



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO**

FACULTAD DE CIENCIAS

**INTRODUCCIÓN A LA GEOMETRÍA DE LAS
CÓNICAS**

T E S I S

**QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
MATEMÁTICO**

P R E S E N T A:

RICARDO ROCA LANCE



**DIRECTOR DE TESIS:
DRA. NATALIA JONARD PÉREZ
2016**

Ciudad Universitaria, CDMX



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

1. Datos del alumno.

Roca

Lance

Ricardo

55812052

Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Matemáticas

403052457

2. Datos del tutor.

Dra.

Jonard

Pérez

Natalia

3. Datos de sinodal 1.

M. en C.

Struck

Chávez

Francisco de Jesús

4. Datos de sinodal 2.

M. en C.

Gómez

Ortega

José Antonio

5. Datos de sinodal 3.

Dr.

Gómez

Gutiérrez

Vinicio

6. Datos de sinodal 4.

Dr.

Bayard

Pierre Michel

7. Datos del trabajo escrito.

Introducción a la geometría de las cónicas

92 p.

2016

CONTENIDO

Introducción	5
Capitulo 1 Preliminares	7
Sección 1.1 Algunos teoremas clasicos de geometría elemental.	7
Sección 1.2 Propiedades aritméticas	17
Capitulo 2 Las cónicas a partir del cono.....	20
Sección 2.1 El cono y sus cortes	20
Sección 2.2 La Parábola.....	22
Sección 2.3 La Elipse.....	24
Sección 2.4 La Hipérbola.....	29
Capitulo 3 Partes y propiedades basicas de las cónicas.	34
Sección 3.1 Excentricidad, focos y directrices.	34
Sección 3.2 Diametros, tangentes y circunferencia de excentricidad.....	41
Sección 3.3 Normales, polos y polares.....	50
Capitulo 4 Propiedades específicas de cada cónica.	56
Sección 4.1 La Parábola.....	56
Fórmula analítica de la parábola.	57
Sección 4.2 La Elipse.....	58
Fórmula analítica de la elipse.....	67
Sección 4.3 La Hipérbola.....	67
Fórmula analítica de la hipérbola	75
Capitulo 5 Teoremas clasicos y aplicaciones.	77
Sección 5.1 La cuadratura de la parábola.	77
Sección 5.2 Envoltura de una parábola.....	80
Sección 5.3 Teorema de Lambert.	82

Sección 5.4 Poncelet.....	87
Sección 5.5 Duplicación del cubo.	89
Bibliografía.	92

INTRODUCCIÓN

El estudio de las cónicas es un tema muy antiguo que se remonta hasta antes del siglo III a. de C. Sin embargo, no fue hasta el 200 a. de C. cuando Apolonio de Perga realizó un tratado formal y sistematizado de las cónicas. A diferencia de sus antecesores que utilizaban conos en específico para trabajar cada una de las cónicas, Apolonio encontró que (casi) cualquier cónica se puede encontrar como la intersección de un cono arbitrario con un plano. Entre las muchas otras aportaciones que hizo Apolonio en sus libros, quizá lo más interesante para el estudio posterior de las cónicas es el haberlas caracterizado a través de propiedades en el plano que dependen exclusivamente de la sección cónica en cuestión.

Actualmente la forma de estudiar las cónicas se basa mayormente en técnicas analíticas y en los cursos básicos de educación media superior y superior, estudiar cónicas se reduce a resolver problemas algebraicos con el fin de encontrar focos, directrices excentricidad, etcetera. Otro enfoque, menos conocido, con el cual se suele abordar el estudio de las cónicas, lo encontramos en la geometría proyectiva. Sin embargo, existe un extenso acervo de la geometría de las cónicas que esconde un gran número de resultados que se pueden obtener con técnicas de geometría sintética. El objetivo de este trabajo es entender la geometría de las cónicas con estas técnicas y para ello comenzaremos desde sus orígenes; es decir, desde los trabajos de Apolonio.

En el capítulo 1 abordaremos muchos resultados conocidos de geometría elemental y aritmética básica, los cuales serán usados a lo largo de este trabajo. La mayoría de estos son teoremas clásicos de la geometría euclidiana.

En el capítulo 2 daremos la definición de cono como lo hizo Apolonio y demostraremos *la propiedad fundamental* de cada cónica (Proposiciones 11, 12 y 13 del Libro I de *Las Cónicas*, de Apolonio). Dichas propiedades permiten describir cada cónica por medio de un parámetro llamado lado recto. También en este capítulo veremos como cualquier cónica puede ser encajada en un cono recto como lo hace Apolonio en su Libro VI. Este hecho lo utilizaremos en el capítulo 3 para obtener las nociones de foco, directriz y excentricidad. Además de esto, en el capítulo 3 veremos varias propiedades generales de las cónicas (es decir, propiedades que no dependen de que la cónica sea una parábola, una elipse o una hipérbola) y hablaremos sobre las rectas tangentes, normales y polares.

En el capítulo 4 veremos propiedades específicas de cada cónica y demostraremos, entre otras cosas, que la longitud de la cuerda focal perpendicular al eje de cualquier cónica es

igual al lado recto. Además de abordar la fórmula analítica de cada cónica, estudiaremos diversas construcciones para cada una de ellas.

Por último, en el capítulo 5 veremos algunos teoremas clásicos referentes a las cónicas, como son la cuadratura de la parábola y el teorema de Lambert, entre otros. Para finalizar, concluiremos el trabajo con el famoso problema de la duplicación de cubo, el cual se cree que inspiró el estudio de las cónicas desde épocas ancestrales.

CAPITULO 1 PRELIMINARES

SECCIÓN 1.1 ALGUNOS TEOREMAS CLASICOS DE GEOMETRÍA ELEMENTAL.

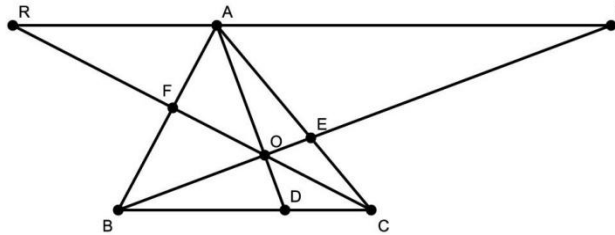
En esta sección probaremos algunos resultados muy conocidos en geometría, los cuales serán necesarios en la parte central de este trabajo.

Para los primeros dos teoremas, hacemos notar que utilizaremos segmentos dirigidos.

Teorema 1.1.1 (Teorema de Ceva): Si en un triángulo ABC se toman los puntos D, E y F sobre los lados BC, CA y AB respectivamente, entonces las rectas DA, EB y FC concurren si y sólo si:

$$\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = 1.$$

Demostración: Para demostrar la primera implicación, consideremos una recta l paralela a BC por A y sean R y S la intersección de l con las rectas CF y BE , respectivamente.



Observemos que el triángulo FAR es semejante a FBC y el triángulo AES es semejante a CEB . Esto implica que:

$$\frac{AF}{FB} = \frac{RA}{BC} \quad \text{y} \quad \frac{CE}{EA} = \frac{BC}{AS}. \quad (1)$$

Asimismo, veamos que los triángulos BOD y SOA son semejantes entre sí, al igual que los triángulos DOC y AOR . De aquí:

$$\frac{BD}{DO} = \frac{SA}{AO} \quad \text{y} \quad \frac{DO}{CD} = \frac{AO}{RA}.$$

Y por lo tanto, $\frac{BD}{DO} \cdot \frac{DO}{CD} = \frac{SA}{AO} \cdot \frac{AO}{RA}$. Al cancelar DO y AO tenemos que $\frac{BD}{CD} = \frac{AS}{RA}$ y al usar (1) llegamos a:

$$\frac{BD}{CD} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = \frac{SA}{RA} \cdot \frac{BC}{SA} \cdot \frac{RA}{BC} = 1$$

Para la segunda implicación llamemos O al punto de intersección de las rectas BE y CF y supongamos que AO corta a BC en un punto Q . Entonces, por la primera parte de la demostración tenemos que:

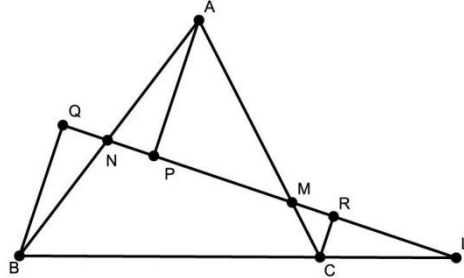
$$\frac{BQ}{QC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = 1$$

Y por hipótesis $\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = 1$, de donde se deduce que $\frac{BQ}{QC} = \frac{BD}{DC}$. De aquí concluimos que $D = Q$ y por lo tanto AD pasa por O .

◆

Teorema 1.1.2. (Teorema de Menelao): Sea ABC un triángulo. Si L, M y N son puntos sobre las rectas BC, CA y AB respectivamente, entonces L, M y N son colineales si y sólo si $\frac{AN}{NB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} = -1$.

Demostración: Para demostrar la primera implicación supongamos que L, M y N están sobre una recta. Sean P, Q y R las proyecciones de los vértices A, B, C , respectivamente sobre dicha recta. Como los triángulos APN y BQN son semejantes obtenemos $\frac{AN}{BN} = \frac{AP}{BQ}$.



También observemos que QBL es semejante a RCL y por lo tanto $\frac{BL}{CL} = \frac{QB}{RC}$. Asimismo, el triángulo APM es semejante al triángulo CRM lo cual implica que $\frac{CM}{AM} = \frac{CR}{AP}$.

De las igualdades anteriores obtenemos que $\frac{AN}{NB} = \frac{AP}{BQ}$, $\frac{BL}{LC} = \frac{QB}{CR}$ y $\frac{CM}{MA} = -\frac{CR}{AP}$, y por lo tanto:

$$\frac{AN}{NB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} = \frac{AP}{BQ} \cdot \frac{QB}{CR} \cdot \left(-\frac{CR}{AP}\right) = -\frac{AP}{BQ} \cdot \frac{QB}{CR} \cdot \frac{CR}{AP} = -1$$

Para demostrar la segunda implicación llamemos L' a la intersección de la recta MN con la recta BC . Por la primera implicación tenemos que $\frac{AN}{NB} \cdot \frac{BL'}{L'C} \cdot \frac{CM}{MA} = -1$ y por hipótesis tenemos que $\frac{AN}{NB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} = -1$ de donde se deduce que $L = L'$, lo cual completa la demostración.

◆

Construcción 1.1.3: Si M , O_1 y F_1 son tres puntos sobre una recta l tales que $\frac{F_1O_1}{O_1M} = e \neq 1$, encontrar $O_2 \neq O_1$ sobre l tal que $\frac{F_1O_2}{O_2M} = e$.

Sea T un punto fuera de l , tracemos los segmentos TM , TO_1 y TF_1 y sea S un punto cualquiera en el segmento TO_1 . Ahora tracemos las rectas MS y F_1S y sean Q y P las intersecciones de MS y F_1S con F_1T y MT , respectivamente. Por los teoremas 1.1.1 y 1.1.2 la intersección de QP con l es el punto buscado.

Teorema 1.1.4

a) Primer Teorema de Tales: Sea ABC un triángulo y sean D y E puntos sobre los lados de AB y AC , respectivamente. Entonces BC es paralela a DE si y sólo si $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$.

b) Segundo Teorema de Tales: Sean AD , BE y CF tres segmentos cortados por dos transversales en los puntos A, B, C y D, E, F , respectivamente. Si AD , BE y CF son paralelas entonces $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$. Recíprocamente si $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$ y dos de los segmentos son paralelos entonces los tres segmentos son paralelos.

Demostración:

a): Para la primera implicación observemos que el área del triángulo ABE es igual a la suma de las áreas de los triángulos ADE y BDE , además los triángulos ABE y ADE tienen la misma altura h_1 y por lo tanto, $\frac{AB \cdot h_1}{2} = \frac{AD \cdot h_1}{2} + \frac{DE \cdot h_2}{2}$. donde h_2 es la altura por B del triángulo DEB . Ahora como el área del triángulo ADC es igual a la suma de las áreas de los triángulos ADE y DEC y como BC es paralela a DE la altura de los triángulos DEC y DEB , tomando como base DE , es la misma (h_2). Así tenemos que $\frac{AC \cdot h_3}{2} = \frac{AD \cdot h_1}{2} + \frac{DE \cdot h_2}{2}$ donde h_3 es la altura por D del triángulo ADC . Esto implica que $\frac{AB \cdot h_1}{2} = \frac{AC \cdot h_3}{2}$ es decir, los triángulos ADC y AEB tienen la misma área. Por esta última igualdad y tomando el área del triángulo ADE con diferentes bases tenemos que

$$\frac{AB}{AD} = \frac{\frac{AB \cdot h_1}{2}}{AD \cdot h_1} = \frac{\frac{AC \cdot h_3}{2}}{\frac{AE \cdot h_3}{2}} = \frac{AC}{AE}$$

Tomando los extremos de esta igualdad concluimos que $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$ que es lo que queríamos probar.

De esta última igualdad observemos que $\frac{AD+DB}{AD} = \frac{AE+EC}{AE}$ o equivalentemente $\frac{DB}{AD} = \frac{EC}{AE}$.

Para demostrar la segunda implicación supongamos que $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$ consideremos la paralela a DE que pase por B y sea C' la intersección de dicha paralela con AC . Por la implicación anterior tenemos que $\frac{AB}{AD} = \frac{AC'}{AE}$ y por la hipótesis concluimos que $\frac{AC}{AE} = \frac{AC'}{AE}$ y por lo tanto $AC' = AC$. Esto implica que $C' = C$, que es lo que queríamos demostrar.

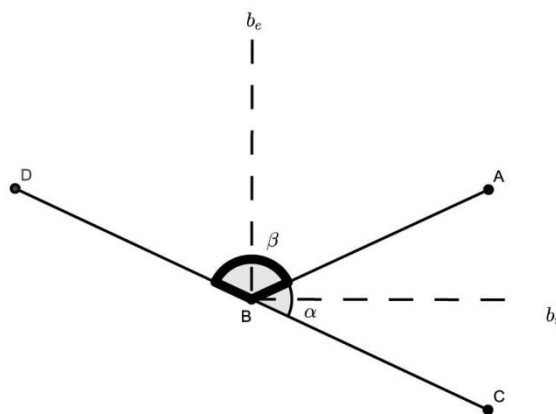
b): Supongamos que AD, BE y CF son paralelas entre sí, A, B, C y D, E, F son los puntos en donde cortan las dos transversales a dichas rectas y sea G el punto de intersección del segmento AF por BE . Observemos que por el Primer teorema de Tales, en los triángulos ACF y FDA se cumple que $\frac{AB}{BC} = \frac{AG}{GF}$ y $\frac{FE}{ED} = \frac{FG}{GA}$ luego, de esta última igualdad podemos observar que $\frac{GA}{FG} = \frac{ED}{FE} = \frac{DE}{EF} = \frac{AG}{GF}$ y por lo tanto $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$.

Para demostrar la segunda implicación veamos que si BE y CF son paralelas y AD cumple que $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$ entonces, AD es paralela a BE . Consideremos G de igual forma que en la implicación anterior, por el primer Teorema de Tales tenemos que $\frac{AB}{BC} = \frac{AG}{GF}$ y por hipótesis $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$ por lo tanto $\frac{AG}{GF} = \frac{DE}{EF}$. Aplicando nuevamente el primer Teorema de Tales se deduce que AD es paralela a GE . Que es lo que se quería demostrar.



Lema 1.1.5: Las bisectrices interna y externa de un ángulo forman un ángulo recto.

Demostración: Sean BA y BC dos semirectas que se intersecan en un punto B y sean b_i y b_e las bisectrices interna y externa del ángulo $\sphericalangle CBA = \alpha$ y sea β el ángulo formado por las



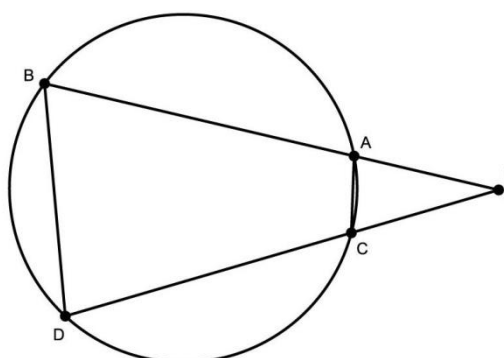
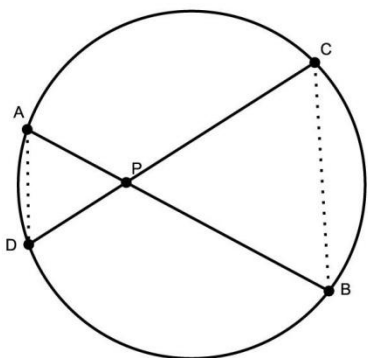
rectas AB y BD donde D está en la prolongación de CB . Observemos que $\alpha + \beta = 180$ de donde $\frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{180}{2}$. Esto implica que $\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = 90$, que es justo el ángulo formado por las dos bisectrices.



Lema 1.1.6: Si dos cuerdas AB y CD de una circunferencia se intersectan en un punto P entonces $PA \cdot PB = PC \cdot PD$. El valor $PA \cdot PB$ se conoce como la potencia de P respecto a la circunferencia.

Demostración: Caso 1. Si P está sobre la circunferencia, podemos suponer que $A = P = C$, de donde $PA = PC = 0$ y por lo tanto $0 \cdot PB = 0 \cdot PD = 0$.

Caso 2. Si P está dentro de la circunferencia tenemos que $\sphericalangle APD = \sphericalangle CPB$ ya que son ángulos opuestos por el vértice, además $\sphericalangle ADC = \sphericalangle ABC$ y $\sphericalangle DAB = \sphericalangle DCB$ debido a que abren el mismo arco. Por lo tanto los triángulos APD y CPB son semejantes de donde $\frac{PA}{PC} = \frac{PD}{PB}$, lo cual implica que $PA \cdot PB = PC \cdot PD$.



Caso 3. Si P está fuera de la circunferencia tenemos que $\sphericalangle PAC = \sphericalangle PDB$ y $\sphericalangle PCA = \sphericalangle PBD$ ya que $ACDB$ es un cuadrilátero cíclico. Por lo tanto PAC y PDB son triángulos semejantes, de donde $\frac{PA}{PC} = \frac{PD}{PB}$. Esto demuestra que $PA \cdot PB = PC \cdot PD$.



Como consecuencia inmediata del Lema 1.1.6 tenemos lo siguiente.

Corolario 1.1.7: Sea ABC un triángulo inscrito en un círculo de manera que AC es un diámetro. Si llamamos D al pie de la perpendicular a AC por B , entonces, $BD^2 = AD \cdot DC$.

Lema 1.1.8: Si ABC es un triángulo inscrito en una circunferencia c y P está en la prolongación de BA de tal forma que PC es tangente a c , entonces, $PC^2 = PA \cdot PB$.

Demostración: Tenemos que $\sphericalangle BPC = \sphericalangle APC$. Y como el ángulo seminscrito $\sphericalangle ACP$ es igual al ángulo inscrito $\sphericalangle PBC$ concluimos que los triángulos PAC y PCB son semejantes. Esto implica que $\frac{PC}{PB} = \frac{PA}{PC}$ y por lo tanto,

$$PC^2 = PA \cdot PB.$$



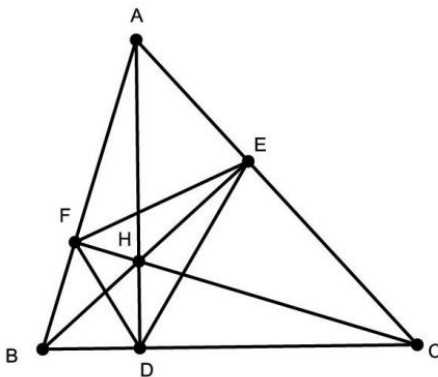
Recordemos que el triángulo órtico de un triángulo ABC es aquél formado por los pies de las alturas de ABC .

Teorema 1.1.9: El ortocentro de un triángulo acutángulo es el incentro del triángulo órtico.

Demostración: Sea ABC un triángulo acutángulo y sean D, E y F los pies de las alturas de los lados BC, CA y AB , respectivamente. Observemos que $BFEC$ es un cuadrilátero cíclico de donde los ángulos $\sphericalangle EBF$ y $\sphericalangle FCE$ son iguales ya que abren el mismo arco. Si H es el ortocentro de ABC entonces $FHDB$ y $EHDC$ son también cuadriláteros cíclicos y por lo tanto:

$$\sphericalangle HDF = \sphericalangle HBF = \sphericalangle EBF = \sphericalangle ECF = \sphericalangle ECH = \sphericalangle EDH.$$

Si vemos los extremos de la igualdad, concluimos que HD es la bisectriz del ángulo $\sphericalangle FDE$.



Análogamente HE es la bisectriz del ángulo $\sphericalangle DEF$, y HF es la bisectriz de $\sphericalangle DFE$, lo cual demuestra el teorema.



Teorema 1.1.10 (Teorema de Simson): Si A', B' y C' son las proyecciones desde un punto P sobre los lados de un triángulo ABC , entonces A', B' y C' son colineales si y sólo si P está en la circunferencia que circunscribe al triángulo ABC .

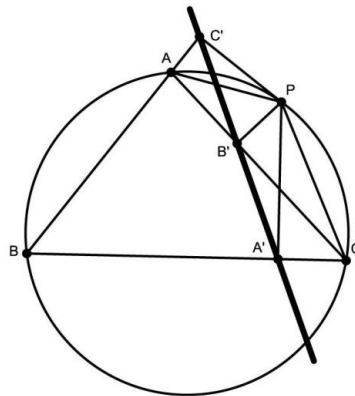
Demostración: Sea ABC un triángulo y A', B' y C' las proyecciones desde un punto P a los lados BC, AC y AB , respectivamente.

Supongamos que P está sobre la circunferencia que circunscribe al triángulo ABC . Sin perder la generalidad supongamos que P está en el arco AC opuesto al vértice B y demostremos que A', B' y C' están sobre una recta. En efecto, observemos que $ABCP$ y $BA'PC'$ son cuadriláteros cíclicos de donde: $\sphericalangle APC = 180^\circ - \sphericalangle ABC$ y $\sphericalangle C'PA' = 180^\circ - \sphericalangle ABC$. Al igualar tenemos que $\sphericalangle APC = \sphericalangle C'PA'$ y al restar el ángulo $\sphericalangle APA'$ en la igualdad anterior

obtenemos que: $\angle A'PC = \angle C'PA$. Por otro lado, los cuadriláteros $AB'PC'$ y $A'B'PC$ son cíclicos de donde $\angle C'B'A = \angle C'PA$ y $\angle A'B'C = \angle A'PC$, lo cual implica que:

$$\angle C'B'A = \angle C'PA = \angle A'PC = \angle A'B'C.$$

Observando los extremos de la igualdad anterior, concluimos que A', B' y C' están sobre una recta.



Ahora supongamos que A', B' y C' están sobre una recta y demostremos que P está en la circunferencia circunscrita a ABC . Evidentemente $\angle C'B'A = \angle A'B'C$ y al ser $AB'PC'$ y $A'B'CP$ cuadriláteros cíclicos tenemos que $\angle C'PA = \angle C'B'A = \angle A'B'C = \angle A'PC$. Si sumamos el ángulo $\angle APA'$ a los extremos de la igualdad anterior obtenemos que $\angle APC = \angle C'PA'$. Observemos que $BA'PC'$ también es un cuadrilátero cíclico y por lo tanto $180^\circ - \angle ABC = \angle C'PA' = \angle APC$. Esto implica que $ABCP$ es cíclico, como se quería demostrar.



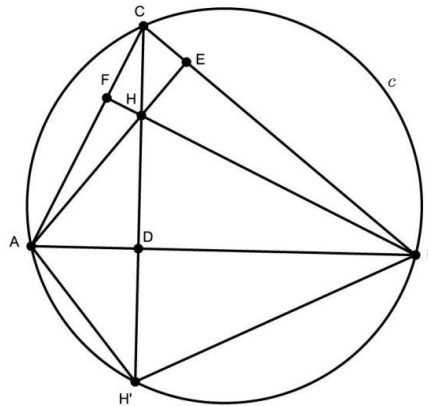
En el teorema anterior, la recta determinada por A', B' y C' se llama recta de Simson respecto al punto P .

Lema 1.1.11: Sea ABC un triángulo inscrito en una circunferencia c . Si tomamos como eje de simetría cualquiera de los lados del triángulo entonces el reflejado del ortocentro H está sobre c .

Demostración: Sin perder la generalidad, tomemos el lado AB como eje de simetría y sea H' el reflejado de H sobre AB . Sean D, E y F los pies de las alturas de los lados AB, BC y CA , respectivamente. Observemos que los triángulos FHC y DHB son semejantes de donde $\angle HCF = \angle HBD$. Análogamente los triángulos EHC y DHA son semejantes y por lo tanto $\angle ECH = \angle DAH$. Entonces:

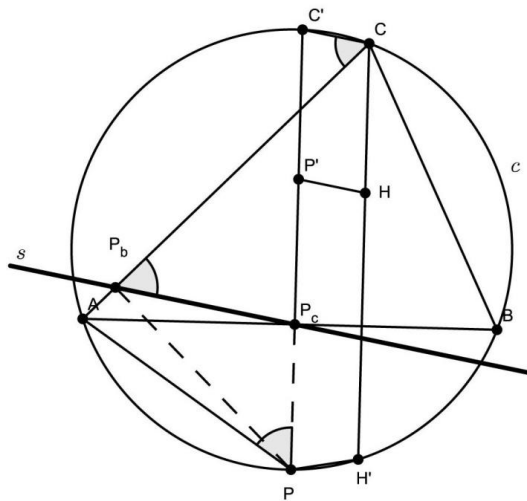
$$\angle AHB = 180^\circ - (\angle DAH + \angle HBD) = 180^\circ - \angle ACB.$$

Como $\angle AHB = \angle AH'B$ entonces $ABCH'$ es cíclico, lo cual completa la demostración.



Lema 1.1.12: Consideremos ABC un triángulo inscrito en una circunferencia c . Sean P un punto cualquiera en c y s la recta de Simson asociada a P . Si C' es la intersección de c con la perpendicular a AB por P , entonces CC' es paralela a s .

Demostración: Sean P_b y P_c los pies de las perpendiculares por P a CA y AB respectivamente. Entonces, $\angle AP_bP = \angle AP_cP = 90^\circ$ lo cual quiere decir que APP_bP_c es



cíclico siendo AP el diámetro. Además $\angle APC' = \angle C'CA$ ya que ambos ángulos subtenden el arco AC' . Así

$$\angle APC' = \angle APP_c = 180^\circ - \angle AP_bP_c = \angle CP_bP_c.$$

De aquí concluimos que $\angle C'CA = \angle APC' = \angle CP_bP_c$ y por lo tanto P_bP_c es paralela a CC' que es lo que queríamos demostrar.



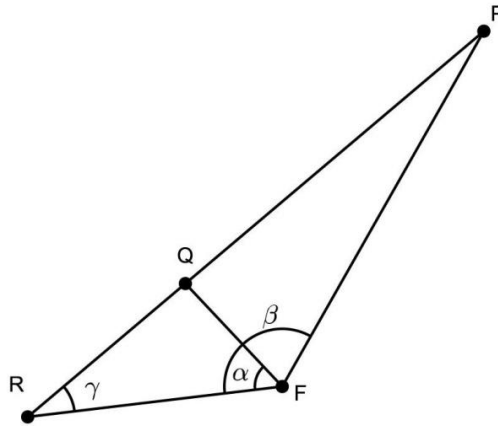
Teorema 1.1.13: Sea s la línea de Simson asociada a un punto P en la circunferencia del triángulo ABC y sea H el ortocentro de dicho triángulo. Entonces s divide al segmento PH en dos partes iguales.

Demostración: Supongamos sin perder la generalidad que P está en el arco AB del circuncírculo de ABC . Sea H' el reflejado de H sobre AB . Por el Lema 1.1.11, H' está en la circunferencia. Si P_c es la proyección de P sobre AB , entonces las rectas PP_c y $H'H$ son perpendiculares a AB y por lo tanto PP_c y $H'H$ son paralelas entre sí. Esto implica que $CC'PH'$ es un trapecio isósceles donde C' es la intersección de PP_c con la circunferencia. Si P' es el reflejado de P sobre AB entonces el segmento $P'H$ es el reflejado de PH' de donde se deduce que $P'H$ es paralela a CC' y por el Lema 1.1.12 $P'H$ es paralela a s . Pero al ser P_c el punto medio de PP' por el Teorema de Tales aplicado al triángulo $P'HP$ concluimos que s divide al segmento PH a la mitad.



Lema 1.1.14: Sea PRF un triángulo y QF un segmento de recta con Q en PR . Llamemos $\alpha = \angle RFQ$ y $\beta = \angle RFP$. Si $\frac{PF}{QF} = \frac{PR}{QR}$ entonces $\text{sen } \alpha = \text{sen } \beta$ en particular los ángulos α y β son iguales o suplementarios.

Demostración: Sea $\gamma = \angle PRF$ entonces por la ley de senos en el triángulo PRF y QRF tenemos que $\frac{\text{sen } \gamma}{PF} = \frac{\text{sen } \beta}{PR}$ y $\frac{\text{sen } \gamma}{QF} = \frac{\text{sen } \alpha}{QR}$ respectivamente.



Despejando $\text{sen } \gamma$ en las igualdades anteriores tenemos que $\text{sen } \beta \cdot \frac{PF}{PR} = \text{sen } \alpha \cdot \frac{QF}{QR}$ y como $\frac{PF}{QF} = \frac{PR}{QR}$ concluimos que $\text{sen } \alpha = \text{sen } \beta$, que es lo que queríamos demostrar.



Teorema 1.1.15 (Propiedad Óptica):

a) Sea l una recta y sean F_1 y F_2 dos puntos fuera de ella y en un mismo semiplano determinado por l . Para cualquier punto X en l la suma $F_1X + XF_2$ alcanza el mínimo cuando el ángulo determinado por F_1X y l es igual al ángulo entre F_2X y l .

b) Sean F_1 y F_2 dos puntos en lados opuestos de una recta l y sea P un punto en l . Entonces el valor absoluto de la diferencia de las distancias de P a F_1 y de P a F_2 es maximal si l es bisectriz del ángulo F_1PF_2 .

Demostración a): Tomemos F_2' el reflejado de F_2 sobre l y tracemos la recta F_1F_2' y sea X la intersección de l con la recta F_1F_2' . Llamemos a P y Q a las proyecciones de F_1 y F_2 en l , respectivamente. Entonces, $XF_2 = XF_2'$ y el ángulo $\sphericalangle F_2XQ = \sphericalangle QXF_2' = \sphericalangle F_1XP$. Demostremos ahora que $F_1X + XF_2$ es mínimo. Sea X' un punto en l distinto de X . Por la desigualdad del triángulo $F_1X' + X'F_2 = F_1X' + X'F_2' > F_1F_2'$, pero $F_1F_2' = F_1X + XF_2' = F_1X + XF_2$ y por lo tanto $F_1X' + X'F_2 > F_1X + XF_2$. Esto demuestra lo que queríamos probar.

Observemos en la demostración anterior que l es bisectriz externa del ángulo $\sphericalangle F_1XF_2$.

b): Sea F_2' el reflejado de F_2 en l . Entonces por la desigualdad del triángulo tenemos, que para cualquier punto P en l se cumple

$$|F_1P - F_2'P| \leq F_1F_2'$$

La igualdad anterior se alcanza cuando P está en la recta F_1F_2' . Como F_2' es el reflejado de F_2 , entonces l es la bisectriz interna de F_1PF_2 , como se quería probar.



Lema 1.1.16: Sea O el punto medio de un segmento PQ . Si Y es un punto en el segmento PQ y R está en la prolongación del rayo PQ . Entonces:

$$\text{a) } |PY - YQ| = 2OY, \text{ y b) } PR + QR = 2OR.$$

Demostración: a) Sin perder la generalidad supongamos que Y está entre OQ entonces $PY = PO + OY$, como O es el punto medio se infiere que $PO = OQ$ de donde $PY - YQ = OQ + OY - YQ$ pero $OQ - YQ = OY$. Por lo tanto $PY - YQ = 2OY$, que es lo que se quería demostrar.

b) Como R está en la prolongación de PQ tenemos que $PR = PO + OR$, además O es el punto medio de PQ de donde $PO = OQ$. Así $PR + QR = OR + OQ + QR$ y por lo tanto $PR + QR = 2OR$, como se quería demostrar.

SECCIÓN 1.2 PROPIEDADES ARITMÉTICAS

En esta sección demostraremos algunas propiedades aritméticas muy sencillas que se utilizarán más adelante.

Definición 1.2.1: La media armónica de dos números positivos a y b es un número c talque $c = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$ ó equivalentemente $\frac{2}{c} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$.

Recordemos que un segmento de recta AB está dividido armónicamente por C y D si, tomando segmentos dirigidos, se cumple la igualdad

$$\frac{AC}{CB} = -\frac{AD}{DB}.$$

En este caso se dice que A y B son conjugados armónicos respecto a C y D .

Lema 1.2.2: Si los puntos A y B son conjugados armónicos con respecto a C y D entonces la longitud del segmento AB es la media armónica de AC y AD .

Demostración: De la Definición 1.2.1 tenemos que $\frac{AC}{CB} = -\frac{AD}{DB}$, lo cual es equivalente a $\frac{BD}{AD} = \frac{CB}{AC}$. Al multiplicar la igualdad anterior por $\frac{1}{AB}$ obtenemos que $\frac{BD}{AD \cdot AB} = \frac{CB}{AC \cdot AB}$ y sustituyendo BD y CB , nos queda

$$\frac{AD - AB}{AD \cdot AB} = \frac{AB - AC}{AC \cdot AB}.$$

Por lo tanto $\frac{1}{AB} - \frac{1}{AD} = \frac{1}{AC} - \frac{1}{AB}$ y de aquí inferimos que

$$\frac{2}{AB} = \frac{1}{AD} + \frac{1}{AC},$$

lo cual quiere decir que AB es la media armónica de AC y AD .



Lema 1.2.3: Si a, b, c, d, e y f son números positivos tales que $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$ entonces c es la media armónica de a y e si y sólo si d es la media armonica de b y f .

Demostración: Supongamos que d es la media armónica de b y f , es decir $\frac{2}{d} = \frac{1}{b} + \frac{1}{f}$. Entonces $2 = \frac{d}{b} + \frac{d}{f}$, además $a = \frac{c \cdot b}{d}$ y $e = \frac{c \cdot f}{d}$ por lo que $\frac{1}{a} + \frac{1}{e} = \frac{d}{c \cdot b} + \frac{d}{c \cdot f} = \frac{1}{c} \left(\frac{d}{b} + \frac{d}{f} \right) = \frac{2}{c}$. Esto

implica que c es la media armónica de a y e . Para demostrar la otra implicación se hace un procedimiento análogo.



Recordemos que la media geométrica de dos números a y b está dada por \sqrt{ab} . Es un hecho conocido que dados $a \geq 0$ y $b \geq 0$ se cumple la desigualdad

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}.$$

Dicha desigualdad se le conoce como la desigualdad de la media aritmética y la media geométrica.

Además la igualdad se alcanza si y sólo si $a = b$ [6, Ejemplo 1.5.10].

Lema 1.2.4: Sea c una constante positiva y $x \neq \frac{c}{2}$ un valor tal que $0 \leq x \leq c$. Entonces $\left(\frac{c}{2}\right)^2 > x(c-x)$.

Demostración: Como $x \neq \frac{c}{2}$, entonces $x \neq c-x$. Por la desigualdad de la media geométrica sabemos que

$$\frac{c}{2} = \frac{x + (c-x)}{2} > \sqrt{x(c-x)}.$$

Como los extremos de la desigualdad son positivos, al elevar al cuadrado se preserva la desigualdad obteniendo

$$\left(\frac{c}{2}\right)^2 > x(c-x).$$



Lema 1.2.5: Sean a, b, c, d, e y n números reales positivos.

- a) Si $e = \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ entonces $\frac{a+c}{b+d} = e$.
- b) Si $e = \frac{a}{b} = \frac{na+c}{nb+d}$ entonces $\frac{c}{d} = e$.

Demostración:

- a) Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, al despejar a se tiene que $a = \frac{cb}{d}$ y por lo tanto

$$\frac{a+c}{b+d} = \frac{\frac{cb}{d} + c}{b+d} = \frac{\frac{cb+dc}{d}}{b+d} = \frac{\frac{c(b+d)}{d}}{b+d} = \frac{c}{d} = e.$$

b) Como $\frac{a}{b} = \frac{na+c}{nb+d}$, tenemos que $a(nb+d) = b(na+c)$ y por lo tanto

$$nab + ad = nab + bc.$$

Al cancelar el término nab , se tiene que $ad = bc$ lo cual implica:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = e.$$



CAPITULO 2 LAS CÓNICAS A PARTIR DEL CONO

SECCIÓN 2.1 EL CONO Y SUS CORTES

Consideremos un plano π y una circunferencia c en π . Tomemos un punto V fuera del plano.

Definición 2.1.1: El conjunto de todas las rectas que unen a V con c se llama **cono**, a cada una de estas rectas se llama generatriz. En este caso el punto V será el vértice del cono, la recta que une a V con el centro de c será el eje del cono y la circunferencia c será la base del cono. Si el eje del cono es ortogonal a π entonces lo llamaremos **cono recto**, en caso contrario lo llamaremos **cono oblicuo**.

Observemos que la base no es única, y por cada plano paralelo a π obtenemos un base distinta del mismo cono.

Proposición 2.1.2: Sea \mathcal{K} un cono con vértice V y base c . Supongamos que τ es un plano arbitrario que pasa por V . Entonces el plano τ corta a \mathcal{K} en un punto, una recta o dos rectas.

Demostración: Observemos que si τ corta a \mathcal{K} en un punto Q distinto del vértice V , entonces la recta VQ queda completamente contenida en la intersección de \mathcal{K} con τ . De esta manera, surgen tres casos:

Caso1: Si $\tau \cap c = \emptyset$, entonces τ corta a \mathcal{K} únicamente en el punto V .

Caso2: Si $\tau \cap c = \{Q\}$, entonces la intersección de \mathcal{K} con τ es la recta VQ .

Caso 3: Si $\tau \cap c = \{Q_1, Q_2\}$, entonces la intersección de \mathcal{K} con τ son dos rectas VQ_1 y VQ_2 .

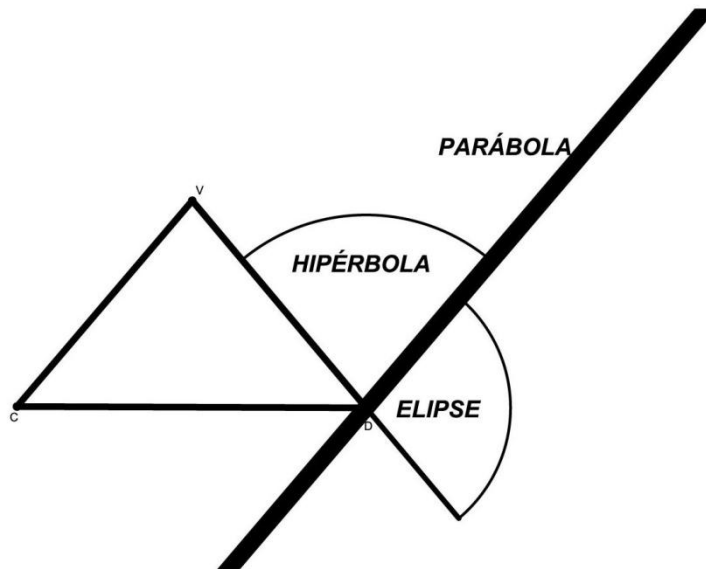


En la proposición anterior, si τ contiene al eje entonces la intersección de τ con \mathcal{K} se llama **triángulo axial**.

Definición 2.1.3: Sea τ cualquier plano que no pase por V entonces la intersección con \mathcal{K} es no vacía y la llamaremos **sección cónica** (o simplemente **cónica**). De esto se derivan 3 casos:

- a) Si τ es paralelo a una generatriz entonces a la sección cónica recibe el nombre de **parábola**.

- b) Si τ corta a las dos hojas del cono entonces a la sección cónica recibe el nombre de **hipérbola**.
- c) En cualquier otro caso la sección cónica se llama **elipse**. Si τ es paralela a la base entonces la intersección es una circunferencia lo cual es un caso particular de la elipse.



Si q es una sección cónica, usaremos la notación $q = \mathcal{K} \cap \tau$, para indicar que q se obtiene al intersecar el plano τ con el cono recto \mathcal{K} .

Definición 2.1.4: El **eje** de una cónica $q = \mathcal{K} \cap \tau$ es la recta que se obtiene al intersecar el plano τ con el triángulo axial perpendicular a la intersección de τ con la base del cono. Los puntos de intersección del eje con la cónica los llamaremos **vértices**.

Observemos que en el caso de la elipse y de la hipérbola siempre habrá dos vértices (que denotaremos usualmente como O_1 y O_2) y en el caso de la parábola un único vértice (que lo denotaremos como O). Si q es una hipérbola el segmento O_1O_2 se llama **eje transverso**. El caso de la elipse es un poco más complicado y lo veremos más adelante en la sección 2.3

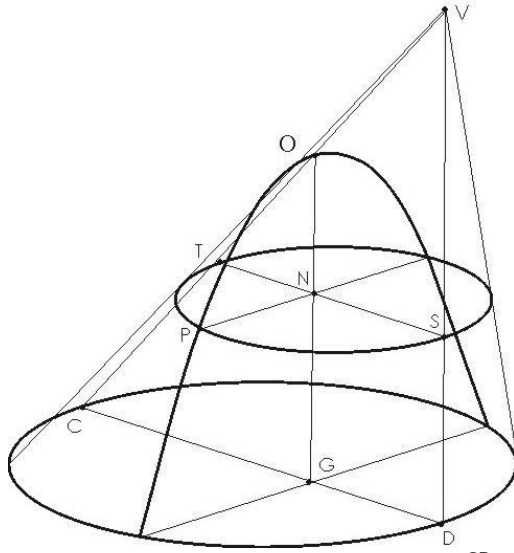
Diremos que dos secciones cónicas son **congruentes** si se puede encimar una en la otra sin que ninguna exceda a la otra. En otras palabras, dadas dos cónicas q y q' con vértices O y O' , para cualquier N y N' puntos en el eje tales que $ON = O'N'$, si P y P' son puntos en q y q' , respectivamente, tales que PN es perpendicular a ON y $P'N'$ es perpendicular a $O'N'$, entonces $PN = P'N'$.

SECCIÓN 2.2 LA PARÁBOLA

El siguiente resultado es considerado por Apolonio como la propiedad básica de la parábola. La cual está en la Proposición 11 del primer libro de *Las Conicas*. [2]

Proposición 2.2.1: Sea $q = \mathcal{K} \cap \tau$ una parábola. Existe una constante θ tal que para cualquier punto P de q se satisface la siguiente ecuación: $PN \cdot PN = \theta \cdot NO$, donde N es el pie de la perpendicular al eje por el punto P y O es el vértice de la parábola. La constante θ se llama **lado recto**.

Demostración: Sea VCD el triángulo axial cuya base CD es perpendicular a la intersección de la base con el plano τ que genera a la parábola, y la generatriz VD es paralela al plano τ ,



siendo V el vértice del cono \mathcal{K} . Observemos que el valor $\frac{CD}{CV} \cdot \frac{CD}{DV}$ es constante y no depende de la base del cono que hayamos tomado. Sea O el vértice de la parábola entonces OV es una constante que sólo depende de q , podemos definir θ como el valor que satisface la siguiente ecuación.

$$\frac{\theta}{OV} = \frac{CD}{CV} \cdot \frac{CD}{DV}. \quad (1)$$

En otras palabras $\theta = \left(\frac{CD}{CV} \cdot \frac{CD}{DV}\right) \cdot OV$.

Llamemos G a la intersección del eje de la parábola con la base de triángulo axial DC . Sean S y T puntos en las rectas VD y VC , respectivamente, tales que el segmento ST es paralelo a DC . Llamemos N a la intersección de ST con OG . Como VD es paralela a OG , tenemos que

$$\frac{CD}{CV} = \frac{GD}{OV} = \frac{SN}{OV} \text{ y } \frac{CD}{DV} = \frac{CG}{GO} = \frac{TN}{ON}.$$

Al sustituir en la ecuación (1), tenemos que

$$\frac{\theta}{OV} = \frac{SN}{OV} \cdot \frac{TN}{ON}. \quad (2)$$

Sea P un punto en la intersección de la parábola con la recta perpendicular a TS por N . Observemos que los puntos P , S y T se encuentran en una circunferencia paralela a la base del cono, y el punto N es el punto medio de la cuerda perpendicular a ST que pasa por P . Así, usando el Corolario 1.1.7 tenemos que $PN^2 = SN \cdot TN$. Y por lo tanto, al sustituir en (2) tenemos:

$$\frac{\theta}{OV} = \frac{PN}{OV} \cdot \frac{PN}{ON}.$$

De esta última igualdad concluimos que $\theta \cdot ON = PN \cdot PN$ lo cual completa la demostración.



Proposición 2.2.2: Sean q y q' dos parábolas con lados rectos θ y η , respectivamente. Entonces q y q' son congruentes si y solo si $\theta = \eta$.

Demostración: Sean N y N' puntos sobre el eje de q y q' , respectivamente tales que $NO = N'O'$, donde O y O' son los vértices de q y q' , respectivamente. Sean P y P' puntos en q y q' , tales que PN es ortogonal NO y $P'N'$ es ortogonal a $N'O'$.

Por la Proposición 2.2.1, sabemos que $NO \cdot \theta = PN \cdot PN$ y $N'O' \cdot \eta = P'N' \cdot P'N'$ entonces q y q' son congruentes si y sólo si $PN = P'N'$ lo cual sucede si y sólo si

$$NO \cdot \theta = PN \cdot PN = P'N' \cdot P'N' = N'O' \cdot \eta.$$

Como $NO = N'O'$, lo anterior es cierto si y sólo si $\theta = \eta$ lo cual completa la demostración.



Teorema 2.2.3: Sea \mathcal{K} un cono recto y q una parábola con lado recto θ , entonces existe un plano τ talque $\mathcal{K} \cap \tau$ es una parábola congruente con q .

Demostración: Sea VCD el triángulo axial de \mathcal{K} con base CD siendo V el vértice del cono \mathcal{K} . Sea O un punto en el lado VC del triángulo tal que $\frac{\theta}{OV} = \frac{CD}{CV} \cdot \frac{CD}{DV}$.

Sea τ el plano paralelo a VD que pasa por O y ortogonal al triángulo axial. Evidentemente la parábola $q' = \mathcal{K} \cap \tau$ tiene lado recto θ y por la Proposición 2.2.2 q es congruente con q' .

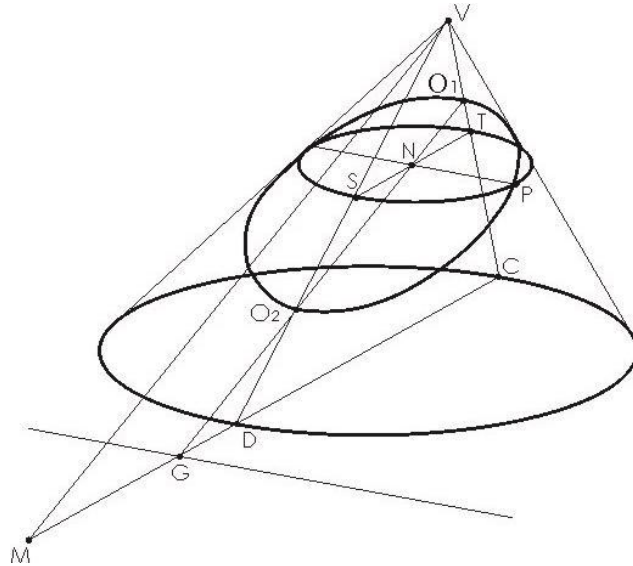


SECCIÓN 2.3 LA ELIPSE

El siguiente resultado, es considerado por Apolonio como la propiedad básica de la Elipse y corresponde a la Proposición 13 del libro 1 de *Las cónicas*. [2]

Proposición 2.3.1: Sea $q = \mathcal{K} \cap \tau$ una elipse, entonces existe una constante θ tal que para cualquier punto P de q satisface la siguiente ecuación: $PN \cdot PN = \theta \cdot \frac{NO_1 \cdot NO_2}{O_1O_2}$ donde O_1 y O_2 son los vértices de la elipse y N es el pie de la perpendicular al eje por el punto P . La constante θ se llama lado recto respecto a O_1O_2 .

Demostración: Sea VCD el triángulo axial cuya base es CD siendo V el vértice del cono \mathcal{K} . Supongamos que τ corta a los lados VC y VD del triángulo axial en los puntos O_1, O_2 , respectivamente, generando una elipse con eje O_1O_2 . Tracemos una recta paralela a O_1O_2 por V y sea M la intersección de dicha recta con la prolongación de CD . Observemos que el valor $\frac{CM}{MV} \cdot \frac{MD}{MV}$ es constante y no depende de la base del cono que hayamos tomado.



Como O_1O_2 es una constante que solo depende de q , podemos definir $\theta = \left(\frac{CM}{MV} \cdot \frac{MD}{MV}\right) \cdot O_1O_2$ O, equivalentemente:

$$\frac{\theta}{O_1O_2} = \frac{CM}{MV} \cdot \frac{MD}{MV}. \quad (1)$$

Llamemos G a la intersección del eje de la elipse con la recta DC . Sean S y T puntos en las generatrices VD y VC , respectivamente, tales que el segmento ST sea paralelo a DC de manera que corte al eje mayor O_1O_2 en el punto N entonces tenemos que

$$\frac{CM}{MV} = \frac{TN}{NO_1} \text{ y } \frac{MD}{MV} = \frac{NS}{NO_2}.$$

Al sustituir en la ecuación (1), tenemos que:

$$\frac{\theta}{O_1O_2} = \frac{TN}{NO_1} \cdot \frac{NS}{NO_2}. \quad (2)$$

Sea P un punto en la elipse, tal que P está en la intersección de la elipse con la recta perpendicular TS por N . Observemos que los puntos P , S y T se encuentran en una circunferencia paralela a la base del cono, y el punto N es el punto medio de la cuerda perpendicular a ST que pasa por P . Así, usando el Corolario 1.1.7 tenemos que $PN^2 = NS \cdot TN$, y por lo tanto al sustituir en (2) llegamos a:

$$\frac{\theta}{O_1O_2} = \frac{PN}{NO_1} \cdot \frac{PN}{NO_2}.$$

De esta última igualdad concluimos que $PN \cdot PN = \theta \cdot \frac{NO_1 \cdot NO_2}{O_1O_2}$, que es lo que queríamos demostrar.



Teorema 2.3.2: Sea $q = \mathcal{K} \cap \tau$ una elipse con eje O_1O_2 y lado recto θ . Si U_1U_2 es el segmento ortogonal a O_1O_2 por el punto medio de este cuyos extremos están en la elipse q , entonces existe una constante θ' tal que $PW^2 = \theta' \cdot \frac{U_1W \cdot WU_2}{U_1U_2}$ donde P es cualquier punto en q y W es el pie de la perpendicular a U_1U_2 por P . El valor θ' se llama lado recto con respecto U_1U_2 .

Demostración: De la Proposición 2.3.1, $PN \cdot PN = \theta \cdot \frac{NO_1 \cdot NO_2}{O_1O_2}$ donde N es el pie de la perpendicular a O_1O_2 por P . Observemos que $NO_1 \cdot NO_2 = \left(\frac{O_1O_2}{2} - PW\right) \cdot \left(\frac{O_1O_2}{2} + PW\right)$, de aquí

$$\frac{PN^2 \cdot O_1O_2}{\theta} = NO_1 \cdot NO_2 = \left(\frac{O_1O_2}{2}\right)^2 - PW^2$$

Igualando los extremos y simplificando obtenemos $\frac{PN^2 \cdot O_1O_2}{\theta \cdot \left(\frac{O_1O_2}{2}\right)^2} + \frac{PW^2}{\left(\frac{O_1O_2}{2}\right)^2} = 1$. Aplicando la Proposición 2.3.1 al punto U_1 , concluimos que $\theta = \frac{(U_1U_2)^2}{O_1O_2}$ de donde, $\frac{PW^2}{\left(\frac{O_1O_2}{2}\right)^2} = 1 - \frac{PN^2}{\left(\frac{U_1U_2}{2}\right)^2}$, luego,

$$\frac{\left(\frac{U_1 U_2}{2}\right)^2 \cdot PW^2}{\left(\frac{O_1 O_2}{2}\right)^2} = \left(\frac{U_1 U_2}{2}\right)^2 - PN^2 = WU_1 \cdot WU_2$$

de donde $PW^2 = WU_1 \cdot WU_2 \cdot \frac{\left(\frac{O_1 O_2}{2}\right)^2}{\left(\frac{U_1 U_2}{2}\right)^2}$ y haciendo $\theta' = \frac{(O_1 O_2)^2}{U_1 U_2}$ tenemos que

$$PW^2 = \theta' \cdot \frac{WU_1 \cdot WU_2}{U_1 U_2}.$$

◆

Por lo tanto la propiedad de la elipse se cumple también para el segmento $U_1 U_2$. Además observemos que si $U_1 U_2 \leq O_1 O_2$ entonces $\frac{\theta}{O_1 O_2} \leq 1$ y en caso contrario, si $U_1 U_2 \geq O_1 O_2$ entonces $\frac{\theta'}{U_1 U_2} \leq 1$.

En el primer caso diremos que $O_1 O_2$ es el eje mayor, $U_1 U_2$ el eje menor y θ el lado recto de la elipse. En el caso contrario $U_1 U_2$ será el eje mayor $O_1 O_2$ el eje menor y θ' será el lado recto de q .

Observemos que si dos elipses son congruentes entonces la longitud de los ejes es la misma.

Proposición 2.3.3: Sean q y q' dos elipses cuyos ejes mayores $O_1 O_2$ y $O'_1 O'_2$, respectivamente, tienen la misma longitud. Entonces q y q' son congruentes si y sólo si los respectivos lados rectos θ y θ' son iguales.

Demostración: Sean N y N' puntos sobre el eje de q y q' , respectivamente tales que $NO_1 = N'O'_1$. Sean P y P' puntos en q y q' , tales que PN es ortogonal NO_1 y $P'N'$ es ortogonal a $N'O'_1$.

Por la Proposición 2.3.1, y el Teorema 2.3.2 se cumplen las siguientes dos igualdades:

$$\theta = O_1 O_2 \cdot \frac{PN}{NO_1} \cdot \frac{PN}{NO_2} \quad \text{y} \quad \theta' = O'_1 O'_2 \cdot \frac{P'N'}{N'O'_1} \cdot \frac{P'N'}{N'O'_2}$$

Como $NO_1 = N'O'_1$ y $O_1 O_2 = O'_1 O'_2$, se tiene que $NO_2 = O_1 O_2 - NO_1 = O'_1 O'_2 - N'O'_1 = N'O'_2$. Así q y q' son congruentes si y sólo si $PN = P'N'$ lo cual sucede si y sólo si,

$$O_1 O_2 \cdot \frac{PN}{NO_1} \cdot \frac{PN}{NO_2} = O'_1 O'_2 \cdot \frac{P'N'}{N'O'_1} \cdot \frac{P'N'}{N'O'_2}$$

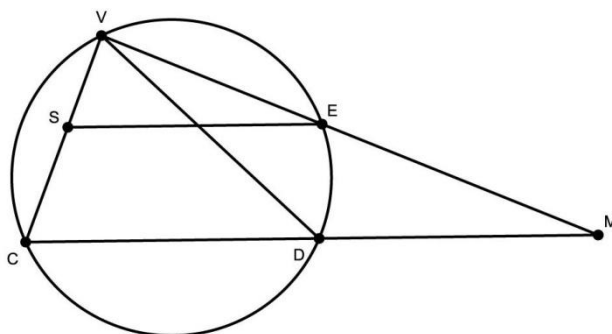
Lo cual es equivalente a que q y q' tengan el mismo lado recto.



A continuación demostraremos que toda elipse se puede encajar en un cono recto. Para ello necesitamos los siguientes lemas.

Lema 2.3.4: Sea VCD un triángulo inscrito en un circunferencia c . Dada una constante $\rho \geq 1$ podemos encontrar un punto M en la prolongación de la recta CD tal que $\frac{VM}{ME} = \rho$ donde E es la intersección de VM con la circunferencia.

Demostración: Si $\rho = 1$ basta tomar $M = D$ y $E = V$. Supongamos $\rho > 1$ y consideremos S un punto en el segmento VC tal que $\rho = \frac{VC}{CS}$. Tracemos la paralela a CD por S hasta cortar a

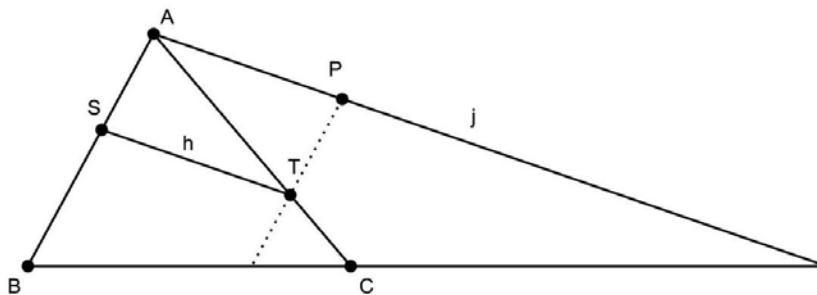


la circunferencia c en un punto E y prolonguemos VE hasta cortar la prolongación de CD en M . Entonces por el Teorema de Tales tenemos que $\frac{VM}{ME} = \frac{VC}{CS} = \rho$, lo cual completa la prueba.



Lema 2.3.5: Sea ABC un triángulo, j una semirrecta por A y h una magnitud fija. Entonces podemos encontrar un punto S en el lado AB y un punto T en el lado AC tal que ST es paralelo a j y tiene longitud h .

Demostración: Sea P un punto en j tal que AP tenga longitud h . Tracemos la paralela a BA por P hasta cortar el lado AC en un punto T y tracemos la paralela a PA por T hasta cortar

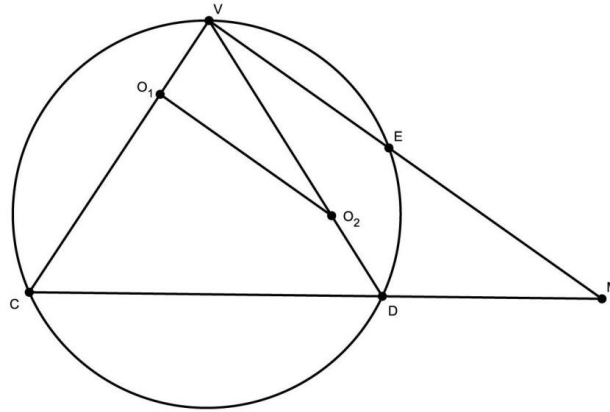


el lado AB en un punto S . Como el cuadrilátero $ASTP$ es un paralelogramo tenemos que $ST = AP = h$, que es lo que queríamos probar.

◆

Teorema 2.3.6: Sea \mathcal{K} un cono recto y q una elipse entonces, existe un plano τ tal que $\mathcal{K} \cap \tau$ es una elipse congruente con q .

Demostración: Sea VCD un triángulo axial de \mathcal{K} con base CD siendo V el vértice del cono \mathcal{K} y consideremos el circuncírculo del triángulo VCD . Por el Lema 2.3.4, podemos encontrar un punto M en la prolongación de CD tal que $\frac{VM}{ME} = \frac{l}{\theta}$ donde l es la longitud del eje mayor y θ es el lado recto de q , siendo E la intersección de VM con el circuncírculo. Por el Lema 2.3.5 podemos encontrar un punto O_1 en el lado VC y un punto O_2 en el lado VD



tal que O_1O_2 tenga longitud l y sea paralelo a VM . Sea τ el plano perpendicular al triángulo VCD que contiene a la recta O_1O_2 y consideremos la cónica $q' = \mathcal{K} \cap \tau$. Por la Proposición 2.3.1, si θ' denota el lado recto de q' entonces

$$\frac{\theta'}{l} = \frac{\theta'}{O_1O_2} = \frac{CM}{MV} \cdot \frac{MD}{MV}.$$

Tomando la potencia desde el punto M al circuncírculo del triángulo VCD tenemos que

$$CM \cdot MD = VM \cdot EM,$$

y usando el hecho de que $\frac{VM}{ME} = \frac{l}{\theta}$ llegamos a las siguientes igualdades:

$$\frac{\theta'}{l} = \frac{CM}{MV} \cdot \frac{MD}{MV} = \frac{VM \cdot EM}{VM^2} = \frac{EM}{VM} = \frac{\theta}{l},$$

lo cual implica que $\theta = \theta'$ y por lo Proposición 2.3.3 q es congruente con q' .

◆

SECCIÓN 2.4 LA HIPÉRBOLA

La hipérbola cumple una propiedad muy parecida a la propiedad básica de la elipse. La diferencia radica en que la elipse está en una sola hoja del cono mientras que la hipérbola involucra ambas hojas del cono. La siguiente proposición corresponde a la Proposición 12 del libro I de *Las Cónicas* [2] donde nombra y caracteriza a la hipérbola.

Proposición 2.4.1: Sea $q = \mathcal{K} \cap \tau$ una hipérbola con vértices O_1 y O_2 , entonces existe una constante θ tal que para cualquier punto P de q se satisface la siguiente ecuación:

$PN \cdot PN = \theta \cdot \frac{NO_1 \cdot NO_2}{O_1O_2}$ donde N es el pie de la perpendicular al eje por el punto P y O_1, O_2 son los vértices de la hipérbola. La constante θ se llama lado recto.

Demostración: Sea VCD el triángulo axial de q con base CD . Tracemos la paralela a O_1O_2 por V y sea M la intersección de dicha paralela con DC . Observemos que el valor $\frac{CM}{MV} \cdot \frac{MD}{MV}$ es constante y no depende de la base del cono que hayamos tomado. Como O_1O_2 es una constante que solo depende de q , podemos definir θ como el valor que satisface la siguiente ecuación.

$$\frac{\theta}{O_1O_2} = \frac{CM}{MV} \cdot \frac{MD}{MV}. \quad (1)$$

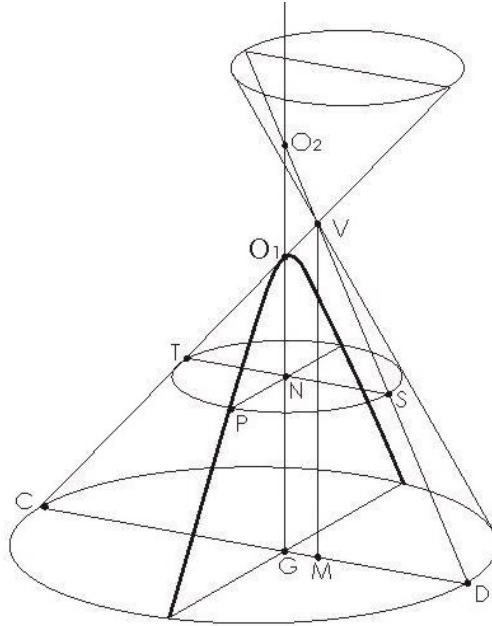
En otras palabras $\theta = \left(\frac{CM}{MV} \cdot \frac{MD}{MV}\right) \cdot O_1O_2$. Llamemos G a la intersección del eje de la hipérbola con la base de triángulo axial DC contenida en el plano de la base de \mathcal{K} . Sean S y T puntos en los lados VD y VC , respectivamente, tales que el segmento ST es paralelo a DC y sea N la intersección del eje de la hipérbola con TS , entonces tenemos que,

$$\frac{CM}{MV} = \frac{TN}{NO_1} \text{ y } \frac{MD}{MV} = \frac{NS}{NO_2}.$$

Al sustituir en la ecuación (1), llegamos a:

$$\frac{\theta}{O_1O_2} = \frac{TN}{NO_1} \cdot \frac{NS}{NO_2}. \quad (2)$$

Sea P un punto en la hipérbola, tal que P está en la intersección de la hipérbola con la recta perpendicular TS por N . Observemos que los puntos P, S y T se encuentran en una



circunferencia paralela a la base del cono, y el punto N es el punto medio de la cuerda perpendicular a ST que pasa por P . Así, usando el Corolario 1.1.7 tenemos que $PN^2 = NS \cdot TN$ y por lo tanto, al sustituir en (2), llegamos a:

$$\frac{\theta}{O_1O_2} = \frac{PN}{NO_1} \cdot \frac{PN}{NO_2}.$$

De esta última igualdad concluimos que $PN \cdot PN = \theta \cdot \frac{NO_1 \cdot NO_2}{O_1O_2}$ como se quería demostrar.



Proposición 2.4.2: Sean q y q' dos hipérbolas cuyos ejes transversos O_1O_2 y $O'_1O'_2$ tienen la misma longitud. Entonces q y q' son congruentes si y sólo si los respectivos lados rectos θ y θ' son iguales.

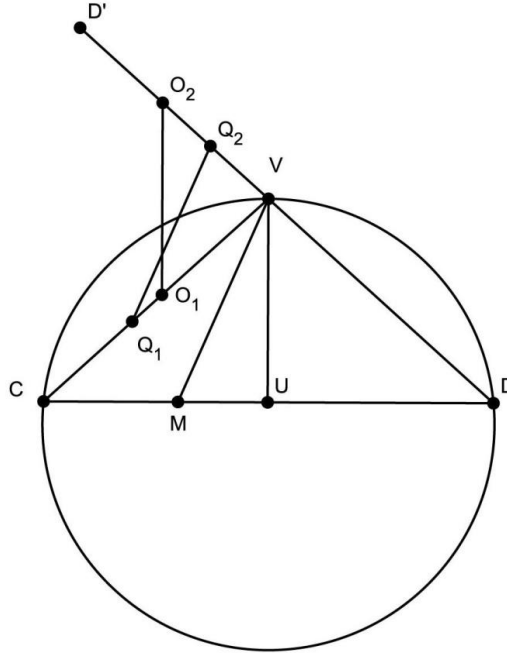
Demostración: La demostración de esta proposición es idéntica a la de la Proposición 2.3.3 y por lo tanto la omitiremos.

Consideremos un cono recto \mathcal{K} con vértice V . Supongamos que el triángulo VCD es un triángulo axial. Como el cono es recto, la recta VU es el eje del cono, donde U es el punto medio de CD . Por el Teorema de Thales el valor $\frac{VU^2}{UC^2}$ es constante y no depende de la elección del triángulo axial. Este valor lo denotaremos como η y será usado a continuación.

Teorema 2.4.3: Sea \mathcal{K} un cono recto y q una hipérbola con lado recto θ y longitud del eje transverso l . Si $\eta \leq \frac{l}{\theta}$, entonces existe un plano τ tal que $\mathcal{K} \cap \tau$ es una hipérbola congruente con q . Además si $\eta = \frac{l}{\theta}$, τ es único y si $\eta < \frac{l}{\theta}$ entonces hay únicamente dos planos posibles. Por otro lado si $\eta > \frac{l}{\theta}$, entonces no existe dicho plano.

Demostración: Sea VCD un triángulo axial de \mathcal{K} , U el punto medio de CD y D' un punto en la prolongación del lado DV de tal forma que $D'VC$ es un ángulo externo del triángulo VCD .

Caso 1: Si $\eta = \frac{VU^2}{UC^2} = \frac{l}{\theta}$, por el Lema 2.3.5 podemos encontrar un segmento O_1O_2 en el triángulo formado por CVD' paralelo a VU de longitud l . Sea τ el plano perpendicular a VCD que contiene a O_1O_2 y llamamos $q' = \mathcal{K} \cap \tau$. Afirmamos que q' es congruente con q . En efecto, como VU es paralela a O_1O_2 por el Teorema 2.4.1, $\frac{O_1O_2}{\theta'} = \frac{VU^2}{CU \cdot UD}$, donde θ' es el lado recto de q' . Como $CU = DU$ tenemos que $\frac{O_1O_2}{\theta'} = \frac{VU^2}{CU \cdot UD} = \frac{VU^2}{UC^2} = \frac{l}{\theta}$ y por lo tanto $\theta' = \theta$.

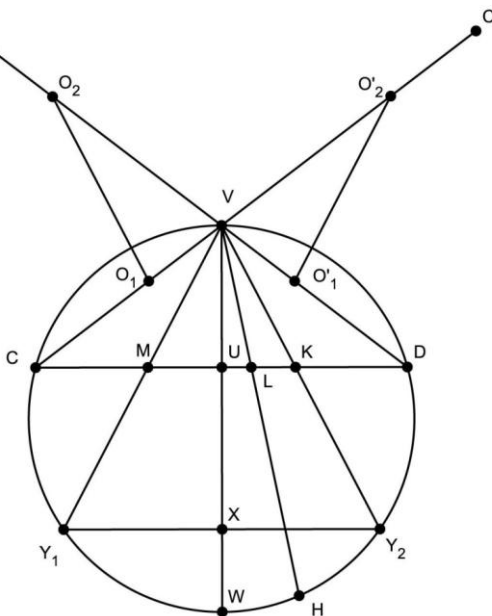


Este hecho, en combinación con la Proposición 2.4.2, implica que q' es la hipérbola buscada.

Ahora demostremos que dado el triángulo axial VCD , ésta es la única hipérbola congruente a q . Supongamos que existe otra, entonces existe una segmento de medida l en el triángulo CVD' que no es paralela a VU (si fuera paralela no tendría medida l) y por la Proposición 2.4.2 no podría ser congruente con q . Sea Q_1Q_2 el segmento pedido, tracemos la paralela a Q_1Q_2 por V y sea M la intersección de esta con CD . Supongamos sin perder la

generalidad que M está en el segmento CU . Entonces, por la Proposición 2.4.1 $\frac{VM^2}{CM \cdot MD} = \frac{l}{\theta}$. Afirmamos que esto es imposible. En efecto, por la desigualdad del triangulo $VM^2 > VU^2$. Además $CM \cdot MD = (CU - UM) \cdot (CU + UM) = CU^2 - UM^2 < CU^2 = CU \cdot UD$, lo cual implica que $VM^2 \cdot CU^2 > VU^2 \cdot CM \cdot MD$ y por lo tanto $\frac{l}{\theta} = \frac{VU^2}{CU \cdot UD} < \frac{VM^2}{CM \cdot MD}$.

Caso 2: Si $\frac{VU^2}{UC^2} < \frac{l}{\theta}$. Sea c la circunferencia que circunscribe al triangulo VCD . Prolonguemos el eje VU hasta cortar a c en W . Entonces, por el Lema 1.1.6 $\frac{VU^2}{CU^2} = \frac{VU^2}{CU \cdot UD} = \frac{VU^2}{UV \cdot UW} = \frac{VU}{UW}$. De aquí inferimos que $\frac{VU}{UW} < \frac{l}{\theta}$. Sea X un punto en la recta VW de tal manera que $\frac{VU}{UX} = \frac{l}{\theta}$.



Tracemos la paralela a CD por X y sean Y_1 y Y_2 las intersecciones de ésta paralela con c y sean M y K las intersecciones de las rectas VY_1 y VY_2 con la recta CD , respectivamente. Por el Teorema de Thales $\frac{VU}{UX} = \frac{l}{\theta} = \frac{VM}{MY_1} = \frac{VK}{KY_2}$. Por el Lema 2.3.5, podemos encontrar puntos O_1, O'_1 en VC y VD , respectivamente y O_2, O'_2 en las prolongaciones de DV y CV , respectivamente, tal que los segmentos O_1O_2 y $O'_1O'_2$, son paralelos a VK y VM respectivamente y tienen longitud l . Afirmamos que los planos perpendiculares a VCD que que pasan por O_1O_2 y $O'_1O'_2$, cortan al cono en hipérbolas q_1 y q_2 , congruentes con q . En efecto, observemos que $\frac{l}{\theta} = \frac{VU}{UX} = \frac{VM}{MY_1} = \frac{VM^2}{VM \cdot MY_1}$ y por el Lema 1.1.6

$$\frac{O_1O_2}{\theta} = \frac{VM^2}{VM \cdot MY_1} = \frac{VM^2}{CM \cdot MD}.$$

Por la Proposición 2.4.1 q_1 es una hipérbola con eje transversal l y lado recto θ , y por la Proposición 2.4.2 q es congruente con q_1 . Análogamente q_2 y q son congruentes.

Ahora veamos que no existe una tercera tal que VCD sea ortogonal al plano que la contiene. Supongamos que si existe y nombrémosla q' . Sea VH la recta paralela al eje de q' donde H es la intersección con c . Llamemos L a la intersección de VH con la base del triángulo axial CD . Por la Proposición 2.4.1 $\frac{l}{\theta} = \frac{VL^2}{CL \cdot LD}$ y por el Lema 1.1.6 $\frac{VL^2}{CL \cdot LD} = \frac{VL^2}{VL \cdot LH} = \frac{VL}{LH}$. Así $\frac{l}{\theta} = \frac{VL}{LH}$ lo cual contradice al hecho de que $\frac{l}{\theta} = \frac{VU}{UX}$.

Ahora veamos que la condición $\frac{VU^2}{UC^2} \leq \frac{l}{\theta}$ es necesaria. Supongamos que existe una hipérbola $q' = \mathcal{K} \cap \tau$ congruente con q tal que $\eta = \frac{VU^2}{UC^2} > \frac{l}{\theta}$. Sea VM la recta paralela al eje de q' donde M es la intersección con CD . Por la Proposición 2.4.1 $\frac{VM^2}{CM \cdot MD} = \frac{l}{\theta}$ y por hipótesis $\frac{VU^2}{CU \cdot UD} > \frac{l}{\theta}$. Esto implica que $\frac{VU^2}{CU \cdot UD} > \frac{VM^2}{CM \cdot MD}$. Lo cual es una contradicción (ver parte final del caso 1).

De aquí concluimos que q existe si $\frac{VU^2}{UC^2} \leq \frac{l}{\theta}$. Sin embargo observemos que sin importar el valor $\frac{l}{\theta}$ siempre es posible construir un cono recto \mathcal{K} tal que $\eta \leq \frac{l}{\theta}$ para l y θ dados. De aquí concluimos que toda hipérbola se puede encajar en un cono recto.

◆

CAPITULO 3 PARTES Y PROPIEDADES BASICAS DE LAS CÓNICAS.

En el capítulo anterior introdujimos las cónicas usando la noción clásica en la cual se obtienen al intersecar un cono con un plano. Sin embargo, esta no es la única manera de definir las. En este capítulo veremos como las cónicas pueden ser caracterizadas como lugares geométricos del plano que cumplen alguna “propiedad” (estas propiedades son las que se utilizan actualmente en los cursos de geometría para abordar las cónicas). Más adelante utilizaremos esta nueva forma de ver las cónicas para deducir propiedades interesantes de ellas.

SECCIÓN 3.1 EXCENTRICIDAD, FOCOS Y DIRECTRICES.

En esta sección, descubriremos las nociones de excentricidad, focos y directrices y caracterizaremos a las cónicas en función de estos conceptos. Seguramente el lector estará familiarizado con estas nociones ya que juegan un papel fundamental en los cursos de geometría analítica.

Recordemos que toda cónica puede ser encajada en un cono recto. Esta propiedad será utilizada en la demostración del siguiente teorema.

Dado un punto P y una recta d denotemos por Pd la distancia de P a la recta d . Esto es, si R es el pie de la perpendicular a d por P , entonces $Pd:PR$.

Teorema 3.1.1: Para toda cónica q existe un punto F , una recta d y una constante e tales que P pertenece a q si y sólo si $\frac{PF}{Pd} = e$. El punto F se llama foco, la recta d se llama directriz y la constante e es la excentricidad de la cónica.

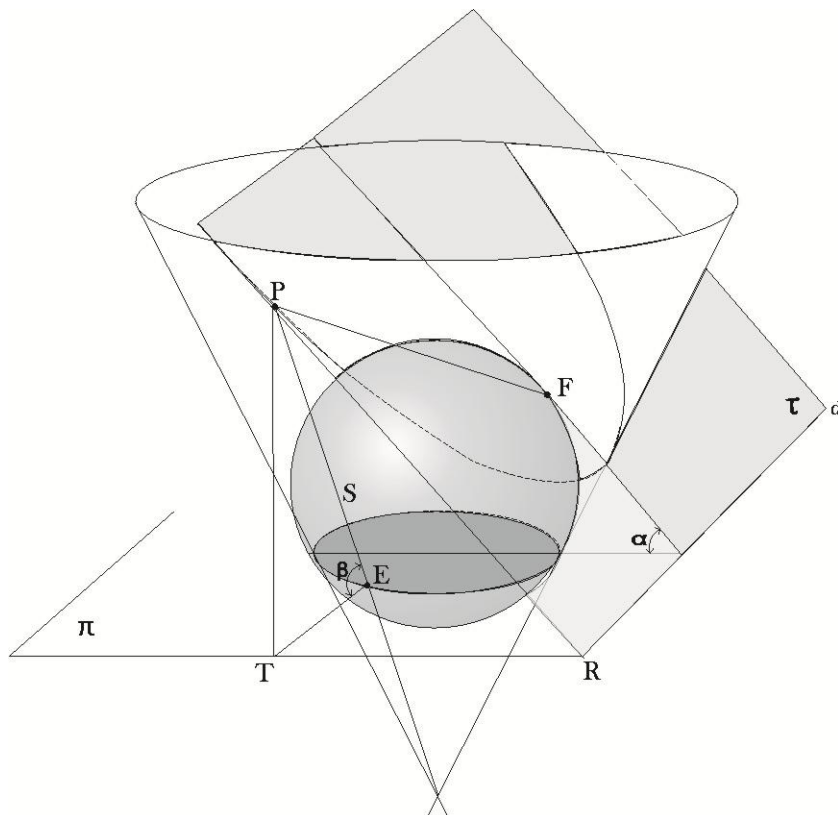
Demostración: Sea $q = \mathcal{K} \cap \tau$, una cónica no circular donde \mathcal{K} es un cono recto. Consideremos S una esfera tangente a τ y \mathcal{K} , contenida en el interior de \mathcal{K} . Sea F el punto de tangencia de S con τ y sea π el plano que contiene a la circunferencia donde S es tangente con \mathcal{K} . Entonces como q es una sección no circular, τ y π no son paralelos y por lo tanto se cortan en una recta d . Sea α el ángulo formado por los planos τ y π . Tomemos un punto P de la sección cónica y tracemos la recta perpendicular a d por P . Sea R el punto de intersección de dicha recta con d . Llamemos T al pie de la recta ortogonal al plano π que pasa por P . Por último, llamemos E al punto de intersección de la esfera S con la generatriz que pasa por P , y sea β el ángulo $\angle PET$.

Observemos que $PF = PE$ (ya que ambos segmentos son tangente a S por P). Por otro lado los triángulos PTE y PTR tienen un ángulo recto en el vértice T y por esta razón

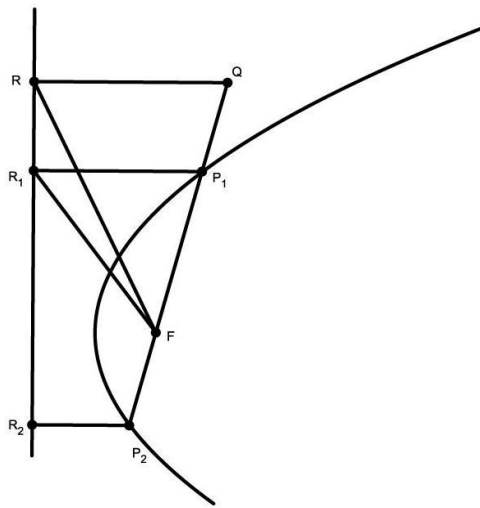
$\text{sen } \alpha = \frac{PT}{PR}$, $\text{sen } \beta = \frac{PE}{PR}$ y por lo tanto;

$$\frac{PF}{PR} = \frac{PE}{PR} = \frac{PE \cdot PT}{PR \cdot PT} = \frac{\left(\frac{PT}{PR}\right)}{\left(\frac{PT}{PE}\right)} = \frac{\text{sen } \alpha}{\text{sen } \beta}.$$

Finalmente observemos que ni α ni β dependen del punto P . Por lo tanto $e = \frac{\text{sen } \alpha}{\text{sen } \beta}$ es una constante de donde $\frac{PF}{PR} = e$, lo cual completa la demostración.



Para demostrar la otra implicación sea q una cónica con excentricidad e , directriz d , foco F y Q un punto que no pertenece a q tal que $\frac{QF}{Qd} = e$. Tracemos la recta QF la cual corta a q en dos puntos P_1 y P_2 . Sean R_1 y R_2 los pies de las perpendiculares a d por P_1 y P_2 , respectivamente. Notemos que los ángulos $\sphericalangle R_1P_1F$ y $\sphericalangle R_2P_2F$ son suplementarios y por lo tanto uno de estos ángulos es igual al ángulo $\sphericalangle RQF$ donde R es el pie de la perpendicular a d por Q . Supongamos sin perder la generalidad que $\sphericalangle R_1P_1F = \sphericalangle RQF$, por la implicación anterior $\frac{P_1F}{P_1R_1} = e$. Por el criterio lado-ángulo-lado los triángulos R_1P_1F y RQF son semejantes, lo cual sólo puede suceder si F pertenece a d . Esta contradicción nos permite concluir que $\frac{QF}{Qd} \neq e$, como se quería probar.



Sea \mathcal{K} un cono recto y τ un plano que corta a \mathcal{K} en una cónica q . Si q es una parábola existe una única esfera que es tangente al interior de \mathcal{K} y τ . Por otro lado si q es una elipse o una hipérbola entonces existen dos esferas tangentes al interior de \mathcal{K} y a τ . Por esta razón, en el caso de la elipse y de la hipérbola, existirán dos focos y dos directrices.

Si q es una parábola, el ángulo α es igual al ángulo β y por lo tanto la excentricidad es 1. De aquí concluimos el siguiente resultado.

Teorema 3.1.2: Una parábola es el lugar geométrico de los puntos P tales que su distancia a un punto fijo F es igual a su distancia a una recta dada.



En el caso de la elipse y de la hipérbola tenemos los siguientes resultados:

Teorema 3.1.3: Sea q una cónica, F un foco de ella y d la directriz correspondiente a F .

- Si q es una elipse, entonces la excentricidad es menor que 1.
- Si q es una hipérbola, entonces la excentricidad es mayor que 1.

Demostración:

a) Como el corte del cono genera una elipse, el ángulo del plano τ es menor que el generado por cualquiera de las generatrices con respecto al plano π y por lo tanto usando la nomenclatura del Teorema 3.1.1 se infiere que $e = \frac{\text{sen}\alpha}{\text{sen}\beta} < 1$.

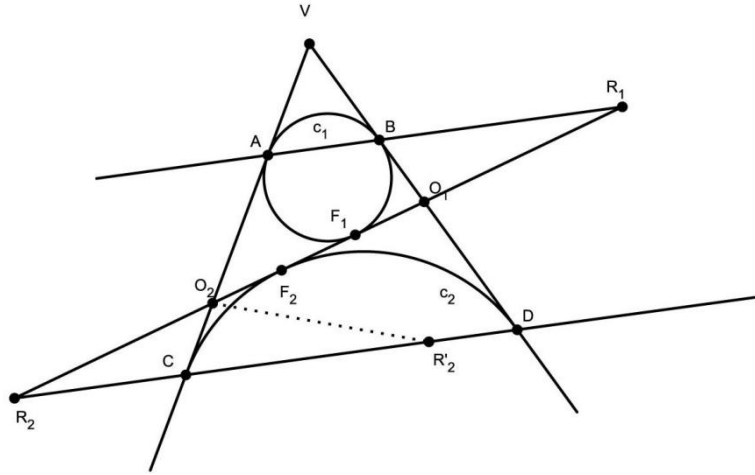
b) De igual forma podemos observar que plano τ corta al cono en un ángulo mayor que el generado por cualquier generatriz con respecto a π , usando la nomenclatura del Teorema 3.1.1 se deduce que $\text{sen}\beta < \text{sen}\alpha$ y por lo tanto $\frac{PF}{PR} = e > 1$.



Teorema 3.1.4 La excentricidad de una elipse (hipérbola) no depende del foco ni de la directriz que tomemos, siempre y cuando sean correspondientes.

Demostración: Sea \mathcal{K} un cono con vértice V , τ un plano que corta a \mathcal{K} en una cónica q , s_1 y s_2 dos esferas tangentes a \mathcal{K} y τ , simultáneamente. Consideremos el triángulo axial VEF de \mathcal{K} perpendicular a τ y llamemos c_1 y c_2 a las circunferencias de intersección de \mathcal{K} con s_1 y s_2 , respectivamente y llamemos A, B y C, D a los puntos de tangencia de las generatrices VF y VE con c_1 y c_2 de tal forma que V, A, C y V, B, D estén alineados. Sea l_τ la intersección de τ con el plano que contiene al triángulo axial y sean F_1 y F_2 las intersecciones de l_τ con s_1 y s_2 , respectivamente. Por último sean O_1 y O_2 las intersecciones de VE y VF con el plano τ , respectivamente (O_1 y O_2 son los vértices de la cónica). Afirmamos que las rectas AB y CD son paralelas. En efecto, como son rectas tangentes a s_1 y s_2 , tenemos que $VA = VB$ y $VC = VD$ y por el recíproco del Teorema de Tales AB es paralela a CD . Para completar la prueba demosetremos que la distancia $O_1F_1 = F_2O_2$ y $R_1O_1 = R_2O_2$ donde R_1 y R_2 son las intersecciones de τ con las rectas AB y CD respectivamente.

a) Para el caso de la elipse tomemos el corte axial de \mathcal{K} por VEF . Observemos que $O_1F_1 = O_1B$ y $O_1F_2 = O_1D$, ya que son tangentes a una misma circunferencia desde un punto fijo



O_1 , asimismo $O_2F_2 = O_2C$ y $O_2F_1 = O_2A$ son tangentes desde O_2 . Luego,

$$O_1F_2 + O_1V = VO_1 + O_1D = VD = VC = VO_2 + O_2C = VO_2 + O_2F_2,$$

sustituyendo $VO_2 = VA + AO_2$ y $O_1V = VB + BO_1$ en los extremos de la igualdad,

$$VA + AO_2 + O_2F_2 = O_1F_2 + VB + BO_1.$$

Como $VA = VB$, y sustituyendo AO_2 y BO_1

$$O_2F_1 + O_2F_2 = O_1F_2 + O_1F_1,$$

ahora sustituyendo nuevamente O_2F_1 y O_1F_2

$$O_2F_2 + F_2F_1 + O_2F_2 = O_1F_1 + F_1F_2 + O_1F_1.$$

De aquí concluimos que $2O_2F_2 = 2O_1F_1$ y por lo tanto $O_2F_2 = O_1F_1$.

Ahora veamos que $R_1O_1 = R_2O_2$. Sea l la perpendicular a CD por O_2 y sea R'_2 el reflejado de R_2 con respecto a l , afirmamos que el triángulo BO_1R_1 es congruente con el triángulo $CO_2R'_2$. En efecto, $\sphericalangle O_1R_1B = \sphericalangle O_2R_2C = \sphericalangle CR'_2O_2$, $\sphericalangle R_1BO_1 = \sphericalangle O_2CR'_2$ y el segmento $O_2C = O_1B$. De donde se concluye que $R_1O_1 = R_2O_2$

b) Ahora demosremos para la hipérbola. Como $O_2A = O_2F_1$ tenemos que

$$O_2V + VA = O_2A = O_2F_1 = O_2O_1 + O_1F_1,$$

Como $O_2V = O_2C + CV$ y $VA = VB$, sustituyendo en el extremo izquierdo obtenemos

$$O_2C + CV + VB = O_2O_1 + O_1F_1.$$

Observemos que $CV + VB = DV + VB = DB = DO_1 - O_1B$ y por lo tanto,

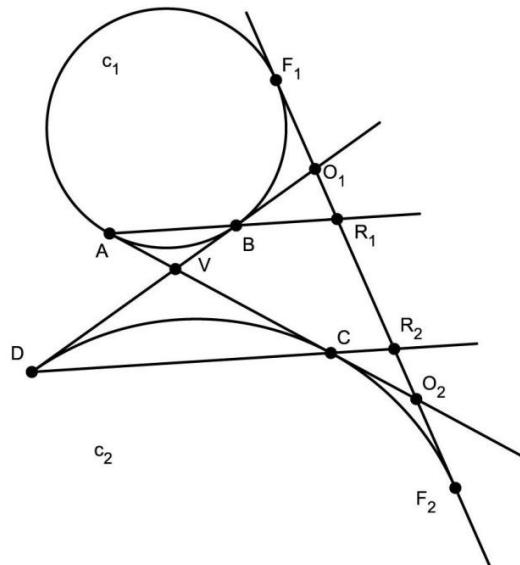
$$O_2F_2 + DO_1 - O_1B = O_2C + CV + VB = O_2O_1 + O_1F_1 = O_1F_2 - F_2O_2 + O_1F_1.$$

Y como $DO_1 = O_1F_2$ inferimos que $O_2F_2 - O_1B = O_1F_1 - F_2O_2$, de donde

$$2O_2F_2 = O_1B + O_1F_1 = 2O_1F_1,$$

o equivalentemente $O_2F_2 = O_1F_1$.

Ahora demosremos que $R_1O_1 = R_2O_2$. Fijémonos en los triángulos O_1DR_2 y O_2R_1A , por el Teorema de Thales como AB y DC son paralelas tenemos que $\frac{DB}{O_1B} = \frac{R_1R_2}{O_1R_1}$ y $\frac{AC}{O_2C} = \frac{R_1R_2}{O_2R_2}$.



Observemos que $AC = DB$ y además

$$O_1B = O_1F_1 = O_2F_2 = O_2C,$$

de donde $\frac{R_1R_2}{O_2R_2} = \frac{DB}{O_1B} = \frac{R_1R_2}{O_1R_1}$ e igualando los extremos concluimos que $R_1O_1 = R_2O_2$.



A partir de este momento podemos definir a las cónicas como lugares geométricos de los puntos tales que la distancia a un punto fijo (llamado foco) y la distancia a una recta (llamada directriz) están en razón constante.

Cuando la razón es 1, esta definición coincide con la definición de parábola que usualmente se utiliza en los cursos de geometría.

Teorema 3.1.5: Una hipérbola es el lugar geométrico de los puntos P tales que el valor absoluto de la diferencia de sus distancias r_1 y r_2 a dos puntos fijos F_1 y F_2 es constante.

Demostración: Sea \mathcal{K} un cono recto y $q = \mathcal{K} \cap \tau$ una hipérbola. Consideremos S_1 y S_2 dos esferas contenidas en \mathcal{K} tangentes a τ y a \mathcal{K} simultáneamente. Evidentemente cada una de estas esferas está en distintas hojas del cono. Sean F_1 y F_2 los puntos de tangencia de S_1 y S_2 con el plano τ . Supongamos que \mathcal{K} es tangente a S_1 y S_2 a lo largo de las circunferencias c_1 y c_2 respectivamente. Sea P un punto de la hipérbola y tomemos la generatriz que pasa por P y corta a c_1 y c_2 en G_1 y G_2 respectivamente. Entonces

$$PF_1 = PG_1 \text{ y } PF_2 = PG_2$$

ya que son rectas tangentes a una esfera desde un punto P exterior a ésta. Por lo que:

$$|PF_1 - PF_2| = |PG_1 - PG_2| = G_1G_2$$

Nótese G_1G_2 es la longitud del segmento en las generatrices del cono determinado por las circunferencias c_1 y c_2 . Como el cono es recto esta longitud es constante y no depende de la posición de P .



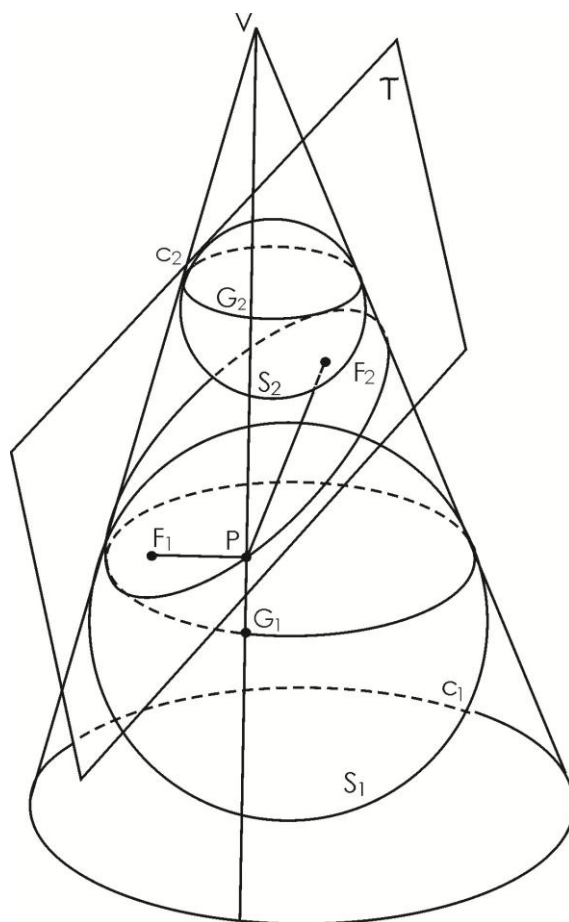
Teorema 3.1.6: Una elipse es el lugar geométrico de los puntos P tales que la suma de sus distancias r_1 y r_2 a dos puntos fijos F_1 y F_2 es constante.

Demostración: Sea $q = \mathcal{K} \cap \tau$ una elipse (con \mathcal{K} un cono recto) y consideremos S_1 y S_2 dos esferas contenidas dentro del cono \mathcal{K} tangentes en F_1 y F_2 al plano τ y tangentes al cono \mathcal{K}

a lo largo de las circunferencias c_1 y c_2 . Sea P un punto de la elipse y tomemos la generatriz que pase por P que interseca en G_1 y G_2 a c_1 y c_2 , respectivamente. Entonces

$$PF_1 = PG_1 \text{ y } PF_2 = PG_2$$

ya que son rectas tangentes a una esfera desde un punto P . De aquí concluimos que



$$PF_1 + PF_2 = PG_1 + PG_2 = G_1G_2.$$

Nótese que G_1G_2 es la distancia entre c_1 y c_2 , y por lo tanto es constante.

SECCIÓN 3.2 DIAMETROS, TANGENTES Y CIRCUNFERENCIA DE EXCENTRICIDAD.

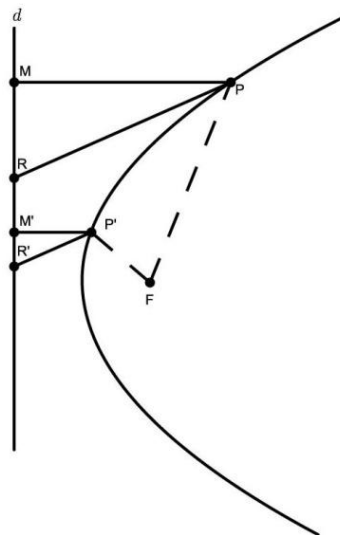
Definición 3.2.1: Una **cuerda** en una cónica es el segmento de recta que une dos puntos cualesquiera de la cónica. En el caso de la hipérbola los dos puntos deben estar en la misma hoja.

Definición 3.2.2: Sea q una cónica, dado un sistema de cuerdas paralelas llamaremos **diámetro** al lugar geométrico de los puntos medios de las cuerdas.

A continuación demostraremos que todo diámetro está contenido en una línea recta. Para ello necesitamos el siguiente lema.

Lema 3.2.3: Sean q una cónica, F un foco y d la directriz correspondiente. Si P y P' son puntos arbitrarios en q , R y R' son puntos en d tales que PR es paralelo a $P'R'$ entonces $\frac{PR}{P'R'} = \frac{PF}{P'F}$.

Demostración: Sean M y M' lo pies de las perpendiculares a d por P y P' , respectivamente.



Entonces existe una constante e tal que $\frac{PF}{PM} = e = \frac{P'F}{P'M'}$. Como los triángulos PMR y $P'M'R'$ son semejantes, se cumple que $\frac{PM}{PR} = \frac{P'M'}{P'R'}$. Así

$$\frac{PF}{PR} = \frac{PF}{PM} \cdot \frac{PM}{PR} = \frac{P'F}{P'M'} \cdot \frac{P'M'}{P'R'} = \frac{P'F}{P'R'}$$

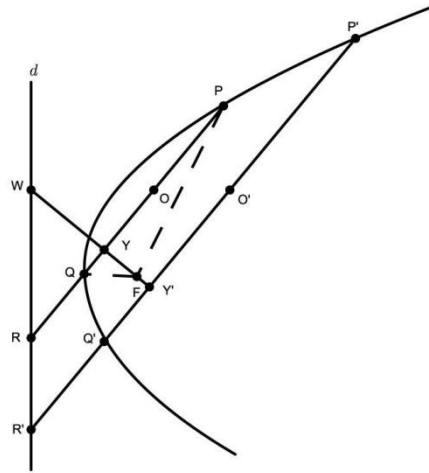
De aquí concluimos que $\frac{PF}{PR} = \frac{P'F}{P'R'}$ y por lo tanto $\frac{PR}{P'R'} = \frac{PF}{P'F}$.



Teorema 3.2.4: El lugar geométrico de los puntos que determinan un diámetro se encuentran en una línea recta.

Demostración: Sea q una cónica con directriz d y foco correspondiente F . Consideremos una cuerda arbitraria QP y sea W la intersección de la directriz con la perpendicular a QP por F . Llamemos Y a la intersección de la recta PQ con WF y sea R a la intersección de la directriz con la recta PQ .

Por el Lema 3.2.3 $\frac{FP}{FQ} = \frac{PR}{QR}$ y por lo tanto $\frac{FP^2}{PR^2} = \frac{FQ^2}{QR^2}$. Aplicando el Lema 1.2.5 tenemos que $\frac{FP^2}{PR^2} = \frac{FP^2 - FQ^2}{PR^2 - QR^2}$. Luego, por el Teorema de Pitágoras aplicado a los triángulos FPY y FQY concluimos que $PY^2 = FP^2 - FY^2$ y $QY^2 = FQ^2 - FY^2$. Así



$$\frac{FP^2}{PR^2} = \frac{FP^2 - FQ^2}{PR^2 - QR^2} = \frac{FP^2 - FY^2 - FQ^2 + FY^2}{PR^2 - QR^2} = \frac{PY^2 - QY^2}{PR^2 - QR^2}$$

Por otro lado, si O es el punto medio de PQ tenemos que $PY + YQ = PQ$ y por el Lema 1.1.16, $PY - QY = 2OY$ y por lo tanto $PY^2 - QY^2 = 2OY \cdot PQ$. Análogamente, por el Lema 1.1.16 $PR + QR = 2OR$ y $PR - RQ = PQ$ y por lo tanto $PR^2 - QR^2 = 2OR \cdot PQ$. Entonces concluimos que

$$\frac{OY}{OR} = \frac{2OY \cdot PQ}{2OR \cdot PQ} = \frac{PY^2 - QY^2}{PR^2 - QR^2} = \frac{FP^2}{PR^2}$$

Ahora si $P'Q'$ es una cuerda paralela a PQ con punto medio O' , por el Lema 3.2.3 $\frac{P'F^2}{P'R'^2} = \frac{P'F^2}{P'R'^2}$ donde R' es la intersección de $P'Q'$ con la directriz. De esta manera si Y' es la intersección de WF con $P'Q'$ haciendo un procedimiento análogo deducimos que $\frac{P'F^2}{P'R'^2} = \frac{O'Y'}{O'R'}$ y por lo tanto $\frac{OY}{OR} = \frac{P'F^2}{P'R'^2} = \frac{O'Y'}{O'R'}$ de donde,

$$\frac{OY}{O'Y'} = \frac{OR}{O'R'}$$

Como $R'Y'$ es paralela a RY los triángulos WRY y $WR'Y'$ son semejantes y $\frac{WR}{WR'} = \frac{WY}{WY'} = \frac{RY}{R'Y'}$.
 Por el Lema 1.2.5

$$\frac{OY}{O'Y'} = \frac{OR}{O'R'} = \frac{OY + YR}{O'Y' + Y'R'} = \frac{YR}{Y'R'}$$

De donde concluimos que los triángulos WYO y $WY'O'$ son semejantes, lo cual garantiza que O, O' y W son colineales.

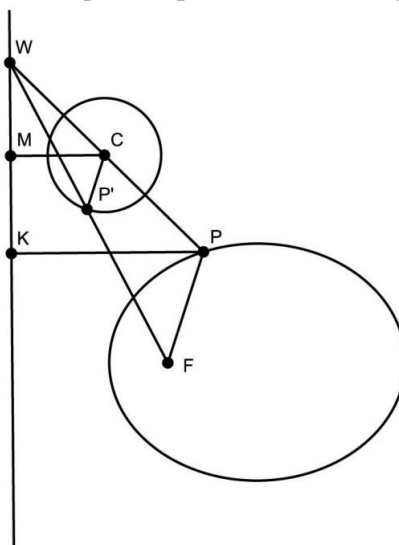


Definición 3.2.5: Sea q una cónica y l un diámetro asociado a una familia de cuerdas paralelas a otra recta m . Si P es un punto en q que es extremo del diámetro l , entonces la **tangente** a q por P será la recta paralela a m que pasa por P .

Definición 3.2.6: Dados un punto C y una cónica q , la **circunferencia de excentricidad** de q respecto a C es la circunferencia de radio r y centro C tal que $\frac{r}{CM} = e$, donde e es la excentricidad de q y M es el pie de la perpendicular por C a una directriz de q .

Construcción 3.2.7 Dada una cónica q con foco F y directriz d construir la circunferencia de excentricidad de q con centro en un punto C .

Sean q una cónica, C un punto cualquiera que no este en d y P un punto cualquiera en q .



Tracemos la recta PC hasta cortar a la directriz en un punto W . Tracemos el segmento WF y sea P' el punto de intersección de la paralela a PF por C con WF . Afiramos que la

circunferencia con centro en C y radio CP' es la circunferencia de excentricidad de la cónica q respecto a C .

En efecto si M es el pie de la perpendicular a d por C entonces se puede observar por lo anterior que $\frac{P'C}{FP} = \frac{WC}{WP} = \frac{WM}{WK} = \frac{CM}{PK}$ donde K es el pie de la perpendicular a d por P . De aquí concluimos que $\frac{P'C}{CM} = \frac{FP}{PK} = e$ y por lo tanto la circunferencia de centro C y radio CP es la circunferencia de excentricidad.



Construcción 3.2.8 Construir una cónica dada la circunferencia de excentricidad y la directriz.

Sea d una recta y C un punto que no pertenezca a d . Supongamos que C es el centro de una circunferencia de radio r y M es el pie de la perpendicular a d por C . Sea F un punto arbitrario y tracemos $P'F$ siendo P' un punto cualquiera en la circunferencia. A la intersección de $P'F$ con d lo nombramos W . Tracemos la paralela a $P'C$ por F y sea P el punto de intersección de la recta WC con dicha paralela. Afirmamos que P está en la cónica de excentricidad $e = \frac{r}{CM}$ con directriz d y foco correspondiente F ; es decir, $\frac{r}{CM} = \frac{PF}{PK}$ donde K es el pie de la perpendicular a d por P .

En efecto como CP' es paralela a FP los triángulos WCP' y WPF son semejantes y análogamente como CM es paralela a PK los triángulos WCM y WPK también son semejantes. Esto implica que $\frac{WC}{WP} = \frac{CP'}{PF}$ y $\frac{WC}{WP} = \frac{CM}{PK}$ de aquí se obtiene que $\frac{CM}{PK} = \frac{CP'}{PF}$ y por lo tanto:

$$\frac{PF}{PK} = \frac{CP'}{CM} = \frac{r}{CM} = e,$$

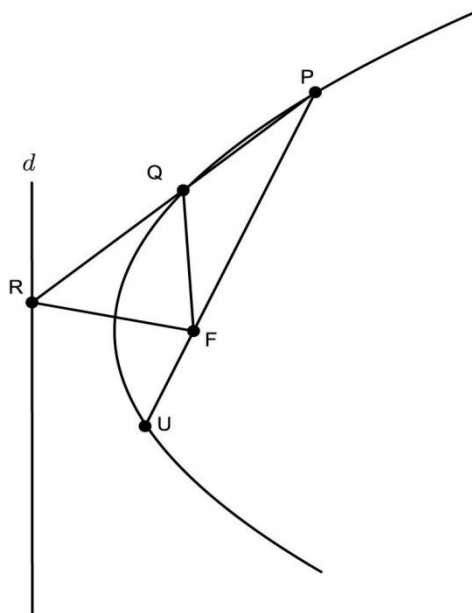
que es lo que queríamos probar.



En las construcciones anteriores observemos que la recta WC corta en 0, 1 ó 2 puntos a q si y sólo si WF corta en 0, 1 ó 2 puntos, respectivamente, a la circunferencia de excentricidad. En particular WC es tangente a q si y sólo si WF es tangente a la circunferencia de excentricidad.

Teorema 3.2.9: Sea q una cónica con directriz d y foco correspondiente F . Para cualquier punto P en q , la recta PF forma un ángulo recto con la recta determinada por F y el punto de intersección de la tangente a q por P con d .

Demostración: Sean P y Q dos puntos en q tal que el rayo PQ interseca a d en R y sea U la



intersección con q del rayo PF . Por el Lema 3.2.3 tenemos que $\frac{FP}{PR} = \frac{FQ}{QR}$ y por el Lema 1.1.14 tenemos que los ángulos $\sphericalangle RFQ$ y $\sphericalangle RFU$ son iguales. Por lo tanto, en el límite, cuando Q tiende a P , la recta RP tiende a ser la recta tangente por P y $\sphericalangle RFQ + \sphericalangle RFU = 2\sphericalangle RFQ$ tiende a 180° . Esto quiere decir que la recta PF formará un ángulo recto con la recta FR , como se quería probar.



En el teorema anterior, si la recta tangente no corta a la directriz, entonces P debe ser el vértice. En este caso, PF es perpendicular a la tangente por P .

Construcción 3.2.10 Construir la recta tangente a una cónica por un punto P que está en q .

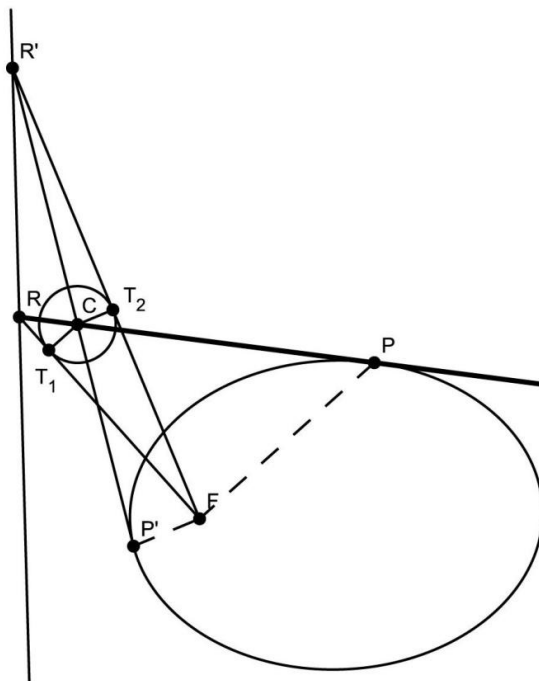
Dada una cónica q con directriz d y foco correspondiente F , para construir la tangente por un punto P basta trazar la perpendicular a la recta PF por F . Si esta recta cortara a d en un punto R entonces la tangente buscada es la recta PR . Por otro lado, si PF es perpendicular a la directriz, entonces P es vértice de la cónica y por lo tanto la tangente por P es simplemente la paralela a la directriz por P .



Construcción 3.2.11 Construir las tangentes a una cónica q con foco F y directriz d por un punto C que no esté en q .

Si C está en d tracemos la recta CF . Llamemos P y P' a la intersección de la perpendicular a CF por F con q . Del Teorema 3.2.9 inferimos que CP es tangente a q en P .

Si C no está en d entonces trazamos la circunferencia de excentricidad de q con centro en C y trazamos las rectas tangentes a la circunferencia desde F . Sean T_1 y T_2 los puntos de tangencia y R y R' los puntos de intersección de FT_1 y FT_2 con d . Afirmamos que RC y $R'C$ son rectas tangentes a q desde C .



En efecto, por la Construcción 3.2.8 los segmentos CT_1 y PF son paralelos y análogamente CT_2 es paralelo a $P'F$. Luego $\angle CT_1F$ y $\angle CT_2F$ son ángulos rectos de donde se infiere que los ángulos $\angle PFR$ y $\angle P'FR'$ son rectos también y por el Teorema 3.2.9 P y P' son los puntos de tangencia de las rectas RP y RP' respectivamente.

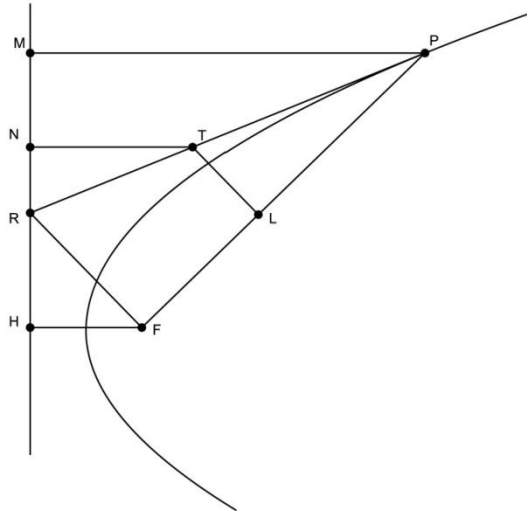


Proposición 3.2.12: Sea q una cónica con foco F , directriz d , excentricidad e y P un punto de q . Supongamos que R es un punto en d tal que RP es tangente a q en P . Si T es un punto en la recta RP y L el pie de la perpendicular a PF desde T , entonces $\frac{FL}{TN} = e$ (con N el pie de la perpendicular a d por T). Y viceversa, si L y N son los pies de las perpendiculares desde T a FP y a la directriz, respectivamente y además $\frac{FL}{TN} = e$ entonces T está en la recta tangente por P .

Demostración: Sea M el pie de la perpendicular a d por P , por el Teorema 3.2.9 el ángulo $\sphericalangle RFP$ es recto y por lo tanto TL es paralela a FR . Luego, por el Teorema de Thales tenemos que $\frac{PF}{LF} = \frac{PR}{TR} = \frac{PM}{TN}$ y de aquí vemos que

$$e = \frac{PF}{PM} = \frac{LF}{TN},$$

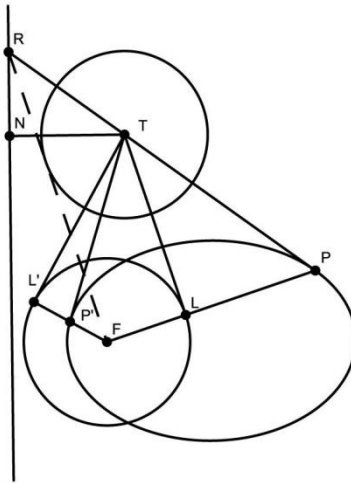
lo cual prueba la primera implicación.



Para demostrar la segunda parte del teorema, construyamos la circunferencia de excentricidad C_T de q con centro en T . Ahora con centro en F tracemos otra circunferencia C_F con el mismo radio que C_T . Desde T tracemos las tangentes a C_F con L y L' los puntos de tangencia y prolonguemos FL y FL' . Afirmamos que si P y P' son las intersecciones con q de las rectas FL y FL' , respectivamente, entonces TP y TP' son las tangentes a q .

En efecto, sin perder la generalidad tracemos la paralela a TL por F y sea R la intersección de esta con d . Como C_T y C_F tienen el mismo radio entonces dicha paralela es tangente a C_T y al ser el ángulo $\sphericalangle FLT$ recto el ángulo $\sphericalangle LFR$ es también recto y por el Teorema 3.2.9 se deduce que T está en la recta tangente a q por P .

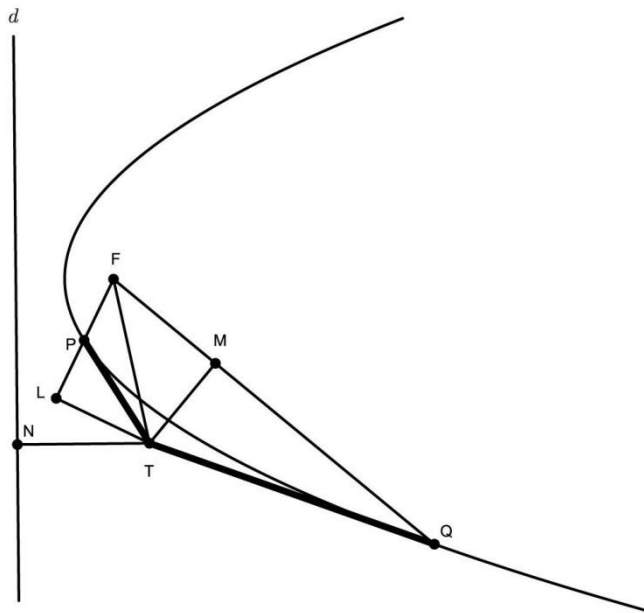
Si la tangente a q es paralela a d , entonces el punto de tangencia es el vértice. En este caso para todo T en la recta tangente, el punto L coincide con P , y la distancia TN es igual a la distancia de P a la directriz. Luego $\frac{FL}{TN} = \frac{FP}{Pd} = e$, y por lo tanto el teorema se sigue cumpliendo.



Observemos que la segunda implicación del teorema anterior nos da una construcción alternativa a la Construcción 3.2.11.

Teorema 3.2.13: Sea q una cónica con foco F , directriz d y sea T un punto fuera de q tal que TP y TQ son tangentes en P y Q a q . Entonces los ángulos $\sphericalangle TFP$ y $\sphericalangle TFQ$ son iguales o suplementarios.

Demostración: Sean TL , TM y TN perpendiculares a PF , QF y a d , respectivamente. Por la Proposición 3.2.12 tenemos que $\frac{FL}{TN} = e = \frac{FM}{TN}$ y por lo tanto $FL = FM$. Como los triángulos TMF y TLF son rectángulos, comparten la hipotenusa TF y $FM = FL$ entonces son congruentes y por lo tanto $\sphericalangle TFM = \sphericalangle TFL$.



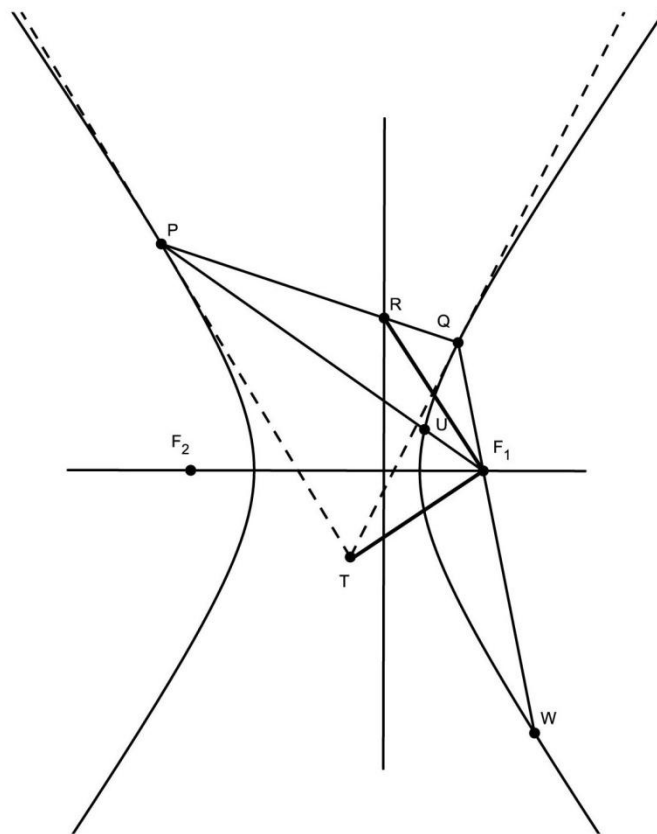
Ahora, si Q está en el rayo FM implica que $\angle TFQ = \angle TFM$ y si Q no está en el rayo implica que $\angle TFQ$ es suplementario a $\angle TFM$. Análogamente, inferimos que $\angle TFL$ y $\angle TFP$ son iguales o suplementarios.

Luego, como $\angle TFL = \angle TFM$ se concluye que $\angle TFQ = \angle TFP$ o $\angle TFQ + \angle TFP = 180^\circ$, como se quería demostrar.



Corolario 3.2.14: Sean P y Q dos puntos diferentes en una cónica q . Supongamos que las tangentes por P y Q se cortan en T y sea R la intersección de PQ con la directriz. Entonces RF es perpendicular a FT , donde F es un foco y d es la directriz correspondiente a F de q .

Demostración: Sea U la otra intersección de la recta PF con q . Del Teorema 3.2.13 los ángulos $\angle TFQ$ y $\angle TFP$ son iguales o suplementarios. Si son iguales, entonces TF es bisectriz interna del ángulo $\angle QFP$. Por el Lema 3.2.3 $\frac{FP}{PR} = \frac{FQ}{QR}$ y por el Lema 1.1.14, concluimos que $\angle RFQ = \angle RFU$ y por lo tanto RF es bisectriz del ángulo $\angle QFU$. Usando el Lema 1.1.5 deducimos que TF y FR son perpendiculares.



Por otro lado, si los ángulos $\angle TFQ$ y $\angle TFP$ son suplementarios, por el argumento anterior $\angle RFQ = \angle RFU$ y por lo tanto RF es bisectriz del ángulo $\angle PFQ$. Además el ángulo $\angle TFP$ es igual al ángulo $\angle TFW$ donde W es la otra intersección de la recta QF con q , de aquí se deduce que TF es la bisectriz del ángulo $\angle PFW$ y por el Lema 1.1.5 TF es perpendicular a RF .

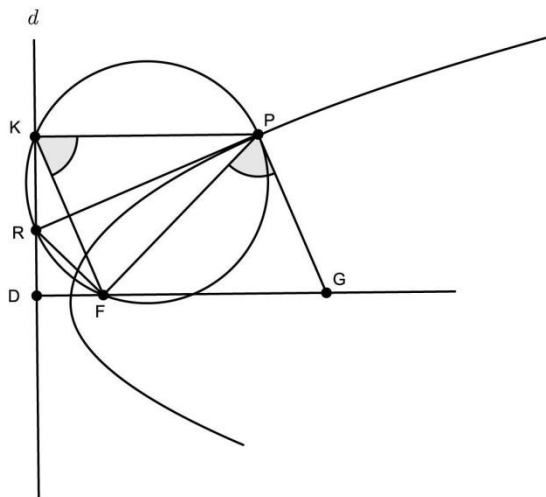


SECCIÓN 3.3 NORMALES, POLOS Y POLARES

Definición 3.3.1: Sea q una cónica y l una recta tangente en un punto P . La **normal** a la cónica por P es la perpendicular a l que pasa por P .

Teorema 3.3.2: Sea q una cónica con foco F , directriz d y P un punto de q . Sea G un punto en el eje de q , entonces G está en la normal por P si y sólo si $\frac{FG}{FP} = e$ donde e es la excentricidad de q .

Demostración: Primero supongamos que G está en la normal. Sean R el punto de intersección de la tangente por P con la directriz d y K el pie de la perpendicular a d por P .



Por Teorema 3.2.9 el ángulo $\angle PFR$ es recto. Como $\angle PKR$ también es recto concluimos que PR es diámetro de la circunferencia que pasa por P, R, F y K . Como PG es perpendicular a PR entonces PG es tangente a la circunferencia de diámetro PR , de donde $\angle FPG = \angle FKP$. Luego, como FG es paralela a PK se tiene que $\angle FPK = \angle PFG$ (por ser ángulos alternos internos) y por lo tanto los triángulos PFG y KPF son semejantes. Esto implica que

$$\frac{FG}{FP} = \frac{PF}{PK} = e.$$

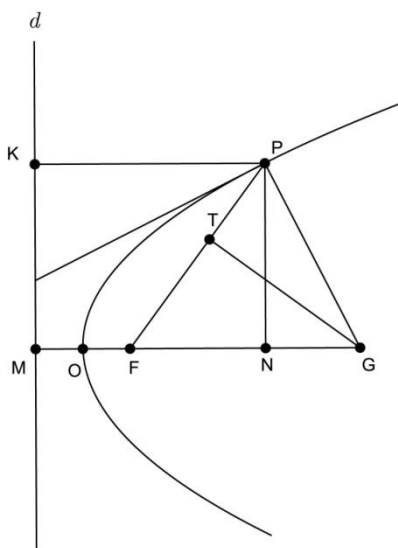
Ahora veamos que si $\frac{FG}{FP} = e$ entonces, G está en la normal de q por P . Como $e = \frac{FG}{FP} = \frac{FP}{PK}$ y PK es paralela a FG tenemos que $\angle PFG = \angle FPK$ (por ser ángulos alternos internos) y en consecuencia los triángulos PKF y FPG son semejantes de donde concluimos que $\angle GPF = \angle PKF$. Esto implica que $\angle GPF$ es un ángulo seminscrita en la circunferencia de diámetro PR y por lo tanto PG es tangente a dicha circunferencia. En consecuencia PG es perpendicular a PR y por lo tanto G está en la normal por P .



Más adelante, en el Corolario 4.1.3 y en las Proposiciones 4.2.3 y 4.3.3 demostraremos para cada cónica que el lado recto de una cónica es la distancia de la cuerda perpendicular al eje que pasa por el foco. Haciendo uso adelantado de estos resultados, demostraremos el siguiente teorema.

Teorema 3.3.3: Sean q una cónica con foco F y G la intersección de la normal por un punto P con el eje de q . Si T es el pie de la perpendicular a PF por G entonces, PT es la mitad de la longitud del lado recto.

Demostración: Sean N el pie de la perpendicular al eje por P , O el vértice de q y M la intersección del eje de q con la directriz. Como los ángulos $\angle FTG$ y $\angle PNM$ son rectos, los triángulos PNF y TFG son semejantes Así, $\frac{FT}{FG} = \frac{FN}{FP}$.



Del Teorema 3.3.2 sabemos que $e = \frac{FG}{FP}$ y por lo tanto se deduce que $e = \frac{FT}{FN}$. Pero también sabemos que $e = \frac{FO}{OM}$ y por lo tanto

$$\frac{FT}{FO} = \frac{FN}{OM} \quad (1)$$

Como $PK = NM$ donde K es el pie de la perpendicular a d por P , entonces $\frac{FP}{NM} = \frac{FO}{OM}$ y por lo tanto

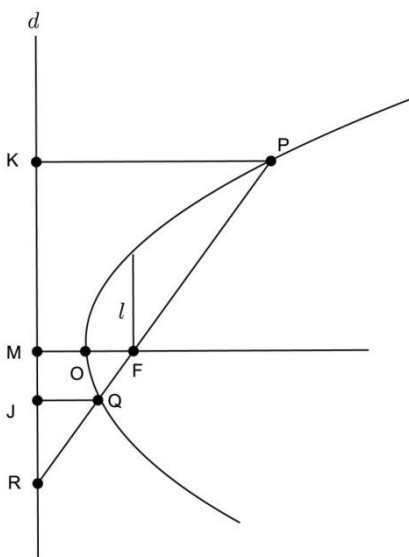
$$\frac{FP}{FO} = \frac{NM}{OM}, \quad (2)$$

de (1) y (2) tenemos que $\frac{PT}{FO} = \frac{FP}{FO} - \frac{FT}{FO} = \frac{NM}{OM} - \frac{FN}{OM} = \frac{FM}{OM}$. Observando los extremos de la igualdad anterior y despejando tenemos que $PT = \frac{FM \cdot FO}{OM}$ para cualquier punto P en q y en particular cuando P está en la perpendicular al eje por F . De donde inferimos que PT es $\frac{1}{2}$ de la longitud de la cuerda focal perpendicular al eje de q .

◆

Teorema 3.3.4: Sea q una cónica con foco F y directriz d , entonces para cualquier cuerda focal PQ el semilado recto es la media armónica de PF y FQ .

Demostración: Sea l la longitud del semilado recto. Entonces si PQ es paralela a la directriz $PF = FQ = l$ lo cual implica que l es la media armónica de PF y PQ .



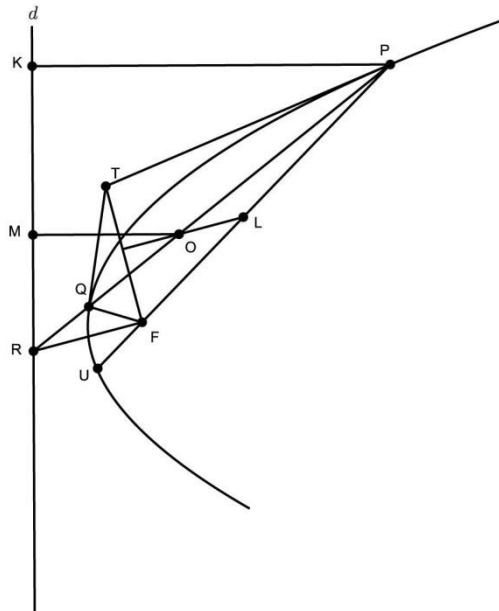
Si PQ no es paralela a la directriz entonces, sea R la intersección de la recta PQ con d . Llamemos K, M y J a los pies de las perpendiculares a d por P, F y Q respectivamente. Entonces $\frac{FP}{PK} = \frac{FQ}{QJ}$ y por lo tanto $\frac{FP}{FQ} = \frac{PK}{QJ}$. Además, por el Lema 3.2.3 $\frac{FP}{FQ} = \frac{PR}{QR}$ y por la Definición 1.2.1, R y F son conjugados armónicos respecto a Q y P . Por el Lema 1.2.2, FR es la media armónica de PR y QR . Como JQ, MF y KP son paralelas, tenemos que $\frac{PR}{PK} = \frac{FR}{FM} = \frac{QR}{QJ}$ lo cual implica, por el Lema 1.2.3, que FM es la media armónica de PK y QJ . Ahora, del

Teorema 3.1.1, inferimos que $e = \frac{PF}{PK} = \frac{l}{FM} = \frac{FQ}{QJ}$ y aplicando nuevamente el Lema 1.2.3 concluimos que l es la media armónica de PF y FQ , como se quería demostrar.



Teorema 3.3.5: Sea q una cónica con directriz d y foco F . Sean P y Q dos puntos sobre q , O un punto en la cuerda PQ y T la intersección de las tangentes por P y Q . Nombremos L a la intersección de la perpendicular a FT por O con FP , entonces, $\frac{FL}{OM} = e$ donde e es la excentricidad de q .

Demostración: Sea K el pie de la perpendicular a d por P y M el pie de la perpendicular a d por O , entonces, $\frac{FP}{PK} = e$ de donde $FP = e \cdot PK$. Además, como OL es perpendicular a FT ,



por el Corolario 3.2.14, OL es paralela a FR , donde R es la intersección de la recta PQ con d .

Por el Teorema de Tales $\frac{FL}{FP} = \frac{RO}{RP}$ y al sustituir FP obtenemos $\frac{FL}{e \cdot PK} = \frac{RO}{RP}$. Despejando llegamos a

$$e = \frac{FL \cdot RP}{RO \cdot PK} = FL \cdot \frac{RP}{RO \cdot PK}. \quad (1)$$

Como PK es paralela a OM los triángulos RPK y ROM son semejantes lo cual implica que $\frac{RO}{OM} = \frac{RP}{PK}$ o, equivalentemente, $\frac{1}{OM} = \frac{RP}{RO \cdot PK}$. Sustituyendo esta última expresión en (1) obtenemos

$$e = FL \cdot \frac{RP}{RO \cdot PK} = FL \cdot \frac{1}{OM} = \frac{FL}{OM},$$

que es lo que se quería demostrar.



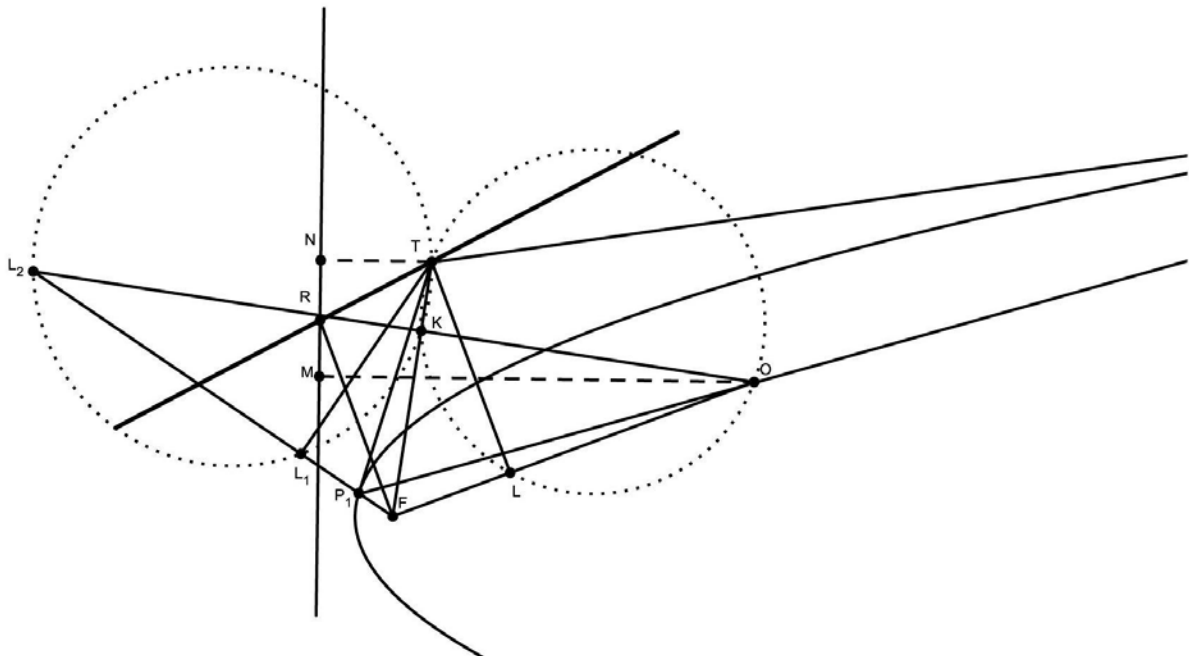
Teorema 3.3.6: Si T es el punto de intersección de dos tangentes a una cónica q por los puntos P_1 y P_2 , entonces, el lugar geométrico de los puntos T cuando P_1 y P_2 se mueven a lo largo de q es una recta si y sólo si la cuerda P_1P_2 pasa por un punto fijo O dentro de q .

Demostración: Sean L el pie de la perpendicular a FO por T , donde F es el foco de q , y M y N los pies de las perpendiculares a la directriz por O y T respectivamente. Afirmamos que $\frac{FO \cdot FL}{OM \cdot TN}$ es constante.

En efecto, tracemos FP_1 y sea L_1 el pie de la perpendicular a FP_1 por T . Sea K el pie de la perpendicular a FT por O y prolonguemos OK hasta cortar a FP_1 en L_2 . Entonces por la Proposición 3.2.12 y por el Teorema 3.3.5, tenemos que $\frac{FL_1}{TN} = \frac{FL_2}{OM} = e$ donde e es la excentricidad de q y por lo tanto

$$\frac{FL_1 \cdot FL_2}{TN \cdot OM} = e^2. \quad (1)$$

Al ser $\angle TKO = \angle TLO = 90^\circ$ y $\angle TKL_2 = \angle TL_1L_2 = 90^\circ$ se tiene que $TKLO$ y TKL_1L_2 son cuadriláteros cíclicos, y por lo tanto, utilizando el Lema 1.1.6, $FO \cdot FL = FK \cdot FT = FL_1 \cdot FL_2$. Sustituyendo esta última igualdad en la ecuación (1) obtenemos $\frac{FO \cdot FL}{TN \cdot OM} = e^2$ lo cual demuestra la afirmación.



Si O es un punto fijo entonces existe una constante j tal que $\frac{FO}{OM} = j$ y por la afirmación anterior tenemos que $\frac{FL}{TN} = \frac{e^2}{j}$ lo cual es constante. Afirmamos que T se mueve a lo largo de una línea.

En efecto, observemos que FL no puede ser el eje de la cónica ya que de lo contrario el punto de intersección de las tangentes no existiría, ahora veamos la demostración de la Proposición 3.2.12 y tomemos la excentricidad mencionada como cualquier constante, en particular $\frac{e^2}{j}$ de donde se deduce que T está en una recta que interseca a la directriz en un punto R de tal manera que el ángulo $\sphericalangle LFR$ es recto.

Supongamos que T está en una línea recta l y llamemos R a la intersección de l con d . Observemos por la afirmación anterior que $\frac{FL}{TN}$ es constante. Como $\frac{FO \cdot FL}{TN \cdot OM} = e^2$ concluimos que $\frac{FO}{OM}$ es constante. Luego por el Teorema 3.1.1 inferimos que O está en una cónica q' con foco F , directriz d y excentricidad $\frac{FO}{OM}$.

Como RF es perpendicular a FO entonces, por el Teorema 3.2.9, existen O y O' dos puntos de tangencia desde el punto R a q' donde O y O' están en una recta que pasa por F . Luego, sabemos que O está en el segmento como P_1P_2 y O' pertenece a dicho segmento si y sólo si P_1P_2 pasa por el foco. Por lo tanto O es un punto fijo el cual está en la intersección del segmento P_1P_2 con la tangente RO .

Corolario 3.3.7: Si T es el punto de intersección de dos tangentes a una cónica q por los puntos P_1 y P_2 , entonces, T está en la directriz si y sólo si la cuerda P_1P_2 pasa por el foco de q .



Usando la notación del teorema anterior, la recta determinada por los puntos T se llama la **polar** del punto O respecto a la cónica q . Y viceversa, si los puntos T están en una recta l , entonces el punto O recibe el nombre de **polo** de l respecto a la cónica q .

Observemos que esta construcción de la polar de un punto respecto a una cónica es análoga a la construcción de los polos y polares respecto a un círculo.

CAPITULO 4 PROPIEDADES ESPECÍFICAS DE CADA CÓNICA.

En el capítulo pasado vimos varias propiedades que conciernen a las tres cónicas en general. Ahora veremos distintas propiedades que son particulares de cada tipo de cónica.

SECCIÓN 4.1 LA PARÁBOLA

Teorema 4.1.1: Sea q una parábola con foco F y directriz d , llamemos O al vértice de la parábola y sea P un punto cualquiera. Entonces P está en la parábola si y sólo si $PN^2 = 4OF \cdot ON$ donde N es el pie de la perpendicular al eje que pasa por P .

Demostración: Sea H el pie de la perpendicular a la directriz por el punto P y llamemos E a la intersección de la directriz con el eje de la parábola. Entonces,

$$PH = EN = EO + ON = OF + ON,$$

de donde,

$$\begin{aligned} PH^2 &= (OF + ON)^2 = OF^2 + 2ON \cdot OF + ON^2 \\ &= OF^2 - 2OF \cdot ON + 4OF \cdot ON + ON^2 \\ &= (ON - OF)^2 + 4OF \cdot ON \\ &= FN^2 + 4OF \cdot ON. \end{aligned}$$

Es decir $PH^2 = FN^2 + 4OF \cdot ON$. Por otro lado, como el triángulo PFN es rectángulo se tiene que $PF^2 = FN^2 + PN^2$. Si P está en la parábola, $PF = PH$ y por lo tanto

$$FN^2 + PN^2 = PF^2 = PH^2 = FN^2 + 4OF \cdot ON,$$

lo cual implica que $PN^2 = 4OF \cdot ON$, como se quería probar. Recíprocamente, si suponemos que $PN^2 = 4OF \cdot ON$, entonces:

$$PH^2 = FN^2 + 4OF \cdot ON = FN^2 + PN^2 = PF^2.$$

Por lo tanto $PH = PF$, lo cual demuestra que P está en la parábola.



Corolario 4.1.2: El lado recto de una parábola es igual a cuatro veces la distancia del foco al vértice.

Demostración: Sea P un punto de la parábola, N el pie de la perpendicular al eje y O el vértice de la parábola. Por la Proposición 2.2.1 $PN^2 = \theta \cdot ON$ y por el Teorema 4.1.1 tenemos que $PN^2 = 4OF \cdot ON$. De aquí concluimos que $\theta = 4OF$.



Corolario 4.1.3: Sea q una parábola con foco F y lado recto θ . Si P es un punto en q tal que PF es perpendicular al eje, entonces $PF = \frac{\theta}{2}$.

Demostración: Por la Proposición 2.2.1 tenemos que $PF^2 = \theta \cdot OF$. Además, si H es el pie de la perpendicular a la directriz por P , entonces $PF = PH = 2OF$. De aquí concluimos que $OF = \frac{PF}{2}$ y por lo tanto

$$PF^2 = \theta \cdot OF = \theta \cdot \frac{PF}{2},$$

lo cual implica que $PF = \frac{\theta}{2}$, como se quería demostrar.



FÓRMULA ANALÍTICA DE LA PARÁBOLA.

Observemos que si la parábola está situada en el plano cartesiano de manera que el vértice coincida con el origen y el eje de la parábola coincida con el eje de las ordenadas, la ecuación $PN^2 = 4OF \cdot ON$ se traduce a la versión analítica:

$$x^2 = 4ay$$

Donde a es el parámetro OF (igual a un cuarto del lado recto). Análogamente si suponemos que el eje de la parábola coincide con el eje de las abscisas, entonces llegamos a la siguiente ecuación analítica:

$$y^2 = 4ax.$$

Construcción 4.1.4 Dada una recta d cualquiera y F un punto fuera de ésta, encontrar los puntos P que pertenecen a la parábola con foco F y directriz d .

Sea H un punto cualquiera en d y sea l la mediatriz del segmento HF , tracemos la perpendicular a d por H y sea P el punto de intersección de esta con l . Entonces afirmamos que P está en la parábola. En efecto, la distancia de P a d es igual a PH y como P está en la mediatriz de HF entonces $PH = PF$ lo cual demuestra que P está en la parábola.



En la Construcción 4.1.4 la recta l es la recta tangente a la parábola por el punto P , como se demostrará en el Lema 4.1.5.

Lema 4.1.5: Si l es una recta tangente a una parábola q en un punto P entonces l es la mediatriz del segmento FH donde F es el foco de la parábola y H es la proyección de P en la directriz d .

Demostración: Si P es el vértice de q entonces l es paralela a d y por el Teorema 3.1.2 $PF = PH$ y por lo tanto l es la mediatriz del segmento FH . Si l no es el vértice de q , sea R la intersección de l con d , por el Teorema 3.2.9, $\sphericalangle PFR = 90^\circ = \sphericalangle PFR$ de donde PR es diámetro de la circunferencia $PFHR$. Además, como $PF = PH$, los ángulos $\sphericalangle RPH$ y $\sphericalangle FPR$ son iguales ya que abren el mismo arco, por lo tanto PR es bisectriz del ángulo $\sphericalangle FPH$. Si Z es la intersección de FH con PR entonces, ZH y ZF son alturas de los triángulos PHR y PRF que a su vez son semejantes y por lo tanto FH es mediatriz de PR , como se quería demostrar.



Construcción 4.1.6 Dado un punto F , una recta l y un punto P en l , encontrar la directriz de la parábola con foco F y tangente a l por el punto P .

Tracemos los segmentos FP y PH , donde H es el reflejado de F sobre l . Sea d la recta perpendicular a HP por H . Entonces, por el Lema 4.1.5, concluimos que d es la directriz buscada.



Observación 4.1.7: Dada una parábola q con foco F y directriz d , no existen dos tangentes a ella que sean paralelas entre sí.

Demostración: Suponemos que existen l y l' rectas tangentes a q y paralelas entre sí. Sean P y P' los puntos de tangencia de l y l' , respectivamente. Llamemos H y K a los pies de las perpendiculares a d por P y P' . Por el Lema 4.1.5 l y l' son mediatrices de los segmentos FH y FK . Como l es paralela a l' , el segmento FH es paralelo al segmento FK , y como estos segmentos comparten el punto F deducimos que $H = K$. Por lo tanto $l = l'$ como queríamos demostrar.



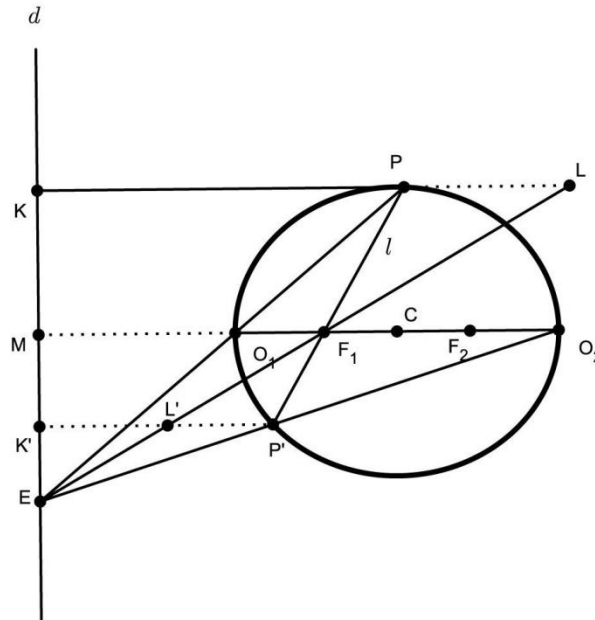
SECCIÓN 4.2 LA ELIPSE.

Hemos demostrado en el Teorema 2.3.6 que toda elipse se puede obtener a través de un corte en un cono recto. Por esta razón, podemos recurrir a la Teorema 3.1.3 a) y redefinir una elipse como el lugar geométrico de todos los puntos P tales que la distancia de P a un punto fijo F_1 entre la distancia de P a una recta dada d_1 es una constante e menor que 1. Utilizaremos esta definición para construir una elipse dados una directriz d , el foco correspondiente F_1 , y la excentricidad $e < 1$.

Construcción 4.2.1: Sea d una recta, F_1 un punto fuera de esta y O_1 un punto en la recta MF_1 (con M el pie de la perpendicular a d por F_1) de tal forma que $\frac{O_1F_1}{O_1M} = e < 1$.

Construiremos la elipse con foco F_1 , vértice O_1 y directriz d . Para ello tracemos O_2 en la prolongación de O_1F_1 de tal forma que $\frac{F_1O_2}{O_2M} = e$, (véase la Construcción 1.1.3).

Sea C el punto medio O_1O_2 y F_2 en O_1O_2 tal que $F_1C = CF_2$. Ahora encontremos los puntos P tal que $\frac{PF_1}{PK} = e$ donde K es el pie de la perpendicular a d por P . Para ello sea E un punto arbitrario en d , tracemos los rayos EO_1, EO_2 y EF_1 . Sea l la recta obtenida al reflejar O_1O_2 en la recta EF_1 .



Sean P y P' los puntos de la intersección de EO_1 y EO_2 con l , respectivamente. Afirmamos que P y P' están en la elipse buscada.

En efecto, sea L la intersección de la recta EF_1 con KP (donde K es el pie de la perpendicular a d por P), como EF_1 es la bisectriz de $\angle PF_1O_2$ se tiene que $\angle PF_1L = \angle LF_1O_2$. Por otro lado, como KL es paralela a O_1O_2 entonces $\angle PLF_1 = \angle LF_1O_2 = \angle PF_1L$. Esto implica

que el triángulo PF_1L es isósceles y por lo tanto $F_1P = PL$ y $\frac{PF_1}{PK} = \frac{LP}{PK}$. Nos fijamos ahora en el triángulo EKL y por el Teorema de Thales inferimos que

$$\frac{PF_1}{PK} = \frac{LP}{PK} = \frac{F_1O_1}{O_1M} = e,$$

lo cual demuestra que P está en la elipse.

Un razonamiento análogo prueba que P' también está en la elipse.



Lema 4.2.2: Sea q una elipse con vértices O_1, O_2 , focos F_1, F_2 y directrices d y d' , respectivamente. La excentricidad e , está dada por:

$$e = \frac{F_1F_2}{O_1O_2} = \frac{O_1O_2}{MM'},$$

donde M y M' son los puntos de intersección del eje con las directrices d y d' , respectivamente.

Demostración: Recordemos que por el Teorema 3.1.1 para cualquier punto P en la elipse se cumple la igualdad $e = \frac{F_1P}{PK_1}$, donde K_1 es el pie de la perpendicular por P a la directriz d . En particular, usando el Lema 1.2.5 a), se tiene que:

$$e = \frac{F_1O_1}{O_1M} = \frac{F_1O_2}{O_2M} = \frac{F_1O_1 + F_1O_2}{O_1M + O_2M} = \frac{O_1O_2}{O_1M + O_1M'} = \frac{O_1O_2}{MM'}.$$

Usando nuevamente el Lema 1.2.5 b) se tiene que:

$$\frac{O_1O_2}{MM'} = \frac{O_1F_1 + F_1F_2 + F_2O_2}{MO_1 + O_1O_2 + O_2M'} = \frac{2O_1F_1 + F_1F_2}{2MO_1 + O_1O_2} = \frac{F_1F_2}{O_1O_2},$$

lo cual completa la demostración.



Proposición 4.2.3: Consideremos la notación de la Construcción 4.2.1. Si $EM = MF_1$ entonces PP' es el segmento perpendicular al eje O_1O_2 que pasa por el foco F_1 . Más aún, en este caso la longitud de PP' es el lado recto.

Demostración: Como los segmentos EM y MF_1 son perpendiculares tenemos que el triángulo EMF_1 es un triángulo rectángulo isósceles. Así la recta LL' forma un ángulo de 45° con respecto a O_1O_2 y por lo tanto PP' forma un ángulo recto con respecto al eje de la elipse. Se sigue de la construcción 4.2.1 que F_1 está en el segmento PP' y por lo tanto PP' es el segmento perpendicular al eje que pasa por F_1 .

Para completar la prueba demostraremos que la longitud del segmento PP' es igual al lado recto θ . Esto es equivalente a demostrar que $PF_1 = \frac{\theta}{2}$.

Por la Proposición 2.3.1 sabemos que $QN \cdot QN = \theta \cdot \frac{NO_1 \cdot NO_2}{O_1O_2}$ para todo punto Q en la elipse. En particular si $N = F_1$ y $Q = P$, se tiene que

$$PF_1 \cdot PF_1 = \theta \cdot \frac{F_1O_1 \cdot F_1O_2}{O_1O_2}. \quad (1)$$

Además por el Teorema 3.1.1 y por el Lema 4.2.2 tenemos las siguientes igualdades

$$\begin{aligned} \frac{PF_1}{F_1M} = e &= \frac{O_1O_2}{MM'} = \frac{O_1O_2}{O_1O_2 + 2MO_1} \\ \frac{PF_1}{F_1M} = e &= \frac{F_1F_2}{O_1O_2} = \frac{O_1O_2 - 2O_1F_1}{O_1O_2}. \end{aligned} \quad (2)$$

De aquí podemos concluir que $\frac{O_1O_2}{O_1O_2 + 2MO_1} = \frac{O_1O_2 - 2O_1F_1}{O_1O_2}$ y por lo tanto

$$(O_1O_2)^2 = (O_1O_2)^2 + 2MO_1 \cdot O_1O_2 - 2O_1O_2 \cdot O_1F_1 - 4MO_1 \cdot O_1F_1.$$

Lo anterior equivale a $4MO_1 \cdot O_1F_1 = 2MO_1 \cdot O_1O_2 - 2O_1O_2 \cdot O_1F_1$ y al dividir entre 2, obtenemos que $2MO_1 \cdot O_1F_1 = MO_1 \cdot O_1O_2 - O_1O_2 \cdot O_1F_1$ y por lo tanto

$$2MO_1 \cdot O_1F_1 + O_1O_2 \cdot O_1F_1 = MO_1 \cdot O_1O_2$$

Si factorizamos llegamos a que $O_1F_1(2MO_1 + O_1O_2) = MO_1 \cdot O_1O_2$ y al despejar concluimos

$$O_1F_1 = \frac{MO_1 \cdot O_1O_2}{2MO_1 + O_1O_2}.$$

Por (2) $\frac{PF_1}{F_1M} = \frac{O_1O_2}{O_1O_2 + 2MO_1}$, y al sustituir en la igualdad anterior llegamos a que

$$O_1F_1 = \frac{PF_1 \cdot MO_1}{F_1M} = \frac{PF_1 \cdot MO_1}{F_1O_1 + O_1M},$$

al despejar PF_1 inferimos que

$$PF_1 = \frac{O_1 F_1 (F_1 O_1 + MO_1)}{MO_1}. \quad (3)$$

Ahora $e = \frac{O_1 F_1}{MO_1} = \frac{O_2 F_1}{MO_2} = \frac{O_2 F_1}{MO_1 + O_1 O_2}$, esto implica que $MO_1 \cdot O_2 F_1 = O_1 F_1 (MO_1 + O_1 O_2)$ y por lo tanto

$$MO_1 \cdot O_2 F_1 = O_1 F_1 \cdot O_1 M + O_1 F_1 \cdot O_1 O_2.$$

Equivalentemente $MO_1(O_2 F_1 - O_1 F_1) = O_1 F_1 \cdot O_1 O_2$. Al despejar MO_1 llegamos a

$$MO_1 = \frac{O_1 F_1 \cdot O_1 O_2}{O_2 F_1 - O_1 F_1}. \quad (4)$$

Ahora sustituimos (4) en (3) y desarrollamos la expresión así obtenida:

$$\begin{aligned} PF_1 &= \frac{O_1 F_1 \left(F_1 O_1 + \frac{O_1 F_1 \cdot O_1 O_2}{O_2 F_1 - O_1 F_1} \right)}{\frac{O_1 F_1 \cdot O_1 O_2}{O_2 F_1 - O_1 F_1}} = \frac{O_1 F_1 \left(\frac{F_1 O_1 (O_2 F_1 - O_1 F_1) + O_1 F_1 \cdot O_1 O_2}{O_2 F_1 - O_1 F_1} \right)}{O_1 F_1 \cdot \frac{O_1 O_2}{O_2 F_1 - O_1 F_1}} = \\ &= \frac{F_1 O_1 \cdot O_2 F_1 - (O_1 F_1)^2 + O_1 F_1 \cdot O_1 O_2}{O_1 O_2} = \frac{F_1 O_1 (O_2 F_1 - O_1 F_1 + O_1 O_2)}{O_1 O_2} = \frac{F_1 O_1 (F_1 F_2 + O_1 O_2)}{O_1 O_2} = \\ &= \frac{F_1 O_1 (F_1 F_2 + F_1 F_2 + O_1 F_1 + F_2 O_2)}{O_1 O_2} = \frac{F_1 O_1 (F_1 F_2 + F_1 F_2 + F_2 O_2 + F_2 O_2)}{O_1 O_2} = \\ &= \frac{F_1 O_1 (2F_1 F_2 + 2F_2 O_2)}{O_1 O_2} = \frac{F_1 O_1 \cdot 2F_1 O_2}{O_1 O_2}. \end{aligned}$$

Si multiplicamos el primer y último término de la igualdad anterior por PF_1 concluimos que

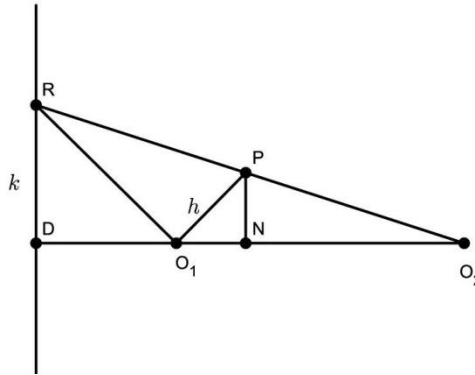
$$PF_1^2 = \frac{F_1 O_1 \cdot 2F_1 O_2 \cdot PF_1}{O_1 O_2}. \quad (5)$$

Por la igualdad (1) e igualando con (5) tenemos que $\theta \cdot \frac{F_1 O_1 \cdot F_1 O_2}{O_1 O_2} = PF_1^2 = \frac{F_1 O_1 \cdot 2F_1 O_2 \cdot PF_1}{O_1 O_2}$. Al simplificar los extremos de la igualdad anterior deducimos que $\theta = 2PF_1$ como se quería demostrar.

◆

Observación 4.2.4: Por la Proposición 2.3.1 una elipse es el lugar geométrico de los puntos P tales que $\frac{PN^2}{NO_1 \cdot NO_2}$ es constante. Si la constante es menor que 1 entonces O_1O_2 es el eje mayor, en caso contrario, O_1O_2 es el eje menor.

Construcción 4.2.5: Sean D y O_2 dos puntos en una recta dada y sea O_1 un punto entre D y O_2 . Sea k la recta perpendicular a DO_2 por D y sea R un punto cualquiera en k . Tracemos las rectas RO_1 y RO_2 y sea h la recta perpendicular a RO_1 por O_1 . Llamemos P a la intersección de h con RO_2 . Afirmamos que el lugar geométrico de los puntos P cuando R se mueve a lo largo de k es una elipse.



En efecto, sea N el pie de la perpendicular a DO_2 por P . Como PN es paralela a RD los triángulos RDO_2 y PNO_2 son semejantes y por lo tanto:

$$\frac{PN}{NO_2} = \frac{RD}{DO_2}.$$

Como el ángulo $\sphericalangle RO_1P$ es recto, se tiene que los ángulos $\sphericalangle DO_1R$ y $\sphericalangle PO_1N$ son complementarios y por lo tanto $\sphericalangle DRO_1 = \sphericalangle PO_1N$, lo cual demuestra que los triángulos RDO_1 y O_1NP son semejantes. De aquí tenemos que:

$$\frac{PN}{NO_1} = \frac{DO_1}{RD}.$$

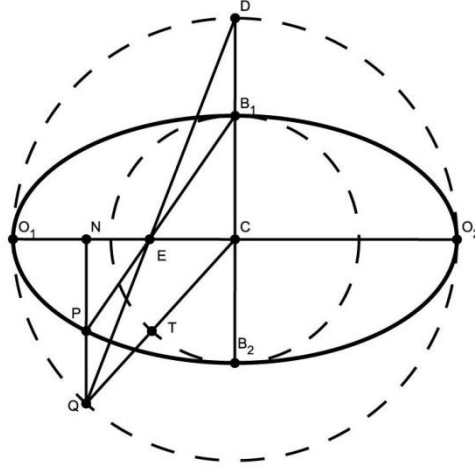
Al multiplicar las igualdades obtenidas, obtenemos:

$$\frac{PN \cdot PN}{NO_2 \cdot NO_1} = \frac{RD \cdot DO_1}{DO_2 \cdot RD} = \frac{DO_1}{DO_2}.$$

Por lo tanto $\frac{PN^2}{NO_2 \cdot NO_1} = \frac{DO_1}{DO_2}$ que es una constante menor que uno y por la Observación 4.2.4, el lugar geométrico de los puntos P es una elipse.



Construcción 4.2.6. Construir una elipse dado el eje mayor O_1O_2 y el eje menor B_1B_2 . Consideremos dos circunferencias concéntricas en un punto C . La primera de diámetro O_1O_2 y la segunda de diámetro B_1B_2 con O_1O_2 perpendicular a B_1B_2 y $O_1O_2 > B_1B_2$. Sea D un punto en el rayo CB_1 de tal forma que $CD = CO_1$. Y sea E un punto cualquiera en el segmento O_1O_2 . Supongamos que el rayo DE corta a la circunferencia de radio O_1C en el punto Q y sea N el pie de la perpendicular a O_1O_2 por Q . Ahora sea P la intersección del rayo B_1E con el segmento QN . Afirmamos que P está en la elipse con eje mayor O_1O_2 , centro C y eje menor B_1B_2 .



En efecto, como QN es paralela a B_1C , por el Teorema de Tales se tiene que $\frac{PN}{QN} = \frac{B_1C}{DC} = \frac{B_1C}{O_1C} = \frac{B_1B_2}{O_1O_2}$. Por el Lema 1.1.6 tenemos que $O_1N \cdot NO_2 = QN^2$. Así:

$$\frac{(B_1B_2)^2}{(O_1O_2)^2} = \frac{(PN)^2}{(QN)^2} = \frac{(PN)^2}{O_1N \cdot NO_2}.$$

Como $O_1O_2 > B_1B_2$, por la Observación 4.2.4 concluimos que P está en la elipse de eje mayor O_1O_2 .

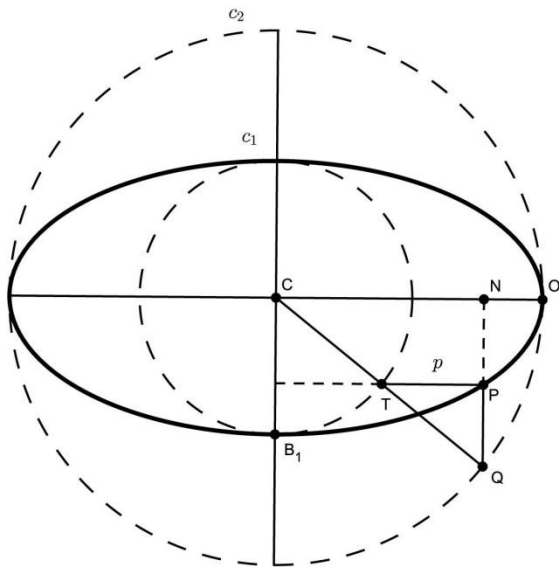


Observemos que en esta construcción sólo se están tomando en cuenta los puntos en una mitad de la elipse. Para considerar la otra mitad tendremos que tomar el punto D' que es la reflexión de D por C y repetir la construcción anterior intercambiando D' por D y B_2 por B_1 .

De la Construcción 4.2.6 podemos observar que $\frac{(B_1B_2)^2}{(O_1O_2)^2} = \frac{(PN)^2}{O_1N \cdot NO_2} = \frac{\theta}{O_1O_2}$. Lo cual implica la siguiente relación: $\theta \cdot O_1O_2 = (B_1B_2)^2$.

Observemos que en la Construcción 4.2.6 si llamamos T a la intersección de QC con la circunferencia de radio menor entonces $\frac{QT}{TC} = \frac{DB_1}{B_1C} = \frac{QP}{PN}$. Por el recíproco del Teorema de Tales, concluimos que PT es paralela a NC y por lo tanto perpendicular a B_1B_2 . Este razonamiento nos permite construir la elipse de la siguiente forma:

Construcción 4.2.7: Sean c_1 y c_2 dos circunferencias con centro en C y radio CB_1 y CO_1 , respectivamente. Supongamos que CB_1 es perpendicular a CO_1 y que c_1 tiene radio menor que c_2 . Sea Q cualquier punto en c_2 y sea T la intersección del segmento CQ con c_1 . Si N es el pie de la perpendicular a la recta CO_1 por Q y p es la paralela a CO_1 por T . Entonces el



lugar geométrico de los puntos P que se obtienen al intersecar p con QN pertenecen a una elipse.

Construcción 4.2.8: Sean F_1 y F_2 puntos arbitrarios distintos. Consideremos la circunferencia con centro F_1 y radio $r > F_1F_2$ y sea E un punto en dicha circunferencia. Tracemos la mediatriz del segmento F_2E y sea P el punto de intersección de la mediatriz con el segmento F_1E . Afirmamos que P está en una elipse de focos F_1 y F_2 .

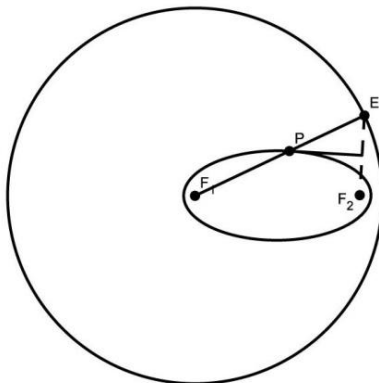
En efecto, como P está en la mediatriz de F_2E , el segmento PF_2 es igual al segmento PE . Como $r > F_1F_2$ entonces P está dentro de la circunferencia ya que si P estuviera fuera, por la desigualdad del triángulo tendríamos que

$$F_1F_2 \geq F_1P - PF_2 = F_1P - PE = F_1E = r,$$

lo cual es una contradicción. Como P está en el segmento F_1E tenemos que $F_1P = F_1E - EP = r - PF_2$, despejando concluimos que

$$r = F_1P + PF_2,$$

y por el Teorema 3.1.6 P está en una elipse de focos F_1 y F_2 .



Lema 4.2.9: Si l es una recta tangente a una elipse en un punto P entonces l es la bisectriz externa del ángulo $\sphericalangle F_1PF_2$, donde F_1 y F_2 son los focos de la elipse.

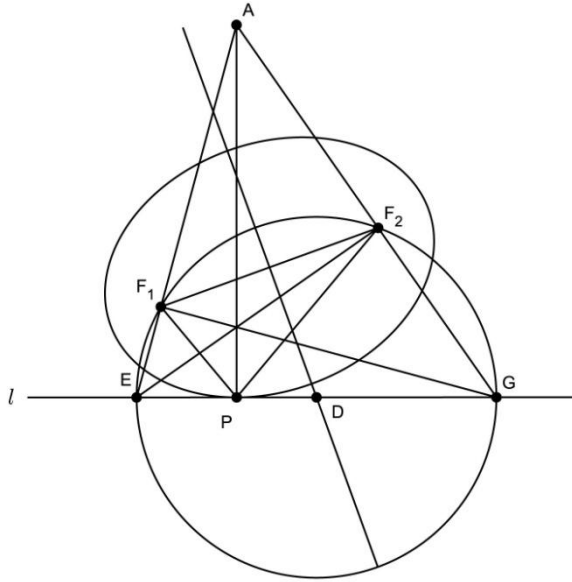
Demostración: Sea P' otro punto sobre l diferente de P . Al ser P el punto de tangencia se tiene que $F_1P' + P'F_2 > F_1P + PF_2$ y por el Teorema 1.1.15 a) concluimos que l es la bisectriz externa del ángulo $\sphericalangle F_1PF_2$.



Construcción 4.2.10: Dados dos puntos F_1 y F_2 y una recta l construir la elipse con focos F_1 y F_2 tangente a l .

Como ya conocemos los focos, para construir la elipse basta encontrar el punto de tangencia. Observemos que si la recta está entre los dos puntos dados o contiene alguno de ellos, entonces no puede ser tangente a ninguna elipse con focos F_1, F_2 . Supongamos entonces que F_1 y F_2 están en un mismo semiplano de los dos semiplanos determinados por l .

Tracemos la mediatriz de F_1F_2 y llamemos D a la intersección de la mediatriz con la recta l . Ahora dibujemos la circunferencia con centro en D y radio DF_1 . Llamemos E y G a los puntos de intersección de la circunferencia con l . Tracemos las rectas EF_1, EF_2, GF_1 y GF_2 . Sea A el punto de intersección de EF_1 con GF_2 . Dibujemos el triángulo F_1F_2P , donde P es el pie de la perpendicular a l que pasa por A . Afirmamos que P está en la elipse de focos F_1 y F_2 , y P es el punto de tangencia de l con la elipse.



En efecto, como E, G, F_1 y F_2 están en una circunferencia con diámetro EG , los ángulos $\sphericalangle EF_2G$ y $\sphericalangle EF_1G$ son rectos y por lo tanto son alturas del triángulo EGA . Esto implica que F_1F_2P es el triángulo órtico de AEA . Por el Teorema 1.1.9, PA es bisectriz de $\sphericalangle F_1PF_2$ y por lo tanto se satisface el Lema 4.2.9. Esto implica que P es el punto de tangencia de l con la elipse, como se quería probar.



FÓRMULA ANALÍTICA DE LA ELIPSE.

Consideremos una elipse de eje O_1O_2 y lado recto θ . Para todo punto P en la elipse sabemos que:

$$PN^2 = \theta \cdot \frac{NO_1 \cdot NO_2}{O_1O_2} = \theta \cdot \frac{NO_1 \cdot (O_1O_2 - NO_1)}{O_1O_2}, \text{ donde } N \text{ es el pie de la perpendicular al eje.}$$

Supongamos que la elipse está situada en el plano cartesiano de manera que el vértice O_1 coincida con el origen y el eje mayor coincida con el eje de las abscisas, entonces la expresión anterior se traduce en términos analíticos a la siguiente ecuación:

$$y^2 = \frac{\theta}{a} x(a - x) = \theta x - \frac{\theta}{a} x^2,$$

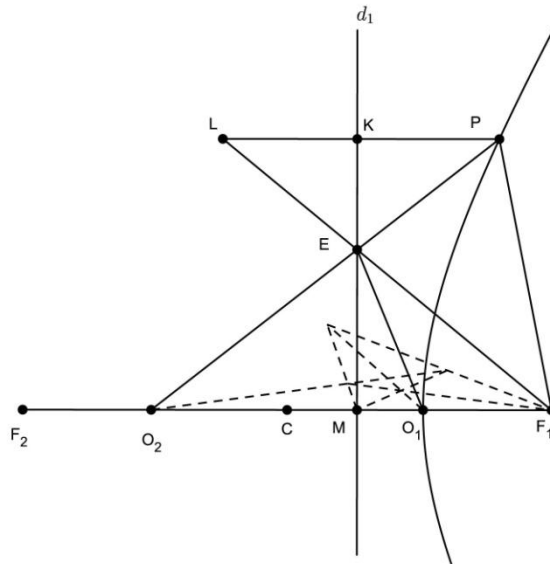
donde a es la longitud del segmento O_1O_2 .

SECCIÓN 4.3 LA HIPÉRBOLA.

Es esta sección se demostrarán algunos teoremas y lemas que son esencialmente iguales a los de la elipse. A continuación construiremos una hipérbola de la misma forma en que se realizó para la elipse en la Construcción 4.2.1.

Construcción 4.3.1: Sea d una recta, F_1 un punto fuera de ésta y O_1 un punto en el segmento MF_1 (con M el pie de la perpendicular a d por F_1) tal que $\frac{F_1O_1}{O_1M} = e > 1$. Construiremos la hipérbola con foco F_1 , vértice O_1 y directriz d . Para ello tracemos O_2 en la prolongación de F_1M de tal forma que $\frac{F_1O_2}{MO_2} = e$ (véase la Construcción 1.1.3).

Sea C el punto medio O_1O_2 y sea F_2 en la prolongación F_1M tal que $F_1C = CF_2$. Sea E un punto arbitrario en d , tracemos los rayos EO_1 , EO_2 y EF_1 y llamamos l la recta obtenida al reflejar O_1O_2 sobre la recta EF_1 .



Si P es el punto de intersección de EO_2 con l , afirmamos que $\frac{F_1P}{PK} = e$ y por lo tanto el lugar geométrico de los punto P así obtenidos es una hipérbola.

En efecto, sea L la intersección de la prolongación de F_1E con KP . Como KL es paralela a O_1O_2 y F_1L es bisectriz del ángulo que forman la recta O_1O_2 con la recta PF_1 entonces $\angle PLF_1$ es igual al ángulo $\angle PF_1L$. Esto implica que el triángulo PF_1L es isósceles y por lo tanto $F_1P = PL$ y $\frac{F_1P}{PK} = \frac{PL}{PK}$.

Nos fijamos ahora en el triángulo EPL y por el Teorema de Tales observamos que:

$$\frac{F_1P}{PK} = \frac{PL}{PK} = \frac{F_1O_2}{MO_2} = e.$$

Lo anterior demuestra que P está en la hipérbola de focos F_1 , directriz d y excentricidad e .

Cabe mencionar que en la construcción anterior sólo se está trazando una hoja de la hipérbola. Para poder construir la otra hoja se puede hacer un procedimiento análogo trazando la directriz d' del otro foco. Recordemos que d' es la recta que se obtiene al reflejar d sobre c .



Lema 4.3.2: Sea q una hipérbola con vértices O_1, O_2 , focos F_1, F_2 y directrices d y d' , respectivamente. La excentricidad e , está dada por:

$$e = \frac{F_1F_2}{O_1O_2} = \frac{O_1O_2}{MM'},$$

donde M y M' son los puntos de intersección de la recta que contiene al eje con las directrices d y d' .

Demostración: Recordemos que por el **Teorema 3.1.1** para cualquier punto P en la hipérbola se cumple la igualdad $e = \frac{F_1P}{PK_1}$, donde K_1 es el pie de la perpendicular por P a la directriz d . En particular, usando el Lema 1.2.5 a), se tiene que:

$$e = \frac{F_1O_1}{O_1M} = \frac{F_1O_2}{O_2M} = \frac{F_1O_1 + F_1O_2}{O_1M + O_2M} = \frac{F_1F_2}{O_1O_2}.$$

Usando nuevamente el Lema 1.2.5 b) se tiene que:

$$\frac{F_1F_2}{O_1O_2} = \frac{O_1F_1 + O_1O_2 + F_2O_2}{MO_1 + MM' + O_2M'} = \frac{2O_1F_1 + O_1O_2}{2MO_1 + MM'} = \frac{O_1O_2}{MM'},$$

lo cual completa la demostración.



Proposición 4.3.3: Consideremos la notación de la Construcción 4.3.1. Si $EM = MF_1$ entonces PF_1 es la mitad de la distancia del lado recto, y PF_1 es la perpendicular al eje.

Demostración: Como los segmentos EM y MF_1 son perpendiculares tenemos que el triángulo EMF_1 es un triángulo rectángulo isósceles. Así la recta LF_1 forma un ángulo de 45° con respecto a O_1O_2 y por lo tanto PF_1 forma un ángulo recto con respecto al eje de la hipérbola.

Para completar la prueba demostraremos que la longitud del segmento PF_1 es igual a la mitad del lado recto θ .

Por la Proposición 2.4.1 sabemos que $QN \cdot QN = \theta \cdot \frac{NO_1 \cdot NO_2}{O_1O_2}$ para todo punto Q en la hipérbola. En particular si $N = F_1$ y $Q = P$, se tiene que:

$$PF_1 \cdot PF_1 = \theta \cdot \frac{F_1O_1 \cdot F_1O_2}{O_1O_2}$$

Por el Teorema 3.1.1 y por el Lema 4.3.2 tenemos la siguiente igualdad:

$$\frac{PF_1}{F_1M} = e = \frac{O_1O_2}{MM'} = \frac{O_1O_2}{O_1O_2 - 2MO_1} \quad (1)$$

donde M' es el la intersección la otra directriz con el eje transverso. Además

$$\frac{PF_1}{F_1M} = e = \frac{F_1F_2}{O_1O_2} = \frac{O_1O_2 + 2O_1F_1}{O_1O_2}.$$

De aquí podemos concluir que $\frac{O_1O_2}{O_1O_2 - 2MO_1} = \frac{O_1O_2 + 2O_1F_1}{O_1O_2}$ y por lo tanto:

$$(O_1O_2)^2 = (O_1O_2)^2 - 2MO_1 \cdot O_1O_2 + 2O_1O_2 \cdot O_1F_1 - 4MO_1 \cdot O_1F_1.$$

Lo anterior equivale a:

$$4MO_1 \cdot O_1F_1 = -2MO_1 \cdot O_1O_2 + 2O_1O_2 \cdot O_1F_1,$$

al dividir entre 2, obtenemos que $2MO_1 \cdot O_1F_1 = O_1O_2 \cdot O_1F_1 - MO_1 \cdot O_1O_2$ y por lo tanto

$$2MO_1 \cdot O_1F_1 - O_1O_2 \cdot O_1F_1 = -MO_1 \cdot O_1O_2.$$

Si factorizamos llegamos a que $O_1F_1(2MO_1 - O_1O_2) = -MO_1 \cdot O_1O_2$ y al despejar concluimos:

$$O_1F_1 = \frac{MO_1 \cdot O_1O_2}{O_1O_2 - 2MO_1}.$$

Por (1) sabemos que $\frac{PF_1}{F_1M} = \frac{O_1O_2}{O_1O_2 - 2MO_1}$, y al sustituir en la igualdad anterior llegamos a

$$O_1F_1 = \frac{PF_1 \cdot MO_1}{F_1M} = \frac{PF_1 \cdot MO_1}{F_1O_1 + O_1M}$$

Al despejar PF_1 inferimos que

$$PF_1 = \frac{O_1F_1(F_1O_1 + MO_1)}{MO_1}. \quad (2)$$

Por otro lado tenemos que $e = \frac{O_1F_1}{MO_1} = \frac{F_1O_2}{MO_2} = \frac{O_2F_1}{O_1O_2 - MO_1}$. Esto implica que

$MO_1 \cdot O_2F_1 = O_1F(O_1O_2 - MO_1)$ y por lo tanto

$$MO_1 \cdot O_2F_1 = O_1F_1 \cdot O_1O_2 - O_1F_1 \cdot MO_1.$$

Equivalentemente $MO_1(O_2F_1 + O_1F_1) = O_1F_1 \cdot O_1O_2$. Al despejar MO_1 llegamos a

$$MO_1 = \frac{O_1F_1 \cdot O_1O_2}{O_2F_1 + O_1F_1}. \quad (3)$$

Ahora sustituimos (3) en (2) y desarrollamos la expresión así obtenida:

$$\begin{aligned} PF_1 &= \frac{O_1F_1 \left(F_1O_1 + \frac{O_1F_1 \cdot O_1O_2}{O_2F_1 + O_1F_1} \right)}{\frac{O_1F_1 \cdot O_1O_2}{O_2F_1 + O_1F_1}} = \frac{O_1F_1 \left(\frac{F_1O_1(O_2F_1 + O_1F_1) + O_1F_1 \cdot O_1O_2}{O_2F_1 + O_1F_1} \right)}{O_1F_1 \cdot \frac{O_1O_2}{O_2F_1 + O_1F_1}} = \\ &= \frac{F_1O_1 \cdot O_2F_1 + (O_1F_1)^2 + O_1F_1 \cdot O_1O_2}{O_1O_2} = \frac{F_1O_1(O_2F_1 + O_1F_1 + O_1O_2)}{O_1O_2} = \frac{F_1O_1(F_1F_2 + O_1O_2)}{O_1O_2} = \\ &= \frac{F_1O_1(O_1O_2 + F_2O_2 + O_1F_1 + O_1O_2)}{O_1O_2} = \frac{F_1O_1(O_1O_2 + F_1O_1 + O_1F_1 + O_1O_2)}{O_1O_2} = \\ &= \frac{F_1O_1(2O_1O_2 + 2F_1O_1)}{O_1O_2} = \frac{F_1O_1(2(O_1O_2 + F_1O_1))}{O_1O_2} = \frac{F_1O_1(2F_1O_2)}{O_1O_2}. \end{aligned}$$

Si multiplicamos el primer y último término de la igualdad anterior por PF_1 concluimos que

$$PF_1^2 = \frac{F_1O_1 \cdot 2F_1O_2 \cdot PF_1}{O_1O_2} \quad (4)$$

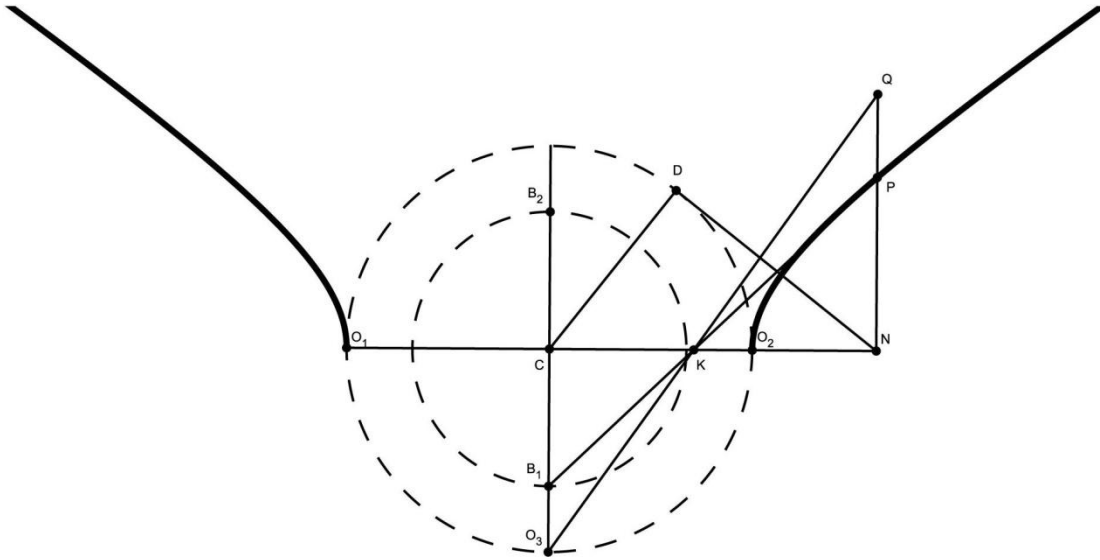
Por la Proposición 2.4.1 e igualando con (4) tenemos: $PF_1^2 = \theta \cdot \frac{F_1O_1 \cdot F_1O_2}{O_1O_2} = \frac{F_1O_1 \cdot 2F_1O_2 \cdot PF_1}{O_1O_2}$

Al simplificar los últimos dos términos de la igualdad anterior deducimos que $\theta = 2PF_1$ como se quería demostrar.

◆

El eje conjugado de una hipérbola es el segmento de longitud $\sqrt{O_1O_2 \cdot \theta}$ (donde θ es el lado recto de la hipérbola) el cual se suele situar como un segmento B_1B_2 ortogonal al eje transversal O_1O_2 de manera que el punto medio de O_1O_2 coincida con el punto medio de B_1B_2 .

Construcción 4.3.4: Construir una hipérbola dado el eje transverso y el eje conjugado. Sea c una circunferencia de diámetro O_1O_2 y llamemos C al centro de c . Supongamos que DN es una tangente a c donde D es el punto de tangencia y N está en la prolongación de O_1O_2 . Tracemos Q un punto en la perpendicular por N a la recta O_1O_2 de tal forma que $QN = DN$. Sea O_3 un punto en c talque CO_3 es perpendicular a O_1O_2 y opuesto a Q por O_1O_2 . Sea K la intersección de la recta QO_3 con O_1O_2 y sea B_1 un punto en el rayo CO_3 . Si P es el punto de intersección del rayo B_1K con la recta NQ entonces P está en la hipérbola de eje transverso O_1O_2 y de longitud de eje menor $2B_1C$.



En efecto, como N es un punto externo a la circunferencia c y D es el punto de tangencia tenemos, por el Lema 1.1.8, que $ND^2 = NO_2 \cdot NO_1$ y como $ND = NQ$ entonces

$$NQ^2 = ND^2 = NO_1 \cdot NO_2$$

Observemos que $\sphericalangle PKQ = \sphericalangle O_3KB_1$ por ser ángulos opuestos por el vértice. Además $\sphericalangle PQK = \sphericalangle B_1O_3K$ y $\sphericalangle KPQ = \sphericalangle KB_1O_3$ por ser PQ y O_3B_1 paralelas. Así, los triángulos KPQ y KB_1O_3 son similares y por lo tanto $\frac{QN}{PN} = \frac{O_3C}{B_1C}$. Al elevar al cuadrado obtenemos $\frac{QN^2}{PN^2} = \frac{O_3C^2}{B_1C^2}$ y si despejamos PN^2 y sustituimos QN llegamos a

$$PN^2 = \frac{QN^2 \cdot B_1C^2}{O_3C^2} = \frac{ND^2 \cdot B_1C^2}{O_3C^2} = \frac{NO_1 \cdot NO_2 \cdot B_1C^2}{O_3C^2}.$$

Como $O_3C = \frac{O_1O_2}{2}$ si llamamos θ a la constante $\frac{4B_1C^2}{O_1O_2}$ concluimos que $PN^2 = \theta \cdot \frac{NO_1 \cdot NO_2}{O_1O_2}$. Lo cual demuestra que P está en la hipérbola de vértices O_1O_2 y lado recto θ .

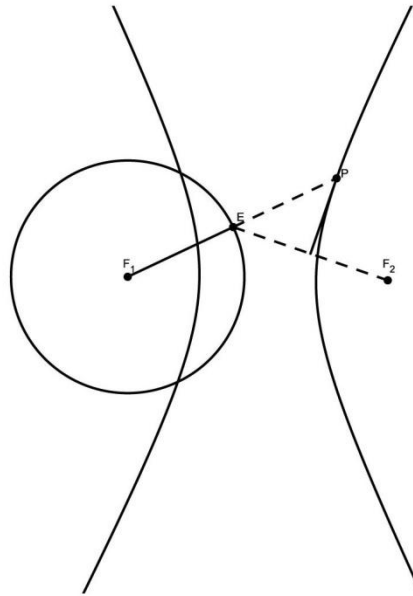


Construcción 4.3.5: Sean F_1 y F_2 puntos arbitrarios distintos. Consideremos la circunferencia con centro F_1 y radio $r < F_1F_2$. Sea E un punto en la circunferencia, tracemos la mediatriz al segmento F_2E y sea P el punto de intersección de la mediatriz con la recta F_1E . Entonces el lugar geométrico de los puntos P así construidos es una hipérbola de focos F_1 y F_2 .

Demostración: Como P está en la mediatriz de F_2E , el segmento PF_2 es igual al segmento PE . Como $r < F_1F_2$ entonces P está fuera de la circunferencia. En efecto, si P estuviera dentro, por la desigualdad del triángulo tendríamos

$$F_1F_2 \leq F_1P + PF_2 = F_1P + PE = F_1E = r,$$

lo cual es una contradicción. Como P está en la recta F_1E tenemos los siguientes casos:



Si P está en el rayo F_1E entonces $PF_1 = PE + EF_1 = PF_2 + r$, despejando tenemos

$$r = PF_1 - PF_2.$$

Si P está en el rayo EF_1 siguiendo un razonamiento análogo llegamos a que $r = PF_2 - PF_1$. Por el Teorema 3.1.5, concluimos que P está en una hipérbola de focos F_1 y F_2 , como se quería probar.



Lema 4.3.6: Si l es una recta tangente a una hipérbola en el punto P entonces l es la bisectriz del ángulo $\angle F_1PF_2$, donde F_1 y F_2 son los focos de la hipérbola.

Demostración: Sea l' la bisectriz del ángulo, si l es distinto de l' entonces existe otro punto Q en la intersección de l' con la hipérbola. Supongamos sin perder la generalidad que P está en la hoja más cercana a F_1 y sea F_1' el reflejado de F_1 con respecto a l' . Entonces $F_1P = PF_1'$ y $F_1Q = QF_1'$ ya que l' es mediatriz de F_1F_1' . Como l' es bisectriz, por el Teorema 1.1.15 b) F_1' está en el segmento PF_2 , de donde

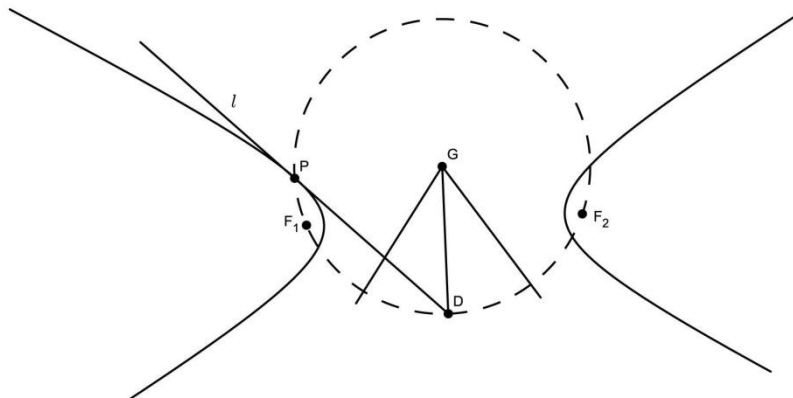
$$F_2F_1' = |F_2P - PF_1'| = |F_2Q - QF_1'|.$$

Por la desigualdad del triángulo $F_2F_1' > |F_2Q - QF_1'|$ y por lo tanto l' no puede intersectar en dos puntos a la hipérbola. Esto demuestra que $l = l'$, como se quería probar.



Construcción 4.3.7: Dados una recta l y dos puntos F_1 y F_2 construir la hipérbola con focos F_1 y F_2 tangente a l .

Para poder construir una hipérbola con estas características es necesario que la recta l no sea la mediatriz de los puntos F_1 y F_2 . Además tiene que pasar entre estos dos puntos sin tocarlos.



Tracemos la mediatriz de F_1F_2 y llamemos D a la intersección de la mediatriz con la recta l . Dibujemos el círculo que pasa por F_1, F_2 y D . Llamemos P al otro punto de intersección de l con la circunferencia. Afirmamos que P está en la hipérbola de focos F_1 y F_2 y P es el punto de tangencia de l a dicha hipérbola.

En efecto, como F_1, F_2 y D están en la una circunferencia y $F_1D = DF_2$, entonces $\sphericalangle F_1PD = \sphericalangle DPF_2$, y por lo tanto PD es bisectriz del ángulo F_1PF_2 . Por el Lema 4.3.6 la recta l es tangente a la hipérbola con focos F_1 y F_2 que pasa por el punto P .

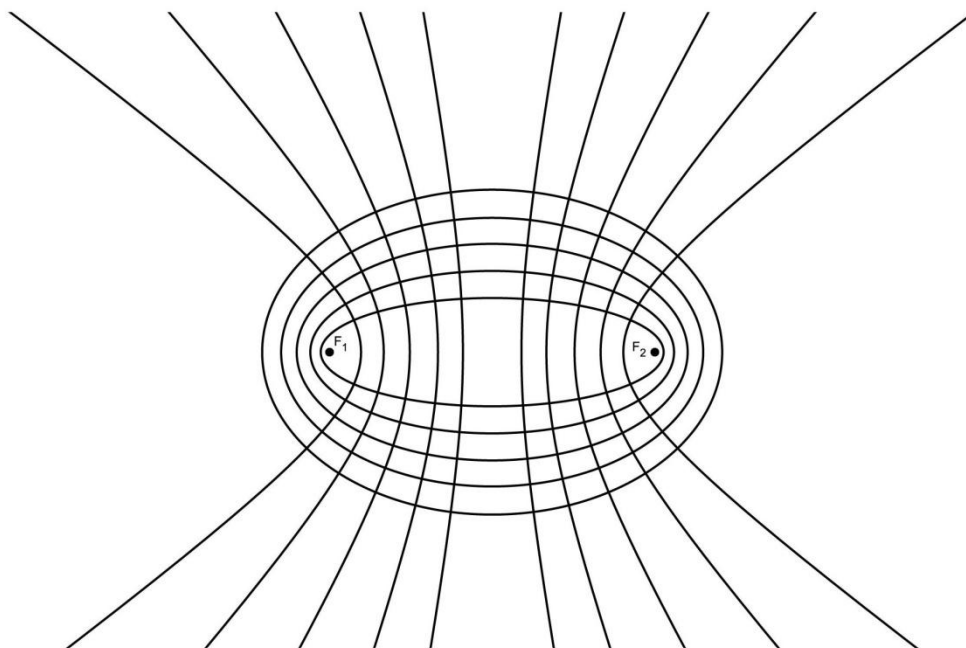


Observemos que la construcción anterior no es posible si el punto D es el punto medio de F_1F_2 . En este caso la recta l será asíntota de una hipérbola con focos F_1 y F_2 .

Si dos cónicas se intersecan en un punto P , llamaremos ángulo de intersección al ángulo formado por las rectas tangentes a las cónicas en el punto P .

Teorema 4.3.8: Sean F_1 y F_2 dos puntos distintos llamemos \mathcal{E} y \mathcal{H} a las familias de todas las elipses e hipérbolas, respectivamente, con focos F_1 y F_2 . Entonces para cualquier e en \mathcal{E} y h en \mathcal{H} los ángulos de intersección de e con h son ángulos rectos.

Demostración: Sea P un punto de intersección de e con h y sea l_e la tangente a e y l_h la tangente a h por P . Por el Lema 4.2.9, l_e es bisectriz externa del ángulo $\sphericalangle F_1 P F_2$ y por el Lema 4.3.6, l_h es bisectriz interna del mismo ángulo. Así, por el Lema 1.1.5, l_e y l_h son perpendiculares.



FÓRMULA ANALÍTICA DE LA HIPÉRBOLA

Consideremos una hipérbola de eje $O_1 O_2$ y lado recto θ . Para todo punto P en la hipérbola sabemos que:

$$PN^2 = \theta \cdot \frac{NO_1 \cdot NO_2}{O_1 O_2} = \theta \cdot \frac{NO_2 \cdot (O_1 O_2 + NO_2)}{O_1 O_2}, \text{ donde } N \text{ es el pie de la perpendicular al eje.}$$

Supongamos que la hipérbola está situada en el plano cartesiano de manera que el vértice O_2 coincida con el origen y el eje coincida con el eje de las abscisas, entonces la expresión anterior se traduce en términos analíticos a la siguiente ecuación:

$$y^2 = \frac{\theta}{a}x(a+x) = \theta x + \frac{\theta x^2}{a}.$$

Donde a es la longitud del segmento O_1O_2 .

CAPITULO 5 TEOREMAS CLASICOS Y APLICACIONES.

SECCIÓN 5.1 LA CUADRATURA DE LA PARÁBOLA.

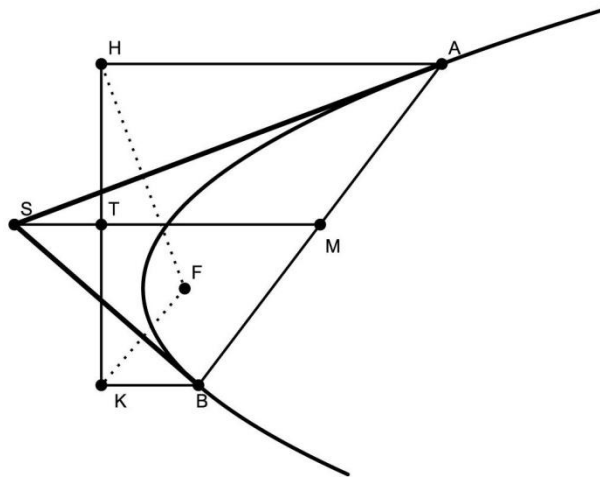
En esta sección demostraremos el teorema clásico de Arquímedes sobre el área de un sector parabólico.

Definición 5.1.1: Dada una parábola q , un triángulo de Arquímedes es aquél determinado por dos tangentes a la parábola y la cuerda que une los puntos de tangencia.

Dados dos puntos A y B en una parábola q , para obtener el triángulo de Arquímedes determinado por la cuerda AB , trazamos las dos tangentes por A y B (como se hizo en la Construcción 4.1.4) y sea S el punto de intersección de dichas tangentes. Entonces ABS es el triángulo buscado. En este caso el segmento AB será la base del triángulo de Arquímedes.

Lema 5.1.2: La mediana de la base de un triángulo de Arquímedes es paralela al eje de la parábola.

Demostración: Sea ABS un triángulo de Arquímedes con base AB llamemos H y K a los pies de las rectas perpendiculares a la directriz por A y B , respectivamente. Si F es el foco



de la parábola entonces SA y SB son mediatrices del triángulo FHK y por lo tanto la recta perpendicular a HK (y paralela al eje) que pasa por S es otra mediatriz del mismo triángulo y consecuentemente pasa por el punto medio de HK y corta en M a la cuerda AB . Sea T el punto medio de la recta HK , por el Teorema de Tales:

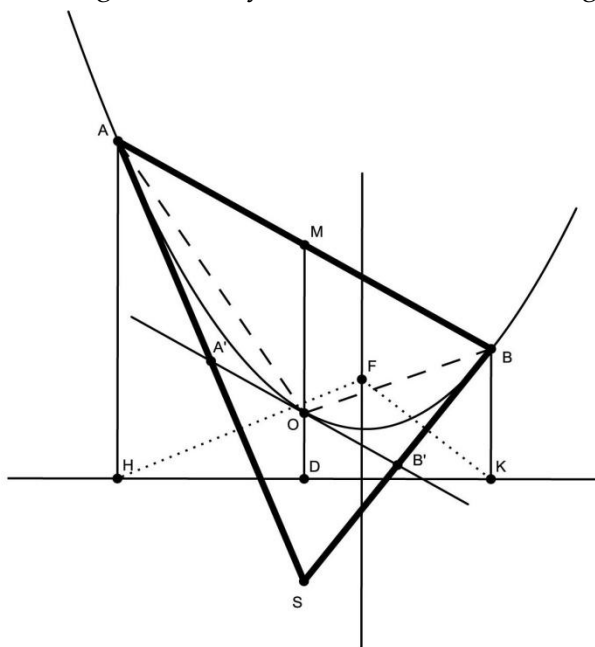
$$1 = \frac{HT}{TK} = \frac{AM}{MB}.$$

Por lo tanto M es el punto medio de AB , lo cual demuestra que la mediana MS es paralela al eje de la parábola.



Lema 5.1.3: Sea ABS un triángulo de Arquímedes. Consideremos A_1 y B_1 los puntos medios de los lados AS y BS . Entonces segmento A_1B_1 es tangente a la parábola en el punto medio de A_1B_1 .

Demostración: Sea O la intersección de la mediana SM (donde M es el punto medio de AB) y la parábola. Sean A' y B' los puntos de intersección de la tangente por O con los segmentos SA y SB , respectivamente. Necesitamos demostrar que $A' = A_1$ y $B' = B_1$. Para ello observemos que los triángulos $AA'O$ y $BB'O$ son también triángulos de Arquímedes.



Por el Lema 5.1.2 las medianas de las bases de estos triángulos son paralelas al eje de la parábola y por lo tanto también son paralelas a SO . Esto implica que la mediana del triángulo $AA'O$ por AO corta a AS en su punto medio. De aquí inferimos que $A_1 = A'$, y análogamente, $B_1 = B'$, como se quería probar.



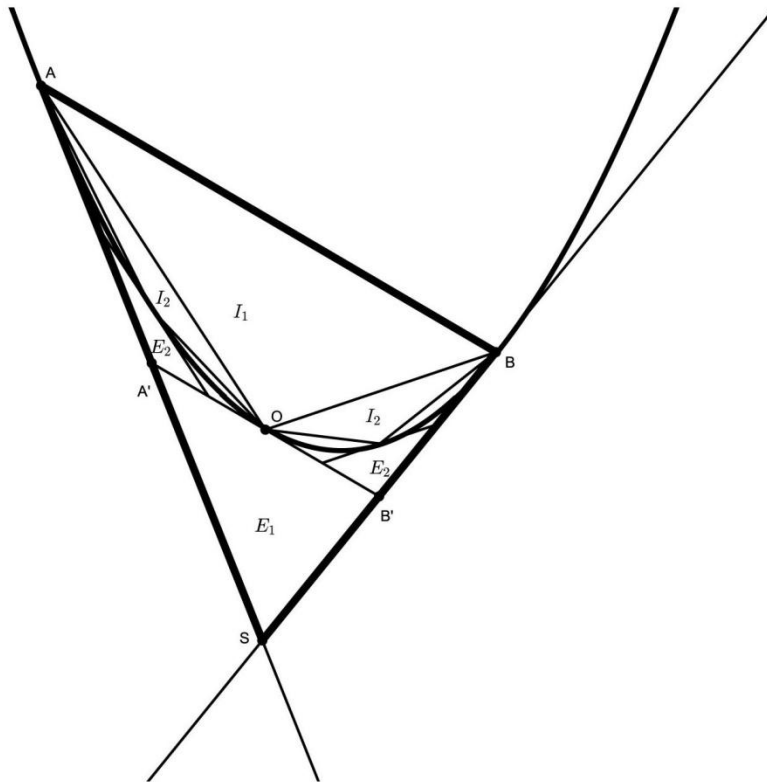
En la demostración anterior podemos observar que los triángulos AOA' y BOB' son triángulos de Arquímedes y tienen la misma área.

Teorema 5.1.4 (Teorema de Arquímedes): Consideremos una parábola q y un triángulo de Arquímedes ABS , entonces el área de la sección parabólica determinada por la cuerda AB es $2/3$ del área del triángulo ABS .

Demostración: Llamemos P al área del sector parabólico y sea T el área del triángulo ABS . Utilizando la notación del Lema 5.1.3, observemos que el triángulo de Arquímedes se divide en cuatro triángulos:

- 1) El triángulo interno AOB que está completamente contenido dentro del área de la parábola.
- 2) El triángulo $A'SB'$ que está completamente contenida en el exterior de la parábola.
- 3) Dos triángulos AOA' y BOB' "residuales" que a su vez son triángulos de Arquímedes.

Llamemos I_1 al área del triángulo interno AOB y E_1 al área del triángulo externo $A'B'S$. Como $A'B'$ es paralela a AB y A' es punto medio de AS se tiene que $I_1 = 2E_1$.



Ahora, cada uno de los triángulos residuales se dividen a su vez en un triángulo interior de área I_2 y uno exterior de área E_2 (donde $I_2 = 2E_2$) y dos triángulos residuales que tienen la misma área.

Continuando sucesivamente con este proceso, en el paso n , podemos dividir a cada uno de los nuevos 2^{n-1} triángulos residuales en un triángulo interno de área I_n , un triángulo externo de área E_n (con $I_n = 2E_n$) y dos triángulos residuales.

Al final de este proceso el área de la parábola será la serie de las áreas de los triángulos internos:

$$P = I_1 + 2I_2 + 4I_3 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1} I_n.$$

Por otro lado, la suma de las áreas de los triángulos externos es igual a T-P:

$$T - P = E_1 + 2E_2 + 4E_3 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1} E_n.$$

Como $I_n = 2E_n$ se tiene que $T - P = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1} E_n = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1} \left(\frac{I_n}{2}\right) = \frac{1}{2}P$

Por lo tanto $T - P = 1/2P$ y al despejar P obtenemos $P = 2/3T$, lo cual completa la demostración.



SECCIÓN 5.2 ENVOLTURA DE UNA PARÁBOLA

Teorema 5.2.1 (Teorema de Apolonio): Sea q una parábola y A y B dos puntos en q distintos. Si las tangentes SA y SB son cortadas por una tercer tangente PQ (siendo P y Q los puntos de intersección con las tangentes SA y SB respectivamente) entonces:

$$\frac{PS}{AP} = \frac{QB}{SQ} = \frac{OQ}{PO'}$$

donde O es el punto de tangencia de PQ con q .

Demostración: Sean las proyecciones A', P', O', S', Q', B' de los puntos A, P, O, S, Q, B , respectivamente, sobre la directriz. Por el Lema 5.1.2 tenemos que

$$A'P' = P'O', O'Q' = Q'B' \text{ y } A'S' = S'B'. \quad (1)$$

Como $A'S' = S'B'$ entonces

$$A'P' + P'S' = S'Q' + Q'B'. \quad (2)$$

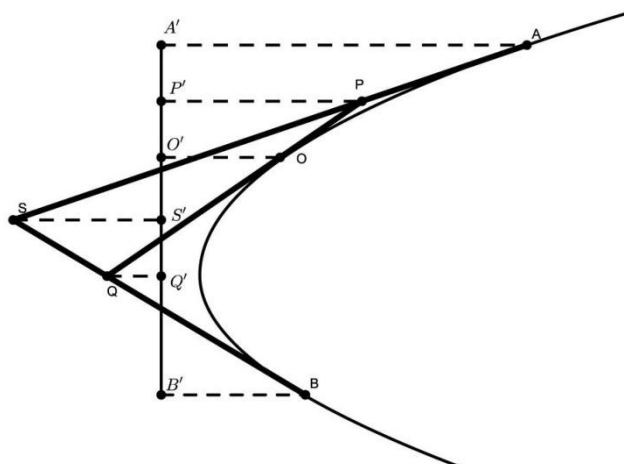
Por otro lado,

$$P'O' + O'Q' = P'Q' = P'S' + S'Q'. \quad (3)$$

Por (1) y (3) $P'S' + S'Q' = P'O' + O'Q' = A'P' + Q'B'$. Esto implica que $P'S' = A'P' + Q'B' - S'Q'$ y al sustituir $P'S'$ en (2) tenemos,

$$A'P' + A'P' + Q'B' - S'Q' = S'Q' + Q'B'.$$

Por lo tanto $2A'P' = 2S'Q'$ y por lo tanto $A'P' = S'Q'$. Al sustituir en (2) obtenemos $P'S' = Q'B'$.



Combinando todas las igualdades encontradas concluimos que:

$$\frac{PS}{AP} = \frac{P'S'}{A'P'} = \frac{Q'B'}{A'P'}$$

$$\frac{OQ}{PO} = \frac{O'Q'}{P'O'} = \frac{Q'B'}{A'P'}$$

$$\frac{QB}{SQ} = \frac{Q'B'}{S'Q'} = \frac{Q'B'}{A'P'}$$

Esto implica que $\frac{PS}{AP} = \frac{OQ}{PO} = \frac{QB}{SQ}$, como se quería probar.



Teorema 5.2.2: Sea S el punto de intersección de dos tangentes a una parábola en los puntos A y B y sean P y Q puntos en SA y SB , respectivamente tales que $\frac{PS}{AP} = \frac{QB}{SQ} = \frac{OQ}{PO}$ donde O es un punto en el segmento PQ entonces PQ es tangente a la misma parábola en el punto O .

Demostración: Como P está en el segmento SA , PA es tangente. Tracemos PQ'' la otra tangente por P y sea O'' el punto de tangencia donde Q'' pertenece al segmento SB . Por el Teorema 5.2.1 tenemos que $\frac{PS}{AP} = \frac{Q''B}{SQ''} = \frac{O''Q}{PO''}$ y por hipótesis tenemos que $\frac{PS}{AP} = \frac{QB}{SQ} = \frac{OQ}{PO}$ de

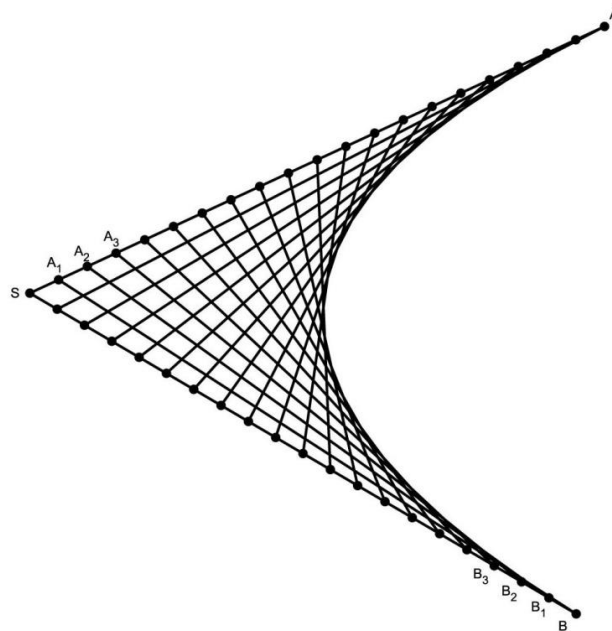
donde $\frac{QB}{SQ} = \frac{Q''B}{SQ''}$ entonces Q y Q'' dividen en la misma proporción a SB y por lo tanto Q y Q'' son iguales. Luego $\frac{OQ}{PO} = \frac{O''Q''}{PO''} = \frac{O''Q}{PO''}$, como O y O'' están en el segmento PQ entonces O y O'' son iguales por lo tanto PO es tangente a la para parábola en O .



Teorema 5.2.3: Sean dos rectas SA y SB no paralelas. Supongamos que el segmento SA está dividido en n partes iguales $S = A_0, A_1, A_2, A_3, \dots, A_{n-1}, A_n = A$ y el segmento SB también está dividido en n partes iguales $B = B_0, B_1, B_2, B_3, \dots, B_{n-1}, B_n = S$.

Entonces las rectas $SB, A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, \dots, A_{n-1}B_{n-1}, AS$ son rectas tangentes a una misma parábola.

Demostración: Consideremos la parábola tangente a SA y SB en los puntos A y B , respectivamente. Si A_i y B_i son cualesquiera dos puntos de la división de los segmentos AS



y SB , respectivamente entonces por construcción $\frac{SA_i}{A_iA} = \frac{BB_i}{B_iS}$ y por el Teorema 5.2.2 A_iB_i es una recta tangente de dicha parábola.



SECCIÓN 5.3 TEOREMA DE LAMBERT.

Lema 5.3.1: Si F es el foco de una parábola y SA una tangente a ésta en el punto A , entonces el reflejado de F sobre SA es un punto sobre la directriz.

Demostración: Sea H la proyección de A en la directriz. Como AH y FA tienen la misma magnitud entonces el triángulo FAH es isósceles siendo SA la mediatriz del segmento HF . Lo cual demuestra que H es el reflejado de F sobre SA .



Lema 5.3.2: Sean SA y SB dos tangentes a una parábola en los puntos A y B , respectivamente. La circunferencia circunscrita al triángulo formado por el foco F y las proyecciones de A y B sobre la directriz tiene centro en S .

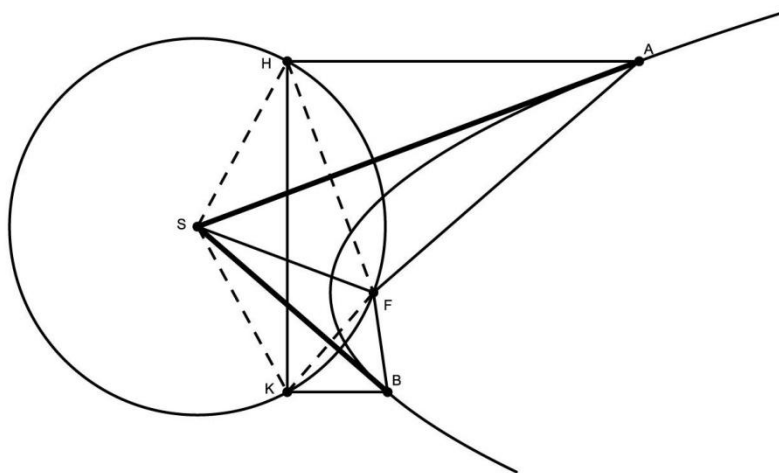
Demostración: Sean H y K las proyecciones de los puntos de tangencia A y B respectivamente. Por el Lema 5.3.1 SA y SB son las mediatrices de los lados FH y FK del triángulo FHK y por lo tanto S es el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo FHK .



Lema 5.3.3: Sean SA y SB dos rectas tangentes a una parábola q . Supongamos que A y B son los puntos de tangencia y sea F el foco de q . Entonces el triángulo FSA es semejante al triángulo FSB . Más aún el ángulo $\angle FAS$ es igual al ángulo $\angle FSB$ y el ángulo $\angle FBS$ es igual al ángulo $\angle FSA$.

Demostración: Sean H y K la reflexión de F sobre SA y SB , respectivamente. Por el Lema 5.3.1, H y K están sobre la directriz de la parábola y como AS es tangente a q , por el Lema 4.1.5, el ángulo $\angle FAS$ es igual al ángulo $\angle HAS$. Ahora como HK es perpendicular a AH y FH es perpendicular a AS tenemos que $\angle FAS = \angle FHK$. Análogamente se deduce que $\angle FBS = \angle FKH$.

Por el Lema 5.3.2, S es el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo FHK de donde



podemos observar que el ángulo $\angle FHK$ es la mitad del ángulo $\angle FSK$ y $\angle FKH$ es la mitad del ángulo $\angle FSH$. Por lo tanto:

$$\angle FHK = \angle FSB \text{ y } \angle FKH = \angle FSA.$$

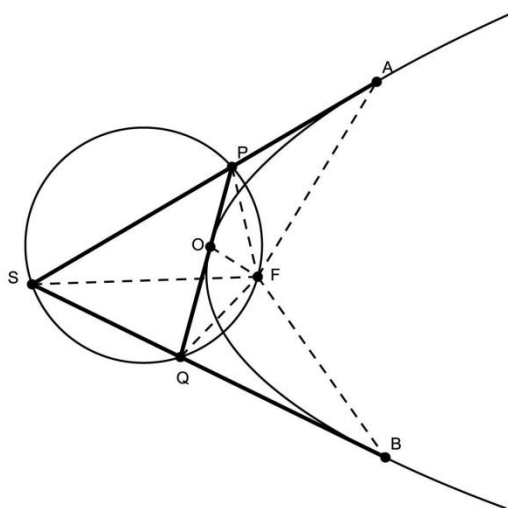
De esto deducimos que:

$$\angle FAS = \angle FSB \text{ y } \angle FBS = \angle FSA,$$

como se quería probar. ◊

Teorema 5.3.4 (Teorema de Lambert): La circunferencia circunscrita al triángulo formado por tres tangentes a una parábola pasa por el foco de dicha parábola.

Demostración: Sean SA y SB dos tangentes a una parábola q . Supongamos que una tercera



tangente corta a SA y SB en P y Q , respectivamente. Sea O el punto de tangencia de PQ con q . Por el Lema 5.3.3 tenemos,

$$\angle FAS = \angle FSB \text{ y } \angle FAP = \angle FPO,$$

en consecuencia

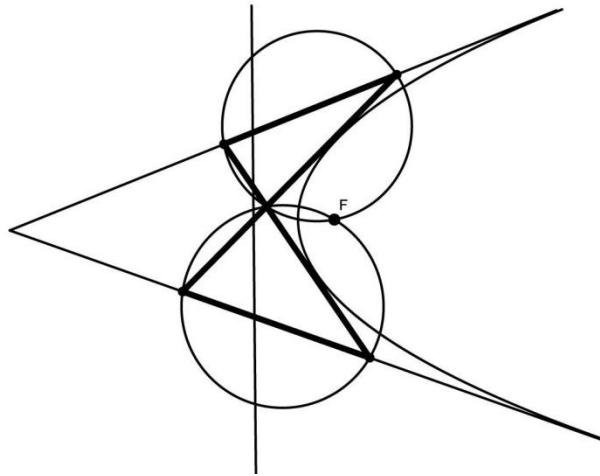
$$\angle FSQ = \angle FPQ,$$

y por lo tanto $FPSQ$ es un cuadrilátero cíclico, como se quería demostrar. ◊

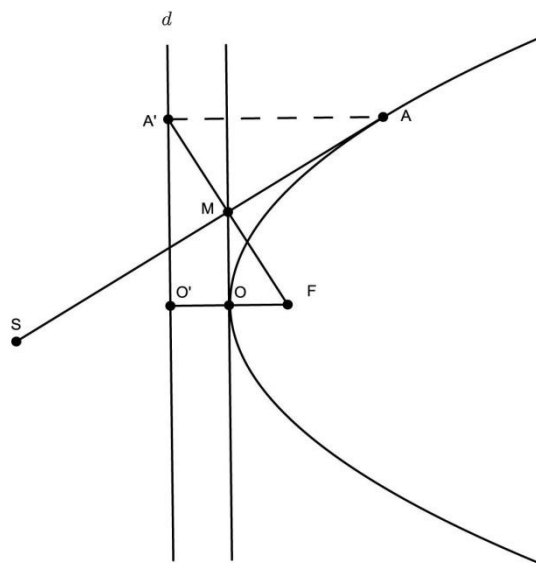
El Teorema de Lambert nos permite dar la siguiente construcción.

Construcción 5.3.5 Dadas cuatro tangentes a una parábola, encontrar el foco y la directriz.

Encontremos dos triángulos cada uno formado por tres de las cuatro rectas dadas (esto se puede hacer por la Observación 4.1.7). Por el Teorema 5.3.4, la intersección de las circunferencias circunscritas a estos triángulos ajenas al los vértices será el foco de la parábola y por el Lema 5.3.1 la directriz la encontramos reflejando el foco sobre dos de las tangentes dadas.



Lema 5.3.6: El lugar geométrico de los puntos formados por las proyecciones de F sobre todas las tangentes a una parábola es la recta tangente en el vértice de dicha parábola. Es decir, para cada punto A en la parábola la proyección de F sobre la tangente SA está en la tangente a la parábola por el vértice.



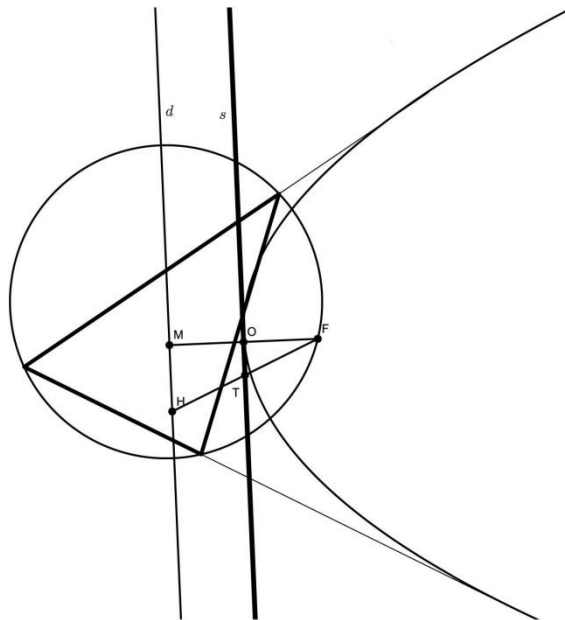
Demostración: Sea O el vértice de la parábola. La tangente por O es la recta paralela a la directriz que pasa por el punto O . Además si O' es la intersección de FO con la directriz entonces $FO = OO'$. Sea A cualquier punto de la parábola y SA la tangente a ésta por A , entonces, SA es la mediatriz del segmento FA' donde A' es la proyección de A en la directriz. Esto implica que la proyección de F sobre la tangente SA es el punto medio del segmento FA' . Llamemos M a este punto, por el Teorema de Tales, MO es paralela a $A'O'$ y por lo tanto M está en la tangente a la parábola por el punto O .



De este último Lema y del Teorema 5.3.4 podemos concluir que la línea de Simson asociada al foco, (respecto a cualquier triángulo formado por tres tangentes a la parábola), es la tangente que pasa por el vértice.

Teorema 5.3.7: Sea q una parábola con foco F y directriz d , entonces el ortocentro de un triángulo formado por tres tangentes a q pasa por d .

Demostración: Por el Lema 5.3.6 la línea de Simson s asociada a F es la recta tangente por el vértice O a q . Además, $\frac{MO}{FM} = \frac{1}{2}$ donde M es el pie de la perpendicular por O a d . Luego,



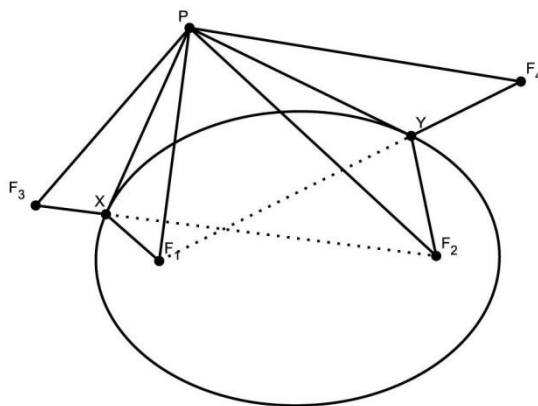
por el Teorema 1.1.13, s divide en dos al segmento FH donde H es el ortocentro del triángulo formado por las tres tangentes; es decir, si T es la intersección de FH con s , entonces $\frac{FT}{FH} = \frac{1}{2}$. Por el Teorema de Tales concluimos que HM es paralela a s y por lo tanto H pertenece a d .



SECCIÓN 5.4 PONCELET.

Teorema 5.4.1 (Propiedad Isogonal): Sean F_1 y F_2 los focos de una elipse e y sean PX y PY dos rectas tangentes a e con X y Y los puntos de tangencia. Entonces los ángulos $\sphericalangle F_1PX$ y $\sphericalangle F_2PY$ son iguales.

Demostración: Sean F_3 y F_4 las reflexiones sobre las tangentes PX y PY de los focos F_1 y F_2 , respectivamente. Entonces $PF_3 = PF_1$ y $PF_2 = PF_4$ y por el Teorema 1.1.15 F_3, X, F_2 están en una recta. Análogamente F_4, Y, F_1 se encuentran alineados.



Por el Teorema 3.1.6 tenemos que,

$$F_2F_3 = F_2X + XF_3 = F_2X + XF_1 = F_2Y + YF_1 = F_1Y + YF_4 = F_1F_4.$$

Esto implica que los triángulos PF_3F_2 y PF_1F_4 son congruentes por tener los tres lados iguales. Así concluimos que $\sphericalangle F_2PF_1 + 2\sphericalangle F_1PX = \sphericalangle F_2PF_3 = \sphericalangle F_1PF_4 = \sphericalangle F_2PF_1 + 2\sphericalangle F_2PY$ lo cual implica que $\sphericalangle F_1PX = \sphericalangle F_2PY$, como se quería demostrar.



La demostración del Teorema 5.4.1 nos da una prueba alternativa al Teorema 3.2.13 en el caso de la elipse. Simplemente observemos que los triángulos PF_3F_2 y PF_1F_4 , al ser congruentes, garantizan que:

$$\sphericalangle PF_1X = \sphericalangle PF_3F_2 = \sphericalangle PF_1F_4 = \sphericalangle PF_1Y.$$

Teorema 5.4.2: Sea P el punto de intersección de dos tangentes l_1, l_2 a una elipse e de tal forma que el ángulo entre l_1 y l_2 es recto. Entonces el lugar geométrico de los puntos P que cumplen esta propiedad es una circunferencia con centro en el centro de la elipse.

Demostración: Si F_1 y F_2 son los focos de e , X y Y los puntos de tangencia de las rectas l_1 y l_2 , respectivamente, y F'_1 el reflejado de F_1 con respecto a l_1 , entonces por la demostración del Teorema 5.4.1 tenemos que $\sphericalangle XPY = \sphericalangle F'_1PF_2$ y, F'_1, X y F_2 son colineales. Luego, la longitud del segmento $F'_1F_2 = F_1X + XF_2$ la cual coincide con la longitud del eje mayor de la elipse. Ahora, por el teorema de Pitágoras, como $\sphericalangle F'_1PF_2$ es recto (ya que $\sphericalangle F'_1PF_2 = \sphericalangle XPY$), se tiene que $F'_1P^2 + PF_2^2 = F'_1F_2^2$. Pero $F'_1P = F_1P$ y por lo tanto $F_1P^2 + F_2P^2$ es igual al cuadrado del eje mayor de e .

Supongamos sin perder la generalidad que la elipse está centrada en el origen y tiene focos en los puntos $(x_1, 0)$ y $(-x_1, 0)$. Entonces, para todos los puntos $P = (x, y)$ se satisface que:

$$(x - x_1)^2 + y^2 + (x + x_1)^2 + y^2 = C,$$

donde C es el cuadrado del eje mayor de e . Desarrollando lo anterior concluimos que:

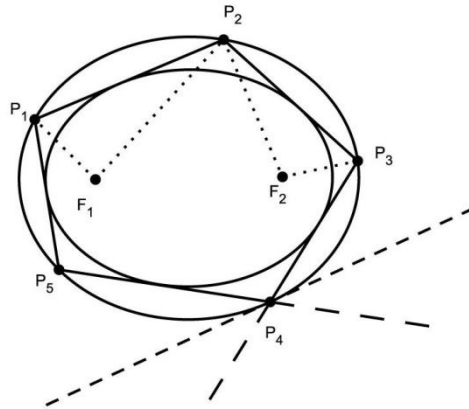
$$2x^2 + 2y^2 + 2x_1^2 = C.$$

Equivalentemente $x^2 + y^2 = \frac{C}{2} - x_1^2$. Como $\frac{C}{2} > \frac{C}{4} = \left(\frac{l}{2}\right)^2 > x_1^2$ entonces $\frac{C}{2} - x_1^2 > 0$ y por lo tanto la ecuación anterior describe una circunferencia.



Teorema 5.4.3 (Teorema de Poncelet): Sea C un polígono convexo de n lados inscrito en una elipse e de tal forma que C tenga un perímetro máximo (máximo entre todos los polígonos convexos de n lados inscritos en la elipse). Entonces C contiene a una elipse e_n la cual está inscrita en C y tienen los mismos focos que e .

Demostración: Sean $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$ los vértices de C . Afirmamos que las tangentes a e en P_i son las bisectrices externas de las rectas $P_{i-1}P_i$ y P_iP_{i+1} . Supongamos que no es el caso y consideremos e' una elipse con focos en P_{i-1}, P_{i+1} que pase por P_i . Por el Lema 4.2.9, l la recta tangente a e' en P_i , es la bisectriz exterior del ángulo $\sphericalangle P_{i-1}P_iP_{i+1}$, y por hipótesis dicha recta no es tangente a e . Entonces existe $P_x \neq P_i$ en la intersección de l con e . De donde $P_{i-1}P_x + P_xP_{i+1} > P_{i-1}P_i + P_iP_{i+1}$ ya que P_x esta fuera de e' . Entonces $P_1P_2 + \dots + P_{i-1}P_x + P_xP_{i+1} + \dots + P_nP_1 > P_1P_2 + \dots + P_{i-1}P_i + P_iP_{i+1} + \dots + P_nP_1$ y por lo tanto $P_1, \dots, P_{i-1}, P_x, P_{i+1}, \dots, P_n$ son los vértices de un polígono inscrito en e de perímetro mayor que el polígono original lo cual contradice el hecho de que habíamos escogido un polígono con perímetro máximo. Por lo tanto la tangente por P_i es la bisectriz externa de las rectas $P_{i-1}P_i$ y P_iP_{i+1} .



Ahora mostremos que se puede inscribir una elipse e_n en C . Sean F_1 y F_2 los focos de e y sea e_n la elipse con focos F_1 y F_2 de tal forma que P_1P_2 sea tangente a e_n (ver Construcción 4.2.10). Afirmamos P_2P_3 también es tangente a e_n . En efecto sea k la otra tangente a e_n que pasa por P_2 , por el Teorema 5.4.1 el ángulo $\sphericalangle P_1P_2F_1$ es igual al ángulo formado por la tangente k y la recta P_2F_2 . Como la tangente a e_n por P_2 es bisectriz exterior de $\sphericalangle P_1P_2P_3$ y de $\sphericalangle F_1P_2F_2$ concluimos que el ángulo $\sphericalangle P_3P_2F_2 = \sphericalangle P_1P_2F_1$ y por lo tanto el segmento P_2P_3 está en la tangente k . Repitiendo este argumento sucesivamente para todos los vértices del polígono concluimos que e_n está inscrita en C .



SECCIÓN 5.5 DUPLICACIÓN DEL CUBO.

Terminaremos este trabajo con el problema de la duplicación del cubo, el cual motivó el estudio de las cónicas hace más de 2000 años.

Dado un cubo C con arista a , el problema de la duplicación del cubo consiste en construir un cubo cuyo volumen sea el doble del volumen de C , es decir, si C tiene volumen a^3 entonces debemos encontrar un cubo de volumen $2a^3$. Para resolver el problema necesitamos encontrar un segmento de longitud x talque $x^3 = 2a^3$.

Si encontramos dos medias geométricas x y y de tal forma que:

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2a},$$

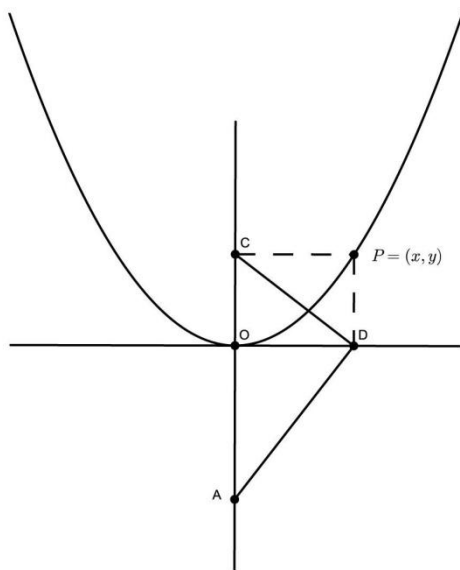
entonces tendríamos que $x^2 = ay$ y $y^2 = 2ax$. Despejando y sustituyendo y encontramos que $y = \frac{x^2}{a}$ de donde $\left(\frac{x^2}{a}\right)^2 = 2ax$. Esto implica que $x^3 = 2a^3$ y por lo tanto x sería la longitud de la arista que necesitamos encontrar.

De esta manera si lográramos trazar las parábolas $x^2 = ay$ y $y^2 = 2ax$ y llamamos P a la intersección de las dos parábolas entonces la abscisa de P sería la longitud buscada. Análogamente, si pudiéramos trazar la hipérbola $2a^2 = xy$ entonces la abscisa del punto P obtenido al intersecar dicha hipérbola con la parábola $x^2 = ay$, sería la longitud buscada. Aunque trazar con regla y compás una parábola o una hipérbola completa es imposible, siempre es posible encontrar algunos puntos. A continuación daremos dos construcciones que permiten encontrar los puntos de una parábola de ecuación $x^2 = ay$, así como los puntos de una hipérbola de ecuación $ab = xy$.

Construcción 5.5.1: Construir la parábola $x^2 = ay$.

Sea ADC un triángulo rectángulo con ángulo recto en D . Llamemos O al pie de la perpendicular desde D sobre AC y sea P la intersección de las perpendiculares a OC y OD por C y D , respectivamente.

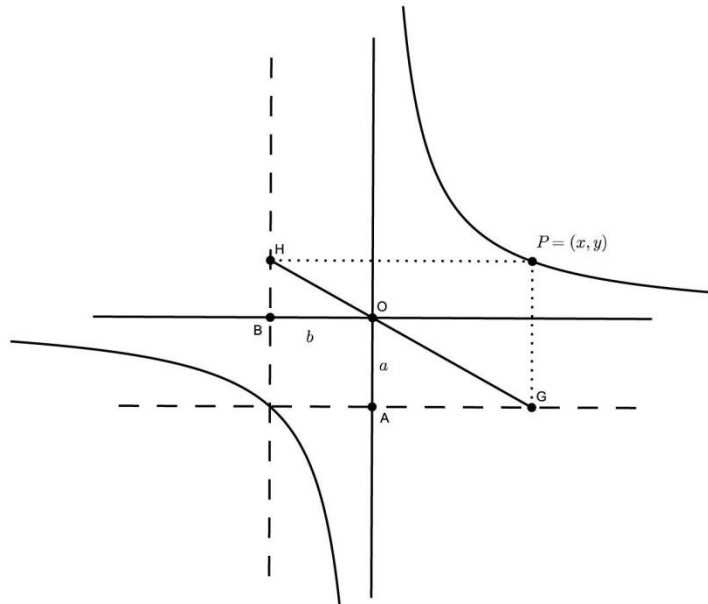
Entonces los triángulos COD y DOA son semejantes, lo cual implica que $\frac{OD}{CO} = \frac{OA}{OD}$ de donde $OD^2 = CO \cdot OA$. Supongamos que la recta AC es el eje de las ordenadas y la recta OD el eje de las abscisas. Entonces, haciendo $x = OD$, $y = CO$ y $a = OA$ concluimos que el punto $P = (x, y)$ satisface $x^2 = ay$.



De esta manera, si mantenemos el punto C fijo y movemos los puntos A y D a lo largo del eje de las ordenadas y abscisas, respectivamente, de tal forma que el ángulo CDA es recto, entonces los puntos P obtenidos por la construcción anterior están en la parábola $x^2 = ay$.

Construcción 5.5.2: Dadas a y b magnitudes positivas, construir la hipérbola de ecuación analítica $ab = xy$.

Consideremos dos segmentos perpendiculares OA y OB de longitud a y b , respectivamente. Tracemos la recta paralela a OB por A y sea G cualquier punto en esta recta. Consideremos la recta GO y llamemos H a la intersección de la prolongación de GO con la recta paralela a OA por B . Sea P la intersección de la recta paralela a OA por G con la recta paralela a OB por H .



Observemos que los triángulos OHB y $G AO$ son semejantes, lo cual implica que

$$\frac{OA}{AG} = \frac{HB}{BO}. \quad (1)$$

Supongamos que la recta OB es el eje de las abscisas y la recta OA el eje de las ordenadas. Entonces el punto $P = (x, y)$ tiene coordenadas $x = AG$ y $y = BH$. Como $OA = a$ y $OB = b$ concluimos que $\frac{a}{x} = \frac{y}{b}$ y por lo tanto P está en la hipérbola $ab = xy$.

BIBLIOGRAFÍA.

- [1] A.V.Akopyan, A.A. Zaslavsky, *Geometry of Conics*, traducción de American Mathematical Society, Estado Unidos, 2007.
- [2] Apollonius, *Apollonius of Perga Conics Books I-III*, traducido al inglés por C. R. Taliaferro, Green Lion Press, Santa Fé, 1998.
- [3] Carl B. Boyer, *Historia de la Matemática*, Alianza Editorial S.A, Madrid, 1986.
- [4] H. Eves, *A Survey of Geometry*, Vol. 1, Allyn and Bacon, Inc., Boston, 1963.
- [5] D. Heinrich, *100 Great Problems of Elementary Mathematics: their History and Solution*, Dover publications Inc., New York 1965.
- [6] Radmila Bulajich Manfrino, Gomez Ortega José Antonio, *Geometría*, Instituto de Matemáticas, UNAM, 2002.
- [7] T. Sundara Row, *Geometric Exercises in Paper Folding*, Dover publications Inc., New York, 1966.
- [8] C. Taylor, *An Introduction to the Ancient and Modern Geometry of Conics*, Deighton, Bell and Co., London, G. Bell and sons, Cambridge, 1881.
- [9] G. J. Toomer, *Apollonius Conics Books V to VII*, Vol 1 y 2, Springer, New York, 1990.