UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Conexidad en categorías concretas de conjuntos estructurados

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICO

P R E S E N T A:

LUIS MANUEL VENEGAS GRAJALES

DIRECTOR DE TESIS:
MAT. SAÚL ARCE ROCHA

2016

CIUDAD UNIVERSITARIA, CDMX

Datos del Alumno
Venegas
Grajales
Luis Manuel
5542706380
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Matemáticas
40508711-0

Datos del tutor
Mat.
Saúl
Arce
Rocha

Datos del sinodal 1
Dr.
Javier
Páez
Cárdenas

Datos del sinodal 2
Dr.
Ángel
Tamariz
Mascarúa

Datos del sinodal 3
Dr.
Iván Fernando
Vilchis
Montalvo

Datos del sinodal 4
Mat.
Enrique Guillermo
Bazúa
Durán

Datos del trabajo escrito
Conexidad en categorías concretas de conjuntos estructurados
123 p.
2016

Índice general

Parte I

Categorías concretas de conjuntos estructurados (*ccce*)

Capítulo 1

Ejemplos y definición de *ccce*

En una relación de perfecto balance entre la generalidad y la concretés de muchos conceptos matemáticos, la así llamada *Teoría de las estructuras matemáticas*, exhibe una visión que sistematiza y unifica muchas construcciones, métodos y pruebas que se dan en diferentes ramas de la Matemática.

Escuetamente enunciado, la teoría de las estructuras matemáticas pone especial atención en los conjuntos que han sido provistos de algún tipo de *estructura* y del modo en que éstos, los conjuntos estructurados, se relacionan entre sí a través de ciertas *funciones que se distinguen por preservar tal estructura*. El sentido de la noción de estructura matemática es el de otorgar a un conjunto dado ciertas propiedades: hablamos así de una estructura topológica, una estructura anular, una estructura de espacio vectorial, una estructura reticular, etc. Todas estas estructuras dotan a los conjuntos de una gran variedad de cualidades; verbigracia: en los espacios topológicos tenemos la compacidad, la conexidad, los axiomas de separación; en los grupos tenemos la ciclicidad, la normalidad, la torción; en los órdenes tenemos los preórdenes, los órdenes parciales, los órdenes reticulares. De especial interés es saber cómo se comportan dichas propiedades bajo las funciones distinguidas.

A propósito de lo arriba dicho, podemos decir que los objetos de estudio de la teoría de las estructuras matemáticas están conformados por lo siguiente: una clase de conjuntos estructurados y una clase de funciones que preservan dicha estructura; a estos objetos les llamaremos *categorías concretas de conjuntos estructurados*.

Antes de presentar la definición de categoría concreta de conjuntos estructurados, ilustraremos el concepto mediante ejemplos particulares.

Ejemplo 1.1. (*Espacios Topológicos*). En la teoría de los espacios topológicos tenemos dos conceptos básicos: el de *espacio topológico* y el de *función continua*. Dado un conjunto X, una topología en X es una familia τ de subconjuntos de X, llamados los *subconjuntos abiertos* de X, tal que[1],

1. Si $\{A_i\}_{i\in I} \subseteq \tau$, I arbitrario, entonces $\underset{i\in I}{\cup} A_i \in \tau$
2. $\{A_i\}_{i\in I} \subseteq \tau$, con I finito, entonces $\underset{i\in I}{\cap} A_i \in \tau$

A la pareja (X,τ) se le denomina espacio topológico. El par (X,τ) consiste en un conjunto X, y una *"estructura"* topológica que hemos denotado por τ. Dados dos espacios topológicos,

$$A = (X,\tau) \quad \text{y} \quad B = (Y,\sigma)$$

una función continua de A en B es una función,

$$f : X \longrightarrow Y$$

tal que,

$$w \in \sigma \Longrightarrow f^{-1}(w) \in \tau$$

Si f es contínua de A en B, escribimos,

$$f : (X,\tau) \longrightarrow (Y,\sigma)$$

Las funciones continuas entre espacios topológicos son tales que:
A. Dados los espacios topológicos,

$$A = (X,\tau), B = (Y,\sigma) \quad \text{y} \quad C = (Z,\gamma)$$

si

$$f : (X,\tau) \longrightarrow (Y,\sigma) \;\; y \;\; g : (Y,\sigma) \longrightarrow (Z,\gamma)$$

[1] La definición que aquí se presenta es la de [8]. Una definición alternativa (que es equivalente) de espacio topológico puede verse en [1]. Ambas son citas de la Bibliografía de este documento.

entonces

$$g \circ f : (X, \tau) \longrightarrow (Z, \gamma)$$

Es decir, si f es contínua de A en B y g es contínua de B en C, entonces $g \circ f$, la composición usual, es continua de A en C.

B. Para cada espacio topológico $A = (X, \tau)$, la identidad es una función continua,

$$1_A = 1_X : (X, \tau) \longrightarrow (X, \tau)$$

Ejemplo 1.2. (Los espacios vectoriales). Dos conceptos básicos aparecen en el estudio de la teoría de los espacios vectoriales: el de *espacio vectorial* y el de *transformación lineal*. Un espacio vectorial es un conjunto X, dotado de dos operaciones,

$$+ : X \times X \longrightarrow X \quad \text{y} \quad \bullet : F \times X \longrightarrow X$$

donde F es un campo. La operación $+$ es llamada *"suma vectorial"*, y la operación $\bullet$ es llamada *"producto por escalares"*. Estas operaciones están sujetas a una serie de axiomas o condiciones comúnmente conocidas. Para denotar a un espacio vectorial, podemos utilizar el símbolo $(X, (+, \bullet))$, el cual consiste de un conjunto X, y una *estructura vectorial* $(+, \bullet)$, que está compuesta por la suma y el producto por escalares, respectivamente, definidos en X. Sean,

$$(X, (+, \bullet)) \quad y \quad \left(Y, \left(\hat{+}, \hat{\bullet}\right)\right)$$

dos espacios vectoriales cualesquiera. Una función

$$f : X \longrightarrow Y$$

es una *transformación lineal*, si *preserva la estructura*; es decir, si satisface las condiciones

1. $f(x + y) = f(x) \hat{+} f(y)$
2. f$(r \bullet x) = r \hat{\bullet} f(x)$

para cualesquiera $x, y \in X$, y para cualquier $r \in F$.

Suele representarse una transformación lineal f entre los espacios vectoriales $(X, (+, \bullet))$ y $\left(Y, \left(\hat{+}, \hat{\bullet}\right)\right)$ como,

$$f : (X, (+, \bullet)) \longrightarrow \left(Y, \left(\hat{+}, \hat{\bullet}\right)\right)$$

A. La composición de transformaciones lineales es lineal; es decir, si,

$$f : (X, (+, \bullet)) \longrightarrow \left(Y, \left(\hat{+}, \hat{\bullet}\right)\right) \quad \text{y} \quad g : \left(Y, \left(\hat{+}, \hat{\bullet}\right)\right) \longrightarrow \left(Z, \left(\tilde{+}, \tilde{\bullet}\right)\right)$$

entonces,

$$g \circ f : (X, (+, \bullet)) \longrightarrow \left(Z, \left(\tilde{+}, \tilde{\bullet}\right)\right)$$

B. Para todo espacio vectorial $A = (X, (+, \bullet))$, la identidad es una transformación lineal

$$1_A : (X, (+, \bullet)) \longrightarrow (X, (+, \bullet))$$

Los ejemplos anteriores muestran dos tipos de *estructuras* (topológicas y vectoriales) totalmente diferenciadas. Sin embargo, a pesar de la naturaleza distinta de las estructuras, hemos podido comprobar, en ambos casos, el cumplimiento de dos principios comúnes (los relacionados a la composición y a la identidad). Estos principios se hacen presentes en otros tantos ejemplos de estructuras. El concepto de una *categoría concreta de conjuntos estructurados* (*ccce*), generaliza las ideas antes expuestas. Para hablar de una *ccce* $\underline{K}$, deben tenerse en contexto tres subentidades básicas, a saber,

1. El de una estructura que permita la referencia, para cada conjunto X, a una clase $\underline{K}[X]$, llamada la clase de $\underline{K}$-estructuras de X (en cada caso específico, tal estructura debe estar determinada).
2. Una colección de conjuntos estructurados que es la clase $|\underline{K}|$ de objetos de $\underline{K}$.
3. La noción de un tipo de función que preserva la estructura entre cualesquiera dos objetos de la categoría $\underline{K}$. La colección de tales funciones es llamada colección de $\underline{K}$-morfismos de la categoría $\underline{K}$. Si A y B son dos objetos de $\underline{K}$ (o $\underline{K}$-objetos), denotaremos al conjunto de $\underline{K}$-morfismos de A en B mediante el símbolo $\underline{K}(A, B)$.

A continuación presentamos algunos ejemplos detallados del concepto de *ccce*. Antes introducimos una sencilla notación:

Notación. Dados dos conjuntos arbitrarios X y Y, denotamos mediante el símbolo $\mathfrak{Set}(X,Y)$ al conjunto de todas las funciones de dominio X y codominio Y.

Ejemplo 1.3. La *ccce* $\mathfrak{T}op$ de los espacios topológicos y de las funciones continuas.

1. Para cada conjunto X, $\mathfrak{T}op[X]$ denota a la clase de $\mathfrak{T}op$-estructuras para X, que son precisamente las topologías en el conjunto X.
2. Los $\mathfrak{T}op$-objetos, en consecuencia, son parejas (X,τ) en las que X es un conjunto y $\tau \in \mathfrak{T}op[X]$; es decir, son los espacios topológicos.
3. Las funciones que preservan la estructura topológica son las funciones continuas; por lo tanto, para cualesquiera $\mathfrak{T}op$-objetos,

$$A = (X,\tau) \quad \text{y} \quad B = (Y,\sigma)$$

se tiene que,

$$\mathfrak{T}op(A,B) = \{f \in \mathfrak{Set}(X,Y) \mid f \text{ es continua}\}$$

Ejemplo 1.4. La *ccce* $\mathfrak{V}ect_F$ de los espacios vectoriales, definidos sobre un campo F, y de las transformaciones lineales.

1. Dado un conjunto X, la estructura vectorial sobre F permite la referencia a una clase $\mathfrak{V}ect_F[X]$ cuyos miembros son parejas del tipo $(+,\bullet)$, donde,

$$+ : X \times X \longrightarrow X \quad \text{y} \quad \bullet : F \times X \longrightarrow X$$

cumplen los axiomas ya conocidos de espacios vectoriales.
2. Los $\mathfrak{V}ect_F$-objetos son parejas $(X,(+,\bullet))$, en las que X es un conjunto y, $(+,\bullet)$ pertenece a $\mathfrak{V}ect_F[X]$. En otras palabras, los $\mathfrak{V}ect_F$-objetos son los espacios vectoriales definidos sobre el campo F.
3. Dados dos espacios vectoriales, sobre un campo F,

$$A = (X,(+,\bullet)) \quad \text{y} \quad B = \left(Y,\left(\hat{+},\hat{\bullet}\right)\right)$$

una función $f : X \longrightarrow Y$ que preserve la estructura debe ser tal que,

$$f(x+y) = f(x)\,\hat{+}\,f(y) \quad \text{y} \quad f(r \bullet x) = r\,\hat{\bullet}\,f(x)$$

para cualesquiera x, y en X, y cualquier r en F.
Tales funciones son las transformaciones lineales entre espacios vectoriales. Por lo tanto,

$$\mathfrak{V}ect_F(A,B) = \{f \in \mathfrak{Set}(X,Y) \mid f \text{ es transformación lineal}\}$$

Definición 1.1. Un **orden parcial** en un conjunto X es una relación binaria α de X (es decir, α es un subconjunto de $X \times X$), tal que,

(a) α contiene a la diagonal $\triangle = \{(x,x) \mid x \in X\}$.
(b) Si (x,y) y (y,z) pertencen a α, entonces (x,z) pertenece a α.
(c) Si (x,y) y (y,x) pertencen a α, entonces $x = y$.

Un conjunto X provisto de un orden parcial α se llama **conjunto parcialmente ordenado** (*copo*). Empleando la notación tradicional, $\leq$, tenemos que

$$x \leq y \Longleftrightarrow (x,y) \in \alpha$$

Así, las propiedades $(a),(b)$ y (c), son las conocidas propiedades *reflexiva*, *transitiva* y *antisimétrica*, respectivamente.

Ejemplo 1.5. La *ccce* $\mathfrak{P}os$ de los conjuntos *parcialmente ordenados*, y de las *funciones monótonas.*

1. En este caso, $\mathfrak{P}os[X]$ denota a la familia de órdenes parciales del conjunto X.
2. Los objetos en $\mathfrak{P}os$ son parejas $(X,\leq)$, donde $\leq$ es un orden parcial en el conjunto X. En otras palabras, los $\mathfrak{P}os$-objetos son los *copos*.

3. Para cualesquiera par de objetos $A = (X, \alpha), B = (Y, \beta)$ en $|\mathfrak{P}os|$, los $\mathfrak{P}os$-morfismos de A en B son las funciones monótonas de A en B; es decir,

$$\mathfrak{P}os\,(A, B) = \{f \in \mathfrak{Set}\,(X, Y) \mid (x, y) \in \alpha \Longrightarrow (f\,(x)\,, f\,(y)) \in \beta\}$$

También los $\mathfrak{P}os$-morfismos satisfacen las condiciones A y B de los ejemplos 1.1 y 1.2. En efecto,

Sean

$$A = (X, \alpha)\,, B = (Y, \beta) \quad \text{y} \quad C = (Z, \gamma)$$

$\mathfrak{P}os$-objetos arbitrarios. Si,

$$f \in \mathfrak{P}os\,(A, B) \quad \text{y} \quad g \in \mathfrak{P}os\,(B, C)$$

entonces

$$g \circ f : X \longrightarrow Z$$

Además,

$$(x, y) \in \alpha \Longrightarrow (f\,(x)\,, f\,(y)) \in \beta$$

porque f pertenece a $\mathfrak{P}os\,(A, B)$. Similarmente, dado que g pertenece a $\mathfrak{P}os\,(B, C)$, se verifica que,

$$(gf\,(x)\,, gf\,(y)) \in \gamma$$

Por lo tanto,

$$g \circ f \in \mathfrak{P}os\,(A, B)$$

La identidad en A,

$$1_A = 1_X : (X, \alpha) \longrightarrow (X, \alpha)$$

es un elemento del conjunto $\mathfrak{P}os\,(A, A)$, ya que la implicación,

$$(x, y) \in \alpha \Longrightarrow (1_X\,(x)\,, 1_X\,(y)) \in \alpha$$

es verdadera.

Ejemplo 1.6. La *ccce* $\mathfrak{G}ra$ de las *gráficas dirigidas* y de las *funciones compatibles.*

1. En este ejemplo, la familia de estructuras para cada conjunto X, es la familia de relaciones binarias en X; es decir,

$$\mathfrak{G}ra\,[X] = \{\alpha \mid \alpha \subseteq X \times X\}$$

2. Un objeto en $\mathfrak{G}ra$ es una pareja $A = (X, \alpha)$, donde $\alpha \in \mathfrak{G}ra\,[X]$.
3. Sean,

$$A = (X, \alpha) \quad \text{y} \quad B = (Y, \beta)$$

dos $\mathfrak{G}ra$-objetos cualesquiera. En este contexto, los morfismos de A en B son las funciones de X en Y que son compatibles respecto a α y β. Es decir,

$$\mathfrak{G}ra\,(A, B) = \{f \in \mathfrak{Set}\,(X, Y) \mid (x, y) \in \alpha \Longrightarrow (f\,(x)\,, f\,(y) \in \beta)\}$$

Los $\mathfrak{G}ra$-morfismos satisfacen las condiciones A y B. En efecto,

A. Sean,

$$A = (X, \alpha)\,, B = (Y, \beta) \quad \text{y} \quad C = (Z, \gamma)$$

tres objetos en $|Gra|$. Si

$$f \in \mathfrak{G}ra\,(A, B) \quad \text{y} \quad g \in \mathfrak{G}ra\,(B, C)$$

entonces,

$$(x, y) \in \alpha \Longrightarrow (f(x), f(y)) \in \beta$$

y,

$$(f(x), f(y)) \in \beta \Longrightarrow (gf(x), gf(y)) \in \gamma$$

Por lo tanto,

$$g \circ f \in \mathfrak{Gra}(A, C)$$

B. Si $A = (X, \alpha)$ pertenece a $|\mathfrak{Gra}|$, entonces 1_A pertenece a$\mathfrak{Gra}(A, A)$. En efecto, pues siempre se cumple que,

$$(x, y) \in \alpha \Longrightarrow (1_X(x), 1_X(y)) \in \alpha$$

Tal vez estos cuatro ejemplos sean suficientes para aclarar la idea de lo que es una *ccce*. Nótese que los objetos son, ante todo, conjuntos que, en cada caso, llevan asignada una *estructura* particular. Presentamos la definición formal del concepto de categoría concreta de conjuntos estructurados.

Definición 1.2. Una **categoría concreta de conjuntos estructurados** (*ccce*) $\underline{K}$, es una colección formada por dos clases:

1. Una clase $|\underline{K}|$, cuyos elementos son parejas $A = (X, \xi)$, donde X es el conjunto subyacente de A y ξ pertenece a una clase denotada por $\underline{K}[X]$. Los miembros de la clase $\underline{K}[X]$ se denominan $\underline{K}$-estructuras del conjunto X. A los elementos de $|\underline{K}|$ se les llama objetos de la categoría concreta $\underline{K}$, o bien, $\underline{K}$-objetos.
2. Una clase $\mathcal{F}_{\underline{K}}$, cuyos elementos son parejas de la forma $(f, (\xi, \eta))$, donde f pertenece a una clase de funciones entre conjuntos, y (ξ, η) es una pareja cuyos elementos ξ y η, son $\underline{K}$-estructuras para el dominio y el codominio de f, respectivamente. A los elementos de $\mathcal{F}_{\underline{K}}$ se les llama $\underline{K}$-morfismos. Además, para cada par de $\underline{K}$-objetos, $A = (X, \xi)$ y $B = (Y, \eta)$, tenemos asociado un conjunto,

$$\underline{K}(A, B) := \left\{(f, (\xi, \eta)) \in \mathcal{F}_{\underline{K}} \mid f \in \mathfrak{Set}(X, Y)\right\}$$

Los elementos de tales conjuntos están sujetos al siguiente par de condiciones:

A. Para cualesquiera $\underline{K}$-objetos,

$$A = (X, \xi), B = (Y, \eta) \quad \text{y} \quad C = (Z, \zeta)$$

si,

$$(f, (\xi, \eta)) \in \underline{K}(A, B) \quad \text{y} \quad (g, (\eta, \zeta)) \in \underline{K}(B, C)$$

entonces,

$$(g \circ f, (\xi, \zeta)) \in \underline{K}(A, C)$$

B. Si $A = (X, \xi)$ pertenece a $|\underline{K}|$, entonces,

$$1_A = (1_X, (\xi, \xi)) \in \underline{K}(A, A)$$

Observación 1.1. En la definición anterior hemos denotado a los elementos de la clase $\mathcal{F}_{\underline{K}}$ con el símbolo $(f, (\xi, \eta))$; otra notación es,

$$f : (X, \xi) \longrightarrow (Y, \eta)$$

Ambas notaciones sirven para dar precisión al lenguaje: éstas indican que en la *ccce* $\underline{K}$ la función $f : X \to Y$ da lugar a un $\underline{K}$-morfismo de (X, ξ) en (Y, η). Cuando no hay confusión ante el hecho de saber cuáles son las $\underline{K}$-estructuras de que están dotados los conjuntos X y Y, y, por lo tanto, saber qué $\underline{K}$-morfismo es f, omitimos el empleo de tales notaciones y el $\underline{K}$ morfismo se denota simplemente por f.

Observación 1.2. La clase de $\underline{K}$-estructuras de un conjunto X puede ser vacía. Por ejemplo, si

$$X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$$

es un conjunto con n elementos, $n > 1$, entonces este no puede ser dotado de una estructura de espacio vectorial sobre el campo de los números reales $\mathbb{R}$. Para ver esto, supongamos que existen operaciones,

$$+ : X \times X \longrightarrow X \quad \text{y} \quad \bullet : \mathbb{R} \times X \longrightarrow X$$

que hacen de X un espacio vectorial. También supongamos, sin pérdida de generalidad, que $x_1 \neq 0_X$. Tomemos una colección de números reales $\{\alpha_i\}_{i=1}^{n}$, tal que $\alpha_i \neq \alpha_j$, si $i \neq j$, con i, j en $\{1, 2, ..., n\}$, y $\alpha_i \neq 0$, para todo i en $\{1, 2, ..., n\}$. Sea

$$A = \{\alpha_1 x_1, \alpha_2 x_1, ..., \alpha_n x_1\}$$

Afirmamos que el conjunto A tiene n elementos. En efecto, pues si $\alpha_i x_1 = \alpha_j x_1$ (con i, j en $\{1, 2, ..., n\}$), entonces, dado que $x_1 \neq 0_X$, se tiene que $\alpha_i = \alpha_j$. Sin embargo, ésto ultimo no es posible, si $i \neq j$. Como A está contenido en X, y A tiene n elementos, entonces $A = X$. Por lo tanto, existe j en $\{1, 2, ..., n\}$ tal que $\alpha_j x_1 = 0_X$. Por otro lado, según nuestras hipótesis, $\alpha_j \neq 0_{\mathbb{R}}$ y $x_1 \neq 0_X$; de donde, $\alpha_j x_1 \neq 0_X$. La contradicción muestra que $\mathfrak{Vect}_F[X] = \emptyset$.

Capítulo 2

Sub*ccce* y sub*ccce* plena: definición y ejemplos

Cuando consideramos un objeto matemático, es común que estudiemos sus correspondientes subestructuras, es decir, sus subobjetos. Recordemos que los objetos que nos hemos propuesto estudiar son las *ccce*. En cierto modo, la estructura de una *ccce* está dada por los axiomas A y B de su definición. A grosso modo, un subobjeto de una *ccce* es otra *ccce* cuyos objetos y morfismo son parte de los objetos y morfismos de aquella. Las dos primeras definiciones de este capítulo presentan dos clases especiales de subobjetos que se pueden dar en una *ccce*.

Definición 2.1. Sean $\underline{S}$ y $\underline{K}$ dos *ccce* cualesquiera. Se dice que la *ccce* $\underline{K}$ es **sub*ccce*** de $\underline{S}$ si,

1. Todo $\underline{K}$-objeto es un $\underline{S}$-objeto; es decir,

$$|\underline{K}| \subseteq |\underline{S}|$$

   o lo que es lo mismo, para todo conjunto X, se tiene que,

$$\underline{K}\,[X] \subseteq \underline{S}\,[X]$$

2. Los $\underline{K}$-morfismos son $\underline{S}$-morfismos,

$$\mathcal{F}_{\underline{K}} \subseteq \mathcal{F}_{\underline{S}}$$

   En otras palabras, $\underline{K}\,(A,B)$ está contenido en $\underline{S}\,(A,B)$, para cualesquiera A, B en $|\underline{K}|$.

Ahora que sabemos lo que significa ser un subobjeto de una *ccce*, tenemos la siguiente definición.

Definición 2.2. Diremos que $\underline{K}$ es **sub*ccce* plena** de $\underline{S}$ si, $\underline{K}$ es una subccce de $\underline{S}$, y además,

$$\underline{K}\,(A,B) = \underline{S}\,(A,B)$$

para cualesquiera objetos A, B en $|\underline{K}|$.

Ejemplo 2.1. $\mathfrak{P}os$ es subccce plena de $\mathfrak{G}ra$.
En efecto;

1. Siendo todo orden parcial sobre X una relación binaria particular sobre X, se tiene que $\mathfrak{P}os\,[X]$ está contenido en $\mathfrak{G}ra\,[X]$.
2. De acuerdo con las definiciones, si,

$$A = (X, \alpha) \quad \text{y} \quad B = (Y, \beta)$$

son $\mathfrak{P}os$-objetos, y por lo tanto $\mathfrak{G}ra$-objetos, entonces, una función de A en B es monótona si, y sólo si, es compatible respecto a los órdenes parciales α y β (que son relaciones binarias especiales). Por lo tanto,

$$\mathfrak{P}os\,(A,B) \subseteq \mathfrak{G}ra\,(A,B)$$

Esto prueba que $\mathfrak{P}os$ es subccce de $\mathfrak{G}ra$.
Comprobemos que $\mathfrak{P}os$ es una subccce plena de $\mathfrak{G}ra$. Sean,

$$A = (X, \alpha) \quad \text{y} \quad B = (Y, \beta)$$

dos $\mathfrak{P}os$-objetos cualesquiera. Puesto que α y β son relaciones particulares, podemos mirar a A y B como $\mathfrak{G}ra$-objetos. Si f es un elemento de $\mathfrak{G}ra\,(A,B)$ entonces, f es compatible respecto a los órdenes parciales α y β; por lo tanto, f es una función monótona entre los copos A y B. Es decir, f pertenece a $\mathfrak{P}os\,(A,B)$.

Definición 2.3. Una **retícula** (lattice) es un copo $(X, \leq)$ con la propiedad de que para cualesquiera x_1, x_2 en X, existen α, β en X, tales que,

1. $\beta \leq x_1, x_2 \leq \alpha$
2. Dados z, w en X, si,

$$w \leq x_1, x_2 \quad \text{y} \quad x_1, x_2 \leq z$$

entonces,

$$w \leq \beta \quad \text{y} \quad \alpha \leq z$$

Observemos que si α' y β' son dos elementos de X que satisfacen las mismas condiciones que α y β, respectivamente, entonces debido a la antisimetría de $\leq$, $\alpha = \alpha'$ y $\beta = \beta'$. Denotamos a α mediante el símbolo $x_1 \vee x_2$ y a β mediante el símbolo $x_1 \wedge x_2$ (de acuerdo a la observación anterior, es legítimo denotarlos de manera especial). A los elementos $x_1 \vee x_2$ y $x_1 \wedge x_2$ se les llama **supremo** e **ínfimo** de $\{x_1, x_2\}$, respectivamente. Además, si,

$$(X, \leq) \quad \text{y} \quad (Y, \preceq)$$

son dos retículas arbitrarias, entonces, una función,

$$f : X \longrightarrow Y$$

será un **morfismo reticular** si para cualesquiera x_1, x_2 en X, se cumple,

$$f(x_1 \vee x_2) = f(x_1) \vee f(x_2)$$

y

$$f(x_1 \wedge x_2) = f(x_1) \wedge f(x_2)$$

Ejemplo 2.2. La *ccce* que a continuación presentamos suele denotarse mediante $\mathfrak{Lat}$.

1. $\mathfrak{Lat}[X]$ es la familia de *estructuras reticulares*, es decir, la familia de órdenes parciales que hacen del conjunto X una retícula.
2. Los $\mathfrak{Lat}$-objetos son las retículas o latices.
3. Los $\mathfrak{Lat}$-morfismos son los morfismos reticulares.

Ejemplo 2.3. $\mathfrak{Lat}$ es sub*ccce* de $\mathfrak{Pos}$, pero no es plena.

No hay dificultad en probar que, en efecto, $\mathfrak{Lat}$ es una *ccce*. A continuación probamos que $\mathfrak{Lat}$ es sub*ccce* de $\mathfrak{Pos}$.

De acuerdo con la definición de una retícula, todo objeto en $\mathfrak{Lat}$ es un objeto en $\mathfrak{Pos}$.

1. Sean, $f : (X, \leq) \longrightarrow (Y, \preceq)$ cualquier morfismo reticular y, x_1, x_2 en X tales que $x_1 \leq x_2$. Entonces, $x_2 = x_1 \vee x_2$. De este modo,

$$f(x_2) = f(x_1 \vee x_2) = f(x_1) \vee f(x_2)$$

Por lo tanto,

$$f(x_1), f(x_2) \leq f(x_2)$$

en particular,

$$f(x_1) \leq f(x_2)$$

Esto prueba que f es una función monótona.

Por último, probemos que $\mathfrak{Lat}$ no es sub*ccce* plena de $\mathfrak{Pos}$. Para probar esto, exhibiremos un par de retículas y una función monótona, entre dichas retículas, que no es morfismo reticular.

Consideremos el conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales con el orden parcial α definido por la divisibilidad,

$$\alpha = \{(n_1, n_2) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : n_1 \mid n_2\}$$

Claramente, $(\mathbb{N}, \alpha)$ es un copo; además, observemos que para cualesquiera números naturales n_1 y n_2, tenemos que,

$$n_1 \wedge n_2 = mcd(n_1, n_2)$$

y

$$n_1 \vee n_2 = mcm\,(n_1, n_2)$$

En efecto,

$$n_1 \wedge n_2 \mid n_1, n_2 \quad \text{y} \quad n_1, n_2 \mid n_1 \vee n_2$$

por lo tanto, para $j = 1, 2$, se tiene que,

$$(n_1 \wedge n_2, n_j)\,, (n_j, n_1 \vee n_2) \in \alpha$$

Y si $k, \dot{k}$ son números naturales tales que,

$$\dot{k} \mid n_j \quad \text{y} \quad n_j \mid k$$

para $j = 1, 2$; entonces,

$$\dot{k} \mid n_1 \wedge n_2 \quad \text{y} \quad n_1 \vee n_2 \mid k$$

Por lo tanto, $(\mathbb{N}, \alpha)$ es una retícula.
Sea β el orden usual en $\mathbb{N}$. Si hacemos,

$$n_1 \wedge n_2 = mín\,\{n_1, n_2\} \quad \text{y} \quad n_1 \vee n_2 = máx\,\{n_1, n_2\}$$

entonces $(\mathbb{N}, \beta)$ también es una retícula. Ahora consideremos la función,

$$1_{\mathbb{N}} : (\mathbb{N}, \alpha) \longrightarrow (\mathbb{N}, \beta)$$

$1_{\mathbb{N}}$ es monótona, ya que si (n_1, n_2) está en α, entonces $n_1 \mid n_2$ y, por lo tanto, $n_1 \leq n_2$ o, equivalentemente, $1_{\mathbb{N}}\,(n_1) \leq 1_{\mathbb{N}}\,(n_2)$. De manera que,

$$(1_{\mathbb{N}}\,(n_1)\,, 1_{\mathbb{N}}\,(n_2)) \in \beta$$

Sin embargo, $1_{\mathbb{N}}$ no es morfismo reticular. Por ejemplo, para los números naturales 2 y 3, con referencia a α, se tiene que,

$$2 \wedge 3 = mcd\,(2, 3) = 1$$

por lo tanto,

$$1_{\mathbb{N}}\,(2 \wedge 3) = 1_{\mathbb{N}}\,(1) = 1$$

Por otro lado, con referencia a β, también tenemos,

$$1_{\mathbb{N}}\,(2) \wedge 1_{\mathbb{N}}\,(3) = mín\,\{2, 3\} = 2$$

de donde,

$$1_{\mathbb{N}}\,(2 \wedge 3) \neq 1_{\mathbb{N}}\,(2) \wedge 1_{\mathbb{N}}\,(3)$$

Definiciones 2.4. Sean, $(X, \leq)$ un copo arbitrario y A cualquier subconjunto de X. Decimos que,

1. Un elemento c de X es una **cota superior** de A en X, si $a \leq c$, para todo a en A.
2. Un elemento d de X es una **cota inferior** de A en X, si $d \leq a$, para todo a en A.
3. Un elemento x de X es un **supremo** de A en X, si x es cota superior de A en X, y $x \leq c$, para toda cota superior c de A en X. Por la condición de antisimetria en un copo, cuando A posee supremo, éste es único. La notación usual es $x = \sup A$.
4. Un elemento x de X es un **ínfimo** de A en X, si x es cota inferior de A en X, y $d \leq x$, para toda cota inferior d de A en X. Análogo al inciso 3, cuando A posee un ínfimo, éste es único. La notación usual es $x = \inf A$.

Observaciones 2.1.

1. En el caso particular en que A es el conjunto vacío, todo x en X es, simultáneamente, cota superior y cota inferior de A. En este caso, para todo x en X, siempre es verdadero que,

$$a \in A \Longrightarrow (a \leq x \quad \text{y} \quad x \leq a)$$

2. Si, además, el copo es una retícula, entonces, para cualesquiera x_1, x_2 en X, se tiene que,

$$\sup \{x_1, x_2\} = x_1 \vee x_2 \quad \text{e} \quad \inf \{x_1, x_2\} = x_1 \wedge x_2$$

Definición 2.5. Se dice que una retícula $(X, \leq)$ es una **retícula completa** cuando todo subconjunto de X posee ínfimo y supremo en X.

En una retícula completa, los elementos $\sup \emptyset$ e $\inf \emptyset$ se denotan como 0 y 1, respectivamente (0 es el primer elemento de X, según $\leq$, y 1 el último).[1]

Ejemplo 2.4. La retícula $(\mathbb{N}, \alpha)$, donde α es el orden parcial definido por la divisibilidad, no es una retícula completa. Esto se debe a que el conjunto $\mathbb{N}$ no tiene cotas superiores respecto al orden dado por α.

Ejemplo 2.5. Para cualquier conjunto X, consideremos su conjunto potencia $Pot\,(X)$. Claramente, $(Pot\,(X), \subseteq)$ es un copo. Si A es un subconjunto no vacío de $Pot\,(X)$, entonces A es una familia no vacía de subconjuntos de X. Luego,

$$\sup A = \cup A \quad \text{e} \quad \inf A = \cap A$$

Si A es el conjunto vacío, entonces,

$$\sup \emptyset = \emptyset \quad \text{e} \quad \inf \emptyset = Pot\,(X)$$

Por lo tanto, $(Pot\,(X), \subseteq)$ es una retícula completa.

Ejemplo 2.6. Las retículas completas nos proporcionan otro ejemplo de *ccce* que denotaremos mediante $\mathfrak{Clat}$.

1. $\mathfrak{Clat}\,[X]$ es la familia de órdenes parciales que hacen de X una retícula completa.
2. Los $\mathfrak{Clat}$-objetos son las retículas completas.
3. Para cualesquiera dos $\mathfrak{Clat}$-objetos $A = (X, \leq)$ y $B = (Y, \preceq)$, definimos,

$$\mathfrak{Clat}\,(A, B) = \left\{ f \in \mathfrak{Set}\,(X, Y) \mid U \subseteq X \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} f\,(\sup U) = \sup f\,(U) \\ y \\ f\,(\inf U) = \inf f\,(U) \end{array} \right\} \right.$$

No es difícil probar que $\mathfrak{Clat}$ es, en efecto, una *ccce*.

[1] En efecto; por el inciso 1 de la obsrevación 2.1, para todo x en X, se cumple $0 = \sup \emptyset \leq x$. De manera análoga, para todo x en X, es $x \leq \inf \emptyset = 1$.

Capítulo 3

Isomorfismos en *ccce*

Al estudiar los objetos de una *ccce* cualquiera, es importante saber cuándo dos de sus objetos tienen *esencialmente* la misma estructura (recordemos que muchos resultados importantes de la matemática provienen de teoremas de clasificación). Tenemos ejemplos de esto: dos espacios topológicos son esencialemnte el mismo si existe un homeomorfismo entre ellos; dos espacios vectoriales son esencialmente el mismo si tienen la misma dimensión, o lo que es lo mismo, si existe una transformación lineal biyectiva entre ellos. El objetivo de este capítulo es precisar estas ideas en el contexto de las *ccce*.

Definición 3.1. Sean, $\underline{K}$ una *ccce* abitraria, y $A = (X, \alpha)\,, B = (Y, \beta)$ dos $\underline{K}$-objetos arbitrarios. Un $\underline{K}$-morfismo $(f, (\alpha, \beta)) \in \underline{K}\,(A, B)$ es un **$\underline{K}$-isomorfismo** si la función $f : X \to Y$ es biyectiva y $\left(f^{-1}, (\beta, \alpha)\right) \in \underline{K}\,(B, A)$.

Si $(f, (\alpha, \beta)) \in \underline{K}\,(A, B)$ es un **$\underline{K}$-isomorfismo**, entonces diremos que los objetos A y B son **isomorfos** bajo f y lo denotaremos mediante cualquiera de las expresiones,

$$f : A \cong B,\quad A \cong_f B,\quad A \overset{f}{\cong} B$$

Ejemplo 3.1. En $\mathfrak{Top}$ los isomorfismos son los homeomorfismos[1].

Ejemplo 3.2. Una función f entre dos copos (X, α) y (Y, β) es un isomorfismo si es biyectiva y,

$$(x, y) \in \alpha \Leftrightarrow (f\,(x)\,, f\,(y)) \in \beta$$

Ejemplo 3.3. Un $\underline{K}$-morfismo $f : (X, \alpha) \longrightarrow (Y, \beta)$ en el que $f : X \longrightarrow Y$ es biyectiva, no necesariamente es un isomorfismo. Por ejemplo, si,

$$\alpha = \{(n_1, n_2) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : n_1 \mid n_2\}$$

y β es el orden usual en $\mathbb{N}$. Entonces

$$1_{\mathbb{N}} : (\mathbb{N}, \alpha) \longrightarrow (\mathbb{N}, \beta)$$

es una biyección monótona. Sin embargo,

$$1_{\mathbb{N}}^{-1} = 1_{\mathbb{N}} : (\mathbb{N}, \beta) \longrightarrow (\mathbb{N}, \alpha)$$

no es monótona.

Observación 3.1. En cualquier *ccce*, la relación $\cong$ ("es isomorfo a") es de equivalencia.

Ejemplo 3.4. En este ejemplo presentamos a la *ccce* de los **espacios métricos**, la cual es denotada como $\mathfrak{Met}$.

1. Las $\mathfrak{Met}$-estructuras para un conjunto X son las métricas en X; es decir,

$$\mathfrak{Met}\,[X] = \left\{ \alpha : X \times X \longrightarrow [0, \infty) \;\middle|\; \begin{array}{c} \alpha\,(x, y) = \alpha\,(y, x) \\ \alpha\,(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y \\ \alpha\,(x, y) + \alpha\,(y, z) \geq \alpha\,(x, z) \end{array} \right\}$$

2. Los $\mathfrak{Met}$-objetos son los espacios métricos.
3. Sean, $A = (X, \alpha)$, $B = (Y, \beta)$ espacios métricos, y x, y pertenecientes a X, entonces,

$$\mathfrak{Met}\,(A, B) = \{f \in \mathfrak{Set}\,(X, Y) \mid \beta\,(f\,(x)\,, f\,(y)) \leq \alpha\,(x, y)\}$$

A estas funciones se les llama **contracciones**.

[1] Para recordar la definición de homeomorfismo puede verse [8], o bien, [1]

No es difícil verificar que los axiomas de composición e identidad se cumplen para esta *ccce*.

Si $f : (X, \alpha) \longrightarrow (Y, \beta)$ es un isomorfismo entre espacios métricos, entonces f es una contracción biyectiva, cuya función inversa también es una contracción. Por lo tanto, dados x, y en X, se tiene que,

$$\alpha\left(f^{-1}(f(x)), f^{-1}(f(y))\right) \leq \beta(f(x), f(y)) \leq \alpha(x, y)$$

es decir,

$$\alpha(x, y) = \beta(f(x), f(y))$$

En este caso, decimos que la función f preserva la distancia. Las contracciones con esta característica reciben el nombre de **isometrías**.

Capítulo 4

Transportabilidad en *ccce*

Vimos en el capítulo anterior que en la *ccce* $\mathfrak{Top}$ los isomorfismos son precisamente los homeomorfismos. Un homeomorfismo del espacio topológico (X, α) en el espacio (Y, β) es una biyección, $f : X \longrightarrow Y$, que *transporta* la topología α en la topología β en el sentido de que, para cada subconjunto V de X se cumple,

$$V \in \alpha \Leftrightarrow f(V) \in \beta$$

Algo análogo ocurre en los espacios vectoriales; efectivamente, si,

$$f : (V, (+, \cdot)) \longrightarrow (V', (\bar{+}, \bar{\cdot}))$$

es un isomorfismo entre espacios vectoriales sobre el mismo campo K, entonces, para cualesquiera v_1, v_2, v_3 en V y para cualquier r en K, se cumple,

$$v_1 + v_2 = v_3 \Leftrightarrow f(v_1) \bar{+} f(v_1) = f(v_3)$$

y

$$r \cdot v_1 = v_2 \Leftrightarrow r \bar{\cdot} f(v_1) = f(v_2)$$

Existe una gran variedad de *ccce* que cumplen con la condición de ser transportables. El objetivo de esta sección es presentar una definición que precise esta noción. En los capítulos siguientes se irá aclarando la razón por la cual fijamos nuestra atención en esta propiedad.

Definición 4.1. Una *ccce* $\underline{K}$ es **transportable** si para todo $\underline{K}$-objeto (X, α) y cualquier biyección $f : X \longrightarrow Y$, existe una única $\underline{K}$-estructura $\beta \in \underline{K}[Y]$, tal que

$$f : (X, \alpha) \longrightarrow (Y, \beta)$$

es un isomorfismo.

Ejemplo 4.1. $\mathfrak{T}op$ es transportable.

Sean, (X, α) un espacio topológico y $f : X \longrightarrow Y$ una función biyectiva. Si,

$$\beta = \{f(U) \mid U \in \alpha\}$$

entonces,

$$Y = f(X) \in \beta \quad \text{y} \quad \emptyset = f(\emptyset) \in \beta$$

Si $\{f(U_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ es una familia arbitraria de elementos de β, entonces,

$$\underset{\lambda \in \Lambda}{\cup} f(U_\lambda) = f\left(\underset{\lambda \in \Lambda}{\cup} U_\lambda\right)$$

es un elemento de β, puesto que $\underset{\lambda \in \Lambda}{\cup} U_\lambda$ pertenece a α. Por otro lado, si Λ es finito, entonces,

$$\underset{\lambda \in \Lambda}{\cap} f(U_\lambda) = f\left(\underset{\lambda \in \Lambda}{\cap} U_\lambda\right)$$

pertenece a β, pues f es biyectiva y $\underset{\lambda \in \Lambda}{\cap} U_\lambda$ pertenece a α. Por lo tanto, β es una topología para Y según la cual f es contínua. En efecto, $f^{-1}(f(U)) = U$ pertenece a α, para cualquier $f(U)$ en β. La función f también es abierta[1]. Luego, f es un homeomorfismo[2]. Y si $\dot{\beta}$ es otra topología para Y que hace de f un homeomorfismo, entonces,

$$f^{-1} : (Y, \beta) \to (X, \alpha) \quad \text{y} \quad f : (X, \alpha) \to \left(Y, \dot{\beta}\right)$$

son homeomorfismos, y , por lo tanto,

$$ff^{-1} : 1_Y : (Y, \beta) \cong \left(Y, \dot{\beta}\right)$$

de donde,

$$\dot{\beta} = \beta$$

Ejemplo 4.2. $\mathfrak{Gra}$ es transportable.
Dados una $\mathfrak{Gra}$-objeto (X, α) y una función biyectiva $f : X \longrightarrow Y$, hacemos,

$$\beta = \{(f(x), f(y)) \mid (x, y) \in \alpha\}$$

Entonces, β está contenido en $Y \times Y$ y $f : (X, \alpha) \to (Y, \beta)$ es compatible. Además,

$$f^{-1} : (Y, \beta) \longrightarrow (X, \alpha)$$

es, en efecto, compatible,

$$(f(x), f(y)) \in \beta \Longrightarrow \left(f^{-1}(f(x)), f^{-1}(f(y))\right) = (x, y)$$

con (x, y) elemento de α. Si $\dot{\beta}$ es otra relación binaria en Y que hace de f un isomorfismo, entonces son compatibles,

$$f^{-1} : (Y, \beta) \to (X, \alpha) \quad \text{y} \quad f : (X, \alpha) \to \left(Y, \dot{\beta}\right)$$

y

$$f^{-1} : \left(Y, \dot{\beta}\right) \to (X, \alpha) \quad \text{y} \quad f : (X, \alpha) \to (Y, \beta)$$

Por lo tanto, también lo son,

$$1_Y : (Y, \beta) \to \left(Y, \dot{\beta}\right) \quad \text{y} \quad 1_X : \left(Y, \dot{\beta}\right) \to (Y, \beta)$$

de lo cual resulta que $\dot{\beta} = \beta$.

Ejemplo 4.3. $\mathfrak{Pos}$ también es transportable. Por tratarse de una subccce de $\mathfrak{Gra}$, los argumentos son análogos a los anteriores.

Ejemplo 4.4. Mediante $\mathfrak{Mtc}$ denotaremos a la *ccce* de los *espacios métricos* y las *funciones continuas* entre ellos.

1. $\mathfrak{Mtc}[X] = \mathfrak{Met}[X]$
2. Los $\mathfrak{Mtc}$-objetos son los espacios métricos.
3. Sean, α un elemento de $\mathfrak{Mtc}[X]$ y $\tau(\alpha)$ la topología inducida por α en X; es decir, aquella que tiene por base a la familia de discos abiertos[3]. Así, para los espacios métricos $A = (X, \alpha)$ y $B = (Y, \beta)$ definimos

$$\mathfrak{Mtc}(A, B) = \{f : (X, \tau(\alpha)) \longrightarrow (Y, \tau(\alpha)) \mid f \text{ es continua}\}$$

[1] Si $f : (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ es una función entre espacios topológicos, decimos que f es abierta si, para toda U en τ, $f(U)$ pertenece a σ.

[2] En los cursos de topología se prueba el siguiente resultado: $h : (X, \tau) \longrightarrow (Y, \sigma)$ es un homeomorfismo si, y sólo si, h es continua, biyectiva y abierta.

[3] Si hay alguna duda al respecto, puede verse la Sección 0 de [8], o bien, los Capítulos 1 y 2 de [1].

Sabemos que tanto la identidad de cualquier $\mathfrak{M}tc$-objeto, como la composición de $\mathfrak{M}tc$-morfismos son, también, $\mathfrak{M}tc$-morfismos. Por lo tanto, son válidos los axiomas de composición e identidad. Probemos que $\mathfrak{M}tc$ no es transportable. Sean, X un conjunto y α, β dos métricas diferentes que induzcan una misma topología en X[4]. Tomemos $Y = X$ y $f : X \longrightarrow Y$ como $f = 1_X$. Entonces, no es única la $\mathfrak{M}tc$-estructura para Y que hace de f un isomorfismo. Por el axioma de identidad

$$1_X : (X, \alpha) \longrightarrow (X, \alpha)$$

es isomorfismo; pero, por construcción, también es un isomorfismo la función,

$$1_X : (X, \alpha) \longrightarrow (X, \beta)$$

Por lo tanto, $\mathfrak{M}tc$ no es transportable.

[4] Por ejemplo, $\alpha = 2\beta$

Capítulo 5

Fibras en *ccce*

Sean, $\underline{K}$ una *ccce* transportable arbitraria y X un conjunto cualquiera; si la clase $\underline{K}[X]$ resulta ser un conjunto, entonces podemos dotarlo con un orden parcial. Auxiliándonos en este y otros resultados presentados en el capítulo presente, veremos que, desde la perspectiva de la teoría de las estructuras matemáticas, la noción de estructura topológica guarda una diferencia meridiana con otras estructuras tales como la de orden parcial, reticular o vectorial.

Definición 5.1. Sea $\underline{K}$ una *ccce* arbitraria y X cualquier conjunto. Sean α, β en $\underline{K}[X]$; se dice que α **es más fina que** β, o bien, que β es **más áspera** que α si,

$$1_X : (X, \alpha) \longrightarrow (X, \beta)$$

es un $\underline{K}$-morfismo. Tal situación se denota escribiendo $\alpha \leq_{\underline{K}} \beta$.

Ejemplo 5.1. Debido al axioma de identidad, cualquier $\underline{K}$-estructura de cualquier *ccce* $\underline{K}$ es más fina y más áspera que sí misma.

En $\mathfrak{Gra}$, α es más fina que β si, y sólo si, α está contenida en β. En efecto,

$$1_X : (X, \alpha) \longrightarrow (X, \beta)$$

es un morfismo en $\mathfrak{Gra}$ si, y sólo si,

$$(x_1, x_2) \in \alpha \Longrightarrow (1_X(x_1), 1_X(x_2)) \in \beta$$

que es justo lo que se había afirmado.

En $\mathfrak{Top}$, α es más fina que β si, y sólo si, β está contenida en α. En efecto,

$$1_X : (X, \alpha) \longrightarrow (X, \beta)$$

es un morfismo en $\mathfrak{Top}$ si, y sólo si, para cualquier U en β,

$$1_X^{-1}(U) = U \in \alpha$$

lo cual implica que β está contenida en α.

En $\mathfrak{Pos}$, $\alpha \leq \beta$ si, y sólo si, α está contenida en β. Dado que $\mathfrak{Pos}$ es sub*ccce* plena de $\mathfrak{Gra}$, se tiene que,

$$\left\{(X, \alpha) \xrightarrow{1_X} (X, \beta)\right\} \subseteq \mathcal{F}_{\mathfrak{Pos}} \Longleftrightarrow \left\{(X, \alpha) \xrightarrow{1_X} (X, \beta)\right\} \subseteq \mathcal{F}_{\mathfrak{Gra}} \Longleftrightarrow \alpha \subseteq \beta$$

Es la plenitud de $\mathfrak{Pos}$ en $\mathfrak{Gra}$ la que permite garantizar el resultado anterior. Podría pensarse que la fineza o aspereza entre las $\underline{K}$-estructuras que figuren en cualquier sub*ccce* $\underline{S}$ de $\underline{K}$ es la misma que en $\underline{K}$, pero esto es falso. Piénsese, por ejemplo, en $\mathfrak{Lat}$, que es sub*ccce* de $\mathfrak{Pos}$, pero no plena. Ya sabemos que en $\mathfrak{Pos}$ el orden parcial para $\mathbb{N}$,

$$\alpha = \{(n_1, n_2) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \ n_1 \mid n_2\}$$

es más fino que el órden usual β, pero esto deja de ser cierto si pensamos a α y β como estructuras reticulares, pues sabemos también que,

$$1_{\mathbb{N}} : (\mathbb{N}, \alpha) \longrightarrow (\mathbb{N}, \beta)$$

no es un morfismo reticular.

Definición 5.2. Sea $\underline{K}$ cualquier *ccce* transportable. Se dice que $\underline{K}$ **tiene fibras pequeñas** si para cada conjunto X, la clase $\underline{K}[X]$ es un conjunto.

Proposición 5.1. *Si $\underline{K}$ tiene fibras pequeñas, entonces $\left(\underline{K}[X], \leq_{\underline{K}}\right)$ es un copo.*

Demostración. Sean α, β y γ en $\underline{K}[X]$. Por el axioma de identidad tenemos $\alpha \leq_{\underline{K}} \alpha$; por lo tanto, $\leq_{\underline{K}}$ es reflexiva. Ahora bien, si,

$$\alpha \leq_{\underline{K}} \beta \quad \text{y} \quad \beta \leq_{\underline{K}} \gamma$$

entonces podemos aplicar el axioma de composición a los morfismos,

$$(X, \alpha) \xrightarrow{1_X} (X, \beta) \quad \text{y} \quad (X, \beta) \xrightarrow{1_X} (X, \gamma)$$

para obtener $\alpha \leq_{\underline{K}} \gamma$. Por lo tanto, $\leq_{\underline{K}}$ es transitiva. Para probar la antisimetría, supongamos que además de $\alpha \leq_{\underline{K}} \beta$ se tiene $\beta \leq_{\underline{K}} \alpha$. Entonces,

$$(X, \alpha) \xrightarrow{1_X} (X, \beta) \quad \text{y} \quad (X, \beta) \xrightarrow{1_X} (X, \alpha)$$

son $\underline{K}$-isomorfismos. Por consiguiente, se tienen los $\underline{K}$-morfismos,

$$(X, \alpha) \xrightarrow{1_X} (X, \beta) \quad \text{y} \quad (X, \alpha) \xrightarrow{1_X \circ 1_X} (X, \alpha)$$

Dado que $\underline{K}$ es transportable, debemos tener $\alpha = \beta$. Esto prueba que $\leq_{\underline{K}}$ es un orden parcial en $\underline{K}[X]$, que es un conjunto por ser $\underline{K}$ de fibras pequeñas. Luego, $\left(\underline{K}[X], \leq_{\underline{K}}\right)$ es un copo. □

Definición 5.3. Cuando dos puntos distintos cualesquiera de un copo son incomparables, se dice que tal copo está **discretamente ordenado**.

Definición 5.4. Sea $\underline{K}$ una *ccce* de fibras pequeñas. Cuando $\left(\underline{K}[X], \leq_{\underline{K}}\right)$ está discretamente ordenado, se dice que $\underline{K}$ está **discretamente fibrada.** Cuando $\left(\underline{K}[X], \leq_{\underline{K}}\right)$ es una retícula completa, se dice que $\underline{K}$ está **completamente fibrada**.

Observación 5.1. Se definió una retícula completa como un copo dentro del cual todo subconjunto posee ínfimo y supremo. Sin embargo, basta con que el conjunto sea superable; esto es, que cada subconjunto suyo posea un supremo dentro del copo. En efecto, suponiendo que tal es el caso para el copo (X, α), sea A cualquier subconjunto de X y sea I el conjunto de cotas inferiores de A. De acuerdo con la hipótesis, I tiene un supremo s en X; entonces, $s \leq a$, para todo a en A, porque cada a en A es cota superior de I. Pero entonces s es una cota inferior de A, y es la más grande porque si c es cualquie otra, entonces c está en I y , por tanto, $c \leq s$. Así entonces, $s = \inf A$; por lo tanto, (X, α) es una retícula completa.

Veamos algunos ejemplos de *ccce* completamente fibradas.

Ejemplo 5.2. $\mathfrak{Top}$ está completamente fibrada. En efecto, $\mathfrak{Top}$ es de fibras pequeñas porque,

$$\mathfrak{Top}[X] \subseteq Pot(Pot(X))$$

y como sabemos, $Pot(Pot(X))$ es un conjunto, para cualquier conjunto X. Resta probar que $(\mathfrak{Top}[X], \leq_{\mathfrak{Top}})$ es superable. Sea T un subconjunto no vacío de $\mathfrak{Top}[X]$, y sea $\alpha = \cap T$ (T es una colección de topologías para X. Además sabemos que la intersección de estas topologías es nuevamente una topología para X). Entonces, para cada β en T,

$$1_X : (X, \beta) \longrightarrow (X, \alpha)$$

es continua, pues α está contenida en β. En otras palabras, para cada β en T, $\beta \leq_{\mathfrak{Top}} \alpha$. Así, α es una cota superior de T. Y si γ es cualquier otra cota superior de T entonces, para cada β en T, $\beta \leq_{\mathfrak{Top}} \gamma$; es decir, para cada β en T, γ está contenida en β. Esto implica que γ está contenida en α; por lo tanto, $\alpha \leq_{\mathfrak{Top}} \gamma$. Se concluye que $\alpha = \sup T$. Si $T = \emptyset$, entonces $Pot(X) = \sup T$. Esto prueba que $(\mathfrak{Top}[X], \leq_{\mathfrak{Top}})$ es una retícula completa. Por lo tanto, $\mathfrak{Top}$ está completamente fibrada.

Ejemplo 5.3. $\mathfrak{Gra}$ está completamente fibrada. En vista de la definición de una $\mathfrak{Gra}$-estructura, tenemos que para cada conjunto X,

$$\mathfrak{Gra}[X] = Pot(X \times X)$$

que también es un conjunto. Por lo tanto, $\mathfrak{Gra}$ es de fibras pequeñas. Por otra parte, sabemos que, para cualesquiera α, β en $\mathfrak{Gra}[X]$,

$$\alpha \leq_{\mathfrak{Gra}} \beta \Longleftrightarrow \alpha \subseteq \beta$$

Por lo tanto,

$$\left(\mathfrak{Gra}\left[X\right], \leq_{\mathfrak{Gra}}\right) = \left(Pot\left(X \times X\right), \subseteq\right)$$

Pero bajo la contención cualquier potencia es una retícula completa (ejemplo 2.5). Por consiguiente, $\mathfrak{Gra}$ está completamente fibrada.

Ejemplo 5.4. A continuación mostraremos que $\mathfrak{Pos}$ no está completamente fibrada. Este resultado es curioso, ya que $\mathfrak{Pos}$ es una sub*ccce* plena de $\mathfrak{Gra}$ y, como acabamos de ver, esta última está completamente fibrada.

Sean, X un conjunto con dos o más elementos, y

$$\triangle\left(X\right) = \left\{(x, x) : x \in X\right\}$$

y sean x_1, x_2 dos elementos distintos de X. Ahora hagamos:

$$\alpha = \triangle\left(X\right) \cup \left\{(x_1, x_2)\right\} \quad \text{y} \quad \beta = \triangle\left(X\right) \cup \left\{(x_2, x_1)\right\}$$

Entonces α y β pertenecen a $\mathfrak{Pos}\left[X\right]$, pero $\{\alpha, \beta\}$ no tiene supremo en $\left(\mathfrak{Pos}\left[X\right], \leq_{\mathfrak{Pros}}\right)$ pues no está acotado superiormente. En efecto, si $\gamma \in \mathfrak{Pos}\left[X\right]$ fuese una cota superior de $\{\alpha, \beta\}$, entonces,

$$\alpha \subseteq \gamma \quad \text{y} \quad \beta \subseteq \gamma$$

Por lo tanto, (x_1, x_2) y (x_2, x_1) pertenecen a γ; de donde, $x_1 = x_2$. Pero esto último no es posible. Por lo tanto, $\left(\mathfrak{Pos}\left[X\right], \leq_{\mathfrak{Pos}}\right)$ no es una retícula completa y , por consiguiente, $\mathfrak{Pos}$ no está completamente fibrada.

Notemos también que $\mathfrak{Pos}$ tampoco está discretamente fibrada. En efecto, si X tiene al menos dos elementos distintos, entonces,

$$1_X : (X, \triangle\left(X\right)) \longrightarrow (X, \alpha)$$

es un morfismo para todo orden parcial α en X. En otras palabras, $\triangle\left(X\right)$ es siempre comparable con cualquier orden parcial α en X: $\triangle\left(X\right) \leq_{\mathfrak{Pos}} \alpha$. Por lo tanto, $\left(\mathfrak{Pos}\left[X\right], \leq_{\mathfrak{Pos}}\right)$ no está discretamente ordenado; es decir, $\mathfrak{Pos}$ no está discretamente fibrada.

Ejemplo 5.5. $\mathfrak{Lat}$ está discretamente fibrada.

Demostración. $\mathfrak{Lat}$ es transportable. Sean, $(X, \leq)$ una retícula y $X \xrightarrow{f} Y$ una función biyectiva; debemos probar que existe una única $\mathfrak{Lat}$-estructura $\preceq$ en $\mathfrak{Lat}\left[Y\right]$, tal que,

$$(X, \leq) \xrightarrow{f} (Y, \preceq)$$

es un isomorfismo reticular.

Dada la relación $\leq$, definimos $\preceq$ de la siguiente manera:

$$y_1 \preceq y_2 \Longleftrightarrow x_1 \leq x_2$$

donde $y_1 = f\left(x_1\right)$, $y_2 = f\left(x_2\right)$. No es difícil ver que $\preceq$ es un orden parcial en Y.

Dados y_1, y_2 en Y, definimos las operaciones $\wedge_{\preceq}$ y $\vee_{\preceq}$ como sigue,

$$y_1 \wedge_{\preceq} y_2 = f\left(x_1 \wedge_{\leq} x_2\right) \quad \text{y} \quad y_1 \vee_{\preceq} y_2 = f\left(x_1 \vee_{\leq} x_2\right)$$

donde $y_1 = f\left(x_1\right)$ y $y_2 = f\left(x_2\right)$. No es difícil verificar que el objeto $(Y, \preceq)$, junto con las operaciones $\wedge_{\preceq}$ y $\vee_{\preceq}$, cumple las condiciones que lo identifican como una retícula.

Desde luego, por el modo en que se definió $\preceq$, se tiene que,

$$(X, \leq) \xrightarrow{f} (Y, \preceq)$$

es un $\mathfrak{Lat}$- morfismo. Probemos ahora que,

$$(Y, \preceq) \xrightarrow{f^{-1}} (X, \leq)$$

es un $\mathfrak{Lat}$-morfismo. Sean $f\left(x_1\right) = y_1, f\left(x_2\right) = y_2$ en Y, arbitrarios, entonces,

$$f^{-1}\left(y_1 \wedge_{\preceq} y_2\right) = f^{-1}f\left(x_1 \wedge_{\leq} x_2\right)$$

$$= x_1 \wedge_{\leq} x_2 = f^{-1}\left(y_1\right) \wedge_{\leq} f^{-1}\left(y_2\right)$$

de modo análogo concluimos que,

$$f^{-1}(y_1 \vee_{\preceq} y_2) = f^{-1}(y_1) \vee_{\leq} f^{-1}(y_2)$$

Esto prueba que f es un $\mathfrak{Lat}$-isomorfismo.

Para verificar que $\mathfrak{Lat}$ es transportable, falta probar la unicidad de $\preceq$. Para este fin, supongamos que $\ll \in \mathfrak{Lat}[Y]$ es tal que,

$$(X, \leq) \xrightarrow{f} (Y, \ll)$$

es un $\mathfrak{Lat}$-isomorfismo. De este modo,

$$(Y, \preceq) \xrightarrow{f^{-1}} (X, \leq);\ \ (X, \leq) \xrightarrow{f} (Y, \ll)$$

y

$$(Y, \ll) \xrightarrow{f^{-1}} (X, \leq)\ \ \ (X, \leq) \xrightarrow{f} (Y, \preceq)$$

son $\mathfrak{Lat}$-morfismos. Por lo tanto, también son $\mathfrak{Lat}$-morfismos los siguientes:

$$(Y, \preceq) \xrightarrow{1_X} (Y, \ll) \qquad \text{y} \qquad (Y, \ll) \xrightarrow{1_X} (Y, \preceq)$$

Se concluye que $\preceq = \ll$. Por lo tanto, $\mathfrak{Lat}$ es transportable. Que $\mathfrak{Lat}$ tenga fibras pequeñas es consecuencia del hecho de que $\mathfrak{Gra}$ tiene fibras pequeñas.

Para demostrar que $\mathfrak{Lat}$ está discretamente fibrada, es necesario demostrar que, para cada conjunto X, el copo $(\mathfrak{Lat}[X], \leq_{\mathfrak{Lat}})$ está discretamente ordenado. Por este motivo, sean $\leq$ y $\preceq$ dos $\mathfrak{Lat}$-estructuras para X tales que la identidad,

$$(X, \leq) \xrightarrow{1_X} (X, \preceq)$$

es un morfismo reticular. Probemos que $\leq = \preceq$. Sean x_1, x_2 en X tales que $x_1 \leq x_2$. Entonces, $x_1 = x_1 \wedge_{\leq} x_2$ y $x_2 = x_1 \vee_{\leq} x_2$. Por hipótesis, $x_1 \wedge_{\leq} x_2 = x_1 \wedge_{\preceq} x_2$ y $x_1 \vee_{\leq} x_2 = x_1 \vee_{\preceq} x_2$; y puesto que $x_1 \wedge_{\preceq} x_2 \preceq x_1 \vee_{\preceq} x_2$, entonces $x_1 \preceq x_2$. Por lo tanto, $\leq \subseteq \preceq$. Un argumento análogo muestra que $\preceq \subseteq \leq$.

Entonces, $(\mathfrak{Lat}[X], \leq_{\mathfrak{Lat}})$ está discretamente ordenado. Por lo tanto, $\mathfrak{Lat}$ es una *ccce* discretamente fibrada. $\square$

Antes de ver los siguientes ejemplos, necesitamos recordar algunos conceptos y resultados de la topología básica de los conjuntos.

Capítulo 6

Algunos ejemplos de sub*ccce* en $\mathfrak{Top}$

Principiamos este capítulo con algunos conceptos y resultados básicos de la topológia de conjuntos que necesitamos recordar para los ejemplos que vienen a continuación. Las demostraciones de las proposiciones pueden consultarse en [1], o bien, [8].

Definición 6.1. Sea X un conjunto arbitrario. Una **topología para** X es una familia τ de subconjuntos de X que satisfaga las condiciones siguientes,

1. Los conjuntos X y $\emptyset$ pertenecen a τ.
2. Si J es cualquier conjunto de índices y $\{A_j\}_{j\in J}$ es una familia de abiertos en τ, entonces $\underset{j\in J}{\cup} A_j$ pertenece a τ.

Si τ es una topologia para X, entonces llamaremos **abiertos en** X a los miembros de τ y hablaremos de la pareja (X,τ) como de un **espacio topológico** del que X será el **conjunto subyacente.**

Definición 6.2. Sea (X,τ) un espacio topológico cualquiera. Decimos que un subconjunto C de X es cerrado en X si su complemento en X es abierto, es decir, si $X\backslash C$ pertenece a τ.

Tenemos una proposición referente a los conjuntos cerrados.

Proposición. *Si $\mathfrak{C}$ es la familia de subconjuntos cerrados de (X,τ), entonces,*

1. Los conjuntos X y $\emptyset$ pertenecen a $\mathfrak{C}$.
2. Si J es cualquier conjunto de índices y $\{C_j\}_{j\in J}$ es una familia de cerrados en $\mathfrak{C}$, entonces $\underset{j\in J}{\cap} C_j$ pertenece a $\mathfrak{C}$.
3. Si C_1 y C_2 pertenecen a $\mathfrak{C}$, entonces $C_1 \cup C_2$ pertenece a $\mathfrak{C}$.

Recíprocamente, si $\mathfrak{C}$ es una familia de subconjuntos de X que satiaface las condiciones anteriores, entonces la familia τ de complementos de los miembros de $\mathfrak{C}$ constituyen una topología para X y los cerrados de (X,τ) coinciden con los elementos de $\mathfrak{C}$.

Definición 6.3. Un espacio topológico (X,τ) **es** T_2 si para cada par de puntos distintos x, y en X, existen conjuntos abiertos V y U tales que,

$$x \in V, y \in U \quad \text{y} \quad V \cap U = \emptyset$$

Definición 6.4. Sea (X,τ) un espacio topológico y A un subconjunto de X. Una **cubierta abierta de** A es una colección $\{U_i\}_{i\in I}$ de conjuntos abiertos tal que

$$A \subseteq \underset{i\in I}{\cup} U_i$$

El conjunto A es compacto si para cada cubierta abierta $\{U_i\}_{i\in I}$, existe un subconjunto finito J de I tal que,

$$A \subseteq \underset{i\in J}{\cup} U_i$$

La colección $\{U_i\}_{i\in J}$ es llamada subcubierta abierta finita de $\{U_i\}_{i\in I}$.

Proposición 6.1. *Sea (X,τ) un espacio topológico compacto y T_2. Sea A un subconjunto de X; entonces A es compacto si, y sólo si, es cerrado.*

Proposición 6.2. *Sean (X,τ) y (Y,σ) espacios compactos. Si*

$$(X,\tau) \xrightarrow{f} (Y,\sigma)$$

es continua y A es un subconjunto compacto de X, entonces el conjunto $f(A)$ (contenido en Y) también es compacto.

A continuación presentamos un ejemplo de una *ccce* que está discretamente fibrada.

Ejemplo 6.1. $\mathfrak{Comp}$ es la sub*ccce* plena de $\mathfrak{Top}$ cuyos objetos son todos los espacios que son compactos y T_2.

$\mathfrak{Comp}$ es transportable. Sea (X,τ) un espacio topológico compacto y T_2. Sea

$$X \xrightarrow{f} Y$$

una función biyectiva. Sabemos que

$$\sigma = \{f(U) \mid U \in \tau\}$$

es la única topología para Y tal que f es continua. Necesitamos probar que (Y,σ) es un espacio topológico compacto y T_2. La compacidad de (Y,σ) es consecuencia de la proposición 6.2. Veamos que (Y,σ) es T_2. Sean y_1, y_2 elementos de Y , con $y_1 \neq y_2$. Como f es biyectiva, existen x_1, x_2, con $x_1 \neq x_2$, en X tales que $f(x_1) = y_1$ y $f(x_2) = y_2$. Por hipótesis, (X,τ) es T_2; entonces existen U, V en τ tales que x_1 pertenece a U, x_2 pertenece a V y $U \cap V = \emptyset$. Por lo tanto, y_1 pertenece a $f(U)$ y y_2 pertenece a $f(V)$; además, $f(U)$ y $f(V)$ son elementos de σ, y puesto que f es biyectiva,

$$f(U) \cap f(V) = f(U \cap V) = f(\emptyset) = \emptyset$$

$\mathfrak{Comp}$ está discretamente fibrada. Para cada conjunto X, $\mathfrak{Comp}[X]$ está contenido en $\mathfrak{Top}[X]$; por lo tanto, $\mathfrak{Comp}$ tiene fibras pequeñas. Dados τ y σ en $\mathfrak{Comp}[X]$, supongamos que,

$$(X,\tau) \xrightarrow{1_X} (X,\sigma)$$

es continua. En consecuencia, σ está contenida en τ. Sea A en τ, entonces $X \backslash A$ es cerrado respecto a τ; por la proposición 6.1, $X - A$ es compacto. Puesto que 1_X es continua y $X \backslash A$ es compacto respecto a τ, entonces, consecuencia de la proposición 6.2, $1_X(X \backslash A) = X \backslash A$ es compacto respecto a σ. Al recurrir a la proposición 6.1, concluimos que $X \backslash A$ es cerrado en σ. Así pues, A es un elemento de σ. En consecuencia, τ está contenida en σ. La doble contención implica que $\tau = \sigma$. Esto prueba que $\mathfrak{Comp}$ está discretamente fibrada.

Observación 6.1. Si (X,τ) es un espacio topológico indiscreto ($\tau = \{X, \emptyset\}$), entonces (X,τ) es un espacio compacto. En efecto, pues cualquier cubierta abierta que contenga a X, tiene entre sus elementos al conjunto X.

Ejemplo 6.2. $\mathfrak{Topc}$ es la sub*ccce* plena de $\mathfrak{Top}$, cuyos objetos son todos los espacios compactos.
Por los resultados anteriores, sabemos que $\mathfrak{Topc}$ tiene fibras pequeñas. Probaremos que $\mathfrak{Topc}$ no está discretamente fibrada. Si X es un conjunto arbitrario y $\sigma_X = \{X, \emptyset\}$, entonces,

$$(X,\tau) \xrightarrow{1_X} (X,\sigma_X)$$

es un $\mathfrak{Topc}$-morfismo para cualquier τ en $\mathfrak{Topc}[X]$. Por lo tanto, para cualquier τ en $\mathfrak{Topc}[X]$, $\tau \leq_{\mathfrak{Topc}} \sigma_X$.
Es natural preguntarnos si para cualquier conjunto X, el copo $(\mathfrak{Topc}[X], \leq_{\mathfrak{Topc}})$ es una retícula. La respuesta es negaiva. Consideremos, por ejemplo, el conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$ y un elemento suyo cualquiera, digamos el 1. Ahora definimos,

$$\tau_1 := \{\{1\}, \mathbb{N}, \emptyset\} \quad \text{y} \quad \tau^1 := \{A \subseteq \mathbb{N} \mid 1 \notin A \text{ o } A = \mathbb{N}\}$$

Entonces, no es difícil verificarlo, $(\mathbb{N},\tau_1)$ y $(\mathbb{N},\tau^1)$ son espacios topológicos compactos. Observemos que si τ es una topología para $\mathbb{N}$ que contiene tanto a τ_1 como a τ^1, entonces τ tiene entre sus elementos a todos los subconjuntos unitarios de $\mathbb{N}$; esto implica que τ es la topología discreta para $\mathbb{N}$. Como consecuencia de lo anterior, no hay elemento de $\mathfrak{Topc}[\mathbb{N}]$ que acote inferiormente a las topologías τ_1 y τ^1 según el orden parcial $\leq_{\mathfrak{Topc}}$.

Definición 6.5. Un espacio topológico (X,τ) **es** T_1 si, dados $x \in X$ y $y \in Y$, con $x \neq y$, existen abiertos U y V tales que, $(x \in U, y \notin U)$ y $(x \notin V, y \in V)$.

Proposición 6.3. *Un espacio topológico (X,τ) es T_1 si, y sólo si, cada subconjunto finito A de X es cerrado.*

Ejemplo 6.3. Con $\mathfrak{Top}_1$ denotamos a la sub*ccce* plena de $\mathfrak{Top}$ cuyos objetos son todos los espacios topológicos (X,τ) que son T_1.

$\mathfrak{Top}_1$ tiene fibras pequeñas y está completamente fibrada. Sólo probaremos que $\mathfrak{Top}_1$ está completamente fibrada. Sean, T un subconjunto de $\mathfrak{Top}_1[X]$. Si T es no vacío, sea $\sigma := \cap T$. Entonces, para cualquier τ en T, la función,

$$(X, \tau) \xrightarrow{1_X} (X, \sigma)$$

es continua. Observemos que en caso de pertenecer a $\mathfrak{Top}_1[X]$, σ será el supremo de T según el orden parcial $\leq_{\mathfrak{Top}_1}$. Veamos que, efectivamente, σ es un elemento de $\mathfrak{Top}_1[X]$. Para cualesquiera dos elementos distintos x, y en X, y para cualquier τ en T, en acuerdo con la proposición 6.3, los conjuntos $\{x\}$ y $\{y\}$ son cerrados respecto a τ. Por lo tanto,

$$X \setminus \{x\} \in \tau \quad \text{y} \quad X \setminus \{y\} \in \tau$$

Esto prueba que,

$$X \setminus \{x\} \in \sigma \quad \text{y} \quad X \setminus \{y\} \in \sigma$$

Por lo tanto, dados x en X y y en Y, con $x \neq y$, existen conjuntos U, V en σ (a saber, $U = X \setminus \{y\}$ y $V = X \setminus \{x\}$) tales que,

$$x \in U, y \notin U \quad \text{y} \quad x \notin V, y \in V$$

Se cumple entonces que σ pertenece a $\mathfrak{Top}_1[X]$.

Si T es el conjunto vacío, entonces $\sup T = Pot(X)$. Naturalmente, $Pot(X)$ pertenece a $\mathfrak{Top}_1[X]$.

Terminamos este capítulo recordando otros conceptos topológicos que ocuparemos más adelante. Sin embargo, cuando presentemos un concepto propio de este trabajo (que por lo general es un concepto categórico), optaremos por dar primeramente en nuestro discurso los conceptos y resultados de la topología de conjuntos que sugieren (generan) dicho concepto. Cualquier noción previa (referente a la topologia de conjuntos) que se requiera para aquellos conceptos topológicos que vayamos presentando a lo largo del trabajo, procuraremos que estén presentes en este capítulo.

Cerradura e interior de un conjunto

Otro par de conceptos básicos de topología son los de cerradura e interior.

Definición 6.6. Sean, (X, τ) un espacio topológico arbitrario y A un subconjunto de X. Definimos **la cerradura de** A como el subconjunto cerrado mínimo de X que contiene a A. Denotaremos a este conjunto como $\overline{A}$.

Observemos que la existencia de este conjunto siempre puede garantizarse, pues siempre podemos pensar en él como en la intersección de todos los cerrados que contienen a A (la familia de cerrados que contienen a A no es vacía; el conjunto X es un elemento de tal familia).

Proposición 6.4. *Sea, (X, τ) y (Y, σ) un par de espacios topológicos arbitrarios y sea $f : X \to Y$ una función arbitraria. Son equivalentes,*

1. f es una función continua de (X, τ) en (Y, σ).
2. Si C es cerrado en (Y, σ), entonces $f^{-1}(C)$ es cerrado en (X, τ).
3. Para cualquier subconjunto A de X, $f(\bar{A})$ está contenido en $\overline{f(A)}$.
4. Para cualquier subconjunto B de Y, $\overline{f^{-1}(B)}$ está contenido en $f^{-1}(\bar{B})$.

Definición 6.7. Sean, (X, τ) un espacio topológico y A un subconjunto de X; definimos **el interior de** A como la unión de la familia de abiertos en (X, τ) contenidos en A. Usualmente se denota el interior de A mediante $\overset{\circ}{A}$ o como $intA$.

Vecindades y vecindades básicas

Definición 6.8. Sea (X, τ) un espacio topológico arbitrario y sea x en X. **Una vecindad de** x es cualquier subconjunto de X que contenga a un abierto que a su vez contenga a x. Suele denotarse mediante $\mathcal{N}_x$ a la familia de todas las vecindades de x, y por $\mathcal{N}_x^\circ$ a la familia de vecindades abiertas de x.

Definición 6.9. En un espacio topológico arbitrario **una base local de vecindades de** x es cualquier subfamilia de $\mathcal{N}_x$ que contenga a un miembro dentro de cualquier vecindad de x. En símbolos, $\mathcal{B}_x$ es base local de x si, y sólo si,

1. $\mathcal{B}_x$ está contenida en $\mathcal{N}_x$.
2. Para cada V en $\mathcal{N}_x$ existe B en $\mathcal{B}_x$ tal que B está contenido en V.

Puntos de acumulación

Definición 6.10. Sea (X, τ) un espacio topológico arbitrario y sea A un subconjunto de X.

1. **Un punto** x **de** X **se llama punto de acumulación de** A si toda vecindad de x contiene algún punto de A distinto de x; es decir, para todo V en $\mathcal{N}_x$,

$$A \cap (V \setminus \{x\}) \neq \emptyset$$

2. El conjunto de puntos de acumulación de A se denota por A' y se llama **conjunto derivado de** A.

Proposición 6.5. *Sea (X, τ) un espacio topológico cualquiera y sea A un subconjunto de X; entonces,*

1. A es cerrado si, y sólo si A' está contenido en A.
2. $\overline{A} = A \cup A'$.

Generación de una Topología; bases y subbbases

Proposición 6.6. *Sea X cualquier conjunto. Si $\{\tau_i\}_{i \in I}$ es una familia de topologías para X y $\tau := \bigcap\limits_{i \in I} \tau_i$, entonces τ es una topología para X.*

Definición 6.11. Sea γ cualquier familia de subconjuntos de X, es decir, $\gamma \subseteq Pot\,(X)$; si $\{\tau_i\}_{i \in I}$ es una familia de topologías que contienen a γ, entonces,

$$\tau\,(\gamma) := \bigcap_{i \in I} \tau_i$$

es la **topología generada por** γ.

Proposición 6.7. *Si γ cualquier familia de subconjuntos de X, entonces $\tau\,(\gamma)$ es la familia de uniones arbitrarias de intersecciones finitas de elementos de γ.*

Definición 6.12. Sea (X, τ) cualquier espacio topológico. **Una base de** τ es una familia β contenida en τ tal que todo elemento de τ es unión de elementos de β. Llamaremos abiertos básicos a los miembros de β.

Proposición 6.8. *Sea (X, τ) un espacio topológico cualquiera. Si β es base de τ, entonces,*

1. Para cada x en Xexiste B en β tal que x pertenece a B.
2. Si B_1 y B_2 pertenecen a β y x está en $B_1 \cap B_2$, entonces existe B_3 en β tal que,

$$x \in B_3 \quad \text{y} \quad B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$$

Recíprocamente, si β es una familia de subconjuntos de X que satisface las condiciones anteriores, entonces existe una topologia para X de la cual β es base.

Definición 6.13. Sea (X, τ) un espacio topológico y sea γ contenida en τ; se dice que γ **es subbase de** τ si la familia β de todas las intersecciones finitas de elementos de γ es base de τ.

Capítulo 7

ccce isomorfas

En el capítulo 3 estudiamos el concepto de isomorfismo entre objetos de una *ccce* dada. Toca el turno de examinar esta misma idea pero ahora entre *ccce*. Presentamos en este capítulo una definición que nos dice cuándo dos *ccce* son esencialmente la misma.

Definición 7.1. Sean $\underline{K}$ y $\underline{S}$ dos *ccce* cualesquiera. Diremos que $\underline{K}$ y $\underline{S}$ son **concretamente isomorfas** si para cada conjunto X, existe una *"biyección natural"*:

$$I_X : \underline{K}\,[X] \longrightarrow \underline{S}\,[X]$$

Es decir, si $f : X \longrightarrow Y$ es una función cualquiera, entonces,

$$\left\{(X,\alpha) \xrightarrow{f} (Y,\beta)\right\} \subseteq \mathcal{F}_{\underline{K}} \Longleftrightarrow \left\{(X, I_X(\alpha)) \xrightarrow{f} (Y, I_Y(\beta))\right\} \subseteq \mathcal{F}_{\underline{S}}$$

Definición 7.2. Con el símbolo $\mathfrak{Pros}$ denotaremos a la *subccce* plena de $\mathfrak{Gra}$ cuyos objetos son los conjuntos preordenados[1], y cuyos morfismos son las funciones monótonas.

Definición 7.3. Un espacio topológico es **casi discreto** si intersecciones arbitrarias de conjuntos abiertos son conjuntos abiertos.

Definición 7.4. Con el símbolo $\mathfrak{CDTop}$ denotaremos a la *subccce* plena de $\mathfrak{Top}$ cuyos objetos son los espacios casi discretos (sus morfismos, debido a la plenitud, son todas las funciones continuas definibles entre estos espacios).

Teorema 7.1. *$\mathfrak{Pros}$ es concretamente isomorfa a $\mathfrak{CDTop}$.*

Demostración. Sea $(X, \leq)$ cualquier conjunto preordenado. Definimos:

$$\tilde{\alpha} = \{U \subseteq X : (x_1 \leq x_2 \text{ y } x_2 \in U) \Longrightarrow (x_1 \in U)\}$$

Entonces $\tilde{\alpha}$ es una topología casi discreta para X. En efecto, para cualquier familia $\{U_i\}_I$ de elementos de $\tilde{\alpha}$ tenemos que:

(1) Si $U = \bigcup\limits_{i\in I} U_i$, y se tiene $x_1 \leq x_2$, con x_2 en U, entonces, para alguna i en I, x_2 pertenece a U_i; por lo tanto, para ese mismo i, x_1 pertenece a U_i ; en consecuencia, x_1 está en U. Por lo tanto, U pertenece a $\tilde{\alpha}$. Se concluye que $\tilde{\alpha}$ está cerrada bajo la formación de uniones arbitrarias.

(2) Si $U = \bigcap\limits_{i\in I} U_i$, y se tienen $x_1 \leq x_2$, con x_2 en U, entonces, para toda i en I, x_2 pertenece a U_i; por lo tanto, para toda i en I, x_1 pertenece a U_i; en consecuencia, x_1 es un elemento de U. Por lo tanto, U pertenece a $\tilde{\alpha}$, y, $\tilde{\alpha}$ está cerrada bajo la formación de intersecciones arbitrarias.

Por consiguiente, podemos definir una función que asocie un objeto $(X, \tilde{\alpha})$ de $\mathfrak{CDTop}$ a cada $\mathfrak{Pros}$-objeto $(X, \leq)$. Veamos que esta función es biyectiva.

Para (X, τ) en $\mathfrak{CDTop}$ definimos:

$$(x_1 \leq_\tau x_2) \Longleftrightarrow [(x_2 \in U \quad \text{y} \quad U \in \tau) \Longrightarrow (x_1 \in U)]$$

Entonces, $\leq_\tau$ es un preorden en X. En efecto:

Reflexividad: Que $x \leq_\tau x$, para todo x en X, es obvio.

Transitividad: Si $x_1 \leq_\tau x_2$, $x_2 \leq_\tau x_3$ y x_3 pertenece a U, entonces x_2 pertenece a U. Luego, x_1 pertenece a U; por lo tanto, $x_1 \leq_\tau x_3$.

Ahora pensemos en la función que asocia a cada $\mathfrak{CDTop}$-objeto (X, τ) el $\mathfrak{Pros}$-objeto $(X, \leq_\tau)$, y veamos que se trata de la inversa de la función que definimos antes. Para ello, pensemos en las composiciones siguientes:

$$\leq \mapsto \tilde{\alpha} \mapsto \leq_{\tilde{\alpha}} \quad \text{y} \quad \tau \mapsto \leq_\tau \mapsto \tilde{\alpha}$$

[1] Un conjunto preordenado es una pareja (X, α) en la que X es un conjunto y α es una relación binaria definida en X que es reflexiva y transitiva.

Con relación a la primera hay que probar que,

$$(x_1 \leq x_2) \Longleftrightarrow (x_1 \leq_{\tilde{\alpha}} x_2)$$

$\Rightarrow \rfloor$ De acuerdo con la definición de $\tilde{\alpha}$, si,

$$x_1 \leq x_2 \quad \text{y} \quad (x_2 \in U \quad \text{y} \quad U \in \tilde{\alpha})$$

entonces x_1 pertenece a U, o sea que,

$$(x_2 \in U \quad \text{y} \quad U \in \tilde{\alpha}) \Longrightarrow x_1 \in U$$

lo cual significa precisamente que $x_1 \leq_{\tilde{\alpha}} x_2$.

$\Leftarrow \rfloor$ Sea,

$$U = \{x \in X : x \leq x_2\}$$

Entonces, U pertenece a $\tilde{\alpha}$ y x_2 pertenece a U; luego, x_1 es elemento de U, pues por hipótesis,

$$(x_2 \in U \quad \text{y} \quad U \in \tilde{\alpha}) \Longrightarrow x_1 \in U$$

Por lo tanto, $x_1 \leq x_2$.

También es cierto que al considerar la composición,

$$\tau \ \mapsto \ \leq_\tau \ \mapsto \ \tilde{\alpha}$$

obtenemos $\tau = \tilde{\alpha}$. Hagamos la demostración.

$\subseteq \rfloor$ Sea V en τ, y supóngamos que para x_1 y x_2 en X se tiene que,

$$x_1 \leq_\tau x_2 \quad \text{y} \quad x_2 \in V$$

Sabemos que,

$$(x_1 \leq_\tau x_2) \Longleftrightarrow [(x_2 \in U \text{ y } U \in \tau) \Longrightarrow (x_1 \in U)]$$

Por consiguiente, x_1 es elemento de V. Esto demuestra que V pertenece a $\tilde{\alpha}$.

$\supseteq \rfloor$ Sea U en $\tilde{\alpha}$; veremos que todo elemento de U tiene una vecindad abierta según τ. En efecto, para cualquier x_2 en U, sea,

$$V = \bigcap \{W : x_2 \in W \text{ y } W \in \tau\}$$

Como τ es casi discreta, V es un elemento de τ; es decir, V es una vecindad abierta de x_2 según τ. Finalmente, observemos que para todo x_1 en V es válida la implicación:

$$(x_2 \in W \text{ y } W \in \tau) \Longrightarrow (x_1 \in W)$$

que, por definición, significa $x_1 \leq_\tau x_2$. Como además x_2 pertenece a U y U pertenece a $\tilde{\alpha}$, entonces x_1 es elemento de U. Por lo tanto, V es un subconjunto de U; así, U pertenece a τ.

Hasta ahora hemos probado que, para cada conjunto X, podemos establecer una correspondencia biunívoca,

$$I_X : \mathfrak{Pros}\,[X] \longrightarrow \mathfrak{CDTop}\,[X]$$

Veamos que esta correspondencia biunívoca es natural.

Sea $(X, \leq)$ un $\mathfrak{Pros}$-objeto arbitrario. Para x en X definimos,

$$\uparrow x = \{y \in X : x \leq y\}$$

Aseguramos que,

$$\uparrow x = \overline{\{x\}}, \text{ según } \bar{\alpha} = I_X(\leq)$$

Para probar esto, primero veremos que $\uparrow x$ es un conjunto cerrado según $\bar{\alpha}$. Sea $U = X \setminus \uparrow x$ y supongamos que y pertenece a U. Si $x_1 \leq y$, entonces x_1 no es un elemento de $\uparrow x$; luego, x_1 pertenece a U, y como y fue escogido de manera arbitraria en U, entonces,

$$U \in \bar{\alpha} = \{W \subseteq X : (x_1 \leq x_2 \text{ y } x_2 \in W) \Longrightarrow x_1 \in W\}$$

Por lo tanto, $X \backslash U = \uparrow x$ es cerrado en X según $\bar{\alpha}$.

Por otro lado, si y es un elemento de $\uparrow x$ y V es una vecindad abierta de y según $\bar{\alpha}$, entonces x pertenece a V porque,

$$x \leq y, y \in V \quad \text{y} \quad V \in \bar{\alpha}$$

Por lo tanto,

$$\{x\} \cap V \neq \emptyset, \text{ para toda } V \text{ en } \mathcal{N}_y^{\circ}$$

Así pues,

$$y \in \overline{\{x\}}, \text{ para toda } y \in \uparrow x$$

De donde, $\uparrow x$ está contenido en $\overline{\{x\}}$. La contención en sentido contrario también vale, pues $\uparrow x$ es cerrado y x pertenece a $\uparrow x$. Por lo tanto, es cierto que $\uparrow x = \overline{\{x\}}$.

Para verificar la naturalidad de I_X hay que probar que, para toda función $X \xrightarrow{f} Y$,

$$\left\{(X, \alpha) \xrightarrow{f} (Y, \beta)\right\} \subseteq \mathcal{F}_{\mathfrak{Pros}} \Longleftrightarrow \left\{(X, I_X(\alpha)) \xrightarrow{f} (Y, I_Y(\beta))\right\} \subseteq \mathcal{F}_{\mathfrak{CDTop}}$$

$\Rightarrow \rfloor$ Supongamos que,

$$(X, \alpha) \xrightarrow{f} (Y, \beta)$$

es monótona y tomemos V en $I_Y(\beta)$, arbitrario. Si,

$$(x_1, x_2) \in \alpha \quad \text{y} \quad x_2 \in f^{-1}(V)$$

entonces,

$$(f(x_1), f(x_2)) \in \beta \quad \text{y} \quad f(x_2) \in V$$

porque f es monótona. En consecuencia, $f(x_1)$ pertenece a V; es decir, x_1 pertenece a $f^{-1}(V)$. Por lo tanto, $f^{-1}(V)$ es elemento de $I_X(\alpha)$, lo que significa que f es continua.

$\Leftarrow \rfloor$ Supongamos que,

$$(X, I_X(\alpha)) \xrightarrow{f} (Y, I_Y(\beta))$$

es continua, y sean x_1 y x_2 en X tales que (x_1, x_2) pertenece a α. Debido a la continuidad de f, tenemos que,

$$f\left(\overline{\{x\}}\right) \subseteq \overline{f\{x\}}$$

es decir,

$$f(\uparrow x) \subseteq \uparrow f(x)$$

Puesto que (x_1, x_2) pertenece a α,

$$\uparrow x_2 \subseteq \uparrow x_1$$

En consecuencia,

$$f(\uparrow x_2) \subseteq f(\uparrow x_1) \subseteq \uparrow f(x_1)$$

Por lo tanto,

$$f(x_2) \in \uparrow f(x_1)$$

es decir,

$$(f(x_1), f(x_2)) \in \beta$$

lo que significa que f es monótona, como se queria demostrar. $\square$

Parte II

ccce topológicas propiamente fibradas

Capítulo 8

ccce topológicas

Una interesante propiedad de las *ccce* topológicas es el hecho de que en ellas es posible garantizar construcciones básicas análogas a las que se hacen en el contexto particular de los espacios topológicos; nos referimos explícitamente a construcciones tales como productos, subespacios, coproductos y cocientes. Desde luego, este tipo de construcciones no son exclusivas de los espacios topológicos. Empero, resulta que en muchas *ccce* no siempre se puede garantizar la realización de dichas construcciones, mientras que en la *ccce* $\mathfrak{Top}$ sí.

En este capítulo presentamos a las *ccce* topológicas como aquellas *ccce* que poseen estructuras análogas a unas muy particulares que se dan en $\mathfrak{Top}$: las topologías iniciales y finales.

Las definiciones y resultados de la topología básica que ocupamos en este capítulo pueden consultarse en [1] o [8]. Para ahondar más en los conceptos y resultados relativos a las categorías concretas de conjuntos estructurados (*ccce*), presentados en este capítulo, pueden consultarse [3] y [9].

8.1. Subespacios, inmersiones y productos topológicos

A fin de motivar el concepto de topología inicial, el cual veremos en la siguiente sección, repasamos aquí de manera sucinta los conceptos de subespacio, inmersión y producto topológicos.

Subespacios e inmersiones topológicas. Dados un espacio topológico (X,τ) y un subconjunto Y de X, $Y \subseteq X$, recordemos que el *subespacio inducido* por Y en (X,τ) es el espacio $(Y, \tau\mid_Y)$, donde $\tau\mid_Y$ es la topología relativa para Y definida por,

$$\tau\mid_Y := \{V \cap Y \mid V \in \tau\}$$

Sea ι la inclusíón de Y en X; notemos que para cada V en τ, se tiene que,

$$V \cap Y = \iota^{-1}(V)$$

En consecuencia, podemos escribir,

$$\tau\mid_Y = \left\{\iota^{-1}(V) \mid V \in \tau\right\}$$

Tenemos el siguiente teorema de caracterización.

Teorema 8.1. *Sean, (X,τ) un espacio topológico, Y un subconjunto de X, $\iota : Y \hookrightarrow X$ la inclusión de Y en X y σ una topología para Y. Entonces σ es la topología de subespacio de Y en (X,τ) si, y sólo si, σ satisface las dos condiciones siguientes,*

1. *$\iota : (Y,\sigma) \hookrightarrow (X,\tau)$ es continua.*
2. *Dados un conjunto Z, una topología η para Z y una función $g : Z \to Y$, si la composición,*

$$\iota g : (Z,\eta) \longrightarrow (X,\tau)$$

es una función continua, entonces $g : (Z,\eta) \to (Y,\sigma)$ es una función continua.

Como podemos notar, el teorema anterior caracteriza a la topología de subespacio de Y en (X,τ) en términos de la inclusión ι y de la topología τ.

Relacionado con la definición de subespacio topológico, está el concepto de encaje o inmersión topológica. Recordemos que una función continua e inyectiva,

$$f : (X,\tau) \longrightarrow (Y,\sigma)$$

es una *inmersión topológica (o encaje)* si f inyecta al espacio (X,τ) en el espacio (Y,σ), de tal modo que *deje a (X,τ) tal cual espacio topológico es* como subespacio de (Y,σ). Dicho en forma más precisa: la función $f' : (X,\tau) \to (f(X), \sigma\mid_{f(X)})$, donde para cada x en X, $f'(x) = f(x)$, debe ser un homeomorfismo. No es difícil verificar que el hecho de que la inyección f sea una inmersión topológica es equivalente a que $\tau = \{f^{-1}(V) \mid V \in \sigma\}$.

De acuerdo a la definición anterior, toda inclusión $\iota : (Y, \tau\mid_Y) \hookrightarrow (X, \tau)$ es una inmersión topológica. De hecho, tenemos un teorema que caracteriza a la topología del espacio dominio de cualquier inmersión, generalizando el teorema 7.1.

Teorema 8.2. *Sean, (Y, σ) un espacio topológico, X un conjunto, $f : X \to Y$ una función inyectiva y τ una topología para X. Entonces $f : (X, \tau) \longrightarrow (Y, \sigma)$ es una inmersión topológica (o encaje) si, y sólo si, τ satisface las dos condiciones siguientes,*

1. *$f : (X, \tau) \longrightarrow (Y, \sigma)$ es continua.*
2. *Dados un conjunto Z, una topología η para Z y una función $g : Z \to X$, si la composición,*

$$fg : (Z, \eta) \longrightarrow (Y, \sigma)$$

es una función continua, entonces $g : (Z, \eta) \to (X, \tau)$ es una función continua.

Podemos parafrasear el teorema anterior diciendo que la topología de inmersión para el conjunto X queda totalmente determinada por la función inyectiva f y por la topología σ.

Productos topológicos. Dada una familia de espacios topológicos $\{(X_i, \tau_i)\}_{i\in I}$, recordemos que la *topología del producto (también llamada topología de Tychonoff)* para el producto cartesiano $\prod\limits_{i\in I} X_i$, es la topología generada por la familia[1],

$$\gamma := \left\{p_i^{-1}(U) \mid U \in \tau_i \,, i \in I\right\}$$

donde p_i denota a la i-proyección canónica,

$$\begin{array}{rccc} p_i : & \prod\limits_{i\in I} X_i & \longrightarrow & X_i \\ & (x_i)_{i\in I} & \longmapsto & x_i \end{array}$$

Al conjunto $\prod\limits_{i\in I} X_i$ con la topología generada por γ se le llama producto topológico de la familia $\{(X_i, \tau_i)\}_{i\in I}$. La topología producto es muy importante en matemáticas; muchas propiedades topológicas se conservan bajo esta topología: El producto de espacios conexos es conexo; el producto de espacios conectables por trayectorias es conectable por trayectorias; el producto de espacios de Hausdorff (T_0, T_1) es Hausdorff (T_0, T_1); el producto de espacios compactos es compacto (este es el *Teorema de Tychonoff*).

Hay una propiedad de caracterización para el producto topológico que guarda cierta "semejanza" con las caracterizaciones dadas en el teorema 8.1 para la topología de subespacio y en el teorema 8.2 para la topología de inmersión. Esto resulta de gran interés para nosotros; es dicha semejanza la que nos motiva a enunciar el concepto de topología inicial.

Teorema 8.3. *Sean, I un conjunto, $\{(X_i, \tau_i)\}_{i\in I}$ una familia de espacios topológicos y τ una topología para el conjunto $\prod\limits_{i\in I} X_i$. Entonces τ es la topología del producto para $\prod\limits_{i\in I} X_i$ si, y sólo si, τ satisface las dos condiciones siguientes,*

1. *Para cada i en I, la i-proyección canónica,*

$$p_i : \left(\prod_{i\in I} X_i, \tau\right) \longrightarrow (X_i, \tau_i)$$

es continua.

2. *Dados un conjunto Z, una topología η para Z y una función $g : Z \to \prod\limits_{i\in I} X_i$, si para cada i en I la composición,*

$$p_i \circ g : (Z, \eta) \longrightarrow (X_i, \tau_i)$$

es una función continua, entonces $g : (Z, \eta) \to \left(\prod\limits_{i\in I} X_i, \tau\right)$ es una función continua.

[1] Recordemos que si X es un conjunto y γ es una familia se subconjuntos de X, entonces la topología para X generada por la familia γ se define como,

$$\tau := \bigcap \{\sigma \in \mathfrak{Top}[X] \mid \gamma \subseteq \sigma\}$$

Esto es equivalente a la afirmación de que todo elemento de τ puede expresarse como unión de intersecciones finitas de elementos de γ.

Lo que el teorema anterior nos dice es que la topología del producto para $\prod_{i\in I} X_i$ queda totalmente determinada por la familia de proyecciones canónicas $\left\{p_i : \prod_{i\in I} X_i \longrightarrow X_i\right\}_{i\in I}$ y por la familia de topologías $\{\tau_i\}_{i\in I}$.

De lo hasta aquí expuesto es natural concluir que para hablar de la topología de subespacio, de la topología de inmersión y de la topología producto, necesitamos tener en contexto lo siguiente:

(a) Ciertas funciones cuyo dominio sea el conjunto al que vamos a dotar con la topología en cuestión: para la topología de subespacio, la inclusión; para la topología de inmersión, una función inyectiva; para la topología del producto, la familia de proyecciones canónicas.

(b) Además, los codominios de las funciones mencionadas en el punto anterior necesitan estar estructurados con ciertas topologías dadas de antemano.

El hecho es que los espacios topológicos que se definen en cada caso, quedan totalmente determinados por las funciones, y sus codominios topologizados, que les corresponden. Es esta la semejanza a la que nos referíamos párrafos más arriba. El paso siguiente es generalizar, todavía dentro de $\mathfrak{Top}$, todo esto.

8.2. Topologías iniciales

En esta sección presentamos el concepto de topología inicial; las estructuras de subespacio, inmersión y producto topológicos vienen a ser un caso particular de aquél. Con esta finalidad, introducimos las siguientes definiciones.

Definición 8.1. Una **fuente cartesiana** es una clase de funciones $(f_i : X \to Y_i)_{i\in I}$, donde I es una clase que puede ser vacía, singular, o propia. Al conjunto X se le llama el **dominio de la fuente**, y a la clase de conjuntos $(Y_i)_{i\in I}$ el **codominio de la fuente**.

Definición 8.2. Sean, I una clase, $((Y_i, \sigma_i))_{i\in I}$ una clase de espacios topológicos y $(f_i : X \to Y_i)_{i\in I}$ una fuente cartesiana. La **topología inicial para X respecto de** $(f_i, \sigma_i)_{i\in I}$, es la topología τ para X generada por la clase,

$$\gamma := \left\{f_i^{-1}(U) \mid U \in \sigma_i \,, i \in I\right\}$$

Observación 8.1. Si en la definición anterior la clase I es la clase vacía, entonces γ también es la clase vacía. En este caso la topología τ para X generada por γ, es la topología indiscreta.

Ejemplos 8.1.

1. Dados un espacio topológico (X, τ) y un subconjunto Y de X; la topología inicial para Y respecto de (ι, τ), donde $\iota : Y \hookrightarrow X$ es la inclusión, es justamente $\tau\,|_Y$, la topología relativa para Y.
2. Sean, (Y, σ) un espacio topológico, $f : X \to Y$ una función inyectiva y τ una topología para X. Entonces,
$$f : (X, \tau) \longrightarrow (Y, \sigma)$$
es una inmersión topológica si, y sólo si, τ es la topología inicial para X respecto de (f, σ).
3. Sean, I un conjunto y $\{(X_i, \tau_i)\}_{i\in I}$ una familia de espacios topológicos. Si τ es la topología de Tychonoff para $\prod_{i\in I} X_i$, entonces τ es la topología inicial para $\prod_{i\in I} X_i$ respecto de $(p_i, \tau_i)_{i\in I}$, donde,
$$\left\{p_i : \prod_{i\in I} X_i \longrightarrow X_i\right\}_{i\in I}$$
es la fuente cartesiana de las proyecciones canónicas.

El siguiente teorema es una caracterización de la topología inicial y generaliza a los teoremas 8.1, 8.2 y 8.3 de la sección anterior.

Teorema 8.4. *Sean, I una clase, $((Y_i, \sigma_i))_{i\in I}$ una clase de espacios topológicos, $(f_i : X \to Y_i)_{i\in I}$ una fuente cartesiana y τ una topología para X. Entonces τ es la topología inicial para X respecto de $(f_i, \sigma_i)_{i\in I}$ si, y sólo si, τ satisface las dos condiciones siguientes,*

1. *Para cada i en I, la función,*
$$f_i : (X, \tau) \longrightarrow (Y_i, \sigma_i)$$
es continua.

2. *Dados un conjunto Z, una topología η para Z y una función $g : Z \to X$, si para cada i en I la composición,*

$$f_i \circ g : (Z, \eta) \longrightarrow (Y_i, \sigma_i)$$

es una función continua, entonces $g : (Z, \eta) \to (X, \tau)$ es una función continua.

Demostración. Sea τ la topología inicial para X respecto de $(f_i, \sigma_i)_{i \in I}$; es decir τ es la topología para X generada por la familia $\gamma = \left\{ f_i^{-1}(U) \mid U \in \sigma_i \, , i \in I \right\}$. Entonces,

1. Por el modo en que la topología τ está definida, es claro que para cada i en I la función,

$$f_i : (X, \tau) \longrightarrow (Y_i, \sigma_i)$$

es continua.

2. Sean, Z un conjunto, η una topología para Z y $g : Z \to X$ una función. Supongamos que para cada i en I, la composición,

$$f_i \circ g : (Z, \eta) \longrightarrow (Y_i, \sigma_i)$$

es continua. Sea V un elemento de γ; entonces existen i en I y U en σ_i tales que $f_i^{-1}(U) = V$. Consecuentemente,

$$g^{-1}(V) = g^{-1}\left(f_i^{-1}(U)\right) \in \eta$$

así pues, $g : (Z, \eta) \to (X, \tau)$ es una función continua.

Supongamos que τ satisface las condiciones 1 y 2. Sea τ' la topología inicial para X respecto de $(f_i, \sigma_i)_{i \in I}$. De acuerdo a la condición 1, para cada i en I la función $f_i : (X, \tau) \to (Y_i, \sigma_i)$ es continua; en consecuencia la familia γ está contenida en τ, y por tanto τ' está contenida en τ.

Ahora bien, dado que para cada i en I la composición,

$$f_i \circ 1_X = f_i : (X, \tau') \longrightarrow (Y_i, \sigma_i)$$

es continua, por el inciso 2 se sigue que la función,

$$1_X : (X, \tau') \longrightarrow (X, \tau)$$

es continua; esto implica que τ está contenida en τ'. Concluimos que $\tau = \tau'$. □

Ahora damos un paso más en nuestro proceso de generalización: La siguiente sección tiene por objetivo dar carácter general, en el contexto de las *ccce*, al concepto de topología inicial. En otras palabras: el concepto de topología inicial que acabamos de describir es un caso partícular de un concepto categórico mucho más general.

8.3. Estructuras iniciales

A continuación presentamos una definición que extiende el concepto de topología inicial a una *ccce* arbitraria. Nuestro modelo a seguir para tal extensión es el teorema 8.4, ya que en él hemos caracterizado a la topología inicial en términos de funciones continuas sin hacer uso de alguna propiedad intrínseca de las estructuras topológicas involucradas.

Definición 8.3. Sean, $\underline{K}$ una *ccce* arbitraria, I una clase, $((Y_i, \eta_i))_{i \in I}$ una clase de $\underline{K}$-objetos, $(f_i : X \to Y_i)_{i \in I}$ una fuente cartesiana y ξ una $\underline{K}$-estructura en X. Decimos que ξ es una **$\underline{K}$-estructura inicial para X respecto de** $(f_i, \eta_i)_{i \in I}$, si se satisfacen las siguientes dos condiciones,

(I_1) Para cada i en I, $f_i : (X, \xi) \to (Y_i, \eta_i)$ es un $\underline{K}$-morfismo.

(I_2) Si (Z, σ) es un $\underline{K}$-objeto y $g : Z \to X$ es una función tal que para cada i en I la composición,

$$f_i \circ g : (Z, \sigma) \to (Y_i, \eta_i)$$

es un $\underline{K}$-morfismo, entonces $g : (Z, \sigma) \to (X, \xi)$ es un $\underline{K}$-morfismo.

Ejemplos 8.2.

1. Dados un espacio topológico (X, τ) y un subconjunto Y de X; una $\mathfrak{Top}$-estructura inicial para Y respecto de (ι, τ), donde $\iota : Y \hookrightarrow X$ es la inclusión, es justamente $\tau\mid_Y$, la topología relativa para Y.

2. Sean, (Y, σ) un espacio topológico, $f : X \to Y$ una función inyectiva y τ una topología para X. Entonces,
$$f : (X, \tau) \longrightarrow (Y, \sigma)$$
es una inmersión topológica si, y sólo si, τ es una $\mathfrak{Top}$-estructura inicial para X respecto de (f, σ).
3. Sean, I un conjunto y $\{(X_i, \tau_i)\}_{i\in I}$ una familia de espacios topológicos. Si τ es la topología de Tychonoff para $\prod\limits_{i\in I} X_i$, entonces τ es una $\mathfrak{Top}$-estructura inicial para $\prod\limits_{i\in I} X_i$ respecto de $(p_i, \tau_i)_{i\in I}$, donde,
$$\left\{p_i : \prod_{i\in I} X_i \longrightarrow X_i\right\}_{i\in I}$$
es la fuente cartesiana de las proyecciones canónicas.
4. Sean, I una clase, $\{(Y_i, \sigma_i)\}_{i\in I}$ una clase de espacios topológicos y $(f_i : X \to Y_i)_{i\in I}$ una fuente cartesiana. La topología inicial para X respecto de $(f_i, \sigma_i)_{i\in I}$ es una $\mathfrak{Top}$-estructura inicial para X respecto de $(f_i, \sigma_i)_{i\in I}$.
5. Si (X, α) es un espacio métrico y Y es un subconjunto de X, entonces la restricción,
$$\alpha \,|_{Y\times Y} : Y \times Y \longrightarrow [0, \infty)$$
es una $\mathfrak{Met}$-estructura inicial para Y respecto de (ι, α).
6. Sea $(V, (+.\cdot))$ un espacio vectorial sobre un campo F y sea W es un subconjunto de V; si $(W, (\bar{+}, \bar{\cdot}))$ es un subespacio de $(V, (+.\cdot))$, entonces $(\bar{+}, \bar{\cdot})$ es una $\mathfrak{Vect}_F$-estructura inicial para W respecto de $(\iota, (+.\cdot))$.
7. Si $(V, (+.\cdot))$ y $\left(\bar{V}, (\bar{+}, \bar{\cdot})\right)$ son dos espacios vectoriales sobre el mismo campo F, recordemos que su *producto directo externo* es el espacio vectorial cuyo conjunto subyacente W es el producto cartesiano de V y $\bar{V}$; esto es,
$$W = \left\{(v, \bar{v}) \mid v \in V, \bar{v} \in \bar{V}\right\}$$
y cuyas estructuras de adición y multiplicación por escalares están dadas por las siguientes reglas,
   a) Para cualesquiera v_0 y v_1 en V y $\bar{v}_0$ y $\bar{v}_1$ en $\bar{V}$:
$$(v_0, \bar{v}_0) \tilde{+} (v_1, \bar{v}_1) := (v_0 + v_1, \bar{v}_0 \bar{+} \bar{v}_1)$$
   b) Para cualquier r en F y para cualesquiera v_0 en V y $\bar{v}_0$ en $\bar{V}$:
$$r \bullet (v_0, \bar{v}_0) := (r \cdot v_0, r \,\bar{\cdot}\, \bar{v}_0)$$
Sea $\{p_i : W \longrightarrow X_i\}_{i\in\{1,2\}}$ la fuente cartesiana de proyecciones canónicas y definamos $\alpha_1 := (+.\cdot)$ y $\alpha_2 := (\bar{+}, \bar{\cdot})$; entonces $\left(\tilde{+}, \bullet\right)$ es una $\mathfrak{Vect}_F$-estructura inicial para W respecto de $(p_i, \alpha_i)_{\,i\in\{1,2\}}$. Desde luego, podemos extender la noción de producto directo externo a una familia arbitraria de espacios vectoriales.
8. Sea $\{(X_i, d_i)\}_{i\in\mathbb{N}}$ una familia de espacios métricos. Para cada natural i, definimos,
$$\begin{array}{rccc} \bar{d}_i : & X_i \times X_i & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x, x') & \longmapsto & \text{mín}\left\{d_i(x,x'),1\right\} \end{array}$$
entonces $\bar{d}_i$ es una distancia acotada para X_i e induce la misma topología que d_i. Tiene entonces sentido definir la función,
$$\begin{array}{rccc} D : & \prod\limits_{i\in\mathbb{N}} X_i \times \prod\limits_{i\in\mathbb{N}} X_i & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (\mathbf{x}, \mathbf{y}) & \longmapsto & \sup\left\{\frac{\bar{d}_i(p_i(\mathbf{x}), p_i(\mathbf{y}))}{i} \mid i \in \mathbb{N}\right\} \end{array}$$
donde $p_i : \prod\limits_{i\in I} X_i \longrightarrow X_i$ es la i-ésima proyección canónica. Resulta que D es una distancia en $\prod\limits_{i\in\mathbb{N}} X_i$ que induce la topología producto para $\prod\limits_{i\in\mathbb{N}} X_i$. En consecuencia, D es una $\mathfrak{Mtc}$-estructura inicial para $\prod\limits_{i\in\mathbb{N}} X_i$ respecto de $(p_i, d_i)_{i\in\mathbb{N}}$.

Definición 8.4. Una *ccce* $\underline{K}$ es **topológica** si, para cualquier clase I, cualquier clase $((Y_i, \eta_i))_{i\in I}$ de $\underline{K}$-objetos y cualquier fuente cartesiana $(f_i : X \to Y_i)_{i\in I}$, existe una $\underline{K}$-estructura ξ para X que es inicial respecto de $(f_i, \eta_i)_{i\in I}$.

Ejemplos 8.3.

1. Desde luego, la *ccce* $\mathfrak{Top}$ es topológica.
2. De acuerdo a la observación 1.2 la *ccce* $\mathfrak{Vect}_{\mathbb{R}}$ no es topológica, pues si X es un subconjunto finito de $\mathbb{R}$ con más de un elemento, entonces no existe una $\mathfrak{Vect}_{\mathbb{R}}$- estructura inicial para X respecto de la inclusión y de las operaciones usuales de suma y producto en $\mathbb{R}$.
3. La *ccce* $\mathfrak{Pos}$ no es topológica. Sean, I una clase vacía, $(A_i = (X_i, \alpha_i))_{i\in I}$ la correspondiente clase vacía de $\mathfrak{Pos}$-objetos, X un conjunto con al menos dos elementos distintos y $(f_i : X \longrightarrow X_i)$ la fuente cartesiana vacía de dominio X. Consideremos una pareja arbitraria de elementos de X, digamos (x_1, x_2). Si α es la $\mathfrak{Pos}$- estructura inicial para X respecto de $(f_i, \alpha_i)_{i\in I}$, entonces la función 1_X induce el $\mathfrak{Pos}$-morfismo,

$$1_X : (X, \{(x_1, x_2)\}) \longrightarrow (X, \alpha)$$

ya que por vacuidad se verifica que para cada i en I, $f_i \circ 1_X \in \mathfrak{Pos}\,(A, A_i)$, donde $A = (X, \{(x_1, x_2)\})$. Como consecuencia, α tiene como elementos a todas las parejas ordenadas de elementos de X. Consecuentemente, $\alpha = X \times X$ y por lo tanto no es una relación antisimétrica. Concluimos que, en general, $\mathfrak{Pos}$ no tiene estrucutras iniciales respecto de las fuentes vacías.
4. La *ccce* $\mathfrak{Gra}$ es topológica. Sean, I una clase no vacía, $\{(Y_i, \alpha_i)\}_{i\in I}$ una clase de gráficas dirigidas y $(f_i : X \to Y_i)_{i\in I}$ una fuente cartesiana. Definimos,

$$\alpha := \{(x_1, x_2) \in X \times X : \text{ para toda } i \in I,\ (f_i\,(x_1)\,, f_i\,(x_2)) \in \alpha_i\}$$

Entonces α es una $\mathfrak{Gra}$-estructura inicial para X respecto de $(f_i, \alpha_i)_{i\in I}$:

(I_1) Por definición de α, para cada i en I, $f_i : (X, \alpha) \to (Y_i, \alpha_i)$ es una función compatible.

(I_2) Si (Z, γ) es un $\mathfrak{Gra}$-objeto y $g : Z \to X$ es una función tal que, para cada i en I,

$$f_i \circ g : (Z, \gamma) \to (Y_i, \alpha_i)$$

es compatible; entonces, para cualquier par de elementos z_1, z_2 en Z tal que (z_1, z_2) está en γ, se tiene que, para cada i en I, $(f_i\,(g\,(z_1))\,, f_i\,(g\,(z_2)))$ está en α_i. Por lo tanto, $(g\,(z_1)\,, g\,(z_2))$ pertenece a α. En consecuencia, $g : (z, \gamma) \to (X, \alpha)$ es compatible.

Si la clase I es vacía, entonces $\alpha = X \times X$ es una $\mathfrak{Gra}$-estructura inicial para X respecto de $(f_i, \alpha_i)_{i\in I}$.

Observación 8.2. Sean, I una clase, $\{(Y_i, \sigma_i)\}_{i\in I}$ una clase de espacios topológicos y $(f_i : X \to Y_i)_{i\in I}$ una fuente cartesiana. Por construcción, la topología inicial para X respecto de $(f_i, \sigma_i)_{i\in I}$ es la más áspera de las topologías en X que hacen de cada f_i una función continua. El siguiente resultado generaliza este hecho.

En relación a la definición 5.1, tenemos la siguiente proposición.

Proposición 8.1. *Sean, $\underline{K}$ una ccce, I una clase, $\{(Y_i, \eta_i)\}_{i\in I}$ una clase de $\underline{K}$-objetos, $(f_i : X \to Y_i)_{i\in I}$ una fuente cartesiana y ξ una $\underline{K}$-estructura para X. Consideremos las siguientes afirmaciones,*

1. ξ es una $\underline{K}$-estructura inicial para X respecto de $(f_i, \eta_i)_{i\in I}$.
2. ξ es un elemento de la clase de las $\underline{K}$-estructuras γ en X para las cuales cada $f_i : (X, \gamma) \to (Y_i, \eta_i)$ es un $\underline{K}$-morfismo, y además, es más áspera que cualquier otro elemento de dicha clase.

Entonces, 1 implica 2 , y si $\underline{K}$ es topológica, 2 implica 1.

Demostración. $1 \Rightarrow 2\rfloor$ Del iniciso (I_1) de la definición 8.3, ξ es una $\underline{K}$-estructura para X tal que para cada i en I,

$$f_i : (X, \xi) \to (Y_i, \eta_i)$$

es un $\underline{K}$-morfismo. Ahora veamos que ξ es más áspera. Sea γ una $\underline{K}$-estructura para X tal que para cada i en I,

$$f_i : (X, \gamma) \to (Y_i, \eta_i)$$

es un $\underline{K}$-morfismo. Consideremos a la identidad 1_X y al $\underline{K}$-objeto (X, γ). En conformidad con la naturaleza de γ, observemos que para cada i en I, la composición,

$$f_i \circ 1_X = f_i : (X, \gamma) \to (Y_i, \eta_i)$$

da por resultado un $\underline{K}$-morfismo. Como ξ es una $\underline{K}$-estructura inicial para X respecto de $(f_i, \eta_i)_{i\in I}$, se sigue que,

$$1_X : (X, \gamma) \longrightarrow (X, \xi)$$

es un $\underline{K}$-morfismo, o lo que es lo mismo, que ξ es más áspera que γ.

Supongamos que $\underline{K}$ es topológica.

$2 \Rightarrow 1 \rfloor$ Sea η una $\underline{K}$-estructura inicial para X respecto de $(f_i, \eta_i)_{i\in I}$. De la primera parte de esta demostración se sigue que η es más áspera que ξ; pero también, de acuerdo con 2, ξ es más áspera que η. Entonces tenemos los $\underline{K}$-morfismos,

$$1_X : (X, \xi) \longrightarrow (X, \eta) \quad \text{y} \quad 1_X : (X, \eta) \longrightarrow (X, \xi)$$

Para verificar que efectivamente ξ es una $\underline{K}$-estructura inicial para X respecto de $(f_i, \eta_i)_{i\in I}$, es suficiente con probar el inciso (I_2) de la definición 8.3. Sean, pues, (Z, β) un $\underline{K}$-objeto y $g : Z \to X$ una función tales que para cada i en I la composición,

$$f_i \circ g : (Z, \beta) \to (Y_i, \eta_i)$$

es un $\underline{K}$-morfismo. Por ser η inicial, $g : (Z, \beta) \to (X, \eta)$ es un $\underline{K}$-morfismo, que al componerlo con el $\underline{K}$-morfismo $1_X : (X, \eta) \to (X, \xi)$, resulta el siguiente $\underline{K}$-morfismo,

$$g : (Z, \beta) \longrightarrow (X, \xi)$$

Se sigue que ξ es una $\underline{K}$-estructura inicial para X respecto de $(f_i, \eta_i)_{i\in I}$. $\square$

Observaciones 8.3. Sean, $\underline{K}$ una *ccce*, I una clase, $((Y_i, \eta_i))_{i\in I}$ una clase de $\underline{K}$-objetos, $(f_i : X \to Y_i)_{i\in I}$ una fuente cartesiana y ξ una $\underline{K}$-estructura para X. Entonces,

1. Si ξ es una $\underline{K}$-estructura inicial para X respecto de $(f_i, \eta_i)_{i\in I}$, con $I = \emptyset$, entonces ξ resulta ser más áspera que todas las $\underline{K}$-estructuras de X.
2. Si ξ y η son dos $\underline{K}$-estructuras iniciales para X respecto de $(f_i, \eta_i)_{i\in I}$, entonces,
$$1_X : (X, \xi) \longrightarrow (X, \eta)$$
es un $\underline{K}$-isomorfismo.
3. Si ξ es una $\underline{K}$-estructura inicial para X respecto de $(f_i, \eta_i)_{i\in I}$ y η es una $\underline{K}$-estructura para X tal que,
$$1_X : (X, \eta) \longrightarrow (X, \xi)$$
es un $\underline{K}$-isomorfismo, entonces η es inicial para X respecto de $(f_i, \eta_i)_{i\in I}$.

8.4. Identificaciones, cocientes y coproductos

Identificaciones. Dados, un espacio topológico (X, τ), un conjunto Y y una función $f : X \to Y$, recordemos que la topología más fina en Y para la cual f es continua está dada por,

$$\sigma := \left\{V \subseteq Y : f^{-1}(V) \in \tau\right\}$$

En otras palabras: con respecto al orden $\leq_{\mathfrak{Top}}$, tenemos que,

$$\sigma = \text{ínf}\left\{\alpha \in \mathfrak{Top}[Y] \mid (f, (\tau, \sigma)) \in \mathcal{F}_{\mathfrak{Top}}\right\}$$

Cuando la función $f : X \to Y$ es suprayectiva, la topología σ se llama topología de identificación inducida por τ y f; el espacio (Y, σ) se llama espacio de identificación, y la función continua,

$$f : (X, \tau) \longrightarrow (Y, \sigma)$$

se llama identificación.

Cocientes. Sean, (X, τ) un espacio topológico, $\sim$ una relación de equivalencia en X y,

$$\begin{array}{rccc} p: & X & \longrightarrow & X/\sim \\ & X & \longmapsto & [x] \end{array}$$

la proyección canónica (o natural). Cuando al conjunto $X/\sim$ le damos la topología de identificación inducida por τ y p, llamémosle σ, hablamos de $(X/\sim, \sigma)$ como del espacio cociente de X bajo la relación $\sim$. Es común llamar a σ la topología cociente y a la función continua,

$$p : (X, \tau) \longrightarrow (X/\sim, \sigma)$$

cociente.

De lo anterior se sigue que todo espacio cociente es un espacio de identifiación. El siguiente teorema da una caracterización para la topología de identificación.

Teorema 8.5. *Sean, (X, τ) y (Y, σ) espacios topológicos y $f : X \to Y$ una función suprayectiva. Son equivalentes,*

1. σ es la topología de identificación inducida por τ y f.
2. Dado cualquier espacio topológico (Z, η) y dada cualquier función $g : Y \to Z$, si la composición,

$$g \circ f : (X, \tau) \longrightarrow (Z, \eta)$$

es continua, entonces,

$$g : (Y, \sigma) \longrightarrow (Z, \eta)$$

es continua.

Resulta que los conceptos de espacio cociente y espacio de identificación son esencialmente el mismo. Esto queda establecido a continuación.

Teorema 8.6. *Sea $f : (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ una identificación y sea $\sim$ la relación de equivalencia en X tal que, $x_1 \sim x_2$ si, y sólo si, $f(x_1) = f(x_2)$; entonces f induce un homeomorfismo,*

$$\tilde{f} : (X/\sim, \tilde{\tau}) \longrightarrow (Y, \sigma)$$

donde $\tilde{\tau}$ es la topología cociente de X bajo la relación $\sim$.

Coproductos. Si $\mathcal{F} = \{X_j\}_{j\in J}$ es una familia de conjuntos, definimos el coproducto (o suma ajena) de $\mathcal{F}$ como el conjunto,

$$\coprod_{j\in J} X_j := \bigcup_{j\in J} (X_j \times \{j\})$$

donde,

$$X_j \times \{j\} = \{(x, j) : x \in X_j\}$$

La función,

$$\begin{array}{cccc} \iota_j : & X_j & \longrightarrow & \coprod\limits_{j\in J} X_j \\ & x & \longmapsto & (x, j) \end{array}$$

se llama la j-ésima inclusión de X_j en $\coprod\limits_{j\in J} X_j$.

Si los elementos de $\mathcal{F}$ son ajenos dos a dos, entonces $\coprod\limits_{j\in J} X_j$ se define simplemente como el conjunto $\bigcup\limits_{j\in J} X_j$, y las inclusiones i_j se definen como,

$$\begin{array}{cccc} \iota_j : & X_j & \longrightarrow & \coprod\limits_{j\in J} X_j \\ & x & \longmapsto & x \end{array}$$

Si $\mathcal{F} = \{(X_j, \tau_j)\}_{j\in J}$ es una familia de espacios topológicos, el coproducto topológico (o suma topológica ajena de $\mathcal{F}$), es el espacio topológico,

$$C = \left(\coprod_{j\in J} X_j, \tau\right)$$

donde τ es la topología en $\coprod_{j\in J} X_j$, definida como,

$$\tau := \left\{ W \subseteq \coprod_{j\in J} X_j \mid \iota_j^{-1}(W) \in \tau_j,\ j \in J \right\}$$

Así pues, τ resulta ser la más fina de todas las topologías en $\coprod_{j\in J} X_j$ que hacen de cada inclusión ι_j una función continua. En otras palabras: en relación al orden $\leq_{\mathfrak{Top}}$, tenemos que,

$$\tau = \inf \left\{ \alpha \in \mathfrak{Top}\left[\coprod_{j\in J} X_j\right] \mid (\iota_j, (\tau_i, \alpha)) \in \mathcal{F}_{\mathfrak{Top}},\ j \in J \right\}$$

El teorema que ahora viene nos proporciona una caracterización, de gran interés para nosotros, del coproducto topológico.

Teorema 8.7. *Sean, J un conjunto, $\{(X_j, \tau_j)\}_{j\in J}$ una familia de espacios topológicos y τ una topologia para $\coprod_{j\in J} X_j$. Entonces τ es la topología del coproducto para $\coprod_{j\in J} X_j$ si, y sólo si, τ satisface las dos condiciones siguientes,*

1. Para cada j en J, la j-ésima inclusión,
$$\iota_j : (X_j, \tau_j) \longrightarrow \left(\coprod_{j\in J} X_j, \tau\right)$$
es continua.
2. Dados un conjunto Z, una topología η para Z y una función $g : \coprod_{j\in J} X_j \to Z$, si para cada j en J la composición,
$$g \circ \iota_j : (X_j, \tau_j) \longrightarrow (Z, \eta)$$
es una función continua, entonces $g : \left(\coprod_{j\in J} X_j, \tau\right) \to (Z, \eta)$ es continua.

El teorema anterior determina a la topología del coproducto para $\coprod_{j\in J} X_j$ en términos de la familia de topologías $\{\tau_j\}_{j\in J}$ y de la familia de funciones,

$$\left\{ \iota_j : X_j \longrightarrow \coprod_{j\in J} X_j \right\}_{j\in J}$$

Las siguientes definiciones tienen como fin extender los métodos que hemos empleado para formar a los espacios de identificación y los coproductos.

Definición 8.5. Un **sumidero cartesiano** es una clase de funciones $(f_i : Y_i \to X)_{i\in I}$, donde I es una clase que puede ser vacía, singular, o propia. La clase de conjuntos $(Y_i)_{i\in I}$ se llama el dominio del sumidero y el conjunto X se llama el codominio del sumidero.

Definición 8.6. Sean, I una clase, $((Y_i, \sigma_i))_{i\in I}$ una clase de espacios topológicos y $(f_i : Y_i \to X)_{i\in I}$ un sumidero cartesiano. La **topología final para** X **respecto de** $(\sigma_i, f_i)_{i\in I}$, es la topología τ para X definida como,

$$\tau := \left\{ V \subseteq X \mid f_i^{-1}(V) \in \sigma_i,\ i \in I \right\}$$

Observaciones 8.4.

1. La topología final para X respecto de $(f_i, \sigma_i)_{i\in I}$ es la más fina de todas las topologías α en X tales que para cada i en I,
$$f_i : (Y_i, \sigma_i) \longrightarrow (X, \alpha)$$
es continua.

2. Si I es la clase vacía, entonces la topología final para X respecto de $(f_i, \sigma_i)_{i \in \emptyset}$ es $\tau = Pot(X)$.

El teorema que sigue es análogo, tanto en su enunciación como en su demostración, al teorema 8.4.

Teorema 8.8. *Sean, I una clase, $((Y_i, \sigma_i))_{i \in I}$ una clase de espacios topológicos, $(f_i : Y_i \to X)_{i \in I}$ un sumidero cartesiano y τ una topología para X. Entonces τ es la topología final para X respecto de $(\sigma_i, f_i)_{i \in I}$ si, y sólo si, τ satisface las dos condiciones siguientes,*

1. Para cada i en I, la función,
$$f_i : (Y_i, \sigma_i) \longrightarrow (X, \tau)$$
es continua.
2. Dados un conjunto Z, una topología η para Z y una función $g : X \longrightarrow Z$, si para cada i en I la composición,
$$g \circ f_i : (Y_i, \sigma_i) \longrightarrow (Z, \eta)$$
es una función continua, entonces $g : (X, \tau) \longrightarrow (Z, \eta)$ es una función continua.

En el mismo espíritu de las secciones precedentes, exhibimos a continuación una generalización del concepto de topología final en una *ccce* arbitraria.

8.5. Estructuras finales

Procediendo de manera similar a como lo hicimos en la parte de estructuras iniciales, tomaremos como punto de referencia el teorema 8.7 para dar la siguiente definición.

Definición 8.7. Sean, $\underline{K}$ una *ccce* arbitraria, I una clase, $((Y_i, \eta_i))_{i \in I}$ una clase de $\underline{K}$-objetos, $(f_i : Y_i \longrightarrow X)_{i \in I}$ un sumidero cartesiano y ξ una $\underline{K}$-estructura para X. Decimos que ξ **es una $\underline{K}$-estructura final para X respecto de** $(\eta_i, f_i)_{i \in I}$, si se satisfacen las siguientes dos condiciones,

(F_1) Para cada i en I, $f_i : (Y_i, \eta_i) \to (X, \xi)$ es un $\underline{K}$-morfismo.
(F_2) Si (Z, σ) es un $\underline{K}$-objeto y $g : X \to Z$ es una función tal que para cada i en I la composición,
$$g \circ f_i : (Y_i, \eta_i) \longrightarrow (Z, \sigma)$$
es un $\underline{K}$-morfismo, entonces $g : (X, \xi) \to (Z, \sigma)$ es un $\underline{K}$-morfismo.

Ejemplos 8.4.

1. Dados, un espacio topológico (X, τ), un conjunto Y y una función $f : X \to Y$, la $\mathfrak{Top}$-estructura final para Y respecto de (τ, f) es la topología de identificación.
2. Sean, J un conjunto, $\{(X_j, \tau_j)\}_{j \in J}$ una familia de espacios topológicos y τ la topologia del coproducto para $\coprod_{j \in J} X_j$. Entonces τ es una $\mathfrak{Top}$-estructura final para $\coprod_{j \in J} X_j$ respecto de $(\tau_j, \iota_j)_{j \in J}$, donde,
$$\left\{ \iota_j : X_j \longrightarrow \coprod_{j \in J} X_j \right\}_{j \in J}$$
es el sumidero cartesiano de inclusiones canónicas.
3. Sean, $A = (V, (+.\cdot))$ un espacio vectorial sobre un campo F y $B = (W_0, (\bar{+}, \bar{\cdot}))$, $C = \left(W_1, \left(\tilde{+}, \tilde{\cdot}\right)\right)$ dos subespacios de A. Recordemos que A es el *producto directo interno* de B y C, $A = B \oplus C$, si se satisfacen las siguientes dos condiciones,
   a) Cada elemento de V puede escribirse como una suma de la forma $w_0 + w_1$, con w_j elemento de W_j $(J = 0, 1)$. En este caso es común que escribamos $A = B + C$.
   b) $W_0 \cap W_1 = \{0\}$, es decir, W_0 y W_1 tienen como único elemento en común al vector cero.

   Sea $\{\iota_j : W_j \longrightarrow V\}_{j \in \{1,2\}}$ el sumidero cartesiano de inclusiones canónicas y denotemos $\alpha_0 := (\bar{+}, \bar{\cdot})$ y $\alpha_1 := \left(\tilde{+}, \tilde{\cdot}\right)$. Si $A = B \oplus C$, entonces $(+.\cdot)$ es una $\mathfrak{Vect}_F$-estructura final para V respecto de $(\alpha_i, \iota_j)_{j \in \{1,2\}}$.
4. Sean $X = X_1 = X_2 = \{0, 1\}$ con $0 \neq 1$ y sean $\alpha_1 = \alpha_2 = \{(0,0), (1,1), (0,1)\}$. Consideremos las funciones 1_X y $f : X_1 \to X$ dado por $f(0) = 1$ y $f(1) = 0$. Entonces no existe una $\mathfrak{Pos}$-estructura para X que haga monótonas a 1_X y f; en particular, no existe una $\mathfrak{Pos}$-estructura final para X respecto de $(\alpha_i, f_i)_{i \in \{1,2\}}$.

Tenemos un resultado análogo a la proposición 8.1 para las estructuras finales.

Proposición 8.2. *Sean, $\underline{K}$ una ccce, I una clase, $\{(Y_i, \eta_i)\}_{i\in I}$ una clase de $\underline{K}$-objetos, $(f_i : Y_i \to X)_{i\in I}$ un sumidero cartesiano y ξ una $\underline{K}$-estructura para X. Consideremos las siguientes afirmaciones,*

1. ξ es una $\underline{K}$-estructura final para X respecto de $(\eta_i, f_i)_{i\in I}$.
2. ξ es un elemento de la clase de las $\underline{K}$-estructuras γ en X para las cuales cada $f_i : (Y_i, \eta_i) \to (X, \gamma)$ es un $\underline{K}$-morfismo, y además, es más fina que cualquier otro elemento de dicha clase.

Entonces, 1 implica 2 , y si $\underline{K}$ es topológica, 2 implica 1.

Demostración. $1 \Rightarrow 2\rfloor$ Por el inciso 1, ξ satisface la condición (F_1) de la definición 8.7. Ahora bien, si γ es una $\underline{K}$-estructura para X tal que para cada i en I, $f_i : (Y_i, \eta_i) \to (X, \gamma)$ es un $\underline{K}$-morfismo, entonces, por el inciso 1 y por el hecho de que para cada i en I la función subyacente del $\underline{K}$-morfismo,

$$f_i : (Y_i, \eta_i) \longrightarrow (X, \gamma)$$

puede expresarse como la composición de la identidad $1_X : X \to X$ con la función subyacente del $\underline{K}$-morfismo,

$$f_i : (Y_i, \eta_i) \longrightarrow (X, \xi)$$

tenemos, por (F_2) de la definición 8.7, que,

$$1_X : (X, \xi) \longrightarrow (X, \gamma)$$

es un $\underline{K}$-morfismo, o lo que es lo mismo, que ξ es más fina que γ.

Supongamos que $\underline{K}$ es topológica.

$2 \Rightarrow 1\rfloor$ Consideremos la clase,

$$C := \left\{\gamma \in \underline{K}\,[X] \mid (f_i, (\eta_i, \gamma)) \in \mathcal{F}_{\underline{K}},\ i \in I\right\}$$

A partir de C definimos la clase,

$$J_C := C \times \{X\} := \{(\gamma, X) \mid \gamma \in C\}$$

la cual utilizamos para indexar a C,

$$C = (\gamma_j)_{j\in J_C}$$

Consideremos la fuente $(1_X : X \to X)$ y la clase de $\underline{K}$-objetos $((X, \gamma_j))_{j\in J_C}$. Sea η la $\underline{K}$-estructura inicial para X respecto de $(1_X, \gamma_j)_{j\in J_C}$. Entonces, para cada j en J_C,

$$1_X : (X, \eta) \longrightarrow (X, \gamma_j)$$

es un $\underline{K}$-morfismo. Esto implica que η es más fina que cualquier elemento de C; en particular, η es más fina que ξ.

Además, por el modo en que definimos la clase C, dado i en I fijo pero arbitrario, tenemos que para cada j en J_C,

$$f_i : (Y_i, \eta_i) \longrightarrow (X, \gamma_j)$$

es un $\underline{K}$-morfismo, y como η es una $\underline{K}$-estructura inicial para X respecto de $(1_X, \gamma_j)_{j\in J_C}$, se sigue que,

$$f_i : (Y_i, \eta_i) \longrightarrow (X, \eta)$$

es un $\underline{K}$-morfismo. En consecuencia, por el inciso 2, ξ es más fina que η. Lo que sigue es probar que η es una $\underline{K}$-estructura final para X respecto de $(\eta_i, f_i)_{i\in I}$ y de aquí concluir que ξ también es final para X respecto de $(\eta_i, f_i)_{i\in I}$. Sean, pues, (Z, ρ) un $\underline{K}$-objeto y $g : X \to Z$ una función tales que para cada i en I,

$$g \circ f_i : (Y_i, \eta_i) \longrightarrow (Z, \rho)$$

es un $\underline{K}$-morfismo. Sea β la $\underline{K}$-estructura inicial para X respecto de (g, ρ) y observemos que para cada i en I,

$$f_i : (Y_i, \eta_i) \longrightarrow (X, \beta)$$

es un $\underline{K}$-morfismo. Consecuentemente, β es un elemento de la clase C. De esto se sigue que,

$$1_X : (X, \eta) \longrightarrow (X, \beta)$$

es un $\underline{K}$-morfismo. Por lo tanto, $g : (X, \eta) \to (Z, \rho)$ es un $\underline{K}$-morfismo, ya que es la composición de los $\underline{K}$-morfismos $1_X : (X, \eta) \to (X, \beta)$ y $g : (X, \beta) \to (Z, \rho)$. Concluimos que η es una $\underline{K}$-estructura final para X respecto de $(\eta_i, f_i)_{i \in I}$. Observemos ahora que el hecho de que ξ sea una $\underline{K}$-estructura final para X respecto de $(\eta_i, f_i)_{i \in I}$ se sigue del inciso 2 y de que ξ es más fina que η. □

Observaciones 8.5. Sean, $\underline{K}$ una *ccce*, I una clase, $\{(Y_i, \eta_i)\}_{i \in I}$ una clase de $\underline{K}$-objetos, $(f_i : Y_i \to X)_{i \in I}$ un sumidero cartesiano y ξ una $\underline{K}$-estructura para X. Entonces,

1. Si ξ es una $\underline{K}$-estructura final para X respecto de $(\eta_i, f_i)_{i \in I}$, con $I = \emptyset$, entonces ξ resulta ser más fina que todas las $\underline{K}$-estructuras de X.
2. Si ξ y η son dos $\underline{K}$-estructuras finales para X respecto de $(\eta_i, f_i)_{i \in I}$, entonces,

$$1_X : (X, \xi) \longrightarrow (X, \eta)$$

   es un $\underline{K}$-isomorfismo.
3. Si ξ es una $\underline{K}$-estructura final para X respecto de $(\eta_i, f_i)_{i \in I}$y η es una $\underline{K}$-estructura para X tal que,

$$1_X : (X, \eta) \longrightarrow (X, \xi)$$

   es un $\underline{K}$-isomorfismo, entonces η es final para X respecto de $(\eta_i, f_i)_{i \in I}$.
4. Si $\underline{K}$ es topológica entonces todo sumidero cartesiano tiene $\underline{K}$-estructuras finales.

Queda claro, pues, que en una *ccce* topológica es posible garantizar la extensión de algunas construcciones elementales de $\mathfrak{Top}$ tales como productos, coproductos, subespacios y cocientes. Sin embargo, a diferencia de $\mathfrak{Top}$, en una *ccce* topológica no tenemos modo de asegurar que las estructuras iniciales y finales para fuentes y sumideros cartesianos arbitrarios son únicas. En el capítulo que viene resolveremos esta cuestión en forma positiva agregando un poco más de estructura a las *ccce* topológicas.

A continuación presentamos otro ejemplo de una *ccce* que no es topológica. Antes una definición.

Definición 8.8. Se dice que una fuente cartesiana $(f_i : X \to Y_i)_{i \in I}$ es **monofuente** si, para cualesquiera dos funciones $g, h : Z \to X$ tales que, para toda i en I, $f_i \circ g = f_i \circ h$, se sigue que $g = h$.

Ejemplo 8.5. Sea $\mathfrak{Th}$ la *ccce* que consta de todos los espacios topológicos de Hausdorff y cuyos morfismos son todas las funciones continuas entre éstos. Sean, I una clase, $((Y_i, \sigma_i))_{i \in I}$ una clase de espacios topológicos de Hausdorff , $(f_i : X \to Y_i)_{i \in I}$ una fuente cartesiana y τ una topología para X. Supongamos que $(f_i : X \to Y_i)_{i \in I}$ es monofuente y que τ es la topología inicial para X respecto de $(f_i, \sigma_i)_{i \in I}$. De estas hipótesis podemos concluir que el espacio (X, τ) es de Hausdorff; si x, x' son un par de puntos distintos en X, sean, $Z = \{z\}$ un conjunto unitario y h, g las funciones constantes de Z en X cuyos valores son x y x', respectivamente. Entonces, por ser $(f_i : X \to Y_i)_{i \in I}$ una monofuente, existe i en I tal que $f_i(h(z)) \neq f_i(g(z))$, es decir, $f_i(x) \neq f_i(x')$. Puesto que (Y_i, σ_i) es de Hausdorff, existen vecindades abiertas ajenas U_i y V_i en σ_i, para $f_i(x)$ y $f_i(x')$, respectivamente. Consecuentemente, los conjuntos, $f_i^{-1}(U_i)$ y $f_i^{-1}(V_i)$ son vecindades abiertas ajenas en τ para x y x', respectivamente. Se sigue que el espacio (X, τ) es de Hausdorff. Desde luego, τ es la $\mathfrak{Th}$-estructura inicial para X respecto de $(f_i, \eta_i)_{i \in I}$. Hemos probado que para cualquier clase I, cualquier clase $((Y_i, \sigma_i))_{i \in I}$ de espacios de Hausdorff y para cualquier monofuente $(f_i : X \to Y_i)_{i \in I}$, existe una $\mathfrak{Th}$-estructura τ para X que es inicial respecto de $(f_i, \eta_i)_{i \in I}$.

Para ver que $\mathfrak{Th}$ no es topológica, consideremos al conjunto de los números reales $\mathbb{R}$ y denotemos mediante σ a la topología usual en dicho conjunto. Sean, $X = \{0, 1\}$ y $f : \mathbb{R} \to X$ definida mediante,

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & X \\ & {\scriptstyle x \in (-\infty, 0)} & \longmapsto & {\scriptstyle 0} \\ & {\scriptstyle x \in [0, \infty)} & \longmapsto & {\scriptstyle 1} \end{array}$$

Observemos que la topología final para X respecto de (σ, f) es $\tau = \{X, \{0\}, \emptyset\}$. Sea γ una topología para X tal que,

$$f : (\mathbb{R}, \sigma) \longrightarrow (X, \gamma)$$

es continua. Entonces γ está contenida en τ, y por tanto, $\gamma = \tau$, o bien, $\gamma = \{X, \emptyset\}$. Esto nos dice que no existe una $\mathfrak{Th}$-estructura final para X respecto de (σ, f). Por el inciso 4 de la observación 8.5, la *ccce* $\mathfrak{Th}$ no es topológica.

Capítulo 9

ccce propiamente fibradas

El concepto de *ccce* propiamente fibrada, el cual presentamos en este capítulo, puede parecer algo artificial, y quizás en cierta medida así lo sea; sin embargo, cuando una *ccce* propiamente fibrada resulta ser también topológica, aparecen dos hechos destacables: las $\underline{K}$-estructuras iniciales y finales son únicas y las funciones constantes inducen $\underline{K}$-morfismos. En vista de estos resultados, las *ccce* topológicas propiamente fibradas tienen una semejanza más estrecha con $\mathfrak{Top}$ que la que hay entre ésta y las *ccce* que son únicamente topológicas. El hecho de que las funciones constantes inducen $\underline{K}$-morfismos cuando $\underline{K}$ es topológica y está propiamente fibrada, será de interés en el capítulo donde abordemos el tema de la conexidad en *ccce*.

Sea $\underline{K}$ una *ccce* arbitraria. De acuerdo a los inciso 2 de la observación 8.3, si ξ y η son $\underline{K}$-estructuras iniciales para una fuente dada, entonces $\xi \leq_{\underline{K}} \eta$ y $\eta \leq_{\underline{K}} \xi$. De manera análoga, por el inciso 2 de la observación 8.5, si ξ y η son $\underline{K}$-estructuras finales para un sumidero dado, entonces $\xi \leq_{\underline{K}} \eta$ y $\eta \leq_{\underline{K}} \xi$. En la *ccce* $\mathfrak{Top}$ cualquier par de topologias σ, τ para un conjunto dado que satisfagan $\sigma \leq_{\underline{K}} \tau$ y $\tau \leq_{\underline{K}} \sigma$, son iguales. En la *ccce* $\mathfrak{Vect}_F$ (la *ccce* de los espacios vectoriales sobre un campo F y las transformaciones lineales), el que dos $\mathfrak{Vect}_F$-estructuras vectoriales $(+, \cdot), (\tilde{+}, \circ)$ para un conjunto dado satisfagan una de las dos relaciones: $(+, \cdot) \leq_{\mathfrak{Vect}_F} (\tilde{+}, \circ)$ o $(\tilde{+}, \circ) \leq_{\mathfrak{Vect}_F} (+, \cdot)$, implica la igualdad de dichas estructuras. Ciertamente, la mayoría de las *ccce* que hemos presentado hasta ahora satisfacen la siguiente implicación,

$$\left(\xi \leq_{\underline{K}} \eta \text{ y } \eta \leq_{\underline{K}} \xi\right) \Longrightarrow \xi = \eta$$

Y como podemos notar, si una *ccce* satisface la condición anterior, entonces tanto las estructuras iniciales (finales) para fuentes (sumideros) son, en caso de que existan, únicas. Estas observaciones motivan, en parte, la siguiente definición.

Definición 9.1. Sea $\underline{K}$ una *ccce* arbitraria. Decimos que $\underline{K}$ **está propiamente fibrada** si, y sólo si, satisface las siguientes condiciones:

(PF_1) Para cada conjunto X, la clase $\underline{K}[X]$ es un conjunto.
(PF_2) Para cada conjunto unitario X, el conjunto $\underline{K}[X]$ tiene un único elemento.
(PF_3) Si ξ y η son $\underline{K}$-estructuras en X tales que,

$$1_X : (X, \xi) \longrightarrow (X, \eta) \quad \text{y} \quad 1_X : (X, \eta) \longrightarrow (X, \xi)$$

son $\underline{K}$-morfismos, entonces $\xi = \eta$.

Ejemplos 9.1.

1. Sabemos que la categoría $\mathfrak{Top}$ tiene fibras pequeñas; por tanto, $\mathfrak{Top}$ satisface los incisos (PF_1) y (PF_3). Comprobemos que $\mathfrak{Top}$ también satisface el inciso (PF_2). Sea $X = \{x\}$; entonces, $Pot(X) = \{\emptyset, \{x\}\}$, que, de hecho, es la única topología definible en X. En otras palabras, $\mathfrak{Top}[X] = \{Pot(X)\}$. Esto prueba que $\mathfrak{Top}$ está propiamente fibrada.
2. $\mathfrak{Pros}$, $\mathfrak{Pos}$, $\mathfrak{Lat}$, $\mathfrak{Clat}$ y $\mathfrak{Met}$ son otros ejemplos de *ccce* propiamente fibradas.
3. Si con $\mathfrak{Vect}$ denotamos a la *ccce* cuyos objetos son todos los espacios vectoriales (sin fijar un campo de antemano, como es en el caso de la *ccce* $\mathfrak{Vect}_F$) y cuyos morfismos son todas las transformaciones lineales, entonces $\mathfrak{Vect}$ no está propiamente fibrada pues cada conjunto unitario tiene una $\mathfrak{Vect}$- estructura diferente para cada campo F.
4. La *ccce* $\mathfrak{Mtc}$ no está propiamente fibrada. Sea X un conjunto no vacío con al menos dos puntos distintos y sea α una métrica para X. Definimos $\beta := 2\alpha$; entonces β es una métrica en X distinta a la métrica α, y además,

$$1_X : (X, \alpha) \longrightarrow (X, \beta) \quad \text{y} \quad 1_X : (X, \beta) \longrightarrow (X, \alpha)$$

son $\mathfrak{Mtc}$-morfismos.
5. La *ccce* $\mathfrak{Gra}$ satisface los incisos (PF_1) y (PF_3), ya que ésta, al igual que $\mathfrak{Top}$, es una categoría concreta que tiene fibras pequeñas. Sin embargo, $\mathfrak{Gra}$ no satisface el inciso (PF_2). Efectivamente: si $X = \{x\}$, entonces $\mathfrak{Gra}[X] = Pot(X \times X) = \{\emptyset, \{(x, x)\}\}$; se sigue que la *ccce* $\mathfrak{Gra}$ no está propiamente fibrada.

6. En general, si $\underline{K}$ es una *ccce* transportable, entonces satisface los incisos (PF_1) y (PF_3).

Al considerar el ejemplo 9.1, surge de manera natural la cuestión de si una *ccce* que satisface los incisos (PF_1) y (PF_3) de la definición 9.1, resulta ser transportable. En relación a esta pregunta tenemos el siguiente teorema.

Teorema 9.1. *Sea $\underline{K}$ es una ccce topológica que satisface los incisos (PF_1) y (PF_3) de la definición 9.1. Entonces $\underline{K}$ es transportable.*

Demostración. Por (PF_1) de la definición 9.1, $\underline{K}$ tiene fibras pequeñas. Sea (X,ξ) un $\underline{K}$-objeto cualquiera y $f : X \to Y$ cualquier biyección; debemos probar que existe una única $\underline{K}$-estructua η en $\underline{K}[Y]$ tal que $f : (X,\xi) \to (Y,\eta)$ es un isomorfismo. Sea η la $\underline{K}$-estructura final para Y respecto de (ξ, f). Puesto que f es biyectiva, podemos considerar a $f^{-1} : Y \to X$ y entonces observar que $f^{-1} \circ f = 1_{(X,\xi)}$. Luego, por el inciso (F_2), $f^{-1} : (Y,\eta) \to (X,\xi)$ es un $\underline{K}$-morfismo. Consecuentemente, $f : (X,\xi) \to (Y,\eta)$ es un $\underline{K}$-isomorfismo. Si ς es una $\underline{K}$-estructura para Y tal que $f : (X,\xi) \to (Y,\varsigma)$ es un $\underline{K}$-isomorfismo, entonces $f^{-1} : (Y,\varsigma) \to (X,\xi)$ es un $\underline{K}$-morfismo. Entonces,

$$(Y,\eta) \xrightarrow{f^{-1}} (X,\xi) \xrightarrow{f} (Y,\varsigma) \quad \text{y} \quad (Y,\varsigma) \xrightarrow{f^{-1}} (X,\xi) \xrightarrow{f} (Y,\eta)$$

son $\underline{K}$-morfismos, y son respectivamente iguales a,

$$1_Y : (Y,\eta) \to (Y,\varsigma) \quad \text{y} \quad 1_Y : (Y,\varsigma) \to (Y,\eta)$$

Siendo $\underline{K}$ una *ccce* que satisface (PF_1) y (PF_3), se sigue que $\varsigma = \eta$. □

Notación. Si $\underline{K}$ denota una *ccce* topológica propiamente fibrada, abreviaremos la escritura escribieno: $\underline{K}$ es una *ccce tpf*.

Corolario 9.1. *Si $\underline{K}$ es una ccce tpf, entonces $\underline{K}$ está completamente fibrada.*

Demostración. Sea X un conjunto arbitrario pero fijo. Por el inciso (PF_1) de la definición 9.1, la clase $\underline{K}[X]$ es un conjunto. Por el teorema 9.1, $\underline{K}$ es transportable. Entonces $\underline{K}$ tiene fibras pequeñas. Luego, por la proposición 5.1, se sigue que $\left(\underline{K}[X], \leq_{\underline{K}}\right)$ es un copo. Ahora probemos que $\left(\underline{K}[X], \leq_{\underline{K}}\right)$ es una retícula completa. Sean, I un conjunto, $\{\xi_i\}_{i\in I}$ una familia de $\underline{K}$-estructuras para X y ξ la $\underline{K}$-estructura final para X respecto de $(\xi_i, 1_X)_{i\in I}$. Entonces $\xi = \sup\{\xi_i\}_{i\in I}$ (ver la proposición 8.2 (implicación: $1 \Rightarrow 2$)). Esto prueba que $\left(\underline{K}[X], \leq_{\underline{K}}\right)$ es una retícula completa. Dado que al conjunto X lo escogimos de manera arbitraria, concluimos que $\underline{K}$ está completamente fibrada. □

Ejemplos 9.2.

1. Consideremos a la *ccce* $\mathfrak{Pos}$. Sabemos que dicha categoría concreta tiene fibras pequeñas. Además, si $X = \{x\}$, entonces $\mathfrak{Pos}[X] = \{(x,x)\}$. Por lo tanto, $\mathfrak{Pos}$ está propiamente fibrada; sin embargo, ya ha sido probado que $\mathfrak{Pos}$ no está completamente fibrada.
2. No es difícil comprobar que la *ccce* $\mathfrak{Lat}$ es transportable. Desde luego, para cada conjunto X, la clase $\mathfrak{Lat}[X]$ es conjunto. Entonces $\mathfrak{Lat}$ tiene fibras pequeñas. Si $X = \{x\}$, entonces $\{(x,x)\}$ es el unico orden parcial que convierte al conjunto X en una reticula (definiendo: $x \vee x = x = x \wedge x$). Entonces $\mathfrak{Lat}$ está propiamente fibrada. Anteriormente hemos probado que $\mathfrak{Lat}$ está discretamente fibrada, de lo cual se concluye que $\mathfrak{Lat}$ no está completamente fibrada. Por el corolario 9.1, $\mathfrak{Lat}$ no es topológica.

La siguiente proposición puede verse como una justificación del inciso (PF_2) de la definición 9.1.

Proposición 9.1. *Sea $\underline{K}$ una ccce tpf. Si $f : X \to Y$ es una función constante con X no vacío, entonces para $\underline{K}$-estructuras arbitrarias ξ y η en X y Y, respectivamente, tenemos que $f : (X,\xi) \to (Y,\eta)$ es un $\underline{K}$-morfismo.*

Demostración. Supongamos que $f[X] = \{y_0\}$. Sea γ la única $\underline{K}$-estructura para $\{y_0\}$. Entonces,

$$\begin{array}{rccc} g: & (X,\xi) & \longrightarrow & (\{y_0\},\gamma) \\ & x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

es un $\underline{K}$-morfismo pues γ es la $\underline{K}$-estructura final para $\{y_0\}$ respecto de (ξ, g). También,

$$\begin{array}{rccc} \iota: & (\{y_0\},\gamma) & \longrightarrow & (Y,\eta) \\ & y_0 & \longmapsto & y_0 \end{array}$$

es un $\underline{K}$-morfismo pues γ es la $\underline{K}$-estructura inicial para $\{y_0\}$ respecto de (ι, η). En consecuencia,

$$f = \iota \circ g : (X,\xi) \longrightarrow (Y,\eta)$$

es un $\underline{K}$-morfismo ya que es la composición de $\underline{K}$-morfismos. □

Tenemos las siguientes definiciones.

Definiciones 9.2. Sea $\underline{K}$ una *ccce tpf*.

1. Un $\underline{K}$-morfismo $f:(X,\xi)\to(Y,\eta)$ es una **$\underline{K}$-inmersión** si f es inyectiva y ξ es inicial respecto de (f,η).
2. Un $\underline{K}$-morfismo $f:(X,\xi)\to(Y,\eta)$ es una **$\underline{K}$-identificación** si f es suprayectiva y η es final respecto de (ξ,f).
3. Diremos que (X,ξ) es un **$\underline{K}$-subobjeto** de (Y,η), si X es un subconjunto de Y y ξ es la $\underline{K}$-estructura inicial para X respecto de (ι,η), donde $\iota:X\hookrightarrow Y$ es la inclusión.
4. Si $\sim$ es una relación de equivalencia en X y $q:X\to X/\sim$ es la proyección natural, diremos que $(X/\sim,\eta)$ es un **$\underline{K}$-objeto cociente** de (X,ξ), si η es final respecto de (ξ,q). En este caso diremos que el $\underline{K}$-morfismo $q:(X,\xi)\to(X/\sim,\eta)$ es un **$\underline{K}$-cociente**.
5. Sean, J un conjunto, $\{(X_j,\xi_j)\}_{j\in J}$ una familia de $\underline{K}$-objetos y,
$$\left\{p_j:\prod_{j\in J}X_j\longrightarrow X_j\right\}_{j\in J}$$
la fuente cartesiana de las proyecciones canónicas. Si ξ es la $\underline{K}$-estructura inicial para $\prod_{j\in J}X_j$ respecto de $(p_j,\xi_j)_{j\in J}$, entonces diremos que $\left(\prod_{j\in J}X_j,\xi\right)$ es un **$\underline{K}$-producto de la familia** $\{(X_j,\xi_j)\}_{j\in J}$.
6. Sean, J un conjunto, $\{(X_j,\xi_j)\}_{j\in J}$ una familia de $\underline{K}$-objetos y,
$$\left\{\iota_j:X_j\longrightarrow\coprod_{j\in J}X_j\right\}_{j\in J}$$
el sumidero de inclusiones. Si ξ es la $\underline{K}$-estructura final para $\coprod_{j\in J}X_j$ respecto de $(\xi_j,\iota_j)_{j\in J}$, entonces $\left(\coprod_{j\in J}X_j,\xi\right)$ es el **$\underline{K}$-coproducto de la familia** $\{(X_j,\xi_j)\}_{j\in J}$.

Desde luego, conceptos como los que acabamos de presentar tienen cabida en cualquier *ccce* $\underline{K}$. La ventaja de trabajar en una *ccce* topológica propiamente fibrada es la garantía de que dichas construcciones siempre existen y son únicas.

Los conceptos de $\mathfrak{Top}$-estructura discreta (topología discreta) y $\mathfrak{Top}$-estructura indiscreta (topología indiscreta), tienen lugar en el contexto de una *ccce* topológica propiamente fibrada: son las llamadas estructura discreta e indiscreta, respectivamente, y es con la presentación de dichos conceptos y dos resultados que nos serán de utilidad más adelante que finalizamos este capítulo.

Definiciones 9.3. Sean, $\underline{K}$ una *ccce tpf*, $I=\emptyset$ una clase vacía y $\{(Y_i,\eta_i)\}_{i\in I}$ una clase vacía de $\underline{K}$-objetos.

1. Siendo $(f_i:Y_i\to X)_{i\in I}$ un sumidero cartesiano vacío, la $\underline{K}$-estructura discreta para X, es la $\underline{K}$-estructura final respecto de $(\eta_i,f_i)_{i\in I}$.
2. Siendo $(f_i:X\to Y_i)_{i\in I}$ una fuente cartesiana vacía, la $\underline{K}$-estructura indiscreta para X, es la $\underline{K}$-estructura inicial respecto de $(\eta_i,f_i)_{i\in I}$.

Tenemos las siguientes observaciones.

Observaciones 9.1. Sean, $\underline{K}$ una *ccce tpf*, Y un conjunto no vacío y (Y,η) un $\underline{K}$-objeto.

1. Si ξ es la $\underline{K}$-estructura discreta para X y $f:X\to Y$ es una función, entonces $f:(X,\xi)\to(Y,\eta)$ es un $\underline{K}$-morfismo.
2. Si ξ es la $\underline{K}$-estructura indiscreta para X y $f:Y\to X$ es uan función, entonces $f:(Y,\eta)\to(X,\xi)$ es un $\underline{K}$-morfismo.

Concluimos este capítulo con un resultado que nos será de utilidad más tarde.

Proposición 9.2. *Sean, $\underline{K}$ una ccce tpf, $p:(X,\tau)\to(Q,\gamma)$ una $\underline{K}$-identificación y $f:(X,\tau)\to(Y,\sigma)$ un un $\underline{K}$-morfismo. Supongamos que, para cualesquiera $x,x^{'}$ en X, se verifica,*
$$p\left(x\right)=p\left(x^{'}\right)\Longrightarrow f\left(x\right)=f\left(x^{'}\right)$$

Entonces existe un único $\underline{K}$*-morfismo* $g : (Q, \gamma) \to (Y, \sigma)$ *que hace conmutar el siguiente diagrama,*

$$\begin{tikzcd}
(X,\tau) \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "p"'] & & (Y,\sigma) \\
& (Q,\gamma) \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

Demostración. Sea $g : Q \to Y$ tal que $g(q) = f\left(p^{-1}(q)\right)$ para toda q en Q. La función g está bien definida ya que si $x, x^{'}$ pertenecen a $p^{-1}\{q\}$, entonces $f(x) = f\left(x^{'}\right)$. Además, por el modo en que está definida g, se sigue que $g \circ p = f$, y por ser p suprayectiva, g es la única función con esta propiedad. Por último, como γ es la $\underline{K}$-estructura final para Q respecto de (τ, p), $g : (Q, \gamma) \to (Y, \sigma)$ es un $\underline{K}$-morfismo. □

Capítulo 10

Algunos tipos elementales de *ccce*

En el capítulo anterior vimos que en una *ccce* topológica siempre es posible garantizar la existencia de construcciones tales como subobjetos, cocientes, productos y coproductos. Y si la *ccce* en cuestión, además de ser topología, está propiamente fibrada, entonces dichas construcciones son únicas. Resulta natural preguntarnos si habrán *ccce* en las cuales siempre sea posible asegurar la existencia de alguna de tales construcciones (sino es que todas) sin que éstas sean necesariamente topológicas. Presentamos en este capítulo algunos ejemplos de tales *ccce*.

10.1. *ccce* hereditarias

Definición 10.1. Una *ccce* $\underline{K}$ es **hereditaria** si para todo $\underline{K}$-objeto (Y, η) y cualquier subconjunto X de Y, existe ξ en $\underline{K}[X]$ tal que (X, ξ) es un subobjeto de (Y, η).

Observación 10.1. Toda categoría concreta topológica es hereditaria. Recordemos que si $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ es un conjunto con n elementos, $n > 1$, entonces éste no puede ser dotado de una estructura de espacio vectorial sobre el campo de los números reales[1]. Esto implica que la *ccce* $\mathfrak{V}ect_{\mathbb{R}}$ no es hereditaria.

Ejemplo 10.1. Sean, $(Y, \leq)$ un copo arbitrario, $X \subseteq Y$ y $\preceq$ el orden parcial inducido por $\leq$ en X; es decir, para cualesquiera x_1, x_2 en X,

$$x_1 \preceq x_2 \Longleftrightarrow x_1 \leq x_2$$

Entonces $(X, \preceq)$ es un subobjeto de $(Y, \leq)$.

Demostración. En efecto:
$(\cdot)$ Si $x_1 \preceq x_2$, entonces,

$$\iota(x_1) = x_1 \leq x_2 = \iota(x_2)$$

lo cual significa que $\iota : (X, \preceq) \to (Y, \leq)$ es monótona.
$(\cdot\cdot)$ Si $(Z, \leqslant)$ es un copo y $g : Z \to X$ una función tal que $\iota \circ g : (Z, \leqslant) \to (Y, \leq)$ es monótona, entonces, para $z_1 \leqslant z_2$, se tiene,

$$\iota(g(z_1)) \leq \iota(g(z_2))$$

pero $g(z_1), g(z_2)$ son elementos de X; por lo tanto,

$$\iota(g(z_1)) = g(z_1) \preceq g(z_2) = \iota(g(z_2))$$

Entonces $g : (Z, \leqslant) \to (X, \preceq)$ es monótona. □

Observación 10.2. A consecuencia del ejemplo anterior tenemos que $\mathfrak{Pos}$ es hereditaria. Entonces $\mathfrak{Pos}$ es un ejemplo de una *ccce* que es hereditaria pero que no es topológica. Con razonamientos análogos al ejemplo anterior podemos probar que $\mathfrak{Gra}$ es hereditaria.

Lema 10.1. *En $\mathfrak{Lat}$, sean (X, α) y (Y, β) dos objetos arbitrarios. Si X es subconjunto de Y, entonces (X, α) es subobjeto de (Y, β) si, y sólo si, para cualesquiera x_1, x_2 en X, se tiene que,*

$$x_1 \wedge_\beta x_2 = x_1 \wedge_\alpha x_2 \quad y \quad x_1 \vee_\beta x_2 = x_1 \vee_\alpha x_2$$

[1] Observación 1.2, página 11.

Demostración. $\Rightarrow \rfloor$ Sean x_1, x_2 elementos de X, entonces, puesto que $\iota : (X, \alpha) \hookrightarrow (Y, \beta)$ es un morfismo reticular,

$$\iota(x_1 \wedge_\alpha x_2) = \iota(x_1) \wedge_\beta \iota(x_2) = x_1 \wedge_\beta x_2$$

y

$$\iota(x_1 \vee_\alpha x_2) = \iota(x_1) \vee_\beta \iota(x_2) = x_1 \vee_\beta x_2$$

pero, $\iota(x_1 \wedge_\alpha x_2) = x_1 \wedge_\alpha x_2$ y $\iota(x_1 \vee_\alpha x_2) = x_1 \vee_\alpha x_2$. Consecuentemente,

$$x_1 \wedge_\beta x_2 = x_1 \wedge_\alpha x_2 \quad \text{y} \quad x_1 \vee_\beta x_2 = x_1 \vee_\alpha x_2$$

$\Leftarrow \rfloor$ Es claro que $\iota : (X, \alpha) \hookrightarrow (Y, \beta)$ es un morfismo reticular. Ahora bien, si (Z, γ) es una retícula y $g : Z \to X$ es una función tal que,

$$\iota \circ g : (Z, \gamma) \to (Y, \beta)$$

es un morfismo reticular, entonces, si (z_1, z_2) pertenece a γ, se sigue que,

$$(\iota(g(z_1)), \iota(g(z_2))) = (g(z_1), g(z_2)) \in \beta$$

por lo tanto,

$$g(z_1) = g(z_1) \wedge_\beta g(z_2) = g(z_1) \wedge_\alpha g(z_2)$$

y

$$g(z_2) = g(z_1) \vee_\beta g(z_2) = g(z_1) \vee_\alpha g(z_2)$$

Así, $(g(z_1), g(z_2))$ es un elemento de α. Concluimos que $g : (Z, \gamma) \to (X, \alpha)$ es un morfismo reticular. $\square$

Ejemplo 10.2. Consideremos nuevamente la retícula $(\mathbb{N}, \alpha)$ en la que,

$$\alpha = \{(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : n \mid m\}$$

e ínfimos y supremos se definen para cualesquier n, m en $\mathbb{N}$ mediante,

$$n \wedge m = m.c.d.(n, m) \quad \text{y} \quad n \vee m = m.c.m.(n, m)$$

Sea $2\mathbb{N}$ el conjunto de números pares y pensémoslo dotado del orden parcial β que α le proporciona. Como consecuencia del lema anterior, tenemos que $(2\mathbb{N}, \beta)$ es una subretícula de $(\mathbb{N}, \alpha)$, pues tanto el máximo común divisor como el mínimo común múltiplo de cualesquiera dos números pares también es par. En cambio, si mediante $\mathbb{P}$ denotamos al conjunto de los números primos, el copo $(\mathbb{P}, \gamma)$ (γ es el orden parcial que α de proporciona a $\mathbb{P}$) no resulta subretícula de $(\mathbb{N}, \alpha)$, ya que para cualquier par de números primos p_1, p_2 se tiene,

$$p_1 \wedge p_2 = 1 \quad \text{y} \quad p_1 \vee p_2 = p_1 p_2$$

y, desde luego, 1 y $p_1 p_2$ no son números primos. De hecho, γ es el orden discreto para $\mathbb{P}$.

Observación 10.3. La proposición 10.1 indica que la *ccce* $\mathfrak{Lat}$ no es hereditaria. De este modo, $\mathfrak{Lat}$ es un ejemplo de una *ccce* que no es hereditaria ni topológica.

Mediante $\mathfrak{Tch}$ denotaremos a la sub*ccce* plena de $\mathfrak{Top}$ formada por los espacios topológicos compactos de Hausdorff y todas las funciones continuas entre ellos.

Lema 10.2. *Los subobjetos de un $\mathfrak{Tch}$-objeto (X, τ) son precisamente los subconjuntos cerrados de X con las topología de subespacio.*

Demostración. Sea (X, τ) un $\mathfrak{Tch}$-objeto. Si Y es un subconjunto de X que es cerrado en (X, τ), entonces $(Y, \tau\mid_X)$ es compacto y de Hausdorff, porque los subconjuntos cerrados de un espacio compacto son compactos y porque el ser de Hausdorff es una propiedad que hereda cualquier subespacio de un espacio topológico que la tiene. Recíprocamente, si $(Y, \tau\mid_X)$ es un subespacio compacto y de Hausdorff del $\mathfrak{Tch}$-objeto (X, τ), entonces Y es cerrado en (X, τ) porque los subconjuntos compactos de un espacio de Hausdorff son cerrados. $\square$

Observación 10.4. La *ccce* $\mathfrak{Tch}$ no es hereditaria. En efecto: el intervalo $I = [0, 1]$ con la topología inducida por la topología usual en $\mathbb{R}$, es un objeto de $\mathfrak{Tch}$. Sin embargo, por el lema 10.2, observamos que el abierto $(0, 1)$ no posee una $\mathfrak{Tch}$-estructura. La *ccce* $\mathfrak{Tch}$ es otro ejemplo de una categoría concreta no topológica.

10.2. *ccce* que poseen intersecciones

Definición 10.2. Sea $\underline{K}$ una *ccce* arbitraria. Se dice que $\underline{K}$ tiene intersecciones si para todo $\underline{K}$-objeto (X, ξ) y para cualesquiera subobjetos suyos $\{(Y_i, \eta_i)\}_{i\in I}$, existe una $\underline{K}$-estructura para $\bigcap\limits_{i\in I} Y_i$ con la cual resulte un subobjeto de (X, ξ).

Ejemplos 10.3.

1. Toda *ccce* hereditaria posee intersecciones. En particular, toda *ccce* topológica posee intersecciones.
2. Como los subobjetos de todo $\mathfrak{Tch}$-objeto (X, τ) son los subconjuntos cerrados de éste, y como toda intersección de aquéllos es cerrada en (X, τ), tenemos que $\mathfrak{Tch}$ tiene intersecciones.
3. Sea $\{(Y_i, \beta_i)\}_{i\in I}$ una familia cualquiera de subretículas de una retícula arbitraria (X, α), y sea $Y = \bigcap\limits_{i\in I} Y_i$. Debido a la proposición 10.1, para cualesquiera y_1, y_2 en Y e i en I,tenemos que,

   $$\{y_1 \wedge_\alpha y_2, y_1 \vee_\alpha y_2\} \subseteq Y_i$$

   Por lo tanto, siendo β el orden inducido por α en Y y haciendo,

   $$y_1 \wedge_\beta y_2 = y_1 \wedge_\alpha y_2 \quad \text{y} \quad y_1 \vee_\beta y_2 = y_1 \vee_\alpha y_2$$

   tenemos que (Y, β) es también una subretícula de (X, α). Por lo tanto, $\mathfrak{Lat}$ tiene intersecciones. Recordemos que $\mathfrak{Lat}$ no es topológica.
4. Mediante $\mathfrak{Topc}$ denotaremos a la sub*ccce* plena de $\mathfrak{Top}$ formada por los espacios topológicos compactos y todas las funciones continuas entre ellos. A continuación presentamos un ejemplo que muestra que $\mathfrak{Topc}$ carece de intersecciones. Tendremos, como consecuencia, que la *ccce* $\mathfrak{Topc}$ no es topológica.
   Sea $X = \mathbb{N} \cup \{\infty_1, \infty_2\}$ y sea τ la topología para X definida por,

   $$U \in \tau \Leftrightarrow \begin{cases} X\backslash U \text{ es finito} \\ \text{o} \\ U \cap \{\infty_1, \infty_2\} = \emptyset \end{cases}$$

   Veamos que, efectivamente, τ es una topología para X.
   a) Sea $\{U_i\}_{i\in I}$ una colección arbitraria de elementos de τ. Si existe i_0 en I tal que $X\backslash U_{i_0}$ es finito, entonces $X\backslash \bigcup\limits_{i\in I} U_i$ es finito, pues $X\backslash \bigcup\limits_{i\in I} U_i$ está contenido en $X\backslash U_{i_0}$. Consecuentemente, $\bigcup\limits_{i\in I} U_i$ es un elemento de τ.
   Si para cada i en I, $U_i \cap \{\infty_1, \infty_2\} = \emptyset$, entonces $\left[\bigcup\limits_{i\in I} U_i\right] \cap \{\infty_1, \infty_2\} = \emptyset$. En este caso también sucede que $\bigcup\limits_{i\in I} U_i$ es un elemento de τ.
   b) Sea $\{U_i\}_{i\in I}$ una colección finita de elementos de τ. Si existe i_0 en I tal que $U_{i_0} \cap \{\infty_1, \infty_2\} = \emptyset$, entonces $\left[\bigcap\limits_{i\in I} U_i\right] \cap \{\infty_1, \infty_2\} = \emptyset$, y por tanto, $\bigcap\limits_{i\in I} U_i$ es un elemento de τ. Si para cada i en I, $X - U_i$ es finito, entonces es finito,

   $$X\backslash \bigcap_{i\in I} U_i = \bigcup_{i\in I} (X\backslash U_i)$$

   pues I es finito. De este modo, $\bigcap\limits_{i\in I} U_i$ es un elemento de τ.

   Demostremos ahora que τ es un elemento de $\mathfrak{Topc}[X]$. En efecto, si $\{U_i\}_{i\in I}$ es una cubierta abierta arbitraria de X, entonces existe i_0 en I tal que ∞_1 es elemento de U_{i_0}; luego, $U_{i_0} \cap \{\infty_1, \infty_2\} \neq \emptyset$, y como U_{i_0} pertenece a τ, entonces $X\backslash U_{i_0}$ es finito, y por lo tanto puede ser cubierto por un número finito de miembros de $\{U_i\}_{i\in I}$. Estos miembros y U_{i_0} constituyen una subcubierta finita para X, lo cual prueba que, efectivamente, (X, τ) es un espacio topológico compacto. Valiéndonos de argumentos similares a éste podemos evidenciar que,

   $$Y_1 = X\backslash \{\infty_1\} \quad \text{y} \quad Y_2 = X\backslash \{\infty_2\}$$

   son subconjuntos compactos de X. En consecuencia, los subespacios (Y_1, σ_1) y (Y_2, σ_2) de (X, τ) son subobjetos en $\mathfrak{Topc}$. Sin embargo, la intersección,

   $$\mathbb{N} = Y_1 \cap Y_2$$

   no puede mirarse como subobjeto de (X, τ) en $\mathfrak{Topc}$ ya que, de hecho, la topología σ inducida por τ en $\mathbb{N}$ es la topología discreta: para cada n en $\mathbb{N}$, $U_n = \{n\}$ pertenece a τ, porque $U_n \cap \{\infty_1 \cap \infty_2\} = \emptyset$. De manera que, para cada n en $\mathbb{N}$, $U_n \cap \mathbb{N} = \{n\}$ es un elemento de σ. Por consiguiente, si γ fuese una topología para $\mathbb{N}$ según la cual $(\mathbb{N}, \gamma)$ resultase $\mathfrak{Topc}$-subobjeto de (X, τ), entonces, por la continuidad de la inclusión,

$$i : (\mathbb{N}, \gamma) \hookrightarrow (X, \tau)$$

tendríase que, para cada n en $\mathbb{N}$,

$$\{n\} = \iota^{-1}(U_n) \in \gamma$$

es decir, $\gamma = \sigma$. Pero $(\mathbb{N}, \sigma)$ no es compacto porque de la cubierta abierta,

$$\{\{1\}, \{2\}, \{3\}, ...\}$$

es imposible extraer una subcubierta finita. Así pues, tal γ no existe.

5. La *ccce* que a continuación presentamos suele denotarse por medio de $\mathfrak{Mon}$.
   1. Para todo conjunto X, $\mathfrak{Mon}[X]$ consta de las parejas $(\cdot, \mathsf{e})$ en las que,

      $$\cdot : X \times X \longrightarrow X$$

      es una operación binaria que es asociativa y e es un elemento de X llamado **neutro** y que cumple lo siguiente:

      $$\mathsf{e} \cdot x = x = x \cdot \mathsf{e}$$

      para todo x en X.
   2. Los objetos de $\mathfrak{Mon}$ reciben el nombre de **monoides** y son, desde luego, parejas del tipo $(X, (\cdot, \mathsf{e}))$, en las que X es un conjunto y $(\cdot, \mathsf{e})$ es un elemento de $\mathfrak{Mon}[X]$.
   3. Si $A = (X, (\cdot, \mathsf{e}))$ y $B = (Y, (\circ, \boldsymbol{e}))$ son monoides cualesquiera, entonces, $f : X \to Y$ es un elemento de $\mathfrak{Mon}(A, B)$ si, y sólo si, $f(\mathsf{e}) = f(\boldsymbol{e})$ y para cualesquiera x_1, x_2 en X, $f(x_1 \cdot x_2) = f(x_1) \circ f(x_2)$. Los $\mathfrak{Mon}$-morfismos se llaman **morfismos de monoides.** Se comprueba fácilmente que en $\mathfrak{Mon}$ se verifican los axiomas de composición e identidad que definen a una *ccce*.

Observación 10.5. En $\mathfrak{Mon}$ los subobjetos se caracterizan por ser cerrados bajo la operación del monoide en cuestión y contener al elemento neutro. En efecto, supongamos que $(X, (\cdot, \mathsf{e}))$ es un monoide y que Y es un subconjunto de X que es cerrado bajo $\cdot$ y que contiene a e. Entonces, $(Y, (\cdot, \mathsf{e}))$ es un monoide y tenemos:

$(\cdot)$ $\iota : (Y, (\cdot, \mathsf{e})) \hookrightarrow (X, (\cdot, \mathsf{e}))$ es un homeomorfismo de monoides ya que, como para cualesquiera y_1, y_2 en Y tenemos que $y_1 \cdot y_2$ pertenece a Y, entonces,

$$\iota(y_1 \cdot y_2) = y_1 \cdot y_2 = \iota(y_1) \cdot \iota(y_2)$$

$(\cdot\cdot)$ Si $(Z, (\circ, e))$ es un $\mathfrak{Mon}$-objeto y $g : Z \to Y$ es tal que $\iota \circ g : (Z, (\circ, e)) \to (X, (\cdot, \mathsf{e}))$ es un homomorfismo, entonces, para cualesquiera z_1, z_2 en Z,

$$g(z_1 \circ z_2) = \iota(g(z_1 \circ z_2)) = \iota g(z_1 \circ z_2) = \iota g(z_1) \cdot \iota g(z_2)$$

lo cual significa que también $g : (Z, (\circ, e)) \to (Y, (\cdot, \mathsf{e}))$ es un homeomorfismo.

Recíprocamente, si $(Y, (\circ, e))$ es un submonoide de $(X, (\cdot, \mathsf{e}))$, entonces,

$$\iota : (Y, (\circ, e)) \hookrightarrow (X, (\cdot, \mathsf{e}))$$

es un homomorfismo, de manera que para cualesquiera y_1, y_2 en Y, tenemos,

$$y_1 \circ y_2 = \iota(y_1 \circ y_2) = \iota(y_1) \cdot \iota(y_2) = y_1 \cdot y_2$$

Pero, $y_1 \circ y_2$ pertenece a Y; por lo tanto, Y está cerrado bajo $\cdot$. Además,

$$e = \iota(e) = \mathsf{e}$$

porque un homomorfismo de monoides aplica el elemento neutro del dominio en el elemento neutro del codominio, como fácilmente se comprueba. Así, , e es elemento de Y.

Ahora veamos que $\mathfrak{Mon}$ tiene intersecciones. Dado cualquier monoide $(X, (\cdot, \mathsf{e}))$ y cualquier familia de submonoides $\{(Y_i, (\cdot, \mathsf{e}))\}_I$ de $(X, (\cdot, \mathsf{e}))$, tenemos que e pertenece a $Y = \bigcap\limits_{i \in I} Y_i$,porque, para cada i en I, e es un elemento de Y_i. Y si y_1, y_2 son dos elementos arbitrarios de Y, entonces, para cada i en I, $y_1 \cdot y_2$ está en Y_i. Esto implica que Y es cerrado bajo la operación $\cdot$.

10.3. *ccce* ***coheredtiarias***

Definición 10.3. Una *ccce* $\underline{K}$ es **coheredtiaria**, si para todo $\underline{K}$-objeto (X, ξ) y cualquier relación de equivalencia $\sim$ en X, existe un objeto cociente $(X/\sim, \eta)$ de (X, ξ) respecto a $\sim$.

Ejemplo 10.4. Toda *ccce* topológica es coheredtiaria.

Ejemplo 10.5. Sin tomar en cuenta el hecho de que $\mathfrak{Gra}$ es topológica, podemos demostrar que es coheredtiaria. Si (X, α) es cualquier gráfica y $\sim$ es una relación de equivalencia en X, hacemos,

$$\bar{\alpha} = \{([u_1], [u_2]) : \text{ existen } x_1 \in [u_1] \text{ y } x_2 \in [u_2] \text{ tales que } (x_1, x_2) \in \alpha\}$$

Esto define una relación binaria en $X/\sim$ y tenemos,

(I_1) La proyección natural $p : (X, \alpha) \to (X/\sim, \bar{\alpha})$ es una función compatible ya que,

$$(x_1, x_2) \in \alpha \Longrightarrow (q(x_1), q(x_2)) = ([x_1], [x_2]) \in \bar{\alpha}$$

(I_2) Si (Z, β) es cualquier digráfica y $h : X/\sim \to Z$ es una función tal que,

$$h \circ q : (X, \alpha) \to (Z, \beta)$$

es compatible, entonces h es compatible. Efectivamente; si $([u_1], [u_2])$ está en $\bar{\alpha}$, existen x_1 en $[u_1]$ y x_2 en $[u_2]$ tales que (x_1, x_2) pertenece a α; por lo tanto, $(h[u_1], h[u_2]) = (h(q(x_1)), h(q(x_2))) \in \beta$. En otras palabras, h es una función compatible. Hemos probado que $(X/\sim, \bar{\alpha})$ es un objeto cociente de (X, α) respecto a $\sim$.

Para el siguiente ejemplo presentamos antes una *ccce* que denotaremos mediante $\mathfrak{Sgr}$.

1. Para cada conjunto X, $\mathfrak{Sgr}[X]$ es la clase de operaciones binarias en X que son asociativas; es decir,

$$\mathfrak{Sgr}[X] = \{\cdot : X \times X \to X \mid x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z, \text{ para cualesquiera } x, y, z \text{ en } X\}$$

2. Los $\mathfrak{Sgr}$-objetos se llaman **semigrupos** y son parejas del tipo $(X, \cdot)$, donde X es un conjunto y $\cdot$ pertenece a $\mathfrak{Sgr}[X]$.
3. Si $A = (X, \cdot)$ y $B = (Y, \circ)$ son semigrupos, entonces,

$$\mathfrak{Sgr}(A, B) = \left\{f \in Y^X : f(x_1 \cdot x_2) = f(x_1) \circ f(x_2), \text{ para cualesquiera } x_1, x_2 \text{ en } X\right\}$$

Los $\mathfrak{Sgr}$-morfismo son los **morfismos de semigrupos**. Los axiomas de composición e identidad se verifican fácilmente.

Ejemplo 10.6. En el semigrupo aditivo de números enteros $(\mathbb{Z}, +)$ definimos una relación de equivalencia como sigue,

$$z_1 \sim z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} z_1, z_2 > 1 \\ \quad \text{ó} \\ z_1, z_2 \leq 1 \end{cases}$$

para cualesquiera $z_1 z_2$ en $\mathbb{Z}$. Observemos que $\mathbb{Z}/\sim$ consta de dos clases,

$$[1] = \{..., -2, -1, 0, 1\} \quad \text{y} \quad [2] = \{2, 3, 4, 5, ...\}$$

Si queremos definir una operación $\bullet$ en $\mathbb{Z}/\sim$ según la cual $(\mathbb{Z}/\sim, \bullet)$ resulte un objeto cociente de $(\mathbb{Z}, +)$, entonces, por definición de objeto cociente,

$$[2] = q(2) = q(1+1) = q(1) \bullet q(1)$$

pero entonces, dado que $[0] = [1]$, tendremos,

$$[1] = q(0) = q(0+0) = q(0) \bullet q(0) = q(1) \bullet q(1) = [2]$$

Por lo tanto, tal operación no se puede definir.

Observación 10.6. El ejemplo anterior muestra que $\mathfrak{Sgr}$ y $\mathfrak{Mon}$ no son coheredtiarias. Consecuentemente, $\mathfrak{Sgr}$ y $\mathfrak{Mon}$ no son topológicas.

10.4. *ccce* que poseen núcleos y *ccce* que poseen imágenes

Definición 10.4. Sea $\underline{K}$ una *ccce* arbitraria. Si (X, ξ) es un $\underline{K}$-objeto y $\sim$ es una relación de equivalencia en X tal que existe una estructura cociente $\tilde{\xi}$ en $\underline{K}\,[X/\!\sim]$ respecto a $\sim$, entonces $\sim$ se llama una **congruencia** en (X, ξ).

Proposición 10.1. *Una relación de equivalencia $\sim$ en un semigrupo $(X, \cdot)$ es una congruencia si, y sólo si para cualesquiera x_1, x'_1, x_2, x'_2 en X se tiene que,*

$$x_1 \sim x'_1 \text{ y } x_2 \sim x'_2 \Longrightarrow x_1 \cdot x_2 \sim x'_1 \cdot x'_2 \qquad (\blacktriangle)$$

Demostración. En efecto, siendo válida la implicación anterior, podemos definir una operación $\circ$ en $X/\!\sim$ del siguiente modo: para cualesquiera x_1, x_2 en X,

$$[x_1] \circ [x_2] = [x_1 \cdot x_2]$$

No es difícil comprobar que la operación $\circ$ está bien definida y que es asociativa.

Sea $p : (X, \cdot) \to (X/\!\sim, \circ)$ la proyección natural. Entonces,

(i) $p : (X, \cdot) \to (X/\!\sim, \circ)$ es un morfismo de semigrupos, pues, dados x_1, x_2 en X, se tiene que.

$$p(x_1 \cdot x_2) = [x_1 \cdot x_2] = [x_1] \circ [x_2] = p(x_1) \circ p(x_2)$$

(ii) La operación $\circ$ es final respecto a $(\cdot, p)$. Si $(Y, \bullet)$ es un semigrupo y $h : X/\!\sim \to Y$ es una función tal que, $hp : (X, \cdot) \to (Y, \bullet)$ es un morfismo, entonces, cualesquiera que sean $[x_1]$ y $[x_2]$ en $X/\!\sim$ tenemos,

$$h([x_1] \circ [x_2]) = h(p(x_1) \circ p(x_2)) = hp(x_1 \cdot x_2) = hp(x_1) \bullet hp(x_2) = h[x_1] \bullet h\{x_2\}$$

lo cual significa que también $h : (X/\!\sim, \circ) \to (Y, \bullet)$ es un morfismo de semigrupos.

Recíprocamente, si $(X/\!\sim, \circ)$ es un objeto cociente de $(X, \cdot)$ respecto a $\sim$, entonces la proyección natural p es un morfismo y en consecuencia, para cualesquiera x_1, x_2 en X,

$$[x_1 \cdot x_2] = p(x_1 \cdot x_2) = p(x_1) \circ p(x_2) = [x_1] \circ [x_2]$$

Si además, $x_1 \sim x'_1$ y $x_2 \sim x'_2$, entonces, $[x_1] = [x'_1]$, $[x_2] = [x'_2]$ y por tanto,

$$[x_1 \cdot x_2] = [x_1] \circ [x_2] = [x'_1] \circ [x'_2] = [x'_1 \cdot x'_2]$$

o sea que también $x_1 \cdot x_2 \sim x'_1 \cdot x'_2$. □

Observación 10.7. La implicación $(\blacktriangle)$ también caracteriza a las congruencias en $\mathfrak{Mon}$. La demostración es análoga.

Definición 10.5. Sea $f : X \to Y$ cualquier función. El **núcleo** de f es la relación de equivalencia en X definida del siguiente modo: para cualesquiera x_1, x_2 en X,

$$x_1 \sim x_2 \Longleftrightarrow f(x_1) = f(x_2)$$

Definición 10.6. Se dice que una *ccce* $\underline{K}$ **tiene núcleos** si el núcleo de cualquiera de sus morfismos es una congruencia.

Ejemplo 10.7. Toda *ccce* cohereditaria tiene núcleos.

Ejemplo 10.8. $\mathfrak{Sgr}$ tiene núcleos.

Efectivamente. si $f : (X, \cdot) \to (Y, \circ)$ es un morfismo de semigrupos y denotamos al núcleo de f mediante $\sim_f$, entonces dados cualesquiera x_1, x'_1, x_2, x'_2 en X tales que,

$$x_1 \sim_f x'_1 \text{ y } x_2 \sim_f x'_2$$

tenemos,

$$f(x_1 \cdot x_2) = f(x_1) \circ f(x_2) = f(x'_1) \circ f(x'_2) = f(x'_1 \cdot x'_2)$$

o sea que también,

$$x_1 \cdot x_2 \sim_f x'_1 \cdot x'_2$$

De acuerdo al Ejemplo 10.1, la relación $\sim_f$ es una congruencia.

Observación 10.8. $\mathfrak{Sgr}$ es ejemplo de una *ccce* que no es cohereditaria pero que tiene núcleos.

Definición 10.7. Se dice que una *ccce* $\underline{K}$ posee imágenes si para todo $\underline{K}$-mofismo $f : (X, \xi) \to (Y, \eta)$, existe $\tilde{\eta}$ en $\underline{K}[f(X)]$ tal que $(f(X), \tilde{\eta})$ es un subobjeto de (Y, η).

Ejemplo 10.9. Toda *ccce* hereditaria posee imágenes.

Ejemplo 10.10. $\mathfrak{Mon}$ posee imágenes.

En efecto; en primer lugar recordemos que los subobjetos de un monoide se caracterizan por contener al elemento neutro y ser cerrados bajo la operación del monoide (Observación 10.5).

Demostración. Sea $f : (X, (e, \cdot)) \to (Y, (\mathsf{e}, \circ))$ un morfismo entre monoides. Por definición, f preserva al elemento neutro; en consecuencia,

$$\mathsf{e} = f(e) \in f(X)$$

Finalmente, sean y, y' elementos de $f(X)$; entonces existen x, x' en X tales que $f(x) = y$ y $f(x') = y'$. Luego,

$$y \circ y' = f(x) \circ f(x') = f(x \cdot x') \in f(X)$$

Esto demuestra que $\mathfrak{Mon}$ posee imágenes. □

Ejemplo 10.11. $\mathfrak{Tch}$ posee imágenes.

Efectivamente; sea $f : (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ un $\mathfrak{Tch}$-morfimso. Entonces f es continua y (X, τ) es compacto. Por la proposición 6.2, el espacio topológico $\left(f(X), \sigma_{f(X)}\right)$ es compacto. Y puesto que la propiedad de ser Hausdorff la heredan todos los subespacios de cualquier espacio de Hausdorff, tenemos que $\left(f(X), \sigma_{f(X)}\right)$ es Hausdorff. En otras palabras, $\left(f(X), \sigma_{f(X)}\right)$ es un subobjeto (en $\mathfrak{Tch}$) de (Y, σ).

Observación 10.9. Tanto $\mathfrak{Tch}$ como $\mathfrak{Mon}$ son ejemplos de *ccce* que no son hereditarias[2] pero que poseen imágenes.

10.5. *ccce* monotopológicas

Ya hemos visto ejemplos de subcategorías concretas de $\mathfrak{Top}$ que no son topológicas; a saber: $\mathfrak{Th}$, $\mathfrak{Tch}$ y $\mathfrak{Topc}$. Resultan, hasta cierto punto, sorprendentes tales resultados, pues la intuición, quizás, nos dicta lo contrario. Es demasiado restrictiva la condición de tener que dotar de estructuras iniciales a todos los conjuntos que sean dominio de fuentes cuyos codominios consten de clases de objetos pertenecientes a las sub*ccce* topológicas arriba mencionadas. Esta restricción puede holgarse un poco y dar lugar a una clase de *ccce* donde tengan cabida muchas de las que habían quedado excluidas de la clase de las topológicas.

Definición 10.8. Se dice que **una fuente cartesiana** $(f_i : X \to Y_i)_{i \in I}$ **separa puntos** si, para cualesquiera puntos distintos x, y en X, existe i en I tal que $f_i(x) \neq f_i(y)$.

Proposición 10.2. *Una fuente de funciones separa puntos si, y sólo si, es monofuente.*

Demostración. Sea $(f_i : X \to Y_i)_{i \in I}$ una fuente de funciones que separa puntos. Sean,

$$g, h : Z \longrightarrow X$$

funciones tales que, para cada i en I, $f_i \circ g = f_i \circ h$. Si z es un elemento de Z tal que $g(z) \neq h(z)$, entonces, existe i en I tal que, $f_i(g(z)) \neq f_i(h(z))$, lo que no es el caso. Por lo tanto, $g = h$.

Supongamos ahora que $(f_i : X \to Y_i)_{i \in I}$ es una monofuente. Sean x, y puntos distintos en X. Consideremos a las funciones constantes $g, h : X \to X$, cuyos valores son, respectivamente, x y y. Entonces $g \neq h$ y, por ser $(f_i : X \to Y_i)_{i \in I}$ monofuente, existe i en I tal que $f_i(x) \neq f_i(y)$. Esto prueba que $(f_i : X \to Y_i)_{i \in I}$ separa puntos. □

Definición 10.9. Sea $\underline{K}$ una *ccce* arbitraria. Se dice que $\underline{K}$ es **monotopológica** si para todo conjunto X, cualquier fuente cartesiana $(f_i : X \to Y_i)_{i \in I}$ que separe puntos, y cualquier familia $((Y_i, \sigma_i))_{i \in I}$ de $\underline{K}$-objetos, existe una $\underline{K}$-estructura inicial ξ para X respecto de $(f_i, \sigma_i)_{i \in I}$.

Observaciones 10.10.

1. Toda *ccce* topológica es monotopológica.

[2] Ver las observaciones 10.4 y 10.5 respectivamente.

2. Toda *ccce* monotopológica tiene productos.

Ahora veremos un resultado que nos ayudará a probar que la *ccce* $\mathfrak{Pos}$ es monotopológica.

Proposición 10.3. *Consideremos a la ccce* $\mathfrak{Pos}$*. Sean,* $(f_i : X \to Y_i)_{i\in I}$ *una fuente cartesiana de funciones y* $\{(Y_i, \leq_i)\}_{i\in I}$ *una familia de conjuntos parcialmente ordenados. Sea* $\preceq$ *una relación en* X *tal que, dados cualesquiera* $x, x^{'}$ *en* X*,* $x \preceq x^{'}$ *si, y sólo si. para cada* i *en* I*,* $f_i(x) \leq_i f_i\left(x^{'}\right)$*. Entonces,*

(a) Si $\preceq$ es antisimétrica, entonces $\preceq$ es la $\mathfrak{Pos}$-estructura inicial para X respecto de $(f_i, \leq_i)_{i\in I}$.
(b) Si $\preceq$ no es antisimétrica, entonces no existe un orden parcial que sea inicial para X respecto de $(f_i, \leq_i)_{i\in I}$.

Demostración.
(a) Es claro que la relación $\preceq$ es reflexiva y transitiva. También se tiene que, para cada i en I,

$$f_i : (X, \preceq) \longrightarrow (Y_i, \leq_i)$$

es monótona. Por otra parte, sea $(T, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado y $h : T \to X$ una función tal que, para cada i en I,

$$f_i \circ h : (T, \leq) \longrightarrow (Y_i, \leq_i)$$

es monótona. Entonces, $t \leq t^{'}$ implica que, para cada i en I,

$$f_i(h(t)) \leq_i f_i\left(h\left(t^{'}\right)\right)$$

lo cual, de acuerdo a al definición de $\preceq$, es equivalente a escribir $h(t) \preceq h\left(t^{'}\right)$. Luego,

$$h : (T, \leq) \longrightarrow (X, \preceq)$$

es monótona. Hemos demostrado que $\preceq$ es la $\mathfrak{Pos}$-estructura inicial para X respecto de $(f_i, \leq_i)_{i\in I}$.

(b) Supongamos que $\preceq$ no es una relación antisimétrica, pero que, sin embargo, existe una $\mathfrak{Pos}$-estructura inicial $\leq$ para X respecto a $(f_i, \leq_i)_I$. Sean $x_0, x_0^{'}$ en X tales que $x_0 \preceq x_0^{'}$, y definamos un orden $\leqslant$ en X como sigue,

$$x \leqslant x^{'} \Longleftrightarrow x = x^{'} \text{ o } \begin{cases} x = x_0 \\ \text{y} \\ x^{'} = x_0^{'} \end{cases}$$

Observese que $x_0 \leqslant x_0^{'}$. Entonces, para cada i en I,la composición,

$$(X, \leqslant) \xrightarrow{1_X} (X, \leq) \xrightarrow{f_i} (Y_i, \leq_i)$$

es monótona. Efectivamente:
$(\circ)$ Si $x \leqslant x^{'}$ con $x = x^{'}$, entonces, dada i en I,$f_i(x) = f_i(1_X(x)) = f_i\left(1_X\left(x^{'}\right)\right) = f_i\left(x^{'}\right)$. Por lo tanto, para cada i en I, $f_i(x) \leq_i f_i\left(x^{'}\right)$.
$(\bullet)$ Si $x \leqslant x^{'}$, con $x = x_0$ y $x^{'} = x_0^{'}$, entonces, $x \preceq x^{'}$, lo cual, de acuerdo con la definición de $\preceq$, implica que también, para cada i en I, $f_i(x) \leq_i f_i\left(x^{'}\right)$.
Pero $\leq$ es inicial para X con respecto de $(f_i, \leq_i)_{i\in I}$; luego,

$$(X, \leqslant) \xrightarrow{1_X} (X, \leq)$$

es monótona. Y como $x_0 \leqslant x_0^{'}$, entonces, $x_0 \leq x_0^{'}$. Si además de $x_0 \preceq x_0^{'}$ se tuviera también que $x_0^{'} \preceq x_0$, entonces, con un razonamiento análogo al anterior, llegaríamos a que también $x_0^{'} \leq x_0$. Pero $\leq$ es una relación antisimétrica, luego, $x_0^{'} = x_0$. Esto implicaría que $\preceq$ es una relación atisimétrica, lo que no es el caso. Por lo tanto, no existe un orden parcial para X que sea inicial respecto a $(f_i, \leq_i)_{i\in I}$ □

Ejemplo 10.12. La *ccce* $\mathfrak{Pos}$ es monotopológica.

Demostración. Sean, X un conjunto, $(f_i : X \to Y_i)_{i\in I}$ una fuente cartesiana que separa puntos, y $\{(Y_i, \leq_i)\}_{i\in I}$ una familia de de $\mathfrak{Pos}$-objetos. Sea $\preceq$ la relación en X de la proposición anterior. Si probamos que $\preceq$ es antisimétrica, entonces, por la prososición anterior, $\preceq$ será la estructura inicial para X respecto a $(f_i, \leq_i)_I$. Si $x, x^{'}$ son puntos en X tales que,

$$x \preceq x^{'} \quad \text{y} \quad x^{'} \preceq x$$

entonces, para cada i en I, se tiene que,

$$f_i\,(x) \leq_i f_i\left(x^{'}\right) \quad \text{y} \quad f_i\left(x^{'}\right) \leq_i f_i\,(x)$$

Y como, para cada i en I, $\leq_i$ es un orden parcial, entonces, para cada i en I, se tiene que, $f_i\,(x) = f_i\left(x^{'}\right)$. Pero $(f_i : X \to Y_i)_{i\in I}$ separa puntos; entonces, $x = x^{'}$, y, por tanto, $\preceq$ es una relación antisimétrica. □

Observaciones 10.11. Toda categoría concreta monotopológica es hereditaria. Efectivamente, pues si A es un subconjunto de X, entonces la inclusión,

$$\iota : A \hookrightarrow X$$

es una fuente, con una sola función, que separa puntos. Si $\underline{K}$ es monotopológica y (X, ξ) es un $\underline{K}$-objeto, entonces existe la estructura inicial de A respecto de (ι, ξ).

Esta observación revela que ni $\mathfrak{Topc}$ ni $\mathfrak{Tch}$ han quedado incluidas en la clase de las categorías concretas monotopológicas.

Parte III

Conexidad en *ccce*

Capítulo 11

Categorías de conexión en $\mathfrak{Top}$

Nuestra meta en este capítulo es presentar una forma de generalizar en un contexto categórico los conceptos topológicos de conexidad y conexidad por trayectorias, junto con otras nociones y resultados relacionados con dichos conceptos. A su vez, el proceso que llevaremos a cabo para llegar a la referida generalización, pretende ser una motivación del concepto de *subcategoría de $\underline{B}$-conexión* presentado por el doctor Roberto Vázquez en [4]. Para lograr estos objetivos, procederemos de manera similar a como antes ya lo hemos hecho: En primer lugar, presentamos el concepto topológico en cuestión; acto seguido, damos una caracterización de ese concepto en términos exclusivos de funciones continuas. Según nuestra experiencia adquirida, este proceso da lugar a una variedad de definiciones y resultados de naturaleza categórica.

Iniciamos la exposición recordando los conceptos y algunos resultados de la conexidad y conexidad por trayectorias en espacios topológicos.

11.1. Conexidad

Nota. Dados un espacio topológico (X, τ) y Y un subconjunto de X, denotaremos, como lo hemos venido haciendo, mediante $\tau\mid_Y$ a la topología de subespacio de Y en (X, τ).

Definiciones 11.1. Sea (X, τ) un espacio topológico arbitrario.

1. **Una división de** (X, τ) es una pareja $[U, V]$ de subconjuntos abiertos de (X, τ) tal que,
$$X = U \cup V \quad \text{y} \quad U \cap V = \emptyset$$
2. La división $[X, \emptyset]$ se llama **división trivial**.
3. El espacio (X, τ) **es conexo** si la única división que tiene es la trivial.
4. Si x y x' son puntos de X, diremos que x y x' están conectados en (X, τ) si existe un subespacio conexo $(Y, \tau\mid_Y)$ tal que x y x' pertenecen a Y.

Tenemos las siguientes proposiciones.

Proposición 11.1. *Si (X, τ) es un espacio topológico entonces son equivalentes,*

1. (X, τ) es conexo
2. Cualesquiera dos puntos de X están conectados en (X, τ).
3. Los únicos subconjuntos abiertos y cerrados de (X, τ) son X y $\emptyset$.
4. Siendo σ la topología discreta para $\{0, 1\}$; si la función,
$$f : (X, \tau) \longrightarrow (\{0, 1\}, \sigma)$$
es continua, entonces $f : X \to \{0, 1\}$ es constante.
5. Si (Y, σ) es un espacio discreto con más de un punto y la función,
$$f : (X, \tau) \longrightarrow (Y, \sigma)$$
es continua, entonces $f : X \to Y$ es constante.

Proposición 11.2. *Sean (X, τ) y (Y, σ) dos espacios topológicos y sea $f : (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ una función continua y suprayectiva. Si (X, τ) es conexo, entonces (Y, σ) es conexo.*

Proposición 11.3. *Sean, (X, τ) un espacio topológico, J un conjunto y $\left\{\left(Y_j, \tau\mid_{Y_j}\right)\right\}_{j\in J}$ una familia de subespacios conexos de (X, τ). Si $\bigcap_{i\in J} Y_j \neq \emptyset$, entonces $\left(\bigcup_{j\in J} Y_j, \tau\mid_{\bigcup_{j\in J} Y_j}\right)$ es conexo.*

El punto 4 de la definición 11.1 nos suigiere la posibilidad de construir una relación en el conjunto subyacente de cada espacio topológico.

Definiciones 11.2. Para cada espacio topológico (X, τ) definimos una relación $\approx_X$ en X de la siguiente manera:
Para cualesquiera x y x' en X, escribiremos $x \approx_X x'$ si, y sólo si, están conectados.

Las observaciones siguientes nos proporciona algunos resultados concernientes a la definición 11.2.

Observaciones 11.1.

1. La relación $\approx_X$ en X es de equivalencia. Las clases de equivalencia reciben el nombre de **componentes conexas** de X.
2. Cada componente conexa de X es un subespacio conexo de X.
3. Si $(Y, \tau\mid_Y)$ es un subespacio conexo de (X, τ), entonces existe una componente conexa de X que contiene a Y. Así pues, las componentes conexas de X son subespacios conexos maximales de X.
4. La componente conexa de cada x en X, es la unión de todos los subespacios conexos de (X, τ) que tienen a x como uno de sus elementos.
5. Cada componente conexa de X es cerrada.

11.2. Conexidad por trayectorias

Nota. Denotaremos mediante I al intervalo cerrado $[0, 1]$ junto con la topología de subespacio que le confiere el espacio de los números reales.

Definiciones 11.3. Sea (X, τ) un espacio topológico.

1. Una trayectoria en (X, τ) es una función continua $f : I \to (X, \tau)$.
2. El espacio (X, τ) es conectable por trayectorias (cpt), si para todo par de puntos x y x' en X, existe una trayectoria $f : I \to (X, \tau)$ tal que $f(0) = x$ y $f(1) = x'$. En este caso suele decirse que f es una trayectoria de origen x y extremo x'.

Tenemos las siguientes proposiciones.

Proposición 11.4. *Sean (X, τ) y (Y, σ) dos espacios topológicos y sea $f : (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ una función continua y suprayectiva. Si (X, τ) es cpt, entonces (Y, σ) es cpt.*

Proposición 11.5. *Sean, (X, τ) un espacio topológico, J un conjunto y $\left\{\left(Y_j, \tau\mid_{Y_j}\right)\right\}_{j\in J}$ una familia de subespacios cpt de (X, τ). Si $\bigcap\limits_{i\in J} Y_j \neq \emptyset$, entonces $\left(\bigcup\limits_{j\in J} Y_j, \tau\mid_{\bigcup\limits_{j\in J} Y_j}\right)$ es cpt.*

Definiciones 11.4. Para cada espacio topológico (X, τ) definimos una relación $\sim_X$ en X de la siguiente manera:
Para cualesquiera x y x' en X, escribiremos $x \sim_X x'$ si, y sólo si, existe una trayectoria en X de origen x y extremo x' .

Observación 11.2.

1. La relación $\sim_X$ en X es de equivalencia. Las clases de equivalencia reciben el nombre de **componentes por trayectorias** de X.
2. Cada componente por trayectorias de X es un subespacio cpt de X.
3. Si $(Y, \tau\mid_Y)$ es un subespacio cpt de (X, τ), entonces existe una componente por trayectorias de X que contiene a Y. Así pues, las componentes por trayectorias de X son subconjuntos cpt maximales de X.
4. La componente por trayectorias de cada x en X, es la unión de todos los subespacios cpt de (X, τ) que tienen a x como uno de sus elementos.

11.3. Categorías de conexión en $\mathfrak{Top}$.

Las proposiciones 11.1 y 11.5 son suceptibles de generalización. Antes introducimos algunas definiciones.

Definiciones 11.5. Sean, X un conjunto arbitrario y $M := \{1, ..., n\}$.

1. **Una cadena en** X es una familia $C := \{X_j\}_{j\in M}$ de subconjuntos de X tal que si C es no vacía, entonces,
   a) Si para algún j en M, X_j no es vacío, entonces para todo j en M, X_j no es vacío.
   b) Si C tiene al menos dos elementos entonces, para todo j en $\{1, ..., n-1\}$, $X_j \cap X_{j+1} \neq \emptyset$.
   Llamaremos a los elementos de una cadena C **eslabones.**

2. **Una familia encadenada de subconjuntos de** X es una familia tal que si no es vacía y algún miembro suyo no es vacío, entonces los demás miembros tampoco son vacíos, y para dos elementos cualesquiera A y B, existe una cadena $C = \{X_j\}_{j\in M}$ de elementos de la familia tal que, $X_1 = A$ y $X_n = B$.

Proposición 11.6. *Sean, (X, τ) un espacio topológico, J un conjunto y $\left\{A_j = \left(Y_j, \tau\mid_{Y_j}\right)\right\}_{j\in J}$ una familia de subespacios conexos de (X, τ) tal que la familia $\mathcal{C} = \{Y_j\}_{j\in J}$ está encadenada. Entonces el espacio $\left(\underset{j\in J}{\cup} Y_j, \tau\mid_{\underset{j\in J}{\cup} Y_j}\right)$ es conexo.*

Demostración. Si $\mathcal{C}$ es vacía, o bien, si cada elemento de $\mathcal{C}$ es vacío, entonces el resultado se sigue trivialmente[1]. Consideremos el caso en que $\mathcal{C}$ no es vacía y ninguno de sus elementos es vacío[2]. Utilizaremos la equivalencia de los incisos 1 y 4 de la proposición 11.1 para esta demostración. Denotemos $Y := \underset{j\in J}{\cup} Y_j$ y supongamos que $f : (Y, \tau\mid_Y) \to (\{0,1\}, \sigma)$ es una función continua donde σ es la topología discreta para $\{0,1\}$. Sea y' un elemento cualquiera de Y; entonces existe j' en J tal que y' es elemento de $Y_{j'}$. Sea $\iota_{j'} : Y_{j'} \hookrightarrow Y$ la inclusión de $Y_{j'}$ en Y. Puesto que $A_{j'} = \left(Y_{j'}, \tau\mid_{Y_{j'}}\right)$ es conexo y,

$$f \circ \iota_{j'} : A_{j'} \longrightarrow (\{0,1\}, \sigma)$$

es continua, se sigue que $f \circ \iota_{j'} : Y_{j'} \to \{0,1\}$ es constante; sin pérdida de generalidad, sea 0 el valor de $f \circ \iota$. Sea ahora j un elemento arbitrario pero fijo de J y consideremos al conjunto Y_j. Ya que $\mathcal{C}$ es una familia encadenada, existe una cadena $C = \{Y_{j_1}, ..., Y_{j_n}\}$ de elementos de $\mathcal{C}$ tal que $Y_{j_1} = Y_{j'}$ y $Y_{j_n} = Y_j$. Como para cada i en $\{1, ..., n\}$, el espacio A_{j_i} es conexo, se sigue que para cada composición,

$$f \circ \iota_{j_i} : A_{j_i} \longrightarrow (\{0,1\}, \sigma)$$

la función,

$$f \circ \iota_{j_i} : Y_{j_i} \to \{0,1\}$$

es constante. En consecuencia, al ser C una cadena, cada función $f \circ \iota_{j_i}$ tiene por valor 0. Además, al ser j un elemento arbitrario de J, se sigue que para todo j en J, $f \circ \iota_j$ es constante de valor 0. Luego entonces, la función,

$$f : Y \to \{0,1\}$$

es constante y su valor es 0. Colegimos que el espacio $(Y, \tau\mid_Y)$ es conexo. □

Para los espacios topológicos cpt tenemos una proposición semejante a la anterior.

Proposición 11.7. *Sean, (X, τ) un espacio topológico, J un conjunto y $\left\{A_j = \left(Y_j, \tau\mid_{Y_j}\right)\right\}_{j\in J}$ una familia de subespacios cpt de (X, τ) tal que la familia $\mathcal{C} = \{Y_j\}_{j\in J}$ está encadenada. Entonces el espacio $\left(\underset{j\in J}{\cup} Y_j, \tau\mid_{\underset{j\in J}{\cup} Y_j}\right)$ es cpt.*

Demostración. Como antes, consideremos el caso en que $\mathcal{C}$ no es vacía y ninguno de sus elementos es vacío. Denotemos $Y := \underset{j\in J}{\cup} Y_j$. Deseamos probar que para cualquier par de elementos de Y existe una trayectoria de origen uno de los puntos y extremo el otro punto. Así pues, sean x y x' un par de elementos en Y; entonces existen j y j' en J tales que $x \in Y_j$ y $x' \in Y_{j'}$. Si $Y_j = Y_{j'}$, entonces el resultado se sigue trivialmente ya que por hipótesis A_j es cpt. Supongamos entonces que $Y_j \neq Y_{j'}$. Puesto que $\mathcal{C}$ es una familia encadenada, existe una cadena $C = \{Y_{j_1}, ..., Y_{j_n}\}$ de elementos de $\mathcal{C}$ tal que $Y_{j_1} = Y_j$ y $Y_{j_n} = Y_{j'}$. Sea también $\{x_0, ..., x_n\}$ una familia finita de elementos de Y en la que, $x_0 = x$, $x_n = x'$, y para cada i en $\{1, ..., n-1\}$, x_i es un elemento de $Y_{j_i} \cap Y_{j_{(i+1)}}$. Por hipótesis, cada espacio A_{j_i} es cpt, en consecuencia, para cada i en $\{1, ..., n\}$ existe una trayectoria,

$$f_{j_i} : I \longrightarrow A_{j_i}$$

tal que $f_{j_i}(0) = x_{i-1}$ y $f_{j_i}(1) = x_i$. Ahora bien, para cada i en $\{1, ..., n\}$ consideremos la aplicación lineal,

$$\begin{array}{rccc} l_i : & \left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right] & \longrightarrow & [0,1] \\ & x & \longmapsto & nx+(1-i) \end{array}$$

[1] El espacio topológico vacío es conexo y cpt.

[2] Como $\mathcal{C}$ está encadenada, sólo hay dos casos: todos sus elementos vacíos o todos no vacíos.

para así construir la regla de correspondencia,

$$\begin{array}{cccc} f: & [0,1] & \longrightarrow & Y \\ & {\scriptstyle x\in\left[\frac{i-1}{n},\frac{i}{n}\right]} & \longrightarrow & {\scriptstyle f_{j_i}\circ l_i(x)} \end{array}$$

La regla de correspondencia f está bien definida, ya que para cada i en $\{1,...,n\}$ tenemos que,

$$f_{j_i}(1) = f_{j_i} \circ l_i\left(\tfrac{i}{n}\right) = x_i = f_{j_{(i+1)}} \circ l_{(i+1)}\left(\tfrac{i}{n}\right) = f_{j_{(i+1)}}(0)$$

Por lo tanto, f es una función; además, siendo $\iota_j : \left[\frac{j-1}{n}, \frac{j}{n}\right] \hookrightarrow [0,1]$ la inclusión de $\left[\frac{j-1}{n}, \frac{j}{n}\right]$ en $[0,1]$, para cada j en $\{1,...,n\}$ tenemos que,

$$f \circ \iota_j = f_{j_i} \circ l_i$$

En consecuencia, f es continua en cada uno de los intervalos del conjunto,

$$\left\{\left[0, \frac{1}{n}\right], ..., \left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right], \ldots, \left[\frac{n-1}{n}, 1\right]\right\}$$

el cual es una cubierta finita de cerrados para I. Se sigue que $f : I \to (Y, \tau\mid_Y)$ es continua y por lo tanto una trayectoria en $(Y, \tau\mid_Y)$ que, ciertamente, tiene como origen a x y como extremo a x'. □

Note. Para las observaciones, definiciones y resultados subsecuentes de este trabajo, es importante recordar algunos aspectos fundamentales en el concepto de función:

Dados dos conjuntos arbitrarios, X y Y, recordemos que un conjunto R es una relación de X a Y si, $R \subseteq X \times Y$. También recordemos que el dominio de R, $Dom(R)$, es el conjunto,

$$Dom(R) = \{x \in X \mid \text{existe } y \in Y \text{tal que } (x,y) \in R\}$$

Así, cuando $Y = \emptyset$, se tiene que $Dom(R) = \emptyset$. Cuando una relación f de X a Y cumple el par de condiciones:
(a) $Dom(f) = X$.
(b) Si $(x,y), (x,y') \in f$, entonces $y = y'$.
Entonces dicha relación f es, como sabemos, una función de X a Y, lo que denotamos por $f : X \to Y$.

Para nuestros fines es importante observar los siguientes hechos:

1. Para cada conjunto Y existe una única función f de $\emptyset$ en Y, que es $f = \emptyset$, llamada la función vacía de codominio Y.
2. Dada cualquier función $f : X \to Y$, si $Y = \emptyset$, entonces $X = \emptyset$.

También recordemos que dada una función $f : X \to Y$, si M es un subconjunto de X, entonces,

$$f(M) := \{f(x) : x \in M\}$$

Y dado un subconjunto N de Y, la imagen inversa de N es el subconjunto de X,

$$f^{-1}(N) := \{x \in X \mid f(x) \in N\}$$

En particular, dado un elemento y de Y, la imagen inversa de y es el subconjunto de X,

$$f^{-1}(\{y\}) = \{x \in X \mid f(x) = y\}$$

Las fibras de f son todos los subconjuntos de X que son imagen inversa de algún elemento y de Y.

Observación 11.3. Sean, X y Z conjuntos, $\mathcal{C} = \{Y_j\}_{j\in J}$ una familia encadenada en X y $f : Y \to Z$ una función, donde $Y = \bigcup_{j\in J} Y_j$. Consideremos el sumidero cartesiano de inclusiones,

$$\{\iota_j : Y_j \hookrightarrow Y\}_{i\in J}$$

Si $\mathcal{C} = \emptyset$, entonces f es la función vacía de codominio Z. Supongamos que $\mathcal{C}$ no es vacía y que para cada j en J,

$$f \circ \iota_j : Y_j \to Z$$

es una función vacía de codominio Z, o bien, si no es vacía, una función constante. Si alguna función ι_j es vacía (es decir, $Y_j = \emptyset$), entonces, dado que $\mathcal{C}$ es una familia encadenada, todas las funciones ι_j son vacías; por tanto

$\mathcal{C} = \{\emptyset\}$. Esto implica que $Y = \emptyset$ y se sigue que f es la función vacía de codominio Z. Por otro lado, si alguna función ι_j es no vacía (es decir, $Y_j \neq \emptyset$) entonces, dado que $\mathcal{C}$ es una familia encadenada, ninguna función ι_j es vacía, luego, todas las funciones $f \circ \iota_j$ son constantes. En este caso Y no es vacío y por tanto $f : Y \to Z$ no es vacía. Por la misma razón de que $\mathcal{C}$ es una familia encadenada, todas las funciones $f \circ \iota_j$ tienen el mismo valor (recordemos la demostración de la proposición 11.6). Colegimos que f es una función constante.

En conclusión: Siendo $\mathcal{C} = \{Y_j\}_{j\in J}$ una familia encadenada en X y $f : Y \to Z$ una función, donde $Y = \bigcup\limits_{j\in J} Y_j$; si es verdad que para cada j en J,

$$f \circ \iota_j : Y_j \to Z$$

es una función vacía de codominio Z, o bien, una función constante, entonces $f : Y \to Z$ es la función vacía de codominio Z, o bien, una función constante.

Notación. Con el simbolo $|\mathfrak{Set}|$ denotaremos a la clase de todos los conjuntos. Definimos $\underline{\mathcal{A}_m^{\mathfrak{Set}}} := \{X \in |\mathfrak{Set}| : |X| \leq 1\}$. Análogamente, $\underline{\mathcal{A}_m^{\mathfrak{Top}}} := \{(X, \tau) \in |\mathfrak{Top}| : |X| \leq 1\}$.

Observación 11.4. Sea $f : Y \to Z$ la función vacía de codominio Z. Observemos que f puede expresarse como $f = h \circ g$, donde g es la función vacía de codomio $\emptyset$ y h es la función vacía de codominio Z. Si $Y \neq \emptyset$ y f es constante, digamos de valor z_0, entonces f puede ser expresada como $f = h \circ g$, donde,

$$\begin{array}{rccc} g: & Y & \longrightarrow & \{z_0\} \\ & y & \longmapsto & z_0 \end{array} \quad \text{y} \quad \begin{array}{rccc} h: & \{z_0\} & \longrightarrow & Z \\ & z_0 & \longmapsto & f(y_0) \end{array}$$

Así pues, en cualquiera de los dos casos siempre es posible hayar un conjunto X en $\underline{\mathcal{A}_m^{\mathfrak{Set}}}$ y un par de funciones,

$$g : Y \longrightarrow X \quad \text{y} \quad h : X \longrightarrow Z$$

tales que $f = h \circ g$.

Supongamos ahora que $f : Y \to Z$ es una función para la cual existen un conjunto X en $\underline{\mathcal{A}_m^{\mathfrak{Set}}}$ y un par de funciones,

$$g : Y \longrightarrow X \quad \text{y} \quad h : X \longrightarrow Z$$

tales que $f = h \circ g$. Si $X = \emptyset$ entonces $Y = \emptyset$; luego, f es la función vacía de codominio Z. Si X es un conjunto unitario y f no es vacía, entonces f es constante.

En lo que sigue, cuando digamos que una función es constante, estaremos suponiendo que dicha función no es vacía.

Definición 11.6. Diremos que una función $f : Y \to Z$ **es** $\underline{\mathcal{A}_m^{\mathfrak{Set}}}$**-constante** si existe un conjunto X en $\underline{\mathcal{A}_m^{\mathfrak{Set}}}$ y un par de funciones,

$$g : Y \longrightarrow X \quad \text{y} \quad h : X \longrightarrow Z$$

tales que $f = h \circ g$.

Desde luego, la definición 11.6 tiene cabida en el contexto topológico.

Definición 11.7. Diremos que una función continua $f : (Y, \sigma) \to (Z, \eta)$ **es** $\underline{\mathcal{A}_m^{\mathfrak{Top}}}$**-constante** si existe un espacio (X, τ) en $\underline{\mathcal{A}_m^{\mathfrak{Top}}}$ y un par de funciones continuas,

$$g : (Y, \sigma) \longrightarrow (X, \tau) \quad \text{y} \quad h : (X, \tau) \longrightarrow (Z, \eta)$$

tales que $f = h \circ g$.

Observación 11.5. De la observación 11.4 colegimos que las funciones $\underline{\mathcal{A}_m^{\mathfrak{Set}}}$-constantes son precisamente las funciones vacías de codominio no necesariamente vacío, o bien, las funciones constantes. En $\mathfrak{Top}$ tenemos un resultado análogo: las funciones continuas $\underline{\mathcal{A}_m^{\mathfrak{Top}}}$-constantes son precisamente las funciones continuas vacías de codominio no necesariamente vacío, o bien, las funciones continuas que son constantes; es decir, son las funciones continuas cuya función subyacente es $\underline{\mathcal{A}_m^{\mathfrak{Set}}}$-constante.

La siguiente proposición se sigue de la observación 11.1 y utilizamos la terminología introducida en la definición 11.6.

Proposición 11.8. *Sean, X un conjunto, $\mathcal{C} = \{Y_j\}_{j\in J}$ una familia de subconjuntos de X, $Y := \bigcup\limits_{j\in J} Y_j$ y $S = \{\iota_j : Y_j \hookrightarrow Y\}_{i\in J}$ el sumidero cartesiano de inclusiones de los Y_j en Y. Si $\mathcal{C} = \{Y_j\}_{j\in J}$ es una familia encadenada en X entonces el sumidero S satisface,*

1. *Si alguna función ι_j no es vacía, entonces ninguna función ι_j es vacía.*
2. *Dados un conjunto Z y una función $f : Y \to Z$; si para cada j en J tenemos que,*

$$f \circ \iota_j : Y_j \to Z$$

es $\underline{\mathcal{A}_m^{\mathfrak{Set}}}$-constante, entonces $f : Y \to Z$ es $\underline{\mathcal{A}_m^{\mathfrak{Set}}}$-constante.

Es legítimo preguntarnos si el recírpoco de la proposición 11.8 se verifica. El siguiente resultado da respuesta a esta cuestión de manera positiva.

Proposición 11.9. *Sean, X un conjunto y $\mathcal{C} = \{Y_j\}_{j\in J}$ una familia de subconjuntos de X. Denotemos $Y = \bigcup\limits_{j\in J} Y_j$ y sea,*

$$S = \{\iota_j : Y_j \hookrightarrow Y\}_{i\in J}$$

el sumidero cartesiano de inclusiones de cada Y_j en Y. Son equivalentes,

1. *La familia $\mathcal{C}$ está encadenada.*
2. *El sumidero S satisface,*
   a) Si alguna función ι_j no es vacía, entonces ninguna función ι_j es vacía.
   b) Dados un conjunto Z y una función $f : Y \to Z$; si para cada j en J tenemos que,

$$f \circ \iota_j : Y_j \to Z$$

es $\underline{\mathcal{A}_m^{\mathfrak{Set}}}$-constante, entonces $f : Y \to Z$ es $\underline{\mathcal{A}_m^{\mathfrak{Set}}}$-constante.

Demostración. $1 \Rightarrow 2\rfloor$ Es la proposición 11.8.

$2 \Rightarrow 1\rfloor$ Supongamos que $\mathcal{C}$ tiene un elemento no vacío, digamos Y_{j_0}. Entonces la función ι_{j_0} no es vacía. Por 2 (a), ninguna función ι_j es vacía; esto significa que ningún elemento de $\mathcal{C}$ es vacío.

Sean A y B un par de elementos arbitrarios de $\mathcal{C}$. Definamos,

$$\mathcal{C}_A = \{Y_j \in \mathcal{C} \mid \text{existe una cadena de } A \text{ en } Y_j \text{ con eslabones en } \mathcal{C}\}$$

y

$$\mathcal{C}_B = \{Y_j \in \mathcal{C} \mid \text{existe una cadena de } B \text{ en } Y_j \text{ con eslabones en } \mathcal{C}\}$$

Supongamos que no hay una cadena de elementos de $\mathcal{C}$ cuyos primer y último eslabones sean A y B, respectivamente. En este caso, los conjuntos $\mathcal{C}_A$ y $\mathcal{C}_B$ son disjuntos. También resultan disjuntos los conjuntos $\cup\mathcal{C}_A$ y $\cup\mathcal{C}_B$. Supongamos que $Y \big/ (\cup\mathcal{C}_A \bigcup \cup\mathcal{C}_B)$ no es vacío. Sea $Z = \{z_1, z_2, z_3\}$ un conjunto de tres elementos y definamos,

$$\begin{array}{rccc} p: & Y & \longrightarrow & Z \\ & x \in \cup\mathcal{C}_A & \longmapsto & z_1 \\ & x \in \cup\mathcal{C}_B & \longmapsto & z_2 \\ & x \in Y\setminus(\cup\mathcal{C}_A \bigcup \cup\mathcal{C}_B) & \longmapsto & z_3 \end{array}$$

Observemos que para cada j en J, el correspondiente conjunto Y_j está contenido en una, y sólo una, fibra de p. Esto implica que para cada j en J, la composición,

$$p \circ \iota_j : Y_j \longrightarrow Z$$

es constante; luego, por 2 (b), p es constante. Pero esto último no es posible; consecuentemente, existe una cadena de elementos de $\mathcal{C}$ cuyos primer y último eslabónes son A y B, respectivamente. Concluimos que la familia $\mathcal{C}$ está encadenada. Si $Y\setminus(\cup\mathcal{C}_A \bigcup \cup\mathcal{C}_B)$ es vacío, consideremos un conjunto Z de dos elementos, para luego definir una función $p : Y \to Z$ cuyas fibras sean precisamente los conjuntos $\cup\mathcal{C}_A$ y $\cup\mathcal{C}_B$; luego, con un argumento similar al anterior, podemos concluir que $\mathcal{C}$ está encadenada. □

Corolario 11.1. *Sean, X un conjunto y $\mathcal{C} = \{Y_j\}_{j\in J}$ una familia no vacía de subconjuntos no vacíos de X. Denotemos $Y := \bigcup\limits_{j\in J} Y_j$ y sea,*

$$S = \{\iota_j : Y_j \hookrightarrow Y\}_{j\in J}$$

el sumidero cartesiano de inclusiones de cada Y_j en Y. Son equivalentes,

1. *La familia $\mathcal{C}$ está encadenada.*
2. *Dados un conjunto Z y una función $f : Y \to Z$, si para cada j en J tenemos que,*

$$f \circ \iota_j : Y_j \longrightarrow Z$$

es constante, entonces $f : Y \to Z$ es constante.

La siguiente definición ofrece una generalización del concepto de función $\underline{\mathcal{A}_m^{\mathfrak{Set}}}$-constante.

Definición 11.8. Sea $\underline{\mathfrak{C}}$ una clase no vacía de conjuntos. **Una función** $f : X \to Y$ **es $\underline{\mathfrak{C}}$-constante** si existen funciones,

$$g : X \longrightarrow C \quad \text{y} \quad h : C \longrightarrow Y$$

con C en $\underline{\mathfrak{C}}$, tales que $f = h \circ g$.

Naturalmente, la definición 11.8 tiene cabida en el contexto topológico.

Definición 11.9. Sea $\underline{\mathfrak{C}}$ una clase no vacía de espacios topológicos. **Una función continua** $f : (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ **es $\underline{\mathfrak{C}}$-constante** si existen funciones continuas,

$$g : (X, \tau) \longrightarrow (Z, \eta) \quad \text{y} \quad h : (Z, \eta) \longrightarrow (Y, \sigma)$$

con (Z, η) en $\underline{\mathfrak{C}}$, tales que $f = h \circ g$.

Esta última definición es, desde luego, una generalización de la definición 11.7.

Notación. Si $\underline{\mathfrak{C}}$ es una clase no vacía de conjuntos, mediante el símbolo $\mathtt{C}_{\underline{\mathfrak{C}}}$ denotaremos a la clase de funciones $\underline{\mathfrak{C}}$-constantes. Análogamente, si $\underline{\mathfrak{C}}$ es una clase no vacía de espacios topologicos, el simbolo $\mathtt{C}_{\underline{\mathfrak{C}}}$ denotará la clase de funciones continuas $\underline{\mathfrak{C}}$-constantes.

Observación 11.6. La proposición 11.9 nos da una caracterización del concepto de familia encadenada en términos de funciones. Como podemos observar, el sumidero cartesiano de inclusiones S juega un papel fundamental en dicha caracterización. Con la finalidad de dar un viso más general a la proposición 11.9, presentamos la siguiente definición.

Definición 11.10. Sean, I una clase y $S = (f_i : X_i \to X)_{i \in I}$ un sumidero cartesiano de funciones; decimos que **el sumidero S está $\underline{\mathcal{A}_m^{\mathfrak{Set}}}$-encadenado** si las siguientes condiciones se satisfacen,

1. Si alguna función f_i no es vacía, entonces ninguna función f_i es vacía.
2. Dados un conjunto Y y una función $f : X \to Y$; si para cada i en I tenemos que,

$$f \circ f_i : X_i \longrightarrow Y$$

es $\underline{\mathcal{A}_m^{\mathfrak{Set}}}$-constante, entonces $f : X \to Y$ es $\underline{\mathcal{A}_m^{\mathfrak{Set}}}$-constante.

Procediendo como antes, damos a continuación una *"versión topológica"* de la definición 11.10.

Definición 11.11. Sean, I una clase, $((X_i, \tau_i))_{i \in I}$ una clase de espacios topológicos, $S = (f_i : X_i \to X)_{i \in I}$ un sumidero cartesiano y τ una topología para X; decimos que S **está $\underline{\mathcal{A}_m^{\mathfrak{Top}}}$-encadenado respecto de** $(\tau_i, \tau)_{i \in I}$ si las siguientes condiciones se satisfacen,

1. Si alguna función f_i no es vacía, entonces ninguna función f_i es vacía.
2. Para cada i en I, $f_i : (X_i, \tau_i) \longrightarrow (X, \tau)$ es continua.
3. Dados un espacio topológico (Y, σ) y una función continua $(f, (\tau, \sigma))$; si para cada i en I tenemos que $(f \circ f_i, (\tau_i, \sigma))$ es $\underline{\mathcal{A}_m^{\mathfrak{Top}}}$-constante, entonces $(f, (\tau, \sigma))$ es $\underline{\mathcal{A}_m^{\mathfrak{Top}}}$-constante.

Las definiciones 11.9 y 11.10 sugieren el siguiente concepto.

Definición 11.12. Sean, I una clase, $((X_i, \tau_i))_{i \in I}$ una clase de espacios topológicos, $S = (f_i : X_i \to X)_{i \in I}$ un sumidero cartesiano y τ una topología para X; dada una clase no vacía de espacios topológicos $\underline{\mathfrak{C}}$, decimos que S **está $\underline{\mathfrak{C}}$-encadenado respecto de** $(\tau_i, \tau)_{i \in I}$ si las siguientes condiciones se satisfacen,

1. Si alguna función f_i no es vacía, entonces ninguna función f_i es vacía.
2. Para cada i en I, $f_i : (X_i, \tau_i) \longrightarrow (X, \tau)$ es continua.
3. Dados un espacio topológico (Y, σ) y una función continua $(f, (\tau, \sigma))$; si para cada i en I tenemos que $(f \circ f_i, (\tau_i, \sigma))$ es $\underline{\mathfrak{C}}$-constante, entonces $(f, (\tau, \sigma))$ es $\underline{\mathfrak{C}}$-constante.

La siguiente proposición nos será de utilidad un poco más adelante.

Proposición 11.10. *Sean, I una clase, $((X_i,\tau_i))_{i\in I}$ una clase de espacios topológicos, $S=(f_i:X_i\to X)_{i\in I}$ un sumidero cartesiano y τ una topología para X. Entonces S satisface la condición 3 de la definición 11.11, si, y sólo si, S satisface la condición 2 de la definición 11.10.*

Demostración. $\Rightarrow\rfloor$ Supongamos que S satisface la condición 3 de la definición 11.11. Sean, Y un conjunto y $f:X\to Y$ una función tales que para cada i en I, la composición $f\circ f_i:X_i\to Y$ es $\underline{\mathcal{A}_m^{\mathfrak{Set}}}$-constante. Deseamos probar que f es $\underline{\mathcal{A}_m^{\mathfrak{Set}}}$-constante. Sea σ la topología indiscreta para Y; entonces la función, $f:(X,\tau)\to(Y,\sigma)$ es continua. Siendo cada $f\circ f_i:X_i\to Y$ es $\underline{\mathcal{A}_m^{\mathfrak{Set}}}$-constante, de la observación 11.5 se sigue que para cada i en I, $(f\circ f_i,(\tau_i,\sigma))$ es $\underline{\mathcal{A}_m^{\mathfrak{Top}}}$-constante. En consecuencia, $(f,(\tau,\sigma))$ es $\underline{\mathcal{A}_m^{\mathfrak{Top}}}$-constante. Nuevamente, por la observación 11.5, la función $f:X\to Y$ es $\underline{\mathcal{A}_m^{\mathfrak{Set}}}$-constante.

$\Leftarrow\rfloor$ Supongamos ahora que S satisface la condición 2 de la definición 11.10. Veamos entonces que S satisface la confición 3 de la definición 11.11. Dados un espacio topológico (Y,σ) y una función continua $(f,(\tau,\sigma))$, supongamos que para cada i en I, $(f\circ f_i,(\tau_i,\sigma))$ es $\underline{\mathcal{A}_m^{\mathfrak{Top}}}$-constante. Como consecuencia de la observación 11.5, cada función $f\circ f_i:X_i\to Y$ es $\underline{\mathcal{A}_m^{\mathfrak{Set}}}$-constante; luego, la función $f:X\to Y$ es $\underline{\mathcal{A}_m^{\mathfrak{Set}}}$-constante. Entonces $(f,(\tau,\sigma))$ es una función continua cuya función subyacente es $\underline{\mathcal{A}_m^{\mathfrak{Set}}}$-constante. Se sigue que $(f,(\tau,\sigma))$ es $\underline{\mathcal{A}_m^{\mathfrak{Top}}}$-constante. $\square$

El siguiente resultado es una generalización natural de la proposición 11.9, y su demostración es similar a la de aquélla.

Proposición 11.11. *Sean, I una clase y $S=(f_i:X_i\to X)_{i\in I}$ un sumidero cartesiano. Denotemos $\mathcal{C}:=\{f_i(X_i)\}_{i\in I}$ y $Y:=\bigcup\limits_{i\in I} f_i(X_i)$. Son equivalentes,*

1. *La clase $\mathcal{C}$ está encadenada*[3].
2. *El sumidero cartesiano $S':=(f_i:X_i\to Y)_{i\in I}$ está $\underline{\mathcal{A}_m^{\mathfrak{Set}}}$-encadenado.*

Demostración. $1\Rightarrow 2\rfloor$ Sean, Z un conjunto y $f:Y\to Z$ una función. Si I es vacía, Y es vacío, entonces $f:Y\to Z$ es la función vacía de codominio Z; luego, la clase $(f\circ f_i)_{i\in I}$ es vacía y $f:Y\to Z$ es $\underline{\mathcal{A}_m^{\mathfrak{Set}}}$-constante. En este caso S' está $\underline{\mathcal{A}_m^{\mathfrak{Set}}}$-encadenado. Supongamos, pues, que I no es vacía. Veamos que también en este caso el sumidero S' satisface las dos condiciones de la definición 11.10.

1. Supongamos que i_0 es un elemento de I para el cual la función f_{i_0} no es vacía. Con este supuesto, el conjunto $f_{i_0}(X_{i_0})$ no es vacío, y dado que $\mathcal{C}$ está encadenada, ningún conjunto $f_i(X_i)$ es vacío; consecuentemente, ninguna función f_i es vacía.

2. Supongamos que para cada i en I, $f\circ f_i:X_i\to Z$ es $\underline{\mathcal{A}_m^{\mathfrak{Set}}}$-constante. Por el inciso anterior, el conjunto Y no es vacío, por tanto, la función $f:Y\to Z$ no es vacía. Se sigue que ninguna función $f\circ f_i$ es vacía. En consecuencia, cada $f\circ f_i$ es constante. Además, todas las funciones $f\circ f_i$ tienen el mismo valor, pues $\mathcal{C}$ está encadenada. Estos argumentos implican que $f:Y\to Z$ es una función constante, luego, una función $\underline{\mathcal{A}_m^{\mathfrak{Set}}}$-constante.

$2\Rightarrow 1\rfloor$ Supongamos que $\mathcal{C}$ tiene un elemento no vacío, digamos $f_{i_0}(X_{i_0})$. Entonces las función f_{i_0} no es vacía; en consecuencia. Por 1 de la definición 11.10, ninguna función f_i es vacía; esto significa que ningún elemento de $\mathcal{C}$ es vacío. Sean A y B un par de elementos arbitrarios de $\mathcal{C}$. Definamos,

$$\mathcal{C}_A=\{F\in\mathcal{C}\mid \text{existe una cadena de } A \text{ en } F \text{ con eslabones en } \mathcal{C}\}$$

y

$$\mathcal{C}_B=\{F\in\mathcal{C}\mid \text{existe una cadena de } B \text{ en } F \text{ con eslabones en } \mathcal{C}\}$$

Supongamos que no hay una cadena de elementos de $\mathcal{C}$ cuyos primer y último eslabones sean A y B, respectivamente. En este caso, los conjuntos $\mathcal{C}_A$ y $\mathcal{C}_B$ son disjuntos. Supongamos que $Y\big/_{(\cup\mathcal{C}_A\bigcup\cup\mathcal{C}_B)}$ no es vacío. Sea $Z=\{z_1,z_2,z_3\}$ un conjunto de tres elementos y definamos,

$$\begin{array}{rccc} p: & Y & \longrightarrow & Z \\ & x\in\cup\mathcal{C}_A & \longmapsto & z_1 \\ & x\in\cup\mathcal{C}_B & \longmapsto & z_2 \\ & x\in Y\backslash(\cup\mathcal{C}_A\bigcup\cup\mathcal{C}_B) & \longmapsto & z_3 \end{array}$$

[3] *En realidad $\mathcal{C}$ es una familia de conjuntos indexada por la clase I.*

Observemos que para cada i en I, el correspondiente conjunto $f_i(X_i)$ está contenido en una, y sólo una, fibra de p. Esto implica que para cada i en I, la composición,

$$p \circ f_i : X_i \longrightarrow Z$$

es constante; luego, por 2 (b), p es constante. Pero esto último no es posible; consecuentemente, existe una cadena de elementos de $\mathcal{C}$ cuyos primer y último eslabónes son A y B, respectivamente. Concluimos que la familia $\mathcal{C}$ está encadenada. Si $Y \backslash (\cup \mathcal{C}_A \bigcup \cup \mathcal{C}_B)$ es vacío, consideremos un conjunto Z de dos elementos, para luego definir una función $p : Y \to Z$ cuyas fibras sean precisamente los conjuntos $\cup \mathcal{C}_A$ y $\cup \mathcal{C}_B$; luego, con un argumento similar al anterior, podemos concluir que $\mathcal{C}$ está encadenada. □

Corolario 11.2. *Sean, I una clase no vacía, $S = (f_i : X_i \to X)_{i \in I}$ un sumidero cartesiano de funciones no vacías*[4]*, $\mathcal{C} := \{f_i(X_i)\}_{i \in I}$ y $Y := \bigcup\limits_{i \in I} f_i(X_i)$. Son equivalentes,*

1. *La clase $\mathcal{C}$ está encadenada.*
2. *Dados un conjunto Z y una función $f : Y \to Z$, si para cada i en I tenemos que,*

$$f \circ f_i : X_i \longrightarrow Z$$

es constante, entonces $f : Y \to Z$ es constante.

Proposición 11.12. *Sean, I una clase y $S = (f_i : X_i \to X)_{i \in I}$ un sumidero cartesiano. Denotemos $\mathcal{C} := \{f_i(X_i)\}_{i \in I}$ y $Y := \bigcup\limits_{i \in I} f_i(X_i)$. Si el sumidero S satisface la condicion 2 de la definición 11.10 y X no es un conjunto unitario, entonces $Y = X$.*

Demostración. Supongamos que Y es vacío. Si X no es vacío, entonces X tienen al menos dos puntos; luego, la función identidad 1_X satisface la hipótesis del inciso 2 de la definición 11.10, pero no es constante. Desde luego, esto va en contra de la hipótesis consistente en que S está $\underline{\mathcal{A}_m^{\mathfrak{Set}}}$-encadenado. Se sigue que X es vacío, y consecuentemente, $X = Y$. Supongamos ahora que Y no es vacío. Deseamos probar la igualdad $X = Y$. Si $X \backslash Y$ no es vacío, sea entonces $p : X \longrightarrow Z$ la función cuyas fibras son precisamente los conjuntos $X \backslash Y$ y Y. Así, para cada i en I,

$$p \circ f_i : X_i \longrightarrow Z$$

es una función $\underline{\mathcal{A}_m^{\mathfrak{Set}}}$-constante. Sin embargo, p no es $\underline{\mathcal{A}_m^{\mathfrak{Set}}}$-constante. Dado que esto no es posible, es necesario concluir que $X = Y$. □

Observación 11.7. En la proposición 11.12 hemos pedido como una de las hipótesis que el conjunto X, codominio del sumidero cartesiano S, no sea unitario. Siendo X unitario, podemos construir un sumidero cartesiano $\underline{\mathcal{A}_m^{\mathfrak{Set}}}$-encadenado para el cual $Y = \emptyset$. En efecto: Sea $\varnothing_X$ la función vacía de codominio $X = \{x\}$. Entonces $S = \{\varnothing_X\}$ está $\underline{\mathcal{A}_m^{\mathfrak{Set}}}$-encadenado y $Y = \emptyset$.

Teorema 11.1. *Sean, I una clase, $\mathcal{C} := ((X_i, \tau_i))_{i \in I}$ una clase de espacios topológicos conexos (cpt), $S = (f_i : X_i \to X)_{i \in I}$ un sumidero cartesiano y τ una topología para X; si S está $\underline{\mathcal{A}_m^{\mathfrak{Top}}}$-encadenado respecto de $(\tau_i, \tau)_{i \in I}$, entonces (X, τ) es conexo (cpt).*

Demostración. Si X es vacío o unitario entonces (X, τ) es conexo (cpt). Supongamos, pues, que X no es vacío ni unitario. Por hipótesis, S está $\underline{\mathcal{A}_m^{\mathfrak{Top}}}$-encadenado, luego, por el lema 11.10, S está $\underline{\mathcal{A}_m^{\mathfrak{Set}}}$-encadenado. Por la proposición 11.12, $X = \bigcup\limits_{i \in I} f_i(X_i)$. A su vez, las proposiciones 11.1 (11.4) y 11.11 implican que $\left\{\left(f_i(X_i), \tau \mid_{f_i(X_i)}\right)\right\}_{i \in I}$ es una familia de subespacios conexos (cpt) de (X, τ) para la cual, la familia $\{f_i(X_i)\}_{i \in I}$ está encadenada. Por último, por la proposición 11.6 (proposición 11.7), el espacio (X, τ) es conexo (cpt). □

Parafraseando la proposición 11.1, ésta nos dice que todo sumidero cartesiano $\underline{\mathcal{A}_m^{\mathfrak{Top}}}$-encadenado, de dominio contenido en la clase de los espacios topológicos conexos (cpt), tiene su codominio en la clase de los espacios topológicos conexos (cpt).

Observaciones 11.8. Analicemos más de cerca la definición 11.10. Sean, $S = (f_i : X_i \to X)_{i \in I}$ un sumidero cartesiano y $\mathcal{C} = \{f_i(X_i)\}_{i \in I}$.

1. Supongamos que S satisface la primera propiedad: *"Si alguna función f_i no es vacía, entonces ninguna función f_i es vacía"*. Ésta nos garantiza que si algún elemento de la familia $\mathcal{C} = \{f_i(X_i)\}_{i \in I}$ no es vacío, entonces ningún elemento de $\mathcal{C}$ es vacío. Así pues, sin esta propiedad no podemos afirmar, en principio, que $\mathcal{C}$ no tiene elementos vacíos, bajo la hipótesis de que hay al menos uno entre sus elementos que no es vacío.

[4] Para toda i en I, f_i no es vacía.

2. Supongamos que el conjunto X no es vacío ni unitario y que S satisface la segunda propiedad: *"Dados un conjunto Y y una función $f : X \to Y$; si para cada i en I tenemos que,*

$$f \circ f_i : X_i \to Y$$

   es $\underline{\mathcal{A}_m^{\mathfrak{Set}}}$-constante, entonces $f : X \to Y$ es $\underline{\mathcal{A}_m^{\mathfrak{Set}}}$-constante". De acuerdo a la proposición 11.12, ésta propiedad nos asegura que la familia $\mathcal{C}$ tiene elementos no vacíos, pues $X = \bigcup\limits_{i \in I} f_i(X_i)$. Todavía más; si denotamos $J := \{i \in I : f_i(X_i) \neq \emptyset\}$, entonces, el sumidero cartesiano,

$$S' = (f_i : X_i \to X)_{i \in J}$$

   está $\underline{\mathcal{A}_m^{\mathfrak{Set}}}$-encadenado. En efecto; es claro que la primera condición de la definición 11.10 se cumple. Veamos la segunda condición. Sea $f : X \to Y$ una función tal que para cada i en J, $f \circ f_i$ es $\underline{\mathcal{A}_m^{\mathfrak{Set}}}$-constante. Buscamos demostrar que $f : X \to Y$ es $\underline{\mathcal{A}_m^{\mathfrak{Set}}}$-constante. Si $J = I$, entonces $S' = S$ y se sigue que $f : X \to Y$ es $\underline{\mathcal{A}_m^{\mathfrak{Set}}}$-constante. Si $I \backslash J$ no es vacío, observemos que para cada i en $I \backslash J$, $f \circ f_i$ es la función vacía de codominio Y, la cual es $\underline{\mathcal{A}_m^{\mathfrak{Set}}}$-constante. Se sigue que para toda i en I, $f \circ f_i$ es $\underline{\mathcal{A}_m^{\mathfrak{Set}}}$-constante. Esto implica que la función $f : X \to Y$ es $\underline{\mathcal{A}_m^{\mathfrak{Set}}}$-constante.

Ahora bien, digamos que τ_i y τ son sendas topologías para los conjuntos X_i y para el conjunto X, respectivamente, de tal modo que los espacios topológicos (X_i, τ_i) son conexos (cpt) y el sumidero S satisface las condiciones 2 y 3 de la definición 11.11, entonces, en vista de las observaciones que recién hemos hecho y del lema 11.10, el sumidero S' está $\underline{\mathcal{A}_m^{\mathfrak{Top}}}$-encadenado respecto de $(\tau_i, \tau)_{i \in I}$. Por la proposición 11.1, (X, τ) es conexo (cpt).

Hemos así probado el siguiente teorema.

Teorema 11.2. *Sean, I una clase, $\mathcal{C} := ((X_i, \tau_i))_{i \in I}$ una clase de espacios topológicos conexos (cpt), $S = (f_i : X_i \to X)_{i \in I}$ un sumidero cartesiano y τ una topología para X; si S satisface las condiciones 1 y 2 de la definición 11.11, entonces (X, τ) es conexo (cpt).*

Las observaciones anteriores junto con el teorema 11.2, dan la pauta para el siguiente par de definiciones.

Definición 11.13. Sean, I una clase, $\mathcal{C} := ((X_i, \tau_i))_{i \in I}$ una clase de espacios topológicos, $S = (f_i : X_i \to X)_{i \in I}$ un sumidero cartesiano y τ una topología para X; diremos que S **está propiamente $\underline{\mathcal{A}_m^{\mathfrak{Top}}}$-encadenado respecto de** $(\tau_i, \tau)_{i \in I}$ si se satisfacen,

1. Para cada i en I, $f_i : (X_i, \tau_i) \longrightarrow (X, \tau)$ es continua.
2. Dados un espacio topológico (Y, σ) y una función continua $(f, (\tau, \sigma))$; si para cada i en I tenemos que $(f \circ f_i, (\tau_i, \sigma))$ es $\underline{\mathcal{A}_m^{\mathfrak{Top}}}$-constante, entonces $(f, (\tau, \sigma))$ es $\underline{\mathcal{A}_m^{\mathfrak{Top}}}$-constante.

El siguiente concepto es una nueva versión de la definición 11.12.

Definición 11.14. Sean, I una clase, $\mathcal{C} := ((X_i, \tau_i))_{i \in I}$ una clase de espacios topológicos, $S = (f_i : X_i \to X)_{i \in I}$ un sumidero cartesiano y τ una topología para X; dada una clase no vacía de espacios topológicos $\underline{\mathfrak{C}}$, diremos que S **está propiamente $\underline{\mathfrak{C}}$-encadenado respecto de** $(\tau_i, \tau)_{i \in I}$ si se satisfacen,

1. Para cada i en I, $f_i : (X_i, \tau_i) \longrightarrow (X, \tau)$ es continua.
2. Dados un espacio topológico (Y, σ) y una función continua $(f, (\tau, \sigma))$; si para cada i en I tenemos que $(f \circ f_i, (\tau_i, \sigma))$ es $\underline{\mathfrak{C}}$-constante, entonces $(f, (\tau, \sigma))$ es $\underline{\mathfrak{C}}$-constante.

Definición 11.15. Sea $\underline{A}$ una clase de espacios topológicos. Diremos que **un espacio topológico** (X, τ) **es un $\underline{A}$-espacio**, si (X, τ) es un elemento de $\underline{A}$.

La siguiente definición presenta la primera generalización de los conceptos de conexidad y conexidad por trayectorias.

Definición 11.16. Una clase no vacía de espacios topológicos $\underline{\mathbf{A}}$ es una categoria de conexión en $\mathfrak{Top}$, si se satisface lo siguiente:

Para cualesquiera clase I, colección de $\underline{\mathbf{A}}$-espacios $(A_i = (X_i, \tau_i))_{i \in I}$ y sumidero cartesiano de funciones $S = (f_i : X_i \to X)_{i \in I}$; si τ es una topología para X tal que S está propiamente $\underline{\mathcal{A}_m^{\mathfrak{Top}}}$-encadenado respecto de $(\tau_i, \tau)_{i \in I}$, entonces (X, τ) es un $\underline{\mathbf{A}}$-espacio.

Ejemplos 11.1.

1. La clase de los espacios topológicos conexos es una categoría de conexión en $\mathfrak{Top}$.
2. La clase de los espacios topológicos conectables por trayectorias es una categoría de conexión en $\mathfrak{Top}$.

3. La clase $\underline{\mathcal{A}_m^{\mathfrak{Top}}} := \{(X,\tau) \in |\mathfrak{Top}| : |X| \leq 1\}$ es una categoría de conexión en $\mathfrak{Top}$.
4. $\mathfrak{Top}$ es una categoría de conexión en sí misma.

Observaciones 11.9. Notemos que la definición 11.14 nos sugiere una segunda generalización de los conceptos de conexidad y conexidad por trayectorias. De hecho, esta generalización tiene como uno de sus casos particulares al concepto de categoría de conexión que acabamos de presentar. Dicha generalización viene dada por la siguiente definición.

Definición 11.17. Sean $\underline{\mathbf{A}}$ *y* $\underline{\mathfrak{C}}$ un par de clases no vacías de espacios topológicos. Diremos que la clase $\underline{\mathbf{A}}$ *es una categoría de* $\underline{\mathfrak{C}}$-conexión en $\mathfrak{Top}$, si se satisface lo siguiente:

Para cualesquiera clase I, colección de $\underline{\mathbf{A}}$-espacios $(A_i = (X_i,\tau_i))_{i\in I}$ y sumidero cartesiano de funciones $S = (f_i : X_i \to X)_{i\in I}$; si τ es una topología para X tal que S está propiamente $\underline{\mathfrak{C}}$-encadenado respecto de $(\tau_i,\tau)_{i\in I}$, entonces (X,τ) es un $\underline{\mathbf{A}}$-espacio.

Cerramos este capítulo con el siguiente comentario.

El enfoque que intentamos dar en este trabajo a nuestra exposición de la teoría de la conexidad en *ccce*, es, en parte, tan sólo un breve reflejo, por lo demás restringido, de la teoría de la conexidad en categorías abstractas desarrollada en [4]. En este artículo, el doctor Vazquez hace ver las ventajas que tiene dicho enfoque; por ejemplo, la aplicación del principio de dualización al concepto de subcategoría $\underline{\mathfrak{C}}$-conexa da lugar a un nuevo concepto que no es trivial en absoluto. Hacemos mención de esto para dejar en claro que el estudio de la teoría de la conexidad es mucho más profundo de lo que aquí se presenta.

Capítulo 12

Conexidad en *ccce*

En el capitulo anterior introdujimos los conceptos de función continua $\mathfrak{C}$-constante y el de sumidero cartesiano propiamente $\mathfrak{C}$-encadenado, donde $\mathfrak{C}$ era una clase no vacía de espacios topológicos. A partir de ellos construimos la noción de categoria de $\mathfrak{C}$-conexión en $\mathfrak{Top}$. En cierto sentido, el capítulo anterior es un preámbulo para el presente. Y es que la meta de este capítulo es introducir dos conceptos fundamentales que vertebran nuestra perspectiva de la teoría de la conexidad en *ccce*: uno es el de **$\underline{K}$-morfismo $\mathfrak{C}$-constante** (generalización del concepto de función continua $\mathfrak{C}$-constante) y el otro es el **$\underline{K}$-sumidero propiamente $\mathfrak{C}$-encadenado** (generalización del concepto de sumidero cartesiano propiamente $\mathfrak{C}$-encadenado). Desde luego, estos conceptos serán el sustrato de uno de nuestros principales objetivos en este trabajo: la extensión de las nociones de conexidad y conexidad por trayectorias de $\mathfrak{Top}$, al orbe de las *ccce tpf*. Así pues, con este capítulo es que comenzamos nuestra exposición de la teoría de la conexidad en *ccce*.

Lo primero que haremos es generalizar la definición 11.9.

Definición 12.1. Sean, $\underline{K}$ una *ccce tpf* y $\mathfrak{C}$ una clase no vacía de $\underline{K}$-objetos. Un $\underline{K}$-morfismo $f : A \to B$ es **$\mathfrak{C}$-constante** si existen, un $\underline{K}$-objeto C en $\mathfrak{C}$ y un par de $\underline{K}$-morfismos,

$$g : A \to C \quad \text{y} \quad h : C \to B$$

tales que $f = hg$.

Ejemplo 12.1. Dada $\underline{K}$ una *ccce tpf*, sea $\mathfrak{C} = \{(Z, \zeta) \in |\underline{K}| : Z = \emptyset\}$. Sea $f : (X, \xi) \to (Y, \eta)$ un $\underline{K}$-morfismo. Entonces, $(f, (\xi, \eta))$ es $\mathfrak{C}$-constante si, y sólo si, es un $\underline{K}$-morfismo vacío de codominio (Y, η) (es decir, si $X = \emptyset$). En efecto, si $(f, (\xi, \eta))$ es $\mathfrak{C}$-constante, entonces existen (Z, ζ) en $\mathfrak{C}$ y un par de $\underline{K}$-morfismos,

$$g : (X, \xi) \to (Z, \zeta) \quad \text{y} \quad h : (Z, \zeta) \to (Y, \eta)$$

tales que $f = hg$. Al considerar la función subyacente $g : X \to Z$ $(Z = \emptyset)$, recordando el concepto de función, observamos que $X = \emptyset$, por lo que f es un $\underline{K}$-morfismo vacío de codominio (Y, η).

Recíprocamente, si $f = \varnothing_Y : (\emptyset, \xi) \to (Y, \eta)$ es un $\underline{K}$-morfismo vacío de codominio (Y, η), entonces $\varnothing_Y$ es $\mathfrak{C}$-constante, ya que el $\underline{K}$-morfismo $1_{(\emptyset, \xi)} : (\emptyset, \xi) \to (\emptyset, \xi)$ hace que el diagrama,

$$\begin{tikzcd}
(\emptyset, \xi) \arrow[rr, "\varnothing_Y"] \arrow[dr, "1_{(\emptyset,\xi)}"'] & & (Y, \eta) \\
& (\emptyset, \xi) \arrow[ur, "\varnothing_Y"'] &
\end{tikzcd}$$

conmute.

Ejemplo 12.2. En $\mathfrak{Top}$, sea $\mathfrak{C} = \{(\{x\}, \{\{x\}, \emptyset\})\}$. Sea $f : (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ una función continua. Entonces $(f, (\tau, \sigma))$ es $\mathfrak{C}$-constante si, y sólo si, $f : X \to Y$ es $\underline{\mathcal{A}_m^{\mathfrak{Set}}}$-constante de codominio no vacío. En efecto; por un lado, el que $(f, (\tau, \sigma))$ sea $\mathfrak{C}$-constante implica que existen funciones continuas,

$$g : (X, \tau) \to (\{x\}, \{\{x\}, \emptyset\}) \quad \text{y} \quad h : (\{x\}, \{\{x\}, \emptyset\}) \to (Y, \sigma)$$

tales que $f = hg$. Por tanto, suponiendo que X no es vacío, dados v, v en X, tenemos que,

$$f(u) = h(g(u)) = h(x) = h(g(v)) = f(v)$$

Esto prueba que f es constante. Si X es vacío, entonces f es la función vacía de codominio Y.

Ahora supongamos que $f : X \to Y$ es una función $\underline{\mathcal{A}_m^{\mathfrak{Set}}}$-constante de codominio no vacío. Si X no es vacío, sea y_0 el valor de f. Definimos las funciones,

$$\begin{array}{rccc} g: & X & \to & \{x\} \\ & w & \mapsto & x \end{array} \qquad \text{y} \qquad \begin{array}{rccc} h: & \{x\} & \to & Y \\ & x & \mapsto & y_0 \end{array}$$

entonces,

$$g : (X, \tau) \to (\{x\}, \{\{x\}, \emptyset\}) \quad \text{y} \quad h : (\{x\}, \{\{x\}, \emptyset\}) \to (Y, \sigma)$$

son continuas, y además, para toda w en X,

$$hg(w) = h(x) = y_0 = f(w)$$

es decir, $f = hg$. Esto prueba que $(f, (\tau, \sigma))$ es $\underline{\mathfrak{C}}$-constante. Si X es vacío, entonces $f = hg$, donde g es la función vacía de codominio $\{x\}$ y h es como antes. En este caso también sucede que $(f, (\tau, \sigma))$ $\underline{\mathfrak{C}}$-constante. La función continua de codominio vacío no puede ser $\underline{\mathfrak{C}}$-constante, pues, en principio, no es posible construir una función de dominio $\{x\}$ y codominio vacio.

Ejemplo 12.3. En $\mathfrak{Gra}$, sea $\underline{\mathfrak{C}} = \{(\{z\}, \emptyset)\}$. Sea $f : (X, \alpha) \to (Y, \beta)$ un $\mathfrak{Gra}$-morfismo. Si $(f, (\alpha, \beta))$ es $\underline{\mathfrak{C}}$-constante, entonces existen funciones compatibles,

$$g : (X, \alpha) \to (\{z\}, \emptyset) \quad \text{y} \quad h : (\{z\}, \emptyset) \to (Y, \beta)$$

tales que $f = hg$. Observemos que la compatibilidad de g sólo es posible cuando $\alpha = \emptyset$. Además, el hecho de que $f = hg$, implica que $f : X \to Y$es $\underline{\mathcal{A}_m^{\mathfrak{Set}}}$-constante de codominio no vacío.

Ahora toca el turno de generalizar la definción 11.14.

Definición 12.2. Sean, $\underline{K}$ una *ccce tpf*, I una clase, $((X_i, \xi_i))_{i \in I}$ una clase de $\underline{K}$-objetos, $S = (f_i : X_i \to X)_{i \in I}$ un sumidero cartesiano y ξ una $\underline{K}$-estructura para X; dada una clase no vacía de $\underline{K}$-objetos $\underline{\mathfrak{C}}$, diremos que S **es un $\underline{K}$-sumidero propiamente $\underline{\mathfrak{C}}$-encadenado respecto de** $(\xi_i, \xi)_{i \in I}$ si las siguientes condiciones se satisfacen,

1. Para cada i en I, $f_i : (X_i, \xi_i) \longrightarrow (X, \xi)$ es un $\underline{K}$-morfismo.
2. Dados un un $\underline{K}$-objeto (Z, η) y un $\underline{K}$-morfismo $(f, (\xi, \eta))$; si para cada i en I, el $\underline{K}$-morfismo $(f \circ f_i, (\xi_i, \eta))$ es $\underline{\mathfrak{C}}$-constante, entonces el $\underline{K}$-morfismo $(f, (\xi, \eta))$ es $\underline{\mathfrak{C}}$-constante.

Definición 12.3. Sean, $\underline{K}$ una *ccce* y $\underline{A}$ una clase de $\underline{K}$-objetos. Diremos que **un $\underline{K}$-objeto** (X, ξ) **es un $\underline{A}$-espacio**, si (X, ξ) es un elemento de $\underline{A}$.

La definición que a continuación presentamos extiende las nociones de conexidad y conexidad por trayectorias presentes en $\mathfrak{Top}$, al contexto de las *ccce* topológicas. Nuestro modelo a seguir es, naturalmente, la definción 11.16.

Definición 12.4. Sea $\underline{K}$ una *ccce tpf*. Sean $\underline{\mathbf{A}}$ *y* $\underline{\mathfrak{C}}$ un par de clases no vacías de $\underline{K}$-objetos. Diremos que la clase $\underline{\mathbf{A}}$ *es una categoría de* $\underline{\mathfrak{C}}$-conexión en $\underline{K}$, si se satisface lo siguiente:

*Para cualesquiera clase I, colección de $\underline{\mathbf{A}}$-objetos $(A_i = (X_i, \xi_i))_{i \in I}$ y sumidero cartesiano de funciones $S = (f_i : X_i \to X)_{i \in I}$; si ξ es una $\underline{K}$-*estructura *para X tal que S está propiamente $\underline{\mathfrak{C}}$-encadenado* respecto de $(\xi_i, \xi)_{i \in I}$*, entonces (X, ξ) es un $\underline{\mathbf{A}}$-espacio.*

Cerramos este capítulo con algunos ejemplos de categorías de conexión en una *ccce tpf*

Ejemplo 12.4. Sea $\underline{K}$ una *ccce tpf*. Entonces para cualquier clase $\underline{\mathfrak{C}}$ no vacía de $\underline{K}$-objetos, $\underline{K}$ es una categoría de $\underline{\mathfrak{C}}$-conexión en $\underline{K}$.

Ejemplo 12.5. Dada una *ccce tpf* $\underline{K}$, denotaremos mediante $\underline{\mathcal{A}_m^{\underline{K}}}$ a la clase de $\underline{K}$-objetos cuyo conjunto subyacente es vacío o unitario; es decir,

$$\underline{\mathcal{A}_m^{\underline{K}}} := \{(X, \xi) \in |\underline{K}| : |X| = 0 \ \text{ó} \ |X| = 1\}$$

Afirmamos que $\underline{\mathcal{A}_m^{\underline{K}}}$ es una categoría de $\underline{\mathcal{A}_m^{\underline{K}}}$-conexión en $\underline{K}$ y que toda categoría de $\underline{\mathfrak{C}}$-conexión en $\underline{K}$ tal que $\underline{\mathcal{A}_m^{\underline{K}}}$ está contenida en $\underline{\mathfrak{C}}$, contiene a $\underline{\mathcal{A}_m^{\underline{K}}}$.

(a) $\underline{\mathcal{A}_m^{\underline{K}}}$ es una categoría de $\underline{\mathcal{A}_m^{\underline{K}}}$-conexión. En efecto; sean, I una clase, $(A_i = (X_i, \xi_i))_{i \in I}$ una clase de $\underline{\mathcal{A}_m^{\underline{K}}}$-objetos y $S = (f_i : X_i \to X)_{i \in I}$ un sumidero cartesiano de funciones. Supongamos que ξ es una $\underline{K}$-estructura para X tal que S está propiamente $\underline{\mathcal{A}_m^{\underline{K}}}$-encadenado respecto de $(\xi_i, \xi)_{i \in I}$. Si X no es vacío ni unitario, sean x y x' dos puntos distintos en X; consideremos la función,

$$\begin{array}{rccc} f : & X & \longrightarrow & \{0,1\} \\ & x & \longmapsto & 0 \\ & y \in X \setminus \{x\} & \longmapsto & 1 \end{array}$$

y sea η la $\underline{K}$-estructura indiscreta para $\{x, x'\}$. Denotemos, $\mathbb{I}_2 := (\{0,1\}, \eta)$. A partir de ahora llamaremos a $\mathbb{I}_2$ el $\underline{K}$-objeto indiscreto de dos puntos. Resulta entonces que,

$$f : (X, \xi) \longrightarrow \mathbb{I}_2$$

es un $\underline{K}$-morfismo. Además, observemos que para cada i en I, la composición,

$$f \circ f_i : (X_i, \xi_i) \longrightarrow \mathbb{I}_2$$

es un $\underline{K}$-morfismo $\underline{\mathcal{A}_m^K}$-constante. Luego, dado que por hipótesis S está propiamente $\underline{\mathcal{A}_m^K}$-encadenado respecto de $(\xi_i, \xi)_{i \in I}$, el $\underline{K}$-morfismo $f : (X, \xi) \to \mathbb{I}_2$ es $\underline{\mathcal{A}_m^K}$-constante; sin embargo esto no es posible, ya que la función $f; X \to \{0, 1\}$ no es vacía ni constante. Se sigue que X es un conjunto vacío, o bien, un conjunto unitario. Concluimos que (X, ξ) pertenece a la clase $\underline{\mathcal{A}_m^K}$.

(a) Si $\underline{\mathbf{A}}$ es una categoría de $\underline{\mathfrak{C}}$-conexión en $\underline{K}$ y $\underline{\mathcal{A}_m^K} \subseteq \underline{\mathfrak{C}}$, entonces $\underline{\mathcal{A}_m^K} \subseteq \underline{\mathbf{A}}$. En efecto; Sea A_0 una clase vacía de $\underline{\mathbf{A}}$-objetos. Entonces, dado un $\underline{K}$-objeto (Y, η) en $\underline{\mathcal{A}_m^K}$, el $\underline{K}$-sumidero vacío,

$$S = \{f_A : A \longrightarrow (Y, \eta)\}_{A \in A_0}$$

está $\underline{\mathfrak{C}}$-encadenado, ya que todo $\underline{K}$-morfismo de dominio en $\underline{\mathcal{A}_m^K}$, es $\underline{\mathcal{A}_m^K}$-constante y consecuentemente, $\underline{\mathfrak{C}}$-constante. Por tanto, (Y, η) es un $\underline{\mathbf{A}}$-objeto. Más aún; observemos que con un argumento análogo al que acabamos de dar, podemos concluir que $\underline{\mathfrak{C}} \subseteq \underline{\mathbf{A}}$.

El siguiente ejemplo de categoría de conexión viene sugerido por el inciso 4 de la proposición 11.1.

Definición 12.5. Sean, $\underline{K}$ una *ccce tpf* y $\mathcal{B}$ una clase no vacía de $\underline{K}$-objetos no vacíos; definimos la clase,

$$\mathsf{K}(\mathcal{B}) := \left\{ A \in |\underline{K}| : \underline{K}(A, B) \subseteq \mathsf{C}_{\underline{\mathcal{A}_m^K}}, \text{ con } B \text{ en } \mathcal{B} \right\}$$

A esta clase la llamaremos **categoría de conexión constante a la izquierda determinada por** $\mathcal{B}$[1].

Proposición 12.1. *La clase* $\mathsf{K}(\mathcal{B})$ *de la definición 12.5 es una categoría de* $\underline{\mathcal{A}_m^K}$*-conexión en* $\underline{K}$.

Demostración. Sean, I una clase, $(A_i = (X_i, \xi_i))_{i \in I}$ *una clase de* $\mathsf{K}(\mathcal{B})$-objetos y $S = (f_i : X_i \to X)_{i \in I}$ un sumidero cartesiano de funciones. Supongamos que ξ es una $\underline{K}$-estructura para X tal que S está propiamente $\underline{\mathcal{A}_m^K}$-encadenado respecto de $(\xi_i, \xi)_{i \in I}$. Demostremos que (X, ξ) es un $\mathsf{K}(\mathcal{B})$-objeto. Sean, pues, $B = (Y, \eta)$ un elemento de $\mathcal{B}$ y $f : (X, \xi) \to (Y, \eta)$ un $\underline{K}$-morfismo. Ya que para cada i en I, la composición,

$$f \circ f_i : (X_i, \tau_i) \longrightarrow (Y, \eta)$$

es un $\underline{K}$-morfismo, y puesto que (X_i, τ_i) es un $\mathsf{K}(\mathcal{B})$-objeto, entonces $f \circ f_i : (X_i, \tau_i) \to (X, \tau)$ es $\underline{\mathcal{A}_m^K}$-constante. Luego, dado que S está propiamente $\underline{\mathcal{A}_m^K}$-encadenado respecto de $(\xi_i, \xi)_{i \in I}$, el $\underline{K}$-morfismo,

$$f : (X, \xi) \longrightarrow (Y, \eta)$$

es $\underline{\mathcal{A}_m^K}$-constante. Se sigue que (X, ξ) es un $\mathsf{K}(\mathcal{B})$-objeto. ☐

Ejemplo 12.6. Sea $\underline{K}$ una *ccce tpf*. Denotemos mediante $\mathbb{D}_2$ al $\underline{K}$-objeto cuyo conjunto subyacente es $\{0.1\}$ y cuya $\underline{K}$-estructura es la discreta. Llamaremos **$\underline{K}$-objetos conexos** a los elementos de la categoría de conexión $\mathsf{K}(\{\mathbb{D}_2\})$. Si $\underline{K} = \mathfrak{Top}$, entonces $\mathsf{K}(\{\mathbb{D}_2\})$ es precisamente la clase de los espacios topológicos conexos (ver el inciso 3 de la definición 11.1).

Observación 12.1. Sean, $\underline{K}$ una *ccce tpf* y $\mathcal{B}$ una clase no vacía de $\underline{K}$-objetos no vacíos; consideremos, además, una clase no vacía $\underline{\mathfrak{C}}$ de $\underline{K}$-objetos. Entonces, la clase,

$$\mathsf{K}(\mathcal{B}) := \{A \in |\underline{K}| : \text{todo } \underline{K}\text{-morfismo } f : A \to B \text{ es } \underline{\mathfrak{C}} \text{ -constante, con } B \text{ en } \mathcal{B}\}$$

es una categoría de $\underline{\mathfrak{C}}$-conexión en $\underline{K}$ y generaliza de manera natural a la categoría de conexión presentada en la definición 12.5.

[1] Vale la pena preguntarnos qué sucede si la clase $\mathcal{B}$ es vacía, o bien, si algún elemento de $\mathcal{B}$ es vacío cuando dicha clase no es vacía. En el primer caso, para cualquier $A \in |\underline{K}|$, la afirmación:

$$\forall B \in \mathcal{B}, \underline{K}(A, B) \subseteq \mathsf{C}_{\underline{\mathcal{A}_m^K}}$$

se verifica; luego, $\mathsf{K}(\mathcal{B}) = \underline{K}$. En el segundo caso, si $B_0 \in \mathcal{B}$ tiene conjunto subyacente vacío, $|B_0| = \emptyset$, y $A \in \mathsf{K}(\mathcal{B})$, entonces, necesariamente, el conjunto subyacente de A, $|A|$, ha de ser vacío, o bien, si $|A| \neq \emptyset$, $\underline{K}(A, B_0) = \emptyset$.

Capítulo 13

Categoría de conexión generada y su caracterización

Dadas una *ccce tpf* $\underline{K}$ y una clase arbitraria $\mathcal{B}$ de $\underline{K}$-objetos, es posible considerar una noción de conexidad para la cual cada elemento de la clase $\mathcal{B}$ sea conexo en ese sentido. Nos referimos a la categoría de conexión generada por $\mathcal{B}$. Este capítulo consiste en presentar formalmente dicha categoría y, posteriormente, caracterizarla.

Proposición 13.1. *Sean, $\underline{K}$ una ccce tpf, J una clase arbitraria, $\left(\underline{\mathrm{A}_j}\right)_{j\in J}$ una colección de categorías de $\underline{\mathfrak{C}}$-conexión en $\underline{K}$ y $\underline{\mathfrak{C}}$ una clase no vacía de $\underline{K}$-objetos; denotemos,*

$$\underline{\mathbf{A}} := \left\{A \in |\underline{K}| : A \text{ es un } \underline{\mathrm{A}}_j\text{-objeto, para toda } j \in J\right\}$$

entonces, $\underline{\mathbf{A}}$ es una categoría de $\underline{\mathfrak{C}}$-conexión en $\underline{K}$.

Demostración. Sean, I una clase, $(A_i = (X_i, \xi_i))_{i\in I}$ una clase de $\underline{\mathbf{A}}$-objetos y $S = (f_i : X_i \to X)_{i\in I}$ un sumidero cartesiano de funciones. Supongamos que ξ es una $\underline{K}$-estructura para X tal que S está propiamente $\underline{\mathfrak{C}}$-encadenado respecto de $(\xi_i, \xi)_{i\in I}$. Entonces (X, ξ) es un $\underline{\mathrm{A}}_j$-objeto para cada j en J; por consiguiente, (X, ξ) pertenece a $\underline{\mathbf{A}}$. □

Observación 13.1. Si $I = \emptyset$, entonces $\underline{\mathbf{A}} = |\underline{K}|$.

Corolario y Definición 13.1. *Sean, $\underline{K}$ una ccce tpf, y $\underline{\mathfrak{C}}$ una clase no vacía de $\underline{K}$-objetos; dada una clase arbitraria $\mathcal{B}$ de $\underline{K}$-objetos, existe la categoria de $\underline{\mathfrak{C}}$-conexión mínima que contienen a $\mathcal{B}$;* ***es la categoría de $\underline{\mathfrak{C}}$-conexión generada por*** *$\mathcal{B}$. La notación que emplearemos para referirnos a ella es $\langle\mathcal{B}\rangle$.*

Ejemplo 13.1. En la *ccce* $\mathfrak{Top}$, la categoría de conexión generada por el espacio topológico vacío $(\emptyset, \{\emptyset\})$, es precisamente $\underline{\mathcal{A}_m^{\mathfrak{Top}}}$.

Resulta que la categoría de $\underline{\mathfrak{C}}$-conexión $\langle\mathcal{B}\rangle$ es susceptible de ser caracterizada en términos de los elementos de la clase $\mathcal{B}$. Para lograr dicha caracterización, es necesario conocer una propiedad básica de los sumideros encadenados.

renewcommandDefiniciónDefiniciones

Definición 13.1. Sean I una clase y $S = (f_i : X_i \to X)_{i\in I}$ un sumidero cartesiano. Supongamos que para cada i en I existen, una clase, que denotaremos mediante J_i, y un sumidero cartesiano indexado por dicha clase, $S_i = (f_j : X_j \to X_i)_{j\in J_i}$; entonces,

(a) La **composición de S con la clase** $(S_i)_{i\in I}$, es el sumidero,

$$S \circ (S_i)_{i\in I} := (f_i \circ f_j : X_j \longrightarrow X)_{j\in J_i,\, i\in I}$$

(b) Diremos que un sumidero cartesiano G **se factoriza mediante el sumidero** S y una clase $(S_i)_{i\in I}$, si $G = S \circ (S_i)_{i\in I}$.

A continuación presentamos algunas propiedades básicas de los sumideros encadenados.

Proposición 13.2. *Sean, $\underline{K}$ una ccce tpf, I una clase, $\mathcal{C} = ((X_i, \xi_i))_{i\in I}$ una clase de $\underline{K}$-objetos, $S = (f_i : X_i \to X)_{i\in I}$ un sumidero cartesiano, $\underline{\mathfrak{C}}$ una clase no vacía de $\underline{K}$-objetos y ξ una $\underline{K}$-estructura para X tal que para cada i en I,*

$$f_i : (X_i, \xi_i) \longrightarrow (X, \xi)$$

es un $\underline{K}$-morfismo. Entonces, para cualesquiera clase J y sumidero cartesiano $S' = (f_j : X_j \to X)_{j\in J}$, tenemos que,

(a) Si S' está contenido en S y S' está propiamente $\underline{\mathfrak{C}}$-encadenado respecto de $(\xi_j, \xi)_{j\in J}$, entonces S está propiamente $\underline{\mathfrak{C}}$-encadenado respecto de $(\xi_i, \xi)_{i\in I}$.

(b) Si S está propiamente $\underline{\mathfrak{C}}$-encadenado respecto de $(\xi_i, \xi)_{i\in I}$ y para cada j en J existen clases, que denotaremos mediante L_j, contenidas cada una en I, tales que S se factoriza a través del sumidero S' y una clase de sumideros cartesianos,

$$\left(S_j = (g_i : X_i \to X_j)_{i\in L_j}\right)_{j\in J}$$

entonces S' está propiamente $\underline{\mathfrak{C}}$-encadenado respecto de $(\xi_j, \xi)_{j\in J}$, donde cada ξ_j es una $\underline{K}$-estructura arbitraria para X_j.

(c) Si como en el inciso anterior $S = S' \circ (S_j)_{j\in I}$, con S' $\underline{\mathfrak{C}}$-encadenado respecto de $(\xi_j, \xi)_{j\in J}$ y cada S_j $\underline{\mathfrak{C}}$-encadenado respecto de $(\xi_i, \xi_j)_{i\in L_i}$, entonces S está $\underline{\mathfrak{C}}$-encadenado respecto de $(\xi_i, \xi)_{i\in I}$.

Demostración. (a) Sea $f : (X, \xi) \to (Y, \eta)$ un $\underline{K}$-morfismo y supongamos que, para cada i en I, la composición, $f \circ f_i : (X_i, \xi_i) \to (Y, \eta)$ es $\underline{\mathfrak{C}}$-constante. Entonces, para cada j en J, la composición $f \circ f_j : (X_j, \xi_j) \to (Y, \eta)$ es $\underline{\mathfrak{C}}$-constante; y como S' está propiamente $\underline{\mathfrak{C}}$-encadenado respecto de $(\xi_j, \xi)_{j\in J}$, cocnluimos que $f : (X, \xi) \to (Y, \eta)$ es $\underline{\mathfrak{C}}$-constante. Esto demuestra que S propiamente $\underline{\mathfrak{C}}$-encadenado respecto de $(\xi_i, \xi)_{i\in I}$.

(b) Para fijar ideas, digamos que para cada i en I, tenemos que,

$$f_j \circ g_i = f_i : X_i \longrightarrow X$$

Sea $f : (X, \xi) \to (Y, \eta)$ un $\underline{K}$-morfimso y supongamos que para cada j en J, $f \circ f_j : (X_j, \xi_j) \to (Y, \eta)$ es $\underline{\mathfrak{C}}$-constante. Entonces, para cada j en J y para cada i en L_j, la composición,

$$(f \circ f_j) \circ g_i = f \circ (f_j \circ g_i) = f \circ f_i : (X_i, \xi_i) \longrightarrow (Y, \eta)$$

es $\underline{\mathfrak{C}}$-constante. Y dado que S está propiamente $\underline{\mathfrak{C}}$-encadenado respecto de $(\xi_i, \xi)_{i\in I}$, se sigue que $(f, (\xi, \eta))$ es $\underline{\mathfrak{C}}$-constante. Esto demuestra que el sumidero S' está propiamente $\underline{\mathfrak{C}}$-encadenado respecto de $(\xi_j, \xi)_{j\in J}$.

(c) Sea $f : (X, \xi) \to (Y, \eta)$ un $\underline{K}$-morfismo arbitrario tal que para cada i en I, la composición,

$$f \circ f_i : (X_i, \xi_i) \longrightarrow (Y, \eta)$$

es $\underline{\mathfrak{C}}$-constante. Luego, dado j en J arbitrario pero fijo, para cada i en L_j, la composición,

$$f \circ (f_j \circ g_i) = (f \circ f_j) \circ g_i : (X_i, \xi_i) \longrightarrow (Y, \eta)$$

es $\underline{\mathfrak{C}}$-constante; y puesto que S_j está propiamente$\underline{\mathfrak{C}}$-encadenado respecto de $(\xi_i, \xi_j)_{i\in L_i}$, el $\underline{K}$-morfismo,

$$f \circ f_j : (X_j, \xi_j) \longrightarrow (Y, \eta)$$

es $\underline{\mathfrak{C}}$-constante. Ahora bien, como S' está propiamente $\underline{\mathfrak{C}}$-encadenado respecto de $(\xi_j, \xi)_{j\in J}$, resulta que $(f, (\xi, \eta))$ es $\underline{\mathfrak{C}}$-constante, que es justo lo que queríamos demostrar. □

Teorema 13.1. *Sean, $\underline{K}$ una ccce tpf y $\underline{\mathfrak{C}}$ una clase de $\underline{K}$-objetos tal que $\underline{\mathcal{A}_m^K}$ está contenida en $\underline{\mathfrak{C}}$. Dada una clase arbitraria $\mathcal{B}$ de $\underline{K}$-objetos, la categoría de $\underline{\mathfrak{C}}$-conexión $\langle\mathcal{B}\rangle$, consta de todos aquellos $\underline{K}$-objetos que son codominio de sumideros cartesianos $\underline{\mathfrak{C}}$-encadenados cuyo dominio está contenido en $\mathcal{B}$.*

Demostración. Sea $\underline{\mathbf{A}}$ la clase de todos los $\underline{K}$-objetos que son codominio de sumideros propiamente $\underline{\mathfrak{C}}$-encadenados cuyo dominio está contenido en $\mathcal{B}$. Si $\mathcal{B}$ es una clase vacía, entonces $\underline{\mathbf{A}} = \underline{\mathcal{A}_m^K} = \langle\mathcal{B}\rangle$. Supongamos que $\mathcal{B}$ no es vacía. Para cada $\mathcal{B}$-objeto (X, ξ), la clase $(1_X : X \to X)$ es un sumidero cartesiano que está propiamente $\underline{\mathfrak{C}}$-encadenado respecto de (ξ, ξ), cuyo dominio $((X, \xi))$ está contenido en $\mathcal{B}$. Por lo tanto, (X, ξ) es un $\underline{\mathbf{A}}$-objeto. Esto demuestra que $\mathcal{B}$ está contenida $\underline{\mathbf{A}}$. Observemos, además, que debido a la porposición 13.2, inciso (c), la clase $\underline{\mathbf{A}}$ satisface la definición 12.4; o sea que $\underline{\mathbf{A}}$ es una categoría de $\underline{\mathfrak{C}}$-conexión en $\underline{K}$. Si $\underline{\mathbf{B}}$ es una categoría de $\underline{\mathfrak{C}}$-conexión en $\underline{K}$ que contiene a $\mathcal{B}$, por la defnción de $\underline{\mathbf{A}}$, es inmediato que $\underline{\mathbf{A}}$ está contenida en $\underline{\mathbf{B}}$. Consecuentemente, $\underline{\mathbf{A}} = \langle\mathcal{B}\rangle$. □

Observación 13.2. Sean, $\underline{K}$ una *ccce tpf* y $\mathcal{B}$ una clase arbitraria de $\underline{K}$-objetos. Por el teorema 13.1, la categoría de $\underline{\mathcal{A}_m^K}$-conexión $\langle\mathcal{B}\rangle$ consta de todos aquellos $\underline{K}$-objetos que son codominio de sumideros cartesianos $\underline{\mathcal{A}_m^K}$-encadenados cuyo dominio está contenido en $\mathcal{B}$. Desde luego, todo sumidero $\underline{\mathcal{A}_m^K}$-encadenado, es un sumidero $\underline{\mathcal{A}_m^{\mathfrak{Set}}}$-encadenado (ver la proposición 11.10). Luego, en conformidad con la proposición 11.12, si (X, ξ) es un $\langle\mathcal{B}\rangle$-objeto de conjunto subyacente no vacío ni unitario y $\mathcal{C} = ((X_i, \xi_i))_{i\in I}$ y $S = (f_i : X_i \to X)_{i\in I}$ son, respectivamente, una clase de $\mathcal{B}$-objetos y un sumidero $\underline{\mathcal{A}_m^K}$-encadenado respecto de $(\xi_i, \xi)_{i\in I}$, entonces $X = \bigcup_{i\in I} f_i(X_i)$; además, recordemos que la familia $\mathcal{C}' = \{f_i(X_i)\}_{i\in I} \diagup \{\emptyset\}$ es una familia encadenada en X (ver corolario 11.2). Parafraseando lo anterior, podemos decir que los objetos de la categoría de $\underline{\mathcal{A}_m^K}$-conexión $\langle\mathcal{B}\rangle$ son precisamente los elementos de $\underline{\mathcal{A}_m^K}$, junto con todos aquellos $\underline{K}$-objetos que poseen una cubierta encadenada cuyos elementos son imágenes, bajo $\underline{K}$-morfismos, de elementos de $\mathcal{B}$.

Notación. Sea $\underline{K}$ una *ccce tpf*. Si S es un sumidero cartesiano propiamente $\underline{\mathcal{A}_m^K}$-encadenado, entonces diremos simplemente que S está encadenado. Así mismo, a toda categoría de $\underline{\mathcal{A}_m^K}$-conexión en $\underline{K}$, la llamaremos categoría de conexión.

Terminamos este capítulo con un resultado que nos dicen cómo se comportan las categorías de conexión respecto a los productos finitos.

Proposición 13.3. *Sean, $\underline{K}$ una ccce tpf y $\underline{\mathbf{A}}$ una categoría de conexión arbitraria. Entonces, el producto de cualesquiera dos $\underline{\mathbf{A}}$-objetos, es un $\underline{\mathbf{A}}$-objeto.*

Demostración. Sean $A = (X, \xi)$ y $B = (Y, \eta)$ dos $\underline{\mathbf{A}}$-objetos arbitrarios no vacíos (X y Y no vacíos); deseamos probar que $A \times B$ es un $\underline{\mathbf{A}}$-objeto. Sea $\mathcal{B} := \{A, B\}$ y consideremos la categoría de conexión $\langle \mathcal{B} \rangle$. Es claro que $\langle \mathcal{B} \rangle$ está contenida en $\underline{\mathbf{A}}$. Denotemos,

$$\mathcal{C} := \{X \times \{b\} : b \in Y\} \bigcup \{\{a\} \times Y : a \in X\}$$

Entonces $\mathcal{C}$ es una familia encadenada en el producto cartesiano $X \times Y$. En efecto; sean C_1 y C_2 dos elementos cualesquiera de $\mathcal{C}$; si,

$$C_1 = X \times \{b\} \quad \text{y} \quad C_2 = \{a\} \times Y$$

entonces $\{C_1, C_2\}$ es una cadena de elementos de $\mathcal{C}$, ya que, $C_1 \cap C_2 = \{(a, b)\}$. Ahora bien, si,

$$C_1 = X \times \{b_1\} \quad \text{y} \quad C_2 = X \times \{b_2\}$$

entonces fijamos a en X y hacemos $C_1' := C_1$, $C_2' := \{a\} \times Y$ y $C_3' := C_2$, entonces $\{C_1', C_2', C_3'\}$ es una cadena de elementos de $\mathcal{C}$ que enlaza a C_1 con C_2. Similarmente ocurre si se toman,

$$C_1 = \{a_1\} \times Y \quad \text{y} \quad C_2 = \{a_2\} \times Y$$

Observemos también que $\mathcal{C}$ es una cubierta para $X \times Y$, ya que si (a, b) es un elemento de $X \times Y$, entonces,

$$(a, b) \in \{a\} \times Y \subseteq \bigcup_{a \in X} \{a\} \times Y$$

Siguiendo con la demostración, para cada a en X y para cada b en Y, definamos las funciones,

$$\begin{array}{rccc} h_X : & X & \longrightarrow & X \times \{b\} \\ & x & \longmapsto & (x, b) \end{array} \quad \text{y} \quad \begin{array}{rccc} h_Y : & Y & \longrightarrow & \{a\} \times Y \\ & y & \longmapsto & (a, y) \end{array}$$

y sean ξ_a y ξ_b las unicas $\underline{K}$-estructuras para los conjuntos $\{a\}$ y $\{b\}$, respectivamente. Denotemos,

$$A_a := (\{a\}, \xi_a) \quad \text{y} \quad B_b := (\{b\}, \xi_b)$$

Ahora sean $A \times A_a$ el $\underline{K}$-producto de la familia $\{A, A_a\}$ y $B \times B_b$ el $\underline{K}$-producto de la familia $\{B, B_b\}$; entonces tenemos configurados dos $\underline{K}$-isomorfismos, a saber,

$$\begin{array}{rccc} h_A : & A & \longrightarrow & A \times B_b \\ & x & \longmapsto & (x, b) \end{array} \quad \text{y} \quad \begin{array}{rccc} h_B : & B & \longrightarrow & A_a \times B \\ & y & \longmapsto & (a, y) \end{array}$$

entonces, el $\underline{K}$-objeto $A \times B$ posee una cubierta encadenada cuyos miembros son imágenes, bajo $\underline{K}$-morfismos, de elementos de $\mathcal{B}$. De la observación 13.2 se sigue que $A \times B$ es un $\underline{\mathbf{A}}$-objeto, que es justo lo que deseábamos demostrar. □

Corolario y Definición 13.2. *Sean, $\underline{K}$ una ccce tpf y $\underline{\mathbf{A}}$ una categoría de conexión arbitraria. Entonces, el producto finito de $\underline{\mathbf{A}}$-objetos, es un $\underline{\mathbf{A}}$-objeto.*

Capítulo 14

Algunas Categorías de Conexión en $\mathfrak{Top}$

Iniciamos este capítulo con una caracterización de las categorías de conexión en una *ccce tpf*; acto seguido, introducimos algunos ejemplos de categorías de conexión en $\mathfrak{Top}$; posteriormente, presentamos una generalización de los conceptos de componente conexa y componente por trayectorias de los cursos básicos de topología. Además, exponemos un resultado que demuestra que en la *ccce* $\mathfrak{Top}$, para cualquier constante a la izquierda $\mathsf{K}(\mathcal{B})$, el producto arbitrario de espacios topológicos $\mathsf{K}(\mathcal{B})$-conexos, es $\mathsf{K}(\mathcal{B})$-conexo. Para finalizar, describimos de manera muy elemental una jerarquía inducida por la contención entre dichas categorías de conexión.

Teorema 14.1. *Sean, $\underline{K}$ una ccce tpf y $\underline{\mathbf{A}}$ una clase de $\underline{K}$-objetos. Entonces, $\underline{\mathbf{A}}$ es una categoría de conexión en $\underline{K}$ si, y sólo si, satisface,*

1. *Si (X,ξ) es un $\underline{\mathbf{A}}$-objeto y $f:(X,\xi)\to(Y,\eta)$ es un $\underline{K}$-morfismo con función subyacente suprayectiva, entonces (Y,η) es un $\underline{\mathbf{A}}$-objeto.*
2. *La clase $\underline{\mathcal{A}_m^K}$ está contenida en $\underline{\mathbf{A}}$.*
3. *Sean, J una clase y $\mathcal{C}:=(A_j=(Y_j,\eta_j))_{j\in J}$ una colección de $\underline{\mathbf{A}}$-objetos. Dado un $\underline{K}$-objeto (X,ξ), si $\mathcal{C}':=(Y_j)_{j\in J}$ es una familia encadenada de subconjuntos de X y η es la $\underline{K}$-estructura inicial para $Y:=\bigcup\limits_{j\in J}Y_j$ respecto de (ι,ξ), entonces (Y,η) es un $\underline{\mathbf{A}}$-objeto.*

Demostración. $\Rightarrow\rfloor$ Supongamos que $\underline{\mathbf{A}}$ es una categoría de conexión en $\underline{K}$.

1. Sean, (X,ξ) un $\underline{\mathbf{A}}$-objeto y $f:(X,\xi)\to(Y,\eta)$ un $\underline{K}$-morfismo cuya función subyacente es suprayectiva. Demostraremos que el sumidero cartesiano $S:=\{f:X\to Y\}$ está propiamente encadenado respecto de (η,ξ). Si $Y=\emptyset$[1], entonces todo $\underline{K}$-morfismo,

$$\varnothing_Y:(\emptyset,\eta)\longrightarrow(W,\rho)$$

es $\underline{\mathcal{A}_m^K}$-constante. Si $Y\neq\emptyset$, entonces, por la suprayectividad de $f:X\to Y$, el conjunto X no es vacío. Sea $g:(Y,\eta)\to(W,\rho)$ un $\underline{K}$-morfismo tal que $g\circ f:(X,\xi)\to(W,\rho)$ es $\underline{\mathcal{A}_m^K}$-constante; entonces la función $g\circ f:X\to W$ es constante, y puesto que $f:X\to Y$ es suprayectiva, $g:Y\to W$ es constante; de donde, $g:(Y,\eta)\to(W,\rho)$ es $\underline{\mathcal{A}_m^K}$-constante. Se sigue que S está propiamente encadenado respecto de (η,ξ). Puesto que $\underline{\mathbf{A}}$ es una categoría de conexión en $\underline{K}$, (Y,η) es un $\underline{\mathbf{A}}$-objeto.

2. Se sigue del ejemplo 12.5.

3. Sean, J una clase y $\mathcal{C}:=(A_j=(Y_j,\eta_j))_{j\in J}$ una colección de $\underline{\mathbf{A}}$-objetos. Dado un $\underline{K}$-objeto (X,ξ), supongamos que $\mathcal{C}':=(Y_j)_{j\in J}$ es una familia encadenada de subconjuntos de X y que η es la $\underline{K}$-estructura inicial para $Y:=\bigcup\limits_{j\in J}Y_j$ respecto de (ι,ξ); debemos demostrar que (Y,η) es un $\underline{\mathbf{A}}$-objeto. Consideremos el sumidero cartesiano,

$$S:=(\iota_j:Y_j\hookrightarrow Y)_{j\in J}$$

En conformidad con la proposición 9.2, cada A_j en $\mathcal{C}$ es un subobjeto de (Y,η). A continuación demostraremos que S está propiamente encadenado respecto de $(\eta_j,\eta)_{j\in J}$. Sean, (Z,γ) un $\underline{K}$-objeto $f:(Y,\eta)\to(Z,\gamma)$ un $\underline{K}$-morfismo. Si J es una clase vacía, entonces Y es vacío y $f:Y\to Z$ es la función vacía de codominio Z; luego, $(f,(\eta,\gamma))$ es $\underline{\mathcal{A}_m^K}$-constante. Similarmente, si J no es vacía pero cada Y_j vacío, entonces $(f,(\eta,\gamma))$ es $\underline{\mathcal{A}_m^K}$-constante. En este caso, S está propiamente encadenado. Supongamos, pues, que J no es vacía y que ningún Y_j es vacío[2]. Veamos que también en este caso el sumidero S está propiamente encadenado. Supongamos que para cada j en J, $f\circ\iota_j:A_j\to(Z,\eta)$ es $\underline{\mathcal{A}_m^K}$-constante. Dado que el conjunto Y no es vacío, la función $f:Y\to Z$ no es vacía. Se sigue que ninguna función $f\circ\iota_j:Y_j\to Z$ es vacía. En consecuencia, cada $f\circ\iota_j:Y_j\to Z$ constante. Más aún, todas las funciones $f\circ\iota_j$ tienen el mismo valor, pues $\mathcal{C}'$ está encadenada. Estos argumentos implican

[1] Puesto que la función vacía $\varnothing:\emptyset\to\emptyset$ es suprayectiva, es necesario considerar el caso $Y=\emptyset$.

[2] Puesto que $\mathcal{C}'$ es una familia encadenada en X, tenemos sólo dos posibilidades: todos los Y_j son vacíos, o bien, ningún Y_j es vacío.

que $f : Y \to Z$ es una función constante, luego, $(f, (\eta, \gamma))$ es $\underline{\mathcal{A}_m^K}$-constante. Concluimos que S está propiamente encadenado respecto de $(\eta_j, \eta)_{j \in J}$.

$\Leftarrow \rfloor$ Recíprocamente; supongamos que $\underline{\mathbf{A}}$ es una clase de $\underline{K}$-objetos que satisface las condiciones 1, 2 y 3. Sean, I una clase, $(A_i = (X_i, \xi_i))_{i \in I}$ *una clase de* $\underline{\mathbf{A}}$-objetos y $S = (f_i : X_i \to X)_{i \in I}$ un sumidero cartesiano de funciones. Supongamos que ξ es una $\underline{K}$-estructura para X tal que S está propiamente encadenado respecto de $(\xi_i, \xi)_{i \in I}$. Probemos que (X, ξ) es un $\underline{\mathbf{A}}$-objeto. Si (X, ξ) es un $\underline{\mathcal{A}_m^K}$-objeto, por el punto 2, (X, ξ) es un $\underline{\mathbf{A}}$-objeto. Supongamos entonces que el conjunto X tiene al menos dos puntos. Si el conjunto $Y := \underset{i \in I}{\cup} f_i(X_i)$ es vacío, entonces el $\underline{K}$-morfismo identidad $1_{(X,\xi)}$ satisface la hipótesis del inciso 2 de la definición 12.2, pero no es $\underline{\mathcal{A}_m^K}$-constante. Dado que esto va en contra de la hipótesis consistente en que S está propiamente encadenado, se sigue que Y no es vacío. Ahora bien, si $X \diagup Y$ no es vacío, sea entonces $p : (X, \xi) \longrightarrow (Z, \eta)$ la identificación cuyas fibras son precisamente los conjuntos $X \diagup Y$ y Y. Así, para cada i en I,

$$p \circ f_i : (X_i, \xi_i) \longrightarrow (Z, \eta)$$

es un $\underline{K}$-morfismo $\underline{\mathcal{A}_m^K}$-constante. Sin embargo, $(p, (\xi, \eta))$ no es $\underline{\mathcal{A}_m^K}$-constante. Dado que esto no es posible, es necesario concluir que $X = Y$. Desde luego, la $\underline{K}$-estructura inicial para X respecto de $(1_X, \xi)$ es ξ; luego, por la condición 3, (X, ξ) es un $\underline{\mathbf{A}}$-objeto. □

Notación. Si $\underline{\mathbf{A}}$ es una categoría de $\underline{\mathfrak{C}}$-conexión en una *ccce tpf* $\underline{K}$, de aquí en adelante será usual nombrar a los objetos de $\underline{\mathbf{A}}$ como $\underline{\mathbf{A}}$-conexos.

Proposición 14.1. *Denotemos mediante* $\underline{C}$ *a la categoría de conexión de todos los espacios topológicos conexos; si* $\underline{\mathbf{A}}$ *es una categoría de conexión de* $\mathfrak{Top}$ *, entonces* $\underline{\mathbf{A}}$ *es* $\mathfrak{Top}$*, o bien,* $\underline{\mathbf{A}}$ *está contenida en* $\underline{C}$*.*

Demostración. Sea $\underline{\mathbf{A}}$ una categoría de conexión con un espacio (X, τ) que tiene una división no trivial $[U, V]$. Sea (Y, σ) un espacio topológico arbitrario. Si Y es vacío o unitario, entonces Y es $\underline{\mathbf{A}}$-conexo. Si Y tiene al menos dos puntos distintos, sea a un punto fijo de Y; luego, para cada b en Y distinto de a, la función $f_b : (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ tal que,

$$f(U) = a \quad \text{y} \quad f(V) = b$$

es continua. En consecuencia, la familia $\{f_b(X)\}_{b \in B}$, donde $B := Y \backslash \{a\}$, es una cubierta encadenada de subconjuntos de Y (es decir, $Y = \underset{b \in B}{\cup} f_b(X)$); además, por el inciso 1 del teorema 14.1, $\left\{\left(f_b(X), \sigma \mid_{f_b(X)}\right)\right\}_{b \in B}$ es una familia de $\underline{\mathbf{A}}$-conexos. Por el inciso 3 del mismo teorema, se sigue que (Y, σ) es $\underline{\mathbf{A}}$-conexo. Concluimos la igualdad $\underline{\mathbf{A}} = \mathfrak{Top}$. □

Corolario y Definición 14.1. *Consideremos al espacio topológico discreto de dos puntos,* $\mathbb{D}_2$. Entonces, $\mathfrak{Top} = \langle\{\mathbb{D}_2\}\rangle$.

Proposición 14.2. *Sea* $\mathbb{I}_2 := (\{0,1\}, \{\{0,1\}, \emptyset\})$ *el espacio topológico indiscreto de dos puntos; entonces,*

(*a*) $\langle\{\mathbb{I}_2\}\rangle$ *es la categoría de conexión de todos los espacios topológicos indiscretos.*
(*b*) $\langle\{\emptyset\}\rangle \subset \langle\{\mathbb{I}_2\}\rangle$ *y toda categoría distinta de* $\langle\{\emptyset\}\rangle$ *contiene a* $\langle\{\mathbb{I}_2\}\rangle$*.*

Demostración. (*a*) Sea (X, τ) un espacio topológico que pertenece a $\langle\{\mathbb{I}_2\}\rangle$; si X es vacío o unitario, el espacio (X, τ) es claramente indiscreto. Supongamos que X no es vacío ni unitario; entonces X posee una cubierta encadenada $\mathcal{C}$ cuyos elementos son imágenes continuas de $\mathbb{I}_2$. Desde luego, cada imagen continua de $\mathbb{I}_2$ conforma un subespacio indiscreto de (X, τ). Supongamos que existe un abierto no vacío U en (X, τ) distinto de X; entonces debe haber dos puntos x y x' en X tales que,

$$x \in U \quad \text{y} \quad x' \in X \backslash U$$

Por lo tanto, también existen C y C' en $\mathcal{C}$ tales que,

$$x \in C \quad \text{y} \quad x' \in C'$$

y una cadena $\{Y_i\}_{i=1}^n$ de elementos de $\mathcal{C}$ cuyos primer y último eslabones son C y C', respectivamente. Dado que cada $(Y_i, \tau \mid_{Y_i})$ es un subespacio indiscreto de (X, τ), notemos que si la intersección $Y_i \cap U$ no es vacía, entonces Y_i está totalmente contendio en U. Puesto que $\{Y_i\}_{i=1}^n$ es una cadena, se sigue que cada Y_i está contenido en U. Pero entonces x es un elemento de U. Como esto último es falso, concluimos que U no existe. Colegimos que (X, τ) es indiscreto. Ahora supongamos que (X, τ) es un espacio indiscreto con más de un punto. Sea x_0 un punto fijo en X. Para cada x en $X \backslash \{x_0\}$, el espacio topológico cuyo conjunto subyacente es $Y_x = \{x_0, x\}$ es un espacio homemomorfo a $\mathbb{I}_2$. Desde luego, la familia $\mathcal{F} = \{(Y_x, \tau\mid_{Y_x})\}_{x\in X\diagup\{x_0\}}$ es una cubierta encadenada de (X,τ). Por la observación 13.2 (o por la condición 3 del teorema 14.1), el espacio (X,τ) pertenece a $\langle\{\mathbb{I}_2\}\rangle$.

(b) Se tiene que $\langle\{\emptyset\}\rangle$ está contenida propiamente en $\langle\{\mathbb{I}_2\}\rangle$, porque $\langle\{\emptyset\}\rangle$ es la mínima categoría de conexión (ver ejemplo 13.1), y porque, siendo $\mathbb{I}_2$ un elemento de $\langle\{\mathbb{I}_2\}\rangle$, $\mathbb{I}_2$ no está $\langle\{\emptyset\}\rangle$, pues $\mathbb{I}_2$ es el indiscreto de dos puntos. Supongamos ahora que $\underline{\mathbf{A}}$ es cualquier categoría de conexión que contiene propiamente a $\langle\{\emptyset\}\rangle$; entonces la diferencia $\underline{A}\setminus\langle\{\emptyset\}\rangle$ no es vacía. Sea (X,τ) un elemento de $\underline{A}\setminus\langle\{\emptyset\}\rangle$; entonces X tiene más de un punto; por lo tanto, existe una función $f:(X,\tau)\to\mathbb{I}_2$ continua y suprayectiva. Por lo tanto, $\mathbb{I}_2$ es $\underline{\mathbf{A}}$-conexo (condición 1 del teorema 14.1). Concluimos que $\langle\{\mathbb{I}_2\}\rangle$ está contenida en $\underline{\mathbf{A}}$. □

Las categorías de conexión $\langle\{\emptyset\}\rangle$ y $\langle\{\mathbb{I}_2\}\rangle$ son comúnmente llamadas categorías de conexión triviales. Esto se debe, quizás, a que los espacios vacíos, singulares e indiscretos presentan los casos más elementales del concepto de conexidad ($\underline{\mathcal{A}_m^{\mathfrak{Top}}}$-conexidad) en $\mathfrak{Top}$. Por otro lado, aunque en estrecha relación con lo que acabamos de comentar, si consideramos un espacio topológico (X,τ) y suponemos que x y x' son dos puntos distintos de X, recordemos que dichos puntos estarán conectados en (X,τ), si existe un subespacio conexo $(Y,\tau\mid_Y)$ tal que x y x' pertenecen a Y. El menor subespacio conexo no trivial de (X,τ) que contiene al conjunto $\{x,x'\}$ es precisamente el espacio $(\{x,x'\},\{\{x,x'\},\{x\},\emptyset\})$, o bien, $(\{x,x'\},\{\{x,x'\},\{x'\},\emptyset\})$. Las topologías de los espacios anteriores son llamadas, indistintamente, **topologías de Sierpinski** para el conjunto $\{x,x'\}$. En general, llamaremos al espacio $\mathbb{S} := (\{0,1\},\{\{0,1\},\{0\},\emptyset\})$ el **espacio de Sierpinski**. Un hecho interesante surge aquí: la categoría de conexión $\langle\{\mathbb{S}\}\rangle$ hereda la no trivial minimalidad de su generador, quedando así entre las categorías de conexión como la más pequeña no trivial. Lo anteriormente dicho quedará precisado a través de la siguiente proposición.

Proposición 14.3. *Sea $\mathbb{S}$ el espacio de Sierpinski; entonces,*

(a) *La categoría de conexión $\langle\{\mathbb{I}_2\}\rangle$ está contenida propiamente en $\langle\{\mathbb{S}\}\rangle$ y toda categoría de conexión que contenga propiamente a $\langle\{\mathbb{I}_2\}\rangle$ contiene a $\langle\{\mathbb{S}\}\rangle$.*

(b) *Los miembros de $\langle\{\mathbb{S}\}\rangle$ de número cardinal mayor que 1 son los espacios topológicos que poseen una cubierta encadenada cuyos elementos son homeomorfos a $\mathbb{I}_2$ ó a $\mathbb{S}$.*

Demostración. (**a**) La función $f:\mathbb{S}\to\mathbb{I}_2$ definida como $f(a)=x$ y $f(b)=y$ es continua. Por la observación 13.2, el espacio indiscreto pertenece a $\langle\{\mathbb{S}\}\rangle$; luego, $\langle\{\mathbb{I}_2\}\rangle$ está contenida propiamente en $\langle\{\mathbb{S}\}\rangle$ ($\mathbb{S}$ no es indiscreto). Por otra parte, si $\underline{\mathbf{A}}$ es cualquier categoría de conexión que contiene propiamente a $\langle\{\mathbb{I}_2\}\rangle$, entonces existen (X,τ) en $\underline{\mathbf{A}}\diagup\langle\{\mathbb{I}_2\}\rangle$ y un abierto U en (X,τ) no vacío y contenido propiamente en X. Sea $f:(X,\tau)\to\mathbb{S}$ tal que $f(U)=\{0\}$ y $f(X-U)=\{1\}$. Entonces la función f es continua. Por la condición 1 del teorema 14.1, $\mathbb{S}$ es un $\underline{\mathbf{A}}$-objeto. Se sigue que $\langle\{\mathbb{S}\}\rangle$ está contenida en $\underline{\mathbf{A}}$.

(**b**) Sea (X,τ) un miembro de $\langle\{\mathbb{S}\}\rangle$ con cardinalidad mayor que 1. Si cada punto de X es un abierto según τ, entonces, $\langle\{\mathbb{S}\}\rangle = \mathfrak{Top}$ (ver la demostración de la proposición 14.1), lo que no es el caso (el discreto de dos puntos, $\mathbb{D}_2$, no pertenece a $\langle\{\mathbb{S}\}\rangle$). Por lo tanto, existe x_0 en X tal que $\{x_0\}$ no es abierto según τ. Así pues, para cada x en $X\setminus\{x_0\}$, el espacio topológico cuyo conjunto subyacente es $A_x=\{x_0,x\}$ es un espacio homemomorfo a $\mathbb{I}_2$ o a $\mathbb{S}$. Claro está, la familia $\mathcal{F}=\{(A_x,\tau_{A_x})\}_{x\in X-\{x_0\}}$ es una cubierta encadenada de (X,τ). En conformidad con la condición 3 del teorema 14.1 y con el inciso anterior, todo espacio topológico que posee una cubierta encadenada cuyos elementos son homeomorfos a $\mathbb{I}_2$ o a $\mathbb{S}$, pertenece a $\langle\{\mathbb{S}\}\rangle$. □

Siguiendo con la comparación entre categorías de conexión en $\mathfrak{Top}$, resulta que la categoría de conexión $\langle\{\mathbb{S}\}\rangle$ está contenida en la constante a la izquierda $\mathsf{K}(T_1)$. Antes de presentar formalmente este resultado, damos una pequeña observación relacionada con las categorías de conexión constantes a la izquierda.

Observación 14.1. Sean $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ dos clases no vacías de espacios topológicos no vacíos. Si $\mathcal{B}$ está contenida en $\mathcal{B}'$, entonces $\mathsf{K}(\mathcal{B}')$ está contenida en $\mathsf{K}(\mathcal{B})$.

Proposición 14.4. $\mathsf{K}(T_1)$ *es la mínima categoría constante a la izquierda que contiene a $\langle\{\mathbb{S}\}\rangle$.*

Demostración. Sean (Y,σ) un espacio T_1 y $f:\mathbb{S}\to(Y,\sigma)$ una función continua. Si sucede que $f(0)\neq f(1)$, entonces existe un abierto U en σ tal que,

$$f(0)\notin U \quad \text{y} \quad f(1)\in U$$

Como f es continua, el conjunto $\{1\}=f^{-1}(U)$ es abierto en $\mathbb{S}$, lo que no es el caso. Por tanto, f es constante. Se sigue que $\langle\{\mathbb{S}\}\rangle$ está contenida en $\mathsf{K}(T_1)$.

Sea $\mathsf{K}(\mathcal{B})$ una categoría constante a la izquierda tal que $\langle\{\mathbb{S}\}\rangle$ está contenida en $\mathsf{K}(\mathcal{B})$. Afirmamos que todo objeto de $\mathcal{B}$ es T_1 . En efecto, si (X,τ) pertenece a $\mathcal{B}$, pero (X,τ) no es un espacio T_1, entonces, existen x_1,x_2 en X tales que al conjunto $\{x_1,x_2\}$ sólo se le puede asociar la topología indiscreta o la de Sierpinski, visto como subespacio de X. Entonces, hay una función continua, pero no constante, del espacio $\mathbb{S}$ en (X,τ), lo que no es posible. Por la observación 14.1, $\mathsf{K}(T_1)$ está contenida en $\mathsf{K}(\mathcal{B})$. □

Definiciones 14.1. Sea $\underline{K}$ una *ccce tpf*.

1. Diremos que una clase de $\underline{K}$-objetos $\underline{\mathbf{A}}$ **es invariante bajo $\underline{K}$-morfismos suprayectivos**, si $\underline{\mathbf{A}}$ satisface lo siguiente:
   Si (X,ξ) es un $\underline{\mathbf{A}}$-objeto y $f:(X,\xi)\to(Y,\eta)$ es un $\underline{K}$-morfismo con función subyacente suprayectiva, entonces (Y,η) es un $\underline{\mathbf{A}}$-objeto.
2. Diremos que una clase de $\underline{K}$-objetos $\underline{\mathbf{A}}$ **es de componentes**, si satisface lo siguiente:
   Para cualesquiera clase J, colección de $\underline{\mathbf{A}}$-objetos $\mathcal{C}:=(A_j=(Y_j,\eta_j))_{j\in J}$ y $\underline{K}$-objeto (X,ξ); si $\mathcal{C}':=(Y_j)_{j\in J}$ es una familia de subconjuntos de X tal que $\bigcap\limits_{j\in J} Y_j\neq\emptyset$ y y η es la $\underline{K}$-estructura inicial para $Y:=\bigcup\limits_{j\in J} Y_j$ respecto de (ι,ξ), entonces (Y,η) es un $\underline{\mathbf{A}}$-objeto.
3. Diremos que una clase de $\underline{K}$-objetos $\underline{\mathbf{A}}$ **es una categoría conectiva,** si $\underline{\mathbf{A}}$ satisface los dos puntos anteriores.

Ejemplo 14.1. En la *ccce* $\mathfrak{Gra}$, la clase,

$$\underline{\mathcal{A}^*_m}=\{(X,\xi)\in|\mathfrak{Gra}|:|X|=1 \text{ y } \alpha\neq\emptyset\}$$

es una categoría conectiva mas no de conexión.

De la topología de los conjuntos sabemos que dado un espacio topológico (X,τ), existe una manera de dividirlo en varios trozos que son conexos. Este proceso se logra a través de las componentes conexas de (X,τ). A continuación ofrecemos una generalización del concepto de componente conexa.

Definición 14.2. Sean, $\underline{K}$ una *ccce tpf*, $\underline{\mathbf{A}}$ una categoría de conexión, (X,ξ) un $\underline{K}$-objeto no vacío y x un elemento de X; entonces **la $\underline{\mathbf{A}}$-componente de** x **en** (X,ξ) es el $\underline{K}$-objeto $\left(C_{\underline{A}}(x),\xi\mid_{C_{\underline{A}}(x)}\right)$, donde,

$$C_{\underline{\mathbf{A}}}(x):=\bigcup\{A\subseteq X:(A,\xi\mid_A) \text{ es un subobjeto } \underline{\mathbf{A}}\text{-conexo de } (X,\xi) \text{ y } x\in A\}$$

y $\xi_{C_{\underline{\mathbf{A}}}(x)}$ es la $\underline{K}$-estructura inicial de $C_{\underline{\mathbf{A}}}(x)$ respecto a (ι,ξ) (ι es la inclusión de $C_{\underline{\mathbf{A}}}(x)$ en X).

Observación 14.2. El $\underline{K}$-objeto $\left(C_{\underline{A}}(x),\xi\mid_{C_{\underline{A}}(x)}\right)$ es el subobjeto máximo $\underline{\mathbf{A}}$-conexo de (X,ξ) que tiene como uno de sus elementos a x.

Resulta que las $\underline{\mathbf{A}}$-componentes de un objeto (X,ξ) conforman una partición del conjunto X.

Proposición 14.5. *Dados una categoría concreta topológica $\underline{K}$ y un $\underline{K}$-objeto (X,ξ), las $\underline{\mathbf{A}}$-componentes de (X,ξ) conforman una partición del conjunto X.*

Demostración.
(a) Para cada x en X, $C_{\underline{\mathbf{A}}}(x)\neq\emptyset$, pues $\{x\}$ es $\underline{\mathbf{A}}$-conexo.
(b) Para cualesquiera x,y en X, si $C_{\underline{\mathbf{A}}}(x)\cap C_{\underline{\mathbf{A}}}(y)\neq\emptyset$, entonces $C_{\underline{\mathbf{A}}}(x)=C_{\underline{\mathbf{A}}}(y)$. Efectivamente, pues si z pertenece a $C_{\underline{\mathbf{A}}}(x)\cap C_{\underline{\mathbf{A}}}(y)$, entonces $C_{\underline{\mathbf{A}}}(x)\cup C_{\underline{\mathbf{A}}}(y)$ es el conjunto subyacente de un subobjeto $\underline{\mathbf{A}}$-conexo de (X,ξ) que tiene como elementos a x y a y. Luego, de acuerdo a la Observación 14.2,

$$C_{\underline{\mathbf{A}}}(y)\subseteq C_{\underline{\mathbf{A}}}(x)\cup C_{\underline{\mathbf{A}}}(y)\subseteq C_{\underline{\mathbf{A}}}(x)$$

y

$$C_{\underline{\mathbf{A}}}(x)\subseteq C_{\underline{\mathbf{A}}}(x)\cup C_{\underline{\mathbf{A}}}(y)\subseteq C_{\underline{\mathbf{A}}}(y)$$

En consecuencia, $C_{\underline{\mathbf{A}}}(y)=C_{\underline{\mathbf{A}}}(x)$.
(c) Es claro que $X=\bigcup\limits_{x\in X} C_{\underline{\mathbf{A}}}(x)$ □

Tenemos las siguientes observaciones.

Observaciones 14.3. Sean, $\underline{K}$ una *ccce tpf*, $\underline{\mathbf{A}}$ una categoría de conexión, (X,ξ) un $\underline{K}$-objeto. Entonces,
(1) La relación de equivalencia inducida por la partición dada en la proposición 14.5 puede ser expresada del siguiente modo:
Dado el $\underline{K}$-objeto (X,ξ) y dos puntos cualesquiera x,x' de X, diremos que x y x' están relacionados ($\underline{\mathbf{A}}$-conectados) si existe un $\underline{K}$-subobjeto $(Y,\xi\mid_Y)$ de (X,ξ) tal que x y x' pertenecen a Y.
(2) Cada subobjeto $\underline{\mathbf{A}}$-conexo de (X,ξ) intersecta sólo a una $\underline{\mathbf{A}}$-componente de (X,ξ). De hecho, cada subobjeto $\underline{\mathbf{A}}$-conexo de (X,ξ) está contenido en alguna $\underline{\mathbf{A}}$-componente de (X,ξ).
(3) El objeto (X,ξ) es $\underline{\mathbf{A}}$-conexo si, y sólo si, (X,ξ) tiene una única $\underline{\mathbf{A}}$-componente.

Los siguientes resultados generalizan algunas propiedades bien conocidas de la conexidad usual (de la categoría de conexión $\mathsf{K}(\{\mathbb{D}_2\})$).

Proposición 14.6. *Sea $\mathcal{B}$ una clase no vacía de espacios topológicos no vacíos T_1, y sea $A = (X, \tau)$ un espacio topológico cualquiera. Si Y es un subespacio denso en A tal que Y, con la topología heredada de A, es* $\mathsf{K}(\mathcal{B})$-conexo, entonces A es $\mathsf{K}(\mathcal{B})$-conexo.

Demostración. Sea $f : A \to B$ cualquier función continua, donde $B = (Z, \sigma)$ pertenece a $\mathcal{B}$. Sea $\tau\mid_Y$ la topología para Y heredada de A y denotemos $C := (Y, \tau\mid_Y)$. Entonces la composición $f \circ \iota_Y : C \to B$ es continua y, por tanto, constante, pues C es $\mathsf{K}(\mathcal{B})$-conexo. Sea b_0 el valor de $f \circ \iota_Y$ y supongamos que para algún punto x en X, $f(x) = b_1$, con $b_1 \neq b_0$. Dado que en todo espacio T_1 cada punto es cerrado, tenemos que $Z\diagup\{b_0\}$ es una vecindad abierta para b_1; en consecuencia, $f^{-1}(Z\diagup\{b_0\})$ es una vecindad abierta para x. Ahora bien, dado que Y es denso en A, de lo anterior se sigue necesariamente que el conjunto $Y \cap f^{-1}(Z\diagup\{b_0\})$ es no vacío, lo que no es el caso. Consecuentemente, la función $f : A \to B$ es constante. Se sigue que A es $\mathsf{K}(\mathcal{B})$-conexo. □

Corolario y Definición 14.2. *Sea $\mathcal{B}$ una clase no vacía de espacios topológicos no vacíos T_1, y sea $A = (X, \tau)$ un espacio topológico cualquiera. Si Y, con la topología heredada de A, es* $\mathsf{K}(\mathcal{B})$-conexo y, además, $Y \subseteq D \subseteq \overline{Y}$, entonces D, con la topología heredada de A, es $\mathsf{K}(\mathcal{B})$-conexo.

Demostración. Sea $\tau\mid_D$ la topología para D heredada de A. Denotemos mediante $\overline{Y}^D$ a la cerradura de Y en (D, τ_D). Entonces, $\overline{Y}^D = \overline{Y} \cap D = D$; luego, por la proposición 14.6, $(D, \tau\mid_D)$ es $\mathsf{K}(\mathcal{B})$-conexo. □

Corolario y Definición 14.3. *Sea $\mathcal{B}$ una clase no vacía de espacios topológicos no vacíos T_1. En cualquier espacio topológico $A = (X, \tau)$ las* $\mathsf{K}(\mathcal{B})$-componentes son cerradas.

Demostración. Se sigue de la proposición 14.6 y de la observación 14.2. □

Proposición 14.7. *Sean, $\mathcal{B}$ una clase no vacía de espacios topológicos no vacíos, I un conjunto no vacío, $\{A_i\}_{i\in I} = \{(X_i, \tau_i)\}_{i\in I}$ una familia indexada de espacios topológicos no vacíos y $A = \left(\prod_{i\in I} X_i, \tau\right)$ el producto topológico de dicha familia. Son equivalentes,*

1. Para cada i en I, el espacio (X_i, τ_i) es $\mathsf{K}(\mathcal{B})$-conexo.
2. El espacio topológico $\left(\prod_{i\in I} X_i, \tau\right)$ es $\mathsf{K}(\mathcal{B})$-conexo.

Demostración. $1 \Rightarrow 2\rfloor$ En primer lugar, supongamos que la clase $\mathcal{B}$ tiene entre sus elementos algún espacio que no es T_1, es decir, supongamos que la clase $\mathcal{B}\diagup T_1$ es no vacía. Sea (Y, σ) un elemento de $\mathcal{B}\diagup T_1$. Entonces existen dos puntos distintos y, y' en Y tales que para cualquier abierto U de (Y, σ) se satisface la siguiente disyunción,

$$(y \in U \Longrightarrow y' \in U) \quad \text{o} \quad (y' \in U \Longrightarrow y \in U)$$

De aquí se desprende que la función definida mediante,

$$\begin{array}{rccc} f: & \{0,1\} & \longrightarrow & Y \\ & 0 & \longmapsto & y \\ & 1 & \longmapsto & y' \end{array}$$

induce una función continua del espacio $\mathbb{S}$ en el espacio (Y, σ). Dado que dicha función no es constante, se sigue que el espacio $\mathbb{S}$ no es $\mathsf{K}(\mathcal{B})$-conexo. Este argumento, junto con la primera parte del ejemplo 12.5, el inciso (b) de la proposición 14.2 y el inciso (a) de la proposición 14.3, implican que $\mathsf{K}(\mathcal{B}) = \langle\{\emptyset\}\rangle$ o $\mathsf{K}(\mathcal{B}) = \langle\{\mathbb{I}_2\}\rangle$. Para el primer caso tenemos que A es $\langle\{\emptyset\}\rangle$-conexo, y para el segundo caso tenemos que A es $\langle\{\mathbb{I}_2\}\rangle$-conexo.

Ahora supongamos que todos los elementos de $\mathcal{B}$ son T_1. Sea, pues, $\mathbf{x}$ un punto fijo pero arbitrario de $\prod_{i\in I} X_i$. En relación al conjunto I, definimos el siguiente conjunto,

$$\mathfrak{Fin}(I) := \{K \subseteq I : K \text{ es finito}\}$$

Para cada K en $\mathfrak{Fin}(I)$, definimos un conjunto,

$$X_K := \left\{ y \in \prod_{i\in I} X_i : p_i(y) = p_i(\mathbf{x}) \quad \text{para todo } i \in I\diagup K \right\}$$

y mediante τ_K denotamos a la topología de subespacio de X_K en A, asimismo, mediante τ'_K denotamos a la topología producto para la familia $\{(X_i, \tau_i)\}_{i \in K}$. A continuación, consideramos la función,

$$\begin{array}{rccc} F_K: & (X_K, \tau_K) & \longrightarrow & \left(\prod\limits_{i\in K} X_i, \tau'_K\right) \\ & y & \longmapsto & y' \end{array}$$

donde, para cada i en K, $p_i(y') = p_i(y)$. No es difícil comprobar que la función F_K es un homeomorfismo. De acuerdo al inciso 1 del teorema 14.1 y al corolario 13.2, los espacios (X_K, τ_K) son $\mathsf{K}(\mathcal{B})$-conexos. Denotemos,

$$Z_{\mathbf{x}} := \bigcup_{K \in \mathfrak{Fin}(I)} X_K$$

Dado que $\mathbf{x}$ es un elemento común a los conjuntos X_K, entonces, si τ' es la topología para $Z_{\mathbf{x}}$ heredada de A, por el inciso 3 del 14.1, el espacio $(Z_{\mathbf{x}}, \tau')$ es $\mathsf{K}(\mathcal{B})$-conexo. Lo que a continuación haremos será probar la igualdad $\overline{Z_{\mathbf{x}}} = \prod\limits_{i\in I} X_i$ (es decir, que el conjunto $Z_{\mathbf{x}}$ es denso en A), pues de ser cierta, se sigue inmediatamente de ella, que el espacio A es $\mathsf{K}(\mathcal{B})$-conexo (proposición 14.6) , y esto es precisamente lo que deseamos demostrar.

Sean, y un punto arbitrario de $\prod\limits_{i\in I} X_i$ y $U = \prod\limits_{i\in I} U_i$ un abierto básico en A tal que y pertenece a U. Entonces existe un subconjunto finito de I, digamos K, tal que $U_i = X_i$, si i no pertenece a K. Veamos que la intersección $U \cap Z_{\mathbf{x}}$ es no vacía. Si K es vacío, entonces $U = \prod\limits_{i\in I} X_i$. Supongamos que K es no vacío. Sea w un punto en $\prod\limits_{i\in I} X_i$ tal que $p_i(w) = p_i(y)$ para i en K y $p_i(w) = p_i(\mathbf{x})$ para i en $I \diagup K$. Es claro que w pertenece al conjunto $U \cap X_K$. Consecuentemente, el conjunto $U \cap Z_{\mathbf{x}}$ es no vacío. Concluimos que $\left(\prod\limits_{i\in I} X_i, \tau\right)$ es $\mathsf{K}(\mathcal{B})$-conexo.

$2 \Rightarrow 1 \rfloor$ Como $\mathsf{K}(\mathcal{B})$ es de conexión y cada proyección natural es continua y suprayectiva, por el inciso 1 del teorema 14.1, cada espacio (X_i, τ_i) es $\mathsf{K}(\mathcal{B})$-conexo, como se quiere probar. □

En este punto es natural preguntarnos si toda categoría de conexión será una constante a la izquierda. Esto resulta no ser cierto y la clase de los espacios topológicos cpt es un ejemplo de este fenómeno. Formalmente tenemos el siguiente resultado.

Afirmación (*). La categoría de conexión de los espacios topológicos cpt no es una categoría de conexión constante a la izquierda.

Antes de verificar esta afirmación, presentamos a la categoría de conexión de los espacios topológicos cpt en términos de uno de sus generadores. Inmediatamente después demostramos que dicha categoría de conexión está contenida propiamente en la categoría $\underline{C}$. Y es en el proceso de la demostración de esta contención propia que encontramos la clave para verificar la *afirmación (*).*

Proposición 14.8. *Sea I el intervalo cerrado $[0,1]$ con la topología heredada de los números reales. Entonces la categoría de conexión $\langle\{I\}\rangle$ (en $\mathfrak{Top}$) es precisamente la categoría de conexión de los espacios topológicos cpt.*

Demostración. En virtud de los teoremas 11.1 y 13.1, cada espacio $\langle\{I\}\rangle$-conexo es cpt, pues I es cpt. Recíprocamente, si $A = (X, \tau)$ es un espacio topológico cpt y x_0 es un punto cualquiera de X, sea, para cada x en X, $f_x : I \to A$ una trayectoria en A de origen x_0 y extremo x. Entonces la familia,

$$S = \{f_x : I \to A : x \in X\}$$

es un sumidero encadenado de codominio A y cuyo dominio está contenido en $\{I\}$. Por tanto, en virtud del teorema 11.1, A es $\langle\{I\}\rangle$-conexo. □

Proposición 14.9. *La categoría de conexión $\langle\{I\}\rangle$ está contenida propiamente en la categoría de conexión $\underline{C}$.*

Demostración. Como ya sabemos, I es conexo; por tanto, $\langle\{I\}\rangle$ está contenida en $\underline{C}$. Para probar la contención propia, exhibimos un espacio topológico conexo que no es cpt. Sea T el siguiente subconjunto del plano $\mathbb{R}^2$,

$$T := \{(x, sen\ ({}^1\!/\!_x)) \mid 0 < x \leq 1\}$$

Observemos que T es la imagen del conjunto conexo $(0,1]$ bajo una función continua. Por lo tanto, T, con la topologia heredada de $\mathbb{R}^2$, es conexo. Recordemos que $\underline{C} = \mathsf{K}(\{\mathbb{D}_2\})$ (ejemplo 12.6); luego, por el corolario 14.2, $\bar{T}$, también con la topología heredada de $\mathbb{R}^2$, es conexo ($\bar{T}$ es la unión de T con el intervalo vertical $\{(0,t) \mid t \in [-1,1]\}$). Sin embargo, puede demostrarse que $\bar{T}$ no es cpt. □

Observación 14.4. Puesto que $(0,1]$ es cpt, resulta que T es cpt. El hecho de que $\bar{T}$ no sea cpt, implica que $\langle\{I\}\rangle$ no es una constante a la izquierda. Efectivamente, para cualqier clase no vacía $\mathcal{B}$ de espacios topológicos no vacíos, si $\mathcal{B} \diagup T_1$ no es una clase vacía, entonces, como ya sabemos, $\mathsf{K}(\mathcal{B}) = \langle\{\emptyset\}\rangle$ o $\mathsf{K}(\mathcal{B}) = \langle\{\mathbb{I}_2\}\rangle$. Y si todos los elementos de $\mathcal{B}$ son T_1, entonces, del corolario 14.2, se sigue que $\langle\{I\}\rangle$ no es una constante a la izquierda (lo contrario implicaría que $\bar{T}$ es cpt, lo que no es el caso).

Presentamos a continuación un resumen de los resultados de conexidad que acabamos de obtener en referencia a la contención. Cabe señalar que, en cierto modo, tenemos configurada una jerarquía elemental entre las categorías de conexión arriba prsentadas.

Notación. Si $\underline{\mathbf{A}}$ y $\underline{\mathbf{B}}$ son categorías de conexión en $\mathfrak{Top}$, la notación $\underline{\mathbf{A}} \sqsubset \underline{\mathbf{B}}$ indicará que $\underline{\mathbf{A}}$ está contenida propiamente en $\underline{\mathbf{B}}$, y que no hay una categoría de conexión $\underline{\mathbf{A}}^*$ en $\mathfrak{Top}$ tal que $\underline{\mathbf{A}}^*$ contenga propiamente a $\underline{\mathbf{A}}$ y que a su vez, $\underline{\mathbf{A}}^*$ esté contenida propiamente en $\underline{\mathbf{B}}$.

Hasta el momento hemos demostrado las siguientes contenciones propias,

$$\langle\{\emptyset\}\rangle \sqsubset \langle\{\mathbb{I}_2\}\rangle \sqsubset \langle\{\mathbb{S}\}\rangle \subseteq \mathsf{K}(T_1) \quad \text{y} \quad \langle\{I\}\rangle \subset \underline{C} \sqsubset \langle\{\mathbb{D}_2\}\rangle$$

Resulta que esta cadena de contenciones puede ampliarse; sin embargo, para tal efecto, es necesario desarrollar con mucha mayor profundidad nuestra teoría de la conexidad, cosa que no haremos en este trabajo.

Capítulo 15

Espacios topológicos localmente $\underline{\mathbf{A}}$-conexos

A continuación generalizamos los conceptos de conexidad local y conexidad por trayectorias local. Comenzamos recordando los conceptos de espacio topológico localmente conexo y localmente conexo por trayectorias.

Definición 15.1. Un espacio topológico (X, τ) es localmente conexo en x en X si x posee una base local de conexos. Diremos que (X, τ) es localmente conexo si lo es en cada uno de sus puntos.

Definición 15.2. Decimos que un espacio topológico (X, τ) es localmente cpt si, para cada x en X, existe una base local en x cuyos elementos son cpt.

Definición 15.3. Sea $\underline{\mathbf{A}}$ una categoría de conexión arbitraria. Un espacio topológico (X, τ) **es localmente $\underline{\mathbf{A}}$-conexo** si cada uno de sus puntos posee una base local cuyos elementos pertenecen a $\underline{\mathbf{A}}$.

Con este nuevo concepto a la mano, presentamos tres resultados, de los cuales, el tercero, nos revela una interesante propiedad de la $\underline{\mathbf{A}}$-conexidad local.

Proposición 15.1. *Si (X, τ) es un espacio topológico, son equivalentes:*

(a) (X, τ) es localmente $\underline{\mathbf{A}}$-conexo.
(b) Las $\underline{\mathbf{A}}$-componentes de los subespacios abiertos de (X, τ) son abiertas.
(c) La topología τ posee una base cuyos elementos son $\underline{\mathbf{A}}$-conexos.

Demostración. $(a) \Rightarrow (b) \rfloor$ Sean, A en τ y a en A, arbitrarios. Denotemos con $C_A(a)$ a la $\underline{\mathbf{A}}$-componente de a en $(A, \tau|_A)$ ($C_A(a)$ es el máximo subespacio $\underline{\mathbf{A}}$-conexo de $(A, \tau|_A)$ que tiene como elemento a a). Dado x en $C_A(a)$, por (a) y puesto que x pertenece a A, existe una vecindad N de x que es $\underline{\mathbf{A}}$-conexa y que está contenida en A. Puesto que $C_A(x)$ es el máximo subespacio $\underline{\mathbf{A}}$-conexo contenido en A, se tiene que $N \subseteq C_A(x)$. Pero,

$$x \in N \subseteq C_A(x) \cap N \subseteq C_A(a)$$

Por lo tanto,

$$N \subseteq C_A(a) = C_A(x)$$

Esto significa que $C_A(a)$ es abierto.

$(b) \Rightarrow (c) \rfloor$ Sea,

$$\beta_X = \{C_A(a) : A \in \tau \quad \text{y} \quad a \in A\}$$

la familia de las $\underline{\mathbf{A}}$-componentes de los abiertos en (X, τ). Por (b), β_X es un subconjunto de τ; además, obsérvese que todo abierto A de τ es partido por las $\underline{\mathbf{A}}$-componentes $C_A(a)$, con a en A. Esto implica que β_X es una base de τ cuyos miembros son $\underline{\mathbf{A}}$-conexos.

$(c) \Rightarrow (a) \rfloor$ Sea β un subconjunto de τ. Si β es una base de subespacios $\underline{\mathbf{A}}$-conexos, es fácil ver que, para cada x en X,

$$\beta_x = \{B \in \beta : x \in B\}$$

es una base local de vecindandes $\underline{A}$-conexas. Por lo tanto, el espacio topológico (X, τ) es localmente $\underline{\mathbf{A}}$-conexo. $\square$

Proposición 15.2. *Si $\underline{\mathbf{A}}$ es una categoría de conexión y $f : (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ es una función continua y y pertenece a $f(X)$, entonces $f^{-1}\left(C_{\underline{\mathbf{A}}}(y)\right)$ es unión de $\underline{\mathbf{A}}$-componentes de (X, τ).*

Demostración. Puesto que y está en $f(X)$, $f^{-1}\left(C_{\underline{\mathbf{A}}}(y)\right)$ no es vacío. Si x pertenece a $f^{-1}\left(C_{\underline{\mathbf{A}}}(y)\right)$, entonces,

$$f\left(C_{\underline{\mathbf{A}}}(x)\right) \cap C_{\underline{\mathbf{A}}}(y) \neq \emptyset$$

Pero $f\left(C_{\underline{\mathbf{A}}}(x)\right)$ es $\underline{\mathbf{A}}$-conexo; en consecuencia también $f\left(C_{\underline{\mathbf{A}}}(x)\right) \cup C_{\underline{\mathbf{A}}}(y)$ es $\underline{\mathbf{A}}$-conexo y, además, tiene a y. Esto, y el hecho de ser $C_{\underline{\mathbf{A}}}(y)$ el máximo subespacio $\underline{\mathbf{A}}$-conexo de (Y,σ) que tiene como elemento a y, implica que,

$$f\left(C_{\underline{\mathbf{A}}}(x)\right) \subseteq C_{\underline{\mathbf{A}}}(y)$$

Por lo tanto,

$$C_{\underline{\mathbf{A}}}(x) \subseteq f^{-1}\left(C_{\underline{\mathbf{A}}}(y)\right)$$

Pero esto ocurre para toda x en $f^{-1}\left(C_{\underline{\mathbf{A}}}(y)\right)$. Debido a esto, se tiene que,

$$\bigcup_{x \in f^{-1}\left(C_{\underline{\mathbf{A}}}(y)\right)} C_{\underline{\mathbf{A}}}(x) \subseteq f^{-1}\left(C_{\underline{\mathbf{A}}}(y)\right)$$

Finalmente, si x está en $f^{-1}\left(C_{\underline{\mathbf{A}}}(y)\right)$, es claro que entonces x está en

$$\bigcup_{x \in f^{-1}\left(C_{\underline{\mathbf{A}}}(y)\right)} C_{\underline{\mathbf{A}}}(x)$$

Por lo tanto,

$$f^{-1}\left(C_{\underline{\mathbf{A}}}(y)\right) = \bigcup_{x \in f^{-1}\left(C_{\underline{\mathbf{A}}}(y)\right)} C_{\underline{\mathbf{A}}}(x)$$

El lema queda demostrado. □

Proposición 15.3. *Sea $\underline{\mathbf{A}}$ una categoría de conexión en $\mathfrak{Top}$. Entonces existe un espacio topológico (X,ρ) tal* que se satisfacen las siguientes condiciones,

1. $1_X : (X,\rho) \longrightarrow (X,\tau)$ es una función continua.
2. (X,ρ) es localmente $\underline{\mathbf{A}}$-conexo.
3. Si $f:(Y,\sigma) \to (X,\tau)$ es continua y (Y,σ) es localmente $\underline{\mathbf{A}}$-conexo, entonces $f:(Y,\sigma) \to (X,\rho)$ es continua.

Demostración. 1. Sean, (X,τ) un espacio topológico arbitrario y ρ la topología para X cuya base consta de las $\underline{A}$-componentes de los abiertos de (X,τ). Sea A un abierto de (X,τ), entonces, dado que A es unión de sus $\underline{\mathbf{A}}$-componentes, se sigue que A es un abierto de (X,ρ). Esto implica que $1_X : (X,\rho) \longrightarrow (X,\tau)$ es continua.

2. Por el inciso (c) de la proposición 15.1, el espacio (X,ρ) es localmente $\underline{\mathbf{A}}$-conexo.

3. Sea $f:(Y,\sigma) \to (X,\tau)$ cualquier función continua en la que (Y,σ) es localmente $\underline{\mathbf{A}}$-conexo; hay que demostrar que $f:(Y,\sigma) \to (X,\rho)$ es continua. Sea B un abierto básico de ρ; entonces, B es una $\underline{\mathbf{A}}$-componente de una abierto A de (X,τ). Puesto que $f:(Y,\sigma) \to (X,\tau)$ es continua, $f^{-1}(A)$ es abierto en (Y,σ). Al tener (Y,σ) la propiedad $\mathcal{P}_{\underline{\mathbf{A}}_L}$, las $\underline{\mathbf{A}}$-componentes de $f^{-1}(A)$ son abiertas en (Y,σ). Se sabe, por el lema anterior, que $f^{-1}(B)$ es unión de $\underline{\mathbf{A}}$-componentes de $f^{-1}(A)$, pues $f^{-1}(B)$ está contenido en $f^{-1}(A)$. Por lo que $f^{-1}(B)$ es abierto y, por lo tanto, $f:(Y,\sigma) \to (X,\rho)$ es continua.

$$\begin{tikzcd}
(X,\rho) \arrow[rr, "1_X"] & & (X,\tau) \\
& (W,\omega) \arrow[ul, "f"] \arrow[ur, "f"'] &
\end{tikzcd}$$

□

Capítulo 16

Objetos totalmente A-inconexos

Presentamos a continuación un breve estudio de la generalización del concepto de disconexidad total en los espacios topológicos a una *ccce tpf*. Con este capítulo damos un primer paso hacia la presentación, muy breve en este trabajo, de las categorías reflexivas, partiendo de la relación que guardan con nuestra teoría de la conexidad.

Comenzamos recordando el concepto de disconexidad total en la *ccce* $\mathfrak{Top}$.

Definición 16.1. Un espacio topológico $A = (X, \tau)$ es **totalmente disconexo** si, para cada x que pertenece a X, la componente $\underline{C}$-conexa (más común: componente conexa) de x en A, $C(x)$, es precisamente $\{x\}$.

Definición 16.2. Un espacio topológico $A = (X, \tau)$ es **totalmente disconexo por trayectorias** si, para cada x que pertenece a X, la componente $\langle\{I\}\rangle$-conexa (más común: componente por trayectorias) de x en A, $c(x)$, es precisamente $\{x\}$.

Notación. Dada una *ccce* $\underline{K}$, mediante el símbolo $\left|\underline{K}^0\right|$ denotaremos a la clase de $\underline{K}$-objetos cuyo conjunto subyacente es vacío. Si A pertenece a $\left|\underline{K}^0\right|$, entonces diremos que A es un $\underline{K}$-objeto vacío.

Definición 16.3. Sean, $\underline{K}$ una *ccce tpf* y $\underline{\mathbf{A}}$ una categoría de conexión en $\underline{K}$. Diremos que un $\underline{K}$-objeto (X, ξ) no vacío es **totalmente $\underline{\mathbf{A}}$-inconexo** si, para cada x que pertenece a X, la componente $\underline{\mathbf{A}}$-conexa de x en A, $C_{\underline{\mathbf{A}}}(x)$, es precisamente $\{x\}$.

Notación. Dada una *ccce tpf* $\underline{K}$, denotaremos mediante $\mathfrak{I}(\underline{\mathbf{A}})$ a la clase de todos los $\underline{K}$-objetos totalmente $\underline{\mathbf{A}}$-inconexos.

Proposición 16.1. *Sea $\underline{K}$ una ccce tpf. Si $\underline{\mathbf{A}}$ es una categoría de conexión en $\underline{K}$ y $\mathcal{B}$ es una clase no vacía de $\underline{K}$-objetos no vacíos, entonces $\underline{\mathbf{A}}$ está contenida en $\mathsf{K}(\mathcal{B})$ si, y sólo si, $\mathcal{B}$ está contenida en $\mathfrak{I}(\underline{\mathbf{A}})$.*

Demostración. Sea (X, ξ) un objeto de $\mathcal{B}$ que no pertenece a $\mathfrak{I}(\underline{\mathbf{A}})$; entonces alguna de sus $\underline{\mathbf{A}}$-componentes, llamémosle $(A, \xi\mid_A)$, tiene más de un punto; por lo tanto, la inclusión,

$$\iota_A : (A, \xi\mid_A) \hookrightarrow (X, \xi)$$

no es $\underline{\mathcal{A}_m^K}$-constante. Entonces $(A, \xi\mid_A)$, que es un elemento de $\underline{\mathbf{A}}$, no está en $\mathsf{K}(\mathcal{B})$. Recíprocamente, si (A, ρ) en $\underline{\mathbf{A}}$ no es un elemento de $\mathsf{K}(\mathcal{B})$, entonces existen (X, ξ) en $\mathcal{B}$ y un $\underline{K}$-morfismo,

$$f : (A, \rho) \longrightarrow (X, \xi)$$

no es $\underline{\mathcal{A}_m^K}$-constante. Por el inciso 1 del teorema 14.1, $f(A)$ es el conjunto subyacente de un subobjeto $\underline{\mathbf{A}}$-conexo de (X, ξ); por el inciso 1 de la observación 14.3, existe una componente $\underline{\mathbf{A}}$-conexa de (X, ξ) cuyo conjunto subyacente contiene a $f(A)$. Denotemos mediante $(A, \xi\mid_A)$ a dicha $\underline{\mathbf{A}}$-componente; queda claro, pues, que A no es un conjunto unitario ($f(A)$ no lo es). De lo anterior se sigue que (X, ξ) no es elemento de $\mathfrak{I}(\underline{\mathbf{A}})$. □

Corolario 16.1. *Sean, $\underline{K}$ una ccce tpf y $\mathcal{B}$ una clase no vacía de $\underline{K}$-objetos no vacíos. Entonces la clase $\mathcal{B}$ está contenida en $\mathfrak{I}(\mathsf{K}(\mathcal{B}))$.*

Demostración. De la proposición anterior, si tomamos $\underline{\mathbf{A}} = \mathsf{K}(\mathcal{B})$, el resultado se sigue inmediatamente. □

Proposición 16.2. *Sean, $\underline{K}$ una ccce topológica propiamente fibrada, $\underline{A}$ una clase cualquiera de $\underline{K}$-objetos, y,*

$$\mathcal{B}_{\underline{A}} := \left\{ B \in |\underline{K}| \setminus \left|\underline{K}^0\right| : \underline{K}(A, B) \subseteq \mathsf{C}_{\underline{\mathcal{A}_m^K}},\ \textit{con } A \textit{ en } \underline{A} \right\}$$

Entonces, $\mathsf{K}\left(\mathcal{B}_{\underline{A}}\right)$ es la mínima constante a la izquierda que contiene a $\underline{A}$[1].

[1] Observemos que la clase $\mathcal{B}_{\underline{A}}$ es no vacía, pues los $\underline{K}$-objetos de conjunto subyacente unitario son elementos suyos.

Demostración. Es claro que la clase $\underline{A}$ está contenida en la constante a la izquierda $\mathsf{K}\left(\mathcal{B}_{\underline{A}}\right)$. Demostremos ahora lo referido a la minimalidad. Sea $\mathcal{B}$ una clase de $\underline{K}$-objetos tal que $\underline{A}$ está contenida en $\mathsf{K}(\mathcal{B})$. Demostraremos que $\mathcal{B}$ está contenida en $\mathcal{B}_{\underline{A}}$. Sea, pues, B un $\mathcal{B}$-objeto arbitrario. Consideremos también un $\underline{A}$-objeto A y un $\underline{K}$-morfismo $f : A \to B$. Entonces, dado que todo elemento de $\underline{A}$ es $\mathsf{K}(\mathcal{B})$-conexo, se sigue que $f : A \to B$ es $\underline{\mathcal{A}_m^K}$-constante. En consecuencia, B es un $\mathcal{B}_{\underline{A}}$-objeto; luego, $\mathcal{B}$ está contenida en $\mathcal{B}_{\underline{A}}$. En virtud de la observación 14.1, $\mathsf{K}\left(\mathcal{B}_{\underline{A}}\right)$ está contenida en $\mathsf{K}(\mathcal{B})$. □

Proposición 16.3. *Sean,* $\underline{K}$ *una ccce tpf,* $\underline{A}$ *una clase de* $\underline{K}$*-objetos y* $\mathcal{B}_{\underline{A}}$ *como en la proposición 16.2. Entonces,* $\mathcal{B}_{\underline{A}} = \mathfrak{I}\left(\mathsf{K}\left(\mathcal{B}_{\underline{A}}\right)\right)$.

Demostración. En conformidad con la proposición 15.1, la clase $\mathcal{B}_{\underline{A}}$ está contenida en la clase $\mathcal{C} := \mathfrak{I}\left(\mathsf{K}\left(\mathcal{B}_{\underline{A}}\right)\right)$. Veamos que la otra contención también está dada. Sean, B un $\mathcal{C}$-objeto, A un $\underline{A}$ -objeto y $f : A \to B$ un $\underline{K}$-morfismo. Puesto que $\underline{A}$ está contenida en $\mathsf{K}\left(\mathcal{B}_{\underline{A}}\right)$ y las $\mathsf{K}\left(\mathcal{B}_{\underline{A}}\right)$-componentes de B tiene conjuntos subyacentes unitaros, se sigue que $f : A \to B$ es $\underline{\mathcal{A}_m^K}$-constante. En consecuencia, B es un $\mathcal{B}_{\underline{A}}$-objeto, que es precisamente lo que deseábamos demostrar. □

Corolario 16.2. *Sean,* $\underline{K}$ *una ccce tpf y* $\mathcal{B}$ *una clase no vacía de* $\underline{K}$*-objetos no vacíos; entonces,* $\mathsf{K}(\mathcal{B}) = \mathsf{K}(\mathfrak{I}(\mathsf{K}(\mathcal{B})))$.

Demostración. Efectivamente; de acuerdo a la proposición 16.2, $\mathsf{K}(\mathcal{B}) = \mathsf{K}\left(\mathcal{B}_{\mathsf{K}(\mathcal{B})}\right)$. Y por la proposición 16.3, $\mathcal{B}_{\mathsf{K}(\mathcal{B})} = \mathfrak{I}(\mathsf{K}(\mathcal{B}))$. □

De acuerdo a nuestros argumentos recién presentados, para toda constante a la izquierda $\mathsf{K}(\mathcal{B})$, es válida la igualdad $\mathcal{B}_{\mathsf{K}(\mathcal{B})} = \mathfrak{I}(\mathsf{K}(\mathcal{B}))$. Tenemos una generalización de este hecho.

Proposición 16.4. *Sea* $\underline{K}$ *una ccce tpf. Si* $\underline{\mathbf{A}}$ *es una categoria de conexión en* $\underline{K}$*, entonces* $\mathcal{B}_{\underline{\mathbf{A}}} = \mathfrak{I}(\underline{\mathbf{A}})$.

Demostración. Primero demostraremos que la clase $\mathcal{B}_{\underline{\mathbf{A}}}$ está contenida en la clase $\mathfrak{I}(\underline{\mathbf{A}})$. Sean, B un $\mathcal{B}_{\underline{\mathbf{A}}}$-objeto, A un $\underline{K}$-subobjeto no vacío $\underline{\mathbf{A}}$-conexo de B e $\iota : A \hookrightarrow B$ el $\underline{K}$-morfismo inclusón. Entonces $\iota : A \hookrightarrow B$ es $\underline{\mathcal{A}_m^K}$-constante, y dado que A no es vacío, la función subyacente de $\iota : A \hookrightarrow B$ es constante. Se sigue que el conjunto subyacente de A es unitario. A continuación demostraremos que la clase $\mathfrak{I}(\underline{\mathbf{A}})$ está contenida en la clase $\mathcal{B}_{\underline{\mathbf{A}}}$. Sean, B un $\mathfrak{I}(\underline{\mathbf{A}})$-objeto, A un $\underline{\mathbf{A}}$-objeto y $f : A \to B$ un $\underline{K}$-morfismo. Si A es vacío, entonces es inmediato que $f : A \to B$ es $\underline{\mathcal{A}_m^K}$-constante. Si A no es vacío, sea X el conjunto subyacente de A y sea η la $\underline{K}$-estructura de subobjeto de $f(X)$ en B. Entonces $(f(X), \eta)$ es un subobjeto $\underline{\mathbf{A}}$-conexo de B (recordemos que $\underline{\mathbf{A}}$ es invariante bajo $\underline{K}$-morfismos suprayectivos). En conformidad con el inciso 1 de la observación 14.3, $f(X)$ es unitario. Se sigue que en este caso también $f : A \to B$ es $\underline{\mathcal{A}_m^K}$-constante. Consecuentemente, B es un $\mathfrak{I}(\underline{\mathbf{A}})$-objeto. □

Corolario 16.3. *Sea* $\underline{K}$ *una ccce tpf. Si* $\underline{\mathbf{A}}$ *es una categoria de conexión en* $\underline{K}$*, entonces* $\mathfrak{I}(\underline{\mathbf{A}}) = \mathfrak{I}(\mathsf{K}(\mathfrak{I}(\underline{\mathbf{A}})))$.

Demostración. Conforme a la porposición 16.3, $\mathcal{B}_{\underline{\mathbf{A}}} = \mathfrak{I}\left(\mathsf{K}\left(\mathcal{B}_{\underline{\mathbf{A}}}\right)\right)$. Por la proposición 16.4, $\mathcal{B}_{\underline{\mathbf{A}}} = \mathfrak{I}(\underline{\mathbf{A}})$. En consecuencia, $\mathfrak{I}(\underline{\mathbf{A}}) = \mathfrak{I}(\mathsf{K}(\mathfrak{I}(\underline{\mathbf{A}})))$. □

Definición 16.4. Sean, $\underline{K}$ una *ccce tpf* y $\mathcal{B}$ una clase no vacía de $\underline{K}$-objetos no vacíos. Diremos que la clase $\mathcal{B}$ es $\mathfrak{I}\mathsf{K}$**-cerrada** si, $\mathcal{B} = \mathfrak{I}(\mathsf{K}(\mathcal{B}))$.

Ejemplo 16.1. Si $\underline{\mathbf{A}}$ es una categoría de conexión, entonces $\mathfrak{I}(\underline{\mathbf{A}})$ es $\mathfrak{I}\mathsf{K}$-cerrada.

En el capítulo siguiente veremos ejemplos de clases $\mathfrak{I}\mathsf{K}$-cerradas en $\mathfrak{Top}$.

Recordando el inciso (1) de la observación 14.3, observemos ahora que en un $\underline{K}$-objeto (X, ξ) totalmente $\underline{\mathbf{A}}$-disconexo, no es posible que dos puntos distintos x y x' de X estén $\underline{\mathbf{A}}$-conectados. En general, tenemos la siguiente definición.

Definición 16.5. Sean, $\underline{K}$ una *ccce tpf* y $\underline{\mathbf{A}}$ una categoría de conexión en $\underline{K}$. Si (X, ξ) es un $\underline{K}$-objeto y x, y son puntos en X, diremos que x y y están $\underline{\mathbf{A}}$**-desconectados** en (X, ξ), si no hay un subobjeto $\underline{\mathbf{A}}$-conexo de (X, ξ) cuyo conjunto subyacente contenga al conjunto $\{x, y\}$.

Observaciones 16.1. (1) Siendo $\underline{K}$ una *ccce tpf*, $\underline{\mathbf{A}}$ una categoría de conexión en $\underline{K}$ y (X, ξ) un $\underline{K}$-objeto, dos puntos x, y en X estarán $\underline{\mathbf{A}}$-desconectados en (X, ξ) si, y sólo si, $C_{\underline{A}}(x) \cap C_{\underline{A}}(y) = \emptyset$.

(2) De acuerdo con la definición 16.5, si la categoría de conexión en cuestión es una constante a la izquierda, digamos $\mathsf{K}(\mathcal{B})$, entonces los puntos x y y estarán $\mathsf{K}(\mathcal{B})$-conectados en (X, ξ), si existe un $\underline{K}$-subobjeto $C = (Y, \xi_Y)$ de (X, ξ), $\mathsf{K}(\mathcal{B})$-conexo y tal que x y y pertenecen a Y. Esto significa que para cualesquiera B en $\mathcal{B}$ y $\underline{K}$-morfismo $f : C \to B$, $f(x) = f(y)$. Así mismo, dos puntos x, y de X estarán $\mathsf{K}(\mathcal{B})$-desconectados si, y sólo si, existen B en $\mathcal{B}$ y un $\underline{K}$-morfismo $f : (\{x, y\}, \xi\mid_{\{x,y\}}) \to B$, tales que $f(x) \neq f(y)$ ($\xi\mid_{\{x,y\}}$ es la $\underline{K}$-estructura inicial de $\{x, y\}$ respecto de (ι, ξ), donde $\iota : \{x, y\} \hookrightarrow X$ es la inclusión).

Corolario 16.4. *Sean, $\underline{K}$ una ccce tpf, $\mathcal{B}$ una clase no vacía de $\underline{K}$-objetos no vacíos y (X, ξ) un $\underline{K}$-objeto tal que X tiene al menos dos puntos. Son equivalentes,*

(a) El $\underline{K}$-objeto (X, ξ) pertenece a $\mathfrak{I}\left(\mathsf{K}\left(\mathcal{B}\right)\right)$.
(b) Cualesquiera dos puntos distintos de X están $\mathsf{K}\left(\mathcal{B}\right)$-desconectados.

Demostración. $(a) \Rightarrow (b) \rfloor$ Supongamos que (X, ξ) pertenece a $\mathfrak{I}\left(\mathsf{K}\left(\mathcal{B}\right)\right)$. Sean x y y dos puntos distintos de X. Sea $C = (Y, \xi_Y)$ un $\underline{K}$-subobjeto de (X, ξ) tal que es $\mathsf{K}\left(\mathcal{B}\right)$-conexo y x pertenece a Y. Entonces el conjunto Y está contenido en $C_{\mathsf{K}(\mathcal{B})}\left(x\right)$; luego, del inciso 1 de la observación 16.1, se sigue que y no pertenece a Y. En consecuencia, x y y están $\mathsf{K}\left(\mathcal{B}\right)$-desconectados.

$(b) \Rightarrow (a) \rfloor$ Supongamos que cualesquiera dos puntos distintos de X están $\mathsf{K}\left(\mathcal{B}\right)$-desconectados. Sea x un punto arbitrario de X. Entonces, dado cualquier otro punto y de X, tenemos que y no es un elemento de $C_{\mathsf{K}(\mathcal{B})}\left(x\right)$. Se sigue que $C_{\mathsf{K}(\mathcal{B})}\left(x\right) = \{x\}$. Concluimos que (X, ξ) pertenece a $\mathfrak{I}\left(\mathsf{K}\left(\mathcal{B}\right)\right)$. $\square$

Nota. Respecto a la notación: si $\underline{K}$ una *ccce tpf* y $\mathcal{B}$ una clase no vacía de $\underline{K}$-objetos no vacíos, de aquí en adelante acordaremos escribir $\mathfrak{I}\mathsf{K}\left(\mathcal{B}\right)$ en lugar de $\mathfrak{I}\left(\mathsf{K}\left(\mathcal{B}\right)\right)$.

Capítulo 17

Dos ejemplos de categorías $\mathfrak{IK}$-cerradas en $\mathfrak{Top}$

En este capítulo presentamos dos ejemplos de clases $\mathfrak{IK}$-cerradas en la *ccce* $\mathfrak{Top}$: la clase de los espacios T_0 y la clase de los espacios T_1. Es interesante la relación que guardan estos axiomas de separación con el concepto de disconexión total en el marco de nuestra teoría de la conexidad. Resulta, pues, que los axiomas de separación T_0 y T_1 nos proporcionan otra idea de *separación;* una en el sentido de la *conexidad categórica.*

Proposición 17.1. *Sea $\mathcal{B} = \{\mathbb{S}\}$, donde, como antes, $\mathbb{S}$ denota el espacio de Sierpinski. Entonces,*

$$T_0 = \mathfrak{I}\mathsf{K}\left(\{\mathbb{S}\}\right)$$

Demostración.
($\diamond$) Sean, (X, τ) en $\mathfrak{I}\mathsf{K}\left(\{\mathbb{S}\}\right)$ y x, y dos puntos en X. Si $x \neq y$, entonces, en vista del corolario 16.4 y del inciso (2) de la observación 16.1, existe una función continua,

$$f : \left(\{x, y\}, \tau\mid_{\{x,y\}}\right) \to \mathbb{S}$$

tal que $f(x) \neq f(y)$. Si $f(x) = 0$, entonces $f^{-1}(0)$ es un abierto relativo en $\{x, y\}$ que tiene x pero no a y. En consecuencia, existe un abierto en τ que tiene como elemento a x, pero no a y. Se sigue que (X, τ) es un espacio T_0.
($\circ$) Si (X, τ) es un espacio T_0 y x, y son puntos distintos en X, entonces, sin pérdida de generalidad, existe un abierto U en (X, τ) tal que,

$$x \in U \quad \text{y} \quad y \notin U$$

Por tanto, si $f : \{x, y\} \to \{0, 1\}$ es la función dada por,

$$f(z) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad z = x \\ 1 & \text{si} \quad z = y \end{cases}$$

entonces $f : \left(\{x, y\}, \tau\mid_{\{x,y\}}\right) \to \mathbb{S}$ es continua y $f(x) \neq f(y)$. Entonces, del inciso (2) de la observación 16.1 del corolario 16.4, se sigue que (X, τ) pertenece a $\mathfrak{I}\mathsf{K}\left(\{\mathbb{S}\}\right)$. $\square$

Corolario 17.1. *Se tiene que $T_0 = \mathfrak{I}\mathsf{K}\left(T_0\right)$.*

Demostración. En efecto, pues por el corolario 16.3 y la proposición 17.1, tenemos que,

$$T_0 = \mathfrak{I}\mathsf{K}\left(\{\mathbb{S}\}\right) = \mathfrak{I}\mathsf{K}\mathfrak{I}\mathsf{K}\left(\{\mathbb{S}\}\right) = \mathfrak{I}\mathsf{K}\left(T_0\right)$$

$\square$

Proposición 17.2. *Sea $\mathcal{B} = \{(Y, \sigma) \in |\mathfrak{Top}| : \sigma$ es la topología cofinita para $Y\}$. Entonces,*

$$T_1 = \mathfrak{I}\mathsf{K}\left(\mathcal{B}\right)$$

Demostración.
($\diamond$) Sean, (X, τ) en $\mathfrak{I}\mathsf{K}\left(\mathcal{B}\right)$ y x, y dos puntos en X. Si $x \neq y$, entonces existe una función continua,

$$f : \left(\{x, y\}, \tau\mid_{\{x,y\}}\right) \to (Y, \sigma)$$

con (Y, σ) en $\mathcal{B}$ y tal que $f(x) \neq f(y)$. Entonces,

$$Y \setminus \{f(x)\} \in \sigma \quad \text{y} \quad U = f^{-1}\left(Y \setminus \{f(x)\}\right) \in \tau\mid_{\{x,y\}}$$

Desde luego,

$$y \in U \quad \text{y} \quad x \notin U$$

De manera análoga,

$$Y \backslash \{f(y)\} \in \sigma \quad \text{y} \quad V = f^{-1}(Y \backslash \{f(y)\}) \in \tau \mid_{\{x,y\}}$$

y resulta que,

$$x \in V \quad \text{y} \quad y \notin V$$

Así, pues, existen abiertos $\tilde{U}, \tilde{V}$ en τ tales que,

$$y \in \tilde{U} \quad \text{y} \quad x \notin \tilde{U}$$

y,

$$x \in \tilde{V} \quad \text{y} \quad y \notin \tilde{V}$$

Se sigue que (X, τ) es un espacio T_1.

($\circ$) Si (X, τ) es un espacio T_1, y x, y son dos puntos distintos en X, entonces la inclusión,

$$\iota : (\{x, y\}, \tau \mid_{\{x,y\}}) \hookrightarrow (X, \tau)$$

es una función no constante y continua, pues el espacio $(\{x, y\}, \tau \mid_{\{x,y\}})$ es discreto. Ahora bien, observemos que si σ es la topología cofinita para X, entonces σ es más áspera que τ. En consecuencia, la función inclusión,

$$\iota : (\{x, y\}, \tau \mid_{\{x,y\}}) \hookrightarrow (X, \sigma)$$

es continua (y ya sabemos que no es constante). Se sigue que el espacio (X, τ) pertenece a $\mathfrak{IK}(\mathcal{B})$. □

La demostración de la siguiente proposición está prácticamente contenida en la demostración anterior.

Proposición 17.3. *Se tiene que* $T_1 = \mathfrak{IK}(T_1)$.

En vista de los resultados precedentes, es natural preguntarnos si todo axioma de separación puede interpretarse como algún tipo de disconexidad total respecto de alguna categoría de conexión constante a la izquierda. La respuesta a esta cuestión la damos a continuación.

Proposición 17.4. *Sea T una clase no vacía de espacios topológicos no vacíos. Entonces la clase $\mathfrak{IK}(T)$ no está contenida en la clase T_2.*

Demostración. En primer lugar, presentamos el siguiente espacio topológico. Sean, $X := \mathbb{N} \cup \{\{0\}, \{1\}\}$ y $\mathfrak{B}$ la familia de todos los subconjuntos de X de los siguientes tipos: Los conjuntos unitarios $\{n\}$, con n un número natural. Para cada pareja de números naturales m y n, los conjuntos de la forma,

$$U_m := \{\{0\}\} \cup \{k \mid k \in \mathbb{N} \text{ y } k \geq m\}$$

y de la forma,

$$V_n := \{\{1\}\} \cup \{k \mid k \in \mathbb{N} \text{ y } k \geq n\}$$

Así definida, la familia $\mathfrak{B}$ conforma una base para una topología sobre el conjunto X. Denotemos mediante τ a la topología generada por $\mathfrak{B}$. Cabe señalar que el espacio (X, τ) es totalmente inconexo y no es T_2.

Ahora bien, supongamos que la clase T tiene entre sus elementos algún espacio T_2. En este caso, no es difícl verificar que el espacio (X, τ) pertenece a la clase $\mathfrak{IK}(T)$, y como (X, τ) no es T_2, se sigue que la clase $\mathfrak{IK}(T)$ no está contenida en la clase T_2.

Supongamos ahora que las clases T y T_2 no tienen elementos en común. De acuerdo al corolario 16.1, la clase T está contenida en la clase $\mathfrak{IK}(T)$; en consecuencia, $\mathfrak{IK}(T)$ no está contenida en la clase T_2. □

Corolario 17.2. *Para ninguna clase T no vacía de espacios topológicos no vacíos se tiene la igualdad $T_2 = \mathfrak{IK}(T)$.*

Demostración. Se sigue inmediatamente de la proposición 17.4. □

Resulta que la clase de espacios topológicos T_2 no puede verse como algún tipo de disconexidad, sea cual sea la categoría de conexión en cuestión.

Proposición 17.5. *En la ccce $\mathfrak{Top}$, no hay categoría de conexión $\underline{\mathbf{A}}$ tal que $T_2 = \mathfrak{I}(\underline{\mathbf{A}})$.*

Demostración. Supongamos que $\underline{\mathbf{A}}$ es una categoria de conexión en $\mathfrak{Top}$ tal que $T_2 = \mathfrak{I}(\underline{\mathbf{A}})$. Entonces,

$$\mathsf{K}(T_2) = \mathsf{K}\mathfrak{I}(\underline{\mathbf{A}})$$

luego,

$$\mathfrak{I}\mathsf{K}(T_2) = \mathfrak{I}\mathsf{K}\mathfrak{I}(\underline{\mathbf{A}})$$

En conformidad con el corolario 16.3, $\mathfrak{I}\mathsf{K}\mathfrak{I}(\underline{\mathbf{A}}) = \mathfrak{I}(\underline{\mathbf{A}})$. Por consiguiente, $T_2 = \mathfrak{I}\mathsf{K}(T_2)$. Por la proposición 17.4, la última igualdad no es posible. De aquí se sigue que no hay categoría de conexión $\underline{\mathbf{A}}$ tal que $T_2 = \mathfrak{I}(\underline{\mathbf{A}})$. $\square$

Capítulo 18

Equivalencias de una categoría constante a la izquierda (no trivial) en $\mathfrak{Top}$

En esta sección presentamos tres propiedades equivalentes que caracterizan a las categorías constantes a la izquierda no triviales en $\mathfrak{Top}$. Una de dichas caracterizaciones nos será de utilidad para el capítulo siguiente.

Un concepto importante que introducimos en esta sección, aunque lo exploraremos superficialmente, es el de categoría de conexión normal. En cierto modo, el concepto de normalidad aquí presentado ya lo hemos estudiado anteriormente; es un concepto que generaliza el resultado expuesto en la proposición 14.6. Considerando la proposición 14.9, resulta que la normalidad es pieza clave para resaltar una diferencia entre la categoría de los espacios conectables por trayectorias y la categoría de los espacios conexos. Hay otras cualidades que también marcan diferencia entre estos dos tipos de categorías de conexión, pero no las mencionaremos en este trabajo (el lector puede consultar [10] para un estudio más profundo de las diferencias entre estas categorías).

Definiciones 18.1. Sean, $\underline{\mathbf{A}}$ una categoría de conexión en $\mathfrak{Top}$ y $f:(X,\tau)\to(Y,\sigma)$ una función continua.

(a) Diremos que f es **$\underline{\mathbf{A}}$-monótona** si para cada y de Y, $\left(f^{-1}(y),\tau\mid_{f^{-1}(y)}\right)$ es $\underline{\mathbf{A}}$-conexo.

(b) Diremos que **la categoría $\underline{\mathbf{A}}$ es d-cerrada**, si para cualquier espacio (Y,σ) que sea $\underline{\mathbf{A}}$-conexo, y para cualquier identificación $\underline{\mathbf{A}}$-monótona, $p:(X,\tau)\to(Y,\sigma)$, resulta que (X,τ) es $\underline{\mathbf{A}}$-conexo.

(c) **Una categoría $\underline{\mathbf{A}}$ de conexión es normal**, si junto con un espacio (X,τ), tiene a todos los espacios que contengan a (X,τ) como subespacio denso. Es decir, si (X,τ) es un subespacio $\underline{\mathbf{A}}$-conexo de (Y,σ) tal que $\overline{X}^{\sigma}=Y$ ($\overline{X}^{\sigma}$ denota la cerradura de X en (Y,σ)), entonces (Y,σ) es $\underline{\mathbf{A}}$-conexo.

Observaciones 18.1. La intersección de categorías de conexión normales es una categoría de conexión normal.

Observaciones 18.2. Si $\mathcal{B}$ es una clase no vacía de espacios topológicos no vacíos tal que cada uno de sus objetos es T_1, entonces $\mathsf{K}(\mathcal{B})$ es normal. De hecho, a continuación veremos que toda categoría constante a la izquierda no trivial, es una categoría de conexión normal.

La *ccce* que tendremos en contexto para los siguientes resultados es $\mathfrak{Top}$.

Proposición 18.1. *Una categoría de conexión $\underline{\mathbf{A}}$ es normal si, y sólo si, las $\underline{\mathbf{A}}$-componentes de cualquier espacio (X,τ) son cerradas.*

Demostración. Si $\underline{\mathbf{A}}$ es una categoría de conexión normal y (X,τ) es un espacio topológico arbitrario, entonces, para cualquier elemento x de X, se tiene que $\overline{C_{\underline{\mathbf{A}}}(x)}$, la cerradura de $C_{\underline{\mathbf{A}}}(x)$ en (X,τ), es $\underline{\mathbf{A}}$-conexo. Esto implica que $\overline{C_{\underline{\mathbf{A}}}(x)}=C_{\underline{\mathbf{A}}}(x)$; se sigue que la componente $C_{\underline{\mathbf{A}}}(x)$ es cerrada en (X,τ).

Supongamos ahora que las $\underline{\mathbf{A}}$-componentes de cualquier espacio topológico son cerradas. Sean, $A=(X,\tau)$ y $B=(Y,\sigma)$ dos espacios topológicos tales que A es un subespacio $\underline{\mathbf{A}}$-conexo de B, y además, $\overline{X}^{\sigma}=Y$; debemos probar que (Y,σ) es $\underline{\mathbf{A}}$-conexo. Sea x en X, entonces X está contenido en $C_{\underline{\mathbf{A}}}(x)$, donde $C_{\underline{\mathbf{A}}}(x)$ es la $\underline{\mathbf{A}}$-componente de x en (Y,σ). Por lo tanto,

$$Y=\overline{X}^{\sigma}\subseteq\overline{C_{\underline{\mathbf{A}}}(x)}^{\sigma}=C_{\underline{\mathbf{A}}}(x)\subseteq Y$$

Entonces (Y,σ) es $\underline{\mathbf{A}}$-conexo. □

Lema 18.1. *Sea $\underline{\mathbf{A}}$ una categoría de conexión no trivial y d-cerrada. Si (X,τ) es un espacio topológico y A es un subconjunto de X tal que $(A,\tau\mid_A)$ es $\underline{\mathbf{A}}$-conexo, entonces el espacio $\left(\overline{A},\tau\mid_{\overline{A}}\right)$ es $\underline{\mathbf{A}}$-conexo.*

Demostración. Sea (X,τ) un espacio topológico arbitrario. Supongamos que A es un subconjunto de X que no es cerrado en τ y que $(A,\tau\mid_A)$ es $\underline{\mathbf{A}}$-conexo. Sean, x un punto en $\overline{A}\backslash A$ y

$$p:\left(A\cup\{x\},\tau\mid_{A\cup\{x\}}\right)\longrightarrow(\{w,z\},\sigma)$$

la identificación de A y x en puntos distintos ($p(A)=w$ y $p(x)=z$, con $w\neq z$). Observemos que $\{z\}$ no es abierto en σ (de ser abierto $\{z\}$, existiría un abierto en τ que tiene como elemento a x pero que no intersecta al conjunto A. Desde luego, esto no es posible, pues x es punto de acumulación de A). Esto implica que $(\{w,z\},\sigma)$ es un espacio indiscreto, o bien, un espacio de Sierpinski. Cualquier caso implica que $(\{w,z\},\sigma)$ es un objeto de

$\underline{\mathbf{A}}$ (por hipótesis $\underline{\mathbf{A}}$ es no trivial); y puesto que $\underline{\mathbf{A}}$ es d-cerrada, concluimos que $\left(A \cup \{x\}, \tau\mid_{A\cup\{x\}}\right)$ es $\underline{\mathbf{A}}$-conexo. Por otro lado, dado que,

$$\overline{A} = \bigcup_{x\in\overline{A}\setminus A} (A \cup \{x\}) \quad \text{y} \quad A = \bigcap_{x\in\overline{A}-A} (A \cup \{x\})$$

resulta entonces claro que $\left(\overline{A}, \tau\mid_{\overline{A}}\right)$ es un $\underline{\mathbf{A}}$-espacio. Entonces $\underline{\mathbf{A}}$ es normal. □

Corolario 18.1. *Si $\underline{\mathbf{A}}$ una categoría de conexión no trivial y d-cerrada, entonces $\underline{\mathbf{A}}$ es normal.*

Demostración. Sean, (X,τ) un espacio topológico arbitrario y x un elemento de X. Entonces el espacio $\left(C_{\underline{\mathbf{A}}}(x), \tau\mid_{C_{\underline{\mathbf{A}}}(x)}\right)$ es $\underline{\mathbf{A}}$-conexo. De acuerdo al lema 18.1 $\left(\overline{C_{\underline{\mathbf{A}}}(x)}, \tau\mid_{\overline{C_{\underline{\mathbf{A}}}(x)}}\right)$ es $\underline{\mathbf{A}}$-conexo; en consecuencia, $C_{\underline{\mathbf{A}}}(x) = \overline{C_{\underline{\mathbf{A}}}(x)}$. En virtud de la proposición 18.1, $\underline{\mathbf{A}}$ es normal. □

Proposición 18.2. *Si $\underline{\mathbf{A}}$ es una categoría de conexión constante a la izquierda, entonces $\underline{\mathbf{A}}$ es d-cerrada.*

Demostración. Sea $\mathcal{B}$ una clase no vacía de espacios topológicos no vacíos tal que $\underline{\mathbf{A}} = \mathsf{K}(\mathcal{B})$. Supongamos que $p:(X,\tau)\to(Y,\sigma)$ es una identificación $\underline{\mathbf{A}}$-monótona y que (Y,σ) es $\underline{\mathbf{A}}$-conexo; debemos probar que (X,τ) es $\underline{\mathbf{A}}$-conexo.

Sean, (Z,ς) en $\mathcal{B}$ y $f:(X,\tau)\to(Z,\varsigma)$ una función continua. Dados x,y en X, tenemos que,

$$p(x) = p(y) \Longrightarrow f(x) = f(y)$$

pues $f\mid_{p^{-1}(p(x))}$ es constante, ya que $\left(p^{-1}(p(x)), \tau\mid_{p^{-1}(p(x))}\right)$ es $\underline{\mathbf{A}}$-conexo. Por la proposición 9.2, existe una única función continua,

$$g:(Y,\sigma)\longrightarrow(Z,\varsigma)$$

tal que el diagrama,

$$\begin{tikzcd}
(X,\tau) \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "p"'] & & (Z,\varsigma) \\
& (Y,\sigma) \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

conmuta. Puesto que (Y,σ) es $\underline{\mathbf{A}}$-conexo y (Z,ς) pertenece a $\mathcal{B}$, se sigue que g es constante. En consecuencia, f es una función constante, pues,

$$f(X) = (g\circ p)(X) = g(p(X))$$

Concluimos que (X,τ) es $\underline{\mathbf{A}}$-conexo. □

Como corolario a la proposición anterior, tenemos el resultado dado en la proposición 14.6.

Corolario 18.2. *Toda categoría constante a la izquierda no trivial, es normal.*

Demostración. Es consecuencia directa del lema 18.1 y de la proposición 18.2. □

Ejemplo 18.1. Las categorías triviales $\langle\{\emptyset\}\rangle$ y $\langle\{\mathbb{I}_2\}\rangle$ son las únicas constantes a la izquierda que no son normales.

Demostración. No es difícil verificar que $\langle\{\emptyset\}\rangle = \mathsf{K}(\mathfrak{Top})$ y que $\langle\{\mathbb{I}_2\}\rangle = \mathsf{K}(\{\mathbb{S}\})$. Por otro lado, observemos que en el espacio $\mathbb{S}$, el conjunto $\{0,1\}$ es la cerradura del conjunto $\{0\}$. Entonces las categorías triviales no son normales, pues el espacio topológico $A = (\{0\}, \{\emptyset,\{0\}\})$ es un elemento común de ambas, pero $\mathbb{S}$ no les pertenece. □

Lema 18.2. *Sea $p:(X,\tau)\to(Y,\sigma)$ una identificación. Si C es cerrado en (Y,σ), entonces, la función,*

$$q = p\mid_{p^{-1}(C)}^{C} : \left(p^{-1}(C), \tau\mid_{p^{-1}(C)}\right) \longrightarrow (C, \sigma\mid_C)$$

es una identificación.

Demostración. Sea W un subconjunto de C tal que $q^{-1}(W)$ es cerrado respecto a $\tau\mid_{p^{-1}(C)}$. Entonces, puesto que $p^{-1}(C)$ es cerrado respecto a τ, resulta que $q^{-1}(W)$ también es cerrado respecto a τ. Consecuentemente, dado que p es una identificación y $q^{-1}(W) = p^{-1}(W)$, W es cerrado respecto a σ; por lo tanto, W es cerrado respecto a $\sigma\mid_C$. Esto prueba que q es una identificación. □

Concluimos este capítulo presentando tres propiedades equivalentes que caracterizan a las categorías constantes a la izquierda no triviales en $\mathfrak{Top}$.

Teorema 18.1. *Sea* $\underline{\mathbf{A}}$ *una categoría de conexión no trivial en* $\mathfrak{Top}$. *Son quivalentes,*

(a) $\underline{\mathbf{A}}$ es una constante a la izquierda.
(b) $\underline{\mathbf{A}} = \mathsf{K}(\mathfrak{I}(\underline{\mathbf{A}}))$
(c) $\underline{\mathbf{A}}$ es $d-$ *cerrada.*
(d) Para todo espacio topológico (X,τ), si $\sim$ es la relación de equivalencia inducida por la partición del conjunto X en sus $\underline{\mathbf{A}}$-componentes y $(X/\sim,\tilde{\tau})$ es el espacio cociente de (X,τ) respecto a $\sim$, entonces $(X/\sim,\tilde{\tau})$ pertenece a $\mathfrak{I}(\underline{\mathbf{A}})$.

Demostración. $(a)\Rightarrow(b)\rfloor$ Ya sabemos que $\mathcal{B}_{\underline{\mathbf{A}}} = \mathfrak{I}(\underline{\mathbf{A}})$; además, por la proposición 16.2, $\mathsf{K}(\mathfrak{I}(\underline{\mathbf{A}}))$ es la mínima constante a la izquierda que contiene a $\underline{\mathbf{A}}$; luego, $\underline{\mathbf{A}} = \mathsf{K}(\mathfrak{I}(\underline{\mathbf{A}}))$.

$(b)\Rightarrow(c)\rfloor$ Es la proposición 18.2.

$(c)\Rightarrow(d)\rfloor$ Sean, $\bar{x}$ en $X/\sim$ y $C_{\underline{\mathbf{A}}}(\bar{x})$ la $\underline{\mathbf{A}}$-componente de $\bar{x}$. Consideremos la proyección natural,

$$\begin{array}{rcl} q:X & \longrightarrow & X/\sim \\ x & \longmapsto & C_{\underline{\mathbf{A}}}(x)=\bar{x} \end{array}$$

Desde luego, la función q es $\underline{\mathbf{A}}$-monótona (para cada $\bar{x}$ en $X/\sim$, $q^{-1}(\bar{x}) = C_{\underline{\mathbf{A}}}(x)$, donde x es un elemento de X tal que $q(x)=\bar{x}$)); luego, por el corolario 18.1, la proposición 18.1 y el lema 18.2, tenemos que,

$$q\,|^{C_{\underline{\mathbf{A}}}(\bar{x})}_{q^{-1}\left(C_{\underline{\mathbf{A}}}(\bar{x})\right)}\colon \left(q^{-1}\left(C_{\underline{\mathbf{A}}}(\bar{x})\right),\tau\,|_{q^{-1}\left(C_{\underline{\mathbf{A}}}(\bar{x})\right)}\right) \longrightarrow \left(C_{\underline{\mathbf{A}}}(\bar{x}),\tilde{\tau}\,|_{C_{\underline{\mathbf{A}}}(\bar{x})}\right)$$

es un cociente. En consecuencia, $\left(q^{-1}\left(C_{\underline{\mathbf{A}}}(\bar{x})\right),\tau\,|_{q^{-1}\left(C_{\underline{\mathbf{A}}}(\bar{x})\right)}\right)$ es un espacio $\underline{\mathbf{A}}$-conexo. Sea x en X tal que $q(x)=\bar{x}$; entonces, x pertenece a $q^{-1}\left(C_{\underline{\mathbf{A}}}(\bar{x})\right)$ y, por tanto,

$$q^{-1}\left(C_{\underline{\mathbf{A}}}(\bar{x})\right) \subseteq C_{\underline{\mathbf{A}}}(x)$$

Así,

$$C_{\underline{\mathbf{A}}}(\bar{x}) = q\left(q^{-1}\left(C_{\underline{\mathbf{A}}}(\bar{x})\right)\right) \subseteq q\left(C_{\underline{\mathbf{A}}}(x)\right) = \{\bar{x}\}$$

Entonces $C_{\underline{\mathbf{A}}}(\bar{x}) = \{\bar{x}\}$. Así pues, $(X/\sim,\varsigma)$ pertenece a $\mathfrak{I}(\underline{\mathbf{A}})$.

$(d)\Rightarrow(a)\rfloor$ De la proposición 15.1, tenemos que $\underline{\mathbf{A}}$ está contenida en $\mathsf{K}(\mathfrak{I}(\underline{\mathbf{A}}))$. Sea (X,τ) un espacio toplógico que no pertenece a $\underline{\mathbf{A}}$; entonces, si $(X/\sim,\tilde{\tau})$ es el espacio cociente de (X,τ) inducido por la partición de X en sus $\underline{\mathbf{A}}$-componentes, resulta que la proyección natural,

$$q:(X,\tau)\longrightarrow(X/\sim,\tilde{\tau})$$

es una función continua no constante de (X,τ) en un elemento de $\mathfrak{I}(\underline{A})$. Consecuentemente, (X,τ) no pertenece a $\mathsf{K}(\mathfrak{I}(\underline{A}))$. Esto prueba que $\mathsf{K}(\mathfrak{I}(\underline{\mathbf{A}}))$ está contenida en $\underline{\mathbf{A}}$. Así, $\underline{\mathbf{A}} = \mathsf{K}(\mathfrak{I}(\underline{\mathbf{A}}))$. $\square$

Capítulo 19

Sub*ccce* $\underline{\mathbf{K}}$-isp

Observaciones 19.1. Sea $\underline{K}$ una *ccce tpf*. Consideremos una clase no vacía $\mathcal{O}$ de $\underline{K}$-objetos. Mediante $\mathcal{O}$ podemos construir una sub*ccce* plena de $\underline{K}$. En efecto, sea $\underline{S}$ la sub*ccce* de $\underline{K}$ cuyos objetos y morfismos quedan determinados del siguiente modo,

1. Para cada conjunto X, definimos su clase de $\underline{S}$-estructuras como,

$$\underline{S}\,[X] := \{\xi \in \underline{K}\,[X] \mid (X, \xi) \in \mathcal{O}\}$$

2. Para cada par de $\underline{S}$-objetos A y B, los $\underline{S}$-morfismos de A en B quedan determinados por la igualdad,

$$\underline{S}\,(A, B) := \underline{K}\,(A, B)$$

Resulta, pues, que la *ccce* $\underline{S}$ es una sub*ccce* plena de $\underline{K}$, y además, $|\underline{S}| = \mathcal{O}$. En otras palabras: A cada clase no vacía de $\underline{K}$-objetos podemos asociarle una sub*ccce* plena de $\underline{K}$, cuyos objetos son precisamente los elementos de la clase dada. Inversamente, si $\underline{S}$ es una sub*ccce* plena de $\underline{K}$, entonces podemos asociarle una clase de $\underline{K}$-objetos, a saber, $|\underline{S}|$.

Notemos que los dos procesos de asociacion son *"mutuamente inversos"*. Es en este sentido que cada clase de $\underline{K}$-objetos puede ser identificada con una sub*ccce* plena de $\underline{K}$. En particular, toda categoría de $\mathfrak{C}$-conexión $\underline{\mathbf{A}}$ y toda clase $\mathfrak{I}\mathsf{K}$-cerrada, pueden ser vistas como sub*ccce* plenas de $\underline{K}$.

Por otro lado, existe un criterio para saber si una sub*ccce* plena de una *ccce* $\underline{K}$ no es $\mathfrak{I}\mathsf{K}$-cerrada. Dicho criterio está formulado en términos de $\underline{K}$-isomorfismos, $\underline{K}$-subespacios y $\underline{K}$-productos. Tratar con este criterio nos proporciona un enfoque a través del cual es posible obtener un tipo especial de sub*ccce* de $\underline{K}$, de tal modo que éstas tienen como ejemplos particulares a las sub*ccce* $\mathfrak{I}\mathsf{K}$-cerradas.

Proposición 19.1. *Sean, $\underline{K}$ una ccce tpf y $\underline{A}$ una subccce plena de $\underline{K}$ que es $\mathfrak{I}\mathsf{K}$-cerrada. Entonces $\underline{A}$ es cerrada bajo la formación de $\underline{K}$-isomorfismos, $\underline{K}$-subobjetos y $\underline{K}$-productos.*

Demostración. (*a*) *$\underline{A}$ es cerrada bajo la formación $\underline{K}$-isomorfismos.* Sean, (X, ξ) en $|\underline{A}|$ y $h : (Y, \eta) \to (X, \xi)$ un $\underline{K}$-isomorfismo. Si $(A, \eta\mid_A)$ es una $\mathsf{K}\,(\underline{A})$-componente de (Y, η), entonces, $(h\,(A)\,, \xi\mid_{h(A)})$ es un $\underline{K}$-subobjeto $\mathsf{K}\,(\underline{A})$-conexo de (X, ξ); luego, al ser (X, ξ) totalmente $\mathsf{K}\,(\underline{A})$-inconexo, se sigue que $h\,(A)$ es un conjunto unitario. En consecuencia, dado que $h : Y \to X$ es una función biyectiva, el conjunto A es unitario. Esto prueba que el $\underline{K}$-objeto (Y, η) es totalmente $\mathsf{K}\,(\underline{A})$-inconexo , y por tanto, que es un elemento de $|\underline{A}|$.

(*b*) *$\underline{A}$ es cerrada bajo la formación de $\underline{K}$-subobjetos.* Sean, (X, ξ) un $\underline{K}$-objeto en $|\underline{A}|$ y (Y, η) un $\underline{K}$-subobjeto de (X, ξ). Debemos probar que (Y, η) pertenece a la clase $|\underline{A}|$ (o lo que es lo mismo, que (Y, η) es un $\underline{A}$-objeto). Supongamos, pues, que x y y son dos puntos distintos en Y. Entonces existen un $\underline{K}$-objeto en $|\underline{A}|$ y un $\underline{K}$-morfismo $f : \left(\{x, y\}\,, \xi\mid_{\{x,y\}}\right) \to A$, tales que $f\,(x) \neq f\,(y)$. Observemos que la $\underline{K}$-estructura inicial de $\{x, y\}$ respecto de (ι, η), donde $\iota : \{x, y\} \hookrightarrow Y$ es la inclusión de $\{x, y\}$ en Y, es precisamente la $\underline{K}$-estructura $\xi\mid_{\{x,y\}}$ (ver la proposición 9.2 y recordar que en una *ccce* topológica propiamente fibrada, las $\underline{K}$-estructuras iniciales para un mismo conjunto subyacente son unicas). Así, pues, tenemos un $\underline{K}$-morfismo, $f : \left(\{x, y\}\,, \eta\mid_{\{x,y\}}\right) \to A$, con A en $|\underline{A}|$ y tal que $f\,(x) \neq f\,(y)$. De aquí se sigue que (Y, η) pertenece a la clase $|\underline{A}|$.

(*c*) *$\underline{A}$ es cerrada bajo la formación de $\underline{K}$-productos arbitrarios.* Sean, I una clase, $\mathcal{C} = (A_i = (X_i, \xi_i))_{i \in I}$ una clase de $\underline{K}$-objetos en $|\underline{A}|$, indexada por I, y $A = \prod\limits_{i \in I} A_i$ el $\underline{K}$-producto de la clase $\mathcal{C}$. Debemos probar que A es un elemento de la clase $|\underline{A}|$. Para este fin, supongamos que x y y son dos puntos distintos en $\prod\limits_{i \in I} X_i$. Entonces existe i_0 en I, tal que $p_{i_0}\,(x) \neq p_{i_0}\,(y)$, donde $p_{i_0} : \prod\limits_{i \in I} X_i \to X_{i_0}$ es la proyección canónica correspondiente al índice i_0. Dado que A_{i_0} pertenece a la clase $|\underline{A}|$ y $\alpha := p_{i_0}\,(x)$ y $\beta := p_{i_0}\,(y)$ son dos puntos distintos en X_{i_0}, existen A' en $|\underline{A}|$ y un $\underline{K}$-morfismo $f : \left(\{\alpha, \beta\}\,, \xi_i\mid_{\{\alpha,\beta\}}\right) \to A'$ tales que $f\,(\alpha) \neq f\,(\beta)$. Denotemos mediante η a la $\underline{K}$-estructura inicial de $\{x, y\}$ en A y con $\iota : \{x, y\} \hookrightarrow \prod\limits_{i \in I} X_i$ a la inclusión de $\{x, y\}$ en $\prod\limits_{i \in I} X_i$. Entonces el $\underline{K}$-morfismo,

$$g := f \circ p_{i_0} \circ \iota : (\{x, y\}\,, \eta) \to A'$$

es tal que $g\,(x) \neq g\,(y)$. De esto se sigue que A es un elemento de la clase $|\underline{A}|$. $\square$

Surge de manera natural la pregunta de si toda sub*ccce* plena de $\underline{K}$ cerrada bajo $\underline{K}$-isomorfismos, $\underline{K}$-subobjetos y $\underline{K}$-productos es $\mathfrak{I}\mathsf{K}$-cerrada. La respuesta a esta interrogante es negativa y tenemos un ejemplo claro en la *ccce* $\mathfrak{Top}$.

Ejemplo 19.1. En la *ccce* $\mathfrak{Top}$, la sub*ccce* plena de $\mathfrak{Top}$ inducida por la clase de los espacios topológicos T_2 (a esta *ccce* la denotamos como $\mathfrak{Th}$) es cerrada bajo la formación de homeomorfismos, subespacios y productos; además, en vista del corolario 17.2, dicha sub*ccce* de $\mathfrak{Top}$ no es $\mathfrak{I}\mathsf{K}$-cerrada. Recordemos que en el ejemplo 8.5 vimos que la *ccce* $\mathfrak{Th}$ es monotopológica, es decir, que para cualquier clase de espacios topológicos $(Y_i, \sigma_i)_{i\in I}$ de Hausdorff y cualquier monofuente $(f_i : X \to Y_i)_{i\in I}$, si τ es la topología inicial para X respecto de $(f_i, \sigma_i)_{i\in I}$, entonces (X, τ) es un espacio de Hausdorff (T_2)[1]. En particular, cualquier homemomorfismo, fuente de proyecciones canónicas o inclusión, conforma una monofuente.

Con la finalidad de proporcionar más ejemplos de sub*ccce* de $\mathfrak{Top}$ que no son $\mathfrak{I}\mathsf{K}$-cerradas, recordamos a continuación las definiciones de algunos otros axiomas de separación además de los ya presentados.

Definiciones 19.1. Sea (X, τ) un espacio topológico. Entonces,

1. (X, τ) es **regular** si para todo conjunto cerrado A de (X, τ) y todo punto x en $X\backslash A$, existen vecindades abiertas y ajenas de x y A, respectivamente.
2. (X, τ) es **completamente regular** si para todo conjunto cerrado A de (X, τ) y todo punto x en $X\backslash A$, existe una función continua $f : (X, \tau) \to I$, tal que,
$$f(x) = 0 \quad \text{y} \quad f(A) \subseteq \{1\}$$
(Cuando $A \neq \emptyset$, ocurre la igualdad $f(A) = 1$).
3. (X, τ) es T_3 si es regular y T_0.
4. (X, τ) es T_3' si es regular y T_1.
5. Cuando (X, τ) es completamete regular y es T_1, se dice que (X, τ) es de **Tychonoff**.
6. (X, τ) es **normal** si para cualquier par de subconjuntos cerrados y ajenos de (X, τ) existen sendas vecindades abiertas y ajenas.

Tenemos los siguientes resultados.

Proposición 19.2. *Todo espacio completamente regular es regular.*

Demostración. Sea (X, τ) un espacio completamente regular. Digamos que han sido dados, A un subconjunto de X tal que A es cerrado respecto de τ y un punto x en $X\backslash A$. Si A es vacío, el resultado se sigue de manera inmediata. Supongamos, pues, que A no es vacío. Por hipótesis, existe una función continua $f : (X, \tau) \to I$, tal que,
$$f(x) = 0 \quad \text{y} \quad f(A) = \{1\}$$
En consecuencia,
$$x \in f^{-1}\left(\left[0, \tfrac{1}{2}\right)\right) \quad \text{y} \quad A \subseteq f^{-1}\left(\left(\tfrac{1}{2}, 1\right]\right)$$
que son abiertos ajenos en (X, τ). Se sigue que (X, τ) es regular. □

Proposición 19.3. *Todo espacio T_3 (o bien T_3') es T_2.*

Demostración. Sea (X, τ) un espacio T_3. Supongamos que x y y son dos puntos distintos en X. Como (X, τ) es T_0 (o bien T_1), existe un abierto U en τ tal que x pertenece a U y y pertenece a $X\backslash U$ (o al revés, pero el argumento seguiria siendo escencialmente el mismo). Puesto que $X\backslash U$ es cerrado y (X, τ) es regular, existen vecindades abiertas y ajenas de x y $X\backslash U$, respectivamente. De aquí se sigue que el espacio (X, τ) es T_2. □

Proposición 19.4. *Todo espacio de Tychonoff es T_2.*

Demostración. En conformidad con la proposición 19.2, todo espacio de Tychonoff es regular y T_1. De aquí se sigue que todo espacio de Tychonoff es un espacio T_3'. En virtud de la proposición 19.3, todo espacio de Tychonoff es un espacio T_2. □

A continuación damos un ejemplo de un espacio topológico normal.

[1] Para evitar cualquier posible confusión, recordemos que la clase de los espacios T_2 es precisamente la clase de los espacios de Hausdorff.

Ejemplo 19.2. Consideremos la recta real $\mathbb{R}$ y sea $\mathcal{B}$ la familia de todos los intervalos semiabiertos de la forma,

$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \quad \text{y} \quad x < b\}$$

donde $a < b$. Entonces $\mathcal{B}$ es base de una topología para $\mathbb{R}$. Sea τ la topología para $\mathbb{R}$ generada por $\mathcal{B}$. Resulta que el espacio topológico $(\mathbb{R}, \tau)$ es normal. En efecto; supongamos que A y B son conjuntos disjuntos y cerrados en $(\mathbb{R}, \tau)$. Para cada punto a en A, elijamos un abierto básico $[a, x_a)$ que no intersecte a B; asimismo, para cada punto b en B, elijamos un abiero básico $[b, x_b)$ que no intersecte a A. Entonces los conjuntos abiertos,

$$U := \bigcup_{a \in A} [a, x_a) \quad \text{y} \quad V := \bigcup_{b \in B} [b, x_b)$$

son disjuntos y contienen a A y B, respectivamente. Que A esté contenido en U y B en V es claro. Veamos que, efectivamente, U y V son disjuntos. Sea u un elemento de U; entonces existe a en A tal que u pertenece a $[a, x_a)$. Si sucede que u es elemento de $[b, x_b)$, para algún b en B (lo cual es equivalente a decir que u pertenece a V), entonces,

$$(a \leq u \quad \text{y} \quad u < x_a) \quad \text{y} \quad (b \leq u \quad \text{y} \quad u < x_b)$$

Dado que $a \neq b$, tenemos que $a < b$, o bien, que $b < a$. Si $a < b$, entonces, b es un elemento de $[a, x_a)$, lo que no es el caso. Análogamente, si $b < a$, entonces concluimos que a es un elemento de $[b, x_b)$, lo que no es posible. De lo anterior se sigue que U y V son disjuntos.

El ejemplo que ahora presentamos es el de un espacio topológico que no es normal.

Ejemplo 19.3. Denotemos mediante $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \tau \times \tau)$ al producto topológico del espacio presentado en el ejemplo 19.2. Resulta que el espacio $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \tau \times \tau)$ no es normal. Podemos ver una demostración de este hecho en [11] (Capítulo 4. Sección 31: Los axiomas de separación. Ejemplo 3).

Proposición 19.5. *Si T es una clase no vacía de espacios topológicos contenida en la clase T_2, entonces T no es $\mathfrak{I}\mathsf{K}$-cerrada.*

Demostración. Supongamos, pues, que T es una clase no vacía de espacios topológicos contenida en la clase T_2. Supongamos que existe una clase no vacía de espacios topológicos no vacíos $\mathcal{B}$ tal que $T = \mathfrak{I}\mathsf{K}(\mathcal{B})$. Con este supuesto, la clase $\mathfrak{I}\mathsf{K}(\mathcal{B})$ está contenida en la clase T_2, pero de acuerdo a la proposición 17.4 esto no es posible. Se sigue que T no es $\mathfrak{I}\mathsf{K}$-cerrada. $\square$

Basándonos en los resultados anteriores, presentamos enseguida algunos ejemplos de sub*ccce* plenas de $\mathfrak{Top}$ que no son $\mathfrak{I}\mathsf{K}$-cerradas.

Ejemplos 19.4.

1. En conformidad con las proposiciones 19.3 y 19.4, las clases de espacios topológicos T_3, T_3' y de Tychonoff están contenidas en la clase de espacios topológicos T_2. Por la proposición 19.5, ninguna de las sub*ccce* plenas de $\mathfrak{Top}$ inducidas por las clases anteriores es $\mathfrak{I}\mathsf{K}$-cerrada.
2. Por la proposición 19.1, la clase de los espacios normales no es cerrada bajo productos. En consecuencia, la sub*ccce* plena de $\mathfrak{Top}$ inducida por esta clase no es $\mathfrak{I}\mathsf{K}$-cerrada.

En la siguiente sección presentaremos un teorema que caracteriza a las sub*ccce* cerradas bajo la formación de $\underline{K}$-isomorfismos, $\underline{K}$-subobjetos y $\underline{K}$-productos de una *ccce* $\underline{K}$ *tpf* (ver el teorema 19.1). Para demostrar dicho teorema, nos valdremos de algunos hechos que daremos en breve. Antes una definición.

Definiciones 19.2. Sean, $\underline{K}$ una *ccce tpf* y $\underline{S}$ una sub*ccce* de $\underline{K}$. Consideremos las siguientes tres propiedades:
(a) Si (X, ξ) es un $\underline{S}$-objeto y $f : (X, \xi) \to (Y, \eta)$ es un $\underline{K}$-isomorfismo, entonces (Y, η) es un $\underline{S}$-objeto.
(b) Si (X, ξ) es un $\underline{S}$-objeto y $(Y, \xi \mid_Y)$ es un $\underline{K}$-subobjeto de (X, ξ), entonces $(Y, \xi \mid_Y)$ es un $\underline{S}$-objeto.
(c) Dados una clase I y una colección $(A_i = (X_i, \xi_i))_{i \in I}$ de $\underline{S}$-objetos, el $\underline{K}$-producto arbitrario de dicha clase, $\prod_{i \in I} A_i$, es un $\underline{S}$-objeto.

Si $\underline{S}$ satisface el inciso (a), (b) o (c), diremos entonces que $\underline{S}$ es cerrada bajo $\underline{K}$ isomorfismos, $\underline{K}$-subespacios o $\underline{K}$-productos arbitrarios, respectivamente Si $\underline{S}$ satisface los tres incisos simultáneamente, entonces hablaremos de $\underline{S}$ como de una **sub*ccce* $\underline{K}$-isp**.

19.1. Caracterización de las sub*ccce* $\underline{\mathbf{K}}$-isp.

Cabe señalar que las siguientes proposiciones son generalizaciones de resultados propios de la topología básica de los conjuntos. En otras palabras: hasta este punto, al menos, en las *ccce* tpf tenemos suficiente "*holgura*" para recrear algunos conceptos y resultados básicos de la topología.

Proposición 19.6. *Sea $\underline{K}$ una ccce tpf. Si $f:(X,\xi)\to(Y,\eta)$ es una $\underline{K}$-inmersión, entonces la función,*

$$\begin{array}{cccc} \bar{f}: & X & \longrightarrow & f(X) \\ & {\scriptstyle x} & \longmapsto & {\scriptstyle \bar{f}(x):=f(x)} \end{array}$$

induce un $\underline{K}$-isomorfismo.

Demostración. Dado que $f:X\to Y$ es una función inyectiva, la función $\bar{f}:X\to f(X)$ es biyectiva. Sea $\iota: f(X)\hookrightarrow Y$ la inclusión de $f(X)$ en Y y consideremos el $\underline{K}$-subobjeto $\left(f(X),\eta\mid_{f(X)}\right)$ de (Y,η). Ahora bien, como ξ y $\eta\mid_{f(X)}$ son $\underline{K}$-estructuras iniciales y,

$$\iota\circ\bar{f}=f \quad \text{y} \quad f\circ\left(\bar{f}\right)^{-1}=\iota$$

se sigue que,

$$\bar{f}:(X,\xi)\longrightarrow\left(f(X),\eta\mid_{f(X)}\right)$$

es un $\underline{K}$-isomorfismo. □

Definición 19.3. Si $f:X\to Y$ es una función, **la relación de equivalencia en X definida por** f, $\sim_f$, está definida mediante la regla,

$$x\sim_f x' \Leftrightarrow f(x)=f(x')$$

Recordemos que para cada y en Y, la fibra de f sobre y es el conjunto,

$$f^{-1}(\{y\})=\{x\in X: f(x)=y\}$$

Así, las clases de equivalencia de $\sim_f$ son precisamente las fibras no vacías de f.

Proposición 19.7. *Sea $\underline{K}$ una ccce tpf. Si $f:(X,\xi)\to(Y,\eta)$ es una $\underline{K}$-identificación, entonces la función,*

$$\begin{array}{cccc} \bar{f}: & X/\sim_f & \longrightarrow & Y \\ & {\scriptstyle [x]} & \longmapsto & {\scriptstyle \bar{f}([x]):=f(x)} \end{array}$$

induce un $\underline{K}$-isomorfismo.

Demostración. Observemos que la función $\bar{f}$ es biyectiva. Sea $p:X\to X/\sim_f$ la proyección natural de X en $X/\sim_f$ y consideremos el $\underline{K}$-objeto cociente $\left(X/\sim_f,\bar{\xi}\right)$ ($\bar{\xi}$ es la $\underline{K}$-estructura final para $X/\sim_f$ respecto de (ξ,p)). Ahora bien, como η y $\bar{\xi}$ son $\underline{K}$-estructuras finales y,

$$\bar{f}\circ p=f \quad \text{y} \quad \left(\bar{f}\right)^{-1}\circ f=p$$

se sigue que,

$$\bar{f}:\left(X/\sim_f,\bar{\xi}\right)\longrightarrow(Y,\eta)$$

es un $\underline{K}$-isomorfismo. □

El siguiente resultado nos ofrece una propiedad muy importante del producto en una *ccce* topológica. De hecho, en el orbe de las categorias abstractas, es esta propiedad (la que a continuación presentamos) la que nos suministra la base adecuada para definir el producto abstracto de objetos (Ver [5]. Capítulo 4: Limits and Colimits).

Proposición 19.8. *Sea $\underline{K}$ una ccce tpf. Sean, I un conjunto no vacío, $(A_i=(X_i,\xi_i))_{i\in I}$ una familia de $\underline{K}$-objetos no vacíos y $A=\prod_{i\in I}A_i$ el $\underline{K}$-producto de dicha familia. Entonces se satisface,*

(*) Dados un $\underline{K}$-objeto $B=(Y,\eta)$ y una fuente cartesiana $F=(f_i:Y\to X_i)_{i\in I}$, si cada $f_i:B\to A_i$ es un $\underline{K}$-morfismo entonces, existe un único $\underline{K}$-morfismo $f:B\to A$ tal que conmuta, para cada i en I, el diagrama,

$$\begin{tikzcd} B \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "f_i"'] & & A \arrow[dl, "p_i"] \\ & A_i & \end{tikzcd}$$

donde $P=\left(p_i:\prod\limits_{i\in I}X_i\to X_i\right)_{i\in I}$ es la fuente cartesiana de proyecciones naturales.

Demostración. Definimos una función $f:Y\to\prod\limits_{i\in I}X_i$ mediante,

$$\begin{array}{rccc} f: & Y & \longrightarrow & \prod\limits_{i\in I}X_i \\ & y & \longmapsto & f(y):=\bar{x} \end{array}$$

donde, para cada i en I, $p_i(\bar{x})=f_i(y)$. Entonces, para cualquier i en I y para cualquier y en Y tenemos que,

$$(p_i\circ f)(y)=p_i(f(y))=f_i(y)$$

de lo cual se sigue que el diagrama de (*) conmuta. Más aún, puesto que P induce una monofuente de $\underline{K}$-morfismos, cuyo codominio posee la $\underline{K}$ estructura inicial para $\prod\limits_{i\in I}X_i$ respecto de $(p_i,\xi_i)_{i\in I}$, se sigue que $f:B\to A$ es un $\underline{K}$-morfismo y que además es el único que satisface la propiedad (*).

Por otro lado, si I es el conjunto vacío, entonces A es un $\underline{K}$-objeto indiscreto (posee una $\underline{K}$-estructura indiscreta) y cuyo conjunto subyacente, $\prod\limits_{i\in I}X_i$, tiene un único elemento: la función vacía de dominio y codominio vacíos. De este modo, sólo hay un modo de definir una función de Y en $\prod\limits_{i\in I}X_i$; es la función constante de valor el único elemento de $\prod\limits_{i\in I}X_i$. Desde luego, esta función induce un único $\underline{K}$-morfismo de B en A tal que conmuta el diagrama de (*). □

Teorema 19.1. *Sean, $\underline{K}$ una ccce tpf y $\underline{S}$ una subccce de $\underline{K}$. Son equivalentes,*

1. $\underline{S}$ es una subccce $\underline{K}$-isp.
2. Para cualesquiera conjunto I, familia de $\underline{S}$-objetos $(A_i=(X_i,\eta_i))_{i\in I}$, monofuente cartesiana $F=(f_i:X\to X_i)_{i\in I}$ y $\underline{K}$-objeto $B=(X,\xi)$; si ξ es la $\underline{K}$-estructura inicial para X respecto de $(f_i,\eta_i)_{i\in I}$, entonces B es un $\underline{S}$-objeto.

Demostración. $1\Rightarrow 2\rfloor$ Sea ξ la $\underline{K}$-estructura inicial para X respecto de $(f_i,\eta_i)_{i\in I}$. Denotemos $B:=(X,\xi)$, $A=\prod\limits_{i\in J}A_i$ y,

$$P=\left(p_i:\prod\limits_{i\in J}X_i\to X_i\right)_{i\in I}$$

a la fuente cartesiana de proyecciones naturales indexada por I. En conformidad con la proposición 19.8, existe un único $\underline{K}$-morfismo $f:B\to A$ tal que conmuta, para cada i en I, el diagrama,

$$\begin{tikzcd} B \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "f_i"'] & & A \arrow[dl, "p_i"] \\ & A_i & \end{tikzcd}$$

Obserevemos que $f:B\to A$ es una $\underline{K}$-inmersión. En efecto: La función $f:X\to\prod\limits_{i\in J}X_i$ es inyectiva, pues si x y x' son dos puntos distintos en X entonces, dado que F' es una monofuente cartesiana, existe i en I tal que $f_i(x)\neq f_i(x')$; en consecuencia, $p_i(f(x))\neq p_i(f(x'))$, de lo cual se sigue que $f(x)\neq f(x')$. Para comprobar la inicialidad de la $\underline{K}$-estructura ξ, supongamos que nos han sido dados un $\underline{K}$-objeto (Y,η) y una función $g:Y\to X$ tales que $f\circ g:(Y,\eta)\to A$ es un $\underline{K}$-morfismo. En consecuencia,

$$p_i\circ(f\circ g)=(p_i\circ f)\circ g=f_i\circ g:(Y,\eta)\to A_i$$

y puesto que ξ es la $\underline{K}$-estructura inicial para X respecto de $(f_i, \eta_i)_{i \in I}$, se sigue que $g : (Y, \eta) \to B$ es un $\underline{K}$-morfismo. Concluimos que, efectivamente, $f : B \to A$ es una $\underline{K}$-inmersión. Denotemos mediante η a la $\underline{K}$-estructura de $\underline{K}$-subobjeto de $f(X)$ en A. En virtud de la proposición 19.6, existe un $\underline{K}$-isomorfismo $\bar{f}$: $(X, \xi_J) \longrightarrow (f(X), \eta)$ tal que conmuta el diagrama,

$$\begin{tikzcd} B \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\bar{f}"'] & & A \\ & (f(X), \eta) \arrow[ur, "\iota"'] & \end{tikzcd}$$

donde $\iota : f(X) \hookrightarrow \prod_{i \in J} X_i$. De aquí se sigue que B es un $\underline{S}$-objeto.

$2 \Rightarrow 1 \rfloor$ Es claro. $\square$

Por lo que ya sabemos, las sub*ccce* plenas de $\mathfrak{Top}$ de los espacios T_0, T_1 y T_2 satisfacen el inciso 2 del teorema 19.1. De hecho, estas sub*ccce* plenas de $\mathfrak{Top}$ cumplen con una propiedad más general que la presentada en ese inciso.

Notación. Mediante los símbolos $\mathfrak{T}_0$ y $\mathfrak{T}_1$ denotaremos a las sub*ccce* plenas de $\mathfrak{Top}$ identificadas con las clases de espacios T_0 y T_1, respectivamente. Y como antes ya lo hicimos, con el símbolo $\mathfrak{Th}$ denotaremos a la sub*ccce* plena de $\mathfrak{Top}$ cuyos objetos son todos los espacios de Hausdorff.

Proposición 19.9. *Sean, I una clase, $((X_i, \tau_i))_{i \in I}$ una clase de $\mathfrak{T}_0$-espacios ($\mathfrak{T}_1$,$\mathfrak{T}_2$), X un conjunto cualquiera y $F = (f_i : X \to X_i)_{i \in I}$ un monofuente cartesiana. Sea τ una topología para X tal que para cada i en I, $f : (X, \tau) \to (X_i, \tau_i)$ es continua. Entonces (X, τ) es un $\mathfrak{T}_0$-espacio ($\mathfrak{T}_1$,$\mathfrak{T}_2$).*

Demostración. Sean x y x' dos puntos distintos en X. Como F es monofuente, existe i en I tal que $f_i(x) \neq f_i(x')$, y como (X_i, τ_i) es un $\mathfrak{T}_0$-espacio ($\mathfrak{T}_1$,$\mathfrak{T}_2$), existe un abierto U en τ_i tal que,

$$f_i(x_1) \in U \quad \text{y} \quad U \subseteq X_i \backslash \{f_i(x_2)\}$$

Entonces $f_i^{-1}(U_i)$ pertenece a τ, y tenemos,

$$x_1 \in f_i^{-1}(U) \quad \text{y} \quad f_i^{-1}(U) \subseteq X \backslash \{x_2\}$$

Se sigue que (X, τ) es un $\mathfrak{T}_0$-espacio ($\mathfrak{T}_1$,$\mathfrak{T}_2$). $\square$

Las sub*ccce* plenas de $\mathfrak{Top}$ de los espacios regulares ($\mathfrak{R}$) y de los espacios completamente regulares ($\mathfrak{Cr}$), también cumplen una propiedad relacionada con las fuentes cartesianas.

Proposición 19.10. *Sean, I una clase, $((X_i, \tau_i))_{i \in I}$ una clase de $\mathfrak{R}$-espacios ($\mathfrak{Cr}$-espacios), X un conjunto cualquiera y $F = (f_i : X \to X_i)_{i \in I}$ una fuente cartesiana. Sea τ la topología inicial para X respecto de $(f_i, \tau_i)_{i \in I}$, entonces (X, τ) es un $\mathfrak{R}$-espacio ($\mathfrak{Cr}$-espacio).*

Demostración. Sean, C un cerrado en (X, τ) y x un elemento de $X \backslash C$. Entonces existe un subconjunto finito de I, digamos $J = \{i_1, ..., i_n\}$, y sendos abiertos U_j en τ_{i_j} tales que,

$$x \in \bigcap_{j=1}^{n} f_{i_j}^{-1}(U_j) \quad \text{y} \quad \bigcap_{j=1}^{n} f_{i_j}^{-1}(U_j) \subseteq X \backslash C$$

En consecuencia, $f_{i_j}(x)$ es un elemento de U_j, para cada j en $\{1, ..., n\}$ y, para cada y en C, existe i en $\{1, ..., n\}$ tal que $f_{i_j}(y)$ pertenece a $X_{i_j} \backslash U_j$. Por hipótesis, para cada j en $\{1, ..., n\}$, el espacio $\left(X_{i_j}, \tau_{i_j}\right)$ es regular; en consecuencia, existen abiertos disjuntos V_j y W_j de $\left(X_{i_j}, \tau_{i_j}\right)$ tales que,

$$f_{i_j}(x) \in V_j \quad \text{y} \quad X_{i_j} \backslash U_j \subseteq W_j$$

Se sigue que,

$$x \in \bigcap_{j=1}^{n} f_{i_j}^{-1}(V_j) \quad \text{y} \quad C \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} f_{i_j}^{-1}(W_j)$$

Por último, dado que,

$$\left(\bigcap_{j=1}^{n} f_{i_j}^{-1}(V_j)\right) \bigcap \left(\bigcup_{j=1}^{n} f_{i_j}^{-1}(W_j)\right) = \emptyset$$

Concluimos que (X,τ) es regular (un $\mathfrak{R}$-espacio).

Veamos ahora el caso de los espacios completamente regulares. Sean, C un cerrado en (X,τ) y $\bar{x}$ un elemento de $X\diagup C$. Deseamos demostrar que existe una función continua, $f:(X,\tau)\to I$ tal que $f(\bar{x})=1$ y $f(C)\subseteq\{0\}$. Entonces existe un subconjunto finito de I, digamos $J=\{i_1,...,i_n\}$, y sendos abiertos U_j en τ_{i_j} tales que,

$$\bar{x}\in\bigcap_{j=1}^{n}f_{i_j}^{-1}(U_j)\quad\text{ y }\quad\bigcap_{j=1}^{n}f_{i_j}^{-1}(U_j)\subseteq X\backslash C$$

Por hipótesis, para cada j en $\{1,...,n\}$, el espacio $\left(X_{i_j},\tau_{i_j}\right)$ es completamente regular; en consecuencia, para cada j en $\{1,...,n\}$, existe una función continua $g_j:\left(X_{i_j},\tau_{i_j}\right)\to I$ tal que $g_j\left(f_{i_j}(\bar{x})\right)=1$ y $g_j\left(X_{i_j}\backslash U_j\right)=\{0\}$. Ahora, para cada j en $\{1,...,n\}$, definimos una función continua mediante la composición,

$$\begin{array}{rcccccc} h_j: & (X,\tau) & \xrightarrow{f_{i_j}} & \left(X_{i_j},\tau_{i_j}\right) & \xrightarrow{g_j} & I \\ & x & \longmapsto & f_{i_j}(x) & \longmapsto & g_j\left(f_{i_j}(x)\right) \end{array}$$

Observemos que $h_j\left(X\backslash f_{i_j}^{-1}(U_j)\right)=\{0\}$. En efecto,

$$x\notin f_{i_j}^{-1}(U_j)\Rightarrow f_{i_j}(x)\notin U_j\Rightarrow g_j\left(f_{i_j}(x)\right)\in g_j\left(X_{i_j}\backslash U_j\right)=\{0\}$$

pero $h_j(x)=g_j\left(f_{i_j}(x)\right)$; por consiguiente, $h_j(x)=0$.

A continuación consideremos la función,

$$\begin{array}{rccc} f: & (X,\tau) & \longrightarrow & I \\ & x & \longmapsto & \prod_{j=1}^{n}h_j(x) \end{array}$$

donde $\prod_{j=1}^{n}h_j(x)$ denota el producto de los n números $h_j(x)$. Es claro que la función f es continua. Además, si evaluamos f en $\bar{x}$ obtenemos el valor,

$$f(\bar{x})=\prod_{j=1}^{n}h_j(x)=\prod_{j=1}^{n}g_j\left(f_{i_j}(\bar{x})\right)=\prod_{j=1}^{n}1=1$$

y si x no pertenece a $\bigcap_{j=1}^{n}f_{i_j}^{-1}(U_j)$, entonces existe j en $\{1,...,n\}$ tal que x no pertenece a $f_{i_j}^{-1}(U_j)$. En consecuencia, $h_j(x)=0$. Se sigue que $f(x)=0$. Concluimos que (X,τ) es completamente regular ($\mathfrak{Cr}$-espacio).

□

Las proposiciones 19.9 y 19.10 motivan las siguientes definiciones.

Definiciones 19.4. Sean, $\underline{K}$ una *ccce tpf*, $\underline{S}$ una sub*ccce* plena de $\underline{K}$, I una clase, y $((X_i,\xi_i))_{i\in I}$ una clase de $\underline{S}$-objetos. Entonces,

1. $\underline{S}$ **es cerrada bajo monofuentes** si para cualquier monofuente $F=(f_i:X\to X_i)_{i\in I}$ y cualquier $\underline{K}$-estructura ξ para X, del hecho de que cada $f_i:(X,\xi)\to(X_i,\xi_i)$ sea un $\underline{K}$- morfismo, se sigue que (X,ξ) es un $\underline{S}$-objeto.
2. $\underline{S}$ **es cerrada bajo fuentes iniciales** si para cualquier fuente $F=(f_i:X\to X_i)_{i\in I}$, del hecho de que ξ sea la $\underline{K}$-estructura inicial para X respecto de $(f_i,\xi_i)_{i\in I}$, se sigue que (X,ξ) es un $\underline{S}$-objeto.

Vale la pena señalar que el teorema 19.1 confiere cierta relevancia a las monofuentes cartesianas. Y para asentuar todavía más dicha relevancia, presentamos el siguiente resultado que muestra la íntima relación que existe entre éstas y las fuentes cartesianas.

19.2. Teorema de factorización (cocientes-monofuentes) en una *ccce tpf*

Teorema 19.2. *Sean, $\underline{K}$ una ccce tpf, I una clase, $(A_i=(X_i,\xi_i))_{i\in I}$ una colección de $\underline{K}$-objetos, $F=(f_i:X\to X_i)_{i\in I}$ una fuente cartesiana y ξ una $\underline{K}$-estructura para X tal que para cada i en I, $f_i:(X,\xi)\to(X_i,\xi_i)$ es un $\underline{K}$-morfismo. Entonces existen un $\underline{K}$-cociente $c:(X,\xi)\to\left(\bar{X},\bar{\xi}\right)$ y una monofuente cartesiana $\bar{F}=\left(\bar{f}_i:\bar{X}\to X_i\right)_{i\in I}$ tales que para cada i en I se satisfacen,*

1. $f_i=\bar{f}_i\circ c$, lo que podemos denotar mediante $F=\bar{F}\circ c$.
2. $\bar{f}_i:\left(\bar{X},\bar{\xi}\right)\to(X_i,\xi_i)$ es un $\underline{K}$-morfismo.

3. Si $F = \tilde{F} \circ \tilde{c}$, donde $\tilde{c} : (X, \xi) \to \left(\tilde{X}, \tilde{\xi}\right)$ es una $\underline{K}$-identificación, y $\tilde{F} = \left(\tilde{f}_i : \tilde{X} \to X_i\right)_{i \in I}$ es una monofuente para la cual cada $\tilde{f}_i : \left(\tilde{X}, \tilde{\xi}\right) \to (X_i, \xi_i)$ es un $\underline{K}$-morfismo, entonces existe un $\underline{K}$-isomorfismo $h : \left(\bar{X}, \bar{\xi}\right) \to \left(\tilde{X}, \tilde{\xi}\right)$ tal que $h \circ c = \tilde{c}$.

Demostración. Sea $\sim_F$ la relación de equivalencia en X definida mediante la regla,

$$x \sim_F x' \Leftrightarrow f_i(x) = f_i(x'), \text{ para cada } i \text{en } I.$$

(cuando F tiene un único elemento, la relación de equivalencia anterior es precisamente la que presentamos en la definición 19.3). Consideremos la proyección canónica de la relación $\sim_F$ y denotémosla mediante c; es decir,

$$\begin{array}{rccc} c: & X & \longrightarrow & X/\sim_F \\ & x & \longmapsto & [x] \end{array}$$

Sean, $\bar{X} := X/\sim_F$ y $\bar{\xi}$ la $\underline{K}$-estructura final para $\bar{X}$ respecto de (ξ, c). Entonces,

$$\begin{array}{rccc} c: & (X, \xi) & \longrightarrow & \left(\bar{X}, \bar{\xi}\right) \\ & x & \longmapsto & [x] \end{array}$$

es un $\underline{K}$-cociente. Si ahora definimos para cada i en I,

$$\begin{array}{rccc} \bar{f}_i: & \bar{X} & \longrightarrow & X_i \\ & [x] & \longmapsto & f_i(x) \end{array}$$

entonces cada $\bar{f}_i$ es una función bien definida porque $f_i(x)$ no depende de la elección de x en $[x]$. Y si definimos $\bar{F} := \left(\bar{f}_i : \bar{X} \to X_i\right)_{i \in I}$, entonces $\bar{F}$ es una monofuente: Si $[x]$ y $[x']$ son elementos distintos en $\bar{X}$, se sigue que $x \nsim_F x'$, y consecuentemente, que existe i en I tal que $f_i(x) \neq f_i(x')$; pero entonces, para esta misma i, $\bar{f}_i([x]) \neq \bar{f}_i([x'])$. Así, pues, $\bar{F}$ es monofuente. Además, para cada i en I tenemos,

$$\bar{f}_i \circ c(x) = \bar{f}_i(c(x)) = \bar{f}_i([x]) = f_i(x)$$

por lo cual, para cada i en I, $\bar{f}_i \circ c = f_i$. Más aún, puesto que cada $(f_i, (\xi, \xi_i))$ es un $\underline{K}$-morfismo y $\left(c, \left(\xi, \bar{\xi}\right)\right)$ es un $\underline{K}$-cociente, se sigue que cada $\left(\bar{f}_i, \left(\bar{\xi}, \xi_i\right)\right)$ es un $\underline{K}$-morfismo. Hasta ahora tenemos demostrado que los incisos 1 y 2 del teorema se satisfacen. Veamos el tercer inciso.

Supongamos que también $F = \tilde{F} \circ \tilde{c}$, para una $\underline{K}$-identificación $\tilde{c} : (X, \xi) \to \left(\tilde{X}, \tilde{\xi}\right)$ y una monofuente $\tilde{F} = \left(\tilde{f}_i : \tilde{X} \to X_i\right)_{i \in I}$. Probaremos que existe un $\underline{K}$-isomorfismo $h : \left(\bar{X}, \bar{\xi}\right) \to \left(\tilde{X}, \tilde{\xi}\right)$ tal que $h \circ c = \tilde{c}$ y $c = h^{-1} \circ \tilde{c}$. De acuerdo a la proposición 19.7, los $\underline{K}$-objetos $\left(\tilde{X}, \tilde{\xi}\right)$ y $(X/\sim_{\tilde{c}}, \eta)$ son $\underline{K}$-isomorfos, en donde η es la $\underline{K}$-estructura final correspondiente a ξ y a la proyección natural $q : X \to X/\sim_{\tilde{c}}$. Si demostráramos la igualdad $\sim_{\tilde{c}} = \sim_F$, entonces las funciones q y c coincidirían y por tanto $(X/\sim_{\tilde{c}}, \eta)$ y $\left(\bar{X}, \bar{\xi}\right)$ representarían el mismo $\underline{K}$-objeto. Veamos que así acontence: Por hipótesis, para cada i en I, $f_i = \tilde{f}_i \circ \tilde{c}$. Si $x \sim_{\tilde{c}} x'$, entonces, para cada i en I,

$$f_i(x) = \tilde{f}_i \circ \tilde{c}(x) = \tilde{f}_i(\tilde{c}(x)) = \tilde{f}_i(\tilde{c}(x')) = \tilde{f}_i \circ \tilde{c}(x') = f_i(x')$$

y se sigue que $x \sim_F x'$. Recíprocamente, si $x \sim_F x'$, entonces, para cada i en I,

$$\tilde{f}_i(\tilde{c}(x)) = \tilde{f}_i \circ \tilde{c}(x) = f_i(x) = f_i(x') = \tilde{f}_i \circ \tilde{c}(x') = \tilde{f}_i(\tilde{c}(x'))$$

lo cual implica, dado que $\tilde{F}$ es monofuente, que $\tilde{c}(x) = \tilde{c}(x')$, es decir, que $x \sim_{\tilde{c}} x'$. Se sigue que $\sim_{\tilde{c}} = \sim_F$. El $\underline{K}$-isomorfismo que buscamos es precisamente el presentado en la proposición 19.7, es decir,

$$\begin{array}{rccc} h: & (X/\sim_{\tilde{c}}, \eta) & \longrightarrow & \left(\tilde{X}, \tilde{\xi}\right) \\ & [x] & \longmapsto & h([x]) := \tilde{c}(x) \end{array}$$

Efectivamente: Para cada x en X, $h(c(x)) = h([x]) = \tilde{c}(x)$. Así, $h \circ c = \tilde{c}$. El teorema queda demostrado. □

Dos importantes resultados obtenemos a partir del teorema 19.2. Los presentamos en el siguiente par de secciones.

19.3. Caracterización de las *ccce tpf*

Sean, $\underline{K}$ una *ccce pf*, I una clase, I una clase, $((X_i, \xi_i))_{i\in I}$ una clase de $\underline{K}$-objetos y $F = (f_i : X \to X_i)_{i\in I}$ una fuente cartesiana. De acuerdo a lo que hicimos en el teorema 19.2, la fuente cartesiana F puede ser factorizada mediante una proyección natural,

$$\begin{array}{rccc} c: & X & \longrightarrow & X/\sim_F \\ & x & \longmapsto & [x] \end{array}$$

y una monofuente cartesiana $\bar{F} := \left(\bar{f}_i : \bar{X} \to X_i\right)_{i\in I}$, con $\bar{X} := X/\sim_F$, en la que para cada i en I tenemos,

$$\begin{array}{rccc} \bar{f}_i: & \bar{X} & \longrightarrow & X_i \\ & [x] & \longmapsto & f_i(x) \end{array}$$

Si $\underline{K}$ es monotopológica, entonces existe una $\underline{K}$-estructura inicial para $\bar{X}$ respecto de $\left(\bar{f}_i, \xi_i\right)_{i\in I}$. Desde luego, nada nos garantiza la existencia de la $\underline{K}$-estructura inicial para X respecto de $(f_i, \xi_i)_{i\in I}$. Pues bien, nuestro objetivo en esta sección es el de buscar posibles condiciones que garanticen la existencia de dicha $\underline{K}$-estructura inicial (intuyendo la posible existencia de dicha estructura debido a la relación entre fuentes y monofuentes presentada en el teorema 19.2). Denotemos mediante $\bar{\xi}$ a la $\underline{K}$-estructura inicial para $\bar{X}$ respecto de $\left(\bar{f}_i, \xi_i\right)_{i\in I}$. Para comenzar nuestra búsqueda, supongamos que ξ es la $\underline{K}$-estructura inicial para X respecto de $(f_i, \xi_i)_{i\in I}$ y veamos qué conclusiones útiles para nuestro objetivo podemos obtener de esta hipótesis. En principio, podemos afirmar que $c : (X, \xi) \to \left(\bar{X}, \bar{\xi}\right)$ es un $\underline{K}$-morfismo; esto se sigue del hecho de que $\bar{\xi}$ es la $\underline{K}$-estructura inicial para $\bar{X}$ respecto de $\left(\bar{f}_i, \xi_i\right)_{i\in I}$, y que para cada i en I, $\bar{f}_i \circ c = f_i$. Ya que sabemos esto, es plausible preguntarnos si ξ es la $\underline{K}$-estructura inicial para X respecto de $\left(c, \bar{\xi}\right)$ (esto quizás pueda ser *"heredado"* del hecho hipotético de que ξ es la $\underline{K}$-estructura inicial para X respecto de $(f_i, \xi_i)_{i\in I}$). Con la finalidad de responder esto último, sean (Z, γ) un $\underline{K}$-objeto y $g : Z \to X$ una función tales que $g \circ c : (Z, \gamma) \to \left(\bar{X}, \bar{\xi}\right)$ es un $\underline{K}$-morfismo. Entonces, para cada i en I,

$$(g \circ c) \circ \bar{f}_i = g \circ \left(c \circ \bar{f}_i\right) = g \circ f_i : (Z, \gamma) \to (X_i, \xi_i)$$

es un $\underline{K}$-morfismo. En consecuencia, puesto que ξ es la $\underline{K}$-estructura inicial para X respecto de $(f_i, \xi_i)_{i\in I}$, tenemos que $g : (Z, \gamma) \to (X, \xi)$ es un $\underline{K}$-morfismo. De aquí se sigue que ξ es la $\underline{K}$-estructura inicial para X respecto de $\left(c, \bar{\xi}\right)$. Concluimos, pues, que si ξ es la $\underline{K}$-estructura inicial para X respecto de $(f_i, \xi_i)_{i\in I}$, entonces ξ es la $\underline{K}$-estructura inicial para X respecto de $\left(c, \bar{\xi}\right)$. Naturalmente, surge de inmediato la pregunta de si la afirmación reciproca de nuestra conclusión será verdadera, pues de ser cierto esto último, la afirmación recíproca, tendriamos automáticamente a disposición la condición de existencia de la $\underline{K}$-estructura inicial para X respecto de $(f_i, \xi_i)_{i\in I}$; a saber: que para cualesquier proyección natural $c : X \longrightarrow X/\sim$ y $\underline{K}$-objeto $\left(X/\sim, \bar{\xi}\right)$, exista una $\underline{K}$-estructura inicial para X respecto de $\left(c, \bar{\xi}\right)$. Supongamos entonces que ξ es la $\underline{K}$-estructura inicial para X respecto de $\left(c, \bar{\xi}\right)$. Sean, (Z, γ) un $\underline{K}$-objeto y $g : Z \to X$ una función tales que para cada i en I,

$$f_i \circ g : (Z, \gamma) \longrightarrow (X_i, \xi_i)$$

es un $\underline{K}$-morfismo. Entonces, para cada i en I,

$$\left(\bar{f}_i \circ c\right) \circ g = \bar{f}_i \circ (c \circ g) : (Z, \gamma) \longrightarrow (X_i, \xi_i)$$

es un $\underline{K}$-morfismo, y puesto que $\bar{\xi}$ es la $\underline{K}$-estructura inicial para $\bar{X}$ respecto de $\left(\bar{f}_i, \xi_i\right)_{i\in I}$, se sigue que,

$$c \circ g : (Z, \gamma) \longrightarrow \left(\bar{X}, \bar{\xi}\right)$$

es un $\underline{K}$-morfismo. Ahora bien, puesto que ξ es la $\underline{K}$-estructura inicial para X respecto de $\left(c, \bar{\xi}\right)$, se sigue que,

$$g : (Z, \gamma) \longrightarrow (X, \xi)$$

es un $\underline{K}$-morfismo. Concluimos que ξ es la $\underline{K}$-estructura inicial para X respecto de $(f_i, \xi_i)_{i\in I}$.

Presentamos en forma de teorema (el cual caracteriza a las *ccce tpf*) las conclusiones principales de todo lo anterior. La demostración del teorema está esencialmente contenida en nuestros razonamientos previos.

Teorema 19.3. *Sea $\underline{K}$ una ccce pf. Son equivalentes,*

1. $\underline{K}$ es topológica.
2. $\underline{K}$ es monotopológica y satisface que para cualesquier proyección natural $c : X \longrightarrow X/\sim$ y $\underline{K}$-objeto $\left(X/\sim, \bar{\xi}\right)$, existe una $\underline{K}$-estructura inicial para X respecto de $\left(c, \bar{\xi}\right)$.

19.4. Reflexividad en *ccce tpf*

Sean, $\underline{K}$ una *ccce tpf*, I una clase, $(A_i = (X_i, \xi_i))_{i \in I}$ una clase de $\underline{K}$-objetos y $F = (f_i : X \to X_i)_{i \in I}$ una fuente cartesiana. Invocando lo hecho en el teorema 19.2, sabemos que la fuente cartesiana F puede ser factorizada mediante una proyección natural,

$$\begin{array}{rccc} c: & X & \longrightarrow & X/\sim_F \\ & x & \longmapsto & [x] \end{array}$$

y una monofuente cartesiana $\bar{F} := \left(\bar{f}_i : \bar{X} \to X_i\right)_{i \in I}$, con $\bar{X} := X/\sim_F$, en la que para cada i en I tenemos,

$$\begin{array}{rccc} \bar{f}_i: & \bar{X} & \longrightarrow & X_i \\ & [x] & \longmapsto & f_i(x) \end{array}$$

Sea $\underline{S}$ una sub*ccce* plena de $\underline{K}$ cerrada bajo monofuentes (iniciales) y supongamos que cada elemento de la clase $(A_i = (X_i, \xi_i))_{i \in I}$ es un $\underline{S}$-objeto. Tenemos el siguiente corolario del teorema 19.2.

Corolario 19.1. *Para cada $\underline{K}$-objeto $A = (X, \xi)$ existe un $\underline{K}$-morfismo $r : A \to B$ tal que,*

1. B es un $\underline{S}$-objeto.
2. Si $f : A \to B'$ es cualquier $\underline{K}$-morfismo con B' un $\underline{S}$-objeto, entonces existe un único $\underline{S}$-morfismo $\tilde{f} : B \to B'$ tal que $\tilde{f} \circ r = f$.

Demostración. Sea C la clase de todos los $\underline{K}$-morfismos de dominio A y codominio en $|\underline{S}|$. Dado un $\underline{S}$-objeto arbitrario $B' = (Y, \eta)$, consideremos el conjunto de $\underline{K}$-morfismos de A en B', $\underline{K}(A, B')$. A partir de este conjunto definimos el siguiente conjunto,

$$I_{B'} := \{(f, X) \mid (f, (\xi, \eta)) \in \underline{K}(A, B')\}$$

Luego, con los conjuntos $I_{B'}$, definimos la clase,

$$I := \bigcup \{I_{B'} \mid B' \in |\underline{S}|\}$$

Ahora utilizamos la clase I para indexar a C,

$$C = (f_i : A \longrightarrow B'_i)_{i \in I}$$

Por el teorema 19.2 existe un $\underline{K}$-cociente $c : A \to B$, con $B = \left(\bar{X}, \bar{\xi}\right)$, y una clase de $\underline{K}$-morfismos,

$$\bar{C} = \left(\bar{f}_i : B \longrightarrow B'_i\right)_{i \in I}$$

tales que para cada i en I, $f_i = \bar{f}_i \circ c$. Además, la fuente,

$$\bar{F} = \left(\bar{f}_i : \bar{X} \longrightarrow Y_i\right)_{i \in I}$$

es una monofuente cartesiana. Ahora bien, puesto que cada elemento de la clase $(B'_i = (Y_i, \eta_i))_{i \in I}$ es un $\underline{S}$-objeto y $\underline{S}$ es cerrada bajo monofuentes, se sigue que B es un $\underline{S}$-objeto. Sea $r = c$; si $f : A \to B'$ es cualquier $\underline{K}$-morfismo con B' un $\underline{S}$-objeto, entonces $f = f_i$, para alguna i en I, y tenemos $f_i = \bar{f}_i \circ r$, es decir, existe un $\underline{K}$-morfismo $\tilde{f} : B \to B'$ tal que $\tilde{f} \circ r = f$. El $\underline{K}$-morfismo $\tilde{f}$ es el único que cumple la relación anterior, pues r es suprayectiva.

Supongamos ahora que $\underline{S}$ es cerrada bajo monofuentes iniciales. En este caso consideraremos a la $\underline{K}$-estructura inicial para $\bar{X}$ respecto de $\left(\bar{f}_i, \eta_i\right)_{i \in I}$. Sin temor a que haya confusión con la notación del caso anterior, denotemos mediante $\bar{\xi}$ a dicha estructura. Entonces el $\underline{K}$-objeto $\left(\bar{X}, \bar{\xi}\right)$ es también un $\underline{S}$-objeto. Sea $r : X \to \bar{X}$ la función subyacente del $\underline{K}$-cociente $c : A \to B$ del caso anterior. Dado que para cada i en I, $f_i = \bar{f}_i \circ r$, se sigue que $r : (X, \xi) \to \left(\bar{X}, \bar{\xi}\right)$ es un $\underline{K}$-morfismo. Los argumentos que faltan para concluir esta parte de la demostración son exactamente iguales a los del caso anterior. □

El resultado que acabamos de exponer sienta precedente para el siguiente concepto.

Definiciones 19.5. Sea $\underline{K}$ una *ccce tpf*. Una sub*ccce* $\underline{S}$ de $\underline{K}$ es **reflexiva** si para cada $\underline{K}$-objeto A existe un $\underline{K}$-morfismo $r : A \to B$ tal que,

1. B es un $\underline{S}$-objeto.

2. Para cada $\underline{K}$-morfismo $f : A \to B'$, con B' un $\underline{S}$-objeto, existe un único $\underline{S}$-morfismo $\tilde{f} : B \to B'$ tal que $\tilde{f} \circ r = f$.

En tal caso es común decir que A es **$\underline{S}$-reflejable** y el $\underline{S}$-objeto B recible el nombre de **$\underline{S}$-reflector** de A. El $\underline{K}$-morfismo $r : A \to B$ recibe el nombre de **$\underline{S}$-reflexión** del $\underline{K}$-objeto A.

Ejemplos 19.5. En la *ccce* $\mathfrak{Top}$ las sub*ccce* $\mathfrak{T}_0$, $\mathfrak{T}_1$ y $\mathfrak{Th}$ son reflexivas.

Los ejemplos de *ccce* reflexivas que hemos visto hasta el momento tienen en común que las funciones subyacentes de sus reflexiones son suprayectivas. En general, tenemos las siguientes definiciones.

Definiciones 19.6. Dada una $\underline{K}$ una *ccce tpf*, si M es una clase de $\underline{K}$-morfismos y $\underline{S}$ es un sub*ccce* reflexiva de $\underline{K}$ tal que toda $\underline{S}$-reflexión pertenece a M, diremos que $\underline{S}$ es **M-reflexiva.** Así,

1. Si M de todos los $\underline{K}$-morfismos cuya función subyacente es suprayectiva, entonces una sub*ccce* M-reflexiva se llama epirreflexiva.
2. Si M de todos los $\underline{K}$-morfismos cuya función subyacente es un cociente, entonces una sub*ccce* M-reflexiva se llama cocienterreflexiva.
3. Si M de todos los $\underline{K}$-morfismos cuya función subyacente es biyectiva, entonces una sub*ccce* M-reflexiva se llama birreflexiva.

El teorema que ahora presentamos da una caracterización de las sub*ccce* epirreflexivas de una *ccce* $\underline{K}$.

Teorema 19.4. *Sean, $\underline{K}$ una ccce tpf y $\underline{S}$ una subccce plena de $\underline{K}$ cerrada bajo la formación de $\underline{K}$-isomorfismos. Son equivalentes,*

1. $\underline{S}$ es epirreflexiva.
2. $\underline{S}$ es cerrada bajo monofuentes iniciales[2].

Demostración. $1 \Rightarrow 2\rfloor$ Sean, I una clase, $((X_i, \xi_i))_{i\in I}$ una clase de $\underline{K}$-objetos y $F = (f_i : X \to X_i)_{i\in I}$ una monofuente cartesiana. Supongamos que ξ es la $\underline{K}$-estructura inicial para X respecto de $(f_i, \xi_i)_{i\in I}$. Comprobemos que (X, ξ) es un $\underline{S}$-objeto. Sea $r : (X, \xi) \to \left(\tilde{X}, \tilde{\xi}\right)$ una $\underline{S}$-epirreflexión de (X, ξ); entonces para cada i en I existe un $\underline{K}$-morfismo $\tilde{f}_i : \left(\tilde{X}, \tilde{\xi}\right) \to (X_i, \xi_i)$ tal que $\tilde{f}_i \circ r = f_i$. A continuación demostraremos que $r : X \to \tilde{X}$ es inyectiva. En efecto, si $r(x_1) = r(x_2)$, entonces $\tilde{f}_i \circ r(x_1) = \tilde{f}_i \circ r(x_2)$, para cada i en I. En consecuencia $f_i(x_1) = f_i(x_2)$, para toda i en I, y puesto que F es monofuente, se sigue que $x_1 = x_2$. Concluimos que $r : X \to \tilde{X}$ es inyectiva, y como por hipótesis dicha función es suprayectiva, se sigue que es biyectiva. Podemos considerar ahora la función $r^{-1} : \tilde{X} \to X$ (la inversa de r). Es claro que para cada i en I, $f_i \circ r^{-1} = \tilde{f}_i$, además, recordemos que ξ es la $\underline{K}$-estructura inicial para X respecto de $(f_i, \xi_i)_{i\in I}$. Así, $r^{-1} : \left(\tilde{X}, \tilde{\xi}\right) \to (X, \xi)$ es un $\underline{K}$-morfismo. Se sigue que $r : (X, \xi) \to \left(\tilde{X}, \tilde{\xi}\right)$ es un $\underline{K}$-isomorfismo. Así pues, siendo $\left(\tilde{X}, \tilde{\xi}\right)$ un $\underline{S}$-objeto, colegimos que (X, ξ) es un $\underline{S}$-objeto.

$2 \Rightarrow 1\rfloor$ Es la segunda parte del corolario 19.1. □

Proposición 19.11. *Sea $\underline{K}$ una ccce tpf y sea $\underline{S}$ una subccce plena de $\underline{K}$. Si $\underline{S}$ es cerrada bajo monofuentes iniciales, entonces $\underline{S}$ es monotopológica.*

Demostración. Sean, I una clase, y $((X_i, \xi_i))_{i\in I}$ una clase de $\underline{S}$-objetos, $F = (f_i : X \to X_i)_{i\in I}$ una monofuente cartesiana y ξ la $\underline{K}$-estructura inicial para X respecto de $(f_i, \xi_i)_{i\in I}$. Dado que $\underline{S}$ es cerrada bajo monofuentes iniciales, se sigue que (X, ξ) es un $\underline{S}$-objeto. Por lo tanto, ξ es la $\underline{S}$-estructura inicial para X respecto de $(f_i, \xi_i)_{i\in I}$. Esto significa que $\underline{S}$ es monotopológica. □

Corolario 19.2. *Sean $\underline{K}$ una ccce tpf y sea $\underline{S}$ una subccce plena de $\underline{K}$ cerrada bajo la formación de $\underline{K}$-isomorfismos. Si $\underline{S}$ es epirreflexiva, entonces $\underline{S}$ es monotopológica.*

Demostración. Si $\underline{S}$ es epirreflexiva, entonces por el teorema 19.4, $\underline{S}$ es cerrada bajo monofuentes iniciales. Por la proposición 19.11, $\underline{S}$ es monotopológica. □

La siguiente proposición nos da más ejemplos de sub*ccce* epirreflexivas de $\mathfrak{Top}$.

Proposición 19.12. *Sea $\underline{S}$ una subccce plena de $\mathfrak{Top}$ que es $\mathfrak{I}\mathsf{K}$-cerrada. Supongamos que $\mathsf{K}(\underline{S})$ no es trivial; entonces $\underline{S}$ es epirreflexiva.*

---

[2] Ver la definición 19.4.

Demostración. Dado un espacio topológico (X,τ), sea $\sim$ la relación de equivalencia inducida por la partición de X en sus $\mathsf{K}(\underline{S})$-componentes. Si $(X/\sim,\varsigma)$ es el espacio cociente de (X,τ) respecto a $\sim$, entonces, por el inciso (d) del teorema 18.1, $(X/\sim,\varsigma)$ pertenece a $\mathfrak{I}(\mathsf{K}(\underline{S}))$; consecuentemente, $(X/\sim,\varsigma)$ pertenece a $\underline{S}$, pues $\underline{S}=\mathfrak{I}(\mathsf{K}(\underline{S}))$.

Ahora sea $f:(X,\tau)\to(Z,\eta)$ una función continua con (Z,η) un espacio topológico en $\underline{S}$. Si $\bar{x}$ es un elemento de $X/\sim$, entonces $q^{-1}(\bar{x})$ es una $\mathsf{K}(\underline{A})$-componente de X; por lo tanto, $f|_{q^{-1}(\bar{x})}$ es constante. Por ser q una identificación, aplicando la proposición 51, existe una única función continua $\tilde{f}:(X/\sim,\varsigma)\to(Z,\eta)$ tal que el diagrama,

$$\begin{tikzcd}
(X,\tau) \arrow[rr, "q"] \arrow[dr, "f"'] & & (X/\sim,\varsigma) \arrow[dl, "\tilde{f}"] \\
& (Z,\eta) &
\end{tikzcd}$$

conmuta. De aquí se sigue que $\underline{S}$ es epirreflexiva. $\square$

A continuación damos algunos otros ejemplos de subcategorías reflexivas de $\mathfrak{Top}$.

Ejemplo 19.6.

1. Consideremos a la categoría de conexión $\underline{C}$ (la sub*ccce* plena de $\mathfrak{Top}$ de los espacios conexos). Por el ejemplo 16.1 y la proposición 19.11, la sub*ccce* plena de $\mathfrak{Top}$ de los espacios totalmente $\underline{C}$- inconexos es cocienterreflexiva.
2. Observemos que $\langle\{\emptyset\}\rangle=\mathsf{K}(\mathfrak{Top})$ y que $\mathfrak{I}([\{\emptyset\}])=\mathfrak{Top}$. En otras palabras, $\mathfrak{Top}$ es $\mathfrak{I}\mathsf{K}$-cerrada. Para cada espacio topológico (X,τ), la función identidad,
$$1_{(X,\tau)}:(X,\tau)\longrightarrow(X,\tau)$$
es una birreflexión.
3. Otra cosa que podemos observar es que, dado un conjunto unitario Z, la función constante,
$$c:(X,\tau)\longrightarrow(Z,\eta)$$
es una cocienterreflexión; es decir, $\langle\{\emptyset\}\rangle$ es cocienterreflexiva.
4. Mediante $\mathfrak{Ind}$ denotaremos a la sub*ccce* plena de $\mathfrak{Top}$ cuyos objetos son todos los espacios topológicos indiscretos. Dado un espacio topológico (X,τ), una $\mathfrak{Ind}$ -reflexión suya es la función continua,
$$1_X:(X,\tau)\longrightarrow(X,\{\emptyset,X\})$$

Presentamos enseguida dos ejemplos de subcategorías reflexivas en $\mathfrak{Gra}$.

Definición 19.7. Denotaremos por $\mathfrak{S}ym$ a la *ccce* cuyos objetos son las parejas (X,ρ), donde X es un conjunto y ρ es una relación simétrica sobre X. Los $\mathfrak{S}ym$-morfismos son todas las funciones compatibles entre éstos. Desde luego, así definida, $\mathfrak{S}ym$ es una *subccce* plena de $\mathfrak{G}ra$. Más aún, $\mathfrak{S}ym$ es una subcategoria reflexiva de $\mathfrak{G}ra$.

Ejemplo 19.7. $\mathfrak{S}ym$ es una subcategoria birreflexiva de $\mathfrak{G}ra$.

En efecto; sea (X,α) una gráfica dirigida cualquiera. Si definimos $\alpha^{-1}=\{(y,x)\mid(x,y)\in\alpha\}$, entonces $\left(X,\alpha\cup\alpha^{-1}\right)$ es un objeto en $\mathfrak{S}ym$. Probemos que el $\mathfrak{G}ra$-morfismo,

$$1_X:(X,\alpha)\longrightarrow\left(X,\alpha\cup\alpha^{-1}\right)$$

es una $\mathfrak{S}ym$-reflexión de (X,α). Sea $f:(X,\alpha)\to(Y,\rho)$ una función compatible arbitraria, donde (Y,ρ) es un $\mathfrak{S}ym$-objeto ; entonces la función,

$$f:\left(X,\alpha\cup\alpha^{-1}\right)\longrightarrow(Y,\rho)$$

es compatible. En efecto, sea (x,y) un elemento de $\alpha\cup\alpha^{-1}$; si (x,y) está en α, es claro que entonces $(f(x),f(y))$ está en ρ. Si (x,y) está en α^{-1}, entonces (y,x) está en α y, consecuentemente, $(f(y),f(x))$ está en ρ. Puesto que ρ es simétrica, tenemos que $(f(x),f(y))$ está en ρ. Por otro lado, observemos que la función,

$$f:\left(X,\alpha\cup\alpha^{-1}\right)\longrightarrow(Y,\rho)$$

es la única función compatible tal que el triángulo,

$$\begin{tikzcd} (X,\alpha) \arrow[r, "1_X"] \arrow[dr, "f"'] & \left(X,\alpha\cup\alpha^{-1}\right) \arrow[d, "f"] \\ & (Y,\rho) \end{tikzcd}$$

conmuta.

Definición 19.8. Consideremos a las categorías concretas $\mathfrak{Gra}$ y $\mathfrak{Top}$. Para cada conjunto X, sea la función,

$$\mathscr{I}_X : \mathfrak{Gra}\,[X] \longrightarrow \mathfrak{CDTop}\,[X]$$

definida como,

$$\mathscr{I}_X\,(\alpha) = \{U \subseteq X : ((x,y)\in\alpha \quad \text{y} \quad y\in U) \Longrightarrow (x\in U)\}$$

Observación 19.2. Notemos que $\mathscr{I}_X\,|_{\mathfrak{Pros}[X]} = I_X$.

Ejemplo 19.8. Sea X un conjunto arbitrario y consideremos las funciones,

$$\mathscr{I}_X : \mathfrak{Gra}\,[X] \longrightarrow \mathfrak{CDTop}\,[X]$$

y

$$I_X^{-1} : \mathfrak{CDTop}\,[X] \longrightarrow \mathfrak{Pros}\,[X]$$

Entonces, para cada $\leq$ en $\mathfrak{Gra}\,[X]$, el preorden,

$$\preceq = I_X^{-1} \circ \mathscr{I}_X\,(\leq)$$

hace del conjunto parcialmente ordenado $(X,\preceq)$ un $\mathfrak{Pros}$-reflector de la gráfica dirigida $(X,\leq)$.

En efecto; sea $\leq$ un elemento de $\mathfrak{Gra}\,[X]$; debemos demostrar que existe una función compatible,

$$r : (X,\leq) \longrightarrow (X,\preceq)$$

tal que si,

$$f : (X,\leq) \longrightarrow (Y,\ll)$$

es una función compatible, con $\ll$ en $\mathfrak{Pros}\,[X]$, entonces existe una única función monótona,

$$g : (X,\preceq) \longrightarrow (Y,\ll)$$

tal que el siguiente diagrama conmuta,

$$\begin{tikzcd} (X,\leq) \arrow[r, "r"] \arrow[dr, "f"'] & (X,\preceq) \arrow[d, "g"] \\ & (Y,\ll) \end{tikzcd}$$

Demostremos que la función,

$$1_X : (X,\leq) \longrightarrow (X,\preceq)$$

es compatible.

En efecto; sean x y y en X tales que $x \leq y$. Sea U en $\mathscr{I}_X\,(\leq)$ y supongamos que y pertenece a U. Entonces se cumple que,

$$x \leq y \quad \text{y} \quad y \in U$$

por lo tanto, x pertenece a U. Esto prueba que $x \preceq y$. Así pues,

$$1_X : (X,\leq) \longrightarrow (X,\preceq)$$

es compatible.

Sea,

$$f:(X,\leq)\longrightarrow(Y,\ll)$$

una función compatible, con $\ll$ en $\mathfrak{Pros}\,[X]$. Demostremos que la función,

$$f:(X,\preceq)\longrightarrow(Y,\ll)$$

es monótona.

En efecto, puesto que,

$$f:(X,\leq)\longrightarrow(Y,\ll)$$

es compatible, entonces,

$$f:(X,\mathscr{I}_X(\leq))\longrightarrow(Y,\mathscr{I}_Y(\ll))$$

es continua. De manera análoga, dado que I_X^{-1} es una biyección natural, la función,

$$f:\left(X,I_X^{-1}\circ\mathscr{I}_X(\leq)\right)\longrightarrow\left(Y,I_Y^{-1}\circ\mathscr{I}_Y(\ll)\right)$$

es compatible. Pero,

$$I_X^{-1}\circ\mathscr{I}_X(\leq)=\preceq\quad\text{y}\quad I_Y^{-1}\circ\mathscr{I}_Y(\ll)=\ll$$

Por lo tanto,

$$f:(X,\preceq)\longrightarrow(Y,\ll)$$

es monótona.

En los ejemplos anteriores hemos visto que la *ccce* $\mathfrak{Ind}$ es reflexiva en $\mathfrak{Top}$ y que cada reflexión tiene por función subyacente una función identidad. Pasa lo mismo con $\mathfrak{S}ym$ en relación a $\mathfrak{G}ra$. El matemático Jiri Adámek ([5]) llama a tales sub*ccce* reflexivas por el nombre de *modificaciones reflexivas*. Así, $\mathfrak{Ind}$ es una modificación reflexiva de $\mathfrak{Top}$ y $\mathfrak{S}ym$ es una modificación reflexiva de $\mathfrak{G}ra$.

Definición 19.9. Sea $\underline{K}$ una *ccce tpf* y sea $\underline{S}$ una sub*ccce* plena de $\underline{K}$. Diremos que $\underline{S}$ es una **modificación reflexiva** de $\underline{K}$, si para cada $\underline{K}$-objeto (X,ξ) existe η en $\underline{S}\,[X]$ tal que $1_X:(X,\xi)\to(X,\eta)$ es una $\underline{S}$-reflexión de (X,ξ).

El siguiente teorema caracteriza a las modificaciones reflexivas.

Teorema 19.5. *Sea $\underline{K}$ una ccce tpf y sea $\underline{S}$ una subccce plena de $\underline{K}$. Son equivalentes,*

1. $\underline{S}$ es una modificación reflexiva de $\underline{K}$.
2. $\underline{S}$ es cerrada bajo fuentes iniciales.

Demostración. $1\Rightarrow 2\rfloor$ Sean, I una clase, y $((X_i,\xi_i))_{i\in I}$ una clase de $\underline{S}$-objetos, $F=(f_i:X\to X_i)_{i\in I}$ una fuente cartesiana y ξ la $\underline{K}$-estructura inicial para X respecto de $(f_i,\xi_i)_{i\in I}$. Debemos demostrar que (X,ξ) es un $\underline{S}$-objeto. Sea $1_X:(X,\xi)\to(X,\eta)$ una $\underline{S}$-reflexión de (X,ξ). Entonces, para cada i en I existe un $\underline{K}$-morfismo $g_i:(X,\eta)\to(X_i,\xi_i)$ tal que $g_i\circ 1_X=f_i$. En consecuencia, las funciones subyacentes de los $\underline{K}$-morfismos g_i y f_i son iguales. Se sigue que, para cada i en I, $f_i:(X,\eta)\to(X_i,\xi_i)$ es un $\underline{K}$-morfismo. Para cada i en I, consideremos el diagrama conmutativo,

$$\begin{tikzcd}
(X,\xi) \arrow[r, "f_i"] & (X_i,\xi_i) \\
(X,\eta) \arrow[u, "1_X"] \arrow[ur, "f_i"'] &
\end{tikzcd}$$

Dado que ξ es inicial para X respecto de $(f_i,\xi_i)_{i\in I}$, se sigue que $1_X:(X,\eta)\to(X,\xi)$ es un $\underline{K}$-morfismo. Colegimos que $\xi=\eta$ y que por tanto (X,ξ) es un $\underline{S}$-objeto.

2 $\Rightarrow$ 1$\rfloor$ Supongamos ahora que $\underline{S}$ es cerrada bajo fuentes iniciales. Debemos demostrar que $\underline{S}$ es una modificación reflexiva de $\underline{K}$. Sea $A := (X, \xi)$ un $\underline{K}$-objeto arbitrario. Procediendo de manera semejante a como lo hicimos en la demostración del corolario 19.1 , sea,

$$C = (f_i : A \longrightarrow B_i')_{i \in I}$$

la clase de todos los $\underline{K}$-morfismos de dominio A y codominio en $|\underline{S}|$. Así también, denotemos $(B_i' := (Y_i, \eta_i))_{i \in I}$, y consideremos ahora a la fuente cartesiana,

$$F = (f_i : X \longrightarrow Y_i)_{i \in I}$$

Sea η la $\underline{K}$-estructura inicial para X respecto de $(f_i, \eta_i)_{i \in I}$. Denotemos $\tilde{A} := (X, \eta)$. No es difícil ver que $1_X : A \to \tilde{A}$ es un $\underline{K}$-morfismo. Ahora bien, dado cualquier $\underline{K}$-morfismo $g : A \to B$, con B en $|\underline{S}|$, se sique que $g = f_i : A \to B_i'$, para alguna i en I. Consideremos el $\underline{K}$-morfismo,

$$f_i : \tilde{A} \longrightarrow B_i'$$

Es claro que dicho $\underline{K}$-morfismo es el único que satisface $f_i \circ 1_X = g$. De aquí inferimos que $\underline{S}$ es una modificación reflexiva de $\underline{K}$. $\square$

Ejemplo 19.9. En conformidad con la proposición 19.10 y con el teorema 19.5, las sub*ccce* plenas de $\mathfrak{Top}$ de los espacios regulares ($\mathfrak{R}$) y de los espacios completamente regulares ($\mathfrak{Cr}$) son modificaciones reflexivas de $\mathfrak{Top}$.

Para el siguiente ejemplo, necesitamos introducir un nuevo tipo de *ccce*. Así, la siguiente definición introduce una noción de estructura.

Definición 19.10. Una seudométrica en un conjunto X es una función $d : X \times X \to [0, +\infty)$ tal que, para cualesquier x, y y z en X, se satisfacen los siguientes puntos,

1. $d(x, x) = 0$.
2. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z)$

Proposición 19.13. *Si d es una seudométrica en un conjunto X entonces, para cualesquier x y y en X, los siguientes puntos se satisfacen,*

1. $d(x, y) \geq 0$.
2. $d(x, y) = d(y, x)$.

Demostración. Sean x y y en X.

1. $0 = d(x, x) \leq d(x, y) + d(x, y) = 2d(x, y)$. En consecuencia, $d(x, y) \geq 0$.

2. $d(x, y) \leq d(x, x) + d(y, x) = d(y, x)$. Asimismo, $d(y, x) \leq d(y, y) + d(x, y) = d(x, y)$. De las dos desigualdades anteriores se sigue que $d(x, y) = d(y, x)$. $\square$

A partir del concepto de seudométrica, construimos una clase de objetos que serán los elementos de nuestra nueva *ccce*.

Definición 19.11. Un espacio seudométrico es una pareja (X, d) donde X es un conjunto y d es una seudométrica en X.

Definición 19.12. Denotaremos mediante $\mathfrak{Pmet}$ a la *ccce* de los espacios seudométricos y las contracciones entre ellos.

Queda claro, pues, que la *ccce* $\mathfrak{Met}$ es una sub*ccce* plena de $\mathfrak{Pmet}$. Más aún, $\mathfrak{Met}$ es una sub*ccce* cocienterreflexiva de $\mathfrak{Pmet}$.

Ejemplo 19.10. La *ccce* $\mathfrak{Met}$ es una sub*ccce* cocienterreflexiva de $\mathfrak{Pmet}$. En primer lugar, daremos un proceso general para construir, a partir de un espacio seudométrico, un espacio métrico.

Sea (X, d) un espacio seudométrico. Definimos una relación de equivalencia, $\sim$, en X del siguiente modo:

Para cualquier par de elementos x y y en X, $x \sim y$ si, y sólo si, $d(x, y) = 0$. Desde luego, el conjunto cociente de X respecto de $\sim$ es,

$$X/\sim := \{[x] \subseteq X : y \in [x] \text{ si, y solo si, } x \sim y\}$$

Denotemos $\tilde{X} := X/\sim$. El siguiente paso es definir una métrica en el conjunto $\tilde{X}$. Definimos la función,

$$\begin{array}{rccc} \tilde{d}: & \tilde{X}\times\tilde{X} & \longrightarrow & [0,+\infty) \\ & ([x],[y]) & \longmapsto & \tilde{d}([x],[y]):=d(x,y) \end{array}$$

Verifiquemos que $\tilde{d}$ está, efectivamente, bien definida. Si $x\sim x'$ y $y\sim y'$, entonces, por definición de $\sim$, $d(x,x') = 0 = d(y,y')$. Luego,

$$d(x,y) \leq d(x,x') + d(y,x') = d(y,x') \leq d(y,y') + d(x',y') = d(x',y')$$

Por lo tanto, $d(x,y) \leq d(x',y')$. De manera similar se comprueba que $d(x',y') \leq d(x,y)$. De las dos desigualdades anteriores se sigue que $d(x,y) = d(x',y')$. Asimismo, no es difícil verificar el hecho que la pareja $\left(\tilde{X},\tilde{d}\right)$ es un espacio métrico.

Como paso último, comprobaremos que $\mathfrak{Met}$ es una sub*ccce* cocienterreflexiva de $\mathfrak{Pmet}$.

Consideremos la proyección natural,

$$\begin{array}{rccc} c: & X & \longrightarrow & \tilde{X} \\ & x & \longmapsto & [x] \end{array}$$

Resulta, hecho que es sencillo de verificar, que c induce una contracción de (X,d) en $\left(\tilde{X},\tilde{d}\right)$,

$$\begin{array}{rccc} c: & (X,d) & \longrightarrow & \left(\tilde{X},\tilde{d}\right) \\ & x & \longmapsto & [x] \end{array}$$

Más aún, la contracción c es una $\mathfrak{Met}$-reflexión para el el espacio seudométrico (X,d). En efecto; sean, $\left(Y,\bar{d}\right)$ un espacio métrico y $f:(X,d)\to\left(Y,\bar{d}\right)$ una contracción. Definimos la regla de correspondencia,

$$\begin{array}{rccc} \tilde{c}: & \tilde{X} & \longrightarrow & Y \\ & [x] & \longmapsto & \tilde{c}([x]) := f(x) \end{array}$$

Resulta que $\tilde{c}$ está bien definida y por lo tanto es una función. Si $x\sim x'$, entonces $d(x,x') = 0$, y dado que $\left(f,\left(d,\bar{d}\right)\right)$ es una contracción, se sigue que,

$$0 \leq \bar{d}(f(x),f(x')) \leq d(x,x') = 0$$

en consecuencia, $\bar{d}(f(x),f(x')) = 0$. Pero $\left(Y,\bar{d}\right)$ es un espacio métrico; así entonces, $f(x) = f(x')$. Lo que haremos a continuación es verificar que $\tilde{c}$ induce una contracción entre los espacios métricos $\left(\tilde{X},\tilde{d}\right)$ y $\left(Y,\bar{d}\right)$. Sean $[x]$ y $[y]$ dos elementos arbitrarios de $\tilde{X}$; entonces,

$$\bar{d}(\tilde{c}([x]),\tilde{c}([y])) = \bar{d}(f(x),f(y))$$

y dado que $\left(f,\left(d,\bar{d}\right)\right)$ es una contracción,

$$\bar{d}(f(x),f(y)) \leq d(x,y)$$

lo cual significa que,

$$\bar{d}(\tilde{c}([x]),\tilde{c}([y])) \leq d(x,y)$$

es decir, $\left(\tilde{c},\left(\tilde{d},\bar{d}\right)\right)$ es una contracción.

Ahora bien, es claro que $\tilde{c}\circ c = f$, y como c es suprayectiva, $\tilde{c}$ es la única función que satisface dicha igualdad. Con esto concluimos que $\mathfrak{Met}$ es una sub*ccce* cocienterreflexiva de $\mathfrak{Pmet}$.

Bibliografía

[1] Robert o Vázquez García. *Lecciones de Topología*. Foro Red-Mat, Volumen 2 (1996), Número 5. (http://www.red-mat.unam.mx)

[2] Roberto Vázquez García. *Reflexividad, Correflexividad y Teoría de las Estructuras Matemáticas*. Foro Red-Mat, Volumen 6, Número 5.

[3] Roberto Vázquez García. *Categorías Concretas Topológicas*. Instituto de Matemáticas (UNAM). Dirección electrónica: http://www.matematicas.unam.mx/paez/catcontop.pdf

[4] Roberto Vázquez García. *Un enfoque correcto de la teoría de conexidad*. Anales del Instituto de Matemáticas (UNAM), 21, número 2 (1981) (175-214)

[5] Jiri Adámek. *Theory of mathematical structures*. Editor: Kluwer Academic Publishers. Edición: 1983. (29 de noviembre de 1983).

[6] Notas de clase. *Subcategorías correflexivas de* $\mathfrak{Top}$.
Dirección electrónica: http://www.matematicas.unam.mx/paez/subcat_corre.pdf

[7] Notas de clase. *Categorías concretas topológicas*.
Dirección electrónica: http://www.matematicas.unam.mx/paez/sali_prin.pdf

[8] Graciela Salicrup. *Introducción a la Topología*. Aportaciones Matemáticas. Textos 1, nivel medio. Editores: J. Rosenblueth y C. Prieto. Sociedad Matemática Mexicana (1997).

[9] Graciela Salicrup. *Epirreflexividad y conexidad en categorías concretas topológicas*. Anales del Instituto de Matemáticas (UNAM), 18, número 2 (1978) (29-122)

[10] Graciela Salicrup, Roberto Vázquez García. *Categorías de Conexión*. Anales del Instituto de Matemáticas (UNAM), 12 (1997).

[11] James R. Munkres. Topología. Segunda Edición. 2002. Editorial: PRENTICE HALL.