UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES ACATLÁN

SOBRE LA UTILIZACIÓN DE LA TEORÍA ALGEBRAICA Y ANALÍTICA DE LAS FUNCIONES GENERADORAS PARA LA ENUMERACIÓN DE ALGUNAS ESTRUCTURAS DISCRETAS

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE

LICENCIADA EN MATEMÁTICAS APLICADAS Y COMPUTACIÓN

PRESENTA

MARIANA CALDERÓN CASTRO

ASESOR: JOSÉ SEBASTIÁN BEJOS MENDOZA

LABORATORIO DE ALGORITMOS PARA LA ROBÓTICA

MARZO, 2016

SANTA CRUZ ACATLÁN, NAUCALPAN, ESTADO DE MÉXICO

LAR

Laboratorio de
Algoritmos para
la Robótica

Agradecimientos

Infinitas gracias a la Universidad, y en particular a la Facultad de Estudios Superiores Acatlán, por abrir sus aulas para poner el conocimiento al alcance de todos. Es un honor saberme hija de la máxima casa de estudios de nuestro país.

Al Laboratorio de Algoritmos para la Robótica agradezco en gran manera por brindar un espacio para la investigación de temas relacionados con ciencias de la computación, y al Centro de Desarrollo Tecnológico por el apoyo a nuestro laboratorio.

Agradezco a Sebastián, inicialmente, por ser mi asesor de tesis, después de regaños y estricta guía convertirse en un mentor para mí y con el paso del tiempo en un entrañable amigo sin el apoyo del cual nunca hubiera concluido este trabajo.

Principalmente agradezco a mis padres, Nidia Ofelia Castro Lozano y Jorge Antonio Calderón Ángeles, por su apoyo incondicional, por siempre creer en mí y por ser mi gran inspiración. Gracias a todo lo que me han dado, el día de hoy me es posible dar este paso y cerrar mi ciclo como universitaria, por esto y mucho más dedico mi tesis a estos maravillosos seres humanos.

Mi hermano ha sido, es y será una persona a la que admiro muchísimo; quiero agradecerle por ser para mí un ejemplo de tenacidad y perseverancia, cualidades que han sido fundamentales para la culminación de este trabajo.

A mi amado Adolfo, mi equipo, agradezco todos estos años de apoyo incondicional, por su alegre compañía en las numerosas desveladas, por ayudarme a encontrar la calma cuando el estrés me inunda, pero principalmente por ser un motor para todas mis metas y proyectos.

Finalmente agradezco a cada una de las personas que en algún momento me dieron una palabra de aliento porque creyeron que algún día lo lograría.

Índice general

Introducción

Una pregunta muy interesante dentro de la matemática discreta, particularmente en la combinatoria enumerativa, es conocer cuántos elementos existen en cierto conjunto finito. A menudo la pregunta va más allá, consideremos a los conjuntos finitos S_i donde i es un elemento de los enteros no negativos, pertenecientes a una clase infinita, es decir un conjunto infinito de conjuntos finitos, en este caso la idea es *contar* el número $f(i)$ de elementos de cada S_i simultáneamente. Pero, ¿qué significa *contar* los elementos de S_i? No hay una respuesta definitiva, $f(i)$ es un resultado que puede ser entregado en diversas maneras a continuación mencionaremos algunas.

1. La forma más satisfactoria de $f(i)$ es una fórmula cerrada completamente explícita compuesta por funciones conocidas y sin contener sumas infinitas. Por ser la más sencilla sería deseable que el resultado siempre estuviera en esta forma, sin embargo, en muy pocos casos existe una fórmula así.

2. Una recurrencia para $f(i)$ dada en términos de varios $f(j)$ previamente calculados, es decir, un proceso finito para calcular $f(i)$ para cualquier $i \in \mathbb{I}$.

3. Una aproximación de $f(i)$. Si $\mathbb{I} = \mathbb{N}$ esta aproximación frecuentemente toma la forma de una *fórmula asintótica* $f(n) \sim g(n)$, donde $g(n)$ es una función conocida y la notación $f(n) \sim g(n)$ significa que $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 1$.

4. El método más útil, pero más difícil de entender, para evaluar $f(i)$ es dar su función generadora (*fg*). De manera informal, una *fg* es un *objeto* que representa una función enumeradora $f(i)$. Generalmente una *fg* es una serie formal de potencias. Los dos tipos más comunes de *fg* son las funciones generadoras ordinarias (*fgo*) y las funciones generadoras exponenciales (*fge*). Si $\mathbb{I} = \mathbb{N}$, entonces la *fgo* de $f(n)$ es la serie formal de potencias $\sum_{n\geq 0} f(n)x^n$, mientras que la *fge* de $f(n)$ es la serie formal de potencias $\sum_{n\geq 0} f(n)x^n/n!$. Las*fg* además pueden ser estudiadas bajo un enfoque analítico, esto permite conocer el comportamiento asintótico de los coeficientes de una función aún cuando n es muy grande. En muchos casos no es posible conocer el valor exacto de los coeficientes y basta con conocer su crecimiento asintótico. La teoría analítica,

en especial el estudio de las singularidades de una función, es una herramienta que permite obtener información asintótica de las sucesiones.

Uno de los principales motivos para realizar este trabajo es que las *fg* para la enumeración exacta o asintótica de estructuras discretas son muy solicitadas en muy diversas áreas de la ciencia. Por ejemplo, en biología computacional las *fg* son frecuentemente utilizadas para el análisis de redes moleculares, por ejemplo formación y disociación en redes de interacción de proteínas[6]. En teoría y experimentación nuclear son empleadas para el estudio de la distribución de partículas[10]. Las *fg* también se aplican a la solución de problemas de enumeración de mecánica cuántica[15] y finanzas cuánticas[25], como por ejemplo, en mecanismos de fijación de precios. En el área de inteligencia computacional son frecuentemente utilizadas en el manejo de la complejidad de redes neuronales [23][30].

El objetivo de esta investigación es mostrar los beneficios que tiene ofrecer $f(i)$ como *fg*. Para ello en el primer capítulo primeramente se estudia la estructura algebraica de las series formales de potencias, se muestra que su estructura algebraica es un anillo y se revisan las operaciones básicas sobre series de potencias. Luego, en el capítulo dos, revisamos algunos ejemplos de series importantes como la serie de potencias exponencial y binomial, posteriormente se ve el método de funciones generadoras para resolver relaciones de recurrencia lineales. En el tercer capítulo se aplica el método de solución de recurrencias por medio de funciones generadoras para la enumeración de algunas estructuras discretas, tales como gráficas conectadas, gráficas par, gráficas de Euler, gráficas $k-$coloreadas y árboles. Por último en el capítulo cuatro presentamos la base de la teoría analítica dedicada al proceso de extraer información asintótica de funciones generadoras. Primeramente vemos algunas definiciones de la teoría analítica que serán fundamentales para la enumeración asintótica como el concepto de analiticidad, las ecuaciones de Cauchy-Riemann, expansiones de Taylor y Laurent y por último se estudia un método para extraer, a partir de las singularidades de una función información sobre el crecimiento asintótico de los coeficientes de la *fg* de cierta estructura.

Capítulo 1

El anillo de las series formales de potencias

En este capítulo mostraremos que el conjunto de las series formales de potencias tiene estructura algebraica de anillo, mostraremos que es un anillo no conmutativo bajo la operación producto y que tiene elemento idéntico multiplicativo. Además revisaremos algunas operaciones especiales sobre series de potencias como la composición y la derivada e integral formales.

1.1. Preliminares

Definición 1.1.1 Sea R un conjunto no vacío, el conjunto de todos los pares ordenados de elementos en R es el producto Cartesiano $R \times R = \{(x, y)|x, y \in R\}$. Una **operación binaria** sobre R es una función $f : R \times R \to R$ que asocia de manera única los elementos de $R \times R$ con un solo elemento de R.

Definición 1.1.2 Dado un conjunto R y una operación binaria $\star$, se dice que R es **cerrado** bajo la operación $\star$ si para cualquier elemento $a \in R$ y $b \in R$ se cumple que $a \star b = c$ tal que $c \in R$

Definición 1.1.3 Dado un conjunto R y una operación binaria $\star$, se dice que la operación $\star$ es **asociativa** si y solo si para todo $a, b, c \in R$ se cumple que $(a \star b) \star c = a(b \star c)$

Definición 1.1.4 Dado un conjunto R y una operación binaria $\star$, se dice que la operación $\star$ es **conmutativa** si y solo si para todo $a \in R$ y $b \in R$ se cumple que $a \star b = b \star a$

Definición 1.1.5 Dado un conjunto R y una operación binaria $\star$, se dice que R tiene **elemento unitario** bajo la operación $\star$ si y solo si se cumple que existe un elemento 1 tal que

i) $1 \star a = a$ para todo $a \in R$

ii) $a \star 1 = a$ para todo $a \in R$

iii) $1 \in R$

Definición 1.1.6 Dado un conjunto R con elemento unitario 1 y una operación binaria $\star$, se dice que $a' \in R$ es el **elemento inverso** de a para la operación $\star$ si y solo si se cumple que para cada $a \in R$, a' cumple que

i) $a \star a' = 1$

ii) $a' \star a = 1$

iii) $a' \in R$

Definición 1.1.7 Dado un conjunto R y dos operaciones binarias $+, \star$ definidas en R, se dice que la operación $\star$ es **distributiva por la derecha** sobre la operación $+$ si para todo $a, b, c \in R$ se cumple que $(a+b)c = ac+bc$, **distributiva por la izquierda** sobre la operación $+$ si para todo $a, b, c \in R$ se cumple que $a(b+c) = ab + ac$ y **distributiva** si es distributiva por la derecha y también por la izquierda.

Definición 1.1.8 Un **grupo** $(G, \star)$ es un conjunto G junto con una operación binaria $\star$ definida en G, tal que G es cerrado, asociativo, tiene elemento unitario y elemento inverso bajo la operación $\star$.

Se dice que un grupo es abeliano si además es conmutativo bajo la operación binaria.

Definición 1.1.9 Un **anillo** $(R, +, \cdot\,)$ es un conjunto R junto con dos operaciones binarias $+$ y $\cdot$, definidas en R tal que los siguientes axiomas se cumplen:

i) $(R, +)$ es un grupo abeliano.

ii) $(R, \cdot\,)$ cumple las propiedades de cerradura y asociatividad.

iii) $\forall \; A, B, C \in R$, se cumple la propiedad distributiva.

Si un anillo cuenta con elemento unitario bajo la operación producto se dice que es un anillo con unidad.

Ejemplo

A continuación veremos que el conjunto de los enteros módulo n tiene estructura de anillo. Primero definiremos el conjunto y a continuación revisaremos cada una de las propiedades que debe cumplir para considerarse un anillo.

El conjunto de los enteros módulo n se define como $\mathbb{Z}_n = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \ldots, \overline{n-1}\}$. Las operaciones binarias $+$ y $*$ se definen sobre los elementos de $\mathbb{Z}_n$ como $\overline{a} + \overline{b} = \overline{(a+b) \mod n}$ y $\overline{a} * \overline{b} = \overline{(a*b) \mod n}$ donde $x \mod y$ es el residuo de x/y.

El conjunto $\mathbb{Z}_n$ es cerrado bajo la operación $+$ ya que la suma de cualquier par de elementos $a, b \in \mathbb{Z}_n$ está definida como $\overline{(a*b) \mod n}$ y el residuo de la división entre n siempre será un entero menor o igual a $n-1$, que es precisamente la definición de los elementos de $\mathbb{Z}_n$.

La operación $+$ es asociativa y conmutativa para los elementos del conjunto $\mathbb{Z}_n$ por la asociatividad y conmutatividad de la suma de números enteros.

El conjunto $\mathbb{Z}_n$ cuenta con elemento neutro aditivo: $\overline{0}$ ya que para cualquier $a \in \mathbb{Z}_n$ se cumple que $a + \overline{0} = \overline{0} + a = a$.

El conjunto $\mathbb{Z}_n$ tiene elemento inverso aditivo. El inverso de cualquier $a \in \mathbb{Z}_n$ es $\overline{x}$ donde $x = (n-a) \mod n$.

El conjunto $\mathbb{Z}_n$ es cerrado bajo la operación $*$. Para cualquier par de números $a, b \in \mathbb{Z}_n$, el producto $\overline{a} * \overline{b} = (a*b) \mod n \leq n-1$ por lo que pertenece a $\mathbb{Z}_n$.

La operación $*$ es asociativa para los elementos del conjunto $\mathbb{Z}_n$ por la asociatividad del producto de números enteros.

El conjunto $\mathbb{Z}_n$ cuenta con elemento neutro multiplicativo: $\overline{1}$ ya que para cualquier $a \in \mathbb{Z}_n$ se cumple que $a * \overline{1} = \overline{1} * a = a$.

La operación $*$ es distributiva sobre la suma para los elementos del conjunto $\mathbb{Z}_n$ por la distributividad del producto sobre la suma en los números enteros.

Por lo tanto los enteros módulo n tienen estructura de anillo.

$\square$

1.2. Series Formales de Potencias

En este trabajo se asume que cuando hagamos referencia a un anillo se refiere a un anillo conmutativo que tenga elemento unitario.

Definición 1.2.1 Para un anillo R, una **serie formal de potencias sobre** R se refiere a cualquier secuencia de símbolos

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

donde todos los elementos a_n son miembros del anillo R.

Una serie formal de potencias se define precisamente por los elementos a_n que la componen. Podemos pensar una serie formal de potencias $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ como una función que transforma un natural n en el elemento a_n, donde a_n pertenece al anillo. Usaremos esta idea para precisar algunos detalles.

Definición 1.2.2 Para un anillo R, una **sucesión en** R es una función $\mathbb{N} \to R$.

Si a es una sucesión, se prefiere escribir $a_n = a(n)$ para denotar al enésimo elemento de a y se utiliza la forma cerrada para realizar una descripción completa de sucesión, escribiendo

$$a = \{a_n\}_{n=0}^{\infty},$$

y de igual forma se acostumbra escribir

$$a = (a_0, a_1, \dots).$$

Definición 1.2.3 El conjunto de todas las sucesiones sobre un anillo R se denota como $R\,[[x]]$.

Es importante que hay una asociación muy natural entre las series formales de potencia y las sucesiones; de hecho por cada sucesión hay una serie y viceversa, para nuestros fines será lo mismo hablar de cualquiera. Sin embargo, la siguiente definición describe una distinción artificial entre ellas pues la notación usada resultará útil para los propósitos de este trabajo.

Definición 1.2.4 Diremos que una serie formal de potencias $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ es **una función generadora de la sucesión** a, si $a = \{a_n\}_{n=0}^{\infty}$; en otras palabras si los coeficientes de la serie A corresponden a los elementos de la sucesión a. Lo anterior se denotará como

$$A \leftrightarrow \{a_n\}_{n=0}^{\infty}.$$

De manera práctica, la anterior definición propone simplemente una notación para describir una sucesión. Se puede utilizar, por ejemplo, para describir algunas operaciones que se definen sobre las sucesiones.

Definición 1.2.5 Para sucesiones a y b sobre R, definimos las sucesiones $a+b$ y $a \cdot b$ como

$$(a+b)_n = a_n + b_n$$

y

$$(a \cdot b)_n = \sum_{i=0}^{n} a_{n-i} b_i$$

La anterior definición en términos de la notación para funciones generadoras nos permite escribir que, si $A \leftrightarrow \{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ y $B \leftrightarrow \{b_n\}_{n=0}^{\infty}$, entonces

$$A + B \leftrightarrow \{a_n + b_n\}_{n=0}^{\infty}$$
$$A \cdot B \leftrightarrow \left\{ \sum_{i=0}^{n} a_{n-i} b_i \right\}_{n=0}^{\infty}$$

Definición 1.2.6 En $R\,[[x]]$, el **operador coeficiente** $[x^n]\colon R\,[[x]] \to R$ se define como

$$[x^n](a) = a_n.$$

Bajo la notación de funciones generadoras, esto quiere decir que si $A \leftrightarrow \{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, entonces $[x^n]A = a_n$. En particular se tiene la siguiente proposición

Proposición 1.2.1 Si $A \leftrightarrow \{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ y $B \leftrightarrow \{b_n\}_{n=0}^{\infty}$, entonces $A = B$ si y sólo si $[x^n]A = [x^n]B$ para todo número natural n.

Prueba. Sigue de la igualdad entre funciones.

1.3. Propiedades de la estructura algebraica

Sea R un anillo con elemento unitario y los símbolos $(+, \cdot)$ representen a la operación suma y producto respectivamente.

Proposición 1.3.1 El conjunto $R\,[[\mathbf{x}]]$ es **asociativo** bajo la operación suma.

Prueba. Dadas las funciones $A(x), B(x), C(x) \in R\,[[\mathbf{x}]]$, empleando la propiedad asociativa de R bajo la suma, vemos que,

$$\begin{aligned}
[x^n]\left\{(A(x)+B(x))+C(x)\right\} &= [x^n]\left\{A(x)+B(x)\right\} + [x^n]\,C(x) \\
&= ([x^n]\,A(x) + [x^n]\,B(x)) + [x^n]\,C(x) \\
&= [x^n]\,A(x) + ([x^n]\,B(x) + [x^n]\,C(x)) \\
&= [x^n]\,A(x) + [x^n]\left\{B(x)+C(x)\right\} \\
&= [x^n]\left\{A(x) + (B(x)+C(x))\right\}
\end{aligned}$$

Para toda $n \in \mathbb{N}$, luego,

$$(A(x) + B(x)) + C(x) = A(x) + (B(x) + C(x)).$$

□

Proposición 1.3.2 El conjunto $R[[\mathbf{x}]]$ tiene **elemento unitario**, idéntico o neutro aditivo, bajo la operación suma.

Prueba.
Proponemos a la función $\mathbf{0}$: $\mathbb{N} \to R \in R[[\mathbf{x}]]$ como $\mathbf{0} \leftrightarrow \{0_n\}_{n=0}^{\infty}$ para $n \geq 0$, donde 0_n es el elemento unitario del anillo R.
Probamos que $\mathbf{0}$+$A(x) = A(x)$

$$[x^n]\{\mathbf{0} + A(x)\} = [x^n]\,\mathbf{0} + [x^n]\,A(x) = [x^n]\,A(x), \text{ para toda } n \in \mathbb{N}$$

Ahora probamos que $A(x) + \mathbf{0} = A(x)$

$$[x^n]\{A(x) + \mathbf{0}\} = [x^n]\,A(x) + [x^n]\,\mathbf{0} = [x^n]\,A(x), \text{ para toda } n \in \mathbb{N}$$

Y dado que $\mathbf{0} \in R[[\mathbf{x}]]$, se cumple que $R[[\mathbf{x}]]$ tiene elemento unitario. □

Proposición 1.3.3 El conjunto $R[[\mathbf{x}]]$ tiene **elemento inverso aditivo**, i.e. para cada $A(x) \in R[[\mathbf{x}]]$ existe una función $-A(x)$ tal que $A(x) + (-A(x)) = (-A(x)) + A(x) = \mathbf{0}$.

Prueba. Proponemos a la función $-A \leftrightarrow \{-a_n\}_{n=0}^{\infty}$ donde $-a_n$ es el elemento inverso aditivo de a_n en R. Probamos que $A + (-A) = 0$

$$\begin{aligned}[x^n]\{A(x) + (-A(x))\} &= [x^n]\,A(x) + [x^n]\{-A(x)\} \\ &= a_n + (-a_n) = 0_n = [x^n]\,\mathbf{0}, \qquad \text{para toda } n \in \mathbb{N}\end{aligned}$$

Ahora probamos que $(-A) + A = 0$

$$\begin{aligned}[x^n]\{(-A(x)) + A(x)\} &= [x^n]\{-A(x) + A(x)\} \\ &= [x^n]\{-A(x)\} + [x^n]\,A(x) \\ &= -a_n + a_n = 0_n = [x^n]\,\mathbf{0}, \qquad \text{para toda } n \in \mathbb{N}\end{aligned}$$

Y dado que $-A(x) \in R[[\mathbf{x}]]$, se cumple que $R[[\mathbf{x}]]$ tiene elemento inverso aditivo.

□

Proposición 1.3.4 El conjunto $R[[\mathbf{x}]]$ es **conmutativo** bajo la operación suma.

Prueba. Dadas las funciones $A(x), B(x) \in R[[\mathbf{x}]]$, empleando la propiedad de conmutatividad de R bajo la suma, de manera trivial vemos que,

$$\begin{aligned}[x^n]\{A(x)+B(x)\} &= [x^n]A(x)+[x^n]B(x)\\ &= [x^n]B(x)+[x^n]A(x) = [x^n]\{B(x)+A(x)\}\end{aligned}$$

para toda $n \in \mathbb{N}$, luego,

$$A(x)+B(x) = B(x)+A(x).$$

Lema 1.3.1 Dado que $R[[\mathbf{x}]]$ bajo la operación suma es cerrado, asociativo, cuenta con un elemento neutro aditivo, un elemento inverso aditivo y es conmutativo, se puede afirmar que:
$(R[[\mathbf{x}]], +)$ tiene estructura de **grupo abeliano**.

Proposición 1.3.5 El conjunto $R[[\mathbf{x}]]$ es **asociativo** bajo la operación producto.

Prueba. Dadas las funciones $A \leftrightarrow \{a_n\}_{n=0}^{\infty}, B \leftrightarrow \{b_n\}_{n=0}^{\infty}, C \leftrightarrow \{c_n\}_{n=0}^{\infty} \in R[[\mathbf{x}]]$, empleando la propiedad de asociatividad de R bajo el producto, vemos que,
Consideremos a los enteros no negativos i, j, k, r, s

$$\begin{aligned}[x^n]\{(A(x)B(x))C(x)\} &= \sum_{i+j=n}\left[x^i\right]A(x)B(x)\left[x^j\right]C(x)\\ &= \sum_{i+j=n}\sum_{k+r=i}\left[x^k\right]A\left[x^r\right]B\left[x^j\right]C\\ &= \sum_{(k+r)+j=n}\left[x^k\right]A(x)\left[x^r\right]B(x)\left[x^j\right]C(x)\\ &= \sum_{k+s=n}\left[x^k\right]A(x)\sum_{r+j=s}\left[x^r\right]B(x)\left[x^j\right]C(x)\\ &= \sum_{k+s=n}\left[x^k\right]A(x)\left[x^s\right]B(x)C(x)\\ &= [x^n]\{A(x)(B(x)C(x))\}\end{aligned}$$

Y por la definición de igualdad de series de potencias, si

$$[x^n]\{(A(x)B(x))C(x)\} = [x^n]\{A(x)(B(x)C(x))\}$$

entonces $(AB)C = A(BC)$. $\square$

Proposición 1.3.6 El conjunto $R\,[[\mathbf{x}]]$ es **distributivo** con respecto a la operación producto sobre la suma, i.e.

$$A(x)(B(x)+C(x)) = A(x)B(x)(x) + A(x)C(x) \text{ y}$$

$$(A(x)+B(x))C(x) = A(x)C(x) + B(x)(x)C(x)$$

Prueba. Dadas las funciones $A(x), B(x), C(x) \in R\,[[\mathbf{x}]]$,

$$\begin{aligned}
[x^n]\,A(x)(B(x)+C(x)) &= \sum_{k=0}^{n} \left[x^k\right] A(x)\Big(\left[x^{n-k}\right]\{B(x)+C(x)\}\Big) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \left[x^k\right] A(x)\Big(\left[x^{n-k}\right] B(x) + \left[x^{n-k}\right] C(x)\Big) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \left[x^k\right] A(x)\left[x^{n-k}\right] B(x) + \left[x^k\right] A\left[x^{n-k}\right] C(x) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \left[x^k\right] A(x)\left[x^{n-k}\right] B(x) + \sum_{k=0}^{n} \left[x^k\right] A(x)\left[x^{n-k}\right] C(x) \\
&= [x^n]\,A(x)B(x) + [x^n]\,A(x)C(x) \\
&= [x^n]\,\{A(x)B(x) + A(x)C(x)\}
\end{aligned}$$

Para toda $n \in \mathbb{N}$, luego,

$$A(x)(B(x)+C(x)) = A(x)B(x) + A(x)C(x)$$

Ahora probaremos la segunda parte,

$$\begin{aligned}
[x^n]\,(A(x)+B(x))C(x) &= \sum_{k=0}^{n} \Big(\left[x^k\right]\{A(x)+B(x)\}\Big)\left[x^{n-k}\right] C(x) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \Big(\left[x^k\right] A(x) + \left[x^k\right] B(x)\Big)\left[x^{n-k}\right] C(x) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \left[x^k\right] A(x)\left[x^{n-k}\right] C(x) + \left[x^k\right] B(x)\left[x^{n-k}\right] C(x) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \left[x^k\right] A(x)\left[x^{n-k}\right] C(x) + \sum_{k=0}^{n} \left[x^k\right] B(x)\left[x^{n-k}\right] C(x) \\
&= [x^n]\,A(x)C(x) + [x^n]\,B(x)C(x) \\
&= [x^n]\,\{A(x)C(x) + B(x)C(x)\}
\end{aligned}$$

Para toda $n \in \mathbb{N}$, luego,

$$(A(x) + B(x))C(x) = A(x)C(x) + B(x)C(x)$$

$\square$

Dado que $(R[[\mathbf{x}]], +)$ es un grupo abeliano y $R[[\mathbf{x}]]$ tiene la propiedad asociativa bajo la operación producto y distributiva bajo la operación producto con respecto de la suma, se puede enunciar el teorema 1.3.1.

Teorema 1.3.1 El conjunto $(R[[\mathbf{x}]], +, \cdot)$ de las series formales de potencias bajo las operaciones binarias suma y producto tiene estructura de **anillo**.

Definición 1.3.1 Un **anillo unitario** $(R, +, \cdot)$ es un conjunto R junto con dos operaciones binarias definidas en R tal que los siguientes axiomas se cumplen:

i) $(R, +, \cdot)$ tiene estructura de anillo.

ii) Existe un **elemento idéntico multiplicativo** $1 \in R$ tal que $\forall A \neq 0 \in R$ se cumple que $1 \cdot A = A \cdot 1 = A$

Lema 1.3.2 $(R[[\mathbf{x}]], +, \cdot)$ tiene la estructura de **anillo unitario**.

Prueba.
Proponemos a la función $1 : \mathbb{N} \to R \in R[[\mathbf{x}]]$ como $1 \leftrightarrow \{i_n\}_{n=0}^{\infty}$, donde $i_n = 0$ para $n \geq 1$ e i_0 es el elemento unitario en R
Dado $A \leftrightarrow \{a_n\}_{n=0}^{\infty} \in R[[\mathbf{x}]]$ Probamos que $1 \cdot A = A$

$$\begin{aligned}
1 \cdot A \leftrightarrow \quad & \{i_n\}_{n=0}^{\infty} \cdot \{a_n\}_{n=0}^{\infty} \\
\leftrightarrow \quad & \left\{\sum_{k=0}^{n} i_k a_{n-k}\right\}_{n=0}^{\infty} \\
\leftrightarrow \quad & \left\{i_0 a_n + \sum_{k=1}^{n} i_k a_{n-k}\right\}_{n=0}^{\infty} \\
\leftrightarrow \quad & \left\{a_n + \sum_{k=1}^{n} (0) a_{n-k}\right\}_{n=0}^{\infty} \\
\leftrightarrow \quad & \{a_n\}_{n=0}^{\infty}
\end{aligned}$$

Ahora probamos que $A \cdot 1 = A$

$$
\begin{aligned}
A \cdot 1 \leftrightarrow \quad & \{a_n\}_{n=0}^{\infty} \cdot \{i_n\}_{n=0}^{\infty} \\
\leftrightarrow \quad & \left\{ \sum_{k=0}^{n} a_k i_{n-k} \right\}_{n=0}^{\infty} \\
\leftrightarrow \quad & \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} a_k i_{n-k} + a_n i_0 \right\}_{n=0}^{\infty} \\
\leftrightarrow \quad & \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} a_k (0) + a_n \right\}_{n=0}^{\infty} \\
\leftrightarrow \quad & \{a_n\}_{n=0}^{\infty}
\end{aligned}
$$

Y dado que $1 \in R[[\mathbf{x}]]$, se cumple que tiene elemento unitario bajo la operación producto, queda demostrado que $(R[[\mathbf{x}]], +, \cdot)$ tiene la estructura de **anillo con elemento idéntico**. $\square$

El conjunto $R[[\mathbf{x}]]$ es **conmutativo** bajo la operación producto dado que R es conmutativo. De manera explícita, consideremos las funciones $A \leftrightarrow \{a_n\}_{n=0}^{\infty}, B \leftrightarrow \{b_n\}_{n=0}^{\infty} \in R[[\mathbf{x}]]$,

$$
\begin{aligned}
A \cdot B \leftrightarrow \quad & \{a_n\}_{n=0}^{\infty} \cdot \{b_n\}_{n=0}^{\infty} \\
\leftrightarrow \quad & \left\{ \sum_{i+j=n} a_i b_j \right\}_{n=0}^{\infty} \\
\leftrightarrow \quad & \left\{ \sum_{j+i=n} a_j b_i \right\}_{n=0}^{\infty} \leftrightarrow \qquad \left\{ \sum_{j+i=n} b_i a_j \right\}_{n=0}^{\infty}
\end{aligned}
$$

que es precisamente la serie generada por $B \cdot A$.

1.4. Operaciones avanzadas sobre funciones generadoras

Definición 1.4.1 Se le denomina **característica de un anillo** al entero no negativo n más pequeño tal que $n \cdot 1 = 0$.

Proposición 1.4.1 El conjunto de las series formales de potencias $R[[\mathbf{x}]]$ tiene **característica cero**.

Prueba. Si $R[[\mathbf{x}]]$ tiene característica cero se debe cumplir que $n \cdot 1 = 0$, esto implica una de las siguientes condiciones:

i) $n = 0$, donde $n \in \mathbb{Z}$

ii) $1 = 0$

El segundo caso no se cumple. Ahora, si $n = k \in \mathbb{Z}, k \neq 0$, es claro que la operación de k sumandos: $1 + 1 + 1 + \cdots + 1 = 0$ no se cumple. Por lo tanto la única manera de garantizar $n \cdot 1 = 0$ es fijando $n = 0$. $\square$

Proposición 1.4.2 Sea $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ una serie formal de potencias en R. Entonces, A es una unidad, es decir tiene un inverso multiplicativo, en $R[[x]]$ si y sólo si a_0 es una unidad en R.

Prueba. Sea A una función generadora de la sucesión a, supongamos que a es una unidad, en ese caso debe existir otra serie formal $B(x) = \sum_{n=0} b_n x^n$, tal que B es una función generadora de la sucesión b, de forma que $ab = 1$, o en otras palabras que $(ab)_k = \delta_{0k}$; en ese caso $a_0 b_0 = 1$ por lo que debemos concluir que a_0 es una unidad.

Si suponemos ahora que a_0 es una unidad, entonces existe $u \in R$ tal que $a_0 u = 1$, definiremos la serie formal B de manera recursiva

$$b_0 = u$$

$$b_k = -u \sum_{n=1}^{k} a_n b_{k-n}$$

y afirmamos que esta satisface $ab = 1$. En efecto

$$(ab)_0 = a_0 b_0 = a_0 u = 1$$

y para valores $k \geq 1$, de acuerdo a la definición que se provee

$$-a_0 b_k = \sum_{n=1}^{k} a_n b_{k-n}$$

por lo que tenemos

$$\begin{aligned}(ab)_k &= \sum_{n=0}^{k} a_n b_{k-n} \\ &= a_0 b_k + \sum_{n=1}^{k} a_n b_{k-n} \\ &= 0\end{aligned}$$

como afirmamos. En ese caso la serie formal de potencias a presenta como inversa a la serie formal b por lo que resulta una unidad en $R\,[[x]]$ como buscábamos.

Definición 1.4.2 Dadas las funciones generadoras $A \leftrightarrow \{a_n\}_{n=0}^{\infty}, B \leftrightarrow \{b_n\}_{n=0}^{\infty} \in R\,[[\mathbf{x}]]$, se define a la **composición** de funciones como

$$A \circ B = \sum_{n=0}^{\infty} a_n B^n(x).$$

Si B tiene $b_0 \neq 0$ entonces cada término de $\sum_n a_n B^n$ contribuye al coeficiente de x^n y si B tiene $b_0 = 0$ entonces podemos calcular el coeficiente de cierto x elevado a la k por medio de los $(k+1)$ términos predecesores. Notemos que cada término

$$\begin{aligned} a_n B^n(x) &= a_n(b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots)^n \\ a_n B^n(x) &= a_n(0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots)^n \\ a_n B^n(x) &= a_n x^n(b_1 + b_2 x + \cdots)^n \end{aligned}$$

contendrá solamente potencias de x mayores que k por lo que no necesitamos mirar esos términos para obtener el coeficiente de x^k. Por lo tanto, si $b_0 = 0$, la obtención del valor de cada uno de los coeficientes en la serie es un *proceso finito* y en consecuencia cada uno de los coeficientes está bien definido y por lo tanto también la serie.

Si $b_0 \neq 0$, el proceso del cómputo de cada coeficiente de $A \circ B$ será infinito a menos que A sea un polinomio, por lo tanto, la composición $A \circ B$ de dos series formales de potencias está definida si y solo si $b_0 = 0$ o A es un polinomio.

Definición 1.4.3 Dada una serie $A(x) = \sum a_n x^n$, la inversa composicional es una serie $B(x)$ tal que

$$A(x) \circ B(x) = B(x) \circ A(x) = x$$

Cuando $a_0 = 0$ la serie inversa existe si y solo si el coeficiente de x es diferente de cero en A.

Definición 1.4.4 Dada una función $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, la **derivada formal** de $A(x)$ con respecto de x es:

$$D_x A(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_n x^n.$$

Escribimos para $A \leftrightarrow \{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ la derivada como $A' \leftrightarrow \{(n+1)a_n\}_{n=0}^{\infty}$.

Proposición 1.4.3 La regla de la cadena se mantiene al derivar funciones generadoras.

Prueba. Dadas $A \leftrightarrow \{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, $B \leftrightarrow \{b_n\}_{n=0}^{\infty}$, $AB \leftrightarrow \{c_n\}_{n=0}^{\infty}$ donde $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$.

$$\begin{aligned}
D_x(AB) &= D_x\left(\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} a_i b_j x^{(i+j)}\right) \\
&= \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}(i+j) a_i b_j x^{(i+j-1)} \\
&= \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} i a_i b_j x^{i-1+j} + \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} j a_i b_j x^{j-1+i} \\
&= B D_x A + A D_x B
\end{aligned}$$

□

Las derivadas de orden superior están definidas recursivamente a través de fijar a $A^{(k+1)}(x) = (A^{(k)}(x))'$.
De ahí que,

$$A^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)\cdots(n+k)A^{(n+k)}x^n$$

Si $A(x), B(x) \in R\,[[\mathbf{x}]]$ y R tiene característica cero, entonces

$$D_x A(x) = D_x B(x) \Leftrightarrow A(x) = B(x)$$

Si $F = \{A_j(x) \mid A_j(x) \in R\,[[\mathbf{x}]]\,, j \geq 0\}$ es una familia sumable y $\alpha_j \in R$ para $j \geq 0$, entonces

$$D_x\left(\sum_{j=0}^{\infty}\alpha_j A_j(x)\right) = \sum_{j=0}^{\infty}\alpha_j D_x A_j(x)$$

Definición 1.4.5 Dada una función $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \in R\,[[\mathbf{x}]]$, donde $R = \mathbb{R}$ o $R = \mathbb{C}$, la **integral formal** de $A(x)$ con respecto de x es

$$I_x A(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^{-1} a_n x^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} n^{-1} a_{n-1} x^n.$$

Si $F = \{A_j(x) \mid A_j(x) \in R\,[[\mathbf{x}]]\,, j \geq 0\}$ es una familia sumable y $\alpha_j \in R$ para $j \geq 0$, y R tiene característica cero, entonces

$$I_x\left\{\sum_{j=0}^{\infty}\alpha_j A_j(x)\right\} = \sum_{j=0}^{\infty}\alpha_j I_x A_j(x)$$

Proposición 1.4.4 para $A(x) \in R\,[[\mathbf{x}]]$, se cumple que

$$D_x(I_xA(x)) = A(x), \qquad I_x(D_xA(x)) = A(x) - a_0$$

Prueba.

$$\begin{aligned}
D_x(I_xA(x)) &= D_x\left(I_x(\sum_{i=0}^{\infty} a_ix^i)\right)\\
&= D_x\left(\sum_{i=0}^{\infty}(i+1)^{-1}a_ix^{i+1}\right)\\
&= D_x\left(\sum_{i=1}^{\infty}(i)^{-1}a_{i-1}x^{i}\right)\\
&= \sum_{i=1}^{\infty}(i)(i)^{-1}a_{i-1}x^{i-1}\\
&= \sum_{i=1}^{\infty}a_{i-1}x^{i-1}\\
&= \sum_{i\geq 0}a_ix^{i}\\
&= A(x)
\end{aligned}$$

ahora,

$$\begin{aligned}
I_x(D_xA(x)) &= I_x\left(D_x\left(\sum_{i=0}^{\infty} a_ix^i\right)\right)\\
&= I_x\left(\sum_{i=1}^{\infty} ia_ix^{i-1}\right)\\
&= \sum_{i=1}^{\infty}(i)^{-1}ia_ix^{i}\\
&= \sum_{i=1}^{\infty}a_ix^{i}\\
&= \sum_{i=1}^{\infty}a_ix^{i} + a_0 - a_0\\
&= A(x) - a_0
\end{aligned}$$

$\square$

Muchos métodos de ecuaciones diferenciales son válidos en el anillo $R[[\mathbf{x}]]$. Sin embargo, se debe prestar mucha atención a cada paso para asegurar que estén definidos en $R[[\mathbf{x}]]$. Consideremos el siguiente ejemplo,

$$D_xF(x) = aF^2(x) + bF(x)$$

con condición en la frontera $f_0 = \alpha$, para $F(x) \in R[[\mathbf{x}]]$ donde $a, b, \alpha \in R$ y a^{-1}, b^{-1} existen. Esta ecuación es del tipo Riccati[1], muy frecuentes en problemas de enumeración.

Linealizamos la función como se sigue. Sea $H(x) \in R[[\mathbf{x}]]$ tal que $h_0 = 1$ y $F(x) = -a^{-1}D_x \log H(x)$[2]. Luego, $H(x)$ satisface la ecuación diferencial $D_x\{D_xH(x)\} = bD_xH(x)$. Como $f_0 = -a^{-1}h_0^{-1}(D_xH(x))|_{x=0}$, entonces $(D_xH(x))|_{x=0} = -a\alpha$. Pero $D_x\{-a\alpha e^{bx}\} = b\{-a\alpha e^{bx}\}$ y $-a\alpha e^{bx}|_{x=0} = -a\alpha$. Entonces por las propiedades $D_xA(x) = D_xB(x), a_0 = b_0 \Leftrightarrow A(x) = B(x)$ obtenemos $D_xH(x) = -a\alpha e^{bx}$. Aplicamos por ambos lados la integral formal,

$$\begin{aligned} H(x) - h_0 &= I_x(D_xH(x)) \\ &= -a\alpha I_x(e^{bx}) = -b^{-1}a\alpha\{e^{bx} - 1\} \end{aligned}$$

de donde $H(x) - 1 = a\alpha b^{-1}\{e^{bx} - 1\}$, ahora, sabemos que $h_0 = 1$. Por lo tanto, $H(x) = 1 - a\alpha b^{-1}\{e^{bx} - 1\}$.

Con esto hemos obtenido una función $H(x)$ única que satisface la forma lineal de la ecuación original y $F(x)$ está determinada de manera única por $F(x) = -a^{-1}H^{-1}(x)D_xH(x)$. Se sigue que

$$F(x) = \frac{\alpha e^{bx}}{1 - a\alpha b^{-1}\{e^{bx} - 1\}}.$$

Existen ecuaciones diferenciales que poseen una solución en el anillo de las series formales de potencias $R[[\mathbf{x}]]$ pero sin ninguna solución que sea una función analítica en el origen.

Si una función es analítica entonces sabemos que puede ser escrita como serie de Taylor convergente a dicha función, sin embargo el tema de analiticidad y convergencia se tratará más adelante junto con su utilidad en la enumeración asintótica de estructuras.

[1]La ecuación de Riccati fue desarrollada en Italia a principios del siglo XVIII por Jacopo Francesco Riccati y es cualquier ecuación diferencial ordinaria de primer orden que sea no lineal.

[2]La interpretación formal del logaritmo se estudia en el capítulo dos.

Capítulo 2

Series de potencias especiales y el método de solución de recurrencias

En este capítulo analizaremos algunos ejemplos de series importantes como la serie de potencias exponencial, la serie de potencias binomial, la serie armónica y series de Dirichlet, circulares, hiperbólicas y de Laurent. Además mostramos el método de funciones generadoras para resolver relaciones de recurrencia lineales.

2.1. La Serie de Potencias Exponencial

En adelante consideraremos que los anillos coeficientes de las series con las que trabajaremos son $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Z} o \mathbb{Q}$. El símbolo $A \overset{fge}{\longleftrightarrow} \{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ significa que A es la función generadora exponencial de la sucesión $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, una función generadora exponencial tiene la forma

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n.$$

Definición 2.1.1 La **función generadora exponencial** (fge) recibe su nombre a partir de la descomposición, precisamente, de la función exponencial e^x. Si analizamos su expansión de Maclaurin: $f(x) = f(0) + f'(0)x + f''x^2/2! + \cdots + f^{(n)}(0)x^n/n! +$

...

$$\begin{aligned}
f(x) &= e(x)\\
e(x) &= e^0 + e^0x^1 + e^0x^2/2! + \cdots\\
e(x) &= 1 + x + x^2/2! + + \cdots\\
e(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}x^k
\end{aligned}$$

Supóngase $A \overset{fge}{\longleftrightarrow} \{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ entonces ¿cuál es la fge de la sucesión $\{a_{n+1}\}_{n=0}^{\infty}$? Inferimos que la respuesta es A', porque

$$\begin{aligned}
A'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{na_nx^{n-1}}{n!}\\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_nx^{n-1}}{(n-1)!}\\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{n+1}x^n}{n!}
\end{aligned}$$

que es equivalente a la premisa $A' \overset{fge}{\longleftrightarrow} \{a_{n+1}\}_0^{\infty}$.
Como se puede ver el caso de la función generadora exponencial es muy sencillo, basta con desplazar el subíndice en una unidad en la sucesión de las $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ y la función resultante es equivalente a la derivada de la serie original.

Proposición 2.1.1 Si $A \overset{fge}{\longleftrightarrow} \{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ entonces, para $h > 0$ entero, se cumple que:

$$\{a_{n+h}\}_0^{\infty} \overset{fge}{\longleftrightarrow} D_x^h A.$$

Prueba. Por inducción matemática sobre h. Para el caso base $h = 1$ ya hemos visto que se cumple. Supongamos que se cumple para h y veamos que esto implica la regla para $h + 1$. Tenemos por hipótesis de inducción que $D_x^h A \overset{fge}{\longleftrightarrow} \{a_{n+h}\}_0^{\infty}$ es decir

$$D_x^h A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{n+h}}{n!}x^n.$$

Así que si derivamos obtenemos

$$D_x^{h+1}A(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{na_{n+h}}{n!}x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n+h}}{(n-1)!}x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{n+h+1}}{n!}x^n$$

y esto significa que $D_x^{h+1}A \overset{fge}{\longleftrightarrow} \{a_{n+h+1}\}_0^{\infty}$ y por tanto la regla se cumple para todo h. $\square$

2.2. La Serie Armónica

Teorema
Si $A \leftrightarrow \{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ entonces

$$\frac{A}{(1-x)} \leftrightarrow \left\{\sum_{r=0}^{n} a_r\right\}_{n=0}^{\infty}$$

Prueba. Sabemos que $\frac{1}{1-x} \leftrightarrow \{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ donde $b_n = 1$ para todo n. Entonces, por la definición del producto de series de potencias formales, obtenemos que

$$\frac{A}{1-x} \leftrightarrow \left\{\sum_{r=0}^{n} a_r b_{n-r}\right\}_{n=0}^{\infty} = \left\{\sum_{r=0}^{n} a_r\right\}_{n=0}^{\infty}$$

$\square$

Los *números armónicos* $\{H_n\}_1^{\infty}$ están definidos como

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \qquad (n \geq 1).$$

Por el teorema anterior, esa función es $1/(1-x)$ por la función generadora de la sucesión $\{1/n\}_1^{\infty}$ de recíprocos de los enteros positivos. De donde surge la pregunta, ¿quién es $H(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^n/n$?

Bien, sabemos que,

$$H(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \Rightarrow H'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}$$

$$H'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = x^0 + x^1 + x^2 + \cdots = \frac{1}{1-x}$$

Por lo tanto, $H'(x) = \frac{1}{1-x}$
Si su derivada es $1/(1-x)$,entonces $H(x)$ debe ser $I_x\{1/(1-x)\} = -\log(1-x)$. Con lo que la función generadora de los números armónicos es

$$\sum_{n=1}^{\infty} H_n x^n = \frac{1}{1-x} \log\left(\frac{1}{1-x}\right).$$

Definición 2.2.1 La serie logarítmica es

$$\log\left(\frac{1}{1-x}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n} \in R\left[[\mathbf{x}]\right]$$

2.3. La Serie de Potencias Binomial

Consideremos la función $f(x) = (1+x)^r$, donde r es un constante real fija, y $x > -1 \in \mathbb{R}$. Si $f(x)$ tiene una expansión en una serie de potencias al rededor de cero, debe estar dada por los coeficientes de la fórmula de Taylor:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

Calculamos las primeras derivadas de f,

$$\begin{aligned}
f'(x) &= r(1-x)^{r-1} \\
f''(x) &= r(r-1)(1-x)^{r-2} \\
f'''(x) &= r(r-1)(r-2)(1-x)^{r-3} \\
&\vdots \\
f^{(n)}(x) &= r(r-1)\cdots(r-n+1)(1-x)^{r-n} \\
&= (r)\downarrow_n (1-x)^{r-n}
\end{aligned}$$

donde

$$(r)\downarrow_n = r(r-1)(r-2)\cdots(r-n+1)$$

es el factorial decreciente, luego, por el teorema de Taylor

$$\begin{aligned}
f(x) &= 1 + rx + \frac{r(r-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{(r)\downarrow_n}{n!}x^n + \cdots \\
&= 1 + rx + \frac{r(r-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{r!}{n!(r-n)!}x^n + \cdots \\
(1+x)^r &= \sum_{n=0}^{r} \binom{r}{n} x^n
\end{aligned}$$

Estas son algunas propiedades de las funciones generadoras ordinarias y exponenciales que más adelante nos serán de gran utilidad:

Propiedad 1. Si $A \leftrightarrow \{a_n\}_0^\infty$, entonces para $h > 0$ entero,

$$\{a_{n+h}\}_0^\infty \leftrightarrow \frac{A - a_0 - \ldots - a_{h-1}x^{h-1}}{x^h}$$

Propiedad 2. Si $A \leftrightarrow \{a_n\}_0^\infty$, y $P(n)$ es un polinomio de n, entonces,

$$P(xD)A \leftrightarrow \{P(n)a_n\}_{n=0}^\infty$$

Propiedad 3. Si $A \leftrightarrow \{a_n\}_0^\infty$ y $B \leftrightarrow \{b_n\}_0^\infty$, entonces

$$AB \leftrightarrow \{\sum_{r=0}^{n} a_r b_{n-r}\}_{n=0}^\infty$$

Propiedad 4. Sea $A \leftrightarrow \{a_n\}_0^\infty$, y k un entero positivo, entonces

$$A^k \leftrightarrow \{\sum_{n_1+n_2+\cdots+n_k=n} a_{n_1}a_{n_2}\cdots a_{n_k}\}_{n=0}^\infty$$

Propiedad 5. Si $A \leftrightarrow \{a_n\}_0^\infty$, entonces

$$\frac{A}{(1-x)} \leftrightarrow \{\sum_{j=0}^{n} a_j\}_{n=0}^\infty$$

Propiedad 1' Si $A \overset{fge}{\longleftrightarrow} \{a_n\}_0^\infty$ entonces, para $h > 0$ entero,

$$\{a_{n+h}\}_0^\infty \overset{fge}{\longleftrightarrow} D_x^h A.$$

Propiedad 2' Si $A \overset{fge}{\longleftrightarrow} \{a_n\}_0^\infty$ y $P(n)$ es un polinomio de n entonces

$$P(xD)A \overset{fge}{\longleftrightarrow} \{P(n)a_n\}_{n=0}^\infty$$

Propiedad 3' Si $A \overset{fge}{\longleftrightarrow} \{a_n\}_0^\infty$ y $B \overset{fge}{\longleftrightarrow} \{b_n\}_0^\infty$ entonces $A \cdot B$ genera la sucesión

$$\left\{\sum_r \binom{n}{r} a_r b_{n-r}\right\}_{n=0}^\infty$$

2.4. Series de Dirichlet

Sea $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ una sucesión, decimos que la serie formal

$$A(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} = a_1 + \frac{a_2}{2^s} + \frac{a_3}{3^s} + \cdots \tag{2.1}$$

es la función generadora de la sucesión de Dirichlet, y escribimos

$$A(s) \overset{Dir}{\longleftrightarrow} \{a_n\}_{n=1}^{\infty}.$$

La importancia de las series de Dirichlet se deriva directamente de su propiedad multiplicativa.

Propiedad $1''$**.** Si $A(s) \overset{Dir}{\longleftrightarrow} \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $B(s) \overset{Dir}{\longleftrightarrow} \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, entonces

$$AB \overset{Dir}{\longleftrightarrow} \left\{ \sum_{d|n} a_d b_{\frac{n}{d}} \right\}_{n=1}^{\infty} \tag{2.2}$$

donde $d\backslash n$ significa d divisor de n.
Prueba.
Sabemos que $A(s) \overset{Dir}{\longleftrightarrow} \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ y que $B(s) \overset{Dir}{\longleftrightarrow} \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, consideremos el producto de dichas series

$$\begin{aligned} AB &= (a_1 + a_2 2^{-s} + a_3 3^{-s} + \cdots)(b_1 + b_2 2^{-s} + b_3 3^{-s} + \cdots) \\ &= (a_1)(b_1) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) 2^{-s} + (a_1 b 3 + a_3 b_1) 3^{-s} + (a_1 b_4 + a_2 b_2 + a_4 b_1) 4^{-s} + \cdots \end{aligned}$$

Esto es, en AB el coeficiente de todos los n^{-s} es la suma de todos los productos de $a_r \cdot b_s$ tales que $rs = n$, es decir

$$\sum_{rs=n} a_r b_s$$

y dado que r y s son divisores de n también se puede escribir como

$$\sum_{d\backslash n} a_d b_{\frac{n}{d}}$$

donde $d\backslash n$ significa d divisor de n. □

Corolario 2.4.1 Las sucesiones de Dirichlet se generan por la convolución de dos sucesiones en un problema en el que los objetos de tamaño **n** fueron obtenidos a través de unir **d** objetos de tamaño **n**$\backslash$**d** donde **d** es divisor de **n**.

Propiedad $2''$**.** Si $A(s) \overset{Dir}{\longleftrightarrow} \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ entonces $A(s)^k$ genera una sucesión de Dirichlet cuyo n-ésimo miembro es la suma, extendida sobre todas las factorizaciones de n en k factores, donde los sumandos son los productos de los miembros de la sucesión cuyos subíndices son factores de n.

A continuación veremos el caso de elevar una serie de potencias de Dirichlet a la k.

$$A(s)^k = \Big(\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}\Big)^k$$

En el producto de dos funciones se hace una suma sobre el primero de los factores el otro sale con una simple división. Para cuando tenemos producto de n funciones se tiene que hacer una suma iterada sobre todos los factores de n:

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{n_1 \geq 1} \sum_{n_2 \geq 1} \cdots \sum_{n_k \geq 1} (a_{n_1} a_{n_2} \cdots a_{n_k})(n_1 n_2 \cdots n_k)^{-s} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{n_1 \geq 1} \sum_{n_2 \geq 1} \cdots \sum_{n_k \geq 1} (a_{n_1} a_{n_2} \cdots a_{n_k})(n)^{-s} \\
&= \sum_{n_1, \ldots, n_k \geq 1} a_{n_1} \cdots a_{n_k} n^{-s}
\end{aligned}$$

En vez de usar sumas iteradas con restricciones podemos hacer la factorización de n en k factores y queda

$$= \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} \{ \sum_{n_1 \ldots n_k = n} a_{n_1} \cdots a_{n_k} \}.$$

Igual que en secciones anteriores, buscaremos qué función A genera la sucesión $\{1_n\}_{n=1}^{\infty}$. En el caso de las funciones ordinarias y exponenciales las respuestas resultaron ser funciones famosas. Para las funciones ordinarias fue $1/(1-x)$ y para las exponenciales fue e^x. En este caso, la serie de Dirichlet cuyos coeficientes son todos iguales a uno se llama ***La Función Zeta de Riemann***.[1]

Es la serie Dirichlet

$$\begin{aligned}
\zeta(s) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \\
&= 1^{-s} + 2^{-s} + 3^{-s} + 4^{-s} + \cdots ,
\end{aligned}$$

Ahora, como $\zeta(s) \overset{Dir}{\longleftrightarrow} \{1_n\}_{n=1}^{\infty}$, nuevamente surge la pregunta: ¿Qué sucesión genera elevar la función $\zeta^2(s)$?

[1] La hipótesis de Riemann, una conjetura sobre la distribución de los ceros de la función zeta de Riemann $\zeta(s)$, es uno de los problemas abiertos más importantes en la matemática contemporánea. Este problema está estrechamente relacionado con la distribución de los números primos en el conjunto de los naturales

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$
$$\zeta^2(s) = (\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s})(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s})$$

La propiedad $1''$ nos dice que dadas $A(s) \overset{Dir}{\longleftrightarrow} \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $B(s) \overset{Dir}{\longleftrightarrow} \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, $A(s)B(s) \overset{Dir}{\longleftrightarrow} \left\{\sum_{d/n} a_d b_{\frac{n}{d}}\right\}_1^{\infty}$, luego, si:

$$\zeta(s) \overset{Dir}{\longleftrightarrow} \{1_n\}_{n=1}^{\infty}$$
$$\Rightarrow$$
$$\zeta^2(s) \overset{Dir}{\longleftrightarrow} \left\{\sum_{d/n} 1 \cdot 1\right\}_1^{\infty}$$

Por lo tanto:

$$\left[\frac{1}{n^s}\right]\zeta^2(s) = d(n)$$

donde $d(n)$ es el número de divisores de n.

La sucesión $d(n)$ es muy irregular, calculando los primeros términos obtenemos

$$1,2,2,3,2,4,2,4,3,4,2,\ldots$$

sin embargo, la función generadora de esta serie es sencillamente $\zeta^2(s)$, donde el n-ésimo término de la sucesión es el número de divisores de n.
Análogamente, por la propiedad $2''$, sabemos que $\zeta(s)^k$ genera el número de factorizaciones ordenadas de n en k factores. Si consideramos inadmisible al factor 1, entonces $(\zeta(s) - 1)^k$ genera el número de factorizaciones ordenadas de n en las cuales hay k factores, todos ≥ 2.

Existen muchos ejemplos de sucesiones de teoría de números muy interesantes, generadas por parientes de la función Zeta de Riemann, pero existe una asombrosa generalización que abarca a muchas estas. A continuación daremos algunas definiciones para luego exhibirla.

Definición 2.4.1 Dados los enteros positivos m y n, decimos que m y n son **primos relativos** si y sólo si su máximo común divisor es igual a 1. También se les llama números primos entre sí o coprimos.

Definición 2.4.2 Una función f en teoría de números tiene como dominio el conjunto de los enteros positivos y se dice que f es **multiplicativa** si tiene la propiedad $f(mn) = f(m)f(n)$ para todos los pares de *primos relativos* m y n.

Como cada entero positivo n está definido de forma única, dejando de lado el orden, por un producto de potencias de números primos,

$$n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_r^{a_r},$$

se sigue que en teoría de números una función multiplicativa está completamente definida por sus valores en todas las potencias de números primos. Entonces,

$$\begin{aligned} f(n) &= f(p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_r^{a_r}) \\ &= f(p_1^{a_1}) f(p_2^{a_2}) \cdots f(p_r^{a_r}). \end{aligned}$$

Por ejemplo, suponga una función multiplicativa f. Para todo primo p y entero positivo m tenemos que $f(p^m) = p^{2m}$. Podemos decir que $f(n) = n^2$, para toda n, pues si representamos a n como en el párrafo anterior,

$$\begin{aligned} f(n) &= f(\prod p_i^{a_i}) = \prod_i f(p_i^{a_i}) \\ &= \prod_i p_i^{2a_i} = \left\{ \prod_i p_i^{a_i} \right\}^2 \\ &= n^2. \end{aligned}$$

Otro caso. Dada la función multiplicativa $d(n)$, que es el número de divisores de n, sabemos que por ejemplo,

$$6 = d(12) = d(3 \cdot 4) = d(3)d(4) = 2 \cdot 3 = 6$$

Para probar que $d(n)$ es multiplicativa en general, sean m y n primos relativos. Todo divisor d de mn es, de manera única, el producto de un divisor d' de m y un divisor d'' de n. Podemos elegir a $d' = mcd(d, m)$[2] y a $d'' = mcd(d, n)$. Por lo tanto el número de divisores de mn es el producto del número de divisores de m por el número de divisores de n, $d(mn) = d(m)d(n)$, que es lo que queríamos probar.
Las funciones de teoría de números satisfacen una sorprendente identidad, la cual enunciaremos, probaremos y luego usaremos.

[2] $mcd(a, b)$ es el máximo común divisor de a y de b

Teorema 2.4.1 Sea f una función multiplicativa de teoría de números, entonces la identidad formal

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s} = \prod_p \left\{ 1 + \frac{f(p)}{p^s} + \frac{f(p^2)}{p^{2s}} + \frac{f(p^3)}{p^{3s}} + \dots \right\}$$

en la que, el producto en el lado derecho se extiende sobre todos los números primos p.

Prueba.
Imagine multiplicar el lado derecho de la ecuación. Cada factor en el producto es una serie infinita. El producto se ve así, cuando expandimos un poco los factores:

$$\begin{aligned} &(1 + \frac{f(2)}{2^s} + \frac{f(2^2)}{2^{2s}} + \frac{f(2^3)}{2^{3s}} + \cdots) \cdot (1 + \frac{f(3)}{3^s} + \frac{f(3^2)}{3^{2s}} + \frac{f(3^3)}{3^{3s}} + \cdots) \quad \cdot \\ &(1 + \frac{f(5)}{5^s} + \frac{f(5^2)}{5^{2s}} + \frac{f(5^3)}{5^{3s}} + \cdots) \cdot (1 + \frac{f(7)}{7^s} + \frac{f(7^2)}{7^{2s}} + \frac{f(7^3)}{7^{3s}} + \cdots) \quad \cdot \quad \cdots \end{aligned} \tag{2.3}$$

Para multiplicar este grupo de series infinitas, del primer paréntesis tomamos un término, por ejemplo $f(2^3)2^{-3s}$. Luego, del segundo paréntesis, tomamos otro término, digamos $f(3)3^{-s}$ y lo multiplicamos por el que extrajimos antes. Esto nos da como resultado un producto acumulado de
$f(2^3)f(3)2^{-3s}3^{-s} = \frac{f(2^3)f(3)}{(24)^s}$. Ahora suponga que de cada paréntesis posterior, nuestra elección es, en todas, el término 1. Luego, como resultado de haber hecho todas las multiplicaciones obtenemos la aportación de esta selección particular a la multiplicación total. Ese conjunto ha producido el término $f(2^3)f(3)(24)^{-s}$ que involucra a (24^s). ¿Qué otra sucesión de selecciones de un término por cada paréntesis también generan una contribución que involucre a 24^{-s}?

Ninguna: ningún otro conjunto de selecciones puede hacerlo.

Si del primer paréntesis elegimos cualquier otro término que no sea $f(2^3)2^{-3s}$, no habrá ninguna forma de seleccionar de los otros paréntesis la potencia de 2 que necesitamos para formar el 24^{-s}. Necesitamos tres números 2 y ningún otro paréntesis los tiene (ni siquiera uno). De manera similar, necesitamos al factor 3^{-s} para poder formar el 24^{-s}. No existen números 3 disponibles en otro paréntesis que no sea el segundo, y de ahí necesariamente debemos elegir al que aporta un solo 3 que es $f(3)3^{-s}$.

Así, el coeficiente de (24^{-s}) en el lado derecho del teorema (2.4.1), es justo el que obtuvimos, $f(2^3)f(3)$. Ahora, dado que f es multiplicativa,

$f(2^3)f(3) = f(8)f(3) = f(24)$, que es justamente lo que dice el lado izquierdo del teorema.

Generalizando, sea n un entero fijo y sea $p_1^{a_1}p_2^{a_2}\cdots p_r^{a_r}$ su factorización en potencias de números primos. A fin de obtener un término que involucre a n^{-s}, i.e. que involucre a $\prod p_i^{-a_i s}$, estamos obligados a elegir el término **"1"** en todos los paréntesis de la extensión (1.5) del teorema, excepto los que involucren a los primos p_i que se necesitan para formar n. Dentro del paréntesis que corresponde al primo p_i deberemos elegir precisamente al término en el cual p_i está elevado a la potencia que ocurre en n, si no fuere así no tendremos oportunidad de obtener n^{-s}. Por tanto, estamos forzados a escoger el término $f(p_i^{a_i})p_i^{-a_i s}$ del paréntesis que le pertenece a p_i. Al concluir nuestra selección, el producto nos queda,

$$\begin{aligned}
&\prod_i f(p_i^{a_i})p_i^{-a_i s}\\
=&\prod_i f(p_i^{a_i})p_i^{a_i}(1)^{-s}\\
=&\prod_i f(p_i^{a_i})(n)(1)^{-s}\\
=&n^{-s}\prod_i f(p_i^{a_i})
\end{aligned}$$

Y por la propiedad multiplicativa de f el coeficiente de n^{-s} es

$$[n^{-s}] = f(n).$$

□

Nota: Es evidente que una función multiplicativa está completamente determinada por sus valores en todas las potencias de números primos. En efecto, del lado derecho del teorema (2.4.1) solo se ven los valores de f en potencias de primos, sin embargo, del lado izquierdo todos los valores aparecen.

Factorización fundamental de la Función Zeta de Riemman

Ejemplo

Un ejemplo del uso del teorema (2.4.1). Tomemos a la función multiplicativa $f(n) = 1$, para todo n.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f(n)}{n^s} = \prod_p\left\{1+\frac{f(p)}{p^s}+\frac{f(p^2)}{p^{2s}}+\dots\right\}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}=\prod_p\left\{1+\frac{1}{p^s}+\frac{1}{p^{2s}}+\dots\right\}$$

De esta expresión reconocemos a la función Zeta de Riemann,

$$\zeta(s)=\prod_p\left\{1+\frac{1}{p^s}+\frac{1}{p^{2s}}+\dots\right\}$$

El lado derecho contiene una sucesión geométrica que se puede expresar así,

$$\zeta(s)=\prod_p\left\{\frac{1}{1-p^{-s}}\right\}=\frac{1}{\prod_p(1-p^{-s})}$$

Esta factorización se conoce como **la Factorización Fundamental de la Función Zeta de Riemann**.

□

Ejemplo

Tomemos la función multiplicativa $\mu(n)$ cuyos valores en potencias de números primos son,

$$\mu(p^a)=\begin{cases}+1, & si\ a=0;\\ -1, & si\ a=1;\\ 0, & si\ a\geq 2\end{cases}$$

Sustituyendo $\mu(n)$ en el teorema (2.4.1),

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n^s}=\prod_p\left\{\frac{\mu(p^0)}{p^{0s}}+\frac{\mu(p^1)}{p^s}+\frac{\mu(p^2)}{p^{2s}}+\frac{\mu(p^3)}{p^{3s}}+\dots\right\}$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n^s}=\prod_p\left\{1+\frac{-1}{p^s}+\frac{0}{p^{2s}}+\frac{0}{p^{3s}}+\dots\right\}$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n^s}=\prod_p\left\{1-p^{-s}\right\} \tag{2.4}$$

De la factorización del primer ejemplo y el resultado anterior obtenemos un hecho relevante,

$$\zeta(s)=\frac{1}{\prod_p(1-p^{-s})}\text{ entonces,}$$
$$\frac{1}{\zeta(s)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n^s},$$

son series recíprocas

$$\frac{1}{\zeta(s)} \xleftrightarrow{Dir} \{\mu(n)\}_1^\infty$$

□

La función $\mu(n)$ es la *Función de Möbius*, importantísima en la teoría analítica de números por el hecho de ser la función recíproca de la función Zeta de Riemann.

Un caso práctico de esto. Supongamos dos sucesiones $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ y $\{b_n\}_{n=1}^\infty$ y supongamos que estas sucesiones están relacionadas por:

$$a_n = \sum_{d/n} b_d \quad (n \geq 1) \tag{2.5}$$

La pregunta es, ¿cómo podemos invertir estas ecuaciones para obtener las b en términos de las a?

Sean $A(s)$ y $B(s)$ funciones generadoras de tipo Dirichlet. Ahora reescribimos la ecuación de manera conveniente,

$$a_n = \sum_{d/n} b_d 1_{\frac{n}{d}} \tag{2.6}$$

para poder expresarla en términos de sus funciones generadoras aplicando directamente la propiedad $\mathbf{1}''$,

$$A(s) = B(s)\zeta(s).$$

Por lo tanto, $B(s) = A(s)/\zeta(s)$ y, de manera inversa, de nuevo por la propiedad $\mathbf{1}''$,

$$b_n = \sum_{d/n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) a_d \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots). \tag{2.7}$$

Esta es la clásica *Fórmula de inversión de Möbius*. La relación de reciprocidad de las sucesiones (2.6) y (2.7), refleja la relación de reciprocidad de sus funciones generadoras $\zeta(s)$ y $1/\zeta(s)$.

Cadena de bits

Ejemplo

¿Cuántas cadenas de tamaño n constituidas por $0's$ y $1's$ son primitivas?, considerando que una cadena primitiva es aquella que no puede ser expresada como concatenación de varias cadenas más pequeñas idénticas entre sí.
Por ejemplo, la cadena 100100100 no es primitiva, mas la cadena 1100 sí.

Existe un total de 2^n cadenas de largo n.[3] Supongamos que $f(n)$ de ellas son primitivas.

Toda $n-$cadena es expresable, de manera única, como una concatenación de cierto número $(\frac{n}{d})$ de cadenas primitivas idénticas de largo d donde d es un divisor de n. ¿Por qué? La respuesta es la siguiente.

Cada cadena puede ser o no primitiva, si lo fuere la forma de expresarla como concatenación de cadenas primitivas sería trivial, tomaríamos a $d = n$ usaríamos una sola $n-$cadena primitiva para expresarla. Si no fuese primitiva, por definición sabemos que una cadena no primitiva es aquella que se puede expresar en como concatenación de cadenas más pequeñas, iguales entre sí. Por ello bastaría con escribir $(\frac{n}{d})$ veces la cadena de tamaño d que se repite para expresar nuestra $n-$cadena. Por lo tanto, la suma del número de cadenas primitivas de largo d, sumando para todo d divisor de n, será igual al número total de cadenas de largo n.

$$2^n = \sum_{d\backslash n} f(d) \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

Utilizamos la fórmula de Inversión de Möbius, analizada anteriormente, para expresar la ecuación anterior en términos de su recíproco.

$$a_n = \sum_{d\backslash n} b_d \qquad \Rightarrow \qquad b_n = \sum_{d\backslash n} \mu\Big(\frac{n}{d}\Big) a_d$$

$$2^n = \sum_{d\backslash n} f(d) \qquad \Rightarrow \qquad f(n) = \sum_{d\backslash n} \mu\Big(\frac{n}{d}\Big) 2^d$$

Para $(n = 1, 2, \ldots)$

Un caso práctico, $n = 4$, los divisores de n son $d = \{1, 2, 4\}$ entonces,

$$f(4) = \mu(\frac{4}{1})2^1 + \mu(\frac{4}{2})2^2\mu(\frac{4}{4})2^4$$

$$\mu(n) = \begin{cases} 0, & \text{si } n \text{ contiene uno o más factores primos repetidos} \\ 1, & \text{si } n = 1 \\ (-1)^k, & \text{si } n \text{ es el producto de } k \text{ diferentes primos} \end{cases}$$

[3]Cada posición ofrece 2 opciones, contamos las combinaciones con remplazo por lo que el resultado es multiplicar 2 n veces.

Entonces

$$f(n) = (0)2^1 + (-1)2^2 + (1)2^4 = 12$$

Notamos que el último término siempre será 2^n al cual le restaremos, por el primer término, si y solo si n es primo, 2 unidades; y por cada $d-$ésimo término término, dónde $d \neq \{1, n\}$ le restaremos 2^d unidades. Esto es, al número total de cadenas le restamos, las $n-cadenas$ $111\ldots 1$ y $000\ldots 0$ y le restamos todas las cadenas conformadas por la concatenación de $d-cadenas$ con $d \neq \{1, n\}$. $\square$

2.5. Series de Potencias Circulares e Hiperbólicas

Definición 2.5.1

$$\operatorname{sen}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Definición 2.5.2

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

Definición 2.5.3

$$\operatorname{senh}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Definición 2.5.4

$$\cosh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

A continuación se presenta el desarrollo de la expansión de cada una de estas funciones a través de La Serie de Maclaurin.

$$f(x) = f(0) + f^I(0)x + \frac{f^{II}(0)x^2}{2!} + \frac{f^{III}(0)x^3}{3!} + \frac{f^{IV}(0)x^4}{4!} + \cdots$$

Expansión de la función $\operatorname{sen}(x)$

$$\begin{aligned}
f(x) &= \operatorname{sen}(x) & f(0) &= \operatorname{sen}(0) & &= 0 \\
f^I(x) &= \cos(x) & f^I(0) &= \cos(0) & &= 1 \\
f^{II}(x) &= -\operatorname{sen}(x) & f^{II}(0) &= -\operatorname{sen}(0) & &= 0 \\
f^{III}(x) &= -\cos(x) & f^{III}(0) &= -\cos(0) & &= -1 \\
f^{IV}(x) &= \operatorname{sen}(x) & f^{IV}(0) &= \operatorname{sen}(0) & &= 0 \\
f^{V}(x) &= \cos(x) & f^{V}(0) &= \cos(0) & &= 1
\end{aligned}$$

$$f(x) = 0 + (1)x + 0 - \frac{x^3}{3!} + 0 + \frac{x^5}{5!} + 0 - \cdots$$
$$f(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} \cdots$$

$$\operatorname{sen}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

Expansión de la función $\cos(x)$

$$\begin{aligned}
f(x) &= \cos(x) & f(0) &= \cos(0) & &= 1\\
f^{I}(x) &= -\operatorname{sen}(x) & f^{I}(0) &= -\operatorname{sen}(0) & &= 0\\
f^{II}(x) &= -\cos(x) & f^{II}(0) &= -\cos(0) & &= -1\\
f^{III}(x) &= \operatorname{sen}(x) & f^{III}(0) &= \operatorname{sen}(0) & &= 0\\
f^{IV}(x) &= \cos(x) & f^{IV}(0) &= \cos(0) & &= 1\\
f^{V}(x) &= -\operatorname{sen}(x) & f^{V}(0) &= -\operatorname{sen}(0) & &= 0
\end{aligned}$$

$$f(x) = 1 + 0 - \frac{x^2}{2!} + 0 + \frac{x^4}{4!} + 0 - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$
$$f(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} \cdots$$

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

Expansión de la función $\operatorname{senh}(x)$

$$\begin{aligned}
f(x) &= \operatorname{senh}(x) & f(0) &= \operatorname{senh}(0) & &= 0\\
f^{I}(x) &= \cosh(x) & f^{I}(0) &= \cosh(0) & &= 1\\
f^{II}(x) &= \operatorname{senh}(x) & f^{II}(0) &= \operatorname{senh}(0) & &= 0
\end{aligned}$$

$$f(x) = 0 + (1)x + 0 + \frac{x^3}{3!} + 0 + \frac{x^5}{5!} + 0 \cdots$$
$$f(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

$$\operatorname{senh}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

Expansión de la función $\cosh(x)$

$$\begin{aligned} f(x) &= \cosh(x) & f(0) &= \cosh(0) & &= 1 \\ f^I(x) &= \operatorname{senh}(x) & f^I(0) &= \operatorname{senh}(0) & &= 0 \\ f^{II}(x) &= \cosh(x) & f^{II}(0) &= \cosh(0) & &= -1 \end{aligned}$$

$$f(x) = 1 + 0 + \frac{x^2}{2!} + 0 + \frac{x^4}{4!} + 0 + \frac{x^6}{6!} + \cdots$$
$$f(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} + \cdots$$

$$\cosh(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

En $\mathbb{C}$ estas son las series de potencias análogas a las funciones trigonométricas correspondientes. Notamos que $e^{ix} = \cos(x) + i\operatorname{sen}(x)$, donde e^{ix} es la composición de $e(x)$ con la serie formal $ix = (0, i, 0, \ldots)$

$$\begin{aligned} e^{ix} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!} \\ &= 1 + ix - \frac{(x)^2}{2!} - \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(x)^4}{4!} + \frac{(ix)^5}{5!} + \cdots \\ &= 1 - \frac{(x)^2}{2!} + \frac{(x)^4}{4!} + \cdots + ix - \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^5}{5!} + \cdots \\ &= 1 - \frac{(x)^2}{2!} + \frac{(x)^4}{4!} + \cdots + i(x - \frac{(x)^3}{3!} + \frac{(x)^5}{5!} + \cdots) \\ &= \cos(x) + i\operatorname{sen}(x) \end{aligned}$$

y también que $e^x = \cosh(x) + \operatorname{senh}(x)$,

$$\begin{aligned}
e^x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x)^n}{n!} \\
&= 1 + x + \frac{(x)^2}{2!} + \frac{(x)^3}{3!} + \frac{(x)^4}{4!} + \frac{(x)^5}{5!} + \cdots \\
&= 1 + \frac{(x)^2}{2!} + \frac{(x)^4}{4!} + \cdots + x + \frac{(x)^3}{3!} + \frac{(x)^5}{5!} + \cdots \\
&= \cosh(x) + \operatorname{senh}(x)
\end{aligned}$$

donde $i^2 = -1$, con lo cual es fácil ver que,

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}(x) =& (1/2i)(e^{ix} - e^{-ix}) \\
(1/2i)(e^{ix} - e^{-ix}) &= (1/2i)\{(\cos(x) + i\operatorname{sen}(x)) - (1 - ix - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots)\} \\
&= (1/2i)\{(\cos(x) + i\operatorname{sen}(x)) - (1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots - ix + \frac{x^3}{3!} + \cdots)\} \\
&= (1/2i)\{(\cos(x) + i\operatorname{sen}(x)) - (1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots - i(x - \frac{x^3}{3!} - \cdots))\} \\
&= (1/2i)\{(\cos(x) + i\operatorname{sen}(x)) - (\cos(x) - i(\operatorname{sen}(x)))\} \\
&= (1/2i)\{\cos(x) + i\operatorname{sen}(x) - \cos(x) + i\operatorname{sen}(x)\} \\
&= (1/2i)\{2i\operatorname{sen}(x)\} \\
&= \operatorname{sen}(x)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\cos(x) =& (1/2)(e^{ix} + e^{-ix}) \\
(1/2)(e^{ix} + e^{-ix}) &= (1/2)\{(\cos(x) + i\operatorname{sen}(x)) + (\cos(x) - i(\operatorname{sen}(x)))\} \\
&= (1/2)\{\cos(x) + i\operatorname{sen}(x)) + \cos(x) - i\operatorname{sen}(x)\} \\
&= (1/2)\{2\cos(x)\} \\
&= \cos(x)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\operatorname{senh}(x) =&(1/2)(e^x - e^{-x})\\
(1/2)(e^x - e^{-x}) &= (1/2)\{(\cosh(x)+\operatorname{senh}(x)) - (1 - x + \frac{(x)^2}{2!} - \frac{(x)^3}{3!} + \frac{(x)^4}{4!} - \cdots)\}\\
&= (1/2)\{(\cosh(x)+\operatorname{senh}(x)) - (1 + \frac{(x)^2}{2!} + \frac{(x)^4}{4!} + \cdots - (x + \frac{(x)^3}{3!} + \cdots))\}\\
&= (1/2)\{(\cosh(x)+\operatorname{senh}(x)) - (\cosh(x) - \operatorname{senh}(x))\}\\
&= (1/2)\{\cosh(x)+\operatorname{senh}(x) - \cosh(x) + \operatorname{senh}(x)\}\\
&= (1/2)\{2\operatorname{senh}(x)\}\\
&= \operatorname{senh}(x)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\cosh(x) =&(1/2)(e^x + e^{-x})\\
(1/2)(e^x + e^{-x}) &= (1/2)\{(\cosh(x)+\operatorname{senh}(x)) + (\cosh(x) - \operatorname{senh}(x))\}\\
&= (1/2)\{2\cosh(x)\}\\
&= \cosh(x)
\end{aligned}
$$

Las principales identidades trigonométricas pueden ser demostradas de igual manera,

$$
\begin{aligned}
\operatorname{sen}^2(x) + \cos^2(x) &= \{(1/2i)(e^{ix} - e^{-ix})\}^2 + \{(1/2)(e^{ix} + e^{-ix})\}^2\\
&= \frac{1}{4}\{e^{2ix} - 2e^{ix-ix} + e^{-2ix}\} + \frac{1}{4}\{(e^{2ix} + 2e^{ix-ix} + e^{-2ix})\}\\
&= \frac{1}{4}\{-e^{2ix} + 2e^{ix-ix} - e^{-2ix} + e^{2ix} + 2e^{ix-ix} + e^{-2ix}\}\\
&= \frac{1}{4}\{-e^{2ix} + e^{2ix} + 2e^{0} + 2e^{0} - e^{-2ix} + e^{-2ix}\}\\
&= \frac{1}{4}\{4\}\\
&= 1
\end{aligned}
$$

Polinomios ciclotómicos

EJEMPLO
Entre las n raíces de la ecuación $x^n = 1$, las raíces $n-$ésimas primitivas son aquellas que no son también raíces $m-$ésimas para alguna $m < n$.

Así, las raíces cuartas de la unidad son:

$$\{1, -1, i, -i\}$$

$$\begin{aligned}
(1)^4 &= (1)(1)(1)(1) && = (1)(1) && = 1\\
(-1)^4 &= (-1)(-1)(-1)(-1) && = (1)(1) && = 1\\
(i)^4 &= (\sqrt{-1})(\sqrt{-1})(\sqrt{-1})(\sqrt{-1}) && = (-1)(-1) && = 1\\
(-i)^4 &= (-\sqrt{-1})(-\sqrt{-1})(-\sqrt{-1})(-\sqrt{-1}) && = (-1)(-1) && = 1
\end{aligned}$$

Notamos que $1, -1$ son también raíces de $x^2 = 1$, por eso $1, -1$ no son raíces primitivas.

De manera general, las raíces $n-$ésimas de la unidad son

$$\{e^{2\pi i r/n}\}_{r=0}^{n-1}$$

Prueba. Si tomamos el caso de las raíces cuadradas de la unidad vemos que de manera trivial se cumple para r_0,

$$\begin{aligned}
r_0 &= e^{2\pi i(0)/2}\\
r_0 &= e^0\\
r_0 &= 1
\end{aligned}$$

Ya que $r_0 = 1$, se cumple que $r_0^2 = 1$. Continuamos con r_1 :

$$\begin{aligned}
r_1 &= e^{2\pi i(1)/2}\\
r_1 &= e^{\pi i}
\end{aligned}$$

Para analizar $e^{\pi i}$ utilizaremos la expansión de la función exponencial. Para fines prácticos haremos un cambio de variable: $\pi = x$

$$\begin{aligned}
e^{xi} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{xi^k}{k!}\\
e^{xi} &= \frac{x^0 i^0}{0!} + \frac{x^1 i^1}{1!} + \frac{x^2 i^2}{2!} + \cdots
\end{aligned}$$

si cambiamos las i^p por su valor real, de existir,

$$e^{xi} = 1 + xi - \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3 i}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5 i}{5!} - \cdots$$

Podemos separar lo anterior en dos partes, la que está multiplicada por i y la que no.

$$e^{xi} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + i \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

Estas series son directamente las expansiones[4] de sen(x) y de cos(x) por lo que podemos expresar nuestra igualdad como:

$$e^{xi} = \cos(x) + i\,\mathrm{sen}(x) \tag{2.8}$$

conocida como **la Fórmula de Euler.** Ahora regresaremos la variable original π a nuestra ecuación y por lo tanto

$$e^{\pi i} = \cos(\pi) + i\,\mathrm{sen}(\pi)$$

$$e^{\pi i} = -1 + i(0) \quad \text{de donde,}$$

$$e^{xi} + 1 = 0 \tag{2.9}$$

La ecuación 2.9 es conocida como **la Identidad de Euler**. Con este hecho, comprobamos que $r_1^2 = (e^{\pi i})^2 = (-1)^2 = 1$, además probar la fórmula general será muy sencillo. Esta dice que: las raíces $n-$ésimas de la unidad son $\{e^{2\pi ir/n}\}_{r=0}^{n-1}$, para $r \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$, podemos expresarlo como

$$e^{(r/n)(2)(\pi i)} = \left(\left(e^{\pi i}\right)^2\right)^{r/n} = ((-1)^2)^{r/n} = (1)^{r/n} = 1$$

□

Las raíces $n-$ésimas primitivas de la unidad son

$$\{e^{2\pi ir/n}\} \quad (0 \leq r \leq n-1; mcd(r,n) = 1).$$

Prueba. Nuevamente vamos a expresar el conjunto de todas las raíces $n-$ésimas de la unidad, para $r = \{0, 1, \ldots, n-1\}$, de la siguiente manera,

$$\left(e^{2\pi i}\right)^{r/n}$$

Digamos que el $mcd(r,n)$=s, donde $s \neq 1$, entonces, sabemos que nuestra expresión elevada a la $\frac{r}{n}$ se podría expresar elevada a un r/n *simplificado*, es decir,

$$\frac{r}{n} = \frac{\frac{r}{s}}{\frac{n}{s}}$$

Ahora declaremos r/s=ρ y n/s=d, entonces nuestra ecuación simplificada quedaría:

$$\left(e^{2\pi i}\right)^{\rho/d}$$

[4]Las expansiones de Maclaurin de ambas funciones están desarrolladas en los anexos 1 y 2 al final del documento.

Si esto lo expresamos de la forma inicial queda, $e^{2\pi i\rho/d}$ y dicho término claramente pertenece al conjunto de raíces $d-$ésimas, donde $d < n$, i.e. no es raíz $m-$ésima primitiva. Por lo tanto, la única manera de que esto no suceda es que el $mcd(r, n) = 1$.
□

Entonces para cada n existen exactamente $\phi(n)$ raíces $n-$ésimas primitivas de la unidad. $\phi(n) = \{r/mcd(r, n) = 1; 0 \leq r \leq (n-1); n \in N\}$ La ecuación cuyas raíces son todas las n raíces $n-$ésimas de la unidad es obviamente la ecuación $x^n - 1 = 0$. Pero ¿quién es el polinomio $\Phi_n(x)$ de grado $\phi(n)$ cuyas raíces son exactamente el conjunto de raíces $n-$ésimas primitivas de la unidad? En otras palabras, ¿qué podemos decir del polinomio,

$$\Phi_n(x) = \prod_{\substack{0\leq r\leq n-1 \\ mcd(r,n)=1}} \left(x - e^{2\pi ir/n}\right) \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)?$$

Los polinomios $\Phi_n(x)$ se llaman *Polinomios Ciclotómicos*. El hecho importante para responder esta pregunta es que

$$\prod_{d/n} \Phi_d(x) = 1 - x^n \quad (n = 1, 2, 3, \ldots). \tag{2.10}$$

Sin lugar a dudas, el lado derecho de la ecuación es el producto de todos los posibles factores $(\omega - x)$ donde ω es una raíz $n-$ésima de la unidad, primitiva o no. Pero cada raíz $n-$ésima de la unidad es una raíz $d-$ésima primitiva de la unidad para únicamente una $d \leq n$, y esa d es un divisor de n. Para detallar un poco más, utilizando lo que analizamos en la última demostración, dada cierta raíz de la unidad $\omega = e^{2\pi ir/n}$, para cierto s divisor de r y de n, podemos expresar a ω en términos de $\rho = r/s$ y $d = n/s$. Como $\omega = e^{2\pi i\rho/d}$, vemos que ω es una raíz $d-$ésima primitiva de la unidad y que d/n (d es divisor de n). Así, cada factor lineal del lado derecho de (2.10), ocurre en uno y sólo uno de los polinomios ciclotómicos de la izquierda de (2.10).

De (2.10) obtendremos una fórmula bastante explícita para $\Phi_n(x)$, invirtiendo la ecuación para despejar las $\Phi's$. El único problema es que tenemos un producto en lugar de una suma, por lo que emplearemos las leyes de los logaritmos.

$$\prod_{d\backslash n} \Phi_d(x) = (1 - x^n)$$

$$\log\Big(\prod_{d\backslash n} \Phi_d(x)\Big) = \log\Big(1 - x^n\Big)$$

$$\sum_{d\backslash n} \log \Phi_d(x) = \log(1 - x^n) \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

Ahora podemos aplicar la inversión de Möbius directamente,

$$\log \Phi_n(x) = \sum_{d\backslash n} \mu\Big(\frac{n}{d}\Big) \log(1 - x^d) \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

Finalmente aplicamos algunas identidades logarítmicas y la función exponencial,

$$\log \Phi_n(x) = \sum_{d\backslash n} \log(1 - x^d)^{\mu(\frac{n}{d})}$$

$$\log \Phi_n(x) = \log(\prod_{d\backslash n} (1 - x^d)^{\mu(\frac{n}{d})} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

$$\Phi_n(x) = \prod_{d\backslash n} (1 - x^d)^{\mu(\frac{n}{d})} \tag{2.11}$$

Los coeficientes de la función de Möbius pueden ser únicamente ± 1 y 0, por lo tanto lo único que nos indicará será si omitimos el término (si $\mu = 0$), si se escribe como numerador($\mu = 1$) o en el denominador, ($\mu = -1$). Por ejemplo, para $\Phi_{12}(x)$

$$\begin{aligned}
\Phi_{12}(x) &= (1-x)^{\mu(12)}(1-x^2)^{\mu(6)}(1-x^3)^{\mu(4)}(1-x^4)^{\mu(3)}(1-x^6)^{\mu(2)}(1-x^{12})^{\mu(1)} \\
&= (1-x)^0(1-x^2)^{\mu(1)}(1-x^3)^0(1-x^4)^{\mu(-1)}(1-x^6)^{\mu(-1)}(1-x^{12})^{\mu(1)} \\
&= \frac{(1-x^2)(1-x^{12})}{(1-x^4)(1-x^6)} \\
&= \frac{(1-x^{12})}{(1+x^2)(1-x^6)} \\
&= \frac{(1-x^{12})}{1-x^6+x^2-x^8}
\end{aligned}$$

$$
\begin{array}{r|ccccc}
 & 1 & -x^2 & +x^4 & & \\ \hline
1 - x^6 + x^2 - x^8 & 1 & -x^{12} & & & \\
 & -1 & & +x^6 & -x^2 + x^8 & \\ \cline{2-5}
 & & -x^{12} & +x^6 & -x^2 + x^8 & \\
 & & & & +x^2 - x^8 & +x^4 - x^{10} \\ \cline{3-6}
 & & -x^{12} & +x^6 & & +x^4 - x^{10} \\
 & & +x^{12} & -x^6 & & -x^4 + x^{10} \\ \cline{3-6}
 & & & & 0 &
\end{array}
$$

□

2.6. Series de Laurent Formales

Definición 2.6.1 El símbolo $\mathbf{R}(\mathbf{x})$ denota el campo fracción del dominio integral $R[x]$. Los elementos de $\mathbf{R}(\mathbf{x})$ son **funciones racionales formales** p/q, donde $p.q$ son polinomios con q no-cero; tenemos que $\frac{p}{q} = \frac{s}{t}$ en $\mathbf{R}(\mathbf{x})$ si y solo si $pt = qs$ en $R[x]$.

Definición 2.6.2 El símbolo $R((x))$ denota el campo fracción del dominio integral. $R[[\mathbf{x}]]$. Los elementos de $R((x))$ son **series de Laurent formales**. Una serie de Laurent formal es un cociente A/B, donde A, B son series de potencias formales donde B es diferente de cero.

$A/B = C/D$ si y solo si $AD = BC$ en $R[x]$.
Es importante destacar que para cualquier $S \neq 0 \in R((x))$, existe un entero único N y una serie única $F \in R[[\mathbf{x}]]$ tales que

$$S = x^N F$$

y $F(0) \neq 0$. Llamamos a N el orden de S. Donde $N \geq 0$, tal que $S \in R[[\mathbf{x}]]$. Cuando $N = -m$ es negativa, $S = x^N F$ es la fracción $\frac{F}{x^m}$, en este caso usualmente usamos la notación de *Series de Laurent*:

$$S = F_0 x^{-m} + F_1 x^{-m+1} + F_2 x^{-m+2} + \cdots + F_m x^0 + F_{m+1} x^1 + \cdots = \sum_{n=-m}^{\infty} F_{n+m} x^n$$

2.7. El método de solución de recurrencias

En esta sección estudiaremos el método de funciones generadoras para resolver relaciones de recurrencia lineales. Primero veremos el caso de relaciones de recurrencias orden r con coeficientes constantes y posteriormente con coeficientes variables. Dada la relación de recurrencia,

$$b_0 a_{n+r} + b_1 a_{n+r-1} + \cdots + b_r a_n = u_n, \qquad n = 0, 1, \ldots, \tag{2.12}$$

donde u_n, $n = 0, 1, \ldots$, es una sucesión dada, $b_0 \neq 0$ y $b_r \neq 0$. La determinación de una sucesión a_k, con $k = 0, 1, \ldots$, que satisfaga esta relación de recurrencia requiere del conocimiento de r valores iniciales $a_0, a_1, \ldots a_{r-1}$. Como los coeficientes $b_0, b_1, \ldots, b_{r-1}$ son conocidos, entonces los c_k,

$$c_k = \sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j}, \qquad k = 0, 1, \ldots, r-1 \tag{2.13}$$

pueden ser calculados. El proceso para obtener la solución a_k, para $k = 0, 1, \ldots$, de la ecuación (2.12), utilizando funciones generadoras, se lleva a cabo en dos pasos. En el primero, haciendo uso de la ecuación (2.12) y sus valores iniciales, la función generadora de la sucesión a_k, para $k = 0, 1, \ldots$ es derivada en el siguiente teorema.

Teorema 2.7.1 Sea a_k, con $k = 0, 1, \ldots$, una sucesión que satisfaga la relación de recurrencia lineal (2.12). Entonces la función generadora

$$A(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k, \tag{2.14}$$

está dada por

$$A(x) = \frac{C(x) + x^r U(x)}{B_r(x)}, \tag{2.15}$$

donde

$$B_r(x) = \sum_{k=0}^{r} b_k x^k, \qquad C(x) = \sum_{k=0}^{r-1} c_k x^k \tag{2.16}$$

y

$$U(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n. \tag{2.17}$$

Prueba. Multiplicamos (2.12) por x^{n+r} y sumamos para $n = 0, 1, \ldots$, obtenemos

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \big(b_0 a_{n+r} + b_1 a_{n+r-1} + \cdots + b_r a_n\big) x^{n+r} &= \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^{n+r} \\
\sum_{n=0}^{\infty} \big(b_0 a_{n+r} x^{n+r} + b_1 x a_{n+r-1} x^{n+r-1} + \cdots + b_r x^r a_n x^n\big) &= x^r \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n \\
b_0 \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+r} x^{n+r} + b_1 x \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+r-1} x^{n+r-1} + \cdots + b_r x^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n &= x^r \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n
\end{aligned}$$

al introducir las funciones generadoras (2.14) y (2.17),

$$\begin{aligned}
b_0\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+r}x^{n+r} + b_1x\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+r-(1)}x^{n+r-(1)} + \cdots \\
+ b_{r-1}x^{r-1}\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+r-(r-1)}x^{n+r-(r-1)} + b_r x^r A &= x^r U \\
\sum_{j=0}^{r-1} b_j x^j \big(\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+r-j}x^{n+r-j}\big) + b_r x^r A &= x^r U
\end{aligned}$$

Ahora, considerando que

$$A(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \sum_{k=0}^{s-1} a_k x^k + \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+s}x^{k+s}$$

$$\Rightarrow \qquad \sum_{n=0}^{\infty} a_{k+s}x^{k+s} = A(x) - \sum_{k=0}^{s-1} a_k x^k \qquad , \qquad s = 1, 2, \ldots$$

Podemos reescribir la función como

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{r-1} b_j x^j \big(A(x) - \sum_{k=0}^{r-j-1} a_k x^k\big) + b_r x^r A(x) &= x^r U(x) \\
A(x)\sum_{j=0}^{r-1} b_j x^j - \sum_{j=0}^{r-1} b_j x^j \sum_{k=0}^{r-j-1} a_k x^k + b_r x^r A(x) &= x^r U \\
A(x)\big(\sum_{j=0}^{r-1} b_j x^j + b_r x^r\big) - \big(\sum_{j=0}^{r-1} b_j x^j \sum_{k=0}^{r-j-1} a_k x^k\big) &= x^r U(x) \\
A(x)\Big(\sum_{k=0}^{r} b_k x^k\Big) - \sum_{k=0}^{r-1}\Big(\sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j}\Big)x^k &= x^r U(x)
\end{aligned}$$

Considerando (2.13) y (2.16)

$$\begin{aligned}
A(x)\Big(B_r(x)\Big) - \sum_{k=0}^{r-1}\Big(c_k\Big)x^k &= x^r U(x) \\
A(x)\Big(B_r(x)\Big) - C(x) &= x^r U(x)
\end{aligned}$$

□

Después de derivar la expresión (2.15) para la función generadora $A(x)$, el segundo paso es determinar los valores de la sucesión a_k, con $k = 0, 1, \ldots$ esto requiere de la expansión del lado derecho de (2.15) en potencias de x. Notemos que el polinomio B_r está relacionado con el polinomio característico

$$\phi(x) = \sum_{k=0}^{r} b_k x^{r-k}$$

de la siguiente manera, $B_r(x) = x^r \phi(1/x)$. Cuando los r valores iniciales $a_0, a_1, \ldots, a_{r-1}$ no fueron dados, los números c_k, $k = 0, 1, \ldots, r-1$ definidos por (2.13) entran en la expresión (2.15) de la función generadora y en la solución de (2.12) como r constantes arbitrarias. Para expandir la función generadora (2.15), hay que expresarla como una suma de funciones de la forma $\frac{c}{(1-\rho x)^k}$ con ayuda del método de fracciones parciales. Específicamente, si $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_s$, son las raíces del polinomio característico $\phi(x)$, con multiplicidades $m_1, m_2, \ldots, m_s$ respectivamente, de tal manera que $\sum_{i=1}^{s} m_i = r$, entonces

$$\phi(x) = b_0(x-\rho_1)^{m_1}(x-\rho_2)^{m_2}\cdots(x-\rho_s)^{m_s}$$

y el denominador de (2.15) se factoriza

$$B_r(x) = b_0(1-\rho_1 x)^{m_1}(1-\rho_2 x)^{m_2}\cdots(1-\rho_s x)^{m_s}$$

por tanto la función generadora (2.15) puede ser escrita en la forma

$$A(x) = \sum_{j=1}^{s}\sum_{k=1}^{m_j} \frac{c_{k,j}}{(1-\rho_j x)^k} + b_0^{-1} x^r U(x) \prod_{j=1}^{s} \frac{1}{(1-\rho_j x)^{m_j}},$$

donde $c_{k,j}$, $\quad k = 1, 2, \ldots, m_j$, $j = 1, 2, \ldots, s$, son las constantes a ser determinadas a través del sistema de r ecuaciones que sale de la ecuación de los coeficientes de x^k, para $k = 0, 1, \ldots, r-1$, en ambos miembros de la identidad

$$\frac{C(x)}{B_r(x)} = \sum_{j=1}^{s}\sum_{k=1}^{m_j} \frac{c_{k,j}}{(1-\rho_j x)^k}$$

La función generadora $A(x)$, utilizando la fórmula binomial generalizada de Newton, puede ser expandida en potencias de x:

$$A(x) = \sum_{j=1}^{s}\sum_{k=1}^{m_j} c_{k,j} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{k+n-1}{k-1} \rho_j^n x^n$$

$$+b_0^{-1}\left[\sum_{n=0}^{\infty}u_n x^{n+r}\right]\prod_{j=1}^{s}\left[\sum_{n_j=0}^{\infty}\binom{m_j+n_j-1}{m_j-1}\rho_j^n x^{n_j}\right]$$

de ahí

$$a_n=\sum_{j=1}^{s}\sum_{k=1}^{m_j}c_{k,j}\binom{k+n-1}{k-1}\rho_j^n$$
$$+\,b_0^{-1}\sum_{k=0}^{n-r}u(n-k-r)\sum\prod_{j=1}^{s}\binom{m_j+n_j-1}{m_j-1}\rho_j^{n_j},$$

donde, la suma interna del segundo término se extiende sobre todos los $n_j=0,1,\ldots,k$, $j=1,2,\ldots,s$ con $n_1+n_2+\cdots+n_s=k$.

Ahora mostraremos como resolver relaciones de recurrencia lineales bivariadas de orden (r,s) con coeficientes constantes:

$$b_{0,0}a_{n+r,k+s}+b_{0,1}a_{n+r,k+s-1}+b_{1,0}a_{n+r-1,k+s}+\cdots+b_{r,s}a_{n,k}=w_{n,k}, \tag{2.18}$$

donde $w_{n,k}$ es una función dada y los coeficientes $b_{i,j}$, $\quad i=\overline{0,n}\quad j=\overline{0,k}$ son constantes dadas. La determinación de la sucesión con dos índices $a_{n,k}$, $n=0,1,\ldots$, $k=0,1,\ldots$, que satisface la relación de recurrencia (2.18) requiere del conocimiento de $r+s$ sucesiones independientes,

$$a_{i,k}\quad,\quad k=0,1,\ldots,\quad i=0,1,\ldots,r-1 \tag{2.19}$$

$$a_{n,j}\quad,\quad n=0,1,\ldots,\quad j=0,1,\ldots,s-1 \tag{2.20}$$

que son las condiciones iniciales.

Derivar la solución de (2.18) empleando una función generadora también se lleva a cabo en dos pasos. Uno, determinar la función generadora bivariable[5].

$$A(x,y)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}a_{n,k}x^k y^n,$$

la cual, usando la sucesión de funciones generadoras

$$A_n(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_{n,k}x^k,\qquad n=0,1,\ldots,$$

[5]Para denotar que una función generadora es bivariable utilizaremos la notación de los paréntesis que llevan por parámetro a las indeterminadas de la función.

es escrita en la forma

$$A(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(x) y^n.$$

Para la deducción de la sucesión de funciones generadoras $A_n(x)$, $n = 0, 1, \ldots,$ multiplicamos (2.18) por x^{k+s} y sumamos para $k = 0, 1, \ldots,$ luego

$$\sum_{i=0}^{r} \sum_{j=0}^{s} b_{i,j} x^j \sum_{k=0}^{\infty} a_{n+r-i,k+s-j} x^{k+s-j} = x^s \sum_{k=0}^{\infty} w_{n,k} x^k, \qquad n = 0, 1, \ldots$$

y como

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{n+r-i,k+s-j} x^{k+s-j} = A_{n+r-i}(x) - \sum_{m=j}^{s-1} a_{n+r-i,m-j} x^{m-j},$$

para $j = 0, 1, \ldots, s-1$, análogamente con el caso de recurrencias de orden r, deducimos la relación

$$\sum_{i=0}^{r} \sum_{j=0}^{s} b_{i,j} x^j A_{n+r-i}(x) - \sum_{i=0}^{r} \sum_{j=0}^{s-1} \sum_{m=j}^{s-1} a_{n+r-i,m-j} x^m = x^s \sum_{k=0}^{\infty} w_{n,k} x^k$$

para $n = 0, 1, \ldots$, introducimos

$$b_i(x) = \sum_{j=0}^{s} b_{i,j} x^j \qquad , \qquad i = 0, 1, \ldots, r,$$

$$C_n(x) = \sum_{m=0}^{s-1} \left\{ \sum_{i=0}^{r} \sum_{j=0}^{m} a_{n+r-i,m-j} b_{i,j} \right\} x^m$$

y

$$W_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} w_{n,k} x^k,$$

esta relación puede ser escrita en la forma

$$b_0(x) A_{n+r}(x) + b_1(x) A_{n+r-1}(x)(x) + \cdots + b_r(x) A_n(x) = C_n(x) + x^s W_n(x), \quad (2.21)$$

para $n = 0, 1, \ldots$
La última es una relación de recurrencia lineal de orden r para las sucesión de funciones generadoras $A_n(x), n = 0, 1, \ldots$ con coeficientes $b_i(x)$ $(i = 0, 1, \ldots, r)$ constantes con respecto de n.

Notemos que las funciones generadoras

$$A_i(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{i,k} x^k, \qquad i = 0, 1, \ldots, r-1 \qquad (2.22)$$

las cuales, de acuerdo con las condiciones iniciales (2.19), son conocidas, constituyen las condiciones iniciales de (2.21). Considerando a x como un parámetro, la relación de recurrencia (2.21) se resuelve exactamente de la misma forma que (2.12). Multiplicamos (2.21) por y^{n+r} y sumando para $n = 0, 1, \ldots$

$$b_0(x)\sum_{n=0}^{\infty} A_{n+r}(x)y^{n+r} + yb_1(x)\sum_{n=0}^{\infty} A_{n+r-1}(x)y^{n+r-1} + \cdots + y^r b_r(x)\sum_{n=0}^{\infty} A_n(x)y^n$$

$$= y^r \sum_{n=0}^{\infty} C_n(x)y^n + y^r x^s \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} w_{n,k}x^k y^n$$

Como

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_{n+s}(x)y^{n+s} = A(x,y) - \sum_{k=0}^{s-1} A_k(x)y^k, \qquad s = \overline{1,r}$$

Introducimos

$$A(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(x)y^n \qquad \text{y} \qquad W_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} w_{n,k}x^k$$

$$\sum_{j=0}^{r-1} b_j(x)y^j\Big(A(x,y) - \sum_{k=0}^{r-j-1} A_k(x)y^k\Big) + y^r b_r(x)A(x,y)$$

$$= y^r \sum_{n=0}^{\infty} C_n(x)y^n + y^r x^s W(x,y)$$

luego

$$A(x,y)\Big(\sum_{i=0}^{r} b_i(x)y^i\Big) - \Big(\sum_{n=0}^{r-1}\sum_{i=0}^{n} A_{n-1}(x)b_i(x)y^n +$$

$$\sum_{m=0}^{s-1}\sum_{j=0}^{m} A^*_{m-j}(y)b^*_j(y)x^m - \sum_{n=0}^{r-1}\sum_{m=0}^{s-1}\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} a_{n-i,m-j}b_{i,j}x^m y^n\Big) = y^r x^s W(x,y)$$

$$\Rightarrow A(x,y)B_{r,s}(x,y) - C(x,y) = y^r x^s W(x,y)$$

con lo que obtenemos la relación

$$A(x,y) = \frac{y^r x^s W(x,y) + C(x,y)}{B_{r,s}(x,y)} \tag{2.23}$$

con

$$B_{r,s}(x,y) = \sum_{i=0}^{r} b_i(x)y^i = \sum_{i=0}^{r}\sum_{j=0}^{s} b_{i,j}x^j y^i$$

$$W(x,y)=\sum_{n=0}^{\infty}W_n(x)y^n=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}w_{n,k}x^ky^n$$

$$C(x,y)=\sum_{n=0}^{r-1}\sum_{i=0}^{n}A_{n-i}(x)b_i(x)y^n+\sum_{m=0}^{s-1}\sum_{j=0}^{m}A^*_{m-j}(y)b^*_j(y)x^m$$
$$-\sum_{n=0}^{r-1}\sum_{m=0}^{s-1}\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}a_{n-i,m-j}b_{i,j}x^my^n$$

con

$$A^*_j(y)=\sum_{n=0}^{\infty}a_{n,j}y^n \qquad j=\overline{0,s-1}$$

funciones generadoras conocidas, de acuerdo con las condiciones iniciales (2.20) y

$$b^*_j(y)=\sum_{i=0}^{r}b_{i,j}u, \qquad j=\overline{0,s}.$$

El siguiente paso es la determinación de la sucesión $a_{n,k}$, $k=0,1,\dots,n=0,1,\dots,$ lo cual requiere de la expansión del lado derecho de (2.23) en potencias de x y de y. Para ello, consideramos a x como parámetro y expandimos la función en potencias de y, luego expandimos la expresión resultante en potencias de x.

Capítulo 3

Funciones generadoras para la enumeración de estructuras discretas

En este capítulo se aplicará el método de solución de recurrencias por medio de funciones generadoras, visto en el capítulo anterior. Primero veremos un ejemplo de una relación de recurrencia en el cual se podrá ver la utilidad de las funciones generadoras y posteriormente aplicaremos el método para la enumeración de algunas estructuras discretas, tales como gráficas conectadas, gráficas par, gráficas de Euler, gráficas $k-$coloreadas y árboles.

Ejemplo
Consideremos una sucesión a_k, $k = 0, 1, \ldots$, cuya función generadora es:

$$A(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k.$$

Además consideremos a la suma

$$s_{1,j} = \sum_{i=0}^{j} a_i \qquad , \qquad j = 0, 1, \ldots$$

$$s_{2,r} = \sum_{j=0}^{r} \sum_{i=0}^{j} a_i = \sum_{j=0}^{r} s_{1,j} \qquad , \qquad r = 0, 1, \ldots$$

De manera general, la suma n-tupla

$$s_{n,k} = \sum_{r=0}^{k} s_{n-1,r} \qquad , \qquad k = 0, 1, \ldots$$

Como

$$s_{n,k} = s_{n,k-1} + s_{n-1,k} \qquad , \qquad k = 1, 2 \ldots, \quad n = 0, 1, \ldots$$

claramente

$$s_{n,k} - s_{n,k-1} = s_{n-1,k} \qquad , \qquad k = 1, 2 \ldots, \quad n = 0, 1, \ldots$$

Multiplicamos esta relación por x^k y luego sumamos para $k = 1, 2, \ldots$

$$\sum_{k=1}^{\infty} s_{n,k} x^k - x \sum_{k=1}^{\infty} s_{n,k-1} x^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} s_{n-1,k} x^k$$

y como $s_{n,0} = s_{n-1,0} = 0$, deducimos para la función generadora

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} s_{n,k} x^k, \quad n = 0, 1, \ldots,$$

la relación de recurrencia lineal de primer orden con coeficientes constantes con respecto de n

$$s_{n,0} + \sum_{k=1}^{\infty} s_{n,k} x^k - x \sum_{k=0}^{\infty} s_{n,k} x^k = s_{n-1,0} + \sum_{k=1}^{\infty} s_{n-1,k} x^k$$
$$S_n(x) - x S_n(x) = S_{n-1}(x)$$

$$(1-x) S_n(x) = S_{n-1}(x), \qquad n = 1, 2, \ldots$$

y condiciones iniciales

$$S_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} s_{0,k} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = A$$

Multiplicándolo por y^n y sumando para $n = 1, 2, \ldots$, obtenemos

$$(1-x) \sum_{n-1}^{\infty} S_n(x) y^n = y \sum_{n=1}^{\infty} S_{n-1}(x) y^{n-1}.$$

Haciendo uso de la condición inicial $S_0(x) = A(x)$, deducimos la función generadora bivariada

$$\begin{aligned}
(1-x)\Big(\sum_{n-1}^{\infty} S_n(x)y^n + A(x)\Big) &= yS(x,y) + A(x)(1-x)\\
(1-x)S(x,y) &= yS(x,y) + A(x)(1-x)\\
(1-x) &= y + \frac{A(x)(1-x)}{S(x,y)}\\
(1-x-y) &= \frac{A(x)(1-x)}{S(x,y)}\\
\Rightarrow S(x,y) &= \frac{(1-x)}{(1-x-y)}
\end{aligned}$$

Considerando que

$$\begin{aligned}
(1-x-y)^{-}1 = ((-y)+(1-x))^{-}1 &= \sum_{n=0}^{\infty}\binom{-1}{n}(-y)^n(1-x)^{-1-n}\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\binom{-1}{n}(-1)^n y^n (1-x)^{-(n+1)} = \sum_{n=0}^{\infty}(1-x)^{-(n+1)}y^n
\end{aligned}$$

expandiendo el lado derecho de la expresión en potencias de y, encontramos

$$S_n(x) = (1-x)^{-n}A(x)$$

Ahora expandimos para potencias de x y como

$$(1-x)^{-n} = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{k}x^k,$$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty} s_{n,k}x^k &= \Big(\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k\Big)\Big(\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{k}x^k\Big)\\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\Big(\sum_{j=0}^{k}\binom{n+j-1}{j}a_{k-j}\Big)x^k\\
\Rightarrow s_{n,k} &= \sum_{j=0}^{k}\binom{n+j-1}{j}a_{k-j}
\end{aligned}$$

□

Resolvamos una instancia con valores. Dada la sucesión

$$a_0 = 1, a_1 = 1, a_2 = 1, a_3 = 3, a_4 = 2, a_5 = 1, \ldots$$

Supongamos que se desea obtener la suma $s_{2,3}$. Primero resolvamos como lo haríamos sin tener ayuda del método de funciones generadoras.

$$s_{2,3} = \sum_{j=0}^{3} s_{1,j}$$

Necesitamos obtener los valores de $s_{1,j}$ para $j = 0, 1, 2, 3$.

$$s_{1,j} = \sum_{i=0}^{j} a_i$$

$$s_{1,0} = a_0 = 1$$
$$s_{1,1} = \sum_{i=0}^{1} a_i = 2$$
$$s_{1,2} = \sum_{i=0}^{2} a_i = 3$$
$$s_{1,3} = \sum_{i=0}^{3} a_i = 6$$

entonces

$$s_{2,3} = \sum_{j=0}^{3} s_{1,j} = 1 + 2 + 3 + 6 = 12$$

Ahora, si hacemos uso de la ecuación que obtuvimos con el método de funciones generadoras considerando que $n = 2$ y $k = 3$:

$$\sum_{j=0}^{3} \binom{2+j-1}{j} a_{3-j} = \binom{1}{0}(3) + \binom{2}{1}(1) + \binom{3}{2}(1) + \binom{4}{3}(1) = 12$$

3.1. Gráficas Conectadas

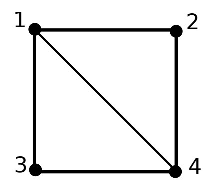
En esta sección primero veremos de cuántas maneras se puede etiquetar una gráfica. Posteriormente mostraremos una relación de recurrencia entre las gráficas etiquetadas y las gráficas etiquetadas conectadas, luego aplicaremos el método de solución de recurrencias para mostrar una relación entre las funciones generadoras de las gráficas etiquetadas y de las gráficas etiquetadas conectadas.

Dada una gráfica G con conjunto de vértices $V = V(G)$ y de aristas E, si una arista $e \in E$ une los puntos u, v, se dice que u es **adyacente** a v y viceversa, además, se dice que e es **incidente** a u y a v.

Consideremos una gráfica G cuyo conjunto de vértices y conjunto de aristas son:

$$V = \{1,2,3,4\}$$
$$E = \{\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{2,4\},\{3,4\}\}$$

entonces su representación gráfica es el siguiente diagrama, en donde los elementos de V son las etiquetas de los vértices de G



¿Cuántas gráficas etiquetadas conformadas por n vértices existen? Sea $G_n(x)$ el polinomio cuyo coeficiente de x^k es el número de gráficas de orden n con k aristas. Ese polinomio es la función generadora de las n-gráficas etiquetadas con cierto número de aristas. Si V es un conjunto de n puntos, y deseamos saber cuántos pares ordenados distintos se pueden elegir, primero de los n puntos elegimos uno, tenemos n opciones, luego elegimos el segundo con $(n-1)$ opciones y dado que es lo mismo elegir (u,v) que (v,u) la cuenta de dichos números es

$$\frac{(n)(n-1)}{2} = \frac{(n)(n-1)}{2}\frac{(n-2)!}{(n-2)!} = \frac{n!}{(n-2)!2!} = \binom{n}{2}$$

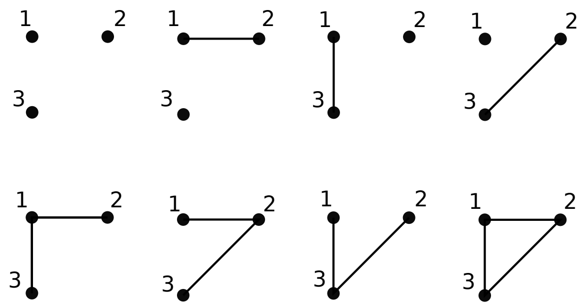
Es decir, hay $\binom{n}{2}$ posibles aristas en nuestra gráfica. Así que el número de n-gráficas con k aristas es $\binom{\binom{n}{2}}{k}$.
Si $m = \binom{n}{2}$, $G_n(x) = \sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}x^k = (1+x)^m$. La expansión de Maclaurin se muestra al final de la sección.

$$G_n(x) = \binom{m}{0}x^0 + \binom{m}{1}x^1 + \binom{m}{2}x^2 + \binom{m}{3}x^3 + \cdots + \binom{m}{m}x^m$$

Los coeficientes de las x^k en $G_n(x)$ son el número de n-gráficas con $1,2,3,4,\ldots$ aristas, luego la suma de los coeficientes es igual al número total de n-gráficas, posible si $x = 1$ en $G_n(x)$.

$$G_n(1) = \binom{m}{0}1^0 + \binom{m}{1}1^1 + \binom{m}{2}1^2 + \binom{m}{3}1^3 + \cdots + \binom{m}{m}1^m \tag{3.1}$$

y como $G_n(x) = (1+x)^m$ entonces queda demostrado que **el número de gráficas etiquetadas de orden n es igual a $G_n = 2^m = 2^{\binom{n}{2}}$.**



Para ejemplificar, tomamos el caso de las 3-gráficas,

$$G_3 = 2^{\binom{3}{2}} = 2^3 = 8$$

A continuación se incluye la expansión de Maclaurin de $f(x) = (1 + x)^m$ empleada para reducir la ecuación 3.1

$$\begin{aligned} f(x) &= (1+x)^m & f(0) &= 1 \\ f'(x) &= m(1+x)^{m-1} & f'(0) &= m \\ f''(x) &= m(m-1)(1+x)^{m-2} & = f''(0) &= m(m-1) \\ f'''(x) &= m(m-1)(m-2)(1+x)^{m-3} & f'''(0) &= m(m-1)(m-2) \end{aligned}$$

$$f(x) = 1 + mx + \frac{m(m-1)x^2}{2!} + \cdots + \frac{m(m-1)\cdots(m-k+1)x^k}{k!}$$

$$f(x) = 1 + \frac{m(m-1)!x}{(m-1)!1!} + \cdots + \frac{m\cdots(m-k+1)(m-k)!x^k}{(m-k)!k!}$$

$$f(x) = \sum_{k=0} \binom{m}{k} x^k$$

Para responder a la pregunta de cuántas maneras podemos etiquetar una gráfica, primero abordaremos algunas definiciones.

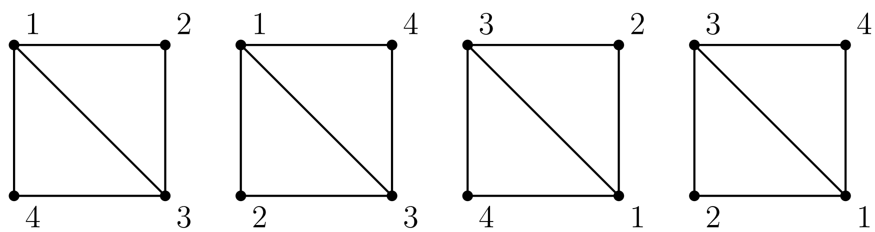
Definición 3.1.1 Un **isomorfismo** α de una gráfica es una transformación 1-1 de $V(G) = V(G_1)$ que preserva las relaciones de adyacencia[1].

[1] Isomorfo, que tiene la misma forma. Del griego $\iota\sigma o$: igual; $\mu o\rho\varphi o\varsigma$: forma.

Si $G = G_1$, entonces α es un automorfismo de G. La colección de todos los automorfismos de G, denotado $\Gamma(G)$, constituye un grupo llamado el **grupo de** G. Los elementos de $\Gamma(G)$ son permutaciones sobre V. Por ejemplo, definimos a la gráfica G con conjunto de vértices V y aristas E de la siguiente manera,

$$G : \left\{ \begin{array}{l} V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}, \\ E = \{\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \{v_3, v_4\}, \{v_4, v_1\}, \{v_1, v_3\}\} \end{array} \right\}$$

G tiene 4 automorfismos, de tal manera que $\Gamma(G)$ contiene las permutaciones: $(v1)(v2)(v3)(v4), (v1)(v3)(v2v4), (v1v3)(v2)(v4), (v1v3)(v2v4)$.



Teorema 3.1.1 Sea $s(G) = |\Gamma(G)|$, el orden del grupo de G, quien denote el número de *simetrías de* G El número de maneras de etiquetar una gráfica de orden n es

$$\ell(G) = \frac{n!}{s(G)} \tag{3.2}$$

Una demostración se puede encontrar en el artículo de Harary y Read titulado "The number of ways to label a graph" (Psychometrika, vol 32, no. 2, pág. 155-156).

Definición 3.1.2 Sea G una gráfica y sean $v_0, v_1, v_2, \ldots, v_n \in E$ una sucesión de vértices de G tales que v_i sea adyacente a v_{i+1} para $i = \overline{0, n-1}$. Tal sucesión junto con las n aristas se conoce como un **paseo de longitud** n.

Si las líneas $\{v_i, v_{i+1}\}$ para $i = \overline{0, n}$ son distintas entonces el paseo se llamará **camino**. Si todos los puntos son distintos y por lo tanto las aristas, entonces lo llamaremos **ruta**.

Definición 3.1.3 Una **gráfica conectada** es aquella en la que se cumple que para todo par de vértices existe una ruta por la que se puede llegar de un vértice a otro.

El número de gráficas etiquetadas conectadas de orden 4 puede ser calculado por fuerza bruta si aplicamos la ecuación (3.2) a cada una de las gráficas de la figura (3.1).

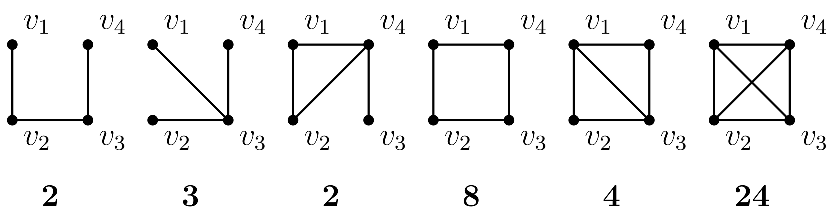
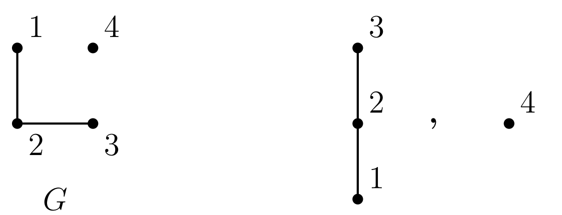


Figura 3.1: *Las gráficas etiquetadas conectadas de orden* 4 *y la cardinalidad de sus grupos de automorfismos*

Se sigue que el número de gráficas etiquetadas conectadas de orden 4 es:

$$
\begin{aligned}
&=\frac{4!}{2}+\frac{4!}{3}+\frac{4!}{2}+\frac{4!}{8}+\frac{4!}{4}+\frac{4!}{24}\\
&=12+8+12+3+6+1\\
&=42
\end{aligned}
$$

Denotaremos al número de gráficas etiquetadas conectadas de orden n como C_n. Una subgráfica H de una gráfica G tiene $V(H) \subset V(G)$ y $E(H) \subset E(G)$. Un componente de una gráfica es una subgráfica máxima conectada.



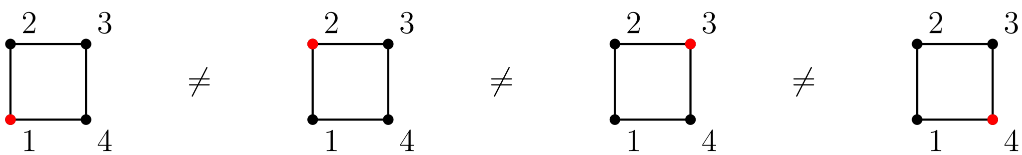
Componentes de G

Una gráfica con raíz tiene a uno de sus puntos, llamado la raíz, distinguido de los demás. 2 gráficas con raíz son isomorfas si existe una función $1-1$ del conjunto de puntos de una gráfica sobre la otra tal que preserve adyacencia y las raíces.

Teorema 3.1.2 El número C_n de las gráficas conectadas etiquetadas cumple que

$$
\begin{aligned}
C_n =& 2^{\binom{n}{2}} - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} k\binom{n}{2} 2^{\binom{n-k}{2}} C_k\\
C_n =& G_n - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} k\binom{n}{2} G_{n-k} C_k
\end{aligned}
$$

Prueba. Para probar el teorema (3.1.2) observamos que se obtiene una gráfica etiquetada con raíz distinta al elegir como raíz de una gráfica etiquetada a cada uno de sus puntos.



Luego, el número de gráficas etiquetadas con raíz es nG_n. Si tomamos el número de componentes de tamaño k por $\binom{n}{k}$, ya que se puede elegir cualquier conjunto de k vértices, k veces por la raíz, por el número de gráficas no necesariamente conexas. Entonces el número de gráficas etiquetadas con raíz ubicada en un componente de k puntos es

$$kC_k\binom{n}{k}G_{n-k}$$

Si sumamos desde $k = 1$ hasta $k = n$ llegamos al número de gráficas etiquetadas con raíz:

$$\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}C_kG_{n-k}.$$

Por lo tanto el número de gráficas etiquetadas conectadas C_n satisface ser el número total de gráficas etiquetadas de orden n menos el número de gráficas con más de un componente, eliminando de la cuenta las n veces que se cuenta la posible raíz en n vértices de la componente, i.e.

$$C_n = 2^{\binom{n}{2}} - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} k\binom{n}{k}2^{\binom{n-k}{2}}C_k$$

$\square$

Por la definición de la multiplicación de dos familias exponenciales y considerando a $C(x) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k\frac{x^k}{k!}$ entonces,

$$\frac{C(x)C(x)}{2}$$

es la función generadora exponencial de las gráficas etiquetadas de dos componentes, y se sigue que

$$\frac{C(x)^n}{n!}$$

es la función generadora exponencial de las gráficas etiquetadas de n componentes. Sea $G(x)$ la función generadora de las gráficas etiquetadas entonces tenemos que las funciones generadoras de las gráficas etiquetadas conectadas y no necesariamente conectadas se relacionan de la siguiente manera.

$$\begin{aligned} G(x) =& \sum_{k=1}^{\infty} C(x)^n/n! \\ G(x) =& \sum_{k=0}^{\infty} C(x)^n/n! - 1 \\ G(x) =& e^{C(x)} - 1 \end{aligned}$$

$$1 + G(x) = e^{C(x)} \tag{3.3}$$

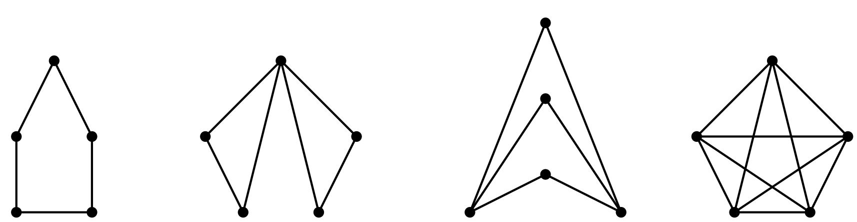
Corolario 3.1.1 Si se conoce la función generadora exponencial de cierta clase de gráficas, entonces la función generadora exponencial de las gráficas conectadas correspondientes será el logaritmo de la primera serie.

3.2. Gráficas de Euler

El objetivo de esta sección es derivar la función generadora para las gráficas etiquetadas de Euler. Primero veremos las definiciones de gráficas par y gráficas de Euler, posteriormente veremos en el teorema 3.2.1 que el número de gráficas par etiquetadas de orden n es igual al número de gráficas etiquetadas de orden $n-1$, utilizaremos esta relación para obtener la función generadora del número de gráficas etiquetadas de Euler. Por último calcularemos los primeros términos de la función generadora exponencial de las gráficas etiquetadas de Euler.

Definición 3.2.1 El grado de un punto v en una gráfica G es el número de líneas incidentes a v. Una **gráfica par** es aquella que cumple que todos sus vértices tienen grado par.

Definición 3.2.2 Una **gráfica de Euler** o gráfica Euleriana es conectada y par.



10 **8** **12** **120**

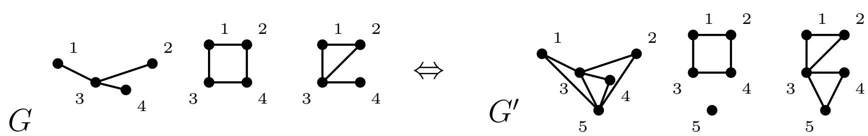
Sea W_n el número de gráficas par etiquetadas de orden n.

Teorema 3.2.1 El número de gráficas par etiquetadas de orden n es igual al número de gráficas etiquetadas de orden $n-1$:

$$W_n = G_{n-1} = 2^{\binom{n-1}{2}}$$

Prueba. Para esta demostración establecemos una relación $1-1$ para estos dos tipos de gráfica. Consideremos cualquier gráfica etiquetada G, de orden $n-1$.
G tiene un número par de nodos impares. Agregamos a G un nuevo punto v, especificando que v es adyacente a todos los nodos impares, a la nueva gráfica la denotamos por $G\prime$.
$G\prime$ es par, etiquetada y de orden n. Ahora mostraremos la biyección, es uno a uno dado que a cada gráfica G de orden $n-1$ le corresponde una y solo una gráfica par de orden n al agregar v y hacerlo adyacente a los nodos de grado impar. Y en el sentido inverso, cada gráfica par etiquetada de orden n puede ser obtenida a partir de alguna gráfica etiquetada de orden $(n-1)$ al eliminar al vértice adecuado. □

Las siguientes gráficas G tienen algunos vértices par y algunos impar, siguiendo el algoritmo anterior se obtienen gráficas par en su totalidad.



Ahora usaremos funciones generadoras para obtener una fórmula para el número de gráficas Eulerianas etiquetadas.

Sea $W(x)$ la función generadora exponencial de las gráficas par etiquetadas, tal que

$$W(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{\binom{n-1}{2}} \frac{x^n}{n!} \tag{3.4}$$

Luego, sea U_n el número de gráficas Eulerianas etiquetadas de orden n tal que

$$U(x) = \sum_{n=1}^{\infty} U_n \frac{x^n}{n!} \tag{3.5}$$

sea su función exponencial.

Proposición 3.2.1 La función generadora exponencial $U(x)$ de las gráficas etiquetadas de Euler satisface que

$$U(x) = \log(W(x) + 1) \tag{3.6}$$

tal que

$$U_n = 2^{\binom{n-1}{2}} - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n-1} j\binom{n}{j}2^{\binom{n-j-1}{2}}U_j \tag{3.7}$$

A continuación mostraremos una deducción de la función (3.6). $W(x)$ es la función generadora de las gráficas etiquetadas par y $U(x)$ es la función generadora de las gráficas etiquetadas par conectadas, luego, por la relación (3.3) sabemos que

$$\begin{aligned} 1 + W(x) =& e^{U(x)} \\ \log(1 + W(x)) =& U(x) \end{aligned}$$

Deducción de (3.7).

$$\begin{aligned} W_n =& 2^{\binom{n-1}{2}} \\ \sum_{n=0}^{\infty} 2^{\binom{n-1}{2}} x^n =& e^{\sum_{n=1} U_n x^n} \end{aligned}$$

Y por el teorema (3.1.2),

$$U_n = 2^{\binom{n-1}{2}} - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n-1} j\binom{n}{2}2^{\binom{n-j-1}{2}}U_k$$

Ahora, calcularemos los primeros términos de $U(x)$, es decir, la función generadora de las gráficas etiquetadas de Euler.

$$
\begin{aligned}
U_0 &= 1 \\
U_1 &= 1 \\
U_2 &= 2^0 - \frac{1}{2}(1)\binom{2}{1}2^0(1) = 1 - 1 = 0 \\
U_3 &= 2^1 - \frac{1}{3}\sum_{j=1}^{2} j\binom{3}{j}2^{\binom{2-j}{2}}U_j \\
&= 2 - \frac{1}{3}[(1)\binom{3}{1}(2^0)(1) + \cdots + U_2] \\
&= 2 - \frac{1}{3}(3) \\
&= 1 \\
U_4 &= 2^3 - \frac{1}{4}[(1)\binom{4}{1}(2^1)(1) + (3)\binom{4}{3}(2^0)(1)] \\
&= 8 - \frac{1}{4}(8 + 12) \\
&= 8 - 5 = 3 \\
U_5 &= 2^6\frac{1}{5}[(1)\binom{5}{1}(2^3)(1) + (3)\binom{5}{3}(2^1)(1) + (4)\binom{5}{4}(2^0)(3)] \\
&= 2^6 - (26) = 38
\end{aligned}
$$

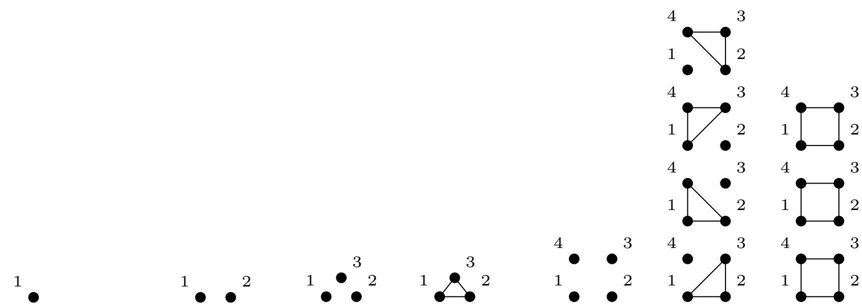
$$
U(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{3x^4}{4!} + \frac{38x^5}{5!} + \cdots \tag{3.8}
$$

3.3. Gráficas Par

En esta sección primero veremos el caso particular de las gráficas par de orden n con k aristas. El teorema 3.3.1 determina la función generadora de las (n,k)-gráficas par. La sección concluye con un corolario que establece el número total de gráficas par de orden n y un ejemplo en el que se obtiene el número de $(5,k)$-gráficas par.

Teorema 3.3.1 El polinomio $W_n(x)$, que tiene como coeficiente de x^k el número de gráficas etiquetadas par con n vértices y k aristas, está dado por

$$
W_n(x) = \frac{1}{2^n}(1+x)^{\binom{n}{2}}\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{i(n-i)} \tag{3.9}
$$



$w_1(x) = 1 \quad w_2(x) = 1 \quad w_3(x) = 1 + x^3 \quad w_4(x) = 1 + 4x^3 + 3x^4$

Figura 3.2: En la función $W_n(x)$ de las gráficas par, n representa el número de vértices en la gráfica, el exponente de cada x es el número de aristas en la gráfica y el coeficiente es el número de gráficas diferentes con dichas características.

Prueba. Para una n pequeña, sabemos que

$$W_1(x) = W_2(x) = 1 \qquad W_3(x) = 1 + x^3 \qquad W_4(x) = 1 + 4x^3 + 3x^4$$

Ver figura (3.2). Sea L el conjunto de todas las gráficas etiquetadas de orden n con k aristas. Consideremos cualquier gráfica $G \in L$ y de manera aleatoria multiplicamos las etiquetas de 1 a n por $+1$ o por -1. Cada vértice quedará *positivo* o *negativo* dependiendo del signo de su etiqueta. Luego, los números $+1$ ó -1 son asignados a cada arista dependiendo del producto de las etiquetas. El signo de G, denotado por $\sigma(G)$, es el producto de los signos de las aristas. Existen 2^n maneras de asignar los signos a los vértices de la gráfica. Por otro lado, supongamos que les fueron asignados a los n enteros que son las etiquetas, entonces existen $\binom{\binom{n}{2}}{k}$diferentes gráficas con k aristas y vértices con signo determinado por la asignación dada de los signos a las etiquetas. Como $\sigma(G)$ es el signo del producto de números positivos y negativos asignado a los puntos adyacentes, entonces

$$\sigma(G) = (-1)^a \tag{3.10}$$

donde a es la suma de los grados de los puntos negativos.

$$\text{si} \begin{cases} a \text{ es par} & \text{cada vértice negativo es adyacente con otro negativo} \\ & \Rightarrow \sigma(G) = + \\ a \text{ es impar} & \text{algún vértice negativo es adyacente con un positivo} \\ & \Rightarrow \sigma(G) = - \end{cases}$$

Por otro lado

$$\sigma(G) = (-1)^b \tag{3.11}$$

en donde b es el número de líneas negativas de G, es decir, lineas que unen un vértice $(+)$ con un vértice $(-)$. Ahora consideremos a $\sum \sigma(G)$ sumando sobre todas las gráficas etiquetadas en L y sobre el conjunto S de 2^n posibles asignaciones de $+1$ ó -1 a las etiquetas de los vértices. Se sigue de (3.10) y de (3.11) que esta suma puede escribirse de dos maneras

$$\sum_{G\in L}\{\sum_{S}(-1)^a\} = \sum_{S}\{\sum_{G\in L}(-1)^b\} \tag{3.12}$$

Primero, tomando el lado izquierdo de (3.12) de G, si G es par, a es par, sin importar las asignaciones de los signos en S, por lo tanto $\sum(-1)^a = 2^n$, $|S| = 2^n$ si a no es par por lo menos algún vértice v en G tiene grado impar. El número de asignaciones en S para las cuales v es positivo y para las cuales es negativo es el mismo, por lo tanto contribuyen cantidades opuestas a $\sum(-1)^a$, por lo tanto el lado izquierdo de (3.12) es 2^n **veces el número de gráficas par en** L. Para el lado derecho consideremos una asignación en S donde i vértices son positivos y $m = n - i$ son negativos, existen $\binom{n}{i}$ de ellas. Si hay j líneas incidentes a un punto positivo y uno negativo, esto puede ocurrir en $\binom{im}{j}$ diferentes maneras. Las $k - j$ líneas restantes pueden ocurrir en $\binom{\binom{i}{2}+\binom{m}{2}}{k-j}$ formas diferentes. Sumando desde $j = 0$ hasta k, obtenemos

$$\sum_{j=0}^{k}(-1)^j\binom{im}{j}\binom{i(i-1)/2 + m(m-1)/2}{k-j}$$

La contribución al lado derecho de (3.12) para cada asignación de i y m dadas, es el coeficiente de x^k en

$$(1-x)^{im}(1+x)^{\frac{i(i-1)}{2}+\frac{m(m-1)}{2}} \tag{3.13}$$

$$f = (1+x)^{im} = \sum_{j=0}^{k}(-1)^j\binom{im}{j}$$

$$g = (1-x)^{\binom{\binom{i}{2}+\binom{m}{2}}{j}}x^j$$

$$f \longleftrightarrow \left\{(-1)^j\binom{im}{j}\right\}_{i=0}^{n}$$

$$g \longleftrightarrow \left\{\binom{\binom{i}{2}+\binom{m}{2}}{j}\right\}_{i=0}^{n}$$

$$fg \longleftrightarrow \left\{\sum_{j=0}^{k}(-1)^j\binom{im}{j}\binom{\binom{i}{2}+\binom{m}{2}}{k-j}\right\}_{i=0}^{\infty}$$

Considerando que

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 0}\binom{c}{n}z^n =&(1+z)^c\\ \sum_{n\geq 0}(-1)^n\binom{c}{n}z^n =&\sum_{n\geq 0}\binom{c}{n}(-z)^n = (1-(-z))^c = (1-z)^c\end{aligned}$$

luego,

$$fg = (1-x)^{im}(1+x)^{\binom{i}{2}+\binom{m}{2}}$$

por lo tanto el lado derecho de (3.12) es el coeficiente de x^k en

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(1-x)^{im}(1+x)^{i(i-1)/2+m(m-1)/2} \tag{3.14}$$

y este coeficiente es 2^n veces el número de gráficas par en L, observando que

$$\binom{i}{2}+\binom{m}{2}=\binom{n}{2}-i(n-i)$$

llegamos al resultado deseado que el número de gráficas par es el coeficiente de x^k en el lado derecho de la ecuación del teorema 3.3.1,

$$\begin{aligned}2^nW_n(x) =&\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(1-x)^{j(n-j)}(1+x)^{\binom{n}{2}-j(n-j)}\\ W_n(x) =&\frac{1}{2^n}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(1+x)^{\binom{n}{2}}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{j(n-j)}\\ W_n(x) =&\frac{1}{2^n}(1+x)^{\binom{n}{2}}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{j(n-j)}\end{aligned}$$

□

Corolario 3.3.1 El número total de gráficas par etiquetadas se obtiene al asignar el valor de $x=1$ a la ecuación del teorema 3.3.1, es decir, $W_n(1)$.

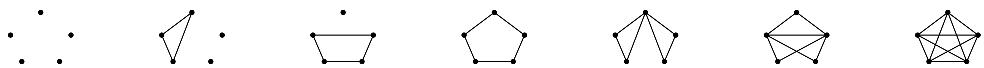


Figura 3.3: Las gráficas par de orden 5 y sus números de simetría.

$$\begin{aligned}
W_n(1) =& \frac{1}{2^n} 2^{\binom{n}{2}} \sum_{j=0}^{n} (2)^{j-(n-j)} \\
=& \frac{1}{2^n} 2^{\frac{n(n-1)}{2}} \\
=& 2^{\frac{n(n-1)}{2} - \frac{2n}{n}} \\
=& 2^{\frac{n^2-3n}{2}} \\
=& 2^{\binom{n-1}{2}}
\end{aligned}$$

A continuación obtendremos los valores de la función generadora de las gráficas par de orden 5 con k aristas con la definición del teorema 3.3.1.

$$W_5(x) = 1 + 10x^3 + 15x^4 + 12x^5 + 15x^6 + 10x^7 + x^{10},$$

es decir, existe una $(5,0)$-gráfica, ninguna $(5,1)$-gráfica, diez $(5,3)$-gráficas, etc. Por el corolario 3.3.1 sabemos que existen $1 + 10 + 15 + 12 + 15 + 10 + 1 = 64$ gráficas par, para obtenerlas basta con reetiquetar las 7 gráficas de la figura (3.3).

3.4. Gráficas k-coloreadas

En esta sección mostraremos una fórmula cerrada del número de gráficas etiquetadas k-coloreadas de orden n. Posteriormente se verá la función generadora de la fórmula con la que podremos obtener un resultado más particular, el número de gráficas k-coloreadas de orden n con q aristas. Concluimos la sección con un ejemplo en el que enumeramos las coloraciones de una gráfica de orden 4 con 3 colores.

Definición 3.4.1 Sea A un conjunto. Una **relación binaria** R definida sobre A es una regla que nos indica si dados dos elementos a y b pertenecientes a A están o no relacionados.

Si R es una relación definida sobre A y $a, b \in A$ están relacionados, entonces escribimos aRb que se lee "a se relaciona con b".

Definición 3.4.2 Sea A un conjunto. Una **relación de equivalencia** definida en A es una relación binaria de A que cumple las tres propiedades siguientes:

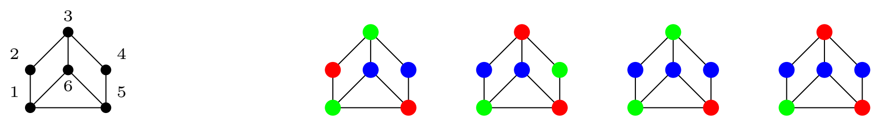


Figura 3.4: Las cuatro gráficas 3-coloreadas posibles.

i) Reflexiva $\quad aRa \quad \forall a \in A$

ii) Simétrica $\quad aRb \Leftrightarrow bRa \quad \forall a, b \in A$

iii) Transitiva $\quad aRb, bRc \Rightarrow aRc \quad \forall a, b, c \in A$

Definición 3.4.3 Sean A un conjunto y R una relación de equivalencia sobre A. Para cada $a \in A$ se llama **clase de equivalencia de** a, y se denota por $[a]$, al siguiente conjunto:

$$[a] = \{b \in A | bRa\}$$

Como se observa, $[a]$ es un subconjunto no vacío de A ya que $a \in [a]$.

Definición 3.4.4 Sean G una gráfica de orden n y R una relación de equivalencia sobre el conjunto de vértices de G. Se dice que G es una **gráfica coloreada** si ningún par de vértices pertenecientes a la misma clase de equivalencia son adyacentes.

Definición 3.4.5 Una gráfica k-coloreada es una gráfica coloreada con k clases de equivalencia.

Se dice que dos gráficas k-coloreadas son isomorfas si existe una biyección entre sus conjuntos de vértices preservando adyacencia y coloración. Una gráfica puede colorearse de varias formas, por ejemplo, las cuatro gráficas 3-coloreadas posibles de la gráfica de orden 6 que se muestran en la figura (3.4).

A continuación mostraremos una fórmula para el número de gráficas etiquetadas k-coloreadas de orden n, siguiendo con la demostración de Read [R2], que es la generalización un resultado de Gilbert [g2].

Sean $p_1, \ldots, p_k$ enteros positivos que formen una partición ordenada de n, tal que

$$\sum_{i=1}^{k} p_i = n \tag{3.15}$$

tomando $\{n\}$ como una solución arbitraria para la ecuación (3.15) y utilizando el coeficiente multinomial, la fórmula de Read se enuncia a continuación

Teorema 3.4.1 El número $\chi_{n,k}$ de gráficas $k-$coloreadas etiquetadas de orden n es

$$\chi_{n,k} = \frac{1}{k!}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!}{p_1!p_2!\cdots p_k}2^{(n^2-\sum p_i^2)/2} \tag{3.16}$$

Prueba. Notemos que el número de gráficas k-coloreadas etiquetadas de orden n en las cuales los colores tienen identidades fijas es $k!\chi_{n,k}$ ya que dado el conjunto de las identidades de los colores, si a cada clase de equivalencia le es asignada una identidad entonces tendremos $k!$ formas de asignarlos. Por tanto ahora consideremos los k colores fijos. Cada solución $\{n\}$ para (3.15) determina una k-partición ordenada de n, y así buscamos el número de maneras en que las etiquetas pueden ser seleccionadas en los vértices del coeficiente multinomial.

$$\binom{n}{p_1, p_2, \ldots, p_k}$$

Luego existen

$$\binom{n}{2} - \sum_{i=1}^{k}\binom{p_i}{2}$$

pares de vértices de diferentes colores. Como cada uno de estos pares de puntos pueden ser o no adyacentes entonces elevamos 2 a la $(\binom{n}{2} - \sum_{i=1}^{k}\binom{p_i}{2})$,

$$\begin{aligned}
2^{\binom{n}{2}-\sum_{i=1}^{k}\binom{p_i}{2}} &= 2^{\frac{n(n-1)}{2}-\frac{\sum p_i^2 - n}{2}} \\
&= 2^{\frac{n^2-n-\sum p_i^2+n}{2}} \\
&= 2^{(n^2-\sum p_i^2)/2}
\end{aligned}$$

Usamos (3.15) para obtener el número total de gráficas con p_i puntos de color i, precisamente la expansión de la ecuación (3.16) del teorema, bajo la operación suma:

$$\binom{n}{p_1, p_2, \ldots, p_k}2^{(n^2-\sum p_i^2)/2}.$$

Uniendo todo, sumamos sobre todas las soluciones de $\{n\}$ de (3.15), obtenemos $k!\chi_{n,k}$ por lo que basta dividir todo entre $k!$. Descomponiendo la ecuación 3.16 podemos ver como trabaja,

$$\chi_{n,k} = \frac{1}{k!}\sum_{n}\binom{n}{p_1!p_2!\cdots p_k}2^{(n^2-\sum p_i^2)/2}$$

$\frac{1}{k!}$ Elimina las $k!$ formas de fijar las identidades de los colores.

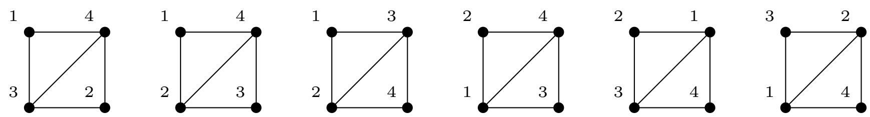


Figura 3.5: Las seis formas de asignar las etiquetas a la gráfica G

$\sum_n$ Suma para todas las posibles particiones tales que $\sum_{i=1}^{k} p_i = n$.

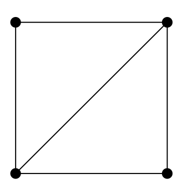
$\binom{n}{p_1,p_2,\ldots,p_k}$ Dicta el número de posibles asignaciones de las etiquetas a los vértices.

$2^{(n^2-\sum p_i^2)/2}$ Dicta el número de posibles aristas incidentes a puntos de diferentes colores.

Por el método de funciones generadoras sabemos que la función generadora de las gráficas etiquetadas k-coloreadas de orden n con q aristas es

$$\chi_{n,k}(x) = \frac{1}{k!}\sum_{\{n\}}\binom{n}{p_1,p_2,\ldots,p_k}(1+x)^{(n^2-\sum p_i^2)/2} \tag{3.17}$$

En donde el coeficiente de x^q es el número de gráficas etiquetadas de orden n k-coloreadas con q aristas. A continuación mostraremos un ejemplo en el que enumeraremos las 3-coloraciones de la gráfica G considerando todas las posibles asignaciones de sus etiquetas.

$G =$ 

En la figura (3.5) se muestran todas las formas de asignar las etiquetas a G.
Las tres particiones de los vértices con respecto a los 3 colores posibles son:

$$\{n\} = \left\{\begin{array}{ccc} 2, & 1, & 1 \\ 1, & 2, & 1 \\ 1, & 1, & 2 \end{array}\right\}$$

La suma de las p_i^2 es la misma en los tres casos: $\sum p_i^2 = 2^2 + 1^2 + 1^2 = 6$

$$\binom{n}{p_1,p_2,\ldots,p_k} = \binom{4}{2,1,1} = \frac{4!}{2!1!1!} = 12$$

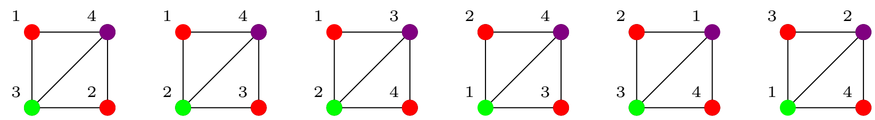


Figura 3.6: Las seis coloraciones etiquetadas de G

Procedemos a calcular las 3-coloraciones de las gráficas de orden 4 $\chi_{4,3}$:

$$\chi_{n,k}(x) = \frac{1}{k!}\sum_{\{n\}}\binom{n}{p_1,p_2,\ldots,p_k}(1+x)^{(n^2-\sum p_i^2)/2}$$

$$\begin{aligned}\chi_{4,3}(x) =& \frac{1}{3!}\left(\frac{4!}{2!1!1!}(1+x)^{(4^2-6)/2} + \frac{4!}{1!2!1!}(1+x)^{(4^2-6)/2} + \frac{4!}{1!1!2!}(1+x)^{(4^2-6)/2}\right)\\ =& \frac{1}{6}\left(12(1+x)^5 + 12(1+x)^5 + 12(1+x)^5\right)\\ =& 6(1+x)^5\\ =& 6\left(x^5+5x^4+10x^3+10x^2+5x+1\right)\\ =& \left(6x^5+30x^4+60x^3+60x^2+30x+6\right)\end{aligned}$$

Y como nos interesa el caso de $q=5$, es decir cinco aristas, revisamos $[x^5]\chi_{4,3}(x) = 6$. Considerando que para dicha gráfica hay seis maneras de asignar las etiquetas entonces sabemos que para cada uno de los seis etiquetados de G, existe solamente una 3-coloración posible, ver la figura (3.6).

3.5. Árboles

En esta sección primero presentaremos la fórmula cerrada del número de árboles de orden n, en el teorema 3.5.1. Existen muchas formas de probar este teorema, nosotros mostraremos la prueba que dio George Pólya ya que utiliza funciones generadoras para realizarla.

Definición 3.5.1 Sea G una gráfica. Un **ciclo** de G es un camino de longitud n en el cual $v_0 = v_n$.

Definición 3.5.2 Un **árbol** es una gráfica conectada sin ciclos.

Se dice que un árbol es no trivial si tiene al menos dos hojas o vértices de grado 1. Un árbol cumple que cualquier par de vértices está conectado por exactamente un camino.

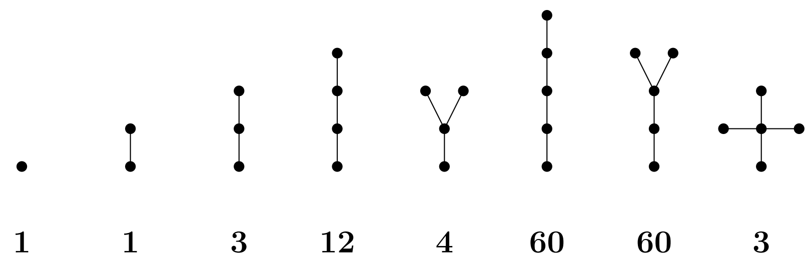


Figura 3.7: Todos los árboles de 1 a 5 vértices y el número de formas de etiquetarlos.

Si T es un árbol con n vértices y q aristas entonces $q = n - 1$. Todos los árboles compuestos por 1 a 5 vértices y el números de formas en que pueden ser etiquetados se muestran en la figura (3.7).

Podemos ver que el número t_n de árboles de tamaño n ya etiquetados es $1, 1, 3, 16, 125, \ldots$ para $n = 1, 2, \ldots$ respectivamente. A partir de estos valores muchos autores han conjeturado correctamente que la fórmula de enumeración está dada por la siguiente ecuación:

Teorema 3.5.1 El número t_n de árboles etiquetados de orden n es

$$t_n = n^{n-2} \tag{3.18}$$

Este teorema ha sido probado por varios autores con métodos muy diversos; por ejemplo, Arthur Cayley propuso una correspondencia entre árboles etiquetados y funciones de un conjunto de $(n-2)$ objetos hacia un conjunto de n objetos. Por otro lado, Heinz Prüfer obtuvo una biyección entre árboles etiquetados de orden n y las $(n-2)$-tuplas $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-2})$ donde a_k es un entero de 1 a n con remplazo permitido. A continuación estudiaremos la prueba de George Pólya ya que para ello emplea funciones generadoras.

Prueba. El número de árboles etiquetados de orden n con raíz es nt_n, la función generadora exponencial para tales árboles es

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} nt_n \frac{x^n}{n!} \tag{3.19}$$

Pólya encontró una ecuación funcional para y y luego aplicó la inversión de Lagrange para determinar t_n. A continuación derivaremos esa ecuación funcional.

Del lema fundamental del conteo etiquetado, $y^j/j!$ es la función generadora exponencial para los j-conjuntos de los árboles etiquetados con raíz. Estos j-conjuntos corresponden precisamente a los árboles etiquetados con raíz para los cuales la raíz

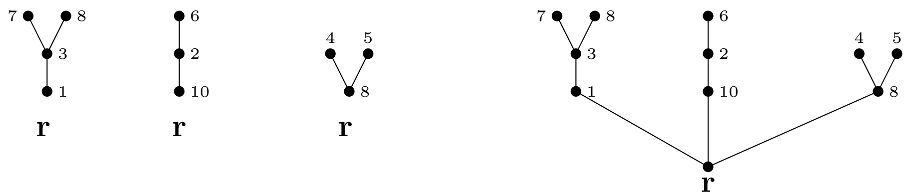


Figura 3.8: 3-conjunto de árboles con raíz y árbol con raíz de grado 3.

tiene grado j pero no tiene etiqueta, es decir, esta biyección se obtiene de primero agregar un vértice nuevo a cada j-conjunto y luego conectar a cada una de las raíces originales. Ver la figura (3.8)

La multiplicación por x introduce una etiqueta y se suma a la cuenta de los vértices. Entonces $xy^j/j!$ enumera los árboles etiquetados con raíz donde la raíz tiene grado j, de donde obtenemos,

$$y = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{xy^j}{j!} \tag{3.20}$$

Por lo tanto llegamos a la ecuación

$$y = xe^y \Leftrightarrow x = ye^{-y} \tag{3.21}$$

La fórmula de inversión de Lagrange dice que si $\Phi(y)$ es analítica en una vecindad de $\gamma = 0$ con $\Phi(0) = 0$, entonces la ecuación

$$x = y(\Phi(y)) \tag{3.22}$$

se resuelve de manera única por la función generadora

$$y = \sum_{k=1}^{\infty} C_k x^k \tag{3.23}$$

cuyos coeficientes son

$$C_k = \left(\frac{1}{k!}\right) \left\{ \left(\frac{d}{dy}\right)^{k-1} \Big(\Phi(y)\Big)^k \right\}_{y=0} \tag{3.24}$$

Aplicamos la fómula de inversión de Lagrange a (3.21) donde $\Phi(y) = e^y$,

$$x = \frac{y}{e^y} \Rightarrow y = \sum_{k=1}^{\infty} C_k x^k \qquad \text{donde } C_k = \frac{1}{k!}\left\{\left(\frac{d}{dy}\right)^{k-1}\left(e^y\right)^k\right\}_{y=0}$$

$$\left(\frac{d}{dy}\right)^{k-1}\left(e^y\right)^k = \left(\frac{d}{dy}\right)^{k-1} e^{ky} = \left(\frac{d}{dy}\right)^{k-2} k e^{ky} = k^{k-1}e^{ky}$$

$$C_k = \frac{k^{k-1}}{k!}e^{ky} \qquad \text{con} \qquad y = 0 \Rightarrow C_k = \frac{k^{(k-1)}}{k!}$$

Por lo tanto,

$$y = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^(k-1)}{k!}x^k \tag{3.25}$$

Confrontando esto con (3.19) queda:

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} nt_n x^n/n! \Leftrightarrow y = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{k-1}}{k!}x^k \tag{3.26}$$

Por último, únicamente cambiamos el índice de la suma por practicidad,

$$\sum_{n=1}^{\infty} nt_n \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n-1}}{n!}x^n$$
$$nt_n = n^{(n-1)}$$
$$t_n = n^{(n-2)}$$

□

3.6. Permutaciones y particiones

En esta sección estudiaremos problemas de enumeración de permutaciones y particiones en términos de cartas, manos y barajas, objetos que definiremos a continuación y nos ayudarán a entender de manera muy simple dichos problemas de enumeración. Después de definir los objetos de cartas manos y barajas, utilizaremos estos conceptos para la demostración del teorema fundamental de la enumeración etiquetada, teorema 3.6.1. Por último aplicaremos la teoría para la enumeración de permutaciones y particiones.

Definición 3.6.1 Una **carta** $c(S,p)$ es un par ordenado en donde S es un conjunto de números enteros que serán asignados como etiquetas a los nodos de la estructura y figura $p \in P$, donde P es el conjunto de todas las configuraciones posibles para una estructura conectada, p tiene tamaño n donde $n = |S|$. El *peso* de una carta es igual a $\omega(c) = |S|$.
Dada una carta con peso $\omega(c) = n$ y *conjunto etiqueta* $S = [n] = \{1, 2, \ldots, n\}$, entonces decimos que dicha carta es estándar.

Definición 3.6.2 Una **mano** H es un conjunto de cartas cuyos conjuntos etiqueta S forman una partición del conjunto $[n]$, para algún n. (I.e. los conjuntos etiqueta de las cartas en H son disjuntos por pares, no vacíos y su unión es $[n]$). El *peso* de una mano es igual a $\sum_{i=1}^{m} \omega(c_i) = n$, donde m es el número de cartas en la mano.

Definición 3.6.3 El **reetiquetado** consiste en cambiar el conjunto etiqueta de una carta $c(S,p)$, por lo tanto únicamente está definido para un nuevo conjunto de etiquetas S' tal que $|S'| = |S|$. Si reetiquetamos a $c(S,p)$ con una carta $c(S',p)$ se dice que es un reetiquetado estándar si $S' = [|S|]$.

Definición 3.6.4 Una **baraja** D es un conjunto finito de cartas estándar con pesos iguales y figuras diferentes. El peso del baraja es el peso común de las cartas.

Definición 3.6.5 Una **familia exponencial** F es una colección de barajas $D_1, D_2, D_3, \ldots$ donde la baraja D_n tiene peso n. d_n es el número de cartas en D_n.

Para una familia exponencial, definimos a la función generadora de la sucesión $\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$ como la *función enumeradora de barajas de la familia*,

$$D(x) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n \frac{x^n}{n!}.$$

Dada una familia exponencial F, para cada $n \geq 0$ y $k \geq 1$, sea $h(n,k)$ el número de manos H de peso n y que consisten de k cartas, donde cada carta en la mano sea una carta reetiquetada de alguna baraja de F. Está permitido tomar de una baraja varias copias de una carta siempre y cuando sea reetiquetada con diferentes conjuntos etiqueta.
Si $h(n,k)$ es el número de manos H de peso n que tienen exactamente k cartas, introducimos la función generadora

$$H(x,y) = \sum_{n,k \geq 0} h(n,k) \frac{x^n}{n!} y^k$$

a la que llamaremos la función enumeradora de manos de la familia. Cabe resaltar que esta función de 2 variables es de tipo *mixto*, para y es una función generadora

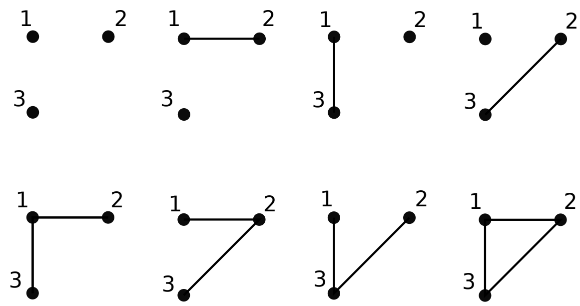


Figura 3.9: *Todas las* 3*-gráficas etiquetadas.*

ordinaria mientras que para x es es exponencial. $h(n) = \sum_k h(n,k)$ es el número de manos de peso n sin importar de cuantas cartas consten y escribimos $H(x) \overset{fge}{\longleftrightarrow} \{h(n)\}$, en lugar de $H(x,1) \overset{fge}{\longleftrightarrow} \{h(n)\}$.

A continuación mostraremos un par de ejemplos de familias exponenciales.

Gráficas no dirigidas

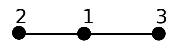
Primero la familia de todas las gráficas no dirigidas con vértices etiquetados. La denominaremos F_1.

Una gráfica G de orden n consta de un conjunto finito no vacío $V = V(G)$ con n puntos llamados vértices y de un conjunto E con parejas de puntos distintos entre sí tales que $e = (u,v) \in E$ donde $u, v \in V$, se denomina arista a cualquier $e \in E$. Una gráfica etiquetada es aquella que tiene asociado a cada vértice un entero positivo. Los enteros asignados son todos diferentes. Se dice que la n-gráfica G (de orden n) tiene el etiquetado estándar si el conjunto de sus etiquetas es $[n]$.

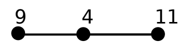
La gráfica G tiene $\binom{n}{2} = n(n-1)/2$ posibles aristas (u,v) ya que hay n posibilidades de elegir al vértice u, $(n-1)$ posibilidades para elegir v y se divide entre 2 ya que, como es una gráfica no dirigida, es lo mismo elegir los vértices u, v que v, u. Entonces, con los n vértices y las $\binom{n}{2}$ posibles aristas se pueden formar $2^{\binom{n}{2}}$ gráficas etiquetadas diferentes. Por ejemplo dado $n = 3$, entonces el número de gráficas que se pueden formar es $2^{\binom{3}{2}} = 2^3 = 8$. En la figura 3.9 se muestran todas las gráficas etiquetadas de orden 3.

Se dice que una gráfica es conectada si para cualquier par de nodos existe un camino de aristas para llegar del primer nodo al segundo. Las cuatro gráficas de abajo en la figura 3.9 son conectadas.

Ahora describiremos a F_1 con los conceptos de manos, cartas y barajas. Una carta $c(S,p)$ representa una gráfica conectada etiquetada, S es un conjunto de enteros positivos que serán las etiquetas de los vértices y p es una gráfica conectada de orden $|S|$ con etiquetado estándar. La asignación de las etiquetas en S a la gráfica se hace respetando el orden, es decir, la etiqueta más pequeña en S se le asignará al vértice 1 en p, y así sucesivamente. De tal manera, cualquier gráfica conectada pueda ser representada mediante una carta, por ejemplo

$c(S,p) = (\{4, 9, 11\},$ 

$\}$

en donde la carta c representa a la gráfica 

.

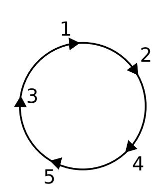
Una mano H con peso n es una colección de cartas tales que sus conjuntos etiqueta forman una partición de $[n]$. Cada componente no necesariamente tiene etiquetas estándar sin embargo la gráfica completa sí. Una baraja D_n corresponde al conjunto de todas las gráficas conectadas de orden n con etiquetas estándar. Retomando el ejemplo de la figura 3.9, las 4 gráficas de abajo conforman la baraja D_3. Entonces la familia exponencial F_1 es el conjunto de todas las gráficas etiquetadas, las cartas son gráficas conectadas, las manos son gráficas no necesariamente conectadas con etiquetas estándar y las barajas D_n son los conjuntos de todas las gráficas conectadas de orden n con etiquetas estándar, d_n es el número de cartas en la n-ésima baraja, esto es el número de cartas de peso n con etiquetas estándar, y el número $h(n, k)$ es el número de manos de peso n conformada por k cartas, que corresponde a una gráfica con n vértices y k componentes conectados.

Permutaciones

El segundo ejemplo es el de la familia de las permutaciones, llamémosla F_2. En F_2 la figura en las cartas es un conjunto de n puntos ordenados sobre un círculo que lleva la dirección de las manecillas del reloj. Los puntos de la permutación están etiquetados con sendos elementos del conjunto $[n]$. El conjunto S con elementos enteros tiene cardinalidad n.

Una carta corresponde a una permutación cíclica de los elementos de S, una permutación con un solo ciclo. Por ejemplo, la carta mostrada en la tabla 3.1 representa a la permutación cíclica $2 \to 3 \to 7 \to 12 \to 6 \to 2$ del conjunto S.

Una baraja consta de cartas estándar, cada baraja D_n es el conjunto de todas las diferentes cartas de peso n, entonces en términos de permutaciones una baraja es el conjunto de todas las permutaciones cíclicas (de un sólo ciclo), del conjunto $[n]$.

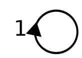
$c(S,p) = \{\{2, 3, 6, 7, 12\},$ 

$\}$

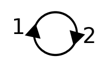
Tabla 3.1: Carta $c \in F_2$.

Como estamos hablando de permutaciones cíclicas no importa qué elemento sea el primero, lo importante es el orden que siguen los demás elementos hasta volver al inicial, por ello, sabemos que $d_n = (n-1)!$

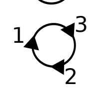
Una mano de peso n y k cartas, es una colección de cartas no necesariamente estándar, cuyos conjuntos etiqueta forman una partición del conjunto $[n]$. La unión de las figuras forma una permutación de n números en k ciclos, cada ciclo queda determinado por una carta. Por ejemplo, la mano de cartas:

$c_1(S,p) = \{\{2\},$ 

$\}$

$c_2(S,p) = \{\{1,4\},$ 

$\}$

$c_3(S,p) = \{\{3,7,9\},$ 

$\}$

representan a la siguiente permutación

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 7 & 9 \\ 4 & 2 & 9 & 1 & 3 & 7 \end{pmatrix} = (2)(14)(397)$$

$h(n,k)$ es el número de permutaciones posibles de n elementos en k ciclos y d_n es el número de permutaciones de n elementos en un solo ciclo, como vimos $d_n = (n-1)!$

¿De qué manera podemos expresar $h(n,k)$ en términos de $d_1, d_2, d_3, \ldots,$?. En F_2 es el número de maneras de permutar n números en k ciclos en términos del número de permutaciones de 1 ciclo para $1, 2, 3, \ldots$ elementos. Mientras que para F_1, el número de n-gráficas no necesariamente conectadas, con k componentes conexos, en términos del número de gráficas conectadas de tamaño $1, 2, 3, \ldots$ Para responder esta pregunta primero daremos algunas definiciones.

Teoremas de enumeración

La operación **merge** sobre familias exponenciales. Dadas dos familias exponenciales, F' y F'' cuyos respectivos conjuntos figura P' y P'' son disjuntos, se dice que les hacemos *merge*

$$F = F' \oplus F''$$

siguiendo el siguiente proceso. Primero, fijar a $n \geq 1$, de F' tomamos las d'_n cartas de la baraja D'_n y las colocamos en una nueva pila, de F'' tomamos todas las d''_n cartas de la baraja D''_n y las colocamos en la nueva pila, que ahora contiene $d_n = d'_n + d''_n$ cartas diferentes. Repetimos para cada $n \geq 1$.

Teorema 3.6.1 Teorema Fundamental de la enumeración etiquetada. Sean F' y F'' dos familias exponenciales, y sea $F = F' \oplus F''$ el resultado de hacerles *merge*. Además sean $H'(x,y)$, $H''(x,y)$ y $H(x,y)$ los respectivos enumeradores de manos de las familias. Entonces

$$H(x,y) = H'(x,y)H''(x,y)$$

Prueba. Consideremos una mano H en la familia F que resulta del *merge*. Algunas de sus cartas provienen de F' y algunas de F''. La colección de cartas que provienen de F' forma una sub-mano H' de peso n' y con k' cartas que fue reetiquetada, de forma que preserva el orden, con el conjunto $S \subseteq [n]$.

Todas las manos H de la familia F están determinadas de forma única por una mano H' de F', la decisión de nuevas etiquetas S con las que se reetiquetará la mano y la sub-mano restante H'' de F'', quien será reetiquetada con las $[n]-S$ etiquetas, preservando el orden. En consecuencia el número de manos de peso n con k cartas de la familia F es exactamente

$$h(n,k) = \sum_{n',k'} \binom{n}{n'} h'(n',k')h''(n-n',k-k')$$

Ahora, considerando que $\left[\frac{x^n y^k}{n!}\right] H(x,y) = h(n,k)$ y que $n'' = n-n'$, $h'' = h-h'$

$$\begin{aligned} H'(x,y)H''(x,y) = & \\ &= \Big(\sum_{n',k'} h'(n',k')\frac{x^{n'}}{n'!}y^{k'}\Big)\Big(\sum_{n'',k''} h''(n'',k'')\frac{x^{n''}}{n''!}y^{k''}\Big) \\ &= \Big(\sum_{n',k'} h'(n',k')\frac{x^{n'}}{n'!}y^{k'}\Big)\Big(\sum_{n',k'} h''(n-n',k-k')\frac{x^{n-n'}}{n-n'!}k-k'\Big) \end{aligned}$$

$= \Big(h'(1,1)xy + h'(2,1)\frac{x^2}{2!}y + h'(3,1)\frac{x^3}{3!}y + h'(2,2)\frac{x^2}{2!}y^2 + h'(3,2)\frac{x^3}{3!}y^2 + \cdots\Big)$
$\Big(h''(n-1,k-1)\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}y^{k-1} + h''(n-2,k-1)\frac{x^{n-2}}{n-2!}y^{k-1}$
$+ h''(n-3,k-1)\frac{x^{n-3}}{n-3!}y^{k-1} + h''(n-2,k-2)\frac{x^{n-2}}{n-2!}y^{k-2}$
$+ h''(n-3,k-2)\frac{x^{n-3}}{n-3!}y^{k-2} + h''(n-3,k-3)\frac{x^{n-3}}{n-3!}y^{k-3} + \cdots\Big)$

$= h'(1,1)h''(n-1,k-1)\frac{x^n y^k}{1!(n-1)!} + h'(1,1)h''(n-2,k-1)\frac{x^{n-1}y^k}{1!(n-2)!} + h'(1,1)h''(n-3,k-1)\frac{x^{n-2}y^k}{1!(n-3)!} + h'(2,1)h''(n-2,k-1)\frac{x^n y^k}{2!(n-2)!} + \cdots + h'(2,2)h''(n-2,k-2)\frac{x^n y^k}{2!(n-2)!} + \cdots + h'(3,1)h''(n-3,k-1)\frac{x^n y^k}{3!(n-3)!} + \cdots + h'(3,2)h''(n-3,k-2)\frac{x^n y^k}{3!(n-3)!} + \cdots$

$= h'(1,1)h''(n-1,k-1)\frac{x^n y^k}{1!(n-1)!} + h'(2,1)h''(n-2,k-1)\frac{x^n y^k}{2!(n-2)!} + h'(2,2)h''(n-2,k-2)\frac{x^n y^k}{2!(n-2)!} + h'(3,1)h''(n-3,k-1)\frac{x^n y^k}{3!(n-3)!} + h'(3,2)h''(n-3,k-2)\frac{x^n y^k}{3!(n-3)!} + \cdots$

$$\begin{aligned}
&= \cdots + \left[\frac{1}{1!(n-1)!}\Big(h'(1,1)h''(n-1,k-1)\Big) + \frac{1}{2(n-2)!}\Big(h'(2,1)h''(n-2,\right.\\
&\quad \left. k-1) + h'(2,2)h''(n-2,k-2)\Big) + \cdots\right] x^n y^k + \cdots\\
&= \cdots + \frac{n!}{n!}\left[\frac{1}{1!(n-1)!}\Big(h'(1,1)h''(n-1,k-1)\Big) + \frac{1}{2(n-2)!}\Big(h'(2,1)h''(n-\right.\\
&\quad \left. 2,k-1) + h'(2,2)h''(n-2,k-2)\Big) + \cdots\right] x^n y^k + \cdots\\
&= \cdots + \left[\frac{n!}{1!(n-1)!}\Big(h'(1,1)h''(n-1,k-1)\Big) + \frac{n!}{2(n-2)!}\Big(h'(2,1)h''(n-2,\right.\\
&\quad \left. k-1) + h'(2,2)h''(n-2,k-2)\Big) + \cdots\right] \frac{x^n y^k}{n!} + \cdots\\
&= \cdots + \left[\sum_{n'=0}^{n}\sum_{k'=1}^{n'}\binom{n}{n'}h'(n',k')h''(n-n',k-k')\right]\frac{x^n y^k}{n!} + \cdots
\end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\left[\frac{x^n y^k}{n!}\right] H'(x,y)H''(x,y) &= \sum_{n'=0}^{n}\sum_{k'=1}^{n'}\binom{n}{n'}h'(n',k')h''(n-n',k-k')\\
&= \left[\frac{x^n y^k}{n!}\right] H(x,y)\\
&= h(n,k)
\end{aligned}$$

A continuación construiremos la relación entre las funciones generadoras de barajas y manos primero con casos triviales y después en general.

Para el primer caso se tiene una familia exponencial con una **única baraja no-vacía** con **una sola carta**. Dado el entero positivo r, definimos a la r-ésima baraja D_r, que contiene una sola carta, como la única baraja no-vacía de la familia exponencial. Por lo tanto, $d_r = 1$ y todos los demás $d_j = 0$. El enumerador de barajas es

$$
\begin{aligned}
D(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} d_n \frac{x^n}{n!} \\
D(x) &= d_r \frac{x^r}{r!} \\
D(x) &= \frac{x^r}{r!}
\end{aligned}
$$

Una mano H consiste de k copias de la única carta que existe, $\omega(H) = rk$ ¿De cuántas maneras podemos etiquetar la mano? Para la primera carta podemos elegir cualquiera de las n etiquetas, de $\binom{n}{r}$ maneras, para la segunda de $\binom{n-r}{r}$ maneras y así sucesivamente hasta la última carta que sería de $\binom{n-(k-1)r}{r}$ maneras. Luego,

$$
\begin{aligned}
&= \binom{n}{r}\binom{n-r}{r}\cdots\binom{n-(k-1)r}{r} \\
&= \left(\frac{n!}{r!(n-r)!}\right)\left(\frac{(n-r)!}{r!(n-2r)!}\right)\left(\frac{(n-2r)!}{r!(n-3r)!}\right)\cdots\left(\frac{(n-(k-1)r)!}{r!(n-kr)!}\right)
\end{aligned}
$$

De manera trivial vemos que todos los numeradores, excepto el primero, se dividen con una parte del denominador anterior que resulta en la unidad. El último denominador, dado que $n = kr$, queda $r!(1)$. Por lo tanto el producto anterior se puede escribir como

$$\frac{n!}{r!^k} = \frac{kr!}{r!^k}.$$

Solo hace falta considerar que no importa el orden de las k cartas por lo que dividimos el resultado por $k!$. Entonces,

$$h(n,k) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq kr \\ \frac{1}{\mathrm{k!}}\frac{\mathrm{kr!}}{\mathrm{r!}^k} & \text{si } n = kr \end{cases}$$

Por lo que la función enumeradora de manos es,

$$
\begin{aligned}
H(x,y) &= \sum_{n,k} h(n,k)\frac{x^n}{n!}y^k \\
&= \sum_k h(kr,k)\frac{x^{kr}}{kr!}y^k \\
&= \sum_k \frac{1}{\mathrm{k!}}\frac{\mathrm{kr!}}{\mathrm{r!}^k}\frac{x^{kr}}{kr!}y^k \\
&= \sum_k \frac{1}{k!}\left(\frac{x^r y}{r!}\right)^k \\
&= e^{\{yx^r/r!\}}
\end{aligned}
$$

La función enumeradora de manos de la familia es $H(x,y) = e^{\{yx^r/r!\}}$.

El segundo caso es una familia exponencial con una **única baraja no-vacía** pero con d_r cartas. Dados los enteros positivos r y d_r, definimos a la familia exponencial F con una única baraja D_r con d_r cartas.

Proposición 3.6.1 El enumerador de manos de F es $H(x,y) = e^{yd_rx^r/r!}$

Prueba. Por inducción en d_r, sabemos que la proposición se cumple para $d_r = 1$ por el caso anterior. Supongamos que la hipótesis se cumple para $d_r = 1, 2, 3, \ldots, m-1$ y que la familia F tiene m cartas en la r-ésima baraja. Entonces F es el resultado de hacer *merge* a una familia con $m-1$ cartas en la r-ésima baraja y una familia con una sola carta, igual, en la r-ésima baraja.
La función enumeradora de barajas es

$$D(x) = \sum_{n}^{\infty} d_n x^n/n! = \frac{d_r x^r}{r!}$$

Por hipótesis de inducción y el lema fundamental, la función enumeradora de manos es el producto:

$$\left(e^{\dfrac{y(m-1)x^r}{r!}}\right)\left(e^{\dfrac{yx^r}{r!}}\right) = e^{\dfrac{(m-1)yx^r}{r!}+\dfrac{yx^r}{r!}} = e^{\dfrac{myx^r}{r!}}$$

Teorema 3.6.2 La fórmula exponencial
Sea F una familia exponencial cuyos enumeradores de barajas y de manos son $D(x)$ y $H(x,y)$ respectivamente, entonces

$$H(x,y) = e^{yD(x)}$$

considerando que $H(x,y) = \sum_{n,k} h(n,k)y^k x^n/n!$, el número de manos de peso n con k cartas es,

$$h(n,k) = \left[\frac{x^n}{n!}\right]\{\frac{D(x)^k}{k!}\}$$

Prueba. Ya probamos el caso particular en donde hay una sola baraja no-vacía. Una familia exponencial F con una sucesión completa de barajas $D_1, D_2, D_3, \ldots$ es el *merge* de las familias F_r $(r = 1, 2, \ldots)$ donde cada F_r tiene una única baraja no-vacía, la r-ésima. Por el teorema fundamental, la función enumeradora de manos de la familia F es el producto de las funciones enumeradoras de cada familia F_r, y como la función generadora propuesta en el teorema en efecto es el producto de las enumeradoras de las F_r, entonces queda demostrado.

$$H(x,y) = \left(e^{\frac{yd_1x}{1!}}\right)\left(e^{\frac{yd_2x^2}{2!}}\right)\cdots = e^{y(\sum_n \frac{d_nx^n}{n!})} = e^{(yD(x))}.$$

Si sumamos la ecuación del teorema 3.6.2 sobre todas las k en vez de escribirse como $H(x,1)$ se deja solamente $H(x)$ donde la variable y toma el valor de 1, y obtendremos:

Corolario 3.6.1 Sea F una familia exponencial, $D(x)$ la función generadora exponencial de la sucesión $\{d_n\}_1^\infty$, la sucesión de los tamaños de las barajas, y sea $H(x) \overset{fge}{\longleftrightarrow} \{h_n\}_{n=1}^\infty$, donde h_n es el número de manos de peso n,

$$H(x) = e^{D(x)}$$

La función enumeradora de manos con k cartas es

$$\frac{1}{k!}\{\log\frac{1}{1-x}\}^k \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots)$$

por lo que la función enumeradora de manos sin importar el número de cartas es

$$H(x) = \sum_k \frac{1}{k!}\{\log\frac{1}{1-x}\}^k = e^{(\log\frac{1}{1-x})} = \frac{1}{1-x},$$

Ahora, si sumamos sobre los k que pertenecen a un dado conjunto T, obtenemos:

Corolario 3.6.2 Sea T un conjunto de enteros positivos, definimos a $\mathrm{e}_T(x) = \sum_{k\in T}\frac{x^n}{n!}$, y sea $h_n(T)$ el número de manos con peso n y cuyo número de cartas es un número que pertenece a T, entonces,
$\{h_n(T)\}_0^\infty \overset{fge}{\longleftrightarrow} \mathrm{e}_T(D(x))$

Permutaciones

En esta subsección aplicaremos los teoremas al ejemplo de la enumeración de la estructura discreta permutaciones[2]. Sabemos que la n-ésima baraja D_n contiene

[2]Se aplica al ejemplo F_2 ya que en el ejemplo de las permutaciones ya se tiene una forma cerrada de obtener d_n, a diferencia de F_1, más adelante encontraremos una recurrencia para obtener d_n de F_1.

$(n-1)!$ cartas. La función generadora exponencial de la sucesión $\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$, es

$$\begin{aligned}
D(x) &= \sum_n d_n \frac{x^n}{n!} \\
&= \sum_n (n-1)! \frac{x^n}{n!} \\
&= \sum_n \frac{(n-1)! x^n}{n(n-1)!} \\
&= \sum_n \frac{x^n}{n} \\
D(x) &= \log(\frac{1}{1-x})
\end{aligned}$$

La expansión de Maclaurin de la última ecuación se muestra al final de la sección. Sabemos por el teorema 3.6.2, la fórmula exponencial, que,

$$\begin{aligned}
H(x,y) &= e^{y \log \frac{1}{(1-x)}} \\
&= e^{\log \frac{1}{(1-x)^y}} \\
H(x,y) &= \frac{1}{(1-x)^y}
\end{aligned}$$

En esta familia exponencial, $h(n,k)$ es el número de permutaciones de n números en k ciclos. Este número se conoce como **Stirling del primer tipo**, y se denota por $\left[{n \atop k}\right]$ entonces, si $h(n,k) = \left[{n \atop k}\right] \Rightarrow [\frac{x^n}{n}]H(x,y) = \sum_k h(n,k)y^k = \sum_k \left[{n \atop k}\right] y^k$

$$\begin{aligned}
\sum_k \left[{n \atop k}\right] y^k &= \left[\frac{x^n}{n!}\right] H(x,y) \\
&= \left[\frac{x^n}{n!}\right] \frac{1}{(1-x)^y}
\end{aligned}$$

Sabemos que:

$$\frac{1}{(1-x)^k} = \sum_n \binom{n+k-1}{n} x^n$$

luego,

$$\begin{aligned}
\sum_k \left[{n \atop k}\right] y^k &= \left[\frac{x^n}{n!}\right] \sum_n \binom{n+y-1}{n} x^n \\
&= \left[\frac{x^n}{n!}\right] \sum_n \frac{(n+y-1)!}{n!(y-1)!} x^n \\
&= \left[\frac{x^n}{n!}\right] \sum_n \frac{(n+y-1)!}{(y-1)!} \frac{x^n}{n!} \\
&= \frac{(n+y-1)!}{(y-1)!} \\
&= \frac{(y-1+n)!}{(y-1)!} \\
&= \frac{(y-1+n)(y-1+n-1)(y-1+n-2)\cdots(y-1-n-(n-1))(y-1)!}{(y-1)!} \\
&= (y+n-1)(y+n-2)(y+n-3)\cdots(y+1)(y)
\end{aligned}$$

Entonces,

$$\sum_k \left[{n \atop k}\right] y^k = (y+n-1)(y+n-2)(y+n-3)\cdots(y+1)(y)$$

Luego, el número de permutaciones de n letras con k ciclos es el coeficiente de y^k en la expansión de la función factorial $(y)(y+1)\cdots(y+n-1)$. Por ejemplo, el número de permutaciones de 4 letras con 3 ciclos. Sea $S = \{a,b,c,d\}$, enunciaremos todas las permutaciones en 3 ciclos de los elementos del conjunto S:

$$\begin{gathered}(a)(b)(cd)\\(a)(c)(bd)\\(a)(d)(bc)\\(b)(c)(ad)\\(b)(d)(ac)\\(c)(d)(ab)\end{gathered}$$

Pero si deseamos saber de cuántas maneras diferentes se puede permutar 4 letras con 3 ciclos sin tener que contar de una por una, aplicamos la teoría anterior,

$$\sum_k \left[{n \atop k}\right] y^k = (y+n-1)(y+n-2)(y+n-3)\cdots(y+1)(y)$$

$$n = 4$$

$$\begin{aligned}&= (y+3)(y+2)(y+1)(y)\\&= (y^2+5y+6)(y^2+y)\\&= y^4+6y^3+11y^2+6y\end{aligned}$$

Sabemos de ahí que,

$$\left[{n \atop 4}\right] = 1 \qquad \left[{n \atop 3}\right] = 6$$
$$\left[{n \atop 2}\right] = 11 \qquad \left[{n \atop 1}\right] = 6$$

Podemos ver que el número de permutaciones de 4 letras en 3 ciclos es, efectivamente, 6.

Expansión de Maclaurin de $f(x) = \log(\frac{1}{1-x})$:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \log(\frac{1}{1-x}) & f(0) &= \frac{1}{1} = 0\\
f'(x) &= \frac{(1-x)}{(1-x)^2} = \frac{1}{1-x} & f'(0) &= \frac{1}{1} = 1\\
f''(x) &= \frac{1}{(x-1)^2} & f''(0) &= \frac{1}{(-1)^2} = 1\\
f'''(x) &= -\frac{2}{(x-1)^3} & f'''(0) &= \frac{-2}{(-1)^3} = 2\\
f^{IV}(x) &= \frac{6}{(x-1)^4} & f^{IV}(0) &= \frac{6}{(-1)^4} = 6
\end{aligned}$$

$$f(x) = ((0) + \frac{(1)x}{1!} + \frac{(1)x^2}{2!} + \frac{(2)x^3}{3!} + \frac{(6)x^4}{4!} + \cdots + \frac{(n-1)!x^n}{n(n-1)!}$$

$$\log(\frac{1}{1-x}) = \sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n}$$

Aplicación de la teoría a Particiones

Ahora aplicaremos la teoría a la enumeración de particiones. Una partición de un conjunto S es una colección de conjuntos disjuntos no vacíos cuya unión es S. Los conjuntos de los cuales se conforma la partición de S reciben el nombre de clases. Por ejemplo, el conjunto $\{a,b,c,d\}$ puede ser particionado de diversas maneras, tales como $\{a\}\{b,c\}\{d\}$ ó $\{a,b,d\}\{c\}$, en la primera partición tiene 3 clases mientras que en la segunda solamente se tienen 2. En las particiones no importa el orden de las clases ni el orden de los elementos en ellas, lo único que hay que notar es qué elementos están juntos y qué otros separados. Por ejemplo, las siguientes son todas las particiones del conjunto $\{a,b,c,d,e\}$ en 4 clases:

$$\{ab\}\{c\}\{d\}\{e\}, \{ac\}\{b\}\{d\}\{e\}, \{ad\}\{b\}\{c\}\{e\}, \{ae\}\{b\}\{c\}\{d\}, \{bc\}\{a\}\{d\}\{e\}$$
$$\{bd\}\{a\}\{c\}\{e\}, \{be\}\{a\}\{c\}\{d\}, \{cd\}\{a\}\{b\}\{e\}, \{ce\}\{a\}\{b\}\{d\}, \{de\}\{a\}\{b\}\{c\}$$

Existen exactamente 10 particiones de un conjunto de tamaño $|[5]|$ en 4 clases. Al número de particiones de un conjunto de tamaño n en k clases se le conoce como **número de Stirling del segundo tipo** y se representa así: $\left\{ {n \atop k} \right\}$, por el ejemplo anterior sabemos que $\left\{ {5 \atop 4} \right\} = 10$.

Definimos a la familia de las particiones como $F_3 = \{\sum_{n\geq 1} D_n\}$. Cada baraja contendrá una sola carta formada por un conjunto $S = [S]$ y por p: otro conjunto de tamaño $|[S]|$ que contiene enteros. Entonces una carta $c(\{1,2,3\},\{2,5,7\})$ representa al conjunto $\{2,5,7\})$. Para la baraja D_n, $d_n = 1$ siendo esta carta $c([n],p)$.

Una mano H de peso n es un conjunto de cartas cuyos conjuntos p son una partición $[n]$. Cada mano corresponde a una única partición del conjunto $[n]$. Entonces, en esta familia el número de manos de peso n con k cartas es igual al número de particiones del conjunto $[n]$ en k clases.

Sabemos que $d_n = 1$ para $n \geq 1$, luego la función enumeradora de barajas es

$$D(x) = \textstyle\sum_n^\infty d_n x^n/n! = \sum_{n\geq 1}^\infty x^n/n! = (\sum_{n=0}^\infty x^n/n!) - 1 = e^x - 1$$

Aplicando la fórmula exponencial,

$$\begin{aligned} H(x,y) =& e^{y(e^x-1)} \\ \sum_n \sum_k h(n,k) y^k \frac{x^n}{n!} =& \sum_k \frac{(e^x-1)^k}{k!} y^k \\ \sum_n h(n,k) \frac{x^n}{n!} =& \frac{(e^x-1)^k}{k!} \end{aligned}$$

Luego, $\left[\frac{x^n}{n!}\right]\frac{(e^x-1)^k}{k!} = h(n,k)$, que en este caso,

$$\left[\frac{x^n}{n!}\right]\frac{(e^x-1)^k}{k!} = \left\{ {n \atop k} \right\}$$

Si se desea conocer de cuántas maneras se puede particionar un conjunto sin importar el número de clases, entonces,

$$H(x) = e^{(e^x-1)} = \sum_{k\geq 0} \frac{(e^x-1)^k}{k!}$$

Esta función genera los números de particiones de los n-conjuntos, a dichos números se les conoce como los números de Bell. En el siguiente capítulo continuaremos con este ejemplo, haciendo uso de la enumeración asintótica.

Capítulo 4

Teoría analítica y enumeración asintótica

En la primera parte de este trabajo, estudiamos la teoría *formal* de las series de potencias. Su estructura algebraica, sus propiedades y operaciones elementales como suma y producto, tipos de funciones generadoras, etcétera.

En este capítulo examinaremos a las series de potencias bajo un enfoque analítico. Este punto de vista implica la asignación de valores a las variables que aparecen en las funciones generadoras. Estos valores pueden ser reales o complejos, en el capítulo veremos que elegir valores complejos tiene mayores beneficios. Lo anterior es debido a que si una función compleja tiene derivada en cierta región, entonces se cumple que es infinitamente diferenciable en dicha región, en cambio, la primera derivada de una función real no garantiza que las de orden superior existan. Esta propiedad resulta muy útil al escribir la serie de Taylor de una función, ya que si es infinitamente diferenciable sabemos que existe una región en la que su serie de Taylor es igual a la función.

En muchos casos no es posible conocer el valor exacto de los coeficientes, el enfoque analítico permite conocer el comportamiento asintótico de los coeficientes de una función cuando $n \to \infty$. Veremos que la teoría analítica, en especial el estudio de las singularidades de una función, es una herramienta que permite conocer el comportamiento asintótico de las sucesiones.

Primeramente veremos algunas definiciones de la teoría analítica que serán fundamentales para la enumeración asintótica. Posteriormente veremos las ecuaciones de Cauchy-Riemann, una herramienta que permite saber si una función es complejo-diferenciable en toda una región. Continuaremos con el teorema de Taylor, una herramienta para representar localmente a una función a través de su serie de Taylor. Luego, estudiaremos la posible presencia de singularidades en una función y la posibilidad de representarlas a través de la expansión de Laurent. Existen muchos métodos analíticos para la enumeración combinatoria, en este trabajo estudiaremos

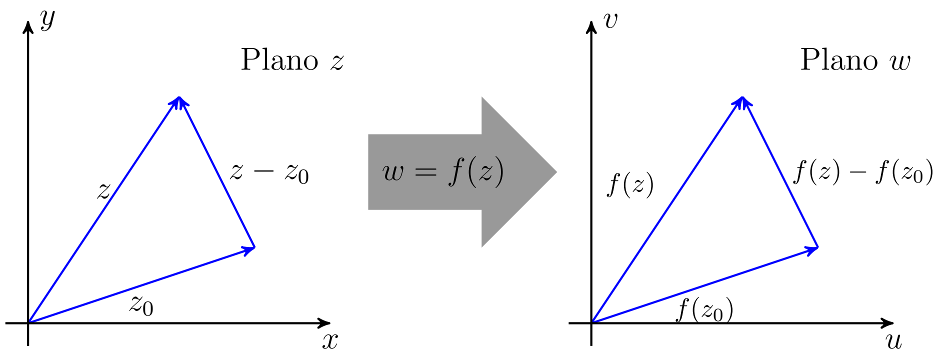


Figura 4.1: *Interpretación geométrica de la derivada compleja*

el análisis de singularidades para aproximar los coeficientes de una sucesión. Al final de la sección se estudia el caso de los números de Bell para ejemplificar la utilidad del método de análisis de singularidades.

4.1. Funciones analíticas

Las funciones complejas que cierta región poseen derivada en cada punto, son llamadas de varias maneras, *holomorfa* o *compleja-diferenciable*, también se les llama *analíticas* aunque en realidad el concepto de analiticidad consiste en que la función pueda representarse localmente a través de una serie de potencias. Estos adjetivos a menudo son empleados indistintamente por una razón, una función es analítica si y solo si es holomorfa.

A continuación se define el concepto de diferenciabilidad.

Definición 4.1.1 Sea $f : A \to \mathbb{C}$, donde A es un conjunto abierto y $\mathbb{C}$ es el campo de los números complejos. Se dice que f es complejo-diferenciable en $z_0 \in A$ si

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

existe. En adelante este límite se denotará por $f'(z_0)$ y la frase *holomorfa en* z_0 significa *holomorfa en una vecindad de* z_0.

Cuando hablamos de derivadas complejas ya no se puede pensar en ellas como la recta tangente a la curva descrita por la función. La figura (4.1) es una interpretación geométrica. En la gráfica de la izquierda (el dominio de la función) vemos dos puntos complejos representados por vectores en el plano complejo z, con eje real x y eje imaginario y. Luego, al aplicar f a los puntos del dominio, la función transforma cada punto a su correspondiente $f(z)$, la gráfica de la derecha, con plano complejo w

y eje real u e imaginario v. El punto z tiende a z_0, con un incremento de $\Delta_z = z - z_0$. En la imagen, el punto $f(z)$ tiende a $f(z_0)$ con una separación a la que llamaremos $\Delta_w = f(z) - f(z_0)$. La derivada es la razón de cambio de Δ_w con respecto a Δ_z cuando Δ_z es infinitamente pequeño.

4.2. Cauchy-Riemann

Con la definición (4.1.1) podemos saber si una función es diferenciable en cierto punto, ahora estudiaremos una herramienta para saber si una función es derivable en toda una región. Se dice que f es holomorfa en la región A si es derivable en cada $z_0 \in A$.

Dada una función compleja $f(z)$, podemos separarla en su parte real e imaginaria como sigue, $f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ donde $u(x,y)$ es la parte real de f y $v(x,y)$ la imaginaria.

Ejemplo

$$\begin{aligned} f(z) &= z^2 \\ f(x+iy) &= (x+iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy \\ &\text{luego,} \\ u(x,y) &= x^2 - y^2 \\ v(x,y) &= 2xy \end{aligned}$$

□

Teorema 4.2.1 Sea A un conjunto abierto y $f : A \to \mathbb{C}$, donde $f = u + iv$. Supongamos que $z = x + iy$ es un punto de A y que $f'(z)$ existe, entonces

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

A estas ecuaciones se les conoce como las ecuaciones de **Cauchy-Riemann**.

Demostración

La derivada compleja está definida como

$$f'(z) = \lim_{\Delta_z \to 0} \frac{f(z + \Delta_z) - f(z)}{\Delta_z}$$

Donde $\Delta_z = \Delta_x + i\Delta_y$ es el incremento.

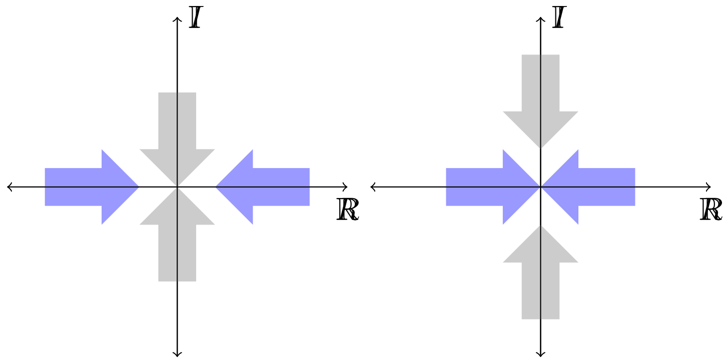


Figura 4.2: La gráfica de la izquierda es $\Delta_x \to 0$ y $\Delta_y = 0$, en la de la derecha $\Delta_y \to 0$ y $\Delta_x = 0$

Tomamos el punto z, $z - z_0 \to 0$, es decir el punto al que nos estamos acercando. Nos podemos acercar por el eje real o por el imaginario dejando fijo al otro. Ver la figura (4.2).

Veamos primero el caso en que nos aproximamos a z por el eje real y dejamos fijo a el imaginario.

Como y es constante, entonces $\Delta_y = 0$, luego, $\Delta_z = \Delta_x + i\Delta_y = \Delta_x$. Definimos a $h = \Delta_x$.

$$f'(z) = \lim_{\Delta_z \to 0} \frac{f(z+\Delta_z) - f(z)}{\Delta_z}$$

$$f'(x+iy) = \lim_{h\to 0} \frac{u(x+h,y) + iv(x+h,y) - [u(x,y) + iv(x,y)]}{h}$$

factorizando los términos imaginarios obtenemos

$$f'(x+iy) = \lim_{h\to 0} \frac{[u(x+h,y) - u(x,y)] + i[v(x+h,y) - v(x,y)]}{h}$$

$$f'(x+iy) = \lim_{h\to 0} \frac{u(x+h,y) - u(x,y)}{h} + i \lim_{h\to 0} \frac{v(x+h,y) - v(x,y)}{h}$$

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}$$

Veamos el caso en que nos acercamos a z por el eje imaginario dejando fijo en cero el incremento real.

Ahora x es constante por lo que $\Delta_x = 0$, luego $\Delta_z = \Delta_x + i\Delta_y = i\Delta_y$. Definimos a $h = \Delta_y$.

$$f'(z) = \lim_{\Delta_z \to 0} \frac{f(z+\Delta_z) - f(z)}{\Delta_z}$$

$$f'(x+iy) = \lim_{h\to 0} \frac{u(x,y+h) + iv(x,y+h) - [u(x,y) + iv(x,y)]}{ih}$$

factorizando los términos imaginarios obtenemos

$$
\begin{aligned}
f'(x+iy) &= \lim_{h\to 0} \frac{u(x,y+h)-u(x,y)+i[v(x,y+h)-v(x,y)]}{ih} \\
f'(x+iy) &= \lim_{h\to 0} \frac{u(x,y+h)-u(x,y)}{ih} + i\lim_{h\to 0} \frac{v(x,y+h)-v(x,y)}{ih} \\
f'(x+iy) &= \lim_{h\to 0} \frac{u(x,y+h)-u(x,y)}{ih} + \lim_{h\to 0} \frac{v(x,y+h)-v(x,y)}{h} \\
f'(z) &= \frac{1}{i}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} \\
f'(z) &= \frac{i}{i\cdot i}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} \\
f'(z) &= -i\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}
\end{aligned}
$$

Notamos que quedan dos expresiones diferentes que definen a f', para que se cumpla deberán ser equivalentes. Para compararlas primero definimos la siguiente propiedad de los números complejos

Definición 4.2.1 Sean $z = a + ib$ y $w = c + id \in \mathbb{C}$, se dice que

$$z = w \qquad \Leftrightarrow \qquad a = c \text{ y } b = d$$

Entonces igualamos reales con reales e imaginarios con imaginarios para las dos expresiones de $f'(z)$,

$$
\begin{aligned}
f'(z) &= \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} \\
f'(z) &= \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}
\end{aligned}
$$

Por lo que queda demostrado que

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial y} \\
\frac{\partial v}{\partial x} &= -\frac{\partial u}{\partial y}
\end{aligned}
$$

□

Continuaremos con el ejemplo anterior, ahora veremos si es diferenciable y calcularemos su derivada compleja.

$$
\begin{gathered}
f(z) = z^2 \\
f(x+iy) = x^2 - y^2 + 2ixy \\
u(x,y) = x^2 - y^2 \qquad , \qquad v(x,y) = 2xy
\end{gathered}
$$

Calculamos las derivadas parciales en x

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x$$
$$\frac{\partial v}{\partial x} = 2y$$

Calculamos las derivadas parciales en y

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -2y$$
$$\frac{\partial v}{\partial y} = 2x$$

Veamos si se cumple que es diferenciable utilizando las ecuaciones de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$$
$$2x = 2x$$
$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$
$$2y = -2y$$

Se cumplen, por lo tanto es diferenciable y la derivada es

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = 2x + i2y$$

Una de las características más interesantes de la diferenciabilidad de una función en términos de la variable compleja, es que la existencia de la primer derivada garantiza que dicha función es infinitamente diferenciable.

4.3. Expansiones de Taylor y Laurent

Sabiendo que si una función compleja tiene derivada, i.e. es analítica, es entonces puede representarse a través de una serie de potencias. El siguiente teorema establece que si f es analítica en un disco abierto centrado en z_0, entonces la función f es localmente representable a través de su serie de Taylor, y es igual a $f(z)$ en todo el disco.

Teorema 4.3.1 El teorema de Taylor
Sea f analítica en una región A, sea $z_0 \in A$ y sea $A_r = \{z \text{ tal que } |z - z_0| < r\}$

contenida en A usualmente se usa el disco más grande posible, si $r = \infty$, $A_r = A = C$. Entonces, para cada $z \in A_r$, la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n$$

converge en A_r esto es, tiene un radio de convergencia $\geq r$ y tenemos

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n$$

usando la convención de que $0! = 1$. La serie anterior es llamada la **serie de Taylor** de f al rededor del punto z_0.

Una demostración del teorema de Taylor por Homersman Coxse puede encontrar en The Cambridge and Dublin Mathematical Journal V. 6 p. 80-81.

Las series de Taylor permiten encontrar una expansión para $f(z)$ en series de potencias convergentes al rededor de un punto z_0, para $f(z)$ cuando f es analítica en todo un disco al rededor de z_0. Pero cuando $z_0 = 0$ en funciones como $f(z) = 1/z$ ó $f(z) = e^z/z^2$, la serie de Taylor no se puede aplicar, se dice que la función tiene una **singularidad**.

Existe otra expansión que puede ser utilizada para este tipo de funciones, la *expansión de Laurent*. Esta expansión utiliza, además de las potencias de z, potencias inversas de z. Es la serie

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{M} \frac{b_n}{(z - z_0)^n}$$

donde M puede ser $= \infty$.

La **expansión de Laurent** o **serie de Laurent** permite representar funciones analíticas en la region anular A, en donde $A = \{a \in \mathbb{C} | r_1 < |z - z_0| < r_2\}$ con $r_1 \geq 0$, $r_2 > r_1$ y $z_0 \in \mathbb{C}$. Cualquier expansión convergente puntualmente de f que tenga esta forma, es igual a la expansión de Laurent, es decir, la expansión de Laurent es única.

Gracias a la condición de unicidad, muchas veces será más práctico calcular la expansión de Laurent a través de manipulaciones algebraicas, que a través de las fórmulas establecidas para a_n y b_n[1].

Cabe mencionar que la expansión es única siempre que se trate de la misma región. Por ejemplo, si $A = \{z \text{ tal que } |z| > 1\}$, entonces $f(z) = 1/z(z - 1)$ tiene la expansión de Laurent

$$f(z) = \frac{1}{z(z-1)} = \frac{1}{z}\Big[\frac{1}{z(1 - \frac{1}{z})}\Big] = \frac{1}{z^2}\big(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2}\big) = +\frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \cdots$$

[1]Korn, G. A. and Korn, T. M. Mathematical Handbook for Scientists and Engineers. New York: Dover, p. 198, 2000.

Como la expansión geométrica $\sum_{n=0}^{\infty} w^n = \frac{1}{1-w}$ sólo es válida para $|w| < 1$, y en este caso $w = \frac{1}{z}$, entonces

$$|\frac{1}{z}| < 1 = \frac{|1|}{|z|} < 1 = 1 < |z|$$

por lo tanto es válida para la región A. Ahora, la expansión de Laurent de la misma función pero en la región $A = \{z \text{ tal que } 0 < |z| < 1\}$ es

$$f(z) = \frac{1}{z(z-1)} = \frac{1}{z}\Big(\frac{1}{-(1-z)}\Big) = -\frac{1}{z}(1 + z + z^2 + \cdots) = -\big(\frac{1}{z} + 1 + z^2 + \cdots)$$

en este caso $w = z$, por lo tanto es válido para $|z| < 1$, y es válida en A.

Tipos de singularidades

Definición 4.3.1 Dada una función f analítica en una región A que contiene alguna ε-vecindad agujerada de z_0, z_0 es llamada una **singularidad aislada** y la expansión de Laurent es válida en tal ε-vecindad agujerada.

Definición 4.3.2 Dada z_0 una singularidad aislada de f y en la expansión de Laurent de f todos los b_n, excepto un número finito, son cero, entonces z_0 es llamado un **polo** de f.

Definición 4.3.3 Sea f una función analítica con singularidad en z_0 y cuyos coeficientes en la expansión de Laurent son b_n. Sea k el mayor entero tal que $b_k \neq 0$, enonces z_0 es llamdo un **polo de orden** k. Si f tiene un polo de orden k, su expansión de Laurent tiene la forma

$$\frac{b_k}{(z-z_0)^k} + \cdots + \frac{b_1}{z-z_0} + a_0 + a_1(z-z_0) + \cdots$$

y la parte de la serie

$$\frac{b_k}{(z-z_0)^k} + \cdots + \frac{b_1}{z-z_0}$$

es llamada la **parte principal** de f en z_0.

Definición 4.3.4 Sea f una función analítica con singularidad en z_0 y cuyos coeficientes en la expansión de Laurent son b_n. Si un número infinito de b_n es distinto de cero, z_0 es llamado una **singularidad escencial** o un polo de orden infinito. b_1 es **el residuo de** f en z_0, esto se escribe $b_1 = Res(f, z_0)$.

Definición 4.3.5 Sea f una función analítica con singularidad en z_0 y cuyos coeficientes en la expansión de Laurent son b_n. Si todos los b_n son cero, decimos que z_0 es una **singularidad removible**.

Definición 4.3.6 Una función que es analítica en una región A, excepto para los polos en A, es llamada **meromorfa en** A. La frase "f *es una función meromorfa*" significa que f es *meromorfa* en $\mathbb{C}$.

4.4. Métodos asintóticos

Con la teoría formal de las series de potencias vimos que podemos manipular recurrencias y resolver ecuaciones funcionales, tales como ecuaciones diferenciales, con series de potencias sin necesidad de revisar si las series resultantes eran convergentes o no. Si una serie converge y representa una función será una gran ventaja ya que se puede obtener información analítica acerca de la recurrencia con la cual podemos conocer qué tipo de crecimiento tendrán sus coeficientes.

A continuación estudiaremos algunas propiedades analíticas de las series de potencias y de las sucesiones de sus coeficientes.

Primero, dada una serie de potencias

$$f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n,$$

en la que ahora utilizamos la variable z para que se piense en una variable compleja.

Exactamente, ¿para qué conjunto de valores complejos de z converge la serie $f(z)$? Daremos la respuesta en términos de la sucesión de coeficientes $\{a_n\}_0^\infty$.

A continuación daremos la definición de límite superior, para después enunciar un teorema que servirá para responder la pregunta anterior.

Definición 4.4.1 Se dice que L es el límite superior de la sucesión $\{x_n\}$ si

a) L es finito y

i) para cada $\epsilon > 0$ todos excepto un conjunto finito de miembros de la sucesión satisfacen que $x_n < L + \epsilon$, y

ii) para cada $\epsilon > 0$, un conjunto infinito de elementos de la sucesión satisfacen que $x_n > L - \epsilon$, o

b) $L = +\infty$ y para cada $M > 0$, existe un n tal que $x_n > M$, o

c) $L = -\infty$ y para cada x, existe únicamente un conjunto finito de valores para n tales que $x_n > x$.

Si L es el límite superior de la sucesión $\{x_n\}_0^\infty$, escribimos $L = \text{lím}\, sup_{n\to\infty}\{x_n\}$, o simplemente $L = \text{lím}\, sup\{x_n\}$.

El límite superior tiene las siguientes propiedades:

- Cada sucesión de números reales tiene un y solo un límite superior que pertenece a los números reales, incluyendo al $\pm\infty$.
- Si una sucesión tiene un límite L, entonces L también es el límite superior de la sucesión.
- Si S es el conjunto de los puntos de acumulación de la sucesión $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$, entonces el lím $sup\{x_n\}$ es la cota superior más pequeña para los números en S.

Teorema 4.4.1 Existe un número R, $0 \leq R \leq +\infty$, llamado radio de convergencia de la serie $f(z)$, tal que la serie converge para todos los valores de z con $|z| < R$ y diverge para todo z tal que $|z| > R$. El valor de R está expresado en términos de la sucesión de coeficientes $\{a_n\}_0^{\infty}$ de la siguiente manera,

$$R = \frac{1}{\text{lím}\, sup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}} \qquad\qquad (1/0 = \infty; 1/\infty = 0).$$

Demostración

Dividiremos la demostración del teorema en tres valores posibles para R. Cuando $R = 0$, $R = \infty$ y $0 < R < \infty$. Primero supongamos que $0 < R < \infty$. Elegimos a z tal que $|z| < R$. Mostraremos que la serie converge en z.

Para $|z| < R$, podemos encontrar una $\epsilon > 0$ tal que

$$|z| < \frac{R}{1+\epsilon R}.$$

Para que R sea finito y diferente de cero, L debe ser finito y diferente de cero. Entonces, por el inciso a) de la definición de lím sup, sabemos que existe una N suficientemente grande tal que para todo $n > N$ se cumple que

$$R < \frac{1}{|a_n|^{1/n} - \epsilon}$$

$$\frac{1}{|a_n|^{1/n}} > \frac{R}{1+\epsilon R} \Rightarrow |a_n|^{1/n} < \frac{1}{R} + \epsilon.$$

Multiplicando por $|z|$ y elevando todo a la n,

$$|a_n||z|^n < \left\{ |z|(\frac{1}{R} + \epsilon) \right\}^n.$$

Por la definición de ϵ sabemos que $|z| < R/(1+\epsilon R) \Leftrightarrow \frac{1}{z} > \frac{1}{R} + \epsilon$, luego

$$|z|\frac{1}{R} + \epsilon < \frac{1}{|z|}|z|,$$

Sea $\alpha = \{|z|(\frac{1}{R} + \epsilon)\}$, por la desigualdad anterior tenemos que $\alpha < 1$ y por transitividad sabemos que

$$|a_n||z|^n < 1.$$

Entonces la serie $\sum a_n z^n$ converge absolutamente, por comparación con los términos de una serie geométrica convergente. Por lo que nuestra serie converge absolutamente en z, y por lo tanto lo mismo sucede para toda $|z| < R$.

Ahora, probaremos que la serie diverge si $|z| > R$. Como $|z| > R$, podemos elegir un $\epsilon > 0$ tal que si $\theta = |(z/R) - \epsilon z|$, entonces $\theta > 1$. Por la definición del límite superior, para una infinidad de valores de n tenemos que $|a_n|^{1/n} > (1/R) - \epsilon$. Luego, para esos valores de n,

$$|a_n z^n| > \left|\left(\frac{1}{R} - \epsilon\right)z\right|^n \theta^n$$

lo que crece sin cota superior ya que $\theta > 1$. Por lo tanto, esa subsucesión de términos de la serie de potencias no tiende a cero y en consecuencia la serie diverge.

Ahora, el caso en el que $R = 0$. No hay valores de z tales que $|z| < R$ por lo que en este caso solo hace falta revisar los valores de z tales que $|z| > R$. De manera similar al caso anterior, podemos elegir un ϵ tal que si

$$\theta = \left|\frac{z}{R} - \epsilon z\right|$$

tomando en cuenta que por convención $1/0 = \infty$ sabemos que $\theta = \infty$, entonces si

$$|a_n|^{1/n} > \frac{1}{R} - \epsilon \Rightarrow |a_n z|^n > \left|z\left(\frac{1}{R} - \epsilon\right)\right|^n = \theta^n$$

Conforme n crece θ^n crece sin cota, por lo tanto sabemos que cuando $n \to \infty$, $|a_n z|^n \neq 0$ y por lo tanto la serie diverge.

El último caso es $R = \infty$. No hay valores mayores por lo que nuevamente únicamente hará falta revisar los valores para z tales que $|z| < R$. Igual que anteriormente, podemos encontrar un $\epsilon > 0$ tal que

$$|z| < \frac{R}{1+\epsilon R} \Leftrightarrow 1 > |z|\left(\frac{1}{R} + \epsilon\right),$$

Tomando en cuenta que existe un N tal que para todo $n > N$ tenemos que $|a_n|^{1/n} < 1/R + \epsilon$, luego $|a_n||z|^n < \{|z|\left(\frac{1}{R} + \epsilon\right)\}^n$. Sea $\alpha = \{|z|(\frac{1}{R} + \epsilon)\}$, por la desigualdad anterior tenemos que $\alpha < 1$, y por la convención $1/\infty = 0$ y por transitividad sabemos que

$$|a_n||z|^n < 1,$$

luego la serie $\sum a_n z^n$ converge absolutamente, por comparación con los términos de una serie geométrica convergente. □

Teorema 4.4.2 Suponga que la serie de potencias $\sum a_n z^n$ converge para todo z en $|z| < R$, y sea $f(z)$ la suma. Entonces $f(z)$ es una función analítica para $|z| < R$. Si además la serie diverge para $|z| > R$, entonces la función $f(z)$ deberá tener al menos una singularidad en el círculo de convergencia $|z| = R$.

Es decir , una serie de potencias continúa siendo convergente hasta que algo se lo impide: una singularidad de la función representada.

Demostración
Si $f(z)$ no tiene singularidades en su círculo de convergencia $|z| = R$, entonces alrededor de cada punto del círculo podemos dibujar un disco abierto en el cual $f(z)$ sigue siendo analítica. Por el teorema de Heine-Borel, un número finito de estos discos cubre el círculo $|z| = R$, luego $f(z)$ debe seguir siendo analítica en algún disco más grande $z \leq R + \epsilon$. Por la desigualdad de Cauchy, los coeficientes de la serie de Taylor de $f(z)$ satisfacen que $|a_n| \leq M/(R+\epsilon)^n$, para toda n, y entonces la serie converge en un disco mayor, una contradicción. □

Una manera de encontrar el radio de convergencia de la expansión en serie de potencias alrededor del origen de una función $f(z)$ es buscar su singularidad más cercana al origen. Por ejemplo, la serie $\sum z^n$ converge si $|z| < 1$ y diverge si $|z| > 1$. Entonces la función representada deberá tener una singularidad en alguna parte del círculo $|z| = 1$. La función es $1/(1 - z)$ y es evidente que tiene una singularidad en $z = 1$.

Otro ejemplo. Tomando a la función $f(z) = 1/(2 - e^z)$. Supongamos que expandimos $f(z)$ en una serie de potencias alrededor de $z = 0$. ¿Cuál sería el radio de convergencia de la serie? De acuerdo al teorema, la serie converge en el disco más grande tal que $|z| < R$ en el cual $f(z)$ es analítica. La función únicamente deja de ser analítica en los puntos z tales que $e^z = 2$. Estos puntos son de la forma $z = \log 2 + 2k\pi i$, para un entero k y de ellos el más cercano al origen es $\log 2$. Por lo tanto $f(z)$ es analítica en el disco $|z| < \log 2$ y no en un disco mayor. Luego, el radio de convergencia de la serie es $R = \log 2$.

Veremos un último ejemplo antes de enunciar una proposición general. Tomando a la función $f(z) = z/(e^z - 1)$ con $(f(0) = 1)$, aproximaremos el tamaño de los

coeficientes de su expansión en serie de potencias alrededor del origen directamente de las propiedades analíticas de la función.
Considerando que $f(z)$ es analítica excepto en puntos donde $e^z = 1$, esto es en todos los puntos $z = 2\pi ki$ para $k \in \mathbb{Z}$. El más cercano al origen de estos puntos es precisamente el origen, con $k = 0$, sin embargo, $f(z)$ no es singular en $z = 0$ ya que, aunque el denominador es cero, el numerador también lo es y por la regla de L'Hopital

$$\lim_{z\to 0} \frac{z}{e^z - 1} \qquad \xrightarrow{L'Hôpital} \qquad \lim_{z\to 0} \frac{1}{e^z} = \frac{1}{1} = 1$$

sabemos que $f(0) = 1$ es una singularidad removible. Entonces la singularidad más cercana al origen está en $z = 2\pi i$.
La serie de potencias

$$\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

por lo que el radio de convergencia es $R = 2\pi$. Ahora, por el teorema (4.4.1),

$$\lim sup|a_n|^{1/n} = \frac{1}{2\pi}.$$

Para valores de n lo suficientemente grandes se cumple que

$$|a_n|^{1/n} < \frac{1}{2\pi} + \epsilon,$$

y para una colección infinita de valores de n tenemos,

$$|a_n|^{1/n} > \frac{1}{2\pi} - \epsilon.$$

Entonces, lo que hemos encontrado de estos coeficientes es que para cada $\epsilon > 0$, existe una N tal que

$$|a_n| < \left(\frac{1}{2\pi} + \epsilon\right)^n \qquad (n > N)$$

y que para una infinidad de valores de n,

$$|a_n| > \left(\frac{1}{2\pi} - \epsilon\right)^n.$$

Entonces los coeficientes de esta serie decrecen a cero con una rapidez exponencial, aproximadamente a la tasa de $1/(2pi)^n$, para una n grande. Esta información acerca de los coeficientes es muy buena considerando que no hemos calculado el valor de ninguno de ellos. El siguiente teorema es una proposición que generaliza lo visto en este ejemplo.

Teorema 4.4.3 Sea $f(z) = \sum a_n z^n$ analítica en alguna región que contiene al origen, dada la singularidad de $f(z)$ con módulo más pequeño tal que esté ubicada en $z_0 \neq 0$ y una $\epsilon > 0$ esté dada. Existe una N tal que para toda $n > N$ tenemos

$$|a_n| < \left(\frac{1}{|z_0|} + \epsilon\right)^n.$$

Y más aún, para una colección infinita de valores de n tenemos

$$|a_n| > \left(\frac{1}{|z_0|} - \epsilon\right)^n.$$

Supongamos que hemos encontrado la función generadora $f(z)$ de cierta sucesión de números procedente de algún problema de combinatoria. Ahora nos interesa estudiar el crecimiento asintótico de la sucesión, es decir, encontrar una función en términos de n que ofrezca una buena aproximación de los valores de la sucesión cuando $n \to \infty$.

A continuación esbozaremos una manera de obtener información asintótica de una función. Primero, *buscar la singularidad o singularidades de $f(z)$ más cercanas al origen* y la razón es la siguiente; $f(z)$ es analítica precisamente en el círculo más grande, centrado en el origen, que no contiene singularidades, encontramos el radio de ese círculo al encontrar las singularidades más cercanas al origen. Una vez que se tiene el radio, también se tiene el radio de convergencia de la la serie de potencias $f(z)$. Conociendo el radio de convergencia podremos obtener algo de información del tamaño de los coeficientes, cuando $n \to \infty$.

Ejemplo

La función $f(z) = e^z/(z-1)$ es meromorfa. Su única singularidad es en el punto $z_0 = 1$ y su parte principal es $e/(z-1)$. Por tanto la función $f(z) - e/(z-1)$ es analítica en todo el plano. Entonces, si $\{c_n\}$ y $\{d_n\}$ son los coeficientes cercanos al origen de las series de potencias $f(z)$ y de la función $e/(z-1)$ respectivamente, la diferencia $c_n - d_n$ es muy pequeña cuando $n \to \infty$, para toda $\varepsilon > 0$ y $n \to \infty$, se tiene que $|c_n - d_n| < \varepsilon^n$.[2] Por lo tanto, una buena aproximación de los coeficientes desconocidos de $f(z)$ puede ser calculada con los de $e/(z-1)$.

A continuación se verá detalladamente el ejemplo, empezando con la expansión de

[2]Teorema 2.25 Generatingfunctionology

$f(z)$

$$
\begin{aligned}
\frac{e^z}{(z-1)} &= \frac{e}{z-1}e^{z-1} \\
&= \frac{e}{z-1}\sum_{n\geq 0}\frac{1}{n!}(z-1)^n \\
&= \frac{e}{z-1}\{1+(z-1)+\frac{1}{2!}(z-1)^2+\dots\} \\
&= \frac{e}{z-1}+e+\frac{e}{2!}(z-1)+\frac{e}{3!}(z-1)^2+\dots
\end{aligned}
$$

Como $e/(z-1)$ es el único término de la serie con potencias negativas de z, es la parte principal. De manera equivalente podemos expandir a $f(z)$ de la siguiente manera,

$$
\begin{aligned}
\frac{e^z}{(z-1)} = \frac{e^z}{(-)(1-z)} &= -\frac{e^z}{(1-z)} \\
= -\frac{1}{1-z}e^z &= -\frac{1}{1-z}\sum_{n\geq 0}\frac{1}{n!}z^n \\
&= -\sum_{n\geq 0}\{1+1+1/2!+\cdots+1/n!\}z^n
\end{aligned}
$$

Por otro lado la expansión de $e/(z-1)$ es:

$$
\begin{aligned}
\frac{e}{(z-1)} &= -\frac{e}{(1-z)} \\
&= -e\sum_{n\geq 0}z^n \\
&= -e-ez-ez^2-ez^3-\cdots
\end{aligned}
$$

Entonces, el hecho de reemplazar la función con su parte principal ofrece, en un solo paso, la aproximación del verdadero coeficiente de z^n. Reemplazamos la n-ésima suma parcial de la serie de potencias de $-e$, con $-e$ misma. Es evidente que cuando $n\to\infty$, la aproximación es impresionantemente buena. La razón de esto es que al sustraer la parte principal de la función, expande su disco de analiticidad de un radio $=1$ a un radio $=\infty$.

Por el teorema (4.4.3), sus coeficientes son $O(\varepsilon^n)$ para cada ε positivo. Luego, los coeficientes de $f(z)$ son

$$= -e + O(\varepsilon^n) \qquad\qquad (n\to\infty)$$

□

En el ejemplo anterior sólo fue necesario sustraer una singularidad para expandir el radio de convergencia de 1 a ∞, consiguiendo una función entera. A continuación revisaremos el caso en el que hace falta sustraer más singularidades para aumentar el radio de convergencia, aunque a veces sólo sea ligeramente.

Si $f(z)$ es meromorfa en en cierta región R, sea z_0 un polo de $f(z)$ de orden r, $0 \leq r \geq \infty$. Entonces, en un disco centrado en z_0, $f(z)$ puede representarse

$$f(z) = \sum_{j=1}^{r} \frac{a_{-j}}{(z - z_0)^j} + \sum_{j=0}^{\infty} a_j (z - z_0)^j.$$

La parte principal de la expansión de $f(z)$ alrededor de la singularidad z_0 (la primera de las dos sumas), será representada por $PP(f; z_0)$. Sabemos que la función $f(z) - PP(f; z_0)$ es analítica en z_0. Esto quiere decir que removemos la singularidad al extraer la parte principal. Si además de z_0 existen otros polos $z_1, z_2, \ldots, z_s$ de $f(z)$ en el mismo disco, entonces la función

$$h(z) = f(z) - PP(f; z_0) - PP(f; z_1) - PP(f; z_0) - \cdots - PP(f; z_s)$$

es analítica en cada uno de los puntos $\{z_j\}_0^s$, y como $f(z)$ no tiene más puntos singulares entonces $h(z)$ es analítica en todo el círculo centrado en el origen y con radio R', con $R' > R$. Esto quiere decir, de nuevo por el teorema (4.4.3), que los coeficientes de la serie de potencias de $h(z)$ alrededor del origen no pueden crecer más rápido que

$$\left(\frac{1}{R'} + \varepsilon\right)^n$$

cuando $n \to \infty$. Luego, si $f \overset{spo}{\longleftrightarrow} \{a_n\}$ y

$$g(z) = PP(f; z_0) + PP(f; z_1) + PP(f; z_0) + \cdots + PP(f; z_s) \overset{spo}{\longleftrightarrow} \{b_n\}$$

entonces

$$a_n = b_n + O\Big(\Big(\frac{1}{R'} + \varepsilon\Big)^n\Big) \qquad (n \to \infty)$$

Ahora estudiaremos el comportamiento asintótico de los coeficientes de $f(z)$. Para ello veremos cuánto contribuye un polo de orden r al coeficiente de cada z^n en $f(z)$.

$$\begin{aligned}
PP(f; z_0) &= \sum_{j=1}^{r} \frac{a_{-j}}{(z-z_0)^j} \\
&= \sum_{j=1}^{r} \frac{(-1)^j a_{-j}}{z_0^j (1-(z/z_0))^j} \\
&= \sum_{j=1}^{r} \frac{(-1)^j a_{-j}}{z_0^j} \sum_{n\geq 0} \binom{n+j-1}{n} (z/z_0)^n \\
&= \sum_{n\geq 0} z^n \{ \sum_{j=1}^{r} \frac{(-1)^j a_{-j}}{z_0^{n+j}} \binom{n+j-1}{j-1} \}
\end{aligned}$$

Entonces, un polo de orden r en z_0, de una función f, contribuye

$$\sum_{j=1}^{r} \frac{(-1)^j a_{-j}}{z_0^{n+j}} \binom{n+j-1}{j-1}$$

al coeficiente de z^n en $f(z)$.

Los números de Bell Ordenados

Ahora veremos el comportamiento asintótico de los números de Bell ordenados definidos de la siguiente manera: un conjunto de n elementos tiene $\left\{ {n \atop k} \right\}$ particiones en k clases. Si importara el orden de las clases, únicamente de las clases y no de los elementos en ellas, entonces para el conjunto $[n]$ existen $k!\left\{ {n \atop k} \right\}$ particiones ordenadas en k clases. El número de Bell ordenado $\tilde{b}(n)$ es el número total de particiones ordenadas de $[n]$, es decir, $\tilde{b}(n) = \sum_k k!\left\{ {n \atop k} \right\}$. ¿Cómo será el crecimiento asintótico de los coeficientes de $\{\tilde{b}(n)\}$ cuando $n \to \infty$? Con el fin de encontrar una fórmula para estos números, multiplicamos cada lado de la ecuación

$$\sum_{1\leq k\leq n} \left\{ {n \atop k} \right\} y^k = e^{-y} \sum_{r\geq 1} \frac{r^n}{r!} y^r.$$

por e^{-y} e integramos de 0 a ∞. Esto da el resultado

$$\tilde{b}(n) = \sum_{r\geq 0} \frac{r^n}{2^{r+1}}.$$

Entonces la función generadora exponencial de los números de Bell ordenados es

$$f(z) = \sum_{n\geq 0} \frac{\tilde{b}(n)}{n!} z^n = \frac{1}{2-e^z}.$$

Las singularidades de $f(z)$ están en todos los puntos $\log 2 \pm 2\pi ki$ para todo entero k. La parte principal en el polo $z_0 = \log 2$ es $(-1/2)/(z - \log 2)$. Esa parte principal por si sola contribuye

$$\frac{1}{2(\log 2)^{n+1}}$$

al coeficiente de z^n y como no hay otras singularidades en $f(z)$ en el círculo de radio $\log 2$ centrado en el origen, entonces

$$h(z) = f(z) - \frac{(-1/2)}{(z - \log 2)}$$

es analítica en el círculo más grande que se extiende del origen a $\log 2 + 2\pi i$. El radio de ese círculo es

$$\rho = \sqrt{(\log 2)^2 + 4\pi^2} = 6.321$$

Por lo tanto los coeficientes de $h(z)$ son $O((.16)^n)$. Uniendo todo, hemos mostrado que los números de Bell ordenados $\tilde{b}(n)$ tienen la forma

$$\tilde{b}(n) = \frac{1}{2(\log 2)^{n+1}} n! + O((.16)^n n!),$$

Que es bastante saber, considerando lo poco que se requirió para obtenerlo. Tantos términos como se desee, de la expansión asintótica, pueden ser producidos de las partes principales de $f(z)$ en sus polos restantes, tomando en orden no descendiente sus valores absolutos. A continuación se muestra una tabla de algunos de los valores de n, $\tilde{b}(n)$ y $n!/(2(\log 2)^{n+1})$. Vemos que la aproximación es asombrosamente buena.

n	1	2	3	4	5	6
$\tilde{b}(n)$	1	3	13	75	541	4683
$n!/(2(\log 2)^{n+1})$	1.040	3.0027	12.9962	74.998	541.0015	4683.001

n	7	8	9	10
$\tilde{b}(n)$	47293	545835	7087261	102247563
$n!/(2(\log 2)^{n+1})$	47292.998	545834.997	7087261.001	102247563.005

Básicamente lo que hemos hecho es usar los coeficientes de Taylor de la serie para $1/(2(\log 2) - z)$ como una aproximación para los coeficientes de la serie para $1/(2 - e^z)$.

Conclusiones

En este trabajo se muestra a las funciones generadoras como la forma más versátil de entregar un resultado a un problema de enumeración combinatoria, en comparación con una solución en fórmula cerrada, relación de recurrencia o aproximación. Se muestra cómo a partir de una solución en forma de función generadora, en un problema de enumeración, es posible encontrar el número de elementos de cierto conjunto finito, obtener una recurrencia por medio de la diferenciación de dicha función generadora, o llegar a una fórmula explícita a través del análisis de los coeficientes en la expansión de la función.

De igual forma, en el escrito se pudo evidenciar que las funciones generadoras son de gran utilidad, si se cuenta con una relación de recurrencia como respuesta a cierto problema de enumeración, y se requiere determinar la sucesión que satisface la recurrencia. El método más general para la solución de relaciones de recurrencias es por medio de funciones generadoras, como se presenta en la sección 2.7.

Considerando una función generadora como una función de variable compleja, es posible utilizar métodos analíticos para conocer un valor aproximado de $f(n)$ o conocer el tipo de crecimiento asintótico cuando $n \to \infty$. Lo anterior representa otra manera en la cual se puede obtener un beneficio importante a partir de una solución en forma de función generadora en un problema de enumeración combinatoria.

Un resultado importante, que caracteriza a este trabajo, es que es una recopilación de la teoría elemental necesaria para la utilización de funciones generadoras en la enumeración. En principio, se advierte de la estructura de anillo unitario sobre las funciones generadoras, se presentan operaciones básicas, pero importantes sobre las misma, y se ofrece una colección grande de funciones generadoras utilizadas en la matemática discreta. Luego, esta compilación, comprende una serie de ejemplos de estructuras discretas, seleccionadas cuidadosamente, sobre las cuales se aplica la teoría de funciones generadoras para resolver problemas de enumeración exacta. Por último, se construye una introducción a la teoría analítica para la enumeración asintótica.

Como investigación futura, sería interesante profundizar en las aplicaciones que tiene la teoría analítica de funciones generadoras y los diferentes métodos de análisis de singularidades. Por otro lado, para complementar este trabajo se podría estudiar la Teoría de Pólya, que por medio de funciones generadoras permite resolver problemas de conteo y enumeración de clases de equivalencia determinadas por la acción de algún grupo de permutaciones sobre un conjunto de objetos.

Bibliografía

[1] F. Bergeron. *Algebraic Combinatorics and Covariant Spaces*. A K Peters, Ltd., Wellesley, Massachusetts, 2009.

[2] F. Bergeron, G. Labelle, and P. Leroux. *Combinatorial Species and Tree-like Structures*. Cambridge University Press, United Kingdom, 1997.

[3] J. A. Bondy and U. Murty. *Graph Theory With Applications*. Elsevier Science Ltd/North-Holland, 1976.

[4] J. A. Bondy and U. Murty. *Graph Theory (Graduate Texts in Mathematics)*. Springer, London, 2011.

[5] M. Bóna. *Combinatorics of Permutations, Second Edition*. CRC Press, Boca Raton, FL, 2012.

[6] A. Coolen and S. Rabello. Generating functional analysis of complex formation and dissociation in large protein interaction networks. 2009.

[7] R. Diestel. *Graph Theory (Graduate Texts in Mathematics)*. Springer, Germany, 2005.

[8] W. T. K. Duncan Farquharson Gregory, Robert Leslie Ellis and N. M. Ferrers. *The Cambridge and Dublin Mathematical Journal*. E. Johnson, 1951.

[9] P. Flajolet and R. Sedgewick. *Analytic Combinatorics*. Cambridge University Press, United Kingdom, 2009.

[10] F. Gelis and R. Venugopalan. Particle production in field theories coupled to strong external sources ii. generating functions. 2006.

[11] I. P. Goulden and D. M. Jackson. *Combinatorial Enumaration*. Dover Publications Inc., Mineola, New York, 2003.

[12] I. P. Goulden and D. M. Jackson. *Combinatorial Enumeration*. Dover Publications, Inc., 2004.

[13] R. L. Graham, D. E. Knuth, and O. Patashnik. *Concrete mathematics : a foundation for computer science, Second Edition*. Addison-Wesley, United States of America, 1998.

[14] T. M. K. Granino Arthur Korn. *Mathematical handbook for scientists and engineers: definitions, theorems, and formulas for reference and review*. Dover Publications, Inc., 2000.

[15] L. Han. Generating function in quantum mechanics: An application to counting problems. 2007.

[16] F. Harary and E. M. Palmer. *Graphical Enumeration*. Academic Press, New York and London, 1973.

[17] M. J. H. Jerrold E. Marsden. *Análisis Básico de Variable Compleja*. Trillas, 2010.

[18] S. K. Lando. *Lectures on Generating Functions*. American Mathematical Society, USA, 2002.

[19] N. A. Loehr. *Bijective Combinatorics*. CRC Press, Boca Raton, 2011.

[20] L. Lovász. *Combinatorial Problems and Exercises*. AMS Chelsea Publishing, Providence, Rhode Island, 2007.

[21] M. Marcolli. Number theory in physics. 2010.

[22] R. Marino and R. Eichhorn. Entropy production of a brownian ellipsoid in the overdamped limit. 2015.

[23] C. G. Mathias Linkerhand. Generating functionals for autonomous latching dynamics in attractor relict networks. 2013.

[24] S. Pemmaraju and S. Skiena. *Computational discrete mathematics : combinatorics and graph theory with Mathematica*. Cambridge University Press, New York, 2003.

[25] S. PENG. The pricing mechanism of contingent claims and its generating function. 2012.

[26] M. S. R.E.Caflisch, F. Gargano and V. Sciacca. Complex singularities and pdes. 2015.

[27] F. Reif. *Fundamentals of Statistical and Thermal Physics*. McGraw Hill Book Company, Berkeley California, 1965.

[28] J. Riordan. *Introduction to Combinatorial Analysis*. Dover Publications, Inc, Mineola, New York, 2002.

[29] F. S. Roberts and B. Tesman. *Applied Combinatorics, Second Edition*. CRC Press, Boca Raton, FL, 2009.

[30] C. G. Rodrigo Echeveste. Generating functionals for computational intelligence: The fisher information as an objective function for self-limiting hebbian learning rules. 2014.

[31] R. P. Stanley. *Enumerative Combinatorics: Volume 1, Second Edition*. Cambridge University Press, New York, NY, 2012.

[32] J. H. van Lint and R. M. Wilson. *A Course in Combinatorics, Second Edition*. Cambridge University Press, United Kingdom, 2001.

[33] M. P. R. T. Vladislav V. Kravchenko1. On bers generating functions for first order systems of mathematical physics. 2010.

[34] H. S. Wilf. *generatingfunctionology*. A K Peters, Ltd., Wellesley, Massachusetts, 1989.