UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS Y DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA

G-FIBRACIONES

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN CIENCIAS

PRESENTA:
CARLOS ALBERTO AQUINO ZÁRATE

DIRECTOR DE LA TESIS:
DR. ROLANDO JIMÉNEZ BENÍTEZ
INSTITUTO DE MATEMÁTICAS CUERNAVACA

MÉXICO, D. F. 21 DE OCTUBRE DE 2015

Dedicado a Dios

Índice general

Introducción

El objetivo de este trabajo es entender la teoría de las G-fibraciones y G-fibraciones aproximables para grupos compactos y grupos finitos y demostrar que para un subgrupo grande H de un grupo compacto metrizable G, el funtor $G \times_H -$ preserva fibraciones aproximables equivariantes, es decir, $G \times_H p : G \times_H X \to G \times_H Y$ es una G-fibración aproximable si $p : X \to Y$ es una H-fibración aproximable (Teorema 3.5.1) por lo cual este trabajo está basado en el artículo *S. Prassidis, Equivariant Approximate Fibrations* [15], completando la mayor parte de las demostraciones y corrigiendo algunas de ellas.

En el primer capítulo damos una breve descripción de la teoría de grupos topológicos y G-espacios en donde también hablamos un poco de G-extensores y G-retractos, además mencionamos el importante resultado que afirma que X es un G-ANE metrizable para la clase de G-espacios metrizables si y sólo si X es un G-ANR para la misma clase (Teorema 1.5.1). También se demuestran algunos resultados con respecto a los G-CW complejos finitos.

El capítulo dos lo dedicamos a las G-fibraciones donde definimos las G-fibraciones de Hurewicz así como las G-fibraciones regulares. Además damos una caracterización local de las G-fibraciones para grupos compactos (Teorema 2.2.1) y una caracterización conocida de G-fibraciones de Serre (Teorema 2.3.1).

Por último, en el tercer capítulo hablamos de las G-fibraciones aproximables para grupos finitos y se demuestra que una función equivariante $p : X \to Y$ entre G-ANR's es una G-fibración aproximable si y sólo si satisface la propiedad de levantamiento de G-homotopía aproximable para G-celdas (Teorema 3.1.1) en donde suponemos que todos los G-espacios son métricos y G-retractos absolutos de G-vecindades para la clase de G-espacios métricos. En esta sección también demostramos una caracterización de las G-fibraciones aproximables por restricción a los puntos fijos (Teorema 3.1.2, resultado que aún no se ha demostrado para G-fibraciones de Hurewicz), es decir, una función equivariante $p : X \to Y$ es una G-fibración aproximable si y sólo si $p^H : X^H \to Y^H$ es una fibración aproximable para cada subgrupo H de G. Además presentamos herramientas necesarias para demostrar que la proyección natural $\pi : G \to G/H$ es una H-fibración donde G es un H-espacio mediante conjugación (Teorema 3.5.1), resultado que ocupamos como lema para la demostración del resultado principal.

Capítulo 1

Grupos topológicos y G-espacios

1.1. Grupos topológicos

Empezaremos dando la definición de grupo topológico ya que es uno de los objetos que utilizaremos a lo largo de este trabajo.

Definición 1.1.1. Un **grupo topológico** es un espacio topológico G con una estructura de grupo y ambas estructuras están relacionadas en el siguiente sentido: sea $(\ , \ ) : G \times G \to G$ la operación de grupo. Ahora pedimos que la operación de grupo y la inversión $i : G \to G$, $g \mapsto g^{-1}$ sean continuas. Si G y G' son grupos topológicos, un morfismo de grupos topológicos es una función continua $f : G \to G'$ tal que $f(g_1 g_2) = f(g_1)f(g_2)$ para todo $g_1, g_2 \in G$, es decir, los morfismos son las funciones que preservan la estructura de grupo topológico.

Algunos ejemplos de grupos topológicos son los siguientes:

Ejemplo 1.1.1. El grupo aditivo de los números reales $\mathbb{R}$, el grupo aditivo de los números complejos $\mathbb{C}$ y en general el grupo aditivo $\mathbb{R}^n$ con las topologías usuales. Además los grupos multiplicativos $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ y $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Cualquier grupo equipado con la topología dicreta es un grupo topológico llamado **grupo discreto**.

Ejemplo 1.1.2. Consideremos el conjunto de matrices $n \times n$ con entradas reales $M_n(\mathbb{R})$. Existe un isomorfismo $M_n(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{2n}$, $(a_{ij}) \mapsto (a_{11}, \ldots, a_{1n}, a_{12}, \ldots, a_{nn})$, este isomorfismo induce una topología en $M_n(\mathbb{R})$ y la métrica $\|A - B\| = (\sum_{i,j}(a_{ij} - b_{ij})^2)^{1/2}$ compatible con dicha topología, de esta manera el determinante $A \mapsto det(A)$ es una función continua ya que es una función polinomial, por razones similares, el producto $(A, B) \mapsto AB$ y la inversión $A \mapsto A^{-1}$ son continuas en donde estén definidas. De esta manera se definen los siguientes grupos topológicos:

- El **grupo general lineal** $GL_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid det(A) \neq 0\}$. Este grupo es un abierto de $M_n(\mathbb{R})$ ya que es imagen inversa del abierto $\{0\}^c$ bajo la función continua $det : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$.

- El **grupo especial lineal** $SL_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid det(A) = 1\}$. Este grupo es un subgrupo normal cerrado de $M_n(\mathbb{R})$ ya que es el kernel del morfismo de grupos $det : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

- Sea $I \in M_n(\mathbb{R})$ la matriz identidad y A^t la transpuesta de A. El **grupo ortogonal** $O(n) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid AA^t = I\}$. Como la función $A \mapsto AA^t$ es continua, O_n es cerrado en $M_n(\mathbb{R})$ y si $A \in O(n)$, entonces $\sum_j a_{ij}^2 = 1$ para cada i por lo tanto $O(n)$ está acotado y así es compacto.

- El **grupo especial ortogonal** $SO_n = O(n) \cap SL_n(\mathbb{R})$. Este grupo también es compacto ya que es cerrado en $O(n)$.

De la definición de grupo topológico se sigue que las traslaciones $L_g : G \to G$, $x \mapsto gx$ y $R_g : G \to G$, $x \mapsto xg$ son homeomorfismos.

Sean $A, B \subseteq G$ subconjuntos de un grupo topológico G, entonces emplearemos la siguiente notación:

$$AB = \{ab \mid a \in A,\, b \in B\}$$

$$A^{-1} = \{a^{-1} \mid a \in A\}$$

Un subconjunto $A \subseteq G$ que satisface $A^{-1} = A$ se llama conjunto simétrico. Es claro que si $A \subseteq G$ es abierto y $B \subseteq G$ entonces AB y BA son abiertos y si A es cerrado y B es finito entonces AB y BA son cerrados. A partir de ahora denotaremos por e al elemento neutro de un grupo topológico G.

Proposición 1.1.1. *Sea G un grupo topológico y sea $U \subseteq G$ una vecindad de e, entonces existen vecindades de e N, V y $W \subseteq G$ tales que*

$$N^2 \subseteq U, \;\; V^{-1} \subseteq U \;\; y \;\; WW^{-1} \subseteq U$$

Demostración: Como la operación de grupo $\varphi : G \times G \to G$ es continua, $\varphi^{-1}(U)$ es abierto, entonces existen abiertos de la identidad, U_1 y U_2 tal que $U_1U_2 \subseteq U$ así que el conjunto buscado es $N = U_1 \cap U_2$, de la misma manera existen V y W ya que la inversión y la división son continuas. $\square$

Proposición 1.1.2. *Todo grupo topológico G es un espacio regular y G es de Hausdorff si y sólo si $\{e\}$ es cerrado.*

Demostración: Como las traslaciones son homeomorfismos, es suficiente demostrar que se pueden separar un conjunto cerrado arbitrario que no contiene a e del conjunto $\{e\}$. Sea C un conjunto cerrado que no contiene a la identidad. Existe un abierto $W \ni e$ tal que $WW^{-1} \subseteq C^c$, entonces $W \cap CW = \emptyset$, los abiertos buscados son W y CW. Si $\{e\}$ es cerrado, entonces todos los puntos de G son cerrados y por ser G regular, es de Hausdorff, trivialmente si G es de Hausdorff, $\{e\}$ es cerrado. $\square$

Definición 1.1.2. Una **métrica invariante** izquierda o derecha de un grupo topológico G es una métrica d en G compatible con su topología tal que $d(hg_1, hg_2) = d(g_1, g_2)$ o respectivamente $d(g_1h, g_2h) = d(g_1, g_2)$

1.2. G-Espacios

En esta sección daremos una breve introducción a la categoría de G-espacios y funciones equivariantes llamada la categoría *G-Top* donde G es un grupo topológico. Antes de empezar hablaremos un poco de acciones de grupos en categorías más generales.

Sea G un grupo y $\mathcal{C}$ una categoría arbitraria. Si $A \in \mathcal{C}$ entonces el conjunto de automorfismos $Aut(A) = \{f \in Hom(A, A) \mid f$ es invertible $\}$ es un grupo con la composición, de esta manera una acción de G sobre A en la categoría $\mathcal{C}$ es un morfismo de grupos:

$$\varphi : G \to Aut(A)$$

Es decir cada elemento $g \in G$ se ve como un automorfismo de A. Si la categoría $\mathcal{C}$ es una categoría conjuntista, es decir, cada elemento $A \in \mathcal{C}$ es un conjunto y cada morfismo es una función, y si G actúa sobre A entonces el morfismo $\varphi : G \to Aut(A)$ induce una función

$$\widetilde{\varphi} : G \times A \to A$$

dada por $\widetilde{\varphi}(g, a) = \varphi(g)(a)$ para cada $g \in G$ y $a \in A$. A continuación definimos con mayor precisión una acción en la categoría de espacios topológicos:

Definición 1.2.1. Sea G un grupo. Un G**-espacio** es un espacio topológico X junto con una acción de G en X en la categoría de espacios topológicos, es decir, junto con un morfismo de grupos $\varphi : G \to Aut(X)$ donde $Aut(X)$ denota el grupo mencionado anteriormente, en este caso es el grupo de homeomorfismos. Por comodidad ocuparemos la siguiente notación: $\varphi(g)(x) = gx$. A la terna (G, X, φ) se le conoce como **grupo de transformaciones**.

La acción φ induce una función $\widetilde{\varphi} : G \times X \to X$ dada por $(g, x) \mapsto \varphi(g)(x)$ se sigue de la definición de acción que esta aplicación satisface lo siguiente:

- $\widetilde{\varphi}(e, x) = x$ para todo $x \in X$
- $\widetilde{\varphi}(g, \widetilde{\varphi}(h, x)) = \widetilde{\varphi}(gh, x)$ para toda $x \in X$, $g, h \in G$

Definición 1.2.2. Sea G un grupo topológico, un grupo de transformaciones (G, X, φ), es un **grupo topológico de transformaciones** si $\widetilde{\varphi} : G \times X \to X$ es continua.

Sea Δ un conjunto dirigido y X un espacio topológico. Una red en X es simplemente una función $x : \Delta \to X$, $x(\alpha) = x_\alpha$. También podemos denotar a la red $x : \Delta \to X$ por $(x_\alpha)_{\alpha \in \Delta}$. Si Δ' es un otro conjunto dirigido y $h : \Delta' \to \Delta$ es una función creciente ($h(\alpha_1) \leq h(\alpha_2)$ si $\alpha_1 \leq \alpha_2$), una subred de una red $x : \Delta \to X$ es la composición $x \circ h : \Delta' \to X$. Una red $(x_\alpha)_{\alpha \in \Delta}$ converge a $p \in X$ y escribimos $x_\alpha \to p$ si para cada abierto $U \subseteq X$ de p, existe $\beta \in \Delta$ tal que $x_\alpha \in U$ siempre que $\beta \leq \alpha$.

Sea $f : X \to Y$ una función continua entre espacios topológicos. Decimos que f es **abierta** si $f(U)$ es abierto siempre que U sea abierto y f es **cerrada** si $f(U)$ es cerrado siempre que U sea cerrado. f es **propia** si f es cerrada y $f^{-1}(y)$ es compacto para cada $y \in Y$. Si $f : X \to Y$ es además sobreyectiva, una función continua $s : Y \to X$ es una sección de f si $f \circ s = 1_Y$.

Si $A \subseteq G$ y $U \subseteq X$ son abiertos, entonces $\widetilde{\varphi}(A, U) = \bigcup_{g \in A} gU$ es abierto por lo tanto la función $\widetilde{\varphi} : G \times X \to X$ es abierta. Si además G es compacto, $\widetilde{\varphi}$ también es cerrada, lo que demostraremos en la siguiente proposición:

Proposición 1.2.1. *Si G es compacto, entonces $\widetilde{\varphi}$ es cerrada.*

Demostración: Sea $C \subseteq G \times X$ cerrado. Si $x \in \overline{\widetilde{\varphi}(C)}$, entonces existe una red $(g_\alpha, x_\alpha)_{\alpha \in I}$ en C tal que $g_\alpha x_\alpha \to x$. Por otra parte, como G es compacto, existe una subred (g_{α_γ}) de (g_α) que converge a algún punto $g \in G$, de este modo, $g_{\alpha_\gamma}^{-1} \to g^{-1}$, entonces $x_{\gamma_\gamma} = g_{\alpha_\gamma}^{-1}(g_{\alpha_\gamma} x_{\alpha_\gamma}) \to g^{-1}x$ y así, $(g_{\alpha_\gamma}, x_{\alpha_\gamma}) \to (g, g^{-1}x) \in C$ por lo tanto $x \in \widetilde{\varphi}(C)$. $\square$

Proposición 1.2.2. *Si (G, X, φ) es un grupo topológico de tranformaciones, entonces $\varphi : G \to Aut(X)$ es continua. (donde Aut(X) está dotado de la topología compacto-abierta).*

Demostración: Sea $U \subseteq Aut(X)$ un abierto sub-básico, es decir,

$$U = (K, V)_{(Aut(X))} = \{f \in Aut(X) \mid f(K) \subseteq V\}$$

donde K es un compacto y V es un abierto de X respectivamente, si $g \in \varphi^{-1}(U)$, entonces $g(K) \subseteq V$ entonces $(g, x) \in \widetilde{\varphi}^{-1}(V)$ para todo $x \in K$ y como $\widetilde{\varphi}^{-1}(V)$ es abierto, existen abiertos $W_x \subseteq G$ de g y $U'_x \subseteq X$ de x tal que $W_x U'_x \subseteq V$ para todo x y como K es compacto, existe un número finito de abiertos $W_x^1, \ldots, W_x^n$, $U'^1_x, \ldots, U'^n_x$ tal que

$$K \subseteq \bigcup_i U'^i_x$$

entonces $\cap W_x^i$ es abierto y es claro que $f(\cup U'^i_x) \subseteq V \ \ \forall f \in \cap W_x^i$ por lo tanto $g \in \cap W_x^i \subseteq \varphi^{-1}(U)$ y así, $\varphi^{-1}(U)$ es abierto. $\square$

Definición 1.2.3. Sea X un G-espacio con acción $\varphi : G \to Aut(X)$.

- Un subconjunto $A \subseteq X$ es **invariante** si $GA \subseteq A$. En este caso, $g(A) = A$ para cada $g \in G$ y así A es un G-espacio.
- Sea $x \in X$. Al conjunto $G_x = \{g \in G \mid gx = x\}$ se le conoce como **estabilizador de** x y es claramente un subgrupo de G.
- La **órbita de un punto** $x \in X$ se define como: $Gx = \{gx \mid g \in G\}$.
- φ es **transitiva** si para cualesquiera $x_1, x_2 \in X$ existe $g \in G$ tal que $x_1 = gx_2$. En este caso, X es un **G-espacio homogeneo**.
- Sea H un subgrupo de G. El **conjunto de puntos fijos de** H es el conjunto $X^H = \{x \in X \mid hx = x \ \forall h \in H\}$. Un punto $x \in X$ es un punto fijo de la acción si $x \in X^G$.
- φ es **efectiva** si es inyectiva o de manera equivalente, si $\bigcap_{x \in X} G_x = \{e\}$ ya que $ker(\varphi) = \bigcap_{x \in X} G_x$
- φ es **libre** si todos lo estabilizadores son triviales, es decir, $G_x = \{e\} \ \forall x \in X$.
- φ es **discontinua** si para todo compacto $K \subseteq X$, el siguiente conjunto $\{g \in G \mid gK \cap K \neq \emptyset\}$ es finito.
- φ es **propiamente discontinua** si para todo $x \in X$ existe un abierto $U \subseteq X$ de x tal que $gU \cap U = \emptyset$ para todo $g \notin G_x$.

Los siguientes son ejemplos de grupos topológicos de transformaciones:

Ejemplo 1.2.1. Cualquier grupo topológico G es un G-espacio donde la acción es la operación de grupo $G \times G \to G$. $(g,h) \mapsto gh$. Si G es un grupo topológico, cualquier espacio X es un G-espacio con la acción trivial, es decir, $G \times X \to X$, $(g,x) = x$.

Ejemplo 1.2.2. Sea G un grupo topológico y H un subgrupo de G. Definimos una acción de H sobre G por $\varphi : H \times G \to G$, $(g,h) \mapsto gh^{-1}$ para cada $h \in H$, $g \in G$. Esta acción es continua ya que la inversión lo es, de esta manera G es un H-espacio.

Ejemplo 1.2.3. Consideremos el grupo ortogonal $O(n)$ que actúa de manera natural en $\mathbb{R}^n$ de la siguiente manera: $\varphi : O(n) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $(A,x) \mapsto Ax$. Claramente está acción es continua, de esta manera $\mathbb{R}^n$ es un $O(n)$-espacio. Mas aun, como las transformaciones ortogonales preservan la norma, el disco unitario $D^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$ y su frontera S^{n-1} son $O(n)$-invariantes por lo tanto son $O(n)$-espacios.

Ejemplo 1.2.4. Consideremos el conjunto finito $S = \{0, 1, \ldots, k-1\}$ con la topología discreta y sea $X = S^{\mathbb{Z}}$ con la topología producto, sus elementos son funciones $f : \mathbb{Z} \to S$. Considerando a $\mathbb{Z}$ como grupo discreto, definimos una acción de $\mathbb{Z}$ sobre X por $\varphi : \mathbb{Z} \times X \to X$, $(n,f) \mapsto \varphi_n(f)$ donde $\varphi_n(f)(k) = f(n+k)$. Si $\pi_n : X \to S$ es la proyección en la n-ésima entrada, entonces $\varphi(n,-) = \varphi_n : X \to X$ satisface que $\pi_n \circ \varphi_1 = \pi_{n+1}$ y $\pi_n \circ \varphi_{-1} = \pi_{n-1}$ por lo tanto φ_1 y φ_{-1} son funciones continuas y así φ_n es continua y como $\mathbb{Z}$ es discreto, φ es continua. De esta forma X es un $\mathbb{Z}$-espacio.

Sea G un grupo y sean X e Y dos G-espacios. Un morfismo de G-espacios es una función continua $f : X \to Y$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & Y \arrow[d, "g"] \\ X \arrow[r, "f"'] & Y \end{tikzcd}$$

La colección de G-espacios junto con los morfismos de G-espacios es una categoría y es denotada por G-Top. A un morfismo en la categoría de G-espacios, se le conoce como **función equivariante**.

Definimos el funtor cociente $-/G : G\text{-}Top \to Top$ de la siguiente manera: Dado un G-espacio X, definimos el cociente como el siguiente conjunto $X/G = \{Gx \mid x \in X\}$ con la topología cociente de la proyección natural $\pi_X : X \to X/G$, $x \mapsto Gx$ y una función equivariante $\varphi : X \to Y$ induce una función continua $\widetilde{\varphi} : X/G \to Y/G$, $Gx \mapsto G\varphi(x)$ de esta manera el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\pi_X"'] & Y \arrow[d, "\pi_Y"] \\ X/G \arrow[r, "\widetilde{\varphi}"'] & Y/G \end{tikzcd}$$

Claramente con esta topología, la proyección orbital π_X, es abierta y si G es compacto, entonces $\pi_X^{-1}(\pi_X(C)) = G(C)$ es cerrado si $C \subseteq X$ es cerrado ya que la acción $\widetilde{\varphi}$ es una función cerrada. Además las fibras Gx son compactas ya que Gx es la imagen de la función continua $\lambda : G \to Gx$, $g \mapsto gx$ y de esta manera π_X es propia.

Ejemplo 1.2.5. Consideremos la acción del grupo discreto $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$ sobre la n-esfera $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\}$ definida por $\varphi : \mathbb{Z}_2 \times S^n \to S^n$, $\varphi(1, x) = -x$ es libre y como la función antipodal y la identidad en la esfera son continuas y como $\mathbb{Z}_2$ es discreto, φ es continua así que S^n es un $\mathbb{Z}_2$-espacio cuyo espacio cociente $S^n/\mathbb{Z}_2$ es el espacio que resulta de identificar de S^n los puntos diametralmente opuestos. Este espacio es llamado el **n-espacio proyectivo real** y es denotado por $\mathbb{P}^n$.

Sea X un G-espacio. Un **conjunto fundamental** respecto a la acción de G sobre X es un conjunto $D \subseteq X$ tal que $\pi_X |_D : D \to X/G$ es biyectiva, es decir es un conjunto que contienen exactamente un punto de cada órbita de X/G.

Ejemplo 1.2.6. Consideremos la acción por traslación de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{R}$, es decir, $\varphi : \mathbb{Z} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(n, r) \mapsto r + n$. El cociente $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ es isimorfo a S^1 ya que cada órbita admite un representante en el intervalo unitario $I = [0, 1]$ de manera única salvo los puntos 0 y 1 que están el la misma órbita ([0,1) es un conjunto fundamental), por lo tanto el cociente $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ se obtiene identificando en I los puntos 0 y 1. Consideremos ahora la acción de $\mathbb{Z}^2$ sobre $\mathbb{R}^2$, $\varphi : \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $((n, m), (x, y)) \mapsto (n, m) + (x, y)$. El espacio cociente es el toro $\mathbb{T}^2$ ya que cada órbita admite un representante en el cuadrado unitario $I^2 = [0, 1] \times [0, 1]$ de manera única salvo los puntos de su frontera, y se obtiene identificando los lados opuestos en el cuadrdado unitario, así el conjunto I^2 es la cerradura de de un conjunto fundamental.

Sea X un espacio topológico, decimos que un espacio E es un **cubriente** con la función continua $p : E \to X$, si p es sobreyectiva y si para cada $x \in X$ existe un abierto U de x y una colección de abiertos disjuntos dos a dos $U_\alpha \subseteq E$ tal que $p^{-1}(U) = \bigsqcup U_\alpha$ y tal que $p |_{U_\alpha} : U_\alpha \to U$ es un homeomorfismo. A la función p se le llamará **proyección cubriente**.

Proposición 1.2.3. *Sea X un G-espacio con acción libre y propiamente discontinua, entonces la proyección natural $\pi_X : X \to X/G$ es una proyección cubriente.*

Demostración: Sea $Gx \in X/G$ una órbita. Como la acción es propiamente discontinua, existe un abierto U de x tal que $gU \cap U = \emptyset$ para todo $g \neq e$ ya que la acción es libre, entonces $g_1 U \cap g_2 U = \emptyset$ siempre que $g_1 \neq g_2$. El conjunto $\widetilde{U} = \{Gx \mid x \in U\} \subseteq X/G$ es abierto ya que $\pi_X^{-1}(\widetilde{U}) = \bigcup_{g \in G} gU$ y además esta unión es disjunta. Por último, $\pi_X |_{gU} : gU \to \widetilde{U}$ es continua, sobreyectiva y abierta, por lo tanto es un homeomorfismo y así, π_X es una proyección cubriente. $\square$

A partir de ahora G será un grupo topológico y (G, X, φ) será un grupo topológico de transformaciones y siempre que hablemos de un G-espacio X, nos estaremos refiriendo a un grupo topológico de transformaciones.

Teorema 1.2.1 (Propiedad Universal del Cociente)**.** *Sea X, Y y Z espacios topológicos y $f : x \to Y$, $g : Y \to Z$ funciones donde f es continua y Y tiene la topología cociente inducida por f. Entonces $g \circ f$ es continua si y sólo si g es continua.*

Demostración: Supongamos que $g \circ f$ es continua. Sea $U \subseteq Z$ un abierto, entonces $f^{-1}(g^{-1}(U)) = (g \circ f)^{-1}(U)$ es abierto y de esta forma, $g^{-1}(U)$ es abierto. Por lo tanto g es continua. El recíproco es inmediato. $\square$

Sea $H < G$ un subgrupo de G y sea $q : G \to G/H$, $g \mapsto gH$, la proyección natural. La función $f : G \times G \to G \times G/H$, $(g_1, g_2) \mapsto (g_1, q(g_2))$ es continua, sobreyectiva y abierta por lo tanto es una identificación. Si definimos $\mu : G \times G/H \to G/H$ como $\mu(g_1, g_2H) = g_1g_2H$, entonces la función $\mu \circ f = q \circ (\, , \,)$ es continua y por el teorema 1.2.1, $\mu : G \times G/H \to G/H$ es continua. Por otra parte, $\psi : G \to Aut(G/H)$, $g \mapsto \psi(g) : G/H \to G/H$, dada por $\psi(g)(g'H) = gg'H$ es una acción ya que $\psi(g)$ es un homeomorfismo para toda $g \in G$ por lo tanto, $(G, G/H, \psi)$ es un grupo topológico de transformaciones.

Las funciones $\theta_x : G \to Gx$, $g \mapsto gx$ y $q : G \to G/H$ son funciones G-equivariantes. Además, la función $\widetilde{\theta_x} : G/G_x \to Gx$, $gG_x \mapsto gx$ es equivariante y biyectiva y hace el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} G \arrow[rr, "\theta_x"] \arrow[dr, "q"'] & & Gx \\ & G/G_x \arrow[ur, "\widetilde{\theta_x}"'] & \end{tikzcd}$$

Proposición 1.2.4. *Si G es compacto y X es de Hausdorff, entonces $\widetilde{\theta_x}$ es un homeomorfismo.*

Demostración: Sea $C \subseteq G/G_x$ cerrado, como G es compacto, G/G_x también lo es, de esta manera, C es compacto y así, $\widetilde{\theta_x}(C)$ es compacto y por ser X Hausdorff, también es cerrado. Por lo tanto, $\widetilde{\theta_x}$ es cerrada y un homeomorfismo. $\square$

1.3. Pull-back y push-out en la categoría G-Top.

Un diagrama conmutativo de funciones G-equivariantes:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "f'"'] & A \arrow[d, "f"] \\ B \arrow[r, "g"'] & Y \end{tikzcd}$$

es un **diagrama pull-back** en la categoría G-Top si satisface la siguiente **propiedad universal**: Si Z es un G-espacio y $\alpha : Z \to A$ y $\beta : Z \to B$ son equivariantes tales que $f \circ \alpha = g \circ \beta$, entonces existe una única función equivariante $\varphi : Z \to X$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[dr, "\varphi"] \arrow[drr, "\alpha"] \arrow[ddr, "\beta"'] & & \\ & X \arrow[r, "g'"'] \arrow[d, "f'"] & A \arrow[d, "f"] \\ & B \arrow[r, "g"'] & Y \end{tikzcd}$$

al G-espacio X se le conoce como pull-back de f y g y gracias a la propiedad universal, es único salvo isomorfismo y podemos definirlo de manera explícita como

$$X = \{(a, b) \in A \times B \mid f(a) = g(b)\}$$

con la acción diagonal. Al pull-back lo denotamos como $X = A \times_Y B$.

Proposición 1.3.1. *En el siguiente diagrama pull-back*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "f'"'] & A \arrow[d, "f"] \\ B \arrow[r, "g"'] & Y \end{tikzcd}$$

se satisface lo siguiente:

- *Si f es sobreyectiva, entonces f' también es sobreyectiva y si f es inyectiva, entonces f' también es inyectiva.*
- *Si f es abierta, f' también lo es.*
- *Si f admite una sección s, entonces f' admite una sección s' tal que $s \circ g = g' \circ s'$*
- *Si f es propia, entonces f' también lo es.*

Demostración: Como $X \cong A \times_Y B$, podemos suponer que $g' = \pi_1$ y $f' = \pi_2$ las proyecciones en la primera y segunda entrada respectivamente. Supongamos que f es sobreyectiva. Si $b \in B$, existe $a \in A$ tal que $f(a) = g(b)$, entonces $(a, b) \in A \times_Y B$ y $\pi_2(a, b) = b$ así que π_2 es sobreyectiva. Ahora supongamos que f es inyectiva. Sean $(a_1, b), (a_2, b) \in A \times_Y B$ entonces $f(a_1) = g(b) = f(a_2)$ entonces $a_1 = a_2$ y así π_2 es inyectiva. Si f admite una sección $s : Y \to A$, definimos $s' : B \to A \times_Y B$ por $s'(b) = (s(g(b)), b)$ que es una sección de π_2. Supongamos ahora que f es abierta, sean U y V abiertos en A y B respectivamante, sea $b \in \pi_2((A \times_Y B) \cap (U \times V))$, entonces existe $a \in U$ tal que $f(a) = g(b)$, $f(U)$ es abierto y $g(b) \in f(U)$. Para cada $x \in V \cap g^{-1}(f(U))$, existe $a \in U$ tal que $g(x) = f(a)$ entonces $b \in V \cap g^{-1}(f(U)) \subseteq \pi_2((A \times_Y B) \cap (U \times V))$ y así, π_2 es abierta. Ahora, si f es propia, sea $C \subseteq A \times B$ cerrado y $(a_\lambda, b_\lambda) \in A \times_Y B \cap C$ una red tal que $b_\lambda \to x$ entonces $g(b_\lambda) = f(a_\lambda) \to g(x)$. Por otra parte $f(\overline{\{a_\lambda\}})$ es cerrado, entonces $f(\overline{\{a_\lambda\}}) = \overline{f(\{a_\lambda\})}$ y $g(x) \in \overline{f(\{a_\lambda\})}$ de esta manera existe $a \in \overline{\{a_\lambda\}}$ tal que $g(x) = f(a)$ y como $x \in \overline{\{b_\lambda\}}$, $(a, x) \in \overline{\{(a_\lambda, b_\lambda)\}} \subseteq C$ por lo tanto $x \in \pi_2((A \times_Y B) \cap C)$ y así π_2 es cerrada. Sea $b \in B$, entonces $\pi_2^{-1}(b) \cong f^{-1}(g(b))$ que es compacto. Por lo tanto π_2 es propia. $\square$

Proposición 1.3.2. *Sea X un G-espacio y Z el pull-back de $A \xrightarrow{f} X/G \xleftarrow{\pi_X} X$ donde A es un G-espacio con la acción trivial y X/G es considerado como G-espacio con la acción trivial. Entonces $A \cong Z/G$.*

Demostración: Como $Z \cong A \times_{X/G} X$, podemos considerar el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} A \times_{X/G} X \arrow[r, "\pi_1"] \arrow[d, "\pi_2"'] & A \arrow[d, "f"] \\ X \arrow[r, "\pi_X"'] & X/G \end{tikzcd}$$

como π_X es sobre y abierta, π_1 es sobre y abierta y el diagrama anterior induce el siguiente diagrama sobre las órbitas:

$$\begin{tikzcd}
(A \times_{X/G} X)/G \arrow[r, "\widetilde{\pi_1}"] \arrow[d, "\widetilde{\pi_2}"'] & A \arrow[d, "f"] \\
X/G \arrow[r, "1_{X/G}"'] & X/G
\end{tikzcd}$$

y es claro que $\widetilde{\pi_1}$ es inyectiva y además sobre y abierta ya que π_1 lo es. Por lo tanto $Z/G \cong (A \times_{X/G} X)/G \cong A$. $\square$

Lema 1.3.1. *Si la composición de aplicaciones continuas* $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ *es propia con* Y *un espacio de Hausdorff, entonces* f *y* $g\mid_{f(X)}$ *son propias.*

Demostración: Si $z \in Z$ entonces $(g\mid_{f(X)})^{-1}(z) = f(X) \cap g^{-1}(z) = f((g \circ f)^{-1}(z))$ es compacto ya que $g \circ f$ es propia y f es continua. Un cerrado de $f(X)$ es de la forma $A \cap f(X)$ donde A es cerrado en Y entonces $g\mid_{f(X)} (A \cap f(X)) = g(A \cap f(X)) = (g \circ f)(f^{-1}(A))$ es cerrado ya que $g \circ f$ es cerrada y $f^{-1}(A)$ es cerrado y así $g\mid_{f(X)}$ es propia. Por otra parte, si $y \in Y$, $(g \circ f)^{-1}(g(y))$ es compacto y como Y es Hausdorff, $f^{-1}(y)$ es cerrado y como $f^{-1}(y) \subseteq (g \circ f)^{-1}(g(y))$, $f^{-1}(y)$ es compacto. Sea A cerrado en X, como $g \circ f$ es propia, $(g \circ f)\mid_A$ es propia y por la primera parte del lema, $g\mid_{f(A)}$ es propia y además admite una extensión continua a $\overline{f(A)}$ y gracias a ([8] lema 3.7.4), $f(A)$ no puede ser un subespacio propio de $\overline{f(A)}$ por lo tanto $f(A) = \overline{f(A)}$. $\square$

Si una función $f : X \to Y$ es equivariante, entonces $gf(x) = f(x)$ siempre que $g \in G_x$, es decir, $G_x \subseteq G_{f(x)}$ para todo $x \in X$ pero no siempre se tiene la igualdad. Cuando se tiene que $G_x = G_{f(x)}$ para todo $x \in X$, decimos que f es **isovariante**.

Proposición 1.3.3. *Sea* G *un grupo compacto. Sean* X *e* Y G*-espacios de Hausdorff y* $f : X \to Y$ *equivariante. Entonces el siguiente diagrama (donde los cocientes están considerados como* G*-espacios con la acción trivial)*

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi_X"'] & Y \arrow[d, "\pi_Y"] \\
X/G \arrow[r, "\widetilde{f}"'] & Y/G
\end{tikzcd}$$

es un pull-back si y sólo si f *es isovariante.*

Demostración: Supongamos que f es isovariante. Sea $P = \{(Gx, y) \mid Gf(x) = Gy\}$ el pull-back de $\widetilde{f}$ y π_y. Veamos que el morfismo inducido $h : X \to P$ es un G-isomorfismo. Si $(Gx_1, f(x_1)) = (Gx_2, f(x_2))$, entonces existe $g \in G$ tal que $x_2 = gx_1$ así que $g \in G_{f(x_1)} = G_{x_1}$ y $x_1 = x_2$, si $(Gx, y) \in P$, entonces $Gf(x) = Gy$ y existe $g \in G$ tal que $gf(x) = y$ así que $h(gx) = (Gx, y)$ por lo tanto h es biyectiva. π_X es propia ya que G es compacto y por el lema anterior, h es propia en particular, es cerrada y así, h es un homeomorfismo. Supongamos ahora que el diagrama anterior es un pull-back entonces X es G-isomorfo a P y $G_x = G_{(Gx, f(x))} = G_{Gx} \cap G_{f(x)} = G \cap G_{f(x)} = G_{f(x)}$. $\square$

A continuación daremos la definición de push-out en G-Top que es la definición dual del pull-back y espacio de adjunción para poder dar la definición de G-CW complejos:

Un diagrama conmutativo de funciones G-equivariantes:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & A \arrow[d, "f'"] \\ B \arrow[r, "g'"'] & Y \end{tikzcd}$$

es un **diagrama push-out** en la categoría de G-espacios si satisface la siguiente **propiedad universal**: Si Z es un G-espacio, $\alpha : B \to Z$ y $\beta : A \to Z$ equivariantes tales que $\beta \circ g = \alpha \circ f$, entonces existe una única función equivariante $\varphi : Y \to Z$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & A \arrow[d, "f'"'] \arrow[ddr, "\beta"] & \\ B \arrow[r, "g'"] \arrow[drr, "\alpha"'] & Y \arrow[dr, "\varphi"] & \\ & & Z \end{tikzcd}$$

Al espacio Y se le conoce como push-out de f y g y de nuevo como en el pull-back, Y es único salvo isomorfismo gracias a la propiedad universal del push-out y se puede definir de manera explícita como:

$$Y \cong A \sqcup B / \sim$$

donde $a \sim b$ si y sólo si existe $x \in X$ tal que $g(x) = a$ y $f(x) = b$.

Definición 1.3.1. Sea X un G-espacio, $A \subseteq X$ un subconjunto cerrado G-invariante y $f : A \to Y$ equivariante. El espacio de adjunción $X \cup_f Y$ es el cociente $(X \sqcup Y)/ \sim$ donde $a \sim f(a)$. En otras palabras, el siguiente diagrama es un push-out:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"'] & Y \arrow[d, "p|_Y"] \\ X \arrow[r, "p|_X"'] & X \cup_f Y \end{tikzcd}$$

donde i es la inclusión y $p : X \sqcup Y \to X \cup_f Y$ es la proyección natural. A la función f se le llama **función de pegado**.

1.4. G-CW complejos.

Los CW complejos son espacios muy usados en Topología Algebraica ya que son espacios relativamente sencillos pero también son lo suficientemete generales en muchos casos. La razón del nombre viene de las palabras Closure-finite-Weak-topology que son dos condiciones que satisface la definición de CW complejo:

- Condición de cerradura finita. Cualquier celda D^n_α está contenida en la unión de un número finito de interiores de celdas.

- Condición de topología débil. Un conjunto $F \subseteq X$ es cerrado si y sólo si $F \cap D^n_\alpha$ es cerrado en D^n_α para cada celda D^n_α.

A continuación damos la definición a detalle de un G-CW complejo:

Definición 1.4.1. Sea n un entero no negativo y sea $D^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < 1\}$. Una G-(n-celda) es un G-espacio de la forma $(G/H) \times D^n$ donde la G-acción sobre D^n es trivial y H es un subgrupo de G.

Definición 1.4.2. Un par de G-espacios (X, A) es un G-CW complejo relativo si X es el límite directo de G-espacios X_n con inclusiones $i_n : X_n \to X_{n+1}$, tal que X_0 es la unión disjunta de A y G-(0-celdas) G/H y X_n es obtenido de X_{n-1} adjuntando una colección de G-(n-celdas) $\{G/H_\alpha \times D^n\}_{\alpha\in R}$ mediante funciones equivariantes de pegado $\varphi_\alpha : G/H_\alpha \times S^{n-1} \to X_{n-1}$ como en el siguiente diagrama push-out:

$$\begin{tikzcd}
\bigsqcup_{\alpha\in R} G/H_\alpha \times S^{n-1} \arrow[r] \arrow[d] & X_{n-1} \arrow[d] \\
\bigsqcup_{\alpha\in R} G/H_\alpha \times D^{n} \arrow[r] & X_n
\end{tikzcd}$$

Si $A = \emptyset$, diremos que X es un G-CW complejo. Un G-CW complejo relativo (Y, B) es un subcomplejo de (X, A) si Y es un G-subespacio de X, B es un G-subespacio de A y $Y_n = Y \cap X_n$ en la descomposición celular.

La razón de la construcción de este tipo de espacios y de este pegado es que el resultado es un espacio con propiedades locales muy agradables como algunas propiedades topológicas de los espacios Euclideanos ya que en cada paso se está pegando la frontera de las n-celdas y de esta manera se tiene una copia homeomorfa del interior de cada n-celda en el n-esqueleto X_n.

Ejemplo 1.4.1. Sea (X, A) un G-CW complejo relativo y n un entero no negativo. Entonces (X, X_n) y (X_n, A) son G-CW complejos relativos y (X_n, A) es un subcomplejo de (X, A). De esta manera, los esqueletos son subcomplejos.

Ejemplo 1.4.2. Sea $\{(X_i, A_i)\}_{i\in R}$ una familia de subcomplejos de (X, A). Entonces el par de G-espacios $(\bigcap_i X_i, \bigcap_i A_i)$ es un subcomplejo. Además, si $\bigcup_i A_i$ es cerrado en X, entonces el par de espacios de G-espacios $(\bigcup_i X_i \bigcup_i A_i)$ es un subcomplejo.

Definición 1.4.3. Sea X un CW complejo y G un grupo. Decimos que una acción $G \to Aut(X)$ es celular si para cada $g \in G$ y cada n-celda E de X, gE es una n-celda de X.

Proposición 1.4.1. *Sea G un grupo discreto. X es un G-CW complejo si y sólo si X es un CW complejo con una acción celular de G con el mismo esqueleto.*

Demostración: Supongamos que X es un G-CW complejo y sea $\{G/H_\alpha \times D^n\}_{\alpha\in R}$ el conjunto de G-(n-celdas) de X, entonces tenemos una función equivariante

$$\varphi : \bigcup_{\alpha\in R} (G/H_\alpha \times D^n) \to X_n$$

tal que las funciones $\varphi\mid_{G/H_\alpha\times S^{n-1}}$ coinciden con las aplicaciones de pegado. Consideremos el conjunto $R'=\bigcup_{\alpha\in R}G/H_\alpha$ entonces obtenemos una aplicación $\psi: R'\times D^n\to X_n$ dada por $\psi(gH_i,x)=\varphi(gH_i,x)$ y de esta manera obtenemos un diagrama push-out:

$$\begin{tikzcd}
R'\times S^{n-1} \arrow[r] \arrow[d] & X_{n-1} \arrow[d] \\
R'\times D^n \arrow[r] & X_n
\end{tikzcd}$$

por lo tanto, X es un CW complejo en donde claramente G actúa en el conjunto de índices R', de esta manera es una acción celular. Ahora supongamos que X es un CW complejo con una acción celular de G, sea $\{D^n_\alpha\}_{\alpha\in R}$ un conjunto de n-celdas que definen la estructura de CW-complejo de X. Consideremos a R como un espacio discreto y sea $\psi: R\times D^\alpha\to X_n$ la aplicación asociada de n-celdas en X_n tal que al restrigirla sobre $R\times S^{n-1}$, obtenemos la aplicación de pegado. Ya que la acción de G en X es celular, G actúa sobre R, entonces R es unión disjunta de sus órbitas. Si R_i es la órbita de $i\in R$ y H_i es el estabilizador de i, entonces gracias a que R y G son discretos, R_i y G/H_i también son discretos, entonces tenemos un homeomorfismo $\gamma_i: R_i\cong G/H_i$. Definimos una función equivariante $\varphi_i: G/H_i\times D^n\to X_n$, $\varphi_i(g_1(gH_i),x)=g_1\psi(\gamma_i^{-1}(gH_i),x)$ entonces, restringiendo estas aplicaciones a $G/H_i\times S^{n-1}$ obtenemos aplicaciones de pegado y así el siguiente diagrama conmutativo es un push-out:

$$\begin{tikzcd}
\coprod_{\alpha\in J}(G/H_\alpha)\times S^{n-1} \arrow[r] \arrow[d] & X_{n-1} \arrow[d] \\
\coprod_{\alpha\in J}(G/H_\alpha)\times D^n \arrow[r] & X_n
\end{tikzcd}$$

y así, X es un G-CW complejo. □

Corolario 1.4.1. *Sea G un grupo discreto y H un subgrupo de G. Si X es un G-CW complejo, entonces X visto como H-espacio, es un H-CW complejo con el mismo esqueleto.*

Demostración: Como X es un G-CW complejo, X es un CW complejo con una acción celular de G. Entonces la restricción de la acción al subgrupo H, también es una acción celular. Por la proposición anterior, X es un H-CW complejo. □

En general un G-CW complejo no es un espacio metrizable pero un G-CW complejo finito siempre es metrizable y para demostrar esto, necesitamos el teorema de matrización de Nagata-Smirnov que mencionamos a continuación:

Teorema 1.4.1 (Teorema de metrización de Nagata-Smirnov (ver [8] 4.4.7))**.** *Un espacio topológico es metrizable si y sólo si es un espacio regular con una base σ-localmente finita.*

Lema 1.4.1. *La metrizabilidad es un invariante bajo aplicaciones propias.*

Demostración: Sea $f: X\to Y$ una aplicación propia de un espacio metrizable X en Y. Sea i un entero positivo y sea d una métrica para X y para cada $y\in Y$, consideremos los conjuntos $U_i(y)=D_{1/i}(f^{-1}(y))=\{y'\in Y\mid d(y',f^{-1}(y))<1/i\}$, $W_i(y)=Y\setminus f(X\setminus U_i(y))$, $V_i(y)=f^{-1}(W_i(y))\subseteq U_i(y)$. De la definición tenemos que $U_j(y)\subseteq U_i(y)$ si $j\geq i$.

La colección $\mathcal{W}_i = \{W_i(y) \mid y \in Y\}$ es una cubierta abierta de Y. Además para cada $y \in Y$, $\{W_i(y)\}_{i\in\mathbb{Z}^{>0}}$ es una base local en y. Para cada abierto V de y, existe un i tal que $U_i \subseteq V$ y como $f^{-1}(W_i(y)) \subseteq U_i(y)$, $W_i(y) \subseteq V$. Mostraremos ahora que para cada $W_i(y)$ existe un j tal que $\bigcup\{W_j(z) \mid W_j(z) \ni y\} \subseteq W_i(y)$. Existe $j \geq 2i$ tal que $U_j(y) \subseteq V_{2i}(y)$. Consideramos un punto $z \in Y$ tal que $y \in W_j(z)$, ya que $f^{-1}(y) \subseteq V_j(z) \subseteq U_j(z)$, existe $x \in f^{-1}(z)$ y $x' \in f^{-1}(y)$ tal que $d(x, x') < 1/j$ esto implica que $U_j(y) \cap f^{-1}(z) \neq \emptyset$ y $f^{-1}(z) \subseteq V_{2i}(y)$. Sea $t \in W_j(z)$, ya que $f^{-1(t)} \subseteq U_j(z)$, para cada $x \in f^{-1}(t)$ existe un $x' \in f^{-1}(z)$ tal que $d(x, x') < 1/j \leq 1/2i$. Obtenemos $f^{-1}(z) \subseteq V_{2i}(y) \subseteq V_{2i}(y)$, por lo tanto existe un $x'' \in f^{-1}(y)$ tal que $d(x', x'') > 1/2i$. Tenemos $d(x, x'') < 1/i$ esto implica que $f^{-1}(t) \subseteq U_i(y)$, es decir, $t \in W_i(y)$ y con esto se completa la demostración de la afirmación anterior. La cubierta $\mathcal{W}_i$ tiene un refinamiento localmente finito $\mathcal{B}_i$ entonces la unión $\bigcap_i \mathcal{B}_i$ es una base para Y y por el teorema de metrización de Nagata-Smirnov, Y es metrizable. □

Proposición 1.4.2. *Cada G-CW complejo finito es un G-espacio metrizable.*

Demostración: El resultado se obtiene del lema anterior y por inducción sobre el número de G-celdas, adjuntando celda por celda. □

1.5. G-extensores y G-retractos.

Antes de empezar hablaremos un poco de los encajes equivariantes.

Un **encaje G-equivariante** es una función continua equivariante $f : X \to Y$ tal que la restricción $f' : X \to f(X)$ es un homeomorfismo.

Sea $C_c(X, Y)$ el espacio de funciones continuas de X en Y con la topología compacto-abierta. En ocaciones denotaremos a $C_c(X, Y)$ simplemente por Y^X.

Para G-espacios X y Y donde X es localmente compacto, el espacio de funciones continuas Y^X con la topología compacto-abierta es un G-espacio con la acción definida por

$$\varphi : G \times Y^X \to Y^X$$

dada por $\varphi(g, f) = gf : X \to Y$, $gf(x) = g(f(g^{-1}x))$.

Un G-espacio L es llamado un **G-espacio lineal topológico** si y sólo si L es un espacio vectorial topológico sobre $\mathbb{R}$ con una acción continua de G en la categoría de espacios vectoriales topológicos. Es decir, L es un espacio vectorial y también es un espacio topológico y las operaciones de espacio vectorial son continuas. Un **G-espacio lineal normado** es un G-espacio lineal L junto con una norma G-invariante $\|\| : L \to \mathbb{R}$, así que L es un G-espacio métrico. Recordemos que un espacio de Banach es un espacio vectorial normado completo con la topología inducida por la norma. Si un G-espacio lineal normado B es completo, entonces B es un **G-espacio de Banach**.

En este trabajo una **clase** de espacios será la colección de objetos de una sub-categoría $\mathcal{C}$ de la categoría G-Top de espacios topológicos. **Una clase topológica débilmente hereditaria** es una clase $\mathcal{C}$ de G-espacios topológicos de Hausdorff que satisface:

- Si $X \in \mathcal{C}$ y $X' \cong X$, entonces $X' \in \mathcal{C}$.

- Si $X \in \mathcal{C}$ y $A \subseteq X$ es un subespacio invariante cerrado, entonces $A \in \mathcal{C}$.

Un G-$\mathcal{C}$ par (X, A) consta de un G-espacio X que pertenece a la clase $\mathcal{C}$ y un subespacio cerrado $A \subseteq X$ G-invariante.

Definición 1.5.1. Un **G-extensor absoluto de vecindades** para la clase $\mathcal{C}$, es un G-espacio Y tal que para cada G-$\mathcal{C}$ par, (X, A) y toda función G-invariante $f : A \to Y$, existe una vecindad G-invariante U de A y una G-extensión $\widetilde{f} : U \to Y$ de f y escribimos $Y \in G\text{-}ANE(\mathcal{C})$. Si además siempre se puede elegir $U = X$ entonces diremos que Y es un **G-extensor absoluto** para la clase $\mathcal{C}$ y denotaremos $Y \in G\text{-}AE(\mathcal{C})$.

Proposición 1.5.1. *Si $Y \in G\text{-}ANE(\mathcal{C})$ y $V \subseteq Y$ es un abierto invariante entonces $V \in G\text{-}ANE(\mathcal{C})$.*

Demostración: Sea (X, A) un G-$\mathcal{C}$par y $f : A \to V$ G-equivariante, sea $i : V \to Y$ la inclusión natural entonces existe una vecindad invariante $U \subseteq X$ de A tal que $i \circ f : A \to Y$ admite una G-extensión $\widetilde{f} : U \to Y$ de $i \circ f$, entonces la extensión buscada es $\widetilde{f}\,|_{\widetilde{f}^{-1}(V)} : \widetilde{f}^{-1}(V) \to V$. □

Proposición 1.5.2. *Sean $Y_1, \ldots, Y_n \in G\text{-}ANE(\mathcal{C})$ entonces $\Pi_i Y_i \in G\text{-}ANE(\mathcal{C})$. Si $\{Y_\alpha\}_{\alpha \in I} \subseteq G\text{-}AE(\mathcal{C})$, entonces $\Pi_\alpha Y_\alpha \in G\text{-}AE(\mathcal{C})$.*

Demostración: Sea (X, A) un G-$\mathcal{C}$par y $f : A \to \Pi_i Y_i$ equivariante, entonces cada aplicación $\pi_i \circ f = f_i : A \to Y_i$ admite una extensión $\widetilde{f_i} : U_i \to Y_i$ a una vecindad U_i de A así que $\widetilde{f} = (\widetilde{f_1}\,|_{\cap U_i}, \ldots, \widetilde{f_n}\,|_{\cap U_i})$ es la extensión buscada. De manera similar se demuestra la segunda afirmación pero ahora las extensiones son a todo el espacio X. □

Ejemplo 1.5.1. El teorema de extensión de Gleason ([13], Teorema 5.24) dice que si X es un $Gl_n(\mathbb{R})$-espacio normal y $A \subseteq X$ es un cerrado invariante y $f : A \to \mathbb{R}^n$ es $Gl_n(\mathbb{R})$-equivariante, entonces f admite una extensión $\widetilde{f} : X \to \mathbb{R}^n$ $Gl_n(\mathbb{R})$-equivariante. Este teorema dice $\mathbb{R}^n$ es un $Gl_n(\mathbb{R})$-extensor absoluto para la clase de $Gl_n(\mathbb{R})$-espacios normales.

Ejemplo 1.5.2. Gracias al teorema de extensión de Tietze, el intervalo unitario $I = [0, 1]$ es un extensor absoluto para la clase de espacios normales y como $(0, 1)$ es un abierto de $[0, 1]$, $(0, 1)$ es un extensor absoluto de vencindades para la misma clase y así también lo es $\mathbb{R} \cong (0, 1)$.

Definición 1.5.2. Sea X un G-$\mathcal{C}$-espacio. Diremos que X es un **G-retracto absoluto de vecindades** para la clase $\mathcal{C}$, denotado por $X \in G\text{-}ANR(\mathcal{C})$, si para cada G-$\mathcal{C}$-espacio Y y cada encaje equivariante $f : X \to Y$, existe una vecindad invariante U de $f(X)$ en Y tal que $f(X)$ es un G-retracto de U. Si además se puede tomar $U = Y$, diremos que X es un **G-retracto absoluto** y escribiremos $X \in G\text{-}AR(\mathcal{C})$.

Proposición 1.5.3. *Si Y es un G-retracto de $Z \in G\text{-}AE(\mathcal{C})$ (ó $Z \in G\text{-}ANE(\mathcal{C})$) entonces $Y \in G\text{-}AE(\mathcal{C})$ (ó $Y \in G\text{-}ANE(\mathcal{C})$).*

Demostración: Como Y es un G-retracto, existe una función equivariante $r : Z \to Y$ tal que $r(y) = y$ para todo $y \in Y$, sea (X, A) un G-$\mathcal{C}$ par y $\varphi : A \to Y$ equivariante, entonces $i \circ \varphi$ admite una extensión $\widetilde{\varphi}$ donde $i : Y \to Z$ es la inclusión natural, así que $r \circ \widetilde{\varphi}$ es la extensión buscada. □

Denotaremos ahora por $\mathcal{M}$ a la clase de G-espacios metrizables.

Proposición 1.5.4. *Sea Y un G-espacio metrizable. Si $Y \in G$-$AE(\mathcal{M})$ entonces $Y \in G$-$AR(\mathcal{M})$. Si $Y \in G$-$ANE(\mathcal{M})$ entonces $Y \in G$-$ANR(\mathcal{M})$.*

Demostración: Sea $\varphi : Y \to X$ un encaje equivariante cerrado y como $Y \cong \varphi(Y)$, $\varphi(Y) \in G$-$AE(\mathcal{C})$ ó $\varphi(Y) \in G$-$ANE(\mathcal{C})$ y además $(X, \varphi(Y))$ es un G-$\mathcal{C}$ par, entonces la identidad $1_{\varphi(Y)} : \varphi(Y) \to \varphi(Y)$ admite una extensión equivariante. Por lo tanto, un extensor absoluto (de vecindades) es un retracto absoluto (de vecindades). $\square$

El recíproco de la proposición anterior se satisface y es demostrado en [13], proposición 6.15 y es muy importante en este trabajo sobre todo en la sección 3.1 ya que los espacios G-ANR tienen el mismo tipo de homotopía de un G-CW complejo y a la vez necesitaremos la propiedad de ser extensores absolutos de vecindades.

Teorema 1.5.1. *Sea G un grupo compacto de Hausdorff y sea Y un G-espacio metrizable. Entonces $Y \in G$-$AR(\mathcal{M})$ si y sólo si $Y \in G$-$AE(\mathcal{M})$. $Y \in G$-$ANR(\mathcal{M})$ si y sólo si $Y \in G$-$ANE(\mathcal{M})$.*

Capítulo 2

G-fibraciones.

En este capítulo introducimos los conceptos de G-fibraciones y G-fibraciones regulares así como las propiedades, herramientas y construcciones necesarias para demostrar una caracterización local de las G-fibraciones regulares entre espacios metrizables, resultado que aplicaremos más adelante para demostrar el resultado principal de este trabajo.

2.1. Levantamiento de homotopías y G-fibraciones.

Definición 2.1.1. Sean X y Y G-espacios. Una **homotopía equivariante** es una función continua $h : X \times I \to Y$ equivariante, donde G actúa en $X \times I$ de manera diagonal y trivialmente en $I = [0,1]$ es decir, $g(x,t) = (gx,t)$ para toda $(x,t) \in X \times I$ y toda $g \in G$. Dos funciones equivariantes $f, g : X \to Y$ son G-homotópicas si existe una homotopía equivariante $h : X \times I \to Y$ tal que $h(x,0) = f(x)$ y $h(x,1) = g(x)$ para todo $x \in X$ y lo denotaremos por $f \simeq g$. Si $D \subseteq X$, diremos que una homotopía equivariante $h : X \times I \to Y$ es relativa a D si $h(d,t) = h(d,0)$ para cada $d \in D$ y cada $t \in I$ y lo denotaremos por $rel(D)$.

Definición 2.1.2. Una función equivariante $p : X \to Y$ tiene la **propiedad de levantamiento de G-homotopías** respecto a un G-espacio A si para cada función equivariante $f : A \to X$ y toda G-homotopía $h : A \times I \to Y$ de $p \circ f$ (es decir, $h(a,0) = p(f(a))$ para toda $a \in A$), existe una G-homotopía $\widetilde{h} : A \times I \to X$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i_0"'] & X \arrow[d, "p"] \\ A \times I \arrow[r, "h"'] \arrow[ur, "\widetilde{h}"] & Y \end{tikzcd}$$

donde $i_0(a) = (a,0)$ para toda $a \in A$.

Una función G-equivariante $p : X \to Y$ es una **G-fibración de Hurewicz** si p tiene la propiedad de levantamiento de G-homotopías respecto a todo G-espacio A.

Una clase importante de G-fibraciones son la fibraciones tal que si la homotopía es relativa a un subespacio cerrado invariante del G-espacio dado entonces existe un levantamiento que también es relativo a este subespacio, esta definición la formalizaremos en la siguiente definición:

Definición 2.1.3. Una función equivariante $p : X \to Y$ es una G**-fibración regular** si para cada subespacio invariante D de un G-espacio A y para cada diagrama G-equivariante:

$$\begin{tikzcd} (A \times \{0\}) \cup (D \times I) \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"'] & X \arrow[d, "p"] \\ A \times I \arrow[r, "h"'] & Y \end{tikzcd}$$

existe una G-homotopía $\widetilde{h} : A \times I \to X$ tal que $\widetilde{h} \circ i = f$ y $p \circ \widetilde{h} = h$.

Ejemplo 2.1.1. Sea G un grupo y X y Y G-espacios. Sea $p : X \times Y \to Y$, $(x, y) \mapsto y$, sea A cualquier G-espacio y consideremos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i_0"'] & X \times Y \arrow[d, "p"] \\ A \times I \arrow[r, "h"'] & Y \end{tikzcd}$$

definimos $\widetilde{h} : A \times I \to X \times Y$ por $(a, t) \mapsto (\pi_1(f(a)), h(a, t))$ donde π_1 es la proyección en la primera entrada. Entonces $\widetilde{h} \circ i_0(a) = \widetilde{h}(a, 0) = (\pi_1(f(a)), h(a, 0)) = (\pi_1(f(a)), p(f(a))) = f(a)$ y $p \circ \widetilde{h}(a, t) = p((\pi_1(f(a)), h(a, t))) = h(a, t)$ y demás, si $h(a, -) : I \to Y$ es constante entonces $\widetilde{h}(a, -) = (\pi_1(f(a)), h(a, -))$ también es constante. Por lo tanto p es una G-fibración regular.

Proposición 2.1.1. *Sean X y Y G-espacios. Si una función equivariante $p : X \to Y$ es una fibración con la propiedad de levantamiento único de trayectorias, entonces p es una G-fibración.*

Demostración: Sea $f : A \to X$ una función equivariante y $h : A \times I \to Y$ una G-homotopía de $p \circ f$ entonces por ser p una fibración, existe una función $\widetilde{h} : A \times I \to X$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i_0"'] & X \arrow[d, "p"] \\ A \times I \arrow[r, "h"'] \arrow[ur, "\widetilde{h}"] & Y \end{tikzcd}$$

por otra parte, $p(\widetilde{h}(gx, t)) = h(gx, t) = gh(x, t) = gp(\widetilde{h}(x, t)) = p(g\widetilde{h}(x, t))$ y además, $\widetilde{h}(gx, 0) = f(gx) = gf(x) = g\widetilde{h}(x, 0)$ esto significa que $\widetilde{h}(gx, t)$ y $g\widetilde{h}(x, t)$ son levantamietos de la misma trayectoria y que comienzan en el mismo punto por lo tanto $\widetilde{h}(gx, t) = g\widetilde{h}(x, t)$. $\square$

Corolario 2.1.1. *Toda proyección cubriente equivariante es una G-fibración.*

Ejemplo 2.1.2. $\mathbb{R}$ y S^1 son $\mathbb{Z}$-espacios con las acciones: $\mathbb{Z}$ actúa en $\mathbb{R}$ por traslación $n(r) = r + n$ y trivialmente en S^1. Definimos $p : \mathbb{R} \to S^1$ por $p(r) = e^{2\pi xi}$, entonces p es $\mathbb{Z}$-equivariante y como p es una proyección cubriente, es una $\mathbb{Z}$-fibración.

Lema 2.1.1. *Sea G un grupo compacto y X un G-espacio. Si V es una vecindad de un subconjunto invariante A de X, entonces existe una vecindad invariante U de A tal que $U \subseteq V$.*

Demostración: Supongamos que V es una vecindad abierta del subconjunto invariante $A \subseteq X$, y consideramos la proyección natural $\pi_X : X \to X/G$ que es cerrada ya que G es compacto. El conjunto $W = (X/G)\backslash\pi(X\backslash V)$ es abierto en X/G y contiene a $\pi(A)$. Además $\pi^{-1}(W) \subseteq V$ ya que $\pi^{-1}(w) \cap (X\backslash V) = \emptyset$ para todo $w \in W$. Así, $U = \pi^{-1}(W) = X\backslash(G(X\backslash V))$ es la vecindad invariante de A deseada. $\square$

Lema 2.1.2. *Sea G un grupo compacto, X y Y G-espacios, $A \subseteq X$ y B un subconjunto compacto de Y. Si V es una vecindad de $A \times B$ en $X \times Y$, entonces existe una vecindad invariante U de A, tal que $U \times B \subseteq V$.*

Demostración: Sea $a \in A$. Para cada $b \in B$, existen vecindades abiertas $V_b \subseteq X$ y $W_b \subseteq Y$, de A y B respectivamente, tales que $V_b \times W_b \subseteq V$. Entonces la colección $\{V_b \times W_b\}_{b\in B}$ es una cubierta abierta de $\{a\} \times B$. Como $\{a\} \times B$ es compacto, existe una subcubierta finita $\{V_{b_1} \times W_{b_1}, \ldots, V_{b_n} \times W_{b_n}\}$ tal que $\{a\} \times B \subseteq \bigcup_i (V_{b_i} \times W_{b_i}) \subseteq V$. Consideremos $V_a = \bigcap_i V_{b_i}$. Entonces V_a es una vecindad abierta de a en X y como para toda $b \in B$, $V_a \times \{b\} \subseteq V$ entonces $V_a \times B \subseteq V$. Definimos $\widetilde{V} = \bigcup_{a\in A} V_a$. Entonces $\widetilde{V}$ es una vecindad de A, y por el lema anterior, existe una vecindad invariante U de A tal que $U \subseteq \widetilde{V}$. Ahora es inmediato que $U \times B \subseteq V$. $\square$

Corolario 2.1.2. *Sea G un grupo compacto y (X, A) un G par. Si V es una vecindad de $A \times I$ en $X \times I$, entonces existe una vecindad invariante U de A en X tal que $U \times I \subseteq V$.*

Proposición 2.1.2. *Para el siguiente diagrama pull-back*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "f'"'] & A \arrow[d, "f"] \\ B \arrow[r, "g"'] & Y \end{tikzcd}$$

se satisface lo siguiente:

1. *Si f es una G-fibración (regular), entonces f' es también una G-fibración (regular).*
2. *Sea G un grupo compacto de Hausdorff. Si A, B y Y son espacios metrizables G-$ANR(\mathcal{M})$ y f es una G-fibración regular, entonces X es un espacio G-$ANR(\mathcal{M})$.*

Demostración: 1. Sea $\varphi : Z \to X$ una función equivariante y $h : Z \times I \to B$ homotopía G-equivariante de $f' \circ \varphi$ entonces existe una G-homotopía $\widetilde{h} : Z \times I \to A$ de tal manera que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "i_0"'] & X \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "f'"] & A \arrow[d, "f"] \\ Z \times I \arrow[r, "h"'] \arrow[urr, "\widetilde{h}"] & B \arrow[r, "g"'] & Y \end{tikzcd}$$

y como $g(h(z,t)) = f(\widetilde{h}(z,t))$ así que $(h(z,t), \widetilde{h}(z,t)) \in A \times_Y B \cong X$ por lo tanto existe un levantamiento $\widetilde{h}' : Z \times I \to X$ de h, de manera similar se demuestra que si f es una fibración regular entonces f' también es regular.

2. Por el teorema 1.5.2, $A, B, Y \in G\text{-}ANE(\mathcal{M})$, basta demostrar que $X \in G\text{-}ANE(\mathcal{M})$. Sea (Z, A) un G-$\mathcal{M}$ par y $h : A \to X$ equivariante, como $A, B \in G\text{-}ANR(\mathcal{M})$, existen vecindades abiertas U_1 y U_2 invariantes de D y extensiones $\widetilde{f} : U_1 \to B$ y $\widetilde{g} : U_2 \to A$ de $f' \circ h$ y $g' \circ h$ respectivamente. Sea $U = U_1 \cap U_2$, ahora definimos la función

$$\widetilde{h} : (U \times \{0,1\}) \cup (D \times I) \to Y$$

de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
\widetilde{h}(x,0) &= f(\widetilde{g}(x)), \quad x \in U, \\
\widetilde{h}(x,1) &= g(\widetilde{f}(x)), \quad x \in U, \\
\widetilde{h}(a,t) &= f(\widetilde{g}(a)) = g(\widetilde{f}(a)), \quad a \in D,\ t \in I.
\end{aligned}$$

entonces $\widetilde{h}$ es continua. Como $B \in G\text{-}ANR(\mathcal{M})$, existe una vecindad invariante W de $(U \times \{0,1\}) \cup (D \times I)$ en $U \times I$ y una extensión G-equivariante $h' : W \to Y$ de $\widetilde{h}$. Por el lema anterior, existe una vecindad invariante V de D en U tal que $V \times I \subseteq W$. Así tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
(V \times \{0\}) \cup (D \times I) \arrow[r, "\widetilde{g}'"] \arrow[d, "i"'] & A \arrow[d, "f"] \\
V \times I \arrow[r, "h'|_{V \times I}"'] & Y
\end{tikzcd}$$

donde $\widetilde{g}'(x,t) = \widetilde{g}(x)$ para cada $(x,t) \in (V \times \{0\}) \cup (D \times I)$. Como f es una G-fibración regular, existe $H : V \times I \to A$ equivariante tal que el diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
(V \times \{0\}) \cup (D \times I) \arrow[r, "\widetilde{g}'"] \arrow[d, "i"'] & A \arrow[d, "f"] \\
V \times I \arrow[r, "h'|_{V \times I}"'] \arrow[ur, "H"] & Y
\end{tikzcd}$$

Definamos $\overline{g} : V \to A$, $\overline{g}(v) = H(v,1)$ para cada $v \in V$, entonces $f(\overline{g}(v)) = f(H(v,1)) = h'(v,1) = g(\widetilde{f}(v))$. Por lo tanto $\overline{g}$ y $\widetilde{f}\ |_V$ determinan una función equivariante única $\overline{h} : V \to X$ tal que $g' \circ \overline{h} = \overline{g}$ y $f' \circ \overline{h} = \widetilde{f}$. Además como $\overline{g}\ |_D = \widetilde{g}\ |_D = g' \circ h$ y $\widetilde{f}\ |_D = f' \circ h$, entonces $\overline{h}\ |_D = h$ por lo tanto $\overline{h}$ es la extensión buscada. $\square$

Definición 2.1.4. Sea $p : X \to Y$ una G-fibración, y $D(p) \subseteq X \times Y^I$ el subespacio $D(p) = \{(x,\alpha) \mid p(x) = \alpha(0)\}$. Una **función de levantamiento** para $p : X \to Y$ es una función equivariante $\lambda : D(p) \to X^I$ (donde la acción en X^I está dada por $(g\alpha)(t) = g(\alpha(t))$) tal que $\lambda(x,\alpha)(0) = x$ y $p(\lambda(x,\alpha)(t)) = \alpha(t)$ para cada $(x,\alpha) \in D(p)$. Decimos que λ es regular si $\lambda(x,\alpha)$ es una trayectoria constante siempre y cuando α sea constante.

Teorema 2.1.1. *Una función equivariante $p : X \to Y$ es una G-fibración de Hurewicz si y sólo si existe una función de levantamiento. La función $p : X \to Y$ es una G-fibración regular si y sólo si la función de levantamiento es regular.*

Demostración: Supongamos que $p : X \to Y$ es una G-fibración. Sea $h : D(p) \times I \to Y$, $((x,\alpha),t) \mapsto \alpha(t)$ entonces tenemos

$$\begin{tikzcd}
D(p) \arrow[r, "\pi_1"] \arrow[d, "i_0"'] & X \arrow[d, "p"] \\
D(p) \times I \arrow[r, "h"'] & Y
\end{tikzcd}$$

un diagrama conmutativo equivariante, de esta manera existe una función equivariante $\widetilde{h} : D(p) \times I \to X$ tal que $\widetilde{h}(d,0) = \pi_1(d)$ y $p \circ \widetilde{h} = h$, con esto, definimos $\lambda : D(p) \to X^I$, $\lambda(x,\alpha)(t) = \widetilde{h}((x,\alpha),t)$, entonces $\lambda(x,\alpha)(0) = \widetilde{h}((x,\alpha),0) = \pi_1(x,\alpha) = x$ y $p(\lambda(x,\alpha)(t)) = p(\widetilde{h}((x,\alpha),t)) = h((x,\alpha),t) = \alpha(t)$ y es fácil ver que λ es equivariante y que si p es una G-fibración regular, entonces λ es regular.

Supongamos ahora que $p : X \to Y$ admite una función de levantamiento $\lambda : D(p) \to X^I$. Sea $f : A \to X$ equivariante y $h : A \times I \to Y$ una G-homotopía de $p \circ f$, definimos $\widetilde{h} : A \times I \to X$ por $\widetilde{h}(a,t) = \lambda(f(a), h(a, \_))(t)$ esta función es claramente equivariante y hace el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i_0"'] & X \arrow[d, "p"] \\
A \times I \arrow[r, "h"'] \arrow[ur, "\widetilde{h}"] & Y
\end{tikzcd}$$

y además, si λ es regular y $h(a, \_)$ es constante, entonces $\widetilde{h}(a, \_) = \lambda(f(a), h(a, \_))(\_)$ es constante por lo tanto p es regular. $\square$

Gracias a la proposición anterior, si suponemos que X y Y son G-espacios metrizables, $D(p)$ también es metrizable y así, p es una G-fibración si y sólo si p tiene la propiedad de levantamiento de homotopía equivariante con respecto a G-espacios metrizables.

2.2. Caracterización local de las G-fibraciones.

En esta sección demostraremos que una función equivariante $p : X \to Y$ entre G-espacios metrizales es una G-fibración si y sólo si la restricción de p a una vecindad invariante de cada punto de Y, $p \mid_{p^{-1}(U)} : p^{-1}(U) \to U$ es una G-fibración, para esto, vamos a suponer a lo largo de toda la sección que G es un grupo compacto, pero antes de eso, daremos una contrucción y herramientas para la demostración.

Sea Y un G-espacio fijo. Denotaremos por G-Top_Y a la categoría de **G-espacios sobre** Y, es decir, los objetos en esta categoría son pares (X,f) donde X es un G-espacio y $f : X \to Y$ es G-equivariante y un morfismo entre (X_1,f_1) y (X_2,f_2) es una función equivariante $\varphi : X_1 \to X_2$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
X_1 \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "f_1"'] & & X_2 \arrow[dl, "f_2"] \\
& Y &
\end{tikzcd}$$

Definición 2.2.1. Sea $\mathcal{C}$ una clase de G-espacios. Decimos que $(X,p) \in G\text{-}Top_Y$ es un $G\text{-}AE(\mathcal{C})_Y$ en la categoría $G\text{-}Top_Y$ (X es un $G\text{-}AE(\mathcal{C})$ sobre Y) si para todo G-$\mathcal{C}$ par (Z,A) y $f : A \to X$ y $h : Z \to Y$ equivariantes, existe una función equivariante $\widetilde{h} : Z \to X$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"'] & X \arrow[d, "p"] \\ Z \arrow[r, "h"'] \arrow[ur, "\widetilde{h}"] & Y \end{tikzcd}$$

Sean X y Y G-espacios de Hausdorff. El espacio $W(X,Y) = \{(x,y) \in X \times Y \mid G_x \subseteq G_y\}$ es un subespacio G-invariante de $X \times Y$ con la acción diagonal. Denotamos al espacio cociente por $(X,Y)_G = W(X,Y)/G$. Ya sabemos que si $f : X \to Y$ es equivariante, entonces $G_x \subseteq G_{f(x)}$ para cada $x \in X$, es decir, $(x, f(x)) \in W(X,Y)$. Consideremos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} W(X,Y) \arrow[r, "\pi_1|_{W(X,Y)}"] \arrow[d, "\pi_{W(X,Y)}"'] & X \arrow[d, "\pi_X"] \\ (X,Y)_G \arrow[r, "\widetilde{\pi_1|_{W(X,Y)}}"'] & X/G \end{tikzcd}$$

donde π_1 es la proyección en la primera entrada y $\widetilde{\pi_1 |_{W(X,Y)}}$ es la función inducida de $\pi_1 |_{W(X,Y)}$. Si $f : X \to Y$ es una función sobreyectiva, denotamos por $\Omega(f)$ al conjunto de secciones de f. Definimos $\varphi : \Omega(\widetilde{\pi_1 |_{W(X,Y)}}) \to \Omega(\pi_1 |_{W(X,Y)})$ por $\varphi(s) = s'$ donde $s'(x) = (x,y)$ y $y \in Y$ es el único elemento tal que $\widetilde{G(x,y)} = s(Gx)$ entonces φ es una biyección con inversa $\psi : \Omega(\pi_1 |_{W(X,Y)}) \to \Omega(\widetilde{\pi_1 |_{W(X,Y)}})$ dada por $\psi(s') = \widetilde{s'}$. Por otra parte podemos definir $\psi' : Hom_G(X,Y) \to \Omega(\pi_1 |_{W(X,Y)})$ por $\psi'(f) = s_f : X \to W(X,Y)$ donde $s_f(x) = (x, f(x))$ y es fácil ver que esta asignación es una biyección. Por lo tanto existe una biyección entre funciones equivariantes $f : X \to Y$ y secciones $s : X/G \to (X,Y)_G$ $\eta : Hom_G(X,Y) \to \Omega(\widetilde{\pi_1 |_{W(X,Y)}})$ dada por $\eta(f)(Gx) = G(x, f(x))$.

A continuación daremos una condición necesaria y sufuciente para que un G-espacio X sea $G\text{-}AE(\mathcal{C})$ sobre Y.

Proposición 2.2.1. *Sea (X,p) un G-espacio sobre Y. Entonces X es un $G\text{-}AE(\mathcal{C})$ sobre Y, si y sólo si $(Z,X)_G$ es $AE(\mathcal{C})$ sobre $(Z,Y)_G$ para cada G-espacio Z.*

Demostración: Supongamos primero que $(Z,X)_G$ es $AE(\mathcal{C})$ sobre $(Z,Y)_G$ para cada G-espacio Z. Sea (Z,A) un G-$\mathcal{C}$ par y supongamos que tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook, "i"'] & X \arrow[d, "p"] \\ Z \arrow[r, "F"'] & Y \end{tikzcd}$$

f y F definen secciones $\widetilde{s_f} : A/G \to \widetilde{(A,X)_G}$, $Ga \mapsto G(a, f(a))$ y $\widetilde{s_F} : Z/G \to (Z,Y)_G$, $Gz \mapsto G(z, F(z))$ de $\pi_1 \widetilde{|_{W(A,X)}}$ y $\pi_1 \widetilde{|_{W(Z,Y)}}$ respectivamente. Sea $\overline{f} : A/G \to (Z,X)_G$ dada por $\overline{f}(Ga) = G(i(a), f(a))$ y así obtenemos el diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} A/G & \xrightarrow{\overline{f}} & (Z,X)_G \\ {\scriptstyle \widetilde{i}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \widetilde{(1_z \times p)|_{W(Z,X)}}} \\ Z/G & \xrightarrow[\widetilde{s_F}]{} & (Z,Y)_G \end{array}$$

Por hipótesis, existe $H : Z/G \to (Z,X)_G$ que preserva la conmutatividad del diagrama anterior. Además la función inducida $\pi_1 \widetilde{|_{W(Z,X)}} : (Z,X)_G \to Z/G$ es igual a la composición $\pi_1 \widetilde{|_{W(Z,Y)}} \circ \widetilde{(1_Z \times p) |_{W(Z,X)}}$, así que

$$\pi_1 \widetilde{|_{W(Z,X)}} \circ H(Gx) = \pi_1 \widetilde{|_{W(Z,Y)}} \circ \widetilde{(1_Z \times p)_{W(Z,X)}} \circ H(Gx)$$

$$= \pi_1 \widetilde{|_{W(Z,Y)}}(\widetilde{s_F}(Gx)) = \pi_1 \widetilde{|_{W(Z,Y)}}(G(x, F(x))) = Gx$$

así que H es una sección de $\pi_1 \widetilde{|_{W(Z,X)}}$ por lo tanto define una función equivariante $h : Z \to X$ tal que $H(Gz) = G(z, h(z))$ para todo $z \in Z$. como

$$G(z, p(h(z))) = \widetilde{(1_Z \times p) |_{W(Z,X)}}(G(z, h(z)))$$

$$= \widetilde{(1_Z \times p) |_{W(Z,X)}}(H(Gz)) = \widetilde{s_F}(Gz) = G(z, F(z)).$$

y

$$G(a, h(i(a))) = G(i(a), h(i(a))) = H(G(i(a)))$$
$$= H(\widetilde{i}(Ga)) = \overline{f}(Ga) = G(i(a), f(a)) = G(a, f(a)).$$

para toda $z \in Z$, $a \in A$, entonces $p \circ h = F$ y $h \circ i = f$ por lo tanto, $(X, p) \in G\text{-}AE(\mathcal{C})_Y$.

Ahora supongamos que $X \in G\text{-}AE(\mathcal{C})_Y$, (A, D) un G-$\mathcal{C}$ par y el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & (Z,X)_G \\ {\scriptstyle i}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \widetilde{(1_Z \times p)|_{W(Z,X)}}} \\ D & \xrightarrow[F]{} & (Z,Y)_G \end{array}$$

con Z un G-espacio.

Sean A^* y D^* los pull-back de

$$A \xrightarrow{f} (Z,X)_G \xleftarrow{\pi_{W(Z,X)}} W(Z,X)$$

y

$$D \xrightarrow{F} (Z,Y)_G \xleftarrow{\pi_{W(Z,Y)}} W(Z,Y)$$

respectivamente, además como $\pi_{W(Z,X)}$ y $\pi_{W(Z,Y)}$ son proyecciones orbitales, por la proposición 1.3.2, $A \cong A^*/G$ y $D \cong D^*/G$. Ahora consideremos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
A^* \arrow[rr, "f'"] \arrow[dr, dotted, "i^*"] \arrow[dd, "\pi_{A^*}"'] & & W(Z,X) \arrow[dr, "(1_Z\times p)|_{W(Z,X)}"] \arrow[dd, "\pi_{W(Z,X)}"' near end] & \\
& D^* \arrow[rr, "F'" near start] \arrow[dd, "\pi_{D^*}" near start] & & W(Z,Y) \arrow[dd, "\pi_{W(Z,Y)}"] \\
A \arrow[rr, "f" near start] \arrow[dr, "i"'] & & (Z,X)_G \arrow[dr, "\widetilde{(1_z\times p)}|_{W(Z,X)}"'] & \\
& D \arrow[rr, "F"'] & & (Z,Y)_G
\end{tikzcd}$$

donde i^* es la función equivariante inducida de la propiedad universal del pull-pack, por otra parte, como $(1_Z \times p)_{W(Z,X)}$ es isovariante, el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
W(Z,X) \arrow[r, "(1_Z\times p)|_{W(Z,X)}"] \arrow[d, "\pi_{W(Z,x)}"'] & W(Z,Y) \arrow[d, "\pi_{W(Z,Y)}"] \\
(Z,X)_G \arrow[r, "\widetilde{(1_Z\times p)}|_{W(Z,X)}"'] & (Z,Y)_G
\end{tikzcd}$$

es un pull-back y por lo tanto,

$$\begin{tikzcd}
A^* \arrow[r, "i^*"] \arrow[d, "\pi_{A^*}"'] & D^* \arrow[d, "\pi_{D^*}"] \\
A \arrow[r, "i"'] & D
\end{tikzcd}$$

es un pull-back y como i es propia e inyectiva, i^* también lo es gracias a la proposición 1.3.1, entonces i^* es un encaje cerrado. Ahora consideremos el diagrama

$$\begin{tikzcd}
A^* \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "i^*"'] & W(Z,X) \arrow[r, "\pi_2|_{W(Z,X)}"] \arrow[d, "(1_Z\times p)|_{W(Z,X)}"] & X \arrow[d, "p"] \\
D^* \arrow[r, "F'"'] & W(Z,Y) \arrow[r, "\pi_2|_{W(Z,Y)}"'] & Y
\end{tikzcd}$$

y como $X \in G\text{-}AE(\mathcal{C})_Y$, existe una función equivariante $\phi : D^* \to X$ tal que $p \circ \phi = \pi_2 |_{W(Z,Y)} \circ F'$ y $\phi \circ i^* = \pi_2 |_{W(Z,X)} \circ f'$. Definimos ahora la función equivariante $\phi' : D^* \to W(Z,X)$ por $\phi'(d) = (\pi_1(F'(d)), \phi(d))$, entonces $\phi'(d) \in W(Z,X)$ ya que π_1 y F' son isovariantes, y así, $G_{\pi_1(F'(d))} = G_d \subseteq G_{\phi(d)}$. Además

$$\phi'(i^*(a)) = (\pi_1(F'(i^*(a))), \phi(i^*(a))) = (\pi_1((1_Z \times p)(f'(a))), \pi_2(f'(a)))$$

$$= (\pi_1(f'(a)), \pi_2(f'(a))) = f'(a)$$

para cada $a \in A^*$ y

$$(1_Z \times p)(\phi'(x)) = (1_Z \times p)(\pi_1(F'(x)), \phi(x)) = (\pi_1(F'(x)), p(\phi(x)))$$
$$= (\pi_1(F'(x)), \pi_2(F'(x))) = F'(x)$$

para cada $x \in D^*$. Es decir, ϕ' hace que el siguiente diagrama conmute:

$$\begin{tikzcd} A^* \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "i^*"'] & W(Z,X) \arrow[d, "(1_Z \times p)|_{W(Z,X)}"] \\ D^* \arrow[ur, "\phi'"] \arrow[r, "F'"'] & W(Z,Y) \end{tikzcd}$$

entonces $\widetilde{\phi'}$ hace conmutativo el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"'] & (Z,X)_G \arrow[d, "\widetilde{(1_Z \times p)|_{W(Z,X)}}"] \\ D \arrow[ur, "\widetilde{\phi'}"] \arrow[r, "F"'] & (Z,Y)_G \end{tikzcd}$$

por lo tanto $(Z,X)_G \in AE(\mathcal{C})_{(Z,Y)_G}$. $\square$

A continuación demostraremos que la propiedad de que un G-espacio $X \in G\text{-}AE(\mathcal{C})_Y$ es una propiedad local.

Lema 2.2.1. *([10]) Sea (X,p) un espacio sobre Y. Supongamos que existe una cubierta abierta $\{V_\alpha\}_{\alpha\in I}$ de Y tal que $p^{-1}(V_\alpha)$ es un $AE(\mathcal{C})$ sobre V_α para cada $\alpha \in I$, entonces X es un $AE(\mathcal{C})$ sobre Y.*

Proposición 2.2.2. *Sea (X,p) un G-espacio sobre Y y supongamos que existe una cubierta abierta de conjuntos invariantes $\{V_\alpha\}_{\alpha\in I}$ de Y tal que para cada $\alpha \in I$,*

$$(p^{-1}(V_\alpha), p\,|_{p^{-1}(V_\alpha)}) \in G\text{-}AE(\mathcal{C})_{V_\alpha}$$

Entonces $X \in G\text{-}AE(\mathcal{C})_Y$.

Demostración: Sea Z un G-espacio y consideramos la cubierta abierta $\{(Z,V_\alpha)_G\}_{\alpha\in I}$ de $(Z,Y)_G$. Entonces por hipótesis, $p^{-1}(V_\alpha)$ es $G\text{-}AE(\mathcal{C})$ sobre V_α para cada $\alpha \in I$ así que por la proposición 2.2.1, $(Z,p^{-1}(V_\alpha))_G$ es $AE(\mathcal{C}$ sobre $(Z,V_\alpha)_G$, luego $(Z,X)_G$ es $AE(\mathcal{C})$ sobre $(Z,Y)_G$ por el lema anterior. Por lo tanto nuevamente por la proposición 2.2.1, $X \in G\text{-}AE(\mathcal{C})_Y$. $\square$

Definición 2.2.2. Decimos que el diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "p'"'] & B \arrow[d, "p"] \\ C \arrow[r, "f"'] & D \end{tikzcd}$$

es un **cuadrado** G-$AE(\mathcal{C})$, si en el diagrama conmutativo,

$$\begin{tikzcd} A \arrow[dr, "\varphi"] \arrow[drr, "f'"] \arrow[ddr, "p'"'] & & \\ & P \arrow[r, "t"] \arrow[d, "s"] & B \arrow[d, "p"] \\ & C \arrow[r, "f"'] & D \end{tikzcd}$$

el cuadrado interior es un diagrama pull-back y (A, φ) es G-$AE(\mathcal{C})$ sobre P.

Proposición 2.2.3. *Una función equivariante $p : X \to Y$, es una G-fibración regular si y sólo si el diagrama*

$$\begin{tikzcd} X^I \arrow[r, "p^I"] \arrow[d, "\pi_X^0"'] & Y^I \arrow[d, "\pi_Y^0"] \\ X \arrow[r, "p"'] & Y \end{tikzcd}$$

es un cuadrado G-AE donde $p^I(\alpha) = p \circ \alpha$ y $\pi_X^0(\alpha) = \alpha(0)$.

Demostración: Notemos primero que el pull-back de p y π_Y^0 es el G-espacio $D(p) = \{(x, \alpha) \mid p(x) = \alpha(0)\}$. Sea (Z, A) un G par. Consideremos los siguientes diagramas conmutativos equivariantes:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"'] & X^I \arrow[d, "\varphi"] \\ Z \arrow[r, "F"'] \arrow[ur, "\psi"] & D(p) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} Z \times \{0\} \cup A \times I \arrow[r, "f'"] \arrow[d] & X \arrow[d, "p"] \\ Z \times I \arrow[r, "F'"'] \arrow[ur, "\psi'"] & Y \end{tikzcd}$$

donde $F'(z,t) = \pi_2(F(z))(t)$, $f'(z, 0) = \pi_1(F(z))$, $f'(a,t) = f(a)(t)$ y $\psi(z,t) = \psi'(z)(t)$ para todo $z \in Z$, $a \in A$, $t \in I$. Con las ecuaciones anteriores tenemos de inmediato que p es una G-fibración regular si y sólo si $X^I \in G$-AE sobre $D(p)$. □

Ahora si tomamos $A = \emptyset$, en el diagrama de la demostración de la proposición anterior, podemos ver que p es una G-fibración si y sólo si φ admite una sección equivariante (aunque esto ya lo habíamos demostrado entes).
Si además, tomamos $Z = D(p)$, tenemos que p tiene la propiedad de levantamiento de homotopía equivariante con respecto a $D(p)$ si y sólo si existe una sección equivariante de φ.

Ahora ya estamos en condiciones necesarias para demostrar la caracterización local de las G-fibraciones regulares antes mencionada. Este resultado también lo podemos encontrar en [11].

Definición 2.2.3. Una función equivariante $p : X \to Y$ es una **G-fibración (regular) local** si existe una cubierta abierta de conjuntos invariantes $\{U_\alpha\}_{\alpha \in J}$ tal que $p\mid_{p^{-1}(U_\alpha)}$: $p^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha$ es una G-fibración (regular) para cada $\alpha \in J$.

Teorema 2.2.1. *Sea G un grupo compacto y $p : X \to Y$ una función equivariante de G-espacios metrizables. Entonces p es una G-fibración regular si y sólo si p es una G-fibración regular local.*

Demostración: La necesidad se satisface claramente, así que sólo demostraremos la suficiencia. Consideremos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
X^I \arrow[dr, "\varphi"] \arrow[drr, "p^I"] \arrow[ddr, "\pi_X^0"'] & & \\
& D(p) \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[d, "\pi_1"] & Y^I \arrow[d, "\pi_Y^0"] \\
& X \arrow[r, "p"'] & Y
\end{tikzcd}$$

Sea $(x, \omega_0) \in D(p)$. Por el lema de la cubierta de Lebesgue, hay un entero n y una colección de conjuntos invariantes $U_1, \ldots, U_n$ tales que $p \mid_{p^{-1}(U_i)}$ es una G-fibración regular y $\omega_0([(i-1)/n, i/n]) \subseteq U_i$ para cada i. Luego el conjunto

$$W = \{\omega \in Y^I \mid \omega([(i-1)/n, i/n]) \subseteq U_i, i = 1, \ldots, n\}$$

es una vecindad abierta invariante de ω_0 y $(x, \omega_0) \in \pi_2^{-1}(W) = \widetilde{W}$. De esta manera obtenemos la restricción del diagrama anterior

$$\begin{tikzcd}
(p^I)^{-1}(W) \arrow[dr, "\varphi_W"] \arrow[drr, "p^I_W"] \arrow[ddr, "\pi_V^0"'] & & \\
& \widetilde{W} \arrow[r, "\pi_2"'] \arrow[d, "\pi_1"] & W \arrow[d, "\pi_W^0"] \\
& X \arrow[r, "p"'] & Y
\end{tikzcd}$$

donde el cuadrado interno es un pull-back y vamos a demostrar que el cuadrado externo es un cuadrado G-AE. Para esto, trabajaremos en la categoría $Hom(\mathcal{GM})$ cuyos objetos son las funciones equivariantes entre G-espacios metrizables y cuyos morfismos entre $p : E \to B$ y $p' : E' \to B'$ son pares de funciones equivariantes (f, f') tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
E' \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "p'"'] & E \arrow[d, "p"] \\
B' \arrow[r, "f"'] & B
\end{tikzcd}$$

Ahora construimos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
 & & & & p_{1,n} \arrow[dl, "\alpha_n"'] \arrow[dr] & & & \\
 & & & p_{1,n-1} \arrow[dr] & & p_{2,n} \arrow[dl] \arrow[dr] & & \\
 & & p_{12} \arrow[dl, "\alpha_2"'] \arrow[dr] & \cdots & p_{2,n-1} & & p_{3,n} & \\
 & p^I_{U_1} \arrow[dl, "\alpha_{U_1}"'] \arrow[dr, "\beta_{U_1}"'] & & p^I_{U_2} \arrow[dl, "\alpha_{U_2}"'] \arrow[dr, "\beta_{U_2}"'] & \cdots & p^I_{U_{n-1}} \arrow[dr, "\beta_{U_n}"'] & & p^I_{U_n} \arrow[dl, "\alpha_{U_n}"'] \\
p & & p & & p & \cdots & p &
\end{tikzcd}$$

donde los morfismos $\alpha_{U_i}, \beta_{U_i} : p^I_{U_i} \to p$ se definen como las composiciones $i \circ (\pi^0_{p^{-1}(U_i)}, \pi^0_{U_i})$ y $i \circ (\pi^1_{p^{-1}(U_i)}, \pi^1_{U_i})$ respectivamente donde $i : p_U \to p$ es la inclusión natural y los niveles superiores son los pul-back de los morfismos anteriores. Ahora como i es un cuadrado pull-back y p_U es una G-fibración regular, entonces α_{U_i} es un cuadrado G-AE. Luego los morfismos $\alpha_2, \ldots, \alpha_n$ son cuadrados G-AE ya que se producen de los cuadrados G-AE, $\alpha_{U_2}, \ldots, \alpha_{U_n}$ respectivamente, tomando pull-backs. Luego, la composición $\alpha = \alpha_{U_1} \circ \alpha_2 \circ \cdots \circ \alpha_n : p_{1,n} \to p$ es también un cuadrado G-AE. La función equivariante $p_{1,n} : \overline{V} \to \overline{W}$ y el morfismo $\alpha = (\pi_{\overline{V}}, \pi_{\overline{W}})$ pueden describirse de manera directa, sea $\widetilde{U_i} = p^{-1}(U_i)$, $i = 1, \ldots, n$, entonces

$$\overline{V} = \{(\omega_1, \ldots, \omega_n) \in \widetilde{U^I_1} \times \cdots \times \widetilde{U^I_n} \mid \omega_1(1) = \omega_2(0), \ldots, \omega_{n-1}(1) = \omega_n(0)\},$$

$$\overline{W} = \{(\omega_1, \ldots, \omega_n) \in U^I_1 \times \cdots \times U^I_n \mid \omega_1(1) = \omega_2(0), \ldots, \omega_{n-1}(1) = \omega_n(0)\},$$

$p_{1,n}(\omega_1, \ldots, \omega_n) = (p\omega_1, \ldots, p\omega_n)$, $\pi_{\overline{V}}(\omega_1, \ldots, \omega_n) = \omega_1(0)$, $\pi_{\overline{W}}(\omega_1, \ldots, \omega_n) = \omega_1(0)$. Los G-espacios V y W son G-isomorfos a los G-espacios $\overline{V}$ y $\overline{W}$ respectivamente por medio de las reglas de correspondencia $\widetilde{h}, h : \omega \mapsto (\omega_1, \ldots, \omega_n)$, dadas por $\omega_i(t) = \omega((i - 1 + t)/n)$, $i = 1, \ldots, n$. La composición de $(\widetilde{h}, h) : p^I_W \to p_{1,n}$ y $\alpha : p_{1,n} \to p$ es el morfismo $(\pi^0_V, \pi^0_W) : p^I_W \to p$, el cual es un cuadrado G-AE al igual que α y $(\widetilde{h}, h)$. Para finalizar, notemos que gracias a la elección inicial de $(x, \omega_0) \in D(p)$ podemos asegurar que obtenemos una cubierta abierta de conjuntos invariantes $\{\widetilde{W_j}\}_{j \in J}$ de $D(p)$, tal que $\varphi^{-1}(\widetilde{W_j})$ es G-AE sobre $\widetilde{W_j}$, para cada $j \in J$. Así que por la proposición 2.2.2, X^I es G-AE sobre $D(p)$ y por lo tanto, gracias a la proposición 2.2.3, p es una G-fibración regular. $\square$

2.3. Una caracterización de G-fibraciones de Serre.

Para terminar este capítulo presentamos una caracterización para G-fibraciones de Serre, el resultado también es cierto para grupos le Lie compactos aunque aquí lo demostramos para un grupo finito y también lo podemos ver en [4].

Sea X, Y G-espacios, una función equivariante $p : X \to Y$ es una G-fibración de Serre si p satisface la propiedad de levantamiento de G-homotopía para la clase de G-CW complejos.

Proposición 2.3.1. *Una función equivariante $p : X \to Y$ es una G-fibración de Serre si y sólo si $f^H : X^H \to Y^H$ es una fibración de Serre para cada subgrupo H de G.*

Demostración: Notemos que hay una correspondencia uno a uno $\eta : Hom_G((G/H) \times I^n, Z) \to Hom(I^n, Z^H)$ dada por $\eta(s) = \widetilde{s}$, $\widetilde{s}(x) = s(H,x)$, con inversa $\eta^{-1}(r)(gH,x) = gr(x)$. Si p es una G-fibración de Serre, consideramos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} D^n \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i_0"'] & X^H \arrow[d, "p^H"] \\ D^n \times I \arrow[r, "h"'] & Y^H \end{tikzcd}$$

aplicando η^{-1}, obtenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} G/H \times D^n \arrow[r, "\eta^{-1}(f)"] \arrow[d, "i_0"'] & X \arrow[d, "p"] \\ G/H \times D^n \times I \arrow[r, "\eta^{-1}(h)"'] & Y \end{tikzcd}$$

entonces existe $H : G/H \times D^n \times I \to X$ tal que $p \circ H = \eta^{-1}(H)$ y $H \circ i_0 = \eta^{-1}(f)$ entonces $\eta(H)$ es tal que $p \circ \eta(H) = h$ y $\eta(H) \circ i_0 = f$ por lo tanto p^H es una fibración de Serre para cada subgrupo H de G. Ahora si p^H es una fibración para cada H, usamos de nuevo la biyección $\eta : Hom_G((G/H) \times D^n, Z) \to Hom(D^n, Z^H)$ y consideramos el siguiete diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} (G/H) \times D^n \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i_0"'] & X \arrow[d, "p"] \\ (G/H) \times D^n \times I \arrow[r, "\varphi"'] & Y \end{tikzcd}$$

entonces existe $F : D^n \times I \to X^H$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} D^n \arrow[r, "\widetilde{f}"] \arrow[d, "i_0"'] & X^H \arrow[d, "p^H"] \\ D^n \times I \arrow[r, "\widetilde{\varphi}"'] \arrow[ur, "F"] & Y^H \end{tikzcd}$$

entonces $\eta^{-1}(F)$ es un levantamiento de φ y de esta manera p es una fibración para G-celdas y así, es una G-fibración de Serre. $\square$

Capítulo 3

G-fibraciones aproximables.

En este capítulo estudiaremos una generalización de las G-fibraciones llamadas G-fibraciones aproximables. Posteriormente hablaremos un poco de grupos de Lie e introducimos dos funtores importantes, el funtor restricción Res_α y el funtor extensión o producto torcido $G \times_H -$. También demostramos que la proyección natural $\pi : G \to G/H$ es una H-fibración donde G es un H-espacio con la acción conjugación, dicho resultado servirá como lema para demostrar nuestro resultado principal.

3.1. G-funciones controladas y G-fibraciones aproximables.

Esta sección está basada en el artículo *S. Prassidis, Equivariant Approximate Fibrations* en donde introducimos las G-funciones controladas así como también las G-fibraciones aproximables y las funciones que satisfacen la propiedad de levantamiento de G-homotopía aproximable denotada por G-$AHLP$ demostrando que una función equivariante $p : X \to Y$ es una G-fibración aproximable si y sólo si p satisface la G-$AHLP$ resultado que aplicaremos para demostrar el resultado principal de esta seccción que es una caracterización de las G-fibraciones aproximables por restricción a los puntos fijos. Para esto, vamos a suponer que G es un grupo finito discreto y que los espacios G-ANR's son G-espacios metrizables para la clase de G-espacios metrizables y en este caso, un G-ANR será lo mismo que un G-ANE, además vamos a suponer que las métricas en esta sección son G-invariantes, esto gracias a que G es finito.

Definición 3.1.1. Sea $p_0 : X_0 \to Y$ y $p_1 : X_1 \to Y$ dos funciones equivariantes. Una G**-función controlada** $h^c : X_0 \to X_1$ de p_0 a p_1 es una función equivariante $h : X_0 \times [0,1) \to X_1 \times [0,1)$ que preserva fibras sobre $[0,1)$ es decir, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} X_0 \times [0,1) \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "\pi_2^0"'] & & X_1 \times [0,1) \arrow[dl, "\pi_2^1"] \\ & {[0,1)} & \end{tikzcd}$$

donde π_2^0 y π_2^1 son las proyecciones en la segunda entrada y la función $\overline{h} : X_0 \times [0,1] \to Y$ dada por

$$\overline{h}(x,t) = \begin{cases} p_1 \circ \pi_1 \circ h(x,t), & t < 1 \\ p_0(x), & t = 1 \end{cases}$$

es continua donde $\pi_1 : X_1 \times [0,1) \to X_1$ es la proyeción en la primera entrada.

Definición 3.1.2. Una función G-equivariante $p : X \to Y$ es una **G-fibración aproximable** para una clase de G-espacios $\mathcal{C}$, si para cada diagrama conmutativo equivariante, donde $A \in \mathcal{C}$,

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i_0"'] & X \arrow[d, "p"] \\ A \times I \arrow[r, "\varphi"'] & Y \end{tikzcd}$$

existe una G-función controlada $h^c : A \times I \to X$ de φ a p tal que $h\,|_{A\times\{0\}\times[0,1)} = f \times 1_{[0,1)}$ donde $1_{[0,1)}$ es la identidad en $[0,1)$. La función p es una G-fibración aproximable si p es una G-fibración aproximable para la clase de todos los G-espacios. h^c es **estacionario** con φ si para cada $a \in A$ tal que $\varphi(a,-) : I \to Y$ es una curva constante, entonces $\pi_1 \circ h(a,-,s) : I \to X$ es una curva constante para cada $s \in [0,1)$. p es una **G-fibración aproximable regular** si h^c puede ser elegida estacionaria con φ.

Sea $p : X \to Y$ es una G-fibración aproximable y consideremos el siguiente diagrama conmutativo equivariante:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i_0"'] & X \arrow[d, "p"] \\ A \times I \arrow[r, "h"'] & Y \end{tikzcd}$$

entonces existe una G-función controlada $H : A \times I \times [0,1) \to X \times [0,1)$ de h a p donde $H(a,t,s) = (H_s(a,t), s)$, de esta manera, H se puede considerar como una red $(H_s)_{s\in[0,1)}$ de funciones $H_s : A \times I \to X$ y la red $(p \circ H_s)_{s\in[0,1)} \to h$ ya que la función $\overline{H}$ es continua. En otras palabras, H se está aproximando a ser una G-fibración a medida que $s \to 1$ y esta es la razón del nombre.

Supongamos que $p : X \to Y$ es una G-fibración y sean $f : A \to X$ y $h : A \times I \to Y$ equivariantes tal que $h(a,0) = p(f(a))$ para todo $a \in A$, entonces existe $H : A \times I \to X$ tal que $H(a,0) = f(a)$ y $p(H(a,t)) = h(a,t)$ y definimos $F : A \times I \times [0,1) \to X \times [0,1)$ por $F(a,t,s) = (H(a,t), s)$, entonces $F\,|_{A\times\{0\}\times[0,1)} = f \times 1_{[0,1)}$ y $\overline{F} : A \times I \times I \to Y$ dada por

$$\overline{F}(a,t,s) = \begin{cases} p \circ \pi_1 \circ F(a,t,s), & s < 1 \\ h(a,t), & s = 1 \end{cases} = h(a,t)$$

es continua, por lo tanto p es también una G-fibración aproximable y de esta manera las G-fibraciones aproximables son una generalización de las G-fibraciones.

Sea X un G-espacio. Una **G-cubierta abierta** de X es una colección de abiertos $\mathcal{U}$ tal que $gU \in \mathcal{U}$ siempre que $U \in \mathcal{U}$ para todo $g \in G$. Si $f, g : X \to Y$ son funciones G-equivariantes y $\mathcal{U}$ es una G-cubierta abierta de Y, diremos que f y g son **$\mathcal{U}$-cercanas** si para cada $x \in X$ existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $f(x), g(x) \in U$.

Definición 3.1.3. Sea $p : X \to Y$ G-equivariante. Si $\mathcal{U}$ es una G-cubierta abierta de Y, entonces p tiene la **propiedad de levantamiento de $\mathcal{U}$-homotopía equivariante**

(G-$\mathcal{U}$-HLP) con respecto a un G-espacio A si, dado el diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i_0"'] & X \arrow[d, "p"] \\ A \times I \arrow[r, "\varphi"'] & Y \end{tikzcd}$$

existe una homotopía equivariante $h : A \times I \to X$ tal que $h \circ i_0 = f$ y $p \circ h$ es $\mathcal{U}$-cercana a φ. Entonces h es un **G-$\mathcal{U}$-levantamiento** de φ. Si p satisface la G-$\mathcal{U}$-HLP para cada G-espacio, entonces p es una **$\mathcal{U}$-G-fibración**. Además si p es una $\mathcal{U}$-G-fibración para cada G-cubierta $\mathcal{U}$, entonces decimos que p satisface la **propiedad de levantamiento de G-homotopía aproximable** (G-$AHLP$). p se dice tener la **propiedad de levantamiento de G-homotopía aproximable regular** con respecto al G-espacio A, si para todas las G-cubiertas $\mathcal{U}$ de Y, el G-$\mathcal{U}$-levantamiento de φ es estacionario con φ.

Sea (X, A) un G-par. Una G-homotopía, $h : X \times I \to X$, es llamada una **retracción por deformación de G-vecindades** a A en X si h es la identidad en $X \times \{0\} \cup A \times I$ y hay una G-vecindad U de A en X tal que $h(U \times \{1\}) = A$. Un par de G-espacios (X, A) es un G-NDR par si existe una función equivariante $\alpha : X \to I$ tal que $\alpha^{-1}(\{0\}) = A$ y una retracción por deformación de G-vecindades h a A en X tal que $h(\alpha^{-1}([0, 1)), 1) = A$. (X, A) es un G-DR par si es un G-NDR par tal que $h(X, 1) \subseteq A$.

Lema 3.1.1. *Sean (X, A) y (Y, B) G-NDR. Entonces así lo es el producto $(X, A) \times (Y, B) = (X \times Y, (X \times B) \cup (A \times Y))$ y si uno de ellos es un G-DR y el otro es un G-NDR, entonces el producto es un G-DR.*

Demostración: Para la primera parte supongamos que $h : X \times I \to X$ y $r : Y \times I \to Y$ son las retracciones por deformación de (X, A) y (Y, B) respectivamente y $u : X \to I$ y $v : Y \to I$ G-equivariantes tales que $u^{-1}(0) = A$, $v^{-1}(0) = B$, $h(u^{-1}([0, 1)), 1) = A$ y $r(v^{-1}([0, 1)), 1)$. Definimos $w : X \times Y \to I$ por $w(x, y) = u(x)v(y)$ es claro que w es equivariante y que $w^{-1}(0) = (X \times Y, (X \times B) \cup (A \times Y))$ y ahora definimos $q : X \times Y \times I \to X \times Y$ por

$$q(x, y, t) = \begin{cases} (x, y), & x \in A, \ \ y \in B \\ (h(x, t), r(y, \frac{x(x)}{v(y)}t)), & v(y) > 0, \ \ u(x) \leq v(y) \\ (h(x, \frac{v(y)}{u(x)}t), r(y, t)), & u(x) > 0, \ \ v(y) \leq u(x) \end{cases}$$

esta función es continua en $(A \times B)^c \times I$ ya que $(h(x, t), r(y, \frac{x(x)}{v(y)}t))$ y $(h(x, \frac{v(y)}{u(x)}t), r(y, t))$ coinciden cuando $0 < u(x) = v(y)$. Entonces sólo basta demostrar que q es continua en $A \times B \times I$. Para esto, sea $(x, y) \in A \times B$ y sean U y V vecindades de x y y respectivamente, entonces $\{x\} \times I \subseteq h^{-1}(U)$ y $\{y\} \times I \subseteq r^{-1}(V)$, luego, como $h^{-1}(U)$ y $r^{-1}(V)$ son abiertos, existen abiertos S, T de x y y respectivamente tales que $S \times I \subseteq h^{-1}(U)$ y $\{y\} \times I \subseteq r^{-1}(V)$ y así $(S \cap U) \times (T \cap V) \subseteq q^{-1}(U \times V)$ por lo tanto, q es continua y claramente es equivariante. Además, por la construcción de q es fácil ver que es una retracción por deformación de $(X, A) \times (Y, B) = (X \times Y, (X \times B) \cup (A \times Y))$.

Ahora supongamos que (X, A) es un G-DR y (Y, B) es un G-NDR entonces ya sabemos que el prducto es un G-DR. Entonces sólo hay que demostrar que $q(x, y, 1) \in$

$(X \times B) \cup (A \times Y)$. Para esto, tenemos tres casos, el primero, $x \in A$, $y \in B$, entonces $q(x, y, 1) = (x, y)$. En el segundo caso, $v(y) > 0$ y $u(x) \leq v(y)$, $h(x, 1) \in A$ ya que (X, A) es un G-DR par, por lo tanto, $q(x, y, 1) \in A \times Y$. En el tercer caso, $u(x) > 0$ y $v(y) \leq u(x)$ y aquí tenemos dos casos: $v(y) = 1$ ó $v(y) < 1$. Si $v(y) = 1$, tenemos que $u(x) = 1$ y así $q(x, y, 1) = (h(x, 1), r(y, 1)) \in A \times Y$. Si $v(y) < 1$, $r(y, 1) \in B$ ya que (Y, B) es un G-NDR par y así $q(x, y, 1) \in X \times B$. Por lo tanto, el producto es un G-DR par. □

Lema 3.1.2. *Sea $p : X \to Y$ una G-fibración. 1) Sea (A, D) un G-DR par. Entonces el siguiente problema de levantamiento equivariante tiene solución:*

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"'] & X \arrow[d, "p"] \\ A \arrow[r, "\varphi"'] & Y \end{tikzcd}$$

2) Sea (A, D) un G-DNR par. Entonces el siguiente problema de levantamiento equivariante tiene solución:

$$\begin{tikzcd} A \times \{0\} \cup D \times I \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"'] & X \arrow[d, "p"] \\ A \times I \arrow[r, "F"'] & Y \end{tikzcd}$$

Demostración: 1) Sea $r : A \to D$ una retracción, $h : A \times I \to A$ $rel(D)$ una homotopía equivariante y $\alpha : A \to I$ equivariante tales que $h_0 = 1_A$, $h_1 = i \circ r$ y $\alpha^{-1}(0) = D$. Definimos $\psi : A \times I \to A$ como:

$$\psi(a, t) = \begin{cases} h(a, 1 - \frac{t}{\alpha(a)}), & t < \alpha(a) \\ h(a, 0), & t \geq \alpha(a) \end{cases}$$

esta función es equivariante y claramente continua en $D^c \times I$. Sea $(d, t) \in D \times I$, sea U un abierto de d, entonces $\{d\} \times I \subseteq h^{-1}(U)$ entonces existe una vecindad V de d tal que $V \times I \subseteq h^{-1}(U)$ por lo tanto, $\psi(V \times I) \subseteq h(V \times I) \subseteq U$ y así, ψ es continua. Ahora consideremos el siguiente diagrama equivariante conmutativo:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "r"] \arrow[d, "i_0"'] & D \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"'] & X \arrow[d, "p"] \\ A \times I \arrow[r, "\psi"'] & A \arrow[r, "\varphi"'] & Y \end{tikzcd}$$

como p es una G-fibración, existe una homotopía equivariante $H : A \times I \to X$ tal que $H(a, 0) = f \circ r$ y $p \circ H = \varphi \circ \psi$. Definimos $F : A \to X$ por $F(a) = H(a, \alpha(a))$, entonces $F(d) = H(d, \alpha(d)) = f(r(d)) = f(d)$ para todo $d \in D$ y $p(F(a)) = p(H(a, \alpha(a))) = \varphi(\psi(a, \alpha(a))) = \varphi(h(a, 0)) = \varphi(a)$ por lo tanto es la solución buscada.

2) Como $(I, \{0\})$ es un G-DR par y (A, D) es un G-NDR par, por el lema anterior, $(A \times I, A \times \{0\} \cup D \times I)$ es un G-DR par y así, por la parte 1), el problema de levantamiento tiene solución. □

Lema 3.1.3. *Sea $q : A \to Y$ una función equivariante y $p : X \to Y$ una G-fibración. Sea (A, D) un G-NDR par y $f^c : A \to X$ una G-función controlada tal que $f^c \mid_D$ es una familia constante de G-funciones que preservan fibras. Entonces f^c es G-homotópica controlada $rel(D)$ a una familia constante de G-funciones que preservan fibras.*

Demostración: Sea $k_s : [0,1] \to [0,1]$ una homotopía de la identidad a la aplicación constante 1 $rel(\{1\})$. Entonces obtenemos una G-homotopía $F : A \times [0,1] \times [0,1] \to Y$ dada por $F(a,t,s) = \overline{f}(a, k_s(t))$. Entonces F es una G-homotopía entre $\overline{f}$ y $\pi_Y \circ (q \times 1_{[0,1]})$ donde π_Y es la proyección natural sobre Y. Como $f^c \mid_D$ es una familia constante, F es relativa sobre $D \times I$. Restringiendo F podemos considerar el siguiente problema de levantamiento:

$$\begin{tikzcd} A \times [0,1) \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"] & X \arrow[d, "p"] \\ A \times [0,1) \times I \arrow[r, "F"'] & Y \end{tikzcd}$$

y como p es una G-fibración, existe una función equivariante $H : A \times [0,1) \times I \to X$ la cual extiende a f y que puede ser elegida relativa sobre $D \times [0,1)$ gracias al lema anterior. H es una G-homotopía controlada entre f^c y $H(\ , \ ,1)$ y satisface $H(d,t,s) = f(d,0)$ para todo $d \in D$, ya que $p(H(a,t,1)) = F(a,t,1) = q(a)$, $H(\ , \ ,1)$ es una función equivariante que preserva fibras para cada $t \in I$ pero puede no ser constante. Podemos utilizar una homotopía $n_s : [0,1) \to [0,1)$ de la identidad a la aplicación constante 0 $rel(\{0\})$, entonces podemos definir una G-homotopía $L : A \times [0,1) \times I \to X$ dada por $L(a,t,s) = H(a, n_s(t), 1)$ entre $H(\ , \ ,1)$ y $H(\ ,0,1)$. Notemos que L es una función equivariante que preserva fibras y por lo tanto es una G-homotopía controlada a la G-función controlada constante $H(\ ,0,1)$ y $rel(D)$. $\square$

Definición 3.1.4. Sea $p : X \to Y$ una función G-equivariante y $ev : D(p) \times I \to Y$, $(x, \alpha, t) \mapsto \alpha(t)$, la función evaluación.

- p admite una **G-función de levantamiento aproximable** si existe una G-función controlada k^c de ev a p tal que $k(x, \alpha, 0, s) = (x, s)$. Además, k^c es regular si $k(x, \alpha, \ , s)$ es constante siempre que α sea constante en $p(x)$ para cada $s \in [0,1)$.
- Para una G-cubierta $\mathcal{U}$ de Y, p admite una **G-$\mathcal{U}$-función de lavantamiento** si existe una función equivariante $\lambda : D(p) \to X^I$ tal que $\lambda(x,\alpha)(0) = x$ y $p \circ \lambda(x,\alpha)$ y α son $\mathcal{U}$-cercanas. λ es regular si es regular en el mismo sentido del capítulo 2.

El siguiente lema es el análogo del teorema 2.1.1 para G-fibraciones:

Lema 3.1.4. *1) La función equivariante $p : X \to Y$ es una G-fibración aproximable (regular) si y sólo si p admite una G-función de levantamiento aproximable (regular). 2) p tiene la G-AHLP (regular) si y sólo si admite una G-$\mathcal{U}$-función de levantamiento (regular) para cada G-cubierta abierta de Y.*

Demostración: 1) supongamos que p admite una G-función de levantamiento aproximable y consideremos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i_0"'] & X \arrow[d, "p"] \\ A \times I \arrow[r, "h"'] & Y \end{tikzcd}$$

sea $k^c : D(p) \times I \to X$ una G-función de levantamiento aproximable de ev a p, es decir, $k(x,\alpha,0,s) = (x,s)$ y $\overline{k} : D(p) \times I \times I \to Y$ dada por $\overline{k} \mid_{D(0)\times I\times[0,1)} = p \circ \pi \circ k$ y $\overline{k} \mid_{D(0)\times I\times\{1\}} = ev$ es continua, definimos una G-función $H^c : A \times I \to X$ por $H(a,t,s) = k(f(a), h(a,\ \ ), t, s)$ entonces $\overline{H} : A \times I \times I \to Y$ dada por $\overline{H} \mid_{A\times I\times[0,1)} = p \circ \pi \circ H$ y $\overline{H} \mid_{A\times I\times\{1\}} = h$ es continua ya que $\overline{H} = \overline{k} \circ \mu$ donde $\mu : A \times I \times I \to D(p) \times I \times I$, $\mu(a,t,s) = (f(a), h(a,\ \ ), t, s)$ que también es continua. Por lo tanto, H^c es una G-función controlada de h a p. Es claro que si k^c es regular, entonces H^c es regular por construcción.

Ahora supongamos que p es una G-fibración aproximable y consideremos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} D(p) \arrow[r, "\pi_1"] \arrow[d, "i_0"'] & X \arrow[d, "p"] \\ D(p) \times I \arrow[r, "ev"'] & Y \end{tikzcd}$$

donde π_1 es la proyección en la primera entrada y ev es la evaluación. Como p es una G-fibración aproximable, existe una G-función controlada $H^c : D(p) \times I \to X$ de ev a p tal que $H \mid_{D(p)\times\{0\}\times[0,1)} = \pi_1 \times 1_{[0,1)}$ por lo tanto H^c es una G-función de levantamiento aproximable y trivialmente si p es una G-fibración aproximable regular, también lo es H^c.

2) Supongamos primero que p admite una G-$\mathcal{U}$-función de levantamiento $\lambda : D(p) \to X^I$, definimos $H : A \times I \to X$ por $H(a,t) = \lambda(f(a), h(a,\ \ ))(t)$ de esta manera, $H(a,0) = \lambda(f(a), h(a,\ \ ))(0) = f(a)$ y como $p \circ \lambda(f(a), h(a,\ \ ))$ y $h(a,\ \ )$ son $\mathcal{U}$-cercanas para toda G-cubierta abierta $\mathcal{U}$ de Y, $p \circ H$ y h son $\mathcal{U}$-cercanas para toda G-cubierta abierta $\mathcal{U}$ por lo tanto p tiene la G-$AHLP$. Si λ es regular, y $h(a,\ \ )$ es constante, entonces $H(a,\ \ ) = \lambda(f(a), h(a,\ \ ))$ es constante por lo tanto p tiene la G-$AHLP$ regular.

Ahora si p tiene la G-$AHLP$ consideramos el diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} D(p) \arrow[r, "\pi_1"] \arrow[d, "i_0"'] & X \arrow[d, "p"] \\ D(p) \times I \arrow[r, "ev"'] & Y \end{tikzcd}$$

entonces existe una función equivariante $H : D(p) \times I \to X$ tal que $H(a,0) = \pi_1(x,\alpha)$ y $p \circ H$ y ev son $\mathcal{U}$-cercanas para cada G-cubierta abierta de Y, definimos $\lambda : D(p) \to X^I$ por $\lambda(x,\alpha)(t) = H(x,\alpha,t)$, entonces $\lambda(x,\alpha)(0) = H(x,\alpha,0) = \pi_1(x,\alpha) = x$ y por otra parte, $p\circ\lambda(x,\alpha)$ y α son $\mathcal{U}$-cercanas ya que $p\circ\lambda(x,\alpha)(t) = p\circ H(x,\alpha)$ y $\alpha(t) = ev(x,\alpha,t)$. Si p tiene la G-$AHLP$ regular entonces $H(x,\alpha,\ \ )$ es constante si α lo es y así $\lambda(x,\alpha) = H(x,\alpha,\ \ )$ es constante por lo tanto regular. $\square$

El siguiente corolario es inmediato y dice que una función equivariante satisface la propiedad de levantamiento con respecto a todos los espacios si lo hace sólo para $D(p)$.

Corolario 3.1.1. *1) $p : X \to Y$ es una G-fibración aproximable si y sólo si el G-problema* *de levantamiento controlado tiene solución:*

$$\begin{tikzcd} D(p) \arrow[r, "\pi_1"] \arrow[d, "i_0"'] & X \arrow[d, "p"] \\ D(p)\times I \arrow[r, "ev"'] & Y \end{tikzcd}$$

2) p tiene la G-AHLP para todos los G-espacios si y sólo si p tiene la G-AHLP para el G-espacio $D(p)$.

Corolario 3.1.2. *Sean X y Y G-espacios métricos. 1) Si $p : X \to Y$ es una G-fibración aproximable para la clase de G-espacios métricos, entonces p es una G-fibración aproximable. 2) Si $p : X \to Y$ tiene la G-AHLP para la clase de G-espacios métricos, entonces p tiene la G-AHLP.*

Demostración: Como X y Y son G-espacios métricos, también lo es $D(p)$. 1) p admite una G-función de levantamiento aproximable. 2) p admite una G-$\mathcal{U}$-función de levantamiento para cada G-cubierta abierta de Y. $\square$

Corolario 3.1.3. *Sea $p : X \to Y$ una G-fibración aproximable y H un subgrupo de G. Entonces las siguientes afirmaciones son ciertas:*

1. *La función $p^H : X^H \to Y^H$ es una $N(H)/H$-fibración aproximable.*

2. *p es una H-fibración aproximable.*

Demostración: Como p es una G-fibración aproximable, existe una G-función de levantamiento aproximable $k^c : D(p)\times I \to X$ además, $D(p)^H = D(p^H)$ y $(X^I)^H = (X^H)^I$ por lo tanto la restricción de K^c al conjunto de puntos fijos es una $N(H)/H$-función de levantamiento aproximable. k^c es también H-equivariante así que p es una H-fibración aproximable. $\square$

Corolario 3.1.4. *Sea Y un G-espacio metrizable. Si $p : X \to Y$ es una G-fibración aproximable de Hurewicz entonces p es una G-fibración aproximable regular con respecto a todos los espacios. Si $p : X \to Y$ tiene la G-AHLP entonces p tiene la G-AHLP regular.*

Demostración: Elegimos una métrica d de Y tal que $diam(Y) < 1$. Para cada $\alpha \in Y^I$, definimos

$$\overline{\alpha}(t) = \begin{cases} \alpha(\frac{t}{diam(\alpha(I))}), & t < diam(\alpha(I)) \\ \alpha(1), & t \geq diam(\alpha(I)) \end{cases}$$

Por otra parte, existe una G-función de levantamiento aproximable $k^c : D(p)\times I \to X$, entonces definimos $\widetilde{k}(x,\alpha,t,s) = k(x,\overline{\alpha},t(diam(\alpha(I))),s)$ que es una G-función de levantamiento aproximable regular . Ahora si p tiene la G-$AHLP$ entonces existe una G-$\mathcal{U}$-función de lavantamiento $\lambda : D(p) \to X^I$ para toda G-cubierta abierta de Y, entonces definimos $\overline{\lambda}(x,\alpha)(t) = \lambda(x,\overline{\alpha})(t(diam(\alpha(I))))$ que es una G-$\mathcal{U}$-función de levantamiento regular para cada G-cubierta abierta $\mathcal{U}$ de Y. $\square$

Lema 3.1.5. *Sea $p : X \to Y$ una función equivariante e $i : X \to D(p)$ $x \mapsto (x, \omega_{p(x)})$ donde $\omega_{p(x)}$ es la curva constante en el punto $p(x)$. Entonces p es una G-fibración aproximable si y sólo si existe una G-función controlada $r^c : D(p) \to X$ tal que $r^c \circ i$ es G-homotópica controlada a 1_X. Además si tal r^c existe, entonces i y r^c son equivalencias G-homotópicas controladas inversas.*

Demostración: Supongamos primero que p es una G-fibración aproximable y consideremos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} D(p) \arrow[r, "\pi_1"] \arrow[d] & X \arrow[d, "p"] \\ D(p) \times I \arrow[r, "ev"'] & Y \end{tikzcd}$$

entonces existe una G-fibración controlada $h^c : D(p) \times I \to X$ de ev a p. Sea $r^c = h^c(\ ,1)$. Definimos $H(x,t,s) = h(x, \omega_{p(x)}, t, s)$ que es una G-homotopía controlada entre 1_X y $r^c \circ i$. Ahora supongamos que existe tal r^c y consideremos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i_0"'] & X \arrow[r, "i"] \arrow[d, "p"] & D(p) \arrow[d] \\ A \times I \arrow[r, "h"'] & Y \arrow[r, "1_Y"'] & Y \end{tikzcd}$$

Este problema tiene una solución $L^c : X \times I \to D(p)$, la composición $r^c \circ L^c$ es controlada pero no necesariamente resuelve el problema, pero como $r^c \circ i$ es homotópica a la identidad, existe una homotopía $H^c : X \times I \to X$ tal que $H_0^c = 1_X^c$ y $H_1^c = r^c \circ i^c$ entonces definimos $\varphi^c : A \times I \to X$ por $\varphi(a,t,s) = H(f(a),t,s)$ esta es una homotopía controlada que comienza en f^c y termina en $r^c \circ L_0^c$ pegando $r^c \circ L^c$ y φ^c de la siguiente manera podemos definir: $K^c : A \times I \to X$ por

$$K(a,t,s) = \begin{cases} \varphi(a, \frac{2t}{1-s}, s), & t \leq \frac{1-s}{2} \\ r \times 1_{[0,1)} \circ L(a, \frac{2t-1+s}{1+s}, s), & t \geq \frac{1-s}{2} \end{cases}$$

que es una solución aproximable del problema de levantamiento. $\square$

Lema 3.1.6. *Sea X un G-espacio paracompacto. Entonces X/G es paracompacto.*

Demostración: Sea $\mathcal{V}$ una cubierta abierta de X/G. La colección $\{\pi_X^{-1}(V)\}_{V \in \mathcal{V}}$ es una G-cubierta abierta de X de conjuntos G-invariantes. Como X es paracompacto, existe un refinamieto localmente finito $\mathcal{U}$ de $\{\pi_X^{-1}(V)\}_{V \in \mathcal{V}}$, entonces $\mathcal{U}' = \{GU\}_{U \in \mathcal{U}}$ es un refinamiento localmente finito de $\{\pi_X^{-1}(V)\}_{V \in \mathcal{V}}$ que consta de conjuntos G-invariantes y así, $\{\pi_X(U)\}_{U \in \mathcal{U}'}$ es un refinamiento localmente finito de $\mathcal{V}$. $\square$

Lema 3.1.7. *Sea $p : X \to Y$ una G-fibración aproximable para la clase de G-espacios paracompactos, entonces p tiene la G-AHLP para G-espacios paracompactos.*

Demostración: Sea

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i_0"'] & X \arrow[d, "p"] \\ A \times I \arrow[r, "h"'] & Y \end{tikzcd}$$

un diagrama conmutativo donde A es un G-espacio paracompacto y $\mathcal{U}$ es una G-cubierta abierta de Y. Entonces existe una G-función controlada $F^c : A \times I \to X$ de h a p tal que $F\mid_{A\times\{0\}\times[0,1)} = f \times 1_{[0,1)}$. Así que tenemos una función equivariante $\overline{F} : A \times I \times I \to Y \times I$ tal que $\overline{F}\mid_{A\times I\times[0,1)} = (p \times 1_{[0,1)}) \circ F$ y $\overline{F}\mid_{A\times I\times\{1\}} = h$. Sea $(A\times I)/G = \{G(a_j, t_j) \mid j \in J\}$ el conjunto completo de representantes de las órbitas de la acción de G sobre $A \times I$. Para cada $j \in J$ elegimos un subconjunto abierto V_j de $A \times I$ que contiene a (a_j, t_j) y un número $r_j \in [0, 1)$ tal que $\overline{F}(V_j \times (r_j, 1])$ está contenido en $U \times [0, 1]$ para algún $U \in \mathcal{U}$ y así, $\overline{F}(g(V_j \times (r_j, 1]))$ está contenido en algún $U \times [0, 1]$ ya que $\mathcal{U}$ es una G-cubierta. Sea $\pi : A \times I \to (A/G) \times I$ la aplicación cociente, la colección $\{\pi(V_j)\}_{j\in J}$ forma una cubierta abierta de $(A/G) \times I$. Ya que $(A \times I)/G$ es paracompacto, existe una subcubierta $\mathcal{V}$ de $\{\pi(V_j)\}_{j\in J}$ localmente finita, para cada $V \in \mathcal{V}$, sea $j(V) \in J$ tal que $V \subseteq \pi(V_{j(V)})$. Como $(A/G) \times I$ es paracompacto existe una aplicación $\alpha : (A/G) \times I \to [0, 1)$ tal que $\alpha(G(a_j, t_j)) \geq min\{r_{j(V)} \mid V \ni G(a_j, t_j)\}$ para cada $G(a_j, t_j)$ en $(A/G) \times I$. Definimos una función G-equivariante $\beta : A \times I \to [0, 1)$ por $\beta(a, t) = \alpha(G(a, t))$. Ahora definimos una aplicación equivariante $\gamma : A \times I \to A \times I \times [0, 1)$ por $\gamma(a, t) = (a, t, \beta(a, t))$, entonces $p \circ \pi_1 \circ F \circ \gamma(a, t) = \pi_1 \circ \overline{F}(a, t, \alpha(G(a, t)))$ y $\pi_1 \circ \overline{F}(a, t, 1) = h(a, t)$ pertenecen al un mismo abierto $U \in \mathcal{U}$, además $\pi_1 \circ F \circ \gamma(a, 0) = \pi_1 \circ F(a, 0, \alpha(G(a, t))) = \pi_1(f(a), \alpha(G(a, t))) = f(a)$. Por lo tanto $\pi_1 \circ F \circ \gamma$ es un G-$\mathcal{U}$-levantamiento aproximable de h. □

Corolario 3.1.5. *Sea $p : X \to Y$ una G-fibración aproximable, donde X y Y son G-espacios métricos. Entonces p satisface G-AHLP.*

Demostración: por el lema anterior, p tiene la G-$AHLP$ para G-espacios paracompactos y como X y Y son G-espacios métricos, $D(p) \subseteq X \times Y^I$ es paracompacto entonces p tiene la G-$AHLP$ para todos los G-espacios. □

Definición 3.1.5. Sea $\mathcal{U}$ una G-cubierta abierta de Y. Decimos que una homotopía $h : X \times I \to Y$ es una **$\mathcal{U}$-G-homotopía** si para cada $x \in X$, existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $h(x, t) \in U$ para todo $t \in I$.

Lema 3.1.8. *(ver [12], proposición 9.1) Si X es un G-ANR y $\mathcal{U}$ una G-cubierta abierta de X, entonces existe un G-refinamiento $\mathcal{V}$ de $\mathcal{U}$, tal que para cualquier G-par metrizable (Y, B) y cualquier par de aplicaciones $\mathcal{V}$-cercanas $f, f' : Y \to X$ y cualquier G-$\mathcal{V}$-homotopía $h_t : B \to X$ con $h_0 = f\mid_B$, $h_1 = f'\mid_B$, existe una G-$\mathcal{U}$-homotopía $H_t : Y \to X$ con $H_0 = f$, $H_1 = f'$ y $H\mid_{B\times I} = h$.*

Lema 3.1.9. *Sea $p : X \to Y$ una función equivariante que satisface G-$AHLP$ donde Y es un G-espacio métrico y un G-ANR. Entonces p es una G-fibración aproximable.*

Demostración: Sea

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & X \\ {\scriptstyle i_0}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ A \times I & \xrightarrow[h]{} & Y \end{array}$$

un diagrama conmutativo. Como Y es un G-espacio métrico, p satisface la G-$AHLP$ regular. Para cada $n \in \mathbb{Z}^+$, elegimos $\mathcal{U}_n$ una G-cubierta abierta de Y tal que $diam(U) < \frac{1}{n}$ para cada $U \in \mathcal{U}_n$, entonces por el lema anterior existe un G-refinamiento abierto $\mathcal{V}_i$ de $\mathcal{U}_i$ tal que cualesquiera dos aplicaciones equivariantes a Y que son $\mathcal{V}_i$-cercanas son $\mathcal{U}_i$-G-homotópicas. Además podemos suponer que cualquier elemento $V \in \mathcal{V}_i$ es tal que

$diam(V) < \frac{1}{n-1}$ si $i > 1$. Definimos de manera inductiva aplicaciones G-equivariantes $H_i : A \times I \times [0, 1 - 1/i] \to X \times [0, 1 - 1/i]$ tal que

1. H_i es una extensión de H_{i-1} si $i > 1$.

2. H_i preserva fibras sobre $[0, 1 - 1/i]$.

3. $H_i \mid_{A \times \{0\} \times [0,1-1/i]} = f \times 1_{[0,1-1/i]}$.

4. $p \circ H_i \mid_{A \times I \times \{1-1/i\}}$ es $\mathcal{V}_i$-cercana a h.

5. $p \circ \pi_1 \circ H_i \mid_{A \times I \times [1-1/(i-1), 1-1/i]}$ es $2/i$-cercana a $h \times 1_{[1-1/(i-1),1-1/i]}$.

Comenzamos con la construcción inductiva. Sea $H_1 : A \times I \times \{0\} \to X \times \{0\}$ tal que $H_1 \mid_{A \times \{0\} \times \{0\}} = f$ y $p \circ H_1$ es $\mathcal{V}_1$-cercana a h que existe gracias a que p satisface la G-$AHLP$. Ahora supongamos que H_i ya está definida. Ya que $p \circ H_i \mid_{A \times I \times \{1-1/i\}}$ es $\mathcal{V}_i$-cercana a h y como $p \circ H_i \mid_{A \times \{0\} \times \{1-1/i\}}$ y $h \mid_{A \times \{0\}}$ coinciden, existe una $\mathcal{U}_i$-G-homotopía entre $p \circ H_i \mid_{A \times I \times \{1-1/i\}}$ y h relativa a $A \times \{0\} \times \{1 - 1/i\}$. Sea $H_{i+1} \mid_{A \times I \times [1-1/i, 1-1/(i+1)]}$: $A \times I \times [1 - 1/i, 1 - 1/(i + 1)] \to X \times [1 - 1/i, 1 - 1/(i + 1)]$ un $\mathcal{V}_{i+1}$-levantamiento de dicha homotopía. Por la regulardidad mencionada anteriormente podemos suponer que $H_{i+1} \mid_{A \times \{0\} \times [1-1/i, 1-1/(i+1)]} = f \times 1_{[1-1/i,1-1/(i+1)]}$. Ahora es claro que existe $H : A \times I \times [0, 1) \to X \times [0, 1)$ pegando las H_i's, es decir, $H \mid_{A \times I \times [0,1-1/i]} = H_i$. □

Lema 3.1.10. *Sea X un G-espacio completamente normal, Y un G-espacio paracompacto y (X, A) un G-NDR par. Sea $f : A \times I \to Y$ una G-$\mathcal{V}$-homotopía donde $\mathcal{V}$ es una G-cubierta abierta de Y. Supongamos que f_0 admite una G-extensión $F_0 : X \to Y$. Entonces existe una G-$\mathcal{V}$-homotopía $F : X \times I \to Y$ que es una extensión de f.*

Demostración: Sea $u : X \to I$ y $g : X \times I \to X$ la función equivariante y la G-homotopía respectivamente definidas por el G-NDR par. Sea $U = \{x \mid u(x) < 1\}$ una vecindad de A. Como (X, A) es un G-NDR par, $(X \times I, (X \times \{0\}) \cup (A \times I))$ es un G-DR par, entonces existe una G-retracción $r : (X \times \{0\}) \cup (U \times I) \to (X \times \{0\}) \cup (A \times I)$ dada por $r(x, t) = (g_t(x), t)$. Gracias a que X es completamente regular, podemos cambiar la función u apropiadamente y podemos elegir U muy cerca de A. Definimos $k : X \times I \to (X \times \{0\}) \cup (U \times I)$ por $k(x, t) = (x, (1 - u(x))t)$. Definimos ahora la función equivariante $h : (X \times \{0\}) \cup (A \times I) \to Y$ por $h(x, 0) = F_0(x)$ y $h(a, t) = f(a, t)$, entonces definimos la extensión $F : X \times I \to Y$ por $F(x, t) = h \circ r \circ k(x, t)$. Si $x \notin U$, entonces $\{F(x, t) \mid t \in I\}$ es un simple punto. Si $x \in U$ podemos elegir r y U tal que $\{F(x, t) \mid t \in I\}$ está cercano a algún $\{f(a, t) \mid t \in I\}$ para algún $a \in A$. Por lo tanto F es una G-$\mathcal{V}$-homotopía. □

Lema 3.1.11. *Sea $p : X \to Y$ una función equivariante que tiene la G-$AHLP$ para G-celdas. Entonces el siguiente G-problema de levantamiento*

$$\begin{tikzcd}
((G/H) \times D^n) \times \{0\} \cup ((G/H) \times \partial D^n) \times I \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"'] & X \arrow[d, "p"] \\
((G/H) \times D^n) \times I \arrow[r, "\varphi"'] & Y
\end{tikzcd}$$

tiene una solución G-aproximable.

Demostración: Como $(D^n \times \{0\}) \cup (\partial D^n \times I) \cong D^n$, tenemos que $((G/H) \times D^n) \times \{0\} \cup ((G/H) \times \partial D^n) \times I \cong (G/H \times (D^n \times \{0\})) \cup (G/H \times (\partial D^n \times I)) \cong G/H \times ((D^n \times \{0\}) \cup (\partial D^n \times I)) \cong G/H \times D^n$. Así que el problema de G-levantamiento aproximable tiene solución. $\square$

Sea X un G-espacio y $\mathcal{U}$ una G-cubierta abierta de X. Sea $A \subseteq X$, el conjunto $st(A,\mathcal{U}) = \bigcup_{U_\alpha \cap A \neq \emptyset} U_\alpha$ es llamado **estrella** de A. Una G-cubierta abierta $\mathcal{V}$ es llamada **G-refinamiento estrella** de otra G-cubierta abierta $\mathcal{U}$, siempre que la G-cubierta $\{st(V_\alpha, \mathcal{V}) \mid V_\alpha \in \mathcal{V}\}$ sea un refinamiento de U. En el siguiente lema ocuparemos el hecho de que cada G-cubierta de un G-espacio paracompacto admite un G-refinamiento estrella ([12], proposición 1.6).

Lema 3.1.12. *Sea X es un G-ANR, Y un G-espacio paracompacto y $p : X \to Y$ una función equivariante. Supongamos que dados $\mathcal{V}$ y $\mathcal{U}$ G-cubiertas abiertas de X y Y repectivamente y un G-problema de levantamiento:*

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & X \\ {\scriptstyle i_0}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ A \times I & \xrightarrow[\varphi]{} & Y \end{array}$$

donde A es un G-espacio métrico, hay una función equivariante $F : A \times I \to X$ tal que f y $F \circ i_0$ son $\mathcal{V}$-cercanas y $p \circ F$ y φ son $\mathcal{U}$-cercanas. Entonces p tiene la G-$AHLP$ con respecto a A.

Demostración: Sea $\mathcal{U}$ una G-cubierta de Y. Como Y es paracompacto, existe un G-refinamiento estrella $\mathcal{U}'$ de $\mathcal{U}$. Sea $\mathcal{V}$ una G-refinamiento abierto de $p^{-1}(\mathcal{U}')$ tal que cualesquiera dos funciones equivariantes $\mathcal{V}$-cercanas son $p^{-1}(\mathcal{U}')$-G-homotópicas. Sea $F' : A \times I \to X$ una G-homotopía tal que f y F'_0 son $\mathcal{V}$-cercanas y $p \circ F'$ y φ son $\mathcal{U}'$-cercanas. Sea $k : A \times I \to X$ una $p^{-1}(\mathcal{U}')$-G-homotopía entre f y F'_0. Además, para cada $a \in A$, existe una cubierta finita $U_1, \ldots, U_n$ de abiertos en $\mathcal{U}'$ de las imágenes de las curvas $p \circ F'(a, \ )$ y $\varphi(a, \ )$ tal que $\varphi(a,0), p \circ F'(a,0) \in U_1$ y $\varphi(a,1), p \circ F'(a,1) \in U_n$. Si $\alpha(t) = \varphi(a,t)$ y $t_0 \in \alpha^{-1}(U_1)$, entonces $p \circ k(a, t/t_0)$ y $\varphi(t_0)$ están en un mismo abierto de $\mathcal{U}$ para cada $t \in [0, t_0]$. Entonces definimos $F : A \times I \to X$ por

$$F(a,t) = \begin{cases} k(a, t/t_0), & 0 \leq t \leq t_0 \\ F'(a, t/t_0 - 1), & t_0 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

con t_0 suficientemente pequeño tal que $p \circ F$ y φ sean $\mathcal{U}$-cercanas. $\square$

Lema 3.1.13. *(ver [15]) Sea $p : X \to Y$ una función equivariante entre G-ANR's que tiene la G-$AHLP$ para G-celdas. Entonces p tiene la G-$AHLP$ para G-ANR's.*

Proposición 3.1.1. *Sea $p : X \to Y$ una función equivariante entre G-ANR's la cual satisface la G-$AHLP$ para G-celdas. Entonces p satisface la G-$AHLP$.*

Demostración: Es suficiente resolver el G-problema de levantamiento para el espacio $D(p)$. Por el lema anterior, es suficiente mostrar que el espacio $D(p)$ es un G-ANR. Sea d la métrica de Y. Sea $\mathcal{U}$ una G-cubierta abierta de Y tal que cualesquiera dos funciones

G-equivariantes de un espacio métrico A a Y que coinciden sobre un G-subconjunto cerrado D de A y ellas son $\mathcal{U}$-cercanas, entonces ellas son G-homotópicas $rel(D)$. Podemos suponer que $diam(U) < 1$ para cada $U \in \mathcal{U}$. Ya que Y es un G-ANR, el espacio de curvas Y^I es G-ANR (ver [12], teorema 11.1) y como un G-ANR es un G-ANE y el producto finito de G-ANE es de nuevo un G-ANE, $X \times Y^I$ es un G-ANE y así, $X \times Y^I$ es G-ANR con la acción diagonal. Sea $D(p)' = \{(x, \alpha) \in X \times Y^I \mid p(x), \alpha(0) \in U$ para algún $U \in \mathcal{U}\}$ entonces $D(p)'$ es un G-subconjunto abierto de $X \times Y^I$ y por lo tanto es un G-ANR. Notemos que además $D(p)$ es un G-subconjunto cerrado de $D(p)'$. Definimos dos funciones G-equivariantes $g_1, g_2 : D(p)' \to Y$ por $g_1(x, \alpha) = p(x)$ y $g_2(x, \alpha) = \alpha(0)$. Por construcción g_1 y g_2 son $\mathcal{U}$-cercanas y coinciden en $D(p)$, por lo tanto existe una G-homotopía H de g_1 a g_2 $rel(D(p))$. Para $(x, \alpha) \in D(p)'$ definimos $\alpha' \in Y^I$ por

$$\alpha'(t) = \begin{cases} H(x, \alpha, \frac{1}{d(p(x),\alpha(0))}), & 0 \leq t < d(p(x), \alpha(0)) \\ \alpha(\frac{t - d(p(x),\alpha(0))}{1 - d(p(x),\alpha(0))}), & d(p(x), \alpha(0)) \leq t \leq 1 \end{cases}$$

la aplicación $r : D(p)' \to D(p)$ dada por $r(x, \alpha) = (x, \alpha')$ es una G-retracción y por lo tanto $D(p)$ es un G-ANR. $\square$

El siguiente teorema dice prácticamente que p una G-fibración aproximable si y sólo si satiface la G-$AHLP$ gracias a la proposición anterior.

Teorema 3.1.1. *Sea $p : X \to Y$ una función G-equivariante entre G-ANR's. Entonces p es una G-fibración aproximable si y sólo si satisface la G-$AHLP$ para G-celdas.*

Demostración: Supongamos que p es una G-fibración aproximable. Como X y Y son G-espacios métricos, p satisface G-$AHLP$, en particular, para G-celdas. Si p satisface la G-$AHLP$ para G-celdas, por el lema anterior satisface G-$AHLP$ y como Y es G-ANR, p es una G-fibración aproximable. $\square$

El el capítulo anterior se demostró que una función equivariante es una G-fibración de Serre si y sólo si $p^H : X^H \to Y^H$ es una fibración de Serre. Aunque no se sabe si este resultado es cierto para caracterizar G-fibraciones de Hurewicz, es cierto para G-fibraciones aproximables de Hurewicz.

Teorema 3.1.2. *$p : X \to Y$ es una G-fibración aproximable si y sólo si $p^H : X^H \to Y^H$ es una fibración aproximable para cada subgrupo H de G.*

Demostración: Si p es una G-fibración aproximable entonces p^H es una fibración aproximable. Ahora supongamos que p^H es una fibración aproximable para cada subgrupo H de G. Demostraremos que p tiene la G-$AHLP$ para G-celdas. Sea

$$\begin{tikzcd} (G/H) \times D^n \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i_0"'] & X \arrow[d, "p"] \\ (G/H) \times D^n \times I \arrow[r, "\varphi"'] & Y \end{tikzcd}$$

un G-problema de levantamiento y $\mathcal{U}$ una G-cubierta abierta de Y. Notemos que hay una correspondencia uno a uno $\eta : Hom_G((G/H) \times D^n, Z) \to Hom(D^n, Z^H)$ dada por

$\eta(s) = \widetilde{s}$, $\widetilde{s}(x) = s(H,x)$, con inversa $\eta^{-1}(r)(gH,x) = gr(x)$ por lo tanto obtenemos el problema de levantamiento:

$$\begin{tikzcd} D^n \arrow[r, "\widetilde{f}"] \arrow[d, "i_0"'] & X^H \arrow[d, "p^H"] \\ D^n \times I \arrow[r, "\widetilde{\varphi}"'] & Y^H \end{tikzcd}$$

y ya que p^H es una fibración aproximable, y en particular X^H y Y^H son espacios métricos, p^H satisface la $AHLP$ entonces hay un levantamiento $\widetilde{F} : D^n \times I \to X^H$ tal que $\widetilde{F}\mid_{D^n\times\{0\}} = \widetilde{f}$ y las funciones $p^H \circ \widetilde{f}$ y $\widetilde{\varphi}$ son $\mathcal{U} \cap Y^H$-cercanas, entonces la función equivariante $F : (G/H) \times D^n \times I \to X$ definida por $F = \eta^{-1}(\widetilde{F})$ es tal que $F(gH,x,0) = g\widetilde{F}(x,0) = g\widetilde{f}(x) = gf(H,x) = f(gH,x)$ y por otra parte, $p \circ F(gH,x,t) = p(g\widetilde{F}(x,t)) = gp(\widetilde{F}(x,t))$ es $\mathcal{U} \cap Y^H$-cercana a $g\widetilde{\varphi}(x,t) = g\varphi(H,x,t) = \varphi(gH,x,t)$. Por lo tanto p es una G-fibración aproximable. $\square$

3.2. Grupos de Lie y subgrupos grandes.

En esta sección describimos los grupos de Lie y resultados que serán utilidad más adelante.

Definición 3.2.1. Sea k un entero positivo. Un **grupo de Lie** de dimensión k es un grupo topológico G segundo numerable con estructura de variedad diferenciable de dimensión k tal que las operaciones de grupo $(\ ,\ ) : G \times G \to G$, $(g_1, g_2) \mapsto g_1g_2$ e $i : G \to G$, $g \mapsto g^{-1}$ son diferenciables.

Proposición 3.2.1. *(ver [7], corolario 1.10.7)Todo subgrupo cerrado H de un grupo de Lie, es un grupo de Lie.*

Proposición 3.2.2. *(ver [5], teorema 0.5.1) Un grupo compacto de Hausdorff G es un grupo de Lie si y sólo si es isomorfo a un subgrupo cerrado de $O(n)$ para algún n.*

Proposición 3.2.3. *(ver [5], corolario 0.4.4) Sea G un grupo compacto y sea U una vecindad de la identidad $e \in G$. Entonces existe un morfismo continuo $\varphi : G \to O(n)$ tal que $ker(\varphi) \subseteq U$.*

Corolario 3.2.1. *Sea G un grupo compacto. Para cada vecindad U de la identidad $e \in G$, existe un subgrupo normal cerrado $N \subseteq G$ tal que $N \subseteq U$ y G/N es un grupo de Lie.*

Demostración: Sea $\varphi : G \to O(n)$ el morfismo continuo de la proposición anterior, tomamos $N = ker(\varphi) \subseteq U$, entonces $G/N = G/ker(\varphi) \cong \varphi(G)$ que es un subgrupo cerrado de $O(n)$. Por lo tanto G/N es un grupo de Lie. $\square$

Proposición 3.2.4. *Sean $N_1, \ldots, N_n$ subgrupos cerrados de un grupo compacto de Hausdorff G tales que para cada i, G/N_i es un grupo de Lie. Entonces $G/(N_1 \cap \cdots \cap N_n)$ es también un grupo de Lie.*

Demostración: Como G/N_i es un grupo de Lie para cada i, el grupo $H = G/N_1 \times \cdots \times G/N_n$ es también un grupo de Lie. Sea $\varphi : G \to H$ el morfismo dado por $\varphi(g) = (gN_1, \ldots, gN_n)$, entonces $ker(\varphi) = N_1 \cap \cdots \cap N_n$, así que $G/(N_1 \cap \cdots \cap N_n) \cong Im(\varphi)$ y como $Im(\varphi)$ es un subgrupo cerrado de H, entonces $G/(N_1 \cap \cdots \cap N_n)$ es un grupo de Lie. $\square$

Proposición 3.2.5. *(ver [1], teorema 1.1) Sea G un grupo compacto de Hausdorff y X un G-ANR. Entonces para cada subgrupo normal cerrdado $N \subseteq G$, el espacio X/N es un G/N-ANR. En particular, X/G es un ANR.*

Proposición 3.2.6. *(ver [14], corolario 1.6.7) Sea H un subgrupo cerrado de un grupo compacto de Lie. Entonces G/H es un G-ANR.*

Ejemplo 3.2.1. Los siguientes son ejemplos de grupos de Lie:

- El grupo aditivo $\mathbb{R}^n$.
- La circunferencia unitaria $S^1 \subseteq \mathbb{C}$
- El toro $\mathbb{T}^n = (S^1)^n$
- El grupo general lineal real $Gl_n(\mathbb{R})$ ó complejo $Gl_n(\mathbb{C})$
- El grupo ortogonal $O(n)$ así como el grupo unitario

$$U(n) = \{A \in Gl_n(\mathbb{C}) \mid A\overline{A}^t = I\}$$

Definición 3.2.2. Sea G un grupo compacto. Un subgrupo cerrado $H \subseteq G$ es **grande** si existe un subgrupo normal cerrado $N \subseteq H$ tal que G/N es un grupo de Lie.

Proposición 3.2.7. *(ver [2] y [3]) Sea H un subgrupo cerrado de un grupo compacto G. Entonces la siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *H es grande.*
2. *G/H es un G-ANR*
3. *G/H es localmente conexo y $dim(G/H) < \infty$.*
4. *G/H es una variedad diferenciable.*

Proposición 3.2.8. *Sea G un grupo compacto.*

1. *Si $H \subseteq G$ es un subgrupo grande, entonces $N(H)/H$ es un grupo de Lie compacto. En particular, un subgrupo normal cerrado N es grande si y sólo si G/N es un grupo de Lie.*
2. *Si $N \subseteq G$ es un subgrupo normal grande, entonces para cada subgrupo cerrado $H \subseteq G$, el subgrupo NH es también un subgrupo grande.*

Demostración: 1. Sea N un subgrupo normal cerrado de G tal que $N \subseteq H$ y G/N es un grupo de Lie. Como $N(H)/N$ es un subgrupo cerrado de G/N, $N(H)/N$ es un grupo de Lie. Además, la función $\varphi : N(H)/N \to N(H)/H$ dada por $\varphi(gN) = gH$ es un morfismo continuo sobreyectivo. Entonces $N(H)/H \cong (N(H)/N)/ker(\varphi)$ es el cociente de un grupo de Lie, por lo tanto es un grupo de Lie. Si N es un subgrupo normal cerrado grande de G, $N(N) = G$ y así G/N es un grupo de Lie, y si G/N es un grupo de Lie, entonces claramente N es grande

2. NH es un subgrupo cerrado de G, $N \subseteq NH$ y por la proposición anterior G/N es un grupo de Lie, entonces NH es un subgrupo grande. □

3.3. Restricción y Extensión de G-espacios.

En esta sección vamos a definir dos funtores covariantes definidos por un morfismo de grupos topológicos $\alpha : G' \to G$, el funtor **restricción** $Res_\alpha : G\text{-}Top \to G'\text{-}Top$ y el funtor **extensión** $Ext_\alpha = G \times_\alpha - : G'\text{-}Top \to G\text{-}Top$.

Sea $\alpha : G' \to G$ un morfismo de grupos topológicos. Sea X un G-espacio, entonces definimos $Res_\alpha(X)$ como el G'-espacio que como conjunto es el mismo espacio topológico X y con una G'-acción definida de la siguiente manera: sea $g' \in G'$ y $x \in X$, entonces definimos $g' \cdot x = \alpha(g')x$ y si $f : X \to Y$ es una función G-equivariante, entonces $Res_\alpha(f) : Res_\alpha(X) \to Res_\alpha(Y)$, dada por $Res_\alpha(f)(x) = f(x)$ es G'-equivariante ya que $Res_\alpha(f)(g' \cdot x) = Res_\alpha(f)(\alpha(g')x) = f(\alpha(g')x) = \alpha(g')f(x) = g' \cdot f(x) = g' \cdot Res_\alpha(f)(x)$. A partir de ahora por comodidad escribiremos $g'x$ en vez de $g' \cdot x$.

Ahora sea X un G'-espacio, entonces $G \times X$ tiene estructura de G'-espacio de la siguiente manera: Sea $g' \in G'$, $g \in G$ y $x \in X$ entonces $g' \cdot (g, x) = (g(\alpha(g'))^{-1}, g'x)$ y denotamos por $[g, x]$ la G'-órbita del punto (g, x) entonces definimos $G \times_\alpha X$ como el cociente $(G \times X)/G'$ que tiene estructura de G-espacio con la siguiente acción: Sean $g_1, g_2 \in G$ y $x \in X$ entonces definimos $g_1 \cdot [g_2, x] = [g_1 g_2, x]$. Si $f : X \to Y$ es G'-equivariante, definimos $G \times_\alpha f : G \times_\alpha X \to G \times_\alpha Y$ por $G \times_\alpha f([g, x]) = [g, f(x)]$ y es G-equivariante ya que $G \times_\alpha f(g_1 \cdot [g, x]) = G \times_\alpha f([g_1 g, x]) = [g_1 g, f(x)] = g_1 \cdot [g, f(x)] = g_1 \cdot (G \times_\alpha f([g, x]))$. Por comodidad, a partir de ahora escribiremos $g_1[g, x]$ en vez de $g_1 \cdot [g, x]$.

Ejemplo 3.3.1. A continuación mencionaremos dos ejemplos importantes del funtor extensión:

- Sea H un subgrupo normal cerrado de un grupo G. Entonces la proyección natural $\pi : G \to G/H$ induce el funtor extensión $G/H \times_\pi - : G\text{-}Top \to G/H\text{-}Top$ y es tal que $G/H \times_\pi X \cong X/H$, $[gH, x] \mapsto N(gx)$.
- Sea H un subgrupo cerrado de un grupo G. La inclusión natural $i : H \to G$ induce el funtor extensión $G \times_i - : H\text{-}Top \to G\text{-}Top$ que asocia a cada H-espacio X el G-espacio $G \times_i X$ qu en este caso lo denotamos por $G \times_H X$ y lo llamamos producto torcido.

A continuación demostraremos algunas proposiciones relacionadas con los funtores previamente definidos y que serán de utilidad. Estos resultados también los podemos encontrar en [11].

Proposición 3.3.1. *Sea $\alpha : G' \to G$ un morfismo de grupos topológicos donde G' es compacto y sea X un G'-espacio. Entonces la aplicación $i_X : X \to G \times_\alpha X$, $x \mapsto [e,x]$ es una función G'-equivariante cerrada y si α es inyectiva, i_X es un G'-encaje.*

Demostración: Sea $i_e : X \to G \times X$ dada por $i_e(x) = (e,x)$ y $\pi_{G\times X} : G \times X \to G \times_\alpha X$ la proyección orbital, ambas son continuas, entonces $i_X = \pi_{G\times X} \circ i_e$ es continua, además como G' es compacto, $\pi_{G\times X}$ es cerrada y como i_e también es cerrada, i_X es cerrada. Ahora como $G \times_\alpha X$ es un G'-espacio tomando la restricción, se tiene que $i_X(g'x) = [e, g'x] = [\alpha(g'), x] = \alpha(g')[e,x] = \alpha(g')i_X(x) = g'i_X(x)$, por lo tanto, i_X es una función G'-equivariante cerrada. Supongamos que α es inyectiva. Sean $x_1, x_2 \in X$ tal que $[e,x_1] = [e,x_2]$, entonces existe $g' \in G'$ tal que $(\alpha(g')^{-1}, g'x_1) = (e, x_2)$ de este modo, $\alpha(g') = e$ y así, $g' = e$ esto significa que i_X es inyectiva, cerrada y G'-equivariante. Por lo tanto, i_X es un G'-encaje. □

Proposición 3.3.2. *Sea $\alpha : G' \to G$ un morfismo de grupos topológicos y X un G'-espacio. Entonces $(G \times_\alpha X)/G \cong X/G'$.*

Demostración: La proyección en la segunda entrada $\pi_2 : G\times X \to X$ es G'-equivariante ya que $\pi_2(g'(g,x)) = \pi_2(g(\alpha(g'))^{-1}, g'x) = g'x = g'\pi_2(g,x)$. La función inducida en los espacios cociente $\widetilde{\pi_2} : G \times_\alpha X \to X/G'$ es continua y abierta ya que π_2 lo es. Como $\widetilde{\pi_2}(G[g,x]) = G'x$, $\widetilde{\pi_2}$ se puede factorizar como:

$$\begin{tikzcd} G \times_\alpha X \arrow[d, "\pi_{G\times_\alpha X}"'] \arrow[dr, "\widetilde{\pi_2}"] & \\ (G \times_\alpha X)/G \arrow[r, "\varphi"'] & X/G' \end{tikzcd}$$

donde φ está dada por $\varphi(G[g,x]) = G'x$ es continua ya que $\pi_{G\times_\alpha X}$ es una identificación y $\widetilde{\pi_2}$ es continua y es abierta ya que $\widetilde{\pi_2}$ lo es. Ahora supongamos que $G[g_1,x_1]$ y $G[g_2,x_2]$ son tales que $G'x_1 = G'x_2$, entonces existe $g' \in G'$ tal que $g'x_1 = x_2$, entonces $G[g_2,x_2] = G[g_2, g'x_1] = G[g_2\alpha(g'), x_1] = G[g_1,x_1]$, por lo tanto, φ es un homeomorfismo. □

Proposición 3.3.3. *Sea $\alpha : G' \to G$ un morfismo de grupos compactos tal que $coker(\alpha)$ es metrizable. Si X es un G'-espacio metrizable, entonces el G-espacio $G \times_\alpha X$ es metrizable.*

Demostración: Como G' es compacto, la proyección $\pi_X : X \to X/G'$ es propia y como X es metrizable y gracias al lema 1.4.1, la imagen bajo esta proyección X/G' es metrizable entonces por la proposición anterior $(G \times_\alpha X)/G$ es metrizable. Sea $[g,x] \in G \times_\alpha X$ y como G es compacto y X Hausdorff, $G[e,x] = G/G_{[e,x]}$. Como $ker(\alpha)$ es un subgrupo cerrado del grupo compacto G', la proyección natural $G' \to G'/ker(\alpha)$ es propia y así, la restricción de α a su imagen $\alpha : G' \to \alpha(G')$ es propia, luego, $\widetilde{\alpha} : G'/G'_x \to G/\alpha(G'_x)$ dada por $\widetilde{\alpha}(g'G'_x) = \alpha(g')\alpha(G'_x)$ es también propia y como $G'x \cong G'/G'_x$ es metrizable, $G/\alpha(G'_x)$ es metrizable y como $G/Im(\alpha)$ es metrizable, $G/\alpha(G'_x) \cong G/G_{[e,x]} = G/G_{[g,x]}$ es metrizable. Hemos demostrado que las G-órbitas $G[g,x]$ y $(G\times_\alpha X)/G$ son metrizables entonces $G \times_\alpha X$ es metrizable. □

Proposición 3.3.4. *Sea $\alpha : G' \to G$ un morfismo de grupos compactos tal que $coker(\alpha)$ es metrizable y sea Y un G-ANR, entonces Y es un G'-ANR.*

Demostración: Sea (X, A) un G' par metrizable y $f : A \to Y$ G'-equivariante. Definimos $\widetilde{f} : G \times_\alpha A \to Y$ dada por $\widetilde{f}([g, a]) = gf(a)$ es G-equivariante. Como G' es compacto, la proyección natural $G \times X \to G \times_\alpha X$ es cerrada y así, $G \times_\alpha A$ es cerrado en $G \times_\alpha X$ y son metrizables gracias a la proposición anterior. Como Y es un G-ANR, existe una vecindad G-invariante U de $G \times_\alpha A$ en $G \times_\alpha X$ y una G-extensión $\overline{f} : U \to Y$ de $\widetilde{f}$. Sea $V = i_X^{-1}(U)$, entonces V es una vecindad G'-invariante de A en X y $\overline{f} \circ i_X |_V : V \to Y$ es una G'-extensión de f y por lo tanto Y es un G'-ANR. $\square$

A continuación hablaremos un poco de las H-rebanadas ya que necesitamos un resultado relacionado con esta definición, para ser más precisos el corolario 3.3.1 que ocuparemos más adelante.

Definición 3.3.1. Sea X un G-espacio, H un subgrupo cerrado de G y $S \subseteq X$ H-invariante. S es una H**-rebanada** de X si:

1. GS es abierto en X.
2. S es cerrado en GS.
3. Si $g \in G \setminus H$, entonces $gS \cap S = \emptyset$.

Diremos que S es una H-rebanada global de X cuando $GS = X$

Proposición 3.3.5. *Sean G un grupo compacto y H un subgrupo cerrado de G. Sea S un subconjunto H-invariante de un G-espacio X, tal que GS es abierto en X. Entonces S es una H-rebanada si y sólo si la función $\eta : G \times_H S \to GS$, dada por $\eta([g, s]) = gs$ es un homeomorfismo G-equivariante.*

Demostración: Supongamos que S es una H-rebanada. Sean $[g, s] = [g', s'] \in G \times_H S$, entonces existe $h \in H$ tal que $g = g'h^{-1}$ y $s = hs'$, entonces $\eta([g, s]) = gs = g'h^{-1}hs' = g's' = \eta([g', s'])$ por lo tanto, η está bien definida. Consideremos ahora el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} G \times S \arrow[rr, "\theta"] \arrow[dr, "\pi_{G\times S}"'] & & GS \\ & G \times_H S \arrow[ur, "\eta"'] & \end{tikzcd}$$

donde $\theta((g, s)) = gs$. Como $\pi_{G\times S}$ es continua, abierta y sobreyectiva, es una identificación y como θ es continua y sobre, η es continua y sobre. Sea $C \subseteq G \times_H S$ cerrado, entonces $\eta(C) = \theta(\pi_{G\times S}^{-1}(C))$ además, $\pi_{G\times S}^{-1}(C)$ es cerrado en $G \times S$ y como G es compacto, θ es cerrada, por lo tanto $\eta(C)$ es cerrado en GS. Supongamos ahora que $\eta([g, s]) = \eta([g', s'])$, entonces $gs = g's'$ así que $s = g^{-1}g's'$. Como S es una H-rebanada, $g^{-1}g' \in H$, entonces $[g', s'] = [g'(g^{-1}g')^{-1}, (g^{-1}g')s'] = [g, s]$, por lo tanto η es inyectiva y claramente es G-equivariante y así η es un homeomorfismo G-equivariante.

Supongamos ahora que η es un homeomorfismo G-equivariante. Por hipótesis GS es abierto en X. Supongamos que $gS \cap S \neq \emptyset$, entonces existen $s, s' \in S$ tales que $gs = s'$. Como $\eta([e, s']) = s' = gs = \eta([g, s])$ y por inyectividad $[e, s'] = [g, s]$ así que existe $h \in H$ tal que $e = gh^{-1}$ y $s' = hs$ por lo tanto $g \in H$ y así se cumple la condición 3 de la definición de H-rebanada. Sea $(g, s) \in \theta^{-1}(S)$ entonces $\theta((g, s)) = gs \in S$ entonces por la propiedad 3 ya demostrada, $g \in H$ así que $\theta^{-1}(S) \subseteq H \times S$ y $\theta^{-1}(S) = H \times S$. Como

$H \times S$ es cerrado en $G \times S$, $\pi_{G\times S}^{-1}(\eta^{-1}(S)) = \theta^{-1}(S)$ es cerrado en $G \times S$ y como $\pi_{G\times S}$ es una identificación, $\eta^{-1}(S)$ es cerrado en $G \times_H S$ y como η es un homoeomorfismo, $S = \eta(\eta^{-1}(S))$ es cerrado en GS. Por lo tanto, S es una H-rebanada. □

Proposición 3.3.6. *Sea H un subgrupo cerrado de un grupo G y sea X un G-espacio. Si $f : X \to G/H$ es G-equivariante, entonces $S = f^{-1}(\{H\})$ es una H-rebanada global de X.*

Demostración: $S = f^{-1}(\{H\})$ es H-invariante ya que $\{H\} \in G/H$ lo es. Luego $GS = G(f^{-1}(\{H\})) = f^{-1}(G\{H\}) = f^{-1}(G/H) = X$. Como H es cerrado, G/H es de Hausdorff, entonces $\{H\}$ es cerrado en G/H y así S es cerrado en X. Por lo tanto S es cerrado en GS. Ahora supongamos que $gS \cap S \neq \emptyset$, entonces existen $s_1, s_2 \in S$ tal que $s_1 = gs_2$. Luego $f(s_1) = f(gs_2) \in gH$, y como $f(s_1) = H$, entonces $g \in H$. De esta manera, si $g \in G\backslash H$, entonces $gS \cap S = \emptyset$. Por lo tanto, S es una H-rebanada global. □

Corolario 3.3.1. *Sean G un grupo compacto, H un subgrupo cerrado de G y X un G-espacio. Entonces para cualquier función G-equivariante $f : X \to G/H$, $G \times_H S \cong X$ donde $S = f^{-1}(\{H\})$.*

Demostración: Por la proposición 3.3.6, S es una H-rebanada global de X, es decir, $GS = X$ y por la proposición 3.3.5, $G \times_H S \cong GS = X$. □

Definición 3.3.2. Sea G un grupo compacto, X un G-espacio de Hausdorff y $x \in X$. Un **G-tubo** alrededor de la órbita Gx es un G-encaje $\varphi : G \times_{G_x} A \to X$ sobre una vecindad abierta de Gx en X, donde $A \subseteq X$ es G_x-invariante.

Los siguientes resultados los utilizaremos para demostrar el teorema 3.4.1 sobre G-haces principales:

Teorema 3.3.1. *(ver [5], teorema 5.4) Sea G un grupo de Lie compacto y X un G-espacio completamente regular. Entonces existe un tubo alrededor de cada una de las órbitas de X.*

Teorema 3.3.2. *(ver [5], teorema 4.2) Sea X un G-espacio y $x \in S \subseteq X$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- *Existe un G-tubo $\varphi : G \times_{G_x} A \to X$ alrededor de Gx tal que $\varphi([e, A]) = S$.*
- *S es una G_x-rebanada.*
- *GS es abierto en X y existe una G-retracción $f : GS \to Gx$ tal que $f^{-1}(x) = S$.*

3.4. G-haces principales.

Antes de definir G-haces principales necesitamos definir lo que es una **acción derecha**. Un **G-espacio derecho** es un espacio topológico X junto con una función continua $\varphi : G \times X \to X$ tal que

- $\varphi(e, x) = x$ para todo $x \in X$.
- $\varphi(g_1 g_2, x) = \varphi(g_2, \varphi(g_1, x))$ para todo $g_1, g_2 \in G$ y $x \in X$.

En tal caso, por comodidad escribiremos $\varphi(g, x) = xg$ para cada $g \in G$ y $x \in X$.

Definición 3.4.1. Sea X un G-espacio libre derecho. Una función continua sobreyectiva $p : X \to Y$ es un **G-haz principal** si

- $p(xg) = p(x)$ para todo $x \in X$ y $g \in G$.
- Para cada $y \in Y$ existe una vecindad abierta $V \ni y$ en Y y un homeomorfismo G-equivariante $\varphi : p^{-1}(V) \to V \times G$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} p^{-1}(V) \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "p"'] & & V \times G \arrow[dl, "\pi_1"] \\ & V & \end{tikzcd}$$

Si p es un G-haz principal, por la condición 2, p es una función abierta y consideremos el siguiente diagrama que es conmutativo gracias a la condición 1:

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "\pi_X"'] \arrow[dr, "p"] & \\ X/G \arrow[rr, "h"'] & & Y \end{tikzcd}$$

Entonces h es un homeomorfismo y $X/G \cong Y$.

Sean $p : X \to X'$ y $q : Y \to Y'$ G-haces principales, un morfismo entre los G-haces p y q es un par de funciones continuas (F, f) donde F es G-equivariante tal que el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "F"] \arrow[d, "p"'] & Y \arrow[d, "q"] \\ X' \arrow[r, "f"'] & Y' \end{tikzcd}$$

es conmutativo. En este caso, gracias a [6] proposiciones 8.3 y 8.4, el diagrama anterior es un pull-back.

Si X es un G-espacio, definimos X_r como el mismo espacio topológico X pero con la acción derecha dada por $x \cdot g = g^{-1}x$ para todo $g \in G$ y $x \in X$. Del mismo modo, si X es un G-espacio derecho, definimos X_l como el mismo espacio topológico X con la acción definida por $g \cdot x = xg^{-1}$.

Ejemplo 3.4.1. Sea X un G-CW complejo libre, entonces $p : X_r \to X_r/G$ es un G-haz principal. Inversamente, si $p : X \to Y$ es un G-haz principal sobre un CW complejo Y, entonces X_l tiene la estructura de un G-CW complejo libre adoptada de las imágenes inversas de los esqueletos de Y.

Ejemplo 3.4.2. Sea M una variedad diferenciable y G un grupo de Lie. Una acción $\varphi : G \times M \to M$ de G sobre M es una **acción diferenciable** si φ es diferenciable. φ es una **acción propia** si $\delta : G \times M \to M \times M$, $(g, x) \mapsto (gx, x)$ es propia. Si M es un grupo de Lie con una acción derecha libre diferenciable y propia sobre una variedad diferenciable M. Entonces por [9], M es un G-CW complejo propio y la proyección $\pi : M_r \to M_r/G$ es un G-haz principal.

Definición 3.4.2. Sea G un grupo de Lie compacto, H un grupo topológico y $\alpha : G \to Aut(H)$ una acción de G en H. Un (G, α, H)**-haz principal** es un H-haz principal $p : X \to Y$ en donde X y Y tienen una estructura de G-espacios izquierdos tal que:

1. p es G-equivariante.

2. Para cada $g \in G$, $h \in H$ y $x \in X$, se satisface $g(xh) = (gx)\alpha_g(h)$.

Teorema 3.4.1. *([11]) Sean G y H grupos de Lie compactos. Si $p : X \to Y$ es un (G, α, H)-haz principal, donde X es un G-espacio metrizable, entonces p es una G-fibración regular.*

Demostración: Sea $K = G \rtimes H$ el producto semidirecto. Entonces podemos considerar a X y $Y \cong X/H$ como K-espacios con las siguientes acciones: $(g,h)x = (gx)h^{-1}$ y $(g,h)xH = (gx)H$ para cada $(g,h) \in K = G \rtimes H$, $x \in X$ y $xH \in Y$. Sea $x_0 \in X$. Como K es un grupo de Lie y X es completamente regular, por el teorema 3.3.1, existe un K-tubo alrededor de cada K-órbita de $x \in X$ y por el teorema 3.3.2, existe una K-vecindad U de la órbita Kx_0 y una K-retracción $f : U \to K/K_{x_0}$. f es también G-equivariante izquierda y H-equivariante derecha. Sea $p' = p\mid_{Kx_0}$, entonces p' es una proyección H-orbital y como $K/K_{x_0} \cong Kx_0$, se tiene que $p'(K/K_{x_0}) = p'(Kx_0) = \{p((g,h)x_0) \mid (g,h) \in K\} = \{(g,h)p'(x_0) \mid (g,h) \in K\} = \{gp'(x_0) \mid g \in G\} = \{gp(x_0) \mid g \in G\} = Gp(x_0) = G/G_{p(x_0)}$ Luego definimos $f' : V = p(U) \to G/G_{p(x_0)}$ por $f'(xH) = f(x)H$ para $xH \in V$ y es G-equivariante ya que $gf'(xH) = g(f(x))H = (gf(x))H = (f(gx))H = f'(gxH) = f'(g(xH))$ para todo $g \in G$ y $xH \in V$ y f' es tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p|_U"'] & K/K_{x_0} \arrow[d, "p'"] \\ V \arrow[r, "f'"'] & G/G_{p(x_0)} \end{tikzcd}$$

de esta manera, (f, f') es un morfismo de haces, por lo tanto el diagrama anterior es un pull-back. Gracias a ([6], pag. 54 E. 7), p' es una G-fibración. Además por la proposición 3.2.6, $G/G_{p(x_0)}$ es un G-ANR y K/K_{x_0} es un K-ANR y por lo tanto, un G-ANR gracias a la proposición 3.3.4 aplicada al monomorfismo $i : G \to K$ dada por $i(g) = (g, e)$. Luego p' es un G-fibración regular y por lo tanto $p\mid_U$ es también una G-fibración regular. De esta manera existe una cubierta $\{V_i\}_{i \in J}$ de X/H tal que $p\mid_{U_i}: U_i \to V_i$ es una G-fibración regular y por la caracterización local de las G-fibraciones, p es una G-fibración regular. □

3.5. G-fibraciones aproximables inducidas por los funtores Res_α y $G \times_H -$.

Ya hemos demostrado que si una G-función equivariante $p : X \to Y$ es una G-fibración aproximable, entonces es también una H-fibración aproximable para cada subgrupo H de G. A continuación demostraremos una generalización de esto; que el functor Res_α preserva fibraciones aproximables equivariantes.

Proposición 3.5.1. *Sean G y G' grupos compactos, X, Y G-espacios y $\alpha : G' \to G$ un morfismo de grupos. Si $p : X \to Y$ es una G-fibración aproximable, entonces $Res_\alpha(p)$ es una G'-fibración aproximable.*

Demostración: Sea A un G'-espacio. Consideremos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "i_A"] \arrow[ddd, "i_0"'] & & X \arrow[ddd, "p"] \\
& G \times_\alpha A \arrow[ur, "f'"'] \arrow[d, "G\times_\alpha(i_0)"'] & \\
& G \times_\alpha (A \times I) \arrow[dr, "F'"] & \\
A \times I \arrow[ur, "i_{A\times I}"] \arrow[rr, "F"'] & & Y
\end{tikzcd}$$

donde $f'([g,a]) = gf(a)$ y $F'([g,(a,t)]) = gF(a,t)$ y como p es una G-fibración aproximable, existe una función G-equivariante $K : G \times_\alpha A \times I \times [0,1) \to X \times [0,1)$ tal que $K \mid_{G\times_\alpha A \times \{0\} \times [0,1)} = f' \times 1_{[0,1)}$ y la siguiente función:

$$\overline{K}([g,a],t,s) = \begin{cases} p \circ \pi_1 \circ K([g,a],t,s), & 0 \leq s < 1 \\ F'([g,a],t), & s = 1 \end{cases}$$

es continua, entonces la función G'-equivariante buscada es $K_1 = K \circ (i_{A\times I} \times 1_{[0,1)})$ ya que $\overline{K_1} = \overline{K} \circ (i_{A\times I} \times 1_I)$. $\square$

Ahora vamos a demostrar que el funtor $G\times_H$- preserva fibraciones aproximables equivariantes pero antes de comenzar con esto, hablaremos un poco de límites inversos en la categoría G-Top.

Sea $(\Lambda, \leq)$ un conjunto dirigido. Un **sistema inverso** en G-Top está formado por una colección $\{X_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ de G-espacios y una colección de funciones G-equivariantes $\{\varphi_{\alpha\beta} : X_\beta \to X_\alpha\}_{\alpha\leq\beta}$ tal que

- $\varphi_{\alpha\alpha} = 1_{X_\alpha}$ para cada $\alpha \in \Lambda$.
- $\varphi_{\alpha\beta} \circ \varphi_{\beta\gamma} = \varphi_{\alpha\gamma}$ siempre que $\alpha \leq \beta \leq \gamma$.

El **límite inverso** de un sistema inverso $(\{X_\alpha\}, \{\varphi_{\alpha\beta}\})$ es un G-espacio X junto con una colección de funciones G-equivariantes $\{f_\alpha : X \to X_\alpha\}$ tal que el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
& X \arrow[dl, "f_\alpha"'] \arrow[dr, "f_\beta"] & \\
X_\alpha & & X_\beta \arrow[ll, "\varphi_{\alpha\beta}"]
\end{tikzcd}$$

conmuta (a dicha colección se le llama G-cono sobre el sistema inverso $(\{X_\alpha\}, \{\varphi_{\alpha\beta}\})$) y se satisface la siguiente propiedad universal: Si $\{f'_\alpha : X' \to X_\alpha\}$ es una colección de funciones G-equivariantes donde X' es un G-espacio y satisfacen que $\varphi_{\alpha\beta} \circ f'_\beta =$

f'_α entonces existe una única función G-equivariante $h : X' \to X$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
& X' \arrow[d, "h"] \arrow[ddl, "f'_\alpha"'] \arrow[ddr, "f'_\beta"] & \\
& X \arrow[dl, "f_\alpha"] \arrow[dr, "f_\beta"'] & \\
X_\alpha & & X_\beta \arrow[ll, "\varphi_{\alpha\beta}"]
\end{tikzcd}$$

Entonces decimos que X es el límite inverso y lo denotaremos por $X = \varprojlim(\{X_\alpha\}, \{f_\alpha\}) = \varprojlim X_\alpha$. En esta categoría podemos describir de manera explícita al límite inverso como el siguiente G-espacio:

$$X = \{x \in \prod_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha \mid \pi_\alpha(x) = \varphi_{\alpha\beta} \circ \pi_\beta(x), \alpha \leq \beta\}$$

donde $\pi_\beta : \prod_\alpha X_\alpha \to X_\beta$ es la proyección en la β-ésima entrada.

Definición 3.5.1. Sea H un subgrupo de G. Una **sucesión pro-Lie** para el G-espacio G/H es una sucesión decreciente $\{N_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ de subgrupos normales cerrados de G tales que G/N_i es un grupo de Lie y $\cap_{i\in\mathbb{N}} N_i H = H$.

Proposición 3.5.2. *Sea $\{f_i : X \to X_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ un G-cono sobre el sistema inverso $\{X_i, f_{ij}\}$ tal que para cada i, f_i es propia y sobreyectiva. Si para cada $x \in X$, $\cap_{i\in\mathbb{N}} f_i^{-1}(f_i(x)) = \{x\}$, entonces $(X, \{f_i\})$ es el límite inverso de $\{X_i, f_{ij}\}$.*

Demostración: Vamos a demostrar que $(X_i, \{f_{ij}\})$ satisface la propiedad universal del límite inverso. Para esto sea $(Y, \{r_i : Y \to X_i\}_{i\in\mathbb{N}})$ un G-cono sobre $(X_i, \{f_{ij}\})$. Sea $y \in Y$ y sea $x_i = r_i(y)$. Como f_i es propia y sobreyectiva, $f_i^{-1}(x_i)$ es compacto y no vacío para cada i, y como $f_i^{-1}(x_i) \supseteq f_j^{-1}(x_j)$ para cada $i \leq j$, se tiene que $\cap_{i\in\mathbb{N}} f_i^{-1}(x_i) \neq \emptyset$. Así que $\cap_{i\in\mathbb{N}} f_i^{-1}(x_i) \neq \emptyset$ consta de un solo elemento, de hecho, si $x \in \cap_{i\in\mathbb{N}} f_i^{-1}(x_i) \neq \emptyset$, entonces $f_i(x) = x_i$, de este modo, $\cap_{i\in\mathbb{N}} f_i^{-1}(x_i) = \cap_{i\in\mathbb{N}} f_i^{-1}(f_i(x)) = \{x\}$. Definimos $f : Y \to X$ por $f(y) = x$, y se cumple que $f_i(f(y)) = f_i(x) = x_i = r_i(y)$. Ahora demostraremos que f es continua. Sea A un subconjunto cerrado de X. Entonces $f^{-1}(A) \subseteq f^{-1}(f_i^{-1}(f_i(A))) = r_i^{-1}(f_i(A))$ para cada i. Por otra parte, si $y \in \cap_{i\in\mathbb{N}} r_i^{-1}(f_i(A))$, entonces $r_i(y) \in f_i(A)$, es decir, $f_i^{-1}(r_i(y)) \cap A \neq \emptyset$ para cada i. $\{f_i^{-1}(r_i(y)) \cap A\}_{i\in\mathbb{N}}$ forma una sucesión decreciente de subconjuntos compactos, luego $(\cap_{i\in\mathbb{N}} f_i^{-1}(r_i(y))) \cap A \neq \emptyset$ y como $\cap_{i\in\mathbb{N}} f_i^{-1}(r_i(y)) = \cap_{i\in\mathbb{N}} f_i^{-1}(x_i) = \{x\} = \{f(y)\}$, entonces $f(y) \in A$, de esta manera, $f^{-1}(A) = \cap_{i\in\mathbb{N}} r_i^{-1}(f_i(A))$. Por lo tanto, $f^{-1}(A)$ es cerrado ya que para cada i, f_i es cerrada. Si $h : Y \to X$ es otra función tal que $f_i(h(y)) = x_i$ para cada i, entonces $h(y) \in \cap_{i\in\mathbb{N}} f_i^{-1}(x_i) = \{x\}$ por lo tanto $f = h$ y así f es única. Por último, si $x \in \cap_{i\in\mathbb{N}} f_i^{-1}(x_i)$, entonces $gx \in \cap_{i\in\mathbb{N}} f_i^{-1}(gx_i)$ por lo tanto $f(gy) = gx = gf(x)$ y así f es G-equivariante. $\square$

Proposición 3.5.3. *Sea H un subgrupo cerrado de un grupo compacto G. Si el cociente G/H es metrizable, entonces existe una sucesión decreciente $\{N_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ de subgrupos normales cerrados de G tales que G/N_i es un grupo de Lie y $\cap_{i\in\mathbb{N}}(N_i H) = H$. Por lo tanto $\varprojlim\{G/(N_i H), r_{ij}\} = G/H$ donde $r_{ij} : G/(N_j H) \to G/(N_i H)$, es la proyección natural para cada $i \leq j$.*

Demostración: Sea $\{U_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión decreciente de vecindades de $\{H\}$ en G/H tal que $\cap_{i\in\mathbb{N}}U_i = \{H\}$ y sea $\widetilde{U}_i = \pi^{-1}(U_i)$, donde $\pi : G \to G/H$ es la proyección natural. Para cada i, existe un subgrupo normal cerrado N'_i tal que $N'_i \subseteq \widetilde{U}_i$ y G/N'_i es un grupo de Lie. Definimos la sucesión $\{N_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ por $N_1 = N'_1$, $N_i = N_{i-1} \cap N'_i$. Los grupos G/N_i también son grupos de Lie gracias a la proposición 3.2.4. Como $\pi(N_iH) = \pi(N_i) \subseteq \pi(N'_i) \subseteq U_i$, tenemos que $H \subseteq \cap_{i\in\mathbb{N}}(N_iH) \subseteq \cap_{i\in\mathbb{N}}\mathcal{U}_i = H$, entonces $\cap_{i\in\mathbb{N}}(N_iH) = H$. Ahora veamos que se cumplen las condiciones de la proposición anterior. Sea $\{r_i : G/H \to G/(N_iH)\}_{i\in\mathbb{N}}$ la familia de proyecciones dada por $r_i(gH) = gN_iH$, entonces, para cada i, $r_i = r_{ij} \circ r_j$ y además r_i es propia y sobreyectiva. Para el elemento $H \in G/H$, se cumple

$$\cap_{i\in\mathbb{N}}r_i^{-1}(r_i(H)) = \cap_{i\in\mathbb{N}}r_i^{-1}(N_iH) = \cap_{i\in\mathbb{N}}(N_iH)/H =$$
$$= H/H = \{H\}$$

luego, como r_i es equivariante, para cada $gH \in G/H$ se tiene: $\cap_{i\in\mathbb{N}}r_i^{-1}(r_i(gH)) = g(\cap_{i\in\mathbb{N}}r_i^{-1}(r_i(H))) = g\{H\} = \{gH\}$. Entonces por la proposición anterior, $G/H = \varprojlim\{G/N_iH, r_{ij}\}$. □

Corolario 3.5.1. *Sea G un grupo compacto metrizable. Entonces existe una sucesión decreciente $\{N_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ de subgrupos normales cerrados de G tal que los grupos G/N_i son grupos de Lie con $\cap_{i\in\mathbb{N}}N_i = \{e\}$ y $\varprojlim\{G/N_i, r_{ij}\} = G$ donde $r_{ij} : G/N_j \to G/N_i$ es la proyección natural para cada $i \leq j$.*

El siguiente lema es uno de los resultados más importantes de este trabajo ya que lo utilizaremos fuertemente en la demostración de nuestro resultado principal. En la demostración de este resultado ocuparemos de manera implicita varios resultados de esta tesis tales como la caracterización local de las G-fibraciones regulares (teorema 2.2.1) entre otros.

Lema 3.5.1. *[11] Sea H un subgrupo grande de un grupo compacto metrizable G. Si consideramos a G como un H-espacio con la acción: $h\cdot g = hgh^{-1}$ entonces la proyección natural $\pi : G \to G/H$ es una H-fibración.*

Demostración: Sea N el subgrupo normal cerrado de G tal que $N \subseteq H$ y G/N es un grupo de Lie. Como G es un es un grupo compacto metrizable, entonces gracias al corolario anterior, existe una sucesión pro-Lie $\{N'_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ tal que $\varprojlim\{G/N'_i, r_{ij}\} = G$. Para cada i sea $N_i = N \cap N'_i$, entonces por la proposición 3.2.4, $\{N_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es también una sucesión pro-Lie y $\varprojlim\{G/N_i, r_{ij}\} = G$. Notemos que $G/N_i \cong (G/N_{i+1})/(N_i/N_{i+1})$. Ahora sea $i \in \mathbb{N}$ arbitrario y definimos $\overline{G} = G/N_{i+1}$, $\overline{N} = N_i/N_{i+1}$ y $\overline{H} = HN_{i+1}/N_{i+1}$, podemos observar que $r_{i,i+1} : \overline{G} = G/N_{i+1} \to \overline{G}/\overline{N} = G/N_i$ es una función $\overline{H}$-equivariante con la acción conjugación de $\overline{H}$ en $\overline{G}$, además, $r_{i,i+1}$ es localmente trivial ([5], cap II teorema 5.8) y así es un $\overline{N}$-haz principal y $hN_{i+1}((gN_{i+1})n_iN_{i+1}) = (hgh^{-1}N_{i+1})(hn_ih^{-1}N_{i+1})$ para cada $h \in H$, $g \in G$, $n_i \in N_i$. Por lo tanto $r_{i,i+1}$ es un $(\overline{H}, \alpha, \overline{N})$-haz principal donde α es la acción por conjugación, entonces por el teorema 3.4.1, r_i^{i+1} es una $\overline{H}$-fibración y por la proposición 3.5.1, es una H-fibración vía la proyección natural $H \to HN_{i+1}/N_{i+1}$. De manera similar, como $G/HN_{i+1} = (G/N_{i+1})/(HN_{i+1}/N_{i+1})$. Como para cada i, $N_i \subseteq H$, la función inducida $\pi_{i+1} : G/N_{i+1} \to G/H$ por la proyección natural $q : \overline{G} \to \overline{G}/\overline{H}$, es un $(\overline{H}, \alpha, \overline{H})$-haz principal y por lo tanto una H-fibración. Ahora para cada $i \in \mathbb{Z}^{>0}$ tenemos el siguiente diagrama conmutativo H-equivariante:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "f"] \arrow[dd, "i_0"'] & & G \arrow[dl, "q_i"'] \arrow[dr, "q_{i+1}"] & \\
& G/N_i \arrow[dr, "r_i"'] & & G/N_{i+1} \arrow[ll, "r_{i,i+1}"'] \arrow[dl, "r_{i+1}"] \\
A \times I \arrow[rr, "h"'] & & G/H &
\end{tikzcd}$$

donde la colección $\{G, q_i\}$ forma el H-cono que define el límite inverso del sistema inverso $\{G/N_i, r_{i,j}\}$. Ahora como r_i es una H-fibración, existe una función H-equivariante $h_i : A \times I \to G/N_i$ tal que $h_i \circ i_0 = q_i \circ f$ y $r_i \circ h_i = h$, por otra parte, $r_{i,i+1}$ también es una H-fibración, entonces existe una función H-equivariante $h_{i+1} : A \times I \to G/N_{i+1}$ tal que $h_{i+1} \circ i_0 = q_{i+1} \circ f$ y $r_{i,i+1} \circ h_{i+1} = h_i$, de esta manera construimos un H-cono $\{A \times I, h_i\}$ sobre $\{G/N_i, r_{i,j}\}$ por lo tanto existe una única función H-equivariante $\widetilde{h} : A \times I \to G$ tal que $q_i \circ \widetilde{h} = h_i$ para toda i, es fácil ver que $\pi \circ \widetilde{h} = h$, por otra parte, $q_i \circ \widetilde{h} \circ i_0 = q_i \circ f$, es decir, $\widetilde{h}(a, 0)N_i = f(a)N_i$ para toda $i \in \mathbb{N}$ y $a \in A$, entonces $\widetilde{h}(a, 0)(f(a))^{-1} \in \bigcap_i N_i = \{e\}$ para cada $a \in A$, por lo tanto $\widetilde{h} \circ i_0 = f$ y así $\pi : G \to G/H$ es una H-fibración. $\square$

Hemos llegado al teorema principal de este trabajo. Al igual que en la proposición 3.5.1, el resultado análogo para G-fibraciones es válido ([11]) y aquí lo hemos demostrado para G-fibraciones aproximables. Este trabajo fue motivado por el hecho de tratar de encontrar hipótesis suficientes bajo las cuales $p : X \to Y$ sea una G-fibración siempre y cuando $p^H : X^H \to Y^H$ es una fibración para cada subgrupo H de G. También se pretende con la ayuda de estos resultados encontrar hipótesis suficientes para definir G-fibraciones aproximables fuertes y demostrar que el funtor $G \times_H -$ también preserva estos objetos.

Teorema 3.5.1. *Sea H un subgrupo grande de un grupo compacto metrizable G. Si X y Y son H-espacios y $p : X \to Y$ es una H-fibración aproximable, entonces $\widetilde{p} = G \times_H p : G \times_H X \to G \times_H Y$ es una G-fibración aproximable.*

Demostración: Consideremos el siguiente diagrama conmutativo equivariante:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i_0"'] & G \times_H X \arrow[d, "\widetilde{p}"] & \\
A \times I \arrow[r, "F"'] & G \times_H Y \arrow[r, "\lambda"] & G/H
\end{tikzcd}$$

donde $\lambda([g, y]) = gH$, $g \in G$, $y \in Y$. Sea $D = i_0^{-1}(F^{-1}(\lambda^{-1}(eH)))$ entonces por el corolario 3.3.1, $G \times_H D \cong A$, $[g, d] \mapsto gd$. Ahora consideremos el siguiente diagrama conmutativo de funciones H-equivariantes:

$$\begin{tikzcd} D \arrow[rr, "c_e"] \arrow[d, "i_0"'] & & G \arrow[d, "\pi"] \\ D \times I \arrow[r, "F|_{D\times I}"'] & G \times_H Y \arrow[r, "\lambda"'] & G/H \end{tikzcd}$$

donde G es un H-espacio con la acción conjugación y c_e es la función constante $c_e(d) = e$ para todo $d \in D$. Gracias al lema anterior, $\pi : G \to G/H$ es una H-fibración, entonces existe una función H-equivariante $v : D \times I \to G$ tal que $v \circ i_0(d) = c_e(a)$ y $\pi \circ v(d, t) = \lambda \circ F(d, t)$.

Sea $\psi : D \times I \times [0, 1) \to G \times_H Y \times [0, 1)$ por $\psi(d, t, s) = (v(d, t)^{-1}F(d, t), s)$ y es H-equivariante ya que

$$\psi(hd, t, s) = (v(hd, t)^{-1}F(hd, t), s) = ((h * v(d, t))^{-1}F(hd, t), s) =$$
$$= ((hv(d, t)h^{-1})^{-1}hF(d, t), s) = h(v(d, t)^{-1}F(d, t), s) =$$
$$= h\psi(d, t, s)$$

por otra parte,

$$\lambda \times 1_{[0,1)}(\psi(d, t, s)) = (\lambda(v(d, t)^{-1}F(d, t)), s) = ((v(d, t))^{-1}\lambda(F(d, t)), s) =$$
$$= (v(d, t)^{-1}\pi(v(d, t)), s) = (v(d, t)^{-1}(v(d, t)H), s) = (H, s)$$

es decir, $Im(\psi) \subseteq (\lambda \times 1_{[0,1)})^{-1}(H \times [0, 1))$. Luego, $i_Y : Y \to G \times_H Y$ es un H-encaje cerrado así, $Y \cong \{[e, y] \mid y \in Y\}$, ahora, para cada $d \in D$, $\widetilde{p} \circ f(d) = F \circ i_0(d) \in \lambda^{-1}(H) \cong Y$, entonces $f(d) \in \widetilde{p}^{-1}(Y) \cong X$. Ahora consideremos el siguiente diagrama conmutativo de funciones H-equivariantes:

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "f|_D"] \arrow[d, "i_0"'] & X \arrow[d, "p"] \\ D \times I \arrow[r, "\pi_1 \circ \psi \circ i_{D\times I}"'] & Y \end{tikzcd}$$

donde $i_{D\times I} : D \times I \to D \times I \times [0, 1)$ está dada por $i_{D\times I}(a, t) = (a, t, 0)$ y como p es una H-fibración aproximable, existe una función H-equivariante $\eta : D \times I \times [0, 1) \to X \times [0, 1)$ tal que $\eta\mid_{D\times\{0\}\times[0,1)} = f\mid_D \times 1_{[0,1)}$ y $\overline{\eta} : D \times I \times I \to Y$ dada por

$$\overline{\eta}(d, t, s) = \begin{cases} p \circ \pi_1 \circ \eta(d, t, s), & 0 \leq s < 1 \\ \pi_1 \circ \psi \circ i_{D\times I}(d, t), & s = 1 \end{cases}$$

es continua. Como $A \cong G \times_H D \cong GD$ entonces para cada $a \in A$, existen $g \in G$ y $d \in D$ tal que a está identificado con gd. Definimos $K : A \times I \times [0, 1) \to G \times_H X \times [0, 1)$ por $K(a, t, s) = K(gd, t, s) = ([gv(d, t), \pi_1(\eta(d, t, s))], s)$. Si $g_1d_1 = gd$, entonces $[g_1, d_1] = [g, d]$ y así, existe $h \in H$ tal que $g_1 = gh^{-1}$ y $d_1 = hd$, así que

$$[g_1v(d_1, t), \pi_1(\eta(d_1, t, s))] = [gh^{-1}v(hd, t), \pi_1(\eta(hd, t, s))] =$$
$$= [gh^{-1}v(hd, t)hh^{-1}, h\pi_1(\eta(d, t, s))] = [gv(d, t)h^{-1}, h\pi_1(\eta(d, t, s))] =$$

$$= [gv(d,t), \pi_1(\eta(d,t,s))]$$

por lo tanto K está bien definida. Si $pr : G \times D \times I \times [0,1) \to G \times_H D \times I \times [0,1)$ es la proyección natural $(g,d,t,s) \mapsto ([g,d],t,s)$, entonces $K \circ pr$ es continua y como pr es una identificación, K es continua. K es G-equivariante ya que

$$K(g_1 a,t,s) = K(g_1 gd,t,s) = ([g_1 gv(d,t), \pi_1(\eta(d,t,s))], s) =$$

$$= g_1([gv(d,t), \pi_1(\eta(d,t,s))], s) = g_1 K(a,t,s)$$

y es tal que

$$k(a,0,s) = ([gv(d,0), \pi_1(\eta(d,0,s))], s) = ([g, f\mid_D(d)], s) =$$

$$= (g[e, f\mid_D(d)], s) = (gf(d), s) = (f(a), s)$$

ahora sólo falta demostrar que $\overline{K} : A \times I \times I \to G \times_H Y$ dada por

$$\overline{K}(a,t,s) = \begin{cases} \widetilde{p} \circ \pi_1 \circ K(a,t,s), & 0 \leq s < 1 \\ F(a,t), & s = 1 \end{cases}$$

es continua. Para esto, como a está identificado con gd para algún $g \in G$ y $d \in D$, entonces $\widetilde{p} \circ \pi_1 \circ K(a,t,s) = [gv(d,t), p(\pi_1(\eta(d,t,s)))] = gv(d,t)[e, p(\pi_1(\eta(d,t,s)))]$ y $F(a,t) = F(gd,t) = gF(d,t) = gv(d,t)\pi_1(\psi(i_{D\times I}(d,t)))$, así $\overline{K}(a,t,s) = gv(d,t)i_Y(\overline{\eta}(d,t,s))$, de esta manera $\overline{K} \circ pr : G \times D \times I \times [0,1) \to G \times_H Y$, $(g,d,t,s) \mapsto gv(d,t)i_Y(\overline{\eta}(d,t,s))$ es continua. Por lo tanto $\overline{K}$ es continua y así $\widetilde{p} : G \times_H X \to G \times_H Y$ es una G-fibración aproximable. $\square$

Bibliografía

[1] S. A. Antonyan, Compact Group Actions On Equivariant Absolute Neighborhood Retracts and Their Orbit Spaces, Topology Appl, 158 (2011), 141-151.

[2] S. A. Antonyan, Equivariant Embeddings Into G-AR's, Glasnik Matematički, 22 (42) (1897), 503-533.

[3] S. A. Antonyan, Existence of a Slice for an Arbitrary Compact Transformation Group, Mat. Zametki, 56 (1994), 3-9.

[4] G. E. Bredon, Equivariant Cohomology Theories, Springer-Verlag, 1967.

[5] G. E. Bredon, Introduction to Compact Transformation Groups, Academic Press, New York, 1972.

[6] T. tom Dieck, Transformation Groups, Walter de Gruyter, Berlin-New York, 1987.

[7] J. J. Duistermaat, J. A. C. Kolk, Lie Groups, Springer-Verlag, 2000.

[8] R. Engelking, General Topology, Helderman Verlag, Berlin, 1989.

[9] S. Illman, Existence and Uniqueness of Equivariant Triangulations of Smooth Proper G-Manifolds with some Applications to Equivariant Whitehead Torsion, J. Reine Angew Math, 524 (2000), 129-183.

[10] I. M. James, General Topology and Homotopy Theory, Springer-Verlag, 1984.

[11] A. L. Kantún, Caracterizaciones de G-fibraciones, Tesis doctoral, Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP, 2013.

[12] M. Murayama, On G-ANR's and Their G-homotopy Types, Osaka J. Math, 20 (1983), 479-512.

[13] S. de Neymet, Introducción a los Grupos Topológicos de Transformaciones, Aportaciones Matemáticas 23, SMM, 2005.

[14] R. S. Palais, The Classification of G-spaces, Memoirs of the AMS, 36, Providence, RI, 1960.

[15] S. Prassidis, Equivariant Approximate Fibrations, Forum Mathematicum, 7 (1995), 755 - 779.