Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

GRUPO FUNDAMENTAL Y TEOREMA DE SEIFERT-VAN KAMPEN

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICO

PRESENTA:

GUILLERMO GACHUZ ATITLAN

DIRECTORA DE TESIS:

DRA. NATALIA JONARD PÉREZ

2016

Cd.Mx.

1. Datos del alumno
   Gachuz
   Atitlan
   Guillermo
   47518059
   Universidad Nacional Autónoma de México
   Facultad de Ciencias
   Matemáticas
   307523583
2. Datos del tutor
   Dra
   Natalia
   Jonard
   Pérez
3. Datos del sinodal 1
   Dr
   Carlos
   Prieto
   de Castro
4. Datos del sinodal 2
   Dr
   Gerardo
   Acosta
   García
5. Datos del sinodal 3
   Dr
   Sergey
   Antonyan
6. Datos del sinodal 4
   Dr
   Valente
   Santiago
   Vargas
7. Datos del trabajo escrito
   Grupo Fundamental y Teorema de Seifert-van Kampen
   74 p
   2016

Investigación realizada gracias al Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e Innovación Tecnológica (PAPIIT) de la UNAM IA104816 *Acciones de grupos en variedades de dimensión infinita*. Agradezco a la DGAPA-UNAM la beca recibida.

Índice general

Prefacio

Un problema fundamental en Topología es determinar cuándo dos espacios topológicos son homeomorfos. Para demostrarlo es suficiente exhibir una biyección continua con inversa continua, o bien, demostrar que no existe tal función entre dichos espacios. Muchas veces esto resulta bastante complejo, por lo que se trata de encontrar alguna propiedad topológica -un invariante topológico- que cumpla un espacio y el otro no; de manera que, para poder determinar si los espacios son topológicamente distintos baste verificar este hecho. El presente trabajo versa sobre uno de estos invariantes topológicos, el Grupo Fundamental, y sobre el *Teorema de Seifert-van Kampen* que nos dará información acerca de esta estructura algebraica.

El primer capítulo es de carácter introductorio y contiene definiciones y resultados básicos que se utilizan a lo largo de la tesis. Se estudian los conceptos de trayectorias homotópicas, espacios cubrientes, levantamientos de trayectorias y homotopías, retractos y retractos fuertes por deformación; esto con el fin de presentar el grupo fundamental y crear la herramienta necesaria para calcular dicho grupo.

Dentro del segundo capítulo se generaliza la idea de suma directa de grupos abelianos al producto libre de grupos. También se define el concepto del producto libre de grupos, producto externo libre y grupos libres. Además, se demuestra la existencia y unicidad bajo isomorfismos de los mismos y se presenta una caracterización que sirve para demostrar el *Teorema de Seifert-van Kampen*, el cual relaciona al producto externo libre con el grupo fundamental.

El tercer capítulo está destinado únicamente a la demostración del *Teorema de Seifert-van Kampen*.

Finalmente, en el cuarto capítulo se ven aplicaciones usando toda la herramienta desarrollada en los apartados anteriores. Se calcula el grupo fundamental de algunos espacios topológicos y se verifica la importancia de dotar a los espacios de estructuras algebraicas.

1 El grupo fundamental

Empezaremos dando algunas definiciones y propiedades del grupo fundamental de un espacio topológico para después demostrar el Teorema de Seifert-van Kampen. Dicho teorema nos ayudará a calcular el grupo fundamental de espacios complejos a través del grupo fundamental de espacios más sencillos.

1.1 Homotopías

A lo largo de este trabajo usaremos la letra I para denotar el intervalo $[0,1]$.

Definición 1.1.1. *Sean X y Y espacios topológicos, f y f' funciones continuas de X en Y. Diremos que f es **homotópica** a f', si existe una función continua $F : X \times I \longrightarrow Y$ tal que*

$$F(x,0) = f(x) \quad y \quad F(x,1) = f'(x) \quad para\ toda\ x \in X.$$

*La función F es llamada **homotopía** entre f y f'. Si f es homotópica a f' escribiremos $f \simeq f'$. En el caso de que $f \simeq f'$ y f' sea una función constante diremos que f es **nulhomotópica**.*

Definición 1.1.2. *Sean J un intervalo en $\mathbb{R}$ y X un espacio topológico , diremos que una función $f : J \longrightarrow X$ es una **trayectoria** en X si f es continua. En caso de que J sea un intervalo de la forma $[a,b]$ y $f(a) = x_0$ y $f(b) = x_1$, entonces* *llamaremos a f una trayectoria de x_0 a x_1 con x_0 el* ***punto inicial*** *de f y x_1 el* ***punto final*** *de f.*

Para la construcción del grupo fundamental, consideraremos el caso especial en que f es un trayectoria en X con dominio I, por lo que apartir de este momento sólo consideraremos trayectorias con dominio I.

Definición 1.1.3. *Sean f y f' dos trayectorias en X, diremos que son* ***trayectorias homotópicas*** *si tienen el mismo punto inicial x_0 y el mismo punto final x_1, y si además existe una homotopía $F : I \times I \longrightarrow X$ entre f y f' que cumpla*

$$\begin{aligned} &F(s,0) = f(s) \quad y \quad F(s,1) = f'(s) \quad \textit{para toda } s \in I, \quad y \\ &F(0,t) = x_0 \qquad y \quad F(1,t) = x_1 \qquad \textit{para toda } t \in I. \end{aligned}$$

En este caso llamaremos a F una ***homotopía de trayectorias*** *entre f y f'. Si f y f' son trayectorias homotópicas escribiremos $f \simeq_t f'$.*

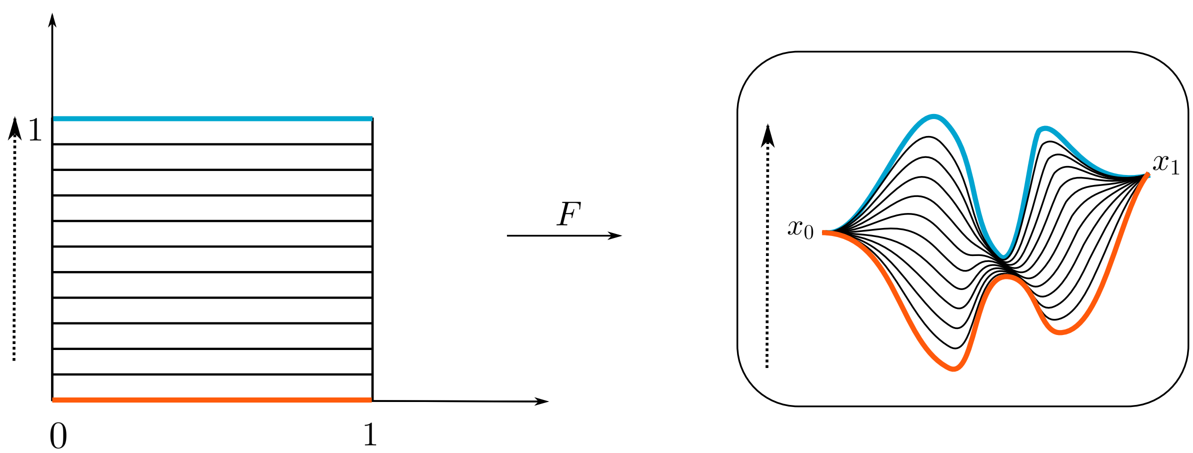


Figura 1.1: Homotopía de trayectorias.

Empezaremos demostrando un lema que será de gran utilidad para verificar la continuidad de ciertas funciones.

Lema 1.1.4 (Lema del Pegado). *Sean $X = A \cup B$, con A y B cerrados (abiertos) en X. Si $f : A \longrightarrow Y$ y $g : B \longrightarrow Y$ son funciones continuas tales que para toda $x \in A \cap B$, $f(x) = g(x)$, entonces la función $h : X \longrightarrow Y$ dada por*

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \textit{si } x \in A, \\ \\ g(x) & \textit{si } x \in B, \end{cases}$$

es continua.

Demostración. Supongamos que A y B son cerrados en X. Sea $U \subseteq Y$ cerrado, entonces

$$(h)^{-1}(U) = (h)^{-1}(U) \cap (A \cup B) = (h|_A)^{-1}(U) \cup (h|_B)^{-1}(U) = (f)^{-1}(U) \cup (g)^{-1}(U).$$

Por la continuidad de f y g tenemos que $(f)^{-1}(U)$ y $(g)^{-1}(U)$ son cerrados en A y B respectivamente, y como A y B son cerrados en X, entonces $(f)^{-1}(U)$ y $(g)^{-1}(U)$ son cerrados en X, es decir, $(h)^{-1}(U)$ es cerrado en X. Por lo tanto, h es continua. La demostración es análoga suponiendo A y B abiertos. ■

Lema 1.1.5. *Las relaciones $\simeq$ y $\simeq_t$ son de equivalencia.*

Demostración. Demostraremos primero que la relación $\simeq$ es reflexiva.

Dada una función continua $f : X \longrightarrow Y$ definimos la función $F : X \times I \longrightarrow Y$ por $F(x,t) = f(x)$, de donde

$$F(x,0) = f(x) \quad \text{y} \quad F(x,1) = f(x) \quad \text{para toda } x \in X.$$

Para concluir que F es una homotopía entre f y f, falta ver que F es continua. Consideremos la función continua $p : X \times I \longrightarrow X$ dada por $p(x,t) = x$, entonces $F = f \circ p$, con lo cual F es la composición de funciones continuas y por lo tanto continua.

En el caso de la relación $\simeq_t$ consideramos una trayectoria f entre y_0 y y_1. Definimos la función $\widetilde{F} : I \times I \longrightarrow Y$ dada por $\widetilde{F}(s,t) = f(s)$. De lo anterior es claro que $\widetilde{F}$ es una homotopía entre f y f, además,

$$\widetilde{F}(0,t) = y_0 \quad \text{y} \quad \widetilde{F}(1,t) = y_1 \quad \text{para toda } t \in I.$$

Por lo tanto, $\widetilde{F}$ es una homotopía de trayectorias entre f y f.

Vamos a demostrar que la relación $\simeq$ es simétrica.

Sean f y f' funciones continuas de X en Y tales que $f \simeq f'$, mostraremos que $f' \simeq f$. Sea F una homotopía entre f y f', y definamos la función $G : X \times I \longrightarrow Y$ como $G(x,t) = F(x, 1-t)$. Observemos que

$$G(x,0) = f'(x) \quad \text{y} \quad G(x,1) = f(x) \quad \text{para toda } x \in X.$$

La continuidad de G se debe a que es una composición de funciones continuas, $G = F \circ h$, donde la función $h : X \times I \longrightarrow Y$ está definida por $h(x,t) = (x, 1-t)$. Por lo tanto, $f' \simeq f$.

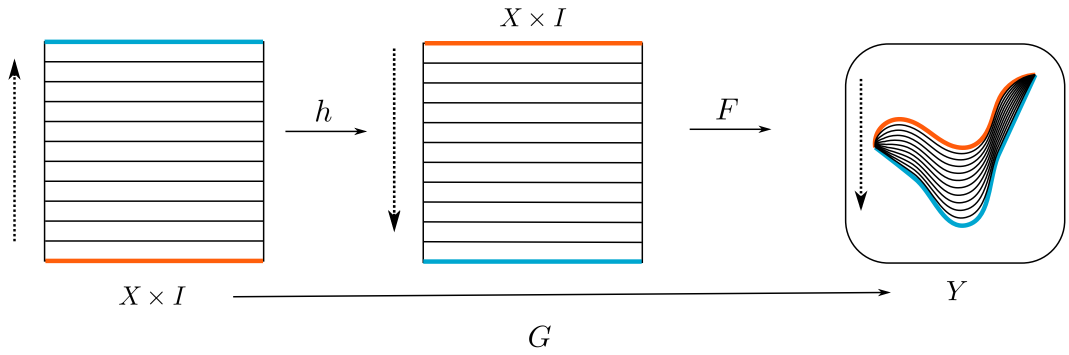


Figura 1.2: Simetría.

En el caso de que f y f' sean trayectorias entre y_0 y y_1, entonces existe una homotopía de trayectorias $\widetilde{F}$ entre f y f' . Definimos $\widetilde{G} : I \times I \longrightarrow Y$ como $\widetilde{G}(s,t) = \widetilde{F}(s, 1-t)$. De lo anterior se sigue que $\widetilde{G}$ es continua y cumple que

$$\widetilde{G}(0,t) = \widetilde{F}(0,1-t) = y_0 \quad \text{y} \quad \widetilde{G}(1,t) = \widetilde{F}(1,1-t) = y_1 \quad \text{para toda } t \in I.$$

Por lo tanto, $f' \simeq_t f$.

Por último, veamos que la relación $\simeq$ es transitiva. Sean f, f' y f'' funciones continuas de X en Y tales que $f \simeq f'$ y $f' \simeq f''$, es decir, existe una homotopía F entre f y f', y una homotopía G entre f' y f''. Definimos la función $H : X \times I \longrightarrow Y$ como

$$H(x,t) = \begin{cases} F(x,2t) & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}], \\ \\ G(x,2t-1) & \text{si } t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Observemos que $H(x, \frac{1}{2}) = F(x,1) = G(x,0) = f'(x)$ para toda $x \in X$, es decir, está bien definida. Por lo tanto, por el lema del pegado, podemos concluir que H es continua, además,

$$H(x,0) = F(x,0) = f(x) \quad \text{y} \quad H(x,1) = G(x,1) = f''(x) \quad \text{para toda } x \in X.$$

Con lo cual obtenemos que la relación es transitiva.

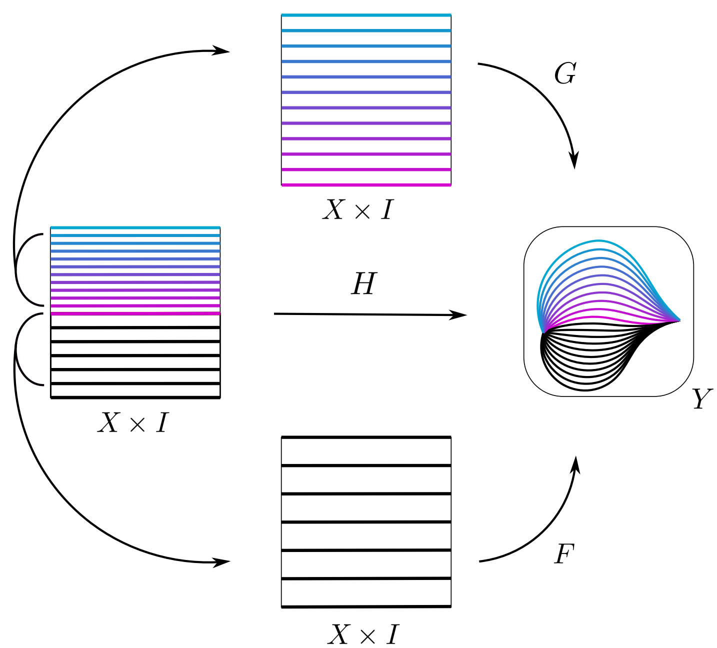


Figura 1.3: Transitividad.

En el caso de que f, f' y f'' sean trayectorias de y_0 a y_1, por ser trayectorias homotópicas existen $\widetilde{F}$ una homotopía de trayectorias entre f y f', y $\widetilde{G}$ una homotopía de trayectorias entre f' y f''. Definimos la función $\widetilde{H} : I \times I \longrightarrow Y$ como

$$\widetilde{H}(s,t) = \begin{cases} \widetilde{F}(s,2t) & \text{si } t \in [0,\frac{1}{2}], \\ \\ \widetilde{G}(s,2t-1) & \text{si } t \in [\frac{1}{2},1]. \end{cases}$$

Esta función resulta ser una homotopía entre f y f'' con la siguiente propiedad:

$$\begin{aligned} \widetilde{H}(0,t) = \widetilde{F}(0,2t) = y_0 \quad \text{si } t \in [0,\tfrac{1}{2}] \quad y \quad \widetilde{H}(0,t) = \widetilde{G}(0,2t-1) = y_0 \quad \text{si } t \in [\tfrac{1}{2},1], \\ \widetilde{H}(1,t) = \widetilde{F}(1,2t) = y_1 \quad \text{si } t \in [0,\tfrac{1}{2}] \quad y \quad \widetilde{H}(1,t) = \widetilde{G}(1,2t-1) = y_1 \quad \text{si } t \in [\tfrac{1}{2},1]. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $f \simeq_t f''$. ∎

La clase de equivalencia de la trayectoria f será denotada por $[f]$, y es llamada la **clase de homotopía** de f.

Ahora definiremos una operación entre trayectorias que dará lugar al Grupo Fundamental.

Definición 1.1.6. *Sean f y g dos trayectorias en X tales que $f(1) = g(0)$. Definimos el **producto de trayectorias** como la función $f * g : I \longrightarrow X$ dada por*

$$(f * g)(s) = \begin{cases} f(2s) & si \ s \in [0, \frac{1}{2}], \\ \\ g(2s-1) & si \ s \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Por el lema del pegado $f * g$ es continua y por lo tanto es una trayectoria en X.

Lema 1.1.7. *Sean* $f, f' : I \longrightarrow X$ *trayectorias homotópicas de* x_0 *a* x_1 *y* $g, g' : I \longrightarrow X$ *trayectorias homotópicas de* x_1 *a* x_2, *entonces* $f * g \simeq_t f' * g'$.

Demostración. Consideremos una homotopía de trayectorias F entre f y f', y una homotopía de trayectorias G entre g y g'. Definimos la función $H : I \times I \longrightarrow X$ como

$$H(s,t) = \begin{cases} F(2s,t) & \text{si } s \in [0, \frac{1}{2}], \\ \\ G(2s-1,t) & \text{si } s \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Esta nueva función queda bien definida y es continua por el lema del pegado, además,

$$\begin{array}{ll} H(s,0) = F(2s,0) = f(2s) & \text{si } s \in [0, \frac{1}{2}], \\ H(s,0) = G(2s-1,0) = g(2s-1) & \text{si } s \in [\frac{1}{2}, 1]; \end{array}$$

y

$$\begin{array}{ll} H(s,1) = F(2s,1) = f'(2s) & \text{si } s \in [0, \frac{1}{2}], \\ H(s,1) = G(2s-1,1) = g'(2s-1) & \text{si } s \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{array}$$

Es decir, $H(s,0) = f * g(s)$ y $H(s,1) = f' * g'(s)$ para toda s $\in I$. Por otro lado,

$$\begin{array}{l} H(0,t) = F(0,t) = x_0 \quad \text{para toda } t \in [0,1] \quad \text{y} \\ H(1,t) = G(1,t) = x_2 \quad \text{para toda } t \in [0,1]. \end{array}$$

Esto implica que H es una homotopía de trayectorias entre $f * g$ y $f' * g'$.

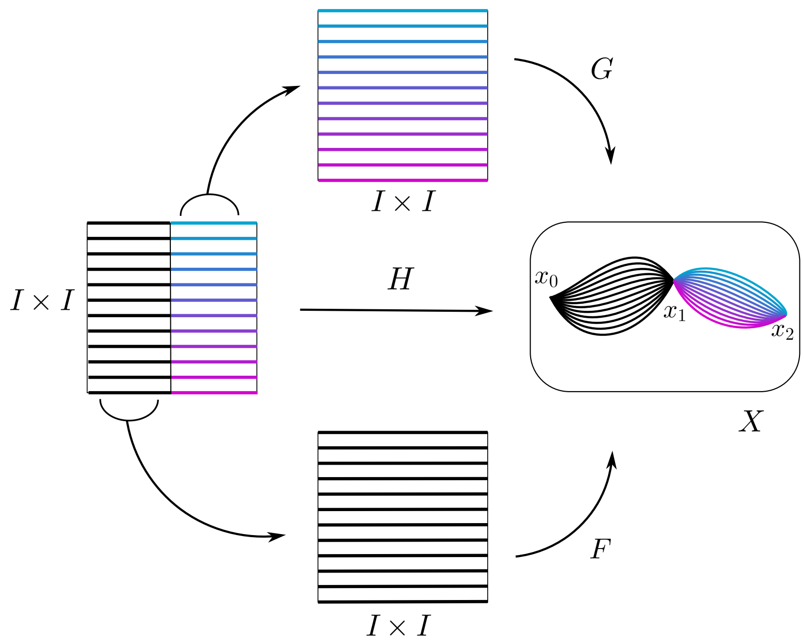


Figura 1.4: Lema 1.1.6

■

Definición 1.1.8. *Sea* $x_0 \in X$ *y* $f : I \longrightarrow X$ *una trayectoria. Diremos que f es un* ***lazo basado en*** $\boldsymbol{x_0}$ *si* $f(0) = f(1) = x_0$. *El conjunto de todas las clases de trayectorias homotópicas basadas en* x_0 *lo denotaremos por* $\boldsymbol{\pi_1(X, x_0)}$.

Antes de dotar a $\pi_1(X, x_0)$ con una estructura algebraica demostraremos los siguientes lemas.

Lema 1.1.9. *Sean* $f, f' : X \longrightarrow Y$ *y* $k : Y \longrightarrow Z$ *funciones continuas. Si* F *es una homotopía entre* f *y* f', *entonces* $k \circ F$ *es una homotopía entre* $(k \circ f)$ *y* $(k \circ f')$. *Si además* f *y* f' *son trayectorias de* y_0 *a* y_1, *entonces* $(k \circ f)$ *y* $(k \circ f')$ *son trayectorias homotópicas de* $k(y_0)$ *a* $k(y_1)$.

Demostración. Sea F una homotopía entre f y f', entonces la función $(k \circ F) : X \times I \longrightarrow Z$ es continua por ser composición de funciones continuas, además,

$$(k \circ F)(x, 0) = (k \circ f)(x) \quad y \quad (k \circ F)(x, 1) = (k \circ f')(x) \quad \text{para toda } x \in X.$$

Por lo tanto, $k \circ f \simeq k \circ f'$. En el caso de que f y f' sean trayectorias en X y F sea una homotopía de trayectorias, tendríamos que

$$(k \circ F)(0, t) = k(y_0) \quad y \quad (k \circ F)(1, t) = k(y_1) \quad \text{para toda } t \in I.$$

Es decir, $k \circ f \simeq_t k \circ f'$. ■

Lema 1.1.10. *Sean* $f, g : I \longrightarrow X$ *trayectorias en* X *tales que* $f(1) = g(0)$ *y* $k : X \longrightarrow Y$ *una función continua. Entonces,* $k \circ (f * g) = (k \circ f) * (k \circ g)$.

Demostración. Por definición tenemos que

$$f * g(s) = \begin{cases} f(2s) & \text{si } s \in [0, \frac{1}{2}], \\ \\ g(2s-1) & \text{si } s \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Por lo tanto, usando nuevamente la definición del producto de trayectorias

$$\begin{aligned} k \circ (f * g)(s) &= \begin{cases} (k \circ f)(2s) & \text{si } s \in [0, \frac{1}{2}], \\ \\ (k \circ g)(2s-1) & \text{si } s \in [\frac{1}{2}, 1], \end{cases} \\ &= (k \circ f) * (k \circ g)(s). \end{aligned}$$

■

A continuación mencionaremos un tipo de conjuntos que ayudarán a la construcción de homotopías.

Definición 1.1.11. *Sea* $A \subseteq \mathbb{R}^n$, *diremos que* A *es* ***convexo*** *si para cualesquiera dos elementos* x *y* z *de* A, *el conjunto* $\{tx + (1-t)z \mid t \in I\}$ *se encuentra contenido en* A.

Lema 1.1.12. *Sean* $f : X \longrightarrow A \subseteq \mathbb{R}^n$ *y* $g : X \longrightarrow A \subseteq \mathbb{R}^n$ *funciones continuas con* A *un subconjunto convexo. Entonces,* $f \simeq g$. *Si* f *y* g *son trayectorias de* x_0 *a* x_1, *entonces* $f \simeq_t g$.

Demostración. Consideremos la función $H : X \times I \longrightarrow A$ dada por

$$H(x,t) = tg(x) + (1-t)f(x) \quad \text{para todo } (x,t) \in X \times I.$$

Observemos que $H(X \times I) \subseteq A$ en vista de que A es convexo, por otro lado, $H(x,0) = f(x)$ y $H(x,1) = g(x)$ para toda $x \in X$; y presuponiendo la continuidad de H tendríamos que $f \simeq g$.

Si f y g fueran trayectorias de x_0 a x_1, se tendría que

$$\begin{aligned} H(0,t) &= tg(0) + (1-t)f(0) = tx_0 + (1-t)x_0 = x_0 \quad \text{para toda } t \in I \quad \text{y} \\ H(1,t) &= tg(1) + (1-t)f(1) = tx_1 + (1-t)x_1 = x_1 \quad \text{para toda } t \in I. \end{aligned}$$

Y nuevamente, presuponiendo la continuidad de H obtendríamos que $f \simeq_t g$. Lo único que falta en ambos casos es verificar la continuidad de H, para esto veremos que H es una composición de funciones continuas.

Consideremos las siguientes funciones continuas:

$$\begin{aligned} &\oplus : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n && \text{dada por} \quad \oplus(\vec{y},\vec{z}) = \vec{y} + \vec{z}, \\ &\odot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n && \text{dada por} \quad \odot(\lambda,\vec{y}) = \lambda\vec{y}, \\ &p_1 : X \times I \longrightarrow X && \text{dada por} \quad p_1(x,t) = x, \\ &p_2 : X \times I \longrightarrow I && \text{dada por} \quad p_2(x,t) = t, \\ &k : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} && \text{dada por} \quad k(t) = 1 - t. \end{aligned}$$

Y definamos $\Delta_1, \Delta_2 : X \times I \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ y $\Delta_3 : X \times I \longrightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ como

$$\begin{aligned} \Delta_1(x,t) &= (p_2(x,t), g \circ p_1(x,t)) = (t, g(x)), \\ \Delta_2(x,t) &= (k \circ p_2(x,t), f \circ p_1(x,t)) = (1-t, f(x)), \\ \Delta_3(x,t) &= (\odot \circ \Delta_1(x,t), \odot \circ \Delta_2(x,t)) = (tg(x), (1-t)f(x)). \end{aligned}$$

Estas funciones son continuas por ser el producto diagonal de funciones continuas. Por último, como $\oplus$ y Δ_3 son continuas y $H = \oplus \circ \Delta_3$, concluimos que H es continua. ■

1.2 La construcción del grupo fundamental

Después de todo el trabajo hecho, estamos en condiciones de probar el siguiente teorema, el cual es un resultado base para toda la teoría que desarrollaremos.

Teorema 1.2.1. $\pi_1(X, x_0)$ *es un grupo respecto a la operación* $[f] \cdot [g] := [f * g]$.

Demostración. Dado que $\pi_1(X, x_0)$ es el conjunto de todas las clases de homotopía de lazos basados en x_0, la operación $*$ está bien definida para cualesquiera dos lazos basados en x_0, y por el lema 1.1.7 también lo está $\cdot$.

1. *Asociatividad.* Sean f, g y h lazos basados en x_0, veamos que $(f * g) * h \simeq_t f * (g * h)$. Para esto definimos la función $\varphi : I \longrightarrow I$ como

$$\varphi(s) = \begin{cases} \frac{s}{2} & \text{si } s \in [0, \frac{1}{2}], \\ \\ s - \frac{1}{4} & \text{si } s \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}], \\ \\ 2s - 1 & \text{si } s \in [\frac{3}{4}, 1]. \end{cases}$$

Por el lema del pegado φ es continua y además $((f * g) * h) \circ \varphi = f * (g * h)$. Por otra parte, como I es convexo, por el lema 1.1.12, tenemos que $\varphi \simeq_t Id_I$ y usando el lema 1.1.9 obtenemos que

$$(f * g) * h = [(f * g) * h] \circ Id_I \simeq_t [(f * g) * h] \circ \varphi = f * (g * h).$$

Es decir, $([f] \cdot [g]) \cdot [h] = [f] \cdot ([g] \cdot [h])$.

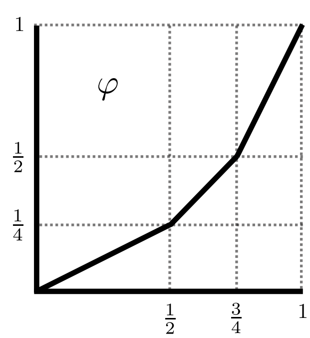


Figura 1.5: Asociatividad, función φ.

2. *Elemento neutro.* Sean f y e lazos basados en x_0 tal que $e(s) = x_0$ para toda $s \in I$. Afirmamos que $e * f \simeq_t f$ y $f * e \simeq_t f$. Para demostrar esto definimos $\varphi : I \longrightarrow I$ y $\psi : I \longrightarrow I$ como

$$\varphi(s) = \begin{cases} 2s & \text{si } s \in [0, \frac{1}{2}], \\ \\ 1 & \text{si } s \in [\frac{1}{2}, 1]., \\ \end{cases}$$

$$\psi(s) = \begin{cases} 0 & \text{si } s \in [0, \frac{1}{2}], \\ \\ 2s - 1 & \text{si } s \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Por el lema del pegado φ y ψ son continuas, además, $f \circ \varphi = f * e$ y $f \circ \psi = e * f$. Por otra parte, como I es convexo, por el lema 1.1.12, $\varphi \simeq_t Id_I$ y $\psi \simeq_t Id_I$, y usando el lema 1.1.9 tenemos que $f \simeq_t f * e$ y $f \simeq_t e * f$. Es decir, $[f] = [f] \cdot [e]$ y $[f] = [e] \cdot [f]$. Por lo tanto, $[e]$ es el elemento neutro.

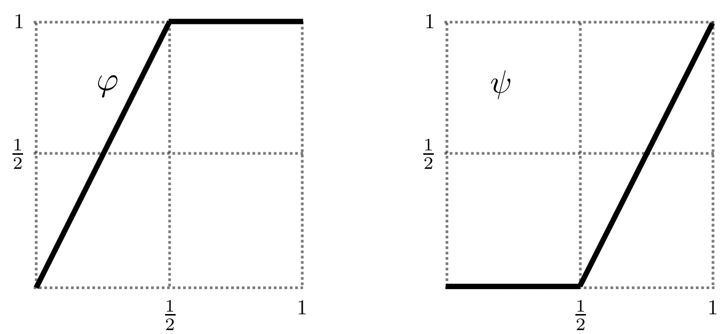


Figura 1.6: Elemento neutro, función φ y ψ.

3. *Elemento Inverso.* Sea f un lazo basado en x_0, definimos $\bar{f} : I \longrightarrow X$ como $\bar{f}(s) = f(1-s)$. Observemos que $\bar{f}$ también es un lazo basado en x_0. Afirmamos que $f * \bar{f} \simeq_t e$ y $\bar{f} * f \simeq_t e$. En efecto, consideremos las funciones $i, e_0 : I \longrightarrow I$ donde i es la identidad en I y e_0 es la constante 0. Entonces, como I es convexo, por el lema 1.1.12, tenemos que $e_0 \simeq_t i * \bar{i}$. Finalmente por los lemas 1.1.9 y 1.1.10 obtenemos lo siguiente:

$$e = f \circ e_0 \simeq_t f \circ (i * \bar{i}) = (f \circ i) * (f \circ \bar{i}) = f * \bar{f}.$$

Análogamente $e \simeq_t \bar{f} * f$. Por lo tanto, $[e] = [f] \cdot [\bar{f}]$ y $[e] = [\bar{f}] \cdot [f]$.

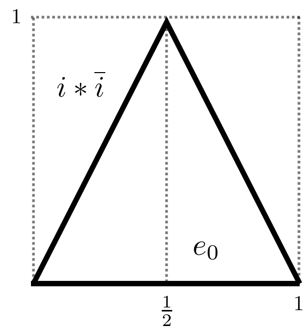


Figura 1.7: Elemento inverso, función e_0 e $i * \bar{i}$.

■

El grupo $\pi_1(X, x_0)$ es llamado el **grupo fundamental** de X en x_0.

El teorema anterior se puede extender para trayectorias en general y como su demostración es esencialmente la misma sólo lo enunciaremos.

Teorema 1.2.2. *Sean f y g trayectorias en X. Si el producto de trayectorias $f * g$ esta bien definido entonces denotaremos por $[f] \cdot [g] = [f * g]$. La operación $\cdot$ cumple las siguientes propiedades:*

1. *Asociatividad. Si $[f] \cdot ([g] \cdot [h])$ está bien definido también lo está $([f] \cdot [g]) \cdot [h]$, además, $[f] \cdot ([g] \cdot [h]) = ([f] \cdot [g]) \cdot [h]$.*

2. *Identidades derecha e izquierda. Dado $x \in X$ definimos a la trayectoria constante $e_x : I \longrightarrow X$ como $e_x(t) = x$ para toda $t \in I$. Entonces, si f es una trayectoria en X de x_0 a x_1 tenemos que*

$$[f] \cdot [e_{x_1}] = [f] \quad y \quad [e_{x_0}] \cdot [f] = [f].$$

3. *Inverso. Dado una trayectoria f en X de x_0 a x_1, definimos la trayectoria $\bar{f} : I \longrightarrow X$ por $\bar{f}(t) = f(1-t)$. Entonces,*

$$[f] \cdot [\bar{f}] = [e_{x_0}] \quad y \quad [\bar{f}] \cdot [f] = [e_{x_1}].$$

Para el siguiente teorema necesitamos definir que entenderemos por que una función mande afínmente un intervalo a otro.

Definición 1.2.3. *Diremos que una función $f : [a,b] \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow [c,d]$ manda* ***afínmente*** *el intervalo $[a,b]$ al intervalo $[c,d]$ (sin invertir la orientación) si f está dada por*

$$f(x) = \frac{(d-c)}{(b-a)}(x-a) + c \quad para\ toda\ x \in [a,b].$$

Teorema 1.2.4. *Sea* f *una trayectoria en* X *y* $\wp = \{a_0, \ldots, a_n\}$ *una partición del intervalo* $[0,1]$. *Si consideramos para toda* $i = 1, \ldots, n$ *la función* $f_i : I \longrightarrow X$, *como aquella que manda afínmente el intervalo* I *al intervalo* $[a_{i-1}, a_i]$ *seguida de* f, *entonces* $[f] = [f_1] \cdot \ldots \cdot [f_n]$.

Demostración. Consideremos la función $f_1 * (f_2 * (\ldots (f_{n-1} * f_n) \ldots))$, que es aquella que sobre el intervalo $[\frac{2^{i-1}-1}{2^{i-1}}, \frac{2^i-1}{2^i}]$ hace el mismo recorrido que f en el intervalo $[a_{i-1}, a_i]$. También definimos la función continua $k : I \longrightarrow I$ como aquella que manda afínmente el intervalo $[\frac{2^{i-1}-1}{2^{i-1}}, \frac{2^i-1}{2^i}]$ al intervalo $[a_{i-1}, a_i]$ para toda $i = 1, \ldots, n$. Ahora, dado que I es convexo, por el lema 1.1.12, $k \simeq_t Id_I$ y usando el lema 1.1.9 obtenemos que $f \circ k \simeq_t f$.

Para finalizar, observemos lo siguiente:

$$f \circ k = f_1 * (f_2 * (\ldots (f_{n-1} * f_n) \ldots)),$$

de donde

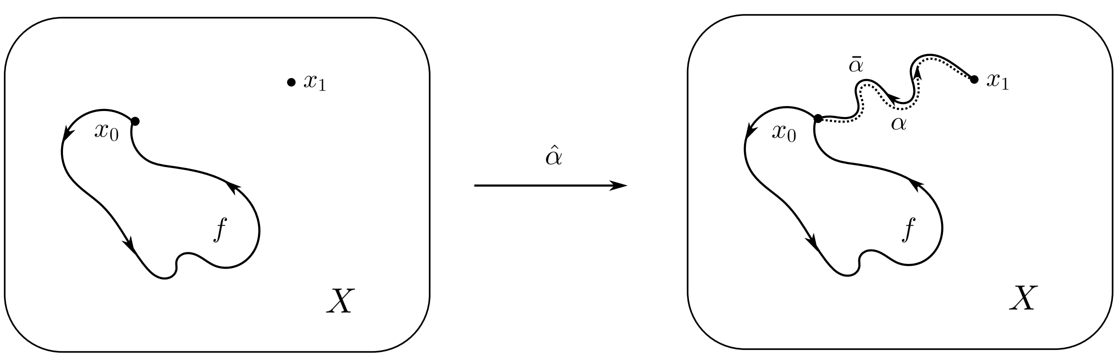
$$[f] = [f_1](\cdot([f_2] \cdot \ldots ([f_{n-1}] \cdot [f_n]) \cdots)) = [f_1] \cdot \ldots \cdot [f_n].$$

∎

Hasta ahora, dado un espacio topológico X, a cada elemento en él le hemos asignado un grupo, pero no nos hemos preguntado si este grupo resulta ser el mismo para cada elemento. Para responder a esta pregunta empezaremos dando la siguiente definición.

Definición 1.2.5. *Sea* α *una trayectoria en* X *de* x_0 *a* x_1. *Definimos la función* $\hat{\alpha} : \pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(X, x_1)$ *como* $\hat{\alpha}([f]) = [\bar{\alpha}] \cdot [f] \cdot [\alpha]$.

Esta función queda bien definida ya que la operación $\cdot$ está bien definida.



$[f] \in \pi_1(X, x_0)$ $\qquad$ $[\bar{\alpha}] * [f] * [\alpha] \in \pi_1(X, x_0)$

Figura 1.8: Función inducida por α.

Teorema 1.2.6. *La función* $\hat{\alpha}$ *es un isomorfismo de grupos.*

Demostración. Veamos que $\hat{\alpha}$ es un homomorfismo. Sean $[f]$ y $[g]$ elementos de $\pi_1(X, x_0)$, entonces

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}([f]\cdot[g]) &= [\bar{\alpha}]\cdot[f]\cdot[g]\cdot[\alpha] \\ &= [\bar{\alpha}]\cdot[f]\cdot[e_{x_0}]\cdot[g]\cdot[\alpha] \\ &= ([\bar{\alpha}]\cdot[f]\cdot[\alpha])(\cdot[\bar{\alpha}]\cdot[g]\cdot[\alpha]) \\ &= \hat{\alpha}([f])\cdot\hat{\alpha}([g]) \end{aligned}$$

Sólo falta ver que efectivamente $\hat{\alpha}$ es un isomorfismo, para esto construyamos su inversa. Si denotamos por $\beta = \bar{\alpha}$ entonces afirmamos que $\hat{\beta} = \hat{\alpha}^{-1}$.
Sea $[h] \in \pi_1(X, x_1)$, entonces

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}\circ\hat{\beta}([h]) &= \hat{\alpha}([\bar{\beta}]\cdot[h]\cdot[\beta]) \\ &= \hat{\alpha}([\bar{\bar{\alpha}}]\cdot[h]\cdot[\bar{\alpha}]) \\ &= \hat{\alpha}([\alpha]\cdot[h]\cdot[\bar{\alpha}]) \\ &= [\bar{\alpha}]\cdot[\alpha]\cdot[h]\cdot[\bar{\alpha}]\cdot[\alpha] \\ &= [e_{x_1}]\cdot[h]\cdot[e_{x_1}] \\ &= [h]. \end{aligned}$$

Por lo tanto $\hat{\alpha}\circ\hat{\beta} = Id_{\pi_1(X,x_1)}$, análogamente obtenemos que $\hat{\beta}\circ\hat{\alpha} = Id_{\pi_1(X,x_0)}$. ∎

Este último teorema responde a la pregunta que nos habíamos hecho.

Corolario 1.2.7. *Si* X *es conexo por trayectorias, entonces* $\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(X, x_1)$ *para cualesquiera dos elementos* x_0 *y* x_1 *en* X.

Estos resultados nos llevan a la siguiente definición.

Definición 1.2.8. *Diremos que* X *es* ***simplemente conexo*** *si es conexo por trayectorias y* $\pi_1(X, x_0)$ *es el grupo trivial para algún* x_0 *en* X.

Lema 1.2.9. *Sea* X *un espacio simplemente conexo, entonces cualesquiera dos trayectorias con los mismos puntos inicial y final son homotópicas.*

Demostración. Sean α y β dos trayectorias de x_0 a x_1, entonces

$$\alpha \simeq_t \alpha * e_{x_1} \simeq_t \alpha * (\bar{\beta} * \beta) \simeq_t (\alpha * \bar{\beta}) * \beta \simeq_t e_{x_0} * \beta \simeq_t \beta.$$

∎

La siguiente pregunta que debemos hacernos es si el grupo fundamental es un invariante topológico. Consideremos una función continua $h : X \longrightarrow Y$ tal que $h(x_0) = y_0$, denotaremos este hecho por $h : (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0)$. Si f es un lazo basado en x_0 entonces $h \circ f$ es un lazo basado en y_0, por lo tanto, tenemos una correspondencia natural entre $\pi_1(X, x_0)$ y $\pi_1(Y, y_0)$ dada por $[f] \longmapsto [h \circ f]$.

Definición 1.2.10. *Sea* $h : (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0)$ *una función continua, definimos la función*

$$h_* : \pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(Y, y_0) \quad por \quad h_*([f]) = [h \circ f].$$

Esta nueva función queda bien definida debido al lema 1.1.9 y es un homomorfismo, lo cual se debe a la siguiente igualdad:

$$h \circ (f * g) = (h \circ f) * (h \circ g).$$

Este homomorfismo es llamado el **homomorfismo inducido por h** relativo al punto base x_0.

Veamos algunas propiedades del homomorfismmo inducido.

Lema 1.2.11. *Sean* $k : (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0)$ *y* $h : (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0)$ *funciones continuas para las cuales existe una homotopía* F *entre* h *y* k *con* $F(x_0, t) = y_0$ *para toda* $t \in I$. *Entonces* $k_* = h_*$.

Demostración. Sea f un lazo basado en x_0, entonces dado que $F(x_0, t) = y_0$ para toda $t \in I$, la composición $F \circ (f \times Id_I)$ es una homotopía de trayectorias entre $h \circ f$ y $k \circ f$, es decir, $h_*([f]) = k_*([f])$ y por lo tanto $k_* = h_*$.

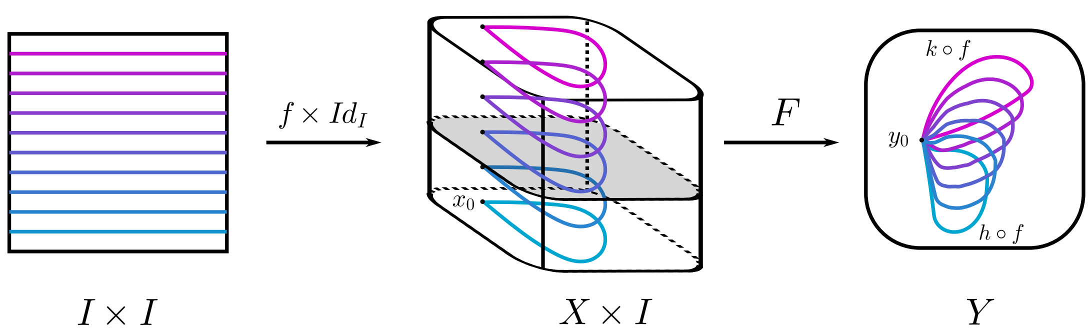


Figura 1.9: Homotopía entre $h \circ f$ y $k \circ f$.

∎

Las siguientes dos propiedades son llamadas propiedades funtoriales.

Teorema 1.2.12. *Sean* $h : (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0)$ *y* $k : (Y, y_0) \longrightarrow (Z, z_0)$ *funciones continuas, entonces se cumplen las siguientes dos propiedades:*

1. $(k \circ h)_* = k_* \circ h_*$.
2. *Si* Id_X *es la función identidad en* X, *entonces* $(Id_X)_* = Id_{\pi_1(X,x_0)}$ *donde* $Id_{\pi_1(X,x_0)}$ *es la función identidad en* $\pi_1(X, x_0)$.

Demostración. Sea $[f] \in \pi_1(X, x_0)$, entonces

$$(k \circ h)_*([f]) = [(k \circ h) \circ f] \quad \text{y} \quad (k_* \circ h_*)([f]) = k_*([h \circ f]) = [k \circ (h \circ f)].$$

Con lo cual, $(k \circ h)_* = k_* \circ h_*$. Por otro lado,

$$(Id_X)_*([f]) = [Id_X \circ f] = [f] = Id_{\pi_1(X,x_0)}([f]).$$

Por lo tanto, $(Id_X)_* = Id_{\pi_1(X,x_0)}$. ■

Corolario 1.2.13. *Sea* $h : (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0)$ *un homeomorfismo, entonces* h_* *es un isomorfismo entre* $\pi_1(X, x_0)$ *y* $\pi_1(Y, y_0)$.

Demostración. Consideremos la función inversa de h, la cual denotaremos por $k : (Y, y_0) \longrightarrow (X, x_0)$. Entonces debido al teorema 1.2.12 tenemos la siguiente igualdad

$$k_* \circ h_* = (k \circ h)_* = (Id_X)_* = Id_{\pi_1(X,x_0)}.$$

Análogamente $h_* \circ k_* = Id_{\pi_1(Y,y_0)}$ y por lo tanto $\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(Y, y_0)$. ■

Del corolario anterior podemos decir que el Grupo Fundamental es un invariante topológico y será una herramienta bastante útil para distinguir cuando dos espacios son topológicamente distintos.

1.3 Espacios cubrientes

Para seguir con nuestro estudio del grupo fundamental introduciremos el concepto de espacio cubriente, el cual nos permitirá calcular grupos fundamentales.

Pasemos a definir algunos conceptos básicos.

Definición 1.3.1. *Sea $P : E \longrightarrow B$ una función continua y suprayectiva. Diremos que un conjunto abierto U en B está **cubierto parejamente** por P si la imagen inversa $P^{-1}(U)$ puede ser escrita como la unión ajena de una familia de abiertos $\{V_\alpha\}_{\alpha\in\lambda}$ en E tal que para toda $\alpha \in \lambda$ la función restricción $P|_{V_\alpha} : V_\alpha \longrightarrow U$ es un homeomorfismo. La colección $\{V_\alpha\}_{\alpha\in\lambda}$ es llamada una **partición de** $P^{-1}(U)$ **en rebanadas**.*

Observemos que en la definición anterior al tomar la función restricción $P|_{V_\alpha}$ la hemos considerado como aquella que va de V_α a su correspondiente imagen. En esta sección al restiringir cualquier otra función también consideraremos a la función restricción como aquella que va de su nuevo dominio a su respectiva imagen.

En la figura 1.9 se puede ver una representación de un abierto cubierto parejamente.

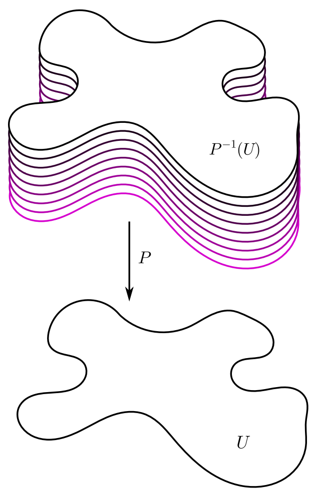


Figura 1.10: Abierto cubierto parejamente por P.

Lema 1.3.2. *Sea $P : E \longrightarrow B$ una función continua y suprayectiva y U un abierto en B cubierto parejamente por P. Entonces, todo abierto $W \subseteq U$ también está cubierto parejamente por P.*

Demostración. Por hipótesis sabemos que existe una partición de $P^{-1}(U)$ en rebanadas, denotémosla por $\{V_\alpha\}_{\alpha\in\lambda}$. Como $W \subseteq U$, entonces $P^{-1}(W) \subseteq P^{-1}(U)$, de donde

$$P^{-1}(W) = P^{-1}(W) \cap P^{-1}(U) = P^{-1}(W) \cap \left(\bigcup_{\alpha\in\lambda} V_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha\in\lambda}(P^{-1}(W) \cup V_\alpha) = \bigcup_{\alpha\in\lambda} V'_\alpha$$

con $V'_\alpha = P^{-1}(W) \cap V_\alpha$ para toda $\alpha \in \lambda$. Por la continuidad de P tenemos que $P^{-1}(W)$ es abierto, por lo que todos los conjuntos V'_α son abiertos. Por último, para poder decir que la familia $\{V'_\alpha\}_{\alpha\in\lambda}$ es una partición en rebanadas de $P^{-1}(W)$ sólo hace falta checar que las funciones restricción $P|_{V'_\alpha} : V'_\alpha \longrightarrow W$ son homeomorfismos. Observemos que $V'_\alpha \subseteq V_\alpha$ para toda $\alpha \in \lambda$ y por lo tanto

$$P|_{V'_\alpha} = (P|_{V_\alpha})|_{V'_\alpha}.$$

Para finalizar, como las restricciones $P|_{V_\alpha}$ son homeomorfismos también lo son las restricciones $P|_{V'_\alpha}$, es decir, la familia $\{V'_\alpha\}_{\alpha\in\lambda}$ es efectivamente una partición de $P^{-1}(W)$ en rebanadas. ∎

Definición 1.3.3. *Sea $P : E \longrightarrow B$ una función continua y suprayectiva. Si para cada elemento b en B existe una vecindad abierta de b cubierta parejamente por P, entonces diremos que P es una **aplicación cubriente** y llamaremos a E un **espacio cubriente** de B.*

Lema 1.3.4. *Sea $P : E \longrightarrow B$ una aplicación cubriente, entonces para todo elemento b en B el subespacio $P^{-1}(\{b\})$ posee la topología discreta.*

Demostración. Sea b un elemento en B, como P es una función cubriente existe una vecindad abierta U de b cubierta uniformemente por P, por lo que podemos considerar $\{V_\alpha\}_{\alpha\in\lambda}$ una partición de $P^{-1}(U)$ en rebanadas. En vista de que cada restricción $P|_{V_\alpha}$ es un homeomorfismo de V_α en U sabemos que existe un único $b_\alpha \in V_\alpha$ tal que $P(b_\alpha) = b$, con lo cual $P^{-1}(\{b\}) \cap V_\alpha = \{b_\alpha\}$ es un abierto en $P^{-1}(\{b\}) = \bigcup_{\alpha\in\lambda} \{b_\alpha\}$. Por lo tanto, $P^{-1}(\{b\})$ posee la topología discreta. ∎

Lema 1.3.5. *Sea $P : E \longrightarrow B$ una aplicación cubriente, entonces P es una función abierta.*

Demostración. Consideremos un abierto A en E, mostraremos que todo elemento de $P(A)$ es un punto interior. Sea $x \in P(A)$, entonces existe una vecindad abierta U de x que está cubierta parejamente por P. Sean $\{V_\alpha\}_{\alpha\in\lambda}$ una partición de $P^{-1}(U)$ en rebanadas y z un elemento de $P^{-1}(\{x\})$. Por el lema 1.3.4 sabemos que existe una única vecincidad V_β que contiene a z, y dado que $P|_{V_\beta}$ es un homeomorfismo sobre U tenemos que el conjunto $P(V_\beta \cap A)$ es un abierto en U y por ende un abierto en B. Por último, $P(A \cap V_\beta)$ es una vecindad abierta de x y $P(A \cap V_\beta) \subseteq P(A)$, por lo tanto, x es un punto interior de $P(A)$. ∎

Para imaginar cómo son estas funciones cubrientes demos un ejemplo.

Teorema 1.3.6. *La función* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{S}^1$ *dada por* $f(x) = (\cos(2\pi x), \operatorname{sen}(2\pi x))$, *es una aplicación cubriente.*

Demostración. Mostraremos que todo elemento en $\mathbb{S}^1$ tiene una vecindad que es cubierta uniformemente por f. Para esto consideremos el conjunto $U = \{(x, y) \in \mathbb{S}^1 \mid x > 0\}$, que es la media circunferencia en el semiplano derecho, abierta y de radio 1 . De la definición de f tenemos que

$$f^{-1}(U) = \{x \in \mathbb{R} \mid \cos(2\pi x) > 0\} = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} (n - \frac{1}{4}, n + \frac{1}{4})$$

Llamemos V_n al intervalo abierto $(n - \frac{1}{4}, n + \frac{1}{4})$, entonces el conjunto $f^{-1}(U)$ es la unión disjunta de intervalos abiertos en $\mathbb{R}$. Por otra parte, afirmamos que la restricción de f a cualquier intervalo cerrado $\overline{V_n}$ sobre $\overline{U}$ es un homeomorfismo. Por la definición de f tenemos que $f(\overline{V_n}) = \overline{U}$ y que $f|_{\overline{V_n}} : \overline{V_n} \longrightarrow \overline{U}$ es una biyección debido a que el mapeo $\operatorname{sen}(2\pi x)$ es estrictamente monótono en ese intervalo. Por último, el hecho de que la restricción $f|_{\overline{V_n}}$ sobre $\overline{U}$ sea un homeomorfismo se sigue de que $\overline{V_n}$ es un conjunto compacto y $\overline{U}$ es un subespacio de Hausdorff. Por lo tanto, la función $f|_{V_n} : V_n \longrightarrow U$ es un homeomorfismo debido a que $f|_{V_n} = (f|_{\overline{V_n}})|_{V_n}$.

Repitiendo el mismo análisis con las otras tres semicircunferencias abiertas se tiene que todas quedan cubiertas uniformemente por f, y como las 4 semicircunferencias abiertas forman una cubierta abierta de $\mathbb{S}^1$ concluimos que f es una aplicación cubriente.

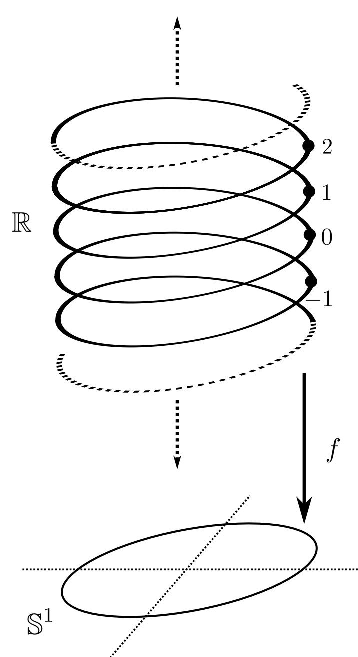


Figura 1.11: $f(x) = (\cos(2\pi x), \operatorname{sen}(2\pi x))$.

■

En la figura 1.10 se puede ver cómo f envuelve a la recta en el cículo unitario.

Teorema 1.3.7. *Sean* $P : E \longrightarrow B$ *y* $P' : E' \longrightarrow B'$ *aplicaciones cubrientes, entonces* $P \times P' : E \times E' \longrightarrow B \times B'$ *es una aplicación cubriente.*

Demostración. Sea $(b, b') \in B \times B'$, veamos que la pareja (b, b') posee una vecindad abierta, cubierta parejamente por $P \times P'$. Dado que P y P' son aplicaciones cubrientes sabemos que existen U y U' vecindades de b y b' que están cubiertas parejamente por P y P', por lo cual, existen $\{V_\alpha\}_{\alpha\in\lambda}$ y $\{V_\beta\}_{\beta\in\eta}$ particiones en rebanadas de $P^{-1}(U)$ y $P'^{-1}(U')$. De lo anterior podemos decir que la imagen inversa $(P \times P')^{-1}(U \times U')$ es la unión de todos los conjuntos $V_\alpha \times V_\beta$, los cuales son ajenos y abiertos en $E \times E'$, además, cada una de las restricciones $P \times P'|_{V_\alpha \times V_\beta} : V_\alpha \times V_\beta \longrightarrow U \times U'$ son homeomorfismos. Por lo tanto, $P \times P'$ es una aplicación cubriente.

Corolario 1.3.8. *Sea* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{S}^1$ *la función definida por* $f(x) = (\cos(2\pi x), \operatorname{sen}(2\pi x))$, *entonces* $f \times f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ *es una aplicación cubriente.*

El espacio $T = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ es llamado el Toro 2-dimensional.

■

1.4 Levantamiento de trayectorias

En esta sección y en la siguiente construiremos la herramienta necesaria para poder calcular el grupo fundamental del círculo $\mathbb{S}^1$.

Definición 1.4.1. *Sean* $P : E \longrightarrow B$ *y* $f : X \longrightarrow B$ *funciones no necesariamente continuas. Diremos que una función* $\tilde{f} : X \longrightarrow E$ *es un* ***levantamiento de f*** *respecto a* P *si* $P \circ \tilde{f} = f$, *es decir, si se tiene el siguiente diagrama conmutativo*

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[d, "P"] \\ X \arrow[ur, "\tilde{f}"] \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

Definición 1.4.2. *Sean* $[a, b]$ *un intervalo y* $\wp = \{s_0, s_1, \ldots, s_n\} \subseteq [a, b]$. *El conjunto* $\wp$ *será llamado una* ***partición*** *de* $[a, b]$ *si* $s_{i-1} < s_i$ *para toda* $i = 1, \ldots, n$, *y* $s_0 = a$ *y* $s_n = b$.

El siguiente teorema sólo lo enunciaremos dado que es un resultado bastante conocido.

Teorema 1.4.3 (Teorema del Número de Lebesgue). *Sea* X *un espacio métrico compacto y* $\{U_1, \ldots, U_n\}$ *una cubierta abierta de* X*, entonces existe* $\delta > 0$ *tal que si* A *es un subconjunto de* X *con diámetro menor que* δ *ocurre que* $A \subseteq U_j$ *para algún índice* j*.*

Teorema 1.4.4. *Sea* $P : (E, e_0) \longrightarrow (B, b_0)$ *una aplicación cubriente, entonces cualquier trayectoria* $f : I \longrightarrow B$ *que empiece en* b_0 *tiene un único levantamiento continuo respecto a* P*,* $\tilde{f} : I \longrightarrow E$*, que empieza en* e_0*.*

Demostración. Como P es una aplicación cubriente podemos generar una cubierta abierta de B con abiertos cubiertos parejamente por P, sea $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\lambda}$ dicha familia. Por otro lado, la continuidad de f nos genera una cubierta abierta $\{f^{-1}(U_\alpha)\}_{\alpha\in\lambda}$ de I y como I es un espacio métrico compacto, aplicando el teorema del número de Lebesgue, sabemos que existe una partición $\wp = \{s_0, \ldots, s_n\}$ de I tal que cada subintervalo $[s_{i-1}, s_i]$ se queda contenido en algún $f^{-1}(U_{\alpha_i})$, con lo cual $f([s_{i-1}, s_i]) \subseteq U_{\alpha_i}$.

Una vez teniendo la partición $\wp$ podemos construir a $\tilde{f}$. Definimos $\tilde{f}(0) = e_0$. Lo que sigue es extender a $\tilde{f}$ sobre todo I. De lo anterior tenemos que $f([s_0, s_1]) \subseteq U_{\alpha_1}$ y que U_{α_1} esta cubierto parejamente por P, entonces consideramos la partición en rebanadas $\{V_\beta^1\}_{\beta\in\eta_1}$ de $P^{-1}(U_{\alpha_1})$. Cada uno de los conjuntos V_β^1 es homeomorfo a U_{α_1} bajo P, además, $\tilde{f}(0) = e_0$ pertenece a uno sólo de estos conjuntos, digamos a V_0^1, por lo que definimos a $\tilde{f}(s)$ para toda $s \in [s_0, s_1]$ como

$$\tilde{f}(s) = (P|_{V_0^1})^{-1}(f(s)) = (P|_{V_0^1})^{-1} \circ f(s).$$

Dado que $P|_{V_0^1} : V_0^1 \longrightarrow U_{\alpha_1}$ es un homeomorfismo su inversa es continua, por lo tanto, $\tilde{f}$ es continua sobre el intervalo $[s_0, s_1]$.

Hasta este momento sólo hemos definido parcialmente la función $\tilde{f}$ sobre el intervalo $[s_0, s_1]$. Lo que sigue es mostrar cómo extender a $\tilde{f}$ sobre los intervalos $[s_0, s_i]$ para toda $i = 2, \ldots, n$.

En general sabemos que $f([s_{j-1}, s_j]) \subseteq U_{\alpha_j}$, donde U_{α_j} está cubierto parejamente por P, y consideramos una partición en rebanadas $\{V_\beta^j\}_{\beta\in\eta_j}$ de $P^{-1}(U_{\alpha_j})$. Supongamos que hemos extendido la función sobre el intervalo $[s_0, s_i]$, entonces de lo anterior $\tilde{f}(s_i)$ pertenece solamente a uno de los conjuntos V_β^{i+1}, digamos V_0^{i+1}, por lo que definimos a $\tilde{f}(s)$ para toda $s \in [s_i, s_{i+1}]$ como

$$\tilde{f}(s) = (P|_{V_0^{i+1}})^{-1} \circ f(s),$$

y dado que $(P|_{V_0^{i+1}})$ es un homeomorfismo sobre $U_{\alpha_{i+1}}$ tenemos que $\tilde{f}$ es continua en el intervalo $[s_i, s_{i+1}]$. De esta manera hemos extendido a $\tilde{f}$ sobre el intervalo I. Para checar la continuidad de $\tilde{f}$ sólo debemos observar que $\tilde{f}|_{[s_i,s_{i+1}]}$ es continua para toda $i = 0, \ldots, n-1$, por lo tanto, el lema del pegado nos asegura la continuidad de $\tilde{f}$ en I. Otra cosa que es inmediata de la construcción de $\tilde{f}$ es que $P \circ \tilde{f} = f$, concluyendo así que $\tilde{f}$ es un levantamiento continuo de f. Lo único que falta es corroborar la unicidad de este levantamiento; para esto consideremos $\hat{f}$ otro levantamiento continuo de f que empiece en e_0, entonces $\hat{f}(0) = e_0 = \tilde{f}(0)$. Supongamos ya hemos demostrado que $\hat{f}(s) = \tilde{f}(s)$ para toda $s \in [s_0, s_i]$ y extendamos la igualdad al intervalo $[s_0, s_{i+1}]$. Sabemos que

1. $f([s_i, s_{i+1}]) \subseteq U_{\alpha_{i+1}}$.
2. $\tilde{f}(s_i) = \hat{f}(s_i) \in V_0^{i+1}$.
3. $\tilde{f}(s) = (P|_{V_0^{i+1}})^{-1} \circ f(s) \quad$ para toda $s \in [s_i, s_{i+1}]$.

Como $\hat{f}$ es un levantamiento de f tenemos que $\hat{f}([s_i, s_{i+1}]) \subseteq P^{-1}(U_{\alpha_{i+1}})$, pero $P^{-1}(U_{\alpha_{i+1}})$ es la unión ajena de abiertos y $\hat{f}([s_i, s_{i+1}])$ es un conjunto conexo debido a la continuidad de $\hat{f}$, esto nos dice que existe un único conjunto V_β^{i+1} que contiene a $\hat{f}([s_i, s_{i+1}])$, y dado que $\tilde{f}(s_i) = \hat{f}(s_i)$ concluimos que $\hat{f}([s_i, s_{i+1}]) \subseteq V_0^{i+1}$. Para finalizar volveremos a usar el hecho de que $\hat{f}$ es un levantamiento de f y $P|_{V_0^{i+1}}$ un homeomorfismo sobre $U_{\alpha_{i+1}}$. Para toda $s \in [s_i, s_{i+1}]$ se tiene que $\hat{f}(s) \in P^{-1}(\{f(s)\})$ y como $\hat{f}$ lleva el intervalo $[s_i, s_{i+1}]$ a V_0^{i+1} ocurre que $\hat{f}(s) = \tilde{f}(s)$, esto último debido a que existe un único $y = \tilde{f}(s) \in V_0^{i+1}$ tal que $y \in P^{-1}(\{f(s)\})$. Por lo tanto, $\hat{f}(s) = \tilde{f}(s)$.

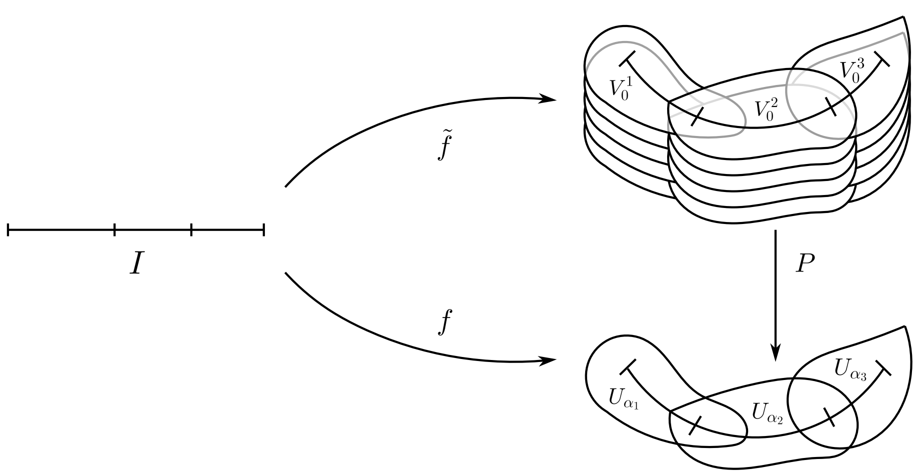


Figura 1.12: Levantamiento de f.

■

1.5 Levantamiento de homotopías

Teorema 1.5.1. *Sea* $P : (E, e_0) \longrightarrow (B, b_0)$ *una aplicación cubriente, entonces toda homotopía* $F : I \times I \longrightarrow B$ *con* $F(0,0) = b_0$ *tiene un único levantamiento continuo respecto a* P, $\widetilde{F} : I \times I \longrightarrow E$, *tal que* $\widetilde{F}(0,0) = e_0$. *Más aún, si* F *es una homotopía de trayectorias, entonces* $\widetilde{F}$ *también lo es.*

Demostración. Como P es una aplicación cubriente podemos generar una cubierta abierta de B con abiertos cubiertos parejamente por P, sea $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\lambda}$ dicha familia. Dado que F es una función continua, la familia $\{F^{-1}(U_\alpha)\}_{\alpha\in\lambda}$ es una cubierta abierta de $I \times I$, y aplicando el teorema del número de Lebesgue podemos encontrar particiones $\wp_1 = \{s_0, \ldots, s_m\}$ y $\wp_2 = \{t_0, \ldots, t_n\}$ de I tal que los rectángulos $I_i \times J_j = [s_{i-1}, s_i] \times [t_{j-1}, t_j]$ están contenidos en algún $F^{-1}(U_{\alpha_{(i,j)}})$, de donde $F(I_i \times J_j) \subseteq U_{\alpha_{(i,j)}}$ para todo (i,j).

Construiremos a $\widetilde{F}$ de la siguiente manera: definimos $\widetilde{F}(0,0) = e_0$, luego dado que los conjuntos $I \times \{0\}$ y $\{0\} \times I$ son homeomorfos a I, entonces por el teorema 1.4.4 podemos extender de manera continua a $\widetilde{F}$ sobre $\tilde{A} = I \times \{0\} \cup \{0\} \times I$ tal que $P \circ \widetilde{F} = F|_{\tilde{A}}$.

A continuación daremos una construcción general para extender a $\widetilde{F}$ a todos los rectángulos generados por la partición $\wp$. Sea (i_0, j_0) con $0 \leq i_0 \leq m$ y $0 \leq j_0 \leq n$, y supongamos que ya hemos definido a $\widetilde{F}$ en el conjunto A y que es un levantamiento de $F|_A$, donde A es la unión de $\tilde{A}$ y los rectángulos anteriores a $I_{i_0} \times J_{j_0}$, es decir, aquellos rectángulos $I_i \times J_j$ para los cuales $j < j_0$ y aquellos que $j = j_0$ e $i < i_0$. Consideremos una partición en rebanadas $\{V_\beta\}_{\beta\in\eta}$ de $P^{-1}(U_{(i_0,j_0)})$ y observemos que el conjunto $C = A \cap (I_{i_0} \times J_{j_0})$ es conexo, ya que es la unión del borde izquierdo e inferior del rectángulo $I_{i_0} \times J_{j_0}$, por lo que $\widetilde{F}(C)$ es conexo y debe estar contenido en alguno de los conjuntos V_β, digamos V_0. Sabemos que $F(I_{i_0} \times J_{j_0}) \subseteq U_{(i_0,j_0)}$ y que $P|_{V_0} : V_0 \longrightarrow U_{(i_0,j_0)}$ es un homeomorfismo, entonces definimos $\widetilde{F}(x)$ para todo $x \in I_{i_0} \times J_{j_0}$ como

$$\widetilde{F}(x) = (P|_{V_0})^{-1} \circ F(x).$$

Por último, la continuidad de $\widetilde{F}$ sobre $A \cup (I_{i_0} \times J_{j_0})$ se debe al hecho de que

$P|_{V_0}$ es un homeomorfismo y que tanto $\widetilde{F}|_{\tilde{A}}$ como $\widetilde{F}|_{I_i \times J_j}$ son continuas para todos los rectángulos anteriores a $I_{i_0} \times J_{j_0}$. Continuando este procedimiento finalizamos extendiendo a $\widetilde{F}$ continuamente sobre $I \times I$ al mismo tiempo que garantizamos es un levantamiento de F.

La unicidad del levantamiento se sigue del mismo razonamiento hecho en el teorema 1.4.4.

En el caso de que F fuera una homotopía de trayectorias tendríamos que $F(\{0\} \times I) = b_0$, y dado que $\widetilde{F}$ es un levantamiento entonces $\widetilde{F}(\{0\} \times I) \subseteq P^{-1}(b_0)$. Por otro lado, la continuidad de $\widetilde{F}$ nos asegura que el conjunto $\widetilde{F}(\{0\} \times I)$ es conexo; y el hecho de que el conjunto $P^{-1}(\{b_0\})$ posee la topología discreta nos dice que el conjunto $\widetilde{F}(\{0\} \times I)$ consta de un sólo punto y por lo tanto $\widetilde{F}(\{0\} \times I) = e_0$. Análogamente $\widetilde{F}(\{1\} \times I)$ es un conjunto que consta de un sólo punto, con lo cual hemos establecido que $\widetilde{F}$ es una homotopía de trayectorias.

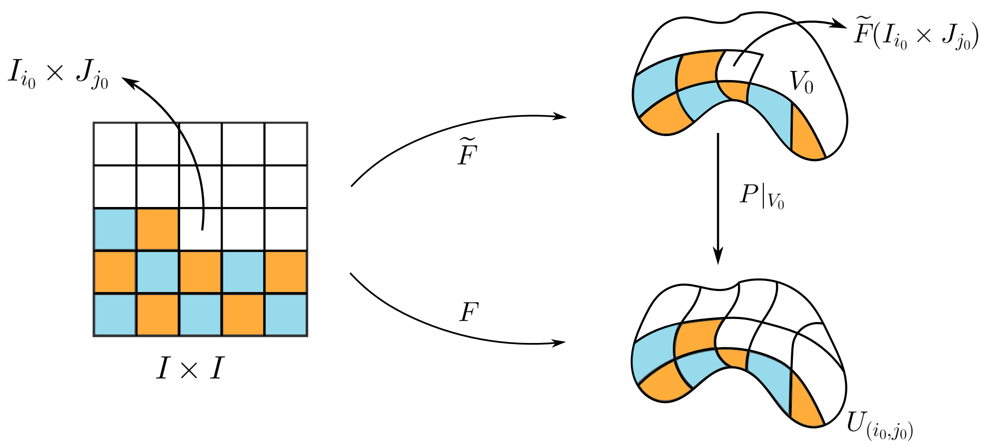


Figura 1.13: Levantamiento de F.

■

Corolario 1.5.2. *Sean $P : (E, e_0) \longrightarrow (B, b_0)$ una aplicación cubriente, f y g dos trayectorias en B de b_0 a b_1, y $\tilde{f}$ y $\tilde{g}$ sus levantamientos respecto a P con punto inicial e_0. Si f y g son trayectorias homotópicas entonces $\tilde{f}$ y $\tilde{g}$ también lo son.*

Demostración. Consideremos $F : I \times I \longrightarrow B$ una homotopía de trayectorias entre f y g. Entonces $F(0,0) = b_0$. Por el lema anterior sabemos que F se levanta a una homotopía de trayectorias $\widetilde{F}$ tal que $\widetilde{F}(0,0) = e_0$, por lo que $\widetilde{F}(\{0\} \times I) = \{e_0\}$ y $\widetilde{F}(\{1\} \times I)$

es un conjunto de un sólo punto, digamos $\{e_1\}$. Entonces la restricción $\widetilde{F}|_{I\times\{0\}}$ es una trayectoria en E que empieza en e_0 y que además es un levantamiento de $F|_{I\times\{0\}}$. Por la unicidad de los levantamientos de trayectorias se tiene que $\widetilde{F}(s,0)=\tilde{f}(s)$ para toda $s\in I$. Análogamente tenemos que $\widetilde{F}(s,1)=\tilde{g}(s)$ para toda $s\in I$, por lo tanto, $\widetilde{F}$ es una homotopía de trayectorias entre $\tilde{f}$ y $\tilde{g}$. ■

Definición 1.5.3. *Sea $P:(E,e_0)\longrightarrow(B,b_0)$ una aplicación cubriente. Dado un elemento $[f]\in\pi_1(B,b_0)$ y $\tilde{f}$ un levantamiento de f respecto a P con punto inicial e_0, entonces definimos la función $\phi_{e_0}:\pi_1(B,b_0)\longrightarrow P^{-1}(\{b_0\})$ como*

$$\phi_{e_0}([f])=\tilde{f}(1).$$

La función ϕ_{e_0} es llamada ***la función levantamiento*** *proveniente de la función cubriente P.*

Ésta función queda bien definida debido al corolario 1.5.2 y depende claramente del elemento e_0 que hayamos escogido.

Teorema 1.5.4. *Sea $P:(E,e_0)\longrightarrow(B,b_0)$ una función cubriente. Si E es conexo por trayectorias entonces la función levantamiento $\phi_{e_0}:\pi_1(B,b_0)\longrightarrow P^{-1}(\{b_0\})$ es suprayectiva. Si E es simplemente conexo entonces la función ϕ es biyectiva.*

Demostración. Supongamos que E es conexo por trayectorias. Entonces para todo $e_1\in P^{-1}(b_0)$ existe una trayectoria $\tilde{f}$ en E de e_0 a e_1. Así, $f=P\circ\tilde{f}$ es un lazo basado en b_0 y $\tilde{f}$ un levantamiento de f respecto a P. Por lo tanto, $\phi_{e_0}([f])=e_1$, con lo cual concluimos ϕ_{e_0} es suprayectiva.

Si además E es simplemente conexo, dados dos elementos $[f],[g]\in\pi_1(B,b_0)$ tales que $\phi_{e_0}([f])=\phi_{e_0}([g])$, mostraremos que $[f]=[g]$. Sean $\tilde{f}$ y $\tilde{g}$ sus levantamientos respecto a P con punto inicial e_0, entonces $\tilde{f}(1)=\tilde{g}(1)$. Dado que E es simplemente conexo, por el lema 1.2.9, sabemos existe una homotopía de trayectorias entre $\tilde{f}$ y $\tilde{g}$. Componiendo esta homotopía por la izquierda con P obtenemos una homotopía de trayectorias entre f y g, es decir, $[f]=[g]$. ■

1.6 Retractos y retractos fuertes por deformación

En la presente sección estudiaremos si es posible trasladar el problema de encontrar el grupo fundamental de un espacio a encontrar el grupo fundamental de algún subespacio.

En la práctica los teoremas subsecuentes simplificarán el cálculo de algunos grupos fundamentales.

Definición 1.6.1. *Sean X un espacio topológico y A un subespacio de X. Definimos una **retracción** de X en A como una función continua*

$$r : X \longrightarrow A$$

*tal que $r|_A = Id_A$. En este caso diremos que el conjunto A es un **retracto** de X.*

Recordemos que una función continua $g : (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0)$ induce un homomorfismo $g_* : \pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(Y, y_0)$ dado por $g_*([f]) = [g \circ f]$.

Lema 1.6.2. *Sea $r : (X, x_0) \longrightarrow (A, x_0)$ una retracción, entonces el homomorfismo inducido por la inclusión $j_* : \pi_1(A, x_0) \longrightarrow \pi_1(X, x_0)$ es inyectivo y r_* es suprayectivo.*

Demostración. Consideremos la retracción $r : (X, x_0) \longrightarrow (A, x_0)$, entonces $r \circ j = Id_A$ y por lo tanto $r_* \circ j_* = Id_{\pi_1(A,x_0)}$. Lo anterior nos dice que el homomorfismo j_* es inyectivo y r_* es suprayectivo. ■

Definición 1.6.3. *Sea A un subespacio de X, diremos que A es un **retracto fuerte por deformación** de X si existe una función continua $H : X \times I \longrightarrow X$ tal que $H(a, t) = a$ para todo $(a, t) \in A \times I$, $H(x, 0) = x$ y $H(x, 1) \in A$ para toda $x \in X$. En tal caso, llamaremos a la función H una **retracción fuerte por deformación** de X en A.*

Consideremos $H : X \times I \longrightarrow X$ una retracción fuerte por deformación de X en A, entonces la función $r : X \longrightarrow A$ definida por $r(x) = H(x, 1)$ es una retracción de X en A y H resulta ser una homotopía entre Id_X y $j \circ r$, donde $j : A \longrightarrow X$ es la función inclusión.

Teorema 1.6.4. *Sean A un retracto fuerte por deformación de X en A y $j : (A, x_0) \longrightarrow (X, x_0)$ la función inclusión, entonces $j_* : \pi_1(A, x_0) \longrightarrow \pi_1(X, x_0)$ es un isomorfismo.*

Demostración. Sean H una retracción fuerte por deformación de X en A y $r : X \longrightarrow A$ la función definida por $r(x) = H(x, 1)$, entonces la función $r \circ j$ es la función identidad en A y por lo tanto $r_* \circ j_* = (r \circ j)_* = Id_{\pi_1(A,x_0)}$. Por otra parte, sabemos que H es una homotopía entre $j \circ r$ e Id_X tal que $H(x_0, t) = x_0$ para toda $t \in I$, entonces por el lema 1.2.11 y el teorema 1.2.12 se tiene que $j_* \circ r_* = (j \circ r)_* = (Id_X)_* = Id_{\pi_1(X,x_0)}$. Por lo tanto, los homomorfismo j_* y r_* son isomorfismos. ■

2 Producto libre de grupos.

Los cursos de licenciatura no suelen cubrir el tema del producto libre de grupos, por lo que en este capítulo se introducirá. Para familiarizarnos con esta nueva estructura algebraica estudiaremos algunas de sus propiedades y abocaremos toda nuestra atención en una de ellas, la extensión de homomorfismos. Dicha propiedad servirá de puente para entrelazar el grupo fundamental con el producto libre de grupos.

2.1 Existencia y unicidad del producto libre de grupos.

Empezaremos por considerar grupos no necesariamente abelianos.

Definición 2.1.1. *Sean G un grupo y $\{G_\alpha\}_{\alpha \in J}$ una familia de subgrupos de G. Diremos que la famlia $\{G_\alpha\}_{\alpha \in J}$ genera a G si para todo $x \in G$ existen índices $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ en J y elementos $x_i \in G_{\alpha_i}$ para toda $i = 1, \ldots, n$, tales que:*

$$x = x_1 \cdot \ldots \cdot x_n.$$

Es decir, podemos escribir a cualquier elemento de G como un producto finito de elementos de los grupos G_α.

Definición 2.1.2. *Sean G un grupo y $\{G_\alpha\}_{\alpha \in J}$ una familia de subgrupos de G que lo generen. Definimos una* ***palabra*** *de G respecto a la familia $\{G_\alpha\}_{\alpha \in J}$ como un* *elemento del conjunto:*

$$\{\varnothing\} \cup \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left(\bigcup_{\alpha\in J} G_\alpha \right)^n .$$

*En caso de que una palabra w sea una n-tupla diremos que w tiene **longitud** n, y si $w=\varnothing$ diremos que w tiene **longitud** 0.*

*Sea $x \in G$, si ocurriera que $x = x_1 \cdot \ldots \cdot x_n$, entonces diremos que la palabra $w=(x_1,\ldots,x_n)$ **representa** al elemento x. En caso de que $w=\varnothing$, por convención diremos que representa al elemento identidad en G.*

Supongamos tenemos una palabra de longitud n, digamos $(x_1,\ldots,x_n)$, que representa a un elemento x de G distinto del elemento identidad, es decir que $x = x_1 \cdot \ldots \cdot x_n$. Dado que G no es necesariamente abeliano, no podemos reordenar los factores de la expresión anterior de tal manera que juntemos a todos los factores que pertenezcan a alguno de los grupos G_α, pero si ocurriera que para algún índice i los elementos x_i y x_{i+1} pertenecieran al mismo grupo G_α podemos agruparlos y obtener la palabra $(x_1,\ldots,x_i{\cdot}x_{i+1},\ldots,x_n)$, de longitud $n-1$, que representa a x. Más aún, si para algún índice i se tiene que $x_i = 1$, entonces podemos generar una nueva palabra quitando a x_i de la expresión y obtener la palabra $(x_1,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_n)$, de longitud $n-1$, que representa a x. Por lo tanto, dada una palabra $w=(x_1,\ldots,x_n)$ de longitud n podemos repetir estos últimos dos procedimientos para obtener una nueva palabra $(y_1,\ldots,y_m)$, con $m \leq n$, que represente a x, de tal forma que $y_i \neq 1_G$ y que ningún grupo G_α contenga a y_i y y_{i+1} simultáneamente para todo índice i. Una palabra que cumpla estas propiedades será llamada una palabra reducida.

Definición 2.1.3. *Sean G un grupo y $\{G_\alpha\}_{\alpha\in J}$ una familia de subgrupos de G que lo generen. Sea x un elemento de G distinto de la identidad, diremos que una palabra $w=(x_1,\ldots,x_n)$ que represente a x es **reducida**, si para toda $i=1,\ldots,n$ se tiene que $x_i \neq 1_G$ y los elementos x_i y x_{i+1} no pertenecen al mismo grupo G_α. En el caso de que $x=1_G$, diremos que la palabra $w=\varnothing$ es una palabra reducida que representa el elemento identidad.*

Sean $(x_1,\ldots,x_n)$ y $(y_1,\ldots,y_m)$ dos palabras reducidas que representen a los elementos x y y respectivamente, entonces la palabra $(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_m)$ representa al elemento $x \cdot y$. No necesariamente la palabra $(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_m)$ es reducida, solamente sería reducida si x_n y a y_1 no pertenecieran al mismo grupo G_α.

Si pensamos por un momento en grupos que sean conmutativos nos viene a la mente, de manera natural, el concepto de suma directa, lo que da cabida a preguntarse si es posible generalizar el concepto cuando no necesariamente se trabajan con grupos abelianios.

Definición 2.1.4. *Sean G un grupo y $\{G_\alpha\}_{\alpha\in J}$ una familia de subgrupos de G que lo generen, tal que $G_\alpha \cap G_\beta = \{1_G\}$ si $\alpha \neq \beta$. Diremos que G es el* ***producto libre*** *de la familia $\{G_\alpha\}_{\alpha\in J}$ si para todo elemento x de G existe una única palabra reducida respecto a la familia $\{G_\alpha\}_{\alpha\in J}$ que lo represente. En tal caso lo denotaremos por:*

$$G = \prod_{\alpha\in J}^{*} G_\alpha,$$

y si la familia de subgrupos fuera finita también lo denotaremos por:

$$G = G_1 * \ldots * G_n.$$

Observemos que si G es el producto libre de la familia $\{G_\alpha\}_{\alpha\in J}$ y $(x_1, \ldots, x_n)$ es una palabra con $x_i \neq 1_G$ para toda $i = 1, \ldots, n,$ entonces para verificar que $(x_1, \ldots, x_n)$ es una palabra reducida es suficiente ver que $\alpha_i \neq \alpha_{i+1}$ para toda $i = 1, \ldots, n.$

Veamos una primera caracterización del producto libre de grupos.

Lema 2.1.5. *Sean G un grupo y $\{G_\alpha\}_{\alpha\in J}$ una familia de subgrupos de G que lo generen. Si $G_\alpha \cap G_\beta = \{1_G\}$ para toda $\alpha \neq \beta$ y la representación del elemento identidad es única a través de una palabra reducida, entonces G es el producto libre de la familia $\{G_\alpha\}_{\alpha\in J}$.*

Demostración. Sean $(x_1, \ldots, x_n)$ y $(y_1, \ldots, y_m)$ dos palabras reducidas que representen a un elemento $x \in G$ distinto del elemento identidad, y α_i y β_i los índices tales que $x_i \in G_{\alpha_i}$ y $y_i \in G_{\beta_i}$. Entonces, tenemos la siguiente igualdad:

$$x_1 \cdot \ldots \cdot x_n = x = y_1 \cdot \ldots \cdot y_m,$$

por lo que la palabra $(y_m^{-1}, \ldots, y_1^{-1}, x_1, \ldots, x_n)$ representa al elemento identidad. Por hipótesis sabemos que la palabra vacía es la única palabra reducida que representa al elemento identidad en $G,$ entonces la palabra $(y_m^{-1}, \ldots, y_1^{-1}, x_1, \ldots, x_n)$ no puede ser reducida, por lo cual, podemos reducirla de longitud.

Dado que $(x_1, \ldots, x_n)$ y $(y_1, \ldots, y_m)$ son palabras reducidas y la palabra $(y_m^{-1}, \ldots, y_1^{-1}, x_1, \ldots, x_n)$ no lo es, entonces debe ocurrir forzosamente que $\alpha_1 = \beta_1,$ por lo tanto, obtenemos la palabra

$$(y_m^{-1}, \ldots, y_1^{-1}x_1, \ldots, x_n)$$

de longitud mayor o igual a uno y que representa al elemento identidad. De lo anterior obtenemos dos casos:

1. Si la longitud de la palabra fuese uno entonces no queda otra opción más que $y_1^{-1}x_1 = 1_G$, con lo cual, $x_1 = y_1$ y la expresión de la palabra reducida sería única.
2. Si la longitud de la palabra fuese mayor que uno, vuelve ocurrir que $y_1^{-1}x_1 = 1_G$ y por lo tanto $x_1 = y_1$, además, significa que la palabra
$$(y_m^{-1}, \ldots, y_2^{-1}, x_2, \ldots, x_n)$$
representa al elemento identidad y es de longitud mayor o igual a uno.

En cualquier caso hemos reducido la longitud de la palabra inicial. Se concluye que después de un número finito de pasos obtenemos que $m = n$ y $x_i = y_i$ para toda $i = 1, \ldots, m$. Por lo tanto, la expresión de un elemento en G por medio de una palabra reducida es única y G resulta ser el producto libre de la familia $\{G_\alpha\}_{\alpha \in J}$. ■

Siguiendo con este proceso de generalizar el concepto, veremos que el producto libre de grupos, al igual que la suma directa de grupos abelianos, satisface cierta condición de extensión de homomorfismos.

Teorema 2.1.6. *Sean G un grupo y $\{G_\alpha\}_{\alpha \in J}$ una familia de subgrupos de G. Si G es el producto libre de la familia $\{G_\alpha\}_{\alpha \in J}$, entonces G satisface la siguiente condición de extensión:*

- *Dados un grupo H y una familia de homomorfismos $\{h_\alpha : G_\alpha \longrightarrow H\}_{\alpha \in J}$ existe un único homomorfismo $h : G \longrightarrow H$ tal que $h|_{G_\alpha} = h_\alpha$ para todo índice α.*

Es decir, si para todo α consideramos la función inclusión i_α tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, dotted, "h"] & H \\ G_\alpha \arrow[u, "i_\alpha"] \arrow[ur, "h_\alpha"'] & \end{tikzcd}$$

Demostración. Sea $x \in G$ distinto del elemento identidad, denotaremos por $w_x = (z_1, \ldots, z_{n_x})$ a la única palabra reducida que representa a x, donde $z_i \in G_{\alpha_i}$ para toda $i = 1, \ldots, n_x$. Definimos la función $h : G \longrightarrow H$ como:

$$h(x) = \begin{cases} h_{\alpha_1}(z_1)h_{\alpha_2}(z_2)\dots h_{\alpha_{n_x}}(z_{n_x}) & \text{si } \ x \neq 1_G \\ 1_H & \text{si } \ x = 1_G. \end{cases}$$

Debido a la unicidad de la representación de los elementos de G por medio de las palabras reducidas la función h queda bien definida, y por construcción es claro que $h|_{G_\alpha} = h_\alpha$ para todo índice α. Lo único que resta es mostrar que h es un homomorfismo. Para esto construiremos una función ϕ que va del conjunto de todas las palabras de G respecto a la familia $\{G_\alpha\}_{\alpha\in J}$ al grupo H. Si denotamos por W el conjunto de todas las palabras de G, entonces definimos la función $\phi : W \longrightarrow H$ como:

$$\phi(w) = \begin{cases} h_{\alpha_1}(x_1)\dots h_{\alpha_n}(x_n) & \text{si } w = (x_1, \dots, x_n) \\ 1_H & \text{si } w = \varnothing \end{cases}$$

donde α_i es el índice tal que $x_i \in G_{\alpha_i}$ para toda $i = 1, \dots, n$. Si $x_i \neq 1_G$, entonces sabemos que el índice α_i es único. En el caso de que $x_i = 1_G$, dado que las funciones h_α son homomorfismos ocurre que mandan el elemento identidad de G al elemento identidad de H, por lo tanto, la función ϕ está bien definida.

Veamos algunas propiedades de esta función.

Sea $w = (x_1, \dots, x_n)$ una palabra distinta del vacío y w' una palabra obtenida de w aplicando alguna de las operaciones para reducir su longitud, entonces afirmamos que $\phi(w) = \phi(w')$.

1. Supongamos que w' se obtuvo quitando a $x_i = 1_G$ de la expresión de w, entonces es claro que $\phi(w) = \phi(w')$ ya que $h_{\alpha_i}(x_i) = 1_H$.

2. Supongamos que $\alpha_i = \alpha_{i+1} = \alpha$, entonces $w' = (x_1, \dots, x_i \cdot x_{i+1}, \dots, x_n)$. Como h_α es un homomorfismo tenemos la igualdad $h_\alpha(x_i \cdot x_{i+1}) = h_\alpha(x_i)h_\alpha(x_{i+1})$. Por lo tanto, $\phi(w) = \phi(w')$.

3. Se sigue que si w es cualquier palabra de G que represente a x, entonces $\phi(w) = \phi(w_x) = h(x)$.

Verifiquemos que h es un homomorfismo.

Sean $w_x = (z_1, \dots, z_{n_x})$ y $w_y = (w_1, \dots, w_{m_y})$ las palabras reducidas que representan a x y y respectivamente. Si denotamos por (w_x, w_y) a la palabra

$(z_1, \ldots, z_{n_x}, w_1, \ldots, w_{m_y})$ que representa a $x \cdot y$, entonces de la definición de ϕ y de la propiedad 3 obtenemos la siguiente igualdad:

$$h(x \cdot y) = \phi(w_{x \cdot y}) = \phi(w_x, w_y) = \phi(w_x)\phi(w_y) = h(x)h(y).$$

Por lo tanto, h es el homomorfismo buscado.

Por último, veamos que dicho homomorfismo es único con esta propiedad. Sea $h' : G \longrightarrow H$ un homomorfismo que cumpla con la propiedad de extensión, entonces dado $x \in G$ tenemos que:

$$h'(x) = h'(z_1 \cdot \ldots \cdot z_{n_x}) = h'(z_1) \ldots h'(z_{n_x}) = h_{\alpha_1}(z_1) \ldots h_{\alpha_{n_x}}(z_{n_x}) = h(x).$$

Por lo tanto, $h = h'$.

■

Sea $\{G_\alpha\}_{\alpha \in J}$ una familia arbitraria de grupos y consideremos el problema de encontrar un grupo G que contenga a subgrupos G'_α isomorfos a los grupos G_α, de manera que G sea el producto libre de la familia $\{G'_\alpha\}_{\alpha \in J}$. Esto conduce a la noción de producto externo libre.

Definición 2.1.7. *Sea $\{G_\alpha\}_{\alpha \in J}$ una familia de grupos. Supongamos que G es un grupo y que $\{i_\alpha : G_\alpha \longrightarrow G\}_{\alpha \in J}$ es una familia de monomorfismos tal que G es el producto libre de la familia $\{i_\alpha(G_\alpha)\}_{\alpha \in J}$. Entonces, diremos que G es el **producto externo libre** de la familia $\{G_\alpha\}_{\alpha \in J}$ relativo a la familia de homomorfismos $\{i_\alpha\}_{\alpha \in J}$; en tal caso, abusando de la notación, lo denotaremos por:*

$$\prod_{\alpha \in J}^{*} G_\alpha.$$

El siguiente teorema mostrará la existencia del producto externo libre.

Teorema 2.1.8 (Existencia del producto externo libre). *Sea $\{G_\alpha\}_{\alpha \in J}$ una familia de grupos, entonces existe un grupo G y una familia de monomorfismos $\{i_\alpha : G_\alpha \longrightarrow G\}_{\alpha \in J}$ tal que G es el producto externo libre de la familia $\{G_\alpha\}_{\alpha \in J}$ relativo a la familia de homomorfismos $\{i_\alpha\}_{\alpha \in J}$.*

Demostración. Para hacer la prueba más sencilla consideraremos que los grupos G_α son ajenos. Definiremos una palabra de longitud $r > 0$ respecto a la familia $\{G_\alpha\}_{\alpha \in J}$ como un elemento del conjunto

$$\left(\bigcup_{\alpha \in J} G_\alpha \right)^r,$$

y definimos la palabra de longitud 0 como el conjunto vacío. Una palabra $w = (x_1, \ldots, x_n)$, distinta del vacío, es llamada reducida si para todo índice α_i, tal que $x_i \in G_{\alpha_i}$, se tiene que $\alpha_i \neq \alpha_{i+1}$ y $x_i \neq 1_{G_{\alpha_i}}$ para toda $i = 1, \ldots, n$. Igual que antes, definimos el conjunto vacío como la única palabra reducida de longitud cero. Denotaremos por W el conjunto de todas las palabras reducidas respecto a la familia $\{G_\alpha\}_{\alpha \in J}$ y $P(W)$ al conjunto de todas las biyecciones de W en sí mismo. $P(W)$ dotado de la operación composición es un grupo. Obtendremos el grupo G como un subgrupo de $P(W)$. Para esto construiremos, para todo índice α y para todo $x \in G_\alpha$, una función $\pi_x : W \longrightarrow W$ que satisfaga las siguientes dos condiciones:

1. Si $x = 1_{G_\alpha}$, entonces $\pi_x = Id_W$.
2. Si x y y son elementos de G_α y $z = x \cdot y$, entonces $\pi_z = \pi_x \circ \pi_y$.

Para facilitar la notación dejaremos que $w = (x_1, \ldots, x_n)$ denote en general a cualquier elemento de W que no sea la palabra vacía, además, α y α_1 denotarán los índices tales que $x \in G_\alpha$ y $x_1 \in G_{\alpha_1}$. Procedamos a constuir dichas funciones.

1. Si $x = 1_{G_\alpha}$, definimos a π_x como la función identidad en W.
2. Si $x \neq 1_{G_\alpha}$, definimos a π_x como:

   a) $\pi_x(\varnothing) = (x)$.

   b) $\pi_x(w) = (x, x_1, \ldots, x_n)$ si $\alpha_1 \neq \alpha$.

   c) $\pi_x(w) = (xx_1, \ldots, x_n)$ si $\alpha_1 = \alpha$ y $x_1 \neq x^{-1}$.

   d) $\pi_x(w) = (x_2, \ldots, x_n)$ si $\alpha_1 = \alpha$, $x_1 = x^{-1}$ y $n \geq 2$.

   e) $\pi_x(w) = \varnothing$ si $\alpha_1 = \alpha$, $x_1 = x^{-1}$ y $n = 1$.

Obserevemos que $\pi_x(W) \subseteq W$ y que la longitud de $\pi_x(w)$ es menor, mayor o igual que la longitud de w.

Sean x y y elementos de G_α y $z = x \cdot y$, veamos que la igualdad $\pi_z = \pi_x \circ \pi_y$ se cumple. Dividámoslo en casos.

1. Si $x = 1_{G_\alpha}$ o $y = 1_{G_\alpha}$, entonces $\pi_x = Id_W$ o $\pi_y = Id_W$, supondremos sin pérdida de generalidad que $y = 1_{G_\alpha}$, por lo que $z = x \cdot 1_{G_\alpha} = x$. Entonces tenemos la siguiente igualdad:

$$\pi_z = \pi_x = \pi_x \circ Id_W = \pi_x \circ \pi_y.$$

2. Si $x \neq 1_{G_\alpha}$ y $y \neq 1_{G_\alpha}$, entonces

   a) Si $v = \varnothing$, como $y \neq 1_{G_\alpha}$, entonces $\pi_y(\varnothing) = (y)$. Ahora tenemos dos casos:

   - Si $z = 1_{G_\alpha}$ eso quiere decir que $y = x^{-1}$ y por la definición de las funciones tenemos que
   $$\pi_x(\pi_y(\varnothing)) = \pi_x(y) = \varnothing = \pi_z(\varnothing).$$
   - Si $z \neq 1_{G_\alpha}$, entonces $y \neq x^{-1}$, por lo tanto
   $$\pi_x(\pi_y(\varnothing)) = \pi_x(y) = (x \cdot y) = (z) = \pi_z(\varnothing).$$

   b) Si $\alpha_1 \neq \alpha$, entonces $\pi_y(w) = (y, x_1, \ldots, x_n)$. Ahora tenemos dos casos:

   - Si $z = 1_{G_\alpha}$, entonces $y = x^{-1}$, por lo tanto
   $$\pi_x(\pi_y(w)) = \pi_x(y, x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_n) = \pi_z(w).$$
   - Si $z \neq 1_{G_\alpha}$, entonces $y \neq x^{-1}$, por lo tanto
   $$\pi_x(\pi_y(w)) = \pi_x(y, x_1, \ldots, x_n) = (x \cdot y, x_1, \ldots, x_n) = \pi_z(w).$$

   c) Si $\alpha_1 = \alpha$ y $x_1 \neq y^{-1}$, entonces $\pi_y = (y \cdot x_1, \ldots, x_n)$.

   - Si $y \cdot x_1 = x^{-1}$ y la longitud de $\pi_y(w)$ es mayor o igual que dos, tenemos que
   $$\pi_x(\pi_y(w)) = \pi_x(y \cdot x_1, \ldots, x_n) = (x_2, \ldots, x_n) = \pi_z(w).$$
   - Si $y \cdot x_1 = x^{-1}$ y la longitud de $\pi_y(w)$ es uno, tenemos que
   $$\pi_x(\pi_y(w)) = \pi_x(y \cdot x_1) = \varnothing = \pi_z(w).$$
   - Si $x \cdot y \cdot x_1 \neq 1_{G_\alpha}$, entonces
   $$\pi_x(\pi_y(w)) = (x \cdot y \cdot x_1, x_2, \ldots, x_n) = (z \cdot x_1 \ldots, x_n) = \pi_z(w).$$

   d) Si $\alpha = \alpha_1$ y $x_1 = y^{-1}$ tenemos dos casos:

   - Si la longitud de w es mayor que dos y α_2 es el índice tal que $x_2 \in G_{\alpha_2}$, entonces $\pi_y(w) = (x_2, \ldots, x_n)$, por lo que
   $$\begin{aligned}
   \pi_x(\pi_y(w)) = \pi_x(x_2, \ldots, x_n) &= (x, x_2, \ldots, x_n) \\
   &= (x \cdot 1_{G_\alpha}, x_2, \ldots, x_n) \\
   &= (x \cdot y \cdot x_1, x_2, \ldots, x_n) \\
   &= (z \cdot x_1, \ldots, x_n) \\
   &= (\pi_z(w)).
   \end{aligned}$$

- Si la longitud de w es uno, entonces

$$\pi_x(\pi_y(x_1)) = \pi_x(\varnothing) = (x) = (x \cdot 1_{G_\alpha}) = (x \cdot y \cdot x_1) = (z \cdot x_1) = \pi_z(x_1).$$

Por lo tanto, para todo índice α y para cualesquiera dos elementos x y y de G_α, con $z = x \cdot y$, se tiene que $\pi_z = \pi_x \circ \pi_y$.

Lo que sigue es mostrar que todas las funciones π_x son elementos de $P(W)$ y que las funciones $\{i_\alpha : G_\alpha \longrightarrow P(W)\}_{\alpha \in J}$ definidas por $i_\alpha(x) = \pi_x$ son monomorfismos.

Sean $x \in G_\alpha$ y $y = x^{-1}$, entonces

$$\pi_y \circ \pi_x = \pi_{y \cdot x} = \pi_{1_{G_\alpha}} = Id_W \qquad \text{y} \qquad \pi_x \circ \pi_y = \pi_{x \cdot y} = \pi_{1_{G_\alpha}} = Id_W,$$

por lo tanto, $\pi_x \in P(W)$. Veamos que i_α es un monomorfismo. Sean x y y elementos de G_α, entonces:

$$i_\alpha(x \cdot y) = \pi_{x \cdot y} = \pi_x \circ \pi_y = i_\alpha(x) \circ i_\alpha(y),$$

por lo tanto, i_α es un homomorfismo. Para ver que es inyectiva consideremos un elemento $x \in G_\alpha$ distinto de la identidad y mostremos que $i_\alpha(x) = \pi_x \neq Id_W$. En efecto, si $x \neq 1_{G_\alpha}$ por definición $\pi_x(\varnothing) = (x)$, por lo tanto, $i_\alpha(x) = \pi_x \neq Id_W$.

Por último, consideremos el subgrupo $G \subseteq P(W)$ generado por los subgrupos $G'_\alpha = i_\alpha(G_\alpha)$. Mostraremos que G es el producto libre de la familia $\{G'_\alpha\}_{\alpha \in J}$.

Por definición la familia $\{G'_\alpha\}_{\alpha \in J}$ genera al subgrupo G. Veamos que $G'_\gamma \cap G'_\beta = \{Id_W\}$ si $\gamma \neq \beta$. Sean $\gamma \neq \beta$, x y y elementos de G_γ y G_β respectivamente; si alguno de ellos es distinto de sus respectivos elementos identidad, entonces π_x o π_y es distinta de la función identidad. Afirmamos que $\pi_x \neq \pi_y$, para ver esto evaluámos ambas funciones en la palabra vacía y obtenemos que $\pi_x(\varnothing) \neq \pi_y(\varnothing)$, por lo tanto, $\pi_x \neq \pi_y$. Esto último nos asegurará que el único elemento en común entre los subgrupos G'_α es el elemento identidad. Sean $\gamma \neq \beta$ y $\pi_z \in G'_\gamma \cap G'_\beta$, entonces existen elementos x y y en G_γ y G_β tal que $i_\gamma(x) = \pi_x = \pi_z = \pi_y = i_\beta(y)$, de lo anterior sabemos que necesariamente x y y son los elementos identidad de los grupos G_γ y G_β, es decir, $\pi_z = Id_w$. Para finalizar la prueba falta ver, debido al lema 2.1.5, que la palabra vacía es la única palabra reducida que representa al elemento identidad en G.

Sea $w' = (\pi_{x_1}, \ldots, \pi_{x_n})$ una palabra reducida de G respecto a la familia $\{G'_\alpha\}_{\alpha \in J}$ y α_i el índice tal que $x_i \in G_{\alpha_i}$ para toda $i = 1, \ldots, n$. Dado que w' es una palabra reducida sabemos que $\alpha_i \neq \alpha_{i+1}$ y $i_{\alpha_i}(x_i) = \pi_{x_i} \neq Id_W$ para toda $i = 1, \ldots, n$. Por lo tanto,

$$\pi_{x_1}(\pi_{x_2}(\ldots(\pi_{x_n}(\varnothing))\ldots))) = (x_1,\ldots,x_n) \neq \varnothing.$$

Es decir, la palabra $(\pi_{x_1},\ldots,\pi_{x_n})$ no representa la función identidad. Con lo cual concluimos que G es el producto libre de la familia $\{G'_\alpha\}_{\alpha\in J}$.

■

Lema 2.1.9. *Sean G un grupo, $\{G_\alpha\}_{\alpha\in J}$ un familia de grupos y $\{i_\alpha : G_\alpha \longrightarrow G\}_{\alpha\in J}$ una familia de monomorfismos. Si G es el producto externo libre de la familia $\{G_\alpha\}_{\alpha\in J}$ respecto a la familia $\{i_\alpha\}_{\alpha\in J}$, entonces G satisface la siguiente condición de extensión:*

- *Dados un grupo H y una familia de homomorfismos $\{h_\alpha : G_\alpha \longrightarrow H\}_{\alpha\in J}$ existe un único homomorfismo $h : G \longrightarrow H$ tal que $h\circ i_\alpha = h_\alpha$ para todo índice α.*

Es decir que para todo índice α tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, dotted, "h"] & H \\ G_\alpha \arrow[u, "i_\alpha"] \arrow[ur, "h_\alpha"'] & \end{tikzcd}$$

Demostración. Denotaremos por G'_α al subgrupo $i_\alpha(G_\alpha)$ para todo índice α, entonces por el teorema 2.1.6 sabemos que para la familia de homomorfismos $\{h_\alpha\circ i_\alpha^{-1} : G'_\alpha \longrightarrow H\}_{\alpha\in J}$ existe un único homomorfismo $h : G \longrightarrow H$ tal que $h|_{G'_\alpha} = h_\alpha\circ i_\alpha^{-1}$, de donde

$$h\circ i_\alpha = h|_{G'_\alpha}\circ i_\alpha = h_\alpha\circ i_\alpha^{-1}\circ i_\alpha = h_\alpha.$$

Por lo tanto, G cumple la propiedad de extensión. Para probar la unicidad de h consideremos un homomorfismo h' tal que $h'\circ i_\alpha = h_\alpha$ para todo índice α, entonces $h'|_{G'_\alpha} = h_\alpha\circ i_\alpha^{-1} = h|_{G'_\alpha}$ para todo α y por el teorema 2.1.6 concluimos que $h' = h$. ■

Nos encontramos en camino de caracterizar al producto externo libre, y a la vez el producto libre de grupos, por medio de la condición de extensión de homomorfismos del lema anterior; para esto necesitamos probar la unicidad bajo isomorfismos del producto externo libre. El siguiente teorema garantiza dicha unicidad.

Teorema 2.1.10 (Unicidad del producto externo libre). *Sean $\{G_\alpha\}_{\alpha\in J}$ una familia de grupos, G y G' grupos, $\{i_\alpha : G_\alpha \longrightarrow G\}_{\alpha\in J}$ y $\{i'_\alpha : G_\alpha \longrightarrow G'\}_{\alpha\in J}$ familias de homomorfismos. Si G y G' satisfacen la condición de extensión del lema 2.1.9 respecto a la* *familia de homomorfismos* $\{i_\alpha\}_{\alpha\in J}$ *e* $\{i'_\alpha\}_{\alpha\in J}$ *respectivamente, entonces existe un único isomorfismo* $\phi : G \longrightarrow G'$ *tal que* $\phi \circ i_\alpha = i'_\alpha$ *para todo índice* α. *Es decir que para todo índice* α *se tiene el siguiente diagrama conmutativo:*

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, dotted, "\phi"] & G' \\ G_\alpha \arrow[u, "i_\alpha"] \arrow[ur, "i'_\alpha"'] & \end{tikzcd}$$

Demostración. Como G y G' satisfacen la propiedad de extensión del lema 2.1.9 sabemos que existen homomorfismos $\phi : G \longrightarrow G'$ y $\psi : G' \longrightarrow G$ que hacen conmutar, para todo índice α, los siguientes triángulos, y por ende el diagrama completo:

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, dotted, "\phi"] & G' \arrow[r, dotted, "\psi"] & G \\ & G_\alpha \arrow[ul, "i_\alpha"] \arrow[u, "i'_\alpha"'] \arrow[ur, "i_\alpha"'] & \end{tikzcd}$$

Esto implica que $\psi\circ\phi\circ i_\alpha = i_\alpha$. Por otro lado, tenemos que $Id_G \circ i_\alpha = i_\alpha$ para toda α, y dado que la condición de extensión también garantiza la unicidad de los homomorfismos, tenemos que $\psi \circ \phi = Id_G$. De manera análoga obtenemos que $\phi \circ \psi = Id_{G'}$, lo cual indica que ϕ es un isomorfismo. Por último, la unicidad de ϕ se debe también a la unicidad que ofrece la condición de extensión. ■

Teorema 2.1.11 (Caracterización del producto externo libre). *Sean* G *un grupo,* $\{G_\alpha\}_{\alpha\in J}$ *una familia de grupos e* $\{i_\alpha : G_\alpha \longrightarrow G\}_{\alpha\in J}$ *una familia de homomorfismos. Entonces,* G *satisface la propiedad de extensión del lema 2.1.9 respecto a la familia de homomorfismos* $\{i_\alpha\}_{\alpha\in J}$ *si y sólo si* G *es el producto externo libre de la familia* $\{G_\alpha\}_{\alpha\in J}$ *relativo a la familia* $\{i_\alpha\}_{\alpha\in J}$.

Demostración. Una parte del teorema queda garantizado por el lema 2.1.9. Supongamos entonces que el grupo G satisface la condición de extensión del lema 2.1.9. Empecemos por mostrar que la familia de homomorfismos $\{i_\alpha\}_{\alpha\in J}$ es de hecho una familia de monomorfismos. Sean β un índice, $H = G_\beta$ y $\{h_\alpha : G_\alpha \longrightarrow H\}_{\alpha\in J}$ la familia de homomorfismos definida por $h_\beta = Id_{G_\beta}$ y $h_\alpha = 0$ para toda $\alpha \neq \beta$. Entonces, por la condición de extensión existe un homomorfismo $h : G \longrightarrow H$ tal que $h \circ i_\alpha = h_\alpha$ para toda α, en particular $h \circ i_\beta = Id_{G_\beta}$, lo cual nos dice que el homomorfismo i_β es inyectivo. Por lo tanto, la familia $\{i_\alpha\}_{\alpha\in J}$ es una familia de monomorfismos.

Por otro lado, del teorema 2.1.8 sabemos que existe un grupo G' y una familia de monomorfismos $\{i'_\alpha : G_\alpha \longrightarrow G'\}_{\alpha\in J}$ tal que G' es el producto libre de la familia

$\{i'_\alpha(G_\alpha)\}_{\alpha\in J}$, con lo cual, tanto G como G' satisfacen la condición de extensión del lema 2.1.9 respecto a las familias $\{i_\alpha\}_{\alpha\in J}$ e $\{i'_\alpha\}_{\alpha\in J}$. Usando el teorema 2.1.10 sabemos que existe un único isomorfismo $\phi : G \longrightarrow G'$ tal que $\phi \circ i_\alpha = i'_\alpha$ para todo índice α. Las demás condiciones para verificar que G es el producto libre de la familia $\{i_\alpha(G_\alpha)\}_{\alpha\in J}$ se desprenden del hecho de que $G \cong G'$ y que $\phi \circ i_\alpha = i'_\alpha$ para todo índice α. Concluimos que G es un producto externo libre de la familia $\{G_\alpha\}_{\alpha\in J}$ relativo a la familia de homomorfismo $\{i_\alpha\}_{\alpha\in J}$. ■

Corolario 2.1.12. *Sea G un grupo tal que $G = G_1 * G_2$ donde G_1 es el producto libre de la familia de subgrupos $\{H_\alpha\}_{\alpha\in J}$ y G_2 es el producto libre de la familia de subgrupos $\{H_\beta\}_{\beta\in K}$. Si los conjuntos J y K son ajenos, entonces G es el producto libre de la familia de subgrupos $\{H_\gamma\}_{\gamma\in J\cup K}$.*

Demostración. Sea H un grupo y $\{h_\gamma : H_\gamma \longrightarrow H\}_{\gamma\in J\cup K}$ una familia de homomorfismos. Por hipótesis sabemos existen homomorfismos $h_1 : G_1 \longrightarrow H$ y $h_2 : G_2 \longrightarrow H$ tal que $h_1|_{H_\alpha} = h_\alpha$ para toda $\alpha \in J$ y $h_2|_{H_\beta} = h_\beta$ para toda $\beta \in K$. Como $G = G_1 * G_2$, para la familia $\{h_1, h_2\}$ existe un homomorfismo $h : G \longrightarrow H$ tal que $h|_{G_1} = h_1$ y $h|_{G_2} = h_2$. Por lo tanto, $h|_{H_\alpha} = (h|_{G_1})|_{H_\alpha} = h_1|_{H_\alpha} = h_\alpha$ para toda $\alpha \in J$ y $h|_{H_\beta} = (h|_{G_2})|_{H_\beta} = h_2|_{H_\beta} = h_\beta$ para toda $\beta \in K$. Con lo cual, por el teorema 2.1.11, tenemos que G es el producto libre de la familia $\{H_\gamma\}_{\gamma\in J\cup K}$. ■

A continuación veremos una aplicación de la caracterización del producto externo libre, pero antes recordemos que significa que un subgrupo de un grupo fuese normal.

Definición 2.1.13. *Sean G un grupo y N un subgrupo de G. Diremos que N es un subgrupo **normal** de G si para todo elemento g de G se tiene la siguiente igualdad:*

$$N = gNg^{-1} = \{gxg^{-1} \mid x \in N\}$$

Teorema 2.1.14. *Sean $G = G_1 * G_2$ y N_i un subgrupo normal del grupo G_i para $i = 1, 2$. Si N es el menor subgrupo normal de G que contiene al conjunto $N_1 \cup N_2$, entonces $(G_1 * G_2)/N \cong (G_1/N_1) * (G_2/N_2)$.*

Demostración. Mostraremos que el grupo $(G_1 * G_2)/N$ satisface la propiedad de extensión del lema 2.1.9 respecto a una familia de homomorfismos que construiremos a continuación. Consideremos las siguientes composiciones de homomorfismos:

$$\begin{tikzcd} G_1 \arrow[r, hook] \arrow[rr, bend right, "f"'] & G_1 * G_2 \arrow[r, "\pi"] & (G_1 * G_2)/N \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} G_2 \arrow[r, hook] \arrow[rr, bend right, "g"'] & G_1 * G_2 \arrow[r, "\pi"] & (G_1 * G_2)/N \end{tikzcd}$$

con π la función proyección. Por otro lado, las funciones proyecciones $\rho_i : G_i \longrightarrow G_i/N_i$, con $i = 1, 2,$ cumplen que $Ker(\rho_1) \subseteq ker(f)$ y $Ker(\rho_2) \subseteq ker(g)$, por lo cual, podemos construir homomorfismos únicos:

$$i_1 : G_1/N_1 \longrightarrow (G_1 * G_2)/N \quad \text{e} \quad i_2 : G_2/N_2 \longrightarrow (G_1 * G_2)/N$$

que hagan conmutar los siguientes diagramas:

$$\begin{tikzcd} G_1 \arrow[r, hook] \arrow[d, "\rho_1"] & G_1 * G_2 \arrow[r, "\pi"] & (G_1 * G_2)/N \\ G_1/N_1 \arrow[urr, dotted, "i_1"] & & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} G_1 \arrow[r, hook] \arrow[d, "\rho_2"] & G_1 * G_2 \arrow[r, "\pi"] & (G_1 * G_2)/N \\ G_2/N_2 \arrow[urr, dotted, "i_2"] & & \end{tikzcd}$$

Afirmamos que $(G_1 * G_2)/N$ satisface la condición de extensión del lema 2.1.9 respecto a la familia $\{i_1, i_2\}$. Sean H un grupo y $h_1 : G_1/N_1 \longrightarrow H$ y $h_2 : G_2/N_2 \longrightarrow H$ homomorfismos. Por hipótesis $G = G_1 * G_2$, entonces para los homomorfismos $h_1 \circ \rho_1$ y $h_2 \circ \rho_2$ sabemos que existe un homomorfismo h' que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} G \arrow[rr, dotted, "h'"] & & H \\ & G_i/N_i \arrow[ur, "h_i"] & \\ G_i \arrow[uu, "j_i"] \arrow[ur, "\rho_i"] & & \end{tikzcd}$$

con j_i la función inclusión e $i = 1, 2$. Observemos que $h'(N_i) = \{1_H\}$, por lo que el conjunto $N_1 \cup N_2 \subseteq Ker(h')$, y como $Ker(h')$ es un subconjunto normal de G entonces $N \subseteq Ker(h')$. Esto último nos dice que podemos construir un único homomorfismo $h : (G_1 * G_2)/N \longrightarrow H$ que haga conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "h'"] \arrow[d, "\pi"'] & H \\ (G_1 * G_2)/N \arrow[ur, dotted, "h"'] & \end{tikzcd}$$

Por último, veremos que h es el único homomorfismo que da lugar a las siguientes igualdades:

$$h \circ i_1 = h_1 \quad \text{y} \quad h \circ i_2 = h_2.$$

Sea $xN_1 \in G_1/N_1$, entonces de los diagramas anteriores obtenemos la siguiente igualdad: $h \circ i_1(xN_1) = h(\pi(x)) = h'(x) = h_1(\rho_1(x)) = h_1(xN_1)$, con lo cual $h \circ i_1 = h_1$. Análogamente tenemos que $h \circ i_2 = h_2$. Para ver la unicidad de h consideremos otro homomorfismo $h'' : (G_1 * G_2)/N \longrightarrow H$ tal que $h'' \circ i_1 = h_1$ y $h'' \circ i_2 = h_2$. Observemos que la familia $\{i_1(G/N_1), i_2(G/N_2)\}$ genera a $(G_1 * G_2)/N$, y dado que h y h'' cumplen las igualdades anteriores tenemos que al evaluarlas en los generadores de $(G_1 * G_2)/N$ son iguales, garantizando así que $h = h''$. Por lo tanto, $(G_1 * G_2)/N$ es el producto externo libre de la familia $\{G_1/N_1, G_2/N_2\}$ relativo a la familia de homomorfismos $\{i_1, i_2\}$, de manera que $(G_1 * G_2)/N \cong (G_1/N_1) * (G_2/N_2)$.

■

Corolario 2.1.15. *Sean $G = G_1 * G_2$ y N el menor subgrupo normal de G que contiene a G_1, entonces $(G_1 * G_2)/N \cong G_2$.*

Demostración. Si consideramos $N_1 = G_1$ y $N_2 = \{1_G\}$, entonces:

$$(G_1 * G_2)/N \cong (G_1/G_1) * (G_2/\{1_G\}) = \{1_{G_1/G_1}\} * (G_2/\{1_G\}) \cong G_2$$

■

2.2 Grupos libres.

Para finalizar el capítulo, generalizaremos el concepto de los grupos abelianos libres. Los grupos libres aparecerán con frecuencia al calcular los grupos fundamentales.

Definición 2.2.1. *Sean G un grupo y $\{a_\gamma\}_{\gamma \in J}$ una familia de elementos de G. Diremos que la familia $\{a_\gamma\}_{\gamma \in J}$ **genera** a G si todo elemento de G puede se escrito como un producto finito de potencias de elementos en $\{a_\gamma\}_{\gamma \in J}$. Si la familia $\{a_\gamma\}_{\gamma \in J}$ es finita, entonces diremos que G es **finitamente generado**.*

Definición 2.2.2. *Sean G un grupo y $\{a_\gamma\}_{\gamma \in J}$ una familia de elementos de G. Si cada elemento a_γ genera un subgrupo infinito G_γ y G es el producto libre de la familia $\{G_\gamma\}_{\gamma \in J}$, entonces diremos que G es un **grupo libre** y la familia $\{a_\gamma\}_{\gamma \in J}$ será llamada un **sistema libre de generadores** de G.*

Consideremos G un grupo libre con $\{a_\gamma\}_{\gamma\in J}$ un sistema libre de generadores, entonces todo elemento x de G, distinto del elemento identidad, puede ser escrito de manera única como:

$$x = (a_{\gamma_1})^{n_1}\cdot \ldots \cdot (a_{\gamma_k})^{n_k},$$

donde $\gamma_i \neq \gamma_{i+1}$ y $n_i \in \mathbb{Z} - \{0\}$ para toda i.

Los grupos libres se caracterizan por la siguiente propiedad de extensión de homomorfismos.

Teorema 2.2.3. *Sean G un grupo y $\{a_\gamma\}_{\gamma\in J}$ una familia de elementos de G. Entonces, G es un grupo libre con $\{a_\gamma\}_{\gamma\in J}$ un sistema libre de generadores si y solo si G satisface la siguiente condición de extensión:*

- *Dados un grupo H y cualquier familia de elementos $\{y_\gamma\}_{\gamma\in J}$ de H existe un único homomorfismo $h : G \longrightarrow H$ tal que $h(a_\gamma) = y_\gamma$ para todo índice γ.*

Demostración. Primero supongamos que G es un grupo libre con $\{a_\gamma\}_{\gamma\in J}$ un sistema libre de generadores. Sean H un grupo y $\{y_\gamma\}_{\gamma\in J}$ una familia de elementos de H, entonces en vista de que los subgrupos $\langle a_\gamma\rangle = G_\gamma$ son infinitos para todo índice γ, podemos construir la familia de homomorfismos $\{h_\gamma : G_\gamma \longrightarrow H\}_{\gamma\in J}$ dados por $h_\gamma(a_\gamma^n) = y_\gamma^n$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Es claro que $h_\gamma(a_\gamma) = y_\gamma$ para todo índice γ, y como G es el producto libre de la familia $\{G_\gamma\}_{\gamma\in J}$ sabemos que existe un único homomorfismo $h : G \longrightarrow H$ tal que $h|_{G_\gamma} = h_\gamma$ para todo índice γ, con lo cual, $h(a_\gamma) = y_\gamma$.

Por último, supongamos que el grupo G satisface la condición de extensión respecto a la familia $\{a_\gamma\}_{\gamma\in J}$. Hay que verificar que bajo estas hipótesis los subgrupos $\langle a_\gamma\rangle = G_\gamma$ son infinitos y que G es el producto libre de la familia $\{G_\gamma\}_{\gamma\in J}$.

Sean β un índice, $H = \mathbb{Z}$ y $\{y_\gamma\}_{\gamma\in J}$ la familia de elementos en $\mathbb{Z}$ tal que $y_\beta = 1$ y $y_\gamma = 0$ si $\beta \neq \gamma$. Por hipótesis existe un homomorfismo $h : G \longrightarrow Z$ tal que $h(a_\beta) = 1$ y $h(a_\gamma) = 0$ para todo índice $\gamma \neq \beta$, con lo cual $h(G_\beta) = \mathbb{Z}$ y $h|_{G_\beta}$ es inyectivo, por lo tanto, $G_\beta \cong \mathbb{Z}$. Para finalizar, tenemos que debido a la condición de extensión que satisface G respecto a la familia $\{a_\gamma\}_{\gamma\in J}$ también G satisface la condición de extensión del teorema 2.1.11, asegurándonos que G es el producto libre de la familia $\{G_\gamma\}_{\gamma\in J}$.

■

Corolario 2.2.4. *Sea* $G = G_1 * G_2$ *donde* G_1 *y* G_2 *son grupos libres con* $\{a_\beta\}_{\beta\in J}$ *y* $\{a_\gamma\}_{\gamma\in K}$ *sus respectivos sistemas libres de generadores. Si los conjuntos de índices* J *y* K *son ajenos, entonces* G *es un grupo libre con* $\{a_\eta\}_{\eta\in J\cup K}$ *un sistema libre de generadores.*

Demostración. Por el corolario 2.1.12 sabemos que G es el producto libre de la familia $\{G_\eta\}_{\eta\in J\cup K}$ con $G_\eta = \langle a_\eta\rangle$, además, cada uno de estos subgrupos es un subgrupo infinito. Por lo tanto, G es un grupo libre con $\{a_\eta\}_{\eta\in J\cup K}$ un sistema libre de generadores. ∎

3 El Teorema de Seifert-van Kampen

El Teorema de Seifert-van Kampen que se tratará en el presente capítulo fue demostrado por el matemático Egbert Rudolf van Kampen en el año 1932. De hecho, el teorema es mejor conocido como el *Teorema de van Kampen* el cual posee una versión más general que dice:

> Sea $\vartheta = \{U_\alpha\}_{\alpha \in J}$ una cubierta de un espacio X tal que los conjuntos U_α son conexos por trayectorias y la intersección finita de elementos en ϑ vuelven a estar en ϑ. Consideremos a ϑ como la categoría cuyos morfismos son las inclusiones de subconjuntos y observemos que el funtor Π, restringido a los espacios y funciones en ϑ dan un diagrama
>
> $$\Pi\mid_\vartheta : \vartheta \longrightarrow \mathscr{G}\mathscr{P}$$
>
> de grupoides. Entonces el grupoide $\Pi(X)$ es el colimite de este diagrama, es decir
>
> $$\Pi(X) \cong \mathrm{colim}_{U \in \vartheta} \Pi(U)$$

La demostración de este teorema, como hemos de intuir, utiliza herramienta algebraica más sofisticada, por lo que demostraremos una versión más sencilla y geométrica del resultado.

En la misma época, el matemático Herbert Karl Johannes Seifert demostró un enunciado parecido, el cual, podía extenderse a otro tipo de espacios. De ahí el nombre "Seifert-van Kampen "para dicho teorema.

Este capítulo comenzará con la demostración de un resultado, el cual es base para la demostración del Teorema de Seifert-van Kampen.

3.1 El Teorema de Seifert-van Kampen

El siguiente teorema se puede considerar como una versión débil del Teorema de Seifert-van Kampen.

Teorema 3.1.1. *Sea X un espacio topológico tal que $X = U \cup V$ con U y V abiertos en X. Si el conjunto $U \cap V$ es conexo por trayectorias y $x_0 \in U \cap V$, entonces las imágenes de los homomorfismos inducidos por las inclusiones, $i_* : \pi_1(U, x_0) \longrightarrow \pi_1(X, x_0)$ y $j_* : \pi_1(V, x_0) \longrightarrow \pi_1(X, x_0)$, generan a $\pi_1(X, x_0)$.*

Demostración. Sea f un lazo en X basado en x_0, entonces el conjunto $\{f^{-1}(U), f^{-1}(V)\}$ forma una cubierta abierta de I. Aplicando el teorema del número de Lebesgue sabemos que existe una partición $\wp' = \{b_0, \ldots, b_n\}$ de I tal que $f([b_{i-1}, b_i])$ se queda contenido en U o en V para toda $i = 1, \ldots, n$. Usaremos esta partición para constuir una nueva, digamos $\wp = \{a_0, \ldots, a_r\}$, de tal manera que cumpla las siguientes dos condiciones:

1. $f(a_i) \in U \cap V$ para toda i.

2. $f([a_{i-1}, a_i]) \subseteq U$ o $f([a_{i-1}, a_i]) \subseteq V$ para toda i.

Si ocurriera que $f(b_i) \in U \cap V$ para toda i, eso querría decir que $\wp'$ era la partición deseada. Si no, significa que existe $i \neq 0, 1$ tal que $f(b_i) \notin U \cap V$.

Tenemos dos casos: si $f(b_i) \in U$ los conjuntos $f([b_{i-1}, b_i])$ y $f([b_i, b_{i+1}])$ se quedan contenidos en U, o bien si $f(b_i) \in V$ los conjuntos $f([b_{i-1}, b_i])$ y $f([b_i, b_{i+1}])$ se quedan contenidos en V. De cualquier forma, podemos quitar a b_i de la partición $\wp'$ y obtener una nueva partición $\wp'' = \{b_0, \ldots, b_{i-1}, b_{i+1}, \ldots, b_n\} = \{c_0, \ldots, c_m\}$ tal que $f([c_i, c_{i+1}]) \subseteq U$ o $f([c_i, c_{i+1}]) \subseteq V$ para toda $i = 0, \ldots, m$. Con esta nueva partición podemos volver a preguntarnos si $f(c_i) \in U \cap V$ para toda i, en caso negativo volvemos a repetir el mismo procedimiento. Se sigue que después de un número finito de pasos encontraremos la partición $\wp = \{a_0, \ldots, a_r\}$.

Una vez teniendo la partición $\wp$ podemos definir las funciones $f_i : I \longrightarrow X$ para toda $i = 1, \ldots, r$, como aquellas que mandan afínmente el intervalo I al intervalo $[a_{i-1}, a_i]$ seguidas de f. Observemos que cada una de dichas trayectorias está contenida en U o en V, y por el teorema 1.2.4 obtenemos que $[f] = [f_1] \cdot \ldots \cdot [f_r]$.

Dado que el conjunto $U \cap V$ es conexo por trayectorias, entonces para cada $i = 1, \ldots, r$ existe una trayectoria α_i en $U \cap V$ de x_0 a $f(a_i)$. Como $f(a_0) = f(a_r) = x_0$ podemos escoger que las trayectorias α_0 y α_n sean la trayectoria constante en x_0.

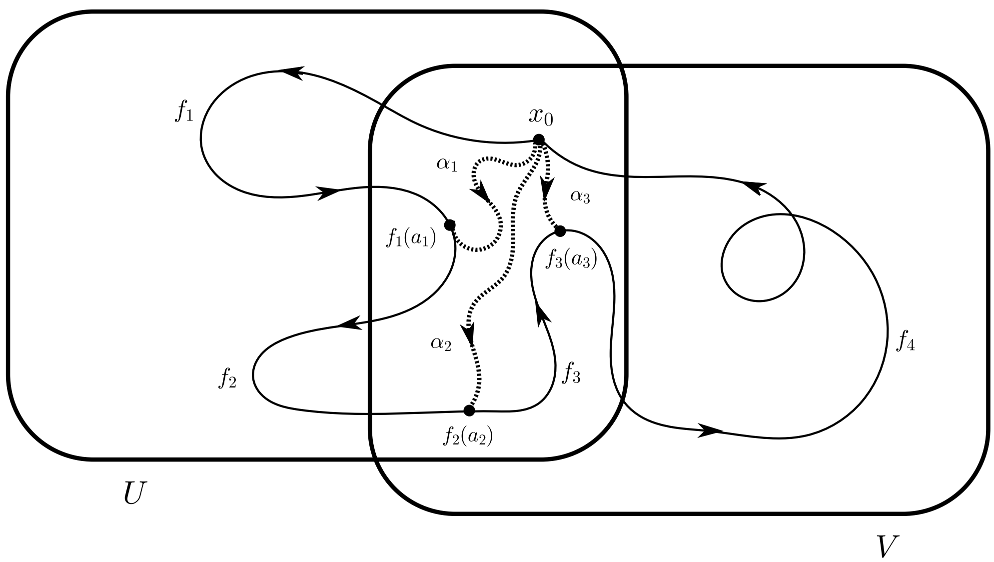


Figura 3.1: Trayectoria $f = f_1 * (f_2 * (\ldots * (f_{r-1} * f_r) \ldots))$.

Por último, definimos para toda $i = 1, \ldots, r$ las funciones $g_i : I \longrightarrow X$ como:

$$g_i = \alpha_{i-1} * (f_i * \bar{\alpha_i}).$$

Dichas funciones son lazos basados en x_0 y por construcción se quedan contenidas en U o en V. De lo anterior se obtiene la siguiente igualdad:

$$\begin{aligned}
[f] = [f_1] \cdot \ldots \cdot [f_r] &= [e_{f(a_0)}] \cdot [f_1] \cdot [e_{f(a_1)}] \cdot [f_2] \cdot \ldots \cdot [f_{r-1}] \cdot [e_{f(a_{r-1})}] \cdot [f_r] \cdot [e_{f(a_r)}] \\
&= [\alpha_0] \cdot [f_1] \cdot [e_{f(a_1)}] \cdot [f_2] \cdot \ldots \cdot [f_{r-1}] \cdot [e_{f(a_{r-1})}] \cdot [f_r] \cdot [\alpha_r] \\
&= [\alpha_0] \cdot [f_1] \cdot [\bar{\alpha_1} * \alpha_1] \cdot [f_2] \cdot \ldots \cdot [f_{r-1}] \cdot [\bar{\alpha}_{r-1} * \alpha_{r-1}] \cdot [f_r] \cdot [\alpha_r] \\
&= [\alpha_0 * (f_1 * \bar{\alpha_1})] \cdot [\alpha_1 * (f_2 * \bar{\alpha_2})] \cdot \ldots \cdot [\alpha_{r-1} * (f_r * \bar{\alpha_r})] \\
&= [g_1] * \ldots * [g_n]
\end{aligned}$$

Si denotamos por $[g_i]_U$ o $[g_i]_V$ a las clases de equivalencia de los grupos $\pi_1(U, x_0)$ y $\pi_1(V, x_0)$ respectivamente, entonces $[g_i] = i_*([g_i]_U)$ o bien $[g_i] = j_*([g_i]_V)$. Es decir, el grupo $\pi_1(X, x_0)$ esta generado por la imagen de los homomorfismos i_* y j_*. ∎

Corolario 3.1.2. *Sea $X = U \cup V$, donde U y V son abiertos en X con U, V y $U \cap V$ conjuntos conexos por trayectorias. Sea $x_0 \in U \cap V$, si U y V son simplemente conexos, entonces X es simplemento conexo.*

Demostración. Dado que los conjuntos $U \cap V$, V y U son conexos por trayectorias y $U \cap V \neq \varnothing$, entonces X es conexo por trayectorias.

Del teorema anterior sabemos que el grupo $\pi_1(X, x_0)$ esta generado por los grupos $i_*(\pi_1(U, x_0))$ y $j_*(\pi_1(V, x_0))$, y como U y V son simplemente conexos, entonces

$$i_*(\pi_1(U, x_0)) = j_*(\pi_1(V, x_0)) = \{[e_{x_0}]\}.$$

Por lo tanto, $\pi_1(X, x_0)$ es el grupo trivial y X es simplemente conexo.

∎

Teorema 3.1.3 (Teorema de Seifert-van Kampen). *Sean $X = U \cup V$, donde U y V son abiertos en X con U, V y $U \cap V$ conjuntos conexos por trayectorias, $x_0 \in U \cap V$ y H un grupo. Consideremos el siguiente diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
 & \pi_1(U, x_0) \arrow[d, "j_1"] \arrow[dr, "\phi_1"] & \\
\pi_1(U \cap V, x_0) \arrow[ur, "i_1"] \arrow[dr, "i_2"'] & \pi_1(X, x_0) \arrow[r, dotted, "\Phi"'] & H \\
 & \pi_1(V, x_0) \arrow[u, "j_2"'] \arrow[ur, "\phi_2"'] &
\end{tikzcd}$$

donde los homomorfismos i_1, i_2, j_1 y j_2 son los homomorfismos inducidos por las respectivas inclusiones y ϕ_1 y ϕ_2 homomorfismos que satisfacen la igualdad $\phi_1 \circ i_1 = \phi_2 \circ i_2$. Entonces, existe un único homomorfismo $\Phi : \pi_1(X, x_0) \longrightarrow H$ tal que $\Phi \circ j_1 = \phi_1$ y $\Phi \circ j_2 = \phi_2$.

Demostración. Para hacer la prueba más sencilla introduciremos la siguiente notación. Dada una trayectoria f en X denotaremos por $[f]$ a la clase de trayectorias homotópicas en X. Si f estuviera contenida en U denotaremos por $[f]_U$ a la clase de trayectorias homotópicas en U. De manera similar, si f estuviera contenida en V o en $U \cap V$ usaremos la notación $[f]_V$ y $[f]_{U \cap V}$ respectivamente.

Construiremos a la función Φ en varias etapas.

1. Primero definiremos una función ρ que irá de los lazos basados en x_0 contenidos en U o en V al grupo H, además, dicha función cumplirá las siguientes dos condiciones:

a) Si $[f]_U = [g]_U$ o bien $[f]_V = [g]_V$, entonces $\rho(f) = \rho(g)$.

b) Si f y g son lazos basados en x_0 tal que ambos yacen en U o en V, entonces $\rho(f * g) = \rho(f) \cdot \rho(g)$.

Definimos a la función ρ por

$$\begin{aligned} \rho(f) = \phi_1([f]_U) & \quad \text{si } f \text{ yace en } U \quad \text{y} \\ \rho(f) = \phi_2([f]_V) & \quad \text{si } f \text{ yace en } V. \end{aligned}$$

Veamos que ρ está bien definida. Sea f un lazo basado en x_0 que yace en $U \cap V$, entonces

$$\begin{aligned} \phi_1([f]_U) &= \phi_1(i_1([f]_{U \cap V})) \\ &= \phi_2(i_2([f]_{U \cap V})) \\ &= \phi_2([f]_V). \end{aligned}$$

Por lo tanto, ρ está bien definida. La condición $a)$ se sigue de la definición de ρ. Para probar la condición $b)$ consideremos a f y g lazos basados en x_0, ambos totalmente contenidos en U o en V (sin pérdida de generalidad supondremos se encuentran en U), entonces

$$\rho(f * g) = \phi_1([f * g]_U) = \phi_1([f]_U \cdot [g]_U) = \phi_1([f]_U) \cdot \phi_1([g]_U) = \rho(f) \cdot \rho(g).$$

2. Extenderemos a ρ a una función σ que irá de todas las trayectorias totalmente contenidas en U o en V al grupo H, además, cumplirá las siguientes dos condiciones:

a) Si $[f]_U = [g]_U$ o bien $[f]_V = [g]_V$, entonces $\sigma(f) = \sigma(g)$.

b) Si f y g son trayectorias tales que ambas yacen en U o en V y $f * g$ está definida, entonces $\sigma(f * g) = \sigma(f) \cdot \sigma(g)$.

Para definir a σ consideraremos para todo elemento $x \in X$ una trayectoria α_x de x_0 a x de la siguiente manera:

- Si $x = x_0$, entonces α_{x_0} denotará la trayectoria constante en x_0.
- Si $x \in U \cap V$ y es distinto de x_0, entonces consideraremos a α_x una trayectoria en $U \cap V$.
- Si $x \in U$ o $x \in V$, y x no pertenece a $U \cap V$, entonces consideraremos a α_x una trayectoria en U o en V.

Por último, definiremos una función auxiliar $\mathcal{L}$ que irá de todas las trayectorias contenidas en U o en V a los lazos basados en x_0. Sea f una trayectoria en U o en V con punto inicial x y punto final y, entonces definimos a $\mathcal{L}$ por

$$\mathcal{L}(f) = \alpha_x * (f * \bar{\alpha_y}).$$

Por lo tanto, podemos definir a σ como

$$\sigma(f) = \rho(\mathcal{L}(f)).$$

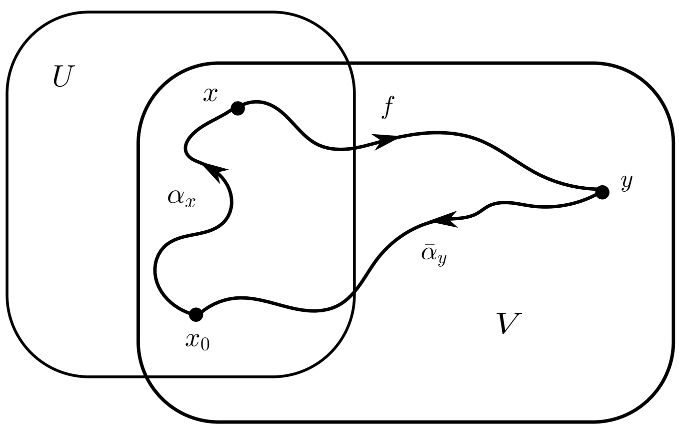


Figura 3.2: Trayectoria $\mathcal{L}(f)$.

Veamos que efectivamente σ es una extensión de ρ. Sea f un lazo basado en x_0 que yace en U o en V (sin pérdida de generalidad supondremos yace en U), entonces

$$\mathcal{L}(f) = e_{x_0} * (f * e_{x_0}) \simeq_t f.$$

Observemos que existe una homotopía de trayectorias entre $\mathcal{L}(f)$ y f que ocurre dentro de U, es decir, $[f]_U = [\mathcal{L}(f)]_U$. Por lo tanto, $\sigma(f) = \rho(\mathcal{L}(f)) = \rho(f)$.

Probemos que σ cumple las condiciones $a)$ y $b)$. Sean f y g dos trayectorias tales que $[f]_U = [g]_U$ o bien que $[f]_V = [g]_V$, por lo que

$$\mathcal{L}(f) = \alpha_x * (f * \bar{\alpha_y}) \simeq_t \alpha_x * (g * \bar{\alpha_y}) = \mathcal{L}(g).$$

Además, existe una homotopía de trayectorias entre $\mathcal{L}(f)$ y $\mathcal{L}(g)$ que ocurre dentro de U o V, con lo cual, $[L(f)]_U = [L(g)]_U$ o $[L(f)]_V = [L(g)]_V$. Por lo tanto,

$$\sigma(f) = \rho(\mathcal{L}(f)) = \rho(\mathcal{L}(g)) = \sigma(g).$$

Para ver que satisface $b)$ consideremos dos trayectorias f y g, ambas trayectorias contenidas en U o en V, tal que $f*g$ esté definida. Entonces, si llamamos $x = f(0)$, $z = f(1)$ y $y = g(1)$ obtenemos que

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(f * g) &= \alpha * ((f * g) * \bar{\alpha_y}) \\
&\simeq_t \alpha_x * (f * (g * \bar{\alpha_y})) \\
&\simeq_t (\alpha_x * (f * \bar{\alpha_z})) * (\alpha_z * (g * \bar{\alpha_y})) \\
&= \mathcal{L}(f) * \mathcal{L}(g).
\end{aligned}$$

Además, existe una homotopía de trayectorias entre $\mathcal{L}(f*g)$ y $\mathcal{L}(f)*\mathcal{L}(g)$ que ocurre dentro de U o V, con lo cual, $[L(f*g)]_U = [L(f)*\mathcal{L}(g)]_U$ o $[L(f*g)]_V = [L(f)*\mathcal{L}(g)]_V$. Por lo tanto,

$$\sigma(f * g) = \rho(\mathcal{L}(f * g)) = \rho(\mathcal{L}(f) * \mathcal{L}(g)) = \rho(\mathcal{L}(f)) \cdot \rho(\mathcal{L}(g)) = \sigma(f) \cdot \sigma(g).$$

3. Para finalizar extenderemos a σ a una función τ que asigna a cualquier trayectoria en X un elemento de H, además, cumplirá las siguientes dos condiciones:

a) Si $[f] = [g]$, entonces $\tau(f) = \tau(g)$.

b) Si f y g son dos trayectorias en X tal que $f * g$ está definida, entonces $\tau(f * g) = \tau(f) \cdot \tau(g)$.

Sea f una trayectoria en X y $\wp = \{s_0, \ldots, s_n\}$ una partición de I tal que el conjunto $f([s_{i-1}, s_i])$ se queda totalmente contenido en U o en V para todo índice i. Denotamos por f_i a las trayectorias que mandan afínmente el intervalo I a $[s_{i-1}, s_i]$ seguidas de f. Por otro lado, por el teorema 1.2.4, sabemos que $[f] = [f_1] \cdot \ldots \cdot [f_n]$, y dado que τ debe extender a σ y satisfacer las condiciones $a)$ y $b)$ no queda más que definir a τ como

$$\tau(f) = \sigma(f_1) \cdot \ldots \cdot \sigma(f_n).$$

Veamos que τ está bien definida, es decir, que no importa la partición que tomemos del intervalo I, el valor $\tau(f)$ es el mismo. Sea $\wp' = \{t_0, \dots, t_m\}$ una partición de I y consideremos la siguiente partición de I:

$$\{t_0, \dots, t_{j-1}, p, t_j, \dots, t_m\}.$$

Si calculamos el valor $\tau(f)$ con esta nueva partición obtenemos que

$$\tau(f) = \sigma(f_1) \cdot \ldots \cdot \sigma(f_{j-1}) \cdot \sigma(f_j') \cdot \sigma(f_j'') \cdot \sigma(f_j) \cdot \ldots \cdot \sigma(f_m),$$

donde f_j' y f_j'' son las trayectorias que mandan afínmente el intervalo I a $[t_{j-1}, p]$ e I a $[p, t_j]$ seguidas de f. Observemos que

$$f_j \simeq_t f_j' * f_j'',$$

además, existe una homotopía de trayectorias entre f_j y $f_j' * f_j''$ que ocurre en U o en V; entonces por la propiedad $a)$ y $b)$ de σ tenemos que $\sigma(f_j) = \sigma(f_j') \cdot \sigma(f_j'')$, con lo cual, el valor $\tau(f)$ se mantiene invariante. Repitiendo este procedimiento una cantidad finita de veces obtenemos que el valor $\tau(f)$ es el mismo tras agregar una cantidad finita de puntos a la partición original. Ahora consideremos dos particiones $\mathcal{P}$ y $\mathcal{Q}$ de I y un refinamiento mutuo $\mathcal{R}$. De lo anterior, el valor de $\tau(f)$ es el mismo para las tres particiones ya que $\mathcal{R}$ se genera agregando una cantidad finita de puntos a cualquiera de las dos particiones. Por lo tanto, τ está bien definida.

Probemos que τ es una extensión de σ y cumple las condiciones $a)$ y $b)$. Para esto consideremos una trayectoria f en U o en V y la partición trivial de I, entonces de la definición de τ se sigue que

$$\tau(f) = \sigma(f).$$

Por lo tanto, τ es una extensión de σ.

Para probar que τ cumple la condición $a)$ consideraremos primero un caso en particular. Supongamos que tenemos dos trayectorias homotópicas f y g, con punto inicial x y punto final y, tal que existe una homotopía de trayectorias F entre ellas con la siguiente propiedad:

- existe una partición $\wp = \{s_0, \dots, s_n\}$ de I tal que $F(R_i) \subseteq U$ o $F(R_i) \subseteq V$ para toda $i = 1, \dots, n$, donde $R_i = [s_{i-1}, s_i] \times I$.

Entonces, afirmamos que $\tau(f) = \tau(g)$.

Para todo índice i consideramos las trayectorias f_i y g_i, los cuales mandan afínmente el intervalo I a $[s_{i-1}, s_i]$ seguidos de f o g respectivamente . Por otra parte, al restringir la homotopía F al rectángulo R_i podemos generar una homotopía entre f_i y g_i que ocurre dentro de U o V; esta homotopía no necesariamente es una homotopía de trayectorias ya que los puntos final e inicial de f_i y g_i pueden moverse durante la homotopía. Consideremos las trayectorias β_i definidas por $\beta_i(t) = F(s_i, t)$ para toda $t \in I$; estas trayectorias tienen como punto inicial a $f(s_i)$ y como punto final $g(s_i)$, además, $\beta_0 = e_x$ y $\beta_n = e_y$.

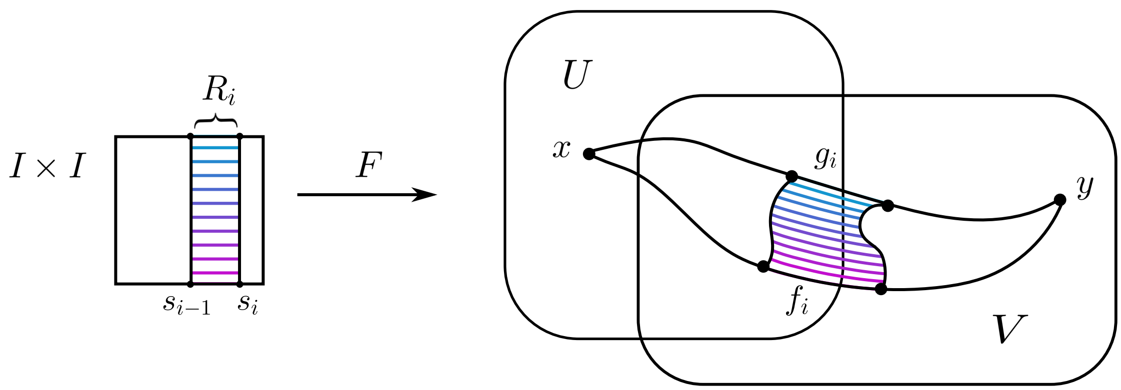


Figura 3.3: Restricción de F sobre R_i.

Lo que sigue es mostrar que para todo índice i existe una homotopía de trayectorias que ocurra dentro de U o V tal que

$$f_i \simeq_t \beta_{i-1} * (g_i * \bar{\beta}_i). \tag{3.1}$$

Presuponiendo que (3.1) es cierta, podremos descomponer a f de la siguiente manera:

$$f \simeq_t f_1 * \ldots * f_n \simeq_t (\beta_0 * (g_1 * \bar{\beta}_1)) * \ldots * (\beta_{n-1} * (g_n * \bar{\beta}_n));$$

y considerando que $\sigma(e_x) = \sigma(e_y) = 1_H$ y $\sigma(\bar{\beta}_i) = \sigma(\beta_i)^{-1}$, obtendríamos que

$$\begin{aligned}
\tau(f) &= \sigma(f_1) \cdot \ldots \cdot \sigma(f_n) \\
\stackrel{(3.1)}{=} &\ \sigma(\beta_0 * (g_1 * \bar{\beta}_1)) \cdot \ldots \cdot \sigma(\beta_{n-1} * (g_n * \bar{\beta}_n)) \\
&= \sigma(\beta_0) \cdot \sigma(g_1) \cdot \sigma(\beta_1)^{-1} \cdot \ldots \cdot \sigma(\beta_{n-1}) \cdot \sigma(g_n) \cdot \sigma(\beta_n)^{-1} \\
&= \sigma(g_1) \cdot \ldots \cdot \sigma(g_n) \\
&= \tau(g).
\end{aligned}$$

En la figura 3.4 hay una representación de las trayectorias $f_1 * \ldots * f_n$ y $(\beta_0 * (g_1 * \bar{\beta}_1)) * \ldots * (\beta_{n-1} * (g_n * \bar{\beta}_n))$.

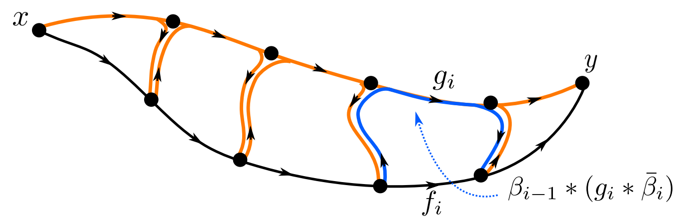


Figura 3.4: Descomposición de f.

El problema de empezar probando (3.1) es que resulta complejo detallar la homotopía. Por lo que le daremos la vuelta a este inconveniente con la construcción de una homotopía de trayectorias entre $f_i * \beta_i$ y $\beta_{i-1} * g_i$ que ocurra en U o en V. Y así, al usar las propiedades de σ, obtendríamos que para todo índice i se cumple la siguiente igualdad:

$$\sigma(f_i) \cdot \sigma(\beta_i) = \sigma(\beta_{i-1}) \cdot \sigma(g_i),$$

con lo cual,

$$\sigma(f_i) = \sigma(\beta_{i-1}) \cdot \sigma(g_i) \cdot \sigma(\beta_i)^{-1}.$$

Por lo tanto, si para toda i sustituyeramos la expresión anterior en la definición de $\tau(f)$ se llegaría a la igualdad deseada. Empezemos a construir dichas homotopías de trayectorias. Sean γ_i y γ_i' las trayectorias definidas por

$$\gamma_i(t) = \begin{cases} (s_{i-1}, 2t) & \text{si } \ t \in [0, \frac{1}{2}], \\ (2(s_i - s_{i-1})(t - \frac{1}{2}) + s_{i-1}, 1) & \text{si } \ t \in [\frac{1}{2}, 1], \end{cases}$$

y

$$\gamma_i'(t) = \begin{cases} (2(s_i - s_{i-1})t + s_{i-1}, 0) & \text{si } \ t \in [0, \frac{1}{2}], \\ (s_i, 2t - 1) & \text{si } \ t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Entonces, $F \circ \gamma_i = \beta_{i-1} * g_i$ y $F \circ \gamma_i' = f_i * \beta_i$. Por otro lado, dado que R_i es convexo existe una homotopía de trayectorias G_i entre γ_i y γ_i' que se queda contenida en R_i, la cual compuesta por la izquierda con F resulta ser una homotopía que ocurre en U o en V entre $\beta_{i-1} * g_i$ y $f_i * \beta_i$. Por lo tanto, $\tau(f) = \tau(g)$.

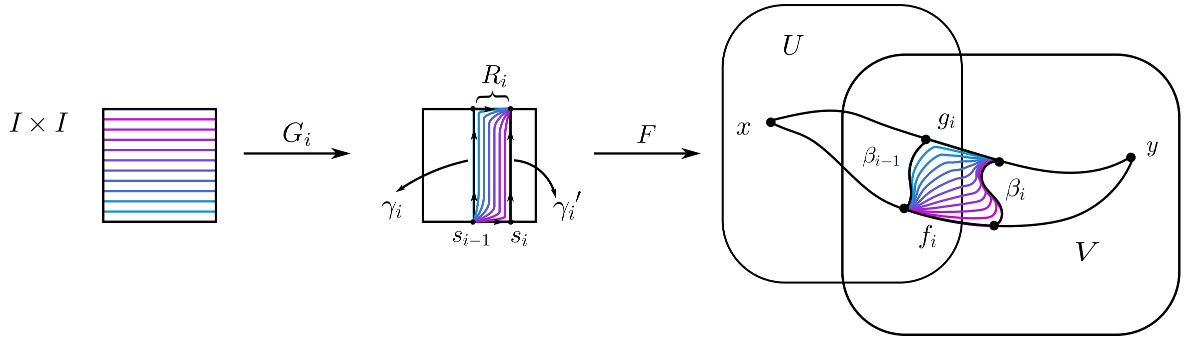


Figura 3.5: Homotopía entre $\beta_{i-1} * g$ y $f_i * \beta_i$.

Lo que sigue es quitar la restricción de que F mande los rectángulos R_i en U o en V.

Consideremos f y g dos trayectorias en X y F una homotopía de trayectorias entre ellas. Por el teorema del número de Lebesgue sabemos que existen particiones $\{s_0, \ldots, s_n\}$ y $\{t_0, \ldots, t_m\}$ de I tal que $F([s_{i-1}, s_i] \times [t_{j-1}, t_j])$ se queda contenido en U o en V para todo índice (i, j). Si definimos las trayectorias h_j como $h_j(t) = F(t, t_j)$ para toda $j = 0, \ldots, m$, entonces $h_0 = f$ y $h_m = g$. Para finalizar, observemos que para toda j las trayectorias f_{j-1} y f_j satisfacen la condición $\bullet$, con lo cual, $\tau(h_{j-1}) = \tau(h_j)$ y por lo tanto $\tau(f) = \tau(g)$.

Veamos que τ satisface la condición b).

Sean f y g trayectorias en X y consideremos la partición $\{s_0, \ldots, s_n\}$ de I, de manera que $s_k = \frac{1}{2}$ con $0 < k < n$, y $f * g([s_{i-1}, s_i])$ se quede contenido en U o en V para toda i. Definimos a las trayectorias $(f * g)_i$ como aquellas que mandan afínmente el intervalo I a $[s_{i-1}, s_i]$ seguidas de $f * g$ para toda $i = 1, \ldots, n$, a las trayectorias f_i como aquellas que mandan afínmente el intervalo I a $[2s_{i-1}, 2s_i]$ seguidas por f para toda $i = 1, \ldots, k$, y a las trayectorias g_{i-k} como aquellas que mandan afínmente el intervalo I a $[2s_{i-1} - 1, 2s_i - 1]$ seguidas de g para toda $i = k+1, \ldots n$. Por la definición del producto de trayectorias tenemos que $(f * g)_i = f_i$ para toda $i = 1, \ldots, k$ y $(f * g)_i = g_{i-k}$ para toda $i = k + 1, \ldots, n$. Por lo tanto, si usamos las particiones $\{s_0, \ldots, s_n\}$, $\{2s_0, \ldots, 2s_k\}$ y $\{2s_k - 1, \ldots, 2s_n - 1\}$ de I, obtenemos que

$$\begin{aligned}
\tau(f * g) &= \sigma((f * g)_1) \cdot \ldots \cdot \sigma((f * g)_n) \\
&= (\sigma(f_1) \cdot \ldots \cdot \sigma(f_k)) \cdot (\sigma(g_1) \cdot \ldots \cdot \sigma(g_{n-k})) \\
&= \tau(f) \cdot \tau(g).
\end{aligned}$$

Con la construcción de τ al fin estamos en condiciones de definir a la función Φ. Definimos a dicha función como

$$\Phi([f]) = \tau(f).$$

La función Φ queda bien definida ya que τ satisface la condición $a)$ y es un homomorfismo por la condición $b)$. Además, el hecho de que cumpla las igualdadades $\Phi \circ j_i = \phi_1$ y $\Phi \circ j_2 = \phi_2$ se debe a que τ es una extensión de ρ. Verifiquemos esta última aseveración. Sea $[f]_U \in \pi_1(U, x_0)$, entonces

$$\begin{aligned}
\Phi(j_1([f]_U)) &= \Phi([f]) \\
&= \tau(f) \\
&= \rho(f) \\
&= \phi_1([f]_U).
\end{aligned}$$

Con lo cual, $\Phi \circ j_1 = \phi_1$. Análogamente $\Phi \circ j_2 = \phi_2$.

Para finalizar la prueba del teorema sólo hace falta demostrar la unicidad del homomorfismo Φ. Consideremos un homomorfismo $\Phi' : \pi_1(X, x_0) \longrightarrow H$ tal que $\Phi' \circ j_1 = \phi_1$ y $\Phi' \circ \phi_2$. Por el lema 3.1.1 sabemos que $j_1(\pi_1(U, x_0))$ y $j_2(\pi_1(V, x_0))$ generan a $\pi_1(X, x_0)$. Por lo que es suficiente demostrar que tanto Φ como Φ' toman los mismos valores sobre los generadores de $\pi_1(X, x_0)$. Sean $j_1([g_1]_U) \in j_1(\pi_1(U, x_0))$ y $j_2([g_2]_V) \in j_2(\pi_1(V, x_0))$, entonces

$$\begin{aligned}
\Phi'(j_1([g_1]_U)) &= \phi_1([g_1]_U) = \Phi(j_1([g_1]_U)) \quad \text{y} \\
\Phi'(j_2([g_2]_V)) &= \phi_2([g_2]_V) = \Phi(j_2([g_2]_V)).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\Phi = \Phi'$. ∎

Para demostrar el siguiente teorema es necesario hacer notar que frecuentemente cuando se considera un grupo G, el cual es un producto externo libre de la familia $\{G_\alpha\}_{\alpha \in J}$ relativo a los homomorfismos $\{i_\alpha : G_\alpha \longrightarrow G\}_{\alpha \in J}$, se identifican a los elementos de cada grupo G_α con sus respectivas imágenes. A continuación haremos uso de dicha notación para facilitar las pruebas, y nos referiremos al producto externo libre como el producto libre.

Teorema 3.1.4 (Teorema de Seifert-van Kampen, versión clásica). *Sean $X = U \cup V$, donde U y V son abiertos en X con U, V y $U \cap V$ conjuntos conexos por trayectorias. Consideremos $x_0 \in U \cap V$ y*

$$j : \pi_1(U, x_0) * \pi_1(V, x_0) \longrightarrow \pi_1(X, x_0),$$

el homomorfismo del producto libre que extiende a los homomorfismos $j_1 : \pi_1(U, x_0) \longrightarrow \pi_1(X, x_0)$ *y* $j_2 : \pi_1(V, x_0) \longrightarrow \pi_1(X, x_0)$, *que son aquellos inducidos por las inclusiones. Entonces,* j *es un epimorfismo y su núcleo resulta ser el menor subgrupo normal del producto libre que contiene a todos los elementos representados por las palabras*

$$(i_1(g)^{-1}, i_2(g)) \quad \textit{tal que} \quad g \in \pi_1(U \cap V, x_0),$$

con $i_1 : \pi_1(U \cap V, x_0) \longrightarrow \pi_1(U, x_0)$ *e* $i_2 : \pi_1(U \cap V, x_0) \longrightarrow \pi_1(V, x_0)$ *los homomorfismos inducidos por las inclusiones.*

Demostración. Dado que $\pi_1(X, x_0)$ está generado por las imágenes $j_1(\pi_1(U.x_0))$ y $j_2(\pi_1(V, x_0))$ resulta claro que j es un epimorfismo.

Lo que sigue es mostrar quien es el núcleo de j; para esto consideremos N el menor subgrupo normal del producto libre que contiene a todos los elementos de la forma $i_1(g)^{-1}i_2(g)$ con $g \in \pi_1(U \cap V)$. Dado que el subgrupo $Ker(j)$ es normal, para probar la contención $N \subseteq Ker(j)$, es suficiente verificar que $i_1(g)^{-1}i_2(g) \in Ker(j)$ para toda $g \in \pi_1(U \cap V)$. Sea $g \in \pi_1(U \cap V)$ e $i : U \cap V \longrightarrow X$ la función inclusión, entonces

$$j(i_1(g)) = j_1(i_1(g)) = i_*(g) = j_2(i_2(g)) = j(i_2(g)),$$

con lo cual $i_1(g)^{-1}i_2(g) \in Ker(j)$ para todo $g \in \pi_1(U \cap V, x_0)$ y por lo tanto $N \subseteq Ker(j)$. De lo anterior se sigue que j induce un epimorfismo

$$k : (\pi_1(U, x_0) * \pi_1(V, x_0))/N \longrightarrow \pi_1(X, x_0),$$

dado por $k(fN) = j(f)$ para toda $fN \in (\pi_1(U, x_0) * \pi_1(V, x_0))/N$. Para probar la igualdad entre $Ker(j)$ y N veremos que la función k es inyectiva mostrando que posee un inverso izquierdo. Sea $H = (\pi_1(U, x_0) * \pi_1(V, x_0))/N$ y $\phi_1 : \pi_1(U, x_0) \longrightarrow H$ el homomorfismo que resulta de componer la inclusión de $\pi_1(U, x_0)$ en el producto libre $\pi_1(U, x_0) * \pi_1(V, x_0)$ seguida por la proyección al cociente H. Análogamente definimos el homomorfismo $\phi_2 : \pi_1(V, x_0) \longrightarrow H$ y consideramos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
 & \pi_1(U, x_0) \arrow[d, "j_1"] \arrow[dr, "\phi_1"] & \\
\pi_1(U \cap V, x_0) \arrow[ur, "i_1"] \arrow[r, "i_*"] \arrow[dr, "i_2"'] & \pi_1(X, x_0) & H \arrow[l, "k"'] \\
 & \pi_1(V, x_0) \arrow[u, "j_2"'] \arrow[ur, "\phi_2"'] &
\end{tikzcd}$$

Veamos que $\phi_1 \circ i_1 = \phi_2 \circ i_2$. Sea $g \in \pi_1(U \cap V, x_0)$, entonces

$$\phi_1(i_1(g)) = i_1(g)N \quad \text{y} \quad \phi_2(i_2(g)) = i_2(g)N;$$

y dado que $i_1(g)^{-1} i_2(g) \in N$, obtenemos la igualdad deseada. De esta última igualdad se desprende, usando el teorema 3.1.3, que existe un único homomorfismo

$$\Phi : \pi_1(X, x_0) \longrightarrow H$$

tal que $\Phi \circ j_1 = \phi_1$ y $\Phi \circ j_2 = \phi_2$.

$$\begin{tikzcd}
 & \pi_1(U,x_0) \arrow[d, "j_1"] \arrow[dr, "\phi_1"] & \\
\pi_1(U \cap V, x_0) \arrow[ur, "i_1"] \arrow[r, "i_*"] \arrow[dr, "i_2"'] & \pi_1(X,x_0) \arrow[r, shift left, "\Phi"] & H \arrow[l, shift left, "k"] \\
 & \pi_1(V,x_0) \arrow[u, "j_2"'] \arrow[ur, "\phi_2"'] &
\end{tikzcd}$$

Afirmamos que Φ es un inverso izquierdo de k; para esto es suficiente probar que $\Phi \circ k$ actúa como la idéntidad sobre cualquier generador de H. Sea $g \in \pi_1(U, x_0)$, entonces

$$\Phi(k(gN)) = \Phi(j(g)) = \Phi(j_1(g)) = \phi_1(g) = gN.$$

De manera similar, $\Phi(k(gN)) = gN$ si $g \in \pi_1(V, x_0)$. Concluimos que $\Phi \circ k = Id_H$ y por lo tanto $Ker(j) = N$. Esto último nos dice que $\pi_1(X, x_0) \cong (\pi_1(U, x_0) * \pi_1(V, x_0))/N$. ■

El siguiente corolario muestra que bajo ciertas condiciones el grupo fundamental de un espacio resultá ser un producto libre de grupos.

Corolario 3.1.5. *Considerando las hipótesis del teorema 3.1.4, si el conjunto $U \cap V$ es simplemente conexo, entonces $\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(U, x_0) * \pi_1(V, x_0)$.*

Demostración. Dado que el conjunto $U \cap V$ es simplemente conexo, obtenemos que el subgrupo N del teorema anterior es el subgrupo trivial, por lo tanto,

$$\pi_1(U, x_0) * \pi_1(V, x_0) \cong (\pi_1(U, x_0) * \pi_1(V, x_0))/N \cong \pi_1(X, x_0).$$

■

Corolario 3.1.6. *Considerando las hipótesis del teorema 3.1.4, si el conjunto V es simplemente conexo, entonces existe un isomorfismo*

$$h : \pi_1(U, x_0)/N \longrightarrow \pi_1(X, x_0);$$

donde N *es el menor subgrupo normal de* $\pi_1(U, x_0)$ *que contiene a la imagen del homomorfismo inducido por la inclusión*

$$i_1 : \pi_1(U \cap V, x_0) \longrightarrow \pi_1(U, x_0).$$

Demostración. Dado que V es simplemente conexo, se tiene la siguiente igualdad:

$$\pi_1(U, x_0) * \pi_1(V, x_0) = \pi_1(U, x_0),$$

y aplicando el teorema 3.1.4 obtenemos que

$$\pi_1(U, x_0)/N = (\pi_1(U, x_0) * \pi_1(V, x_0))/N \cong \pi_1(X, x_0).$$

■

4 Calculando grupos fundamentales.

Para finalizar el trabajo, presentaremos algunos espacios y calcularemos sus respectivos grupos fundamentales ayudándonos de la herramienta expuesta en los capítulos anteriores.

4.1 Grupo fundamental de $\mathbb{S}^1$.

Por fin estamos en condiciones de calcular uno de los primeros grupos fundamentales no triviales.

Teorema 4.1.1. *El grupo fundamental de* $\mathbb{S}^1$ *es isomorfo a* $\mathbb{Z}$.

Demostración. Sea $P : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{S}^1$ la aplicación cubriente del teorema 1.3.6 y $b_0 = P(e_0)$ con $e_0 = 0$. Entonces, por la definición de P tenemos que $P^{-1}(\{b_0\}) = \mathbb{Z}$, y como $\mathbb{R}$ es simplemente conexo, aplicando el teorema 1.5.4, la función levantamiento $\phi_{e_0} : \pi_1(\mathbb{S}^1, b_0) \longrightarrow \mathbb{Z}$ es biyectiva.

Por lo tanto, lo único que falta demostrar es que la función ϕ_{e_0} es un homomorfismo. Para esto consideremos $[f]$ y $[g]$ elementos de $\pi_1(\mathbb{S}^1, b_0)$ y $\tilde{f}$ y $\tilde{g}$ sus respectivos levantamientos en $\mathbb{R}$ respecto a P con punto inicial $e_0 = 0$. Sean $n = \tilde{f}(1)$ y $m = \tilde{g}(1)$, de donde, $\phi_{e_0}([f]) = n$ y $\phi_{e_0}([g]) = m$. Definimos la función $\hat{g} : I \longrightarrow R$ como $\hat{g}(s) = n + \tilde{g}(s)$, la cual es un levantamiento de g con punto inicial n (esto se debe a que $P(n + x) = P(x)$ para toda $x \in \mathbb{R}$), por lo tanto, el producto $\tilde{f} * \hat{g}$ esta bien definido y es un levantamiento de $f * g$ que empieza en 0. Por último, dado que $\hat{g}(1) = m + n$ se obtiene la siguiente igualdad:

$$\phi_{e_0}([f] \cdot [g]) = \tilde{f} * \hat{g}(1) = \hat{g}(1) = m + n = \phi_{e_0}([f]) + \phi_{e_0}([g]).$$

Por lo tanto, $\pi_1(\mathbb{S}^1, b_0) \cong \mathbb{Z}$.

■

4.2 Grupo fundamental de $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$.

Teorema 4.2.1. *Sean X y Y espacios topológicos y $(x_0, y_0) \in X \times Y$. Entonces, $\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \cong \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$.*

Demostración. Sean $p : X \times Y \longrightarrow X$ y $q : X \times Y \longrightarrow Y$ las funciones proyecciones y $p_* : \pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \longrightarrow \pi_1(X, x_0)$ y $q_* : \pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \longrightarrow \pi_1(Y, y_0)$ los homomorfismos inducidos. Definimos el homomorfismo

$$\Phi : \pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \longrightarrow \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$$

como $\Phi = (p_*, q_*)$. Afirmamos Φ es un isomorfismo. Sean $([g], [h]) \in \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$ y $f : I \longrightarrow X \times Y$ la función definida por $f(t) = (g(t), h(t))$, entonces f es un lazo basado en (x_0, y_0) y $\Phi([f]) = ([g], [h])$. Por lo tanto, Φ es suprayectiva.

Para ver la inyectividad de Φ mostraremos que su núcleo es el grupo trivial. Sea $f : I \longrightarrow X \times Y$ un lazo basado en (x_0, y_0) tal que $\Phi([f]) = ([e_{x_0}], [e_{y_0}])$, donde $([e_{x_0}], [e_{y_0}])$ es el elemento identidad en $\pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$. De la igualdad anterior se sigue que $[p \circ f] = [e_{x_0}]$ y $[q \circ f] = [e_{y_0}]$. Por lo tanto, si consideremos una homotopía de trayectorias G entre $p \circ f$ y e_{x_0}, y una homotopía de trayectorias H entre $q \circ f$ y e_{y_0}; entonces la función $F : I \times I \longrightarrow X \times Y$ definida por $F(s,t) = (G(s,t), H(s,t))$ es una homotopía de trayectorias entre $f = (p \circ f, q \circ f)$ y $e_{(x_0, y_0)} = (e_{x_0}, e_{y_0})$. Con lo cual, $[f] = [e_{(x_0, y_0)}]$.

■

El siguiente corolario es resultado directo de los teoremas 4.2.1 y 4.1.1.

Corolario 4.2.2. *El grupo fundamental de $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ es isomorfo $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.*

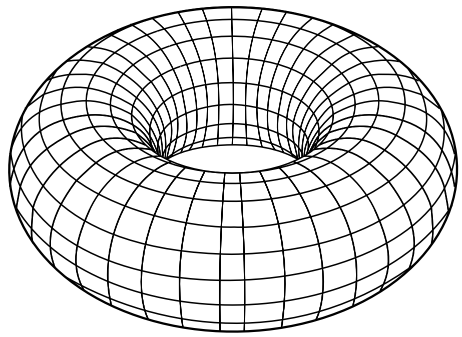


Figura 4.1: Toro 2-dimensional, $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$.

4.3 Grupo fundamental de $\mathbb{S}^n$

Teorema 4.3.1. *Si $n \geq 2$, entonces la n-esfera $\mathbb{S}^n$ es simplemente conexa.*

Demostración. Consideremos los puntos $(0, \ldots, 0, 1)$ y $(0, \ldots, 0, -1)$ en $\mathbb{R}^{n+1}$, que son el polo norte y el polo sur de la esfera $\mathbb{S}^n$, y veamos que tanto la esfera sin el polo norte $\mathbb{S}^n \setminus \{p\}$ y la esfera sin el polo sur $\mathbb{S}^n \setminus \{q\}$ son homeomorfas a $\mathbb{R}^n$.

Para esto definimos la función $f : \mathbb{S}^n \setminus \{p\} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ como:

$$f(x_1, \ldots, x_{n+1}) = \frac{1}{1 - x_{n+1}}(x_1, \ldots, x_n).$$

Esta función es llamada la **proyección estereográfica** y es contninua ya que es continua en cada una de sus entradas. Por otro lado, podemos definir la función $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{S}^n \setminus \{p\}$ dada por:

$$g(y) = g(y_1, \ldots, y_n) = (t(y)y_1, \ldots, t(y)y_n, 1 - t(y)),$$

donde $t(y) = \frac{2}{1+\|y\|^2}$. Esta función vuelve a ser continua ya que es continua en cada una de sus entradas y es la inversa de f. Por lo tanto, f es un homeomorfismo.

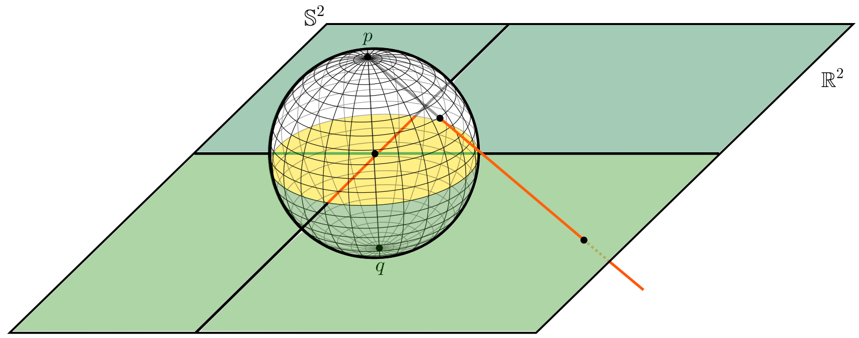


Figura 4.2: Proyección estereográfica para $n = 2$.

Por último, consideremos la función $h : \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ definida por:

$$h(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) = (x_1, \ldots, x_n, -x_{n+1}).$$

Observemos que h es su propia inversa y es continua, es decir, es un homeomorfismo. Por lo que si la restringimos al conjunto $\mathbb{S}^n \setminus \{p\}$ obtenemos un homeomorfismo entre $\mathbb{S}^n \setminus \{p\}$ y $\mathbb{S}^n \setminus \{q\}$. Por lo tanto, $\mathbb{R}^n \cong \mathbb{S}^n \setminus \{p\} \cong \mathbb{S}^n \setminus \{q\}$.

Ahora estamos en condiciones de probar que la esfera $\mathbb{S}^n$ es simplemente conexa. Definimos los conjuntos abiertos $U = \mathbb{S}^n \setminus \{p\}$ y $V = \mathbb{S}^n \setminus \{q\}$ en $\mathbb{S}^n$. Como U y V son homeomorfos a $\mathbb{R}^n$ sabemos que son conexos por trayectorias, más aún, son simplemente conexos; además, $(1, 0, \ldots, 0) \in U \cap V$ y $\mathbb{S}^n = U \cup V$, por lo que $\mathbb{S}^n$ es conexo por trayectorias. Concluimos, dado que $\mathbb{S}^1$ es conexo por trayectorias, que $\mathbb{S}^m$ es conexo por trayectorias para toda $m \geq 1$.

Lo único que nos hace falta para estar en las condiciones del corolario 3.1.2 es ver que el conjunto $U \cap V$ es conexo por trayectorias. Restringiendo a la proyección estereográfica obtenemos que $U \cap V = \mathbb{S}^n \setminus \{p, q\} \cong \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Por lo tanto, si demostráramos que $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ es conexo por trayectorias finalizaríamos la prueba.

Sean z_0 y z_1 elementos de $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, si ambos puntos se encontraran en la esfera $\mathbb{S}^{n-1}$, como $n - 1 \geq 1$, tendríamos que existe una trayectoria que los une. Supongamos que alguno de los puntos no pertenece a $\mathbb{S}^{n-1}$, entonces ocurrirían alguno de los siguientes casos:

1. Sin pérdida de generalidad supongamos que z_0 pertenece a la esfera $\mathbb{S}^{n-1}$ y z_1 no, entonces siempre podemos construir un segmento de recta que una a z_1 con algún punto en la esfera, digamos z_2. Por otro lado, sabemos que la esfera $\mathbb{S}^{n-1}$

es conexa por trayectorias, entonces existe una trayectoria de z_2 a z_1. Por lo tanto, usando las dos trayectorias anteriores podemos construir una trayectoria en $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ de z_0 a z_1.

2. Supongamos que ambos puntos no pertenecen a la esfera, entonces sabemos que podemos construir dos segementos de recta que unan a z_0 y z_1 con puntos en la esfera. Como la esfera $\mathbb{S}^{n-1}$ es conexa por trayectorias sabemos que existe un trayecto en la esfera que conecta a estos últimos dos puntos. Por lo tanto, usando los segmentos y la trayectoria anterior podemos contruir una trayectoria en $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ de z_0 a z_1.

Concluimos, usando el corolario 3.1.2, que la esfera $\mathbb{S}^n$ es simplemente conexa.

■

4.4 Grupo fundamental de $\mathbb{P}^n$

Definición 4.4.1. *El* ***n-espacio proyectivo*** *denotado por* $\mathbb{P}^n$, *con* $n \geq 2$, *es el espacio cociente obtenido de la esfera* $\mathbb{S}^n$ *identificando cada* $x \in \mathbb{S}^n$ *con su punto antípoda* $-x$.

Teorema 4.4.2. *La función cociente* $P : \mathbb{S}^n \longrightarrow \mathbb{P}^n$ *es una aplicación cubriente.*

Demostración. Antes de demostrar que P es una aplicación cubriente veremos que es una función abierta.

Consideremos un abierto V en $\mathbb{S}^n$ y la función antipodal $a : \mathbb{S}^n \longrightarrow \mathbb{S}^n$ definida por $a(x) = -x$. Esta función es claramente un homeomorfismo por lo que $a(V)$ es un conjunto abierto. Por otro lado, de la definición de P obtenemos la siguiente igualdad

$$P^{-1}(P(V)) = V \cup a(V),$$

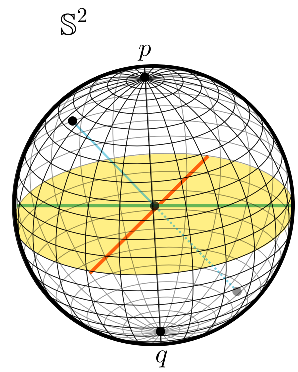
de donde se observa que el conjunto $P^{-1}(P(V))$ es un abierto en $\mathbb{S}^n$; y como $\mathbb{P}^n$ posee la topología cociente, entonces $P(V)$ es un abierto de $\mathbb{P}^n$.

Demostremos que P es una aplicación cubriente.

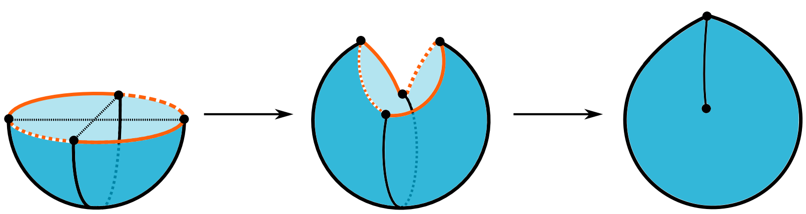
Sea $x \in \mathbb{S}^n$ y U una bola de $\mathbb{S}^n$ centrada en x de radio menor que 1. Entonces para todo $z \in U$ la distancia entre z y $a(z)$ es igual que 2, por lo que

$a(z) \notin U$. Esto significa que la función $P|_U : U \longrightarrow P(U)$ es biyectiva, y dado que U es un conjunto abierto también resulta ser una función abierta y por lo tanto un homeomorfismo. Análogamente podemos decir que la función $P|_{a(U)} : a(U) \longrightarrow P(U)$ es un homeomorfismo. Por último, observemos que el conjunto $P^{-1}(P(U))$ es la unión ajena de los conjuntos abiertos U y $a(U)$, es decir que $P(U)$ es un abierto cubierto uniformente por P. Con esto concluimos que la función P es una aplicación cubriente.

∎



(a) Puntos antípodas.



(b) Representación del 2-espacio proyectivo.

Figura 4.3: Plano proyectivo $\mathbb{P}^2$

Teorema 4.4.3. *Si $n \geq 2$, entonces el grupo fundamental de $\mathbb{P}^n$ es isomorfo a $\mathbb{Z}_2$.*

Demostración. Dado que la esfera $\mathbb{S}^n$ es simplemente conexa y la función $P : (\mathbb{S}^n, x_0) \longrightarrow (\mathbb{P}^n, y_0)$ es una aplicación cubriente, entonces $\mathbb{P}^n$ es conexo por trayectorias. Esto nos indica que el grupo fundamental de $\mathbb{P}^n$ no depende del punto que hayamos elegido.

Por otro lado, los teoremas 4.4.2 y 4.3.1 aseguran que la función levantamiento $\phi_{x_0} : \pi_1(\mathbb{P}^n, y_0) \longrightarrow P^{-1}(\{y_0\})$ es biyectiva. De la definición de P sabemos que la cardinalidad de $P^{-1}(\{y_0\})$ es igual a dos, por lo cual, el grupo $\pi_1(\mathbb{P}^2, y_0)$ es de orden 2 y por lo tanto isomorfo a $\mathbb{Z}_2$. ∎

4.5 Grupo fundamental de $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{\vec{0}\}$.

Corolario 4.5.1. *El homomorfismo inducido por la función inclusión* $j : (\mathbb{S}^n, \vec{e}_1) \longrightarrow (\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{\vec{0}\}, \vec{e}_1)$, *para* $n \geq 1$, *es un isomorfismo.*

Demostración. Veremos que $\mathbb{S}^n$ es un retracto fuerte por deformación de $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{\vec{0}\}$. Sea $H : (\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{\vec{0}\}) \times I \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{\vec{0}\}$ la función dada por $H(x,t) = (1-t)x + tx/||x||$. Claramente dicha función es una retracción fuerte por deformación de $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{\vec{0}\}$ en $\mathbb{S}^n$. Por lo tanto, usando el teorema 1.6.4, el homomorfismo j_* es un isomorfismo. ∎

4.6 Grupo fundamental de $\mathbb{R}^3$ menos una recta.

Para calcular el grupo fundamental de $\mathbb{R}^3$ menos una recta supondremos sin pérdida de generalidad que la recta que quitamos es el eje z, el cual llamaremos l.

Corolario 4.6.1. *El homomorfismo inducido por la función inclusión,* $j : (\mathbb{S}^1 \times \{0\}, \vec{e}_1) \longrightarrow (\mathbb{R}^3 \setminus l, \vec{e}_1)$, *es un isomorfismo, con lo cual,* $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus l, \vec{e}_1) \cong \mathbb{Z}$.

Demostración. Veremos que $\mathbb{S}^1 \times \{0\}$ es un retracto fuerte por deformación de $\mathbb{R}^3 \setminus l$. Para esto consideremos las funciones $H_1 : (\mathbb{R}^3 \setminus l) \times I \longrightarrow \mathbb{R}^3 \setminus l$ y $H_2 : (\mathbb{R}^3 \setminus l) \times I \longrightarrow \mathbb{R}^3 \setminus l$ definidas por

$$\begin{aligned} H_1(x,y,z,t) &= (1-t)(x,y,z) + t\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, z\right), \\ H_2(x,y,z,t) &= (1-t)(x,y,z) + t\,(x,y,0)\,. \end{aligned}$$

Para finalizar, definimos la función $H : (\mathbb{R}^3 \setminus l) \times I \longrightarrow \mathbb{R}^3 \setminus l$ como

$$H(\vec{x},t) = \begin{cases} H_1(\vec{x}, 2t) & \text{si } \ t \in [0, \frac{1}{2}], \\ H_2\left(H_1(\vec{x},1), 2t-1\right) & \text{si } \ t \in [\frac{1}{2}, 1], \end{cases}$$

la cual es continua por el lema del pegado, además, $H((\mathbb{R}^3 \setminus l) \times I) = \mathbb{S}^1 \times \{0\}$. Si $(x,y) \in \mathbb{S}^1$, entonces $H(x,y,0,t) = (x,y,0)$ para toda $t \in I$. Por lo tanto, la función H es una retracción fuerte por deformación de $\mathbb{R}^3 \setminus l$ en $\mathbb{S}^1 \times \{0\}$ y por el teorema 1.6.4 sabemos que el homomorfismo j_* es un isomorfismo.

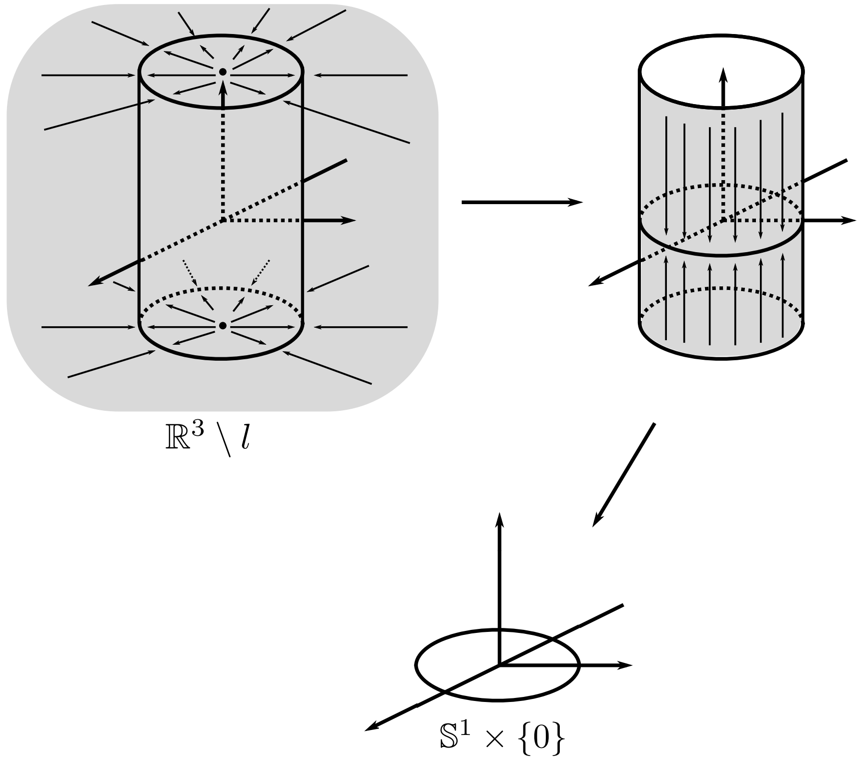


Figura 4.4: Retracción fuerte por deformación H.

■

4.7 Grupo fundamental de la figura ocho.

Teorema 4.7.1. *El grupo fundamental de la figura ocho no es abeliano.*

Demostración. Sea X la unión de los círculos $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - \frac{1}{4})^2 + y^2 = \frac{1}{16}\}$ y $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x + \frac{1}{4})^2 + y^2 = \frac{1}{16}\}$ en $\mathbb{R}^2$, cuya intersección consiste del punto $\vec{0}$. Lo siguiente será encontrar un espacio cubriente de X. Sea E el subespacio de $\mathbb{R}^2$ que consta de los ejes coordenados $A_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0\}$ y $B_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0\}$, y las cirfunferencias

$$A_n = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - \frac{1}{4})^2 + (y - n)^2 = \frac{1}{16}\right\}$$

y

$$B_n = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - n)^2 + (y - \frac{1}{4})^2 = \frac{1}{16}\right\}$$

para toda $n \in \mathbb{Z} - \{0\}$.

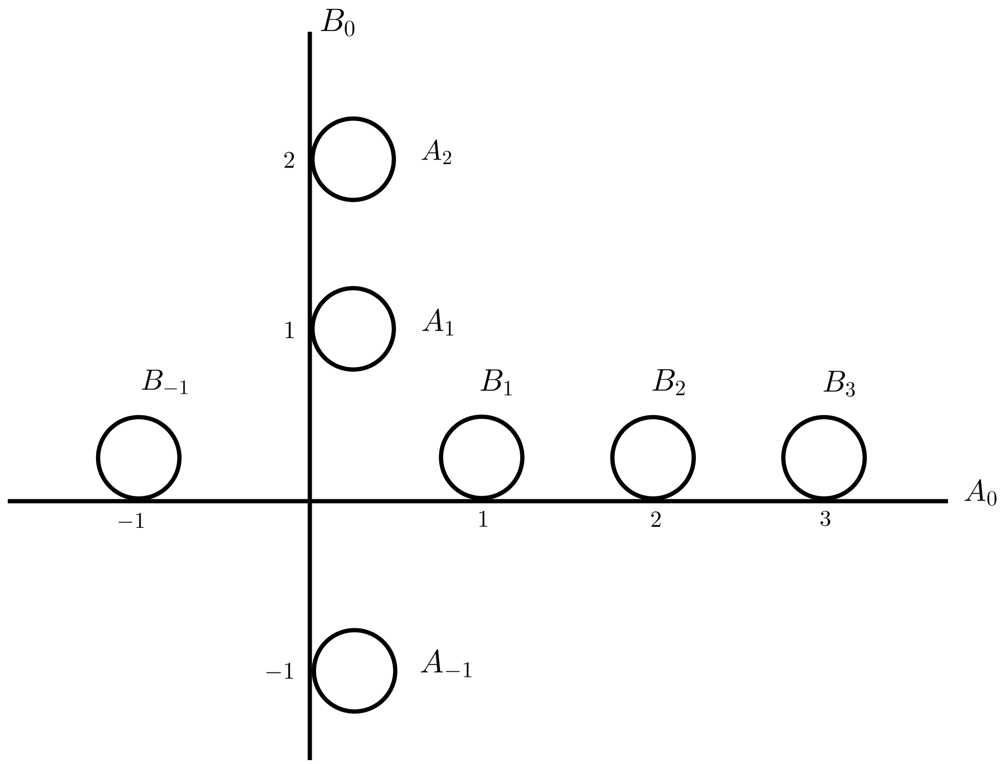


Figura 4.5: Subespacio E.

Si denotamos por $T_{\vec{x}}$ la traslación por el vector $\vec{x}$ y R_θ la rotación por un ángulo θ, entonces la función $P : (E, \vec{0}) \longrightarrow (X, \vec{0})$ dada por

$$P(\vec{x}) = \begin{cases} T_{(\frac{1}{4},0)}(-\cos(2\pi x)/4, -\operatorname{sen}(2\pi x)/4) & \text{si } \ \vec{x} \in A_0, \\ T_{(-\frac{1}{4},0)}(\cos(2\pi y)/4, \operatorname{sen}(2\pi y)/4) & \text{si } \ \vec{x} \in B_0, \\ T_{(0,-n)}(\vec{x}) & \text{si } \ \vec{x} \in A_n, \\ T_{(0,-n)} \circ R_{\frac{\pi}{2}}(\vec{x}) & \text{si } \ \vec{x} \in B_n, \end{cases}$$

es una función cubriente.

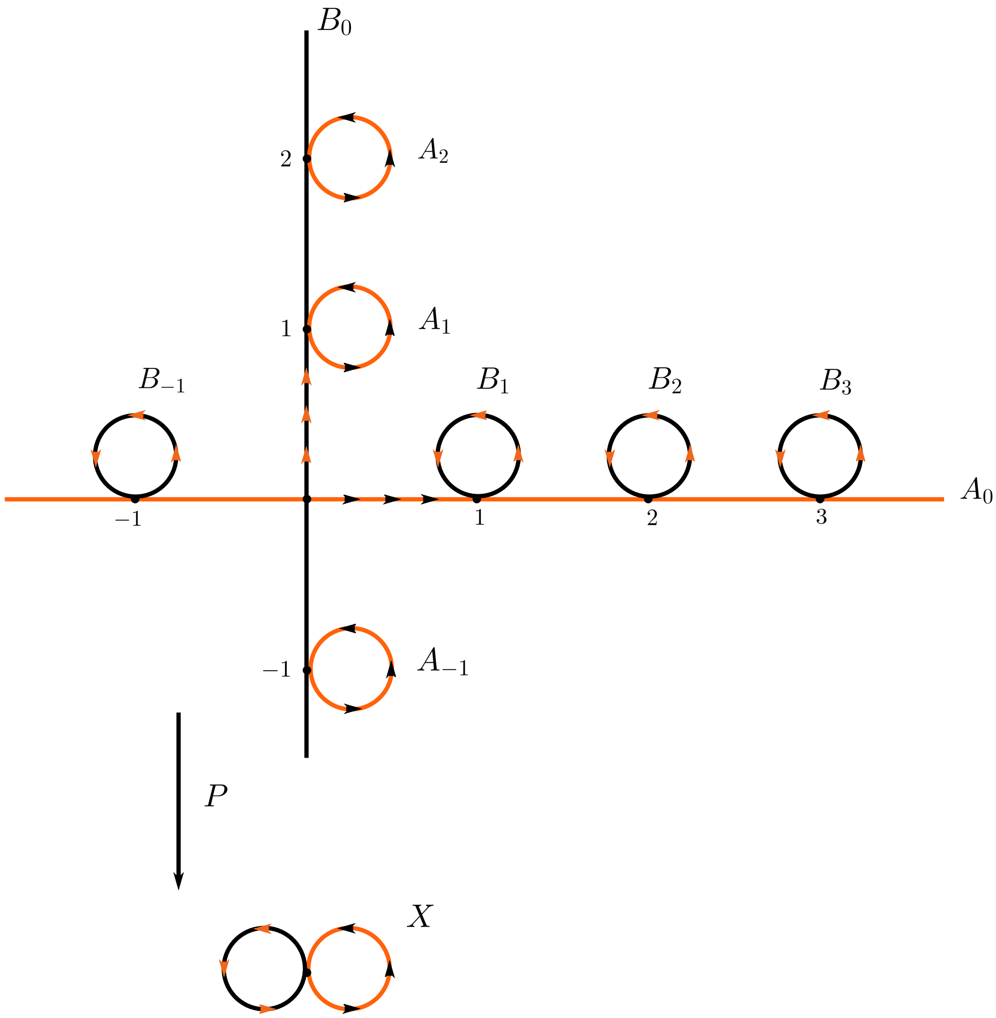


Figura 4.6: Función cubriente P.

Consideremos las trayectorias $\tilde{f} : I \longrightarrow E$ y $\tilde{g} : I \longrightarrow E$ dadas por $\tilde{f}(t) = (t, 0)$ y $\tilde{g}(t) = (0, t)$, entonces dichas trayectorias son levantamientos continuos respecto a P de los lazos $f = P \circ \tilde{f}$ y $g = P \circ \tilde{g}$ respectivamente. Ahora para ver que el grupo $\pi_1(X, \vec{0})$ no es abeliano demostraremos que $[f * g] \neq [g * f]$. Para esto consideremos la trayectoria $\tilde{h} : I \longrightarrow E$ dada por

$$\tilde{h}(t) = \begin{cases} (2t, 0) & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}], \\ \frac{1}{4}(\operatorname{sen}(4\pi t - 2\pi), -\cos(4\pi t - 2\pi)) + (1, \frac{1}{4}) & \text{si } t \in [\frac{1}{2}, 1], \end{cases}$$

y la trayectoria $\tilde{h'} : I \longrightarrow E$ dada por

$$\tilde{h'}(t) = \begin{cases} (0, 2t) & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}], \\ \frac{1}{4}(-\cos(4\pi t - 2\pi), -\operatorname{sen}(4\pi t - 2\pi)) + (\frac{1}{4}, 1) & \text{si } t \in [\frac{1}{2}, 1]; \end{cases}$$

estas trayectorias son levantamientos continuos respecto a P de los lazos $f*g$ y $g*f$ respectivamente, y por construcción $\tilde{h}(1) \neq \tilde{h}'(1)$. Por lo tanto, por el corolario 1.5.2 sabemos que $f*g$ y $g*f$ no son trayectorias homotópicas. De lo anterior concluimos que $\pi_1(X, \vec{0})$ no es un grupo abeliano.

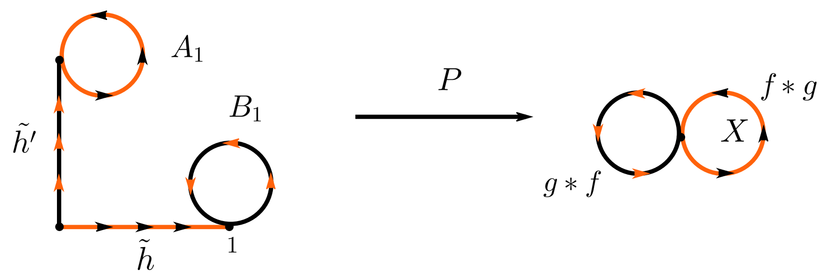


Figura 4.7: Levantamientos de $f*g$ y $g*f$.

■

A continuación describiremos con más precisión quien es el grupo fundamental de la figura ocho, el cuál será un caso particular de un grupo fundamental más general.

4.8 Grupo fundamental de la cuña de círculos.

Definición 4.8.1. *Sea X un espacio de Hausdorff tal que $X = \bigcup_{i=1}^{n} S_i$, con $S_1, \ldots, S_n$ subespacios homeomorfos a $\mathbb{S}^1$. Si existiera un elemento p de X tal que $S_i \cap S_j = \{p\}$ para todo $i \neq j$, entonces diremos que X es la **cuña de los círculos** $S_1, \ldots, S_n$.*

Teorema 4.8.2. *Sean X la cuña de los círculos $S_1, \ldots, S_n$ y $\{p\} = \bigcap_{i=1}^{n} S_i$, entonces el grupo fundamental $\pi_1(X,p)$ es un grupo libre, más aún, si f_i representa a un lazo basado en p de S_i cuya clase de equivalencia es un generador de $\pi_1(S_i,p)$, entonces la familia $\{[f_1], \ldots, [f_n]\}$ es un sistema libre de generadores de $\pi_1(X,p)$.*

Demostración. El resultado es inmediato para $n=1$, procedamos por inducción.

Sean $n > 1$ y X la cuña de los círculos $S_1, \ldots, S_n$ con p el punto común de los círculos. Para toda $i = 1, \ldots, n$ escojamos un punto $p_i \in S_i$ tal que $p_i \neq p$ y $W_i = S_i \setminus \{p_i\}$, entonces definimos los conjuntos $U = S_1 \cup W_2 \cup \ldots \cup W_n$ y $V = W_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_n$.

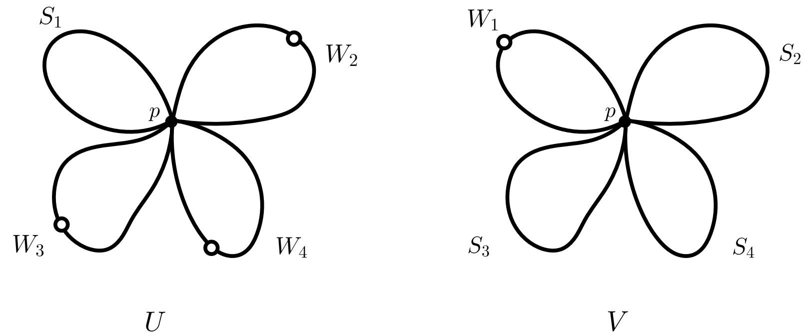


Figura 4.8: Abiertos U y V

Observemos que los conjuntos $U \cap V = W_1 \cup \ldots \cup W_n$, U y V son conexos por trayectorias por ser la unión de espacios conexos por trayectorias que tienen un punto en común, además, cada uno de los espacios W_i es homeomorfo a un intervalo abierto teniendo como retracto fuerte por deformación a $\{p\}$. Sea $F_i : W_i \times I \longrightarrow W_i$ la retracción fuerte por deformación de W_i en $\{p\}$, entonces definimos la función $F : U \cap V \times I \longrightarrow U \cap V$ como:

$$F(w,t) = F_i(w,t) \quad \text{si} \;\; w \in W_i.$$

Como F_i es una retracción fuerte por deformación de W_i en $\{p\}$ para toda $i = 1, \ldots, n$, entonces F esta bien definida. Lo siguiente es ver que F es una función continua para poder concluir que es una retracción fuerte por deformación de $U \cap V$ en $\{p\}$. Como X es un espacio de Hausdorff y S_i es compacto, entonces S_i es cerrado en X y por lo tanto W_i es cerrado en $U \cap V$. De lo anterior concluimos que $W_i \times I$ es cerrado en $U \cap V \times I$ para toda $i = 1, \ldots, n$, y usando el lema del pegado garantizamos la continuidad de F. Por último, por el teorema 1.6.4, tenemos que $U \cap V$ es simplemente conexo, lo cual nos pone en las condiciones del corolario 3.1.5. Por lo tanto, $\pi_1(X,p) \cong \pi_1(U,p) * \pi_1(V,p)$.

De manera análoga a como vimos que $\{p\}$ era un retracto fuerte por deformación de $U \cap V$ podemos ver que S_1 es un retracto fuerte por deformación de U y que $S_2 \cup \ldots \cup S_n$ es un retracto fuerte por deformación de V, de donde $\pi_1(U,p)$ es un grupo cíclico infinito con $[f_1]$ un generador del grupo. Para finalizar, usamos la hipótesis de inducción obteniendo que $\pi_1(V,p)$ es un grupo libre con $\{[f_2], \ldots, [f_n]\}$ un sistema libre de generadores y por lo tanto, por el corolario 2.2.4, concluimos que $\pi_1(X,p)$ es un grupo libre con $\{[f_1], \ldots, [f_n]\}$ un sistema libre de generadores.

■

4.9 Grupo fundamental de $\mathbb{R}^2$ menos dos puntos.

Para calcular el grupo fundamental de $\mathbb{R}^2$ menos dos puntos supondremos sin pérdida de generalidad que los dos puntos que quitamos son $p=(-1,0)$ y $q=(1,0)$, además, denotaremos por X a la unión de los dos circunferencias unitarias centradas en $(-1,0)$ y $(1,0)$.

Corolario 4.9.1. *El homomorfismo inducido por la función inclusión,*
$j:(X,\vec{0})\longrightarrow(\mathbb{R}^2\setminus\{p,q\},\vec{0})$, *es un isomorfismo, con lo cual* $\pi_1(\mathbb{R}^2\setminus\{p,q\},\vec{0})\cong\mathbb{Z}*\mathbb{Z}$.

Demostración. Veremos que X es un retracto fuerte por deformación de $\mathbb{R}^2\setminus\{p,q\}$. Para esto consideremos los 4 cuadrantes de $\mathbb{R}^2$, denotados por C_1, C_2, C_3 y C_4, y las siguientes funciones: sea $H_1:(\mathbb{R}^2\setminus\{p,q\})\times I\longrightarrow\mathbb{R}^2\setminus\{p,q\}$ la función dada por

$$H_1(\vec{x},t)=\begin{cases}\vec{x} & \text{si } \vec{x}\in\bar{B}_2(0,0)\setminus\{p,q\},\\ (1-t)\vec{x}+\frac{t\vec{x}}{||\vec{x}||} & \text{si } \vec{x}\in\mathbb{R}^2\setminus B_2(0,0);\end{cases}$$

sean $A=\bar{B}_1(p)\cup\bar{B}_1(q)$ y $H_2:(\bar{B}_2(0,0)\setminus\{p,q\})\times I\longrightarrow\bar{B}_2(0,0)\setminus\{p,q\}$ la función dada por

$$H_2(\vec{x},t)=\begin{cases}\vec{x} & \text{si } \vec{x}\in A\setminus\{p,q\},\\ (1-t)(x,y)+t(x,\sqrt{1-(x-1)^2}) & \text{si } \vec{x}\in C_1\cap(\bar{B}_2(0,0)\setminus Int(A)),\\ (1-t)(x,y)+t(x,\sqrt{1-(x+1)^2}) & \text{si } \vec{x}\in C_2\cap(\bar{B}_2(0,0)\setminus Int(A)),\\ (1-t)(x,y)+t(x,-\sqrt{1-(x+1)^2}) & \text{si } \vec{x}\in C_3\cap(\bar{B}_2(0,0)\setminus Int(A)),\\ (1-t)(x,y)+t(x,-\sqrt{1-(x-1)^2}) & \text{si } \vec{x}\in C_4\cap(\bar{B}_2(0,0)\setminus Int(A));\end{cases}$$

y sea $H_3:(A\setminus\{p,q\})\times I\longrightarrow A\setminus\{p,q\}$ la función dada por

$$H_3(\vec{x},t)=\begin{cases}(1-t)\vec{x}+t\left(\frac{\vec{x}+(1,0)}{||\vec{x}+(1,0)||}+(-1,0)\right) & \text{si } \vec{x}\in\bar{B}_1(p)\setminus\{p\},\\ \\ (1-t)\vec{x}+t\left(\frac{\vec{x}+(-1,0)}{||\vec{x}+(-1,0)||}+(1,0)\right) & \text{si } \vec{x}\in\bar{B}_1(q)\setminus\{q\}.\end{cases}$$

Estas últimas tres funciones son continuas debido al lema del pegado y nos servirán para definir la retracción fuerte por deformación que buscamos. Por último, definimos la función $H:(\mathbb{R}^2\setminus\{p,q\})\times I\longrightarrow(\mathbb{R}^2\setminus\{p,q\})$ como

$$H(\vec{x},t)=\begin{cases}H_1(\vec{x},3t) & \text{si } t\in[0,\frac{1}{3}],\\ H_2(H_1(\vec{x},1),3t-1) & \text{si } t\in[\frac{1}{3},\frac{2}{3}],\\ H_3(H_2(H_1(\vec{x},1),1),3t-2) & \text{si } t\in[\frac{2}{3},1],\end{cases}$$

la cual es continua por el lema del pegado. Además, $H((\mathbb{R}^2 \setminus \{p,q\}) \times I) = X$ y si $(x,y) \in X$ entonces $H(x,y,t) = (x,y)$ para toda $t \in I$. Por lo tanto, la función H es una retracción fuerte por deformación de $\mathbb{R}^2 \setminus \{p,q\}$ en X y por el teorema 1.6.4 sabemos que el homomorfismo j_* es un isomorfismo.

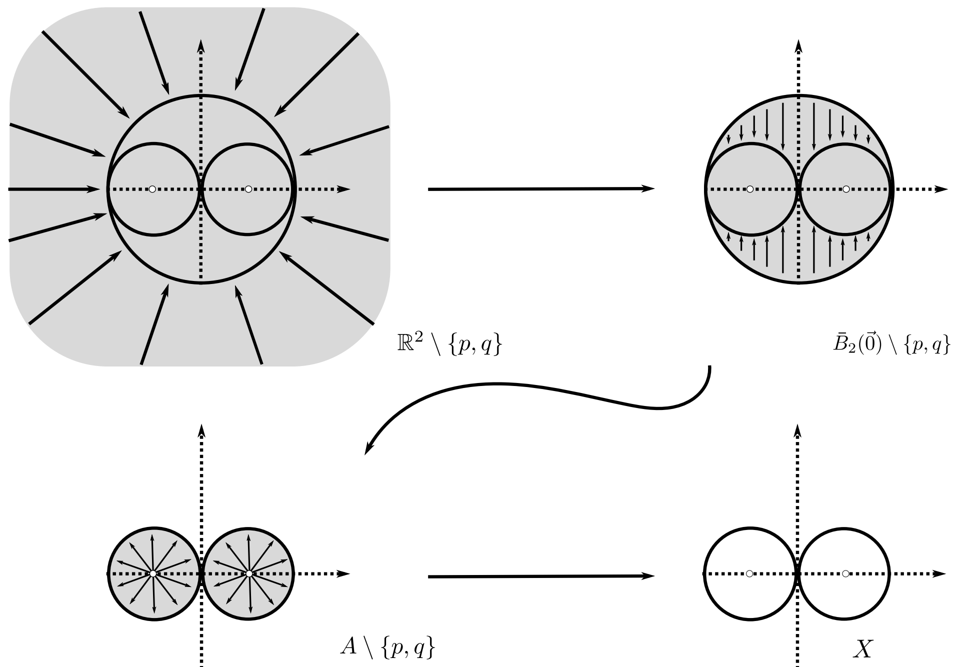


Figura 4.9: Retracción por deformación H.

■

Bibliografía

[1] Aguilar, Marcelo; Gitler, Samuel; Prieto,Carlos. *Algebraic Topology from a Homotopical Viewpoint*. Springer-Verlag, New York, 2002.

[2] Bennedict, Johann; James, Ian M. *History of Topology*. Elsevier, 1999.

[3] Dieudonné, Jean. *A History of Algebraic and Differential Topology 1900-1960*. Birkhäuser Boston, 2009.

[4] Geoghegan, Ross. *Topological Methods in Group Theory*. Springer-Verlag, New York, 2008.

[5] Hatcher, Allen. *Algebraic Topology*. Cambridge University Press, New York, 2002.

[6] Massey, William S. *Algebraic Topology: An Introduction*. Harcourt, Brace & World, New York, 1967.

[7] May, Peter J. *A Concise Course in Algebraic Topology*. The University of Chicago Press, 1999.

[8] Munkres, James R. *Elements of Algebraic Topology*. Perseus Publishing, 1984.

[9] Rotman, Joseph J. *An Introduction to the Theory of Groups*. Springer-Verlag, New York, 1995.

[10] Rotman, Joseph J. *Advanced Modern Algebra*. American Mathematical Society, 2002.

[11] Rotman, Joseph J. *An Introduction to Algebraic Topology*. Springer-Verlag, New York, 1988.

[12] Prasolov, Viktor V. *Elements of Combinatorial and Differential Topology*. American Mathematical Society, 2000.

[13] Prieto, Carlos *Topología Básica*. Fondo de Cultura Económica, 2003.

[14] Seifert, H. *Konstruktion dreidimensionaler geschlossener Räume*, Ber. Sächs. Akad. Wiss.,83 (1931), 22-26.

[15] Willard, Stephen. *General Topology*. Dover, New York, 2004.