



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

---

---

FACULTAD DE CIENCIAS

Segunda cuantización de un Hamiltoniano  
efectivo para la Cromodinámica Cuántica a  
bajas energías

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:  
FÍSICA

PRESENTA:  
DANNA OASSIS LÓPEZ PÉREZ

DIRECTOR DE TESIS:  
DR. PETER OTTO HESS BECHSTEDT



2016

Ciudad Universitaria, D. F.



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

1.Datos del alumno	1.Datos del alumno
Apellido paterno	López
Apellido materno	Pérez
Nombres	Danna Oassis
Teléfono	56 01 27 35
Universidad Nacional	Universidad Nacional
Autónoma de México	Autónoma de México
Facultad de Ciencias	Facultad de Ciencias
Carrera	Física
Número de cuenta	410042847
2.Datos del tutor	2.Datos del tutor
Grado	Doctor
Nombres	Peter Otto
Apellido paterno	Hess
Apellido materno	Bechstedt
3.Datos del sinodal 1	3.Datos del sinodal 1
Grado	Doctora
Nombre	Myriam
Apellido paterno	Mondragón
Apellido materno	Ceballos
4.Datos del sinodal 2	4.Datos del sinodal 2
Grado	Doctora
Nombre	Gabriela
Apellido paterno	Murguía
Apellido materno	Romero
5.Datos del sinodal 3	5.Datos del sinodal 3
Grado	Doctor
Nombre	Roelof
Apellido paterno	Bijker
Apellido materno	Bijker
6.Datos del sinodal 4	6.Datos del sinodal 4
Grado	Doctor
Nombre	Genaro
Apellido paterno	Toledo
Apellido materno	Sánchez
7.Datos del trabajo escrito	7.Datos del trabajo escrito
Título	Segunda cuantización de un Hamiltoniano efectivo para la Cromodinámica Cuántica a bajas energías
Número de páginas	82
Año	2016

# Agradecimientos

Al *Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología* por el estímulo económico otorgado por ser ayudante de investigador.

A mi asesor, *Peter Otto Hess*, por su apoyo, paciencia y tiempo distribuido en reuniones y clases que me ayudaron a entender un poco más la utilidad y belleza de la teoría de grupos.

A *Arturo y Tochtli*, por ser mis segundos asesores y ayudarme a resolver dudas cuando no veía el camino para entender algo.

A *mi mamá y mis hermanos*, por su infinito apoyo a lo largo todos estos años, recordándome que no estoy sola y que juntos podemos armar el sistema solar en una noche.

A *mi papá*, porque a pesar de la distancia intentas ser parte de mi vida.

A *Tere y José Luis* por ser un ejemplo de vida y enseñarme que el apoyo incondicional puede darse incluso a aquellos con los que no tenemos lazos de sangre.

Pero sobre todo a *Domingo*, por ayudarme a ver el mundo de una manera diferente y por que sin tu apoyo y amor esta tesis no existiría.



# Índice general

<b>Introducción</b>	<b>1</b>
<b>1. Cromodinámica Cuántica a bajas energías</b>	<b>5</b>
1.1. Cromodinámica clásica . . . . .	7
1.2. Hamiltoniano a bajas energías . . . . .	11
1.3. Cuantización Canónica . . . . .	16
<b>2. Modelo de Bolsa del MIT</b>	<b>19</b>
2.1. Condición de frontera del MIT . . . . .	20
2.2. Ecuación de Dirac en potencial central . . . . .	22
2.3. Ecuación de Dirac en cavidad esférica . . . . .	26
<b>3. Desarrollo en modos de cavidad esférica</b>	<b>31</b>
3.1. Simetría SU(2) y SU(3) . . . . .	34
3.2. Índice de pseudo-espín . . . . .	36
<b>4. Sector de quarks</b>	<b>39</b>
4.1. Sector libre . . . . .	40
4.2. Sector de interacción . . . . .	41
<b>5. Conclusiones</b>	<b>57</b>
<b>A. Modos de cavidad esférica de anti-quarks</b>	<b>59</b>
<b>B. Álgebra de SU(2) y SU(3)</b>	<b>65</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>73</b>



# Introducción

La cromodinámica cuántica es la parte del modelo estándar que describe las interacciones fuertes entre los quarks y gluones que conforman a los hadrones. Es una teoría de campo no abeliana con simetría interna  $SU(3)$  que da lugar a tres cargas fuertes que reciben el nombre de color y son análogas a la carga eléctrica del electromagnetismo. Los gluones son el análogo fuerte de los fotones en la electrodinámica cuántica con la diferencia de que los gluones poseen carga.

La cromodinámica cuántica exhibe dos características fundamentales: confinamiento y libertad asintótica. El confinamiento es el mecanismo por el cual los quarks y gluones permanecen siempre en estados ligados y nunca como partículas libres; de esa manera todos los observables (estados hadrónicos) son estados de color neutro y por ende se transforman trivialmente bajo el grupo  $SU(3)$ . Sin embargo, no se ha podido demostrar partiendo del Lagrangiano invariante  $SU(3)$  que se mostrará en el capítulo 1. Por otro lado la libertad asintótica nos dice que a altas energías los quarks y gluones interactúan débilmente formando un plasma de quark-gluones.

La magnitud de la interacción entre los quarks y gluones está determinada por la llamada constante de acoplamiento. Gracias a la libertad asintótica sabemos que esta constante es pequeña a altas energías permitiéndonos estudiar la cromodinámica cuántica de forma perturbativa; sin embargo, sabemos que a bajas energías la constante de acoplamiento es grande por lo que el confinamiento y el estudio de estados hadrónicos son fenómenos de naturaleza no perturbativa.

Existen distintas técnicas para realizar estudios no perturbativos de la cromodinámica cuántica, entre las más populares se encuentran: lattice-QCD y teoría perturbativa quiral. En el presente trabajo no discutiremos



ninguna de estas técnicas sino que trabajaremos bajo un formalismo en el cual se utilizan técnicas para sistemas de muchos cuerpos, siguiendo de cerca los trabajos [1], [2] y [3].

Para estudiar no perturbativamente a la cromodinámica cuántica los trabajos previamente mencionados siguen la línea de trabajo presentada a continuación:

1. Establecer un Hamiltoniano efectivo a bajas energías. Es decir, identificar la parte no perturbativa dominante del Hamiltoniano de la cromodinámica cuántica.
2. Escribir este Hamiltoniano efectivo en el formalismo de segunda cuantización. En los trabajos mencionados la base utilizada es la del oscilador armónico.
3. Utilizar técnicas para sistemas de muchos cuerpos como el método de Tamm-Dankoff (TDA) y la aproximación de fase aleatoria (RPA) para estudiar las propiedades de estados ligados de quarks.

Haciendo uso de este formalismo ha sido posible estudiar analítica y semi-analíticamente sistemas de quarks y gluones a bajas energías [3]. La clave radica en expresar adecuadamente el Hamiltoniano efectivo para posteriormente poder utilizar las técnicas en sistemas de muchos cuerpos que han tenido tanto éxito en física nuclear y materia condensada. Podemos contrastar esto con cálculo en redes (*lattice-qcd*) en donde es necesario realizar cálculos computacionalmente costosos, en nuestro caso buscamos reducir los cálculos computacionales al mínimo.

En el presente trabajo trataremos únicamente los primeros dos puntos anteriormente expuestos. Realizaremos sólo una discusión sobre el primer punto mientras que una variación del segundo punto será la parte central del trabajo. En lugar de utilizar la base del oscilador armónico para escribir el Hamiltoniano efectivo en su forma de segunda cuantización utilizaremos la llamada base de modos de cavidad esférica, particularmente trataremos únicamente el sector de quarks dejando de lado cualquier interacción gluónica. Esta base surge como solución a la ecuación de Dirac en un pozo de potencial esférico por lo que es físicamente relevante ya que modela fermiones confinados en una bolsa (el potencial esférico) dándonos así una base con la cual trabajar que es fenomenológicamente acorde con lo esperado.

En el capítulo 1 realizaremos un breve resumen del formalismo de la cromodinámica cuántica como teoría de campo y mostraremos la idea general de cómo llegar al Hamiltoniano efectivo utilizando la norma de Coulomb.

En el capítulo 2 obtendremos las soluciones a la ecuación de Dirac para un potencial esférico y en particular para un pozo con las llamadas condiciones de frontera del MIT, en donde pedimos que la corriente de color sea cero fuera de la bolsa imponiendo así el confinamiento.

En el capítulo 3 estudiaremos la expansión de los campos fermiónicos de quarks en función de los modos de cavidad esférica y discutiremos las simetrías de color y sabor que se considerarán.

El capítulo 4 es el punto central de la tesis y en él escribiremos en el formalismo de segunda cuantización los términos del sector de quarks del Hamiltoniano efectivo en la base de modos de cavidad esférica.

Concluiremos el trabajo en el capítulo 5 con una discusión de los resultados obtenidos así como las perspectivas para posibles trabajos futuros.



# Capítulo 1

## Cromodinámica Cuántica a bajas energías

La cromodinámica cuántica (QCD por sus siglas en inglés) es en la actualidad la principal candidata como teoría capaz de describir a la fuerza fuerte [4]. Es decir describe las interacciones fuerte entre quarks y gluones, partículas fundamentales del modelo estándar que conforman los hadrones (protón, neutrón, pión, etc).

Al igual que la electrodinámica cuántica (QED por sus siglas en inglés) la QCD es una teoría de norma, sin embargo difieren en el hecho de que la QCD es una teoría cuántica de norma no-abeliana. Para entender esto adecuadamente primero debemos recordar qué es una teoría de norma y para ello discutiremos brevemente en qué consiste la formulación Lagrangiana de una teoría de campos.

En teoría clásica de campos, e.g. electrodinámica de Maxwell, una de las posibles formas de especificar una teoría es comenzar definiendo la densidad Lagrangiana  $\mathcal{L}$ , la cual es una función de los campos que caracterizan la teoría (e.g. el potencial electromagnético en electrodinámica clásica), y presenta las siguientes dependencias funcionales:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi_a, \partial_\mu \phi_a, t), \tag{1.1}$$

donde  $\phi_a$  es un campo que en principio puede tener diversos tipos de índices (e.g. un campo vectorial tiene índices de espacio tiempo, etc).

Una vez definida la densidad Lagrangiana es posible obtener la dinámica de la teoría utilizando el principio de mínima acción. Éste consiste en minimizar la acción  $S$  que es un funcional definido como:

$$S = \int d^4x \mathcal{L}(\phi_a, \partial_\mu \phi_a, t). \quad (1.2)$$

Las ecuaciones de movimiento, conocidas comúnmente como ecuaciones de Euler-Lagrange, se obtienen al pedir que  $\delta S = 0$  y están dadas por:

$$\partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_a)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_a} = 0. \quad (1.3)$$

Análogamente es posible utilizar el formalismo Hamiltoniano (que será discutido más adelante al momento de cuantizar la teoría), sin embargo la formulación Lagrangiana tiene la ventaja de que la invariancia bajo el grupo de Lorentz puede verse explícitamente al momento de construir el Lagrangiano. Esto permitirá construir una teoría naturalmente relativista.

Así mismo, es posible pedir que el Lagrangiano tenga simetrías adicionales a la del grupo de Lorentz. En específico, cuando pedimos que el Lagrangiano sea invariante ante transformaciones locales de los campos bajo un grupo continuo de simetrías, decimos que la teoría que este Lagrangiano describe es una teoría invariante de norma. Cuando el grupo continuo es (no-)abeliano se dice que la teoría es (no-)abeliana. Esta invariancia local induce ciertas libertades a la teoría que posteriormente hay que remover; a esto se le conoce como “fijar la norma” y un ejemplo de ello son las normas de Lorentz ( $\partial_\mu A^\mu = 0$ ) y Coulomb ( $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ ) para el potencial electromagnético en QED, las cuales nos permiten definir a  $A^\mu$ .

El grupo de simetría correspondiente a la QCD es el grupo SU(3). Físicamente esta simetría está relacionada a la invariancia de las interacciones fuertes bajo cambios de color de los quarks, la carga de color de los quarks es el equivalente fuerte a la carga eléctrica cuyo grupo de simetría es U(1), con la diferencia de que existen tres diferentes tipos de color. Recordemos que la asignación de este nuevo grado de libertad surgió de la necesidad de poder tener estados ligados de 3 quarks (bariones) en donde éstos pudieran encontrarse en un estado cuántico aparentemente idéntico sin que el principio de Pauli se viole, ya que los quarks son fermiones.

## 1.1. Cromodinámica clásica

Para hablar de la cromodinámica cuántica primero es necesario construir un Lagrangiano dentro de la teoría clásica de campos que sea invariante de norma local no-abeliano SU(3). Posteriormente será posible cuantizar la teoría clásica resultante.

Además del color, los quarks tienen una propiedad que se conoce como sabor y actualmente sabemos de la existencia de por lo menos 6 diferentes sabores. Debido a que los quarks son partículas con espín  $\frac{1}{2}$  es posible utilizar como punto de partida la densidad Lagrangiana de un campo de fermiones libres que evolucionan de acuerdo a la ecuación de Dirac:

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi}(r)_{cf} (i\gamma^\mu \partial_\mu \delta_{cc'} - m\delta_{cc'}) \Psi(r)_{c'f}, \quad (1.4)$$

donde los campos  $\Psi_{c'f}(r)$  y  $\bar{\Psi}_{cf}(x) = \Psi_{cf}(r)\gamma^0$  representan los campos de quarks y antiquarks respectivamente con índices espacio-temporales  $\mu = 0, 1, 2, 3$ ; de color  $c, c' = 1, \dots, N_c$ ; de sabor  $f = 1, \dots, N_f$ ; y espinoriales que no están escritos explícitamente pero corren de 1 a 4. También hay que mencionar que  $\eta^{\mu\nu}$  es la métrica de Minkowsky y  $\gamma^\mu$  son las llamadas matrices de Dirac que satisfacen el álgebra de Clifford:

$$\{\gamma^\nu, \gamma^\mu\} = 2\eta^{\mu\nu}. \quad (1.5)$$

Como mencionamos anteriormente buscamos que el Lagrangiano (1.4) se mantenga invariante ante transformaciones locales de la forma:

$$\Psi(r)_{cf} \rightarrow e^{-i\alpha^a(r)T^a} \Psi(r)_{cf}, \quad y \quad (1.6)$$

$$\bar{\Psi}(r)_{cf} \rightarrow e^{i\alpha^a(r)T^a} \bar{\Psi}(r)_{cf}, \quad (1.7)$$

con  $\alpha^a$  los parámetros de la transformación y  $T^a$  los generadores del grupo de simetría SU(3).

El grupo de simetría  $SU(3)$  cuenta con 8 generadores, lo que quiere decir que la suma de los índices  $a$  en las expresiones (1.6) y (1.7) corre de 1 a 8, además, los generadores  $T^a$  satisfacen el álgebra:

$$[T^a, T^b] = i f^{abd} T^d. \quad (1.8)$$

Esta relación es conocida como el álgebra de Lie del grupo y los coeficientes  $f^{abc}$  son las llamadas constantes de estructura.

La densidad Lagrangiana mostrada en (1.4) no es invariante ante la transformación, en particular podemos observar que del término que contiene la derivada

$$\partial_\mu \Psi(r)_{cf} \rightarrow (e^{-i\alpha^a(r)T^a})_{cc'} \partial_\mu \Psi(r)_{c'f} - i(T^a \partial_\mu \alpha^a(r) e^{i\alpha^a(r)T^a})_{cc'} \Psi(r)_{c'f}, \quad (1.9)$$

se obtiene un término extra que destruye la invariancia, este término está asociado a la derivada de los parámetros de la transformación  $\alpha^a$ .

Para eliminar el término extra que resulta de aplicar la transformación es necesario, de forma análoga a lo realizado en la electrodinámica cuántica, introducir una derivada modificada  $D_\mu$ , que cumpla con:

$$D_\mu \Psi(r)_{cf} \rightarrow e^{-i\alpha^a(r)T^a} D_\mu \Psi(r)_{cf}. \quad (1.10)$$

Con esto en mente se puede definir la llamada derivada covariante  $D_{\mu, cc'}$ :

$$D_{\mu, cc'} \equiv \partial_\mu \delta_{cc'} - ig T_{cc'}^a V_\mu^a(r), \quad (1.11)$$

en donde hemos introducido un campo vectorial  $V_\mu^a(r)$  con índices de color  $a$  ( $a = 1, \dots, 8$ ) y componentes espacio-temporales  $\mu$  ( $\mu = 0, 1, 2, 3$ ), el cual pedimos se transforme de la siguiente manera:

$$V_\mu^a(r) \rightarrow V_\mu^a(r) - \frac{1}{g} \partial_\mu \alpha^a(r), \quad (1.12)$$

donde  $g$  es una constante de acoplamiento. Físicamente el campo vectorial representará a los gluones, por lo que habrá 8 diferentes tipos de gluones, cada uno asociado a uno de los índices de color del campo. Debido a que los gluones se encuentran asociados a un campo vectorial, como todos los portadores de carga en una teoría de norma, estos tendrán espín igual a 1.

Haciendo uso de esta nueva derivada, la derivada covariante (1.11), se obtiene un término extra en el Lagrangiano que será un término de interacción, por lo que el Lagrangiano queda escrito como:

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi}(r)_{cf} (i\gamma^\mu \partial_\mu \delta_{cc'} - m\delta_{cc'}) \Psi(r)_{c'f} - g (\bar{\Psi}(r)_{cf} \gamma^\mu T_{cc'}^a \Psi(r)_{c'f}) V_\mu^a. \quad (1.13)$$

Sin embargo la densidad Lagrangiana presentada en (1.13) aún no es invariante de norma, para probarlo basta con hacer una transformación infinitesimal como la mostrada a continuación:

$$\Psi(r)_{cf} \rightarrow [1 - i\alpha^a(r)T^a] \Psi(r)_{cf}. \quad (1.14)$$

Al fijarnos en el término de interacción observamos que surge un término extra no deseado asociado a la no-conmutatividad de los generadores de SU(3),

$$\begin{aligned} (\bar{\Psi}(r)_{cf} \gamma^\mu T_{cc'}^a \Psi(r)_{c'f}) &\rightarrow (\bar{\Psi}(r)_{cf} \gamma^\mu T_{cc'}^a \Psi(r)_{c'f}) \\ &\quad - i\alpha^b(r) \bar{\Psi}(r)_{cf} \gamma^\mu (T^a T^b - T^b T^a)_{cc'} \Psi(r)_{c'f}. \end{aligned} \quad (1.15)$$

Este término extra se puede escribir como:

$$f^{abd} \alpha^b(r) (\bar{\Psi}(r)_{cf} \gamma^\mu \Psi(r)_{c'f}). \quad (1.16)$$

Para eliminar este término extra es necesario redefinir la forma en la que el campo se transforma, por lo que ahora pedimos que:

$$V_\mu^a(r) \rightarrow V_\mu^a(r) - \frac{1}{g} \partial_\mu \alpha^a(r) + f^{abd} \alpha^b(r) V_\mu^d(r). \quad (1.17)$$



Si buscamos darle sentido físico a todos los campos dentro de la densidad Lagrangiana necesitamos añadir un término cinético para los gluones (de la misma manera que en QED se hace para el fotón) y este nuevo término cinético debe preservar la invarianza de  $\mathcal{L}$ . Bajo estas consideraciones la densidad Lagrangiana invariante de norma para la cromodinámica cuántica sería:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \bar{\Psi}(r)_{cf} (i\gamma^\mu \partial_\mu \delta_{cc'} - m\delta_{cc'}) \Psi(r)_{c'f} - g (\bar{\Psi}(r)_{cf} \gamma^\mu T_{cc'}^a \Psi(r)_{c'f}) V_\mu^a(r) \\ & - \frac{1}{4} V_{\mu\nu}^a(r) V^{a,\nu\mu}(r). \end{aligned} \quad (1.18)$$

Donde el último término es el término cinético de gluones con  $V_{\mu\nu}^a$ , dado por:

$$V_{\mu\nu}^a(r) = \partial_\mu V_\nu^a(r) - \partial_\nu V_\mu^a(r) + gf^{abd} V_\mu^b(r) V_\nu^d(r). \quad (1.19)$$

Es posible hacer una analogía a los campos eléctrico y magnético de la QED, obteniendo un campo “cromoelectrico”  $E_i^a$  y uno “cromomagnético”  $B_i^a$ :

$$E_i^a \equiv iV_{i4}^a = -\dot{V}_i^a - \nabla_i V_0^a + gf^{abd} V_0^b V_i^d, \quad (1.20)$$

$$\epsilon_{ijk} B_k^a \equiv V_{ij}^a = \nabla_i V_j^a - \nabla_j V_i^a + gf^{abd} V_i^b V_j^d. \quad (1.21)$$

También es posible obtener las ecuaciones de movimiento para el Lagrangiano (1.18), siendo éstas:

$$\begin{aligned} (i\gamma^\mu D_\mu - m) \Psi_{cf}(r) &= 0; \quad \text{y} \\ \partial_\mu V^{a,\mu\nu}(r) + gf^{abd} V_\mu^b(r) V^{d,\mu\nu}(r) - g\bar{\Psi}_{cf}(r) \gamma^\nu T_{cc'}^a \Psi_{c'f}(r) &= 0. \end{aligned} \quad (1.22)$$

Es importante notar que en las ecuaciones (1.22) existe un término de autointeracción para los gluones y ello se debe a que, a diferencia de la partícula portadora en la QED (el fotón), los gluones sí presentan carga de color. Otra característica notable es la ausencia de un término de masa para los gluones, esto se debe a que introducir dicho término rompe la invarianza de norma local al hacer las transformaciones (1.6), (1.7) y (1.17). De igual forma se observa que los campos de quarks evolucionan mediante una ecuación de Dirac acoplada con los campos gluónicos.

## 1.2. Hamiltoniano a bajas energías

Ahora buscaremos estudiar la teoría cuantizada de forma canónica a bajas energías por lo que primero debemos traducir la densidad Lagrangiana al Hamiltoniano adecuado para los sistemas que buscamos estudiar, y posteriormente cuantizar esa teoría.

Recordemos que en el formalismo Hamiltoniano la información del sistema está contenida en el Hamiltoniano, el cual se obtiene a partir de una transformación de Legendre del Lagrangiano definida como:

$$H = \int d\mathbf{r} \mathcal{H} = \int d\mathbf{r} \left[ \pi^a \dot{\phi}^a - \mathcal{L} \right], \quad (1.23)$$

donde  $\mathcal{H}$  es la llamada densidad Hamiltoniana y  $\pi^a$  es el momento canónico asociado al campo  $\phi^a$  definido como:

$$\pi^a = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}^a}. \quad (1.24)$$

Sin embargo, para escribir el Hamiltoniano en una teoría de norma es necesario primero fijar ésta, de otra forma la transformación no estará bien definida debido a la libertad interna de la teoría [5]. Esto quiere decir que hay que imponer alguna condición funcional sobre  $V_\mu^a$  de forma que quede definido de forma única. Ejemplos de ello son la norma axial temporal  $V_0^a = 0$ , norma axial espacial  $V_i^a = 0$  (con  $i$  cualquiera de las componentes espaciales) y la norma de Coulomb  $\nabla_i A_i^a = 0$ .

Una norma deseable para trabajar es la de Coulomb ya que los campos dinámicos resultantes de esta condición están asociados a los campos cro-moeléctrico y cromomagnético, los cuales son campos físicos. Como veremos más adelante es en esta norma en la que el Hamiltoniano a bajas energías ha sido estudiado de forma no perturbativa [6]. El problema es que no es trivial escribir el Hamiltoniano bajo esta norma de forma directa por lo que es necesario realizar un procedimiento alternativo. A continuación explicaremos conceptualmente los pasos a seguir para lograrlo.

Comenzaremos por obtener el Hamiltoniano en la norma axial temporal y posteriormente transformaremos el campo a la norma de Coulomb. Con

esto en mente, la densidad Hamiltoniana en la norma axial temporal queda escrita como [3]:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}(\Pi^a \Pi^a + B^a B^a) - g \bar{\Psi} \gamma V^a T_{cc'}^a \Psi_{c'f} + \bar{\Psi}_{cf} (-i\gamma \nabla + m) \Psi_{cf}, \quad (1.25)$$

donde el momento canónico de  $\Psi$  está dado por  $i\Psi^\dagger$ ,  $\Pi^a = -E^a$  con  $E^a$  y  $B^a$  los campos cromoelectrónicos y cromomagnéticos definidos en (1.20) y (1.21) respectivamente.

Pasar de la norma axial-temporal a la norma de Coulomb no es trivial; en el trabajo de N. H. Christ y T. D [5]. Lee se muestra cómo pasar de la norma axial-temporal a una norma arbitraria  $\chi(A_i)$ , conservando la simetría SU(N), donde  $A_i(r)$  representa el campo asociado a la nueva norma y  $\chi(A_i)$  es la condición funcional impuesta.

Este cambio de norma se logra al hacer una transformación del tipo:

$$\begin{aligned} V_i &= u A_i u^\dagger + \frac{i}{g} u \nabla_i u^\dagger \\ A_0 &= -\frac{i}{g} u^\dagger u, \end{aligned} \quad (1.26)$$

donde  $V_i$  es el potencial en la norma axial-temporal,  $A_\mu$  es el potencial en la norma de Coulomb y  $u$  es una transformación unitaria en SU(3) definida por 8 parámetros  $\phi$ , es decir  $u = u(\phi)$ .

Aplicar una transformación como la mostrada en (1.26) es equivalente a hacer un cambio de coordenadas de un sistema cartesiano, a uno curvo en términos del potencial  $A_i$  y los parámetros  $\phi$  de la transformación  $u$  [5]. La densidad Hamiltoniana transformada queda escrita como

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \Psi^\dagger (-i\alpha \cdot \nabla + \beta m) \Psi + \frac{1}{2} (\mathcal{J}^{-1/2} \Pi \mathcal{J} \cdot \Pi \mathcal{J}^{-1/2} + B \cdot B) \\ &- g \Psi^\dagger \alpha \cdot A \Psi + \int d\mathbf{r}' \frac{1}{2} \mathcal{J}^{-1/2} \rho^a(r) \mathcal{J}^{1/2} K_{ab}(r, r'; A) \mathcal{J}^{1/2} \rho^b(r') \mathcal{J}^{-1/2}, \end{aligned} \quad (1.27)$$

donde  $\rho^a(r)$  es la densidad de corriente de quarks, definida por:

$$\rho^a(r) = \Psi^\dagger(r) T^a \Psi(r), \quad (1.28)$$

y  $\mathcal{J}$  es el llamado determinante de Faddeev-Popov dado por:

$$\mathcal{J} = \det(\nabla \cdot \mathcal{D}). \quad (1.29)$$

Con  $\mathcal{D}$  la derivada covariante definida en función del nuevo campo de norma  $A_\mu$ , este determinante está relacionado al Jacobiano de la transformación obtenido al realizar el cambio de norma [5]. El término  $K_{ab}(r, r'; A)$  que aparece en la densidad Hamiltoniana está definido por:

$$K_{ab}(r, r', A) \equiv \left\langle r, a \left| \frac{g}{\nabla \cdot \mathcal{D}} (-\nabla^2) \frac{g}{\nabla \cdot \mathcal{D}} \right| r', b \right\rangle. \quad (1.30)$$

Adam P. Szczepaniak y Eric S. Swanson realizaron un estudio del Hamiltoniano (1.27) a bajas energías y una de las cosas que determinaron es que en este régimen el Hamiltoniano queda escrito de forma más conveniente como [6].

$$H = H_0 + H_1, \quad (1.31)$$

donde:

$$H_0 = \int \left\{ \frac{1}{2} [\mathbf{\Pi}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{\Pi}(\mathbf{r}) - \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot \nabla^2 \mathbf{A}(\mathbf{r})] + \Psi^\dagger [-i\boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla] \Psi + \Psi^\dagger \beta m \Psi \right\} \\ + \frac{1}{2} g^2 \int \rho_a(\mathbf{r}) K^0(\mathbf{r} - \mathbf{r}') d\mathbf{r} \rho^a(\mathbf{r}') d\mathbf{r}'; \quad (1.32)$$

y

$$H_1 = \int \frac{1}{2} [\mathbf{B}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) + \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot \nabla^2 \mathbf{A}(\mathbf{r})] d\mathbf{r} - g \int \Psi^\dagger(\mathbf{r}) \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) \Psi(\mathbf{r}) d\mathbf{r} + V_A + V_B \\ + \frac{1}{2} g^2 \int \rho_a(\mathbf{r}) \left\{ \left\langle a\mathbf{r} \left| \frac{1}{\nabla \cdot \mathcal{D}} (-\nabla)^2 \frac{1}{\nabla \cdot \mathcal{D}} \right| a'\mathbf{r}' \right\rangle - \delta^{aa'} \mathbf{K}^0(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \right\} \rho^{a'}(\mathbf{r}') d\mathbf{r} d\mathbf{r}'. \quad (1.33)$$

Para llegar a la forma de este Hamiltoniano se desarrolló el determinante de Faddeev-Popov en potencias del campo de norma, los términos  $V_a$  y  $V_B$  contienen los términos de orden mayor a cero mientras que los de orden cero se conservaron en  $H_0$ , posteriormente se aplica un principio variacional con lo que se obtienen gluones con masa (aproximadamente 600 MeV) [6].

Dentro de los resultados más destacables del estudio realizado por Szcze-paniak y Swanson se encuentra el hecho de que el determinante de Faddeev-Popov es dominante a energías bajas por lo que genera un posible mecanismo de confinamiento. De igual forma, como la manera en que está escrito lo sugiere, el término  $H_0$  es la base de los sistemas a bajas energías a una primera aproximación (genera estados hadrónicos) mientras que  $H_1$  provee las correcciones debidas al intercambio de gluones.

Así mismo, el potencial de confinamiento se comporta como un operador de Casimir entre fuentes de color (i.e. es proporcional a la identidad del álgebra de color) por lo que su término dominante queda escrito como:

$$K_{ab}^0(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = \delta_{ab}K^0(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = g^2 \langle \Psi | \left[ (\nabla \cdot \mathcal{D})^{-1} (-\nabla^2) (\nabla \cdot \mathcal{D})^{-1} \right]_{\mathbf{r},a,\mathbf{r}',b} | \Psi \rangle. \quad (1.34)$$

Su proporcionalidad a la identidad en el álgebra de color ya ha sido usada explícitamente en (1.32). Es posible sustituir el término  $K^0(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$  en (1.32) por su valor de expectación en el vacío para poder resolver la teoría  $H_0$  de forma no perturbativa y posteriormente añadir  $H_1$  mediante técnicas perturbativas usuales. Por lo que en primera instancia la atención se le dará al término  $H_0$ .

El término  $H_0$  está conformado por cuatro términos, dados por:

$$H_{K_q} = \int \Psi^\dagger [-i\boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla] \Psi d\mathbf{r}, \quad (1.35)$$

$$H_{m_q} = \int \Psi^\dagger \beta m \Psi d\mathbf{r}, \quad (1.36)$$

$$H_{K_g} = \frac{1}{2} \int [\boldsymbol{\Pi}(\mathbf{r}) \cdot \boldsymbol{\Pi}(\mathbf{r}) - \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot \nabla^2 \mathbf{A}(\mathbf{r})] d\mathbf{r}, \quad y \quad (1.37)$$

$$H_{\text{Coulomb}}^{q-q} = \frac{1}{2}g^2 \int \rho_a(\mathbf{r}) \langle a\mathbf{r} | \frac{1}{\nabla \cdot \mathcal{D}} (-\nabla)^2 \frac{1}{\nabla \cdot \mathcal{D}} | a'\mathbf{r}' \rangle \rho^a(r') d\mathbf{r} d\mathbf{r}'. \quad (1.38)$$

Donde  $H_{K_q}$  es el término cinético de quarks,  $H_{m_q}$  es el término de masa de quarks,  $H_{K_g}$  es el término cinético de gluones y  $H_{\text{Coulomb}}^{q-q}$  es el término de interacción de quarks que a su vez parece mostrar propiedades confinantes [6].

Es posible realizar una aproximación para el potencial de interacción y para ello hay que recurrir a un modelo fenomenológico. Por tanto se sustituirá el término  $K^0(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$  por un potencial que tenga las características buscadas, es decir, uno que sea confinante. La forma usualmente aceptada de este potencial es [7]:

$$K^0(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \langle a\mathbf{r} | \frac{g}{\nabla \cdot \mathcal{D}} (-\nabla)^2 \frac{g}{\nabla \cdot \mathcal{D}} | a'\mathbf{r}' \rangle \approx -\frac{a}{r - r'} + b(r - r'). \quad (1.39)$$

En donde el término  $\frac{g^2}{2}$  estará incluido en las constantes  $a$  y  $b$  que serán parámetros a ajustar, por ejemplo, haciendo uso del espectro de masas hadrónicas.

De esa manera, el término de interacción del Hamiltoniano  $H_0$  queda escrito como:

$$H_{\text{Coulomb}}^{q-q} = a \int d\mathbf{r} d\mathbf{r}' \frac{\rho_a(\mathbf{r}) \rho^a(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + b \int d\mathbf{r} d\mathbf{r}' |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \rho_a(\mathbf{r}) \rho^a(\mathbf{r}'). \quad (1.40)$$

Hay que notar que en este trabajo únicamente se trabajará con el sector de quarks y con el término de confinamiento bajo la aproximación ya descrita. De igual forma se hará uso del modelo fenomenológico conocido como modelo de Bolsa del MIT (discutido en el capítulo 2) para escribir los operadores fermiónicos  $\Psi(r)$ .

Bajo estas aproximaciones será posible trabajar con el Hamiltoniano  $H_0$  de forma no perturbativa, por lo que el siguiente paso será cuantizar la teoría mediante el formalismo canónico como se muestra en la siguiente sección.

Por último hay que notar que, salvo algunas consideraciones fenomenológicas, la teoría  $H_0 + H_1$  es en su totalidad cromodinámica cuántica, por

lo que en principio se busca, en el futuro, trabajar con la teoría de campo completa.

### 1.3. Cuantización Canónica

Para cuantizar la teoría se busca promover los campos de quarks ( $\Psi$ ) y gluones ( $A^\mu$ ) a operadores. La cuantización canónica de estos consiste en considerar que dichos campos describen operadores definidos en todo el espacio y que satisfacen las relaciones de (anti)conmutación canónicas con sus momentos canónicos asociados, estas relaciones están dadas por:

$$\{\Psi_{cf\alpha}(r), \Psi_{c'f'\alpha'}^\dagger(r')\} = \delta_{cc'}\delta_{ff'}\delta_{\alpha\alpha'}\delta^{(3)}(r-r'), \quad y \quad (1.41)$$

$$[A_a^\mu(r), \Pi_b^\nu(r')] = ig^{\mu\nu}\delta_{ab}\delta^{(3)}(r-r'). \quad (1.42)$$

Las relaciones de conmutación y anticonmutación faltantes se consideran iguales a cero. Consideraremos los operadores en la representación de Schrödinger por lo que los operadores serán independientes del tiempo.

Al trabajar en esta representación es posible desarrollar los operadores en una base de funciones completas que dependan únicamente de las coordenadas espaciales, y en donde los coeficientes del desarrollo sean operadores asociados a la creación de partículas con números cuánticos que correspondan a la base utilizada. Hay que mencionar que en el presente trabajo únicamente se trabajará con los operadores de quarks y no con los de gluones.

Para realizar este desarrollo primero hay que separar el campo en una parte de frecuencia positiva ( $E_{\mathbf{n}} > 0$ ) y una de frecuencia negativa ( $E_{\mathbf{n}} < 0$ ), que corresponderán a las energías asociadas a las soluciones para quarks y antiquarks respectivamente.  $\mathbf{n}$  representa un conjunto de números cuánticos que caracterizan a las funciones base y describen una relación de cuantización sobre la energía,

$$\Psi_{\mathbf{cf}} = \Psi_{\mathbf{cf}}^{(+)} + \Psi_{\mathbf{cf}}^{(-)}, \quad (1.43)$$

donde  $\Psi_{cf}^{(+)}$  está asociada a  $E_n > 0$  y  $\Psi_{cf}^{(-)}$  a  $E_n < 0$ .

Siempre que la base que estamos usando satisfaga una relación de simetría para la energía dada por  $E_{-n} = -E_n$ , el desarrollo descrito queda explícitamente dada por:

$$\Psi_{cf} = \sum_{\mathbf{n}} \left[ a_{cf\mathbf{n}} u_{\mathbf{n}f} + b_{cf\mathbf{n}}^\dagger u_{-\mathbf{n}f} \right], \quad (1.44)$$

donde  $a_{cf\mathbf{n}}$  y  $b_{cf\mathbf{n}}^\dagger$  se interpretan como operadores de aniquilación/creación de quarks/anti-quarks con números cuánticos  $\mathbf{n}$ , mientras que  $u_{\mathbf{n}}$  son las funciones que forman la base escogida. Esta interpretación de los operadores se justifica en el apéndice A.

De acuerdo a las relaciones de conmutación canónicas (1.41) los coeficientes del desarrollo satisfacen las relaciones de anticonmutación dadas por:

$$\{a_{cf\mathbf{n}}, a_{c'f'\mathbf{n}'}^\dagger\} = \{b_{cf\mathbf{n}}, b_{c'f'\mathbf{n}'}^\dagger\} = \delta_{cc'} \delta_{ff'} \delta_{\mathbf{n}\mathbf{n}'}. \quad (1.45)$$

El resto de las relaciones de anticonmutación son idénticamente cero y es posible ver, de las relaciones anteriormente mostradas, que en efecto los operadores  $a_{cf\mathbf{n}}$  y  $b_{cf\mathbf{n}}$  tienen la estructura algebraica de operadores de creación/aniquilación.

En nuestro caso la base a utilizar será obtenida a partir de soluciones a la ecuación de Dirac independiente del tiempo en una cavidad esférica, que se discutirá a detalle en el capítulo 2. La cavidad esférica es una forma fenomenológica de incluir el confinamiento en el tratamiento de la teoría, a pesar de que éste en principio se encuentra presente en el término de Coulomb del Hamiltoniano (1.40) [6]. Es decir, simplemente desarrollaremos en la base de una teoría de quarks libres pero confinados.





## Capítulo 2

# Modelo de Bolsa del MIT

En el capítulo anterior se presentó la forma Hamiltoniana adecuada para un tratamiento no perturbativo a bajas energías de la cromodinámica cuántica. En el presente trabajo se busca estudiar el sector de quarks de este Hamiltoniano, por lo que para estudiar los campos fermiónicos, como ya se mencionó, será necesario utilizar una base completa en la cual desarrollarlos. En este capítulo se presentará la base que se utilizará a lo largo del trabajo así como su motivación.

Buscaremos una base de funciones que sean soluciones a la ecuación de Dirac independiente del tiempo sujeta a un potencial central (en específico un pozo esférico estático), es decir buscamos espinores  $u(\mathbf{r})$  (funciones con 4 índices que se transforman de acuerdo a la representación espinoral) tales que:

$$\hat{H}_D(\mathbf{r})u(\mathbf{r}) = Eu(\mathbf{r}) \quad (2.1)$$

donde  $\hat{H}_D$  es el Hamiltoniano de Dirac con un potencial central dado por:

$$\hat{H}_D = c\boldsymbol{\alpha} \cdot \hat{\mathbf{p}} + m\beta c^2 + V(r), \quad (2.2)$$

$$V = \begin{cases} 0 & r < R, \\ \infty & r > R, \end{cases} \quad (2.3)$$

en donde  $c$  es la velocidad de la luz,  $\hat{\mathbf{p}}$  es el operador de momento lineal,  $R$  es el radio de la bolsa (parámetro a ajustarse posteriormente) y donde  $\alpha$  y  $\beta$  son matrices dadas por:

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0 & \hat{\sigma} \\ \hat{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (2.4)$$

con  $\hat{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$  en donde  $\sigma_i$  son las matrices de Pauli. Hay también que recordar que las entradas diagonales de la matriz  $\beta$  corresponden a la identidad de las matrices de  $2 \times 2$ .

La motivación detrás de esta selección es que esta base permitirá diagonalizar el término cinético de quarks de una forma simple. Nos permitirá estudiar el Hamiltoniano  $H_0$  desde la perspectiva de quarks libres pero confinados a una bolsa (el potencial esférico) tales que conforman una estructura hadrónica. El confinamiento debe realizarse pidiendo que la corriente de color se anule en la frontera de la bolsa para asegurar que cualquier estado hadrónico no tenga color, esta condición es conocida como condición de frontera del MIT.

## 2.1. Condición de frontera del MIT

Los espinores  $u(\mathbf{r})$  describen por sí mismos a un fermión (quark) libre contenido en una bolsa esférica. Sabemos que debido a la simetría de color SU(3) inherente en la teoría es posible tener en una misma bolsa diferentes quarks asociados a diferentes colores por lo que es posible definir una corriente de color  $\mathbf{J}_\mu^\alpha$  dada por [8]:

$$\mathbf{J}_\mu^\alpha = (\bar{q}_r, \bar{q}_b, \bar{q}_g) T^\alpha \gamma_\mu \begin{pmatrix} q_r \\ q_b \\ q_g \end{pmatrix}, \quad (2.5)$$

donde asumiremos que los generadores de SU(3) ( $T^\alpha$ ) se encuentran en su representación fundamental en donde se conocen como matrices de Gell-Mann, los índices  $r$ ,  $g$ , y  $b$  corresponden a los colores de quarks rojo, verde y azul mientras que  $q_i$  y  $\bar{q}_i$  representan las funciones de onda para un quark y un antiquark con color  $i$  contenidos en la bolsa.

Las funciones  $q_i$  deben satisfacer (2.1) mientras que las soluciones para antiquarks están asociadas a las de quarks mediante una transformación CPT [8], es decir:

$$\bar{q}(\mathbf{r}) = \hat{C}\hat{P}\hat{T}q(\mathbf{r}) = \gamma^0 i \gamma^2 (i \gamma^1 \gamma^3 (q(\mathbf{r}))^*)^* . \quad (2.6)$$

Lo siguiente es imponer que esta corriente, en efecto, desaparezca en la frontera de la bolsa ( $r = R$ ). Para escribir esta condición sobre los espinores  $q_i$  primero hay que recordar que se está considerando una bolsa estática y esférica, es decir, podemos caracterizarla por medio de un vector normal  $n^\mu$ ,

$$n^\mu = (0, \hat{\mathbf{e}}_r). \quad (2.7)$$

Con ello la condición del modelo de bolsa del MIT queda escrita como:

$$\hat{\mathbf{e}}_r \cdot \mathbf{J}^\alpha|_R = 0. \quad (2.8)$$

Debido a la simetría de color de la teoría sabemos que las funciones de onda para diferentes colores deberán ser iguales, es decir:

$$q_r(\mathbf{r}) = q_b(\mathbf{r}) = q_g(\mathbf{r}) = q(\mathbf{r}). \quad (2.9)$$

Con esta consideración, la ecuación (2.8) queda escrita como:

$$\hat{\mathbf{e}}_r \cdot \bar{q} \boldsymbol{\gamma} q|_{R(\theta, \phi)} = 0. \quad (2.10)$$

Sin embargo, la ecuación (2.10) es una condición cuadrática, para simplificarla podemos hacer uso de que:

$$(\hat{\mathbf{e}}_r \cdot \boldsymbol{\gamma})^2 = -1, \quad (2.11)$$

Por lo que este operador con eigenvalores  $\pm i$  tendrá eigenfunciones que satisfagan:

$$(\hat{\mathbf{e}}_r \cdot \boldsymbol{\gamma})q = \pm iq. \quad (2.12)$$

Los eigenestados con eigenvalor  $-i$  son las antipartículas de los estados con eigenvalor  $i$ , por lo que es posible trabajar únicamente con los eigenestados de signo positivo.

La ecuación (2.12) implica la condición (2.10) [8]. Es posible restringirnos a estados que sean eigenfunciones del operador  $(\hat{\mathbf{e}}_r \cdot \boldsymbol{\gamma})$  para utilizar una condición de frontera lineal dada por:

$$-i(\hat{\mathbf{e}}_r \cdot \boldsymbol{\gamma})q(r = R) = q(r = R). \quad (2.13)$$

Esta condición de frontera impondrá el confinamiento de forma fenomenológica y solo resta solucionar la ecuación de Dirac con el potencial deseado.

## 2.2. Ecuación de Dirac en potencial central

Primero obtendremos las soluciones a la ecuación (2.1) para un potencial arbitrario con simetría radial. Para ello hay que observar que el Hamiltoniano de Dirac cuenta con las siguientes simetrías:

$$[\hat{H}_D, \hat{J}^2] = 0, \quad [\hat{H}_D, \hat{J}_z] = 0, \quad [\hat{H}_D, \hat{P}] = 0, \quad (2.14)$$

donde  $\hat{J}$  es el operador de momento angular total y  $\hat{P}$  el operador de paridad, dados por:

$$\hat{\mathbf{J}} = \hat{\mathbf{L}} + \frac{\hbar}{2}\hat{\boldsymbol{\sigma}}, \quad \hat{P} = e^{i\theta}\beta\hat{P}_0, \quad (2.15)$$

$e^{i\theta}$  es una fase arbitraria con  $\theta = [0, 2\pi]$ , y  $P_0$  está dado por:

$$\hat{P}_0 f(r, t) = f(-r, t). \quad (2.16)$$

Para resolver el problema de eigenvalores primero escribiremos al espinor  $u(\mathbf{r})$  de una forma más conveniente dada por:

$$u = \begin{pmatrix} \phi \\ \varphi \end{pmatrix}, \quad (2.17)$$

donde  $\phi$  y  $\varphi$  son biespinores.

Sustituyendo la forma mostrada en la ecuación (2.17) para  $u$  se encuentra que la ecuación de Dirac es equivalente a las ecuaciones:

$$c(\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \hat{\mathbf{p}}) \varphi = (E - mc^2 - V) \phi, \quad (2.18)$$

$$c(\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \hat{\mathbf{p}}) \phi = (E + mc^2 - V) \varphi. \quad (2.19)$$

Resta encontrar la forma que deben tener  $\phi$  y  $\varphi$ . Para ello utilizaremos las simetrías del Hamiltoniano de Dirac ya introducidas.

Debido a que el Hamiltoniano y el operador de paridad conmutan es necesario que  $u(\mathbf{r})$  tenga una paridad bien definida. Utilizando el operador de paridad definido en (2.15) y la forma para  $u(\mathbf{r})$  dada por (2.17) se encuentra que  $\phi$  y  $\varphi$  deben tener paridad opuesta.

Utilizando los mismos argumentos pero ahora con el operador de momento angular total se encuentra que es necesario que  $\phi$  y  $\varphi$  sean eigenestados de  $\hat{J}^2$  con números cuánticos  $j$  y  $m$  idénticos, por lo es posible pedir que:

$$\phi \propto \Omega_{jlm}, \quad \text{y} \quad \varphi \propto \Omega_{jlm}, \quad (2.20)$$

donde  $\Omega_{jlm}$  son los conocidos espinores esféricos [12] dados por:

$$\Omega_{jlm} = \sum_{m_l m_s} \left\langle lm_l \frac{1}{2} m_s | jm \right\rangle Y_{lm_l} \chi_{\frac{1}{2} m_s}. \quad (2.21)$$

El índice  $m_s$  corresponde al espín por lo que sólo toma los valores de  $\pm\frac{1}{2}$ , mientras que  $m_l = m - m_s$ . En esta última expresión el término  $\langle lm_l \frac{1}{2} m_j | jm \rangle$  corresponde a los coeficientes de Clebsh-Gordan,  $Y_{lm_l}$  son armónicos esféricos y  $\chi$  biespinores dados por:

$$\chi_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \chi_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Recordando que la paridad de los espinores esféricos está determinada por el número cuántico  $l$  de acuerdo a  $\hat{P}_0 \Omega_{jlm} = (-1)^l \Omega_{jlm}$  se puede llegar al Ansatz:

$$\phi = g(r)\Omega_{jlm}, \quad \varphi = if(r)\Omega_{j(2j-l)m}, \quad (2.22)$$

donde  $g(r)$  y  $f(r)$  son funciones por determinar que no tienen dependencia angular. Para poder transformar las ecuaciones (2.18) y (2.19) en ecuaciones para  $f(r)$  y  $g(r)$  es necesario utilizar la identidad:

$$\hat{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}} = i \left( \frac{\hat{\sigma} \cdot \mathbf{r}}{r} \right) \left[ -\hbar \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\hat{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{L}}}{r} \right]. \quad (2.23)$$

La forma en la que los operadores  $\frac{\hat{\sigma} \cdot \mathbf{r}}{r}$  y  $\hat{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{L}}$  actúan sobre los espinores esféricos se encuentra a continuación.

$$\left( \frac{\hat{\sigma} \cdot \mathbf{r}}{r} \right) \Omega_{jlm} = -\Omega_{j(2j-l)m} \quad \left( \frac{\hat{\sigma} \cdot \mathbf{r}}{r} \right) \Omega_{j(2j-l)m} = -\Omega_{jlm} \quad (2.24)$$

$$\left( \hat{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{L}} \right) \Omega_{jlm} = -\hbar(\kappa + 1) \Omega_{jlm} \quad \left( \hat{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{L}} \right) \Omega_{j(2j-l)m} = \hbar(\kappa - 1) \Omega_{j(2j-l)m} \quad (2.25)$$

con

$$\kappa = \left( 2j + \frac{1}{2} \right) \begin{cases} (-1) & j = l + \frac{1}{2} \\ (1) & j = l - \frac{1}{2} \end{cases} \quad (2.26)$$

Como vemos de la primera ecuación en (2.25) es posible definir un operador  $\hat{K}$  como:

$$\hat{K} = \left( \hbar + \hat{\sigma} \cdot \hat{L} \right), \quad (2.27)$$

tal que

$$\hat{K}\Omega_{jlm} = -\kappa\hbar\Omega_{jlm}, \quad \hat{K}\Omega_{j(2j-l)m} = \kappa\hbar\Omega_{j(2j-l)m}, \quad (2.28)$$

y

$$[\hat{K}, \hat{H}] = 0. \quad (2.29)$$

Es decir  $\hat{K}$  es una simetría del Hamiltoniano, por lo que será posible utilizar los números cuánticos de este nuevo operador para simplificar la notación de los estados. Permittiéndonos introducir una nueva notación para estos dada por:

$$\chi_{\kappa}^m \equiv \Omega_{jlm}, \quad \chi_{-\kappa}^m \equiv \Omega_{j(2j-l)m}, \quad (2.30)$$

con

$$\hat{K}\chi_{\kappa}^m = -\hbar\kappa\chi_{\kappa}^m, \quad \hat{K}\chi_{-\kappa}^m = \hbar\kappa\chi_{-\kappa}^m, \quad (2.31)$$

tenemos que:

$$\phi = g(r)\chi_{\kappa}^m \quad y \quad \varphi = if(r)\chi_{-\kappa}^m. \quad (2.32)$$

Haciendo uso de (2.23), (2.24) y (2.25), las ecuaciones (2.18) y (2.19) se reducen a:

$$\hbar c \left[ \frac{df}{dr} + \frac{1-\kappa}{r} f \right] + (E - mc^2 - V) g = 0, \quad (2.33)$$



$$\hbar c \left[ \frac{dg}{dr} + \frac{1 + \kappa}{r} g \right] - (E + mc^2 - V) f = 0. \quad (2.34)$$

Las ecuaciones (2.33) y (2.34), junto con las condiciones de frontera, determinarán las funciones  $f(r)$  y  $g(r)$  por lo que sólo falta utilizar el potencial de bolsa esférica junto con las condiciones del MIT en estas ecuaciones para determinar las funciones  $u(r)$ .

### 2.3. Ecuación de Dirac en cavidad esférica

Procederemos a solucionar las ecuaciones radiales obtenidas en la sección anterior para el modelo de bolsa del MIT. Utilizando el potencial de bolsa esférica dado por (2.3) las ecuaciones radiales (2.33) y (2.34) se reducen a:

$$\hbar c \left[ \frac{df}{dr} + \frac{1 - \kappa}{r} f \right] + (E - mc^2) g = 0, \quad (2.35)$$

$$\hbar c \left[ \frac{dg}{dr} + \frac{1 + \kappa}{r} g \right] - (E + mc^2) f = 0. \quad (2.36)$$

Sustituyendo la ecuación (2.35) en (2.36) (y viceversa) y haciendo el cambio de variable:

$$x = \frac{p}{\hbar} r, \quad (2.37)$$

es posible obtener dos ecuaciones desacopladas para  $f$  y  $g$ , dadas por:

$$x^2 \frac{d^2 f}{dx^2} + 2x \frac{df}{dx} + [x^2 - \alpha(\alpha + 1)] f = 0, \quad (2.38)$$

$$x^2 \frac{d^2 g}{dx^2} + 2x \frac{dg}{dx} + [x^2 - \bar{\alpha}(\bar{\alpha} + 1)] g = 0, \quad (2.39)$$

con

$$\alpha = \begin{cases} \kappa - 1 & \kappa > 0 \\ -\kappa & \kappa < 0 \end{cases}, \quad \bar{\alpha} = \begin{cases} \kappa & \kappa > 0 \\ -\kappa - 1 & \kappa < 0 \end{cases} \quad (2.40)$$

Las ecuaciones (2.38) y (2.39) no son más que ecuaciones esféricas de Bessel por lo que  $f$  y  $g$  quedan dadas por:

$$f = a j_{\alpha} \left( \frac{p}{\hbar} r \right) \quad \text{y} \quad g = b j_{\bar{\alpha}} \left( \frac{p}{\hbar} r \right). \quad (2.41)$$

Únicamente se ha utilizado la función esférica del primer tipo ya que buscamos que la solución sea regular (normalizable) en el origen. Las ecuaciones (2.18) y (2.19) exigen que  $a$  y  $b$  estén relacionadas mediante:

$$a = b \operatorname{sgn}(\kappa) \frac{pc}{E + mc^2}, \quad (2.42)$$

lo que nos permite llegar a la solución dada por:

$$u(\mathbf{r}) = A \begin{pmatrix} j_{\bar{\alpha}} \left( \frac{p}{\hbar} r \right) \chi_{\kappa}^m \\ i \operatorname{sgn}(\kappa) \frac{pc}{E + mc^2} j_{\alpha} \left( \frac{p}{\hbar} r \right) \chi_{-\kappa}^m \end{pmatrix}, \quad (2.43)$$

donde  $A$  es una constante de normalización.

Sólo resta aplicar las condiciones de frontera lineales del modelo de bolsa del MIT. La condición (2.13) aplicada a la solución (2.43) se ve como:

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{\hat{\sigma} \cdot \mathbf{r}}{r} \\ -\frac{\hat{\sigma} \cdot \mathbf{r}}{r} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_{\bar{\alpha}} \left( \frac{p}{\hbar} R \right) \chi_{\kappa}^m \\ i \operatorname{sgn}(\kappa) \frac{pc}{E + mc^2} j_{\alpha} \left( \frac{p}{\hbar} R \right) \chi_{-\kappa}^m \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} j_{\bar{\alpha}} \left( \frac{p}{\hbar} R \right) \chi_{\kappa}^m \\ i \operatorname{sgn}(\kappa) \frac{pc}{E + mc^2} j_{\alpha} \left( \frac{p}{\hbar} R \right) \chi_{-\kappa}^m \end{pmatrix}. \quad (2.44)$$

Esta condición se reduce finalmente a:

$$j_{\bar{\alpha}} \left( \frac{p}{\hbar} R \right) + \operatorname{sgn}(\kappa) \frac{pc}{E + mc^2} j_{\alpha} \left( \frac{p}{\hbar} R \right) = 0. \quad (2.45)$$

La ecuación (2.45) nos da una ecuación sobre el momento  $p$  para cada  $\kappa$  dada, ya que sabemos que existe una relación de dispersión relativista entre la energía y el momento, dada por:

$$E = \pm \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4}. \quad (2.46)$$

La relación de dispersión está dada a través de una raíz cuadrada por lo que existen dos soluciones. Esto quiere decir que la ecuación (2.45) contiene en realidad dos ecuaciones (una para  $E < 0$  y otra para  $E > 0$ ).

Las ecuaciones (2.45) y (2.46) impondrán condiciones de cuantización sobre la energía y el momento. Esto quiere decir que tanto  $p$  como  $E$  quedarán determinados por  $\kappa$  y por un número cuántico principal  $n$  que estará definido de forma que denote las diferentes soluciones correspondientes a la ecuación (2.45), en específico si  $n > 0$  estaremos considerando  $E > 0$  mientras que cuando  $n < 0$  significa que  $E < 0$ . Aprovechando la introducción del número cuántico  $n$  introduciremos el número de sabor  $f$ , que denotará el sabor del quark en la bolsa, básicamente indicando qué masa estamos considerando.

En este punto es conveniente introducir nuevas variables adimensionales de momento, energía y masa dadas por:

$$x_{n\kappa f} \equiv \frac{p_{n\kappa f}}{\hbar} R, \quad \omega_{n\kappa f} \equiv \frac{E_{n\kappa f}}{\hbar c} R, \quad \xi_f \equiv \frac{m_f c}{\hbar} R. \quad (2.47)$$

donde  $p_{n\kappa f}$  y  $E_{n\kappa f}$  son los valores permitidos de momento y energía mientras que  $m_f$  denota la masa de un quark con sabor  $f$ . Es posible escribir la relación de dispersión (2.46) para estas nuevas variables, dejando explícito el signo que se ha tomado de la raíz, como:

$$\omega_{n\kappa f} = \text{sgn}(n) \sqrt{x_{n\kappa f}^2 + \xi_f^2}. \quad (2.48)$$

Mientras que la relación de cuantización (2.45) queda escrita como:

$$j_{\bar{\alpha}}(x_{n\kappa f}) = -\text{sgn}(\kappa) \frac{x_{n\kappa f}}{\xi_f + \text{sgn}(n) \sqrt{x_{n\kappa f}^2 + \xi_f^2}} j_{\alpha}(x_{n\kappa f}). \quad (2.49)$$

Esta nueva selección de variables es más conveniente ya que deja explícita la selección en el signo de la relación de dispersión a través del número cuántico  $n$ . Como ya vimos el conjunto de números cuánticos que caracteriza al sistema está dado por  $(n, \kappa, m, f)$ , lo que nos lleva a escribir las funciones  $u(\mathbf{r})$  como:

$$u_{n\kappa m f}(\mathbf{r}) = A_{n\kappa f} \begin{pmatrix} j_{\bar{\alpha}} \left( x_{n\kappa f} \frac{r}{R} \right) \chi_{\kappa}^m \\ i \operatorname{sgn}(\kappa) \frac{x_{n\kappa f}}{\omega_{n\kappa f} + \xi_f} j_{\alpha} \left( x_{n\kappa f} \frac{r}{R} \right) \chi_{-\kappa}^m \end{pmatrix}, \quad (2.50)$$

donde  $A_{n\kappa f}$  es una constante de normalización dada por:

$$A_{n\kappa f} = \frac{1}{R^{\frac{3}{2}}} \frac{x_{n\kappa f}}{|j_{\bar{\alpha}}(x_{n\kappa f})|} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{n\kappa f}(\omega_{n\kappa f} + \kappa) + \xi_f}}. \quad (2.51)$$

Las funciones  $u_{n\kappa m}$  forman una base completa ortonormal, es decir:

$$\int u_{n\kappa m f}^{\dagger} u_{n'\kappa' m' f'} d\mathbf{r} = \delta_{nn'} \delta_{\kappa\kappa'} \delta_{mm'} \delta_{ff'}. \quad (2.52)$$

A este conjunto de soluciones lo denotaremos como modos de cavidad esférica y haciendo uso de ellos en el siguiente capítulo realizaremos el desarrollo descrito en el capítulo 1.



## Capítulo 3

# Desarrollo en modos de cavidad esférica

En este capítulo escribiremos el desarrollo (1.44) para el campo de quarks haciendo uso de los modos de cavidad esférica, con números cuánticos  $\mathbf{n} = (n, j, l, m)$  y cuya energía satisface la relación de simetría requerida (ver apéndice A). De igual forma discutiremos dos simetrías asociadas a los elementos de este desarrollo: la simetría que representan los índices de color y sabor, y la simetría funcional entre modos de quarks y antiquarks.

Comenzaremos escribiendo la expansión mencionada como:

$$\Psi_{cf} = \sum_{\kappa, m, n > 0} \left[ \hat{a}_{cf n \kappa m} u_{f n \kappa m} + \hat{b}_{cf n \kappa m}^\dagger u_{f - n - \kappa m} \right]. \quad (3.1)$$

Como se muestra en el apéndice A, los operadores  $\hat{a}$  y  $\hat{b}$  están relacionados a la creación y aniquilación de quarks y antiquarks respectivamente. La selección de índices en el desarrollo es tal que los modos de cavidad esférica que acompañan a los operadores de creación/aniquilación en efecto representan las soluciones asociadas a quarks/antiquarks en una bolsa esférica con los números cuánticos correspondientes (ver apéndice A).

Las relaciones de anticonmutación distintas de cero que satisfacen estos operadores se encuentran dadas por:

$$\{a_{cf n\kappa m}, a_{c' f' n' \kappa' m'}^\dagger\} = \{b_{cf n\kappa m}, b_{c' f' n' \kappa' m'}^\dagger\} = \delta_{cc'} \delta_{ff'} \delta_{nn'} \delta_{\kappa\kappa'} \delta_{mm'}. \quad (3.2)$$

Lo siguiente será reescribir la expresión (3.1) en función de  $(j, l)$  en lugar de  $\kappa$ , de donde obtenemos:

$$\Psi_{cf} = \sum_{j, l, m, |n|} \left[ \hat{a}_{cf n j l m} u_{f n j l m} + \hat{b}_{cf n j l m}^\dagger u_{f - n j (2j - l) m} \right]. \quad (3.3)$$

En donde se entiende que la suma sobre  $j$  implica considerar los dos posibles valores de  $j$  dada  $l$ , es decir  $j = l \pm \frac{1}{2}$ . Y en donde  $|n|$  indica que la suma es sobre valores positivos de  $n$ .

Ahora reescribiremos los operadores  $\hat{a}$  y  $\hat{b}$  en función de unos nuevos operadores  $\hat{\beta}$  de acuerdo a las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} a_{cf n\kappa m} &\rightarrow \beta^{\frac{1}{2}(nl)j m c f}, & a_{cf n\kappa m}^\dagger &\rightarrow \beta_{\frac{1}{2}(nl)j m c f}^\dagger, \\ b_{cf n\kappa m} &\rightarrow \beta_{-\frac{1}{2}(nl)j m c f}^\dagger, & b_{cf n\kappa m}^\dagger &\rightarrow \beta^{-\frac{1}{2}(nl)j m c f}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Hay que notar un par de cosas de esta última expresión:

- Básicamente hemos escrito a los operadores de quarks y antiquarks bajo un mismo operador  $\beta^{\tau(nl)j m c f}$  que contiene un número cuántico adicional, que tiene como finalidad diferenciar entre quarks y antiquarks ( $\tau = \{\frac{1}{2}(\text{quark}), -\frac{1}{2}(\text{antiquark})\}$ ).
- Hasta ahora hemos tratado indistintamente la posición de los índices de color, sabor y de la cavidad sin embargo, a partir de ahora, seremos cuidadosos en su posición ya que como podemos ver la posición de estos índices en los operadores  $\hat{\beta}$  es crítica. Posteriormente introduciremos la llamada representación esférica de los índices de color y sabor por lo que introduciremos las reglas para subir y bajar estos índices.

Los operadores  $\hat{\beta}$  satisfacen las relaciones de anticonmutación dadas por:

$$\{\beta^{\tau(nl)jmcf}, \beta_{\tau'(n'l')j'm'c'f'}^\dagger\} = \delta_{\tau'}^\tau \delta_{n'}^n \delta_{l'}^l \delta_{m'}^m \delta_{c'}^c \delta_{f'}^f, \quad (3.5)$$

$$\{\beta^{\tau(nl)jmcf}, \beta^{\tau'(n'l')j'm'c'f'}\} = \{\beta_{\tau(nl)jmcf}^\dagger, \beta_{\tau'(n'l')j'm'c'f'}^\dagger\} = 0. \quad (3.6)$$

Podemos de igual forma agregar el índice  $\tau$  a los modos de cavidad de acuerdo a:

$$\begin{aligned} u_{fnjlm} &\rightarrow u_{\frac{1}{2}fnjlm}, & u_{f-nj(2j-l)m} &\rightarrow u_{-\frac{1}{2}fnjlm}, \\ u_{fnjlm}^\dagger &\rightarrow u_{\frac{1}{2}fnjlm}^\dagger, & u_{f-nj(2j-l)m}^\dagger &\rightarrow u_{-\frac{1}{2}fnjlm}^\dagger. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Esto nos permite escribir la ecuación de Dirac para quarks y antiquarks como:

$$[-i\alpha \cdot \nabla + \beta m] u_{\tau fnljm} = E_{\tau nljf} u_{\tau fnljm} \quad (3.8)$$

Con la introducción del índice  $\tau$  la energía queda dada por:

$$\begin{aligned} E_{\frac{1}{2}nljf} &= E_{nljf} \\ E_{-\frac{1}{2}nljf} &= E_{-n(2j-l)jf} = -E_{nljf}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

De igual forma es posible escribir la relación de ortonormalidad de los modos con el índice  $\tau$  como:

$$\int u_{\tau nljm}^\dagger u_{\tau' n'l'j'm'} d\mathbf{r} = \delta_{\tau\tau'} \delta_{nn'} \delta_{ll'} \delta_{jj'} \delta_{mm'} + \delta_{\tau-\tau'} \delta_{n-n'} \delta_{l(2j'-l')} \delta_{jj'} \delta_{m-m'}. \quad (3.10)$$

Esto nos permite reescribir (3.3) como:

$$\Psi^{cf} = \sum_{j,l,m,|n|} \left[ \beta^{\frac{1}{2}(nl)jmcf} u_{\frac{1}{2}fnjlm} + \beta^{-\frac{1}{2}(nl)jmcf} u_{-\frac{1}{2}fnjlm} \right]. \quad (3.11)$$



Podemos simplificar esta última expresión escribiéndola como una suma sobre el índice  $\tau$ , de acuerdo a esto los campos de quarks y su adjunto quedan escritos como:

$$\begin{aligned}\Psi^{cf} &= \sum_{\tau,j,l,m,|n|} \beta^{\tau(nl)jmcf} u_{\tau fnjlm}, \\ \Psi_{cf}^\dagger &= \sum_{\tau,j,l,m,|n|} \beta_{\tau(nl)jmcf}^\dagger u^{\dagger\tau fnjlm}.\end{aligned}\tag{3.12}$$

### 3.1. Simetría SU(2) y SU(3)

Hemos ya escrito de una forma simplificada el desarrollo en modos de cavidad esférica, lo siguiente que realizaremos será utilizar la simetría exacta SU(3) en los índices de color y la simetría rota (SU(2) ó SU(3)) en los índices de sabor para trabajar con ellos en lo que se conoce como su representación esférica. La utilidad de esta representación se manifestará al momento de calcular el término de interacción de quarks.

La idea detrás de esto es poder trabajar con los índices de color y sabor como números cuánticos de SU(2) ó SU(3) de una forma apropiada. Es decir, poder asociarlos a algún multiplete de alguna de las representaciones irreducibles de estos grupos, buscando una relación similar a la que tienen los índices de momento angular con las representaciones de SO(3).

#### 3.1.1. Simetría de color

El grupo de simetría de la cromodinámica cuántica da lugar a la existencia de tres tipos de colores de quarks (i.e.  $c = 1, 2, 3$ ) y estos pueden asociarse a la representación fundamental del grupo SU(3) denotada por  $(1, 0)$  mientras que los antiquarks se pueden asociar a la representación conjugada  $(0, 1)$  (ver apéndice B para una discusión del álgebra de SU(3)). Esto quiere decir que podemos caracterizar a los tres colores de quarks con el triplete que forma la base de la representación  $(1, 0)$  y podemos hacer lo mismo con los antiquarks y con la representación  $(0, 1)$ .

Por otro lado sabemos que los estados pertenecientes a una representación irreducible de SU(3) se denotan por tres números cuánticos; siendo

estos la hipercarga de color  $Y_c$ , el isoespín de color  $I_c$  y su tercera componente  $I_{zc}$ . En general los estados pertenecientes a un multiplete de SU(3) son denotados por  $|(p, q)Y_c I_c I_{zc}\rangle$  con  $(p, q)$  la representación a la que pertenecen, donde  $p$  es el número de quarks y  $q$  el número de antiquarks.

Como los quarks están caracterizados únicamente por los números cuánticos de la representación fundamental de SU(3) resulta conveniente escribir esto de forma explícita en los índices de color, es decir en lugar de referirnos a ellos como quark 1, 2 o 3 nos referiremos a ellos por sus números cuánticos. Esto quiere decir que podemos escribir a los índices de color como  $c = \{Y_c, I_c, I_{zc}\}$  con las combinaciones  $(\{-\frac{2}{3}, 0, 0\}, \{\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\}, \{\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\})$ . Ésta es la llamada representación esférica de los índices de color. Los índices para antiquarks los denotaremos por  $\bar{c} = \{-Y_c, I_c, -I_{zc}\}$ .

### 3.1.2. Simetría de sabor

A pesar de que la simetría de color es exacta, sabemos que los diferentes sabores de quarks (6 conocidos) tienen diferentes masas, por lo que no hay una simetría de sabor exacta. Sin embargo al trabajar con sistemas a bajas energías es posible concentrarnos únicamente en los quarks más ligeros e introducir una simetría aproximada dada por el grupo SU(2) (si consideramos los quarks up y down) o con el grupo SU(3) (añadiendo el quark strange). Sabemos que aunque éstas son simetrías rotas en la naturaleza, han tenido un papel fundamental en la clasificación del espectro hadrónico [8].

Lo siguiente, al igual que con los índices de sabor, será asociar a los dos o tres diferentes sabores de quarks con la base de la representación fundamental de SU(2) o SU(3), esto quiere decir que estos índices se podrán escribir como  $f = \{\frac{1}{2}, \sigma_f\} = \{\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}\}$  o  $f = \{Y_f, I_f, I_{zf}\}$  respectivamente. Los índices para antiquarks los denotaremos por  $\bar{f} = -f$  o  $\bar{f} = \{-Y_f, I_f, -I_{zf}\}$  para SU(2) o SU(3) respectivamente. Hay que notar que con la introducción de esta simetría estamos considerando una degeneración en las masas, por lo que habrá que remover el índice  $f$  de los modos de cavidad esférica.

### 3.1.3. Reglas de transformación

Utilizaremos las reglas para bajar y subir índices descritas por Draayer, dadas por [9]:

$$\beta^{\tau(nl)jmc f} = (-1)^{\frac{1}{2}-\tau} (-1)^{j-m} (-1)^{X_c} (-1)^{X_f} \beta_{-\tau(nl)j-m\bar{c}\bar{f}}, \quad (3.13)$$

con

$$\begin{aligned} \chi_i &= \frac{1}{3}(\lambda_i - \mu_i) + \frac{Y_i}{2} - I_{zi} & \text{Si } i \text{ está en } (\lambda_i, \mu_i) \text{ de SU(3),} \\ \chi_i &= \frac{1}{2} - i & \text{Si } i \text{ está en } \left(\pm \frac{1}{2}\right) \text{ de SU(2).} \end{aligned} \quad (3.14)$$

Estas reglas se introducen debido a que resultarán útiles en el cálculo del término de interacción.

### 3.2. Índice de pseudo-espín

En esta última sección buscaremos escribir los modos de cavidad esférica de quarks y antiquarks bajo una misma forma funcional haciendo uso del nuevo número cuántico  $\tau$ . La finalidad de esto es que el desarrollo en estos modos quede escrito de la manera más simple posible para poder trabajar con ellos de una forma adecuada al calcular el término de interacción de quarks.

Podemos notar que la forma explícita de los modos de quarks y antiquarks dada por (2.30) y (2.50) se puede escribir en función del índice  $\tau$  como:

$$u_{\tau n l j m} = A_{\tau n l j} \begin{pmatrix} j_{\bar{\alpha}_\tau} \left(x_{\tau n l j} \frac{r}{R}\right) \Omega_{\tau j l m} \\ i \operatorname{sgn}(\kappa_\tau) \frac{x_{\tau n l j}}{\omega_{\tau n l j} + \xi} j_{\alpha_\tau} \left(x_{\tau n l j} \frac{r}{R}\right) \Omega_{-\tau j l m} \end{pmatrix}, \quad (3.15)$$

donde  $\kappa_\tau$ ,  $\bar{\alpha}_\tau$  y  $\alpha_\tau$  quedan definidas como:

$$\kappa_\tau = \left(2j + \frac{1}{2}\right) \operatorname{sgn}(\tau) \begin{cases} (-1) & j = l + \frac{1}{2} \\ (1) & j = l - \frac{1}{2} \end{cases} \quad (3.16)$$

$$\alpha_\tau = \begin{cases} \kappa_\tau - 1 & \kappa_\tau > 0 \\ -\kappa_\tau & \kappa_\tau < 0 \end{cases} \quad \bar{\alpha}_\tau = \begin{cases} \kappa_\tau & \kappa_\tau > 0 \\ -\kappa_\tau - 1 & \kappa_\tau < 0 \end{cases} \quad (3.17)$$

Así mismo consideramos las definiciones:

$$A_{\frac{1}{2} n l j} = A_{n l j}, \quad A_{-\frac{1}{2} n l j} = A_{-n(2j-l)j}, \quad (3.18)$$

$$\Omega_{\frac{1}{2}jlm} = \Omega_{jlm}, \quad \Omega_{-\frac{1}{2}jlm} = \Omega_{j(2j-l)m}, \quad (3.19)$$

$$\begin{aligned} x_{\frac{1}{2}nlj} &= x_{nlj}, & x_{-\frac{1}{2}nlj} &= x_{-n(2j-l)j}, & x_{\tau nlj} &= x_{-\tau nlj}, \\ \omega_{\frac{1}{2}nlj} &= \omega_{nlj}, & \omega_{-\frac{1}{2}nlj} &= \omega_{-n(2j-l)j}, & \omega_{\tau nlj} &= -\omega_{-\tau nlj}. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Por tanto, la condición de frontera quedará escrita como:

$$j_{\bar{\alpha}\tau}(x_{\tau n\kappa}) = -\text{sgn}(\kappa_\tau) \frac{x_{\tau n\kappa}}{\xi + \omega_{\tau n\kappa}} j_\alpha(x_{\tau n\kappa}). \quad (3.21)$$

Lo único que hemos hecho es notar que para un modo de quarks con  $(n, j, l, m)$  dados podemos escribir la función de antiquarks realizando una transformación a los índices  $(-n, j, (2j-l), m)$  (ver apéndice A), por lo que las definiciones en  $\tau$  denotan esta transformación.

Para escribir (3.15) de forma compacta podemos introducir una función  $R_\tau(r)$  dada por:

$$R_\tau(r) = A_{\tau nlj} j_{\bar{\alpha}\tau} \left( x_{\tau nlj} \frac{r}{R} \right). \quad (3.22)$$

Haciendo uso de las definiciones (3.16), (3.17), (3.18) y (3.20) así como de las relaciones (A.1) y (A.11) podemos ver que la función  $R_\tau$  se transforma ante un cambio de signo de  $\tau$  como:

$$R_{-\tau}(r) = \text{sgn}(\kappa_\tau) A_{\tau nlj} \frac{x_{\tau nlj}}{\xi + \omega_{\tau nlj}} j_{\alpha\tau} \left( x_{nlj} \frac{r}{R} \right). \quad (3.23)$$

Esto nos permite escribir (3.15) como:

$$u_{\tau nljm} = \begin{pmatrix} R(r)_\tau \Omega_{\tau jlm} \\ iR(r)_{-\tau} \Omega_{-\tau jlm} \end{pmatrix}. \quad (3.24)$$

Lo interesante de la ecuación (3.24) es que podemos escribir la parte superior del espinor  $u$  en función de  $\tau$  y la parte inferior del espinor  $u$

en función de  $-\tau$ , por lo que nos referiremos al número cuántico  $\tau$  como pseudo-espín. Podemos notar que los (anti)quarks “abajo” tienen pseudo-espín  $(-)\frac{1}{2}$  mientras que los “arriba” tienen pseudo-espín  $(-)-\frac{1}{2}$ .

Escribiremos la parte angular de los modos de cavidad en función de los armónicos esféricos, ya que sabemos cómo trabajar con ellos. Para esto reescribiremos  $\Omega_{\tau jlm}$ , haciendo uso de (2.21), de acuerdo a:

$$\Omega_{\tau jlm} = \sum_{m_{l_\tau} m_s} \left\langle l_\tau m_{l_\tau} \frac{1}{2} m_s \left| jm \right\rangle Y_{l_\tau m_{l_\tau}} \chi_{\frac{1}{2} m_s}, \quad (3.25)$$

donde  $l_\tau$  queda definido como:

$$l_\tau = \left( \tau + \frac{1}{2} \right) l - \left( \tau - \frac{1}{2} \right) (2j - l). \quad (3.26)$$

Podemos notar que toda la información del pseudo-espín de la parte angular está contenida en el momento angular orbital. De acuerdo a (3.25) podemos escribir los modos de cavidad para quarks y antiquarks bajo una sola forma funcional, utilizando el índice de pseudo-espín, de la siguiente manera:

$$u_{\tau n l j m} = \begin{pmatrix} R_\tau(r) \sum_{m_{l_\tau} m_s} \left\langle l_\tau m_{l_\tau} \frac{1}{2} m_s \left| jm \right\rangle Y_{l_\tau m_{l_\tau}} \chi_{\frac{1}{2} m_s} \\ i R_{-\tau}(r) \sum_{m_{l_{-\tau}} m_s} \left\langle l_{-\tau} m_{l_{-\tau}} \frac{1}{2} m_s \left| jm \right\rangle Y_{l_{-\tau} m_{l_{-\tau}}} \chi_{\frac{1}{2} m_s} \end{pmatrix}. \quad (3.27)$$

La forma dada por (3.27) será la que utilizaremos para calcular el término de interacción en el sector de quarks del Hamiltoniano  $H_0$ .

## Capítulo 4

# Sector de quarks

En este capítulo se escribirá el sector de quarks del Hamiltoniano introducido en el capítulo 1 utilizando el desarrollo en modos de cavidad esférica descrito en el capítulo 3. La finalidad de esto es tener una expresión del Hamiltoniano a bajas energías en el formalismo de segunda cuantización en función de una base que contiene el confinamiento de forma fenomenológica, esto permitirá a futuro poder estudiar la dinámica de estados ligados de quarks.

Para ello podemos recordar que el sector de quarks  $H_q$  está dado por una parte libre  $H_{\text{free}}^q$  y una parte de interacción  $H_{\text{Coulomb}}^{q-q}$ , es decir:

$$H_q = H_{\text{free}}^q + H_{\text{Coulomb}}^{q-q} \quad (4.1)$$

donde,

$$H_{\text{free}}^q = \int \Psi_{cf}^\dagger [-i\alpha \cdot \nabla + \beta m] \Psi^{cf} d\mathbf{r}, \quad (4.2)$$

$$H_{\text{Coulomb}}^{q-q} = \int \int (T_a)_{c'}^c (T_a)_{d'}^d \Psi_{cf}^\dagger \Psi^{c'f} \Psi_{d'f'}^\dagger \Psi^{d'f'} V(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) d\mathbf{r} d\mathbf{r}', \quad (4.3)$$

con el potencial aproximado por:

$$V(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{a}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + b|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|. \quad (4.4)$$

## 4.1. Sector libre

Para escribir el Hamiltoniano del sector libre de quarks en segunda cuantización podemos introducir el desarrollo (3.12) en el Hamiltoniano dado por (4.2), obteniendo:

$$H_{\text{free}}^q = \sum_{\tau_i j_i | n_i | l_i m_i} \beta_{\tau_1 n_1 l_1 j_1 m_1 c f}^\dagger \beta^{\tau_2 n_2 l_2 j_2 m_2 c f} \int u_{\tau_2 n_2 l_2 j_2 m_2}^\dagger [-i\alpha \cdot \nabla + \beta m] u_{\tau_2 n_2 l_2 j_2 m_2} d\mathbf{x}, \quad (4.5)$$

donde hay contracción sobre índices de color y sabor repetidos, con  $i = 1, 2$ , por lo que la suma indicada queda definida como:

$$\sum_{\tau_i | n_i | j_i l_i m_i} = \sum_{\tau_1 | n_1 | j_1 l_1 m_1} \sum_{\tau_2 | n_2 | j_2 l_2 m_2} \quad (4.6)$$

Podemos ahora utilizar que los modos son eigenfunciones de la ecuación de Dirac —ecuación (3.8)—, para simplificar (4.5) a:

$$H_{\text{free}}^q = \sum_{\tau_i j_i | n_i | l_i m_i} \beta_{\tau_1 n_1 l_1 j_1 m_1 c f}^\dagger \beta^{\tau_2 n_2 l_2 j_2 m_2 c f} E_{\tau_2 n_2 j_2 l_2} \int u_{\tau_1 n_1 l_1 j_1 m_1}^\dagger u_{\tau_2 n_2 l_2 j_2 m_2} d\mathbf{x}. \quad (4.7)$$

Utilizando la relación de ortonormalidad de los modos dada por (3.10) así como las relaciones para el energía (3.9) y recordando que la suma es sobre valores positivos de  $n_i$ , llegamos a la forma final de la parte libre del Hamiltoniano dada por:

$$H_{\text{free}}^q = \sum_{\tau | n | j | l m} |E_{\tau n l j}| \beta_{\tau n l j m c f}^\dagger \beta^{\tau n l j m c f}. \quad (4.8)$$

## 4.2. Sector de interacción

Podemos notar que el término de interacción está compuesto por tres diferentes elementos: el producto de dos generadores, el producto de cuatro campos fermiónicos y el potencial de interacción, tal como se muestra en la ecuación (4.3). Trataremos cada uno de estos elementos por separado buscando expresarlos en una forma conveniente.

En el caso de los campos y el potencial, la meta es poder escribirlos de manera que podamos realizar las integrales sobre la parte angular. Por otro lado buscamos escribir el producto de los generadores en lo que se conoce como su representación acoplada, análogo a la representación esférica para los índices de color y sabor.

### 4.2.1. Producto de campos fermiónicos

Antes de ver el producto de cuatro campos veremos el producto de dos de ellos, utilizando la expansión (3.12) podemos ver que el producto  $\Psi^{c_1 f_1} \Psi^{c_2 f_2}$ , en una misma posición espacial, se puede escribir como:

$$\Psi_{c_1 f_1}^\dagger \Psi^{c_2 f_2} = \sum_{\tau_i | n_i | l_i j_i m_i} \beta_{\tau_1 n_1 l_1 j_1 m_1 c_1 f_1}^\dagger \beta^{\tau_2 n_2 l_2 j_2 m_2 c_2 f_2} u_{\tau_1 n_1 l_1 j_1 m_1}^\dagger u_{\tau_2 n_2 l_2 j_2 m_2} \quad (4.9)$$

De acuerdo a (3.27) y definiendo el vector de índices  $\mathbf{N}_i = \{\tau_i, n_i, l_i, j_i, m_i\}$  podemos escribir el producto de modos de cavidad que aparece en (4.9) como:

$$\begin{aligned} u_{\mathbf{N}_1}^\dagger u_{\mathbf{N}_2} &= \sum_{m_{l_{\tau_i}} m_s} \left\langle j_1 m_1 \left| l_{\tau_1} m_{l_{\tau_1}} \frac{1}{2} m_s \right\rangle \left\langle l_{\tau_2} m_{l_{\tau_2}} \frac{1}{2} m_s \left| j_2 m_2 \right\rangle \right. \\ &\times R(r)_{\tau_1} R(r)_{\tau_2} Y_{l_{\tau_1} m_{l_{\tau_1}}}^* Y_{l_{\tau_2} m_{l_{\tau_2}}} + \sum_{m_{l_{\tau_i}} m_s} \left\langle j_1 m_1 \left| l_{-\tau_1} m_{l_{-\tau_1}} \frac{1}{2} m_s \right\rangle \right. \\ &\times \left\langle l_{-\tau_2} m_{l_{-\tau_2}} \frac{1}{2} m_s \left| j_2 m_2 \right\rangle R(r)_{-\tau_1} R(r)_{-\tau_2} Y_{l_{-\tau_1} m_{l_{-\tau_1}}}^* Y_{l_{-\tau_2} m_{l_{-\tau_2}}} \right. \end{aligned} \quad (4.10)$$

en donde la suma sobre  $m_{l_{\tau_i}}$  indica sumar sobre  $m_{l_{\tau_1}}$  y  $m_{l_{\tau_2}}$  y en donde también hemos utilizado la orthonormalidad de los espinores dada por:



$$\chi_{\frac{1}{2}m_s}^\dagger \chi_{\frac{1}{2}m_{s'}} = \delta_{ss'}. \quad (4.11)$$

Podemos escribir (4.10) como una sola suma introduciendo un nuevo índice  $\sigma = \pm 1$  de acuerdo a:

$$u_{\mathbf{N}_1}^\dagger u_{\mathbf{N}_2} = \sum_{\sigma} \sum_{m_{l_{\tau_i} m_s}} \left\langle j_1 m_1 \left| l_{\sigma_1} m_{l_{\sigma_1}} \frac{1}{2} m_s \right\rangle \left\langle l_{\sigma_2} m_{l_{\sigma_2}} \frac{1}{2} m_s \left| j_2 m_2 \right\rangle \right. \\ \left. \times R(r)_{\sigma_1} R(r)_{\sigma_2} Y_{l_{\sigma_1} m_{l_{\sigma_1}}}^* Y_{l_{\sigma_2} m_{l_{\sigma_2}}} \right. \quad (4.12)$$

En donde por simplicidad hemos abreviado  $\sigma_i = \sigma \tau_i$ . Hay que notar que este índice diferencia los términos provenientes de la parte arriba ( $\sigma = 1$ ), que nos da el primer factor, de la parte abajo, que nos da el segundo factor ( $\sigma = -1$ ), por lo que podemos considerarlo un índice quiral.

Utilizando (4.12) podemos reescribir (4.9) como:

$$\Psi_{c_1 f_1}^\dagger \Psi^{c_2 f_2} = \sum_{\tau_i | n_i} \sum_{l_i j_i m_i} \sum_{\sigma} \sum_{m_{l_{\tau_i} m_s}} \beta_{\tau_1 n_1 l_1 j_1 m_1 c_1 f_1}^\dagger \beta^{\tau_2 n_2 l_2 j_2 m_2 c_2 f_2} \\ \times \left\langle j_1 m_1 \left| l_{\sigma_1} m_{l_{\sigma_1}} \frac{1}{2} m_s \right\rangle \left\langle l_{\sigma_2} m_{l_{\sigma_2}} \frac{1}{2} m_s \left| j_2 m_2 \right\rangle R(r)_{\sigma_1} R(r)_{\sigma_2} Y_{l_{\sigma_1} m_{l_{\sigma_1}}}^* Y_{l_{\sigma_2} m_{l_{\sigma_2}}} \right. \quad (4.13)$$

Ya calculado el producto de dos campos procederemos a calcular el de cuatro. Para esto notamos que a partir de (4.13) obtenemos que:

$$\Psi_{c_1 f_1}^\dagger(\mathbf{r}) \Psi^{c_2 f_2}(\mathbf{r}) \Psi_{c_3 f_3}^\dagger(\mathbf{r}') \Psi^{c_4 f_4}(\mathbf{r}') = \sum_{\tau_i | n_i} \sum_{l_i j_i m_i} \sum_{m_{l_{\tau_i}}} \sum_{\sigma \sigma'} \sum_{m_s m_{s'}} \\ \beta_{\tau_1 n_1 l_1 j_1 m_1 c_1 f_1}^\dagger \beta^{\tau_2 n_2 l_2 j_2 m_2 c_2 f_2} \beta_{\tau_3 n_3 l_3 j_3 m_3 c_3 f_3}^\dagger \beta^{\tau_4 n_4 l_4 j_4 m_4 c_4 f_4} \\ \left\langle j_1 m_1 \left| l_{\sigma_1} m_{l_{\sigma_1}} \frac{1}{2} m_s \right\rangle \left\langle l_{\sigma_2} m_{l_{\sigma_2}} \frac{1}{2} m_s \left| j_2 m_2 \right\rangle \right. \\ \left. \left\langle j_3 m_3 \left| l_{\sigma'_3} m_{l_{\sigma'_3}} \frac{1}{2} m_{s'} \right\rangle \left\langle l_{\sigma'_4} m_{l_{\sigma'_4}} \frac{1}{2} m_{s'} \left| j_4 m_4 \right\rangle \right. \right. \\ R_{\sigma_1}(r) R_{\sigma_2}(r) R_{\sigma'_3}(r') R_{\sigma'_4}(r') Y_{l_{\sigma_1} m_{l_{\sigma_1}}}^*(\Omega) Y_{l_{\sigma_2} m_{l_{\sigma_2}}}(\Omega) Y_{l_{\sigma'_3} m_{l_{\sigma'_3}}}^*(\Omega') Y_{l_{\sigma'_4} m_{l_{\sigma'_4}}}(\Omega') \quad (4.14)$$

en donde  $\Omega$  denota la dependencia angular.

Lo siguiente será reescribir los coeficientes de Clebsch-Gordan utilizando la notación de los simbolos  $3 - J$  (ver apéndice B) dada por:

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} = \frac{(-1)^{j_1-j_2-m_3}}{\sqrt{2j_3+1}} \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j_3 - m_3 \rangle. \quad (4.15)$$

Obteniendo así:

$$\begin{aligned} \Psi_{c_1 f_1}^\dagger(\mathbf{r}) \Psi^{c_2 f_2}(\mathbf{r}) \Psi_{c_3 f_3}^\dagger(\mathbf{r}') \Psi^{c_4 f_4}(\mathbf{r}') &= \sum_{\tau_i | n_i} \sum_{l_i j_i m_i} \sum_{m_{l_{\tau_i}}} \sum_{\sigma \sigma'} \sum_{m_s m_{s'}} \\ &\beta_{\tau_1 n_1 l_1 j_1 m_1 c_1 f_1}^\dagger \beta^{\tau_2 n_2 l_2 j_2 m_2 c_2 f_2} \beta_{\tau_3 n_3 l_3 j_3 m_3 c_3 f_3}^\dagger \beta^{\tau_4 n_4 l_4 j_4 m_4 c_4 f_4} \\ &\times \prod_{k=1}^4 \sqrt{2j_k+1} (-1)^{l_{\sigma_1}+l_{\sigma_2}+(m_1+m_2)+l_{\sigma_3}+l_{\sigma_4}+(m_3+m_4)} \\ &\times R_{\sigma_1}(r) R_{\sigma_2}(r) R_{\sigma_3}(r') R_{\sigma_4}(r') Y_{l_{\sigma_1} m_{l_{\sigma_1}}}^*(\Omega) Y_{l_{\sigma_2} m_{l_{\sigma_2}}}(\Omega) Y_{l_{\sigma_3} m_{l_{\sigma_3}}}^*(\Omega') Y_{l_{\sigma_4} m_{l_{\sigma_4}}}(\Omega') \\ &\times \begin{pmatrix} l_{\sigma_1} & \frac{1}{2} & j_1 \\ m_{l_{\sigma_1}} & m_s & -m_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_{\sigma_3} & \frac{1}{2} & j_3 \\ m_{l_{\sigma_3}} & m_{s'} & -m_3 \end{pmatrix} \\ &\times \begin{pmatrix} l_{\sigma_2} & \frac{1}{2} & j_2 \\ m_{l_{\sigma_2}} & m_s & -m_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_{\sigma_4} & \frac{1}{2} & j_4 \\ m_{l_{\sigma_4}} & m_{s'} & -m_4 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.16)$$

#### 4.2.2. Acoplamiento de generadores de SU(3)

De la misma forma en la que relacionamos los índices de color  $c$  con la representación  $(1,0)$  es posible relacionar los índices  $a$  de los generadores con la representación adjunta  $(1,1)$ . Esto es útil ya que podemos hacer uso de las reglas para bajar índices así como del teorema generalizado de Wigner-Eckart para escribir de una forma acoplada (en función de los coeficientes de Clebsch-Gordan de SU(3)) el producto de dos generadores (ver apéndice B), siendo ésta:

$$\begin{aligned} (T_a)_{c_2}^{c_1} (T^a)_{c_4}^{c_3} &= \sum_a \frac{1}{2} (-1)^{\chi_{c_2} + \chi_{c_4} + \chi_a} \langle (10)c_1, (01)\bar{c}_2 | (11)a \rangle \\ &\langle (10)c_3, (01)\bar{c}_4 | (11)\bar{a} \rangle, \end{aligned} \quad (4.17)$$

en donde  $\chi_i$  corresponde a la fase de SU(3) definida en (3.14). Los índices  $c$  y  $a$  pertenecen a las representaciones (1,0) y (1,1) respectivamente, mientras  $\bar{c}$  y  $\bar{a}$  pertenecen a las representaciones conjugadas.

### 4.2.3. Potencial de interacción

El potencial de interacción confinante está dado por dos contribuciones que dependen únicamente de la distancia entre dos puntos, por lo que podemos utilizar un desarrollo de Laplace y tipo Laplace para estos términos.

Podemos recordar que este desarrollo consiste en separar la parte radial de la angular en una serie de polinomios de Legendre, la cual a su vez podemos expresar como una serie en armónicos esféricos.

Los desarrollos de Laplace y tipo Laplace mencionados son [10]:

$$\frac{1}{|r - r'|} = \sum_{LM} \frac{4\pi}{2L + 1} \left[ \frac{1}{r_{>}} \right] \left( \frac{r_{<}}{r_{>}} \right)^L Y_{LM}^*(\Omega) Y_{LM}(\Omega'), \quad (4.18)$$

$$|r - r'| = \sum_{LM} \frac{4\pi}{2L + 1} \left[ \frac{r_{<}^2}{r_{>}} \frac{1}{2L + 3} - \frac{r_{>}}{2L - 1} \right] \left( \frac{r_{<}}{r_{>}} \right)^L Y_{LM}^*(\Omega) Y_{LM}(\Omega'), \quad (4.19)$$

donde  $r_{>}$  y  $r_{<}$  están dadas por:

$$r_{>} = \max(r, r') \quad \text{y} \quad r_{<} = \min(r, r'). \quad (4.20)$$

Por lo que podemos escribir el potencial como:

$$V(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) = \sum_{LM} \frac{4\pi}{2L + 1} V_L(r_{>}, r_{<}) Y_{LM}^*(\Omega) Y_{LM}(\Omega'), \quad (4.21)$$

con  $V_L(r_{>}, r_{<})$  dado por:

$$V_L(r_{>}, r_{<}) = \left[ \frac{a}{r_{>}} + b \left( \frac{r_{<}^2}{r_{>}} \frac{1}{2L + 3} - \frac{r_{>}}{2L - 1} \right) \right] \left( \frac{r_{<}}{r_{>}} \right)^L. \quad (4.22)$$

#### 4.2.4. Término de interacción

Este capítulo constituye la parte central del trabajo y en él se utilizará la base de modos de cavidad esférica desarrollada en el capítulo 3 para calcular el término de interacción, siguiendo de cerca lo realizado por T. Yepez en [3], donde se calcula el término de interacción utilizando la base del oscilador armónico.

Utilizando (4.16), (4.17) y (4.21), podemos escribir (4.3) como:

$$\begin{aligned}
H_{\text{Coulomb}}^{q-q} &= \sum_{ac_i} \sum_{ff'} \sum_{\tau_i | n_i} \sum_{l_i j_i m_i} \sum_{m_{l_{\tau_i}}} \sum_{\sigma \sigma'} \sum_{m_s m_{s'}} \sum_{LM} \left( \frac{2\pi}{2L+1} \right) \left( \prod_{k=1}^4 \sqrt{2j_k+1} \right) \\
&\quad (-1)^{l_{\sigma_1} + l_{\sigma_2} + m_1 + m_2 + l_{\sigma'_3} + l_{\sigma'_4} + m_3 + m_4 + \chi_{c_2} + \chi_{c_4} + \chi_a + M + m_{l_{\sigma_1}} + m_{l_{\sigma'_3}}} \\
&\quad \left( \int \int r^2 r'^2 V_L(r_>, r_<) R_{\sigma_1}(r) R_{\sigma_2}(r) R_{\sigma'_3}(r') R_{\sigma'_4}(r') dr dr' \right) \\
&\quad \beta_{\tau_1 n_1 l_1 j_1 m_1 c_1 f}^\dagger \beta^{\tau_2 n_2 l_2 j_2 m_2 c_2 f} \left( \int Y_{L-M}(\Omega) Y_{l_{\sigma_1} - m_{l_{\sigma_1}}}(\Omega) Y_{l_{\sigma_2} m_{l_{\sigma_2}}}(\Omega) d\Omega \right) \\
&\quad \beta_{\tau_3 n_3 l_3 j_3 m_3 c_3 f'}^\dagger \beta^{\tau_4 n_4 l_4 j_4 m_4 c_4 f'} \left( \int Y_{LM}(\Omega') Y_{l_{\sigma'_3} - m_{l_{\sigma'_3}}}(\Omega') Y_{l_{\sigma'_4} m_{l_{\sigma'_4}}}(\Omega') d\Omega' \right) \\
&\quad \langle (10)c_1, (01)\bar{c}_2 | (11)a \rangle \begin{pmatrix} l_{\sigma_1} & \frac{1}{2} & j_1 \\ m_{l_{\sigma_1}} & m_s & -m_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_{\sigma'_3} & \frac{1}{2} & j_3 \\ m_{l_{\sigma'_3}} & m_{s'} & -m_3 \end{pmatrix} \\
&\quad \langle (10)c_3, (01)\bar{c}_4 | (11)\bar{a} \rangle \begin{pmatrix} l_{\sigma_2} & \frac{1}{2} & j_2 \\ m_{l_{\sigma_2}} & m_s & -m_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_{\sigma'_4} & \frac{1}{2} & j_4 \\ m_{l_{\sigma'_4}} & m_{s'} & -m_4 \end{pmatrix} \quad (4.23)
\end{aligned}$$

en donde hemos expresado explícitamente la suma sobre los índices de color y sabor (por consistencia y claridad) y en donde también utilizamos que:

$$Y_{lm}^* = (-1)^m Y_{l-m}. \quad (4.24)$$

De la ecuación (4.23) podemos observar que tenemos tres integrales desacopladas: la parte radial y las dos partes angulares. Las integrales angulares

son realizables y sabemos que están dadas por la fórmula general [11];

$$\begin{aligned}
 & \int Y_{j_1 m_1}(\Omega) Y_{j_2 m_2}(\Omega) Y_{j_3 m_3}(\Omega) d\Omega = \\
 & = \left[ \frac{(2j_1 + 1)(2j_2 + 1)(2j_3 + 1)}{4\pi} \right]^{\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix}.
 \end{aligned} \tag{4.25}$$

Por lo que el resultado del producto de las dos integrales angulares será:

$$\begin{aligned}
 & \rightarrow \left[ \frac{(2l_{\sigma_1} + 1)(2l_{\sigma_2} + 1)(2L + 1)}{4\pi} \right]^{\frac{1}{2}} \left[ \frac{(2l_{\sigma'_3} + 1)(2l_{\sigma'_4} + 1)(2L + 1)}{4\pi} \right]^{\frac{1}{2}} \\
 & \begin{pmatrix} l_{\sigma_1} & l_{\sigma_2} & L \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_{\sigma_1} & l_{\sigma_2} & L \\ -m_{l_{\sigma_1}} & m_{l_{\sigma_2}} & -M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_{\sigma'_3} & l_{\sigma'_4} & L \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_{\sigma'_3} & l_{\sigma'_4} & L \\ -m_{l_{\sigma'_3}} & m_{l_{\sigma'_4}} & M \end{pmatrix}.
 \end{aligned} \tag{4.26}$$

Utilizando el resultado para las integrales angulares (4.26) podemos reescribir (4.23) como:

$$\begin{aligned}
H_{\text{Coulomb}}^{q-q} &= \sum_{ac_i} \sum_{ff'} \sum_{\tau_i | n_i} \sum_{l_i j_i m_i} \sum_{m_{l\tau_i}} \sum_{\sigma\sigma'} \sum_{m_s m_{s'}} \sum_{LM} \left( \frac{1}{2L+1} \right) \\
& \left[ \beta_{\tau_1 n_1 l_1 j_1 m_1 c_1 f}^\dagger \beta^{\tau_2 n_2 l_2 j_2 m_2 c_2 f} \langle (10)c_1, (01)\bar{c}_2 | (11)a \rangle \langle l_{\sigma_1} 0 l_{\sigma_2} 0 | L0 \rangle \right] \\
& \left[ \beta_{\tau_3 n_3 l_3 j_3 m_3 c_3 f'}^\dagger \beta^{\tau_4 n_4 l_4 j_4 m_4 c_4 f'} \langle (10)c_3, (01)\bar{c}_4 | (11)\bar{a} \rangle \langle l_{\sigma'_3} 0 l_{\sigma'_4} 0 | L0 \rangle \right] \\
& (-1)^{M+m_{l\sigma_1}+m_{l\sigma'_3}+m_1+m_2+m_3+m_4+\chi_{c_2}+\chi_{c_4}+\chi_a} \\
& \left( \frac{1}{2} \int \int r^2 r'^2 V_L(r_>, r_<) R_{\sigma_1}(r) R_{\sigma_2}(r) R_{\sigma'_3}(r') R_{\sigma'_4}(r') dr dr' \right) \\
& \begin{pmatrix} l_{\sigma_1} & \frac{1}{2} & j_1 \\ m_{l\sigma_1} & m_s & -m_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_{\sigma'_3} & \frac{1}{2} & j_3 \\ m_{l\sigma'_3} & m_{s'} & -m_3 \end{pmatrix} \\
& \begin{pmatrix} l_{\sigma_2} & \frac{1}{2} & j_2 \\ m_{l\sigma_2} & m_s & -m_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_{\sigma'_4} & \frac{1}{2} & j_4 \\ m_{l\sigma'_4} & m_{s'} & -m_4 \end{pmatrix} \\
& \left( \prod_{k=1}^4 \sqrt{(2j_k+1)(2l_{\sigma_k}+1)} \right) \begin{pmatrix} l_{\sigma_1} & l_{\sigma_2} & L \\ -m_{l\sigma_1} & m_{l\sigma_2} & -M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_{\sigma'_3} & l_{\sigma'_4} & L \\ -m_{l\sigma'_3} & m_{l\sigma'_4} & M \end{pmatrix} \\
& \tag{4.27}
\end{aligned}$$

en donde  $\sigma_k = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma'_3, \sigma'_4\}$  y en donde hemos reescrito los símbolos 3-J provenientes de la ecuación (4.26) que contienen ceros como coeficientes de Clebsch-Gordan de acuerdo a (4.15).

Relacionaremos el producto de tres símbolos 3J con el llamado símbolo 6J mediante (ver apéndice B):

$$\begin{aligned}
\sum_{m'_1 m'_2 m'_3} (-1)^{l_1+l_2+l_3+m'_1+m'_2+m'_3} & \begin{pmatrix} j_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m'_2 & -m'_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_1 & j_2 & l_3 \\ -m'_1 & m_2 & m'_3 \end{pmatrix} \\
& \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & j_3 \\ m'_1 & -m'_2 & m_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} \left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ l_1 & l_2 & l_3 \end{matrix} \right\}. \\
& \tag{4.28}
\end{aligned}$$

Para poder utilizar esta relación primero hay que utilizar las relaciones

de simetría de los símbolos 3J dadas en (B.6) para reescribir (4.27) en una forma más conveniente dada por:

$$\begin{aligned}
H_{\text{Coulomb}}^{q-q} &= \sum_{ac_i} \sum_{ff'} \sum_{\tau_i |n_i|} \sum_{l_i j_i m_i} \sum_{m_{l_{\tau_i}}} \sum_{\sigma\sigma'} \sum_{m_s m_{s'}} \sum_{LM} \left( \frac{1}{2L+1} \right) \\
&\left[ \beta_{\tau_1 n_1 l_1 j_1 m_1 c_1 f}^\dagger \beta^{\tau_2 n_2 l_2 j_2 m_2 c_2 f} \langle (10)c_1, (01)\bar{c}_2 | (11)a \rangle \langle l_{\sigma_1} 0 l_{\sigma_2} 0 | L0 \rangle \right] \\
&\left[ \beta_{\tau_3 n_3 l_3 j_3 m_3 c_3 f'}^\dagger \beta^{\tau_4 n_4 l_4 j_4 m_4 c_4 f'} \langle (10)c_3, (01)\bar{c}_4 | (11)\bar{a} \rangle \langle l_{\sigma_3'} 0 l_{\sigma_4'} 0 | L0 \rangle \right] \\
&(-1)^{M+m_{l_{\sigma_1}}+m_{l_{\sigma_3'}}+m_1+m_2+m_3+m_4+\chi_{c_2}+\chi_{c_4}+\chi_a} \\
&\left( \frac{1}{2} \int \int r^2 r'^2 V_L(r_>, r_<) R_{\sigma_1}(r) R_{\sigma_2}(r) R_{\sigma_3'}(r') R_{\sigma_4'}(r') dr dr' \right) \\
&(-1)^{L+l_{\sigma_1}+l_{\sigma_2}} \begin{pmatrix} j_1 & l_{\sigma_1} & \frac{1}{2} \\ -m_1 & m_{l_{\sigma_1}} & m_s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_3 & l_{\sigma_3'} & \frac{1}{2} \\ -m_3 & m_{l_{\sigma_3'}} & m_{s'} \end{pmatrix} \\
&(-1)^{L+l_{\sigma_3'}+l_{\sigma_4'}} \begin{pmatrix} l_{\sigma_2} & j_2 & \frac{1}{2} \\ -m_{l_{\sigma_2}} & m_2 & -m_s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_{\sigma_4'} & j_4 & \frac{1}{2} \\ -m_{l_{\sigma_4'}} & m_4 & -m_{s'} \end{pmatrix} \\
&\left( \prod_{k=1}^4 \sqrt{(2j_k+1)(2l_{\sigma_k}+1)} \right) \begin{pmatrix} l_{\sigma_2} & l_{\sigma_1} & L \\ m_{l_{\sigma_2}} & -m_{l_{\sigma_1}} & -M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_{\sigma_4'} & l_{\sigma_3'} & L \\ m_{l_{\sigma_4'}} & -m_{l_{\sigma_3'}} & M \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{4.29}$$

Realizaremos un paso más antes de convertir las expresiones a los símbolos 6-J, para esto notaremos las siguientes cosas:

$$(-1)^{m_{l_{\sigma_1}}+m_2} = (-1)^{m_{l_{\sigma_1}}+m_{l_{\sigma_2}}+m_s}, \tag{4.30}$$

$$(-1)^{m_{l_{\sigma_3'}}+m_4} = (-1)^{m_{l_{\sigma_3'}}+m_{l_{\sigma_4'}}+m_{s'}}, \tag{4.31}$$

$$(-1)^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+1} = 1. \tag{4.32}$$

Para obtener las identidades (4.30) y (4.31) hemos utilizado las restricciones que imponen los símbolos 3J (ver definición (4.15) o (B.5)) sobre sus elementos inferiores.

Haciendo uso de (4.30), (4.31) y (4.32) podemos escribir (4.29) como:

$$\begin{aligned}
H_{\text{Coulomb}}^{q-q} &= \sum_{ac_i} \sum_{ff'} \sum_{\tau_i | n_i} \sum_{l_i j_i m_i} \sum_{m_{l_{\tau_i}}} \sum_{\sigma \sigma'} \sum_{m_s m_{s'}} \sum_{LM} \left( \frac{1}{2L+1} \right) \\
&\left[ \beta_{\tau_1 n_1 l_1 j_1 m_1 c_1 f}^\dagger \beta^{\tau_2 n_2 l_2 j_2 m_2 c_2 f} \langle (10)c_1, (01)\bar{c}_2 | (11)a \rangle \langle l_{\sigma_1} 0 l_{\sigma_2} 0 | L0 \rangle \right] \\
&\left[ \beta_{\tau_3 n_3 l_3 j_3 m_3 c_3 f'}^\dagger \beta^{\tau_4 n_4 l_4 j_4 m_4 c_4 f'} \langle (10)c_3, (01)\bar{c}_4 | (11)\bar{a} \rangle \langle l_{\sigma_3} 0 l_{\sigma_4} 0 | L0 \rangle \right] \\
&(-1)^{M+\chi_{c_2}+\chi_{c_4}+\chi_a} (-1)^{m_1+m_3+1} \\
&\left( \frac{1}{2} \int \int r^2 r'^2 V_L(r_>, r_<) R_{\sigma_1}(r) R_{\sigma_2}(r) R_{\sigma_3}'(r') R_{\sigma_4}'(r') dr dr' \right) \\
&(-1)^{l_{\sigma_1}+l_{\sigma_2}+\frac{1}{2}+m_{l_{\sigma_1}}+m_{l_{\sigma_2}}+m_s} \begin{pmatrix} j_1 & l_{\sigma_1} & \frac{1}{2} \\ -m_1 & m_{l_{\sigma_1}} & m_s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_3 & l_{\sigma_3} & \frac{1}{2} \\ -m_3 & m_{l_{\sigma_3}} & m_{s'} \end{pmatrix} \\
&(-1)^{l_{\sigma_3}'+l_{\sigma_4}'+\frac{1}{2}+m_{l_{\sigma_3}'}+m_{l_{\sigma_4}'}+m_{s'}} \begin{pmatrix} l_{\sigma_2} & j_2 & \frac{1}{2} \\ -m_{l_{\sigma_2}} & m_2 & -m_s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_{\sigma_4}' & j_4 & \frac{1}{2} \\ -m_{l_{\sigma_4}'} & m_4 & -m_{s'} \end{pmatrix} \\
&\left( \prod_{k=1}^4 \sqrt{(2j_k+1)(2l_{\sigma_k}+1)} \right) \begin{pmatrix} l_{\sigma_2} & l_{\sigma_1} & L \\ m_{l_{\sigma_2}} & -m_{l_{\sigma_1}} & -M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_{\sigma_4}' & l_{\sigma_3}' & L \\ m_{l_{\sigma_4}'} & -m_{l_{\sigma_3}'} & M \end{pmatrix}. \tag{4.33}
\end{aligned}$$

Podemos finalmente utilizar (4.28) junto con (4.33), en donde haremos uso de las sumas en  $m_{l_{\tau_i}}, m_s$  y  $m_{s'}$  para llegar a:



$$\begin{aligned}
H_{\text{Coulomb}}^{q-q} = & \sum_{ac_i} \sum_{ff'} \sum_{\tau_i | n_i} \sum_{l_i j_i m_i} \sum_{\sigma \sigma'} \sum_{LM} \left( \frac{1}{2L+1} \right) \left( \prod_{k=1}^4 \sqrt{(2j_k+1)(2l_{\sigma_k}+1)} \right) \\
& \left[ \beta_{\tau_1 n_1 l_1 j_1 m_1 c_1 f}^\dagger \beta^{\tau_2 n_2 l_2 j_2 m_2 c_2 f} \langle (10)c_1, (01)\bar{c}_2 | (11)a \rangle \langle l_{\sigma_1} 0 l_{\sigma_2} 0 | L0 \rangle \right] \\
& \left[ \beta_{\tau_3 n_3 l_3 j_3 m_3 c_3 f'}^\dagger \beta^{\tau_4 n_4 l_4 j_4 m_4 c_4 f'} \langle (10)c_3, (01)\bar{c}_4 | (11)\bar{a} \rangle \langle l_{\sigma'_3} 0 l_{\sigma'_4} 0 | L0 \rangle \right] \\
& (-1)^{M+\chi_{c_2}+\chi_{c_4}+\chi_a} (-1)^{m_1+m_3+1} \\
& \left( \frac{1}{2} \int \int r^2 r'^2 V_L(r_>, r_<) R_{\tau_1}(r) R_{\tau_2}(r) R_{\tau_3}(r') R_{\tau_4}(r') dr dr' \right) \\
& \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & L \\ -m_1 & m_2 & -M \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & L \\ l_{\sigma_2} & l_{\sigma_1} & \frac{1}{2} \end{Bmatrix} \begin{pmatrix} j_3 & j_4 & L \\ -m_3 & m_4 & M \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} j_3 & j_4 & L \\ l_{\sigma'_4} & l_{\sigma'_3} & \frac{1}{2} \end{Bmatrix}.
\end{aligned} \tag{4.34}$$

Podemos bajar los índices de los operadores de aniquilación, salvo  $\tau$  y  $f$ , lo que introduce una fase dada por:

$$\rightarrow (-1)^{j_2-m_2+\chi_{c_2}+j_4-m_4+\chi_{c_4}}. \tag{4.35}$$

De transformar los símbolos 3J restantes a coeficientes de Clebsch-Gordan se obtiene una fase adicional dada por:

$$\rightarrow (-1)^{j_1-j_2+j_3-j_4}. \tag{4.36}$$

Nuevamente se obtiene una fase adicional al cambiar los índices  $m$  en los símbolos 3J por  $-m$ , dada por:

$$\rightarrow (-1)^{j_1+j_2+j_3+j_4}. \tag{4.37}$$

Por último podemos también notar que con la introducción de los símbolos 6J obtuvimos dos símbolos 3J adicionales en los cuales se acopla  $M$  con  $m_1, m_2, m_3$  y  $m_4$ , en específico  $M = m_3 - m_4$  y  $M = m_2 - m_1$ .

Teniendo en cuenta todas estas consideraciones obtenemos la expresión para el término de interacción dada por:

$$\begin{aligned}
H_{\text{Coulomb}}^{q-q} &= \sum_{a c_i} \sum_{f f'} \sum_{\tau_i | n_i} \sum_{l_i j_i m_i} \sum_{\sigma \sigma'} \sum_{LM} \left( \prod_{k=1}^4 \sqrt{(2j_k + 1)(2l_{\sigma_k} + 1)} \right) \\
&\quad \left( \frac{1}{2L + 1} \right)^2 (-1)^{M + \chi_a} (-1)^{1 + j_2 + j_4} \\
&\quad \left( \frac{1}{2} \int \int r^2 r'^2 V_L(r_>, r_<) R_{\tau_1}(r) R_{\tau_2}(r) R_{\tau_3}(r') R_{\tau_4}(r') dr dr' \right) \\
&\quad \left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & L \\ l_{\sigma_2} & l_{\sigma_1} & \frac{1}{2} \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} j_3 & j_4 & L \\ l_{\sigma'_4} & l_{\sigma'_3} & \frac{1}{2} \end{matrix} \right\} \\
&\quad \langle j_1 m_1, j_2 - m_2 | L - M \rangle \langle j_3 m_3, j_4 - m_4 | LM \rangle \\
&\quad [ \langle (10)c_1, (01)\bar{c}_2 | (11)a \rangle \langle l_{\sigma_1} 0 l_{\sigma_2} 0 | L0 \rangle \langle (10)c_3, (01)\bar{c}_4 | (11)\bar{a} \rangle \langle l_{\sigma'_3} 0 l_{\sigma'_4} 0 | L0 \rangle ] \\
&\quad \left[ \beta_{\tau_1 n_1 l_1 j_1 m_1 c_1 f}^\dagger \beta_{n_2 l_2 j_2 - m_2 \bar{c}_2}^{\tau_2 f} \beta_{\tau_3 n_3 l_3 j_3 m_3 c_3 f'}^\dagger \beta_{n_4 l_4 j_4 - m_4 \bar{c}_4}^{\tau_4 f'} \right]. \quad (4.38)
\end{aligned}$$

Escribiremos esta última expresión de una forma más compacta, para eso primero definiremos a la magnitud de interacción  $I_{\tau_i n_i j_i l_{\sigma_i}}^L$  dada por:

$$\begin{aligned}
I_{\tau_i n_i j_i l_{\sigma_i}}^L &\equiv \left( \frac{1}{2L + 1} \right)^2 \left( \prod_{k=1}^4 \sqrt{(2j_k + 1)(2l_{\sigma_k} + 1)} \right) \\
&\quad \left( \frac{1}{2} \int \int r^2 r'^2 V_L(r_>, r_<) R_{\tau_1}(r) R_{\tau_2}(r) R_{\tau_3}(r') R_{\tau_4}(r') dr dr' \right) \quad (4.39) \\
&\quad \langle l_{\sigma_1} 0 l_{\sigma_2} 0 | L0 \rangle \langle l_{\sigma'_3} 0 l_{\sigma'_4} 0 | L0 \rangle \left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & L \\ l_{\sigma_2} & l_{\sigma_1} & \frac{1}{2} \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} j_3 & j_4 & L \\ l_{\sigma'_4} & l_{\sigma'_3} & \frac{1}{2} \end{matrix} \right\}.
\end{aligned}$$

Haciendo uso de la definición de la magnitud de interacción podemos escribir la ecuación (4.38) como:

$$\begin{aligned}
H_{\text{Coulomb}}^{q-q} &= \sum_{a c_i} \sum_{f f'} \sum_{\tau_i | n_i} \sum_{l_i j_i m_i} \sum_{\sigma \sigma'} \sum_{LM} I_{\tau_i n_i j_i l_{\sigma_i}}^L (-1)^{M + \chi_a} (-1)^{1 + j_2 + j_4} \\
&\quad \langle j_1 m_1, j_2 - m_2 | L - M \rangle \langle j_3 m_3, j_4 - m_4 | LM \rangle \langle (10)c_1, (01)\bar{c}_2 | (11)a \rangle \\
&\quad \langle (10)c_3, (01)\bar{c}_4 | (11)\bar{a} \rangle \left[ \beta_{\tau_1 n_1 l_1 j_1 m_1 c_1 f}^\dagger \beta_{n_2 l_2 j_2 - m_2 \bar{c}_2}^{\tau_2 f} \beta_{\tau_3 n_3 l_3 j_3 m_3 c_3 f'}^\dagger \beta_{n_4 l_4 j_4 - m_4 \bar{c}_4}^{\tau_4 f'} \right]. \quad (4.40)
\end{aligned}$$

Lo siguiente es notar que  $\beta_{\tau_i n_i l_i j_i m_i c_i f}$  corresponde a las componentes esféricas de los índices de color SU(3) y de momento angular y sabor SU(2) del operador tensorial  $\beta$ . Esto es de utilidad ya que podemos recordar que es posible escribir el producto de dos operadores tensoriales, escritos en índices esféricos, tanto en una base de índices acoplada como en una base desacoplada, a través de los coeficientes de Clebsch-Gordan de acuerdo a:

$$[A_{\Gamma_1} \otimes B_{\Gamma_2}]_{\Gamma\alpha} = \sum_{\alpha_1 \alpha_2} \langle \Gamma_1 \alpha_1, \Gamma_2 \alpha_2 | \Gamma \alpha \rangle A_{\Gamma_1 \alpha_1} B_{\Gamma_2 \alpha_2}. \quad (4.41)$$

Esta ecuación expresa un elemento de la base acoplada (lado derecho) como una suma sobre los elementos en la base desacoplada (lado izquierdo). Donde  $A$  y  $B$  son operadores tensoriales escritos en índices esféricos,  $\Gamma$  denota los índices de una representación irreducible del grupo SU(2) o SU(3) y  $\alpha$  denota los índices que diferencian los vectores base de cada representación, por ejemplo para SU(2)  $\Gamma = j, \alpha = m$ . Cuando escribamos el producto en su forma acoplada escribiremos los índices de SU(3) arriba y los índices de SU(2) abajo.

Podemos notar que en (4.40) se encuentran presentes relaciones de acoplamiento de los operadores tensoriales de la forma (4.41) para el momento angular en SU(2) y para el color en SU(3) dadas por:

$$\left[ \beta_{(\tau_1 n_1 l_1 c_1 f) j_1}^\dagger \otimes \beta_{(n_2 j_2 \bar{c}_2) j_2}^{\tau_2 f} \right]_{L-M} = \sum_{m_1 m_2} \left[ \langle j_1 m_1, j_2 - m_2 | L - M \rangle \beta_{\tau_1 n_1 l_1 j_1 m_1 c_1 f}^\dagger \beta_{n_2 l_2 j_2 - m_2 \bar{c}_2}^{\tau_2 f} \right], \quad (4.42)$$

$$\left[ \beta_{(\tau_3 n_3 l_3 c_3 f') j_3}^\dagger \otimes \beta_{(n_4 j_4 \bar{c}_4) j_4}^{\tau_4 f'} \right]_{LM} = \sum_{m_3 m_4} \left[ \langle j_3 m_3, j_4 - m_4 | LM \rangle \beta_{\tau_3 n_3 l_3 j_3 m_3 c_3 f'}^\dagger \beta_{n_4 l_4 j_4 - m_4 \bar{c}_4}^{\tau_4 f'} \right], \quad (4.43)$$

$$\left[ \beta_{\tau_1 n_1 l_1 j_1 m_1 f}^\dagger \otimes \beta_{n_2 l_2 j_2 - m_2}^{\tau_2 f(01)} \right]^{(11)a} = \sum_{c_1 c_2} \left[ \langle (10) c_1, (01) \bar{c}_2 | (11) a \rangle \beta_{\tau_1 n_1 l_1 j_1 m_1 c_1 f}^\dagger \beta_{n_2 l_2 j_2 - m_2 \bar{c}_2}^{\tau_2 f} \right], \quad (4.44)$$

$$\left[ \beta_{\tau_3 n_3 l_3 j_3 m_3 f'}^{\dagger(10)} \otimes \beta_{n_4 l_4 j_4 - m_4}^{\tau_4 f'(01)} \right]^{(11)\bar{a}} = \sum_{c_3 c_4} \left[ \langle (10)c_3, (01)\bar{c}_4 | (11)\bar{a} \rangle \beta_{\tau_3 n_3 l_3 j_3 m_3 c_3 f'}^{\dagger} \beta_{n_4 l_4 j_4 - m_4 \bar{c}_4}^{\tau_4 f'} \right]. \quad (4.45)$$

Podemos ahora combinar (4.42) y (4.44) para obtener:

$$\left[ \beta_{\tau_1 n_1 l_1 j_1 f}^{\dagger(10)} \otimes \beta_{n_2 l_2 j_2}^{\tau_2 f(01)} \right]_{L-M}^{(11)a} = \sum_{m_1 m_2} \sum_{c_1 c_2} \left[ \langle j_1 m_1, j_2 - m_2 | L - M \rangle \langle (10)c_1, (01)\bar{c}_2 | (11)a \rangle \beta_{\tau_1 n_1 l_1 j_1 m_1 c_1 f}^{\dagger} \beta_{n_2 l_2 j_2 - m_2 \bar{c}_2}^{\tau_2 f} \right]. \quad (4.46)$$

De igual forma podemos combinar (4.43) y (4.45) para obtener:

$$\left[ \beta_{\tau_3 n_3 l_3 j_3 f'}^{\dagger(10)} \otimes \beta_{n_4 l_4 j_4}^{\tau_4 f'(01)} \right]_{LM}^{(11)\bar{a}} = \sum_{m_3 m_4} \sum_{c_3 c_4} \left[ \langle j_3 m_3, j_4 - m_4 | LM \rangle \langle (10)c_3, (01)\bar{c}_4 | (11)\bar{a} \rangle \beta_{\tau_3 n_3 l_3 j_3 m_3 c_3 f'}^{\dagger} \beta_{n_4 l_4 j_4 - m_4 \bar{c}_4}^{\tau_4 f'} \right]. \quad (4.47)$$

De acuerdo a esto podemos reescribir (4.40) como:

$$H_{\text{Coulomb}}^{q-q} = \sum_{a f f'} \sum_{\tau_i | n_i} \sum_{l_i j_i} \sum_{\sigma \sigma'} \sum_{LM} I_{\tau_i j_i l_i \sigma_i}^L (-1)^{M+\chi_a} (-1)^{1+j_2+j_4} \left[ \beta_{\tau_1 n_1 l_1 j_1 f}^{\dagger(10)} \otimes \beta_{n_2 l_2 j_2}^{\tau_2 f(01)} \right]_{L-M}^{(11)a} \left[ \beta_{\tau_3 n_3 l_3 j_3 f'}^{\dagger(10)} \otimes \beta_{n_4 l_4 j_4}^{\tau_4 f'(01)} \right]_{LM}^{(11)\bar{a}}. \quad (4.48)$$

Hemos acoplado el momento angular y el color de los operadores de creación sin embargo, es posible realizar más acoplamientos similares notando la siguiente relación para los coeficientes de Clebsch-Gordan:

$$(-1)^{\chi_\alpha} = \sqrt{\dim(\Gamma)} \langle \Gamma \alpha, \Gamma \bar{\alpha} | (0)0 \rangle \quad (4.49)$$

donde  $\chi_\alpha$  es la fase (3.14) asociada a la representación  $\Gamma$  con índices de subgrupo  $\alpha$ ,  $\dim(\Gamma)$  es la dimensión de la representación,  $\bar{\alpha}$  representa los índices del vector base conjugado a  $\alpha$  y  $|(0)0\rangle$  representa la representación trivial (para  $SU(3)$  un estado sin color y para  $SU(2)$  un estado sin espín).

Recordando que una representación  $|jm\rangle$  de  $SU(2)$  tiene una fase dada por  $\chi_m = j - m$  y una dimensión dada por  $2j + 1$  podemos reescribir la fase en (4.48) como:

$$(-1)^{M+\chi_a} = (-1)^L \sqrt{8(2J+1)} \langle LM, L-M|00\rangle \langle (11)a, (11)\bar{a}|(00)0\rangle. \quad (4.50)$$

En donde también hemos utilizado el hecho de que  $a$  pertenece a (11) cuya dimensión es 8. Los coeficientes de Clebsch-Gordan introducidos acoplan los dos productos tensoriales a un solo producto en una base acoplada a espín y color cero, es decir:

$$\begin{aligned} & \left[ \left( \beta_{\tau_1 n_1 l_1 j_1 f}^{\dagger(10)} \otimes \beta_{n_2 l_2 j_2}^{\tau_2 f(01)} \right)_L^{(11)} \otimes \left( \beta_{\tau_3 n_3 l_3 j_3 f'}^{\dagger(10)} \otimes \beta_{n_4 l_4 j_4}^{\tau_4 f'(01)} \right)_L^{(11)} \right]_{00}^{(00)0} = \\ & = \sum_{Ma} \langle LM, L-M|00\rangle \langle (11)a, (11)\bar{a}|(00)0\rangle \quad (4.51) \\ & \left[ \beta_{\tau_1 n_1 l_1 j_1 f}^{\dagger(10)} \otimes \beta_{n_2 l_2 j_2}^{\tau_2 f(01)} \right]_{L-M}^{(11)a} \left[ \beta_{\tau_3 n_3 l_3 j_3 f'}^{\dagger(10)} \otimes \beta_{n_4 l_4 j_4}^{\tau_4 f'(01)} \right]_{LM}^{(11)\bar{a}}. \end{aligned}$$

Es posible obtener un acoplamiento en los índices de sabor, para esto utilizaremos la regla (3.13) para bajar los índices de los operadores de aniquilación obteniendo así una fase extra dada por:

$$\rightarrow (-1)^{\chi_f + \chi_{f'}} (-1)^{1+\tau_2 + \tau_4}. \quad (4.52)$$

Si la magnitud de interacción  $I_{\tau_i j_i l_i \sigma_i}^L$  no dependiera de los índices de pseudoespín sería posible acoplar a pseudoespín cero. Pero como este no es el caso solo es posible realizar un acoplamiento a sabor cero, para esto primero cambiamos la fase de sabor por:

$$(-1)^{\chi_f + \chi_{f'}} = \dim(F) \langle Ff, F\bar{f}|[00]\rangle \langle Ff', F\bar{f}'|[00]\rangle \quad (4.53)$$

donde  $F$  denota la representación a la que asociamos la simetría de color,  $f$  y  $f'$  denotan los índices asociados a los sabores de quarks considerados y  $[00]$  denota la representación trivial en la simetría de sabor. Si solo consideramos los quarks up y down  $F = \frac{1}{2}$  en  $SU(2)$  mientras que si añadimos el quark strange  $F = (10)$  en  $SU(3)$ .

Podemos ahora identificar el producto tensorial en la base acoplada a sabor, color y espín cero como:

$$\begin{aligned}
& \left[ \left( \beta_{\tau_1 n_1 l_1 j_1}^{\dagger F(10)} \otimes \beta_{\tau_2 n_2 l_2 j_2}^{F(01)} \right)_L^{[00](11)} \otimes \left( \beta_{\tau_3 n_3 l_3 j_3}^{\dagger F(10)} \otimes \beta_{\tau_4 n_4 l_4 j_4}^{F(01)} \right)_L^{[00](11)} \right]_{00}^{[00](00)0} \\
& = \sum_{ff'} \langle Ff, F\bar{f} | [0] \rangle \langle Ff', F\bar{f}' | [0] \rangle \\
& \left[ \left( \beta_{\tau_1 n_1 l_1 j_1}^{\dagger(10)} \otimes \beta_{\tau_2 n_2 l_2 j_2}^{(01)} \right)_L^{(11)} \otimes \left( \beta_{\tau_3 n_3 l_3 j_3}^{\dagger(10)} \otimes \beta_{\tau_4 n_4 l_4 j_4}^{(01)} \right)_L^{(11)} \right]_{00}^{(00)0} \\
& \quad (4.54)
\end{aligned}$$

Haciendo uso de estos acoplamientos podemos finalmente escribir el término de interacción en una forma compacta como:

$$\begin{aligned}
H_{\text{Coulomb}}^{q-q} &= \sum_{\tau_i | n_i} \sum_{l_i j_i} \sum_{\sigma \sigma'} I_{\tau_i j_i l_i \sigma_i}^L \dim(F) \sqrt{8(2J+1)} (-1)^{L+j_2+j_4} (-1)^{\tau_2+\tau_4} \\
& \left[ \left( \beta_{\tau_1 n_1 l_1 j_1}^{\dagger F(10)} \otimes \beta_{\tau_2 n_2 l_2 j_2}^{F(01)} \right)_L^{[00](11)} \otimes \left( \beta_{\tau_3 n_3 l_3 j_3}^{\dagger F(10)} \otimes \beta_{\tau_4 n_4 l_4 j_4}^{F(01)} \right)_L^{[00](11)} \right]_{00}^{[00](00)0} . \\
& \quad (4.55)
\end{aligned}$$

Podemos observar que el término de interacción toma una forma similar a la obtenida por T. Yopez en [3], con la diferencia de que la magnitud de la interacción tiene dependencia en el pseudoespín y está dada por integrales de funciones de Bessel en lugar de integrales de polinomios de Laguerre. Esto ocasiona que no podamos realizar un acoplamiento a pseudoespín cero.

A pesar de que la base de modos de cavidad esférica nos da un término cinético diagonalizado, no muestra alguna mejora significativa en relación a la base del oscilador armónico. En todo caso parece aumentar la complejidad del término de interacción ya que no es posible acoplar a pseudoespín cero por lo que hay que considerar dos sumas adicionales.



## Capítulo 5

# Conclusiones

Hemos escrito ya los términos del sector libre y de interacción de quarks en el formalismo de segunda cuantización en la base de modos de cavidad esférica. Sin embargo aún tenemos parámetros libres que necesitan ser ajustados: El radio de la bolsa ( $R$ ) y los parámetros  $a$  y  $b$  del potencial que caracterizan la parte tipo Coulomb y la parte confinante respectivamente. Para ajustar estos parámetros sería necesario obtener el espectro de masas hadrónico a partir del Hamiltoniano efectivo aquí presentado y tratar de ajustarlo con los resultados experimentales conocidos.

Podemos analizar cada uno de los términos obtenidos en el sector de quarks y compararlos con los previamente obtenidos en [3] utilizando la base de oscilador armónico.

El sector libre de quarks es diagonal en la base de modos de cavidad por lo que no es necesario realizar una diagonalización, como en el caso de la base del oscilador. Esto nos indica que la base escogida en este trabajo es una selección natural para estudiar fermiones libres confinados.

El sector de interacción de quarks tiene una forma similar a la obtenida en la base del oscilador, con la diferencia de que las integrales radiales a realizar se encuentran en función de funciones esféricas de Bessel en lugar de polinomios de Laguerre. En el término de interacción obtenido existe un número cuántico de pseudoespín que relaciona las partes de arriba y abajo de los espinores utilizados como base; debido a que la magnitud de la interacción depende de este número no es posible realizar un acoplamiento similar al realizado en la base del oscilador armónico.



Más allá de la forma diagonal de la energía cinética efectiva parece no existir ningún beneficio extra en utilizar la base de modos de cavidad esférica, y parecería innecesario rehacer los análisis ya realizados con la base del oscilador ya que el término de interacción es ligeramente más complejo (existen sumas adicionales debido a que no se puede acoplar a pseudoespín cero). Sin embargo sería instructivo en un futuro obtener los términos de interacción gluónica para ver si existe algún beneficio en utilizar esta base, pero la experiencia obtenida al calcular el término de interacción parece indicar lo contrario.

Las perspectivas a futuro incluyen incorporar los términos gluónicos para buscar obtener los espectros de energía no solo de partículas compuestas por quarks (en las que las interacciones gluónicas juegan un papel importante) sino buscar también el espectro de partículas compuestas únicamente por gluones (glueballs).

Una vez expresado el término efectivo considerando interacciones entre quarks y gluones habría que utilizar alguna de las diversas técnicas en sistemas de muchos cuerpos disponibles para analizar la dinámica de sistemas hadrónicos.

## Apéndice A

# Modos de cavidad esférica de anti-quarks

En este apéndice mostraremos que los modos de cavidad esférica descritos por  $u_{-n-\kappa m f}$  en efecto corresponden a la función de onda asociada a un antiquark confinado en una bolsa con las condiciones de frontera del MIT. Para ello primero mostraremos ciertas relaciones de simetría para las variables adimensionales de energía y momento, posteriormente obtendremos la función de onda para un antiquark a través de una transformación CPT y mostraremos que es igual a la obtenida al realizar el cambio de índices  $\mathbf{n} \rightarrow -\mathbf{n}$ , con  $\mathbf{n} = (n, \kappa, m)$  y  $-\mathbf{n} = (-n, -\kappa, m)$ .

De igual forma discutiremos cómo se llega a la interpretación de los operadores de creación y aniquilación a partir de un desarrollo en modos normales de cavidad esférica.

### A.1. Relaciones de simetría

Buscamos ver cómo se relaciona  $(\omega_{-n-\kappa}, x_{-n-\kappa})$  con  $(\omega_{n\kappa}, x_{n\kappa})$ . Para ello primero hay que notar lo siguiente:

$$\begin{aligned} \bar{\alpha} &\rightarrow \alpha, & \alpha &\rightarrow \bar{\alpha}, \\ \omega_{-n-\kappa f} &= -sgn(n) \sqrt{x_{-n-\kappa f}^2 + \xi_f^2} \end{aligned} \tag{A.1}$$

donde  $\rightarrow$  indica el resultado obtenido al realizar el cambio  $\mathbf{n} \rightarrow -\mathbf{n}$ .

Utilizando (A.1) es posible escribir la condición de frontera (2.49) para los índices  $-\mathbf{n}$  como:

$$j_\alpha(x_{-n-\kappa f}) = \text{sgn}(\kappa) \frac{x_{-n-\kappa f}}{\xi_f - \text{sgn}(n)\sqrt{x_{-n-\kappa f}^2 + \xi_f^2}} j_{\bar{\alpha}}(x_{-n-\kappa f}). \quad (\text{A.2})$$

Hay que notar que la fracción del lado derecho de la ecuación (A.2) se puede reescribir como:

$$\begin{aligned} & \frac{x_{-n-\kappa f}}{\xi_f - \text{sgn}(n)\sqrt{x_{-n-\kappa f}^2 + \xi_f^2}} = \\ &= \frac{x_{-n-\kappa f}}{\xi_f - \text{sgn}(n)\sqrt{x_{-n-\kappa f}^2 + \xi_f^2}} \frac{\xi_f + \text{sgn}(n)\sqrt{x_{-n-\kappa f}^2 + \xi_f^2}}{\xi_f + \text{sgn}(n)\sqrt{x_{-n-\kappa f}^2 + \xi_f^2}} \\ &= \frac{(\xi_f + \text{sgn}(n)\sqrt{x_{-n-\kappa f}^2 + \xi_f^2}) x_{-n-\kappa f}}{\xi_f^2 - (x_{-n-\kappa f}^2 + \xi_f^2)} = -\frac{\xi_f + \text{sgn}(n)\sqrt{x_{-n-\kappa f}^2 + \xi_f^2}}{x_{-n-\kappa f}}. \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Utilizando (A.1) y notando que  $\text{sgn}(\kappa) = \text{sgn}(\kappa)^{-1}$  podemos reescribir (A.2) como:

$$-\text{sgn}(\kappa) \frac{x_{-n-\kappa f}}{\xi_f + \text{sgn}(n)\sqrt{x_{-n-\kappa f}^2 + \xi_f^2}} j_\alpha(x_{-n-\kappa f}) = j_{\bar{\alpha}}(x_{-n-\kappa f}). \quad (\text{A.4})$$

Hay que notar que (A.4) implica que  $x_{-n-\kappa f}$  es solución a la ecuación de frontera (2.49) para  $n$  y  $\kappa$ , por lo que podemos concluir que:

$$x_{-n-\kappa f} = x_{n\kappa f}. \quad (\text{A.5})$$

Las relaciones (A.1) y (A.5) nos permiten concluir también que:

$$\omega_{-n-\kappa f} = -\omega_{n\kappa f}. \quad (\text{A.6})$$

## A.2. Transformación CPT

En el capítulo 2 mostramos la forma funcional de los modos de cavidad esférica para quarks. A continuación usaremos una transformación CPT para encontrar la forma funcional de los modos asociados a un antiquark. Para esto utilizaremos la relación (2.6) considerando la representación de Dirac para las matrices  $\gamma^\mu$ , dada por:

$$\gamma^k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^k \\ \sigma^k & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.7})$$

Usando (2.6) y (A.7) tenemos que:

$$\tilde{u}_{n\kappa m f}(\mathbf{r}) = A_{n\kappa f} \begin{pmatrix} i\sigma^2\sigma^1\sigma^3 \text{sgn}(\kappa) \frac{x_{n\kappa f}}{\omega_{n\kappa f} + \xi_f} j_\alpha \left(x_{n\kappa f} \frac{r}{R}\right) \chi_{-\kappa}^m \\ -\sigma^2\sigma^1\sigma^3 j_{\bar{\alpha}} \left(x_{n\kappa f} \frac{r}{R}\right) \chi_\kappa^m \end{pmatrix}, \quad (\text{A.8})$$

donde  $\tilde{u}_{n\kappa m f}(\mathbf{r})$  denota los modos de antiquarks. Podemos recordar que:

$$\sigma^2\sigma^1\sigma^3 = -i\mathbb{1}, \quad (\text{A.9})$$

considerando esto llegamos a que el espinor de cavidad esférica para antiquarks está dado por:

$$\tilde{u}_{n\kappa m f}(\mathbf{r}) = A_{n\kappa f} \begin{pmatrix} \text{sgn}(\kappa) \frac{x_{n\kappa f}}{\omega_{n\kappa f} + \xi_f} j_\alpha \left(x_{n\kappa f} \frac{r}{R}\right) \chi_{-\kappa}^m \\ i j_{\bar{\alpha}} \left(x_{n\kappa f} \frac{r}{R}\right) \chi_\kappa^m \end{pmatrix}. \quad (\text{A.10})$$

### A.3. Transformación $(n, \kappa, m) \rightarrow (-n, -\kappa, m)$

Realizaremos un cambio de índices  $\mathbf{n} \rightarrow -\mathbf{n}$  sobre los modos de cavidad esférica de quarks para mostrar que estos corresponden a las soluciones para antiquarks obtenidas en la sección anterior en donde se utilizó una transformación CPT.

Comenzaremos primero por transformar la constante de normalización, por lo que utilizando las relaciones de simetría (A.5) y (A.6), la transformación (A.1) y la condición de frontera (2.49) obtenemos que:

$$\begin{aligned} A_{-n-\kappa f} &= \frac{1}{R^{\frac{3}{2}}} \frac{x_{n\kappa f}}{|j_\alpha(x_{n\kappa f})|} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{n\kappa f}(\omega_{n\kappa f} + \kappa) + \xi_f}} \\ &= \text{sgn}(\kappa) A_{n\kappa f} \frac{x_{n\kappa f}}{\xi_f + \omega_{n\kappa f}}. \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

Utilizando nuevamente (A.5), (A.6), (A.1) junto con (A.11) vemos que:

$$\begin{aligned} u_{-n-\kappa m f}(\mathbf{r}) &= A_{n\kappa f} \text{sgn}(\kappa) \frac{x_{n\kappa f}}{\xi_f + \omega_{n\kappa f}} \begin{pmatrix} j_\alpha \left( x_{n\kappa f} \frac{r}{R} \right) \chi_{-\kappa}^{-m} \\ -i \text{sgn}(\kappa) \frac{x_{n\kappa f}}{\xi_f - \omega_{n\kappa f}} j_{\bar{\alpha}} \left( x_{n\kappa f} \frac{r}{R} \right) \chi_\kappa^m \end{pmatrix} \\ &= A_{n\kappa f} \begin{pmatrix} \text{sgn}(\kappa) \frac{x_{n\kappa f}}{\xi_f + \omega_{n\kappa f}} j_\alpha \left( x_{n\kappa f} \frac{r}{R} \right) \chi_{-\kappa}^{-m} \\ -i \frac{x_{n\kappa f}^2}{\xi_f^2 - \omega_{n\kappa f}^2} j_{\bar{\alpha}} \left( x_{n\kappa f} \frac{r}{R} \right) \chi_\kappa^m \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

Utilizando la relación de dispersión relativista (2.48) obtenemos:

$$u_{-n-\kappa m f}(\mathbf{r}) = A_{n\kappa f} \begin{pmatrix} \text{sgn}(\kappa) \frac{x_{n\kappa f}}{\xi_f + \omega_{n\kappa f}} j_\alpha \left( x_{n\kappa f} \frac{r}{R} \right) \chi_{-\kappa}^m \\ i j_{\bar{\alpha}} \left( x_{n\kappa f} \frac{r}{R} \right) \chi_\kappa^m \end{pmatrix}. \quad (\text{A.13})$$

Comparando (A.10) y (A.13) podemos finalmente concluir que en efecto  $u_{-n-\kappa m f} = \tilde{u}_{n\kappa m f}$ .

## A.4. Desarrollo en modos normales

Hemos ya mostrado que los antiquarks corresponden a las soluciones para los números cuánticos  $(-n, -\kappa, m, f)$  de los modos de cavidad esférica. Por lo que podemos utilizar esto para justificar la interpretación dada en el capítulo 1 al desarrollo en modos normales de los campos fermiónicos.

Recordemos que las funciones  $u_{n\kappa mf}$  forman una base ortonormal completa, por lo que podemos desarrollar el campo fermiónico  $\Psi_{cf}$  usando esta base como:

$$\Psi_{cf}(\mathbf{r}) = \sum_{n\kappa m} a_{cfn\kappa m} u_{n\kappa mf}(\mathbf{r}), \quad (\text{A.14})$$

donde  $a_{cfn\kappa m}$  son los coeficientes del desarrollo; debido a que  $\Psi_{cf}$  es un operador estos coeficientes deberán ser también operadores. Dado que el momento canónico asociado a los campos fermiónicos está dado por  $i\Psi_{cf}^\dagger$  estos satisfacen un álgebra correspondiente a operadores de creación y aniquilación de quarks en el espacio real, es decir crean/aniquilan quarks en la posición  $\mathbf{r}$ . Esto implica que la ecuación (A.14) no es más que un cambio de base para los operadores de aniquilación, lo que implica que  $a_{cfn\kappa m}$  puede ser interpretado como un operador de aniquilación de partículas asociadas al modo  $u_{n\kappa mf}$  (i.e. quarks/antiquarks libres confinados en una bolsa).

Para hacer explícita la separación entre quarks y antiquarks podemos separar la parte positiva de  $n$  y la parte negativa de  $n$  llegando a:

$$\Psi_{cf} = \sum_{\kappa, m, n > 0} (a_{cfn\kappa m} u_{n\kappa mf} + a_{cf-n\kappa m} u_{-n\kappa mf}). \quad (\text{A.15})$$

Como la distribución de números cuánticos  $\kappa$  y  $m$  es simétrica respecto al 0 y como las sumas involucran todos sus valores, tenemos que:

$$\sum_{\kappa m} a_{cf-n\kappa m} u_{-n\kappa mf} = \sum_{\kappa m} a_{cf-n-\kappa m} u_{-n-\kappa mf}. \quad (\text{A.16})$$

Lo que implica que podemos reescribir (A.15) como:

$$\Psi_{cf} = \sum_{\kappa, m, n > 0} (a_{cfn\kappa m} u_{n\kappa mf} + a_{cf-n-\kappa m} u_{-n-\kappa mf}). \quad (\text{A.17})$$

Debido a la relación de simetría (A.6) podemos interpretar el segundo término como un operador de creación de una partícula asociada al modo  $u_{-n-\kappa mf}$ , *i.e.* un antiquark con números cuánticos  $n, \kappa, m, f$ . Esto debido a que la energía asociada a este segundo término es  $-\omega_{n\kappa}$ , es decir estamos cediendo energía para crear un antiquark con energía  $\omega_{n\kappa}$ . Definiendo al operador de creación de antiquarks como  $b_{cf n\kappa m}^\dagger$  podemos reescribir (A.17) en su forma final como:

$$\Psi_{cf}(\mathbf{r}) = \sum_{\kappa, m, n > 0} \left( a_{cf n\kappa m} u_{n\kappa mf}(\mathbf{r}) + b_{cf n\kappa m}^\dagger u_{-n-\kappa mf}(\mathbf{r}) \right), \quad (\text{A.18})$$

correspondiendo a la interpretación dada en el capítulo 1. Hay que notar que los operadores creación/anihilación de quarks y antiquarks están relacionados mediante:

$$a_{cf -n-\kappa m} = b_{cf n\kappa m}^\dagger \quad y \quad b_{cf -n-\kappa m} = a_{cf n\kappa m}^\dagger. \quad (\text{A.19})$$

## Apéndice B

# Álgebra de $SU(2)$ y $SU(3)$

En este apéndice daremos un breve resumen de lo que es un grupo de Lie, mencionando las propiedades utilizadas implícitamente a lo largo del trabajo. En particular discutiremos las álgebras de  $SU(2)$  y  $SU(3)$ . De igual forma resumiremos varias de las identidades utilizadas en el capítulo 4 para obtener el término de interacción del sector de quarks.

### B.1. Teoría de grupos y representaciones

Un grupo es una estructura algebraica equipada con una operación y cuyos elementos satisfacen las propiedades de cerradura, asociatividad, elemento inverso y elemento neutro bajo dicha operación.

Es posible describir a los elementos de los grupos como transformaciones lineales que actúan sobre un espacio vectorial, en particular podemos describir a los elementos del grupo como matrices. El conjunto de transformaciones lineales asociadas a los elementos de un grupo es conocido como una representación. Cuando las representaciones matriciales de todos los elementos del grupo no son diagonalizables simultáneamente (bajo la misma transformación) se dice que la representación es irreducible. Se dice que dos representaciones son equivalentes si están relacionadas mediante una transformación unitaria.

Dado que las transformaciones físicas son usualmente descritas como transformaciones lineales actuando sobre un espacio vectorial (por ejemplo el espacio de Hilbert) es posible describirlas utilizando teoría de grupos.



## B.2. Grupos de Lie y $SU(N)$

Un grupo de Lie es un grupo cuyos elementos se encuentran parametrizados por parámetros continuos  $(\theta_i)$ . Cualquier elemento  $U(\theta_{\mathbf{n}})$  del grupo puede escribirse, en función de los llamados generadores  $J_i$ , como:

$$U(\theta_{\mathbf{n}}) = e^{-i \sum_i^n \theta_i J_i} \quad (\text{B.1})$$

donde  $\theta_i$  denota al  $i$ -ésimo parámetro y  $J_i$  denota el  $i$ -ésimo generador.

Mientras que  $U(\theta_{\mathbf{n}})$  denota una transformación física bajo el grupo caracterizada por los parámetros  $\theta_{\mathbf{n}}$ , los generadores denotan una transformación infinitesimal. Lo que la relación (B.1) nos dice es que las propiedades del grupo estarán definidas localmente en los generadores. El grupo estará caracterizado únicamente por la relación entre los generadores dada por:

$$[J_i, J_j] = f_{ijk} J_k, \quad (\text{B.2})$$

donde el corchete denota al conmutador y donde  $f_{ijk}$  son conocidas como las constantes de estructura y en donde hemos asumido la suma sobre el índice contraído.

Esta relación resulta familiar de la teoría de momento angular ya que podemos relacionar a los operadores de momento angular con representaciones del grupo  $SO(3)$  o  $SU(2)$ . Hablamos del grupo  $SU(N)$  o  $SO(N)$  cuando el grupo en sí mismo está definido por matrices unitarias u ortogonales de dimensión  $N \times N$  con determinante igual a la unidad.

La principal meta de la teoría de representaciones es encontrar las representaciones irreducibles ya que a partir de ellas podemos construir cualquier representación reducible. Cuando la representación es reducible sabemos que se debe poder escribir como la suma directa de dos o más representaciones irreducibles, en donde estas subrepresentaciones darán lugar a sub-espacios invariantes. Un sub-espacio invariante es un sub-espacio del espacio vectorial sobre el cual se aplican las transformaciones cuyos elementos se mantienen dentro de este espacio bajo cualquier transformación. Cuando el espacio vectorial es todo el espacio de Hilbert los espacios invariantes estarán directamente relacionados a los llamados multipletes (el singlete y el triplete de la suma de momento angular son ejemplos de ello).

Como ya hemos visto es posible relacionar a los elementos de un grupo de Lie con operadores que actúan sobre un espacio de Hilbert por lo que en ocasiones resultará más conveniente hablar de los operadores en lugar de su representación matricial, dado que ambos son equivalentes.

Otras propiedades importantes de un grupo de Lie son: su rango y sus operadores de Casimir. El rango es el número máximo de generadores que conmutan entre sí mientras, el rango de  $SU(N)$  es  $N-1$ . Un operador de Casimir es un operador que conmuta con todos los generadores del grupo. El teorema de Racah nos dice que el número de operadores de Casimir será igual al rango del grupo (esto es cierto para los grupos de Lie conocidos como semi-simples, para una discusión a detalle ver [12]).

La utilidad de los operadores de Casimir aparece en la clasificación de representaciones irreducibles e identificación de multipletes. El Hamiltoniano de un sistema conmutará con todos los operadores de Casimir de un grupo de Lie si el sistema posee la simetría del grupo (su Hamiltoniano conmuta con todos sus generadores, es decir el sistema es invariante ante cualquier transformación), esto nos permite utilizar a los eigenvalores de los operadores de Casimir como números cuánticos adecuados para la descripción del sistema.

Cada multiplete estará caracterizado por el eigenvalor de sus elementos respecto a los operadores de Casimir, sin embargo dentro de los multipletes es posible realizar consideraciones físicas (existencia de un estado de mínima energía) para definir estados degenerados característicos haciendo uso de los eigenvalores de alguno de los generadores. En el caso del momento angular orbital el operador de Casimir está dado por  $L^2$  y sabemos que los multipletes están caracterizados por el número cuántico  $l$  (relacionado al eigenvalor del operador de Casimir mediante  $l(l+1)$ ), no es posible cambiar de momento angular orbital mediante rotaciones sin embargo es posible cambiar de número cuántico magnético  $m$  (relacionado al generador  $L_z$ ) mediante los operadores de ascenso y descenso ( $L_+ = L_x + iL_y$  y  $L_- = L_x - iL_y$ ).

Dado que los generadores son operadores hermitianos (cuando trabajamos con grupos unitarios) hacer uso de sus eigenvalores y eigenestados nos permitirán trabajar con estados ortogonales entre si. Esto quiere decir que la degeneración del generador a utilizar en los operadores de Casimir nos definirá una base de un sub-espacio invariante con dimensión igual a la degeneración, con una representación asociada de esta dimensión.

Antes de terminar la sección hay que mencionar dos representaciones que llevan sus propios nombres. La representación fundamental de un grupo  $SU(N)$  es aquella que tiene la dimensión del grupo ( $N$ ). La representación adjunta de un grupo  $SU(N)$  es aquella dada por las constantes de estructura de grupo tomando dos de los índices como índices de matriz y el otro como numerador del elemento, naturalmente la dimensión de esta representación es igual al número de generadores del grupo (en el caso de  $SU(N)$  el número de generadores está dado por  $N^2 - 1$ ).

### B.3. Producto de sub-espacios invariantes

La representación de un sistema construido a partir del producto directo de sub-espacios invariantes (como en el caso de acoplamiento de momento angular) es en general reducible para el caso de los grupos  $SU(N)$ . La base de este sub-espacio puede ser escrita de dos formas: base acoplada y base desacoplada. La base desacoplada es simplemente el producto directo de cada vector base mientras que la base acoplada es una suma directa de vectores base correspondientes a diferentes representaciones de forma que sumen la dimensión adecuada. Las dos bases están relacionadas mediante una transformación lineal cuyos coeficientes son conocidos como coeficientes de Clebsch-Gordan y que se puede escribir esquemáticamente como:

$$|C_{l\dots}\rangle \otimes |C_{j\dots}\rangle = \sum_k \oplus C_{ljk} |C_{k\dots}\rangle$$

$$\sum \dim(|C_{k\dots}\rangle) = \dim(|C_{l\dots}\rangle) \times \dim(|C_{j\dots}\rangle). \quad (\text{B.3})$$

Con:

$$C_{ljk} = \langle C_{k\dots} | C_{l\dots} C_{j\dots} \rangle, \quad (\text{B.4})$$

donde  $|C_{i\dots}\rangle$  denota un estado caracterizado por los eigenvalores del operador de Casimir  $C_i$  mientras que  $C_{ljk}$  son los coeficientes de Clebsch-Gordan. El lado izquierdo corresponde a un elemento de la base desacoplada mientras que el derecho corresponde a la combinación lineal asociada en la base acoplada.

El uso de cada base en general está determinado por la simetría del problema físico a considerar (los números cuánticos conservados).

## B.4. Representaciones de SU(2)

El caso de SU(2) corresponde a la conocida teoría de espín por lo que sus representaciones irreducibles estarán caracterizadas por el número cuántico  $s$  relacionado al operador de Casimir  $S^2$ , de igual forma es convencional utilizar al número cuántico  $s_z$  para caracterizar únicamente al estado físico asociado. Por lo que los eigenestados físicos estarán únicamente caracterizados por  $|s \ s_z\rangle$ .

La representación fundamental corresponde al espín  $\frac{1}{2}$  mientras que la representación adjunta corresponde al espín 1 (esta representación corresponde a rotaciones en un espacio tridimensional).

## B.5. Coeficientes de Clebsch-Gordan SU(2)

Es usual trabajar con estados acoplados en momento angular orbital y espín por lo que nos encontramos frecuentemente con los coeficientes de Clebsch-Gordan de la representación SU(2) dados por  $\langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j_3 m_3 \rangle$ , para ello es conveniente introducir el símbolo 3J dado por [11]

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} = \begin{cases} \frac{(-1)^{j_1-j_2-m_3}}{\sqrt{2j_3+1}} \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j_3 m_3 \rangle \\ 0 & \text{si } (m_1 + m_2 + m_3 \neq 0 \text{ o } \mathbf{j}_1 + \mathbf{j}_2 \neq \mathbf{j}_3) \end{cases} \quad (\text{B.5})$$

Este símbolo satisface las relaciones de simetría dadas por [11]:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} j_2 & j_3 & j_1 \\ m_2 & m_3 & m_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j_3 & j_1 & j_2 \\ m_3 & m_1 & m_2 \end{pmatrix} \\ &= (-1)^{j_1+j_2+j_3} \begin{pmatrix} j_1 & j_3 & j_2 \\ m_1 & m_3 & m_2 \end{pmatrix} \\ &= (-1)^{j_1+j_2+j_3} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ -m_1 & -m_2 & -m_3 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

Aunque discutimos en general el acoplamiento entre dos representaciones irreducibles en ocasiones es necesario trabajar con el acoplamiento de tres diferentes momentos angulares. Si buscamos trabajar con la base acoplada con momento angular total  $J$  el acoplamiento puede ocurrir de dos formas. En la primera  $j_1$  se acopla a  $j_2$  para dar  $j_{12}$  para posteriormente acoplarse a  $j_3$  y finalmente dar  $J$ . En la segunda  $j_2$  y  $j_3$  se acoplan en  $j_{23}$  que posteriormente se acoplan con  $j_1$  para dar  $J$ . La transformación que relaciona los dos esquemas se escribe en función de los llamados símbolos 6J de acuerdo a [11]:

$$\langle j_1 j_2(j_{12}) j_3, J | j_1 j_2 j_3(j_{23}) J \rangle = (-1)^{j_1+j_2+j_3+J} \sqrt{(2j_{12}+1)(2j_{23}+1)} \begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_{12} \\ j_3 & J & j_{23} \end{Bmatrix}, \quad (\text{B.7})$$

donde el término en corchetes es el símbolo 6J que satisface:

$$\begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_{12} \\ j_3 & J & j_{23} \end{Bmatrix} \neq 0 \quad \text{si} \quad \begin{array}{l} \mathbf{j}_1 + \mathbf{j}_2 = \mathbf{j}_{12} \\ \mathbf{j}_3 + \mathbf{j}_2 = \mathbf{j}_{23} \\ \mathbf{j}_1 + \mathbf{J} = \mathbf{j}_{23} \\ \mathbf{j}_3 + \mathbf{J} = \mathbf{j}_{12} \end{array} \quad (\text{B.8})$$

Los símbolos 3J y los símbolos 6J se encuentran relacionados mediante:

$$\sum_{m'_1 m'_2 m'_3} (-1)^{l_1+l_2+l_3+m'_1+m'_2+m'_3} \begin{pmatrix} j_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m'_2 & -m'_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_1 & j_2 & l_3 \\ -m'_1 & m_2 & m'_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & j_3 \\ m'_1 & -m'_2 & m_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ l_1 & l_2 & l_3 \end{Bmatrix}. \quad (\text{B.9})$$

## B.6. Representaciones de SU(3)

SU(3) tiene 8 generadores ( $F_i$ ) y un rango igual a 2 por lo que sabemos que tendrá dos operadores de Casimir. Las ocho matrices que conforman la forma usual de la representación fundamental son conocidas como matrices de Gell-Mann. Los dos operadores de Casimir están dados por [8]:

$$C_1 = \sum_{i=1}^8 F_i^2, \quad (B.10)$$

$$C_2 = \sum_{ijk} d_{ijk} F_i F_j F_k,$$

donde  $d_{ijk}$  queda definido a partir de:

$$\{F_i, F_j\} = \frac{4}{3} \delta_{ij} + 2d_{ijk} F_k, \quad (B.11)$$

y en donde hemos asumido la suma sobre el índice contraído.

Los generadores que conmutan son:

$$[F_1, F_8] = [F_2, F_8] = [F_3, F_8] = 0. \quad (B.12)$$

Dada una representación  $F_i$  es posible reescribirla en lo que se conoce como su forma esférica de acuerdo a:

$$\begin{aligned} I_{\pm} &= F_1 \pm iF_2, & I_3 &= F_3, & V_{\pm} &= F_4 \pm iF_5, \\ U_{\pm} &= F_6 \pm iF_7, & Y &= \frac{2}{\sqrt{3}} F_8. \end{aligned} \quad (B.13)$$

Esta forma es análoga a la implementación de los operadores  $L_{\pm}$  en la teoría de momento angular.

Podemos también notar que SU(3) cuenta con tres sub-álgebras SU(2) (I-álgebra, V-álgebra y U-álgebra) por lo que es común utilizar los eigenvalores de una de estas sub-álgebras, en particular se utiliza la sub-álgebra

de Isoespín I (números cuánticos  $I$  e  $I_3$ ). Debido a las relaciones de conmutación que son iguales a cero podemos ver que es natural utilizar los eigenvalores de la hipercarga  $Y$ .

En el caso de  $SU(3)$  cada vector base de los espacios invariantes caracterizados por los eigenvalores de los operadores de Casimir se encuentran degenerados en el espacio  $Y - I_3$ , de las relaciones de conmutación podemos ver la forma en la que el resto de los generadores actúa sobre este espacio:  $I_{\pm}$  sube/baja  $I_3$  en una unidad,  $V_{\pm}$  sube/baja  $I_3$  en media unidad y sube/baja  $Y$  en una unidad, y  $U_{\pm}$  baja/sube  $I_3$  en media unidad y baja/sube  $Y$  en una unidad.

A diferencia de  $SU(2)$  existen dos representaciones fundamentales de  $SU(3)$ , relacionadas a través de la conjugación compleja (esto debido a que el espacio degenerado ahora es bi-dimensional en lugar de uni-dimensional). Los vectores base de una de estas representaciones la asociamos a los quarks mientras que la otra la asociamos a los antiquarks. Es usual denotar las representaciones irreducibles por el número de quarks que contienen en lugar de utilizar los operadores de Casimir, de esta forma un vector base de un espacio invariante queda escrito como  $|(qp)II_3Y\rangle$  donde  $q$  es el número de quarks y  $p$  el número de antiquarks. La representación adjunta está formada por un quark y un antiquark.

## B.7. Teorema de Wigner-Eckart

Para dar una noción intuitiva del teorema de Wigner-Eckart lo presentaremos primero en su forma usual para  $SU(2)$  y posteriormente daremos una versión generalizada para  $SU(N)$ .

Para  $SU(2)$  el teorema relaciona los elementos de matriz de un operador tensorial de rango  $k$  ( $T^k$ ) en la base de eigenestados de momento angular con el producto de dos factores: uno independiente de la orientación del momento angular (i.e. del número cuántico magnético) y un coeficiente de Clebsch-Gordan, es decir [11]:

$$\langle jm|T_q^k|j'm'\rangle = \langle j'm'kq|jm\rangle \langle j||T^k||j'\rangle \quad (\text{B.14})$$

donde  $q$  es la  $q$ -ésima componente del operador  $T$ ,  $\langle j'm'kq|jm\rangle$  es un coeficiente de Clebsch-Gordan y  $\langle j||T^k||j'\rangle$  es conocido como el elemento de

matriz reducido independiente de  $m, m'$  y  $q$ . En el caso de un operador vectorial  $k = 1$  y  $T_q = (T_+, T_-, T_3)$  con  $T_{\pm} = T_1 \pm iT_2$ , donde  $T_1, T_2, T_3$  es la representación cartesiana del operador vectorial.

El teorema de Wigner-Eckart en  $SU(3)$  está dado por [9]

$$\langle \mu_1 \nu_1 | T_{\nu}^{\mu} | \mu_2 \nu_2 \rangle = \sum_{\gamma} \langle \mu_{\gamma} \nu_{\mu_1 \nu_1} | \mu_2 \nu_2 \rangle \langle \mu_2 || T^{\mu} || \mu_1 \rangle_{\gamma} \quad (\text{B.15})$$

en donde  $\mu_i = (q_i, p_i)$  denota la representación en la que nos encontramos y  $\nu_i = (I, I_3, Y)$  denota el conjunto de números cuánticos de la hipercarga y el iso-espín,  $\langle \mu_2 || T^{\mu} || \mu_1 \rangle$  denota la matriz reducida que solo depende de las representaciones  $\mu_2$  y  $\mu_1$ , y la suma en  $\mu_{\gamma}$  denota la suma sobre todas las representaciones con la misma dimensión de forma que los coeficientes de Clebsch-Gordan sean distintos a cero.

Para calcular los elementos de matriz reducida de un operador escrito en forma esférica basta con usar las relaciones esféricas de  $SU(2)$  y  $SU(3)$  al actuar sobre estados bases de las representaciones irreducibles de  $SU(2)$  y  $SU(3)$  respectivamente.

El teorema de Wigner-Eckart resulta útil ya que nos da una expresión para los elementos de matriz de un operador, en particular en el presente trabajo estamos interesados en los generadores de  $SU(3)$ . En el caso de los generadores de  $SU(3)$  escritos en la base esférica tenemos que:

$$(T_a)_{c_2}^{c_1} \equiv \langle (10)c_1 | T_a | (10)c_2 \rangle = (-1)^{\chi_i+1} \frac{1}{\sqrt{2}} \langle (10)c_1, (01)\bar{c}_2 | (11)a \rangle. \quad (\text{B.16})$$

Con:

$$\chi_i = \frac{1}{3} \left( (\lambda_i - \mu_i) + \frac{Y_i}{2} - I_{3i} \right) \quad \text{Si } i \text{ está en } (\lambda_i, \mu_i) \text{ de } SU(3), \quad (\text{B.17})$$

donde  $a$  denota la representación  $(1, 1)$ ,  $c_1$  y  $c_2$  denotan un conjunto de eigenvalores de  $(I, I_3, Y)$ , y  $\bar{c}_2$  denota los eigenvalores de  $(I, -I_3, -Y)$ . Vemos que en este caso  $c_1$  y  $c_2$  se encuentran en las representaciones fundamentales.





# Bibliografía

- [1] O. C. T. Y.-M. D.A. Amor-Quiroz, P.O. Hess, “Qcd at low energy: The use of many-body methods,” *Journal of Physics: Conference Series*, vol. 639, no. 012014, 2015.
- [2] A. S. O. C. T. Yepez-Martinez, P.O. Hess, “A solvable model for many-quark systems in qcd hamiltonians,” *Physical Review C*, vol. 81, no. 045204, 2010.
- [3] T. Yepez-Martinez, “Un modelo motivado de la cromodinamica cuantica a bajas energias para los niveles orbitales s y p,” 2011.
- [4] A. Durrant, *Quantum Physics of Matter*. Physical world, Taylor & Francis, 2000.
- [5] T. Lee, *Particle Physics and Introduction to Field Theory*. Taylor & Francis, 2004.
- [6] E. S. A.P. Szczepaniac, “Coulomb gauge qcd, confinement, and the constituent representation,” *Physical Review*, vol. 65, no. 025012, 2001.
- [7] F. Halzen, *Quarks and Leptons*. John Wiley & Sons, 1984.
- [8] E. S. W. Greiner, S. Schramm, *Quantum Chromodynamics*. Springer, 1994.
- [9] J. D. J. Escher, “Fermion realization of the nuclear  $sp(6,r)$  model,” *Journal of Mathematical Physics*, vol. 39, no. 10, 1998.
- [10] C. Jen, “The continuous electron affinity spectrum of hydrogen,” *Physical Review*, vol. 43, 1933.
- [11] V. K. D.A. Varshalovich, A.N Moskalev, *Quantum Theory of Angular Momentum*. World Scientific.

- [12] M. B. W. Greiner, *Quantum Mechanics, Symmetries*. Springer, 1992.