0+1}$.

Demostración. Supongamos sin pérdida de generalidad que $i_0 = 0$. Primero observemos que $w \notin S_0$ pues existe zw - H -camino y $z \in S_0$, contradiciendo que S_0 es H -independiente. Como $w \in S_1$, sea $j_0 = \max\{i \in \{0, \dots, n-1\} | w \in S_i\}$. $w \in S_{j_0}$ $w \notin S_{j_0+1}$ \square

Se sigue de lo anterior que existe $i_0 \in \{0, \dots, n-1\}$ y $t_0 \in S_{i_0}$ tal que $t_0 \notin S_{i_0+1}$. Se sigue del hecho de que $(S_{i_0}, S_{i_0+1}) \in F(D_1)$ que existe $t_1 \in S_{i_0+1}$ tal que existe $t_0 t_1$ H -camino contenido en D_1 y no hay $t_1 S_0$ - H -camino en D . También de lo anterior se sigue que existe $i_1 \in \{0, \dots, n-1\}$ tal que $t_1 \in S_{i_1}$ y $t_1 \notin S_{i_1+1}$. Ya que $(S_{i_1}, S_{i_1+1}) \in F(D_{\mathcal{J}})$. Se sigue que existe $t_2 \in S_{i_1+1}$ tal que existe $t_1 t_2$ - H -camino contenido en D_1 y no existe $t_2 S_1$ - H -camino contenido en D . Inductivamente de la misma forma, y ya que D es finito podemos obtener una sucesión de vértices $(t_0, t_1, \dots, t_{m-1})$ tal que existe $t_i t_{i+1}$ - H -camino contenido en D_1 y no

existe $t_{i+1}t_i$ camino contenido en D para cada $i \in \{0, \dots, m-1\}$. Contradiciendo el **Lema 5.2.1** que habíamos probado anteriormente en el capítulo. Por lo tanto $D_{\mathcal{J}}$ es acíclica. \square

Definición 5.2.2. Diremos que una sucesión de vértices de D , (u, v, w) es un H - C_3 arcoiris si:

$\exists uv$ - H -camino \mathcal{C}_1 , $\exists vw$ - H -camino \mathcal{C}_2 y $\exists wu$ - H -camino \mathcal{C}_3 tal que:
 (color (flecha final de \mathcal{C}_1), color (flecha inicial de \mathcal{C}_2)) $\notin F(H)$.
 (color (flecha final de \mathcal{C}_2), color (flecha inicial de \mathcal{C}_3)) $\notin F(H)$.

Definición 5.2.3. Diremos que una sucesión de vértices de D , (u, v, w, y) es un H - P_3 arcoiris si:

$\exists uv$ - H -camino \mathcal{C}_1 , $\exists vw$ - H -camino \mathcal{C}_2 y $\exists wy$ - H -camino \mathcal{C}_3 tal que:
 (color (flecha final de \mathcal{C}_1), color (flecha inicial de \mathcal{C}_2)) $\notin F(H)$.
 (color (flecha final de \mathcal{C}_2), color (flecha inicial de \mathcal{C}_3)) $\notin F(H)$.

Definición 5.2.4. Dada una partición de las flechas de D , $\mathcal{F} = \{F_1, \dots, F_n\}$. Diremos que una sucesión de vértices de D , (u, v, w) es un H - C_3 fuertemente arcoiris si:

$\exists uv$ - H -camino \mathcal{C}_1 , $\exists vw$ - H -camino \mathcal{C}_2 y $\exists wu$ - H -camino \mathcal{C}_3 tal que:
 (color (flecha final de \mathcal{C}_1), color (flecha inicial de \mathcal{C}_2)) $\notin F(H)$.
 (color (flecha final de \mathcal{C}_2), color (flecha inicial de \mathcal{C}_3)) $\notin F(H)$.
 Además $\mathcal{C}_1 \subseteq D[F_i]$ y $\mathcal{C}_3 \subseteq D[F_j]$, $i \neq j$.

Definición 5.2.5. Dada una partición de las flechas de D , $\mathcal{F} = \{F_1, \dots, F_n\}$. Diremos que una sucesión de vértices de D , (u, v, w, y) es un H - P_3 fuertemente arcoiris si:

$\exists uv$ - H -camino \mathcal{C}_1 , $\exists vw$ - H -camino \mathcal{C}_2 y $\exists wy$ - H -camino \mathcal{C}_3 tal que:
 (color (flecha final de \mathcal{C}_1), color (flecha inicial de \mathcal{C}_2)) $\notin F(H)$.
 (color (flecha final de \mathcal{C}_2), color (flecha inicial de \mathcal{C}_3)) $\notin F(H)$.
 Además $\mathcal{C}_1 \subseteq D[F_i]$ y $\mathcal{C}_3 \subseteq D[F_j]$ $i \neq j$.

Teorema 5.2.8. Sea D una digráfica H -coloreada. Supongamos que existe una partición de $F(D)$ en dos conjuntos F_1 y F_2 tal que todo ciclo contenido en $D_i = D[F_i]$ $i = 1, 2$ es un H -ciclo. Supongamos también que D no tiene H - C_3 fuertemente arcoiris ni H - P_3 fuertemente arcoiris. Si todo H -camino de D está contenido en D_1 o está contenido en D_2 , entonces D tiene un H -núcleo.

Demostración. La idea principal de la demostración de este teorema es seleccionar $S \in V(D_{\mathcal{J}})$ tal que $\delta_{D_{\mathcal{J}}}^+(S) = 0$ (tal S existe ya que $D_{\mathcal{J}}$ es acíclica) y probaremos que S es un

H -núcleo de D .

Por el **teorema 5.2.6**, $\mathcal{S} \neq \emptyset$, así que podemos considerar la digráfica $D_{\mathcal{S}}$. La cual por el **Lema 5.2.7**, es acíclica. Así que existe $S \in V(D_{\mathcal{S}})$ tal que $\delta_{D_{\mathcal{S}}}^+(S) = 0$.

Probaremos que S es un H -núcleo de D .

Supongamos por contradicción que S no es un H -núcleo de D . Ya que $S \in V(D_{\mathcal{S}})$ tenemos que S es H -independiente.

Sea $X = \{z \in v(D) \mid \text{no existe } zS \text{ } H\text{-camino en } D\}$.

Se sigue de nuestra suposición que $X \neq \emptyset$. Ya que $D[X]$ es una subdigráfica inducida de D , tenemos que $D[X]$ satisface las hipótesis del **teorema 5.2.6**. Así, existe un vértice $x_0 \in X$ tal que $\{x_0\}$ es un H -seminúcleo módulo D_1 de $D[X]$.

Sea $T = \{z \in S \mid \text{no existe } zx_0 \text{ } H\text{-camino contenido en } D_1\}$.

De la definición de T , tenemos que para todo $z \in (S \setminus T)$ existe un zx_0 - H -camino contenido en D_1 .

Afirmación 5.2.3. $T \cup \{x_0\}$ es H -independiente por caminos.

Demostración. Ya que $T \subseteq S$ y $S \in \mathcal{S}$ se sigue que T es H -independiente por caminos. Claramente $\{x_0\}$ es H -independiente por caminos. Ahora como $x_0 \in X$ no existen x_0S H -caminos y por lo tanto no existen x_0T H -caminos. Como $S \in \mathcal{S}$ y $x_0 \in X$ no existen H -caminos de T a x_0 contenidos en D_2 (pues S es H -seminúcleo mód D_1) y por definición de T no existen Tx_0 H -caminos contenidos en D_1 . \square

Afirmación 5.2.4. $\forall z \in V(D) \setminus (T \cup \{x_0\})$, si existe un $(T \cup \{x_0\})z$ - H camino contenido en D_2 , entonces existe un $z(T \cup \{x_0\})$ - H camino contenido en D .

Demostración.

Caso 1: Existe un Tz H -camino contenido en D_2 .

Ya que $T \subseteq S$ y $S \in \mathcal{S}$, se sigue que existe un zS H -camino contenido en D . Nosotros podemos suponer que existe un $z(S \setminus T)$ H -camino contenido en D , ya que en otro caso ya terminamos. Sea α_1 un uz H -camino contenido en D_2 con $u \in T$, y sea α_2 un zw H -camino

con $w \in (S \setminus T) \subseteq D$. Ya que $w \in (S \setminus T)$ se sigue de la definición de T que existe α_3 un wx_0 H -camino contenido en D_1 .

Más aún, ($color(\text{flecha final de } \alpha_1)$, $color(\text{flecha inicial de } \alpha_2)$) no está en las flechas de H ya que de otro modo $\alpha_1 \cup \alpha_2$ sería un H -camino en D con $\{u, w\} \subseteq S$ contradiciendo que S es H -independiente por caminos. Además podemos suponer que ($color(\text{flecha final de } \alpha_2)$, $color(\text{flecha inicial de } \alpha_3)$) no está en las flechas de H , ya que en otro caso tendríamos que $\alpha_2 \cup \alpha_3$ es un zx_0 H -camino en D y la afirmación estaría probada. Más aún $\alpha_1 \subseteq D_2$ y $\alpha_3 \subseteq D_1$. Así que obtenemos que la sucesión (u, z, w, x_0) es un H - P_3 fuertemente arcoiris, lo cual es una contradicción.

Caso 2: Existe un x_0z H -camino contenido en D_2 .

Sea α_1 un x_0z H -camino $\subseteq D_2$. Podemos suponer que $z \notin X$ pues si $z \in X$, por la elección de x_0 sabemos que existe un zx_0 H -camino contenido en D y ya habríamos terminado.

Se sigue de la definición de X que existe algún zS H camino contenido en D . Sea α_2 tal H -camino y digamos que α_2 termina en w . Nosotros podemos suponer que $w \in (S \setminus T)$ ya que de otro modo ya terminamos. Como $w \in (S \setminus T)$, por la definición de T , tenemos que existe un wx_0 H -camino contenido en D_1 . Sea α_3 tal H -camino. De nuevo tenemos que: ($color(\text{flecha final de } \alpha_1)$, $color(\text{flecha inicial de } \alpha_2)$) no está en las flechas de H ya que de otro modo $\alpha_1 \cup \alpha_2$ sería un x_0w H -camino con $w \in S$, contradiciendo que $x_0 \in X$. Además podemos suponer que ($color(\text{flecha final de } \alpha_2)$, $color(\text{flecha inicial de } \alpha_3)$) no está en las flechas de H ya que de otro modo $\alpha_2 \cup \alpha_3$ es un zx_0 H -camino y la afirmación estaría demostrada. Más aún, $\alpha_1 \subseteq D_2$ y $\alpha_3 \subseteq D_1$.

Entonces (x_0, z, w, x_0) es un H - C_3 fuertemente arcoiris, lo cual es una contradicción.

Nosotros concluimos de las dos afirmaciones anteriores que $(T \cup \{x_0\}) \in \mathcal{S}$ y por lo tanto $(T \cup \{x_0\}) \in V(D_{\mathcal{S}})$. También tenemos que $(S, (T \cup \{x_0\})) \in F(D_{\mathcal{S}})$ ya que $T \subseteq (T \cup \{x_0\})$, y para cada $s \in (S \setminus T)$ existe un sx_0 H -camino contenido en D_1 y no existe x_0S H -camino contenido en D .

Pero ésto contradice el hecho de que $\delta_{D_{\mathcal{S}}}^+(S) = 0$. Por lo tanto S es un H -núcleo de D y el teorema está demostrado. \square

□

Nota 5.2.9. Nótese que mientras que en el **teorema 5.2.5** se pide que todo ciclo sea un H -ciclo, en el **teorema 5.2.8** permitimos que existan ciclos que no son H -ciclos ya que sólo estamos pidiendo que los ciclos contenidos en cada D_i con $i \in \{1, 2\}$ sea un H -ciclo

Definición 5.2.6. Dada una partición de $F(D)$ $\mathcal{F} = \{F_1, \dots, F_n\}$, definimos $\mathcal{C}(F)$ como sigue :

$$V(\mathcal{C}(\mathcal{F})) = \mathcal{F}$$

$(F_i, F_j) \in F(\mathcal{C}(\mathcal{F}))$ si y sólo si $\exists(x, y), (y, z) \in F(D)$ tales que $(x, y) \in F_i, (y, z) \in F_j$

Teorema 5.2.10. Sea D una digráfica H -coloreada $\mathcal{F} = \{F_1, \dots, F_n\}$ una partición de $F(D)$ tal que:

1. En $D[F_i]$ todo ciclo es un H -ciclo para $i \in \{1, \dots, n\}$.
2. D no tiene $H-C_3$ ni $H-P_3$ fuertemente arcoiris.
3. Todo H -camino está contenido en $D[F_i]$ para algún $i \in \{1, \dots, n\}$
4. $\mathcal{C}(\mathcal{F})$ es bipartita.

entonces D tiene H -núcleo.

Demostración.

Sea $P = \{U, W\}$ la partición de $V(\mathcal{C}(\mathcal{F}))$ que hace que $\mathcal{C}(F)$ sea bipartita.

Consideremos

$$\bar{F}_1 = \bigcup_{F_i \in U} F_i \quad \bar{F}_2 = \bigcup_{F_j \in W} F_j$$

Notemos que por la definición de $\mathcal{C}(\mathcal{F})$, y ya que U y W son cada uno de ellos independientes, tenemos que:

- Todo ciclo en $D[\bar{F}_i]$ es un H -ciclo $i = 1, 2$.
- D no tiene $H-C_3$ ni $H-P_3$ fuertemente arcoiris por hipótesis.
- Todo H -camino está contenido en $D[\bar{F}_1]$ ó en $D[\bar{F}_2]$

Notemos que se cumplen todas las hipótesis del **teorema 5.2.8** y por lo tanto D tiene H -núcleo.

□

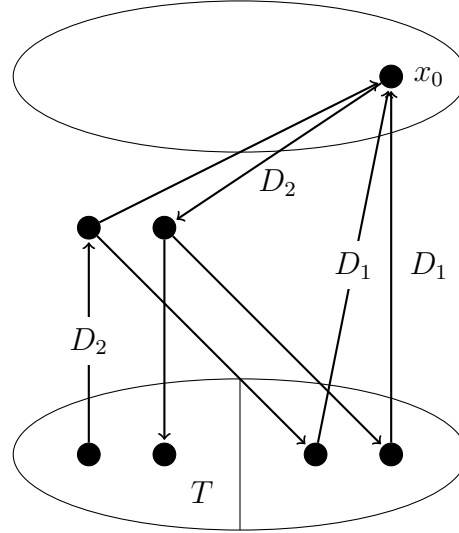


Figura 5.6: $T \cup \{x_0\}$ es un seminúcleo mód D_1

El siguiente teorema es uno de los resultado principal de esta tesis, y es una generalización parcial del *teorema de Richardson*.

Teorema 5.2.11. Sean D y H digráficas. D una digráfica H -coloreada y $\mathcal{F} = \{F_1, \dots, F_n\}$ una partición de $F(D)$ tal que se cumplen las siguientes condiciones:

- Todo ciclo dirigido contenido en $D_i = D[F_i]$ es un H -ciclo.
- Todo H -camino está contenido en D_i para alguna i , $1 \leq i \leq n$
- D no tiene H - C_3 ni H - P_3 fuertemente arcoiris.

Si $\mathcal{C}(\mathcal{F})$ no tiene ciclos dirigidos de longitud impar al menos 3 y además es fuertemente conexas, entonces D tiene H -núcleo por caminos.

Demostración.

Ya que $\mathcal{C}(\mathcal{F})$ es fuertemente conexas y no tiene ciclos dirigidos de longitud impar al menos 3, se sigue del **teorema 1.4.6** que $\mathcal{C}(\mathcal{F})$ es bipartita. Así que se sigue del **teorema 5.2.10** que D tiene un H -núcleo.

□

El siguiente teorema es otro de los resultados principales, generaliza al **teorema 3.2.17** que a su vez es una generalización del **teorema de Sands, Sauer y Woodrow**.

Teorema 5.2.12. *Sean D y H digráficas. Si D es una digráfica H coloreada sin H - C_3 arcoiris ni H - P_3 arcoiris, entonces tiene H -núcleo por caminos.*

Demostración. Se mostrará que en $\mathcal{C}_H(D)$ (la H -cerradura por caminos de D) todo ciclo tiene una flecha simétrica. Supóngase por contradicción que en $\mathcal{C}_H(D)$ existe un ciclo dirigido sin flechas simétricas. Considérese $C = (v_0, v_1, \dots, v_n, v_0)$ un ciclo de longitud mínima en $\mathcal{C}_H(D)$ sin flechas simétricas.

Caso 1: $longitud(C) = 3$

Si $longitud(C) = 3$, $C = (v_0, v_1, v_2, v_0)$. Considérense \mathcal{C}_0 un v_0v_1 H -camino, \mathcal{C}_2 un v_1v_2 H -camino y \mathcal{C}_1 un v_2v_0 H -camino. $\mathcal{C}_0 \cup \mathcal{C}_1$ es un H -camino ó $\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$ es un H -camino, ya que en otro caso C sería un H - C_3 arcoiris. Si $\mathcal{C}_0 \cup \mathcal{C}_1$ es un H -camino, entonces $(v_0, v_2) \in A(\mathcal{C}_H(D))$, por otra parte si $\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$ es un H -camino, entonces $(v_1, v_0) \in F(\mathcal{C}_H(D))$. Ambas contradicen que C no tiene flechas simétricas.

Caso 2: $longitud(C) = 4$

En este caso $C = (v_0, v_1, v_2, v_3, v_0)$. Considérense \mathcal{C}_0 un v_0v_1 H -camino, \mathcal{C}_1 un v_1v_2 un H -camino, \mathcal{C}_2 un v_2v_3 un H -camino y \mathcal{C}_3 un v_3v_0 un H -camino. Nótese que si $\mathcal{C}_i \cup \mathcal{C}_{i+1 \pmod 4}$ es un H -camino para toda $i \in \{0, \dots, 3\}$, entonces $\mathcal{C}_0 \cup \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 \mathcal{C}_3$ es un H -camino. Ésto implica que $(v_0, v_3) \in A(\mathcal{C}_H(D))$ contradiciendo que C no tiene flechas simétricas. Por lo tanto se puede suponer sin pérdida de generalidad que $\mathcal{C}_0 \cup \mathcal{C}_1$ no es un H -camino.

Nótese que $\mathcal{C}_3 \cup \mathcal{C}_0$ es un H -camino, ya que en otro caso (v_3, v_0, v_1, v_2) forma un H - P_3 arcoiris. También $\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$ es un H -camino, ya que en otro caso (v_0, v_1, v_2, v_3) forma un H - P_3 arcoiris.

Si $\mathcal{C}_2 \cup \mathcal{C}_3$ no es un H -camino, entonces nótese que (v_0, v_1, v_3) es un H - C_3 arcoiris.

Supóngase entonces que $\mathcal{C}_2 \cup \mathcal{C}_3$ es un H -camino. Ésto implica que $(v_2, v_0) \in A(\mathcal{C}_H(D))$. Nótese también que también $(v_0, v_2) \in A(\mathcal{C}_H(D))$, ya que en otro caso, (v_0, v_1, v_2, v_0) sería un ciclo asimétrico de longitud menor en $\mathcal{C}_H(D)$. Llámese \mathcal{C}'_0 a un v_0v_2 H -camino y \mathcal{C}'_2 a un

v_2v_0 H -camino.

Nótese que $\mathcal{C}'_2 \cup \mathcal{C}_0$ no es un H -camino, ya que en otro caso $(v_2, v_1) \in A(\mathcal{C}_H(D))$ contradiciendo que C es asimétrico. Tampoco $\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}'_2$ ya que en otro caso $(v_1, v_0) \in A(\mathcal{C}_H(D))$ contradiciendo que C es asimétrico. De esto se sigue que (v_0, v_1, v_2, v_0) es un H - C_3 arcoiris.

Caso 3: $longitud(C) \geq 5$

Supóngase que $C = (v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, \dots, v_n, v_0)$. Considérense \mathcal{C}_i $v_i v_{i+1 \pmod n}$ H -caminos. Nótese que si $\mathcal{C}_i \cup \mathcal{C}_{i+1 \pmod n}$ es un H -camino para toda $i \in \{0, \dots, n\}$, entonces $\mathcal{C}_0 \cup \mathcal{C}_1 \cup \dots \cup \mathcal{C}_n$ es un H -camino. Ésto implica que $(v_0, v_n) \in A(\mathcal{C}_H(D))$ contradiciendo que C es asimétrico. Supongáse sin pérdida de generalidad que $\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$ no es un H -camino. $\mathcal{C}_0 \cup \mathcal{C}_1$ es un H -camino, ya que en otro caso (v_0, v_1, v_2, v_3) es un H - P_3 arcoiris. De la misma forma $\mathcal{C}_2 \cup \mathcal{C}_3$ es un H -camino, ya que en otro caso (v_1, v_2, v_3, v_4) es un H - P_3 arcoiris. De lo anterior se tiene que $(v_0, v_2) \in A(\mathcal{C}_H(D))$ y $(v_2, v_4) \in A(\mathcal{C}_H(D))$. Ésto implica que también $(v_2, v_0) \in A(\mathcal{C}_H(D))$, ya que en otro caso $(v_0, v_2, v_3, v_4, \dots, v_n, v_0)$ sería un ciclo asimétrico de longitud menor a C . Análogamente $(v_4, v_2) \in A(\mathcal{C}_H(D))$. Llámese \mathcal{C}'_2 a un v_2v_0 H -camino y \mathcal{C}'_4 a un v_4v_2 H -camino.

Nótese $\mathcal{C}'_2 \cup \mathcal{C}_0$ no es un H -camino, ya que en otro caso $(v_2, v_1) \in A(\mathcal{C}_H(D))$ contradiciendo que C es un ciclo asimétrico. De la misma forma se tiene que $\mathcal{C}_3 \cup \mathcal{C}'_4$, ya que en otro caso $(v_3, v_2) \in A(\mathcal{C}_H(D))$ contradiciendo que C es un ciclo asimétrico.

Caso 1: $\mathcal{C}'_4 \cup \mathcal{C}'_2$ es un H -camino

En este caso (v_0, v_2, v_4, v_0) es un H - C_3 arcoiris.

Caso 1: $\mathcal{C}'_4 \cup \mathcal{C}'_2$ no es un H -camino

En este caso (v_4, v_2, v_0, v_1) es un H - P_3 arcoiris.

□

El **teorema 5.2.5** es una generalización del **teorema 3.2.16**, el cual como se observó es a su vez una generalización del *teorema de Sands, Sauer y Woodrow*, del mismo modo el **teorema 5.2.6** es una generalización del **teorema 3.2.17**. Ya que en el caso particular en que

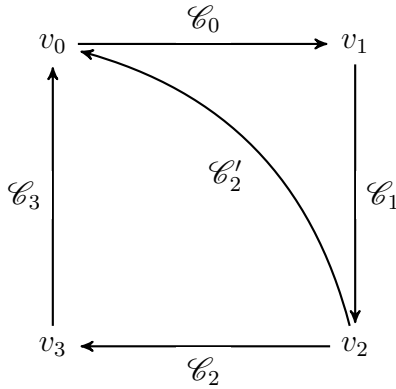


Figura 5.7: Caso cuando el ciclo es de longitud 4

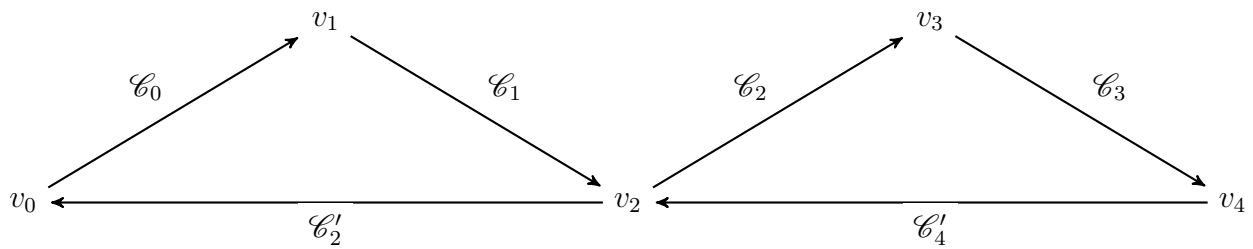


Figura 5.8: Caso cuando el ciclo es de longitud ≥ 5

la digráfica H consiste de m -colores y sólo los lazos, obtenemos el caso monocromático.

Bibliografía

- [1] P. Arpin, V. Linek. *Reachability Problems in Edge-Colored Digraphs*. Discrete Mathematics, 307 (2007) 2276-2289.
- [2] J. Bang-Jensen, G. Gutin. *Digraphs: Theory, Algorithms and Applications*. Springer-Verlag, London, 2000.
- [3] C. Berge. *Graphs*. North-Holland Mathematical Library, The Netherlands, 1989.
- [4] J.A. Bondy, U.S.R. Murty. *Graph Theory*. Springer, Berlin, 2008.
- [5] V. Chvátal. *On the Computational Complexity of Finding a Kernel*. Report CRM300, Centre de Recherches Mathématiques, Université de Montréal, 1973.
- [6] P. Duchet. *Graphes Noyau-Parfaits*. Ann. Discrete Math. 9 (1980) 93-101.
- [7] B. Effantin, H. Kheddouci. *Grundy Number of Graphs*. Discuss Math. Graph Theory 27 (2007) 5-18.
- [8] A.S. Fraenkel. *Planar Kernel and Grundy with $d \leq 3$, $d_{out} \leq 2$, $d_{in} \leq 2$, are NP Complete*. Discrete Appl. Math. 3 (1981) 257-262.
- [9] H. Galeana-Sánchez, V. Neumann-Lara. *On Kernels and Semikernels of Digraphs*. Discrete Math. 48 (1984) 67-76.
- [10] H. Galeana-Sánchez. *On Monochromatic Paths and Monochromatic Cycles in Edge Coloured Tournaments*. Discrete Math. 156 (1996) 103-112.
- [11] H. Galeana-Sánchez. *Kernels in Edge Coloured Digraphs*. Discrete Math. 184 (1998) 87-99.
- [12] H. Galeana-Sánchez. *Kernels by Monochromatic Paths and the Color-Class Digraph*. Discuss Math. Graph Theory 31, 273-281 (2011).

- [13] H. Galeana-Sánchez, G. Gaytán-Gómez, R. Rojas-Monroy. *Monochromatic Cycles and Monochromatic Paths in Arc-Coloured Digraphs*. Discuss Math. Graph Theory 31, 283-292 (2011).
- [14] H. Galeana-Sánchez, L. Pastrana. *Kernels in Edge Coloured Line Digraph*. Discussiones Mathematicae Graph Theory. 1998. Vol. 18, no. 1, 91-98.
- [15] H. Galeana-Sánchez, E. O'Reilly-Regueiro. *Tournaments with kernels by monochromatic paths*. Contributions to Discrete Mathematics. Vol.7 (2012), no. 2, 18-29.
- [16] H. Galeana-Sánchez, E. O'Reilly-Regueiro. *Monochromatic absorbency and independence in 3-quasitransitive digraphs*. AKCE Int. J. Graphs Comb. 10 (2013), no. 4, 415-426.
- [17] H. Galeana-Sánchez, R. Rojas Monroy. *A Counterexample to a Conjecture on Edge-Coloured Tournaments*. Discrete Math. 282 (2004) 275-276.
- [18] H. Galeana-Sánchez, R. Rojas Monroy. *Kernels in Pretransitive Digraphs*. Discrete Math. 275 (2004) 129-136.
- [19] H. Galeana-Sánchez, R. Rojas Monroy. *Monochromatic Paths and at Most 2-Coloured Arc Sets in Edge Coloured Tournaments*. Graphs and Combinatorics. 21 (3) (2005) 307-317.
- [20] H. Galeana-Sánchez, R. Rojas Monroy. *Kernels in Quasi-Transitive Digraphs*. Discrete Math. 306 (2006) 1969-1974.
- [21] H. Galeana-Sánchez, R. Sánchez. *Richardson's Theorem in H-Coloured Digraphs*. Graphs and Combinatorics. 2016. Vol 32, no. 2, 629-638.
- [22] H. Galeana-Sánchez, R. Strausz. *Panchromatic Patterns*. Submitted (2015).
- [23] G. Hahn, P. Ille, R.E. Woodrow. *Absorbing Sets in Arc-Coloured Tournaments*. Discrete Math. 283 (2004) 93-99.
- [24] V. Linek, B. Sands. *A Note on Paths in Edge-Coloured Tournaments*. Ars Combin. 44 (1996) 225-228.
- [25] S. Minggang. *On Monochromatic Paths in m-Coloured Tournaments*. J. Combin. Theory(B) 45 (1988) 108-111.

- [26] K.B. Reid. *Monotone Reachability in Arc-Colored Tournaments*. Congr. Numer.146 (2000) 131-141.
- [27] M.Richardson. *Extensions Theorems for Solutions of Irreflexive Relations*. Proc. Natl. Acad. Sci. USA 39 (1953) 649.
- [28] B.Sands, N. Sauer, R. Woodrow. *On Monochromatic Paths in Edge Coloured Digraphs*. J. Combin. Theory (B) 33 (1982) 271-275.
- [29] J. von Neumann, O. Morgenstern. *Theory of Games and Economic Behavior*. Princeton University Press. Princeton NJ, 1944.
- [30] I. Włoch. *On Kernels by Monochromatic Paths in D-join*. Ars Combin. 99 (2011) 215-224.