



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

PERCOLACIÓN ÓPTIMA EN REDES COMPLEJAS

T E S I S

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:

Físico

PRESENTA:

Ollin Demian Langle Chimal

TUTOR:

Dr. Jesús Espinal Enríquez

México, Ciudad de México, 2016





Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Hoja de datos del jurado

1. Datos del alumno

Langle

Chimal

Ollin Demian

56 18 24 94

Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Física

407056213

2. Datos del tutor

Dr. Jesús

Espinal

Enríquez

3. Datos del sinodal 1

Dr. Enríque

Hernández

Lemus

4. Datos del sinodal 2

Dr. Damián

Hernández

Herrán

5. Datos del sinodal 3

Dr. Jesús Mario

Siqueiros

García

6. Datos del sinodal 4

Dr. Carlos Adolfo

Piña

García.

7. Datos de la tesis

Percolación óptima en redes complejas

93 p.

2016

Los árboles tardíos son los que dan mejores frutos.

Molière

El mundo entero se aparta cuando ve pasar a un hombre que sabe a dónde va.

Antoine de Saint-Exupéry

A mis padres Ana e Yvar.

Agradezco infinitamente a mis padres por todo el apoyo que me han brindado en cada una de las etapas de mi vida al igual que a mis abuelas, quienes siempre han estado conmigo y me han dado todo el amor que se puede brindar.

Gracias a Gracia que me brinda su apoyo y amor.

Gracias a McFly, Layla y Emil, quienes me muestran todos los días el amor y la bondad.

A mi prima Nahayelli a quien quiero con el alma.

Gracias a todos mis amigos del Vives, CEDART, la facultad, el ITAM, el Colmex, el INMEGEN, Entrena México, AMUNAM. Todos forman una parte muy importante en cada uno de mis logros.

Gracias a la vida por ponerme en los lugares indicados, a Chucho por guiarme, escucharme, apoyarme y hacerme soñar con vidas y mundos mejores.

Gracias al Instituto Luis Vives, al CEDART "Diego Rivera", a la Facultad de Ciencias, al ITAM, a la UACM y a Damián por una educación de primera calidad.

Agradezco al Dr. Sarira Sahu por mi servicio social y al Dr. Marco Martos por abrirme sus puertas en el Instituto de Astronomía.

Resumen

Los sistemas complejos a menudo son difíciles de describir y entender porque están compuestos de un gran número de elementos interactuantes. Un buen ejemplo puede verse en sistemas sociales: diversos componentes (personas, rumores, preferencias electorales) interactúan simultáneamente (amistades en redes sociales, transmisión de enfermedades, cambio de preferencias electorales por presión social, etc.). Por la cantidad tan grande de elementos e interacciones, entender de manera integral sistemas de este tipo se vuelve un problema difícil. Una representación útil para el estudio de dichos sistemas es la generada por grafos o redes, donde los componentes del sistema corresponden a nodos y sus interacciones son las ligas o aristas entre ellos. Existen diferentes tipos de propiedades dentro de dichas redes, las cuales se dividen en dos grandes grupos: estructurales y dinámicas. El propósito de este trabajo es estudiar una del segundo tipo, que es la percolación, en específico el problema de la percolación óptima que es dada una red compleja encontrar el mínimo número de nodos a remover tal que no exista un componente gigante. Para poder llevar a cabo este estudio es necesario el conocimiento de ciertas propiedades estructurales o topológicas que son las que nos pueden ayudar a determinar la fase en la que se encuentra la red en cuestión. En otras palabras, necesitamos estudiar cómo varían las propiedades estructurales para saber en qué momento cambia una dinámica.

El hecho de hacer una remoción de nodos implica que la red está sometida a ataques y dependiendo de la topología inicial, será más o menos vulnerable a ellos, esta propiedad se llama robustez, pero dicha propiedad no es absoluta por lo que si una red es robusta bajo un cierto tipo de ataques puede ser vulnerable a otro. En este trabajo se presenta una propuesta de ataques óptimos dada la reducción de una energía definida en la red para lograr una convergencia a una estrategia general óptima. También se consideran otras estrategias y se hace una comparación de los resultados obtenidos por medio de todas ellas.

En concreto, la presente tesis tiene como objetivo, utilizando una red social de personajes ligados al narcotráfico en México, encontrar el número mínimo de nodos esenciales que al ser removidos de la red, reduzcan el componente gigante, siendo éste un claro ejemplo del problema de percolación óptima. Para lograr este objetivo se hace una introducción por la teoría general de redes, incluyendo similitudes con la teoría de percolación. Posteriormente se introduce a la recientemente propuesta centralidad llamada

Collective Influence para poder tener un entendimiento de las bases en las que se sustenta dicha teoría. Posteriormente se hacen comparaciones de percolación como fenómeno dinámico en distintas redes de ejemplo para poder después realizar la metodología al caso de estudio y analizar los resultados obtenidos. Para poder realizar este trabajo fue necesaria la implementación computacional de todos los métodos descritos debido a la naturaleza no sólo de esta red sino de las redes de la vida real en general.

Índice general

Índice de figuras	IX
Índice de tablas	XI
1. Introducción	1
1.1. Complejidad	1
1.2. Redes complejas	2
1.3. Estudio de las redes complejas	2
1.3.1. Modelo de Erdős-Rényi	4
1.3.2. Red tipo árbol	5
1.3.3. Modelo de Watts-Strogatz	6
1.4. Percolación en redes complejas	7
1.4.1. Cantidades de interés en la teoría de percolación	7
1.4.2. Resultados generales	9
1.4.3. Similitudes entre teoría de redes aleatorias y percolación	10
1.5. Percolación óptima	11
1.5.1. Robustez y ataques	11
2. Objetivos	17
2.1. Objetivo general	17
2.2. Objetivos específicos	17
2.2.1. Estudio de Collective Influence	17
2.2.2. Implementación computacional	18
2.2.3. Comparación y discusión	18
3. Marco teórico	19
3.1. Influencia Colectiva (Collective Influence)	19
3.1.1. Función de costo de energía de influencia	22
3.1.2. Interpretación en términos de caminatas NB y generalización de interacciones	25
3.1.3. Minimización con Optimización Extrema (EO)	28
3.1.3.1. τ -EO con interacciones multicuerpos	29
3.1.4. Algoritmo de CI	30

3.2. Ejemplificación del algoritmo	31
3.3. Ataques a redes de ejemplo	35
3.3.1. Red del artículo de Barabasi	36
3.3.2. Red tipo Erdős-Rényi	37
3.3.3. Red tipo Watts-Strogatz	39
3.3.4. Red tipo Árbol	41
4. Caso de estudio	45
4.1. Contextualización del problema de los Carteles en México	45
4.2. Construcción de la red	46
4.3. Ataques a la red	48
4.3.1. Comparación para diferentes radios de CI	48
4.3.2. Comparación por centralidades	52
4.4. Componentes Resultantes	57
5. Discusión y Conclusiones	59
5.1. Comparación de Centralidades	59
5.2. Sobre la red final de los narcos	60
5.3. Perspectivas	62
5.3.1. Aplicaciones de esta metodología en otras redes	62
5.3.2. Limitaciones	62
5.3.3. Trabajo a futuro	62
Bibliografía	63
A. Apéndice	65
A.1. Modelo de Ising	65
A.1.1. Spin Glass	66
A.2. Códigos	67
A.2.1. Collective Influence	67
A.2.2. Collective Influence para nodos de strings	68
A.2.3. Eliminación por CI	69
A.2.4. Eliminación por otras centralidades	75

Índice de figuras

1.1. Retículo en fase crítica (derecha) y subcrítica (izquierda) de percolación.	7
1.2. Ejemplo de centralidades.	14
3.1. Juego de <i>Pidra-Papel-Tijeras-Lagarto-Spock</i>	26
3.2. Red de Barabási mostrando al nodo 5 (en naranja) y $\partial(i, 2)$ (en rojo).	31
3.3. Red de Barabási mostrando los 5 nodos con mayor CI para $\partial(i, 2)$ en color naranja.	33
3.4. Redes de comparación Degreee contra CI a distintos radios.	34
3.5. Desconexión de la red de Barabási por ataques con diferentes centralidades	36
3.6. Red tipo Erdős-Rényi.	37
3.7. Desconexión de la red aleatoria de Erdős-Rényi por ataques con diferentes centralidades.	38
3.8. Red tipo Watts-Strogatz.	39
3.9. Desconexión de la red aleatoria de Watts-Strogatz por ataques con diferentes centralidades.	40
3.10. Red tipo Árbol.	41
3.11. Desconexión de una red tipo árbol por ataques con diferentes centralidades	42
4.1. Red del Narco	47
4.2. Dinámica del grado promedio al desconectar una fracción de nodos por distintos radios de CI de la red del narco.	49
4.3. Dinámica del número de aristas totales de la red al desconectar una fracción de nodos por distintos radios de CI de la red del narco.	50
4.4. Dinámica del orden del componente mayor al desconectar una fracción de nodos por distintos radios de CI de la red del narco.	51
4.5. Dinámica de λ_{max} del componente mayor al desconectar una fracción de nodos por distintos radios de CI en la red del narco.	52
4.6. Dinámica del grado promedio al desconectar una fracción de nodos por distintas centralidades en la red del narco.	53
4.7. Dinámica del número de aristas al desconectar una fracción de nodos por distintas centralidades en la red del narco.	54
4.8. Dinámica del orden del componente mayor al desconecta una fracción de nodos por distintas centralidades en la red del narco.	55

ÍNDICE DE FIGURAS

4.9. Dinámica de λ_{max} del componente mayor al desconectar una fracción de nodos por distintas centralidades en la red del narco.	56
4.10. Primeros componentes mayores en el orden subcrítico de la red del narco al atacarlos por la respectiva centralidad.	57
4.11. Componentes mayores en el valor mínimo del mayor eigenvalor de la matriz NB de la red del narco.	58

Índice de tablas

1.1. Comparación de centralidades.	15
3.1. Matriz Non-Backtracking para red de ejemplo.	21
3.2. Valores de CI para cada nodo a distintos radios en red de ejemplo.	32
4.1. Valores de parámetros en el primer componente de orden subcrítico de la red del narco.	57
4.2. Valores de parámetros en el valor mínimo del mayor eigenvalor de la matriz NB de la red del narco.	58
5.1. Valores de parámetros por ataque de CI en comparación con Degree.	59
5.2. Personajes eliminados.	61

Introducción

1.1. Complejidad

La ciencia de la complejidad, como un acercamiento emergente a la investigación, es el estudio de los sistemas. No es en sí una sola teoría, sino una colección de ellas, que se basa en herramientas multidisciplinarias. La complejidad y las redes tienen como objetivo el estudio de la dinámica colectiva, son un área de investigación interdisciplinaria que busca mejorar nuestro entendimiento de los sistemas complejos, es decir, sistemas compuestos por un gran número de partes interactuantes.(15)

Las ciencias de la complejidad están en un rápido crecimiento a nivel mundial gracias al reto de entender problemas en economía, medicina, epidemiología, transporte, neurociencia, genómica, reconocimiento de patrones, detección de comunidades, crimen, ecología, cambio climático, redes sociales, publicidad y demás temas de interés. A pesar de las diferencias en la naturaleza de los casos anteriormente descritos, se han encontrado muchas cuestiones en común. Por ejemplo, podemos encontrar que sistemas complejos dinámicos que van de ecosistemas a mercados financieros y el clima, suelen tener cambios repentinos de comportamiento en los cuales puede ocurrir un giro inmediato a un régimen dinámico contrastante. Aunque predecir dichos puntos críticos, es decir, donde ocurren dichos cambios drásticos, antes de que sean alcanzados es extremadamente difícil. Trabajos en diferentes campos científicos sugieren la existencia de señales tempranas genéricas que pueden indicar si se está acercando un umbral crítico para una amplia variedad de sistemas.(14).

Consideramos la mecánica estadística como una metodología matemática para entender las propiedades de los sistemas en cuestión así como sus interacciones. Esto a menudo involucra el uso de probabilidad y diversas ramas de las matemáticas, que al ser universalmente utilizadas, generan ideas para la aplicación en otras áreas.

Los experimentos confinados a laboratorios y simples muestras estadísticas, son muchas veces demasiado simplificados e idealistas como para poder estudiar varias de las preguntas más interesantes en el área de la complejidad, por lo que se debe buscar obtener

datos reales de los sistemas, así, la investigación teórica de las ciencias de la complejidad deben tener una base de datos obtenida de sistemas reales para poder hacer posible la identificación de cuestiones comunes entre ellos.

1.2. Redes complejas

Las redes complejas son conjuntos de muchos elementos conectados, que en su representación matemática son llamados nodos que interactúan de alguna forma. A los nodos de una red también se les llama *vértices* y los representaremos por los símbolos v_1, v_2, \dots, v_N , donde N es el número total de nodos en la red. Si un nodo v_i está conectado con otro nodo v_j , esta conexión se representa por una pareja ordenada (v_i, v_j) , o simplemente $v_i v_j$ y se le llama arista. De esta manera definimos:

Definición 1. *Una red es el par ordenado $G = (V, E)$ donde V es el conjunto de nodos y E es el de aristas existentes en ella.*

Existen dos tipos de redes, las dirigidas y las no dirigidas. Las últimas son las que tienen conexiones simétricas entre nodos, es decir, dada una red G , si $v_i v_j \in G$, entonces, $v_j v_i \in G$. Mientras que en las primeras no todas las conexiones son simétricas.

También es importante definir el concepto de componente, que es el conjunto de nodos que están conectados entre sí pero no lo están con el resto de los nodos de la red. Los componentes en una red pueden tener diferentes órdenes, que van desde 1 (un sólo nodo que no está conectado a otro) hasta el orden de toda la red (todos los nodos están conectados con todos), en cuyo caso la red consta de un sólo componente. Es importante enfatizar que el hecho de que un componente no esté conectado al cuerpo principal de la red no significa que no pertenezca a ella. La red no está determinada sólo por las conexiones, sino también por los nodos que conforman al sistema.

Las interconexiones en las redes complejas giran al rededor de un grupo de nodos esenciales, mucho más pequeño que el del total, los cuales pueden causar el esparcimiento de información a través de la red (18), o por el contrario, si son inmunizados, prevendrían la difusión de una epidemia a gran escala(20). Localizar estos nodos óptimos (cantidad mínima) es uno de los mayores problemas de la ciencia de las redes complejas, por lo cuál, en este trabajo se pretende hacer un acercamiento mediante el estudio de la percolación en la red descrita.

1.3. Estudio de las redes complejas

Existen dos campos de estudio principales en el área de las redes complejas los cuales además de ser diferentes son también complementarios, estos son: *Estructura* y *Dinámica*. En el primero se estudian las propiedades topológicas del sistema, las cuales son también las estructurales y nos dicen cómo es que están conectados los elementos de

la red, es decir, los nodos. La dinámica estudia el cambio en la red, el cual puede ser fenomenológico o estructural.

La teoría de gráficas aleatorias fue introducida por Paul Erdős y Alfréd Rényi en 1960, cuando Erdős descubrió que métodos probabilísticos solían ser de ayuda para estudiar problemas en teoría de gráficas.

Algunas de las propiedades más importantes que determinan la estructura (o topología) de una red son las siguientes:

1. **La distribución de conexiones (o vecinos) $P(k)$:** Es la probabilidad de que un nodo escogido al azar tenga (k) conexiones (o vecinos).
2. **El coeficiente de agregación C :** Es la probabilidad de que dos nodos conectados directamente a un tercer nodo, estén conectados entre sí. Por ejemplo, en una red de amistades, es la probabilidad de que dos de mis amigos sean ellos mismos amigos uno del otro.
3. **La longitud mínima L_{ij} entre dos nodos v_i y v_j :** Es el número mínimo de pasos que se tienen que dar para llegar de un nodo v_i a v_j de la red.
4. **La distribución de órdenes de componentes $P(s)$:** Es la probabilidad de que un componente esté compuesto por s nodos.
5. **El orden del componente más grande,** al que denotaremos por S_∞ .

En una red, los nodos además de estar conectados también interactúan y estas interacciones dan lugar a fenómenos dinámicos interesantes. Por esto es que además de estudiar las propiedades estructurales de una red también es importante hacerlo a sus propiedades dinámicas una vez que sabemos de qué manera interactúan los nodos. Por ejemplo, las enfermedades en una sociedad no son estáticas, sino que se propagan por toda la población dando lugar a epidemias.⁽²⁾

Algunos ejemplos de propiedades dinámicas son los cambios en las distribuciones en el tiempo, evolución, adaptación, decaimiento y en especial, dentro de estas propiedades dinámicas se encuentra el tema central de estudio de este trabajo que es la percolación como transición de fase y proceso difusivo.

Para hacer análisis de redes se cuenta con varios tipos de representaciones algebraicas que nos dan la posibilidad de estudiar los tipos de propiedades mencionados anteriormente. Por ejemplo, se puede representar a la red por medio de una matriz que contenga la información de cuántos nodos componen a la red en cuestión y cuáles de ellos están conectados.

Definición 2. Matriz de Adyacencia. *Cualquier red puede ser representada por una matriz de adyacencia que está definida como:*

$$A_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si hay un enlace del nodo } j \text{ al nodo } i \\ 0 & \text{si no lo hay} \end{cases}$$

Esta matriz no es la única que nos genera una representación matemática de una red, hay muchas otras que contienen la información necesaria de acuerdo al problema que se quiera resolver. Para los fines de esta tesis es conveniente definir la siguiente:

Definición 3. Matriz Non-Backtracking (NB). También llamada Matriz de Hashimoto, es una representación de la estructura de las aristas de una red. Es usada para identificar caminos sin regresos, es decir, contiene la información de la secuencia de aristas a seguir en una caminata sobre la red tal que si se camina $i \rightarrow j$, la matriz da la información de qué aristas $j \rightarrow k$ están permitidas como siguiente movimiento excluyendo explícitamente la posibilidad $j \rightarrow i$.

$$B_{k \rightarrow \ell, i \rightarrow j} = \begin{cases} 1 & \text{si } \ell = i \text{ y } j \neq k \\ 0 & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases} \quad (1.1)$$

Todas estas matrices cumplen la propiedad de ser cuadradas, por lo que se puede esperar que sus eigenvalores contengan alguna propiedad de interés. Lo que en efecto es cierto y ha dado lugar a un gran campo de investigación que son las propiedades espectrales asociadas a las redes teniendo particular interés los 2 eigenvalores de norma mayor, para los cuales es importante notar que por definición estas matrices tienen estrictamente todas sus entradas reales y positivas o cero, lo que es conveniente para estudiar su espectro por el teorema de Perron-Frobenius.

Definición 4. Teorema de Perron-Frobenius. Una matriz cuadrada real con entradas positivas, tiene un único máximo eigenvalor real y su eigenvector puede ser escogido para tener estrictamente componentes positivos. Dicho eigenvalor, llamado en ocasiones eigenvalor Perron-Frobenius, es real y positivo.

1.3.1. Modelo de Erdős-Rényi

Una gran parte de la teoría desarrollada para redes complejas está basada en la extrapolación de los resultados en las que son de tipo Erdős-Rényi que a su vez son implementaciones de teorías de otras ramas de la ciencia. Por esta razón es que es importante dar una pequeña introducción a este tipo de redes. Erdős y Rényi definen una red aleatoria como aquella con N nodos etiquetados conectados por n aristas, las

cuales son escogidas al azar de las $N(N-1)/2$ posibles. En total, hay $C_{N(N-1)/2}^n$ redes con N nodos y n aristas, formando un espacio de probabilidad en el que todas ellas son equiprobables. (21)

Una definición equivalente es el modelo binomial, el cual empieza con N nodos y cada par de ellos es conectado con probabilidad p . Consecuentemente el número total de aristas es una variable aleatoria con esperanza $E(n) = p[N(N-1)/2]$. Si G_0 es una red con nodos v_1, v_2, \dots, v_N y n aristas, la probabilidad de obtenerla por este proceso de construcción es $P(G_0) = p^n(1-p)^{(N(N-1)/2)-n}$.

La teoría de redes aleatorias estudia las propiedades del espacio de probabilidad asociado a las redes que tienen N nodos cuando $N \rightarrow \infty$. La primera propiedad de las redes aleatorias estudiada por Erdős y Rényi fue la aparición de una subred.

Definición 5. Subred. Una red G_1 que consiste de un conjunto de V_1 de nodos y otro E_1 de aristas es una subred de $G = \{V, E\}$ si $V_1 \subseteq V$ y $E_1 \subseteq E$.

1.3.2. Red tipo árbol

Los árboles son redes que no contienen ciclos. Representan estructura jerárquica de forma gráfica, son muy simples pero tienen una estructura muy rica.

Una red acíclica conectada es llamada *árbol*. A sus aristas se les suelen llamar ramas y por su estructura jerárquica, a los nodos de los que no se desprenden otros se les llaman nodos hoja. Para los objetivos de esta tesis es necesaria la definición de una red localmente tipo árbol, pero es conveniente definir primero otros conceptos.

Definición 6. Si v es un nodo de una red G no dirigida, entonces el conjunto de todos los nodos adyacentes a v en G es llamado vecindario de v en G y se denota como $N_G(v)$ o simplemente como $N(v)$.

Definición 7. Si una red G no dirigida (sin loops¹ o aristas repetidas) tiene la propiedad de que para cada nodo v de G , el vecindario $N(v)$ de v induce una subred conectada de G , entonces G es localmente conectada. (8)

Definición 8. Una red G no dirigida es llamada localmente tipo árbol, si por cada nodo v de G , la subred de G inducida por el vecindario $N(v)$ es un árbol. (Una red que consiste en un sólo nodo también es considerada un árbol.) (3)

¹Un loop es un enlace entre un nodo y él mismo.

1.3.3. Modelo de Watts-Strogatz

Este modelo genera redes aleatorias con distancias pequeñas entre todos los nodos y un coeficiente de agrupamiento alto, esto es, cuántas aristas tiene de todas las posibles. A las redes que cumplen estas propiedades se les llama de Mundo Pequeño.

Definición 9. Red de Mundo Pequeño. *Es un tipo de red en la cual la mayoría de los nodos no son vecinos entre sí pero por lo general existe un camino de pocos pasos por el cual se conectan. Específicamente se definen como las redes donde la distancia media L entre dos nodos escogidos aleatoriamente, crece proporcionalmente al logaritmo del número de nodos N en la red, esto es:*

$$L \propto \log N \tag{1.2}$$

El algoritmo descrito por Watts y Strogatz para la generación de éste tipo de redes requiere definir primero otro tipo de redes.

Definición 10. Retículo. *Es una red que forma un enrejado regular.*

Retículo anular. *Es una red que se obtiene al tomar un ciclo y conectando cada vértice a los vecinos de su vecindario.*

Watts y Strogatz propusieron un modelo que depende de un sólo parámetro que interpola entre un retículo de orden finito y una red aleatoria. El algoritmo de construcción es el siguiente:

Orden: Empezamos con un retículo anular de N nodos en donde cada uno de ellos está conectado a sus primeros K vecinos ($K/2$ de cada lado) para así tener una red dispersa pero conectada.

Aleatorizar: Aleatoriamente reconectar cada arista con probabilidad p tal que los *loops* y las aristas duplicadas están prohibidas. Este proceso introduce $pNK/2$ aristas que conectan nodos que de otra manera serían parte de diferentes vecindarios. Al variar p se puede monitorear de cerca la transición entre completez ($p = 0$) y aleatoriedad ($p = 1$).

1.4. Percolación en redes complejas

Uno de los hallazgos más interesantes de la teoría de redes aleatorias es la existencia de una probabilidad a la cual se forma un componente gigante, esto es, existe una probabilidad crítica p_c tal que por debajo de p_c la red está compuesta por clusters aislados pero arriba de p_c un componente gigante abarca la red entera. Este fenómeno es muy similar a la transición de percolación, un tema bastante estudiado en matemáticas y mecánica estadística.

En efecto, una transición de percolación y que un componente gigante emerja es el mismo fenómeno expresado en diferentes lenguajes. Sin embargo, la teoría de percolación no reproduce las predicciones de la teoría de redes aleatorias por lo que debe estudiarse desde una perspectiva diferente.

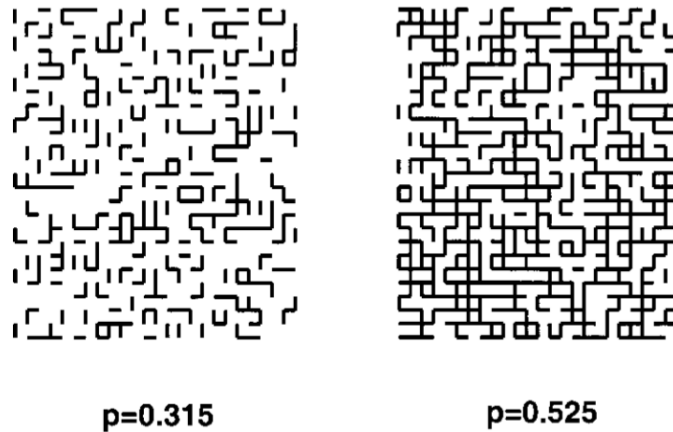


Figura 1.1: Retículo en fase crítica (derecha) y subcrítica (izquierda) de percolación.

1.4.1. Cantidades de interés en la teoría de percolación

Consideremos un retículo d -dimensional cuyas aristas están presentes con probabilidad p . La teoría de percolación estudia el que caminos que percolan emerjan a través del retículo (que empiezan de un lado y terminan en el opuesto). Para una p pequeña sólo unas pocas aristas están presentes, por lo que únicamente se forman pequeños clusters o grupos de nodos conectados, pero a una cierta probabilidad crítica p_c , llamada umbral de percolación, un cluster percolante de nodos conectados aparece (ver figura 1.1), el cual es llamado cluster infinito dado que su orden diverge cuando el del retículo lo hace. Las cantidades principales de la percolación son las siguientes:

1. INTRODUCCIÓN

1. La *probabilidad de percolación* P , es la probabilidad de que un cierto nodo pertenezca al cluster infinito:

$$P = P_p(|C| = \infty) = 1 - \sum_{s < \infty} P_p(|C| = s), \quad (1.3)$$

donde $P_p(|C| = s)$ denota la probabilidad de que el cluster en un principio tenga orden s . Es fácil ver que:

$$P = \begin{cases} 0 & \text{si } p < p_c \\ > 0 & \text{si } p > p_c. \end{cases} \quad (1.4)$$

2. El *orden promedio del cluster* $\langle s \rangle$, definido como:

$$\langle s \rangle = E_p(|C|) = \sum_{s=1}^{\infty} s P_p(|C| = s), \quad (1.5)$$

dado el valor esperado del orden del cluster. Como $\langle s \rangle$ es infinito cuando $P > 0$, es útil trabajar con el orden promedio de los clusters finitos quitando al infinito del sistema ($|C| = \infty$)

$$\langle s \rangle^f = E_p(|C|, |C| < \infty) = \sum_{s < \infty} s P_p(|C| = s). \quad (1.6)$$

3. La *distribución de órdenes de los clusters* n_s , definida como la probabilidad de un nodo de tener una posición fija en un cluster de orden s

$$n_s = \frac{1}{s} P_p(|C| = s). \quad (1.7)$$

Hay que notar que n_s no coincide con la probabilidad de que un nodo sea parte de un cluster de orden s . Al fijar la posición del nodo en el cluster escogemos sólo uno de los s posibles nodos, que se puede ver por el hecho de que $P_p(|C| = s)$ es dividida por s , garantizando que contamos cada cluster sólo una vez.

Estas cantidades son también de interés para las redes aleatorias pero hay una gran diferencia respecto a la teoría de percolación pues esta está definida en un retículo d -dimensional. En una red aleatoria podemos definir una distancia no-métrica sobre las aristas, pero como todos los nodos están potencialmente unidos por una arista, no hay un retículo de dimensión pequeña en la cual una red pueda ser incrustada. Sin embargo, ambas teorías convergen en el límite de dimensión infinita ($d \rightarrow \infty$) de la percolación. Afortunadamente muchos resultados en la teoría de percolación pueden ser generalizados a dimensiones infinitas por lo que los resultados obtenidos en su contexto pueden ser aplicados directamente a redes aleatorias también.

1.4.2. Resultados generales

1. La fase subcrítica ($p < p_c$)

Cuando $p < p_c$, sólo pequeños clusters de nodos conectados están presentes en el sistema. La probabilidad de que se genere un camino que una al origen con un nodo en la superficie, $\partial B(r)$, de una caja centrada en el origen y con longitud $2r$ por lado decae exponencialmente si $P < \infty$. Podemos definir una longitud de correlación ξ como la longitud característica del decaimiento exponencial

$$P_p [0 \leftrightarrow \partial B(r)] \sim e^{-r/\xi}, \quad (1.8)$$

donde $0 \leftrightarrow \partial B(r)$ significa que hay un camino del origen a un nodo cualquiera en $\partial B(r)$. La ecuación (1.8) indica que el radio de un cluster finito en la región subcrítica tiene un decaimiento exponencial y que la longitud de correlación representa el radio promedio de un cluster finito. ξ es igual a 0 para $p = 0$ y se va a infinito cuando $p \rightarrow p_c$.

El decaimiento exponencial del radio del cluster implica que la probabilidad de que un cluster tenga orden s , $P_p(|C| = s)$, también decae exponencialmente para una s grande:

$$P_p(|C| = s) \sim e^{-\alpha(p)s} \text{ cuando } s \rightarrow \infty, \quad (1.9)$$

con $\alpha(p) \rightarrow \infty$ cuando $p \rightarrow 0$ y $\alpha(p_c) = 0$.

2. La fase supercrítica ($p > p_c$)

Para $P > 0$ existe exactamente un cluster infinito y en esta fase las cantidades mencionadas anteriormente son dominadas por la contribución de dicho cluster; por lo que es útil el estudio de las probabilidades correspondientes en términos de clusters finitos. La probabilidad de que haya un camino del origen a la superficie de la caja de longitud de lado $2r$ que no es parte del cluster infinito decae exponencialmente como

$$P_p [0 \leftrightarrow \partial B(r), |C| < \infty] \sim e^{-r/\xi}, \quad (1.10)$$

A diferencia de la fase subcrítica, el decaimiento del orden de los clusters, $P_p(|C| = s < \infty)$, sigue una exponencial alargada, $e^{\beta(p)s^{(d-t)/d}}$, que es la primera cantidad importante que depende de la dimensión del retículo, pero incluso esa dependencia se desvanece cuando $d \rightarrow \infty$, y la distribución de orden del cluster decae exponencialmente como en la fase subcrítica.

1.4.3. Similitudes entre teoría de redes aleatorias y percolación

En la teoría de redes aleatorias estudiamos una red de N nodos, con cada par de ellos estando conectado con probabilidad p . Esto corresponde a percolación en máximo N dimensiones, tal que cada dos nodos conectados son vecinos y las aristas entre los nodos de una red lo son también en el problema de percolación. Como la teoría de redes aleatorias estudia el régimen de $N \rightarrow \infty$, es análogo a la percolación de dimensión infinita. En redes aleatorias de N nodos, el umbral de percolación, que denota la probabilidad de conexión a la cual aparece un cluster gigante debe ser $p_c \simeq 1/N$. En efecto, esta es exactamente la probabilidad crítica de una transición de fase hacia la aparición de un componente gigante.

1. Para $p < p_c = 1/N$

- La probabilidad de aparición del componente gigante en una red, y un cluster infinito en percolación es igual a 0.
- Los clusters de redes aleatorias son árboles, mientras que en percolación tienen una estructura fractal y un perímetro proporcional a su volumen.
- El cluster más grande en una red aleatoria es un árbol con $\ln(N)$ nodos, mientras que en percolación general $P_p(|C| = s) \sim e^{-s/s_c}$ sugiriendo que el orden del cluster mayor escala como $\ln(N)$.

2. Para $p = p_c = 1/N$

- Un único cluster gigante o cluster infinito aparece.
- El orden del cluster gigante es $N^{2/3}$, mientras que para percolación de dimensión infinita $P_p(|C| = s) \sim s^{-3/2}$, así el orden del cluster más grande escala como $N^{2/3}$.

3. Para $p > p_c = 1/N$

- El orden del cluster gigante es $(f(p_c N) - f(pN))N$, donde f es una función que decrece exponencialmente con $f(1) = 1$. El orden del cluster infinito es $PN \propto (p - p_c)N$.
- El cluster gigante tiene una estructura compleja que contiene ciclos, mientras que el cluster infinito ya no es fractal sino compacto. (21)

1.5. Percolación óptima

El vector $\mathbf{n} = (n_1, n_2, \dots, n_N)$ representa cuál nodo está presente dentro de una red y cuál es removido. Adoptamos la convención que $n_i = 1$ si el nodo i está presente, y $n_i = 0$ si es removido. La fracción total de nodos removidos es denotada por q :

$$q = 1 - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N n_i \equiv 1 - \langle n \rangle. \quad (1.11)$$

Llamamos $G(q)$ a la fracción de sitios ocupados que pertenecen al componente conectado gigante (más grande) que en el límite $N \rightarrow \infty$ representa la probabilidad de existencia de dicho componente gigante. El problema de la percolación óptima es encontrar la fracción mínima q_c de nodos tales que al ser removidos $G(q_c) = 0$:

$$q_c = \min\{q \in [0, 1] : G(q) = 0\}. \quad (1.12)$$

Para $q \geq q_c$, la red consiste en una colección de clusters de nodos cuyos órdenes son subextensivos¹. Alternativamente, por una fracción fija $q < q_c$, buscamos la configuración de nodos removidos tales que nos da el mínimo componente conectado gigante no cero.

El problema de la percolación óptima tiene muchas aplicaciones en las redes del mundo real, pues la selección de los nodos por medio de los parámetros antes descritos son justamente los que provocan que un flujo se esparza rápidamente dentro de la red si dicho flujo es introducido por ellos o que si son removidos, dicho flujo avance más lentamente.

1.5.1. Robustez y ataques

Al realizar una remoción de nodos en una red se cambian las características generales de la misma, por lo que es importante cuantificar cómo varían dichas características al llevar a cabo esta acción.

Definición 11. *La habilidad de resistir fallas y perturbaciones es un atributo crítico para muchos sistemas complejos incluyendo las redes y se le conoce como robustez, a la que también se le puede definir como la capacidad del sistema para mantener su estructura o sus funciones intactas cuando está sujeto a una perturbación.*

La forma más común de medir la robustez de una red es evaluar sus propiedades después de la eliminación de uno o varios elementos (sean nodos, aristas o la combinación de ambos), donde dicha remoción puede ser aleatoria, simulando una falla, o puede ser

¹No suficientemente grande.

dirigida a un elemento importante, simulado un ataque (22).

La remoción de nodos en forma dirigida por lo general empieza eliminando a los nodos más importantes, a los cuales les podemos otorgar esa cualidad por medio de diversas medidas a las cuales llamaremos *centralidades*.

Definición 12. Centralidad: Valor que se le da a un nodo como identificador de su importancia dentro de la red.

La palabra *importancia* tiene muchos significados y eso nos lleva a diferentes definiciones de centralidad.

Definición 13. Centralidad de Grado (Degree): El número de conexiones incidentes en un nodo.

$$C_D(v_i) = \text{deg}(v_i)$$

Esta centralidad es importante para responder muchas preguntas que surgen comúnmente respecto a las redes como lo puede ser la popularidad de las personas o la importancia de un puerto económico.

Definición 14. Cercanía (Closeness): La lejanía de un nodo está definida como la suma de su distancia geodésica a todos los otros nodos, y su cercanía es el recíproco de ella. Esto es:

$$C_C(v_i) = \frac{n-1}{\sum_j L_{ij}}$$

Con n el número de nodos totales.

Este concepto es utilizado cuando es importante saber qué nodos podemos utilizar de pivote para hacer conexiones con el resto tal que la distancia que recorramos sea la mínima. Por ejemplo, si diario se visitan las mismas tres estaciones del Metro, por medio de esta centralidad podríamos encontrar cerca de cuál podríamos vivir para que el traslado sea el mínimo.

Definición 15. Centralidad de Intermediación (Betweenness): El número de veces que un nodo se encuentra dentro del camino más corto entre otros dos nodos.

$$C_B(v_i) = \sum_{j,k} \frac{b_{jik}}{b_{jk}}$$

donde b_{jk} es el número de caminos más cortos desde el nodo j hasta k , y b_{jik} el número de ellos que pasan por el nodo i .

La intermediación o betweenness es de gran importancia para saber los nodos más probables por los que haya un flujo. Es decir, es particularmente útil para las propiedades dinámicas.

Definición 16. Centralidad de Eigenvalor: *Es el eigenvector correspondiente al mayor eigenvalor de la matriz de adyacencias, se organiza por la entrada de mayor valor correspondiente al eigenvector.*

Este es un método basado en la teoría espectral de grafos, del cual deriva la centralidad introducida en los siguientes capítulos. Está relacionado a la conectividad de los nodos, pues las entradas del eigenvector están en función de las aristas incidentes. Éste tipo de centralidad nos da un poco más de información respecto a la topología de la red pues le da un valor alto a los nodos que pertenecen a ciclos y también a los que se encuentran adentro de caminos, dejando los valores menores a los más externos. Para la obtención numérica de el vector asociado al mayor eigenvalor se puede hacer uso del método de potencias.

Definición 17. Método de potencias.

- Sean $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ los eigenvalores de una matriz A de $n \times n$. λ_1 es el mayor eigenvalor de A si $|\lambda_1| > |\lambda_i|, i = 2, \dots, n$
- Se toma una aproximación inicial \mathbf{x}_0 a vector asociado al eigenvalor mayor, que debe ser un vector no cero en R^n y se genera la siguiente secuencia:

$$\mathbf{x}_1 = A\mathbf{x}_0$$

$$\mathbf{x}_2 = A\mathbf{x}_1 = A(A\mathbf{x}_0) = A^2\mathbf{x}_0$$

$$\vdots$$

$$\mathbf{x}_k = A\mathbf{x}_{k-1} = A(A^{k-1}\mathbf{x}_0) = A^k\mathbf{x}_0.$$

Como podemos escribir cualquier vector en el espacio de A como una combinación lineal de sus eigenvectores ya que estos son linealmente independientes y como $Av = \lambda v$ para un v eigenvector y una λ eigenvalor, entonces $A(Av) = A(\lambda v) = \lambda Av = \lambda^2 v$ y así sucesivamente a cada iteración del método de potencias por lo que: $A^k v = \lambda^k v$. Si se aplica lo anterior a la combinación lineal que forma al vector \mathbf{x}_0 en cuestión, entonces cada vez los términos que no corresponden al mayor eigenvalor se vuelven despreciables porque cada vez son más chicos que el

1. INTRODUCCIÓN

asociado a él. De esta manera, \mathbf{x}_k tiende al eigenvector propio asociado al mayor eigenvalor.

- La aproximación inicial x_0 no influye en la convergencia hacia el eigenvector asociado al eigenvalor mayor.

- Como $\mathbf{x}_k = A^k \mathbf{x}_0 = \lambda^k \mathbf{x}_0$:

$$\|\mathbf{x}_k\| = |\lambda^k| \|\mathbf{x}_0\|$$

$$|\lambda^k| = \frac{\|\mathbf{x}_k\|}{\|\mathbf{x}_0\|}$$

- Por el teorema de Perron-Frobenius dicho eigenvalor es real y positivo por lo que podemos quitar el valor absoluto y:

$$\lambda = \left(\frac{\|\mathbf{x}_k\|}{\|\mathbf{x}_0\|} \right)^{\frac{1}{k}}$$

Ya teniendo estas definiciones podemos usar un ejemplo para observar cómo se dan los distintos valores de centralidad.

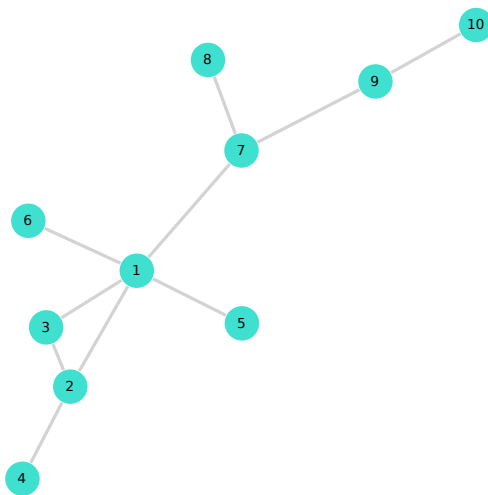


Figura 1.2: Ejemplo de centralidades.

Para ver cómo un nodo puede tener una cierta importancia dentro de una red mediante un tipo de centralidad y otra diferente por otro método, podemos calcular dichos valores para la red 1.2. Añadiendo además de las centralidades anteriormente descritas, una quinta que se definirá en el siguiente capítulo.

Nodo	Degree	Closeness	Betweenness	Eigenvalor	$CI\partial(i, 2)$
1	5	0.64	54	1.18	4
2	3	0.47	16	1.41	4
3	3	0.45	0	1.26	2
4	1	0.33	0	0.50	0
5	1	0.41	0	0.77	0
6	1	0.41	0	0.77	0
7	3	0.56	33	1.14	6
8	1	0.37	0	0.37	0
9	1	0.41	16	0.44	4
10	1	0.3	0	0.20	0

Tabla 1.1: Comparación de centralidades.

En el análisis de vulnerabilidad y robustez de las redes complejas, los resultados de Albert, Jeong y Barabási(22) marcaron un punto de partida; encontraron que algunos aspectos de dichas propiedades dependen de la topología de las redes, en particular de la distribución de grado nodal. Así, las redes libres de escala son consideradas como robustas ante errores o fallas aleatorias en el sistema, mientras que son vulnerables a ataques dirigidos a los nodos más conectados. En contraposición, las redes aleatorias son robustas ante los ataques dirigidos a nodos muy conectados.

Por otro lado, los resultados de Newman(17) muestran que las redes con configuración selectiva en sus distribuciones de grado son más robustas ante la remoción de nodos altamente conectados. Una configuración selectiva se da cuando los nodos con mayor número de conexiones están enlazados con otros nodos altamente ligados. Este comportamiento se observa en redes sociales, mientras que las redes tecnológicas y biológicas tienden a no tener una configuración selectiva. Estos resultados sugieren que las redes sociales son menos vulnerables que las biológicas o las artificiales a ataques a sus nodos más importantes.

Objetivos

2.1. Objetivo general

La finalidad principal de este trabajo consiste en encontrar y justificar una metodología óptima para encontrar una subred tal que al remover esta, se genere una percolación óptima, es decir, dadas las herramientas de estudio de las propiedades dinámicas y estructurales de las redes se propone una combinación mínima de nodos de las mismas para que se pueda considerar que la red resultante no cuenta con un componente gigante. Para esto se describe la metodología para realizar ataques dirigidos y hacer comparaciones de las modificaciones topológicas que se van presentando a cada iteración y mediante dichas variables estructurales encontrar el punto crítico en que se modifica la propiedad dinámica de percolación, es decir, cuando pasa del estado en el que percola al que no. Una vez que se cuente con las herramientas necesarias, se aplicarán estas a la red del narcotráfico en México propuesta por Jesús Espinal, et. al. (11), por lo que propondremos una estrategia óptima de remoción de personajes tal que la red se pueda considerar destruida o fragmentada y también presentar cómo se modifica la topología en la red dependiendo de las estrategias utilizadas para poder llevar a cabo una comparación.

2.2. Objetivos específicos

2.2.1. Estudio de Collective Influence

Como la teoría de redes es un campo de estudio muy reciente y que ha despertado mucho interés en los últimos años, la cantidad de métodos de estudio y resultados que se publican anualmente es muy alta. Muchas de las centralidades que se utilizan aún para otorgar importancia a los elementos en una red, son de carácter heurístico por lo que son muy pocas las metodologías que se desarrollan con un motivo enfocado, dentro de las que sí lo tienen encuentra el caso de *Collective Influence*(7), una medida de

centralidad recientemente desarrollada con el objetivo de maximizar o minimizar flujos de cualquier tipo en una red. Por ello como primer objetivo de este trabajo se tiene la comprensión y el desarrollo de la teoría en la que se basa esta medida.

2.2.2. Implementación computacional

Debido a la alta complejidad en las redes del mundo real, es imposible un estudio analítico manual por lo que el uso de la computadora es esencial para llevar a cabo el desarrollo de este trabajo. De esta manera, se debe primero hacer una representación computacional de las redes que se vayan a estudiar. Una vez que se tienen las representaciones es necesario hacer implementaciones de cada una de las centralidades a utilizar y posteriormente el de los ataques dirigidos. Después de esto será necesario generar las herramientas que permitan comparar las redes resultantes entre las distintas estrategias, para finalmente realizar dicha comparación. Para todo lo anterior se utilizará el lenguaje Julia, que está enfocado al cómputo científico.

2.2.3. Comparación y discusión

El objetivo final consiste en comparar los resultados obtenidos por medio de las implementaciones computacionales y hacer un análisis cualitativo mediante las propiedades cuantitativas encontradas para poder llevar a cabo una interpretación.

Marco teórico

En este capítulo se presentará la construcción del método de *Collective Influence*, para el cual se define una función de energía en la red y se encuentra la contribución de cada nodo en ella, para poder hacer una disminución de la misma al remover óptimamente una selección de los mismos.

3.1. Influencia Colectiva (Collective Influence)

En la sección 1.5 se definió el problema de la percolación óptima el cual se aborda para su estudio en este capítulo. Debemos considerar de la teoría de percolación óptima que un nodo i puede ser desconectado del componente gigante G , porque fue directamente removido o porque lo fue por remoción de otros nodos. En el primer caso $n_i = 0$ mientras que en el segundo $n_i = 1$. Así, podemos ver que n_i no nos puede decir si el nodo i pertenece a G o no, por lo que necesitamos una variable que nos proporcione dicha información, la cual es la probabilidad del nodo i de pertenecer al componente gigante, ν_i y establecemos $\nu_i = 1$ si $i \in G$, y $\nu_i = 0$ si no.

La fracción de nodos en el componente gigante, al remover q de ellos de la red, está dada por:

$$G(q) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \nu_i \quad (3.1)$$

En principio, la percolación óptima minimiza el componente gigante sobre las configuraciones de \mathbf{n} . Sin embargo, una forma funcional explícita de $G(\mathbf{n})$ no es factible, por lo que se hace un acercamiento al minimizar sobre \mathbf{n} de los eigenvalores que controlan la estabilidad de la solución de percolación, la cual puede ser escrita explícitamente en términos de \mathbf{n} . Primero hay que encontrar la relación entre el vector $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \dots, \nu_N)$ y el vector $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_N)$.

Consideremos dos nodos conectados i y j con la arista dirigida hacia j , al remover *virtualmente* j de la red, la pregunta a responder es si el nodo i pertenece a G o no. Esta información es proporcionada por la variable $\nu_{i \rightarrow j} = 1, 0$ que representa la probabilidad

de i de pertenecer al componente gigante conectado en la ausencia de j . Evidentemente $\nu_{i \rightarrow j} = 0$ si $n_i = 0$. Así que el caso interesante es cuando $n_i = 1$. Recordando que j está momentaneamente ausente de la red, la probabilidad de que i pertenezca a G está determinada por el hecho de que **al menos uno de los vecinos de i diferentes de j pertenece a G cuando i es virtualmente removido de la red**. Para una red localmente tipo árbol esto puede ser expresado como:

$$\nu_{i \rightarrow j} = \nu_i \left[1 - \prod_{k \in \partial i \setminus j} (1 - \nu_{k \rightarrow i}) \right], \quad (3.2)$$

Donde $\partial i \setminus j$ es el conjunto de vecinos de i menos j . Si volvemos a añadir a j a la red, obtenemos:

$$\nu_i = n_i \left[1 - \prod_{k \in \partial i} (1 - \nu_{k \rightarrow i}) \right]. \quad (3.3)$$

El sistema definido en la ec. (2.2) siempre admite la solución $\nu_{i \rightarrow j} = 0$ para todo $i \rightarrow j$. Como consecuencia también $\nu_i = 0$ para todo i , lo que nos da $G = 0$. Esta solución es estable, dado que el mayor eigenvalor del operador lineal representado por la matriz de $2E \times 2E$ definida sobre las aristas dirigidas $k \rightarrow \ell, i \rightarrow j$:

$$M_{k \rightarrow \ell, i \rightarrow j} = \frac{\partial \nu_{i \rightarrow j}}{\partial \nu_{k \rightarrow \ell}} \Big|_{\nu_{i \rightarrow j} = 0} \quad (3.4)$$

es menor que uno(16). Llamamos $\lambda(\mathbf{n}; q)$ al eigenvalor mayor del operador \hat{M} , el cual depende del vector \mathbf{n} y añadimos una dependencia paramétrica de la fracción de nodos removidos q . Así, la estabilidad de un conjunto solución \mathbf{n} de $G = 0$ es determinada por la condición $\lambda(\mathbf{n}; q) < 1$.

Para una fracción fija q en general existen muchas posibles configuraciones de \mathbf{n} que satisfacen la ec. (1.11). Cuando $q < q_c$ con cada configuración de \mathbf{n} obtenemos $\lambda(\mathbf{n}; q) > 1$, dado que es imposible encontrar un conjunto de nodos a remover tal que $G(q) = 0$, por lo que corresponde a la inestabilidad de la solución $\nu_{i \rightarrow j} = 0$ dado por un valor de $\lambda(\mathbf{n}; q)$ mayor que 1. Por el contrario, cuando $q > q_c$, tenemos dos distintas posibilidades: existe una configuración \mathbf{n} tal que $\lambda(\mathbf{n}; q) > 1$ lo que corresponde a una remoción de nodos no óptima que es incapaz de destruir al componente gigante ($G(q) > 0$); y por otro lado, es posible encontrar otra configuración para la cuál $\lambda(\mathbf{n}; q) < 1$, lo que corresponde a la red fragmentada con $G(q) = 0$. Como nos aproximamos a q_c por arriba, $q \rightarrow q_c^+$, el número de configuraciones \mathbf{n} tal que $\lambda(\mathbf{n}; q) < 1$ (y por lo tanto $G(q) = 0$) decrece y eventualmente se desvanece en q_c .

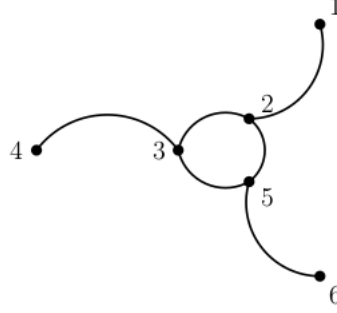
La matriz \hat{M} se puede obtener en términos de la matriz Non-Backtracking (NB) \hat{B} para una red aleatoria localmente tipo árbol por la ecuación:

$$M_{k \rightarrow \ell, i \rightarrow j} = n_i B_{k \rightarrow \ell, i \rightarrow j} \quad (3.5)$$

donde

$$B_{k \rightarrow \ell, i \rightarrow j} = \begin{cases} 1 & \text{si } \ell = i \text{ y } j \neq k, \\ 0 & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases}$$

El operador NB modificado \hat{M} es representado por una matriz de $2E \times 2E$ sobre las $2E$ aristas dirigidas de la red. Por ejemplo, para la siguiente gráfica de $V = 6$ y $E = 6$:



La matriz \hat{M} correspondiente es de 12×12 de la forma:

	1 → 2	2 → 1	2 → 3	2 → 5	3 → 2	3 → 4	3 → 5	4 → 3	5 → 2	5 → 3	5 → 6	6 → 5
1 → 2	0	0	n_2	n_2	0	0	0	0	0	0	0	0
2 → 1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2 → 3	0	0	0	0	0	n_3	n_3	0	0	0	0	0
2 → 5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	n_5	n_5	0
3 → 2	0	n_2	0	n_2	0	0	0	0	0	0	0	0
3 → 4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3 → 5	0	0	0	0	0	0	0	0	n_5	0	n_5	0
4 → 3	0	0	0	0	n_3	0	n_3	0	0	0	0	0
5 → 2	0	n_2	n_2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5 → 3	0	0	0	0	n_3	n_3	0	0	0	0	0	0
5 → 6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6 → 5	0	0	0	0	0	0	0	0	n_5	n_5	0	0

Tabla 3.1: Matriz Non-Backtracking para red de ejemplo.

En consecuencia del teorema de Perron-Frobenius, el eigenvalor mayor de la matriz NB, \hat{B} , es positivo y real mientras que el eigenvector correspondiente se puede escoger tal que todas sus entradas sean positivas.

El eigenvalor de interés en nuestro problema es el mayor de la matriz \hat{M} (no el de \hat{B}), la cual es en efecto una apta modificación de la matriz NB por la vía de óptima remoción de n_i . De esta manera, \hat{M} es una matriz NB en una red modificada donde algunos nodos son removidos de manera óptima ($n_i = 0$). De acuerdo al teorema de Perron-Frobenius, el eigenvalor mayor de la matriz \hat{B} es una función estrictamente decreciente de \hat{B} , esto es si $\hat{M} < \hat{B}$ (con la desigualdad refiriéndose a entrada por entrada de las matrices), entonces $\lambda(\hat{M}) < \lambda(\hat{B})$. La matriz \hat{M} puede obtenerse de \hat{B} al poner uno o algunos $n_i = 0$. Así, el problema de optimización para un q dado puede ser visto como encontrar la configuración influyente óptima \mathbf{n}^* que minimice $\lambda(\mathbf{n}; q)$ sobre todas las

configuraciones posibles \mathbf{n} que satisfagan $\langle n \rangle = 1 - q$. Sea $\lambda(\mathbf{n}^*; q)$ este mínimo:

$$\lambda(\mathbf{n}^*; q) \equiv \min_{\mathbf{n}: \langle n \rangle = 1 - q} \lambda(\mathbf{n}; q). \quad (3.6)$$

El umbral óptimo q_c es la solución de la ecuación:

$$\lambda(\mathbf{n}^*; q) = 1 \quad (3.7)$$

Esta ecuación es difícil de resolver pues no hay una fórmula explícita para $\lambda(\mathbf{n}; q)$ como función de \mathbf{n} . Así que proponemos una secuencia de aproximaciones al eigenvalor mayor (y su eigenvector asociado) basadas en el método de potencias, el cual converge rápidamente a la solución exacta. Hay que subrayar que la solución óptima exacta para $\ell \rightarrow \infty$ sirve sólo bajo la suposición de que la red en consideración es localmente tipo árbol porque de no ser así, un camino cerrado sin retorno no terminaría en el mismo nodo sino en un vecino.

Es de notar en el ejemplo que la matriz \hat{M} no depende de n_1, n_4, n_6 , es decir, no depende de las variables que no pertenecen al ciclo. Como consecuencia, su eigenvalor mayor no depende de esos nodos, $\lambda = \lambda(n_2, n_3, n_5)$. Por lo que remover los nodos en los extremos no reduce a λ , el cual es 1 para la red considerada: $\lambda(1, 1, 1) = 1$. Por el contrario, al remover un nodo perteneciente al ciclo, la red se convierte en un árbol (o un bosque), y el eigenvalor de Perron-Frobenius es cero: $\lambda(0, 1, 1) = \lambda(1, 0, 1) = \lambda(1, 1, 0) = 0$. En general el mayor eigenvalor de una red tipo árbol es cero, para redes con un ciclo, $\lambda = 1$ y para redes con más de un ciclo $\lambda > 1$. Por lo que podemos ver que el resultado de minimizar el mayor eigenvalor de la matriz NB modificada es una forma de atacar a los ciclos en la red. Cuando el eigenvalor alcanza el valor crítico de uno ($\lambda = 1$) la red consiste en un sólo ciclo, que es destruido por la remoción de un sólo nodo, causando una caída inmediata del eigenvalor de 1 a 0. Cuando el componente gigante es reducido a una topología de tipo árbol, se puede considerar completamente fragmentada, pues cualquier árbol puede ser destruido al quitar un número ya definido de aristas (las que contenga el árbol).

3.1.1. Función de costo de energía de influencia

Dado que q siempre se mantiene fijo, se va a omitir de forma que $\lambda(\mathbf{n}; q) \equiv \lambda(\mathbf{n})$. Para una configuración dada \mathbf{n} , el eigenvalor $\lambda(\mathbf{n})$ determina la tasa de crecimiento de un vector no nulo arbitrario \mathbf{w}_0 después de ℓ iteraciones de la matriz \hat{M} , puesto que \mathbf{w}_0 tiene proyección no cero en el eigenvector correspondiente a $\lambda(\mathbf{n})$. Denotando con $\mathbf{w}_\ell(\mathbf{n})$ al vector en la ℓ -ésima iteración,

$$\mathbf{w}_\ell(\mathbf{n}) = \hat{M}^\ell \mathbf{w}_0, \quad (3.8)$$

podemos escribir de acuerdo al método de potencias:

$$\lambda(\mathbf{n}) = \lim_{\ell \rightarrow \infty} \left[\frac{|\mathbf{w}_\ell(\mathbf{n})|}{|\mathbf{w}_0|} \right]^{1/\ell}, \quad (3.9)$$

donde

$$|\mathbf{w}_\ell(\mathbf{n})|^2 = \langle \mathbf{w}_\ell(\mathbf{n}) | \mathbf{w}_\ell(\mathbf{n}) \rangle = \langle \mathbf{w}_0 | (\hat{M}^\ell)^\dagger \hat{M}^\ell | \mathbf{w}_0 \rangle. \quad (3.10)$$

Para una ℓ finita definimos:

$$\lambda_\ell(\mathbf{n}) = \left[\frac{|\mathbf{w}_\ell(\mathbf{n})|}{|\mathbf{w}_0|} \right]^{1/\ell}, \quad (3.11)$$

por lo que tenemos:

$$\lambda(\mathbf{n}) = \lim_{\ell \rightarrow \infty} \lambda_\ell(\mathbf{n}). \quad (3.12)$$

Ahora, para derivar la expresión analítica de $\lambda_\ell(\mathbf{n})$.

Realizamos la primera aproximación de $\ell = 1$:

$$|\mathbf{w}_1(\mathbf{n})\rangle = \hat{M} |\mathbf{w}_0\rangle. \quad (3.13)$$

Para hacer esto, es conveniente incrustar la matriz \hat{M} , cuya dimensión es $2E \times 2E$, a un espacio de dimensión mayor $N \times N \times N \times N$. En este espacio \hat{M} está dado por:

$$M_{ijkl} = n_k A_{ij} A_{k\ell} \delta_{jk} (1 - \delta_{il}), \quad (3.14)$$

donde cada índice va de 1 a N : $i, j, k, \ell = 1, \dots, N$ y A_{ij} es la matriz de adyacencia. Prácticamente, tenemos representada \hat{M} en los nodos de la red, en lugar de las aristas dirigidas. Las deltas de Kroenecker garantizan la naturaleza sin retornos de las caminatas NB.

Como vector $2E$ -dimensional inicial en el espacio de las aristas, escogemos el vector con todas sus componentes igual a uno, $|\mathbf{w}_0\rangle = |1\rangle$; la solución óptima es independiente de esta selección. Los componentes del vector análogo $N \times N$, $|\mathbf{w}_0\rangle$ en el espacio agrandado de nodos está dado por $|w_0\rangle_{ij} = A_{ij}$.

El vector derecho $|\mathbf{w}_1(\mathbf{n})\rangle$ es:

$$|w_1(\mathbf{n})\rangle_{ij} = \sum_{k\ell} M_{ijkl} |w_0\rangle_{k\ell} = n_j A_{ij} (k_j - 1), \quad (3.15)$$

mientras que el izquierdo $\langle \mathbf{w}_1(\mathbf{n}) |$ está dado por:

$${}_{ij} \langle w_1(\mathbf{n}) | = \sum_{k\ell} {}_{k\ell} \langle w_0 | M_{klij} = n_i A_{ij} (k_i - 1). \quad (3.16)$$

Como el factor $k_i - 1$ aparece constantemente, es conveniente definirlo como:

$$z_i \equiv k_i - 1 \quad (3.17)$$

La norma $|\mathbf{w}_1(\mathbf{n})|^2$ es:

$$|\mathbf{w}_1(\mathbf{n})|^2 = \sum_{ij} {}_{ij} \langle w_1(\mathbf{n}) | w_1(\mathbf{n}) \rangle_{ij} = \sum_{ij} A_{ij} z_i z_j n_i n_j. \quad (3.18)$$

3. MARCO TEÓRICO

Como la norma de $|\mathbf{w}_0\rangle$ es simplemente: $|\mathbf{w}_0|^2 = \sum_i k_i = 2E$, podemos escribir la expresión final para $\lambda_1(\mathbf{n})$ de la ecuación (2.11) como:

$$\lambda_1(\mathbf{n}) = \left[\frac{1}{2E} \sum_{ij} A_{ij} z_i z_j n_i n_j \right]^{1/2}. \quad (3.19)$$

El orden de la primera optimización $\ell = 1$ corresponde a un problema de dos cuerpos. En general, el término de orden ℓ , aproximadamente describe un problema de 2ℓ -cuerpos. Sea para $\ell = 2$, $|\mathbf{w}_2(\mathbf{n})\rangle$:

$$|\mathbf{w}_2(\mathbf{n})\rangle_{ij} = \sum_{k\ell} M_{ijk\ell} |\mathbf{w}_1(\mathbf{n})\rangle_{k\ell} = n_j A_{ij} \sum_{\ell} A_{j\ell} n_{\ell} z_{\ell} (1 - \delta_{i\ell}), \quad (3.20)$$

y también $\langle \mathbf{w}_2(\mathbf{n}) |$:

$${}_{ij} \langle \mathbf{w}_2(\mathbf{n}) | = \sum_{k\ell} {}_{k\ell} \langle \mathbf{w}_1(\mathbf{n}) | M_{k\ell ij} = n_i A_{ij} \sum_k A_{ik} n_k z_k (1 - \delta_{kj}). \quad (3.21)$$

La norma $|\mathbf{w}_2(\mathbf{n})|^2$ está dada por:

$$|\mathbf{w}_2(\mathbf{n})|^2 = \sum_{ijkl} A_{ij} A_{jk} A_{k\ell} (1 - \delta_{ik})(1 - \delta_{j\ell}) z_i z_{\ell} n_i n_j n_k n_{\ell}. \quad (3.22)$$

Hay dos tipos de interacciones que se pueden describir en la ecuación anterior, una de 3-cuerpos y una de 4-cuerpos. La última sucede cuando $n_i \neq n_{\ell}$, formando una línea de nodos descrita por:

$$A_{ij} A_{jk} A_{k\ell} z_i z_j n_i n_j n_k n_{\ell}. \quad (3.23)$$

La primera es la representación de un ciclo, lo que sucede cuando $n_i = n_{\ell}$:

$$A_{ij} A_{jk} A_{ki} (z_i)^2 n_i n_j n_k. \quad (3.24)$$

Entonces la aproximación del eigenvalor mayor de $\ell = 2$, $\lambda_2(\mathbf{n})$, está dada por:

$$\lambda_2(\mathbf{n}) = \left[\frac{1}{2E} \sum_{ijkl} A_{ij} A_{jk} A_{k\ell} (1 - \delta_{ik})(1 - \delta_{j\ell}) z_i z_{\ell} n_i n_j n_k n_{\ell} \right]^{1/4} \quad (3.25)$$

En el siguiente orden $\ell = 3$, $|\mathbf{w}_3(\mathbf{n})|^2$ aparece un término de interacción de 6-cuerpos:

$$A_{ij} A_{jk} A_{k\ell} A_{\ell m} A_{mp} z_i z_p n_i n_j n_k n_{\ell} n_m n_p, \quad (3.26)$$

pero también se pueden describir 4 interacciones de 5-cuerpos, 4 de 4-cuerpos y 1 de 3-cuerpos.

3.1.2. Interpretación en términos de caminatas NB y generalización de interacciones

Los nodos que tienen cada tipo de interacción dados por $|\mathbf{w}_1(\mathbf{n})|^2$, $|\mathbf{w}_2(\mathbf{n})|^2$, y $|\mathbf{w}_3(\mathbf{n})|^2$ son los mismos nodos visitados por una caminata NB de longitud 1, 3 y 5 respectivamente (con la posibilidad de pasar por una arista en múltiples ocasiones). En general, la expansión del término $|\mathbf{w}_\ell(\mathbf{n})|^2$ contendrá todas las posibilidades que pueden ser construidas usando los nodos que pasen por una caminata NB de longitud $2\ell - 1$.

Las redes NB en la expansión son construidas con el siguiente método:

- a) Para un ℓ dado construimos todas las caminatas NB de $2\ell - 1$ pasos empezando en el nodo i (con grado k_i) y terminando en el nodo j (con grado k_j).
- b) Los nodos iniciales y finales de la caminata no tienen que ser necesariamente diferentes.
- c) Los ciclos están permitidos en la caminata NB. Así, el camino más corto entre i y j puede ser más pequeño que los $2\ell - 1$ pasos de la caminata.
- d) Hay que recordar que la condición para una caminata NB aleatoria sólo es que no puede regresar por la misma arista por la que acaba de pasar, sin embargo, puede visitar los mismos nodos varias veces.
- e) También las caminatas NB pueden pasar por la misma arista en repetidas ocasiones.
- f) El número de nodos de la caminata NB es el orden de la interacción.
- g) La red dominante siempre es un camino directo (línea) de longitud $2\ell - 1$ y 2ℓ nodos, donde el camino más corto entre el nodo inicial y el final es $2\ell - 1$; las demás opciones, que son las que contienen ciclos, son despreciables para considerar redes aleatorias que son localmente tipo árbol.

Un claro ejemplo de este tipo de redes es el juego de *Piedra-Papel-Tijeras-Lagarto-Spock* en la que podemos encontrar caminos entre cualquiera dos nodos y todos ellos serán sin retornos.

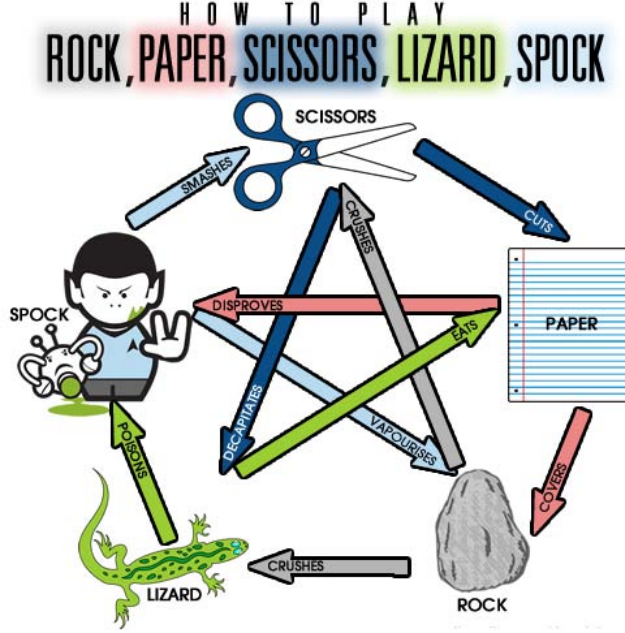


Figura 3.1: Juego de Piedra-Papel-Tijeras-Lagarto-Spock

En el caso de la figura 3.1, tenemos interacciones dirigidas entre cualesquiera dos nodos que son las estrategias del juego. Por la forma en la que definimos todas estas interacciones nos es posible encontrar caminos sin retornos de distintas longitudes entre 2 estrategias.

Sea una gráfica de Erdős-Renyi, donde cada arista está presente con probabilidad $\langle k \rangle / N$. El número total de ciclos de longitud ℓ en la red está dado por:

$$\mathcal{N}(\ell) = \left(\frac{\langle k \rangle}{N} \right)^\ell \frac{1}{2\ell} N(N-1)\dots(N-\ell+1) \sim \frac{\langle k \rangle^\ell}{2\ell}, \quad (3.27)$$

donde el factor $1/2\ell$ viene del hecho que: (a) Cualquiera de los ℓ nodos en el ciclo puede ser tomado como punto de inicio, (b) el ciclo puede ser recorrido en dos direcciones. Por lo tanto, la probabilidad $p(\ell)$ de que un nodo pertenezca a un ciclo de longitud ℓ es:

$$p(\ell) = \frac{\mathcal{N}(\ell)}{N} = \frac{\langle k \rangle^\ell}{2\ell N}. \quad (3.28)$$

Como consecuencia, para una red muy grande, el término principal de $|\mathbf{w}_\ell(\mathbf{n})|^2$ para una ℓ dada (el que contiene 2ℓ nodos) ya es en sí una buena aproximación, que en el límite $N \rightarrow \infty$ se vuelve exacta. Sin embargo, para redes pequeñas todos los términos deben ser considerados.

Como en el límite $N \rightarrow \infty$, los ciclos no contribuyen a la evaluación de la norma $|\mathbf{w}_\ell(\mathbf{n})|$, la ecuación para ella se simplifica considerablemente porque podemos tomar

en cuenta sólo los términos con interacciones de 2ℓ cuerpos; los restantes con ciclos, decaen con velocidad $1/N$.

La expresión analítica para $|\mathbf{w}_1(\mathbf{n})|^2$ y $|\mathbf{w}_2(\mathbf{n})|^2$ dada por las ecuaciones (2.18) y (2.22) puede ser generalizada a toda $|\mathbf{w}_\ell(\mathbf{n})|^2$ de la forma:

$$|\mathbf{w}_\ell(\mathbf{n})|^2 = \sum_{i_1 i_2 \dots i_{2\ell}} A_{i_1 i_2} A_{i_2 i_3} \dots A_{i_{2\ell-1} i_{2\ell}} (1 - \delta_{i_1 i_3}) (1 - \delta_{i_2 i_4}) \dots (1 - \delta_{i_{2\ell-2} i_{2\ell}}) z_{i_1} z_{i_2} n_{i_1} n_{i_2} \dots n_{i_{2\ell}}. \quad (3.29)$$

Cuando los ciclos son omitidos, es posible aproximar el ambiente local al rededor de un nodo por un árbol, junto con la suposición original de localidad tipo árbol. Una manera simple de implementar una aproximación de tipo árbol es considerar sólo las caminatas NB de longitud $2\ell - 1$ que comienzan de un nodo i dado y terminan en los nodos j , de tal manera que estas caminatas NB coincidan con los caminos más cortos entre i y dichos nodos j . Más aún, estas caminatas NB contienen los productos $n_{i_1} n_{i_2} \dots n_{i_{2\ell}}$ con todo n_{i_α} diferente de los otros. De esta manera, podemos escribir la expresión para el término principal de $|\mathbf{w}_\ell(\mathbf{n})|^2$ como:

$$|\mathbf{w}_\ell(\mathbf{n})|^2 = \sum_{i=1}^N z_i \sum_{j \in \partial \text{Ball}(i, 2\ell-1)} \left(\prod_{k \in P_{2\ell-1}(i, j)} n_k \right) z_j, \quad (3.30)$$

Siendo $\text{Ball}(i, \ell)$ el conjunto de nodos dentro de una bola de radio ℓ alrededor del nodo i , donde el radio se define tomando el camino más corto como distancia, $\partial \text{Ball}(i, j)$ es la frontera de la bola y $P_\ell(i, j)$ es el conjunto de nodos pertenecientes al camino más corto de longitud ℓ que conecta i con j . Esta es la función de costo de energía de influencia.

La función de costo de energía (2.30) contiene sólo interacciones pares de 2ℓ -cuerpos. Es posible interpolar con interacciones impares al considerar un análogo de la expansión del método de potencias del eigenvalor en términos de los elementos de la matriz $\langle \mathbf{w}_\ell(\mathbf{n}) | \hat{M} | \mathbf{w}_\ell(\mathbf{n}) \rangle$. El eigenvalor $\lambda(\mathbf{n})$ puede ser descrito por otra expansión en series del método de potencias como:

$$\lambda(\mathbf{n}) = \lim_{\ell \rightarrow \infty} \left[\frac{\langle \mathbf{w}_\ell(\mathbf{n}) | \hat{M} | \mathbf{w}_\ell(\mathbf{n}) \rangle}{\langle \mathbf{w}_0 | \mathbf{w}_0 \rangle} \right]^{1/(2\ell+1)} \quad (3.31)$$

La expresión explícita de $\langle \mathbf{w}_\ell(\mathbf{n}) | \hat{M} | \mathbf{w}_\ell(\mathbf{n}) \rangle$ se puede computar de manera parecida a $|\mathbf{w}_\ell(\mathbf{n})|^2$. Por ejemplo, para $\langle \mathbf{w}_1(\mathbf{n}) | \hat{M} | \mathbf{w}_1(\mathbf{n}) \rangle$:

$$\langle \mathbf{w}_1(\mathbf{n}) | \hat{M} | \mathbf{w}_1(\mathbf{n}) \rangle = \sum_{ijk} A_{ij} A_{jk} (1 - \delta_{ik}) z_i z_k n_i n_j n_k. \quad (3.32)$$

La expresión asintótica para $N \rightarrow \infty$ (que desprecia los ciclos) es similar a la ecuación (2.30), para $\ell \geq 1$:

$$\langle \mathbf{w}_\ell(\mathbf{n}) | \hat{M} | \mathbf{w}_\ell(\mathbf{n}) \rangle = \sum_{i=1}^N z_i \sum_{j \in \partial \text{Ball}(i, 2\ell)} \left(\prod_{k \in P_{2\ell}(i, j)} n_k \right) z_j, \quad (3.33)$$

mientras que para $\ell = 0$:

$$\langle \mathbf{w}_0 | \hat{M} | \mathbf{w}_0 \rangle = \sum_{i=1}^N k_i(k_i - 1)n_i. \quad (3.34)$$

El equivalente a la aproximación de $\lambda(\mathbf{n})$ en la ec. (2.11) es:

$$\lambda'_\ell(\mathbf{n}) = \left[\frac{\langle \mathbf{w}_\ell(\mathbf{n}) | \hat{M} | \mathbf{w}_\ell(\mathbf{n}) \rangle}{\langle \mathbf{w}_0 | \mathbf{w}_0 \rangle} \right]^{1/(2\ell+1)} \quad (3.35)$$

3.1.3. Minimización con Optimización Extrema (EO)

Este método sirve para la minimización del eigenvalor $\lambda(\mathbf{n})$ y tiene la ventaja sobre otros métodos de minimización el hecho de que utiliza por completo la función de energía, incluidos los ciclos.

Consideremos la menor aproximación no trivial del eigenvalor $\lambda(\mathbf{n}) \sim \frac{|w_1(\mathbf{n})|}{|w_0(\mathbf{n})|}$ y su correspondiente función de energía $\mathcal{E}(\mathbf{n})$

$$\mathcal{E}(\mathbf{n}) \equiv | \mathbf{w}_1(\mathbf{n}) |^2 = \sum_{ij} A_{ij}(k_i - 1)(k_j - 1)n_i n_j. \quad (3.36)$$

Sea,

$$b_i = (k_i - 1) \sum_j A_{ij}(k_j - 1)n_j, \quad (3.37)$$

por lo que podemos reescribir la función de energía como:

$$\mathcal{E}(\mathbf{n}) = \sum_i b_i n_i. \quad (3.38)$$

Cada nodo en estado $n_i = 0$ (ausente) tiene contribución cero a la energía, mientras que los nodos $n_i = 1$ tienen una contribución igual a b_i . Por lo tanto, para minimizar la energía $\mathcal{E}(\mathbf{n})$ tenemos que encontrar el conjunto de nodos con la menor b_i bajo la restricción $\sum_i n_i = N(1 - q)$. Es importante notar que b_i depende de los estados n_j de sus vecinos j .

El algoritmo de EO busca explorar el espacio de estados para encontrar las configuraciones con las menores b_i . Para una q fija las variables n_i son en principio asignadas aleatoriamente en dos conjuntos: S_0 que contiene qN nodos a remover $n_i = 0$, y S_1 con $(1 - q)N$ nodos con $n_i = 1$:

$$\begin{aligned} S_1 &\equiv \{i : n_i = 1\}, \\ S_0 &\equiv \{i : n_i = 0\}, \end{aligned} \quad (3.39)$$

con las restricciones $|S_0| = qN$, y $|S_0| + |S_1| = N$. La separación inicial de los nodos en estos dos grupos es arbitraria. Después de esto hay que intercambiar la variable n_i en S_1 con el valor mayor de b_i , con n_j en S_0 con el menor. En otras palabras, hacemos

$n_i = 0$ y $n_j = 1$. Esto no cambia el tamaño de S_1 y S_0 por lo que la restricción global $\sum_i n_i = N(1 - q)$ aún se satisface. La función de energía de (2.38) correspondiente a esta nueva configuración C_1 es evaluada y si $\mathcal{E}(C_1) < \mathcal{E}(C_0)$ la configuración C_1 es guardada junto con el valor de su energía. El algoritmo se repite con los nuevos valores y hasta que no hay una mejora en la minimización de la energía.

Este es el algoritmo básico de EO el cual se puede mejorar por medio de un parámetro τ (τ -EO), en el cual las variables a intercambiar no son determinísticamente seleccionadas al escoger los valores máximos y mínimos de b_i sino por selección aleatoria.

Ordenamos los b_i en dos conjuntos S_0 de manera decreciente y S_1 en creciente:

$$\begin{aligned} b_{\Pi(1)} &\geq b_{\Pi(2)} \geq \dots \geq b_{\Pi(|S_1|)}, \\ b_{\Lambda(1)} &\geq b_{\Lambda(2)} \geq \dots \geq b_{\Lambda(|S_0|)}, \end{aligned} \quad (3.40)$$

donde Π y Λ son dos permutaciones de las etiquetas i de las variables en S_1 y S_0 respectivamente. La peor variable en S_1 (la que tiene mayor valor) es $n_{\Pi(1)}$ que queremos intercambiar con la peor en S_0 , $n_{\Lambda(1)}$ (la que tiene menor valor). La diferencia en este método es ordenar las variables de acuerdo a su valor b_i . Para las variables en S_1 la peor variable es $n_{\Pi(1)}$ con clasificación 1, y la peor es $n_{\Pi(|S_1|)}$ con clasificación $|S_1|$, de manera análoga sucede para S_0 . Entonces se considera la siguiente distribución de probabilidad sobre las clasificaciones de r :

$$P(r) \propto r^\tau, \quad (3.41)$$

con $r \in [1, |S_1|]$ o $r \in [1, |S_0|]$ para las clasificaciones de las variables en S_1 o S_0 respectivamente. A cada iteración se saca un par r_1 y r_0 de $P(r)$ y luego intercambiamos las variables $n_{\Pi(r_1)}$ y $n_{\Lambda(r_0)}$. Después τ -EO procede igual que el EO original. Para $\tau \rightarrow \infty$, recuperamos el EO determinista, intercambiando sólo las peores variables. La idea de usar la distribución libre de escala $P(r)$ es asegurar que ninguna variable es excluida de cambiar de conjunto, mientras que se le da mayor prioridad a las que tienen peor b_i . Al hacerlo aleatorio se hacen posibles reconfiguraciones globales del sistema y así pasar sobre las barreras de energía y encontrar un mejor mínimo. Está probado por Marone y Makse que el valor óptimo es $\tau = 1.7$ (7).

3.1.3.1. τ -EO con interacciones multicuerpos

El caso general de la función de energía que queremos minimizar es:

$$\mathcal{E}(\mathbf{n}) = |\mathbf{w}_\ell(\mathbf{n})|^2 \quad (3.42)$$

que involucra a lo mucho interacciones de 2ℓ -cuerpos, por lo que siempre tenemos el caso de interacciones de un número par de cuerpos. Para tratar sistemas con máximo $(2\ell + 1)$ -cuerpos, se considera la función de energía:

$$\mathcal{E}' = \langle \mathbf{w}_\ell(\mathbf{n}) | \hat{H} | \mathbf{w}_\ell(\mathbf{n}) \rangle. \quad (3.43)$$

Y para poder aplicar el algoritmo de EO debemos cambiar la definición de b_i , por la que encontramos en la ecuación (2.33). Por ejemplo, en el caso de un sistema con interacciones de 4-cuerpos descritos por $|\mathbf{w}_2(\mathbf{n})|^2$:

$$b_i = \sum_{jkl} A_{ij} A_{jk} A_{k\ell} (1 - \delta_{ik})(1 - \delta_{j\ell}) z_i z_\ell n_j n_k n_\ell, \quad (3.44)$$

después de esto se puede aplicar el algoritmo exactamente igual que para el sistema de interacciones de 2 cuerpos.

3.1.4. Algoritmo de CI

Se ha demostrado que encontrar el conjunto óptimo de *influencers* (los nodos con valor de CI más alto) puede ser resuelto al minimizar la función de costo de energía:

$$E_\ell(\mathbf{n}) = \sum_{i=1}^N z_i \sum_{j \in \partial \text{Ball}(i, \ell)} \left(\prod_{k \in P_\ell(i, j)} n_k \right) z_j, \quad (3.45)$$

con $E_\ell(\mathbf{n}) = |\mathbf{w}_{(\ell+1)/2}|^2$ para ℓ impar y $E_\ell(\mathbf{n}) = \langle \mathbf{w}_{\ell/2} | \hat{M} | \mathbf{w}_{\ell/2} \rangle$ para ℓ par. Así, definimos la fuerza de influencia colectiva al nivel ℓ del nodo i como:

$$CI_\ell(i) = z_i \sum_{j \in \partial \text{Ball}(i, \ell)} \left(\prod_{k \in P_\ell(i, j)} n_k \right) z_j, \quad (3.46)$$

y reescribimos la ecuación (2.45) como:

$$E_\ell(\mathbf{n}) = \sum_{i=1}^N CI_\ell(i). \quad (3.47)$$

Podemos ver que $CI_\ell(i) = b_i n_i$, por lo que una manera eficiente y rápida de minimizar la función de costo de energía $E_\ell(\mathbf{n})$ es remover los nodos con mayor influencia colectiva CI_ℓ . Cuando todos los nodos están presentes, $CI_\ell(i)$ se define como:

$$CI_\ell(i) = z_i \sum_{j \in \partial \text{Ball}(i, \ell)} z_j. \quad (3.48)$$

Al computar esta cantidad para cada nodo, podemos obtener al mayor valor de *Collective Influence* y removerlo. Remover nodo por nodo por medio de este principio adaptativo puede destruir la red de una manera óptima y rápida. También podemos aumentar la rapidez con la que trabaja el algoritmo al eliminar una fracción finita de nodos en cada paso. El algoritmo también incrementa su rendimiento al usar valores mayores del radio de la bola ℓ , teniendo su pico de rendimiento en $\ell = 3, 4$ (7).

Cuando ℓ se vuelve mayor que el diámetro de la red, $CI_\ell = 0$ para toda i , por lo que debemos considerar ℓ menor a él. La adaptabilidad del algoritmo de CI usualmente es llamado *ejecución* o *decimation* en la teoría del *Spin Glass*, es una forma colectiva de seleccionar nodos influyentes, pues la remoción de cada nodo depende fuertemente de la historia del proceso.

3.2. Ejemplificación del algoritmo

Se ejemplificará el algoritmo mediante la siguiente red, que se presenta en el artículo de la referencia (9). Esta red tiene un diámetro igual a 6.

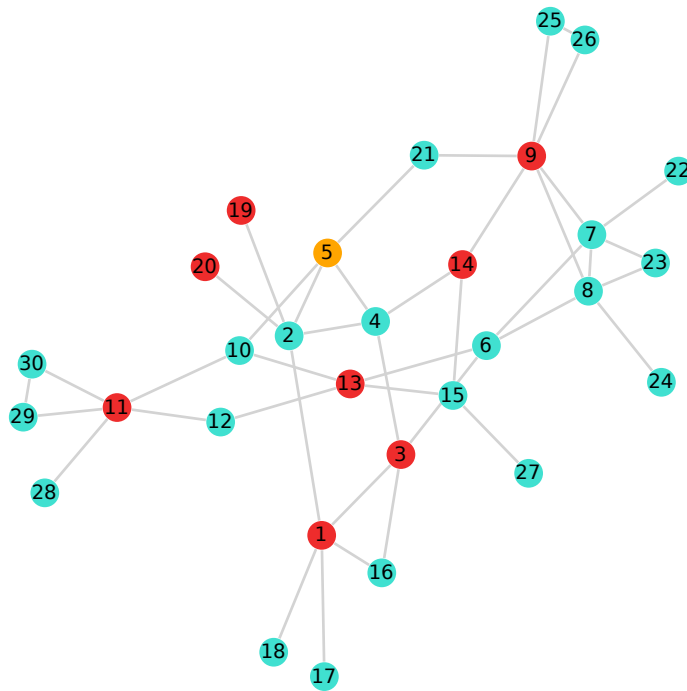


Figura 3.2: Red de Barabási mostrando al nodo 5 (en naranja) y $\partial(i, 2)$ (en rojo).

Tomemos por ejemplo el nodo 5 con $z_5 = 3$, cuya frontera de la bola de radio 2 es $\partial(5, 2) = (1, 3, 9, 11, 13, 14, 19, 20)$ y a su vez $z_1 = 4$, $z_3 = 3$, $z_9 = 5$, $z_{11} = 4$, $z_{13} = 3$, $z_{14} = 2$, $z_{19} = 0$, $z_{20} = 0$. Así $\sum_{i \in \partial(5, 2)} z_i = 21$, por lo tanto $CI(5) = 63$. Al aplicar el algoritmo de CI a distintos radios de la bola para todos los nodos de la red obtenemos los siguientes valores para dicha centralidad:

3. MARCO TEÓRICO

Nodo	CI $\partial(i, 2)$	CI $\partial(i, 3)$	CI $\partial(i, 4)$	CI $\partial(i, 5)$
1	36	64	52	16
2	36	68	52	14
3	60	36	18	6
4	54	51	12	0
5	63	57	3	0
6	57	48	6	0
7	44	64	32	8
8	44	64	32	8
9	60	60	50	10
10	32	44	8	0
11	24	52	88	16
12	9	16	19	2
13	60	63	6	0
14	48	24	8	4
15	28	50	16	0
16	10	16	12	6
17	0	0	0	0
18	0	0	0	0
19	0	0	0	0
20	0	0	0	0
21	21	20	4	0
22	0	0	0	0
23	8	11	16	8
34	0	0	0	0
25	11	12	12	10
26	11	12	12	10
27	0	0	0	0
28	0	0	0	0
29	3	6	13	22
30	3	6	13	22

Tabla 3.2: Valores de CI para cada nodo a distintos radios en red de ejemplo.

De aquí podemos ver que los 5 nodos con CI mayor para $\partial(i, 2)$ son 3, 5, 6, 9 y 13.

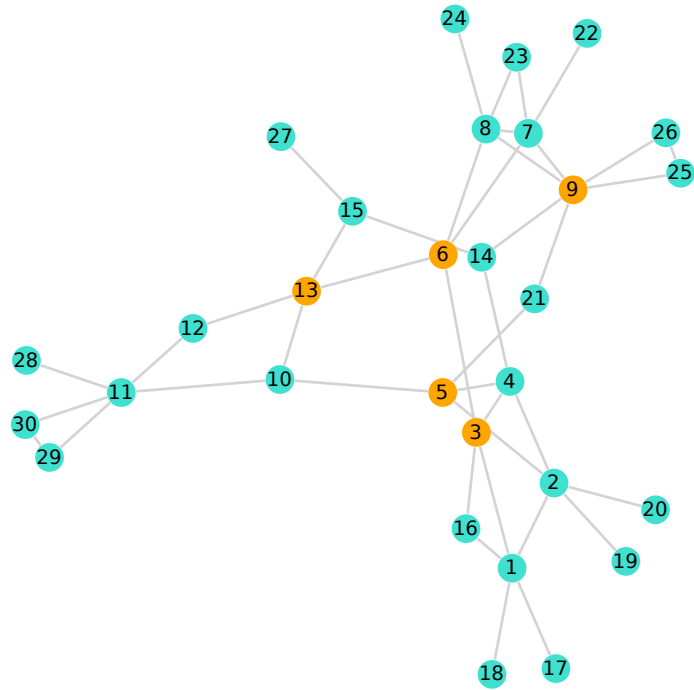


Figura 3.3: Red de Barabási mostrando los 5 nodos con mayor CI para $\partial(i, 2)$ en color naranja.

En el trabajo será importante la localización de los nodos con mayor valor de cada centralidad para poder realizar los ataques. Al desconectar una fracción de nodos en lugar de hacerlo uno por uno se reduce la complejidad computacional de $N^2 \log N$ a $N \log N$ casi sin afectar los resultados. (7)

3. MARCO TEÓRICO

A continuación se muestra una comparación de los valores de CI y Degree en la red.

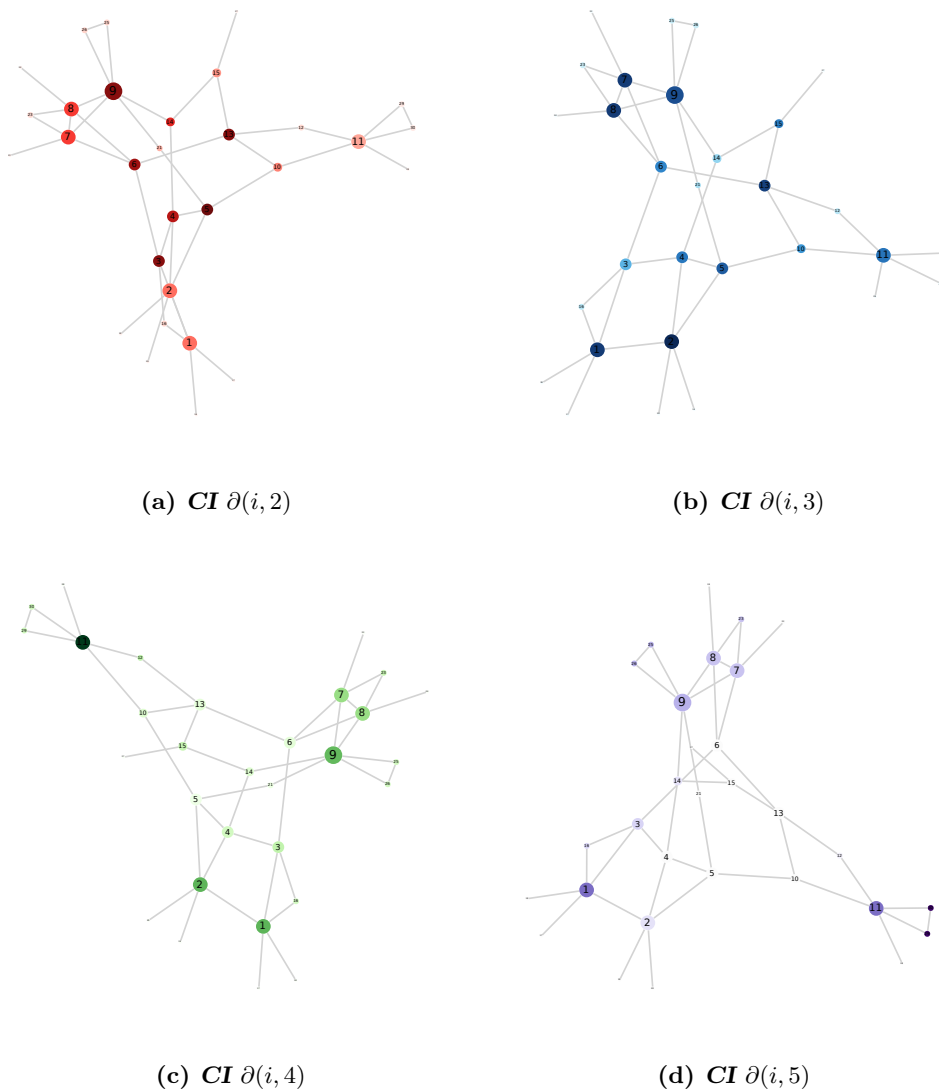


Figura 3.4: Redes de comparación Degreee contra CI a distintos radios.

En 3.4 el tamaño de los nodos es proporcional al valor de Degree mientras que el color va de claro a oscuro en dependencia al CI. En esta figura es fácil observar que no hay una relación directa entre los valores de ambas centralidades pues hay nodos con alto Degreee y bajo CI y visceversa. En este ejemplo los nodos con sólo un vecino también tienen CI bajo pero puede existir el caso en el que su valor sea alto. Cada figura representa un radio distinto de la bola. Por medio de la tabla y las imagenes anteriores podemos observar que no hay una relación directa entre los valores de CI a distintos

radios ni entre ellos ni con el Degree del mismo nodo.

3.3. Ataques a redes de ejemplo

A continuación se presentan algunas redes construidas por diversos algoritmos para después realizarles ataques dirigidos. Se hace referencia al mayor eigenvalor de la matriz Non-Backtracking por la reciente definición de costo de energía en una red compleja que es el parámetro hacia la percolación óptima. En todos los ejemplos se utiliza el algoritmo de CI a distancia $\ell = 2$ al ser redes pequeñas y también se utilizarán las medidas heurísticas de grado (Degree), intermediación (Betweenness) y cercanía (Closeness).

3.3.1. Red del artículo de Barabasi

Se utilizará primero la red del ejemplo anterior, la cual tiene $\lambda_{max} = 2.363$. El ataque se realizó desconectando los 5 nodos con valor más alto de cada centralidad.

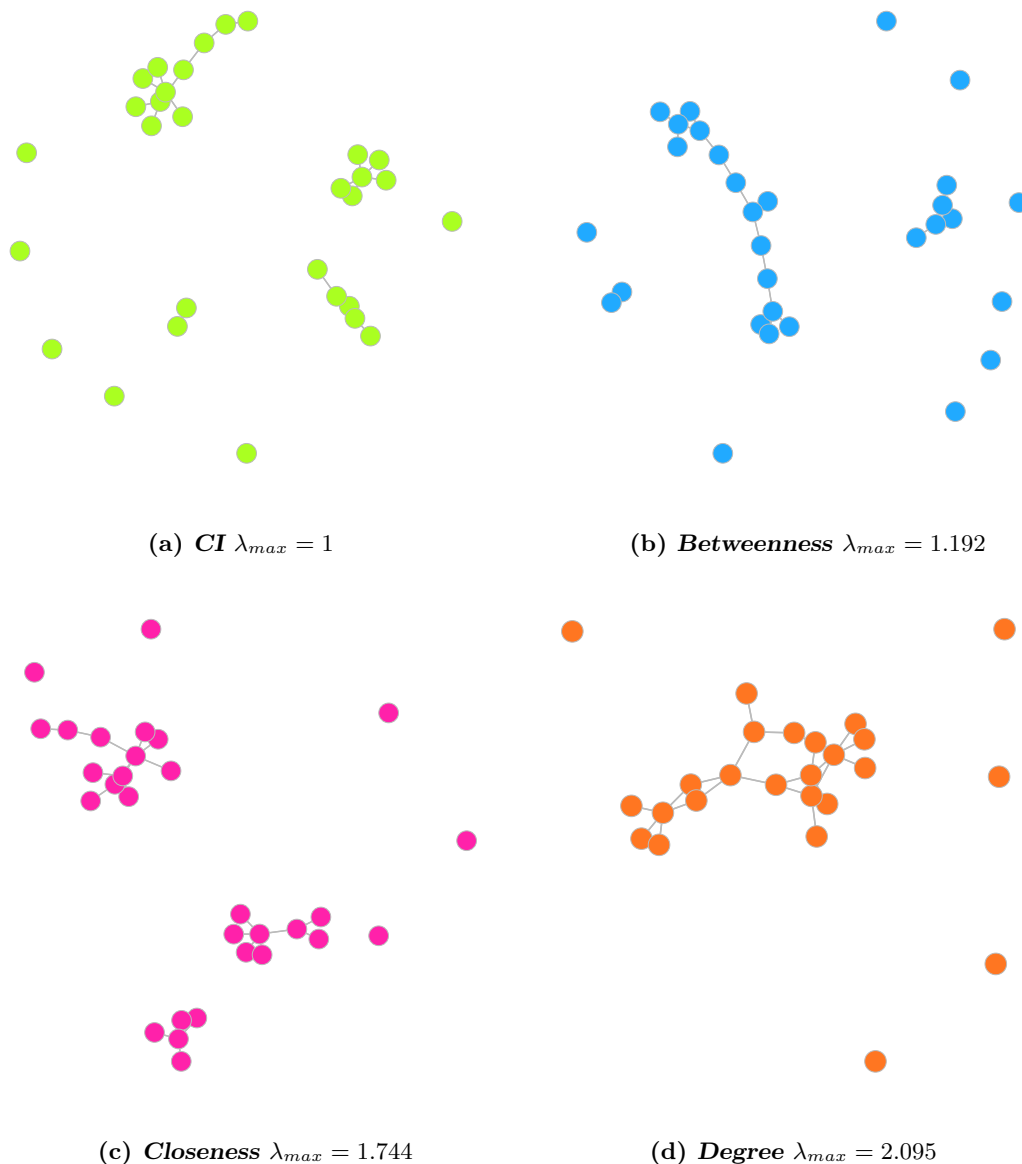


Figura 3.5: Desconexión de la red de Barabási por ataques con diferentes centralidades

A simple vista podemos observar que la red resultante del ataque por CI es arborea mientras que en las otras existen ciclos, esto es más evidente al comparar los máximos

eigenvalores de los que desprendemos que con tan sólo 5 nodos desconectados se resuelve el problema de percolación óptima por medio del algoritmo de CI.

3.3.2. Red tipo Erdős-Rényi

Se creó una red del tipo Erdős-Rényi con 100 nodos y probabilidad de conexión 0.2 y $\lambda_{max} = 20.983$. El ataque se realizó desconectando los 30 nodos con valor más alto de cada centralidad.

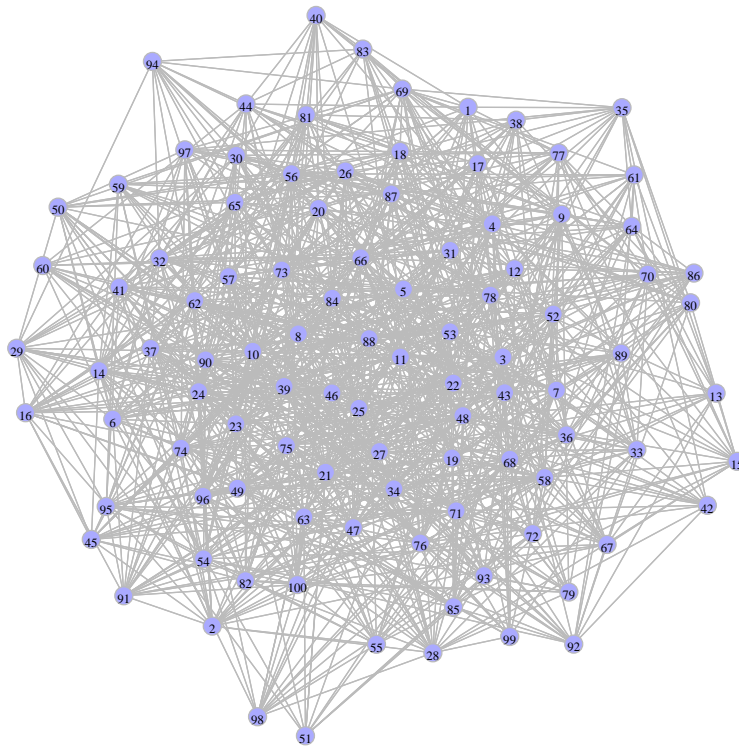


Figura 3.6: Red tipo Erdős-Rényi.

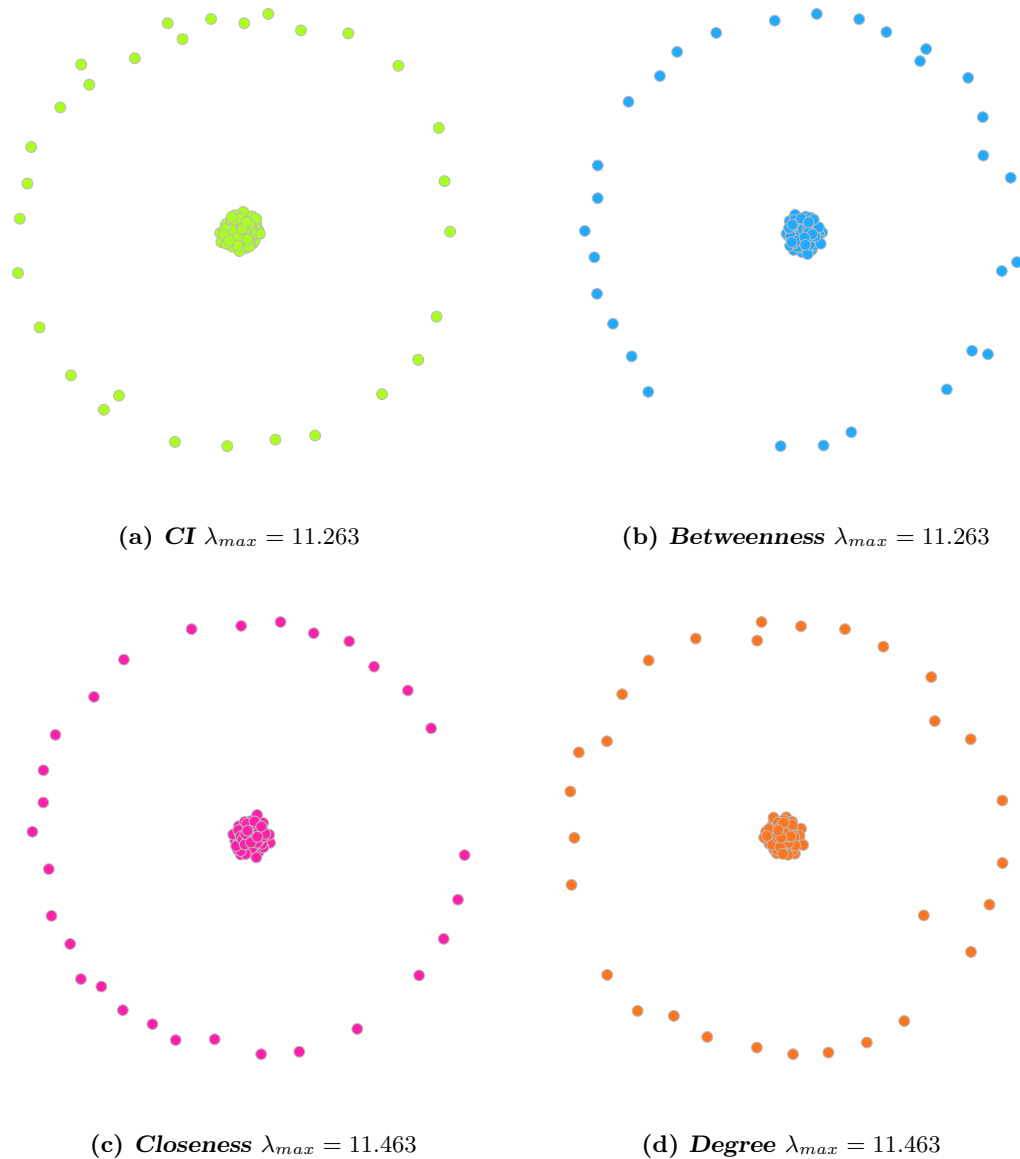


Figura 3.7: Desconexión de la red aleatoria de Erdős-Rényi por ataques con diferentes centralidades.

En la imagen 3.7 podemos notar de las figuras anteriores es que aunque terminaron desconectados el mismo número de nodos en todos los ataques (30), λ_{max} es menor para CI y Betweenness, lo que nos sugiere una estructura menos conectada. Lo anterior resulta cierto pues la red final por medio de esos ataques tiene 420 aristas mientras que en las otras dos son 411 las restantes de un total de 1060 iniciales. Este tipo de redes

son tan robustas que los ataques en general ocasionan poco daño.

3.3.3. Red tipo Watts-Strogatz

Para crear este modelo se utilizaron 100 nodos con $\langle k \rangle = 5$ y una probabilidad de 1, para el cual el valor de λ_{max} es 3.350 y para el cual el ataque de nuevo es la desconexión de los 30 nodos con el valor mayor de cada centralidad.

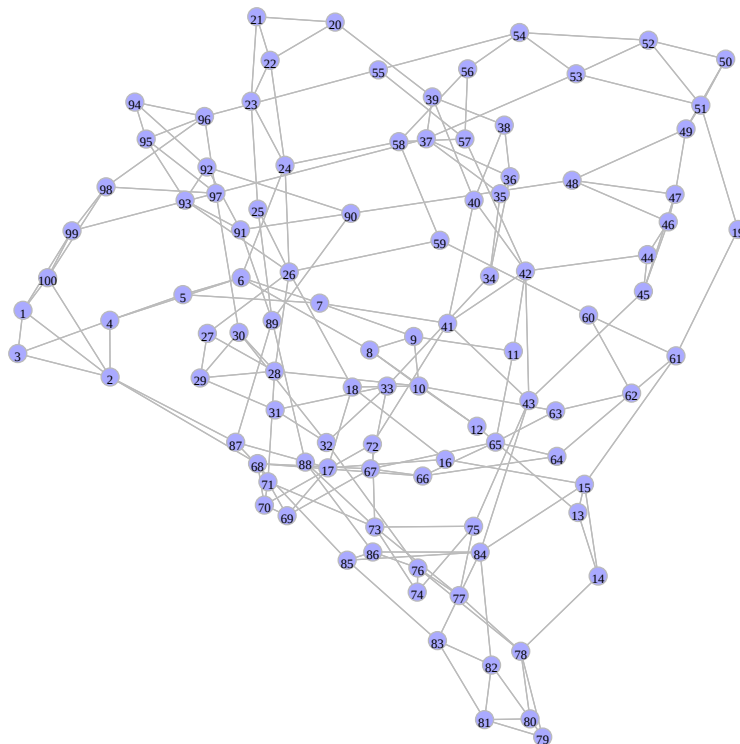
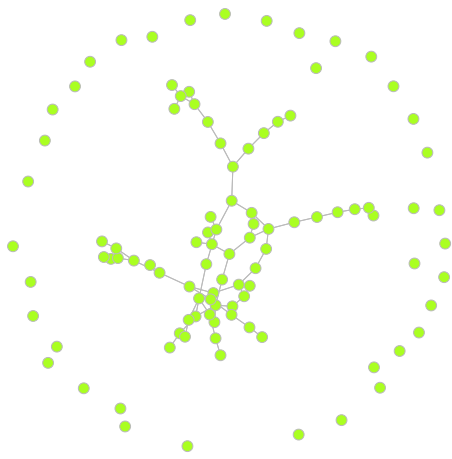
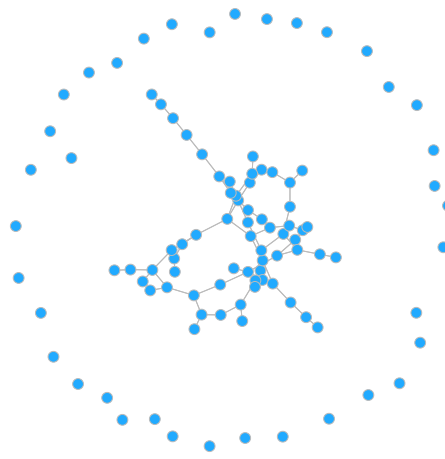


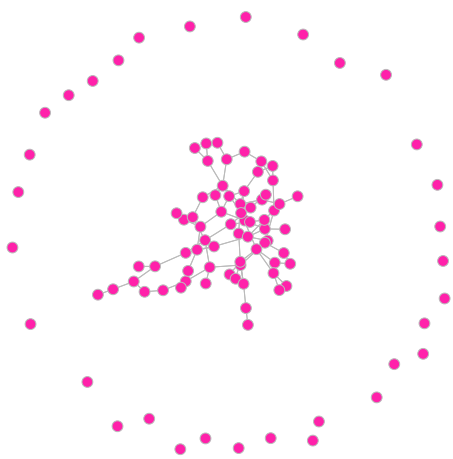
Figura 3.8: Red tipo Watts-Strogatz.



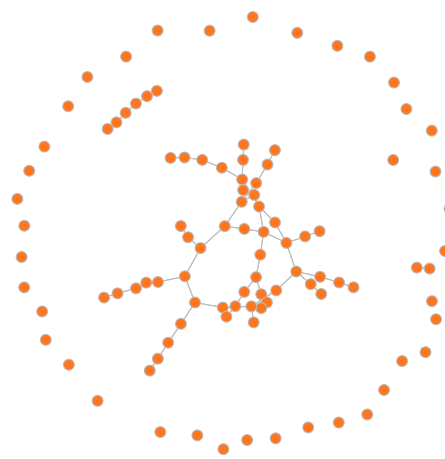
(a) *CI* $\lambda_{max} = 1.538$



(b) *Betweenness* $\lambda_{max} = 1.575$



(c) *Closeness* $\lambda_{max} = 1.898$



(d) *Degree* $\lambda_{max} = 1.540$

Figura 3.9: Desconexión de la red aleatoria de Watts-Strogatz por ataques con diferentes centralidades.

En este ejemplo que es un poco más aproximado a una red real por ser de *mundo pequeño*, podemos observar que las estructuras finales por CI, Betweenness y Degree son muy parecidas pero CI tiene una ligera ventaja respecto al λ_{max} por lo que es menos cíclica y más cercana a la percolación óptima. El resultado más importante que nos arroja este modelo es que como se menciona en el capítulo anterior, la topología de

la red inicial es muy importante para que determinado algoritmo de ataque respecto a una centralidad sea exitoso, pues cada tipo de red es más vulnerable o robusta ante un cierto ataque dependiendo de sus propiedades. Es fácil ver que el número de nodos desconectados en las redes con λ_{max} menor es mayor.

3.3.4. Red tipo Árbol

Se creó una red tipo árbol con 100 nodos. Es evidente que $\lambda_{max} = 0$. Se realizaron ataques de la misma manera que en las redes anteriores.

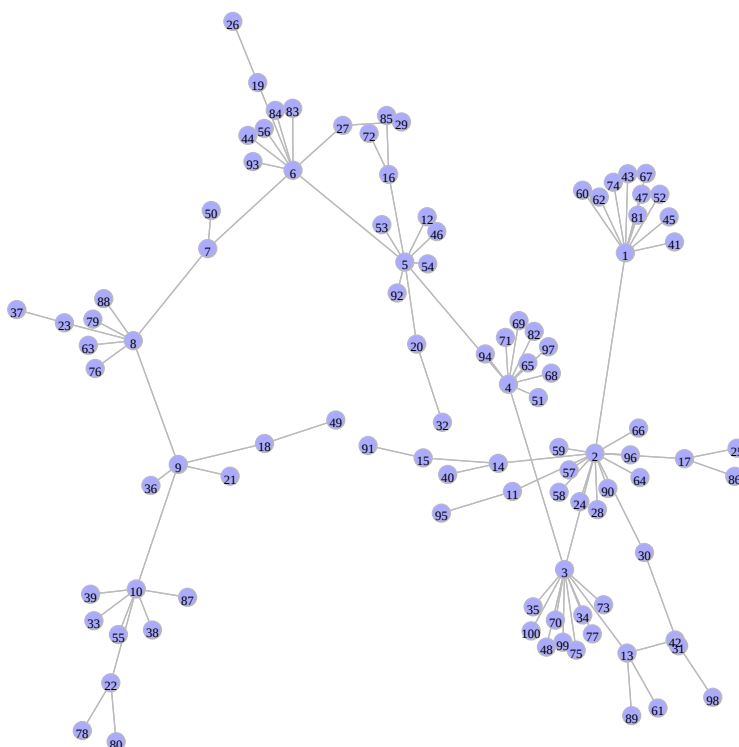
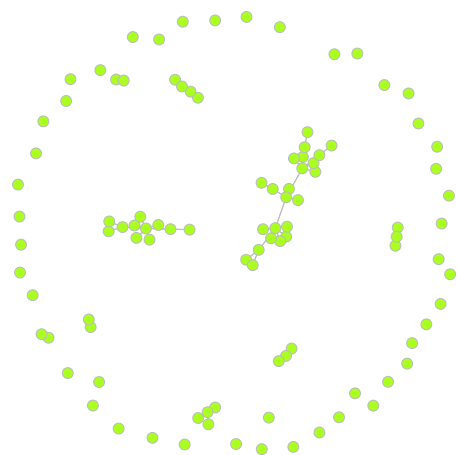
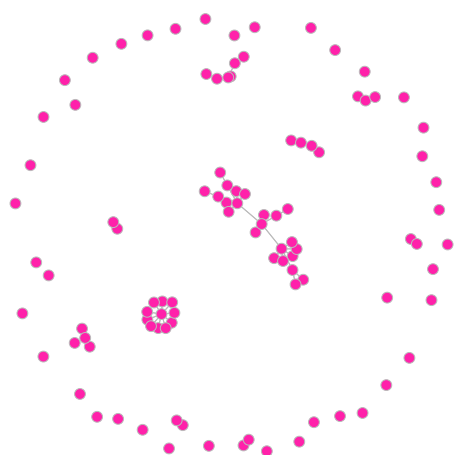
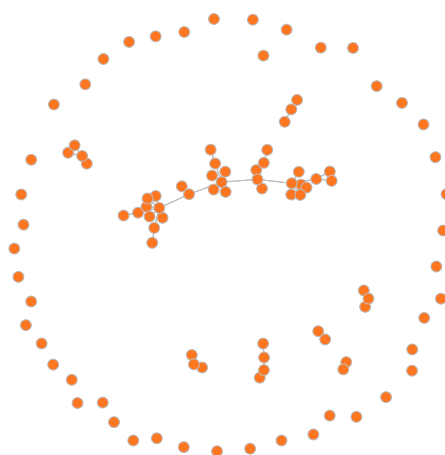


Figura 3.10: Red tipo Árbol.

(a) *CI* $\lambda_{max} = 0$ (b) *Betweenness* $\lambda_{max} = 0$ (c) *Closeness* $\lambda_{max} = 0$ (d) *Degree* $\lambda_{max} = 2.184$ **Figura 3.11:** Desconexión de una red tipo árbol por ataques con diferentes centralidades

En este tipo de redes siempre tendremos un $\lambda_{max} = 0$ que es igual al de la red inicial por lo que no es un buen parámetro para la desconexión. Por otro lado es importante notar que los algoritmos de CI, Betweenness y Closeness tienen un tiempo de fallo menor que el de Degree pues todos ellos necesitan vecinos a distancia mínima de 2 mientras que Degree trabaja a distancia 1. De los ejemplos anteriores podemos inferir una superioridad de la centralidad CI ante las demás para resolver nuestro problema

aunque hay que considerar que la topología de la red inicial es muy importante para llevarlo a cabo, pues la condición que se le pide a las redes para que sea válido es que sean localmente tipo árbol.

Caso de estudio

En éste capítulo se estudiará una red propuesta del *narco* mexicano por medio de minería de textos.

4.1. Contextualización del problema de los Carteles en México

La actualidad de la seguridad en México es una extrema crisis que con el vertiginoso crecimiento que tiene ha debilitado al Estado de una manera irremediable. La ONU estima que existen cerca de los 55 millones de consumidores de droga en Estados Unidos¹, que por lo que sabemos son los demandantes mayoritarios del *bien* (económicamente hablando) que son las drogas. Existen calculos que ubican las ganancias del mercado de menudeo entre los 55 y los 80 mil millones de dólares anuales, mientras que los cárteles estarían percibiendo una cifra cercana a los 15-20 millones(4) sin considerar el aumento de los mismos en el control del menudeo. Un mercado de esta magnitud es una fuente de ingresos en el que por lo mismo muchos quieren participar y más aún considerando la naturaleza inelástica de la demanda. En el 2016 el presupuesto destinado a la seguridad en México fue aproximadamente de 225 mil millones de pesos, equivalentes a 12.5 mil millones de dolares por lo que podemos observar una gran asimetría en la disposición financiera de ambas partes.

En una visión pesimista, dadas las diferencias de recursos con los que se cuentan el único objetivo posible que se puede tener en la guerra que se libra contra el narco actualmente es el de acotar al crimen organizado pues el eliminarlo es una tarea que se aprecia imposible dadas las circunstancias de la demanda de droga y a su vez la demanda de dinero por parte de las organizaciones criminales. Dadas las fortalezas estructurales de México, la guerra comenzada por Felipe Calderón es ganable, pero se necesita un

¹2 millones de consumidores de heroína, nueve de cocaína, 24 de mariguana, 5 de metanfetaminas y 3 de éxtasis.

cambio de estrategia. La apuesta por la fuerza por parte del ejército y el aparato de seguridad pública conlleva el riesgo de que la situación actual empeore pues el crimen organizado no está dispuesto a dejar la posición económica tan privilegiada en la que se encuentra.

Es por eso que las recientemente concebidas ciencias del crimen y la seguridad, que son técnicas de los sistemas complejos, por medio de métodos computacionales, de inteligencia y ciencia de datos, juegan un papel fundamental en la estructuración de las estrategias óptimas a seguir para poder hacer superables esta y otras guerras que pongan en juego el bienestar de la humanidad en general. Con esta motivación es que se lleva a cabo el estudio de este caso.

Gracias a la ley de transparencia, en el 2014 se hizo público un documento de la Procuraduría General de la República en la que se muestra que se tienen identificadas al menos 43 células delictivas que pertenecen a 9 organizaciones que operan en todo nuestro país (19), que ya en sí es una red de alto interés pues con más de 60 mil muertes y 26,121 desapariciones en el sexenio de Felipe Calderón (5) vivimos una época en la que somos el tercer país con mayor número de muertes de civiles por conflictos armados, tan sólo por debajo de Siria e Irak (1). Se propone una red basada en minería de textos del libro *Los Señores del Narco* de Anabel Hernández García, cuya obtención se describe adelante, mediante la cual se propone una aproximación de la red de personajes involucrados lo que permite un estudio de objetos físicos más allá de las entidades organizacionales.

4.2. Construcción de la red

Para construir la red se realizó la siguiente metodología de minería de textos al libro *Los Señores del Narco* de Anabel Hernández García.

- a) **Conversión a texto.** Se convirtió el archivo de extensión PDF por medio de la herramienta *python-pdfminer*, la cual permite mediante el comando *pdf2txt* tomar el texto de un PDF y obtenerlo como texto simple.
- b) **Detección de nombres propios.** Haciendo uso de la herramienta *Natural Language Toolkit (NLTK)* de *Python*, se identificaron los nombres propios que correspondieran a personas. Dado que *NLTK* está escrita para el idioma inglés, fue necesario realizar un curado manual a la lista de nombres obtenida.
- c) **Conjunción de personajes.** Por el hecho de que no se hace mención a los personajes de una sola manera sino una combinación de nombres de pila, apellidos y diversos alias, fue necesario crear un diccionario para dar un identificador único a cada personaje.
- d) **Conexiones.** Para crear las conexiones entre personajes se hizo un script que generara la tupla de ellos si se encontraban a menos de 200 bytes de distancia en

el texto, el número de ocurrencias de dicha tupla genera un peso a la conexión que puede ser de utilidad para trabajos futuros.

- e) **Red.** Las redes se generaron, analizaron y dibujaron por medio del lenguaje de programación *Julia* y los siguientes paquetes: *LightGraphs*, *SimpleGraphs*, *Graph-Plot*, *Colors* y *Gadfly*. [Julia](#).

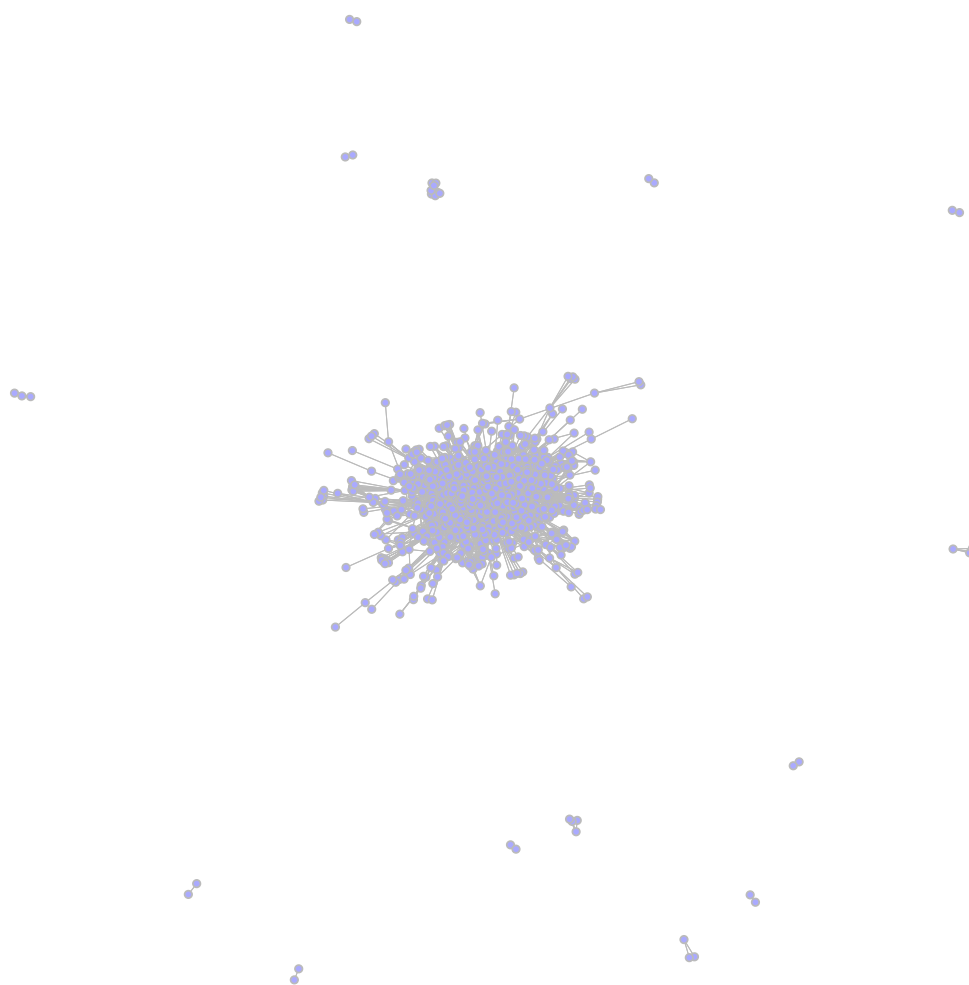


Figura 4.1: Red del Narco

La figura 4.1 muestra el resultado de la red obtenida, la cual tiene 1022 nodos, 6405 aristas y el componente mayor está compuesto por 981 nodos y $\lambda_{max} = 39.756$.

4.3. Ataques a la red

En esta sección se muestran y comparan los resultados al realizar ataques a la red por distintos tipos de centralidades. Para llevar a cabo dichos ataques se escribió un script que realizara el algoritmo siguiente:

1. Calcular el componente mayor, el número de nodos removidos, el número de aristas totales, el grado promedio, el mayor eigenvalor de la NBM, el número de nodos desconectados y guardar los valores en un arreglo para cada uno.
2. Calcular la centralidad de cada nodo.
3. Ordenar la lista de nodos por centralidad de mayor a menor.
4. De esa lista tomar el 1 % más alto y desconectar los nodos correspondientes de la red.
5. Iterar los pasos anteriores hasta que no haya variación en el mayor eigenvalor de la NBM.

4.3.1. Comparación para diferentes radios de CI

Dado que no existe una formulación analítica que nos permita saber cuál es el radio óptimo a usar en una red específica para que el algoritmo de *CI* tenga su máximo rendimiento en el ataque a redes, se debe hacer un análisis numérico. A continuación se muestran los resultados obtenidos para los radios que denotaremos por $\delta = 2$, $\delta = 3$ y $\delta = 4$. Los ataques se realizaron quitando a cada iteración el 1 % de los nodos conectados con valores de *CI* más altos para cada radio.

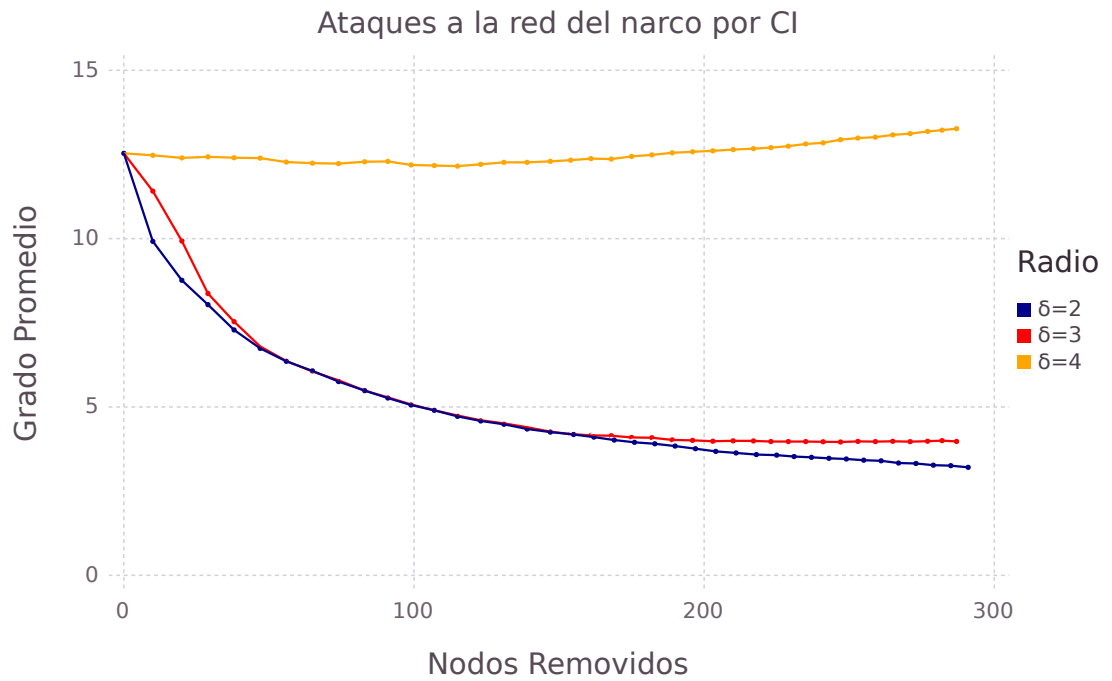


Figura 4.2: Dinámica del grado promedio al desconectar una fracción de nodos por distintos radios de CI de la red del narco.

Llama la atención de la figura 4.2 que es una función creciente para $\delta = 4$. Esto sucede porque se desconectan nodos de grado más bajo que el promedio por lo que este tiende a subir.

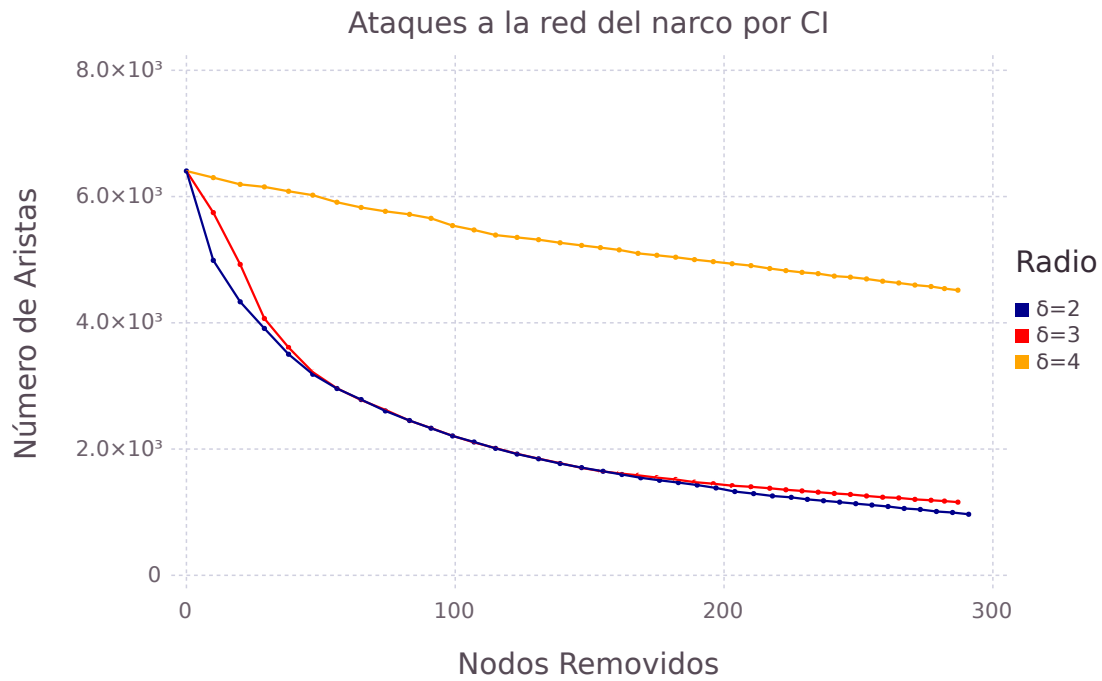


Figura 4.3: Dinámica del número de aristas totales de la red al desconectar una fracción de nodos por distintos radios de CI de la red del narco.

Es muy notorio el hecho de que en la figura 4.3 para $\delta = 4$ se obtienen resultados muy inferiores a los que arroja el algoritmo para los radios $\delta = 2$ y $\delta = 3$.

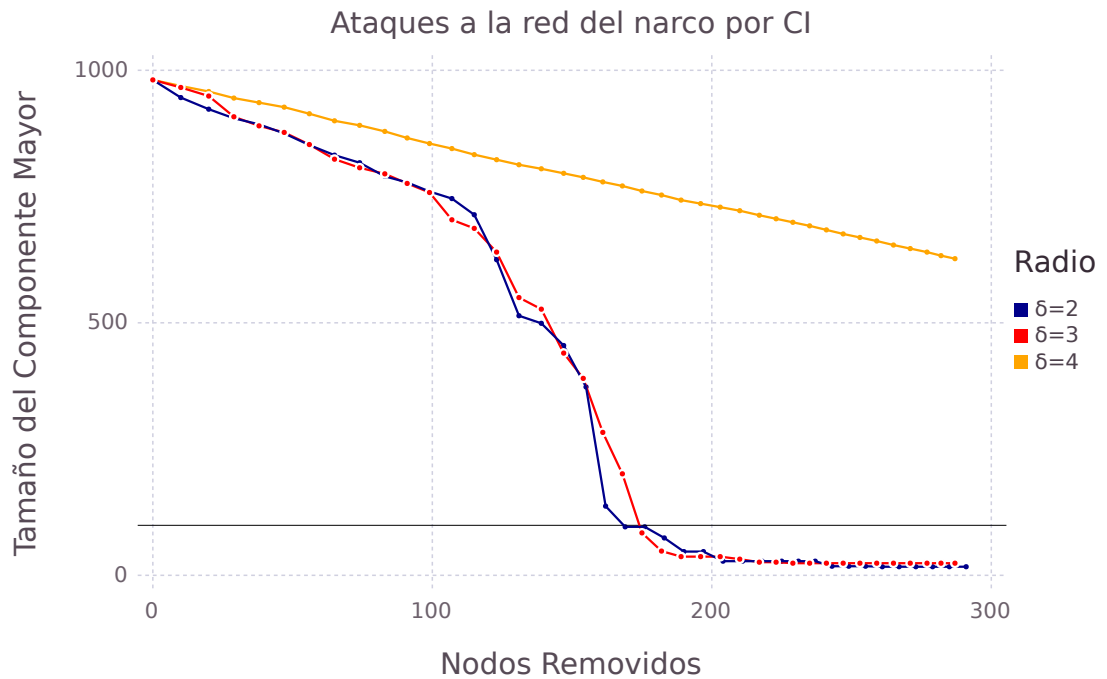


Figura 4.4: Dinámica del orden del componente mayor al desconectar una fracción de nodos por distintos radios de CI de la red del narco.

Podemos observar en todas las figuras anteriores que para $\delta = 4$ se obtienen resultados muy inferiores a los que arroja el algoritmo para los radios $\delta = 2$ y $\delta = 3$. La línea negra representa el orden crítico del componente mayor.

Vemos un resultado muy interesante en la figura 4.4, pues la gráfica es un claro ejemplo de una transición de fase y observamos que justo en dicha transición el orden del componente mayor interseca con el del componente gigante en P_c que es $981^{(2/3)} \simeq 99$.

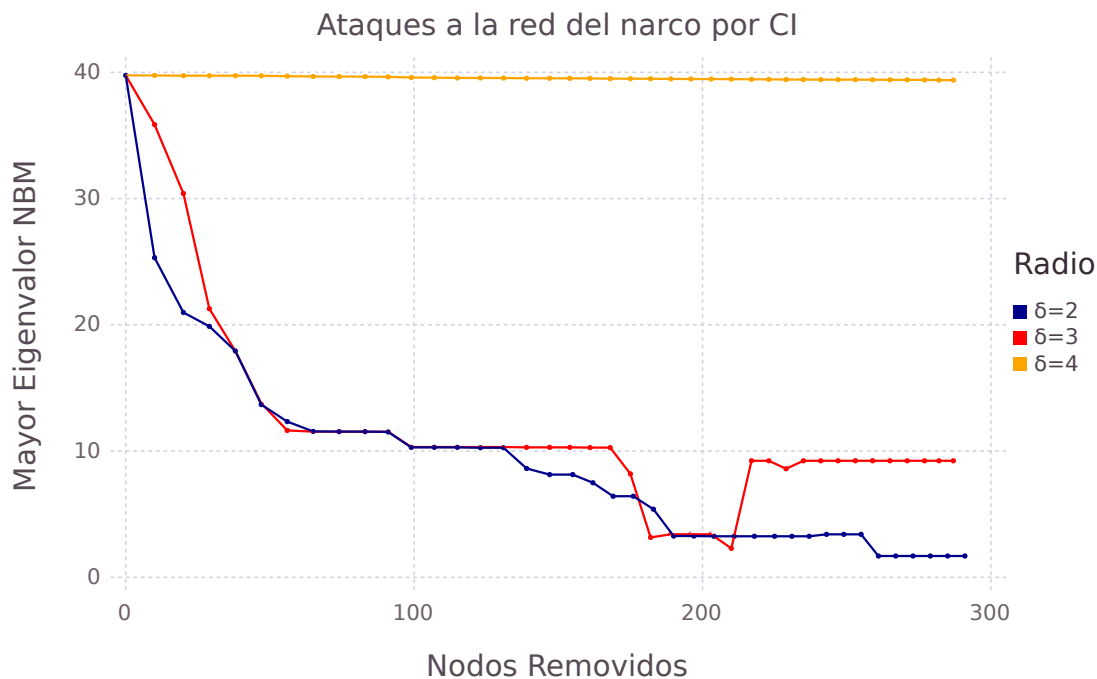


Figura 4.5: Dinámica de λ_{max} del componente mayor al desconectar una fracción de nodos por distintos radios de CI en la red del narco.

En la gráfica 4.5 podemos observar un súbito incremento en el mayor eigenvalor lo que resultaría contra-intuitivo pero esto es debido a un cambio de cluster como componente más grande que evidentemente está más conectado que el anterior. Para $\delta = 4$ se observa un cambio mínimo y lineal debido a que los nodos de mayor valor de CI a este radio deben de ser muy externos y que no son parte de ciclos.

4.3.2. Comparación por centralidades

A continuación se presenta cómo se modifican los parametros por medio de los ataques por distintas centralidades.

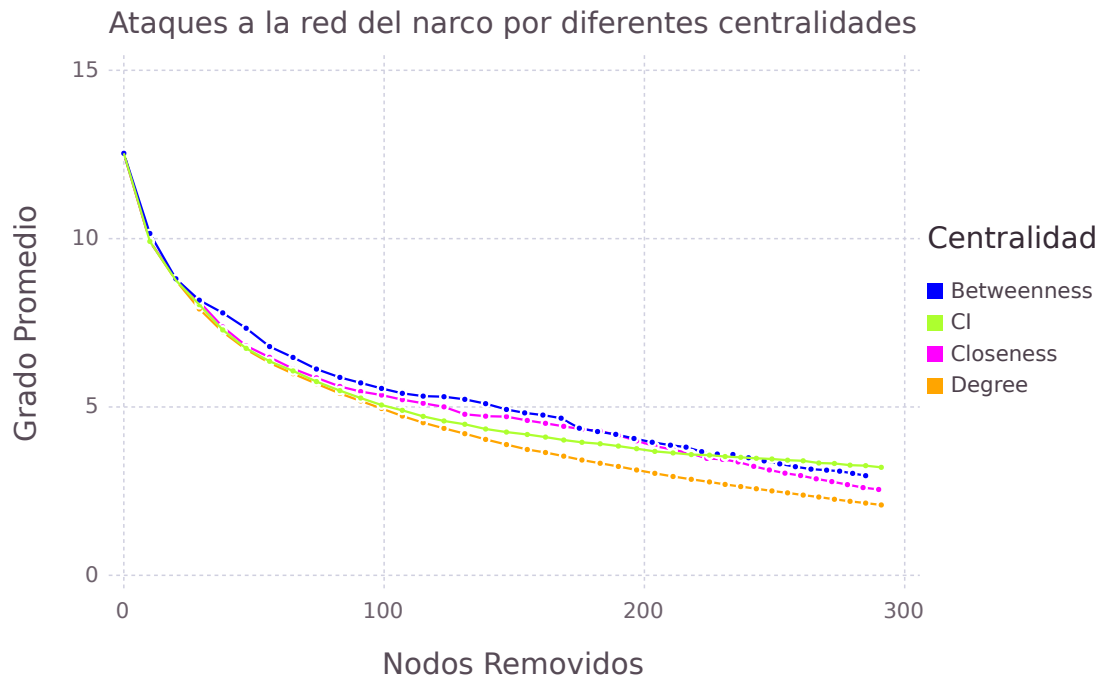


Figura 4.6: Dinámica del grado promedio al desconectar una fracción de nodos por distintas centralidades en la red del narco.

Es evidente que el mejor algoritmo para la reducción de este parámetro es el de Degree pues desconecta exactamente a los nodos de mayor grado.

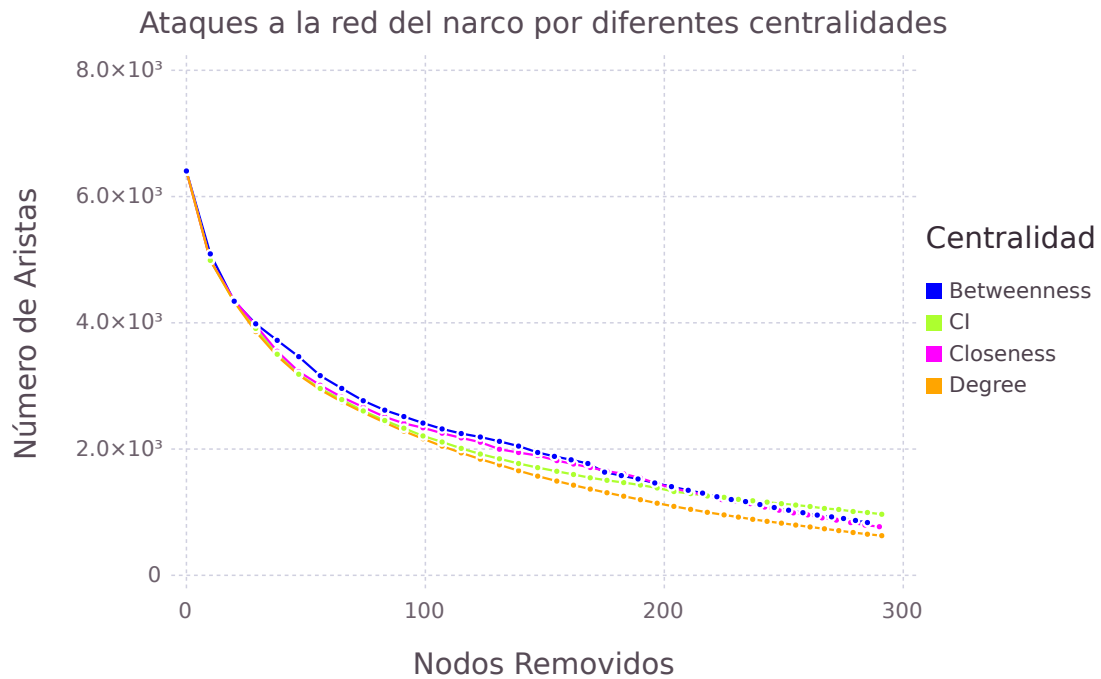


Figura 4.7: Dinámica del número de aristas al desconectar una fracción de nodos por distintas centralidades en la red del narco.

De nuevo la centralidad más eficiente para lograr una disminución en el parámetro correspondiente es Degree, pues desconectando los nodos de grado más alto se eliminan el mayor número de aristas posibles. Este parámetro podría parecer equivalente al anterior pero como se vio en el estudio de los diferentes radios de CI, no lo es.

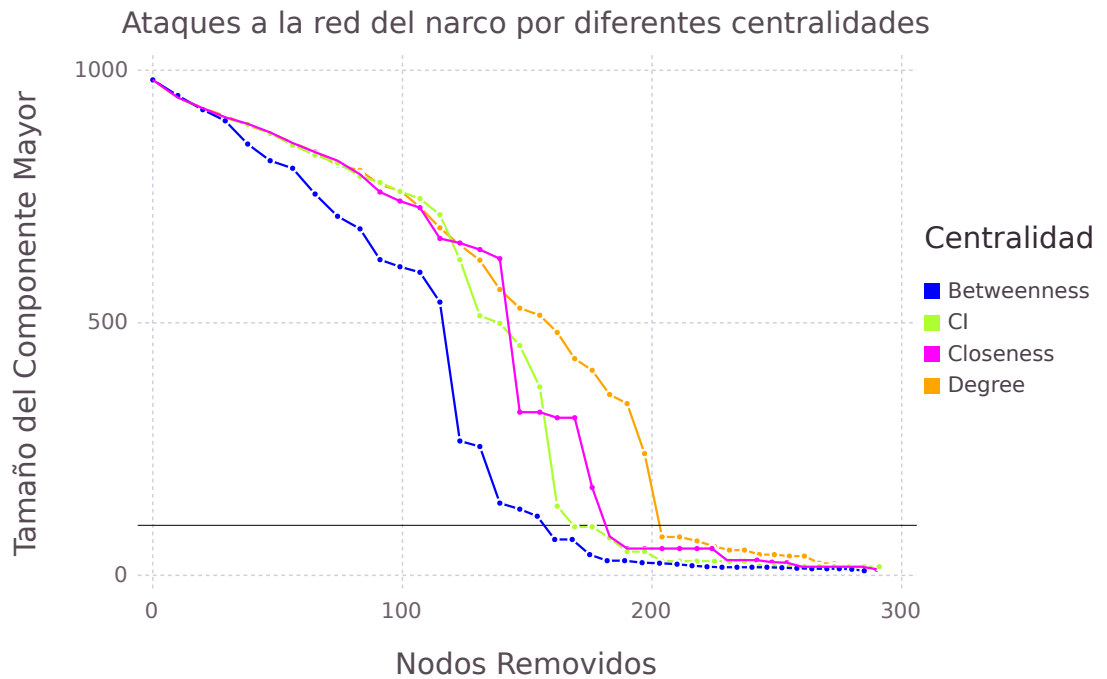


Figura 4.8: Dinámica del orden del componente mayor al desconecta una fracción de nodos por distintas centralidades en la red del narco.

En la figura 4.8 se observa la reducción del componente mayor es más dramática por medio de Betweenness. De la misma manera que en el estudio de los radios de CI, se observa una transición de fase justo en el orden crítico del componente mayor.

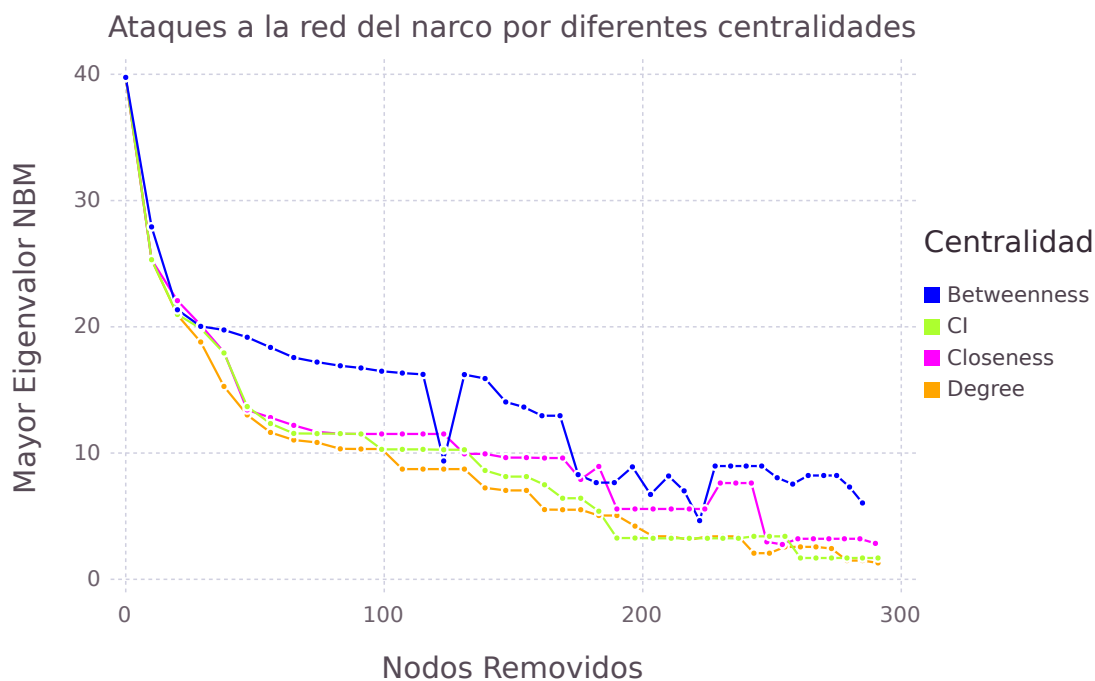


Figura 4.9: Dinámica de λ_{max} del componente mayor al desconectar una fracción de nodos por distintas centralidades en la red del narco.

Podemos observar que aunque los ataques por medio de Betweenness son muy eficientes para la reducción del orden del componente mayor, no lo es tanto para la reducción de λ_{max} , aunque Degree y CI sí lo son. Siendo el último el más equilibrado en la reducción del componente y el eigenvalor.

4.4. Componentes Resultantes

Los componentes gigantes resultantes de la descomposición de la red en cuestión son mostrados en éste apartado.

De esta manera podremos ver a simple vista la diferencia topológica que obtenemos por medio de las eliminaciones de los nodos con mayor valor central, dependiendo de la medida utilizada.

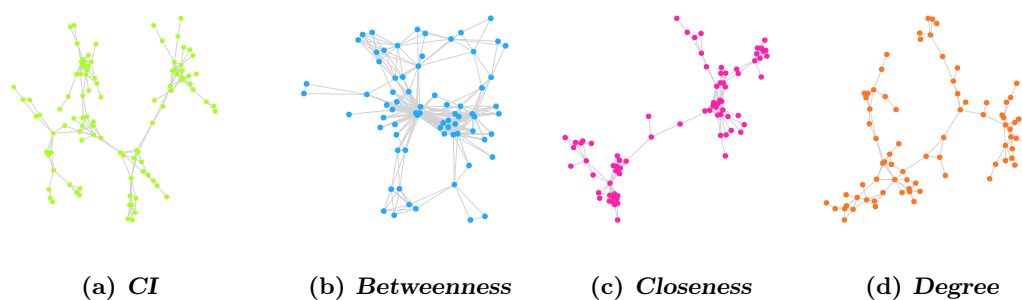


Figura 4.10: Primeros componentes mayores en el orden subcrítico de la red del narco al atacarlos por la respectiva centralidad.

	CI	Betweenness	Closeness	Degree
Iteraciones	20	19	22	25
Orden del componente	96	71	77	76
Nodos removidos	169	161	183	204
Aristas totales	1545	1830	1607	1092
λ_{max}	6.421	12.958	8.937	3.406

Tabla 4.1: Valores de parámetros en el primer componente de orden subcrítico de la red del narco.

4. CASO DE ESTUDIO

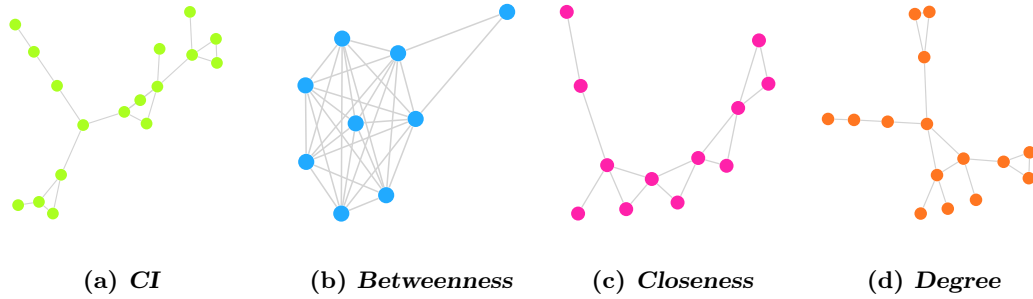


Figura 4.11: Componentes mayores en el valor mínimo del mayor eigenvalor de la matriz NB de la red del narco.

	CI	Betweenness	Closeness	Degree
Iteraciones	34	39	41	37
Orden del componente	17	9	12	15
Nodos removidos	261	285	301	279
Aristas totales	1090	836	718	678
λ_{max}	1.688	6.047	1.788	1.484

Tabla 4.2: Valores de parámetros en el valor mínimo del mayor eigenvalor de la matriz NB de la red del narco.

Discusión y Conclusiones

5.1. Comparación de Centralidades

Para comenzar una comparación es importante recordar que el objetivo de este trabajo es encontrar una forma de desconectar el menor número de nodos posibles de una red tales que obtengamos un componente gigante con el mínimo λ_{max} . Como se vio en el capítulo uno, la transición de fase de percolación se da en una probabilidad crítica en la cual aparece el componente gigante de orden $N^{2/3}$.

En la tabla 4.1 se observa que la centralidad que da un primer orden subcrítico con el menor eigenvalor es Degree, pero también es posible ver que se tiene un número mayor de nodos removidos que en las otras, de hecho hay un comportamiento más eficiente por medio de CI como se observa en la siguiente tabla:

	CI	Degree
Iteraciones	23	25
Orden del componente	47	76
Nodos removidos	190	204
Aristas totales	1430	1092
λ_{max}	3.269	3.406

Tabla 5.1: Valores de parámetros por ataque de CI en comparación con Degree.

Lo que observamos en la tabla 5.1 es que con un menor número de nodos removidos por CI se obtiene un componente mayor menos conectado que en el caso de Degree.

A su vez, en la tabla 4.2 y las redes 4.11 tenemos casi las mismas redes resultantes para CI, Closeness y Degree pero con mucho menor número de nodos removidos por la primera. Por lo tanto, en este contexto podemos decir que el método más eficiente para realizar ataques a una red es mediante la centralidad de Collective Influence, la cual nos permite obtener la red con un λ_{max} más chico al remover una cantidad menor de nodos que las demás centralidades.

5.2. Sobre la red final de los narcos

Podría parecer que para obtener una destrucción de esta red se necesita remover un gran número de personajes, pero dada la cantidad de conexiones que tiene la red inicial si tomamos los 190 nodos removidos de la tabla 5.1, equivale al 18.5% para que entre en una fase subcrítica los cuales no son números tan grandes como para no ser considerados como una estrategia óptima dados los esfuerzos y condiciones actuales. Los primeros personajes a remover son los que tienen una mayor contribución en la energía inicial de la red por lo que son los nombres de mayor interés. A continuación se presenta la lista de los primeros 50 de ellos removidos por medio de Collective Influence.

Lugar	Personaje
1	Joaquín Chapo Guzmán
2	Juan Francisco Guzmán Loera
3	Genaro García Luna
4	Amado Carrillo
5	Rodolfo Carrillo
6	Ismael Zambada
7	Vicente Carrillo
8	Héctor Güero Palma
9	Gloria Félix Gallardo
10	Rafael Félix Gallardo
11	Arturo Beltran Leyva
12	Ignacio Nacho Coronel
13	Benjamin Arellano Félix
14	Miguel Arellano Félix (Jefe de Jefes)
15	Jorge Enrique Tello Peón
16	Arellano Félix
17	Javier Arellano Félix
18	Ramón Arellano Félix
19	Arturo Beltrán Leyva
20	Vicente Fox
21	Rafael Caro Quintero
22	Juan José El Azul Esparragoza
23	Ochoa
24	Valencia
25	Jorge Carrillo Olea
26	Jesús Zambada García
27	María Pomposa Esparragoza
28	Ernesto don Neto Fonseca
29	Ernesto Zedillo
30	Carlos Salinas de Gortari

Tabla 5.2: Personajes eliminados.

De la tabla 5.2 podemos observar que muchos de los personajes que aparecen ya se encuentran muertos o capturados, por lo que hay que recordar que esta es una red basada en la literatura y que al ser una red dinámica es muy probable que diste de una real en este momento. También debemos tener en cuenta que estos son los personajes que tienen una mayor contribución a la definición de energía en la red y que la remoción de estos nos lleva a un estado menos energético, también a consecuencia de la búsqueda de un estado no percolante, la eliminación de ellos implica una mayor dificultad en un flujo dado que se encuentre en la red, como puede ser, de información, dinero, drogas,

etc.

5.3. Perspectivas

5.3.1. Aplicaciones de esta metodología en otras redes

La percolación óptima puede ser utilizada para el estudio de diversas fenomenologías y también como estrategias para ataques u optimización de recursos. Esto puede ser visto en una planeación de redes tecnológicas como telecomunicaciones, carreteras, tuberías o irrigación de campos, pues se pueden minimizar los enlaces para obtener el mayor alcance. En epidemias se pueden localizar los puntos más importantes a inmunizar para que una enfermedad se propague lo menos posible. En marketing podemos localizar los nodos óptimos en una red social para viralizar una campaña con un alcance mayor y más eficiente.

5.3.2. Limitaciones

Como dice la teoría, Collective Influence es eficiente en redes que son localmente tipo árbol aunque sea escalable para algunas que no lo son. Teniendo esto en cuenta se debe manejar con cuidado el estudio por este medio pues podemos obtener resultados poco óptimos. También existe el gran problema de no tener una solución analítica para determinar el radio de la bola óptimo. Una limitante mayor es la poca capacidad que se tiene algunas veces para acceder a información que nos permita la construcción de una red cercana a la realidad, es posible que se obtengan resultados interesantes pero siempre hay que tener en cuenta que nuestra interpretación es tan sólo una abstracción de la realidad.

5.3.3. Trabajo a futuro

Siendo tan joven el estudio de las redes complejas, diariamente se publican resultados que podrían ser de interés para una ampliación de este estudio. El algoritmo de Collective Influence fue publicado el año pasado (2015) siendo precedido por el método de detección de comunidades mediante el espectro de la matriz Non-Backtracking, por lo que el siguiente paso es hacer un estudio de la dinámica de las comunidades obtenidas por dicho método mientras se desconecta la red haciendo uso de la misma matriz.

Bibliografía

- [1] AFP, D. (2015). Siria, irak y méxico con más muertos por conflictos en 2014, reportaje. [46](#)
- [2] Aldana, M. (2006). Redes complejas. *Notas*. [3](#)
- [3] Bohdan, Z. (1983). Locally tree-like graphs. *Časopis pro pěstování matematiky*, 108:230–238. [5](#)
- [4] Canales, R. (2010). Para ganar la guerra del narco. [45](#)
- [5] CNN (2015). Radiografía del narco en méxico: droga, armas, muertes y desapariciones. [46](#)
- [6] Ernesto Zedillo, e. a. (2012). *Rethinking the "War on Drugs" Through the US-Mexico Prism*. Yale Center for the Study of Globalization, CT, USA.
- [7] Flaviano Morone, H. M. (2015). Influence maximization in complex networks through optimal percolation. *Nature*, 524:65–78. [17](#), [29](#), [30](#), [33](#)
- [8] Gary Chartrand, R. P. (1974). Locally connected graphs. *Časopis pro pěstování matematiky*, 99:158–163. [5](#)
- [9] István Kovács, A.-L. B. (2015). Destruction perfected. *Nature*, 524:38–39. [31](#)
- [10] Iyer, S. (2015). What is an intuitive explanation of the hashimoto non-backtracking matrix and its utility in network analysis?
- [11] Jesús Espinal Enríquez, e. a. (2014). A literature-based approach to a narco-network. *Social Informatics*, pages 97–101. [17](#)
- [12] Keith Davids, e. a. (2014). *Complex Systems in Sport*, volume 1 of *Routledge Research in Sport and Exercise Science*. Routledge, NY, USA.
- [13] Laura Lotero, R. H. (2014). Vulnerabilidad de redes complejas y aplicaciones al transporte urbano: Una revisión de la literatura. *Revista EIA*, 11:67–78.

BIBLIOGRAFÍA

- [14] Martin Scheffer, e. a. (2009). Early-warning signals for critical transitions. *Nature*, 461:53–59. [1](#)
- [15] Michael MacDonald, Brett Jackson, A. B. (2012). Complexity science in brief. [1](#)
- [16] MIT (2015). Eigenvalue stability. [20](#)
- [17] Newman, M. (2002). Assortative mixing in networks. *Physical Review Letters*, 89:1–4. [15](#)
- [18] P. Domingos, M. R. (2001). Mining knowledge-sharing sites for viral marketing. *In Proc. 8Th ACM SIGKDD Int. Conf. On Knowledge Discovery and Data Mining*, pages 61–70. [2](#)
- [19] PGR (2015). Organizaciones criminales (epn 2). [46](#)
- [20] R. Pastor-Satorras, A. V. (2001). Epidemic spreading in scale-free networks. *Phys. Rev.*, 86:3200–3203. [2](#)
- [21] Réka Albert, A.-L. B. (2002). Statistical mechanics of complex networks. *Reviews of Modern Physics*, 74:47–97. [5](#), [10](#)
- [22] Réka Albert, Hawoong Jeong, A.-L. B. (2000). Error and attack tolerance of complex networks. *Nature*, 406:378–382. [12](#), [15](#)
- [23] Tommaso Castellani, A. C. (2005). Spin-glass theory for pedestrians. *J. Stat. Mech.*, 5:1–52.

Apéndice

El método de optimización extrema fue desarrollada para los modelos de Ising y de spin glass, por lo que se presenta una introducción a la teoría de estos.

A.1. Modelo de Ising

Una transición de fase está caracterizada por algún parámetro de orden $\phi(\mu)$ que depende de algún parámetro de control externo μ que puede ser variado continuamente. En transiciones críticas, ϕ varía continuamente en μ_c (donde toma el valor de cero) pero las derivadas de ϕ son discontinuas en la criticalidad. Para las llamadas transiciones de primer orden, hay un salto discontinuo en ϕ en el punto crítico.

Aunque el modelo de Ising es de un sistema físico, se ha usado en diversos contextos como los receptores de membranas por Duke y Bray, mercados financieros por Bornhordt y Wagner, ecología por Katori y sistemas sociales por Stauffer. Fue descrito en principio como un modelo simple de comportamiento crítico, pero pronto se notó que proporciona un poderoso contexto para entender diferentes transiciones de fase usando una pequeña cantidad de características fundamentales. El experimento consiste en un retículo de $L \times L$ sitios. Cada uno de ellos ocupado por un **spin** con dos estados posibles: -1 (abajo) y +1 (arriba). La magnetización total $M(T)$ para una temperatura T dada es simplemente la suma $M(T) = (1/N) \sum_{i=1}^N S_i$ donde $N = L^2$. Los spines tienen la tendencia natural de alinearse con sus átomos vecinos en la misma dirección. Si un átomo *abajo* está rodeado por vecinos *arriba*, tenderá a adoptar un estado *arriba*. El estado final sería una reja con sólo unidades *arriba* o *abajo*. Esto define la fase *ordenada*, donde la magnetización toma el valor $M = 1$ o $M = -1$.

El Hamiltoniano es:

$$\mathcal{H} = -\frac{1}{2} \sum_{\langle i,j \rangle} JS_i S_j \quad (\text{A.1})$$

donde $J > 0$ es una constante de acoplamiento (la fuerza de interacciones locales) y $\sum_{\langle i,j \rangle}$ indica la suma sobre los vecinos más cercanos.

El modelo está basado en la observación de que si calentamos una pieza de acero (un

ferromagnético) a una alta temperatura, entonces ninguna atracción magnética es observada. Esto es debido al hecho de que perturbaciones térmicas interrumpen interacciones atómicas al voltear un sólo átomo sin considerar el estado de los vecinos. Si la temperatura aplicada es suficientemente alta, entonces los átomos adquirirán configuraciones aleatorias, y la magnetización global será cero. Esto define la llamada fase de *desorden*. El problema entonces involucra un conflicto entre dos tendencias: la primera hacia el orden, asociada a un acoplamiento entre los átomos más cercanos, y la segunda hacia el desorden, dado el ruido externo.

Podemos ver que los pares de unidades con el mismo valor contribuirán a reducir la energía mientras que pares con valores opuestos la incrementarán. Así, los cambios resultantes de interacciones spin-spin ocurrirán en la dirección de la reducción de energía del sistema al alinear spines en la misma dirección.

El *estado base*, es decir, el de mínima energía es el que contiene todos los spines *arriba* o todos *abajo* (en ambos casos, se tiene $S_i S_j = 1$ para todos los pares). Sin embargo, al comenzar a considerar fluctuaciones térmicas, el sistema podrá explorar diferentes configuraciones. En este contexto, la probabilidad $P(\{S_i\})$ de observar un conjunto $\{S_i\}$ de spines (en un estado) es:

$$P(\{S_i\}) = \frac{1}{Z} \exp\left(-\frac{E(\{S_i\})}{\kappa T}\right) \quad (\text{A.2})$$

siendo Z la normalización $Z = \sum_{\{S_i\}} \exp(-E(\{S_i\})/\kappa T)$ (también conocida como la función de partición). Aquí, $\exp(-E(\{S_i\})/\kappa T)$ es el factor de Boltzmann. Es fácil observar que incrementar T tiene un fuerte efecto: el decaimiento de la exponencial se vuelve más lento y para T grandes, el factor se aproxima a 1 para todas las energías. El aplanado implica que todos los estados son igualmente probables de ser observados.

A.1.1. Spin Glass

Usualmente los materiales sólidos se encuentran en diferentes fases, por ejemplo, ferromagnética, antiferromagnética o paramagnética. En los sólidos paramagnéticos la magnetización es nula, mientras que en los ferromagnéticos aparece magnetización espontánea. Los antiferromagnéticos se caracterizan porque tienen una magnetización escalonada no nula.

Normalmente todos los sólidos a una temperatura suficientemente alta se encuentran en la fase paramagnética (las fluctuaciones térmicas destruyen los posibles estados ordenados de los momentos magnéticos de cada átomo y la magnetización resultante, suma de todos los momentos magnéticos, es nula) mientras que si la temperatura es suficientemente baja se ordenan pasando a una fase ferromagnética (si la interacción entre los momentos magnéticos de los átomos es atractiva) o antiferromagnética (si la interacción es repulsiva).

Sin embargo existen materiales en los que dicha interacción unas veces es positiva pero otras es negativa por lo que se esperará que a temperatura suficiente baja no estarán ni en una fase ferromagnética ni en una antiferromagnética. Estos materiales son los llama-

dos *spin glasses*. A baja temperatura se encuentran en una fase desordenada, mientras que los ferromagnéticos lo están en una muy ordenada.

Definición 18. Frustración: Sean 3 situaciones A , B y C . Una situación A y B favorable dará lugar a una interacción $J_{AB} = 1$ mientras que si son incompatibles $J_{AB} = -1$, análogamente para J_{BC} y J_{AC} . Se dirá que el conjunto de estas tres situaciones es frustrada, es decir, no podemos satisfacer simultáneamente a A , B y C , si $J_{AB}J_{BC}J_{AC} = -1$

Definición 19. Desorden: Se tienen variables aleatorias S que están distribuidas con el peso de Boltzmann y J que lo están mediante una distribución $p[J]$. En el desorden denominado "quenched" (templado o congelado) los elementos del sistema descritos por las variables S tienen tiempos de reacción mucho menores que los elementos del sistema descritos por las J , que podemos denominar variables de control. Los *spin glasses* son un ejemplo de este tipo de desorden. Los *spines* (momentos magnéticos de los átomos magnéticos) cambian mucho más rápido que lo que cambian las posiciones de las impurezas que dan lugar a las J .

En la ecuación (1.13) J representa la función de acoplamiento, la cual induce frustración y desorden al sistema. Normalmente se debe escribir el Hamiltoniano del sistema que representa la energía, para posteriormente escribir la función de partición. En el caso de los *spin glasses* se usa el modelo de Edwards-Anderson (EA), en el que en lugar de tener J oscilante, la tendremos aleatoria, que por lo general será gaussiana, con media nula y varianza uno.

A.2. Códigos

A.2.1. Collective Influence

Código para la obtención de Collective Influence en Julia Language. Para la versión comentada ir a mi [Github](#).

```
function CI(g,n: :Int64)
    n < diameter(g) || error("n debe ser menor que el diametro de la red")
    n > 1 || error("n debe ser mayor que 1")
```

```
CI = zeros(nv(g))
for v in 1:nv(g)
    vec = neighbors(g,vertices(g)[v])
    vec2 = vec
    vec = vcat(vertices(g)[v],vec)
    todos = vec
    distn = Array{Int64,0}
    for l in 1:(n-1)
        todos = union(vec,vec2)
        for m in vec2
            vec2 = union(vec2,neighbors(g,m))
        end
        distn = setdiff(vec2,todos)
    end
    d = zeros(distn)
    for m in 1:length(distn)
        d[m] = (degree(g,distn[m]))-1
    end
    suma = sum(d)
    CI[v] = suma * (degree(g,vertices(g)[v])-1)
end
CI = hcat(collect(vertices(g)),CI)
end
```

A.2.2. Collective Influence para nodos de strings

Este código utiliza el paquete SimpleGraphs

```
function CI(g,n::Int64)
    #n < diameter(g) || error("n debe ser menor que el diametro de la red")
```

```
CI = zeros(NV(g))
for v in 1:NV(g)
    vec = neighbors(g,vlist(g)[v])
    vec2 = vec
    vec = vcat(vec,vlist(g)[v])
    todos = vec
    distn = Array{Int64,0}
    for l in 1:(n-1)
        todos = union(vec,vec2)
        for m in vec2
            vec2 = union(vec2,neighbors(g,m))
        end
        distn = union(setdiff(todos,vec2),setdiff(vec2,todos))
    end
    d = zeros(length(distn))
    for m in 1:length(distn)
        d[m] = (deg(g,distn[m]))-1
    end
    suma = sum(d)
    CI[v] = suma * (deg(g,vlist(g)[v])-1)
end
CI = hcat(vlist(g),CI)
end
```

A.2.3. Eliminación por CI

```
using LightGraphs
```

```
red = readlm("reddeInarco.dat")
```

```
g = Graph()
ultimovertice = Int64(maximum(red))
add_vertices!(g,ultimovertice)
for n in 1:Int64((length(red)/2))
    add_edge!(g,Int64(red[n,1]),Int64(red[n,2]))
end

function quitararistas(g)
    n_v = nv(g)
    CI = zeros(n_v)
    suma = 0
    for v in 1:n_v
        vec = neighbors(g,v)
        vec = vcat(vec,v)
        vec2 = Array{Int64,0}
        for n in vec
            vec2 = union(vec2,neighbors(g,n))
        end
        dist2 = union(setdiff(vec,vec2),setdiff(vec2,vec))
        d = zeros(dist2)
        for n in 1:length(dist2)
            d[n] = (degree(g,dist2[n]))-1
        end
        suma = sum(d)
        CI[v] = suma * (degree(g,v)-1)
    end
    CIordenado = sortrows(hcat(collect(vertices(g)),CI), by=x->(x[2]), rev = true)
    nodoscero = Array{Int64,0}
    for n in 1:n_v
```

```
        if degree(g,n) == 0
            push!(nodoscero,n)
        end
    end
    for n in 1:(Int64(floor((nv(g)-length(nodoscero))*0.01)))
        a = Int64(CIordenado[n,1])
        for m in 1:n_v
            if has_edge(g,a,m) == true
                rem_edge!(g,a,m)
            end
        end
    end
end

function tamanocomponentemayor(g)
    a = connected_components(g)
    b = Array{Array,0}
    c = Array{Int64,0}
    for n in 1:length(a)
        push!(b,collect(a[n]))
        push!(c,length(b[n]))
    end
    elmasgrande = maximum(c)
end

function gradopromedio(g)
    nodos = collect(vertices(g))
    grados = Array{Int64,0}
    nodoscero = Array{Int64,0}
```

```
for n in nodos
    push! (grados,degree(g,n))
    if degree(g,n) == 0
        push! (nodoscero,n)
    end
end
suma = sum(grados)
total = length(nodos)
ceros = length(nodoscero)
nocero = total-ceros
promedio = suma/nocero
end
```

```
function nodoscero(g)
    nodos = collect(vertices(g))
    nodoscero = Array{Int64,0}
    for n in nodos
        if degree(g,n) == 0
            push! (nodoscero,n)
        end
    end
    length(nodoscero)
end
```

```
function mayoreigen(g)
    a = sort(adjacency_spectrum(g), rev=true)
    b = a[1]
end
```

```
function mayornbm(g)
    a = connected_components(g)
    b = Array{Array{Int64},0}
    c = Array{Int64,0}
    for n in 1:length(a)
        push!(b,collect(a[n]))
        push!(c,length(b[n]))
    end
    d = zeros{Int64}(c)
    for n in 1:length(c)
        d[n] = n
    end
    e = sortrows(hcat(d,c),by=x->(x[2]),rev=true)
    componentemayor = a[e[1,1]]
    h = induced_subgraph(g,componentemayor[:])
    N = collect(non_backtracking_matrix(h))
    A = N[1]
    B = sort(norm(eigvals(A)),rev=true)
    C = B[1]
end
```

```
function iterarquitar(g)
    iteracion = Array{Int64,0}
    componentemayor = Array{Int64,0}
    numerodearistas = Array{Int64,0}
    gradoprom = Array{Float64,0}
    mayoreigen = Array{Float64,0}
```



```
ceros = Array(Int64,0)
mayoreigenvnbm = Array(Float64,0)
aristas = collect(edges(g))
aristas = length(aristas)
b = 0
i = 1
push!(iteracion,i)
push!(componentemayor,tamanocomponentemayor(g))
push!(numerodearistas,aristas)
push!(gradoprom,gradopromedio(g))
push!(mayoreigenv,mayoreigen(g))
push!(ceros,nodoscero(g))
push!(mayoreigenvnbm,mayornbm(g))
while aristas != b
    b = aristas
    i += 1
    quitararistas(g)
    aristas = collect(edges(g))
    aristas = length(aristas)
    push!(iteracion,i)
    push!(componentemayor,tamanocomponentemayor(g))
    push!(numerodearistas,aristas)
    push!(gradoprom,gradopromedio(g))
    push!(mayoreigenv,mayoreigen(g))
    push!(ceros,nodoscero(g))
    push!(mayoreigenvnbm,mayornbm(g))
end
itvscmp = hcat(iteracion,componentemayor,numerodearistas,#=
=#gradoprom,mayoreigenv,ceros,mayoreigenvnbm)
```

```
writedlm("CI.dat",itvscomp)
end
```

```
@time iterarquitar(g)
```

A.2.4. Eliminación por otras centralidades

```
using LightGraphs
red = readlm("reddelnarco.dat")
g = Graph()
ultimovertice = Int64(maximum(red))
add_vertices!(g,ultimovertice)
for n in 1:Int64((length(red)/2))
    add_edge!(g,Int64(red[n,1]),Int64(red[n,2]))
end

function quitararistas(g)
    intermedio = #betweenness centrality(g)#degree centrality(g)#closeness centrality(g)
    nodo = collect(1:length(intermedio))
    intermedios = hcat(nodo,intermedio)
    intermedioordenado = sortrows(intermedios, by=x->(x[2]), rev = true)
    nodos = collect(vertices(g))
    nodoscero = Array{Int64,0}()
    for n in nodos
        if degree(g,n) == 0
            push!(nodoscero,n)
        end
    end
    for n in 1:(Int64(floor((length(nodos)-length(nodoscero))*0.01)))
```

```
a = Int64(intermedioordenado[n,1])
for m in nodos
    if has_edge(g,a,m) == true
        rem_edge!(g,a,m)
    end
end
end
end

function tamanocomponentemayor(g)
    a = connected_components(g)
    b = Array{Array{Int64},0}
    c = Array{Int64,0}
    for n in 1:length(a)
        push!(b,collect(a[n]))
        push!(c,length(b[n]))
    end
    elmasgrande = maximum(c)
end

function gradopromedio(g)
    nodos = collect(vertices(g))
    grados = Array{Int64,0}
    nodoscero = Array{Int64,0}
    for n in nodos
        push!(grados,degree(g,n))
        if degree(g,n) == 0
            push!(nodoscero,n)
        end
    end
end
```

```
suma = sum(grados)
total = length(nodos)
ceros = length(nodoscero)
nocero = total-ceros
promedio = suma/nocero
```

```
end
```

```
function mayoreigen(g)
```

```
    a = sort(adjacency_spectrum(g), rev=true)
    b = a[1]
```

```
end
```

```
function nodoscero(g)
```

```
    nodos = collect(vertices(g))
    nodoscero = Array{Int64,0}
```

```
    for n in nodos
```

```
        if degree(g,n) == 0
            push!(nodoscero,n)
```

```
        end
```

```
    end
```

```
    length(nodoscero)
```

```
end
```

```
function mayornbm(g)
```

```
    a = connected_components(g)
```

```
    b = Array{Array,0}
```

```
    c = Array{Int64,0}
```

```
    for n in 1:length(a)
```

```
        push!(b,collect(a[n]))
```

```
        push!(c,length(b[n]))
    end
    d = zeros(c)
    for n in 1:length(c)
        d[n] = n
    end
    e = sortrows(hcat(d,c),by=x->(x[2]),rev=true)
    componentemayor = a[e[1,1]]
    h = induced_subgraph(g,componentemayor[:])
    N = collect(non_backtracking_matrix(h))
    A = N[1]
    B = sort(norm(eigvals(A)),rev=true)
    C = B[1]
end
```

```
function iterarquitar(g)
    iteracion = Array{Int64,0}
    componentemayor = Array{Int64,0}
    numerodearistas = Array{Int64,0}
    gradoprom = Array{Float64,0}
    mayoreigenv = Array{Float64,0}
    ceros = Array{Int64,0}
    mayoreigenvnbm = Array{Float64,0}
    aristas = collect(edges(g))
    aristas = length(aristas)
    b = 0
    i = 1
    push!(iteracion,i)
```

```
push! (componentemayor,tamanocomponentemayor(g))
push! (numerodearistas,aristas)
push! (gradoprom,gradopromedio(g))
push! (mayoreigenv,mayoreigen(g))
push! (ceros,nodoscero(g))
push! (mayoreigenvnbm,mayornbm(g))
while aristas != b
    b = aristas
    i += 1
    quitararistas(g)
    aristas = collect(edges(g))
    aristas = length(aristas)
    push! (iteracion,i)
    push! (componentemayor,tamanocomponentemayor(g))
    push! (numerodearistas,aristas)
    push! (gradoprom,gradopromedio(g))
    push! (mayoreigenv,mayoreigen(g))
    push! (ceros,nodoscero(g))
    push! (mayoreigenvnbm,mayornbm(g))
end
itvscomp = hcat(iteracion,componentemayor,numerodearistas,#=
                                     =#gradoprom,mayoreigenv,ceros,mayoreigenvnbm)
writedlm("Centralidad.dat",itvscomp)
end

@time iterarquitar(g)
```