



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS Y
DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA

**ANÁLISIS ESPECTRAL DIRECTO E INVERSO
DE MATRICES EN BANDA**

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
DOCTOR EN CIENCIAS

PRESENTA:
M. C. SERGIO PALAFOX DELGADO

TUTOR PRINCIPAL
DR. LUIS OCTAVIO SILVA PEREYRA
INSTITUTO DE INVESTIGACIONES EN MATEMÁTICAS
APLICADAS Y EN SISTEMAS, UNAM

MIEMBROS DEL COMITÉ TUTOR
DR. RAFAEL RENÉ DEL RÍO CASTILLO
INSTITUTO DE INVESTIGACIONES EN MATEMÁTICAS
APLICADAS Y EN SISTEMAS, UNAM
DR. SANTIAGO LÓPEZ DE MEDRANO SÁNCHEZ
INSTITUTO DE MATEMÁTICAS, UNAM
DR. MIKAHIL KUDRYAVTSEV
INSTITUTE FOR LOW TEMPERATURE PHYSICS
AND ENGINEERING, UKRAINE

MÉXICO, D.F. FEBRERO 2016



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

`sergiopalafox@gmail.com`

`silva@iimas.unam.mx`

Departamento de Física Matemática
Instituto de Investigaciones en Matemáticas
Aplicadas y en Sistemas
Universidad Nacional Autónoma de México
C.P. 04510, México D.F.

Software: \LaTeX , TikZ, editor Emacs.

A Nube y Alan, mis hijos, que nacieron durante mis estudios de doctorado y son mi mayor motor para seguir adelante.

Agradecimientos

Quiero agradecer a las personas que formaron parte del proceso para que se pudiera realizar e imprimir esta tesis, las cuales se mencionarán a continuación. Mi tutor, Luis Silva, por aceptarme como alumno de doctorado y dedicarme el tiempo y paciencia necesarios para así poder concluir los estudios. A los miembros del comité tutor, Rafael del Río, Santiago López de Medrano y Mikhail Kudryavtsev. Además, a los sinodales, Luis Silva, Rafael del Río, María de los Ángeles Sandoval, Carlos Villegas y Juan Héctor Arredondo. También quiero agradecer, por el apoyo y la ayuda, a todo el equipo de la coordinación del posgrado, en especial a María Inés León, Teresa Martínez y Lucía Hernández.

Agradezco a las instituciones que me brindaron espacios para el desarrollo de mis estudios, en general a la Universidad Nacional Autónoma de México pero particularmente al Instituto de Investigación en Matemáticas Aplicadas y en Sistemas, al Instituto de Matemáticas y a la Facultad de Ciencias, esta última también por permitirme ser profesor durante algunos semestres. Junto, a CONACYT por la beca de doctorado que me otorgó, DGAPA-PAPIIT por los apoyos económicos otorgados para que pudiera asistir a eventos académicos los cuales ayudaron a fortalecer mis conocimientos.

Finalmente, agradezco a mi esposa María Luisa y mis hijos, Nube y Alan, por estar conmigo en todo momento y contar con su apoyo. A mis padres, Felipe y Lety, que siempre he contado con su completo apoyo y, debido a la educación otorgada por su parte, he logrado estar en la recta final de mis estudios de doctorado.

Índice general

Introducción	9
1. Problema de interpolación lineal para polinomios vectoriales de dimensión n	15
1.1. Polinomios vectoriales y su altura	16
1.2. La altura bajo transformaciones lineales sobre \mathbb{P}	19
1.3. Generadores del problema de interpolación	22
1.4. Caracterización de las soluciones	28
2. Análisis espectral para matrices en $\mathcal{M}(n, N)$ ($N < \infty$)	37
2.1. La Función espectral	41
2.2. Conexión con el problema de interpolación lineal	48
2.3. Reconstrucción	51
2.4. Otros métodos espectrales inversos	61
2.5. Sistema de masas y resortes	62
3. Análisis espectral para matrices en $\mathcal{M}(n, \infty)$	65
3.1. Análisis espectral de submatrices	69
3.2. Análisis espectral para matrices simétricas en banda infinitas . .	73
3.3. La función espectral para el caso autoadjunto	77
3.4. Reconstrucción de la matriz	81
A. Artículos	87
On a linear interpolation problem for n -dimensional vector polynomials	88
Inverse spectral analysis for a class of finite band symmetric matrices	112
Inverse spectral analysis for a class of infinite band symmetric matrices	145
Bibliografía	175

Introducción

La investigación de la tesis doctoral trata el análisis espectral directo e inverso de operadores cuya representación matricial con respecto a cierta base está en una clase de matrices simétricas en banda, denotadas por $\mathcal{M}(n, N)$ y $\mathcal{M}(n, \infty)$. Este análisis se realiza con énfasis en los problemas inversos de caracterización y reconstrucción.

A pesar de que los problemas espectrales inversos para matrices de Jacobi han sido estudiados ampliamente (véase [12–14, 19, 24, 27–29, 41, 42, 44] para el caso finito y [15, 16, 18, 19, 25, 26, 45, 46] para el caso infinito), trabajos para matrices en banda no necesariamente tridiagonales no son muy abundantes (véase [8, 22, 23, 33, 34, 36, 39, 52, 53] para el caso finito y [6, 21] para el caso infinito).

Nuestra clase $\mathcal{M}(n, N)$ se conforma por matrices simétricas en banda de $N \times N$ y con $2n + 1$ diagonales no necesariamente nulas. Estas diagonales se encuentran por debajo y por encima de la diagonal principal, tomando en cuenta siempre que la matriz es simétrica (véase (0.0.1)). Los elementos de la diagonal más alejada de la diagonal principal satisfacen con ser positivos hasta llegar a un elemento a partir del cual todos los siguientes elementos son ceros (véase figura 1 (a)), a este tipo de propiedad le llamamos “degeneración de la diagonal”. Puede ocurrir que todo los elementos de la diagonal más alejada a la diagonal principal sean todos positivos, dicho caso coincide con la figura 1 (b).

$$\left(\begin{array}{cccccccc} d_1^{(0)} & d_1^{(1)} & \dots & d_1^{(n)} & & & & \\ d_1^{(1)} & d_2^{(0)} & d_2^{(1)} & \ddots & d_2^{(n)} & & & \\ \vdots & d_2^{(1)} & d_3^{(0)} & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ d_1^{(n)} & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & d_{N-n}^{(n)} \\ & d_2^{(n)} & \ddots & \ddots & \ddots & d_{N-2}^{(1)} & \vdots & \\ & & \ddots & \ddots & d_{N-2}^{(1)} & d_{N-1}^{(0)} & d_{N-1}^{(1)} & \\ & & & d_{N-n}^{(n)} & \dots & d_{N-1}^{(1)} & d_N^{(0)} & \end{array} \right) \quad (0.0.1)$$

Si existe degeneración de la diagonal más alejada a la diagonal principal, entonces la siguiente diagonal se comporta de la misma forma que la diagonal

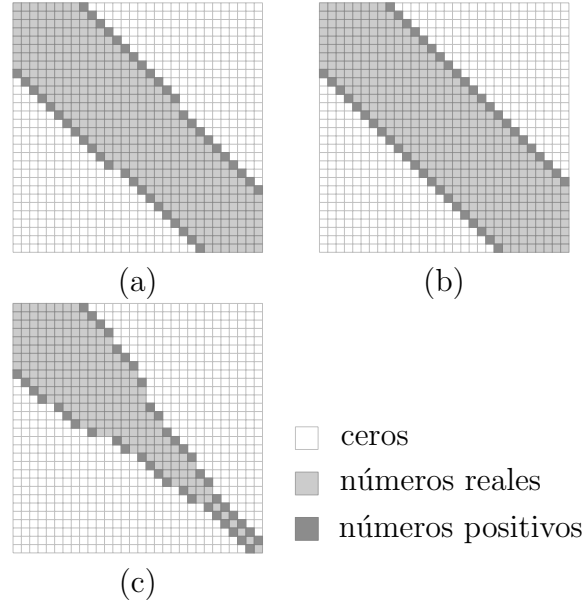


Figura 1: Elementos en $\mathcal{M}(n, N)$

anterior, es decir, los elementos (a partir de un punto determinado por la primera degeneración) son positivos y puede ocurrir que a partir de cierto elemento todos los elementos subsecuentes de la diagonal sean ceros. Esto corresponde a la existencia de una segunda degeneración. Si no ocurre la segunda degeneración, tendríamos una matriz como la figura 1 (a).

De forma análoga se comportan las siguientes diagonales hasta llegar, a lo más, a una “cola” de tres diagonales, es decir, pueden ocurrir a lo más $n - 1$ degeneraciones (véase figura 1 (c)).

Para la clase de matrices $\mathcal{M}(n, \infty)$, basta considerar las mismas propiedades de la clase finita $\mathcal{M}(n, N)$, salvo que ahora se considera una matriz semi-infinita, esto es, las diagonales son sucesiones infinitas (véase (0.0.2)).

$$\left(\begin{array}{cccccccc}
 d_1^{(0)} & d_1^{(1)} & \dots & d_1^{(n)} & & & & \\
 d_1^{(1)} & d_2^{(0)} & d_2^{(1)} & \ddots & d_2^{(n)} & & & \\
 \vdots & d_2^{(1)} & d_3^{(0)} & \ddots & \ddots & \ddots & & \\
 d_1^{(n)} & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & d_{N-n}^{(n)} & \\
 & d_2^{(n)} & \ddots & \ddots & \ddots & d_{N-2}^{(1)} & \vdots & \ddots \\
 & & \ddots & \ddots & d_{N-2}^{(1)} & d_{N-1}^{(0)} & d_{N-1}^{(1)} & \\
 & & & d_{N-n}^{(n)} & \dots & d_{N-1}^{(1)} & d_N^{(0)} & \ddots \\
 & & & & \ddots & & \ddots & \ddots
 \end{array} \right) \quad (0.0.2)$$

Así, dado un espacio de Hilbert separable de dimensión infinita y una base ortonormal en él, se estudian las extensiones autoadjuntas del operador A cuya representación matricial con respecto a la base dada es una matriz en la clase $\mathcal{M}(n, \infty)$ (para representación matricial de operadores simétricos no acotados en un espacio de Hilbert separable véase [2, sec. 47]). Puede ocurrir que el operador A sea autoadjunto.

También consideramos el caso en el que un espacio de Hilbert de dimensión finita y una base ortonormal en él están dados. Así, se estudian los operadores cuya representación matricial, con respecto a la base dada, son matrices en la clase $\mathcal{M}(n, N)$

Sobre aplicaciones de este tipo de operadores, se sabe que la dinámica de un sistema lineal de masas y resortes (cuando éste se encuentra dentro del régimen de la ley de Hooke y las interacciones se extienden a los $2n$ vecinos inmediatos de cada masa, véase figuras 2 y 3) es caracterizada por las propiedades espectrales de un operador cuya representación matricial, con respecto a cierta base ortonormal, está en $\mathcal{M}(n, N)$ (véase [20, 38]). Las entradas de la matriz están determinadas por las masas y las constantes de elasticidad del sistema. También se puede deducir que el operador generado por una matriz en $\mathcal{M}(n, N)$, modela un sistema de masas y resortes donde nuevamente la interacción se extiende a los $2n$ vecinos inmediatos de cada masa (véase sección 2.5).

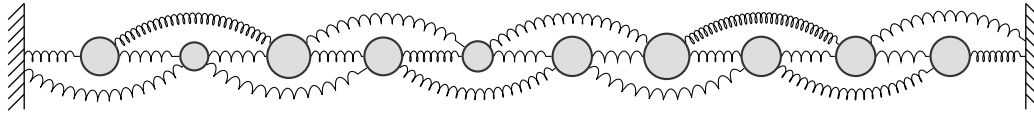


Figura 2: Sistema de masas y resortes de una matriz en $\mathcal{M}(2, 10)$: caso no degenerado

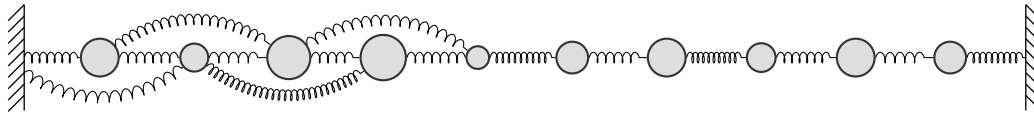


Figura 3: Sistema de masas y resortes de una matriz en $\mathcal{M}(2, 10)$: caso degenerado

Análogamente, los sistemas lineales infinitos de masas y resortes (véase figura 4) son modelados por las extensiones autoadjuntas de operadores cuya representación matricial, con respecto a cierta base ortonormal, son matrices en $\mathcal{M}(n, \infty)$.

Los operadores no sólo están relacionados con matrices, sino también con ecuaciones en recurrencias. En este sentido, los operadores están definidos por

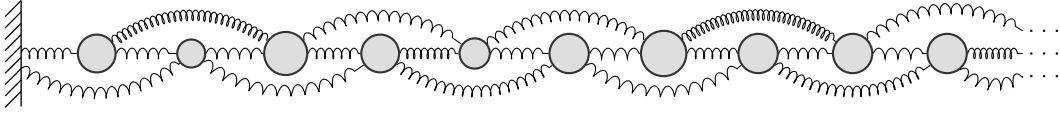


Figura 4: Sistema de masas y resortes en $\mathcal{M}(2, \infty)$: caso no degenerado

una relación en recurrencias y condiciones a la frontera. En el caso finito, dichas condiciones están determinadas por las matrices mismas. En el caso infinito, además de las condiciones a la frontera que la matriz define, podemos tener condiciones asintóticas adicionales (véase sección 3.3).

Las matrices en las clases $\mathcal{M}(n, \infty)$ y $\mathcal{M}(n, \infty)$ tienen la propiedad de definir condiciones a la frontera que no se habían considerado anteriormente en la teoría de ecuaciones en diferencias. En efecto, las degeneraciones en las diagonales corresponden a condiciones a la frontera internas del tipo extremo derecho (véase página 70).

Una herramienta importante para el análisis espectral de operadores asociado a matrices en $\mathcal{M}(n, N)$ (particularmente el análisis espectral inverso) es la teoría de interpolación lineal de polinomios vectoriales de dimensión n . En este trabajo se resuelve el problema de interpolación lineal el cual consiste en lo siguiente: dada una colección de números complejos z_1, \dots, z_N , llamados nodos de interpolación, y otra colección de números complejos $\alpha_k(1), \dots, \alpha_k(N)$, $k = 1, \dots, n$, tal que $\sum_{k=1}^n |\alpha_k(j)| > 0$ para cualquier $j \in \{1, 2, \dots, N\}$, se buscan polinomios P_k , $k = 1, \dots, n$, que satisfacen

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k(j) P_k(z_j) = 0 \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, N\} .$$

Se hace énfasis en el hecho que los nodos de interpolación z_1, z_2, \dots, z_N no necesariamente tienen que ser diferentes por pares (véase observación 1.3.2). El desarrollo y resultados de este problema se presentan en el capítulo 1, aquí se da una completa caracterización de todas las soluciones del problema de interpolación (véase por ejemplo teorema 1.4.3). La solución del problema de interpolación constituye una generalización de la teoría desarrollada por Kudryavtsev y Golinskii en [22].

Con base en los resultados obtenidos en la teoría de interpolación lineal de polinomios vectoriales, se aborda el análisis espectral directo e inverso de los operadores correspondientes a matrices en $\mathcal{M}(n, N)$ y $\mathcal{M}(n, \infty)$. En lo que respecta al problema directo, para cada matriz en $\mathcal{M}(n, N)$ construimos una función con valores matriciales, no negativa, de rango uno, a partir de una matriz de condiciones iniciales (véase (2.1.4)). Además la función construida cumple ciertas propiedades (véase observación 2.1.2). En el caso semi-infinito

$\mathcal{M}(n, \infty)$, el problema directo es mucho más sutil y se muestra que para cada operador existe una función que hace las veces de una función espectral (véase definición 3.2.1). Cuando el operador correspondiente a una matriz en $\mathcal{M}(n, \infty)$ es autoadjunto, es posible construir esta función explícitamente a partir de la función espectral de operadores correspondientes a matrices en $\mathcal{M}(n, N)$ utilizando resultados de la teoría de perturbación mediante la convergencia de resolventes.

En lo que respecta al análisis espectral inverso para el caso finito, se desarrollo un método de reconstrucción de la matriz a partir de la función espectral. Es decir, dada una función $\tilde{\sigma}$ que satisface las propiedades de la observación 2.1.2, es decir, posee las características esperadas de una función espectral, construimos unívocamente una matriz \mathcal{A} que resulta estar en la clase $\mathcal{M}(n, N)$. Más aún, se prueba que la función espectral σ del operador asociado a \mathcal{A} , definida a partir de cierta condición inicial, coincide con la función $\tilde{\sigma}$ (véase teorema 2.3.1).

El análisis espectral inverso para el caso semi-infinito es más delicado. Dada una función $\tilde{\sigma}$ con valores matriciales que satisface la definición 3.2.2 es posible reconstruir unívocamente una matriz en $\mathcal{M}(n, \infty)$, pero de acuerdo a nuestra definición (véase definición 3.2.1) a cada matriz en $\mathcal{M}(n, \infty)$ le corresponde una familia de funciones espectrales. Para el caso autoadjunto es posible afirmar que la función $\tilde{\sigma}$ coincide con la función espectral correspondiente a la matriz reconstruida para cierta condición inicial (véase teorema 3.4.2).

La estructura de la tesis esta organizada de la siguiente manera. En el capítulo 1 se presentan resultados que abordan el problema de interpolación lineal, el cual fue necesario desarrollar para obtener nuestro objetivo: el análisis espectral de los operadores asociados a las clases de matrices ya mencionadas. Los resultados de este problema están reportados en [37]. Por otro lado, la teoría espectral de los operadores correspondientes a la clase de matrices finita $\mathcal{M}(n, N)$ se encuentra en el capítulo 2. Además aquí se discuten algunos métodos alternativos sobre el análisis espectral de dichos operadores. Este capítulo contiene los resultados de [36]. Mientras que en el capítulo 3 se presenta el análisis espectral para la clase de matrices infinita $\mathcal{M}(n, \infty)$. El artículo [35] da cuenta de los resultados obtenidos de este análisis. Finalmente, en el apéndice se incluyen los artículos de investigación [35–37].

Capítulo 1

Un problema de interpolación lineal para polinomios vectoriales de dimensión n

En este capítulo, el principal interés es el estudio del siguiente problema de interpolación. Dada una colección de números complejos z_1, \dots, z_N , llamados nodos de interpolación, y otra colección de números complejos $\alpha_k(1), \dots, \alpha_k(N)$, $k = 1, \dots, n$, tal que $\sum_{k=1}^n |\alpha_k(j)| > 0$ para cualquier $j \in \{1, 2, \dots, N\}$, se buscan polinomios P_k , $k = 1, \dots, n$, que satisfacen

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k(j) P_k(z_j) = 0 \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, N\}. \quad (1.0.1)$$

Se hace énfasis en el hecho que los nodos de interpolación z_1, z_2, \dots, z_N no necesariamente tienen que ser diferentes por pares (véase observación 1.3.2). Los resultados de este capítulo dan una completa caracterización de todas las soluciones del problema de interpolación (1.0.1).

El problema de interpolación definido anteriormente ha sido estudiado en [22] y mucho antes en [48] para el caso particular cuando $n = 2$. En este caso, la teoría desarrollada en [22, 48] permite abordar el problema encontrando una función racional $-\alpha_2(j)/\alpha_1(j) \in \overline{\mathbb{C}}$ en cada nodo de interpolación z_j . Este es el llamado problema de interpolación racional, o problema Cauchy-Jacobi y $P_1(z)/P_2(z)$ es el denominado multipunto aproximante de Padé [3, sec. 7.1].

Notablemente, aunque la investigación en este tema ha puesto particular énfasis en el aspecto numérico, en [22, 48] consideran el problema teórico tomando en cuenta la estructura de todas las soluciones del problema de interpolación racional. En [22], este tema se usa para tratar el análisis espectral inverso de matrices unitarias con cinco diagonales (las llamadas matrices CMV, cf. [21]) y éstas requieren ciertas restricciones adicionales para ciertos coeficientes de la interpolación racional de polinomios. De forma similar, el análisis espectral de

matrices simétricas con cinco diagonales también requiere condiciones adicionales (véase [34]) sobre el problema de interpolación racional. La descripción obtenida en [22] permite reducir el problema de interpolación racional con tales restricciones adicionales a un sistema lineal triangular y a responder la pregunta específica de existencia y unicidad (o no-unicidad) de la solución del problema espectral inverso. Otros enfoques sobre interpolación racional pueden encontrarse en [10, 11, 43].

El presente capítulo generaliza, para cualquier $n \in \mathbb{N}$, la teoría de interpolación lineal dada en [22, sec. 2]. Este paso de $n = 2$ a cualquier $n \in \mathbb{N}$ no es directo; varios de los resultados obtenidos requieren diferentes técnicas. Particularmente, esto se hace evidente en la sección 1.3 y sección 1.4. Generalizaciones similares del problema de interpolación racional que también se centran en la estructura del conjunto de soluciones puede encontrarse en [4, 5, 49, 50].

La principal motivación para el estudio del problema de interpolación dado por (1.0.1) radica en sus aplicaciones a problemas espectrales directos e inversos de matrices simétricas en banda de $N \times N$ con $2n + 1$ diagonales, que serán consideradas en el siguiente capítulo. A pesar de que la teoría de interpolación discutida aquí, se desarrolló debido a las aplicaciones que se tenían en mente sobre análisis espectral inverso, se resolvió un problema interesante por sí mismo y que puede tener otras aplicaciones. Es importante hacer notar, que aunque [4, 5, 49, 50] también trata con las propiedades estructurales del conjunto de soluciones del problema de interpolación dado por (1.0.1), este enfoque difiere en varios aspectos de los usados en estos trabajos. Por un lado, permite abordar el análisis espectral inverso de matrices simétricas en banda finitas (véase capítulo 2). Por otro lado, los métodos desarrollados aquí, permiten una nueva caracterización del problema de interpolación y nuevos resultados sobre la estructura de soluciones (véase sección 1.4 y en particular, teorema 1.4.2 y teorema 1.4.3).

El capítulo es organizado como sigue. En sección 1.1 se establece la notación, se introducen los conceptos importantes y se prueban algunas afirmaciones útiles. Sección 1.2 contiene resultados auxiliares relacionados con transformaciones lineales de polinomios vectoriales. Finalmente, en sección 1.3 y sección 1.4, se muestra que los llamados *generadores* determinan el conjunto de soluciones del problema de interpolación dado por (1.0.1) y se demuestra una completa caracterización de este conjunto.

1.1. Polinomios vectoriales y su altura

A lo largo de este capítulo se considera un número fijo $n \in \mathbb{N}$. Se inicia esta sección fijando la notación e introduciendo algunos conceptos auxiliares.

Definición 1.1.1. Se denota por \mathbb{P} al espacio de polinomios vectoriales de

dimensión n , es decir,

$$\mathbb{P} := \left\{ \mathbf{p}(z) = \begin{pmatrix} P_1(z) \\ P_2(z) \\ \vdots \\ P_n(z) \end{pmatrix} : P_k \text{ es un polinomio escalar para } k \in \{1, \dots, n\} \right\}.$$

Claramente, \mathbb{P} es un espacio lineal de dimensión infinita y éste es un módulo sobre el anillo de los polinomios escalares, o sea, para cualquier polinomio escalar S ,

$$\mathbf{p} \in \mathbb{P} \Rightarrow S\mathbf{p} = (SP_1(z), SP_2(z), \dots, SP_n(z))^t \in \mathbb{P}.$$

Definición 1.1.2. Sea la función $h : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{N} \cup \{0, -\infty\}$ definida por

$$h(\mathbf{p}) := \begin{cases} \max_{j \in \{1, \dots, n\}} \{n \deg P_j(z) + j - 1\}, & \mathbf{p} \neq 0, \\ -\infty, & \mathbf{p} = 0, \end{cases} \quad (1.1.1)$$

donde se supone que $\deg 0 = -\infty$. El número $h(\mathbf{p})$ es llamado la altura del polinomio vectorial \mathbf{p} .

Note que para cualquier polinomio escalar S

$$h(S\mathbf{p}) = h(\mathbf{p}) + n \deg S. \quad (1.1.2)$$

Lema 1.1.1. (a) Si $h(\mathbf{p}) \neq h(\mathbf{q})$, entonces $h(a\mathbf{p} + b\mathbf{q}) = \max\{h(\mathbf{p}), h(\mathbf{q})\}$ para todo $a, b \in \mathbb{C}$.

(b) Si $h(\mathbf{p}) = h(\mathbf{q}) = m$, entonces $h(a\mathbf{p} + b\mathbf{q}) \leq m$ para cualquier $a, b \in \mathbb{C}$.

(c) Si $h(\mathbf{p}) = h(\mathbf{q}) = m$, entonces existe un $c \in \mathbb{C}$ tal que $h(\mathbf{p} + c\mathbf{q}) \leq m - 1$

Demostración. Sólo se prueba (c) ya que (a) y (b) se prueban con la misma argumentación. Sea $m = nk + l$ con $l \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ y $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, entonces k y l están únicamente determinados por m y $\deg(Q_{l+1}(z)) = \deg(P_{l+1}(z)) = k$. Por lo tanto, existe c tal que $\deg(P_{l+1} + cQ_{l+1}) \leq k - 1$. Además, se tiene que $\deg(P_j + cQ_j)$ no es mayor que $k - 1$ para $l + 1 \leq j \leq n$ y $\deg(P_j + cQ_j)$ no es mayor que k para $1 \leq j \leq l$. Así,

$$\begin{aligned} h(\mathbf{p} + c\mathbf{q}) &= \max_{j \in \{1, \dots, n\}} \{n \deg(P_j(z) + cQ_j(z)) + j - 1\} \\ &\leq \max\{nk + l - 1, n(k - 1) + l, n(k - 1) + n - 1\} \\ &\leq nk + l - 1 = m - 1. \end{aligned}$$

□

Para $k = 0, 1, \dots$, se considera el siguiente conjunto de elementos en \mathbb{P} ,

$$\mathbf{e}_{nk+1}(z) = \begin{pmatrix} z^k \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_{nk+2}(z) = \begin{pmatrix} 0 \\ z^k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \mathbf{e}_{n(k+1)}(z) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ z^k \end{pmatrix}. \quad (1.1.3)$$

Claramente, $h(\mathbf{e}_j(z)) = j - 1$ para todo $j \in \mathbb{N}$.

Lema 1.1.2. *La sucesión $\{\mathbf{e}_j(z)\}_{j=1}^\infty$ es una base del espacio \mathbb{P} , esto es, para cualquier $\mathbf{p} \in \mathbb{P}$ con $h(\mathbf{p}) = m \neq -\infty$, existe un único conjunto de números complejos $\{c_k\}_{k=0}^m$, donde $c_m \neq 0$, tal que*

$$\mathbf{p}(z) = \sum_{k=0}^m c_k \mathbf{e}_{k+1}.$$

Demostración. Se prueba la afirmación por inducción. Si $m = 0, 1, \dots, n - 1$, el resultado es inmediato. Como antes, sea $m = nk + l$ con $k \in \mathbb{N}$ y $l \in \{0, 1, \dots, n - 1\}$. Entonces se puede escribir $P_{l+1}(z) = az^k + Q_{l+1}(z)$, donde $a \neq 0$ y $\deg Q_{l+1} \leq k - 1$.

Definamos $\mathbf{q}(z) := \mathbf{p}(z) - a\mathbf{e}_{nk+l+1} = (Q_1(z), Q_2(z), \dots, Q_n(z))^t$, es decir, $Q_j = P_j$ para $j = \{1, 2, \dots, n\} \setminus \{l + 1\}$. Así, $\deg Q_j$ no es mayor que $k - 1$ para todo $j = l + 2, l + 3, \dots, n$ y $\deg Q_j$ no es mayor que k para cualquier $j = 1, 2, \dots, l$. Por consiguiente, se tiene

$$h(\mathbf{q}) \leq \max\{nk + l - 1, n(k - 1) + n - 1\} = m - 1.$$

En la hipótesis de inducción se supone que $\mathbf{q} = \sum_{k=0}^{m-1} c_k \mathbf{e}_{k+1}$. De modo que se obtiene

$$\mathbf{p} = a\mathbf{e}_{nk+l+1} + \mathbf{q} = a\mathbf{e}_{m+1} + \sum_{k=0}^{m-1} c_k \mathbf{e}_{k+1} = \sum_{k=0}^m \tilde{c}_k \mathbf{e}_{k+1}.$$

La unicidad de la expansión se sigue de la independencia de la sucesión $\{\mathbf{e}_j(z)\}_{j=1}^\infty$, que es fácil de verificar. \square

Teorema 1.1.1. *Sea $\{\mathbf{g}_m\}_{m=1}^\infty$ una sucesión arbitraria de elementos en \mathbb{P} tal que*

$$h(\mathbf{g}_m) = m - 1 \quad \forall m \in \mathbb{N},$$

entonces $\{\mathbf{g}_m\}_{m=1}^\infty$ es una base de \mathbb{P} .

Demostración. Del Lema 1.1.2, se sigue que $\mathbf{g}_{m+1}(z) = \sum_{k=0}^m c_{mk} \mathbf{e}_{k+1}(z)$, donde c_{jj} es diferente de 0 para todo $j = 0, \dots, m$. Así

$$\begin{pmatrix} \mathbf{g}_1 \\ \mathbf{g}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{g}_{m+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{00} & 0 & \dots & 0 \\ c_{10} & c_{11} & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ c_{m0} & c_{m1} & \dots & c_{mm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{e}_{m+1} \end{pmatrix}.$$

Note que $\{c_{jk}\}_{j,k \in \{0, \dots, m\}}$ es una matriz triangular, por lo tanto

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{e}_{m+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{c}_{00} & 0 & \dots & 0 \\ \tilde{c}_{10} & \tilde{c}_{11} & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ \tilde{c}_{m0} & \tilde{c}_{m1} & \dots & \tilde{c}_{mm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{g}_1 \\ \mathbf{g}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{g}_{m+1} \end{pmatrix}.$$

Ya que $\{\mathbf{e}_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ es una base, lo mismo se cumple para $\{\mathbf{g}_m\}_{m \in \mathbb{N}}$. \square

1.2. La altura bajo transformaciones lineales sobre \mathbb{P}

Sea $A = \{a_{jk}\}_{j,k \in \{1, \dots, n\}}$ una matriz arbitraria de $n \times n$. Para cualquier $\mathbf{p} \in \mathbb{P}$, la transformación lineal generada por A es

$$A\mathbf{p}(z) = \begin{pmatrix} a_{11}P_1(z) + a_{12}P_2(z) + \dots + a_{1n}P_n(z) \\ a_{21}P_1(z) + a_{22}P_2(z) + \dots + a_{2n}P_n(z) \\ \vdots \\ a_{n1}P_1(z) + a_{n2}P_2(z) + \dots + a_{nn}P_n(z) \end{pmatrix} \in \mathbb{P}.$$

Se sigue de Definición 1.1.2 que

$$h(A\mathbf{p}) = \max_{j \in \{1, \dots, n\}} \left\{ n \deg \left(\sum_{k=1}^n a_{jk} P_k(z) \right) + j - 1 \right\}. \quad (1.2.1)$$

Lema 1.2.1. (a) Para cualquier matriz arbitraria A de $n \times n$ y $\mathbf{p} \in \mathbb{P}$,

$$h(A\mathbf{p}) \leq h(\mathbf{p}) + n - 1.$$

(b) Si la matriz A es triangular superior entonces para cualquier $\mathbf{p} \in \mathbb{P}$,

$$h(A\mathbf{p}) \leq h(\mathbf{p}).$$

(c) Si la matriz A es triangular inferior, entonces $h(\mathbf{p}) \leq nk + n - 1$ implica que $h(A\mathbf{p}) \leq nk + n - 1$ para cualquier $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Demostración. (a) Note que, para todo $j \in \{1, \dots, n\}$ las desigualdades de abajo son válidas

$$n \deg \left(\sum_{k=1}^n a_{jk} P_k \right) + j - 1 \leq n \max_{k \in \{1, \dots, n\}} \{\deg P_k\} + j - 1 \leq h(\mathbf{p}) + j - 1.$$

Así que $h(A\mathbf{p}) \leq h(\mathbf{p}) + n - 1$.

(b) Sea $A = \{a_{jk}\}_{j,k \in \{1, \dots, n\}}$ la matriz tal que $a_{jk} = 0$ si $j > k$. Entonces, para la última entrada del polinomio vectorial $A\mathbf{p}$, se tiene que

$$n \deg(a_{nn} P_n) + n - 1 \leq h(\mathbf{p}),$$

y para la anterior a la última

$$n \deg \left(\sum_{k=n-1}^n a_{n-1,k} P_k \right) + n - 2 \leq n \max_{k \in \{n-1, n\}} \{\deg P_k\} + n - 2 \leq h(\mathbf{p}).$$

Análogamente, se obtienen desigualdades para todas las entradas hasta la primera:

$$n \deg \left(\sum_{j=1}^n a_{1k} P_k \right) \leq n \max_{k \in \{1, \dots, n\}} \{\deg P_k\} \leq h(\mathbf{p}).$$

De modo que, $h(A\mathbf{p}) \leq h(\mathbf{p})$.

(c) Sea $A = \{a_{jk}\}_{j,k \in \{1, \dots, n\}}$ tal que $a_{jk} = 0$ si $j < k$. Y $h(\mathbf{p}) \leq nl + n - 1$ con $l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Se verifica que

$$n \deg P_j + j - 1 \leq nl + n - 1 \quad \forall j = 1, \dots, n,$$

por lo tanto $\deg P_j \leq l + \frac{n-j}{n}$ para todo $j = 1, \dots, n$. Esto implica que $\deg P_j \leq l$ para cualquier $j = 1, \dots, n$. Así por (1.2.1), $h(A\mathbf{p}) \leq \max_{j \in \{1, \dots, n\}} \{nl + j - 1\} = nl + n - 1$. \square

Ahora, se introducen algunas matrices y se formulan algunos resultados auxiliares para éstas. Estos resultados serán de gran utilidad en la siguiente sección.

Sea $A_l = \{a_{jk}\}_{j,k \in \{1, \dots, n\}}$ tal que, para un entero fijo $l \in \{1, \dots, n\}$, se satis-

face

$$\begin{aligned} a_{jj} &= 1 & \forall j \in \{1, \dots, n\} \setminus \{l\}, \\ a_{jk} &= 0 & \forall j \neq k, \text{ con } j \in \{1, \dots, n\} \setminus \{l\}, \end{aligned}$$

es decir, ésta es de la forma

$$A_l = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{l1} & a_{l2} & \dots & a_{ll-1} & a_{ll} & a_{ll+1} & \dots & a_{ln} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.2.2)$$

Además, para cualquier $l \in \{1, \dots, n\}$, defínase la función matricial

$$T_l(z) := \text{diag}\{t_k(z)\}, \quad t_k(z) := \begin{cases} z & \text{si } k = l, \\ 1 & \text{en otro caso,} \end{cases} \quad (1.2.3)$$

es decir, $T_l(z)$ es cercana a la matriz identidad, excepto que en la l -ésima entrada de la diagonal principal, $T_l(z)$ tiene la variable z en lugar de 1.

Lema 1.2.2. *Sea $n \geq 3$ fijo y $l \in \{2, \dots, n-1\}$. Si $\mathbf{p} \in \mathbb{P}$ es tal que $h(\mathbf{p}) \leq nk + l - 1$ para cualquier $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, entonces $h(A_l \mathbf{p}) \leq nk + l - 1$.*

Demostración. Sea $\mathbf{p} \in \mathbb{P}$. Si $h(\mathbf{p}) \leq nk + l - 1$, entonces

$$\deg P_l \geq \deg P_i, \quad 1 \leq i \leq l-1, \quad (1.2.4)$$

$$\deg P_l > \deg P_i, \quad l+1 \leq i \leq n. \quad (1.2.5)$$

Por otro lado,

$$A_l \mathbf{p} = \left(P_1(z), P_2(z), \dots, P_{l-1}(z), \sum_{i=1}^n a_{li} P_i(z), P_{l+1}(z), \dots, P_n(z) \right)^t.$$

Por (1.2.4) y (1.2.5) se tiene que

$$\deg \left(\sum_{i=1}^n a_{li} P_i(z) \right) \leq \max_{i \in \{1, \dots, n\}} \{\deg P_i(z)\} \leq \deg P_l(z).$$

Por lo tanto, por (1.2.1),

$$h(A_l \mathbf{p}) \leq h(\mathbf{p}) \leq nk + l - 1.$$

□

Lema 1.2.3. Si $\mathbf{p} \in \mathbb{P}$ y $h(\mathbf{p})$ no es mayor que $nk + j$ para $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y $j \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, entonces $h(T_{j+2}(z)\mathbf{p}) \leq nk + j + 1$, donde $T_{n+1} := T_1$.

Demostración. La afirmación se sigue de (1.2.4) y (1.2.5) por un razonamiento similar al usado en la demostración del Lema 1.2.2. □

1.3. Generadores del problema de interpolación

En esta sección, se inicia el análisis detallado del problema de interpolación establecido al inicio del capítulo. Se prueba primero una interpretación alternativa del problema de interpolación dado por (1.0.1).

Claramente, para todo $j \in \{1, \dots, N\}$, se obtiene que

$$\left| \sum_{k=1}^n \alpha_k(j) P_k(z_j) \right|^2 = \left(\sum_{k=1}^n \overline{\alpha_k(j) P_k(z_j)} \right) \left(\sum_{k=1}^n \alpha_k(j) P_k(z_j) \right) = \langle \mathbf{p}(z_j), \sigma_j \mathbf{p}(z_j) \rangle,$$

donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es el producto interno en \mathbb{C}^n considerando que el primer argumento es antilineal y

$$\sigma_j := \begin{pmatrix} |\alpha_1(j)|^2 & \overline{\alpha_1(j)} \alpha_2(j) & \overline{\alpha_1(j)} \alpha_3(j) & \dots & \overline{\alpha_1(j)} \alpha_n(j) \\ \alpha_2(j) \overline{\alpha_1(j)} & |\alpha_2(j)|^2 & \alpha_2(j) \overline{\alpha_3(j)} & \dots & \alpha_2(j) \overline{\alpha_n(j)} \\ \alpha_3(j) \overline{\alpha_1(j)} & \alpha_3(j) \overline{\alpha_2(j)} & |\alpha_3(j)|^2 & \dots & \alpha_3(j) \overline{\alpha_n(j)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{\alpha_n(j)} \alpha_1(j) & \overline{\alpha_n(j)} \alpha_2(j) & \overline{\alpha_n(j)} \alpha_3(j) & \dots & |\alpha_n(j)|^2 \end{pmatrix}. \quad (1.3.1)$$

Por lo tanto, el problema de interpolación (1.0.1) es equivalente a encontrar $\mathbf{p} \in \mathbb{P}$ tal que

$$\langle \mathbf{p}(z_j), \sigma_j \mathbf{p}(z_j) \rangle = 0, \quad j = 1, \dots, N. \quad (1.3.2)$$

Observación 1.3.1. Se sigue de (1.3.1) que σ_j es una matriz no negativa de rango uno. Más aún, para cualquier matriz σ de $n \times n$ no negativa de rango

uno, existe una colección de números complejos $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ tal que

$$\sigma = \begin{pmatrix} |\alpha_1|^2 & \overline{\alpha_1}\alpha_2 & \overline{\alpha_1}\alpha_3 & \dots & \overline{\alpha_1}\alpha_n \\ \overline{\alpha_2}\alpha_1 & |\alpha_2|^2 & \overline{\alpha_2}\alpha_3 & \dots & \overline{\alpha_2}\alpha_n \\ \overline{\alpha_3}\alpha_1 & \overline{\alpha_3}\alpha_2 & |\alpha_3|^2 & \dots & \overline{\alpha_3}\alpha_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{\alpha_n}\alpha_1 & \overline{\alpha_n}\alpha_2 & \overline{\alpha_n}\alpha_3 & \dots & |\alpha_n|^2 \end{pmatrix}. \quad (1.3.3)$$

Por lo tanto, el problema de interpolación puede establecerse como el problema que busca un $\mathbf{p} \in \mathbb{P}$ tal que (1.3.2) es válida para cualquier colección de matrices $\{\sigma_j\}_{j=1}^N$ de $n \times n$ no negativas de rango uno.

Definición 1.3.1. Se denota por $\mathbb{S}(n, N) = \mathbb{S}(\{\sigma_j\}_{j=1}^N, \{z_j\}_{j=1}^N)$ al conjunto de todas las soluciones del problema de interpolación (1.0.1), donde σ_j está dada por (1.3.1). Se usa la notación $\mathbb{S}(n, N)$ cuando la matriz concreta $\{\sigma_j\}_{j=1}^N$ y los nodos de interpolación $\{z_j\}_{j=1}^N$ no son relevantes.

Note que un problema de interpolación está completamente determinado por los conjuntos $\{\sigma_j\}_{j=1}^N$ y $\{z_j\}_{j=1}^N$. Ya que una solución de (1.0.1) es un elemento de \mathbb{P} , obviamente se tiene que $\mathbb{S}(n, N) \subset \mathbb{P}$. Claramente, de la misma manera que pasa para \mathbb{P} , el espacio $\mathbb{S}(n, N)$ es un módulo sobre el anillo de los polinomios escalares.

Observación 1.3.2. Se considera el problema de interpolación dado por $\{\sigma_j\}_{j=1}^N$ y $\{z_j\}_{j=1}^N$, si resulta que $z_N = z_{N-1}$ y los vectores $\boldsymbol{\alpha}(j_N) := (\alpha_1(j_N), \dots, \alpha_n(j_N))^t$ y $\boldsymbol{\alpha}(j_{N-1})$ son linealmente independientes, entonces

$$\mathbb{S}(\{\sigma_j\}_{j=1}^N, \{z_j\}_{j=1}^N) = \mathbb{S}(\{\sigma_j\}_{j=1}^{N-1}, \{z_j\}_{j=1}^{N-1}).$$

Por razones de conveniencia se supone a continuación que los vectores $\boldsymbol{\alpha}$, para los cuales los nodos coinciden, son linealmente independientes, en el caso que éstos sean linealmente dependientes, las afirmaciones sobre los resultados se deben cambiar de manera evidente a las correspondientes afirmaciones con un número menor de nodos.

Sea $\mathbb{M}(\mathbf{r})$ el subconjunto de \mathbb{P} dado por

$$\mathbb{M}(\mathbf{r}) := \{\mathbf{p} \in \mathbb{P} : \mathbf{p} = S\mathbf{r}, \mathbf{r} \in \mathbb{P}, S \text{ es un polinomio escalar arbitrario}\}. \quad (1.3.4)$$

Se dice que $\mathbb{M}(\mathbf{r})$ es el conjunto de polinomios vectoriales generados por \mathbf{r} . Observe que $\mathbb{M}(\mathbf{r})$ es un conjunto lineal y para cualquier $\mathbf{q} \in \mathbb{M}(\mathbf{r})$ no nulo, existe $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que

$$h(\mathbf{q}) = h(\mathbf{r}) + nk. \quad (1.3.5)$$

Por lo tanto, todos los vectores polinomiales no ceros de $\mathbb{M}(\mathbf{r})$ son tales que sus alturas están en la misma clase de equivalencia de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Uno de los principales objetivos de esta sección es mostrar que $\mathbb{S}(n, N)$ tiene exactamente n generadores, esto es, existen n polinomios vectoriales $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n$ tal que

$$\mathbb{M}(\mathbf{r}_1) \dot{+} \dots \dot{+} \mathbb{M}(\mathbf{r}_n) = \mathbb{S}(n, N).$$

Este resultado está relacionado con datos ya conocidos sobre el conjunto de polinomios que son soluciones del problema de interpolación racional para el caso de vectores [49, teorema 3.1 y teorema 3.2] o el problema de aproximación M-Padé [50, teorema 3.1].

Definición 1.3.2. Sea \mathcal{M} un subconjunto arbitrario de \mathbb{P} . Se define la altura de \mathcal{M} por

$$h(\mathcal{M}) := \min \{h(\mathbf{q}) : \mathbf{q} \in \mathcal{M}, \mathbf{q} \neq 0\}. \quad (1.3.6)$$

Lema 1.3.1. Sea \mathcal{M} un subconjunto lineal de $\mathbb{S}(n, N)$ y $\mathbf{r}, \mathbf{p} \in \mathcal{M}$ tales que $h(\mathbf{r}) = h(\mathbf{p}) = h(\mathcal{M})$, entonces $\mathbf{r} = c\mathbf{p}$ con $c \in \mathbb{C}$.

Demostración. Del Lema 1.1.1(c), se sigue que existe un c en \mathbb{C} tal que $h(\mathbf{r} + c\mathbf{p}) \leq h(\mathcal{M}) - 1$. Debido a que \mathcal{M} es lineal, $\mathbf{r} + c\mathbf{p} \in \mathcal{M}$, pero ya que no existe un elemento $\mathbf{q} \neq 0$ en \mathcal{M} tal que $h(\mathbf{q}) \leq h(\mathcal{M})$. Se tiene que $\mathbf{r} + c\mathbf{p} \equiv 0$. \square

Definición 1.3.3. Se dice que \mathbf{r} en $\mathbb{S}(n, N)$ es un primer generador de $\mathbb{S}(n, N)$ cuando $h(\mathbf{r}) = h(\mathbb{S}(n, N))$.

Se denota por \mathbb{M}_1 al conjunto $\mathbb{M}(\mathbf{r})$ cuando \mathbf{r} es un primer generador. Claramente, Lema 1.3.1 implica que \mathbb{M}_1 no depende de la elección del primer generador.

Teorema 1.3.1. Si \mathbf{r} es un primer generador de $\mathbb{S}(n, N)$, entonces $h(\mathbf{r}) \leq N$ para cualquier $N \in \mathbb{N}$.

Demostración. El objetivo de esta demostración es obtener un algoritmo constructivo para encontrar una solución cuya altura no es mayor que N . Claramente, esto implica la afirmación del teorema, ya que por definición, la altura del primer generador es menor o igual a la altura de cualquier solución no nula.

La construcción se realiza por inducción. Para $N = 1$, se tiene una solución

$$\mathbf{p}(z) := (C_1, C_2, 0, \dots, 0)^t, \quad (1.3.7)$$

donde $C_1 = \alpha_2(1)$, $C_2 = -\alpha_1(1)$, a no ser que $\alpha_2(1)$ y $\alpha_1(1)$ sean ambos ceros, en cuyo caso C_1, C_2 serán cualquier par de constantes no cero. En efecto, (1.3.7) es solución de (1.3.2) ya que $\langle \mathbf{p}(z_1), \sigma_1 \mathbf{p}(z_1) \rangle = 0$ y $h(\mathbf{p}) \leq 1$.

Ahora, supóngase que la afirmación es válida para cualquier N fijo, se mostrará que es válida para $N + 1$. Se reducirá el problema de interpolación con

$N + 1$ nodos a un problema de interpolación con N nodos, en el cual se conoce la solución por hipótesis de inducción.

Se escribe $N = nk + l$ con $l < n$, donde, para cualquier n fijo, los enteros k y l están únicamente determinados. Suponga que $n \geq 3$, primero se prueba la afirmación para un l fijo en $\{0, 1, \dots, n - 3\}$. Si la matriz (1.3.1) satisface que $\alpha_{l+2}(j) = 0$ para todo $j \in \{1, \dots, N + 1\}$, entonces $\sigma_j = T_{l+2}(0)\sigma_j T_{l+2}(0)$. Así, poniendo el polinomio vectorial $\mathbf{p}(z) := \mathbf{e}_{l+2}(z)$ (véase (1.1.3)), se sigue que \mathbf{p} es un elemento de $\mathbb{S}(n, N + 1)$. En efecto, ya que $T_{l+2}(0)\mathbf{p}(z) = 0$, se tiene que

$$\langle \mathbf{p}(z_j), \sigma_j \mathbf{p}(z_j) \rangle = \langle \mathbf{p}(z_j), T_{l+2}(0)\sigma_j T_{l+2}(0)\mathbf{p}(z_j) \rangle = 0.$$

Más aún, $h(\mathbf{p}) = l + 1 \leq N + 1$. Por lo tanto, supóngase sin pérdida de generalidad que $\alpha_{l+2}(N + 1)$ no es igual a cero (de otra manera sólo basta con volver a enumerar los puntos z_1, \dots, z_{N+1}).

Se considera la matriz A_{l+2} (véase (1.2.2)), donde

$$a_{l+2,k} := \begin{cases} \frac{1}{\alpha_{l+2}(N+1)} & \text{si } k = l + 2, \\ -\frac{\alpha_k(N+1)}{\alpha_{l+2}(N+1)} & \text{para } k \in \{1, 2, \dots, n\} \setminus \{l + 2\}. \end{cases}$$

Con estos ajustes, es sencillo verificar que

$$A_{l+2}^* \sigma_{N+1} A_{l+2} = \text{diag}\{d_k\}_{k=1}^n, \quad d_k := \begin{cases} 1 & \text{si } k = l + 2, \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases} \quad (1.3.8)$$

Además, ya que σ_j es una matriz no negativa de rango uno para cualquier $j \in \{1, \dots, N\}$, también se cumple para $A_{l+2}^* \sigma_j A_{l+2}$. Por lo tanto (véase observación 1.3.1), para cualquier $j \in \{1, \dots, N\}$, existen números complejos $\beta_1(j), \dots, \beta_n(j)$ tales que

$$A_{l+2}^* \sigma_j A_{l+2} = \begin{pmatrix} |\beta_1(j)|^2 & \overline{\beta_1(j)}\beta_2(j) & \overline{\beta_1(j)}\beta_3(j) & \dots & \overline{\beta_1(j)}\beta_n(j) \\ \overline{\beta_2(j)}\beta_1(j) & |\beta_2(j)|^2 & \overline{\beta_2(j)}\beta_3(j) & \dots & \overline{\beta_2(j)}\beta_n(j) \\ \overline{\beta_3(j)}\beta_1(j) & \overline{\beta_3(j)}\beta_2(j) & |\beta_3(j)|^2 & \dots & \overline{\beta_3(j)}\beta_n(j) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{\beta_n(j)}\beta_1(j) & \overline{\beta_n(j)}\beta_2(j) & \overline{\beta_n(j)}\beta_3(j) & \dots & |\beta_n(j)|^2 \end{pmatrix}. \quad (1.3.9)$$

Ahora, para todo $j \in \{1, \dots, N\}$, sea

$$\gamma_i(j) := \begin{cases} (z_{N+1} - z_j)\beta_{l+2}(j) & \text{si } i = l + 2, \\ \beta_i(j) & \text{para } i \in \{1, 2, \dots, n\} \setminus \{l + 2\}, \end{cases}$$

se considera el problema de interpolación auxiliar dado por $\{\tilde{\sigma}_j\}_{j=1}^N$ y $\{z_j\}_{j=1}^N$, donde

$$\tilde{\sigma}_j := \begin{pmatrix} \frac{|\gamma_1(j)|^2}{\gamma_2(j)\gamma_1(j)} & \overline{\gamma_1(j)}\gamma_2(j) & \overline{\gamma_1(j)}\gamma_3(j) & \dots & \overline{\gamma_1(j)}\gamma_n(j) \\ \frac{\gamma_2(j)\gamma_1(j)}{\gamma_3(j)\gamma_1(j)} & \frac{|\gamma_2(j)|^2}{\gamma_3(j)\gamma_2(j)} & \overline{\gamma_2(j)}\gamma_3(j) & \dots & \overline{\gamma_2(j)}\gamma_n(j) \\ \frac{\gamma_3(j)\gamma_1(j)}{\gamma_n(j)\gamma_1(j)} & \frac{\gamma_3(j)\gamma_2(j)}{\gamma_n(j)\gamma_2(j)} & |\gamma_3(j)|^2 & \dots & \overline{\gamma_3(j)}\gamma_n(j) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\gamma_n(j)\gamma_1(j)}{\gamma_n(j)\gamma_1(j)} & \frac{\gamma_n(j)\gamma_2(j)}{\gamma_n(j)\gamma_2(j)} & \overline{\gamma_n(j)}\gamma_3(j) & \dots & |\gamma_n(j)|^2 \end{pmatrix}.$$

Por hipótesis de inducción, existe un polinomio vectorial \mathbf{q} en $\mathbb{S}(\{\tilde{\sigma}_j\}_{j=1}^N, \{z_j\}_{j=1}^N)$ tal que

$$h(\mathbf{q}) \leq N = nk + l. \quad (1.3.10)$$

Se define el polinomio vectorial

$$\mathbf{r}(z) := A_{l+2}T_{l+2}(z_{N+1} - z)\mathbf{q}(z). \quad (1.3.11)$$

Entonces, para todo $j \in \{1, \dots, N\}$,

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{r}(z_j), \sigma_j \mathbf{r}(z_j) \rangle &= \langle \mathbf{q}(z_j), T_{l+2}(\overline{z_{N+1}} - z_j) A_{l+2}^* \sigma_j A_{l+2} T_{l+2}(z_{N+1} - z_j) \mathbf{q}(z_j) \rangle \\ &= \langle \mathbf{q}(z_j), \tilde{\sigma}_j \mathbf{q}_{z_j} \rangle = 0. \end{aligned} \quad (1.3.12)$$

También, se sigue de (1.3.8) que

$$T_{l+2}^*(0) A_{l+2}^* \sigma_{N+1} A_{l+2} T_{l+2}(0) = 0.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{r}(z_{N+1}), \sigma_{N+1} \mathbf{r}(z_{N+1}) \rangle &= \langle \mathbf{q}(z_{N+1}), T_{l+2}(0) A_{l+2}^* \sigma_{N+1} A_{l+2} T_{l+2}(0) \mathbf{q}(z_{N+1}) \rangle \\ &= 0. \end{aligned}$$

Esta última igualdad y (1.3.12) implican que \mathbf{r} está en $\mathbb{S}(\{\sigma_j\}_{j=1}^{N+1}, \{z_j\}_{j=1}^{N+1})$. Además, se sigue de (1.3.10) y (1.3.11), a través de lema 1.2.2 y lema 1.2.3, que

$$h(\mathbf{r}) \leq nk + l + 1 = N + 1.$$

Así, la afirmación del teorema ha sido probado para $n \geq 3$ y $l \in \{0, \dots, n-3\}$.

Para probar la afirmación cuando $l = n - 2$, se considera

$$\mathbf{r}(z) := A_n T_n(z_{N+1} - z) \mathbf{q}(z)$$

y repitiendo el razonamiento anterior, se muestra que \mathbf{r} está en $\mathbb{S}(n, N + 1)$.

Aún más, ya que $h(\mathbf{q}) < nk + n - 2$, lema 1.2.3 implica que

$$h(T_n(z_{N+1} - z)\mathbf{q}) \leq nk + n - 1.$$

Por lo tanto, lema 1.2.1(c) afirma que $h(\mathbf{r}) \leq N + 1$.

El caso $l = n - 1$ es tratado análogamente con

$$\mathbf{r}(z) := A_1 T_1(z_{N+1} - z)\mathbf{q}(z),$$

que es un elemento de $\mathbb{S}(n, N + 1)$. Otra vez, por lema 1.2.3,

$$h(T_1(z_{N+1} - z)\mathbf{q}) \leq nk + n - 1.$$

Entonces, se sigue de lema 1.2.2 que $h(\mathbf{r}) \leq N + 1$.

Ahora es claro como terminar la prueba cuando $n < 3$. \square

Lema 1.3.2. *Dado un entero $m \geq Nn$, existe una solución \mathbf{p} de $\mathbb{S}(n, N)$ tal que $h(\mathbf{p}) = m$.*

Demostración. Sea $m = (N + k)n + l$ con $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y $l \in \{0, 1, \dots, n - 1\}$. Se construirá una solución $\mathbf{p} \in \mathbb{S}(n, N)$ tal que $h(\mathbf{p}) = (N + k)n + l$.

Se define \mathbf{p} como sigue

$$\mathbf{p}(z) := (0, \dots, 0, P_{l+1}(z), 0, \dots, 0)^t$$

donde $P_{l+1}(z) = z^k \prod_{j=1}^N (z - z_j)$ y z_1, \dots, z_N son los nodos del problema de interpolación (1.0.1). Es fácil verificar que p es solución de $\mathbb{S}(n, N)$ y

$$h(\mathbf{p}) = n \deg P^{(l+1)}(z) + l = (N + k)n + l.$$

\square

Note que lema 1.3.2 y (1.3.5) implican que existen n polinomios vectoriales en $\mathbb{S}(n, N)$ cuyas alturas están en diferentes elementos del espacio factor $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Se mostrará más adelante, que existe una infinidad de soluciones para cada clase de equivalencia determinada por la alturas.

Lema 1.3.3. *Sea m un número natural fijo tal que $1 \leq m < n$. Si $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_m$ son elementos arbitrarios de $\mathbb{S}(n, N)$, entonces $\mathbb{S}(n, N) \setminus [\mathbb{M}(\mathbf{r}_1) + \dots + \mathbb{M}(\mathbf{r}_m)]$ no es vacío y $h(\mathbb{S}(n, N) \setminus [\mathbb{M}(\mathbf{r}_1) + \dots + \mathbb{M}(\mathbf{r}_m)]) \neq h(\mathbf{r}_j) + nk$ para cualquier $j \in \{1, \dots, m\}$ y $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. (En otras palabras, $h(\mathbb{S}(n, N) \setminus [\mathbb{M}(\mathbf{r}_1) + \dots + \mathbb{M}(\mathbf{r}_m)])$ y $h(\mathbf{r}_j)$ son diferentes elementos del espacio factor $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ para todo $j \in \{1, \dots, m\}$).*

Demostración. Que $\mathbb{S}(n, N) \setminus [\mathbb{M}(\mathbf{r}_1) + \dots + \mathbb{M}(\mathbf{r}_m)]$ es no vacío se sigue de lema 1.3.2 y (1.3.5) ya que $m < n$. Se probará la segunda afirmación por

reducción al absurdo. Supóngase, para algún $k_0 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y $j_0 \in \{1, \dots, m\}$,

$$h(\mathbb{S}(n, N) \setminus [\mathbb{M}(\mathbf{r}_1) + \dots + \mathbb{M}(\mathbf{r}_m)]) = h(\mathbf{r}_{j_0}) + nk_0.$$

Por lo tanto, existe $\mathbf{q} \in \mathbb{S}(n, N) \setminus [\mathbb{M}(\mathbf{r}_1) + \dots + \mathbb{M}(\mathbf{r}_m)]$ para el cual $h(\mathbf{q}) = h(\mathbf{r}_{j_0}) + nk_0$. Sea $\mathbf{p} \in \mathbb{M}(\mathbf{r}_{j_0})$ tal que $h(\mathbf{p}) = h(\mathbf{r}_{j_0}) + nk_0$. Entonces por lema 1.1.1(c), existe $c \in \mathbb{C}$ tal que $h(\mathbf{q} + c\mathbf{p}) \leq h(\mathbf{q}) - 1$. Claramente, $\mathbf{q} + c\mathbf{p} \in \mathbb{S}(n, N)$ pero no está en $\mathbb{M}(\mathbf{r}_1) + \dots + \mathbb{M}(\mathbf{r}_m)$. Esto contradice el hecho de que \mathbf{q} es un elemento de mínima altura en $\mathbb{S}(n, N) \setminus [\mathbb{M}(\mathbf{r}_1) + \dots + \mathbb{M}(\mathbf{r}_m)]$. \square

Definición 1.3.4. Tomando en cuenta definición 1.3.3 y lema 1.3.3, para $1 < j \leq n$, se define de forma recursiva el j -ésimo generador de $\mathbb{S}(n, N)$ como el polinomio vectorial \mathbf{r}_j en $\mathbb{S}(n, N) \setminus [\mathbb{M}_1 \dot{+} \dots \dot{+} \mathbb{M}_{j-1}]$ tal que

$$h(\mathbf{r}_j) = h(\mathbb{S}(n, N) \setminus [\mathbb{M}_1 \dot{+} \dots \dot{+} \mathbb{M}_{j-1}])$$

y $\mathbb{M}_j := \mathbb{M}(\mathbf{r}_j)$.

En esta definición se usa suma directa ($\dot{+}$) ya que $\mathbb{M}_k \cap \mathbb{M}_l = \{0\}$ para $k \neq l$. Eso se sigue del hecho, de que polinomios vectoriales no ceros en \mathbb{M}_k y \mathbb{M}_l tiene diferentes alturas, como una consecuencia de (1.3.5) y lema 1.3.3. Claramente, cada iteración de esta definición, hasta $j = n$, tiene sentido como consecuencia de lema 1.3.3. Note también que $\mathbb{M}_1 \dot{+} \dots \dot{+} \mathbb{M}_j$ no depende de la elección del j -ésimo generador. En efecto, si, al igual que \mathbf{r}_j , el polinomio vectorial \mathbf{q} es un j -ésimo generador y \mathbf{q} no está en $\mathbb{M}_1 \dot{+} \dots \dot{+} \mathbb{M}_j$, entonces, tomando en cuenta que $h(\mathbb{S} \setminus [\mathbb{M}_1 \dot{+} \dots \dot{+} \mathbb{M}_{j-1}])$ no es mayor que $h(\mathbb{S} \setminus [\mathbb{M}_1 \dot{+} \dots \dot{+} \mathbb{M}_j])$, se observa que lema 1.3.3 genera una contradicción.

1.4. Caracterización de las soluciones

Esta sección trata las propiedades de los generadores del problema de interpolación dado en (1.0.1). Para esclarecer las propiedades de los generadores, se es posible dar una completa descripción de toda solución del problema de interpolación.

Observación 1.4.1. Debido al lema 1.3.3, definición 1.3.3 y definición 1.3.4, se obtiene inmediatamente que

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{h(\mathbf{r}_1), \dots, h(\mathbf{r}_n)\}$$

con \mathbf{r}_j el j -ésimo generador ($j = 1, \dots, n$).

Las siguientes afirmaciones sencillas se utilizan para probar el teorema 1.4.1 que da estimaciones para la suma de las alturas de los generadores.

Lema 1.4.1. *Sea $n > 1$. Para $j \in \{1, \dots, n\}$, considere \mathbf{r}_j el j -ésimo generador de $\mathbb{S}(n, N)$. Entonces, existen infinitos números complejos z tales que los vectores $\mathbf{r}_1(z), \dots, \mathbf{r}_n(z)$ en \mathbb{C}^n son linealmente independiente.*

Demostración. Se demostrará el lema por reducción al absurdo. Por continuidad, si los vectores $\mathbf{r}_1(z), \dots, \mathbf{r}_n(z)$ son linealmente dependientes casi siempre, salvo en un conjunto finito de puntos, entonces éstos son linealmente dependientes casi siempre. Se supone que $k \in \{2, \dots, n\}$ es el número para el cual el vector $\mathbf{r}_k(z)$ es una combinación lineal de $\mathbf{r}_1(z), \dots, \mathbf{r}_{k-1}(z)$ para cada z , pero $\mathbf{r}_1(z_0), \dots, \mathbf{r}_{k-1}(z_0)$ son linealmente independientes para cierto z_0 . Esto último significa que

$$\text{rank}(\mathbf{r}_1(z_0) \dots \mathbf{r}_{k-1}(z_0)) = k - 1.$$

Por continuidad, este rango también es igual a $k - 1$ en alguna vecindad de z_0 . Además, por hipótesis, para cualquier $z \in \mathbb{C}$,

$$\mathbf{r}_k(z) = \sum_{l=1}^{k-1} F_l(z) \mathbf{r}_l(z).$$

Resolviendo este sistema para la incógnita $F_l(z)$, el rango de la matriz es igual a $k - 1$, se observa que para cualquier $l \in \{1, \dots, k - 1\}$, F_l es una función racional de z . Por lo tanto existen polinomios escalares S_0, \dots, S_{k-1} tal que

$$S_0(z) \mathbf{r}_k(z) = \sum_{l=1}^{k-1} S_l(z) \mathbf{r}_l(z).$$

Por definición 1.3.4, tomando en cuenta (1.3.5) y lema 1.3.3, se concluye que todos los $S_l \mathbf{r}_l$ ($l \in \{1, \dots, k - 1\}$) tienen diferente altura. Así, por lema 1.1.1(a) existe $l_0 \in \{1, \dots, k - 1\}$ tal que

$$h(S_0 \mathbf{r}_k) = h(S_{l_0} \mathbf{r}_{l_0}), \quad (1.4.1)$$

pero de acuerdo a (1.3.5) y lema 1.3.3 el lado derecho y el lado izquierdo de (1.4.1) son diferentes elementos de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Esta contradicción termina la prueba. \square

Teorema 1.4.1. *Sea $n > 1$. Para $l \in \{1, \dots, n\}$, se considera \mathbf{r}_l el l -ésimo generador de $\mathbb{S}(n, N)$. Entonces, para cualquier $m \in \{1, \dots, n\}$,*

$$\sum_{l=1}^m h(\mathbf{r}_l) \leq Nm + \frac{m(m-1)}{2}.$$

En particular, cuando $m = n$, se da una estimación de la suma de todos los generadores.

Demostración. La prueba se realiza inductivamente con respecto a m . Para $m = 1$, la afirmación ha sido probada en teorema 1.3.1.

Paso 1. ($m = 1 \rightsquigarrow m = 2$)

Sea N_1 un entero tal que

$$0 \leq N_1 \leq N \quad \text{y} \quad h(\mathbf{r}_1) = N - N_1. \quad (1.4.2)$$

Debido a que \mathbf{r}_1 es una solución de mínima altura del problema de interpolación dado por $\{\sigma_j\}_{j=1}^N$ y $\{z_j\}_{j=1}^N$, resulta que $\mathbf{r}_1(\tilde{z})$ no se anula para cualquier $\tilde{z} \neq z_1, \dots, z_N$. En efecto, de otra manera $\mathbf{r}_1(z)/(z - \tilde{z})$ debería ser una solución del problema de interpolación cuya altura sería menor a $h(\mathbf{r}_1)$. Así, eligiendo los números $z_{N+1}, \dots, z_{N+N_1+1}$ cada uno de los cuales no es igual a z_1, \dots, z_N , se considera el problema de interpolación con $\{\sigma_j\}_{j=1}^{N+N_1+1}$ y $\{z_j\}_{j=1}^{N+N_1+1}$, donde las nuevas matrices σ_j están dadas por

$$\sigma_j := \begin{pmatrix} |R_1(z_j)|^2 & R_1(z_j)\overline{R_2(z_j)} & R_1(z_j)\overline{R_3(z_j)} & \dots & R_1(z_j)\overline{R_n(z_j)} \\ R_2(z_j)\overline{R_1(z_j)} & |R_2(z_j)|^2 & R_2(z_j)\overline{R_3(z_j)} & \dots & R_2(z_j)\overline{R_n(z_j)} \\ R_3(z_j)\overline{R_1(z_j)} & R_3(z_j)\overline{R_2(z_j)} & |R_3(z_j)|^2 & \dots & R_3(z_j)\overline{R_n(z_j)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_n(z_j)\overline{R_1(z_j)} & R_n(z_j)\overline{R_2(z_j)} & R_n(z_j)\overline{R_3(z_j)} & \dots & |R_n(z_j)|^2 \end{pmatrix} \quad (1.4.3)$$

para $j = N+1, \dots, N+N_1+1$. Aquí la notación $\mathbf{r}_1(z) = (R_1(z), \dots, R_n(z))^t$ ha sido usada. De acuerdo al teorema 1.3.1, existe \mathbf{r} en $\mathbb{S}(\{\sigma_j\}_{j=1}^{N+N_1+1}, \{z_j\}_{j=1}^{N+N_1+1})$ tal que

$$h(\mathbf{r}) \leq N + N_1 + 1. \quad (1.4.4)$$

Se mostrará que $\mathbf{r} \notin \mathbb{M}_1$. Para esto, se supone lo contrario, $\mathbf{r}(z) = S(z)\mathbf{r}_1(z)$ para algún polinomio escalar no nulo S . Tomando en cuenta (1.4.3), es sencillo verificar, para $j = N+1, \dots, N+N_1+1$, que

$$\langle S(z_j)\mathbf{r}_1(z_j), \sigma_j S(z_j)\mathbf{r}_1(z_j) \rangle = |S(z_j)|^2 (|R_1(z_j)|^2 + \dots + |R_n(z_j)|^2)^2.$$

Por lo tanto, debido a la elección de los nodos $\{z_j\}_{j=N+1}^{N+N_1+1}$, es cierto que

$$S(z_{N+1}) = \dots = S(z_{N+N_1+1}) = 0.$$

Entonces, $\deg S \geq N_1 + 1$. Esta desigualdad junto con (1.1.2) y (1.4.2) implican que $h(\mathbf{r}) \geq N - N_1 + n(N_1 + 1)$, lo que contradice a (1.4.4). Finalmente, se observa que \mathbf{r} está en $\mathbb{S}(\{\sigma_j\}_{j=1}^N, \{z_j\}_{j=1}^N)$.

Paso 2. ($m > 1 \rightsquigarrow m + 1 \leq n$)

Debido a que la afirmación se supone válida para $m > 1$, se puede definir de forma recursiva los números N_1, \dots, N_m tales que para cualquier $l \in \{1, \dots, m\}$,

lo siguiente se válido

$$h(\mathbf{r}_l) = N + (l - 1) + N_{l-1} - N_l, \quad (1.4.5)$$

donde se supone que $N_0 = 0$. Se probará que existe un polinomio vectorial \mathbf{r} en $\mathbb{S}(\{\sigma_j\}_{j=1}^N, \{z_j\}_{j=1}^N)$ tal que

$$h(\mathbf{r}) \leq N + m + N_m \quad \text{y} \quad \mathbf{r} \notin \mathbb{M}_1 + \cdots + \mathbb{M}_m.$$

A partir de esto, la afirmación del teorema claramente se sigue.

Se considera el conjunto $I := \{N + 1, \dots, N + m + N_m\}$ y los conjuntos

$$\begin{aligned} I_1 &:= \{N + 1, \dots, N + L_1 + 1\}, \\ I_2 &:= \{N + L_1 + 2, \dots, N + L_2 + 2\}, \\ &\vdots \\ I_m &:= \{N + L_{m-1} + m, \dots, N + m + N_m\}, \end{aligned}$$

donde

$$L_k := \sum_{j=1}^k \left\lfloor \frac{m - j + 1 + N_m + N_j - N_{j-1}}{n} \right\rfloor.$$

Aquí $\lfloor \cdot \rfloor$ es la función parte entera piso y otra vez se asume que $N_0 = 0$. Por lo tanto, $\{I_j\}_{j=1}^m$ es una partición de I , esto es,

$$I = \bigcup_{j=1}^m I_j \quad \text{y} \quad j \neq l \implies I_j \cap I_l = \emptyset.$$

Sea $z_0 \in \mathbb{C}$ tal que los polinomios vectoriales $\mathbf{r}_1(z_0), \dots, \mathbf{r}_m(z_0)$ son linealmente independientes. La existencia de tal número es probada por lema 1.4.1. Debido a que las entradas de cada uno de estos vectores son polinomios, los vectores $\mathbf{r}_1(z), \dots, \mathbf{r}_m(z)$ son también linealmente independientes para cualquier z en una vecindad de z_0 . Tomando los puntos $z_{N+1}, \dots, z_{N+m+N_m}$ en esta vecindad tal que

$$\{z_{N+1}, \dots, z_{N+m+N_m}\} \cap \{z_1, \dots, z_N\} = \emptyset,$$

defínase los vectores $\boldsymbol{\alpha}(j) = (\alpha_1(j), \dots, \alpha_n(j))^t$ de tal forma que, para cada $l \in \{1, \dots, m\}$,

$$\langle \boldsymbol{\alpha}(j), \mathbf{r}_l(z_j) \rangle \neq 0 \quad \text{y} \quad \langle \boldsymbol{\alpha}(j), \mathbf{r}_k(z_j) \rangle = 0 \quad (1.4.6)$$

para k en $\{1, \dots, m\} \setminus \{l\}$ y $j \in I_l$. Note que la independencia lineal de los vectores $\mathbf{r}_l(z_j)$, para cualquier l en $\{1, \dots, m\}$ y $j \in I$, garantiza la existencia de $\boldsymbol{\alpha}(j)$, $j \in I$, con las propiedades requeridas.

Para $j \in I$, se definen las matrices σ_j usando (1.3.1) con los números $\alpha_k(j)$ dados anteriormente y se considera el problema de interpolación dado por $\{\sigma_j\}_{j=1}^{N+m+N_m}$ y $\{z_j\}_{j=1}^{N+m+N_m}$. De teorema 1.3.1, existe un polinomio vectorial \mathbf{r} en $\mathbb{S}(\{\sigma_j\}_{j=1}^{N+m+N_m}, \{z_j\}_{j=1}^{N+m+N_m})$ tal que $h(\mathbf{r})$ no es mayor que $N + m + N_m$. Resulta que \mathbf{r} no está en $\mathbb{M}_1 + \cdots + \mathbb{M}_m$, ya que suponiendo que

$$\mathbf{r}(z) = \sum_{k=1}^m S_k(z) \mathbf{r}_k(z) \quad (1.4.7)$$

con $S_k(z)$ un polinomio escalar ($k \in \{1, \dots, m\}$), se llega a una contradicción. En efecto, se verifica de (1.4.6) y (1.4.7) que

$$\langle \mathbf{r}(z_j), \sigma_j \mathbf{r}(z_j) \rangle = 0 \quad \text{para } j \in I,$$

lo que implica

$$\text{o bien } S_l \equiv 0 \quad \text{ó } \deg S_l \geq L_l - L_{l-1} + 1 \quad (L_0 = 0) \quad (1.4.8)$$

para $l \in \{1, \dots, m-1\}$ y además

$$\text{pasa } S_m \equiv 0 \quad \text{ó } \deg S_m \geq N_m - L_{m-1} + 1.$$

Por otro lado, tomando en cuenta (1.1.2), lema 1.1.1(a), y lema 1.3.3, se obtiene de cálculos sencillos que

$$\deg S_l \leq L_l - L_{l-1} \quad \text{para } l \in \{1, \dots, m\}. \quad (1.4.9)$$

Se sigue de (1.4.8) y (1.4.9) que

$$S_1(z) \equiv \cdots \equiv S_{m-1}(z) \equiv 0.$$

Análogamente, para probar que $S_m \equiv 0$, se muestra que $\deg S_m \geq N_m - L_m + 1$ es incompatible con (1.4.9) para $l = m$. Esto se hace verificando que

$$N_m - L_m + 1 > 0. \quad (1.4.10)$$

En vista de (1.4.5) y lema 1.3.3, los números $m - j + 1 + N_m + N_j - N_{j-1}$, para $j \in \{1, \dots, m\}$, son diferentes elementos del espacio $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. De manera que existe una permutación $\{a_1, \dots, a_n\}$ de $\{0, \dots, n-1\}$, tal que

$$\left\lfloor \frac{m - j + 1 + N_m + N_j - N_{j-1}}{n} \right\rfloor = \frac{m - j + 1 + N_m + N_j - N_{j-1} - a_j}{n}.$$

Existe a lo más un j en $\{1, \dots, m\}$ tal que $a_j = 0$. Por otra parte,

$$\sum_{j=1}^m a_j \geq \sum_{j=1}^m (j-1).$$

Entonces, la parte izquierda de la igualdad (1.4.10) se puede reescribir reescrita como

$$N_m - \sum_{j=1}^m \frac{m-j+1 + N_m + N_j - N_{j-1} - a_j}{n} + 1.$$

Debido a que

$$\sum_{j=1}^m (m-j+1 - a_j) \leq m,$$

se tiene

$$\begin{aligned} N_m - \sum_{j=1}^m \frac{m-j+1 + N_m + N_j - N_{j-1} - a_j}{n} + 1 \\ \geq N_m - \sum_{j=1}^m \frac{m + N_m + N_j - N_{j-1}}{n} + 1 \\ \geq N_m - \frac{m + (m+1)N_m}{n} + 1 > 0. \end{aligned}$$

En la última desigualdad, se usa que $m+1 \leq n$. □

Teorema 1.4.2. *Sea \mathbf{r}_j el j -ésimo generador de $\mathbb{S}(n, N)$. Se satisface que*

$$\sum_{j=1}^n h(\mathbf{r}_j) = Nn + \frac{n(n-1)}{2}.$$

Demostración. Debido a el teorema 1.4.1, es suficiente mostrar que

$$\sum_{j=1}^n h(\mathbf{r}_j) \geq Nn + \frac{n(n-1)}{2}. \quad (1.4.11)$$

Se supone que esto no es cierto y se define

$$Q(z) := \det(\mathbf{r}_1(z) \dots \mathbf{r}_n(z)),$$

donde $(\mathbf{r}_1(z) \dots \mathbf{r}_n(z))$ es la matriz cuadrada con columnas dada por los vectores $\mathbf{r}_1(z), \dots, \mathbf{r}_n(z)$. Para las entradas de los generadores, se usa la notación

$$\mathbf{r}_j(z) = \left(R_1^{(j)}, \dots, R_n^{(j)} \right)^t \quad \forall j \in \{1, \dots, n\}.$$

Se sigue de definición 1.1.2, que para cualquier j en $\{1, \dots, n\}$, existe $l(j) \in \{1, \dots, n\}$ tal que

$$h(\mathbf{r}_j) = n \deg R_{l(j)}^{(j)} + l(j) - 1.$$

Además, por lema 1.3.3, cuando j recorre el conjunto $\{1, \dots, n\}$, $l(j)$ también recorre $\{1, \dots, n\}$. Por lo tanto,

$$\sum_{j=1}^n h(\mathbf{r}_j) = n \sum_{j=1}^n \deg R_{l(j)}^{(j)} + \sum_{j=1}^n (j - 1).$$

Así la negación de (1.4.11) implica que

$$\sum_{j=1}^n \deg R_{l(j)}^{(j)} < N. \quad (1.4.12)$$

Por otro lado, ya que intercambiar dos columnas de una matriz lleva a multiplicar el correspondiente determinante por -1 , es claro que para calcular el grado del polinomio Q , uno puede usar cualquier reordenamiento de los vectores \mathbf{r}_j , $j \in \{1, \dots, n\}$. De manera que,

$$\deg Q(z) = \deg \det (\mathbf{r}_{l^{-1}(1)}(z) \dots \mathbf{r}_{l^{-1}(n)}(z)).$$

Note que en este reordenamiento de las columnas, los elementos de la diagonal de la matriz son los polinomios que determinan las alturas de los generadores. Por lo tanto, es fácil verificar que $\deg Q$ es la suma de los grados de los elementos de la diagonal de $(\mathbf{r}_{l^{-1}(1)}(z) \dots \mathbf{r}_{l^{-1}(n)}(z))$, es decir,

$$\deg Q(z) = \sum_{j=1}^n \deg R_{l(j)}^{(j)}, \quad (1.4.13)$$

y por (1.4.12), esto es estrictamente menor que N .

Ahora, fijando un nodo de interpolación z_{l_0} y observando que \mathbf{r}_j está en $\mathbb{S}(n, N)$ para todo $j \in \{1, \dots, n\}$, se tiene

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k(l_0) R_k^{(j)}(z_{l_0}) = 0, \quad j \in \{1, \dots, n\}.$$

Por construcción, este sistema tiene una solución, es decir, el determinante de el sistema es cero, entonces $Q(z_{l_0}) = 0$. Debido a la arbitrariedad del nodo de interpolación z_{l_0} , se tiene que

$$Q(z_1) = \dots = Q(z_N) = 0.$$

Estas igualdades, junto con (1.4.12) y (1.4.13), implican que $Q(z) \equiv 0$ lo cual contradice al lema 1.4.1. \square

Teorema 1.4.3. *Sea $n \geq 2$. Cualquier elemento \mathbf{p} de $\mathbb{S}(n, N)$, puede ser reescrito en la forma*

$$\mathbf{p} = \sum_{j=1}^n S_j \mathbf{r}_j,$$

donde S_j es un polinomio escalar y \mathbf{r}_j es el j -ésimo generador del problema de interpolación ($j \in \{1, \dots, n\}$).

Demostración. Para $j \in \{2, \dots, n\}$, se consideran los conjuntos

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_j &:= \{m \in \mathbb{N} : m = h(\mathbf{r}_k) + nl + 1, \text{ donde } k < j \text{ y } l \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}, \\ \mathcal{A}_1 &:= \{1, 2, \dots, h(\mathbf{r}_1)\}, \\ \mathcal{A}_j &:= \{h(\mathbf{r}_{j-1}) + 1, \dots, h(\mathbf{r}_j)\} \setminus \mathcal{B}_j. \end{aligned} \quad (1.4.14)$$

Ahora, se define la sucesión $\{\mathbf{g}_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ como sigue

$$\mathbf{g}_k(z) := \begin{cases} \mathbf{e}_k(z) & \text{para } k \in \cup_{j=1}^n \mathcal{A}_j, \\ z^l \mathbf{r}_j(z) & \text{para } k = h(\mathbf{r}_j) + nl + 1, \end{cases}$$

donde \mathbf{e}_k está dado en (1.1.3). Se nota que $h(\mathbf{g}_k) = k - 1$. Por lo tanto, por teorema 1.1.1, se tiene que $\{\mathbf{g}_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ es una base en \mathbb{P} . Así, cualquier $\mathbf{p} \in \mathbb{S}(n, N)$ puede ser reescrito como

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= \sum_{j \in \mathbb{N}} c_j \mathbf{g}_j \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{k \in \mathcal{A}_j} c_k \mathbf{e}_k + \sum_{j=1}^n S_j \mathbf{r}_j, \end{aligned} \quad (1.4.15)$$

donde S_j es un polinomio escalar. Debido a que \mathbf{p} y $\sum_{j=0}^{n-1} S_j \mathbf{r}_j$ están en $\mathbb{S}(n, N)$, se tiene que

$$\sum_{j=1}^n \sum_{k \in \mathcal{A}_j} c_k \mathbf{e}_k \quad (1.4.16)$$

está en $\mathbb{S}(n, N)$.

Se mostrará que (1.4.16) es una solución trivial. Se supone lo contrario, que (1.4.16) es no trivial, es decir, existe $k \in \cup_{j=1}^n \mathcal{A}_j$ tal que $c_k \neq 0$. Sea

$$k_0 := \max_{1 \leq j \leq n} \{k \in \mathcal{A}_j : c_k \neq 0\}$$

y \mathcal{A}_{j_0} es tal que $k_0 \in \mathcal{A}_{j_0}$. Por lema 1.1.1 (a) la altura de (1.4.16) es igual a $k_0 - 1$. Por lo tanto, por (1.4.14),

$$h \left(\sum_{j=1}^n \sum_{k \in \mathcal{A}_j} c_k \mathbf{e}_k \right) < h(\mathbf{r}_{j_0})$$

y por construcción,

$$\sum_{j=1}^n \sum_{k \in \mathcal{A}_j} c_k \mathbf{e}_k \notin \mathbb{M}_1 + \cdots + \mathbb{M}_{j_0-1}$$

lo que contradice al lema 1.3.3. □

Capítulo 2

Análisis espectral para matrices en $\mathcal{M}(n, N)$ ($N < \infty$)

Esta sección trata el análisis espectral directo e inverso de una clase de matrices en banda simétricas finitas, con principal énfasis en problemas inversos de caracterización y reconstrucción. Problemas espectrales inversos para matrices en banda han sido ampliamente estudiados en el caso particular de matrices de Jacobi finitas (véase por ejemplo [12–14, 19, 24, 27–29, 41, 42, 44]). Los trabajos que tratan matrices en banda finitas no necesariamente tridiagonales, no son muy abundantes (véase [8, 22, 23, 33, 34, 39, 52, 53]).

Sea \mathcal{H} un espacio de Hilbert de dimensión finita y $\{\delta_k\}_{k=1}^N$ una base ortonormal fija en él. Considere el operador D_j ($j = 0, 1, \dots, n$ con $n < N$), cuya representación matricial con respecto a $\{\delta_k\}_{k=1}^N$ es una matriz diagonal, es decir, $D_j \delta_k = d_k^{(j)} \delta_k$ para todo $k = 1, \dots, N$, donde $d_k^{(j)}$ es un número real. También, sea S el operador de desplazamiento, esto es,

$$S\delta_k = \begin{cases} \delta_{k+1} & k = 1, \dots, N-1 \\ 0 & k = N. \end{cases}$$

El objeto a considerar en esta sección es el operador simétrico

$$A := D_0 + \sum_{j=1}^n S^j D_j + \sum_{j=1}^n D_j (S^*)^j.$$

Por lo tanto, la representación matricial de A con respecto a $\{\delta_k\}_{k=1}^N$ es una matriz en banda Hermitiana la cual es denotada por \mathcal{A} . Al igual que la matriz \mathcal{A} , para cualquier $j \in \{0, \dots, n\}$, se considera la matriz diagonal \mathcal{D}_j , que es la representación matricial del operador D_j con respecto a $\{\delta_k\}_{k=1}^N$.

Se supone que las diagonales satisfacen las siguientes condiciones. La diagonal más alejada a la diagonal principal, que es dada por la matriz diagonal

$\text{diag}\{d_k^{(n)}\}_{k=1}^{N-n}$, denotada por \mathcal{D}_n , es tal que, todos los números $d_1^{(n)}, \dots, d_{m_1-1}^{(n)}$ son estrictamente positivos y $d_{m_1}^{(n)} = \dots = d_{N-n}^{(n)} = 0$ con

$$1 < m_1 < N - n + 1.$$

Puede ocurrir que todos los elementos de la sucesión $\text{diag}\{d_k^{(n)}\}_{k=1}^{N-n}$ son positivos en cuyo caso es conveniente que signifique que $m_1 = N - n + 1$. En este caso, se define $m_j = N - n + j$ para $j = 2, \dots, n$.

Ahora, si $m_1 < N - n + 1$, los elementos $d_{m_1+1}^{(n-1)}, \dots, d_{N-n+1}^{(n-1)}$ de la matriz diagonal \mathcal{D}_{n-1} se comportan de igual forma que los elementos de \mathcal{D}_n , esto es, existe m_2 , que satisfacen

$$m_1 < m_2 < N - n + 2,$$

tal que $d_{m_1+1}^{(n-1)}, \dots, d_{m_2-1}^{(n-1)} > 0$ y $d_{m_2}^{(n-1)} = \dots = d_{N-n+1}^{(n-1)} = 0$. Aquí, también es posible que $m_2 = N - n + 2$ en cuyo caso $d_k^{(n-1)} > 0$ para $k = m_1 + 1, \dots, N - n + 1$ y se define $m_j = N - n + j$ para $j = 3, \dots, n$.

Nosotros continuamos aplicando esta regla hasta algún $j_0 \leq n - 1$ tal que $m_{j_0} < N - n + j_0$ y $m_{j_0+1} = N - n + j_0 + 1$. Finalmente, se define $m_j = N - n + j$ para $j = j_0 + 2, \dots, n$. En general, los elementos de \mathcal{D}_{n-j} satisfacen

$$\begin{aligned} d_{m_j+1}^{(n-j)}, \dots, d_{m_{j+1}-1}^{(n-j)} &> 0, \\ d_{m_j+1}^{(n-j)} &= \dots = d_{N-n+j}^{(n-j)} = 0 \end{aligned} \quad (2.0.1)$$

para $j = 0, \dots, j_0 - 1$, con $m_0 = 0$. Y cuando $m_{j+1} = m_j + 1$, entonces no existen elementos de la diagonal que satisfagan (2.0.1). Los elementos de \mathcal{D}_{n-j_0} satisfacen

$$d_{m_{j_0+1}}^{(n-j_0)}, \dots, d_{N-n+j_0}^{(n-j_0)} > 0.$$

Se dice que la diagonal \mathcal{D}_{n-j} sufre una degeneración en m_{j+1} para $j \in \{0, \dots, j_0 - 1\}$. Cuando $j_0 = 0$, no existe degeneración de la diagonal \mathcal{D}_n . Note que \mathcal{D}_2 es la diagonal más interior donde una degeneración puede ocurrir. Observe además, que en todos los casos, se tiene el conjunto $\{m_1, \dots, m_n\}$.

Definición 2.0.1. Fijando los números naturales n y N tal que $n < N$. Todas las matrices que satisfacen las propiedades anteriores para un conjunto de números dados $\{m_i\}_{i=1}^n$ son denotados por $\mathcal{M}(n, N)$. Note que en esta notación, N representa la dimensión y $2n + 1$ es el número de diagonales de las matrices.

Un ejemplo de una matriz en $\mathcal{M}(3, 7)$, cuando $m_1 = 3$, $m_2 = 5$ y $m_3 = 7$,

es la siguiente.

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} d_1^{(0)} & d_1^{(1)} & d_1^{(2)} & d_1^{(3)} & 0 & 0 & 0 \\ d_1^{(1)} & d_2^{(0)} & d_2^{(1)} & d_2^{(2)} & d_2^{(3)} & 0 & 0 \\ d_1^{(2)} & d_2^{(1)} & d_3^{(0)} & d_3^{(1)} & d_3^{(2)} & 0 & 0 \\ d_1^{(3)} & d_2^{(2)} & d_3^{(1)} & d_4^{(0)} & d_4^{(1)} & d_4^{(2)} & 0 \\ 0 & d_2^{(3)} & d_3^{(2)} & d_4^{(1)} & d_5^{(0)} & d_5^{(1)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_4^{(2)} & d_5^{(1)} & d_6^{(0)} & d_6^{(1)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_6^{(1)} & d_7^{(0)} \end{pmatrix}.$$

Aquí se dice que la matriz \mathcal{A} sufre una degeneración de la diagonal \mathcal{D}_3 en $m_1 = 3$ y una degeneración de \mathcal{D}_2 en $m_2 = 5$. Observe que $j_0 = 2$.

Es conocido que la dinámica de un sistema lineal de masas y resortes finito es caracterizado por las propiedades espectrales de una matriz finita de Jacobi [20, 38] (véase figura 2.1) cuando el sistema está dentro del régimen de validez de la ley de Hooke. Las entradas de la matriz de Jacobi están determinadas por las masas y las constantes de elasticidad del sistema [14–16, 20, 38]. El movimiento del sistema mecánico de figura 2.1 es una superposición de oscilaciones armónicas cuyas frecuencias son las raíces cuadradas del valor absoluto de los elementos del espectro del operador de Jacobi. Análogamente, se puede deducir

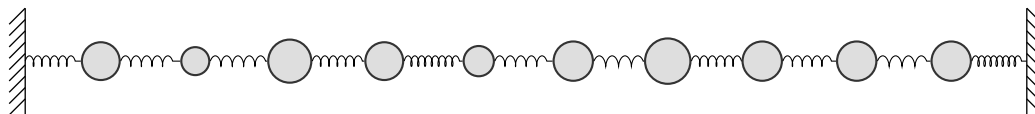


Figura 2.1: Sistema de masas y resortes que corresponde a una matriz de Jacobi

que una matriz en $\mathcal{M}(n, N)$ modela un sistema lineal de masas y resortes donde la interacción se extiende a todos los $2n$ vecinos inmediatos de cada masa (véase sección 2.5). Por ejemplo, si la matriz está en $\mathcal{M}(2, 10)$ y no sufre ninguna degeneración, esto es, $m_1 = 9$, el correspondiente sistema de masas y resortes está dado en Fig. 2.2. Si para otra matriz en $\mathcal{M}(2, 10)$, se tiene degeneración

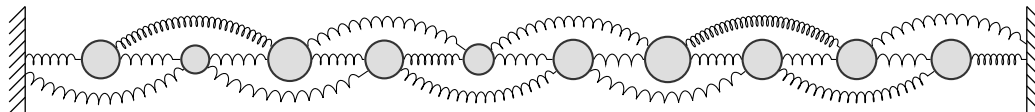


Figura 2.2: Sistema de masas y resortes de una matriz en $\mathcal{M}(2, 10)$: caso no degenerado

en las diagonales, por ejemplo $m_1 = 4$, el correspondiente sistema de masas y resortes está dado en Fig. 2.3.

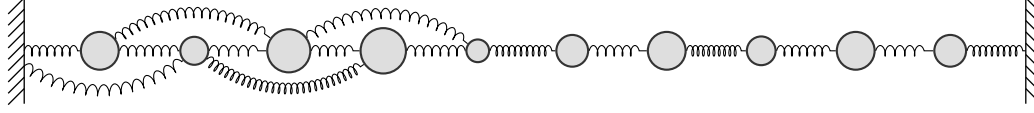


Figura 2.3: Sistema de masas y resortes de una matriz en $\mathcal{M}(2, 10)$: caso degenerado

En este capítulo, el enfoque a usar para el análisis espectral de operadores cuya representación matricial pertenece a $\mathcal{M}(n, N)$ está basado en el usado en [33,34], éste permite tratar el caso arbitrario para cualquier n . Un importante ingrediente de los métodos usados aquí es la interpolación lineal de polinomios vectoriales de dimensión n , desarrollado en capítulo 1 y basado en [37]. La teoría de interpolación lineal del capítulo 1 es una generalización no trivial de la teoría de interpolación racional desarrollada en [22] con ideas de [33,34]. Éstas son las bases de la teoría de interpolación lineal para que los resultados de [33, 34] sean extendidos a matrices en banda con $2n + 1$ diagonales. Es importante aclarar que las técnicas usadas en la reconstrucción de matrices en $\mathcal{M}(n, N)$, han sido modificadas ya que la generalización del caso $n = 2$ al arbitrario n no se puede obtener directamente. Por otra parte, en contraste a [33,34], la clase de matrices $\mathcal{M}(n, N)$ se ha hecho más pequeño que el que se considera en [33,34], con el fin de lidiar con la unicidad de la reconstrucción sobre estas matrices. Finalmente, se hace notar que el problema espectral inverso para un sistema de masas y resortes (véase Fig. 2.3) es estudiado en este capítulo y una solución físicamente significativa es probada para un caso especial.

Es sabido que si existe un número natural K tal que $N = Kn$, entonces una matriz en banda con $2n + 1$ diagonales puede reducirse a una matriz tridiagonal por bloques. Sin embargo, la teoría espectral para matrices tridiagonales por bloques requiere que las matrices por bloques fuera de la diagonal principal sean invertibles. Las matrices en $\mathcal{M}(n, N)$ no satisfacen estos requerimientos cuando existe una degeneración de las diagonales. Las técnicas para recuperar una matriz de su función espectral desarrollada en este capítulo, es aplicable a cualquier elemento en $\mathcal{M}(n, N)$ aún y cuando N no es un múltiplo entero de n .

Este capítulo es organizado como sigue. La siguiente sección trata el el análisis espectral directo de los operadores bajo las consideraciones mencionadas. En esa sección, una familia de funciones espectrales es construida para cada elemento en $\mathcal{M}(n, N)$. En sección 2.2, se establece la conexión del análisis espectral y el problema de interpolación. La sección 2.3 aborda el problema de reconstrucción y caracterización. En sección 2.4 se discuten enfoques alternativos para el problema espectral inverso y se da un análisis comparativo con el método dado

en sección 2.3. La sección 2.5 da una breve reseña de cómo deducir la matriz simétrica en banda asociado a un sistema de masas y resortes a partir de las ecuaciones de la dinámica del sistema.

2.1. La Función espectral

Considere $\varphi = \sum_{k=1}^N \varphi_k \delta_k \in \mathcal{H}$ y la ecuación

$$(A - zI)\varphi = 0, \quad z \in \mathbb{C}. \quad (2.1.1)$$

Se sabe que la ecuación tiene una solución no trivial sólo para un conjunto finito de z .

De (2.1.1) se obtiene un sistema de N ecuaciones, donde cada ecuación, dada por un fijo $k \in \{1, \dots, N\}$, es de la forma

$$\sum_{i=0}^{n-1} d_{k-n+i}^{(n-i)} \varphi_{k-n+i} + d_k^{(0)} \varphi_k + \sum_{i=1}^n d_k^{(i)} \varphi_{k+i} = z \varphi_k, \quad (2.1.2)$$

donde se supone que

$$\varphi_k = 0, \quad \text{para } k < 1, \quad (2.1.3a)$$

$$\varphi_k = 0, \quad \text{para } k > N. \quad (2.1.3b)$$

Se puede considerar (2.1.3) como condiciones a la frontera donde (2.1.3a) es la condición del tipo extremo izquierdo y (2.1.3b) es la condición del tipo extremo derecho.

El sistema (2.1.2) y (2.1.3a) restringido a $k \in \{1, 2, \dots, N\} \setminus \{m_i\}_{i=1}^n$ puede ser resuelto recursivamente siempre que las primeras n entradas del vector φ sean dadas. Sea $\varphi^{(j)}(z)$ ($j \in \{1, \dots, n\}$) una solución de (2.1.2) para todo $k \in \{1, 2, \dots, N\} \setminus \{m_i\}_{i=1}^n$ tal que

$$\langle \delta_i, \varphi^{(j)}(z) \rangle = t_{ji}, \quad \text{para } i = 1, \dots, n, \quad (2.1.4)$$

donde $\mathcal{T} = \{t_{ji}\}_{j,i=1}^n$ es una matriz triangular superior con entradas reales y $t_{jj} \neq 0$ para todo $j \in \{1, \dots, n\}$. En (2.1.4) y durante el desarrollo del texto, se considera que el producto interno en \mathcal{H} es antilineal en su primer argumento.

La condición dada por (2.1.4) puede ser vista como las condiciones iniciales para el sistema (2.1.2) y (2.1.3). Se hace énfasis que dada la condición a la frontera del tipo extremo izquierdo (2.1.3a) y la condición inicial (2.1.4), el sistema restringido a $k \in \{1, 2, \dots, N\} \setminus \{m_i\}_{i=1}^n$ tiene una única solución para cualquier fijo $j \in \{1, \dots, n\}$ y $z \in \mathbb{C}$.

Observación 2.1.1. Note que las propiedades de la matriz \mathcal{T} garantizan que la colección de vectores $\{\varphi^{(j)}(z)\}_{j=1}^n$ es un sistema fundamental de soluciones de (2.1.2) restringido a $k \in \{1, 2, \dots, N\} \setminus \{m_i\}_{i=1}^n$ con condiciones a la frontera (2.1.3a).

Las entradas del vector $\varphi^{(j)}(z)$ son polinomios, de modo que se denota $P_k^{(j)}(z) := \varphi_k^{(j)}(z)$, para todo $k \in \{1, \dots, N\}$. Además, se define

$$Q_i^{(j)}(z) := (z - d_{m_i}^{(0)})P_{m_i}^{(j)}(z) - \sum_{k=0}^{n-1} d_{m_i-n+k}^{(n-k)} P_{m_i-n+k}^{(j)}(z) - \sum_{k=1}^{n-i} d_{m_i}^{(k)} P_{m_i+k}^{(j)}(z)$$

para $i \in \{1, \dots, n\}$ (se supone que la última suma es cero cuando $i = n$).

Es importante notar que los polinomios $\{P_k^{(j)}(z)\}_{k=1}^N$ y $\{Q_i^{(j)}(z)\}_{i=1}^n$ dependen de la condiciones iniciales dada por la matriz \mathcal{T} .

Se define la matriz

$$\mathcal{Q}(z) := \begin{pmatrix} Q_1^{(1)}(z) & \dots & Q_1^{(n)}(z) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Q_n^{(1)}(z) & \dots & Q_n^{(n)}(z) \end{pmatrix}.$$

Se sigue que para cualquier z donde existe una solución de (2.1.1), existe además una solución de la ecuación homogénea

$$\mathcal{Q}(z) \begin{pmatrix} \beta_1(z) \\ \vdots \\ \beta_n(z) \end{pmatrix} = 0. \quad (2.1.5)$$

En efecto, ya que $\{\varphi^{(j)}(z)\}_{j=1}^n$ es un sistema fundamental para cualquier $z \in \mathbb{C}$, el vector $\beta(z)$, dado por

$$\beta(z) = \sum_{j=1}^n \beta_j(z) \varphi^{(j)}(z), \quad (2.1.6)$$

es una solución de (2.1.2), (2.1.3a). Así, usando las ecuaciones en diferencias (2.1.2), se verifica que

$$(A - zI)\beta(z) = \sum_{k=1}^N c_k(z) \delta_k,$$

donde

$$c_k(z) := \begin{cases} \sum_{j=1}^n \beta_j(z) Q_i^{(j)}(z) & \text{si } k = m_i, \text{ para todo } i = 1, \dots, n, \\ 0 & \text{de otra manera.} \end{cases}$$

Por lo tanto, (2.1.6) es una solución de (2.1.1) si

$$\sum_{j=1}^n \beta_j(z) Q_i^{(j)}(z) = 0 \quad (2.1.7)$$

para todo $i \in \{1, \dots, n\}$, el cual es equivalente para (2.1.5).

Lema 2.1.1. *Sea $\tilde{n}(z) := \dim \ker(A - zI)$. Entonces,*

$$\text{rank}(\mathcal{Q}(z)) = n - \tilde{n}(z).$$

Observe que $\tilde{n}(z) \leq n$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

Demostración. La prueba es sencilla. Fijando $z \in \mathbb{C}$, se recurre al teorema de Kronecker-Capelli-Rouché (véase [30, cap. 3 secs. 1-2]) para obtener que la dimensión del espacio de soluciones de (2.1.5) es igual a $n - \text{rank}(\mathcal{Q}(z))$. \square

Inmediatamente del lema 2.1.1 se sigue que

$$\text{spec}(A) = \{z \in \mathbb{C} : \det \mathcal{Q}(z) = 0\}.$$

Fijando $j \in \{1, \dots, n\}$. Para una solución $\varphi^{(j)}(z_0)$ de (2.1.1), la ecuación

$$Q_i^{(j)}(z_0) = 0, \quad (2.1.8)$$

se debe satisfacer para cualquier $i \in \{1, \dots, n\}$. Las condiciones (2.1.8) pueden verse como condiciones de fronteras internas (de tipo extremo derecho) para la ecuación en diferencias (2.1.2). Note que la degeneración de la diagonales da lugar a condiciones de frontera internas.

Sea $\{x_k\}_{k=1}^N$ una sucesión real tal que $x_k \in \text{spec}(A)$ y los elementos de esta sucesión ha sido enumerada tomando en cuenta la multiplicidad de los autovalores. También, sea $\alpha(x_k)$ el correspondiente autovector tal que

$$\langle \alpha(x_k), \alpha(x_l) \rangle = \delta_{kl}, \text{ con } k, l \in \{1, \dots, N\}.$$

Se sigue de observación 2.1.1 que

$$\alpha(x_k) = \sum_{j=1}^n \alpha_j(x_k) \varphi^{(j)}(x_k) \quad (2.1.9)$$

para cualquier $k \in \{1, \dots, N\}$. Claramente, por construcción

$$\sum_{j=1}^n |\alpha_j(x_k)| > 0 \quad \text{para todo } k \in \{1, \dots, N\}. \quad (2.1.10)$$

Note además que debido a que $\{\alpha(x_k)\}_{k=1}^N$ es una base de \mathcal{H} , se sigue de (2.1.4) que

$$\sum_{k=1}^N |\alpha_j(x_k)| > 0 \quad \text{para todo } j \in \{1, \dots, n\}. \quad (2.1.11)$$

Por (2.1.7) y del hecho que $\alpha(x_k) \in \ker(A - x_k I)$, se sigue que

$$\sum_{j=1}^n \alpha_j(x_k) Q_i^{(j)}(x_k) = 0 \quad \text{para todo } i \in \{1, \dots, n\} \quad (2.1.12)$$

es cierto.

Ahora, se define la función con valores matriciales

$$\sigma(t) := \sum_{x_k < t} \sigma_k, \quad (2.1.13)$$

donde

$$\sigma_k = \begin{pmatrix} \frac{|\alpha_1(x_k)|^2}{\alpha_2(x_k)\alpha_1(x_k)} & \overline{\alpha_1(x_k)}\alpha_2(x_k) & \dots & \overline{\alpha_1(x_k)}\alpha_n(x_k) \\ \alpha_2(x_k)\alpha_1(x_k) & |\alpha_2(x_k)|^2 & \dots & \alpha_2(x_k)\alpha_n(x_k) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{\alpha_n(x_k)}\alpha_1(x_k) & \overline{\alpha_n(x_k)}\alpha_2(x_k) & \dots & |\alpha_n(x_k)|^2 \end{pmatrix} \quad (2.1.14)$$

es una matriz no negativa de rango uno (compare con [33, sec. 1]). Note que $\sigma(t) = \sigma^\mathcal{T}(t)$ depende de las condiciones iniciales dadas por $\mathcal{J}(t)$.

Observación 2.1.2. La función con valores matriciales $\sigma(t)$ tiene las siguientes propiedades:

- a) Es una función escalón, monótona no decreciente.
- b) Cada salto es una matriz de rango no mayor que n .
- c) La suma de los rangos de todos los saltos es igual a N , es decir, la dimensión del espacio \mathcal{H} .

Para cualquier función con valores matriciales $\sigma(t)$ que satisfacen las propiedades a)-c), existe una colección de vectores $\{\alpha(x_k)\}_{k=1}^N$ que satisfacen (2.1.10) tal que $\sigma(t)$ está dada por (2.1.13) y (2.1.14) (compare con [33, teo. 2.2]).

Si $\mathcal{T} = I$, entonces $\sigma_{ij}(t) = \langle \delta_i, E(t)\delta_j \rangle$ ($i, j \in \{1, \dots, n\}$) donde $E(t)$ es la resolución espectral de A . En efecto,

$$\begin{aligned} \langle \delta_i, E(t)\delta_j \rangle &= \left\langle \delta_i, \sum_{x_l < t} \langle \alpha(x_l), \delta_j \rangle \alpha(x_l) \right\rangle = \sum_{x_l < t} \langle \alpha(x_l), \delta_j \rangle \langle \delta_i, \alpha(x_l) \rangle \\ &= \sum_{x_l < t} \overline{\alpha_j(x_l)} \alpha_i(x_l) = \sigma_{ij}(t). \end{aligned}$$

Por lo tanto, en este caso, la función con valores matriciales $\sigma(t)$ es la función espectral de A con respecto a δ_i, δ_j ($i, j = 1, \dots, n$).

Definición 2.1.1. El conjunto de todas las funciones con valores matriciales $\sigma(t)$ dadas por (2.1.13) y (2.1.14), donde la colección de vectores $\{\alpha(x_k)\}_{k=1}^N$ satisfacen (2.1.10) y (2.1.11), es denotado por $\mathfrak{M}(n, N)$.

Nótese que las funciones con valores matriciales en $\mathfrak{M}(n, N)$ satisfacen a), b) y c) de observación 2.1.2.

Se considera el espacio de Hilbert $L_2(\mathbb{R}, \sigma)$, donde σ es la correspondiente función espectral del operador A dado por (2.1.13) y (2.1.14) (véase [2, sec. 72]). Suponiendo que el producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_{L_2(\mathbb{R}, \sigma)}$ es antilineal en su primer argumento. Claramente, el inciso c) de la observación 2.1.2 implica que $L_2(\mathbb{R}, \sigma)$ es un espacio de dimensión N y en cada clase de equivalencia existe un polinomio vectorial de dimensión n . Defínase el polinomio vectorial en $L_2(\mathbb{R}, \sigma)$

$$\mathbf{q}_i(z) := (Q_i^{(1)}(z), \dots, Q_i^{(n)}(z))^t \quad (2.1.15)$$

para todo $i \in \{1, \dots, n\}$, y

$$\mathbf{p}_k(z) := (P_k^{(1)}(z), \dots, P_k^{(n)}(z))^t \quad (2.1.16)$$

para todo $k \in \{1, \dots, N\}$.

Lema 2.1.2. Los polinomios vectoriales $\{\mathbf{p}_k(z)\}_{k=1}^N$, definidos por (2.1.16), satisfacen

$$\langle \mathbf{p}_j, \mathbf{p}_k \rangle_{L_2(\mathbb{R}, \sigma)} = \delta_{jk}$$

para $j, k \in \{1, \dots, N\}$.

Demostración.

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{p}_j, \mathbf{p}_k \rangle_{L_2(\mathbb{R}, \sigma)} &= \sum_{l=1}^N \langle \mathbf{p}_j(x_l), \sigma_l \mathbf{p}_k(x_l) \rangle \\
&= \sum_{l=1}^N \overline{\left(\sum_{s=1}^n \alpha_s(x_l) P_j^{(s)}(x_l) \right)} \sum_{s=1}^n \alpha_s(x_l) P_k^{(s)}(x_l) \\
&= \sum_{l=1}^N \langle \delta_j, \alpha(x_l) \rangle \langle \alpha(x_l), \delta_k \rangle = \delta_{jk},
\end{aligned}$$

donde se ha usado que $\delta_l = \sum_{i=1}^n \langle \alpha(x_i), \delta_l \rangle \alpha(x_i)$. \square

Sea $U : \mathcal{H} \rightarrow L_2(\mathbb{R}, \sigma)$ una isometría dada por $U\delta_k \mapsto \mathbf{p}_k$, para todo $k \in \{1, \dots, N\}$. Bajo esta isometría, el operador A se convierte en el operador de multiplicación por la variable independiente en $L_2(\mathbb{R}, \sigma)$. En efecto,

$$\begin{aligned}
\langle \delta_k, A\delta_j \rangle &= \left\langle \sum_{l=1}^N \langle \alpha(x_l), \delta_k \rangle \alpha(x_l), A \sum_{s=1}^N \langle \alpha(x_s), \delta_j \rangle \alpha(x_s) \right\rangle \\
&= \sum_{l=1}^N \langle \delta_k, \alpha(x_l) \rangle \left\langle \alpha(x_l), \sum_{s=1}^N x_s \langle \alpha(x_s), \delta_j \rangle \alpha(x_s) \right\rangle \\
&= \sum_{l=1}^N \langle \delta_k, \alpha(x_l) \rangle x_l \langle \alpha(x_l), \delta_j \rangle \\
&= \langle \mathbf{p}_k, t\mathbf{p}_j \rangle.
\end{aligned}$$

Si la matriz \mathcal{T} en (2.1.4) resulta ser la matriz identidad, esto es, $\mathcal{T} = I$, entonces puede mostrarse que U^{-1} es el correspondiente isomorfismo para la representación canónica del operador A [2, sec. 75], es decir,

$$\delta_k = U^{-1} \mathbf{p}_k = \sum_{j=1}^n P_k^{(j)}(A) \delta_j$$

para todo $k \in \{1, \dots, N\}$.

Observación 2.1.3. La representación matricial del operador de multiplicación en $L_2(\mathbb{R}, \sigma)$ con respecto a la base $\{\mathbf{p}_1(z), \dots, \mathbf{p}_N(z)\}$ es nuevamente la matriz \mathcal{A} . Así

$$\sum_{i=0}^{n-1} d_{k-n+i}^{(n-i)} \mathbf{p}_{k-n+i}(z) + d_k^{(0)} \mathbf{p}_k(z) + \sum_{i=1}^n d_k^{(i)} \mathbf{p}_{k+i}(z) = z \mathbf{p}_k(z), \quad (2.1.17)$$

para $k = 1, \dots, N$ donde se supone que $\mathbf{p}_k = 0$ siempre que $k < 1$. Además se

verifica que

$$\mathbf{q}_j(z) = (z - d_{m_j}^{(0)})\mathbf{p}_{m_j}(z) - \sum_{i=0}^{n-1} d_{m_j-n+i}^{(n-i)}\mathbf{p}_{m_j-n+i}(z) - \sum_{i=1}^{n-j} d_{m_j}^{(i)}\mathbf{p}_{m_j+i}(z) \quad (2.1.18)$$

para todo $j \in \{1, \dots, n\}$, donde la última sumando se anula cuando $j = n$.

La relación entre las funciones espectrales $\sigma^{\mathcal{T}} = \sigma$ y σ^I para una \mathcal{T} arbitraria, está dada por el siguiente lema.

Lema 2.1.3. *Fijando un número natural $N > n$. Para cualquier matriz triangular superior de $n \times n$ sin ceros en la diagonal principal \mathcal{T} , la función espectral $\sigma^{\mathcal{T}}$ dada en (2.1.13) satisface*

$$\mathcal{T}^* \sigma^{\mathcal{T}} \mathcal{T} = \sigma^I.$$

Demostración. Sea \mathcal{T} una matriz triangular superior de $n \times n$. Entonces, por (2.1.9) se tiene

$$\langle \delta_j, \alpha(x_l) \rangle_{\mathbb{C}^N} = \sum_{i=1}^j \alpha_i(x_l) t_{ij}, \quad \forall j \in \{1, \dots, n\}.$$

Ahora, para el caso particular, cuando $\mathcal{T} = I$, se considera

$$\sigma^I(t; i, j) = \sum_{x_l < t} \overline{\alpha'_i(x_l)} \alpha'_j(x_l).$$

Por lo tanto, $\langle \delta_j, \alpha(x_l) \rangle_{\mathbb{C}^N} = \alpha'_j(x_l)$ y

$$\sigma^I(t; i, j) = \sum_{x_l < t} \sum_{k=1}^i \overline{\alpha_k(x_l) t_{ki}} \sum_{s=1}^j \alpha_s(x_l) t_{ks}. \quad (2.1.19)$$

Por otro lado, observe que

$$\mathcal{T}^* \begin{pmatrix} \overline{\alpha_1(x_l)} \\ \vdots \\ \overline{\alpha_n(x_l)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{\alpha_1(x_l) t_{11}} \\ \overline{\sum_{k=1}^2 \alpha_k(x_l) t_{k2}} \\ \vdots \\ \overline{\sum_{k=1}^n \alpha_k(x_l) t_{kn}} \end{pmatrix},$$

así por (2.1.19) se tiene

$$\sigma^I(t; i, j) = (\mathcal{T}^* \sigma^{\mathcal{T}} \mathcal{T})(t; i, j).$$

□

Una consecuencia inmediata del lema es la siguiente afirmación.

Corolario 2.1.1. *Fijando $N > n$. Para cualquier matriz triangular superior de $n \times n$ \mathcal{T} sin ceros en la diagonal principal, se tiene que*

$$\mathcal{T}^* \int_{\mathbb{R}} d\sigma^{\mathcal{T}} \mathcal{T} = \int_{\mathbb{R}} d\sigma^I = I.$$

2.2. Conexión con el problema de interpolación lineal

Motivado por (2.1.12), se considera el problema de interpolación presentado en el capítulo anterior. Dada una colección de números complejos $\{z_k\}_{k=1}^N$ y $\{\alpha_j(k)\}_{j=1}^n$ ($k = 1, \dots, N$), se trata de encontrar el polinomio escalar $R_j(z)$ ($j = 1, \dots, n$) el cual satisface la ecuación

$$\sum_{j=1}^n \alpha_j(k) R_j(z_k) = 0, \quad \forall k \in \{1, \dots, N\}. \quad (2.2.1)$$

Los polinomios que satisfacen (2.2.1) serán la solución del problema de interpolación y los números $\{z_k\}_{k=1}^N$ son llamados nodos de interpolación.

En el capítulo anterior se mostró que el estudio de (2.2.1) es equivalente a estudiar la ecuación

$$\langle \mathbf{r}(z_k), \sigma_k \mathbf{r}(z_k) \rangle_{\mathbb{C}^n} = 0 \quad (2.2.2)$$

para $k = 1, \dots, N$, donde $\mathbf{r}(z)$ es un polinomio vectorial de dimensión n no trivial (véase (1.3.2)).

Ahora, se aplican los resultados obtenidos en el capítulo 1 al análisis espectral del operador A . Para este fin, se considera la solución de (2.1.12) como elementos de $\mathbb{S}(\{\sigma_k\}_{k=1}^N, \{x_k\}_{k=1}^N)$ (véase definición 1.3.1), donde σ_k está dado por (2.1.14).

Lema 2.2.1. *Fijando $j \in \{1, \dots, n\}$ y sea $\{x_k\}_{k=1}^N = \text{spec } A$, donde $\{x_k\}_{k=1}^N$ está enumerado tomando en cuenta la multiplicidad de los autovalores. Si $\mathbf{q}_j(z)$ es el polinomio vectorial dado en (2.1.15), entonces*

$$\mathbf{q}_j(z) \in \mathbb{S}(\{\sigma_k\}_{k=1}^N, \{x_k\}_{k=1}^N).$$

Demostración. La afirmación se sigue de comparar (2.1.7) con (2.1.12). \square

De este lema, tomando en cuenta la definición del producto interior en $L_2(\mathbb{R}, \sigma)$ (véase la demostración de lema 2.1.2) y definición 1.3.1, se llega a la siguiente afirmación.

Corolario 2.2.1. *Para todo $j \in \{1, \dots, n\}$ el polinomio vectorial $\mathbf{q}_j(z)$ está en la clase de equivalencia del cero en $L_2(\mathbb{R}, \sigma)$, esto es,*

$$\langle \mathbf{q}_j, \mathbf{q}_j \rangle_{L_2(\mathbb{R}, \sigma)} = 0$$

y para todo $\mathbf{r} \in L_2(\mathbb{R}, \sigma)$,

$$\langle \mathbf{r}, \mathbf{q}_j \rangle_{L_2(\mathbb{R}, \sigma)} = 0. \quad (2.2.3)$$

Lema 2.2.2. *Fijando $k \in \{1, \dots, N\}$.*

a) *Si $m_j < k < m_{j+1}$, con $j = 0, \dots, n-1$ y $m_0 = 0$, entonces*

$$h(\mathbf{p}_{k+n-j}) = n + h(\mathbf{p}_k).$$

b) *Si no existe degeneración de las diagonales, se tiene*

$$h(\mathbf{p}_k) = k - 1, \quad \text{para todo } k \in \{1, \dots, N\}.$$

c) *Para cualquier $i \in \{1, \dots, N\}$ y $j \in \{1, \dots, n\}$, lo siguiente es cierto*

$$h(\mathbf{p}_i) \neq h(\mathbf{p}_{m_j}) + n = h(\mathbf{q}_j).$$

Demostración. a) Las alturas de los polinomios vectoriales $\{\mathbf{p}_k\}_{k=n+1}^N$ están determinadas recursivamente por medio del sistema (2.1.17). Así por definición 2.0.1, cualquier $m_j < k < m_{j+1}$, con $j = 0, \dots, n-1$, se tiene la ecuación

$$\cdots + d_k^{(0)} \mathbf{p}_k + d_k^{(1)} \mathbf{p}_{k+1} + \cdots + d_k^{(n-j)} \mathbf{p}_{k+n-j} = z \mathbf{p}_k.$$

Ya que $d_k^{(n-j)}$ nunca se anula, las alturas de \mathbf{p}_{k+n-j} coincide con la de $z \mathbf{p}_k$, esto implica la afirmación.

b) Cuando no existe degeneraciones de las diagonales, entonces $m_1 = N - n + 1$. Así, las alturas de los vectores polinomiales $\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N$ están determinadas por a) con $j = 0$.

c) La afirmación se sigue de las ecuaciones en recurrencias (2.1.17) y (2.1.18). \square

Lema 2.2.3. *Para cualquier entero no negativo s , existe $k \in \{1, \dots, N\}$ ó un par $j \in \{1, \dots, n\}$ y $l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que $s = h(\mathbf{p}_k)$ o bien $s = h(\mathbf{q}_j) + nl$.*

Demostración. Debido a lema 2.2.2 a, se sigue de (2.1.4) y (2.1.16) que

$$h(\mathbf{p}_k) = k - 1 \quad \text{para } k = 1, \dots, h(\mathbf{q}_1). \quad (2.2.4)$$

Suponiendo que existe $s \in \mathbb{N}$ ($s > n$) tal que $s \neq h(\mathbf{p}_k)$ para todo $k \in \{1, \dots, N\}$ y $s \neq h(\mathbf{q}_j) + nl$ para todo $j \in \{1, \dots, n\}$ y $l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Sea \hat{l} un entero tal que $s - n\hat{l} \in \{h(\mathbf{p}_k)\}_{k=1}^N \cup \{h(\mathbf{q}_j) + nl\}$ ($j \in \{1, \dots, n\}$ y $l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$). Existe siempre un entero debido a (3.1.10) y del hecho que $h(\mathbf{q}_1) > n$ (véase lema 2.2.2 c)). Se toma a \hat{l}_0 como el mínimo de todos los \hat{l} 's. Por lo tanto, existe $k_0 \in \{1, \dots, N\}$ o bien $j_0 \in \{1, \dots, n\}$, respectivamente, tal que

a) $s - n\hat{l}_0 = h(\mathbf{p}_{k_0})$ o bien

b) $s - n\hat{l}_0 = h(\mathbf{q}_{j_0}) + nl$, con $l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

En el caso a) se prueba que \hat{l}_0 no es el mínimo entero, esto implica la afirmación del lema. En efecto, si existe un $j \in \{1, \dots, n\}$ tal que $k_0 = m_j$, entonces $s - n\hat{l}_0 + n = h(\mathbf{p}_{m_{j_0}}) + n = h(\mathbf{q}_{j_0})$ debido a c) del lema 2.2.2. Si no existe tal j , entonces $m_j < k_0 < m_{j+1}$ y lema 2.2.2c) implica $s - n\hat{l}_0 + n = h(\mathbf{p}_{k_0}) + n = h(\mathbf{p}_{k_0+n-j})$.

En el caso b), si $s - n\hat{l}_0 = h(\mathbf{q}_{j_0}) + nl$, entonces $s = h(\mathbf{q}_{j_0}) + n(l + \hat{l}_0)$ que es una contradicción. \square

Como una consecuencia del teorema 1.1.1, el lema anterior genera el siguiente resultado.

Corolario 2.2.2. *Cualquier polinomio vectorial $\mathbf{r}(z)$ es una combinación lineal finita de*

$$\{\mathbf{p}_k(z) : k \in \{1, \dots, N\}\} \cup \{z^l \mathbf{q}_j(z) : l \in \mathbb{N}, j \in \{1, \dots, n\}\}. \quad (2.2.5)$$

Teorema 2.2.1. *El polinomio vectorial $\mathbf{q}_j(z)$ es un j -generador de*

$$\mathbb{S}(\{\sigma_k\}_{k=1}^N, \{x_k\}_{k=1}^N)$$

para todo $j \in \{1, \dots, n\}$ (véase definición 1.3.4).

Demostración. Para cualquier fijo $j \in \{1, \dots, n\}$, se supone que existe un elemento $\mathbf{r}(z) \in \mathbb{S}(\{\sigma_k\}_{k=1}^N, \{x_k\}_{k=1}^N) \setminus (\mathbb{M}(\mathbf{q}_1) \dot{+} \dots \dot{+} \mathbb{M}(\mathbf{q}_{j-1}))$, donde $\mathbf{q}_0(z) := 0$ tal que $h(\mathbf{q}_{j-1}) < h(\mathbf{r}) < h(\mathbf{q}_j)$. Escribiendo \mathbf{r} como corolario 2.2.2, entonces por corolario 2.2.1,

$$0 = \langle \mathbf{r}, \mathbf{r} \rangle_{L_2(\mathbb{R}, \sigma)} = \left\langle \sum_{k=1}^N c_k \mathbf{p}_k, \sum_{k=1}^N c_k \mathbf{p}_k \right\rangle_{L_2(\mathbb{R}, \sigma)} = \sum_{k=1}^N |c_k|^2.$$

Esto implica que $c_k = 0$ para todo $k \in \{1, \dots, N\}$. Sucesivamente, otra vez por corolario 2.2.2, se tiene

$$\mathbf{r}(z) \in \mathbb{M}(\mathbf{q}_1) \dot{+} \dots \dot{+} \mathbb{M}(\mathbf{q}_{j-1})$$

para $j > 1$, y $\mathbf{r}(z) \equiv 0$ para $j = 1$. Esta contradicción implica que $\mathbf{q}_j(z)$ satisface la definición de j -generador para cualquier $j \in \{1, \dots, n\}$. \square

La siguiente afirmación es una consecuencia directa del teorema 2.2.1, teorema 1.4.2 y la observación 1.4.1.

Corolario 2.2.3. *Sea $\{\mathbf{q}_1(z), \dots, \mathbf{q}_n(z)\}$ los vectores polinomiales de dimensión n definidos por (2.1.15). Entonces, $h(\mathbf{q}_1), \dots, h(\mathbf{q}_n)$ son diferentes elementos de las clases de equivalencia del espacio factor $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Además,*

$$\sum_{j=1}^n h(\mathbf{q}_j) = Nn + \frac{n(n-1)}{2}.$$

2.3. Reconstrucción

En esta sección, se toma como punto inicial una función con valores matriciales $\tilde{\sigma} \in \mathfrak{M}(n, N)$ y se construye una matriz \mathcal{A} en $\mathcal{M}(n, N)$ a partir de esta función. Además, se verifica que, para alguna matriz \mathcal{T} dada como condición inicial, la función σ generada por la matriz \mathcal{A} (véase sección 2.1) coincide con $\tilde{\sigma}$. Así, los resultados de esta sección muestran que cualquier, matriz en $\mathcal{M}(n, N)$ puede ser reconstruida de su función en $\mathfrak{M}(n, N)$.

Sea $\tilde{\sigma}(t)$ una matriz con valores matriciales $\mathfrak{M}(n, N)$. Entonces, se puede asociar un problema de interpolación (2.2.1) que es equivalente a (2.2.2) (con $\tilde{\sigma}_k$ en lugar de σ_k). Por lo tanto, por teorema 1.4.3, existen n generadores $\tilde{\mathbf{q}}_1(z), \dots, \tilde{\mathbf{q}}_n(z)$ de $\mathbb{S}(\{\tilde{\sigma}_k\}_{k=1}^N, \{\tilde{z}_k\}_{k=1}^N)$.

Sea $\{\mathbf{e}_i(z)\}_{i \in \mathbb{N}}$ una sucesión de polinomios vectoriales de dimensión n definidos por

$$\mathbf{e}_{nk+1}(z) := \begin{pmatrix} z^k \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_{nk+2}(z) := \begin{pmatrix} 0 \\ z^k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \mathbf{e}_{n(k+1)}(z) := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ z^k \end{pmatrix}. \quad (2.3.1)$$

Claramente, $h(\mathbf{e}_i) = i - 1$. En el espacio de Hilbert $L_2(\mathbb{R}, \tilde{\sigma})$, se le aplica el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt a la sucesión $\{\mathbf{e}_i(z)\}_{i \in \mathbb{N}}$. Supóngase que $\tilde{\mathbf{q}}_1$ es el primer generador del correspondiente problema de interpolación

y $\{\tilde{\mathbf{p}}_k\}_{k=1}^{h(\tilde{\mathbf{q}}_1)}$ los polinomios vectoriales ortonormalizados de las $h(\tilde{\mathbf{q}}_1)$ primeras iteraciones del proceso de Gram-Schmidt. Por lo tanto, si se define

$$\mathbf{s} := \mathbf{e}_{h(\tilde{\mathbf{q}}_1)+1} - \sum_{i=1}^{h(\tilde{\mathbf{q}}_1)} \langle \tilde{\mathbf{p}}_i, \mathbf{e}_{h(\tilde{\mathbf{q}}_1)+1} \rangle \tilde{\mathbf{p}}_i,$$

entonces, en vista del hecho que $h(\tilde{\mathbf{p}}_k) = k - 1$ para $k = 1, \dots, h(\tilde{\mathbf{q}}_1)$, se tiene $\mathbf{e}_{h(\tilde{\mathbf{q}}_1)+1} = c\tilde{\mathbf{q}}_1 + \sum_{i=1}^{h(\tilde{\mathbf{q}}_1)} c_i \tilde{\mathbf{p}}_i$ que a la vez conduce a

$$\mathbf{s} = c\tilde{\mathbf{q}}_1 + \sum_{k=1}^{h(\tilde{\mathbf{q}}_1)} \tilde{c}_k \tilde{\mathbf{p}}_k. \quad (2.3.2)$$

Esto implica que $\|\mathbf{s}\|_{L_2(\mathbb{R}, \tilde{\sigma})} = 0$ ya que $\langle \mathbf{s}, \tilde{\mathbf{q}}_1 \rangle_{L_2(\mathbb{R}, \tilde{\sigma})}$ y $\mathbf{s} \perp \tilde{\mathbf{p}}_k$ para $k = 1, \dots, h(\tilde{\mathbf{q}}_1)$. Se continua con el proceso tomando el siguiente vector de la sucesión (2.3.1). Note que si $\tilde{\mathbf{p}}_k$ es un elemento normalizado dado por el proceso de Gram-Schmidt, la siguiente iteración *completa* genera un vector normalizado $\tilde{\mathbf{p}}_{k+1}$. Observe que si la técnica de Gram-Schmidt produce un polinomio vectorial \mathbf{q} de norma cero y altura h , entonces para cualquier entero l , el polinomio vectorial \mathbf{t} que es obtenido con la $h + 1 + nl$ -ésima iteración del proceso de Gram-Schmidt, esto es,

$$\mathbf{t} = \mathbf{e}_{h+1+nl} - \sum_{h(\tilde{\mathbf{p}}_i) < h+nl} \langle \tilde{\mathbf{p}}_i, \mathbf{e}_{h+1+nl} \rangle \tilde{\mathbf{p}}_i,$$

satisface que $\|\mathbf{t}\|_{L_2(\mathbb{R}, \tilde{\sigma})} = 0$ (para todo $l \in \mathbb{N}$), debido al hecho que

$$\mathbf{e}_{h+1+nl} = R_l \mathbf{q} + \sum_{h(\tilde{\mathbf{p}}_i) < h+1+nl} c_i \tilde{\mathbf{p}}_i + \sum_{h(\mathbf{r}_i) < h+1+nl} \mathbf{r}_i,$$

donde R_l es un polinomio escalar con grado l y cada \mathbf{r}_i es un polinomio vectorial de norma cero con $h(\mathbf{r}_i) \neq h + nk$.

Ya que $L_2(\mathbb{R}, \tilde{\sigma})$ tiene dimensión N , entonces uno obtiene del algoritmo de Gram-Schmidt una sucesión ortonormalizada $\{\tilde{\mathbf{p}}_k\}_{k=1}^N$. Además, los ceros encontrados por las iteraciones fallidas produce todos los generadores $\{\tilde{\mathbf{q}}_i\}_{i=1}^n$ del problema de interpolación dado por $\tilde{\sigma}$ y también polinomios en $\mathbb{S}(\{\tilde{\sigma}_k\}_{k=1}^N, \{\tilde{z}_k\}_{k=1}^N)$ tal que sus alturas son de la forma $h(\tilde{\mathbf{q}}_i) + nl$ con $i \in \{1, \dots, n\}$ y $l \in \mathbb{N}$.

Observación 2.3.1. Si se interesa sólo en las alturas de los polinomios vectoriales $\tilde{\mathbf{p}}_N$ y $\tilde{\mathbf{q}}_n$ entonces se puede detener el proceso de Gram-Schmidt cuando $\tilde{\mathbf{q}}_{n-1}$ aparece y así usar corolario 2.2.3.

Del hecho que

$$h \left(\mathbf{e}_k - \sum_{h(\mathbf{p}_i) < k-1} \langle \tilde{\mathbf{p}}_i, \mathbf{e}_k \rangle \tilde{\mathbf{p}}_i \right) = h(\mathbf{e}_k), \quad (2.3.3)$$

se concluye que las alturas del conjunto $\{\mathbf{p}_k(z)\}_{k=1}^N \cup \{z^l \mathbf{q}_i(z)\}_{i=1}^n$ ($l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$) están en correspondencia uno a uno con el conjunto $\mathbb{N} \cup \{0\}$. Por lo tanto, debido a la teorema 1.1.1, se puede escribir cualquier polinomio vectorial \mathbf{r} de dimensión n como

$$\mathbf{r}(z) = \sum_{k=1}^N c_k \mathbf{p}_k(z) + \sum_{j=1}^n S_j(z) \mathbf{q}_j(z),$$

donde $c_k \in \mathbb{C}$, $S_j(z)$ son polinomios escalares. Además, $c_k = 0$ si $h(\mathbf{r}) > h(\mathbf{p}_k)$, respectivamente, $S_j(z) = 0$ si $h(\mathbf{r}) > h(\mathbf{q}_j)$. En particular, para $k \in \{1, \dots, N\}$,

$$z \tilde{\mathbf{p}}_k(z) = \sum_{l=1}^N c_{kl} \tilde{\mathbf{p}}_l(z) + \sum_{j=1}^n S_{kj}(z) \tilde{\mathbf{q}}_j(z), \quad (2.3.4)$$

donde $c_{kl} \in \mathbb{C}$ y $S_{kj}(z)$ es un polinomio escalar.

Observación 2.3.2. En (2.3.4), es cierto que

- a) $c_{kl} = 0$ si $h(z \tilde{\mathbf{p}}_k) < h(\tilde{\mathbf{p}}_l)$,
- b) $S_{kj}(z) = 0$ si $h(z \tilde{\mathbf{p}}_k) < h(S_{kj}(z) \tilde{\mathbf{q}}_j)$,
- c) $c_{kl} > 0$ si existe $l \in \mathbb{N}$ tal que $h(z \tilde{\mathbf{p}}_k) = h(\tilde{\mathbf{p}}_l)$.

Los incisos a) y b) son obtenidos de comparar las alturas del lado derecho e izquierdo de (2.3.4). En inciso c), se tiene que tomar en cuenta que el primer coeficiente de \mathbf{e}_k es positivo para $k \in \mathbb{N}$ y por lo tanto el proceso de Gram-Schmidt genera la sucesión $\{\tilde{\mathbf{p}}_k\}_{k=1}^N$ cuyos elementos tienen el primer coeficiente positivo.

Observación 2.3.3. Para $k = 1, \dots, h(\tilde{\mathbf{q}}_1)$. Se tiene que

$$h(\tilde{\mathbf{p}}_k) = k - 1,$$

y para $k > h(\tilde{\mathbf{q}}_1)$

$$h(\tilde{\mathbf{p}}_k) = k - 1 + b_k,$$

donde b_k es el número de elementos en el conjunto $\mathbb{M}(\tilde{\mathbf{q}}_1) \dot{+} \dots \dot{+} \mathbb{M}(\tilde{\mathbf{q}}_n)$ que se obtuvieron del proceso de Gram-Schmidt y cuyas alturas son menores que

$h(\tilde{\mathbf{p}}_k)$. Observe que $b_k < b_{n+k}$, que a su vez implica

$$h(\tilde{\mathbf{p}}_{n+k}) > h(\tilde{\mathbf{p}}_k) + n. \quad (2.3.5)$$

Por lo tanto, si se toma el producto interno de (2.3.4) con $\tilde{\mathbf{p}}_l(z)$ en $L_2(\mathbb{R}, \tilde{\sigma})$, se obtiene

$$c_{lk} = \langle \tilde{\mathbf{p}}_l, z\tilde{\mathbf{p}}_k \rangle_{L_2(\mathbb{R}, \tilde{\sigma})} = \langle z\tilde{\mathbf{p}}_l, \tilde{\mathbf{p}}_k \rangle_{L_2(\mathbb{R}, \tilde{\sigma})} = c_{kl}, \quad (2.3.6)$$

donde (2.2.3) ha sido usado. Entonces, la matriz $\{c_{lk}\}_{l,k=1}^N$ es simétrica y ésta es la representación matricial del operador de multiplicación por la variable independiente en $L_2(\mathbb{R}, \tilde{\sigma})$ con respecto a la base $\{\tilde{\mathbf{p}}_k(z)\}_{k=1}^N$.

Los siguientes resultados aclaran la estructura de la matriz $\{c_{lk}\}_{l,k=1}^N$.

Lema 2.3.1. *Si $|l - k| > n$. Entonces,*

$$c_{kl} = c_{lk} = 0.$$

Demostración. Para $l - k > n$, se obtiene a partir de (2.3.5) que $h(\tilde{\mathbf{p}}_l) > h(\tilde{\mathbf{p}}_{k+n}) \geq h(\tilde{\mathbf{p}}_k) + n = h(z\tilde{\mathbf{p}}_k)$. Por lo tanto, de observación 2.3.2 a)

$$c_{lk} = \langle \tilde{\mathbf{p}}_l, z\tilde{\mathbf{p}}_k \rangle_{L_2(\mathbb{R}, \tilde{\sigma})} = 0.$$

Y similarmente pasa para $k - l > n$. □

Lema 2.3.1 muestra que $\{c_{lk}\}_{l,k=1}^N$ es una matriz en banda. Regresando a la pregunta de caracterización de las diagonales de $\{c_{lk}\}_{l,k=1}^N$. Se verá que éstas sufren el tipo de degeneración dada al inicio del capítulo.

Para un número fijo $i \in \{0, \dots, n\}$, se definen los números

$$d_k^{(i)} := c_{k+i,k} = c_{k,k+i} \quad (2.3.7)$$

para $k = 1, \dots, N - i$.

Lema 2.3.2. *Fijando $j \in \{0, \dots, n - 1\}$.*

a) *Si k es tal que $h(\tilde{\mathbf{q}}_j) < h(z\tilde{\mathbf{p}}_k) < h(\tilde{\mathbf{q}}_{j+1})$, entonces $d_k^{(n-j)} > 0$. Aquí se supone que $h(\mathbf{q}_0) := n - 1$.*

b) *Si k es tal que $h(z\tilde{\mathbf{p}}_k) \geq h(\tilde{\mathbf{q}}_{j+1})$, se tiene que $d_k^{(n-j)} = 0$.*

Demostración. Fijando el número $j \in \{0, \dots, n - 1\}$, entonces cualquier polinomio vectorial de la base $\{\tilde{\mathbf{p}}_k(z)\}_{k=1}^N$ satisface ya sea

$$h(\tilde{\mathbf{q}}_j) < h(z\tilde{\mathbf{p}}_k) < h(\tilde{\mathbf{q}}_{j+1}) \quad (2.3.8)$$

o bien

$$h(z\tilde{\mathbf{p}}_k) \geq h(\tilde{\mathbf{q}}_{j+1}). \quad (2.3.9)$$

Suponiendo que $k \in \{1, \dots, N\}$ es tal que (2.3.8) es válido, entonces existe $l \in \{1, \dots, N\}$ tal que

$$h(\tilde{\mathbf{p}}_l) = h(\tilde{\mathbf{p}}_k) + n = h(z\tilde{\mathbf{p}}_k).$$

En efecto, si no existe un polinomio vectorial $\tilde{\mathbf{p}}_l(z)$ tal que $h(\tilde{\mathbf{p}}_l) = h(z\tilde{\mathbf{p}}_k)$, entonces $h(z\tilde{\mathbf{p}}_k) = h(z^s\tilde{\mathbf{q}}_i)$ para algún $i \leq j$ y $s \geq 1$. Por lo tanto $h(\tilde{\mathbf{p}}_k) = h(z^{s-1}\tilde{\mathbf{q}}_i)$, lo cual contradice el hecho que las alturas del conjunto $\{\tilde{\mathbf{p}}_k\}_{k=1}^N \cup \{z^l\tilde{\mathbf{q}}_j\}_{j=1}^n$ ($l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$) están en correspondencia uno a uno con el conjunto $\mathbb{N} \cup \{0\}$. Sea f_k el número de elementos de la sucesión de polinomios vectoriales $\{z^l\tilde{\mathbf{q}}_j\}_{j=1}^n$ ($l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$) cuyas alturas están entre $h(\tilde{\mathbf{p}}_k)$ y $h(\tilde{\mathbf{p}}_k) + n$. Si se supone que (2.3.8) es válido, entonces

$$f_k = j. \quad (2.3.10)$$

Esto es así porque existen $n - 1$ “lugares” entre $h(\tilde{\mathbf{p}}_k)$ y $h(\tilde{\mathbf{p}}_k) + n$ y además, para cada generador $\tilde{\mathbf{q}}_j(z)$ ($j \in \{1, \dots, n\}$) las alturas de los elementos de $\mathbb{M}(\tilde{\mathbf{q}}_j)$ caen en la misma clase de equivalencia de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ (véase observación 1.4.1). Por (2.3.10), se tiene

$$h(z\tilde{\mathbf{p}}_k) = h(\tilde{\mathbf{p}}_k) + n = h(\tilde{\mathbf{p}}_{k+n-f_k}) = h(\tilde{\mathbf{p}}_{k+n-j}).$$

Por lo tanto, la observación 2.3.2 c) implica que $d_k^{(n-j)} > 0$.

Ahora, se supone que (2.3.9) tiene lugar. En este caso, se verifica que

$$f_k \geq j + 1. \quad (2.3.11)$$

Sea \tilde{f}_k el número de elementos en $\{\tilde{\mathbf{p}}_k(z)\}_{k=1}^N$ cuyas alturas están entre $h(\tilde{\mathbf{p}}_k)$ y $h(\tilde{\mathbf{p}}_k) + n$. Entonces

$$h(\tilde{\mathbf{p}}_{k+\tilde{f}_k}) < h(\tilde{\mathbf{p}}_k) + n \leq h(\tilde{\mathbf{p}}_{k+\tilde{f}_k+1}).$$

También, se sigue de (2.3.11) y la igualdad $n - 1 = f_k + \tilde{f}_k$ que

$$h(\tilde{\mathbf{p}}_{k+\tilde{f}_k+1}) \leq h(\tilde{\mathbf{p}}_{k+n-j-1}) < h(\tilde{\mathbf{p}}_{k+n-j}).$$

Así, $h(\tilde{\mathbf{p}}_k) + n < h(\tilde{\mathbf{p}}_{k+n-j})$. Lo que implica que $\langle \tilde{\mathbf{p}}_{k+n-1}, z\tilde{\mathbf{p}}_k \rangle_{L_2(\mathbb{R}, \tilde{\sigma})} = 0$, lo cual genera que $d_k^{(n-j)} = 0$ cuando (2.3.9) es válido. \square

Tomando en cuenta (2.3.7), se sigue de lema (2.3.1) y lema (2.3.2) que la matriz $\{c_{kl}\}_{k,l=1}^N$, cuyas entradas están dadas por (2.3.6), está en la clase $\mathcal{M}(n, N)$. Esto es, la representación matricial del operador de multiplicación por la variable independiente en $L_2(\mathbb{R}, \tilde{\sigma})$ con respecto a la base $\{\tilde{\mathbf{p}}_k\}_{k=1}^N$ es una matriz en $\mathcal{M}(n, N)$.

Observación 2.3.4. Debido a que la matriz $\{c_{kl}\}_{k,l=1}^N$ esta en $\mathcal{M}(n, N)$, existen los números $\{m_i\}_{i=1}^n$ asociados a ésta (véase el inicio del capítulo). Estos números pueden encontrarse del lema 2.3.2 el cual dice que una degeneración ocurre cuando existe $k \in \{1, \dots, N\}$ tal que $h(z\tilde{\mathbf{p}}_k) = h(\tilde{\mathbf{q}}_{j+1})$ (esto pasa para cada $j \in \{1, \dots, n-1\}$). Así,

$$h(z\tilde{\mathbf{p}}_{m_j}) = h(\tilde{\mathbf{q}}_j), \quad \forall j \in \{1, \dots, n\}. \quad (2.3.12)$$

Es sencillo verificar que (2.1.11) es equivalente a el hecho que $\mathbf{e}_i(z)$ no está en la clase de equivalencia del cero en $L(\mathbb{R}, \tilde{\sigma})$ para $i \in \{1, \dots, n\}$. Por lo tanto, los primeros n elementos de $\{\tilde{\mathbf{p}}_k(z)\}_{k=1}^N$ son obtenidos aplicando el proceso de Gram-Schmidt a el conjunto $\{\mathbf{e}_i(z)\}_{i=1}^n$. Así, si se define

$$t_{ij} := \langle \delta_i, \tilde{\mathbf{p}}_j \rangle, \quad \forall i, j \in \{1, \dots, n\}, \quad (2.3.13)$$

la matriz $\mathcal{T} = \{t_{ij}\}_{i,j=1}^n$ resulta ser triangular superior. Ahora, para esta matriz \mathcal{T} y \mathcal{A} , de la sección 2.1, se construye una solución $\varphi^{(j)}(z)$ que satisface (2.1.4). De manera que, el polinomio vectorial $\{\mathbf{p}_1(z), \dots, \mathbf{p}_n(z)\}$ definido por (2.1.16) satisface (2.3.13). En otras palabras

$$\mathbf{p}_j(z) = \tilde{\mathbf{p}}_j(z), \quad \forall j \in \{1, \dots, n\}.$$

Así, se considera la ecuación en recurrencias, la cual es obtenida de (2.3.4), tomando en cuenta observación 2.3.2, (2.3.7) y lema 2.3.2. Esto es,

$$\begin{aligned} d_1^{(0)}\tilde{\mathbf{p}}_1 + \dots + d_1^{(n)}\tilde{\mathbf{p}}_{n+1} &= z\tilde{\mathbf{p}}_1 \\ d_1^{(1)}\tilde{\mathbf{p}}_1 + d_2^{(0)}\tilde{\mathbf{p}}_2 + \dots + d_2^{(n)}\tilde{\mathbf{p}}_{n+2} &= z\tilde{\mathbf{p}}_2 \\ &\vdots \\ d_{m_1-1-n}^{(n)}\tilde{\mathbf{p}}_{m_1-1-n} + \dots + d_{m_1-1}^{(0)}\tilde{\mathbf{p}}_{m_1-1} + d_{m_1-1}^{(1)}\tilde{\mathbf{p}}_{m_1} + d_{m_1-1}^{(n)}\tilde{\mathbf{p}}_{m_1-1+n} &= z\tilde{\mathbf{p}}_{m_1-1} \\ \dots + d_{m_1+1}^{(0)}\tilde{\mathbf{p}}_{m_1+1} + d_{m_1+1}^{(1)}\tilde{\mathbf{p}}_{m_1+2} + \dots + d_{m_1+1}^{(n-1)}\tilde{\mathbf{p}}_{m_1+n} + S_{m_1+1,1}\tilde{\mathbf{q}}_1 &= z\tilde{\mathbf{p}}_{m_1+1} \\ &\vdots \\ \dots + d_{m_2-1}^{(0)}\tilde{\mathbf{p}}_{m_2-1} + d_{m_2-1}^{(1)}\tilde{\mathbf{p}}_{m_2} + d_{m_2-1}^{(n-1)}\tilde{\mathbf{p}}_{m_2-2+n} + S_{m_2-1,1}\tilde{\mathbf{q}}_1 &= z\tilde{\mathbf{p}}_{m_2-1} \\ \dots + d_{m_2+1}^{(0)}\tilde{\mathbf{p}}_{m_2+1} + d_{m_2+1}^{(1)}\tilde{\mathbf{p}}_{m_2+2} + \dots + d_{m_2+1}^{(n-2)}\tilde{\mathbf{p}}_{m_2-1+n} + \sum_{i=1}^2 S_{m_2+1,i}\tilde{\mathbf{q}}_i &= z\tilde{\mathbf{p}}_{m_2+1} \\ &\vdots \end{aligned} \quad (2.3.14)$$

Ya que $\mathbf{p}_k(z)$ y $\tilde{\mathbf{p}}_k(z)$ satisfacen la misma ecuación en recurrencias para cualquier $k \in \{1, \dots, m_1 - 1 + n\}$, se tiene

$$\mathbf{p}_k(z) = \tilde{\mathbf{p}}_k(z), \quad \forall k \in \{1, \dots, m_1 - 1 + n\}.$$

Del sistema de ecuaciones (2.3.14), se considera la ecuación que contiene el polinomio vectorial $z\tilde{\mathbf{p}}_{m_1+1}(z)$. Por la comparación de esta ecuación con la correspondiente de (2.1.17), se concluye que

$$\mathbf{p}_{m_1+n}(z) = \tilde{\mathbf{p}}_{m_1+n}(z) + S(z)\tilde{\mathbf{q}}_1(z),$$

donde $S(z)$ es un polinomio escalar, así $S(z)\tilde{\mathbf{q}}_1(z)$ está en la clase de equivalencia del cero de $L_2(\mathbb{R}, \tilde{\sigma})$. Observe que $h(\tilde{\mathbf{p}}_{m_1+n}) > h(S\tilde{\mathbf{q}}_1)$ debido a que en la ecuación que contiene $z\tilde{\mathbf{p}}_{m_1+1}(z)$, $h(\tilde{\mathbf{p}}_{m_1+n}) = h(z\tilde{\mathbf{p}}_{m_1+1})$ y la altura de $z\tilde{\mathbf{p}}_{m_1+1}(z)$, no coincide con la altura de $S(z)\tilde{\mathbf{q}}_1(z)$. Recursivamente, para $k > m_1 + n$, se obtiene el siguiente lema.

Lema 2.3.3. *Los vectores polinomiales $\{\mathbf{p}_k(z)\}_{k=1}^N$ y $\{\tilde{\mathbf{p}}_k(z)\}_{k=1}^N$ definidos anteriormente (véase el texto abajo de (2.3.13) y abajo de (2.3.3), respectivamente) satisfacen que*

$$\mathbf{p}_k(z) = \tilde{\mathbf{p}}_k(z) + \tilde{\mathbf{r}}_k(z) \quad (2.3.15)$$

para todo $k \in \{1, \dots, N\}$, donde $\tilde{\mathbf{r}}_k(z)$ está en la clase de equivalencia del cero $L_2(\mathbb{R}, \tilde{\sigma})$ y $h(\tilde{\mathbf{r}}_k) < h(\mathbf{p}_k)$. Por lo tanto,

$$h(\mathbf{p}_k) = h(\tilde{\mathbf{p}}_k), \quad \forall k \in \{1, \dots, N\}.$$

Por otro lado, para el caso particular $k = m_1$, (2.3.4) y (2.3.12) implican que

$$z\tilde{\mathbf{p}}_{m_1} = d_{m_1-n}^{(n)}\tilde{\mathbf{p}}_{m_1-n} + \dots + d_{m_1}^{(0)}\tilde{\mathbf{p}}_{m_1} + d_{m_1}^{(1)}\tilde{\mathbf{p}}_{m_1+1} + \dots + d_{m_1}^{(n-1)}\tilde{\mathbf{p}}_{m_1+n-1} + \gamma_1\tilde{\mathbf{q}}_1,$$

donde $\gamma_1 \neq 0$.

En general, se verifica que para todo $j \in \{1, \dots, n\}$

$$\begin{aligned} z\tilde{\mathbf{p}}_{m_j} &= d_{m_j-n}^{(n)}\tilde{\mathbf{p}}_{m_j-n} + \dots + d_{m_j}^{(0)}\tilde{\mathbf{p}}_{m_j} + \\ &+ d_{m_j}^{(1)}\tilde{\mathbf{p}}_{m_j+1} + \dots + d_{m_j}^{(n-j)}\tilde{\mathbf{p}}_{m_j+n-j} + \sum_{i<j} S_{m_j,i}\tilde{\mathbf{q}}_i + \gamma_j\tilde{\mathbf{q}}_j, \end{aligned}$$

donde $\gamma_j \neq 0$ y $S_i(z)$ es un polinomio escalar. De manera que,

$$\begin{aligned} \gamma_j\tilde{\mathbf{q}}_j &= \left(z - d_{m_j}^{(0)} \right) \tilde{\mathbf{p}}_{m_j} - \left(d_{m_j-n}^{(n)}\tilde{\mathbf{p}}_{m_j-n} + \dots + d_{m_j-1}^{(1)}\tilde{\mathbf{p}}_{m_j-1} + \right. \\ &\left. + d_{m_j}^{(1)}\tilde{\mathbf{p}}_{m_j+1} + \dots + d_{m_j}^{(n-j)}\tilde{\mathbf{p}}_{m_j+n-j} + \sum_{i<j} S_{m_j,i}\tilde{\mathbf{q}}_i \right) \end{aligned} \quad (2.3.16)$$

para todo $j \in \{1, \dots, n\}$.

Se define el conjunto de polinomios vectoriales $\{\mathbf{q}_1(z), \dots, \mathbf{q}_n(z)\}$ por medio de (2.1.18) mediante $\{\mathbf{p}_1(z), \dots, \mathbf{p}_N(z)\}$, como se hizo en la sección 2.1.

Lema 2.3.4. Sea $\tilde{\mathbf{q}}_j(z)$ el j -generador de $\mathbb{S}(\{\tilde{\sigma}_k\}_{k=1}^N, \{\tilde{x}_k\}_{k=1}^N)$, y $\mathbf{q}_j(z)$ como se definió anteriormente. Entonces $h(\mathbf{q}_j) = h(\tilde{\mathbf{q}}_j)$ para todo $j \in \{1, \dots, n\}$ y

$$\mathbf{q}_j(z) = \sum_{i \leq j} S_i(z) \tilde{\mathbf{q}}_i(z), \quad S_j \neq 0, \quad (2.3.17)$$

donde $S_i(z)$ es un polinomio escalar.

Demostración. Se sigue de (2.1.18), (2.3.15) y (2.3.16) que

$$\mathbf{q}_j(z) = \gamma_j \tilde{\mathbf{q}}_j(z) + \tilde{\mathbf{s}}_j(z), \quad \text{para todo } j \in \{1, \dots, n\}, \quad (2.3.18)$$

donde $\tilde{\mathbf{s}}_j(z)$ está en la clase de equivalencia del cero de $L_2(\mathbb{R}, \tilde{\sigma})$ y su altura es estrictamente menor que la altura de $\tilde{\mathbf{q}}_j(z)$ ya que, debido a (2.3.12), la altura de $\tilde{\mathbf{q}}_j(z)$ es estrictamente mayor que la altura de cualquier otro término en la ecuación con $k = m_j$ del sistema (2.3.4). Así, $h(\mathbf{q}_j) = h(\tilde{\mathbf{q}}_j)$ para todo $j \in \{1, \dots, n\}$.

La ecuación (2.3.18) además muestra que $\mathbf{q}_i(z) \in \mathbb{S}(\{\tilde{\sigma}_k\}_{k=1}^N, \{\tilde{x}_k\}_{k=1}^N)$ y debido a teorema 1.4.3, (2.3.17) se satisface. \square

Lema 2.3.5. Sean $\mathbf{r}(z)$ y $\mathbf{s}(z)$ cualesquiera dos vectores polinomiales de dimensión n . Entonces

$$\langle \mathbf{r}, \mathbf{s} \rangle_{L_2(\mathbb{R}, \sigma)} = \langle \mathbf{r}, \mathbf{s} \rangle_{L_2(\mathbb{R}, \tilde{\sigma})}.$$

Demostración. Por corolario 2.2.2, cualquier polinomio vectorial $\mathbf{r}(z)$ puede escribirse como

$$\mathbf{r}(z) = \sum_{k=1}^N c_k \mathbf{p}_k(z) + \sum_{j=1}^n S_j(z) \mathbf{q}_j(z),$$

donde $c_k = \langle \mathbf{r}, \mathbf{p}_k \rangle_{L_2(\mathbb{R}, \sigma)}$ y $S_j(z)$ son polinomios escalares. Así,

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{r}, \tilde{\mathbf{p}}_k \rangle_{L_2(\mathbb{R}, \tilde{\sigma})} &= \left\langle \sum_{l=1}^N c_l \mathbf{p}_l + \sum_{j=1}^n S_j \mathbf{q}_j, \tilde{\mathbf{p}}_k \right\rangle_{L_2(\mathbb{R}, \tilde{\sigma})} \\ &= \left\langle \sum_{l=1}^N c_l (\tilde{\mathbf{p}}_l + \tilde{\mathbf{r}}_l) + \sum_{j=1}^n S_j \left(\sum_{i \leq j} S_i \tilde{\mathbf{q}}_i \right), \tilde{\mathbf{p}}_k \right\rangle_{L_2(\mathbb{R}, \tilde{\sigma})} \\ &= \left\langle \sum_{l=1}^N c_l \tilde{\mathbf{p}}_l, \tilde{\mathbf{p}}_k \right\rangle_{L_2(\mathbb{R}, \tilde{\sigma})} = c_k. \end{aligned}$$

\square

Para las funciones $\sigma(t)$ y $\tilde{\sigma}(t)$ en $\mathfrak{M}(n, N)$ se consideran los puntos x_k y \tilde{x}_k ,

donde respectivamente, $\sigma(t)$ y $\tilde{\sigma}(t)$ tienen saltos σ_k y $\tilde{\sigma}_k$. Por definición, k toma todos los valores de el conjunto $\{1, \dots, N\}$.

Lema 2.3.6. *Los puntos donde los saltos de las matrices $\sigma(t)$ y $\tilde{\sigma}(t)$ tienen lugar, coinciden. Es decir,*

$$x_k = \tilde{x}_k, \quad \text{para todo } k \in \{1, \dots, N\}.$$

Demostración. Se define el polinomio vectorial de dimensión n

$$\mathbf{r}(z) := \prod_{l=1}^N (z - x_l) \mathbf{e}_1(z)$$

(véase (2.3.1)). Por lo tanto,

$$\langle \mathbf{r}, \mathbf{r} \rangle_{L_2(\mathbb{R}, \sigma)} = \sum_{k=1}^N \langle \mathbf{r}(x_k), \sigma_k \mathbf{r}(x_k) \rangle_{\mathbb{C}^n} = 0.$$

Ahora, si uno supone que $\{\tilde{x}_k\}_{k=1}^N \setminus \{x_k\}_{k=1}^N \neq \emptyset$, entonces

$$\langle \mathbf{r}, \mathbf{r} \rangle_{L_2(\mathbb{R}, \tilde{\sigma})} = \sum_{k=1}^N \langle \mathbf{r}(\tilde{x}_k), \tilde{\sigma}_k \mathbf{r}(\tilde{x}_k) \rangle_{\mathbb{C}^n} > 0$$

debido a (2.1.11). En vista del lema 2.3.5 la hipótesis ha dado lugar a una contradicción, así $\{\tilde{x}_k\}_{k=1}^N \subset \{x_k\}_{k=1}^N$. Análogamente, se prueba que $\{x_k\}_{k=1}^N \subset \{\tilde{x}_k\}_{k=1}^N$. \square

Lema 2.3.7. *Los saltos de las matrices con valores matriciales $\sigma(t)$ y $\tilde{\sigma}(t)$ coinciden, esto es, para todo $k \in \{1, \dots, N\}$,*

$$\sigma_k = \tilde{\sigma}_k.$$

Demostración. Se define, para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, el polinomio vectorial de dimensión n

$$\mathbf{r}_{ki}(z) := \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^N (z - x_l) \mathbf{e}_i(z).$$

Entonces, para todo $i, j \in \{1, \dots, n\}$,

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{r}_{ki}, \mathbf{r}_{kj} \rangle_{L_2(\mathbb{R}, \sigma)} &= \sum_{s=1}^N \langle \mathbf{r}_{ki}(x_s), \sigma_s \mathbf{r}_{kj}(x_s) \rangle_{\mathbb{C}^n} = \sum_{s=1}^N \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^N |(x_s - x_l)|^2 \overline{\alpha_i(x_s)} \alpha_j(x_s) \\ &= \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^N |x_k - x_l|^2 \overline{\alpha_i(x_k)} \alpha_j(x_k). \end{aligned}$$

Análogamente,

$$\langle \mathbf{r}_{ki}, \mathbf{r}_{kj} \rangle_{L_2(\mathbb{R}, \tilde{\sigma})} = \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^N |x_k - x_l|^2 \overline{\tilde{\alpha}_i(x_k)} \tilde{\alpha}_j(x_k),$$

donde lema 2.3.6 ha sido usado junto con el hecho que los números $\tilde{\alpha}_i(x_k)$ definen las entradas de la matriz $\tilde{\sigma}_k$ (véase (2.1.14)). Por lo tanto, por lema 2.3.5

$$\sigma_k = \tilde{\sigma}_k, \quad \text{para todo } k \in \{1, \dots, N\}.$$

□

Así, con la ayuda de los resultados anteriores, se puede afirmar el siguiente teorema.

Teorema 2.3.1. *Sea $\tilde{\sigma}(t)$ un elemento de $\mathfrak{M}(n, N)$ y $\{c_{kl}\}_{k,l=1}^N \in \mathcal{M}(n, N)$ la correspondiente matriz que se obtiene de aplicar el método de reconstrucción a la matriz con valores matriciales $\tilde{\sigma}(t)$. Si A es el operador cuya representación matricial con respecto a la base $\{\delta_1, \dots, \delta_N\}$ en \mathcal{H} , es $\{c_{kl}\}_{k,l=1}^N$, entonces existe una matriz triangular superior \mathcal{T} tal que la correspondiente función espectral $\sigma(t)$ del operador A coincide con $\tilde{\sigma}(t)$.*

Observación 2.3.5. Sea \mathcal{A} en $\mathcal{M}(n, N)$ y A el correspondiente operador. Se denota por V_θ al operador unitario cuya representación matricial con respecto a la base canónica es $\text{diag}\{e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_N}\}$ con $\theta_k \in (0, 2\pi)$ para cualquier $k \in \{1, \dots, N\}$.

Se define

$$B = V_\theta A V_\theta^*. \quad (2.3.19)$$

Por el hecho que (2.0.1) es válido, la representación matricial de B está en $\mathcal{M}(n, N)$ si y solo si $\theta_k = 0$ para todo $k \in \{1, \dots, N\}$. Así, en la familia de matrices unitariamente equivalentes al operador (2.3.19), existe sólo un elemento en $\mathcal{M}(n, N)$.

Sobre la base de la observación anterior, el teorema 2.3.1 puede ser parafraseado como sigue: la función espectral de una matriz en $\mathcal{M}(n, N)$ determina de

forma única la misma matriz. En otras palabras, una matriz en $\mathcal{M}(n, N)$ puede ser reconstruida a partir de su función espectral.

2.4. Otros métodos espectrales inversos

Para matrices de Jacobi existen dos caminos de reconstruir la matriz a partir de la función espectral ρ . El primero está basado en el hecho de que la sucesión de polinomios ortogonales, construido vía la aplicación del proceso de Gram-Schmidt a la sucesión de funciones $\{t^{k-1}\}_{k=1}^{\infty}$ en $L_2(\mathbb{R}, \rho)$, determina las entradas de la matriz (véase [1, cap. 1, sec. 1 y cap. 4 sec. 2] y [47, sec. 1]). El segundo método usa el comportamiento asintótico de la función m -Weyl correspondiente a ρ , generando las entradas de la matriz [19, sec. 3]. En el caso de matrices tridiagonales por bloques, existen dos métodos en los cuales se trabajan con ciertas restricciones. En efecto, se considera una matriz finita, tridiagonal por bloques

$$\begin{pmatrix} Q_1 & B_1^* & 0 & \cdots & 0 \\ B_1 & Q_2 & B_2^* & \ddots & \vdots \\ 0 & B_2 & Q_3 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & B_{N/n-1}^* \\ 0 & \dots & 0 & B_{N/n-1} & Q_{N/n} \end{pmatrix}, \quad (2.4.1)$$

donde B_k son invertibles. De acuerdo a [7, cap.7 sec. 2.8], se recuperan las entradas de las matrices $Q_1, \dots, Q_{N/n}$ y $B_1, \dots, B_{N/n-1}$ a partir de una función con entradas matriciales obtenida de la función espectral. Éste corresponde al primer método mencionado anteriormente. Existe también un análogo al segundo método que está basado en la función $M(z)$ dado por [7, cap. 7 ec. 2.63] que satisface

$$M(z)^{-1} = Q_1 - zI - B_1 \widetilde{M}(z) B_1^*, \quad (2.4.2)$$

donde $\widetilde{M}(z)$ es la función dada por [7, cap.7 ec. 2.63] para la matriz tridiagonal por bloques obtenida a partir de (2.4.1) eliminando la primer fila y columna por bloques. La ecuación (2.4.2) es la análoga por bloques de [19, ec. 2.15]. Sobre el comportamiento asintótico de $\widetilde{M}(z)$, se encuentra Q_1 y $B_1 B_1^*$ a partir de (2.4.2). Ya que, en este contexto, la matriz B_1 es triangular superior con diagonal principal positiva, se puede obtener las entradas B_1 a partir $B_1 B_1^*$. Es posible encontrar las siguientes entradas de la matriz considerando (2.4.2) para la siguiente matriz truncada.

Cualquier matriz de la clase $\mathcal{M}(n, N)$ puede escribirse como (2.4.1) siempre y cuando $N/n = K$. Note que si una matriz en $\mathcal{M}(n, N)$ sufre degeneración, entonces existe k_0 tal que B_k no es invertible para todo $k = k_0, \dots, K - 1$. Entonces, los métodos citados anteriormente pueden ser usados para el análisis espectral inverso de los elementos en $\mathcal{M}(n, N)$ que no sufren degeneración y

que $N/n \in \mathbb{N}$.

El procedimiento desarrollado en sección 2.3 es aplicable a toda la clase $\mathcal{M}(n, N)$, lo cual muestra que es más general que los métodos descritos anteriormente. En la técnica de reconstrucción de la sección 2.3, degeneraciones pueden ser tratadas sobre la base de las soluciones del problema de interpolación lineal para polinomios vectoriales de dimensión n .

2.5. Sistema de masas y resortes

Esta sección describe brevemente cómo las leyes de movimiento de Newton y la ley de Hooke generan una ecuación en diferencias finita que puede ser escrita por una matriz simétrica en banda.

Considere el sistema finito de masas y resortes dado por la figura 2.4, donde se supone que N es par.

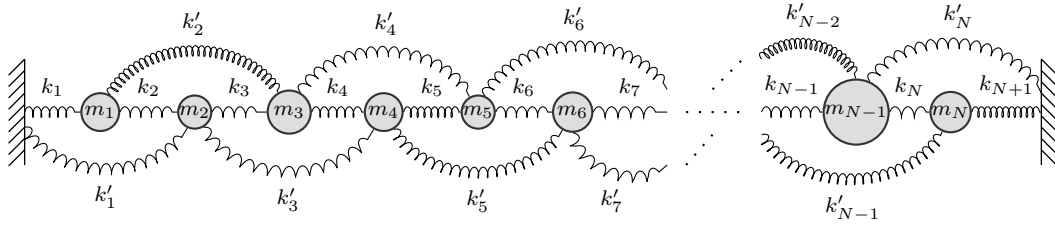


Figura 2.4: Sistema de masas y resortes de una matriz en $\mathcal{M}(2, N)$

En figura 2.4, m_j , k_j y k'_j se consideran la j -ésima masa, la j -ésima constante de elasticidad que conecta las masas inmediatas y la j -ésima constante de elasticidad que conecta las masas separadas por una de estas masas, respectivamente.

Debido a la ley de Hooke, las fuerzas F_i que actúan sobre las masas m_i están dadas por

$$F_i = k'_{i+1}x_{i+2} + k_{i+1}x_{i+1} + (k_{i+1} + k'_{i+1} + k_i + k'_{i-1})x_i + k_ix_{i-1} + k'_{i-1}x_{i-2}$$

El sistema de ecuaciones, debido a la segunda ley de Newton, puede escribirse como

$$M\ddot{x} = Kx, \quad (2.5.1)$$

donde

$$M = \begin{pmatrix} m_1 & & & & & \\ & m_2 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & m_N & \end{pmatrix} \quad K = \begin{pmatrix} \alpha_1 & k_2 & k'_2 & 0 & \dots & 0 \\ k_2 & \alpha_2 & k_3 & k'_3 & \dots & 0 \\ k'_2 & k_3 & \alpha_3 & k_4 & \ddots & 0 \\ 0 & k'_3 & k_4 & \alpha_4 & & k'_{N-1} \\ \vdots & & \ddots & & \ddots & k_N \\ 0 & \dots & 0 & k'_{N-1} & k_N & \alpha_N \end{pmatrix}$$

con $\alpha_i = -(k_{i+1} + k'_{i+1} + k_i + k'_{i-1})$. El sistema (2.5.1) es equivalente a $\ddot{U} = LU$, donde $U = M^{1/2}X$ y

$$L = M^{-1/2}KM^{-1/2} = \begin{pmatrix} \frac{\alpha_1}{m_1} & \frac{k_2}{\sqrt{m_1 m_2}} & \frac{k'_2}{\sqrt{m_1 m_3}} & 0 & \dots & 0 \\ \frac{k_2}{\sqrt{m_1 m_2}} & \frac{\alpha_2}{m_2} & \frac{k_3}{\sqrt{m_2 m_3}} & \frac{k'_3}{\sqrt{m_2 m_4}} & \dots & 0 \\ \frac{k'_2}{\sqrt{m_1 m_3}} & \frac{k_3}{\sqrt{m_2 m_3}} & \frac{\alpha_3}{m_3} & \frac{k_4}{\sqrt{m_3 m_4}} & \ddots & 0 \\ 0 & \frac{k'_3}{\sqrt{m_2 m_4}} & \frac{k_4}{\sqrt{m_3 m_4}} & \frac{\alpha_4}{m_4} & & \frac{k'_{N-1}}{\sqrt{m_{N-2} m_N}} \\ \vdots & & \ddots & & \ddots & \frac{k_N}{\sqrt{m_{N-1} m_N}} \\ 0 & \dots & 0 & \frac{k'_{N-1}}{\sqrt{m_{N-2} m_N}} & \frac{k_N}{\sqrt{m_{N-1} m_N}} & \frac{\alpha_N}{m_N} \end{pmatrix}$$

Entonces, de acuerdo a nuestra notación, las diagonales están dadas por

$$d_j^{(0)} = \frac{k_{j+1} + k'_{j+1} + k_j + k'_{j-1}}{m_j} \quad (2.5.2)$$

$$d_j^{(1)} = \frac{k_{j+1}}{\sqrt{m_{j+1} m_j}} \quad (2.5.3)$$

$$d_j^{(2)} = \frac{k'_{j+1}}{\sqrt{m_{j+2} m_j}}. \quad (2.5.4)$$

Los autovalores de esta matriz determinan las frecuencias del oscilador armónico cuya superposición genera el movimiento del sistema mecánico.

Para matrices de Jacobi, esto es, cuando las masas están conectadas sólo con su masa vecina inmediata, es posible dar una fracción continua que se obtiene de los cocientes k_j/m_j para cualquier j a partir del cociente k_1/m_1 [16, obs. 11] (véase además [38, pág. 76]). Esta reconstrucción tiene sentido físico. En el caso general, uno puede construir las siguientes fracciones continuas a partir de (2.5.2), (2.5.3) y (2.5.4). Note que las primeras ecuaciones pueden ser reducidas a las fracciones continuas de [16, obs. 11] cuando $k'_j = 0$ para todo $j = 1, \dots, N$.

$$\begin{aligned}
\frac{k_{j+1} + k'_j}{m_{j+1}} &= \frac{\left(d_j^{(1)}\right)^2 + \sqrt{\frac{m_{j+2}}{m_{j+1}}} d_j^{(1)} d_j^{(2)} + \sqrt{\frac{m_{j-1}}{m_j}} d_{j-1}^{(2)} d_j^{(1)} + \sqrt{\frac{m_{j-1} m_{j+2}}{m_{j+1} m_j}} d_j^{(2)} d_{j-1}^{(2)}}{d_j^{(0)} + \frac{k_j + k'_{j-1}}{m_j}} \\
&= \frac{\left(d_j^{(1)}\right)^2 + \frac{k'_{j+1}}{k_{j+1}} \left(d_j^{(1)}\right)^2 + \frac{k_{j-1}}{k'_{j-1}} \frac{d_j^{(1)} d_{j-1}^{(2)} d_{j-2}^{(2)}}{d_{j-2}^{(1)}} + \frac{k'_{j+1} k_{j-1}}{k_{j+1} k'_{j-1}} \frac{d_j^{(1)} d_{j-1}^{(2)} d_{j-2}^{(2)}}{d_{j-2}^{(1)}}}{d_j^{(0)} + \frac{k_j + k'_{j-1}}{m_j}}.
\end{aligned}$$

Capítulo 3

Análisis espectral para matrices en $\mathcal{M}(n, \infty)$

En el presente capítulo, se estudia lo mismo que en el capítulo anterior a diferencia que ahora se hace para el caso de las matrices infinitas, esto es, el análisis espectral directo e inverso de una clase de matrices en banda simétrica infinitas, este análisis es llevado con énfasis en los problemas de caracterización y reconstrucción. Las matrices a considerar y definidas en párrafos posteriores, surgen de ecuaciones en diferencias con condiciones iniciales, de frontera del tipo extremo izquierdo, además de las llamadas condiciones de frontera interiores. Condiciones de frontera interiores están dadas por degeneraciones de las diagonales (véase abajo de definición 1.1.2 y arriba de (3.1.2)). Cada matriz en $\mathcal{M}(n, \infty)$ genera de forma única un operador simétrico cerrado para el cual se da una caracterización espectral. Más específicamente, se prueban condiciones necesarias y suficientes para que una función con valores matriciales sea una función espectral del operador derivado de nuestra clase de matrices (véase definición 3.2.1, teorema 3.4.1). Como un resultado adicional se encuentran criterios “si y solo si” para degeneración en términos de las propiedades de polinomios en un espacio L_2 (véase teorema 3.2.1).

Aunque el problema espectral inverso para el caso infinito ha sido estudiado ampliamente (véase por ejemplo [15, 16, 18, 19, 25, 26, 45, 46]), trabajos que tratan matrices no necesariamente tridiagonales no son muy abundantes (véase [6, 21]).

Sea \mathcal{H} un espacio de Hilbert separable de dimensión infinita y una base ortonormal $\{\delta_k\}_{k=1}^{\infty}$ fija en él. Se estudia el operador simétrico A cuya representación matricial con respecto a $\{\delta_k\}_{k=1}^{\infty}$ es una matriz en banda simétrica la cual es denotada por \mathcal{A} (véase [2, sec. 47] para la definición de la representación matricial de un operador simétrico no acotado).

Se supone que la matriz \mathcal{A} tiene $2n + 1$ diagonales banda, esto es, $2n + 1$ diagonales no necesariamente ceros. Las diagonales banda satisfacen las siguientes condiciones. La diagonal más alejada a la diagonal principal, la cual está dada

por la matriz diagonal $\text{diag}\{d_k^{(n)}\}_{k=1}^\infty$, denotada por \mathcal{D}_n , es tal que, para algún $m_1 \in \mathbb{N}$, todos los números $d_1^{(n)}, \dots, d_{m_1-1}^{(n)}$ son positivos y $d_k^{(n)} = 0$ para todo $k \geq m_1$ con

$$m_1 > 1.$$

Puede suceder que todos los elementos de la sucesión $\{d_k^{(n)}\}_{k \in \mathbb{N}}$ son positivos en cuyo caso por conveniencia significa que $m_1 = \infty$.

Ahora, si $m_1 < \infty$, entonces los elementos $\{d_{m_1+k}^{(n-1)}\}_{k=1}^\infty$ de la siguiente diagonal de las más alejada a la diagonal principal, \mathcal{D}_{n-1} , se comportan en la misma forma como los elementos de \mathcal{D}_n , esto es, existe m_2 , que satisface

$$m_1 < m_2,$$

tal que $d_{m_1+1}^{(n-1)}, \dots, d_{m_2-1}^{(n-1)} > 0$ y $d_k^{(n-1)} = 0$ para todo $k \geq m_2$. Aquí, es también posible que $m_2 = \infty$ en cuyo caso $d_k^{(n-1)} > 0$ para todo $k > m_1$.

Se sigue aplicando la misma regla siempre y cuando m_1, \dots, m_j sean finitos. Así, si $m_j < \infty$, existe m_{j+1} , que satisface

$$m_j < m_{j+1},$$

tal que $d_{m_j+1}^{(n-j)}, \dots, d_{m_{j+1}-1}^{(n-j)} > 0$ y $d_k^{(n-j)} = 0$ para todo $k \geq m_{j+1}$. Si $m_j = \infty$, entonces $d_k^{(n-j)} > 0$ para todo $k > m_j$. Eventualmente, existe $j_0 \leq n-1$ tal que $m_{j_0+1} = \infty$. Observe que puede ocurrir que $m_{j+1} = m_j + 1$, en cuyo caso no existen elementos de la diagonal que cumplan $d_{m_j+1}^{(n-j)}, \dots, d_{m_{j+1}-1}^{(n-j)} > 0$.

Definición 3.0.1. Para un número natural fijo n , el conjunto de matrices que satisfacen las propiedades anteriores es denotado por $\mathcal{M}(n, \infty)$. Cada matriz en $\mathcal{M}(n, \infty)$ está determinada por un conjunto de enteros $\{m_j\}_{j=1}^{j_0}$ o bien el conjunto vacío, el cual ocurre cuando $m_1 = \infty$. Para aclarar esta definición véase fig. 3.1.

Siempre y cuando $j \leq j_0 - 1$, se dice que la diagonal correspondiente a \mathcal{D}_{n-j} sufre degeneración en m_{j+1} . Note que la diagonal correspondiente a \mathcal{D}_{n-j_0} no se degenera. Además, j_0 define el número de degeneraciones que la matriz \mathcal{A} posee.

Observación 3.0.1. Se define el número $n_0 := n - j_0$. Note que la “cola” de la matriz, esto es, la submatriz semi-infinita obtenida de remover las primeros $n_0 + m_{j_0} - 1$ columnas y filas, tiene $2n_0 + 1$ diagonales y la diagonal \mathcal{D}_{n_0} de esta submatriz tiene sólo números positivos (véase fig. 3.5).

Un ejemplo de una matriz en $\mathcal{M}(3, \infty)$, cuando $m_1 = 3$ y $m_2 = 5$, es la

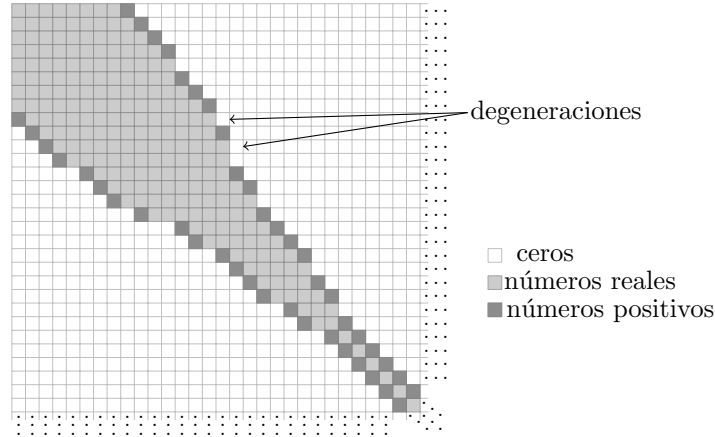


Figura 3.1: Estructura de las matrices en $\mathcal{M}(n, \infty)$

siguiente

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} d_1^{(0)} & d_1^{(1)} & d_1^{(2)} & d_1^{(3)} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ d_1^{(1)} & d_2^{(0)} & d_2^{(1)} & d_2^{(2)} & d_2^{(3)} & 0 & 0 & \\ d_1^{(2)} & d_2^{(1)} & d_3^{(0)} & d_3^{(1)} & d_3^{(2)} & 0 & 0 & \ddots \\ d_1^{(3)} & d_2^{(2)} & d_3^{(1)} & d_4^{(0)} & d_4^{(1)} & d_4^{(2)} & 0 & \ddots \\ 0 & d_2^{(3)} & d_3^{(2)} & d_4^{(1)} & d_5^{(0)} & d_5^{(1)} & 0 & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & d_4^{(2)} & d_5^{(1)} & d_6^{(0)} & d_6^{(1)} & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_6^{(1)} & d_7^{(0)} & \ddots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}. \quad (3.0.1)$$

Aquí la matriz \mathcal{A} se dice que sufre degeneración de la diagonal \mathcal{D}_3 en $m_1 = 3$ y una degeneración de \mathcal{D}_2 en $m_2 = 5$. Note que en este caso $j_0 = 2$.

Es sabido que la dinámica de un sistema lineal de masa y resortes (véase fig. 3.2) es caracterizada por las propiedades espectrales de una matriz de Jacobi semi-infinita [15, 16] cuando el sistema es válido dentro del régimen de la ley de Hooke (véase [20, 38] para una explicación de como obtener la matriz a partir del sistema de masas y resortes en el caso infinito). Las entradas de la matriz de Jacobi están determinadas por las masas y la constante de elasticidad del sistema [14–16, 20, 38]. El movimiento del sistema mecánico de la fig. 3.2 es un superposición de la oscilación armónica cuyas frecuencias son las raíces cuadradas del valor absoluto de los autovalores del operador de Jacobi. Análogamente, se puede deducir que una extensión autoadjunta del mínimo operador cerrado generado por una matriz en $\mathcal{M}(n, \infty)$ modela un sistema lineal de masas y resortes donde la interacción se extiende a las $2n$ vecinos inmediatos de cada

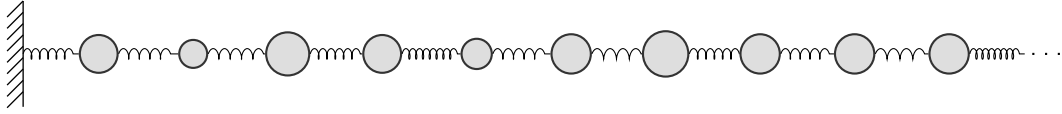


Figura 3.2: Sistema de masas y resortes que corresponde a una matriz de Jacobi

masa (compare con sección 2.5). Por ejemplo, si la matriz está en $\mathcal{M}(2, \infty)$ y no le ocurre ninguna degeneración, esto es, $m_1 = \infty$, el correspondiente sistema de masas y resortes está dado en fig. 3.3. Si para otra matriz en $\mathcal{M}(2, \infty)$, se tiene

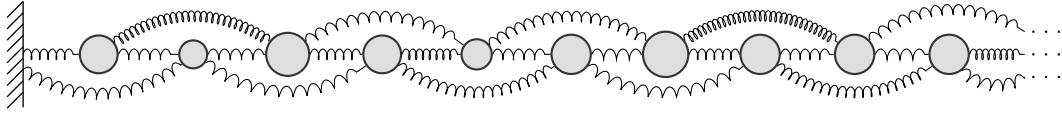


Figura 3.3: Sistema de masas y resortes en $\mathcal{M}(2, \infty)$: caso no degenerado

degeneración de la diagonal, por ejemplo $m_1 = 4$, el correspondiente sistema de masas y resortes está dado en fig. 3.4.

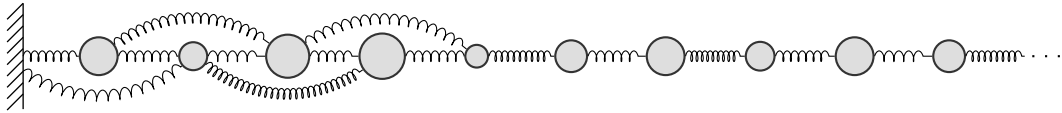


Figura 3.4: Sistema de masas y resortes de una matriz en $\mathcal{M}(2, \infty)$: caso degenerado

En este capítulo, el enfoque al análisis espectral de los operadores cuya representación matricial pertenece a $\mathcal{M}(n, \infty)$ está basado en el usado en [33, 34, 36] el cual trata el caso dimensionalmente finito. Como en estos trabajos, un importante ingrediente del análisis espectral inverso es la interpolación lineal de polinomios vectoriales de dimensión n presentado en el capítulo 1 y recientemente desarrollado en [37].

La organización de este capítulo es la siguiente. En sección 3.1, se presentan los resultados mostrados en capítulo 2 y basados en [36] sobre la medida espectral correspondiente a las matrices de dimensión finita las cuales son las matrices truncadas de la esquina superior izquierda de las matrices en $\mathcal{M}(n, \infty)$. Estos operadores de dimensión finita juegan un rol auxiliar en el análisis espectral del operador A . Después, en sección 3.2, se construye una matriz con valores matriciales para cada elemento de $\mathcal{M}(n, \infty)$ que tiene las propiedades de una función espectral. La sección 3.3 trata con varios criterios para que el operador A sea

autoadjunto y así dar la función espectral de A refiriéndose a algunas de sus propiedades. Finalmente, en sección 3.4, se aborda el problema de reconstrucción y caracterización.

3.1. Análisis espectral de submatrices

Fijando $N > n$. El análisis espectral del operador A es abordado a través del operador auxiliar $P_{\mathcal{H}_N} A \upharpoonright_{\mathcal{H}_N}$, donde $\mathcal{H}_N = \text{span}\{\delta_i\}_{i=1}^N$ y $P_{\mathcal{H}_N}$ es el proyector ortogonal sobre el espacio \mathcal{H}_N . Note que $P_{\mathcal{H}_N} A \upharpoonright_{\mathcal{H}_N}$ puede ser identificado con el operador cuya representación matricial es la submatriz de dimensión finita que corresponde a la matriz de la esquina superior derecha de $N \times N$ de una matriz en $\mathcal{M}(n, \infty)$ (compare con (3.0.1)), las matrices mencionadas son las definidas en definición 2.0.1 y denotadas por $\mathcal{M}(n, N)$. Así, se considera esta matriz de dimensión finita y se denota por \tilde{A}_N al correspondiente operador en \mathcal{H}_N .

El análisis de la función espectral de estos operadores es estudiado en capítulo 2 en el cual se estudia la clase de matrices $\mathcal{M}(n, N)$.

Notación. La notación de los objetos principales $(A, \mathcal{A}, \mathcal{H}, \sigma)$ del capítulo 2 y el presente capítulo son los mismos. En este capítulo agregaremos el subíndice N ($A_N, \mathcal{A}_N, \mathcal{H}_N, \sigma_N$) para hacer referencia a los objetos para el caso finito, es decir, los del capítulo 2. Lo anterior se hace para no dificultar la lectura y notación del capítulo 2.

De acuerdo al capítulo 2, el análisis espectral del operador \tilde{A}_N puede ser tratado estudiando la ecuación en recurrencias (2.1.2), considerando la condiciones de frontera (2.1.3) del tipo extremo izquierdo y derecho por (2.1.3a) y (2.1.3a), respectivamente.

El sistema (2.1.2) con (2.1.3), restringido a $k \in \{1, \dots, N\} \setminus \{m_j\}_{j=1}^{j_0}$, puede ser resuelto recursivamente siempre que las primeras n entradas del vector φ sean dados. Como se hizo en el capítulo anterior sea $\varphi^{(j)}(z)$ ($j \in \{1, \dots, n\}$) una solución de (2.1.2) para todo $k \in \{1, \dots, N\} \setminus \{m_j\}_{j=1}^{j_0}$ tal que

$$\langle \delta_i, \varphi^{(j)}(z) \rangle = t_{ji} \quad \text{para } i, j = 1, \dots, n, \quad (3.1.1)$$

donde $\mathcal{T} = \{t_{ji}\}_{j,i=1}^n$ satisface

- I) \mathcal{T} es una matriz triangular superior de $n \times n$ con entradas reales.
- II) $\prod_{i=1}^n t_{ii} \neq 0$.

La condición dada por (3.1.1) puede verse como condición inicial para el sistema (2.1.2) y (2.1.3a). Se hace énfasis que dada la condición de frontera del tipo extremo izquierdo (2.1.3a) y la condición inicial (3.1.1), el sistema

restringido a $k \in \{1, \dots, N\} \setminus \{m_j\}_{j=1}^{j_0}$ tiene una única solución para cualquier fijo $j \in \{1, \dots, n\}$ y $z \in \mathbb{C}$. Las degeneraciones que sufren las diagonales de las matrices en $\mathcal{M}(n, N)$ están relacionadas a otro tipo de “condiciones de frontera”. En efecto, las ecuaciones del sistema (2.1.2) y (2.1.3a), cuando $k \in \{m_j\}_{j=1}^{j_0}$, producen condiciones de frontera internas (del tipo extremo izquierdo) (compare con (2.1.8)).

Lo mencionado anteriormente, ayuda a determinar la función espectral $\sigma_N^{\mathcal{T}}(t)$ del operador \tilde{A}_N donde \mathcal{T} es la condición inicial definida en (3.1.1). Y además esta función es la que se presenta en (2.1.13) y (2.1.14) que satisface (2.1.10) y (2.1.11). Estas funciones con valores matriciales satisfacen la observación 2.1.2.

De esta forma, consideramos a $L_2(\mathbb{R}, \sigma_N^{\mathcal{T}})$ el espacio de Hilbert de dimensión N , donde el producto interior es antilineal en el primer argumento. Además, en cada clase de equivalencia de este espacio existe un polinomio vectorial de dimensión n .

De esta forma, se definen los vectores

$$\mathbf{p}_k := \mathcal{T} \mathbf{e}_k \quad \text{para } k = 1, \dots, n, \quad (3.1.2)$$

donde \mathbf{e}_k está definido en (2.3.1) y \mathcal{T} satisface I) y II). Tomando $\{\mathbf{p}_k\}_{k=1}^n$ como condición inicial para la ecuación en recurrencias

$$\sum_{i=0}^{n-1} d_{k-n+i}^{(n-i)} \mathbf{p}_{k-n+i}(z) + d_k^{(0)} \mathbf{p}_k(z) + \sum_{i=1}^n d_k^{(i)} \mathbf{p}_{k+i}(z) = z \mathbf{p}_k(z), \quad k \in \mathbb{N} \setminus \{m_j\}_{j=1}^{j_0}, \quad (3.1.3)$$

donde se supone que

$$\mathbf{p}_k = 0, \quad \text{siempre que } k < 1, \quad (3.1.4)$$

se obtiene una sucesión $\{\mathbf{p}_k(z)\}_{k=1}^{\infty}$ de polinomio vectoriales. La siguiente afirmación es probada en lema 2.1.2.

Proposición 3.1.1. *Para cualquier número natural $N > n$, los polinomios vectoriales $\{\mathbf{p}_k(z)\}_{k=1}^N$, definidos por (3.1.3), satisfacen*

$$\langle \mathbf{p}_j, \mathbf{p}_k \rangle_{L_2(\mathbb{R}, \sigma_N^{\mathcal{T}})} = \delta_{jk}$$

para $j, k \in \{1, \dots, N\}$.

Ahora, si $j_0 \neq 0$ se define

$$\mathbf{q}_j(z) := (z - d_{m_j}^{(0)}) \mathbf{p}_{m_j}(z) - \sum_{k=0}^{n-1} d_{m_j-n+k}^{(n-k)} \mathbf{p}_{m_j-n+k}(z) - \sum_{k=1}^{n-j} d_{m_j}^{(k)} \mathbf{p}_{m_j+k}(z) \quad (3.1.5)$$

para $j \in \{1, \dots, j_0\}$.

Usando el mismo razonamiento como en teorema 2.2.1, se prueba que para cualquier $N \geq n_0 + m_{j_0}$ (véase observación 3.0.1), los polinomios vectoriales $\{\mathbf{q}_j(z)\}_{k=1}^{j_0}$ satisfacen

$$\langle \mathbf{q}_j, \mathbf{q}_j \rangle_{L_2(\mathbb{R}, \sigma_N^T)} = 0. \quad (3.1.6)$$

Para usar resultados del capítulo 1 y capítulo 2 es necesario convenir lo siguiente.

Convención. A partir de ahora, se considera el número natural N no menor que $n_0 + m_{j_0}$.

Debido a teorema 2.2.1 y observación 1.4.1 se tiene la siguiente afirmación.

Proposición 3.1.2. *Los polinomios vectoriales $\{\mathbf{q}_j(z)\}_{j=1}^{j_0}$ son los primeros j_0 generadores del problema de interpolación dado por (2.2.2) (véase sección 2.2). Además, para $j = 1, \dots, j_0$, $h(\mathbf{q}_j)$ son diferentes elementos del espacio factor $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.*

Las alturas del conjunto infinito de polinomios vectoriales $\{\mathbf{p}_k\}_{k=n+1}^{\infty}$ son determinados recursivamente por el sistema (3.1.3). En efecto, análogamente que en el caso finito, para cualquier $m_j < k < m_{j+1}$, con $j = 0, \dots, j_0$, se tiene la ecuación

$$\cdots + d_k^{(0)} \mathbf{p}_k + d_k^{(1)} \mathbf{p}_{k+1} + \cdots + d_k^{(n-j)} \mathbf{p}_{k+n-j} = z\mathbf{p}_k,$$

donde se supone que $m_0 = 0$. Y debido a que $d_k^{(n-j)}$ nunca se eliminan, las altura de \mathbf{p}_{k+n-j} coinciden con la de $z\mathbf{p}_k$. Por lo tanto,

$$h(\mathbf{p}_{k+n-j}) = n + h(\mathbf{p}_k). \quad (3.1.7)$$

Si no existe degeneración de las diagonales, entonces (3.1.7) implica que

$$h(\mathbf{p}_k) = k - 1, \quad \text{para todo } k \in \mathbb{N}. \quad (3.1.8)$$

Por otro lado, cuando existe presencia de degeneraciones, se verifica de (3.1.5) y (3.1.7) que no importa cual $k \in \mathbb{N}$ se elija,

$$h(\mathbf{p}_k) \neq h(\mathbf{p}_{m_j}) + n = h(\mathbf{q}_j), \quad (3.1.9)$$

$j = 1, \dots, j_0$.

Lema 3.1.1. *Para cualquier entero no negativo s , existe $k \in \mathbb{N}$ o un par $j \in \{1, \dots, j_0\}$ y $l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que $s = h(\mathbf{p}_k)$ ó $s = h(\mathbf{q}_j) + nl$.*

Demostración. La demostración se repite a la del lema 2.2.3. Se reproduce para comodidad del lector. Debido a (3.1.7), se sigue de (3.1.2) que

$$h(\mathbf{p}_k) = k - 1 \quad \text{para } k = 1, \dots, h(\mathbf{q}_1) \quad (3.1.10)$$

(compare con (3.1.8)).

Suponiendo que existe $s \in \mathbb{N}$ ($s > n$) tal que $s \neq h(\mathbf{p}_k)$ para todo $k \in \mathbb{N}$ y $s \neq h(\mathbf{q}_j) + nl$ para todo $j \in \{1, \dots, j_0\}$ y $l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Sea \hat{l} un entero tal que $s - n\hat{l} \in \{h(\mathbf{p}_k)\}_{k=1}^\infty \cup \{h(\mathbf{q}_j) + nl\}_{j=1}^{j_0}$ ($l \in \{0\} \cup \mathbb{N}$). Existe siempre un entero debido a (3.1.10) y $h(\mathbf{q}_1) > n$ (véase (3.1.9)). Se toma \hat{l}_0 el mínimo de todos los \hat{l} 's. Por lo tanto, existe $k' \in \mathbb{N}$ o bien $j' \in \{1, \dots, j_0\}$ y $l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que, o bien

a) $s - n\hat{l}_0 = h(\mathbf{p}_{k'})$ ó

b) $s - n\hat{l}_0 = h(\mathbf{q}_{j'}) + nl$, con $l \in \{0\} \cup \mathbb{N}$.

En el caso a), se probará que \hat{l}_0 no es el mínimo entero, esto implica la afirmación de la proposición. En efecto, si $k' = m_j$, entonces $s - n\hat{l}_0 + n = h(\mathbf{p}_{m_j}) + n = h(\mathbf{q}_j)$. Si no existe tal j , entonces $m_j < k' < m_{j+1}$ y (3.1.7) implica que $s - n\hat{l}_0 + n = h(\mathbf{p}_{k'}) + n = h(\mathbf{p}_{k'+n-j})$.

En el caso b), si $s - n\hat{l}_0 = h(\mathbf{q}_{j'}) + nl$, entonces $s = h(\mathbf{q}_{j'}) + n(l + \hat{l}_0)$ que es una contradicción. \square

Como una consecuencia del teorema 1.1.1, el lema anterior genera el siguiente resultado.

Corolario 3.1.1. *Cualquier polinomio vectorial $\mathbf{r}(z)$ de dimensión n es una combinación lineal de*

$$\{\mathbf{p}_k(z) : k \in \mathbb{N}\} \cup \{z^l \mathbf{q}_j(z) : l \in \mathbb{N}, j \in \{1, \dots, j_0\}\}. \quad (3.1.11)$$

Observe que

$$\langle \mathbf{e}_{nk+i}(t), \mathbf{e}_{nl+j}(t) \rangle_{L_2(\mathbb{R}, \sigma_N^{\mathcal{J}})} = \int_{\mathbb{R}} t^{k+l} d\sigma_N^{\mathcal{J}}(i, j), \quad (3.1.12)$$

donde $\mathbf{e}_{nk+i}(z)$ están definidos por (2.3.1).

Sobre la base del corolario 3.1.1, se verifica que los momentos matriciales

$$S_k(\mathcal{J}) := \int_{\mathbb{R}} t^k d\sigma_N^{\mathcal{J}} \quad \text{para } k = 0, 1, \dots, \left\lceil \frac{2h(\mathbf{p}_N)}{n} \right\rceil \quad (3.1.13)$$

coinciden para cualquier $\tilde{N} > N$, donde $\lceil \cdot \rceil$ es la función parte entera techo.

Observación 3.1.1. Note que para cualquier número natural k , existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $S_{2k}(\mathcal{J})$, dado por (3.1.13), es una matriz definida positiva.

3.2. Análisis espectral para matrices simétricas en banda infinitas

En esta sección, se construye una función con valores matriciales para cada elemento de $\mathcal{M}(n, \infty)$, dicha función tiene las propiedades de función espectral. Para este fin, se definen los criterios para que una medida sea una función espectral de una *matriz* en la clase $\mathcal{M}(n, \infty)$. A partir de la definición, cualquier función espectral $\sigma(t)$ de una matriz \mathcal{A} en la clase $\mathcal{M}(n, \infty)$ es la función espectral de alguna extensión autoadjunta del mínimo operador cerrado generado por \mathcal{A} (véase [2, sección. 47]). Así, que este operador autoadjunto es transformado, por un mapa isométrico el cual puede considerarse como la transformada de Fourier, en el operador de multiplicación por la variable independiente definido en el dominio maximal en el espacio $L_2(\mathbb{R}, \sigma)$. Es importante notar que no todas las funciones espectrales de una matriz en $\mathcal{M}(n, \infty)$ corresponden a una extensión A_0 del mínimo operador cerrado generado por A tal que $A_0 \subset A^*$ (véase observación 3.2.1).

Los resultados de esta sección y la siguiente, prueban una completa descripción de todas las posibles funciones espectrales que pueden ser asociadas con algún elemento de $\mathcal{M}(n, \infty)$ a través de los criterios que aquí se presentan.

Definición 3.2.1. Una función no decreciente con valores matriciales σ y momentos finitos, tal que $\int_{\mathbb{R}} d\sigma$ es invertible, es llamada una función espectral de una matriz \mathcal{A} en $\mathcal{M}(n, \infty)$ si y sólo si existe \mathcal{T} que satisface I) II) (véase página 69) tal que $\{\mathbf{p}_k\}_{k=1}^{\infty}$ es una sucesión ortonormal en $L_2(\mathbb{R}, \sigma)$ y para cada $j \in \{1, \dots, j_0\}$, \mathbf{q}_j esta en la clase de equivalencia del cero en $L_2(\mathbb{R}, \sigma)$.

Note que todos los polinomios vectoriales anteriormente mencionados están en $L_2(\mathbb{R}, \sigma)$ cuando σ es una función espectral de una matriz en $\mathcal{M}(n, \infty)$. Más aún, los polinomios son densos en $L_2(\mathbb{R}, \sigma)$ cuando el sistema ortonormal $\{\mathbf{p}_k\}_{k=1}^{\infty}$ resulta ser completo.

Sobre las bases de la definición anterior, se puede construir un mapa isométrico entre el espacio original \mathcal{H} y el subespacio que resulta de la cerradura de los polinomios en $L_2(\mathbb{R}, \sigma)$. Este mapa isométrico, el cual es denotado por U , es realizado por la asociación de la base ortonormal $\{\delta_k\}_{k=1}^{\infty}$ con el sistema ortonormal $\{\mathbf{p}_k\}_{k=1}^{\infty}$, esto es, $U\delta_k = \mathbf{p}_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Además, dentro de este mapa, el operador A es transformado bajo algunas restricciones en el operador de multiplicación por la variable independiente. En efecto, si $\varphi = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k \delta_k$ es un elemento del dominio de A , entonces $f = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k \mathbf{p}_k$ está en el dominio del operador de multiplicación por la variable independiente y

$$UAU^{-1}f(t) = tf(t).$$

Lema 3.2.1. Sea \mathcal{A} un elemento en $\mathcal{M}(n, \infty)$ y $\sigma_N^{\mathcal{T}}$ la función espectral del correspondiente operador A_N para un fijo \mathcal{T} . Entonces, existe un subsucesión

$\{\sigma_{N_i}^{\mathcal{J}}\}_{i=1}^{\infty}$ convergente a una función en valores matriciales $\sigma^{\mathcal{J}}$ bajo la norma de matrices de $n \times n$.

Demostración. En vista de corolario 2.1.1, las condiciones del primer teorema de Helly para operadores acotadas [9, teo. 4.3] se satisfacen en cualquier intervalo cerrado (compare con [40, sec. 8.4] para el caso escalar), por lo tanto la afirmación se deduce. La generalización del primer teorema de Helly para la afirmación [9, teo. 4.3] se basa en aplicar el teorema escalar a la forma bilineal de la sucesión de operadores (para elementos fijos en el espacio de Hilbert) en un proceso diagonal conocido usando la acotación de los operadores y la separabilidad del espacio para obtener la afirmación en el sentido de convergencia débil. Usando el hecho de que la convergencia débil y uniforme son equivalentes en espacios de dimensión finita, se obtiene la afirmación. \square

La siguiente proposición es obtenida aplicando [9, teo. 4.4] al resultado anterior y tomando en cuenta que las matrices $\sigma_N^{\mathcal{J}}$ son de dimensión finita.

Proposición 3.2.1. *(Segundo teorema generalizado de Helly) Suponiendo que la función $f(t)$ es continua en el intervalo real $[a, b]$, donde a y b son puntos de continuidad de $\sigma^{\mathcal{J}}(t)$ (véase lema 3.2.1). Entonces, existe una subsucesión $\{\sigma_{N_i}^{\mathcal{J}}\}_{i=1}^{\infty}$ tal que*

$$\int_a^b f(t) d\sigma_{N_i}^{\mathcal{J}}(t) \xrightarrow{i \rightarrow \infty} \int_a^b f(t) d\sigma^{\mathcal{J}}(t),$$

donde la convergencia es bajo la norma de matrices de $n \times n$.

Con los resultados anteriores se prueban las siguientes afirmaciones.

Lema 3.2.2. *Existe una subsucesión $\{\sigma_{N_i}^{\mathcal{J}}\}_{i=1}^{\infty}$ tal que*

$$\int_{\mathbb{R}} t^k d\sigma_{N_i}^{\mathcal{J}} = \int_{\mathbb{R}} t^k d\sigma^{\mathcal{J}}$$

para cualquier entero no negativo $k \leq \left\lceil \frac{2h(p_{N_i})}{n} \right\rceil$ (véase (3.1.13)).

Demostración. Si se supone que $-a < 0$ y $b > 0$ son dos puntos de continuidad de $\sigma^{\mathcal{J}}(t)$, entonces se sigue de proposición 3.2.1 que

$$\int_{-a}^b t^k d\sigma^{\mathcal{J}} = \lim_{i \rightarrow \infty} \int_{-a}^b t^k d\sigma_{N_i}^{\mathcal{J}}.$$

Por otro lado, dado un número r tal que $r > k$, entonces para $r < \left\lceil \frac{2h(\mathbf{p}_{N_i})}{n} \right\rceil$

$$\begin{aligned} \left\| \int_{-\infty}^{\infty} - \int_b^{-a} t^k d\sigma_{N_i}^{\mathcal{T}} \right\| &= \left\| \int_{-\infty}^{-a} + \int_b^{\infty} t^k d\sigma_{N_i}^{\mathcal{T}} \right\| = \left\| \int_{-\infty}^{-a} + \int_b^{\infty} \frac{t^r}{t^{r-k}} d\sigma_{N_i}^{\mathcal{T}} \right\| \\ &\leq \frac{1}{c^{r-k}} \left\| \int_{-\infty}^{-a} + \int_b^{\infty} t^r d\sigma_{N_i}^{\mathcal{T}} \right\| \leq \frac{\|S_r(\mathcal{T})\|}{c^{r-k}}, \end{aligned}$$

donde $c = \min\{a, b\}$ y $S_r(\mathcal{T}) = \int_{\mathbb{R}} t^r d\sigma_{N_i}^{\mathcal{T}}$ (la integral es convergente debido a la proposición 3.1.1). Así,

$$\left\| S_k(\mathcal{T}) - \int_{-a}^b t^k d\sigma^{\mathcal{T}} \right\| \leq \frac{\|S_r(\mathcal{T})\|}{c^{r-k}}.$$

Esto genera la afirmación, cuando se hace a a y a b tender a infinito de tal manera que $-a$ y b son todo el tiempo puntos de continuidad de $\sigma^{\mathcal{T}}(t)$. \square

Del lema anterior, se obtiene directamente el siguiente resultado.

Corolario 3.2.1. *La función espectral $\sigma^{\mathcal{T}}$, a la cual una subsucesión $\{\sigma_N^{\mathcal{T}}\}_{N=2}^{\infty}$ converge de acuerdo al lema 3.2.1, es una solución de un cierto problema de momentos matricial cuya sucesión de momentos es denotada por $\{S_k(\mathcal{T})\}_{k=0}^{\infty}$ (véase lema 3.2.2).*

Lema 3.2.3. *Cualquier $\mathcal{A} \in \mathcal{M}(n, \infty)$ tiene al menos una función espectral (en el sentido de la definición 3.2.1).*

Demostración. Se sigue directamente de lema 3.2.2 que el polinomio vectorial $\{\mathbf{p}_k(z)\}_{k=1}^{\infty}$, definido por (3.1.3), satisface

$$\langle \mathbf{p}_j, \mathbf{p}_k \rangle_{L_2(\mathbb{R}, \sigma^{\mathcal{T}})} = \delta_{jk}$$

para $j, k \in \mathbb{N}$, donde $\sigma^{\mathcal{T}}$ es la función dada en lema 3.2.1. Ahora, fijando $j \in \{1, \dots, j_0\}$ y considerando $N > n_0 + m_{j_0}$ (véase convención de sección anterior). Entonces,

$$0 = \|\mathbf{q}_j\|_{L_2(\mathbb{R}, \sigma_N^{\mathcal{T}})}^2 = \int_{\mathbb{R}} \langle \mathbf{q}_j, d\sigma_N^{\mathcal{T}} \mathbf{q}_j \rangle.$$

Por lema 3.2.2 existe una subsucesión $\{\sigma_{N_i}^{\mathcal{T}}\}_{i=1}^{\infty}$ tal que, a partir de algún $i \in \mathbb{N}$,

$$0 = \int_{\mathbb{R}} \langle \mathbf{q}_j, d\sigma_{N_i}^{\mathcal{T}} \mathbf{q}_j \rangle = \int_{\mathbb{R}} \langle \mathbf{q}_j, d\sigma^{\mathcal{T}} \mathbf{q}_j \rangle = \|\mathbf{q}_j\|_{L_2(\mathbb{R}, \sigma^{\mathcal{T}})}^2$$

\square

Corolario 3.2.2. *La función espectral $\sigma^{\mathcal{T}}$ dada en lema 3.2.3 tiene un número infinito de puntos de crecimiento.*

Demostración. Si $\sigma^{\mathcal{T}}$ tiene un número infinito de puntos de crecimiento, entonces $L_2(\mathbb{R}, \sigma^{\mathcal{T}})$ debe ser un espacio de dimensión finita y la correspondiente sucesión de polinomios vectoriales $\{\mathbf{p}_k\}_k$ debe ser finita. \square

Observación 3.2.1. Sea $\mathcal{A} \in \mathcal{M}(n, \infty)$ y \mathcal{T} tal que σ es la función espectral de \mathcal{A} de acuerdo a la definición 3.2.1. Si el problema de momentos es *determinado*, entonces existe justo una solución y esta solución corresponde a la función espectral del operador A que resulta ser autoadjunto [17, sección. 2]. Si el problema de momentos es *indeterminado*, entonces existen varias soluciones del problema de momentos y cada solución $\hat{\sigma}$ es una función espectral de \mathcal{A} ya que la sucesión $\{\mathbf{p}_k\}_{k=1}^{\infty}$ es ortonormal en $L_2(\mathbb{R}, \hat{\sigma})$ para cualquier $\hat{\sigma}$. En este caso, $\hat{\sigma}$ no necesariamente corresponde a la función espectral de la extensión autoadjunta canónica del operador A (por extensión canónica autoadjunta de un operador simétrico se quiere decir una restricción autoadjunta de A^*). En efecto, la solución $\hat{\sigma}$ es la función espectral de la extensión canónica autoadjunta si y solo si los polinomios son densos en $L_2(\mathbb{R}, \hat{\sigma})$. Se espera que la función espectral $\sigma^{\mathcal{T}}$, a la cual una subsucesión de $\{\sigma_N^{\mathcal{T}}\}_{N=2}^{\infty}$ converge de acuerdo al lema 3.2.1, es tal que los polinomios son densos en $L_2(\mathbb{R}, \sigma^{\mathcal{T}})$. Este asunto, junto con otras preguntas sobre caracterización de las función $\sigma^{\mathcal{T}}$ serán tratados para un próximo manuscrito.

Definición 3.2.2. El conjunto de todas las funciones, con valores matriciales de $n \times n$ con un número infinito de puntos de crecimiento tal que todos los momentos $\{S_k\}_{k=1}^{\infty}$ existen y S_0 es invertible, es denotado por $\mathfrak{M}(n, \infty)$. Además de que $\mathfrak{M}_d(n, \infty)$ denota el subconjunto de $\mathfrak{M}(n, \infty)$ para el cual la sucesión de momentos matriciales genera un problema de momentos matricial determinado.

Teorema 3.2.1. Sea $\mathcal{A} \in \mathcal{M}(n, \infty)$ y j_0 el número de degeneraciones de la matriz \mathcal{A} (véase párrafo debajo de definición 2.0.1). Para cualquier función espectral σ de \mathcal{A} , es cierto que:

- a) (Caso no degenerado) Si $j_0 = 0$, es decir, la matriz \mathcal{A} no sufre degeneraciones, entonces no existe un polinomio vectorial no trivial en la clase del cero del espacio $L_2(\mathbb{R}, \sigma)$, esto es,

$$\langle \mathbf{r}(z), \mathbf{r}(z) \rangle_{L_2(\mathbb{R}, \sigma)} = 0 \iff \mathbf{r} \equiv \mathbf{0}.$$

- b) (Caso degenerado) Si $j_0 > 0$, entonces todos los polinomios vectoriales $\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_{j_0}$ están en la clase de equivalencia del cero y cualquier polinomio $\mathbf{r}(z)$ en esta clase puede escribirse como

$$\mathbf{r}(z) = \sum_{j=1}^{j_0} R_j(z) \mathbf{q}_j(z), \quad (3.2.1)$$

donde $R_j(z)$ es un polinomio escalar.

Demostración. Primero se prueba b). Se supone que existe un polinomio vectorial no trivial $\mathbf{r}(z)$ en la clase de equivalencia del cero con altura r . Por lo tanto, por corolario 3.1.1

$$\mathbf{r}(z) = \sum_{k=1}^l c_k \mathbf{p}_k(z) + \sum_{j=1}^{j_0} R_j(z) \mathbf{q}_j(z), \quad (3.2.2)$$

donde $\max\{h(\mathbf{p}_l), \max_{j=1, \dots, j_0} \{h(R_j \mathbf{q}_j)\}\} = r$. Además,

$$c_k = \langle \mathbf{r}(z), \mathbf{p}_k(z) \rangle_{L_2(\mathbb{R}, \sigma)} \quad \text{para todo } k \in \{1, \dots, l\}. \quad (3.2.3)$$

Ya que $\mathbf{r}(z)$ está en la clase del cero, el término derecho de la igualdad (3.2.3) es siempre cero. Por lo tanto, (3.2.1) es válido.

Para probar a), se usa nuevamente (3.2.2) tomando en cuenta (3.1.8). Así, la afirmación se sigue de (3.2.3). \square

Observación 3.2.2. La afirmación del teorema 3.2.1 b) puede ser interpretado como sigue. Si la función espectral de \mathcal{A} tiene un número numerable de puntos de crecimiento que no se acumulan en ningún lugar, entonces el espectro del operador de multiplicación por la variable independiente consiste sólo de autovalores los cuales, debido al hecho que σ es una matriz de $n \times n$, tienen multiplicidad no mayor a n . Sean $\{x_l\}_{l=1}^{\infty}$ los autovalores del operador de multiplicación por la variable independiente enumerados tomando en cuenta multiplicidad. Entonces los polinomios vectoriales $\{\mathbf{q}_j\}_{j=1}^{j_0}$ son generadores del problema de interpolación

$$\langle \mathbf{r}(z_l), \sigma_l \mathbf{r}(z_l) \rangle_{\mathbb{C}^n} = 0, \quad z_l \in \text{spec}(A), \quad (3.2.4)$$

donde σ_l es la misma matriz que aparece en el término derecho de (2.1.14) con las mismas propiedades. Note que (3.2.4) es un problema de interpolación lineal con un conjunto infinito de nodos de interpolación.

3.3. La función espectral para el caso autoadjunto

En esta sección se interesa en el caso cuando $A = A^*$, ya se sabe que el operador A es simétrico y por definición cerrado. Así que vamos al tocar algunos criterios de autoadjuntez de A .

Nuestro primer criterio se basa en el hecho que cualquier matriz en banda semi-infinita puede considerarse como una matriz de Jacobi semi-infinita por bloques. En efecto, cualquier matriz en banda semi-infinita con $2n+1$ diagonales es equivalente a una matriz de Jacobi semi-infinita donde cada entrada es una

matriz de $p \times p$ con $p \geq n$. Debido a que el operador A^* es el operador definido por la matriz \mathcal{A} en el dominio maximal [2, sec. 47], el hecho de que el operador A sea autoadjunto depende exclusivamente del comportamiento asintótico de los elementos de la diagonal de su representación matricial dada por la matriz \mathcal{A} . Para cualquier matriz en $\mathcal{M}(n, \infty)$, se considera la submatriz semi-infinita después de la última degeneración, a la cual llamamos “cola de la matriz” (véase observación 3.0.1 y fig. 3.5). Esta “cola” puede verse como una matriz de Jacobi semi-infinita por bloques.

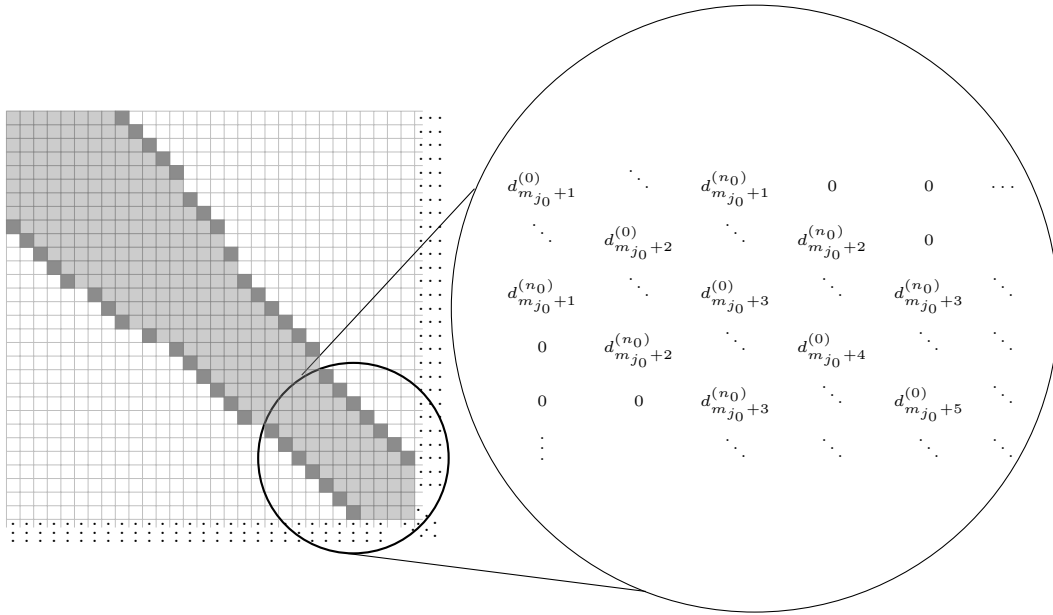


Figura 3.5: La “cola” de la matrices en $\mathcal{M}(n, \infty)$

Se denota

$$\begin{pmatrix} Q_1 & B_1^* & 0 & 0 & \cdots \\ B_1 & Q_2 & B_2^* & 0 & \\ 0 & B_2 & Q_3 & B_3^* & \cdots \\ 0 & 0 & B_3 & Q_4 & \cdots \\ \vdots & & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} d_{m_{j_0}+1}^{(n_0)} & \cdots & d_{m_{j_0}+1}^{(n_0)} & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & d_{m_{j_0}+2}^{(n_0)} & \cdots & d_{m_{j_0}+2}^{(n_0)} & 0 & \\ d_{m_{j_0}+1}^{(n_0)} & \cdots & d_{m_{j_0}+3}^{(n_0)} & \cdots & d_{m_{j_0}+3}^{(n_0)} & \cdots \\ 0 & d_{m_{j_0}+2}^{(n_0)} & \cdots & d_{m_{j_0}+4}^{(n_0)} & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & d_{m_{j_0}+3}^{(n_0)} & \cdots & d_{m_{j_0}+5}^{(n_0)} & \cdots \\ \vdots & & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix},$$

donde cada entrada es una matriz de $n_0 \times n_0$ ($n_0 := n - j_0$). Claramente, los elementos de la diagonal por bloques adyacente a la diagonal principal, esto es, las matrices $\{B_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ y $\{B_k^*\}_{k \in \mathbb{N}}$, son triangulares superiores e inferiores,

respectivamente, tales que las entradas de la diagonal principal son números positivos.

La siguiente proposición es el análogo al criterio de Carleman [1, cap. 1, Addenda and Problems] para matrices de Jacobi por bloques.

Proposición 3.3.1. (*[7, cap. 7, teo. 2.9]*) Si $\sum_{j=0}^{\infty} 1/\|B_j\|$ diverge, entonces A es autoadjunto.

En [32, cor. 2.5] las siguientes condiciones de necesidad para autoadjuntez son dadas.

Proposición 3.3.2. *Suponiendo que, iniciando a partir de algún k_0 , todas las matrices Q_k son invertibles. Si*

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \|Q_k^{-1}\| = 0, \text{ y } \limsup_{k \rightarrow +\infty} \{\|Q_k^{-1}B_k\| + \|Q_k^{-1}B_k^*\|\} < 1,$$

entonces el operador A es autoadjunto.

Otros criterios están dados por la teoría de perturbación. En efecto, se considera los operadores D_j ($j = 0, 1, \dots, n$), cuya representación matricial con respecto a $\{\delta_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ es una matriz diagonal, es decir, $D_j\delta_k = d_k^{(j)}\delta_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$, donde $d_k^{(j)}$ es un número real (véase [2, sec. 47]). Se define operador de desplazamiento S como

$$S\delta_k = \delta_{k+1}, \quad \text{para todo } k \in \mathbb{N},$$

donde por linealidad, éste está definido sobre $\text{span}\{\delta_k\}_{k=1}^{\infty}$ y entonces extendido a \mathcal{H} por continuidad. Se considera el operador simétrico

$$A' := D_0 + \sum_{j=1}^n S^j D_j + \sum_{j=1}^n D_j (S^*)^j. \quad (3.3.1)$$

Ahora, si el operador $\sum_{j=1}^n S^j D_j + \sum_{j=1}^n D_j (S^*)^j$ es D_0 -acotado con la D_0 -cota más pequeña que 1 (véase [51, sec. 5.1]), se puede recurrir al teorema de Rellich-Kato [31, teo. 4.3] para mostrar que A' es autoadjunto.

En esta sección, se supone que el operador A es autoadjunto. El enfoque para la construcción de la función espectral de A se basa en las técnicas de la teoría de perturbación relacionado con convergencia fuerte de la resolvente (véase [51, sec. 9.3]).

Se comienza recordando la siguiente definición

Definición 3.3.1. Un subconjunto D del dominio de un operador cerrable B , es llamado núcleo de B cuando $\overline{B \upharpoonright_D} = B$.

Además, se recurren a los siguientes resultados conocidos (compare con [31, cor. 8.1.6 y teo. 8.1.15]):

Proposición 3.3.3. [51, teo. 9.16]. Sean $\{B_N\}_{N \in \mathbb{N}}$ y B operadores autoadjuntos en \mathcal{H} . Si existe un núcleo D de B tal que para cualquier $\varphi \in D$ existe un $N_0 \in \mathbb{N}$ el cual satisface que $\varphi \in \text{dom } B_N$ para $N > N_0$ y $B_N \varphi \rightarrow B \varphi$, entonces la sucesión $\{(B_N - zI)^{-1}\}_{N \in \mathbb{N}}$ converge fuertemente a $(B - zI)^{-1}$ (denotado por $(B_N - zI)^{-1} \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{s} (B - zI)^{-1}$) para todo $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

Proposición 3.3.4. [51, teo. 9.19]. Sea $\{B_N\}_{N \in \mathbb{N}}$ y B operadores autoadjuntos en \mathcal{H} , tal que la sucesión $\{(B_N - iI)^{-1}\}_{N \in \mathbb{N}}$ converge fuertemente a $(B - iI)^{-1}$. Entonces

$$\begin{aligned} E_{B_N}(t) &\xrightarrow[N \rightarrow \infty]{s} E_B(t) \\ E_{B_N}(t+0) &\xrightarrow[N \rightarrow \infty]{s} E_B(t), \end{aligned} \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R} \text{ tal que } E_B(t) = E_B(t+0).$$

Aquí, como antes, $E_{B_N}(t)$ y $E_B(t)$ son las resoluciones espectrales de la identidad de B_N y B , respectivamente.

Recordando el operador \tilde{A}_N de dimensión finito estudiado en sección 3.1 y definiendo

$$A_N := \tilde{A}_N \oplus \mathbb{O}, \quad (3.3.2)$$

donde \mathbb{O} es el operador cero en el espacio $\mathcal{H} \ominus \mathcal{H}_N$ de dimensión infinita. Para cualquier $N > n$, el operador A_N es autoadjunto, así se puede tomar ventaja del teorema espectral. Introduciendo la siguiente notación para la función espectral con valores matriciales

$$\sigma_N(t) := \langle \delta_i, E_{A_N}(t) \delta_j \rangle \quad \text{para cualquier } N > n \quad (3.3.3)$$

$$\sigma(t) := \langle \delta_i, E_A(t) \delta_j \rangle. \quad (3.3.4)$$

Lema 3.3.1. La función espectral con valores matriciales $\sigma_N(t)$ del operador A_N converge a la función espectral $\sigma(t)$ del operador A en todos los puntos de continuidad de $\sigma(t)$, esto es,

$$\sigma_N(t) \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{} \sigma(t), \quad t \text{ pertenece a un punto de continuidad de } \sigma(t). \quad (3.3.5)$$

Demostración. Sea $l_{\text{fin}}(\mathbb{N})$ el espacio lineal de sucesiones con un número finito de elementos no cero. Este espacio es un núcleo del operador A . Dado un elemento $\varphi = \sum_{k=1}^s \varphi_k \delta_k \in l_{\text{fin}}$, se verifica que, para todo $N \geq N_0 := s + n$, $A_N \varphi = A \varphi$. Por lo tanto, las condiciones de la proposición 3.3.3 se satisfacen. Así, por proposición 3.3.4, se obtiene el resultado. \square

Corolario 3.3.1. Para cualquier $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, la integral

$$\int_{\mathbb{R}} t^k d\sigma$$

converge. Más aún, $\int_{\mathbb{R}} d\sigma$ es la matriz identidad.

Demostración. La primer parte de la afirmación es una consecuencia de los lemas 3.2.2 y 3.3.1. La segunda parte se sigue del hecho que σ es la función espectral del operador autoadjunto A . \square

Sobre la base del resultado anterior, se denota

$$S_k := \int t^k d\sigma$$

para cualquier $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Definición 3.3.2. Dada la función espectral σ del operador autoadjunto A , se denota

$$\sigma^{\mathcal{T}} := \mathcal{T}\sigma\mathcal{T}^*,$$

donde \mathcal{T} es una matriz que satisface I) y II).

Usando corolario 2.1.1, se tiene

$$\sigma_N^{\mathcal{T}}(t) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \sigma^{\mathcal{T}}(t), \quad t \text{ pertenece a los puntos de continuidad de } \sigma^{\mathcal{T}}(t), \quad (3.3.6)$$

donde $\sigma_N^{\mathcal{T}}$ es la función dada en (2.1.13) y (2.1.14). También se afirma que

$$\mathcal{T}S_k\mathcal{T}^* = \int_{\mathbb{R}} t^k d\sigma^{\mathcal{T}} := S_k(\mathcal{T}). \quad (3.3.7)$$

Lema 3.3.2. Para cualquier \mathcal{T} que satisface I) y II) (véase página 69), la función $\sigma^{\mathcal{T}}$, dada en definición 3.3.2, está en $\mathfrak{M}_d(n, \infty)$.

Demostración. Se sigue de [17, sec. 2] que la sucesión $\{S_k\}_{k=0}^{\infty}$ define un problema de momentos matricial determinado. En vista de (3.3.7), la sucesión $\{S_k(\mathcal{T})\}_{k=0}^{\infty}$ también tiene una solución para cualquier \mathcal{T} . \square

3.4. Reconstrucción de la matriz

Es esta sección, el punto de partida será una función con valores matriciales $\tilde{\sigma}(t) \in \mathfrak{M}(n, \infty)$ y se construirá una matriz \mathcal{A} en la clase $\mathcal{M}(n, \infty)$ a partir de la función $\tilde{\sigma}(t)$. Además, se verifica que para alguna matriz \mathcal{T} , la cual se da como condición inicial y satiface I) y II) (véase página 69), la función $\tilde{\sigma}$ es la función espectral de la matriz reconstruida \mathcal{A} . Por lo tanto, cualquier matriz en $\mathcal{M}(n, \infty)$ puede ser reconstruida a partir de su función en $\mathfrak{M}(n, \infty)$.

Se considera el espacio de Hilbert $L_2(\mathbb{R}, \tilde{\sigma})$ con $\tilde{\sigma} \in \mathfrak{M}(n, \infty)$. De lo que se ha dicho, o bien existen polinomios vectoriales de norma cero o no existen.

Se aplica el proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt a la sucesión de polinomios vectoriales dada por (2.3.1). Si existen polinomios cuya norma es cero, entonces el algoritmo de Gram-Schmidt genera polinomios vectoriales de norma cero. En efecto, sea $\mathbf{r} \neq 0$ un polinomio vectorial de norma cero de mínima altura h_1 (esto es cualquier polinomio de norma cero que tiene altura no menor que h_1), y sea $\{\tilde{\mathbf{p}}_k\}_{k=1}^{h_1}$ los polinomios vectoriales ortonormalizados que se obtienen de las primeras h_1 iteraciones del proceso de Gram-Schmidt. Por lo tanto, si se define

$$\mathbf{s} := \mathbf{e}_{h_1+1} - \sum_{i=1}^{h_1} \langle \tilde{\mathbf{p}}_i, \mathbf{e}_{h_1+1} \rangle \tilde{\mathbf{p}}_i,$$

entonces, en vista del hecho que $h(\tilde{\mathbf{p}}_k) = k - 1$ para $k = 1, \dots, h_1$, se tiene $\mathbf{e}_{h_1+1} = a\mathbf{r} + \sum_{i=1}^{h_1} a_i \tilde{\mathbf{p}}_i$ que a su vez conduce a

$$\mathbf{s} = a\mathbf{r} + \sum_{k=1}^{h_1} \tilde{a}_k \tilde{\mathbf{p}}_k. \quad (3.4.1)$$

Esto implica que $\|\mathbf{s}\|_{L_2(\mathbb{R}, \tilde{\sigma})} = 0$, ya que $\langle \mathbf{s}, \mathbf{r} \rangle_{L_2(\mathbb{R}, \tilde{\sigma})}$ y $\mathbf{s} \perp \tilde{\mathbf{p}}_k$ para $k = 1, \dots, h_1$ por construcción. Entonces el proceso de Gram-Schmidt produce polinomios vectoriales de norma cero. Habiendo encontrado polinomios de norma cero, se continua con el proceso tomando el siguiente vector de la sucesión (2.3.1). Observe que si la técnica de Gram-Schmidt produce un polinomio vectorial \mathbf{q} de norma cero de altura h , entonces para cualquier número entero l , el polinomio vectorial \mathbf{t} que se obtiene de la $h + 1 + nl$ -ésima iteración del proceso de Gram-Schmidt, esto es,

$$\mathbf{t} = \mathbf{e}_{h+1+nl} - \sum_{h(\tilde{\mathbf{p}}_i) < h+1+nl} \langle \tilde{\mathbf{p}}_i, \mathbf{e}_{h+1+nl} \rangle \tilde{\mathbf{p}}_i,$$

satisface que $\|\mathbf{t}\|_{L_2(\mathbb{R}, \tilde{\sigma})} = 0$ (para todo $l \in \mathbb{N}$), debido a que

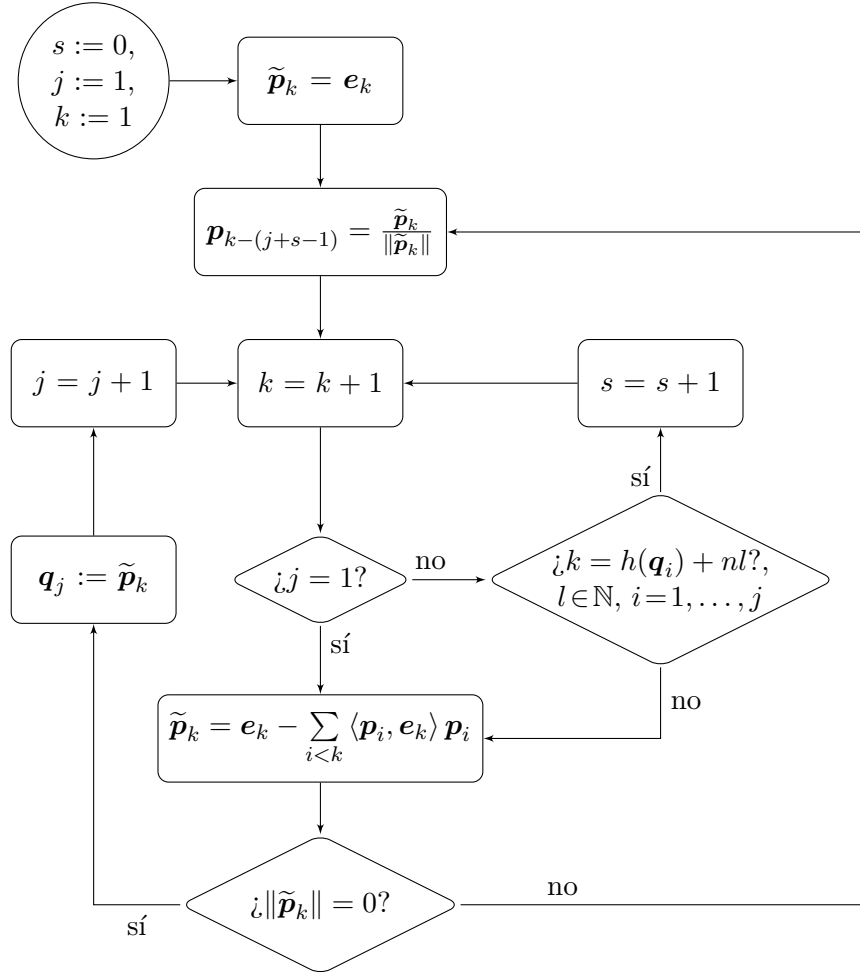
$$\mathbf{e}_{h+1+nl} = R_l \mathbf{q} + \sum_{h(\tilde{\mathbf{p}}_i) < h+1+nl} c_i \tilde{\mathbf{p}}_i + \sum_{h(\mathbf{r}_i) < h+1+nl} \mathbf{r}_i,$$

donde R_l es un polinomio escalar con grado k y cada \mathbf{r}_i es un polinomio vectorial de norma cero con $h(\mathbf{r}_i) \neq h + nk$.

Observación 3.4.1. Ya que $\tilde{\sigma}$ tiene un número infinito de puntos de crecimiento, el proceso de Gram-Schmidt produce una sucesión infinita de vectores ortonormales. En efecto, un conjunto finito de vectores ortonormales implica que $L_2(\mathbb{R}, \tilde{\sigma})$ es de dimensión finita.

El siguiente diagrama de flujo muestra que el proceso de Gram-Schmidt apli-

cando a la sucesión (2.3.1) no sólo da la sucesión ortonormalizada de polinomios vectoriales, sino también una sucesión de polinomios vectoriales de norma cero tal que en algún paso del algoritmo estas dos sucesiones juntas, son una base del espacio de polinomios vectoriales (véase teorema 1.1.1 y compare con (3.1.11)).



Claramente, ya que el soporte de la medida es infinito (véase corolario 3.2.2), no se pueden obtener más de $n - 1$ polinomios vectoriales de norma cero del proceso de Gram-Schmidt aplicados a la sucesión de vectores polinomiales dados por (2.3.1). En efecto, si se encuentra el n -ésimo polinomio vectorial \mathbf{q}_n , repitiendo la argumentación descrita anteriormente y tomando en cuenta

$$\{h(\mathbf{q}_1), \dots, h(\mathbf{q}_n)\} = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z},$$

se obtiene que todos los polinomios vectoriales que se obtienen de este proceso tienen norma cero a partir de algún polinomio vectorial. Esto corresponde a un circuito infinito del lado izquierdo en el diagrama de flujo y a una medida con soporte finito, y en cuyo caso, $L_2(\mathbb{R}, \tilde{\sigma})$ sería de dimensión finita.

Lema 3.4.1. *Cualquier polinomio vectorial $\mathbf{r}(z)$ es una combinación lineal de*

$$\{\mathbf{p}_k(z) : k \in \mathbb{N}\} \cup \{z^l \mathbf{q}_j(z) : l \in \mathbb{N}, j \in \{1, \dots, j_0\}\}. \quad (3.4.2)$$

Demostración. Note que la sucesión de polinomios vectoriales (2.3.1) satisfacen que $h(\mathbf{e}_i) = i - 1$. Debido al hecho que

$$h \left(\mathbf{e}_k - \sum_{h\tilde{\mathbf{p}}_i < k} \langle \tilde{\mathbf{p}}_i, \mathbf{e}_k \rangle \tilde{\mathbf{p}}_i \right) = h(\mathbf{e}_k), \quad (3.4.3)$$

se concluye que las alturas del conjunto $\{\tilde{\mathbf{p}}_k\}_{k=1}^{\infty} \cup \{z^l \mathbf{q}_j\}_{j=1}^{j_0}$ ($l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$) están en correspondencia uno a uno con el conjunto $\mathbb{N} \cup \{0\}$. Esto completa la demostración, debido al teorema 1.1.1. \square

Por una argumentación dada anteriormente y al mismo razonamiento usado en la demostración del teorema 3.2.1 b), se llega a la siguiente afirmación.

Proposición 3.4.1. *Sea $\tilde{\sigma}$ en $\mathfrak{M}(n, \infty)$. Entonces existen a lo más $n - 1$ polinomios vectoriales $\{\tilde{\mathbf{q}}_i\}_{i=1}^{j_0}$ ($j_0 \leq n - 1$) tal que cualquier polinomio vectorial de norma cero \mathbf{r} satisface que*

$$\mathbf{r} = \sum_{i=1}^{j_0} R_i \tilde{\mathbf{q}}_i,$$

donde R_i , para cualquier $i \in \{1, \dots, j_0\}$, es un polinomio escalar.

Sea $\tilde{\sigma}(t)$ una matriz con valores matriciales en $\mathfrak{M}(n, \infty)$ y considérese la sucesión $\{\tilde{\mathbf{p}}_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ y $\{\tilde{\mathbf{q}}_i\}_{i=1}^{j_0}$ obtenida de aplicar el proceso de Gram-Schmidt a la sucesión (2.3.1). Ya que para cualquier $k \in \mathbb{N}$ existe $l \in \mathbb{N}$ tal que $h(z\tilde{\mathbf{p}}_k) \leq h(\tilde{\mathbf{p}}_l)$, se tiene por lema 3.4.1 que

$$z\tilde{\mathbf{p}}_k(z) = \sum_{i=1}^l c_{ik} \tilde{\mathbf{p}}_i(z) + \sum_{j=1}^{j_0} R_{kj}(z) \tilde{\mathbf{q}}_j(z), \quad (3.4.4)$$

donde $c_{ki} \in \mathbb{C}$ y $R_{kj}(z)$ es un polinomio escalar.

Observación 3.4.2. De comparar las alturas del lado derecho e izquierdo de (3.4.4), se obtiene los incisos a) y b) de abajo. Para verificar inciso c), se toma en cuenta que el coeficiente principal de \mathbf{e}_k es positivo para $k \in \mathbb{N}$ y por lo tanto el proceso de Gram-Schmidt genera la sucesión $\{\tilde{\mathbf{p}}_k\}_{k=1}^{\infty}$ cuyos coeficientes principales son positivos (compare con observación 2.3.1).

a) $c_{lk} = 0$ si $h(z\tilde{\mathbf{p}}_k) = h(\tilde{\mathbf{p}}_l)$,

b) $R_{kj}(z) = 0$ si $h(z\tilde{\mathbf{p}}_k) < h(R_{kj}(z)\tilde{\mathbf{q}}_j)$,

c) $c_{lk} > 0$ si existe $l \in \mathbb{N}$ tal que $h(z\tilde{\mathbf{p}}_k) = h(\tilde{\mathbf{p}}_l)$

Claramente,

$$c_{lk} = \langle \tilde{\mathbf{p}}_l, z\tilde{\mathbf{p}}_k \rangle_{L_2(\mathbb{R}, \tilde{\sigma})} = \langle z\tilde{\mathbf{p}}_l, \tilde{\mathbf{p}}_k \rangle_{L_2(\mathbb{R}, \tilde{\sigma})} = c_{kl}. \quad (3.4.5)$$

En sección 2.3, se prueba un algoritmo de reconstrucción para reconstruir la matriz finita en banda asociada a el operador A_N a partir de su función espectral. Las pruebas de los lemas 2.3.1 y 2.3.2 demuestran las siguientes dos afirmaciones, respectivamente

Proposición 3.4.2. *Si $|l - k| > n$. Entonces, los números complejos c_{ki} en (3.4.4) cumplen*

$$c_{kl} = c_{lk} = 0.$$

Proposición 3.4.2 muestra que $\{c_{lk}\}_{l,k=1}^{\infty}$ es una matriz en banda. Volviendo a la pregunta de caracterización de las diagonales de $\{c_{lk}\}_{l,k=1}^{\infty}$. Se mostrará que éstas sufrirán el mismo tipo de degeneración que se dio al inicio del capítulo.

Para un número fijo $i \in \{0, \dots, n\}$, se definen los números

$$d_k^{(i)} := c_{k+i,k} = c_{k,k+i} \quad (3.4.6)$$

para $k \in \mathbb{N}$.

Proposición 3.4.3. *Fijando $j \in \{0, \dots, j_0 - 1\}$.*

a) *Si k es tal que $h(\tilde{\mathbf{q}}_j) < h(z\tilde{\mathbf{p}}_k) < h(\tilde{\mathbf{q}}_{j+1})$, entonces $d_k^{(n-j)} > 0$. Aquí se supone que $h(\mathbf{q}_0) := n - 1$.*

b) *Si k es tal que $h(z\tilde{\mathbf{p}}_k) \geq h(\tilde{\mathbf{q}}_{j+1})$, entonces $d_k^{(n-j)} = 0$*

Corolario 3.4.1. *Si c_{lk} son los coeficientes dados en (3.4.4), entonces la matriz $\{c_{lk}\}_{k,l=1}^{\infty}$ está en $\mathcal{M}(n, \infty)$ y ésta es la representación matricial de una restricción simétrica del operador de multiplicación por la variable independiente en $L_2(\mathbb{R}, \tilde{\sigma})$. (La restricción podría ser impropia, es decir, el caso cuando la restricción coincide con el operador de multiplicación por la variable independiente no es excluido).*

Demostración. Tomando en cuenta (3.4.6), se sigue de proposición 3.4.2 y 3.4.3 que la matriz $\{c_{lk}\}_{k,l=1}^{\infty}$ está en la clase $\mathcal{M}(n, \infty)$. Ahora, en vista de (3.4.5), el operador de multiplicación por la variable independiente es una extensión del mínimo operador simétrico cerrado B en $L_2(\mathbb{R}, \tilde{\sigma})$ que satisface

$$c_{kl} = \langle \tilde{\mathbf{p}}_k, B\mathbf{p}_l \rangle_{L_2(\mathbb{R}, \tilde{\sigma})}.$$

□

Teorema 3.4.1. *Sea $\tilde{\sigma}(t)$ un elemento de $\mathfrak{M}(n, \infty)$ y c_{kl} los coeficientes dados en (3.4.4). Entonces $\tilde{\sigma}$ es una función espectral de la matriz $\{c_{kl}\}_{k,l=1}^{\infty}$ de acuerdo a la definición 3.2.1.*

Demostración. Ya que la ecuación en recurrencias para la sucesión ortonormal $\{\tilde{\mathbf{p}}_k\}_{k=1}^{\infty}$ y la sucesión de polinomios $\{\mathbf{p}_k\}_{k=1}^{\infty}$ están relacionados de la misma forma como en el caso de dimensión finita (véase (2.1.17) y (2.3.15)), se puede usar la argumentación de las pruebas del lema 2.3.3 (sin olvidar la convención de la página 71) para obtener que los polinomios vectoriales $\{\tilde{\mathbf{p}}_k\}_{k=1}^{\infty}$ y $\{\mathbf{p}_k\}_{k=1}^{\infty}$ satisfacen

$$\mathbf{p}_k(z) = \tilde{\mathbf{p}}_k(z) + \tilde{\mathbf{r}}_k(z) \quad (3.4.7)$$

donde $\|\tilde{\mathbf{r}}_k\|_{L_2(\mathbb{R}, \tilde{\sigma})} = 0$. Análogamente, cuando $j_0 \neq 0$ también puede probarse que $\{\tilde{\mathbf{q}}_k\}_{k=1}^{j_0}$ y $\{\mathbf{q}_j\}_{j=1}^{j_0}$ satisfacen

$$\mathbf{q}_j(z) = \sum_{i \leq j} R_i(z) \tilde{\mathbf{q}}_i(z), \quad R_j \neq 0, \quad (3.4.8)$$

donde $R_i(z)$ es un polinomio escalar (véase lema 2.3.4). Debido a que (3.4.7) y (3.4.8), $\{\mathbf{p}_k\}_{k=1}^{\infty}$ es una sucesión ortonormal en $L_2(\mathbb{R}, \tilde{\sigma})$ y $\tilde{\mathbf{q}}_j$ está en la clase de equivalencia del cero en el espacio $L_2(\mathbb{R}, \tilde{\sigma})$, para cualquier $j \in \{1, \dots, j_0\}$. Por lo tanto se prueba la afirmación. \square

Teorema 3.4.2. *Sea $\tilde{\sigma}$ en $\mathfrak{M}_d(n, \infty)$ y c_{ki} los coeficientes dados en (3.4.4). Entonces existe \mathcal{T} tal que $\sigma^{\mathcal{T}}$, dado en definición 3.3.2, coincide con $\tilde{\sigma}$.*

Demostración. De acuerdo al teorema 3.4.1, existe \mathcal{T} tal que los vectores polinomiales $\{\mathbf{p}_k\}_{k=1}^{\infty}$ son ortonormales en $L_2(\mathbb{R}, \tilde{\sigma})$. Ya que $\tilde{\sigma}$ es la única solución del problema de momentos

$$\left\{ \int_{\mathbb{R}} t^k d\tilde{\sigma} \right\}_{k=0}^{\infty},$$

el sistema ortonormal $\{\mathbf{p}_k\}_{k=1}^{\infty}$ es una base y $\{c_{kl}\}_{k,l=1}^{\infty}$ es la representación matricial del operador de multiplicación por la variable independiente (véase [17, sec. 2]). Sea σ la función espectral dado por (3.3.4) (con A el operador de multiplicación por la variable independiente) y $\sigma^{\mathcal{T}}$ la función definida en definición 3.3.2. Ya que los elementos de la sucesión $\{\mathbf{p}_k\}_{k=1}^{\infty}$ satisfacen la ecuación en recurrencias dada por la matriz $\{c_{kl}\}_{k,l=1}^{\infty}$ con condición inicial \mathcal{T} , para cualquier $k, l \in \mathbb{N}$, existe N suficientemente grande tal que

$$\langle \mathbf{p}_k, \mathbf{p}_l \rangle = \delta_{kl}.$$

Ahora, a partir de (3.3.6) y lema 3.2.2, se sigue que $\tilde{\sigma}$ y $\sigma^{\mathcal{T}}$ tienen los mismos momentos. \square

Apéndice A

Artículos

Aquí se anexan los manuscritos, desarrollados durante la investigación doctoral, que están publicados, en revistas internacionales indizadas y arbitradas, y sometidos a este tipo de revistas.

El manuscrito que trata el problema de interpolación se llama “On a linear interpolation problem for n -dimensional vector polynomials” se encuentra publicado en la revista *Journal of Approximation Theory*, volumen 199, páginas 45-62, del año 2015. Se encuentra anexo en la presente tesis en la página 88.

En la página 112 puede encontrarse el manuscrito que aborda la teoría espectral directa e inversa de la clase $\mathcal{M}(n, N)$. Dicho manuscrito con nombre “Inverse spectral analysis for a class of finite band symmetric matrices”, se encuentra sometido en la revista *Houston Journal of Mathematics*.

Finalmente en la página 145, se anexa el manuscrito sobre el análisis espectral para la clase $M(n, \infty)$ cuyo nombre es “Inverse spectral analysis for a class of infinite band symmetric matrices” y fue sometido a la revista *Journal of Mathematical Analysis and Applications*.

On a linear interpolation problem for n -dimensional vector polynomials*

Mikhail Kudryavtsev

Department of Mathematics
Institute for Low Temperature Physics and Engineering
Lenin Av. 47, 61103
Kharkov, Ukraine
kudryavtsev@onet.com.ua

Sergio Palafox

Departamento de Física Matemática
Instituto de Investigaciones en Matemáticas Aplicadas y en Sistemas
Universidad Nacional Autónoma de México
C.P. 04510, México D.F.
sergiopalafox@gmail.com

Luis O. Silva

Departamento de Física Matemática
Instituto de Investigaciones en Matemáticas Aplicadas y en Sistemas
Universidad Nacional Autónoma de México
C.P. 04510, México D.F.
silva@iimas.unam.mx

Abstract

This work provides a complete characterization of the solutions of a linear interpolation problem for vector polynomials. The interpolation problem consists in finding n scalar polynomials such that an equation involving a linear combination of them is satisfied for each one of the N interpolation nodes. The results of this work generalize previous results on the so-called rational interpolation and have applications to direct and inverse spectral analysis of band matrices.

Mathematics Subject Classification(2010): 30E05; 41A05.

Keywords: Linear interpolation; Spaces of vector polynomials.

*Research partially supported by UNAM-DGAPA-PAPIIT IN105414

1. Introduction

In this work, we are concerned with the following interpolation problem. Given a collection of complex numbers z_1, \dots, z_N , which are called interpolation nodes, and other collections of complex numbers $\alpha_k(1), \dots, \alpha_k(N)$, $k = 1, \dots, n$, such that $\sum_{k=1}^n |\alpha_k(j)| > 0$ for every $j \in \{1, 2, \dots, N\}$, find polynomials P_k , $k = 1, \dots, n$, which satisfy

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k(j) P_k(z_j) = 0 \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, N\}. \quad (1)$$

We lay stress on the fact that the interpolation nodes z_1, z_2, \dots, z_N are not required to be pairwise different (see Remark 2 in Section 4). The results of this paper give a complete characterization of all solutions of the interpolation problem (1).

The interpolation problem defined above has been studied in [7] and much earlier in [11] for the particular setting when $n = 2$. In this case, the theory developed in [7, 11] allows to treat the problem of finding a rational function $P_1(z)/P_2(z)$ which takes the value $-\alpha_2(j)/\alpha_1(j) \in \mathbb{C}$ at each interpolation node z_j . This is the so-called rational interpolation problem, or Cauchy-Jacobi problem, and $P_1(z)/P_2(z)$ is referred to as the multipoint Padé approximant [1, Sec. 7.1]. Noteworthy, although the research in this matter has put particular emphasis on the numerical aspect of the problem, [7, 11] consider the theoretical problem of accounting for the structure of all solutions of the rational interpolation problem. In [7], this is used to deal with the inverse spectral analysis of five-diagonal unitary matrices (the so called CMV matrices, cf. [6]) and this requires additional constraints for certain coefficients of the interpolating rational polynomials. Similarly, the spectral analysis of five-diagonal symmetric matrices also demands additional conditions (see [8]) on the rational interpolation problem. The description obtained in [7] permits to reduce the rational interpolation problem with such additional restrictions to a triangular linear system and to answer the specific question of the existence and uniqueness (or non-uniqueness) of the solution to the inverse spectral problem. Other approaches to rational interpolation can be found in [4, 5, 10].

The present work generalizes to any $n \in \mathbb{N}$ the linear interpolation theory given in [7, Sec. 2]. The passage from $n = 2$ to any $n \in \mathbb{N}$ is not straightforward; many of the obtained results require differing techniques. Particularly, this becomes clear in Sections 4 and 5. Similar generalizations of the rational interpolation problem that also focus on the structure of the set of solutions can be found in [2, 3, 12, 13].

Our main motivation for studying the interpolation problem given by (1) lies in its applications to direct and inverse spectral problems of $N \times N$ symmetric band

matrices with $2n + 1$ diagonals, which will be considered in a forthcoming paper [9]. Notwithstanding the fact that the interpolation theory discussed in this work was developed with the applications to inverse spectral analysis in mind, we solve a problem interesting by itself and which may have other applications. It is worth remarking that, although [2, 3, 12, 13] also deal with the structural properties of the solution set of the interpolation problem given by (1), our approach differs in several respects from the ones used in those works. On the one hand, this permits to tackle the inverse spectral analysis of finite diagonal band matrices [9]. On the other hand, the method developed here allows a new characterization of the interpolation problem and new results on the structure of the solutions (see Section 5 and, in particular, Theorems 5.2 and 5.3).

The exposition is organized as follows. In Section 2 we lay down the notation, introduce the main concepts, and prove some subsidiary assertions. Section 3 contains auxiliary results related to linear transformations of vector polynomials. Finally, in Sections 4 and 5, we show that the so-called *generators* determine the set of solutions of the interpolation problem given by (1) and provide a complete characterization of this set.

2. Vector polynomials and their height

Throughout this work we consider the number $n \in \mathbb{N}$ to be fixed. We begin this section by fixing the notation and introducing some auxiliary concepts.

Definition 1. Let us denote by \mathbb{P} the space of n -dimensional vector polynomials, viz.,

$$\mathbb{P} := \left\{ \mathbf{p}(z) = \begin{pmatrix} P_1(z) \\ P_2(z) \\ \vdots \\ P_n(z) \end{pmatrix} : P_k \text{ is a scalar polynomial for } k \in \{1, \dots, n\} \right\}.$$

Clearly, \mathbb{P} is an infinite dimensional linear space and it is a module over the ring of scalar polynomials, i. e., for any scalar polynomial S ,

$$\mathbf{p} \in \mathbb{P} \Rightarrow S\mathbf{p} = (SP_1(z), SP_2(z), \dots, SP_n(z))^t \in \mathbb{P}.$$

Definition 2. Let the function $h : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{N} \cup \{0, -\infty\}$ be defined by

$$h(\mathbf{p}) := \begin{cases} \max_{j \in \{1, \dots, n\}} \{n \deg P_j(z) + j - 1\}, & \mathbf{p} \neq 0, \\ -\infty, & \mathbf{p} = 0, \end{cases} \quad (2)$$

where it has been assumed that $\deg 0 = -\infty$. The number $h(\mathbf{p})$ is called the height of the vector polynomial \mathbf{p} .

Note that for any scalar polynomial S

$$h(S\mathbf{p}) = h(\mathbf{p}) + n \deg S. \quad (3)$$

Lemma 2.1. (a) If $h(\mathbf{p}) \neq h(\mathbf{q})$, then $h(a\mathbf{p} + b\mathbf{q}) = \max\{h(\mathbf{p}), h(\mathbf{q})\}$ for all $a, b \in \mathbb{C}$.

(b) If $h(\mathbf{p}) = h(\mathbf{q}) = m$, then $h(a\mathbf{p} + b\mathbf{q}) \leq m$ for every $a, b \in \mathbb{C}$.

(c) If $h(\mathbf{p}) = h(\mathbf{q}) = m$, then there exists a $c \in \mathbb{C}$ such that $h(\mathbf{p} + c\mathbf{q}) \leq m - 1$

Proof. We only prove (c) since (a) and (b) are proven with the same argumentation. Let $m = nk + l$ with $l \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ and $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, then k and l are uniquely determined by m and $\deg(Q_{l+1}(z)) = \deg(P_{l+1}(z)) = k$. Therefore, there is c so that $\deg(P_{l+1} + cQ_{l+1}) \leq k - 1$. Also, one has that $\deg(P_j + cQ_j)$ is not greater than $k - 1$ for $l + 1 \leq j \leq n$ and $\deg(P_j + cQ_j)$ is not greater than k for $1 \leq j \leq l$. So,

$$\begin{aligned} h(\mathbf{p} + c\mathbf{q}) &= \max_{j \in \{1, \dots, n\}} \{n \deg(P_j(z) + cQ_j(z)) + j - 1\} \\ &\leq \max\{nk + l - 1, n(k - 1) + l, n(k - 1) + n - 1\} \\ &\leq nk + l - 1 = m - 1. \end{aligned}$$

□

For $k = 0, 1, \dots$, let us consider the following set of elements in \mathbb{P} ,

$$\mathbf{e}_{nk+1}(z) = \begin{pmatrix} z^k \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_{nk+2}(z) = \begin{pmatrix} 0 \\ z^k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \mathbf{e}_{n(k+1)}(z) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ z^k \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Clearly, $h(\mathbf{e}_j(z)) = j - 1$ for all $j \in \mathbb{N}$.

Lemma 2.2. The sequence $\{\mathbf{e}_j(z)\}_{j=1}^{\infty}$ is a basis of the space \mathbb{P} , i. e., for any $\mathbf{p} \in \mathbb{P}$ with $h(\mathbf{p}) = m \neq -\infty$, there exist unique numbers c_0, c_1, \dots, c_m , where $c_m \neq 0$, such that

$$\mathbf{p}(z) = \sum_{k=0}^m c_k \mathbf{e}_{k+1}.$$

Proof. We prove the assertion by induction. If $m = 0, 1, \dots, n - 1$, the result is immediate. As before, let $m = nk + l$ with $k \in \mathbb{N}$ and $l \in \{0, 1, \dots, n - 1\}$. Then one can write $P_{l+1}(z) = az^k + Q_{l+1}(z)$, where $a \neq 0$ and $\deg Q_{l+1} \leq k - 1$.

Define $\mathbf{q}(z) := \mathbf{p}(z) - a\mathbf{e}_{nk+l+1} = (Q_1(z), Q_2(z), \dots, Q_n(z))^t$, i.e. $Q_j = P_j$ for $j = \{1, 2, \dots, n\} \setminus \{l + 1\}$. Thus, $\deg Q_j$ is not greater than $k - 1$ for all $j = l + 2, l + 3, \dots, n$ and $\deg Q_j$ is not greater than k for every $j = 1, 2, \dots, l$. Therefore, one has

$$h(\mathbf{q}) \leq \max \{nk + l - 1, n(k - 1) + n - 1\} = m - 1.$$

In the induction hypothesis we assume $\mathbf{q} = \sum_{k=0}^{m-1} c_k \mathbf{e}_{k+1}$. So, one obtains

$$\mathbf{p} = a\mathbf{e}_{nk+l+1} + \mathbf{q} = a\mathbf{e}_{m+1} + \sum_{k=0}^{m-1} c_k \mathbf{e}_{k+1} = \sum_{k=0}^m \tilde{c}_k \mathbf{e}_{k+1}.$$

The uniqueness of the expansion follows from the linear independence of the sequence $\{\mathbf{e}_j(z)\}_{j=1}^\infty$, which is straightforward to verify. \square

Theorem 2.1. *Let $\{\mathbf{g}_m\}_{m=1}^\infty$ be an arbitrary sequence of elements in \mathbb{P} such that*

$$h(\mathbf{g}_m) = m - 1 \quad \forall m \in \mathbb{N},$$

then $\{\mathbf{g}_m\}_{m=1}^\infty$ is a basis of \mathbb{P} .

Proof. From Lemma 2.2, it follows that $\mathbf{g}_{m+1}(z) = \sum_{k=0}^m c_{mk} \mathbf{e}_{k+1}(z)$, where c_{jj} is different from 0 for all $j = 0, \dots, m$. So

$$\begin{pmatrix} \mathbf{g}_1 \\ \mathbf{g}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{g}_{m+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{00} & 0 & \dots & 0 \\ c_{10} & c_{11} & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ c_{m0} & c_{m1} & \dots & c_{mm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{e}_{m+1} \end{pmatrix}.$$

Note that $\{c_{jk}\}_{j,k \in \{0, \dots, m\}}$ is a triangular matrix, thus

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{e}_{m+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{c}_{00} & 0 & \dots & 0 \\ \tilde{c}_{10} & \tilde{c}_{11} & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ \tilde{c}_{m0} & \tilde{c}_{m1} & \dots & \tilde{c}_{mm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{g}_1 \\ \mathbf{g}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{g}_{m+1} \end{pmatrix}.$$

Since $\{\mathbf{e}_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ is a basis, the same is true for $\{\mathbf{g}_m\}_{m \in \mathbb{N}}$. \square

3. The height under linear transformations on \mathbb{P}

Let $A = \{a_{jk}\}_{j,k \in \{1, \dots, n\}}$ be an arbitrary $n \times n$ matrix. For any $\mathbf{p} \in \mathbb{P}$, the linear transformation generated by A is

$$A\mathbf{p}(z) = \begin{pmatrix} a_{11}P_1(z) + a_{12}P_2(z) + \cdots + a_{1n}P_n(z) \\ a_{21}P_1(z) + a_{22}P_2(z) + \cdots + a_{2n}P_n(z) \\ \vdots \\ a_{n1}P_1(z) + a_{n2}P_2(z) + \cdots + a_{nn}P_n(z) \end{pmatrix} \in \mathbb{P}.$$

It follows from Definition 2 that

$$h(A\mathbf{p}) = \max_{j \in \{1, \dots, n\}} \left\{ n \deg \left(\sum_{k=1}^n a_{jk}P_k(z) \right) + j - 1 \right\}. \quad (5)$$

Lemma 3.1. (a) For any arbitrary $n \times n$ matrix A and $\mathbf{p} \in \mathbb{P}$,

$$h(A\mathbf{p}) \leq h(\mathbf{p}) + n - 1.$$

(b) If the $n \times n$ matrix A is upper triangular then for any $\mathbf{p} \in \mathbb{P}$,

$$h(A\mathbf{p}) \leq h(\mathbf{p}).$$

(c) If the $n \times n$ matrix A is lower triangular, then $h(\mathbf{p}) \leq nk + n - 1$ implies $h(A\mathbf{p}) \leq nk + n - 1$ for any $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Proof. (a) Note that, for all $j \in \{1, \dots, n\}$ the inequalities below hold

$$n \deg \left(\sum_{k=1}^n a_{jk}P_k \right) + j - 1 \leq n \max_{k \in \{1, \dots, n\}} \{\deg P_k\} + j - 1 \leq h(\mathbf{p}) + j - 1.$$

Hence $h(A\mathbf{p}) \leq h(\mathbf{p}) + n - 1$.

(b) Let the matrix $A = \{a_{jk}\}_{j,k \in \{1, \dots, n\}}$ be such that $a_{jk} = 0$ if $j > k$. Then, for the last entry of the vector polynomial $A\mathbf{p}$, one has

$$n \deg(a_{nn}P_n) + n - 1 \leq h(\mathbf{p}),$$

and for the next to last

$$n \deg \left(\sum_{k=n-1}^n a_{n-1,k} P_k \right) + n - 2 \leq n \max_{k \in \{n-1, n\}} \{ \deg P_k \} + n - 2 \leq h(\mathbf{p}).$$

Analogously, one obtains inequalities for all the entries up to the first one:

$$n \deg \left(\sum_{j=1}^n a_{1k} P_k \right) \leq n \max_{k \in \{1, \dots, n\}} \{ \deg P_k \} \leq h(\mathbf{p}).$$

Therefore, $h(A\mathbf{p}) \leq h(\mathbf{p})$.

(c) Let $A = \{a_{jk}\}_{j,k \in \{1, \dots, n\}}$ be such that $a_{jk} = 0$ if $j < k$. And $h(\mathbf{p}) \leq nl + n - 1$ with $l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. One verifies that

$$n \deg P_j + j - 1 \leq nl + n - 1 \quad \forall j = 1, \dots, n,$$

therefore $\deg P_j \leq l + \frac{n-j}{n}$ for all $j = 1, \dots, n$. This implies that $\deg P_j \leq l$ for any $j = 1, \dots, n$. So by (5), $h(A\mathbf{p}) \leq \max_{j \in \{1, \dots, n\}} \{nl + j - 1\} = nl + n - 1$. \square

Now, we introduce some matrices and state auxiliary results for them. These results will be useful in the next section.

Let $A_l = \{a_{jk}\}_{j,k \in \{1, \dots, n\}}$ be such that, for a fixed integer $l \in \{1, \dots, n\}$, it satisfies

$$\begin{aligned} a_{jj} &= 1 & \forall j \in \{1, \dots, n\} \setminus \{l\}, \\ a_{jk} &= 0 & \forall j \neq k, \text{ with } j \in \{1, \dots, n\} \setminus \{l\}, \end{aligned}$$

that is, it has the form

$$A_l = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{l1} & a_{l2} & \dots & a_{ll-1} & a_{ll} & a_{ll+1} & \dots & a_{ln} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Also, for any $l \in \{1, \dots, n\}$, define the matrix function

$$T_l(z) := \text{diag}\{t_k(z)\}, \quad t_k(z) := \begin{cases} z & \text{if } k = l, \\ 1 & \text{otherwise,} \end{cases} \quad (7)$$

i. e., $T_l(z)$ is nearly the identity matrix, except that in the l -th entry of the main diagonal, $T_l(z)$ has the variable z instead of 1.

Lemma 3.2. *Fix $n \geq 3$ and $l \in \{2, \dots, n-1\}$. If $\mathbf{p} \in \mathbb{P}$ is such that $h(\mathbf{p}) \leq nk + l - 1$ for any $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, then $h(A_l \mathbf{p}) \leq nk + l - 1$.*

Proof. Let $\mathbf{p} \in \mathbb{P}$. If $h(\mathbf{p}) \leq nk + l - 1$, then

$$\deg P_l \geq \deg P_i, \quad 1 \leq i \leq l-1, \quad (8)$$

$$\deg P_l > \deg P_i, \quad l+1 \leq i \leq n. \quad (9)$$

On the other hand,

$$A_l \mathbf{p} = \left(P_1(z), P_2(z), \dots, P_{l-1}(z), \sum_{i=1}^n a_{li} P_i(z), P_{l+1}(z), \dots, P_n(z) \right)^t.$$

By (8) and (9) we have

$$\deg \left(\sum_{i=1}^n a_{li} P_i(z) \right) \leq \max_{i \in \{1, \dots, n\}} \{\deg P_i(z)\} \leq \deg P_l(z).$$

Hence, by (5),

$$h(A_l \mathbf{p}) \leq h(\mathbf{p}) \leq nk + l - 1. \quad \square$$

Lemma 3.3. *If $\mathbf{p} \in \mathbb{P}$ and $h(\mathbf{p})$ is not greater than $nk + j$ for $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ and $j \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, then $h(T_{j+2}(z) \mathbf{p}) \leq nk + j + 1$, where $T_{n+1} := T_1$.*

Proof. The assertion follows from (8) and (9) by a reasoning similar to the one used in the proof of Lemma 3.2. \square

4. Generators of the interpolation problem

In this section we begin the detailed analysis of the interpolation problem set forth in the Introduction. Let us first provide an alternative interpretation of the interpolation problem given by (1).

Clearly, for all $j \in \{1, \dots, N\}$, one has

$$\left| \sum_{k=1}^n \alpha_k(j) P_k(z_j) \right|^2 = \left(\sum_{k=1}^n \overline{\alpha_k(j) P_k(z_j)} \right) \left(\sum_{k=1}^n \alpha_k(j) P_k(z_j) \right) = \langle \mathbf{p}(z_j), \sigma_j \mathbf{p}(z_j) \rangle,$$

where $\langle \cdot, \cdot \rangle$ is the inner product in \mathbb{C}^n with the first argument being anti-linear, and

$$\sigma_j := \begin{pmatrix} |\alpha_1(j)|^2 & \overline{\alpha_1(j)}\alpha_2(j) & \overline{\alpha_1(j)}\alpha_3(j) & \dots & \overline{\alpha_1(j)}\alpha_n(j) \\ \overline{\alpha_2(j)}\alpha_1(j) & |\alpha_2(j)|^2 & \overline{\alpha_2(j)}\alpha_3(j) & \dots & \overline{\alpha_2(j)}\alpha_n(j) \\ \overline{\alpha_3(j)}\alpha_1(j) & \overline{\alpha_3(j)}\alpha_2(j) & |\alpha_3(j)|^2 & \dots & \overline{\alpha_3(j)}\alpha_n(j) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{\alpha_n(j)}\alpha_1(j) & \overline{\alpha_n(j)}\alpha_2(j) & \overline{\alpha_n(j)}\alpha_3(j) & \dots & |\alpha_n(j)|^2 \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Thus, the interpolation problem (1) is equivalent to finding $\mathbf{p} \in \mathbb{P}$ such that

$$\langle \mathbf{p}(z_j), \sigma_j \mathbf{p}(z_j) \rangle = 0, \quad j = 1, \dots, N. \quad (11)$$

Remark 1. It follows from (10) that σ_j is a nonnegative rank-one matrix. Moreover, for every nonnegative rank-one $n \times n$ matrix σ , there is a collection of complex numbers $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ such that

$$\sigma = \begin{pmatrix} |\alpha_1|^2 & \overline{\alpha_1}\alpha_2 & \overline{\alpha_1}\alpha_3 & \dots & \overline{\alpha_1}\alpha_n \\ \overline{\alpha_2}\alpha_1 & |\alpha_2|^2 & \overline{\alpha_2}\alpha_3 & \dots & \overline{\alpha_2}\alpha_n \\ \overline{\alpha_3}\alpha_1 & \overline{\alpha_3}\alpha_2 & |\alpha_3|^2 & \dots & \overline{\alpha_3}\alpha_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{\alpha_n}\alpha_1 & \overline{\alpha_n}\alpha_2 & \overline{\alpha_n}\alpha_3 & \dots & |\alpha_n|^2 \end{pmatrix}. \quad (12)$$

Thus, the interpolation problem can be stated as the problem of finding $\mathbf{p} \in \mathbb{P}$ such that (11) holds for any collection of nonnegative rank-one $n \times n$ matrices $\{\sigma_j\}_{j=1}^N$.

Definition 3. Let us denote by $\mathbb{S}(n, N) = \mathbb{S}(\{\sigma_j\}_{j=1}^N, \{z_j\}_{j=1}^N)$ the set of all solutions of the interpolation problem (1), where σ_j is given by (10). We use the notation $\mathbb{S}(n, N)$ when the concrete matrices $\{\sigma_j\}_{j=1}^N$ and the interpolation nodes $\{z_j\}_{j=1}^N$ are not relevant.

Note that an interpolation problem is completely determined by the sets $\{\sigma_j\}_{j=1}^N$ and $\{z_j\}_{j=1}^N$. Since a solution of (1) is an element of \mathbb{P} , one obviously has $\mathbb{S}(n, N) \subset \mathbb{P}$. Clearly, in the same way it happens for \mathbb{P} , the space $\mathbb{S}(n, N)$ is a module over the ring of scalar polynomials.

Remark 2. Consider the interpolation problem given by $\{\sigma_j\}_{j=1}^N$ and $\{z_j\}_{j=1}^N$, if it turns out that $z_N = z_{N-1}$ and the vectors $\boldsymbol{\alpha}(j_N) := (\alpha_1(j_N), \dots, \alpha_n(j_N))^t$ and $\boldsymbol{\alpha}(j_{N-1})$ are linearly dependent, then

$$\mathbb{S}(\{\sigma_j\}_{j=1}^N, \{z_j\}_{j=1}^N) = \mathbb{S}(\{\sigma_j\}_{j=1}^{N-1}, \{z_j\}_{j=1}^{N-1}).$$

For the sake of convenience, we will suppose below that the vectors $\boldsymbol{\alpha}$ for the coinciding nodes are linearly independent, and in the case they are linearly dependent, the statements of the results should be changed in an evident manner to the corresponding statements with less nodes.

Let $\mathbb{M}(\mathbf{r})$ be the subset of \mathbb{P} given by

$$\mathbb{M}(\mathbf{r}) := \{\mathbf{p} \in \mathbb{P} : \mathbf{p} = S\mathbf{r}, \mathbf{r} \in \mathbb{P}, S \text{ is an arbitrary scalar polynomial}\}. \quad (13)$$

We say that $\mathbb{M}(\mathbf{r})$ is the set of vector polynomials generated by \mathbf{r} . Note that $\mathbb{M}(\mathbf{r})$ is a linear set and for any nonzero $\mathbf{q} \in \mathbb{M}(\mathbf{r})$ there exists $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ such that

$$h(\mathbf{q}) = h(\mathbf{r}) + nk. \quad (14)$$

Thus, all nonzero vector polynomials of $\mathbb{M}(\mathbf{r})$ are such that their heights are in the same equivalence class of $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

One of the main goals of this section is to show that $\mathbb{S}(n, N)$ has exactly n generators, that is, there are n vector polynomials $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n$ such that

$$\mathbb{M}(\mathbf{r}_1) \dot{+} \dots \dot{+} \mathbb{M}(\mathbf{r}_n) = \mathbb{S}(n, N).$$

This result is related to a known fact about the set of polynomials being solutions of the rational interpolation problem in its vector case [12, Thms. 3.1, 3.2] or the M-Padé approximation problem [13, Thm. 3.1].

Definition 4. Let \mathcal{M} be an arbitrary subset of \mathbb{P} . We define the height of \mathcal{M} by

$$h(\mathcal{M}) := \min \{h(\mathbf{q}) : \mathbf{q} \in \mathcal{M}, \mathbf{q} \neq 0\}. \quad (15)$$

Lemma 4.1. *Let \mathcal{M} be a linear subset of $\mathbb{S}(n, N)$ and $\mathbf{r}, \mathbf{p} \in \mathcal{M}$ such that $h(\mathbf{r}) = h(\mathbf{p}) = h(\mathcal{M})$, then $\mathbf{r} = c\mathbf{p}$ with $c \in \mathbb{C}$.*

Proof. From Lemma 2.1(c), it follows that there exists a complex constant c in \mathbb{C} such that $h(\mathbf{r} + c\mathbf{p}) \leq h(\mathcal{M}) - 1$. Since \mathcal{M} is linear, $\mathbf{r} + c\mathbf{p} \in \mathcal{M}$, but there is no element $\mathbf{q} \neq 0$ in \mathcal{M} such that $h(\mathbf{q}) \leq h(\mathcal{M})$. Hence $\mathbf{r} + c\mathbf{p} \equiv 0$. \square

Definition 5. We say that \mathbf{r} in $\mathbb{S}(n, N)$ is a first generator of $\mathbb{S}(n, N)$ when $h(\mathbf{r}) = h(\mathbb{S}(n, N))$.

Let us denote by \mathbb{M}_1 the set $\mathbb{M}(\mathbf{r})$ with \mathbf{r} being a first generator. Clearly, Lemma 4.1 implies that \mathbb{M}_1 does not depend on the choice of the first generator.

Theorem 4.1. *If \mathbf{r} is a first generator of $\mathbb{S}(n, N)$, then $h(\mathbf{r}) \leq N$ for any $N \in \mathbb{N}$.*

Proof. The goal of this proof is to obtain a constructive algorithm for finding a solution whose height is not greater than N . Clearly, this implies the assertion of the theorem since, by definition, the height of the first generator is less than or equal to the height of any nonzero solution.

Our construction is carried out by induction. For $N = 1$, we have a solution

$$\mathbf{p}(z) := (C_1, C_2, 0, \dots, 0)^t, \quad (16)$$

where $C_1 = \alpha_2(1)$, $C_2 = -\alpha_1(1)$, unless $\alpha_2(1)$ and $\alpha_1(1)$ are both zero, in which case C_1, C_2 are any nonzero constants. Indeed, (16) is solution of (11) since $\langle \mathbf{p}(z_1), \sigma_1 \mathbf{p}(z_1) \rangle = 0$, and $h(\mathbf{p}) \leq 1$.

Now, we suppose that the assertion holds for a fixed N and let us show that it also holds for $N + 1$. We will reduce the interpolation problem with $N + 1$ nodes to an interpolation problem with N nodes, which we know how to solve by the induction hypothesis.

Write $N = nk + l$ with $l < n$, where, for any fixed n , the integers k and l are uniquely determined. Suppose that $n \geq 3$ and let us first prove the assertion for a fixed l in $\{0, 1, \dots, n - 3\}$. If the matrix (10) satisfies that $\alpha_{l+2}(j) = 0$ for all $j \in \{1, \dots, N + 1\}$, then $\sigma_j = T_{l+2}(0)\sigma_j T_{l+2}(0)$. So, by putting the vector polynomial $\mathbf{p}(z) := \mathbf{e}_{l+2}(z)$ (see (4)), it turns out that \mathbf{p} is an element of $\mathbb{S}(n, N + 1)$. Indeed, since $T_{l+2}(0)\mathbf{p}(z) = 0$, one has

$$\langle \mathbf{p}(z_j), \sigma_j \mathbf{p}(z_j) \rangle = \langle \mathbf{p}(z_j), T_{l+2}(0)\sigma_j T_{l+2}(0)\mathbf{p}(z_j) \rangle = 0.$$

Moreover, $h(\mathbf{p}) = l + 1 \leq N + 1$. Thus, suppose without loss of generality that $\alpha_{l+2}(N + 1)$ is not equal to zero (otherwise re-enumerate the points z_1, \dots, z_{N+1}).

Consider the matrix A_{l+2} (see (6)), where

$$a_{l+2,k} := \begin{cases} \frac{1}{\alpha_{l+2}(N+1)} & \text{if } k = l + 2, \\ -\frac{\alpha_k(N+1)}{\alpha_{l+2}(N+1)} & \text{for } k \in \{1, 2, \dots, n\} \setminus \{l + 2\}. \end{cases}$$

With these settings, it is straightforward to verify that

$$A_{l+2}^* \sigma_{N+1} A_{l+2} = \text{diag}\{d_k\}_{k=1}^n, \quad d_k := \begin{cases} 1 & \text{if } k = l + 2, \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases} \quad (17)$$

Moreover, since σ_j is a nonnegative rank-one matrix for every $j \in \{1, \dots, N\}$, the

same is true for $A_{l+2}^* \sigma_j A_{l+2}$. Therefore (see Remark 1), for any $j \in \{1, \dots, N\}$, there are complex numbers $\beta_1(j), \dots, \beta_n(j)$ such that

$$A_{l+2}^* \sigma_j A_{l+2} = \begin{pmatrix} |\beta_1(j)|^2 & \overline{\beta_1(j)}\beta_2(j) & \overline{\beta_1(j)}\beta_3(j) & \dots & \overline{\beta_1(j)}\beta_n(j) \\ \overline{\beta_2(j)}\beta_1(j) & |\beta_2(j)|^2 & \overline{\beta_2(j)}\beta_3(j) & \dots & \overline{\beta_2(j)}\beta_n(j) \\ \overline{\beta_3(j)}\beta_1(j) & \overline{\beta_3(j)}\beta_2(j) & |\beta_3(j)|^2 & \dots & \overline{\beta_3(j)}\beta_n(j) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{\beta_n(j)}\beta_1(j) & \overline{\beta_n(j)}\beta_2(j) & \overline{\beta_n(j)}\beta_3(j) & \dots & |\beta_n(j)|^2 \end{pmatrix}. \quad (18)$$

Now, for all $j \in \{1, \dots, N\}$, let

$$\gamma_i(j) := \begin{cases} (z_{N+1} - z_j)\beta_{l+2}(j) & \text{if } i = l + 2, \\ \beta_i(j) & \text{for } i \in \{1, 2, \dots, n\} \setminus \{l + 2\}, \end{cases}$$

and consider the auxiliary interpolation problem given by $\{\tilde{\sigma}_j\}_{j=1}^N$ and $\{z_j\}_{j=1}^N$, where

$$\tilde{\sigma}_j := \begin{pmatrix} |\gamma_1(j)|^2 & \overline{\gamma_1(j)}\gamma_2(j) & \overline{\gamma_1(j)}\gamma_3(j) & \dots & \overline{\gamma_1(j)}\gamma_n(j) \\ \overline{\gamma_2(j)}\gamma_1(j) & |\gamma_2(j)|^2 & \overline{\gamma_2(j)}\gamma_3(j) & \dots & \overline{\gamma_2(j)}\gamma_n(j) \\ \overline{\gamma_3(j)}\gamma_1(j) & \overline{\gamma_3(j)}\gamma_2(j) & |\gamma_3(j)|^2 & \dots & \overline{\gamma_3(j)}\gamma_n(j) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{\gamma_n(j)}\gamma_1(j) & \overline{\gamma_n(j)}\gamma_2(j) & \overline{\gamma_n(j)}\gamma_3(j) & \dots & |\gamma_n(j)|^2 \end{pmatrix}.$$

By the induction hypothesis, there is a vector polynomial \mathbf{q} in $\mathbb{S}(\{\tilde{\sigma}_j\}_{j=1}^N, \{z_j\}_{j=1}^N)$ such that

$$h(\mathbf{q}) \leq N = nk + l. \quad (19)$$

Define the vector polynomial

$$\mathbf{r}(z) := A_{l+2} T_{l+2}(z_{N+1} - z) \mathbf{q}(z). \quad (20)$$

Then, for all $j \in \{1, \dots, N\}$,

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{r}(z_j), \sigma_j \mathbf{r}(z_j) \rangle &= \langle \mathbf{q}(z_j), T_{l+2}(\overline{z_{N+1} - z_j}) A_{l+2}^* \sigma_j A_{l+2} T_{l+2}(z_{N+1} - z_j) \mathbf{q}(z_j) \rangle \\ &= \langle \mathbf{q}(z_j), \tilde{\sigma}_j \mathbf{q}_{z_j} \rangle = 0. \end{aligned} \quad (21)$$

Also, it follows from (17) that

$$T_{l+2}^*(0) A_{l+2}^* \sigma_{N+1} A_{l+2} T_{l+2}(0) = 0.$$

Hence

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{r}(z_{N+1}), \sigma_{N+1} \mathbf{r}(z_{N+1}) \rangle &= \langle \mathbf{q}(z_{N+1}), T_{l+2}(0) A_{l+2}^* \sigma_{N+1} A_{l+2} T_{l+2}(0) \mathbf{q}(z_{N+1}) \rangle \\ &= 0. \end{aligned}$$

This last equality and (21) imply that \mathbf{r} is in $\mathbb{S}(\{\sigma_j\}_{j=1}^{N+1}, \{z_j\}_{j=1}^{N+1})$. Moreover, it follows from (19) and (20), by means of Lemmas 3.2 and 3.3, that

$$h(\mathbf{r}) \leq nk + l + 1 = N + 1.$$

Thus, the assertion of the theorem has been proven for $n \geq 3$ and $l \in \{0, \dots, n-3\}$.

For proving the assertion when $l = n - 2$, consider

$$\mathbf{r}(z) := A_n T_n(z_{N+1} - z) \mathbf{q}(z)$$

and, repeating the reasoning above, it is shown that \mathbf{r} is in $\mathbb{S}(n, N + 1)$. Moreover, since $h(\mathbf{q}) < nk + n - 2$, Lemma 3.3 implies that

$$h(T_n(z_{N+1} - z) \mathbf{q}) \leq nk + n - 1.$$

Therefore, Lemma 3.1(c) yields $h(\mathbf{r}) \leq N + 1$.

The case $l = n - 1$ is treated analogously with

$$\mathbf{r}(z) := A_1 T_1(z_{N+1} - z) \mathbf{q}(z)$$

being an element of $\mathbb{S}(n, N + 1)$. Again, by Lemma 3.3,

$$h(T_1(z_{N+1} - z) \mathbf{q}) \leq nk + n - 1.$$

Thus, it follows from Lemma 3.2(b) that $h(\mathbf{r}) \leq N + 1$.

It is now clear how to finish the proof when $n < 3$. □

Lemma 4.2. *Given an integer $m \geq Nn$, there exists a solution \mathbf{p} of $\mathbb{S}(n, N)$ such that $h(\mathbf{p}) = m$.*

Proof. Let $m = (N + k)n + l$ with $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ and $l \in \{0, 1, \dots, n - 1\}$. Let us construct a solution $\mathbf{p} \in \mathbb{S}(n, N)$ such that $h(\mathbf{p}) = (N + k)n + l$.

Define \mathbf{p} as follows

$$\mathbf{p}(z) := (0, \dots, 0, P_{l+1}(z), 0, \dots, 0)^t$$

where $P_{l+1}(z) = z^k \prod_{j=1}^N (z - z_j)$ and z_1, \dots, z_N are the nodes of the interpolation problem (1). It is straightforward to verify that \mathbf{p} is solution of $\mathbb{S}(n, N)$ and

$$h(\mathbf{p}) = n \deg P^{(l+1)}(z) + l = (N + k)n + l.$$

□

Note that Lemma 4.2 and (14) imply that there are n vector polynomials in $\mathbb{S}(n, N)$ whose heights are different elements of the factor space $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. We will see later on that there are infinitely many solutions for every equivalence class of the heights.

Lemma 4.3. *Fix a natural number m such that $1 \leq m < n$. If $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_m$ are arbitrary elements of $\mathbb{S}(n, N)$, then $\mathbb{S}(n, N) \setminus [\mathbb{M}(\mathbf{r}_1) + \dots + \mathbb{M}(\mathbf{r}_m)]$ is not empty and $h(\mathbb{S}(n, N) \setminus [\mathbb{M}(\mathbf{r}_1) + \dots + \mathbb{M}(\mathbf{r}_m)]) \neq h(\mathbf{r}_j) + nk$ for any $j \in \{1, \dots, m\}$ and $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. (In other words, $h(\mathbb{S}(n, N) \setminus [\mathbb{M}(\mathbf{r}_1) + \dots + \mathbb{M}(\mathbf{r}_m)])$ and $h(\mathbf{r}_j)$ are different elements of the factor space $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ for any $j \in \{1, \dots, m\}$).*

Proof. That $\mathbb{S}(n, N) \setminus [\mathbb{M}(\mathbf{r}_1) + \dots + \mathbb{M}(\mathbf{r}_m)]$ is not empty follows from Lemma 4.2 and (14) since $m < n$. We prove the second assertion by *reductio ad absurdum*. Suppose that, for some $k_0 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ and $j_0 \in \{1, \dots, m\}$,

$$h(\mathbb{S}(n, N) \setminus [\mathbb{M}(\mathbf{r}_1) + \dots + \mathbb{M}(\mathbf{r}_m)]) = h(\mathbf{r}_{j_0}) + nk_0.$$

Hence, there is $\mathbf{q} \in \mathbb{S}(n, N) \setminus [\mathbb{M}(\mathbf{r}_1) + \dots + \mathbb{M}(\mathbf{r}_m)]$ for which $h(\mathbf{q}) = h(\mathbf{r}_{j_0}) + nk_0$. Let $\mathbf{p} \in \mathbb{M}(\mathbf{r}_{j_0})$ such that $h(\mathbf{p}) = h(\mathbf{r}_{j_0}) + nk_0$. Then, by Lemma 2.1(c), there is $c \in \mathbb{C}$ such that $h(\mathbf{q} + c\mathbf{p}) \leq h(\mathbf{q}) - 1$. Clearly, $\mathbf{q} + c\mathbf{p} \in \mathbb{S}(n, N)$ but not in $\mathbb{M}(\mathbf{r}_1) + \dots + \mathbb{M}(\mathbf{r}_m)$. This contradicts the fact that \mathbf{q} is an element of minimal height in $\mathbb{S}(n, N) \setminus [\mathbb{M}(\mathbf{r}_1) + \dots + \mathbb{M}(\mathbf{r}_m)]$. □

Definition 6. Taking into account Definition 5 and Lemma 4.3, for $1 < j \leq n$, one defines recursively the j -th generator of $\mathbb{S}(n, N)$ as the vector polynomial \mathbf{r}_j in $\mathbb{S}(n, N) \setminus [\mathbb{M}_1 \dot{+} \dots \dot{+} \mathbb{M}_{j-1}]$ such that

$$h(\mathbf{r}_j) = h(\mathbb{S}(n, N) \setminus [\mathbb{M}_1 \dot{+} \dots \dot{+} \mathbb{M}_{j-1}])$$

and $\mathbb{M}_j := \mathbb{M}(\mathbf{r}_j)$.

In this definition we have used direct sum ($\dot{+}$) since $\mathbb{M}_k \cap \mathbb{M}_l = \{0\}$ for $k \neq l$. This follows from the fact that the nonzero vector polynomials in \mathbb{M}_k and \mathbb{M}_l have different heights as a consequence of (14) and Lemma 4.3. Clearly, each iteration of this definition, up to $j = n$, makes sense as a consequence of Lemma 4.3. Note also that $\mathbb{M}_1 \dot{+} \dots \dot{+} \mathbb{M}_j$ does not depend on the choice of the j -th generator. Indeed, if, along with \mathbf{r}_j , the vector polynomial \mathbf{q} is a j -th generator and \mathbf{q} is not in $\mathbb{M}_1 \dot{+} \dots \dot{+} \mathbb{M}_j$, then, taking into account that $h(\mathbb{S} \setminus [\mathbb{M}_1 \dot{+} \dots \dot{+} \mathbb{M}_{j-1}])$ is not greater than $h(\mathbb{S} \setminus [\mathbb{M}_1 \dot{+} \dots \dot{+} \mathbb{M}_j])$, it is straightforward to verify that Lemma 4.3 yields a contradiction.

5. Characterization of the solutions

This section deals with the properties of the generators of the interpolation problem given in (1). By elucidating the generators' properties, we are able to give a complete description of all solution of the interpolation problem.

Remark 3. Due to Lemma 4.3, and Definitions 5 and 6, one immediately obtains that

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{h(\mathbf{r}_1), \dots, h(\mathbf{r}_n)\}.$$

The following simple assertion is used to prove Theorem 5.1 which gives estimates for the sum of the heights of generators.

Lemma 5.1. *Let $n > 1$. For $j \in \{1, \dots, n\}$, let \mathbf{r}_j be the j -th generator of $\mathbb{S}(n, N)$. Then, there are infinitely many complex numbers z such that the vectors $\mathbf{r}_1(z), \dots, \mathbf{r}_n(z)$ in \mathbb{C}^n are linearly independent.*

Proof. We shall prove the lemma by *reductio ad absurdum*. By continuity, if the vectors $\mathbf{r}_1(z), \dots, \mathbf{r}_n(z)$ are linearly dependent everywhere but a finite set of points, then they are linearly dependent everywhere. Suppose, $k \in \{2, \dots, n\}$ is the number for which the vector $\mathbf{r}_k(z)$ is a linear combination of $\mathbf{r}_1(z), \dots, \mathbf{r}_{k-1}(z)$ for every z , but $\mathbf{r}_1(z_0), \dots, \mathbf{r}_{k-1}(z_0)$ are still linearly independent for a certain z_0 . The latter means that

$$\text{rank}(\mathbf{r}_1(z_0) \dots \mathbf{r}_{k-1}(z_0)) = k - 1.$$

By continuity, this rank also equals $k - 1$ in some neighborhood of z_0 . Also, by the hypothesis, for any $z \in \mathbb{C}$,

$$\mathbf{r}_k(z) = \sum_{l=1}^{k-1} F_l(z) \mathbf{r}_l(z).$$

Solving this linear system for the unknown $F_l(z)$, the rank of the matrix being equal to $k - 1$, we see that for any $l \in \{1, \dots, k - 1\}$, F_l is a rational function of z . Therefore there are scalar polynomials S_0, \dots, S_{k-1} such that

$$S_0(z) \mathbf{r}_k(z) = \sum_{l=1}^{k-1} S_l(z) \mathbf{r}_l(z).$$

By Definition 6, taking into account (14) and Lemma 4.3, one concludes that all $S_l \mathbf{r}_l$ ($l \in \{1, \dots, k - 1\}$) have different heights. Hence, by Lemma 2.1(a) there is $l_0 \in \{1, \dots, k - 1\}$ such that

$$h(S_0 \mathbf{r}_k) = h(S_{l_0} \mathbf{r}_{l_0}), \tag{22}$$

but according to (14) and Lemma 4.3 the r. h. s and the l. h. s of (22) are different elements of $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. This contradiction finishes the proof. \square

Theorem 5.1. *Let $n > 1$. For $l \in \{1, \dots, n\}$, let \mathbf{r}_l be the l -th generator of $\mathbb{S}(n, N)$. Then, for any $m \in \{1, \dots, n\}$,*

$$\sum_{l=1}^m h(\mathbf{r}_l) \leq Nm + \frac{m(m-1)}{2}.$$

In particular, when $m = n$, this gives an estimate of the sum of all generators.

Proof. The proof is carried out inductively with respect to m . For $m = 1$, the assertion has already been proven in Theorem 4.1.

Step 1. ($m = 1 \rightsquigarrow m = 2$)

Let N_1 be an integer such that

$$0 \leq N_1 \leq N \quad \text{and} \quad h(\mathbf{r}_1) = N - N_1. \quad (23)$$

Since \mathbf{r}_1 is a solution of minimal height of the interpolation problem given by $\{\sigma_j\}_{j=1}^N$ and $\{z_j\}_{j=1}^N$, it turns out that $\mathbf{r}_1(\tilde{z})$ does not vanish for any $\tilde{z} \neq z_1, \dots, z_N$. Indeed, otherwise $\mathbf{r}_1(z)/(z - \tilde{z})$ would be a solution of the interpolation problem whose height is less than $h(\mathbf{r}_1)$. Thus, choose the numbers $z_{N+1}, \dots, z_{N+N_1+1}$ each one of which is not equal to z_1, \dots, z_N , and consider the interpolation problem $\{\sigma_j\}_{j=1}^{N+N_1+1}$ and $\{z_j\}_{j=1}^{N+N_1+1}$, where the new matrices σ_j are given by

$$\sigma_j := \begin{pmatrix} |R_1(z_j)|^2 & R_1(z_j)\overline{R_2(z_j)} & R_1(z_j)\overline{R_3(z_j)} & \dots & R_1(z_j)\overline{R_n(z_j)} \\ R_2(z_j)\overline{R_1(z_j)} & |R_2(z_j)|^2 & R_2(z_j)\overline{R_3(z_j)} & \dots & R_2(z_j)\overline{R_n(z_j)} \\ R_3(z_j)\overline{R_1(z_j)} & R_3(z_j)\overline{R_2(z_j)} & |R_3(z_j)|^2 & \dots & R_3(z_j)\overline{R_n(z_j)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_n(z_j)\overline{R_1(z_j)} & R_n(z_j)\overline{R_2(z_j)} & R_n(z_j)\overline{R_3(z_j)} & \dots & |R_n(z_j)|^2 \end{pmatrix} \quad (24)$$

for $j = N + 1, \dots, N + N_1 + 1$. Here the notation $\mathbf{r}_1(z) = (R_1(z), \dots, R_n(z))^t$ has been used. According to Theorem 4.1, there is \mathbf{r} in $\mathbb{S}(\{\sigma_j\}_{j=1}^{N+N_1+1}, \{z_j\}_{j=1}^{N+N_1+1})$ such that

$$h(\mathbf{r}) \leq N + N_1 + 1. \quad (25)$$

Let us show that $\mathbf{r} \notin \mathbb{M}_1$. To this end, suppose on the contrary that $\mathbf{r}(z) = S(z)\mathbf{r}_1(z)$ for some nonzero scalar polynomial S . Taking into account (24), it is straightforward to verify that, for $j = N + 1 \dots, N + N_1 + 1$, one has

$$\langle S(z_j)\mathbf{r}_1(z_j), \sigma_j S(z_j)\mathbf{r}_1(z_j) \rangle = |S(z_j)|^2 (|R_1(z_j)|^2 + \dots + |R_n(z_j)|^2)^2.$$

Therefore, by the way the nodes $\{z_j\}_{j=N+1}^{N+N_1+1}$ have been chosen, the following should hold

$$S(z_{N+1}) = \cdots = S(z_{N+N_1+1}) = 0.$$

Thus, $\deg S \geq N_1 + 1$. This inequality together with (3) and (23) imply that $h(\mathbf{r}) \geq N - N_1 + n(N_1 + 1)$ which contradicts (25). Finally, observe that \mathbf{r} is in $\mathbb{S}(\{\sigma_j\}_{j=1}^N, \{z_j\}_{j=1}^N)$.

Step 2. ($m > 1 \rightsquigarrow m + 1 \leq n$)

Since the assertion is assumed to be proven for $m > 1$, one can define recursively the numbers N_1, \dots, N_m such that for any $l \in \{1, \dots, m\}$, the following holds

$$h(\mathbf{r}_l) = N + (l - 1) + N_{l-1} - N_l, \quad (26)$$

where it is assumed that $N_0 = 0$. We shall prove that there is a vector polynomial \mathbf{r} in $\mathbb{S}(\{\sigma_j\}_{j=1}^N, \{z_j\}_{j=1}^N)$ such that

$$h(\mathbf{r}) \leq N + m + N_m \quad \text{and} \quad \mathbf{r} \notin \mathbb{M}_1 \dot{+} \cdots \dot{+} \mathbb{M}_m.$$

From this, the assertion of the theorem clearly will follow.

Consider set $I := \{N + 1, \dots, N + m + N_m\}$ and the sets

$$\begin{aligned} I_1 &:= \{N + 1, \dots, N + L_1 + 1\}, \\ I_2 &:= \{N + L_1 + 2, \dots, N + L_2 + 2\}, \\ &\vdots \\ I_m &:= \{N + L_{m-1} + m, \dots, N + m + N_m\}, \end{aligned}$$

where

$$L_k := \sum_{j=1}^k \left\lfloor \frac{m - j + 1 + N_m + N_j - N_{j-1}}{n} \right\rfloor.$$

Here $\lfloor \cdot \rfloor$ is the floor function and it is again assumed that $N_0 = 0$. Thus, $\{I_j\}_{j=1}^m$ is a partition of I , i. e.,

$$I = \bigcup_{j=1}^m I_j \quad \text{and} \quad j \neq l \implies I_j \cap I_l = \emptyset.$$

Let $z_0 \in \mathbb{C}$ be such that the vectors $\mathbf{r}_1(z_0), \dots, \mathbf{r}_m(z_0)$ are linearly independent. The existence of such number is provided by Lemma 5.1. Since the entries of each of those vectors are polynomials, the vectors $\mathbf{r}_1(z), \dots, \mathbf{r}_m(z)$ are also linearly independent for any z in a neighborhood of z_0 . Take the points $z_{N+1}, \dots, z_{N+m+N_m}$

in this neighborhood such that

$$\{z_{N+1}, \dots, z_{N+m+N_m}\} \cap \{z_1, \dots, z_N\} = \emptyset,$$

and define the vectors $\boldsymbol{\alpha}(j) = (\alpha_1(j), \dots, \alpha_n(j))^t$ in such a way that, for each $l \in \{1, \dots, m\}$,

$$\langle \boldsymbol{\alpha}(j), \mathbf{r}_l(z_j) \rangle \neq 0 \quad \text{and} \quad \langle \boldsymbol{\alpha}(j), \mathbf{r}_k(z_j) \rangle = 0 \quad (27)$$

for k in $\{1, \dots, m\} \setminus \{l\}$ and $j \in I_l$. Note that the linear independence of the vectors $\mathbf{r}_l(z_j)$ for any l in $\{1, \dots, m\}$ and $j \in I$ guarantees the existence of $\boldsymbol{\alpha}(j)$, $j \in I$, with the required properties.

For $j \in I$, define the matrices σ_j using (10) with the numbers $\alpha_k(j)$ given above and consider the interpolation problem given by $\{\sigma_j\}_{j=1}^{N+m+N_m}$ and $\{z_j\}_{j=1}^{N+m+N_m}$. By Theorem 4.1, there is \mathbf{r} in $\mathbb{S}(\{\sigma_j\}_{j=1}^{N+m+N_m}, \{z_j\}_{j=1}^{N+m+N_m})$ such that $h(\mathbf{r})$ is not greater than $N + m + N_m$. It turns out that \mathbf{r} is not in $\mathbb{M}_1 \dot{+} \dots \dot{+} \mathbb{M}_m$, because if one assumes

$$\mathbf{r}(z) = \sum_{k=1}^m S_k(z) \mathbf{r}_k(z) \quad (28)$$

with $S_k(z)$ being a scalar polynomial ($k \in \{1, \dots, m\}$), a contradiction will follow. Indeed, one verifies from (27) and (28) that

$$\langle \mathbf{r}(z_j), \sigma_j \mathbf{r}(z_j) \rangle = 0 \quad \text{for} \quad j \in I,$$

implies that

$$\text{either} \quad S_l \equiv 0 \quad \text{or} \quad \deg S_l \geq L_l - L_{l-1} + 1 \quad (L_0 = 0) \quad (29)$$

for $l \in \{1, \dots, m-1\}$ and

$$\text{either} \quad S_m \equiv 0 \quad \text{or} \quad \deg S_m \geq N_m - L_{m-1} + 1.$$

On the other hand, taking into account (3), Lemma 2.1(a), and Lemma 4.3, one obtains after straightforward calculations that

$$\deg S_l \leq L_l - L_{l-1} \quad \text{for} \quad l \in \{1, \dots, m\}. \quad (30)$$

It follows from (29) and (30) that

$$S_1(z) \equiv \dots \equiv S_{m-1}(z) \equiv 0.$$

Analogously, to prove that $S_m \equiv 0$, one shows that $\deg S_m \geq N_m - L_m + 1$ is

incompatible with (30) for $l = m$. This is done by verifying that

$$N_m - L_m + 1 > 0. \quad (31)$$

In view of (26) and Lemma 4.3, the numbers $m - j + 1 + N_m + N_j - N_{j-1}$, for $j \in \{1, \dots, m\}$, are different elements of the space $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Therefore there exists a permutation $\{a_1, \dots, a_m\}$ of $\{0, \dots, m-1\}$, such that

$$\left\lfloor \frac{m - j + 1 + N_m + N_j - N_{j-1}}{n} \right\rfloor = \frac{m - j + 1 + N_m + N_j - N_{j-1} - a_j}{n}.$$

There is at most one j in $\{1, \dots, m\}$ such that $a_j = 0$. Moreover,

$$\sum_{j=1}^m a_j \geq \sum_{j=1}^m (j-1).$$

Thus, the l. h. s. of the inequality (31) can be rewritten as follows

$$N_m - \sum_{j=1}^m \frac{m - j + 1 + N_m + N_j - N_{j-1} - a_j}{n} + 1.$$

Since

$$\sum_{j=1}^m (m - j + 1 - a_j) \leq m,$$

one has

$$\begin{aligned} N_m - \sum_{j=1}^m \frac{m - j + 1 + N_m + N_j - N_{j-1} - a_j}{n} + 1 & \\ & \geq N_m - \sum_{j=1}^m \frac{m + N_m + N_j - N_{j-1}}{n} + 1 \\ & \geq N_m - \frac{m + (m+1)N_m}{n} + 1 > 0. \end{aligned}$$

In the last inequality, it has been used that $m + 1 \leq n$. □

Theorem 5.2. *Let \mathbf{r}_j be the j -th generator of $\mathbb{S}(n, N)$. It holds true that*

$$\sum_{j=1}^n h(\mathbf{r}_j) = Nn + \frac{n(n-1)}{2}.$$

Proof. Because of Theorem 5.1, it suffices to show that

$$\sum_{j=1}^n h(\mathbf{r}_j) \geq Nn + \frac{n(n-1)}{2}. \quad (32)$$

Suppose that this is not true and define

$$Q(z) := \det(\mathbf{r}_1(z) \dots \mathbf{r}_n(z)),$$

where $(\mathbf{r}_1(z) \dots \mathbf{r}_n(z))$ is the square matrix with columns given by the vectors $\mathbf{r}_1(z), \dots, \mathbf{r}_n(z)$. For the entries of the generators, we use the notation

$$\mathbf{r}_j(z) = \left(R_1^{(j)}, \dots, R_n^{(j)} \right)^t \quad \forall j \in \{1, \dots, n\}.$$

It follows from Definition 2, that for any j in $\{1, \dots, n\}$, there is $l(j) \in \{1, \dots, n\}$ such that

$$h(\mathbf{r}_j) = n \deg R_{l(j)}^{(j)} + l(j) - 1.$$

Moreover, by Lemma 4.3, when j runs through the set $\{1, \dots, n\}$, $l(j)$ also runs through $\{1, \dots, n\}$. Therefore,

$$\sum_{j=1}^n h(\mathbf{r}_j) = n \sum_{j=1}^n \deg R_{l(j)}^{(j)} + \sum_{j=1}^n (j-1).$$

Thus the negation of (32) imply that

$$\sum_{j=1}^n \deg R_{l(j)}^{(j)} < N. \quad (33)$$

On the other hand, since the interchanging of two columns of a matrix leads to multiplying the corresponding determinant by -1 , it is clear that for calculating the degree of the polynomial Q , one could use any arrangement of the vectors \mathbf{r}_j , $j \in \{1, \dots, n\}$. Thus,

$$\deg Q(z) = \deg \det(\mathbf{r}_{l^{-1}(1)}(z) \dots \mathbf{r}_{l^{-1}(n)}(z)).$$

Note that in this arrangement of the columns the diagonal elements of the matrix are the polynomials that determine the height of the generators. Hence, it is straightforward to verify that $\deg Q$ is the sum of the degree of the diagonal

elements of $(\mathbf{r}_{l^{-1}(1)}(z) \dots \mathbf{r}_{l^{-1}(n)}(z))$, that is,

$$\deg Q(z) = \sum_{j=1}^n \deg R_{l(j)}^{(j)}, \quad (34)$$

and, by (33), this is $< N$.

Now, fix a node of interpolation z_{l_0} and observe that, since \mathbf{r}_j is in $\mathbb{S}(n, N)$ for all $j \in \{1, \dots, n\}$, one has

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k(l_0) R_k^{(j)}(z_{l_0}) = 0, \quad j \in \{1, \dots, n\}.$$

By construction, this system has a solution, that is, the determinant of the system vanishes, so $Q(z_{l_0}) = 0$. Since the interpolation node z_{l_0} was arbitrary, one concludes that

$$Q(z_1) = \dots = Q(z_N) = 0.$$

These equalities, together with (33) and (34), imply that $Q(z) \equiv 0$ which contradicts Lemma 5.1. \square

Theorem 5.3. *Let $n \geq 2$. Any element \mathbf{p} of $\mathbb{S}(n, N)$, can be written in the form*

$$\mathbf{p} = \sum_{j=1}^n S_j \mathbf{r}_j,$$

where S_j is a scalar polynomial and \mathbf{r}_j is the j -th generator of the interpolation problem ($j \in \{1, \dots, n\}$).

Proof. For $j \in \{2, \dots, n\}$, consider the sets

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_j &:= \{m \in \mathbb{N} : m = h(\mathbf{r}_k) + nl + 1, \text{ where } k < j \text{ and } l \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}, \\ \mathcal{A}_1 &:= \{1, 2, \dots, h(\mathbf{r}_1)\}, \\ \mathcal{A}_j &:= \{h(\mathbf{r}_{j-1}) + 1, \dots, h(\mathbf{r}_j)\} \setminus \mathcal{B}_j. \end{aligned} \quad (35)$$

Now, define the sequence $\{\mathbf{g}_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ as follows

$$\mathbf{g}_k(z) := \begin{cases} \mathbf{e}_k(z) & \text{for } k \in \cup_{j=1}^n \mathcal{A}_j, \\ z^l \mathbf{r}_j(z) & \text{for } k = h(\mathbf{r}_j) + nl + 1, \end{cases}$$

where \mathbf{e}_k is given in (4). Note that $h(\mathbf{g}_k) = k - 1$. Therefore, by Theorem 2.1, we

have that $\{\mathbf{g}_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ is a basis in \mathbb{P} . So, any $\mathbf{p} \in \mathbb{S}(n, N)$ can be written as

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= \sum_{j \in \mathbb{N}} c_j \mathbf{g}_j \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{k \in \mathcal{A}_j} c_k \mathbf{e}_k + \sum_{j=1}^n S_j \mathbf{r}_j, \end{aligned} \quad (36)$$

where S_j is a scalar polynomial. Since \mathbf{p} and $\sum_{j=0}^{n-1} S_j \mathbf{r}_j$ are in $\mathbb{S}(n, N)$, one has that

$$\sum_{j=1}^n \sum_{k \in \mathcal{A}_j} c_k \mathbf{e}_k \quad (37)$$

is in $\mathbb{S}(n, N)$.

Let us show that (37) is a trivial solution. Suppose on the contrary that (37) is nontrivial, i. e., there is $k \in \cup_{j=1}^n \mathcal{A}_j$ such that $c_k \neq 0$. Let

$$k_0 := \max_{1 \leq j \leq n} \{k \in \mathcal{A}_j : c_k \neq 0\}$$

and \mathcal{A}_{j_0} be such that $k_0 \in \mathcal{A}_{j_0}$. By Lemma 2.1(a) the height of (37) is equal to $k_0 - 1$. Therefore, by (35),

$$h \left(\sum_{j=1}^n \sum_{k \in \mathcal{A}_j} c_k \mathbf{e}_k \right) < h(\mathbf{r}_{j_0})$$

and, by construction,

$$\sum_{j=1}^n \sum_{k \in \mathcal{A}_j} c_k \mathbf{e}_k \notin \mathbb{M}_1 \dot{+} \cdots \dot{+} \mathbb{M}_{j_0-1}$$

which contradicts Lemma 4.3. □

References

- [1] G. A. Baker, Jr. and P. Graves-Morris. *Padé approximants*, volume 59 of *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Cambridge University Press, Cambridge, second edition, 1996.
- [2] B. Beckermann. The structure of the singular solution table of the M-*Padé* approximation problem. *J. Comput. Appl. Math.*, 32(1-2):3–15, 1990. Ex-

- trapolation and rational approximation (Luminy, 1989).
- [3] B. Beckermann and G. Labahn. A uniform approach for Hermite Padé and simultaneous Padé approximants and their matrix-type generalizations. *Numer. Algorithms*, 3(1-4):45–54, 1992. Extrapolation and rational approximation (Puerto de la Cruz, 1992).
 - [4] V. G. Cherednichenko. Rational interpolation, analytic solution. *Sibirsk. Mat. Zh.*, 43(1):188–193, iv, 2002.
 - [5] V. G. Cherednichenko. Approximation by rational functions. *Appl. Anal.*, 87(10-11):1289–1293, 2008.
 - [6] L. Golinskii and M. Kudryavtsev. Inverse spectral problems for a class of five-diagonal unitary matrices. *Dokl. Akad. Nauk*, 423(1):11–13, 2008.
 - [7] L. Golinskii and M. Kudryavtsev. Rational interpolation and mixed inverse spectral problem for finite CMV matrices. *J. Approx. Theory*, 159(1):61–84, 2009.
 - [8] M. Kudryavtsev. The direct and the inverse problem of spectral analysis for five-diagonal symmetric matrices. II. *Mat. Fiz. Anal. Geom.*, 6(1-2):55–80, 1999.
 - [9] M. Kudryavtsev, S. Palafox, and L. O. Silva. Inverse spectral analysis for a class of finite band symmetric matrices. *ArXiv e-prints*, Sept. 2014.
 - [10] M. Pindor. Rational approximation and noise. In *Harmonic analysis and rational approximation*, volume 327 of *Lecture Notes in Control and Inform. Sci.*, pages 145–156. Springer, Berlin, 2006.
 - [11] M. Van Barel and A. Bultheel. A new approach to the rational interpolation problem. *J. Comput. Appl. Math.*, 32(1-2):281–289, 1990. Extrapolation and rational approximation (Luminy, 1989).
 - [12] M. Van Barel and A. Bultheel. A new approach to the rational interpolation problem: the vector case. *J. Comput. Appl. Math.*, 33(3):331–346, 1990.
 - [13] M. Van Barel and A. Bultheel. A general module-theoretic framework for vector M-Padé and matrix rational interpolation. *Numer. Algorithms*, 3(1-4):451–461, 1992. Extrapolation and rational approximation (Puerto de la Cruz, 1992).

Inverse spectral analysis for a class of finite band symmetric matrices *

Mikhail Kudryavtsev

Department of Mathematics
Institute for Low Temperature Physics and Engineering
Lenin Av. 47, 61103
Kharkov, Ukraine
kudryavtsev@onet.com.ua

Sergio Palafox

Departamento de Física Matemática
Instituto de Investigaciones en Matemáticas Aplicadas y en Sistemas
Universidad Nacional Autónoma de México
C.P. 04510, México D.F.
sergiopalafod@gmail.com

Luis O. Silva

Departamento de Física Matemática
Instituto de Investigaciones en Matemáticas Aplicadas y en Sistemas
Universidad Nacional Autónoma de México
C.P. 04510, México D.F.
silva@iimas.unam.mx

Abstract

In this note, we solve an inverse spectral problem for a class of finite band symmetric matrices. We provide necessary and sufficient conditions for a matrix valued function to be a spectral function of the operator corresponding to a matrix in our class and give an algorithm for recovering this matrix from the spectral function. The reconstructive algorithm is applicable to matrices which cannot be treated by known inverse block matrix methods. Our approach to the inverse problem is based on the rational interpolation theory developed in a previous paper.

Mathematics Subject Classification(2010): 34K29; 47B36.

Keywords: Inverse spectral problem; Band symmetric matrices; Spectral measure.

*Research partially supported by UNAM-DGAPA-PAPIIT IN105414

1. Introduction

This work deals with the direct and inverse spectral analysis of a class of finite symmetric band matrices with emphasis in the inverse problems of characterization and reconstruction. Inverse spectral problems for band matrices have been studied extensively in the particular case of Jacobi matrices (see for instance [6–8, 12, 17, 20–22, 29–31] for the finite case and [9–12, 18, 19, 32, 33] for the infinite case). Works dealing with band matrices non-necessary tridiagonal are not so abundant (see [5, 15, 16, 24, 25, 28, 35, 36] for the finite case and [3, 14] for the infinite case).

Let \mathcal{H} be a finite dimensional Hilbert space and fix an orthonormal basis $\{\delta_k\}_{k=1}^N$ in it. Consider the operator D_j ($j = 0, 1, \dots, n$ with $n < N$), whose matrix representation with respect to $\{\delta_k\}_{k=1}^N$, is a diagonal matrix, i. e., $D_j \delta_k = d_k^{(j)} \delta_k$ for all $k = 1, \dots, N$, where $d_k^{(j)}$ is a real number. Also, let S be the shift operator, that is,

$$S\delta_k = \begin{cases} \delta_{k+1} & k = 1, \dots, N-1 \\ 0 & k = N. \end{cases}$$

The object of our considerations in this note is the symmetric operator

$$A := D_0 + \sum_{j=1}^n S^j D_j + \sum_{j=1}^n D_j (S^*)^j.$$

Hence, the matrix representation of A with respect to $\{\delta_k\}_{k=1}^N$ is an Hermitian band matrix which is denoted by \mathcal{A} . Alongside the matrix \mathcal{A} , for any $j \in \{0, \dots, n\}$, we consider the diagonal matrix \mathcal{D}_j , being the matrix representation with respect to $\{\delta_k\}_{k=1}^N$ of the operator D_j .

We assume that the diagonals satisfy the following conditions. The diagonal farthest from the main one, that is \mathcal{D}_n , is such that all the numbers $d_1^{(n)}, \dots, d_{m_1-1}^{(n)}$ are strictly positive and $d_{m_1}^{(n)} = \dots = d_{N-n}^{(n)} = 0$ with

$$1 < m_1 < N - n + 1.$$

It may happen that all the elements of the sequence \mathcal{D}_n are positive which we convene to mean that $m_1 = N - n + 1$. In this case, we define $m_j = N - n + j$ for $j = 2, \dots, n$.

Now, if $m_1 < N - n + 1$, the elements $d_{m_1+1}^{(n-1)}, \dots, d_{N-n+1}^{(n-1)}$ of \mathcal{D}_{n-1} behave in the same way as the elements of \mathcal{D}_n , that is, there is m_2 , satisfying

$$m_1 < m_2 < N - n + 2,$$

such that $d_{m_1+1}^{(n-1)}, \dots, d_{m_2-1}^{(n-1)} > 0$ and $d_{m_2}^{(n-1)} = \dots = d_{N-n+1}^{(n-1)} = 0$. Here, it is also

possible that $m_2 = N - n + 2$ in which case $d_k^{(n-1)} > 0$ for $k = m_1 + 1, \dots, N - n + 1$ and we define $m_j = N - n + j$ for $j = 3, \dots, n$.

We continue applying this rule up to some $j_0 \leq n - 1$ such that $m_{j_0} < N - n + j_0$ and $m_{j_0+1} = N - n + j_0 + 1$. Finally, we define $m_j = N - n + j$ for $j = j_0 + 2, \dots, n$. In general, the elements of \mathcal{D}_{n-j} satisfy

$$\begin{aligned} d_{m_j+1}^{(n-j)}, \dots, d_{m_{j+1}-1}^{(n-j)} &> 0, \\ d_{m_j+1}^{(n-j)} = \dots = d_{N-n+j}^{(n-j)} &= 0 \end{aligned} \tag{1.1}$$

for $j = 0, \dots, j_0 - 1$, with $m_0 = 0$. In (1.1), we have assumed that $m_j + 1 < m_{j+1}$. The elements of \mathcal{D}_{n-j_0} satisfy

$$d_{m_{j_0}+1}^{(n-j_0)}, \dots, d_{N-n+j_0}^{(n-j_0)} > 0.$$

We say that the diagonal \mathcal{D}_{n-j} undergoes a degeneration at m_{j+1} for $j \in \{0, \dots, j_0 - 1\}$. When $j_0 = 0$, there is no degeneration of the diagonal \mathcal{D}_n . Note that \mathcal{D}_2 is the innermost diagonal where a degeneration may occur. Observe also that, in all cases, one has the set $\{m_1, \dots, m_n\}$.

Definition 1. Fix the natural numbers n and N such that $n < N$. All the matrices satisfying the above properties for a given set of numbers $\{m_i\}_{i=1}^n$ are denoted by $\mathcal{M}(n, N)$. Note that in this notation, N represents the dimension and $2n + 1$ is the number of diagonals of the matrices.

An example of a matrix in $\mathcal{M}(3, 7)$, when $m_1 = 3$, $m_2 = 5$ and $m_3 = 7$ is the following.

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} d_1^{(0)} & d_1^{(1)} & d_1^{(2)} & d_1^{(3)} & 0 & 0 & 0 \\ d_1^{(1)} & d_2^{(0)} & d_2^{(1)} & d_2^{(2)} & d_2^{(3)} & 0 & 0 \\ d_1^{(2)} & d_2^{(1)} & d_3^{(0)} & d_3^{(1)} & d_3^{(2)} & 0 & 0 \\ d_1^{(3)} & d_2^{(2)} & d_3^{(1)} & d_4^{(0)} & d_4^{(1)} & d_4^{(2)} & 0 \\ 0 & d_2^{(3)} & d_3^{(2)} & d_4^{(1)} & d_5^{(0)} & d_5^{(1)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_4^{(2)} & d_5^{(1)} & d_6^{(0)} & d_6^{(1)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_6^{(1)} & d_7^{(0)} \end{pmatrix}.$$

Here we say that the matrix \mathcal{A} underwent a degeneration of the diagonal \mathcal{D}_3 in $m_1 = 3$ and a degeneration of \mathcal{D}_2 in $m_2 = 5$. Observe that $j_0 = 2$.

It is known that the dynamics of a finite linear mass-spring system is characterized by the spectral properties of a finite Jacobi matrix [13, 27] (see Fig. 1) when the system is within the regime of validity of the Hooke law. The entries of the Jacobi matrix are determined by the masses and spring constants of the system [8–10, 13, 27]. The movement of the mechanical system of Fig. 1 is a

superposition of harmonic oscillations whose frequencies are the square roots of absolute values of the elements of the Jacobi operator's spectrum. Analogously,

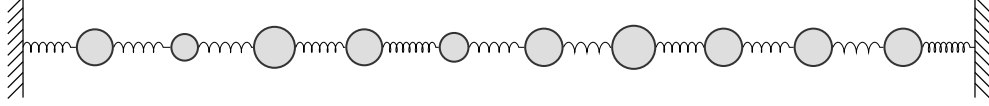


Figure 1: Mass-spring system corresponding to a Jacobi matrix

one can deduce that a matrix in $\mathcal{M}(n, N)$ models a linear mass-spring system where the interaction extends to all the n neighbors of each mass (see Appendix). For instance, if the matrix is in $\mathcal{M}(2, 10)$ and no degeneration of the diagonals occurs, viz. $m_1 = 9$, the corresponding mass-spring system is given in Fig. 2. If for another matrix in $\mathcal{M}(2, 10)$, one has degeneration of the diagonals,

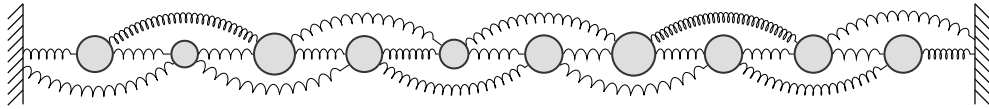


Figure 2: Mass-spring system of a matrix in $\mathcal{M}(2, 10)$: nondegenerated case

for instance $m_1 = 4$, the corresponding mass-spring system is given in Fig. 3.

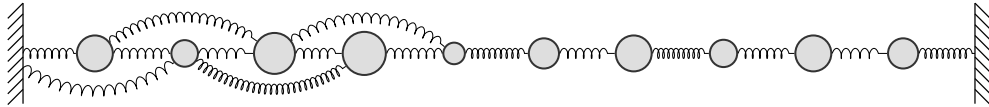


Figure 3: Mass-spring system of a matrix in $\mathcal{M}(2, 10)$: degenerated case

In this work, the approach to the inverse spectral analysis of the operators whose matrix representation belongs to $\mathcal{M}(n, N)$ is based on the one used in [24, 25], but it allows to treat the case of arbitrary n . An important ingredient of the methods used here is the linear interpolation of n -dimensional vector polynomials, recently developed in [26]. The linear interpolation theory of [26] is a nontrivial generalization of the rational interpolation theory developed in [15] from ideas of [24, 25]. It is on the basis of this linear interpolation theory that the results of [24, 25] are extended here to band matrices with $2n + 1$ diagonals. Noteworthy, the generalization from the case $n = 2$ to arbitrary n cannot be done directly. We had to modify the technique used in the reconstruction of matrices in $\mathcal{M}(n, N)$. Moreover, in contrast to [24, 25], the class of matrices

$\mathcal{M}(n, N)$ to be reconstructed has been done smaller than the one considered in [24, 25] in order guarantee uniqueness of the reconstruction.

It is known that if there exists a natural number K such that $N = Kn$, then a band matrix with $2n + 1$ diagonals can be reduced to a tridiagonal block matrix. However, the spectral theory for tridiagonal block matrices requires that the off-diagonal block matrices be invertible. The matrices in $\mathcal{M}(n, N)$ do not satisfy this requirement when there is a degeneration of the diagonals. The technique for recovering a matrix from its spectral function developed in this paper is applicable to any element in $\mathcal{M}(n, N)$ even when N is not an integer multiple of n .

This paper is organized as follows. The next section deals with the direct spectral analysis of the operators under consideration. In this section, a family of spectral functions is constructed for each element in $\mathcal{M}(n, N)$. In Section 3, the connection of the spectral analysis and the interpolation problem is established. Section 4 treats the problem of reconstruction and characterization. In Section 5, we discuss alternative approaches to the inverse spectral problem and give a comparative analysis with the method given in Section 4. The Appendix gives a brief account of how to deduce the band symmetric matrix associated with a mass-spring system from the dynamical equations.

2. The spectral function

Consider $\varphi = \sum_{k=1}^N \varphi_k \delta_k \in \mathcal{H}$ and the equation

$$(A - zI)\varphi = 0, \quad z \in \mathbb{C}. \quad (2.1)$$

We know that the equation has nontrivial solutions only for a finite set of z .

From (2.1) one obtains a system of N equations, where each equation, given by a fixed $k \in \{1, \dots, N\}$, is of the form

$$\sum_{i=0}^{n-1} d_{k-n+i}^{(n-i)} \varphi_{k-n+i} + d_k^{(0)} \varphi_k + \sum_{i=1}^n d_k^{(i)} \varphi_{k+i} = z \varphi_k, \quad (2.2)$$

where it has been assumed that

$$\varphi_k = 0, \quad \text{for } k < 1, \quad (2.3a)$$

$$\varphi_k = 0, \quad \text{for } k > N. \quad (2.3b)$$

One can consider (2.3) as boundary conditions where (2.3a) is the condition at the left endpoint and (2.3b) is the condition at the right endpoint.

The system (2.2) with (2.3), restricted to $k \in \{1, 2, \dots, N\} \setminus \{m_i\}_{i=1}^n$, can be solved recursively whenever the first n entries of the vector φ are given. Let

$\varphi^{(j)}(z)$ ($j \in \{1, \dots, n\}$) be a solution of (2.2) for all $k \in \{1, 2, \dots, N\} \setminus \{m_i\}_{i=1}^n$ such that

$$\langle \delta_i, \varphi^{(j)}(z) \rangle = t_{ji}, \text{ for } i = 1, \dots, n, \quad (2.4)$$

where $\mathcal{T} = \{t_{ji}\}_{j,i=1}^n$ is an upper triangular real matrix and $t_{jj} \neq 0$ for all $j \in \{1, \dots, n\}$. In (2.4) and in the sequel, we consider the inner product in \mathcal{H} to be antilinear in its first argument.

The condition given by (2.4) can be seen as the initial conditions for the system (2.2) and (2.3a). We emphasize that given the boundary condition at the left endpoint (2.3a) and the initial condition (2.4), the system restricted to $k \in \{1, 2, \dots, N\} \setminus \{m_i\}_{i=1}^n$ has a unique solution for any fixed $j \in \{1, \dots, n\}$ and $z \in \mathbb{C}$.

Remark 2.1. Note that the properties of the matrix \mathcal{T} guarantee that the collection of vectors $\{\varphi^{(j)}(z)\}_{j=1}^n$ is a fundamental system of solutions of (2.2) restricted to $k \in \{1, 2, \dots, N\} \setminus \{m_i\}_{i=1}^n$ with the boundary condition (2.3a).

The entries of the vector $\varphi^{(j)}(z)$ are polynomials, so we denote $P_k^{(j)}(z) := \varphi_k^{(j)}(z)$, for all $k \in \{1, \dots, N\}$. And, define

$$Q_i^{(j)}(z) := (z - d_{m_i}^{(0)})P_{m_i}^{(j)}(z) - \sum_{k=0}^{n-1} d_{m_i-n+k}^{(n-k)} P_{m_i-n+k}^{(j)}(z) - \sum_{k=1}^{n-i} d_{m_i}^{(k)} P_{m_i+k}^{(j)}(z)$$

for $i \in \{1, \dots, n\}$ (it is assumed that the last sum is zero when $i = n$).

It is worth remarking that the polynomials $\{P_k^{(j)}(z)\}_{k=1}^N$ and $\{Q_i^{(j)}(z)\}_{i=1}^n$ depend on the initial conditions given by the matrix \mathcal{T} .

Define the matrix

$$\mathcal{Q}(z) := \begin{pmatrix} Q_1^{(1)}(z) & \dots & Q_1^{(n)}(z) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Q_n^{(1)}(z) & \dots & Q_n^{(n)}(z) \end{pmatrix}.$$

It turns out that for any z where there exists a solution of (2.1), there also exists a solution of the homogeneous equation

$$\mathcal{Q}(z) \begin{pmatrix} \beta_1(z) \\ \vdots \\ \beta_n(z) \end{pmatrix} = 0. \quad (2.5)$$

Indeed, since $\{\varphi^{(j)}(z)\}_{j=1}^n$ is a fundamental system for any $z \in \mathbb{C}$, the vector $\beta(z)$, given by

$$\beta(z) = \sum_{j=i}^n \beta_j(z) \varphi^{(j)}(z), \quad (2.6)$$

is a solution of (2.2), (2.3a). Thus, using the difference equations (2.2), one verifies that

$$(A - zI)\beta(z) = \sum_{k=1}^N c_k(z)\delta_k,$$

where

$$c_k(z) := \begin{cases} \sum_{j=1}^n \beta_j(z)Q_i^{(j)}(z) & \text{if } k = m_i, \text{ for all } i = 1, \dots, n, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Therefore, (2.6) is a solution of (2.1) if

$$\sum_{j=1}^n \beta_j(z)Q_i^{(j)}(z) = 0 \quad (2.7)$$

for all $i \in \{1, \dots, n\}$, which is equivalent to (2.5).

Lemma 2.1. *Let $\tilde{n}(z) := \dim \ker(A - zI)$. Then,*

$$\text{rank}(\mathcal{Q}(z)) = n - \tilde{n}(z).$$

Observe that $\tilde{n}(z) \leq n$ for all $z \in \mathbb{C}$.

Proof. The proof is straightforward. Having fixed $z \in \mathbb{C}$, one recurs to the Kronecker-Capelli-Rouché Theorem (see [23, Chap.3 Secs.1-2]) to obtain that the dimension of the space of solutions of (2.5) is equal to $n - \text{rank}(\mathcal{Q}(z))$. \square

Immediately from Lemma 2.1 it follows that

$$\text{spec}(A) = \{z \in \mathbb{C} : \det \mathcal{Q}(z) = 0\}.$$

Fix $j \in \{1, \dots, n\}$. For $\varphi^{(j)}(z_0)$ to be a solution of (2.1), the equation

$$Q_i^{(j)}(z_0) = 0, \quad (2.8)$$

should be satisfied for any $i \in \{1, \dots, n\}$. The conditions (2.8) can be seen as *inner* boundary conditions (of the right endpoint type) for the difference equation (2.2). Note that the degeneration of diagonals gives rise to inner boundary conditions.

Let $\{x_k\}_{k=1}^N$ be a real sequence such that $x_k \in \text{spec}(A)$ and the elements of this sequence have been enumerated taking into account the multiplicity of eigenvalues. Also, let $\alpha(x_k)$ be the corresponding eigenvectors such that

$$\langle \alpha(x_k), \alpha(x_l) \rangle = \delta_{kl}, \quad \text{with } k, l \in \{1, \dots, N\}.$$

It follows from Remark 2.1 that

$$\alpha(x_k) = \sum_{j=1}^n \alpha_j(x_k) \varphi^{(j)}(x_k) \quad (2.9)$$

for any $k \in \{1, \dots, N\}$. Clearly, by construction

$$\sum_{j=1}^n |\alpha_j(x_k)| > 0 \quad \text{for all } k \in \{1, \dots, N\}. \quad (2.10)$$

Additionally, since $\{\alpha(x_k)\}_{k=1}^N$ is a basis of \mathcal{H} , it follows from (2.4) that

$$\sum_{k=1}^N |\alpha_j(x_k)| > 0 \quad \text{for all } j \in \{1, \dots, n\}. \quad (2.11)$$

By (2.7) and the fact that $\alpha(x_k) \in \ker(A - x_k I)$, it follows that

$$\sum_{j=1}^n \alpha_j(x_k) Q_i^{(j)}(x_k) = 0 \quad \text{for all } i \in \{1, \dots, n\} \quad (2.12)$$

is true.

Now, define the matrix valued function

$$\sigma(t) := \sum_{x_k < t} \sigma_k, \quad (2.13)$$

where

$$\sigma_k = \begin{pmatrix} \frac{|\alpha_1(x_k)|^2}{\alpha_2(x_k)\alpha_1(x_k)} & \overline{\alpha_1(x_k)}\alpha_2(x_k) & \dots & \overline{\alpha_1(x_k)}\alpha_n(x_k) \\ \alpha_2(x_k)\alpha_1(x_k) & |\alpha_2(x_k)|^2 & \dots & \alpha_2(x_k)\alpha_n(x_k) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{\alpha_n(x_k)}\alpha_1(x_k) & \overline{\alpha_n(x_k)}\alpha_2(x_k) & \dots & |\alpha_n(x_k)|^2 \end{pmatrix} \quad (2.14)$$

is a rank-one, nonnegative matrix (cf. [24, Sec.1]). Note that $\sigma(t) = \sigma^{\mathcal{J}}(t)$ depends on the initial conditions given by \mathcal{J} .

Remark 2.2. The matrix valued function $\sigma(t)$ has the following properties:

- i)* It is nondecreasing monotone step function.
- ii)* Each jump is a matrix of rank not greater than n .
- iii)* The sum of the ranks of all jumps is equal to N , i. e., the dimension of the space \mathcal{H} .

For any matrix valued function $\sigma(t)$ satisfying properties *i*–*iii*), there is a collection of vectors $\{\alpha(x_k)\}_{k=1}^N$ satisfying (2.10) and (2.11) such that $\sigma(t)$ is given by (2.13) and (2.14) (cf. [24, Thm. 2.2]).

If $\mathcal{T} = I$, then $\sigma_{ij}(t) = \langle \delta_i, E(t)\delta_j \rangle$ ($i, j \in \{1, \dots, n\}$) where $E(t)$ is the spectral resolution of A . Indeed,

$$\begin{aligned} \langle \delta_i, E(t)\delta_j \rangle &= \left\langle \delta_i, \sum_{x_l < t} \langle \alpha(x_l), \delta_j \rangle \alpha(x_l) \right\rangle = \sum_{x_l < t} \langle \alpha(x_l), \delta_j \rangle \langle \delta_i, \alpha(x_l) \rangle \\ &= \sum_{x_l < t} \overline{\alpha_j(x_l)} \alpha_i(x_l) = \sigma_{ij}(t). \end{aligned}$$

Therefore, in this case, the matrix valued function $\sigma(t)$ is the spectral function of the operator A with respect to δ_i, δ_j ($i, j = 1, \dots, n$).

Definition 2. The set of all matrix valued functions $\sigma(t)$ given by (2.13) and (2.14), where the collection of vectors $\{\alpha(x_k)\}_{k=1}^N$ satisfies (2.10) and (2.11), is denoted by $\mathfrak{M}(n, N)$.

Note that the matrix valued functions in $\mathfrak{M}(n, N)$ satisfy *i*–*iii*) of Remark 2.2.

Consider the Hilbert space $L_2(\mathbb{R}, \sigma)$, where σ is the spectral function corresponding to the operator A given by (2.13) and (2.14) (see [2, Sec. 72]). We agree that the inner product $\langle \cdot, \cdot \rangle$ is antilinear in its first argument. Clearly, the property *iii*) implies that $L_2(\mathbb{R}, \sigma)$ is an N -dimensional space and in each equivalence class there is an n -dimensional vector polynomial. Define the vector polynomials in $L_2(\mathbb{R}, \sigma)$

$$\mathbf{q}_i(z) := (Q_i^{(1)}(z), \dots, Q_i^{(n)}(z))^t \quad (2.15)$$

for all $i \in \{1, \dots, n\}$, and

$$\mathbf{p}_k(z) := (P_k^{(1)}(z), \dots, P_k^{(n)}(z))^t \quad (2.16)$$

for all $k \in \{1, \dots, N\}$.

Lemma 2.2. *The vector polynomials $\{\mathbf{p}_k(z)\}_{k=1}^N$, defined by (2.16), satisfy*

$$\langle \mathbf{p}_j, \mathbf{p}_k \rangle_{L_2(\mathbb{R}, \sigma)} = \delta_{jk}$$

for $j, k \in \{1, \dots, N\}$.

Proof.

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{p}_j, \mathbf{p}_k \rangle_{L_2(\mathbb{R}, \sigma)} &= \sum_{l=1}^N \langle \mathbf{p}_j(x_l), \sigma_l \mathbf{p}_k(x_l) \rangle \\
&= \sum_{l=1}^N \overline{\left(\sum_{s=1}^n \alpha_s(x_l) P_j^{(s)}(x_l) \right)} \sum_{s=1}^n \alpha_s(x_l) P_k^{(s)}(x_l) \\
&= \sum_{l=1}^N \langle \delta_j, \alpha(x_l) \rangle \langle \alpha(x_l), \delta_k \rangle = \delta_{jk},
\end{aligned}$$

where it has been used that $\delta_l = \sum_{i=1}^n \langle \alpha(x_i), \delta_l \rangle \alpha(x_i)$. \square

Let $U : \mathcal{H} \rightarrow L_2(\mathbb{R}, \sigma)$ be the isometry, given by $U\delta_k \mapsto \mathbf{p}_k$, for all $k \in \{1, \dots, N\}$. Under this isometry, the operator A becomes the operator of multiplication by the independent variable in $L_2(\mathbb{R}, \sigma)$. Indeed,

$$\begin{aligned}
\langle \delta_k, A\delta_j \rangle &= \left\langle \sum_{l=1}^N \langle \alpha(x_l), \delta_k \rangle \alpha(x_l), A \sum_{s=1}^N \langle \alpha(x_s), \delta_j \rangle \alpha(x_s) \right\rangle \\
&= \sum_{l=1}^N \langle \delta_k, \alpha(x_l) \rangle \left\langle \alpha(x_l), \sum_{s=1}^N x_s \langle \alpha(x_s), \delta_j \rangle \alpha(x_s) \right\rangle \\
&= \sum_{l=1}^N \langle \delta_k, \alpha(x_l) \rangle x_l \langle \alpha(x_l), \delta_j \rangle \\
&= \langle \mathbf{p}_k, t\mathbf{p}_j \rangle_{L_2(\mathbb{R}, \sigma)}.
\end{aligned}$$

If the matrix \mathcal{T} in (2.4) turns out to be the identity matrix, i. e., $\mathcal{T} = I$, then it can be shown that U^{-1} is the isomorphism corresponding to the canonical representation of the operator A [2, Sec. 75], that is,

$$\delta_k = U^{-1} \mathbf{p}_k = \sum_{j=1}^n P_k^{(j)}(A) \delta_j$$

for all $k \in \{1, \dots, N\}$.

Remark 2.3. The matrix representation of the multiplication operator in $L_2(\mathbb{R}, \sigma)$ with respect to the basis $\{\mathbf{p}_1(z), \dots, \mathbf{p}_N(z)\}$ is again the matrix \mathcal{A} . Thus,

$$\sum_{i=0}^{n-1} d_{k-n+i}^{(n-i)} \mathbf{p}_{k-n+i}(z) + d_k^{(0)} \mathbf{p}_k(z) + \sum_{i=1}^n d_k^{(i)} \mathbf{p}_{k+i}(z) = z \mathbf{p}_k(z) \quad (2.17)$$

for $k = 1, \dots, N$, where it is assumed that $\mathbf{p}_l = 0$ whenever $l < 1$. Also, one verifies that

$$\mathbf{q}_j(z) = (z - d_{m_j}^{(0)})\mathbf{p}_{m_j}(z) - \sum_{i=0}^{n-1} d_{m_j-n+i}^{(n-i)}\mathbf{p}_{m_j-n+i}(z) - \sum_{i=1}^{n-j} d_{m_j}^{(i)}\mathbf{p}_{m_j+i}(z) \quad (2.18)$$

for all $j \in \{1, \dots, n\}$, where the last sum vanishes when $j = n$.

The relationship between the spectral functions $\sigma^{\mathcal{J}} = \sigma$ and σ^I for an arbitrary \mathcal{J} is given by the following lemma.

Lemma 2.3. *Fix a natural number $N > n$. For any $n \times n$ upper triangular matrix with no zeros in the main diagonal \mathcal{J} , the spectral function $\sigma^{\mathcal{J}}$ given in (2.13) satisfies*

$$\mathcal{J}^* \sigma^{\mathcal{J}} \mathcal{J} = \sigma^I.$$

Proof. Let \mathcal{J} be $n \times n$ upper triangular matrix with no zeros in the main diagonal. Then, by (2.9) one has

$$\langle \delta_j, \alpha(x_l) \rangle = \sum_{i=1}^j \alpha_i(x_l) t_{ij}, \quad \forall j \in \{1, \dots, n\}.$$

Now, for the particular case, when $\mathcal{J} = I$, one considers

$$\sigma^I(t; i, j) = \sum_{x_l < t} \overline{\alpha'_i(x_l)} \alpha'_j(x_l).$$

Therefore, $\langle \delta_j, \alpha(x_l) \rangle_{\mathbb{C}^N} = \alpha'_j(x_l)$ and

$$\sigma^I(t; i, j) = \sum_{x_l < t} \sum_{k=1}^i \overline{\alpha_k(x_l) t_{ki}} \sum_{s=1}^j \alpha_s(x_l) t_{ks}. \quad (2.19)$$

Observe that

$$\mathcal{J}^* \begin{pmatrix} \overline{\alpha_1(x_l)} \\ \vdots \\ \overline{\alpha_n(x_l)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{\alpha_1(x_l) t_{11}} \\ \overline{\sum_{k=1}^2 \alpha_k(x_l) t_{k2}} \\ \vdots \\ \overline{\sum_{k=1}^n \alpha_k(x_l) t_{kn}} \end{pmatrix},$$

and by (2.19)

$$\sigma^I(t; i, j) = (\mathcal{J}^* \sigma^{\mathcal{J}} \mathcal{J})(t; i, j).$$

□

An immediate consequence of the previous lemma is the following assertion

Corollary 2.1. *Fix $N > n$. For any $n \times n$ upper triangular matrix \mathcal{T} with no zeros in the main diagonal, one has*

$$\mathcal{T}^* \int_{\mathbb{R}} d\sigma^{\mathcal{T}} \mathcal{T} = \int_{\mathbb{R}} d\sigma^I = I.$$

3. Connection with a linear interpolation problem

Motivated by (2.12), we consider the following interpolation problem. Given a collection of complex numbers $\{z_k\}_{k=1}^N$ and $\{\alpha_j(k)\}_{j=1}^n$ ($k = 1, \dots, N$), find the scalar polynomials $R_j(z)$ ($j = 1, \dots, n$) which satisfy the equation

$$\sum_{j=1}^n \alpha_j(k) R_j(z_k) = 0, \quad \forall k \in \{1, \dots, N\}. \quad (3.1)$$

The polynomials satisfying (3.1) are the solutions to the interpolation problem and the numbers $\{z_k\}_{k=1}^N$ are called the interpolation nodes.

In [26], this interpolation problem is studied in detail. Let us introduce some of the notions and results given in [26].

Definition 3. For a collection of complex numbers z_1, \dots, z_N , and matrices $\sigma_k := \{\overline{\alpha_i(k)} \alpha_j(k)\}_{i,j=1}^n$ ($k \in \{1, \dots, N\}$), let us consider the equations

$$\langle \mathbf{r}(z_k), \sigma_k \mathbf{r}(z_k) \rangle_{\mathbb{C}^n} = 0 \quad (3.2)$$

for $k = 1, \dots, N$, where $\mathbf{r}(z)$ is a nonzero n -dimensional vector polynomial. We denote by $\mathbb{S} = \mathbb{S}(\{\sigma_k\}_{k=1}^N, \{z_k\}_{k=1}^N)$ the set of all vector polynomials $\mathbf{r}(z)$ which satisfy (3.2) (c.f. [26, Def. 3]).

It is worth remarking that solving (3.2) is equivalent to solving the linear interpolation problem (3.1), whenever $\mathbf{r}(z) = (R_1(z), \dots, R_n(z))^t$.

Definition 4. Let $\mathbf{r}(z) = (R_1(z), R_2(z), \dots, R_n(z))^t$ be an n -dimensional vector polynomial. The height of $\mathbf{r}(z)$ is the number

$$h(\mathbf{r}) := \max_{j \in \{1, \dots, n\}} \{n \deg(R_j) + j - 1\},$$

where it is assumed that $\deg 0 := -\infty$ and $h(\mathbf{0}) := -\infty$.

In [26, Thm. 2.1] the following proposition is proven.

Proposition 3.1. *Let $\{\mathbf{g}_1(z), \dots, \mathbf{g}_{m+1}(z)\}$ be a sequence of vector polynomials such that $h(\mathbf{g}_i) = i - 1$ for all $i \in \{1, \dots, m + 1\}$. Any vector polynomial $\mathbf{r}(z)$*

with height $m \neq -\infty$ can be written as follows

$$\mathbf{r}(z) = \sum_{i=1}^{m+1} c_i \mathbf{g}_i(z),$$

where $c_i \in \mathbb{C}$ for all $i \in \{1, \dots, n\}$ and $c_{m+1} \neq 0$.

Definition 5. Let \mathcal{S} be an arbitrary subset of the set of all n -dimensional vector polynomials. We define the height of \mathcal{S} by

$$h(\mathcal{S}) := \min \{h(\mathbf{r}) : \mathbf{r} \in \mathcal{S}, \mathbf{r} \neq 0\}.$$

We say that $\mathbf{r}(z)$ in the set \mathbb{S} is a first generator of \mathbb{S} when

$$h(\mathbf{r}) = h(\mathbb{S}).$$

Definition 6. Let $\mathbb{M}(\mathbf{r})$ be the subset of vector polynomials, determined by an arbitrary vector polynomial \mathbf{r} , given by

$$\mathbb{M}(\mathbf{r}) := \{\mathbf{s}(z) : \mathbf{s}(z) = S(z)\mathbf{r}(z), S(z) \text{ is an arbitrary scalar polynomial}\}.$$

Note that for all $\mathbf{s}(z) \in \mathbb{M}(\mathbf{r})$, there is a $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ such that

$$h(\mathbf{s}) = nk + h(\mathbf{r}).$$

In this case $k = \deg S$, where $\mathbf{s}(z) = S(z)\mathbf{r}(z)$.

Proposition 3.2. ([26, Lem. 4.3]) Fix a natural number m such that $1 \leq m < n$. If the vector polynomials $\mathbf{r}_1(z), \dots, \mathbf{r}_m(z)$ are arbitrary elements of \mathbb{S} , then

$$h(\mathbb{S} \setminus [\mathbb{M}(\mathbf{r}_1) + \dots + \mathbb{M}(\mathbf{r}_m)]) \neq h(\mathbf{r}_j) + nk$$

for any $j \in \{1, \dots, m\}$ and $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. In other words,

$$h(\mathbb{S} \setminus [\mathbb{M}(\mathbf{r}_1) + \dots + \mathbb{M}(\mathbf{r}_m)]) \quad \text{and} \quad h(\mathbf{r}_j)$$

are different elements of the factor space $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ for any $j \in \{1, \dots, m\}$.

Due to Proposition 3.2, the following definition makes sense.

Definition 7. One defines recursively the j -th generator of \mathbb{S} as the vector polynomial $\mathbf{r}_j(z)$ in $\mathbb{S} \setminus [\mathbb{M}(\mathbf{r}_1) \dot{+} \dots \dot{+} \mathbb{M}(\mathbf{r}_{j-1})]$ such that

$$h(\mathbf{r}_j) = h(\mathbb{S} \setminus [\mathbb{M}(\mathbf{r}_1) \dot{+} \dots \dot{+} \mathbb{M}(\mathbf{r}_{j-1})]).$$

In [26, Thm. 5.3 and Rem. 3], the following results were obtained.

Proposition 3.3. *There are exactly n generators of \mathbb{S} . Moreover, if the vector polynomials $\mathbf{r}_1(z), \dots, \mathbf{r}_n(z)$ are the generators of \mathbb{S} , then*

$$\mathbb{S} = \mathbb{M}(\mathbf{r}_1) \dot{+} \dots \dot{+} \mathbb{M}(\mathbf{r}_n)$$

and the heights of the generators of \mathbb{S} are different elements of the factor space $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Proposition 3.4. *Let $\mathbf{r}_j(z)$ be the j -th generator of $\mathbb{S}(n, N)$. It holds true that*

$$\sum_{j=1}^n h(\mathbf{r}_j) = Nn + \frac{n(n-1)}{2}. \quad (3.3)$$

Now, let us apply these results to the spectral analysis of the operator A . To this end, consider the solution of (2.12) as elements of $\mathbb{S}(\{\sigma_k\}_{k=1}^N, \{x_k\}_{k=1}^N)$, where σ_k is given by (2.14).

Lemma 3.1. *Fix $j \in \{1, \dots, n\}$ and let $\{x_k\}_{k=1}^N = \text{spec}(A)$, where $\{x_k\}_{k=1}^N$ is enumerated taking into account the multiplicity of eigenvalues. If $\mathbf{q}_j(z)$ is the vector polynomial given in (2.15), then*

$$\mathbf{q}_j(z) \in \mathbb{S}(\{\sigma_k\}_{k=1}^N, \{x_k\}_{k=1}^N).$$

Proof. The assertion follows by comparing (2.7) with (2.12). \square

From this lemma, taking into account the definition of the inner product in $L_2(\mathbb{R}, \sigma)$ (see the proof of Lemma 2.2) and Definition 3, one arrives at the following assertion.

Corollary 3.1. *For all $j \in \{1, \dots, n\}$ the vector polynomial $\mathbf{q}_j(z)$ is in the equivalence class of the zero in $L_2(\mathbb{R}, \sigma)$, that is,*

$$\langle \mathbf{q}_j, \mathbf{q}_j \rangle_{L_2(\mathbb{R}, \sigma)} = 0$$

and, for all $\mathbf{r} \in L_2(\mathbb{R}, \sigma)$,

$$\langle \mathbf{r}, \mathbf{q}_j \rangle_{L_2(\mathbb{R}, \sigma)} = 0. \quad (3.4)$$

Lemma 3.2. *Fix $k \in \{1, \dots, N\}$.*

i) If $m_j < k < m_{j+1}$, with $j = 0, \dots, n-1$ and $m_0 = 0$, then

$$h(\mathbf{p}_{k+n-j}) = n + h(\mathbf{p}_k).$$

ii) If there are no degenerations of the diagonals, then

$$h(\mathbf{p}_k) = k - 1, \quad \text{for all } k \in \{1, \dots, N\}.$$

iii) For any $i \in \{1, \dots, N\}$ and $j \in \{1, \dots, n\}$, the following holds

$$h(\mathbf{p}_i) \neq h(\mathbf{p}_{m_j}) + n = h(\mathbf{q}_j).$$

Proof. i) The heights of the vector polynomials $\{\mathbf{p}_k\}_{k=n+1}^N$ are determined recursively by means of the system (2.17). For any $m_j < k < m_{j+1}$, with $j = 0, \dots, n-1$, one has the equation

$$\dots + d_k^{(0)} \mathbf{p}_k + d_k^{(1)} \mathbf{p}_{k+1} + \dots + d_k^{(n-j)} \mathbf{p}_{k+n-j} = z \mathbf{p}_k.$$

Since $d_k^{(n-j)}$ never vanishes, the height of \mathbf{p}_{k+n-j} coincides with the one of $z \mathbf{p}_k$, this implies the assertion.

ii) When there are no degenerations of the diagonals, then $m_1 = N - n + 1$. So, the heights of the vector polynomials $\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N$ are determined by i) with $j = 0$.

iii) The assertions follows from the recurrence equations (2.17) and (2.18). \square

Lemma 3.3. For any nonnegative integer s , there exist $k \in \{1, \dots, N\}$ or a pair $j \in \{1, \dots, n\}$ and $l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ such that either $s = h(\mathbf{p}_k)$ or $s = h(\mathbf{q}_j) + nl$.

Proof. Due to Lemma 3.2 i), it follows from (2.4) and (2.16) that

$$h(\mathbf{p}_k) = k - 1 \quad \text{for } k = 1, \dots, h(\mathbf{q}_1). \quad (3.5)$$

Suppose that there is $s \in \mathbb{N}$ ($s > n$) such that $s \neq h(\mathbf{p}_k)$ for all $k \in \{1, \dots, N\}$ and $s \neq h(\mathbf{q}_j) + nl$ for all $j \in \{1, \dots, n\}$ and $l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Let \hat{l} be an integer such that $s - n\hat{l} \in \{h(\mathbf{p}_k)\}_{k=1}^N \cup \{h(\mathbf{q}_j) + nl\}$ ($j \in \{1, \dots, n\}$ and $l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$). There is always such an integer due to (3.5) and the fact that $h(\mathbf{q}_1) > n$ (see Lemma 3.2 iii). We take \hat{l}_0 to be the minimum of all \hat{l} 's. Thus, there is $k_0 \in \{1, \dots, N\}$ or $j_0 \in \{1, \dots, n\}$, respectively, such that either

a) $s - n\hat{l}_0 = h(\mathbf{p}_{k_0})$ or

b) $s - n\hat{l}_0 = h(\mathbf{q}_{j_0}) + nl$, with $l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

In the case a), we prove that \hat{l}_0 is not the minimum integer, this implies the assertion of the lemma. Indeed, if there is $j \in \{1, \dots, n\}$ such that $k_0 = m_j$,

then $s - n\hat{l}_0 + n = h(\mathbf{p}_{m_j}) + n = h(\mathbf{q}_j)$ due to *iii*) of Lemma 3.2. If there is not such j , then $m_j < k_0 < m_{j+1}$, and Lemma 3.2 *i*) implies $s - n\hat{l}_0 + n = h(\mathbf{p}_{k_0}) + n = h(\mathbf{p}_{k_0+n-j})$.

For the case b), if $s - n\hat{l}_0 = h(\mathbf{q}_{j_0}) + nl$, then $s = h(\mathbf{q}_{j_0}) + n(l + \hat{l}_0)$ which is a contradiction. \square

As a consequence of Proposition 3.1, the above lemma yields the following result.

Corollary 3.2. *Any vector polynomial $\mathbf{r}(z)$ is a finite linear combination of*

$$\{\mathbf{p}_k(z) : k \in \{1, \dots, N\}\} \cup \{z^l \mathbf{q}_j(z) : l \in \mathbb{N} \cup \{0\}, j \in \{1, \dots, n\}\}.$$

Theorem 3.1. *For $j \in \{1, \dots, n\}$, the vector polynomial $\mathbf{q}_j(z)$ is a j -th generator of*

$$\mathbb{S}(\{\sigma_k\}_{k=1}^N, \{x_k\}_{k=1}^N).$$

Proof. For any fixed $j \in \{1, \dots, n\}$, suppose that there is an element $\mathbf{r}(z) \in \mathbb{S}(\{\sigma_k\}_{k=1}^N, \{x_k\}_{k=1}^N) \setminus (\mathbb{M}(\mathbf{q}_1) \dot{+} \dots \dot{+} \mathbb{M}(\mathbf{q}_{j-1}))$, where $\mathbf{q}_0(z) := 0$ such that $h(\mathbf{q}_{j-1}) < h(\mathbf{r}) < h(\mathbf{q}_j)$. Write \mathbf{r} as Corollary 3.2, then by Corollary 3.1

$$0 = \langle \mathbf{r}, \mathbf{r} \rangle_{L_2(\mathbb{R}, \sigma)} = \left\langle \sum_{k=1}^N c_k \mathbf{p}_k, \sum_{k=1}^N c_k \mathbf{p}_k \right\rangle_{L_2(\mathbb{R}, \sigma)} = \sum_{k=1}^N |c_k|^2.$$

This implies that $c_k = 0$ for all $k \in \{1, \dots, N\}$. In turn, again by Corollary 3.2, one has

$$\mathbf{r}(z) \in \mathbb{M}(\mathbf{q}_1) \dot{+} \dots \dot{+} \mathbb{M}(\mathbf{q}_{j-1})$$

for $j > 1$, and $\mathbf{r}(z) \equiv 0$ for $j = 1$. This contradiction yields that $\mathbf{q}_j(z)$ satisfies the definition of j -generator for any $j \in \{1, \dots, n\}$. \square

The following assertion is a direct consequence of Theorem 3.1, Proposition 3.3, and Proposition 3.4.

Corollary 3.3. *Let $\{\mathbf{q}_1(z), \dots, \mathbf{q}_n(z)\}$ be the n -dimensional vector polynomials defined by (2.15). Then, $h(\mathbf{q}_1), \dots, h(\mathbf{q}_n)$ are different elements of the equivalence class of the factor space $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Also,*

$$\sum_{j=1}^n h(\mathbf{q}_j) = Nn + \frac{n(n-1)}{2}.$$

4. Reconstruction

In this section, we take as a starting point a matrix valued function $\tilde{\sigma} \in \mathfrak{M}(n, N)$ and construct a matrix \mathcal{A} in $\mathcal{M}(n, N)$ from this function. Moreover, we verify that, for some matrix \mathcal{T} giving the initial conditions, the function σ generated by the matrix \mathcal{A} (see Section 2) coincides with $\tilde{\sigma}$. Thus, the results of this section show that any matrix in $\mathcal{M}(n, N)$ can be reconstructed from its function in $\mathfrak{M}(n, N)$.

Let $\tilde{\sigma}(t)$ be a matrix valued function in $\mathfrak{M}(n, N)$. Thus, one can associate an interpolation problem (3.1) which is equivalent to (3.2) (with $\tilde{\sigma}_k$ instead of σ_k). Then, by Proposition, 3.3 there are n generators $\tilde{\mathbf{q}}_1(z), \dots, \tilde{\mathbf{q}}_n(z)$ of $\mathbb{S}(\{\tilde{\sigma}_k\}_{k=1}^N, \{\tilde{z}_k\}_{k=1}^N)$.

Let $\{\mathbf{e}_i(z)\}_{i \in \mathbb{N}}$ be a sequence of n -dimensional vector polynomials defined by

$$\mathbf{e}_{nk+1}(z) := \begin{pmatrix} z^k \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_{nk+2}(z) := \begin{pmatrix} 0 \\ z^k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \mathbf{e}_{n(k+1)}(z) := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ z^k \end{pmatrix}. \quad (4.1)$$

Clearly, $h(\mathbf{e}_i) = i - 1$. In the Hilbert space $L_2(\mathbb{R}, \tilde{\sigma})$, let us apply the Gram-Schmidt procedure of orthonormalization to the sequence $\{\mathbf{e}_i(z)\}_{i \in \mathbb{N}}$. Suppose that $\tilde{\mathbf{q}}_1$ is the first generator of the corresponding interpolation problem and let $\{\tilde{\mathbf{p}}_k\}_{k=1}^{h(\tilde{\mathbf{q}}_1)}$ be the orthonormalized vector polynomials obtained by the first $h(\tilde{\mathbf{q}}_1)$ iterations of the Gram-Schmidt procedure. Hence, if one defines

$$\mathbf{s} := \mathbf{e}_{h(\tilde{\mathbf{q}}_1)+1} - \sum_{i=1}^{h(\tilde{\mathbf{q}}_1)} \langle \tilde{\mathbf{p}}_i, \mathbf{e}_{h(\tilde{\mathbf{q}}_1)+1} \rangle_{L_2(\mathbb{R}, \tilde{\sigma})} \tilde{\mathbf{p}}_i,$$

then, in view of the fact that $h(\tilde{\mathbf{p}}_k) = k - 1$ for $k = 1, \dots, h(\tilde{\mathbf{q}}_1)$, one has $\mathbf{e}_{h(\tilde{\mathbf{q}}_1)+1} = c\tilde{\mathbf{q}}_1 + \sum_{i=1}^{h(\tilde{\mathbf{q}}_1)} c_i \tilde{\mathbf{p}}_i$ which in turn leads to

$$\mathbf{s} = c\tilde{\mathbf{q}}_1 + \sum_{k=1}^{h(\tilde{\mathbf{q}}_1)} \tilde{c}_k \tilde{\mathbf{p}}_k. \quad (4.2)$$

This implies that $\|\mathbf{s}\|_{L_2(\mathbb{R}, \tilde{\sigma})} = 0$ since $\langle \mathbf{s}, \tilde{\mathbf{q}}_1 \rangle_{L_2(\mathbb{R}, \tilde{\sigma})} = 0$ and $\mathbf{s} \perp \tilde{\mathbf{p}}_k$ for $k = 1, \dots, h(\tilde{\mathbf{q}}_1)$ by construction. One continues with the procedure by taking the next vector of the sequence (4.1). Note that if $\tilde{\mathbf{p}}_k$ is a normalized element given by the Gram-Schmidt procedure, then the next *completed* iteration yields a normalized vector $\tilde{\mathbf{p}}_{k+1}$. Observe that if the Gram-Schmidt technique has

produced a vector polynomial of zero norm \mathbf{q} of height h , then for any integer number l , the vector polynomial \mathbf{t} that is obtained at the $h+1+nl$ -th iteration of the Gram-Schmidt process, that is,

$$\mathbf{t} = \mathbf{e}_{h+1+nl} - \sum_{h(\tilde{\mathbf{p}}_i) < h+nl} \langle \tilde{\mathbf{p}}_i, \mathbf{e}_{h+1+nl} \rangle_{L_2(\mathbb{R}, \tilde{\sigma})} \tilde{\mathbf{p}}_i,$$

satisfies that $\|\mathbf{t}\|_{L_2(\mathbb{R}, \tilde{\sigma})} = 0$ (for all $l \in \mathbb{N}$), due to the fact that

$$\mathbf{e}_{h+1+nl} = R_l \mathbf{q} + \sum_{h(\tilde{\mathbf{p}}_i) < h+1+nl} c_i \tilde{\mathbf{p}}_i + \sum_{h(\mathbf{r}_i) < h+1+nl} \mathbf{r}_i,$$

where R_l is a scalar polynomial with degree k and each \mathbf{r}_i is a vector polynomial of zero norm with $h(\mathbf{r}_i) \neq h + nk$.

Since $L_2(\mathbb{R}, \tilde{\sigma})$ has dimension N , then one obtains from the Gram-Schmidt algorithm the orthonormalized sequence $\{\tilde{\mathbf{p}}_k\}_{k=1}^N$. Furthermore, the zeros found by the unsuccessful iterations yields all the generators $\{\tilde{\mathbf{q}}_i\}_{i=1}^n$ of the interpolation problem given by $\tilde{\sigma}$ and also polynomials in $\mathbb{S}(\{\tilde{\sigma}_k\}_{k=1}^N, \{\tilde{z}_k\}_{k=1}^N)$ such that their height are of the form $h(\tilde{\mathbf{q}}_i) + nl$ with $i \in \{1, \dots, n\}$ and $l \in \mathbb{N}$.

Remark 4.1. If one is interested only in the heights of the vector polynomials $\tilde{\mathbf{p}}_N$ and $\tilde{\mathbf{q}}_n$ then one stops the Gram-Schmidt procedure when $\tilde{\mathbf{q}}_{n-1}$ appears and use Corollary 3.3.

Due to the fact that

$$h \left(\mathbf{e}_k - \sum_{h(\tilde{\mathbf{p}}_i) < k-1} \langle \tilde{\mathbf{p}}_i, \mathbf{e}_k \rangle_{L_2(\mathbb{R}, \tilde{\sigma})} \tilde{\mathbf{p}}_i \right) = h(\mathbf{e}_k), \quad (4.3)$$

one concludes that the heights of the set $\{\tilde{\mathbf{p}}_k(z)\}_{k=1}^N \cup \{z^l \tilde{\mathbf{q}}_i(z)\}_{i=1}^n$ are in one-to-one correspondence with the set $\{0\} \cup \mathbb{N}$. Thus, in view of Proposition 3.1, one can write any n -dimensional vector polynomial \mathbf{r} as

$$\mathbf{r}(z) = \sum_{k=1}^N c_k \tilde{\mathbf{p}}_k(z) + \sum_{j=1}^n S_j(z) \tilde{\mathbf{q}}_j(z),$$

where $c_k \in \mathbb{C}$, $S_j(z)$ are scalar polynomials. Also, $c_k = 0$, respectively $S_j(z) = 0$, if $h(\mathbf{r}) > h(\tilde{\mathbf{p}}_k)$, respectively $h(\mathbf{r}) > h(\tilde{\mathbf{q}}_j)$. In particular, for $k \in \{1, \dots, N\}$,

$$z \tilde{\mathbf{p}}_k(z) = \sum_{l=1}^N c_{lk} \tilde{\mathbf{p}}_l(z) + \sum_{j=1}^n S_{kj}(z) \tilde{\mathbf{q}}_j(z), \quad (4.4)$$

where $c_{kl} \in \mathbb{C}$ and $S_{kj}(z)$ is scalar polynomial.

Remark 4.2. In (4.4), it holds that, for each k ,

- i)* $c_{lk} = 0$ if $h(z\tilde{\mathbf{p}}_k) < h(\tilde{\mathbf{p}}_l)$,
- ii)* $S_{kj}(z) = 0$ if $h(z\tilde{\mathbf{p}}_k) < h(S_{kj}(z)\tilde{\mathbf{q}}_j)$,
- iii)* $c_{lk} > 0$ if there is $l \in \mathbb{N}$ such that $h(z\tilde{\mathbf{p}}_k) = h(\tilde{\mathbf{p}}_l)$.

Items *i)* and *ii)* are obtained by comparing the heights of the left and right hand side of (4.4). In item *iii)*, one has to take into account that the leading coefficient of \mathbf{e}_k is positive for $k \in \mathbb{N}$ and therefore the Gram-Schmidt procedure yields the sequence $\{\tilde{\mathbf{p}}_k\}_{k=1}^N$ with its elements having positive leading coefficients.

Remark 4.3. For $k = 1, \dots, h_1$. We have that

$$h(\tilde{\mathbf{p}}_k) = k - 1,$$

and, for $k > h_1$

$$h(\tilde{\mathbf{p}}_k) = k - 1 + b_k,$$

where b_k is the number of elements in the set $\mathbb{M}(\tilde{\mathbf{q}}_1) \dot{+} \dots \dot{+} \mathbb{M}(\tilde{\mathbf{q}}_n)$ obtained by the Gram-Schmidt procedure and whose heights are less than $h(\tilde{\mathbf{p}}_k)$. Observe that $b_k < b_{n+k}$, which in turn implies

$$h(\tilde{\mathbf{p}}_{n+k}) > h(\tilde{\mathbf{p}}_k) + n. \quad (4.5)$$

Therefore, if we take the inner product of (4.4) with $\tilde{\mathbf{p}}_l(z)$ in $L_2(\mathbb{R}, \tilde{\sigma})$, we obtain

$$c_{lk} = \langle \tilde{\mathbf{p}}_l, z\tilde{\mathbf{p}}_k \rangle_{L_2(\mathbb{R}, \tilde{\sigma})} = \langle z\tilde{\mathbf{p}}_l, \tilde{\mathbf{p}}_k \rangle_{L_2(\mathbb{R}, \tilde{\sigma})} = c_{kl}, \quad (4.6)$$

where (3.4) has been used. Hence, the matrix $\{c_{lk}\}_{l,k=1}^N$ is symmetric and it is the matrix representation of the operator of multiplication by the independent variable in $L_2(\mathbb{R}, \tilde{\sigma})$ with respect to the basis $\{\tilde{\mathbf{p}}_k(z)\}_{k=1}^N$.

The following results shed light on the structure of the matrix $\{c_{lk}\}_{l,k=1}^N$.

Lemma 4.1. *If $|l - k| > n$. Then,*

$$c_{kl} = c_{lk} = 0.$$

Proof. For $l - k > n$, we obtain from (4.5) that $h(\tilde{\mathbf{p}}_l) > h(\tilde{\mathbf{p}}_{k+n}) \geq h(\tilde{\mathbf{p}}_k) + n = h(z\tilde{\mathbf{p}}_k)$. Therefore by Remark 4.2,

$$c_{lk} = \langle \tilde{\mathbf{p}}_l, z\tilde{\mathbf{p}}_k \rangle_{L_2(\mathbb{R}, \tilde{\sigma})} = 0.$$

And similarly for $k - l > n$. □

Lemma 4.1 shows that $\{c_{lk}\}_{l,k=1}^N$ is a band matrix. Let us turn to the question of characterizing the diagonals of $\{c_{lk}\}_{l,k=1}^N$. It will be shown that they undergo the kind of degeneration given in the Introduction.

For a fixed number $i \in \{0, \dots, n\}$, we define the numbers

$$d_k^{(i)} := c_{k+i,k} = c_{k,k+i} \quad (4.7)$$

for $k = 1, \dots, N - i$.

Lemma 4.2. Fix $j \in \{0, \dots, n - 1\}$.

i) If k is such that $h(\tilde{\mathbf{q}}_j) < h(z\tilde{\mathbf{p}}_k) < h(\tilde{\mathbf{q}}_{j+1})$, then $d_k^{(n-j)} > 0$. Here one assumes that $h(\mathbf{q}_0) := n - 1$.

ii) If k is such that $h(z\tilde{\mathbf{p}}_k) \geq h(\tilde{\mathbf{q}}_{j+1})$, one has that $d_k^{(n-j)} = 0$.

Proof. Fix a number $j \in \{0, \dots, n - 1\}$, then any vector polynomial of the basis $\{\tilde{\mathbf{p}}_k(z)\}_{k=1}^N$ satisfies either

$$h(\tilde{\mathbf{q}}_j) < h(z\tilde{\mathbf{p}}_k) < h(\tilde{\mathbf{q}}_{j+1}) \quad (4.8)$$

or

$$h(z\tilde{\mathbf{p}}_k) \geq h(\tilde{\mathbf{q}}_{j+1}). \quad (4.9)$$

Suppose that $k \in \{1, \dots, N\}$ is such that (4.8) holds, then there is $l \in \{1, \dots, N\}$ such that

$$h(\tilde{\mathbf{p}}_l) = h(\tilde{\mathbf{p}}_k) + n = h(z\tilde{\mathbf{p}}_k).$$

Indeed, if there is no vector polynomial $\tilde{\mathbf{p}}_l(z)$ such that $h(\tilde{\mathbf{p}}_l) = h(z\tilde{\mathbf{p}}_k)$, then $h(z\tilde{\mathbf{p}}_k) = h(z^s\tilde{\mathbf{q}}_i)$ for some $i \leq j$ and $s \geq 1$. Therefore $h(\tilde{\mathbf{p}}_k) = h(z^{s-1}\tilde{\mathbf{q}}_i)$, which contradicts the fact that the heights of the set $\{\tilde{\mathbf{p}}_k\}_{k=1}^N \cup \{z^l\tilde{\mathbf{q}}_j\}_{j=1}^n$ ($l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$) are in one-to-one correspondence with the set $\mathbb{N} \cup \{0\}$.

Let f_k be the number of elements of the sequence $\{\tilde{\mathbf{g}}_i\}_{i=1}^\infty$ in $\mathbb{M}(\tilde{\mathbf{q}}_1) \dot{+} \dots \dot{+} \mathbb{M}(\tilde{\mathbf{q}}_i)$ whose heights lies between $h(\tilde{\mathbf{p}}_k)$ and $h(\tilde{\mathbf{p}}_k) + n$. If one assumes that (4.8) holds, then

$$f_k = j. \quad (4.10)$$

This is so because there are $n - 1$ “places” between $h(\tilde{\mathbf{p}}_k)$ and $h(\tilde{\mathbf{p}}_k) + n$ and, for each generator $\tilde{\mathbf{q}}_j(z)$ ($j \in \{1, \dots, n\}$) the heights of the elements of $\mathbb{M}(\tilde{\mathbf{q}}_j)$ fall into the same equivalence class of $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ (see Proposition 3.2). By (4.10), one has

$$h(z\tilde{\mathbf{p}}_k) = h(\tilde{\mathbf{p}}_k) + n = h(\tilde{\mathbf{p}}_{k+n-f_k}) = h(\tilde{\mathbf{p}}_{k+n-j}).$$

Therefore, Remark 4.2 iii) implies that $d_k^{(n-j)} > 0$.

Now, suppose that (4.9) takes place. In this case, one verifies that

$$f_k \geq j + 1. \quad (4.11)$$

Let \tilde{f}_k be the number of elements in $\{\tilde{\mathbf{p}}_k(z)\}_{k=1}^N$ whose heights lies between $h(\tilde{\mathbf{p}}_k)$ and $h(\tilde{\mathbf{p}}_k) + n$. Then

$$h(\tilde{\mathbf{p}}_{k+\tilde{f}_k}) < h(\tilde{\mathbf{p}}_k) + n \leq h(\tilde{\mathbf{p}}_{k+\tilde{f}_k+1}).$$

Also, it follows from (4.11) and the equality $n - 1 = f_k + \tilde{f}_k$ that

$$h(\tilde{\mathbf{p}}_{k+\tilde{f}_k+1}) \leq h(\tilde{\mathbf{p}}_{k+n-j-1}) < h(\tilde{\mathbf{p}}_{k+n-j}).$$

Thus $h(\tilde{\mathbf{p}}_k) + n < h(\tilde{\mathbf{p}}_{k+n-j})$. This implies that $\langle \tilde{\mathbf{p}}_{k+n-1}, z\tilde{\mathbf{p}}_k \rangle_{L_2(\mathbb{R}, \tilde{\sigma})} = 0$, which yields that $d_k^{(n-j)} = 0$ whenever (4.9) holds. \square

Corollary 4.1. *The matrix representation of the operator of multiplication by the independent variable in $L_2(\mathbb{R}, \tilde{\sigma})$ with respect to the basis $\{\tilde{\mathbf{p}}_k\}_{k=1}^N$ is a matrix in $\mathcal{M}(n, N)$.*

Proof. Taking into account (4.7), it follows from Lemma (4.1) and (4.2) that the matrix $\{c_{kl}\}_{k,l=1}^N$ whose entries are given by (4.6) is in the class $\mathcal{M}(n, N)$. \square

Remark 4.4. Since the matrix $\{c_{kl}\}_{k,l=1}^N$ is in $\mathcal{M}(n, N)$, there are numbers $\{m_i\}_{i=1}^n$ associated with it (see Introduction). This numbers can be found from Lemma 4.2 which tells us that a degeneration occurs when there exists $k \in \{1, \dots, N\}$ such that $h(z\tilde{\mathbf{p}}_k) = h(\tilde{\mathbf{q}}_{j+1})$ (this happens for each $j \in \{1, \dots, n - 1\}$). Thus,

$$h(z\tilde{\mathbf{p}}_{m_j}) = h(\tilde{\mathbf{q}}_j), \quad \forall j \in \{1, \dots, n\}. \quad (4.12)$$

It is straightforward to verify that (2.11) is equivalent to the fact that $\mathbf{e}_i(z)$ is not in the equivalence class of zero in $L(\mathbb{R}, \tilde{\sigma})$ for $i \in \{1, \dots, n\}$. Therefore, the first n elements of $\{\tilde{\mathbf{p}}_k(z)\}_{k=1}^N$ are obtained by applying Gram-Schmidt to the set $\{\mathbf{e}_i(z)\}_{i=1}^n$. Thus, if one defines

$$t_{ij} := \langle \delta_i, \tilde{\mathbf{p}}_j \rangle_{\mathbb{C}^n}, \quad \forall i, j \in \{1, \dots, n\}, \quad (4.13)$$

the matrix $\mathcal{T} = \{t_{ij}\}_{i,j=1}^n$ turns out to be upper triangular real and $t_{jj} \neq 0$ for all $j \in \{1, \dots, n\}$. Now, for this matrix \mathcal{T} and \mathcal{A} construct the solutions $\varphi^{(j)}(z)$ satisfying (2.4). Hence, the vector polynomials $\{\mathbf{p}_1(z), \dots, \mathbf{p}_n(z)\}$ defined by (2.16) satisfy (4.13). In other words

$$\mathbf{p}_j(z) = \tilde{\mathbf{p}}_j(z), \quad \forall j \in \{1, \dots, n\}.$$

Consider the recurrence equation, which is obtained from (4.4), but only for the case *iii*) of the Remark 4.2 taking into account (4.7) and Lemma 4.2. That

On the other hand, for the particular case $k = m_1$, (4.4) and (4.12) imply that

$$z\tilde{\mathbf{p}}_{m_1} = d_{m_1-n}^{(n)}\tilde{\mathbf{p}}_{m_1-n} + \cdots + d_{m_1}^{(0)}\tilde{\mathbf{p}}_{m_1} + d_{m_1}^{(1)}\tilde{\mathbf{p}}_{m_1+1} + \cdots + d_{m_1}^{(n-1)}\tilde{\mathbf{p}}_{m_1+n-1} + \gamma_1\tilde{\mathbf{q}}_1,$$

where $\gamma_1 \neq 0$.

In general, one verifies that for all $j \in \{1, \dots, n\}$

$$\begin{aligned} z\tilde{\mathbf{p}}_{m_j} &= d_{m_j-n}^{(n)}\tilde{\mathbf{p}}_{m_j-n} + \cdots + d_{m_j}^{(0)}\tilde{\mathbf{p}}_{m_j} + \\ &\quad + d_{m_j}^{(1)}\tilde{\mathbf{p}}_{m_j+1} + \cdots + d_{m_j}^{(n-j)}\tilde{\mathbf{p}}_{m_j+n-j} + \sum_{i<j} S_{m_j,i}\tilde{\mathbf{q}}_i + \gamma_j\tilde{\mathbf{q}}_j, \end{aligned}$$

where $\gamma_j \neq 0$ and $S_i(z)$ is a scalar polynomial. Hence,

$$\begin{aligned} \gamma_j\tilde{\mathbf{q}}_j &= \left(z - d_{m_j}^{(0)} \right) \tilde{\mathbf{p}}_{m_j} - \left(d_{m_j-n}^{(n)}\tilde{\mathbf{p}}_{m_j-n} + \cdots + d_{m_j-1}^{(1)}\tilde{\mathbf{p}}_{m_j-1} + \right. \\ &\quad \left. + d_{m_j}^{(1)}\tilde{\mathbf{p}}_{m_j+1} + \cdots + d_{m_1}^{(n-j)}\tilde{\mathbf{p}}_{m_j+n-j} + \sum_{i<j} S_{m_j,i}\tilde{\mathbf{q}}_i \right) \end{aligned} \quad (4.16)$$

for all $j \in \{1, \dots, n\}$.

Let us define the set of vector polynomials $\{\mathbf{q}_1(z), \dots, \mathbf{q}_n(z)\}$ by means of (2.18) using $\{\mathbf{p}_1(z), \dots, \mathbf{p}_N(z)\}$, as was done in Section 2.

Lemma 4.4. *Let $\tilde{\mathbf{q}}_j(z)$ be j -generator of $\mathbb{S}(\{\tilde{\sigma}_k\}_{k=1}^N, \{\tilde{x}_k\}_{k=1}^N)$, and $\mathbf{q}_j(z)$ be defined as above. Then $h(\mathbf{q}_j) = h(\tilde{\mathbf{q}}_j)$ for all $j \in \{1, \dots, n\}$ and*

$$\mathbf{q}_j(z) = \sum_{i \leq j} S_i(z)\tilde{\mathbf{q}}_i(z), \quad S_j \neq 0, \quad (4.17)$$

where $S_i(z)$ are scalar polynomials.

Proof. It follows from (2.18), (4.15) and (4.16) that

$$\mathbf{q}_j(z) = \gamma_j\tilde{\mathbf{q}}_j(z) + \tilde{\mathbf{s}}_j(z), \quad \text{for all } j \in \{1, \dots, n\}, \quad (4.18)$$

where $\tilde{\mathbf{s}}_j(z)$ is in the equivalence class of the zero of $L_2(\mathbb{R}, \tilde{\sigma})$ and its height is strictly less than the height of $\tilde{\mathbf{q}}_j(z)$ since, due to (4.12), the height of $\tilde{\mathbf{q}}_j(z)$ is strictly greater than the height of any other term in the equation with $k = m_j$ in the system (4.4). Thus, $h(\mathbf{q}_j) = h(\tilde{\mathbf{q}}_j)$ for all $j \in \{1, \dots, n\}$.

Equation (4.18) also shows that $\mathbf{q}_i(z) \in \mathbb{S}(\{\tilde{\sigma}_k\}_{k=1}^N, \{\tilde{x}_k\}_{k=1}^N)$ and, due to Proposition 3.3, (4.17) is satisfied. \square

Lemma 4.5. *Let $\mathbf{r}(z)$ and $\mathbf{s}(z)$ be any two n -dimensional vector polynomials.*

Then,

$$\langle \mathbf{r}, \mathbf{s} \rangle_{L_2(\mathbb{R}, \sigma)} = \langle \mathbf{r}, \mathbf{s} \rangle_{L_2(\mathbb{R}, \tilde{\sigma})}.$$

Proof. Any vector polynomial $\mathbf{r}(z)$ can be written as

$$\mathbf{r}(z) = \sum_{k=1}^N c_k \mathbf{p}_k(z) + \sum_{j=1}^n S_j(z) \mathbf{q}_j(z),$$

where $c_k = \langle \mathbf{r}, \mathbf{p}_k \rangle_{L_2(\mathbb{R}, \sigma)}$ and $S_j(z)$ are scalar polynomials. Thus,

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{r}, \tilde{\mathbf{p}}_k \rangle_{L_2(\mathbb{R}, \tilde{\sigma})} &= \left\langle \sum_{l=1}^N c_l \mathbf{p}_l + \sum_{j=1}^n S_j \mathbf{q}_j, \tilde{\mathbf{p}}_k \right\rangle_{L_2(\mathbb{R}, \tilde{\sigma})} \\ &= \left\langle \sum_{l=1}^N c_l (\tilde{\mathbf{p}}_l + \tilde{\mathbf{r}}_l) + \sum_{j=1}^n S_j \left(\sum_{i \leq j} S_i \tilde{\mathbf{q}}_i \right), \tilde{\mathbf{p}}_k \right\rangle_{L_2(\mathbb{R}, \tilde{\sigma})} \\ &= \left\langle \sum_{l=1}^N c_l \tilde{\mathbf{p}}_l, \tilde{\mathbf{p}}_k \right\rangle_{L_2(\mathbb{R}, \tilde{\sigma})} = c_k. \end{aligned}$$

□

For the functions $\sigma(t)$ and $\tilde{\sigma}(t)$ in $\mathfrak{M}(n, N)$ consider the points x_k and \tilde{x}_k , where, respectively, $\sigma(t)$ and $\tilde{\sigma}(t)$ have jumps σ_k and $\tilde{\sigma}_k$. By definition, k takes all the values of the set $\{1, \dots, N\}$.

Lemma 4.6. *The points where the jumps of the matrices $\sigma(t)$ and $\tilde{\sigma}(t)$ take place coincide, i. e.,*

$$x_k = \tilde{x}_k, \quad \text{for all } k \in \{1, \dots, N\}.$$

Proof. Define the n -dimensional vector polynomial

$$\mathbf{r}(z) := \prod_{l=1}^N (z - x_l) \mathbf{e}_1(z)$$

(see (4.1)). Therefore,

$$\langle \mathbf{r}, \mathbf{r} \rangle_{L_2(\mathbb{R}, \sigma)} = \sum_{k=1}^N \langle \mathbf{r}(x_k), \sigma_k \mathbf{r}(x_k) \rangle_{\mathbb{C}^n} = 0.$$

Now, if one assumes that $\{\tilde{x}_k\}_{k=1}^N \setminus \{x_k\}_{k=1}^N \neq \emptyset$, then

$$\langle \mathbf{r}, \mathbf{r} \rangle_{L_2(\mathbb{R}, \tilde{\sigma})} = \sum_{k=1}^N \langle \mathbf{r}(\tilde{x}_k), \tilde{\sigma}_k \mathbf{r}(\tilde{x}_k) \rangle_{\mathbb{C}^n} > 0$$

due to (2.11). In view of Lemma 4.5 our assumption has lead to a contradiction, so $\{\tilde{x}_k\}_{k=1}^N \subset \{x_k\}_{k=1}^N$. Analogously, one proves that $\{x_k\}_{k=1}^N \subset \{\tilde{x}_k\}_{k=1}^N$. \square

Lemma 4.7. *The jumps of the matrix valued functions $\sigma(t)$ and $\tilde{\sigma}(t)$ coincide, namely, for all $k \in \{1, \dots, N\}$,*

$$\sigma_k = \tilde{\sigma}_k.$$

Proof. Define, for each $i \in \{1, \dots, n\}$, the n -dimensional vector polynomial by

$$\mathbf{r}_{ki}(z) := \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^N (z - x_l) \mathbf{e}_i(z).$$

Thus, for all $i, j \in \{1, \dots, n\}$,

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{r}_{ki}, \mathbf{r}_{kj} \rangle_{L_2(\mathbb{R}, \sigma)} &= \sum_{s=1}^N \langle \mathbf{r}_{ki}(x_s), \sigma_s \mathbf{r}_{kj}(x_s) \rangle_{\mathbb{C}^n} = \sum_{s=1}^N \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^N |x_s - x_l|^2 \overline{\alpha_i(x_s)} \alpha_j(x_s) \\ &= \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^N |x_k - x_l|^2 \overline{\alpha_i(x_k)} \alpha_j(x_k). \end{aligned}$$

Analogously,

$$\langle \mathbf{r}_{ki}, \mathbf{r}_{kj} \rangle_{L_2(\mathbb{R}, \tilde{\sigma})} = \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^N |x_k - x_l|^2 \overline{\tilde{\alpha}_i(x_k)} \tilde{\alpha}_j(x_k),$$

where Lemma 4.6 was used together with the fact that the numbers $\tilde{\alpha}_i(x_k)$ define the entries of the matrix $\tilde{\sigma}_k$ (see (2.14)). Therefore, by Lemma (4.5)

$$\sigma_k = \tilde{\sigma}_k, \quad \text{for all } k \in \{1, \dots, N\}.$$

\square

Thus, with the help of the above results, one can assert the following theorem.

Theorem 4.1. Let $\tilde{\sigma}(t)$ be an element of $\mathfrak{M}(n, N)$ and $\{c_{kl}\}_{k,l=1}^N \in \mathcal{M}(n, N)$ be the corresponding matrix that results from applying the method of reconstruction to the matrix valued function $\tilde{\sigma}(t)$. If A is the operator whose matrix representation with respect to the basis $\{\delta_1, \dots, \delta_N\}$ in \mathcal{H} , is $\{c_{kl}\}_{k,l=1}^N$, then there is an upper triangular real matrix \mathcal{T} with no zeros in the main diagonal such that the corresponding spectral function $\sigma(t)$ for the operator A coincides with $\tilde{\sigma}(t)$.

Remark 4.5. Let \mathcal{A} be in $\mathcal{M}(n, N)$ and A be the corresponding operator. Denote by V_θ the unitary operator whose matrix representation with respect to the canonical basis is $\text{diag}\{e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_N}\}$ with $\theta_k \in [0, 2\pi)$ for any $k \in \{1, \dots, N\}$. Define

$$B = V_\theta A V_\theta^* . \quad (4.19)$$

By the fact that (1.1) holds, the matrix representation of B is in $\mathcal{M}(n, N)$ if and only if $\theta_k = 0$ for all $k \in \{1, \dots, N\}$. Thus, within the family of unitarily equivalent matrices corresponding to the operators (4.19), there is only one element in $\mathcal{M}(n, N)$.

On the basis of the previous remark, Theorem 4.1, can be paraphrased as follows: the spectral function of a matrix in $\mathcal{M}(n, N)$ uniquely determines the matrix itself. In other words, a matrix in $\mathcal{M}(n, N)$ can be uniquely recovered from its spectral function.

5. Alternative inverse spectral methods

For Jacobi matrices there are two ways of recovering the matrix from the spectral function ρ . The first one is based on the fact that the sequence of orthonormal polynomials, constructed via the application of Gram-Schmidt procedure to the sequence of functions $\{t^{k-1}\}_{k=1}^\infty$ in $L_2(\mathbb{R}, \rho)$, determines the entries of the matrix (see [1, Chap. 1, Sec. 1 and Chap. 4 Sec. 2] and [34, Sec. 1]). The second method uses the fact that the asymptotic expansion of the m -Weyl function corresponding to ρ yields the matrix entries [12, Sec. 3]. In the case of tridiagonal block matrices, these two methods also work with some restrictions. Indeed, consider a finite tridiagonal block matrix

$$\begin{pmatrix} Q_1 & B_1^* & 0 & \cdots & 0 \\ B_1 & Q_2 & B_2^* & \ddots & \vdots \\ 0 & B_2 & Q_3 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & B_{K-1}^* \\ 0 & \cdots & 0 & B_{K-1} & Q_K \end{pmatrix} , \quad (5.1)$$

where B_k is invertible for all $k = 1, \dots, K-1$. According to [4, Chap.7 Sec. 2.8], one recovers the matrix entries Q_1, \dots, Q_K and B_1, \dots, B_{K-1} from a matrix

valued function obtained from the spectral function. This corresponds to the first method outlined above. There is also an analogue of the second method which is based on the function $M(z)$ given by [4, Chap.7 Eq. 2.63] which satisfy

$$M(z)^{-1} = Q_1 - zI - B_1 \widetilde{M}(z) B_1^*, \tag{5.2}$$

where $\widetilde{M}(z)$ is the function given by [4, Chap.7 Eq. 2.63] for the tridiagonal block matrix obtained from (5.1) by deleting the first block row and block column. Equation (5.2) is the block analogue of [12, Eq. 2.15]. On the basis of the asymptotic behavior of \widetilde{M} , one finds Q_1 and $B_1 B_1^*$ from (5.2). Since, in our setting, the matrix B_1 is upper triangular with positive main diagonal, one can actually obtain the entries of B_1 from $B_1 B_1^*$. It is possible to obtain the next matrix entries by considering (5.2) for the next truncated matrix.

Any matrix of the class $\mathcal{M}(n, N)$ can be written as (5.1) whenever $N/n = K$. Note that if a matrix in $\mathcal{M}(n, N)$ undergoes degeneration, then there is k_0 such that B_k is not invertible for all $k = k_0, \dots, K - 1$. Thus, the methods cited above can be used for the inverse spectral analysis of the elements of $\mathcal{M}(n, N)$ which, do not undergo degenerations and for which $N/n \in \mathbb{N}$.

The procedure developed in Section 4 is applicable to the whole class $\mathcal{M}(n, N)$, which shows that it is more general than the methods described above. In the reconstruction technique of Section 4, degenerations can be treated on the basis of the solution of the linear interpolation problem for n -dimensional vector polynomials.

Appendix

This appendix briefly describes how Newton's laws of motion and the Hooke law yield a finite difference equation which can be written by a finite band symmetric matrix.

Consider the finite mass-spring system given by Fig. A, where we have assumed that N is even.

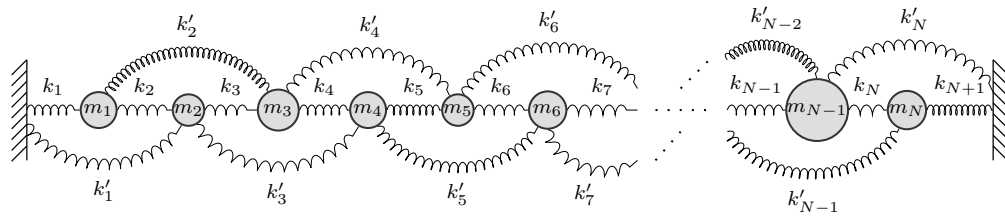


Figure A: Mass-spring system of a matrix in $\mathcal{M}(2, N)$: nondegenerated case

In Fig. A, m_j and k_j , k'_j stand, respectively, for the j -th mass, the j -th spring constant connecting immediate neighbors, and the j -th spring constant connecting mediated neighbors.

Due to the Hooke law, the forces F_i acting on the masses m_i are given by

$$F_i = k'_{i+1}x_{i+2} + k_{i+1}x_{i+1} + (k_{i+1} + k'_{i+1} + k_i + k'_{i-1})x_i + k_ix_{i-1} + k'_{i-1}x_{i-2}.$$

This system of equations, due to Newton's second law, can be written as

$$M\ddot{x} = Kx, \quad (\text{A.1})$$

where

$$M = \begin{pmatrix} m_1 & & & & & \\ & m_2 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & m_N & \end{pmatrix} \quad K = \begin{pmatrix} \alpha_1 & k_2 & k'_2 & 0 & \dots & 0 \\ k_2 & \alpha_2 & k_3 & k'_3 & \dots & 0 \\ k'_2 & k_3 & \alpha_3 & k_4 & \ddots & 0 \\ 0 & k'_3 & k_4 & \alpha_4 & & k'_{N-1} \\ \vdots & & \ddots & & \ddots & k_N \\ 0 & \dots & 0 & k'_{N-1} & k_N & \alpha_N \end{pmatrix}$$

with $\alpha_i = -(k_{i+1} + k'_{i+1} + k_i + k'_{i-1})$. The system (A.1) is equivalent to $\ddot{U} = LU$, where $U = M^{1/2}X$ and

$$L = M^{-1/2}KM^{-1/2} = \begin{pmatrix} \frac{\alpha_1}{m_1} & \frac{k_2}{\sqrt{m_1 m_2}} & \frac{k'_2}{\sqrt{m_1 m_3}} & 0 & \dots & 0 \\ \frac{k_2}{\sqrt{m_1 m_2}} & \frac{\alpha_2}{m_2} & \frac{k_3}{\sqrt{m_2 m_3}} & \frac{k'_3}{\sqrt{m_2 m_4}} & \dots & 0 \\ \frac{k'_2}{\sqrt{m_1 m_3}} & \frac{k_3}{\sqrt{m_2 m_3}} & \frac{\alpha_3}{m_3} & \frac{k_4}{\sqrt{m_3 m_4}} & \ddots & 0 \\ 0 & \frac{k'_3}{\sqrt{m_2 m_4}} & \frac{k_4}{\sqrt{m_3 m_4}} & \frac{\alpha_4}{m_4} & & \frac{k'_{N-1}}{\sqrt{m_{N-2} m_N}} \\ \vdots & & \ddots & & \ddots & \frac{k_N}{\sqrt{m_{N-1} m_N}} \\ 0 & \dots & 0 & \frac{k'_{N-1}}{\sqrt{m_{N-2} m_N}} & \frac{k_N}{\sqrt{m_{N-1} m_N}} & \frac{\alpha_N}{m_N} \end{pmatrix}.$$

Thus, according to our notation, the diagonals are given by

$$d_j^{(0)} = \frac{k_{j+1} + k'_{j+1} + k_j + k'_{j-1}}{m_j} \quad (\text{A.2})$$

$$d_j^{(1)} = \frac{k_{j+1}}{\sqrt{m_{j+1} m_j}} \quad (\text{A.3})$$

$$d_j^{(2)} = \frac{k'_{j+1}}{\sqrt{m_{j+2} m_j}}. \quad (\text{A.4})$$

The eigenvalues of this matrix determine the frequencies of the harmonic oscillations whose superposition yields the movement of the mechanical system.

For Jacobi matrices, viz. when the masses are connected only with their immediate neighbor, it is possible to give a finite continued fraction which

yields the quotients k_j/m_j for any j from the quotient k_1/m_1 [10, Rem. 11] (see also [27, pag. 76]). This reconstruction is physically meaningful. In the general case, one can construct the following continued fractions from (A.2), (A.3), and (A.4). Note that the first equation reduces to the continued fraction of [10, Rem. 11] when $k'_j = 0$.

$$\frac{k_{j+1} + k'_j}{m_{j+1}} = \frac{\left(d_j^{(1)}\right)^2 + \sqrt{\frac{m_{j+2}}{m_{j+1}}}d_j^{(1)}d_j^{(2)} + \sqrt{\frac{m_j-1}{m_j}}d_{j-1}^{(2)}d_j^{(1)} + \sqrt{\frac{m_{j-1}m_{j+2}}{m_{j+1}m_j}}d_j^{(2)}d_{j-1}^{(2)}}{d_j^{(0)} + \frac{k_j+k'_{j-1}}{m_j}} \quad (\text{A.5})$$

$$= \frac{\left(d_j^{(1)}\right)^2 + \frac{k'_{j+1}}{k_{j+1}}\left(d_j^{(1)}\right)^2 + \frac{k_{j-1}}{k'_{j-1}}\frac{d_j^{(1)}d_{j-1}^{(2)}d_{j-2}^{(2)}}{d_{j-2}^{(1)}} + \frac{k'_{j+1}k_{j-1}}{k_{j+1}k'_{j-1}}\frac{d_j^{(1)}d_{j-1}^{(2)}d_{j-2}^{(2)}}{d_{j-2}^{(1)}}}{d_j^{(0)} + \frac{k_j+k'_{j-1}}{m_j}}. \quad (\text{A.6})$$

References

- [1] N. I. Akhiezer. *The classical moment problem and some related questions in analysis*. Translated by N. Kemmer. Hafner Publishing Co., New York, 1965.
- [2] N. I. Akhiezer and I. M. Glazman. *Theory of linear operators in Hilbert space*. Dover Publications Inc., New York, 1993. Translated from the Russian and with a preface by Merlynd Nestell, Reprint of the 1961 and 1963 translations, Two volumes bound as one.
- [3] B. Beckermann and A. Osipov. Some spectral properties of infinite band matrices. *Numer. Algorithms*, 34(2-4):173–185, 2003. International Conference on Numerical Algorithms, Vol. II (Marrakesh, 2001).
- [4] J. M. Berezans'kiĭ. *Expansions in eigenfunctions of selfadjoint operators*. Translated from the Russian by R. Bolstein, J. M. Danskin, J. Rovnyak and L. Shulman. Translations of Mathematical Monographs, Vol. 17. American Mathematical Society, Providence, R.I., 1968.
- [5] F. W. Biegler-König. Construction of band matrices from spectral data. *Linear Algebra Appl.*, 40:79–87, 1981.
- [6] M. T. Chu and G. H. Golub. *Inverse eigenvalue problems: theory, algorithms, and applications*. Numerical Mathematics and Scientific Computation. Oxford University Press, New York, 2005.

- [7] C. de Boor and G. H. Golub. The numerically stable reconstruction of a Jacobi matrix from spectral data. *Linear Algebra Appl.*, 21(3):245–260, 1978.
- [8] R. del Rio and M. Kudryavtsev. Inverse problems for Jacobi operators: I. Interior mass-spring perturbations in finite systems. *Inverse Problems*, 28(5):055007, 18, 2012.
- [9] R. del Rio, M. Kudryavtsev, and L. O. Silva. Inverse problems for Jacobi operators III: Mass-spring perturbations of semi-infinite systems. *Inverse Probl. Imaging*, 6(4):599–621, 2012.
- [10] R. del Rio, M. Kudryavtsev, and L. O. Silva. Inverse problems for Jacobi operators II: Mass perturbations of semi-infinite mass-spring systems. *Zh. Mat. Fiz. Anal. Geom.*, 9(2):165–190, 2013.
- [11] M. G. Gasymov and G. S. Guseĭnov. On inverse problems of spectral analysis for infinite Jacobi matrices in the limit-circle case. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 309(6):1293–1296, 1989.
- [12] F. Gesztesy and B. Simon. m -functions and inverse spectral analysis for finite and semi-infinite Jacobi matrices. *J. Anal. Math.*, 73:267–297, 1997.
- [13] G. M. L. Gladwell. *Inverse problems in vibration*, volume 119 of *Solid Mechanics and its Applications*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, second edition, 2004.
- [14] L. Golinskii and M. Kudryavtsev. Inverse spectral problems for a class of five-diagonal unitary matrices. *Dokl. Akad. Nauk*, 423(1):11–13, 2008.
- [15] L. Golinskii and M. Kudryavtsev. Rational interpolation and mixed inverse spectral problem for finite CMV matrices. *J. Approx. Theory*, 159(1):61–84, 2009.
- [16] L. Golinskii and M. Kudryavtsev. An inverse spectral theory for finite CMV matrices. *Inverse Probl. Imaging*, 4(1):93–110, 2010.
- [17] L. J. Gray and D. G. Wilson. Construction of a Jacobi matrix from spectral data. *Linear Algebra and Appl.*, 14(2):131–134, 1976.
- [18] G. Š. Guseĭnov. The determination of the infinite Jacobi matrix from two spectra. *Mat. Zametki*, 23(5):709–720, 1978.
- [19] R. Z. Halilova. An inverse problem. *Izv. Akad. Nauk Azerbaĭdžan. SSR Ser. Fiz.-Tehn. Mat. Nauk*, 1967(3-4):169–175, 1967.

- [20] H. Hochstadt. On some inverse problems in matrix theory. *Arch. Math. (Basel)*, 18:201–207, 1967.
- [21] H. Hochstadt. On the construction of a Jacobi matrix from spectral data. *Linear Algebra and Appl.*, 8:435–446, 1974.
- [22] H. Hochstadt. On the construction of a Jacobi matrix from mixed given data. *Linear Algebra Appl.*, 28:113–115, 1979.
- [23] V. A. Ilyin and È. G. Poznyak. *Linear algebra*. “Mir”, Moscow, 1986. Translated from the Russian by Irene Aleksanova.
- [24] M. Kudryavtsev. The direct and the inverse problem of spectral analysis for five-diagonal symmetric matrices. I. *Mat. Fiz. Anal. Geom.*, 5(3-4):182–202, 1998.
- [25] M. Kudryavtsev. The direct and the inverse problem of spectral analysis for five-diagonal symmetric matrices. II. *Mat. Fiz. Anal. Geom.*, 6(1-2):55–80, 1999.
- [26] M. Kudryavtsev, S. Palafox, and L. O. Silva. On a linear interpolation problem for n -dimensional vector polynomials. *J. Approx. Theory*, 199:45–62, 2015.
- [27] V. A. Marchenko. *Introduction to the theory of inverse problems of spectral analysis*. Universitetski Lekcii. Akta, Kharkov, 2005. In Russian.
- [28] M. P. Mattis and H. Hochstadt. On the construction of band matrices from spectral data. *Linear Algebra Appl.*, 38:109–119, 1981.
- [29] P. Nylén and F. Uhlig. Inverse eigenvalue problem: existence of special spring-mass systems. *Inverse Problems*, 13(4):1071–1081, 1997.
- [30] P. Nylén and F. Uhlig. Inverse eigenvalue problems associated with spring-mass systems. In *Proceedings of the Fifth Conference of the International Linear Algebra Society (Atlanta, GA, 1995)*, volume 254, pages 409–425, 1997.
- [31] Y. M. Ram. Inverse eigenvalue problem for a modified vibrating system. *SIAM J. Appl. Math.*, 53(6):1762–1775, 1993.
- [32] L. O. Silva and R. Weder. On the two spectra inverse problem for semi-infinite Jacobi matrices. *Math. Phys. Anal. Geom.*, 9(3):263–290 (2007), 2006.

-
- [33] L. O. Silva and R. Weder. The two-spectra inverse problem for semi-infinite Jacobi matrices in the limit-circle case. *Math. Phys. Anal. Geom.*, 11(2):131–154, 2008.
- [34] B. Simon. The classical moment problem as a self-adjoint finite difference operator. *Adv. Math.*, 137(1):82–203, 1998.
- [35] S. M. Zagorodnyuk. Direct and inverse spectral problems for $(2N + 1)$ -diagonal, complex, symmetric, non-Hermitian matrices. *Serdica Math. J.*, 30(4):471–482, 2004.
- [36] S. M. Zagorodnyuk. The direct and inverse spectral problems for $(2N + 1)$ -diagonal complex transposition-antisymmetric matrices. *Methods Funct. Anal. Topology*, 14(2):124–131, 2008.

Inverse spectral analysis for a class of infinite band symmetric matrices *

Mikhail Kudryavtsev

Department of Mathematics
Institute for Low Temperature Physics and Engineering
Lenin Av. 47, 61103
Kharkov, Ukraine
kudryavtsev@onet.com.ua

Sergio Palafox

Departamento de Física Matemática
Instituto de Investigaciones en Matemáticas Aplicadas y en Sistemas
Universidad Nacional Autónoma de México
C.P. 04510, México D.F.
sergiopalafod@gmail.com

Luis O. Silva

Departamento de Física Matemática
Instituto de Investigaciones en Matemáticas Aplicadas y en Sistemas
Universidad Nacional Autónoma de México
C.P. 04510, México D.F.
silva@iimas.unam.mx

Abstract

This note deals with the direct and inverse spectral analysis for a class of infinite band symmetric matrices. This class corresponds to operators arising from difference equations with usual and *inner* boundary conditions. We give a characterization of the spectral functions for the operators and provide necessary and sufficient conditions for a matrix-valued function to be a spectral function of the operators. Additionally, we give an algorithm for recovering the matrix from the spectral function. The approach to the inverse problem is based on the rational interpolation theory.

Mathematics Subject Classification(2010): 34K29, 47A75, 47B36, 70F17,

Keywords: Inverse spectral problem; Band symmetric matrices; Spectral measure.

*Research partially supported by UNAM-DGAPA-PAPIIT IN105414

1. Introduction

In this note, the direct and inverse spectral analysis of a class of infinite symmetric band matrices, denoted $\mathcal{M}(n, \infty)$, is carried out with emphasis in the inverse problems of characterization and reconstruction. The matrices under consideration, defined in the paragraphs below, arise from difference equations with initial and left endpoint boundary conditions together with the so called *inner* boundary conditions. Inner boundary conditions are given by degenerations of the diagonals (see below in Definition 1 and above of (2.4)). Each matrix in $\mathcal{M}(n, \infty)$ generates uniquely a closed symmetric operator for which we give a spectral characterization. More specifically, we provide necessary and sufficient conditions for a matrix-valued function to be a spectral function of the operators stemming from our class of matrices (see Definition 4 and Theorems 5.1 and 5.2). As a byproduct of the spectral analysis of the operators corresponding to matrices in $\mathcal{M}(n, \infty)$ we find an if-and-only-if criterion for degeneration in terms of the properties of polynomials in a L_2 space (see Theorem 3.1).

Although the inverse spectral problems for Jacobi matrices have been studied extensively (see for instance [7–9, 14, 19, 22–24, 34–36] for the finite case and [10, 11, 13, 14, 20, 21, 37, 38] for the infinite case), works dealing with band matrices non-necessary tridiagonal are not so abundant (see [5, 17, 18, 27–29, 32, 40, 41] for the finite case and [3, 16] for the infinite case).

Let \mathcal{H} be an infinite dimensional separable Hilbert space and fix an orthonormal basis $\{\delta_k\}_{k=1}^\infty$ in it. We study the symmetric operator A whose matrix representation with respect to $\{\delta_k\}_{k=1}^\infty$ is a symmetric band matrix which is denoted by \mathcal{A} (see [2, Sec. 47] for the definition of the matrix representation of an unbounded symmetric operator).

We assume that the matrix \mathcal{A} has $2n + 1$ band diagonals, that is, $2n + 1$ diagonals not necessarily zero. The band diagonals satisfy the following conditions. The band diagonal farthest from the main one, which is given by the diagonal matrix $\text{diag}\{d_k^{(n)}\}_{k=1}^\infty$, denoted by \mathcal{D}_n , is such that, for some $m_1 \in \mathbb{N}$, all the numbers $d_1^{(n)}, \dots, d_{m_1-1}^{(n)}$ are positive and $d_k^{(n)} = 0$ for all $k \geq m_1$ with

$$m_1 > 1. \tag{1.1}$$

It may happen that all the elements of the sequence $\{d_k^{(n)}\}_{k \in \mathbb{N}}$ are positive which we convene to mean that $m_1 = \infty$.

Now, if $m_1 < \infty$, then the elements $\{d_{m_1+k}^{(n-1)}\}_{k=1}^\infty$ of the diagonal next to the farthest, \mathcal{D}_{n-1} , behave in the same way as the elements of \mathcal{D}_n , that is, there is m_2 , satisfying

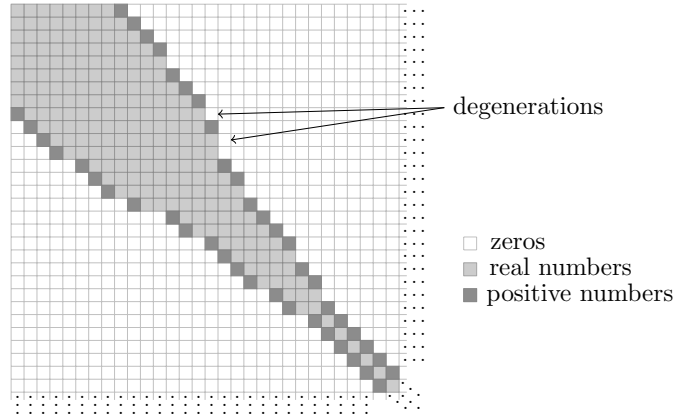
$$m_1 < m_2, \tag{1.2}$$

such that $d_{m_1+1}^{(n-1)}, \dots, d_{m_2-1}^{(n-1)} > 0$ and $d_k^{(n-1)} = 0$ for all $k \geq m_2$. Here, it is also possible that $m_2 = \infty$ in which case $d_k^{(n-1)} > 0$ for all $k > m_1$.

We continue applying the same rule as long as m_1, \dots, m_j are finite. Thus, if $m_j < \infty$, there is m_{j+1} , satisfying

$$m_j < m_{j+1}, \quad (1.3)$$

such that $d_{m_j+1}^{(n-j)}, \dots, d_{m_{j+1}-1}^{(n-j)} > 0$ (here we assume that $m_j + 1 < m_{j+1}$) and $d_k^{(n-j)} = 0$ for all $k \geq m_{j+1}$. If $m_j = \infty$, then $d_k^{(n-j)} > 0$ for all $k > m_j$. Eventually, there is $j_0 \leq n - 1$ such that $m_{j_0+1} = \infty$.



Definition 1. For a natural number n , the set of matrices satisfying the above properties with a given set of numbers $\{m_j\}_{j=1}^{j_0}$ is denoted by $\mathcal{M}(n, \infty)$.

As long as $j \leq j_0 - 1$, we say that the diagonal corresponding to \mathcal{D}_{n-j} undergoes degeneration at m_{j+1} . Note that the diagonal corresponding to \mathcal{D}_{n-j_0} do not degenerate. Also, j_0 defines the number of degenerations that the matrix \mathcal{A} has.

Remark 1. Define the number $n_0 := n - j_0$. Note that the “tail” of the matrix, that is, the semi-infinite submatrix obtained by removing the first $n_0 + m_{j_0} - 1$ columns and rows, has $2n_0 + 1$ diagonals and the diagonal \mathcal{D}_{n_0} has only positive numbers.

An example of a matrix in $\mathcal{M}(3, \infty)$, when $m_1 = 3$ and $m_2 = 5$, is the

following.

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} d_1^{(0)} & d_1^{(1)} & d_1^{(2)} & d_1^{(3)} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ d_1^{(1)} & d_2^{(0)} & d_2^{(1)} & d_2^{(2)} & d_2^{(3)} & 0 & 0 & \\ d_1^{(2)} & d_2^{(1)} & d_3^{(0)} & d_3^{(1)} & d_3^{(2)} & 0 & 0 & \ddots \\ d_1^{(3)} & d_2^{(2)} & d_3^{(1)} & d_4^{(0)} & d_4^{(1)} & d_4^{(2)} & 0 & \ddots \\ 0 & d_2^{(3)} & d_3^{(2)} & d_4^{(1)} & d_5^{(0)} & d_5^{(1)} & 0 & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & d_4^{(2)} & d_5^{(1)} & d_6^{(0)} & d_6^{(1)} & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_6^{(1)} & d_7^{(0)} & \ddots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}. \quad (1.4)$$

Here we say that the matrix \mathcal{A} underwent a degeneration of the diagonal \mathcal{D}_3 in $m_1 = 3$ and a degeneration of \mathcal{D}_2 in $m_2 = 5$. And, note that $j_0 = 2$.

It is known that the dynamics of an infinite linear mass-spring system (see Fig. 1) is characterized by the spectral properties of a semi-infinite Jacobi matrix [10, 11] when the system is within the regime of validity of the Hooke law (see [15, 31] for an explanation of how to obtain the matrix from the mass-spring system in the finite case). The entries of the Jacobi matrix are determined by the masses and spring constants of the system [9–11, 15, 31]. The movement of the mechanical system of Fig. 1 is a superposition of harmonic oscillations whose frequencies are the square roots of absolute values of the Jacobi operator’s eigenvalues. Analogously, one can deduce that a self-adjoint extension of the

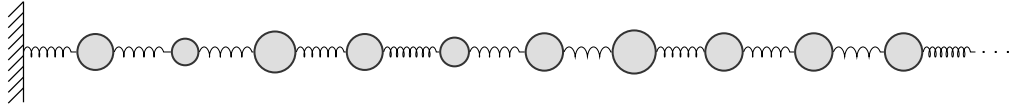


Figure 1: Mass-spring system corresponding to a Jacobi matrix

minimal closed operator generated by a matrix in $\mathcal{M}(n, \infty)$ models a linear mass-spring system where the interaction extends to all the n neighbors of each mass (cf. [29, Appendix]). For instance, if the matrix is in $\mathcal{M}(2, \infty)$ and no degeneration of the diagonals occurs, viz. $m_1 = \infty$, the corresponding mass-spring system is given in Fig. 2. If for another matrix in $\mathcal{M}(2, \infty)$, one has degeneration of the diagonals, for instance $m_1 = 4$, the corresponding mass-spring system is given in Fig. 3.

In this work, the approach to the inverse spectral analysis of the operators whose matrix representation belongs to $\mathcal{M}(n, \infty)$ is based on the one used in [27–29] which deal with the finite dimensional case. As in those papers, an important ingredient of the inverse spectral analysis is the linear interpolation of n -dimensional vector polynomials, recently developed in [30].

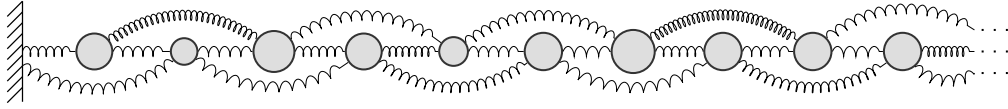


Figure 2: Mass-spring system of a matrix in $\mathcal{M}(2, \infty)$: nondegenerated case

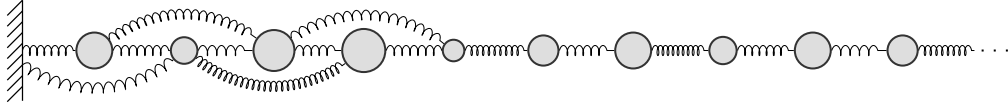


Figure 3: Mass-spring system of a matrix in $\mathcal{M}(2, \infty)$: degenerated case

This paper is organized as follows. In Section 2, we present the results obtained in [29] on the spectral measures of the operators corresponding to finite dimensional matrices being an upper-left corner of a matrix in $\mathcal{M}(n, \infty)$. These finite dimensional operators play an auxiliary role in the spectral analysis of operator A . Later, in Section 3, we construct a matrix valued function for each element of $\mathcal{M}(n, \infty)$ having the properties of a spectral function. Section 4 deals with various criteria for the operator A to be self-adjoint and gives the spectral function of A touching upon some of their properties. Finally, in Section 5, we deal with the problem of reconstruction and characterization.

2. Spectral analysis of submatrices

Fix $N > n$. The spectral analysis of the operator A is carried out by means of the auxiliary operator $P_{\mathcal{H}_N} A \upharpoonright_{\mathcal{H}_N}$, where $\mathcal{H}_N = \text{span}\{\delta_i\}_{i=1}^N$ and $P_{\mathcal{H}_N}$ is the orthogonal projection onto the subspace \mathcal{H}_N . Note that $P_{\mathcal{H}_N} A \upharpoonright_{\mathcal{H}_N}$ can be identified with the operator whose matrix representation is the finite dimensional submatrix corresponding to the $N \times N$ upper-left corner of a matrix in $\mathcal{M}(n, \infty)$ (cf. (1.4)). We denote the class of these $N \times N$ matrices by $\mathcal{M}(n, N)$ and the corresponding operator in \mathcal{H}_N is denoted by \tilde{A}_N .

According to [29, Sec. 2], the spectral analysis of the operator \tilde{A}_N can be carried out by studying a system of N equations, where each equation, given by a fixed $k \in \{1, \dots, N\}$, is of the form (cf. [29, Eq. 2.2])

$$\sum_{i=0}^{n-1} d_{k-n+i}^{(n-i)} \varphi_{k-n+i} + d_k^{(0)} \varphi_k + \sum_{i=1}^n d_k^{(i)} \varphi_{k+i} = z \varphi_k, \quad (2.1)$$

where it has been assumed that

$$\varphi_k = 0, \quad \text{for } k < 1, \quad (2.2a)$$

$$\varphi_k = 0, \quad \text{for } k > N. \quad (2.2b)$$

One can consider (2.2) as boundary conditions where (2.2a) is the condition at the left endpoint and (2.2b) is the condition at the right endpoint.

The system (2.1) with (2.2), restricted to $k \in \{1, 2, \dots, N\} \setminus \{m_i\}_{i=1}^{j_0}$, can be solved recursively whenever the first n entries of the vector φ are given. Let $\varphi^{(j)}(z)$ ($j \in \{1, \dots, n\}$) be a solution of (2.1) for all $k \in \{1, 2, \dots, N\} \setminus \{m_i\}_{i=1}^n$ such that

$$\langle \delta_i, \varphi^{(j)}(z) \rangle = t_{ji}, \quad \text{for } i = 1, \dots, n, \quad (2.3)$$

where $\mathcal{T} = \{t_{ji}\}_{j,i=1}^n$ satisfies

I) \mathcal{T} is $n \times n$ upper triangular with real entries.

II) $\prod_{i=1}^n t_{ii} \neq 0$.

The condition given by (2.3) can be seen as the initial conditions for the system (2.1) and (2.2a). We emphasize that given the boundary condition at the left endpoint (2.2a) and the initial condition (2.3), the system restricted to $k \in \{1, 2, \dots, N\} \setminus \{m_i\}_{i=1}^n$ has a unique solution for any fixed $j \in \{1, \dots, n\}$ and $z \in \mathbb{C}$. The degenerations which the diagonals of matrices in $\mathcal{M}(n, N)$ undergo are related to other kind of ‘‘boundary conditions’’. Indeed, the equations of the system (2.1), when $k \in \{m_j\}_{j=1}^{j_0}$, give rise to the inner boundary conditions (of the right endpoint type) (cf. [29, Eq. 2.8]).

The normalized eigenvectors of the operator \tilde{A}_N can be decomposed as follows

$$\alpha(x_l) = \sum_{j=1}^n \alpha_j(x_l) \varphi^{(j)}(x_l), \quad (2.4)$$

where $\{x_l\}_{l=1}^N =: \text{spec } \tilde{A}_N$ and $\alpha_j(x_l) \in \mathbb{C}$. It follows from (2.1), (2.2), and (2.3), that

$$\sum_{j=1}^n |\alpha_j(x_k)| > 0 \quad \text{for all } k \in \{1, \dots, N\}$$

and

$$\sum_{k=1}^N |\alpha_j(x_k)| > 0 \quad \text{for all } j \in \{1, \dots, n\}.$$

The operator \tilde{A}_N has a matrix-valued spectral function

$$\sigma_N^{\mathcal{J}}(t) = \sum_{x_l < t} \begin{pmatrix} \frac{|\alpha_1(x_l)|^2}{\alpha_2(x_l)\alpha_1(x_l)} & \overline{\alpha_1(x_l)}\alpha_2(x_l) & \dots & \overline{\alpha_1(x_l)}\alpha_n(x_l) \\ \frac{|\alpha_2(x_l)|^2}{\alpha_n(x_l)\alpha_1(x_l)} & |\alpha_2(x_l)|^2 & \dots & \overline{\alpha_2(x_l)}\alpha_n(x_l) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{|\alpha_n(x_l)|^2}{\alpha_1(x_l)\alpha_2(x_l)} & \overline{\alpha_n(x_l)}\alpha_2(x_l) & \dots & |\alpha_n(x_l)|^2 \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

with the following properties:

- a) It is a nondecreasing monotone step function which is continuous from the left.
- b) Each jump is a matrix of rank not greater than n .
- c) The sum of the ranks of all jumps equals N .

Note that the matrices in the sum on the r.h.s. of (2.5) are the tensor product of the vector $\begin{pmatrix} \alpha_1(x_l) \\ \vdots \\ \alpha_n(x_l) \end{pmatrix}$ with the complex conjugate of itself.

The relationship between the spectral functions $\sigma_N^{\mathcal{J}}$ for an arbitrary \mathcal{J} and the case $\mathcal{J} = I$ is given by the following equation which is proven in [29, Pro. 2.1].

$$\mathcal{J}^* \int_{\mathbb{R}} d\sigma_N^{\mathcal{J}} \mathcal{J} = \int_{\mathbb{R}} d\sigma_N^I = I. \quad (2.6)$$

Consider the Hilbert space $L_2(\mathbb{R}, \sigma_N^{\mathcal{J}})$ with the usual inner product which we assume to be antilinear in the first argument. Clearly, the property c) implies that $L_2(\mathbb{R}, \sigma_N^{\mathcal{J}})$ is an N -dimensional space and in each equivalence class there is an n -dimensional vector polynomial.

Define the vectors

$$\mathbf{p}_k := \mathcal{J} \mathbf{e}_k \quad \text{for } k = 1, \dots, n, \quad (2.7)$$

where $\{\mathbf{e}_k\}_{k=1}^n$ is the canonical basis in \mathbb{C}^n , i.e.,

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \mathbf{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (2.8)$$

Taking $\{\mathbf{p}_k\}_{k=1}^n$ as initial conditions of the recurrence equation

$$\sum_{i=0}^{n-1} d_{k-n+i}^{(n-i)} \mathbf{p}_{k-n+i}(z) + d_k^{(0)} \mathbf{p}_k(z) + \sum_{i=1}^n d_k^{(i)} \mathbf{p}_{k+i}(z) = z \mathbf{p}_k(z), \quad k \in \mathbb{N} \setminus \{m_j\}_{j=1}^{j_0}, \quad (2.9)$$

where it is assumed that

$$\mathbf{p}_k = 0, \quad \text{for } k < 1, \quad (2.10)$$

one obtains a sequence $\{\mathbf{p}_k(z)\}_{k=1}^\infty$ of vector polynomials. The next assertion is proven in [29, Lem. 2.2].

Proposition 2.1. *For any natural number $N > n$, the vector polynomials $\{\mathbf{p}_k(z)\}_{k=1}^N$, defined by (2.9), satisfy*

$$\langle \mathbf{p}_j, \mathbf{p}_k \rangle_{L_2(\mathbb{R}, \sigma_N^T)} = \delta_{jk}$$

for $j, k \in \{1, \dots, N\}$.

Let $U : \mathcal{H}_N \rightarrow L_2(\mathbb{R}, \sigma_N^T)$ be the isometry given by $U\delta_k \mapsto \mathbf{p}_k$, for all $k \in \{1, \dots, N\}$. Under this isometry the operator \tilde{A}_N becomes the operator of multiplication by the independent variable in $L_2(\mathbb{R}, \sigma_N^T)$ (see [29, Sec. 2]).

Define

$$\mathbf{q}_j(z) := (z - d_{m_j}^{(0)})\mathbf{p}_{m_j}(z) - \sum_{k=0}^{n-1} d_{m_j-n+k}^{(n-k)}\mathbf{p}_{m_j-n+k}(z) - \sum_{k=1}^{n-j} d_{m_j}^{(k)}\mathbf{p}_{m_j+k}(z) \quad (2.11)$$

for $j \in \{1, \dots, j_0\}$.

Using the same reasoning as in [29, Thm. 3.1], one proves that, for any natural number $N \geq n_0 + m_{j_0}$ (see Remark 1), the vector polynomials $\{\mathbf{q}_j(z)\}_{k=1}^{j_0}$ satisfy

$$\langle \mathbf{q}_j, \mathbf{q}_j \rangle_{L_2(\mathbb{R}, \sigma_N^T)} = 0. \quad (2.12)$$

The existence of polynomials of zero norm in $L_2(\mathbb{R}, \sigma_N^T)$ is related to a linear interpolation problem consisting in the following: Given collections of numbers $\{z_k\}_{k=1}^N$ and $\{\alpha_j(k)\}_{j=1}^n$ ($k = 1, \dots, N$), find the scalar polynomials $R_j(z)$ ($j=1, \dots, n$) wick satisfy the equation

$$\sum_{j=1}^n \alpha_j(k) R_j(z_k) = 0, \quad \forall k \in \{1, \dots, N\}.$$

This is equivalent (see [29]) to finding n -dimensional vector polynomials satisfying

$$\langle \mathbf{r}(z), \mathbf{r}(z) \rangle_{L_2(\mathbb{R}, \sigma_N^T)} = 0, \quad \mathbf{r}(z) = (R_1(z), R_2(z), \dots, R_n(z))^t. \quad (2.13)$$

In [30] it was found that the solutions of the linear interpolation problem given by (2.13) are determined by a set of n vector polynomials called generators [30, Thm. 5.3].

An important concept in the context of solving (2.13) is the following.

Definition 2. Let $\mathbf{r}(z) = (R_1(z), R_2(z), \dots, R_n(z))^t$ be an n -dimensional vector polynomial. The height of $\mathbf{r}(z)$ is the number

$$h(\mathbf{r}) := \max_{j \in \{1, \dots, n\}} \{n \deg(R_j) + j - 1\},$$

where it is assumed that $\deg 0 := -\infty$ and $h(\mathbf{0}) := -\infty$.

Note that we have defined the vector polynomials $\{\mathbf{e}_k\}_{k=1}^n$ so that

$$h(\mathbf{e}_k) = k - 1. \quad (2.14)$$

Having the concepts of height of a vector polynomial and generator of the interpolation problem (2.13) at hand, we invoke results from [29] and [30]. First we convene:

Convention 1. From now on, we consider the natural number N to be no less than $n_0 + m_{j_0}$.

Proposition 2.2. (*[29, Thm. 3.1]*) *The vector polynomials $\{\mathbf{q}_j(z)\}_{j=1}^{j_0}$ are the first j_0 generators of the linear interpolation problem given by (2.13) (see [29, Sec. 3]). Moreover, for $j = 1, \dots, j_0$, $h(\mathbf{q}_j)$ are different elements of the factor space $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ [30, Lem. 4.3].*

The heights of the vector polynomials $\{\mathbf{p}_k\}_{k=n+1}^\infty$ are determined recursively by means of the system (2.9). Indeed, for any $m_j < k < m_{j+1}$, with $j = 0, \dots, j_0$, one has the equation

$$\dots + d_k^{(0)} \mathbf{p}_k + d_k^{(1)} \mathbf{p}_{k+1} + \dots + d_k^{(n-j)} \mathbf{p}_{k+n-j} = z \mathbf{p}_k,$$

where we have assumed that $m_0 = 0$. Since $d_k^{(n-j)}$ never vanishes, the height of \mathbf{p}_{k+n-j} coincides with the one of $z \mathbf{p}_k$. Thus

$$h(\mathbf{p}_{k+n-j}) = n + h(\mathbf{p}_k). \quad (2.15)$$

If there are no degenerations of the diagonals, then (2.15) implies that

$$h(\mathbf{p}_k) = k - 1, \quad \text{for all } k \in \mathbb{N}. \quad (2.16)$$

On the other hand, in the presence of degenerations, one verifies from (2.11) and (2.15) that, no matter which $k \in \mathbb{N}$ one chooses,

$$h(\mathbf{p}_k) \neq h(\mathbf{p}_{m_j}) + n = h(\mathbf{q}_j), \quad (2.17)$$

for any $j = 1, \dots, j_0$.

Lemma 2.1. *For any nonnegative integer s , there exist $k \in \mathbb{N}$ or a pair $j \in \{1, \dots, j_0\}$ and $l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ such that either $s = h(\mathbf{p}_k)$ or $s = h(\mathbf{q}_j) + nl$.*

Proof. This proof repeats the one of [29, Lem. 3.3]. We have reproduced it here for the reader's convenience. Due to (2.15), it follows from (2.7) and (2.14) that

$$h(\mathbf{p}_k) = k - 1 \quad \text{for } k = 1, \dots, h(\mathbf{q}_1) \quad (2.18)$$

(cf. (2.16)).

Suppose that there is $s \in \mathbb{N}$ ($s > n$) such that $s \neq h(\mathbf{p}_k)$ for all $k \in \mathbb{N}$ and $s \neq h(\mathbf{q}_j) + nl$ for all $j \in \{1, \dots, j_0\}$ and $l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Let \hat{l} be an integer such that $s - n\hat{l} \in \{h(\mathbf{p}_k)\}_{k=1}^\infty \cup \{h(\mathbf{q}_j) + nl\}$ ($j \in \{1, \dots, j_0\}$ and $l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$). There is always such an integer due to (2.18) and $h(\mathbf{q}_1) > n$ (see (2.17)). We take \hat{l}_0 to be the minimum of all \hat{l} 's. Thus, there is $k' \in \mathbb{N}$ or $j' \in \{1, \dots, j_0\}$, respectively, such that either

- a) $s - n\hat{l}_0 = h(\mathbf{p}_{k'})$ or
- b) $s - n\hat{l}_0 = h(\mathbf{q}_{j'}) + nl$, with $l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

In the case a), we prove that \hat{l}_0 is not the minimum integer, this implies the assertion of the lemma. Indeed, if there is $j \in \{1, \dots, j_0\}$ such that $k' = m_j$, then $s - n\hat{l}_0 + n = h(\mathbf{p}_{m_j}) + n = h(\mathbf{q}_j)$ due to (2.17). If there is not such j , then $m_j < k' < m_{j+1}$ and (2.15) implies $s - n\hat{l}_0 + n = h(\mathbf{p}_{k'}) + n = h(\mathbf{p}_{k'+n-j})$.

For the case b), if $s - n\hat{l}_0 = h(\mathbf{q}_{j'}) + nl$, then $s = h(\mathbf{q}_{j'}) + n(l + \hat{l}_0)$ which is a contradiction. \square

As a consequence of [30, Thm. 2.1], the above lemma yields the following result.

Corollary 2.1. *Any vector polynomial $\mathbf{r}(z)$ is a finite linear combination of*

$$\{\mathbf{p}_k(z) : k \in \mathbb{N}\} \cup \{z^l \mathbf{q}_j(z) : l \in \mathbb{N}, j \in \{1, \dots, j_0\}\}. \quad (2.19)$$

To conclude this section, we use the canonical basis of \mathbb{C}^n (see (2.8)) to define the family of vector polynomials for $k \in \mathbb{N}$ and $i = 1, \dots, n$.

$$\mathbf{e}_{nk+i}(z) := z^k \mathbf{e}_i. \quad (2.20)$$

Observe that

$$\langle \mathbf{e}_{nk+i}(t), \mathbf{e}_{nl+j}(t) \rangle_{L_2(\mathbb{R}, \sigma_N^{\mathcal{T}})} = \int_{\mathbb{R}} t^{k+l} d\sigma_N^{\mathcal{T}}(i, j). \quad (2.21)$$

On the basis of Corollary 2.1, one verifies that the matrix moments

$$S_k(\mathcal{T}) := \int_{\mathbb{R}} t^k d\sigma_N^{\mathcal{T}} \quad \text{for } k = 0, 1, \dots, \left\lfloor \frac{2h(\mathbf{p}_N)}{n} \right\rfloor \quad (2.22)$$

coincide for any $\tilde{N} \geq N$, where $\lceil \cdot \rceil$ is the ceiling function.

Remark 2. Note that, for any natural number k , there exists $N \in \mathbb{N}$ such that $S_{2k}(\mathcal{T})$, given by (2.22), is a positive definite matrix.

3. Spectral analysis of infinite symmetric band matrices

In this section, we construct a matrix valued function for each element of $\mathcal{M}(n, \infty)$ having the properties of a spectral function. To this end, we give defining criteria for a measure to be a spectral function of a *matrix* in the class $\mathcal{M}(n, \infty)$. By our definition, any spectral function σ of \mathcal{A} in $\mathcal{M}(n, \infty)$ is the spectral function of some self-adjoint extension of the minimal closed operator generated by \mathcal{A} (see [2, Sec. 47]) so that this self-adjoint operator is transformed by a unitary isometric map, which can be regarded as a Fourier transform, into the operator of multiplication by the independent variable defined on its maximal domain in some space $L_2(\mathbb{R}, \sigma)$. It is worth remarking that not all the spectral functions of a matrix in $\mathcal{M}(n, \infty)$ correspond to a self-adjoint extension A_0 of the minimal closed operator generated by A such that $A_0 \subset A^*$ (see Remark 3).

The results of this section and the next one provides a complete description of all possible spectral functions that can be associated with some element of $\mathcal{M}(n, \infty)$ by our criteria.

Definition 3. A nondecreasing $n \times n$ matrix-valued function σ with finite moments, such that $\int_{\mathbb{R}} d\sigma$ is invertible, is called a spectral function of a matrix \mathcal{A} in $\mathcal{M}(n, \infty)$ if and only if there exist \mathcal{T} satisfying I) and II) such that $\{\mathbf{p}_k\}_{k=1}^{\infty}$ is an orthonormal sequence in $L_2(\mathbb{R}, \sigma)$ and, for each $j \in \{1, \dots, j_0\}$, \mathbf{q}_j is in the equivalence class of zero in $L_2(\mathbb{R}, \sigma)$.

Note that all the vector polynomials are in $L_2(\mathbb{R}, \sigma)$ when σ is a spectral function of a matrix in $\mathcal{M}(n, \infty)$. Moreover the polynomials are dense in $L_2(\mathbb{R}, \sigma)$ when the orthonormal system $\{\mathbf{p}_k\}_{k=1}^{\infty}$ turns out to be complete.

On the basis of the definition above, one can construct an isometric map between the original space \mathcal{H} and the subspace being the closure of the polynomials in $L_2(\mathbb{R}, \sigma)$. This isometric map, which will be denoted by U , is realized by associating the orthonormal basis $\{\delta_k\}_{k=1}^{\infty}$ with the orthonormal system $\{\mathbf{p}_k\}_{k=1}^{\infty}$, i. e., $U\delta_k = \mathbf{p}_k$ for all $k \in \mathbb{N}$. Furthermore, under this map, the operator A is transformed into some restriction of the operator of multiplication by the independent variable. Indeed, if $\varphi = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k \delta_k$ is an element of the domain of A , then $f = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k \mathbf{p}_k$ is in the domain of the operator of multiplication by the independent variable and

$$UAU^{-1}f(t) = tf(t).$$

Lemma 3.1. *Let \mathcal{A} be an element of $\mathcal{M}(n, \infty)$ and $\sigma_N^{\mathcal{T}}$ be the matrix valued spectral function of the corresponding operator A_N for a fixed matrix \mathcal{T} satisfying I) and II). Then, there exist a subsequence $\{\sigma_{N_i}^{\mathcal{T}}\}_{i=1}^{\infty}$ converging pointwise to a matrix valued function $\sigma^{\mathcal{T}}$ in the norm of the $n \times n$ -matrices.*

Proof. In view of (2.6), the hypothesis of Helly's first theorem for bounded operators [6, Thm. 4.3] is satisfied in any bounded interval (cf. [33, Sec. 8.4] for the scalar case), therefore the statement follows. The generalization of Helly's first theorem given in [6, Thm. 4.3] is based on applying the scalar theorem to the bilinear form of the sequence of operators (for fixed elements in the Hilbert space) in a diagonal process fashion using the boundedness of the operators and the separability of the space. This yields the assertion in the sense of weak convergence. Using the fact that uniform and weak convergence are equivalent in finite dimensional spaces, one obtains the assertion. \square

The following proposition is obtained by applying [6, Thm. 4.4] to the result above and taking into account that the matrices $\sigma_N^{\mathcal{T}}$ are finite dimensional.

Proposition 3.1. *(Helly's generalized second theorem) Suppose that the function $f(t)$ is continuous in the real interval $[a, b]$, where a and b are points of continuity of $\sigma^{\mathcal{T}}(t)$ (see Lemma 3.1). Then there exist a subsequence $\{\sigma_{N_i}^{\mathcal{T}}\}_{i=1}^{\infty}$ such that*

$$\int_a^b f(t) d\sigma_{N_i}^{\mathcal{T}}(t) \xrightarrow{i \rightarrow \infty} \int_a^b f(t) d\sigma^{\mathcal{T}}(t),$$

where the convergence is in the norm of $n \times n$ -matrices.

With these results at hand we prove the following assertions.

Lemma 3.2. *There exist a subsequence $\{\sigma_{N_i}^{\mathcal{T}}\}_{i=1}^{\infty}$ such that*

$$\int_{\mathbb{R}} t^k d\sigma_{N_i}^{\mathcal{T}} = \int_{\mathbb{R}} t^k d\sigma^{\mathcal{T}}$$

for any nonnegative integer $k \leq \left\lceil \frac{2h(\mathbf{p}_{N_i})}{n} \right\rceil$ (see (2.22)).

Proof. If one assumes that $-a < 0$ and $b > 0$ are two points of continuity of $\sigma^{\mathcal{T}}(t)$, then, it follows from Proposition 3.1 that

$$\int_{-a}^b t^k d\sigma^{\mathcal{T}} = \lim_{i \rightarrow \infty} \int_{-a}^b t^k d\sigma_{N_i}^{\mathcal{T}}.$$

On the other hand, given a number r such that $r > k$, then for $r < \left\lceil \frac{2h(\mathbf{p}_{N_i})}{n} \right\rceil$

$$\begin{aligned} \left\| \int_{-\infty}^{\infty} - \int_b^{-a} t^k d\sigma_{N_i}^{\mathcal{J}} \right\| &= \left\| \int_{-\infty}^{-a} + \int_b^{\infty} t^k d\sigma_{N_i}^{\mathcal{J}} \right\| = \left\| \int_{-\infty}^{-a} + \int_b^{\infty} \frac{t^r}{t^{r-k}} d\sigma_{N_i}^{\mathcal{J}} \right\| \\ &\leq \frac{1}{c^{r-k}} \left\| \int_{-\infty}^{-a} + \int_b^{\infty} t^r d\sigma_{N_i}^{\mathcal{J}} \right\| \leq \frac{\|S_r(\mathcal{J})\|}{c^{r-k}}, \end{aligned}$$

where $c = \min\{a, b\}$ and $S_r(\mathcal{J}) = \int_{\mathbb{R}} t^r d\sigma_{N_i}^{\mathcal{J}}$ (the integral is convergent due to Proposition 2.1). Thus,

$$\left\| S_k(\mathcal{J}) - \int_{-a}^b t^k d\sigma^{\mathcal{J}} \right\| \leq \frac{\|S_r(\mathcal{J})\|}{c^{r-k}}.$$

This yields the assertion, when one makes a and b tend to ∞ in such a way that $-a$ and b are all the time points of continuity of $\sigma^{\mathcal{J}}(t)$. \square

From the previous lemma, one directly obtains the following result.

Corollary 3.1. *The spectral function $\sigma^{\mathcal{J}}$ to which a subsequence of $\{\sigma_N^{\mathcal{J}}\}_{N=2}^{\infty}$ converges according to Lemma 3.1 is a solution of a certain matrix moment problem given by $\{S_k(\mathcal{J})\}_{k=0}^{\infty}$ (see Lemma 3.2).*

Lemma 3.3. *Any $\mathcal{A} \in \mathcal{M}(n, \infty)$ has at least one spectral function (in the sense of Definition 3).*

Proof. It follows directly from Proposition 2.1 and Lemma 3.2 that the vector polynomials $\{\mathbf{p}_k(z)\}_{k=1}^{\infty}$, defined by (2.8) and (2.9), satisfy

$$\langle \mathbf{p}_j, \mathbf{p}_k \rangle_{L_2(\mathbb{R}, \sigma^{\mathcal{J}})} = \delta_{jk}$$

for $j, k \in \mathbb{N}$, where $\sigma^{\mathcal{J}}$ is the function given by Lemma 3.1. Now, fix $j \in \{1, \dots, j_0\}$ and consider $N > n_0 + m_{j_0}$ (see Remark 1). Thus,

$$0 = \|\mathbf{q}_j\|_{L_2(\mathbb{R}, \sigma_N^{\mathcal{J}})}^2 = \int_{\mathbb{R}} \langle \mathbf{q}_j, d\sigma_N^{\mathcal{J}} \mathbf{q}_j \rangle.$$

By Lemma 3.2 there is a subsequence $\{\sigma_{N_i}^{\mathcal{J}}\}_{i=1}^{\infty}$ such that, beginning from some $i \in \mathbb{N}$,

$$0 = \int_{\mathbb{R}} \langle \mathbf{q}_j, d\sigma_{N_i}^{\mathcal{J}} \mathbf{q}_j \rangle = \int_{\mathbb{R}} \langle \mathbf{q}_j, d\sigma^{\mathcal{J}} \mathbf{q}_j \rangle = \|\mathbf{q}_j\|_{L_2(\mathbb{R}, \sigma^{\mathcal{J}})}^2$$

\square

Corollary 3.2. *The spectral function $\sigma^{\mathcal{J}}$ given in Lemma 3.1 has an infinite number of growth points.*

Proof. If $\sigma^\mathcal{T}$ had finite number of growth points, then $L_2(\mathbb{R}, \sigma^\mathcal{T})$ would be a finite dimensional space and correspondingly the sequence of vector polynomials $\{\mathbf{p}_k\}_k$ would be finite. \square

Remark 3. Let \mathcal{A} be in $\mathcal{M}(n, \infty)$ and \mathcal{T} be such that σ is the spectral function of \mathcal{A} according to Definition 3. If the moment problem associated with σ turns out to be *determinate*, then there is just one solution and this solution corresponds to the spectral function of the operator A which turns out to be self-adjoint [12, Sec. 2]. If the moment problem is *indeterminate*, then there are various solutions of the moment problem and each solution $\hat{\sigma}$ is a spectral function of \mathcal{A} since the sequence of polynomials $\{\mathbf{p}_k\}_{k=1}^\infty$ is orthonormal in $L_2(\mathbb{R}, \hat{\sigma})$ for any solution $\hat{\sigma}$. In this case, $\hat{\sigma}$ not necessarily corresponds to the spectral function of canonical self-adjoint extensions of the operator A (by a canonical self-adjoint extension of the symmetric operator A we mean a self-adjoint restriction of A^*). Indeed, the solution $\hat{\sigma}$ is the spectral function of a canonical self-adjoint extension if and only if the polynomials are dense in $L_2(\mathbb{R}, \hat{\sigma})$. We expect that the spectral function $\sigma^\mathcal{T}$, to which a subsequence of $\{\sigma_N^\mathcal{T}\}_{N=2}^\infty$ converges according to Lemma 3.1, be such that the polynomials are dense in $L_2(\mathbb{R}, \sigma^\mathcal{T})$. This matter, together with other questions on characterization of the functions $\sigma^\mathcal{T}$ will be dealt with in a forthcoming paper.

Definition 4. The set of all $n \times n$ -matrix valued functions with an infinite number of growing points such that all the moments $\{S_k\}_{k=1}^\infty$ exists and S_0 is invertible is denoted by $\mathfrak{M}(n, \infty)$. Besides, $\mathfrak{M}_d(n, \infty)$ denotes the subset of $\mathfrak{M}(n, \infty)$ for which the sequence of matrix moments generates a determinate matrix moment problem.

Theorem 3.1. *Let \mathcal{A} be in $\mathcal{M}(n, \infty)$ and j_0 be the number of degenerations of \mathcal{A} (see the paragraph below Definition 1). For any spectral function σ of \mathcal{A} , it holds true that:*

- i) (Case nondegenerate) If $j_0 = 0$, i. e., the matrix \mathcal{A} does not undergo degeneration, then there are no vector polynomials in the equivalence class of the zero of the space $L_2(\mathbb{R}, \sigma)$, i. e.,*

$$\langle \mathbf{r}(z), \mathbf{r}(z) \rangle_{L_2(\mathbb{R}, \sigma)} = 0 \iff \mathbf{r} \equiv 0.$$

- ii) (Case degenerate) If $j_0 > 0$, then all the polynomials $\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_{j_0}$ are in the equivalence class of zero and any polynomial $\mathbf{r}(z)$ in this equivalence class can be written as*

$$\mathbf{r}(z) = \sum_{j=1}^{j_0} R_j(z) \mathbf{q}_j(z), \tag{3.1}$$

where $R_j(z)$ is a scalar polynomial.

Proof. First one proves (ii). Suppose that there is a nontrivial vector polynomial $\mathbf{r}(z)$ in the equivalence class of zero with height r . Therefore, by Corollary 2.1

$$\mathbf{r}(z) = \sum_{k=1}^l c_k \mathbf{p}_k(z) + \sum_{j=1}^{j_0} R_j(z) \mathbf{q}_j(z), \quad (3.2)$$

where $\max\{h(\mathbf{p}_l), \max_{j=1, \dots, j_0} \{h(R_j \mathbf{q}_j)\}\} = r$. Furthermore,

$$c_k = \langle \mathbf{r}(z), \mathbf{p}_k(z) \rangle_{L_2(\mathbb{R}, \sigma)} \quad \text{for all } k \in \{1, \dots, l\}. \quad (3.3)$$

And, since $\mathbf{r}(z)$ is in the zero class, the r.h.s. of the equality in (3.3) is always zero. Hence, (3.1) holds true.

To prove (i), one uses again (3.2) taking into account (2.16). Then, the assertion follows from (3.3). \square

Remark 4. The assertion ii) of Theorem 3.1 can be interpreted as follows. If the spectral function of \mathcal{A} has a countable set of growth points not accumulating anywhere, then the spectrum of the operator of multiplication consists only of eigenvalues which, due to the fact that σ is an $n \times n$ matrix, have multiplicity not greater than n . Let $\{x_l\}_{l=1}^{\infty}$ be the eigenvalues of the multiplication operator by the independent variable enumerated taking into account their multiplicity. Hence the vector polynomials $\{\mathbf{q}_j\}_{j=1}^{j_0}$ are generators of the interpolation problem

$$\langle \mathbf{r}(x_l), \sigma_l \mathbf{r}(x_l) \rangle_{\mathbb{C}^n} = 0, \quad l \in \mathbb{N}, \quad (3.4)$$

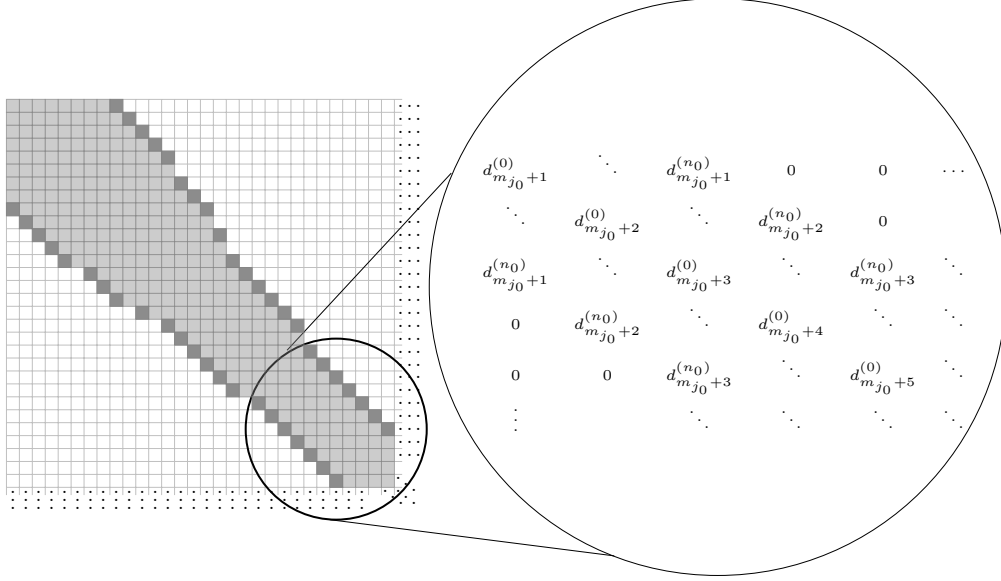
where σ_l is a matrix of the same form as r.h.s. of (2.5) and has the same properties. Note that (3.4) is a linear interpolation problem with an infinite set of nodes of interpolation.

4. Spectral functions in the self-adjoint case

The operator A is symmetric and, by definition, closed. In this section, we are interested in the case when $A = A^*$. So let us touch upon some criteria for self-adjointness of A .

Our first criterion is based on the fact that any semi-infinite band matrix can be considered as a block semi-infinite Jacobi matrix. Indeed, any semi-infinite band matrix with $2n + 1$ diagonals is equivalent to a semi-infinite Jacobi matrix where each entry is a $p \times p$ matrix with $p \geq n$. Since the operator A^* is the operator defined by the matrix \mathcal{A} in the maximal domain [2, Sec. 47], the fact that the operator A is self-adjoint depends exclusively on the asymptotic behavior of the diagonal elements of its matrix representation \mathcal{A} . For any matrix

in $\mathcal{M}(n, \infty)$, consider the semi-infintie submatrix after the last degeneration, which we called the “tail of the matrix” (see Remark 1). This “tail” can be seen as semi-infinite block Jacobi matrix.



Let us denote

$$\begin{pmatrix} Q_1 & B_1^* & 0 & 0 & \cdots \\ B_1 & Q_2 & B_2^* & 0 & \\ 0 & B_2 & Q_3 & B_3^* & \ddots \\ 0 & 0 & B_3 & Q_4 & \ddots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} d_{m_{j_0}+1}^{(0)} & \ddots & d_{m_{j_0}+1}^{(n_0)} & 0 & 0 & \cdots \\ \ddots & d_{m_{j_0}+2}^{(0)} & \ddots & d_{m_{j_0}+2}^{(n_0)} & 0 & \\ d_{m_{j_0}+1}^{(n_0)} & \ddots & d_{m_{j_0}+3}^{(0)} & \ddots & d_{m_{j_0}+3}^{(n_0)} & \ddots \\ 0 & d_{m_{j_0}+2}^{(n_0)} & \ddots & d_{m_{j_0}+4}^{(0)} & \ddots & \ddots \\ 0 & 0 & d_{m_{j_0}+3}^{(n_0)} & \ddots & d_{m_{j_0}+5}^{(0)} & \ddots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix},$$

where each entry is an $n_0 \times n_0$ matrix ($n_0 := n - j_0$). Clearly, the elements of the block diagonal adjacent to the main diagonal, i.e., the matrices $\{B_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ and $\{B_k^*\}_{k \in \mathbb{N}}$, are upper and, respectively, lower triangular matrices such that the main diagonal entries are positive numbers.

The following proposition is the analogue of the Carleman criterion [1, Chap. 1, Addenda and Problems] for block Jacobi matrices.

Proposition 4.1. (*[4, Ch. 7, Thm. 2.9]*) *If $\sum_{j=0}^{\infty} 1/\|B_j\|$ diverges, then A is self-adjoint.*

In [26, Cor. 2.5], the following necessary conditions for self-adjointness are given

Proposition 4.2. *Suppose that, starting from some k_0 , all the matrices Q_k are invertible. If*

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \|Q_k^{-1}\| = 0, \text{ and } \limsup_{k \rightarrow +\infty} \{\|Q_k^{-1}B_k\| + \|Q_k^{-1}B_k^*\|\} < 1,$$

then the operator A is self-adjoint.

Another criterion is given by perturbation theory. Indeed, consider the operators D_j ($j = 0, 1, \dots, n$), whose matrix representation with respect to $\{\delta_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ is a diagonal matrix, i. e., $D_j \delta_k = d_k^{(j)} \delta_k$ for all $k \in \mathbb{N}$, where $d_k^{(j)}$ is a real number (see [2, Sec. 47]). Note that \mathcal{D}_j , given in the Introduction, is the matrix representation of the operator D_j with respect to $\{\delta_k\}_{k \in \mathbb{N}}$. Define the shift operator S as follows

$$S\delta_k = \delta_{k+1}, \quad \text{for all } k \in \mathbb{N},$$

where by linearity, it is defined on $\text{span}\{\delta_k\}_{k=1}^{\infty}$ and then extended to \mathcal{H} by continuity. Consider the symmetric operator

$$A' := D_0 + \sum_{j=1}^n S^j D_j + \sum_{j=1}^n D_j (S^*)^j. \quad (4.1)$$

Now, if the operator $\sum_{j=1}^n S^j D_j + \sum_{j=1}^n D_j (S^*)^j$ is D_0 -bounded with D_0 -bound smaller than 1 (see [39, Sec. 5.1]), one can resort to the Rellich-Kato theorem [25, Thm. 4.3] to show that A' is self-adjoint. When this happens, it can be shown that $A = A'$.

Let us assume from this point to the end of this section that the operator A is self-adjoint. Our approach to constructing the spectral functions of A is based on techniques of perturbation theory related with strong resolvent convergence (see [39, Sec. 9.3]).

We begin by recalling the following definition

Definition 5. A subset D of the domain of a closeable operator B is called a core of B when $\overline{B \upharpoonright_D} = B$.

Also, we recur to the following known results (cf. [25, Chap. 8, Cor. 1.6 and Thm. 1.15]):

Proposition 4.3. [39, Thm. 9.16]. *Let $\{B_N\}_{N \in \mathbb{N}}$ and B be self-adjoint operators on \mathcal{H} . If there is a core D of B such that for every $\varphi \in D$ there is an $N_0 \in \mathbb{N}$ which satisfies $\varphi \in \text{dom } B_N$ for $N > N_0$ and $B_N \varphi \rightarrow B \varphi$, then the sequence $\{(B_N - zI)^{-1}\}_{N \in \mathbb{N}}$ converges strongly to $(B - zI)^{-1}$ (denoted $(B_N - zI)^{-1} \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{s} (B - zI)^{-1}$) for all $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.*

Proposition 4.4. [39, Thm. 9.19]. *Let $\{B_N\}_{N \in \mathbb{N}}$ and B be self-adjoint operators on \mathcal{H} , such that the sequence $\{(B_N - iI)^{-1}\}_{N \in \mathbb{N}}$ converges strongly to $(B - iI)^{-1}$. Then*

$$\begin{aligned} E_{B_N}(t) &\xrightarrow[N \rightarrow \infty]{s} E_B(t) \\ E_{B_N}(t+0) &\xrightarrow[N \rightarrow \infty]{s} E_B(t) \end{aligned}, \quad \text{for all } t \in \mathbb{R} \text{ such that } E_B(t) = E_B(t+0).$$

Here, as before, $E_{B_N}(t)$ and $E_B(t)$ are the spectral resolutions of the identity of B_N and B , respectively.

Recall the finite dimensional operator \tilde{A}_N studied in Section 2 and define

$$A_N := \tilde{A}_N \oplus \mathbb{O},$$

where \mathbb{O} is the zero-operator in the infinite dimensional space $\mathcal{H} \ominus \mathcal{H}_N$. For any $N > n$, the operator A_N is self-adjoint, so we take advantage of the spectral theorem. Let us introduce the following notation for the matrix valued spectral functions

$$\sigma_N(t) := \langle \delta_i, E_{A_N}(t) \delta_j \rangle \quad \text{for any } N > n \tag{4.2}$$

$$\sigma(t) := \langle \delta_i, E_A(t) \delta_j \rangle. \tag{4.3}$$

Lemma 4.1. *The matrix valued functions $\sigma_N(t)$ given in (4.2) converge to the matrix valued function $\sigma(t)$, defined by (4.3), at all points of continuity of $\sigma(t)$, i. e.,*

$$\sigma_N(t) \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{} \sigma(t), \quad t \text{ being a point of continuity of } \sigma(t). \tag{4.4}$$

Proof. Let $l_{\text{fin}}(\mathbb{N})$ be the linear space of sequences with a finite number of nonzero elements. This space is a core of the operator A . Given an element $\varphi = \sum_{k=1}^s \varphi_k \delta_k \in l_{\text{fin}}$, one verifies that, for all $N \geq N_0 = s + n$, $A_N \varphi = A \varphi$. Therefore, the conditions of Proposition 4.3 are satisfied. So, by Proposition 4.4, one obtains the result. \square

Corollary 4.1. *For any $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, the integral*

$$\int_{\mathbb{R}} t^k d\sigma$$

converge. Moreover, $\int_{\mathbb{R}} d\sigma$ is the identity matrix.

Proof. The first part of the assertion is a consequence of Lemmas 3.2 and 4.1. The second part follows from the fact that σ is the spectral function of the self-adjoint operator A . \square

On the basis of the previous result, let us denote

$$S_k := \int_{\mathbb{R}} t^k d\sigma$$

for any $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Definition 6. Given the spectral function σ of the self-adjoint operator A , denote

$$\sigma_{\mathcal{T}} := \mathcal{T}\sigma\mathcal{T}^*,$$

where \mathcal{T} is a matrix satisfying I) and II) (see the second paragraph of Section 2).

Using (2.6), one obtains

$$\sigma_N^{\mathcal{T}}(t) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \sigma_{\mathcal{T}}(t), \quad \text{for } t \text{ being a point of continuity of } \sigma(t), \quad (4.5)$$

where $\sigma_N^{\mathcal{T}}$ is the function given in (2.5). It also holds that

$$\mathcal{T}S_k\mathcal{T}^* = \int_{\mathbb{R}} t^k d\sigma_{\mathcal{T}} := S_k(\mathcal{T}). \quad (4.6)$$

Lemma 4.2. For any matrix \mathcal{T} satisfying I) and II), the function $\sigma_{\mathcal{T}}$, given in Definition 6, is in $\mathfrak{M}_d(n, \infty)$.

Proof. It follows from [12, Sec. 2] that the sequence $\{S_k\}_{k=0}^{\infty}$ defines a determinate moment problem. In view of (4.6), the sequence $\{S_k(\mathcal{T})\}_{k=0}^{\infty}$ also has only one solution for any \mathcal{T} . \square

5. Reconstruction of the matrix

In this section, the starting point is a matrix valued function $\tilde{\sigma} \in \mathfrak{M}(n, \infty)$ and we construct a matrix \mathcal{A} in the class $\mathcal{M}(n, \infty)$ from this function. Furthermore, we verify that, for some matrix \mathcal{T} which gives the initial conditions (see the second paragraph of Section 2), $\tilde{\sigma}$ is the spectral function of the reconstructed matrix \mathcal{A} . Hence, any matrix in $\mathcal{M}(n, \infty)$ can be reconstructed from its function in $\mathfrak{M}(n, \infty)$.

Consider the Hilbert space $L_2(\mathbb{R}, \tilde{\sigma})$ with $\tilde{\sigma} \in \mathfrak{M}(n, \infty)$. From what has been said, either there are polynomials of zero norm in this space or there are not. Let us apply the Gram-Schmidt procedure of orthonormalization to the sequence of vector polynomials given by (2.20). If there exist nonzero polynomials whose norm is zero, then the Gram-Schmidt algorithm yields vector polynomials of zero norm. Indeed, let $\mathbf{r} \neq 0$ be a vector polynomial of zero norm of minimal height h_1 (that is, any nonzero polynomial of zero norm has height no less than

h_1), and let $\{\tilde{\mathbf{p}}_k\}_{k=1}^{h_1}$ be the orthonormalized vector polynomials obtained by the first h_1 iterations of the Gram-Schmidt procedure. Hence, if one defines

$$\mathbf{s} = \mathbf{e}_{h_1+1} - \sum_{i=1}^{h_1} \langle \tilde{\mathbf{p}}_i, \mathbf{e}_{h_1+1} \rangle \tilde{\mathbf{p}}_i,$$

then, in view of the fact that $h(\tilde{\mathbf{p}}_k) = k - 1$ for $k = 1, \dots, h_1$, one has $\mathbf{e}_{h_1+1} = a\mathbf{r} + \sum_{i=1}^{h_1} a_i \tilde{\mathbf{p}}_i$ which in turn leads to

$$\mathbf{s} = a\mathbf{r} + \sum_{k=1}^{h_1} \tilde{a}_k \tilde{\mathbf{p}}_k. \tag{5.1}$$

This implies that $\|\mathbf{s}\|_{L_2(\mathbb{R}, \tilde{\sigma})} = 0$ since $\langle \mathbf{s}, \mathbf{r} \rangle_{L_2(\mathbb{R}, \tilde{\sigma})} = 0$ and $\mathbf{s} \perp \tilde{\mathbf{p}}_k$ for $k = 1, \dots, h_1$ by construction. Thus, the Gram-Schmidt procedure yields vector polynomials of zero norm.

Having found a vector polynomials of zero norm, one continues with the procedure taking the next vector of the sequence (2.20). Observe that if the Gram-Schmidt technique has produced a vector polynomial of zero norm \mathbf{q} of height h_2 , then for any integer number l , the vector polynomial \mathbf{t} that is obtained at the $h_2 + 1 + nl$ -th iteration of the Gram-Schmidt process, this is,

$$\mathbf{t} = \mathbf{e}_{h_2+1+nl} - \sum_{h(\tilde{\mathbf{p}}_i) < h_2+nl} \langle \tilde{\mathbf{p}}_i, \mathbf{e}_{h_2+1+nl} \rangle \tilde{\mathbf{p}}_i,$$

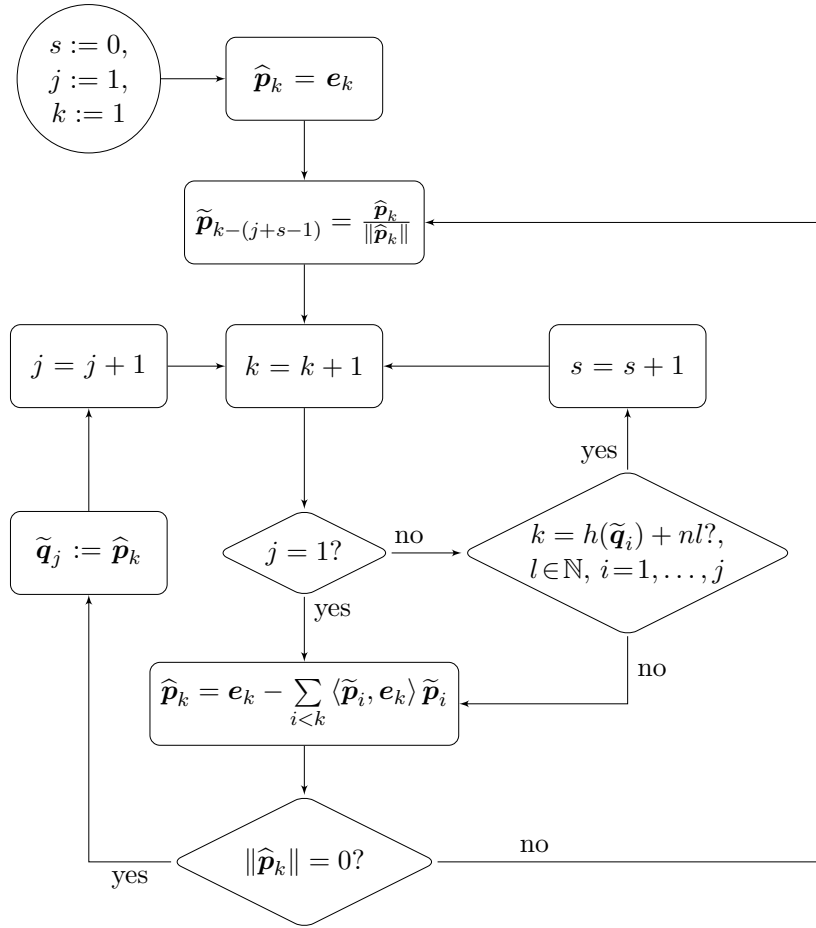
satisfies that $\|\mathbf{t}\|_{L_2(\mathbb{R}, \tilde{\sigma})} = 0$ (for all $l \in \mathbb{N}$), due to

$$\mathbf{e}_{h_2+1+nl} = R_l \mathbf{q} + \sum_{h(\tilde{\mathbf{p}}_i) < h_2+nl} c_i \tilde{\mathbf{p}}_i + \sum_{h(\mathbf{r}_i) < h_2+nl} \mathbf{r}_i,$$

where R_l is a scalar polynomial with degree l and each \mathbf{r}_i is a vector polynomial of zero norm with $h(\mathbf{r}_i) \neq h_2 + nl$.

Remark 5. Since $\tilde{\sigma}$ has an infinite number of growth points, the Gram-Schmidt procedure renders an infinite sequence of orthonormal vectors. Indeed, a finite set of orthonormal vectors implies that $L_2(\mathbb{R}, \tilde{\sigma})$ is finite dimensional.

The following flow chart shows that the Gram-Schmidt procedure applied to the sequence (2.20) gives not only the orthonormalized sequence, but also a sequence of null vector polynomials such that at any step of the algorithm these two sequences together are a basis of the space of vector polynomials (see [30, Thm. 2.1] and compare with (2.19)).



Clearly, since the support of the measure is infinite (see Corollary 3.2), one cannot obtain more than $n - 1$ null vectors from the Gram-Schmidt procedure applied to the sequence of vector polynomials given by (2.20). Indeed, if one finds the n -th vector polynomial $\tilde{\mathbf{q}}_n$, by repeating the argument described above and taking into account

$$\{h(\tilde{\mathbf{q}}_1), \dots, h(\tilde{\mathbf{q}}_n)\} = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z},$$

one obtains that all the vectors provided by this procedure have zero norm beginning from some vector. This corresponds to an infinite loop in the left side of flow chart and to a measure with finite support since, in this case, $L_2(\mathbb{R}, \tilde{\sigma})$ would be finite dimensional.

Lemma 5.1. *Any vector polynomial $\mathbf{r}(z)$ is a finite linear combination of*

$$\{\tilde{\mathbf{p}}_k(z) : k \in \mathbb{N}\} \cup \{z^l \tilde{\mathbf{q}}_j(z) : l \in \mathbb{N} \cup \{0\}, j \in \{1, \dots, j_0\}\}. \quad (5.2)$$

Proof. Note that the vector polynomials defined in (2.20) satisfy that $h(\mathbf{e}_i) = i - 1$. Due to the fact that

$$h\left(\mathbf{e}_k - \sum_{h(\tilde{\mathbf{p}}_i) < k-1} \langle \tilde{\mathbf{p}}_i, \mathbf{e}_k \rangle \tilde{\mathbf{p}}_i\right) = h(\mathbf{e}_k), \quad (5.3)$$

one concludes that the heights of the set $\{\tilde{\mathbf{p}}_k(z)\}_{k=1}^N \cup \{z^l \tilde{\mathbf{q}}_i(z)\}_{i=1}^n$ ($l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$) are in one-to-one correspondence with the set $\mathbb{N} \cup \{0\}$. To complete the proof, it only remains to use [30, Thm. 2.1]. \square

By the argumentation given above and the same reasoning used in the proof of Theorem 3.1 ii), one arrives at the following assertion.

Proposition 5.1. *Let $\tilde{\sigma}$ be in $\mathfrak{M}(n, \infty)$. There exist at the most $n - 1$ vector polynomials $\{\tilde{\mathbf{q}}_i\}_{i=1}^{j_0}$ ($j_0 \leq n - 1$) such that any vector polynomial \mathbf{r} of zero norm satisfies that*

$$\mathbf{r} = \sum_{i=1}^{j_0} R_i \tilde{\mathbf{q}}_i,$$

where R_i , for any $i \in \{1, \dots, j_0\}$, is a scalar polynomial.

Let $\tilde{\sigma}(t)$ be a matrix valued function in $\mathfrak{M}(n, \infty)$ and consider the sequences $\{\tilde{\mathbf{p}}_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ and $\{\tilde{\mathbf{q}}_i\}_{i=1}^{j_0}$ obtained by applying the Gram-Schmidt process to the sequence (2.20). Since for any $k \in \mathbb{N}$ there exists $l \in \mathbb{N}$ such that $h(z\tilde{\mathbf{p}}_k) \leq h(\tilde{\mathbf{p}}_l)$, one has by Lemma 5.1 that

$$z\tilde{\mathbf{p}}_k(z) = \sum_{i=1}^l c_{ik} \tilde{\mathbf{p}}_i(z) + \sum_{j=1}^{j_0} R_{kj}(z) \tilde{\mathbf{q}}_j(z), \quad (5.4)$$

where $c_{ik} \in \mathbb{C}$ and $R_{kj}(z)$ is a scalar polynomial.

Remark 6. By comparing the heights of the left and right hand sides of (5.4), one obtains the following relations given in items i) and ii) below. To verify item iii), one has to take into account that the leading coefficient of \mathbf{e}_k is positive for $k \in \mathbb{N}$ and therefore the Gram-Schmidt procedure yields the sequence $\{\tilde{\mathbf{p}}_k\}_{k=1}^\infty$ with its elements having positive leading coefficients (cf. [29, Rem. 4]).

- i) $c_{lk} = 0$ if $h(z\tilde{\mathbf{p}}_k) < h(\tilde{\mathbf{p}}_l)$,
- ii) $R_{kj}(z) = 0$ if $h(z\tilde{\mathbf{p}}_k) < h(R_{kj}(z)\tilde{\mathbf{q}}_j)$,
- iii) $c_{lk} > 0$ if there is $l \in \mathbb{N}$ such that $h(z\tilde{\mathbf{p}}_k) = h(\tilde{\mathbf{p}}_l)$.

Clearly (recall that our inner product is antilinear in its first argument),

$$c_{lk} = \langle \tilde{\mathbf{p}}_l, z\tilde{\mathbf{p}}_k \rangle_{L_2(\mathbb{R}, \tilde{\sigma})} = \langle z\tilde{\mathbf{p}}_l, \tilde{\mathbf{p}}_k \rangle_{L_2(\mathbb{R}, \tilde{\sigma})} = c_{kl}. \quad (5.5)$$

In [29, Sec. 3], a reconstruction algorithm is provided for recovering the finite band matrix associated to the operator A_N from its spectral function. The proof of [29, Lem. 4.1] proves the following assertion

Proposition 5.2. *If $|l - k| > n$. Then, the complex numbers c_{ki} in (5.4) obey*

$$c_{kl} = c_{lk} = 0.$$

Proposition 5.2 shows that $\{c_{lk}\}_{l,k=1}^\infty$ is a band matrix. Let us turn to the question of characterizing the diagonals of $\{c_{lk}\}_{l,k=1}^\infty$. It will be shown that they undergo the kind of degeneration given in the Introduction.

For a fixed number $i \in \{0, \dots, n\}$, we define the numbers

$$d_k^{(i)} := c_{k+i,k} = c_{k,k+i} \quad (5.6)$$

for $k \in \mathbb{N}$. The proof of the following assertion repeats the one of [29, Lem. 4.2].

Proposition 5.3. *Fix $j \in \{0, \dots, j_0 - 1\}$.*

i) If k is such that $h(\tilde{\mathbf{q}}_j) < h(z\tilde{\mathbf{p}}_k) < h(\tilde{\mathbf{q}}_{j+1})$, then $d_k^{(n-j)} > 0$. Here one assumes that $h(\mathbf{q}_0) := n - 1$.

ii) If k is such that $h(z\tilde{\mathbf{p}}_k) \geq h(\tilde{\mathbf{q}}_{j+1})$, then $d_k^{(n-j)} = 0$.

Corollary 5.1. *If c_{ik} are the coefficients given in (5.4), then the matrix $\{c_{kl}\}_{k,l=1}^\infty$ is in $\mathcal{M}(n, \infty)$ and it is the matrix representation of a symmetric restriction of the operator of multiplication by the independent variable in $L_2(\mathbb{R}, \tilde{\sigma})$. (The restriction could be improper, i. e., the case when the restriction coincides with the multiplication operator is not excluded).*

Proof. Taking into account (5.6), it follows from Propositions 5.2 and 5.3 that the matrix $\{c_{kl}\}_{k,l=1}^\infty$ is in the class $\mathcal{M}(n, \infty)$. Now, in view of (5.5), the operator of multiplication by the independent variable is an extension of the minimal closed symmetric operator B in $L_2(\mathbb{R}, \tilde{\sigma})$ satisfying

$$c_{kl} = \langle \tilde{\mathbf{p}}_k, B\tilde{\mathbf{p}}_l \rangle.$$

□

Theorem 5.1. *Let $\tilde{\sigma}$ be an element of $\mathfrak{M}(n, \infty)$ and c_{ki} be the coefficients given in (5.4). Then $\tilde{\sigma}$ is a spectral function of the matrix $\{c_{kl}\}_{k,l=1}^\infty$ according to Definition 3.*

Proof. Since the recurrence equation for the orthonormal sequence $\{\tilde{\mathbf{p}}_k\}_{k=1}^\infty$ and the sequence of polynomials $\{\mathbf{p}_k\}_{k=1}^\infty$ are related in the same way as in the finite dimensional case (see [29, Eqs. 2.17 and 4.15]), one can use the argumentation of the proofs of [29, Lem. 4.3]) to obtain that the vector polynomials $\{\mathbf{p}_k(z)\}_{k=1}^\infty$ and $\{\tilde{\mathbf{p}}_k(z)\}_{k=1}^\infty$ satisfy

$$\mathbf{p}_k(z) = \tilde{\mathbf{p}}_k(z) + \mathbf{r}_k(z), \tag{5.7}$$

where $\|\mathbf{r}_k\|_{L_2(\mathbb{R}, \tilde{\sigma})} = 0$. Analogously, when $j_0 \neq 0$ it can also be proven that the vector polynomials $\{\tilde{\mathbf{q}}_j(z)\}_{j=1}^{j_0}$ and $\{\mathbf{q}_j(z)\}_{j=1}^{j_0}$ satisfy

$$\mathbf{q}_j(z) = \sum_{i \leq j} R_i(z) \tilde{\mathbf{q}}_i(z), \quad R_j \neq 0, \tag{5.8}$$

where $R_i(z)$ are scalar polynomials (see [29, Lem. 4.4]). Due to (5.7) and (5.8) $\{\mathbf{p}_k\}_{k=1}^\infty$ is an orthonormal sequence in $L_2(\mathbb{R}, \tilde{\sigma})$ and \mathbf{q}_j is the equivalence class of zero in this space for any $j \in \{1, \dots, j_0\}$. \square

Theorem 5.2. *Let $\tilde{\sigma}$ be in $\mathfrak{M}_d(n, \infty)$ and c_{ki} be the coefficients given in (5.4). Then there exists \mathcal{T} such that $\sigma_{\mathcal{T}}$, given in Definition 6, coincides with $\tilde{\sigma}$.*

Proof. According to Theorem 5.1, there is \mathcal{T} such that the vector polynomials $\{\mathbf{p}_k\}_{k=1}^\infty$ are orthonormal in $L_2(\mathbb{R}, \tilde{\sigma})$. Since $\tilde{\sigma}$ is the unique solution of the moment problem

$$\left\{ \int_{\mathbb{R}} t^k d\tilde{\sigma} \right\}_{k=0}^\infty,$$

the orthonormal system $\{\mathbf{p}_k\}_{k=1}^\infty$ is a basis and $\{c_{kl}\}_{k,l=1}^\infty$ is the matrix representation of the operator of multiplication by the independent variable [12, Sec. 2]. Let σ be the spectral function given by (4.3) (with A being the operator of multiplication by the independent variable) and $\sigma_{\mathcal{T}}$ the function defined in Definition 6. Since the elements of the sequence $\{\mathbf{p}_k\}_{k=1}^\infty$ satisfy the recurrence equations given by the matrix $\{c_{kl}\}_{k,l=1}^\infty$ with initial conditions \mathcal{T} , for any $k, l \in \mathbb{N}$, there is N sufficiently large such that

$$\langle \mathbf{p}_k, \mathbf{p}_l \rangle = \delta_{kl}.$$

Now, from (4.5) and Lemma 3.2, it follows that $\tilde{\sigma}$ and $\sigma_{\mathcal{T}}$ have the same moments. \square

References

- [1] N. I. Akhiezer. *The classical moment problem and some related questions in analysis*. Translated by N. Kemmer. Hafner Publishing Co., New York, 1965.

-
- [2] N. I. Akhiezer and I. M. Glazman. *Theory of linear operators in Hilbert space*. Dover Publications Inc., New York, 1993. Translated from the Russian and with a preface by Merlynd Nestell, Reprint of the 1961 and 1963 translations, Two volumes bound as one.
- [3] B. Beckermann and A. Osipov. Some spectral properties of infinite band matrices. *Numer. Algorithms*, 34(2-4):173–185, 2003. International Conference on Numerical Algorithms, Vol. II (Marrakesh, 2001).
- [4] J. M. Berezans'kiĭ. *Expansions in eigenfunctions of selfadjoint operators*. Translated from the Russian by R. Bolstein, J. M. Danskin, J. Rovnyak and L. Shulman. Translations of Mathematical Monographs, Vol. 17. American Mathematical Society, Providence, R.I., 1968.
- [5] F. W. Biegler-König. Construction of band matrices from spectral data. *Linear Algebra Appl.*, 40:79–87, 1981.
- [6] M. S. Brodskii. *Triangular and Jordan representations of linear operators*. American Mathematical Society, Providence, R.I., 1971. Translated from the Russian by J. M. Danskin, Translations of Mathematical Monographs, Vol. 32.
- [7] M. T. Chu and G. H. Golub. *Inverse eigenvalue problems: theory, algorithms, and applications*. Numerical Mathematics and Scientific Computation. Oxford University Press, New York, 2005.
- [8] C. de Boor and G. H. Golub. The numerically stable reconstruction of a Jacobi matrix from spectral data. *Linear Algebra Appl.*, 21(3):245–260, 1978.
- [9] R. del Rio and M. Kudryavtsev. Inverse problems for Jacobi operators: I. Interior mass-spring perturbations in finite systems. *Inverse Problems*, 28(5):055007, 18, 2012.
- [10] R. del Rio, M. Kudryavtsev, and L. O. Silva. Inverse problems for Jacobi operators III: Mass-spring perturbations of semi-infinite systems. *Inverse Probl. Imaging*, 6(4):599–621, 2012.
- [11] R. del Rio, M. Kudryavtsev, and L. O. Silva. Inverse problems for Jacobi operators II: Mass perturbations of semi-infinite mass-spring systems. *Zh. Mat. Fiz. Anal. Geom.*, 9(2):165–190, 2013.
- [12] A. J. Durán and P. López-Rodríguez. The matrix moment problem. In *Margarita mathematica*, pages 333–348. Univ. La Rioja, Logroño, 2001.

- [13] M. G. Gasymov and G. S. Guseĭnov. On inverse problems of spectral analysis for infinite Jacobi matrices in the limit-circle case. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 309(6):1293–1296, 1989.
- [14] F. Gesztesy and B. Simon. m -functions and inverse spectral analysis for finite and semi-infinite Jacobi matrices. *J. Anal. Math.*, 73:267–297, 1997.
- [15] G. M. L. Gladwell. *Inverse problems in vibration*, volume 119 of *Solid Mechanics and its Applications*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, second edition, 2004.
- [16] L. Golinskii and M. Kudryavtsev. Inverse spectral problems for a class of five-diagonal unitary matrices. *Dokl. Akad. Nauk*, 423(1):11–13, 2008.
- [17] L. Golinskii and M. Kudryavtsev. Rational interpolation and mixed inverse spectral problem for finite CMV matrices. *J. Approx. Theory*, 159(1):61–84, 2009.
- [18] L. Golinskii and M. Kudryavtsev. An inverse spectral theory for finite CMV matrices. *Inverse Probl. Imaging*, 4(1):93–110, 2010.
- [19] L. J. Gray and D. G. Wilson. Construction of a Jacobi matrix from spectral data. *Linear Algebra and Appl.*, 14(2):131–134, 1976.
- [20] G. Š. Guseĭnov. The determination of the infinite Jacobi matrix from two spectra. *Mat. Zametki*, 23(5):709–720, 1978.
- [21] R. Z. Halilova. An inverse problem. *Izv. Akad. Nauk Azerbaĭdžan. SSR Ser. Fiz.-Tehn. Mat. Nauk*, 1967(3-4):169–175, 1967.
- [22] H. Hochstadt. On some inverse problems in matrix theory. *Arch. Math. (Basel)*, 18:201–207, 1967.
- [23] H. Hochstadt. On the construction of a Jacobi matrix from spectral data. *Linear Algebra and Appl.*, 8:435–446, 1974.
- [24] H. Hochstadt. On the construction of a Jacobi matrix from mixed given data. *Linear Algebra Appl.*, 28:113–115, 1979.
- [25] T. Kato. *Perturbation theory for linear operators*. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 1976. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Band 132.
- [26] A. G. Kostyuchenko and K. A. Mirzoev. Generalized Jacobi matrices and deficiency indices of ordinary differential operators with polynomial coefficients. *Funktsional. Anal. i Prilozhen.*, 33(1):30–45, 96, 1999.

- [27] M. Kudryavtsev. The direct and the inverse problem of spectral analysis for five-diagonal symmetric matrices. I. *Mat. Fiz. Anal. Geom.*, 5(3-4):182–202, 1998.
- [28] M. Kudryavtsev. The direct and the inverse problem of spectral analysis for five-diagonal symmetric matrices. II. *Mat. Fiz. Anal. Geom.*, 6(1-2):55–80, 1999.
- [29] M. Kudryavtsev, S. Palafox, and L. O. Silva. Inverse spectral analysis for a class of finite band symmetric matrices. *Preprint*, arXiv:1409.3868, 2014.
- [30] M. Kudryavtsev, S. Palafox, and L. O. Silva. On a linear interpolation problem for n -dimensional vector polynomials. *J. Approx. Theory*, 199:45–62, 2015.
- [31] V. A. Marchenko. *Introduction to the theory of inverse problems of spectral analysis*. Universitetski Lekcii. Akta, Kharkov, 2005. In Russian.
- [32] M. P. Mattis and H. Hochstadt. On the construction of band matrices from spectral data. *Linear Algebra Appl.*, 38:109–119, 1981.
- [33] I. P. Natanson. *Theory of functions of a real variable*. Frederick Ungar Publishing Co., New York, 1955. Translated by Leo F. Boron with the collaboration of Edwin Hewitt.
- [34] P. Nylén and F. Uhlig. Inverse eigenvalue problem: existence of special spring-mass systems. *Inverse Problems*, 13(4):1071–1081, 1997.
- [35] P. Nylén and F. Uhlig. Inverse eigenvalue problems associated with spring-mass systems. In *Proceedings of the Fifth Conference of the International Linear Algebra Society (Atlanta, GA, 1995)*, volume 254, pages 409–425, 1997.
- [36] Y. M. Ram. Inverse eigenvalue problem for a modified vibrating system. *SIAM J. Appl. Math.*, 53(6):1762–1775, 1993.
- [37] L. O. Silva and R. Weder. On the two spectra inverse problem for semi-infinite Jacobi matrices. *Math. Phys. Anal. Geom.*, 9(3):263–290 (2007), 2006.
- [38] L. O. Silva and R. Weder. The two-spectra inverse problem for semi-infinite Jacobi matrices in the limit-circle case. *Math. Phys. Anal. Geom.*, 11(2):131–154, 2008.
- [39] J. Weidmann. *Linear operators in Hilbert spaces*, volume 68 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1980. Translated from the German by Joseph Szücs.

-
- [40] S. M. Zagorodnyuk. Direct and inverse spectral problems for $(2N + 1)$ -diagonal, complex, symmetric, non-Hermitian matrices. *Serdica Math. J.*, 30(4):471–482, 2004.
- [41] S. M. Zagorodnyuk. The direct and inverse spectral problems for $(2N + 1)$ -diagonal complex transposition-antisymmetric matrices. *Methods Funct. Anal. Topology*, 14(2):124–131, 2008.

Bibliografía

- [1] N. I. Akhiezer. *The classical moment problem and some related questions in analysis*. Translated by N. Kemmer. Hafner Publishing Co., New York, 1965.
- [2] N. I. Akhiezer and I. M. Glazman. *Theory of linear operators in Hilbert space*. Dover Publications Inc., New York, 1993. Translated from the Russian and with a preface by Merlynd Nestell, Reprint of the 1961 and 1963 translations, Two volumes bound as one.
- [3] G. A. Baker, Jr. and P. Graves-Morris. *Padé approximants*, volume 59 of *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Cambridge University Press, Cambridge, second edition, 1996.
- [4] B. Beckermann. The structure of the singular solution table of the M-Padé approximation problem. *J. Comput. Appl. Math.*, 32(1-2):3–15, 1990. Extrapolation and rational approximation (Luminy, 1989).
- [5] B. Beckermann and G. Labahn. A uniform approach for Hermite Padé and simultaneous Padé approximants and their matrix-type generalizations. *Numer. Algorithms*, 3(1-4):45–54, 1992. Extrapolation and rational approximation (Puerto de la Cruz, 1992).
- [6] B. Beckermann and A. Osipov. Some spectral properties of infinite band matrices. *Numer. Algorithms*, 34(2-4):173–185, 2003. International Conference on Numerical Algorithms, Vol. II (Marrakesh, 2001).
- [7] J. M. Berezans'kiĭ. *Expansions in eigenfunctions of selfadjoint operators*. Translated from the Russian by R. Bolstein, J. M. Danskin, J. Rovnyak and L. Shulman. Translations of Mathematical Monographs, Vol. 17. American Mathematical Society, Providence, R.I., 1968.
- [8] F. W. Biegler-König. Construction of band matrices from spectral data. *Linear Algebra Appl.*, 40:79–87, 1981.
- [9] M. S. Brodskiĭ. *Triangular and Jordan representations of linear operators*. American Mathematical Society, Providence, R.I., 1971. Translated from

- the Russian by J. M. Danskin, Translations of Mathematical Monographs, Vol. 32.
- [10] V. G. Cherednichenko. Rational interpolation, analytic solution. *Sibirsk. Mat. Zh.*, 43(1):188–193, iv, 2002.
- [11] V. G. Cherednichenko. Approximation by rational functions. *Appl. Anal.*, 87(10-11):1289–1293, 2008.
- [12] M. T. Chu and G. H. Golub. *Inverse eigenvalue problems: theory, algorithms, and applications*. Numerical Mathematics and Scientific Computation. Oxford University Press, New York, 2005.
- [13] C. de Boor and G. H. Golub. The numerically stable reconstruction of a Jacobi matrix from spectral data. *Linear Algebra Appl.*, 21(3):245–260, 1978.
- [14] R. del Rio and M. Kudryavtsev. Inverse problems for Jacobi operators: I. Interior mass-spring perturbations in finite systems. *Inverse Problems*, 28(5):055007, 18, 2012.
- [15] R. del Rio, M. Kudryavtsev, and L. O. Silva. Inverse problems for Jacobi operators III: Mass-spring perturbations of semi-infinite systems. *Inverse Probl. Imaging*, 6(4):599–621, 2012.
- [16] R. del Rio, M. Kudryavtsev, and L. O. Silva. Inverse problems for Jacobi operators II: Mass perturbations of semi-infinite mass-spring systems. *Zh. Mat. Fiz. Anal. Geom.*, 9(2):165–190, 2013.
- [17] A. J. Durán and P. López-Rodríguez. The matrix moment problem. In *Margarita mathematica*, pages 333–348. Univ. La Rioja, Logroño, 2001.
- [18] M. G. Gasymov and G. S. Guseĭnov. On inverse problems of spectral analysis for infinite Jacobi matrices in the limit-circle case. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 309(6):1293–1296, 1989.
- [19] F. Gesztesy and B. Simon. m -functions and inverse spectral analysis for finite and semi-infinite Jacobi matrices. *J. Anal. Math.*, 73:267–297, 1997.
- [20] G. M. L. Gladwell. *Inverse problems in vibration*, volume 119 of *Solid Mechanics and its Applications*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, second edition, 2004.
- [21] L. Golinskii and M. Kudryavtsev. Inverse spectral problems for a class of five-diagonal unitary matrices. *Dokl. Akad. Nauk*, 423(1):11–13, 2008.

-
- [22] L. Golinskii and M. Kudryavtsev. Rational interpolation and mixed inverse spectral problem for finite CMV matrices. *J. Approx. Theory*, 159(1):61–84, 2009.
- [23] L. Golinskii and M. Kudryavtsev. An inverse spectral theory for finite CMV matrices. *Inverse Probl. Imaging*, 4(1):93–110, 2010.
- [24] L. J. Gray and D. G. Wilson. Construction of a Jacobi matrix from spectral data. *Linear Algebra and Appl.*, 14(2):131–134, 1976.
- [25] G. Š. Guseĭnov. The determination of the infinite Jacobi matrix from two spectra. *Mat. Zametki*, 23(5):709–720, 1978.
- [26] R. Z. Halilova. An inverse problem. *Izv. Akad. Nauk Azerbaĭdžan. SSR Ser. Fiz.-Tehn. Mat. Nauk*, 1967(3-4):169–175, 1967.
- [27] H. Hochstadt. On some inverse problems in matrix theory. *Arch. Math. (Basel)*, 18:201–207, 1967.
- [28] H. Hochstadt. On the construction of a Jacobi matrix from spectral data. *Linear Algebra and Appl.*, 8:435–446, 1974.
- [29] H. Hochstadt. On the construction of a Jacobi matrix from mixed given data. *Linear Algebra Appl.*, 28:113–115, 1979.
- [30] V. A. Ilyin and È. G. Poznyak. *Linear algebra*. “Mir”, Moscow, 1986. Translated from the Russian by Irene Aleksanova.
- [31] T. Kato. *Perturbation theory for linear operators*. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 1976. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Band 132.
- [32] A. G. Kostyuchenko and K. A. Mirzoev. Generalized Jacobi matrices and deficiency indices of ordinary differential operators with polynomial coefficients. *Funktsional. Anal. i Prilozhen.*, 33(1):30–45, 96, 1999.
- [33] M. Kudryavtsev. The direct and the inverse problem of spectral analysis for five-diagonal symmetric matrices. I. *Mat. Fiz. Anal. Geom.*, 5(3-4):182–202, 1998.
- [34] M. Kudryavtsev. The direct and the inverse problem of spectral analysis for five-diagonal symmetric matrices. II. *Mat. Fiz. Anal. Geom.*, 6(1-2):55–80, 1999.
- [35] M. Kudryavtsev, S. Palafox, and L. O. Silva. Inverse spectral analysis for a class of infinite band symmetric matrices. *In preparation*.

- [36] M. Kudryavtsev, S. Palafox, and L. O. Silva. Inverse spectral analysis for a class of finite band symmetric matrices. *Preprint*, arXiv:1409.3868, 2014.
- [37] M. Kudryavtsev, S. Palafox, and L. O. Silva. On a linear interpolation problem for n -dimensional vector polynomials. *J. Approx. Theory*, 199:45–62, 2015.
- [38] V. A. Marchenko. *Introduction to the theory of inverse problems of spectral analysis*. Universitetski Lekcii. Akta, Kharkov, 2005. In Russian.
- [39] M. P. Mattis and H. Hochstadt. On the construction of band matrices from spectral data. *Linear Algebra Appl.*, 38:109–119, 1981.
- [40] I. P. Natanson. *Theory of functions of a real variable*. Frederick Ungar Publishing Co., New York, 1955. Translated by Leo F. Boron with the collaboration of Edwin Hewitt.
- [41] P. Nylén and F. Uhlig. Inverse eigenvalue problem: existence of special spring-mass systems. *Inverse Problems*, 13(4):1071–1081, 1997.
- [42] P. Nylén and F. Uhlig. Inverse eigenvalue problems associated with spring-mass systems. In *Proceedings of the Fifth Conference of the International Linear Algebra Society (Atlanta, GA, 1995)*, volume 254, pages 409–425, 1997.
- [43] M. Pindor. Rational approximation and noise. In *Harmonic analysis and rational approximation*, volume 327 of *Lecture Notes in Control and Inform. Sci.*, pages 145–156. Springer, Berlin, 2006.
- [44] Y. M. Ram. Inverse eigenvalue problem for a modified vibrating system. *SIAM J. Appl. Math.*, 53(6):1762–1775, 1993.
- [45] L. O. Silva and R. Weder. On the two spectra inverse problem for semi-infinite Jacobi matrices. *Math. Phys. Anal. Geom.*, 9(3):263–290 (2007), 2006.
- [46] L. O. Silva and R. Weder. The two-spectra inverse problem for semi-infinite Jacobi matrices in the limit-circle case. *Math. Phys. Anal. Geom.*, 11(2):131–154, 2008.
- [47] B. Simon. The classical moment problem as a self-adjoint finite difference operator. *Adv. Math.*, 137(1):82–203, 1998.
- [48] M. Van Barel and A. Bultheel. A new approach to the rational interpolation problem. *J. Comput. Appl. Math.*, 32(1-2):281–289, 1990. Extrapolation and rational approximation (Luminy, 1989).

-
- [49] M. Van Barel and A. Bultheel. A new approach to the rational interpolation problem: the vector case. *J. Comput. Appl. Math.*, 33(3):331–346, 1990.
- [50] M. Van Barel and A. Bultheel. A general module-theoretic framework for vector M-Padé and matrix rational interpolation. *Numer. Algorithms*, 3(1-4):451–461, 1992. Extrapolation and rational approximation (Puerto de la Cruz, 1992).
- [51] J. Weidmann. *Linear operators in Hilbert spaces*, volume 68 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1980. Translated from the German by Joseph Szücs.
- [52] S. M. Zagorodnyuk. Direct and inverse spectral problems for $(2N + 1)$ -diagonal, complex, symmetric, non-Hermitian matrices. *Serdica Math. J.*, 30(4):471–482, 2004.
- [53] S. M. Zagorodnyuk. The direct and inverse spectral problems for $(2N + 1)$ -diagonal complex transposition-antisymmetric matrices. *Methods Funct. Anal. Topology*, 14(2):124–131, 2008.