



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA  
DE MÉXICO

---

---

FACULTAD DE CIENCIAS

Modos de vibración de sistemas no homogéneos en una y dos  
dimensiones

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Físico

PRESENTA:

Jimmy Hernández Morales

TUTOR

Dr. Ricardo Méndez Fragoso

Noviembre, 2015





Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## **Agradecimientos**

Primero que nada agradezco mi familia: a mi mamá, Magdalena Morales López; mi papá, Hipolito Hernández; mi tío, José Morales; mi tía María Reina Morales, ya que fueron fundamentales para que este proyecto se llevara a cabo. A mi sobrina Guadalupe Hernández, mi tía Julia Morales a mis primos hermanos: Marlene Hernández, Hipolito Hernández, Andy Hernández y María Enelda Hernández, Alejandra Hernández, Amalia Hernández.

Al Dr. Ricardo Méndez, que ha sido un gran ejemplo para mí, tanto en el ámbito académico como personal; gracias por su comprensión, su apoyo, sus enseñanzas, consejos y la paciencia que me ha tenido. A la Profesora Margarita Chévez, le agradezco mis primeras lecciones y el apoyo que me ha brindado siempre, de igual manera a don Alfredo Mata.

A mis profesores y amigos por transmitirme sus conocimientos y la paciencia que me tuvieron, en especial agradezco los profesores: Luis Briseño, Faustino Sanchez, Julian Chagolla, Lucia Médina, Gerardo Mejía, Claude Thions, Raybel Ancona, Rafael Ortiz, Ricardo Martin Hernández, Eugenio Ley Koo, Catalina Stern, Lazaro Gordillo y Luis Rincón. A los miembros del jurado por sus consejos y observaciones: Dr. Eugenio Ley koo, Dr. Carlos Arturo Vargas, Dra. Lucia Médina y el Dr. Pablo Luis Rendón.

A mis amigos, personas especiales, y excelentes compañeros con quienes he convivido a lo largo de todo este proceso: Alhelí González, Abisait Olivares, Alicia Dorante, Anayeli Ramírez, Ana Marroquí, Ana Karen González, Ana Paulina Pérez, Marco Antonio Salazar, Christian Coria, Gabriela Cervantes, Yolanda Martínez, Yoary Hernández, Jose Antonio Camargo, Roberto Torres, Juan Pablo Montero, Omar Pérez, Iván Benítez, Pedro Porras, Edgar Alonso, Carlos Ramon Pérez, Dinora Jeronimo, Luis Enrique Moreno, René Martínez, Silvia Sevilla, Carolina León, Carmen Almanza, Moises Ramírez, Fernando Sánchez, Fernando de la Cruz. A mis compañeros de Ciencias de la Computación, Actuaría, Matemáticas y Física. Gracias por su amistad.

A la Facultad de Ciencias por lo mucho que me ha dado.

También agradezco el apoyo otorgado por el proyecto PAPIIT IA 102414 por la beca otorgada y el material para la realizar esta tesis. Al Departamento de Física de la Facultad de Ciencias, UNAM por el espacio para desarrollar mis actividades académicas. Adicionalmente también agradezco el apoyo complementario de los proyectos PAPIME PE103114 y PE106615 para la realización de algunas actividades académicas relacionadas con esta tesis.

# Índice general

Resumen . . . . .	1
<b>1. Introducción.</b>	<b>3</b>
1.1. Introducción . . . . .	3
1.1.1. Oscilaciones libres con dos grados de libertad . . . . .	3
1.1.2. Ondas estacionarias . . . . .	4
1.2. Contenido de la tesis . . . . .	6
1.2.1. Planteamiento del problema de los modos de vibración en 1 dimensión en una cuerda no homogénea. . . . .	6
1.2.2. Modos de vibración de la cuerda no homogénea . . . . .	7
1.2.3. Sistemas en dos dimensiones: modos de vibración de la membrana no homogénea . . . . .	7
<b>2. El problema de la cuerda vibrante.</b>	<b>11</b>
2.1. El problema de la cuerda vibrante . . . . .	11
2.1.1. Solución general de la ecuación de onda . . . . .	12
2.1.2. La cuerda no homogénea . . . . .	14
2.2. El experimento . . . . .	16
<b>3. El problema de la membrana.</b>	<b>19</b>
3.1. Deducción de la ecuación onda en dos dimensiones . . . . .	19
3.1.1. Deducción 1 de la ecuación de onda para una membrana . . . . .	19
3.1.2. Deducción 2 para la ecuación de onda de una membrana . . . . .	21
3.2. Vibración de una membrana circular . . . . .	22
3.3. Membrana no homogénea . . . . .	25
3.3.1. Membrana anular y sujeta en los contornos . . . . .	25
3.3.2. Membrana anular con frontera interior libre y frontera exterior fija. . . . .	26
3.3.3. Membranas anulares de diferentes densidades . . . . .	27
<b>4. El problema de la cuerda y la membrana con <math>N</math> secciones de densidades constantes.</b>	<b>29</b>
4.1. Cuerda con $N$ -secciones . . . . .	29
4.1.1. Caso particular de la cuerda homogénea. . . . .	32
4.1.2. Cuerda con dos densidades diferentes. . . . .	32
4.2. Membrana con $N$ -inhomogeneidades . . . . .	33

<b>5. Resultados.</b>	<b>37</b>
5.1. Resultados: modos de vibración de sistemas en una dimensión . . . . .	37
5.2. Resultados: modos de vibración de sistemas en dos dimensiones . . . . .	43
5.2.1. Tabla de modos normales de una membrana anular con frontera interior libre y exterior fija . . . . .	44
5.2.2. Gráfica de la membrana libre en la frontera interna . . . . .	45
5.2.3. Gráfica de la membrana anular con frontera interior libre y frontera exterior fija. . . . .	46
5.2.4. Tabla de modos normales de las membranas concéntricas de diferentes densidades . . . . .	47
5.2.5. Gráficas de la membrana con dos densidades diferentes . . . . .	48
5.2.6. Gráficas de la membrana con tres densidades diferentes . . . . .	49
<b>6. Conclusiones y discusiones</b>	<b>53</b>
6.1. Futuras investigaciones y aplicaciones . . . . .	55
<b>A. Soluciones de tipo onda viajera.</b>	<b>57</b>
<b>B. Funciones de Bessel</b>	<b>59</b>
<b>C. Series de Fourier.</b>	<b>63</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>65</b>

# Resumen

En este trabajo de tesis se estudia el problema de hallar los modos normales de oscilación de sistemas no homogéneos en una y dos dimensiones. Para una dimensión se considera el caso de una cuerda fija en ambos extremos y regiones de diferentes densidades; para dos dimensiones hemos considerado membranas con geometrías circulares y cambios de densidad radiales. En ambos casos se resuelve la ecuación de onda en cada región con condiciones de continuidad de la función de onda y su derivada en la interfaz. Para la cuerda se consideran condiciones de Dirichlet y para la membrana se consideran condiciones de frontera de Dirichlet y Neumann.

En el primer capítulo resolvemos el problema de la cuerda hallando los valores propios o modos asociados a las funciones propias de la ecuación de onda para cada región. También se describe el diseño experimental de una cuerda no homogénea excitada por fuerza electromagnética con la finalidad de validar nuestro modelo. En el segundo capítulo se estudia el problema de hallar los modos en dos dimensiones en una membrana no homogénea y para ello se resuelve el problema de valores propios asociados a las superposiciones de funciones de Bessel ordinarias y de Neumann, que son las soluciones a la ecuación de onda para la parte radial.

Posteriormente, generalizamos el modelo para  $N$ -secciones de diferentes densidades en la cuerda y la membrana, para lo cual se hace uso de la matriz de transferencia entre cada una de las partes para obtener las ecuaciones que determinan los modos normales de vibración.

Finalmente, presentamos los modos explícitos obtenidos a partir de la implementación computacional de las ecuaciones obtenidas en el modelo, haciendo una comparación con los resultados experimentales para el caso de una dimensión. También se presentan gráficas correspondientes a los comportamientos de los modos variando los cocientes de densidades.



## Introducción.

### 1.1. Introducción

En el presente trabajo se hace un breve estudio de los modos normales de vibración de sistemas no homogéneos, es decir, con densidades no constantes, en una y dos dimensiones, sujetas a condiciones de frontera bien definidas. La importancia de este trabajo radica en la obtención del comportamiento de las frecuencias de los modos normales en relación con los cambios de densidad, ya que en la mayoría de los casos los sistemas reales no son homogéneos. Iniciamos haciendo un tratamiento general acerca de los fenómenos ondulatorios acústicos, explicando los conceptos que son necesarios para entender el contenido de esta tesis. De la misma manera definimos y acotamos nuestros sistemas de estudios en las secciones 1.2.2 y 1.2.3. Conocer los modos de un determinado sistema nos permite caracterizar y entender mejor su estructura. Las aplicaciones de estos conocimientos se encuentran en los equipos de sonido, instrumentos musicales, estructuras rígidas como en los edificios, sismología, estructura de materiales, etc. [1–4]. Dado que nos interesa el fenómeno oscilatorio en un sistema conformado por un número muy grande de partículas, iniciamos estudiando oscilaciones con dos grados de libertad, para posteriormente tratar el de un sistema continuo. Estos últimos son los que nos interesa discutir, en específico el caso de una cuerda sujeta en los extremos que además tiene cambios de densidad en secciones bien localizadas.

#### 1.1.1. Oscilaciones libres con dos grados de libertad

Ejemplos de sistemas con movimientos armónicos y con dos grados de libertad que podemos encontrar es el péndulo doble en la aproximación lineal. Para dos grados de libertad el movimiento más general es la superposición de dos movimientos armónicos simples. Estos dos movimientos armónicos simples se les denominan modos normales o simplemente modos. Cada modo tiene una frecuencia con la que oscila,  $\omega$ , y si el sistema se encuentra únicamente en un modo, éste hace un movimiento armónico simple y todas las partes oscilan con la misma frecuencia. Para un sistema con  $N$  grados



de libertad hay exactamente  $N$  modos y cada uno con su propia frecuencia. En cada modo todas las partes móviles, pasan por sus posiciones de equilibrio simultáneamente, es decir, cada grado de libertad oscila con la misma fase determinada por las condiciones iniciales. En general, las condiciones iniciales determinan cuáles modos son excitados y el sistema se moverá como una superposición de los modos normales del sistema.

Puesto que dado cada grado de libertad oscila con la misma frecuencia  $\omega$ , cada parte experimenta la misma fuerza restauradora dada por  $\omega^2$  [1,5]. Si un sistema esta compuesto por un número muy grande de partes móviles y están distribuidas en una región limitada del espacio, la distancia promedio de las partes se torna muy pequeña. Podríamos pensar que las partes móviles se van a haciendo infinitas y la distancia entre ellas tiende a cero. De esta manera podemos considerar al sistema como un continuo. Esta suposición nos permite describir el movimiento de todas las partes con el vector  $\Psi(x, y, z, t)$ , es decir en todas direcciones, donde el desplazamiento  $\Psi$  es una función continua de la posición  $x, y, z$  y del tiempo  $t$ .

### 1.1.2. Ondas estacionarias

En un sistema continuo se tiene una cantidad infinita de partes móviles y por ende una cantidad infinita de modos ya que tiene infinitos grados de libertad; en la práctica esta cantidad de modos es finita y sólo nos interesaran los primeros, debido a que son los que mejor representan los movimientos a estudiar. Además como vemos en el siguiente capítulo en los sistemas homogéneos, por ejemplo en una cuerda, una vez que se conoce la frecuencia fundamental las demás resultan ser múltiplos enteros de esa cantidad y con ello es mucho más fácil encontrar los demás modos normales asociados a dichas frecuencias.

El movimiento más general de un sistema puede describirse como una superposición de todos sus modos dependiendo de las condiciones iniciales [1]. El desplazamiento de las partes móviles de un sistema esta representado por una cantidad vectorial  $\Psi(x, y, z, t)$ , la cual podemos poner como sigue:

$$\Psi(x, y, z, t) = \hat{i}\Psi_x(x, y, z, t) + \hat{j}\Psi_y(x, y, z, t) + \hat{k}\Psi_z(x, y, z, t), \quad (1.1)$$

donde  $\hat{i}$ ,  $\hat{j}$ ,  $\hat{k}$  son los vectores unitarios a lo largo de los ejes coordenados y  $\Psi_x$ ,  $\Psi_y$ ,  $\Psi_z$  son los componentes del vector de desplazamiento  $\Psi$ . La expresión anterior es una expresión general, sin embargo para el caso de una cuerda, si consideramos que ésta se encuentra en su posición de equilibrio estirada a lo largo del eje  $z$ . Esta coordenada es suficiente para indicar su posición de equilibrio. Entonces la Ec. (1.1) puede escribirse de la siguiente manera:

$$\Psi(\mathbf{z}, \mathbf{t}) = \hat{i}\Psi_x(z, t) + \hat{j}\Psi_y(z, t) + \hat{k}\Psi_z(z, t). \quad (1.2)$$

Las vibraciones a lo largo del eje  $z$  se llaman vibraciones longitudinales y a los que son a lo largo de los ejes  $x, y$  se les llama transversales. En este trabajo sólo abordaremos ondas de tipo transversal, de modo que podemos suponer que  $\Psi_z$  es nulo:

$$\Psi(\mathbf{z}, \mathbf{t}) = \hat{i}\Psi_x(z, t) + \hat{j}\Psi_y(z, t). \quad (1.3)$$

Sin pérdida de generalidad y debido a la simetría en el eje  $z$  se puede considerar que la oscilación es sólo en alguna de las direcciones anteriores y la función  $\Psi$  debe satisfacer la ecuación diferencial parcial<sup>1</sup>

$$\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}, \quad (1.4)$$

---

<sup>1</sup>En la realidad las oscilaciones transversales no son en un sólo plano, pero para los estudios que se hacen en este trabajo sólo se considera una dirección, misma que se controla en el experimento que se propone en capítulos siguientes.

conocida como la ecuación de onda y  $v$  es la velocidad de propagación de la onda. La solución a esta ecuación se obtiene usando la técnica de separación de variables que se describe en el Capítulo 2. Dicha solución se puede escribir de la forma

$$\Psi(x, t) = A(x) \cos(\omega t + \delta), \quad (1.5)$$

que es la expresión general para una onda estacionaria, donde la constante  $\delta$  corresponde a la fase y queda determinada por las condiciones iniciales. Substituyendo la función anterior en la ecuación de ondas obtenemos la relación:

$$\frac{d^2 A(x)}{dx^2} = -\omega^2 \frac{1}{v^2} A(x). \quad (1.6)$$

Esta es la ecuación que gobierna la forma del modo puesto que cada modo tiene una frecuencia diferente. Entonces para diferentes modos se tienen distintos movimientos. Finalmente, la forma general para una oscilación en el espacio que resulta ser solución de la ecuación anterior es:

$$A(x) = C \operatorname{sen} \left( 2\pi \frac{x}{\lambda} \right) + D \operatorname{cos} \left( 2\pi \frac{x}{\lambda} \right). \quad (1.7)$$

En donde  $\lambda$  representa la longitud para la cual se tiene una oscilación completa; por eso se le llama longitud de onda. Si ahora derivamos la ecuación anterior,

$$\frac{d^2 A(x)}{dx^2} = - \left( \frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 A(x). \quad (1.8)$$

Y comparamos las ecuaciones (1.6) y (1.8) vemos que

$$\left( \frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 = \left( \frac{\omega}{v} \right)^2 = \left( \frac{2\pi\nu}{v} \right)^2, \quad (1.9)$$

es decir,

$$\lambda\nu = v = \text{constante}; \quad (1.10)$$

con ello se obtiene la relación entre longitud de onda y frecuencia para ondas transversales estacionarias en una cuerda continua homogénea. La velocidad  $v$  es la velocidad local del sonido. Finalmente la solución general para el desplazamiento  $\Psi(x, t)$  de la cuerda en el estado estacionario para un sólo modo queda la forma siguiente:

$$\Psi(x, t) = \cos(\omega t + \delta) \left[ C \operatorname{sen} \left( 2\pi \frac{x}{\lambda} \right) + D \operatorname{cos} \left( 2\pi \frac{x}{\lambda} \right) \right], \quad (1.11)$$

donde  $C$ ,  $D$ ,  $\delta$  se determinan por las condiciones iniciales y las condiciones de frontera.

**Condiciones de frontera.** La solución mostrada en la Ec. (1.11) es una solución general; sin embargo, falta incorporar condiciones particulares a las que se encuentra sometido el sistema [6–9]. Por ejemplo, si en los extremos se encuentra fija (condiciones de frontera de Dirichlet), entonces la función se anula en  $x = 0$   $x = L$ . De esta manera la única forma de satisfacer esta condición de frontera es que

$$\operatorname{sen} \left( \frac{2\pi L}{\lambda} \right) = 0. \quad (1.12)$$

Así las únicas longitudes de onda posible son aquellas que satisfacen la relación:

$$2\pi L/\lambda = \pi, 2\pi, 3\pi \dots \quad (1.13)$$

Es decir, las longitudes de onda resultan ser fracciones enteras de la longitud de la cuerda. De la misma manera las frecuencias resultan ser múltiplos enteros de la frecuencia fundamental, a dichas frecuencias se les llaman armónicos. No pretendemos en esta introducción ahondar en la solución general a la ecuación de onda, ya que ésta se hace en el siguiente capítulo, donde deducimos la ecuación de onda y discutimos de manera más detallada su solución. Un concepto útil es el **Número de onda** que se define por el inverso de la longitud de onda,  $\sigma$ :

$$\sigma = \frac{1}{\lambda}. \quad (1.14)$$

Al número de onda multiplicado por  $2\pi$  se le llama número angular  $\kappa$  y sus unidades son radianes de fase por metros.

$$\kappa = \frac{2\pi}{\lambda} \quad \text{número de onda angular} \quad (1.15)$$

Otro concepto útil es la **Relación de dispersión** que se define por medio de la Ec. (1.10), que relaciona la frecuencia y la longitud de onda para los modos normales de una cuerda, sin embargo, esta relación se expresa más comúnmente en términos de la frecuencia angular  $\omega$  y el número de onda angular  $\kappa$ , y para los fines de esta tesis utilizamos esta última relación. Utilizando la Ec.(1.10) y substituyendo en ella la Ec. (1.14), obtenemos la expresión siguiente:

$$\nu = v \frac{1}{\lambda} = v\sigma, \quad (1.16)$$

si ahora multiplicamos por  $2\pi$  obtendremos la expresión buscada,

$$\omega = v\kappa. \quad (1.17)$$

## 1.2. Contenido de la tesis

En el presente trabajo se estudia los modos de vibración de dos sistemas que tienen estructura bien definida:

1. Una cuerda con dos densidades,  $\rho_1$  y  $\rho_2$ , y fija en los extremos.
2. Una membrana circular compuesta por dos densidades  $\rho_1$  y  $\rho_2$ , y fija en la frontera. Como caso particular se incluye una membrana circular fija en la frontera y hueca en el centro.
3. Extensión de los sistemas anteriores con  $N$  cambios de densidad.

El tratamiento que se realizó en este trabajo es teórico-experimental: para el primer sistema. Para la parte teórica se realizó el análisis adecuado que mejor se adaptó a la geometría y disposición del sistema para posteriormente obtener los modos explícitos utilizando programas de cómputo. En la parte experimental se diseñaron los dispositivos y experimentos necesarios a fin de lograr obtener los modos normales de vibración.

### 1.2.1. Planteamiento del problema de los modos de vibración en 1 dimensión en una cuerda no homogénea.

Dado que el fenómeno consiste en la propagación de ondas en un medio no homogéneo con estructura bien definida, se resuelve la ecuación de onda para cada parte del sistema con las debidas

condiciones de frontera.

$$\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = \nabla^2 \Psi \quad (1.18)$$

donde  $v$  es la velocidad de propagación en cada sección. Más adelante se establece que esta velocidad depende de su densidad y tensión. En las secciones 1.2.2 y 1.2.3 se explica la forma de obtener los resultados teóricos y en la sección 2.2 se exponen los experimentos correspondientes a los sistemas que se estudian en este trabajo, para los cuales las tensiones son las mismas y por lo tanto  $v$  sólo depende de la densidad.

### 1.2.2. Modos de vibración de la cuerda no homogénea

Para el problema de la cuerda se consideran condiciones de Dirichlet ya que la cuerda esta fija en los extremos como se muestra en la Figura 1.1. Para la unión de las cuerdas, se considera que la función de onda y su derivada respecto al desplazamiento tienen el mismo valor, es decir, en términos físicos, la cuerda no se rompe y toda la cuerda está tensa. De este modo el problema se reduce a resolver la ecuación de onda en cada sección dependiendo de su velocidad de propagación:

$$\begin{aligned} \frac{1}{v_1^2} \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial x^2}, \Psi_1 \in (0, L/2), \\ \frac{1}{v_2^2} \frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial x^2}, \Psi_2 \in (L/2, L), \end{aligned}$$

con las condiciones a la frontera y en la interfaz escritas de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \Psi_1(-L, t) &= \Psi_2(L, t) = 0, \\ \Psi_1(0, t) &= \Psi_2(0, t), \\ \frac{\partial \Psi_1(0, t)}{\partial x} &= \frac{\partial \Psi_2(0, t)}{\partial x}. \end{aligned}$$

En la primera ecuación se expresa la condición de la cuerda fija en los extremos, la segunda ecuación expresa la condición de continuidad en el origen, y finalmente la tercera ecuación la continuidad de la derivada, en el mismo punto que la función.

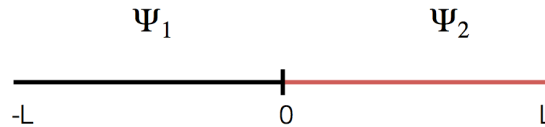


Figura 1.1: Cuerda con dos densidades diferentes de longitud  $2L$ , fija en los extremos (condiciones de Dirichlet).

### 1.2.3. Sistemas en dos dimensiones: modos de vibración de la membrana no homogénea

De manera similar al sistema anterior se resuelve la ecuación de onda para cada sección de la membrana utilizando coordenadas polares para ser compatible con la geometría del sistema. También

se considera que las membranas son concéntricas de radios  $R_0$  y  $R_1$  que encierran regiones con diferentes densidades en analogía al caso de la sección anterior. En este caso las condiciones a la frontera son :

$$\begin{aligned} \Psi_0(R_0, t) &= \Psi_1(R_0, t) \\ \frac{\partial \Psi_0(R_0, t)}{\partial r} &= \frac{\partial \Psi_1(R_0, t)}{\partial r} \\ \Psi_1(R_1, t) &= 0 \quad \text{y} \quad |\Psi_0(0, t)| < \infty. \end{aligned}$$

La primera ecuación expresa la condición de continuidad en la interfaz, es decir, ambas funciones valen lo mismo en  $R_0$ . De la misma manera en la segunda ecuación se tiene el equivalente para la derivada. Finalmente las dos últimas ecuaciones representan el hecho de que la membrana se encuentre fija en la frontera justo donde el radio toma el valor de  $R_1$  y la solución evaluada en el origen debe ser acotada. [11–15]. Una representación de esta membrana se muestra en la Figura 1.2.

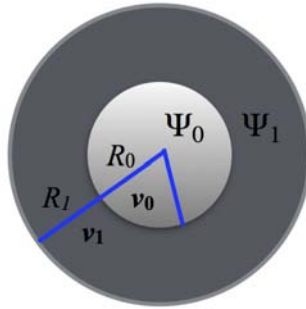


Figura 1.2: Membrana con dos densidades diferentes de radios  $R_0$  y  $R_1$ , para cada sección tenemos una ecuación de onda con una velocidad de propagación característica del material de acuerdo a su densidad.

De acuerdo con la Figura anterior,  $\Psi_0$  y  $\Psi_1$  son las soluciones a la ecuación de onda en cada sección con densidades  $\rho_0$  y  $\rho_1$  respectivamente. También se considera que  $\Psi_0$  tiene valor finito en el origen para evitar soluciones divergentes. En general, para este tipo de membranas aparecen como soluciones combinaciones lineales de funciones de Bessel de primera y segunda especie, y las raíces de estas combinaciones junto con las condiciones de frontera proporcionan los modos normales de vibración.

Otro caso que se aborda, en el Capítulo 3, es una membrana que tiene un orificio central. En este caso se considera que la membrana se encuentra fija en la frontera exterior con dos posibles casos para el centro:

1. Con libertad de oscilar transversalmente en el radio interior.  $\frac{\partial \Psi(R_0, t)}{\partial r} = 0$
2. Fija para ese radio interior  $\Psi(R_0, t) = 0$ .

donde en este caso  $R_0$  es el radio del orificio central. En la Figura 1.3 se muestra la configuración para este último sistema. A diferencia del caso anterior no necesitamos acotar la solución en el origen. De esta forma tenemos como solución combinaciones de funciones de Bessel de primera y segunda especie.

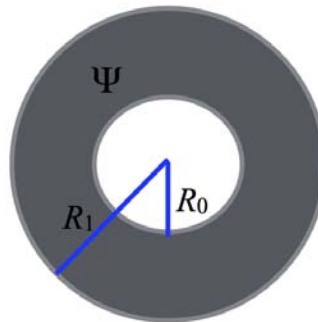


Figura 1.3: Membrana hueca de radio interno  $R_0$ , radio externo  $R_1$  y función de onda  $\Psi$ .

Una vez definidos nuestros sistemas de estudio comenzamos a caracterizarlos y describirlos a partir del próximo capítulo. Para ello vamos a desarrollar el modelo para la cuerda homogénea y no homogénea, que implica la deducción de la ecuación de onda en una dimensión, así como también la construcción de la solución mediante la técnica de separación de variables. También se detalla el experimento cuya intención es comparar los resultados con los obtenidos a partir de simulaciones computacionales con los mismo parámetros y que representen las mismas condiciones [14, 16, 17]. En el capítulo 3 se estudian las vibraciones en dos dimensiones. Para ello se hace la deducción de la ecuación de ondas en dos dimensiones ocupando coordenadas polares. Se resuelven mediante separación de variables y con las condiciones a la frontera descritas anteriormente. En el capítulo 4 se hace la generalización para  $n$  cambios de densidad que provocan las  $n$  inhomogeneidades con geometrías afines a las que se han trabajado en los capítulos anteriores. Para ello se hace uso de matrices de transferencia, lo que nos permite obtener información de una región en términos de la adyacente, mediante una relación de recurrencia. Finalmente se presentan los resultados obtenidos en la simulación y en el experimento para una cuerda haciendo el análisis y discusión pertinentes.



# Capítulo 2

## El problema de la cuerda vibrante.

### 2.1. El problema de la cuerda vibrante

Para poder construir un modelo sencillo de la cuerda vibrante se asumen algunas hipótesis y se toman como base las construcciones propuestas en las referencias [9–11]. Para ello consideramos una cuerda en posición horizontal en equilibrio y sujeta por los extremos. En esta construcción se desprecian efectos gravitacionales y se considera que la cuerda es prácticamente unidimensional, debido a que el largo es mucho mayor que la sección transversal. Denotemos el movimiento de la cuerda por  $y(x, t)$ , donde  $x$  es la coordenada a lo largo donde se encuentra situada la cuerda en el intervalo  $(0, 1)$  en la dirección  $\hat{i}$ . La variable  $t$  representa el tiempo y está en el intervalo  $(0, \infty)$ . De esta manera las condiciones a la frontera quedan dados por:

$$\lim_{x \rightarrow 0} y(x, t) = 0 \quad y \quad \lim_{x \rightarrow 1} y(x, t) = L, \quad (2.1)$$

y usualmente estas condiciones se denotan como

$$y(0, t) = 0 \quad y \quad y(1, t) = L. \quad (2.2)$$

De manera análoga se pueden escribir las condiciones iniciales se puedes escribir como:

$$y(x, 0) = f(x) \quad y \quad \frac{\partial y(x, 0)}{\partial t} = g(x), \quad (2.3)$$

mismas que significan la posiciones y velocidades iniciales de cada punto de la cuerda. Por practicidad denotaremos  $\frac{\partial y(x, t)}{\partial t} \equiv y_t(x, t)$

Ahora bien, para modelar el movimiento de la cuerda para todo tiempo, consideremos que en el intervalo  $x \in (0, 1)$  se tiene que  $n^+(x, t)$ , en el segmento  $[0, x)$ , ejerce una fuerza sobre el segmento  $[x, 1]$ . De manera similar,  $-n^-(x, t)$  en el intervalo  $(x, 1]$  ejerce una fuerza sobre el segmento  $[0, x]$ . De



esta manera se tiene que en un intervalo  $[a, b]$  alrededor de  $x$  se tiene que el balance de fuerzas es igual a la derivada del cantidad lineal de movimiento en el segmento:

$$n^+(b, t) - n^-(a, t) + \int_a^b f(x, t) dx = \frac{d}{dt} \int_a^b \rho(x) y_t(x, t) dx = \quad (2.4)$$

$$= \int_a^b \rho(x) y_{tt}(x, t) dx \quad \text{para todo } (a, b) \subset (0, 1) \quad (2.5)$$

donde  $f(x, t)$  son fuerzas externas sobre la cuerda que pueden depender de  $x$ ,  $t$ ,  $y(x, t)$  y  $y_t(x, t)$ , y  $\rho(x)$  es la densidad lineal de masa. Dada la continuidad de las funciones en el cualquier punto del intervalo, se puede diferenciar la ecuación anterior para obtener:

$$n_x(x, t) + f(x, t) = \rho(x) y_{tt}(x, t) \quad \text{para toda } x \in (0, 1), t > 0. \quad (2.6)$$

donde se ha hecho uso de que  $n^\pm$  es continua y al momento de hacer la diferenciación se obtiene la parcial de  $n$  respecto de  $x$ ,  $n_x(x, t)$ . Esta última ecuación es llamada como la “ecuación clásica de movimiento de una cuerda”. Hasta el momento se tiene una ecuación general y es necesario incorporar propiedades asociadas al tipo de cuerda que se está utilizando. El caso que nos interesa es una cuerda muy larga respecto a su sección transversal y la aproximación lineal de  $n(x, t)$  está dado por:

$$n(x, t) = T y_x(x, t) \quad (2.7)$$

donde  $T$  es la fuerza de tensión en la cuerda y  $y_x(x, t)$  es la tangente a la cuerda en el punto  $x$  y tiempo  $t$ . En el caso de una sección con densidad constante se tiene que  $\rho(x) = \rho$  y con ello se obtiene la ecuación:

$$T y_{xx} + f(x, t) = \rho y_{tt}(x, t) \quad (2.8)$$

Hay que recordar que  $f(x, t)$  representa las fuerzas externas sobre la cuerda. Entonces para encontrar las soluciones en general es necesario conocer las soluciones de la ecuación homogénea, es decir cuando  $f(x, t) = 0$ . De esta manera se puede identificar el término  $v = \sqrt{T/\rho}$ , que como se verá más adelante es la velocidad de propagación de la onda en el medio.

$$y_{xx} = \frac{1}{v^2} y_{tt}(x, t) \quad \text{donde } v = \sqrt{\frac{T}{\rho}}. \quad (2.9)$$

Esta forma de la ecuación es lo que comúnmente se conoce como ecuación de ondas en la aproximación lineal. Esta ecuación nos sirve para hacer los modelos de cuerdas no homogéneas por secciones y posteriormente contrastar los resultados con experimentos.

### 2.1.1. Solución general de la ecuación de onda

Hay varias maneras de encontrar la solución a la Ec. (2.9). Una de las más conocidas y utilizadas es la solución dada por D’Alambert [11] que es de la forma:

$$\Psi(x, t) = \frac{1}{2} (f(x + vt) + f(x - vt)) + \frac{1}{2} \int_{x-vt}^{x+vt} g(s) ds. \quad (2.10)$$

donde  $f$  y  $g$  satisfacen las condiciones iniciales

$$\Psi(x, 0) = f(x) \quad \Psi_t(x, 0) = g(x). \quad (2.11)$$

Fisicamente, esta solución en la Ec. (2.10) representa una onda que viaja a la izquierda y otra hacia la derecha. Los detalles de esta solución se pueden encontrar en el Apéndice A. Sin embargo, esta solución no es práctica para entender completamente el movimiento de la cuerda y por ello procedemos como en las siguientes secciones tomando en cuenta la solución en la Ec. (2.10)

### Modos normales de una cuerda fija en los extremos

Vamos a considerar el caso de una cuerda finita de longitud  $L$  fija en los extremos a la cual se le aplica una perturbación a lo largo de su longitud. Debido a que la cuerda esta fija en los extremos tenemos condiciones tipo Dirichlet<sup>1</sup>  $\Psi(0, t) = 0$  y  $\Psi(L, t) = 0$ . Sabemos que la solución general de la ecuación de onda, de acuerdo con la Ec. (2.10), es de la forma

$$\Psi(x, t) = Ae^{i(\omega t - \kappa x)} + Be^{i(\omega t + \kappa x)}. \quad (2.12)$$

Aplicando las condiciones de frontera tipo Dirichlet se tiene que

$$\begin{aligned} A + B &= 0, \\ Ae^{i(-\kappa L)} + Be^{i(\kappa L)} &= 0. \end{aligned}$$

donde se ha omitido el factor temporal debido a que ha sido factorizado. De la primera ecuación obtenemos que  $A = -B$ , y substituyendo en la segunda obtenemos que

$$2iA \sin(\kappa L) = 0.$$

Si  $A = 0$  obtenemos la solución trivial, es decir no hay movimiento. Si  $\sin(\kappa L) = 0$  se requiere que

$$\kappa L = n\pi \quad n = 0, 1, \dots$$

Es decir, las soluciones son valores discretos tales que  $\kappa = \kappa_n = n\pi/L$ . Si se sustituye la Ec. (2.12) en la Ec. (2.9) se obtiene que  $\kappa = \omega/v$ , y por lo tanto las frecuencias que pueden existir en la cuerda también toman valores discretos

$$f_n = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{nv}{2L}. \quad (2.13)$$

De este modo tenemos una familia de soluciones de la forma

$$\Psi_n(x, t) = A_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)e^{i\omega_n t}.$$

Desarrollando la expresión anterior para obtener soluciones reales y linealmente independientes se obtiene que

$$\Psi_n(x, t) = (A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t)) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \quad (2.14)$$

donde  $B_n = A_n$  son coeficientes que se determinan mediante las condiciones iniciales, Ec. (2.11). La función  $\sin(n\pi x/L)$  correspondiente a la parte espacial es la función propia o modo normal asociada a cada solución con una frecuencia particular a la que también se le denomina frecuencia natural. Como pudimos observar en el tratamiento anterior cuando la cuerda se encuentra sujeta en los extremos obtenemos frecuencias discretas. El modo normal con la frecuencia mas alta es para  $n = 1$  y se le conoce como modo fundamental o primer armónico. Dicho de otra manera,  $f_1 = 2v/L$  es la frecuencia fundamental y los armónicos se obtienen para valores de  $n = 2, 3, \dots$

---

<sup>1</sup>Estas condiciones a la frontera significan que el sistema no se mueve en la frontera

Ahora bien, la solución completa para el problema de la cuerda vibrante es la suma de los modos individuales, es decir,

$$\Psi(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} (A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t)) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right).$$

Suponiendo que para el tiempo  $t = 0$  la cuerda tiene un desplazamiento  $f(x)$  y una velocidad inicial  $g(x)$ , entonces

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) &= f(x), \\ \sum_{i=1}^{\infty} B_n \omega_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) &= g(x). \end{aligned}$$

Aplicando las series de Fourier (ver Apéndice C) tenemos que

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx, \\ B_n &= \frac{2}{L} \int_0^L g(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx. \end{aligned}$$

De esta manera la solución a las vibraciones en una cuerda homogénea queda en términos de la superposición de sus modos normales (2.14), donde los coeficiente se determinan por las series de Fourier de las condiciones iniciales.

### 2.1.2. La cuerda no homogénea

Una vez revisado el modelo de la cuerda vibrante, modelamos un sistema no homogéneo que consta de una cuerda con secciones de diferentes densidades. En este caso, tenemos que resolver la ecuación de onda para cada sección de la cuerda con la condición de que la función y su derivada asociadas a cada sección deben valer lo mismo en la interfaz. Para comenzar con este tratamiento, consideramos por simplicidad una cuerda de longitud  $2L$  con velocidades de propagación  $v_1$  en el intervalo  $-L < x < 0$  y  $v_2$  en  $0 < x < L$ . De esta manera para cada sección se tiene que resolver la ecuación de onda respectiva,

$$\begin{aligned} \frac{1}{v_1^2} \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial x^2}, \\ \frac{1}{v_2^2} \frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial x^2}, \end{aligned} \tag{2.15}$$

con las condiciones a la frontera y en la interfaz escritas de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \Psi_1(-L, t) &= \Psi_2(L, t) = 0, \\ \Psi_1(0, t) &= \Psi_2(0, t), \\ \frac{\partial \Psi_1(0, t)}{\partial x} &= \frac{\partial \Psi_2(0, t)}{\partial x}. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Aplicando separación de variables en cada sección,  $\Psi_i(x, t) = X_i(x)T_i(t)$  con  $i = 1, 2$ , se obtiene que  $\frac{\partial^2 \Psi_i}{\partial x^2} = X_i'' T_i$ ,  $\frac{\partial^2 \Psi_i}{\partial t^2} = X_i T_i''$ . Substituyendo en las Ecs. (2.15) y dividiendo entre  $X_i$  y  $T_i$  se obtiene

$$\frac{T_i''}{v_i^2 T_i} = \frac{X_i''}{X_i} = -\kappa_i^2,$$

donde  $-\kappa_i^2$  es la constante de separación y se toma negativa para asegurar soluciones acotadas. Entonces la solución del problema para cada sección es:

$$\begin{aligned} X_i(x) &= A \sin(\kappa_i x + \phi), \\ T_i(t) &= C \sin(\omega_i t + \alpha). \end{aligned}$$

De esta manera podemos escribir las soluciones generales para cada sección de la cuerda como sigue:

$$\begin{aligned} \Psi_1 &= A_1 \sin(\kappa_1 x + \phi_1) \sin(\omega_1 t + \alpha), \\ \Psi_2 &= A_2 \sin(\kappa_2 x + \phi_2) \sin(\omega_2 t + \beta), \end{aligned}$$

donde las fases, frecuencias y números de onda son determinadas por las condiciones en las Ecs. (2.16). Ahora bien, como la cuerda está sujeta en los extremos se tiene la siguiente condición:

$$\Psi_1(-L, t) = A_1 \sin(-\kappa_1 L + \phi_1) \sin(\omega_1 t + \alpha) = 0, \quad (2.17)$$

$$\Psi_2(L, t) = A_2 \sin(\kappa_2 L + \phi_2) \sin(\omega_2 t + \beta) = 0. \quad (2.18)$$

De las condiciones a la frontera en las Ecs (2.16)

$$\Psi_1(0, t) = \Psi_2(0, t) \Rightarrow A_1 \sin(\phi_1) \sin(\omega_1 t + \alpha) = A_2 \sin(\phi_2) \sin(\omega_2 t + \beta),$$

entonces

$$A_1 \sin \phi_1 = A_2 \sin \phi_2 \quad \text{y} \quad \sin(\omega_1 t + \alpha) = \sin(\omega_2 t + \beta) \quad (2.19)$$

De este par de ecuaciones obtenemos:

$$\begin{aligned} \omega_1 t + \alpha &= \omega_2 t + \beta + 2m\pi, \\ \omega_1 &= \omega_2, \quad \alpha = \beta + 2m\pi. \end{aligned}$$

De la última igualdad se deduce que  $\omega_1 = \omega_2$ , lo cual era de esperarse ya que físicamente ambas secciones vibran con la misma frecuencia, sin embargo no tienen el mismo número de onda

$$\kappa_1 v_1 = \kappa_2 v_2 \Rightarrow \frac{\kappa_1}{\kappa_2} = \frac{v_2}{v_1}$$

Ahora evaluando la condición sobre la derivada en las Ecs. (2.16) obtenemos

$$A_1 \lambda_1 \cos \phi_2 = A_2 \lambda_1 \cos \phi_1 \quad (2.20)$$

Tomamos el cociente de las Ecs. (2.19) y (2.20) para obtener

$$\tan \phi = \frac{\kappa_1}{\kappa_2} \tan \phi_2 \Rightarrow \tan \phi_1 = \frac{\kappa_1}{\kappa_2} \tan \phi_2, \quad (2.21)$$

y desarrollando la parte espacial de las Ecs. (2.17) y (2.18) para todo tiempo se tienen que cumplir las siguientes relaciones

$$\begin{aligned} -\sin \kappa_1 L \cos \phi_1 + \sin \phi_1 \cos \kappa_1 L &= 0 \\ \sin \kappa_2 L \cos \phi_2 + \sin \phi_2 \cos \kappa_2 L &= 0 \end{aligned}$$

De estas ecuaciones se obtiene lo siguiente

$$\begin{aligned} \tan \kappa_1 L &= \tan \phi_1 \\ \tan \kappa_2 L &= -\tan \phi_2 \end{aligned}$$

Con este desarrollo podemos escribir la Ec. (2.21) en términos de un cociente de velocidades

$$\tan(\kappa_1 L) + \frac{v_2}{v_1} \tan\left(\frac{\kappa_1 v_1}{v_2} L\right) = 0$$

Como  $v = \sqrt{T/\rho}$  para  $T$  constante, la ecuación anterior puede quedar en términos del cociente de densidades:

$$\tan(\kappa_1 L) + \sqrt{\frac{\rho_2}{\rho_1}} \tan\left(\kappa_1 \sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_2}} L\right) = 0 \quad (2.22)$$

Al resolver esta ecuación transcendental obtenemos los valores para  $\kappa$  y con ello las frecuencias del sistema  $\omega = \kappa_1 v_1 = \kappa_2 v_2$ . Además, conociendo los valores de la tensión y la densidad podemos obtener las frecuencias del sistema. Un caso límite de lo anterior es cuando las densidades son las mismas. Ello significa que el cociente de densidad es 1 y ello simplifica la expresión anterior

$$\begin{aligned} \tan(\kappa_1 L) + \tan(\kappa_1 L) &= 0 \\ 2 \tan(\kappa_1 L) &= 0 \\ \frac{\text{sen}(\kappa_1 L)}{\text{cos}(\kappa_1 L)} &= 0 \end{aligned}$$

De esta manera se obtiene que las frecuencias son las mismas del caso homogéneo dado por la Ec. (2.13).

## 2.2. El experimento

Para poder comparar los resultados teóricos y validar nuestro modelo se ideó un experimento en el que se midieran las frecuencias de resonancia con dos densidades diferentes<sup>2</sup>. Para lograr un sistema no homogéneo con dos densidades diferentes se utilizaron cuerdas entorchadas. Para ello se entorchó una sección de un cable de cobre ya que este último es diamagnético y podemos excitarla por fuerza electromagnética; en comparación con el dispositivo inicial utilizamos las cuerdas de cobre para no excitar de manera mecánica el sistema y tener de manera más aproximada la cuerda fija en ambos extremos. La cuerda fue entorchada de manera controlada por un dispositivo especial para

---

<sup>2</sup>Inicialmente se trabajó con un arreglo de una cuerda de guitarra fija en un extremo y en el otro se conectó un vibrador. La tensión era producida por una pesa que se colocó del lado del extremo fijo. El vibrador estaba conectado a un generador de funciones para poder modificar la frecuencia. De esta manera la cuerda vibraba cuando entraba en resonancia algún modo normal.

dicha tarea, ya que el entorchado debe ser lo más uniforme posible. La cuerda estaba descansando en los extremos y a una tensión  $T_0$  mediante pesas que colgaban de la cuerda. Se hizo pasar una corriente por el cable de cobre controlada por un generador de funciones. Se dispuso un campo magnético uniforme producido por dos imanes colocados en la sección media del cable. De esta forma, la fuerza de Lorentz en la región del campo magnético podía mover la cuerda completa cuando la frecuencia de la corriente que se suministraba se encontraba en resonancia con algún modo de vibración. Entonces nos asegurábamos para un rango de frecuencias que la amplitud no cambiara, observamos el máximo y estábamos en presencia de la frecuencia del modo de vibración.

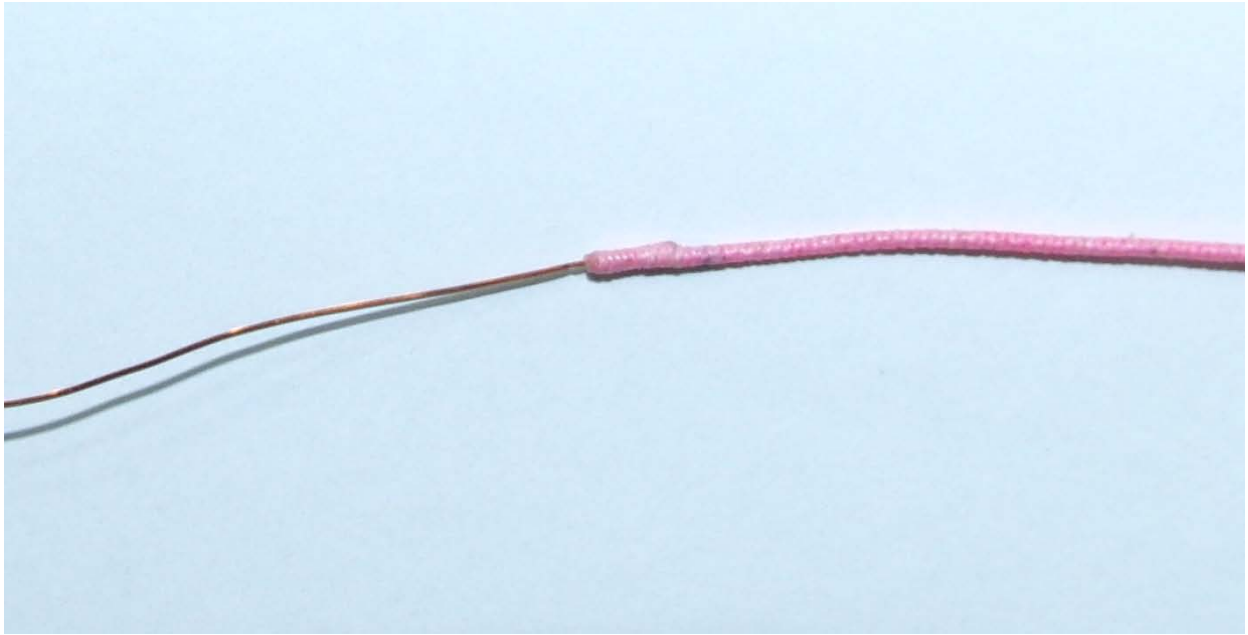


Figura 2.1: Cuerda de cobre entorchada en una sección con hilo y la otra sin entorchar.

En la Figura 2.1 se muestra la cuerda entorchada para generar un sistema no homogéneo en una dimensión. Primero se hicieron pruebas con la cuerda homogénea (sin entorchar) variando la tensión en un rango de 1 Kg a 1.4 Kg aumentando la masa de las pesas en 100 gr para cada medición. Posteriormente se hizo lo mismo con la cuerda con la sección entorchada para comparar las frecuencias de resonancia. El montaje completo de este experimento se puede ver en la Figura 2.2. Para realizar el experimento se ocupó un generador de funciones marca BK PRECISION modelo 4045, pesas de 1 kg, 100 gr y 200 gr. Alambres de cobre esmaltado de 0.56 mm y 0.43 mm de diámetro. La parte entorchada de cada cable quedó en 1.07 mm y 1.02 mm de espesor, respectivamente. La longitud del cable se midió con un flexómetro, así como la sección que se entorchó. Las masas de los cables y las secciones entorchadas se midieron con una balanza de alta precisión, para obtener densidades lineales. Para generar el campo magnético se usaron un par de imanes de Neodimio de 22mm×9mm×47mm con un campo magnético de 2600 Gauss en la cara que daba hacia la cuerda.

Finalmente, la longitud de la cuerda fue de 99 cm y los soportes sobre los cuales descansaba la cuerda fueron un par de puentes para guitarra. Se tomaron lecturas de 6 modos de vibración partiendo desde el modo fundamental para cada tensión y cada cuerda. Se manejó una diferencia de potencial

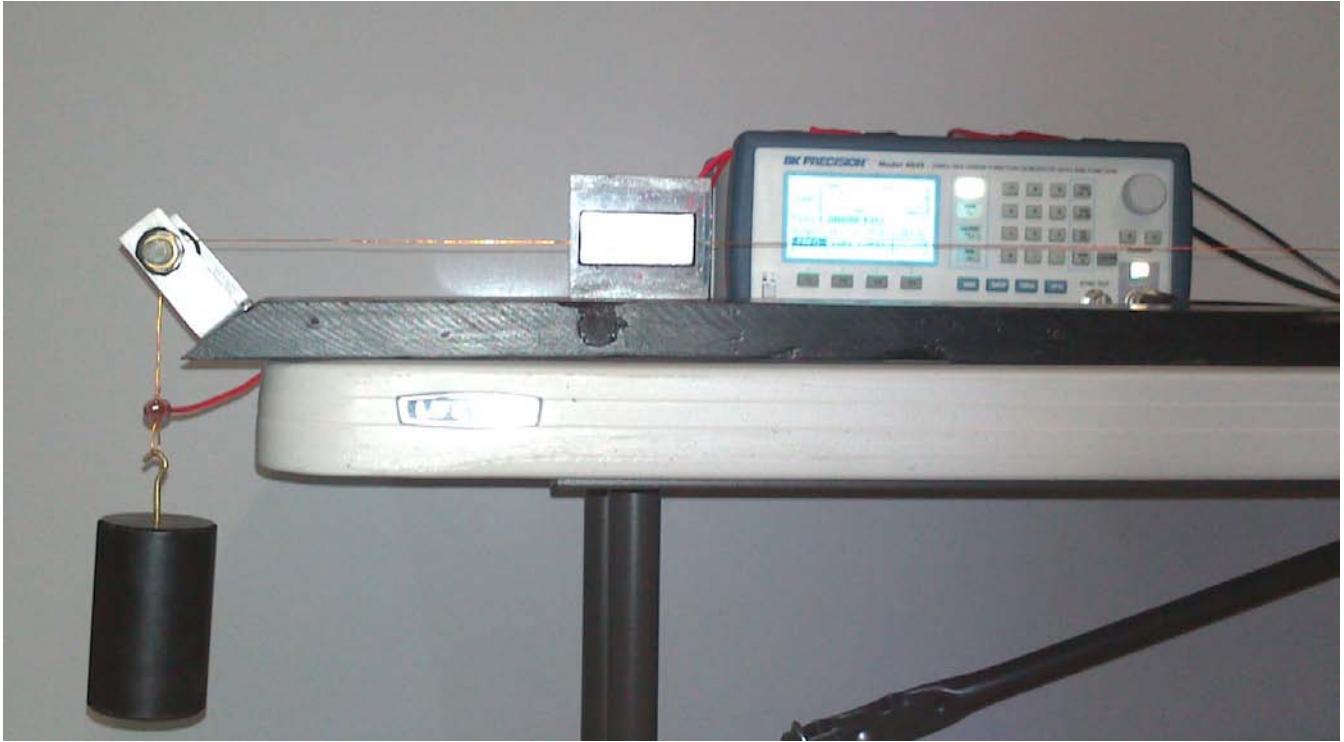


Figura 2.2: Montaje experimental donde se puede observar la cuerda a través de la cual se hacia pasar una corriente de frecuencia bien definida, dado por el generador de funciones, y los imanes para producir un campo magnético

de 10 Volts en el generador de funciones en un rango de 28 a 400 Hertz.

# Capítulo 3

## El problema de la membrana.

### 3.1. Deducción de la ecuación onda en dos dimensiones

En el capítulo anterior hallamos los modos de vibración de un sistema en una dimensión con dos densidades en secciones específicas de la cuerda, de modo que en este capítulo analizamos la extensión a dos dimensiones. Para poder deducir la ecuación que modela el movimiento de una membrana se asumen las siguientes hipótesis, como en el caso de la cuerda:

1. La membrana es flexible y elástica, es decir recobra su forma original cuando se suprime la fuerza de deformación y la tensión es tangente a la superficie de la membrana.
2. La tensión es constante y la misma para toda sección de la membrana.
3. El peso de la membrana es pequeño comparado con la tensión a la que se encuentra sujeta la membrana.
4. La tangente del ángulo entre la posición de equilibrio y la membrana desplegada es pequeña comparada con la unidad.
5. Las vibraciones son principalmente verticales en la aproximación lineal.

En base a las hipótesis anteriores se deduce la ecuación de onda en dos dimensiones de dos maneras alternativas.

#### 3.1.1. Deducción 1 de la ecuación de onda para una membrana

Vamos a considerar una sección diferencial de la membrana con área  $\delta A = \delta x \delta y$ . Si  $T$  es la Tensión, en una sección lineal  $\delta x$  actúa una fuerza  $T\delta x$ , de manera similar para  $\delta y$  la fuerza es  $T\delta y$ . Entonces



la fuerza que actúa sobre la membrana en dirección vertical se muestra en la Figura 3.1:

$$T\delta x \sin \beta - T\delta x \sin \alpha + T\delta y \sin \delta - T\delta y \sin \gamma \quad (3.1)$$

Como las pendientes son pequeñas podemos usar la aproximación para ángulos pequeños. El seno de los ángulos es aproximadamente igual a su tangente. Por tanto la cantidad anterior queda expresada de la siguiente forma:

$$T\delta x(\tan \beta - \tan \alpha) - T\delta y(\tan \delta - \tan \gamma) \quad (3.2)$$

Por la segunda ley de Newton la fuerza resultante es igual a la masa por la aceleración; entonces, la

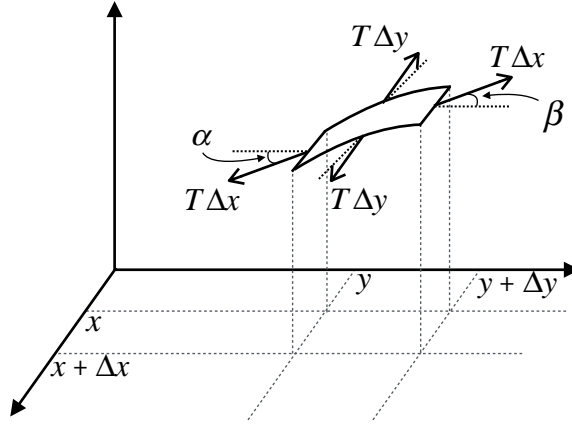


Figura 3.1: Tensiones que actúan sobre una área de  $\delta A$  de la membrana

expresión anterior es igual a  $\rho \delta A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$

$$T\delta x(\tan \beta - \tan \alpha) + T\delta y(\tan \delta - \tan \gamma) = \rho \delta A \frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial t^2} \quad (3.3)$$

donde  $\rho$  es la masa por unidad de área,  $\delta A \simeq \delta x \delta y$  es el área de la sección y  $u_{tt}$  es calculada en el mismo punto en la región de consideración. Además sabemos que la tangente de los ángulos se pueden expresar en termino de sus derivadas como sigue:

$$\begin{aligned} \tan \alpha(x, y, t) &= \frac{\partial u(x_1, y)}{\partial y} \\ \tan \beta(x, y, t) &= \frac{\partial u(x_2, y + \delta y)}{\partial y} \\ \tan \delta(x, y, t) &= \frac{\partial u(x, y_1)}{\partial x} \\ \tan \gamma(x, y, t) &= \frac{\partial u(x + \delta x, y_2)}{\partial x} \end{aligned} \quad (3.4)$$

sustituyendo las Ecs. (3.4) en la Ec. (3.3)

$$T\delta y \left[ \frac{\partial u(x, y_1)}{\partial x} - \frac{\partial u(x + \delta x, y_2)}{\partial x} \right] - T\delta x \left[ \frac{\partial u(x_1, y)}{\partial y} - \frac{\partial u(x_2, y + \delta y)}{\partial y} \right] = \rho \delta A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad (3.5)$$

Dividiendo todo entre  $\rho\delta x\delta y$

$$\frac{T}{\rho} \left[ \frac{u_y(x, y_1) - u_y(x + \delta x, y_2)}{\delta y} - \frac{u_x(x_1, y) - u_x(x_2, y + \delta)}{\delta x} \right] = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \quad (3.6)$$

Tomando el limite de la ecuación anterior cuando  $\delta x \rightarrow 0$  y  $\delta y \rightarrow 0$  obtenemos la ecuación de onda en dos dimensiones,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\rho}{T} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad (3.7)$$

o bien,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \quad (3.8)$$

Donde identificamos la velocidad de propagación como  $v^2 = T/\rho$ .

### 3.1.2. Deducción 2 para la ecuación de onda de una membrana

En esta sección hacemos una deducción alterna a la ecuación de onda utilizando elementos del cálculo vectorial como en [7]. Para ello se asumen las mismas hipótesis mencionadas anteriormente. De la hipótesis 4 y 5 podemos decir que la densidad de masa  $\rho_0(x, y)$  no cambia considerablemente cuando la membrana está en otra posición.

Consideremos un desplazamiento  $z = u(x, y, t)$  que depende de las coordenadas espaciales y el tiempo  $t$ . Si todas las pendientes son pequeñas podemos asumir de manera aproximada que la vibración de la membrana es totalmente vertical y la tensión es constante. Entonces la densidad de masa  $\rho_0$  en la posición no perturbada no cambia apreciablemente cuando la membrana es perturbada. La tensión  $T$  es tangente a la membrana y actúa a lo largo de toda la frontera. Como ésta es constante y uniforme podemos expresarla como el producto vectorial de los vectores unitarios tangente y normal a la membrana, es decir:

$$\vec{F}_T = T_0 \hat{t} \times \hat{n}, \quad (3.9)$$

donde  $T_0$  es la magnitud de la tensión. Sin embargo sólo estamos considerando la componente vertical  $\vec{F}_T \cdot \hat{k}_0$ . Aplicando la segunda ley de Newton a cada sección diferencial de la membrana y sumando sobre todas ellas, tenemos que la masa ( $\rho_0 dA$ ) por la aceleración ( $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ ) sumadas sobre toda la membrana es igual a la integral de línea sobre la componente vertical de la fuerza de tensión, entonces

$$\iint \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dA = \oint T_0 (\hat{t} \times \hat{n}) \cdot \hat{k} ds = \oint T_0 (\hat{n} \times \hat{k}) \cdot \hat{t} ds. \quad (3.10)$$

$ds$  es la diferencial de longitud de arco,  $dA$  es la diferencial de área superficial. Usando el teorema de Stokes  $\iint \nabla \times \vec{B} \cdot \hat{n} dA = \oint \vec{B} \cdot \hat{t} ds$ , tenemos que

$$\iint \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dA = \iint T_0 [\nabla \times (\hat{n} \times \hat{k})] \cdot \hat{n} dA, \quad (3.11)$$

de la expresión anterior se llega a que,

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T_0 [\nabla \times (\hat{n} \times \hat{k})] \cdot \hat{n}. \quad (3.12)$$

Como el desplazamiento en  $u$  de la membrana es función de  $x, y$  es decir  $z = u(x, y)$ , podemos poner al vector normal unitario utilizando el gradiente de la siguiente manera:

$$\hat{n} = \frac{-\frac{\partial u}{\partial x} \hat{i} - \frac{\partial u}{\partial y} \hat{j} + \hat{k}}{\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + 1}} \approx -\frac{\partial u}{\partial x} \hat{i} - \frac{\partial u}{\partial y} \hat{j} + \hat{k}, \quad (3.13)$$

asumiendo que las derivadas parciales son pequeñas. Ahora que conocemos el valor  $\hat{n}$  podemos calcular  $\hat{n} \times \hat{k}$  como sigue:

$$\hat{n} \times \hat{k} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{\partial u}{\partial y} \hat{i} + \frac{\partial u}{\partial x} \hat{j}. \quad (3.14)$$

Finalmente, obtenemos

$$\nabla \times (\hat{n} \times \hat{k}) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -\frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial x} & 0 \end{vmatrix} = \hat{k} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right). \quad (3.15)$$

substituyendo la Ec.(3.15) en la Ec. (3.12), obtenemos la ecuación de diferencial parcial para la vibración de una membrana:

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right). \quad (3.16)$$

O bien

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (3.17)$$

En donde hemos identificado  $v^2 = T/\rho$ .

A continuación se estudia la vibración de la membrana circular, un caso muy importante en el estudio de los modos de vibración puesto que muchos sistemas presentan esta geometría. Se hace uso de coordenadas polares ya que simplifica en gran medida el trabajo que se requiere para obtener e interpretar una solución.

### 3.2. Vibración de una membrana circular

En coordenadas polares la ecuación de onda se expresa de la siguiente manera:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = v^2 \left( \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta^2} \right), \quad (3.18)$$

donde  $0 < r < R$  y  $0 < \theta < 2\pi$  y  $t > 0$ . La posición inicial de la membrana puede modelarse por la función  $f(r, \theta)$  y la velocidad inicial por la función  $g(r, \theta)$

$$\Psi(r, \theta, 0) = f(r, \theta), \quad \frac{\partial \Psi}{\partial t}(r, \theta, 0) = g(r, \theta), \quad (3.19)$$

La manera en la que resolvemos la Ec.(3.18) es nuevamente mediante separación de variables (ver [6]), ésto a fin de reducir la ecuación diferencial parcial a un problema de valores propios.

### Separación de variables

Asumimos que la solución es de la forma  $\Psi(r, \theta, t) = R(r)\Theta(\theta)T(t)$ , substituyendo en la Ec.(3.18) y separando variables obtenemos

$$\frac{T''}{v^2 T} = \frac{R''}{R} + \frac{R'}{rR} + \frac{1}{r^2} \frac{\Theta''}{\Theta} \quad (3.20)$$

Como el lado derecho depende solo de  $t$  y el lado derecho solo de  $r$  y  $\theta$  entonces deben de ser igual a una constante de separación  $-\kappa^2$ , entonces

$$\frac{T''}{v^2 T} = -\kappa^2, \quad \frac{R''}{R} + \frac{R'}{rR} + \frac{\Theta''}{r^2 \Theta} = -\kappa^2. \quad (3.21)$$

Separando nuevamente las variables de la segunda ecuación.

$$-\frac{\Theta''}{\Theta} = \mu^2, \quad \kappa^2 r^2 + \frac{r^2 R''}{R} + \frac{r R'}{R} = \mu^2. \quad (3.22)$$

De este modo hemos obtenido tres ecuaciones diferenciales ordinarias con condiciones a la frontera:

$$T'' = -\kappa^2 v^2 T \quad T(0) = f(r, \theta), \quad T'(0) = g(r, \theta) \quad (3.23)$$

$$R'' + rR' + (\kappa^2 r^2 - \mu^2)R = 0, \quad R(R) = 0 \quad |R(0)| < \infty \quad (3.24)$$

$$\Theta'' = -\mu^2 \Theta \quad \Theta(0) = \Theta(2\pi), \quad \Theta'(0) = \Theta'(2\pi) \quad (3.25)$$

Si  $\mu = 0$ ,  $\Theta$  es constante, si  $\mu \neq 0$  la solución es de la forma  $\Theta(\theta) = c_1 \cos(\mu\theta) + c_2 \sin(\mu\theta)$ .

Para que se satisfaga las condiciones de frontera  $\mu$  debe tomar solo valores enteros:

$$\Theta_m(\theta) = A_m \cos(m\theta) + B_m \sin(m\theta) \quad m = 0, 1, \dots \quad (3.26)$$

Entonces la ecuación para la parte radial queda de la siguiente forma:

$$R'' + rR' + (\kappa^2 r^2 - m^2)R = 0, \quad R(R) = 0. \quad (3.27)$$

Esta ecuación se conoce como la ecuación de Bessel en su forma paramétrica de orden  $m$ , siendo una ecuación de segundo orden y homogénea; por lo tanto, tiene dos soluciones linealmente independientes, y la solución general es una superposición de ellas. A las dos funciones solución se les conoce como funciones de Bessel de primera y segunda clase o de Neumann.  $J_m(\kappa_{mn}r)$ ,  $Y_m(\kappa_{mn}r)$  y la función radial se puede escribir como combinación lineal de ellas.

$$R(r) = AJ_m(\kappa_{mn}r) + BY_m(\kappa_{mn}r). \quad (3.28)$$

En nuestro problema la solución está acotada en  $R(0)$ . Por ésta restricción  $B = 0$ , entonces la solución es:

$$R(r) = J_m(\kappa_{mn}r) \quad n = 0, 1, \dots \quad m = 1, 2, \dots \quad (3.29)$$

Por la condición de frontera Ec.(3.24) se sigue que  $\kappa_{mn} = \alpha_{mn}/R$  donde  $\alpha_{mn}$  es la  $n$ -ésima raíz de la función de Bessel de orden  $m$ , el subíndice  $m$  expresa el número nodos angulares y  $n$  el número nodos radiales. La parte temporal tiene como solución:

$$T(t) = \tilde{A}_{mn} \cos(v\kappa_{mn}t) + \tilde{B}_{mn} \sin(v\kappa_{mn}t). \quad (3.30)$$

Haciendo el producto de las funciones  $\Psi(r, \theta, t) = R(r)\Theta(\theta)\Upsilon(t)$  obtenemos las soluciones a la ecuación de onda:

$$\Psi_{mn}(r, \theta, t) = J_m(\kappa_{mn}r) [(A_{mn} \cos(m\theta) + B_{mn} \sin(m\theta))] \times \left[ \tilde{A}_{mn} \cos(v\kappa_{mn}t) + \tilde{B}_{mn} \sin(v\kappa_{mn}t) \right], \quad (3.31)$$

donde los coeficientes  $A_{mn}$ ,  $B_{mn}$ ,  $\tilde{A}_{mn}$  y  $\tilde{B}_{mn}$  se determinan mediante las condiciones iniciales.

### Vibración de una membrana con velocidad inicial cero

Hasta ahora hemos obtenido la solución general al problema de la membrana circular, sin embargo para obtener una solución particular necesitamos especificar condiciones iniciales. Supongamos que la membrana parte de una posición inicial dada por la función  $f(r, \theta)$  y del reposo, es decir:

$$\Psi(r, \theta, 0) = f(r, \theta) \quad \frac{\partial \Psi}{\partial t}(r, \theta, t) |_{t=0} = 0 \quad 0 < r < R \quad 0 < \theta < 2\pi \quad (3.32)$$

Por el principio de superposición, sabemos que la solución se puede expresar de la siguiente forma

$$\Psi(r, \theta, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} J_m(\kappa_{mn}r) (a_{mn} \cos(m\theta) + b_{mn} \sin(m\theta)) \cos(v\kappa t); \quad (3.33)$$

para  $t = 0$  la función toma el valor dado por la función  $f(r, \theta)$

$$f(r, \theta) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} J_m(\kappa_{mn}r) (a_{mn} \cos(m\theta) + b_{mn} \sin(m\theta)) \quad (3.34)$$

La serie de Fourier generalizada y los coeficientes  $a_{mn}$ ,  $b_{mn}$  serian los coeficientes generalizados de Fourier para la función  $f$ . Para determinar los valores de los coeficientes utilizamos las propiedades usuales de ortogonalidad validas para las series de Fourier y Bessel [13]. Desarrollamos la Ec. (3.34) separando el término  $m = 0$ , entonces

$$f(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{0n} J_0(\kappa_{0n}r) + \sum_{m=1}^{\infty} \left( \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} J_m(\kappa_{mn}r) \cos(m\theta) + \sum_{n=1}^{\infty} b_{mn} J_m(\kappa_{mn}r) \sin(m\theta) \right), \quad (3.35)$$

renombrado los términos como sigue:

$$\begin{aligned} a_0(r) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_{0n} J_0(\kappa_{0n}r) \\ a_m(r) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} J_m(\kappa_{mn}r) \\ b_m(r) &= \sum_{n=1}^{\infty} b_{mn} J_m(\kappa_{mn}r), \end{aligned} \quad (3.36)$$

la expresión se simplifica notablemente e identificamos la serie de Fourier:

$$f(r, \theta) = a_0(r) + \sum_{m=1}^{\infty} (a_m(r) \cos(m\theta) + b_m(r) \sin(m\theta)) \quad (3.37)$$

Donde  $a_0(r)$ ,  $a_m(r)$ ,  $b_m(r)$  son los coeficientes de Fourier, ahora aplicando las propiedades de ortogonalidad del seno y el coseno,

$$a_0(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(r, \theta) d\theta = \sum_{n=1}^{\infty} a_{0n} J_0(\kappa_{0n} r) \quad (3.38)$$

$$a_m(r) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(r, \theta) \cos(m\theta) d\theta = \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} J_m(\kappa_{mn} r) \quad (3.39)$$

$$b_m(r) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(r, \theta) \sin(m\theta) d\theta = \sum_{n=1}^{\infty} b_{mn} J_m(\kappa_{mn} r) \quad (3.40)$$

Ahora solo falta determinar los coeficientes  $a_{0n}$ ,  $a_{mn}$ ,  $b_{mn}$  para lo cual vamos a utilizar las propiedades de ortogonalidad de las funciones de Bessel, para  $0 < r < R$ . Haciendo esto obtenemos las relaciones

$$a_{0m} = \frac{2}{R^2 J_1^2(\alpha_{0n})} \int_0^R a_0(r) J_0(\kappa_{0n} r) r dr \quad (3.41)$$

$$a_{mn} = \frac{2}{R^2 J_{m+1}^2(\alpha_{mn})} \int_0^R a_m(r) J_m(\kappa_{mn} r) r dr \quad (3.42)$$

$$b_{mn} = \frac{2}{R^2 J_{m+1}^2(\alpha_{mn})} \int_0^R b_m(r) J_m(\kappa_{mn} r) r dr \quad (3.43)$$

Ahora usando las Ecs.(3.38-3.40) y substituyendo en las ecuaciones anteriores obtenemos finalmente:

$$a_{0n} = \frac{2}{\pi R^2 J_1^2(\alpha_{0n})} \int_0^R \int_0^{2\pi} f(r, \theta) J_0(\kappa_{0n} r) r d\theta dr \quad (3.44)$$

$$a_{mn} = \frac{2}{\pi R^2 J_{m+1}^2(\alpha_{mn})} \int_0^R \int_0^{2\pi} f(r, \theta) \cos(m\theta) J_m(\kappa_{mn} r) r d\theta dr \quad (3.45)$$

$$b_{mn} = \frac{2}{\pi R^2 J_{m+1}^2(\alpha_{mn})} \int_0^R \int_0^{2\pi} f(r, \theta) \sin(m\theta) J_m(\kappa_{mn} r) r d\theta dr. \quad (3.46)$$

Hemos obtenido la solución particular de una membrana circular homogénea con una velocidad inicial 0 de una posición dada por la función  $f(r, \theta)$ . Sin embargo, como la mayoría de los sistemas reales no son homogéneos, en la siguiente sección analizamos casos particulares de sistemas no homogéneos iniciando nuestro estudio con el caso de la membrana que presenta una discontinuidad en el centro y finalizando con dos membranas concéntricas de diferentes densidades.

### 3.3. Membrana no homogénea

#### 3.3.1. Membrana anular y sujeta en los contornos

Consideremos el caso de una membrana que tiene una discontinuidad en el centro, la membrana es no homogénea y consta de una frontera la interna y otra externa como se observa en la figura 3.2.

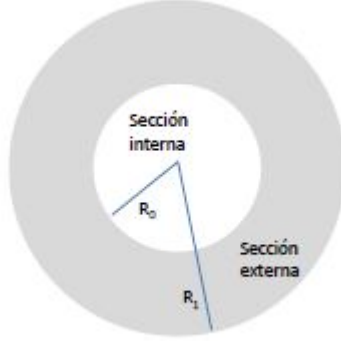


Figura 3.2: Membrana anular que consta de una sección interna hueca y otra externa de densidad  $\rho$ .

Supongamos además que las fronteras en  $R_0$  y  $R_1$  se encuentran fijas, esto se expresa de la siguiente forma

$$\Psi(R_0, \theta, t) = 0, \quad \Psi(R_1, \theta, t) = 0, \quad (3.47)$$

donde  $R_0$  es el radio de la perforación circular. La solución para la parte radial en este caso es una combinación lineal de funciones de Bessel de primera y segunda clase como se muestra en la Ec. (3.28),

$$R(r) = A_{mn}J_m(\kappa_{mn}r) + B_{mn}Y_m(\kappa_{mn}r). \quad (3.48)$$

Por las condiciones a la frontera sabemos que la función radial evaluada en  $R_0$  y  $R_1$  son cero, es decir,

$$J_m(\kappa_{mn}R_0) + C_{mn}Y_m(\kappa_{mn}R_0) = 0 \quad (3.49)$$

$$J_m(\kappa_{mn}R_1) + C_{mn}Y_m(\kappa_{mn}R_1) = 0. \quad (3.50)$$

Hemos obtenido un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas donde  $C_{mn} = B_{mn}/A_{mn}$ , despejando  $C_{mn}$  de la primera ecuación y substituyendo en la segunda, obtenemos

$$J_m(\kappa_{mn}R_1)Y_m(\kappa_{mn}R_0) - J_m(\kappa_{mn}R_0)Y_m(\kappa_{mn}R_1) = 0 \quad (3.51)$$

la cual es una expresión analítica y cuya solución nos permite hallar los valores de  $\kappa_{mn}$ . Con esto la solución general al problema planteado es

$$\Psi_{mn}(r, \theta, t) = \left[ J_m(\kappa_{mn}r) + \frac{J_m(\kappa_{mn}R_0)}{Y_m(\kappa_{mn}R_0)} Y_m(\kappa_{mn}r) \right] (A_{mn} \cos m\theta + B_{mn} \sin m\theta) \times \quad (3.52)$$

$$(\tilde{A}_{mn} \cos v\kappa_{mn}t + \tilde{B}_{mn} \sin v\kappa_{mn}t) \quad (3.53)$$

Al igual que en el caso anterior, los coeficientes  $A_{mn}$ ,  $B_{mn}$ ,  $\tilde{A}_{mn}$  y  $\tilde{B}_{mn}$  se determinan con las condiciones iniciales. En el Capítulo 5 se muestran los perfiles de la membrana al resolver la Ec. (3.51).

### 3.3.2. Membrana anular con frontera interior libre y frontera exterior fija.

Ahora vamos a analizar un caso similar al anterior, pero, con diferentes condiciones de frontera, como se describe en la sección (1.2.3):

$$\frac{\Psi(R_0, \theta, t)}{\partial r} = 0, \quad \Psi(R_1, \theta, t) = 0. \quad (3.54)$$

Con estas condiciones de frontera para la parte radial obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$J'_m(\kappa_{mn}R_0) + C_{mn}Y'_m(\kappa_{mn}R_0) = 0 \quad (3.55)$$

$$J_m(\kappa_{mn}R_1) + C_{mn}Y_m(\kappa_{mn}R_1) = 0. \quad (3.56)$$

Aplicando el mismo procedimiento de la sección (3.3.1) obtenemos una ecuación analítica para  $\kappa$

$$J_m(\kappa_{mn}R_1)Y'_m(\kappa_{mn}R_0) - J'_m(\kappa_{mn}R_0)Y_m(\kappa_{mn}R_1) = 0 \quad (3.57)$$

Resolviendo esta ecuación obtenemos los valores de  $\kappa_{mn}$  que son justamente los modos en los que vibra la membrana. Con esto la solución general al problema planteado es

$$\Psi_{mn}(r, \theta, t) = \left[ J_m(\kappa_{mn}r) + \frac{Y'_m(\kappa_{mn}R_0)}{J'_m(\kappa_{mn}R_0)} Y_m(\kappa_{mn}r) \right] (A_{mn} \cos m\theta + B_{mn} \sin m\theta) \times \quad (3.58)$$

$$(\tilde{A}_{mn} \cos v\kappa_{mn}t + \tilde{B}_{mn} \sin v\kappa_{mn}t) \quad (3.59)$$

Al igual que en el caso anterior, los coeficientes  $A_{mn}$ ,  $B_{mn}$ ,  $\tilde{A}_{mn}$  y  $\tilde{B}_{mn}$  se determinan con las condiciones iniciales.

### 3.3.3. Membranas anulares de diferentes densidades

Finalmente vamos a analizar el caso de dos membranas concéntricas de diferentes densidades con las condiciones de frontera:

$$R_0(R_0) = R_1(R_0), \quad R'_0(R_0) = R'_1(R_0) \text{ y } R_1(R_1) = 0. \quad (3.60)$$

Como la solución tiene que estar acotada, entonces para la membrana de radio  $R_0$  la solución es solo  $J_m(\kappa_{mn}r)$  ya que  $Y_m(\kappa_{mn}r)$  diverge en cero. Entonces evaluando en la condiciones de frontera obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones.

$$A_0 J_m(\kappa_{mn}^0 R_0) = A_1 J_m(\kappa_{mn}^1 R_0) + B_1 Y_m(\kappa_{mn}^1 R_0) \quad (3.61)$$

$$A_0 J'_m(\kappa_{mn}^0 R_0) = A_1 J'_m(\kappa_{mn}^1 R_0) + B_1 Y'_m(\kappa_{mn}^1 R_0) \quad (3.62)$$

$$A_1 J_m(\kappa_{mn}^1 R_1) + B_1 Y_m(\kappa_{mn}^1 R_1) = 0 \quad (3.63)$$

dividiendo entre  $A_0$  y renombrando  $\mu_0 = A_1/A_0$  y  $\mu_1 = B_1/A_0$

$$J_m(\kappa_{mn}^0 R_0) = \mu_0 J_m(\kappa_{mn}^1 R_0) + \mu_1 Y_m(\kappa_{mn}^1 R_0) \quad (3.64)$$

$$J'_m(\kappa_{mn}^0 R_0) = \mu_0 J'_m(\kappa_{mn}^1 R_0) + \mu_1 Y'_m(\kappa_{mn}^1 R_0) \quad (3.65)$$

$$\mu_0 J_m(\kappa_{mn}^1 R_1) + \mu_1 Y_m(\kappa_{mn}^1 R_1) = 0 \quad (3.66)$$

Las Ecs. (3.64) y (3.65) forman un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, entonces podemos obtener los valores de  $\mu_0$  y  $\mu_1$  aplicando la regla de Cramer

$$\mu_0 = \frac{J_m(\kappa_{mn}^0 R_0)Y'_m(\kappa_{mn}^1 R_0) - J'_m(\kappa_{mn}^0 R_0)Y_m(\kappa_{mn}^1 R_0)}{W[J_m(\kappa_{mn}^1 R_0), Y_m(\kappa_{mn}^1 R_0)]} \quad (3.67)$$

$$\mu_1 = \frac{J_m(\kappa_{mn}^1 R_0)J'_m(\kappa_{mn}^0 R_0) - J'_m(\kappa_{mn}^1 R_0)J_m(\kappa_{mn}^0 R_0)}{W[J_m(\kappa_{mn}^1 R_0), Y_m(\kappa_{mn}^1 R_0)]}, \quad (3.68)$$



en donde  $W$  denota el wroskiano de las funciones de Bessel de las dos especies en la región anular anterior. Substituyendo los valores de  $\mu_1$  y  $\mu_2$  en la Ec. (3.66), obtenemos la ecuación solución, los valores de las  $\kappa_{mn}^i$  se pueden obtener mediante un esquema numérico. Notese que si hacemos la densidad de la membrana central tender a cero, obtendremos el sistema.

$$\mu_0 J_m(\kappa_{mn}^1 R_0) + \mu_1 Y_m(\kappa_{mn}^1 R_0) = 0 \quad (3.69)$$

$$\mu_0 J'_m(\kappa_{mn}^1 R_0) + \mu_1 Y'_m(\kappa_{mn}^1 R_0) = 0 \quad (3.70)$$

Es decir recuperamos el caso de la membrana de la sección 3.3.1, lo cual era de esperarse, ya que la membrana anular es un caso particular de las membranas concéntricas de diferente densidad.

# Capítulo 4

El problema de la cuerda y la membrana con  $N$  secciones de densidades constantes.

En este capítulo abordamos el problema de obtener las frecuencias naturales de un sistema no homogéneo, en una y dos dimensiones con  $N$  secciones de densidades constantes. Las soluciones se obtienen haciendo uso de las matrices de transferencia, o matrices de coeficientes, para simplificar el tratamiento algebraico.

## 4.1. Cuerda con $N$ -secciones

Consideremos una cuerda con  $N$  secciones, cada una con una densidad  $\rho_i$  y longitud  $l_i - l_{i-1}$ . Como se ilustra en la Figura 4.1.

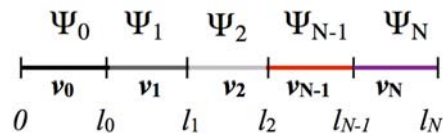


Figura 4.1: Cuerda con  $N$  secciones con densidades diferentes, donde  $\Psi_i$  con  $i = 0, 1, \dots, N$  representa las funciones de onda correspondiente a la sección  $l_i - l_{i-1}$ , y  $v_i$  son las velocidades de propagación para cada medio.

Entonces para cada segmento asociamos una ecuación de onda, con su respectiva velocidad de propa-

CAPÍTULO 4. EL PROBLEMA DE LA CUERDA Y LA MEMBRANA CON  $N$  SECCIONES DE DENSIDADES CONSTANTES.

---

gación  $v_i$ .

$$\frac{\partial^2 \Psi_i}{\partial x^2} = \frac{1}{v_i^2} \frac{\partial^2 \Psi_i}{\partial t^2} \quad i = 0, 1, \dots, N \quad (4.1)$$

Como sabemos por los capítulos anteriores, utilizando el método de separación de variables la solución general tendrá la forma

$$\Psi_i(x, t) = (C_i \cos \kappa_i t + D_i \sin \kappa_i t)(A_i \cos \kappa_i x + B_i \sin \kappa_i x). \quad (4.2)$$

Consideramos que la función de onda correspondiente a cada sección tiene el mismo valor para la  $i$ -ésima interfaz, esta condición de continuidad expresa el hecho que la cuerda no se rompe y además la cuerda se encuentra fija en los extremos. Es decir,

$$\Psi_i(l_i, t) = \Psi_{i+1}(l_i, t), \quad (4.3)$$

$$\frac{\partial \Psi_i(l_i, t)}{\partial x} = \frac{\partial \Psi_{i+1}(l_i, t)}{\partial x}, \quad (4.4)$$

$$\Psi_0(0, t) = 0, \quad (4.5)$$

$$\Psi_N(l_N, t) = 0. \quad (4.6)$$

Las dos primeras ecuaciones expresan la condición de continuidad y las siguientes las condiciones de frontera. Si ahora sustituimos la Ec. (4.2) en las Ecs. (4.3) y (4.4) y evaluamos para  $x = l_i$  obtenemos las siguientes expresiones:

$$A_i \cos \kappa_i l_i + B_i \sin \kappa_i l_i = A_{i+1} \cos \kappa_{i+1} l_i + B_{i+1} \sin \kappa_{i+1} l_i. \quad (4.7)$$

$$-A_i \kappa_i \sin \kappa_i l_i + B_i \kappa_i \cos \kappa_i l_i = -A_{i+1} \kappa_{i+1} \sin \kappa_{i+1} l_i + B_{i+1} \kappa_{i+1} \cos \kappa_{i+1} l_i. \quad (4.8)$$

Ahora evaluamos la solución general en la condición de frontera en la Ec. (4.6) y obtenemos la expresión que se muestra a continuación,

$$A_N \cos(\kappa_N l_N) + B_N \sin(\kappa_N l_N) = 0, \quad (4.9)$$

la condición en la Ec.(4.5) se usa mas adelante para hallar los valores  $A_0$  y  $B_0$ . Notamos que la ecuación anterior se puede simplificar como un producto interior de dos vectores  $\mathbf{x}_N = (A_N, B_N)$  y  $\mathbf{y} = (\cos(\kappa_N l_N), \sin(\kappa_N l_N))$  respectivamente, por lo que la expresión anterior toma la forma siguiente:

$$(A_N, B_N) \begin{pmatrix} \cos(\kappa_N l_N) \\ \sin(\kappa_N l_N) \end{pmatrix} = 0 \quad (4.10)$$

$$\mathbf{x}^T \mathbf{y} = 0. \quad (4.11)$$

Además podemos expresar las condiciones de frontera en las Ecs. (4.7) y (4.8) en forma matricial de la siguiente manera

$$\begin{pmatrix} \cos(\kappa_i l_i) & \sin(\kappa_i l_i) \\ -\kappa_i \sin(\kappa_i l_i) & \kappa_i \cos(\kappa_i l_i) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_i \\ B_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\kappa_{i+1} l_i) & \sin(\kappa_{i+1} l_i) \\ -\kappa_{i+1} \sin(\kappa_{i+1} l_i) & \kappa_{i+1} \cos(\kappa_{i+1} l_i) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{i+1} \\ B_{i+1} \end{pmatrix}. \quad (4.12)$$

De estas expresiones podemos definir la matriz  $\mathbf{T}$  y el vector  $\mathbf{x}$ :

$$\mathbf{T}(\kappa_i, l_i) = \begin{pmatrix} \cos(\kappa_i l_i) & \sin(\kappa_i l_i) \\ -\kappa_i \sin(\kappa_i l_i) & \kappa_i \cos(\kappa_i l_i) \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{x}_i = \begin{pmatrix} A_i \\ B_i \end{pmatrix}$$

La expresión 4.12 se simplifica en la siguiente ecuación:

$$\mathbf{T}(\kappa_i, l_i)\mathbf{x}_i = \mathbf{T}(\kappa_{i+1}, l_i)\mathbf{x}_{i+1}, \quad (4.13)$$

donde  $\mathbf{T}(\kappa_i, l_i)$  se identifica como la matriz de coeficientes de transferencia. Ahora vamos a desarrollar la expresión anterior con la finalidad de llegar a una ecuación con términos que ya conocemos. Iniciamos desarrollando los primeros dos valores de la ecuación anterior, para  $i = 0$

$$\mathbf{T}(\kappa_0, l_0)\mathbf{x}_0 = \mathbf{T}(\kappa_1, l_1)\mathbf{x}_1, \quad (4.14)$$

y para  $i = 1$

$$\mathbf{T}(\kappa_1, l_1)\mathbf{x}_1 = \mathbf{T}(\kappa_2, l_1)\mathbf{x}_2. \quad (4.15)$$

Con ello notamos que existe una relación de recurrencia entre el término anterior y el siguiente. Desarrollando para  $i = N - 1$  se obtiene

$$\mathbf{T}(\kappa_{N-1}, l_{N-1})\mathbf{x}_{N-1} = \mathbf{T}(\kappa_N, l_N)\mathbf{x}_N. \quad (4.16)$$

Ahora multiplicamos por la derecha con  $\mathbf{y}$  a la ecuación anterior para obtener

$$\mathbf{T}(\kappa_{N-1}, l_{N-1})\mathbf{x}_{N-1} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{T}(\kappa_N, l_N)\mathbf{x}_N \cdot \mathbf{y}. \quad (4.17)$$

Ahora invertimos la matriz  $\mathbf{T}(\kappa_N, l_N)$ , ésto se puede hacer ya que las soluciones forman una base ortogonal; es decir, son linealmente independientes, lo que nos asegura que el determinante de la matriz es distinto de cero y por lo tanto invertible; entonces:

$$\mathbf{T}^{-1}(\kappa_N, l_N)\mathbf{T}(\kappa_{N-1}, l_{N-1})\mathbf{x}_{N-1} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x}_N \cdot \mathbf{y} \quad (4.18)$$

Notamos que el lado derecho de la ecuación es igual a la Ec.(4.11), y por lo tanto igual a cero, de modo que la Ec.(4.18) también es igual a cero,

$$\mathbf{T}^{-1}(\kappa_N, l_N)\mathbf{T}(\kappa_{N-1}, l_{N-1})\mathbf{x}_{N-1} \cdot \mathbf{y} = 0 \quad (4.19)$$

Por la relación de recurrencia en la ecuación 4.13 se obtiene el coeficiente  $\mathbf{x}_1$ ,

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(\kappa_{N-2}, l_{N-2})\mathbf{x}_{N-2} &= \mathbf{T}(\kappa_{N-1}, l_{N-2})\mathbf{x}_{N-1} \\ \mathbf{x}_{N-1} &= \mathbf{T}^{-1}(\kappa_{N-1}, l_{N-2})\mathbf{T}(\kappa_{N-2}, l_{N-2})\mathbf{x}_{N-2}, \end{aligned} \quad (4.20)$$

al substituir en la Ec.(4.19) se obtiene de manera recursiva una relación entre  $\mathbf{x}_0$  y  $\mathbf{y}$

$$\mathbf{T}^{-1}(\kappa_N, l_N)\mathbf{T}(\kappa_{N-1}, l_{N-1})\mathbf{T}^{-1}(\kappa_{N-1}, l_{N-2})\mathbf{T}(\kappa_{N-2}, l_{N-2})\mathbf{x}_{N-2} \cdot \mathbf{y} = 0 \quad (4.21)$$

.

.

.

$$\mathbf{T}^{-1}(\kappa_N, l_N)\mathbf{T}(\kappa_{N-1}, l_{N-1}) \cdots \mathbf{T}^{-1}(\kappa_2, l_1)\mathbf{T}(\kappa_1, l_1)\mathbf{T}^{-1}\mathbf{T}(\kappa_0, l_0)\mathbf{x}_0 \cdot \mathbf{y} = 0, \quad (4.22)$$

donde

$$\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} A_0 \\ B_0 \end{pmatrix} \quad (4.23)$$

Como la cuerda se encuentra sujeta en  $x = 0$ , Ec. (4.5), tenemos que  $A_0 = 0$  y  $B_0 \neq 0$ . Sustituyendo esos valores en la Ec.(4.22) obtenemos:

$$\mathbf{T}^{-1}(\kappa_N, l_{N-1})\mathbf{T}(\kappa_{N-1}, l_{N-1}) \cdots \mathbf{T}^{-1}(\kappa_2, l_1)\mathbf{T}(\kappa_1, l_1)\mathbf{T}^{-1}(\kappa_1, l_0)\mathbf{T}(\kappa_0, l_0)B_0 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{y} = 0 \quad (4.24)$$

Como  $B_0$  es una constante podemos eliminarla obteniendo:

$$\mathbf{T}^{-1}(\kappa_N, l_{N-1})\mathbf{T}(\kappa_{N-1}, l_{N-1}) \cdots \mathbf{T}^{-1}(\kappa_2, l_1)\mathbf{T}(\kappa_1, l_1)\mathbf{T}^{-1}(\kappa_1, l_0)\mathbf{T}(\kappa_0, l_0) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\kappa_N l_N) \\ \sin(\kappa_N l_N) \end{pmatrix} = 0. \quad (4.25)$$

Finalmente podemos escribir la ecuación anterior de manera simplificada como un producto finito de matrices,

$$\prod_{i=1}^N \mathbf{T}^{-1}(\kappa_i, l_{i-1})\mathbf{T}(\kappa_{i-1}, l_{i-1}) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\kappa_N l_N) \\ \sin(\kappa_N l_N) \end{pmatrix} = 0. \quad (4.26)$$

Resolviendo la ecuación anterior podemos hallar los valores de  $\kappa_i$ . Nótese que hemos obtenido una ecuación escalar y además podemos encontrar el valor de todas las  $\kappa_i$  puesto que la cuerda vibra a la misma frecuencia. Es decir  $\omega = \omega_i$  para todas las secciones de la cuerda. Esto hace que podamos escribir la ecuación anterior en términos de un sólo valor de  $\kappa_i$ , sin pérdida de generalidad  $\kappa_0$ :

$$\begin{aligned} \omega_0 = \omega_i &\Rightarrow \frac{\kappa_0}{v_0} = \frac{\kappa_i}{v_i} \\ \kappa_i &= \frac{v_i}{v_0} \kappa_0. \end{aligned} \quad (4.27)$$

De esta manera, al encontrar las raíces para dicha ecuación se pueden determinar las frecuencias con las que la cuerda completa puede vibrar.

#### 4.1.1. Caso particular de la cuerda homogénea.

Para el caso particular de la cuerda homogénea, la Ec.(4.26) se reduce a la expresión simple:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\kappa_0 l_0) \\ \sin(\kappa_0 l_0) \end{pmatrix} = 0, \quad (4.28)$$

realizando el producto obtenemos:

$$\sin(\kappa_0 l_0) = 0. \quad (4.29)$$

Entonces los valores para  $\kappa_0$  son de la forma  $\frac{n\pi}{l_0}$ , hemos llegado a la misma expresión para la frecuencia que ya habíamos obtenido en el capítulo 2.

#### 4.1.2. Cuerda con dos densidades diferentes.

Para el caso de dos inhomogeneidades se tiene que  $N = 1$  y la Ec.(4.26) toma la forma.

$$\mathbf{T}^{-1}(\kappa_1, l_0)\mathbf{T}(\kappa_0, l_0) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\kappa_1 l_1) \\ \sin(\kappa_1 l_1) \end{pmatrix} = 0, \quad (4.30)$$

desarrollando la ecuación anterior:

$$\begin{pmatrix} \kappa_1 \cos(\kappa_1 l_0) & -\sin(\kappa_1 l_0) \\ \kappa_1 \sin(\kappa_1 l_0) & \cos(\kappa_1 l_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\kappa_0 l_0) & \sin(\kappa_0 l_0) \\ -\kappa_0 \sin(\kappa_0 l_0) & \kappa_0 \cos(\kappa_0 l_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\kappa_1 l_1) \\ \sin(\kappa_1 l_1) \end{pmatrix} = 0, \quad (4.31)$$

entonces.

$$\begin{pmatrix} \kappa_1 \cos(\kappa_1 l_0) \sin(\kappa_0 l_0) - \sin(\kappa_1 l_0) \kappa_0 \cos(\kappa_0 l_0) \\ \kappa_1 \sin(\kappa_1 l_0) \sin(\kappa_0 l_0) + \cos(\kappa_1 l_0) \kappa_0 \cos(\kappa_0 l_0) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\kappa_1 l_1) \\ \sin(\kappa_1 l_1) \end{pmatrix} = 0. \quad (4.32)$$

Realizando el producto anterior obtenemos la ecuación escalar:

$$\begin{aligned} & \cos(\kappa_1 l_1) [\kappa_1 \cos(\kappa_1 l_0) \sin(\kappa_0 l_0) - \sin(\kappa_1 l_0) \kappa_0 \cos(\kappa_0 l_0)] + \\ & \sin(\kappa_1 l_1) [\kappa_1 \sin(\kappa_1 l_0) \sin(\kappa_0 l_0) + \cos(\kappa_1 l_0) \kappa_0 \cos(\kappa_0 l_0)] = 0, \end{aligned} \quad (4.33)$$

simplificando la expresión anterior obtenemos,

$$\kappa_1 \tan(\kappa_0 l_0) [1 + \tan(\kappa_1 l_1) \tan(\kappa_1 l_0)] + \kappa_0 [\tan(\kappa_1 l_1) - \tan(\kappa_1 l_0)] = 0 \quad (4.34)$$

Para el caso particular de dos inhomogeneidades de la misma longitud, con  $l_0 = L$ ,  $l_1 = 2L$ , la ecuación anterior se simplifica a:

$$\kappa_1 \tan(\kappa_0 L) [1 + \tan(\kappa_1 L) \tan(2\kappa_1 L)] + \kappa_0 [\tan(2\kappa_1 L) - \tan(\kappa_1 L)] = 0. \quad (4.35)$$

Simplificando la ecuación anterior, utilizando la identidad de la tangente para el doble del ángulo, obtenemos

$$\kappa_1 \tan(\kappa_0 L) + \kappa_0 \tan(\kappa_1 L) = 0 \quad (4.36)$$

En términos de las densidades de cada sección y utilizando el hecho de que  $\omega_1 = \omega_0$ , obtenemos

$$\tan(\kappa_0 L) + \sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_0}} \tan\left(\sqrt{\frac{\rho_0}{\rho_1}} \kappa_0 L\right) = 0 \quad (4.37)$$

Nótese que esta ecuación es la misma que la Ec. (2.22) que se obtiene en el capítulo 2.

## 4.2. Membrana con $N$ -inhomogeneidades

En analogía al sistema anterior, ahora consideremos el problema de la membrana no homogénea con  $N$  secciones de densidades diferentes como se observa en la Figura 4.2. El método que usamos para encontrar los modos normales, es resolver la ecuación de onda para cada sección como en el sistema anterior. Las condiciones para las interfaces y las de frontera son:

$$\Psi_i(R_i, t) = \Psi_{i+1}(R_i, t) \quad (4.38)$$

$$\frac{\partial \Psi_i(R_i, t)}{\partial r} = \frac{\partial \Psi_{i+1}(R_i, t)}{\partial r} \quad (4.39)$$

$$|\Psi_0(0, t)| < M \quad M \in \mathbb{R} \quad (4.40)$$

$$\Psi_N(R_N, t) = 0 \quad (4.41)$$

Las primeras dos ecuaciones expresan la condición de continuidad de la función y su derivada para cada interfaz. Por su parte la Ec. (4.40) indica que la solución debe estar acotada en  $R = 0$ . Finalmente,

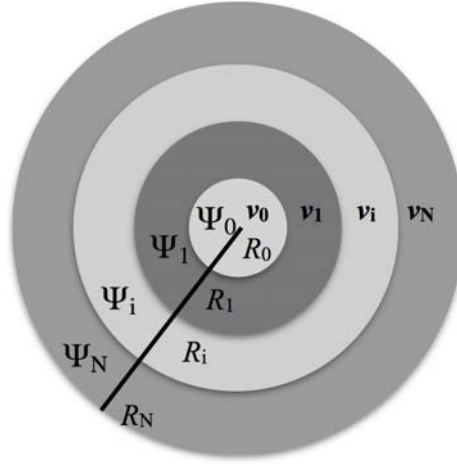


Figura 4.2: Membrana con anillos de  $N$  densidades diferentes. Donde  $\Psi_i$  con  $i = 0, 1, N$  representan las funciones de onda correspondientes a la región comprendida entre  $R_i$  y  $R_{i-1}$ , y  $v_i$  son las velocidades de propagación para cada medio.

la última ecuación indica que la membrana esta fija en su frontera. Sabemos que la solución de la ecuación de onda en una membrana para la parte radial son combinaciones de funciones de Bessel de primera y segunda especie,

$$R_i(r) = A_{im}J_m(\kappa_{im}r) + B_{im}Y_m(\kappa_{im}r), \quad (4.42)$$

donde  $m$  indica la excitación angular y el índice  $i$  denota la  $i$ -ésima sección radial. Para las condiciones de frontera en las ecuaciones anteriores se obtienen las siguientes relaciones:

$$A_{im}J_m(\kappa_i R_N) + B_{im}Y_m(\kappa_i R_N) = A_{i+1m}J_m(\kappa_{i+1} R_N) + B_{i+1m}Y_m(\kappa_{i+1} R_N) \quad (4.43)$$

$$\kappa_i[A_{im}J'_m(\kappa_i R_N) + B_{im}Y'_m(\kappa_i R_N)] = \kappa_{i+1}[A_{i+1m}J'_m(\kappa_{i+1} R_N) + B_{i+1m}Y'_m(\kappa_{i+1} R_N)] \quad (4.44)$$

$$A_{Nm}J_m(\kappa_N R_N) + B_{Nm}Y_m(\kappa_N R_N) = 0, \quad (4.45)$$

donde las funciones  $J'_m(\kappa_i R_N)$  y  $Y'_m(\kappa_i R_N)$  denotan las derivadas ya evaluadas. Las Ecs. (4.45) y (4.44) se expresan en una sola ecuación de tipo matricial:

$$\begin{pmatrix} J_m(\kappa_i R_N) & Y_m(\kappa_i R_N) \\ \kappa_i J'_m(\kappa_i R_N) & \kappa_i Y'_m(\kappa_i R_N) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{im} \\ B_{im} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_m(\kappa_{i+1} R_N) & Y_m(\kappa_{i+1} R_N) \\ \kappa_{i+1} J'_m(\kappa_{i+1} R_N) & \kappa_{i+1} Y'_m(\kappa_{i+1} R_N) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{i+1,m} \\ B_{i+1,m} \end{pmatrix}. \quad (4.46)$$

Mientras que la Ec. (4.45) se puede expresar como el producto interior de dos vectores:

$$(A_{Nm}, B_{Nm}) \cdot (J_n(\kappa_N R_N), Y_n(\kappa_N R_N)) = 0 \quad (4.47)$$

$$\mathbf{x}_N \cdot \mathbf{y} = 0. \quad (4.48)$$

Utilizando la notación como en la sección anterior pero en las ecuaciones anteriores se hace la siguiente identificación:

$$\mathbf{T}(\kappa_i, m) = \begin{pmatrix} J_m(\kappa_i R_i) & Y_m(\kappa_i R_i) \\ \kappa_i J'_m(\kappa_i R_i) & \kappa_i Y'_m(\kappa_i R_i) \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{x}_i = \begin{pmatrix} A_{i,m} \\ B_{i,m} \end{pmatrix}.$$

La Ec. (4.46) se convierte en:

$$\mathbf{T}(\kappa_i, R_i)\mathbf{x}_i = \mathbf{T}(\kappa_{i+1}, R_i)\mathbf{x}_{i+1} \quad (4.49)$$

Procediendo de manera análoga a como se hizo en la sección anterior se tiene que para  $i = 0$

$$\mathbf{T}(\kappa_0, R_0)\mathbf{x}_0 = \mathbf{T}(\kappa_1, R_0)\mathbf{x}_1, \quad (4.50)$$

y para  $i = 1$

$$\mathbf{T}(\kappa_1, R_1)\mathbf{x}_1 = \mathbf{T}(\kappa_2, R_1)\mathbf{x}_2. \quad (4.51)$$

Vemos que para obtener  $\mathbf{x}_2$  necesitamos conocer  $\mathbf{x}_1$  análogamente para  $\mathbf{x}_{i+1}$  necesitamos  $\mathbf{x}_i$ , es decir, podemos obtener la solución de forma recursiva. Ahora bien, para  $i = N - 1$  se tiene que

$$\mathbf{T}(\kappa_{N-1}, R_{N-1})\mathbf{x}_{N-1} = \mathbf{T}(\kappa_N, R_N)\mathbf{x}_N, \quad (4.52)$$

y multiplicando por  $\mathbf{y}$  obtenemos

$$\mathbf{T}(\kappa_{N-1}, R_{N-1})\mathbf{x}_{N-1} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{T}(\kappa_N, R_N)\mathbf{x}_N \cdot \mathbf{y}. \quad (4.53)$$

Invirtiéndola matriz  $\mathbf{T}(\kappa_N, R_N)$  se obtiene

$$\mathbf{T}^{-1}(\kappa_N, R_N)\mathbf{T}(\kappa_{N-1}, R_{N-1})\mathbf{x}_{N-1} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x}_N \cdot \mathbf{y} \quad (4.54)$$

Por la condición de frontera en la Ec.(4.48) la ecuación anterior es igual a cero,

$$\mathbf{T}^{-1}(\kappa_N, R_N)\mathbf{T}(\kappa_{N-1}, R_{N-1})\mathbf{x}_{N-1} \cdot \mathbf{y} = 0. \quad (4.55)$$

Sabemos también por la Ec.(4.52) que para el termino  $i$ -esimo se tiene

$$\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{T}^{-1}(\kappa_{i+1}, R_{i+1})\mathbf{T}(\kappa_i, R_i)\mathbf{x}_i \quad (4.56)$$

y substituyendo en la Ec. (4.55)

$$\mathbf{T}^{-1}(\kappa_N, R_N)\mathbf{T}(\kappa_{N-1}, R_{N-1})\mathbf{T}^{-1}(\kappa_N, R_N)\mathbf{T}(\kappa_{N-2}, R_{N-2})\mathbf{x}_{N-2} \cdot \mathbf{y} = 0. \quad (4.57)$$

Escrito de manera recursiva se tiene

$$\mathbf{T}^{-1}(\kappa_N, R_N)\mathbf{T}(\kappa_{N-1}, R_{N-1})\mathbf{T}^{-1}(\kappa_N, R_N)\mathbf{T}(\kappa_{N-2}, R_{N-2}) \cdots \mathbf{T}^{-1}(\kappa_2, R_2)\mathbf{T}(\kappa_1, R_1)\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{y} = 0. \quad (4.58)$$

El término  $\vec{a}_1$  lo conocemos por la Ec. 4.50. Sin embargo, el término  $B_{0m}$  tiene que ser cero, para que la solución no diverja cuando  $r = 0$ . Entonces el resultado es:

$$\begin{pmatrix} J_m(\kappa_i R_N) & Y_m(\kappa_i R_N) \\ \kappa_0 J'_m(\kappa_i R_N) & \kappa_0 Y'_m(\kappa_i R_N) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{0m} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_m(\kappa_{i+1} R_N) & Y_m(\kappa_{i+1} R_N) \\ \kappa_1 J'_m(\kappa_{i+1} R_N) & \kappa_1 Y'_m(\kappa_{i+1} R_N) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{1,m} \\ B_{1,m} \end{pmatrix}, \quad (4.59)$$

donde  $A_{0m}$  es un coeficiente a determinar y que podemos factorizar de la ecuación para escribirla de la siguiente manera

$$A_{0m} \begin{pmatrix} J_m(\kappa_i R_N) \\ \kappa_0 J'_m(\kappa_i R_N) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_m(\kappa_{i+1} R_N) & Y_m(\kappa_{i+1} R_N) \\ \kappa_1 J'_m(\kappa_{i+1} R_N) & \kappa_1 Y'_m(\kappa_{i+1} R_N) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{1,m} \\ B_{1,m} \end{pmatrix} \quad (4.60)$$



Finalmente, invertimos la matriz obteniendo la expresión que buscábamos para  $\mathbf{x}_1$ ,

$$A_{0m} \begin{pmatrix} J_m(\kappa_{i+1}R_N) & Y_m(\kappa_{i+1}R_N) \\ \kappa_1 J'_m(\kappa_{i+1}R_N) & \kappa_1 Y'_m(\kappa_{i+1}R_N) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} J_m(\kappa_i R_N) \\ \kappa_0 J'_m(\kappa_i R_N) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{1,m} \\ B_{1,m} \end{pmatrix} \quad (4.61)$$

y sustituyendo la Ec.(4.61) en la Ec.(4.58) obtenemos la expresión

$$\mathbf{T}^{-1}(\kappa_N, R_{N-1})\mathbf{T}(\kappa_{N-1}, R_{N-1}) \cdots \mathbf{T}^{-1}(\kappa_2, R_1)\mathbf{T}(\kappa_1, R_1)\mathbf{T}^{-1}(\kappa_1, R_1)\mathbf{x}_0 \cdot \mathbf{y} = 0, \quad (4.62)$$

misma que se puede simplificar de la siguiente manera

$$\left[ \prod_{i=1}^N \mathbf{T}^{-1}(\kappa_i, R_{i-1})\mathbf{T}(\kappa_{i-1}, R_{i-1}) \right] \mathbf{T}^{-1}(\kappa_0, R_0)\mathbf{x}_0 \cdot \mathbf{y} = 0. \quad (4.63)$$

Hemos obtenido una expresión similar a la Ec. (4.26) de la sección anterior. Esta ecuación es escalar y se debe encontrar una solución para  $\kappa_0$ , y por consiguiente se encuentran los demás valores de  $\kappa_i$  utilizando el cociente de velocidades. En el siguiente capítulo presentamos los resultados experimentales de los modos de vibración de una cuerda no homogénea con dos densidades diferentes y la comparación con los valores teóricos obtenidos de la implementación computacional de las Ecs.(4.26,4.63). También se presentan los perfiles de las líneas nodales de las membranas para dos y tres densidades diferentes que se obtuvieron con el tratamiento expuesto en este capítulo.

# Capítulo 5

## Resultados.

### 5.1. Resultados: modos de vibración de sistemas en una dimensión

A continuación se presentan los resultados teóricos y experimentales para dos cuerdas homogéneas y posteriormente agregando una inhomogeneidad a cada una de ellas. Para el experimento se sometieron las cuerdas a cinco tensiones diferentes y se midieron los modos correspondientes a esas tensiones. Los valores teóricos se obtuvieron mediante la implementación de algoritmos de búsqueda de raíces de las Ecs. (4.26) y (4.63) del Capítulo 4 utilizando las bibliotecas numpy, scipy y matplotlib del lenguaje de programación Python. La densidades de los alambres fueron de  $\rho_1 = 0.01145631$  gr/cm,  $\rho_2 = 0.01861842$  gr/cm, en la parte entorchada las densidades lineales fueron de  $\tilde{\rho}_1 = 0.01706598$  gr/cm para la cuerda 1 y  $\tilde{\rho}_2 = 0.02383872$  gr/cm para la cuerda 2. Ambas cuerdas tenían una longitud de 99 cm. A continuación se presentan tablas con los resultados obtenidos con las frecuencias en Hertz, la primera contiene los modos para la cuerda menos densa,  $\rho_1 = 0.01145631$  gr/cm. Se midieron en total 7 modos con 5 tensiones diferentes en el caso homogéneo y 3 para el no homogéneo. Los cocientes de densidades para esta cuerda, son 1.0 y  $\tilde{\rho}_1/\rho_1 = 1.48$  respectivamente. El experimento es para ilustrar y muestra que podemos realizar de manera experimental el estudio de los modos de las membranas tratadas de manera teórica en los capítulos anteriores. No se agregan las incertidumbres por que no era la finalidad profundizar en el experimento.

Modo	T=1000 gr.		T=1100 gr.		T=1200 gr.		T=1300 gr.		T=1400 gr.	
	MT	ME	MT	ME	MT	ME	MT	ME	MT	ME
0	45.360	45.19	49.016	48.75	51.196	51.11	53.286	52.95	55.298	54.48
1	93.471	92.29	98.033	97.44	102.392	102.16	106.573	105.85	110.596	109.56
2	140.206	139.61	147.049	146.9	153.588	153.08	159.860	158.63	165.894	164.97
3	186.942	185.7	196.066	195.26	204.784	203.92	213.146	212.6	221.192	221.99
4	233.677	231.95	245.083	244.82	255.980	255.01	266.433	265.32	276.490	276.26
5	280.413	279.7	294.099	293.24	307.177	305.41	319.720	317.83	331.789	330.4
6	327.148	325.63	343.116	342.93	358.373	356.76	373.006	372.82	387.087	385.5

Tabla 5.1: Datos correspondientes a la cuerda 1 homogénea con valor de densidad  $\rho = 0.0114563$ , donde MT denota el valor de la frecuencia del Modo Teórico y ME del Modo Experimental

Modo	T=1000 gr.		T=1100 gr.		T=1200 gr.	
	Teórico	Experimental	Teórico	Experimental	Teórico	Experimental
Modo 0	36.233	38.44	38.1775	39.75	39.875	41.24
Modo 1	77.364	78.77	81.384	81.17	85.003	82.36
Modo 2	110.367	115.64	116.195	118.59	121.362	129.86
Modo 3	152.233	156.70	159.663	160.41	166.763	169.76
Modo 4	188.205	193.8	197.391	201.82	206.168	211.56
Modo 5	193.86	188.61	203.32	201.68	212.37	212.76
Modo 6	265.959	272.72	278.940	285.43	291.343	294.95

Tabla 5.2: Datos correspondientes a la cuerda 1 no homogénea con dos secciones de densidades  $\rho_1 = 0.01145631$  gr/cm y  $\tilde{\rho}_1 = 0.01706598$  gr/cm.

Las siguientes tablas corresponden a los datos obtenidos para la cuerda con mayor densidad, con un valor de  $\rho_2 = 0.01861842$  gr/cm, al igual que los datos presentados anteriormente la primera tabla corresponde al caso homogéneo y el segundo al no homogéneo, los cocientes de densidad son 1.0 y 1.28 para la sección no homogénea.

Modo	T=1000 gr.		T=1100 gr.		T=1200 gr.		T=1300 gr.		T=1400 gr.	
	MT	ME	MT	ME	MT	ME	MT	ME	MT	ME
0	36.66	35.29	38.449	36.21	40.15	37.26	41.79	41.36	43.37	44.23
1	73.32	71.41	76.89	72.35	80.31	76.48	83.59	79.52	86.75	87.06
2	109.98	109.22	115.34	110.64	120.47	112.33	125.39	120.32	130.13	132.50
3	146.64	144.08	153.79	149.56	160.63	150.41	167.19	158.99	173.50	176.86
4	183.30	178.53	192.24	184.75	200.797	194.57	208.99	199.02	216.88	222.35
5	219.96	214.61	230.69	221.58	240.95	235.00	250.79	238.72	260.26	264.98
6	256.62	252.74	269.14	257.28	281.11	281.29	292.59	287.91	303.64	308.26

Tabla 5.3: Resultados obtenidos para la cuerda 2 de densidad  $\rho_2 = 0.01861842$  y longitud de 99 cm.

Modo	T=1000 gr.		T=1100 gr.		T=1200 gr.		T=1300 gr.		T=1400 gr.	
	MT	ME	MT	ME	MT	ME	MT	ME	MT	ME
Modo 0	31.69	31.63	33.23	33.19	34.71	34.26	36.13	35.05	37.49	36.92
Modo 1	65.20	63.38	68.412	67.51	71.42	69.63	74.34	72.39	77.15	74.82
Modo 2	95.32	94.16	99.98	99.90	104.42	105.39	108.69	107.71	112.79	111.09
Modo 3	129.89	126.24	136.23	134.28	142.29	142.12	148.10	144.89	153.69	149.57
Modo 4	159.60	157.26	167.39	166.38	174.83	176.09	181.97	179.89	188.84	184.28
Modo 5	193.86	188.61	203.32	201.68	212.37	212.76	221.04	216.82	229.38	223.66
Modo 6f	224.56	221.89	235.52	237.71	245.99	245.86	256.04	251.42	265.70	259.50

Tabla 5.4: Datos correspondientes a la cuerda 2 no homogénea con valores de densidades  $\rho_2 = 0.01861842$  y  $\tilde{\rho}_2 = 0.02383872$ .

Las gráficas siguientes corresponden a las tablas para ambas cuerdas, en ellas se pretende mostrar los comportamientos de los modos en función de las tensiones. Como se mencionó en el capítulo 2 se ocuparon 5 masas diferentes en un rango de 1.0 a 1.5 kg variando 100 gr para cada medición, por lo que las tensiones tomaron valores entre 9 a 14 N. Las primeras dos gráficas muestran el comportamiento de los modos para la cuerda 1 homogénea graficando tensión vs frecuencia. Las líneas continuas corresponden a los valores teóricos obtenidos y los puntos a las mediciones experimentales.

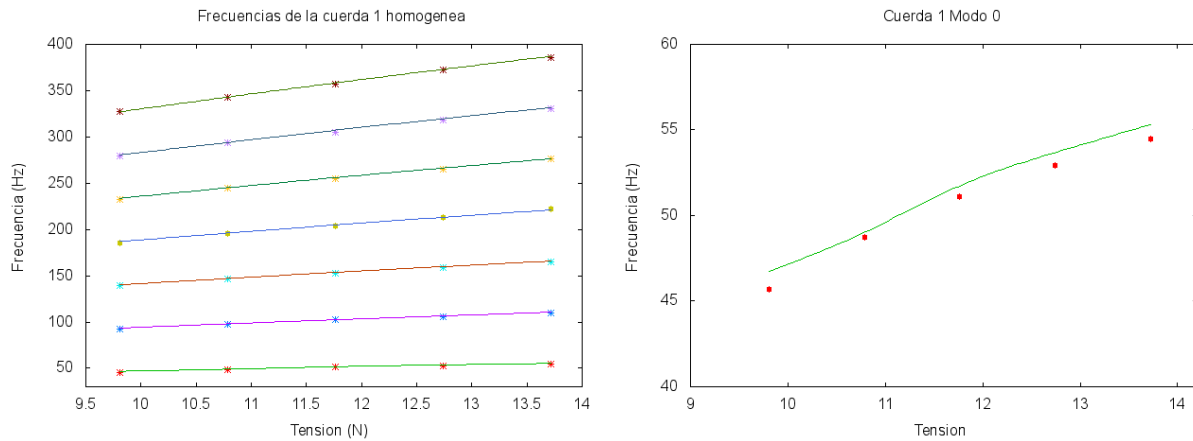


Figura 5.1: Comparación de los modos teóricos (\*) y los experimentales (+) para la cuerda 1 homogénea.

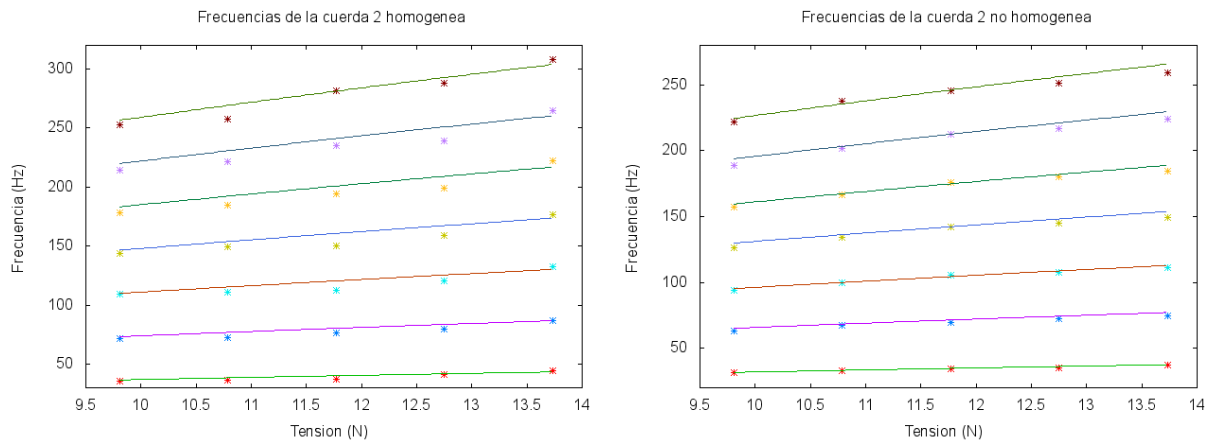
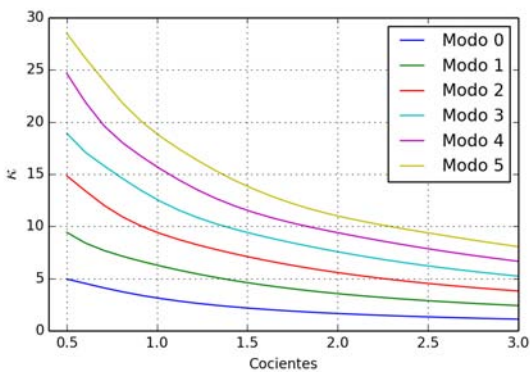


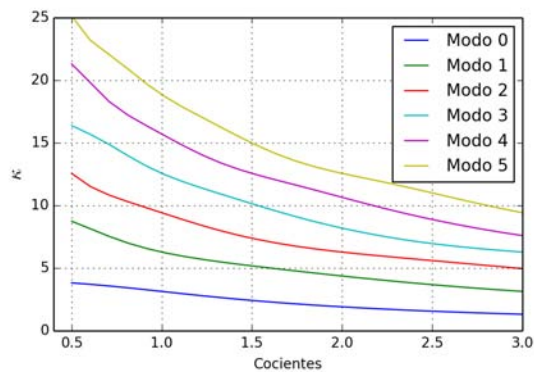
Figura 5.2: Gráfica de los modos normales de vibración experimentales (\*) y la línea continua corresponde a los valores teóricos obtenidos para la cuerda 2 no homogénea .

Uno de los primeros resultados que podemos visualizar en las gráficas es el rango de frecuencias mientras que para la cuerda menos densa las frecuencias están en un rango de 0 a 400 Hertz para la mas densa los valores comprenden un rango de 0 a 300 Hertz. Es decir, a mayor densidad de la cuerda se obtienen frecuencias más bajas, y entonces para el mismo  $n$  se cubre un menor rango de frecuencia con los armónicos que para una frecuencia mayor.

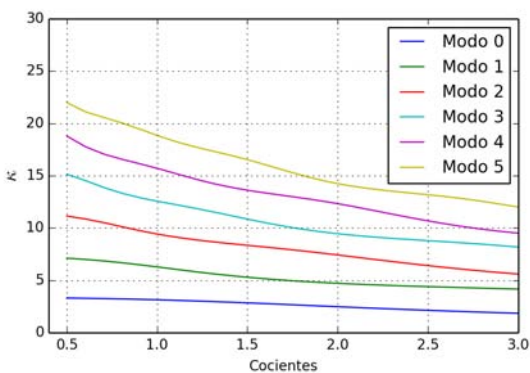
En las siguientes gráficas visualizamos la variación de los modos en función del cociente de densidades en un rango de 0 a 3. En las primeras cuatro gráficas también se hace variar el tamaño de la inhomogeneidad a fin de cerciorarse que efectivamente para una inhomogeneidad pequeña la cuerda se comporta como si fuera una cuerda homogénea.



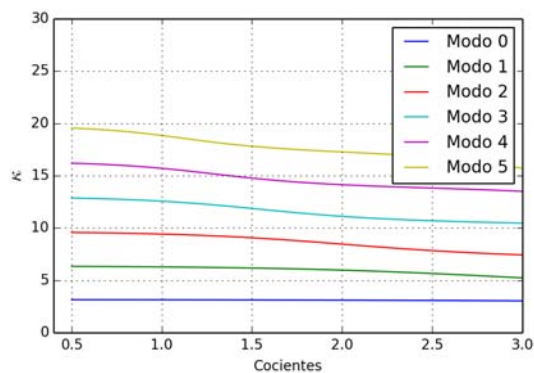
(a) Sección no homogénea de tamaño 0.7



(b) Sección no homogénea de tamaño 0.5

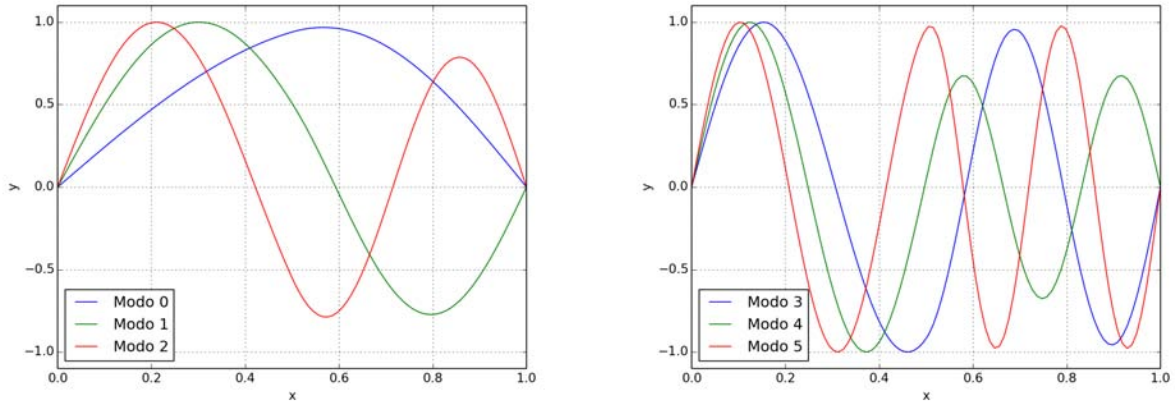


(c) Sección no homogénea de tamaño 0.3



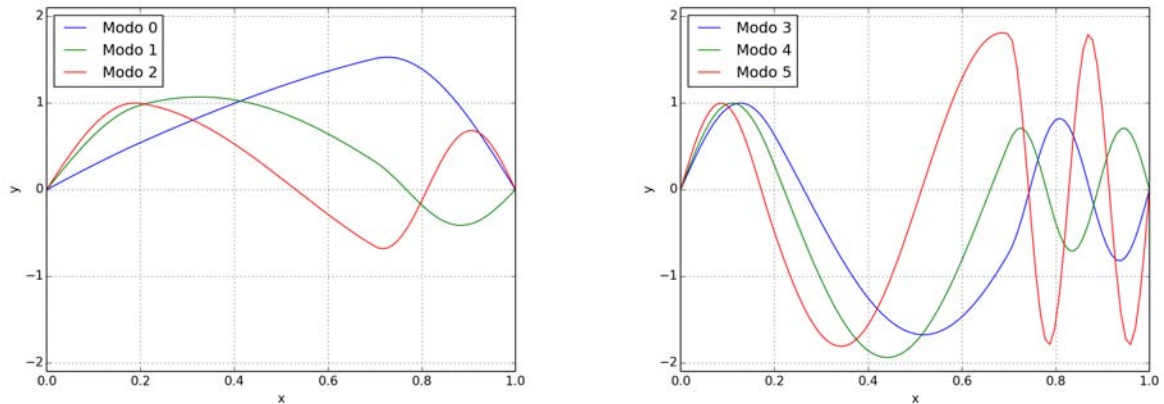
(d) Sección no homogénea de tamaño 0.1

Figura 5.3: Evolución de los modos de la cuerda no homogénea de longitud 1 en función de los cocientes de densidades y longitud de la inhomogeneidad



(a) Nodos de los modos 0, 1, 2 de una cuerda con dos inhomogeneidades (b) Nodos de los modos 3, 4, 5 de una cuerda con dos inhomogeneidades

Figura 5.4: Distribución de los nodos para diferentes modos de vibración de una cuerda no homogénea de longitud 1 con dos secciones de longitud 0.5 y con cocientes de densidades de valor 1 y 1.48 como la cuerda del experimento.

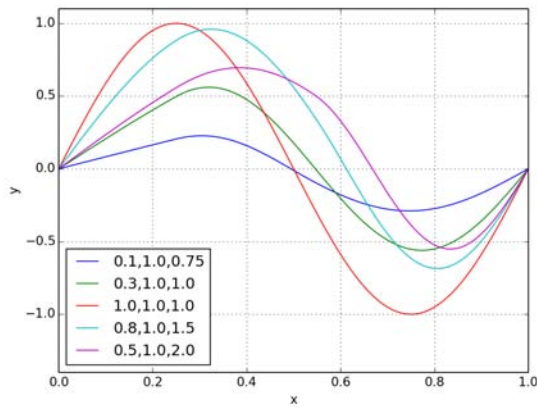


(a) Nodos de los modos 0, 1, 2 de una cuerda con tres inhomogeneidades (b) Nodos de los modos 3, 4, 5 de una cuerda con tres inhomogeneidades

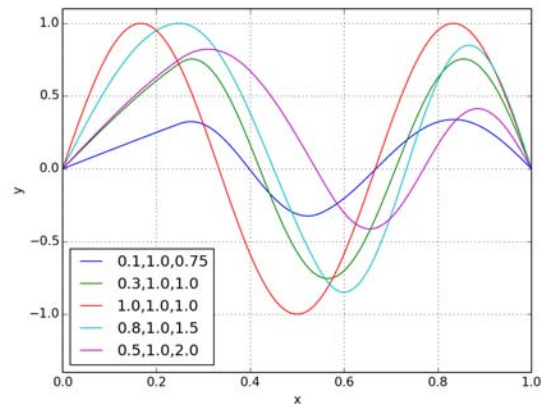
Figura 5.5: Distribución de los nodos para diferentes modos de vibración de una cuerda no homogénea de longitud 1 con tres secciones de longitud 0.2, 0.5, 0.3 respectivamente y con cocientes de densidades de valor 1.0, 0.5, 2.0 como en nuestra cuerda real.

Finalmente se presentan las gráficas de una cuerda para los primeros dos modos de vibración con tres secciones de diferente longitud, haciendo variar el cociente de densidad, teniendo como referencia a la cuerda homogénea. En ellas podemos observar que para el primer modo de la cuerda homogénea el nodo se encuentra a la mitad, sin embargo esta simetría de los nodos se pierde conforme el cociente de densidades aumenta, los nodos se concentran en las secciones con mayor densidad. Un resultado interesante de esto es que para la cuerda no homogénea los armónicos no resultan ser múltiplos de la frecuencia fundamental. En las últimas cuatro gráficas se presenta el perfil de los primeros 4 modos

vibracionales variando el cociente de densidades para una cuerda con dos secciones de la misma longitud.

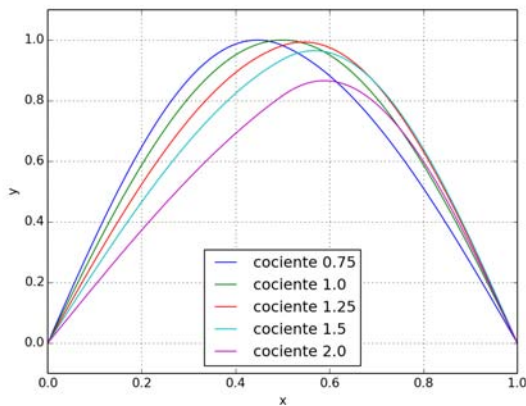


(a) Movimiento de la cuerda para el modo 1

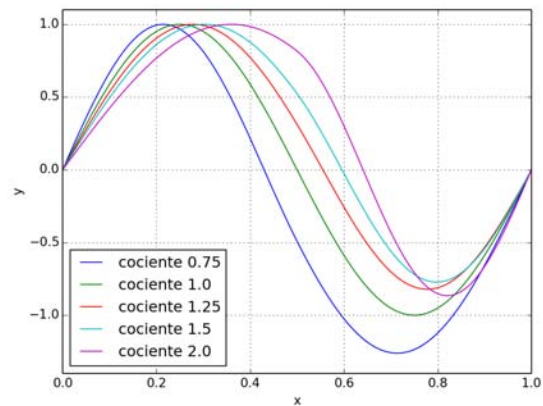


(b) Movimiento de la cuerda para el modo 2

Figura 5.6: Movimiento de la cuerda no homogénea de longitud 1 con tres secciones de longitudes 0.25, 0.3, 0.45 , para los primeros dos modos de vibración variando el cociente de densidades para los valores que se especifica en las imágenes.



(a) Movimiento de la cuerda para el modo 0



(b) Movimiento de la cuerda para el modo 1

Figura 5.7: Movimiento de la cuerda no homogénea de longitud 1 con dos secciones de igual longitud, para los primeros dos modos de vibración variando el cociente de densidades para la parte derecha.

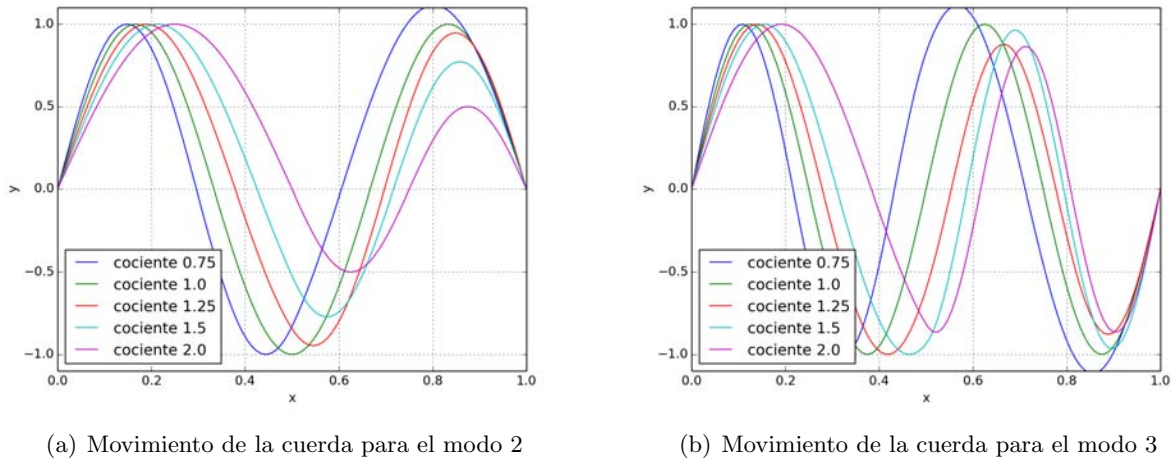


Figura 5.8: Movimiento de la cuerda no homogénea de longitud 1 con dos secciones de igual longitud, para los modos tres y cuatro variando el cociente de densidades para la parte derecha.

## 5.2. Resultados: modos de vibración de sistemas en dos dimensiones

En esta sección presentamos un conjunto de tablas correspondientes a los modos de sistemas en dos dimensiones con los casos particulares de las membranas con un orificio central, y para dos y tres densidades diferentes. En la siguiente subsección se muestran las tablas con resultados para la membrana con orificio en el centro y en la subsecciones 5.2.2 y 5.2.3 se presentan las líneas nodales correspondientes a dichas tablas.

Posteriormente, en la sección 5.2.4 se muestran los resultados para membranas con discontinuidades concéntricas en la densidad y sin hueco en el centro. En las subsecciones 5.2.5 y 5.2.6 se muestran los resultados con dos y tres densidades diferentes correspondientes a las tablas de la sección 5.2.4. Finalmente se muestra una gráfica del comportamiento de los modos haciendo variar el cociente de densidades.



**5.2.1. Tabla de modos normales de una membrana anular con frontera interior libre y exterior fija**

angular \ radial	0	1	2	3	4	5	6
0	1.79401	1.95851	2.38092	2.94277	3.56530	4.20588	4.84169
1	4.80206	4.85702	5.01938	5.28239	5.63696	6.07305	6.57973
2	7.90896	7.94129	8.03769	8.19649	8.41518	8.69073	9.01998
3	11.03509	11.05802	11.12658	11.24012	11.39762	11.59773	11.83890
4	14.16799	14.18576	14.23898	14.32733	14.45030	14.60720	14.79721
5	17.30401	17.31853	17.36203	17.43433	17.53515	17.66410	17.82069
6	20.44173	20.45401	20.49079	20.55198	20.63740	20.74680	20.87988
7	23.58049	23.59112	23.62298	23.67602	23.75011	23.84508	23.96075
8	26.71990	26.72928	26.75739	26.80419	26.86960	26.95350	27.05575
9	29.85978	29.86816	29.89331	29.93519	29.99373	30.06886	30.16048

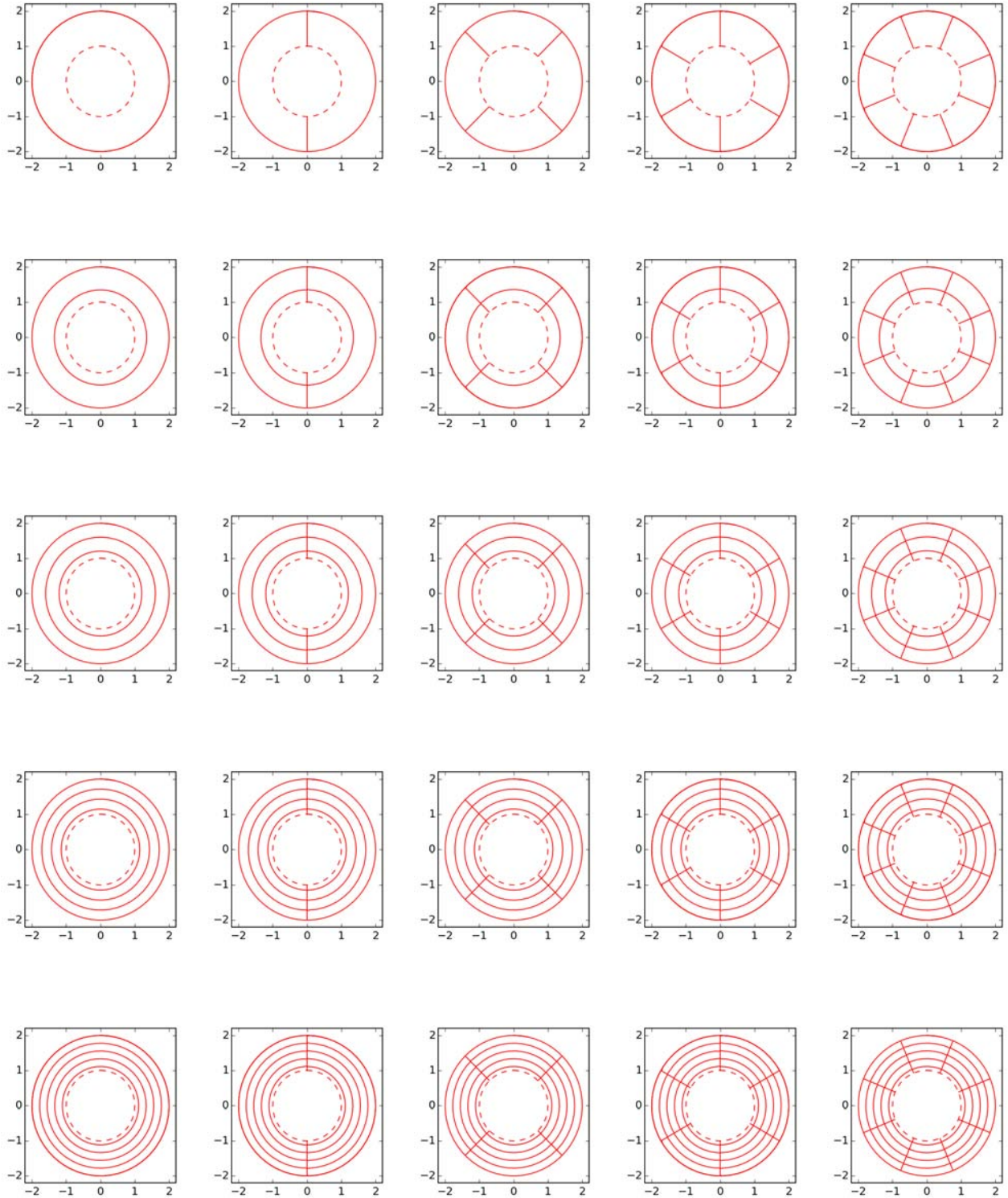
Tabla 5.5: Modos normales de las membrana con una discontinuidad en el centro y libre de oscilar transversalmente en el centro

[h]

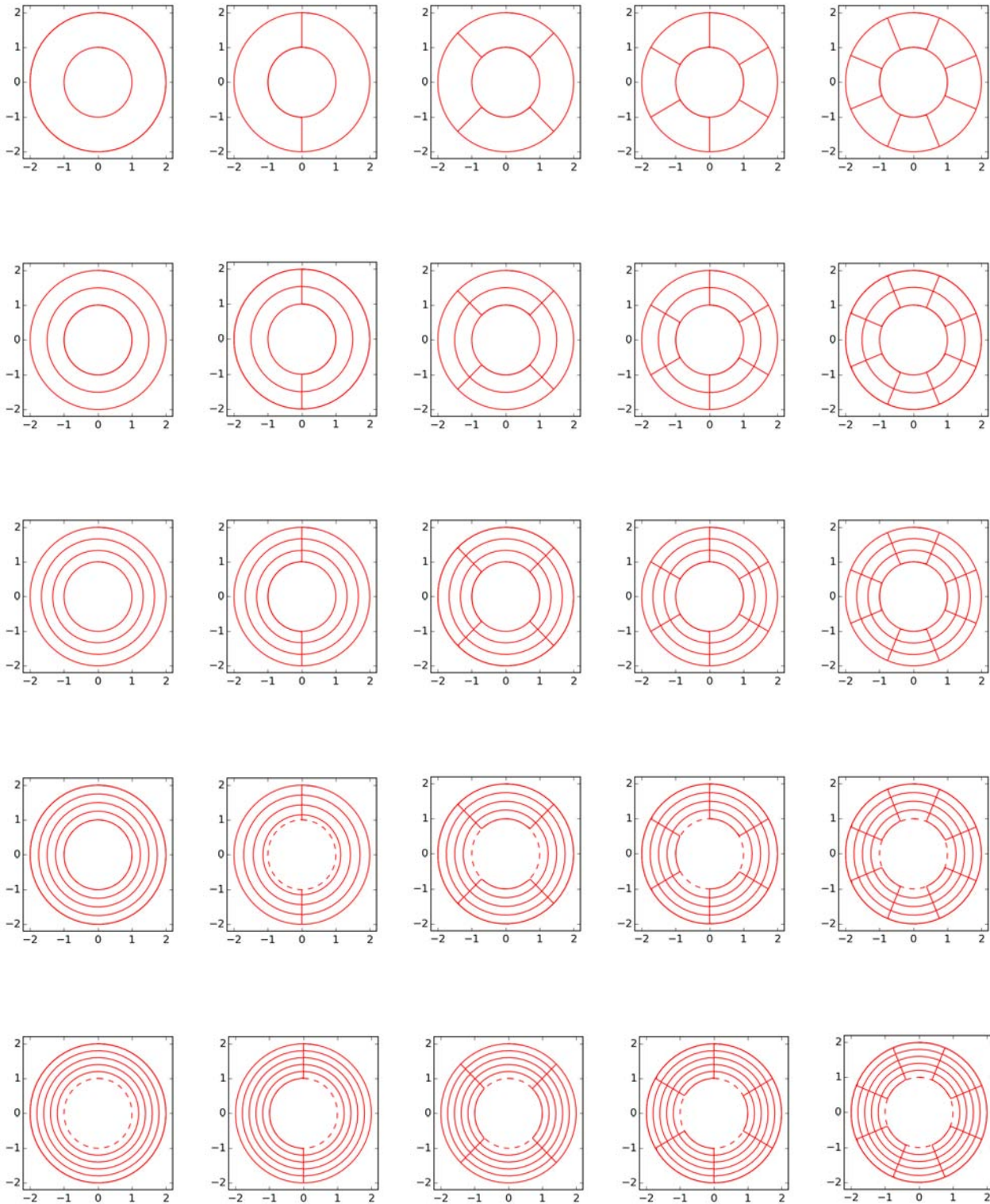
angular \ radial	0	1	2	3	4	5	6
0	3.12303	3.19658	3.40692	3.72887	4.13337	4.59502	5.09446
1	6.27344	6.31235	6.42777	6.61592	6.87116	7.18665	7.55498
2	9.41821	9.44446	9.52285	9.65224	9.83086	10.05639	10.32612
3	12.56142	12.58120	12.64038	12.73848	12.87475	13.04814	13.25742
4	15.70400	15.71985	15.76734	15.84622	15.95609	16.09641	16.26652
5	18.84625	18.85948	18.89912	18.96502	19.05697	19.17464	19.31764
6	21.98831	21.99966	22.03367	22.09025	22.16927	22.27051	22.39373
7	25.13026	25.14019	25.16997	25.21953	25.28879	25.37759	25.48578
8	28.27213	28.28096	28.30744	28.35153	28.41316	28.49223	28.58862
9	31.41394	31.42189	31.44573	31.48543	31.54094	31.61219	31.69910

Tabla 5.6: Modos normales de las membrana con una discontinuidad en el centro y fija en las fronteras.

5.2.2. Gráfica de la membrana libre en la frontera interna



**5.2.3. Gráfica de la membrana anular con frontera interior libre y frontera exterior fija.**



5.2.4. Tabla de modos normales de las membranas concéntricas de diferentes densidades

angular \ radial	0	1	2	3	4	5	6
0	2.79672	5.0560741	7.44602	9.89948	12.35727	14.78738	17.17888
1	7.87505	10.5100594	13.09796	15.70213	18.34957	21.03631	23.73467
2	12.95881	15.0010470	16.94624	18.98400	21.15070	23.43444	25.82233
3	16.48799	18.4460608	20.76761	23.23382	25.75243	28.29302	30.84496
4	20.89501	23.5352795	26.15848	28.72731	31.24115	33.71573	36.17878
5	26.24194	28.6973975	30.83889	32.78713	34.73939	36.79865	38.98199
6	30.59809	32.2585074	34.19673	36.47227	38.93197	41.46599	44.02672
7	34.14818	36.5800542	39.18741	41.80940	44.38886	46.89787	49.32200

Tabla 5.7: Datos correspondientes a las membranas concéntricas con radios 0.5, 1.0 y densidades de 1.0 y 0.4.

angular \ radial	0	1	2	3	4	5	6
0	2.94903	5.07425	6.79393	8.21261	9.46557	10.62220	11.71964
1	6.45758	8.16285	10.23184	12.25947	14.11125	15.86972	17.58171
2	10.16918	11.67780	13.42337	15.66700	18.17270	20.45027	22.28794
3	13.65861	15.93494	17.73540	19.36528	21.15351	23.30833	25.64593
4	17.60169	19.43163	21.58454	23.34652	24.77550	26.27072	28.18248
5	21.62062	23.11485	24.62261	26.65030	28.74246	30.55746	32.25466
6	24.69631	26.78962	28.50044	30.15372	32.20715	34.54665	36.63051
7	28.42005	30.21916	32.53671	34.55315	36.14746	37.76790	39.71690

Tabla 5.8: Modos normales de una membrana con tres densidades diferentes cuyos cocientes de densidades son 0.4, 0.7, 1.0 y radios de 0.3, 0.8, 1.0 respectivamente.

angular \ radial	0	1	2	3	4	5	6
0	2.99461	5.32952	7.49798	9.53766	11.52362	13.49478	15.46482
1	7.05450	9.06130	11.52796	14.20711	16.81852	19.23183	21.48953
2	11.71668	13.85990	15.77669	17.87051	20.31444	23.10138	26.03923
3	15.72322	18.20587	20.76912	22.99065	25.00779	27.04680	29.26075
4	20.71980	22.64197	24.72303	27.22629	29.82691	32.18504	34.30007
5	24.79510	27.41037	29.62216	31.52068	33.57024	35.97307	38.54443
6	29.49105	31.34466	33.68802	36.11503	38.13370	39.95649	41.92313
7	33.74833	35.97252	37.70655	39.65315	42.01966	44.31145	46.27963

Tabla 5.9: Modos normales de una membrana con tres densidades diferentes cuyos cocientes de densidades son 1.0, 0.7, 0.4 y radios de 0.3, 0.8, 1.0 respectivamente.

5.2.5. Gráficas de la membrana con dos densidades diferentes

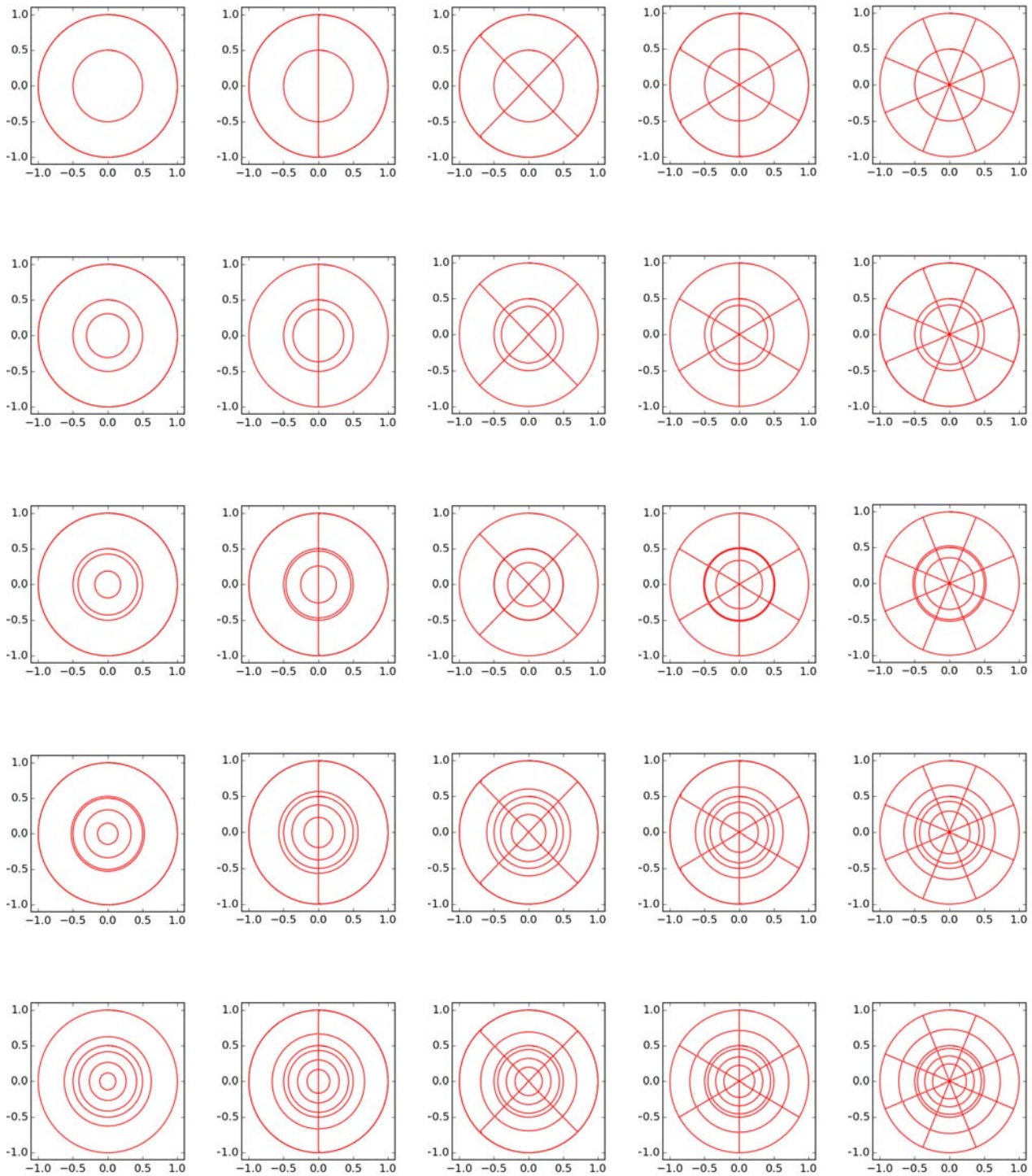


Figura 5.9: Curvas de nivel para diferentes modos radiales y modo angular 0 de una membrana con dos densidades diferentes cuyos cocientes son 1, 1.5 y radios de 1 y 2 respectivamente.



5.2.6. Gráficas de la membrana con tres densidades diferentes

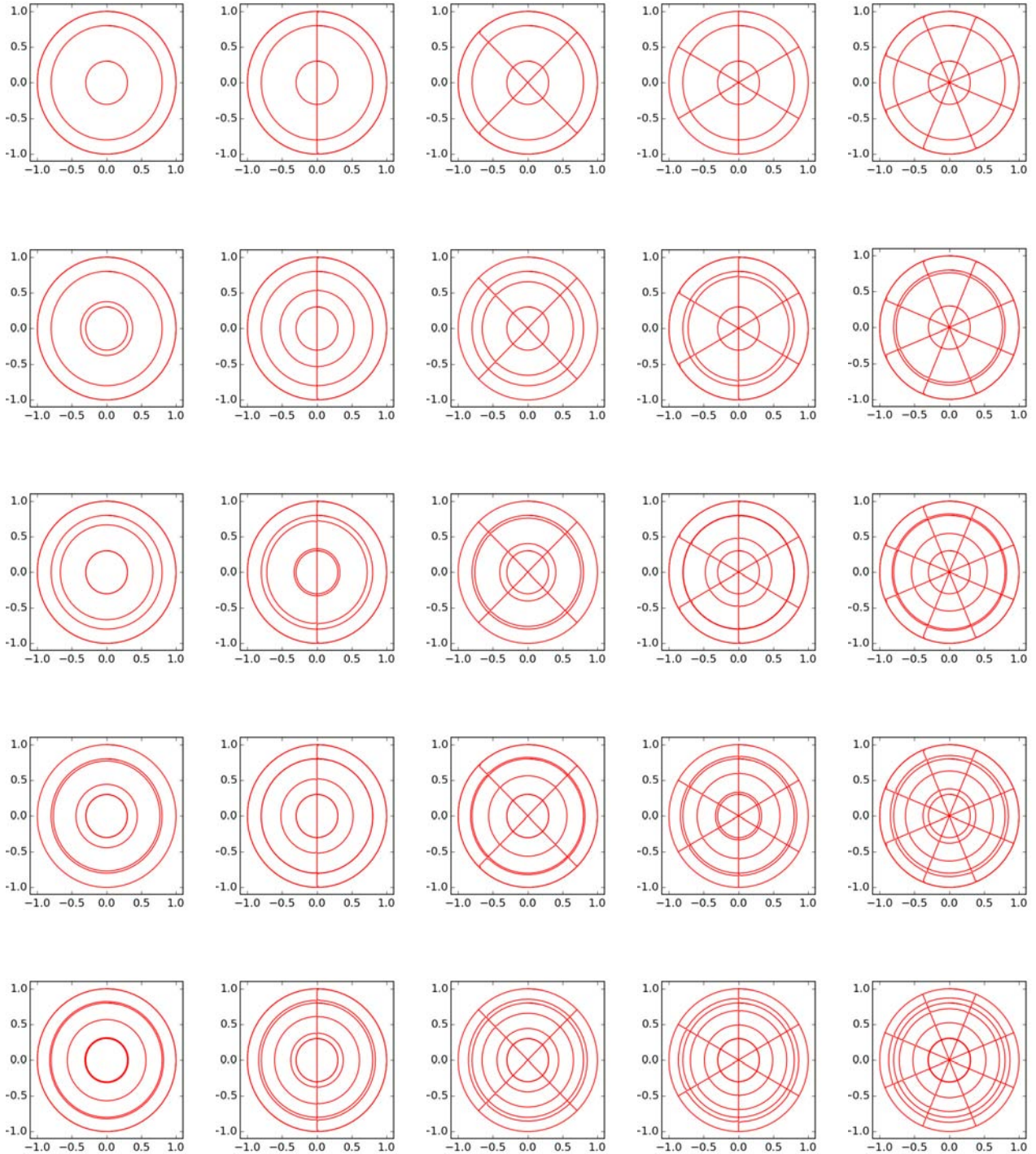


Figura 5.10: Curvas de nivel 0 para cinco modos radiales (columna) y modos angulares (renglones) de una membrana con tres densidades diferentes cuyos cocientes de densidades son 0.4, 0.7, 1.0 y radios de 0.3, 0.8, 1.0 respectivamente.

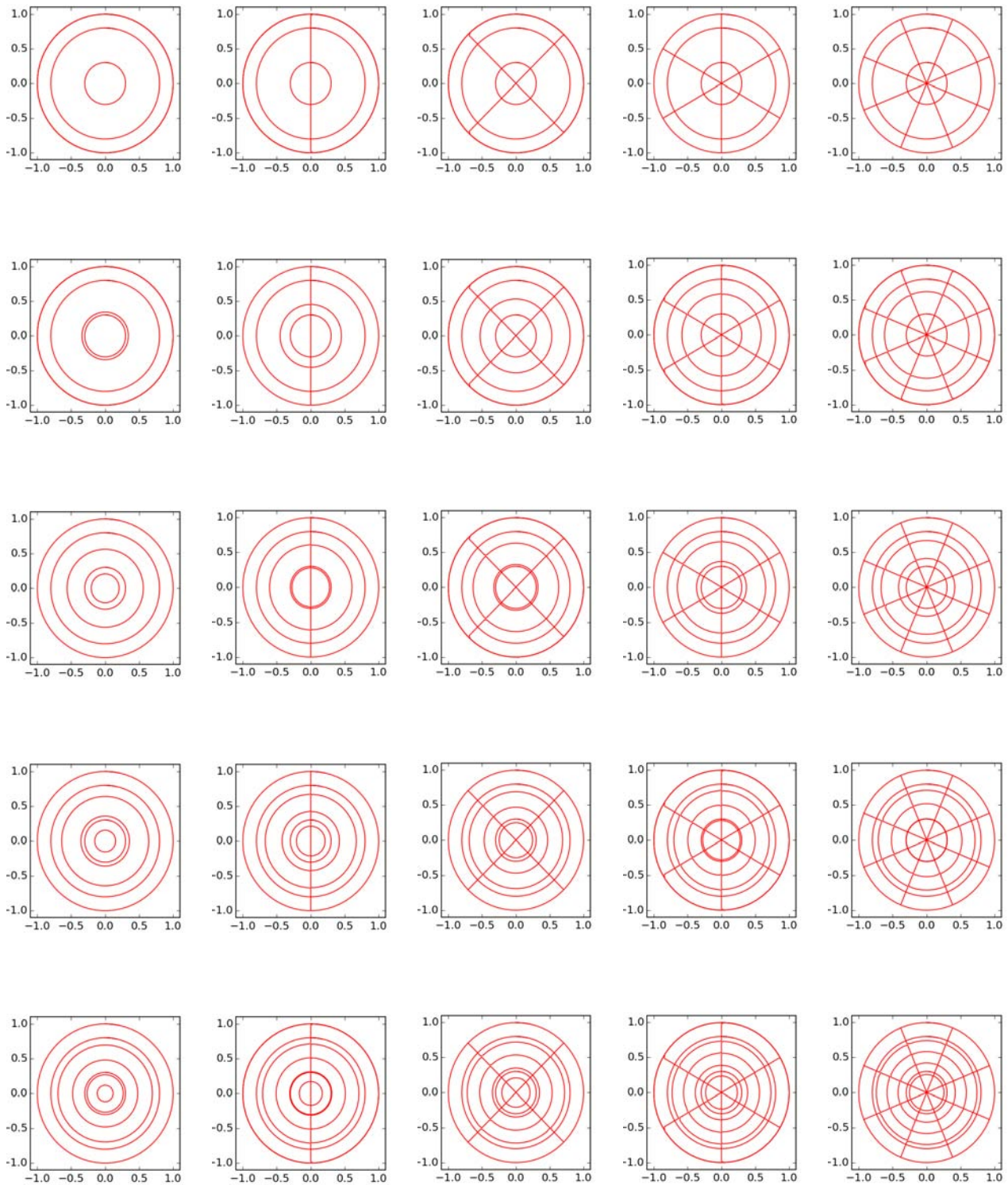


Figura 5.11: Curvas de nivel 0 para diferentes cinco modos radiales (verticales) y modos angulares (horizontales) de una membrana con tres densidades diferentes cuyos cocientes de densidades son 1.0, 0.7, 0.4 y radios de 0.3, 0.8, 1.0 respectivamente.

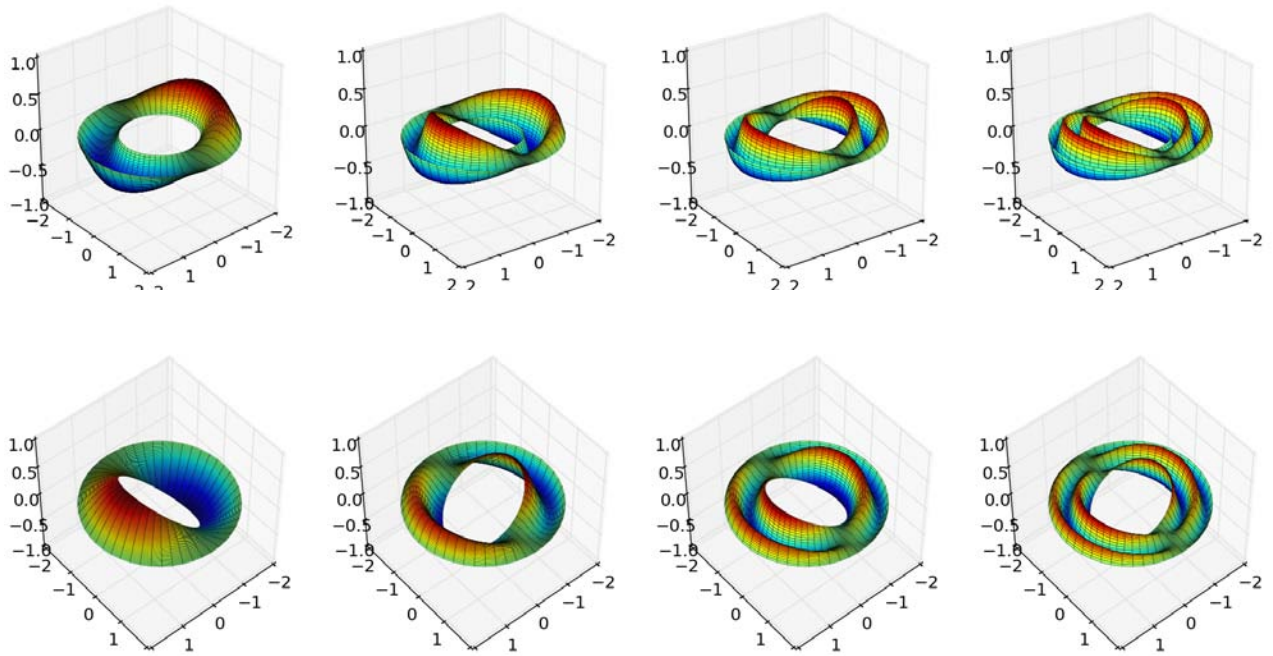


Figura 5.12: Perfiles de las membranas anulares para el modo angular uno y cuatro modos radiales. La primera fila es la membrana anular fija en ambas fronteras y la segunda es la membrana anular con frontera interior libre y exterior fija.

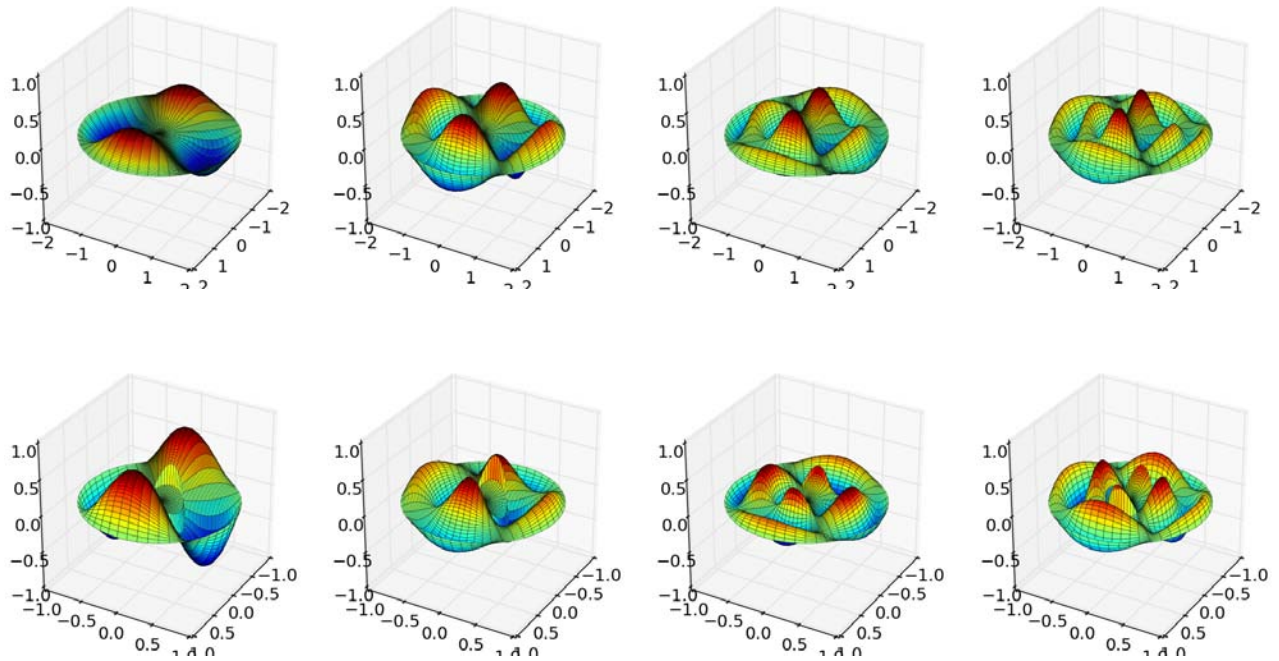


Figura 5.13: Membranas anulares concéntricas con modo angular dos para los primeros cuatro modos radiales. La primera fila es una membrana con dos densidades diferentes  $\rho_1=1.0$  y  $\rho_2=1.5$  mientras que la segunda es de tres secciones con densidades  $\rho_1=0.4$ ,  $\rho_2=0.7$   $\rho_3=1.0$ .



Como pudimos observar en las gráficas de las membranas las líneas nodales angulares son simétricas y las frecuencias de los modos radiales no son múltiplos de la frecuencia fundamental. Los nodos radiales se concentran en la región de mayor densidad, debido a que la velocidad de propagación es menor en esas regiones. Lo anterior se puede ver con mayor claridad en la gráfica que se presenta a continuación, en donde observamos como disminuye el valor de los modos al aumentar el cociente de densidades, es decir, cuando la densidad es mayor la velocidad de propagación disminuye.

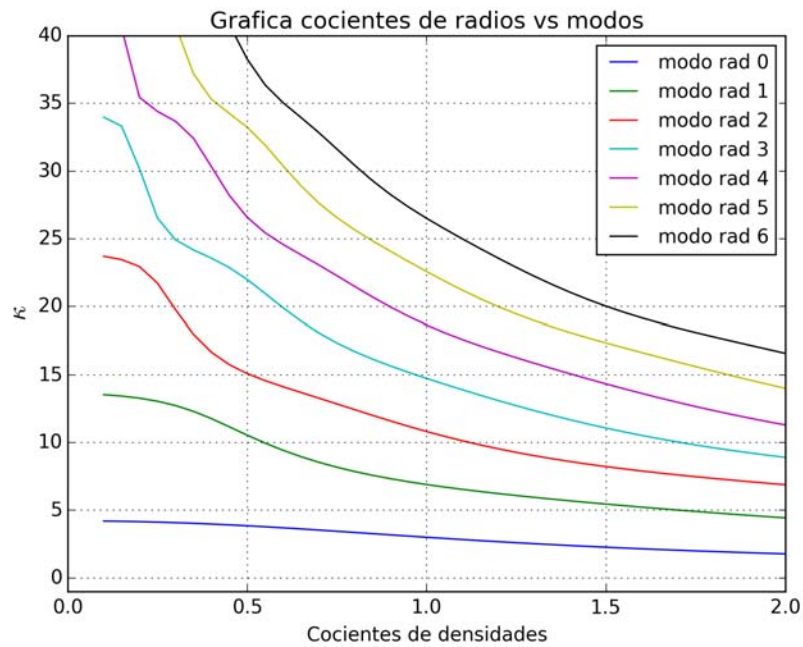


Figura 5.14: Valores de  $\kappa$  en función del cociente de velocidades.

# Capítulo 6

## Conclusiones y discusiones

El estudio de los modos normales de vibración resultan ser de suma importancia puesto que nos proporcionan información acerca de las propiedades intrínsecas del material; la densidad del material o la tensión a la que este se encuentra sometido. En el capítulo 2 se dedujo la ecuación de onda para el caso de un sistema en una dimensión, haciendo particular énfasis en las cantidades físicas involucradas como son la tensión y la densidad. Se obtuvieron las soluciones asociadas a esta ecuación mediante el método de separación de variables con condiciones de Dirichlet. De esta manera las frecuencias resultaron ser múltiplos enteros de la frecuencia fundamental. Posteriormente se analizó una cuerda no homogénea con dos secciones de diferentes densidades y fija en los extremos, bajo condiciones de continuidad de la función de onda y su derivada en la interfaz de cambio de densidad. Sabiendo que ambas secciones vibran a la misma frecuencia, obtuvimos un modelo para hallar la frecuencia de vibración del sistema no homogéneo en términos del cociente de las velocidades de propagación de la onda en el medio. Mas aún, como el sistema se encuentra sometido a la misma tensión, la ecuación se puede poner en términos de los cocientes de densidades de cada región haciendo que las frecuencias de vibración nos proporcione información sobre la estructura del sistema.

También se construyó un dispositivo experimental a fin de contrastar los resultados teóricos con valores experimentales. El primer prototipo constaba de un vibrador mecánico que excitaba a una cuerda de guitarra en un extremo, la cuerda tenía una sección desentorchada mientras el otro extremo estaba fijo. Sin embargo, debido a que la cuerda se excitaba de manera mecánica no se tenían bien controladas las condiciones a la frontera, además el rango de frecuencia sólo permitía alcanzar valores de hasta 200 Hz. Debido a estos inconvenientes se optó por rediseñar el experimento, de manera que se construyó el dispositivo que se describe en el capítulo 2. Para el experimento se ocuparon cuerdas de cobre ya que al ser de un material diamagnético no son atraídas por un imán. En contraste, los materiales paramagnéticos y ferromagnéticos sienten una fuerza de atracción del imán que dificulta hacer experimentos como los descritos en el capítulo 2. Las tensiones a las que se sometió la cuerda fueron constantes y para el cambio en la densidad del material se entorchó una sección con hilo para cuerdas de arco. A diferencia de los experimentos convencionales hacemos uso de fuerza electromagnética como medio de excitación, lo que permite tener un mejor control del experimento ya que no se perturba de manera directa (mecánica) el sistema. Con el nuevo dispositivo podíamos alcanzar frecuencias mas altas de hasta 400 Hz y podíamos observar los máximos de la amplitudes de las oscilaciones para una cantidad mayor de cantidad de modos, que con el dispositivo anterior; esos máximos eran difíciles de visualizar para frecuencias altas.

En el capítulo 2 se estudiaron los modos vibración de sistemas en dos dimensiones a partir de la ecuación de onda para una geometría circular. Se hallaron las soluciones para el caso homogéneo, siendo éstas las raíces de los polinomios de Bessel. Posteriormente se estudio el caso de la membrana no homogénea mediante un modelo cuya construcción toma en cuenta las mismas hipótesis que el caso de la cuerda no homogénea, que incluían las premisas de continuidad de la función y de la derivada de la ecuación de onda en la interfaz. Como casos particulares de membranas no homogéneas se estudio con detalle aquellas con una discontinuidad en el centro bajo condiciones de Dirichlet y Neumann. La solución para la función de onda resulto ser una combinación de funciones Bessel de primera y segunda clase.

Los primeros modelos para la cuerda y la membrana se obtenían mediante manipulaciones algebraicas de la ecuación de onda con condiciones de continuidad en la interface, lo que dificultaba su generalización para  $n$  cambios de densidad. Sin embargo, haciendo uso de las matrices de transferencia obtuvimos un modelo mas simple, ya que para una determinada propiedad en una interface ésta la podemos obtener en términos de su valor en la siguiente región. Es decir el  $n$ -ésimo modo correspondiente a una interface  $n$ , se puede poner en términos del modo correspondiente a la interface  $n - 1$ , estableciendo una relación de recurrencia de manera que cualquier región con  $\kappa_i$  se puede calcular en términos de  $\kappa_0$ , siendo este último un material de referencia.

Las soluciones (raíces) de las Ecs.(4.26) y (4.63) o modos del sistema resultaron ser soluciones que se pueden calcular con mucha precisión. Los valores explícitos de los modos se obtuvieron mediante la búsqueda de raíces por el método de *Brent*. Para ello se desarrollaron programas computacionales que consideran el caso para  $n$  cambios de densidad tanto para la cuerda como para la membrana.

En el capítulo 5 se presentaron las comparaciones entre los valores teóricos y experimentales de los modos de vibración para la cuerda homogénea, resultando ser éstas múltiplos de la frecuencia fundamental como era de esperarse. Después a la misma cuerda se le entorchó la mitad de la longitud, por lo que la segunda sección era de mayor densidad que la primera; como resultado de esto, las frecuencias de vibración resultaron ser menores respecto a los modos de la cuerda homogénea. De hecho nuestras simulaciones muestran que si la densidad de la inhomogeneidad agregada es mayor que la densidad de la cuerda original y por lo tanto el cociente también lo es, las frecuencias son menores para un mismo modo. Las tensiones a las que se sometió la cuerda eran constantes y se experimentó con cinco tensiones diferentes colgando pesas de 1 a 1.5 kg aumentando 100 gramos en cada medición. El resultado de esto es que las frecuencias eran mayores al aumentar la tensión aplicada a la cuerda, esto debido a que la velocidad de propagación de la onda es proporcional a la raíz de la tensión entre la densidad.

Otro comportamiento interesante de los modos normales es que los nodos se concentran en las secciones con mayor densidad. Esto se debe a que la velocidad de propagación de la onda es menor y por lo tanto la longitud de onda también es menor en comparación con la sección de menor densidad. De la misma manera los nodos radiales de la membrana se localizan en la parte de mayor densidad. Cuando el valor del cociente de densidades es muy grande la distancia entre modos se vuelve pequeña, e inversamente, si el cociente es pequeño las distancias entre modos es grande. Y finalmente, si el tamaño de la homogeneidad es pequeña comparada con el tamaño de la cuerda, los modos se comportan como el caso de la cuerda homogénea.

## 6.1. Futuras investigaciones y aplicaciones

El modelo estudiado en esta tesis nos permitió encontrar los modos normales de un sistema con una distribución de densidades. Esto nos permite saber el comportamiento del sistema dependiendo de su estructura interna. Más aún, se pueden proponer sistemas que tengan nodos o antinodos bien localizados dependiendo de distribución espacial de las inhomogeneidades.

Como aplicación directa se podrían estudiar instrumentos membranófonos, es decir aquellos instrumentos que producen el sonido por la vibración de una membrana, en particular los que presentan inhomogeneidades concéntricas; por ejemplo, los instrumentos de percusión hindús como son la *Tabla* y el *Mrdaringan*. Como trabajo futuro pretendemos estudiar experimentalmente el caso de la membrana circular no homogénea con sus diferentes variantes (discontinuidades y cambios de densidad) y contrastarlos con los valores teóricos que obtuvimos en este trabajo. Cabe mencionar que nuestro modelo sólo considera membranas con geometría circular e inhomogeneidades concéntricas, sería interesante estudiar el caso de membranas circulares con inhomogeneidades no concéntricas, además de abarcar membranas con geometrías elípticas para el caso homogéneo e inhomogéneo.

Se propone como experimento estudiar una membrana elástica de densidad conocida la cual se someterá a una tensión constante en dirección radial. Se pretende trabajar con membranas hechas de diferentes materiales como son papel aluminio, polímeros, entre otros materiales disponibles en el mercado. Posteriormente agregarles parches circulares centrales para tener el caso de estudio que hemos tratado a lo largo de esta tesis. En este caso se propone que la tensión se mida mediante un dinamómetro *push & pull*, para asegurarnos que la tensión sea la misma en diferentes puntos de la membrana. Adicionalmente, podemos usar el método óptico que consiste en una malla láser proyectada sobre la membrana para ver la deformación en los diferentes puntos y con ello asegurar que la tensión sea la misma en diferentes puntos. Mediante un generador de funciones cuya salida sea un bocina se pueden generar ondas acústicas que incidan sobre la membrana, y con la ayuda de un sensor electroacústico medir el nivel de excitación. Al hacer el barrido de frecuencias se detectará las frecuencias con máxima amplitud y con ello identificar las frecuencias de resonancia. Cabe mencionar que para utilizar un sensor electroacústico se propone que la membrana esté recubierta con una capa delgada de un material diamagnético para poder captar las señales en la membrana.

Otra manera para hallar los modos de vibración es mediante la técnica de Chladni que consiste en esparcir un polvo fino sobre la superficie de la membrana, por ejemplo arena, y al hacer un barrido de frecuencias mediante la técnica de excitación descrita anteriormente se formaran patrones regulares para ciertos valores de frecuencia, identificando a éstas como las frecuencias de resonancia. La desventaja de esta técnica es que no proporciona mucha precisión en las mediciones, pero es muy efectiva para identificar los rangos de trabajo. Es por ello que una combinación de esta técnica y la propuesta en el párrafo anterior serán de mucha utilidad al momento de hacer los experimentos.



# Apéndice A

## Soluciones de tipo onda viajera.

En este apéndice resolvemos la ecuación de onda en dos dimensiones. Como sabemos la ecuación de onda en dos dimensiones en coordenadas cartesianas, es la segunda derivada parcial de la función de onda respecto al tiempo, e igual a la segunda derivada parcial de la función de onda respecto a la posición, multiplicada por el factor de la velocidad de propagación al cuadrado.

$$\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (\text{A.1})$$

Vamos a suponer que al tiempo  $t = 0$  la función de onda es igual a una función que solo depende de  $x$ , dada por  $f(x)$  y tiene una velocidad inicial descrita por la función  $g(x)$ .

$$\Psi(x, 0) = f(x) \quad \frac{\partial \Psi}{\partial t}(x, 0) = g(x). \quad (\text{A.2})$$

Hagamos el cambio de variable de  $(x, t)$  a  $(\xi, \eta)$ , donde  $\xi, \eta$  son las nuevas variables:

$$\xi = x + ct \quad \eta = x - ct \quad (\text{A.3})$$

derivando la expresión respecto a  $x$  e  $t$ , y aplicando la regla de la cadena, obtenemos las siguientes expresiones,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi}{\partial x} &= \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} + \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} \\ \frac{\partial \Psi}{\partial t} &= \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} = v \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} - v \frac{\partial \Psi}{\partial \eta}. \end{aligned}$$

Derivando nuevamente respecto a  $x$  e  $t$ , obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \Psi}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} \\ \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \Psi}{\partial t} &= v \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} - v \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \Psi}{\partial \eta}, \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

sin pérdida de generalidad calculamos las derivadas respecto a  $x$  de las derivadas parciales de  $\xi$  y  $\eta$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} &= \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \eta \partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} &= \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \xi \partial \eta}\end{aligned}$$

Análogamente para  $t$ , ahora sustituimos las expresiones anteriores en las Ec.(A.4), obtenemos

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \eta^2} \quad (\text{A.5})$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = v^2 \left[ \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \xi^2} - 2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \eta^2} \right]. \quad (\text{A.6})$$

Finalmente sustituimos las relaciones anteriores en la ecuación de onda(A.1):

$$4 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \xi \partial \eta} = 0, \quad (\text{A.7})$$

cuya solución es

$$\Psi(\xi, \eta) = p(\xi) + q(\eta) \quad (\text{A.8})$$

Donde  $p$  y  $q$  sean funciones arbitrarias y derivables. Entonces por A.3, la solución general es de la siguiente forma

$$\Psi(\xi, \eta) = p(x + vt) + q(x - vt). \quad (\text{A.9})$$

Imponiendo las condiciones iniciales Ecs.(A.2) obtenemos

$$p(x) + q(x) = f(x) \quad (\text{A.10})$$

$$p'(x) - q'(x) = g(x), \quad (\text{A.11})$$

e integrando la Ec.(A.11) llegamos a que:

$$p(x) - q(x) = \frac{1}{c} \int_{x_0}^x g(s) ds \quad (\text{A.12})$$

Combinando las Ecs.(A.10 y A.12) obtenemos los valores para  $p(x)$  y  $q(x)$ ,

$$p(x) = \frac{1}{2} \left( f(x) + \int_{x_0}^x g(s) ds \right) \quad (\text{A.13})$$

$$q(x) = \frac{1}{2} \left( f(x) + \int_x^{x_0} g(s) ds \right). \quad (\text{A.14})$$

Por último evaluamos a  $p$  y  $q$  entre  $x - vt$  y  $x + vt$  y remplazamos en A.9,

$$\Psi(x, t) = \frac{1}{2} (f(x + ct) + f(x - ct)) + \frac{1}{2} \int_{x-vt}^{x+vt} g(s) ds. \quad (\text{A.15})$$

Esta es finalmente la solución de D'Alambert para la ecuación de onda en una dimension.

# Apéndice B

## Funciones de Bessel

La parte radial de la ecuación de onda en dos dimensiones, en coordenadas cilíndricas se conoce como la ecuación paramétrica de Bessel y se expresa de la siguiente manera:

$$x^2 y'' + xy' + (\lambda^2 x^2 - \nu^2)y = 0. \quad (\text{B.1})$$

La solución se obtiene mediante el método de Frobenius, para ello proponemos una solución como una serie de potencias de la forma

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r}, \quad (\text{B.2})$$

ahora derivando la expresión anterior y substituyendo en la Ec. (B.1) obtenemos:

$$x^2 \sum_{n=0}^{\infty} c_n (n+r)(n+r-1)x^{n+r-2} + x \sum_{n=0}^{\infty} c_n (n+r)x^{n+r-1} + (\lambda^2 x^2 - \nu^2) \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r} = 0$$

metiendo las potencias de  $x$  dentro del operador suma obtenemos la ecuación,

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (n+r)(n+r-1)x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (n+r)x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^2 c_n x^{n+r+2} - \sum_{n=0}^{\infty} \nu^2 c_n x^{n+r} = 0.$$

Ahora vamos a cambiar nuestra notación de índices  $n$  por  $k$

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k (k+r)(k+r-1)x^{k+r} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k (k+r)x^{k+r} + \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^2 c_k x^{k+r+2} - \sum_{k=0}^{\infty} \nu^2 c_k x^{k+r} = 0,$$

recorremos el índice para la tercera suma,

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k (k+r)(k+r-1)x^{k+r} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k (k+r)x^{k+r} + \sum_{k=2}^{\infty} \lambda^2 c_k x^{k+r} - \sum_{k=0}^{\infty} \nu^2 c_k x^{k+r} = 0$$



Como las sumas corren para índices diferentes vamos a desarrollar los primeros términos de la suma hasta  $k = 1$  entonces para  $k = 0$ ,

$$(r(r-1)c_0 + rc_0 - \nu^2 c_0)x^r + \sum_{k=1}^{\infty} c_k(k+r)(k+r-1)x^{k+r} + \sum_{k=1}^{\infty} c_k(n+r)x^{n+r} + \sum_{k=2}^{\infty} \lambda^2 c_{k-2}x^{k+r} - \sum_{k=1}^{\infty} \nu^2 c_k x^{k+r} = 0$$

desarrollamos la suma para el término  $k = 1$  la ecuación queda la siguiente manera:

$$(r(r-1)c_0 + rc_0 - \nu^2 c_0)x^r + ((r+1)rc_1 + (r+1)c_1 - \nu^2 c_1)x^{r+1} + \sum_{k=2}^{\infty} c_k(k+r)(k+r-1)x^{k+r} + \sum_{k=2}^{\infty} c_k(k+r)x^{n+r} + \sum_{k=2}^{\infty} \lambda^2 c_{k-2}x^{k+r} - \sum_{k=2}^{\infty} \nu^2 c_k x^{k+r} = 0$$

simplificando la expresión anterior y agrupando términos comunes

$$(r(r-1)c_0 + rc_0 - \nu^2 c_0)x^r + ((r+1)rc_1 + (r+1)c_1 - \nu^2 c_1)x^{r+1} + \sum_{k=2}^{\infty} [(k+r)(k+r-1)c_{k-2} + (k+r)c_k + \lambda^2 c_{k-2} - \nu^2 c_k] x^{k+r} = 0$$

finalmente la expresión anterior se reduce a la expresión siguiente:

$$(r^2 - \nu^2)c_0 x^r + ((r+1)2 - \nu^2)c_1 x^{r+1} + \sum_{k=2}^{\infty} [(k+r)^2 - \nu^2]c_k + \lambda^2 c_{k-2} x^{k+r} = 0.$$

Supongamos que  $r^2 = \nu$  entonces  $r_{1,2} = \pm\nu$  entonces para  $r = \nu$  obtenemos

$$c_1((\nu+1)^2 - \nu^2) = 0$$

por lo que  $c_1 = 0$  si  $k = 1$  mientras que si  $k \geq 2$  obtenemos

$$((k+\nu)^2 - \nu^2)c_k + \lambda^2 c_{k-2} = 0$$

y encontramos la relación de recurrencia para  $c_k$

$$c_k = \frac{\lambda^2}{k(k+2\nu)} c_{k-2}. \tag{B.3}$$

Entonces para valores de  $k$  par, es decir  $k = 2n$  obtenemos

$$\begin{aligned} c_{2n} &= \frac{\lambda^2}{2n(2n+2\nu)} c_{2n-2} \\ &= \frac{\lambda^2}{4n(n+\nu)} c_{2(n-1)} \end{aligned} \tag{B.4}$$

pero

$$c_{2(n-1)} = \frac{\lambda^2}{4(n-1)((n-1)+\nu)} c_{2(n-2)} \quad (\text{B.5})$$

Substituyendo la expresión anterior en la Ec.(B.4), obtenemos el valor para  $c_{2n}$

$$c_{2n} = (-1)^2 \frac{(\lambda^2)^2}{4^2 n(n-1)(n+\nu)(n-1+\nu)} c_{2(n-2)}.$$

Para el siguiente término

$$c_{2n} = (-1)^3 \frac{(\lambda^2)^3}{4^3 n(n-1)(n-2)(n+\nu)(n-1+\nu)(n-2+\nu)} c_{2(n-3)}$$

haciendo este proceso de forma recursiva hasta el termino  $c_0$  obtenemos el termino general

$$c_{2n} = (-1)^n \frac{(\lambda^2)^n}{4^n n(n-1) \cdots 2 \cdot 1 (n+\nu)(n-1+\nu) \cdots (2+\nu)(1+\nu)} c_0$$

multiplicando el denominador y numerador por  $\nu!$  y utilizando la propiedad de la funcion gamma  $\Gamma(p) = (p-1)!$  entonces la expresión anterior se convierte en

$$c_{2n} = (-1)^n \frac{\Gamma(\nu+1)(\lambda^2)^n}{4^n n! \Gamma(n+\nu+1)} c_0 \quad (\text{B.6})$$

Entonces

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n} x^{2n+\nu} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\Gamma(\nu+1)(\lambda^2)^n}{4^n n! \Gamma(n+\nu+1)} x^{2n+\nu} \frac{\lambda^\nu}{2^\nu \Gamma(\nu+1)}$$

Acomodando términos obtenemos

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n! \Gamma(n+\nu+1)} \left(\frac{\lambda x}{2}\right)^{2n+\nu}.$$

Finalmente

$$J_\nu = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\Gamma(n+\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\nu}$$

$$J_{-\nu} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\Gamma(n+\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n-\nu}.$$

Para  $\lambda > 0$  y  $\nu > 0$  tales que  $\nu$  no es un entero, la solución general a la ecuación paramétrica de Bessel es una combinación lineal de funciones de Bessel.

$$y(x) = c_1 J_\nu + c_2 J_{-\nu}. \quad (\text{B.7})$$

Cuando  $\nu$  no es un entero definimos

$$Y_\nu(x) = \frac{\cos(\nu\pi) J_\nu(x) - J_{-\nu}(x)}{\sin(\nu\pi)}$$

para  $\nu = m$  un entero definimos

$$Y_\nu(x) = \lim_{\nu \rightarrow m} Y_\nu(x) \quad (\text{B.8})$$

las funciones de  $Y_\nu$  son llamadas funciones de Bessel de segunda clase de Neumann.



# Apéndice C

## Series de Fourier.

Sabemos que las funciones

$$1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \dots \quad (\text{C.1})$$

son ortogonales en el intervalo  $[-\pi, \pi]$  y linealmente independientes. De esta manera asociamos una serie trigonométrica a cualquier función periódica continua a trozos  $f(x)$  con periodo  $2\pi$  y escribimos su representación en términos de ésta como:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx). \quad (\text{C.2})$$

Si integramos la serie en el intervalo de  $[-\pi, \pi]$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) dx, \quad (\text{C.3})$$

ya que

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx = 0, \quad (\text{C.4})$$

el primer coeficiente de Fourier para  $a_0$  es

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, \quad (\text{C.5})$$

donde  $a_0$  es el promedio de  $f$  en el intervalo  $[-\pi, \pi]$ . Ahora multiplicamos la serie por  $\cos mx$  y usamos la propiedad de ortogonalidad de las funciones trigonométricas para ese intervalo y obtenemos:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx dx = \int_{-\pi}^{\pi} a_0 \cos mx dx + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} a_n \cos nx \cos mx dx \quad (\text{C.6})$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} b_n \sin nx \cos mx dx \quad (\text{C.7})$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} a_n \cos^2 mx dx = \pi a_m \quad \text{si } m = n \quad (\text{C.8})$$

Para los casos en que  $m \neq n$  la integral es cero, para obtener el coeficiente  $a_n$  multiplicamos por  $\cos mx$  a la Ec.(C.2), e integramos en el intervalo  $[-\pi, \pi]$ , y obtenemos:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx dx \quad (\text{C.9})$$

de manera similar para  $b_n$  pero en este caso multiplicamos por  $\sin mx$ :

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin mx dx. \quad (\text{C.10})$$

## Bibliografía

- [1] FRANK S. CRAWFORD JR. , *Waves Berkeley Physics course Vol 3*, primera edición, McGraw-Hill, Berkeley California, 1968 .
- [2] PINSKY, *Partial Differential Equations and Boundary Value Problems with Applications*. McGraw-Hill, New York, 1991.
- [3] LAURENT E. KINNSLER, A ET. AL., *Fundamentals of acustics*, cuarta edición, John wiley and Sons, Inc, New York 2000 .
- [4] LOKENATH DEBNATH y PIOTR MIKUSINSKI, *Hilbert Spaces with Applications*, third edition, Elsevier Academic Press , San Diego California ,2005.
- [5] PHILIP M. MORSE y K. UNO INGARD , *Theoretical Acoustics*, primera edición, Princeton University Press, Princeton New Jersey, 21 de enero de 1987.
- [6] NAKHLE H. ASMAR, *Partial Differential Equations and Boundary Value Problems with Fourier Series*, segunda edición. Pearson, 2005.
- [7] R. HABERMAN, *Ecuaciones en derivadas parciales con series de Fourier y problemas de contorno*, Ed. Prentice-Hall. Madrid, 2003.
- [8] S. J. FARLOW, *Partial Differential Equations for Scientist and Engineers*.Dover, USA, 1993.
- [9] TYN MYINT-U y LOKENATH DEBNATH , *Linear Partial Differential Equations for Scientists and Engineers*, cuarta edición, Birkhäuser, Boston, 15 de diciembre de 2006.
- [10] S. S. Antman. *The Equations for Large Vibrations of Strings*, The American Mathematical Monthly, Vol. 87, No. 5 (May, 1980), pp. 359-370.
- [11] H. F. WEINBERGER , *A First Course in Partial Differential Equations: with Complex Variables and Transform Methods*. Dover, USA, 1995
- [12] ORIN J. FARREL y BERTRAM ROSS , *Solve problems in analysis as applied to gamma, to beta, legendre and bessel functions* , primera edición, Dover Publications Inc, New York 1971.
- [13] B. G. KONEREV , *Bessel Functions and their applications* , primera edición, Taylor and Francis Inc, London and New York 2002.

## BIBLIOGRAFÍA

---

- [14] GEORGE ARFKEN, *Mathematical Methods for Physicists*, third edition, Academic Press Inc, San Diego California ,1985.
- [15] RICHARD COURANT y DAVID HILBERT, *Methods of Mathematical Physics*, Wiley-VCH; Volume 1 edition January 4, 1989.
- [16] Fernando Pérez, Brian E. Granger, IPython: A System for Interactive Scientific Computing, *Computing in Science and Engineering*, vol. 9, no. 3, pp. 21-29, May/June 2007, doi:10.1109/MCSE.2007.53. URL: <http://ipython.org>
- [17] W. E. BOYCE y R. C. DI PRIMA, *Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera*, Ed. Limusa Wiley. México, 2000.