UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Teoría Ergódica y Caminatas Aleatorias

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Matemático

PRESENTA:

Gabriel Baez Sanagustin

TUTOR

Dr. Sergio Iván López Ortega

2015

cd. Mx.

1. Datos del alumno

Apellido paterno	Baez
Apellido materno	Sanagustin
Nombre(s)	Gabriel
Teléfono	75740684
Universidad Nacional Autónoma de México	Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias	Facultad de Ciencias
Carrera	Matemáticas
Número de cuenta	309063438

2. Datos del tutor

Grado	Dr
Nombre(s)	Sergio Iván
Apellido paterno	López
Apellido materno	Ortega

3. Datos del sinodal 1

Grado	Dr
Nombre(s)	Gerónimo Francisco
Apellido paterno	Uribe
Apellido materno	Bravo

4. Datos del sinodal 2

Grado	Dr
Nombre(s)	Juan Carlos
Apellido paterno	Pardo
Apellido materno	Millan

5. Datos del sinodal 3

Grado	Dr
Nombre(s)	Fernando
Apellido paterno	Baltazar
Apellido materno	Larios

6. Datos del sinodal 4

Grado	Dr
Nombre(s)	Manuel
Apellido paterno	Domínguez
Apellido materno	De la Iglesia

7. Datos del trabajo escrito

Título	Teoría ergódica y caminatas aleatorias
Número de páginas	152
Año	2015

Agradecimientos

Este trabajo está dedicado a todas aquellas personas que creen y que persiguen con todo lo que tienen eso en lo que creen, que no se detienen ni siquiera ante el más grande obstáculo.

Expreso mi profundo agradecimiento a la Universidad Nacional Autónoma de México, a la Facultad de Ciencias, en particular a todos los profesores, que contribuyeron fuertemente en mi formación académica durante este tiempo. Uno de los medios que hizo posible este trabajo fue el financiamento otorgado por el Programa de Apoyo a la Investigación e Innovación Tecnológica de la Universidad Nacional Autónoma de México (PAPIIT-UNAM), mediante el "Proyecto PAPIIT IA102214", Estimación de ecuaciones diferenciales estocásticas con efectos aleatorios. Agradezco a la DGAPA-UNAM por la beca recibida.

En primer lugar, agradezco infinitamente a mis padres, que siempre me han impulsado y apoyado absolutamente en todo lo que he querido hacer, enseñado las cosas que son necesarias para enfrentar distintas situaciones que surgen en el día a día. Sin ellos no estaría en el punto en que me encuentro. Muchas gracias por el apoyo incondicional, incluso en los momentos en que no tenían que hacerlo y literalmente, por soportarme en todo momento. Aprovecho estas líneas para darle las gracias a mis hermanas por el apoyo y todas esas veces en que me animaron a continuar, incluso que me ayudaban en diversas cosas. Que hubiera sido sin su ayuda...

Enseguida quiero agradecer al director de este trabajo. No me imagino el desarrollo de este trabajo de diferente forma. Sergio, te agradezco muchísimo todo el apoyo, el soporte y las facilidades (que han sido muchas) para trabajar. Quiero agradecer todas esas veces en que me animaste a continuar o a iniciar cualquiera de las cosas que tuve en mente, por todo el tiempo dedicado y por todos tus consejos, sugerencias y demás, de donde he aprendido demasiadas cosas, no sólo en el ámbito académico. No encuentro la forma de agradecerte que hayas aceptado dirigir este trabajo, sólo me queda decir muchísimas gracias por todo. En este espacio quiero dar las gracias a los sinodales: Dr. Gerónimo Uribe, Dr. Juan Carlos Pardo, Dr. Manuel Domínguez y Dr. Fernando Baltazar, por el tiempo que dedicaron para leer esta tesis, así como sus comentarios y apoyo. Quiero agradecer también a Natalia Mantilla, por el enorme apoyo para poder encontrar un asesor de tesis, cuánto le agradezco. También a Bibiana Obregón, por todas las palabras de aliento y ánimo durante todo el proceso. Ambas son piezas muy importantes en esto. !Muchísimas gracias!

No puedo desaprovechar la oportunidad de agradecer a mi incondicional hermano menor, de quién he aprendido muchisimo más de lo que hubiese pensado (incluso más de lo que él imagina), por tratar de comprender que la mayoría de las cosas en la vida son muy complicadas (como trabajar en un proyecto como este) y aún así tener una buena cara para ellas. Muchas gracias por ser el primero en creer en lo que quería hacer (y no pensar que estaba loco), casi seguramente no lo habría hecho. Gracias por todas esas charlas, incluso cuando me rehusaba a tenerlas, por hacerme entrar en razón muchas (pero muchas) veces, en los momentos difíciles y esos que parecían serlo y al final no era para tanto. Es claro que no podría hacer un resumen, y no sé como podría pagártelo. De momento, sólo diré por ahora ¡muchísimas gracias hermano!

Por último, pero no menos importante, mis entrañables amigos (sería una injusticia mencionar a algunos de ustedes y dejar fuera a otros, así que no lo haré, pero sé con certeza que lo saben) son parte esencial de la vida en la facultad y en otros ámbitos, por supuesto, también me han soportado bastante y definitivamente quiero agradecerles por todas las palabras dichas, las veces en que había que estudiar y por supuesto, aquellas en que nos dejamos llevar por la corriente, y también por creer en que esto sería posible. Muchas gracias a todos.

Introducción

Para introducir a la caminata aleatoria como un proceso estocástico con espacio de estados $\mathbb{Z}$ suele elegirse a un número p con $0 < p < 1$ y este se define como el valor común de todas las probabilidades de transición en un paso. Estas transiciones se definen considerando que el proceso tiene un salto de longitud uno hacia la derecha o la izquierda con probabilidades p y $1-p$ respectivamente. Este proceso se construye con una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, cuyos valores son 1 y -1 con probabilidades p y $1-p$. Se concluye que el proceso con estas características es una cadena de Markov homogénea.

Considere el mismo mecanismo de saltos con la posibilidad de que las probabilidades de transición ya no son constantes y todas con un valor común. Se puede contemplar a estas probabilidades como una realización de una sucesión de variables aleatorias que toman valores en el intervalo $[0,1]$; Digamos que $\{\mathtt{W}_x\}_{x\in\mathbb{Z}}$ es una sucesión de variables aleatorias definidas en un espacio de probabilidad Ω. Así que tomando $\omega \in \Omega$ para cada $x \in \mathbb{Z}$, dado que la caminata aleatoria está situada en el estado x, las probabilidades de transición a los estados $x-1$ y $x+1$ corresponden a los valores $\mathtt{W}_x(\omega)$ y $1-\mathtt{W}_x(\omega)$. A la sucesión $\{\mathtt{W}_x(\omega)\}_{x\in\mathbb{Z}}$ se le conoce como el *ambiente* de la caminata determinado por ω. Este modelo se conoce como caminatas aleatorias en ambientes aleatorios (RWRE por sus siglas en inglés).

Una vez que se ha definido el nuevo modelo, se tienen las siguientes preguntas naturales: Son conocidas ciertas propiedades del primer modelo, como el comportamiento al infinito y la Ley Fuerte de los Grandes Números, ¿Es posible establecer los mismos resultados para este nuevo modelo? En caso de que lo sea, ¿bajo qué condiciones es esto posible?, ¿Se requiere definir a la sucesión de variables $\{\mathtt{W}_x\}_{x\in\mathbb{Z}}$ de alguna manera en particular para poder explicar el comportamiento del proceso? El propósito de este trabajo es exponer las respuestas a estas preguntas, bajo el supuesto de que la sucesión $\{\mathtt{W}_x\}_{x\in\mathbb{Z}}$ consiste de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, con valores en el intervalo $]0,1[$, que satisfacen una condición simple llamada elipticidad uniforme. Ambos resultados, el de comportamiento al infinito y asintótico, fueron expuestos en primera instancia por Solomon en 1975, en su artículo de título *Random Walks in Random Environments* [Sol75].

El camino más común para abordar este problema es utilizar resultados de teoría ergódica. Un resultado fundamental dentro de este campo es el Teorema Ergódico de Birkhoff, que constituye la base de muchas de las demostraciones de los resultados presentados en este trabajo. Resulta de vital importancia para establecer resultados en donde se definen sucesiones de funciones que definen promedios; básicamente en este tipo de sucesiones estamos interesados cuando hablamos de ley fuerte de los grandes números.

En el Capítulo 1, el centro de estudio son las transformaciones entre dos espacios de medida. Se introducen conceptos que caracterizan a una transformación respecto a las medidas involucradas, tales como ergodicidad, recurrencia, mezcla fuerte y débil. Se enuncia y demuestra el Teorema Ergódico de Birkhoff como herramienta importante para caracterizar la ergodicidad de una transformación. Dentro de este capítulo, se establecen criterios para caracterizar a las distintas transformaciones a través de funciones en espacios de Banach $\mathcal{L}_p$, aprovechando algunas propiedades de estos espacios, estudiadas en Teoría de la Medida y Análisis Funcional.

Los Capítulos 2 y 3 abordan ejemplos relevantes en el desarrollo de la teoría ergódica. En el Capítulo 2 se considera $[m]$ a un conjunto finito de m elementos, con $m \in \mathbb{N}$ y se construye el producto cartesiano infinito $[m]^{\otimes\mathbb{Z}}$. Enseguida se construyen dos medidas de probabilidad en este espacio, así como una transformación preservadora de medida que satisface la condición de ergodicidad bajo dichas medidas. Se exponen propiedades que tiene dicha transformación bajo ambas medidas. Se observa que dado la naturaleza de una de esas medidas (esta medida se define a partir de una matriz estocástica que posee un vector de probabilidad invariante), se pueden establecer resultados similares a los que se obtienen de una cadena de Markov homogénea, irreducible y aperiodica con espacio de estados finito, como el Teorema Ergódico para cadenas de Markov y los Teoremas de Convergencia.

El Capítulo 3 contiene un ejemplo que abarca espacios más generales como los grupos topológicos compactos, en los que se considera la medida de Haar para estudiar diversas transformaciones en esos espacios, en su mayoría, homomorfismos contínuos y suprayectivos. Al igual que en el Capítulo 2, el objetivo en este capítulo es analizar condiciones necesarias y suficientes para garantizar que se satisfagan las definiciones del Capítulo 1. Muchos de estos resultados son motivados por propiedades observadas en las rotaciones del disco unitario en el plano complejo, con respecto a sus transformaciones. Esa es la razón por la cual se presentan algunos de esos resultados que se tienen para el disco unitario.

Con énfasis en las preguntas descritas para el nuevo modelo, en el Capítulo 4 se revisan los conceptos fundamentales para clasificar a los estados de una caminata aleatoria simétrica simple con espacios de estados $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}^2$ y $\mathbb{Z}^3$ como la descrita en el modelo clásico. También se presenta una parte técnica en donde se utilizan algunos teoremas e ideas de los capítulos 1 y 2 para demostrar la Ley fuerte de los grandes números para sucesiones de variables aleatorias integrables, independientes y con idéntica distribución, además de obtener como consecuencia inmediata la Ley Fuerte de los Grandes Números para caminatas aleatorias simétricas. Cabe mencionar que, siempre que se tiene una sucesión de variables aleatorias que satisface las hipótesis de la Ley Fuerte de los Grandes Números, es posible definir un espacio de probabilidad y una transformación que resulta ser ergódica con respecto a esta medida de probabilidad. Y como se ha mencionado antes, esto hace posible, en conjunto con el Teorema Ergódico de Birkhoff, probar la Ley Fuerte de los Grandes Números.

El nuevo modelo es introducido en el Capítulo 5. Debe tenerse en mente lo siguiente: El comportamiento de la caminata aleatoria en este modelo en principio depende de $\omega \in \Omega$ y del valor en que comience, digamos $x \in \mathbb{Z}$, si llamamos $\mathbb{P}_\omega^x$ a la ley de probabilidad bajo la cual opera la caminata bajo estas condiciones, el objetivo es tratar de establecer los resultados deseados desde el punto de vista en que no sea necesario realizar un análisis exhaustivo del comportamiento de la caminata para cada $\omega \in \Omega$. El siguiente paso es unificar toda la información que se tiene. Para ello se construyen un espacio medible y una medida de probabilidad que conjunten las leyes $\mathbb{P}_\omega^x$ con una medida producto $\mathtt{Q}$, bajo la cual $\{\mathtt{W}_x\}_{x\in\mathbb{Z}}$ es una sucesión de variables independientes e idénticamente distribuidas, denotaremos por $\mathbb{P}_{\mathtt{Q}}^x$ a dicha medida de probabilidad. El desarrollo de este capítulo básicamente puede dividirse en dos apartados. En el primero, se establecen resultados sobre cadenas de nacimiento y muerte, fijando el ambiente de la caminata, se prueban resultados generales aplicables a sucesiones de variables aleatorias independientes, para que, de la unión de estos dos procesos resulte el teorema en que se establece el comportamiento al infinito de una caminata aleatoria en ambientes aleatorios. En el camino, se observa lo siguiente: Cuando el ambiente está fijo, los resultados conocidos para caminatas aleatorias son válidos, de hecho, varios de ellos se establecen en torno a ciertos valores determinados por las probabilidades de transición, sin embargo, en el momento de unificar toda la información, estos pierden la relevancia que tenían. Una nueva fuente de información sobre la caminata (unificada), está contenida en las funciones potenciales, asociadas a los estados de la caminata aleatoria en el nuevo modelo.

En el segundo apartado, se tiene un contratiempo: Resulta que, bajo la nueva medida $\mathbb{P}_{\mathtt{Q}}^x$, el proceso construido no es en general una cadena de Markov. Entonces la eficacia de esta medida se ve notoriamente afectada en el momento de querer establecer la Ley Fuerte de los Grandes Números para el proceso en el nuevo modelo. Recordando lo que se mencionó sobre el Capítulo 4, la prueba recae en cierto momento en el hecho de que la caminata aleatoria del primer modelo satisface la propiedad de Markov. ¿Cómo solucionar este inconveniente? Construyendo una medida de probabilidad ν bajo la cual las variables aleatorias $\{W_x\}_{x\in\mathbb{Z}}$ sean independientes e idénticamente distribuidas, que nos proporcione información de las probabilidades de transición y que sea equivalente a la medida $\mathtt{Q}$. Se recupera la información de todo el proceso con la medida $\mathbb{P}_\nu$, se construye un proceso que sí satisface la propiedad de Markov, con el cuál se construye una transformación preservadora de medida, que además tendrá la propiedad de ergodicidad. En esa instancia se estará bajo condiciones análogas a las del Capítulo 4, obteniéndose el resultado deseado.

Finalmente, en el Capítulo 6 se comparan ambos modelos. En el Capítulo 4 se deduce que la Ley Fuerte de los Grandes Números para caminatas aleatorias simétricas en $\mathbb{Z}$ depende totalmente del valor esperado de alguna de las variables aleatorias independientes que determinan los saltos. En este capítulo se exhibe gráficamente (con ayuda del paquete estadístico R) el comportamiento de una caminata aleatoria en ambientes aleatorios, así como de los potenciales introducidos en el Capítulo 5. Se hace explícito el hecho de que los potenciales proporcionan información sobre el comportamiento en general de la caminata aleatoria. El potencial ayuda a predecir la cantidad de tiempo que la caminata visitará ciertos estados. La información relevante está determinada por los potenciales más que por el valor esperado de una de las variables involucradas en el modelo con ambientes aleatorios.

Índice general

Capítulo 1

Transformaciones preservadoras de medida.

En este capítulo se expone un concepto fundamental para la Teoría Ergódica, que es el de transformación preservadora de medida. La mayoría de los resultados se establecen para un espacio de probabilidad. Se establece la propiedad de ergodicidad de una transformación preservadora de medida, caracterizaciones básicas de dicha propiedad, así como algunas de sus consecuencias, entre ellas el Teorema Ergódico de Birkhoff.

Se introducen dos conceptos importantes dentro de la clasificación de transformaciones preservadoras de medida, comunmente conocidas como mezcla fuerte y débil, ambas relacionadas con la propiedad de ergodicidad. Se muestran algunas criterios para determinar cuando una transformación satisface alguna de estas dos propiedades.

A lo largo de este trabajo, $\biguplus$ denotará la unión disjunta de una familia de conjuntos. Considere la siguiente notación:

Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida. Escribamos

$$\mathcal{N}(\mu) = \{A \in \Sigma : \ \mu[A] = 0\}$$

como la colección de todos los conjuntos en Σ con medida $\mu-$cero.

También $(X, \overline{\Sigma}, \overline{\mu})$ denota la *completación* de (X, Σ, μ), donde $\overline{\Sigma} = \{A \cup B : \ A \in \Sigma, \ B \in \mathcal{N}(\mu)\}$, la medida $\overline{\mu} : \overline{\Sigma} :\to \overline{\mathbb{R}}$ está definida como $\overline{\mu}[A \cup B] = \mu[A]$. Además se tiene que $\Sigma \subseteq \overline{\Sigma}$ y $\overline{\mu}|_{\Sigma} = \mu$.

Denote por $\mathcal{P}(X)$ al conjunto potencia de X. Decimos que $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$ es una *semiálgebra* de subconjuntos de X si satisface

I. $\emptyset \in \mathcal{S}$

II. Para todo $A, B \in \mathcal{S}$ se tiene que $A \cap B \in \mathcal{S}$

III. Para todo $A \in \mathcal{S}$ existen $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{S}$ conjuntos disjuntos tales que $X \backslash A = \biguplus_{i=1}^{n} A_i$.

Considere $\{(X_i, \Sigma_i, \mu_i)\}_{i=1}^{2}$ espacios de medida. Una función $f : X_1 \to X_2$ será llamada $(\Sigma_1, \Sigma_2)-$medible si para todo $B \in \Sigma_2$ se tiene que $f^{-1}(B) \in \Sigma_1$.

Dado cualquier $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X_2)$, escribimos $f^{-1}(\mathcal{B}) = \{f^{-1}(B) : \ B \in \mathcal{B}\}$.

Se suponen conocidos todos los resultados básicos de Teoría de la Medida, entre ellos, el Lema de Clases Monótonas, propiedades de las funciones medibles (aproximación por funciones simples), definición y propiedades de la integral de Lebesgue en estos espacios, así como los espacios normados de funciones integrables. También se utilizará el Teorema de Radon-Nikodym y algunas consecuencias del Teorema de Fubini. Todos estos resultados pueden consultarse en [Gra13].

1.1. Transformaciones preservadoras de medida: Definiciones básicas.

En esta sección se introducen los conceptos básicos relacionados con transformaciones preservadoras de medida, así como las posibles transformaciones que pueden definirse a partir de ciertas transformaciones dadas previamente.

DEFINICIÓN 1 (TRANSFORMACIÓN PRESERVADORA DE MEDIDA). *Sean* $\{(X_i, \Sigma_i, \mu_i)\}_{i=1}^2$ *espacios de medida y* $T : X_1 \to X_2$ *una función* $(\Sigma_1, \Sigma_2)-$*medible.*

a. Se dice que T *es una transformación* $\mu_1 - \mu_2 -$ **preservadora de medida** *si para todo* $A \in \Sigma_2$ *ocurre*

$$\mu_1[T^{-1}(A)] = \mu_2[A].$$

Considere (X, Σ, μ) *un espacio de medida y* $T : X \to X$ *una transformación* $\mu - \mu-$*preservadora de medida. Se dirá simplemente que* T *es una transformación* $\mu-$*preservadora de medida.*

b. Se dice que T *es una transformación* $\mu_1 - \mu_2 -$ **invertible preservadora de medida** *si* T *es una función invertible y tanto* T *como* T^{-1} *son transformaciones* $\mu_1 - \mu_2$ *y* $\mu_2 - \mu_1-$*preservadoras de medida respectivamente.*

OBSERVACIÓN 1. Sean $\{(X_i, \Sigma_i, \mu_i)\}_{i=1}^3$ espacios de medida, $T : X_1 \to X_2$ y $S : X_2 \to X_3$ funciones. Se satisfacen

1 Si T y S son transformaciones $\mu_1 - \mu_2$ y $\mu_2 - \mu_3-$preservadoras de medida respectivamente, entonces $S \circ T$ es una transformación $\mu_1 - \mu_3-$preservadora de medida. En particular, si $T : (X, \Sigma, \mu) \to (X, \Sigma, \mu)$ es una transformación $\mu-$preservadora de medida, entonces, para cada $n \in \mathbb{N}$ la función $T^n : X \to X$, definida recursivamente como $T^n = T \circ T^{n-1}$ y $T^0 = Id_X$, es también una transformación $\mu-$preservadora de medida.

2 Denote por $\{(X_i, \overline{\Sigma}_i, \overline{\mu}_i)\}_{i=1}^2$ a las completaciones de los espacios $\{(X_i, \Sigma_i, \mu_i)\}_{i=1}^2$. Si T es una transformación $\mu_1 - \mu_2-$preservadora de medida, entonces T es también una transformación $\overline{\mu}_1 - \overline{\mu}_2-$preservadora de medida.

Demostración de la Observación 1.

1. Se verifica inmediatamente que $S \circ T$ es una función $(\Sigma_1, \Sigma_3)-$medible. Por las hipótesis, para todo $A \in \Sigma_3$ se tiene que
$$\mu_1[(S \circ T)^{-1}(A)] = \mu_1[T^{-1}(S^{-1}(A))] = \mu_2[S^{-1}(A)] = \mu_3[A].$$
El caso particular ahora es claro.

2. Se utilizará la Definición 1. Para ello, considere $C \in \overline{\Sigma}_2$ arbitrario. Expresemos $C = A \cup B$, donde $A \in \Sigma_2$, $B \in \mathcal{N}(\mu_2)$. Observe que se tiene que $T^{-1}(A) \in \Sigma_1$ y también, como T es una transformación $\mu_1 - \mu_2-$preservadora de medida, $\mu_1[T^{-1}(B)] = \mu_2[B] = 0$, es decir $T^{-1}(B) \in \mathcal{N}(\mu_1)$. Así que $T^{-1}(C) = T^{-1}(A) \cup T^{-1}(B)$, donde $T^{-1}(A) \in \Sigma_1$ y $T^{-1}(B) \in \mathcal{N}(\mu_1)$. Esto significa que $T^{-1}(C) \in \overline{\Sigma}_1$.

   Por otro lado, por las definiciones de μ_1, μ_2 y el hecho de que T sea una transformación $\mu_1 - \mu_2-$preservadora de medida, se deduce que
$$\overline{\mu}_1[T^{-1}(C)] = \overline{\mu}_1[T^{-1}(A) \cup T^{-1}(B)] = \mu_1[T^{-1}(A)] = \mu_2[A] = \overline{\mu}_2[A \cup B] = \overline{\mu}_2[C].$$
   Por la elección arbitraria de $C \in \overline{\Sigma}_2$ se concluye que T es una transformación $\overline{\mu}_1 - \overline{\mu}_2-$preservadora de medida.

⊠

Tenemos el siguiente resultado que permite verificar la propiedad de preservación de medida para espacios de medida cuya $\sigma-$álgebra esté generada por una semiálgebra de subconjuntos del espacio.

TEOREMA 1. *Sean* $\{(X_i, \Sigma_i, \mu_i)\}_{i=1}^2$ *espacios de medida finita,* $T : X_1 \to X_2$ *una función. Suponga que* $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X_2)$ *es una semiálgebra de subconjuntos de* X_2 *tal que* $\sigma(\mathcal{S}) = \Sigma_2$*. Entonces* T *es una una transformación* $\mu_1 - \mu_2-$*preservadora de medida si y sólo si* T *satisface*

(I) *Para todo* $B \in \mathcal{S}$*:* $T^{-1}(B) \in \mathcal{F}$*.*

(II) *Para cada* $B \in \mathcal{S}$: $\mu_1[T^{-1}(B)] = \mu_2[B]$.

Demostración. Emplearemos la Definición 1.

$\Longrightarrow$] Esta implicación se tiene inmediatamente de la Definición 1.

$\Longleftarrow$] Suponga que se satisfacen las condiciones (I) y (II). Para establecer la conclusión del enunciado, se utiliza la técnica conocida comunmente como el principio de "los buenos conjuntos". Se define

$$\mathcal{C} = \{B \in \Sigma_2 : \ T^{-1}(B) \in \Sigma_1, \ \mu_1[T^{-1}(B)] = \mu_2[B]\}.$$

Se demostrará que $\mathcal{C}$ es una clase monótona que satisface $\mathcal{C} = \Sigma_2$. En primer lugar, observe que es claro que $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{C} \subseteq \Sigma_2$. Recuerde que, como $\mathcal{S}$ es una semiálgebra, el álgebra generada por $\mathcal{S}$, $\mathcal{A}(\mathcal{S})$, tiene la forma

$$\mathcal{A}(\mathcal{S}) = \left\{ \biguplus_{i=1}^{r} A_i : \ A_i \in \mathcal{S}, \ i \in \{1, \dots, r\}, \ r \in \mathbb{N} \right\}.$$

<u>Afirmación.</u> Se tienen

I. $\mathcal{A}(\mathcal{S}) \subseteq \mathcal{C}$.

II. $\mathcal{C}$ es una clase monótona.

Demostración de la Afirmación.

I. Fije $A \in \mathcal{A}(\mathcal{S})$ con $A = \biguplus_{i=1}^{r} A_i$, $A_i \in \mathcal{S}$, $i \in \{1, \dots, r\}$, $r \in \mathbb{N}$. Por la condición (I), para cada $i \in \{1, \dots, r\}$ tenemos $T^{-1}(A_i) \in \Sigma_1$ y por la condición (II) ocurre que $\mu_1[T^{-1}(A_i)] = \mu_2[A_i]$. También $T^{-1}(A) = \biguplus_{i=1}^{r} T^{-1}(A_i)$. Así que $T^{-1}(A) \in \sigma_1$ y

$$\mu_1[T^{-1}(A)] = \mu_1\left[\biguplus_{i=1}^{r} T^{-1}(A_i)\right] = \sum_{i=1}^{r} \mu_1[T^{-1}(A_i)] = \sum_{i=1}^{r} \mu_2[A_i] = \mu_2[A].$$

De modo que $A \in \mathcal{C}$. Así se concluye que $\mathcal{A}(\mathcal{S}) \subseteq \mathcal{C}$.

II. Mostremos que para cada sucesión creciente de conjuntos $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathcal{C}$ ocurre que $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{C}$. Fije cualquier sucesión creciente de conjuntos $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathcal{C}$. Entonces para cada $n \in \mathbb{N}$ se satisface $T^{-1}(A_n) \subseteq T^{-1}(A_{n+1})$, $T^{-1}(A_n) \in \Sigma_1$ y $\mu_1[T^{-1}(A_n)] = \mu_2[A_n]$. Observe que $T^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} T^{-1}(A_n) \in \Sigma_1$ y por el Teorema de Continuidad para μ_1 y μ_2 se tiene que

$$\mu_1\left[T^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)\right] = \mu_1\left[\bigcup_{n=1}^{\infty} T^{-1}(A_n)\right] = \lim_{n\to\infty} \mu_1[T^{-1}(A_n)] = \lim_{n\to\infty} \mu_2[A_n] = \mu_2\left[\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right].$$

Por ello, $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{C}$.

Análogamente, podemos probar que para toda sucesión decreciente de conjuntos $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathcal{C}$ se tiene que $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{C}$.

Por lo tanto $\mathcal{C}$ es una clase monótona.

Dada la Afirmación, desde que $\mathcal{A}(\mathcal{S})$ es un álgebra y $\mathcal{S}$ es un $\pi-$sistema, por el Lema de Clases Monótonas se tiene que $\Sigma_2 = \sigma(\mathcal{S}) = \sigma(\mathcal{A}(\mathcal{S})) = \mathcal{M}(\mathcal{A}(\mathcal{S})) = \mathcal{M}(\mathcal{S})$, donde $\mathcal{M}(\mathcal{A}(\mathcal{S}))$ y $\mathcal{M}(\mathcal{S})$ son las clases monótonas generadas por $\mathcal{A}(\mathcal{S})$ y $\mathcal{S}$ respectivamente. Así, $\Sigma_2 = \mathcal{M}(\mathcal{A}(\mathcal{S})) = \mathcal{M}(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$, donde $\mathcal{M}(\mathcal{C})$ es la clase monótona generada por $\mathcal{C}$ y la última igualdad se obtiene de que $\mathcal{C}$ es una clase monótona. Por tanto, $\mathcal{C} = \Sigma_2$ y por la Definición 1 se obtiene que T es una transformación $\mu_1 - \mu_2-$preservadora de medida.

$\boxtimes$

Definición 2 (Transformación producto directo). *Sean* $\{(X_i, \Sigma_i, \mu_i)\}_{i=1}^2$ *espacios de medida* $\sigma-$*finitos,* $T_i : X_i \to X_i$ *una transformación* μ_i-*preservadora de medida,* $i = 1, 2$. *Denotemos por* $(X_1 \times X_2, \Sigma_1 \otimes \Sigma_2, \mu_1 \otimes \mu_2)$ *al espacio de medida producto, donde* $\Sigma_1 \otimes \Sigma_2 = \sigma(\Sigma_1 \times \Sigma_2)$, *con* $\Sigma_1 \times \Sigma_2 = \{A_1 \times A_2 : \ A_i \in \Sigma_i, \ i = 1, 2\}$, $\mu_1 \otimes \mu_2$ *es la única medida definida en* $(X_1 \times X_2, \Sigma_1 \otimes \Sigma_2)$ *tal que para todo* $A_1 \in \Sigma_1$ *y* $A_2 \in \Sigma_2$ *ocurre que*

$$\mu_1 \otimes \mu_2[A_1 \times A_2] = \mu_1[A_1]\mu_2[A_2].$$

Se define la **transformación producto directo** $T_1 \otimes T_2 : X_1 \times X_2 \to X_1 \times X_2$ *para todo* $(x_1, x_2) \in X_1 \times X_2$ *como*

$$(T_1 \otimes T_2)(x_1, x_2) = (T_1(x_1), T_2(x_2)).$$

Observación 2. Considere toda la notación de la Definición 2. Se tiene que $\Sigma_1 \times \Sigma_2$ es una semiálgebra de subconjuntos de $X_1 \times X_2$ tal que $\sigma(\Sigma_1 \times \Sigma_2) = \Sigma_1 \otimes \Sigma_2$ y que $T_1 \otimes T_2$ es una transformación $\mu_1 \otimes \mu_2-$preservadora de medida.

Demostración de la Observación 2. Se verifica de inmediato que $\Sigma_1 \times \Sigma_2$ es una semiálgebra de subconjuntos de $X_1 \times X_2$ tal que $\sigma(\Sigma_1 \times \Sigma_2) = \Sigma_1 \otimes \Sigma_2$. Por el Teorema 1, será suficiente demostrar que para todo $A_1 \in \Sigma_1$ y $A_2 \in \Sigma_2$ se tiene que $(T_1 \otimes T_2)^{-1}(A_1 \times A_2) \in \Sigma_1 \otimes \Sigma_2$ y también que $\mu_1 \otimes \mu_2[(T_1 \otimes T_2)^{-1}(A_1 \times A_2)] = \mu_1 \otimes \mu_2[A_1 \times A_2]$.

Fije $A_1 \in \Sigma_1$, $A_2 \in \Sigma_2$. Note que para cada $i \in \{1, 2\}$ tenemos que $T_i^{-1}(A_i) \in \Sigma_i$ y $\mu_i[A_i] = \mu_i[T_i^{-1}(A_i)]$. Además ocurre que

$$\begin{aligned}(T_1 \otimes T_2)^{-1}(A_1 \times A_2) &= \{(x_1, x_2) \in X_1 \times X_2 : \ (T_1(x_1), T_2(x_2)) \in A_1 \times A_2\} \\ &= \{(x_1, x_2) \in X_1 \times X_2 : \ T_i(x_i) \in A_i, \ i = 1, 2\} \\ &= \{(x_1, x_2) \in X_1 \times X_2 : \ (x_1, x_2) \in T_1^{-1}(A_1) \times T_2^{-1}(A_2)\} = T_1^{-1}(A_1) \times T_2^{-1}(A_2).\end{aligned}$$

Por lo cual, $(T_1 \otimes T_2)^{-1}(A_1 \times A_2) \in \Sigma_1 \otimes \Sigma_2$ y por la definición de $\mu_1 \otimes \mu_2$ ocurre que

$$\begin{aligned}\mu_1 \otimes \mu_2[(T_1 \otimes T_2)^{-1}(A_1 \times A_2)] &= \mu_1 \otimes \mu_2[T_1^{-1}(A_1) \times T_2^{-1}(A_2)] = \mu_1[T_1^{-1}(A_1)]\mu_2[T_2^{-1}(A_2)] = \mu_1[A_1]\mu_2[A_2] \\ &= \mu_1 \otimes \mu_2[A_1 \times A_2].\end{aligned}$$

Por la elección de $A_1 \in \Sigma_1$, $A_2 \in \Sigma_2$ se tiene la conclusión.

$\boxtimes$

1.2. Recurrencia

Comenzaremos con el siguiente resultado.

Teorema 2 (Teorema de recurrencia de Poincaré). *Sea* (X, Σ, μ) *un espacio de medida finita y* $T : X \to X$ *una transformación* $\mu-$*preservadora de medida. Entonces, para todo* $B \in \Sigma$ *se tiene que el conjunto* $B_0 = \{b \in B : \ |\{n \in \mathbb{N} : \ T^n(b) \in B\}| = \infty\}$ *es* $\Sigma-$*medible. Además* $\mu[B] = \mu[B_0]$.

Demostración. Fije $B \in \Sigma$ y considere B_0 como en el enunciado.

Mostremos primero que $B_0 \in \Sigma$. Para cada $k \in \mathbb{N}$ denote por $T^{-k}(B) = (T^k)^{-1}(B)$. Note que $T^{-k}(B) \in \Sigma$, ya que T^k es una función $\Sigma-$medible.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ defina el conjunto

$$C_n = B \cap \bigcap_{i=n}^{\infty} T^{-i}(X \backslash B)$$

que es un conjunto $\Sigma-$medible. Observe que

$$C_n = \bigcap_{i=n}^{\infty} T^{-i}(X \backslash B) = B \cap \bigcap_{i=n}^{\infty} (X \backslash T^{-i}(B)) = B \backslash \bigcup_{i=n}^{\infty} T^{-i}(B).$$

Se afirma que $B_0 = B\setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$. Para establecer esto último, observe que

$$B\setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n = B\setminus \bigcup_{n=1}^{\infty}\Big(B\setminus \bigcup_{i=n}^{\infty} T^{-i}(B)\Big) = B\cap \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{i=n}^{\infty} T^{-i}(B).$$

De modo que $b \in B\setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$ si y sólo si $b \in B\cap \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{i=n}^{\infty} T^{-i}(B)$, lo cual sucede si y sólo si $b\in B$ y para una infinidad de $i\in\mathbb{N}$ ocurre que $b\in T^{-i}(B)$, es decir, $T^i(b)\in B$, en otras palabras, $|\{n\in\mathbb{N}:\ T^n(b)\in B\}| = \infty$, que significa $b\in B_0$. Así que $B_0 = B\setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$. De aquí que $B_0\in\Sigma$.

Resta verificar que $\mu[B]=\mu[B_0]$. Para ello, observe que $B = T^{-0}(B)\subset \bigcup_{i=0}^{\infty} T^{-i}(B)$. Luego, para cada $n\in\mathbb{N}$ tenemos que

$$C_n = B\setminus \bigcup_{i=n}^{\infty} T^{-i}(B) \subseteq \Big(\bigcup_{i=0}^{\infty} T^{-i}(B)\Big)\setminus\Big(\bigcup_{i=n}^{\infty} T^{-i}(B)\Big)$$

y también

$$T^{-n}\Big(\bigcup_{i=0}^{\infty} T^{-i}(B)\Big) = \bigcup_{i=0}^{\infty} T^{-n}(T^{-i}(B)) = \bigcup_{i=0}^{\infty} T^{-(i+n)}(B) = \bigcup_{i=n}^{\infty} T^{-i}(B).$$

Como T es una transformación $\mu-$preservadora de medida, por la Observación 1 y las expresiones previas, se tiene que

$$\mu\Big[\bigcup_{i=0}^{\infty} T^{-i}(B)\Big] = \mu\Big[T^{-n}\Big(\bigcup_{i=0}^{\infty} T^{-i}(B)\Big)\Big] = \mu\Big[\bigcup_{i=n}^{\infty} T^{-i}(B)\Big].$$

Entonces, para cada $n\in\mathbb{N}$ se obtiene que

$$0\le \mu[C_n] \le \mu\Big[\bigcup_{i=0}^{\infty} T^{-i}(B)\Big] - \mu\Big[\bigcup_{i=n}^{\infty} T^{-i}(B)\Big] = \mu\Big[\bigcup_{i=n}^{\infty} T^{-i}(B)\Big] - \mu\Big[\bigcup_{i=n}^{\infty} T^{-i}(B)\Big] = 0.$$

Por tanto $\mu\Big[\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n\Big] = 0$. De aquí que

$$\mu[B_0] = \mu\Big[B\setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n\Big] = \mu[B] - \mu\Big[\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n\Big] = \mu[B].$$

$\boxtimes$

COROLARIO 1. *Sean (X,Σ,μ) un espacio de medida finita y T una transformación $\mu-$preservadora de medida. Entonces para todo $B\in\Sigma$ con $\mu[B]>0$ existe $B_0\in\Sigma$ tal que $\mu[B]=\mu[B_0]$. Además para cada $b\in B_0$ existe una sucesión estrictamente creciente $\{\alpha(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ de números naturales tal que para todo $n\in\mathbb{N}$ ocurre que $T^{\alpha(n)}(b)\in B_0$.*

Demostración. Fije $B\in\Sigma$ con $\mu[B]>0$. Al igual que en el Teorema 2, consideremos

$$B_0 = B\cap \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{i=n}^{\infty} T^{-i}(B).$$

La prueba del Teorema 2 implica que $B_0\in\Sigma$ y que $\mu[B]=\mu[B_0]$.

Para concluir la prueba del resultado, fije $b\in B_0$. A continuación construimos la sucesión $\{\alpha(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ inductivamente.

Como $b\in B\cap \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{i=n}^{\infty} T^{-i}(B)$, para $n=1$ existe $\alpha(1)\in\mathbb{N}$ con $\alpha(1)>1$ y $T^{\alpha(1)}(b)\in B$.

Supóngase construida la colección $\{\alpha(1),\ldots,\alpha(k)\}\subseteq\mathbb{N}$ con $\alpha(1)<\ldots<\alpha(k)$ y $T^{\alpha(i)}(b)\in B$, para $i\in\{1,\ldots,k\}$. Como $b\in B\cap \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{i=n}^{\infty} T^{-i}(B)$, para $\alpha(k)+1$ existe un número natural $\alpha(k+1)$ tal que $\alpha(k+1)\ge \alpha(k)+1$ y $T^{\alpha(k+1)}(b)\in B$. Entonces existen $\{\alpha(1),\ldots,\alpha(k+1)\}\subseteq\mathbb{N}$ con $\alpha(1)<\ldots<\alpha(k+1)$ y $T^{\alpha(i)}(b)\in B$, para $i\in\{1,\ldots,k+1\}$. Por el principio de inducción matemática se tiene la conclusión.

$\boxtimes$

1.3. Operadores asociados a una transformación preservadora de medida.

Definamos la notación que utilizaremos en esta sección. Sean $p \geq 1$ y (X, Σ, μ) un espacio de medida. Escribimos $\mathbb{K}$ para referirnos a $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$.

$\mathcal{L}_0^{\mathbb{K}}(X, \Sigma, \mu)$ denotará al $\mathbb{K}-$ espacio vectorial de las funciones $f : X \to \mathbb{K}$ que son $(\Sigma, \mathcal{B}(\mathbb{K}))-$medibles.

$\mathcal{L}_p^{\mathbb{K}}(X, \Sigma, \mu)$ denotará el espacio de Banach cuyos elementos son funciones $f : X \to \mathbb{K}$ que son $(\Sigma, \mathcal{B}(\mathbb{K}))-$medibles y $\int_X |f|^p d\mu < \infty$. Denote a la norma en este espacio por $\|\cdot\|_p$, definida para cada $f \in \mathcal{L}_p^{\mathbb{K}}(X, \Sigma, \mu)$ como

$$\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}.$$

También $\mathcal{L}_\infty^{\mathbb{K}}(X, \Sigma, \mu)$ denotará al espacio de Banach que contiene a las funciones $f : X \to \mathbb{K}$ que son $(\Sigma, \mathcal{B}(\mathbb{K}))-$medibles tal que $\inf\{M > 0 : \mu[|f|^{-1}(]M, \infty[)] = 0\}$ está bien definido. Denote a la norma en este espacio por $\|\cdot\|_\infty$, definida para cada $f \in \mathcal{L}_\infty^{\mathbb{K}}(X, \Sigma, \mu)$ como

$$\|f\|_\infty = \inf\{M > 0 : \mu[|f|^{-1}(]M, \infty[)] = 0\}.$$

Si $U : \mathcal{L}_p^{\mathbb{K}}(X, \Sigma, \mu) \to \mathcal{L}_p^{\mathbb{K}}(X, \Sigma, \mu)$ es un operador lineal acotado, escribiremos

$$\|U\|_p = \sup\big\{\|U(f)\|_p : \ f \in \mathcal{L}_p^{\mathbb{K}}(X, \Sigma, \mu), \ \|f\|_p \leq 1\big\}. \tag{1.1}$$

a la norma del operador lineal U. Cuando $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ diremos que U es un *operador lineal positivo* si para toda $f \in \mathcal{L}_p^{\mathbb{K}}(X, \Sigma, \mu)$ con $f \geq 0$ c.t.p. (μ) ocurre que $U(f) \geq 0$ c.t.p. (μ).

Definición 3 (Operador asociado a una transformación preservadora de medida). *Sean $\{(X_i, \Sigma_i, \mu_i)\}_{i=1}^2$ espacios de medida, $T : X_1 \to X_2$ una transformación $\mu_1 - \mu_2-$preservadora de medida. Definimos $U_T : \mathcal{L}_0^{\mathbb{K}}(X_2, \Sigma_2, \mu_2) \to \mathcal{L}_0^{\mathbb{K}}(X_1, \Sigma_1, \mu_1)$ para cada $f \in \mathcal{L}_0^{\mathbb{K}}(X_2, \Sigma_2, \mu_2)$ como*

$$U_T(f) = f \circ T.$$

A U_T se le llama **operador asociado** *a T.*

Proposición 1. *Sean $\{(X_i, \Sigma_i, \mu_i)\}_{i=1}^2$ espacios de medida finita, $T : X_1 \to X_2$ una transformación $\mu_1 - \mu_2-$preservadora de medida. Entonces U_T es un operador lineal. Más aún, cuando $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ se tiene que U_T es un operador positivo, esto es, para cada $f \in \mathcal{L}_0^{\mathbb{K}}(X_2, \Sigma_2, \mu_2)$ con $f \geq 0$ c.t.p. (μ_2) ocurre que $U_T(f) \geq 0$ c.t.p. (μ_1).*

Demostración. Note primero que para cada $f \in \mathcal{L}_0^{\mathbb{K}}(X_2, \Sigma_2, \mu_2)$ se tiene que $U_T(f) = f \circ T \in \mathcal{L}_0^{\mathbb{K}}(X_1, \Sigma_1, \mu_1)$.

Verifiquemos ahora que U_T es un operador lineal. Para cada $f, g \in \mathcal{L}_0^{\mathbb{K}}(X_2, \Sigma_2, \mu_2)$, $c \in \mathbb{K}$ y $x \in X_1$ tenemos que

$$((cf + g) \circ T)(x) = (cf + g)(T(x)) = c(f \circ T)(x) + (g \circ T)(x).$$

Por ello

$$U_T(cf + g) = (cf + g) \circ T = c(f \circ T) + (g \circ T) = cU_T(f) + U_T(g).$$

que significa que U_T es un operador lineal.

Queda por verificar que, en el caso en que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, U_T es un operador lineal positivo. Para ello, fije $f \in \mathcal{L}_0^{\mathbb{K}}(X_2, \Sigma_2, \mu_2)$ con $f \geq 0$ c.t.p. (μ_2). Como T es una transformación $\mu_1 - \mu_2-$preservadora de medida y $f^{-1}([0, \infty[) \in \Sigma_1$ ocurre que

$$\mu_2[X_2] = \mu_2[f^{-1}([0, \infty[)] = \mu_1[T^{-1}(f^{-1}([0, \infty[))] = \mu_1[(f \circ T)^{-1}([0, \infty[)].$$

De esta forma se concluye que $U_T(f) \geq 0$ c.t.p (μ_1). ⊠

Tenemos el siguiente lema que relaciona la integral de una función con la integral del operador aplicado a esa función.

LEMA 1. *Sean* $\{(X_i, \Sigma_i, \mu_i)\}_{i=1}^2$ *espacios de medida finita,* $T : X_1 \to X_2$ *una transformación* $\mu_1 - \mu_2-$*preservadora de medida. Entonces para cada* $f \in \mathcal{L}_0^{\mathbb{K}}(X_2, \Sigma_2, \mu_2)$ *con* $f \geq 0$ *c.t.p* (μ_2) *se tiene que*

$$\int_{X_1} U_T(f)d\mu_1 = \int_{X_2} fd\mu_2.$$

Demostración. La demostración de este resultado se desarrolla mediante aproximación de funciones medibles por funciones Σ_2-simples. Considere los siguientes casos:

Caso 1. $f = \chi_B$, donde $B \in \Sigma_2$.
Note que para cada $x \in X_1$

$$(f \circ T)(x) = \chi_B(T(x)) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in T^{-1}(B) \\ 0 & \text{si} \quad x \notin T^{-1}(B) \end{cases} = \chi_{T^{-1}(B)}(x)$$

Como T es una transformación $\mu_1 - \mu_2-$preservadora de medida, se tiene que

$$\int_{X_1} U_T(f)d\mu_1 = \int_{X_1} \chi_{T^{-1}(B)}d\mu_1 = \mu_1[T^{-1}(B)] = \mu_2[B] = \int_{X_2} \chi_B d\mu_2 = \int_{X_2} fd\mu_2.$$

Caso 2. f es una función Σ_2-simple.
En este caso, la conclusión se tiene del Caso 1 y la linealidad de la integral para funciones no negativas.

Caso 3. f es una función $(\Sigma_2, \mathcal{B}(\mathbb{K}))-$medible no negativa.
Por el teorema de aproximación por funciones simples, para f existe $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión creciente de funciones Σ_2-simples no negativas definidas en X_2 tal que $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$ c.t.p.(μ_2).

Se verifica de inmediato que $(U_T(f_n))_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión creciente de funciones Σ_1-simples no negativas tales que $\lim\limits_{n\to\infty} U_T(f_n) = U_T(f)$ c.t.p.(μ_1).

Entonces por el Caso 2 y el Teorema de Convergencia Monótona:

$$\int_{X_1} U_T(f)d\mu_1 = \lim_{n\to\infty} \int_{X_1} U_T(f_n)d\mu_1 = \lim_{n\to\infty} \int_{X_2} f_n d\mu_2 = \int_{X_2} fd\mu_2.$$

⊠

COROLARIO 2. *Sean* $\{(X_i, \Sigma_i, \mu_i)\}_{i=1}^2$ *espacios de medida finita,* $T : X_1 \to X_2$ *una transformación* $\mu_1 - \mu_2-$*preservadora de medida. Entonces para cada* $f \in \mathcal{L}_0^{\mathbb{K}}(X_2, \Sigma_2, \mu_2)$ *se tiene que* $U_T(f) \in \mathcal{L}_1^{\mathbb{K}}(X_1, \Sigma_1, \mu_1)$ *si y sólo si* $f \in \mathcal{L}_1^{\mathbb{K}}(X_2, \Sigma_2, \mu_2)$. *En este caso:*

$$\int_{X_1} U_T(f)d\mu_1 = \int_{X_2} fd\mu_2. \tag{1.2}$$

Demostración. Distinguimos entre los casos $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ y $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Caso 1. $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.
Por el Lema 1 se tiene que

$$\int_{X_1} |U_T(f)|d\mu_1 = \int_{X_2} |f|d\mu_2.$$

Es decir, $U_T(f) \in \mathcal{L}_1^{\mathbb{K}}(X_1, \Sigma_1, \mu_1)$ si y sólo si $f \in \mathcal{L}_1^{\mathbb{K}}(X_2, \Sigma_2, \mu_2)$. En tal caso, si f^+, f^- la parte positiva y negativa de f respectivamente, como $f = f^+ - f^-$, ocurre que $U_T(f) = U_T(f^+) - U_T(f^-)$ y por el Lema 1

$$\int_{X_1} U_T(f^+)d\mu_1 = \int_{X_2} f^+d\mu_2, \qquad \int_{X_1} U_T(f^{-1})d\mu_1 = \int_{X_2} f^- d\mu_2,$$

de donde se sigue que

$$\int_{X_1} U_T(f)d\mu_1 = \int_{X_1} U_T(f^+)d\mu_1 - \int_{X_1} U_T(f^-)d\mu_1 = \int_{X_2} f^+d\mu_2 - \int_{X_2} f^-d\mu_2 = \int_{X_2} fd\mu_2$$

Caso 2. $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.
Basta observar que si $f = \Re(f) + i\Im(f)$, entonces $U_T(f) = U_T(\text{Re}(f)) + iU_T(\text{Im}(f)) = \text{Re}(U_T(f)) + i\text{Im}(U_T(f))$ y aplicar el Caso 1 a $\text{Re}(f)$ y $\text{Im}(f)$.

$\boxtimes$

Una consecuencia importante del Corolario 2 está en el siguiente resultado.

TEOREMA 3. *Sean* $\{(X_i, \Sigma_i, \mu_i)\}_{i=1}^2$ *espacios de medida finita,* $T : X_1 \to X_2$ *una transformación* $\mu_1 - \mu_2-$*preservadora de medida y* $p \geq 1$*. Entonces*

$$U_T\big(\mathcal{L}_p^{\mathbb{K}}(X_2, \Sigma_2, \mu_2)\big) \subseteq \mathcal{L}_p^{\mathbb{K}}(X_1, \Sigma_1, \mu_1).$$

Además, si para cada $i \in \{1, 2\}$*,* $\|\cdot\|_p^{(i)}$ *denota la norma* p *en* $\mathcal{L}_p^{\mathbb{K}}(X_i, \Sigma_i, \mu_i)$*, entonces para cada* $f \in \mathcal{L}_p^{\mathbb{K}}(X_2, \Sigma_2, \mu_2)$

$$\|U_T(f)\|_p^{(1)} = \|f\|_p^{(2)}. \tag{1.3}$$

Demostración. Sea $f \in \mathcal{L}_p^{\mathbb{K}}(X_2, \Sigma_2, \mu_2)$ arbitraria. Observe que

$$U_T(|f|^p) = |f|^p \circ T = |f \circ T|^p = |U_T(f)|^p.$$

Del Corolario 2 se obtiene que $|U_T(f)|^p \in \mathcal{L}_p^{\mathbb{K}}(X_1, \Sigma_1, \mu_1)$ y

$$\|U_T(f)\|_p^{(1)} = \int_{X_1} |U_T(f)|^p d\mu_1 = \int_{X_1} U_T(|f|^p) d\mu_1 = \int_{X_2} |f|^p d\mu_2 = \|f\|_p^{(2)}$$

de donde se sigue el resultado. $\boxtimes$

En la siguiente observación se muestran algunas propiedades del operador asociado a una transformación preservadora de medida.

OBSERVACIÓN 3. Sean $\{(X_i, \Sigma_i, \mu_i)\}_{i=1}^2$ espacios de medida finita, $T : X_1 \to X_2$ una transformación $\mu_1 - \mu_2-$preservadora de medida y $p \geq 1$. Sea U_T el operador asociado a T. Se tienen las siguientes propiedades de U_T:

(I) Para cada $c \in \mathbb{K}$, $f, g \in \mathcal{L}_0^{\mathbb{K}}(X_2, \Sigma_2, \mu_2)$, si $\underline{c} : X_2 \to \mathbb{K}$ denota la función constante c, entonces $U_T(\underline{c}) = \underline{c}$ y $U_T(fg) = U_T(f)U_T(g)$.

(II) Si (X_3, Σ_3, μ_3) es un espacio de medida y $S : X_2 \to X_3$ es una transformación $\mu_2 - \mu_3-$preservadora de medida, entonces $U_{S\circ T} = U_T \circ U_S$. En particular, si (X, Σ, μ) es un espacio de medida y $T : X \to X$ es una transformación $\mu-$preservadora de medida, para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $U_{T^n} = (U_T)^n$, donde esta última función se define recursivamente para cada $f \in \mathcal{L}_0^{\mathbb{K}}(X, \Sigma, \mu)$ como $(U_T)^n(f) = (U_T)^{n-1}(U_T(f))$, con $U_T^0(f) = f$.

(III) Si (X, Σ, μ) es un espacio de medida finito y $T : X \to X$ es una transformación $\mu-$preservadora de medida. Puede restringirse el dominio y el contradominio de U_T a $\mathcal{L}_p^{\mathbb{K}}(X, \Sigma, \mu)$, que resulta ser un operador lineal acotado.

Demostración de la Observación 3. Considere la notación para las funciones constantes.

(I) Fije $c \in \mathbb{K}$ y $f, g \in \mathcal{L}_0^{\mathbb{K}}(X_2, \Sigma_2, \mu_2)$. Observe que para todo $x \in X_1$ ocurre que

$$U_T(\underline{c})(x) = (\underline{c} \circ T)(x) = \underline{c}(T(x)) = c = \underline{c}(x).$$

y también

$$U_T(fg)(x) = ((fg) \circ T)(x) = f(T(x))g(T(x)) = U_T(f)(x)U_T(g)(x).$$

De este modo se tiene (I).

(II) Ya se tiene, por la Observación 1, que $S \circ T$ es una transformación $\mu_1 - \mu_3-$preservadora de medida. También, para cada $f \in \mathcal{L}_0^{\mathbb{K}}(X_2, \Sigma_2, \mu_2)$ ocurre que

$$U_{S\circ T}(f) = f \circ (S \circ T) = (f \circ S) \circ T = U_T(f \circ S) = U_T(U_S(f)) = (U_T \circ U_S)(f).$$

(III) Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida y T una transformación $\mu-$preservadora de medida. Note que, para cada $f \in \mathcal{L}_p^{\mathbb{K}}(X, \Sigma, \mu)$ que satisface $\|f\|_p \leq 1$, se tiene que, por la expresión (1.3) del Teorema 3, que $\|U_T(f)\|_p = \|f\|_p \leq 1$, entonces el conjunto

$$\{\|U_T(f)\|_p : \ f \in \mathcal{L}_p^{\mathbb{K}}(X, \Sigma, \mu), \ \|f\|_p \leq 1\}$$

está acotado superiormente y luego,

$$\|U_T\|_p = \sup\{\|U_T(f)\|_p : \ f \in \mathcal{L}_p^{\mathbb{K}}(X, \Sigma, \mu), \ \|f\|_p \leq 1\} \leq 1,$$

obteniéndose que U_T es un operador lineal acotado en $\mathcal{L}_p^{\mathbb{K}}(X, \Sigma, \mu)$.

$\boxtimes$

1.4. Ergodicidad

El objetivo de esta sección es presentar el Teorema Ergódico de Birkhoff, así como la definición y principales caracterizaciones de las transformaciones ergódicas.

El siguiente resultado es fundamental para establecer el Teorema Ergódico en su versión más general, donde el espacio de medida considerado es $\sigma-$finito.

Teorema 4 (Teorema Ergódico Maximal). *Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida $\sigma-$finito, $T : X \to X$ una transformación $\mu-$preservadora de medida, $U : \mathcal{L}_1^{\mathbb{K}}(X, \Sigma, \mu) \to \mathcal{L}_1^{\mathbb{K}}(X, \Sigma, \mu)$ un operador lineal acotado positivo con $\|U\| \leq 1$. Fije $N \in \mathbb{N}$ y $f \in \mathcal{L}_1^{\mathbb{K}}(X, \Sigma, \mu)$. Defina la sucesión de funciones $(f_n : X \to \mathbb{R})_{n \geq 0}$ como sigue: Sea $f_0 = 0$. Para cada $n \geq 1$ definimos $f_n = \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} U^i(f)$ y también considere $F_N = \max\{f_n : 0 \leq n \leq N\}$. Entonces*

$$\int_{\{x \in X: \ F_N(x) > 0\}} f d\mu \geq 0. \tag{1.4}$$

Demostración. En primer lugar, se tiene que $F_N = \max\{f_n : 0 \leq n \leq N\} \geq f_0 = 0$. También para cada natural n, con $0 \leq n \leq N$, se tiene que $f_n \leq F_N$, es decir, $F_N - f_n \geq 0$, donde $F_N - f_n \in \mathcal{L}_1^{\mathbb{K}}(X, \Sigma, \mu)$. Esto implica, desde que U es un operador lineal positivo, que

$$U(F_N) \geq U(f_n) = U\left(\sum_{i=0}^{n-1} U^i(f)\right) = \sum_{j=1}^{n} U^j(f).$$

Por ello, para cada $0 \leq n \leq N$

$$U(F_N) + f \geq U(f_n) + f = \sum_{j=1}^{n} U^j(f) = \sum_{i=0}^{n} U^i(f) = f_{n+1}. \tag{1.5}$$

<u>Afirmación.</u> Para cada $x \in X$ con $F_N(x) > 0$ se satisface que

$$F_N(x) = \max\{f_n(x) : \ 1 \leq i \leq N\}. \tag{1.6}$$

Demostración de la Afirmación. Fije $x \in X$ con $F_N(x) > 0$. Se verifica de inmediato que

$$F_N(x) \geq \max\{f_n(x) : \ 1 \leq i \leq N\}.$$

Por otro lado, note que la condición $F_N(x) > 0$ implica que $F_N(x) \neq f_0(x)$.Considere $j_0 \in \{1, \ldots N\}$ tal que $f_{j_0}(x) = \max\{f_n(x) : \ 1 \leq i \leq N\}$. Se tiene que $f_{j_0}(x) > 0$. (Porque, en caso contrario, si $f_{j_0}(x) \leq 0$, entonces para cada $k \in \{1, \ldots N\}$ ocurre que $f_k(x) \leq f_{j_0}(x) \leq 0$, así que para cada $k \in \{0, \ldots N\}$ tenemos $f_k(x) \leq f_{j_0}(x) \leq 0$, lo que implica que $F_N(x) \leq 0$, que es contradictorio).

Por lo que para todo $k \in \{0, \ldots N\}$ tenemos $f_k(x) \leq f_{j_0}(x)$, es decir,

$$\max\{f_n(x) : \ 1 \leq i \leq N\} = f_{j_0}(x) \geq \max\{f_n(x) : \ 0 \leq i \leq N\} = F_N(x).$$

Así se obtiene la expresión (1.6).

Por la Afirmación y la ecuación (1.5) se concluye que para todo $x \in X$ con $F_N(x)$ se tiene que

$$U(F_N)(x) + f(x) \geq F_N(x) = \text{máx}\{f_n(x) :\ 1 \leq i \leq N\}.$$

Definamos el conjunto $\Sigma-$medible $A_{(f,N)} = \{x \in X :\ F_N(x) > 0\}$. Como $F_N \geq 0$, tenemos que $X \backslash A_{(f,N)} = \{x \in X :\ F_N(x) = 0\}$. Por la ecuación (1.5), esto implica que $(U(F_N)+f)\chi_{A_{(f,N)}} \geq F_N \chi_{A_{(f,N)}}$; equivalentemente

$$f\chi_{A_{(f,N)}} \geq (F_N - f)\chi_{A_{(f,N)}}. \tag{1.7}$$

También se tiene que $F_N \chi_{X\backslash A_{(f,N)}} = 0$. Y como $F_N > 0$ y $U(F_N) > 0$, ya que U es un operador lineal positivo, tenemos que

$$\|F_N\|_1 = \int_X F_N = \int_{A_{(f,N)}} F_N, \qquad \|U(F_N)\|_1 = \int_X U(F_N) \geq \int_{A_{(f,N)}} F_N. \tag{1.8}$$

Por las propiedades de la norma del operador, así como el hecho de que $\|U\| \leq 1$ se tiene que $\|U(F_N)\|_1 \leq \|U\|\|F_N\|_1 = \|F_N\|_1$, es decir, $\|F_N\|_1 - \|U(F_N)\|_1 \geq 0$.

De las ecuaciones (1.7) y (1.8) se concluye que

$$\begin{aligned}\int_{A_{(f,N)}} f d\mu &\geq \int_{A_{(f,N)}} (F_N - U(F_N))d\mu = \int_{A_{(f,N)}} F_N d\mu - \int_{A_{(f,N)}} U(F_N)d\mu \\ &\geq \int_X F_N d\mu - \int_X U(F_N)d\mu = \|F_N\|_1 - \|U(F_N)\|_1 \geq 0\end{aligned}$$

que es el resultado deseado.

⊠

Corolario 3. *Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida $\sigma-$finito, $T : X \to X$ una transformación $\mu-$preservadora de medida, $g \in \mathcal{L}_1^{\mathbb{R}}(X, \Sigma, \mu)$. Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ defina el conjunto*

$$B_{(g,\alpha)} = \left\{x \in X :\ \sup_{n\in\mathbb{N}}\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}(g \circ T^i)(x)\right\} > \alpha\right\}.$$

Entonces para cada $A \in \Sigma$ con $T^{-1}(A) = A$ y $\mu[A] < \infty$ se tiene que

$$\int_{B_{(g,\alpha)}\cap A} g d\mu \geq \alpha\mu\big(B_{(g,\alpha)} \cap A\big). \tag{1.9}$$

Demostración. Recuerde que, del inciso (III) de la Observación 3, se tiene que U_T es un operador lineal acotado en $\mathcal{L}_1^{\mathbb{R}}(X, \Sigma, \mu)$ con $\|U_T\|_1 \leq 1$.

Sean $A \in \Sigma$ con $\mu[A] < \infty$. Note que, para cada $k \in \mathbb{N}$ ocurre que $g \circ T^k \in \mathcal{L}_0^{\mathbb{R}}(X, \Sigma, \mu)$, por lo que, para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ tenemos que $B_{(g,\alpha)} \in \Sigma$. Considere los siguientes casos para A:

<u>Caso 1.</u> $A = X$ con $\mu[X] < \infty$.

Defina $f = g - \underline{\alpha}$. Es claro que, el hecho de que $\mu[X] < \infty$ implica que $f \in \mathcal{L}_1^{\mathbb{R}}(X, \Sigma, \mu)$. Definimos los siguientes conjuntos y funciones en X: $f_0 = 0$. Para cada $n \geq 1$ considere

$$f_n = \sum_{i=0}^{n-1} U_T^i(f) = \sum_{i=0}^{n-1}[g \circ T^i - \underline{\alpha} \circ T^i] = \sum_{i=0}^{n-1}(g \circ T^i) - n\alpha.$$

También, para cada $N \in \mathbb{N}$ definimos

$$F_N(x) = \text{máx}\{f_n :\ 0 \leq n \leq N\}$$

y el conjunto $\Sigma-$medible $A_{(f,N)} = \{x \in X :\ F_N(x) > 0\}$. Con dichas definiciones, se reescribe

$$\begin{aligned}B_{(g,\alpha)} &= \left\{x \in X :\ \sup_{n\in\mathbb{N}}\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}(g \circ T^i)(x)\right\} > \alpha\right\} = \left\{x \in X :\ \sup_{n\in\mathbb{N}}\left\{\frac{1}{n}(f_n(x) + n\alpha)\right\} > \alpha\right\} \\ &= \left\{x \in X :\ \sup_{n\in\mathbb{N}}\left\{\frac{1}{n}f_n(x) + \alpha\right\} > \alpha\right\}.\end{aligned}$$

Tenemos la siguiente

Afirmación. $B_{(g,\alpha)} = \bigcup_{N=1}^{\infty} A_{(f,N)}$.

Demostración de la Afirmación. Probaremos únicamente que $B_{(g,\alpha)} \subseteq \bigcup_{N=1}^{\infty} A_{(f,N)}$, la otra contención se tiene de forma similar. Fije $x \in B_{(g,\alpha)}$ arbitrario. Entonces $\sup_{n\in\mathbb{N}}\left\{\frac{1}{n}f_n(x) + \alpha\right\} > \alpha$. Por ello existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{N}f_N(x) + \alpha > \alpha$. Se sigue que $F_N(x) \geq f_N(x) > 0$, es decir, $x \in A_{(f,N)}$. Así que $B_{(g,\alpha)} \subseteq \bigcup_{N=1}^{\infty} A_{(f,N)}$. Esto prueba la Afirmación.

Por la Afirmación, para cada $N \in \mathbb{N}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ se tiene que $A_{(f,N)} \subseteq B_{(g,\alpha)}$. Además, como $\mu[X] < \infty$, ocurre que $\mu[B_{(g,\alpha)}] < \infty$. Por el Teorema Ergódico Maximal

$$0 \leq \int_{A_{(f,N)}} f d\mu \leq \int_{B_{(g,\alpha)}} f d\mu = \int_{B_{(g,\alpha)}} (g - \underline{\alpha}) d\mu = \int_{B_{(g,\alpha)}} g d\mu - \alpha\mu[B_{(g,\alpha)}],$$

y se concluye que

$$\int_{B_{(g,\alpha)}} g d\mu \geq \alpha\mu[B_{(g,\alpha)}].$$

Caso 2. $A \in \Sigma$ con $T^{-1}(A) = A$ y $\mu[A] < \infty$.
En tal caso, la condición $T^{-1}(A) = A$ implica que $T(A) \subseteq T(T^{-1}(A)) \subseteq A$. Entonces, al considerar el espacio de medida finita (A, Σ_A, μ_A), donde $\Sigma_A = \{A \cap B : \ B \in \Sigma\}$, $\mu_A = \mu|_{\Sigma_A}$, así como la función $T_A : A \to A$ definida para cada $x \in A$ como $T_A(x) = T(x)$, se observa que T_A es una transformación μ_A-preservadora de medida, y de hecho $g|_A \in \mathcal{L}_1^{\mathbb{R}}(A, \Sigma_A, \mu_A)$. Por el Caso 1 se concluye que para cada $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\int_{B_{(g,\alpha)}\cap A} g d\mu = \int_{B_{(g,\alpha)}} g|_A d\mu_A \leq \alpha\mu_A[B_{(g,\alpha)}] = \alpha\mu[B_{(g,\alpha)} \cap A].$$

Esto demuestra el resultado.

⊠

Teorema 5 (Teorema Ergódico de Birkhoff). *Sean (X, Σ, μ) un espacio de medida $\sigma-$finito, $T : X \to X$ una transformación $\mu-$preservadora de medida, $f \in \mathcal{L}_1^{\mathbb{K}}(X, \Sigma, \mu)$. Entonces existe una única función $f^* \in \mathcal{L}_1^{\mathbb{K}}(X, \Sigma, \mu)$ tal que $f^* \circ T = f^*$ c.t.p. (μ) y*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}(f \circ T^i) = f^* \qquad c.t.p.\ (\mu). \tag{1.10}$$

Además, si $\mu[X] < \infty$, entonces

$$\int_X f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}(f \circ T^i) d\mu = \int_X f^* d\mu. \tag{1.11}$$

Demostración. Note que, dada $f \in \mathcal{L}_1^{\mathbb{C}}(X, \Sigma, \mu)$, esta se puede escribir como $f = \mathrm{Re}(f) + i\mathrm{Im}(f)$, puede aplicarse el resultado para $\mathrm{Re}(f), \mathrm{Im}(f) \in \mathcal{L}_1^{\mathbb{R}}(X, \Sigma, \mu)$. Por ello, es suficiente establecer el resultado para $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Considere los siguientes casos para $\mu[X]$:

Caso 1. $\mu[X] < \infty$.
Defina las funciones $f^*, f_* : X \to \mathbb{R}$ como sigue

$$f^* = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}(f \circ T^i), \qquad f_* = \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}(f \circ T^i).$$

Note que f^* y f_* son funciones $(\Sigma, \mathcal{B}(\mathbb{R}))-$medibles.

Observe que para todo $n \in \mathbb{N}$ y $x \in X$ ocurre

$$\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n}(f\circ T^i)(x) = \frac{f(x)}{n+1} + \frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n}(f\circ T^i)(x) = \frac{f(x)}{n+1} + \frac{n}{n+1}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}(f\circ T^i)(T(x)).$$

Entonces

$$\begin{aligned} f^*(x) &= \limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n}(f\circ T^i)(x) = \limsup_{n\to\infty}\left(\frac{f(x)}{n+1} + \frac{n}{n+1}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}(f\circ T^i)(T(x))\right) \\ &= \limsup_{n\to\infty}\left(\frac{f(x)}{n+1}\right) + \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)\limsup_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}(f\circ T^i)(T(x))\right) = f^*(T(x)) = (f^*\circ T)(x). \end{aligned}$$

Es decir,

$$f^* = f^*\circ T \tag{1.12}$$

De la misma forma se obtiene que $f_*\circ T = f_*$.

Demostraremos que la sucesión de funciones $\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}(f\circ T^i)\right\}_{n\geq 0}$ es convergente c.t.p. (μ). Para ello se tiene la siguiente

Afirmación 1. $f^* = f_*$ c.t.p. (μ).

Demostración de la Afirmación 1. Para cada $\omega\in\mathbb{R}$ defina los conjuntos $\Sigma-$ medibles

$$E^+_\omega(f) = \{x\in X:\ \omega < f^*(x)\} = (f^*)^{-1}(]\omega,\infty]),$$

y también

$$E^-_\omega(f) = \{x\in X:\ f_*(x) < \omega\} = (f_*)^{-1}([-\infty,\omega[).$$

Debido a la ecuación (1.12), se tiene que

$$T^{-1}\big(E^+_\omega(f)\big) = T^{-1}\big((f^*)^{-1}(]\omega,\infty])\big) = (f^*\circ T)^{-1}(]\omega,\infty]) = (f^*)^{-1}(]\omega,\infty]) = E^+_\omega(f),$$

y de igual forma se tiene que $T^{-1}\big(E^-_\omega(f)\big) = E^-_\omega(f)$.

Defina el conjunto $\Sigma-$medible

$$\mathcal{R} = \bigcup_{\alpha,\beta\in\mathbb{Q},\ \alpha<\beta} E^-_\alpha(f)\cap E^+_\beta(f) = \bigcup_{\alpha,\beta\in\mathbb{Q},\ \alpha<\beta}\{x\in X:\ f_*(x) < \alpha < \beta < f^*(x)\}.$$

De la definición de f_* y f^*, trivialmente se tiene que $f_*\leq f^*$. Por tanto, para probar la Afirmación, es suficiente demostrar que $\mu[R]=0$. De hecho, probaremos que para todo $\alpha,\beta\in\mathbb{Q}$ con $\alpha<\beta$ se satisface que

$$\mu[E^-_\alpha(f)\cap E^+_\beta(f)] = 0.$$

Para ello, fije $\alpha,\beta\in\mathbb{Q}$ con $\alpha<\beta$. Con la notación del Corolario 3, considere el conjunto

$$B_{(f,\beta)} = \left\{x\in X:\ \sup_{n\in\mathbb{N}}\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}(f\circ T^i)(x)\right\} > \beta\right\}.$$

Notemos que para cada $x\in X$ ocurre que

$$f^*(x) \leq \sup_{n\in\mathbb{N}}\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}(f\circ T^i)(x)\right\},$$

de donde se obtiene que $E^-_\alpha(f)\cap E^+_\beta(f)\subset B_{(f,\beta)}$, es decir, $E^-_\alpha(f)\cap E^+_\beta(f)\cap B_{(f,\beta)} = E^-_\alpha(f)\cap E^+_\beta(f)$.

Así que $E^-_\alpha(f)\cap E^+_\beta(f)$ es un conjunto $\Sigma-$medible que satisface $T^{-1}\big(E^-_\alpha(f)\cap E^+_\beta(f)\big)=E^-_\alpha(f)\cap E^+_\beta(f)$ y

$$\mu[E^-_\alpha(f)\cap E^+_\beta(f)]\leq\mu[X]<\infty.$$

Entonces, por el Corolario 3

$$\int_{E^-_\alpha(f)\cap E^+_\beta(f)} fd\mu=\int_{E^-_\alpha(f)\cap E^+_\beta(f)\cap B_{(f,\beta)}} fd\mu\geq\beta\mu[E^-_\alpha(f)\cap E^+_\beta(f)\cap B_{(f,\beta)}]=\beta\mu[E^-_\alpha(f)\cap E^+_\beta(f)] \quad (1.13)$$

Por otro lado, tenemos que $(-f)^*=-f_*$ y $(-f)_*=-f^*$. por lo que

$$E^-_\alpha(f)=\{x\in X: f_*(x)<\alpha\}=\{x\in X: -\alpha<(-f)^*(x)=-f_*(x)\}=E^+_{-\alpha}(-f),$$

y de igual manera se tiene que $E^+_\beta(f)=E^-_{-\beta}(-f)$. Como ocurre para cada $x\in X$ que

$$(-f)^*(x)\leq\sup_{n\in\mathbb{N}}\bigg\{\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}(-f\circ T^i)(x)\bigg\},$$

se obtiene que

$$E^-_\alpha(f)\cap E^+_\beta(f)=E^+_{-\alpha}(-f)\cap E^-_{-\beta}(-f)\subseteq B_{(-f,-\alpha)}.$$

lo que implica que $E^-_\alpha(f)\cap E^+_\beta(f)=E^+_{-\alpha}(-f)\cap E^-_{-\beta}(-f)\cap B_{(-f,-\alpha)}$. Mediante un argumento similar al anterior, tenemos que, aplicando la ecuación (1.13) a $-f$, $-\alpha$ y $-\beta$, por el Corolario 3

$$\begin{aligned}\int_{E^-_\alpha(f)\cap E^+_\beta(f)}(-f)d\mu&=\int_{E^+_{-\alpha}(-f)\cap E^-_{-\beta}(-f)\cap B_{(-f,-\alpha)}}(-f)d\mu\geq-\alpha\mu[E^+_{-\alpha}(-f)\cap E^-_{-\beta}(-f)\cap B_{(-f,-\alpha)}]\\&=-\alpha\mu[E^+_{-\alpha}(-f)\cap E^-_{-\beta}(-f)]=-\alpha\mu[E^-_\alpha(f)\cap E^+_\beta(f)].\end{aligned}$$

Luego

$$\int_{E^-_\alpha(f)\cap E^+_\beta(f)}(-f)d\mu\geq-\alpha\mu[E^-_\alpha(f)\cap E^+_\beta(f)]. \quad (1.14)$$

De las desigualdades (1.13) y (1.14) se tiene que

$$\beta\mu[E^-_\alpha(f)\cap E^+_\beta(f)]\leq\int_{E^-_\alpha(f)\cap E^+_\beta(f)} fd\mu\leq\alpha\mu[E^-_\alpha(f)\cap E^+_\beta(f)].$$

Como $\alpha<\beta$, de la última expresión se tiene que $\mu[E^-_\alpha(f)\cap E^+_\beta(f)]=0$. Por la elección de $\alpha,\beta\in\mathbb{Q}$ se tiene la Afirmación 1.

Afirmación 2. $f^*\in\mathcal{L}_1^{\mathbb{R}}(X,\Sigma,\mu)$.

Demostración de la Afirmación 2. Para cada $n\in\mathbb{N}$ defina la función $g_n: X\to\mathbb{R}$ como

$$g_n=\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}|f\circ T^i|=\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}|U_T^i(f)|.$$

La función g_n es $(\Sigma,\mathcal{B}(\mathbb{R}))-$medible no negativa. Por el Corolario 2, para cada $n\in\mathbb{N}$ ocurre que $g_n\in\mathcal{L}_1^{\mathbb{R}}(X,\Sigma,\mu)$ y

$$\int_X g_n d\mu=\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\int_X|U_T^i(f)|d\mu=\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\int_X|f|d\mu=\int_X|f|d\mu.$$

Por otro lado, de la Afirmación 1 se tiene que

$$|f_*|=\left|\liminf_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}(f\circ T^i)\right|=\left|\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}(f\circ T^i)\right|\leq\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}|U_T^i(f)|=\liminf_{n\to\infty}g_n \qquad \text{c.t.p. } (\mu).$$

Entonces, por el lema de Fatou para $(g_n)_{n\geq0}$ se sigue que

$$\int_X|f_*|d\mu\leq\int_X\liminf_{n\to\infty}g_n d\mu\leq\liminf_{n\to\infty}\int_X g_n d\mu=\int_X|f|d\mu<\infty.$$

Afirmación 3. $\int_X f_* d\mu = \int_X f d\mu.$

Demostración de la Afirmación 3. Considere los siguientes casos:

Caso i. $f \in \mathcal{L}_\infty(X, \Sigma, \mu)$.

Si $f = 0$ c.t.p. (μ), entonces $f_* = f^* = 0$ c.t.p. (μ) y la afirmación es cierta. Por tanto, puede suponerse que $f \neq 0$ c.t.p. (μ).

Para cada $n \in \mathbb{N}$ defina la función $h_n : X \to \mathbb{R}$ como $h_n = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}(f \circ T^i)$. Como $|f| \leq \|f\|_\infty$ c.t.p. (μ), se tiene que $h_n \in \mathcal{L}_\infty^{\mathbb{R}}(X, \Sigma, \mu)$. También, del Corolario 2 se tiene que

$$\int_X h_n d\mu = \int_X \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}(f \circ T^i) d\mu = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\int_X U_T^i(f) d\mu = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\int_X f d\mu = \int_X f d\mu.$$

Por otro lado, como T es una transformación $\mu-$preservadora de medida, se tiene, para cada entero $i \geq 0$ y $M > 0$ que

$$\mu[|f|^{-1}(]0, \infty[)] = \mu[T^{-i}\big(|f|^{-1}(]0, \infty[)\big)] = \mu[|f \circ T^i|^{-1}(]0, \infty[)],$$

y entonces

$$\|f\|_\infty = \text{ínf}\{M > 0 : \ \mu[|f|^{-1}(]0, \infty[)] = 0\} = \text{ínf}\{M > 0 : \ \mu[|f \circ T^i|^{-1}(]0, \infty[)] = 0\} = \|f \circ T^i\|_\infty.$$

Por la desigualdad del triángulo:

$$\|h_n\|_\infty = \left\|\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}(f \circ T^i)\right\|_\infty \leq \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\|f \circ T^i\|_\infty = \|f\|_\infty.$$

También, de la Afirmación 1 se sigue que

$$|f_*| = \left|\lim_{n\to\infty} h_n\right| = \lim_{n\to\infty}|h_n| \leq \|f\|_\infty \qquad \text{c.t.p. } (\mu).$$

Luego $f_* \in \mathcal{L}_\infty^{\mathbb{R}}(X, \Sigma, \mu)$ y $\|f_*\|_\infty = \left\|\lim_{n\to\infty} h_n\right\|_\infty \leq \|f\|_\infty$.

Concluimos que $\{f_* - h_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de funciones $(\Sigma, \mathcal{B}(\mathbb{R}))-$medibles que satisfacen que

$$\lim_{n\to\infty}|f^* - h_n| = 0 \qquad \text{c.t.p. } (\mu)$$

y que $|f^* - h_n| \leq \|f^* - h_n\|_\infty \leq 2\|f\|_\infty$ c.t.p. (μ). Como $\mu[X] < \infty$, por el Teorema de Convergencia Acotada ocurre que

$$0 = \int_X \lim_{n\to\infty}|f^* - h_n| d\mu = \lim_{n\to\infty}\int_X |f^* - h_n| d\mu.$$

Así que

$$\left|\int_X f^* d\mu - \int_X f d\mu\right| = \left|\int_X f^* d\mu - \int_X h_n d\mu\right| \leq \int_X |f^* - h_n| d\mu$$

donde el lado derecho de esta desigualdad converge a 0 cuando $n \to \infty$. De lo que se sigue la afirmación en este caso.

Caso ii. $f \in \mathcal{L}_1^{\mathbb{R}}(X, \Sigma, \mu)$.

Con la notación del Caso i se afirma que

$$\lim_{n\to\infty}\int_X h_n d\mu = \int_X f^* d\mu.$$

Para probar esto último, fije $\epsilon > 0$ arbitrario. Recuerde que, como $\mu[X] < \infty$, se tiene que $\mathcal{L}_\infty^{\mathbb{R}}(X, \Sigma, \mu)$ es un subespacio denso de $\mathcal{L}_1^{\mathbb{R}}(X, \Sigma, \mu)$, por lo que, para $f \in \mathcal{L}_1^{\mathbb{R}}(X, \Sigma, \mu)$ y $\epsilon > 0$ existe $f_0 \in \mathcal{L}_\infty^{\mathbb{R}}(X, \Sigma, \mu)$ tal que

$$\int_X |f - f_0| d\mu < \frac{\epsilon}{3}. \tag{1.15}$$

Siguiendo la demostración en el Caso 1, se obtiene que

$$0 = \lim_{n\to\infty} \int_X \left| f_0^* - \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}(f_0 \circ T^i) \right| d\mu.$$

Entonces, para $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para cada natural n con $n \geq N$ ocurre

$$\lim_{n\to\infty} \int_X \left| f_0^* - \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}(f_0 \circ T^i) \right| d\mu < \frac{\epsilon}{3}. \tag{1.16}$$

Observe que todas las propiedades probadas para f^* se tienen también para f_0^*, entre ellas $f_{0*} = f_0^*$ c.t.p. (μ). Más aún

$$\begin{aligned}(f - f_0)^* &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}((f-f_0)\circ T^i) = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}(f\circ T^i) - \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}(f_0\circ T^i)\right] \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}(f\circ T^i) - \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}(f_0\circ T^i) = f^* - f_0^* \qquad \text{c.t.p. } (\mu).\end{aligned}$$

Por el Lema 1, la desigualdad triangular y el lema de Fatou tenemos que

$$\begin{aligned}\int_X |(f-f_0)^*| d\mu &= \int_X \left| \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}((f-f_0)\circ T^i)\right| d\mu \leq \int_X \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}|(f-f_0)\circ T^i| d\mu \\ &\leq \liminf_{n\to\infty}\int_X \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}|(f-f_0)\circ T^i| d\mu = \liminf_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\int_X |U_T^i(f-f_0)| d\mu \\ &= \liminf_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\int_X |f-f_0| d\mu = \int_X |f-f_0| d\mu.\end{aligned}$$

Al igual que en la demostración del Caso 1 se obtiene que

$$\int_X |f^* - f_0^*| d\mu = \int_X |(f-f_0)^*| d\mu \leq \int_X |f - f_0| d\mu. \tag{1.17}$$

Por el Lema 1 y las expresiones (1.15), (1.16) y (1.17), para cada natural n con $n \geq N$ ocurre que

$$\begin{aligned}\left|\int_X f^* d\mu - \int_X h_n d\mu\right| &= \left|\int_X f^* d\mu - \int_X \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}(f\circ T^i) d\mu\right| \leq \int_X \left| f^* - \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}(f\circ T^i)\right| d\mu \\ &= \int_X \left| f^* - f_0^* + f_0^* - \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}(f_0\circ T^i) + \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}((f-f_0)\circ T^i)\right| d\mu \\ &\leq \int_X |f^*-f_0^*| d\mu + \int_X \left| f_0^* - \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}(f_0\circ T^i)\right| d\mu + \int_X \left|\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}((f-f_0)\circ T^i)\right| d\mu \\ &\leq \int_X |f^*-f_0^*| d\mu + \int_X \left| f_0^* - \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}(f_0\circ T^i)\right| d\mu + \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\int_X |(f-f_0)\circ T^i| d\mu \\ &\leq \int_X |f-f_0| d\mu + \int_X \left| f_0^* - \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}(f_0\circ T^i)\right| d\mu + \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\int_X |f-f_0| d\mu \\ &< \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon.\end{aligned}$$

Por la elección de $\epsilon > 0$ se concluye que

$$\int_X f^* d\mu = \lim_{n\to\infty}\int_X h_n d\mu = \int_X f d\mu.$$

<u>Caso 2.</u> $\mu[X] = \infty$.

Se adopta la notación del Caso 1. Se tiene la siguiente

Afirmación 4. Para cada $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$ con $\alpha < \beta$ se satisface que

$$\mu[E_\alpha^-(f) \cap E_\beta^+(f)] < \infty.$$

Demostración de la Afirmación 4. Fije $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$ con $\alpha < \beta$. Se tienen los siguientes casos:

Caso (i). $\beta > 0$.

Se afirma que para todo $C \in \Sigma$ con $\mu[C] < \infty$ y $C \subseteq E_\alpha^-(f) \cap E_\beta^+(f)$ se satisface que

$$\mu[C] \leq \frac{1}{\beta} \int_X |f| d\mu.$$

Para probar esto último, fije $C \in \Sigma$ con las características enunciadas. Considere la función $\varphi : X \to \mathbb{R}$ definida como $\varphi = f - \beta\chi_C$. Observe que, como $\mu[C] < \infty$, se tiene que $\varphi \in \mathcal{L}_1^{\mathbb{R}}(X, \Sigma, \mu)$. Definimos las funciones en X y conjuntos siguientes: $\varphi_0 = 0$. Para cada $n \geq 1$ considere

$$\varphi_n = \sum_{i=0}^{n-1} U_T^i(\varphi) = \sum_{i=0}^{n-1}[f \circ T^i - \beta\chi_C \circ T^i] = \sum_{i=0}^{n-1}[f \circ T^i - \chi_{T^{-i}(C)}] \geq \sum_{i=0}^{n-1}(f \circ T^i) - n\beta.$$

También, para cada $N \in \mathbb{N}$ definimos

$$\Phi_N(x) = \text{máx}\{\varphi_n : \ 0 \leq n \leq N\} = \text{máx}\left\{\sum_{i=0}^{n-1}[f \circ T^i - \chi_{T^{-i}(C)}] : \ 0 \leq n \leq N\right\}.$$

Por el Teorema Ergódico Maximal, para cada $N \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$\int_{\{x \in X: \ \Phi_N(x) > 0\}} (f - \beta\chi_C) d\mu = \int_{\{x \in X: \ \Phi_N(x) > 0\}} \varphi d\mu \geq 0.$$

A continuación mostraremos que

$$C \subseteq D = \bigcup_{N=1}^{\infty} \{x \in X : \ \Phi_N(x) > 0\}.$$

Sea $x \in C$ arbitrario. Entonces $x \in E_\beta^+(f)$, es decir

$$\beta < f^*(x) \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \left\{ \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} (f \circ T^i)(x) \right\},$$

así que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\displaystyle\frac{1}{m} \sum_{i=0}^{m-1} (f \circ T^i)(x) > \beta$, es decir,

$$\Phi_m(x) \geq \varphi_m(x) \geq \sum_{i=0}^{m-1} (f \circ T^i)(x) - m\beta > 0.$$

Entonces $x \in D$. Por lo tanto $C \subseteq D$.

De la observación anterior se tiene que

$$\int_D (f - \beta\chi_C) d\mu \geq \int_{\{x \in X: \ \Phi_1(x) > 0\}} (f - \beta\chi_C) d\mu \geq 0.$$

Así que

$$0 \leq \int_D (f - \beta\chi_C) d\mu = \int_D f d\mu - \beta\mu[C \cap D] = \int_D f d\mu - \beta\mu[C].$$

Entonces

$$\beta\mu[C] \leq \int_D f d\mu \leq \int_X f d\mu \leq \int_X |f| d\mu,$$

obteniéndose lo deseado.

Finalmente, como (X, Σ, μ) es un espacio de medida $\sigma-$finito, se tiene la existencia de una sucesión creciente de conjuntos $\Sigma-$medibles, con medida finita, digamos $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, tales que $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ defina el conjunto $\Sigma-$medible $C_n = X_n \cap E_\alpha^-(f) \cap E_\beta^+(f)$. Se tiene que $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión creciente de conjuntos medibles que satisfacen $\mu[C_n] < \infty$ y $C_n \subseteq E_\alpha^-(f) \cap E_\beta^+(f)$ y también $\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n = E_\alpha^-(f) \cap E_\beta^+(f)$. Por el Teorema de Continuidad para μ y lo anterior, se concluye que

$$\mu[E_\alpha^-(f) \cap E_\beta^+(f)] = \lim_{n\to\infty} \mu[C_n] \leq \frac{1}{\beta}\int_X |f| d\mu < \infty.$$

Caso (ii). $\beta < 0$.
En este caso se tiene que $\alpha < \beta < 0$. De donde, $-\alpha > 0$. Aplicando el Caso (i) para $-f$ y $-\alpha$, recordando que $E_\alpha^-(f) = E_{-\alpha}^+(-f)$ y $E_\beta^+(f) = E_{-\beta}^-(-f)$, se obtiene que

$$\mu[E_\alpha^-(f) \cap E_\beta^+(f)] = \mu[E_{-\alpha}^+(-f) \cap E_{-\beta}^-(-f)] < \infty.$$

De este modo se tiene la Afirmación 4.

Para demostrar que $f^* = f_*$ c.t.p. (μ), se procede de forma análoga al Caso 1, donde lo único que se requiere es la Afirmación 4. Entonces se tiene que para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$ con $\alpha < \beta$ ocurre que $\mu[[E_\alpha^-(f) \cap E_\beta^+(f)] = 0$. Por ello $f^* = f_*$ c.t.p. (μ). El hecho de que $f^* \in \mathcal{L}_1^{\mathbb{R}}(X, \Sigma, \mu)$ se obtiene de la misma forma que en el Caso 1.

$\boxtimes$

Ahora describiremos a las transformaciones ergódicas, para establecer relaciones entre este concepto y el Teorema Ergódico de Birkhoff.

Definición 4 (Transformación Ergódica). *Sean (X, Σ, μ) un espacio de probabilidad y $T : X \to X$ una transformación $\mu-$preservadora de medida. A T se le llama una* **transformación $\mu-$ ergódica** *si para todo $B \in \Sigma$ tal que $T^{-1}(B) = B$ ocurre que $\mu[B] \in \{0, 1\}$.*

A continuación se enuncia un primer resultado de caracterización de las transformaciones ergódicas.

Teorema 6 (Caracterización de las transformaciones ergódicas (I)). *Sean (X, Σ, μ) un espacio de probabilidad y $T : X \to X$ una transformación $\mu-$preservadora de medida. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(I) *T es una transformación $\mu-$ergódica.*

(II) *Para todo $B \in \Sigma$ con $\mu[T^{-1}(B) \triangle B] = 0$ se tiene que $\mu[B] \in \{0, 1\}$.*

(III) *Para cada $A \in \Sigma$ tenemos que $\mu\left[\bigcup_{n=1}^{\infty} T^{-n}(A)\right] = 1$.*

(IV) *Para cualesquiera $A, B \in \Sigma$ con $\mu[A], \mu[B] > 0$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\mu[T^{-n}(A) \cap B] > 0$.*

Demostración.

(I) $\Longrightarrow$ (II)] Suponga que T es una transformación $\mu-$ergódica.
Fije $B \in \Sigma$ arbitrario con $\mu[T^{-1}(B) \triangle B] = 0$. Definamos el conjunto $\Sigma-$medible

$$B_\infty = \bigcap_{n=0}^{\infty} \bigcup_{i=n}^{\infty} T^{-i}(B).$$

Observe que

$$T^{-1}(B_\infty) = T^{-1}\left(\bigcap_{n=0}^{\infty} \bigcup_{i=n}^{\infty} T^{-i}(B)\right) = \bigcap_{n=0}^{\infty} \bigcup_{i=n}^{\infty} T^{-(i+1)}(B) = \bigcap_{n=0}^{\infty} \bigcap_{i=n+1}^{\infty} T^{-(i+1)}(B) = B_\infty.$$

<u>Afirmación.</u> Para cada $n \in \mathbb{N}$ ocurre

(a) $T^{-n}(B)\triangle B \subseteq \bigcup_{i=0}^{n-1}[T^{-(i+1)}(B)\triangle T^{-i}(B)]$.

(b) $B\triangle\left(\bigcup_{i=n}^{\infty} T^{-i}(B)\right) \subseteq \bigcup_{i=n}^{\infty}[B\triangle T^{-i}(B)]$.

(c) $B_\infty\triangle B \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcup_{i=n}^{\infty}[B\triangle T^{-i}(B)]$.

(d) $\mu[T^{-n}(B)\triangle B] = 0$.

(e) $\mu\left[B\triangle\left(\bigcup_{i=n}^{\infty} T^{-i}(B)\right)\right] = 0$.

(f) $\mu[B_\infty\triangle B] = 0$. De hecho, $\mu[B] = \mu[B_\infty]$.

Demostración de la Afirmación.

(a) Sea $n \in \mathbb{N}$. Fije $x \in T^{-n}(B)\triangle B$. Considere los siguientes casos:

<u>Caso 1.</u> $x \in T^{-n}(B)\backslash B$.

Note que $\{r \in \{1,\dots,n\} :\ x \in T^{-r}(B)\} \neq \emptyset$. Considere $k = \text{mín}\{r \in \{1,\dots,n\} :\ x \in T^{-r}(B)\}$. Como $x \notin B$ se tiene que $x \notin T^{-(k-1)}(B)$, lo cual significa que $x \in T^{-(k)}(B)\triangle T^{-(k-1)}(B)$, es decir, $x \in \bigcup_{i=0}^{n-1}[T^{-(i+1)}(B)\triangle T^{-i}(B)]$.

<u>Caso 2.</u> $x \in B\backslash T^{-n}(B)$.

Al igual que en el Caso 1, considere $l = \text{mín}\{r \in \{1,\dots,n\} :\ x \notin T^{-r}(B)\}$. Tenemos que $x \notin T^{-l}(B)$ y $x \in T^{-(l-1)}(B)$. Luego, $x \in T^{-l}(B)\triangle T^{-(l-1)}(B)$ Como $x \in B$, entonces $0 \leq l \leq n-1$ y $x \in \bigcup_{i=0}^{n-1}[T^{-(i+1)}(B)\triangle T^{-i}(B)]$.

En ambos casos se tiene que $x \in \bigcup_{i=0}^{n-1}[T^{-(i+1)}(B)\triangle T^{-i}(B)]$.

(b) Fije $n \in \mathbb{N}$ y $x \in B\triangle\left(\bigcup_{i=n}^{\infty} T^{-i}(B)\right)$. Se tienen los siguientes casos:

<u>Caso 1.</u> $x \in B\backslash\left(\bigcup_{i=n}^{\infty} T^{-i}(B)\right)$.

En este caso, $x \in B$ y para cada natural $i \geq n$ ocurre que $x \notin T^{-i}(B)$, es decir, $x \in B\triangle T^{-i}(B)$. Por ello $x \in \bigcup_{i=n}^{\infty}[B\triangle T^{-i}(B)]$.

<u>Caso 2.</u> $x \in \left(\bigcup_{i=n}^{\infty} T^{-i}(B)\right)\backslash B$.

En tal caso, existe un natural $m \geq n$ tal que $x \in T^{-m}(B)\backslash B$, esto es, $x \in T^{-m}(B)\triangle B$ y luego $x \in \bigcup_{i=n}^{\infty}[B\triangle T^{-i}(B)]$.

En los dos casos obtenemos que $x \in \bigcup_{i=n}^{\infty}[B\triangle T^{-i}(B)]$.

(c) Sea $x \in B_\infty\triangle B$ arbitrario. Considere los siguientes casos:

<u>Caso 1.</u> $x \in B_\infty\backslash B$.

En particular ocurre que $x \in \bigcup_{i=1}^{\infty} T^{-i}(B)$. Por lo que existe un natural $m \geq 1$ tal que $x \in T^{-m}(B)\backslash B$, esto es, $x \in T^{-m}(B)\triangle B$. Por lo tanto $x \in \bigcup_{i=m}^{\infty}[T^{-i}(B)\triangle B] \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcup_{i=n}^{\infty}[B\triangle T^{-i}(B)]$.

Caso 2. $x \in B \backslash B_\infty$.

Como $x \notin B_\infty$, entonces $x \in \bigcup_{n=0}^{\infty} \bigcap_{i=n}^{\infty} [X \backslash T^{-i}(B)]$, así que existe un natural $m \geq 1$ tal que $x \in B \backslash T^{-m}(B)$, es decir, $x \in \bigcup_{i=m}^{\infty} [T^{-i}(B) \triangle B] \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i=n}^{\infty} [B \triangle T^{-i}(B)]$.

En ambos casos se tiene que $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i=n}^{\infty} [B \triangle T^{-i}(B)]$.

(d) Como T es una transformación $\mu-$preservadora de medida, por la Observación 1, el inciso (a) y el hecho de que $\mu[T^{-1}(B) \triangle B] = 0$, para cada $n \in \mathbb{N}$ ocurre que

$$0 \leq \mu[T^{-n}(B) \triangle B] \leq \mu\left[\bigcup_{i=0}^{n-1} [T^{-(i+1)}(B) \triangle T^{-i}(B)]\right] \leq \mu\left[\bigcup_{i=0}^{n-1} T^{-i}[T^{-1}(B) \triangle B]\right]$$
$$\leq \sum_{i=0}^{n-1} \mu[T^{-i}[T^{-1}(B) \triangle B]] = \sum_{i=0}^{n-1} \mu[T^{-1}(B) \triangle B] = 0.$$

Por ello $0 = \mu[T^{-n}(B) \triangle B]$.

(e) Al igual que en (d), del inciso (b), para cada $n \in \mathbb{N}$ se deduce que

$$\mu\left[B \triangle \left(\bigcup_{i=n}^{\infty} T^{-i}(B)\right)\right] \leq \mu\left[\bigcup_{i=n}^{\infty} [B \triangle T^{-i}(B)]\right] \leq \sum_{i=n}^{\infty} \mu[B \triangle T^{-i}(B)] = 0.$$

(f) Note que, por el inciso (c) y (e) se tiene que

$$0 \leq \mu[B_\infty \triangle B] \leq \mu\left[\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i=n}^{\infty} [B \triangle T^{-i}(B)]\right] \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu\left[B \triangle \left(\bigcup_{i=n}^{\infty} T^{-i}(B)\right)\right] = 0.$$

Entonces $\mu[B_\infty \triangle B] = 0$. De aquí que

$$\mu[B_\infty] \leq \mu[B_\infty \cup B] \leq \mu[B \cap B_\infty] + \mu[B_\infty \triangle B] = \mu[B \cap B_\infty] \leq \mu[B]$$

De igual forma se obtiene que $\mu[B] \leq \mu[B_\infty]$. Entonces $\mu[B_\infty] = \mu[B]$.

Así se tiene la Afirmación 1.

Como T es una transformación $\mu-$ergódica y $B_\infty \in \Sigma$ satisface que $T^{-1}(B_\infty) = B_\infty$, por la Definición 4 y el inciso (f) de la Afirmación se concluye que $\mu[B] = \mu[B_\infty] \in \{0, 1\}$.

(II) $\Longrightarrow$ (III)] Suponga que para todo $B \in \Sigma$ con $\mu[T^{-1}(B) \triangle B] = 0$, entonces $\mu[B] \in \{0, 1\}$.

Fije $A \in \Sigma$ con $\mu[A] > 0$. Defina el conjunto $\Sigma-$medible $A^* = \bigcup_{n=1}^{\infty} T^{-n}(A)$. Observe que

$$T^{-1}(A^*) = T^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} T^{-n}(A)\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} T^{-(n+1)}(A) = \bigcup_{n=2}^{\infty} T^{-n}(A) \subseteq A^*.$$

Entonces $T^{-1}(A^*) \triangle A^* = A^* \backslash T^{-1}(A^*)$, y como T es una transformación $\mu-$preservadora de medida se obtiene que

$$\mu[T^{-1}(A*) \triangle A^*] = \mu[A^* \backslash T^{-1}(A^*)] = \mu[A^*] - \mu[T^{-1}(A^*)] = 0.$$

Por hipótesis, esto significa que $\mu[A^*] \in \{0, 1\}$. Observe que, si se supone $\mu[A^*] = 0$, entonces esto significa que $0 = \mu[T^{-1}(A)] = \mu[A]$, que sería una contradicción. Por tanto, debe tenerse $\mu[A^*] = 1$.

(III) $\Longrightarrow$ (IV)] Suponga que se satisface (III). Fije cualesquiera $A, B \in \Sigma$ con $\mu[A], \mu[B] > 0$. La condición (III) implica que $\mu\left[\bigcup_{n=1}^{\infty} T^{-n}(A)\right] = 1$. Así que

$$0 < \mu[B] = \mu\left[\bigcup_{n=1}^{\infty} T^{-n}(A) \cap B\right].$$

De aquí se deduce que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\mu[T^{-N}(A) \cap B] > 0$.

(III) $\Longrightarrow$ (IV)] Procedamos por contrapositiva. Suponga que T no es una transformación $\mu-$ergódica. Entonces existe $B \in \Sigma$ tal que $T^{-1}(B) = B$ y que satisface $0 < \mu[B] < 1$. También ocurre que $0 < \mu[X \backslash B] = 1 - \mu[B] < 1$.

Por el principio de inducción matemática se obtiene que para todo $n \in \mathbb{N}$ ocurre que $T^{-n}(B) = B$. Considere los conjuntos $\Sigma-$medibles B y $X \backslash B$ que satisfacen $\mu[B], \mu[X \backslash B] > 0$. La condición (IV) implica que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$0 < \mu[T^{-N}(B) \cap (X \backslash B)] = \mu[B \cap (X \backslash B)] = 0,$$

que es una contradicción. Por lo tanto (IV) $\Longrightarrow$ (I).

$\boxtimes$

Observación 4. Sean (X, Σ, μ) un espacio de probabilidad y $T : X \to X$ una transformación $\mu-$preservadora de medida. Se verifica de inmediato que las siguientes condiciones son equivalentes:

(1) Para cada $A \in \Sigma$ con $\mu[A] > 0$ ocurre que $\mu\left[\bigcup_{n=1}^{\infty} T^{-n}(A)\right] = 1$.

(2) Para todo $A \in \Sigma$ con $\mu[A] > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\mu\left[\bigcup_{n=N}^{\infty} T^{-n}(A)\right] = 1$.

También son equivalentes:

I. Para cualesquiera $A, B \in \Sigma$ con $\mu[A], \mu[B] > 0$ existe un natural N tal que $\mu[T^{-N}(A) \cap B] > 0$.

II. Para todo $A, B \in \Sigma$ con $\mu[A], \mu[B] > 0$ y para todo $N \in \mathbb{N}$ eiste un natural n con $n \geq N$ tal que $\mu[T^{-n}(A) \cap B] > 0$.

Estas condiciones pueden ser sustituidas en el Teorema 6 ((2) por (III) y II. por (IV)).

Teorema 7 (Caracterización de las transformaciones ergódicas (II)). *Sean (X, Σ, μ) un espacio de probabilidad, $T : X \to X$ una transformación $\mu-$preservadora de medida y $p \geq 1$. Son equivalentes:*

(I) *T es una transformación $\mu-$ergódica.*

(II) *Para cada $f \in \mathcal{L}_0^{\mathbb{K}}(X, \Sigma, \mu)$ con $f \circ T = f$ ocurre que f es una función constante c.t.p. (μ).*

(III) *Para cada $f \in \mathcal{L}_0^{\mathbb{K}}(X, \Sigma, \mu)$ con $f \circ T = f$ c.t.p. (μ) tenemos que f es una función constante c.t.p. (μ).*

(IV) *Para cada $f \in \mathcal{L}_p^{\mathbb{K}}(X, \Sigma, \mu)$ con $f \circ T = f$ ocurre que f es una función constante c.t.p. (μ).*

(V) *Para cada $f \in \mathcal{L}_p^{\mathbb{K}}(X, \Sigma, \mu)$ con $f \circ T = f$ c.t.p. (μ) se tiene que f es una función constante c.t.p. (μ).*

Demostración. En primer lugar, observe que, cuando $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, el estudio de $f \in \mathcal{L}_0^{\mathbb{C}}(X, \Sigma, \mu)$ se limita a estudiar las funciones $\mathrm{Re}(f), \mathrm{Im}(f) \in \mathcal{L}_0^{\mathbb{R}}(X, \Sigma, \mu)$. Entonces supondremos, sin pérdida de generalidad, que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

(I) $\Longrightarrow$ (III)] Suponga que T es una transformación $\mu-$ergódica. Sea $f \in \mathcal{L}_0^{\mathbb{R}}(X,\Sigma,\mu)$ tal que $f \circ T = f$ c.t.p. (μ). Considere el conjunto $\Sigma-$medible de medida $\mu-$cero

$$N = \{x \in X: \ (f \circ T)(x) \neq f(x)\}.$$

Con esta notación se tiene que $(f \circ T)\chi_{X\setminus N} = f\chi_{X\setminus N}$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ y $k \in \mathbb{Z}$ defina el conjunto

$$E(n,k) = f^{-1}\left(\left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right[\right)$$

Tenemos la siguiente

<u>Afirmación.</u> Para todo $k \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$ se tiene que

1. $T^{-1}(E(n,k)) \triangle E(n,k) \subseteq N$.
2. $\mu[T^{-1}(E(n,k)) \triangle E(n,k)] = 0$.
   Además
3. Existe una sucesión de números enteros $\{k(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\mu\left[\bigcap_{n=1}^{\infty} E(n,k(n))\right] = 1$ y para todo $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} E(n,k(n))$ ocurre que
$$\lim_{n\to\infty} \frac{k(n)}{2^n} = f(x).$$

Demostración de la Afirmación. Fije $k \in \mathbb{Z}$ y $n \in \mathbb{N}$.

1. Procedamos por contradicción. Suponga que $T^{-1}(E(n,k)) \triangle E(n,k) \nsubseteq N$. Sea $x \in X\setminus N$ tal que $x \in T^{-1}(E(n,k)) \triangle E(n,k)$. Considere los casos siguientes:
   <u>Caso I.</u> $x \in T^{-1}(E(n,k))\setminus E(n,k)$.
   Observe que, dado que $x \in T^{-1}(E(n,k))$ y $x \in X\setminus N$ ocurre que
   $$\frac{k}{2^n} \leq (f\circ T)(x) = f(x) < \frac{k+1}{2^n},$$
   de donde se sigue que $x \in E(n,k)$, lo cual es contradictorio.

   <u>Caso II.</u> $x \in E(n,k)\setminus T^{-1}(E(n,k))$.
   Mediante un razonamiento similar al del Caso I, se tiene la conclusión en este caso.

   En ambos casos se obtiene una contradicción. Por lo tanto $T^{-1}(E(n,k)) \triangle E(n,k) \subseteq N$.

2. Es ahora inmediato de 1 y del hecho de que $\mu[N] = 0$.

3. Fije $n \in \mathbb{N}$. Observe que, por el inciso 2, para todo $k \in \mathbb{Z}$ ocurre que $\mu[T^{-1}(E(n,k)) \triangle E(n,k)] = 0$. Como T es una transformación $\mu-$ergódica, por el inciso (II) del Teorema 6 se tiene que $\mu[E(n,k)] \in \{0,1\}$.

   Observe que, también se tiene que
   $$]-\infty,\infty[= \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right[.$$

   Entonces
   $$X = f^{-1}(]-\infty,\infty[) = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} f^{-1}\left(\left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right[\right) = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} E(n,k).$$

   Luego, $1 = \mu[X] = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mu[E(n,k)]$. Dado lo anterior, existe un único $k(n) \in \mathbb{Z}$ tal que $\mu[E(n,k(n))] = 1$.

Defina $Z = \bigcap_{n=1}^{\infty} E(n, k(n))$, que es un conjunto $\Sigma-$medible.

Probaremos ahora que $\mu[Z] = 1$. Para ello, defina para todo $n \in \mathbb{N}$ el conjunto $Z_n = \bigcap\limits_{i=1}^{n} E(i, k(i))$.

Observe que $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión decreciente de conjuntos $\Sigma-$medibles y que $Z = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} Z_n$. Se verifica inductivamente que para todo $n \in \mathbb{N}$ ocurre que $\mu[Z_n] = 1$. Por el Teorema de Continuidad para μ se tiene que

$$1 = \lim_{n\to\infty} \mu[Z_n] = \mu[Z].$$

Resta demostrar que para todo $x \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} E(n, k(n))$ se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{k(n)}{2^n} = f(x).$$

Fije $x \in Z$. Entonces para todo $n \in \mathbb{N}$ tenemos $\dfrac{k(n)}{2^n} \leq f(x) < \dfrac{k(n)+1}{2^n}$, es decir,

$$\left| f(x) - \frac{k(n)}{2^n} \right| = f(x) - \frac{k(n)}{2^n} < \frac{k(n)+1}{2^n} - \frac{k(n)}{2^n} = \frac{1}{2^n}$$

donde el lado derecho de la última desigualdad converge a 0 cuando n tiende a infinito. Entonces $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{k(n)}{2^n} = f(x)$.

Esto prueba la Afirmación.

Por el inciso 3 de la Afirmación se sigue que, para cada $x, y \in Z$ ocurre que $f(y) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{k(n)}{2^n} = f(x)$, esto significa que f es una función constante en Z. Como $\mu[Z] = 1$, entonces f es una función constante c.t.p. (μ).

(IV) $\Longrightarrow$ (I)] Suponga que para toda $f \in \mathcal{L}_p^{\mathbb{R}}(X, \Sigma, \mu)$ que satisfaga $f \circ T = f$ c.t.p. (μ) se tiene que f es una función constante c.t.p. (μ). Probemos que T es una transformación $\mu-$ergódica por medio de la Definición 4.

Fije $B \in \Sigma$ con $T^{-1}(B) = B$. Observe que $\chi_B \in \mathcal{L}_p^{\mathbb{R}}(X, \Sigma, \mu)$ satisface $\chi_B \circ T = \chi_{T^{-1}(B)} = \chi_B$. De la hipótesis se tiene que χ_B es una función constante c.t.p. (μ). De modo que $\chi_B \in \{\chi_X, \chi_\emptyset\}$ c.t.p. (μ). Entonces $\mu[B] \in \{0, 1\}$.

Las implicaciones (III) $\Longrightarrow$ (II) , (V) $\Longrightarrow$ (IV) , (IV) $\Longrightarrow$ (III) y (III) $\Longrightarrow$ (V) son inmediatas.

$\boxtimes$

En el Teorema 7, en el caso en que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, en el siguiente resultado se establece una condición necesaria para la ergodicidad de la transformación, que es visiblemente más fuerte que el inciso (III) del Teorema 7.

PROPOSICIÓN 2. *Sean (X, Σ, μ) un espacio de probabilidad, $T : X \to X$ una transformación $\mu-$preservadora de medida. Suponga que T es una transformación $\mu-$ergódica. Entonces para cada $f \in \mathcal{L}_0^{\mathbb{R}}(X, \Sigma, \mu)$ con $f \circ T \geq f$ c.t.p. (μ) se tiene que f es una función constante c.t.p. (μ).*

Demostración. Sea $f \in \mathcal{L}_0^{\mathbb{R}}(X, \Sigma, \mu)$ con $f \circ T \geq f$ c.t.p. (μ). Sea $N = \{x \in X : (f \circ T)(x) < f(x)\}$, que es un conjunto $\Sigma-$medible con $\mu[N] = 0$. Como T es una transformación $\mu-$preservadora de medida, para cada $n \in \mathbb{N}$ se obtiene que

$$1 = \mu[X \backslash N] = \mu[T^{-n}(X \backslash N)] = \mu[\{x \in X : (f \circ T^{n+1})(x) = (f \circ T)(T^n(x)) \geq f(T^n(x)) = (f \circ T^n)(x)\}],$$

lo que significa que $(f \circ T^n) \geq f$ c.t.p. (μ). De hecho, de aquí se sigue que

$$\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} (f \circ T^i) \geq f \qquad \text{c.t.p. } (\mu).$$

Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ defina el conjunto $E_\alpha = f^{-1}([\alpha, \infty[)$. E_α es un conjunto $\Sigma-$medible que satisface

$$E_\alpha \backslash N = \{x \in X : \ (f \circ T)(x) \geq f(x) \geq \alpha\} \subseteq \{x \in X : \ (f \circ T)(x) \geq \alpha\} = T^{-1}(E_\alpha).$$

De esto último se tiene que

$$\begin{aligned}
\big(T^{-1}(E_\alpha) \triangle E_\alpha\big) \cap (X\backslash N) &= \big[(T^{-1}(E_\alpha)\backslash E_\alpha) \cap (X\backslash N)\big] \cup \big[(E_\alpha \backslash T^{-1}(E_\alpha)) \cap (X\backslash N)\big] \\
&\subseteq \big[(T^{-1}(E_\alpha) \cap (X\backslash N))\backslash E_\alpha\big] \cup \big[(E_\alpha \cap (X\backslash N))\backslash T^{-1}(E_\alpha)\big] \\
&\subseteq (T^{-1}(E_\alpha) \cap (X\backslash N))\backslash E_\alpha \subseteq T^{-1}(E_\alpha)\backslash E_\alpha.
\end{aligned}$$

Como T es una transformación $\mu-$preservadora de medida y $1 = \mu[X\backslash N] = 1$ entonces

$$\begin{aligned}
\mu[T^{-1}(E_\alpha) \triangle E_\alpha] &= \mu[\big(T^{-1}(E_\alpha) \triangle E_\alpha\big) \cap (X\backslash N)] \leq \mu[T^{-1}(E_\alpha)\backslash E_\alpha] \\
&= \mu[T^{-1}(E_\alpha)] - \mu[T^{-1}(E_\alpha) \cap E_\alpha] = \mu[E_\alpha] - \mu[T^{-1}(E_\alpha) \cap E_\alpha \cap (X\backslash N)] \\
&= \mu[E_\alpha] - \mu[E_\alpha \cap (X\backslash N)] = \mu[E_\alpha] - \mu[E_\alpha] = 0.
\end{aligned}$$

Entonces, para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ ocurre que $\mu[T^{-1}(E_\alpha) \triangle E_\alpha] = 0$. Por la ergodicidad de T, del inciso (II) del Teorema 6, para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ ocurre que $\mu[E_\alpha] \in \{0, 1\}$.

<u>Afirmación.</u> Existe $\alpha^* \in \mathbb{R}$ tal que $\mu[E_{\alpha^*}] = 1$.

Demostración de la Afirmación. Procedamos por contradicción. Suponga que para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ ocurre que $\mu[E_\alpha] = 0$. Como $X = \bigcup\limits_{k \in \mathbb{Z}} E_k = \bigcup\limits_{k \in \mathbb{Z}} f^{-1}([k, \infty[)$, entonces

$$1 = \mu[X] = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mu[E_k] = 0,$$

que es contradictorio. Así se tiene la Afirmación.

Similarmente puede concluirse que existe $\beta^* \in \mathbb{R}$ tal que $\mu[E_{\beta^*}] = 0$, es decir, $\mu[f^{-1}(]-\infty, \beta^*[)] = 1$. Así que $\mu[\{x \in X : \ \alpha^* \leq f(x) < \beta^*\}] = \mu[E_{\alpha^*} \cap f^{-1}(]-\infty, \beta^*[)] = 1$. Entonces existe $M > 0$ tal que $|f| \leq M$ c.t.p. (μ), por lo que $f \in \mathcal{L}_1^{\mathbb{R}}(X, \Sigma, \mu)$. Por el Teorema Ergódico de Birkhoff existe $f^* \in \mathcal{L}_1^{\mathbb{R}}(X, \Sigma, \mu)$ tal que $f^* \circ T = f^*$ c.t.p. (μ)

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} (f \circ T^i) = f^* \qquad \text{c.t.p. } (\mu),$$

y también $\displaystyle\int_X f^* d\mu = \int_X f d\mu$. Por la $\mu-$ergodicidad de T y el Teorema 6 (V), la condición $f^* \circ T = f^*$ c.t.p. (μ) implica que f^* es una función constante c.t.p. (μ), digamos que $c \in \mathbb{R}$ satisface que $f^* = \underline{c}$ c.t.p. (μ). Entonces

$$c = \int_X f^* d\mu = \int_X f d\mu$$

Observe que se satisface que

$$f \leq \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} (f \circ T^i) = f^* = \underline{c} \qquad \text{c.t.p. } (\mu).$$

Entonces tenemos que $\underline{c} - f \geq 0$ c.t.p. (μ) y $\displaystyle\int_X (\underline{c} - f) d\mu = 0$, esto implica que $f = \underline{c}$ c.t.p. (μ).

$\boxtimes$

Corolario 4 (Teorema Ergódico de Von Neumman para espacios $\mathcal{L}_p$). *Sean (X, Σ, μ) un espacio de probabilidad, $T : X \to X$ una transformación $\mu-$preservadora de medida y $p \geq 1$. Entonces para cada $f \in \mathcal{L}_p^{\mathbb{K}}(X, \Sigma, \mu)$ existe una función $f^* \in \mathcal{L}_p^{\mathbb{K}}(X, \Sigma, \mu)$ tal que $f * \circ T = f^*$ c.t.p. (μ) y*

$$\lim_{n \to \infty} \left\| \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} (f \circ T^i) - f^* \right\|_p = 0. \tag{1.18}$$

Demostración. Consideremos los siguientes casos:

<u>Caso 1.</u> $g \in \mathcal{L}_{\infty}^{\mathbb{K}}(X, \Sigma, \mu)$.

En este caso, existe $M > 0$ tal que $|g| \leq M$ c.t.p. (μ). Se tiene que $g \in \mathcal{L}_{1}^{\mathbb{K}}(X, \Sigma, \mu)$ y por el Teorema Ergódico de Birkhoff existe una función $g^* \in \mathcal{L}_{1}^{\mathbb{K}}(X, \Sigma, \mu)$ tal que $g^* \circ T = g^*$ c.t.p. (μ) y

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} (g \circ T^i) = g^* \qquad \text{c.t.p. } (\mu).$$

Observe que

$$|g^*| = \left| \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} (g \circ T^i) \right| = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} |g \circ T^i| \leq \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} M = M \qquad \text{c.t.p. } (\mu).$$

Esto último significa que $|g^*|^p \leq M^p$ c.t.p. (μ), y luego, $g^* \in \mathcal{L}_{p}^{\mathbb{K}}(X, \Sigma, \mu)$. También ocurre que

$$\lim_{n \to \infty} \left| \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} (g \circ T^i) - g^* \right| = 0 \qquad \text{c.t.p. } (\mu).$$

Por lo tanto, la sucesión de funciones $\left| \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} (g \circ T) - g^* \right|^p$ en $\mathcal{L}_{0}^{\mathbb{K}}(X, \Sigma, \mu)$ satisface

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} (g \circ T^i) - g^* \right|^p \leq \left(\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} |g \circ T^i| + |g^*| \right)^p \leq (2M)^p \qquad \text{c.t.p. } (\mu),$$

y también que

$$\lim_{n \to \infty} \left| \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} (g \circ T^i) - g^* \right|^p = 0 \qquad \text{c.t.p. } (\mu).$$

Entonces, por el Teorema de Convergencia Acotada,

$$0 = \int_X \lim_{n \to \infty} \left| \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} (g \circ T^i) - g^* \right|^p d\mu = \lim_{n \to \infty} \int_X \left| \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} (g \circ T^i) - g^* \right|^p d\mu = \lim_{n \to \infty} \left\| \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} (g \circ T^i) - g^* \right\|_p.$$

Así se obtiene la conclusión en este caso.

<u>Caso 2.</u> $f \in \mathcal{L}_{p}^{\mathbb{K}}(X, \Sigma, \mu)$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ defina la función f_n en X como

$$f_n = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} U_T^i(f) = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} (f \circ T^i).$$

Note que, por el Teorema 3, como $f \in \mathcal{L}_{p}^{\mathbb{K}}(X, \Sigma, \mu)$ se obtiene que $f_n \in \mathcal{L}_{p}^{\mathbb{K}}(X, \Sigma, \mu)$. Se tiene la siguiente

<u>Afirmación.</u> $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathcal{L}_{p}^{\mathbb{K}}(X, \Sigma, \mu)$.

Demostración de la Afirmación. Fije $\epsilon > 0$. Por la densidad de $\mathcal{L}_{\infty}(X, \Sigma, \mu)$ en $\mathcal{L}_{p}^{\mathbb{K}}(X, \Sigma, \mu)$, se tiene que existe $g \in \mathcal{L}_{\infty}(X, \Sigma, \mu)$ tal que

$$\|f - g\|_p < \frac{\epsilon}{3}.$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$ defina la función g_n en X como

$$g_n = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} U_T^i(g) = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} (g \circ T^i).$$

Por el Caso 1, para g existe $g* \in \mathcal{L}_{p}^{\mathbb{K}}(X, \Sigma, \mu)$ tal que $g * \circ T = g *$ c.t.p. (μ) y $\lim_{n \to \infty} \|g_n - g\|_p = 0$. En particular, $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathcal{L}_{p}^{\mathbb{K}}(X, \Sigma, \mu)$. Entonces, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para cualesquiera natural n y k con $k, n \geq N$ ocurre que

$$\|g_{n+k} - g_n\|_p < \frac{\epsilon}{3}.$$

Observe que $f-g\in\mathcal{L}_p^{\mathbb{K}}(X,\Sigma,\mu)$, así que por el Teorema 3, para cada $k\in\mathbb{N}$ se tiene que

$$\|f_k-g_k\|_p\leq\left\|\frac{1}{k}\sum_{i=0}^{k-1}((f-g)\circ T^i)\right\|\leq\frac{1}{k}\sum_{i=0}^{k-1}\|(f-g)\circ T^i\|_p=\sum_{i=0}^{k-1}\|f-g\|_p=\|f-g\|_p.$$

Entonces, para todo $k,n\in\mathbb{N}$ con $k,n\geq N$ se tiene que

$$\begin{aligned}\|f_{n+k}-f_n\|_p&\leq\|f_{n+k}-g_{n+k}\|_p+\|g_{n+k}-g_n\|_p+\|g_n-f_n\|_p\leq\|f-g\|_p+\|g_{n+k}-g_n\|_p+\|g-f\|_p\\&<\frac{\epsilon}{3}+\frac{\epsilon}{3}+\frac{\epsilon}{3}=\epsilon.\end{aligned}$$

Como $\epsilon>0$ es arbitrario, se obtiene la Afirmación.

Dado que $\mathcal{L}_p^{\mathbb{K}}(X,\Sigma,\mu)$ es un espacio de Banach, por la Afirmación se deduce que existe $f^*\in\mathcal{L}_p^{\mathbb{K}}(X,\Sigma,\mu)$ tal que

$$\lim_{n\to\infty}\left\|\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}(f\circ T^i)-f^*\right\|_p=\lim_{n\to\infty}\|f_n-f^*\|_p=0.$$

Resta demostrar que $f^*\circ T=f^*$ c.t.p. (μ). Para ello, basta observar que, para todo $n\in\mathbb{N}$ y $x\in X$ ocurre que

$$\begin{aligned}f_{n+1}(x)&=\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n}(f\circ T^i)(x)=\frac{f(x)}{n+1}+\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n}(f\circ T^i)(x)=\frac{f(x)}{n+1}+\frac{n}{n+1}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}(f\circ T^i)(T(x))\\&=\frac{f(x)}{n+1}+\frac{n}{n+1}f_n(T(x)),\end{aligned}$$

y también, por el Teorema 3 se obtiene

$$\|f_n\|_p\leq\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\|f\circ T^i\|_p=\|f\|_p,\quad\text{y}\tag{1.19}$$

$$\|f_n\circ T-f^*\circ T\|_p=\|(f_n-f^*)\circ T\|_p=\|f_n-f^*\|_p.\tag{1.20}$$

Por la desigualdad triangular, las ecuaciones (1.19) y (1.20), para cada $n\in\mathbb{N}$ se tiene que

$$\begin{aligned}0&\leq\|f^*-f^*\circ T\|_p\leq\|f^*-f_n\|_p+\|f_n-f_n\circ T\|_p+\|f_n\circ T-f^*\circ T\|_p\\&\leq\|f^*-f_n\|_p+\left\|f_n-\frac{1}{n}f_{n+1}+\frac{f}{n}\right\|_p+\|f_n-f^*\|_p=2\|f_n-f^*\|_p+\left\|f_n-f_{n+1}-\frac{f_{n+1}}{n}+\frac{f}{n}\right\|_p\\&\leq2\|f_n-f^*\|_p+\|f_n-f_{n+1}\|_p+\frac{1}{n}\|f_{n+1}-f\|_p\leq2\|f_n-f^*\|_p+\|f_n-f_{n+1}\|_p+\frac{2}{n}\|f\|_p.\end{aligned}$$

El lado derecho de esta desigualdad converge a 0 cuando n tiende a infinito. De aquí se obtiene que $0=\|f^*-f^*\circ T\|_p$ y con ello, $f^*=f^*\circ T$ c.t.p. (μ), obteniéndose el resultado.

⊠

Corolario 5 (Caracterización de las transformaciones ergódicas (III)). *Sean (X,Σ,μ) un espacio de probabilidad, $T:X\to X$ una transformación $\mu-$preservadora de medida. Son equivalentes:*

(I) *T es una transformación $\mu-$ergódica.*

(II) *Para cualesquiera $A,B\in\Sigma$ ocurre que*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\mu[T^{-i}(A)\cap B]=\mu[A]\mu[B].$$

Demostración.

(I) $\Longrightarrow$ (II)] Suponga que T es una transformación $\mu-$ergódica y sean $A, B \in \Sigma$ cualesquiera. Note que $\chi_A \in \mathcal{L}_1^{\mathbb{K}}(X, \Sigma, \mu)$ y por el Teorema Ergódico de Birkhoff, existe una función $(\chi_A)^* \in \mathcal{L}_1^{\mathbb{K}}(X, \Sigma, \mu)$ tal que $(\chi_A)^* \circ T = (\chi_A)^*$ c.t.p. (μ),

$$\mu[A] = \int_X \chi_A d\mu = \int_X (\chi_A)^* d\mu \quad \text{y}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}(\chi_A \circ T^i) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \chi_{T^{-i}(A)} = (\chi_A)^* \qquad \text{c.t.p. } (\mu).$$

Como T es una transformación $\mu-$ergódica, por el inciso (V) del Teorema 7, la condición $(\chi_A)^* \circ T = (\chi_A)^*$ c.t.p. (μ) implica que $(\chi_A)^*$ es una función constante c.t.p. (μ), digamos $(\chi_A)^* = \underline{c}$ c.t.p. (μ), con $c \in \mathbb{K}$. Entonces $\mu[A] = c$. Por ello,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \chi_{T^{-i}(A)} = \mu[A] \qquad \text{c.t.p. } (\mu).$$

La sucesión de funciones $\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \chi_{T^{-i}(A)}\chi_B\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathcal{L}_0^{\mathbb{K}}(X, \Sigma, \mu)$ satisface

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \chi_{T^{-i}(A)}\chi_B = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \chi_{T^{-i}(A)\cap B} = \mu[A]\chi_B \qquad \text{c.t.p. } (\mu).$$

Además para cada $n \geq 0$ ocurre que

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \chi_{T^{-i}(A)}\chi_B\right| \leq \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} |\chi_{T^{-i}(A)}\chi_B| \leq 1 \qquad \text{c.t.p. } (\mu).$$

Por el Teorema de Convergencia Acotada, concluimos que

$$\begin{aligned}\mu[A]\mu[B] &= \int_X \mu[A]\chi_B d\mu = \int_X \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \chi_{T^{-i}(A)}\chi_B d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \chi_{T^{-i}(A)}\chi_B d\mu \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \mu[T^{-i}(A)\cap B].\end{aligned}$$

(II) $\Longrightarrow$ (I)] Suponga que la condición (II) es válida. De acuerdo con el inciso (IV) del Teorema 6, para probar que T es una transformación $\mu-$ergódica, es suficiente verificar que para cada $A, B \in \Sigma$ con $\mu[A], \mu[B] > 0$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\mu[T^{-n}(A)\cap B] > 0$. Para probar esto último, procedemos por contradicción. Suponga que existen $A, B \in \Sigma$ con $\mu[A], \mu[B] > 0$ tales que para todo natural n ocurre que $\mu[T^{-n}(A)\cap B] = 0$. Por hipotesis se tiene que

$$0 < \mu[A]\mu[B] = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \mu[T^{-i}(A)\cap B] = 0,$$

que es una contradicción. Por lo tanto, T es una transformación $\mu-$ergódica.

$\boxtimes$

Observación 5. Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida finita.

I. Sea $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ un álgebra de subconjuntos tal que $\Sigma = \sigma(\mathcal{A})$. Entonces para cada $A \subseteq X$ tenemos que $A \in \Sigma$ si y sólo si para todo $\epsilon > 0$ existe $A_0 \in \mathcal{A}$ tal que $\mu[A \triangle A_0] < \epsilon$. La demostración de este hecho puede hallarse en [Kni09].

II. Dados $A, B, C, D \subseteq X$ se tiene que $(A\cap C)\triangle(B\cap D) \subseteq [A\triangle B] \cup [C\triangle D]$. De hecho, si (X, Σ, μ) tiene medida finita y $A, B \in \Sigma$, entonces se satisface que $|\mu[A] - \mu[B]| \leq \mu[A\triangle B]$.

El siguiente resultado establece que para verificar la ergodicidad en una transformación preservadora de medida en un espacio de medida cuya $\sigma-$álgebra está generada por una semiálgebra, basta con verificar que se satisface la condición (II) del Corolario 5 para los elementos de dicha semiálgebra.

Proposición 3. *Sean* (X,Σ,μ) *un espacio de probabilidad y* $T : X \to X$ *una transformación* $\mu-$*preservadora de medida. Suponga que* $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$ *es una semiálgebra tal que* $\Sigma = \sigma(\mathcal{S})$. *Son equivalentes:*

(I) T *es una transformación* $\mu-$*ergódica.*

(II) *Para cualesquiera* $A, B \in \Sigma$ *ocurre que*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \mu[T^{-i}(A)\cap B] = \mu[A]\mu[B]. \tag{1.21}$$

Demostración. Observe que la implicación (I) $\Longrightarrow$ (II) ya se tiene del Corolario 5. Resta probar que (II) $\Longrightarrow$ (I). Para ello, suponga que la condición (II) se satisface. De acuerdo con el Corolario 5, para probar que T es una transformación $\mu-$ergódica, es suficiente verificar que para cualesquiera $A, B \in \Sigma$ se tiene la ecuación (1.21).

Para ello, fije $A, B \in \Sigma$ y $\epsilon > 0$. Denote por $\mathcal{A}(\mathcal{S})$ el álgebra generada por $\mathcal{S}$. De acuerdo con el inciso I de la Observación 5, existen $A_0, B_0 \in \mathcal{A}(\mathcal{S})$ tales que $\mu[A_0\triangle A] < \frac{\epsilon}{8}$ y $\mu[B_0\triangle B] < \frac{\epsilon}{8}$. Suponga que $A_0 = \biguplus_{k=1}^{r} A_k$, $B_0 = \biguplus_{l=1}^{s} B_l$, donde $(A_k)_{k=1}^r \subseteq \mathcal{S}$ y también $(B_l)_{l=1}^s \subseteq \mathcal{S}$, con $r, s \in \mathbb{N}$. De las hipótesis, para cada $(k,l) \in \{1,\ldots,r\}\times\{1,\ldots,s\}$ ocurre que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \mu[T^{-i}(A_k)\cap B_l] = \mu[A_k]\mu[B_l].$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \mu[T^{-i}(A_0)\cap B_0] &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \mu\left[T^{-i}\left(\biguplus_{k=1}^{r} A_k\right)\cap\left(\biguplus_{l=1}^{s} B_l\right)\right] \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \mu\left[\biguplus_{k=1}^{r}\biguplus_{l=1}^{s} T^{-i}(A_k)\cap B_l\right] = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{k=1}^{r}\sum_{l=1}^{s} \mu[T^{-i}(A_k)\cap B_l] \\
&= \sum_{k=1}^{r}\sum_{l=1}^{s} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \mu[T^{-i}(A_k)\cap B_l] = \sum_{k=1}^{r}\sum_{l=1}^{s} \mu[A_k]\mu[B_l] = \sum_{k=1}^{r}\mu[A_k]\sum_{l=1}^{s}\mu[B_l] \\
&= \mu[A_0]\mu[B_0].
\end{aligned}$$

Así que para $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo natural $n \leq N$ ocurre

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \mu[T^{-i}(A_0)\cap B_0] - \mu[A_0]\mu[B_0]\right| < \frac{\epsilon}{2} \tag{1.22}$$

Por otro lado, del inciso II de la Observación 5 se obtiene para cada $k \in \mathbb{N}$ que

$$[T^{-k}(A)\cap B]\triangle[T^{-k}(A_0)\cap B_0] \subset [T^{-k}(A)\triangle T^{-k}(A_0)]\triangle[B\triangle B_0] = T^{-k}(A\triangle A_0)\cup[B\triangle B_0].$$

Como T es una transformación $\mu-$preservadora de medida, así como la propiedad con que fueron elegidos A_0 y B_0 se tiene que

$$\begin{aligned}
|\mu[T^{-k}(A)\cap B] - \mu[T^{-k}(A_0)\cap B_0]| &\leq \mu[[T^{-k}(A)\cap B]\triangle[T^{-k}(A_0)\cap B_0]] \leq \mu[T^{-k}(A\triangle A_0)\cup[B\triangle B_0]] \\
&\leq \mu[T^{-k}(A\triangle A_0)] + \mu[B\triangle B_0] = \mu[A\triangle A_0] + \mu[B\triangle B_0] < \frac{\epsilon}{8} + \frac{\epsilon}{8} = \frac{\epsilon}{4},
\end{aligned}$$

es decir,

$$|\mu[T^{-k}(A)\cap B] - \mu[T^{-k}(A_0)\cap B_0]| < \frac{\epsilon}{4}. \tag{1.23}$$

También se tiene que

$$|\mu[A]\mu[B] - \mu[A_0]\mu[B_0]| \leq \mu[B]|\mu[A]-\mu[A_0]| + \mu[A_0]|\mu[B]-\mu[B_0]| \leq \mu[A\triangle A_0] + \mu[B\triangle B_0] < \frac{\epsilon}{8}+\frac{\epsilon}{8} = \frac{\epsilon}{4}. \tag{1.24}$$

De las desigualdades (1.22), (1.23) y (1.24) se tiene que, para todo natural n con $n \leq N$

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\mu[T^{-i}(A)\cap B]-\mu[A]\mu[B]\right| &\leq \left|\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\mu[T^{-i}(A)\cap B]-\sum_{i=0}^{n-1}\mu[T^{-i}(A_0)\cap B_0]\right| \\ &+\left|\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\mu[T^{-i}(A_0)\cap B_0]-\mu[A_0]\mu[B_0]\right|+|\mu[A]\mu[B]-\mu[A_0]\mu[B_0]| \\ &< \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{\epsilon}{4}+\frac{\epsilon}{4}+\frac{\epsilon}{2}=\epsilon.\end{aligned}$$

Por la elección de $\epsilon > 0$, así como de $A, B \in \Sigma$ y el Corolario 5 se concluye que T es una transformación $\mu-$ergódica.

⊠

Observación 6 (Al Teorema Ergódico de Birkhoff). Sean (X, Σ, μ) un espacio de probabilidad, $T : X \to X$ una transformación $\mu-$preservadora de medida y $f \in \mathcal{L}_1^{\mathbb{K}}(X, \Sigma, \mu)$. Por el Teorema Ergódico de Birkhoff existe una función $f^* \in \mathcal{L}_1^{\mathbb{K}}(X, \Sigma, \mu)$ tal que $f^* \circ T = f^*$ c.t.p. (μ),

$$\int_X f^* d\mu = \int_X f d\mu \quad \text{y}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}(f\circ T^i)=f^* \qquad \text{c.t.p. } (\mu).$$

Se hará explicita la forma de la función f^* considerando los siguientes casos para T:

Caso 1. T es una transformación $\mu-$ergódica.
En este caso, por el inciso (V) del Teorema 7, la condición $f * \circ T = f^*$ c.t.p. (μ) implica que f^* es una función constante c.t.p. (μ), digamos $f^* = \underline{c}$ c.t.p. (μ), donde $c \in \mathbb{K}$. Notemos que

$$\int_X f^* d\mu = c = f^* \qquad \text{c.t.p. } (\mu).$$

Caso 2. T no es una transformación $\mu-$ergódica. Considere la siguiente $\sigma-$álgebra de subconjuntos de X

$$\Sigma_T = \{A \in \Sigma : T^{-1}(A) = A\}.$$

Por el Teorema de Radon-Nikodym, existe una única función $\bar{f} : X \to \mathbb{R}$ $(\Sigma_T, \mathcal{B}(\mathbb{K}))-$medible definida c.t.p. (μ) tal que para todo $E \in \Sigma_T$ satisface

$$\int_E f d\mu = \int_E \bar{f} d\mu.$$

A la función $\bar{f}$ se le conoce como *esperanza condicional* respecto a Σ_T, y se escribirá $\mathbb{E}_\mu[f|\Sigma_T]$ en vez de $\bar{f}$. Con la notación previa se tiene la siguiente

Afirmación. $f^* = \mathbb{E}_\mu[f|\Sigma_T]$ c.t.p. (μ).

Demostración de la Afirmación. Considere el conjunto $\Sigma-$medible con medida $\mu-$cero dado por

$$N = \left\{x \in X : f^*(x) \neq \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}(f\circ T^i)(x)\right\}.$$

Considere la función $\widehat{f} : X \to \mathbb{K}$ definida como $\widehat{f} = f * \chi_{X\setminus N}$. Observe que $\widehat{f}$ es una función $(\Sigma, \mathcal{B}(\mathbb{K}))-$medible. También se tiene que $\widehat{f} = f^*$ c.t.p. (μ) y $\widehat{f} = \widehat{f} \circ T$ c.t.p. (μ). De esto último se sigue que $\widehat{f}$ es una función $(\Sigma_T, \mathcal{B}(\mathbb{K}))-$medible. Utilizaremos la definición de esperanza condicional con respecto a Σ_T para demostrar que $\widehat{f} = \mathbb{E}_\mu[f|\Sigma_T]$ c.t.p. (μ). Observe que, resta verificar que para todo $E \in \Sigma_T$ se tiene que

$$\int_E f d\mu = \int_E \widehat{f} d\mu.$$

Para probar esto último, fije $E \in \Sigma_T$. Entonces $T^{-1}(E) = E$. Del principio de inducción matemática se sigue que, para todo $k \in \mathbb{N}$ ocurre que $T^{-k}(E) = E$. Observe que $f\chi_E \in \mathcal{L}_1^{\mathbb{K}}(X, \Sigma, \mu)$. Entonces, por el Teorema Ergódico de Birkhoff existe $(f\chi_E)^* \in \mathcal{L}_1^{\mathbb{K}}(X, \Sigma, \mu)$ tal que $(f\chi_E)^* \circ T = (f\chi_E)^*$ c.t.p. (μ),

$$\int_X (f\chi_E)^* d\mu = \int_X f\chi_E d\mu \quad \text{y,}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} (f\chi_E \circ T^i) = (f\chi_E)^* \qquad \text{c.t.p. } (\mu).$$

Se verifica de inmediato que para todo $k \in \mathbb{N}$ se tiene

$$(f\chi_E \circ T^k) = (f \circ T^k)\chi_{T^{-k}(E)} = (f \circ T^k)\chi_E.$$

Entonces

$$f^*\chi_E = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} (f \circ T^i)\chi_E = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} (f\chi_E \circ T^k) = (f\chi_E)^* \qquad \text{c.t.p. } (\mu).$$

y luego,

$$\int_E f d\mu = \int_X f\chi_E d\mu = \int_X (f\chi_E)^* d\mu = \int_X f^*\chi_E d\mu = \int_E f^* d\mu = \int_E \widehat{f} d\mu.$$

Por la elección de $E \in \Sigma_T$ y la definición de esperanza condicional respecto a Σ_T se concluye que

$$f^* = \widehat{f} = \mathbb{E}_\mu[f|\Sigma_T] \qquad \text{c.t.p. } (\mu).$$

1.5. Transformaciones mezclantes.

En esta sección se introducen algunos conceptos de transformaciones mezclantes (comunmente conocido en la literatura como *mixing*), se establecen algunos criterios útiles para determinar bajo que condiciones se tienen estos conceptos a través de conjuntos, funciones medibles y el operador asociado a la transformación en cuestión. También, éstos se relacionan estos conceptos con el de ergodicidad.

Definición 5 (Transformaciones mezclantes). *Sean (X, Σ, μ) un espacio de probabilidad, $T : X \to X$ una transformación $\mu-$preservadora de medida.*

i. *T es una transformación $\mu -$* **fuertemente mezclante** *si para todo $A, B \in \Sigma$ se tiene que*

$$\lim_{n\to\infty} \mu[T^{-n}(A) \cap B] = \mu[A]\mu[B]. \tag{1.25}$$

ii. *Se dice que T es una transformación $\mu -$* **débilmente mezclante** *si para cualesquiera $A, B \in \Sigma$ ocurre que*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} \big|\mu[T^{-i}(A) \cap B] - \mu[A]\mu[B]\big| = 0. \tag{1.26}$$

Una forma de interpretar una transformación mezclante consiste en pensar en que A y B en un proceso asintótico (o bien asintótico en promedio) bajo la transformación T son independientes en el sentido probabilístico.

Observación 7. Sean (X, Σ, μ) un espacio de probabilidad, $T : X \to X$ una transformación $\mu-$preservadora de medida. Se tienen las siguientes afirmaciones:

(i) Si T es una transformación $\mu-$fuertemente mezclante, entonces T es una transformación $\mu-$ergódica.

(ii) Si T es una transformación $\mu-$débilmente mezclante, entonces T es una transformación $\mu-$ergodica.

Demostración de la Observación 7. En ambos casos, para probar que T es una transformación $\mu-$ergódica, basta con verificar que se tiene la condición (II) del Corolario 5.

(I) Esta afirmación se tiene del hecho de que, si $A, B \in \Sigma$ satisfacen la ecuación (1.25), entonces

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \mu[T^{-i}(A)\cap B] = \mu[A]\mu[B],$$

que es la condición requerida.

(II) Es claro desde que, para cada $A, B \in \Sigma$ y $n \in \mathbb{N}$ ocurre que

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \mu[T^{-i}(A)\cap B] - \mu[A]\mu[B]\right| \leq \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \big|\mu[T^{-i}(A)\cap B] - \mu[A]\mu[B]\big|.$$

⊠

Tenemos la siguiente proposición para caracterizar a las transformaciones mezclantes en espacios de probabilidad cuya $\sigma-$álgebra está generada por una semiálgebra de subconjuntos.

Proposición 4. *Sean (X, Σ, μ) un espacio de probabilidad y $T : X \to X$ una transformación $\mu-$preservadora de medida. Suponga que $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$ es una semiálgebra tal que $\Sigma = \sigma(\mathcal{S})$. Entonces*

1. *T es una transformación $\mu-$fuertemente mezclante si y sólo si para todo $A, B \in \mathcal{S}$ se satisface*

$$\lim_{n\to\infty} \mu[T^{-n}(A)\cap B] = \mu[A]\mu[B].$$

2. *T es una transformación $\mu-$débilmente mezclante si para cualesquiera $A, B \in \mathcal{S}$ ocurre que*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} \big|\mu[T^{-i}(A)\cap B] - \mu[A]\mu[B]\big| = 0.$$

Demostración. La prueba es similar a la demostración de la Proposición 3. ⊠

Para efectos del siguiente resultado, que es un lema técnico, diremos que $J \subseteq \mathbb{Z}^+$ es un *conjunto con densidad cero* si

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\big|J\cap\{0,\ldots,n-1\}\big|}{n} = 0.$$

Lema 2. *Sea $(a_n)_{n\geq 0}$ una sucesión acotada de números reales. Las condiciones siguientes son equivalentes:*

(I) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} |a_i| = 0.$

(II) *Existe $J \subseteq \mathbb{Z}^+$ un conjunto con densidad cero tal que*

$$\lim_{n\to\infty,\ n\notin J} a_n = 0.$$

(III) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} |a_i|^2 = 0.$

Demostración. Para cada $J \subseteq \mathbb{Z}^+$ y cada natural $n \geq 0$, denotemos por $|J|(n) = \big|J\cap\{0,\ldots,n-1\}\big|$.

(I) $\Longrightarrow$ (II)] Suponga que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} |a_i| = 0.$

Para cada $k \in \mathbb{N}$ definamos el conjunto $J_k = \left\{n \in \mathbb{N} :\ |a_n| \geq \frac{1}{k}\right\}$. Tenemos la siguiente

Afirmación 1. La sucesión de conjuntos $\{J_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ satisface las siguientes propiedades:

1. Para cada $k \in \mathbb{N}$ se tiene que $J_k \subseteq J_{k+1}$.
2. Para todo $k \in \mathbb{N}$ ocurre que J_k es un conjunto con densidad cero.

3. Existe una sucesión $(\ell_k)_{k\in\mathbb{N}}$ estrictamente creciente de números naturales tal que para cualesquiera $k,n\in\mathbb{N}$ que satisfagan $n\geq \ell_k$ se tiene que
$$\frac{|J_{k+1}|(n)}{n}<\frac{1}{k+1}.$$

Demostración de la Afirmación 1.

Fije $k\in\mathbb{N}$. Sea $n\in J_k$ arbitrario. Se tiene que
$$|a_n|\geq \frac{1}{k}\geq \frac{1}{k+1},$$
es decir, $n\in J_{k+1}$. De esto se sigue que $J_k\subseteq J_{k+1}$.

Sea $k\in\mathbb{N}$. Demostraremos que $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|J_k|(n)}{n}=0$. Observe que para todo $n\in\mathbb{N}$ e $i\in J_k\cap\{0,\ldots,n-1\}$ se tiene que $|a_i|\geq \dfrac{1}{k}$ y luego
$$\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}|a_i|\geq \frac{1}{n}\sum_{i\in J_k\cap\{0,\ldots,n-1\}}|a_i|\geq \frac{1}{n}\sum_{i\in J_k\cap\{0,\ldots,n-1\}}\frac{1}{k}=\frac{1}{n}\frac{1}{k}\frac{|J_k|(n)}{n},$$
donde, por hipótesis, el lado izquierdo de la desigualdad anterior converge a cero cuando n tiende a infinito. Por ello $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|J_k|(n)}{n}=0$.

La sucesión requerida la construimos inductivamente como sigue: Sea $\ell_0=0$. Para construir ℓ_1 utilizaremos el hecho de que $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|J_2|(n)}{n}=0$. Notemos que, para $\dfrac{1}{1+1}$ existe $\ell_1\in\mathbb{N}$ tal que para cada natural $n\geq\ell_1$ ocurre que
$$\frac{|J_2|(n)}{n}<\frac{1}{1+1}.$$

Construyamos ℓ_2 como sigue: Observe que $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|J_3|(n)}{n}=0$. Para $\dfrac{1}{2+1}$ existe $N_2\in\mathbb{N}$ tal que para cada natural $n\geq N_2$ ocurre que $\dfrac{|J_3|(n)}{n}<\dfrac{1}{2+1}$. Sea $\ell_2=\max\{N_2+1,\ell_1+1\}\in\mathbb{N}$. Observe que $\ell_2>\ell_1$ y para todo natural $n\geq\ell_2$ se tiene que $\dfrac{|J_3|(n)}{n}<\dfrac{1}{2+1}$.

Para $k\in\mathbb{N}$ supóngase construidos los números naturales $\{\ell_0,\ell_1,\ldots\ell_k\}$ estrictamente crecientes tales que, para todo $i\in\{1,\ldots,k\}$ y $n\in\mathbb{N}$ con $n\geq\ell_i$ satisfacen que
$$\frac{|J_{i+1}|(n)}{n}<\frac{1}{i+1}.$$

A continuación se construye ℓ_{k+1}. Note que $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|J_{k+2}|(n)}{n}=0$. Entonces existe $N_{k+1}\in\mathbb{N}$ tal que para cada natural $n\geq N_{k+1}$ ocurre que $\dfrac{|J_{k+2}|(n)}{n}<\dfrac{1}{k+2}$. Sea $\ell_{k+1}=\max\{N_{k+1}+1,\ell_k+1\}\in\mathbb{N}$. Observe que $\ell_{k+1}>\ell_k$ y para todo natural $n\geq\ell_{k+1}$ se tiene que $\dfrac{|J_{k+2}|(n)}{n}<\dfrac{1}{k+2}$.

Por el principio de inducción matemática se tiene la conclusión.
Así se tiene la Afirmación 1.

Para cada $a,b\in\mathbb{Z}$ denote por $[a,b[=\{x\in\mathbb{Z}:\ a\leq x<b\}$. Con la notación de la Afirmación 1, para cada entero $k\geq 0$ definimos los conjuntos $R_k=[\ell_k,\ell_{k+1}[\cap J_{k+1}$. Observe que, por la construcción de $(\ell_k)_{k\geq 0}$, se tiene que $[\ell_k,\ell_{k+1}[\cap[\ell_{k+1},\ell_{k+2}[=\emptyset$, así que $R_k\cap R_{k+1}=\emptyset$. Considere el conjunto
$$J=\bigcup_{k=0}^{\infty}R_k.$$

<u>Afirmación.</u> Las siguientes afirmaciones son verdaderas

I. Para todo $k, n \in \mathbb{N}$ con $n \in [\ell_k, \ell_{k+1}[$ se tiene que

$$J \cap [0, n[\subseteq \big(J_k \cap [0, \ell_k[\big) \cup \big(J_{k+1} \cap [0, n[\big).$$

II. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{|J|(n)}{n} = 0$, es decir, J es un conjunto de densidad cero.

Demostración de la Afirmación 2.

I. Fije $k, n \in \mathbb{N}$ con $n \in [\ell_k, \ell_{k+1}[$ y $r \in J \cap [0, n[$. Como $r \in J$, entonces existe un único natural $m \geq 0$ tal que $r \in R_m = [\ell_m, \ell_{m+1}[\cap J_{m+1}$. Considere los siguientes casos:

<u>Caso 1.</u> $r \in [0, \ell_k[$.

En este caso se afirma que $m + 1 \leq k$. Para probar esto último, procedamos por contradicción: Suponga que $m + 1 > k$. Si, por ejemplo, se tiene que $k = m$, entonces $0 \leq r < \ell_k \leq r < \ell_{m+1}$, que es una contradicción. Cuando $k < m$, tenemos que $0 \leq r < \ell_k < \ell_m \leq r < \ell_{m+1}$, que también es una contradicción. Por lo que $m + 1 \leq k$. De aquí que $r \in J_{m+1} \subseteq J_k$, es decir, $r \in J_k \cap [0, \ell_k[$.

<u>Caso 2.</u> $r \in [\ell_k, n[$.

De manera análoga al Caso 1, en este caso se concluye que $m \leq k$. Luego, $r \in J_{m+1} \subseteq J_{k+1}$. Así que $r \in J_{k+1} \cap [0, n[$.

En ambos casos se obtiene que $r \in \big(J_k \cap [0, \ell_k[\big) \cup \big(J_{k+1} \cap [0, n[\big)$.

II. Observe primero que $\mathbb{Z}^+ \cup 0 = \biguplus_{r\geq 0} [\ell_r, \ell_{r+1}[$, así que para todo $n \in \mathbb{N}$ existe $r \in \mathbb{N}$ con $r \geq 0$ tal que $\ell_r \leq n < \ell_{r+1}$. Fije $\epsilon > 0$. Entonces existe $k \in \mathbb{N}$ tal que para todo natural $r \geq k$ ocurre que $\dfrac{1}{r} + \dfrac{1}{r+1} < \epsilon$.

Sea $N = \ell_k$. Entonces, por la Afirmación 1 y por el inciso I de esta afirmación se tiene que, para todo natural $n \geq \ell_k = N$ existe $r \in \mathbb{N}$ tal que $r \geq k$, $\ell_r \leq n < \ell_{r+1}$

$$\begin{aligned}\frac{|J|(n)}{n} = \frac{|J \cap [0, n[|}{n} &\leq \frac{|J_r \cap [0, \ell_r[|}{n} + \frac{|J_{r+1} \cap [0, n[|}{n} \leq \frac{|J_r \cap [0, n[|}{n} + \frac{|J_{r+1} \cap [0, n[|}{n} \\ &\leq \frac{|J_r|(n)}{n} + \frac{|J_{r+1}|(n)}{n} \leq \frac{1}{r} + \frac{1}{r+1} < \epsilon.\end{aligned}$$

Por la elección de $\epsilon > 0$ se tiene la conclusión.

Así se tiene la Afirmación 2.

Resta demostrar que $\displaystyle\lim_{n\to\infty,\ n\notin J} a_n = 0.$. Para ello, fije $\epsilon > 0$. Entonces existe $k \in \mathbb{N}$ tal que para todo natural $r \geq k$ se tiene que $\dfrac{1}{r+1} < \epsilon$. Sea $N = \ell_k$. Observe que para todo natural n con $n \geq N$ y $n \notin J$ ocurre que existe $r \in \mathbb{N}$ con $r \geq k$, $\ell_r \leq n < \ell_{r+1}$ y $n \notin J_{m+1}$, que significa que

$$|a_n| < \frac{1}{r+1} < \epsilon.$$

Como $\epsilon > 0$ fue arbitrario, se concluye que $\displaystyle\lim_{n\to\infty,\ n\notin J} a_n = 0$. De esto último y la Afirmación 2 se obtiene (II).

(II) $\Longrightarrow$ (I)] Suponga que existe $J \subseteq \mathbb{Z}^+$ conjunto de densidad cero tal que $\displaystyle\lim_{n\to\infty,\ n\notin J} a_n = 0$. Demostremos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} |a_i| = 0.$$

Para esto, fije $\epsilon > 0$. Como $(a_n)_{n\geq 0}$ es una sucesión acotada, existe $M > 0$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ tenemos $|a_n| \leq M$. Para $\epsilon > 0$ existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que para todo natural $n \geq N_1$ y $n \notin J$ ocurre que $|a_n| < \dfrac{\epsilon}{3}$.

También, como $\lim_{n\to\infty} \frac{|J|(n)}{n} = 0$, existen $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que para todo natural $n \geq N_2$ se tiene que $\frac{|J|(n)}{n} < \frac{\epsilon}{3M}$.

Sea $N' = \max\{N_1, N_2\}$. Se tiene que existe $N_3 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $\frac{MN}{n} < \frac{\epsilon}{3}$. Sea $N = \max\{N', N_3\}$. Para todo $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq N$ ocurre que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}|a_i| &= \frac{1}{n}\sum_{i\in\{0,\ldots,n-1\}\cap J}|a_i| + \frac{1}{n}\sum_{i\in\{0,\ldots,n-1\}\setminus J,\ i<N}|a_i| + \frac{1}{n}\sum_{i\in\{0,\ldots,n-1\}\setminus J,\ i\geq N}|a_i| \\
&< \frac{1}{n}\sum_{i\in\{0,\ldots,n-1\}\cap J} M + \frac{1}{n}\sum_{i\in\{0,\ldots,n-1\}\setminus J,\ i<N} M + \frac{1}{n}\sum_{i\in\{0,\ldots,n-1\}\setminus J,\ i\geq N}\frac{\epsilon}{3} \\
&< M\frac{|J|(n)}{n} + M\frac{N}{n} + \frac{1}{n}\frac{\epsilon}{3}(n - |J|(n)) \\
&\leq M\frac{|J|(n)}{n} + M\frac{N}{n} + \frac{1}{n}\frac{\epsilon}{3}n < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon.
\end{aligned}$$

Como $\epsilon > 0$ es arbitrario, entonces $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}|a_i| = 0$.

(I) $\Longrightarrow$ (III)] Suponga que $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}|a_i| = 0$. Por la implicación (I) $\Longrightarrow$ (II), se tiene que existe $J \subseteq \mathbb{Z}^+$ conjunto con densidad cero tal que $\lim_{n\to\infty,\ n\notin J} a_n = 0$. Esto implica que $\lim_{n\to\infty,\ n\notin J} (a_n)^2 = 0$, donde $(a_n^2)_{n\geq 0}$ es también una sucesión de números reales acotada. Por la implicación (II) $\Longrightarrow$ (I) para la sucesión $(a_n^2)_{n\geq 0}$ ocurre que $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}|a_i|^2 = 0$.

(III) $\Longrightarrow$ (I)] La demostración es similar a la del inciso (II) $\Longrightarrow$ (I).

⊠

Teorema 8 (Caracterización de las transfomaciones débilmente mezclantes (I)). *Sean (X, Σ, μ) un espacio de probabilidad, $T : X \to X$ una transformación $\mu-$preservadora de medida. Las condiciones siguientes son equivalentes:*

(I) *T es una transformación $\mu-$débilmente mezclante.*

(II) *Para cualesquiera $A, B \in \Sigma$ existe $J(A, B) \subseteq \mathbb{Z}^+$ un conjunto con densidad cero tal que*

$$\lim_{n\to\infty,\ n\notin J(A,B)} \mu[T^{-n}(A) \cap B] = \mu[A]\mu[B].$$

(III) *Para todo $A, B \in \Sigma$ ocurre que*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\left|\mu[T^{-i}(A)\cap B] - \mu[A]\mu[B]\right|^2 = 0.$$

Demostración. Fije $A, B \in \Sigma$. Entonces la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida como

$$a_n = \mu[T^{-n}(A) \cap B] - \mu[A]\mu[B]$$

es acotada, ya que para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$|a_n| = \left|\mu[T^{-i}(A)\cap B] - \mu[A]\mu[B]\right| \leq \mu[T^{-i}(A)\cap B] + \mu[A]\mu[B] \leq 2, \tag{1.27}$$

es decir, se satisfacen las hipótesis del Lema 2 y con la aplicación de dicho lema a dicha sucesion se obtiene el resultado. ⊠

Definición 6. *Sea (X, Σ, μ) un espacio de probabilidad. Diremos que una familia de subconjuntos $\Sigma-$medibles $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una* **base numerable** *para (X, Σ, μ) si para cada $B \in \Sigma$ y $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\mu[B \triangle B_N] < \epsilon$.*

Sea (X, Σ, μ) un espacio de probabilidad. Se tiene la siguiente notación:

Considere la función $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{L}_2^{\mathbb{K}}(X, \Sigma, \mu) \times \mathcal{L}_2^{\mathbb{K}}(X, \Sigma, \mu) \to \mathbb{C}$ definida para cada $(f, g) \in \mathcal{L}_2^{\mathbb{K}}(X, \Sigma, \mu) \times \mathcal{L}_2^{\mathbb{K}}(X, \Sigma, \mu)$ como

$$\langle f, g \rangle = \int_X f\overline{g} d\mu,$$

donde $\overline{g}$ denota conjugación compleja. Entonces $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es un producto interno en $\mathcal{L}_2^{\mathbb{K}}(X, \Sigma, \mu)$ y de hecho, $(\mathcal{L}_2^{\mathbb{K}}(X, \Sigma, \mu), \langle \cdot, \cdot \rangle)$ es un espacio de Hilbert.

Recuerde que, para todo $f \in \mathcal{L}_2^{\mathbb{K}}(X, \Sigma, \mu)$ se tiene que

$$\|f\|_2^2 = \langle f, f \rangle = \int_X |f|^2 d\mu.$$

En la siguiente resultado se establecen condiciones necesarias y suficientes para que un espacio de probabilidad (X, Σ, μ) tenga una base numerable.

Lema 3. *Sea (X, Σ, μ) un espacio de probabilidad.*

I. *Entonces (X, Σ, μ) tiene una base numerable si y sólo si $(\mathcal{L}_2^{\mathbb{K}}(X, \Sigma, \mu), \|\cdot\|_2)$ es un espacio de Banach separable.*

II. *Si T es una transformación $\mu-$débimente mezclante y $\{B_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una base numerable para (X, Σ, μ), entonces*
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{k,\ell=1}^{\infty} \frac{\left|\mu[T^{-i}(B_k)\cap B_\ell] - \mu[B_k]\mu[B_\ell]\right|}{2^{k+\ell}} = 0. \tag{1.28}$$

Demostración.

I. Consultar [Hew94].

II. Denote por $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ la potencia de $\mathbb{N}$. En $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ defina $\nu : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathbb{R}$ para cada $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ como
$$\nu[A] = \sum_{j\in A} \frac{1}{2^j}.$$

Se verifica inmediatamente que $(N, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \nu)$ es un espacio de probabilidad. Consideremos el espacio de probabilidad producto $(\mathbb{N}^2, \mathcal{P}(\mathbb{N})^{\otimes 2}, \nu^{\otimes 2})$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ defina la función $\varphi_n : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{R}$ definida para cada $(k, \ell) \in \mathbb{N}^2$ como
$$\varphi_n(k, \ell) = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\left|\mu[T^{-i}(B_k)\cap B_\ell] - \mu[B_k]\mu[B_\ell]\right|.$$

Observe que φ_n es una función $(\mathcal{P}(\mathbb{N})^{\otimes 2}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))-$medible. Además, para todo $(k, \ell) \in \mathbb{N}^2$ se tiene que
$$|\varphi_n(k, \ell)| \leq \frac{2}{n} \leq 2,$$

y además φ_n puede reescribirse como
$$\varphi_n = \sum_{(k,\ell)\in\mathbb{N}^2} \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\left|\mu[T^{-i}(B_k)\cap B_\ell] - \mu[B_k]\mu[B_\ell]\right|\chi_{(k,\ell)}.$$

De modo que para cada $n \in \mathbb{N}$, por el Teorema de Convergencia Monótona se tiene que
$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{N}^2} \varphi_n d\nu^{\otimes 2} &= \sum_{(k,\ell)\in\mathbb{N}^2} \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\left|\mu[T^{-i}(B_k)\cap B_\ell] - \mu[B_k]\mu[B_\ell]\right|\nu^{\otimes 2}[\{(k,\ell)\}] \\
&= \sum_{(k,\ell)\in\mathbb{N}^2} \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\left|\mu[T^{-i}(B_k)\cap B_\ell] - \mu[B_k]\mu[B_\ell]\right|\nu[\{k\}]\nu[\{\ell\}] \\
&= \sum_{(k,\ell)\in\mathbb{N}^2} \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\left|\mu[T^{-i}(B_k)\cap B_\ell] - \mu[B_k]\mu[B_\ell]\right|\frac{1}{2^{k+\ell}}.
\end{aligned}$$

También, como T es una transformación $\mu-$débilmente mezclante, para cada $(k,\ell)\in\mathbb{N}^2$ se satisface que

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_n(k,\ell)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\left|\mu[T^{-i}(B_k)\cap B_\ell]-\mu[B_k]\mu[B_\ell]\right|=0.$$

Por el Teorema de Convergencia Acotada ocurre que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{k,\ell=1}^{\infty}\frac{\left|\mu[T^{-i}(B_k)\cap B_\ell]-\mu[B_k]\mu[B_\ell]\right|}{2^{k+\ell}}=\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{N}^2}\varphi_n d\nu^{\otimes 2}=\int_{\mathbb{N}^2}\lim_{n\to\infty}\varphi_n d\nu^{\otimes 2}=0.$$

⊠

En el siguiente resultado se caracterizan a las transformaciones débilmente mezclantes en espacios de probabilidad que poseen una base numerable.

Teorema 9. *Sean (X,Σ,μ) un espacio de probabilidad y $T:X\to X$ una transformación $\mu-$preservadora de medida. Suponga que (X,Σ,μ) tiene una base numerable. Son equivalentes:*

(I) *T es una transformación $\mu-$débilmente mezclante.*

(II) *Existe $J\subseteq\mathbb{Z}^+$ un conjunto con densidad cero tal que, para cada $A,B\in\Sigma$ ocurre*

$$\lim_{n\to\infty,\ n\notin J}\mu[T^{-n}(A)\cap B]=\mu[A]\mu[B].$$

Demostración.

(II) $\Longrightarrow$ (I)] Ya se tiene del Teorema 8.

(I) $\Longrightarrow$ (II)] Suponga que T es una transformación $\mu-$débilmente mezclante y sea $\{B_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una base numerable. Para cada $n\in\mathbb{N}$ defina

$$a_n=\sum_{k,\ell=1}^{\infty}\frac{\left|\mu[T^{-n}(B_k)\cap B_\ell]-\mu[B_k]\mu[B_\ell]\right|}{2^{k+\ell}}.$$

En el inciso II del Lema 3 se verificó que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada y que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}|a_i|=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{k,\ell=1}^{\infty}\frac{\left|\mu[T^{-i}(B_k)\cap B_\ell]-\mu[B_k]\mu[B_\ell]\right|}{2^{k+\ell}}=0.$$

Entonces, por el Lema 2 se tiene que existe $J\subseteq\mathbb{Z}^+$ un conjunto con densidad cero tal que

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty,\ n\notin J}a_n&=\lim_{n\to\infty,\ n\notin J}\sum_{k,\ell=1}^{\infty}\frac{\left|\mu[T^{-n}(B_k)\cap B_\ell]-\mu[B_k]\mu[B_\ell]\right|}{2^{k+\ell}}\\&=\sum_{k,\ell=1}^{\infty}\frac{1}{2^{k+\ell}}\lim_{n\to\infty,\ n\notin J}\left|\mu[T^{-n}(B_k)\cap B_\ell]-\mu[B_k]\mu[B_\ell]\right|=0,\end{aligned}$$

en particular, para cada $(k,\ell)\in\mathbb{N}^2$ se tiene que

$$\lim_{n\to\infty,\ n\notin J}\left|\mu[T^{-n}(B_k)\cap B_\ell]-\mu[B_k]\mu[B_\ell]\right|=0.$$

Demostraremos que para todo $A,B\in\Sigma$ se tiene que

$$\lim_{n\to\infty,\ n\notin J}\mu[T^{-n}(A)\cap B]=\mu[A]\mu[B].$$

Para ello, fije $A,B\in\Sigma$ y $\epsilon>0$. Como $\{B_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una base numerable para (X,Σ,μ), entonces existen $N,M\in\mathbb{N}$ tales que $\mu[A\triangle B_N]<\frac{\epsilon}{3}$ y $\mu[B\triangle B_M]<\frac{\epsilon}{3}$.

Como $\lim_{n\to\infty,\ n\notin J} \left|\mu[T^{-n}(B_N)\cap B_M] - \mu[B_N]\mu[B_M]\right| = 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para cada natural $n \notin J$ con $n \geq n_0$ se tiene que

$$\left|\mu[T^{-n}(B_N)\cap B_M] - \mu[B_N]\mu[B_M]\right| < \frac{\epsilon}{3}. \tag{1.29}$$

De la misma forma en que se obtuvieron las desigualdades (1.23) y (1.24) en la Proposición 3, para cada $n \in \mathbb{N}\backslash J$ con $n \geq n_0$ se obtienen

$$\left|\mu[T^{-n}(A)\cap B] - \mu[T^{-n}(B_N)\cap B_M]\right| \leq \mu[A\triangle B_N] + \mu[B\triangle B_M] < \frac{\epsilon}{3}, \quad \text{y} \tag{1.30}$$

$$\left|\mu[A]\mu[B] - \mu[B_N]\mu[B_M]\right| \leq \mu[A\triangle B_N] + \mu[B\triangle B_M] < \frac{\epsilon}{3} \tag{1.31}$$

Por las ecuaciones (1.29), (1.30) y (1.31), para todo $n \in \mathbb{N}\backslash J$ con $n \geq n_0$ se tiene

$$\begin{aligned}\left|\mu[T^{-n}(A)\cap B].\mu[A]\mu[B]\right| &\leq \left|\mu[T^{-n}(A)\cap B] - \mu[T^{-n}(B_N)\cap B_M]\right| \\ &+ \left|\mu[T^{-n}(B_N)\cap B_M] - \mu[B_N]\mu[B_M]\right| + \left|\mu[A]\mu[B] - \mu[B_N]\mu[B_M]\right| \\ &< \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon.\end{aligned}$$

Por la elección de $\epsilon > 0$ se concluye que $\lim_{n\to\infty,\ n\notin J} \mu[T^{-n}(A)\cap B] = \mu[A]\mu[B]$.

De esta forma se tiene el resultado.

⊠

Ahora, caracterizaremos a las transformaciones mezcladoras y ergódicas a través de funciones en $\mathcal{L}_2^{\mathbb{K}}(X,\Sigma,\mu)$.

Teorema 10 (Caracterización de transformaciones mezcladoras mediante funciones). *Sean (X,Σ,μ) un espacio de probabilidad, $T : X \to X$ una transformación $\mu-$preservadora de medida. Las condiciones siguientes son equivalentes por bloques:*

1. (Ergodicidad)

(I) *T es una transformación $\mu-$ergódica.*

(II) *Para cada $f \in \mathcal{L}_2^{\mathbb{K}}(X,\Sigma,\mu)$ ocurre que*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \langle U_T^i(f), f\rangle = \langle f, 1\rangle\langle 1, f\rangle.$$

(III) *Para cualesquiera $f, g \in \mathcal{L}_2^{\mathbb{K}}(X,\Sigma,\mu)$ tenemos*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \langle U_T^i(f), g\rangle = \langle f, 1\rangle\langle 1, g\rangle.$$

2. (Débilmente mezclante)

(I) *T es una transformación $\mu-$débilmente mezclante.*

(II) *Para cada $f, g \in \mathcal{L}_2^{\mathbb{K}}(X,\Sigma,\mu)$ se tiene que*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \left|\langle U_T^i(f), g\rangle - \langle f, 1\rangle\langle 1, g\rangle\right| = 0.$$

(III) *Para toda $f \in \mathcal{L}_2^{\mathbb{K}}(X,\Sigma,\mu)$ ocurre que*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \left|\langle U_T^i(f), f\rangle - \langle f, 1\rangle\langle 1, f\rangle\right| = 0.$$

(IV) *Para cualquier $f \in \mathcal{L}_2^{\mathbb{K}}(X,\Sigma,\mu)$ se satisface*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \left|\langle U_T^i(f), f\rangle - \langle f, 1\rangle\langle 1, f\rangle\right|^2 = 0.$$

3. (Fuertemente mezclante)

(I) *T es una transformación $\mu-$fuertemente mezclante*

(II) *Dadas $f, g \in \mathcal{L}_2^{\mathbb{K}}(X, \Sigma, \mu)$ se tiene que*

$$\lim_{n\to\infty} \langle U_T^n(f), g\rangle = \langle f, 1\rangle\langle 1, g\rangle.$$

(III) *Para todo $f \in \mathcal{L}_2^{\mathbb{K}}(X, \Sigma, \mu)$ ocurre que*

$$\lim_{n\to\infty} \langle U_T^n(f), f\rangle = \langle f, 1\rangle\langle 1, f\rangle.$$

Demostración. Probaremos únicamente el inciso 3 del Teorema, ya que los incisos restantes se obtienen de manera análoga.

(I) $\Longrightarrow$ (III)] Suponga que T es una transformación $\mu-$fuertemente mezclante. Fije $f \in \mathcal{L}_2^{\mathbb{K}}(X, \Sigma, \mu)$. Considere los siguientes casos para f:

Caso 1. $f = \chi_A$, donde $A \in \Sigma$.
Recuerde que para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $\chi_A = \chi_{T-n(A)}$. Así que

$$\lim_{n\to\infty} \langle U_T^n(\chi_A), \chi_A\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle \chi_{T^{-n}(A)}, \chi_A\rangle = \langle \chi_A, \chi_A\rangle = \|\chi_A\|_2^2 = \mu[A]\mu[A] = \langle \chi_A, 1\rangle\langle 1, \chi_A\rangle.$$

Caso 2. f es una función $\Sigma-$simple.
El resultado se tiene por la linealidad de la integral, las propiedades del producto interno y el caso anterior.

Caso 3. $f \in \mathcal{L}_1^{\mathbb{K}}(X, \Sigma, \mu)$. Denote por

$$\mathcal{S}^K(X, \Sigma, \mu) = \{h \in \mathcal{L}_0^{\mathbb{K}}(X, \Sigma, \mu) : \ h \text{ es una función } \Sigma - \text{simple } \}.$$

Fije $\epsilon > 0$. Como $\mathcal{S}^K(X, \Sigma, \mu)$ es un subespacio denso de $\mathcal{L}_2^{\mathbb{K}}(X, \Sigma, \mu)$, entonces existe $h \in \mathcal{S}^K(X, \Sigma, \mu)$ tal que

$$\|f - h\|_2 < r = \min\left\{\epsilon, \frac{\epsilon}{8(\|f\|_2 + \epsilon)}\right\}. \tag{1.32}$$

También ocurre que $\|h\|_2 < \|f\|_2 + r$
Por el Caso 2, se tiene que $\lim\limits_{n\to\infty} \langle U_T^n(h), h\rangle = \langle h, 1\rangle\langle 1, h\rangle$. Entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo natural $n \geq N$ se satisface que

$$\left|\langle U_T^n(h), h\rangle - \langle h, 1\rangle\langle 1, h\rangle\right| < \frac{\epsilon}{2}. \tag{1.33}$$

Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz en $(\mathcal{L}_2^{\mathbb{K}}(X, \Sigma, \mu), \|\cdot\|_2)$ y el Teorema 3, así como las desigualdades (1.32) y (1.33), para cada natural $n \geq N$ se tiene

$$\begin{aligned}
\left|\langle U_T^n(f), f\rangle - \langle f, 1\rangle\langle 1, f\rangle\right| &\leq \left|\langle U_T^n(f), f\rangle - \langle U_T^n(h), f\rangle\right| + \left|\langle U_T^n(h), f\rangle - \langle U_T^n(h), h\rangle\right| \\
&+ \left|\langle U_T^n(h), h\rangle - \langle h, 1\rangle\langle 1, h\rangle\right| + \left|\langle h, 1\rangle\langle 1, h\rangle - \langle f, 1\rangle\langle 1, h\rangle\right| \\
&+ \left|\langle f, 1\rangle\langle 1, h\rangle - \langle f, 1\rangle\langle 1, f\rangle\right| \\
&= \left|\langle U_T^n(f - h), f\rangle\right| + \left|\langle U_T^n(h), f - h\rangle\right| + \left|\langle U_T^n(h), h\rangle - \langle h, 1\rangle\langle 1, h\rangle\right| \\
&+ \left|\langle 1, h\rangle\right|\left|\langle h - f, 1\rangle\right| + \left|\langle f, 1\rangle\right|\left|\langle 1, h - f\rangle\right| \\
&\leq \|U_T^n(f - h)\|_2\|f\|_2 + \|U_T^n(h)\|_2\|f - h\|_2 + \left|\langle U_T^n(h), h\rangle - \langle h, 1\rangle\langle 1, h\rangle\right| \\
&+ \|1\|_2\|h\|_2\|f - h\|_2\|1\|_2 \\
&+ \|f\|_2\|1\|_2\|1\|_2\|f - h\|_2 \\
&= \|f - h\|_2\|f\|_2 + \|h\|_2\|f - h\|_2 + \left|\langle U_T^n(h), h\rangle - \langle h, 1\rangle\langle 1, h\rangle\right| \\
&+ \|h\|_2\|f - h\|_2 + \|f\|_2\|f - h\|_2 \\
&< 2r\|f\|_2 + 2r\|h\|_2 + \left|\langle U_T^n(h), h\rangle - \langle h, 1\rangle\langle 1, h\rangle\right| \\
&< 2\frac{\epsilon}{8(\|f\|_2 + \epsilon)}\|f\|_2 + 2\frac{\epsilon}{8(\|f\|_2 + \epsilon)}(\|f\|_2 + r) + \frac{\epsilon}{2} \\
&\leq \frac{\epsilon}{4}\frac{\|f\|_2}{\|f\|_2 + \epsilon} + \frac{\epsilon}{4}\frac{\|f\|_2 + \epsilon}{\|f\|_2 + \epsilon} + \frac{\epsilon}{2} < \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.
\end{aligned}$$

Por la elección de $\epsilon > 0$ se tiene la conclusión.

(III) $\Longrightarrow$ (II) $\big]$ Suponga válida la condición (II). Demostraremos que se satisface (III). Fije $f \in \mathcal{L}_2^{\mathbb{K}}(X, \Sigma, \mu)$. Definamos

$$\mathtt{W}(f) = \left\{ g \in \mathcal{L}_2^{\mathbb{K}}(X, \Sigma, \mu) : \lim_{n\to\infty} \langle U_T^n(f), g\rangle = \langle f, 1\rangle\langle 1, g\rangle \right\}.$$

<u>Afirmación.</u> El conjunto $\mathtt{W}(f)$ satisface las siguientes propiedades:

(a) $\mathtt{W}(f)$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{L}_2^{\mathbb{K}}(X, \Sigma, \mu)$.
(b) $\mathtt{W}(f)$ es un subconjunto cerrado de $(\mathcal{L}_2^{\mathbb{K}}(X, \Sigma, \mu), \|\cdot\|_2)$.
(c) $U_T\big(\mathtt{W}(f)\big) \subseteq \mathtt{W}(f)$.
(d) $\mathtt{W}(f)$ contiene a f y a las funciones constantes.

Demostración de la Afirmación.

(a) Observe que para todo $c \in \mathbb{K}$, $g_1, g_2 \in \mathtt{W}(f)$ ocurre que

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \langle U_T^n(f), cg_1 + g_2\rangle &= \lim_{n\to\infty} \big[\overline{c}\langle U_T^n(f), g_1\rangle + \langle U_T^n(f), g_2\rangle\big] = \overline{c}\langle f, 1\rangle\langle 1, g_1\rangle + \langle f, 1\rangle\langle 1, g_2\rangle \\ &= \langle f, 1\rangle\langle 1, cg_1 + g_2\rangle.\end{aligned}$$

Lo cual implica que $cg_1 + g_2 \in \mathtt{W}(f)$. Por ello, $\mathtt{W}(f)$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{L}_2^{\mathbb{K}}(X, \Sigma, \mu)$.

(b) Para probar esta afirmación, es suficiente verificar que, si $\overline{\mathtt{W}(f)}$ denota la cerradura topológica de $\mathtt{W}(f)$ en $(\mathcal{L}_2^{\mathbb{K}}(X, \Sigma, \mu), \|\cdot\|_2)$, entonces $\overline{\mathtt{W}(f)} \subseteq \mathtt{W}(f)$. Para ello, fije $g \in \overline{\mathtt{W}(f)}$. Entonces, existe una sucesión $(g_m)_{m\in\mathbb{N}} \subseteq \mathtt{W}(f)$ tal que

$$\lim_{m\to\infty} \|g_m - g\|_2 = 0.$$

Demostraremos a continuación que $\lim_{n\to\infty} \langle U_T^n(f), g\rangle = \langle f, 1\rangle\langle 1, g\rangle$. Para ello, sea $\epsilon > 0$ arbitrario. Entonces existe $M \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|g_M - g\|_2 < \frac{\epsilon}{4(\|f\|_2 + 1)}. \tag{1.34}$$

Como $g_M \in \mathtt{W}(f)$, entonces $\lim_{n\to\infty} \langle U_T^n(f), g_M\rangle = \langle f, 1\rangle\langle 1, g_M\rangle$, así que para $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para cada natural $n \geq N$ ocurre que

$$\big|\langle U_T^n(f), g_M\rangle - \langle f, 1\rangle\langle 1, g_M\rangle\big| < \frac{\epsilon}{2}. \tag{1.35}$$

Por las desigualdades (1.34) y (1.35), así como el Teorema 3 y la desigualdad de Cauchy-Schwarz en $(\mathcal{L}_2^{\mathbb{K}}(X, \Sigma, \mu), \|\cdot\|_2)$, para todo $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq N$ se tiene que

$$\begin{aligned}\big|\langle U_T^n(f), g\rangle - \langle f, 1\rangle\langle 1, g\rangle\big| &\leq \big|\langle U_T^n(f), g\rangle - \langle U_T^n(f), g_M\rangle\big| \\ &\quad + \big|\langle U_T^n(f), g_M\rangle - \langle f, 1\rangle\langle 1, g_M\rangle\big| + \big|\langle f, 1\rangle\langle 1, g_M\rangle - \langle f, 1\rangle\langle 1, g\rangle\big| \\ &= \big|\langle U_T^n(f), g - g_M\rangle\big| + \big|\langle U_T^n(f), g_M\rangle - \langle f, 1\rangle\langle 1, g_M\rangle\big| + \big|\langle f, 1\rangle\big|\big|\langle 1, g_M - g\rangle\big| \\ &\leq \|U_T^n(f)\|_2\|g_M - g\|_2 + \big|\langle U_T^n(f), g_M\rangle - \langle f, 1\rangle\langle 1, g_M\rangle\big| + \|f\|_2\|g_M - g\|_2 \\ &= 2\|f\|_2\|g_M - g\|_2 + \big|\langle U_T^n(f), g_M\rangle - \langle f, 1\rangle\langle 1, g_M\rangle\big| < 2\|f\|_2 \frac{\epsilon}{4(\|f\|_2 + 1)} + \frac{\epsilon}{2} \\ &< \epsilon.\end{aligned}$$

Por la elección de $\epsilon > 0$ se tiene la conclusión.

(c) Note que, por el Corolario 2, para cada $g \in \mathtt{W}(f)$ se tiene que

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \langle U_T^n(f), U_T(g)\rangle &= \lim_{n\to\infty} \int_X [U_T^n(f)][\overline{U_T(g)}]d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X U_T(U_T^{n-1}(f)\overline{g})d\mu \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_X U_T^{n-1}(f)\overline{g}d\mu = \lim_{n\to\infty} \langle U_T^{n-1}(f), g\rangle = \langle f, 1\rangle\langle 1, g\rangle = \langle f, 1\rangle\left(\int_X \overline{g}d\mu\right) \\ &= \langle f, 1\rangle\left(\int_X U_T(\overline{g})d\mu\right) = \langle f, 1\rangle\langle 1, U_T(g)\rangle,\end{aligned}$$

lo que implica que $U_T(g) \in \mathtt{W}(f)$.
Por tanto, $U_T\big(\mathtt{W}(f)\big) \subseteq \mathtt{W}(f)$.

(d) Es claro.

Así se tiene la Afirmación.

Considere $\mathtt{V}(f)$ al mínimo subespacio cerrado de $\mathcal{L}_2^{\mathbb{K}}(X,\Sigma,\mu)$ tal que $U_T(\mathtt{V}(f)) \subseteq \mathtt{V}(f)$ y que contiene a f y a las funciones constantes. Entonces, por la Afirmación se tiene que $\mathtt{V}(f) \subseteq \mathtt{W}(f)$.

Denote por $\mathtt{V}(f)^{\perp}$ al complemento ortogonal de $\mathtt{V}(f)$ en $\mathcal{L}_2^{\mathbb{K}}(X,\Sigma,\mu)$. Se tiene que $\mathcal{L}_2^{\mathbb{K}}(X,\Sigma,\mu) = \mathtt{V}(f) \oplus \mathtt{V}(f)^{\perp}$. Se afirma que $\mathtt{V}(f)^{\perp} = \mathtt{W}(f)$. Para probar esto último, fije $g \in \mathtt{V}(f)^{\perp}$. Como $1 \in \mathtt{V}(f)$, se satisface que $\langle 1, g\rangle = 0$. Como $f \in \mathtt{V}(f)$ y $U_T(\mathtt{V}(f)) \subseteq \mathtt{V}(f)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ ocurre que $\langle U_T^n(f), g\rangle = 0$. Entonces

$$\lim_{n\to\infty} \langle U_T^n(f), g\rangle = 0 = \langle f, 1\rangle\langle 1, g\rangle.$$

Lo que significa que $g \in \mathtt{W}(f)$. Por tanto $\mathtt{V}(f)^{\perp} = \mathtt{W}(f)$. De aquí se concluye que $\mathcal{L}_2^{\mathbb{K}}(X,\Sigma,\mu) = \mathtt{V}(f) \oplus \mathtt{V}(f)^{\perp} = \mathtt{W}(f)$. Esto último prueba el resultado.

$\boxtimes$

El siguiente corolario del Teorema 10 es exclusivo de los espacios de probabilidad con una base numerable.

Corolario 6. *Sean (X,Σ,μ) un espacio de probabilidad y $T: X \to X$ una transformación $\mu-$preservadora de medida. Suponga que (X,Σ,μ) tiene una base numerable. Entonces, T es una transformación $\mu-$débilmente mezclante si y sólo si existe $J \subseteq \mathbb{Z}^+$ conjunto de densidad cero tal que para cualesquiera $f, g \in \mathcal{L}_2^{\mathbb{K}}(X,\Sigma,\mu)$ se satisface*

$$\lim_{n\to\infty, n\notin J} \langle U_T^n(f), g\rangle = \langle f, 1\rangle\langle 1, g\rangle.$$

Demostración. Suponga que (X,Σ,μ) tiene una base numerable.

$\Longrightarrow$] Suponga que T es una transformación $\mu-$débilmente mezclante. Por el Teorema 9, existe $J \subseteq \mathbb{Z}^+$ un conjunto con densidad cero tal que, para cada $A, B \in \Sigma$ ocurre

$$\lim_{n\to\infty,\ n\notin J} \mu[T^{-n}(A) \cap B] = \mu[A]\mu[B].$$

De acuerdo con el bloque 2 del Teorema 10, para obtener el resultado, es suficiente verificar que para todo $f \in \mathcal{L}_2^{\mathbb{K}}(X,\Sigma,\mu)$ se tiene que

$$\lim_{n\to\infty, n\notin J} \langle U_T^n(f), f\rangle = \langle f, 1\rangle\langle 1, f\rangle.$$

La demostración de este hecho es similar a la del Teorema 10, únicamente agregando la condición de que $n \notin J$ en el proceso de límite.

$\Longleftarrow$] Suponga que existe $J \subseteq \mathbb{Z}^+$ conjunto de densidad cero tal que para cualesquiera $f, g \in \mathcal{L}_2^{\mathbb{K}}(X,\Sigma,\mu)$ se satisface

$$\lim_{n\to\infty, n\notin J} \langle U_T^n(f), g\rangle = \langle f, 1\rangle\langle 1, g\rangle.$$

Entonces, para cada $A, B \in \Sigma$ se tiene que $\chi_A, \chi_B \in \mathcal{L}_2^{\mathbb{K}}(X,\Sigma,\mu)$, luego

$$\lim_{n\to\infty, n\notin J} \mu[T^{-n}(A) \cap B] = \lim_{n\to\infty, n\notin J} \langle U_T^n(\chi_A), g\rangle = \langle \chi_A, 1\rangle\langle 1, \chi_B\rangle = \mu[A]\mu[B].$$

Por el Teorema 9, se concluye que T es una transformación $\mu-$débilmente mezclante.

$\boxtimes$

En el siguiente resultado se caracteriza la ergodicidad de una transformación T a través de la transformación producto directo $T \otimes T$ de la Definición 2 en el correspondiente espacio de probabilidad producto.

Teorema 11. *Sean (X,Σ,μ) un espacio de probabilidad, $T: X \to X$ una transformación $\mu-$preservadora de medida. Considere $(X \times X, \Sigma \otimes \Sigma, \mu \otimes \mu)$ el espacio de medida producto y denote por $T \otimes T$ a la transformación producto directo. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

(I) *T es una transformación $\mu-$débilmente mezclante*

(II) *$T \otimes T$ es una transformación $\mu \otimes \mu-$ergódica.*

(III) *$T \otimes T$ es una transformación $\mu \otimes \mu-$débilmente mezclante.*

Demostración.

(III) $\Longrightarrow$ (II)] Esta implicación se debe a la Observación 7.

(I) $\Longrightarrow$ (III)] Suponga que T es una transformación $\mu-$débilmente mezclante. Recuerde que

$$\Sigma \times \Sigma = \{A \times B : A, B \in \Sigma\}$$

es una semiálgebra de subconjuntos de $X \times X$ tal que $\sigma(\Sigma \times \Sigma) = \Sigma \otimes \Sigma$. Así que por el inciso (II) de la Proposición 4, para probar que $T \otimes T$ es una transformación $\mu \otimes \mu-$mezclante, bastará con verificar que para cualesquiera $A, B, C, D \in \Sigma$ se satisface que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \left|\mu \otimes \mu[(T \otimes T)^{-i}(A \times B) \cap (C \times D)] - \mu \otimes \mu[A \times B]\mu \otimes \mu[C \times D]\right| = 0. \tag{1.36}$$

Fije $A, B, C, D \in \Sigma$. Note que la sucesión de números reales $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, donde para cada $n \in \mathbb{N}$

$$a_n = \left|\mu \otimes \mu[(T \otimes T)^{-n}(A \times B) \cap (C \times D)] - \mu \otimes \mu[A \times B]\mu \otimes \mu[C \times D]\right|$$

está acotada, así que, por el Lema 2, para probar que se tiene la ecuación (1.36), es suficiente con demostrar que existe $J \subseteq \mathbb{Z}^+$ con densidad cero tal que

$$\lim_{n\to\infty,\ n\notin J} a_n = 0.$$

A continuación probaremos esto último. Observe que, como T es una transformación $\mu-$débilmente mezclante, por el Teorema 8 existen $J(A, C),\ J(B, D) \subseteq \mathbb{Z}^+$ conjuntos con densidad cero tales que

$$\lim_{n\to\infty,\ n\notin J(A,C)} \mu[T^{-n}(A) \cap C] = \mu[A]\mu[C], \text{ y}$$

$$\lim_{n\to\infty,\ n\notin J(B,D)} \mu[T^{-n}(B) \cap D] = \mu[B]\mu[D].$$

Observe que, con la notación del Lema 2, $J = J(A, C) \cup J(B, D) \subseteq \mathbb{Z}^+$ satisface que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|J|(n)}{n} \leq \lim_{n\to\infty} \frac{|J(A, C)|(n)}{n} + \lim_{n\to\infty} \frac{|J(B, D)|(n)}{n} = 0,$$

es decir J es un conjunto con densidad cero. Además, al igual que se hizo en la Observación 2, para cada $n \in \mathbb{N}$ tenemos que

$$(T \otimes T)^{-1}(A \times B) = T^{-1}(A) \times T^{-1}(B), \qquad \text{y también}$$

$$(T \otimes T)^{-1}(A \times B) \cap (C \times D) = [T^{-1}(A) \times T^{-1}(B)] \cap (C \times D) = [T^{-1}(A) \cap C] \times [T^{-1}(B) \cap D].$$

Entonces ocurre que

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty,\ n\notin J} \mu \otimes \mu[(T \otimes T)^{-1}(A \times B) \cap (C \times D)] &= \lim_{n\to\infty,\ n\notin J} \mu \otimes \mu[[T^{-1}(A) \cap C] \times [T^{-1}(B) \cap D]] \\
&= \lim_{n\to\infty,\ n\notin J} \mu[T^{-1}(A) \cap C]\mu[T^{-1}(B) \cap D] \\
&= \mu[A]\mu[C]\mu[B]\mu[D] \\
&= \mu \otimes \mu[A \times B]\ \mu \otimes \mu[C \times D].
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $T \otimes T$ es una transformación $\mu \otimes \mu-$débilmente mezclante.

(II) $\Longrightarrow$ (I) $]$ Suponga que $T \otimes T$ es una transformación $\mu \otimes \mu-$ergódica. Para demostrar que T es una transformación $\mu-$débilmente mezclante, por el inciso (III) del Teorema 8, basta con verificar que para todo $A, B \in \Sigma$ ocurre que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \left|\mu[T^{-i}(A) \cap B] - \mu[A]\mu[B]\right|^2 = 0.$$

Fije $A, B \in \Sigma$. Como $T \otimes T$ es una transformación $\mu \otimes \mu-$ergódica, por el Corolario 5 se tiene que

$$\begin{aligned} \mu[A]\mu[B] = \mu \otimes \mu[A \times X]\ \mu \otimes \mu[B \times X] &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \mu \otimes \mu[T^{-i}(A \times X) \cap (B \times X)] \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \mu \otimes \mu[(T^{-i}(A) \cap B) \times X] \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \mu[T^{-i}(A) \cap B] \end{aligned}$$

También

$$\begin{aligned} \mu[A]^2\mu[B]^2 = \mu \otimes \mu[A \times A]\ \mu \otimes \mu[B \times B] &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \mu \otimes \mu[T^{-i}(A \times A) \cap (B \times B)] \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \mu \otimes \mu[(T^{-i}(A) \cap B) \times (T^{-i}(A) \cap B)] \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \mu[T^{-i}(A) \cap B]^2. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \left|\mu[T^{-i}(A) \cap B] - \mu[A]\mu[B]\right|^2 &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \mu[T^{-i}(A) \cap B]^2 \\ &\quad - 2\mu[A]\mu[B] \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \mu[T^{-i}(A) \cap B] + \mu[A]^2\mu[B]^2 = 0. \end{aligned}$$

Como $A, B \in \Sigma$ fueron arbitrarios, por el Teorema 8 se concluye que T es una transformación $\mu-$débilmente mezclante.

$\boxtimes$

Proposición 5. *Sean (X, Σ, μ) un espacio de probabilidad, $T : X \to X$ una transformación $\mu-$preservadora de medida. Entonces T es una transformación $\mu-$fuertemente mezclante si y sólo si $T \otimes T$ es una transformación $\mu \otimes \mu-$fuertemente mezclante.*

Demostración.

$\Longrightarrow$ $]$ Suponga que T es una transformación $\mu-$fuertemente mezclante. Con la notación del Teorema 11, desde que $\Sigma \times \Sigma$ es una semiálgebra de subconjuntos de $X \times X$ tal que $\sigma(\Sigma \times \Sigma) = \Sigma \otimes \Sigma$, de acuerdo con la 4, para probar que $T \otimes T$ es una transformación $\mu \otimes \mu-$fuertemente mezclante es suficiente verificar que para todo $A, B, C, D \in \Sigma$ ocurre que

$$\lim_{n\to\infty} \mu \otimes \mu[(T \otimes T)^{-1}(A \times B) \cap (C \times D)] = \mu \otimes \mu[A \times B] \ \ \mu \otimes \mu[C \times D].$$

Fije $A, B, C, D \in \Sigma$. Como T es una transformación $\mu-$fuertemente mezclante, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \mu[T^{-n}(A) \cap C] = \mu[A]\mu[C], \quad \text{y}$$

$$\lim_{n\to\infty} \mu[T^{-n}(B) \cap D] = \mu[B]\mu[D].$$

Por la definición de la medida producto se tiene que

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}(\mu\otimes\mu)[(T\otimes T)^{-1}(A\times B)\cap(C\times D)] &= \lim_{n\to\infty}(\mu\otimes\mu)[(T^{-1}(A)\cap C)\times(T^{-n}(B)\cap D)]\\ &= \lim_{n\to\infty}\mu[T^{-n}(A)\cap C]\mu[T^{-n}(B)\cap D]\\ &= \lim_{n\to\infty}\mu[T^{-n}(A)\cap C]\ \lim_{n\to\infty}\mu[T^{-n}(B)\cap D]\\ &= \mu[A]\mu[C]\mu[B]\mu[D]=(\mu\otimes\mu)[A\times B]\ \ (\mu\otimes\mu)[C\times D].\end{aligned}$$

Por la Proposición 4 se concluye que $T\otimes T$ es una transformación $\mu\otimes\mu-$fuertemente mezclante.

$\Longleftarrow$] Suponga que $T\otimes T$ es una transformación $\mu\otimes\mu-$fuertemente mezclante. Entonces para todo $A,B\in\Sigma$ se tiene que

$$\begin{aligned}\mu[A]\mu[B]=(\mu\otimes\mu)[A\times X]\ (\mu\otimes\mu)[B\times X] &= \lim_{n\to\infty}(\mu\otimes\mu)[(T\otimes T)^{-1}(A\times X)\cap(B\times X)]\\ = \lim_{n\to\infty}(\mu\otimes\mu)[(T^{-1}(A)\cap B)\times X] &= \lim_{n\to\infty}\mu[T^{-n}(A)\cap B]\end{aligned}$$

Por la Definición 5 se tiene que T es una transformación $\mu-$fuertemente mezclante.

⊠

En este último apartado del capítulo se caracterizan a las transformaciones mezclantes a través del operador asociado a dicha transformación en $\mathcal{L}_2^{\mathbb{K}}(X,\Sigma,\mu)$.

DEFINICIÓN 7. *Sean (X,Σ,μ) un espacio de probabilidad, $T:X\to X$ una transformación $\mu-$preservadora de medida. A $\lambda\in\mathbb{C}$ es un valor propio de T si λ es un* **valor propio** *del operador U_T definido en $\mathcal{L}_2^{\mathbb{K}}(X,\Sigma,\mu)$, esto es, existe una función $f\in\mathcal{L}_2^{\mathbb{K}}(X,\Sigma,\mu)$ con $f\neq 0$ c.t.p. (μ) tal que $U_T(f)=\lambda f$ c.t.p. (μ). En tal caso, a f se le llama* **eigenfunción** *asociada al valor propio λ.*

OBSERVACIÓN 8. Sean (X,Σ,μ) un espacio de probabilidad, $T:X\to X$ una transformación $\mu-$preservadora de medida. Se tienen las siguientes afirmaciones:

1. $\lambda=1$ es un valor propio de T.
2. Si $\lambda\in\mathbb{C}$ es un valor propio de T, entonces $|\lambda|=1$.

Demostración de la Observación 8.

1. Considere cualquier $c\in\mathbb{C}$ con $c\neq 0$, y $\underline{c}:X\to\mathbb{C}$ la función constante asociada a c. Entonces
$$U_T(\underline{c})=\underline{c}\circ T=1\cdot\underline{c},$$
es decir, $\underline{c}$ es una eigenfunción asociada al valor propio 1 para T.

2. Sea $\lambda\in\mathbb{C}$ un valor propio de T y considere $f\in\mathcal{L}_2^{\mathbb{K}}(X,\Sigma,\mu)$ una eigenfunción asociada al valor propio λ. Se tiene que $U_T(f)=\lambda f$ y por el Teorema 3 se tiene que
$$\|f\|_2=\|U_T(f)\|_2=\|\lambda f\|_2=|\lambda|\|f\|_2.$$
Como $f\neq 0$ c.t.p. (μ), entonces $\|f\|_2\neq 0$, de aquí que $|\lambda|=1$.

⊠

DEFINICIÓN 8. *Sean (X,Σ,μ) un espacio de probabilidad, $T:X\to X$ una transformación $\mu-$preservadora de medida. Se dice que T es una transformación con* **espectro continuo** *si $\lambda=1$ es el único valor propio de T y las unicas eigenfunciones son funciones constantes no nulas.*

OBSERVACIÓN 9. Sean (X,Σ,μ) un espacio de probabilidad, $T:X\to X$ una transformación $\mu-$preservadora de medida. Son equivalentes:

(I) T es una transformación con espectro continuo.

(II) T es una transformación $\mu-$ergódica y $\lambda=1$ es el único valor propio de T.

Demostración de la Observación 9.

(I) $\Longrightarrow$ (II)] Suponga que T es una transformación con espectro continuo. Entonces $\lambda = 1$ es el único valor propio de T y las únicas eigenfunciones de T son las funciones constantes no nulas. Demostraremos que T es una tranformación $\mu-$ergódica. De acuerdo con el inciso (IV) del Teorema 7, es suficiente con verificar que para toda $f \in \mathcal{L}_2^{\mathbb{K}}(X, \Sigma, \mu)$ con $f \circ T = f$ se tiene que f es una función constante c.t.p. (μ). Precisamente, esto último es equivalente a la condición de que las únicas eigenfunciones asociadas al valor propio $\lambda = 1$ son las funciones constantes c.t.p. (μ).

(II) $\Longrightarrow$ (I)] Se tiene de forma análoga a la implicación anterior.

$\boxtimes$

El siguiente resultado, de Análisis Funcional, se enuncia sin demostración. Escribiremos K el circulo unitario en $\mathbb{C}$ con la topología usual y $\mathcal{B}(K)$ denota la $\sigma-$álgebra de Borel en K.

Dado $\mathcal{H}$ un espacio de Hibert de funciones complejo con producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$, $U : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ un operador lineal, diremos que U es un *operador lineal unitario* si U es una biyección y además para todo $f, g \in \mathcal{H}$ ocurre que $\langle U(f), U(g) \rangle = \langle f, g \rangle$.

Teorema 12 (Teorema Espectral para Operadores Unitarios). *Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hibert complejo, $U : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ un operador lineal unitario. Entonces para toda $f \in \mathcal{H}$ existe una única medida finita μ_f definida en $(K, \mathcal{B}(K))$ tal que para todo $n \in \mathbb{Z}$ se tiene que*

$$\langle U^n(f), f \rangle = \int_K z^n d\mu_f(z).$$

Considere (X, Σ, μ) un espacio de probabilidad, $T : X \to X$ una transformación $\mu-$ invertible preservadora de medida y U_T el operador asociado a T en $\mathcal{L}_2^{\mathbb{K}}(X, \Sigma, \mu)$. Entonces U_T es un operador lineal unitario. También, si T es una transformación con espectro continuo, para cada $f \in \mathcal{L}_2^{\mathbb{K}}(X, \Sigma, \mu)$ que satisfaga $\langle f, 1 \rangle = 0$ ocurre que μ_f no tiene átomos, esto es, para todo $z \in K$ se tiene $\mu_f[\{z\}] = 0$.

Observación 10. Sea (X, Σ, μ) un espacio de probabilidad y $f \in \mathcal{L}_1^{\mathbb{C}}(X, \Sigma, \mu)$, con $f = \mathrm{Re}(f) + i\mathrm{Im}(f)$. Se tiene que

$$\int_X f d\mu = \int_X \mathrm{Re}(f) d\mu + i \int_X \mathrm{Im}(f) d\mu.$$

Observe que

$$\overline{\int_X f d\mu} = \int_X \mathrm{Re}(f) d\mu - i \int_X \mathrm{Im}(f) d\mu = \int_X [\mathrm{Re}(f) d\mu - i\mathrm{Im}(f)] d\mu = \int_X \overline{f} d\mu.$$

Con el Teorema Espectral para operadores unitarios, se establece el siguiente resultado, donde se establece una condición necesaria y suficiente para garantizar que una transformación invertible preservadora de medida es débilmente mezclante, todo esto mediante el concepto de espectro continuo.

Teorema 13. *Sean (X, Σ, μ) un espacio de probabilidad y T una transformación $\mu-$invertible preservadora de medida. Entonces T es una transformación $\mu-$débilmente mezclante si y sólo si T tiene espectro continuo.*

Demostración.

$\Longrightarrow$] Procedamos por contradicción. Suponga que T es una transformación $\mu-$debilmente mezclante que no tiene espectro continuo. Por la Definición 8, esto implica que existen $\lambda \in \mathbb{C}$ y $f \in \mathcal{L}_2^{\mathbb{K}}(X, \Sigma, \mu)$ tales que $f \neq 0$ c.t.p. (μ), $U_T(f) = \lambda f$ c.t.p. (μ) y que $\lambda \neq 1$ o bien f no es una función constante c.t.p. (μ).

Suponga por ejemplo que $\lambda \neq 1$. Por el Corolario 2 se tiene que

$$\lambda \int_X f d\mu = \int_X \lambda f d\mu = \int_X U_T(f) d\mu = \int_X f d\mu,$$

lo cual significa que $\langle f, 1 \rangle = \int_X f d\mu = 0$. Por la Observación 8 se tiene que $|\lambda| = 1$. Como T es una transformación $\mu-$débilmente mezclante, por el bloque 2 del Teorema 10 se tiene que

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \left| \langle U_T^i(f), f \rangle - \langle f, 1 \rangle \langle 1, f \rangle \right| = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \left| \langle U_T^i(f), f \rangle \right| \\ &= \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \left| \langle \lambda^i f, f \rangle \right| = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} |\lambda|^i \left| \langle f, f \rangle \right| = \langle f, f \rangle = \|f\|_2. \end{aligned}$$

Entonces $f = 0$ c.t.p. (μ), que es una contradicción. Por lo tanto, se tiene que $\lambda = 1$. Entonces $f = U_T(f) = f \circ T$ c.t.p. (μ). Por la Observación 7, como T es una transformación $\mu-$débilmente mezclante, entonces T es una transformación $\mu-$ergódica. Así que, por el inciso (V) del Teorema 7, la condición $f = f \circ T$ c.t.p. (μ) implica que f es una función constante c.t.p. (μ), que contradice las hipótesis. Esto demuestra la implicación.

$\Longleftarrow$] Suponga que T es una transformación con espectro continuo. Por el bloque 2 del Teorema 10, para probar que T es una transformación $\mu-$débilmente mezclante, es suficiente con verificar que para cada $f \in \mathcal{L}_2^{\mathbb{K}}(X, \Sigma, \mu)$ se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \left| \langle U_T^i(f), f\rangle - \langle f, 1\rangle\langle 1, f\rangle \right|^2 = 0.$$

Considere $f \in \mathcal{L}_2^{\mathbb{K}}(X, \Sigma, \mu)$ y considere los casos siguientes:

Caso 1. Existe $c \in \mathbb{C}$ tal que $f = \underline{c}$ c.t.p. (μ).
En este caso se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \left| \langle U_T^i(f), f\rangle - \langle f, 1\rangle\langle 1, f\rangle \right|^2 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \left| \langle \underline{c}, \underline{c}\rangle - \langle \underline{c}, 1\rangle\langle 1, \underline{c}\rangle \right|^2 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \left| |c|^2 - |c|^2 \right| = 0.$$

Caso 2. $\langle f, 1\rangle = 0$.
Considere μ_f la medida finita en $(K, \mathcal{B}(K))$ del Teorema 1.12. Se tiene la siguiente

Afirmación. Se satisfacen

(a) μ_f no tiene átomos.

(b) Si $\mu_f \otimes \mu_f$ denota la medida producto en el espacio producto $(K^2, \mathcal{B}(K)^{\otimes 2})$ entonces

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} (x\bar{y})^i = 0 \qquad \text{c.t.p}(\mu_f \otimes \mu_f)(x, y).$$

(c) Se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \left| \int_K z^i d\mu_f(z) \right|^2 = 0.$$

Demostración de la Afirmación.

(a) Se sigue del Teorema 12.

(b) Dfina el conjunto

$$\Delta = \Delta(K^2) = \{(z, z) : z \in K\}.$$

Note que $\Delta \in \mathcal{B}(K)^{\otimes 2}$. Del inciso (a) y el Teorema de Fubini se obtiene que

$$\begin{aligned}(\mu_f \otimes \mu_f)(\Delta) &= \int_\Delta d(\mu_f \otimes \mu_f) = \int_K \int_{\{y\in K:\ (x,y)\in\Delta\}} d\mu_f(y) d\mu_f(x) \\ &= \int_K \mu_f[\{y \in K :\ (x, y) \in \Delta\}] d\mu_f(x) = \int_K \mu_f[\{x\}] d\mu_f(x) = 0.\end{aligned}$$

Observe que para todo $(x, y) \notin \Delta$ tenemos que $x\bar{y} = x\dfrac{\bar{y}}{|y|^2} = xy^{-1} \neq 1$, así que para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} (x\bar{y})^i = \frac{1}{n} \frac{1 - (x\bar{y})^n}{1 - (x\bar{y})}, \qquad \text{también}$$

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} (x\bar{y})^i \right| \le \frac{1}{n} \frac{1 + |x\bar{y}|^n}{|1 - x\bar{y}|} = \frac{2}{n} \frac{1}{|1 - x\bar{y}|}.$$

El lado derecho de la última desigualdad converge a cero cuando n tiende a infinito. Por lo tanto, para todo $(x, y) \notin \Delta$ ocurre que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} (x\bar{y})^i = 0.$$

Como $(\mu_f \otimes \mu_f)(\Delta) = 0$, se tiene la conclusión.

(c) Para cada $n \in \mathbb{N}$ defina la función $\varphi_n : k \times K \to K$ dada para $(x, y) \in K \times K$ como

$$\varphi_n(x, y) = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} (x\bar{y})^i.$$

Observe que ϕ_n es una función $(\mathcal{B}(K)^{\otimes 2}, \mathcal{B}(K))-$medible tal que

$$\left|\varphi_n(x, y)\right| = \left|\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} (x\bar{y})^i\right| \leq \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} |x\bar{y}|^i = 1.$$

También, por el Teorema de Fubini y la Observación 10 tenemos que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \left| \int_K x^i d\mu_f(x) \right|^2 &= \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \left(\int_K x^i d\mu_f(x) \right) \left(\overline{\int_K x^i d\mu_f(x)} \right) \\
&= \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \left(\int_K x^i d\mu_f(x) \right) \left(\int_K \bar{y}^i d\mu_f(y) \right) = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \int_{K \times K} (x\bar{y})^i d(\mu_f \otimes \mu_f)(x, y) \\
&= \int_{K \times K} \varphi_n(x, y) d(\mu_f \otimes \mu_f)(x, y).
\end{aligned}$$

Como $\mu_f \otimes \mu_f$ es una medida finita, por el inciso anterior y e Teorema de Convergencia Dominada se tiene que

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \left| \int_K x^i d\mu_f(x) \right|^2 &= \lim_{n\to\infty} \int_{K \times K} \varphi_n(x, y) d(\mu_f \otimes \mu_f)(x, y) \\
&= \int_{K \times K} \lim_{n\to\infty} \varphi_n(x, y) d(\mu_f \otimes \mu_f)(x, y) = 0.
\end{aligned}$$

Así se tiene la Afirmación.

Observe que, por el Teorema 12, para cada $i \in \mathbb{Z}$ tenemos que

$$\langle U_T^i(f), f \rangle = \int_K x^i d\mu_f(x).$$

De esto último y el inciso (c) de la Afirmación se obtiene que

$$\lim_{n\to\infty} \left|\langle U_T^i(f), f \rangle - \langle f, 1 \rangle \langle 1, f \rangle\right|^2 = \lim_{n\to\infty} \left|\langle U_T^i(f), f \rangle\right|^2 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \left| \int_K x^i d\mu_f(x) \right|^2 = 0.$$

<u>Caso 3.</u> $f \in \mathcal{L}_2^{\mathbb{K}}(X, \Sigma, \mu)$.
En este caso, considere la función $g : X \to \mathbb{K}$ definida como $g = f - \langle f, 1 \rangle$. Observe que $g \in \mathcal{L}_2^{\mathbb{K}}(X, \Sigma, \mu)$ y que, por el Corolario 2, para cada $n \in \mathbb{N}$ ocurre que

$$\begin{aligned}
\left|\langle U_T^i(g), g \rangle\right| &= \left|\langle U_T^i(f) - \langle f, 1 \rangle, f - \langle f, 1 \rangle \rangle\right| = \left|\langle U_T^i(f), f \rangle - \langle U_T^i(f), 1 \rangle \langle 1, f \rangle - \langle 1, f \rangle \langle 1, f \rangle + \langle 1, f \rangle \langle 1, f \rangle\right| \\
&= \left|\langle U_T^i(f), f \rangle - \langle f, 1 \rangle \langle 1, f \rangle\right|
\end{aligned}$$

Finalmente, se aplica el Caso 2 a la función g y se tiene la conclusión.

Entonces, por el Teorema 10 se tiene que T es una transformación $\mu-$débilmente mezclante.

$\boxtimes$

Capítulo 2

El corrimiento de Markov.

En este capítulo se estudia el corrimiento bilateral de Markov. Esto permite obtener los resultados usuales para cadenas de Markov, desde la perspectiva de la teoría ergódica.

Iniciaremos esta sección introduciendo la notación que será utilizada.

Sea $m \geq 1$. Denotemos por $[m] = \{0, \ldots, m-1\}$. Consideremos $[m]^{\mathbb{Z}}$ al espacio de las funciones de $\mathbb{Z}$ a $[m]$. A los elementos de $[m]^{\mathbb{Z}}$ los denotaremos por $x = (x_r)_{r\in\mathbb{Z}}$.

Para cada $t \in \mathbb{Z}$, definimos a la $t-$*ésima proyección* como la función $\pi_t : [m]^{\mathbb{Z}} \to [m]$ para cada $(x_r)_{r\in\mathbb{Z}} \in [m]^{\mathbb{Z}}$ como

$$\pi_t((x_r)_{r\in\mathbb{Z}}) = x_t.$$

Así mismo, $\mathcal{P}([m])$ es la potencia de $[m]$.

Para cada $k \in \mathbb{N}$, $i_1, \ldots, i_k \in \mathbb{Z}$, $A_1, \ldots, A_k \in \mathcal{P}([m])$ definimos el *cilindro con base* $A_1, \ldots, A_k$ como el conjunto

$$C(i_1, \ldots, i_k; A_1, \ldots, A_k) = \bigcap_{l=1}^{k} \pi_{i_l}^{-1}(A_l) = \{(x_r)_{r\in\mathbb{Z}} \in [m]^{\mathbb{Z}} : \ (x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}) \in A_1 \times \cdots \times A_k\}$$

También, dados $k \in \mathbb{N}$, $j \in \mathbb{Z}$, $q_0, \ldots, q_k \in [m]$ se define el $(j; q_0, \ldots, q_k)$-cilindro en $[m]^{\mathbb{Z}}$ como

$$C(j, q_0, \ldots, q_k) = \bigcap_{l=0}^{k} \pi_{j+l}^{-1}(\{q_l\}) = \bigcap_{l=0}^{k} C(j+l, q_l) = \{(x_r)_{r\in\mathbb{Z}} \in [m]^{\mathbb{Z}} : \ (q_0, \ldots, q_k) = (x_j, \ldots, x_{j+k})\}.$$

Considere los conjuntos

$$\mathcal{S} = \{ \ C(j, q_0, \ldots, q_k) : \ k \in \mathbb{N}, \ j \in \mathbb{Z}, \ q_0, \ldots, q_k \in [m] \ \} \cup \{\emptyset\},$$

$$\mathcal{A}_{\mathcal{S}} = \left\{ \biguplus_{=1}^{t} C_i : C_i \in \mathcal{S} \right\}$$

$$\mathcal{P}([m])^{\mathbb{Z}} = \{C(i_1, \ldots, i_k; A_1, \ldots, A_k) : \ i_1, \ldots, i_k \in \mathbb{Z}, \ A_1, \ldots, A_k \in \mathcal{P}([m]), \ k \in \mathbb{N}\}$$

Sean $a, \ b \in \mathbb{Z}$. Se definen los conjuntos:

$$\begin{aligned}
[a, b] &= \{x \in \mathbb{Z} : \ a \leq x \leq b\} \\
[a, b[&= \{x \in \mathbb{Z} : \ a \leq x < b\} \\
]a, b] &= \{x \in \mathbb{Z} : \ a < x \leq b\} \\
]a, b[&= \{x \in \mathbb{Z} : \ a < x < b\}
\end{aligned}$$

Utilizaremos la notación $a \wedge b = \text{máx}\{a, b\}$, $a \vee b = \text{mín}\{a, b\}$.

Dados $l \geq 1$, $j_1, \ldots, j_l \in \mathbb{Z}$ fijos, tales que para cualesquiera $k \neq m$ se tiene que $j_k \geq j_m$, consideramos la función $\phi : \{j_1, \ldots, j_l\} \to \{1, \ldots, l\}$ definida como $\phi(j_i) = i$.

Observación 11. Se tienen las siguientes propiedades generales:

1. Sean $a,\ b,\ c,\ d \in \mathbb{Z}$ con $a \leq b$, $c \leq d$. Entonces

$$[a,b] \cap [c,d] = \begin{cases} \emptyset & \text{si } b < c \text{ o } d < a \\ [a \vee c, b \wedge d] & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$[a,b] \backslash [c,d] = \begin{cases} [a,b] & \text{si } [a,b] \cap [c,d] = \emptyset \\ [a,c[& \text{si } a \leq c \leq b \leq d \\ ]d,b] & \text{si } c \leq a \leq d \leq b \end{cases}$$

$$[c,d] \backslash [a,b] = \begin{cases} [c,d] & \text{si } [a,b] \cap [c,d] = \emptyset \\ [c,a[& \text{si } c \leq a \leq d \leq b \\ ]b,d] & \text{si } a \leq c \leq b \leq d \end{cases}$$

2. Para cualesquiera $A, B \in \mathcal{S}$ se tiene que $A \cap B \in \mathcal{A}_{\mathcal{S}}$.
3. Para todo $A \in \mathcal{S}$ tenemos que $[m]^{\mathbb{Z}} \backslash A \in \mathcal{A}_{\mathcal{S}}$.
4. (Propiedades de la unión de elementos de $\mathcal{A}_{\mathcal{S}}$)
   I. Si $A, B \in \mathcal{S}$ con $A \cap B = \emptyset$, entonces $A \cup B \in \mathcal{A}_{\mathcal{S}}$.
   II. Si $A, B \in \mathcal{S}$, entonces $A \cup B \in \mathcal{A}_{\mathcal{S}}$.
   III. Si $A, B \in \mathcal{A}_{\mathcal{S}}$, entonces $A \cup B \in \mathcal{A}_{\mathcal{S}}$.
5. Para $A, B \in \mathcal{A}_{\mathcal{S}}$ se tiene que $A \cap B \in \mathcal{A}_{\mathcal{S}}$.
6. Para todo $A \in \mathcal{A}_{\mathcal{S}}$ tenemos que $[m]^{\mathbb{Z}} \backslash A \in \mathcal{A}_{\mathcal{S}}$.
7. $[m]^{\mathbb{Z}} \in \mathcal{A}_{\mathcal{S}}$.
8. $\mathcal{A}_{\mathcal{S}}$ es un álgebra de subconjuntos de $[m]$.
9. $\mathcal{P}([m])^{\mathbb{Z}} = \mathcal{A}_{\mathcal{S}}$.

Se observa que $([m], \mathcal{P}([m]))$ es un espacio medible, así que puede considerarse el espacio producto $([m]^{\mathbb{Z}}, \mathcal{P}([m])^{\otimes \mathbb{Z}})$ donde $\mathcal{P}([m])^{\otimes \mathbb{Z}}$ es la $\sigma-$álgebra de subconjuntos de $[m]^{\mathbb{Z}}$ generada por $\mathcal{P}([m])^{\mathbb{Z}}$. Así que la condición 9 permite concluir que $\mathcal{P}([m])^{\otimes \mathbb{Z}} = \sigma(\mathcal{P}([m])^{\mathbb{Z}}) = \sigma(\mathcal{A}_{\mathcal{S}})$.

Demostración de la Observación 11.

1. La demostración de este hecho puede verificarse mediante cálculos directos.
2. Sean $A, B \in \mathcal{S}$ con $A = C(j_1, q_0^1, \ldots, q_{k_1}^1)$, $B = C(j_2, q_0^2, \ldots, q_{k_2}^2)$, donde $j_1, j_2 \in \mathbb{Z}$, $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$. Denote por $\widetilde{A} = [j_1, j_1 + k_1]$, $\widetilde{B} = [j_2, j_2 + k_2]$. Considere los siguientes casos:

   (α) $[j_1, j_1 + k_1] \cap [j_2, j_2 + k_2] = \emptyset$.
   Note que en esta situación, de acuerdo con 1, se tiene que $j_1 + k_1 < j_2$, o bien $j_2 + k_2 < j_1$. Denote por $\widetilde{A \cap B} =](j_1 + k_1) \wedge (j_2 + k_2), j_1 \vee j_2[$.

   Se afirma que

$$A \cap B = D = \biguplus_{q \in [m]^{\widetilde{A \cap B}}} C\big(j_1 \wedge j_2, q_0^{\phi(j_1 \wedge j_2)}, \ldots, q_{k_{\phi(j_1 \wedge j_2)}}^{\phi(j_1 \wedge j_2)}, q = (q_i)_{i \in \widetilde{A \cap B}}, q_0^{\phi(j_1 \vee j_2)}, \ldots, q_{k_{\phi(j_1 \vee j_2)}}^{\phi(j_1 \vee j_2)}\big)$$

   Probaremos la primera contención a continuación. Sea $(x_r)_{r \in \mathbb{Z}} \in A \cap B$, por la definición de A y B se tiene que:

$$x_{l+(j_1 \wedge j_2)} = q_l^{\phi(j_1 \wedge j_2)}, \qquad l \in \{0, \ldots, k_{(j_1 \wedge j_2)}\}.$$
$$x_{l+(j_1 \vee j_2)} = q_l^{\phi(j_1 \vee j_2)}, \qquad l \in \{0, \ldots, k_{(j_1 \vee j_2)}\}.$$

   De modo que considerando $x = (x_i)_{i \in](j_1+k_1) \wedge (j_2+k_2), j_1 \vee j_2[} \in \widetilde{A \cap B}$, se obtiene que

$$(x_r)_{r \in \mathbb{Z}} \in C\big(j_1 \wedge j_2, q_0^{\phi(j_1 \wedge j_2)}, \ldots, q_{k_{\phi(j_1 \wedge j_2)}}^{\phi(j_1 \wedge j_2)}, x = (x_i)_{i \in \widetilde{A \cap B}}, q_0^{\phi(j_1 \vee j_2)}, \ldots, q_{k_{\phi(j_1 \vee j_2)}}^{\phi(j_1 \vee j_2)}\big).$$

   Así que $(x_r)_{r \in \mathbb{Z}} \in D$. Esto prueba la primera contención. La otra contención se obtiene de manera similar. Entonces $A \cap B = D$.

(β) $[j_1, j_1 + k_1] \cap [j_2, j_2 + k_2] \neq \emptyset$.
Observe que $\widetilde{A} \cap \widetilde{B} = [j_1 \vee j_2, (j_1 + k_1) \wedge (j_2 + k_2)]$. Definamos

$$\widetilde{C} = [j_1 \wedge j_2, j_1 \vee j_2[, \quad \widetilde{D} =](j_1 + k_1) \wedge (j_2 + k_2), (j_1 + k_1) \vee (j_2 + k_2)]$$

También, por el inciso 1 se tiene que

$$\begin{aligned}\widetilde{A} \cup \widetilde{B} &= [j_1 \wedge j_2, (j_1 + k_1) \vee (j_2 + k_2)] \\ &= [j_1 \wedge j_2, j_1 \vee j_2[\uplus [j_1 \vee j_2, (j_1 + k_1) \wedge (j_2 + k_2)] \uplus](j_1 + k_1) \wedge (j_2 + k_2), (j_1 + k_1) \vee (j_2 + k_2)] \\ &= \widetilde{C} \uplus \big(\widetilde{A} \cap \widetilde{B}\big) \uplus \widetilde{D}.\end{aligned}$$

En el supuesto de que para cada $l \in \widetilde{A} \cap \widetilde{B}$ se satisfaga que:

$$q^{\phi(j_1 \vee j_2)}_{l - j_{\phi(j_1 \vee j_2)}} = q^{\phi(j_1 \wedge j_2)}_{l - j_{\phi(j_1 \wedge j_2)}} \tag{2.1}$$

definimos el conjunto

$$E = C\big(j_1 \wedge j_2, \big(q^{\phi(j_1 \wedge j_2)}_{l - j_{\phi(j_1 \wedge j_2)}}\big)_{i \in \widetilde{C}}, \big(q^{\phi(j_1 \vee j_2)}_{l - j_{\phi(j_1 \vee j_2)}}\big)_{i \in \widetilde{A} \cap \widetilde{B}}, \big(q^{\phi((j_1+k_1) \vee (j_2+k_2))}_{l - j_{\phi((j_1+k_1) \vee (j_2+k_2))}}\big)_{i \in \widetilde{D}}\big).$$

Se afirma que:

$$A \cap B = \begin{cases} E & \text{si para cada} \quad l \in \widetilde{A} \cap \widetilde{B},\ q^{\phi(j_1 \vee j_2)}_{l - j_{\phi(j_1 \vee j_2)}} = q^{\phi(j_1 \wedge j_2)}_{l - j_{\phi(j_1 \wedge j_2)}} \\ \emptyset & \text{en otro caso} \end{cases}$$

lo cual se obtendrá analizando un subcaso (los casos restantes se obtienen exhaustivamente de la misma forma). Utilizando la definición de A y B, tras renombrar índices, se obtiene que

$$\begin{aligned}A \cap B &= \bigcap_{l=0}^{k_1} \pi^{-1}_{j_1 + l}(\{q^1_l\}) \cap \bigcap_{l=0}^{k_2} \pi^{-1}_{j_2 + l}(\{q^2_l\}) \\ &= \bigcap_{l \in \widetilde{A} \backslash \widetilde{B}} \pi^{-1}_l(\{q^1_{l - j_1}\}) \ \cap \bigcap_{l \in \widetilde{A} \cap \widetilde{B}} \pi^{-1}_l(\{q^1_{l - j_1}\} \cap \{q^2_{l - j_2}\}) \ \cap \bigcap_{l \in \widetilde{B} \backslash \widetilde{A}} \pi^{-1}_l(\{q^2_{l - j_2}\})\end{aligned}$$

- Subcaso (i): $j_1 \leq j_2 \leq j_2 + k_2 \leq j_1 + k_1$.
  En este caso, existe $u \geq 0$ tal que $j_2 = j_1 + u$. Así que, por el inciso 1 de esta observación, se sigue:

  $$\widetilde{A} \cap \widetilde{B} = [j_1 \vee j_2, (j_1 + k_1) \wedge (j_2 + k_2)] = [j_2, j_2 + k_2] = [j_1 + u, j_1 + u + k_2],$$

  $$\widetilde{A} \cup \widetilde{B} = [j_1, j_1 + k_1] = \widetilde{A},$$

  $$\widetilde{A} \backslash \widetilde{B} = [j_1 \wedge j_2, j_1 \vee j_2[\uplus](j_1 + k_1) \wedge (j_2 + k_2), (j_1 + k_1) \vee (j_2 + k_2)] = [j_1, j_1 + u - 1] \uplus [j_1 + k_2 + u + 1, j_1 + k_1],$$

  $$\widetilde{B} \backslash \widetilde{A} = \emptyset,$$

  $$\widetilde{A} \cap \widetilde{B} = [j_2, j_2 + k_2] = [j_1 + u, j_1 + k_2 + u].$$

  De donde, (ajustando nuevamente los índices), se tiene que:

  $$\begin{aligned}A \cap B &= \bigcap_{l \in \widetilde{A} \backslash \widetilde{B}} \pi^{-1}_l(\{q^1_{l - j_1}\}) \ \cap \bigcap_{l \in \widetilde{A} \cap \widetilde{B}} \pi^{-1}_l(\{q^1_{l - j_1}\} \cap \{q^2_{l - j_2}\}) \\ &= \bigcap_{l \in [j_1, j_1 + u - 1]} \pi^{-1}_l(\{q^1_{l - j_1}\}) \ \cap \bigcap_{l \in [j_1 + u, j_1 + k_2 + u]} \pi^{-1}_l(\{q^1_{l - j_1}\} \cap \{q^2_{l - j_2}\}) \ \cap \\ &\quad \bigcap_{l \in [j_1 + k_2 + u + 1, j_1 + k_1]} \pi^{-1}_l(\{q^1_{l - j_1}\}) \\ &= \bigcap_{l \in [0, u - 1]} \pi^{-1}_l(\{q^1_l\}) \ \cap \bigcap_{l \in [u, k_2 + u]} \pi^{-1}_l(\{q^1_l\} \cap \{q^2_{l - u}\}) \ \cap \\ &\quad \bigcap_{l \in [k_2 + u + 1, k_1]} \pi^{-1}_l(\{q^1_l\}).\end{aligned}$$

  En el supuesto de que para cada $l \in [u, u + k_2]$ se satisfaga que:

$$q_l^1 = q_{l-u}^2$$

(lo cuál equivale a la ecuación (2.1) y se requiere como condición para que la última intersección no sea vacía), se define el conjunto

$$E = C(j_1, q_0^1, \ldots, q_{u-1}^1, q_u^2, \ldots, q_{u+k2}^2, q_{k_2+u+1}^1, \ldots, q_{k_1}^1).$$

de donde, se tiene finalmente que

$$A \cap B = \begin{cases} E & \text{si para cada} \quad l \in [u,\ k_2 + u],\ q_l^1 = q_{l-u}^2 \\ \emptyset & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Se obtiene que $A \cap B \in \mathcal{S}$.

Entonces, en ambos casos se concluye $A \cap B \in \mathcal{A}_{\mathcal{S}}$.

3. Sea $A \in \mathcal{S}$ con $A = C(j, q_0, \ldots, q_k)$. Entonces, se verifica de inmediato que

$$B_l = [m]^{\mathbb{Z}} \backslash C(j+l, q_l) = [m]^{\mathbb{Z}} \backslash \bigcap_{l=0}^{k} \pi_{j+l}^{-1}(\{q_l\}) = \biguplus_{i_l \in [m] \backslash \{q_l\}} C(j+l, i_l), \qquad l \in \{0, \ldots, k\} \tag{2.2}$$

Y de la expresión (2.2)

$$[m]^{\mathbb{Z}} \backslash A = \bigcup_{l=0}^{k} \big([m]^{\mathbb{Z}} \backslash \pi_{j+l}^{-1}(\{q_l\})\big) = \bigcup_{l=0}^{k} B_l.$$

Definamos los siguientes conjuntos

$$A_0 = B_0 = \biguplus_{i_0 \in [m] \backslash \{q_0\}} C(j, i_0),$$

y para cada $l \in \{1, \ldots, k\}$

$$A_l = B_l \backslash A_{l-1}.$$

De la definición de dichos conjuntos se verifica fácilmente que $[m]^{\mathbb{Z}} \backslash A = \biguplus_{l=0}^{k} A_l$. De la identidad (2.2) se sigue que

$$[m]^{\mathbb{Z}} \backslash A_0 = C(j, q_0),$$

y recursivamente, para cada $l \in \{1, \ldots, k\}$ se deduce que:

$$B_l^{\mathcal{C}} = [m]^{\mathbb{Z}} \backslash B_l = C(j+l, q_l),$$

$$\begin{aligned} A_l &= \big(B_l \cap A_0\big) \cup \bigcup_{r=1}^{l-1} \big(B_l \cap B_r^{\mathcal{C}}\big) \\ &= \Bigg(\biguplus_{(i_0, i_l) \in [m] \backslash \{q_0\} \times [m] \backslash \{q_l\}} C(j, i_0) \cap C(j+l, i_l) \Bigg) \cup \bigcup_{r=1}^{l-1} \Bigg(\biguplus_{i_l \in [m] \backslash \{q_l\}} C(j+r, q_r) \cap C(j+l, i_l) \Bigg) \\ &= \biguplus_{(i_0, \ldots, i_l) \in D_l} C(j, i_0, \ldots, i_l), \end{aligned}$$

donde $\bigcup_{j=1}^{0} = \emptyset$, y $D_l = \big[[m] \times \cdots \times [m] \times ([m] - \{q_l\})\big] - \big[\{q_0\} \times ([m] - \{q_1\}) \times \cdots \times ([m] - \{q_{l-1}\}) \times ([m] - \{q_l\})\big]$.

Así que $[m]^{\mathbb{Z}} \backslash A = \biguplus_{l=0}^{k} A_l = \biguplus_{l=0}^{k} \biguplus_{(i_0, \ldots, i_l) \in D_l} C(j, i_0, \ldots, i_l)$, que es un elemento de $\mathcal{A}_{\mathcal{S}}$. Por lo tanto $[m]^{\mathbb{Z}} \backslash A \in \mathcal{A}_{\mathcal{S}}$.

4. Sean $A, B \in \mathcal{S}$ cualesquiera.

   I. Es claro de la definición de $\mathcal{A}_{\mathcal{S}}$.

   II. Note que $A \backslash B = A \cap ([m]^{\mathbb{Z}} \backslash B)$, $B \backslash A = B \cap ([m]^{\mathbb{Z}} \backslash A)$, que de acuerdo con los incisos 1, 2 y 3 de esta observación, son elementos de $\mathcal{A}_{\mathcal{S}}$. De modo que, por el inciso I se obtiene que $A \cup B = (A \backslash B) \uplus (A \cap B) \uplus (B \backslash A) \in \mathcal{A}_{\mathcal{S}}$.

   III. Se procede inductivamente sobre el número de uniendos de A, B y se utiliza el inciso II.

5. Sean $A, B \in \mathcal{A}_{\mathcal{S}}$ cualesquiera con $A = \biguplus_{i=1}^{r} A_i$, $B = \biguplus_{=1}^{t} B_j$, donde $A_i, B_j \in \mathcal{S}$. Empleando la definición de intersección de conjuntos, se obtiene que:

$$A \cap B = \biguplus_{(i,j) \in \{1,\ldots,r\} \times \{1,\ldots,t\}} A_i \cap B_j,$$

   donde, para cada $(i, j) \in \{1, \ldots, r\} \times \{1, \ldots, t\}$, se tiene que, por el inciso 1, $A_i \cap B_j \in \mathcal{A}_{\mathcal{S}}$. Por el inciso 4 se concluye que $A \cap B \in \mathcal{A}_{\mathcal{S}}$.

6. Fije $A \in \mathcal{A}_{\mathcal{S}}$ con $A = \biguplus_{i=1}^{r} A_i$, donde $A_i \in \mathcal{S}$. Empleando la afirmación del inciso 3, $[m]^{\mathbb{Z}} \backslash A_i \in \mathcal{A}_{\mathcal{S}}$. Luego, por el inciso 5 y el principio de inducción matemática, se sigue que

$$[m]^{\mathbb{Z}} \backslash A = \bigcap_{i=1}^{r} ([m]^{\mathbb{Z}} \backslash A_i) \in \mathcal{A}_{\mathcal{S}}.$$

7. Basta observar que $[m]^{\mathbb{Z}} = \biguplus_{q_0 \in [m]} C(0, q_0)$.

8. Es inmediato de todos los incisos anteriores.

9. Por la definición de $\mathcal{A}_{\mathcal{S}}$, es claro que $\mathcal{A}_{\mathcal{S}} \subseteq \mathcal{P}([m])^{\mathbb{Z}}$. Para probar la contención restante, considere $D \in \mathcal{P}([m])^{\mathbb{Z}}$, con $D = C(i_1, \ldots, i_k; A_1, \ldots, A_k) = \bigcap_{l=1}^{k} \pi_{i_l}^{-1}(A_l)$, donde $k \in \mathbb{N}$, $i_1, \ldots, i_k \in \mathbb{Z}$, $A_1, \ldots, A_k \in \mathcal{P}([m])$. Por el hecho de que $\mathcal{A}_{\mathcal{S}}$ es un álgebra de subconjuntos de $[m]^{\mathbb{Z}}$, así como el hecho de que:

$$D = C(i_1, \ldots, i_k; A_1, \ldots, A_k) = \bigcap_{l=1}^{k} \pi_{i_l}^{-1}(A_l) = \bigcap_{l=1}^{k} \bigcup_{d_l \in A_l} \pi_{i_l}^{-1}(\{d_k\}) = \bigcap_{l=1}^{k} \bigcup_{d_l \in A_l} C(i_l, d_l),$$

   obtenemos que $D \in \mathcal{A}_{\mathcal{S}}$. Por lo tanto, $\mathcal{P}([m])^{\mathbb{Z}} \subseteq \mathcal{A}_{\mathcal{S}}$.

$\boxtimes$

2.1. Construcción de medidas de probabilidad en $\left([m]^{\mathbb{Z}}, \mathcal{P}([m])^{\otimes \mathbb{Z}}\right)$.

Emplearemos el siguiente resultado para construir medidas de probabilidad en el espacio medible $\left([m]^{\mathbb{Z}}, \mathcal{P}([m])^{\otimes \mathbb{Z}}\right)$.

TEOREMA 14 (TEOREMA DE CONSISTENCIA DE DANIELL- KOLMOGOROV PARA $\left([m]^{\mathbb{Z}}, \mathcal{P}([m])^{\otimes \mathbb{Z}}\right)$). *Sea $m \geq 1$. Suponga que para cada $k \in \mathbb{N}$, $i_0, \ldots, i_k \in [m]$ existe $\mu_k(i_0, \ldots, i_k) \in [0, 1]$ tal que se satisfacen las siguientes condiciones (condiciones de consistencia de Kolmogorov):*

I) $\sum_{i_0 \in [m]} \mu_0(i_0) = 1$

II) *Para cada $k \in \mathbb{N}$, $i_0, \ldots, i_k \in [m]$ se tiene que:*

$$\mu_k(i_0, \ldots, i_k) = \sum_{i_{k+1} \in [m]} \mu_{k+1}(i_0, \ldots, i_k, i_{k+1}).$$

Entonces existe una única medida de probabilidad $\mu : \mathcal{P}([m])^{\otimes\mathbb{Z}} \to \mathbb{R}$ tal que, para todo $j \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{N}$, $q_0, \dots, q_k \in [m]$ se satisface:

$$\mu\big(C(j, q_0, \dots, q_k)\big) = \mu_k(q_0, \dots, q_k). \tag{2.3}$$

Demostración. Consultar [Par05]. ⊠

2.2. Transformaciones Preservadoras de Medida en $\big([m]^{\mathbb{Z}}, \mathcal{P}([m])^{\otimes\mathbb{Z}}\big)$.

Se describirá de una forma más general a una transformación en $\big([m]^{\mathbb{Z}}, \mathcal{P}([m])^{\otimes\mathbb{Z}}\big)$ a continuación.

Considere un conjunto de medidas en $[0,1]$, digamos, $\mu_k(i_0, \dots, i_k)$, que satisfacen las hipótesis de consistencia del Teorema 14 y $\mu : \mathcal{P}([m])^{\otimes\mathbb{Z}} \to \mathbb{R}$ la única medida de probabilidad en $\big([m]^{\mathbb{Z}}, \mathcal{P}([m])^{\otimes\mathbb{Z}}\big)$ que satisface la condición (2.3). Observe que una función de $[m]^{\mathbb{Z}}$ en $[m]^{\mathbb{Z}}$ está completamente determinada por la definición de la misma con respecto a las proyecciones de $[m]^{\mathbb{Z}}$ en $[m]$. Se define $T : [m]^{\mathbb{Z}} \to [m]^{\mathbb{Z}}$ como la única función que, para cada $n \in \mathbb{Z}$ y $(x_r)_{r\in\mathbb{Z}} \in [m]^{\mathbb{Z}}$:

$$\big(\pi_n \circ T\big)\big((x_r)_{r\in\mathbb{Z}}\big) = \pi_{n+1}\big((x_r)_{r\in\mathbb{Z}}\big) = x_{n+1}.$$

PROPOSICIÓN 6. *Con la notación anterior, se tiene que T es una transformación invertible $\mu-$preservadora de medida. A esta transformación se le conoce como el corrimiento bilateral en $[m]^{\mathbb{Z}}$.*

Demostración. Como $\mathcal{A}_{\mathcal{S}}$ es un álgebra (en particular una semiálgebra) de subconjuntos de $[m]^{\otimes\mathbb{Z}}$, se empleará el Teorema 1, para probar que T es una transformación $\mu-$preservadora de medida.

Para ello, sea $C(j, q_0, \dots, q_k) = \bigcap_{l=0}^{k} \pi_{j+l}^{-1}(\{q_l\}) \in \mathcal{S}$ fijo. Notemos que, por la definición de T y de μ, se tiene que

$$\begin{aligned} T^{-1}\big(C(j, q_0, \dots, q_k)\big) &= T^{-1}\left(\bigcap_{l=0}^{k} \pi_{j+l}^{-1}(\{q_l\})\right) = \bigcap_{l=0}^{k} T^{-1}\big(\pi_{q_{j+l}}^{-1}\{q_l\}\big) = \bigcap_{l=0}^{k} \big(\pi_{q_{j+l}} \circ T\big)^{-1}(\{q_l\}) \\ &= \bigcap_{l=0}^{k} \pi_{q_{j+1+l}}^{-1}(\{q_l\}) = C(j+1, q_0, \dots, q_k). \end{aligned}$$

$$\mu\Big(T^{-1}\big(C(j, q_0, \dots, q_k)\big)\Big) = \mu\big(C(j+1, q_0, \dots, q_k)\big) = \mu_k(q_0, \dots, q_k) = \mu\big(C(j, q_0, \dots, q_k)\big).$$

Es decir, para cada $C \in \mathcal{S}$, $T^{-1}(C) \in S$ y también $\mu\big(T^{-1}(C)\big) = \mu(C)$.

De aquí que, para todo $A \in \mathcal{A}_{\mathcal{S}}$ con $A = \biguplus_{i=1}^{r} A_i$ y $A_i \in \mathcal{S}$, ocurre

$$T^{-1}(A) = \biguplus_{i=1}^{r} T^{-1}(A_i) \in \mathcal{A}_{\mathcal{S}}$$

Y también

$$\mu\big(T^{-1}(A)\big) = \sum_{i=1}^{r} \mu\big(T^{-1}(A_i)\big) = \sum_{i=1}^{r} \mu\big(A_i\big) = \mu(A).$$

Luego, por el Teorema 1, se tiene que T es una transformación $\mu-$preservadora de medida.

Resta probar que T es una función invertible con función inversa $\overline{T}$ que es $\mu-$preservadora de medida. Para ello, se define a la única función $\overline{T} : [m]^{\mathbb{Z}} \to [m]^{\mathbb{Z}}$ tal que para todo $n \in \mathbb{Z}$ y $(x_r)_{r\in\mathbb{Z}} \in [m]^{\mathbb{Z}}$ cumple que

$$\big(\pi_n \circ \overline{T}\big)\big((x_r)_{r\in\mathbb{Z}}\big) = \pi_{n-1}\big((x_r)_{r\in\mathbb{Z}}\big) = x_{n-1}.$$

Se tiene que $\overline{T}$ es la función inversa de T, puesto que, para cada $n \in \mathbb{Z}$ y $(x_r)_{r\in\mathbb{Z}} \in [m]^{\mathbb{Z}}$

$$\begin{aligned} \big(\pi_n \circ (T \circ \overline{T})\big)\big((x_r)_{r\in\mathbb{Z}}\big) &= \big((\pi_n \circ T) \circ \overline{T}\big)\big((x_r)_{r\in\mathbb{Z}}\big) = \big(\pi_{n+1} \circ \overline{T}\big)\big((x_r)_{r\in\mathbb{Z}}\big) = \pi_n\big((x_r)_{r\in\mathbb{Z}}\big) = x_n \\ &= \big(\pi_n \circ Id_{[m]^{\mathbb{Z}}}\big)\big((x_r)_{r\in\mathbb{Z}}\big). \end{aligned}$$

De la misma manera,

$$\big(\pi_n \circ (\overline{T} \circ T)\big)\big((x_r)_{r\in\mathbb{Z}}\big) = \big(\pi_n \circ Id_{[m]^{\mathbb{Z}}}\big)\big((x_r)_{r\in\mathbb{Z}}\big).$$

Así que $(\overline{T} \circ T) = (T \circ \overline{T}) = Id_{[m]^{\mathbb{Z}}}$. La prueba de que $\overline{T}$ es una transformación $\mu-$preservadora de medida, se obtiene siguiendo un razonamiento análogo al utilizado para T.

⊠

2.2.1. Corrimiento bilateral asociado a vectores de probabilidad.

En esta parte, se asocia una medida de probabilidad en $\left([m]^{\mathbb{Z}}, \mathcal{P}([m])^{\otimes\mathbb{Z}}\right)$ a un vector de probabilidad en $\mathbb{R}^m$. Además, se describe al corrimiento bilateral en $[m]^{\mathbb{Z}}$ con respecto a dicha medida.

DEFINICIÓN 9. *Sean* $m \geq 1$, $P = (P_{ij})_{i,j\in[m]}$ *una matriz con coeficientes en* $\mathbb{R}$, $v = (v_i)_{i\in[m]}$.

I) *Decimos que* P *es una matriz estocástica si*

(A) *Para cada* $i, j \in [m]$ *se tiene que* $0 \leq P_{ij} \leq 1$.

(B) *Para todo* $i \in [m]$ $\displaystyle\sum_{j\in[m]} P_{ij} = 1$.

II) *Se dice que* v *es un vector de probabilidad asociado a* P *si*

(A) *Dado* $i \in [m]$, $0 \leq v_i \leq 1$ *y* $\displaystyle\sum_{i\in[m]} v_i = 1$.

(B) $vP = v$, *esto es,* $\displaystyle\sum_{j\in[m]} v_j P_{ij} = v_i, \quad i \in [m]$.

OBSERVACIÓN 12. Fije $m \geq 1$. Se tienen las siguientes afirmaciones:

1. Sea (X, Σ, μ) un espacio de probabilidad y $B \in \Sigma$ tal que $\mu(B) > 0$. Se define la función $\mu(\cdot|B) : \Sigma \to \mathbb{R}$ para cada $A \in \Sigma$ por
$$\mu(\cdot|B)(A) = \mu(A|B) = \frac{\mu(A \cap B)}{\mu(B)}.$$
Esta función es una medida de probabilidad en (X, Σ), llamada la *medida condicional* respecto a B.

2. Si $v = (v_i)_{i\in[m]}$ es un vector de probabilidad y para cada $k \in \mathbb{N}$, $i_0, \ldots, i_k \in [m]$ se define
$$\mu_k(i_0, \ldots, i_k) = v_{i_0} \ldots v_{i_k}$$
Este conjunto de medidas de $\mathbb{R}$ satisface las condiciones de consistencia de Kolmogorov. Así que, por el Teorema 14, existe una única medida de probabilidad $\mu : \mathcal{P}([m])^{\otimes\mathbb{Z}} \to \mathbb{R}$ tal que, para todo $j \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{N}$, $q_0, \ldots, q_k \in [m]$ se satisface:
$$\mu\big(C(j, q_0, \ldots, q_k)\big) = \mu_k(q_0, \ldots, q_k) = v_{q_0} \ldots v_{q_k}.$$
De hecho, para cada $i \in [m]$ se tiene que $v_i = \mu_0(i) = \mu(C(0, i))$.

   A esta medida de probabilidad, se le llama la *medida de probabilidad asociada a* v. Por la Proposición 6, el corrimiento bilateral en $[m]^{\mathbb{Z}}$ es una transformación invertible $\mu-$preservadora de medida, la cual es llamada el $v-$*corrimiento bilateral* en $[m]^{\mathbb{Z}}$.

3. Sea $v = (v_i)_{i\in[m]}$ un vector de probabilidad, μ la medida asociada a v y T el $v-$corrimiento bilateral en $[m]^{\mathbb{Z}}$. Entonces para cada $A, B \in \mathcal{S}$ existen $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ tal que
$$A \cap T^{-N1}(B) \in \mathcal{S}, \qquad T^{-N2}(A) \cap B \in \mathcal{S}.$$
Más aún, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo natural $n \geq N$ ocurre que
$$\mu\big(T^{-n}(A) \cap B\big) = \mu(A)\mu(B) = \mu\big(A \cap T^{-n}(B)\big).$$

Demostración de la Observación 12.

1. Se sigue del hecho de que μ es una medida.

2. Basta observar que, dado que v es un vector de probabilidad y la definición de la colección de números en $[0, 1]$, ocurre

   (a) $1 = \displaystyle\sum_{i\in[m]} v_i = \sum_{i_0\in[m]} \mu_0(i_0)$.

(b) Para cada $k \in \mathbb{N}$, $i_0, \ldots, i_k \in [m]$ se tiene que

$$\mu_k(i_0, \ldots, i_k) = v_{i_0} \ldots v_{i_k} = \sum_{i_{k+1} \in [m]} v_{i_0} \ldots v_{i_k} v_{i_{k+1}} = \sum_{i_{k+1} \in [m]} \mu_k(i_0, \ldots, i_k, i_{k+1}).$$

que son las condiciones de consistencia de Kolmogorov. Ahora, la conclusión se obtiene de inmediato al aplicar el Teorema 14.

3. Sean $A, B \in \mathcal{S}$ expresados de la forma $A = C(j_1, q_0^1, \ldots, q_{k_1}^1)$, $B = C(j_2, q_0^2, \ldots, q_{k_2}^2)$. Sin pérdida de generalidad suponga que $j_1 \leq j_2$. Considere los casos siguientes:

<u>Caso 1.</u> $j_2 \leq j_1 + k_1$.
Se tiene que $j_1 + k_1 = j_2 + N_0$, donde $N_0 \geq 0$. Considere $N_1 = N_0 + 1$. Entonces ocurre $j_1 + k_1 + 1 = j_2 + N_1$, además inductivamente, siguiendo el cálculo efectuado en la Proposición 6 se obtiene que

$$\begin{aligned} T^{-N_1}(B) &= T^{-N_1}\left(\bigcap_{l=0}^{k_2} \pi_{j_2+l}^{-1}(\{q_l^2\})\right) = \bigcap_{l=0}^{k_2} \left(\pi_{j_2+l} \circ T^{N_1}\right)^{-1}(\{q_l^2\}) = \bigcap_{l=0}^{k_2} \pi_{j_2+l+N_1}^{-1}(\{q_l^2\}) \\ &= C(j_2 + N_1, q_0^2, \ldots, q_{k_2}^2) = C(j_1 + k_1 + 1, q_0^2, \ldots, q_{k_2}^2) \in \mathcal{S}. \end{aligned}$$

Para cada $l \in [0,\ k_1 + k_2 + 1]$ se define

$$q_l = \begin{cases} q_l^1 & \text{si} \quad l \in [0,\ k_1] \\ q_{l-(k_1+1)}^2 & \text{si} \quad l \in [k_1 + 1,\ k_1 + k_2 + 1] \end{cases}.$$

Se verifica de inmediato que

$$A \cap T^{-N_1}(B) = C(j_1, q_0^1, \ldots, q_{k_1}^1) \cap C(j_1 + k_1 + 1, q_0^2, \ldots, q_k^2) = C(j_1, q_0, \ldots, q_{k_1+k_2+1}) \in \mathcal{S},$$

y también

$$\begin{aligned} \mu\big(A \cap T^{-N_1}(B)\big) &= \mu\big(C(j_1, q_0^1, \ldots, q_{k_1}, q_0^2, \ldots, q_{k_2}^2)\big) \\ &= v_{q_0} \ldots v_{q_{k_1}} v_{q_{k_1+1}} \ldots v_{q_{k_1+k_2+1}} \\ &= v_{q_0^1} \ldots v_{q_{k_1}^1} v_{q_0^2} \ldots v_{q_{k_2}^2} = \mu(A)\mu(B). \end{aligned}$$

De hecho, dado $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq N_1$, existe $u \in \mathbb{N}$ tal que $n = N_1 + u$ y con la notación anterior se tiene que $j_2 + n = j_1 + k_1 + (1 + u)$. Se sigue un procedimiento similar al anterior para concluir que

$$T^{-n}(B) = C(j_1 + k_1 + (1 + u), q_0^2, \ldots, q_{k_2}^2). \tag{2.4}$$

Suponiendo $u \geq 1$, directamente se verifica que

$$\begin{aligned} A \cap T^{-n}(B) &= C(j_1, q_0^1, \ldots, q_{k_1}^1) \cap C(j_1 + k_1 + (1 + u), q_0^2, \ldots, q_k^2) \qquad (2.5) \\ &= \biguplus_{(q_1, \ldots, q_u) \in [m]^u} C(j_1, q_0^1, \ldots, q_{k_1}^1, q_1, \ldots, q_u, q_0^2, \ldots, q_{k_2}^2). \qquad (2.6) \end{aligned}$$

Por inducción sobre u, empleando que v es un vector de probabilidad y el Teorema de Fubini (para sumas) se obtiene que

$$\begin{aligned} \mu\big(A \cap T^{-n}(B)\big) &= \sum_{(q_1, \ldots, q_u) \in [m]^u} \mu\big(C(j_1, q_0^1, \ldots, q_{k_1}, q_1, \ldots, q_u, q_0^2, \ldots, q_{k_2}^2)\big) \\ &= \sum_{(q_1, \ldots, q_u) \in [m]^u} v_{q_0^1} \ldots v_{q_{k_1}^1} v_{q_1} \ldots v_{q_u} v_{q_0^2} \ldots v_{q_{k_2}^2} \\ &= v_{q_0^1} \ldots v_{q_{k_1}^1} v_{q_0^2} \ldots v_{q_{k_2}^2} \sum_{q_1 \in [m]} \cdots \sum_{q_u \in [m]} v_{q_1} \ldots v_{q_u} \\ &= v_{q_0^1} \ldots v_{q_{k_1}^1} v_{q_0^2} \ldots v_{q_{k_2}^2} = \mu(A)\mu(B). \end{aligned}$$

De forma análoga a como se encontró N_1, se encuentra $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que $T^{-N_2}(A) \cap B \in \mathcal{S}$ y para cada $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq N_2$ se satisface que $\mu(A)\mu(B) = \mu\big(A \cap T^{-n}(B)\big)$.

Finalmente se $N = \max\{N_1, N_2\}$, que satisface la condición deseada.

<u>Caso 2.</u> $j_2 > j_1 + k_1$.
La prueba es similar al Caso 1.

$\boxtimes$

Proposición 7. *Sea $m \geq 1$ y $v = (v_i)_{i\in[m]}$ un vector de probabilidad. Entonces el $v-$corrimiento bilateral T en $[m]^{\mathbb{Z}}$ es una transformación $\mu-$fuertemente mezclante.*

Demostración. Se utilizará la Proposición 4, que caracteriza a las transformaciones $\mu-$fuertemente mezclantes. Dado que $\mathcal{A}_{\mathcal{S}}$ es una semiálgebra de subconjuntos de $[m]^{\mathbb{Z}}$ tal que $\mathcal{P}([m])^{\otimes\mathbb{Z}} = \sigma(\mathcal{A}_{\mathcal{S}})$, bastará con probar que para cualesquiera $A, B \in \mathcal{A}_{\mathcal{S}}$ se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} \mu\big(T^{-n}(A) \cap B\big) = \mu(A)\mu(B).$$

Para ello, fije $A, B \in \mathcal{A}_{\mathcal{S}}$, donde $A = \biguplus_{i=1}^{r} A_i$, $B = \biguplus_{=1}^{t} B_j$, con $A_i, B_j \in \mathcal{S}$. Por la Observación 12 (inciso 1), se tiene que para todo $(i,j) \in \{1,\ldots,r\}\times\{1,\ldots,t\}$ existe un natural $N_{(i,j)}$ tal que para cada $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq N_{(i,j)}$ ocurre que

$$\mu\big(T^{-n}(A_i) \cap B_j\big) = \mu(A_i)\mu(B_j).$$

Sea $N = \max\{N_{(i,j)} :\ (i,j) \in \{1,\ldots,r\}\times\{1,\ldots,t\}\}$. Entonces para cada $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq N$ se tiene que

$$\mu\big(T^{-n}(A_i) \cap B_j\big) = \mu(A_i)\mu(B_j), \qquad (i,j) \in \{1,\ldots,r\}\times\{1,\ldots,t\} \tag{2.7}$$

Se obtiene fácilmente que $T^{-n}(A) = \biguplus_{i=1}^{r} T^{-n}(A_i)$, de donde

$$T^{-n}(A) \cap B = \biguplus_{(i,j)\in\{1,\ldots,r\}\times\{1,\ldots,t\}} (T^{-n}(A_i) \cap B_j),$$

y por el Teorema de Fubini (para sumas) y la expresión (2.7), para cada $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq N$ se obtiene que

$$\begin{aligned}\mu\big(T^{-n}(A) \cap B\big) &= \sum_{(i,j)\in\{1,\ldots,r\}\times\{1,\ldots,t\}} \mu\big(T^{-n}(A_i) \cap B_j\big) = \sum_{(i,j)\in\{1,\ldots,r\}\times\{1,\ldots,t\}} \mu(A_i)\mu(B_j)\\ &= \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{t} \mu(A_i)\mu(B_j) = \left(\sum_{i=1}^{r}\mu(A_i)\right)\left(\sum_{j=1}^{t}\mu(B_j)\right) = \mu(A)\mu(B).\end{aligned}$$

Por la elección de $A, B \in \mathcal{A}_{\mathcal{S}}$ se obtiene que T es una transformación $\mu-$fuertemente mezclante.

$\boxtimes$

Sean $m \geq 1$, $v = (v_i)_{i\in[m]}$ un vector de probabilidad. Como corolario de la Proposición 7 y la Observación 7 tenemos que el $v-$corrimiento bilateral T en $[m]^{\mathbb{Z}}$ es una transformación $\mu-$ergódica.

2.2.2. Corrimiento bilateral asociado a una matriz extocástica con un vector de probabilidad invariante.

A lo largo de esta sección, se relaciona a una medida de probabilidad en $\big([m]^{\mathbb{Z}}, \mathcal{P}([m])^{\otimes\mathbb{Z}}\big)$ con una matriz estocástica, para la cual se supone la existencia de un vector de probabilidad invariante asociado. También se describe al corrimiento bilateral con respecto a la medida en cuestión, que, a diferencia de la parte previa, no siempre resulta ser ergódico. Las propiedades de ergodicidad, mezcla fuerte y débil quedarán completamente determinadas por las características de la matriz estocástica.

En primer lugar, se define a la medida asociada a una matriz estocástica.

Teorema 15. *Sean $m \geq 1$ y $P = (P_{ij})_{i,j\in[m]}$ una matriz estocástica con vector de probabilidad asociado $v = (v_i)_{i\in[m]}$. Entonces existe una única medida de probabilidad en $\big([m]^{\mathbb{Z}}, \mathcal{P}([m])^{\otimes\mathbb{Z}}\big)$, $\mu : \mathcal{P}([m])^{\otimes\mathbb{Z}} \to \mathbb{R}$ que satisface las siguientes condiciones:*

(I) *Para cada $r \in \mathbb{Z},\ i \in [m]$, $\mu(C(r,i)) = v_i$.*

(II) *Para todo $r \in \mathbb{Z},\ i,j \in [m]$, $\mu(C(r,i) \cap C(r+1,j)) = v_iP_{ij}$.*

(III) *Para cualesquiera* $n \in \mathbb{N}$, $i_0, \ldots, i_n \in [m]$ *con* $P_{i_0,i_1}, \ldots, P_{i_{n-1},i_n} > 0$, $v_{i_0}, v_{i_{n-1}} > 0$ *se tiene que*

$$\mu(C(n, i_n)|C(0, i_0, \ldots, i_{n-1})) = \mu(C(n, i_n)|C(n-1, i_{n-1})) \tag{2.8}$$

A μ se le llama la medida de Markov asociada a (v,P). Al corrimiento bilateral T en $[m]^{\mathbb{Z}}$ se le llama el (v,P)-corrimiento bilateral en $[m]^{\mathbb{Z}}$.

Demostración. Para cada $k \geq 1$, $i_0, \ldots, i_k \in [m]$ defina $\mu_k(i_0, \ldots, i_k) = v_{i_0} P_{i_0,i_1} \ldots P_{i_{k-1},i_k}$, y $\mu_0(i_0) = v_{i_0}$.
Es claro de la definición que $\mu_k(i_0, \ldots, i_k) \in [0,1]$. También se tiene que

(a) $\displaystyle\sum_{i_0 \in [m]} \mu_0(i_0) = \sum_{i_0 \in [m]} v_{i_0} = 1$

(b) Para cada $k \in \mathbb{N}$, $i_0, \ldots, i_k \in [m]$ se tiene que, desde que P es una matriz estocástica

$$\begin{aligned}\sum_{i_{k+1} \in [m]} \mu_{k+1}(i_0, \ldots, i_k, i_{k+1}) &= \sum_{i_{k+1} \in [m]} v_{i_0} P_{i_0,i_1} \ldots P_{i_{k-1},i_k} P_{i_k,i_{k+1}} = v_{i_0} P_{i_0,i_1} \ldots P_{i_{k-1},i_k} \sum_{i_{k+1} \in [m]} P_{i_k,i_{k+1}} \\ &= v_{i_0} P_{i_0,i_1} \ldots P_{i_{k-1},i_k} = \mu_k(i_0, \ldots, i_k).\end{aligned}$$

De modo que, este subconjunto de $[0,1]$ satisface las condiciones de consistencia de Kolmogorov, luego, por el Teorema 15, existe una única medida de probabilidad en $\big([m]^{\mathbb{Z}}, \mathcal{P}([m])^{\otimes \mathbb{Z}}\big)$, $\mu : \mathcal{P}([m])^{\otimes \mathbb{Z}} \to \mathbb{R}$ tal que para todo $k \in \mathbb{N}$, $i_0, \ldots, i_k \in [m]$

$$\mu\big(C(j, i_0, \ldots, i_k)\big) = \mu_k(i_0, \ldots, i_k) = v_{i_0} P_{i_0,i_1} \ldots P_{i_{k-1},i_k}. \tag{2.9}$$

(I) Esta condición se obtiene directamente de la expresión (2.9) para $k = 0$.

(II) Sean $r \in \mathbb{Z}$, $i, j \in [m]$ cualesquiera. Se verifica de inmediato que $C(r,i) \cap C(r+1,j) = C(r,i,j))$, así que, por la definición de μ se obtiene que

$$\mu(C(r,i) \cap C(r+1,j)) = \mu(C(r,i,j)) = v_i P_{ij}.$$

(III) Sean $n \in \mathbb{N}$, $i_0, \ldots, i_n \in [m]$ con $P_{i_0,i_1}, \ldots, P_{i_{n-1},i_n} > 0$, $v_{i_0}, v_{i_{n-1}} > 0$. Al igual que antes, se obtiene directamente que

$$C(n, i_n) \cap C(0, i_0, \ldots, i_{n-1}) = C(0, i_0, \ldots, i_{n-1}, i_n),$$

y también

$$C(n, i_n) \cap C(n-1, i_{n-1}) = C(n-1, i_{n-1}, i_n).$$

Así que, de la ecuación (2.9), se sigue que

$$\begin{aligned}\mu(C(n, i_n)|C(0, i_0, \ldots, i_{n-1})) &= \frac{\mu(C(n, i_n) \cap C(0, i_0, \ldots, i_{n-1}))}{\mu(C(0, i_0, \ldots, i_{n-1}))} = \frac{\mu(C(0, i_0, \ldots, i_{n-1}, i_n))}{\mu(C(0, i_0, \ldots, i_{n-1}))} \\ &= \frac{v_{i_0} P_{i_0,i_1} \ldots P_{i_{n-1},i_n}}{v_{i_0} P_{i_0,i_1} \ldots P_{i_{n-2},i_{n-1}}} = P_{i_{n-1},i_n} = \frac{v_{i_{n-1}} P_{i_{n-1},i_n}}{v_{i_{n-1}}} \\ &= \frac{\mu(C(n-1, i_{n-1}, i_n))}{\mu(C(n-1, i_{n-1}))} = \frac{\mu(C(n, i_n) \cap C(n-1, i_{n-1}))}{\mu(C(n-1, i_{n-1}))} \\ &= \mu(C(n, i_n)|C(n-1, i_{n-1})).\end{aligned}$$

⊠

Definición 10. *Sea $m \geq 1$ y $Q = (Q_{ij})_{i,j \in [m]}$ una matriz de tamaño $m \times m$ con coeficientes en $\mathbb{R}$.*

(A) *Se dice que Q es una* **matriz no negativa** *si para todo $i, j \in [m]$ se tiene que $Q_{ij} \geq 0$.*

Para cada $n \in \mathbb{N}$ denotaremos por $Q^n = \big(Q_{ij}^{(n)}\big)_{i,j \in [m]}$, la $n-$ésima potencia de Q, donde $Q^0 = I$.

(B) *A Q se le conoce como* **matriz irreducible** *si para todo $i, j \in [m]$ existe $N = N(i,j) \in \mathbb{N}$ tal que $Q_{ij}^{(N)} > 0$.*

(C) *Q es una* **matriz regular** *si existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para cada $i, j \in [m]$ se satisface $Q_{ij}^{(N)} > 0$.*

(D) *El kernel de Q es el subespacio de $\mathbb{R}^m$ definido como*

$$\ker(Q) = \{x \in \mathbb{R}^m : \; Qx = 0\}.$$

(E) *$\lambda \in \mathbb{R}$ es un valor propio de Q si existe $x \in \mathbb{R}^m \backslash \{0\}$ tal que $x \in \ker(Q - \lambda I)$, donde I denota la matriz identidad de tamaño $m \times m$.*

(F) *Diremos que $\lambda \in \mathbb{R}$ es un valor propio simple de Q si $\dim_{\mathbb{R}}(\ker(Q - \lambda I)) = 1$ (dimensión de espacio vectorial).*

En el siguiente resultado, se describirán algunas características de las matrices no negativas con coeficientes en $\mathbb{R}$.

Teorema 16 (Perrón-Frobenius). *Sea $Q = (Q_{ij})_{i,j \in [m]}$ una matriz no negativa. Entonces:*

(I) *Existe $\lambda \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ tal que para todo $\rho \in \mathbb{R}$ valor propio de Q, se satisface que $|\rho| < \lambda$.*

(II) $\min \left\{ \sum_{j \in [m]} Q_{ij} : \; i \in [m] \right\} \leq \lambda \leq \max \left\{ \sum_{j \in [m]} Q_{ij} : \; i \in [m] \right\}.$

(III) *Para λ existen $u = (u_i)_{i \in [m]} \in \mathbb{R}^m$, $v = (v_i)_{i \in [m]} \in \mathbb{R}^m$ no negativos tales que $Qv = \lambda v$, $uQ = \lambda u$.*

(IV) *Si Q es una matriz irreducible, entonces λ es un valor propio simple de Q, $u_i, v_i > 0$, $i \in [m]$ y es el único valor propio de Q que satisface (III). En este caso, λ es llamado el valor propio dominante de Q.*

Demostración. Consultar [Gan60]. ⊠

A continuación se presenta un resultado sobre matrices estocásticas irreducibles y vectores de probabilidad invariantes asociados a las mismas.

Corolario 7. *Sean $m \geq 1$ y $P = (P_{ij})_{i,j \in [m]}$ una matriz estocástica e irreducible. Entonces*

(A) *El valor dominante de P es 1.*

(B) *Existe $v \in \mathbb{R}^m$ un vector de probabilidad invariante asociado a P.*

Demostración. Por el Teorema 16, existe $\lambda \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ valor propio dominante de P.

(A) De acuerdo con la condición (II) de ese resultado, como P es una matriz estocástica se tiene que

$$1 = \min \left\{ \sum_{j \in [m]} Q_{ij} : \; i \in [m] \right\} \leq \lambda \leq \max \left\{ \sum_{j \in [m]} Q_{ij} : \; i \in [m] \right\} = 1.$$

Es decir, $\lambda = 1$.

(B) Por los incisos (III) y (IV) del teorema anterior, dado que $\lambda = 1$ y P es una matriz irreducible, existe $u = (u_i)_{i \in [m]} \in \mathbb{R}^m$ estrictamente positivo tal que $uQ = u$, es decir, $\dfrac{u}{\sum_{i \in [m]} u_i}$ es un vector de probabilidad invariante asociado a P.

⊠

El lema siguiente describe el comportamiento asintótico una matriz estocástica que tiene asociado un vector de probabilidad invariante, el cual se supondrá estrictamente positivo. Para la prueba de este lema, se requiere establecer que, si $P = (P_{ij})_{i,j \in [m]}$ es una matriz estocástica, entonces se tiene que, para cada $r, t \in \mathbb{N}$, $i, j \in [m]$

$$P_{ij}^{(r+t)} = \sum_{k \in [m]} P_{ik}^{(r)} P_{kj}^{(t)}, \tag{2.10}$$

que en notación matricial significa que $P^{r+t} = P^r P^t$, donde esta última expresión denota el producto usual de matrices. A estas ecuaciones comúnmente se les llama *ecuaciones de Chapman-Kolmogorov.*

Lema 4. *Sea $P=(P_{ij})_{i,j\in[m]}$ una matriz estocástica. Suponga que $v=(v_i)_{i\in[m]}$ es un vector de probabilidad invariante asociado a P. Entonces existe una matriz estocástica $Q=(Q_{ij})_{i,j\in[m]}$ tal que $PQ=QP=Q=Q^2$ y además satisface que, para todo $l,j\in[m]$*

$$Q_{lj}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}P_{lj}^{(i)},\quad \textit{que se abrevia}\quad Q=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}P^{(i)} \tag{2.11}$$

Demostración. Denote por T al $(v,P)-$corrimiento de Markov en $\big([m]^{\mathbb{Z}},\mathcal{P}([m])^{\otimes\mathbb{Z}}\big)$ con medida asociada μ. Para cada $j\in\mathbb{Z}$ defina $\chi_j=\chi_{C(0,j)}$. que es una función en $L_1^{\mathbb{R}}([m]^{\mathbb{Z}},\mathcal{P}([m])^{\otimes\mathbb{Z}},\mu)$. Entonces, por el Teorema Ergódico de Birkhoff, existe $\chi_j^*\in L_1^{\mathbb{R}}([m]^{\mathbb{Z}},\mathcal{P}([m])^{\otimes\mathbb{Z}},\mu)$ tal que

$$\chi_j^*=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}(\chi_j\circ T^i)\qquad \text{c.t.p. } (\mu).$$

Inductivamente, de forma análoga a los cálculos realizados en la Observación 12, se obtiene que para todo número natural $i\geq 0$

$$\chi_j\circ T^i=\chi_{C(0,j)}\circ T^i=\chi_{T^{-i}(C(0,j))}=\chi_{C(i,j)}.$$

Entonces

$$\chi_j^*=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\chi_{C(i,j)}\qquad \text{c.t.p. } (\mu).$$

Sea $l\in\mathbb{Z}$ arbitrario fijo. La sucesión de funciones $\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\chi_l\chi_{C(i,j)}\right\}_{n\geq 1}$ en $L_0^{\mathbb{R}}([m]^{\mathbb{Z}},\mathcal{P}([m])^{\otimes\mathbb{Z}},\mu)$ satisface que

$$\chi_l\chi_j^*=\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\chi_l\chi_{C(i,j)}=\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\chi_{C(i,j)\cap C(0,l)},$$

y que para todo $n\in\mathbb{N}$

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\chi_l\chi_{C(i,j)}\right|\leq 1\qquad \text{c.t.p. } (\mu).$$

Entonces por el teorema de convergencia acotada en $L_1^{\mathbb{R}}([m]^{\mathbb{Z}},\mathcal{P}([m])^{\otimes\mathbb{Z}},\mu)$, y la definición de μ ocurre que

$$\int_{[m]^{\mathbb{Z}}}\chi_l\chi_j^*d\mu=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\int_{[m]^{\mathbb{Z}}}\chi_{C(i,j)\cap C(0,l)}d\mu=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\mu\big(C(i,j)\cap C(0,l)\big). \tag{2.12}$$

Por otro lado, note que para cada natural $i\geq 2$, por un razonamiento como en la Observación 12 (inciso 3), se tiene que

$$C(0,l)\cap C(i,j)=\biguplus_{(a_1,\ldots,a_{i-1})\in[m]^{i-1}}C(0,l)\cap C(1,a_1,\ldots,a_{i-1})\cap C(i,j)=\biguplus_{(a_1,\ldots,a_{i-1})\in[m]^{i-1}}C(0,l,a_1,\ldots,a_{i-1},j)$$

A partir del principio de inducción matemática, el Teorema 15 (inciso (III)), las ecuaciones de Chapman Kolmogorov (2.10) y el Teorema de Fubini (para sumas) se sigue que

$$\begin{aligned}\mu\big(C(0,l)\cap C(i,j)\big)&=\sum_{(a_1,\ldots,a_{i-1})\in[m]^{i-1}}\mu\big(C(0,l,a_1,\ldots,a_{i-1},j)\big)\\&=\sum_{a_1\in[m]}\cdots\sum_{a_{i-1}\in[m]}v_lP_{l,a_1}\ldots P_{a_{i-2},a_{i-1}}P_{a_{i-1},j}=v_lP_{l,j}^{(i)}\end{aligned} \tag{2.13}$$

y que

$$\mu\big(C(0,l)\cap C(i,j)\big)=\mu\big(C(0,l,j)\big)=v_lP_{l,j} \tag{2.14}$$

Así que, de las expresiones (2.12), (2.13), (2.14) se concluye que

$$\int_{[m]^{\mathbb{Z}}}\chi_l\chi_j^*d\mu=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\mu\big(C(i,j)\cap C(0,l)\big)=v_l\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}P_{l,j}^{(i)}.$$

Para cada $l, j \in \mathbb{Z}$ definamos

$$Q_{lj} = \frac{1}{v_l}\int_{[m]^{\mathbb{Z}}} \chi_l \chi_j^* d\mu = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} P_{l,j}^{(i)}. \tag{2.15}$$

y consideremos $Q = (Q_{ij})_{i,j\in[m]}$, que está bien definida por ser la integral finita de una función.

<u>Afirmación</u>. La matriz Q satisface las siguientes propiedades:

1. Q es una matriz estocástica.
2. $PQ = QP = Q$.
3. Para todo natural $i \geq 0$ se verifica que $QP^i = Q$.
4. $Q^2 = Q$.

Demostración de la Afirmación. Notemos primero que, si $l, j \in [m]$, para cada $n \in \mathbb{N}$

$$0 \leq \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} P_{l,j}^{(i)} \leq \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} 1 = 1.$$

De aquí que $0 \leq Q_{lj} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} P_{l,j}^{(i)} \leq 1$.

1. Desde que, para todo número natural $i \geq 0$, P^i es una matriz estocástica, se tiene que para cada $l \in [m]$ ocurre

$$\sum_{j\in[m]} Q_{lj} = \sum_{j\in[m]} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} P_{l,j}^{(i)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j\in[m]} P_{l,j}^{(i)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} 1 = 1$$

   Por lo tanto, Q es una matriz estocástica.

2. Sean $l, j \in [m]$ arbitrarios fijos. Denote por $(PQ)_{lj}$ a la entrada lj de la matriz PQ. Entonces, por las ecuaciones de Chapman-Kolmogorov (2.10) y la definición del producto de matrices se obtiene que

$$(PQ)_{lj} = \sum_{k\in[m]} P_{lk}Q_{kj} = \sum_{k\in[m]} P_{lk} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} P_{k,j}^{(i)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{k\in[m]} P_{lk}P_{k,j}^{(i)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} P_{l,j}^{(i+1)}.$$

   Notemos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} P_{l,j}^{(i+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} P_{l,j}^{(i)} \tag{2.16}$$

   ya que

$$\left|\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} P_{l,j}^{(i+1)} - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} P_{l,j}^{(i)}\right| \leq \frac{1}{n}|P_{l,j}^{(n)} - P_{l,j}^{(0)}| \leq \frac{2}{n},$$

   donde el lado derecho converge a 0 cuando $n \to \infty$.
   Entonces, por la ecuación (2.16), para todo $l, j \in [m]$ se satisface que

$$(PQ)_{lj} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} P_{l,j}^{(i+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} P_{l,j}^{(i)} = Q_{lj}$$

   Por tanto, $PQ = Q$. Similarmente se obtiene que $QP = Q$.

3. Procedamos por inducción sobre i.

   Es claro que el resultado es válido para $i = 0$. También es válido para $i = 1$, por el inciso 2 en esta afirmación.

Supóngase válido el resultado para $i > 1$ fijo, es decir,

$$QP^i = Q \qquad\qquad \text{(Hipótesis Inductiva).}$$

Ahora, por la hipótesis inductiva y el inciso 2, se obtiene que $QP^{i+1} = QP^iP = QP = Q$, con lo cual se establece el resultado para $i+1$. Por el principio de inducción matemática se tiene la conclusión.

4. Por el inciso 3 de esta afirmación y la convergencia se obtiene que

$$Q^2 = QQ = Q\Big(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} P^{(i)}\Big) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} QP^{(i)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} Q = Q.$$

Así se tiene la Afirmación.

La prueba del Lema 4 ahora se sigue directamente de la Afirmación.

$\boxtimes$

En el siguiente resultado, se establecen condiciones necesarias y suficientes para garantizar la ergodicidad del corrimiento bilateral de Markov asociado a una matriz estocástica con vector de probabilidad invariante.

Teorema 17. *Sean $m \geq 1$ y $P = (P_{ij})_{i,j\in[m]}$ una matriz estocástica con vector de probabilidad invariante asociado $v = (v_i)_{i\in[m]}$ (estrictamente positivo). Denote por*

$$Q = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} P^{(i)}.$$

Considere T el $(v,P)-$corrimiento de Markov en $\big([m]^{\mathbb{Z}}, \mathcal{P}([m])^{\otimes\mathbb{Z}}\big)$ con medida asociada μ. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes

(I) *T es una transformación $\mu-$ergódica.*

(II) *Todos los renglones de Q son iguales.*

(III) *P es una matriz irreducible.*

(IV) *1 es un valor propio simple de Q.*

Demostración. Note primero que la existencia de la matriz Q se establece en el Lema 4.

(I) $\Longrightarrow$ (II)] Suponga que T es una transformación $\mu-$ergódica. Demostraremos que para cada $l, j \in [m]$ se tiene que $Q_{lj} = Q_{1j}$. Para ello fije $l, j \in [m]$. Observe que en la demostración del Lema 4, por las ecuaciones (2.12) y (2.15) se obtuvo que

$$v_l Q_{lj} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \mu\big(C(i,j) \cap C(0,l)\big).$$

Por la caracterización de las transformaciones $\mu-$ergódicas debida al Teorema, así como el hecho de que para todo $i \in \mathbb{N}$ ocurre que $T^{-i}(C(0,j)) = C(i,j)$ se tiene que

$$v_l Q_{lj} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \mu\big(C(i,j)\cap C(0,l)\big) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \mu\big(T^{-i}(C(0,j))\cap C(0,l)\big) = \mu(C(0,j))\mu(C(0,l)) = v_j v_l.$$

Por lo que $Q_{lj} = v_j$. Entonces todos los renglones de Q son iguales a $(v_0, \ldots, v_{m-1})$.

(II) $\Longrightarrow$ (III)] Suponga que todos los renglones de Q son iguales a $r = (r_0, \ldots, r_{m-1})$, es decir, para todo $l, j \in [m]$ tenemos que $Q_{lj} = r_j$. Como v es un vector de probabilidad invariante para P, se verifica de inmediato por inducción que para todo $i \in \mathbb{N}$ se satisface que $vP^i = v$, de donde

$$vQ = v\Big(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} P^{(i)}\Big) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} vP^{(i)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} v = v$$

Se efectúa un producto de matrices para verificar que

$$(v_j)_{j\in[m]} = v = vQ = \left(\sum_{l\in[m]} v_l Q_{lj}\right) = \left(\sum_{l\in[m]} v_l r_j\right) = \left(r_j \sum_{l\in[m]} v_l\right) = (r_j)_{j\in[m]}.$$

Así que r es estrictamente positivo.

Demostraremos que P es irreducible. Procedamos por contradicción: Suponga que P no es una matriz irreducible. Entonces existen $l, j \in [m]$ tales que para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple que $P_{lj}^{(n)} = 0$. De esto último se tiene que

$$r_j = Q_{lj} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} P_{lj}^{(i)} = 0.$$

Esto contradice al hecho de que r es estrictamente positivo. Por lo tanto P es una matriz irreducible.

(III) $\Longrightarrow$ (II)] Suponga que P es una matriz irreducible. Probemos que todos los renglones de Q son iguales mediante la siguiente afirmación.

Afirmación 1. Para cada $j \in [m]$ denote por $r_j = \max\{Q_{lj} : \ l \in [m]\}$. Entonces para cada $l \in [m]$ se tiene que

1. $Q_{lj} > 0$.
2. $Q_{lj} = r_j$.

Demostración de la Afirmación 1. Fije $j \in [m]$.

1. Para cada $i \in [m]$ denote por $A_i = \{l \in [m] : Q_{ij} > 0\}$. Como Q es una matriz estocástica, se tiene que $\sum_{i\in[m]} Q_{ij} = 1$ y luego, $A_i \neq \emptyset$. Fije $i \in [m]$. Como P es irreducible, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $P_{ij}^{(N)} > 0$.
   Recuerde que, del enunciado 3 de la Afirmación hecha en el Lema 4, se tiene que $Q = QP^N$, así que

   $$Q_{ij} = (QP^N)_{ij} = \sum_{k\in[m]} Q_{ik} P_{kj}^{(N)} \geq Q_{il} P_{lj}^{(N)} > 0.$$

   Esto demuestra el inciso 1.
2. Procedamos por contradicción. Suponga que existe $l \in [m]$ tal que $Q_{lj} \neq r_j$. Note que por la definición de r_j se tiene que $Q_{lj} < r_j$. Por el Lema 4 se tiene que Q es una matriz estocástica, $Q^2 = Q$ y luego, para todo $i \in [m]$

   $$\begin{aligned} Q_{ij} = (Q^2)_{ij} = \sum_{k\in[m]} Q_{ik}Q_{kj} &= \sum_{k\in[m],\ k\neq l} Q_{ik}Q_{kj} + Q_{il}Q_{lj} < \sum_{k\in[m],\ k\neq l} Q_{ik} r_j + Q_{il} r_j \\ &= r_j\left(\sum_{k\in[m]} Q_{ik}\right) = r_j. \end{aligned}$$

   Pero, por la definición de r_j, existe $l_0 \in [m]$ tal que $Q_{l_0 j} = r_j$, esto es una contradicción con lo anterior. Por lo tanto, para todo $l \in [m]$ debe tenerse que $Q_{lj} = r_j$.

Esto demuestra la Afirmación 1.

En consecuencia de la Afirmación 1, se obtiene que todos los renglones de Q son iguales.

(II) $\Longrightarrow$ (I)] Suponga que todos los renglones de Q son iguales.
En la prueba de la implicación (II) $\Longrightarrow$ (III) se mostró que bajo este supuesto, todos los renglones de Q deben ser iguales a $v = (v_i)_{i\in[m]}$. De acuerdo con la Proposición 3, desde que $\mathcal{A}_{\mathcal{S}}$ es una semiálgebra de subconjuntos de $[m]^{\mathbb{Z}}$ tal que $\mathcal{P}([m])^{\otimes\mathbb{Z}} = \sigma(\mathcal{A}_{\mathcal{S}})$, para probar la ergodicidad de T, basta mostrar que para todo $A, B \in \mathcal{A}_{\mathcal{S}}$ se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \mu\big(T^{-n}(A)\cap B\big) = \mu(A)\mu(B).$$

La clave para obtener lo deseado será la siguiente afirmación.

Afirmación 2. Para todo $A, B \in \mathcal{S}$ se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \mu\big(T^{-n}(A)\cap B\big) = \mu(A)\mu(B).$$

Demostración de la Afirmación 2. Sean $A, B \in \mathcal{S}$ expresados de la forma $A = C(j_1, q_0^1, \ldots, q_{k_1}^1)$, $B = C(j_2, q_0^2, \ldots, q_{k_2}^2)$. Se utiliza el mismo razonamiento empleado para obtener la expresión (2.4) en virtud de obtener que, para cada $i \in \mathbb{N}$ con $i > j_1 + k_1 - j_2$ (equivalentemente $u = j_2 + i - (j_1 + k_1) \geq 1$)

$$T^{-i}(B) = T^{-i}(C(j_2, q_0^2, \ldots, q_{k_2}^2)) = C(j_2 + i, q_0^2, \ldots, q_{k_2}^2)$$

Al igual que en la expresión (2.5), se verifica que

$$\begin{aligned}
A \cap T^{-i}(B) &= C(j_1, q_0^1, \ldots, q_{k_1}^1) \cap C(j_2 + i, q_0^2, \ldots, q_k^2) \\
&= \biguplus_{(q_1,\ldots,q_{j_2+i-(j_1+k_1)-1})\in[m]^{j_2+i-(j_1+k_1)-1}} C(j_1, q_0^1, \ldots, q_{k_1}^1, q_1, \ldots, q_{j_2+i-(j_1+k_1)-1}, q_0^2, \ldots, q_{k_2}^2) \\
&= \biguplus_{(q_1,\ldots,q_{u-1})\in[m]^{u-1}} C(j_1, q_0^1, \ldots, q_{k_1}^1, q_1, \ldots, q_{u-1}, q_0^2, \ldots, q_{k_2}^2).
\end{aligned}$$

Por inducción sobre u, la definición de μ, las ecuaciones de Chapman-Kolmogorov (2.10) y el Teorema de Fubini (para sumas) se obtiene que

$$\begin{aligned}
\mu\big(A \cap T^{-i}(B)\big) &= \sum_{(q_1,\ldots,q_{u-1})\in[m]^{u-1}} \mu\big(C(j_1, q_0^1, \ldots, q_{k_1}, q_1, \ldots, q_{u-1}, q_0^2, \ldots, q_{k_2}^2)\big) \\
&= \sum_{(q_1,\ldots,q_{u-1})\in[m]^{u-1}} v_{q_0^1} P_{q_0^1,q_1^1} \cdots P_{q_{k_1-1}^1,q_{k_1}^1} P_{q_{k_1}^1,q_1} P_{q_1,q_2} \cdots P_{q_{u-2},q_{u-1}} P_{q_{u-1},q_0^2} \cdots P_{q_{k_2-1}^2,q_{k_1}^2} \\
&= v_{q_0^1} P_{q_0^1,q_1^1} \cdots P_{q_{k_1-1}^1,q_{k_1}^1} \left(\sum_{q_1\in[m]} \cdots \sum_{q_{u-1}\in[m]} P_{q_{k_1}^1,q_1} P_{q_1,q_2} \cdots P_{q_{u-2},q_{u-1}} P_{q_{u-1},q_0^2} \right) P_{q_0^2,q_1^2} \cdots P_{q_{k_2-1}^2,q_{k_2}^2} \\
&= v_{q_0^1} P_{q_0^1,q_1^1} \cdots P_{q_{k_1-1}^1,q_{k_1}^1} P^{(u)}_{q_{k_1}^1,q_0^2} P_{q_0^2,q_1^2} \cdots P_{q_{k_2-1}^2,q_{k_2}^2} \\
&= v_{q_0^1} P_{q_0^1,q_1^1} \cdots P_{q_{k_1-1}^1,q_{k_1}^1} P^{(j_2+i-(j_1+k_1))}_{q_{k_1}^1,q_0^2} P_{q_0^2,q_1^2} \cdots P_{q_{k_2-1}^2,q_{k_2}^2}.
\end{aligned}$$

En resumen, para cada $i \in \mathbb{N}$ con $i > j_1 + k_1 - j_2$, se tiene que

$$\mu\big(A \cap T^{-i}(B)\big) = v_{q_0^1} P_{q_0^1,q_1^1} \cdots P_{q_{k_1-1}^1,q_{k_1}^1} P^{(j_2+i-(j_1+k_1))}_{q_{k_1}^1,q_0^2} P_{q_0^2,q_1^2} \cdots P_{q_{k_2-1}^2,q_{k_2}^2}. \tag{2.17}$$

Al igual que en la ecuación (2.16), se concluye que

$$v_{q_0^2} = Q_{q_{k_1}^1,q_0^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} P^{(i+1)}_{q_{k_1}^1,q_0^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} P^{(i+j_2-(j_1+k_1))}_{q_{k_1}^1,q_0^2}, \tag{2.18}$$

y de las expresiones (2.17) y (2.18) se sigue que

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \mu\big(A \cap T^{-i}(B)\big) &= v_{q_0^1} P_{q_0^1,q_1^1} \cdots P_{q_{k_1-1}^1,q_{k_1}^1} \left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} P^{(j_2+i-(j_1+k_1))}_{q_{k_1}^1,q_0^2} \right) P_{q_0^2,q_1^2} \cdots P_{q_{k_2-1}^2,q_{k_2}^2} \\
&= v_{q_0^1} P_{q_0^1,q_1^1} \cdots P_{q_{k_1-1}^1,q_{k_1}^1} v_{q_0^2} P_{q_0^2,q_1^2} \cdots P_{q_{k_2-1}^2,q_{k_2}^2} = \mu(A)\mu(B).
\end{aligned}$$

De esta forma se obtiene la Afirmación 2.

Finalmente, se procede de igual forma que en la prueba de la Proposición 7, utilizando la Afirmación 2 para concluir que T es una transformación $\mu-$ergódica.

(II) $\Longrightarrow$ (IV)] Suponga que todos los renglones de Q son iguales. Como antes, se puede concluir que todos los renglones de Q son iguales al vector v, esto es, para todo $l, j \in [m]$ se tiene que $Q_{lj} = v_j$. A continuación se prueba que 1 es un valor propio simple de Q:

Ya que Q es una matriz estocástica, se tiene que 1 es un valor propio de Q asociado al vector propio $(1,\dots,1)\in\mathbb{R}^m$. Note que para probar la condición requerida, es suficiente mostrar que para todo $w\in\mathbb{R}^m$ tal que $Qw=w$ existe $c\in\mathbb{R}$ tal que $w=c(1,\dots,1)$.

Sea $w=(w_i)_{i\in[m]}\in\mathbb{R}^m$ arbitrario tal que $Qw=w$. Entonces, efectuando el producto usual de matrices se obtiene que para toda $i\in[m]$

$$w_i=\sum_{j\in[m]} w_jQ_{ij}=\sum_{j\in[m]} w_jv_j=c$$

donde la última suma no depende de $i\in[m]$. Por ello $w=c(1,\dots,1)$. Por la elección arbitraria de w se concluye que $\ker(Q-\mathrm{I})$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^m$ generado por $(1,\dots,1)\in\mathbb{R}^m$, es decir, 1 es un valor propio simple de Q.

(IV) $\Longrightarrow$ (II)] Suponga que 1 es un valor propio simple de Q. Recuerde del Lema 4, que se tiene que $Q^2=Q$, así que, si se consideran los vectores columna de Q como $Q=(w_0|\dots|w_{m-1})$, donde para $j\in[m]$, $w_j=(Q_{0,j},\dots,Q_{m-1,j})^t$ ($(Q_{0,j},\dots,Q_{m-1,j})^t$ denota el vector transpuesto en $\mathbb{R}^m$) y se efectúa el producto de matrices, se tiene que

$$(w_0|\dots|w_{m-1})=Q=QQ=Q(w_0|\dots|w_{m-1})=(Qw_0|\dots|Qw_{m-1}).$$

Entonces, para cada $j\in[m]$ se satisface que $Qw_j=w_j$, es decir, w_j es un vector propio de Q asociado al valor propio 1. Así que por hipótesis, existe $c_j\in\mathbb{R}$ tal que $w_j=(c_j,\dots,c_j)^t=(Q_{0,j},\dots,Q_{m-1,j})^t$. Por lo tanto, para todo $l,j\in[m]$ se tiene que $Q_{lj}=c_j$, es decir, todos los renglones de Q son iguales.

$\boxtimes$

Se tiene un corolario, que comúnmente se conoce como el Teorema Ergódico para cadenas de Markov con espacio de estados finito.

Corolario 8 (Teorema Ergódico para cadenas de Markov con espacio de estados finito). *Sea $P=(P_{ij})_{i,j\in[m]}$ una matriz estocástica irreducible. Entonces para cada $l,j\in[m]$ se tiene que*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}P_{lj}^{(i)}=v_j.$$

Demostración. La expresión requerida se obtiene análogamente a la expresión (2.18). $\boxtimes$

En el siguiente resultado se muestran condiciones bajo las cuales el corrimiento de Markov asociado a una matriz estocástica con vector de probabilidad invariante es una transformación fuertemente o débilmente mezclante. Previo al teorema, se enuncia un lema referido a la factorización de Jordan una matriz con coeficientes en $\mathbb{R}$.

Lema 5 (Forma Canónica de Jordan). *Sea $P=(P_{ij})_{i,j\in[m]}$ una matriz de tamaño $m\times m$.*

Suponga que los valores propios de P son $\lambda_1,\dots,\lambda_k$, donde $k\le m$ y el polinomio característico de P, $q_P(t)=\det(P-tI)=\prod_{i=1}^{k}(t-\lambda_i)^{r_i}$, con la propiedad de que $\sum_{i=1}^{k}r_i=m$. Para cada $j\in\{1,\dots,k\}$ considere el bloque de Jordan asociado al valor propio λ_j dado por una matriz de tamaño k_j^i, donde $i\in I_j$, con $|I_j|=s_j$

$$J_{\lambda_j}^{k_j^i}=\begin{pmatrix}\lambda_j & 0 & 0 & 0 & \cdots 0\\ 1 & \lambda_j & 0 & 0 & \cdots 0\\ 0 & 1 & \lambda_j & 0 & \cdots 0\\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0\cdots & 1 & \lambda_j & 0\\ 0 & 0 & & & \cdots\lambda_j\end{pmatrix}.$$

Entonces el número de bloques de Jordan asociados al valor propio λ_j *corresponde a* $\dim(\ker(P-\lambda_j I))$ *y si se define la matriz de tamaño* $r_j = \sum_{i\in I_j} k_j^i$ *dada por*

$$J_{\lambda_j} = \begin{pmatrix} J_{\lambda_j}^{k_j^1} & 0 & 0 & 0 & \cdots 0 \\ 0 & J_{\lambda_j}^{k_j^2} & 0 & 0 & \cdots 0 \\ 0 & 0 & J_{\lambda_j}^{k_j^3} & 0 & \cdots 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0\cdots & 0 & J_{\lambda_j}^{k_j^{s_j-1}} & 0 \\ 0 & 0 & & & \cdots J_{\lambda_j}^{k_j^{s_j}} \end{pmatrix},$$

existe una matriz invertible U *de tamaño* $m\times m$ *tal que*

$$P = U^{-1}\begin{pmatrix} J_{\lambda_1} & 0 & 0 & 0 & \cdots 0 \\ 0 & J_{\lambda_2} & 0 & 0 & \cdots 0 \\ 0 & 0 & J_{\lambda_3} & 0 & \cdots 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0\cdots & 0 & J_{\lambda_{k-1}} & 0 \\ 0 & 0 & & & \cdots J_{\lambda_k} \end{pmatrix} U.$$

Demostración. Consultar [SHF03] ⊠

TEOREMA 18. *Sean* $m \geq 1$ *y* $P = (P_{ij})_{i,j\in[m]}$ *una matriz estocástica con vector de probabilidad invariante asociado* $v = (v_i)_{i\in[m]}$ *(estrictamente positivo). Considere* T *el* $(v,P)-$*corrimiento bilateral de Markov en* $\big([m]^{\mathbb{Z}}, \mathcal{P}([m])^{\otimes\mathbb{Z}}\big)$ *con medida de probabilidad asociada* μ*. Las afirmaciones siguientes son equivalentes:*

(I) T *es una transformación* μ*-débilmente mezclante.*

(II) T *es una transformación* $\mu-$*fuertemente mezclante.*

(III) P *es una matriz regular*

(IV) *Para todo* $i,j\in[m]$ *se tiene que* $\lim_{n\to\infty} P_{ij}^{(n)} = v_j$.

Demostración. Recuerde la definición de regularidad de una matriz, dada en la Definición 10.

(I)$\Longrightarrow$(III)] Suponga que T es una transformación $\mu-$débilmente mezclante. Entonces por el Teorema 8, se tiene que para todo $i,j\in[m]$ existe $J_{ij}\subseteq\mathbb{Z}^+$ un conjunto de densidad cero tal que

$$\lim_{n\to\infty, n\notin J_{ij}} \mu\big(T^{-n}(C(0,j))\cap C(0,i)\big) = \mu(C(0,i))\mu(C(0,j)) = v_i v_j.$$

Así como se obtuvo la ecuación (2.17), se obtiene que, en este caso para cada $n\in\mathbb{N}$ ocurre

$$\begin{aligned}\mu\big(T^{-n}(C(0,j))\cap C(0,i)\big) &= \mu\big(C(n,j)\cap C(0,i)\big)\\ &= \sum_{(i_1,\ldots,i_{n-1})\in[m]^{n-1}} \mu\big((C(n,j))\cap C(1,i_1,\ldots,i_{n-1})\cap C(0,i)\big)\\ &= \sum_{(i_1,\ldots,i_{n-1})\in[m]^{n-1}} \mu\big(C(0,,i,i_1,\ldots,i_{n-1},j)\big)\\ &= \sum_{(i_1,\ldots,i_{n-1})\in[m]^{n-1}} v_i P_{i,i_1}\ldots P_{i_{n-1},i_n} P_{i_n,j} = v_i P_{i,j}^{(n)}\end{aligned}$$

Ya se había observado en la demostración del Teorema 11, que $J = \bigcup_{(i,j)\in[m]\times[m]} J_{ij}$ es un conjunto con densidad cero. Al igual que en la demostración del Teorema 11, se concluye que para cada $i,j\in[m]$

$$v_i v_j = \mu(C(0,i))\mu(C(0,j)) = \lim_{n\to\infty,n\notin J} \mu\big(T^{-n}(C(0,j))\cap C(0,i)\big) = \lim_{n\to\infty,n\notin J} v_i P_{ij}^{(n)}.$$

Así que, para todo $i,j\in[m]$

$$v_j = \lim_{n\to\infty,n\notin J} P_{ij}^{(n)} > 0,$$

y por lo tanto

$$\min\{v_j:\ j\in[m]\}=\lim_{n\to\infty,n\notin J}\min\{P_{ij}^{(n)}: i,j\in[m]\}>0.$$

Entonces existe $N\in\mathbb{N}$ ($N\notin J$) tal que para cualesquiera $i,j\in[m]$ se tiene que $P_{ij}^{(N)}\geq\min\{P_{ij}^{(n)}: i,j\in[m]\}>0$. Luego, P es una matriz regular.

(IV)$\Longrightarrow$(II)] Demostremos que T es una transformación $\mu-$ fuertemente mezcladora. Desde que $\mathcal{A}_{\mathcal{S}}$ es una semiálgebra de subconjuntos de $[m]^{\mathbb{Z}}$ tal que $\sigma(\mathcal{A}_{\mathcal{S}})=\mathcal{P}([m])^{\otimes\mathbb{Z}}$, de acuerdo con la Proposición 4, basta con probar que para cualesquiera $A,B\in\mathcal{A}_{\mathcal{S}}$ se tiene que

$$\lim_{n\to\infty}\mu\big(T^{-n}(A)\cap B\big)=\mu(A)\mu(B).$$

Probaremos que esta propiedad se cumple para los elementos de $\mathcal{S}$, y luego, el argumento general se obtiene de forma análoga a la demostración de la Proposición 7. Fije $A,B\in\mathcal{S}$ donde $A=C(j_1,q_0^1,\ldots,q_{k_1}^1)$, $B=C(j_2,q_0^2,\ldots,q_{k_2}^2)$. Se repite exactamente la prueba de la Afirmación 2 del Teorema 16 para obtener que, para todo $n\in\mathbb{N}$ con $n>(j_1+k_1)-j_2$ se tiene que

$$\mu\big(A\cap T^{-n}(B)\big)=v_{q_0^1}P_{q_0^1,q_1^1}\ldots P_{q_{k_1-1}^1,q_{k_1}^1}P_{q_{k_1}^1,q_0^2}^{(j_2+n-(j_1+k_1))}P_{q_0^2,q_1^2}\ldots P_{q_{k_2-1}^2,q_{k_2}^2}.$$

También, por hipótesis y la definición de μ

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\mu\big(A\cap T^{-n}(B)\big)&=\lim_{n\to\infty}v_{q_0^1}P_{q_0^1,q_1^1}\ldots P_{q_{k_1-1}^1,q_{k_1}^1}P_{q_{k_1}^1,q_0^2}^{(j_2+n-(j_1+k_1))}P_{q_0^2,q_1^2}\ldots P_{q_{k_2-1}^2,q_{k_2}^2}\\&=v_{q_0^1}P_{q_0^1,q_1^1}\ldots P_{q_{k_1-1}^1,q_{k_1}^1}\left(\lim_{n\to\infty}P_{q_{k_1}^1,q_0^2}^{(j_2+n-(j_1+k_1))}\right)P_{q_0^2,q_1^2}\ldots P_{q_{k_2-1}^2,q_{k_2}^2}\\&=v_{q_0^1}P_{q_0^1,q_1^1}\ldots P_{q_{k_1-1}^1,q_{k_1}^1}v_{q_0^2}P_{q_0^2,q_1^2}\ldots P_{q_{k_2-1}^2,q_{k_2}^2}=\mu(A)\mu(B).\end{aligned}$$

Entonces, por la Proposición 4, se tiene que T es una transformación $\mu-$fuertemente mezclante.

(II)$\Longrightarrow$(I)] Por la Observación, se tiene que siempre se satisface esta condición.

(II)$\Longrightarrow$(IV)] La demostración es análoga a la de la implicación (IV)$\Longrightarrow$(II)].

(III)$\Longrightarrow$(IV)] Se esbozará la prueba de este hecho a continuación. Consideremos la descomposición de Jordan de la matriz P, a la que se refiere el Lema 5. Por simplicidad de la notación, supondremos que la matriz de Jordan es una matriz diagonal y que todos los valores propios de P son distintos entre sí (el caso general es tratado de la misma manera, sólo que se requiere mayor notación). Expresemos a la matriz diagonal D como

$$D=\begin{pmatrix}1&0&0&0&\cdots 0\\0&\lambda_1&0&0&\cdots 0\\0&0&\lambda_2&0&\cdots 0\\&\ddots&\ddots&\ddots&\\0&0\cdots&0&\lambda_{m-2}&0\\0&0&&&\cdots\lambda_{m-1}\end{pmatrix},$$

donde $P=U^{-1}DU$, U es una matriz invertible de tamaño $m\times m$ con coeficientes en $\mathbb{R}$. Denote por $W=(w_{ij})_{i,j\in[m]}$. Se verifica de inmediato por inducción que para todo $n\in\mathbb{N}$ se tiene que $P^n=WD^nU$.

Por el Corolario 7, $\lambda_0=1$ es un valor propio dominante, así que, sin pérdida de generalidad suponga que $1>|\lambda_1|>\ldots>|\lambda_{m-1}|$. También, la forma en que se suele construir U es como una matriz de cambio de base, cuyas columnas están formadas de los vectores propios de P que forman una base ordenada ortonormal de $\mathbb{R}^m$ asociados a los valores propios 1, λ_1, $\ldots,\lambda_{m-1}$. Como P es una matriz irreducible, por el Corolario 7 (inciso (II)), esto significa que la primera columna de U (al ser vector propio de P asociado al valor propio 1) es de la forma $(q_0,\ldots,q_0)\in\mathbb{R}^m$, donde $q_0\in\mathbb{R}$.

Entonces, para cada $n\in\mathbb{N}$ se tiene que

$$P^n = W \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots 0 \\ 0 & \lambda_1^n & 0 & 0 & \cdots 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2^n & 0 & \cdots 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 \cdots & 0 & \lambda_{m-2}^n & 0 \\ 0 & 0 & & & \cdots \lambda_{m-1}^n \end{pmatrix} U.$$

Y luego,

$$\lim_{n\to\infty} P^n = W \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & & & \cdots 0 \end{pmatrix} U = \begin{pmatrix} w_{00}q_0 \\ w_{01}q_0 \\ \vdots \\ w_{0m-2}q_0 \\ w_{0m-1}q_0 \end{pmatrix}.$$

Esto último significa que para todo $i, j \in [m]$ se cumple

$$\lim_{n\to\infty} P_{ij}^{(n)} = w_{0j}q_0.$$

Se verifica que el vector $(w_{00}q_0, \ldots, w_{0m-1}q_0)$ es invariante para P, de las identidades $WU = I$ y $P = WDU$. Por la unicidad del vector invariante se concluye que $v = (v_i)_{i\in[m]} = (w_{00}q_0, \ldots, w_{0m-1}q_0)$ y de aquí se obtiene el resultado deseado.

$\boxtimes$

Capítulo 3

Rotaciones en grupos topológicos.

En este capítulo se analizarán algunas transformaciones definidas sobre grupos topológicos compactos, enfatizando sobre algunos casos particulares en el disco unitario en $\mathbb{C}$. Estas transformaciones consisten en funciones continuas y suprayectivas, rotaciones por un elemento fijo y transformaciones afines (la composición de dos funciones del tipo rotación y una función continua y suprayectiva).

3.1. Construcción de medidas de probabilidad en un grupo topológico compacto.

A lo largo de este capítulo, G denotará a un espacio topológico $(G, \tau_G, \cdot)$ con estructura de grupo, y denotaremos por $\mathcal{B}(G)$ a la $\sigma-$álgebra de Borel de G, esto es $\mathcal{B}(G) = \sigma(\tau_G)$.

Decimos que G es un *grupo topológico* si las funciones en G: $(x, y) \mapsto xy$, $x \mapsto x^{-1}$ son funciones continuas.

Una *medida regular* en $(G, \mathcal{B}(G))$ es una medida $m : \mathcal{B}(G) \to \mathbb{R}$ que satisface la propiedad de que para todo $E \in \mathcal{B}(G)$ y $\epsilon > 0$ existe $C \subseteq G$ un conjunto compacto tal que $m(E \backslash C) < \epsilon$.

Para $E \in \mathcal{B}(G)$ y $x \in G$ se definen los conjuntos

$$xE = \{xe : \ e \in E\},$$

y

$$Ex = \{ex : \ e \in E\}$$

que resultan ser elementos de $\mathcal{B}(G)$, ya que $y \mapsto xy$ y $y \mapsto yx$ son funciones continuas.

Una medida $m : \mathcal{B}(G) \to \mathbb{R}$ en $(G, \mathcal{B}(G))$ es

(a) *Invariante bajo rotaciones izquierdas* si para todo $E \in \mathcal{B}(G)$ y $x \in G$ se tiene $m(xE) = m(E)$.

(b) *Invariante bajo rotaciones derechas* si para todo $E \in \mathcal{B}(G)$ y $x \in G$ se tiene $m(Ex) = m(E)$.

(c) *Invariante bajo rotaciones* si es invariante bajo rotaciones izquierdas y derechas.

El siguiente resultado permite construir medidas de probabilidad suponiendo que el grupo topológico es compacto.

Teorema 19 (Construcción de medidas de Haar en grupos compactos). *Sea G un grupo topológico compacto. Entonces existe una única medida de probabilidad $m : \mathcal{B}(G) \to \mathbb{R}$ regular e invariante bajo rotaciones izquierdas en $(G, \mathcal{B}(G))$. A m se le llama la* medida de Haar *en $(G, \mathcal{B}(G))$.*

Demostración. Consultar [Hew94]. $\boxtimes$

Observación 13. Sea G un grupo topológico compacto con medida de Haar m en $(G, \mathcal{B}(G))$. Se tienen las siguientes afirmaciones:

1. Para todo $x \in G$ y $f \in \mathcal{L}_1^{\mathbb{K}}(G, \mathcal{B}(G), m)$
$$\int_G f(y)dm(y) = \int_G f(xy)dm(y).$$

2. Si $U \subseteq G$ es un conjunto abierto no vacío, entonces $m(U) > 0$.

3. Denotemos por $K = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ al disco unitario en $\mathbb{C}$, donde $|\cdot|$ denota el módulo complejo. Se tiene que, con el producto usual en $\mathbb{C}$ y la topología inducida por el módulo complejo en $\mathbb{C}$ es un grupo topológico compacto. Se tiene que la medida de Haar en K coincide con la medida de Lebesgue normalizada. Así mismo, dado $n \geq 1$, se denota por K^n el grupo topológico producto directo (con la operación usual en el producto directo de grupos y la topología producto inducidos por K), el cual es llamado el $n-$*toro* en $\mathbb{C}^n$. Se tiene que la medida de Haar en K^n coincide con la medida producto en $(K, \mathcal{B}(K), m)$.

4. Sea G un grupo topológico compacto y metrizable con métrica $r : G \times G \to G$ tal que τ_G coindice con la topología generada por r. Entonces, la función $\rho : G \times G \to G$ dada por
$$\rho(x, y) = \int_G \left(\int_G r(gxh, gyh)dm(g) \right) dm(h).$$
es una función bien definida, es una métrica en G y para todo $x, y, z \in G$ se tiene que $\rho(xz, yz) = \rho(x, y) = \rho(zx, zy)$, es decir, la métrica es invariante bajo rotaciones.

Demostración de la Observación 3.

1. La prueba se obtiene a través de aproximación por funciones simples. Fije $x \in G$. Considere los siguientes casos para $f \in \mathcal{L}_1^{\mathbb{K}}(G, \mathcal{B}(G), m)$.

   Caso (α). $f = \chi_E$, donde $E \in \mathcal{B}(G)$. En este caso, se tiene que, para cada $y \in G$
$$f(xy) = \chi_E(xy) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad xy \in E \\ 0 & \text{si} \quad xy \notin E \end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad y \in x^{-1}E \\ 0 & \text{si} \quad y \notin x^{-1}E \end{cases} = \chi_{x^{-1}E}(y).$$

   Por ello
$$\int_G f(xy)dm(y) = \int_G \chi_E(xy)dm(y) = \int_G \chi_{x^{-1}E}(y)dm(y) = m(x^{-1}E) = m(E) = \int_G f(y)dm(y).$$

   Caso(β). f es una función $\mathcal{B}(G)-$simple. La conclusión se obtiene por el Caso (α) y linealidad de la integral.

   Caso(γ). $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ y $f \geq 0$.
   En tal caso, se utiliza el Teorema de Aproximación por funciones $\mathcal{B}(G)-$simples para hallar una sucesión creciente $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de funciones $\mathcal{B}(G)$-simples no negativas tal que $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$ en G. Se verifica de inmediato que, para toda $y \in G$ y $n \in \mathbb{N}$ se cumple $0 \leq f_n(xy) \leq f_{n+1}(xy)$ y $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(xy) = f(xy)$. Por el Caso (β) y el Teorema de Convergencia Monótona se concluye que
$$\int_G f(xy)dm(y) = \lim_{n\to\infty} \int_G f_n(xy)dm(y) = \lim_{n\to\infty} \int_G f_n(y)dm(y) = \int_G f(y)dm(y).$$

   Caso(δ). $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.
   En este caso, basta aplicar el Caso (γ) y expresar a $f = f^+ - f^-$, donde $f^+, f^- \geq 0$.

   Caso(ϵ). $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.
   Resulta del Caso (δ) y expresar a $f = \mathrm{Re}(f) + \mathrm{Im}(f)$.

2. Sea $U \subseteq G$ un conjunto abierto no vacío.
   Para cada $g \in G$ considere la función $T_g : G \to G$ definida para cada $x \in G$ como $T_g(x) = gx$. Es claro que T_g es una función continua y que para todo $y \in G$ se satisface que $yU = \{yu : u \in U\} = \{x \in G : y^{-1}x \in U\} = T_{y^{-1}}^{-1}(U)$ que es un conjunto abierto en G.

Se verifica de inmediato que $\{yU\}_{y\in G}$ es una cubierta abierta de G. Por compacidad de G, existen $\{y_1,\ldots y_k\}\subseteq G$ tal que $G=\bigcup_{i=1}^{k} y_iU$. Entonces

$$1=m(G)\leq \sum_{i=1}^{k} m(y_iU)=km(U),$$

de donde $m(U)>0$.

3. Esto se sigue del Teorema 19 (unicidad de la medida de Haar) y el hecho de que la medida de Lebesgue normalizada en $(K,\mathcal{B}(K))$ se construye regular e invariante bajo rotaciones.

4. Observe que, para cada $h\in G$, $(x,y)\in G\times G$, $g\mapsto r(gxh,gyh)$ es una función continua y no negativa de G en $\mathbb{R}$. Como G es compacto, dicha función es acotada y luego, integrable. De la misma manera se tiene que $h\mapsto \int_G r(gxh,gyh)dm(g)$ es una función integrable no negativa.

Afirmación. Se tienen las siguientes propiedades de ρ: Para todo $x,y,z\in G$ ocurre que:
   1. $\rho(x,y)=0$ si y sólo si $x=y$.
   2. $\rho(x,y)\geq 0$.
   3. $\rho(x,y)=\rho(y,x)$.
   4. $\rho(x,z)\leq\rho(x,y)+\rho(y,z)$.
   5. $\rho(xz,yz)=\rho(x,y)=\rho(zx,zy)$

Demostración de la Afirmación. Fije $x,y,z\in G$.

1. Es claro que si $x=y$ entonces $\rho(x,y)=0$. Recíprocamente, si $\rho(x,y)=0$, entonces

$$\int_G\left(\int_G r(gxh,gyh)dm(g)\right)dm(h)=0,$$

lo que significa que

$$\int_G r(gxh,gyh)dm(g)=0,\quad c.t.p.(m)(h)$$

así que

$$r(gxh,gyh)=0\quad \text{c.t.p.}(m\otimes m)(g,h)$$

Por ello, $gxh=gyh\quad$ c.t.p.$(m\otimes m)(g,h)$. Luego $x=y$.

2. Es claro de la definición.

3. Como r es una métrica, se tiene que

$$\rho(x,y)=\int_G\left(\int_G r(gxh,gyh)dm(g)\right)dm(h)=\int_G\left(\int_G r(gyh,gxh)dm(g)\right)dm(h)=\rho(y,x).$$

4. Por la desigualdad triangular para r y la monotonía de la integral, se tiene

$$\begin{aligned}\rho(x,z)&=\int_G\left(\int_G r(gxh,gzh)dm(g)\right)dm(h)\leq\int_G\left(\int_G [r(gxh,gyh)+r(gyh,gzh)]dm(g)\right)dm(h)\\&\leq\int_G\left(\int_G r(gxh,gyh)dm(g)\right)dm(h)+\int_G\left(\int_G r(gyh,gzh)dm(g)\right)dm(h)=\rho(x,y)+\rho(y,z).\end{aligned}$$

5. Por el inciso 1 de esta observación

$$\rho(xz,yz)=\int_G\left(\int_G r(gxzh,gyzh)dm(g)\right)dm(h)=\int_G\left(\int_G r(gxh,gyh)dm(g)\right)dm(h)=\rho(x,y).$$

Similarmente se tiene que $\rho(zx,zy)=\rho(x,y)$.

De esta afirmación se concluye que ρ es una métrica invariante bajo rotaciones.

$\boxtimes$

Continuaremos con algunas definiciones y notaciones.

Decimos que G es un *grupo topológico localmente compacto* si para todo $x \in G$ y $U \subseteq G$ conjunto abierto, existe $V \subseteq G$ un conjunto abierto tal que $\overline{V}$ es un conjunto compacto (donde $\overline{V}$ denota la cerradura topológica de V) y $x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq U$.

Consideremos $\widehat{G} = \{\varphi : G \to K : \ \varphi \text{ es homomorfismo continuo}\}$. A los elementos de $\widehat{G}$ se les llama *caracteres* de G. Note que, dados $\varphi, \psi \in \widehat{G}$, se define la función $\varphi\psi : G \to K$ para cada $x \in G$ como $\varphi\psi(x) = \varphi(x)\psi(x)$, es un homomorfismo continuo, es decir $\varphi\psi \in \widehat{G}$. De esta forma, se define la operación en $\widehat{G}$, de tal forma que $\widehat{G}$ es un grupo abeliano. También, $\widehat{G}$ es un subespacio topólogico de $C(G, \mathbb{C}) = \{f : G \to \mathbb{C} : \ f \text{ es una función continua}\}$ con la topología compacto abierta, se tiene que $\widehat{G}$ es un grupo topológico abeliano localmente compacto.

Denotemos por $\underline{1} : G \to K$ a la función de valor constante 1. Se tiene que $\underline{1} \in \widehat{G}$.

Observación 14. Sea G un grupo topológico.

1. Sean G un grupo localmente compacto y H un subgrupo cerrado de G tal que $H \neq G$. Entonces existe $\gamma \in \widehat{G}$ tal que $\gamma \neq \underline{1}$ y que para todo $h \in H$, $\gamma(h) = 1$.

   En adelante, supondremos que G un grupo compacto y denotaremos por m la medida de Haar en $\mathcal{B}(G)$.

2. $\widehat{G} \subseteq \mathcal{L}_\infty^{\mathbb{C}}(G, \mathcal{B}(G), m)$ y para cada $p \geq 1$ se satisface $\widehat{G} \subseteq \mathcal{L}_p^{\mathbb{C}}(G, \mathcal{B}(G), m)$. Más aún, $\widehat{G}$ es un conjunto ortonormal en $\mathcal{L}_2^{\mathbb{C}}(G, \mathcal{B}(G), m)$.

3. $\widehat{G}$ es una base ortonormal de $\mathcal{L}_2^{\mathbb{C}}(G, \mathcal{B}(G), m)$. De hecho, para cada $f \in \mathcal{L}_2^{\mathbb{C}}(G, \mathcal{B}(G), m)$ existen únicos $\{a_\gamma\}_{\gamma \in \widehat{G}} \subseteq \mathbb{C}$ tal que $\{\gamma \in \widehat{G} : \ a_\gamma \neq 0\}$ es numerable y $f = \sum_{\gamma \in \widehat{G}} a_\gamma \gamma$, esto significa que, para todo $\epsilon > 0$ existe un conjunto finito $R_\epsilon \subseteq \widehat{G}$ tal que, para todo conjunto finito $R \supseteq R_\epsilon$ se tiene que $\left\| f - \sum_{\gamma \in R} a_\gamma \gamma \right\|_2 < \epsilon$.

   También, como $\widehat{G}$ es un conjunto ortonormal en $\mathcal{L}_2^{\mathbb{C}}(G, \mathcal{B}(G), m)$, por la identidad de Parseval para normas en espacios de Banach, se tiene que

   $$\sum_{\gamma \in \widehat{G}} |a_\gamma|^2 = \sum_{\gamma \in \widehat{G}} |a_\gamma|^2 \|\gamma\|_2^2 = \left\| \sum_{\gamma \in \widehat{G}} a_\gamma \gamma \right\|_2 = \|f\|_2 < \infty.$$

   A esta representación de f se le conoce como la *serie de Fourier* de f.

4. Sean G localmente compacto y $T : G \to G$ un endomorfismo. Se define la función $\widehat{T} : \widehat{G} \to \widehat{G}$ para cada $\gamma \in \widehat{G}$ como $\widehat{T}(\gamma) = \gamma \circ T$. Entonces $\widehat{T}$ es un endomorfismo en $\widehat{G}$, que es llamado el *endomorfismo dual* asociado a T.

   También, T es una función inyectiva (suprayectiva) si y sólo si $\widehat{T}$ es una función suprayectiva (inyectiva).

5. Considere el grupo topológico $\dfrac{\mathbb{R}}{\mathbb{Z}} = \{x + \mathbb{Z} : \ x \in \mathbb{R}\}$, donde, para cada $x \in \mathbb{R}$, se define $x + \mathbb{Z} = \{x + n : \ n \in \mathbb{Z}\}$. Entonces la función $\varphi : \dfrac{\mathbb{R}}{\mathbb{Z}} \to K$ dada para todo $x \in \mathbb{R}$ como $\varphi(x + \mathbb{Z}) = \exp(2\pi i x)$ es un isomorfismo de grupos topológicos. De la misma forma, para $n \in \mathbb{N}$, se tiene que, $\varphi_n : \dfrac{\mathbb{R}^n}{\mathbb{Z}^n}$ definida para cada $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ como $\varphi_n((x_1, \ldots, x_n) + \mathbb{Z}^n) = (\exp(2\pi i x_1), \ldots, \exp(2\pi i x_n))$, es un isomorfismo, donde $\dfrac{\mathbb{R}^n}{\mathbb{Z}^n}$ es isomorfo a $\left(\dfrac{\mathbb{R}}{\mathbb{Z}}\right)^n$.

Demostración de la Observación 4. En algunos incisos, se hará referencia a [Hew94], ya que se requiere de Teoría de Representaciones de Grupos para probar dichos enunciados.

1. Consultar [Hew94].

2. En primer lugar, observe que para $\gamma \in \widehat{G}$, como G es compacto, se tiene que $\gamma(G) = \{\gamma(g) : \ g \in G\} \subseteq K$ también lo es, luego γ es acotada, así que existe $M > 0$ tal que $|\gamma| \leq M$, por lo que $\gamma \in \mathcal{L}_{\infty}^{\mathbb{C}}\left(G, \mathcal{B}(G), m\right)$. Más aún, dado $p \geq 1$, como $(G, \mathcal{B}(G), m)$ tiene medida finita, se concluye que $\gamma \in \mathcal{L}_{p}^{\mathbb{C}}\left(G, \mathcal{B}(G), m\right)$.

   Afirmación. Para todo $\gamma \in \widehat{G}$ se satisface
   (a) $\|\gamma\|_2^2 = \langle \gamma, \gamma \rangle = 1$.
   (b) Si $\gamma \neq \underline{1}$ entonces $\langle \gamma, \underline{1} \rangle = \displaystyle\int_G \gamma dm = 0$.

   Demostración de la Afirmación. Fije $\gamma \in \widehat{G}$.

   (a) Note que, como $\gamma(G) \subseteq K$, entonces para todo $g \in G$, $|\gamma(g)| = 1$. De modo que
   $$\|\gamma\|_2^2 = \langle \gamma, \gamma \rangle = \int_G \gamma\overline{\gamma} dm = \int_G |\gamma|^2 dm = 1$$

   (b) Si $\gamma \neq \underline{1}$, entonces existe $a \in G$ tal que $\gamma(a) \neq 1$. De la Observación 13 (inciso 1), se sigue que
   $$\int_G \gamma(x) dm(x) = \int_G \gamma(ax) dm = \int_G \gamma(a)\gamma(x) dm(x) = \gamma(a) \int_G \gamma(x) dm(x),$$
   de donde
   $$(\gamma(a) - 1) \int_G \gamma(x) dm(x) = 0.$$
   Como $\gamma(a) \neq 1$, debe tenerse que $\displaystyle\int_G \gamma(x) dm(x) = 0$.

   De esta afirmación, para cualesquiera $\gamma, \delta \in \widehat{G}$ con $\gamma \neq \delta$ se tiene que $\gamma\overline{\delta} \neq \underline{1}$, así que, por el inciso (b) de la Afirmación se tiene que
   $$\langle \gamma, \delta \rangle = \int_G \gamma\overline{\delta} dm = \langle \gamma\overline{\delta}, \underline{1} \rangle = 0$$

   Por lo tanto, $\widehat{G}$ es un conjunto ortonormal en $\mathcal{L}_2^{\mathbb{C}}\left(G, \mathcal{B}(G), m\right)$.

3. Consultar [Hew94] para la parte que establece que $\widehat{G}$ es una base ortonormal de $\mathcal{L}_2^{\mathbb{C}}\left(G, \mathcal{B}(G), m\right)$. La segunda parte resulta inmediata de la identidad de Parseval en $\mathcal{L}_2^{\mathbb{C}}\left(G, \mathcal{B}(G), m\right)$.

4. Basta observar que para todo $\gamma \in \widehat{G}$, la composición de los homomorfismos γ y T resulta ser un homomorfismo, y utilizar la estructura de grupo que tiene $\widehat{G}$. La segunda afirmación es consecuencia de utilizar las equivalencias de inyectividad y suprayectividad de una función a través de los conceptos de función cancelable por la izquierda y la derecha.

5. Es inmediato.

$\boxtimes$

El siguiente lema caracteriza a los subgrupos de $(\mathbb{R}, +)$, y será utilizado para caracterizar a los subgrupos cerrados de K.

LEMA 6. *Considere el grupo abeliano* $(\mathbb{R}, +)$.

(I) *Sea L un subgrupo de $\mathbb{R}$. Entonces se satisface alguna de las siguientes condiciones:*

   (a) Existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $L = \alpha\mathbb{Z} = \{\alpha t : \ t \in \mathbb{Z}\}$.

   (b) L es denso en $\mathbb{R}$ (con la topología usual de $\mathbb{R}$).

(II) *Dado $\theta \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z} + \theta\mathbb{Z} = \{m + \theta n : \ m, n \in \mathbb{Z}\}$ es un subgrupo denso de $\mathbb{R}$.*

(III) *Para $\theta \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, $\{\exp(2\pi i n\theta) : \ n \in \mathbb{Z}\}$ es un subgrupo denso de K.*

Demostración. Denote por $\mathbb{R}^+ =]0, \infty[$ y también $\mathbb{R}^- =]-\infty, 0[$.

(I) Sea L un subgrupo de $\mathbb{R}$, que denotaremos por $L \leq \mathbb{R}$. Si $L = \{0\}$, claramente $L = 0\mathbb{Z}$. Suponga que $L \neq \{0\}$. Luego existe $x_0 \in L$ con $x_0 \neq 0$. Como $L \leq \mathbb{R}$, entonces $-x_0 \in L$. De modo que $L \cap \mathbb{R}^+ \neq \emptyset$, acotado inferiormente por 0. Sea $\alpha = \inf(L \cap \mathbb{R}^+) \geq 0$. Considere los siguientes casos

Caso 1. $\alpha > 0$.

En este caso, se afirma que $\alpha \in L$. Para probar esto último procedemos por contradicción: Suponga que $\alpha \notin L$. Por la definición de α se tiene que, para todo $\epsilon > 0$ existen $x'_\epsilon, x''_\epsilon \in L \cap \mathbb{R}^+$ tal que $\alpha < x'_\epsilon < x''_\epsilon < \alpha + \epsilon$, es decir, existe $x_\epsilon = x''_\epsilon - x'_\epsilon \in L \cap \mathbb{R}^+$ tal que $0 < x_\epsilon = x''_\epsilon - x_\epsilon < \alpha + \epsilon - \alpha = \epsilon$. En particular, para $\alpha > 0$ existe $x_\alpha \in L \cap \mathbb{R}^+$ tal que $0 < x_\alpha < \alpha$, lo cual es una contradicción a la definición de α. Por lo tanto $\alpha \in L$.

Como $L \leq \mathbb{R}$ y $\alpha \in L$, se concluye que $\alpha\mathbb{Z} \subseteq L$. Demostraremos que $L \cap \mathbb{R}^+ \subseteq \alpha\mathbb{Z} \cap \mathbb{R}^+$. Para ello, sea $l \in L \cap \mathbb{R}^+$. Luego, $\alpha \leq l$. Como $\alpha \in L$, puede suponerse que $\alpha < l$. Sea

$$R + 1 = \min\left\{ n \in \mathbb{N} : \ \frac{1}{n} < \frac{\alpha}{l} \right\}.$$

Observe que $(R+1)\alpha > l \geq R\alpha$, luego $0 \leq l - R\alpha < \alpha$. Como $l - R\alpha \in L \cap \mathbb{R}^+$, esta última desigualdad significa que $0 = l - R\alpha$ (en caso contrario, se tendría una contradicción con la definición de α). Por ello, $l = R\alpha \in \alpha\mathbb{Z}$. Así que $L \cap \mathbb{R}^+ \subseteq \alpha\mathbb{Z}$. De la misma manera se concluye que $L \cap \mathbb{R}^- \subseteq \alpha\mathbb{Z}$. Por tanto, $L = \alpha\mathbb{Z}$.

Caso 2. $\alpha = 0$.

Note que, como $0 = \inf(L \cap \mathbb{R}^+)$, se tiene que 0 es un punto de acumulación de $L \cap \mathbb{R}^+$. Probemos que $\overline{L} = \mathbb{R}$. Para esto, sean $x_0 \in \mathbb{R}$ y $\epsilon > 0$ arbitrarios fijos. Como 0 es punto de acumulación de $L \cap \mathbb{R}^+$, se tiene que existe $l_0 \in L \cap \mathbb{R}^+$ tal que $-2\epsilon < l_0 < 2\epsilon$.

Afirmación. Existe $N \in \mathbb{Z}$ tal que $x_0 - \epsilon < Nl_0 < x_0 + \epsilon$.

Demostración de la Afirmación. Procedamos por contradicción. Considere $r \in \mathbb{Z}$ tal que $rl_0 \leq x_0 - \epsilon < x_0 + \epsilon \leq (r+1)l_0$. Entonces

$$2\epsilon = x_0 + \epsilon - (x_0 - \epsilon) \leq (r+1)l_0 - rl_0 = l_0 < 2\epsilon$$

que es contradictorio, obteniéndose la Afirmación.

De la Afirmación, existe $N \in \mathbb{Z}$ tal que $Nl_0 \in L$ por lo que $Nl_0 \in L \cap (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$. Por la elección de $x_0 \in \mathbb{R}$ y $\epsilon > 0$ se concluye que L es denso en $\mathbb{R}$.

(II) Fije $\theta \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Z}$. Es claro que $\mathbb{Z} + \theta\mathbb{Z} \leq \mathbb{R}$. Probemos por contradicción que $\mathbb{Z} + \theta\mathbb{Z}$ es un subgrupo denso en $\mathbb{R}$. Suponga que la afirmación es falsa. Por el inciso anterior, existe $\beta \in \mathbb{R}$ tal que $\mathbb{Z} + \theta\mathbb{Z} = \beta\mathbb{Z}$. Observe que $1 = 1 + \theta(0) \in \beta\mathbb{Z}$. Luego, existe $m \in \mathbb{Z}$ tal que $1 = m\beta$, por lo tanto $\beta = m \in \{-1, 1\}$.

Por ejemplo, cuando $\beta = m = 1$, $\mathbb{Z} + \theta\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$. Pero $\theta = 0 + \theta \in \mathbb{Z}$, que contradice la hipótesis. El caso $\beta = m = -1$ conduce a una contradicción similar. Por lo tanto, $\mathbb{Z} + \theta\mathbb{Z}$ es un subgrupo denso de $\mathbb{R}$.

(III) Sea $\theta \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$. Por el inciso (II) se tiene $\overline{\mathbb{Z} + \theta\mathbb{Z}} = \mathbb{R}$. Para demostrar que $\{\exp(2\pi i n\theta) : \ n \in \mathbb{Z}\}$ es denso en K, sea $\exp(2\pi i t) \in K$, con $t \in \mathbb{R}$ arbitrario fijo. Note que $t \in \mathbb{R} = \overline{\mathbb{Z} + \theta\mathbb{Z}}$, así que existe una sucesión $(n_m + \theta k_m)_{m \in \mathbb{N}}$ en $\mathbb{Z} + \theta\mathbb{Z}$ tal que $\lim\limits_{m \to \infty} (n_m + \theta k_m) = t$. Observe que, en $(K, |\cdot|)$, $\omega \mapsto \exp(2\pi i \omega)$ es una función continua, de modo que la convergencia anterior implica que

$$\lim_{m \to \infty} \exp(2\pi i \theta k_m) = \lim_{m \to \infty} \exp(2\pi i (n_m + \theta k_m)) = \exp(2\pi i t)$$

en K. Luego, existe una sucesión en $\{\exp(2\pi i n\theta) : \ n \in \mathbb{Z}\}$ que converge a $\exp(2\pi i t)$. Por ello, $\exp(2\pi i t) \in \overline{\{\exp(2\pi i n\theta) : \ n \in \mathbb{Z}\}}$. Entonces $\overline{\{\exp(2\pi i n\theta) : \ n \in \mathbb{Z}\}} = K$.

$\boxtimes$

A continuación se enuncia un resultado que describe a todos los posibles elementos de $\widehat{K}$, así como los homomorfismos continuos de K^n en K, para $n \in \mathbb{N}$.

TEOREMA 20. *Sea n un natural fijo.*

(I) *Sea H un subgrupo cerrado de K. Entonces $H = K$, o bien, H es un grupo cíclico finito que consta de todas las raíces $q-$ésimas de la unidad, para algún $q \in \mathbb{N}$.*

(II) *Los únicos automorfismos de K son la identidad y la función $z \mapsto z^{-1}$.*

(III) *Los únicos homomorfismos de K en K son de la forma $\theta_m : K \to K$, con $\theta_m(z) = z^m$, donde $m \in \mathbb{Z}$.*

(IV) *Los únicos homomorfismos de K^n en K son de la forma $\theta_{(m_1,\ldots,m_n)} : K \to K$, con*

$$\theta_{(m_1,\ldots,m_n)}(z_1, \ldots, z_n) = z_1^{m_1} \cdots z_n^{m_n}$$

y $(m_1, \ldots, m_n) \in \mathbb{Z}^n$.

Demostración.

(I) Sea H un subgrupo cerrado de K y considere los casos siguientes.

Caso 1. H es infinito.
Se tiene que la función $f : \mathbb{R} \to K$ dada por $f(t) = \exp(2\pi it)$ es una homomorfismo continuo y suprayectivo. Así que $f^{-1}(H)$ es un subgrupo de $\mathbb{R}$, donde $f^{-1}(H) = \{t \in \mathbb{R} :\ \exp(2\pi it) \in H\}$. Por el inciso (I) del Lema 6, se tiene alguno de los siguientes casos:

Subcaso 1. Existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $f^{-1}(H) = c\mathbb{Z}$.
Se tiene que $H = f(f^{-1}(H)) = f(c\mathbb{Z}) = \{\exp(2\pi ict) :\ t \in \mathbb{Z}\}$. Como H es infinito, debe ocurrir que $c \notin \mathbb{Q}$, así que por el Lema 6 (incisos (II) y (III)) se tiene que $\mathbb{Z} + c\mathbb{Z}$ es denso en $\mathbb{R}$ y $\{\exp(2\pi ict) :\ t \in \mathbb{Z}\}$ es denso en K. Es claro que $f(\mathbb{Z} + c\mathbb{Z}) = f(c\mathbb{Z})$, luego, por continuidad y suprayectividad de f se obtiene que

$$K = f(\mathbb{R}) = f(\overline{\mathbb{Z} + c\mathbb{Z}}) \subseteq \overline{f(\mathbb{Z} + c\mathbb{Z})} = \overline{f(f^{-1}(H))} = \overline{H} = H.$$

Por ello, $K = H$.

Subcaso 2. $f^{-1}(H) = \mathbb{R}$.
Al igual que en el Subcaso 1, se concluye que $K = H$.

Caso 2. H es finito.
Suponga que H es un subgrupo de q elementos, es decir $|H| = q$. Entonces, se tiene que para todo $h \in H$, $h^q = 1$. Por ello, cada elemento de H es una raíz $q-$ésima de la unidad. En este caso, H consiste de todas las raíces $q-$ésimas de la unidad, que conforman un grupo cíclico finito generado por $\exp\left(\dfrac{2\pi i}{q}\right)$.

(II) Fije $\theta : K \to K$ un automorfismo. Para cada $c, d \in K$ denote por $\overrightarrow{[c, d]}$ el conjunto de elementos de K que conforman el arco (en sentido levógiro) del círculo determinado por c y d, el cual será llamado el intervalo con extremos c y d. Se tiene que $\overrightarrow{[c, d]}$ es un conjunto conexo en K y que todos los conjuntos conexos en K es de esta forma (la prueba de esta afirmación es similar a la demostración de la caracterización de los conjuntos conexos de $\mathbb{R}$).

Observe que $\theta(1) = 1$, $\theta(-1)\theta(1) = \theta(1) = 1$, luego $\theta(-1)$ es un elemento de orden 2. Se verifica inmediatamente que -1 es el único elemento de orden 2 en K, de donde $\theta(-1) = -1$.

También $i, -i$ son los únicos elementos de orden 4, y se tiene que $\theta(i), \theta(-i)$ son elementos de orden 4 que satisfacen $\theta(-i) = -\theta(i)$. Por ello, $\theta(i), \theta(-i) \in \{i, -i\}$. Se consideran los siguientes casos:

Caso (i). $\theta(i) = i$.
Por continuidad de θ se tiene que $\theta\big(\overrightarrow{[1, i]}\big)$ es conexo en K. Entonces $\theta\big(\overrightarrow{[1, i]}\big)$ es un intervalo. De hecho, como $\theta(1) = 1$, $\theta(i) = i$ y θ es una biyección, el intervalo en cuestión es $\overrightarrow{[1, i]}$, o bien $\overrightarrow{[i, 1]}$. Como $-1 \notin \overrightarrow{[i, 1]}$ y -1 es el único elemento de K que cumple que $\theta(-1) = -1 \in \overrightarrow{[i, 1]}$, debe tenerse que $\theta\big(\overrightarrow{[1, i]}\big) = \overrightarrow{[1, i]}$.

Por otro lado, se verifica que el único elemento de orden 8 es $\exp\big(\frac{\pi i}{4}\big)$, también $\theta\big(\exp\big(\frac{\pi i}{4}\big)\big)$ tiene orden 8, así que $\theta\big(\exp\big(\frac{\pi i}{4}\big) = \exp\big(\frac{\pi i}{4}\big)\big)$. Razonando como antes, se obtiene que $\theta\big(\overrightarrow{[1, \exp(\frac{\pi i}{4})]}\big) = \overrightarrow{[1, \exp(\frac{\pi i}{4})]}$.

Inductivamente se verifica que para todo $k \in \mathbb{N}$

$$\theta\left(\exp\left(\frac{2\pi i}{2^k}\right)\right) = \exp\left(\frac{2\pi i}{2^k}\right),$$

ya que para todo $r \in \mathbb{Q}$ y $z \in K$ se tiene que $\theta(z^r) = (\theta(z))^r$.
Por lo tanto, θ fija a todas las raíces de la unidad. Es claro que el conjunto de las raíces de la unidad es denso en K (la demostración de este hecho se tiene como la del inciso (III) del Lema 6). Por lo tanto $\theta = Id_K$.

Caso (ii). $\theta(i) = -i$.
Se procede como en el Caso (i) para probar que para todo $k \in \mathbb{N}$

$$\theta\left(\exp\left(\frac{2\pi i}{2^k}\right)\right) = \exp\left(-\frac{2\pi i}{2^k}\right)$$

y concluir que para todo $z \in K$ se cumple que $\theta(z) = z^{-1}$.

(III) Sea $\theta : K \to K$ un homomorfismo. Observe que, si $\theta = Id_K$, entonces, con la notación introducida ocurre $\theta = \theta_1$. En caso de que $\theta = \underline{1}$, se tendrá que $\theta = \theta_0$. Puede suponerse, sin pérdida de generalidad, que $\theta \notin \{Id_K, \underline{1}\}$.

Como K es compacto y conexo, $\theta(K)$ es un subgrupo compacto (luego, cerrado) y conexo en K. Por lo tanto, $|\theta(K)| = 1$ o bien $\theta(K)$ es infinito. Como $\theta \neq \underline{1}$ (θ no es una función constante), no ocurre que $|\theta(K)| = 1$ así que $\theta(K)$ es infinito. Más aún, por el inciso (I) debe tenerse que $\theta(K) = K$, es decir, θ es suprayección.

Se afirma que $\ker(\theta)$ es un subgrupo cerrado de K con $\ker(\theta) \neq K$. Probemos esto último como sigue: Claramente $\ker(\theta)$ es un subgrupo de K. Además, como $\theta \neq \underline{1}$, entonces existe $a \in K$ tal que $\theta(a) \neq 1$, de modo que $\ker(\theta) \neq K$. Resta probar que $\ker(\theta)$ es cerrado en K, y es suficiente verificar que $\overline{\ker(\theta)} \subseteq \ker(\theta)$. Esto se muestra a continuación. Sea $x \in \overline{\ker(\theta)}$ arbitrario fijo. Esto implica que existe una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $\ker(\theta)$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $\theta(x_n) = 0$ y por continuidad de θ se obtiene que $0 = \lim\limits_{n\to\infty} \theta(x_n) = \theta(x)$. Por ello, $x \in \ker(\theta)$. Así que $\overline{\ker(\theta)} \subseteq \ker(\theta)$ y $\ker(\theta)$ es un subgrupo cerrado de K.

Como $\ker(\theta) \neq K$, entonces, por el inciso (I) se tiene que $\ker(\theta)$ es un grupo cíclico finito generado por $\exp\left(\dfrac{2\pi i}{q}\right)$ para algún $q \in \mathbb{N}$. Explicitamente, $\ker(\theta) = \{\exp\left(\frac{2\pi i}{q}\right) : \ i \in \{0, \ldots, q-1\}\} = R_q$.

Considere el isomorfismo inducido por θ (usando el primer teorema de isomorfismos), definido por $\widetilde{\theta} : \dfrac{K}{R_q} \to K$ donde para cada $z \in K$

$$\widetilde{\theta}(zR_q) = \theta(z)$$

y $\widetilde{\theta} = \{zR_q : z \in K\}$.
De la misma manera, el homomorfismo suprayectivo θ_q cumple que $\ker(\theta_q) = R_q$ induce un isomorfismo $\widetilde{\theta}_q : \dfrac{K}{R_q} \to K$ que satisface que para cada $z \in K$

$$\widetilde{\theta}_q(zR_q) = z^q.$$

Así se obtiene que $\widetilde{\theta} \circ \widetilde{\theta}_q^{\,-1} : K \to K$ es un automorfismo en K., donde para todo $z \in K$ se tiene que $(\widetilde{\theta} \circ \widetilde{\theta}_q^{\,-1})(z) = \widetilde{\theta}(z^{\frac{1}{q}} R_q) = (\theta(z))^{\frac{1}{q}}$. Por el inciso (II) se tiene que $\widetilde{\theta} \circ \widetilde{\theta}_q^{\,-1}$ es la función identidad en K o el mapeo $z \mapsto z^{-1}$.

En el primer caso, se tiene que para todo $z \in K$

$$z = (\widetilde{\theta} \circ \widetilde{\theta}_q^{\,-1})(z) = (\theta(z))^{\frac{1}{q}}, \text{ es decir, } \theta(z) = z^q = \theta_q(z).$$

En el segundo caso, se tendría que para todo $z \in K$

$$z^{-1} = (\widetilde{\theta} \circ \widetilde{\theta}_q^{\,-1})(z) = (\theta(z))^{\frac{1}{q}}, \text{ es decir, } \theta(z) = z^{-q} = \theta_{-q}(z).$$

De esta manera se tiene la conclusión.

(IV) Sea $\theta : K^n \to K$ un homomorfismo. Para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ considere la función $\psi_i : K \to K^n$ definida para todo $z \in K$ como $\psi_i(z) = (z\delta_{ij})_{j=1}^n = (1, \ldots, 1, z, 1, \ldots, 1)$, donde δ_{ij} denota la delta de Kronecker. Es claro que ψ_i es una función continua. También es un homomorfismo, ya que con la operación usual en el producto directo K^n se tiene que, para todo $z, w \in K$ ocurre

$$\psi_i(zw) = (1, \ldots, 1, zw, 1, \ldots, 1) = (1, \ldots, 1, z, 1, \ldots, 1)(1, \ldots, 1, w, 1, \ldots, 1) = \psi_i(z)\psi_i(w).$$

Entonces, para cualquier $i \in \{1, \ldots, n\}$ $\theta \circ \psi_i : K \to K$ es un homomorfismo en K. Por el inciso (III) se tiene que existe $m_i \in \mathbb{Z}$ tal que $\theta \circ \psi_i = \theta_{m_i}$, es decir, para todo $z \in K$

$$\theta_{m_i} z^{m_i} = \theta \circ \psi_i(z) = \theta((1, \ldots, 1, z, 1, \ldots, 1)). \tag{3.1}$$

También, por la estructura de grupo en K^n se tiene que para todo $(z_1, \ldots, z_n) \in K^n$

$$(z_1, \ldots, z_n) = \prod_{i=1}^{n} (z^i \delta_{ij})_{j=1}^n = \prod_{i=1}^{n} \psi_i(z_i) \tag{3.2}$$

De las expresiones (3.1) y (3.2) se concluye que existe $(m_1, \ldots, m_n) \in \mathbb{Z}^n$ tal que para $(z_1, \ldots, z_n) \in K^n$

$$\theta((z_1, \ldots, z_n)) = \theta\left(\prod_{i=1}^{n} \psi_i(z_i)\right) = \prod_{i=1}^{n} \theta(\psi_i(z_i)) = \prod_{i=1}^{n} z_i^{m_i} = \theta_{(m_1, \ldots, m_n)}((z_1, \ldots, z_n)).$$

⊠

Observación 15 (al Teorema 20). Observe que, en la demostración del Teorema 20 se puede concluir que para todo homomorfismo $\theta : K \to K$ de K ($\theta : K^n \to K$ de K^n) existe un único $m \in \mathbb{Z}$ ($(m_1, \ldots, m_n) \in \mathbb{Z}^n$) tal que $\theta = \theta_m$ ($\theta = \theta_{(m_1, \ldots, m_n)}$).

Corolario 9. *Sea $n \in \mathbb{N}$ y $T : K^n \to K^n$ un homomorfismo. Entonces existe una única matriz $Q = (q_{ij})_{i,j=1}^n$ con coeficientes en $\mathbb{Z}$ tal que para cada $(z_1, \ldots, z_n) \in K^n$ ocurre*

$$T((z_1, \ldots, z_n)) = (z_1^{q_{11}} \cdots z_n^{q_{1n}}, \ldots, z_1^{q_{n1}} \cdots z_n^{q_{nn}}).$$

En notación aditiva, consideremos el isomorfismo $\varphi : \dfrac{\mathbb{R}^n}{\mathbb{Z}^n} \to K^n$ definido en la Observación 14. Entonces para todo $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ se tiene que

$$(\varphi^{-1} \circ T \circ \varphi)((x_1, \ldots, x_n) + \mathbb{Z}^n) = Q(z_1, \ldots, z_n)^t + \mathbb{Z}^n.$$

A la matriz Q se le denotará por $[T]$.

Demostración. Sean $n \in \mathbb{N}$ y $T : K^n \to K^n$ un homomorfismo. Para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ considere la función $\pi_i : K^n \to K$ la i−ésima proyección de K^n en K. Entonces $\pi_i \circ T : K^n \to K$ es un homomorfismo. Entonces, por el Teorema 20 (inciso (IV)), se tiene que para $i \in \{1, \ldots, n\}$ existe un único $(q_{i1}, \ldots, q_{in}) \in \mathbb{Z}^n$ tal que

$$(\pi_i \circ T)(z_1, \ldots, z_n) = z_1^{q_{i1}} \cdots z_n^{q_{in}}.$$

Por ello,

$$T(z_1, \ldots, z_n) = (z_1^{q_{11}} \cdots z_n^{q_{1n}}, \ldots, z_1^{q_{n1}} \cdots z_n^{q_{nn}}).$$

Considere la matriz $Q = (q_{ij})_{i,j=1}^n$. Mediante un cálculo directo se concluye que se tiene la parte de la notación aditiva.

⊠

Observación 16. Considere K con m la medida de Haar en $(K, \mathcal{B}(K))$. Note que $\widehat{K} = \{\gamma : K \to K : \gamma \text{ es un homomorfismo continuo}\}$. Por el inciso (III) del Teorema 20, los únicos caracteres de K son las funciones de la forma $z \mapsto z^m$, donde $m \in \mathbb{Z}$. Por ello, dada $f \in \mathcal{L}_2^{\mathbb{C}}(K, \mathcal{B}(G), m)$ se tiene que la serie de Fourier asociada a f está determinada para cada $z \in K$ como

$$f(z) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} a_m z^m$$

donde $(a_m)_{m \in \mathbb{Z}} \subseteq \mathbb{C}$ satisface que $\displaystyle\sum_{m \in \mathbb{Z}} |a_m|^2 < \infty$.

3.1.1. Transformaciones Preservadoras de Medida en $(G, \mathcal{B}(G), m)$.

Sea G un grupo topológico compacto. En este contexto, m denota la medida de Haar en G. Se presentan algunos ejemplos generales transformaciones preservadoras de medida en $(G, \mathcal{B}(G), m)$ y sus características en cuanto a ergodicidad, mezcla fuerte y débil. En algunas caracterizaciones se requiere que el grupo satisfaga algunas condiciones como conmutatividad, conexidad o la propiedad de ser metrizable.

Para cada $a \in G$ defina a la función $T_a : G \to G$ como sigue: Para todo $x \in G$, $T_a(x) = ax$. Se tiene que T_a es un homomorfismo continuo. Es claro que T_a es una función suprayectiva. A esta función se le llama la *rotación por "a"*.

Una *transformación afín* en G es una función $\varphi : G \to G$ de la forma $\varphi = T_a \circ f$, donde $a \in G$ y $f : G \to G$ es un endomorfismo continuo y suprayectivo. Note que toda transformación afín es un endomorfismo continuo y suprayectivo.

El siguiente resultado nos permite concluir que las rotaciones y transformaciones en G son transformaciones $m-$preservadoras de medida.

PROPOSICIÓN 8. *Sea G un grupo compacto y $T : G \to G$ un endomorfismo continuo y suprayectivo. Entonces T es una transformación $m-$preservadora de medida.*

Demostración. Sea $T : G \to G$ un endomorfismo continuo y suprayectivo. Por la continuidad de G se tiene que T es una función $(\mathcal{B}(G), \mathcal{B}(G))-$medible.

Defina a la función $\mu : \mathcal{B}(G) \to \mathbb{R}$ como sigue: Para todo $E \in \mathcal{B}(G)$ se tiene que $\mu(E) = m\big(T^{-1}(E)\big)$.

<u>Afirmación.</u> Se tienen las siguientes propiedades de μ:

(a) Para cualesquiera $x \in G$ y $E \in \mathcal{B}(G)$ existe $a \in G$ tal que $T^{-1}(xE) = aT^{-1}(E)$.

(b) μ es una medida regular.

(c) μ es una medida invariante bajo rotaciones.

Demostración de la Afirmación. Es inmediato que μ es una medida en $(G, \mathcal{B}(G))$. Además de que $\mu(X) = m\big(T^{-1}(G)\big) = m(G) = 1$.

(a) Fije $x \in G$ y $E \in \mathcal{B}(G)$. Por suprayectividad de T, existe $a \in G$ tal que $T(a) = x$. Probemos la igualdad de los conjuntos $T^{-1}(xE)$ y $a^{-1}T^{-1}(E)$.

Sea $w \in T^{-1}(xE)$ arbitrario. Entonces $T(w) \in xE$, luego, $T(a^{-1}w) = (T(a))^{-1}T(w) = x^{-1}w \in E$, es decir $a^{-1}w \in T^{-1}(E)$. Por tanto, $w = a(a^{-1}w) \in aT^{-1}(E)$. Así se obtiene que $T^{-1}(xE) \subseteq aT^{-1}(E)$. Recíprocamente, sea $w \in aT^{-1}(E)$. Tenemos que existe $z \in T^{-1}(E)$ tal que $az = w$, donde $T(z) \in E$. Entonces $T(w) = T(az) = T(a)T(z) = xT(z) \in xE$, así que $w \in T^{-1}(xE)$. De manera que $aT^{-1}(E) \subseteq T^{-1}(xE)$. En conclusión, $T^{-1}(xE) = aT^{-1}(E)$.

(b) Emplearemos la definición de medida regular en $(G, \mathcal{B}(G))$. Fije $\epsilon > 0$ y $E \in \mathcal{B}(G)$ arbitrarios. Por continuidad de T, $T^{-1}(E) \in \mathcal{B}(G)$ y por regularidad de m, existe $C \subseteq G$ compacto tal que $C \subseteq T^{-1}(E)$ y $m\big(T^{-1}(E) \backslash C\big) < \epsilon$.

Por continuidad de T, $T(C)$ es un conjunto compacto tal que $T(C) \subseteq T\big(T^{-1}(E)\big) = E$. También $C \subseteq T^{-1}\big(T^(E)\big)$ y entonces

$$\mu(E \backslash T(C)) = m\big(T^{-1}(E) \backslash T^{-1}\big(T(E)\big)\big) \leq m\big(T^{-1}(E) \backslash C\big) < \epsilon.$$

Así se concluye que μ es una medida regular.

(c) Fije $x \in G$ y $E \in \mathcal{B}(G)$ cualesquiera. Por el inciso (a), existe $a \in G$ tal que $T^{-1}(xE) = aT^{-1}(E)$. Como m es una medida invariante bajo rotaciones se obtiene que

$$\mu(xE) = m\big(T^{-1}(xE)\big) = m\big(aT^{-1}(E)\big) = m\big(T^{-1}(E)\big) = \mu(E).$$

De la misma forma se obtiene que $\mu(Ex) = \mu(E)$. Por ello, μ es una medida invariante bajo rotaciones.

Por la unicidad de la medida de Haar en $(G, \mathcal{B}(G))$ y la Afirmación, se concluye que $m = \mu$. Esto significa que, para todo $E \in \mathcal{B}(G)$ se tiene que

$$m(E) = \mu(E) = m\big(T^{-1}(E)\big).$$

Por lo tanto, T es una transformación $m-$preservadora de medida. ⊠

Se establecerá un criterio de ergodicidad de una rotación por "a.$^{\text{en}}$ K, que simplemente consiste en determinar si a es o no una raíz de la unidad.

Teorema 21. *Sea $a \in K$ y m la medida de Haar en $(K, \mathcal{B}(K))$. Entonces T_a es transformación $m-$érgodica si y sólo si "a"no es una raíz de la unidad.*

Demostración. Fije $a \in K$.

$\Longrightarrow]$ Procedamos por contrapositiva: Suponga que a es una raíz de la unidad. Entonces existe $q \in \mathbb{N}$ tal que $a^q = 1$. Considere la función $\theta_q : K \to K$ dada por $\theta_q(z) = z^q$. Se tiene que θ_q es una función $(\mathcal{B}(K), \mathcal{B}(K))$ medible que satisface, para cada $z \in K$

$$(\theta_q \circ T_a)(z) = \theta_q(az) = (az)^q = a^q z^q = z^q = \theta_q(z).$$

Sin embargo, es claro que θ_q no es una función constante en K. Por el Teorema 7, se concluye que T_a no es una transformación $m-$ergódica.

$\Longleftarrow]$ Suponga que a no es una raíz de la unidad. De acuerdo con el inciso (IV) del Teorema 7, para probar la $m-$ergodicidad de T_a, es suficiente con demostrar que para toda $f \in \mathcal{L}_2^{\mathbb{C}}(K, \mathcal{B}(G), m)$ con $f \circ T_a = f$ se tiene que f es una función constante *c.t.p.*(m).

Fije $f \in \mathcal{L}_2^{\mathbb{C}}(K, \mathcal{B}(G), m)$ con $f \circ T_a = f$ y escribamos su representación en serie de Fourier (Observación 16) dada para todo $z \in K$ como

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}} b_m z^m.$$

Entonces, para cada $z \in K$, ocurre

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}} b_m z^m = f(z) = f(az) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} a^m b_m z^m. \tag{3.3}$$

Por la unicidad en los coeficientes de la serie de Fourier, se sigue que, para todo $m \in \mathbb{Z}$, $b_m(a^m - 1) = 0$. Por hipótesis, para todo natural $n \neq 0$ se tiene que $a_n \neq 1$, es decir, $b_n = 0$. Luego, $f = a_0$ *c.t.p.*(m). Por la elección de $f \in \mathcal{L}_2^{\mathbb{C}}(K, \mathcal{B}(G), m)$ se concluye que T_a es una transformación $m-$ergódica.

⊠

Se generaliza el resultado anterior para grupos compactos.

Teorema 22. *Sea G un grupo compacto, $a \in G$, T_a la rotación por a en G y m la medida de Haar en $(G, \mathcal{B}(G))$. Entonces T_a es una transformación $m-$ergódica si y sólo si $\{a^n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ es un conjunto denso en G. En particular, si T es $m-$ergódica, entonces G es un grupo abeliano.*

Demostración. Sea $a \in G$.

$\Longrightarrow]$ Suponga que T_a es una transformación $m-$ergódica. Denote por $H = \overline{\{a^n : n \in \mathbb{Z}\}}$, que es un subgrupo cerrado de G. Se tiene que $H = G$. Procedamos por contradicción: Suponga que $H \neq G$. Por el inciso 1 de la Observación 14 se tiene que, bajo estas condiciones, existe $\gamma \in \widetilde{G}$ tal que $\gamma \neq \underline{1}$ y para todo $h \in H$, $\gamma(h) = 1$. En particular, $a \in H$ y $\gamma(a) = 1$. Note que γ es una función $(\mathcal{B}(G), \mathcal{B}(K))-$medible que cumple que para cada $z \in K$

$$(\gamma \circ T_a)(z) = \gamma(az) = \gamma(a)\gamma(z) = \gamma(z). \tag{3.4}$$

Por lo tanto γ no es una función no constante en $G \backslash H$, donde $G \backslash H$ es un conjunto abierto no vacío (ya que $H \neq G$) y que cumple que $m(G \backslash H) > 0$ (por la Observación 13, inciso 2) . De modo que γ es una función no constante c.t.p(m). Por el Teorema 7, se concluye que T_a no es una transformación $m-$ergódica, lo que contradice las hipótesis. Por lo tanto, $H = G$ y $\{a^n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ es un conjunto denso en G.

$\Longleftarrow$] Suponga que $D = \{a^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es un conjunto denso en G. De acuerdo con el Teorema 7, para probar la $m-$ergodicidad de T_a, basta con verificar que, para todo $f \in \mathcal{L}_2^{\mathbb{C}}(G, \mathcal{B}(G), m)$ con $f \circ T = f$, se tiene que f es una función constante *c.t.p.*(m). Sea $f \in \mathcal{L}_2^{\mathbb{C}}(G, \mathcal{B}(G), m)$ con $f \circ T = f$ y representación en serie de Fourier dada para cada $z \in K$ por

$$f(z) = \sum_i b_i \gamma_i(z),$$

donde $(b_i)_i \subseteq \mathbb{C}$ satisface $\sum_i |b_i|^2 < \infty$.

Entonces, para cada $z \in \mathbb{C}$, ocurre

$$\sum_i b_i \gamma_i(z) = f(z) = f(az) = \sum_i b_i \gamma_i(a)\gamma_i(z).$$

Por la unicidad de los coeficientes en las series de Fourier se tiene que para todo i, $b_i(\gamma_i(a) - 1) = 0$. Fije i. Se tienen los casos siguientes

Caso (i). $b_i = 0$.
En tal caso, el término i en la expresión de f no es considerado.

Caso (i). $b_i \neq 0$.
Si $b_i \neq 0$, entonces $\gamma_i(a) = 1$. Entonces para todo $n \in \mathbb{Z}$, $\gamma_i(a^n) = 1$, es decir para todo $d \in D$, $\gamma_i(d) = 1$. Como D es denso en G, debe tenerse que $\gamma_i = \underline{1}$.

De ambos casos, se tiene que $f = \sum_i b_i$, luego f es una función constante *c.t.p.*(m). Por la elección de $f \in \mathcal{L}_2^{\mathbb{C}}(G, \mathcal{B}(G), m)$ y el Teorema 7, se concluye que T_a es una transformación $m-$ergódica.

En particular, cuando T_a es una transformación $m-$ergódica, D es un conjunto denso en G, de donde $D \times D$ es denso en $G \times G$, y como las funciones de $G \times G$ en G definidas como $(x, y) \mapsto xy$, $(x, y) \mapsto yx$ coinciden en $D \times D$, coindicen en $G \times G$, por lo tanto, G es un grupo abeliano.

$\boxtimes$

Observación 17. En $(K, \mathcal{B}(K), m)$, para $p \in Z$ consideremos $\theta_p : K \to K$ dada por $\theta_p(z) = z^p$. Es claro que θ_p es un endomorfismo suprayectivo en K y por la Proposición 8 se tiene que θ_p es una transformación $m-$preservadora de medida. Se tiene que para $|p| > 1$, θ_p es una transformación $m-$ergódica.

Demostración de la Observación 6. Para establecer el resultado, considere $f \in \mathcal{L}_2^{\mathbb{C}}(K, \mathcal{B}(G), m)$ cualquiera con $f \circ \theta_p = f$ y representación en serie de Fourier dada, para todo $z \in K$, por $\sum_{m\in\mathbb{Z}} a_m z^m$ con $\sum_{m\in\mathbb{Z}} |a_m|^2 < \infty$. Entonces para todo $z \in K$, ocurre

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}} a_m z^m = f(z) = (f \circ \theta_p)(z) = f(z^p) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} a_m z^{mp}.$$

Se comparan los términos de la serie de la izquierda y la derecha (en ese orden), y por la unicidad en los coeficientes de las series de Fourier y el hecho de que $|p| > 1$ se obtiene por ejemplo que $a_p z^p = a_1 z^p$, luego, $a_p = a_1$. También $a_{p^2} z^{p^2} = a_p z^{p^2}$, que significa que $a_{p^2} = a_p$. Entonces se concluye que $a_1 = a_p = a_{p^2} = \ldots a_{p^m}$, lo cuál es válido para todo $m \in \mathbb{N}$. Similarmente, para cada $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$ se tiene que $a_n = a_{np} = a_{np^2} = \ldots$ Los demás términos que no sean de la forma a_{np^k}, donde $n \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{N}$, en la comparación se tiene que son idénticamente cero (ya que no aparecen en la serie del lado derecho).

La condición $\sum_{m\in\mathbb{Z}} |a_m|^2 < \infty$ implica que $\lim_{m\to\infty} a_m = \lim_{m\to-\infty} a_m = 0$. Por lo tanto, para todo $m \in \mathbb{Z}$ se tiene que $a_m = 0$. Entonces $f = a_0$. Por ello, f es una función constante *c.t.p.*(m). Por la elección arbitraria de $f \in \mathcal{L}_2^{\mathbb{C}}(K, \mathcal{B}(G), m)$ y el Teorema 7, se concluye que θ_p es una transformación $m-$ergódica.

$\boxtimes$

El siguiente resultado generaliza la Observación 17 para grupos abelianos compactos, en el sentido de que los caracteres de K cumplen la condición de ergodicidad que establece el siguiente resultado.

Teorema 23. *Sea G un grupo abeliano compacto con m la medida de Haar en $(G, \mathcal{B}(G))$, $T : G \to G$ un endomorfismo continuo y suprayectivo. Si T es una transformación $m-$ergódica, entonces para cualquier $\gamma \in \widehat{G}$, si existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\gamma \circ T^k = \gamma$ entonces $\gamma = \underline{1}$.*

Demostración. Sea T un endomorfismo continuo y suprayectivo en G. (Recuerde que, por la Proposición 8, T es una transformación $m-$preservadora de medida)

Procedamos por contradicción: Suponga que T es una transformación $m-$ergódica y que existen $\gamma \in \widehat{G}$ y $k \in \mathbb{N}$ tales que $\gamma \circ T^k = \gamma$ y que $\gamma \neq \underline{1}$. Sin pérdida de generalidad, suponga que $n = \text{mín}\{r \in \mathbb{N} : \ \gamma \circ T^r = \gamma\}$. Entonces, para toda $i \in \{0, \dots, k-1\}$ se tiene que $\gamma \circ T^i \neq \gamma$. En particular, esta condición significa que $\{\gamma \circ T^i\}_{i=0}^{k-1}$ son todos distintos entre sí, y como $\widehat{G}$ es un conjunto ortogonal de $\mathcal{L}_2^{\mathbb{C}}(K, \mathcal{B}(G), m)$, $\{\gamma \circ T^i\}_{i=0}^{k-1}$ también lo es. Considere la función $f = \displaystyle\sum_{i=0}^{k-1}(\gamma \circ T^i)$. Es claro que f es una función $(\mathcal{B}(G), \mathcal{B}(K))-$medible y que

$$f \circ T = \sum_{i=1}^{k}(\gamma \circ T^i) = \sum_{i=1}^{k-1}(\gamma \circ T^i) + \gamma = f.$$

Por ergodicidad de T y el Teorema 7, se obtiene que f es una función constante $c.t.p.(m)$, digamos la constante c. Así que, por la identidad de Parseval en $\mathcal{L}_2^{\mathbb{C}}(K, \mathcal{B}(G), m)$, y el hecho de que T es una transformación $m-$preservadora de medida, se tiene que

$$c = \|f\|_2 = \left\| \sum_{i=0}^{k-1}(\gamma \circ T^i) \right\|_2 = \sum_{i=0}^{k-1} \|\gamma \circ T^i\|_2 = \sum_{i=0}^{k-1} \|\gamma\|_2 = k.$$

Lo cual no ocurre a menos que para cada $i \in \{0, \dots, k-1\}$ se tenga que $\gamma \circ T^i = 1$, lo cual contradice el hecho de que $\{\gamma \circ T^i \neq \gamma\}_{i=0}^{k-1}$ son todos distintos entre sí. De esta manera se obtiene la conclusión.

$\boxtimes$

Considerando la notación introducida, se puede reescribir el Teorema 20 de la siguiente manera: para todo $\gamma \in \widehat{K^n}$ existe un único $(m_1, \dots, m_n) \in \mathbb{Z}^n$ tal que $\gamma = \theta_{(m_1, \dots, m_n)}$. Se verifica de inmediato que $\psi : \widehat{K^n} \to \mathbb{Z}^n$ definida por $\psi(\gamma) = \psi(\theta_{(m_1, \dots, m_n)}) = (m_1, \dots, m_n)$ es un isomorfismo (de grupos topológicos).

Recuerde que, por el Corolario 9, dados $n \in \mathbb{N}$ y $T : K^n \to K^n$ un endomorfismo de K^n, existe una única matriz $[T] = Q = (Q_{ij})_{i,j=1}^n$ para cada $(z_1, \dots, z_n) \in K^n$, tal que

$$T((z_1, \dots, z_n)) = (z_1^{q_{11}} \cdots z_n^{q_{1n}}, \dots, z_1^{q_{n1}} \cdots z_n^{q_{nn}}).$$

Consideremos el endomorfismo dual $\widehat{T} : \widehat{K^n} \to \widehat{K^n}$ definido para cada $\gamma \in \widehat{K^n}$ como $\widehat{T}(\gamma) = \gamma \circ T$.

Se tiene que para $(m_1, \dots, m_n) \in \mathbb{Z}^n$ y $(z_1, \dots, z_n) \in K^n$ ocurre

$$\begin{aligned}(\theta_{(m_1,\dots,m_n)} \circ T)(z_1, \dots, z_n) &= \theta_{(m_1,\dots,m_n)}(z_1^{q_{11}} \cdots z_n^{q_{1n}}, \dots, z_1^{q_{n1}} \cdots z_n^{q_{nn}}) = (z_1^{q_{11}} \cdots z_n^{q_{1n}})^{m_1} \cdots (z_1^{q_{n1}} \cdots z_n^{q_{nn}})^{m_n} \\ &= z_1^{q_{11}m_1 + \cdots + q_{n1}m_n} \cdots z_n^{q_{1n}m_1 + \cdots + q_{nn}m_n} \\ &= \theta_{(q_{11}m_1 + \cdots + q_{n1}m_n, \dots, q_{1n}m_1 + \cdots + q_{nn}m_n)}(z_1, \dots, z_n).\end{aligned}$$

Entonces, para todo $(m_1, \dots, m_n) \in \mathbb{Z}^n$ en notación matricial tenemos que

$$\begin{aligned}(\psi \circ T \circ \psi^{-1})(m_1, \dots, m_n) &= \big(\psi\big(\widehat{T}\big(\psi^{-1}(m_1, \dots, m_n)\big)\big)\big) = \psi\big(\widehat{T}\big(\theta_{(m_1,\dots,m_n)}\big)\big) \\ &= \psi\big(\theta_{(q_{11}m_1 + \cdots + q_{n1}m_n, \dots, q_{1n}m_1 + \cdots + q_{nn}m_n)}\big) = [T]_t(m_1, \dots, m_n)^t\end{aligned}$$

donde $[T]_t$ denota la matriz transpuesta de $[T]$.

Se verifica de inmediato que para todo $k \in \mathbb{N}$ se tiene que $[T^k] = \big([T]\big)^k$.

El siguiente corolario caracteriza la ergodicidad de T en K^n por medio de los valores propios de $[T]_t$.

COROLARIO 10. *Sea $n \in \mathbb{N}$ y m la medida de Haar en $(K, \mathcal{B}(K))$. Denote por $m^{\otimes n}$ a la medida producto en $(K^n, \mathcal{B}(K)^{\otimes n})$. Sea $T : K^n \to K^n$ un endomorfismo continuo y suprayectivo. Entonces T es una transformación $m^{\otimes n}-$ergódica si y sólo si los valores propios de $[T]_t$ no son raíces de la unidad.*

Demostración. Sea $T : K^n \to K^n$ un endomorfismo continuo y suprayectivo.

$\Longrightarrow]$ Por contrapositiva: Suponga que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que λ es una raíz $k-$ésima de la unidad y que además es un valor propio de $[T]_t$. Entonces existe $x \in \mathbb{R}^n$ con $x \neq 0$ tal que $\big([T]_t - \lambda \mathrm{I}\big)(x) = 0$. Entonces $\big([T]_t^k - \mathrm{I}\big)(x) = 0$.

Dado que todos los coeficientes de ambas matrices están en $\mathbb{Z}$ puede hallarse en $\mathbb{Q}^n$ tras hacer una normalización, la solución al sistema de ecuaciones que induce la expresión $\big([T]_t - \lambda \mathrm{I}\big)(x) = 0$ puede hallarse en $\mathbb{Z}^n$. Sin pérdida de generalidad, suponga que $x \in \mathbb{Z}^n$.

Con la notación definida previamente se obtiene que

$$x = [T]_t^k(x) = [T^k]_t(x) = (\psi \circ \widehat{T^k} \circ \psi^{-1})(x).$$

Entonces

$$\gamma_x = \psi^{-1}(x) = (\widehat{T^k} \circ \psi^{-1})(x) = \widehat{T^k}(\psi^{-1}(x)) = \widehat{T^k}(\theta_x) = \theta_x \circ T^k$$

Como $x \neq 0$, entonces $\theta_x \neq \underline{1}$. Entonces existe $\theta_x \in \widehat{K^n}$ con $\theta_x \neq \underline{1}$ y $\theta_x = \theta_x \circ\ T^k$. Por el Teorema 23 se concluye que T no es una transformación $m^{\otimes n}-$ergódica.

$\Longleftarrow]$ (Contrapositiva) Suponga que T no es una transformación $m^{\otimes n}-$ergódica. Entonces por el Teorema 23, existen $\gamma \in \widehat{K^n}$ y $k \in \mathbb{N}$ tal que $\gamma = \gamma \circ T^k$ y con $\gamma \neq \underline{1}$. También, por el Teorema 20 (inciso (IV)), existe $m = (m_1, \ldots, m_n) \in \mathbb{Z}^n$ tal que $\gamma = \theta_{(m_1,\ldots,m_n} = \theta_m$. Como $\gamma \neq \underline{1}$, entonces $m \neq 0$. Por ello

$$\begin{aligned}
[T]_t^k(m) = [T^k]_t(m) &= \big(\psi\big(\widehat{T^k}\big(\psi^{-1}(m_1, \ldots, m_n)\big)\big)\big) = \psi\big(\widehat{T^k}\big(\theta_{(m_1,\ldots,m_n)}\big)\big) \\
&= \psi\big(\theta_{(m_1,\ldots,m_n)} \circ T^k\big) = \psi\big(\theta_{(m_1,\ldots,m_n)}\big) = (m_1, \ldots, m_n) = m.
\end{aligned}$$

Luego $[T]_t^k$ tiene a 1 como valor propio. En consecuencia, $[T]_t$ debe tener una raíz $k-$ésima de la unidad como valor propio.

⊠

3.2. Ergodicidad en grupos abelianos compactos, conexos y metrizables.

En esta sección se considerarán grupos abelianos, compactos, conexos y metrizables, utilizando algunas propiedades de estas estructuras para desarrollar resultados de ergodicidad, mezcla fuerte y débil en transformaciones afines.

Teorema 24. *Sea G un grupo abeliano métrico, compacto y conexo. Sea $f : G \to G$ un endomorfismo continuo y suprayectivo. Sea $a \in G$ y $T = T_a \circ f$ la transformación afín asociada a f y a. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(I) *T es una transformación $\mu-$ergódica.*

(II) *Denote la función $B : G \to G$ a la función definida para cada $x \in G$ como $B(x) = x^{-1}f(x)$. Entonces B es un endomorfismo continuo. Además se satisfacen:*

   (A) *Si para todo $k \in \mathbb{N}$ y $\gamma \in \widehat{G}$ ocurre que $\gamma \circ f^k = \gamma$, entonces $\gamma \circ f = \gamma$.*

   (B) *Sea $[a, B(G)]$ el mínimo subgrupo cerrado de G que contiene a $B(G)$ y a. Entonces $[a, B(G)] = G$.*

(III) *Existe $x_0 \in G$ tal que $G = \overline{\{T^n(x_0) :\ n \geq 0\}}$.*

(IV) $[m][\{x \in G :\ \overline{\{T^n(x) :\ n \geq 0\}} = G\}] = 1$.

Demostración. Considere la función B definida en el enunciado. Observe que B es el producto de dos endomorfismos continuos y G es un grupo abeliano, lo que implica que B es un endomorfismo continuo. De hecho, para cada $x \in G$ se tiene que

$$(B \circ f)(x) = B(f(x)) = (f(x))^{-1}f(f(x)) = f(x^{-1})f(f(x)) = f(x^{-1}f(x)) = f(B(x)) = (f \circ B)(x).$$

(I) $\Longrightarrow$ (IV)] Suponga que T es una transformación $m-$ergódica. Observe que, como G es compacto y métrico, entonces es segundo numerable. Sea $\{V_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una base (topológica) para G.

Observe que para cada $x \in G$ ocurre que $\overline{\{T^n(x) : \ x \in G\}} = G$ si y sólo si para todo $i \in \mathbb{N}$ ocurre que $V_i \cap \{T^n(x) : n \geq 0\} \neq \emptyset$, que ocurre si y sólo si $x \in \bigcap_{i=1}^{\infty} \bigcup_{k=0}^{\infty} T^{-k}(V_i)$.

<u>Afirmación.</u> Para todo $i \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$m\Big[\bigcup_{k=0}^{\infty} T^{-k}(V_i)\Big] = 1.$$

Demostración de la Afirmación. Fije $i \in \mathbb{N}$. Observe que

$$T^{-1}\Big(\bigcup_{k=0}^{\infty} T^{-k}(V_i)\Big) \subseteq \bigcup_{k=0}^{\infty} T^{-k}(V_i).$$

Por ello

$$T^{-1}\Big(\bigcup_{k=0}^{\infty} T^{-k}(V_i)\Big) \triangle \bigcup_{k=0}^{\infty} T^{-k}(V_i) = \Big(T^{-1}\Big(\bigcup_{k=0}^{\infty} T^{-k}(V_i)\Big)\Big) \backslash \Big(\bigcup_{k=0}^{\infty} T^{-k}(V_i)\Big).$$

Como T es una transformación $m-$preservadora de medida, entonces

$$m\Big[T^{-1}\Big(\bigcup_{k=0}^{\infty} T^{-k}(V_i)\Big) \triangle \bigcup_{k=0}^{\infty} T^{-k}(V_i)\Big] = 0.$$

Por el inciso (II) del Teorema 6, esto último implica que $m\Big[\bigcup_{k=0}^{\infty} T^{-k}(V_i)\Big] \in \{0,1\}$. Como m es la medida de Haar en G y T es una función continua entonces $\bigcup_{k=0}^{\infty} T^{-k}(V_i)$ es un conjunto abierto no vacío, por el inciso 2 de la Observación 13 se concluye que $m\Big[\bigcup_{k=0}^{\infty} T^{-k}(V_i)\Big] = 1$.

Esto prueba la Afirmación.

Por la Afirmación se tiene que

$$m[\{x \in G : \ \overline{\{T^n(x) : \ n \geq 0\}} = G\}] = m\Big[\bigcap_{i=1}^{\infty} \bigcup_{k=0}^{\infty} T^{-k}(V_i)\Big] = 1.$$

(IV) $\Longrightarrow$ (III)] Es claro.

(III) $\Longrightarrow$ (II)] Suponga que existe $x_0 \in G$ tal que $\overline{\{T^n(x_0) : \ n \geq 0\}} = G$.

(A) Suponga que $\gamma \in \widehat{G}$ satisface para todo $k \in \mathbb{N}$ que $\gamma \circ f^k = \gamma$. Probemos que $\gamma \circ f = \gamma$. Definamos $\gamma_1 = \gamma \circ B$. Observe que $\gamma_1 \in \widehat{G}$. Observe que para cada $k \in \mathbb{N}$ y $x \in G$ ocurre que

$$(\gamma_1 \circ T^k)(x) = \gamma_1(a \cdot f(a) \cdots f^{k-1}(a) f^k(x)) = \gamma_1(a \cdot f(a) \cdots f^{k-1}(a))\gamma_1(f^k(x)),$$

donde

$$\begin{aligned}\gamma_1(a \cdot f(a) \cdots f^{k-1}(a)) &= \gamma((a \cdot f(a) \cdots f^{k-1}(a))^{-1} f(a \cdot f(a) \cdots f^{k-1}(a))) \\ &= \gamma(a^{-1} \cdot f(a^{-1}) \cdots f^{k-1}(a^{-1}) f(a) \cdot f^2(a) \cdots f^k(a)) = \gamma(a^{-1} f^k(a)).\end{aligned}$$

De aquí que

$$\gamma_1(a \cdot f(a) \cdots f^{k-1}(a)) = \gamma(a^{-1} f^k(a)). \tag{3.5}$$

Entonces

$$\begin{aligned}\gamma_1(f^k(x)) &= (\gamma\circ B\circ f^k)(x) = (\gamma\circ f^k)\circ B(x) = (\gamma\circ B)(x)\\ &= \gamma_1(x),\end{aligned}$$

es decir,

$$\gamma_1(f^k(x)) = \gamma_1(x). \tag{3.6}$$

Así que, por las ecuaciones (3.5) y (3.6) se tiene que

$$\begin{aligned}(\gamma_1\circ T^k)(x) &= \gamma_1(a\cdot f(a)\cdots f^{k-1}(a))\gamma_1(f^k(x)) = \gamma(a^{-1}f^k(a))\gamma_1(x) = \gamma(a^{-1})(\gamma\circ f^k)(x)\gamma_1(x)\\ &= \gamma(a^{-1})\gamma(a)\gamma_1(x).\end{aligned}$$

Por tanto $\gamma_1\circ T^k = \gamma_1$. Entonces

$$\{\gamma_1(x_0),\ \gamma_1(T(x_0)),\dots,\gamma_1(T^{k-1}(x_0))\} = \{(\gamma_1\circ T^n)(x_0):\ n\geq 0\}.$$

De esta última identidad se sigue que γ_1 tiene un número finito de valores en el conjunto denso $\{T^n(x_0):\ n\geq 0\}$. Por conexidad de G y continuidad de γ_1 es conexo y finito. Luego, γ_1 es una función constante, de hecho $\gamma_1 = \underline{1}$, puesto que $\gamma_1(1) = 1$. De esta forma se obtiene que para todo $x\in G$ ocurre que

$$1 = \gamma_1(x) = (\gamma\circ B)(x) = \gamma(x^{-1}f(x)) = (\gamma(x))^{-1}(\gamma\circ f)(x),$$

de donde se sigue que $\gamma\circ f = \gamma$.

(B) Probemos que $[a, B(G)] = G$. Procedamos por contradicción. Suponga que $[a, B(G)] \neq G$. Como $[a, B(G)]$ es un subgrupo cerrado de G, por la Observación 14, debe tenerse que existe $\gamma\in\widehat{G}$ tal que $\gamma\neq\underline{1}$ y que $\gamma\big|_{[a,B(G)]} = \underline{1}$. En particular se tiene que $\gamma(a) = 1$ y que $\gamma\circ B = \underline{1}$, y al igual que antes, esto implica que $\gamma\circ f = \gamma$. También, para todo $x\in G$ ocurre que

$$(\gamma\circ T)(x) = \gamma(af(x)) = \gamma(a)(\gamma\circ f)(x) = \gamma(x).$$

De aquí que $\gamma\big(\{T^n(x_0):\ n\geq 0\}\big) = \{\gamma(x_0)\}$. Por la continuidad de γ tenemos que

$$\gamma(G) = \gamma\big(\overline{\{T^n(x_0):\ n\geq 0\}}\big) \subseteq \overline{\gamma\big(\{T^n(x_0):\ n\geq 0\}\big)} = \overline{\{\gamma(x_0)\}} = \{\gamma(x_0)\}.$$

Así que $\gamma(G) = \{\gamma(x_0)\}$. De esto se tiene, al igual que en el inciso (a), que $\gamma = \underline{1}$, que es contradictorio. Por lo tanto $[a, B(G)] = G$.

$\boxtimes$

Teorema 25. *Sea G un grupo topológico compacto con m la medida de Haar en $(G,\mathcal{B}(G))$. Para todo $a\in G$ se tiene que T_a no es una transformación $m-$débilmente mezclante.*

Demostración. Fije $a\in G$. Observe que T_a es una transformación invertible $m-$preservadora de medida, ya que $T_{a^{-1}}$ es una transformación $m-$preservadora de medida tal que $T_a\circ T_{a^{-1}} = Id_G = T_{a^{-1}}\circ T_a$. Denote por U_{T_a} el operador asociado a T_a en $\mathcal{L}_2^{\mathbb{C}}(G,\mathcal{B}(G),m)$.

Por otro lado, para cualquier $\gamma\in\widehat{G}$ y $x\in G$ se tiene que

$$U_{T_a}(\gamma)(x) = (\gamma\circ T_a)(x) = \gamma(ax) = \gamma(a)\gamma(x),$$

donde no necesariamente ocurre que $\gamma(a) = 1$. De aquí se obtiene que 1 no es el único valor propio de U_{T_a}, así que por la Observación 9 se tiene que T_a no tiene espectro continuo. Finalmente, por el Teorema 13 se concluye que T_a no es una transformación $m-$débilmente mezclante. $\boxtimes$

Teorema 26. *Sea G un grupo compacto y abeliano, m la medida de Haar en $(G,\mathcal{B}(G))$, $T: G\to G$ un endomorfismo continuo. Las condiciones siguientes son equivalentes:*

(I) *T es una transformación $m-$fuertemente mezclante.*

(II) *T es una transformación $m-$débilmente mezclante.*

(III) *T es una transformación $m-$ergódica.*

Demostración. En general se tienen las implicaciones (I) $\Longrightarrow$ (II) y (II) $\Longrightarrow$ (III). Resta probar (III) $\Longrightarrow$ (I).

Suponga que T es una transformación $m-$ergódica. Probaremos que T es una transformación $m-$fuertemente mezclante. De acuerdo con el bloque 3 del Teorema 10, basta con verificar que para todo $f, g \in \mathcal{L}_2^{\mathbb{K}}(G, \mathcal{B}(G), m)$ se satisface

$$\lim_{n\to\infty} \langle U_T^n(f), g\rangle = \langle f, 1\rangle\langle 1, g\rangle.$$

Consideremos los siguientes casos:

Caso 1. $\gamma, \delta \in \widehat{G}$.

Cuando $\gamma = \underline{1} = \delta$, el resultado es claro. Suponga entonces que $\gamma \neq \underline{1}$, $\delta \neq \underline{1}$.

Afirmación. Existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para cada natural $n \geq N$ ocurre que

$$\langle U_T^n(\gamma), \delta\rangle = 0.$$

Demostración de la Afirmación. Considere los casos siguientes:

Para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $U_T^n(\gamma) \neq \delta$.

Como $\widehat{G}$ es un conjunto ortonormal en $\mathcal{L}_2^{\mathbb{C}}(X, \Sigma, \mu)$ se tiene para todo $n \in \mathbb{N}$ que $\langle U_T^n(\gamma), \delta\rangle = 0$.

Existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\gamma \circ T^N = \delta$.

Como T es una transformación $\mu-$ergódica y $\delta \neq 1$, por el Teorema 7 se tiene que para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $\delta \circ T^n \neq \delta$, y como $\widehat{G}$ es base ortonormal de $\mathcal{L}_2^{\mathbb{C}}(G, \mathcal{B}(G), m)$ se tiene que

$$\langle U_T^{n+N}(\gamma), \delta\rangle = \langle \delta \circ T^n, \delta\rangle = 0.$$

En este caso, para todo natural $n \geq N$ se tiene que $\langle U_T^n(\gamma), \delta\rangle = 0$.

Esto demuestra la Afirmación.

De la Afirmación se concluye que $\lim\limits_{n\to\infty} \langle U_T^n(\gamma), \delta\rangle = 0 = \langle \gamma, 1\rangle\langle 1, \delta\rangle$.

Caso 2. Fije $\delta \in \widehat{G}$. En este caso, así como en la demostración del Teorema 10, se puede concluir que

$$\mathtt{W}(\delta) = \left\{ f \in \mathcal{L}_2^{\mathbb{C}}(G, \mathcal{B}(G), m) : \lim_{n\to\infty} \langle U_T^n(f), \delta\rangle = \langle f, 1\rangle\langle 1, \delta\rangle = 0 \right\}$$

es un subespacio cerrado de $\mathcal{L}_2^{\mathbb{C}}(G, \mathcal{B}(G), m)$ tal que $\widehat{G} \subseteq \mathtt{W}(\delta)$. Considere $\mathtt{W}(\delta)^\perp = \{g \in \mathcal{L}_2^{\mathbb{C}}(G, \mathcal{B}(G), m) :$ Para todo $f \in \mathtt{W}(\delta) : \ \langle f, g\rangle = 0\}$. Se afirma que $\mathtt{W}(\delta)^\perp = \{0\}$. Para demostrar esto último, sea $\delta \in \mathtt{W}(\delta)^\perp$ con representación en series de Fourier $g = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} a_k\gamma_k$, donde $(\gamma_k)_{k\in\mathbb{Z}} \subseteq \widehat{G}$. Como $g \in \widehat{G}$ y $\widehat{G}$ es una base ortonormal de $\mathcal{L}_2^{\mathbb{C}}(G, \mathcal{B}(G), m)$, entonces para cada $k \in \mathbb{Z}$ ocurre que $\langle g, \gamma_k\rangle = 0$, de donde, para cada $k \in \mathbb{Z}$ ocurre que

$$0 = \langle g, \gamma_k\rangle = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \langle a_m\gamma_m, \gamma_k\rangle = a_k\langle \gamma_k, \gamma_k\rangle = a_k$$

Así que $g = 0$. Como $g \in \mathtt{W}(\delta)^\perp$, entonces $\mathtt{W}(\delta)^\perp = \{0\}$. Como $\widehat{G} \subseteq \mathtt{W}(\delta)^\perp$, entonces puede concluirse al igual que en el Teorema 10, que $\mathtt{W}(\delta) = \mathcal{L}_2^{\mathbb{C}}(G, \mathcal{B}(G), m)$ y así se tiene la conclusión en este caso.

Caso 3. Fije $f \in \mathcal{L}_2^{\mathbb{C}}(G, \mathcal{B}(G), m)$.

Como en el caso 2, se concluye que

$$\mathtt{W}(f) = \left\{ g \in \mathcal{L}_2^{\mathbb{C}}(G, \mathcal{B}(G), m) : \lim_{n\to\infty} \langle U_T^n(f), g\rangle = \langle f, 1\rangle\langle 1, g\rangle = 0 \right\}$$

es un subespacio cerrado de $\mathcal{L}_2^{\mathbb{C}}(G, \mathcal{B}(G), m)$ que conincide con $\mathcal{L}_2^{\mathbb{C}}(G, \mathcal{B}(G), m)$.

$\boxtimes$

TEOREMA 27. *Sea G un grupo abeliano, compacto, conexo y métrico y sea m la medida de Haar en $(G, \mathcal{B}(G))$. Sean $a \in G$, $f : G \to G$ un endomorfismo continuo y suprayectivo. Considerar $T = T_a \circ f$ la transformación afín asociada. Las afirmaciones siguientes con equivalentes:*

(I) *T es una transformación $m-$fuertemente mezclante.*

(II) *T es una transformación $m-$débilmente mezclante.*

(III) *f es una transformación $m-$ergódica.*

Demostración.

(I) $\Longrightarrow$ (II) $\big]$ Es claro.

(II) $\Longrightarrow$ (III) $\big]$ (Contrapositiva) Suponga que f no es una transformación $m-$ergódica. Por el inciso (IV) del Teorema 7 existe $g \in \mathcal{L}_2^{\mathbb{C}}(G, \mathcal{B}(G), m)$ tal que $g \circ f = g$ y que g no es una función constante *c.t.p.*(m). Considere la representación en series de Fourier para g

$$g = \sum_{k \in \mathbb{Z}} b_i \gamma_i$$

, donde $(\gamma_i)_{i \in \mathbb{Z}} \subseteq \widehat{G}$. Entonces para todo $x \in G$ ocurre que

$$0 = \sum_{i \in \mathbb{Z}} b_i [\gamma_i - (\gamma_i \circ f)](x) = 0.$$

Como g no es una función constante *c.t.p.*(m) existe $i \in \mathbb{Z}$ tal que $b_i \neq 0$, esto último implica que $\gamma_i = \gamma_i \circ f$ y $\gamma_i \neq \underline{1}$. Escribamos $\gamma = \gamma_i$. Se verifica de inmediato que para todo $n \in \mathbb{N}$ y $x \in G$ ocurre que

$$U_T^n(\gamma)(x) = \gamma(a) \dots \gamma(f^{n-1}(a))\gamma(x).$$

De aquí que

$$\left|\langle U_T^n(\gamma), \gamma\rangle\right| = |\gamma(a) \dots \gamma(f^{n-1}(a))|\left|\langle \gamma, \gamma\rangle\right| = \|\gamma\|_2 = 1.$$

Por lo tanto

$$\lim_{n \to \infty} \langle U_T^n(\gamma), \gamma\rangle = 1 \neq 0 = \langle \gamma, 1\rangle\langle 1, \gamma\rangle.$$

Por el bloque 3 del Teorema 10 se concluye que T no es una transformación $m-$fuertemente mezclante.

(III) $\Longrightarrow$ (I) $\big]$ Suponga que f es una transformación $m-$ergódica. Por el Teorema 24 se satisfacen

(a) Si para todo $k \in \mathbb{N}$ y $\gamma \in \widehat{G}$ ocurre que $\gamma \circ f^k = \gamma$, entonces $\gamma \circ f = \gamma$.

(b) Sea $[a, B(G)]$ el mínimo subgrupo cerrado de G que contiene a $B(G)$ y a. Entonces $[a, B(G)] = G$.

Considere $\widehat{B} : \widehat{G} \to \widehat{G}$ el homomorfismo dual definido para cada $\gamma \in \widehat{G}$ como

$$\widehat{B}(\gamma) = \gamma \circ B.$$

Observe que para todo $\gamma \in \widehat{G}$ y $x \in G$ ocurre que

$$(\gamma \circ B)(x) = \gamma(x^{-1} f(x)) = (\gamma(x))^{-1}(\gamma \circ f)(x).$$

<u>Afirmación.</u> $\widehat{B}$ es un homomorfismo inyectivo.

Demostración de la Afirmación. Fije $\gamma \in \widehat{G}$ con $\widehat{B}(\gamma) = \underline{1} = \gamma \circ B$. Para cada $x \in G$ ocurre que $1 = \underline{1}(x) = (\gamma \circ B)(x) = (\gamma(x))^{-1}(\gamma \circ f)(x)$, es decir $(\gamma \circ f)(x) = \gamma(x)$. Como f es una transformación $m-$ergódica, por el Teorema 7 se tiene que γ es una función constante *c.t.p.*(m) , y como $\gamma(1) = 1$, entonces $\gamma = \underline{1}$.

Por tanto $\ker(\widehat{B}) = \{\underline{1}\}$, es decir, $\widehat{B}$ es un homomorfismo inyectivo.

Por el inciso 4 de la Observación 14, la Afirmación implica que B es un homomorfismo suprayectivo, así que $B(G) = G$. Entonces, para $a \in G$ existe $b \in G$ tal que $a = B(b) = b^{-1} f(b)$.

Considere la función $\psi = T_b$, que es una transformación invertible $m-$preservadora de medida. Observe que como f es una transformación $m-$ergódica, por el Teorema 26 se tiene que f es una transformación $m-$fuertemente mezclante.

Observe que para todo $x \in G$ se tiene que

$$(\psi \circ T)(x) = \psi(af(x)) = baf(x) = f(b)f(x) = f(bx) = (f \circ \psi)(x),$$

de donde, para cada $n \in \mathbb{N}$ ocurre que

$$\psi \circ T^n = f^n \circ T.$$

Desde que ψ es una transformación invertible $m-$preservadora de medida, para todo $C, D \in \mathcal{B}(G)$ y $n \in \mathbb{N}$ ocurre que

$$m[T^{-n}(C) \cap D] = m[T^{-n}(\psi^{-1}(\psi(C))) \cap D] = m[\psi^{-1}(f^{-n}(\psi(C))) \cap \psi^{-1}(\psi(D))] = m[f^{-n}(\psi(C)) \cap \psi(D)].$$

Como f es una transformación $m-$fuertemente mezclante, para cada $C, D \in \mathcal{B}(G)$ se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} m[T^{-n}(C) \cap D] = \lim_{n\to\infty} m[f^{-n}(\psi(C)) \cap \psi(D)] = m[\psi(C)]m[\psi(D)] = m[C]m[D].$$

Por lo tanto, T es una transformación $m-$fuertemente mezclante.

$\boxtimes$

Capítulo 4

Caminatas Aleatorias y Teoremas Límite.

En este capítulo se presentarán resultados clásicos para caminatas aleatorias simples en $\mathbb{Z}$ (en algunos casos $\mathbb{Z}^d$, $d \geq 1$) referentes a la recurrencia y comportamiento asintótico de dicho proceso.

Consideremos $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad, $d \in \mathbb{N}$. Tenemos las siguientes definiciones y notaciones:

Una función $X : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R})^{\otimes d})$ será llamada una *variable aleatoria* en $\mathbb{R}^d$ si X es una función $(\mathcal{F}, \mathcal{B}(\mathbb{R})^{\otimes d})-$medible. Diremos que X es una *variable aleatoria* en $\mathbb{Z}^d$ si lo es en $\mathbb{R}^d$ y para cada $\omega \in \Omega$ se tiene que $X(\omega) \in \mathbb{Z}^d$.

En este caso, para cada $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})^{\otimes d}$ denotaremos por $\mathbb{P}[X \in A] = \mathbb{P}[X^{-1}(A)]$.

Si $X \in \mathcal{L}_1^{\mathbb{K}}(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, denotaremos por

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X] = \int_{\Omega} X d\mathbb{P}.$$

a la *esperanza* de X respecto a $\mathbb{P}$.

Sean $n \in \mathbb{N}$ y $X_1, \ldots, X_n : \Omega \to \mathbb{R}^d$ variables aleatorias en $\mathbb{R}^d$. Diremos que:

(a) $X_1, \ldots, X_n$ son *variables aleatorias independientes* respecto a $\mathbb{P}$ si para todo $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})^d$ ocurre que

$$\mathbb{P}\left[\bigcap_{i=1}^{n} X_i^{-1}(A_i)\right] = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}[X_i^{-1}(A_i)].$$

(b) $X_1, \ldots, X_n$ son *variables aleatorias idénticamente distribuidas* respecto a $\mathbb{P}$ si para todo $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ y $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})^{\otimes d}$ se tiene que $\mathbb{P}[X_i^{-1}(A)] = \mathbb{P}[X_j^{-1}(A)]$.

Dado $\mathbb{T}$ un conjunto no vacío (generalmente tendremos el caso $\mathbb{T} = \mathbb{N}$ o $\mathbb{T} = [0, +\infty[$), una colección de variables aleatorias en $\mathbb{R}^d$ definidas en Ω, $\{X_t\}_{t \in \mathbb{T}}$ será llamado un *proceso estocástico* en $\mathbb{R}^d$.

Diremos que el proceso estocástico definido en Ω, $\{X_t\}_{t \in \mathbb{T}}$ con valores en $\mathbb{R}^d$ consta de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas (en $\mathbb{R}^d$) si para todo conjunto finito $\mathbb{T}_0 \subseteq \mathbb{T}$ se tiene que $\{X_t\}_{t \in \mathbb{T}_0}$ son variables independientes e idénticamente distribuidas (en $\mathbb{R}^d$) respecto a $\mathbb{P}$.

Denotemos a $\mathbb{N} \cup 0$ por $\mathbb{N}_0$.

Definición 11. *Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad. Denotemos por $\mathbf{E}$ al espacio medible $\mathbb{N}^d$, $\mathbb{Z}^d$ $(d \in \mathbb{N})$ o bien un subconjunto finito de estos. Sea $\{X_i\}_{i \in \mathbb{N}_0}$ un proceso estocástico con valores en $\mathbf{E}$ definido en Ω.*

(A) *Se dice que $\{S_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ es una* **cadena de Markov** *si para cualesquiera $n \in \mathbb{N}$, $s_0, s_1, \ldots, s_n, s_{n+1} \in \mathbf{E}$ con $\mathbb{P}[S_0 = x_0, \ldots, S_n = s_n] > 0$ se cumple que*

$$\mathbb{P}[S_{n+1} = s_{n+1} | S_n = s_n, \ldots, S_0 = s_0] = \mathbb{P}[S_{n+1} = s_{n+1} | S_n = s_n].$$

En este caso, $\boldsymbol{E}$ es llamado el espacio de estados de la cadena. Para cada $n \in \mathbb{N}_0$, $x, y \in \mathbf{E}$ escribiremos

$$\mathbb{P}_{x,y}(n) = \mathbb{P}[S_{n+1} = y | S_n = x]$$

llamadas las probabilidades de transición de la cadena (en un paso) del estado x al estado y en el tiempo n.

(B) *Una* **cadena de Markov** $\{S_i\}_{i\in\mathbb{N}_0}$ *será llamada* **homogénea** *(respecto al tiempo) si para todo* $n, m \in \mathbb{N}$ *y* $s, s' \in \mathbf{E}$ *ocurre que*

$$\mathbb{P}[S_{n+m} = s | S_m = s'] = \mathbb{P}[S_n = s | S_0 = s'].$$

Para una cadena homogénea, se tiene que para todo $n, m \in \mathbb{N}_0$ *y* $x, y \in \mathbf{E}$ *la identidad* $\mathbb{P}_{x,y}(n) = \mathbb{P}_{x,y}(m)$ *es válida, cantidad que simplemente se escribirá como* $\mathbb{P}_{x,y}$. *Escribimos también* $\mathbb{P}^{(n)}_{x,y} = \mathbb{P}[S_n = y | S_0 = x]$ *como la probabilidad de transición del estado* x *al estado* y *en* n *pasos.*

(C) *Sea* $\{S_i\}_{i\in\mathbb{N}_0}$ *una cadena de Markov homogénea con espacio de estados* $\mathbf{E}$.

I. *Dos estados* $x, y \in \mathbf{E}$ *están* **comunicados** *si existen* $N, M \in \mathbb{N}_0$ *tal que* $\mathbb{P}^{(N)}_{x,y} > 0$, $\mathbb{P}^{(M)}_{y,x} > 0$.

II. *La cadena* $\{S_i\}_{i\in\mathbb{N}_0}$ *es* **irreducible** *si todos los estados están comunicados.*

III. *Un* **estado** $x \in \mathbf{E}$ *es* **recurrente** *si* $\mathbb{P}[\exists n \in \mathbb{N} : \ S_n = x | S_0 = x] = 1$.

IV. *Un* **estado** $x \in \mathbf{E}$ *es* **transitorio** $\mathbb{P}[\exists n \in \mathbb{N} : \ S_n = x | S_0 = x] < 1$.

V. *La* **cadena** $\{S_i\}_{i\in\mathbb{N}_0}$ *es* **recurrente** *si todos los estados son recurrentes.*

VI. *La* **cadena** $\{S_i\}_{i\in\mathbb{N}_0}$ *es* **transitoria** *si todos los estados son transitorios.*

Observación 18. Sea $\{S_i\}_{i\in\mathbb{N}_0}$ una cadena de Markov homogénea con espacio de estados $\mathbf{E}$ definida en Ω. Se verifican las siguientes ecuaciones (de Chapman-Kolmogorov). Para cada $n, m \in \mathbb{N}$ y $x, y \in \mathbf{E}$ ocurre que

$$\mathbb{P}^{(n+m)}_{x,y} = \sum_{z\in\mathbf{E}} \mathbb{P}^{(n)}_{x,z}\mathbb{P}^{(m)}_{z,y}. \tag{4.1}$$

También, para cada $x \in \mathbf{E}$

(a) x es un estado recurrente si y sólo si $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}^{(n)}_{x,x} = \infty$.

(b) x es un estado transitorio si y sólo si $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}^{(n)}_{x,x} < \infty$.

También, utilizando las ecuaciones de Chapman-Kolmogorov se tiene que la propiedad de recurrencia y transitoriedad es una propiedad de clase, esto es, para todo $x, y \in \mathbf{E}$ estados comunicados, x es un estado recurrente (transitorio) si y sólo si y es un estado recurrente (transitorio).

Denotemos por 0 a $(0, \dots, 0) \in \mathbb{Z}^d$ y para cada $i \in \{1, \dots, n\}$ denotemos por e_i al vector canónico en $\mathbb{Z}^d$.

Definición 12. *Una caminata aleatoria en* $\mathbb{Z}^d$ *es un proceso estocástico* $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ *en* $\mathbb{Z}^d$ *definido en* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *tal que para todo* $n \in \mathbb{N}$

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \tag{4.2}$$

donde $\{X_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ *es una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas en* $\mathbb{Z}^d$ *definidas en* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Así mismo, una caminata aleatoria simple en $\mathbb{Z}^d$ *es una caminata aleatoria en* $\mathbb{Z}^d$ *definida en* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *que satisface para todo* $i \in \mathbb{N}$ *y* $j \in \{1, \dots, d\}$

$$\mathbb{P}[X_i = e_j] = \mathbb{P}[X_i = -e_j] = \frac{1}{2d}.$$

Observación 19. Es bien sabido que una caminata aleatoria en $\mathbb{Z}^d$ es una cadena de Markov homogénea con espacio de estados $\mathbb{Z}^d$. Consideremos una caminata aleatoria simple en $\mathbb{Z}^d$. Para cada $a, b \in \mathbb{Z}^d$ consideremos las probabilidades de transición del estado a al estado b en un paso, definidas previamente. Para cada $a \in \mathbb{Z}^d$, por independencia de las variables $\{X_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, las únicas probabilidades de transición a un paso no nulas están dadas para cada $j \in \{1, \dots, n\}$ por

$$\mathbb{P}_{a,a\pm e_j} = \mathbb{P}[S_{n+1} = a \pm a + e_j | S_n = a] = \mathbb{P}[X_{n+1} = \pm e_j] = \frac{1}{2d} \qquad \forall j \in \{1, \dots, n\}.$$

Similarmente se tiene que $\mathbb{P}_{a\pm e_j, a} = \dfrac{1}{2d}$.

Entonces, directamente de las ecuaciones de Chapman-Kolmogorov, se verifica que la caminata aleatoria simple en $\mathbb{Z}^d$ es irreducible.

4.1. Clasificación de Caminatas Aleatorias en $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}^2$ y $\mathbb{Z}^3$.

Debido a la Observación 19, la caminata es irreducible. Por lo tanto, basta con estudiar la recurrencia o transitoriedad de un único estado para concluir la recurrencia o transitoriedad de la caminata. Previo al resultado, se establece una observación con respecto a la función Gamma Γ.

Observación 20. Denotemos por $\Gamma :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ a la función dada por

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty t^\alpha \exp(-t)dt > 0.$$

Por un corolario del Teorema de Convergencia Dominada de Lebesgue y empleando el hecho de que para cada $\alpha > 0$ ocurre que $\lim_{t\to\infty} t^\alpha \exp(-t) = 0$, tenemos que Γ es una función derivable en $]0, +\infty[$.

Definamos ahora la función $\Psi :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ para cada $\alpha > 0$ como

$$\Psi(\alpha) = \frac{\Gamma'(\alpha)}{\Gamma(\alpha)} = \frac{d}{d\alpha}(\ln(\alpha)).$$

Recuerde que $\gamma = \lim_{n\to\infty}\left[\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n)\right]$ es la constante de Euler, y que puede obtenerse que $\lim_{x\to 1} \Gamma'(x) = -\gamma$. Se tiene también que para $\alpha > 0$ ocurre que $\Gamma(\alpha + 1) = \alpha\Gamma(\alpha)$, y de aquí se obtiene la identidad

$$\Gamma'(\alpha + 1) = \frac{d}{d\alpha}\Gamma(\alpha + 1) = \alpha\Gamma'(\alpha) + \Gamma(\alpha).$$

Luego,

$$\Psi(\alpha + 1) = \frac{\Gamma'(\alpha + 1)}{\Gamma(\alpha + 1)} = \frac{\Gamma'(\alpha + 1)}{\alpha\Gamma(\alpha)} = \frac{\Gamma'(\alpha)}{\Gamma(\alpha)} + \frac{1}{\alpha} = \Psi(\alpha) + \frac{1}{\alpha}.$$

donde $\Psi(1) = \frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)} = -\gamma$.

Puede deducirse ahora que para todo $n \in \mathbb{N}$:

$$\Psi(n + 1) = -\gamma + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

Más aún, considerando $x \in \mathbb{N}$, se tiene también que

$$\Psi(x + n) = \frac{1}{x + n - 1} + \frac{1}{x + n - 2} + \cdots + \Psi(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{x + k} + \Psi(x).$$

De aquí que

$$\begin{aligned}
\sum_{k=n+2}^{x+n} \frac{1}{k} &= -\gamma + \sum_{k=1}^{x+n} \frac{1}{k} - \left[-\gamma + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k}\right] \\
&= \Psi(x + n) - \Psi(n + 1) = \frac{1}{x + n - 1} + \frac{1}{x + n - 2} + \cdots + \Psi(x) - \left[-\gamma + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k}\right] \\
&= \sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{x + k} - \frac{1}{k + 1}\right) + \gamma + \Psi(x).
\end{aligned}$$

Cuando n tiende a infinito, el lado izquierdo de la última ecuación converge a cero. Se obtiene que

$$\Psi(x) = -\gamma - \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{x + k} - \frac{1}{k + 1}\right) = -\gamma - \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{x + k} - \frac{1}{k + 1}\right)$$

Derivando término a término esta serie convergente, tenemos que

$$\frac{d\Psi}{dx}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(x + k)^2} > 0.$$

Es decir, Ψ es derivable y tiene derivada positiva en $\mathbb{N}$.

Proposición 9. *Considere* $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *una caminata aleatoria simple en* $\mathbb{Z}^d$ *definida en* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. *Denote por* 0 *a* $(0,\ldots,0) \in \mathbb{Z}^d$.

(I) *Cuando* $d \in \{1, 2\}$, 0 *es un estado recurrente (y por tanto, la caminata es recurrente).*

(II) *Cuando* $d = 3$, 0 *es un estado transitorio (y por tanto, la caminata es transitoria).*

Demostración. (I) Considere los casos siguientes

Caso $d = 1$. Tenemos la siguiente

Afirmación 1. Para todo $n \geq 1$, $\mathbb{P}_{0,0}^{(2n)} = \binom{2n}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^n\left(1-\frac{1}{2}\right)^n$.

Demostración de la Afirmación 1. Sea $n \in \mathbb{N}$. Observe primero que, suponiendo $S_0 = 0$, se requiere efectuar (exactamente) una cantidad par de pasos en la caminata para volver al estado 0. Entonces $\mathbb{P}_{0,0}^{(2n+1)} = 0$.

Para cada $n \geq 1$ definamos R_{2n} y L_{2n} el número de pasos efectuados hacia la derecha y hacia la izquierda (en la recta $\mathbb{Z}$) respectivamente, desde que $S_0 = 0$ hasta que $S_{2n} = 0$.
Entonces se tiene que $2n = R_{2n} + L_{2n}$ y por construcción, $S_{2n} = R_{2n} - L_{2n} = 0$. (Si la caminata comienza en cero, es requerido efectuar el mismo número de pasos hacia la derecha y la izquierda para volver al estado 0).

Por ello, $2R_{2n} = 2n + S_{2n}$ y también

$$R_{2n} = n + \frac{1}{2}S_{2n} = \frac{1}{2}\left[2n + \sum_{i=1}^{2n} X_i\right] = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2n}(1 + X_i)$$

donde $\frac{1}{2}(1+X_1), \ldots, \frac{1}{2}(1+X_{2n})$ son variables aleatorias no negativas, independientes y con idéntica distribución Bernoulli con parámetro $\frac{1}{2}$. De modo que R_{2n} tiene distribución Binomial con parámetros $\left(2n, \frac{1}{2}\right)$.
Por construcción de R_{2n} y L_{2n} se tiene que,

$$\mathbb{P}_{0,0}^{(2n)} = \mathbb{P}[S_{2n} = 0|S_0 = 0] = \mathbb{P}\left[R_{2n} = n + \frac{1}{2}S_{2n}\right] = \mathbb{P}[R_{2n} = n] = \binom{2n}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^n\left(1-\frac{1}{2}\right)^n \tag{4.3}$$

Esto demuestra la Afirmación 1.

Ahora, por la ecuación (4.3) y la fórmula de Stirling se tiene que

$$\mathbb{P}_{0,0}^{(2n)} = \frac{(2n)!}{(n!)^2}\frac{1}{2^{2n}} \sim \frac{\sqrt{2\pi(2n)}\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}}{\left(\sqrt{2\pi(n)}\left(\frac{n}{e}\right)^n\right)}\frac{1}{2^{2n}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n\pi}}$$

lo cual significa que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathbb{P}_{0,0}^{(2n)}}{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n\pi}}} = 1.$$

Luego, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para cada natural $n \geq N$ ocurre que

$$\frac{\mathbb{P}_{0,0}^{(2n)}}{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n\pi}}} > \frac{1}{2}, \quad \text{equivalentemente } \mathbb{P}_{0,0}^{(2n)} > \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{n}}.$$

Y como $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}} = \infty$, por el criterio de comparación para series se obtiene que $\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}_{0,0}^{(2n)} = \infty$. Por la Observación 18 se concluye que 0 es un estado recurrente.

Caso $d=2$. Bajo el supuesto de que $S_0 = 0$, analizaremos el desplazamiento de la cadena en $\mathbb{Z}^2$ en las 4 direcciones posibles. Para volver al estado 0, si la cadena se desplaza l pasos a la derecha y m pasos hacia arriba, debe despazarse l pasos a la izquierda y m pasos hacia abajo para regresar a 0. Esto significa que se requiere una cantidad par de pasos para regresar al estado 0. Así que, al igual que en el caso $d = 1$, para cada $n \in \mathbb{N}$ ocurre que $\mathbb{P}_{0,0}^{(2n+1)} = 0$.

Dado $n \geq 1$, se calcula a continuación $\mathbb{P}_{0,0}^{(2n)}$:

Notemos que $S_{2n} = \sum_{i=1}^{2n} X_i$, donde $X_i \in \{\pm e_1, \pm e_2\}$ y $\mathbb{P}[X_i = \pm e_j] = \dfrac{1}{4}$, con $j \in \{1, 2\}$.

Por tanto, el valor de S_{2n} está completamente determinado por $(X_1, \ldots, X_{2n})$. Por independencia de $\{X_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, para cada $(x_1, \ldots, x_{2n}) \in \{e_1, -e_1, e_2, -e_2\}^{2n}$ ocurre

$$\mathbb{P}[(X_1, \ldots, X_{2n}) = (x_1, \ldots, x_{2n})] = \prod_{i=1}^{2n} \mathbb{P}[X_i = x_i] = \left(\frac{1}{4}\right)^{2n}$$

que corresponde a la probabilidad con que puede elegirse alguna de las posibles trayectorias de la caminata. Pero en el supuesto de que $S_{2n} = 0$ se requiere que la caminata inicie y regrese a 0 en (exactamente) $2n$ pasos que esto significa que deben tenerse la misma cantidad de movimientos hacia arriba y abajo, hacia la derecha y la izquierda respectivamente, digamos, l y m tales que $2l + 2m = 2n$, es decir, $l + m = n$ (o bien, $m = l - n$). el número total de trayectorias de $2n$ pasos que pueden elegirse, que tengan l movimientos hacia la izquierda (y la derecha), y $n-l$ movimientos hacia arriba (y hacia abajo) está dado por la cantidad combinatoria:

$$\frac{(2n)!}{l!l!(n-l)!(n-l)!}.$$

De aquí que la probabilidad de elegir una trayectoria de $2n$ pasos con l pasos a la izquierda (y a la derecha) y $n - l$ movimientos hacia arriba (y abajo) es

$$\frac{(2n)!}{l!l!(n-l)!(n-l)!}\left(\frac{1}{4}\right)^{2n}.$$

Para calcular $\mathbb{P}_{0,0}^{(2n)}$, descomponemos al evento como la unión de todos los eventos de todas las posibles trayectorias anteriores (con longitudes fijas), de donde

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_{0,0}^{(2n)} &= \sum_{l=0}^{n} \frac{(2n)!}{l!l!(n-l)!(n-l)!}\left(\frac{1}{4}\right)^{2n} = \left(\frac{1}{4}\right)^{2n} \frac{(2n)!}{n!n!} \sum_{l=0}^{n} \binom{n}{l}\binom{n}{n-l} = \left(\frac{1}{4}\right)^{2n} \binom{2n}{n}\binom{2n}{n} \\ &= \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{2n} \binom{2n}{n}\right]^2.\end{aligned}$$

Se utiliza la fórmula de Stirling para obtener que

$$\mathbb{P}_{0,0}^{(2n)} = \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{2n} \binom{2n}{n}\right]^2 \sim \frac{2}{n\pi}$$

es decir

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathbb{P}_{0,0}^{(2n)}}{\frac{2}{n\pi}} = 1.$$

Luego, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para cada natural $n \geq N$ ocurre que

$$\frac{\mathbb{P}_{0,0}^{(2n)}}{\frac{2}{n\pi}} > \frac{1}{2}, \quad \text{equivalentemente } \mathbb{P}_{0,0}^{(2n)} > \frac{1}{n\pi}.$$

Como $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n} = \infty$, por el criterio de comparación de series y la Observación 18 se concluye que $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}_{0,0}^{(2n)} = \infty$, es decir, 0 es un estado recurrente.

(II) Suponga que $d = 3$. Bajo la consideración de que $S_0 = 0$, siguiendo el argumento de los casos $d = 1, 2$, para volver al estado 0 la caminata debe desplazarse una cantidad par de veces, así que para cada $n \in \mathbb{N}$ ocurre que $\mathbb{P}_{0,0}^{(2n+1)} = 0$.

Dado $n \in \mathbb{N}$, con el fin de calcular $\mathbb{P}_{0,0}^{(2n)}$, se observa que ahora es necesario ejecutar la misma cantidad de movimientos hacia la derecha y la izquierda, digamos k; la misma cantidad de pasos hacia arriba y abajo, digamos l; y hacia adelante y atrás, digamos m, que deben satisfacer $2n = 2k + 2l + 2m$, lo que equivale a $n = k + l + m$. Además, la probabilidad de elegir la trayectoria de la caminata con estas características está dada por

$$\frac{(2n)!}{k!k!l!l!m!m!}\left(\frac{1}{6}\right)^{2n}.$$

donde $\dfrac{(2n)!}{k!k!l!l!m!m!}$ representa la cantidad de trayectorias que pueden elegirse con estas características y $\left(\dfrac{1}{6}\right)^{2n}$ la probabilidad de elegir una de estas trayectorias.

Entonces, como en el caso $d = 2$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_{0,0}^{(2n)} &= \sum_{k+l+m=n} \frac{(2n)!}{k!k!l!l!m!m!}\left(\frac{1}{6}\right)^{2n} = \left(\frac{1}{6}\right)^{2n} \frac{(2n)!}{n!n!} \sum_{k+l+m=n} \left(\frac{n!}{k!l!m!}\right)^2 \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} \binom{2n}{n} \sum_{k+l+m=n} \left(\frac{n!}{k!l!m!}\right)^2 \left(\frac{1}{3}\right)^{2n}
\end{aligned}$$

Tenemos la siguiente

<u>Afirmación 2.</u> Para cada $k, l, m, n \in \mathbb{N}$ con $k + l + m = n$ se tiene que $\left[\dfrac{n}{3}\right]^3 \leq k!l!m!$.

Demostración de la Afirmación 2. Se emplearán multiplicadores de Lagrange para obtener la desigualdad. Considere la función $\varphi(k, l, m) = \Gamma(k)\Gamma(l)\Gamma(m)$ definida en el conjunto compacto de $\mathbb{R}^3$, $C = \{(k, l, m) \in \mathbb{R}^3 : \ k + l + m = n\}$.

Optimizar la función φ equivale a optimizar la función $F(k, l, m, \lambda) = \ln(\varphi(k, l, m)) - \lambda(k + l + m - n)$, que de acuerdo con el Teorema de los Mutiplicadores de Lagrange, alcanza un máximo o mínimo en C, que hallaremos a continuación. Considere la notación de la Observación 20 y las ecuaciones

$$\frac{\partial F}{\partial k}(k, l, m, \lambda) = \frac{\partial F}{\partial k}\big[\ln(\Gamma(k)) + \ln(\Gamma(l)) + \ln(\Gamma(m)) - \lambda(k + l + m - n)\big] = \Psi(k) - \lambda = 0.$$

$$\frac{\partial F}{\partial l}(k, l, m, \lambda) = \frac{\partial F}{\partial l}\big[\ln(\Gamma(k)) + \ln(\Gamma(l)) + \ln(\Gamma(m)) - \lambda(k + l + m - n)\big] = \Psi(l) - \lambda = 0.$$

$$\frac{\partial F}{\partial m}(k, l, m, \lambda) = \frac{\partial F}{\partial m}\big[\ln(\Gamma(k)) + \ln(\Gamma(l)) + \ln(\Gamma(m)) - \lambda(k + l + m - n)\big] = \Psi(m) - \lambda = 0.$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda}(k, l, m, \lambda) = \frac{\partial F}{\partial \lambda}\big[\ln(\Gamma(k)) + \ln(\Gamma(l)) + \ln(\Gamma(m)) - \lambda(k + l + m - n)\big] = k + l + m - n = 0.$$

de donde $\lambda = \Psi(k) = \Psi(l) = \Psi(m)$ y $k + l + m = n$. La representación de Ψ en dicha Observación, para valores de $k, l, m \in \mathbb{N}_0$ se sigue que $k = l = m = \dfrac{n}{3}$. Por otro lado, la matriz Hessiana correspondiente a esta función tiene determinante $[\Psi'(k)]^3$ cuyo valor es positivo según la Observación 20 , que de acuerdo con los criterios para máximos o mínimos en funciones de varias variables, indica que $\left(\dfrac{n}{3}, \dfrac{n}{3}, \dfrac{n}{3}\right)$ es un mínimo para φ, de donde se obtiene la Afirmación 2.

Para continuar con la demostración de la Proposición, consideremos los siguientes casos para n.

Subcaso 1. $n = 3r$ para $r \in \mathbb{N}$.

De la Afirmación 2 se sigue que, para todo $(k,l,m) \in \mathbb{N}^3$ con $k+l+m = n = 3r$, $(r!)^3 \leq k!l!m!$. Observe que $(k,l,m) \mapsto \frac{n!}{k!l!m!}\left(\frac{1}{3}\right)^n \chi_{\{(k,l,m)\in\mathbb{N}^3:\ k+l+m=n\}}(k,l,m)$ corresponde a la función de densidad de un vector aleatorio discreto en $\mathbb{N}^3$ con distribución multinomial de parámetros $\left(n, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

Por ello,

$$\sum_{k+l+m=n} \frac{n!}{k!l!m!}\left(\frac{1}{3}\right)^n = 1 \tag{4.4}$$

Combinando la ecuación (4.4) con la última expresión obtenida para $\mathbb{P}_{0,0}^{(2n)}$, además de la Afirmación 2 y la fórmula de Stirling obtenemos que

$$\mathbb{P}_{0,0}^{(2n)} = \mathbb{P}_{0,0}^{(6r)} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2n}\binom{2n}{n}\sum_{k+l+m=n}\frac{n!}{k!l!m!}\frac{n!}{k!l!m!}\left(\frac{1}{3}\right)^{2n} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{2n}\left(\frac{1}{3}\right)^{n}\binom{2n}{n}\frac{n!}{(r!)^3}\sum_{k+l+m=n}\frac{n!}{k!l!m!}\left(\frac{1}{3}\right)^{n}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{2n}\left(\frac{1}{3}\right)^{n}\binom{2n}{n}\frac{n!}{(r!)^3} \sim \frac{1}{3^n}\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n\pi}}\right)\frac{\sqrt{2\pi(n)}\left(\frac{n}{e}\right)^n}{\left(\sqrt{2\pi(r)}\left(\frac{r}{e}\right)^r\right)^3} = \frac{1}{3^n}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{(2\pi r)^3}}\frac{n^n}{r^n} = \frac{2\sqrt{3^3}}{(\sqrt{2\pi})^3}\frac{1}{\sqrt{n^3}}.$$

Por el criterio de comparación de series se concluye que

$$\sum_{r=0}^{\infty}\mathbb{P}_{0,0}^{(6r)} \leq \frac{2\sqrt{3^3}}{(\sqrt{2\pi})^3}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^3}} < \infty.$$

De la misma manera se concluye que

$$\sum_{r=0}^{\infty}\mathbb{P}_{0,0}^{(6r+2)} < \infty \qquad \sum_{r=0}^{\infty}\mathbb{P}_{0,0}^{(6r+4)} < \infty.$$

Por lo que $\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}_{0,0}^{(n)} < \infty$. Por la Observación 18 tenemos que 0 es un estado transitorio en este caso.

$\boxtimes$

4.2. Comportamiento Asintótico de las caminatas aleatorias simples.

En esta sección se demostrará la Ley Fuerte de los Grandes Números para una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas definidas en $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ integrables. Con esto, se tendrá el mismo resultado para caminatas aleatorias simples.

Consideremos la siguiente notación: Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad, $X : \Omega \to \mathbb{R}$ una variable aleatoria en $\mathbb{R}$. Observe que la función $\mu = \mathbb{P} \circ X^{-1} : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ definida para cada $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ como

$$\mu[A] = \mathbb{P}[X^{-1}(A)] = \mathbb{P}[X \in A]$$

es una medida de probabilidad en $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Consideremos $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ al conjunto de todas las funciones $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, donde para cada $n \in \mathbb{N}$ se escribirá $x(n) = x_n$ y por abuso de notación, escribimos $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en vez de x.

Para cada $q \in \mathbb{N}$ consideramos $\pi_q : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$ a la $q-$ésima proyección de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ en $\mathbb{R}$, es decir, la función que para cada $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ está definida como

$$\pi_q((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) = x_r.$$

Para cada $k \in \mathbb{N}$, $i_1, \ldots, i_k \in \mathbb{N}$, $A_1, \ldots, A_k \subseteq \mathbb{R}$ definimos el *cilindro con base* $A_1, \ldots, A_k$ como el conjunto

$$C(i_1, \ldots, i_k; A_1, \ldots, A_k) = \bigcap_{l=1}^{k}\pi_{i_l}^{-1}(A_l) = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} :\ (x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}) \in A_1 \times \cdots \times A_k\}$$

Considere

$$\mathcal{B}(\mathbb{R})^{\mathbb{N}} = \{C(i_1, \ldots, i_k; A_1, \ldots, A_k) : \ i_1, \ldots, i_k \in \mathbb{N}, \ A_1, \ldots, A_k \subseteq \mathbb{R}, \ k \in \mathbb{N}\}.$$

Al igual que en el Capítulo 2, se puede probar que $\mathcal{B}(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ es una semiálgebra de sunconjuntos de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tal que $\mathcal{B}(\mathbb{R})^{\otimes\mathbb{N}} = \sigma(\mathcal{B}(\mathbb{R})^{\mathbb{N}})$ que es la $\sigma-$álgebra producto en el espacio medible producto $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))^{\otimes\mathbb{N}}$. Considere $\mu^{\otimes\mathbb{N}}$ la medida producto en $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})^{\otimes\mathbb{N}})$ como la única medida en $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})^{\otimes\mathbb{N}})$ que satisface para todo $k \in \mathbb{N}$, $i_1, \ldots, i_k \in \mathbb{N}$, $A_1, \ldots, A_k \subseteq \mathbb{R}$,

$$\mu^{\otimes\mathbb{N}}\left[\bigcap_{l=1}^{k} \pi_{i_l}^{-1}(A_l)\right] = \prod_{i=1}^{k} \mu[A_i].$$

De hecho, $\mu^{\otimes\mathbb{N}}$ resulta ser una medida de probabilidad en $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})^{\otimes\mathbb{N}})$.

Consideremos $T : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ como la única función $(\mathcal{B}(\mathbb{R})^{\otimes\mathbb{N}}, \mathcal{B}(\mathbb{R})^{\otimes\mathbb{N}})-$medible tal que para todo $q \in \mathbb{N}$ satisface

$$\pi_q \circ T = \pi_{q+1}.$$

Inductivamente se verifica que para todo $n, r \in \mathbb{N}$ se tiene

$$\pi_q \circ T^n = \pi_{q+n}.$$

A T se le llama el *corrimiento unilateral* en $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathcal{B}(\mathbb{R})^{\otimes\mathbb{N}})$.

PROPOSICIÓN 10. *Con la notación introducida se tiene que el corrimiento bilateral T en $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})^{\otimes\mathbb{N}})$ es una transformación $\mu^{\otimes\mathbb{N}}-$fuertemente mezclante.*

Demostración. La demostración es exactamente la utilizada para la Proposición 7 en el Capítulo 2. ⊠

La Proposición 10 y la Observación hecha en el Capítulo 1 indican que, de hecho, el corrimiento bilateral T en $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})^{\otimes\mathbb{N}})$ es una transformación $\mu^{\otimes\mathbb{N}}-$ergódica.

OBSERVACIÓN 21. Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad, $\{X_n : \Omega \to \mathbb{R}\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias independientes con idéntica distribución común a la distribución de X. Defina la función $\Phi : \Omega \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ para cada $\omega \in \Omega$ como

$$\Phi(\omega) = (X_n(\omega))_{n\in\mathbb{N}},$$

que es una función $(\mathcal{F}, \mathcal{B}(\mathbb{R})^{\otimes\mathbb{N}})-$ medible, la cual satisface para todo $n \in \mathbb{N}$ que $\pi_n \circ \Phi = X_n$. Al igual que antes, se verifica que $\mathbb{P} \circ \Phi^{-1}$ es una medida de probabilidad en $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathcal{B}(\mathbb{R})^{\otimes\mathbb{N}})$. Observe que, por independencia e idéntica distribución de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bajo $\mathbb{P}$, se tiene que para todo $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ con $A = C(i_1, \ldots, i_k; A_1, \ldots, A_k) = \bigcap_{l=1}^{k} \pi_{i_l}^{-1}(A_l)$, donde $k \in \mathbb{N}$, $i_1, \ldots, i_k \in \mathbb{N}$, $A_1, \ldots, A_k \subseteq \mathbb{R}$ se satisface

$$\begin{aligned}(\mathbb{P} \circ \Phi^{-1})[A] &= \mathbb{P}\left[\Phi^{-1}\left(\bigcap_{l=1}^{k} \pi_{i_l}^{-1}(A_l)\right)\right] = \mathbb{P}\left[\bigcap_{l=1}^{k} (\pi_{i_l} \circ \Phi)^{-1}(A_l)\right] = \mathbb{P}\left[\bigcap_{l=1}^{k} X_{i_l}^{-1}(A_l)\right] = \prod_{l=1}^{k} \mathbb{P}[X_{i_l}^{-1}(A_l)] \\ &= \prod_{l=1}^{k} \mathbb{P}[X^{-1}(A_l)] = \prod_{l=1}^{k} \mu[A_l] = \mu^{\otimes\mathbb{N}}[A].\end{aligned}$$

Por la unicidad de la medida producto en $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathcal{B}(\mathbb{R})^{\otimes\mathbb{N}})$ se concluye que $\mu^{\otimes\mathbb{N}} = \mathbb{P} \circ \Phi^{-1}$.

Se mostrará un resultado técnico que será de mucha utilidad en lo que resta de este trabajo.

LEMA 7 (TEOREMA DE LA MEDIDA IMAGEN). *Sean $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de medida, $(\Omega', \mathcal{F}')$ un espacio medible y $\varphi : \Omega \to \Omega'$ una función $(\mathcal{F}, \mathcal{F}')-$medible.*

(I) *La función $\mathbb{P}' = \mathbb{P} \circ \varphi^{-1} : \mathcal{F}' \to \mathbb{R}$ definida para cada $A \in \mathcal{F}'$ como*

$$\mathbb{P}'[A] = \mathbb{P}[\varphi^{-1}(A)]$$

es una medida en $(\Omega', \mathcal{F}')$.

(II) *Para toda función* $f : \Omega' \to \mathbb{R}$, $(\mathcal{F}', \mathcal{B}(\mathbb{R}))-$*medible se tiene que* $f \in \mathcal{L}_1^{\mathbb{K}}(\Omega', \mathcal{F}', \mathbb{P}')$ *si y sólo si* $(f \circ \varphi) \in \mathcal{L}_1^{\mathbb{K}}(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. *En ese caso*

$$\int_{\Omega'} f d\mathbb{P}' = \int_{\Omega'} f d(\mathbb{P} \circ \varphi^{-1}) = \int_{\Omega} (f \circ \varphi) d\mathbb{P}.$$

Demostración.

I) Es inmediato que $\mathbb{P}$ es una medida en $(\Omega, \mathcal{F})$.

II) Se demostrará este inciso por medio de aproximación por funciones simples.

<u>Caso 1.</u> $f = \chi_A$, donde $A \in \mathcal{F}'$.
Note que $f \circ \varphi = \chi_A \circ \varphi = \chi_{\varphi^{-1}(A)}$ y entonces

$$\int_{\Omega'} f d\mathbb{P}' = \mathbb{P}'[A] = \mathbb{P}[\varphi^{-1}(A)] = \int_{\Omega'} (f \circ \varphi) d\mathbb{P}.$$

<u>Caso 2.</u> f es una función $\mathcal{F}'-$simple.
Este caso se sigue del Caso 1 y la linealidad de la integral.

<u>Caso 3.</u> f es una función $(\mathcal{F}', \mathcal{B}(\mathbb{R}))-$medible no negativa.
Considere $(f_n : \Omega' \to \mathbb{R})_{n \geq 1}$ una sucesión creciente de funciones $\mathcal{F}'-$simples no negativas que convergen a f c.t.p.$(\mathbb{P}')$.

Se verifica que inmediato que $(f_n \circ \varphi : \Omega' \to \mathbb{R})_{n \geq 1}$ es una sucesión creciente de funciones $\mathcal{F}-$simples no negativas que convergen a f c.t.p.$(\mathbb{P})$. Por el Teorema de Convergencia Monótona en ambos espacios, así como el Caso 2, ocurre

$$\int_{\Omega'} f d\mathbb{P}' = \lim_{n \to \infty} \int_{\Omega'} f_n d\mathbb{P}' = \lim_{n \to \infty} \int_{\Omega} (f_n \circ \varphi) d\mathbb{P} = \int_{\Omega} (f \circ \varphi) d\mathbb{P}.$$

<u>Caso 4.</u> El caso general se obtiene como consecuencia inmediata del Caso 3.

⊠

COROLARIO 11. *Sean* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *un espacio de probabilidad,* $X \in \mathcal{L}_1^{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *y* $\pi_1 : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$ *la* $1-$*proyección de* $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ *en* $\mathbb{R}$. *Entonces* $\pi_1 \in \mathcal{L}_1^{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathcal{B}(\mathbb{R})^{\otimes \mathbb{N}}, \mu^{\otimes \mathbb{N}})$ *y además*

$$\int_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} \pi_1 d\mu^{\otimes \mathbb{N}} = \int_{\mathbb{R}} Id_{\mathbb{R}} d\mu = \int_{\Omega} X d\mathbb{P} = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X]. \tag{4.5}$$

Demostración. Consideremos los espacios de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mu)$, $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathcal{B}(\mathbb{R})^{\otimes \mathbb{N}}, \mu^{\otimes \mathbb{N}})$ y las funciones medibles (respectivamente) $\pi_1 : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$, $Id_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función identidad y $X \in \mathcal{L}_1^{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Por el Lema 7, como $Id_{\mathbb{R}} \circ X \in \mathcal{L}_1^{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, entonces $Id_{\mathbb{R}} \in \mathcal{L}_1^{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mu)$ y

$$\int_{\mathbb{R}} Id_{\mathbb{R}} d\mu = \int_{\mathbb{R}} Id_{\mathbb{R}} d(\mathbb{P} \circ X^{-1}) = \int_{\Omega} (Id_{\mathbb{R}} \circ X) d\mathbb{P} = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X].$$

Nuevamente, por el Lema 7, $\mu^{\otimes \mathbb{N}} \circ \pi_1^{-1}$ es una medida en $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ que cumple para todo $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

$$(\mu^{\otimes \mathbb{N}} \circ \pi_1^{-1})[A] = \mu^{\otimes \mathbb{N}}[\pi_1^{-1}(A)] = \mu[A].$$

Como $Id_{\mathbb{R}} \in \mathcal{L}_1^{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mu)$, entonces $Id_{\mathbb{R}} \circ \pi_1 \in \mathcal{L}_1^{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathcal{B}(\mathbb{R})^{\otimes \mathbb{N}}, \mu^{\otimes \mathbb{N}})$ y

$$\int_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} \pi_1 d\mu^{\otimes \mathbb{N}} = \int_{\mathbb{R}} Id_{\mathbb{R}} d\mu.$$

Así se tiene el resultado. ⊠

TEOREMA 28 (LEY FUERTE DE LOS GRANDES NÚMEROS). *Sean* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *un espacio de probabilidad,* $(X_n : \Omega \to \mathbb{R})_{n \in \mathbb{N}}$ *una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas respecto a* $\mathbb{P}$ *con distribución común a la variable aleatoria* $X \in \mathcal{L}_1^{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. *Entonces*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X] \qquad (\mathbb{P})- \quad c.s. \tag{4.6}$$

Demostración. Considere $\pi_1 \in \mathcal{L}_1^{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathcal{B}(\mathbb{R})^{\otimes\mathbb{N}}, \mu^{\otimes\mathbb{N}})$ y T el corrimiento unilateral en $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathcal{B}(\mathbb{R})^{\otimes\mathbb{N}})$, que de acuerdo con la Proposición 9 es una transformación $\mu^{\otimes\mathbb{N}}-$ergódica. Previamente se mencionó que para todo $i \in \mathbb{N}$ se tiene que $\pi_1 \circ T^i = \pi_{i+1}$.

Por el Teorema Ergódico de Birkhoff y la Observación 6 al Teorema 28 se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \int_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} \pi_1 d\mu^{\otimes\mathbb{N}} = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X] \qquad (\mu^{\otimes\mathbb{N}})-\text{ c.s.}$$

Del hecho de que $\mu^{\otimes\mathbb{N}} = \mathbb{P} \circ \Phi^{-1}$ se sigue que

$$0 = \mu^{\otimes\mathbb{N}}\left[\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \pi_1 \circ T^i \neq \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X]\right] = \mathbb{P}\left[\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \pi_1 \circ T^i \circ \Phi \neq \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X]\right] = \mathbb{P}\left[\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} X_i \neq \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X]\right].$$

Entonces se concluye la expresión (4.6).

⊠

Corolario 12 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Caminatas Aleatorias Simples en $\mathbb{Z}$). *Sean $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad, $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una caminata aleatoria simple en $\mathbb{Z}$ con variables aleatorias asociadas $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$. Entonces*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X_1] = 0 \qquad (\mathbb{P})-\ c.s.$$

Demostración. Inmediato de la definición de $(S_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ y del Teorema 28. ⊠

Capítulo 5

Teoremas Límite para Caminatas Aleatorias en Ambientes Aleatorios.

En este capítulo se introducen las caminatas aleatorias en ambientes aleatorios (RWRE por sus siglas en inglés), se define una medida de probabilidad inducida por este proceso. Se presentan conceptos necesarios para establecer un resultado que describa, bajo ciertas condiciones, el comportamiento al infinito de este proceso. Además, se precisan las definiciones y los detalles necesarios que conllevan a la demostración de la Ley Fuerte de los Grandes Números.

5.1. Cadenas de Nacimiento y Muerte

En esta sección, se establecen algunas propiedades generales para las cadenas de nacimiento y muerte, referentes al tiempo en que la cadena incide por primera vez en alguno de los estados posibles. Esto último tiene como finalidad generalizar estos resultados a las caminatas aleatorias en ambientes aleatorios. Uno de los resultados principales de esta sección será fundamental en la prueba del resultado que establece el comportamiento al infinito de este proceso.

DEFINICIÓN 13. *Sea* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *un espacio de probabilidad,* $\mathbf{E}$ *un conjunto a lo más numerable, donde* $\mathbf{E} = \mathbb{N}$, $\mathbf{E} = \mathbb{Z}$ *o bien* $\mathbf{E} = \{0, \ldots, d\}$*, con* $d \in \mathbb{N}_0$*. Suponga que para todo* $x \in \mathbb{Z}$ *existen* $p_x,\ q_x,\ r_x \in [0,1]$ *tales que* $1 = p_x + q_x + r_x$*, que se asocian a una cadena de Markov (homogénea)* $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ *en* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *con probabilidades de transición determinadas para cada* $x, y \in \mathbb{Z}$ *como sigue:*

$$P_{xy} = \begin{cases} p_x & \textit{si} \quad y = x+1 \\ q_x & \textit{si} \quad y = x-1 \\ r_x & \textit{si} \quad y = x \\ 0 & \textit{en otro caso} \end{cases}$$

En el caso que $\mathbf{E} = 0, \ldots, d$ *con* $d \in \mathbb{N}_0$*, se define* $p_d = 0$ *y* $q_0 = 0$.

Bajo estas condiciones, a $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ *se le llama* **cadena de nacimiento y muerte** *con espacio de estados* $\mathbf{E}$ *y probabilidades de transición* $\{(p_x, q_x, r_x)\}_{x\in\mathbf{E}}$.

NOTACIÓN 22. Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad, $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ una cadena de nacimiento y muerte con espacio de estados $\mathbf{E} = \mathbb{Z}$ y probabilidades de transición $\{(p_x, q_x, r_x = 0)\}_{x\in\mathbb{Z}}$ donde, para todo $x \in \mathbb{Z}$, se supondrá que $0 < p_x < 1$. Para todo $x \in \mathbb{Z}$ definimos:

$$P_x = \frac{q_x}{p_x},$$

$$t_x = \begin{cases} \displaystyle\prod_{k=0}^{x-1} P_k & \text{si} \quad x \geq 0 \\ \displaystyle\prod_{k=x}^{-1} P_k & \text{si} \quad x < 0 \end{cases},$$

y también el *potencial* de la cadena como

$$V(x) = \begin{cases} sgn(x)\log(t_x) & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}.$$

PROPOSICIÓN 11. *Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad, $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ una cadena de nacimiento y muerte con espacio de estados $\mathbf{E} = \mathbb{Z}$ y probabilidades de transición $\{(p_x, q_x, r_x = 0)\}_{x\in\mathbb{Z}}$. Para cada $x \in \mathbb{Z}$ considere la variable aleatoria*

$$T_x = \text{ínf}\{n \geq 0 \ : S_n = x\}, \tag{5.1}$$

y la medida de probabilidad condicional $\mathbb{P}_x : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ dada por $\mathbb{P}_x[\cdot] = \mathbb{P}[\cdot|S_0 = x]$. Entonces para cada $a, b \in \mathbb{Z}$ con $a < b$ se satisfacen las siguientes propiedades:

(I) *Dados $a < x < b$, $y \in [a, b]$ se tiene que*

$$\mathbb{P}[T_a < T_b|S_1 = y, S_0 = x] = \mathbb{P}[T_a < T_b|S_0 = y].$$

(II) *Para todo $a < x < b$ se tiene que*

$$\mathbb{P}_x[T_a < T_b] = \frac{\displaystyle\sum_{r=x+1}^{b} \exp(V(r))}{\displaystyle\sum_{r=a+1}^{b} \exp(V(r))} \tag{5.2}$$

(III) *Para $k, l \in \mathbb{Z}$*

(A) *Si $l > k$ entonces*

$$\mathbb{P}_l[T_k < \infty] = \left(1 + \frac{\displaystyle\sum_{r=k+1}^{l} \exp(V(r))}{\displaystyle\sum_{r=l+1}^{\infty} \exp(V(r))}\right)^{-1} \tag{5.3}$$

(B) *Si $l < k$ entonces*

$$\mathbb{P}_l[T_k < \infty] = \left(1 + \frac{\displaystyle\sum_{r=l+1}^{k} \exp(V(r))}{\displaystyle\sum_{r=-\infty}^{l} \exp(V(r))}\right)^{-1} \tag{5.4}$$

Demostración. Se hace énfasis en la notación introducida. Fije $a, b \in \mathbb{Z}$ con $a < b$.

(I) Sean $a < x < b$, $y \in [a, b]$. Considere los siguientes casos:

<u>Caso 1.</u> $y = a$.

Sea $n \in \mathbb{N}_0$ arbitrario fijo. Suponiendo que $S_0 = x$, se obtiene que $S_0 \neq a$. Entonces

$$\mathbb{P}[n = T_a, n < T_b, S_0 = x, S_1 = a] = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad n \neq 1 \\ \mathbb{P}[1 = T_a, 1 < T_b, S_0 = x, S_1 = a] & \text{si} \quad n = 1 \end{cases}$$

y por la propiedad de Markov y el hecho de que $a < b$:

$$\mathbb{P}[1 = T_a, 1 < T_b, S_0 = x, S_1 = a] = \mathbb{P}[S_0 = x, S_1 = a] = \mathbb{P}[S_1 = a|S_0 = x]\mathbb{P}[S_0 = x].$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[T_a < T_b|S_0 = x, S_1 = a] &= \sum_{n\in\mathbb{N}_0} \frac{\mathbb{P}[n = T_a, n < T_b, S_0 = x, S_1 = a]}{\mathbb{P}[S_0 = x, S_1 = a]} \\ &= \frac{\mathbb{P}[S_0 = x, S_1 = a]}{\mathbb{P}[S_0 = x, S_1 = a]} = 1. \end{aligned}$$

Repitiendo el argumento anterior, utilizando el hecho de que $a < b$, se obtiene que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[T_a < T_b|S_0 = a] &= \sum_{n\in\mathbb{N}_0} \frac{\mathbb{P}[n = T_a, n < T_b, S_0 = a]}{\mathbb{P}[S_0 = a]} = \frac{\mathbb{P}[0 = T_a, 0 < T_b, S_0 = a]}{\mathbb{P}[S_0 = a]} \\ &= \frac{\mathbb{P}[S_0 = a]}{\mathbb{P}[S_0 = a]} = 1.\end{aligned}$$

Así que $\mathbb{P}[T_a < T_b|S_0 = x, S_1 = a] = 1 = \mathbb{P}[T_a < T_b|S_0 = a]$.

<u>Caso 2.</u> $y = b$.
Se procede de forma análoga al caso anterior para concluir que, para $n \in \mathbb{N}_0$, se tiene

$$\mathbb{P}[n = T_a, n < T_b, S_0 = x, S_1 = b] = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad n \neq 0 \\ \mathbb{P}[0 = T_a, 0 < T_b, S_0 = x, S_1 = b] & \text{si} \quad n = 0 \end{cases},$$

y como $a < x < b$ se obtiene que

$$\mathbb{P}[0 = T_a, 0 < T_b, S_0 = x, S_1 = b] = \mathbb{P}[S_0 = a, S_0 = x, S_1 = b] = 0$$

así que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[T_a < T_b|S_0 = x, S_1 = b] &= \sum_{n\in\mathbb{N}_0} \frac{\mathbb{P}[n = T_a, n < T_b, S_0 = x, S_1 = b]}{\mathbb{P}[S_0 = x, S_1 = b]} \\ &= \frac{\mathbb{P}[0 = T_a, 0 < T_b, S_0 = x, S_1 = b]}{\mathbb{P}[S_0 = x, S_1 = b]} = 0.\end{aligned}$$

De igual manera tenemos que

$$\mathbb{P}[T_a < T_b|S_0 = b] = \sum_{n\in\mathbb{N}_0} \frac{\mathbb{P}[n = T_a, n < T_b, S_0 = b]}{\mathbb{P}[S_0 = b]} = \frac{\mathbb{P}[0 = T_a, 0 < T_b, S_0 = b]}{\mathbb{P}[S_0 = b]} = 0.$$

Así que $\mathbb{P}[T_a < T_b|S_0 = x, S_1 = b] = 0 = \mathbb{P}[T_a < T_b|S_0 = b]$.

<u>Caso 3.</u> $a < y < b$.
Fije $n \geq 1$. Observe que bajo esta condición ocurre

$$\{n = T_a, n < T_b, S_0 = x, S_1 = y\} = \begin{cases} \emptyset & \text{si} \quad n = 1 \\ \{S_0 = x, S_1 = y, S_i \neq a, b, S_n = a \neq b\}_{i\in\{1,\ldots,n-1\}} & \text{si} \quad n \geq 2 \end{cases},$$

y también:

$$\{n - 1 = T_a, n < T_b, S_0 = y\} = \begin{cases} \emptyset & \text{si} \quad n = 1 \\ \{S_0 = y, S_i \neq a, b, S_{n-1} = a \neq b\}_{i\in\{0,\ldots,n-2\}} & \text{si} \quad n \geq 2 \end{cases}.$$

Para cada $n \geq 2$ defina el conjunto

$$D_n = \{(s_1, \ldots, s_n) \in \mathbb{Z}^{n-1} : \ s_1 = y, s_i \neq a, b, s_n = a \neq b, \ i \in \{1, \ldots, n-1\}\}.$$

Por la propiedad de Markov en la tercera igualdad y la homogeneidad de la cadena en la cuarta igualdad, se tiene que

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[T_a < T_b|S_0 = x, S_1 = y] &= \sum_{n\geq 2} \frac{\mathbb{P}[n = T_a, n < T_b, S_0 = x, S_1 = y]}{\mathbb{P}[S_0 = x, S_1 = y]} \sum_{n\geq 2} \frac{\mathbb{P}[(S_1, \ldots, S_n) \in D_n, S_0 = x]}{\mathbb{P}[S_0 = x, S_1 = y]} \\
&= \sum_{n\geq 2} \sum_{(y,s_2,\ldots,s_n)\in D_n} \frac{\mathbb{P}[S_n = s_n, \ldots, S_2 = s_2, S_1 = y, S_0 = x]}{\mathbb{P}[S_0 = x, S_1 = y]} \\
&= \sum_{n\geq 2} \sum_{(y,s_2,\ldots,s_n)\in D_n} \frac{\mathbb{P}[S_n = s_n|S_{n-1} = s_{n-1}]\cdots\mathbb{P}[S_2 = s_2|S_1 = y]\mathbb{P}[S_1 = y, S_0 = x]}{\mathbb{P}[S_1 = y, S_0 = x]} \\
&= \sum_{n\geq 2} \sum_{(y,s_2,\ldots,s_n)\in D_n} \mathbb{P}[S_{n-1} = s_n|S_{n-2} = s_{n-1}]\cdots\mathbb{P}[S_1 = s_2|S_0 = y] \\
&= \sum_{n\geq 2} \sum_{(y,s_2,\ldots,s_n)\in D_n} \frac{\mathbb{P}[S_{n-1} = s_n, S_{n-2} = s_{n-1}, S_1 = s_2, S_0 = y]}{\mathbb{P}[S_0 = y]} \\
&= \sum_{n\geq 2} \frac{\mathbb{P}[(S_0, \ldots, S_{n-1}) \in D_n]}{\mathbb{P}[S_0 = x]} = \sum_{n\geq 2} \frac{\mathbb{P}[n-1 = T_a, n-1 < T_b, S_0 = y]}{\mathbb{P}[S_0 = y]} \\
&= \mathbb{P}[T_a < T_b|S_0 = y].
\end{aligned}$$

(II) Defina la función $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ como sigue

$$g(x) = \mathbb{P}_x[T_a < T_b], \qquad \forall x \in [a, b].$$

En el inciso (I) se obtuvo que $g(a) = \mathbb{P}[T_a < T_b|S_0 = a] = 1$ y que $g(b) = \mathbb{P}[T_a < T_b|S_0 = b] = 0$.

<u>Afirmación 1.</u> La función g tiene las siguientes propiedades:

(1) Para cada $z \in [a, b]$ se satisface la ecuación en recurrencia

$$g(z) = q_z g(z-1) + p_z g(z+1)$$

(2) La solución de la ecuación del inciso (i) está dada por la expresión (5.2).

Demostración de la Afirmación 1. Fije $z \in [a, b]$.

(1) En la quinta igualdad, por el inciso (I), ocurre que

$$\begin{aligned}
g(z) = \mathbb{P}_z[T_a < T_b] &= \frac{\mathbb{P}[T_a < T_b, S_0 = z]}{\mathbb{P}[S_0 = z]} = \sum_{x\in\mathbb{Z}} \frac{\mathbb{P}[T_a < T_b, S_0 = z, S_1 = x]}{\mathbb{P}[S_0 = z]} \\
&= \sum_{x\in\mathbb{Z}} \frac{\mathbb{P}[T_a < T_b|S_0 = z, S_1 = x]\mathbb{P}[S_0 = z, S_1 = x]}{\mathbb{P}[S_0 = z]} \\
&= \sum_{x\in\mathbb{Z}} \mathbb{P}[T_a < T_b|S_0 = z, S_1 = x]\mathbb{P}[S_1 = x|S_0 = z] \\
&= \sum_{x\in\mathbb{Z}} \mathbb{P}[T_a < T_b|S_0 = x]\mathbb{P}[S_1 = x|S_0 = z] = \sum_{x\in\mathbb{Z}} g(z)P_{zx} = q_z g(z-1) + p_z g(z+1).
\end{aligned}$$

(2) Considere los siguientes casos:

<u>Caso 1.</u> $0 < a < b$.

Observe que para todo $y \in [a, b-1[$ se tiene que $q_y = 1 - p_y$ y por la parte (1) tenemos que

$$\begin{aligned}
p_y[g(y+1) - h(y)] - q_y[g(y) - g(y-1)] &= p_y[g(y+1) - g(y) + g(y) - g(y-1)] - [g(y) - g(y-1)] \\
&= p_y[g(y+1) - g(y-1)] - [g(y) - g(y-1)] \\
&= p_y g(y+1) + (1-p_y)g(y-1) - g(y) = 0,
\end{aligned}$$

es decir,

$$g(y+1) - g(y) = \frac{q_y}{p_y}[g(y) - g(y-1)]. \tag{5.5}$$

Iterativamente se obtiene que

$$g(y+1) - g(y) = \frac{q_y \cdots q_{a+1}}{p_y \cdots p_{a+1}}[g(a+1) - g(a)] = \frac{t_{y+1}}{t_{a+1}}[g(a+1) - 1]. \tag{5.6}$$

Se suma desde a hasta $b-1$ en la ecuación (5.6) para obtener

$$-1 = g(b) - g(a) = \sum_{y=a}^{b-1}[g(y+1) - g(y)] = \left(\frac{g(a+1)-1}{t_{a+1}}\right)\left(\sum_{y=a}^{b-1} t_{y+1}\right),$$

así que

$$\frac{g(a+1)-1}{t_{a+1}} = -\frac{1}{\sum\limits_{y=a}^{b-1} t_{y+1}}. \tag{5.7}$$

Combinando las ecuaciones (5.6) y (5.7) se tiene que

$$g(y+1) - g(y) = -\frac{t_{y+1}}{\sum\limits_{y=a}^{b-1} t_{y+1}},$$

y asl sumar en la última ecuación se suma desde z hasta $b-1$ ocurre que

$$-g(z) = g(b) - g(z) = \sum_{y=z}^{b-1}[g(y+1) - g(y)] = -\frac{\sum\limits_{z=y}^{b-1} t_{y+1}}{\sum\limits_{y=a}^{b-1} t_{y+1}}.$$

Mediante un cambio de variable adecuado en la última expresión, se tiene la ecuación (5.2) en este caso.

Caso 2. $a < b < 0$.

Este caso es similar al Caso 1, tras intercambiar los roles de p y q. Para tener mayor claridad, consideremos primero el siguiente caso particular. Suponga que $a = -5$ y que $b = -1$. Para cada $y \in]-5, -1[$ se satisface la expresión (5.5), de donde se tiene

$$p_{-4}[g(-3) - g(-4)] = q_{-4}[g(-4) - g(-5)],$$

$$p_{-3}[g(-2) - g(-3)] = q_{-3}[g(-3) - g(-4)],$$

y

$$p_{-2}[g(-1) - g(-2)] = q_{-2}[g(-2) - g(-3)].$$

Luego

$$\begin{aligned} -1 = g(-5) - g(-1) &= [g(-1) - g(-2)] + [g(-2) - g(-3)] + [g(-3) - g(-4)] + [g(-4) - g(-5)] \\ &= \left(1 + \frac{p_{-2}}{q_{-2}} + \frac{p_{-3}}{q_{-3}}\frac{p_{-2}}{q_{-2}} + \frac{p_{-4}}{q_{-4}}\frac{p_{-3}}{q_{-3}}\frac{p_{-2}}{q_{-2}}\right)[g(-1) - g(-2)]. \end{aligned}$$

Con la convención de que a los productos vacíos son iguales al valor 1 se obtiene que

$$-1 = [g(-1) - g(-2)] \sum_{r=1}^{4} \prod_{j=2}^{r} \frac{p_{-j}}{q_{-j}}.$$

Y, por ejemplo,

$$g(-2) = \frac{1}{\sum\limits_{r=1}^{4} \prod\limits_{j=2}^{r} \frac{p_{-j}}{q_{-j}}} = \frac{\frac{p_{-1}}{q_{-1}}}{\sum\limits_{r=1}^{4} \prod\limits_{j=1}^{r} \frac{p_{-j}}{q_{-j}}} = \frac{\frac{p_{-1}}{q_{-1}}}{\sum\limits_{r=-5+1}^{-1} \prod\limits_{j=r}^{-1} \frac{p_j}{q_j}} = \frac{\frac{1}{P_{-1}}}{\sum\limits_{r=-5+1}^{-1} \prod\limits_{j=r}^{-1} \frac{1}{P_j}} = \frac{\exp(V(-1))}{\sum\limits_{r=-5+1}^{-1} \exp(V(r))}$$

que coincide con la expresión (5.2).

En el caso general, dados $a < b < 0$, $k, m \in \mathbb{N}$ que satisfacen $k < m$, $a = -m$ y $b = -k$. Fije $r \in]k, m[$. Note que $a < -r < b$ y que se satisface la ecuación (5.5), es decir

$$g(-r) - g(-r-1) = \frac{p_{-r}}{q_{-r}}[g(-r+1) - g(-r)].$$

Recursivamente se obtiene que

$$g(-r) - g(-r-1) = \frac{p_{-r} \cdots p_{-k-1}}{q_{-r} \cdots q_{-k-1}}[g(-k) - g(-k-1)]. \tag{5.8}$$

Sumando desde k hasta $m-1$ en la ecuación (5.8) obtenemos

$$-1 = g(-k) - g(-m) = \sum_{r=k}^{m-1}[g(-r) - g(-r-1)] = [g(-k) - g(-k-1)]\Big(\sum_{r=k}^{m-1}\prod_{j=k+1}^{r}\frac{p_{-j}}{q_{-j}}\Big).$$

De la misma manera, para $y \in]-m, -k[$ tenemos

$$g(y) - 1 = g(y) - g(-m) = \sum_{r=-y}^{m-1}[g(-r) - g(-r-1)] = [g(-k) - g(-k-1)]\Big(\sum_{r=-y}^{m-1}\prod_{j=k+1}^{r}\frac{p_{-j}}{q_{-j}}\Big)$$

Con el cambio de variable $s = -r$ y $j = -l$ se concluye que

$$g(y) = 1 + [g(-k) - g(-k-1)]\Big(\sum_{r=k}^{m-1}\prod_{j=k+1}^{r}\frac{p_{-j}}{q_{-j}}\Big) = 1 - \frac{\sum_{r=-y}^{m-1}\prod_{j=k+1}^{r}\frac{p_{-j}}{q_{-j}}}{\sum_{r=k}^{m-1}\prod_{j=k+1}^{r}\frac{p_{-j}}{q_{-j}}} = 1 - \frac{\sum_{s=-m+1}^{y}\prod_{l=s}^{-k-1}\frac{p_l}{q_l}}{\sum_{s=-m+1}^{-k}\prod_{l=s}^{-k-1}\frac{p_l}{q_l}}$$

$$= \frac{\sum_{s=y+1}^{-k}\prod_{l=s}^{-k-1}\frac{p_l}{q_l}}{\sum_{s=-m+1}^{-k}\prod_{l=s}^{-k-1}\frac{p_l}{q_l}} = \frac{\sum_{s=y+1}^{-k}\prod_{l=s}^{-1}\frac{p_l}{q_l}}{\sum_{s=-m+1}^{-k}\prod_{l=s}^{-1}\frac{p_l}{q_l}} = \frac{\sum_{s=y+1}^{b}\exp(V(s))}{\sum_{s=a+1}^{b}\exp(V(s))}.$$

<u>Caso 3.</u> $a < 0 < b$.

En primer lugar analizamos un caso particular con el propósito de ilustrar el procedimiento. Suponga que $a = -3$, $b = 3$. Con base en la ecuación (5.5) se tienen las relaciones siguientes:

$$g(-1) - g(-2) = \frac{p_{-1}}{q_{-1}}[g(0) - g(-1)],$$

$$g(-2) - g(-3) = \frac{p_{-1}}{q_{-1}}[g(-1) - g(-2)] = \frac{p_{-1}}{q_{-1}}\frac{p_{-2}}{q_{-2}}[g(0) - g(-1)],$$

$$g(1) - g(0) = \frac{q_0}{p_0}[g(0) - g(-1)],$$

$$g(2) - g(1) = \frac{q_0}{p_0}\frac{q_1}{p_1}[g(0) - g(-1)],$$

$$g(2) - g(1) = \frac{q_0}{p_0}\frac{q_1}{p_1}\frac{q_2}{p_2}[g(0) - g(-1)].$$

Entonces

$$-1 = g(3) - g(-3) = \sum_{k=-3+1}^{3}[g(k) - g(k-1)] =$$

$$\Big(\frac{q_0}{p_0}\frac{q_1}{p_1}\frac{q_2}{p_2} + \frac{q_0}{p_0}\frac{q_1}{p_1} + \frac{q_0}{p_0} + 1 + \frac{p_{-1}}{q_{-1}} + \frac{p_{-1}}{q_{-1}} + \frac{p_{-2}}{q_{-2}}\Big)[g(0) - g(-1)] = [g(0) - g(-1)]\Big(\sum_{s=-3+1}^{3}\exp(V(s))\Big).$$

En general, utilizando las ecuaciones (5.6) y (5.8) ocurre que para cada $-r \in [a+1, -1]$ y $x \in [0, b]$

$$g(x+1)-g(x)=\frac{q_x\cdots q_0}{p_x\cdots p_0}[g(0)-g(-1)]=\exp(V(x+1))[g(0)-g(-1)],$$

y

$$g(-r)-g(-r-1)=\frac{p_{-r}\cdots p_{-1}}{q_{-r}\cdots q_{-1}}[g(0)-g(-1)]=\exp(V(-r))[g(0)-g(-1)].$$

Así que para $y\in[a+1,b-1]$ se obtiene

$$g(y)-g(a)=\sum_{x=a+1}^{y}[g(x)-g(x-1)]=\sum_{x=a+1}^{y}\exp(V(x))[g(0)-g(-1)],$$

y para $y=b$

$$-1=g(b)-g(a)=\sum_{x=a+1}^{b}[g(x)-g(x-1)]=\sum_{x=a+1}^{b}\exp(V(x))[g(0)-g(-1)].$$

Por ello

$$g(y)=1-\frac{\sum_{x=a+1}^{y}\exp(V(x))}{\sum_{x=a+1}^{b}\exp(V(x))}=\frac{\sum_{x=y+1}^{b}\exp(V(x))}{\sum_{x=a+1}^{b}\exp(V(x))}$$

que demuestra la Afirmación 1.

De la afirmación anterior se obtiene inmediatamente el inciso (II).

(III) Fije $l,k\in\mathbb{Z}$.

(A) Suponga que $l>k$. Para cada $m\in\mathbb{Z}$ con $m>l$ definamos $R_m=\{S_0=l,T_k<T_m\}:=\{\omega\in\Omega : S_0(\omega)=l,\ T_k(\omega)<T_m(\omega)\}$. Algunas propiedades de esta sucesión de conjuntos se enuncian en la siguiente

Afirmación 2.

(1) Para todo $\omega\in\Omega$ y $m\in\mathbb{Z}$, con $m>l$ y $S_0(\omega)=l$, ocurre que $m-l<T_m(\omega)$.

(2) Dados $m_1,m_2\in\mathbb{Z}$ que satisfagan $l<m_1\leq m_2$, se tiene que $R_{m_1}\subseteq R_{m_2}$.

(3) $\{T_k<\infty,S_0=l\}=\bigcup\limits_{l<m}R_m$.

Demostración de la Afirmación 2.

(1) Note que, si $S_0(\omega)=l$, y $l<m$ entonces el mínimo número de pasos que debe efectuar la caminata para acceder al estado m serán $m-l$, es decir, $m-l\leq T_m(\omega)$.

(2) Sean $m_1,m_2\in\mathbb{Z}$ que cumplan $l<m_1\leq m_2$. Suponga que $\omega\in R_{m_1}$. Observe que, en caso de que $T_{m_2}(\omega)=\infty$, el resultado es claro. Suponga entonces que $T_{m_2}(\omega)<\infty$. En particular se tiene que $S_{T_{m_2}(\omega)}(\omega)=m_2$. Como $l<m_1\leq m_2$, por construcción de $\{S_n\}_{n\geq 0}$. debe tenerse que existe $s(\omega)\in\{1,\ldots,T_{m_2}(\omega)\}$ tal que $S_{s(\omega)}(\omega)=m_1$. Entonces $T_{m_1}(\omega)<\infty$. Sin pérdida de generalidad puede suponerse que $T_{m_1}(\omega)=s(\omega)$. De esta manera se tiene que $T_{m_1}(\omega)=s(\omega)\leq T_{m_2}(\omega)$, es decir, $\omega\in R_{m_2}$.

(3) Denote por $A=\{T_k<\infty,S_0=l\}$ y $B=\bigcup\limits_{l<m}R_m$. Se prueba la igualdad entre estos conjuntos a continuación. Fije $\omega\in A$ arbitrario. Entonces $T_k(\omega)<\infty$ y $S_0=l$. Luego, la propiedad arquimediana garantiza la existencia de $m\in\mathbb{N}$ tal que $T_k(\omega)<m-l\leq T_m(\omega)$, donde la última desigualdad se tiene por el inciso (1) de esta afirmación. Así que $\omega\in B$, que prueba que $A\subseteq B$.

Recíprocamente, sea $\omega\in B$. Existe $m\in\mathbb{N}$ tal que $l<m$ y $T_k(\omega)<T_m(\omega)$ con $S_0(\omega)=l$ y $T_m(\omega)\leq\infty$. De aquí que $T_k(\omega)<\infty$ y así $\omega\in A$. Entonces $B\subseteq A$. Por lo tanto $A=B$.

Esto demuestra la Afirmación 2.

Por la Afirmación 2 y el Teorema de Continuidad de la probabilidad se tiene que

$$\mathbb{P}_l[T_k < \infty] = \mathbb{P}_l\Big[\bigcup_{m>l}\{T_k < T_m\}\Big] = \lim_{m\to\infty} \mathbb{P}_l[T_k < T_m] = \lim_{m\to\infty} \frac{\sum\limits_{r=l+1}^{m} \exp(V(r))}{\sum\limits_{r=k+1}^{m} \exp(V(r))}$$

$$= \lim_{m\to\infty} \left(\frac{\sum\limits_{r=k+1}^{m} \exp(V(r))}{\sum\limits_{r=l+1}^{m} \exp(V(r))}\right)^{-1} = \lim_{m\to\infty} \left(1 + \frac{\sum\limits_{r=k+1}^{l} \exp(V(r))}{\sum\limits_{r=l+1}^{m} \exp(V(r))}\right)^{-1}$$

$$= \left(1 + \frac{\sum\limits_{r=k+1}^{l} \exp(V(r))}{\sum\limits_{r=l+1}^{\infty} \exp(V(r))}\right)^{-1}$$

Esta última expresión se puede reescribir como

$$\mathbb{P}_l[T_k < \infty] = \left(1 + \frac{\sum\limits_{r=k+1}^{l} \exp(V(r))}{\sum\limits_{r=l+1}^{\infty} \exp(V(r))}\right)^{-1} = \frac{\sum\limits_{r=l+1}^{\infty} \exp(V(r))}{\sum\limits_{r=k+1}^{\infty} \exp(V(r))}$$

en el caso que $\sum\limits_{r=l+1}^{\infty} \exp(V(r)) < \infty$.

(B) Suponga que $k > l$. Ahora, para cada $m \in \mathbb{N}$ con $-m < l$ defina $R'_m = T_k < T_{-m},\ S_0 = l$. Estos conjuntos satisfacen las propiedades:

(1) Para cada $\omega \in \Omega$ y $m \in \mathbb{N}$ con $S_0(\omega) = l$ se tiene que $m + l = T_{-m}(\omega)$.

(2) Para todos $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$ con $m_1 \leq m_2$ ocurre que $R'_{m_1} \subseteq R'_{m_2}$.

(3) $\{T_k < \infty, S_0 = l\} = \bigcup\limits_{m>-l} R'_m$.

cuya demostración es similar a la de la Afirmación 2. Al igual que en el inciso (a), por el Teorema de Continuidad de la probabilidad se tiene que

$$\mathbb{P}_l[T_k < \infty] = \mathbb{P}_l\Big[\bigcup_{m>-l}\{T_k < T_{-m}\}\Big] = \lim_{m\to\infty} \mathbb{P}_l[T_k < T_{-m}] = \lim_{m\to\infty} \big(1 - \mathbb{P}_l[T_{-m} < T_k]\big)$$

$$= 1 - \lim_{m\to\infty} \frac{\sum\limits_{r=l+1}^{k} \exp(V(r))}{\sum\limits_{r=-m+1}^{k} \exp(V(r))} = \lim_{m\to\infty} \frac{\sum\limits_{r=-m+1}^{l} \exp(V(r))}{\sum\limits_{r=-m+1}^{k} \exp(V(r))} = \lim_{m\to\infty} \left(\frac{\sum\limits_{r=-m+1}^{k} \exp(V(r))}{\sum\limits_{r=-m+1}^{l} \exp(V(r))}\right)^{-1}$$

$$= \lim_{m\to\infty} \left(1 + \frac{\sum\limits_{r=l+1}^{k} \exp(V(r))}{\sum\limits_{r=-m+1}^{l} \exp(V(r))}\right)^{-1} = \left(1 + \frac{\sum\limits_{r=l+1}^{k} \exp(V(r))}{\sum\limits_{r=-\infty}^{l} \exp(V(r))}\right)^{-1}$$

Esta última expresión se puede reescribir como

$$\mathbb{P}_l[T_k < \infty] = \left(1 + \frac{\sum\limits_{r=l+1}^{k} \exp(V(r))}{\sum\limits_{r=-\infty}^{l} \exp(V(r))}\right)^{-1} = \frac{\sum\limits_{r=-\infty}^{l} \exp(V(r))}{\sum\limits_{r=-\infty}^{k} \exp(V(r))}$$

en el caso que $\displaystyle\sum_{r=-\infty}^{l} \exp(V(r)) < \infty.$

$\boxtimes$

5.2. Algunos resultados para sucesiones de variables aleatorias independientes

En esta sección se abordarán algunos resultados que serán de utilidad en la próxima sección respecto a una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas definidas en un espacio de probabilidad. En primer lugar se establece la definición de eventos permutables y la ley 0-1 de Hewitt-Savage para este tipo de eventos, que es pieza fundamental para describir el comportamiento de la sucesión asintóticamente.

A lo largo de esta sección consideraremos $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad, $X : \Omega \to \mathbb{R}$ una función $(\mathcal{F}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))-$medible. Recordemos que $\mu = \mathbb{P} \circ X^{-1}$ es una medida de probabilidad en $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ y que $\mu^{\otimes \mathbb{N}}$ denota la medida producto en $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathcal{B}(\mathbb{R})^{\otimes \mathbb{N}})$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ definamos $I_n = \{1, \ldots, n\}, I'_n = \mathbb{N} \backslash \{1, \ldots, n\}$. Sea $n \in \mathbb{N}$ y S_n el grupo de permutaciones de n elementos. Dados $\sigma \in S_n$ y $x = (x_m)_{m \in \mathbb{N}}$ definamos el elemento $\sigma(x) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, que satisface para cada $r \in \mathbb{N}$

$$\pi_r(\sigma(x)) = \begin{cases} x_{\sigma(r)} & \text{si} \quad r \in \{1, \ldots, n\} \\ x_r & \text{si} \quad r \notin \{1, \ldots, n\} \end{cases} = x_{\sigma(r)\chi_{I_n}(r) + r\chi_{I'_r}(r)}$$

También, para $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})^{\otimes \mathbb{N}}$, definimos

$$\sigma(A) = \{\sigma(x) : \ x \in A\}.$$

Diremos que

(a) $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})^{\otimes \mathbb{N}}$ es *permutable* si para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\sigma \in S_n$ se tiene que $A = \sigma(A)$.

(b) Una función $Y : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$, $\mathcal{B}(\mathbb{R})^{\otimes \mathbb{N}}, \mathcal{B}(\mathbb{R})-$medible es *permutable* si para todo $x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $n \in \mathbb{N}$ y $\sigma \in S_n$ satisface que $Y(x) = Y(\sigma(x))$.

Sea $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias independientes con la misma distribución que X, definidas en $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Sea $\Phi : \Omega \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ definida para cada $\omega \in \Omega$ como $\Phi(\omega) = (X_n(\omega))_{n \in \mathbb{N}}$.

En el capítulo 3 se establece que $\mathbb{P} \circ \Phi^{-1}$ es una medida de probabilidad en $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathcal{B}(\mathbb{R})^{\otimes \mathbb{N}})$ que coincide con $\mu^{\otimes \mathbb{N}}$, la cual denotaremos por ν. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definamos las $\sigma-$álgebras

$$\mathcal{F}_n = \sigma(\{X_i^{-1}([a, \infty[) : \ i \in I_n, a \in \mathbb{R}\}), \qquad \mathcal{F}'_n = \sigma(\{X_i^{-1}([a, \infty[) : \ i \in I'_n, a \in \mathbb{R}\})$$

$$\mathcal{F}_0 = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_n, \qquad \mathcal{F}'_0 = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}'_n,$$

$$\mathcal{F}_\infty = \sigma\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_n\Big), \qquad \mathcal{F}'_\infty = \sigma\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}'_n\Big).$$

todas ellas contenidas en $\mathcal{F}$.

Con la notación anterior se tienen los siguientes resultados.

Proposición 12. *Para todo $\epsilon > 0$ y $E \in \mathcal{F}_\infty$ existe $E_\epsilon \in \displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_n$ tal que $\mathbb{P}[E \triangle E_\epsilon] < \epsilon$.*

Demostración. Considere $\mathcal{C} = \left\{ E \in \mathcal{F}_\infty \middle| \ \forall \ \epsilon > 0 \ \exists \ E_\epsilon \in \displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_n : \ \mathbb{P}[E \triangle E_\epsilon] < \epsilon \right\}$. Se empleará el Lema de Clases Monótonas para probar que $\mathcal{C} = \mathcal{F}$. Para ello, requerimos de la siguiente

Afirmación. Se satisfacen:

(1) $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{F}_\infty$.

(2) $\mathcal{C}$ es una clase monótona.

(3) $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{C}$ y además es un álgebra de subconjuntos de Ω.

Demostración de la Afirmación.

(1) Es inmediato de la definición.

(2) Se tiene en primer lugar que $\Omega \in \mathcal{C}$, ya que es claro que $\Omega \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_n$ y además para todo $\epsilon > 0$ existe $\Omega \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_n$ tal que $\mathbb{P}[\Omega \triangle \Omega] = 0 < \epsilon$.

Probemos ahora que $\mathcal{C}$ es cerrado bajo uniones crecientes. Para ello, fije $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión creciente en $\mathcal{C}$ y $\epsilon > 0$ arbitrarios. Por el Teorema de Continuidad de la probabilidad se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}[E_n] = \mathbb{P}\left[\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right],$$

así que para $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left|\mathbb{P}\left[\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right] - \mathbb{P}[E_N]\right| = \mathbb{P}\left[\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right] - \mathbb{P}[E_N] < \frac{\epsilon}{2}. \tag{5.9}$$

Por otro lado, para $E_N \in \mathcal{C}$ existe $E_\epsilon \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_n$ tal que

$$\mathbb{P}[E_N \triangle E_\epsilon] < \frac{\epsilon}{2} \tag{5.10}$$

Por la Observación 5 del Capítulo 1 se tiene que

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \triangle E_\epsilon \subseteq \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \triangle E_N\right) \cup (E_N \triangle E_\epsilon)$$

Como $E_N \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, de las expresiones (5.9) y (5.10) se concluye que para $\epsilon > 0$ existe $E_\epsilon \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_n$ tal que

$$\mathbb{P}\left[\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \triangle E_\epsilon\right] = \mathbb{P}\left[\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \setminus E_N\right] + \mathbb{P}[E_N \triangle E_\epsilon] = \mathbb{P}\left[\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right] - \mathbb{P}[E_N] + \mathbb{P}[E_N \triangle E_\epsilon] < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,$$

y por lo tanto, $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{F}_\infty$.

De la misma forma se prueba que $\mathcal{C}$ es cerrado bajo intersecciones decrecientes. Por lo tanto, $\mathcal{C}$ es una clase monótona.

(3) El hecho de que $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_n$ sea un álgebra de subconjuntos de Ω se sigue de que, puede verificarse de inmediato que para $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $\mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{F}_{n+1}$. Por otro lado, es claro que $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{C}$.

Esto demuestra la Afirmación.

Entonces, por la Afirmación y el lema de clases monótonas se concluye que $\mathcal{F}_\infty = \sigma\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_n\Big) \subseteq \sigma(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{C}$, lo que prueba la proposición.

⊠

Teorema 29. *Sea $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias e independientes e idénticamente distribuidas. Entonces:*

(I) *Para todo $n \in \mathbb{N}$, $A \in \mathcal{F}_n$, $A' \in \mathcal{F}'_n$ se tiene que $\mathbb{P}[A \cap A'] = \mathbb{P}[A]\mathbb{P}[A']$.*

(II) (Ley 0-1 de Kolmogorov) *Para todo $E \in \mathcal{F}'_0$ ocurre que $\mathbb{P}[E] \in \{0, 1\}$.*

Demostración. Considere $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con las características solicitadas.

(I) Fije $n \in \mathbb{N}$. Se probará el resultado mediante la siguiente secuencia de pasos.

Paso 1. Fije $k \in I'_n$ y $b \in \mathbb{R}$. Mediante el Teorema de Continuidad de la probabilidad y la independencia entre las variables aleatorias $\{X_1, \dots, X_n\}$ y X_k se verifica de inmediato que

$$\mathcal{C} = \{A \in \mathcal{F}_n :\ \mathbb{P}[A \cap X_k^{-1}([b, \infty[)] = \mathbb{P}[A] \cdot \mathbb{P}[X_k^{-1}([b, \infty[)]\}$$

es una clase monótona tal que $\{X_i^{-1}([a, \infty[) :\ i \in I_n, a \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathcal{C} \subseteq \mathcal{F}_n$. Entonces por el Lema de Clases Monótonas se concluye que $\mathcal{F}_n = \sigma\big(\{X_i^{-1}([a, \infty[) :\ i \in I_n, a \in \mathbb{R}\}\big) \subseteq \sigma(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{C}$. Por lo tanto $\mathcal{C} = \mathcal{F}_n$.

Paso 2. De forma similar al Paso 1, puede comprobarse que

$$\mathcal{C}' = \{A' \in \mathcal{F}'_n \big|\ \forall A \in \mathcal{F}_n :\ \mathbb{P}[A \cap A'] = \mathbb{P}[A]\mathbb{P}[A']\}$$

es una clase monótona tal que $\{X_i^{-1}([a, \infty[) :\ i \in I'_n, a \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathcal{C}' \subseteq \mathcal{F}'_n$. Por el Lema de Clases Monótonas se tiene que $\mathcal{F}'_n = \sigma\big(\{X_i^{-1}([a, \infty[) :\ i \in I'_n, a \in \mathbb{R}\}\big) \subseteq \sigma(\mathcal{C}') \subseteq \mathcal{C}'$, es decir, $\mathcal{C}' = \mathcal{F}'_n$.

El paso 2 prueba el enunciado (I).

(II) Fije $E \in \mathcal{F}'_0 = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}'_n$. Suponga que $\mathbb{P}[E] > 0$. Recuerde que $\mathbb{P}[\cdot|E]$ es una medida de probabilidad (condicional) en $(\Omega, \mathcal{F}_\infty)$. Entonces, por el inciso (I), para cada $n \in \mathbb{N}$ y $F \in \mathcal{F}_n$

$$\mathbb{P}[F|E] = \frac{\mathbb{P}[E \cap F]}{\mathbb{P}[E]} = \frac{\mathbb{P}[E]\mathbb{P}[F]}{\mathbb{P}[E]} = \mathbb{P}[F].$$

De hecho, esta última identidad se satisface para todo $F \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_n$. Empleando el lema de Clases Monótonas se concluye que $\mathbb{P}[\cdot|E]$ y $\mathbb{P}$ coinciden en $\mathcal{F}_\infty$. Finalmente, observe que $E \in \mathcal{F}_\infty$, ya que para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $\{X_i^{-1}([a, \infty[) :\ i \in I'_n, a \in \mathbb{R}\} \subseteq \bigcap_{i=n+1}^{\infty} \mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{F}_\infty$, es decir $\mathcal{F}'_n \subseteq \mathcal{F}_\infty$.

Entonces $\mathbb{P}[E] = \mathbb{P}[E|E] = \dfrac{\mathbb{P}[E]}{\mathbb{P}[E]} = 1$, que prueba el resultado.

⊠

Lema 8. *Sea $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas. Considere ν la medida de probabilidad en $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathcal{B}(\mathbb{R})^{\otimes\mathbb{N}})$ asociada a esta sucesión.*

Entonces para todo $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R})^{\otimes\mathbb{N}}$, $n \in \mathbb{N}$ y $\sigma \in S_n$ se tiene que

$$\nu(E) = \nu(\sigma(E)).$$

Demostración. Fije $n \in \mathbb{N}$ y $\sigma \in S_n$. Definamos la función $\nu' : \mathcal{B}(\mathbb{R})^{\otimes\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$ dada para cada $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R})^{\otimes\mathbb{N}}$ por

$$\nu'(E) = \nu(\sigma(E))$$

Claramente ν' es una medida en $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathcal{B}(\mathbb{R})^{\otimes\mathbb{N}})$. Observe que $\sigma(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}) = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Luego ν' es una medida de probabilidad.

Se afirma que $\nu' = \nu$. Para probar esta afirmación, de acuerdo con la definición de la $\sigma-$álgebra producto, es suficiente probar que el resultado se satisface para los conjuntos de la forma $\bigcap_{i=1}^{m} \pi_{\alpha_i}^{-1}(B_i)$, donde $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{N}$, $B_1, \ldots, B_m \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $m \in \mathbb{N}$ y para cada $t \in \mathbb{N}$ la función $\pi_t : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$ es la $t-$ésima proyección de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ en $\mathbb{R}$. El resto de la prueba se obtiene con el Lema de Clases Monótonas.

Fije $m \in \mathbb{N}$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{N}$ y $B_1, \ldots, B_m \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Note que

$$\begin{aligned}
\sigma\Big(\bigcap_{i=1}^{m} \pi_{\alpha_i}^{-1}(B_i)\Big) &= \Big\{\sigma(x) :\ x \in \bigcap_{i=1}^{m} \pi_{\alpha_i}^{-1}(B_i)\Big\} = \{\sigma(x) :\ x_{\alpha_i} \in B_i,\ i = 1, \ldots, n\} \\
&= \{(x_{\sigma(r)\chi_{I_n}(r) + r\chi_{I'_n}(r)})_{r\in\mathbb{N}} :\ x_{\sigma(\alpha_i)\chi_{I_n}(\alpha_i) + \alpha_i\chi_{I'_n}(\alpha_i)} \in B_i,\ i = 1, \ldots, n\} \\
&= \bigcap_{i=1}^{m} \pi^{-1}_{\sigma(\alpha_i)\chi_{I_n}(\alpha_i) + \alpha_i\chi_{I'_n}(\alpha_i)}(B_i).
\end{aligned}$$

Así que por la definición de ν (medida producto, independencia e idéntica distribución de las variables indicadas), se tiene que

$$\begin{aligned}
\nu'\Big(\bigcap_{i=1}^{m} \pi_{\alpha_i}^{-1}(B_i)\Big) &= \nu\Big(\bigcap_{i=1}^{m} \pi^{-1}_{\sigma(\alpha_i)\chi_{I_n}(\alpha_i) + \alpha_i\chi_{I'_n}(\alpha_i)}(B_i)\Big) = \prod_{i=1}^{m} \mu(B_i) \\
&= \nu\Big(\bigcap_{i=1}^{m} \pi_{\alpha_i}^{-1}(B_i)\Big).
\end{aligned}$$

De esta manera se tiene la conclusión.

⊠

Definición 14. *Se define la función $d : \mathcal{B}(\mathbb{R})^{\otimes\mathbb{N}} \times \mathcal{B}(\mathbb{R})^{\otimes\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$ para cada $A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})^{\otimes\mathbb{N}}$ como*

$$d(A, B) = \nu(A \triangle B).$$

Se verifica de inmediato que d es una pseudométrica en $\mathcal{B}(\mathbb{R})^{\otimes\mathbb{N}}$. Como es usual, para $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R})^{\otimes\mathbb{N}}$ y $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})^{\otimes\mathbb{N}}$ diremos que $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a A respecto a d si $\lim_{n\to\infty} d(A_n, A) = 0$, en cuyo caso será denotado por $A_n \xrightarrow{d} A$.

Para $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}, (B_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R})^{\otimes\mathbb{N}}$, $A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})^{\otimes\mathbb{N}}$ con $A_n \xrightarrow{d} A$ y $B_n \xrightarrow{d} B$ se tiene que $A_n \cap B_n \xrightarrow{d} A \cap B$. Esto último se obtiene del hecho de que, para cada $n \in \mathbb{N}$ se satisface que

$$(A_n \cap B_n) \triangle (A \triangle B) \subseteq (A_n \triangle A) \cup (B_n \triangle B).$$

Observación 23. La sucesión de variables aleatorias especificada, tiene asociada una función de distribución común F en todas las variables. Es necesario considerar a un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con la distribución indicada F en tal espacio. De acuerdo con el Teorema de Consistencia de Kolmogorov, bastará considerar el espacio $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) = (\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathcal{B}(\mathbb{R})^{\otimes\mathbb{N}}, \mu^{\otimes\mathbb{N}})$, donde μ es la medida de probabilidad en $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ asociada a F. En este contexto, la sucesión de variables aleatorias está dada por $(\pi_t)_{t\in\mathbb{N}}$ las proyecciones de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ en $\mathbb{R}$. Con la notación introducida, es fácil notar que $\mathcal{F} = \mathcal{B}(\mathbb{R})^{\otimes\mathbb{N}} = \mathcal{F}_\infty$.

En adelante, se considera $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) = (\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathcal{B}(\mathbb{R})^{\otimes\mathbb{N}}, \mu^{\otimes\mathbb{N}})$ y también $(X_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\pi_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Teorema 30 (Ley 0-1 de Hewitt-Savage). *Para todo $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R})^{\otimes\mathbb{N}}$ permutable se tiene que $\mathbb{P}[E] \in \{0, 1\}$.*

Demostración. Sea $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R})^{\otimes\mathbb{N}}$ permutable. De acuerdo con la Observación 23, $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R})^{\otimes\mathbb{N}} = \mathcal{F}_\infty$, así que por la Proposición 12 se tiene que para cada $k \in \mathbb{N}$ existe $\alpha(k) \in \mathbb{N}$ y existe $E_k \in \mathcal{F}_{\alpha(k)}$ tal que $d(E_k, E) = \mathbb{P}[E\triangle E_k] < \frac{1}{2^k}$.

Como se menciona en la prueba de dicha proposición, $\{\mathcal{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión creciente de $\sigma-$álgebras, así que puede suponerse sin pérdida de generalidad que $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión estrictamente creciente que diverge a infinito.

Fije $k \in \mathbb{N}$. Defina $\sigma_k \in S_{2k}$ como el producto de ciclos siguientes

$$\sigma_k = \prod_{i=1}^{\alpha(k)} (i, \quad \alpha(k)+i) = (1, \quad \alpha(k)+1)\cdots(\alpha(k), \quad 2\alpha(k))$$

y defina también $F_k = \sigma_k(E_k)$. Se afirma que $F_k \in \mathcal{F}'_{\alpha_k}$. Para probar esta afirmación, se emplea la definición de $\mathcal{F}_{\alpha_k}$ y se supone que $E_k = \bigcap_{j=1}^{\alpha(k)} X_j^{-1}(A_j)$, donde $A_j \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $j = 1,\ldots,\alpha(k)$. En este caso, puede verificarse directamente que

$$\sigma_k(E_k) = \bigcap_{j=1}^{\alpha(k)} X^{-1}_{j+\alpha(k)}(A_j) \in \mathcal{F}'_{\alpha(k)}.$$

El argumento general se tiene empleando el Lema de Clases Monótonas.

Ahora, por el Lema 8, como σ_k es una biyección y E es permutable se tiene que

$$d(F_k, E) = \mathbb{P}[E\triangle F_k] = \mathbb{P}[\sigma_k(E)\triangle\sigma_k(E_k)] = \mathbb{P}[\sigma_k(E\triangle E_k)] = \mathbb{P}[E\triangle E_k] = d(E_k, E) < \frac{1}{2^k}. \tag{5.11}$$

De la ecuación (5.11) se obtiene inmediatamente que $E_n \xrightarrow{d} E$ y $F_n \xrightarrow{d} E$ y por la Definición 14 se tiene que $E_n \cap F_n \xrightarrow{d} E$.

Por otro lado, del inciso (I) del Teorema 29 se tiene que para cada $k \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{P}[E_k \cap F_k] = \mathbb{P}[E_k]\mathbb{P}[F_k]. \tag{5.12}$$

Se afirma que para todo $\epsilon > 0$ se tiene que

$$|(\mathbb{P}[E])^2 - \mathbb{P}[E]| < \epsilon.$$

Fije $\epsilon > 0$. Entonces, derivado del hecho de $E_n \cap F_n \xrightarrow{d} E$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{2^N} < \frac{\epsilon}{4}$ y también

$$\mathbb{P}[(E_N \cap F_N)\triangle E] < \frac{\epsilon}{2}.$$

De las ecuaciones (5.11) y (5.12) se tiene que

$$\begin{aligned}|(\mathbb{P}[E])^2 - \mathbb{P}[E]| &\leq \mathbb{P}[E]|\mathbb{P}[E_N] - \mathbb{P}[E]| + \mathbb{P}[E_N]|\mathbb{P}[F_N] - \mathbb{P}[E]| + |\mathbb{P}[E_N \cap F_N] - \mathbb{P}[E]| \\ &\leq \mathbb{P}[E_N\triangle E] + \mathbb{P}[F_N\triangle E] + \mathbb{P}[(E_N \cap F_N)\triangle E] = d(E_N, E) + d(F_N, E) + d(E_N \cap F_N, E) \\ &< \frac{\epsilon}{2} + 2\frac{\epsilon}{4} = \epsilon.\end{aligned}$$

Por la elección arbitraria de $\epsilon > 0$ se concluye que $\mathbb{P}[E] = (\mathbb{P}[E])^2$. Entonces $\mathbb{P}[E] \in \{0, 1\}$.

⊠

Para la sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definimos al proceso

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i.$$

A partir de ahora supondremos que $\mathbb{P}[X_1 > 0] > 0$ y también $\mathbb{P}[X_1 < 0] > 0$. Con ello, se establece el siguiente

LEMA 9. *Con las hipótesis enunciadas se tiene que*

(I) $\mathbb{P}\left[\limsup_{n\to\infty} S_n = +\infty\right] = 1$ *o bien,* $\mathbb{P}\left[\lim_{n\to\infty} S_n = -\infty\right] = 1.$

(II) $\mathbb{P}\left[\lim_{n\to\infty} S_n = +\infty\right] = 1$ *o bien,* $\mathbb{P}\left[\liminf_{n\to\infty} S_n = -\infty\right] = 1.$

Demostración. En primer lugar, mediante la propiedad arquimediana, puede verificarse de inmediato que existe $c > 0$ tal que $\mathbb{P}[X_1 > c] > 0$.

(I) Notemos que para cada $m \in \mathbb{N}$ y $\tau \in S_m$ se tiene que para cada $\omega = (\omega_r)_{r\in\mathbb{N}} \in \Omega$

$$\limsup_{n\to\infty} S_n(\tau(\omega)) = \limsup_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} X_{\tau(i)\chi_{I_m}(i)+i\chi_{I'_m}(i)}(\omega) = \limsup_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} X_i(\omega) = \limsup_{n\to\infty} S_n(\omega),$$

lo cual demuestra que, para cada $k \in \mathbb{Z}$ el conjunto $\mathcal{F}-$medible

$$\left\{\omega \in \Omega : \ kc \leq \limsup_{n\to\infty} S_n(\omega) < (k+1)c\right\}$$

es permutable, y por la ley 0-1 de Hewitt-Savage se tiene que

$$\mathbb{P}\left[kc \leq \limsup_{n\to\infty} S_n < (k+1)c\right] \in \{0,1\}.$$

Observe que

$$\left\{\omega \in \Omega : \ -\infty < \limsup_{n\to\infty} S_n(\omega) < +\infty\right\} = \biguplus_{k\in\mathbb{Z}} \left\{\omega \in \Omega : \ kc \leq \limsup_{n\to\infty} S_n(\omega) < (k+1)c\right\}$$

Esto significa que para todo $k \in \mathbb{Z}$ (excepto a lo más en un único valor $k \in \mathbb{Z}$) se tiene que

$$\mathbb{P}\left[kc \leq \limsup_{n\to\infty} S_n < (k+1)c\right] = 0.$$

Se afirma que para todo $k \in \mathbb{Z}$ se tiene que $\mathbb{P}\left[kc \leq \limsup_{n\to\infty} S_n < (k+1)c\right] = 0$. Procedamos por contradicción. Suponga que existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $\mathbb{P}\left[kc \leq \limsup_{n\to\infty} S_n < (k+1)c\right] = 1$. Entonces

$$\mathbb{P}\left[kc > \limsup_{n\to\infty} S_n\right] + \mathbb{P}\left[\limsup_{n\to\infty} S_n \geq (k+1)c\right] = 0$$

Luego $\mathbb{P}\left[\limsup_{n\to\infty} S_n \leq (k+1)c\right] = \mathbb{P}\left[kc > \limsup_{n\to\infty} S_n\right] = 0$. Como $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de variables independientes e idénticamente distribuidas, se tiene que

$$0 < \mathbb{P}\left[kc \leq \limsup_{n\to\infty} S_n < (k+1)c, \ S_1 > c\right] \leq \mathbb{P}\left[c + \limsup_{n\to\infty} S_n - S_1 < (k+1)c\right] \leq \mathbb{P}\left[\limsup_{n\to\infty} S_n - S_1 < kc\right]$$
$$= \mathbb{P}\left[\limsup_{n\to\infty} S_n < kc\right] = 0,$$

lo que es una contradicción. Así que para todo $k \in \mathbb{Z}$ se tiene que $\mathbb{P}\left[kc \leq \limsup_{n\to\infty} S_n < (k+1)c\right] = 0.$

Con ello hemos probado que $\mathbb{P}\left[-\infty < \limsup_{n\to\infty} S_n < +\infty\right] = 0,$

por lo que

$$\mathbb{P}\left[\limsup_{n\to\infty} S_n = +\infty\right] + \mathbb{P}\left[\limsup_{n\to\infty} S_n = -\infty\right] = 1.$$

Se sigue también que $\left\{\limsup_{n\to\infty} S_n = +\infty\right\}$ es permutable y entonces por el Teorema 30, concluimos que

$$\mathbb{P}\left[\limsup_{n\to\infty} S_n = +\infty\right] \in \{0,1\}.$$

Suponga por ejemplo que $\mathbb{P}\left[\limsup_{n\to\infty} S_n = -\infty\right] = 0$. En tal caso se tiene que $\mathbb{P}\left[\limsup_{n\to\infty} S_n = +\infty\right] = 1$ y $\mathbb{P}\left[\lim_{n\to\infty} S_n = -\infty\right] \neq 1$. El otro caso se prueba análogamente.

(II) La demostración es similar al inciso (I).

$\boxtimes$

Para la siguiente definición, recuerde que la sucesión $\{\mathcal{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de $\sigma-$álgebras de subconjuntos de Ω definida para cada $n \in \mathbb{N}$ como

$$\mathcal{F}_n = \sigma(\{X_i^{-1}([a,\infty[) : \quad i \in I_n,\ a \in \mathbb{R}\})$$

es creciente y está contenida en $\mathcal{F}$.

Definición 15 (Tiempo de Paro respecto a $\{\mathcal{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$). *Una variable aleatoria $\tau : \Omega \to \mathbb{R}$ con valores en $\mathbb{Z}^+$ es llamada un tiempo de paro respecto a $\mathcal{F}_{n n\in\mathbb{N}}$ si para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene*

$$\{\tau = n\} = \{\omega \in \Omega : \ \tau(\omega) = n\} \in \mathcal{F}_n.$$

Definamos las siguientes variables aleatorias:

$$\tau_0^+ = \text{ínf}\{n \geq 1 : \ S_n \geq 0\}$$

$$\tau^+ = \text{ínf}\{n \geq 1 : \ S_n > 0\}$$

$$\tau_0^- = \text{ínf}\{n \geq 1 : \ S_n \leq 0\}$$

$$\tau^- = \text{ínf}\{n \geq 1 : \ S_n < 0\} \tag{5.13}$$

Tenemos el siguiente

Lema 10. *Considere los tiempos aleatorios de la expresión 5.13. Estos satisfacen las siguientes propiedades:*

(I) *Si* $\mathbb{P}[\tau_0^+ < \infty] < 1$ *entonces* $\mathbb{P}\left[\limsup_{n\to\infty} S_n = -\infty\right] = 1$.

(II) *Si* $\mathbb{P}[\tau_0^+ < \infty] = 1$ *entonces* $\mathbb{P}\left[\limsup_{n\to\infty} S_n = +\infty\right] = 1$.

(III) *Si* $\mathbb{P}[\tau_0^- < \infty] < 1$ *entonces* $\mathbb{P}\left[\liminf_{n\to\infty} S_n = +\infty\right] = 1$.

(IV) *Si* $\mathbb{P}[\tau_0^- < \infty] = 1$ *entonces* $\mathbb{P}\left[\liminf_{n\to\infty} S_n = -\infty\right] = 1$.

Demostración. Únicamente se prueban los incisos (I) y (II), ya que los restantes incisos pueden obtenerse de forma análoga.

(I) Suponga que $\mathbb{P}[\tau_0^+ < \infty] < 1$. Entonces $1 - \mathbb{P}[\tau_0^+ = \infty] = \mathbb{P}[\tau_0^+ < \infty] < 1$, es decir, $\mathbb{P}[\tau_0^+ = \infty] > 0$.

Se afirma que $\mathbb{P}[\sup\{S_n : \ n \geq 1\} < +\infty] > 0$. Procedamos por contradicción. Suponga que

$$\mathbb{P}[\sup\{S_n : \ n \geq 1\} = +\infty] = 1.$$

Entonces $\sup_{n\in\mathbb{N}} S_n = \infty$ $(\mathbb{P})$-c.s Dado $\omega \in \Omega$ tal que $\sup_{n\in\mathbb{N}} S_n(\omega) = \infty$ y $\tau_0^+(\omega) = \infty$, se tiene que para todo $n \in \mathbb{N}$ $S_n(\omega) < 0$ y también para todo $R > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $0 > S_N > R$, que es contradictorio.

Por lo tanto $\mathbb{P}[\sup S_n:\ n\geq 1<+\infty]>0$.

Ya que $\limsup_{n\to\infty} S_n \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} S_n$ en Ω, se concluye que $\mathbb{P}\left[\limsup_{n\to\infty} S_n<\infty\right]>0$. De aquí que $\mathbb{P}\left[\limsup_{n\to\infty} S_n=\infty\right]\neq 1$. Por el inciso (I) del Lema 9 debe tenerse que $\mathbb{P}\left[\lim_{n\to\infty} S_n=-\infty\right]=1$. En particular, existe $\lim_{n\to\infty} S_n$ ($\mathbb{P}$)-c.s y se concluye que $\mathbb{P}\left[\limsup_{n\to\infty} S_n=-\infty\right]=1$.

(II) Suponga que $\mathbb{P}[\tau_0^+<\infty]=1$. Entonces $\mathbb{P}[\exists n\geq 1:\ S_n\geq 0]=1$. Se afirma que $\mathbb{P}\left[\limsup_{n\to\infty} S_n\geq 0\right]=1$. Procedamos por contradicción. Suponga que $\mathbb{P}\left[\limsup_{n\to\infty} S_n\geq 0\right]\neq 1$. Observe que $\left\{\limsup_{n\to\infty} S_n\geq 0\right\}$ es permutable, así que por el Teorema 30 ocurre que

$$\mathbb{P}\left[\limsup_{n\to\infty} S_n\geq 0\right]=0,$$

es decir $\mathbb{P}\left[\limsup_{n\to\infty} S_n<0\right]=1$. Entonces existe $K_0\in\mathbb{N}$ tal que $\mathbb{P}\left[\sup_{n\geq K_0} S_n<0\right]=1$. Por la independencia e idéntica distribución de $(X_r)_{r\in\mathbb{N}}$ la sucesión es estacionaria y se verifica inmediatamente que

$$0<\mathbb{P}[S_{K_0}>0]=\mathbb{P}\left[\sum_{i=1}^{n} X_{i+K_0}, S_{K_0}>0,\ \sup_{n\geq K_0} S_n<0\right]=\mathbb{P}\left[S_{n+K_0}\geq 0,\ \sup_{n\geq K_0} S_n<0\right],$$

que es una contradicción. Luego, $\mathbb{P}\left[\limsup_{n\to\infty} S_n\geq 0\right]=1$. Entonces, del Lema 9 inciso (I), debe ocurrir que $\mathbb{P}\left[\limsup_{n\to\infty} S_n=\infty\right]=1$.

⊠

Proposición 13. *Se tienen las identidades*

(I) $\mathbb{E}[\tau^+]=\dfrac{1}{\mathbb{P}[\tau_0^-=\infty]}$,

(II) $\mathbb{E}[\tau^-]=\dfrac{1}{\mathbb{P}[\tau_0^+=\infty]}$.

Demostración. Se prueba el inciso (I), ya que la demostración del inciso (II) es análoga.

(I) Sea $S_0=0$ y para cada $n\in\mathbb{N}$ y $1\leq k\leq n$ definamos el conjunto

$$\begin{aligned}E_n(k)&=\{S_k\leq 0, S_k\leq S_1,\ldots,S_k\leq S_{k-1}, S_k<S_{k+1},\ldots,S_k<S_n\}\\&=\{X_1+\cdots+X_k\leq 0, X_2+\cdots+X_k\leq 0,\ldots,X_k\leq 0, 0<X_{k+1},\ldots,0<X_{k+1}+\cdots+X_n\},\end{aligned}$$

y también

$$E_n(0)=\{S_1>0,\ldots,S_n>0\}.$$

Se enuncian algunas propiedades de estos conjuntos.

<u>Afirmación 1.</u> Para todo $n\in\mathbb{N}$ y $1\leq k\leq n$ se satisfacen

(a) $\Omega=\biguplus_{k=0}^{n} E_n(k)$. En particular, $1=\sum_{k=0}^{n}\mathbb{P}[E_n(k)]$.
(b) $\mathbb{P}[S_k\leq 0, S_k\leq S_1,\ldots,S_k\leq S_{k-1}]=\mathbb{P}[\tau^+>k]$.
(c) $\mathbb{P}[S_k<S_{k+1},\ldots,S_k<S_n]=\mathbb{P}[\tau_0^->n-k]$.
(d) $\mathbb{P}[E_n(k)]=\mathbb{P}[\tau^+>k]\mathbb{P}[\tau_0^->n-k]$.
(e) $\mathbb{P}[\tau_0^-<\infty]\sum_{m=0}^{\infty}\mathbb{P}[\tau^+>m]=1$.

Demostración de la Afirmación 1. Fije $n \in \mathbb{N}$.

(a) Observe que

$$E_n(0) = \{S_1 > 0, \dots, S_n > 0\},$$

$$E_n(1) = \{S_1 \leq 0, S_1 \leq S_0 = 0, S_1 < S_2, \dots, S_1 < S_n\},$$

$$E_n(2) = \{S_2 \leq 0, S_2 \leq S_1, S_2 < S_3, \dots, S_2 < S_n\},$$

y en general ocurre que

$$E_n(n) = \{S_n \leq 0, S_n \leq S_1, \dots, S_n \leq S_{n-1}\}.$$

De aquí se observa que para todo $k, l \in \{0, \dots, n\}$ con $k \neq l$, por ejemplo con $k < l$, los elementos de $E_n(k)$ satisfacen $S_k < S_l$, mientras que para los elementos de $E_n(l)$ se tiene que $S_l \leq S_k$. Esto significa que $E_n(k) \cap E_n(l) = \emptyset$. Además, por inspección se verifica que

$$\Omega = \bigcup_{k,l \in \{0,\dots,n\}} \{S_l \leq S_k\} \cup \{S_k < S_l\} = \biguplus_{k=0}^{n} E_n(k).$$

(b) Con la definición de τ^+ en la expresión (5.13) se tiene que, por independencia e idéntica distribución de $(X_r)_{r \in \mathbb{N}}$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[S_k \leq 0, S_k \leq S_1, \dots, S_k \leq S_{k-1}] &= \mathbb{P}[S_k \leq 0, S_k \leq S_1, \dots, S_k \leq S_{k-1}] \\
&= \mathbb{P}[X_1 + \cdots + X_k \leq 0, X_2 + \cdots + X_k \leq 0, \dots, X_k \leq 0] \\
&= \mathbb{P}[X_1 + \cdots + X_k \leq 0, X_1 + \cdots + X_{k-1} \leq 0, \dots, X_1 \leq 0] \\
&= \mathbb{P}[S_k \leq 0, S_{k-1} \leq 0, \dots, S_1 \leq 0] = \mathbb{P}[\tau^+ > k].
\end{aligned}$$

(c) Es análogo al inciso (b).

(d) Por los incisos (b) y (c), así como por independencia e idéntica distribución de $(X_r)_{r \in \mathbb{N}}$ ocurre

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[E_n(k)] &= \mathbb{P}[X_1 + \cdots + X_k \leq 0, X_2 + \cdots + X_k \leq 0, \dots, X_k \leq 0, 0 < X_{k+1}, \dots, 0 < X_{k+1} + \cdots + X_n] \\
&= \mathbb{P}[X_1 + \cdots + X_k \leq 0, X_2 + \cdots + X_k \leq 0, \dots, X_k \leq 0]\mathbb{P}[0 < X_{k+1}, \dots, 0 < X_{k+1} + \cdots + X_n] \\
&= \mathbb{P}[\tau^+ > k]\mathbb{P}[\tau_0^- > n - k].
\end{aligned}$$

(e) Note que por los incisos (a) y (d) se obtiene que

$$1 = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}[\tau^+ > k]\mathbb{P}[\tau_0^- > n - k]. \tag{5.14}$$

Distinguimos entre dos casos posibles para $\mathbb{E}[\tau^+]$.

Caso 1. $\mathbb{E}[\tau^+] = \infty$.

Note que $(\mathbb{P}[\tau_0^- > n])_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión decreciente y acotada inferiormente por $\mathbb{P}[\tau_0^- = \infty]$. Entonces, por la ecuación (5.14), para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$\mathbb{P}[\tau_0^- = \infty] \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}[\tau^+ > k] \leq \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}[\tau^+ > k]\mathbb{P}[\tau_0^- > n - k] = 1.$$

De esta última expresión se tiene que

$$\mathbb{P}[\tau_0^- = \infty]\mathbb{E}[\tau^+] = \mathbb{P}[\tau_0^- = \infty] \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}[\tau^+ > k] \leq 1. \tag{5.15}$$

Y como $\mathbb{E}[\tau^+] = \infty$, debe ocurrir que $\mathbb{P}[\tau_0^- = \infty] = 0$. Por ello, $\mathbb{E}[\tau^+] = \dfrac{1}{\mathbb{P}[\tau_0^- = \infty]}$.

Caso 2. $\mathbb{E}[\tau^+] = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}[\tau^+ > k] < \infty$.

En este caso se tiene la siguiente

<u>Afirmación.</u> Se satisface que:

I. $\mathbb{P}[\tau_0^- = \infty] > 0$.

II. Para todo $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq N$ se tiene que

$$1 \leq (1+\epsilon)\mathbb{P}[\tau_0^- = \infty]\mathbb{E}[\tau^+] + \epsilon.$$

Demostración de la Afirmación. Emplearemos el hecho de que $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \mathbb{P}[\tau^+ > k] < \infty$.

I. Procedamos por contradicción. Suponga que la afirmación es falsa. Por el Teorema de Continuidad de la probabilidad se tiene que $0 = \mathbb{P}[\tau_0^- = \infty] = \lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{P}[\tau_0^- > n]$. Entonces para $\epsilon = \dfrac{1}{\mathbb{E}[\tau^+]+2} > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\mathbb{P}[\tau_0^- > n] < \epsilon, \qquad \sum_{k=N+1}^{\infty} \mathbb{P}[\tau^+ > k] < \epsilon.$$

De esta última expresión, en conjunto con la ecuación (5.15), se tiene que

$$\begin{aligned}
1 &= \sum_{k=0}^{2N} \mathbb{P}[\tau^+ > k]\mathbb{P}[\tau_0^- > 2N-k] \\
&= \sum_{k=0}^{N} \mathbb{P}[\tau^+ > k]\mathbb{P}[\tau_0^- > 2N-k] + \sum_{k=N+1}^{2N} \mathbb{P}[\tau^+ > k]\mathbb{P}[\tau_0^- > 2N-k] \\
&\leq \epsilon \sum_{k=0}^{N} \mathbb{P}[\tau^+ > k] + \sum_{k=N+1}^{2N} \mathbb{P}[\tau^+ > k] \leq \epsilon\mathbb{E}[\tau^+] + \sum_{k=N+1}^{\infty} \mathbb{P}[\tau^+ > k] < \epsilon(\mathbb{E}[\tau^+]+1) < 1
\end{aligned}$$

que es una contradicción. Por lo tanto $\mathbb{P}[\tau_0^- = \infty] > 0$.

II. Fije $\epsilon > 0$ arbitrario. Al igual que antes, se tiene que $\mathbb{P}[\tau_0^- = \infty] = \lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{P}[\tau_0^- > n]$. Por el inciso anterior, se tiene que $\mathbb{P}[\tau_0^- = \infty] > 0$, así que para $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo natural $n \geq N$ ocurre que

$$\mathbb{P}[\tau_0^- > n] < (1+\epsilon)\mathbb{P}[\tau_0^- = \infty], \qquad \sum_{k=n+1}^{\infty} \mathbb{P}[\tau^+ > k] < \epsilon.$$

Así que para cada $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq N$ ocurre

$$\begin{aligned}
1 &= \sum_{k=0}^{2n} \mathbb{P}[\tau^+ > k]\mathbb{P}[\tau_0^- > 2n-k] \\
&= \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}[\tau^+ > k]\mathbb{P}[\tau_0^- > 2n-k] + \sum_{k=n+1}^{2n} \mathbb{P}[\tau^+ > k]\mathbb{P}[\tau_0^- > 2n-k] \\
&\leq (1+\epsilon)\mathbb{P}[\tau_0^- = \infty] \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}[\tau^+ > k] + \sum_{k=n+1}^{2n} \mathbb{P}[\tau^+ > k] \\
&\leq (1+\epsilon)\mathbb{P}[\tau_0^- = \infty]\mathbb{E}[\tau^+] + \sum_{k=n+1}^{\infty} \mathbb{P}[\tau^+ > k] < (1+\epsilon)\mathbb{P}[\tau_0^- = \infty]\mathbb{E}[\tau^+] + \epsilon.
\end{aligned}$$

Esto demuestra la Afirmación.

En el segundo inciso de la Afirmación, haciendo $\epsilon \to 0$ se concluye que

$$1 \leq \mathbb{P}[\tau_0^- = \infty]\mathbb{E}[\tau^+]. \tag{5.16}$$

Combinando las expresiones (5.15) y (5.16) se sigue que $1 = \mathbb{P}[\tau_0^- = \infty]\mathbb{E}[\tau^+]$.

Así se tiene la conclusión en todos los casos.

De esta forma se obtiene la Afirmación 1.

(II) Es similar.

$\boxtimes$

Lema 11 (Wald). *Considere τ un tiempo de paro respecto a $\{\mathcal{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Suponga que $\mathbb{E}[|X_1|] < \infty$ y que $\mathbb{E}[|\tau|] < \infty$. Se define ($\mathbb{P}$)-c.s la función $\mathcal{F}, \mathcal{B}(\mathbb{R})-$medible $S_\tau : \Omega \to \mathbb{R}$ para cada $\omega \in \Omega$*

$$S_\tau(\omega) = S_{\tau_\omega}(\omega).$$

Entonces

$$\mathbb{E}[S_\tau] = \mathbb{E}[X_1]\mathbb{E}[\tau]. \tag{5.17}$$

Demostración. Inmediata. $\boxtimes$

Proposición 14. *Suponga que $\mathbb{E}[X_1] = 0$. Entonces*

$$\mathbb{P}\left[\limsup_{n\to\infty} S_n = \infty, \quad \liminf_{n\to\infty} S_n = -\infty\right] = 1.$$

Demostración. Tenemos la siguiente

Afirmación. Se satisfacen las identidades $\mathbb{E}[\tau^+] = \infty$ y $\mathbb{E}[\tau^-] = \infty$.

Demostración de la Afirmación. Probaremos únicamente la primera identidad, la segunda se obtiene de la misma forma. Procedamos por contradicción. Suponga que $\mathbb{E}[\tau^+] < \infty$. Considere X_1^+ y X_1^- la parte positiva y la parte negativa de X_1 respectivamente. Observe que para cada $r \in \mathbb{N}$ ocurre que:

$$\{\tau^+ = r\} = \{S_0 \leq 0, \ldots, S_{r-1} \leq 0, S_r > 0\}.$$

Por lo que τ^+ es un tiempo de paro respecto a $\{\mathcal{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Entonces, por el Lema 11 se sigue que

$$\mathbb{E}[S_{\tau^+}] = \mathbb{E}[X_1]\mathbb{E}[\tau^+].$$

Por otro lado

$$\mathbb{E}[X_1^+] = \int_\Omega (0\chi_{\{X_1\leq 0\}} + X_1\chi_{\{X_1>0\}})d\mathbb{P} \geq \int_\Omega S_1\chi_{\{\tau^+=1\}} \geq 0.$$

También, por el Teorema de Convergencia Dominada, se tiene que

$$\mathbb{E}[S_{\tau^+}] = \sum_{n=1}^{\infty}\int_\Omega S_n\chi_{\{\tau^+=n\}}d\mathbb{P} \geq \int_\Omega S_1\chi_{\{\tau^+=1\}} = \mathbb{E}[X_1^+] \geq 0.$$

Combinando las ecuaciones anteriores se obtiene que

$$0 \leq \mathbb{E}[X_1^+] \leq \mathbb{E}[S_{\tau^+}] = \mathbb{E}[X_1]\mathbb{E}[\tau^+] = 0.$$

Entonces $\mathbb{E}[X_1^+] = 0$. De igual forma puede obtenerse que $\mathbb{E}[X_1^-] = 0$. Por lo tanto $\mathbb{E}|X_1| = 0$. Luego $X_1 = 0$ ($\mathbb{P}$)-c.s, lo cuál contradice las hipótesis de que $\mathbb{P}[X_1 > 0], \mathbb{P}[X_1 < 0] > 0$. Por lo tanto, $\mathbb{E}[\tau^+] = \infty$.

De la Afirmación, y de la Proposición 13 se tiene que

$$\frac{1}{\mathbb{P}[\tau_0^- = \infty]} = \mathbb{E}[\tau^+] = \infty = \mathbb{E}[\tau^-] = \frac{1}{\mathbb{P}[\tau_0^+ = \infty]}.$$

Por lo tanto, $\mathbb{P}[\tau_0^- = \infty] = 0 = \mathbb{P}[\tau_0^+ = \infty]$, es decir $\mathbb{P}[\tau_0^- < \infty] = 1 = \mathbb{P}[\tau_0^+ < \infty]$. De acuerdo con los incisos (II) y (IV) en el Lema 10 se concluye que

$$\mathbb{P}\left[\limsup_{n\to\infty} S_n = +\infty\right] = 1 = \mathbb{P}\left[\liminf_{n\to\infty} S_n = -\infty\right].$$

Esto demuestra la Proposición. $\boxtimes$

5.3. Recurrencia para RWRE

Se introduce la notación general para una caminata aleatoria en ambientes aleatorios (RWRE).

Fije $\omega = (\omega)_{r\in\mathbb{Z}}$ y $x \in \mathbb{Z}$. El Teorema de Consistencia de Kolmogorov garantiza la existencia de una medida de probabilidad $\mathbb{P}_\omega^x$ en $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathcal{B}(\mathbb{R})^{\otimes\mathbb{N}})$ y una cadena de Markov $(S_n^\omega)_{n\in\mathbb{N}_0}$, tal que para cada $i,j \in \mathbb{Z}$ las probabilidades de transición están determinadas por

$$\mathbb{P}_\omega^x[S_{n+1} = j | S_n = i] = \begin{cases} \omega_i & \text{si} & j = i+1 \\ 1-\omega_i & \text{si} & j = i-1 \\ 0 & \text{en otro caso} & \end{cases}$$

y también $\mathbb{P}_\omega^x[S_0 = x] = 1$. De hecho, las variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas que se utilizan para construir a la caminata aleatoria $(S_n^\omega)_{n\in\mathbb{N}_0}$ no dependen de ω. Entonces, por simplicidad en la notación, se escribirá $(S_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ en vez de $(S_n^\omega)_{n\in\mathbb{N}_0}$ para cada $\omega \in [0,1]^{\otimes\mathbb{Z}}$. Realmente por la construcción de las variables aleatorias en cuestión y el hecho de que toman valores en $\mathbb{Z}$ con probabilidad no nula, en vez de $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathcal{B}(\mathbb{R})^{\otimes\mathbb{N}})$ bastará considerar únicamente $(\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}, \mathcal{B}(\mathbb{Z})^{\otimes\mathbb{N}})$, donde $\mathcal{B}(\mathbb{Z})$ es la $\sigma-$álgebra de Borel en $\mathbb{Z}$. Observe que, bajo estas condiciones, $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ es una cadena de nacimiento y muerte bajo $\mathbb{P}_\omega^x$, así que los resultados de la primera sección de este capítulo son válidos para este proceso. A ω se le llama el **ambiente** de la caminata aleatoria con probabilidades de transición determinadas por la medida de probabilidad $\mathbb{P}_\omega^x$.

Denotaremos por $\mathbb{P}_\omega$ a $\mathbb{P}_\omega^0$.

Para cada $x \in \mathbb{Z}$ consideremos $\mathtt{W}_x : [0,1]^{\otimes\mathbb{Z}} \to [0,1]$ definida como la $x-$ésima proyección de $[0,1]^{\otimes\mathbb{Z}}$ en $[0,1]$. Considere $\mathtt{Q} : \mathcal{B}([0,1])^{\otimes\mathbb{Z}} \to \mathbb{R}$ una medida producto en $([0,1]^{\otimes\mathbb{Z}}, \mathcal{B}([0,1])^{\otimes\mathbb{Z}})$ tal que $\{\mathtt{W}_x\}_{x\in\mathbb{Z}}$ sea una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas.

Para cada $\varphi : [0,1]^{\otimes\mathbb{Z}} \to [0,1]$ función $(\mathcal{B}([0,1])^{\otimes\mathbb{Z}}, \mathcal{B}([0,1]))-$medible e integrable, denotamos por

$$\mathbb{E}_{\mathtt{Q}}[\varphi] = \int_{[0,1]^{\otimes\mathbb{Z}}} \varphi(\omega) d\mathtt{Q}(\omega).$$

Observación 24. Fije $B \in \mathcal{B}([0,1])^{\otimes\mathbb{Z}}$ y $x \in \mathbb{Z}$. Entonces la función definida en $[0,1]^{\otimes\mathbb{Z}}$, determinada por $\omega \mapsto \mathbb{P}_\omega^x[B]$ es una función $(\mathcal{B}([0,1])^{\otimes\mathbb{Z}}, \mathcal{B}([0,1]))-$medible. Esto último se obtiene directamente del Lema de Clases Monótonas.

Denote por $(\Omega, \mathcal{F}) = ([0,1]^{\otimes\mathbb{Z}}, \mathcal{B}([0,1])^{\otimes\mathbb{Z}})$, $\mathcal{G} = \mathcal{B}(\mathbb{Z})^{\otimes\mathbb{N}}$ y $\mathcal{F} * \mathcal{G} = \{A \times B : \ A \in \mathcal{F},\ B \in \mathcal{G}\}$. Se verifica fácilmente que $\mathcal{F} * \mathcal{G}$ es una semiálgebra de subconjuntos de $\Omega \times \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ tal que $\sigma(\mathcal{F} * \mathcal{G})$ es igual a $\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$, la $\sigma-$álgebra producto.

Fije $x \in \mathbb{Z}$. Es claro que la función (que está bien definida gracias a la Observación 24) $\widehat{\mathbb{P}_{\mathtt{Q}}^x} : \mathcal{F} * \mathcal{G} \to \mathbb{R}$ dada para cada $A \in \mathcal{F}$ y $B \in \mathcal{G}$ por

$$\widehat{\mathbb{P}_{\mathtt{Q}}^x}[A \times B] = \int_A \mathbb{P}_\omega^x[B] d\mathtt{Q}(\omega).$$

satisface las propiedades de una medida de probabilidad.

Para cada $C \in \mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$ y $\omega \in \Omega$ definamos $C(\omega) = \{b \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}} : \ (\omega, b) \in C\} \in \mathcal{G}$.

Con esta notación, se tiene que, por el Teorema 0.2 de [Wal00], $\widehat{\mathbb{P}_{\mathtt{Q}}^x}$ puede extenderse a una única medida de probabilidad $\mathbb{P}_{\mathtt{Q}}^x : \mathcal{F} \otimes \mathcal{G} :\to \mathbb{R}$ en $(\Omega \times \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}, \mathcal{F} \otimes \mathcal{G})$ tal que $\mathbb{P}_{\mathtt{Q}}^x|_{\mathcal{F}*\mathcal{G}} = \widehat{\mathbb{P}_{\mathtt{Q}}^x}$ y para todo $C \in \mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$ se tiene que

$$\mathbb{P}_{\mathtt{Q}}^x[C] = \int_\Omega \mathbb{P}_\omega^x[C(\omega)] d\mathtt{Q}(\omega).$$

Para cada $\psi \in \mathcal{L}_1^{\mathbb{K}}(\Omega \times \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}, \mathcal{F} \otimes \mathcal{G}, \mathbb{P}_{\mathtt{Q}}^x)$ se escribe

$$\mathbb{E}_{\mathtt{Q}}^x[\psi] = \int_{\Omega \times \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}} \psi d\mathbb{P}_{\mathtt{Q}}^x.$$

Por simplicidad escribamos $\mathbb{P}_{\mathtt{Q}} = \mathbb{P}^0_{\mathtt{Q}}$ y también $\mathbb{E}_{\mathbb{P}_{\mathtt{Q}}} = \mathbb{E}_{\mathbb{P}^0_{\mathtt{Q}}}$, donde $\mathbb{E}_{\mathbb{P}_{\mathtt{Q}}}$ denota a la integral con respecto a la medida $\mathbb{P}_{\mathtt{Q}}$.

En lo restante, se supondrá que para cada $x \in \mathbb{Z}$ ocurre que $0 < \mathtt{W}_x < 1$ ($\mathtt{Q}$)-c.s. Definimos las variables aleatorias $\mathtt{P}_x : \Omega \to [0,1]$ como

$$\mathtt{P}_x = \frac{1-\mathtt{W}_x}{\mathtt{W}_x}.$$

Por independencia e idéntica distribución de $\{\mathtt{W}_x\}_{x\in\mathbb{Z}}$ en $(\Omega, \mathcal{F}, \mathtt{Q})$, se tiene la independencia e idéntica distribución de $\{\mathtt{P}_x\}_{x\in\mathbb{Z}}$. Es posible extender el dominio de $\mathtt{P}_x$ a $\Omega \times \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ con la misma regla de correspondencia, la cual resulta ser una función $(\mathcal{F}\otimes\mathcal{G}, \mathcal{B}([0,1]))-$medible.

Observación 25. Considere $\phi : \Omega \to [0,1]$ una función $(\mathcal{F}, \mathcal{B}([0,1]))-$medible. Definamos $\widetilde{\phi} : \Omega \times \mathbb{Z}^{\mathbb{N}} \to [0,1]$ dada para $(\omega, t) \in \Omega \times \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ por

$$\widetilde{\phi}(\omega, t) = \phi(\omega).$$

Note que $\widetilde{\phi}$ es una función $(\mathcal{F}\otimes\mathcal{G}, \mathcal{B}([0,1]))-$medible, ya que para todo $C \in \mathcal{B}([0,1])$ se tiene que:

$$\widetilde{\phi}^{-1}(C) = \phi^{-1}(C) \times \mathbb{Z}^{\mathbb{N}} \in \mathcal{F}\otimes\mathcal{G}.$$

Abusando de la notación, se escribirá ϕ en lugar de $\widetilde{\phi}$.

Se afirma que $\phi \in \mathcal{L}_1^{\mathbb{K}}(\Omega, \mathcal{F}, \mathtt{Q})$ si y sólo si $\widetilde{\phi} \in \mathcal{L}_1^{\mathbb{K}}(\Omega\times\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}, \mathcal{F}\otimes\mathcal{G}, \mathbb{P}_{\mathtt{Q}})$. En tal caso ocurre

$$\mathbb{E}_{\mathtt{Q}}[\varphi] = \int_{\Omega} \phi(\omega) d\mathtt{Q}(\omega) = \int_{\Omega\times\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}} \phi(\omega, t) d\mathbb{P}_{\mathtt{Q}}(\omega, t) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}_{\mathtt{Q}}}[\varphi]. \tag{5.18}$$

En particular, estas afirmaciones son aplicables a la sucesión $\{\mathtt{P_x}\}_{x\in\mathbb{Z}}$.

Demostración de la Observación. La medibilidad de ϕ en el dominio extendido, se tiene por la igualdad de conjuntos previa. Resta verificar la igualdad entre ambas integrales en la ecuación (5.18). Para ello, se utiliza aproximación por funciones $\mathcal{F}\otimes\mathcal{G}-$simples. Considere los siguientes casos:

Caso 1. $\phi = \chi_A$, donde $A \in \mathcal{F}$. Observe que de las definiciones de $\mathbb{P}_{\mathtt{Q}}$ se tiene que

$$\int_{\Omega\times\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}} \phi(\omega, t) d\mathbb{P}_{\mathtt{Q}}(\omega, t) = \int_{\Omega\times\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}} \chi_{A\times\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}}(\omega, t) d\mathbb{P}_{\mathtt{Q}}(\omega, t) = \mathbb{P}_{\mathtt{Q}}[A\times\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}] = \int_A \mathbb{P}_\omega[\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}] d\mathtt{Q}(\omega) = \mathtt{Q}[A] = \int_\Omega \phi(\omega) d\mathtt{Q}(\omega).$$

Caso 2. ϕ es una función $\mathcal{F}\otimes\mathcal{G}-$simple. Se tiene del Caso 1 y la linealidad de la integral.

Caso 3. ϕ es una función $(\mathcal{F}\otimes\mathcal{G}, \mathcal{B}([0,1]))-$medible no negativa. Se tiene inmediatamente del Caso 2 y el Teorema de Convergencia Monótona.

Caso General. Es claro del Caso 3 para ϕ^+ y ϕ^-, la parte positiva y negativa de ϕ, respectivamente.

⊠

Al igual que antes, es posible extender el dominio de $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ a $\Omega\times\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$, cuyas probabilidades de transición están definidas para cada $\omega \in \Omega$. La información de la caminata aleatoria para $\omega \in \Omega$ fijo, puede ayudar a estudiar al proceso ahora variando $\omega \in \Omega$. Esto motiva la siguiente:

Definición 16 (Caminata Aleatoria en Ambientes Aleatorios (RWRE)). *Sea $x \in \mathbb{Z}$. Al proceso estocástico construido $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ en el espacio $(\Omega\times\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}, \mathcal{F}\otimes\mathcal{G}, \mathbb{P}^x_{\mathtt{Q}})$ se le conoce como una* **caminata aleatoria en ambientes aleatorios** *(RWRE).*

Observación 26. Fije $x \in \mathbb{Z}$. En general, el proceso estocástico construido en $(\Omega\times\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}, \mathcal{F}\otimes\mathcal{G}, \mathbb{P}^x_{\mathtt{Q}})$ no resulta ser una cadena de Markov. Sin embargo, por construcción, para cada $\omega \in \Omega$, $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ sí es una caminata aleatoria con dominio $(\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}, \mathcal{G}, \mathbb{P}^x_\omega)$.

Tenemos una definición adicional. Tiene que ver con una propiedad que será de bastante utilidad para los subsecuentes resultados.

Definición 17. *Sean $\delta > 0$. En $(\Omega, \mathcal{F})$ diremos que $\mathtt{Q}$ tiene la propiedad de $\delta-$* **elipticidad uniforme** *si para todo $y \in \mathbb{Z}$ ocurre*

$$\mathtt{Q}[\text{mín}\{\mathtt{W}_y,\ 1-\mathtt{W}_y\} > \delta] = 1. \tag{5.19}$$

Por simplicidad en la notación y algunos cálculos, en la mayor parte de los resultados subsecuentes, se utilizará únicamente $x = 0$. Para el resto del capítulo, se supone que existe $\delta > 0$ tal que $\mathtt{Q}$ satisface la condición de $\delta-$elipticidad uniforme.

Fije $x \in \mathbb{Z}$. La idea del siguiente Teorema es mostrar que para analizar alguna propiedad de $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ bajo $\mathbb{P}^x_{\mathtt{Q}}$, bastará que dicha propiedad se satisfaga $(\mathbb{P}^x_\omega)$-c.s para todo $\omega \in \Omega$ excepto quizá para un conjunto de medida $\mathtt{Q}-$cero.

Teorema 31. *Sean $x \in \mathbb{Z}$ y $B \in \mathcal{F}$. Supongamos que $\mathbb{P}^x_\omega[B] = 1$ $(\mathtt{Q})-$c.s. Entonces $\mathbb{P}^x_{\mathtt{Q}}[\Omega \times B] = 1$.*

Demostración. Inmediata de las definiciones de $\mathbb{P}^x_{\mathtt{Q}}$. ⊠

Como consecuencia del Teorema 31, para cada $\varphi : \mathbb{Z}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{Z}$ función $(\mathcal{G}, \mathcal{B}(\mathbb{Z}))-$medible con $\varphi = \varphi(\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}_0})$ y $C \in \mathcal{B}(\mathbb{Z})$, si estos satisfacen $\mathbb{P}^x_\omega[\varphi(\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}) \in C] = 1$ $(\mathtt{Q})$-c.s, entonces $\mathbb{P}^x_{\mathtt{Q}}[\varphi(\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}) \in C] = 1$.

Teorema 32 (Recurrencia o Transitoriedad de RWRE). *Bajo toda la notación se tiene que* $\log(\mathtt{P}_0) \in \mathcal{L}^{\mathbb{R}}_1(\Omega \times \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}, \mathcal{F} \otimes \mathcal{G}, \mathbb{P}_{\mathtt{Q}})$. *Además*

(I) *Si* $\mathbb{E}_{\mathbb{P}_{\mathtt{Q}}}[\log(\mathtt{P}_0)] < 0$, *entonces* $\lim_{n\to\infty} S_n = +\infty$ $(\mathbb{P}_{\mathtt{Q}})-$*c.s.*

(II) *Si* $\mathbb{E}_{\mathbb{P}_{\mathtt{Q}}}[\log(\mathtt{P}_0)] > 0$, *entonces* $\lim_{n\to\infty} S_n = -\infty$ $(\mathbb{P}_{\mathtt{Q}})-$*c.s.*

(III) *Si* $\mathbb{E}_{\mathbb{P}_{\mathtt{Q}}}[\log(\mathtt{P}_0)] = 0$, *entonces* $\limsup_{n\to\infty} S_n = +\infty$ *y* $\liminf_{n\to\infty} S_n = -\infty$ $(\mathbb{P}_{\mathtt{Q}})-$*c.s.*

Demostración. En primer lugar, la integrabilidad de $\log[P_0]$ se debe a la condición de $\delta-$elipticidad uniforme:

$$\frac{\delta}{1-\delta} \leq \mathtt{P}_0 = \frac{1-\mathtt{W}_x}{\mathtt{W}_x} \leq \frac{1-\delta}{\delta} \qquad (\mathtt{Q}) - \text{c.s.}$$

es decir, $\log[P_0]$ es una función acotada $(\mathtt{Q})$-c.s. Por la Observación 25, esta propiedad también se satisface $(\mathbb{P}_{\mathtt{Q}})$-casi seguramente.

Se probará que las propiedades se satisfacen $(\mathbb{P}^0_\omega)$-casi seguramente, para $(\mathtt{Q})$-casi seguramente todo $\omega \in \Omega$.

Para cada $k \in \mathbb{Z}$ definamos las variables aleatorias $\mathtt{V}_k : \Omega \times \mathbb{Z}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$ como

$$\mathtt{V}_k = \begin{cases} \sum_{i=0}^{k-1} \log(\mathtt{P}_i) & \text{si} \quad k \geq 1 \\ 0 & \text{si} \quad k = 0 \\ \sum_{i=k}^{-1} -\log(\mathtt{P}_i) & \text{si} \quad k \leq -1 \end{cases}.$$

Note que, por independencia e idéntica distribución de $\{\mathtt{P}_x\}_{x\in\mathbb{Z}}$ bajo $\mathtt{Q}$, se tiene que $\{\log(\mathtt{P}_x)\}_{x\in\mathbb{Z}}$ también lo es. De hecho, el argumento de integrabilidad de $\log[\mathtt{P}_0]$ bajo $\mathtt{Q}$ permite asegurar que $\{\log(\mathtt{P}_x)\}_{x\in\mathbb{Z}} \subseteq \mathcal{L}^{\mathbb{K}}_1(\Omega, \mathcal{F}, \mathtt{Q})$. Por la ecuación (5.18), para todo $k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ se satisface:

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}_{\mathtt{Q}}}\left[\frac{\mathtt{V}_k}{k}\right] = \mathbb{E}_{\mathtt{Q}}\left[\frac{\mathtt{V}_k}{k}\right] = \mathbb{E}_{\mathtt{Q}}[\log(\mathtt{P}_0)] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}_{\mathtt{Q}}}[\log(\mathtt{P}_0)].$$

Entonces, por la Ley Fuerte de los Grandes Números, se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathtt{V}_n}{n} = \mathbb{E}_{\mathbb{P}_{\mathtt{Q}}}[\log(\mathtt{P}_0)], \qquad \lim_{n\to-\infty} \frac{\mathtt{V}_n}{n} = \mathbb{E}_{\mathbb{P}_{\mathtt{Q}}}[\log(\mathtt{P}_0)] \qquad (\mathtt{Q}) - \text{c.s.} \tag{5.20}$$

Por la Observación 25, esta propiedad también se cumple $(\mathbb{P}_{\mathtt{Q}})$-casi seguramente.

(I) Suponga que $\alpha = \mathbb{E}_{\mathbb{P}_{\mathtt{Q}}}[\log(\mathtt{P}_0)] < 0$. Por la ecuación (5.20) se tiene que existe un natural N tal que para todo $n \geq N$ ocurre que

$$\frac{3\alpha}{2} n < \mathtt{V}_n < \frac{\alpha}{2} n < 0 \qquad (\mathtt{Q}) - \text{c.s},$$

y también

$$0 < -\frac{\alpha}{2}n < \mathtt{V}_{-n} < -\frac{3\alpha}{2}n \qquad (\mathtt{Q}) - \text{c.s.}$$

Como $\exp\left(\frac{\alpha}{2}\right) < 1$ y $\exp\left(-\frac{\alpha}{2}\right) \geq 1$, entonces

$$\sum_{n=N}^{\infty} \exp(\mathtt{V}_n) \leq \sum_{n=N}^{\infty} \left[\exp\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right]^n < \infty \qquad (\mathtt{Q}) - \text{c.s,}$$

y

$$\sum_{n=-\infty}^{-N} \exp(\mathtt{V}_n) = \sum_{n=N}^{\infty} \exp(\mathtt{V}_{-n}) \geq \sum_{n=N}^{\infty} \left[\exp\left(-\frac{\alpha}{2}\right)\right]^n = \infty \qquad (\mathtt{Q}) - \text{c.s.}$$

Fije $\omega \in \Omega$ que satisfaga ambas condiciones.

Por el inciso (III) en la Proposición 11 y lo anterior, se tiene que para cada natural k

$$\mathbb{P}_\omega^0[T_k < \infty] = \left(1 + \frac{\sum_{n=1}^{k} \exp(V(n)(\omega))}{\sum_{n=-\infty}^{0} \exp(V(n)(\omega))}\right)^{-1} = 1.$$

Considere τ_0^+ definida en las ecuaciones (5.13). Note que, como $\mathbb{P}_\omega^0[S_0 = 0]$, para cada natural $k > 0$ se tiene que $\{T_k < \infty\} \subseteq \{\tau_0^+ < \infty\}$.

Así que $1 = \mathbb{P}_\omega^0[T_k < \infty] \leq \mathbb{P}_\omega^0[\tau_0^+ < \infty] \leq 1$. Luego $1 = \mathbb{P}_\omega^0[\tau_0^+ < \infty]$. Entonces, por el Lema 10, esto implica que $\mathbb{P}_\omega^0\left[\limsup_{n\to\infty} S_n = +\infty\right] = 1$.

De la misma forma, se puede probar que para todo entero $m < 0$ se tiene que $\mathbb{P}_\omega^0[T_m < \infty] < 1$ y con ello $\mathbb{P}_\omega^0[\tau_0^- < \infty] < 1$. Por el Lema 10 se obtiene que $\mathbb{P}_\omega^0\left[\liminf_{n\to\infty} S_n = +\infty\right] = 1$.

Entonces $\mathbb{P}_\omega^0\left[\limsup_{n\to\infty} S_n = +\infty,\ \liminf_{n\to\infty} S_n = +\infty\right] = 1$ $(\mathtt{Q})$-c.s. Por el Teorema 31 se concluye que

$$\mathbb{P}_{\mathtt{Q}}\left[\lim_{n\to\infty} S_n = +\infty\right] = 1.$$

(II) Es similar a la prueba del inciso (I).

(III) Suponga que $\mathbb{E}_{\mathbb{P}_\mathtt{Q}}[\log(\mathtt{P}_0)] = 0$. Por la Observación 25 se tiene que $\mathbb{E}_\mathtt{Q}[\log(\mathtt{P}_0)] = 0$. En este caso, $\{\log(\mathtt{P}_x)\}_{x\in\mathbb{Z}}$ es una sucesión de variables aleatorias idénticamente distribuidas en $(\Omega, \mathcal{F}, \mathtt{Q})$ con $\mathbb{E}_\mathtt{Q}[\log(\mathtt{P}_0)] = 0$. Por la Proposición 14 se tiene que

$$\mathtt{Q}\left[\limsup_{n\to\infty} \mathtt{V}_n = \infty, \quad \liminf_{n\to\infty} \mathtt{V}_n = -\infty\right] = 1.$$

Entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} \exp(\mathtt{V}_n) = \infty = \sum_{n=1}^{\infty} \exp(-\mathtt{V}_n) \qquad (\mathtt{Q}) - \text{c.s.}$$

Por la idéntica distribución de $\{\mathtt{W}_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ bajo $\mathtt{Q}$, se tiene que $\{\mathtt{P}_n\}_{n\geq 0}$ y $\{\mathtt{P}_{-n}\}_{n\geq 0}$ son idénticamente distribuidas bajo $\mathtt{Q}$. Luego

$$\mathtt{Q}\left[\limsup_{n\to\infty} \mathtt{V}_{-n} = \infty, \quad \liminf_{n\to\infty} \mathtt{V}_{-n} = -\infty\right] = \mathtt{Q}\left[\limsup_{n\to\infty} \mathtt{V}_{n} = \infty, \quad \liminf_{n\to\infty} \mathtt{V}_{n} = -\infty\right] = 1.$$

Así que

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} \exp(\mathtt{V}_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \exp(\mathtt{V}_{-n}) = \infty \qquad (\mathtt{Q}) - \text{c.s.}$$

Fije $\omega \in \Omega$ que satisfaga las condiciones previas. Razonando como en el inciso (I), se obtiene que $1 = \mathbb{P}^0_\omega[\tau_0^+ < \infty]$ y por el Lema 10 se tiene que $\mathbb{P}^0_\omega\left[\limsup_{n\to\infty} S_n = +\infty\right] = 1$.

Así mismo, por el inciso (III) de la Proposición 11 se tiene que para todo entero $k < 0$

$$\mathbb{P}^0_\omega[T_k < \infty] = \left(1 + \frac{\sum_{n=k+1}^{0} \exp(V(n)(\omega))}{\sum_{n=1}^{\infty} \exp(V(n)(\omega))}\right)^{-1} = 1$$

Utilizando la ecuación (5.13) también se tiene que $\{T_k < \infty\} \subseteq \{\tau_0^- < \infty\}$ y con ello que $1 = \mathbb{P}^0_\omega[\tau_0^- < \infty]$. Por el Lema 10 se obtiene que $\mathbb{P}^0_\omega\left[\liminf_{n\to\infty} S_n = -\infty\right] = 1$.

Entonces $\mathbb{P}^0_\omega\left[\limsup_{n\to\infty} S_n = +\infty, \ \liminf_{n\to\infty} S_n = -\infty\right] = 1$ $(\mathtt{Q})$-c.s. Por el Teorema 31 se concluye que

$$\mathbb{P}_{\mathtt{Q}}\left[\limsup_{n\to\infty} S_n = +\infty, \ \liminf_{n\to\infty} S_n = -\infty\right] = 1.$$

$\boxtimes$

5.4. Ley Fuerte de los Grandes Números para RWRE

En esta sección se enuncia y se prueba la Ley Fuerte de los grandes números para RWRE.

En primer lugar, se introduce la notación necesaria para esta sección.

Considere $\theta : \Omega \to \Omega$ la única función $(\mathcal{F}, \mathcal{F})-$medible tal que para todo $r \in \mathbb{Z}$ se tiene que

$$\mathtt{W}_r \circ \theta = \mathtt{W}_{r+1}$$

A θ se le conoce como el *corrimiento bilateral* en $(\Omega, \mathcal{F})$. De forma similar a la Proposición 6 del Capítulo 2, se tiene que, por la independencia e idéntica distribución de $\{\mathtt{W}_x\}_{x\in\mathbb{Z}}$ bajo $\mathtt{Q}$, θ es una transformación $\mathtt{Q}-$preservadora de medida.

Observe que para todo $x \in \mathbb{Z}$ se tiene que $\mathtt{P}_x \circ \theta = \mathtt{P}_{x+1}$, $\mathtt{P}_x \circ \theta^{-1} = \mathtt{P}_{x-1}$.

Recordando al proceso $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ construido en $(\Omega \times \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}, \mathcal{F}\otimes\mathcal{G})$ y con espacio de estados $\mathbb{Z}$, para cada $n \in \mathbb{N}_0$ se define a la función $\overline{S}_n : \Omega \times \mathbb{Z}^{\mathbb{N}} \to \Omega$ como sigue:

$$\overline{S}_n(\omega, t) = \theta^{S_n(t)}(\omega) \qquad \forall(\omega, t) \in \Omega \times \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}.$$

Se verifica de inmediato que $\overline{S}_n$ es una función $(\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}, \mathcal{F})-$medible.

Así mismo, para cada $\omega \in \Omega$ se define $\overline{S}^\omega_n : \mathbb{Z}^{\mathbb{N}} \to \Omega$ como

$$\overline{S}^\omega_n(t) = \overline{S}_n(\omega, t) = \theta^{S_n(t)}(\omega) \qquad \forall t \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}.$$

que es una función $(\mathcal{G}, \mathcal{F})-$medible.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ consideraremos las siguientes $\sigma-$álgebras de subconjuntos de $\Omega \times \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ contenidas en $\mathcal{F} \times \mathcal{G}$:

$$\mathcal{F}_n = \sigma(\overline{S}_0, \ldots, \overline{S}_n) := \sigma(\{\overline{S}_i^{-1}(A) : \ A \in \mathcal{F}, \ i = 0, \ldots, n\}),$$

$$\mathcal{G}_n = \sigma(\overline{S}_n),$$

y para cada $\omega \in \Omega$ las siguientes son $\sigma-$álgebras de subconjuntos de $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ contenidas en $\mathcal{G}$:

$$\mathcal{F}_n(\omega) = \sigma(\overline{S}_0^{\omega}, \ldots, \overline{S}_n^{\omega}) := \sigma(\{\overline{S}_i^{\omega^{-1}}(A) : \ A \in \mathcal{F}, \ i = 0, \ldots, n\}),$$

$$\mathcal{G}_n(\omega) = \sigma(\overline{S}_n^{\omega}),$$

$$\mathcal{H}_n(\omega) = \sigma(S_0^{\omega}, \ldots, S_n^{\omega}),$$

$$\mathcal{J}_n(\omega) = \sigma(S_n^{\omega}).$$

Observe que $\{\mathcal{F}_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ es una filtración en $(\Omega \times \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}, \mathcal{F} \otimes \mathcal{G}, \mathbb{P}_{\mathtt{Q}})$ y para cada $\omega \in \Omega$ se tiene que $\{\mathcal{F}_n(\omega)\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ es una filtración en $(\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}, \mathcal{G}, \mathbb{P}_{\omega}^0)$. También, por construcción, $\{S_n^{\omega}\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ es un $\{\mathcal{H}_n(\omega)\}_{n \in \mathbb{N}_0}-$proceso de Markov.

Para toda función $f \in \mathcal{L}_0^{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{F})$ acotada, definamos la función $Tf : \Omega \to \mathbb{R}$ como

$$Tf = \mathtt{W}_0(f \circ \theta) + (1 - \mathtt{W}_0)(f \circ \theta^{-1}) \tag{5.21}$$

donde θ^{-1} denota a la función inversa de θ en Ω. Resulta que Tf es una función $(\mathcal{F}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))-$medible y acotada, más aún, $Tf \in \mathcal{L}_0^{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{F}, \mathtt{Q})$.

Para $\omega \in \Omega$ se escribirá $\mathbb{E}_{0,\omega}$ para denotar a la integral respecto a la medida de probabilidad $\mathbb{P}_{\omega}^0$ en $(\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}, \mathcal{G})$.

Previo a los resultados de esta sección, se presentan dos definiciones que serán de vital importancia más adelante.

Definición 18 (Proceso de Markov). *Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad y $\{\mathcal{F}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una filtración respecto a $\mathcal{F}$. Sea $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de funciones $(\mathcal{F}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))-$medibles tales que para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que X_n es una función $(\mathcal{F}_n, \mathcal{B}(\mathbb{R}))-$medible. Entonces $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es un $\{\mathcal{F}_n\}_{n \in \mathbb{N}}-$* **proceso de Markov** *si para toda función $f \in \mathcal{L}_0^{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ acotada y $n \in \mathbb{N}$ ocurre que*

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[f(X_{n+1}) | \mathcal{F}_n] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[f(X_{n+1}) | \sigma(X_n)],$$

donde $\sigma(X_n)$ denota a la $\sigma-$álgebra generada por la función X_n.

Definición 19 (Martingalas). *Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad y $\{\mathcal{F}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una filtración respecto a $\mathcal{F}$. Sean $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de funciones $\mathcal{F}, \mathcal{B}(\mathbb{R})-$medibles. Diremos que $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una $\{\mathcal{F}_n\}_{n \in \mathbb{N}}-$* **martingala** *si para todo $n \in \mathbb{N}$ se satisfacen:*

I. *X_n es una función $(\mathcal{F}_n, \mathcal{B}(\mathbb{R}))-$medible.*

II. *$X_n \in \mathcal{L}_1^{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.*

III. *$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X_{n+1} | \mathcal{F}_n] = X_n$ $(\mathbb{P})-c.s.$*

Lema 12. *Fije $\omega \in \Omega$ y $n \in \mathbb{N}$. Entonces*

(a) *Para toda función $f \in \mathcal{L}_0^{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{F})$ acotada ocurre*

$$\mathbb{E}_{0,\omega}[f(\overline{S}_{n+1}^{\omega}) | \mathcal{J}_n(\omega)] = Tf(\overline{S}_n^{\omega}) \qquad (\mathbb{P}_{\omega}^0) - c.s. \tag{5.22}$$

(B) *Para cualesquiera $f_0, f_1, \ldots, f_n, f_{n+1} \in \mathcal{L}_0^{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{F})$ acotadas se tiene que*

$$\mathbb{E}_{0,\omega}[f_0(\overline{S}_0^\omega) \cdots f_n(\overline{S}_n^\omega) f_{n+1}(\overline{S}_{n+1}^\omega)] = \mathbb{E}_{0,\omega}[f_0(\overline{S}_0^\omega) \cdots f_n(\overline{S}_n^\omega) T f_{n+1}(\overline{S}_n^\omega)] \tag{5.23}$$

(C) *Para toda función $f \in \mathcal{L}_0^{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{F})$ acotada tenemos*

$$\mathbb{E}_{0,\omega}[f(\overline{S}_{n+1}^\omega) | \mathcal{F}_n(\omega)] = Tf(\overline{S}_n^\omega) = \mathbb{E}_{0,\omega}[f(\overline{S}_{n+1}^\omega) | \mathcal{G}_n(\omega)] \qquad (\mathbb{P}_\omega^0) - c.s. \tag{5.24}$$

Demostración. Sean $n \in \mathbb{N}$ y $\omega = (\omega_x)_{x \in \mathbb{Z}} \in \Omega$ arbitrarios. Defina la función $\alpha : \Omega \times \mathbb{Z} \to \Omega$ como

$$\alpha(\omega, r) = \theta^r(\omega) \qquad \forall (\omega, r) \in \Omega \times \mathbb{Z},$$

que es una función $(\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{Z}), \mathcal{F})-$medible.

Para $\omega \in \Omega$ considere $\alpha^\omega : \mathbb{Z} \to \Omega$ dada como

$$\alpha^\omega(r) = \alpha(\omega, r) = \theta^r(\omega) \qquad \forall r \in \mathbb{Z},$$

que es una función $(\mathcal{B}(\mathbb{Z}), \mathcal{F})-$medible.

(A) Sea $f \in \mathcal{L}_0^{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{F})$ acotada. Considere la función $\psi : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ dada como

$$\psi(r) = \mathbb{E}_{0,\omega}[f(\overline{S}_{n+1}^\omega) | S_n^\omega = r] \qquad \forall r \in \mathbb{Z}.$$

Observe que para cada $r \in \mathbb{Z}$ se tiene que

$$\begin{aligned}
\psi(r) &= \mathbb{E}_{0,\omega}[(f \circ \alpha^\omega)(S_{n+1}^\omega) | S_n^\omega = r] = \sum_{t \in \mathbb{Z}} (f \circ \alpha^\omega)(t) \mathbb{P}_\omega^0[S_{n+1}^\omega = t | S_n^\omega = r] \\
&= \omega_r (f \circ \alpha^\omega)(r+1) + (1 - \omega_r)(f \circ \alpha^\omega)(r-1) = (\mathtt{W}_0(\theta^r)) f(\theta^{r+1}(\omega)) + (1 - \mathtt{W}_0(\theta^r)) f(\theta^{r-1}(\omega)) \\
&= Tf(\theta^r(\omega)).
\end{aligned}$$

Por la definición de esperanza condicional ocurre que

$$\mathbb{E}_{0,\omega}[f(\overline{S}_{n+1}^\omega) | \mathcal{J}_n(\omega)] = \psi(S_n^\omega) = Tf(\theta^{S_n^\omega}(\omega)) = Tf(\overline{S}_n^\omega) \qquad (\mathbb{P}_\omega^0) - \text{c.s.}$$

(B) Sean $f_0, f_1, \ldots, f_n, f_{n+1} \in \mathcal{L}_0^{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{F})$ acotadas. Observe que para cada $i \in \{0, \ldots, n\}$ se tiene que $f_i(\overline{S}_i^\omega) = (f_i \circ \alpha^\omega)(S_i^\omega)$, que son funciones $(\mathcal{H}_n(\omega), \mathcal{B}(\mathbb{R}))-$medibles.

Como $(S_n^\omega)_{n \in \mathbb{N}_0}$ es un $\{\mathcal{H}_n(\omega)\}_{n \in \mathbb{N}_0}-$proceso de Markov, por las propiedades de esperanza condicional y el inciso (a), se tiene que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{0,\omega}[f_0(\overline{S}_0^\omega) \cdots f_n(\overline{S}_n^\omega) f_{n+1}(\overline{S}_{n+1}^\omega)] &= \mathbb{E}_{0,\omega}[\mathbb{E}_{0,\omega}[f_0(\overline{S}_0^\omega) \cdots f_n(\overline{S}_n^\omega) f_{n+1}(\overline{S}_{n+1}^\omega) | \mathcal{H}_n(\omega)]] \\
&= \mathbb{E}_{0,\omega}[f_0(\overline{S}_0^\omega) \cdots f_n(\overline{S}_n^\omega) \mathbb{E}_{0,\omega}[f_{n+1}(\overline{S}_{n+1}^\omega) | \mathcal{H}_n(\omega)]] \\
&= \mathbb{E}_{0,\omega}[f_0(\overline{S}_0^\omega) \cdots f_n(\overline{S}_n^\omega) \mathbb{E}_{0,\omega}[f_{n+1}(\overline{S}_{n+1}^\omega) | \mathcal{J}_n(\omega)]] \\
&= \mathbb{E}_{0,\omega}[f_0(\overline{S}_0^\omega) \cdots f_n(\overline{S}_n^\omega) T f_{n+1}(\overline{S}_n^\omega)].
\end{aligned}$$

(C) Probaremos únicamente la primera identidad, ya que la segunda se obtiene de forma similar. Fije $f \in \mathcal{L}_0^{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{F})$ acotada. Para probar la identidad requerida, se utiliza la definición de esperanza condicional. En primer lugar, observe que $Tf(\overline{S}_n^\omega)$ es una función $(\mathcal{F}_n(\omega), \mathcal{B}(\mathbb{R}))-$medible, pues

$$Tf(\overline{S}_n^\omega) = \mathtt{W}_0(f \circ \theta \circ \alpha^\omega)(S_n^\omega) + (1 - \mathtt{W}_0)(f \circ \theta^{-1} \circ \alpha^\omega)(S_n^\omega).$$

Resta probar que para todo $B \in \mathcal{F}_n(\omega)$ se tiene que

$$\mathbb{E}_{0,\omega}[\chi_B Tf(\overline{S}_n^\omega)] = \mathbb{E}_{0,\omega}[\chi_B f(\overline{S}_{n+1}^\omega)].$$

Para ello, sea $B \in \mathcal{F}_n(\omega)$ arbitrario fijo. Por la definición de $\mathcal{F}_n(\omega)$, puede suponerse sin pérdida de generalidad que $B = \bigcap_{i=0}^{n} \overline{S}_i^{\omega^{-1}}(B_i)$, donde $B_i \in \mathcal{F}$, $i = 0, \ldots, n$, ya que el resultado general se obtiene a partir del Lema de Clases Monótonas aplicado a la clase monótona

$$\{B \in \mathcal{F}:\ \mathbb{E}_{0,\omega}[\chi_B Tf(\overline{S}_n^{\omega})] = \mathbb{E}_{0,\omega}[\chi_B f(\overline{S}_{n+1}^{\omega})]\}$$

que contiene a $\mathcal{F}_n(\omega)$.
Note que para cada $i = 0, \ldots, n$ se tiene que $\chi_{B_i} \in \mathcal{L}_0^{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{F})$ y que $\chi_{B_i} \circ \overline{S}_i^{\omega} = \chi_{\overline{S}_i^{\omega-1}(B_i)}$. Del inciso (b) se obtiene que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{0,\omega}[\chi_B Tf(\overline{S}_n^{\omega})] &= \mathbb{E}_{0,\omega}[\chi_{\overline{S}_0^{\omega-1}(B_0)} \cdots \chi_{\overline{S}_n^{\omega-1}(B_n)} Tf(\overline{S}_n^{\omega})] = \mathbb{E}_{0,\omega}[\chi_{B_0}(\overline{S}_0^{\omega}) \cdots \chi_{B_n}(\overline{S}_n^{\omega}) Tf(\overline{S}_n^{\omega})] \\ &= \mathbb{E}_{0,\omega}[\chi_{B_0}(\overline{S}_0^{\omega}) \cdots \chi_{B_n}(\overline{S}_n^{\omega}) f(\overline{S}_{n+1}^{\omega})] = \mathbb{E}_{0,\omega}[\chi_B f(\overline{S}_{n+1}^{\omega})]\end{aligned}$$

De la definición de esperanza condicional se concluye que

$$\mathbb{E}_{0,\omega}[f(\overline{S}_{n+1}^{\omega})|\mathcal{F}_n(\omega)] = Tf(\overline{S}_n^{\omega}) \qquad (\mathbb{P}_{\omega}^0) - \text{c.s.}$$

⊠

Teorema 33. *Los siguientes enunciados son verdaderos:*

(I) *Para cada $\omega \in \Omega$: $\{\overline{S}_n^{\omega}\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ es un $\{\mathcal{F}_n(\omega)\}_{n\in\mathbb{N}_0}-$proceso de Markov.*

(II) *$\{\overline{S}_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ es un $\{\mathcal{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}-$proceso de Markov.*

Demostración.

(I) Con la definición de $\{\mathcal{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}-$proceso de Markov y el inciso (c) del Lema 12 se obtiene la conclusión.

(II) Probaremos la siguiente

Afirmación. Sea $n \in \mathbb{N}_0$.

I. Para cualesquiera $f_0, f_1, \ldots, f_n, f_{n+1} \in \mathcal{L}_0^{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{F})$ acotadas:

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}_{\mathsf{Q}}}[f_0(\overline{S}_0) \cdots f_n(\overline{S}_n) f_{n+1}(\overline{S}_{n+1})] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}_{\mathsf{Q}}}[f_0(\overline{S}_0) \cdots f_n(\overline{S}_n) Tf_{n+1}(\overline{S}_n)] \tag{5.25}$$

II. Para toda función $f \in \mathcal{L}_0^{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{F})$ acotada:

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}_{\mathsf{Q}}}[f(\overline{S}_{n+1})|\mathcal{F}_n] = Tf(\overline{S}_n) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}_{\mathsf{Q}}}[f(\overline{S}_{n+1})|\mathcal{G}_n] \qquad (\mathbb{P}_{\mathsf{Q}}) - \text{c.s.} \tag{5.26}$$

Demostración de la Afirmación. Fije $n \in \mathbb{N}_0$.

I. Sean $f_0, f_1, \ldots, f_n, f_{n+1} \in \mathcal{L}_0^{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{F})$ acotadas. Por la ecuación (5.23) del Lema 12 se tiene que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{\mathbb{P}_{\mathsf{Q}}}[f_0(\overline{S}_0) \cdots f_n(\overline{S}_n) f_{n+1}(\overline{S}_{n+1})] &= \int_{\Omega} \left(\int_{\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}} f_0(\overline{S}_0^{\omega}(t)) \cdots f_n(\overline{S}_n^{\omega}(t)) f_{n+1}(\overline{S}_{n+1}^{\omega}(t)) d\mathbb{P}_{\omega}^0(t) \right) d\mathsf{Q}(\omega) \\ &= \int_{\Omega} \mathbb{E}_{0,\omega}[f_0(\overline{S}_0^{\omega}) \cdots f_n(\overline{S}_n^{\omega}) f_{n+1}(\overline{S}_{n+1}^{\omega})] d\mathsf{Q}(\omega) \\ &= \int_{\Omega} \mathbb{E}_{0,\omega}[f_0(\overline{S}_0^{\omega}) \cdots f_n(\overline{S}_n^{\omega}) Tf_{n+1}(\overline{S}_n^{\omega})] d\mathsf{Q}(\omega) \\ &= \int_{\Omega} \left(\int_{\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}} f_0(\overline{S}_0^{\omega}(t)) \cdots f_n(\overline{S}_n^{\omega}(t)) Tf_{n+1}(\overline{S}_n^{\omega}(t)) d\mathbb{P}_{\omega}^0(t) \right) d\mathsf{Q}(\omega) \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}_{\mathsf{Q}}}[f_0(\overline{S}_0) \cdots f_n(\overline{S}_n) Tf_{n+1}(\overline{S}_n)]\end{aligned}$$

II. Se procede de forma similar a la prueba del inciso (c) del Lema 12. Así se obtiene la Afirmación.

Por el inciso (II) de la Afirmación y la definición de un $\{\mathcal{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}-$proceso de Markov se tiene el resultado.

⊠

Denotemos por $\overline{\Omega} = \Omega^{\mathbb{N}_0}$, $\overline{\mathcal{F}} = \mathcal{F}^{\otimes \mathbb{N}_0}$ al espacio producto $(\Omega, \mathcal{F})^{\otimes \mathbb{N}_0}$. Para cada $n \in \mathbb{N}_0$ denote por $\overline{\mathtt{W}}_n : \overline{\Omega} \to \Omega$ a la $n-$ésima proyección de $\overline{\Omega}$ en Ω. Como en el Capítulo 2, si

$$\mathcal{S}^{\overline{\Omega}} = \left\{ \bigcap_{i=0}^{n} \overline{\mathtt{W}}_i^{-1}(A_i) : \; A_i \in \mathcal{F}, \; i = 0, \dots, n, \; n \in \mathbb{N}_0 \right\}$$

entonces $\mathcal{S}^{\overline{\Omega}}$ es una semiálgebra de subconjuntos de $\overline{\Omega}$ tal que $\sigma(\mathcal{S}^{\overline{\Omega}}) = \overline{\mathcal{F}}$.

Consideremos $\overline{\theta} : \overline{\Omega} \to \overline{\Omega}$ la única función $(\overline{\mathcal{F}}, \overline{\mathcal{F}})-$medible tal que para todo $r \in \mathbb{N}_0$

$$\overline{\mathtt{W}}_r \circ \overline{\theta} = \overline{\mathtt{W}}_{r+1}$$

Definamos $\Phi : \Omega \times \mathbb{Z}^{\mathbb{N}} \to \overline{\Omega}$ para cada $(\omega, t) \in \Omega \times \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ con

$$\Phi(\omega, t) = (\overline{S}_m(\omega, t))_{m \in \mathbb{N}_0}$$

que es una función $(\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}, \overline{\mathcal{F}})-$medible.

Note que para cada $r \in \mathbb{N}_0$ se tiene que $\overline{\mathtt{W}}_r \circ \Phi = \overline{S}_r$.

Sea $\nu : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ una medida de probabilidad absolutamente continua respecto a $\mathtt{Q}$ (lo cual se denotará por $\mathtt{Q} \ll \nu$). Sea $\mathbb{P}_\nu : \mathcal{F} \otimes \mathcal{G} \to \mathbb{R}$ definida para cada $A \in \mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$ por

$$\mathbb{P}_\nu[A] = \int_\Omega \mathbb{P}^0_\omega[A^\omega] d\nu(\omega)$$

donde para $\omega \in \Omega$ se tiene que $A^\omega = \{t \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}} : \; (\omega, t) \in A\}$.

Diremos que ν es una *medida $T-$invariante* en $(\Omega, \mathcal{F})$ si para toda función $f \in \mathcal{L}_0^{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{F})$ acotada se satisface que

$$\int_\Omega T f d\nu = \int_\Omega f d\nu.$$

LEMA 13. *Sea ν una medida de probabilidad en $(\Omega, \mathcal{F})$ con $\mathtt{Q} \ll \nu$ y $T-$invariante. Entonces se tienen las siguientes afirmaciones:*

(I) *Para cada $\omega \in \Omega$ la función $T_\omega : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ definida como*

$$T_\omega(B) = T\chi_B(\omega) = \mathtt{W}_0(\omega)\chi_B(\theta(\omega)) + (1 - \mathtt{W}_0)(\omega)\chi_B(\theta^{-1}(\omega)) \qquad \forall B \in \mathcal{F}$$

es una medida de probabilidad en $(\Omega, \mathcal{F})$.

(II) *Para cada $\omega \in \Omega$ existe una medida de probabilidad en $(\overline{\Omega}, \overline{\mathcal{F}})$, $\overline{\mathbb{P}}_\omega : \overline{\mathcal{F}} \to \mathbb{R}$ tal que para todo $B \in \mathcal{S}^{\overline{\Omega}}$ con $B = \bigcap_{i=0}^{n} \overline{\mathtt{W}}_i^{-1}(B_i)$ y $B_i \in \mathcal{F}$, $i = 0, \dots, n$ se tiene que*

$$\overline{\mathbb{P}}_\omega[B] = \overline{\mathbb{P}}_\omega\left[\bigcap_{i=0}^{n} \overline{\mathtt{W}}_i^{-1}(B_i)\right] = \chi_{B_0}(\omega)\left(\int_{B_1} \cdots \left(\int_{B_n} dT_{\omega^{n-1}}(\omega^n)\right) \cdots dT_\omega(\omega^1)\right)$$

y $\overline{\theta}$ es una transformación $\overline{\mathbb{P}}_\omega-$preservadora de medida.

(III) *La función $\overline{\mathbb{P}}_\nu : \overline{\mathcal{F}} \to \mathbb{R}$ definida para cada $A \in \overline{\mathcal{F}}$ como*

$$\overline{\mathbb{P}}_\nu[A] = \int_\Omega \overline{\mathbb{P}}_\omega[A] d\nu(\omega)$$

es una medida de probabilidad en $(\Omega, \mathcal{F})$ tal que $\overline{\mathbb{P}}_\nu = \mathbb{P}_\nu \circ \Phi^{-1}$.

(IV) $\nu \ll \mathtt{Q}$.

Demostración.

(I) Fije $\omega \in \Omega$. Observe primero que

$$T_\omega(\emptyset) = T\chi_\emptyset(\omega) = 0.$$

$$T_\omega(\Omega) = T\chi_\Omega(\omega) = 1.$$

Por otro lado, para cualquier sucesión de conjuntos disjuntos $(B_m)_{m\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F}$, definimos $B = \biguplus_{m=1}^{\infty} B_m$ y obtenemos que

$$\begin{aligned}
T_\omega\left(\biguplus_{m=1}^{\infty} B_m\right) &= T_\omega(B) = \mathtt{W}_0(\omega)\chi_B(\theta(\omega)) + (1 - \mathtt{W}_0(\omega))\chi_B(\theta^{-1}(\omega)) \\
&= \mathtt{W}_0(\omega)\sum_{m=1}^{\infty}\chi_{B_m}(\theta(\omega)) + (1 - \mathtt{W}_0(\omega))\sum_{m=1}^{\infty}\chi_{B_m}(\theta^{-1}(\omega)) \\
&= \sum_{m=1}^{\infty}[\mathtt{W}_0(\omega)\chi_{B_m}(\theta(\omega)) + (1 - \mathtt{W}_0(\omega))\chi_{B_m}(\theta^{-1}(\omega))] = \sum_{m=1}^{\infty} T_\omega(B_m).
\end{aligned}$$

Por lo tanto T_ω es una medida de probabilidad en $(\Omega, \mathcal{F})$.

(II) Fije $\omega \in \Omega$. Definamos $\overline{\mathbb{P}}_\omega : \mathcal{S}^{\overline{\Omega}} \to \mathbb{R}$ como sigue: Para $B \in \mathcal{S}^{\overline{\Omega}}$ con $B = \bigcap_{i=0}^{n} \overline{\mathtt{W}}_i^{-1}(B_i)$ y $B_i \in \mathcal{F}$, $i = 0, \ldots, n$,

$$\overline{\mathbb{P}}_\omega\left[\bigcap_{i=0}^{n} \overline{\mathtt{W}}_i^{-1}(B_i)\right] = \mathbb{E}_{0,\omega}[\chi_{B_0}(\overline{S}_0^\omega)\cdots\chi_{B_n}(\overline{S}_n^\omega)].$$

Se verifica de inmediato que $\overline{\mathbb{P}}_\omega$ es una función finitamente aditiva, así que por el Teorema 0.2 de [Wal00], esta función se puede extender a una medida en $(\overline{\Omega}, \overline{\mathcal{F}})$ tal que

$$\overline{\mathbb{P}}_\omega[\overline{\Omega}] = \overline{\mathbb{P}}_\omega[\overline{\mathtt{W}}_0^{-1}(\Omega)] = \chi_\Omega(\omega) = 1.$$

<u>Afirmación 1.</u> Para todo $n \in \mathbb{N}_0$, $B_0, \ldots, B_n \in \mathcal{F}$ y $\omega \in \Omega$ se tiene que:

(a)

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{0,\omega}[\chi_{B_0}(\overline{S}_1^\omega)\cdots\chi_{B_n}(\overline{S}_{n+1}^\omega)] &= \mathbb{E}_{0,\omega}[\chi_{B_0}(\overline{S}_1^\omega)\cdots\chi_{B_{n-1}}(\overline{S}_n^\omega)T\chi_{B_n}(\overline{S}_n^\omega)] \\
&= T(\chi_{B_0}T(\chi_{B_1}(\cdots(T\chi_{B_n})\cdots)))(\omega).
\end{aligned}$$

(b)

$$\mathbb{E}_{0,\omega}[\chi_{B_0}(\overline{S}_0^\omega)\cdots\chi_{B_n}(\overline{S}_n^\omega)] = \chi_{B_0}(\omega)T(\chi_{B_1}T(\chi_{B_2}(\cdots(T\chi_{B_n})\cdots)))(\omega).$$

Demostración de la Afirmación 1. Este resultado se obtiene de forma exhaustiva por medio del Lema 12. Es claro que el inciso (b) es consecuencia inmediata de (a). Así que sólo resta probar (a).

(a) Se estudian únicamente los casos $n = 0, 1, 2$.

<u>Caso $n = 0$.</u> Por el inciso (b) del Lema 12 se tiene que

$$\mathbb{E}_{0,\omega}[\chi_{B_0}(\overline{S}_1^\omega)] = \mathbb{E}_{0,\omega}[T\chi_{B_0}(\overline{S}_0^\omega)] = T\chi_{B_0}(\omega)$$

<u>Caso $n = 1$.</u> Por el inciso (b) del Lema 12 se tiene

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{0,\omega}[\chi_{B_0}(\overline{S}_1^\omega)\chi_{B_1}(\overline{S}_2^\omega)] &= \mathbb{E}_{0,\omega}[\chi_{B_0}(\overline{S}_1^\omega)T\chi_{B_1}(\overline{S}_1^\omega)] = \mathbb{E}_{0,\omega}[(\chi_{B_0}T\chi_{B_1})(\overline{S}_1^\omega)] \\
&= \mathbb{E}_{0,\omega}[T(\chi_{B_0}T\chi_{B_1})(\overline{S}_0^\omega)] = T(\chi_{B_0}T\chi_{B_1})(\omega)
\end{aligned}$$

<u>Caso $n = 2$.</u> Por la ecuación (5.25) se obtiene

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{0,\omega}[\chi_{B_0}(\overline{S}_1^\omega)\chi_{B_1}(\overline{S}_2^\omega)\chi_{B_2}(\overline{S}_3^\omega)] &= \mathbb{E}_{0,\omega}[\chi_{B_0}(\overline{S}_1^\omega)\chi_{B_1}(\overline{S}_2^\omega)T\chi_{B_2}(\overline{S}_2^\omega)] \\
&= \mathbb{E}_{0,\omega}[\chi_{B_0}(\overline{S}_1^\omega)(\chi_{B_1}T\chi_{B_2})(\overline{S}_2^\omega)] \\
&= \mathbb{E}_{0,\omega}[\chi_{B_0}(\overline{S}_1^\omega)T(\chi_{B_1}T\chi_{B_2})(\overline{S}_1^\omega)] = \\
&= \mathbb{E}_{0,\omega}[T(\chi_{B_0}T(\chi_{B_1}T\chi_{B_2}))(\overline{S}_0^\omega)] = T(\chi_{B_0}T(\chi_{B_1}T\chi_{B_2}))(\omega).
\end{aligned}$$

De forma similar se obtiene el resultado en los casos restantes.

Se sigue la Afirmación 1.

Note que el inciso (b) de la Afirmación 1 coincide con el resultado buscado para la expresión de $\overline{\mathbb{P}}_\omega$ en $\mathcal{S}^{\overline{\Omega}}$.

(III) Observe primero que, por la definición, tenemos que para todo $B \in \overline{\mathcal{F}}$ la función $\omega \mapsto \overline{\mathbb{P}}_\omega[B]$ es $(\mathcal{F}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))-$medible. Así que $\overline{\mathbb{P}}_\nu$ está bien definida. Se verifica inmediatamente, mediante el Teorema de Convergencia Monótona (en $(\Omega, \mathcal{F}, \nu)$), que $\overline{\mathbb{P}}_\nu$ es una medida de probabilidad en $(\overline{\Omega}, \overline{\mathcal{F}})$.

Probemos ahora que $\overline{\mathbb{P}}_\nu = \mathbb{P}_\nu \circ \Phi^{-1}$. Note que, de acuerdo a la definición de $\overline{\mathcal{F}}$, será suficiente probar que $\overline{\mathbb{P}}_\nu|_{\mathcal{S}^{\overline{\Omega}}} = \mathbb{P}_\nu \circ \Phi^{-1}|_{\mathcal{S}^{\overline{\Omega}}}$ ya que el resultado general puede obtenerse con el Lema de Clases Monótonas.

Sea $B \in \mathcal{S}^{\overline{\Omega}}$ con $B = \bigcap_{i=0}^{n} \overline{\mathtt{W}}_i^{-1}(B_i)$, donde $B_i \in \mathcal{F}$, $i = 0, \ldots, n$. Entonces

$$\begin{aligned}\overline{\mathbb{P}}_\nu[B] &= \overline{\mathbb{P}}_\nu\left[\bigcap_{i=0}^{n} \overline{\mathtt{W}}_i^{-1}(B_i)\right] = \int_\Omega \overline{\mathbb{P}}_\omega\left[\bigcap_{i=0}^{n} \overline{\mathtt{W}}_i^{-1}(B_i)\right] d\nu(\omega) = \int_\Omega \mathbb{E}_{0,\omega}[\chi_{B_0}(\overline{S}_0^\omega) \cdots \chi_{B_n}(\overline{S}_n^\omega)] d\nu(\omega) \\ &= \int_\Omega \mathbb{P}_\omega^0\left[\bigcap_{i=0}^{n} \overline{S}_i^{\omega^{-1}}(B_i)\right] d\nu(\omega) = \mathbb{P}_\nu\left[\bigcap_{i=0}^{n} \overline{S}_i^{-1}(B_i)\right] = \mathbb{P}_\nu \circ \Phi^{-1}[B].\end{aligned}$$

Por lo que $\overline{\mathbb{P}}_\nu = \mathbb{P}_\nu \circ \Phi^{-1}$.

Finalmente, verificamos que $\overline{\theta}$ es una transformación $\overline{\mathbb{P}}_\nu-$preservadora de medida. Para ello, recurrimos al Teorema 1, y al hecho de que $\mathcal{S}^{\overline{\Omega}}$ es una semiálgebra de subconjuntos de $\overline{\Omega}$ tal que $\sigma(\mathcal{S}^{\overline{\Omega}}) = \overline{\mathcal{F}}$. De acuerdo con dicho resultado, es suficiente comprobar que para todo $B \in \mathcal{S}^{\overline{\Omega}}$ se tiene que $\overline{\theta}^{-1}[B] \in \overline{\mathcal{F}}$ y que $\overline{\mathbb{P}}_\nu[\overline{\theta}^{-1}[B]] = \overline{\mathbb{P}}_\nu[B]$.

Sea $B \in \mathcal{S}^{\overline{\Omega}}$ con $B = \bigcap_{i=0}^{n} \overline{\mathtt{W}}_i^{-1}(B_i)$, donde $B_i \in \mathcal{F}$, $i = 0, \ldots, n$. Note que $\overline{\theta}^{-1}[B] = \bigcap_{i=0}^{n} \overline{\mathtt{W}}_{i+1}^{-1}(B_i) \in \overline{\mathcal{F}}$, por la definición de $\overline{\mathcal{F}}$. Luego, como ν es una medida $T-$invariante, por la Afirmación 1, se tiene que

$$\begin{aligned}\overline{\mathbb{P}}_\nu[\overline{\theta}^{-1}(B)] &= \overline{\mathbb{P}}_\nu\left[\bigcap_{i=0}^{n} \overline{\mathtt{W}}_{i+1}^{-1}(B_i)\right] = \int_\Omega \overline{\mathbb{P}}_\omega\left[\bigcap_{i=0}^{n} \overline{\mathtt{W}}_{i+1}^{-1}(B_i)\right] d\nu(\omega) = \int_\Omega \chi_\Omega(\omega)\mathbb{E}_{0,\omega}[\chi_{B_0}(\overline{S}_1^\omega) \cdots \chi_{B_n}(\overline{S}_{n+1}^\omega)] d\nu(\omega) \\ &= \int_\Omega T(\chi_{B_0} T(\chi_{B_1}(\cdots (T\chi_{B_n}) \cdots)))(\omega) d\nu(\omega) = \int_\Omega \chi_{B_0} T(\chi_{B_1}(\cdots (T\chi_{B_n}) \cdots))(\omega) d\nu(\omega) \\ &= \int_\Omega \mathbb{E}_{0,\omega}[\chi_{B_0}(\overline{S}_0^\omega) \cdots \chi_{B_n}(\overline{S}_n^\omega)] d\nu(\omega) = \int_\Omega \mathbb{P}_\omega^0\left[\bigcap_{i=0}^{n} \overline{S}_i^{\omega^{-1}}(B_i)\right] d\nu(\omega) = \mathbb{P}_\nu\left[\bigcap_{i=0}^{n} \overline{S}_i^{-1}(B_i)\right] \\ &= \mathbb{P}_\nu \circ \Phi^{-1}[B] = \overline{\mathbb{P}}_\nu[B].\end{aligned}$$

Por la elección arbitraria de $B \in \mathcal{S}^{\overline{\Omega}}$ y el Teorema 1, se concluye que $\overline{\theta}$ es una transformación $\overline{\mathbb{P}}_\nu-$preservadora de medida.

(IV) Por hipótesis se tiene que $\mathtt{Q} \ll \nu$. Sea $f = \dfrac{d\nu}{d\mathtt{Q}}$ la derivada de Radon-Nikodym de ν con respecto a $\mathtt{Q}$. Observe que f es una función $(\mathcal{F}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))-$medible no negativa.

Se afirma que $\mathtt{Q}[f^{-1}(\{0\})] = 0$. Para probar esto, defina $C = f^{-1}(\{0\}) = \{\omega \in \Omega : \ f(\omega) = 0\}$. Como ν es una medida $T-$invariante, entonces

$$0 = \int_\Omega f\chi_C d\mathtt{Q} = \nu[C] = \int_\Omega \chi_C d\nu = \int_\Omega T\chi_C d\nu = \int_\Omega fT\chi_C d\mathtt{Q}.$$

Como $fT\chi_C \geq 0$ $(\mathtt{Q})$-c.s, esto implica que $fT\chi_C = 0$ $(\mathtt{Q})$-c.s. Entonces $f\chi_{C^c}T\chi_C = 0$ $(\mathtt{Q})$-c.s, y desde que $f \neq 0$ en C^c, esto significa que $\chi_{C^c}T\chi_C = 0$ $(\mathtt{Q})$-c.s, donde C^c denota el complemento de C.

Por otro lado, $T\chi_C \leq 1$, así que

$$\chi_C \geq \chi_C T\chi_C = T\chi_C = \mathtt{W}_0(\chi_C \circ \theta) + (1-\mathtt{W}_0)(\chi_C \circ \theta^{-1}) \geq \mathtt{W}_0(\chi_C \circ \theta) \qquad (\mathtt{Q})-\text{c.s.}$$

Afirmamos que $\chi_C \geq \chi_C \circ \theta$ $(\mathtt{Q})$-c.s. Para demostrar esta desigualdad, procedemos por contradicción. Suponga que existe $\omega \in \Omega$ tal que $\chi_C(\omega) \geq \mathtt{W}_0(\chi_C \circ \theta)(\omega)$ y que $0 \leq \chi_C(\omega) < (\chi_C \circ \theta)(\omega)$. Esto significa que $\chi_C(\omega) = 0$ y $(\chi_C \circ \theta)(\omega) = 1$. Luego, $0 = \chi_C(\omega) \geq \mathtt{W}_0(\chi_C \circ \theta)(\omega) = \mathtt{W}_0(\omega)(\omega)$ por las hipótesis generales, que es una contradicción. Por lo tanto, $\chi_C \geq \chi_C \circ \theta$ $(\mathtt{Q})$-c.s.

Como θ es una transformación $\mathtt{Q}-$preservadora de medida ocurre que

$$\int_\Omega (\chi_C - (\chi_C \circ \theta))d\mathtt{Q} = 0.$$

Por lo anterior, se obtiene que $\chi_C = \chi_C \circ \theta$ $(\mathtt{Q})$-c.s.Al repetir este proceso inductivamente, se obtiene que para todo $n \in \mathbb{Z}$

$$\chi_C = \chi_C \circ \theta^n = \chi_{\theta^{-n}(C)} \qquad (\mathtt{Q})-\text{c.s.}$$

Defina $\widetilde{C} = \bigcap\limits_{n\in\mathbb{Z}} \theta^{-n}(C) \in \mathcal{F}$. Note que $\chi_C = \chi_{\widetilde{C}}$ $(\mathtt{Q})$-c.s y que $\theta^{-1}(\widetilde{C}) = \bigcap\limits_{n\in\mathbb{Z}} \theta^{-(n+1)}(C) = \widetilde{C}$.

Como θ es una transformación $\mathtt{Q}-$ergódica, entonces $\theta^{-1}(\widetilde{C}) = \widetilde{C}$, lo que significa que $\mathtt{Q}[C] \in \{0,1\}$.

Se afirma que $\mathtt{Q}[\widetilde{C}] = 0$. Procedamos por contradicción. Suponga que $\mathtt{Q}[\widetilde{C}] = 1$. Entonces $\mathtt{Q}[C^c] = \mathtt{Q}[\widetilde{C}^c] = 0$. Como $\mathtt{Q} \ll \nu$ y $\mathtt{Q}[\widetilde{C}] = 0$, se tiene que $\nu[C^c] = 0 = \nu[C]$. Luego, $1 = \nu[\Omega] = \nu[C] + \nu[C^c] = 0$, que es una contradicción. Por ello, $\mathtt{Q}[\widetilde{C}] = 0 = \mathtt{Q}[C]$.

Concluimos que $\dfrac{1}{f}$ es una función bien definida $(\mathtt{Q})$-c.s y $(\mathcal{F}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))-$medible. Por las propiedades de la derivada de Radon-Nikodym, se concluye que $\nu \ll \mathtt{Q}$ y que, de hecho $\dfrac{d\mathtt{Q}}{d\nu} = \dfrac{1}{f} = \left(\dfrac{d\nu}{d\mathtt{Q}}\right)^{-1}$.

⊠

Notación 27. Para cada $n \in \mathbb{N}_0$ escribimos $\mathcal{F}'_n = \sigma(\overline{\mathtt{W}}_0, \dots, \overline{\mathtt{W}}_n) \subseteq \overline{\mathcal{F}}$, $\mathcal{G}'_n = \sigma(\overline{\mathtt{W}}_n) \subseteq \overline{\mathcal{F}}$. Denote por $\mathbb{E}_{\overline{\mathbb{P}}_\nu}$ a la integral en $(\overline{\Omega}, \overline{\mathcal{F}}, \overline{\mathbb{P}}_\nu)$.

Previo a enunciar el resultado que establece que $\overline{\theta}$ es una transformación $\overline{\mathbb{P}}_\nu-$ergódica en $\overline{\Omega}$, se enunciará el siguiente teorema, cuya prueba se puede encontrar en el Teorema 3.3.7 de [Kni09].

Definición 20. *Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad y $\{X_i\}_{i\in I}$ una sucesión de funciones $(\mathcal{F}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))-$medibles, donde I es un conjunto de indices. Diremos que $\{X_i\}_{i\in I}$ es una colección de* **funciones uniformemente integrables** *si $\{X_i\}_{i\in I} \subseteq \mathcal{L}_1^{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ y*

$$\lim_{c\to\infty} \sup_{i\in I} \left\{ \int_{\{|X_i|\geq c\}} |X_i| d\mathbb{P} \right\} = 0.$$

Teorema 34 (Teorema de Convergencia de Doob para Martingalas). *Sean $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad, $\{\mathcal{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una fitración en $\mathcal{F}$ y $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una $\{\mathcal{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}}-$martingala. Se tiene que $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es uniformemente integrable si y sólo si existe $X \in \mathcal{L}_1^{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ tal que la sucesión $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a X en $\mathcal{L}_1^{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.*

Demostración. Se puede consultar en [Kni09]. ⊠

Notación 28. De forma similar, para cada $n \in \mathbb{N}_0$ escribimos $\mathcal{F}'_n = \sigma(\overline{\mathtt{W}}_0, \dots, \overline{\mathtt{W}}_n) \subseteq \overline{\mathcal{F}}$, $\mathcal{G}'_n = \sigma(\overline{\mathtt{W}}_n) \subseteq \overline{\mathcal{F}}$. Denote por $\mathbb{E}_{\overline{\mathbb{P}}_\nu}$ a la integral en $(\overline{\Omega}, \overline{\mathcal{F}}, \overline{\mathbb{P}}_\nu)$.

Tenemos el siguiente resultado:

PROPOSICIÓN 15. *$\overline{\theta}$ es una transformación $\overline{\mathbb{P}}_\nu$−ergódica.*

Demostración. Para demostrar la proposición, de acuerdo con la Definición, debe verificarse que para todo $A \in \overline{\mathcal{F}}$ con $\overline{\theta}^{-1}(A) = A$ se satisface $\overline{\mathbb{P}}_\nu[A] \in \{0,1\}$.

Observe que $\mathcal{S}^{\overline{\Omega}}$ es una semiálgebra de subconjuntos de $\overline{\Omega}$ tal que $\sigma(\mathcal{S}^{\overline{\Omega}}) = \overline{\mathcal{F}}$ y que

$$\{A \in \mathcal{F} : \overline{\theta}^{-1}(A) = A \Longrightarrow \overline{\mathbb{P}}_\nu[A] \in \{0,1\}\}$$

es una clase monótona que contiene a $\mathcal{S}^{\overline{\Omega}}$, por lo que es suficiente verificar la definición de ergodicidad para $\mathcal{S}^{\overline{\Omega}}$.

Sea $A \in \mathcal{S}^{\overline{\Omega}}$ con $A = \bigcap_{i=0}^{m} \mathtt{W}_i^{-1}(A_i)$, donde $A_i \in \mathcal{F}$, $i = 0, \ldots, m$ y $\overline{\theta}^{-1}(A) = A$. La prueba se obtiene de forma exhaustiva para cada valor de $n \in \mathbb{N}_0$, por lo que, para simplificar los cálculos, se supondrá que $m = 1$. Defina la función $\phi : \Omega \to \mathbb{R}$ dada para cada $\omega \in \Omega$ por

$$\phi(\omega) = \overline{\mathbb{P}}_\omega[A] = \mathbb{E}_{0,\omega}[\chi_{A_0}(\overline{S}_0^\omega)\chi_{A_1}(\overline{S}_1^\omega)] = (\chi_{A_0} T \chi_{A_1})(\omega),$$

que es una función $(\mathcal{F}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$−medible.

Considere a la sucesión de funciones $(\overline{\mathcal{F}}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$−medibles dada por $\{\phi(\overline{\mathtt{W}}_n)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$.

<u>Afirmación.</u> $\{\phi(\overline{\mathtt{W}}_n)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ satisface las siguientes propiedades:

(a) Para cada $n \in \mathbb{N}_0$ ocurre que $\phi(\overline{\mathtt{W}}_n) = \mathbb{E}_{\overline{\mathbb{P}}_\nu}[\chi_A|\mathcal{F}'_n] = \mathbb{E}_{\overline{\mathbb{P}}_\nu}[\chi_A|\mathcal{G}'_n]$.

(b) $\{\phi(\overline{\mathtt{W}}_n)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ es una $\{\mathcal{F}'_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$−martingala.

(c) $\lim_{n\to\infty} \phi(\overline{\mathtt{W}}_n) = \chi_A$ $(\overline{\mathbb{P}}_\nu)$-c.s.

(d) Existe $B \in \mathcal{F}$ tal que

   I. $\overline{\mathbb{P}}_\nu \circ \overline{\mathtt{W}}_0^{-1} = \nu$.

   II. $\chi_B = \phi$.

   III. $T\chi_B(\overline{\mathtt{W}}_0) = \mathbb{E}_{\overline{\mathbb{P}}_\nu}[\chi_B(\overline{\mathtt{W}}_1)|\mathcal{F}'_0] = \chi_B(\overline{\mathtt{W}}_0)$ $(\overline{\mathbb{P}}_\nu)$-c.s.

   IV. $T\chi_B = \chi_B$ (ν)-c.s.

   V. $\theta^{-1}(B) = B$.

Demostración de la Afirmación.

(a) Probaremos solo la primera igualdad, dado que la segunda se obtiene de forma análoga. La prueba consiste en verificar directamente la definición de esperanza condicional. Fije $n \in \mathbb{N}_0$.

Es claro que $\phi(\overline{\mathtt{W}}_n)$ es una función $\mathcal{F}'_n$−medible. Resta verificar que para todo $C \in \mathcal{F}'_n$ se tiene que

$$\mathbb{E}_{\overline{\mathbb{P}}_\nu}[\chi_C \phi(\overline{\mathtt{W}}_n)] = \mathbb{E}_{\overline{\mathbb{P}}_\nu}[\chi_C \chi_A].$$

Sea $C \in \mathcal{F}'_n$. Sin pérdida de generalidad, suponga que $C = \bigcap_{i=0}^{m} \mathtt{W}_i^{-1}(A_i)$, donde $A_i \in \mathcal{F}$, $i = 0, \ldots, n$.

Por el Lema 7 del Capítulo 3, adaptando la prueba de la ecuación (5.25) a ν y el inciso (III) del Lema 13 se tiene que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{\overline{\mathbb{P}}_\nu}[\chi_C \phi(\overline{\mathtt{W}}_n)] &= \int_{\overline{\Omega}} \chi_C \phi(\overline{\mathtt{W}}_n) d\overline{\mathbb{P}}_\nu = \int_{\overline{\Omega}} \chi_C \phi(\overline{\mathtt{W}}_n) d(\mathbb{P}_\nu \circ \Phi^{-1}) = \int_{\Omega\times\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}} (\chi_C \circ \Phi)\phi(\overline{\mathtt{W}}_n \circ \Phi) d\mathbb{P}_\nu \\
&= \int_{\Omega\times\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}} \chi_{C_0}(\overline{S}_0) \cdots \chi_{C_n}(\overline{S}_n) \chi_{A_0}(\overline{S}_n) T\chi_{A_0}(\overline{S}_n) d\mathbb{P}_\nu \\
&= \mathbb{E}_{\mathbb{P}_\nu}[\chi_{C_0}(\overline{S}_0) \cdots \chi_{C_0}(\overline{S}_n) \chi_{C_n\cap A_0}(\overline{S}_n) T\chi_{A_0}(\overline{S}_n)] \\
&= \mathbb{E}_{\mathbb{P}_\nu}[\chi_{C_0}(\overline{S}_0) \cdots \chi_{C_0}(\overline{S}_n) \chi_{C_n\cap A_0}(\overline{S}_n) \chi_{A_0}(\overline{S}_{n+1})] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}_\nu}[(\chi_C \circ \Phi)\chi_{\overline{S}_n^{-1}(A_0)} \chi_{\overline{S}_{n+1}^{-1}(A_1)}].
\end{aligned}$$

Por otro lado, como $\overline{\theta}^{-1}(A) = A$, tenemos que $\overline{\theta}^{-n}(A) = A$. Así que

$$A = \bigcap_{i=0}^{1} \overline{\theta}^{-n}(\mathtt{\overline{W}}_i^{-1}(A_i)) = \bigcap_{i=0}^{1} \mathtt{\overline{W}}_{i+n}^{-1}(A_i),$$

y además

$$\Phi^{-1}(A) = \bigcap_{i=0}^{1} (\mathtt{\overline{W}}_{i+n} \circ \Phi)^{-1}(A_i) = \bigcap_{i=0}^{1} \overline{S}_{i+n}^{-1}(A_i).$$

Por el Lema 7,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{\overline{\mathbb{P}}_\nu}[\chi_C \phi(\mathtt{\overline{W}}_n)] &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}_\nu}[(\chi_C \circ \Phi)\chi_{\overline{S}_n^{-1}(A_0)}\chi_{\overline{S}_{n+1}^{-1}(A_1)}] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}_\nu}[(\chi_C \circ \Phi)\chi_{\Phi^{-1}(A)}] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}_\nu}[(\chi_C \circ \Phi)(\chi_A \circ \Phi)] \\ &= \mathbb{E}_{\overline{\mathbb{P}}_\nu}[\chi_A \chi_C].\end{aligned}$$

Por la definición de esperanza condicional se obtiene el inciso (a).

(b) Emplearemos la definición de $\{\mathcal{F}'_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}-$martingalas. En primer lugar, es claro que para todo $n \in \mathbb{N}_0$ $\phi(\mathtt{\overline{W}}_n)$ es una función $\mathcal{F}'_n-$medible que satisface $\phi(\mathtt{\overline{W}}_n) \leq 1$ $(\overline{\mathbb{P}}_\nu)$-c.s, así que $\phi(\mathtt{\overline{W}}_n) \in \mathcal{L}_1^{\mathbb{R}}(\overline{\Omega}, \overline{\mathcal{F}}, \overline{\mathbb{P}}_\nu)$.

Por la propiedad de torre para la esperanza condicional, para cada $n \in \mathbb{N}_0$, $\mathcal{F}'_n \subseteq \mathcal{F}'_{n+1}$ implica que

$$\mathbb{E}_{\overline{\mathbb{P}}_\nu}[\phi(\mathtt{\overline{W}}_{n+1})|\mathcal{F}'_n] = \mathbb{E}_{\overline{\mathbb{P}}_\nu}[\mathbb{E}_{\overline{\mathbb{P}}_\nu}[\chi_A|\mathcal{F}'_{n+1}]|\mathcal{F}'_n] = \mathbb{E}_{\overline{\mathbb{P}}_\nu}[\chi_A|\mathcal{F}'_n] = \phi(\mathtt{\overline{W}}_n) \qquad (\overline{\mathbb{P}}_\nu) - \text{c.s} \ ,$$

por lo que $\{\phi(\mathtt{\overline{W}}_n)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ es una $\{\mathcal{F}'_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}-$martingala.

(c) Observe que para cada $n \in \mathbb{N}_0$ y $c > 0$, por la desigualdad de Chebyshev y el inciso (b) tenemos la desigualdad

$$\int_{\{|\phi(\mathtt{\overline{W}}_n)|\geq c\}} |\phi(\mathtt{\overline{W}}_n)| d\overline{\mathbb{P}}_\nu \leq \overline{\mathbb{P}}_\nu[|\phi(\mathtt{\overline{W}}_n)| \geq c] \leq \frac{1}{c}\int_{\Omega} |\phi(\mathtt{\overline{W}}_n)| d\overline{\mathbb{P}}_\nu \leq \frac{1}{c}.$$

Por ello

$$\lim_{c\to\infty} \sup_{n\in\mathbb{N}_0} \left[\int_{\{|\phi(\mathtt{\overline{W}}_n)|\geq c\}} |\phi(\mathtt{\overline{W}}_n)| d\overline{\mathbb{P}}_\nu\right] \lim_{c\to\infty} \frac{1}{c} = 0,$$

lo que implica que $\{\mathtt{\overline{W}}_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ es una $\{\mathcal{F}'_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}-$martingala uniformemente integrable. Así que, como consecuencia del Teorema de Convergencia de Martingalas, se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} \phi(\mathtt{\overline{W}}_n) = \chi_A \qquad (\overline{\mathbb{P}}_\nu) - \text{c.s.}$$

(d)

I. Note que, por el inciso (b) de la Afirmación 1 del Lema 13, se sigue que para todo $A \in \mathcal{F}$

$$(\overline{\mathbb{P}}_\nu \circ \mathtt{\overline{W}}_0^{-1})[A] = \overline{\mathbb{P}}_\nu[\mathtt{\overline{W}}_0^{-1}(A)] = \mathbb{P}_\nu[\Phi^{-1}(\mathtt{\overline{W}}_0^{-1}(A))] = \int_\Omega \mathbb{E}_{0,\omega}[\chi_A(\overline{S}_0^\omega)]d\nu(\omega) = \int_\Omega \chi_A(\omega)d\nu(\omega) = \nu[A].$$

II. Probaremos que existe $B \in \mathcal{F}$ tal que $\chi_B = \phi$ (ν)-c.s. Procedamos por contradicción. Suponga que la afirmación es falsa. Entonces existen $0 < a < b < 1$ tales que $\nu[\phi^{-1}([a,b])] > 0$.

Sea $\Sigma_\phi = \{C \in \mathcal{F} : \ \overline{\theta}^{-1}(C) = C\}$. Observe que $\chi_{(\phi\circ\mathtt{\overline{W}}_0)^{-1}([a,b])} \in \mathcal{L}_1^{\mathbb{R}}(\overline{\Omega}, \overline{\mathcal{F}}, \overline{\mathbb{P}}_\nu)$ y que para cada $n \in \mathbb{N}_0$ ocurre que

$$\chi_{(\phi\circ\mathtt{\overline{W}}_0)^{-1}([a,b])} \circ \overline{\theta}^n = \chi_{(\phi\circ\mathtt{\overline{W}}_0\circ\overline{\theta}^n)^{-1}([a,b])} = \chi_{(\phi\circ\mathtt{\overline{W}}_n)^{-1}([a,b])}.$$

Por la Observación 6 al Teorema Ergódico de Birkhoff

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n}\chi_{(\phi\circ\mathtt{\overline{W}}_i)^{-1}([a,b])} = \mathbb{E}_{\overline{\mathbb{P}}_\nu}[\chi_{(\phi\circ\mathtt{\overline{W}}_0)^{-1}([a,b])}|\Sigma_\phi] \qquad (\overline{\mathbb{P}}_\nu) - \text{c.s.}$$

Debido al Teorema de Convergencia Dominada y el inciso anterior tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n}\overline{\mathbb{P}}_\nu[\phi(\overline{\mathtt{W}}_i) \in [a,b]] = \overline{\mathbb{P}}_\nu[\phi(\overline{\mathtt{W}}_0) \in [a,b]] = \nu[\phi^{-1}([a,b])] > 0.$$

Por el inciso (c) y el hecho de que la convergencia $(\overline{\mathbb{P}}_\nu)$-casi seguramente implica que para todo $D \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ se satisface que $\lim\limits_{n\to\infty} \overline{\mathbb{P}}_\nu[\phi(\overline{\mathtt{W}}_n) \in D] = \overline{\mathbb{P}}_\nu[\chi_A \in D]$, ocurre que

$$\lim_{n\to\infty} \overline{\mathbb{P}}_\nu[\phi(\overline{\mathtt{W}}_n) \in [a,b]] = \overline{\mathbb{P}}_\nu[\chi_A \in [a,b]] = 0$$

ya que $0 < a < b < 1$.

Así, concluimos

$$0 = \lim_{n\to\infty} \overline{\mathbb{P}}_\nu[\phi(\overline{\mathtt{W}}_n) \in [a,b]] = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n}\overline{\mathbb{P}}_\nu[\phi(\overline{\mathtt{W}}_i) \in [a,b]] = \overline{\mathbb{P}}_\nu[\phi(\overline{\mathtt{W}}_0) \in [a,b]] = \nu[\phi^{-1}([a,b])] > 0.$$

que es contradictorio. De este modo se obtiene el resultado.

III. Probaremos la primera igualdad mediante la definición de esperanza condicional.

Es claro que $T\chi_B(\overline{\mathtt{W}}_0)$ es una función $\mathcal{F}_0'-$medible. Resta probar que para todo $C \in \mathcal{F}_0'$ ocurre que

$$\mathbb{E}_{\overline{\mathbb{P}}_\nu}[\chi_C T\chi_B(\overline{\mathtt{W}}_0)] = \mathbb{E}_{\overline{\mathbb{P}}_\nu}[\chi_C \chi_B(\overline{\mathtt{W}}_1)].$$

Para ello, sea $C \in \mathcal{F}_0'$ arbitrario fijo. Al igual que en (a), sin pérdida de generalidad puede suponerse que $C = \mathtt{W}_0^{-1}(C_0)$, donde $C_0 \in \mathcal{F}$. Por el Lema 7 y la expresión (5.23) se tiene que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{\overline{\mathbb{P}}_\nu}[\chi_C T\chi_B(\overline{\mathtt{W}}_0)] &= \mathbb{E}_{\overline{\mathbb{P}}_\nu}[\chi_{C_0}(\overline{\mathtt{W}}_0) T\chi_B(\overline{\mathtt{W}}_0)] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}_\nu}[\chi_{C_0}(\overline{\mathtt{W}}_0 \circ \Phi) T\chi_B(\overline{\mathtt{W}}_0 \circ \Phi)] \\
&= \mathbb{E}_{\mathbb{P}_\nu}[\chi_{C_0}(\overline{S}_0) T\chi_B(\overline{S}_0)] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}_\nu}[\chi_{C_0}(\overline{S}_0)\chi_B(\overline{S}_1)] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}_\nu}[\chi_{C_0}(\overline{\mathtt{W}}_0 \circ \Phi)\chi_B(\overline{\mathtt{W}}_1 \circ \Phi)] \\
&= \mathbb{E}_{\overline{\mathbb{P}}_\nu}[\chi_{C_0}(\overline{\mathtt{W}}_0)\chi_B(\overline{\mathtt{W}}_1)] = \mathbb{E}_{\overline{\mathbb{P}}_\nu}[\chi_C \chi_B(\overline{\mathtt{W}}_1)].
\end{aligned}$$

Por la definición de esperanza condicional se concluye que

$$T\chi_B(\overline{\mathtt{W}}_0) = \mathbb{E}_{\overline{\mathbb{P}}_\nu}[\phi(\overline{\mathtt{W}}_1)|\mathcal{F}_0'] \qquad (\overline{\mathbb{P}}_\nu) - \text{c.s.}$$

Como $\{\overline{\mathtt{W}}_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ es una $\{\mathcal{F}_n'\}_{n\in\mathbb{N}_0}-$martingala, entonces

$$T\chi_B(\overline{\mathtt{W}}_0) = \mathbb{E}_{\overline{\mathbb{P}}_\nu}[\phi(\overline{\mathtt{W}}_1)|\mathcal{F}_0'] = \chi_B(\overline{\mathtt{W}}_0) \qquad (\overline{\mathbb{P}}_\nu) - \text{c.s.}$$

IV. Por los incisos I. y III. se tiene que $T\chi_B = \chi_B$ (ν)-c.s.

V. Probemos que $\theta^{-1}(B) = B$.
Sea $\omega \in \theta^{-1}(B)$ arbitrario. Entonces $\theta(\omega) \in B$. Se afirma que $\omega \in B$. Procedamos por contradicción. Suponga que $\omega \notin B$. Luego por el inciso previo

$$0 = \chi_B = T\chi_B(\omega) = \mathtt{W}_0(\omega)\chi_B(\theta(\omega)) + (1 - \mathtt{W}_0)(\omega)\chi_B(\theta^{-1}(\omega)).$$

Como $0 < \mathtt{W}_0(\omega), 1 - \mathtt{W}_0(\omega) < 1$, entonces $1 = \chi_B(\theta(\omega)) = \chi_B(\theta^{-1}(\omega)) = 0$, que es contradictorio. Por lo tanto, $\omega \in B$ y $\theta^{-1}(B) \subseteq B$. La otra contención se tiene de forma similar.

Esto concluye la demostración de la Afirmación.

Como θ es una transformación $\mathtt{Q}-$ergódica y $B \in \mathcal{F}$ con $\theta^{-1}(B) = B$, debe ocurrir que $\mathtt{Q}[B] \in \{0,1\}$. Por hipótesis y el inciso (IV) del Lema 13 se tiene que $\nu \ll \mathtt{Q}$ y $\mathtt{Q} \ll \nu$. Luego $\nu[B] \in \{0,1\}$. Finalmente, nótese que por I. y IV. del inciso (d) de la Afirmación, ocurre que

$$\overline{\mathbb{P}}_\nu[A] = \mathbb{E}_{\overline{\mathbb{P}}_\nu}[\chi_A] = \mathbb{E}_{\overline{\mathbb{P}}_\nu}[\mathbb{E}_{\overline{\mathbb{P}}_\nu}[\chi_A|\mathcal{F}_0']] = \mathbb{E}_{\overline{\mathbb{P}}_\nu}[\phi(\overline{\mathtt{W}}_0)] = \mathbb{E}_{\overline{\mathbb{P}}_\nu}[\chi_B(\overline{\mathtt{W}}_0)] = \overline{\mathbb{P}}_\nu[\overline{\mathtt{W}}_0^{-1}(B)] = \nu[B] \in \{0,1\}.$$

Por la elección de $A \in \overline{\mathcal{F}}$ se concluye que $\overline{\theta}$ es una transformación $\overline{\mathbb{P}}_\nu-$ergódica. $\boxtimes$

5.4.1. Construcción de una medida de probabilidad T- invariante en $(\Omega, \mathcal{F})$ absolutamente continua respecto a $\mathtt{Q}$.

En la subsección anterior, se analizaron condiciones bajo las cuales, dada una medida ν de probabilidad T-invariante en $(\Omega, \mathcal{F})$ tal que $\mathtt{Q} \ll \nu$, se puede construir una medida de probabilidad $\overline{\mathbb{P}}_\nu$ en $(\overline{\Omega}, \overline{\mathcal{F}})$ tal que $\overline{\theta}$ sea una transformación $\overline{\mathbb{P}}_\nu-$ergódica.

En esta subsección veremos bajo que condiciones se puede garantizar la existencia de al menos una medida ν de probabilidad T- invariante en $(\Omega, \mathcal{F})$ tal que $\mathtt{Q} \ll \nu$.

Antes de enunciar el resultado principal, observemos que para todo $k \in \mathbb{Z}$ se tiene que $\mathtt{P}_k > 0$ y por ello se tiene que

$$0 < \mathbb{E}_{\mathtt{Q}}\left[(1+\mathtt{P}_0)\sum_{j=0}^{\infty}\prod_{k=0}^{j-1}\mathtt{P}_{k+1}\right], \quad \mathbb{E}_{\mathtt{Q}}\left[\left(1+\frac{1}{\mathtt{P}_0}\right)\sum_{j=0}^{\infty}\prod_{k=-j}^{-1}\frac{1}{\mathtt{P}_k}\right].$$

Teorema 35. *Suponga que se satisface alguna de las condiciones siguientes:*

(I) $\mathbb{E}_{\mathtt{Q}}\left[(1+\mathtt{P}_0)\sum_{j=0}^{\infty}\prod_{k=0}^{j-1}\mathtt{P}_{k+1}\right] < \infty$

(II) $\mathbb{E}_{\mathtt{Q}}\left[\left(1+\frac{1}{\mathtt{P}_0}\right)\sum_{j=0}^{\infty}\prod_{k=-j}^{-1}\frac{1}{\mathtt{P}_k}\right] < \infty.$

Entonces existe una única medida de probabilidad $\nu : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ en $(\Omega, \mathcal{F})$ con $\mathtt{Q} \ll \nu$ y que para todo $f \in \mathcal{L}_0^{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{F})$ acotada se tiene que

$$\int_\Omega Tf d\nu = \int_\Omega f d\nu.$$

Explícitamente, la derivada de Radon-Nikodym para cada caso está determinada por

I. $$\frac{d\nu}{d\mathtt{Q}} = \frac{1}{\mathbb{E}_{\mathtt{Q}}\left[(1+\mathtt{P}_0)\sum_{j=0}^{\infty}\prod_{k=0}^{j-1}\mathtt{P}_{k+1}\right]}(1+\mathtt{P}_0)\sum_{j=0}^{\infty}\prod_{k=0}^{j-1}\mathtt{P}_{k+1}$$

II. $$\frac{d\nu}{d\mathtt{Q}} = \frac{1}{\mathbb{E}_{\mathtt{Q}}\left[\left(1+\frac{1}{\mathtt{P}_0}\right)\sum_{j=0}^{\infty}\prod_{k=-j}^{-1}\frac{1}{\mathtt{P}_k}\right]}\left(1+\frac{1}{\mathtt{P}_0}\right)\sum_{j=0}^{\infty}\prod_{k=-j}^{-1}\frac{1}{\mathtt{P}_k}.$$

Demostración. Únicamente se aborda el caso (I), el otro caso se tiene de forma análoga.

Suponga que $\mathbb{E}_{\mathtt{Q}}\left[(1+\mathtt{P}_0)\sum_{j=0}^{\infty}\prod_{k=0}^{j-1}\mathtt{P}_{k+1}\right] < \infty.$

Existencia. Considere la función $g : \Omega \to \mathbb{R}$ definida por

$$g = \frac{1}{\mathbb{E}_{\mathtt{Q}}\left[(1+\mathtt{P}_0)\sum_{j=0}^{\infty}\prod_{k=0}^{j-1}\mathtt{P}_{k+1}\right]}(1+\mathtt{P}_0)\sum_{j=0}^{\infty}\prod_{k=0}^{j-1}\mathtt{P}_{k+1},$$

que es una función $(\mathcal{F}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))-$medible no negativa tal que $\mathbb{E}_{\mathtt{Q}}[g] < \infty$. Se verifica de inmediato que la función $\nu : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ dada por

$$\nu[C] = \int_C g d\mathtt{Q} \qquad \forall C \in \mathcal{F}$$

es una medida de probabilidad absolutamente continua respecto a $\mathtt{Q}$, tal que $\frac{d\nu}{d\mathtt{Q}} = g.$

Probaremos ahora que ν es una medida $T-$invariante. Sea $f \in \mathcal{L}_0^{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{F})$ acotada. Por ser θ una transformación $\mathtt{Q}-$preservadora de medida y el hecho de que $\{\mathtt{P}_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ es una sucesión de variables independientes e idénticamente distribuidas (y por lo tanto estacionaria) bajo $\mathtt{Q}$ se tiene que

$$\begin{aligned}
\int_\Omega Tf d\nu &= \int_\Omega gTf d\mathtt{Q} = \int_\Omega \left[\left(1+\frac{1-\mathtt{W}_0}{\mathtt{W}_0}\right)\sum_{j=0}^{\infty}\prod_{k=0}^{j-1}\mathtt{P}_{k+1}\right][\mathtt{W}_0(f\circ\theta)+(1-\mathtt{W}_0)(f\circ\theta^{-1})]d\mathtt{Q}\\
&= \int_\Omega (f\circ\theta)\left(\sum_{j=0}^{\infty}\prod_{k=0}^{j-1}(\mathtt{P}_k\circ\theta)\right)d\mathtt{Q} + \int_\Omega \frac{f\circ\theta^{-1}}{(\mathtt{W}_0\circ\theta)\circ\theta^{-1}}\left(\sum_{j=0}^{\infty}\prod_{k=0}^{j-1}(\mathtt{P}_{k+2}\circ\theta^{-1})\right)d\mathtt{Q}\\
&- \int_\Omega (f\circ\theta^{-1})\left(\sum_{j=0}^{\infty}\prod_{k=0}^{j-1}(\mathtt{P}_{k+2}\circ\theta^{-1})\right)d\mathtt{Q}\\
&= \int_\Omega f\sum_{j=0}^{\infty}\prod_{k=0}^{j-1}\mathtt{P}_k d\mathtt{Q} + \int_\Omega \frac{f}{\mathtt{W}_1}\left(\sum_{j=0}^{\infty}\prod_{k=0}^{j-1}\mathtt{P}_{k+2}\right)d\mathtt{Q} - \int_\Omega f\left(\sum_{j=0}^{\infty}\prod_{k=0}^{j-1}\mathtt{P}_{k+2}\right)d\mathtt{Q}\\
&= \int_\Omega f\sum_{j=0}^{\infty}\prod_{k=0}^{j-1}\mathtt{P}_{k+2} d\mathtt{Q} + \int_\Omega \frac{f}{\mathtt{W}_0}\left(\sum_{j=0}^{\infty}\prod_{k=0}^{j-1}\mathtt{P}_{k+1}\right)d\mathtt{Q} - \int_\Omega f\left(\sum_{j=0}^{\infty}\prod_{k=0}^{j-1}\mathtt{P}_{k+2}\right)d\mathtt{Q}\\
&= \int_\Omega f(1+\mathtt{P}_0)\left(\sum_{j=0}^{\infty}\prod_{k=0}^{j-1}\mathtt{P}_{k+1}\right)d\mathtt{Q} = \int_\Omega fg d\mathtt{Q} = \int_\Omega f d\nu.
\end{aligned}$$

Por lo que ν es una medida de probabilidad en $(\Omega, \mathcal{F})$ que satisface las condiciones deseadas.

<u>Unicidad.</u> Suponga que ν' es una medida de probabilidad en $(\Omega, \mathcal{F})$ con $\mathtt{Q} \ll \nu'$ que cumple para cada $f \in \mathcal{L}_0^{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{F})$ acotada se cumple que

$$\int_\Omega Tf d\nu' = \int_\Omega f d\nu'.$$

Sea $g' = \dfrac{d\nu'}{d\mathtt{Q}}$ la derivada de Radon-Nikodym de ν' respecto a $\mathtt{Q}$.

<u>Afirmación.</u> Se satisfacen las siguientes propiedades:

(A) $\log(\mathtt{P}_0) \in \mathcal{L}_1^{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{F}, \mathtt{Q})$ y $\mathbb{E}_{\mathtt{Q}}[\log(\mathtt{P}_0)] < 0$.

(B) $(g'\mathtt{W}_0)\circ\theta^{-1} + (g'(1-\mathtt{W}_0))\circ\theta = g'$ $(\mathtt{Q})$-c.s (y por lo tanto, (ν)-c.s).

(C) $\displaystyle\sum_{j=0}^{\infty}\prod_{k=0}^{j-1}\mathtt{P}_{k+1} \le \sum_{j=0}^{\infty}\exp(j\mathbb{E}_{\mathtt{Q}}[\log(\mathtt{P}_0)]) < \infty$ $(\mathtt{Q})$-c.s.

(D) $\displaystyle\lim_{j\to\infty}\prod_{k=0}^{j-1}\mathtt{P}_k = 0$ $(\mathtt{Q})$-c.s.

Demostración de la Afirmación.

(A) Observe que la condición de elipticidad uniforme para Q implica que

$$\frac{\delta}{1-\delta} < \mathtt{P}_0 = \frac{1-\mathtt{W}_0}{\mathtt{W}_0} < \frac{1-\delta}{\delta} \qquad (\mathtt{Q})-\text{c.s}\ ,$$

de donde

$$\log\left(\frac{\delta}{1-\delta}\right) < \log(\mathtt{P}_0) < \log\left(\frac{1-\delta}{\delta}\right) \qquad (\mathtt{Q})-\text{c.s.}$$

Luego $\log(\mathtt{P}_0) \in \mathcal{L}_1^{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{F}, \mathtt{Q})$.

Por otro lado, por la independencia e idéntica distribución de $\{\mathtt{P}_x\}_{x\in\mathbb{Z}}$ bajo $\mathtt{Q}$ se obtiene que

$$0 < \mathbb{E}_{\mathtt{Q}}\left[(1+\mathtt{P}_0)\sum_{j=0}^{\infty}\prod_{k=0}^{j-1}\mathtt{P}_{k+1}\right] = \mathbb{E}_{\mathtt{Q}}[1+\mathtt{P}_0]\sum_{j=0}^{\infty}\prod_{k=0}^{j-1}\mathbb{E}_{\mathtt{Q}}[\mathtt{P}_{k+1}] = \mathbb{E}_{\mathtt{Q}}[1+\mathtt{P}_0]\sum_{j=0}^{\infty}(\mathbb{E}_{\mathtt{Q}}[\mathtt{P}_0])^j < \infty$$

lo cual ocurre si y sólo si $0 < \mathbb{E}_{\mathtt{Q}}[\mathtt{P}_0] < 1$. Por la desigualdad de Jensen para funciones cóncavas y lo anterior, tenemos que

$$\mathbb{E}_{\mathtt{Q}}[\log(\mathtt{P}_0)] \le \log(\mathbb{E}_{\mathtt{Q}}[\mathtt{P}_0]) < 0,$$

que es el resultado requerido.

(B) Defina los conjuntos $\mathcal{F}-$medibles:

$$N^+ = \{\omega \in \Omega : \ ((g'\mathtt{W}_0) \circ \theta^{-1} + (g'(1-\mathtt{W}_0)) \circ \theta - g')(\omega) > 0\}$$

y

$$N^- = \{\omega \in \Omega : \ ((g'\mathtt{W}_0) \circ \theta^{-1} + (g'(1-\mathtt{W}_0)) \circ \theta - g')(\omega) < 0\}.$$

Para probar el resultado es suficiente con verificar que $\mathtt{Q}[N^+ \cup N^-] = 0$. Probaremos que $\mathtt{Q}[N^+] = 0$; de manera análoga se tendrá que $\mathtt{Q}[N^-] = 0$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definamos

$$N_n^+ = \{\omega \in \Omega : \ \frac{1}{n} < ((g'\mathtt{W}_0) \circ \theta^{-1} + (g'(1-\mathtt{W}_0)) \circ \theta - g')(\omega)\}.$$

Note que $N^+ \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} N_n^+$. Como ν es $T-$invariante, la sucesión $\{W_x\}_{x\in\mathbb{Z}}$ es estacionaria bajo $\mathtt{Q}$ y θ es una transformación $\mathtt{Q}-$preservadora de medida, para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$\begin{aligned}
\frac{\mathtt{Q}[N_n^+]}{n} &= \int_\Omega \frac{1}{n}\chi_{N_n^+} d\mathtt{Q} \le \int_\Omega [(g'\mathtt{W}_0) \circ \theta^{-1} + (g'(1-\mathtt{W}_0)) \circ \theta - g']\chi_{N_n^+} d\mathtt{Q} \\
&= \int_\Omega g'(\mathtt{W}_0(\chi_{N_n^+} \circ \theta)) \circ \theta^{-1} d\mathtt{Q} + \int_\Omega g'((1-\mathtt{W}_0)(\chi_{N_n^+} \circ \theta^{-1})) \circ \theta d\mathtt{Q} - \int_\Omega g'\chi_{N_n^+} d\mathtt{Q} \\
&= \int_\Omega g'(\mathtt{W}_0(\chi_{N_n^+} \circ \theta)) d\mathtt{Q} + \int_\Omega g'((1-\mathtt{W}_0)(\chi_{N_n^+} \circ \theta^{-1})) d\mathtt{Q} - \int_\Omega g'\chi_{N_n^+} d\mathtt{Q} \\
&= \int_\Omega \mathtt{W}_0(\chi_{N_n^+} \circ \theta) d\nu' + \int_\Omega (1-\mathtt{W}_0)(\chi_{N_n^+} \circ \theta^{-1}) d\nu' - \int_\Omega \chi_{N_n^+} d\nu' \\
&= \int_\Omega T\chi_{N_n^+} d\nu' - \int_\Omega \chi_{N_n^+} d\nu = 0.
\end{aligned}$$

Entonces $\mathtt{Q}[N_n^+] = 0$ y por ello $\mathtt{Q}[N^+] = 0$. Más aún, como $\mathtt{Q} \ll \nu'$, entonces $\nu'[N^+] = 0$. Esto demuestra (B).

(C) Como θ es una transformación $\mathtt{Q}-$ergódica, por el Teorema Ergódico de Birkhoff, tenemos que

$$\lim_{j\to\infty} \frac{1}{j} \log\left(\prod_{k=0}^{j-1} \mathtt{P}_{k+1}\right) = \lim_{j\to\infty} \frac{1}{j} \sum_{k=0}^{j-1} \log(\mathtt{P}_{k+1}) = \lim_{j\to\infty} \frac{1}{j} \sum_{k=0}^{j-1} \log(\mathtt{P}_1 \circ \theta^k) = \mathbb{E}_{\mathtt{Q}}[\log(\mathtt{P}_0)] \qquad (\mathtt{Q}) - \text{c.s} \ ,$$

así que

$$\lim_{j\to\infty} \frac{\log\left(\prod_{k=0}^{j-1} \mathtt{P}_{k+1}\right)}{j\mathbb{E}_{\mathtt{Q}}[\log(\mathtt{P}_0)]} = 1 \qquad (\mathtt{Q}) - \text{c.s.}$$

Por el inciso (A) se obtiene

$$\sum_{j=0}^{\infty} \prod_{k=0}^{j-1} \mathtt{P}_{k+1} = \sum_{j=0}^{\infty} \exp\left[\log\left(\prod_{k=0}^{j-1} \mathtt{P}_{k+1}\right)\right] \le \sum_{j=0}^{\infty} \exp(j\mathbb{E}_{\mathtt{Q}}[\log(\mathtt{P}_0)]) < \infty \qquad (\mathtt{Q}) - \text{c.s}$$

lo que demuestra (C).

(D) Inmediato de (C).

Así se tiene la Afirmación.

Por el inciso (B) de la Afirmación 1 tenemos que $(g'(1-\mathtt{W}_0))\circ\theta^2+g'\mathtt{W}_0=g'\circ\theta$ (ν)-c.s. Definamos $h=g'\mathtt{W}_0\in\mathcal{L}_1^{\mathbb{R}}(\Omega,\mathcal{F},\mathtt{Q})$. La última ecuación se reescribe en términos de h como:

$$h\mathtt{P}_0\circ\theta^2-\left(\frac{h}{\mathtt{W}_0}\right)\circ\theta+h=0 \qquad (\mathtt{Q})-\text{c.s.}$$

Sea $\overline{h}=h\mathtt{P}_0\circ\theta-h\in\mathcal{L}_1^{\mathbb{R}}(\Omega,\mathcal{F},\mathtt{Q})$. Inductivamente se verifica que para todo $n\in\mathbb{N}$ se tiene $\overline{h}\circ\theta^n=\overline{h}$ $(\mathtt{Q})$-c.s. En particular:

$$\begin{aligned}\overline{h}\circ\theta-\overline{h}&=h\mathtt{P}_0\circ\theta^2-h\circ\theta-h\mathtt{P}_0\circ\theta+h=\left(\frac{h}{\mathtt{W}_0}\right)\circ\theta-h-h\circ\theta-h\mathtt{P}_0\circ\theta+h\\&=\left[\left(\frac{1}{\mathtt{W}_0}-1\right)h\right]\circ\theta-h\mathtt{P}_0\circ\theta=\left[\left(\frac{1-\mathtt{W}_0}{\mathtt{W}_0}\right)h\right]\circ\theta-h\mathtt{P}_0\circ\theta=0 \qquad (\mathtt{Q})-\text{c.s.}\end{aligned}$$

Como θ es una transformación $\mathtt{Q}$−ergódica, por el Teorema 7, debe tenerse que existe $C\in\mathbb{R}$ tal que $h\mathtt{P}_0\circ\theta-h=\overline{h}=C$ $(\mathtt{Q})$-c.s. Consideremos los siguientes casos para C:

<u>Caso 1.</u> $C=0$.

En tal caso se tiene que $h\circ\theta^{-1}=h\mathtt{P}_0$ $(\mathtt{Q})$-c.s. Por el principio de inducción matemática se concluye que

$$h=(h\circ\theta^n)\prod_{k=0}^{n-1}\mathtt{P}_{k+1} \qquad (\mathtt{Q})-\text{c.s.}$$

Así que por el inciso (C) de la Afirmación se concluye que $\mathtt{W}_0g'=h=0$, $(\mathtt{Q})$-c.s. Luego $g'=0$ $(\mathtt{Q})$-c.s.

<u>Caso 2.</u> $C\neq 0$.

Sea $C'=-C$. En este caso se tiene que $h=(\mathtt{P}_0h)\circ\theta+C'$ $(\mathtt{Q})$-c.s. Sea h_0 una constante y defina recursivamente para cada $n\in\mathbb{N}$ la función

$$h_{n+1}=(\mathtt{P}_0h_n)\circ\theta+C'.$$

Por el principio de inducción matemática, se concluye que para todo $n\in\mathbb{N}$ ocurre

$$h_n=\left(\prod_{k=1}^{n}\mathtt{P}_k\right)h_0+C\sum_{j=0}^{n-1}\prod_{k=0}^{j-1}\mathtt{P}_{k+1}, \qquad (\mathtt{Q})-\text{c.s.}$$

Por los incisos (C) y (D) de la Afirmación

$$\lim_{n\to\infty}h_n=C\sum_{j=0}^{\infty}\prod_{k=0}^{j-1}\mathtt{P}_{k+1} \qquad (\mathtt{Q})-\text{c.s}\ .$$

Se verifica de inmediato que $\lim\limits_{n\to\infty}h_n$ satisface la misma condición que h, de donde se deduce que $\lim\limits_{n\to\infty}h_n=h$ y de aquí obtenemos que

$$g'=\frac{C}{1-\mathtt{W}_0}\sum_{j=0}^{\infty}\prod_{k=0}^{j-1}\mathtt{P}_{k+1}=C(1+\mathtt{P}_0)\sum_{j=0}^{\infty}\prod_{k=0}^{j-1}\mathtt{P}_{k+1} \qquad (\mathtt{Q})-\text{c.s}\ ,$$

y como ν' es una medida de probabilidad en $(\Omega,\mathcal{F})$ tenemos que $C=\left(\mathbb{E}_{\mathtt{Q}}\left[(1+\mathtt{P}_0)\sum_{j=0}^{\infty}\prod_{k=0}^{j-1}\mathtt{P}_{k+1}\right]\right)^{-1}$.

Como ν' es una medida de probabilidad en $(\Omega,\mathcal{F})$, de lo anterior se deduce que el Caso 1 debe descartarse, y el Caso 2 corresponde al Teorema.

⊠

5.4.2. Ley fuerte de los Grandes Números para RWRE

Continuaremos con la notación establecida. Sea

$$c = \frac{1 - \mathbb{E}_{\mathtt{Q}}[\mathrm{P}_0]}{1 + \mathbb{E}_{\mathtt{Q}}[\mathrm{P}_0]} \tag{5.27}$$

OBSERVACIÓN 29. Se satisfacen

I. Para cualesquiera $\lambda \in \mathbb{R}$ y $x \in \mathbb{R}$ con $|x| \leq 1$ se cumple que $\exp(\lambda x) \leq \exp\left(\frac{\lambda^2}{2}\right) + x\mathrm{senh}(\lambda)$.

II. Dados $t > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$ $\alpha \neq 0$, la función $g : \left]-\infty, \frac{t}{\alpha^2}\right] \to \mathbb{R}$ definida por $g(\lambda) = \left(\frac{t}{\alpha} - \lambda\alpha\right)^2$ tiene un máximo en $\lambda = 0$ y entonces para todo $\lambda \in \left]-\infty, \frac{t}{\alpha^2}\right]$ se tiene la desigualdad

$$-\lambda t + \frac{\lambda^2\alpha^2}{2} \leq -\frac{t^2}{2\alpha^2}.$$

Demostración. Esta observación puede probarse utilizando técnicas de cálculo como maximizar funciones y expansiones en series de Taylor para las funciones involucradas. ⊠

A continuación probamos el Teorema prncipal de este capítulo.

TEOREMA 36 (LEY FUERTE DE LOS GRANDES NÚMEROS PARA RWRE). *Se tiene $\mathbb{P}_{\mathtt{Q}}-$casi seguramente*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = \begin{cases} c & si \quad \mathbb{E}_{\mathtt{Q}}[\mathrm{P}_0] < 1. \\ -c & si \quad \mathbb{E}_{\mathtt{Q}}\left[\frac{1}{\mathrm{P}_0}\right] < 1. \\ 0 & \textit{en otro caso.} \end{cases}$$

Demostración. Definamos a la función $d : \mathbb{Z} \times \Omega \to \mathbb{R}$ por

$$d(x,\omega) = \mathbb{E}^x_\omega[S_1 - S_0] \qquad \forall (x,\omega) \in \mathbb{Z} \times \Omega$$

que es una función $(\mathcal{B}(\mathbb{Z}) \otimes \mathcal{F}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))-$medible.

Se tiene para todo $(x,\omega) \in \mathbb{Z} \times \Omega$ con $\omega = (\omega_r)_{r\in\mathbb{Z}}$ ocurre que

$$\begin{aligned} d(x,\omega) &= \mathbb{E}^x_\omega[S_1] - \mathbb{E}^x_\omega[S_0] = (x+1)\mathbb{P}^x_\omega[S_1 = x+1|S_0 = x] + (x-1)\mathbb{P}^x_\omega[S_1 = x-1|S_0 = x] - x\mathbb{P}^x_\omega[S_0 = x] \\ &= (x+1)\omega_x + (x-1)(1-\omega_x) - x = \omega_x - (1-\omega_x) \\ &= 1 \cdot \mathbb{P}^0_{\theta^x(\omega)}[S_1 = 1|S_0 = 0] + (-1)\mathbb{P}^0_{\theta^x(\omega)}[S_1 = -1|S_0 = 0] - 0 \cdot \mathbb{P}^0_{\theta^x(\omega)}[S_0 = 0] = d(0, \theta^x(\omega)). \end{aligned}$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$ defina las funciones $D_n, M_n : \Omega \times \mathbb{Z}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$ por

$$D_n(\omega,t) = \sum_{i=0}^{n-1} d(S_i(t),\omega) = \sum_{i=0}^{n-1} d(0, \theta^{S_i(t)}(\omega)) = \sum_{i=0}^{n-1} d(0, \overline{S}_i(\omega,t))$$

$$M_n(\omega,t) = S_n(\omega,t) - D_n(\omega,t).$$

que son funciones $(\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))-$medibles.

También, para cada $\omega \in \Omega$ denotamos $D^\omega_n, M^\omega_n : \mathbb{Z}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$ como $M^\omega_n(t) = M_n(\omega,t)$ y $D^\omega_n(t) = D_n(\omega,t)$ donde $t \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$.

Tenemos la siguiente

<u>Afirmación.</u> Para cada $\omega \in \Omega$ se tiene que

(a) $\{M^\omega_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ es una $\{\mathcal{F}_n(\omega)\}_{n\in\mathbb{N}_0}-$martingala.

(b) $\lim_{n\to\infty} \frac{M_n^\omega}{n} = 0$ $(\mathbb{P}_\omega^0)$-c.s.

Más aún, de esta Afirmación se sigue que $\lim_{n\to\infty} \frac{M_n}{n} = 0$ $(\mathbb{P}_{\mathtt{Q}})$-c.s.

Demostración de la Afirmación. En primer lugar, observe que para todo $n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}$ y $\omega = (\omega_x)_{x\in\mathbb{Z}} \in \Omega$

$$\mathbb{E}_{0,\omega}[S_{n+1}|S_n = r] = (r+1)\mathbb{P}_\omega^0[S_{n+1} = r+1|S_n = r] + (r-1)\mathbb{P}_\omega^0[S_{n+1} = r-1|S_n = r] = \omega_r + (1-\omega_r) + r = d(0, \theta^r(\omega)).$$

Por ello

$$\mathbb{E}_{0,\omega}[S_{n+1}|\mathcal{G}_n(\omega)] = \mathbb{E}_{0,\omega}[S_{n+1}|S_n] = d(0, \theta^{S_n}(\omega)) + S_n = d(0, \overline{S}_n^\omega) + S_n^\omega \qquad (\mathbb{P}_\omega^0) - \text{c.s.} \tag{5.28}$$

Fije $\omega \in \Omega$.

(a) Se utilizará la definición de $\{\mathcal{F}_n(\omega)\}_{n\in\mathbb{N}}-$martingala.

Observe que para cada $n \in \mathbb{N}$, $M_n^\omega = S_n^\omega - D_n^\omega$ es una función $\mathcal{F}_n(\omega)-$medible, D_n^ω es una función acotada y por construcción de $\{S_n^\omega\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ tenemos que

$$\mathbb{E}_{0,\omega}[|M_n^\omega|] \le \mathbb{E}_{0,\omega}[|S_n^\omega|] + \mathbb{E}_{0,\omega}[|D_n^\omega|] < \infty.$$

Por el inciso (I) del Teorema 33 tenemos que $\{\overline{S}_n^\omega\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ es una $\{\mathcal{F}_n(\omega)\}_{n\in\mathbb{N}_0}-$cadena de Markov en $(\mathbb{Z}^\mathbb{N}, \mathcal{G}, \mathbb{P}_\omega^0)$, y por construcción $\{\overline{S}_n^\omega\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ también lo es. Como consecuencia de la ecuación (5.28) se tiene que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{0,\omega}[M_{n+1}^\omega|\mathcal{F}_n(\omega)] &= \mathbb{E}_{0,\omega}[S_{n+1}^\omega|\mathcal{F}_n(\omega)] - \mathbb{E}_{0,\omega}[D_{n+1}^\omega|\mathcal{F}_n(\omega)] = \mathbb{E}_{0,\omega}[S_{n+1}^\omega|\mathcal{G}_n(\omega)] - D_n^\omega - d(0, \overline{S}_n^\omega)\\ &= S_n - D_n^\omega = M_n^\omega \qquad (\mathbb{P}_\omega^0) - \text{c.s.}\end{aligned}$$

Esto demuestra que $\{M_n^\omega\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ es una $\{\mathcal{F}_n(\omega)\}_{n\in\mathbb{N}}-$martingala.

(b) Por las hipótesis generales se tiene

$$|M_{n+1}^\omega - M_n^\omega| \le |S_{n+1} - S_n| + |D_{n+1}^\omega - D_n^\omega| = 1 + |d(0, \overline{S}_n^\omega)| \le 1 + \mathtt{W}_0(\overline{S}_n^\omega) + (1 - \mathtt{W}_0(\overline{S}_n^\omega)) = 2 \qquad (\mathbb{P}_\omega^0) - \text{c.s.} \tag{5.29}$$

Note que para cada $\lambda \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, debido a que $\{M_n^\omega\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ es una $\{\mathcal{F}_n(\omega)\}_{n\in\mathbb{N}_0}-$martingala, la ecuación (5.29), el inciso (II) en la Observación 29 y propiedades de la esperanza condicional, tenemos que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{0,\omega}[\exp(\lambda M_n^\omega)] &= \mathbb{E}_{0,\omega}\left[\exp(\lambda M_{n-1}^\omega)\mathbb{E}_{0,\omega}\left[\exp\left(2\lambda\frac{M_n^\omega - M_{n-1}^\omega}{2}\right)\middle|\mathcal{F}_n(\omega)\right]\right]\\ &\le \mathbb{E}_{0,\omega}\left[\exp(\lambda M_{n-1}^\omega)\left(\exp\left(\frac{(2\lambda)^2}{2}\right) + \operatorname{senh}(2\lambda)\mathbb{E}_{0,\omega}\left[\frac{M_n^\omega - M_{n-1}^\omega}{2}\middle|\mathcal{F}_n(\omega)\right]\right)\right]\\ &= \exp(2\lambda^2)\mathbb{E}_{0,\omega}[\exp(\lambda M_n^\omega)] + \frac{\operatorname{senh}(2\lambda)}{2}\mathbb{E}_{0,\omega}[M_n^\omega - M_{n-1}^\omega] = \exp(2\lambda^2)\mathbb{E}_{0,\omega}[\exp(\lambda M_n^\omega)]\\ &\le \ldots \le \exp(2n\lambda^2),\end{aligned}$$

donde el procedimiento se repite iterativamente.

Entonces, para cada $k \in \mathbb{N}$ y $n \in \mathbb{N}$, por la desigualdad de Chebyshev, se sigue que

$$\mathbb{P}_\omega^0\left[M_n^\omega \ge \frac{n}{k}\right] \le \exp(-n)\mathbb{E}_{0,\omega}[\exp(kM_n^\omega)]\exp(-n + 2nk^2) = \exp(-(2k^2 - 1)n).$$

Entonces, para cualquier $k \in \mathbb{N}$

$$\sum_{n=0}^\infty \mathbb{P}_\omega^0\left[M_n^\omega \ge \frac{n}{k}\right] \le \sum_{n=0}^\infty \exp(-(2k^2 - 1)n) < \infty.$$

Por el Lema de Borel-Cantelli se concluye que para todo $k \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{P}_\omega^0\left[\bigcap_{N=1}^\infty \bigcup_{n=N}^\infty \left\{M_n^\omega \ge \frac{n}{k}\right\}\right] = \mathbb{P}_\omega^0\left[\limsup_{n\to\infty}\left\{M_n^\omega \ge \frac{n}{k}\right\}\right] = 0.$$

Y de igual forma tenemos que para todo $k \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{P}^0_\omega\Big[\bigcap_{N=1}^{\infty}\bigcup_{n=N}^{\infty}\Big\{-M^\omega_n \geq \frac{n}{k}\Big\}\Big] = 0,$$

Así que para todo $k \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{P}^0_\omega\Big[\bigcap_{N=1}^{\infty}\bigcup_{n=N}^{\infty}\Big\{|M^\omega_n| \geq \frac{n}{k}\Big\}\Big] = 0.$$

Y concluimos que

$$0 \leq \mathbb{P}^0_\omega\Big[\lim_{n\to\infty}\frac{M^\omega_n}{n} \neq 0\Big] = \mathbb{P}^0_\omega\Big[\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{N=1}^{\infty}\bigcup_{n=N}^{\infty}\Big\{|M^\omega_n| \geq \frac{n}{k}\Big\}\Big] \leq \sum_{k=1}^{\infty}\mathbb{P}^0_\omega\Big[\bigcap_{N=1}^{\infty}\bigcup_{n=N}^{\infty}\Big\{|M^\omega_n| \geq \frac{n}{k}\Big\}\Big] = 0.$$

La última parte resulta de aplicar el Teorema 31 al límite del inciso (b). Esto demuestra la Afirmación.

Consideremos los casos del enunciado del Teorema.

(A) Suponga que $\mathbb{E}_{\mathtt{Q}}[\mathtt{P}_0] < 1$. Entonces, al igual que en el Teorema 35 se tiene que

$$0 < \mathbb{E}_{\mathtt{Q}}\Big[(1+\mathtt{P}_0)\sum_{j=0}^{\infty}\prod_{k=0}^{j-1}\mathtt{P}_{k+1}\Big] = \mathbb{E}_{\mathtt{Q}}[1+\mathtt{P}_0]\sum_{j=0}^{\infty}\prod_{k=0}^{j-1}\mathbb{E}_{\mathtt{Q}}[\mathtt{P}_{k+1}] = \mathbb{E}_{\mathtt{Q}}[1+\mathtt{P}_0]\sum_{j=0}^{\infty}(\mathbb{E}_{\mathtt{Q}}[\mathtt{P}_0])^j = \frac{1+\mathbb{E}_{\mathtt{Q}}[\mathtt{P}_0]}{1-\mathbb{E}_{\mathtt{Q}}[\mathtt{P}_0]} = \frac{1}{c} < \infty.$$

Por el Teorema 35 (I), existe una única medida de probabilidad ν en $(\Omega, \mathcal{F})$ con $\mathtt{Q} \ll \nu$ y $T-$invariante. De hecho

$$\frac{d\nu}{d\mathtt{Q}} = c\sum_{j=0}^{\infty}\prod_{k=0}^{j-1}\mathtt{P}_{k+1} \qquad (\mathtt{Q}) - \text{c.s.}$$

También, por el Lema 13 inciso (IV) se tiene que $\nu \ll \mathtt{Q}$.

Considere la función $\ell : \Omega \to \mathbb{R}$ definida como $\ell(\omega) = d(0,\omega) = \mathtt{W}_0(\omega) - (1 - \mathtt{W}_0(\omega))$. Note que ℓ es una función $(\mathcal{F}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))-$medible y acotada. Por lo que $\ell \circ \overline{\mathtt{W}}_0 \in \mathcal{L}^{\mathbb{R}}_1(\overline{\Omega}, \overline{\mathcal{F}}, \overline{\mathbb{P}}_\nu)$. En la Proposición 15 se demostró que $\nu = \overline{\mathbb{P}}_\nu \circ \overline{\mathtt{W}}_0^{-1}$. Por el Lema 7 ocurre que

$$\begin{aligned}\int_{\Omega}(\ell \circ \overline{\mathtt{W}}_0)d\overline{\mathbb{P}}_\nu &= \int_{\Omega}\ell d\nu = \int_{\Omega}(1+\mathtt{P}_0)(\mathtt{W}_0 - (1-\mathtt{W}_0))c\sum_{j=0}^{\infty}\prod_{k=0}^{j-1}\mathtt{P}_{k+1}d\mathtt{Q} = \int_{\Omega}\Big(1 + \frac{1}{\mathtt{W}_0} + 1\Big)c\sum_{j=0}^{\infty}\prod_{k=0}^{j-1}\mathtt{P}_{k+1}d\mathtt{Q}\\ &= c\int_{\Omega}(1-\mathtt{P}_0)\sum_{j=0}^{\infty}\prod_{k=0}^{j-1}\mathtt{P}_{k+1}d\mathtt{Q} = c(1-\mathbb{E}_{\mathtt{Q}}[\mathtt{P}_0])\sum_{j=0}^{\infty}(\mathbb{E}_{\mathtt{Q}}[\mathtt{P}_0])^j = c.\end{aligned}$$

Por la Proposición 15, $\overline{\theta}$ es una transformación $\overline{\mathbb{P}}_\nu-$ergódica. Así que podemos aplicar el Teorema Ergódico de Birkhoff y obtener

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}(\ell \circ \overline{\mathtt{W}}_0) \circ \overline{\theta}^i = \int_{\Omega}(\ell \circ \overline{\mathtt{W}}_0)d\overline{\mathbb{P}}_\nu = c \qquad (\overline{\mathbb{P}}_\nu) - \text{c.s.}$$

Como $\overline{\mathbb{P}}_\nu = \mathbb{P}_\nu \circ \Phi^{-1}$, tenemos que

$$\begin{aligned}0 &= \overline{\mathbb{P}}_\nu\Big[\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}(\ell \circ \overline{\mathtt{W}}_0) \circ \overline{\theta}^i \neq c\Big] = \mathbb{P}_\nu\Big[\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}(\ell \circ \overline{\mathtt{W}}_0) \circ \overline{\theta}^i \circ \Phi \neq c\Big] = \mathbb{P}_\nu\Big[\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\ell(\overline{S}_i) \neq c\Big]\\ &= \mathbb{P}_\nu\Big[\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\ell(\overline{S}_i) \neq c\Big] = \mathbb{P}_\nu\Big[\lim_{n\to\infty}\frac{D_n}{n} \neq c\Big],\end{aligned}$$

es decir

$$\lim_{n\to\infty}\frac{D_n}{n} = c \qquad (\mathbb{P}_\nu) - \text{c.s.} \tag{5.30}$$

Como $\mathtt{Q} \ll \nu$ y $\nu \ll \mathtt{Q}$, de la Afirmación se tiene que $\lim_{n\to\infty} \frac{M_n}{n} = 0$ $(\mathbb{P}_\nu)$-c.s. Entonces

$$\lim_{n\to\infty} \frac{M_n}{n} = 0 \qquad (\mathbb{P}_\nu) - \text{c.s.} \tag{5.31}$$

Como consecuencia de las expresiones (5.30) y (5.31) tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = c \qquad (\mathbb{P}_\nu) - \text{c.s.}$$

Finalmente, por la condición de continuidad absoluta entre $\mathtt{Q}$ y ν se concluye que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = c \qquad (\mathbb{P}_{\mathtt{Q}}) - \text{c.s.}$$

(B) Para el caso $\mathbb{E}_{\mathtt{Q}}\left[\frac{1}{\mathtt{P}_0}\right] < 1$, la demostración se obtiene como en (A).

(C) Suponga que no ocurre (A) ni (B). Entonces $\mathbb{E}_{\mathtt{Q}}[\mathtt{P}_0] \geq 1$ y $\mathbb{E}_{\mathtt{Q}}\left[\frac{1}{\mathtt{P}_0}\right] \geq 1$. Sea

$$\Gamma = \{(x, x') \in \mathbb{Z}^2 : \ x - x' \text{ es par } \}.$$

Para $\omega, \omega' \in \Omega$ diremos que $\omega \preceq \omega'$ si y sólo si para todo $r \in \mathbb{Z}$ se tiene que $\mathtt{W}_r(\omega) \leq \mathtt{W}_r(\omega')$.

Fije $\omega, \omega' \in \Omega$ con $\widehat{\omega} = (\omega, \omega')$ y $\widehat{x} = (x, x') \in \Gamma$ con $\omega \preceq \omega'$. Consideremos las caminatas aleatorias $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ y $\{S'_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ en $(\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}, \mathcal{G}, \mathbb{P}^x_\omega)$ y $(\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}, \mathcal{G}, \mathbb{P}^{x'}_{\omega'})$ respectivamente. Sea $n \in \mathbb{N}_0$. Defina la función $\widehat{S_n} : \mathbb{Z}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{Z}^2$ para cada $t \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$

$$\widehat{S_n}(t) = (S_n(t), S'_n(t))$$

que es una función $(\mathcal{G}, \mathcal{B}(\mathbb{Z})^{\otimes 2})-$medible.

Por el Teorema de Consistencia de Kolmogorov puede construirse una medida de probabilidad $\mathbb{P}^{\widehat{x}}_{\widehat{\omega}}$ en $(\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}, \mathcal{G})$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ y $A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{Z})$ ocurre que

$$\mathbb{P}^{\widehat{x}}_{\widehat{\omega}}[\widehat{S}_n^{-1}(A \times B)] = \mathbb{P}^x_\omega[S_n^{-1}(A)]\mathbb{P}^{x'}_{\omega'}[S'^{-1}_n(B)].$$

<u>Afirmación.</u> Suponga que $x \leq x'$. Entonces $\{\widehat{S}_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ es un proceso de Markov en $(\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}, \mathcal{G}, \mathbb{P}^{\widehat{x}}_{\widehat{\omega}})$ con espacio de estados $(\Gamma, \mathcal{B}(\Gamma))$ y $\mathbb{P}^{\widehat{x}}_{\widehat{\omega}}[S_n \leq S'_n] = 1$.

Demostración de la Afirmación. Suponga que $x - x' = 2l$ con $l \in \mathbb{N}_0$. Abordaremos el caso $l \geq 1$. El caso $l = 0$ se trata similarmente.

El hecho de que $\{\widehat{S}_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ sea una cadena de Markov en $(\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}, \mathcal{G}, \mathbb{P}^{\widehat{x}}_{\widehat{\omega}})$ se obtiene inmediatamente de la independencia de $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ y $\{S'_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ bajo $\mathbb{P}^{\widehat{x}}_{\widehat{\omega}}$.

Por otro lado, observe que $\mathbb{P}^{\widehat{x}}_{\widehat{\omega}}[S_0 \leq S'_0] = \mathbb{P}^{\widehat{x}}_{\widehat{\omega}}[x \leq x'] = 1$. Probemos por ejemplo que $\mathbb{P}^{\widehat{x}}_{\widehat{\omega}}[S_1 \leq S'_1] = 1$ y se tendrán de forma exhaustiva los demás casos. Sea $t \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ arbitrario fijo. Considere los siguientes casos:

<u>Caso 1.</u> $S_1(t) = x + 1$ y $S'_1(t) = x' + 1$.
Es claro que $S_1(t) \leq S'_1(t)$.

<u>Caso 2.</u> $S_1(t) = x - 1$ y $S'_1(t) = x' - 1$.
Se tiene de inmediato que $S_1(t) \leq S'_1(t)$.

<u>Caso 3.</u> $S_1(t) = x + 1$ y $S'_1(t) = x' - 1$.
Note que $2 \leq 2l = x - x'$ y por ello $S_1(t) = x + 1 = x + 2 - 1 \leq x + x' - x - 1 = x' - 1 = S'_1(t)$.

<u>Caso 4.</u> $S_1(t) = x - 1$ y $S'_1(t) = x' + 1$.
Observe que $S_1(t) = x - 1 \leq x \leq x' \leq x' + 1 = S'_1(t)$.

En todos los casos $S_1(t) \leq S'_1(t)$. Por lo tanto $\mathbb{P}^{\widehat{x}}_{\widehat{\omega}}[S_1 \leq S'_1] = 1$. De hecho, se verifica inmediatamente que $S_1 - S'_1$ es par. De la misma forma se verifica esto para cada $n \in \mathbb{N}$. Entonces el espacio de estados de este proceso es $(\Gamma, \mathcal{B}(\Gamma))$.

Ahora, para cada $\alpha > 0$ y $\omega = (\omega_r)_{r\in\mathbb{Z}} \in \Omega$ definamos

$$\overline{\omega}^{\alpha} = \left(\frac{\omega_r + \alpha}{1+\alpha}\right)_{r\in\mathbb{Z}} \in \Omega$$

Se tiene que $\omega \preceq \overline{\omega}^{\alpha}$ y puede considere la caminata aleatoria $\{S_n^{\alpha}\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ en $(\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}, \mathcal{G}, \mathbb{P}^{\widehat{0}}_{\widehat{\alpha}})$.

Además si definimos $\mathtt{P}_0^{\alpha} : \Omega \to \mathbb{R}$ para cada $\omega \in \Omega$ por

$$\mathtt{P}_0^{\alpha}(\omega) = \frac{1 - \mathtt{W}_0(\overline{\omega}^{\alpha})}{\mathtt{W}_0(\overline{\omega}^{\alpha})},$$

se tiene que es una función $(\mathcal{F}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))-$medible. Notemos que

$$\mathtt{P}_0^{\alpha}(\omega) = \frac{1 - \mathtt{W}_0(\omega)}{\mathtt{W}_0(\omega) + \alpha} = \frac{1}{\dfrac{1}{\mathtt{P}_0(\omega)} + \dfrac{\alpha}{1 - \mathtt{W}_0(\omega)}} \leq \frac{1}{\dfrac{1}{\mathtt{P}_0(\omega)} + \alpha},$$

así que para $\alpha > 0$ suficientemente grande se satisface que

$$\mathbb{E}_{\mathtt{Q}}[\mathtt{P}_0^{\alpha}] \leq \mathbb{E}_{\mathtt{Q}}\left[\frac{1}{\mathtt{P}_0^{-1} + \alpha}\right] < 1.$$

Por el inciso (A) y la Afirmación, para $\alpha > 0$ suficientemente grande ocurre

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{S_n^{\alpha}}{n} = \frac{1 - \mathbb{E}_{\mathtt{Q}}[\mathtt{P}_0^{\alpha}]}{1 + \mathbb{E}_{\mathtt{Q}}[\mathtt{P}_0^{\alpha}]} \qquad (\mathbb{P}^{\widehat{0}}_{\overline{\omega}^{\alpha}}) - \text{c.s.} \tag{5.32}$$

Se verifica de inmediato que $\alpha \mapsto \mathbb{E}_{\mathtt{Q}}[\mathtt{P}_0^{\alpha}]$ es una función continua tal que

$$\mathbb{E}_{\mathtt{Q}}[\mathtt{P}_0^{\alpha}] \leq \mathbb{E}_{\mathtt{Q}}\left[\frac{1}{\mathtt{P}_0^{-1} + \alpha}\right] \leq \mathbb{E}_{\mathtt{Q}}\left[\frac{1}{\mathtt{P}_0^{-1}}\right] = \mathbb{E}_{\mathtt{Q}}[\mathtt{P}_0].$$

Tenemos que $1 \in [0, \mathbb{E}_{\mathtt{Q}}[\mathtt{P}_0]]$, así que por la continuidad de la función $\alpha \mapsto \mathbb{E}_{\mathtt{Q}}[\mathtt{P}_0^{\alpha}]$, existe $\alpha^* > 0$ con $\mathbb{E}_{\mathtt{Q}}[\mathtt{P}_0^{\alpha^*}] = 1$. Fije una sucesión creciente y positiva de números reales $(\alpha_m)_{m\in\mathbb{N}}$ tal que $\lim\limits_{m\to\infty} \alpha_m = \alpha^*$. Entonces de la expresión (5.32) se obtiene

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} \leq \lim_{m\to\infty} \frac{1 - \mathbb{E}_{\mathtt{Q}}[\mathtt{P}_0^{\alpha_m}]}{1 + \mathbb{E}_{\mathtt{Q}}[\mathtt{P}_0^{\alpha_m}]} = \frac{1 - \mathbb{E}_{\mathtt{Q}}[\mathtt{P}_0^{\alpha^*}]}{1 + \mathbb{E}_{\mathtt{Q}}[\mathtt{P}_0^{\alpha^*}]} = 0 \qquad (\mathbb{P}^0_{\omega}) - \text{c.s. }.$$

Similarmente se tiene que $\liminf\limits_{n\to\infty} \dfrac{S_n}{n} \geq 0$ $(\mathbb{P}^0_{\omega})$-c.s. Por ello $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{S_n}{n} = 0$ $(\mathbb{P}^0_{\omega})$-c.s. La conclusión para (C) se obtiene de esto último y el Teorema 31. 3 ⊠

Observación 30. Con la notación utilizada, por la desigualdad de Jensen para funciones convexas se tiene que $\mathbb{E}_{\mathtt{Q}}\left[\dfrac{1}{\mathtt{P}_0}\right] \geq \dfrac{1}{\mathbb{E}_{\mathtt{Q}}[\mathtt{P}_0]}$, es decir, $\left(\mathbb{E}_{\mathtt{Q}}\left[\dfrac{1}{\mathtt{P}_0}\right]\right)^{-1} \leq \mathbb{E}_{\mathtt{Q}}[\mathtt{P}_0]$.

En el Teorema 36 es suficiente considerar los casos $\mathbb{E}_{\mathtt{Q}}[\mathtt{P}_0] < 1$ y $\mathbb{E}_{\mathtt{Q}}\left[\dfrac{1}{\mathtt{P}_0}\right] < 1$, ya que

$$\mathbb{E}_{\mathtt{Q}}[\mathtt{P}_0] < 1 \implies \left(\mathbb{E}_{\mathtt{Q}}\left[\frac{1}{\mathtt{P}_0}\right]\right)^{-1} < 1 \iff 1 < \mathbb{E}_{\mathtt{Q}}\left[\frac{1}{\mathtt{P}_0}\right]$$

y también

$$\mathbb{E}_{\mathtt{Q}}\left[\frac{1}{\mathtt{P}_0}\right] < 1 \implies 1 > \mathbb{E}_{\mathtt{Q}}\left[\frac{1}{\mathtt{P}_0}\right] \geq \frac{1}{\mathbb{E}_{\mathtt{Q}}[\mathtt{P}_0]} \iff 1 < \mathbb{E}_{\mathtt{Q}}[\mathtt{P}_0].$$

Capítulo 6

Simulación de RWRE

Este capítulo tiene como objetivo ilustrar el comportamiento de una caminata aleatoria en un ambiente aleatorio (RWRE) a través de gráficas tanto de la caminata aleatoria como de la función potencial. Estas gráficas son generadas a partir de un programa computacional implementado en la paquetería R. Uno de los propósitos principales consiste en proporcionar una versión gráfica que permite confirmar que el comportamiento asintótico de una caminata aleatoria de esta naturaleza puede ser predecido y explicado mediante la función potencial.

El primer programa implementado se utiliza para generar una caminata aleatoria con probabilidad de transición p, donde $0 < p < 1$. Se simula una variable aleatoria con distribución Bernoulli de parámetro p, generando una variable aleatoria con distribución uniforme en el intervalo $]0, 1[$.

Función **unoymenosuno**(p)

```
unoymenosuno<-function(p){
u=runif(1)
r=0

if(u<p){r=1}
else {r=-1}
r=r
}
```

El siguiente código es utilizado para generar la caminata aleatoria requerida y recibe dos parámetros. El primero, denotado por dw, es un vector de longitud 3, con $dw = (c_1, c_2, q)$, donde $0 < q < 1$ y se construye la distribución de $\mathtt{W}_0$ bajo $\mathtt{Q}$ como sigue:

$$\mathtt{Q}[\mathtt{W}_0 = c_1] = q, \quad \mathtt{Q}[\mathtt{W}_0 = c_2] = 1 - q.$$

El segundo parámetro es un número natural k, que indica la cantidad de pasos que son registrados para generar la trayectoria de la caminata. Una vez que se introduce esta información, el programa simula las variables aleatorias $\mathtt{W}_{-k}, \dots, \mathtt{W}_{-1}$ y $\mathtt{W}_1, \mathtt{W}_k$ independientes y con idéntica distribución respecto a $\mathtt{W}_0$ bajo $\mathtt{Q}$. Los valores que se generan de esta simulación representan las probabiidades de transición en un paso entre los estados $\{-k, \dots, k\}$, con los cuales se genera a la caminata aleatoria, con ayuda de la función **unoymenosuno()**, que recibe como parámetro la probabilidad de transición cada que se efectúa un salto en la caminata. Simultáneamente calcula los valores de los potenciales $\mathtt{V}_{-k}, \dots, \mathtt{V}_k$ introducidos en el Teorema 32. El programa produce las gráficas tanto de la trayectoria de la caminata como de los potenciales.

Función **caminataamb**(dw,k)

```
caminataamb<-function(dw,k){
w=runif(2*k+1,0,1)

for(i in 1:2*k+1){            #Generar v.a.i.i.d con la distribución de W_{0} (ambiente)
if(w[i]<dw[3]){               #Probabilidades de transición de la caminata aleatoria
w[i]=dw[1]
}
else w[i]=dw[2]
}

v=1-w
p=w/v


v=rep(0,2*k+1)                #Generar valores de las funciones potenciales
v[k+1]=0
v[k]=-1*log(p[k])

for(i in 2:k+1){
v[k+i]=v[k+i-1]+log(p[k+i-1])
}

v1=0
for(i in 1:k){
v1=v1-log(p[i])
}

v[1]=v1

for(i in 1:k){
v[i+1]=v[i]+log(p[i])
}

v=v

y=rep(0,k+1)                  #Generar caminata aleatoria en k pasos
y[1]=0

for(i in 1:k){
y[i+1]=y[i]+unoymenosuno(w[k+1+y[i]])
}

y=y
x1=array(-k:k)
x2=array(0:k)
plot(x1,v,type='l',xlab="Estados",ylab="Potencial",main="Potenciales")

plot(x2,y,type='l',xlab="Pasos de la Caminata",ylab="Estados",main="Caminata aleatoria")


}
```

Se presentan dos casos que difieren en la velocidad de convergencia asintótica, es decir, se consideran estos casos de acuerdo al valor de $\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n}$.

Caso 1. $\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = 0$.

De acuerdo con el Teorema 36, esta condición se tiene cuando $\mathbb{E}_{\mathtt{Q}}[P_0] \geq 1$ y $\mathbb{E}_{\mathtt{Q}_0}[\mathtt{P}_0^{-1}] \geq 1$. Se verifica directamete que el vector $dw = (0{,}4999, 0{,}8999, 0{,}4)$ satisface las condiciones requeridas. Se ejecuta el programa con $k = 50000$, es decir, los posibles estados que podría visitar la caminata aleatoria en 50000 pasos están dentro del conjunto $\{-50000, \ldots, 50000\}$. En la figura 6.1 se tiene la gráfica la trayectoria obtenida, mientras que en la figura 6.2 se presenta la gráfica de los potenciales involucrados.

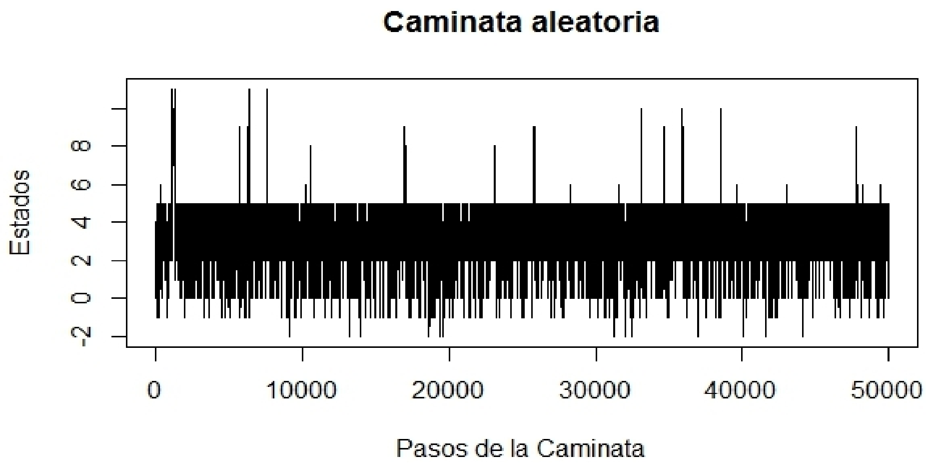

Figura 6.1: Trayectoria de RWRE en 50000 pasos cuando $\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = 0$.

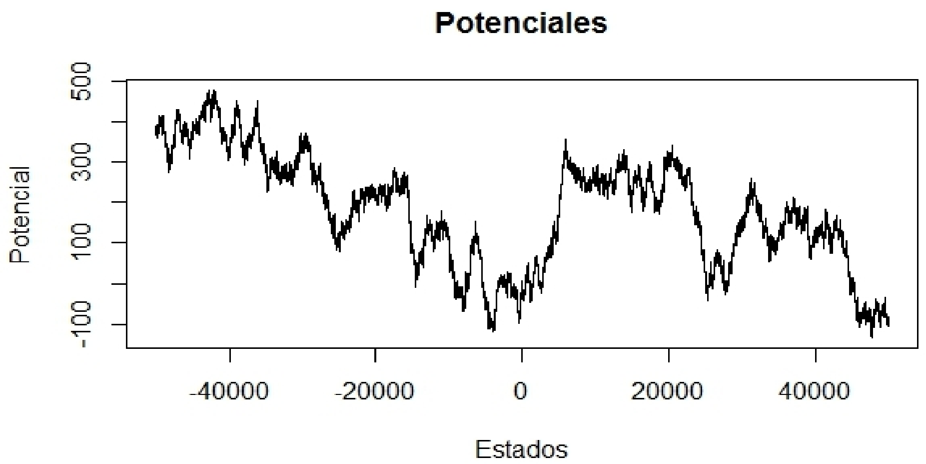

Figura 6.2: Potenciales inducidos por la distribución dw en el caso $\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = 0$.

Se observa en esta simulación que los estados visitados por la caminata en 50000 pasos están en el conjunto $\{-2, \ldots, 10\}$. En la gráfica de los potenciales, $\mathtt{W}_{-2}, \ldots, \mathtt{W}_{10}$ muestran un comportamiento decreciente, el cual persiste en un radio de estados cercanos al estado cero. Esto intuitivamente significa que la caminata aleatoria visita frecuentemente estos estados, presenta un estancamiento dentro de ellos y el número de pasos necesarios para salir de este conjunto de estados debe ser significativamente grande, tal como lo muestra la gráfica de potenciales. Incluso, con ayuda de la figura 6.2, es posible predecir el comportamiento de la caminata en caso de que visite estados posteriores al 20000, puesto que presenta en un conjunto de estados cercanos al 20000, el mismo comportamiento que en un entorno del estado cero.

Caso 2. $\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = \frac{1-\mathbb{E}_{\mathtt{Q}}[\mathrm{P}_0]}{1+\mathbb{E}_{\mathtt{Q}}[\mathrm{P}_0]} > 0$ y $\mathbb{E}_{\mathbb{P}_{\mathtt{Q}}}[S_1] < 0$.
En este caso se efectúa una simulación de la caminata con 900000 pasos, se considera la distribución de $\mathtt{W}_0$ bajo $\mathtt{Q}$ con el vector $dw = (0{,}225, 0{,}655, 0{,}3)$. Se verifica fácilmente que esta distribución de $\mathtt{W}_0$ satisface las siguientes condiciones:

$$\frac{1-\mathbb{E}_{\mathtt{Q}}[\mathrm{P}_0]}{1+\mathbb{E}_{\mathtt{Q}}[\mathrm{P}_0]} > 0,$$

y también

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}_{\mathtt{Q}}}[S_1] = \mathbb{P}_{\mathtt{Q}}[S_1 = 1|\mathtt{W}_0 = c_1](q) + (-1)\mathbb{P}_{\mathtt{Q}}[S_1 = -1|\mathtt{W}_0 = c_2](1-q) = c_1(q) - c_2(1-q) < 0.$$

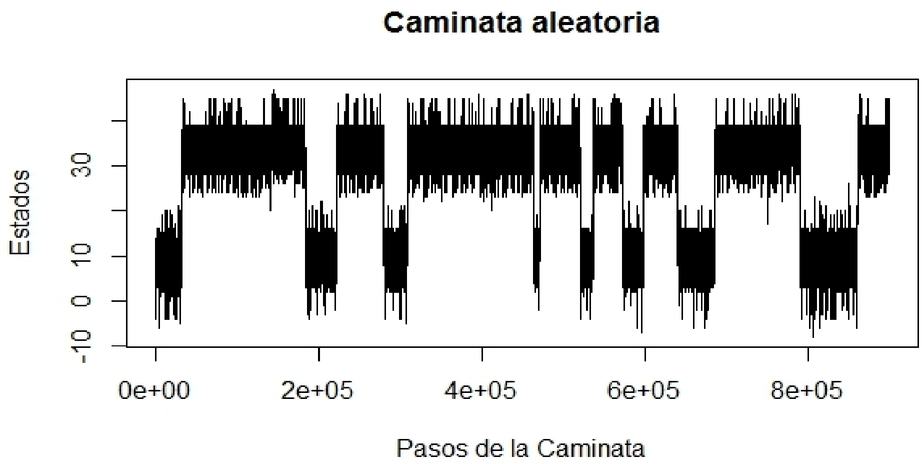

Figura 6.3: Trayectoria de RWRE en 900000 pasos cuando $\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = \frac{1-\mathbb{E}_{\mathtt{Q}}[\mathrm{P}_0]}{1+\mathbb{E}_{\mathtt{Q}}[\mathrm{P}_0]} > 0$ y $\mathbb{E}_{\mathbb{P}_{\mathtt{Q}}}[S_1]<0$.

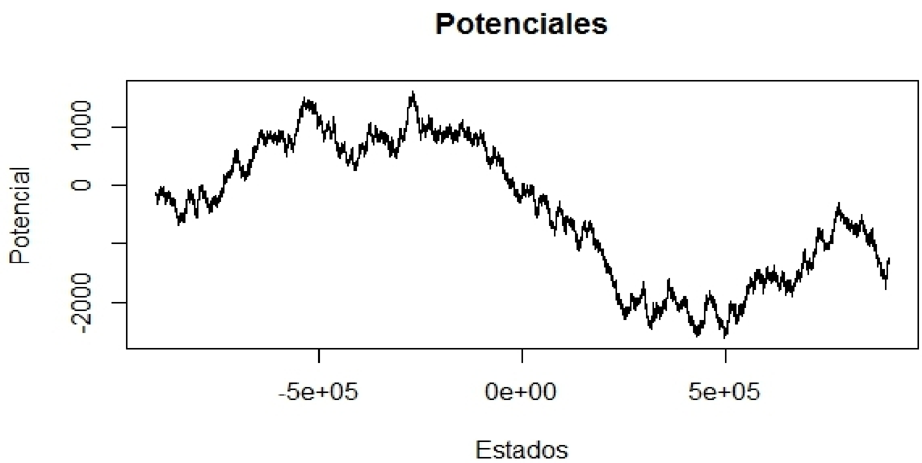

Figura 6.4: Potenciales inducidos por la distribución dw en el caso $\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = \frac{1-\mathbb{E}_{\mathtt{Q}}[\mathrm{P}_0]}{1+\mathbb{E}_{\mathtt{Q}}[\mathrm{P}_0]} > 0$ y $\mathbb{E}_{\mathbb{P}_{\mathtt{Q}}}[S_1]<0$.

Observe que $c > 0$ implica que debe ocurrir que $\mathbb{E}_{\mathtt{Q}}[\mathtt{P}_0] < 1$. Recuerde que en el Teorema 36 se estableció que esta condición implica que $\mathbb{E}_{\mathtt{Q}}[\log(\mathtt{P}_0)] < 0$, lo cual significa, por el Teorema 32, que $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$ $(\mathbb{P}_{\mathtt{Q}})-$c.s. De acuerdo con la figura 6.4, la gráfica de los potenciales, los potenciales negativos no indican persistencia ni comportamiento notablemente irregular, lo cual se debe a que, en caso de visitar dichos estados negativos, no permanece demasiado tiempo en ellos. En contraste con el potencial de los estados positivos, este refleja estancamiento y un comportamiento en general decreciente después del estado cero, que se acentúa en un entorno de estados centrado en 500000, esto es, cuando la cadena empieza a visitar estados no negativos y suficientemente grandes, permanece más tiempo dentro de ellos, aunque, una simulación con un número mayor de pasos debería reflejar un comportamiento similar en otros estados no negativos y mayores que 900000, puesto que la sucesión $\{S_n\}_{n\geq 0}$ diverge a $+\infty$ $(\mathbb{P}_{\mathtt{Q}})$-c.s.

Un hecho importante es el siguiente: El comportamiento de la caminata aleatoria está fuertemente ligado con el potencial correspondiente a los estados involucrados, más que con el valor de $\mathbb{E}_{\mathtt{Q}}[S_1]$. Note que en las caminatas aleatorias simétricas, donde las probabilidades de transición en un paso coinciden entre sí con un valor común, de acuerdo con el Corolario 12 (a la Ley Fuerte de los Grandes Números para caminatas aleatorias simétricas) el comportamiento asintótico está completamente determinado por $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[S_1]$.

Bibliografía

[Gan60] F.R. Gantmacher. *The Theory of Matrices*. 1960.

[Gra13] Guillermo Grabinsky. *Teoria de la Medida*. Las Prensas de Ciencias, UNAM, 2013.

[Hew94] Ross Hewitt. *Abstract Harmonic Analysis*. 1994.

[Kni09] O. Knill. *Probability Theory and Stochastic Processes with Applications*. 2009.

[Par05] K. R. Parthasarathy. *Probability Measures on Metric Spaces*. 2005.

[SHF03] E.Spence S. H. Friedberg, A. J. Insel. *Linear Algebra*. Prentice Hall, 2 edition, 2003.

[Sol75] Fred Solomon. Random walks in random environments. *The Annals of Probability*, 3(1):1–31, 1975.

[Wal00] Peter Walters. *An Introduction to Ergodic Theory*. Springer, 2000.