Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Estudios Superiores Iztacala

"Resolución de problemas aritméticos verbales en nivel básico: propuesta de intervención basada en esquemas algebraicos"

T E S I N A

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE

LICENCIADO EN PSICOLOGÍA

P R E S E N T A (N)

Uriel Escobar Durán

Director: Mtro. **Luis Gonzaga Zarzosa Escobedo**

Dictaminadores: Dr. **Jorge Guerrero Barrios**

Mtra. **Assol Cortés Moreno**

Los Reyes Iztacala, Edo de México, Abril 2016

Agradecimientos.

A mi alma mater, la Facultad de Estudios Superiores Iztacala: gracias por el apoyo académico, económico y humano; por enseñarme que siempre un alumno de la UNAM se debe a la sociedad que lo mantuvo allí. Gracias totales.

A mi madre: gracias por confiar en mí siempre; por impulsarme todos los días a cumplir mis sueños; por ser tan trabajadora e inteligente; por ser tan admirable; por estar siempre en todo momento; por ser la mejor mamá del mundo.

A mi padre: gracias por demostrarme que el trabajo es siempre el origen de las grandes metas; por ser tan responsable y trabajador; por ser un ejemplo para mí; por ser nuestro sustento todos estos años; sin ti, nada de lo que he hecho habría sido posible.

A mi Ari: gracias por abrirme espacio en tu vida del modo más sincero que hay: con tu amor; por ser una mujer completa; por soñar y trabajar juntos todos los días; por ser el ejemplo de que en la vida siempre se puede cumplir lo que deseas… tú eres lo que siempre deseé; por ser la razón de mis sonrisas y de mis metas; porque tu belleza, nobleza e inteligencia siempre te llevarán tan lejos como quieras. ¡Te amo!

A mis hermanos y mis sobrinas: gracias por ser parte de mi vida; por siempre estar cuando nos necesitamos; por siempre considerarnos a nosotros (mis papás y yo) en sus prioridades; por ser seres humanos excelentes y dignos de amor y confianza; porque este logro es de ustedes, de nuestra familia; porque sé que estaremos siempre unidos.

A Luis Zarzosa: gracias por inspirar este proyecto; por su confianza, guía y apoyo; por ser mi amigo y mi maestro a la vez; por ser un profesional en su magnífica labor como docente; por ser tan agradable y sincero; por no escatimar en compartir sus conocimientos; por enseñarme que el "caballo verde" no siempre "versa" sobre "Niurka".

A la maestra Assol: por dedicarnos tanto tiempo y esfuerzo a sus amigos y alumnos; por sus importantes observaciones hacia este proyecto; por su agradable compañía; por inspirar perseverancia, excelencia y trabajo en todos los que le rodeamos; por siempre regalar una sonrisa.

Al Dr. Jorge Guerrero: por hacer de sus clases puntos de inflexión en la vida de nosotros, sus alumnos y amigos; por su sinceridad, paciencia y pasión por la ciencia; por su respeto y apoyo; por sus grandes esfuerzos en la culminación de este proyecto.

A mis amigos (saben bien quiénes son): por acompañarme desde mi hogar hasta la escuela tantos años. De todos me he llevado algo y siempre los tengo presentes en todo lo que hago. Por hacer de mi vida algo maravilloso. Por compartir su vida con la mía. Por ser mi familia.

A mis compañeros y maestros: porque he aprendido de ustedes muchas cosas con tan solo su conocimiento o presencia; por buscar juntos nuestros sueños sin dejar de saludarnos, al menos; por estar simplemente en mi vida.

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

La resolución de problemas que requieren en uso de matemáticas es un tema que tiene relevancia internacional, ya que el objetivo de cualquier sistema educativo es lograr que sus alumnos puedan aplicar lo aprendido en un aula a problemáticas cotidianas en donde sea necesario aportar alguna solución. Cuando un estudiante finaliza su educación básica y ha adquirido conocimientos y habilidades en esta materia, podría participar de un modo pleno en la sociedad moderna a la cual pertenece al encontrar un empleo con remuneración digna (Organización de Cooperación y Desarrollo Económicos, 2012).

Si las matemáticas resultan relevantes en la resolución de problemas y en la participación plena en una sociedad, su enseñanza tendría que abarcar aspectos en los cuales los estudiantes puedan relacionar su vida cotidiana con lo aprendido en la escuela; sin embargo, el modo en el cual se aprende matemáticas no es genérico, por lo que un estudiante de nivel básico puede ver entorpecida la relación entre lo que aprende en un salón de clases y situaciones cotidianas si la manera en la cual ha aprendido a resolver (por ejemplo una suma), no permite que pueda resolver otra suma en un contexto distinto al escolar.

Existen ejemplos de países como Finlandia, China y Corea del sur que le conceden un lugar privilegiado a la enseñanza de las matemáticas vinculada a la resolución de problemas. Ellos consiguen alcanzar los primeros lugares en el Programa para la Evaluación Internacional de los Estudiantes (PISA).

El programa PISA se enfoca en dos ámbitos: el primero consiste en evaluar las habilidades en esta materia de estudiantes de 15 años a través de la resolución de problemas matemáticos (Darling-Hammond, 2010). El segundo ámbito implica un enfoque en la competencia matemática en situaciones de la vida cotidiana de un alumno, mismas que sean relevantes para él. Por lo tanto, se pude asegurar que aquellos países que logran alcanzar los primeros lugares de la prueba tienen un sistema educativo exitoso en cuanto a la *transferencia* de habilidades y conocimientos del contexto escolar a la vida cotidiana.

Ante este escenario, cabe el siguiente cuestionamiento: ¿cómo se puede enseñar matemáticas y esperar que la metodología empleada permita la *transferencia* a contextos distintos al escolar? o, dicho de otro modo, ¿cómo se generaliza lo que un estudiante aprendió en el aula a su vida cotidiana? Para resolver esta cuestión es útil hacer hincapié en varios puntos. El primero de ellos trata sobre los factores que dificultarían la transferencia; podemos pensar en dos condiciones extremas: 1) la enseñanza de las matemáticas de un modo eminentemente abstracto que no permita su aplicación a entornos significativos para el estudiante; y 2) el aprendizaje de operaciones matemáticas ligadas a un problema, en contextos prácticos y específicos, pero que fuera de dicha situación no se logra generalizar a nuevas circunstancias al no haber aprendido las reglas generales.

La primera condición sugiere una enseñanza que se enfoca en la parte abstracta de la matemática, lo cual propicia que, al no percibirse el vínculo con aspectos significativos de la vida, se acabe aprendiendo la matemática de modo rutinario y memorístico ya que la abstracción que implica este primer punto dificulta aplicar las matemáticas en situaciones prácticas.

La segunda condición extrema implica el aprendizaje de operaciones matemáticas en contextos prácticos y específicos –i.e. en situaciones que requieren el manejo de dinero y cantidades– pero que no trascienden el contexto en el cual se aprendió.

Si en la enseñanza de las matemáticas se encontraran las condiciones intermedias entre estos dos extremos, la probabilidad de transferencia sería mayor. Una estrategia que puede permitir encontrar dichas condiciones intermedias, sería la enseñanza de las matemáticas basada en problemas, pero siempre y cuando permita ir identificando comunes denominadores a partir de una buena cantidad de problemas, pues de esta manera para los alumnos será más fácil el consecuente dominio de reglas que puedan facilitar la transferencia.

Otro ángulo del problema acerca de las condiciones que pueden hacer más probable la transferencia, tiene que ver con puntos como los siguientes: A) el modo de plantear un problema matemático; B) las diferencias entre el contexto de aprendizaje y la transferencia a un contexto novedoso; y C) el método de enseñanza utilizado por el docente.

A) El modo en el cual es planteado un problema matemático.

Esto implica, comúnmente, relacionar la enseñanza de alguna de las áreas de las matemáticas –entre ellas, la aritmética– en situaciones cotidianas por parte de un profesor. ¿A qué recurre un profesor para relacionar las matemáticas con la vida cotidiana de un alumno? La mayor parte de las veces, al planteamiento de problemas cotidianos que impliquen el uso de conocimientos y habilidades matemáticas. Este planteamiento se da a través de varios factores críticos en la estructura de dicho problema: modo oral o escrito; usando esquemas o gráficas; basándose en lenguaje cotidiano o sofisticado para el alumno; añadiendo información irrelevante; presentado una situación a través de un cuento o narración; entre otros. Estos factores son importantes ya que en ellos se puede basar la solución satisfactoria de dicho problema y, principalmente, la *transferencia*.

B) El factor relativo a las diferencias entre el contexto de aprendizaje y el de transferencia a otro ámbito.

Este factor versa sobre las probables diferencias entre contextos de aprendizaje y el de transferencia. Si es notable la diferencia, la transferencia probablemente no se llevaría a cabo, dado que los estudiantes no estarían expuestos a las propiedades de este nuevo contexto con anterioridad. Por lo tanto, si el contexto al cual se puede transferir lo aprendido en clase es más complejo en comparación con aquel en el que se aprendió en primera instancia, las dificultades para el alumno serían evidentes. Si los problemas matemáticos aprendidos en un salón de clases tuvieran semejanzas al contexto cotidiano del alumno, en cuanto al nivel de complejidad y propiedades numéricas, esquemáticas y verbales, la probabilidad de una transferencia exitosa sería mayor.

C) El método de enseñanza que implemente un docente.

En términos generales, se podrían identificar tres: 1) aquellos que tienen al profesor como modelo de aprendizaje, es decir, cuando el profesor se limita a mostrar una línea de razonamientos lógicos para llegar a una solución; pero que asume que si ya se explicó, se debió haber aprendido; 2) los que se basan en una regla genérica de resolución de problemas, como por ejemplo: *Tratar de entender el problema; pensar en un plan; llevar a cabo el plan; verificar el resultado*; y 3) los que implican una clasificación de tipos de problema y una posterior relación con algoritmos en función de su estructura, en otras palabras, aprendizaje basado en esquemas. La descripción y análisis de estas metodologías se desarrollarán en el capítulo 2 de la presente tesina, aunque es preciso renombrarlas para hacer más práctica su futura referencia, por lo que a la primera metodología se le pude nombrar *casuística,* a la segunda *método heurístico* y a la tercera metodología basada en una *taxonomía.*

Existe un tercer aspecto a considerar, que es complementario a los puntos expuestos hasta ahora: En la solución de cualquier problema matemático, resulta crucial la identificación de las relaciones cuantitativas implicadas y el sistema de representación de dichas relaciones, ya que de eso depende la pertinencia de las operaciones a realizar y el resultado.

En este rubro, se puede pensar que al *interior* de las matemáticas se encontrarían las herramientas con las cuales se pueden clasificar diferentes tipos de relaciones cuantitativas. Si el álgebra es, tal como sugiere Carraher, Schliemann, Brizuela y Earnest (2006), la generalización aritmética de números y cantidades y, por ende, la rama de las matemáticas que aborda las relaciones cuantitativas del modo más general posible, ésta podría ser un marco de referencia para clasificar las diferentes estructuras de los problemas matemáticos. El gran desafío consiste en armonizar la aritmética con el álgebra; enseñar a razonar algebraicamente a partir de lo concreto y generar mayores posibilidades de transferencia en la medida en que el álgebra resulte el mejor recurso para identificar las relaciones cuantitativas implicadas.

El álgebra como criterio rector para identificar diferentes tipos de relación cuantitativa, tendría como ventaja abonar a favor de una misma lógica entre la aritmética y el álgebra, tal como lo han impulsado autores como Schliemann, Carraher y Brizuela (2011) y en general en movimiento del *Álgebra temprana* (Blair, 2003)

Si bien es cierto que la aritmética representa muchas ventajas en relación con la *transferencia*, posee limitantes al momento de clasificar y esquematizar problemas planteados verbalmente. Por ejemplo, si se planteara el siguiente problema: "Juan tiene 3 bolsas de palomitas, si su mamá le regaló otras 2 bolsas, ¿cuántas bolsas tiene ahora?", aritméticamente hablando, tendríamos que sumar las cantidades que se plantean en el problema para solucionarlo a partir de una clasificación pertinente (problemas de suma, por ejemplo); sin embargo, si el problema se planteara del siguiente modo: "Juan tiene 3 bolsas de palomitas, ¿cuántas palomitas le regaló su mamá si en total tiene 7?" una clasificación de tipo de problemas como la descrita con anterioridad la ubicaría en otro tipo de operación aritmética, a pesar de contener la misma estructura que el primer problema (un dato desconocido y dos datos conocidos, los cuales conforman las partes y la cantidad total del problema), con lo que el álgebra representa una ventaja en cuanto a la configuración de un referente que puede permitir a un alumno clasificar de un modo más general los tipos de problemas a los cuales se puede enfrentar, incluyendo aquellos que conllevan datos desconocidos.

Esta situación implica una desvinculación entre la clasificación de problemas usando la aritmética y la propiedad algebraica de generalizar los datos a través de letras, lo cual no se limita al campo de los problemas aritméticos planteados verbalmente, debido a que comúnmente el álgebra representa una dificultad para los alumnos de nivel básico, puesto que sus reglas son distintas a la aritmética y basa sus procedimientos en letras en vez de números. Ante esta situación, existen movimientos que han intentado vincular a la aritmética y al álgebra a través de la enseñanza de las matemáticas. Estos movimientos sugieren que, tanto aritmética como álgebra, pueden combinarse en la enseñanza de las matemáticas basada en la resolución de problemas planteados verbalmente.

Los tres tipos de metodologías en la resolución de problemas anteriormente enunciados –teniendo como núcleo operativo la clasificación de problemas a través de esquemas para poder llegar a la *transferencia*– se basan principalmente en problemas aritméticos. Por lo tanto, cabe la siguiente interrogante: ¿el uso de un álgebra simplificada facilitaría la *transferencia* de problemas aritméticos planteados verbalmente? Y si fuera así, ¿cómo se llevaría a cabo la enseñanza basada en álgebra?

Una prueba de que es más probable que la *transferencia* se presente al combinar problemas aritméticos verbales con esquemas algebraicos –en comparación con otras metodologías– se observa en la propuesta metodológica de Xin (2012), quien teniendo como criterio eje al álgebra para clasificar problemas planteados verbalmente a través de esquemas, entrenó a niños de cuarto grado de primaria en EE.UU. en la identificación de la estructura común de los problemas de suma y resta y de multiplicación y división a través de esquemas algebraicos. Si este tipo de metodologías aumentan la probabilidad de *transferencia* a través de la clasificación de las estructuras subyacentes de un problema aritmético planteado verbalmente, es conveniente ahondar en dicha metodología, con la intención de optimizarla a partir de los problemas más complejos, como aquellos que requieren una operación intermedia o paréntesis para poder resolverlos.

Es por ello que el objetivo de la presente tesina es hacer una revisión histórica de la lógica, procedimientos y planteamientos teóricos acerca de la enseñanza para la solución de problemas matemáticos en la educación básica, para finalmente proponer el diseño de una metodología en la resolución de problemas aritméticos verbales para nivel básico de educación, específicamente para estudiantes el rango que va de tercer a sexto grado de primaria, que estén en riesgo de tener dificultades en cuanto a la transición de la aritmética al álgebra.

1. CONTEXTO MUNDIAL Y NACIONAL EN LA COMPETENCIA DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS

1.1. *Estadísticas sobre las competencias no escolarizadas (Prueba PISA).*

La prueba PISA evalúa las competencias en matemáticas, ciencias y lectura de los estudiantes de sus 65 países afiliados. Esta prueba no está diseñada para evaluar el aprendizaje de los contenidos fijados en los programas de las escuelas, ni tampoco evalúa el desempeño de los docentes o de los programas vigentes. Su objetivo principal es evaluar si los estudiantes de 15 años son capaces de reproducir, aplicar y transferir sus conocimientos en nuevos contextos no académicos; si pueden analizar, razonar y comunicar sus ideas efectivamente; y si pueden seguir aprendiendo nuevos conocimientos y habilidades durante toda la vida (INEE, 2015).

PISA se considera como una evaluación que implica competencias no escolarizadas, debido a que los ítems de la prueba derivan de estándares educativos basados en habilidades y conocimientos de los alumnos en relación a problemas cotidianos de su contexto. Estos estándares sirven, a su vez, como una referencia de qué tanto una política de educación funciona o no en ciertos países, por lo que aquellos países que obtienen resultados favorables en la prueba, sugiere que poseen sistemas educativos efectivos en relación a la resolución de problemas de la vida cotidiana de sus alumnos y que, además, estos sistemas pueden implementado en los países que obtienen resultados bajos en la escala de la prueba. Esta prueba establece seis niveles de competencia: nivel 6 (más de 668 puntos), nivel 5 (607 a 668 puntos), nivel 4 (545 a 606 puntos), nivel 3 (483 a 544 puntos), nivel 2 (421 a 482 puntos) y nivel 1 (358 a 420 puntos). Cuando el puntaje de algún estudiante se ubica por debajo del nivel 1, la escala indica que éste no es capaz de realizar las tareas matemáticas más elementales que exige PISA (OCDE, 2015).

Una de las competencias que evalúa la prueba PISA es la matemática. La competencia matemática se puede definir como la capacidad de un estudiante para resolver, razonar, analizar y comunicar de modo eficaz situaciones que impliquen conceptos matemáticos (OCDE, 2015). Además, el dominio de las competencias matemáticas es un aspecto que predice una mayor probabilidad de que se continúe con estudios de educación superior y de ingresos que vayan de acuerdo a sus expectativas. Teniendo esto en consideración, es adecuado describir los resultados de la prueba en competencia matemática para identificar a los países que lideran la clasificación de la prueba y, a partir de esos estándares, ubicar la situación en la que se encuentra México en relación a esta prueba y a este tipo de competencia.

Antes de describir los resultados de los países mejor ubicados en la escala de la prueba, cabe destacar que entre los países que participaron en la evaluación de matemáticas de PISA en el año 2012, existen grandes diferencias en el puntaje de la prueba, puesto que la diferencia entre el país con el puntaje medio más alto y el país con el más bajo es de 245 puntos, es decir, el equivalente a casi seis años de escolarización. A esto hay que añadir las diferencias que existen *dentro* de la prueba en cada país; la diferencia de rendimiento en matemáticas *dentro* de los países es por lo general incluso mayor a las que existen entre los países, más de 300 puntos de separación entre los rendimientos más altos y más bajos en un país, lo que implica siete años de escolarización (OCDE, 2015). Por lo tanto, los siguientes puntajes suponen un especial enfoque en las necesidades educativas y en la reducción de distancias entre el desempeño de los países de la OCDE.

Shanghái-China tiene la puntuación más alta en competencia matemática, con una media de 613 puntos, esto significa que se encuentra 119 puntos por encima de la media de la OCDE. Singapur, Hong Kong-China, Taipéi Chino, Corea, Macao-China, Japón, Liechtenstein, Suiza y Holanda, en orden descendente en cuanto a puntuación, son los diez mejores en matemáticas. La economía asociada de Shanghái-China tiene la mayor proporción de estudiantes con un rendimiento de nivel 5 o 6, con un 55%, seguida de Singapur, con un 40%, China Taipéi, con un 37% y Hong Kong, con un 34%. Por otra parte, el 23% de los estudiantes en países de la OCDE y el 32% de los estudiantes en todos los países y economías participantes no alcanzaron el nivel básico (nivel 2) en la evaluación de matemáticas de PISA (OCDE, 2015).

Dentro de este contexto mundial en competencias matemáticas, México se encuentra ubicado, según dicha prueba, en el lugar 53 con un puntaje medio de 413 puntos –nivel 1, el más inferior de la escala–. Esto quiere decir que de los estudiantes mexicanos evaluados, el 54.7% se encuentra por debajo del nivel 2 y tan sólo el 0.6% en el nivel 5 o 6. ¿Qué implican estos puntajes en comparación con otros países? El puntaje otorgado a México es equivalente, estadísticamente, al obtenido por países como Costa Rica o Uruguay, aunado al hecho de estar por debajo del puntaje promedio de PISA. Los alumnos mexicanos de más alto rendimiento obtienen el mismo puntaje que un alumno promedio en Japón (539 puntos). Además, el promedio de México de 413 puntos lo ubica por debajo de Portugal, España y Chile, aunque superior a países como Brasil, Perú y Colombia (OCDE, 2014).

Si bien es cierto que las estadísticas nacionales en la prueba PISA ubican a México en una posición muy inferior en comparación con otros países, esto no quiere decir que no existan avances en este puntaje en comparación con los anteriores años en los que la prueba fue aplicada. Entre PISA 2003 y PISA 2012, México mejoró en el puntaje promedio de sus alumnos evaluados en matemáticas, pasando de 385 puntos en 2003 a 413 puntos en 2012. El aumento de 28 puntos en matemáticas entre PISA 2003 y PISA 2012 fue uno de los más importantes entre los países de la OCDE, a tal grado que de los 39 países y economías que participaron en PISA 2003 y PISA 2012, sólo México, Turquía y Alemania mejoraron significativamente su rendimiento en matemáticas durante el periodo entre estudios (OCDE, 2014).

Si el puntaje, teniendo en cuenta que es de niveles básicos en promedio, ha ido mejorando a lo largo de los años, esto brinda un panorama que sirve como referencia para estadísticas nacionales que, aunque no evalúen competencias no escolarizadas como la prueba PISA, se encargan de competencias de índole escolarizada, lo que quiere decir que se basan en evaluar lo que se domina de un currículo escolar.

1.2. Estadísticas sobre las competencias escolarizadas (pruebas Excale, ENLACE y PLANEA).

Los datos del estudio PISA, sobre todo para los países que obtienen bajos resultados, implican una presión para que las naciones involucrados revisen sus políticas educativas en las competencias correspondientes como las matemáticas –para favorecer una participación en la sociedad moderna a los estudiantes– las evaluaciones nacionales escolarizadas pueden resultan vitales para comprender el estado en el cual se encuentran los estudiantes en relación a la enseñanza que reciben en sus respectivas aulas. En México, el Sistema Educativo Nacional (SEN) comprende el sistema escolarizado y el extraescolar. El sistema escolarizado se divide en tres niveles: nivel básico, medio superior y el superior. El nivel básico comprende a su vez la educación preescolar, primaria y secundaria (Díaz, 2013). La educación primaria, como todo el sistema educativo, está sujeta a distintas evaluaciones, específicamente, se realizan varias pruebas escolarizadas, de las cuales destacan, para alumnos de educación básica, las pruebas Excale y ENLACE.

La prueba ENLACE en el año 2008, indicó que de los alumnos de primaria a los que se les aplicó la prueba, el 73% se ubica en los rangos de *elemental* o *insuficiente,* mientras que para los de secundaria, en el mismo rango de *elemental o insuficiente,* el porcentaje fue mayor: 91%. Sin embargo, para el año 2013, el porcentaje de alumnos en los rangos de *elemental* o *insuficiente* disminuyó significativamente a un 51.2 %, teniendo como consecuencia evidente un aumento al 48.8 % de los estudiantes en el rango de *bueno* y *excelente;* esta tendencia se mantuvo, en un grado menor, para los alumnos de educación secundaria, ya que del 91% de los estudiantes que se encontraban en los niveles más bajos en 2008 (elemental o insuficiente), en 2013 el porcentaje disminuyó a 78.1% (Secretaria de Educación Pública, 2013).

Por otra parte, los Exámenes de la Calidad y el Logro Educativo (EXCALE), los cuales evaluaban el desempeño de los estudiantes basándose en muestras representativas de los mismos en competencias escolarizadas. Las puntuaciones de la prueba se basaban, principalmente, en el dominio de un contenido curricular

(INEE, 2015). La prueba EXCALE (2005, en Blanco, 2011) indicó que el 70% de los estudiantes de sexto de primaria se ubicaron por debajo de los dos primeros niveles de logro, de un total de 5. Esto implica que más de dos terceras partes de los alumnos de sexto de primaria no poseen ni los conocimientos ni las habilidades requeridas en los planes de estudio de la SEP.

Estas dos pruebas revelan datos que se complementan entre sí, ya que la prueba EXCALE se aplicó en el 2005 (bajo esta modalidad) y la prueba ENLACE se implementó del año 2006 al 2013, aunado a que ENLACE evaluaba un dominio curricular y EXCALE evaluaba contenidos curriculares aplicando pruebas a estudiantes. A pesar de los aparentes avances en competencia matemática reportada por la SEP, en el año 2013, de acuerdo a lo reportado por el INEE relativo a la justificación de la prueba PLANEA (INEE, 2015), este instituto solicitó a un comité de expertos internacionales la elaboración de un estudio para analizar la solidez operativa de dichas pruebas, mismo que identificó problemas en ambos instrumentos. Con la intención de contar con instrumento con mayor confiabilidad y validez el INEE diseñó, en coordinación con la SEP, el Plan Nacional de Evaluación de los Aprendizajes (PLANEA), con el fin optimizar las pruebas ENLACE y EXCALE. Cabe mencionar que la prueba PLANEA se aplicó a estudiantes de Educación Media Superior y de Nivel Básico (cuarto grado de primaria) y que sus resultados no son comparables con las dos pruebas anteriormente mencionadas, de acuerdo a lo indicado por el INEE (2015).

¿Cuáles fueron los resultados de la prueba PLANEA aplicada en el 2015? Según lo reportado por el INEE (2015), teniendo como niveles de dominio de la competencia en matemáticas el I, II (los más bajos) y el III y IV (los más altos), a nivel nacional en lo que respecta a la Educación Primaria, los estudiantes que se ubicaron en el dominio I correspondieron al 49.5%, mientras que para el dominio II el porcentaje fue de 33.2%. Los dominios III y IV fueron alcanzados por un 16.6 % y un 2.6% respectivamente. En el caso de la Educación Media Superior, los alumnos que se ubicaron en el nivel de dominio IV representaron el 6.4%, mientras que el nivel III lo alcanzaron el 12.4% de los estudiantes. Este porcentaje representa casi una quinta parte de los estudiantes evaluados, por lo que la mayor parte de los estudiantes evaluados se ubicaron en los dominios más bajos –esto es el I y II– con un 51.3% y un 29.9% respectivamente. Estos datos configuran un panorama en el que el 80.2% de los estudiantes evaluados, tan sólo son capaces de aplicar procedimientos aritméticos y geométricos simples para la comprensión de diversas situaciones similares a las que se estudian tan sólo en el aula, además de la identificación de relaciones espaciales, las cuales se pueden considerar situacionales que no trascienden el contexto en el cual se aprendieron.

Esta falta de *transferencia* del aprendizaje que se lleva a cabo en el aula hacia contextos significativos para los alumnos, coincide con lo reportado por la prueba PISA en el sentido de la carencia en cuanto a la habilidad de los alumnos en la resolución de problemas que tengan que ver con competencias matemáticas en situaciones cotidianas. Si el principal obstáculo para la comprensión de las matemáticas en su aplicación más práctica a la vida cotidiana tiene que ver con la *transferencia*, una solución para esta problemática podría versar sobre la implementación de metodologías de enseñanza que pongan especial atención precisamente en la transferencia, en una enseñanza de las matemáticas que logre el equilibrio necesario entre la aplicación significativa y las cualidades abstractas inherentes a esta materia. Es por eso que a continuación se expondrán y analizarán diferentes metodologías en la enseñanza de las matemáticas, con el fin de argumentar una propuesta de intervención que tiene como propiedad principal el concepto multicitado de *transferencia*.

2. MODELOS TEÓRICO-METODOLÓGICOS DE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS ARITMÉTICOS

2.1. *El profesor como modelo de razonamiento lógico.*

Este tipo de metodología –a la cual se le denominará ***casuística*** *ya que intenta instruir mediante la presentación de casos*– hace alusión al planteamiento de un problema o caso por parte del profesor y los pasos o procedimientos que éste sigue para resolverlos, esperando que los alumnos imiten o sigan los mismos pasos pero en un nuevo caso a partir de su *entendimiento* o *razonamiento* propios. Los procedimientos matemáticos se implementan de este modo en la mayor parte de las prácticas de enseñanza, debido a que, para autores que han tratado de subrayar las presuntas ventajas de este método (como Nevot, 2004), el profesor funge como un *compositor*, quien debe plantear preguntas y ejercicios de comprensión que armonicen unos con otros. Se asume tácitamente que el profesor es un modelo que muestra una línea de razonamiento lógico, que luego el alumno debe imitar.

Si se pusiera esta metodología en práctica, el procedimiento podría ser el siguiente: un profesor de matemáticas plantea un problema aritmético a sus estudiantes, con el objetivo de resolverlo frente a ellos mostrando los pasos a seguir y haciendo hincapié en la información más importante. Por ejemplo “Mario tiene 34 cupones validos en ‘La bodeguita’. Si requiere de 45 cupones para comprarse unos audífonos, ¿cuántos cupones le faltan?” El profesor identificaría los datos importantes del problema (34 cupones, se requieren 45 cupones, por lo tanto, le faltan 11). Podría recurrir a una reiteración verbal del problema y, finalmente, escribiría el procedimiento correcto. De este modo, los estudiantes tendrían que repetir el procedimiento para cada problema al cual se enfrenten en el aula.

Este tipo de metodología presuntamente permite a los alumnos recurrir a ejemplos que han aprendido con anterioridad, cuando se presente un problema novedoso, por lo que tendrían que recordar el procedimiento aprendido y aplicarlo. Además, en caso de que el problema sea distinto a los aprendidos en cuanto a datos e información, los alumnos tendrían que comprender las similitudes cruciales para darle una solución.

Esta metodología hace hincapié en los casos concretos y en su reiteración; sin embargo, descuida otros rubros cruciales para relacionar problemas novedosos con los aprendidos en el aula. Un ejemplo de este descuido ocurriría cuando un alumno interactuara con otro problema distinto a los que ha aprendido en clase, ¿cómo le haría para resolverlo? Lo más probable es que el alumno recurra a lo que ha aprendido en clase, por lo tanto, recurriría al procedimiento del profesor. Esto quiere decir que el alumno haría referencia al modo de comprensión y de ejecución de su profesor, mas no al suyo, ya que no se puede asumir que la demostración del profesor coincida con el modo de proceder de un estudiante ante un problema novedoso.

Si bien es cierto que para algunos problemas basta con recurrir a lo aprendido en clase –o en el mejor de los casos al sentido común– al momento de encontrar algo que relacione los problemas novedosos con los aprendidos con anterioridad, un alumno puede encontrar dificultades, pues se le deja en una situación de incertidumbre. Otra limitación que presenta una metodología casuística es que habitualmente al alumno se le ven presentando casos diversos, pero sin la idea de sacar un común denominador y sin mantener graduados los niveles de dificultad. Cómo tácitamente se asume que el asunto es razonar, entonces el análisis, tanto de las peculiaridades del problema como de su grado de dificultad, pasan a un segundo plano. De problemas heterogéneos difícilmente puede esperarse que se identifique su estructura y los mecanismos de solución pertinentes, como para derivar una regla que aplique a situaciones extraescolares; el alumno ve cómo otro soluciona problemas, pero no se le está enseñando ninguna estrategia.

En conclusión, si la *casuística* implica un modelamiento de procedimientos ligados a casos particulares, eso implícitamente asume que los alumnos pueden seguir este procedimiento tal como lo hace el profesor, sin necesidad de entrenamiento previo en, por ejemplo, identificación de información o datos relevantes adicionales a los que el docente realiza para un problema dado. Ejemplos de ello se observan en el modo de enseñar temas matemáticos como el cálculo, el álgebra o la trigonometría. Por ende, esta metodología basada en casos particulares tiene pocas probabilidades de permitir la transferencia, ya que se basa en el procedimiento que modela el profesor y en la particularidad del caso o problema resuelto, teniendo a este modelamiento de un procedimiento –derivado del modo en el cual comprende y procede un docente o instructor– como único referente de resolución.

En contraste, una metodología que representa una ventaja en relación a la casuística es el método heurístico; este método tiene como principal eje rector los aportes de George Pólya. A continuación se describe de qué va la tesis de este autor y las mencionadas ventajas en relación a la metodología basada en la casuística.

2.2. *El método heurístico.*

George Pólya es considerado como el precursor por antonomasia de las primeras temáticas de resolución de problemas. Para este autor, la resolución de problemas debe analizarse desde un punto de vista matemático pero de un modo global, es decir, esta temática debe basarse en procedimientos que sean aplicables en cualquier campo de la vida cotidiana (Alfaro, 2006). Pólya define a la *heurística* como "el arte de la resolución de problemas, ya que la heurística trata de comprender el método que conduce a la solución de problemas, en particular las operaciones mentales típicamente útiles en este proceso" (Pólya, 1965, p. 102, en Hernández y Villalba, 1994). Polya (1945, en Sepúlveda, Medina y Sepúlveda, 2009) se interesó por las problemáticas que representaba el desempeño de sus estudiantes en el aprendizaje de las matemáticas, particularmente resolver problemas. Además, a partir del análisis de los diálogos que llevaba a cabo consigo mismo sistematizó un método que puede ser útil a los estudiantes al resolver problemas.

Para dar cuenta de este método heurístico, este autor tiene como propuesta metodológica un plan que tiene su nombre –plan de Polya– y que se basa en cuatro rubros: a) comprender el problema matemático; b) concebir un plan para resolverlo;

c) ejecutar dicho plan; y d) examinar la solución obtenida (Corbalán y Deulofeu, 1996). Antes de describir en qué consisten estos rubros, cabe mencionar que el plan de Pólya deriva del cuestionamiento relativo al cómo resolver problemas en un modo genérico, es decir, cualquier tipo de problemas, no sólo los problemas matemáticos. Es por eso que para este autor un aprendiz debe realizar el siguiente procedimiento al momento de resolver un problema: 1) familiarizarse con el problema desde una perspectiva global, para que una vez visualizado el problema y al tener claro qué se puede hacer, el alumno pueda… 2) comprender el problema al aislar las partes del mismo y proceder a resolverlo. Este proceder puede derivarse de… 3) una idea útil que permita vincular el problema con conocimientos anteriores, con la intención de verificar en qué sí sirve la idea y en qué no (Alfaro, 2006). Este procedimiento permitiría a los alumnos vislumbrar el problema desde un punto de vista global.

Derivado de este procedimiento genérico que aplica para cualquier tipo de problemas, Pólya desarrolló los siguientes cuatro pasos que configuran su plan para resolver problemas matemáticos:

a) Comprender el problema matemático: comprender o definir el problema matemático implica un análisis por parte del alumno en relación a la información relevante e irrelevante –ya sean datos numéricos o de contexto (personajes, objetos y lugares) – así como los datos que se requieren conocer o incógnitas. Comprender el problema también incluye la herramienta de la representación –en una primera instancia para visualizar los componentes– a través de paráfrasis, ilustraciones o gráficas (Macías, 2013). Las preguntas de autoevaluación que pueden realizar los alumnos son las siguientes: ¿Qué indica el problema? ¿Qué información es la que se requiere? ¿Cuáles son los datos del problema?
b) Concebir un plan para resolverlo: este paso versa sobre el dominio de estrategias que permitan resolver el problema matemático. Estas estrategias incluyen el procedimiento correcto de la resolución del problema, la solución y los métodos de corroboración, mismos que

pueden derivarse de problemas aprendidos con anterioridad o de metodologías que sean compatibles con este paso (i.e. el método *casuístico*). Las preguntas de autoevaluación para este paso pueden ser las siguientes: ¿Has resuelto algún problema parecido a este? ¿Debes usar todos los datos? ¿Se puede resolver este problema usando gráficas? ¿Hay más de un modo para resolver este problema? ¿Cuál es tu plan para resolver el problema?

c) Ejecutar el plan: este paso trata sobre la demostración de un paso y su correcta ejecución (Alfaro, 2006). Debe haber un énfasis mayor en la habilidad del estudiante para ejecutar el plan establecido en comparación con el manejo de cantidades, ya que hay una tendencia por reducir el proceso de resolución de problemas a los cálculos que llevan a la solución del problema.

d) Examinar la solución obtenida: lo cual consiste en la verificación de los tres pasos anteriores con base en el contraste entre el producto del procedimiento implementado y el dato que faltaba en un principio (i.e. la sustitución de la incógnita de una ecuación por el resultado del procedimiento aplicado), así como utilizar como una herramienta los resultados y el procedimiento de un problema para resolver problemas similares. Las preguntas de autoevaluación en este caso pueden ser las siguientes: ¿El resultado es compatible con el dato que se necesita? ¿existe otra posibilidad de resultado en el problema?

Además de estos cuatro rubros, Pólya (1945, en Sepúlveda et al., 2009) establece que existen dos tipos de problemas: los *rutinarios* y los *no rutinarios*. Los problemas *rutinarios* son aquellos que se resuelven de un modo intuitivo y no requieren de una esquematización o de visualizar un método En cambio, los problemas *no rutinarios* requieren un mayor esfuerzo y tiempo antes de que se vislumbre algún método para darle solución. Cabe destacar que esta clasificación es relativa, puesto que para algún estudiante resolver un problema aparentemente rutinario, puede significar un esfuerzo mayor en comparación con otros alumnos. Finalmente, de acuerdo a Alfaro (2006) las preguntas que acompañan a cada uno de los pasos del plan de Pólya subyacen a dos ideas generales: generalidad y sentido común. La generalidad implica todo tipo de situaciones, desde aquellas que se aprenden o se ejemplifican en un aula hasta las que un alumno puede enfrentar en su vida cotidiana. El sentido común hace referencia a preguntas que puede ser planteadas de un modo simple y que, a su vez, tengan por objetivo desarrollar la habilidad de preguntar acerca de aspectos clave en los alumnos en relación a un problema.

¿De dónde surge el plan de Pólya? Sus planteamientos teóricos y metodológicos se convirtieron en una de las líneas de investigación que mayor progreso y desarrollo han tenido a la educación matemática. Esto ocurrió hasta la década de los 70's cuando empezó a reconocerse el trabajo de Pólya cuando la comunidad de educadores matemáticos ubicó en su propuesta una metodología útil para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas (Sepúlveda et al., 2009).

El origen del plan de Pólya se puede ubicar en conferencias y clases dónde se llevaban a cabo demostraciones de resolución de problemas. A partir de estas clases y conferencias, surgió en Pólya al cuestionarse cómo se origina el razonamiento matemático, así como la inquietud por identificar un método para organizar las ideas relativas a un problema y argumentar por qué un orden dado puede ser adecuado y por qué otro no lo es (Alfaro, 2006). Aunque es evidente la influencia de esta clase de cuestionamientos que se hizo Polya, existe una propuesta relacionada con su plan que pudo haber sido un antecedente importante en la culminación del plan Pólya. Se trata de la tesis de Dewey (1933) acerca de la resolución de problemas y que versa sobre los siguientes cinco pasos: 1. localización de un problema. 2. delimitar el problema en el *pensamiento* del sujeto. 3. tentativas de solución. 4. desarrollo o ensayo de las probables soluciones. 5. validar o rechazar el plan.

¿Qué ventaja tiene el plan de Polya para la resolución de problemas matemáticos? En primer lugar –y en relación a la anterior metodología– la definición de Pólya en relación a la *heurística* representa la primera ventaja en relación al método *casuístico,* ya que la resolución de problemas matemáticos no se basa únicamente en casos concretos y en la resolución que brinda un docente, sino en la comprensión del problema a partir de preguntas que pueden auxiliar a un alumno en relación a la resolución de un problema, aunado a que estas preguntas representan la base de un método planificado que permite al docente subrayar los distintos modos de solución que puede implicar un problema, además de intentar desarrollar en el alumno la habilidad de resolver algún problema.

Además, el plan de Pólya representa una guía para cualquier alumno cuando tienen que resolver problemas matemáticos, debido a que permite hacer una pausa al momento de operar con cantidades. Esta pausa facilita considerar otros elementos no numéricos y que juegan un papel crucial en relación a la resolución de un problema matemático, ya que en ocasiones los estudiantes ignoran dichos elementos para dar paso a un uso indiscriminado de cálculos. Un ejemplo de la importancia de los elementos no numéricos en un problema matemático lo reporta Sabagh (2008, en Díaz, 2013), quien asegura que con alumnos que tienen bajo rendimiento académico en matemáticas, existe una alta probabilidad que distorsionen la información verbal inmersa en las relaciones entre cantidades (i.e. la palabra “más” en el siguiente problema: *Juan compró una caja de galletas 2 pesos más barata que Joaquín, si a Joaquín le costó 24 pesos, ¿cuánto le costó la caja de galleta a Juan?* En este caso los niños proceden a hacer una suma influida por la palabra “más” pasando por alto la verdadera relación lingüística implicada).

Además del estudio anterior que ejemplifica las dificultades del contexto verbal en un problema matemático, existen otros estudios como el realizado por Case (1992, en Ramírez, 1998) que han buscado evaluar la eficacia de estrategias heurísticas basadas en el plan de Polya. En este estudio –realizado con estudiantes mexicanos de nivel básico de educación– se les enseñó una estrategia para resolver problemas de suma y resta basada en cuatro pasos: 1. Leer el problema en voz alta;

2. Observar y seleccionar las palabras importantes; 3. Elaborar un dibujo o diagrama; 4. Escribir la operación y la respuesta completa. Además de estos cuatro pasos, los instructores implementaron estrategias de autoevaluación y la identificación de palabras clave en los problemas de suma y resta. Los resultados indicaron que los estudiantes redujeron significativamente la cantidad de errores que cometían cuando resolvían problemas aritméticos de suma y resta.

Por otra parte, quizá la principal falencia del plan de Pólya surge a partir de la generalidad que implica dicho plan. Cuando un problema es "similar" a otro, se asume que poseen características que los hacen pertenecer a una misma categoría, o que su estructura es la misma pero sólo cambian los datos. ¿Qué pasaría si un alumno tratara de relacionar un problema novedoso con otro previamente aprendido pero con un resultado y procedimiento diametralmente opuestos? Por ejemplo, ante el siguiente problema "*Gerardo compró un frasco de café, el cual costaba 79 pesos y era 13 pesos más barato que el que se compró su amigo Héctor, ¿cuánto le costó el frasco de café a Héctor*?" un problema "similar" podría ser el siguiente: "*Rosario ha coleccionado 45 pulseras fosforescentes, lo cual es 5 veces más que la cantidad de pulseras de Fernanda, ¿cuántas pulseras tiene Fernanda?*". Los problemas son aparentemente similares, pero ni el resultado ni el procedimiento es similar, ya que el primero implica una resta y el segundo una división. ¿Un alumno de nivel básico podría distinguir la diferencia entre estos dos problemas utilizando el plan de Polya? Probablemente sí, aunque el método no brinda una herramienta explícita que indique alguna diferencia en la estructura de estos dos problemas (sobre todo para aquellos alumnos a los cuales, probablemente, les sea complicado encontrar diferencias procedimentales y estructurales entre ambos problemas).

Cuando un problema aprendido con anterioridad es distinto a un problema novedoso, el plan de Pólya se vería limitado en relación a las diferencias que existen entre esos problemas, tal como se ejemplificó con anterioridad. Para poder resolverlos de un modo más sencillo, ¿que se podría adecuar en relación al plan de Polya? Una estrategia heurística como el plan de Pólya, induce o propicia únicamente respuestas más analizadas o atentas en relación a los elementos del problema y a sus respectivos procedimientos. De este modo, es muy probable que sólo afecte la disposición de hacer contacto con el problema, por lo que la mayor parte de la tarea continua recayendo en el alumno.

El plan de Polya permite visualizar la solución a partir de un análisis previo y de la ejecución y verificación de un plan, pero por sí solo no deriva de una clasificación que delimite la aplicación de un procedimiento y que aumente la probabilidad de éxito en la ejecución del plan. Dicho de otro modo, el plan de Pólya no se encarga –como primera prioridad– del *cómo* se resuelve, sino funge como guía para que el alumno pueda recordar cómo le ha hecho pero con base en otros problemas; ¿qué haría falta para que el alumno también relacione tipos de problemas y no sólo los problemas? En los siguientes subtemas se analizarán posibles alternativas al plan de Pólya derivadas de estos dos últimos cuestionamientos, aunque cabe señalar que aquello que hace falta –en relación al cuestionamiento anterior– podría incluir algún método más sofisticado que el método heurístico.

En conclusión, el método o plan de Pólya, se enfoca en que los estudiantes dirijan su atención al análisis de un problema matemático antes de comenzar a hacer cálculos. Pólya indica que el estudio de métodos heurísticos tiene como objetivo obtener puntos comunes en cualquier tipo de problemas, por lo que se buscan las características generales de análisis de un problema que permitan implementar estrategias de resolución (Alfaro, 2006).

El hecho de basarse en cuatro componentes, permite que sea fácil de recordar y permite sustraer un patrón común de los problemas matemáticos, a pesar de las diferencias que éstos presenten entre sí al momento de ser planteados por un docente o un material de apoyo. Pólya enfatizó el interés que debe existir por parte del alumno por resolver un problema. Por otra parte, el docente es concebido como un modelo en la resolución de problemas, aunque a diferencia de la metodología casuística (en la cual el docente es el modelo del razonamiento en la resolución de problemas matemáticos), el docente en el método heurístico es quien plantea las preguntas a los alumnos con la intención de brindarles una herramienta de análisis global de un problema, por lo que ellos podrían utilizarla en un problema novedoso (Alfaro, 2006).

2.3 *El constructivismo y el álgebra temprana.*

Uno de los principales temas de discusión acerca de la enseñanza de las matemáticas radica en la creencia de que el álgebra debe ser enseñada a partir de la educación secundaria. Ante este escenario, existen propuestas teóricas que cuestionan este planteamiento y aseguran que el álgebra puede ser enseñada desde el nivel básico de educación: la primaria. Se trata de la propuesta teórica llamada “álgebra temprana”, sus principales tesis se ubican en la obra de Schliemann, Carraher y Brizuela (2011). Estos autores señalan que, si el álgebra puede concebirse como una generalización aritmética, tanto de números como de cantidades, entonces puede enseñarse la aritmética de un modo más general al vincular esta generalidad que ofrece el álgebra con la particularidad de la aritmética relativa a cantidades.

El “álgebra temprana” es una propuesta curricular que sugiere la integración del álgebra en la enseñanza de las matemáticas desde la educación primaria. Esta propuesta versa sobre los distintos modos de establecer relaciones algebraicas que se relacionan con la enseñanza-aprendizaje de la aritmética. ¿Por qué darle un carácter algebraico a la aritmética? La respuesta radica en que existen modos de establecer relaciones –pertenecientes al ámbito algebraico– y que se pueden vincular con la enseñanza de la aritmética. Esta relación puede favorecer en los alumnos de primaria el desarrollo conceptual de las matemáticas con un nivel de complejidad como el que implica el álgebra (Blanton y Kaput, 2005). Por lo tanto, el álgebra temprana tiene como objetivo unificar bajo la misma lógica la enseñanza de la aritmética con el carácter algebraico de ésta.

Considerando que existen elementos que son similares entre la aritmética y el álgebra, también existen elementos incompatibles con el álgebra en la enseñanza de la aritmética. Por ejemplo, la aritmética se remite a la representación de cantidades y al manejo que se les pueda hacer a éstas (ya sea sumarlas, restarlas, multiplicarlas o dividirlas). El álgebra, si bien es cierto que considera las representaciones aritméticas, incluye la generalidad que aporta representar una cantidad con una letra o *literal*, por lo que para un alumno puede resultar muy elevado el nivel de complejidad basado en esta importante diferencia (i.e., sumar 12 + 15 es distinto para un estudiante cuando tiene que sumar 3y + 8x + 9y). Otra problemática que existe en la transición de la aritmética al álgebra, versa sobre el concepto de igualdad, ya que en aritmética el signo igual se utiliza para representar un resultado y en álgebra para representar una igualdad (i.e., sumar 12 + 15 = 27 es distinto a la equivalencia 3y + 8x + 9y = 13y +5x). Estas diferencias implican que, cuando un alumno de primaria pasa a secundaria, tiene que reaprender los aspectos ejemplificados.

¿Por medio de qué elementos se lleva a la práctica el "álgebra temprana"? ¿Por qué se llama *constructivista*? Se lleva a cabo a través del papel crucial que representan los instructores o docentes que se encuentran al frente de un grupo de estudiantes. Los investigadores y docentes de este enfoque se encargan de brindarles a los estudiantes las herramientas que ellos pueden utilizar y que sería su decisión tomarlos en cuenta para resolver un problema matemático. Es decir, el alumno *construiría* su conocimiento de la resolución de un problema matemático a partir de elementos que le han sido facilitados por el docente o por sus compañeros de clase. Por lo tanto, se trata de un enfoque constructivista ya que, además de considerar que el alumno debe adecuar las herramientas de su entorno en relación a un problema matemático en función de su capacidad y experiencias personales, difiere de propuestas teóricas que otorgan alguna estrategia directa y las herramientas metodológicas y conceptuales que se requieren para resolver un problema matemático.

Con este escenario como base, Carraher et al. (2006) ha intentado diversificar la cantidad de recursos didácticos que den cuenta de cómo los niños se muestran ante una "algebraización" de la aritmética. Alguno de esos recursos didácticos de los cuales los alumnos pueden echar mano son los siguientes: la notación algebraica, misma que puede fungir con un apoyo en el aprendizaje de las matemáticas; el uso de rectas numéricas, con la posibilidad de ubicar espacialmente las cantidades que un estudiante puede utilizar en cualquier contexto –lo que implica el uso de números negativos–; tablas y gráficas de funciones simbólicas, que pueden ser herramientas para que los alumnos puedan entender cómo expresar relaciones funcionales por medio de problemas inmersos en diversos contextos; y concebir una relación aritmética como función, lo que quiere decir que, para cada problema, existe una relación entre ambas partes del mismo (tal como sucede con una ecuación, la cual implica una igualdad entre los elementos de ambos lados de la ecuación) y que quizá en esa relación se puede facilitar resolver un problema matemático (Carraher et al., 2006).

Los diversos contextos que implican los problemas matemáticos son fundamentales en la tesis de estos autores, ya que para ellos el “álgebra temprana” debe ser implementada con base en la enseñanza de situaciones significativas para los alumnos, con la intención de hacer de su comprensión lógica y matemática la base su propia comprensión.

El trabajo de Carraher y sus colaboradores deriva de una disyuntiva inicial entre aquellas propuestas teóricas que conciben, por un lado, al álgebra como una rama de las matemáticas más sofisticada que la aritmética que debe ser enseñada conforme las *estructuras mentales* de los alumnos lo permitan, lo que quiere decir que los alumnos, cuando tienen problemas para entender el álgebra, se debe a una insuficiente capacidad cognitiva. En otra vertiente, están aquellas propuestas que aseguran que la aritmética tiene una relación, básica pero latente, con el álgebra –lo que no significa que ambas ramas de las matemáticas sean iguales, ya que esta propuesta subraya que la principal diferencia entre aritmética y el álgebra consiste en que la primera implica operaciones con números y la segunda contempla la generalización de números, variables y funciones– por lo que puede ser enseñada desde nivel básico. Derivado de este última propuesta, la “pre-algebra” surge como una propuesta que aminora el paso de la aritmética al álgebra a modo de recurso propedéutico, es decir, crea un puente entre la rígida separación entre estas ramas que se plantea en la mayor parte de los planes de estudio en el mundo (Carraher, et al., 2006).

¿Cuáles son los indicios de que el “álgebra temprana” facilita la comprensión de un problema matemático y, con esto, integrarse de un modo más efectivo a la aritmética? Carraher et al. (2011) describe ejemplos en su investigación, en donde a niños de tercer grado de educación primaria en EE.UU. les pidieron resolver problemas matemáticos con cantidades explícitas e incógnitas en ambos lados de una “ecuación”. Por ejemplo, en el siguiente problema matemático: “*Miguel y Roberto tienen cada uno un acuario con peces. Miguel tiene 8 peces azules y algunos peces de color rojo. Roberto sólo tiene peces rojos; tiene tres veces más peces rojos que Miguel. En total, Miguel tiene el mismo número de peces que Roberto. ¿Cuántos peces rojos tiene Miguel?”* después de una serie de rastreos, los alumnos pueden llegar a comprender que cuando se realizan operaciones equivalentes en ambos lados de una ecuación, la igualdad se mantiene. Este desempeño brinda indicios de un entendimiento adecuado por parte de los alumnos en relación a ideas básicas del álgebra, sin importar que los estudiantes vayan en tercer grado de primaria.

Para implementar la notación “algebraica” en un problema matemático, en el problema siguiente: “*Si Raúl le debe a Susana 3 pesos, ¿cómo se puede representar la cantidad de dinero que tiene ahora Susana?”,* los alumnos, de acuerdo a la pregunta, son exhortados a identificar algún modo de resolver el problema, por lo que no requieren saber qué implica una notación algebraica y que les puede ayudar a resolver el problema aritmético, simplemente tendrían que echar mano –si así lo deciden– de un modo de representación que les puede ayudar a ordenar su pensamiento (si se parece a una notación algebraica, es una coincidencia operativa). También podrían ubicar la cantidad de dinero de Susana en una recta numérica para facilitar su “ubicación” en relación a otras cantidades. Como se desconoce cuánto dinero tiene Susana, se puede asumir que ella tiene “n” cantidad de dinero y que, además, ella tiene -3 pesos, lo cual deriva de la deuda de Raúl. Por lo tanto, usando notación “algebraica”, la cantidad de dinero de Susana puede ser representada así: “n – 3”.

¿Coincide esta representación con una notación formal algebraica? Solo en su operatividad o su función, pero la notación “algebraica” deriva de un intento por parte del alumno por organizar la información del problema, mientras que la notación algebraica formal subyace a reglas algebraicas establecidas hace cientos de años y quizá de otros intentos por organizar la información. Por lo tanto, como indica el autor, “la notación algebraica (en este caso, notación “algebraica”) los ayudó a pasar de resultados de cálculos específicos a generalizaciones acerca de relaciones entre dos series de números” (p.152).

¿Qué implica la propuesta del “álgebra temprana”? Implica una serie de planteamientos que intentan vincular la aritmética y el álgebra desde nivel básico de educación. Además, sugiere que los alumnos *construyen* su propio conocimiento en relación a la aritmética a partir de herramientas, de las que destacan la notación algebraica, gráficas, pictogramas, tablas, y rectas numéricas. Además, si bien es cierto que las investigaciones de Carraher representan nociones de un campo en el que aún quedan aspectos por investigar (sobre todo aquellos que intentan descubrir el *cómo piensan* los alumnos), son también el referente de una probable línea de investigación que puede optimizarse en función de sus resultados y de la confirmación de los mismos.

Tomando en cuenta que el “álgebra temprana representa indicios y nociones de una línea de investigación, en contraste, la instrucción explícita contempla una metodología distinta que versa sobre herramientas que un instructor puede brindar a un grupo de alumnos, en lugar de esperar a que los alumnos desarrollen estas herramientas por sí solos.

¿La instrucción explícita impide a los alumnos comprender un modo más eficaz al momento de resolver problemas aritméticos verbales? ¿El hecho de que, cuando está presente la instrucción explícita, las herramientas que se les brinda y que no eligen ellos, impide que puedan emplearlas y con ello comprender la implicación de un problema aritmético verbal? ¿Qué elementos brinda las metodologías basadas en una instrucción explícita y en un entrenamiento aparentemente mecánico?

2.4. *Modelos de la enseñanza basada en esquemas. Principales precursores.*

2.4.1. *Las propuestas de Vergnaud y Jitendra*

Gérard Vergnaud ha dirigido su trabajo en relación a la enseñanza de las matemáticas a raíz de la teoría de los campos conceptuales. Vergnaud indica en relación a esta teoría, que el conocimiento se puede organizar en campos conceptuales y que las personas pueden tener el dominio de dichos campos durante una extensa cantidad de tiempo en función a su experiencia, madurez y aprendizaje. Este mismo autor define al *campo conceptual* como un conjunto informal y heterogéneo de problemas, situaciones, conceptos, relaciones, estructuras, contenidos y operaciones del pensamiento, conectados unos a otros y, probablemente, entrelazados durante el proceso de adquisición (Vergnaud, 1982, en Moreira, 2002). El dominio progresivo de un campo conceptual requiere entonces de un prolongado lapso de tiempo para las personas (en el caso de las matemáticas, para los alumnos), por lo que esta teoría puede sugerir que los alumnos de matemáticas pueden organizar los problemas matemáticos. Esta organización puede realizarse a través de un esquema, el cual sería la representación de un campo conceptual. Por ejemplo, si un estudiante quisiera aprender sumas de 3, 4 y 5 unidades, podría hacerlo de un modo general –es decir, todos los tipos de sumas sin un orden establecido– o usando un esquema, con el cual podría intentar aprender primero las sumas de 3 unidades, luego las de 4 y al final las de 5. ¿En qué consistiría ese esquema? ¿Facilitaría el aprendizaje de las sumas? Si es afirmativa la respuesta a estos cuestionamientos, los esquemas facilitarían ordenar el conocimiento de un estudiante de matemáticas.

¿Qué tiene que ver la teoría de los esquemas con la psicología y, principalmente, con la enseñanza de las matemáticas? En cuanto a la vinculación con el campo de la psicología este autor indica lo siguiente: “se trata de una teoría psicológica del proceso de conceptualización de la vida cotidiana, que permite localizar y estudiar continuidades y rupturas entre conocimientos desde el punto de vista de su contenido conceptual” (Vergnaud, 1990, p.133, en Moreira, 2002). Además, define *concepto* a partir de tres rubros: 1) un conjunto de situaciones que constituyen el referente del concepto; 2) conjunto de invariantes operatorios (teoremas y conceptos-en-acción) que dan el significado del concepto; 3) conjunto de representaciones simbólicas que componen su significante (Moreira, 2002). Finalmente, Vergnaud considera que los esquemas necesariamente se refieren a situaciones, a tal punto que debería hablarse de interacción esquema-situación en vez de interacción sujeto-objeto.

Para poder aplicar esquemas en la vida real a partir de situaciones significativas, el alumno tendría que dominar ciertas reglas operativas a partir de conceptos específicos. Por ejemplo, si cierta situación como: “Pedro tiene 30 pesos y se compró una bebida de 17 pesos, ¿cuánto dinero tiene ahora?” implica la necesidad de saber cuánto influye en una cantidad inicial (30 pesos) una magnitud de cambio (17 pesos). Esa persona tendría que saber restar para saber cuánto es la cantidad final o producto de su situación o problema (13 pesos).

Al propósito de las matemáticas, Vergnaud puso énfasis en las estructuras aditivas y las estructuras multiplicativas, con la intención de estudiar las dificultades de los alumnos en esta área y a la luz de una tesis que sugiere que las dificultades de los estudiantes no son las mismas en un campo conceptual que en otro. Para dar cuenta de estas estructuras aditivas, Vergnaud (1991) clasifica los problemas aditivos en seis categorías: 1) <u>Dos medidas se unen para dar una nueva medida</u> (i.e., “En una casa hay 3 mujeres y 6 hombres, ¿Cuántas personas hay en total?”); 2) <u>una transformación opera sobre una suma medida para dar una nueva medida</u> (i.e., “Tengo 45 pesos y aposté en la ‘pirinola’ y gané otros 13 pesos, ¿Cuántos pesos tengo en total?”); 3) <u>una relación une dos medidas</u> (i.e., “Juana tiene 14 pares de calcetines y su abuelita tiene 19 pares más, ¿Cuántos pares de calcetines tiene la abuelita de Juana?”); 4) <u>dos transformaciones operan para dar una nueva transformación</u> (i.e., “Heriberto juega a la lotería. En el primer juego ganó 69 pesos y en el segundo ganó 45 pesos, ¿Cuánto dinero tiene ahora?”); 5) <u>una transformación opera sobre un estado relativo (relación) para dar un estado relativo</u> (i.e., “Bárbara le pagó a la tienda ‘Orestes’ 560 pesos, pero aún les debe 125 pesos, ¿Cuánto dinero le debía Bárbara a la tienda ‘Orestes’ en un principio?”; 6) <u>Dos</u>

estados relativos se relacionan para dar un nuevo estado relativo (i.e., “Yamile le compró a Fernanda 380 gramos de nueces de la india y a Tadeo 560 gramos, ¿Cuántos gramos de nuez de la india compró Yamile en total?”).

Esta extensa clasificación representa una ejemplificación de los alcances de la teoría de los esquemas. Esta teoría es relevante en el campo de las matemáticas, principalmente, por su propuesta relativa a la esquematización de situaciones cotidianas y su relación con la enseñanza de materias como matemáticas. Si bien el trabajo de Vergnaud no se limita al campo de las matemáticas, brinda un referente conceptual para propuestas que sí se han especializado en la enseñanza de las matemáticas para estudiantes que presentan dificultades en su aprendizaje.

Una propuesta que hace uso de clasificaciones de tipos de problemas matemáticos es la que subyace a las investigaciones de Asha Jitendra en educación primaria de los EE.UU. Al igual que Vergnaud, esta autora hace uso de una taxonomía para clasificar los tipos de problemas matemáticos. Por lo tanto, tanto Vergnaud como Jitendra desarrollan en sus investigaciones esquemas que puedan facilitar la resolución de problemas matemáticos. Antes de dar cuenta de la propuesta teórica y de los hallazgos de las investigaciones de Asha Jitendra, cabe mencionar la implicación del término *esquema* en la resolución de problemas matemáticos. Un *esquema*, tal como lo indica Gick y Holyoak (1983, en Fuchs, Zumeta, Finelli, Powell, Seethaler, Hamlett y Fuchs, 2010), hace referencia a una descripción generalizada de tipos de problemas verbales que requieren un método de solución similar (i.e. la clasificación de Vergnaud previamente descrita).

Jitendra ha utilizado como eje rector de sus investigaciones, en relación a la enseñanza de las matemáticas, la Instrucción Basada en Esquemas (SBI, por sus siglas en inglés) para alumnos con o sin problemas de aprendizaje en esta materia. El SBI versa sobre la identificación de los factores críticos de un problema aritmético verbal, lo cual implica reconocer un esquema o estructura subyacente a este que permita organizar la información que contiene un problema verbal. En otras palabras, el SBI implica leer el problema matemático (el cual es planteado verbalmente) y seleccionar un esquema que, además de clasificar el problema, facilite la resolución del mismo. A través de estos esquemas, se puede organizar la información del problema matemático, con lo que un alumno puede ser instruido en la identificación de la información crucial que le facilite la resolución del problema al realizar los cálculos requeridos. ¿En qué tipos de problemas se basan estos esquemas? Se basan en tres tipos de problemas: *cambio, comparación* y *combinación.*

De acuerdo a Aguilar y Martínez (1998, en Díaz, 2013), los problemas de *cambio* constan de tres rubros: “cantidad inicial” (CI), “magnitud de cambio” (MC) y “resultado” (R). La magnitud de cambio sugiere un efecto transformador en la cantidad inicial, lo que da pie a un resultado final (i.e. “Gildardo tiene 13 pesos ahorrados (cantidad inicial) y su mamá le regaló 17 pesos más (magnitud de cambio), ¿Cuánto dinero tiene ahorrado ahora Gildardo (resultado)?”). Al momento de resolver el problema, pueden desconocerse alguna de las tres cantidades, por lo que la instrucción permite a los alumnos identificar qué dato de los tres es el que falta. Si la cantidad desconocida corresponde a la CI, el esquema sería “¿? + MC = R”; si la incógnita corresponder a la MC, el esquema sería “CI + ¿? = R”; y si la incógnita está en el R, el esquema sería “CI + MC = ¿?”. Los problemas de *comparación* implican los rubros de “conjunto referente” (C_r), “conjunto comparado” (C_c) y “resultado” (R) (i.e. “Sandra ha tenido 14 novios (C_r) y su amiga Casandra ha tenido 19 novios (C_c), ¿Cuántos novios más ha tenido Casandra en comparación con Sandra (R)?”). El esquema varía en función de la incógnita tal como en los problemas de *cambio.* Finalmente, los problemas de *combinación* constan de “parte 1 (P_1)”, “parte 2 (P_2)” y “parte total (P_T)” (i.e. “Maite tiene en su zotehuela un bote de basura *orgánica* y otro de *inorgánica*. La basura *orgánica* pesa 2560 gramos y la basura *inorgánica* pesa 3450 gramos, ¿Cuántos gramos de basura tiene Margara en total?”). El esquema varía en función de la incógnita tal como ocurre en los dos tipos de problema anterior.

En una de sus primeras investigaciones, Jitendra y Hoff (1996) analizaron, en tres alumnos de cuarto grado de primaria (en EE.UU.), el efecto del SBI en la resolución de problemas verbales de suma, aunado a la clasificación de dichos problemas en diagramas esquemáticos, los cuales hacían alusión a distintos tipos de problemas (i.e. problemas de *cambio, comparación* y *combinación*). Los resultados de esta investigación, si bien es cierto derivan de un estudio piloto, indicaron ciertos indicios de un mejor desempeño de estos estudiantes en la resolución de problemas en relación al grupo control, por lo que a partir de este escenario, la autora enfatizó su investigación en los alcances del SBI para problemas novedosos y para el análisis semántico de los problemas aritméticos verbales. Cabe señalar que el análisis semántico versa sobre la relación que existe entre la información verbal más importante para poder resolver el problema y el tipo de problema y los datos del problema (Jitendra, DiPipi y Perron-Jones, 2002).

Posteriormente, esta autora dirigió su investigación hacia los alumnos de tercer y cuarto año de educación primaria, los cuales presentaban problemas de aprendizaje en las matemáticas (Jitendra, Griffin, McGoey, Gardill, Bath, y Riley, 1998) y en los cuales se implementó el SBI. Esta estrategia se enfocó en el análisis semántico de los problemas aritméticos verbales, en los cuales los estudiantes hacen distinciones entre tipos de problemas (*cambio, comparación y combinación*) y los clasifican con el uso de diagramas. Además de estos diagramas, a los estudiantes se les brindó la posibilidad de utilizar enunciados matemáticos en problemas aritméticos verbales como los siguientes: *si el total es desconocido, entonces suma* o *si el total es conocido, entonces resta* (Jitendra, 2002, en Xin, 2012). Los resultados sugirieron que el SBI mejoraba el desempeño de los alumnos en este tipo de problemas en comparación con el grupo control.

¿Qué implica la investigación que lidera Asha Jitendra? Implica evidencia de la efectividad del uso de esquemas en la resolución de problemas aritméticos verbales. Además, sugiere que es necesario un análisis semántico de los problemas aritméticos. Profundizar en este análisis puede llevarse a cabo tomando en cuenta la instrucción que reciben los estudiantes en relación al uso de esquemas, ya que Jitendra enfatiza más en la información de esquemas, diagramas e imágenes que en la instrucción explícita. Derivado de esta idea, surge el siguiente cuestionamiento: ¿Qué ventaja representa la instrucción explícita en relación a una instrucción implícita? Si la instrucción fuera implícita, se puede esperar que los estudiantes sean alentados por el docente o instructor, ya sea para decidirse a usar una estrategia para la resolución de un problema matemático o para decidir si son capaces de hacerlo. Si la instrucción es explícita, el instructor o docente brindaría a los estudiantes una estrategia adecuada, la pondría a prueba y demostraría su efectividad de acuerdo a sus alcances.

Sin embargo, si el análisis semántico se lleva a cabo a la par de una instrucción explícita, éste tendría que ampliarse, a tal grado de involucrar otros rubros que pueden, por un lado, facilitar aún más la resolución de problemas aritméticos verbales (como brindar una estrategia a los estudiantes de modo explícito, en vez de esperar a que ellos elijan o descubran la más adecuada de acuerdo a su experiencia) y, por otro lado, permitir que los estudiantes transfieran con mayor facilidad lo aprendido en el aula a un contexto que les sea significativo.

En relación a la instrucción explícita y al análisis semántico de los problemas aritméticos verbales, a continuación se describen las implicaciones de la propuesta de Lynn Fuchs llamada “Instrucción ampliada basada en esquemas” y en qué difiere de la propuesta de Asha Jitendra.

2.4.2. *Fuchs: la instrucción ampliada basada en esquemas (SBI-T).*

La propuesta de Lynn Fuchs se basa, al igual que el de Asha Jitendra, en la resolución de problemas aritméticos verbales en nivel primaria. Sin embargo, el trabajo de Fuchs difiere al de Jitendra en varios aspectos. Primeramente, en la metodología de Fuchs a los participantes se les enseña a reconocer las nuevas características de los problemas novedosos (i.e. formato distinto, pregunta adicional, información irrelevante o información de tablas, imágenes o gráficos) y la relación que guardan con los problemas aprendidos previamente, con lo que los alumnos pueden tipificar en una misma categoría los problemas previamente aprendidos y los problemas novedosos, elevando la probabilidad de transferencia (Powell, 2011). He ahí la *ampliación* que sugiere la propuesta de Fuchs en relación a la de Jitendra.

La transferencia, si bien en cierto que es un punto crucial en la tesis del trabajo de Fuchs (mas no así en el trabajo de Asha Jitendra), no surgió como principal preocupación en un principio. Antes de describir el proceso que antecede a la transferencia como principal objetivo de las investigaciones de Fuchs, es conveniente destacar que la taxonomía que utilizaba Jitendra era muy similar a la clasificación de Fuchs; sin embargo, a lo largo de su investigación fue modificando esta taxonomía. En primera instancia, la taxonomía de Jitendra (*cambio, comparación* y *combinación*), era similar a la de Fuchs (*total, diferencia* y *cambio*); sin embargo, ésta cambió y añadió a la taxonomía problemas de tipo *lista de compras, mitades, bolsa de compras* y *pictográficos* (Powell, 2011).

¿Por qué cambió la taxonomía empleada por Fuchs a pesar de las evidencias que favorecían la clasificación de Jitendra? ¿En qué se basa esta optimización? Las investigaciones de Lynn Fuchs se enfocaron, en primera instancia, en el análisis semántico y la clasificación de problemas matemáticos. Además, la investigación se configuró a partir de la preocupación de la autora por identificar y analizar principios de prevención de dificultades con las matemáticas e intervención en esta área, con el fin de integrar el contexto en el cual se lleva a cabo la instrucción explícita en la resolución de problemas matemáticos. Cabe destacar que la instrucción explícita representaba una temática no priorizada por Jitendra y que Fuchs se encargó de evaluar. De acuerdo a los resultados, la instrucción explícita representó una variable que favoreció a los estudiantes en la resolución de problemas aritméticos verbales. Además, implica, de acuerdo a esta investigación, una correlación con los siguientes rubros: la instrucción explícita y la toma de decisión subsecuente de los alumnos (Fuchs y Fuchs, 2002).

Una vez establecida esta correlación con dichos rubros, habría que evaluar los efectos de la instrucción explícita en función a la correlación descrita anteriormente, aunado a un elemento en el que no parecía haber un efecto significativo del SBI y que tiene que ver con la capacidad de generalización de los alumnos relativa a problemas aprendidos en el aula y problema novedosos y cotidianos: la transferencia.

Por lo tanto, Fuchs, Prentice, Burch, Hamlett, Owen, Hosp, et al. (2003) realizaron un estudio con estudiantes de tercer grado de primaria para evaluar el efecto de la instrucción explícita en la resolución de problemas aritméticos verbales. Para evaluar dicho efecto, dividieron a los alumnos en tres grupos experimentales: el primero estuvo bajo un arreglo experimental que versó sobre instrucción en solución general de problemas; el segundo recibió una instrucción parcial y con instrucción en trasferencia; y en el tercero se implementó un entrenamiento con instrucción completa en solución de problemas verbales, aunado a instrucción en transferencia. Los resultados del estudio indicaron que tanto la instrucción completa en la solución de problemas y la instrucción de transferencia, representaron una mayor mejora en el desempeño de los alumnos en la resolución de problemas aritméticos verbales en comparación con los otros dos grupos. Por lo tanto, con estos resultados, el SBI demostraba su eficacia en su configuración y brindaba indicios de optimización en la instrucción explícita y en la instrucción de transferencia.

Estos indicios se evaluaron en un estudio similar al del 2003 pero realizado un año después por Fuchs, Fuchs, Prentice, Hamlett, Finelli y Courey (2004), el cual demostró la ventaja que representa el SBI-T con un especial enfoque en la transferencia de los esquemas al obtener como resultado una mejora en el desempeño de los estudiantes en la resolución de problemas basándose en un entrenamiento de instrucción explícita en funciones de transferencia (formato, diferente, tipos de problema combinados, diferente vocabulario, información irrelevante, diferente pregunta y combinación de funciones de transferencia). Con este panorama, el SBI se convirtió, para Fuchs, en un elemento que podría mejorarse en el campo tanto de la transferencia como de la resolución de problemas aritméticos verbales en los rubros de la instrucción explícita y de la instrucción de transferencia, convirtiendo así el SBI a SBI-T, es decir, a Instrucción Basada en Esquemas Ampliados.

Fuchs, Fuchs, Finelli, Courey y Hamlett (2004) se propusieron evaluar el SBI-T en instrucción basada en transferencia y en situaciones cotidianas (este último aspecto representa la principal diferencia entre este estudio y el descrito anteriormente). La transferencia se evaluó a través de 4 niveles: 1) problemas similares entre sí; 2) problemas con narración distinta, distinto formato y pregunta; 3) dos problemas, que incluyen variaciones en los rubros de los dos niveles anteriores; 4) dos problemas de la vida cotidiana.

Cabe destacar que en este estudio se diseñó un folleto comercial para que los estudiantes seleccionaran la información que requerían para resolver los problemas aritméticos verbales. Este folleto implicaba una relación con problemáticas cotidianas, ya que los precios de los productos son parte de situaciones a las cuales se enfrentaría en una tienda de autoservicio cualquier alumno, por lo que representan el vínculo entre la instrucción que reciben y su vida cotidiana. Sus resultados indicaron un mejor desempeño de los alumnos, con o sin dificultades para aprender matemáticas, que fueron evaluados en el grupo de SBI-T en comparación con los que no; sin embargo, también surgía con ellos un punto frágil en el tema de la *transferencia*, dado que los alumnos tenían precisamente dificultades en esta área y no podían resolver problemas novedosos que tuvieran que ver con sus actividades cotidianas.

Como la *transferencia* se volvió un rubro en el que los alumnos podrían tener dificultades, este autor consideró que este tema era un reto que implicaba que los estudiantes pudieran resolver problemas con los cuales no han interactuado antes. Por lo tanto, Fuchs y Fuchs (2005) evaluaron la efectividad del SBI-T, poniendo especial énfasis, una vez más, en la instrucción explícita y su relación con problemas novedosos relativos a la *transferencia* de lo aprendido en el aula a la vida cotidiana. En este trabajo, se confirmó la correlación entre la instrucción explícita y la transferencia de los alumnos. En su siguiente investigación, Fuchs, Fuchs, Finello, Courey, Hamlett, Sones, et al. (2006) confirmaron sus resultados obtenidos relativos a la instrucción explícita y a la transferencia en el año anterior y aseguraron que la transferencia era un campo en el cual no se habían hecho investigaciones recientes en matemáticas. Como parte de la ampliación de los efectos del SBI-T en el tema de la transferencia, la investigación se enfocó en clasificar los problemas en cuatro tipos de problemas de la vida cotidiana y que a la postre significarían la adecuación de nuevas situaciones de problemas no tomadas en cuenta por Jitendra anunciada al principio: *listas de compras, problemas de mitades, bolsa de compras (multiplicación) y problemas pictográficos*. Con los resultados obtenidos, los autores indicaron que cuando se combina el SBI-T con problemas de la vida real, los estudiantes mejoran en su desempeño en la resolución de problemas aritméticos verbales.

En los siguientes años, las investigaciones de Fuchs, Seethaler, Powell, Fuchs, Hamlett y Fletcher (2008) se han enfocado en evaluar aquellos factores correspondientes a los problemas aritméticos verbales, los cuales pueden facilitar la transferencia. Uno de esos factores contempla el uso de una ecuación algebraica como esquema que pudiera servir como referente en el entrenamiento de los alumnos (i.e. p1 + p2 = T). El uso de una ecuación algebraica derivó, en primera instancia, de la estrategia inmersa en los estudios de los autores mencionados, misma que versaba sobre la representación de esquemas a partir de letras, con el fin de facilitar la representación de los esquemas que implica el SBI-T, es decir, los tipos de problemas (*total, cambio* y *diferencia*). Además, de acuerdo la investigación de Fuchs et al. (2010), surgió la siguiente tesis en relación al álgebra: la estructura que subyace a un problema aritmético verbal es una abstracción de ese problema, lo cual generaliza ese problema y lo categoriza en un tipo de problema dado y se particulariza de acuerdo al caso en concreto que aborda dicho problema. Por lo tanto, generalizar la estructura de un problema es equivalente a lo que el álgebra hace con las relaciones cuantitativas implicadas en matemáticas. En otras palabras, usar una ecuación algebraica surge como respuesta a la necesidad de organizar la información que subyace a un problema aritmético verbal y que, a través de una ecuación, se eligiera el esquema más adecuado para cada tipo de problema.

Otro factor que añadieron al SBI-T fue la implementación de estrategias genéricas intermedias –como las que se utilizan en la metodología *heurística*– que servían de auxiliares para identificar el tipo de problema (i.e. LEN: Lee, entiende el problema y nómbralo). Este paso heurístico dentro de la propuesta de Fuchs, surgió a partir de las posibles optimizaciones del SBI-T en relación a la transferencia. Específicamente, la dificultad de los alumnos por resolver problemas de la vida cotidiana, pudo haber orillado a los autores hacia una alternativa que brindara a los estudiantes un paso intermedio que permitiera organizar y analizar la información que obtenían del problema –al momento de resolver un problema aritmético verbal– y con ello aumentar la probabilidad de transferencia.

Fuchs y Jitendra son los autores más preponderantes que fungen como antecedente del Modelo Conceptual Basado en Resolución de Problemas (COMPS, por sus siglas en inglés), el cual se analizará a continuación.

2.4.3. *Xin: Modelo conceptual basado en solución de problemas (COMPS).*

Este modelo conceptual deriva de la propuesta de Xin (2012) que versa sobre la enseñanza relativa a la resolución de problemas matemáticos, con un énfasis especial en la relación que existe entre la aritmética y el álgebra. Su propuesta tiene como objetivo identificar, con base en instrucción explícita, una estructura subyacente a problemas aritméticos verbales de suma, resta, multiplicación y división. Esta estructura ayuda, por un lado, a los alumnos a clasificar los problemas a los cuales pueden enfrentarse basándose en preguntas muy específicas de auto-análisis – en alguna medida similares a las empleadas en el plan de Pólya–; por otro lado, estas preguntas están vinculadas con la estructura de cada problema, por lo que el empleo de esta estructura facilita separar la información crítica o relevante de un problema aritmético de la información irrelevante. Este esquema, además, funge como una ecuación y facilita a los alumnos la resolución de un problema aritmético verbal. Dicho modelo incluye una taxonomía que se implementa a través de dos fases: 1) representación de la estructura del problema y 2) resolución de problemas.

Representación de la estructura del problema: Esta fase contempla los problemas aritméticos que no tienen datos desconocidos. La implementación de esta tarea tiene como objetivo ayudar a los estudiantes a entender la estructura subyacente del problema y las relaciones matemáticas entre las cantidades implicadas. Además de los enunciados, la autora incluye en el entrenamiento el uso del Modelo de Barras de Singapur. Este modelo consiste en representar gráficamente el esquema parte-parte-todo a través de dos barras, de tal modo que cada barra representa una de las partes que hacen el *todo* de un enunciado o cantidades (i.e., en la suma 7 + 5 = 12, hay una barra que representa el 7, otra que representa el 5 y, al unirlas, hacen el *todo* formando el número 12), con lo que los estudiantes pueden visualizar de un modo simple que una cantidad total es compuesta por sus respectivas partes.

Con estos elementos, los estudiantes pueden identificar la estructura del problema y mapear la información que les requiere el esquema correspondiente al tipo de problema. Este requerimiento se basa en las preguntas de auto-análisis que subyacen a la estrategia llamada *Word-Problem Story Grammar*. El *Word-Problem Story Grammar* implica, de acuerdo a Rand (1984, en Xin, 2012) una serie de expectativas del conocimiento acerca de la estructura interna de una narración que facilita la comprensión de la misma y, además, brinda a los estudiantes un elemento que organiza la información de un problema aritmético verbal. Por lo tanto, Xin, Wiles y Lin (2008) definen este concepto como preguntas de auto-análisis que facilitan una significativa y adecuada representación de información, dentro del esquema de una ecuación.

Finalmente, como en una primera fase, los enunciados no implican cantidades desconocidas, los alumnos pueden identificar el *balance* que implica la ecuación y con ello reforzar el concepto de *igualdad* que conlleva cualquier ecuación y, particularmente, la función que representa en este sentido el signo *igual*. En otras palabras, frente a una narración que expresa relaciones cuantitativas, el estudiante sólo debe identificar por medio una barra dividida en dos secciones, que dato corresponde a una parte, cuál a la otra y cómo ambas forman el total; de esta manera resulta muy fácil la demostración de igualdad en la relación “Parte + Parte = Todo”.

Resolución de problemas: Esta fase consiste en la representación de problemas con incógnitas, las cuales pueden ser representadas mediante alguna letra, además del auxiliar que representa el esquema de cada tipo de problema. Aunado a este aspecto, los estudiantes pueden auxiliarse del DOTS (Por sus siglas en inglés y que la traducción es: Detectar, organizar, transformar y resolver), la cual es una herramienta mnemotécnica diseñada para auxiliar a los estudiantes en la resolución del problema aritmético verbal.

Las dos fases anteriores se contextualizan dentro de la taxonomía que plantea esta autora. En un primer momento plantea las relaciones ***aditivas*-*sustractivas*** las cuales subdivide en relaciones ***Parte-Parte-Todo; y Adición-Comparación***. Dentro de las primeras abarca tres variantes: a)- Problemas de *combinación*; b)- Problemas de *Cambio-ganancia* y c)- *Cambio-pérdida*. Y en cuanto a las de *Adición-Comparación* las desglosa en: a)- *Comparación-más*; y b)- *Comparación-menos*. En cuanto a las relaciones ***Multiplicativas***, también plantea una primera clasificación en dos categorías: relaciones ***Grupos-Igual***; y relaciones ***Multiplica-Compara.*** A su vez cada uno de estos dos grupos engloba tres tipos de problemas específicos (**Ver Anexo 1**)

Lo que se pretende al trabajar con esta taxonomía es que el alumno identifique la estructura del problema: ya sean la de relaciones de adición sustracción (esquema: Parte-Parte-Todo) o las de tipo multiplicativo (esquema Factor-Factor-Producto). Tomando en cuenta estas estructuras, se le brinda al estudiante de una estrategia o marco de referencia para identificar y ordenar las relaciones cuantitativas expresadas en el problema. Las subdivisiones y desgloses que se presentan a partir de esta primera gran clasificación (**ver Anexo 1**) cumplen la función de guía para el instructor a fin de exponer al alumno o diferentes formatos expositivos y diferentes ubicaciones de la incógnita, pero mostrando que a pesar de estos cambios la estructura de las relaciones permanece siendo la misma.

En los problemas de *Cantidad combinada* que pertenecen a la categoría Parte-Parte-Todo, una de las partes es lo que se desconoce (“Entre Javier y Ana tienen juntos 92 libros; si Ana tiene 35, ¿cuántos tendrá Javier?), o el Todo (Javier tiene 57 libros y Ana 35; ¿Cuántos tienen entre los dos?).

En los de *Cambio-ganancia* también se procede mediante el esquema estructural *Parte-Parte-Todo* y existe un cambio favorable a uno de los personajes. (“Celia tenía una buena cantidad de estampas; pero su hermano le regaló otras 40; ahora tiene 67. ¿Cuántas estampas tenía Celia al principio?). Se puede desconocer la cantidad más pequeña o la mayor. Los problemas *Cambio-pérdida* implica el mismo proceder de los problemas anteriores, excepto que existe un cambio desfavorable a uno de los personajes (“Bruno solía tener cupones para el cine, pero se ha gastado 18 y ahora le quedan 32. ¿Cuántos cupones tenía en un principio?”).

En cuanto a los problemas ***Adición-Comparación***, se ponderan tanto la cantidad más pequeña como la cantidad más grande. Esta ponderación se lleva a cabo a través de la relación de las cantidades mencionadas con la diferencia que existe entre ellas. Por lo tanto, en este tipo de problemas, las cantidades que deben ser identificadas son: la cantidad más grande; la cantidad más pequeña; y la cantidad que implica la diferencia entre la cantidad más grande y la más pequeña. De estos problemas se derivan dos desgloses: *compara más* y *compara menos.* Los problemas del primer desglose están constituidos por una cantidad de diferencia favorable en uno de los personajes del problema, es decir, la diferencia implica una suma (Gildardo compró boletos para un concierto el viernes, le costaron 690 pesos. El sábado los boletos elevaron su precio, ya que costaban 785 pesos. ¿En cuánto dinero se elevó el precio de los boletos del concierto?). La diferencia se convierte en desfavorable en el caso del segundo desglose, por lo que implica una resta (Jenny colecciona fotos de sus artistas favoritos; tiene 57. Sin embargo, tiene en su colección 24 fotos menos que las que tiene Marian. ¿Cuántas fotos tiene en su colección Marian?

Los otros dos tipos de problemas, *grupos iguales* y de *multiplicación-comparación,* la estructura que los vincula como problemas de multiplicación y división se llama ***Factor-Factor-Producto***. Esta estructura versa sobre la identificación de dos factores y el producto o resultado. Estos dos tipos de problemas se diferencian del siguiente modo: En un problema tipo *grupos iguales* (i.e. “Kevin tiene 5 cajas de bombones, cada caja tiene 16 bombones, ¿cuantos bombones tiene en total?”) el primer factor se representa como la *unidad de medida* (5 cajas), el segundo factor se representa como *número de unidades* (16 bombones) y el resultado como el *producto* (80 bombones). En un problema tipo *multiplicación-comparación* (i.e. “Ernesto ha conseguido 7 reconocimientos por buen promedio en toda su vida, pero su hermana Aline ha conseguido el triple, es decir, tres veces más esa cantidad, ¿cuántos reconocimientos ha recibido Aline?”) el primer factor se representa como la *unidad* (7 reconocimientos), el segundo factor como *multiplicador* (3 veces más) y el resultado como *producto* (21 reconocimientos).

Finalmente, la fase de *resolución de problemas* implica dos unidades más, una consiste en *problemas complejos* y la otra sobre *problemas mezclados*. Los cuales se basan en la estructura **factor-factor-producto** y a su vez en las subcategorías Grupos Iguales y Multiplicación-Comparación. Este tipo de problemas también contienen información irrelevante y se pueden emplear en ellos pictogramas y números decimales (i.e., Valeria tiene 6 años de edad y necesita repartir dulces en bolsitas para sus 14 compañeros. Si a cada bolsa le caben 16 dulces y cada uno le costó en promedio 5 pesos, ¿cuántos dulces tiene en total Valeria?). Los problemas *mezclados* son aquellos que requieren la implementación de dos esquemas, ya sean de las estructuras **factor-factor-producto** o **parte-parte-todo**. Por ejemplo, un problema complejo sería el siguiente: “Jeremías y Virgilio son sacerdotes y necesitan comprar bancas para sus iglesias. La iglesia del padre Jeremías necesita 38 bancas y le cuesta cada una 67 pesos. El padre Virgilio requiere comprar 19 bancas más por el mismo precio cada una. ¿Cuánto dinero se va a gastar entre los dos para comprar sus respectivas bancas? En este problema, Xin (2012) sugiere que hacer uso de los esquemas previamente aprendidos es lo más adecuado para darle solución.

La instrucción explícita, el uso de esquemas que representan de modo más parsimonioso la estructura matemática de los problemas, y el manejo de estímulos auxiliares que permiten ubicar las relaciones cuantitativas expresadas en el problema en la estructura correspondiente a manera de una ecuación, son la materia prima de la propuesta de Xin. A diferencia de Fuchs, la taxonomía empleada por Xin, aunque toma en cuenta el análisis semántico, no pone el énfasis en él como sí lo hace el SBI-T.

Otro rubro en el cual la propuesta de Xin atiende es la dificultad que implica relacionar los problemas del aula con contextos significativos. Esta propuesta presenta problemas aritméticos en la que los alumnos pueden resolver primero los problemas más fáciles y seguir ascendiendo en la escala de dificultad de un modo pausado.

Cabe destacar que –a lo largo de la metodología de esta autora– se relacionan los esquemas con representaciones aritméticas o algoritmos, por lo que siempre un problema aritmético verbal se puede representar a través de un algoritmo (i.e., “Vanessa y Deborah tienen 15 y 18 años respectivamente. Tienen entre las dos 33 años”. El problema se puede representar en un algoritmo aritmético del siguiente modo: 15 + 18 = 33).

Sin embargo, en esta última unidad esta metodología omite esta relación entre el uso de esquemas con la representación en algoritmos, dado que la correcta representación de un problema que requiere el uso de dos esquemas se debería basar en el uso del paréntesis, el cual anuncia la presencia de una operación intermedia. Por ejemplo, en el siguiente problema: “Fabricio realizó compras de fin de año. Se compró una chamarra de 2500 pesos y un pantalón de mezclilla. Si el pantalón le costó 785 pesos menos que la chamarra, ¿cuánto dinero se gastó en total en estas dos prendas?”, se pueden aplicar dos esquemas de tipo parte-parte-todo y relacionar estos esquemas con las siguientes expresiones aritméticas: x + 785 = 2500 y 2500 + x = a. Sin embargo, para mantener la relación entre el uso de esquemas y la representación aritmética, se puede usar un paréntesis, de tal modo que el problema quedaría del siguiente modo: 2500 + (2500 – 785) = x

¿Cómo se podría mantener la armonía entre el uso de esquema y la representación en algoritmos al incluir el uso de paréntesis para problemas que requieran de una operación intermedia? ¿Es suficiente con la metodología de Xin para poder hacer más probable la transferencia de lo aprendido en un aula hacia contextos significativos para el estudiante?

Si se omite la relación antes descrita en problemas que implican operación intermedia, es probable que dos rubros se vean afectados: la transferencia hacia problemas significativos y la comprensión de las relaciones cuantitativas implicadas en este tipo de problemas. Para dar cuenta de los argumentos relativos al rubro de la transferencia, en el siguiente capítulo se analizará la importancia de la transferencia en metodologías que se basan en el uso de esquemas auxiliares, Aunque antes de dar paso al mencionado capítulo, es necesario concluir que la instrucción explícita puede representar mayores ventajas relativas a la transferencia en comparación con el "álgebra temprana". Estas ventajas se describen a continuación:

a) Existe una mayor cantidad de evidencia empírica a favor de los trabajos basados en la instrucción explícita en comparación con las investigaciones relativas al álgebra temprana, las cuales –aunque muestran indicios de éxito– aún se encuentran en proceso de construcción en cuanto a pruebas contundentes de su efectividad.
b) La instrucción explícita implica dotar a los alumnos de herramientas tangibles derivadas de una metodología que, principalmente, se basa en una taxonomía que emplea esquemas o auxiliares que pueden ser más prácticos y, probablemente, eficaces en comparación con el enfoque constructivista relativo al álgebra temprana.
c) La relación del uso de esquemas auxiliares en problemas aritméticos verbales está vinculado ampliamente con el desarrollo de conceptos científicos, en los cuales se ahondará más adelante con base en la epistemología vygotskiana.

3. EL PROBLEMA DE LA TRANSFERENCIA: NÚCLEO CENTRAL EN LA ENSEÑANZA PARA LA SOLUCIÓN DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS

Una de las principales problemáticas que enfrentan los alumnos de nivel básico es la relativa a los contenidos abstractos que representan materias como matemáticas, particularmente los problemas aritméticos planteados verbalmente. Los problemas aritméticos representan un intento por vincular el contenido abstracto de las matemáticas con contenidos relativamente significativos para los alumnos; sin embargo, los problemas aritméticos por sí solos no resuelven esta problemática; requieren de una metodología que aumente las probabilidades de éxito al momento de resolver un problema, tanto en entornos escolares como extraescolares.

¿Por qué los entornos extraescolares tienen relevancia en la enseñanza de las matemáticas? Porque problematizar a los estudiantes de primaria en situaciones cotidianas, por un lado, disminuye las probabilidades de que el alumno se pueda confundir al momento de resolver un problema matemático, puesto que los escenarios cotidianos pueden ser más significativos que los entornos meramente escolares o abstractos, además de implicar un desligamiento de la enseñanza de las matemáticas de un escenario meramente escolar. Por otro lado, pueden facilitar que los alumnos apliquen su conocimiento en el área de las matemáticas hacia problemas reales y, con ello, poder demostrar que dominan los contenidos aritméticos de nivel básico. Todas las metodologías descritas en el capítulo 2 –a pesar de sus notables diferencias– hacen uso de problemas cotidianos.

Estas preocupaciones del vínculo entre lo que se aprende en el contexto escolar y lo extraescolar, en general suelen abordarse como asuntos de transferencia del aprendizaje; del cómo lo aprendido en un contexto se generaliza o amplía a otros contextos. Este asunto es sumamente importante, debido a que contempla el propósito fundamental de la enseñanza: su incorporación a la vida cotidiana.

Al respecto de la transferencia, Mares (2001) indica que los conocimientos verbales de los alumnos de primaria que se encuentren vinculados con competencias tanto observacionales (acciones que requieran utilizar los sentidos para diferenciar objetos, organismos y eventos) como operativas (acciones relacionadas con arreglar condiciones para observar eventos), y que a su vez estén ligadas a un mismo grupo de objetos, organismos y eventos, se transfieren de manera más amplia en comparación con aquellos conocimientos verbales que no están vinculados con las mencionadas competencias. Esto quiere decir que, si el conocimiento de un alumno de primaria –en la enseñanza de matemáticas– se relaciona con lo que puede observar y hacer al momento de aprender a resolver problemas aritméticos verbales y, a la vez, estos hacen referencia a eventos que se pueden categorizar como *cotidianos* o *significativos* para el alumno, la transferencia tiene una mayor probabilidad de ocurrencia.

La transferencia es un concepto que permite establecer el momento en el cual un alumno domina una materia (en un sentido transituacional o transcontextual). La transferencia se puede definir como el modo en que una interacción, la cual es establecida bajo circunstancias específicas, influye en la forma en que se establece otra distinta (Mares, 2000, en Silva, 2011). En la enseñanza de las matemáticas, la metodología que emplea un docente con sus alumnos –misma que implica una interacción sujeta a circunstancias y condiciones específicas (i.e., las metodologías descritas en el capítulo 2)– influye para que éstos desarrollen una serie de competencias que les permitan resolver problemas tanto de dicho contexto, como de otros.

Sólo cuando el alumno puede resolver este tipo de problemas en un entorno distinto al escolar y a partir de una metodología dada, se podría hablar de transferencia. Antes de explicar el modelo propuesto por Mares en relación a la transferencia, es necesario hacer hincapié en qué implicaría la falta de transferencia relativa a los problemas aritméticos verbales.

La falta de transferencia subyace a una problemática latente en los alumnos de matemáticas: una escasa relación entre los problemas que aprenden en el aula y los de su vida cotidiana. Esto es importante puesto que en recientes reformas a la educación básica en, por ejemplo, México o EE.UU., se prioriza la necesidad de que la enseñanza de las matemáticas incluya competencias relacionadas con la vida real para un desarrollo en competencias académicas y laborales (Secretaría de Educación Pública, 2012, en Alcalá, Vázquez y Zarzosa, 2013). Por lo tanto, la transferencia en la resolución de problemas matemáticos es relevante en el campo de las matemáticas, ya que la enseñanza de las matemáticas puede tener escaso significado para el alumno derivado de temáticas abstractas y sin una relación con problemáticas cotidianas.

Tal como se adelantaba en el final del capítulo pasado, vincular problemas escolares a contextos extraescolares y significativos puede propiciar que el nivel de dificultad que puede existir entre ambos contextos y problemas sea muy elevado para un estudiante de nivel básico si no hay un adecuado análisis de la tarea que debe resolver cada alumno.

Por ejemplo, si un estudiante sólo sabe resolver problemas de resta de una cifra y con la incógnita siempre en el resultado, sería conveniente instruirlo en problemas de resta de dos cifras, después verificar si sabe resolver problemas de suma tanto de una como dos cifras, y sólo después de completar estos requisitos y no de un modo premeditado (es decir, pasar de los problemas de resta a los de suma sin tomar en cuenta, por ejemplo, la cantidad de cifras) el alumno probablemente pueda resolver problemas de suma y resta cuando se cambie de lugar la incógnita. Por lo tanto, la transferencia implica que ambos contextos (el escolar y el extraescolar) se relacionen entre sí contemplando variar el nivel de dificultad de los problemas aritméticos planteados verbalmente de acuerdo a la variedad y cantidad de problemas que el alumno pueda resolver.

¿Cómo se puede llevar a cabo la transferencia? ¿Las metodologías descritas y analizadas en el capítulo 2 podrían facilitar la transferencia? ¿El modelo de Mares analizado anteriormente podría explicar el modo en el cual se realiza o no la transferencia? Los conocimientos verbales en el rubro de los problemas aritméticos verbales implican lo que un alumno es capaz de realizar en este ámbito. Por ejemplo, si un alumno puede resolver problemas aritméticos de suma y resta de una cifra, esos serían sus conocimientos verbales. Si estos conocimientos se relacionan con competencias observacionales (i.e., la diferenciación de información relevante e irrelevante; con la clasificación de problemas de acuerdo a la estructura de éstos en relación a sus datos y contextos lingüísticos; y con la selección de un procedimiento que le permita llegar a una respuesta) y a su vez con competencias operativas (i.e., aplicar un procedimiento a un problema aritmético de acuerdo a su estructura; despejar una ecuación para darle respuesta a dicho problema; y sustituir el resultado en la ecuación inicial —lo cual implica igualar ambas partes de la ecuación—), es más probable que pueda transferir sus nuevos conocimientos verbales ampliamente.

Cabe destacar que se requiere una vinculación de este tipo de conocimientos y competencias con un mismo grupo de organismos, objetos y eventos, por lo que, si este grupo hace referencia a la vida cotidiana de un alumno de primaria, sería más probable aun transferir ampliamente los conocimientos verbales de un estudiante. En resumen, si los conocimientos verbales de un alumno se vinculan con una metodología que, a su vez, se relacione con competencias tanto operativas como observacionales y estas, a su vez, convergen en situaciones u objetos con los que un alumno pueda encontrarse en su vida cotidiana, la transferencia tendría una alta probabilidad de ocurrencia.

¿Tiene alguna relación el modelo descrito por Mares con alguna de las metodologías analizadas en el capítulo 2? En la metodología propuesta por Xin (2012), por un lado se puede vislumbrar la heurística utilizada por Pólya, pero también se puede apreciar que plantea una taxonomía más completa en comparación a las de Vergnaud, Fuchs y Jitendra. El modelo de Xin se basa en la instrucción explícita (en comparación con la propuesta de “álgebra temprana”); y, principalmente, se basa en el uso de esquemas, lo cual permite identificar *la estructura subyacente* de un problema aritmético, además de echar mano de estímulos auxiliares que permiten identificar los datos cruciales del problema. En relación con el modelo descrito por Mares (2001), ahí contempla los conocimientos verbales del alumno al igual que las competencias observacionales y operativas, teniendo siempre como referente eventos, organismos y eventos de la vida cotidiana de un alumno de primaria. Por lo tanto, esta metodología brinda más elementos auxiliares a los alumnos para que dirijan su atención a la información crucial de un problema dado, puedan resolverlo con base en un plan y puedan aplicar estos pasos en otros problemas, lo cual podría incrementar la probabilidad de enfrentarse a una amplia gama de problemas aritméticos debido a la relación que guardan éstos con contextos extraescolares.

Otro rubro que toma en cuenta la metodología de Xin es la dificultad de los problemas que plantea, ya que son, en primera instancia, relativamente fáciles (i.e., Hernán tiene 8 discos de música y Damián 9, ¿Cuántos tienen en total?) y la dificultad aumenta conforme las fases de la propuesta lo requieren; el aumento no es abrupto.

En conclusión, la transferencia contempla el desempeño exitoso en la resolución de problemas aritméticos verbales en contextos en los que no han sido entrenados previamente. Si una metodología para resolver ese tipo de problemas basada en esquemas como a la propuesta por Xin, de acuerdo a la lógica de su estructura, brinda al alumno la posibilidad de desarrollar competencias tanto operativas como observacionales en relación a contextos significativos o, en otras palabras, uso de esquemas e identificación de esquemas auxiliares a través de la instrucción explícita, podría aumentar la probabilidad de una amplia transferencia.

4. VYGOTSKY Y SU RELACIÓN CON EL USO DE ESQUEMAS

En la metodología empleada por Xin (2012), los esquemas son relevantes, ya que representan una herramienta que facilita poner énfasis en las relaciones cuantitativas –a través del empleo de una ecuación– implicadas en un problema aritmético verbal, así como clasificarles de acuerdo a sus características estructurales.

¿Por qué los esquemas son relevantes en la enseñanza de las matemáticas? Principalmente, porque sirven como “auxiliares” en la comprensión de un problema aritmético verbal. Esto implica que los alumnos pueden emplearlos con el objetivo de resolver un problema matemático. Por lo tanto, los esquemas permiten que un estudiante represente de un modo formal una situación o problema que contiene información y que requiere de una solución. Tienen una ventaja adicional: hacen más económico el manejo, organización y transformación de una información, que de otro modo podría abrumar y, probablemente, inducir al error.

El uso de esquemas no se remite solamente a problemas aritméticos verbales, puesto que son una configuración de estímulos auxiliares. Por ejemplo, los niños al momento de estar aprendiendo a sumar comúnmente utilizan sus dedos como estímulos o signos auxiliares para “apoyarse” en ellos y realizar una suma. Cuando tienen que aprender a multiplicar, algunos pueden sumar la cantidad requerida las veces necesarias para llegar al resultado (i.e., 7 x 3 implicaría que el niño sume 3 veces el número 7) y este procedimiento antecede a la clásica memorización de las tablas de multiplicar. Los niños no están multiplicando “formalmente”, es decir, utilizan el auxiliar que representan sus dedos para llegar a un resultado, lo que eventualmente les permitirá efectuar una multiplicación sin la necesidad de usar sus dedos. Por lo tanto, un esquema es una configuración de estímulos auxiliares y se puede hacer uso de estos esquemas en varias áreas no necesariamente aritméticas.

En relación a ejemplos del uso de esquemas que se aplican en otras áreas de conocimiento, en la comprensión lectora es amplia la implementación del llamado *Story Grammar* como esquema para comprender de un modo sencillo los elementos cruciales de una narración. *Story Grammar* implica identificar a los personajes principales; lugar y tiempo de la narración; el problema principal; y qué se hizo para resolver dicho problema (Mandler y Johnson, 1977, en Nguyen, 2002). Cuando los lectores identifican estos elementos en una narración, en realidad están ante una estructura que se repite en cualquier texto de este tipo, lo que facilita la comprensión del mismo sin importar qué tanto varíen los personajes y el contexto de la narración.

Los diagramas de “preguntas guía” son otro ejemplo de esquemas que implican una serie de signos auxiliar. Estos implican definir un concepto o acontecimiento a través de cuestionamientos diversos, con el fin de analizarlo. Por ejemplo, si el concepto fuera “diagramas de flujo”, las preguntas guía serían las siguientes: ¿Qué es?; ¿Para qué sirve?; ¿Cómo se usa?; ¿Dónde se usa?; ¿Por qué se usa?; y ¿Quiénes lo usan? Las respuestas a estas preguntas guía configurarían el concepto y las implicaciones del mismo.

Si estos “auxiliares” pueden facilitar que un niño comprenda conceptos abstractos, pareciera que se asemejan a una *herramienta* que está mediando su comprensión de un tema abstracto como la aritmética. Por ende, si los esquemas que puede utilizar un estudiante de primaria, le permiten comprender desde sumas hasta problemas matemáticos, existe un vínculo claro entre los esquemas con algunas tesis de Vygostky acerca del desarrollo de los conceptos científicos, que forma parte de lo que el autor denomina *procesos psicológicos superiores*. Estos procesos se adquieren y se desarrollan a través de la interacción social con personas que comparten costumbres y valores de sus diferentes grupos, por lo que los procesos psicológicos superiores son mediados culturalmente.

¿Qué implica el tránsito entre los esquemas auxiliares hacia el desarrollo los procesos psicológicos superiores? Vygotsky (1996) indica que en el desarrollo de los conceptos en la niñez, se pueden clasificar los conceptos en dos clases: espontáneos y científicos: los conceptos espontáneos versan sobre las reflexiones del alumno acerca de su experiencia cotidiana. Por otra parte, los conceptos científicos surgen de una actividad estructurada –comúnmente en un aula de clases– y se le imponen al estudiante conceptos definidos de modo lógico. Entre los conceptos espontáneos y científicos existen los *preconceptos* que fungen como eslabones entre la experiencia cotidiana del alumno y la generalización que implica un concepto *real* o científico.

Por ejemplo, el concepto *utópico* –cuando se le domina o se interioriza– puede provocar que una persona perciba de un modo distinto su entorno, a tal grado de poder identificar situaciones o escenarios que no corresponden a las condiciones que brinda su propio entorno y llamarles a estas situaciones *utópicas*. En otro ejemplo, cuando un alumno se enfrenta ante un concepto como *falacia*, y cuando pueda interiorizar dicho término, podría dar cabida a una sistematización de argumentos que se basen en la lógica y que requieren ciertas características para ser, ya sea *verdad* o *falacia*. Este término no corresponde a sus conceptos espontáneos en primera instancia, pero herramientas auxiliares (tablas de verdad o silogismos, por ejemplo) pueden facilitar que el alumno interiorice el signo que implica una *falacia*: la relación lógica o ilógica entre planteamientos.

Ante este escenario de conceptos científicos, el álgebra entendida como la rama de las matemáticas que versa sobre las relaciones cuantitativas del modo más general posible, se puede considerar como una formulación científica que implica, tal como indica Vygotsky (1988) un nivel de pensamiento superior, el cual permite organizar las relaciones cuantitativas a través de generalizaciones. El uso de herramientas auxiliares en esta rama de las matemáticas puede facilitar que los alumnos la utilicen de tal modo que les permita organizar de un modo general los casos concretos que implican las relaciones cuantitativas de la aritmética.

Precisamente dentro del ámbito de las matemáticas, también se puede considerar que la aritmética implica una noción científica, aunque de menor grado de abstracción. Vygotsky (1988) asegura que los conocimientos de aritmética –si bien representan una transformación de los conceptos espontáneos de un estudiante– son mejorados a su vez por el álgebra, en la medida que convierte lo concreto de la aritmética en planteamientos más generales a la manera de leyes algebraicas generales. Es decir, el álgebra implica generalizar las previas generalizaciones de la aritmética, por lo que el álgebra es equivalente a una concepción científica de orden superior, mientras que la aritmética es un sistema con menor grado de abstracción (sin dejar de tener un estatus de concepto científico). Por lo tanto, los conceptos científicos de orden superior –a través de conceptos científicos de un nivel de abstracción menor como la aritmética– transforman gradualmente la estructura de los conceptos espontáneos y ayuda a organizarlos dentro de un sistema, lo que facilita el ascenso de los niños relativo a niveles de desarrollo superior (Vygotsky, 1986, en Schmittau, 2011).

¿Cómo concebir el álgebra dentro de planteamientos de este tipo? Vygotsky (1988) plantea que las *herramientas* son objetos que permiten transformar el medio circundante; están externamente orientadas. En cambio el *signo* es aquel recurso psicológico (en un principio externo a la persona) que opera entre el medio circundante y el individuo cumpliendo una función de mediación; es un intermediario que, cuando se interioriza, acaba permitiendo la reconstrucción interna de una operación externa. Este signo puede tener una modalidad más elaborada o compleja –ser un grupo de signos articulados en un todo– pero que también cumple funciones de mediación entre el medio y el individuo. No habría problema si le llamáramos “esquema” siempre y cuando siga cumpliendo la misma función de herramienta psicológica, herramienta internamente orientada y que acaba controlando la conducta intelectual del individuo.

Un ejemplo de esquemas que fungen como signos es el esquema “parte-parte-todo”, el cual permite a los alumnos situar a un problema aritmético verbal como parte de un patrón. Por lo que el *signo* facilita la interiorización de las relaciones cuantitativas implicadas en un problema aritmético verbal.

Existen estudios que han llevado a la práctica la relación entre el uso de esquemas auxiliares y la relación con los postulados de Vygotsky. Davydov, según lo indicado por Schmittau (2011), hizo uso del álgebra como esquema para demostrar que los alumnos de nivel básico de educación pueden aplicar principios algebraicos (conceptos científicos) a partir de un currículum basado en abstracciones, es decir, ecuaciones que representan problemas de: longitud, área, distancia, peso y tiempo (i.e., *t* -8 -8 = x). A diferencia de la propuesta de Xin (2012), Davydov utiliza como esquema ecuaciones y desigualdades, lo que presuntamente puede permitir que los alumnos a los que se les enseña matemáticas bajo este currículum, puedan resolver problemas de un modo generalizado (i.e., Jazmín tiene 100 gramos de dulces, si Eduardo tiene menos gramos que Jazmín, ¿Cuántos gramos de dulces tiene Eduardo? Respuesta: Eduardo tiene 100 gr. – *d*).

¿Qué implica utilizar una ecuación? Además de su función como *signo* en la interiorización de relaciones cuantitativas, las ecuaciones pueden emplearse de un modo abstracto como en el ejemplo anterior o de un modo *informal* (i.e., el todo se compone de la suma de las partes; Si Juan y Pedro tienen la misma cantidad de canicas, y a cada uno le quitamos cinco, seguirán teniendo la misma cantidad). Esto implica que la ecuación es una igualdad de cualquier modo en cual sea presentada, lo que conlleva la organización de las relaciones cuantitativas de un problema aritmético o de un problema algebraico, sin importar si es implementada de un modo abstracto o de un modo *informal*.

¿En qué son similares los esquemas de Xin y Davydov? En que ambos usan ecuaciones como esquemas –Xin de un modo implícito a través de plantillas– aunque, en el caso de Davydov, los problemas que resuelve no tengan como resultado una cantidad concreta, sino que se enfocan en representar esos problemas en expresiones algebraicas que después tendrán que ser sustituidas por cantidades.

En conclusión, si los esquemas fungen como signos que permiten interiorizar conceptos científicos como los del álgebra, la implementación de esquemas en la enseñanza de las matemáticas puede representar para los alumnos un *signo* que favorece el manejo sistemático y efectivo de relaciones cuantitativas, lo que a su vez representa una mejor incidencia del alumno con su propio entorno –ya sea escolar, laboral o cotidiano– así como una percepción distinta de dicho entorno.

La propuesta de Xin (2012) implica el uso de esquemas con el objetivo de identificar, con base en instrucción explícita, una estructura subyacente a problemas aritméticos verbales de suma, resta, multiplicación y división. Los dos esquemas implementados por Xin son el "parte-parte-todo" y el "factor-factor-producto". Estos esquemas son implementados de acuerdo al tipo de problema al cual se pueden enfrentar los alumnos. Cuando los problemas implican únicamente hacer uso de uno u otro esquema, la relación de dicho esquema con la representación aritmética (i.e., 5 + 6 = 11) se mantiene.

La limitante de esta metodología se ha anunciado en la parte final del capítulo 2 (subtema 2.4.3., el problema de Fabricio y sus compras de fin de año en ropa: "Fabricio realizó compras de fin de año. Se compró una chamarra de 2500 pesos y un pantalón de mezclilla. Si el pantalón le costó 785 pesos menos que la chamarra, ¿cuánto dinero se gastó en total en estas dos prendas?"). ¿Esta situación representa realmente un problema? Si la respuesta es afirmativa, esto se debería a que las relaciones cuantitativas que implican los problemas aritméticos verbales podrían no estar siendo comprendidas por los alumnos, y las relaciones cuantitativas, por ende, no podrían interiorizarse, ya que la función de los esquemas es precisamente fungir como el *signo* que facilitaría esta interiorización. Esto quiere decir que cuando un problema aritmético requiriera de operación intermedia, la mejor opción para la comprensión de las relaciones cuantitativas ya mencionadas sería representar dicho problema con un paréntesis en vez de hacerlo con dos operaciones por separado. Si los problemas que implican operación intermedia no se representan con un paréntesis y, aunado a ello, los esquemas o signos auxiliares son implementados del mismo modo en el cual se implementan con problemas una sola operación, ¿Sería necesario diseñar un esquema o signo auxiliar que facilite aún más la interiorización de las relaciones cuantitativas que implica un problema con operación intermedia o paréntesis?

De ser este último cuestionamiento afirmativo, ¿Cómo se pueden representar este tipo de problemas utilizando esquemas algebraicos y vinculándolos con una expresión aritmética como el paréntesis? A partir de un esquema adicional que indique, por un lado, que el problema implica una operación intermedia, es decir, el uso de paréntesis. Por otro lado, este esquema puede permitir a los alumnos utilizar un paréntesis cuando los problemas impliquen el uso de más de un esquema.

De este modo, y derivado del objetivo de la presente tesina, se describe a continuación la siguiente propuesta de intervención basada en esquemas algebraicos, teniendo como estructura base la propuesta de Xin (2012).

5. PROPUESTA DE INTERVENCIÓN

5.1. Instrumentos de diagnóstico y evaluación.

La Prueba de Ejercicios Aritméticos Verbales (**ver Anexo 2**) versa sobre 10 problemas aritméticos verbales, que en su resolución implican las cuatro operaciones básicas.

5.2. *Procedimiento.*

Pre-prueba.

La pre-prueba consideraría la aplicación de la Prueba de Ejercicios Aritméticos Verbales (**ver Anexo 2**). Los participantes se seleccionarían de acuerdo a lo descrito en *Selección de la muestra*.

Intervención 1.

La intervención 1 la conformarían tres sesiones. La primera tendría el objetivo de que se logre identificar la estructura de los problemas “Parte-Parte-Todo”. La segunda implicaría la resolución de este tipo de problemas. La tercera sesión versa sobre la evaluación de la Fase 2. Las sesiones se describen a continuación:

Sesión 1. Sumas, modelos de barras y diagrama Parte-Parte-Todo.

Esta sesión comenzaría con la introducción al concepto de “suma”; lo cual se hará por medio de ejercicios. El primero de ellos trataría sobre el modo de representar el siguiente problema: “Haroldo tiene una pecera grande con 12 peces. Su mamá le regaló 8 peces más. ¿Cuántos peces tiene ahora?”; en este problema, el instructor dibujará y pedirá a los participantes que dibujen, primeramente, los 12 peces que tenía Haroldo en un principio, para que después dibujen los 8 peces que le regaló su mamá y cuenten todos los peces en total. Si los participantes logran deducir el resultado del problema, el instructor les planteará el segundo problema: “Sandro colecciona monedas antiguas y tiene 14. Su mejor amigo le regaló 9 monedas más. ¿Cuántas monedas tiene ahora Sandro?”. Si los participantes logran deducir el resultado del problema a través de dibujar el ejercicio y contar las monedas de Sandro, el instructor les indicaría que pueden representar las monedas, los peces o cualquier otro objeto con círculos, para ahorrarse tiempo y esfuerzo.

El siguiente problema será representado por el instructor con círculos, cada uno de los cuales equivale a una unidad: “El señor Sixto dejó en su refrigerador 8 nuggets de pollo, pero en la comida no se terminó 4 y los guardó junto con los anteriores nuggets que ya había. ¿Cuántos nuggets le quedan ahora al señor Sixto?”. Una vez que los alumnos puedan representar el problema con círculos y resolver el problema, el instructor les indicará que –así como pueden representar los elementos de un problema con círculos– también lo pueden hacer con cuadrados.

> Una vez completados los ejercicios anteriores, los participantes resolverán el siguiente ejercicio basado en la figura 1: **1.1**: ¿Cuántos cuadrados hay en la primera fila? ¿Cuántos cuadrados hay en la segunda fila? ¿Cuántos cuadrados tenemos en total en ambas filas?

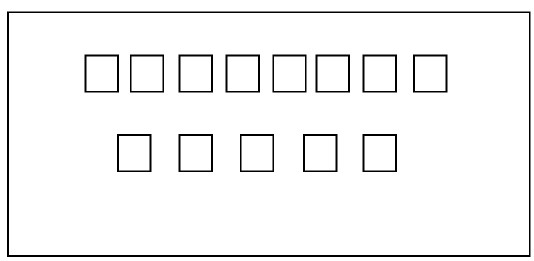


Figura 1. Diagrama del ejercicio 1.1

Todos los ejercicios serán realizados por el instructor y los participantes. El instructor ejemplificará primero los ejercicios y los participantes podrán resolver otra serie de ejercicios una vez que finalice el instructor.

El ejercicio implica la respuesta verbal de los alumnos y que ellos puedan resolver el ejercicio. En caso de que no respondan, el instructor contará junto con los alumnos los cuadrados. El instructor hará hincapié en que las partes de un problema forman el total de ese problema.

El siguiente paso será introducir el concepto de “barra”. El instructor les dará 12 cubos de papel (7 rojos y 5 azules) para que puedan realizar la suma de los cubos rojos (7) con los azules (5), para eso, tendrán que juntar en dos filas los cubos, en la primera fila los cubos rojos y en la segunda los cubos azules. El instructor les indicará a los participantes que cada fila corresponde a una “parte” del problema. Después se juntarán ambas filas y se dará entrada al ejercicio 1.2, el cual implica la pregunta ¿cuántos cubos hay en total?:

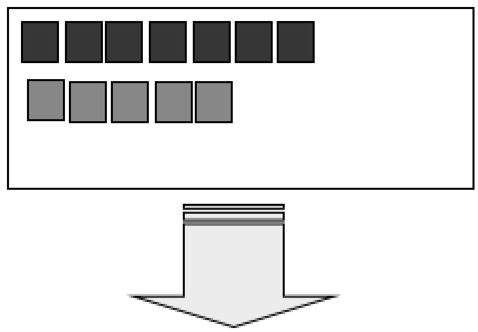


Figura 2. Diagrama del ejercicio 1.2.

El instructor indicará que se puede saber la respuesta juntando ambas filas. Después del ejercicio 1.2, se mostrará que el ejercicio también se puede resolver a través del esquema *parte-parte-todo* y con el Modelo de Barras:

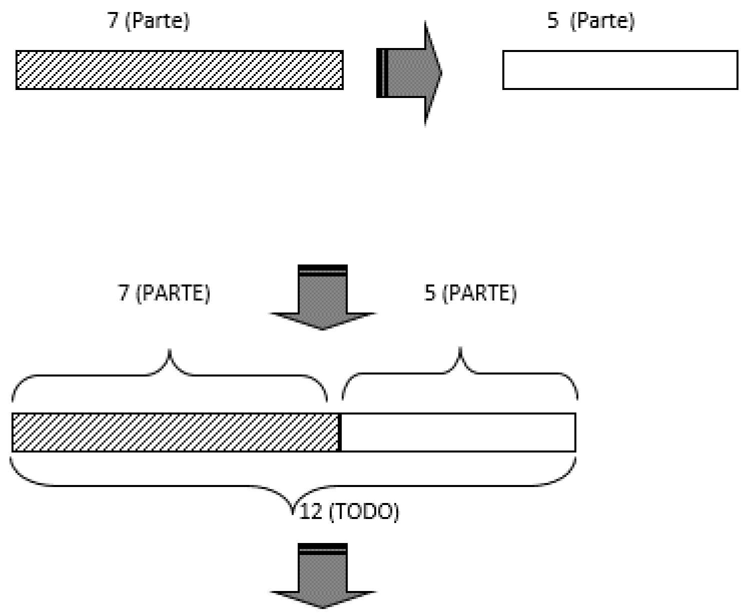


Figura 3. Diagrama de la representación en barras del ejercicio 1.2. Las barras representan las partes del problema y el corchete más grande representa el todo.

Para poner en práctica este modo de representar una suma, los participantes tendrán que resolver y representar los siguientes dos problemas: “Charlie tiene 6 manzanas, su hermano Félix le dio otras 7, ¿cuántos manzanas tiene ahora?” y “Octavio tiene 12 bambúes en su jardín. Su novia le regaló 9 bambúes más. ¿Cuántos bambúes tiene en su jardín Octavio?”. Si los participantes logran resolver los problemas y representarlos como se muestra en la figura 3, entonces resolverán el siguiente ejercicio (1.2.1): “Derek compró 5 pesos de tortillas, pero su mamá ya había comprado 7 pesos de tortillas. ¿Cuánto dinero se gastaron entre Derek y su mamá en tortillas?

Después, el instructor ejemplificará la resolución del ejercicio 1.3: Si tenemos una barra que representa 7 y otra que representa 4, ¿cuánto valen las dos barras juntas? Ahora, hará hincapié en que las barras y las cantidades a las que hacen alusión pueden representarse con el uso de un diagrama llamada “parte-parte-todo”:

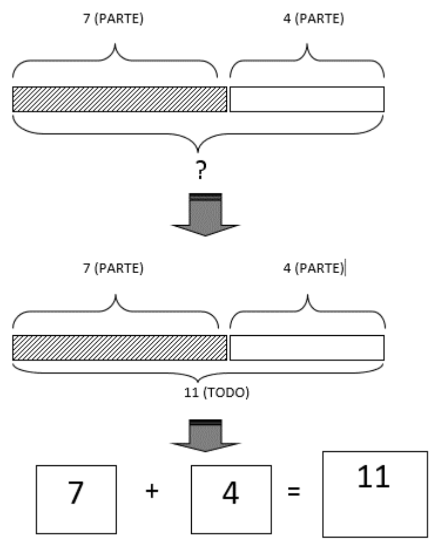


Figura 4. Representación del ejercicio 1.3. Los cuadros inferiores representan el esquema "parte-parte-todo".

Para que el concepto de *igualdad* sea parte de la resolución del problema, se hará hincapié en señalar que, tanto en el lado izquierdo como en el derecho, la ecuación tiene la misma cantidad de unidades (tal como se hizo en el anterior ejercicio). En este caso, en ambos lados da como resultado 11.

Lado Izquierdo: 7 + 4=11 Lado Derecho: 11

Lado Izquierdo 11=11 Lado Derecho.

Figura 5. Representación de la igualdad que implica el ejercicio 1.3.

Una vez terminada la ejemplificación del instructor, los participantes deberán resolver el siguiente ejercicio tal como se resolvió el anterior, para pasar a la sesión 2: "Decio tiene 9 galletas de chocolate. Si se compró otras 7 galletas de chocolate, ¿cuántas galletas tiene ahora?".

Sesión 2. Resolución de problemas "Parte-Parte-Todo".

El esquema *parte-parte-todo* (**ver anexo 3**) estará a la vista de los alumnos en un pizarrón u hoja de papel.

Después, tanto los participantes como el instructor leerán el problema completo y determinarán cuál es el tema del ejercicio, los datos que se tienen y cuál es la información que falta o que se solicita en el ejercicio. Después, con la ayuda de barras, se representarán el ejercicio 2.1 (Dante y su amigo Lisandro juegan videojuegos los fines de semana. Dante tiene 27 videojuegos en su colección, mientras que Lisandro tiene 49. ¿Cuántos videojuegos tienen entre los dos?"), tanto la cantidad de videojuegos de Dante y de Lisandro como la cantidad total (desconocida).

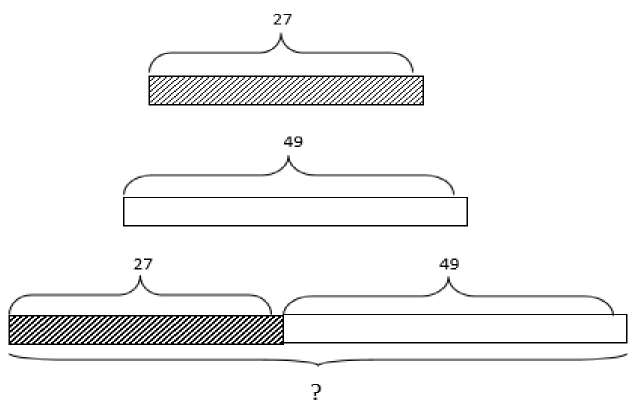


Figura 6. Representación del ejercicio 2.1. (Modelo de barras).

Una vez que los datos del problema han sido representados en barras, se utilizará el esquema *parte-parte-todo* para resolver el ejercicio. Nuevamente el instructor pondrá énfasis en la *igualdad* que implica ambas partes de la ecuación y ejemplificará inmediatamente después el siguiente ejercicio:

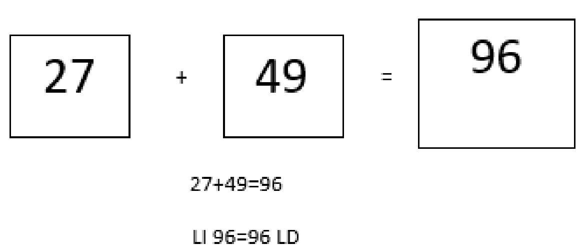


Figura 7. Representación del diagrama "parte-parte-todo" y del concepto de igualdad (lado izquierdo vs. lado derecho).

Una vez ejemplificado el ejercicio 2.1, el instructor planteará el ejercicio 2.2: “Elena tiene una colección de pares de zapatos muy amplia con 34 pares. Sin embargo, su mamá también tiene muchos pares. Entre las dos tienen 89 pares. ¿Cuántos pares de zapatos tiene la mamá de Elena? (El instructor anotará en el pizarrón el tema: Colección de zapatos de Elena y su mamá).

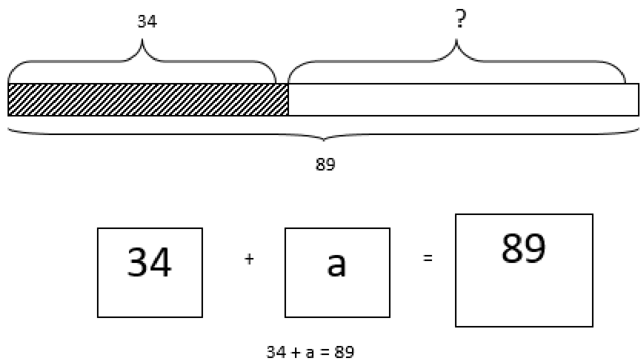
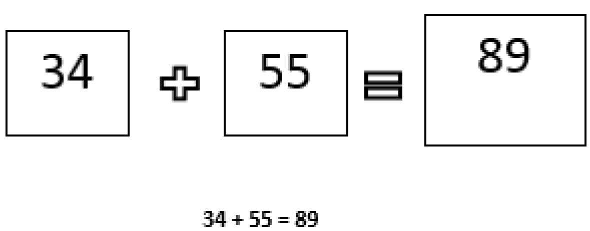


Figura 8. Representación del problema 2.2. Se emplea el modelo de barras y el esquema “parte-parte-todo”.

En este paso, se indicará a los participantes que para resolver el problema, primero pondrán una letra “a” cuando no se sepa la información del problema. Para poder despejar la ecuación, también se les indicará que las letras y los números “no pueden estar juntos, ya que no se llevan”, por lo tanto pasarán el 34 del lado del 89 y, como condición, debe pasar con el signo contrario:

$$a = 89 - 34$$

$$a = 55$$



Lado izquierdo 89 = 89 Lado derecho.

Por tanto, la mamá de Elena tiene 89 zapatos.

Figura 9. Representación del despeje y de la resolución del problema 2.2.

Evaluación 1. *Sesión 2. Ejercicios “parte-parte-todo”*.

Esta evaluación consistiría en la implementación y la posterior resolución de cuatro ejercicios (**ver Anexo 4**), que conformarían seis en total (considerando los anteriores dos ejercicios); dos ejercicios con incógnita al principio, dos con incógnita en medio y dos con incógnita al final. Si la mayor parte de los participantes logran resolver los ejercicios, daría inicio la fase 4 (que implica también la sesión 3).

Intervención 2.

La intervención 2 implicaría una sesión en la cual el instructor ejemplificará una serie de ejercicios utilizando el esquema *parte-parte-todo* para problemas de la modalidad o caso en particular de tipo *adición-comparación* (**ver Anexo 4**). La principal diferencia de este tipo de problemas en comparación con los problemas parte-parte-todo (sólo al momento de representarlos, ya que siguen siendo parte del esquema *parte-parte-todo*), radica en que la cantidad más grande siempre se ubicará al final del esquema (en el cuadrado “todo”), mientras que la cantidad más pequeña y la diferencia estarán siempre en el principio (parte 1) y en el medio (parte 2) del esquema respectivamente. La representación de este tipo de problemas se describe a continuación:

Sesión 3. Representación de problemas “Adición-Comparación”.

Esta fase consistiría en la ejemplificación de la resolución de problemas tipo “Adición-Comparación”, los cuales serán evaluados en una fase posterior. El instructor comenzará planteando el problema 3.1: “Berenice tiene 14 pares de zapatos en su ropero. Samantha tiene 33 pares más que Berenice. Samantha tiene 47”.

El primer paso implicaría hacer hincapié por parte del instructor en el tema del ejercicio (Pares de Zapato de Berenice y Samantha). Después, el instructor y los participantes subrayarán la frase clave que *compara* en el ejercicio, en este caso, la frase es *Samantha tiene 33 pares más que Berenice.* Después se deberá representar la cantidad de zapatos que tiene Berenice con la ayuda de una barra, tal como se realizó anteriormente. Después se representarán las dos cantidades juntas, dando como resultado el *todo* (47, la cantidad de pares de zapatos de Samantha) que representa la respuesta del ejercicio:

Después de representar las cantidades del ejercicio con la ayuda de barras, el instructor y los participantes utilizarán el esquema *parte-parte-todo* para resolver el ejercicio. Al final, el instructor nuevamente remarcará que la cantidad de unidades en el rectángulo de la cantidad más pequeña sumada a la cantidad del rectángulo de *diferencia* es igual a la cantidad más grande.

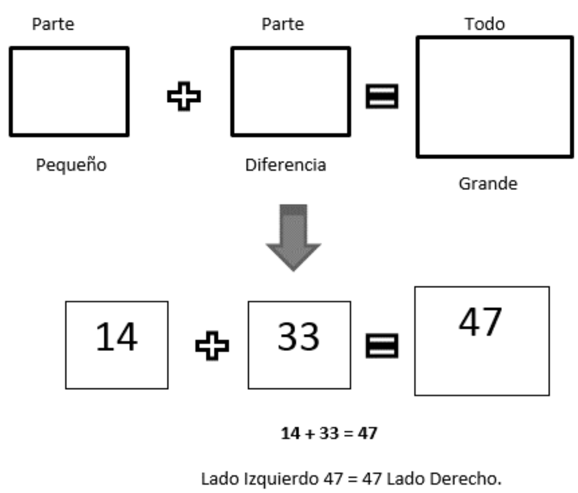
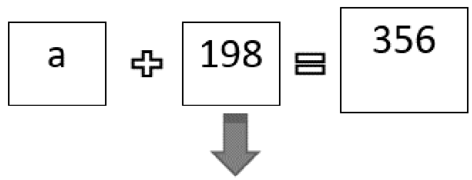


Figura 10. Ejemplificación del empleo de los elementos del esquema "parte-parte-todo" y de la igualdad.

Después de representar el ejercicio anterior, el instructor planteará el ejercicio 3.2, el cual se resolverá con el mismo procedimiento que el ejercicio anterior. El ejercicio 3.2 es el siguiente: "Hugo y Mario acuden a la secundaria juntos. A Hugo le han regalado sus amigas 19 cartas de amor. Si a Hugo le han regalado 26 cartas *menos que* a Mario, entonces a Mario le han regalado 45 cartas".

El siguiente ejercicio que se ejemplificará en su resolución por el instructor, es el 3.3, el cual indicará lo siguiente: “Liliana y Armando están imprimiendo sus trabajos de fin de curso. La impresora realizó 356 impresiones de Liliana. Si Armando tiene 198 impresiones *menos que* las que tiene Liliana, ¿cuántas impresiones son de Armando?”. Este ejercicio implica el mismo procedimiento que los dos ejercicios anteriores, excepto por la parte más pequeña, la cual es una cantidad desconocida y se representa del siguiente modo:



$$a + 198 = 365$$

$$a = 365 - 198$$

$$\underline{a = 167}$$

Figura 11. Representación de una incógnita y del despeje que implica.

Para poder despejar la ecuación que se muestra en la figura 11, también el instructor indicará que las letras y los números “no pueden estar juntos, ya que no se llevan”, por lo tanto pasarán el 34 del lado del 89 y, como condición, debe pasar con el signo contrario.

Evaluación 2 y 3.

La evaluación 2 consistiría en la resolución –por parte de los participantes– de los ejercicios correspondientes a la sesión 3 (**ver Anexo 4**). La evaluación 3 se llevaría a cabo en la sesión 4 si los participantes logran resolver la mayor parte de los ejercicios.

Sesión 4. Evaluación problemas Parte-parte-todo y Adición-Comparación.

Esta sesión atendería la presentación de problemas tanto *parte-parte-todo* como de *adición-comparación*. Primero se retomará el procedimiento de resolución de un ejercicio tipo *parte-parte-todo* y después se resolverá un ejercicio tipo *adición-*

comparación. Los procedimientos y las plantillas utilizadas son las mismas que en las fases anteriores. El ejercicio 3.1 (**ver Anexo 4**) servirá de ejemplo para el procedimiento de resolución. Si los participantes logran contestar la mayor parte de los ejercicios, podrá iniciar la intervención 3.

Intervención 3. *Sesión 5. Representación de problemas de* ***multiplicación****. Partes Iguales (PI).*

Esta intervención comenzaría con la presentación de la estructura de los problemas "Partes Iguales", que corresponden a ejercicios de multiplicación. Para representar los problemas de multiplicación, tanto de tipo "partes iguales", el instructor y los participantes utilizarán el esquema de la estructura "factor-factor-producto" correspondiente a la subcategoría "Partes Iguales" (**ver Anexo 3**). Para que los participantes puedan emplear este esquema, el instructor planteará el ejercicio 4.01: "Roque tiene 6 cajas de bombones. Cada caja tiene 3 bombones. Por lo tanto, Roque tiene 18 bombones en total".

El instructor haría hincapié en el tema del ejercicio (La caja de bombones de Roque). Después indicará que los problemas de "Partes Iguales" como este, contienen dos aspectos: Las unidades de medida y el número de partes. En este ejercicio, Roque tiene 6 cajas de bombones, por lo que tiene 6 partes iguales de bombones, y cada parte tiene 3 bombones en su interior. Los bombones en su interior son la "unidad de medida", y las cajas son "número de partes". Después el instructor hará uso del esquema auxiliar para problemas de multiplicación:

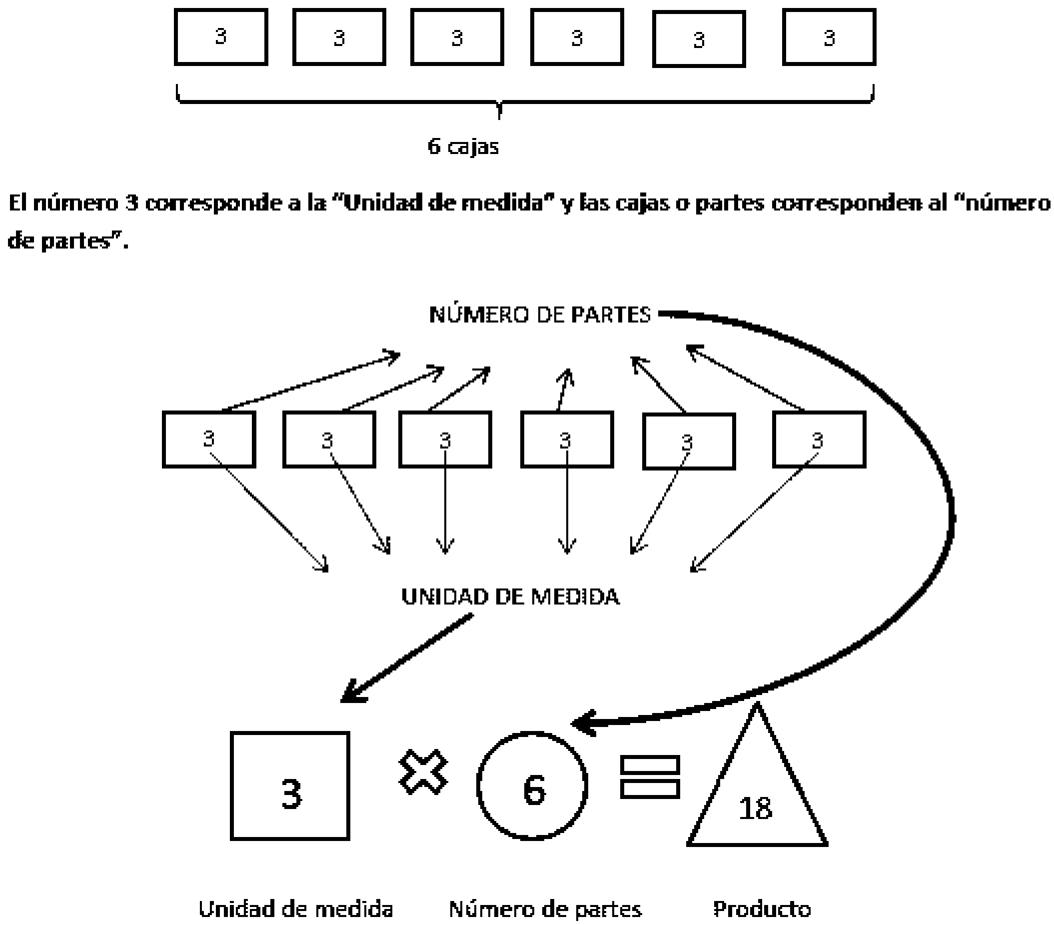


Figura 12. Representación de la resolución del problema 4.01 y del uso del esquema "partes iguales".

El instructor indicará lo siguiente a los participantes: El 3 representa la unidad de medida o los bombones en cada una de las cajas de Roque. El 6 representa el número de partes o las cajas de bombones de Roque. El 18 representa el total de unidades o el producto de los bombones y la cantidad de cajas. Después relacionará el esquema con la representación aritmética, además de poner énfasis en la igualdad que implica la ecuación; esto es, que el lado izquierdo sea igual al lado derecho en cuanto a la cantidad de unidades.

3 x 6 = 18

Lado Izquierdo 18 = 18 Lado Derecho.

Por lo tanto, Roque tiene en total 18 bombones.

Figura 13. Representación de la igualdad en un problema de multiplicación (4.01).

A continuación el instructor planteará el problema 4.02: “Felipe colecciona cartas para su álbum y ha comprado varios sobres. Cada sobre tiene 5 cartas. Si en total Felipe tiene 45 cartas, ¿cuántos sobres ha comprado?”. Para la resolución de este ejercicio, el instructor explicará la utilidad de un nuevo esquema para resolver ejercicios aritméticos: DOAS. Este esquema fungiría como herramienta genérica o heurística que sirve de guía al momento de resolver problemas multiplicativos.

DOAS

(Guía de la resolución de problemas verbales).

Detectar la estructura o el tipo del problema.

Organizar la información usando los diagramas conceptuales.

Acomodar el diagrama en una ecuación.

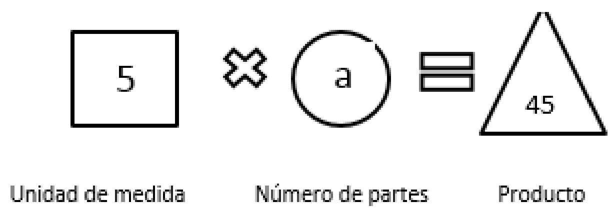
Solucionar la ecuación para la cantidad desconocida y checar la igualdad.

Figura 14. Esquema o herramienta heurística DOAS (detectar, organizar, acomodar y solucionar).

El procedimiento para aplicar el DOAS es el siguiente: **Detectando** la estructura del problema. Cada sobre tiene 5 cartas (Unidad de medida); en total son 45 cartas (producto); los sobres (número de partes) no se sabe. Por lo tanto, es un problema de tipo “Grupos Iguales”.

Organizando la información. Si la cantidad de sobres (número de partes) no se sabe, el instructor colocará en la figura correspondiente a “número de partes” la letra “a”. Si la cantidad total es de 45 cartas, esa cantidad se colocará en la figura de “Producto”. Por último, si la cantidad que tiene cada sobre es de 5 cartas, esa cantidad se colocará en la figura de “Unidad de medida”.

Acomodando y **Solucionando** el ejercicio. Para Acomodar el diagrama en una ecuación, se tiene que *despejar* la incógnita, para ello, el instructor indicará lo siguiente a los participantes: “Como las letras y los números no se llevan, es necesario pasar a los números juntos del lado derecho. Como el 5 está multiplicando en el lado izquierdo, si se pasa al lado derecho se tiene que *invertir* la multiplicación. Esto significa que el 5 tiene que dividir al 45, y para eso se pondrá *al lado del producto o el triángulo y con el signo de división”.*



Acomodando 5 x a = 45

Solucionando a = 45 ÷ 5

a= 9

Checando* 5 x 9 = 45

LI 45 = 45 LD

Por tanto, Felipe ha comprado 9 sobres.

*Sólo se aplica este paso cuando un ejercicio haya requerido del despeje de la incógnita.

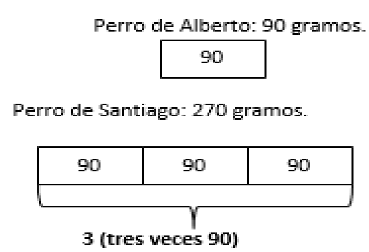
Figura 15. Representación del procedimiento que implica la implementación del DOAS y el esquema PI.

Evaluación 4. Los participantes podrían resolver en esta evaluación los ejercicios que corresponden a la evaluación 4 (**ver Anexo 4**). Si los participantes lograran resolver la mayor parte de los ejercicios, daría comienzo la fase 8.

Intervención 4. *Sesión 6. Representación de ejercicios de multiplicación. Multiplicación-Comparación.*

Esta intervención comenzaría con la presentación de la estructura de los ejercicios de tipo “Multiplicación-Comparación”. Para la presentación de los ejercicios "Multiplicación-Comparación", el instructor y los participantes utilizarán el esquema correspondiente (**ver anexo 3**). El instructor planteará el problema 5.01: "El perro de Alberto se come al día 90 gramos de pollo, sin embargo, el perro de Santiago se come 3 veces más carne que el perro de Alberto. El perro de Santiago se come 270 gramos de carne".

El instructor, después de indicar o escribir el tema del ejercicio y la frase clave de comparación, indicará a los participantes que este tipo de ejercicios se llaman "Multiplicación-Comparación", ya que compara la cantidad de gramos de pollo que se come al día el perro de Alberto y el de Santiago, lo cual requiere de una multiplicación y una división, debido a que, como el perro de Santiago come 3 *veces más,* al multiplicar 90 por 3 se obtendría el producto o total. Además, el instructor utilizará un esquema de barras para ejemplificar el problema:



El instructor relacionará las partes del esquema de barras con el esquema MC.

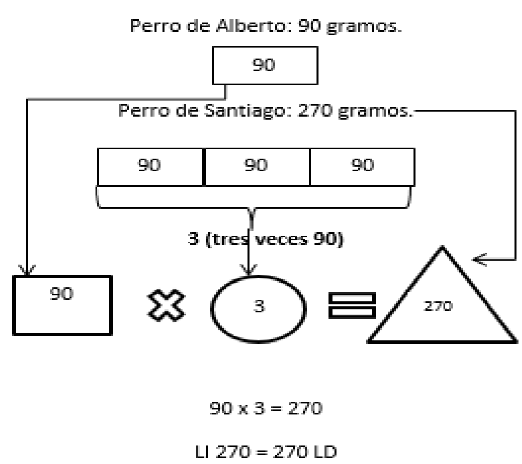


Figura 16. Representación del procedimiento de la resolución de ejercicios tipo MC.

Después de ejemplificar el ejercicio, el instructor planteará el ejercicio 5.02: “Lionel recibirá una beca de estudios por parte de su escuela. El primer año le pagarán 350 pesos y el segundo año recibirá 4 veces más esa cantidad. ¿Cuánto dinero recibirá Lionel de beca el segundo año?”.

El instructor agregará como esquema auxiliar el DOAS, sumado al esquema MC del siguiente modo: **Detectar** (paso 1) la estructura del problema. El segundo año recibirá 4 **veces** *más* esa cantidad. Dado que el ejercicio indica 4 veces más, es un ejercicio de tipo Multiplicación-Comparación, ya que se está comparando la cantidad de dinero dl la beca de Lionel el primer y segundo año.

Organizar (paso 2) la información usando diagramas conceptuales. La Unidad en el problema es 350, dado que es la cantidad que es multiplicada por otra. El 4 es la cantidad de veces que será multiplicado el 350, por ende, es el Multiplicador. El producto es el dato que falta, por lo tanto, se le pondrá una letra “a”:

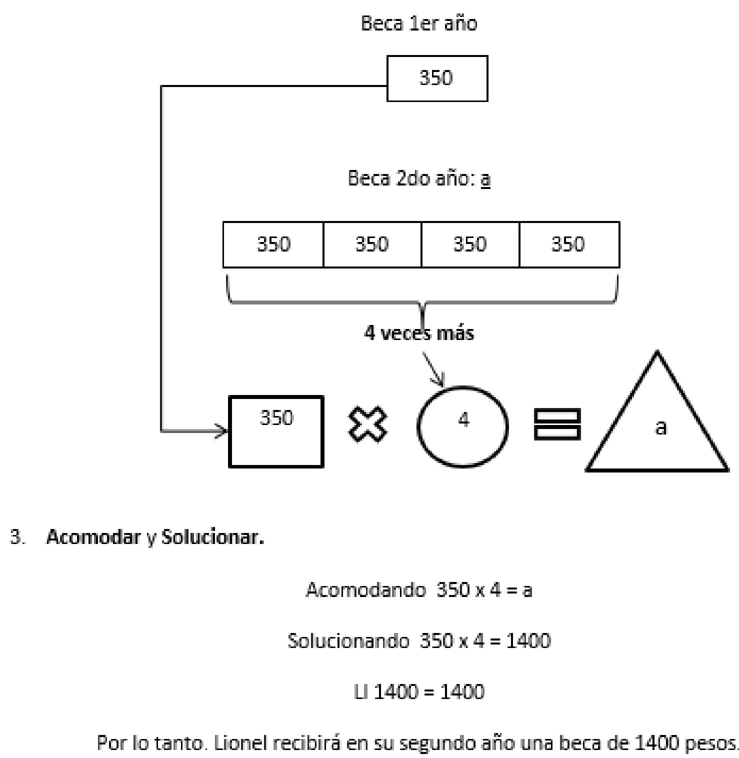


Figura 17. Representación de la implementación del esquema MC y del tercer y cuarto paso del DOAS.

Para los ejercicios que requieren de despeje, el instructor mencionará lo siguiente: “Como las letras y los números no se llevan, es necesario pasar a los números juntos del lado derecho. Como el número (cantidad dada por el ejercicio correspondiente) está multiplicando en el lado izquierdo, si se pasa al lado derecho se tiene que *invertir* la multiplicación. Esto significa que el número de la derecha tiene que dividir al número de la izquierda, y para eso se pondrá *al lado del producto o el triángulo y con el signo de división”.*

Evaluación 5. Los participantes podrían resolver los ejercicios correspondientes a la evaluación 5 (**ver Anexo 4**). Si los participantes logran resolver la mayor parte de los ejercicios, podrán ser parte de la fase 10.

Evaluación 6. *Sesión 7. Problemas de tipo PI y MC.*

Esta evaluación versaría sobre la presentación de problemas tanto *partes iguales* como de *multiplicación-comparación*. Primero se retomará, por parte del instructor, el procedimiento de resolución de dos ejercicios *partes iguales* y después se resolverán dos ejercicios tipo *multiplicación-comparación* (**ver Anexo 4**). Si los participantes lograran resolver la mayor parte de los ejercicios, podrán ser parte de la fase 11.

Intervención 5. *Sesión 8. Problemas con paréntesis.*

Esta intervención consistiría en problemas que requieren de una operación intermedia. Para poder resolver esa clase de ejercicios, el esquema auxiliar correspondiente es el siguiente:

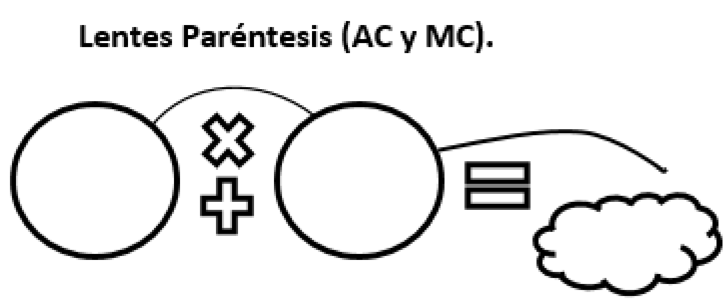


Figura 18. Esquema auxiliar “Lentes Paréntesis” para problemas que implican una operación intermedia.

Los “Lentes Paréntesis” se aplican si un ejercicio tiene dos datos conocidos y dos datos desconocidos (incógnitas) y cuando la pregunta del ejercicio requiera de un dato como máximo. Los lentes funcionan de acuerdo al tipo de ejercicio, por lo que pueden acomodarse en ellos datos del mismo modo que se hace ya sea en los problemas Adición-Comparación (Pequeño-Diferencia-Grande) o en los ejercicios Multiplicación-Comparación (Unidad-Multiplicador-Producto), por ello, los signos “+” y “x” se ponen en el mismo lugar, dejando al instructor y a los participantes la decisión sobre cuál usar. Después del signo de igual existe una nube debajo de la curva de los lentes, lo cual indica que el dato que resulte de la incorporación de los signos de *más* o *menos* se incorporará debajo.

El esquema “Lentes Paréntesis” se aplicará por el instructor del siguiente modo por medio del siguiente ejercicio (5.01): “Luan y Magdalena son hermanos y coleccionan conchitas en la playa. Luan tiene 4 conchitas y Magdalena tiene 5 más que él. ¿Cuántas conchitas tienen <u>entre los dos</u>?”

Aplicando el DOAS: <u>*Detectar*</u> la estructura del problema. Como faltan dos datos (Cantidad de conchitas de Luan y Magdalena y las conchitas de Magdalena), el ejercicio es de tipo “Lentes Paréntesis”, esto se puede notar en la pregunta del ejercicio (¿cuántas conchitas tienen entre los dos?) porque sólo requiere de un dato. La frase clave <u>Magdalena tiene 5 más que él</u> indica que el ejercicio, además de ser “Lentes Paréntesis”, es de Adición-Comparación, por lo que el ejercicio es de tipo “Lentes Paréntesis AC”. <u>*Organizar*</u> la información usando diagramas conceptuales.

Todos los problemas de tipo “Lentes Paréntesis”, dado que implican una operación intermedia, requieren de otro esquema en el que se pondrá el número que resulte de la resolución de la ecuación de su esquema. Por lo tanto, en todos los casos en este tipo de ejercicios, tendrán como esquema base el tipo “Parte-Parte-Todo”. Como se requieren dos datos en vez de uno, el esquema “Lentes Paréntesis” *tomará* los datos conocidos (el 4 y el 5) y los resolverá de acuerdo al tipo de ejercicio (Adición-Comparación o Multiplicación-Comparación). Los datos desconocidos serán representados con las letras “a” y “b”.

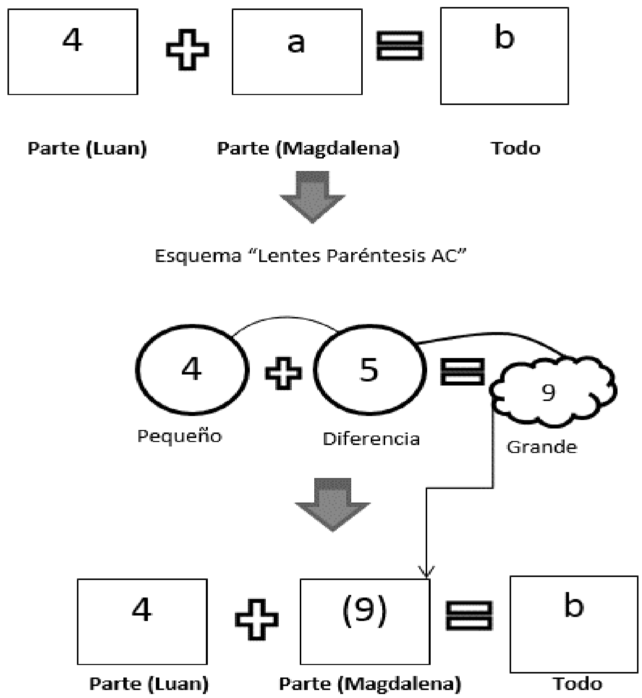


Figura 19. Representación del procedimiento relativo al ejercicio 5.01.

El resto de los pasos del DOAS y de la resolución del ejercicio se describen en la figura 20.

Acomodar el diagrama en una ecuación.

4 + 9 = b o b = 4 + 9

Solucionar la ecuación para la cantidad desconocida y checar la igualdad.

b = 13

LI 13 = 13 LD

Checando 4 + (4 + 5) = 13

Esquema "Lentes Paréntesis".

Por lo tanto, (resolviendo el paréntesis) son **9** las conchitas que tienen entre Luan y Magdalena.

Figura 20. Pasos 3 y 4 del DOAS y representación de la igualdad del ejercicio 5.02.

El instructor planteará a los participantes el ejercicio 5.03: "Dionisio compró dos perfumes. Si el primero le costó 540 pesos y el segundo le costó 3 veces más caro, ¿cuánto dinero se gastó Dionisio en total?". Aplicando el DOAS: *Detectar* la estructura del problema. Como faltan dos datos (El costo del segundo perfume y el gasto total de los perfumes) es un problema "Lentes Paréntesis". De acuerdo a la frase clave "*Si el primero le costó 540 pesos y el segundo le costó 3 veces más caro*", el ejercicio es de tipo "Multiplicación-Comparación", por lo que el esquema a utilizar es de tipo "Lentes Paréntesis MC". *Organizar* la información usando diagramas conceptuales.

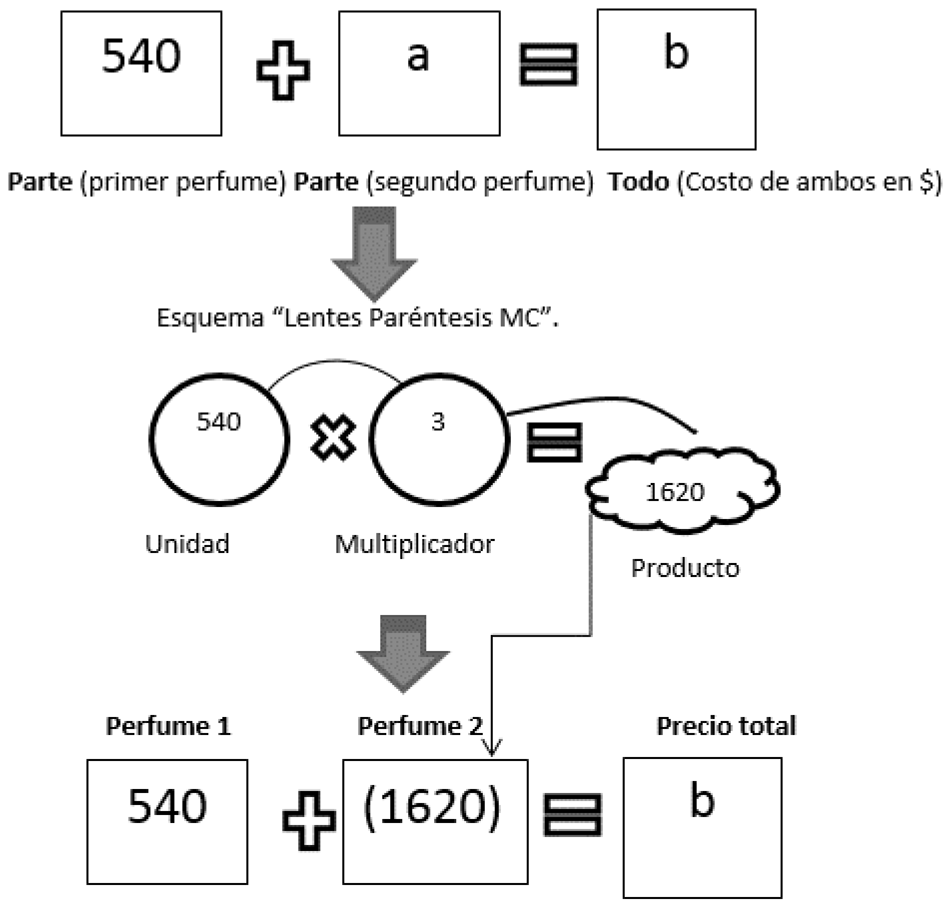


Figura 21. Representación del procedimiento (paso 1 y 2 del DOAS y uso de esquema LP) relativo al ejercicio 5.03.

El resto del procedimiento se describe en la figura 22:

Acomodar el diagrama en una ecuación.

$$540 + 1620 = b \quad o \quad b = 540 + 1620$$

Solucionar la ecuación para la cantidad desconocida y checar la igualdad.

$$b = 2160$$

$$LI\ 2160 = 2160\ LD$$

Checando la igualdad $\underbrace{540 + (540 \times 3)}_{1620} = 2160$

Por lo tanto, el costo de los dos perfumes fue 2160 pesos.

Figura 22. Representación de los pasos 3 y 4 del DOAS, así como de la igualdad del ejercicio 5.03.

Evaluación 7.

Esta evaluación contemplaría la implementación de los ejercicios relativos a la evaluación 7 (ver **Anexo 4**).

CONCLUSIÓN

A lo largo de esta revisión histórica de la lógica, procedimientos y planteamientos teóricos relativos a la enseñanza para la resolución de problemas matemáticos –particularmente aritméticos y planteados verbalmente– se ha expuesto una serie de rubros cruciales, los cuales han permitido identificar la configuración de la relación que existe entre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

El contexto expuesto en el primer capítulo permitió vislumbrar a través de estadísticas –tanto nacionales como internacionales– la problemática en la cual están imbuidos los estudiantes de educación básica en México, además de los referentes de evaluación y cómo estos se han ido modificando.

Cada metodología expuesta en el segundo capítulo tiene argumentos teóricos y metodológicos para considerarlas como propuestas vigentes. Sin embargo, algunas de ellas representan más ventajas que otras de acuerdo a principios de parsimonia, consistencia teórica o efectividad. La metodología del aprendizaje basado en esquemas es la que, al estar constituida por una taxonomía exhaustiva y por ser la que más eficacia demuestra en cuanto a la aplicación de sus postulados, tiene mayor probabilidad de transferencia del aprendizaje. Esta clase de contextos donde se proporcionan herramientas que permiten dar un orden sistemático a la información original, son los que representan el escenario más prometedor para la enseñanza de solución de problemas.

Los esquemas son, de acuerdo a los postulados vygotskianos relativos a los procesos psicológicos superiores, una configuración de signos que facilitan la interiorización de las relaciones cuantitativas implicadas en los problemas aritméticos planteados verbalmente. Por lo tanto, una metodología como la propuesta en la presente tesina, podría permitir no sólo que los estudiantes con problemas para resolver problemas matemáticos, tengan un modo más sencillo y efectivo de resolverlos con éxito, sino también un sistema lógico y de representación, que resulta compatible con los métodos de representación algebraica y por lo tanto, puede facilitar o hacer menos difícil la transición de la aritmética al álgebra. El rubro que queda aún pendiente es la aplicación de esta metodología y la confirmación o rechazo de la funcionalidad de un esquema auxiliar al momento de representar operaciones intermedias en problemas aritméticos verbales.

Esta aplicación de la metodología podría contemplar, inicialmente, estudios piloto (con una población mexicana que implique un rango de entre 7 y 8 años de edad) para comprobar el efecto de las variables sugeridas en la propuesta de investigación, como el uso de esquemas auxiliares, los esquemas de las estructuras de problemas aritméticos y la instrucción explícita. Si las variables demuestran afectar favorablemente el desempeño de uno o varios alumnos en la resolución de problemas aritmético verbales, se podría hacer uso de un diseño cuasi experimental para poder ampliar los resultados del estudio piloto con un grupo de tercer grado de primaria. Se podría hacer uso de la Prueba de Ejercicios Aritméticos Verbales (ver **Anexo 2**) y se podrían seleccionar a los alumnos con la puntuación más baja y que hayan requerido la mayor cantidad de tiempo para resolver los problemas.

.Si los resultados son favorables, entonces el estudio podría derivar en un diseño experimental que contemple una mayor cantidad de grupos por evaluar (de tercer a sexto grado de primaria) y, por ende, un mayor alcance en relación a la confiabilidad y validez externa del estudio.

Entendiendo que esta aplicación aún requiere validarse a través del *camino* descrito en el párrafo anterior, de confirmarse la efectividad evidenciada por las investigaciones de Xin (2012) pero en la población de alumnos de primaria de México, esta investigación podría dar cuenta de una alternativa en la enseñanza de las matemáticas, principalmente en el rubro de problemas aritméticos verbales.

Si la metodología demuestra ser capaz de resolver la problemática que implica en México la enseñanza y el aprendizaje de este tipo de problemas, la población más beneficiada serían los estudiantes de primaria que pueden dejar de estar en riesgo de tener dificultades en la transferencia de la aritmética al álgebra.

BIBLIOGRAFÍA

Alcalá, A., Vázquez, J., y Zarzosa, L. (2013). Solución estratégica a problemas matemáticos verbales de una sola operación. El caso de la multiplicación y la división. *Educación Matemática, 25* (3), 103-128.

Alfaro, C. (2006). Las ideas de Pólya en la resolución de problemas. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática, 1* (1), 1-13.

Blair. L. (2003). It's elementary: introducing algebraic thinking before high school. *SEDL Letter, 15* (1), 1-5.

Blanco, E. (2011). *Los límites de la escuela: educación, desigualdad y aprendizaje en México.* México: Colegio de México.

Blanton, M. & Kaput, J. (2005). Characterizing a classroom practice that promotes Algebraic reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education,* 36 (5), 412-446.

Carraher, D., Schliemann, A.D., Brizuela, B., & Earnest, D. (2006). Arithmetic and Algebra in early Mathematics Education. *Journal for Research in Mathematics Education*, *37* (2), 87-115.

Chen, Z. (1999). Schema induction in children's analogical problem solving. *Journal of Educational Psychology, 15,* 703-705.

Corbalán, F. y Deulofeu, J. (1996). Polya, un clásico en resolución de problemas. *Suma, 22,* 103-107.

Dewey, J. (1933). How We Think: A Restatement of Reflective Thinking to the Educative Process. Boston: D. C. Heath.

Díaz, J. (2013). Metodología para la resolución de problemas aritméticos en educación básica. Estado actual y propuesta de intervención. Tesis de Licenciatura, Facultad de Estudios Superiores Iztacala, Universidad Nacional Autónoma de México, México.

Fuchs, L.S., & Fuchs, D. (2002). Mathematical problem-solving profiles of students with mathematics disabilities with and without comorbid Reading disabilities. *Journal of Learning Disabilities, 35,* 563-573.

Fuchs, L. S., & Fuchs, D. (2005). Enhancing mathematical problem solving for students with disabilities. *The Journal of Special Education, 39* (1), 45-57.

Fuchs, L., Fuchs, D., Finelli, R., Courey, S. & Hamlett, L. (2004). Expanding Schema-Based Transfer Instruction to help third graders solve real-life mathematical problems. *American Educational Research Journal, 41* (2), 419-445.

Fuchs, L., Fuchs, D., Finello, R., Courey, S., Hamlett, L., Sones, E. & Hope, S. (2006). Teaching third graders about real-life mathematical problems solving: a randomized controlled study. *The Elementary School Journal, 106* (4), 293-313.

Fuchs, L. S., Fuchs, D., Prentice, K., Burch, M., Hamlett, C. L., Owen, R., et al. (2003). Explicitly teaching for transfer: Effects on third grade students' mathematical problem solving. *Journal of Educational Psychology, 95*, 293–305.

Fuchs, L., Fuchs, D., Prentice, K., Hamlett, C., Finelli, R. & Courey, S. (2004). Enhancing mathematical problem solving among third-grade students with schema-based instruction. *Journal of Educational Psychology.* 96, 635-647.

Fuchs, L. S., Seethaler, P. M., Powell, S. R., Fuchs, D., Hamlett, C. L., & Fletcher, J. M. (2008). Effects of preventative tutoring on the mathematical problem solving of third-grade students with math and reading difficulties. *Exceptional Children*, 74, 155–173.

Fuchs, L., Zumetra, R., Finelli, R., Powell, S., Seethaler, P., Hamlett, C. & Fuchs, D. (2010). The effects of Schema-Broadening Instruction on second grader's word-problem performance and their ability to represent word problems with algebraic equations: a randomized control study. *The Elementary School Journal, 110* (4), 1-25.

Hernández, V. M. y Villalba, M. C. (1994). George Pólya: el padre de las estrategias para la solución de problemas. Recuperado de: http://fractus.uson.mx/Papers/Polya/Polya.pdf. Octubre de 2015.

INEE (2012). México en PISA 2012. México: INEE.

INEE (2015). ¿Qué es PISA? Recuperado de: http://www.inee.edu.mx/index.php/proyectos/pisa/que-es-pisa. Septiembre de 2015.

Jitendra, A. K., DiPipi, C. M. & Perron-Jones, N. (2002). An exploratory study of Schema Based Word-Problem-Solving Instruction for middle school students with learning disabilities: an emphasis on conceptual and procedural understanding. *The Journal of Special Education, 36* (1), 23-38.

Jitendra, A. K., Griffin, C. C., McGoey, K., Gardill, M. C., Bhat, P., & Riley, T. (1998). Effects of mathematical word problems solving by students at risk or with mild disabilities. *Journal of Educational Research, 91*, 345-355.

Jitendra, A, K., & Hoff, K. (1996). The Effects of Schema-Bases Instruction on mathematical word problem solving performance of students with learning disabilities. *Journal of Learning Disabilities, 29,* 422-431.

Macias, M. (2013). La resolución de problemas matemáticos basada en el modelo de Polya, en alumnos de 5to y 6to grado de primaria. Tesis de Licenciatura, Facultad de Psicología, Universidad Nacional Autónoma de México. México.

Mares, G., (2001). La transferencia desde una perspectiva del desarrollo psicológico. En: Guadalupe Mares & Yolanda Guevara (Eds.) *Psicología Interconductual: Avances en la investigación básica.* México, UNAM-FES Iztacala. 11-164.

Mayer, D. P. (1998). Do new teaching standards undermine performance on old test? *Educational Evaluation and Policy Analysis, 15,* 1-16.

Moreira, M. (2002). La teoría de los campos conceptuales de Vergnaud. La enseñanza de las ciencias y la investigación en el área. *Enseñanza de las Ciencias, 7* (1), 1-28.

Nevot, A, (2004). Enseñanza de las matemáticas basada en estilos de aprendizaje. *Sociedad Española de Matemática Aplicada, 28,* 169-184.

Nguyen, Y. B. (2002). Using Story-Grammar Instruction and picture books to increase reading comprehension. *Academic Exchange Quality, 6* (2), 2-3.

OCDE (2012). Resultados de PISA en 2012 en foco. Recuperado de: http://www.oecd.org/pisa/keyfindings/PISA2012_Overview_ESP-FINAL.pdf. Septiembre de 2015.

OCDE (2014). PISA on focus. Paris: OCDE.

OCDE (2015). El programa PISA de la OCDE. Paris: OCDE.

Powell, S. (2011). Solving word problems using schemas: a review of the literature. *Learning Disabilities Research & Practice, 26* (2), 94-108.

Ramírez, L. (1998). Aplicación de un procedimiento cognoscitivo-conductual para la enseñanza de resolución de problemas aritméticos. Tesis de Licenciatura, Facultad de Psicología, Universidad Nacional Autónoma de México, México.

SEP (2013). Resultados históricos nacionales 2006-2013. México: SEP.

Sepúlveda, A., Medina, C., Sepúlveda, D. I. (2009). La resolución de problemas y el uso de tareas en la enseñanza de las matemáticas. *Educación Matemática 21* (2), 79-113.

Schliemann, A.D., Carraher, D.W., y Brizuela, B.M. (2011). El carácter algebraico de la aritmética. De las ideas de los niños a las actividades en el aula. Buenos Aires: Paidós.

Schmittau, J. (2011). The role of theorical analysis in developing algebraic thinking: a vygotskian perspective. En J. Cai & E. Knuth (Eds.), *Early algebraization: a global dialogue from Multiple Perspective,* (pp. 71-85). Nueva York: Ed. Springer.

Vergnaud, G. (1991). El niño, las Matemáticas y la realidad. México: Trillas.

Vygotsky, L. S. (1988). El desarrollo de los procesos psicológicos superiores. Barcelona: Grijalbo.

Vygotsky, L. S. (1996). *Pensamiento y lenguaje.* Barcelona: Paidós.

Xin, Y. P. (2012). *Conceptual model-based problem solving: Teach students with learning difficulties to solve math problems*. West Lafayette, EE.UU: Sense publishers.

Xin, Y. P., Wiles, B. & Lin, Y. (2008). Teaching conceptual model-based-word problem story grammar to enhance mathematics problems solving. *The Journal of Special Education, 42*, 163-178.

ANEXO 1.

Clasificación de Xin (2012) en relación a problemas aritméticos verbales.

Tipo de problemas.	**Subcategoría.**	**Desglose de la subcategoría.**	**Descripción de la incógnita.**
Adición-sustracción.	Parte-Parte-Todo (PPT).	Combinación.	Parte menor desconocida.
			Parte mayor desconocida.
		Cambio con ganancia.	Parte menor desconocida.
			Parte mayor desconocida.
		Cambio con pérdida.	Parte menor desconocida.
			Parte mayor desconocida.
	Adición-Comparación (AC).	Compara más.	Parte menor desconocida.
			Parte mayor desconocida.
			Diferencia desconocida.
		Compara menos.	Parte menor desconocida.
			Parte mayor desconocida.
			Diferencia desconocida.
Problemas Multiplicativos	Grupos Iguales (GI).		Se desconoce el valor de cada unidad (factor 1).
			Se desconoce el número de unidades (factor 2).
			Se desconoce el producto.
	Multiplicación-Comparación (MC).		Se desconoce el conjunto comparado.
			Se desconoce el conjunto de referencia.
			Se desconoce el multiplicador.

ANEXO 2.

Prueba de Ejercicios Aritméticos Verbales.

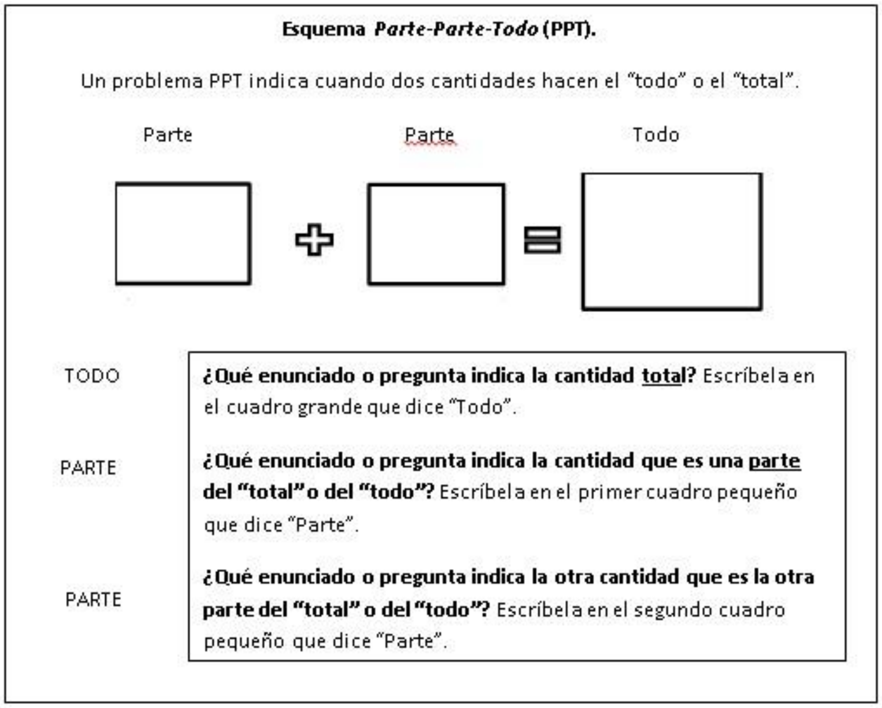
Nombre Completo:

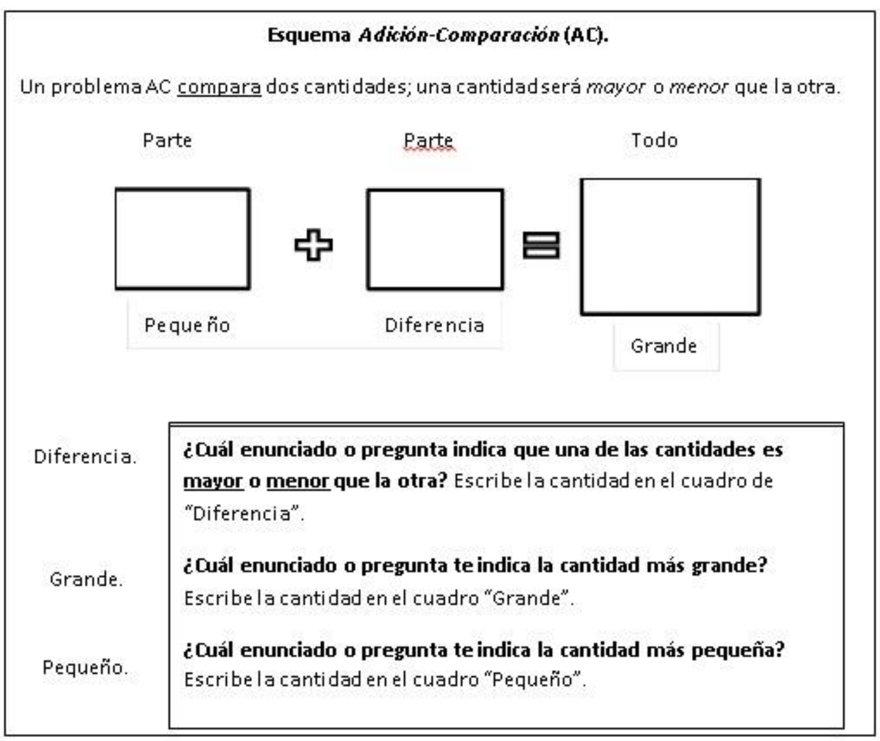
Resuelve los siguientes ejercicios.

1. Miguel y su amiga Anahí tienen ahorra algo de dinero. Miguel tiene ahorrado 65 pesos y Anahí tiene 30 pesos ahorrados. ¿Cuánto dinero tienen ahorrado entre los dos?
2. Sarah se compró un par de tenis blancos para su escuela. En el mercado le costaron 210 pesos. Si en el centro comercial le hubieran costado 85 pesos más, ¿Cuánto dinero se ahorró al comprar su par de tenis en el mercado?
3. José Luis es dueño de una manada de 8 cachorros. Cada día tiene que darles la misma cantidad de croquetas en sus platos cuando comen. Si cada plato tiene que contener 380 gramos, ¿Cuántos gramos de croquetas tiene para repartir José Luis en total?
4. Juan Pablo está pagando su celular a varios pagos en meses en vez de comprarlo de un solo pago. Si lo hubiera pagado en un solo pago, le hubiera costado 5850 pesos. A pagos en varios meses, el precio se eleva 3 veces. ¿Cuánto dinero le va a costar el celular a Juan Pablo?
5. Noemí tiene 39 flores en su jardín. Si le quedan 24 por que se le marchitaron algunas por no regarlas a tiempo, ¿Cuántas flores se le marchitaron a Noemí?
6. Teodoro y Simón salieron a pedir dulces en Halloween. Teodoro juntó 75 dulces y Simón juntó 18 dulces más, ¿Cuántos dulces juntaron entre los dos en Halloween?
7. Una pipa de agua tira 12 litros de agua cada día que sale a surtir. Si antes de que la repararan salió a surtir agua 8 días, ¿Cuántos litros de agua desperdició?
8. Georgina y Florentina compran diferentes detergentes en el súper mercado. A Georgina le costó el suyo 19 pesos, lo cual es 14 pesos menos que lo que le costó a Florentina el suyo. ¿Cuánto le costó el detergente a Florentina?
9. Emma y Yamile hacen un experimento en su casa. A Yamile se tardó en terminarlo 120 horas en total, lo cual es 48 horas menos que lo que se tardó Williams, ¿Cuántas horas se tardaron entre los dos para terminar su experimento?
10. Ramsés tiene que hacer la bandera de Francia con semillas coloreadas de Azul, Blanco y Rojo (porque son los 3 colores de la bandera de Francia). Si para cada color tiene que usar la misma cantidad de semillas y en total tiene 615 gramos de semillas, ¿cuántos gramos de semillas habrá en cada parte de la bandera de Francia?

ANEXO 3. ESQUEMAS DE LAS ESTRUCTURAS DE PROBLEMAS ARITMÉTICOS.

Adaptado de Xin (2012).

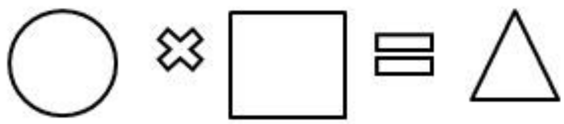


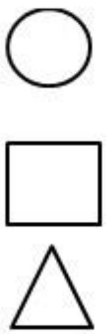


Partes Iguales (PI).

Un ejercicio de PI indica un número igual de segmentos o partes.

Unidad de medida   # de Partes   Producto





¿Cuál pregunta o enunciado indica la <u>Unidad de medida</u> (cantidad de elementos de cada parte)? Busca la Unidad de medida y escríbela en el círculo de "Unidad de medida".

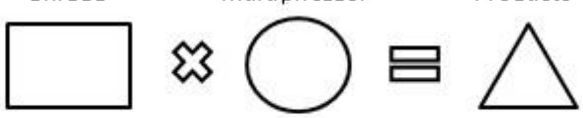
¿Cuál pregunta o enunciado indica el <u>Número de partes</u>? Escribe esa cantidad en el cuadrado de" # de Partes".

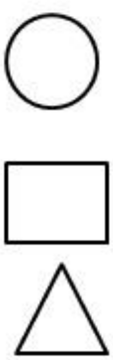
¿Cuál pregunta o enunciado indica el Total o el <u>Producto?</u> Escribe ese número en el triángulo de "Producto".

Multiplicación-Comparación (MC).

<u>Un ejercicio de MC indica cuando un número o cantidad multiplica y compara una parte de otra cantidad.</u>

Unidad   Multiplicador   Producto





¿Cuál pregunta o enunciado indica una cantidad que es "<u>más</u>" o "<u>menos</u>" <u>veces</u> que otra? Anótala en el círculo de "multiplicador".

¿Cuál pregunta o enunciado indica una cantidad o UNIDAD que es multiplicada por otra? Escríbela en el rectángulo de "Unidad".

¿Cuál es la cantidad comparada o el producto? Escríbela en el triángulo de "Producto".

ANEXO 4.

Ejercicios de evaluación 1.

1.3.: Teresa está intentando tomar hoy 2000 mililitros de agua al día. En la tarde llevaba 850 mililitros y siguió tomando agua. Ya en la noche, antes de dormir, consiguió tomar 1980 mililitros. ¿Cuántos mililitros de agua tomo entre la tarde y la noche? (Ejercicio con incógnita en medio).

1.4.: Mateo está tratando de pagar su computadora a "meses sin intereses" en la tienda "Omega", pero olvidó cuánto dinero dio en el primer pago. Si hasta el momento lleva tres pagos completos que suman 2000 pesos, y si en el segundo pago dio 580 pesos y en el tercero 849, ¿cuánto habrá dado en el primer pago? (Ejercicio con incógnita al principio).

1.5.: El profesor Joaquín tiene dos grupos en los que da clase, está interesado en saber a cuántos alumnos de ambos grupos les gusta jugar "escondidillas". En el primer grupo, a 34 alumnos les gusta ese juego, mientras que en el otro grupo fueron 28 alumnos a los que les gusta. ¿A cuántos alumnos del profeso Joaquín les gusta jugar "escondidillas"? (Ejercicio con incógnita al final).

1.6.: María es ama de casa y tiene dos hijas: Silvana y Gabriela. Entre las dos se gastan al día 89 pesos. Si Gabriela se gasta 38 pesos al día, ¿cuánto dinero se gasta Silvana? (Ejercicio con incógnita al principio).

Ejercicios de evaluación 2.

2.5.: Gema y su mamá quieren ir a un parque de diversiones cerca de su casa, y la entrada sólo cuesta 3000 gramos de arroz. En su casa sólo tiene 1850 gramos de arroz, por lo que a Georgina y a su mamá les faltan gramos de arroz. ¿Cuántos son? (Incógnita en la diferencia)

2.6.: Héctor está comprando sus útiles escolares. Cuando se dirigió a pagar a la caja, el cajero le dijo que los útiles estaban 140 pesos más baratos que el día de ayer, por un descuento especial. Si Héctor terminó pagando con el descuento 510 pesos. ¿Cuánto le hubieran costado sus útiles un día antes? (Incógnita en la cantidad más pequeña).

2.7.: Una niña ahorrativa rompió su *cochinito*, y contó su dinero ahorrado, dándole como resultado 890 pesos. Si su hermano también rompió su alcancía y al contar su dinero descubrió que ahorró en su propio *cochinito* 340 pesos menos que su hermana, ¿cuánto dinero ahorró él? (Incógnita en la cantidad más grande).

2.8.: La señora Leonor está comprando un detergente líquido en el supermercado, pero está confundida con los precios. El detergente *Perla* 6 pesos más barato que el detergente *Orquídea*, pero el detergente *Orquídea* cuesta 39 pesos. ¿Cuánto cuesta el detergente *Perla*? (Incógnita en la cantidad más pequeña)

2.9.: Los hoteles en la Ciudad de México registraron en el día de ayer el hospedaje de 365 turistas internacionales. El día de hoy hay 108 turistas en los hoteles de la Ciudad de México.

Ejercicios de evaluación 3.

3.1.: Liliana colecciona pulseras, al igual que su amiga Jazmín. Si Liliana tiene 56 pulseras y entre las dos tienen 98, ¿cuántas pulseras tiene Jazmín? (Parte-Parte-Todo; incógnita en la segunda "parte"). Ejercicio que servirá de ejemplo en la metodología.

3.2.: Un camión de transporte público tiene asientos disponibles para 49 personas. Si pueden ir de pie 78 personas, ¿cuántas personas caben en total en el camión? (Parte-Parte-Todo; incógnita en “todo”).

3.3.: Omar y Gabriela compitieron en una prueba de velocidad en su escuela y tenían que correr alrededor del patio. Omar tardó en correr alrededor del patio 107 segundos y Gabriela se tardó 19 segundos más que él. ¿Cuántos segundos se tardó Gabriela en correr alrededor del patio? (Adición-.Comparación más; incógnita en la cantidad más “grande”). Ejercicio que servirá de ejemplo en la metodología.

3.4.: Karla ha perdido dinero en la escuela dos veces. Si en la primera vez perdió 29 pesos y en la segunda vez perdió 56 pesos, ¿cuánto dinero perdido de diferencia hay entre la primera y segunda vez? (Adición-Comparación más; incógnita en la “diferencia”).

3.5.: Saúl fue por las tortillas hoy y pidió 3000 gramos. La señora de las tortillas le envolvió dos filas de tortillas porque no tenía papel largo. Si en la segunda fila le envolvió 2200 gramos, ¿cuántos gramos le envolvió la señora de las tortillas a Saúl en la primera fila? (Parte-Parte-Todo; incógnita en la primera “parte”).

3.6.: Felipe quiere comprarle a su papá su celular con el dinero que ha ahorrado de sus *domingos*. Su papá le pide 7600 pesos para venderle el celular. Si Felipe tiene 4500 pesos menos de los que pide su papá para llegar a esa cantidad, ¿cuánto dinero tiene ahorrado Felipe? (Adición-Comparación menos; incógnita en la cantidad más “pequeña”).

3.7.: Margarita quiere cuidar su alimentación y está indecisa en comer un helado light de chocolate o uno light de vainilla. El helado light de vainilla tiene 240 calorías, pero son 310 calorías menos que el helado de chocolate. ¿Cuántas calorías tiene el helado light de chocolate? (Adición-Comparación menos; incógnita en la cantidad más “grande”).

3.8.: María vende manzanas cubiertas de tamarindo en el mercado. Ella hizo 45 manzanas en total y le quedaron 23 al final del día. ¿Cuántas manzanas vendió María? (Parte-Parte-Todo; incógnita en la segunda “parte”).

3.9.: Joselyn tiene dos padrinos adinerados y le regalan dinero el fin de semana. Si uno de sus padrinos le regaló 560 pesos y en total los dos padrinos le regalaron 1200 pesos, ¿cuánto dinero le regaló su otro padrino? (Parte-Parte-Todo; incógnita en la primera “parte”).

3.10.: Ulises compró dos bolsas de tepache en el mercado. Si la primera bolsa contiene 650 mililitros y esa cantidad es 320 mililitros mayor que la segunda bolsa, ¿cuántos mililitros contiene la segunda bolsa de tepache? (Adición comparación más; incógnita en la cantidad más “pequeña”).

3.11.: Enrique y Daniel estaban compitiendo por ver quién de los dos come más tacos. Si Enrique comió 29 tacos y le ganó a Daniel, ya que Daniel sólo pudo comer 13 tacos, ¿cuántos tacos menos comió Daniel? (Adición-Comparación menos; incógnita en la “diferencia”).

3.12.: Lizbeth tiene muchos peces en su pecera, pero no todos salen a nadar al mismo tiempo; una parte sale en el día y la otra en la noche. Si en el día salen a nadar 34 peces y en la noche 46, ¿cuántos peces tiene Lizbeth en su pecera? (Parte-Parte-Todo; incógnita en el “todo”).

Ejercicios de evaluación 4.

4.3.: La señora Remedios vende perfumes a domicilio y le llegan paquetes a su casa para que los pueda vender. Si cada caja tiene 15 botellas de perfume y tiene en su casa 5 paquetes de esos perfumes, ¿cuántas botellas de perfume tiene en total la señora Remedios? (Incógnita en el Producto).

4.4.: Salomón, quien no tenía hambre, decidió compartir con sus hambrientos amigos los paquetes de galletas que se compró. Si compró 6 paquetes de galletas y en total les dio 36 galletas, ¿cuántas galletas tenían los paquetes? (Incógnita en la Unidad de medida).

4.5.: Rigoberto se gasta de lunes a viernes en la escuela la misma cantidad de dinero, por lo que los 5 días de la semana se gasta 35 pesos. ¿Cuánto dinero se gasta en una semana Rigoberto? (Incógnita en el Producto).

4.6.: Nicandro tiene 8 mandarinas. Si todas sus mandarinas tienen 96 gajos, ¿cuántos gajos tiene cada mandarina? (Incógnita en la Unidad de medida).

4.7.: Xóchitl tiene 8 cajas que contienen la misma cantidad de libros. Si en total tiene en las cajas 128 libros, ¿cuántos libros tiene en cada caja? (Incógnita en el Número de partes).

Ejercicios de evaluación 5.

5.3.: La empresa de tornillos “Torcidos” contrató este año 6 veces más empleados que el año pasado. Si este año contrató a 585 empleados, ¿cuántos empleados contrataron el año pasado en la empresa “Torcidos”? (Incógnita en la “Unidad”).

5.4.: Fernando suele jugar videojuegos varios minutos al día y hoy jugó dos veces. Si la primera vez que jugó duró en el juego 140 minutos y la segunda vez duró 3 veces más minutos que la primera vez, ¿cuántos minutos duró jugando videojuegos en total hoy? (Incógnita en el “Producto”).

5.5.: Gabriela y Tonatiuh tienen muchas materias reprobadas en la escuela. Si Gabriela tiene 4 materias reprobadas y Tonatiuh tiene 20, ¿cuántas veces más materias reprobadas tiene Tonatiuh en comparación con Gabriela? (Incógnita en el “Multiplicador”).

5.6.: Eunice y su amigo Andrés les gusta ir a conciertos. Si Eunice ha ido a 7 conciertos en toda su vida y Andrés ya fue a 35, ¿por cuántas veces más Andrés supera a Eunice en conciertos asistidos? (Incógnita en el “Multiplicador”).

5.7.: Odilia y Ofelia venden cajas de galletas de casa en casa. Ofelia vendió 9 veces más cajas de galletas que Odilia. Si entre las dos vendieron 63 cajas de galletas, ¿cuántas cajas de galletas logró vender Odilia? (Incógnita en la “Unidad”).

Ejercicios de evaluación 6.

6.1.: Nicandro tiene bolsas de comida para alimentar a sus gatos. Cada bolsa tiene 225 gramos. SI en total la cantidad de comida en las bolsas suman 1350 gramos, ¿cuántas bolsas de comida de gato tiene Nicandro? (Partes Iguales; Incógnita en el “Número de partes”). Ejercicio que servirá como ejemplo en la metodología.

6.2.: Javier y Osmar son hermanos. Osmar es 4 veces más grande en edad que Javier. Si Osmar tiene 20 años, ¿cuántos años tiene Javier? (Multiplicación-Comparación; Incógnita en la “Unidad”). Ejercicio que servirá como ejemplo en la metodología.

6.3.: En la escuela de Ramiro hay 16 jardines. Si en cada jardín hay 9 pinos, ¿cuántos pinos hay en la escuela de Ramiro? (Partes Iguales; Incógnita en el “Producto”).

6.4.: Fidel quiere comprarse un teléfono celular y está comparando dos modelos. El primer celular tiene 850 Megabytes de memoria RAM y el segundo tiene 6 veces esa cantidad en memoria RAM, ¿cuántos Megabytes de memoria RAM tiene el segundo modelo de teléfono celular? (Multiplicación-Comparación; Incógnita en el “Producto”).

6.5.: Brenda y Gonzalo han juntado latas de aluminio para venderlas a una fábrica de reciclaje. Si Gonzalo juntó 7 veces más gramos de aluminio que Brenda y entre los dos juntaron 4214 gramos, ¿cuántos gramos de aluminio juntó Brenda? (Multiplicación-Comparación; Incógnita en la "Unidad").

6.6.: Alfonso compró papas fritas para su fiesta en casa. Si compró 8 bolsas de papás y le costaron en total 210 pesos, ¿cuánto le costó cada bolsa? (Partes Iguales; Incógnita en la "Unidad de Medida").

6.7.: Emilio decidió cobrar las deudas que sus amigos tienen con él. Si antes de cobrar sus deudas tenía 23 pesos y después de cobrarlas juntó en total 276 pesos, ¿cuántas veces aumentó su dinero Emilio en comparación con lo que tenía al principio? (Multiplicación-Comparación; Incógnita en el "Multiplicador").

6.8.: Marina fue al cine con su novio y se compró varias bolsas de gomitas. Si cada bolsa tiene 17 gomitas y en total las bolsas juntas tienen 136 gomitas, ¿cuántas bolsas de gomitas compró Marina? (Partes Iguales; Incógnita en el "Número de partes").

6.9.: Aida está pintando su cuarto y se compró un bote de pintura de 3000 gramos. Si uso 12 botes de pintura para dividir la pintura en partes iguales del bote allí, ¿cuántos gramos de pintura tenían cada uno de los botes? (Partes Iguales; Incógnita en la "Unidad de Medida").

6.10.: Alejandra usa Facebook todos los días. Al principio del año tenía 52 amigos, si al final del año consiguió 312 amigos en total, ¿cuántas veces aumentó su cantidad de amigos en comparación con la cantidad que tenía al principio? (Multiplicación-Comparación; Incógnita en el Multiplicador").

6.11.: La familia de Axel está brindando por el "Año Nuevo" con las tradicionales uvas. Si cada copa tiene 12 uvas y son 19 copas las que su familia está utilizando, ¿cuántas uvas hay en total en las copas? (Partes Iguales; Incógnita en el "Producto").

6.12.: La familia de Axel está cenando por la "Navidad" con pavo. Si mamá compró el pavo en 350 pesos y ese precio es 4 veces más caro que lo que cuesta el resto del año, ¿cuánto vale normalmente, es decir, el resto del año, el pavo que compró la mamá de Axel? (Multiplicación-Comparación; Incógnita en el "Producto").

Ejercicios de evaluación 7.

7.3.: Karina y Trinidad son amigas y coleccionan *posters* de sus artistas favoritos. Trinidad tiene 5 posters más que su amiga Trinidad, es decir, tiene 14. ¿Cuántos *posters* tienen entre las dos amigas? (Lentes Paréntesis AC).

7.4.: Patricia y Karen trabajan en una oficina. Patricia gana 2500 pesos y Karen gana 5 veces más que ella. ¿Cuánto dinero ganan entre las dos? (Lentes Paréntesis MC).

7.5.: Brandon revela fotos en su estudio. Por revelar una foto cobra 65 pesos y por enmarcarla cobra 6 veces más. Si una señora le encargó revelar una de sus fotos y enmarcarla, ¿cuánto dinero gastó en total? (Lentes Paréntesis MC).

7.6.: Federico y Flavio están jugando "rayuela". Federico ha ganado 23 pesos y Flavio 19 pesos más que él. ¿Cuánto dinero han ganado los dos en total? (Lentes Paréntesis AC).