



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE  
MÉXICO

---

---

FACULTAD DE CIENCIAS

MODELO DE RIESGO MODULADO  
DE MARKOV CON TASAS DE  
INTERÉS ESTOCÁSTICAS

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:  
ACTUARIA

PRESENTA:  
ERIKA TATIANA RUEDA SANTOS

DIRECTOR DEL TRABAJO:  
DR. FERNANDO BALTAZAR LARIOS

2016



CIUDAD UNIVERSITARIA, D. F.



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

# Datos del jurado

Datos del alumno:

Erika Tatiana Rueda Santos

59 70 56 15

Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Actuaría

306083143

Datos del director de tesis:

Dr. Fernando Baltazar Larios

Datos del sinodal 1:

Dr. Luis Antonio Rincón Solís

Datos del sinodal 2:

Dra. Ana Meda Guardiola

Datos del sinodal 3:

Dra. María Asunción Begoña Fernández Fernández

Datos del sinodal 4:

Act. Harim García Lamont

Datos del trabajo escrito:

Modelo de Riesgo Modulado de Markov con tasas de interés estocásticas.

119 pag.

2016.

# Dedicatoria

*A mi familia,  
mis axiomas.*

*... Vi el Aleph, desde todos los puntos,  
vi en el Aleph la tierra,  
y en la tierra otra vez el Aleph  
y en el Aleph la tierra,  
vi mi cara y mis vísceras,  
vi tu cara, y sentí vértigo y lloré,  
por que mis ojos habían visto ese objeto  
secreto y conjetural,  
cuyo nombre usurpan los hombres,  
pero que ningún hombre ha mirado:  
el inconcebible universo.*

*Jorge Luis Borges. El Aleph.*

# Agradecimientos

A mis padres Ana y Atilano, pilares fundamentales en mi vida cuyo apoyo ha sido inconmensurable. Gracias por todo el amor y la confianza que me han brindado, gracias a ustedes hoy logro cumplir y vivir uno de mis más grandes sueños.

A mis hermanos Francisco y Luis, por su amor y apoyo incondicional.

A Orlando, por el amor y las alegrías vividas y sentidas, por ser fuente de inspiración y motivación que me impulsan a ser una mejor persona en todo sentido.

A mi director de tesis, el Dr. Fernando Baltazar Larios, por todo el apoyo que me brindó durante la elaboración del presente trabajo, por el tiempo dedicado en cada una de las revisiones y por toda la paciencia que mostró.

A mis sinodales: El Dr. Luis Antonio Rincón Solís, la Dra. Ana Meda Guardiola, la Dra. María Asunción Begoña Fernández Fernández y al Act. Harim García Lamont, por el tiempo dedicado en la revisión de la tesis y por haberla enriquecido con sus comentarios y sugerencias.

Por último, a la DGAPA-UNAM por su estímulo financiero a través del Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e Innovación Tecnológica (PAPIIT) en el proyecto con clave IA105716 que lleva por nombre: Estimación de Procesos Markovianos discretamente observados y sus aplicaciones.

# Índice general

Datos del jurado	I
Dedicatoria	II
Agradecimientos	III
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. Conceptos básicos</b>	<b>4</b>
2.1. Procesos Estocásticos . . . . .	4
2.2. Procesos de saltos de Markov . . . . .	9
2.3. Modulado de Markov . . . . .	23
2.3.1. Proceso Poisson . . . . .	24
2.3.2. Proceso de Cox modulado de Markov . . . . .	28
2.4. Simulación . . . . .	29
<b>3. Modelo de Riesgo Modulado de Markov con tasas de interés estocásticas</b>	<b>37</b>
3.1. Descripción del modelo . . . . .	38
3.2. Modelo de tasas de interés . . . . .	42
3.3. Análisis del proceso de riesgo . . . . .	51
<b>4. Aplicación del modelo de Riesgo Modulado de Markov con tasas de interés estocásticas</b>	<b>78</b>
4.1. Implementación del modelo . . . . .	79
4.2. Análisis de resultados . . . . .	91
<b>5. Conclusiones</b>	<b>96</b>

<b>A. Matrices de dos dimensiones</b>	<b>98</b>
<b>B. Regla de la derivación de Leibniz</b>	<b>99</b>
<b>C. Códigos en R</b>	<b>100</b>
C.1. Matriz de probabilidades de saltos . . . . .	100
C.2. Proceso de saltos de Markov . . . . .	101
C.3. Proceso de Cox modulado de Markov . . . . .	103
C.4. Proceso de Cramer Lundberg modulado de Markov . . . . .	104
C.5. Proceso de Cramer Lundberg modulado de Markov con tasas de interés estocásticas . . . . .	108

# Capítulo 1

## Introducción

La noción de riesgo es un concepto importante en la economía, debido a que es necesario contar con estrategias y métodos para el buen manejo del capital disponible de las compañías aseguradoras, bancos y otras instituciones públicas y privadas con la finalidad de mitigar el riesgo. Específicamente, la teoría de riesgo se ha centrado en estudiar las fluctuaciones de las reservas de una compañía aseguradora y de estimar las posibilidades de ruina de dicha aseguradora, es decir, la probabilidad de que la reserva pueda ser negativa en algún momento.

En general una compañía de seguros opera de la siguiente manera: un grupo de personas que está expuesta a un tipo determinado de accidentes tales como choques de automóviles, incendios, robos, etc. contrata un seguro donde cada una de ellas paga a la aseguradora una cantidad fija de dinero por unidad de tiempo llamado prima; la aseguradora a su vez, tiene la obligación de pagar al asegurado el monto total del daño en caso de accidente en el momento en que éste ocurre. Por lo tanto, aunque no se conozca con certeza cuántas personas requerirán de la protección de la compañía, ni el tamaño total de los daños que ocurrirán, el capital obtenido de la primas colectadas más el capital inicial de la compañía, deben de ser suficientes para solventar los gastos que se presenten.

Sin duda, una de las preguntas de mayor interés para una compañía aseguradora es la siguiente: ¿Hasta qué punto la compañía aseguradora puede solventarse?, o bien, ¿Cuál es la probabilidad de que la compañía se arruine en un tiempo finito o en un intervalo de tiempo dado?. El modelo clásico de riesgo, también conocido como modelo de Cramer-Lundberg modela el



capital que tendrá la compañía aseguradora después de cierto tiempo, sin embargo este modelo no es del todo realista, pues no se sabe con certeza a cuánto equivalen el día de hoy cada uno de los montos de reclamos ocurridos en un tiempo futuro para con ello saber si el capital con el que cuenta la compañía el día de hoy es suficiente para hacerle frente a sus obligaciones.

Ahora bien, la necesidad de incrementar la flexibilidad en el tamaño y arribo de los reclamos es lo que nos lleva a la construcción de un modelo de riesgo modulado de Markov con tasas de interés estocásticas, debido a que el modelo clásico de riesgo asume una tasa de interés neta igual a cero, lo cual es muy restrictivo y no se apega mucho a la realidad, por ello se describirá un modelo más general que considera una fuerza de interés estocástica la cual se describe por medio de un proceso de saltos Markov y ésta a su vez es modulada de acuerdo a un proceso subyacente que dicta las condiciones del entorno del proceso de riesgo, es decir, la fuerza de interés estocástica dependerá del estado en que se encuentre el proceso en riesgo; además, también se considera el caso de una entidad que está dividida en varias líneas de negocio.

Al final será posible obtener conclusiones acerca de las capacidades de pago que tiene una compañía aseguradora frente a sus obligaciones, es decir, si en algún momento la compañía no puede pagar el monto de las reclamaciones de los asegurados. Sin embargo, la ruina no necesariamente se refiere exclusivamente a la incapacidad total de pago por parte de la compañía aseguradora, sino que puede ser un parámetro técnico para que active su alerta y tome alguna decisión para superar esta situación y no significa que inmediatamente vaya a ir a la quiebra.

El trabajo se divide de la siguiente forma:

El Capítulo 2 nos da una breve introducción al tema de procesos estocásticos, mencionando algunas de sus características principales y haciendo un enfoque en los procesos de saltos de Markov; además se da una introducción del modelo general de modulado de Markov aplicándolo a un proceso de Cox modulado de Markov, finalizando con la implementación de tal proceso llevado a una situación de la vida real, las ventas en una cafetería.

En el Capítulo 3 se describe el modelo de riesgo modulado de Markov con tasas de interés estocásticas; se presenta algunos resultados relevantes para el modelo de tasas de interés y finalmente se desarrollan los primeros dos momentos del modelo de riesgo modulado de Markov con tasas de interés estocásticas.

En el Capítulo 4 se introduce la aplicación numérica, donde se calcula el capital de la compañía aseguradora a tiempo presente a partir del hecho de descontar todos los montos por reclamos y por primas de los asegurados. Por último, en el Capítulo 5 se presentan las conclusiones y las limitaciones de los resultados.

# Capítulo 2

## Conceptos básicos

En este capítulo se presenta una breve introducción al tema de procesos estocásticos mencionando algunas de sus características principales, en particular, nos enfocamos en el estudio de procesos en donde el tiempo es continuo y las variables toman valores en un conjunto a lo más numerable. Posteriormente, se definen las características que debe de cumplir un proceso para que tenga la propiedad de Markov. Se presenta una breve descripción de lo que es un proceso de saltos, mostrando que si los tiempos en que permanece constante después de un salto tienen distribución exponencial, entonces dicho proceso cumple con la propiedad Markoviana y es conocido como proceso de Markov. Además de estudiar algunas de las propiedades generales de un proceso de Markov, como son sus probabilidades de transición, se obtienen expresiones explícitas del generador infinitesimal, que es una matriz que determina de manera única el comportamiento del proceso.

Una vez que se define un proceso de Markov y sus propiedades, se da una breve introducción al modelo general de modulado de Markov, finalizando con una simulación que permite ver el comportamiento de un proceso de saltos de markov, empleando los resultados de sus trayectorias para modular un proceso de Cox.

### 2.1. Procesos Estocásticos

Comencemos por definir una variable aleatoria, para ello considere un espacio de probabilidad, que no es más que la terna  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , donde  $\Omega$  es un conjunto no vacío,  $\mathcal{F}$  una  $\sigma$ -álgebra de subconjuntos de  $\Omega$  y  $P$  una medida de

probabilidad definida en  $\mathcal{F}$ . Entonces, una variable aleatoria se define como sigue:

**Definición 2.1.1.** Sea  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  un espacio de probabilidad. Una función  $X$  valuada en los reales definida en  $\Omega$  se conoce como **variable aleatoria** si:

$$X^{-1}(S) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in S\} \in \mathcal{F}, \text{ para todo } S \in \mathcal{B}, \quad (2.1)$$

donde  $\mathcal{B}$  es la  $\sigma$ -álgebra de conjuntos de Borel en  $\mathbb{R}$ . Entonces, una variable aleatoria  $X$  es una función medible de  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  en  $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ .

Ahora bien, considere un sistema que puede caracterizarse por estar en un conjunto de estados previamente especificados, además, suponga que dicho sistema evoluciona o bien, cambia de un estado a otro a lo largo del tiempo de acuerdo a una cierta ley de movimiento. Si  $X_t$  representa el estado del sistema al tiempo  $t$  y se considera que la forma en que el sistema evoluciona no es determinista sino provocado por algún mecanismo aleatorio, resulta natural considerar a  $X_t$  como una variable aleatoria para cada valor del índice  $t$ . Hasta aquí se tiene una colección de variables aleatorias indexadas por el tiempo y a esta colección se le conoce como *proceso estocástico*. En general, las variables aleatorias que conforman un proceso están relacionadas unas con otras de alguna manera particular, es decir, no son independientes entre sí y las distintas formas en que se pueden dar estas dependencias es una de las características que diferencian a unos procesos de otros, así pues, una definición formal de un proceso estocástico se define de la siguiente forma:

**Definición 2.1.2.** Un proceso estocástico es una colección de variables aleatorias  $X = \{X_t, t \in T\}$ , definidas en el mismo espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , parametrizadas por un conjunto  $T$  llamado **espacio parametral**, en donde las variables  $X_t$  toman valores en un conjunto  $S$  llamado **espacio de estados**.

Los valores en el espacio parametral se puede interpretar como tiempos, de esta forma a  $X_t$  se le interpretará como el estado del proceso al tiempo  $t$ .

Ahora bien, de acuerdo a la definición de variable aleatoria, para poder hablar del espacio de estados  $S$ , es necesario asociar a este conjunto una  $\sigma$ -álgebra y considerando que  $S$  es un subconjunto de  $\mathbb{R}$ , puede tomarse la  $\sigma$ -álgebra de Borel de  $\mathbb{R}$  restringida a  $S$ , es decir,  $S \cap \mathcal{B}(\mathbb{R})$ , así pues, un proceso estocástico también podría considerarse como una función de dos variables,

$$X : T \times \Omega \rightarrow S,$$

tal que a cada pareja  $(t, \omega) \in (T, \Omega)$  se le asocia el estado  $X(t, \omega) = X_t(\omega) \in S$  y así, para cada  $\omega \in \Omega$  fijo, la función

$$t \rightarrow X_t(\omega)$$

es una trayectoria o realización del proceso, mientras que para cada valor de  $t \in T$  fijo, el mapeo

$$\omega \rightarrow X_t(\omega)$$

es una variable aleatoria.

Es importante mencionar que existe una clasificación general en los procesos estocásticos según las características del espacio parametral, de ahí las definiciones siguientes:

**Definición 2.1.3. *Proceso estocástico a tiempo discreto.*** Si  $T$  es un conjunto a lo más numerable, se dice que  $X$  es un proceso estocástico a tiempo discreto, en general, este tipo de procesos se denotarán como  $X = \{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ . Así, para cada  $n \in T$ ,  $X_n$  se puede interpretar como el estado del proceso al tiempo  $n$ .

**Definición 2.1.4. *Proceso estocástico a tiempo continuo.*** Si  $T$  es un conjunto no numerable, se dice que  $X$  es un proceso estocástico a tiempo continuo, en este caso el espacio parametral podría ser  $T = [0, \tau]$  ó  $T = \mathbb{R}^+$ . Estos procesos se denotarán como  $X = \{X_t, t \geq 0\}$ .

En cuanto al espacio de estados  $S$  del proceso, que es el conjunto donde las variables aleatorias toman valores, de forma análoga también puede ser discreto o continuo.

Podemos decir entonces, que los distintos tipos de procesos estocásticos se obtienen al considerar las diferentes posibilidades para el espacio de estados  $S$ , el espacio parametral  $T$ , las características de las trayectorias y, principalmente, las relaciones de dependencia entre las variables aleatorias que conforman el proceso.

Un ejemplo de proceso estocástico es el **proceso de Markov**, el cual es un modelo cuya evolución futura depende solamente del estado presente del proceso, mientras que los estados anteriores no tienen influencia. A esta condición se le conoce como **propiedad de Markov**. La siguiente es la definición de un proceso de Markov para procesos a tiempo continuo.

**Definición 2.1.5. Procesos de Markov.** Se dice que un proceso estocástico  $X = \{X_t, t \geq 0\}$  es un proceso de Markov si satisface la siguiente propiedad: Si para cualesquiera estados  $i_1, \dots, i_{n-1}, i, j \in S$ , si suponemos que  $i$  es el estado presente del proceso,  $j$  es un estado futuro y el resto de los estados corresponden a estados pasados, entonces se cumple la siguiente igualdad:

$$P[X_{s+t} = j \mid X_s = i, X_{s_1} = i_1, \dots, X_{s_{n-1}} = i_{n-1}] = P[X_{s+t} = j \mid X_s = i],$$

para cualesquiera tiempos no decrecientes  $0 \leq s_1 < \dots < s_{n-1} < s < s+t \in T$ . A esta propiedad se le conoce como **propiedad de Markov**.

Observe que no estamos suponiendo que se conoce la historia del proceso en todo el pasado a tiempo continuo, sino únicamente en una colección arbitraria pero finita de tiempos pasados, entonces, este tipo de procesos son aquellos cuya evolución futura depende solamente del estado presente del proceso, mientras que la información correspondiente a los eventos pasados es irrelevante.

Decimos que un proceso de Markov es *homogéneo en el tiempo*, si para  $s \geq 0$  y  $t \geq 0$ , la probabilidad  $P[X_{s+t} = j \mid X_s = i]$  es idéntica a  $P[X_t = j \mid X_0 = i]$ , es decir, no hay dependencia del valor de  $s$ . Denotaremos estas probabilidades como  $p_{ij}(t)$ , para  $i, j \in S$  fijos y  $t \geq 0$ , y las llamamos **probabilidades de transición del proceso de Markov**. Es decir,

$$p_{ij}(t) = P[X_{t+s} = j \mid X_s = i] = P[X_t = j \mid X_0 = i]. \quad (2.2)$$

En particular, para  $t = 0$  se define  $p_{ij}(0)$  como la *función delta de Kronecker*, como sigue:

$$p_{ij}(0) = \lim_{t \rightarrow 0} p_{ij}(t) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases} \quad (2.3)$$

y con ello se impone una condición de continuidad en las probabilidades de transición del proceso de Markov.

Las probabilidades de transición correspondientes a un mismo intervalo de tiempo de longitud  $t$ , suelen ordenarse en forma de matriz,  $P(t) = \{p_{ij}(t)\}_{i,j \in S}$ , en la cual, el subíndice de fila representa el estado de partida y el subíndice de columna el estado de llegada, y se conoce como la matriz de probabilidades de transición al tiempo  $t$  del proceso de Markov.

**Proposición 2.1.1.** Si un proceso  $X = \{X_t, t \geq 0\}$  satisface la propiedad de Markov, la familia  $\{P(t), t \geq 0\}$  constituye un semigrupo de transición de matrices estocásticas, lo cual quiere decir que  $\{P(t), t \geq 0\}$  cumple con las siguientes propiedades:

1.  $\lim_{t \rightarrow 0^+} P(t) = P(0) = I$ , donde  $I$  es la matriz identidad.
2.  $P(t + s) = P(t)P(s)$ , para cualesquiera  $s, t \geq 0$ .

*Demostración.* La propiedad 1 se cumple pues  $P(0) = \{p_{ij}(0)\}_{i,j \in S}$ , que no es más que la función delta de Kronecker, que es la identidad.

Para demostrar la propiedad 2, veamos que por definición de  $p_{ij}(t)$  y por probabilidad condicional es válido que:

$$P(t + s) = p_{ij}(t + s) = P[X_{t+s} = j | X_0 = i] = \frac{P[X_{t+s} = j, X_0 = i]}{P[X_0 = i]},$$

agregando un estado  $k$  al tiempo  $t$  y sumando sobre todo posible valor que puede tomar  $k \in S$ ,

$$= \sum_{k \in S} \frac{P[X_{t+s} = j, X_t = k, X_0 = i]}{P[X_0 = i]},$$

por probabilidad condicional,

$$\begin{aligned} &= \sum_{k \in S} \frac{P[X_{t+s} = j | X_t = k, X_0 = i] P[X_t = k, X_0 = i]}{P[X_0 = i]}, \\ &= \sum_{k \in S} \frac{P[X_{t+s} = j | X_t = k, X_0 = i] P[X_t = k | X_0 = i] P[X_0 = i]}{P[X_0 = i]}, \end{aligned}$$

al reducir términos y aplicar propiedad de Markov,

$$= \sum_{k \in S} P[X_{t+s} = j | X_t = k] P[X_t = k | X_0 = i],$$

por propiedad de homogeneidad en el tiempo,

$$= \sum_{k \in S} P[X_s = j | X_0 = k] P[X_t = k | X_0 = i] = \sum_{k \in S} p_{ik}(t) p_{kj}(s).$$

□

A la propiedad 2, se le conoce como **Ecuación de Chapman-Kolmogorov**.

## 2.2. Procesos de saltos de Markov

En esta sección nos vamos a enfocar en procesos estocásticos donde el tiempo es continuo y las variables toman valores en un espacio de estados  $S$  a lo más numerable. Considere un proceso estocástico  $X = \{X_t, t \geq 0\}$ , el cual inicia en el estado  $i_1$  al tiempo cero, este proceso permanece en ese estado un tiempo aleatorio  $T_1$ , saltando luego a un estado distinto  $i_2$ , por lo cual ahora el proceso permanece en este estado un tiempo aleatorio  $T_2$ , posteriormente el proceso salta a un estado  $i_3$  distinto al anterior, permaneciendo en éste un tiempo aleatorio  $T_3$  y así sucesivamente. Vamos a llamar **tiempos de estancia** a los tiempos aleatorios  $T_i$  en los que el proceso  $X = \{X_t, t \geq 0\}$  permanece constante en alguno de sus estados  $i \in S$  y llamaremos **tiempos de salto** a los momentos en el cual el proceso tiene saltos, los denotamos como  $\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2, \mathcal{J}_3, \dots$ , entonces el proceso puede verse de la siguiente forma:

$$X_t = \begin{cases} i_1 & \text{si } 0 \leq t < \mathcal{J}_1, \\ i_2 & \text{si } \mathcal{J}_1 \leq t < \mathcal{J}_2, \\ i_3 & \text{si } \mathcal{J}_2 \leq t < \mathcal{J}_3, \\ \vdots & \end{cases} \quad (2.4)$$

A un proceso que cumple con estas características se le conoce como **proceso de saltos**. De esta forma,  $\mathcal{J}_n$  es el tiempo en que ocurre el  $n$ -ésimo salto del proceso, es decir, cuando cambia de un estado a otro e  $i_n$  es el  $n$ -ésimo estado visitado por el proceso  $X = \{X_t, t \geq 0\}$ .

Podemos ver a los tiempos de salto como:

$$\mathcal{J}_n = T_1 + \dots + T_n, \text{ para } n \geq 1.$$

de esta forma:

$$T_n = \begin{cases} \mathcal{J}_n - \mathcal{J}_{n-1} & \text{si } \mathcal{J}_n < \infty, \\ \infty & \text{e.o.c.} \end{cases} \quad (2.5)$$

Sin embargo, este proceso de saltos, podría no estar definido para todo tiempo  $t \geq 0$  y además, no nos garantiza que cumpla la propiedad de Markov, por ello se explican a continuación algunas condiciones que impondremos a los procesos de saltos particulares con los que trataremos de aquí en adelante



tal que cumplan con estas características. Veamos cuáles son los distintos escenarios con los que nos podemos encontrar al trabajar con procesos de saltos.

Primeramente vamos a suponer los tiempos de estancia  $T_1, T_2, \dots$  son independientes entre sí y además que para cada  $i \in S$ ,  $T_i$  podrá ser finito con probabilidad uno o bien, infinito con probabilidad uno. Si  $T_i < \infty$ , para algún  $i \in S$ , entonces  $i$  es un estado **no absorbente** y por consiguiente, el tiempo de estancia  $T_i$  es *finito* con probabilidad uno. En este caso, para el proceso  $X = \{X_t, t \geq 0\}$ , si  $T_i < \infty$  para todo  $i \in S$ , como  $T = \mathbb{R}^+$ , se tiene una infinidad de saltos, pero si  $T = [0, \tau]$  con  $\tau \in \mathbb{R}^+$ , se tiene un número finito de saltos. Este tipo de procesos se pueden ver como en la Figura 2.1.

Ahora bien, si  $T_i = \infty$ , para algún  $i \in S$ , implica que el proceso deja de saltar y permanece en el estado  $i$  el resto del tiempo, por lo cual el estado  $i$  es **absorbente** y por lo tanto, el tiempo de estancia es *infinito* con probabilidad uno, se puede ver como en la Figura 2.2. De esta forma, podemos decir que sólo tendremos dos tipos de estados: **absorbentes** y **no absorbentes**.

Por último, puede ocurrir que el proceso de saltos no esté definido para todo  $t \geq 0$  dentro del espacio parametral, es decir, se puede dar el caso en el que los tiempos de estancia  $T_i$  sean cada vez más pequeños de tal forma que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{J}_n < \infty, \quad (2.6)$$

lo cual nos dice que el proceso está realizando un número infinito de saltos durante un intervalo de tiempo acotado, implicando que el proceso no quede definido para todo  $t \geq 0$  a lo cual decimos que el proceso  $X = \{X_t, t \geq 0\}$  *explota* en un tiempo finito  $\zeta$  como se muestra en la Figura 2.3. Por ahora, para evitar que nuestros procesos tengan explosiones, vamos a suponer que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{J}_n = \infty, \quad (2.7)$$

es decir, trabajaremos sólo con estados no absorbentes y así el proceso queda definido para todo tiempo  $t \in [0, \infty)$ .

Por otra parte, un resultado importante que se enuncia a continuación es que el proceso de saltos que cumple con las características mencionadas hasta ahora, satisface la propiedad de Markov si, y sólo si, los tiempos de estancia  $T_i$  en los estados no absorbentes tienen distribución exponencial.

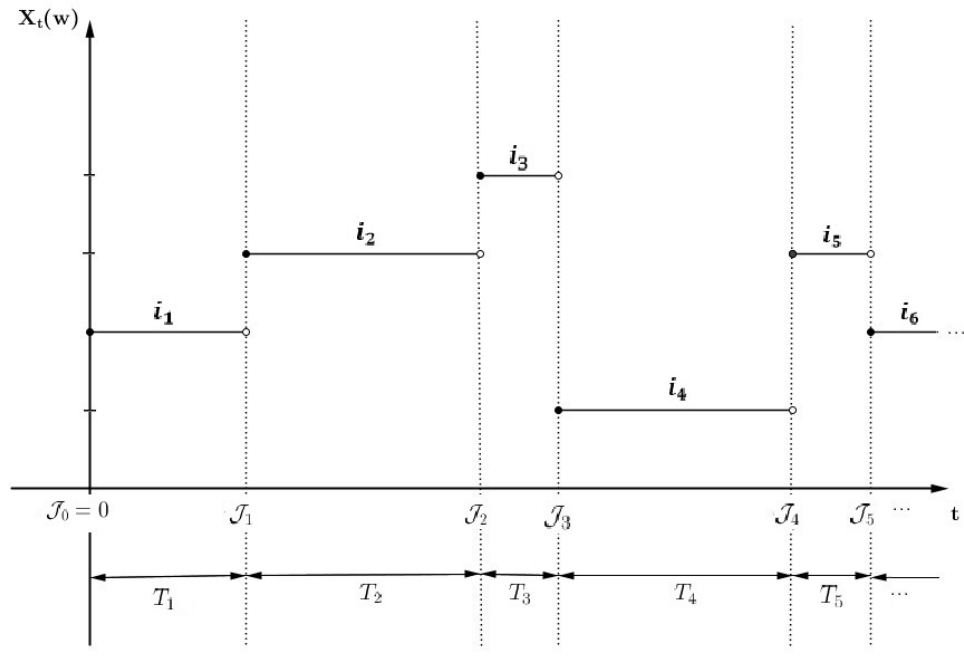


Figura 2.1: Estados no absorventes.

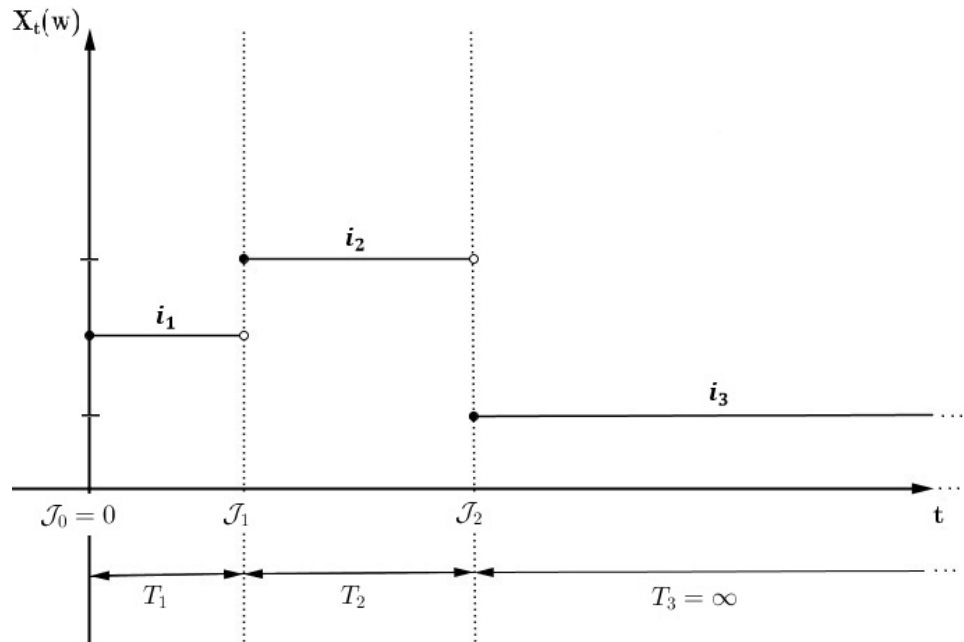


Figura 2.2: Estado absorvente.

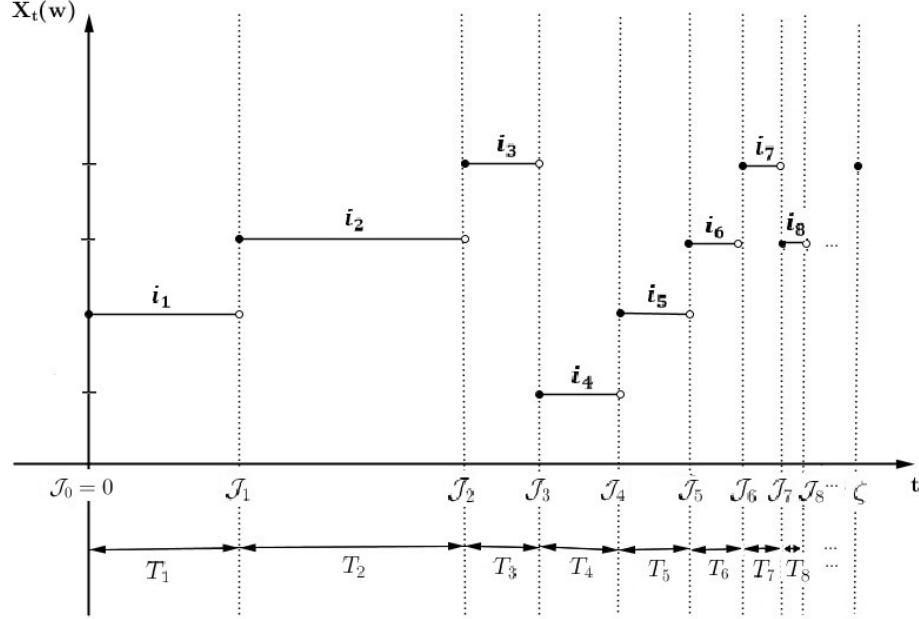


Figura 2.3: Número infinito de saltos en un intervalo de tiempo acotado.

**Proposición 2.2.1.** *Un proceso de saltos  $X = \{X_t, t \geq 0\}$  satisface la propiedad de Markov si, y sólo si, para todo  $i \in S$ , los tiempos de estancia  $T_i$  tienen distribución exponencial con parámetro  $\lambda_i$ ,  $0 \leq \lambda_i < \infty$ , así,*

$$P[T_i > t] = e^{-\lambda_i t}, \text{ para toda } t \geq 0.$$

*Demostración.* Sea  $X = \{X_t, t \geq 0\}$  un proceso de saltos tal que cumple con la propiedad de Markov y además es homogéneo en el tiempo. Suponga que al tiempo cero el proceso inicia en el estado  $i$ , es decir,  $X_0 = i$ . Sea  $T_i$  el tiempo en que el proceso permanece en el estado  $i$ .

Ahora bien, observe que para todo  $s \geq 0$  el evento  $\{T_i > s\}$  es equivalente al evento  $\{X_u = i, 0 \leq u \leq s\}$ . Similarmente, para todo  $s, t \geq 0$ , el evento  $\{T_i > s + t\}$  es equivalente a  $\{X_u = i, 0 \leq u \leq s + t\}$ , por lo cual:

$$\begin{aligned} P[T_i > s + t \mid T_i > s] &= P[X_u = i, 0 \leq u \leq s + t \mid X_u = i, 0 \leq u \leq s] \\ &= P[X_u = i, s \leq u \leq s + t \mid X_u = i, 0 \leq u \leq s] \end{aligned}$$

por propiedad de Markov, esta igualdad es equivalente a,

$$= P[X_u = i, s \leq u \leq s + t \mid X_s = i]$$

y por homogeneidad del proceso en el tiempo,

$$\begin{aligned} &= P[X_u = i, 0 \leq u \leq t \mid X_0 = i] \\ &= P[T_i > t]. \end{aligned}$$

De este modo se cumple la siguiente igualdad:

$$P[T_i > s + t \mid T_i > s] = P[T_i > t], \text{ para todo } t, s \geq 0,$$

lo cual muestra que los tiempos de estancia  $T_i$  satisfacen la propiedad de pérdida de la memoria que es una de las propiedades que caracterizan de manera única a la distribución exponencial dentro del conjunto de distribuciones absolutamente continuas, entonces,

$$P[T_i > t] = e^{-\lambda_i t}, \text{ para todo } t \geq 0 \text{ y } \lambda_i \geq 0,$$

es decir, los tiempos de estancia tienen distribución exponencial con parámetro  $\lambda_i \geq 0$  y esta distribución sólo depende del estado que está siendo visitado y no del estado siguiente.

Así pues, se ha demostrado que los tiempos de estancia de un proceso de saltos tienen distribución exponencial a partir del hecho de que el proceso de saltos cumple con la propiedad de Markov. Por el contrario, si lo que se sabe acerca del proceso de saltos es que sus tiempos de estancia  $T_i$  tienen distribución exponencial con parámetro  $\lambda_i \geq 0$ , entonces se asegura que el proceso de saltos también cumple con la propiedad de Markov. Esta parte de la prueba se omite.  $\square$

Por lo tanto, un resultado importante que acabamos de demostrar es que el proceso de saltos como lo hemos descrito hasta ahora, cumple con la propiedad de Markov siempre y cuando, el proceso de saltos permanezca constante en cada uno de los estados por los que pasa un periodo de tiempo que se distribuye exponencial.

**Definición 2.2.1.** *A un proceso de saltos  $X = \{X_t, t \geq 0\}$  que cumple con la propiedad de Markov se le conoce como **proceso de Markov o proceso de saltos de Markov**.*

El siguiente paso que daremos será mostrar algunas de las propiedades de mayor relevancia que posee un proceso de Markov.

Sea  $X = \{X_t, t \geq 0\}$  un proceso de Markov. Considere a  $\{\mathcal{J}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  como la secuencia de tiempos de salto del proceso; además, observe los tiempos de estancia también se pueden expresar como:  $T_{n+1} = \mathcal{J}_{n+1} - \mathcal{J}_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , con ello vamos a definir el siguiente proceso a tiempo discreto:

$$\mathcal{J}_0 = 0, \quad \mathcal{J}_{n+1} = \mathcal{J}_n + T_{n+1}, \quad (2.8)$$

y

$$Y_n = X_{\mathcal{J}_n}, \quad \text{para } n \in \mathbb{N}. \quad (2.9)$$

entonces  $Y = \{Y_n, n \in \mathbb{N}\}$  forma una proceso estocástico a tiempo discreto y es la secuencia sucesiva de estados visitados por el proceso de Markov

$X = \{X_t, t \geq 0\}$ , es decir, son los estados que visita el proceso cada vez que realiza un salto, así, si  $Y_n = i$ , el intervalo  $[\mathcal{J}_n, \mathcal{J}_{n+1})$  será el tiempo de estancia en el estado  $i$ , además, si  $X = \{X_t, t \geq 0\}$  es continuo por la derecha, entonces también se cumple que los tiempos de estancia  $\mathcal{J}_{n+1} - \mathcal{J}_n$  tienen distribución exponencial con parámetro  $\lambda_i$  si  $Y_n = i$ , por lo cual, el proceso  $Y = \{Y_n, n \in \mathbb{N}\}$  también cumple con la propiedad de Markov y entonces es un proceso de Markov a tiempo discreto. De esta forma  $X = \{X_t, t \geq 0\}$  se puede definir en términos de las  $Y_n$  como:

$$X_t = Y_n \quad \text{para } t \in [\mathcal{J}_n, \mathcal{J}_{n+1}). \quad (2.10)$$

Sea  $q_{ij}$  la probabilidad de que el proceso de Markov  $Y = \{Y_n, n \in \mathbb{N}\}$  pase del estado  $i$  al estado  $j$  al efectuar un salto. Impondremos la condición  $q_{ii} = 0$ , y con ello se imposibilita que el proceso salte al mismo estado de partida. Las probabilidades de salto satisfacen entonces las siguientes condiciones:

- a)  $q_{ij} \geq 0$ ;
- b)  $q_{ii} = 0$ ;
- c)  $\sum_{j \in S} q_{ij} = 1$ .

Se define a  $Q = \{q_{ij}\}_{i,j \in S}$  como la matriz de probabilidades de saltos asociada a  $Y = \{Y_n, n \in \mathbb{N}\}$ . Hemos mencionado anteriormente que para un proceso de Markov  $X = \{X_t, t \geq 0\}$  las probabilidades de transición son los números

$p_{ij}(t) = P[X_t = j \mid X_0 = i]$ . Observemos entonces que en un proceso de Markov a tiempo continuo las probabilidades de saltos  $q_{ij}$  y las probabilidades de transición  $p_{ij}(t)$  representan aspectos distintos del proceso, ya que las primeras son probabilidades de cambio al estado  $j$  cuando el proceso se encuentra en el estado  $i$  y tiene un salto, mientras que las segundas son probabilidades de encontrar al proceso en el estado  $j$  partiendo del estado  $i$  al término de un intervalo de tiempo de longitud  $t$ . El siguiente resultado relaciona a  $p_{ij}(t)$  con  $q_{ij}$  y  $\lambda_i$  y nos permitirá obtener algunas conclusiones generales acerca de las probabilidades de transición.

**Lema 2.2.2.** Sean  $i, j \in S$ , para cualquier  $t \geq 0$ ,

$$p_{ij}(t) = \delta_{ij}e^{-\lambda_i t} + \int_0^t \lambda_i e^{-\lambda_i u} \left( \sum_{k \neq i} q_{ik} p_{kj}(t-u) \right) du. \quad (2.11)$$

*Demostración.* Por un lado, se tiene que si  $i$  es un estado absorbente, es decir,  $\lambda_i = 0$ , entonces  $p_{ij}(t) = \delta_{ij}$ .

Vamos a suponer entonces que el estado  $i$  es no absorbente, y además expresamos a  $p_{ij}(t)$  como sigue:

$$\begin{aligned} p_{ij}(t) &= P[X_t = j \mid X_0 = i] \\ &= P[X_t = j, T_i > t \mid X_0 = i] + P[X_t = j, T_i \leq t \mid X_0 = i] \end{aligned} \quad (2.12)$$

Si  $T_i > t$ , entonces  $X_t = X_0$ , así,

$$\begin{aligned} P[X_t = j, T_i > t \mid X_0 = i] &= P[X_t = j \mid T_i > t, X_0 = i] P[T_i > t \mid X_0 = i] \\ &= \delta_{ij} e^{-\lambda_i t}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

y si ocurre que  $T_i \leq t$ , entonces,

$$P[X_t = j, T_i \leq t \mid X_0 = i] = \int_0^t f_{X_t, T_i | X_0}(j, u \mid i) du, \text{ con } u \geq 0,$$

agregamos un estado  $k \in S$ ,  $k \neq i$ , que será el estado que tomará el proceso transcurrido el intervalo de tiempo  $u$  que es el periodo de tiempo que el proceso permanece en  $i$  y sumamos  $k$  sobre todo el espacio de estados  $S$  que son los posibles valores que puede tomar, así,

$$= \int_0^t \sum_{k \neq i} f_{X_t, X_u, T_i | X_0}(j, k, u \mid i) du, \quad (2.14)$$

Ahora bien, obsérvese que,

$$f_{X_t, X_u, T_i | X_0}(j, k, u | i) = P[X_t = j, X_u = k, T_i = u | X_0 = i],$$

por propiedad de probabilidad condicional obtenemos:

$$= \frac{P[X_t = j | X_u = k, T_i = u, X_0 = i]P[X_u = k, T_i = u, X_0 = i]}{P[X_0 = i]},$$

aplicamos propiedad de Markov a la primera probabilidad y propiedad de probabilidad condicional al segundo término,

$$\begin{aligned} &= \frac{P[X_t = j | X_u = k]P[X_u = k | T_i = u, X_0 = i]P[T_i = u, X_0 = i]}{P[X_0 = i]} \\ &= P[X_t = j | X_u = k]P[X_u = k | T_i = u, X_0 = i]P[T_i = u | X_0 = i] \\ &= p_{kj}(t - u)q_{ik}\lambda_i e^{-\lambda_i u}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

En esta última igualdad, como  $T_i$  se distribuye exponencial, entonces  $P[T_i = u | X_0 = i] = \lambda_i e^{-\lambda_i u}$ .

Sustituyendo (2.15) en (2.14) tenemos que,

$$P[X_t = j, T_i \leq t | X_0 = i] = \int_0^t \sum_{k \neq i} p_{kj}(t - u)q_{ik}\lambda_i e^{-\lambda_i u} du \quad (2.16)$$

y por último, sustituyendo los resultados (2.13) y (2.16) en (2.12) obtenemos lo que queríamos,

$$p_{ij}(t) = \delta_{ij}e^{-\lambda_i t} + \int_0^t \lambda_i e^{-\lambda_i u} \left( \sum_{k \neq i} q_{ik} p_{kj}(t - u) \right) du.$$

□

A continuación se presenta el resultado principal que relaciona a  $p_{ij}(t)$  con  $q_{ij}$  y  $\lambda_i$ .

**Teorema 2.2.3.** *Para alguna  $i, j \in S$ , la función  $t \rightarrow p_{ij}(t)$  es diferenciable y la derivada es continua y para cualquier  $t > 0$ ,*

$$\frac{d}{dt} p_{ij}(t) = -\lambda_i p_{ij}(t) + \sum_{k \neq i} \lambda_i q_{ik} p_{kj}(t). \quad (2.17)$$

*Demostración.* Hacemos un cambio de variable  $s = t - u$  en la expresión del Lema (2.2.2), de forma tal que,

$$\begin{aligned} p_{ij}(t) &= \delta_{ij}e^{-\lambda_i t} + \int_0^t \lambda_i e^{-\lambda_i t} e^{\lambda_i s} \left( \sum_{k \neq i} q_{ik} p_{kj}(s) \right) ds, \\ &= \delta_{ij}e^{-\lambda_i t} + \lambda_i e^{-\lambda_i t} \int_0^t e^{\lambda_i s} \left( \sum_{k \neq i} q_{ik} p_{kj}(s) \right) ds. \end{aligned} \quad (2.18)$$

De la igualdad (2.18) podemos observar que las probabilidades de transición  $p_{ij}(t)$  del proceso de Markov  $X = \{X_t, t \geq 0\}$  son funciones continuas en  $t$ , y en particular en el integrando  $s \rightarrow p_{kj}(s)$  es una función continua. Esto implica que la integral es diferenciable y por lo tanto la función  $t \rightarrow p_{ij}(t)$  también es diferenciable con derivada continua.

Derivando  $p_{ij}(t)$  con respecto a  $t$  y aplicando teorema fundamental del cálculo obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} p_{ij}(t) &= -\lambda_i \delta_{ij} e^{-\lambda_i t} + \lambda_i e^{-\lambda_i t} \left( e^{\lambda_i t} \sum_{k \neq i} q_{ik} p_{kj}(t) \right) \\ &\quad - \lambda_i^2 e^{-\lambda_i t} \int_0^t e^{\lambda_i s} \sum_{k \neq i} q_{ik} p_{kj}(s) ds, \end{aligned}$$

se reducen términos,

$$= -\lambda_i \delta_{ij} e^{-\lambda_i t} + \lambda_i \sum_{k \neq i} q_{ik} p_{kj}(t) - \lambda_i \int_0^t \lambda_i e^{\lambda_i(s-t)} \sum_{k \neq i} q_{ik} p_{kj}(s) ds,$$

se hace un segundo cambio de variable  $-u = s - t$ ,

$$= -\lambda_i \delta_{ij} e^{-\lambda_i t} + \lambda_i \sum_{k \neq i} q_{ik} p_{kj}(t) - \lambda_i \int_0^t \lambda_i e^{-\lambda_i u} \sum_{k \neq i} q_{ik} p_{kj}(t - u) du. \quad (2.19)$$

Ahora bien, del Lema 2.2.2 sabemos que la siguiente igualdad es válida:

$$- \int_0^t \lambda_i e^{-\lambda_i u} \left( \sum_{k \neq i} q_{ik} p_{kj}(t - u) \right) du = \delta_{ij} e^{-\lambda_i t} - p_{ij}(t).$$

Entonces,



$$\begin{aligned}
(2.19) &= -\lambda_i \delta_{ij} e^{-\lambda_i t} + \lambda_i \sum_{k \neq i} q_{ik} p_{kj}(t) + \lambda_i \delta_{ij} e^{-\lambda_i t} - \lambda_i p_{ij}(t) \\
&= -\lambda_i p_{ij}(t) + \lambda_i \sum_{k \neq i} q_{ik} p_{kj}(t).
\end{aligned}$$

que es lo que queríamos demostrar. □

La ecuación (2.17) constituye todo un sistema de ecuaciones diferenciales para las probabilidades de transición  $p_{ij}(t)$  del proceso de Markov  $X = \{X_t, t \geq 0\}$ , en donde se puede observar que la derivada  $\frac{d}{dt} p_{ij}(t)$  puede depender de todas las probabilidades de transición de la forma  $p_{kj}(t)$ , para  $k \neq i$ . Hemos mencionado además, que la derivada  $\frac{d}{dt} p_{ij}(t)$  es una función continua en el tiempo, entonces, si tomamos el límite cuando  $t \rightarrow 0$  se obtiene el siguiente resultado:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} p_{ij}(0) &= -\lambda_i p_{ij}(0) + \lambda_i \sum_{k \neq i} q_{ik} p_{kj}(0), \\
&= -\lambda_i \delta_{ij} + \lambda_i \sum_{k \neq i} q_{ik} \delta_{kj} \\
&= -\lambda_i \delta_{ij} + \lambda_i q_{ij} \\
&= \begin{cases} -\lambda_i & \text{si } i = j, \\ \lambda_i q_{ij} & \text{si } i \neq j. \end{cases}
\end{aligned}$$

De ahí el siguiente resultado.

**Definición 2.2.2.** *A las cantidades  $\frac{d}{dt} p_{ij}(0)$  se les conoce como parámetros infinitesimales del proceso  $X = \{X_t, t \geq 0\}$  y se les denota como  $g_{ij}$ , entonces, estos parámetros son:*

$$g_{ij} = \begin{cases} -\lambda_i & \text{si } i = j, \\ \lambda_i q_{ij} & \text{si } i \neq j. \end{cases} \quad (2.20)$$

*Variando los índices  $i, j$ , estos nuevos parámetros conforman una matriz  $G$  llamada generador infinitesimal del proceso de Markov, es decir,*

$$G = \begin{pmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 q_{01} & \lambda_0 q_{02} & \cdots \\ \lambda_1 q_{10} & -\lambda_1 & \lambda_1 q_{12} & \cdots \\ \lambda_2 q_{20} & \lambda_2 q_{21} & -\lambda_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}. \quad (2.21)$$

Dicha matriz, determina de manera única el comportamiento del proceso de Markov, donde se puede interpretar a  $g_{ij}$ , como la tasa para ir del estado  $i$  al estado  $j$ , y a  $g_{ii}$ , como la tasa de salida del estado  $i$ ; además, dichas tasas cumplen con las siguientes propiedades:

- a)  $g_{ij} \geq 0$ ,  $i \neq j$ ;
- b)  $g_{ii} \leq 0$ , para toda  $i$ ;
- c)  $\sum_{j \in S} g_{ij} = 0$ , para toda  $i$ .

Las afirmaciones a) y b) se deducen de la expresión (2.20), mientras que c) ocurre siempre y cuando  $q_{ii} = 0$ , ya que,

$$\begin{aligned} \sum_{j \in S} g_{ij} &= -\lambda_i + \sum_{j \neq i} \lambda_i q_{ij} \\ &= -\lambda_i + \lambda_i(1 - q_{ii}), \\ &= -\lambda_i + \lambda_i, \\ &= 0. \end{aligned}$$

Cabe hacer mención, que  $g_{ii} = 0$  ocurre cuando el estado  $i$  es absorbente, es decir, cuando  $\lambda_i = 0$ . Demostraremos a continuación que el generador infinitesimal caracteriza de manera única al proceso de Markov.

**Proposición 2.2.4.** *El generador infinitesimal caracteriza de forma única al proceso de Markov  $X = \{X_t, t \geq 0\}$ .*

*Demostración.* La demostración se sigue de la igualdad (2.20), ya que a partir del generador  $G = \{g_{ij}\}_{i,j \in S}$ , se obtienen los parámetros iniciales que definen el proceso de Markov. El procedimiento para obtener una matriz estocástica  $Q$ , llamada la matriz de probabilidades de saltos a partir del generador infinitesimal  $G$ , con  $Q = \{q_{ij}\}_{i,j \in S}$  es definida por:

$$\lambda_i = -g_{ii},$$

$$q_{ij} = \begin{cases} -\frac{g_{ij}}{g_{ii}} & \text{si } j \neq i, \\ 0 & \text{si } j = i. \end{cases} \quad (2.22)$$

□

**Ejemplo 2.2.1.** *El generador infinitesimal para el proceso de Poisson de parámetro  $\lambda$  es:*

$$G = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & -\lambda & \lambda & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & -\lambda & \lambda & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}. \quad (2.23)$$

Así, la matriz de probabilidades de saltos  $Q$ , definida a partir del generador infinitesimal  $G$ , está dada por:

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}. \quad (2.24)$$

Se ha demostrado ya en el Teorema 2.2.3 que:

$$\frac{d}{dt}p_{ij}(t) = -\lambda_i p_{ij}(t) + \sum_{k \neq i} \lambda_i q_{ik} p_{kj}(t), \quad (2.25)$$

y además, se definió al generador infinitesimal  $G$  del proceso de Markov como:

$$g_{ij} = \begin{cases} -\lambda_i & \text{si } i = j, \\ \lambda_i q_{ij} & \text{si } i \neq j, \end{cases} \quad (2.26)$$

por lo cual, la ecuación (2.25) toma la forma simple y memorable:

$$\frac{d}{dt}p_{ij}(t) = \sum_{k \in S} g_{ik} p_{kj}(t), \quad (2.27)$$

que en forma matricial se puede ver como:

$$P'(t) = GP(t), \quad (2.28)$$

y es conocida como **la ecuación diferencial retrospectiva de Kolmogorov**, además, se puede obtener también de una forma análoga, **la ecuación diferencial prospectiva de Kolmogorov**, es decir,

$$P'(t) = P(t)G. \quad (2.29)$$

Ahora surge la pregunta de si se pueden resolver las ecuaciones prospectivas y retrospectivas usando esta notación matricial. Si  $P(t)$  y  $G$  son escalares, fácilmente se puede obtener que,

$$P(t) = e^{tG}, \quad (2.30)$$

con la condición inicial  $P(0) = I$ , con  $I$ , la matriz identidad, por lo cual, resulta apropiado introducir la serie:

$$e^{tG} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tG)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n G^n}{n!}. \quad (2.31)$$

de ahí el siguiente resultado:

**Teorema 2.2.5.** *Para cada proceso de Markov  $X = \{X_t, t \geq 0\}$  con espacio de estados  $S$  a lo más numerable y generador infinitesimal  $G$ ,  $P(t) = e^{tG}$ , es la única solución para las ecuaciones prospectivas y retrospectivas de Kolmogorov, con condición inicial  $P(0) = I$ , ( $I$ , la matriz identidad).*

*Demostración.* Tenemos que la serie definida en (2.31) converge para todo  $t$  finito, y es por lo tanto diferenciable término por término en cada componente, entonces,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}P(t) &= \frac{d}{dt}(e^{tG}), \quad \text{sustituyendo el valor de la serie,} \\ &= \frac{d}{dt} \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(tG)^n}{n!} \right), \quad \text{derivando,} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nt^{n-1}G^n}{n!}, \quad \text{reduciendo términos,} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{n-1}G^n}{(n-1)!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(tG)^{n-1}}{(n-1)!} G, \\ &= P(t)G. \end{aligned}$$

a lo cual, es fácil ver que  $P(0) = I$ . Entonces  $P(t)$  satisface la ecuación prospectiva.

Ahora bien, supóngase que  $S(t)$  es alguna solución para las ecuaciones prospectivas, además, considere lo siguiente:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(S(t)e^{-tG}) &= S(t)(-G)e^{-tG} + S'(t)e^{-tG}, \text{ como } S(t) \text{ es solución,} \\ &= S(t)(-G)e^{-tG} + S(t)Ge^{-tG} = 0.\end{aligned}$$

Por consiguiente,  $S(t)e^{-tG}$  es una constante, y además es la identidad, por ello  $S(t) = e^{tG} = P(t)$ , con lo cual se ha probado la unicidad de la solución  $P(t)$  para la ecuación diferencial prospectiva. Ahora, únicamente falta demostrar que  $P(t)$  también es solución para la ecuación diferencial retrospectiva, y para ello, basta probar que  $GP(t) = P(t)G$ , lo cual ocurre pues,

$$\begin{aligned}P(t)G &= e^{tG}G = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tG)^n}{n!} G \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} G \frac{(tG)^n}{n!} = Ge^{tG} = GP(t).\end{aligned}$$

□

Por último veremos qué es una distribución estacionaria, pues esta definición nos será de gran utilidad más adelante.

**Definición 2.2.3.** *Distribución estacionaria.* Sea  $P(t)$  la matriz de probabilidades de transición al tiempo  $t$  de un proceso de Markov a tiempo continuo. Se dice que una distribución de probabilidad  $\pi = (\pi_1, \pi_2, \dots)$  sobre el espacio de estados es estacionaria si para cualquier  $t \geq 0$ ,

$$\pi P(t) = \pi. \tag{2.32}$$

Explícitamente, si para cualquier  $t \geq 0$ ,  $\sum_i \pi_i p_{ij}(t) = \pi_j$ . Por tanto, si el proceso  $X_0$  tiene como distribución inicial una distribución estacionaria  $\pi$ , entonces  $P[X_t = j] = \sum_i \pi_i p_{ij}(t) = \pi_j$ , es decir, la variable  $X_t$  tiene la misma distribución de probabilidad  $\pi$  para cualquier valor de  $t$ . A continuación se enuncia un resultado, el cual sugiere una forma de encontrar una posible distribución estacionaria para un proceso de Markov a tiempo continuo.

**Proposición 2.2.6.** *La distribución  $\pi$  es estacionaria para el proceso de Markov  $X = \{X_t, t \geq 0\}$  cuyo generador infinitesimal es  $G$  si, y sólo si:*

$$\pi G = 0. \quad (2.33)$$

Se puede ver la demostración detallada en Durrett (2012) página 149, [2].

**Ejemplo 2.2.2.** *Considere un proceso de Markov  $X = \{X_t, t \geq 0\}$  con dos estados, cuyo generador infinitesimal está dado por la siguiente matriz:*

$$G = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{pmatrix}.$$

*Se pretende encontrar una distribución estacionaria  $\pi = (\pi_1, \pi_2)$  para este proceso, por lo cual se resolverá la ecuación  $\pi G = 0$ , con la condición de que  $\pi_1 + \pi_2 = 1$ , entonces, si  $\pi G = 0$ , tenemos el siguiente sistema:*

$$(\pi_1 \quad \pi_2) \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{pmatrix} = 0,$$

*y entonces, el sistema de ecuaciones a resolver es:*

$$\begin{aligned} -\lambda\pi_1 + \mu\pi_2 &= 0, \\ \pi_1 + \pi_2 &= 1, \end{aligned}$$

*lo cual lleva a la siguiente solución:*

$$\pi = (\pi_1, \pi_2) = \left( \frac{\mu}{\lambda + \mu}, \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \right).$$

## 2.3. Modulador de Markov

En este apartado daremos una breve introducción al modulador de Markov, para ello haremos uso del proceso Poisson doblemente estocástico también conocido como proceso de Cox y la razón por la cual se ha elegido este tipo de procesos, es que la ocurrencia de los sucesos depende de un proceso externo y justo en eso consiste el modulador de Markov, en el hecho de que un proceso estocástico dependa a su vez de otro proceso subyacente a él para definir su comportamiento. Sin embargo, no estudiaremos a profundidad las propiedades del proceso de Cox, debido a que no es el objetivo de este apartado, sino más bien lo que se pretende es clarificar en qué consiste el modulador de Markov que estudiaremos a profundidad en el siguiente capítulo.

### 2.3.1. Proceso Poisson

Comenzaremos por dar algunas definiciones referentes al proceso Poisson, para con ello dar entrada a lo que es un proceso de Cox.

Suponga que un mismo evento ocurre repetidas veces de manera aleatoria a lo largo del tiempo. Suponga que las variables aleatorias  $T_1, T_2, \dots$  representan los tiempos que transcurren entre una ocurrencia del evento y la siguiente ocurrencia, a estos tiempos se les llama tiempos de estancia o tiempos de interarribo. Suponga que estos eventos son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidos.

Entonces, si tenemos los tiempos de interarribo  $T_1, \dots, T_n$  independientes e idénticamente distribuidos, el número de eventos ocurridos en el intervalo de tiempo  $[0, t]$  está dado por:

$$N_t = \text{máx}\{n \in \mathbb{N} : T_1 + \dots + T_n \leq t\}.$$

**Definición 2.3.1.** *Sea  $N_t$  el número de eventos que han ocurrido en el intervalo de tiempo  $[0, t]$ . El proceso estocástico  $N = \{N_t, t \geq 0\}$  es conocido como proceso de conteo.*

El proceso de conteo tiene las siguientes propiedades, las cuales se deducen directamente de su definición.

1.  $N_t$  es una variable aleatoria cuyos posibles valores son  $0, 1, 2, \dots$
2. La función  $N_t$  es no decreciente, es decir,  $N_{t_2} - N_{t_1} \geq 0$ , si  $t_2 \geq t_1 \geq 0$ . Además,  $N_{t_2} - N_{t_1}$  es el número de eventos que han ocurrido en el intervalo de tiempo  $(t_1, t_2]$ .

**Definición 2.3.2.** *Un proceso de conteo  $N = \{N_t, t \geq 0\}$  es de Poisson con parámetro  $\lambda > 0$  (intensidad del proceso) si satisface las siguientes condiciones:*

1.  $N_0 = 0$ .
2. Tiene incrementos independientes.
3.  $N_{t+s} - N_s \sim \text{Poisson}(\lambda t)$ , para todo  $s, t \geq 0$ .

A partir de esta definición, también se puede deducir que el proceso Poisson tiene *incrementos estacionarios*, ya que la distribución de  $N_{t+s} - N_s$  no depende de  $s$ , como se puede observar en la tercera condición. Además, al tomar  $s = 0$ , ocurre que:

$$N_t = N_{t+0} - N_0 \sim \text{Poisson}(\lambda t), \text{ para todo } s, t \geq 0.$$

entonces,

$$P[N_t = n] = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}.$$

A este proceso se le llama *proceso de Poisson homogéneo*, y ello se debe a que el parámetro  $\lambda$  no cambia en el tiempo, es decir, es homogéneo en el tiempo.

Además, si en la definición (2.3.2) se especifica que  $N = \{N_t, t \geq 0\}$  es un proceso con incrementos independientes y estacionarios, entonces se podría reemplazar la tercera condición por las siguientes:

$$P[N_\delta = 1] = \lambda\delta + o(\delta), \quad (2.34)$$

$$P[N_\delta = 0] = 1 - \lambda\delta + o(\delta), \quad (2.35)$$

donde  $o(\delta)$  es tal que,

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{o(\delta)}{\delta} = 0.$$

Entonces, la probabilidad de que haya exactamente un evento en un intervalo de tiempo  $\delta$  debe de ser proporcional al tamaño del intervalo más un término que es despreciable si  $\delta$  es suficientemente pequeña. Además, tenemos que,

$$P[N_\delta \geq 2] = 1 - \{P[N_\delta = 0] + P[N_\delta = 1]\} = o(\delta). \quad (2.36)$$

Estas condiciones hacen uso de las probabilidades infinitesimales del proceso y ello tiene algunas ventajas desde el punto de vista de la interpretación de lo que sucede en un intervalo infinitesimal de tiempo  $[0, \delta]$ . La expresión (2.34) nos dice que dado que el proceso empieza en el estado cero, la probabilidad de que pase al estado uno al final de un intervalo de tiempo pequeño  $[0, \delta]$  es  $\lambda\delta + o(\delta)$ ; en la expresión (2.35) la probabilidad de que el proceso no tenga ningún cambio en dicho intervalo es  $1 - \lambda\delta + o(\delta)$ , y finalmente, en la expresión (2.36) la probabilidad de que el proceso tenga dos o más incrementos en tal



intervalo es  $o(h)$ . Es decir, en un intervalo cualquiera de longitud infinitesimal  $\delta$  sólo pueden ocurrir dos situaciones: que haya un incremento o que no lo haya.

Observe que como  $N_t$  tiene distribución Poisson con parámetro  $\lambda t$ , para todo  $t \geq 0$ , tenemos que:

$$\begin{aligned} E[N_t] &= \lambda t, \\ E[N_t^2] &= V[N_t] + (E[N_t])^2 = \lambda t + \lambda^2 t^2. \end{aligned}$$

Por otro lado, hemos dicho ya que las variables aleatorias  $T_i$  representan los tiempos que el proceso permanece en el estado  $i$ , para  $i \in \{1, 2, \dots\}$  y se les conoce como tiempos de estancia o tiempos de interarribo. Estos tiempos cumplen la siguiente propiedad:

**Proposición 2.3.1.** *Sea  $N = \{N_t, t \geq 0\}$  un proceso Poisson con parámetro  $\lambda > 0$ , y sea  $T_i$  el tiempo que el proceso permanece en el estado  $i$ , para  $i = 1, 2, \dots$ . Las variables aleatorias  $T_1, T_2, \dots$  son independientes y todas ellas tienen distribución exponencial de parámetro  $\lambda$ .*

En consecuencia, la variable  $J_n = T_1 + \dots + T_n$  tiene distribución  $\text{gama}(n, \lambda)$ . Esta variable representa el tiempo real en el que se observa la ocurrencia del  $n$ -ésimo evento. Observe la igualdad de eventos  $(N_t \geq n) = (J_n \leq t)$ , lo cual es equivalente a decir que al tiempo  $t$  han ocurrido al menos  $n$  eventos sí, y sólo si, el  $n$ -ésimo evento ocurrió antes de  $t$ .

Por otro lado, también podemos encontrar el *proceso Poisson no homogéneo*, el cual omite la suposición de incrementos estacionarios del proceso Poisson. Esto da la posibilidad a que la tasa de arribo en los eventos no sea necesariamente constante, sino que pueda variar en el tiempo.

**Definición 2.3.3.** *Un proceso Poisson no homogéneo es un proceso  $N = \{N_t, t \geq 0\}$ , cuyo parámetro es la función de intensidad positiva y localmente integrable  $\lambda_t \geq 0$ , para  $t \geq 0$ , y que cumple con las siguientes propiedades:*

1.  $N_0 = 0$ .
2. Los incrementos son independientes.
3. Para cualesquiera  $t \geq 0$ , y cuando  $h \rightarrow 0$ ,
  - a)  $P[N_{t+\delta} - N_t \geq 1] = \lambda_t \delta + o(\delta)$ .

$$b) P[N_{t+\delta} - N_t \geq 2] = o(\delta).$$

Como se puede observar, hay gran similitud entre el proceso Poisson homogéneo y el no homogéneo salvo por dos aspectos, en lugar de la constante  $\lambda$ , tenemos ahora la función  $\lambda_t$ , además la hipótesis de incrementos estacionarios ya no aparece, lo cual es consecuencia de que el parámetro varía con el tiempo. Cabe hacer mención que la variable  $N_t$  continúa teniendo distribución Poisson.

**Proposición 2.3.2.** *La variable  $N_t$  en un proceso Poisson no homogéneo de parámetro  $\lambda_t$  tiene distribución Poisson de parámetro  $\Lambda_t$ , en donde  $\Lambda_t$  queda definida como sigue:*

$$\Lambda_t = \int_0^t \lambda_s ds,$$

lo cual es similar a la siguiente expresión, para  $n = 0, 1, \dots$

$$P[N_t = n] = e^{-\Lambda_t} \frac{[\Lambda_t]^n}{n!}.$$

Las trayectorias de un proceso Poisson no homogéneo son semejantes a las trayectorias de un proceso Poisson, es decir, son trayectorias no decrecientes y con saltos unitarios hacia arriba, salvo que la frecuencia promedio con la que aparecen los saltos cambia a lo largo del tiempo.

**Proposición 2.3.3.** *Sea  $N = \{N_t, t \geq 0\}$  un proceso Poisson no homogéneo con función de intensidad  $\lambda_t$ , la variable incremento tiene distribución Poisson de parámetro  $\Lambda_{t+s} - \Lambda_s$ , es decir,*

$$N_{t+s} - N_s \sim \text{Poisson}(\Lambda_{t+s} - \Lambda_s), \text{ para todo } s, t \geq 0.$$

Ahora bien, si la función  $\Lambda_t$  es la constante  $\lambda$ , entonces,  $\Lambda_t = \lambda t$ , de tal forma que regresaríamos al proceso Poisson homogéneo. Cuando  $\lambda_t$  es continua, entonces  $\Lambda_t$  es diferenciable y por teorema fundamental del cálculo  $\Lambda_t' = \lambda_t$ . A la función  $\Lambda_t$  se le conoce como función de intensidad, mientras que a  $\lambda_t$  se le conoce como función de valor medio.

Hemos supuesto ya que el parámetro de arriba promedio de los eventos del proceso Poisson es una función determinista  $\lambda_t$ , vamos a suponer ahora que la función  $\lambda_t$  es una variable aleatoria  $\Lambda_t$ , entonces el conjunto  $\Lambda = \{\Lambda_t, t \geq 0\}$  es un proceso estocástico, razón por la cual, al proceso  $N = \{N_t, t \geq 0\}$  se le conoce como *proceso Poisson doblemente estocástico*. Consideremos el caso cuando la variable aleatoria  $\Lambda_t$  no depende de  $t$ .

**Definición 2.3.4.** Sea  $\Lambda$  una variable aleatoria positiva. Si el proceso de conteo  $N = \{N_t, t \geq 0\}$ , dado que  $\Lambda = \lambda$  es un proceso Poisson con parámetro  $\lambda$ , entonces el proceso estocástico  $N = \{N_t, t \geq 0\}$  es llamado proceso Poisson condicional o mixto.

El proceso Poisson condicional, tiene estacionariedad, pero no tiene incrementos independientes.

Tenemos ya los elementos necesarios para poder definir un proceso de Cox. El proceso de Cox, es una generalización del proceso de Poisson cuya intensidad en la ocurrencia de cada uno de sus eventos está influenciada por un proceso externo de tal forma que la intensidad resulta ser un proceso estocástico.

**Definición 2.3.5.** Proceso Poisson doblemente estocástico o Proceso de Cox. Sea  $\Lambda = \{\Lambda_t, t \geq 0\}$  un proceso estocástico, en donde  $\Lambda_t$  no es negativa para toda  $t \geq 0$ . Si dado que  $\Lambda_t = \lambda_t$  para toda  $t \geq 0$ , el proceso de conteo  $N = \{N_t, t \geq 0\}$  es un proceso Poisson no homogéneo con función de intensidad  $\lambda_t$ , entonces a  $N = \{N_t, t \geq 0\}$  se le conoce como proceso Poisson doblemente estocástico o proceso de Cox.

Si la variable aleatoria  $\Lambda_t$  no depende de  $t$ , se tendría un proceso Poisson condicional. Además, si  $\Lambda_t$  es una función determinista  $\lambda_t$ , entonces el proceso  $N = \{N_t, t \geq 0\}$  es un proceso Poisson no homogéneo con función de intensidad  $\lambda_t$ , por lo cual podemos concluir que tanto el proceso Poisson homogéneo, el no homogéneo y el compuesto son casos particulares del proceso Poisson doblemente estocástico. Al proceso  $\Lambda = \{\Lambda_t, t \geq 0\}$  se le conoce como proceso de intensidad.

### 2.3.2. Proceso de Cox modulado de Markov

Sea  $N = \{N_t, t \geq 0\}$  un proceso de Cox, la necesidad de incrementar la flexibilidad en la ocurrencia de los eventos es lo que nos lleva a la introducción de un proceso de entorno modulado, por ello se describirá un nuevo modelo en el que dado que el proceso de Cox considera los parámetros de intensidad  $\Lambda = \{\Lambda_t, t \geq 0\}$  como un proceso estocástico, entonces éste a su vez será modulado de acuerdo a un proceso subyacente el cual dicta las condiciones del entorno del proceso de Cox, es decir, la intensidad del proceso de Cox dependerá del estado del entorno en el que se encuentre.

## 2.4. Simulación

Como ejemplo del proceso de Cox modulado de Markov vamos a estudiar el caso particular de las ventas de una cafetería.

Imagine que el dueño de una cafetería altamente concurrida, con el fin de abastecerse con materia prima necesaria para sus ventas desea saber cuál es el número de bebidas que venderá después de cierto tiempo. Está interesado no sólo en saber el número total de bebidas sino además cuántas de ellas son bebidas calientes y cuántas son frías. Sin embargo determinar la frecuencia con la que llega una persona a comprar una bebida, así como el tipo de bebida que compra (fría o caliente) dependen de la temperatura que haya en el día (caluroso, templado, frío), por tal razón es necesario agregar un proceso de saltos de Markov que será un proceso subyacente el cual modelará los cambios entre los tipos de temperaturas, de tal modo que tanto el tipo de bebida que compran los clientes así como la frecuencia de arribo de los mismos dependerán en gran medida del estado en que se encuentre este proceso subyacente, sin embargo, hay que hacer hincapié en que esta dependencia no será en su totalidad pues si esto ocurriera tendríamos un modelo determinista ya que por ejemplo, si la temperatura en un cierto tiempo  $t$  fuera calurosa implicaría que todas las personas que lleguen a comprar una bebida se lleven un café frío, lo cual no suele ser siempre así pues también existe la posibilidad de que alguna persona compre una bebida caliente, por tanto lo que hará el proceso subyacente es marcar una tendencia en el tipo de bebida que más se comprará de acuerdo al estado que tome, así como la frecuencia de arribo de los clientes.

Sea  $X = \{X_t, t \geq 0\}$  un proceso de saltos de Markov con espacio de estados  $S = \{\text{caluroso}, \text{templado}, \text{frío}\}$ , donde  $X_t$  es la temperatura al tiempo  $t$ . Este será el proceso subyacente a través del cual obtendremos las trayectorias que siguen las temperaturas en el tiempo. Sea  $G$  el generador infinitesimal que caracteriza al proceso  $X$ , que para fines de ejemplificación lo vamos a definir como sigue:

$$G = \begin{array}{c} \text{caluroso} \\ \text{templado} \\ \text{frío} \end{array} \begin{array}{ccc} \text{caluroso} & \text{templado} & \text{frío} \\ \left( \begin{array}{ccc} -1/50 & 3/200 & 1/200 \\ 3/100 & -1/25 & 1/100 \\ 3/40 & 1/40 & -1/10 \end{array} \right), \end{array}$$

a partir del cual se obtiene la siguiente matriz de probabilidades de saltos  $Q$ :

$$Q = \begin{matrix} & \begin{matrix} \text{caluroso} & \text{templado} & \text{frío} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \text{caluroso} \\ \text{templado} \\ \text{frío} \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 3/4 & 1/4 \\ 3/4 & 0 & 1/4 \\ 3/4 & 1/4 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

Además, haciendo uso de la proposición (2.2.6), donde  $\pi G = 0$ , la distribución estacionaria del proceso  $X$  es:

$$\pi = (\pi_1, \pi_2, \pi_3) = (0.65502183 \quad 0.28384279 \quad 0.06113537).$$

Suponga que el dueño de la cafetería quiere saber el número de bebidas que venderá en un lapso de 200 minutos, veamos cómo se comporta la temperatura en este periodo. El apéndice contiene el código en  $R$  para generar trayectorias de un proceso de saltos de Markov que cumple con las características mencionadas en la sección 2.2. Haciendo uso de los datos proporcionados, posibles trayectorias de este proceso se muestran en la Figura 2.4.

Una vez que se sabe cómo es el comportamiento de la temperatura en el tiempo el siguiente paso es generar las trayectorias de los tiempos de arribo de los clientes, el cual será un proceso de Cox.

Sea  $N = \{N_t, t \geq 0\}$  un proceso de Cox con parámetro  $\lambda$  donde  $N_t$  es el número de bebidas totales vendidas al tiempo  $t$ . Además  $\lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$  y está asociada a una distribución la cual se va a construir a partir del proceso de saltos de Markov, es decir, el parámetro de intensidad del proceso de Cox dependerá del estado en que se encuentra el proceso subyacente. Observe además que el proceso de Cox es un proceso Poisson, por lo cual los tiempos de arribo de los clientes siguen una distribución exponencial cuyo parámetro depende del estado en que se encuentre el proceso de saltos de Markov.

Supongamos que en promedio un cliente llega a comprar una bebida cada 5 minutos si la temperatura es calurosa; si la temperatura es templada, en promedio llega un cliente cada 10 minutos, y si la temperatura es fría entonces el tiempo promedio de arribo de un cliente son 5 minutos por lo cual,  $\lambda = \{1/5, 1/10, 1/5\}$ . Por último, suponga que cada vez que llega un cliente a la cafetería cada venta está clasificada como venta tipo  $I$  si la bebida que compra es fría y venta tipo  $II$  si la bebida que compra es caliente. Supongamos que es de tipo  $I$  con probabilidad  $p = \{p_1, p_2, p_3\}$  y es de tipo  $II$  con probabilidad  $1 - p = \{1 - p_1, 1 - p_2, 1 - p_3\}$ , las cuales dependen del estado en que se encuentre el proceso subyacente al momento del arribo.

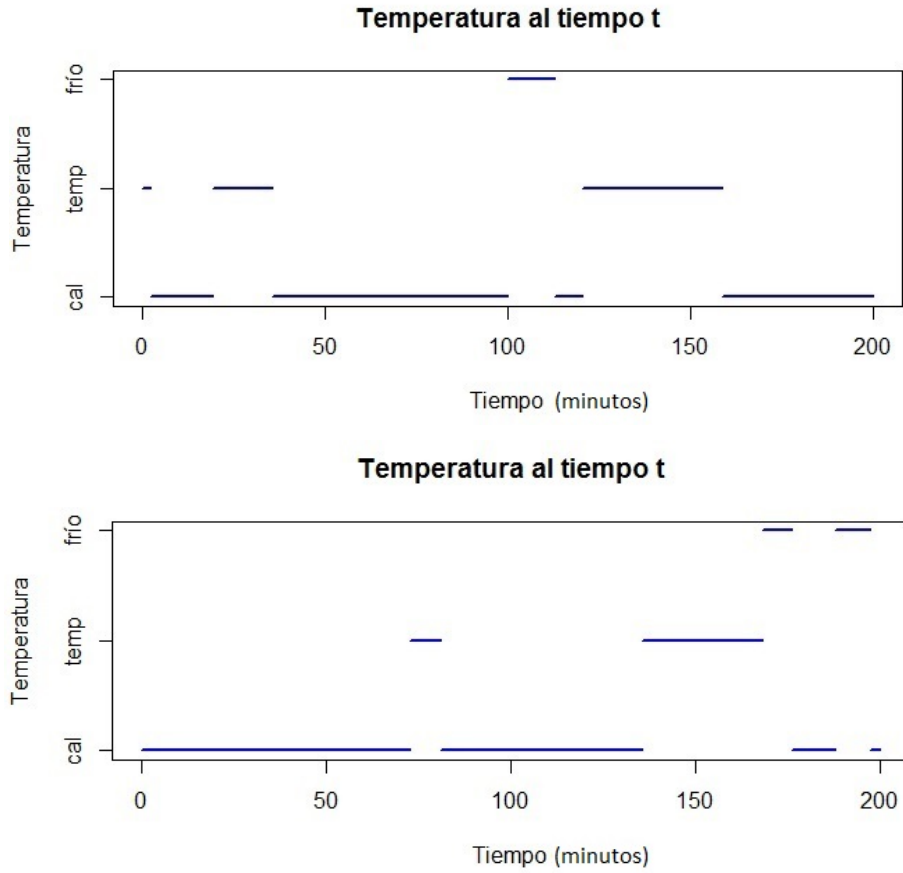


Figura 2.4: Procesos de Markov

Así, si  $N_t^I$  y  $N_t^{II}$  denotan el número de bebidas del tipo  $I$  y del tipo  $II$  que se han vendido al tiempo  $t$  respectivamente, cumplen con la siguiente propiedad:

**Proposición 2.4.1.**  $N^I = \{N_t^I, t \geq 0\}$  y  $N^{II} = \{N_t^{II}, t \geq 0\}$  son procesos de Cox independientes de parámetros  $p\lambda$  y  $(1-p)\lambda$  respectivamente.

Además, como  $N_t^I$  y  $N_t^{II}$  son independientes,  $N_t = N_t^I + N_t^{II}$ . Por lo tanto, como los procesos de Cox del número de ventas del tipo  $I$  y del tipo  $II$  dependen a su vez del proceso subyacente, también cumplen lo siguiente:

**Proposición 2.4.2.** Sea  $X = \{X_t, t \geq 0\}$  un proceso de Markov con espacio de estados  $S = \{1, \dots, m\}$  y sean  $N^I = \{N_t^I, t \geq 0\}$  y  $N^{II} = \{N_t^{II}, t \geq 0\}$

procesos de Cox independientes de parámetros  $p\lambda = \{p_i\lambda_i\}_{i=1,\dots,m}$  y  $(1-p)\lambda = \{(1-p_i)\lambda_i\}_{i=1,\dots,m}$ , respectivamente. Su esperanza se define como sigue:

$$E(N_t^I) = \sum_{i=1}^m p_i \lambda_i \pi_i t, \quad (2.37)$$

$$E(N_t^{II}) = \sum_{i=1}^m (1-p_i) \lambda_i \pi_i t, \quad (2.38)$$

donde  $\pi = \{\pi_i\}_{i=1,\dots,m}$ , es la distribución estacionaria del proceso de Markov.

Suponga que las probabilidades de comprar una bebida fría dado el estado en que se encuentra la temperatura son las siguientes  $p = (0.9, 0.5, 0.1)$ , más los datos que ya se nos han proporcionado:  $T = 200$  minutos,  $\lambda = \{1/5, 1/10, 1/5\}$ ,

$$\pi = (\pi_1, \pi_2, \pi_3) = (0.65502183 \quad 0.28384279 \quad 0.06113537).$$

Así, el número promedio teórico de bebidas vendidas frías y calientes al minuto 200 son las siguientes:

$$\begin{aligned} E(N_{200}^I) &= \sum_{i=1}^3 p_i \lambda_i \pi_i (200), \\ &= 26.66 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(N_{200}^{II}) &= \sum_{i=1}^3 (1-p_i) \lambda_i \pi_i (200) \\ &= 7.66 \end{aligned}$$

$$E(N_{200}) = E(N_{200}^I) + E(N_{200}^{II}) = 34.32.$$

En el apéndice se encuentra el código en  $R$  que permite simular una trayectoria del proceso de Cox de acuerdo a un proceso de saltos de Markov  $X$ , los siguientes son los datos que se emplearon para simular dichas trayectorias:

```

#Simulacion
tiempo <- 200
G <- matrix(c(-1/50,3/200,1/200,3/100,-1/25,1/100,3/40,
              1/40,-1/10),3,3,byrow=TRUE)
a <- proceso_saltos_markov_subyacente(G,tiempo)
prob_bebida_fria <- c(0.9,0.5,0.1)
lambdas <- c(1/5, 1/10, 1/5)
pc <- proceso_Cox(a,prob_bebida_fria,lambdas,tiempo)
pc

```

La Figura (2.5) muestra una de las trayectorias del proceso de saltos de Markov subyacente obtenida con los datos proporcionados, y será nuestra base para simular las trayectorias del proceso de Cox.

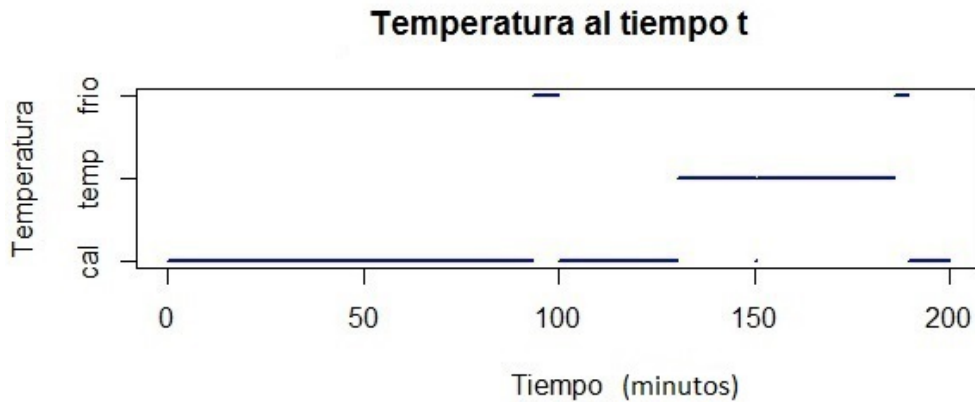


Figura 2.5: Trayectoria de un proceso de saltos de Markov

Una posible trayectoria del proceso de Cox o del proceso de ventas se puede observar en la Figura (2.6). Este gráfico muestra el tiempo de arribo de cada cliente, el tiempo que transcurre entre una venta y otra, así como el tipo de bebida que se vende en cada arribo (línea azul: bebida fría; línea roja: bebida caliente).





Figura 2.6: Trayectoria de un proceso de Cox

Como se puede observar, cuando la temperatura es calurosa hay mayor número de ventas de bebidas frías; así mismo, cuando hay temperatura fría, el número de bebidas calientes vendidas es mayor que las frías y por último, cuando la temperatura es templada, se tiene un equilibrio entre el número de bebidas frías y calientes que se venden. Los datos arrojados en esta simulación son:

bebidas frías	bebidas calientes	bebidas totales
26	8	34

Que son valores parecidos al número de ventas del tipo *I* y *II* teóricas que ya hemos calculado. Otra posible trayectoria del proceso de Cox se muestra en la Figura (2.7)

En esta trayectoria también es posible observar cuál es el comportamiento de la venta de bebidas calientes y frías de acuerdo al clima en un periodo de 200 minutos, las cuales se comportan como uno esperaría, es decir, más ventas de bebidas frías en temperatura caliente y más ventas de bebidas calientes en temperatura fría. En esta simulación, las ventas simuladas fueron las siguientes:

bebidas frías	bebidas calientes	bebidas totales
28	8	36

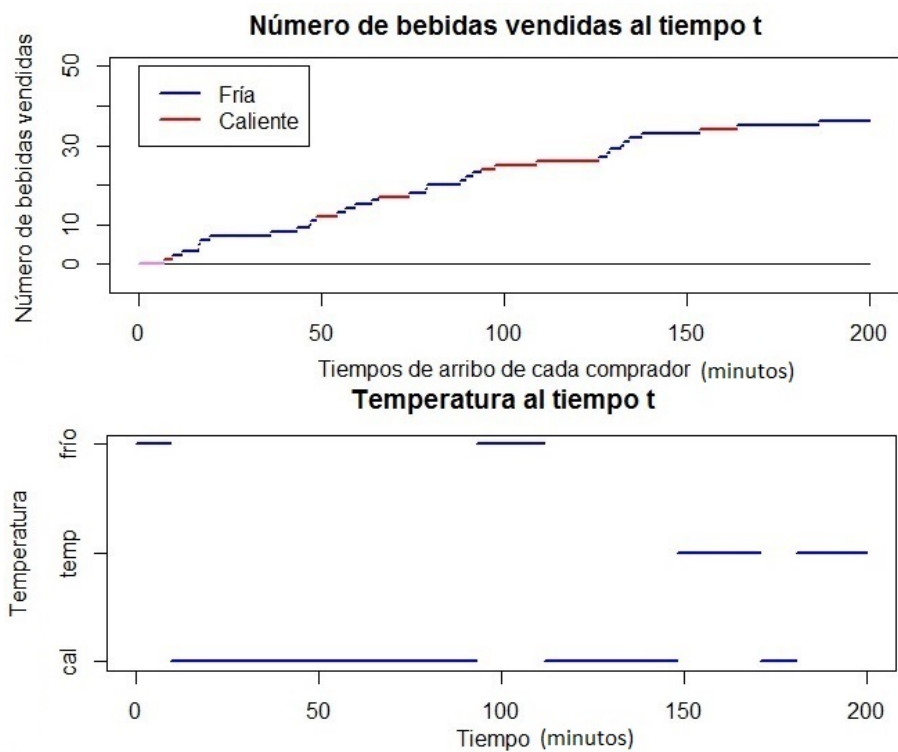


Figura 2.7: Trayectoria de un proceso de Cox

Que en comparación con los datos teóricos, se aproximan bastante. La siguiente tabla muestra los resultados de las ventas promedio al variar el número de simulaciones:

simulaciones	Bebidas vendidas		
	frías	calientes	totales
100	26.83	7.4	34.23
500	26.83	7.69	34.52
1000	26.78	7.58	34.36
1500	26.73	7.62	34.35
2000	26.72	7.65	34.37
5000	26.65	7.65	34.3
teórico	26.66	7.66	34.32

Y como podemos observar, conforme más grande es el valor de  $n$ , más nos acercamos al valor de las ventas teórico. Además, con base a la distribución estacionaria del proceso de saltos de Markov subyacente,  $\pi = (\pi_1, \pi_2, \pi_3) = (0.65502183, 0.28384279, 0.06113537)$ , se tiene una probabilidad más alta de que la temperatura esté en estado caluroso y una probabilidad muy baja de estar en temperatura fría, y de acuerdo a las probabilidades de comprar una bebida fría dado el estado en que se encuentra la temperatura,  $p = (0.9, 0.5, 0.1)$ , se puede observar que hay 0.9 de probabilidad de comprar bebida fría dado que la temperatura es calurosa y apenas un 0.1 de probabilidad de comprar una bebida caliente dado que se está en temperatura calurosa, lo cual, también cuadra con los datos que se han obtenido en las simulaciones, además, también se observa tal comportamiento en las gráficas, ya que hay mayor prevalencia en el estado caluroso que en el frío y el número de bebidas frías en comparación a las bebidas calientes es mayor.

Con este ejemplo, hemos podido apreciar muy bien cómo funciona un proceso modulado de Markov, en el capítulo siguiente nos vamos a enfocar en el modelo de riesgo modulado de Markov con tasas de interés estocásticas.

## Capítulo 3

# Modelo de Riesgo Modulado de Markov con tasas de interés estocásticas

Este capítulo contiene una introducción breve al modulado de Markov con tasas de interés estocásticas. Determinamos explícitamente la forma de los primeros momentos de un Modelo de Riesgo Modulado de Markov con tasas de interés estocásticas. Los momentos se derivan por medio de la transformada de Laplace-Stieltjes conjunta, además, las ecuaciones y fórmulas son convencionalmente representadas usando una formalización de matrices bidimensionales. El trabajo que se presenta en este apartado se desarrolló con base en el artículo de Guglielmo D'Amico [1], ya que da la posibilidad de trabajar con tasas de interés moduladas estocásticamente además de considerar una compañía que tiene distintas líneas de negocio. Un ejemplo numérico se presenta al final, con la finalidad de mostrar una aplicación del modelo y ver gráficamente cómo es que se comporta un proceso de este tipo.

Una motivación que nos lleva a construir un Modelo de Riesgo Modulado de Markov con tasas de interés estocásticas (MRMMTIE) es que el modelo clásico de riesgo asume una tasa de interés neta igual a cero, lo cual es muy restrictivo y no se apega mucho a la realidad, por tal razón vamos a considerar un modelo general que presentará una tasa de interés neto distinta de cero en los reclamos.

De aquí en adelante el capítulo se ha dividido como sigue: en la sección 3.1 se describe el modelo; en la sección 3.2 se presenta el modelo de tasas de interés,

en el cual sólo se desarrollan los resultados que son estrictamente relevantes para el análisis de los momentos y la sección 3.3 se destina para el análisis de los dos primeros momentos del Proceso de Riesgo Modulado de Markov con tasas de interés estocásticas.

### 3.1. Descripción del modelo

En el presente capítulo haremos hincapié en el modelo clásico de riesgo, también conocido como modelo de Cramer-Lundberg.

El modelo clásico de Cramer-Lundberg es el proceso a tiempo continuo  $C = \{C_t, t \geq 0\}$  dado por:

$$C_t = u + ct - \sum_{n=1}^{N_t} X_n, \quad (3.1)$$

donde  $u \geq 0$  es el capital inicial de la compañía aseguradora,  $ct$  es la entrada por primas hasta el tiempo  $t$ , con  $c > 0$  constante,  $X = \{X_n, n = 1, 2, \dots\}$  es una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con soporte en  $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ , donde cada variable aleatoria  $X_n$  representa el monto de la  $n$ -ésima reclamación y  $N_t$  es un proceso Poisson homogéneo de tasa  $\lambda$ , que modela el número de reclamos que ocurren en el intervalo  $[0, t]$ , además los montos de reclamación son independientes del número de reclamos, es decir,  $X_n$  es independiente de  $N_t$ .

Al proceso  $C_t$  se le llama *proceso de riesgo*. La Figura 3.1 muestra una trayectoria de un proceso que comienza con un capital inicial  $u$ . Los intervalos en donde estas trayectorias son continuas y crecientes, corresponden a periodos donde no hay reclamos y la compañía recibe las primas de sus asegurados. El aumento en el proceso es de la forma  $ct$ . Las discontinuidades son siempre saltos hacia abajo y aparecen en el momento en que ocurre una reclamación, lo cual está determinado por el proceso poisson homogéneo. El tamaño de un salto está dado por la variable  $X_n, n = \{1, 2, \dots, N_t\}$ .

Sin embargo este modelo no es del todo realista, pues no se sabe con certeza a cuánto equivalen cada uno de los montos de reclamos ocurridos en el intervalo de tiempo  $t$  a tiempo presente, por ello agregaremos un factor de descuento a cada uno de esos montos, con la finalidad de saber a cuánto equivalen el día de hoy y así saber cuál es el capital de la compañía en el presente, ya

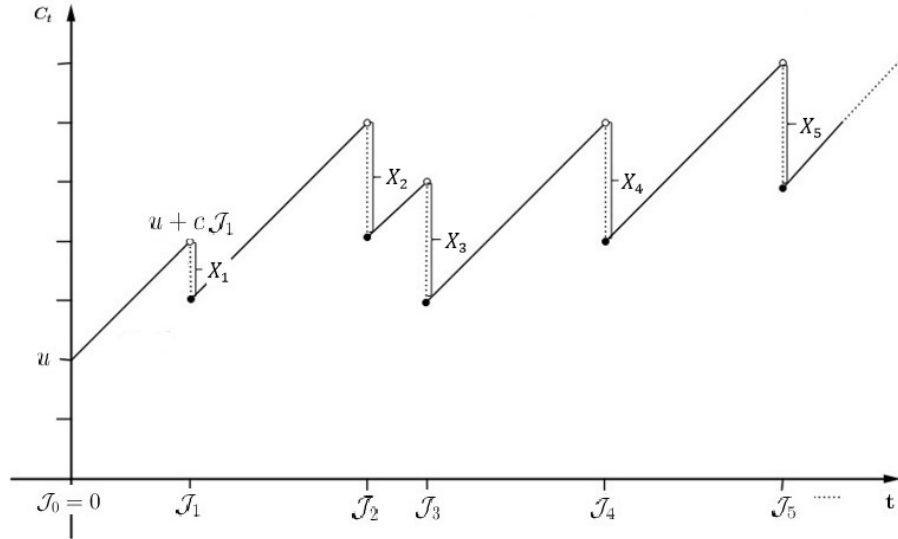


Figura 3.1: Trayectoria de un proceso de riesgo de Cramer Lundberg.

que ello permite a las aseguradoras tomar ciertas decisiones de ser necesario. De ahora en adelante sólo nos vamos a enfocar en el tercer término de la igualdad (3.1), que corresponde al monto y número de reclamos que ocurren en el intervalo de tiempo  $t$ , pues el monto acumulado por primas y el capital inicial serán constantes en el tiempo.

Vamos a definir un *proceso de reclamos agregados descontado* como sigue:

El proceso de reclamos agregados descontado se define como la suma descontada de todos los reclamos reportados hasta un tiempo  $t$ , lo vamos a representar como sigue:

$$L_t = \sum_{n=1}^{N_t} X_n e^{-\delta \cdot J_n}, \quad (3.2)$$

donde  $J_n$  es el tiempo de ocurrencia del  $n$ -ésimo reclamo,  $n = \{1, 2, \dots\}$ , además  $J_0 = 0$ ;  $N_t$  es el número de reclamos ocurridos hasta el tiempo  $t$ , esto es,  $N_t = \text{máx}\{n \in \mathbb{N}, J_n \leq t\}$ ;  $X_n$  es el tamaño del  $n$ -ésimo reclamo y  $\delta$  es la fuerza de interés constante.

Además, se asume que los reclamos agregados descontados tienen las siguientes características:

- 1) Los reclamos ocurren de acuerdo a un proceso Poisson ;

- II) El tamaño de los reclamos  $X = \{X_n, n = 1, 2, \dots\}$  se describe como una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas;
- III) El tiempo de ocurrencia de los reclamos,  $J_n$ , y el tamaño de los reclamos,  $X_n$ ,  $n = \{1, 2, \dots\}$ , son independientes.

Ahora bien, la necesidad de incrementar la flexibilidad en el tamaño y arribo de los reclamos es lo que nos lleva a la introducción de un proceso modulado, por ello, se describirá un modelo más general que considera una fuerza de interés estocástica la cual se describe por medio de un proceso de Markov y ésta a su vez es modulada de acuerdo a un proceso subyacente que dicta las condiciones del entorno del proceso de riesgo, es decir, la fuerza de interés estocástica dependerá del estado en que se encuentre el proceso en riesgo; además, también se considera el caso de una entidad que está dividida en varias líneas de negocio.

Vamos a comenzar considerando cualquier entidad la cual tiene  $k$  líneas de negocio. Sea  $Y = \{Y_t, t \geq 0\}$  un proceso de Markov con espacio de estados  $S = \{1, 2, \dots, m\}$ , que describe las condiciones del entorno del proceso de riesgo, es decir, el proceso  $Y_t$  se puede pensar como la condición económica en que se encuentra el proceso de riesgo al tiempo  $t$ . Vamos a denotar como  $G = \{g_{ij}\}_{i,j \in S}$  al generador infinitesimal del proceso de Markov  $Y$ .

Sea  $N_t^h$  el número de reclamos reportados hasta el tiempo  $t$  en la línea de negocio  $h$ ,  $h \in \{1, 2, \dots, k\}$ , además, vamos a asumir que  $N_t^h$  es un proceso Poisson doblemente estocástico con tasa de intensidad  $r_t = r_{Y_t}^h$ , que como podemos observar, dependerá tanto del estado del entorno del proceso al tiempo  $t$ , así como de la línea de negocio en que éste se encuentre.

Por  $X_n^h(Y_{s_n})$  se denotará el tamaño del  $n$ -ésimo reclamo, que como se puede observar, depende tanto de la línea de negocio  $h$ , como del estado en que se encuentra el proceso al momento de la ocurrencia del  $n$ -ésimo reclamo. Los tamaños de los reclamos son independientes dado el estado del proceso en riesgo.

Por último, hemos mencionado que en varios modelos se suele emplear una fuerza de interés constante lo cual los hace muy restrictivos, por tal razón vamos a declarar el proceso de Markov  $\delta = \{\delta_t, t \geq 0\}$  con espacio de estados  $I = \{1, 2, \dots, r\}$ , el cual describirá el proceso de las tasas de interés

instantáneas, que si bien, aunque únicamente considera un número finito de posibles estados y por tanto, se dejan fuera muchos de los posibles valores que podrían tomar las tasas de interés instantáneas, aún así este modelo nos permite tener un mejor acercamiento a la realidad. La dinámica de este proceso se describe con el generador infinitesimal  $\Pi(i) = \{\pi_{ab}(i)\}_{a,b \in I}$ ,  $i \in S$ , cuyos valores dependen del estado en que se encuentra el proceso  $Y = \{Y_t, t \geq 0\}$ , es por ello que para cada estado  $i \in S$  se tendrá un generador infinitesimal diferente.

Entonces, cada uno de los asegurados en la línea de negocio  $h$  genera un proceso de reclamos agregados, que al ser descontado equivale al siguiente valor:

$$L_t^h = \sum_{n=1}^{N_t^h} X_n^h e^{-\delta_{J_n} \cdot J_n}, \quad (3.3)$$

donde  $J_n$  es el tiempo de ocurrencia del  $n$ -ésimo reclamo.

Por tanto, si  $n^{(h)}$ , es el número de asegurados dentro de la línea de negocio  $h$ , entonces, los procesos de reclamos agregados descontados para todas las líneas de negocio  $h = \{1, \dots, k\}$  hasta el tiempo  $t$ , queda definido como:

$$\bar{L}_t = \sum_{h=1}^k n^{(h)} L_t^h. \quad (3.4)$$

Vamos a suponer además que al tiempo del  $n$ -ésimo reclamo  $J_n$ , se obtiene un capital por primas  $cJ_n$ , con  $c > 0$  constante, de tal manera que cada monto generado por primas también será descontado a tiempo presente haciendo uso de las mismas tasas de interés con que se descontará el monto del  $n$ -ésimo reclamo, así pues, habrán tantos montos descontados por primas como número de reclamos ocurran en el intervalo  $[0, t]$ . Entonces el modelo de Cramer Lundberg modulado de Markov con tasas de interés estocásticas será el proceso a tiempo continuo  $C^* = \{C_t^*, t \geq 0\}$  dado por:

$$C_t^* = u + \sum_{n=1}^{N_t^h} cJ_n e^{-\delta_{J_n} \cdot J_n} - \sum_{n=1}^{N_t^h} X_n^h e^{-\delta_{J_n} \cdot J_n}, \quad (3.5)$$

Con  $u \geq 0$  el capital inicial de la compañía aseguradora.



Una cuestión de suma importancia es la condición de ganancia neta en el modelo de riesgo modulado de Markov, ésto con el fin de saber si los ingresos por primas resultan ser mayores con respecto a los montos esperados de los siniestros, pues ello nos indicaría que los montos cobrados por primas son suficientes para cubrir todas aquellas reclamaciones por parte de los asegurados sin tener pérdidas. De acuerdo con Yi and Lu [6], la condición de ganancia neta para el modelo de riesgo de Cramer Lundberg modulado de Markov correspondiente a la línea de negocio  $w$ ,  $w \in \{h, k\}$  está dada por:

$$d^w = \sum_{i=1}^m \eta_i^w \left( \frac{c_i^w}{r_i^w} - \mu_i^w \right) > 0, \quad (3.6)$$

Donde  $c_i^w$  es el monto cobrado por prima cuando el estado del proceso subyacente es  $i$  en la línea de negocio  $w$ ;  $r_i^w$  es la tasa de intensidad en la ocurrencia de los reclamos en el estado del proceso subyacente  $i$  correspondiente a la línea de negocio  $w$ ;  $\mu_i^w$  es la media finita del monto de los reclamos correspondiente al estado del proceso subyacente  $i$  en la línea de negocio  $w$  y  $\eta_i^w$  es la única distribución estacionaria para este modelo de riesgo modulado de Markov para la línea de negocio  $w$  la cual está dada por:

$$\eta_i^w = \frac{\frac{r_i^w \pi_i}{g_i}}{\sum_{k \in S} \frac{r_k^w \pi_k}{g_k}}, \quad (3.7)$$

con  $i \in S$ ; donde  $g_i$  es la entrada  $(i, i)$  del generador infinitesimal  $G$  correspondiente al proceso de Markov subyacente  $Y$  y  $\pi = (\pi_1, \pi_2, \pi_3)$  es la distribución estacionaria del proceso  $Y$ .

## 3.2. Modelo de tasas de interés

Hemos dicho ya que trabajaremos con un modelo que considera una fuerza de interés estocástica, la cual es descrita mediante una cadena de Markov modulada por el entorno de proceso de riesgo, así mismo, dicha fuerza de interés dependerá también de las distintas líneas de negocio de la compañía.

Considere a  $Y = \{Y_t, t \geq 0\}$  un proceso de Markov con espacio de estados  $S = \{1, 2, \dots, m\}$ , el cual como dijimos en la sección anterior describe las condiciones del entorno para el negocio en riesgo, cuyo generador infinitesimal

está dado por  $G = \{g_{ij}\}_{i,j \in S}$ . Además, también considere el proceso de Markov  $\delta = \{\delta_t, t \geq 0\}$  con espacio de estados  $I = \{1, 2, \dots, r\}$  es decir, el proceso de fuerza de interés cuyo generador infinitesimal es  $\Pi(i) = (\pi_{ab}(i))_{a,b \in I}$ .

Comenzaremos denotando las probabilidades de transición al tiempo  $t$  del proceso  $(Y, \delta)$  como sigue:

$$\phi_{(i,a);(j,b)}(t) = P[Y_t = j, \delta_t = b \mid Y_0 = i, \delta_0 = a], \quad (3.8)$$

cuya probabilidad nos dice que al cabo de un periodo de tiempo  $t$  la condición económica será  $j$  y habrá una tasa de interés  $b$  dado que al tiempo cero la condición económica del mercado era  $i$  y se tenía una tasa de interés  $a$ .

Será útil representar las probabilidades de transición  $\phi_{(i,a);(j,b)}(t)$  en términos de matrices bidimensionales como se muestra a continuación.

Sea  $u = \begin{bmatrix} |S| \\ |I| \end{bmatrix}$ , donde  $|S| = m$  y  $|I| = r$  representan la cardinalidad del espacio de estados para los proceso  $Y$  y  $\delta$ , respectivamente y sea  $\Phi_{[u \times u]}(t)$  una matriz bidimensional de tamaño  $u \times u$ , por lo cual  $\Phi$  será una matriz de tamaño  $m \times m$ , cuyos elementos serán matrices de tamaño  $r \times r$  que son de la forma:

$$\Phi \begin{bmatrix} i & j \\ a & b \end{bmatrix} (t) = \phi_{(i,a);(j,b)}(t), \quad i, j \in S, a, b \in I, \quad (3.9)$$

y cumplen con la siguiente propiedad:

**Lema 3.2.1.** *Para todo  $i, j \in S, a, b \in I$ , se tiene:*

$$\begin{aligned} \Phi \begin{bmatrix} i & j \\ a & b \end{bmatrix} (t) &= \delta_{ij} e^{g_i t} (e^{\Pi(i)t})_{ab} \\ &+ \int_0^t e^{g_i u} \sum_{k \neq i \in S} \sum_{c \in I} (e^{\Pi(i)u})_{ac} g_{ik} \Phi \begin{bmatrix} k & j \\ c & b \end{bmatrix} (t - u) du. \end{aligned}$$

*NOTA:* Observe que si no se trabajara con el proceso de tasas de interés, los elementos  $(e^{\Pi(i)t})_{ab}$  y  $(e^{\Pi(i)u})_{ac}$  se anularían de la expresión y entonces obtendríamos la fórmula general para el cálculo de las probabilidades de transición al tiempo  $t$  del proceso de saltos de Markov clásico que obtuvimos en (2.2.2).

*Demostración.* Sea  $G$  el generador infinitesimal correspondiente al proceso  $Y = \{Y_t, t \geq 0\}$ . Sea  $Q = \{q_{ij}\}_{i,j \in S}$  la matriz de probabilidades de saltos la cual se define a partir de  $G$  como:

$$\lambda_i = -g_i ,$$

$$q_{ij} = \begin{cases} -\frac{g_{ij}}{g_i} & \text{si } j \neq i, \\ 0 & \text{si } j = i, \end{cases}$$

donde  $\lambda_i$  es la tasa de intensidad de los tiempos de estancia o tiempos de interarribo del proceso de Markov  $Y$ . Sea  $T_i$  el tiempo de estancia en el estado  $i$  antes de la primera transición en el entorno del proceso  $Y$ .

Por un lado se tiene que si al tiempo cero el entorno del proceso parte del estado  $i$  y éste es un estado absorbente, entonces  $\lambda_i = 0$ , entonces  $g_i = 0$  y con ello:

$$\Phi_{\begin{bmatrix} i & j \\ a & b \end{bmatrix}}(t) = \delta_{ij}(e^{\Pi(i)t})_{ab}. \quad (3.10)$$

Por ello, vamos a suponer que el estado  $i$  es no absorbente y se expresará a  $\Phi_{\begin{bmatrix} i & j \\ a & b \end{bmatrix}}(t)$  como sigue suponiendo que los estados de estancia  $T_i$  son eventos disjuntos.

$$\begin{aligned} \Phi_{\begin{bmatrix} i & j \\ a & b \end{bmatrix}}(t) &= P[Y_t = j, \delta_t = b, T_i > t \mid Y_0 = i, \delta_0 = a] \\ &+ P[Y_t = j, \delta_t = b, T_i \leq t \mid Y_0 = i, \delta_0 = a]. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Por un lado, en el primer término del lado derecho de la igualdad, usamos probabilidad condicional y se obtiene:

$$\begin{aligned} P[Y_t = j, \delta_t = b, T_i > t \mid Y_0 = i, \delta_0 = a] &= \frac{P[Y_t = j, \delta_t = b, T_i > t, Y_0 = i, \delta_0 = a]}{P[Y_0 = i, \delta_0 = a]}, \\ &= \frac{P[Y_t = j, \delta_t = b \mid T_i > t, Y_0 = i, \delta_0 = a]P[T_i > t, Y_0 = i, \delta_0 = a]}{P[Y_0 = i, \delta_0 = a]}, \\ &= P[Y_t = j, \delta_t = b \mid T_i > t, Y_0 = i, \delta_0 = a]P[T_i > t \mid Y_0 = i, \delta_0 = a]. \end{aligned}$$

Las dos últimas igualdades las obtuvimos condicionando las probabilidades. Ahora bien, el primer evento que nos gustaría que ocurriera entre  $Y_t = j$  y  $\delta_t = b$  dadas las condiciones, es que  $Y_t = j$ , pues la fuerza de interés  $\delta_t$  depende del estado que tome el entorno del proceso al tiempo  $t$ , de esta forma:

$$\begin{aligned} &= P[\delta_t = b \mid Y_t = j, T_i > t, Y_0 = i, \delta_0 = a] \cdot P[Y_t = j \mid T_i > t, Y_0 = i, \delta_0 = a] \cdot \\ &P[T_i > t \mid Y_0 = i, \delta_0 = a], \end{aligned}$$

como  $T_i > t$ , implica que  $Y_t = Y_0$ , de tal forma que al aplicar propiedades de los procesos de Markov, la igualdad se reduce a:

$$= (e^{\Pi(i)t})_{ab} \delta_{ij} e^{-\lambda_i t} = (e^{\Pi(i)t})_{ab} \delta_{ij} e^{g_i t}.$$

En esta última igualdad, como los tiempos de estancia  $T_i$  se distribuyen exponencial con parámetro  $\lambda_i$ , entonces,

$$P[T_i > t \mid Y_0 = i, \delta_0 = a] = e^{-\lambda_i t} = e^{g_i t}.$$

Con lo anterior hemos demostrado que:

$$P[Y_t = j, \delta_t = b, T_i > t \mid Y_0 = i, \delta_0 = a] = (e^{\Pi(i)t})_{ab} \delta_{ij} e^{g_i t}. \quad (3.12)$$

Por otro lado, en el segundo término del lado derecho en la igualdad (3.11) ocurre que para  $u \geq 0$ :

$$P[Y_t = j, \delta_t = b, T_i \leq t \mid Y_0 = i, \delta_0 = a] = \int_0^t f_{Y_t, \delta_t, T_i | Y_0, \delta_0}(j, b, u \mid i, a) du,$$

agregamos un estado  $k \in S, k \neq i$ , y un estado  $c \in I$ , que son los estados que tomarán al cabo de un tiempo  $u$  tanto el proceso de entorno del negocio en riesgo así como la fuerza de interés respectivamente, haciendo correr tanto a  $k$  como a  $c$  sobre todo el espacio de estados  $S$  e  $I$ . En el intervalo de tiempo anterior a  $u$  ambos procesos permanecen en sus estados iniciales,  $i$  y  $a$ , así:

$$P[Y_t = j, \delta_t = b, T_i \leq t \mid Y_0 = i, \delta_0 = a] = \int_0^t \sum_{k \neq i \in S} \sum_{c \in I} f_{Y_t, \delta_t, Y_u, \delta_u, T_i | Y_0, \delta_0}(j, b, k, c, u \mid i, a) du. \quad (3.13)$$

Trabajaremos a continuación con la función de probabilidad condicional. Observemos la siguiente igualdad para  $f_{Y_t, \delta_t, Y_u, \delta_u, T_i | Y_0, \delta_0}(j, b, k, c, u \mid i, a)$  al ser condicionada varias veces:

$$\begin{aligned} f_{Y_t, \delta_t, Y_u, \delta_u, T_i | Y_0, \delta_0}(j, b, k, c, u \mid i, a) &= P[Y_t = j, \delta_t = b, Y_u = k, \delta_u = c, T_i = u \\ &\quad \mid Y_0 = i, \delta_0 = a] \\ &= P[Y_t = j, \delta_t = b \mid Y_u = k, \delta_u = c, T_i = u, Y_0 = i, \delta_0 = a] \cdot \\ &\quad P[Y_u = k, \delta_u = c \mid T_i = u, Y_0 = i, \delta_0 = a] \cdot \\ &\quad P[T_i = u \mid Y_0 = i, \delta_0 = a], \\ &= P[Y_t = j, \delta_t = b \mid Y_u = k, \delta_u = c] \cdot \\ &\quad P[Y_u = k, \delta_u = c \mid T_i = u, Y_0 = i, \delta_0 = a] \cdot \\ &\quad P[T_i = u \mid Y_0 = i, \delta_0 = a], \end{aligned}$$

En esta última expresión hicimos uso de la propiedad de Markov. Ahora bien, separando la segunda probabilidad de acuerdo al orden de ocurrencia de los procesos, es decir, dadas las condiciones, primero ocurre el proceso  $Y_u$  y una vez que se sabe el estado que toma, entonces se puede asignar un valor a  $\delta_u$ , con lo cual,

$$\begin{aligned}
&= P[Y_t = j, \delta_t = b \mid Y_u = k, \delta_u = c] \cdot \\
&\quad P[\delta_u = c \mid Y_u = k, T_i = u, Y_0 = i, \delta_0 = a] \cdot \\
&\quad P[Y_u = k \mid T_i = u, Y_0 = i, \delta_0 = a] \cdot \\
&\quad P[T_i = u \mid Y_0 = i, \delta_0 = a], \\
&= \Phi_{\begin{bmatrix} k & j \\ c & b \end{bmatrix}}(t - u) (e^{\Pi(i)u})_{ac} g_{ik} \lambda_i e^{-\lambda_i u} \\
&= \Phi_{\begin{bmatrix} k & j \\ c & b \end{bmatrix}}(t - u) (e^{\Pi(i)u})_{ac} \left(-\frac{g_{ik}}{g_i}\right) (-g_i e^{g_i u}) \\
&= \Phi_{\begin{bmatrix} k & j \\ c & b \end{bmatrix}}(t - u) (e^{\Pi(i)u})_{ac} g_{ik} e^{g_i u}.
\end{aligned}$$

por lo tanto hemos encontrado que:

$$f_{Y_t, \delta_t, Y_u, \delta_u, T_i | Y_0, \delta_0}(j, b, k, c, u \mid i, a) = \Phi_{\begin{bmatrix} k & j \\ c & b \end{bmatrix}}(t - u) (e^{\Pi(i)u})_{ac} g_{ik} e^{g_i u}. \quad (3.14)$$

Se sustituye (3.14) en (3.13) y obtenemos que,

$$\begin{aligned}
&P[Y_t = j, \delta_t = b, T_i \leq t \mid Y_0 = i, \delta_0 = a] = \\
&\int_0^t e^{g_i u} \sum_{k \neq i \in S} \sum_{c \in I} (e^{\Pi(i)u})_{ac} g_{ik} \Phi_{\begin{bmatrix} k & j \\ c & b \end{bmatrix}}(t - u) du. \quad (3.15)
\end{aligned}$$

Por último, se reemplazan las expresiones (3.12) y (3.15) en (3.11) y se obtiene lo que queríamos demostrar,

$$\begin{aligned}
\Phi_{\begin{bmatrix} i & j \\ a & b \end{bmatrix}}(t) &= \delta_{ij} e^{g_i t} (e^{\Pi(i)t})_{ab} \\
&+ \int_0^t e^{g_i u} \sum_{k \neq i \in S} \sum_{c \in I} (e^{\Pi(i)u})_{ac} g_{ik} \Phi_{\begin{bmatrix} k & j \\ c & b \end{bmatrix}}(t - u) du.
\end{aligned}$$

□

Con el resultado anterior, se han calculado las probabilidades de transición al tiempo  $t$  para el proceso de Markov  $(Y, \delta)$  de las cuales se desprende el

siguiente resultado, que no es más que la ecuación diferencial retrospectiva de Kolmogorov para el proceso de Markov  $(Y, \delta)$ , la cual es análoga a la ecuación diferencial retrospectiva de Kolmogorov del proceso de saltos de Markov clásico que fue definida en (2.28).

**Teorema 3.2.2.** Sean  $(Y, \delta)$  procesos de Markov con espacios de estados finitos  $S$  e  $I$  respectivamente, entonces, la ecuación retrospectiva de Kolmogorov para  $(Y, \delta)$  está dada por:

$$\Phi'_{[u \ u]}(t) = \Lambda_{[u \ u]} \otimes \Phi_{[u \ u]}(t), \quad (3.16)$$

donde  $\otimes$  indica el producto entre matrices y para toda  $i, j \in S$ ,  $a, b \in I$ ,

$$\Lambda_{\begin{bmatrix} i & j \\ a & b \end{bmatrix}} = \begin{cases} g_i + \pi_{aa}(i) & \text{si } i = j, a = b, \\ \pi_{ab}(i) & \text{si } i = j, a \neq b, \\ g_{ij} & \text{si } i \neq j, a = b, \\ 0 & \text{e.o.c.} \end{cases} \quad (3.17)$$

es el generador infinitesimal del proceso de Markov  $(Y, \delta)$  con espacio de estados  $S \times I$ .

*Demostración.* Por el Lema 3.2.1 sabemos que,

$$\begin{aligned} \Phi_{\begin{bmatrix} i & j \\ a & b \end{bmatrix}}(t) &= \delta_{ij} e^{g_i t} (e^{\Pi(i)t})_{ab} \\ &+ \int_0^t e^{g_i u} \sum_{k \neq i \in S} \sum_{c \in I} (e^{\Pi(i)u})_{ac} g_{ik} \Phi_{\begin{bmatrix} k & j \\ c & b \end{bmatrix}}(t-u) du, \end{aligned}$$

se hace un cambio de variable,  $v = t - u$ , así,

$$\begin{aligned} \Phi_{\begin{bmatrix} i & j \\ a & b \end{bmatrix}}(t) &= \delta_{ij} e^{g_i t} (e^{\Pi(i)t})_{ab} \\ &+ \int_0^t e^{g_i(t-v)} \sum_{k \neq i \in S} \sum_{c \in I} (e^{\Pi(i)(t-v)})_{ac} g_{ik} \Phi_{\begin{bmatrix} k & j \\ c & b \end{bmatrix}}(v) dv, \end{aligned} \quad (3.18)$$

calculando la parcial con respecto de  $t$ ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi_{\begin{bmatrix} i & j \\ a & b \end{bmatrix}}(t)}{\partial t} &= \delta_{ij} (g_i) e^{g_i t} (e^{\Pi(i)t})_{ab} + \delta_{ij} e^{g_i t} (\Pi(i) e^{\Pi(i)t})_{ab} \\ &+ \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t e^{g_i(t-v)} \sum_{k \neq i \in S} \sum_{c \in I} (e^{\Pi(i)(t-v)})_{ac} g_{ik} \Phi_{\begin{bmatrix} k & j \\ c & b \end{bmatrix}}(v) dv, \end{aligned}$$

en el tercer término, se hace uso de la regla de la derivación de Leibniz [ver Apéndice B],

$$\begin{aligned}
&= \delta_{ij}(g_i)e^{g_it} (e^{\Pi(i)t})_{ab} + \delta_{ij} e^{g_it} (\Pi(i)e^{\Pi(i)t})_{ab} \\
&+ \left( e^{g_i(t-t)} \sum_{k \neq i \in S} \sum_{c \in I} (e^{\Pi(i)(t-t)})_{ac} g_{ik} \Phi_{[c \ j]}^{[k \ j]}(t) \right) \left( \frac{d}{dt} t \right) \\
&+ \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} \left( e^{g_i(t-v)} \sum_{k \neq i \in S} \sum_{c \in I} (e^{\Pi(i)(t-v)})_{ac} g_{ik} \Phi_{[c \ j]}^{[k \ j]}(v) dv \right),
\end{aligned}$$

derivando el término que está dentro de la integral,

$$\begin{aligned}
&= \delta_{ij}(g_i)e^{g_it} (e^{\Pi(i)t})_{ab} + \delta_{ij} e^{g_it} (\Pi(i)e^{\Pi(i)t})_{ab} \\
&+ \sum_{k \neq i \in S} \sum_{c \in I} \delta_{ac} g_{ik} \Phi_{[c \ j]}^{[k \ j]}(t) \\
&+ \int_0^t (g_i)e^{g_i(t-v)} \sum_{k \neq i \in S} \sum_{c \in I} (e^{\Pi(i)(t-v)})_{ac} g_{ik} \Phi_{[c \ j]}^{[k \ j]}(v) dv \\
&+ \int_0^t e^{g_i(t-v)} \sum_{k \neq i \in S} \sum_{c \in I} (\Pi(i)e^{\Pi(i)(t-v)})_{ac} g_{ik} \Phi_{[c \ j]}^{[k \ j]}(v) dv,
\end{aligned}$$

reacomodando términos,

$$\begin{aligned}
&= \delta_{ij} e^{g_it} (\Pi(i)e^{\Pi(i)t})_{ab} + \delta_{ij} g_i e^{g_it} (e^{\Pi(i)t})_{ab} \\
&+ \sum_{k \neq i \in S} \sum_{c \in I} \delta_{ac} g_{ik} \Phi_{[c \ j]}^{[k \ j]}(t) \\
&+ g_i \int_0^t e^{g_i(t-v)} \sum_{k \neq i \in S} \sum_{c \in I} (e^{\Pi(i)(t-v)})_{ac} g_{ik} \Phi_{[c \ j]}^{[k \ j]}(v) dv \\
&+ \int_0^t e^{g_i(t-v)} \sum_{k \neq i \in S} \sum_{c \in I} (\Pi(i)e^{\Pi(i)(t-v)})_{ac} g_{ik} \Phi_{[c \ j]}^{[k \ j]}(v) dv,
\end{aligned}$$

factorizando  $g_i$  del segundo y cuarto término:

$$\begin{aligned}
&= g_i \left( \delta_{ij} e^{g_i t} (e^{\Pi(i)t})_{ab} + \int_0^t e^{g_i(t-v)} \sum_{k \neq i \in S} \sum_{c \in I} (e^{\Pi(i)(t-v)})_{ac} g_{ik} \Phi_{[c \ b]}^{[k \ j]}(v) dv \right) \\
&+ \sum_{k \neq i \in S} \sum_{c \in I} \delta_{ac} g_{ik} \Phi_{[c \ b]}^{[k \ j]}(t) + \delta_{ij} e^{g_i t} (\Pi(i) e^{\Pi(i)t})_{ab} \\
&+ \int_0^t e^{g_i(t-v)} \sum_{k \neq i \in S} \sum_{c \in I} (\Pi(i) e^{\pi(i)(t-v)})_{ac} g_{ik} \Phi_{[c \ b]}^{[k \ j]}(v) dv,
\end{aligned}$$

ahora bien, observe que el término que está dentro del paréntesis de la igualdad anterior corresponde a  $\Phi_{[a \ b]}^{[i \ j]}(t)$ , por lo cual se sustituirá a éste último y además se descompondrá al proceso  $\Pi$  como sigue:

$$\begin{aligned}
&= g_i \Phi_{[a \ b]}^{[i \ j]}(t) + \sum_{k \neq i \in S} \sum_{c \in I} \delta_{ac} g_{ik} \Phi_{[c \ b]}^{[k \ j]}(t) + \sum_{l \in I} \pi_{al}(i) \left[ \delta_{ij} e^{g_i t} (e^{\Pi(i)t})_{lb} \right. \\
&\left. + \int_0^t e^{g_i(t-v)} \sum_{k \neq i \in S} \sum_{c \in I} (e^{\Pi(i)(t-v)})_{lc} g_{ik} \Phi_{[c \ b]}^{[k \ j]}(v) dv \right],
\end{aligned}$$

donde de acuerdo a su definición, la expresión que está dentro del corchete del tercer término corresponde a  $\Phi_{[l \ b]}^{[i \ j]}(t)$ , por lo cual,

$$= g_i \Phi_{[a \ b]}^{[i \ j]}(t) + \sum_{k \neq i \in S} \sum_{c \in I} \delta_{ac} g_{ik} \Phi_{[c \ b]}^{[k \ j]}(t) + \sum_{l \in I} \pi_{al}(i) \Phi_{[l \ b]}^{[i \ j]}(t),$$

separando la suma del tercer término con los índices de acuerdo a  $l \neq a$  y  $l = a$ ,

$$\begin{aligned}
&= g_i \Phi_{[a \ b]}^{[i \ j]}(t) + \sum_{k \neq i \in S} \sum_{c \in I} \delta_{ac} g_{ik} \Phi_{[c \ b]}^{[k \ j]}(t) + \sum_{l \neq a \in I} \pi_{al}(i) \Phi_{[l \ b]}^{[i \ j]}(t) \\
&+ \pi_{aa}(i) \Phi_{[a \ b]}^{[i \ j]}(t),
\end{aligned}$$

factorizando  $\Phi_{[a \ b]}^{[i \ j]}(t)$  del primer y cuarto término,

$$= (g_i + \pi_{aa}(i)) \Phi_{[a \ b]}^{[i \ j]}(t) + \sum_{k \neq i \in S} g_{ik} \Phi_{[a \ b]}^{[k \ j]}(t) + \sum_{l \neq a \in I} \pi_{al}(i) \Phi_{[l \ b]}^{[i \ j]}(t),$$

y aplicando la formalización a matrices de dos dimensiones, efectivamente se prueba que:



$$\Phi'_{[u u]}(t) = \Lambda_{[u u]} \otimes \Phi_{[u u]}(t), \quad (3.19)$$

donde  $\otimes$  es el producto entre matrices, y

$$\Lambda_{\begin{bmatrix} i & j \\ a & b \end{bmatrix}} = \begin{cases} g_i + \pi_{aa}(i) & \text{si } i = j, a = b, \\ \pi_{ab}(i) & \text{si } i = j, a \neq b, \\ g_{ij} & \text{si } i \neq j, a = b, \\ 0 & \text{e.o.c.} \end{cases} \quad (3.20)$$

□

Cabe hacer mención que los elementos de la matriz  $\Lambda$  tienen las siguientes propiedades:

- 1)  $\Lambda_{\begin{bmatrix} i & j \\ a & b \end{bmatrix}} \geq 0$ , para  $i \neq j$  y  $a \neq b$ , es decir, los elementos fuera de la diagonal son positivos;
- 2)  $\Lambda_{\begin{bmatrix} i & i \\ a & a \end{bmatrix}} < 0$ , para todo  $i$  y  $a$ , es decir, los elementos de la diagonal son negativos;
- 3)  $\sum_{j \in S} \sum_{b \in I} \Lambda_{\begin{bmatrix} i & j \\ a & b \end{bmatrix}} = 0$ , para toda  $i$ , es decir, las sumas de las filas de  $\Lambda$  son todas cero.

Consecuentemente, se reconoce a  $\Lambda$  como el generador infinitesimal del proceso de Markov  $(Y, \delta)$  con espacio de estados a lo más numerable  $S \times I$ .

Para facilitar la notación, vamos a denotar a  $\pi_{aa}(i)$  como  $\pi_a(i)$ .

**Ejemplo 3.2.1.** *Supóngase que  $|S| = 2$  y  $|I| = 3$ , entonces la matriz  $\Lambda$ , tendrá la siguiente forma:*

$$\Lambda = \left[ \begin{array}{c} \begin{bmatrix} g_1 + \pi_1(1) & \pi_{12}(1) & \pi_{13}(1) \\ \pi_{21}(1) & g_1 + \pi_2(1) & \pi_{23}(1) \\ \pi_{31}(1) & \pi_{32}(1) & g_1 + \pi_3(1) \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} g_{21} & 0 & 0 \\ 0 & g_{21} & 0 \\ 0 & 0 & g_{21} \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \begin{bmatrix} g_{12} & 0 & 0 \\ 0 & g_{12} & 0 \\ 0 & 0 & g_{12} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} g_2 + \pi_1(2) & \pi_{12}(2) & \pi_{13}(2) \\ \pi_{21}(2) & g_2 + \pi_2(2) & \pi_{23}(2) \\ \pi_{31}(2) & \pi_{32}(2) & g_2 + \pi_3(2) \end{bmatrix} \end{array} \right].$$

y con ello, el elemento correspondiente a los índices  $i = 1, j = 1, a = 2, b = 3$  es:

$$\Lambda_{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}} = \pi_{23}(1).$$

### 3.3. Análisis del proceso de riesgo

El objetivo en el siguiente apartado es establecer expresiones explícitas para los dos primeros momentos de un proceso de reclamos agregados descontado y nos vamos a enfocar únicamente en dos líneas de negocio, la cuales denominaremos como  $h$  y  $k$ . Se desarrollará un sistema de ecuaciones diferenciales para la transformada de Laplace-Stieltjes conjunta de la distribución de los reclamos agregados descontados; para dicho desarrollo, se hará uso del artículo [1], ya que considera nuestro caso más general para el modelo de riesgo modulado con Markov con tasas de interés estocásticas con dos líneas de negocio  $\{h, k\}$ . Sin embargo también se usará como referencia el artículo [4]. Si desea profundizar más acerca de las propiedades de la transformada de Laplace-Stieltjes conjunta consulte [3] y [8].

Hemos mencionado ya que cada uno de los asegurados en la línea de negocio  $h$ , genera un proceso de reclamos agregados descontado equivalente a:

$$L_t^h = \sum_{n=1}^{N_t^h} X_n^h e^{-\delta_{J_n} \cdot J_n}, \quad (3.21)$$

donde  $N_t^h$  es el número de reclamos reportados hasta el tiempo  $t$  en la línea de negocio  $h$ ,  $X_n^h$  es el tamaño del  $n$ -ésimo reclamo en la línea de negocio  $h$ ,  $J_n$  el tiempo de ocurrencia del  $n$ -ésimo reclamo y  $\delta_{J_n}$  la tasa de interés en el momento del  $n$ -ésimo reclamo. A partir de ello vamos a definir un proceso de reclamos agregado descontado  $z$ -trasladado como sigue:

**Definición 3.3.1.** *Se dice que un proceso de reclamos agregados descontado relativo a una línea de negocio  $h$ , es  $z$ -trasladado si para cualquier  $z \geq 0$ :*

$$L_{(t,z)}^h = \sum_{n=1}^{N_t^h} X_n^h e^{-\delta_{J_n} \cdot (J_n + z)}, \quad (3.22)$$

Como se puede observar, el proceso anterior se obtiene al multiplicar cada uno de los reclamos descontados  $X_n^h e^{-\delta_{J_n} \cdot J_n}$  por el factor aleatorio  $e^{-\delta_{J_n} \cdot z}$ ,  $z \geq 0$ . Nótese que si  $z = 0$ , entonces  $L_{(t,0)}^h$  es igual a  $L_t^h$ .

Ahora bien, se ha introducido el proceso de reclamos agregados descontado  $z$ -trasladado con la finalidad de tener una representación conveniente de los incrementos  $L_{(t+z,0)}^h - L_{(t,0)}^h$ , ya que al hacer uso de matrices bidimensionales

es posible escribirlo de forma recursiva, de tal forma que se pueda representar por un simple producto de matrices.

Considere a  $Y = \{Y_t, t \geq 0\}$ , el proceso de Markov subyacente con espacio de estados  $S = \{1, 2, \dots, m\}$  como ya lo hemos definido anteriormente, el cual describe las condiciones del entorno del negocio en riesgo. Vamos a pensar a  $Y_t$  como la condición económica que se presenta al tiempo  $t$ , entonces  $Y_{J_n}$  será la condición económica en el momento del  $n$ -ésimo reclamo. Considérese también el proceso de Markov  $\delta = \{\delta_t, t \geq 0\}$  con las características ya descritas anteriormente, el cual describe el proceso de las tasas de interés instantáneas cuyo espacio de estados es  $I = \{1, 2, \dots, r\}$ . Ahora bien, se va a denotar como  $\mathbb{E}_{(i,a)}$  a la esperanza condicional dado que el estado del proceso subyacente  $Y$  al tiempo cero es  $i$ , y estado del proceso de tasas de interés al tiempo cero es  $a$ , es decir,  $\{Y_0 = i, \delta_0 = a\}$ , con  $i \in S, a \in I$ . Se define a continuación la transformada de Laplace- Stieltjes conjunta para los procesos de reclamos agregados descontados al tiempo  $t$   $z$ -trasladados para las líneas de negocio  $h$  y  $k$ .

**Definición 3.3.2.** *La transformada de Laplace-Stieltjes conjunta para los procesos de reclamos agregados descontados al tiempo  $t$   $z$ -trasladados correspondientes a dos líneas de negocio distintas  $h, k$ , está dada por:*

$$f_{\begin{bmatrix} i & j \\ a & b \end{bmatrix}}(x_h, x_k; t, z) = \mathbb{E}_{(i,a)} \left[ e^{-(x_h L_{(t,z)}^h + x_k L_{(t,z)}^k)} 1_{\{Y_t=j, \delta_t=b\}} \right], \quad (3.23)$$

con  $z \geq 0$  y  $t \geq 0$ .

Vamos a denotar como  $F_{[u,u]}(x_h, x_k; t, z)$  a la matriz bidimensional, de orden en filas y columnas de  $u \times u$ , de tal forma que el elemento en la entrada  $((i, a), (j, b))$  corresponde al elemento  $f_{\begin{bmatrix} i & j \\ a & b \end{bmatrix}}(x_h, x_k; t, z)$ .

Una vez definido lo anterior se demostrarán algunas de las propiedades que cumplen las matrices bidimensionales  $F_{[u,u]}(x_h, x_k; t, z)$ , cuyos elementos corresponden a transformadas de Laplace-Stieltjes conjuntas, dichas propiedades servirán de apoyo para cumplir con el objetivo de obtener las fórmulas explícitas para los primeros dos momentos de un proceso de reclamos agregados descontado para cada línea de negocio del proceso de riesgo modulado de Markov.

De ahora en adelante se entenderá que todas las matrices son del orden de filas y de columnas  $u \times u$  respectivamente, y para facilitar la notación no

se mostrarán los índices dimensionales en ellas, salvo en los casos donde sea necesario.

A continuación habrá un pequeño paréntesis para demostrar la siguiente proposición, la cual nos será útil para la demostración de la proposición subsecuente.

Sea  $L_{(t+z,0)}^h - L_{(t,0)}^h$  el incremento que hay entre los procesos de reclamos agregados descontados en la línea de negocio  $h$  correspondientes a los tiempos  $t+z$  y  $t$ , es decir, el incremento que hay en los reclamos después de un tiempo  $z > 0$  partiendo de  $t$  y vamos a suponer que  $Y_t = i$  y  $\delta_t = a$ . Ahora bien, sea  $L_{(z,t)}^h$  el proceso al tiempo  $z$  de los reclamos agregados descontados  $t$ -trasladado correspondiente a la línea de negocio  $h$  y supongamos que en este caso se tiene que  $Y_0 = i$  y  $\delta_0 = a$ . Si denotamos como  $D(Y)$  como la distribución de probabilidad de alguna variable aleatoria  $Y$ , entonces la siguiente proposición es válida:

**Proposición 3.3.1.** *Sea  $z \geq 0$ ,  $t \geq 0$ ,  $i \in S$ ,  $a \in I$  y  $h$  una línea de negocio. Se cumple que:*

$$D(L_{(t+z,0)}^h - L_{(t,0)}^h \mid Y_t = i, \delta_t = a) = D(L_{(z,t)}^h \mid Y_0 = i, \delta_0 = a).$$

*Demostración.* Para probar esta igualdad, es suficiente hacer la siguiente representación:

$$\begin{aligned} L_{(t+z,0)}^h - L_{(t,0)}^h &= \sum_{n=1}^{N_{t+z}^h} X_n^h e^{-\delta_{J_n} \cdot J_n} - \sum_{n=1}^{N_t^h} X_n^h e^{-\delta_{J_n} \cdot J_n} \\ &= \sum_{n=N_t^h+1}^{N_{t+z}^h} X_n^h e^{-\delta_{J_n} \cdot J_n} = \sum_{m=1}^{N_{t+z}^h - N_t^h} X_{m+N_t^h}^h e^{-\left(\delta_{J_{m+N_t^h}}\right) \cdot \left(J_{m+N_t^h}\right)}. \end{aligned}$$

En la última expresión se hizo el cambio de variable  $m = n - N_t^h$ . Con base en la última expresión es posible concluir las siguientes igualdades relacionadas con las distribuciones, las cuales son válidas para toda  $i \in S$  y para toda  $a \in I$ . Recuerde que  $N_0^h = 0$ , entonces las siguientes igualdades son válidas al hacer  $t = 0$ :

$$1) \ D(X_{m+N_t^h}^h \mid Y_t = i) = D(X_m^h \mid Y_0 = i);$$

- II)  $D(J_{m+N_t^h} | Y_t = i) = D(J_m + t | Y_0 = i)$ ;
- III)  $D(N_{t+z}^h - N_t^h | Y_t = i) = D(N_z^h | Y_0 = i)$ ;
- IV)  $D(\delta_{J_{m+N_t^h}} | Y_t = i, \delta_t = a) = D(\delta_{J_m} | Y_0 = i, \delta_0 = a)$ .

por lo tanto,

$$D(L_{(t+z,0)}^h - L_{(t,0)}^h | Y_t = i, \delta_t = a) = D(L_{(z,t)}^h | Y_0 = i, \delta_0 = a)$$

□

La siguiente proposición enuncia una de las propiedades de las matrices bidimensionales.

**Proposición 3.3.2.** *Sean  $h, k$ , dos líneas de negocio distintas. Para cada pareja  $(h, k)$  y para todo  $x_h \geq 0, x_k \geq 0, t \geq 0$  y  $z \geq 0$ , se cumple que:*

$$F(x_h, x_k; t + z, 0) = F(x_h, x_k; t, 0) \otimes F(x_h, x_k; z, t), \quad (3.24)$$

donde  $\otimes$  denota el producto entre dos matrices bidimensionales.

*Demostración.* Sea  $f_{\begin{bmatrix} i & j \\ a & b \end{bmatrix}}(x_h, x_k; t + z, 0)$  el elemento  $((i, a), (j, b))$  de  $F(x_h, x_k; t + z, 0)$  para  $i, j \in S, a, b \in I$ . Por definición se tiene que,

$$f_{\begin{bmatrix} i & j \\ a & b \end{bmatrix}}(x_h, x_k; t + z, 0) = \mathbb{E}_{(i,a)} \left[ e^{-(x_h L_{(t+z,0)}^h + x_k L_{(t+z,0)}^k)} \mathbf{1}_{\{Y_{t+z}=j, \delta_{t+z}=b\}} \right],$$

aplicando propiedad de esperanza condicional,

$$= \mathbb{E}_{(i,a)} \left[ \mathbb{E}_{(i,a)} \left[ e^{-(x_h L_{(t+z,0)}^h + x_k L_{(t+z,0)}^k)} \mathbf{1}_{\{Y_{t+z}=j, \delta_{t+z}=b\}} \mid Y_t, \delta_t \right] \right],$$

separamos la exponencial y se agrega en ambos exponentes un cero disfrazado como sigue:

$$= \mathbb{E}_{(i,a)} \left[ \mathbb{E}_{(i,a)} \left[ e^{-(x_h (L_{(t+z,0)}^h + L_{(t,0)}^h - L_{(t,0)}^h))} \cdot e^{-(x_k (L_{(t+z,0)}^k + L_{(t,0)}^k - L_{(t,0)}^k))} \mathbf{1}_{\{Y_{t+z}=j, \delta_{t+z}=b\}} \mid Y_t, \delta_t \right] \right],$$

se separan los términos de las exponenciales correspondientes a  $L^h(t, 0)$  y  $L^k(t, 0)$  y como ya son constantes salen de la esperanza,

$$\begin{aligned}
&= \mathbb{E}_{(i,a)} \left[ e^{-x_h L^h_{(t,0)}} \cdot e^{-x_k L^k_{(t,0)}} \mathbb{E}_{(i,a)} \left[ e^{-(x_h(L^h_{(t+z,0)} - L^h_{(t,0)}))} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \cdot e^{-(x_k(L^k_{(t+z,0)} - L^k_{(t,0)}))} \mathbf{1}_{\{Y_{t+z}=j, \delta_{t+z}=b\}} \mid Y_t, \delta_t \right] \right] \\
&= \mathbb{E}_{(i,a)} \left[ e^{-(x_h L^h_{(t,0)} + x_k L^k_{(t,0)})} \right. \\
&\quad \left. \cdot \mathbb{E}_{(i,a)} \left[ e^{-(x_h(L^h_{(t+z,0)} - L^h_{(t,0)}) + x_k(L^k_{(t+z,0)} - L^k_{(t,0)}))} \mathbf{1}_{\{Y_{t+z}=j, \delta_{t+z}=b\}} \mid Y_t, \delta_t \right] \right] \tag{3.25}
\end{aligned}$$

al hacer uso de la proposición (3.3.1) la esperanza interior se reduce, de tal forma que,

$$\begin{aligned}
f_{\begin{bmatrix} i & j \\ a & b \end{bmatrix}}(x_h, x_k; t+z, 0) &= \mathbb{E}_{(i,a)} \left[ e^{-(x_h L^h_{(t,0)} + x_k L^k_{(t,0)})} \right. \\
&\quad \left. \mathbb{E}_{(Y_t, \delta_t)} \left[ e^{-(x_h L^h_{(z,t)} + x_k L^k_{(z,t)})} \mathbf{1}_{\{Y_z=j, \delta_z=b\}} \right] \right] \\
&= \mathbb{E}_{(i,a)} \left[ e^{-(x_h L^h_{(t,0)} + x_k L^k_{(t,0)})} \cdot f_{\begin{bmatrix} Y_t & j \\ \delta_t & b \end{bmatrix}}(x_h, x_k; z, t) \right].
\end{aligned}$$

Por último, vamos a sumar sobre todos los valores posibles que pueden tomar los procesos  $Y_t$  y  $\delta_t$  para sus respectivos estados  $c \in S$  y  $d \in I$ :

$$\begin{aligned}
&= \sum_{c \in S} \sum_{d \in I} \mathbb{E}_{(i,a)} \left[ e^{-(x_h L^h_{(t,0)} + x_k L^k_{(t,0)})} \mathbf{1}_{\{Y_t=c, \delta_t=d\}} \cdot f_{\begin{bmatrix} c & j \\ d & b \end{bmatrix}}(x_h, x_k; z, t) \right], \\
&= \sum_{c \in S} \sum_{d \in I} f_{\begin{bmatrix} i & c \\ a & d \end{bmatrix}}(x_h, x_k; t, 0) \cdot f_{\begin{bmatrix} c & j \\ d & b \end{bmatrix}}(x_h, x_k; z, t),
\end{aligned}$$

que en términos matriciales da como resultado:

$$F(x_h, x_k; t+z, 0) = F(x_h, x_k; t, 0) \otimes F(x_h, x_k; z, t).$$

□

Los autores Kim & Kim trabajaron el caso particular donde sólo se considera una línea de negocio y el proceso de tasas de interés sólo tiene una tasa de interés que es constante en el tiempo, si desea profundizar más en este caso puede consultar el artículo [4].

Además, si en nuestro modelo descartáramos el proceso de de tasas de interés, es decir si regresamos al caso donde  $\delta = 0$ , el resultado en (3.24) se reduce al producto de las transformadas de Laplace correspondientes a los reclamos del proceso de Cramer Lundberg clásico.

Veamos una propiedad más sobre la matriz bidimensional  $F(x_h, x_k; z, t)$ , que será de gran utilidad adelante, para ello es necesario declarar la siguiente notación:

Sea

$$\hat{\psi}_{i,a}^w(x_w, t) = \mathbb{E}_{(i,a)} \left[ e^{-x_w X_1^w e^{-at}} \right], \quad (3.26)$$

la transformada de Laplace-Stieltjes de la variable aleatoria generada por el tamaño de reclamo  $X_1^w$  descontado un tiempo  $t$  dado que  $Y_0 = i$ ,  $\delta_0 = a$  en la línea de negocio  $w \in \{h, k\}$ , entonces la siguiente proposición es verdadera:

**Proposición 3.3.3.** *Sean  $h, k$ , dos líneas de negocio. Para cada pareja  $(h, k)$  y para todo  $x_h \geq 0$ ,  $x_k \geq 0$ ,  $t \geq 0$  y  $w \in (h, k)$ ,*

$$F(x_h, x_k; z, t) = I + \sum_{w \in \{h, k\}} R^w \otimes \left( \hat{\Psi}^w(x_w, t) - I \right) \cdot z + \hat{G} \cdot z + \hat{\Pi} \cdot z + o(z), \quad (3.27)$$

donde, para toda  $i, j \in S$ ,  $a, b \in I$ ,

$$I = \left( I_{\begin{bmatrix} i & j \\ a & b \end{bmatrix}} \right), \quad \text{donde } I_{\begin{bmatrix} i & j \\ a & b \end{bmatrix}} = \begin{cases} 1 & \text{si } i=j, a=b, \\ 0 & \text{e.o.c.} \end{cases}$$

$$R^w = \left( r_{\begin{bmatrix} i & j \\ a & b \end{bmatrix}}^w \right), \quad \text{donde } r_{\begin{bmatrix} i & j \\ a & b \end{bmatrix}}^w = \begin{cases} r_i^w & \text{si } i=j, a=b, \\ 0 & \text{e.o.c.} \end{cases}$$

$$\hat{\Psi}^w(x_w, t) = \left( \hat{\psi}_{\begin{bmatrix} i & j \\ a & b \end{bmatrix}}^w(x_w, t) \right), \quad \hat{\psi}_{\begin{bmatrix} i & j \\ a & b \end{bmatrix}}^w(x_w, t) = \begin{cases} \hat{\psi}_{i,a}^w(x_w, t) & \text{si } i=j, a=b, \\ 0 & \text{e.o.c.} \end{cases}$$

$$\hat{G} = \left( g_{\begin{bmatrix} i & j \\ a & b \end{bmatrix}} \right), \quad \text{donde } g_{\begin{bmatrix} i & j \\ a & b \end{bmatrix}} = \begin{cases} g_{ij} & \text{si } i=j, a=b, \\ 0 & \text{e.o.c.} \end{cases}$$

$$\hat{\Pi} = \left( \pi_{\begin{smallmatrix} i & j \\ a & b \end{smallmatrix}} \right), \quad \text{donde } \pi_{\begin{smallmatrix} i & j \\ a & b \end{smallmatrix}} = \begin{cases} \pi_{ab}(i) & \text{si } i=j, a=b, \\ 0 & \text{e.o.c.} \end{cases}$$

*Demostración.* Recordemos que  $N_t^h$  y  $N_t^k$  son el número de reclamos ocurridos en el intervalo de tiempo  $(0, t]$  en la línea de negocio  $h$  y  $k$  respectivamente. Ahora bien, vamos a denotar con  $N_z^\delta$  y  $N_z^Y$  al número de transiciones ocurridas en el proceso de tasas de interés  $\delta$  y en el proceso de entorno  $Y$  durante el intervalo de tiempo  $(0, z]$  respectivamente, mientras que con  $N_z$  vamos a denotar a un proceso de conteo multivariado, el cual cumple lo siguiente:

$$N_z = (N_z^h, N_z^k, N_z^\delta, N_z^Y),$$

además,  $\| N_z \|$  será la norma euclidiana del vector  $N_z$  y nos apoyaremos del uso de las bases canónicas:  $e_1 = (1, 0, 0, 0)$ ,  $e_2 = (0, 1, 0, 0)$ ,  $e_3 = (0, 0, 1, 0)$  y  $e_4 = (0, 0, 0, 1)$ .

Considere la siguiente representación para  $f_{\begin{smallmatrix} i & j \\ a & b \end{smallmatrix}}(x_h, x_k; z, t)$ :

$$\begin{aligned} f_{\begin{smallmatrix} i & j \\ a & b \end{smallmatrix}}(x_h, x_k; z, t) &= \mathbb{E}_{(i,a)} \left[ e^{-(x_h L_{(z,t)}^h + x_k L_{(z,t)}^k)} \mathbf{1}_{\{Y_t=j, \delta_t=b\}} \right] \\ &= P_{(i,a)}[N_z = e_1] \cdot \mathbb{E}_{(i,a)} \left[ e^{-(x_h L_{(z,t)}^h + x_k L_{(z,t)}^k)} \mathbf{1}_{\{Y_z=j, \delta_z=b\}} \mid N_z = e_1 \right] \\ &+ P_{(i,a)}[N_z = e_2] \cdot \mathbb{E}_{(i,a)} \left[ e^{-(x_h L_{(z,t)}^h + x_k L_{(z,t)}^k)} \mathbf{1}_{\{Y_z=j, \delta_z=b\}} \mid N_z = e_2 \right] \\ &+ P_{(i,a)}[N_z = e_3] \cdot \mathbb{E}_{(i,a)} \left[ e^{-(x_h L_{(z,t)}^h + x_k L_{(z,t)}^k)} \mathbf{1}_{\{Y_z=j, \delta_z=b\}} \mid N_z = e_3 \right] \\ &+ P_{(i,a)}[N_z = e_4] \cdot \mathbb{E}_{(i,a)} \left[ e^{-(x_h L_{(z,t)}^h + x_k L_{(z,t)}^k)} \mathbf{1}_{\{Y_z=j, \delta_z=b\}} \mid N_z = e_4 \right] \\ &+ P_{(i,a)}[\| N_z \| > 1] \cdot \mathbb{E}_{(i,a)} \left[ e^{-(x_h L_{(z,t)}^h + x_k L_{(z,t)}^k)} \mathbf{1}_{\{Y_z=j, \delta_z=b\}} \mid \| N_z \| > 1 \right] \\ &+ P_{(i,a)}[N_z = 0] \cdot \mathbb{E}_{(i,a)} \left[ e^{-(x_h L_{(z,t)}^h + x_k L_{(z,t)}^k)} \mathbf{1}_{\{Y_z=j, \delta_z=b\}} \mid N_z = 0 \right] \quad (3.28) \end{aligned}$$

donde  $P_{(i,a)}$  es la probabilidad condicional dado que el estado al tiempo cero del proceso subyacente  $Y$  y del proceso de tasas de interés  $\delta$  son  $i$  e  $a$ , respectivamente. Además, cada una de las entradas del proceso de conteo  $N_z$  tiene distribución Poisson y particularmente, las dos primeras entradas del vector tiene intensidad  $r(z) = r_i^w$  con  $w \in \{h, k\}$ , por lo cual,

$$P_{(i,a)}[N_z = e_1] = r_i^h \cdot z + o(z). \quad (3.29)$$



$$P_{(i,a)}[N_z = e_2] = r_i^k \cdot z + o(z). \quad (3.30)$$

Por otro lado, si nos enfocamos en la expresión

$$\mathbb{E}_{(i,a)} \left[ e^{-(x_h L_{(z,t)}^h + x_k L_{(z,t)}^k)} \mathbf{1}_{\{Y_z=j, \delta_z=b\}} \middle| N_z = e_1 \right], \quad (3.31)$$

$N_z$  toma el valor del vector  $(1, 0, 0, 0)$ , con lo cual  $N_z^h = 1$ ,  $N_z^k = 0$ ,  $N_z^\delta = 0$  y  $N_z^Y = 0$ , por tanto  $L_{(z,t)}^h = X_1^h e^{-\delta J_1 (J_1+t)}$  y  $L_{(z,t)}^k = 0$ , así, (3.31) se reduce a,

$$\mathbb{E}_{(i,a)} \left[ e^{-x_h X_1^h e^{-\delta J_1 (J_1+t)}} \mathbf{1}_{\{Y_z=j, \delta_z=b\}} \right],$$

haciendo tender  $z$  a cero,

$$\lim_{z \rightarrow 0} \mathbb{E}_{(i,a)} \left[ e^{-x_h X_1^h e^{-\delta J_1 (J_1+t)}} \mathbf{1}_{\{Y_z=j, \delta_z=b\}} \right] = \mathbb{E}_{(i,a)} \left[ e^{-x_h X_1^h e^{-\delta J_1 (J_1+t)}} \mathbf{1}_{\{i=j\}} \mathbf{1}_{\{a=b\}} \right],$$

como se puede observar, el estado del proceso de tasas de interés  $\delta$  que comienza en el estado  $a$ , no cambia durante el periodo de tiempo  $J_1$ , por lo cual el término  $e^{-\delta J_1 (J_1+t)}$  puede reducirse a  $e^{-at}$ , por consiguiente,

$$= \mathbb{E}_{(i,a)} \left[ e^{-x_h X_1^h e^{-at}} \mathbf{1}_{\{i=j\}} \mathbf{1}_{\{a=b\}} \right] = \hat{\psi}_{i,a}^h(x_h, t) \mathbf{1}_{\{i=j\}} \mathbf{1}_{\{a=b\}}. \quad (3.32)$$

Sustituyendo las expresiones (3.29) y (3.32) en el primer término de la ecuación (3.28), se obtiene que:

$$\begin{aligned} & P_{(i,a)}[N_z = e_1] \cdot \mathbb{E}_{(i,a)} \left[ e^{-(x_h L_{(z,t)}^h + x_k L_{(z,t)}^k)} \mathbf{1}_{\{Y_z=j, \delta_z=b\}} \middle| N_z = e_1 \right] \\ &= \left( r_i^h \cdot z + o(z) \right) \left( \hat{\psi}_{i,a}^h(x_h, t) \mathbf{1}_{\{i=j\}} \mathbf{1}_{\{a=b\}} \right), \text{ cuando } z \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Vamos a considerar ahora el segundo término de la ecuación (3.28), que por simetría con respecto al primer término es fácil probar que:

$$\begin{aligned} & P_{(i,a)}[N_z = e_2] \cdot \mathbb{E}_{(i,a)} \left[ e^{-(x_h L_{(z,t)}^h + x_k L_{(z,t)}^k)} \mathbf{1}_{\{Y_z=j, \delta_z=b\}} \middle| N_z = e_2 \right] \\ &= \left( r_i^k \cdot z + o(z) \right) \left( \hat{\psi}_{i,a}^k(x_k, t) \mathbf{1}_{\{i=j\}} \mathbf{1}_{\{a=b\}} \right), \text{ cuando } z \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Ahora bien, ¿Qué ocurre en el tercer término de (3.28)?, ¿A qué expresión es equivalente?, tenemos lo siguiente:

$$P_{(i,a)}[N_z = e_3] \cdot \mathbb{E}_{(i,a)} \left[ e^{-(x_h L_{(z,t)}^h + x_k L_{(z,t)}^k)} \mathbf{1}_{\{Y_z=j, \delta_z=b\}} \middle| N_z = e_3 \right] \quad (3.35)$$

Primero se desea calcular la probabilidad de ocurrencia del evento  $N_z = e_3$ , lo cual es equivalente a  $N_z^\delta = 1$ , entonces se quiere calcular la probabilidad de que el número de transiciones ocurridas en el proceso de tasas de interés en el intervalo  $(0, z]$  sea una. La pregunta es, dado que el proceso inicia en el estado  $a \in I$  ¿a cuál de los estados  $w \in I$ ,  $w \neq a$  cambia el proceso en el momento de la transición?, para ello es necesario no sólo calcular la probabilidad de que  $N_z = e_3$ , sino que además se cumpla que  $\delta_z = w$  y como  $N_z^\delta$  es un proceso Poisson cuyo parámetro está determinado por la entrada  $(a, w)$  del generador infinitesimal correspondiente al proceso  $\delta$ , es decir,  $\Pi(i) = (\pi_{aw}(i))_{a,w \in I}$ ,  $i \in S$ , entonces, para alguna  $w \in I$ ,

$$\lim_{z \rightarrow 0} P_{(i,a)}[N_z = e_3, \delta_z = w] = \pi_{aw}(i) \cdot z + o(z). \quad (3.36)$$

Por otro lado, como  $N_z = e_3 = (0, 0, 1, 0)$ , se tiene que  $N_z^h = 0$ ,  $N_z^k = 0$ ,  $N_z^\delta = 1$  y  $N_z^Y = 0$ , por lo cual,

$$L_{(z,t)}^h = \sum_{n=1}^{N_z^h} X_n^h e^{-\delta_{J_n}(J_n+t)} = 0 \quad \text{y} \quad L_{(z,t)}^k = 0,$$

que al substituirse en la esperanza condicional y además agregando la condición de que  $\delta_z = w$ ,

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}_{(i,a)} \left[ e^{-(x_h L_{(z,t)}^h + x_k L_{(z,t)}^k)} \mathbf{1}_{\{Y_z=j, \delta_z=b\}} \middle| N_z = e_3, \delta_z = w \right] \\ &= E_{(i,a)}[\mathbf{1}_{\{Y_z=j, \delta_z=b\}} \mid \delta_z = w], \end{aligned}$$

y haciendo tender  $z$  a cero,

$$\lim_{z \rightarrow 0} E_{(i,a)}[\mathbf{1}_{\{Y_z=j, \delta_z=b\}} \mid \delta_z = w] = \mathbf{1}_{\{i=j\}} \mathbf{1}_{\{w=b\}} = \mathbf{1}_{\{i=j\}}, \quad (3.37)$$

por lo tanto, al substituir las expresiones (3.36) y (3.37) en la expresión (3.35),

$$P_{(i,a)}[N_z = e_3] \cdot \mathbb{E}_{(i,a)} \left[ e^{-(x_h L_{(z,t)}^h + x_k L_{(z,t)}^k)} \mathbf{1}_{\{Y_z=j, \delta_z=b\}} \middle| N_z = e_3 \right]$$

$$= \left( \pi_{ab}(i) \cdot z + o(z) \right) 1_{\{i=j\}} = \pi_{ab}(i) \cdot z 1_{\{i=j\}} + o(z) 1_{\{i=j\}}, \quad \text{cuando } z \rightarrow 0. \quad (3.38)$$

Con un procedimiento análogo al inmediato anterior, veamos qué sucede con la cuarta expresión de la ecuación (3.28), es decir:

$$P_{(i,a)}[N_z = e_4] \cdot \mathbb{E}_{(i,a)} \left[ e^{-(x_h L_{(z,t)}^h + x_k L_{(z,t)}^k)} 1_{\{Y_z=j, \delta_z=b\}} \mid N_z = e_4 \right]. \quad (3.39)$$

Esta vez se quiere calcular la probabilidad de que el proceso de conteo  $N_z$  sea igual a  $e_4 = (0, 0, 0, 1)$ , es decir,  $N_z^h = 0$ ,  $N_z^k = 0$ ,  $N_z^\delta = 0$  y  $N_z^Y = 1$ , por lo tanto, se desea obtener la probabilidad de que el número de transiciones en el proceso subyacente  $Y$  incremente en una unidad en el lapso de tiempo  $z$ . Si suponemos que el proceso  $Y$  parte del estado  $i \in S$  entonces al momento de la transición podrá llegar a cualquiera de los estados  $k \in S, k \neq i$  y como el proceso  $N_z^Y$  tiene distribución Poisson con parámetro igual a la entrada  $g_{ik}$  del generador infinitesimal correspondiente a dicho proceso, es decir  $G$ , entonces haciendo tender  $z$  a cero la probabilidad es la siguiente:

$$\lim_{z \rightarrow 0} P_{(i,a)}[N_z = e_4, Y_z = k] = g_{ik} \cdot z + o(z). \quad (3.40)$$

Además, como  $N_z^h = 0$  y  $N_z^k = 0$ , entonces,  $L_{(z,t)}^h = 0$  y  $L_{(z,t)}^k = 0$ , por lo cual,

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}_{(i,a)} \left[ e^{-(x_h L_{(z,t)}^h + x_k L_{(z,t)}^k)} 1_{\{Y_z=j, \delta_z=b\}} \mid N_z = e_4 \right] \\ &= E_{(i,a)}[1_{\{Y_z=j, \delta_z=b\}} \mid Y_z = k], \quad k \in S, \end{aligned}$$

y haciendo tender  $z$  a cero,

$$\lim_{z \rightarrow 0} E_{(i,a)}[1_{\{Y_z=j, \delta_z=b\}} \mid Y_z = k] = 1_{\{j=k\}} 1_{\{b=a\}} = 1_{\{b=a\}}, \quad (3.41)$$

por lo tanto, al sustituir (3.40) y (3.41) en (3.39), se obtiene que:

$$\begin{aligned} & P_{(i,a)}[N_z = e_4] \cdot \mathbb{E}_{(i,a)} \left[ e^{-(x_h L_{(z,t)}^h + x_k L_{(z,t)}^k)} 1_{\{Y_z=j, \delta_z=b\}} \mid N_z = e_4 \right] \\ &= \left( g_{ij} \cdot z + o(z) \right) \left( 1_{\{a=b\}} \right) = g_{ij} z 1_{\{a=b\}} + o(z) 1_{\{a=b\}}, \quad \text{cuando } z \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (3.42)$$

Estamos casi por concluir la prueba, únicamente falta desarrollar los últimos dos términos de la ecuación (3.28), así que nos enfocaremos en el penúltimo de ellos,

$$P_{(i,a)}[\|N_z\| > 1] \cdot \mathbb{E}_{(i,a)} \left[ e^{-(x_h L_{(z,t)}^h + x_k L_{(z,t)}^k)} \mathbf{1}_{\{Y_z=j, \delta_z=b\}} \mid \|N_z\| > 1 \right], \quad (3.43)$$

cuya expresión es fácil de calcular, pues como el proceso de conteo  $N_z$  tiene distribución Poisson, la probabilidad de que el proceso tenga dos o más incrementos en un intervalo infinitesimal de tiempo  $(0, z]$  es  $o(z)$ , es decir, en un intervalo cualquiera de longitud infinitesimal  $z$ , sólo pueden ocurrir dos situaciones, que haya un incremento o que no lo haya, por lo cual,

$$\begin{aligned} & P_{(i,a)}[\|N_z\| > 1] \cdot \mathbb{E}_{(i,a)} \left[ e^{-(x_h L_{(z,t)}^h + x_k L_{(z,t)}^k)} \mathbf{1}_{\{Y_z=j, \delta_z=b\}} \mid \|N_z\| > 1 \right] \\ &= o(z) \mathbf{1}_{\{i=j\}} \mathbf{1}_{\{a=b\}}, \text{ cuando } z \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (3.44)$$

Y finalmente, veamos qué ocurre con el último término de la expresión (3.28), es decir, con la expresión

$$P_{(i,a)}[N_z = 0] \cdot \mathbb{E}_{(i,a)} \left[ e^{-(x_h L_{(z,t)}^h + x_k L_{(z,t)}^k)} \mathbf{1}_{\{Y_z=j, \delta_z=b\}} \mid N_z = 0 \right]. \quad (3.45)$$

Por un lado,

$$\begin{aligned} P_{(i,a)}[N_z = 0] &= 1 - (P_{(i,a)}[N_z = 1] + P_{(i,a)}[\|N_z\| > 1]) \\ &= 1 - (P_{(i,a)}[N_z = e_1] + P_{(i,a)}[N_z = e_2] + P_{(i,a)}[N_z = e_3] \\ &\quad + P_{(i,a)}[N_z = e_4] + P_{(i,a)}[\|N_z\| > 1]), \end{aligned}$$

y usando los resultados previamente calculados:

$$\begin{aligned} P_{(i,a)}[N_z = 0] &= 1 - \left( r_i^h \cdot z + o(z) + r_i^k \cdot z + o(z) + \sum_{w \neq a} \pi_{aw}(i) \cdot z + o(z) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k \neq i} g_{ik} \cdot z + o(z) + o(z) \right), \end{aligned}$$

que por la forma en que se definieron los generadores infinitesimales  $\Pi$  y  $G$ , esta expresión se reduce a:

$$P_{(i,a)}[N_z = 0] = 1 - (r_i^h + r_i^k - \pi_a(i) - g_i) \cdot z + o(z). \quad (3.46)$$

Y por último, dado que  $N_z = 0$ , implica que no hubo transición en alguno de los procesos de conteo, por lo cual,

$$\mathbb{E}_{(i,a)} \left[ e^{-(x_h L_{(z,t)}^h + x_k L_{(z,t)}^k)} \mathbf{1}_{\{Y_z=j, \delta_z=b\}} \mid N_z = 0 \right] = \mathbf{1}_{\{i=j\}} \mathbf{1}_{\{a=b\}}. \quad (3.47)$$

lo anterior siempre y cuando  $z \rightarrow 0$ . Por lo tanto, al sustituir las expresiones (3.46) y (3.47) en la ecuación (3.45), se tiene que:

$$\begin{aligned} & P_{(i,a)}[N_z = 0] \cdot \mathbb{E}_{(i,a)} \left[ e^{-(x_h L_{(z,t)}^h + x_k L_{(z,t)}^k)} \mathbf{1}_{\{Y_z=j, \delta_z=b\}} \mid N_z = 0 \right] \\ &= (1 - (r_i^h + r_i^k - \pi_{aa}(i) - g_{ii}) \cdot z + o(z)) \mathbf{1}_{\{i=j\}} \mathbf{1}_{\{a=b\}}, \text{ siempre que } z \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (3.48)$$

Y al sustituir los resultados (3.33), (3.34), (3.38), (3.42), (3.44) y (3.48) en la expresión original (3.28), se puede concluir que:

$$\begin{aligned} f \begin{bmatrix} i & j \\ a & b \end{bmatrix} (x_h, x_k; z, t) &= (r_i^h \cdot z + o(z)) (\hat{\psi}_{i,a}^h(x_h, t) \mathbf{1}_{\{i=j\}} \mathbf{1}_{\{a=b\}}) \\ &+ (r_i^k \cdot z + o(z)) (\hat{\psi}_{i,a}^k(x_k, t) \mathbf{1}_{\{i=j\}} \mathbf{1}_{\{a=b\}}) \\ &+ \pi_{ab}(i) \cdot z \mathbf{1}_{\{i=j\}} + o(z) \mathbf{1}_{\{i=j\}} \\ &+ g_{ij} \cdot z \mathbf{1}_{\{a=b\}} + o(z) \mathbf{1}_{\{a=b\}} \\ &+ o(z) \mathbf{1}_{\{i=j\}} \mathbf{1}_{\{a=b\}} \\ &+ (1 - (r_i^h + r_i^k - \pi_{aa}(i) - g_{ii}) \cdot z + o(z)) \mathbf{1}_{\{i=j\}} \mathbf{1}_{\{a=b\}}. \end{aligned}$$

siempre y cuando  $z \rightarrow 0$ . Desarrollando,

$$\begin{aligned} &= r_i^h \cdot z \cdot \hat{\psi}_{i,a}^h(x_h, t) \mathbf{1}_{\{i=j\}} \mathbf{1}_{\{a=b\}} + o(z) \hat{\psi}_{i,a}^h(x_h, t) \mathbf{1}_{\{i=j\}} \mathbf{1}_{\{a=b\}} \\ &+ r_i^k \cdot z \cdot \hat{\psi}_{i,a}^k(x_k, t) \mathbf{1}_{\{i=j\}} \mathbf{1}_{\{a=b\}} + o(z) \hat{\psi}_{i,a}^k(x_k, t) \mathbf{1}_{\{i=j\}} \mathbf{1}_{\{a=b\}} \\ &+ \pi_{ab}(i) \cdot z \mathbf{1}_{\{i=j\}} + o(z) \mathbf{1}_{\{i=j\}} + g_{ij} \cdot z \mathbf{1}_{\{a=b\}} + o(z) \mathbf{1}_{\{a=b\}} \\ &+ o(z) \mathbf{1}_{\{i=j\}} \mathbf{1}_{\{a=b\}} + \mathbf{1}_{\{i=j\}} \mathbf{1}_{\{a=b\}} - r_i^h \cdot z \mathbf{1}_{\{i=j\}} \mathbf{1}_{\{a=b\}} \\ &- r_i^k \cdot z \mathbf{1}_{\{i=j\}} \mathbf{1}_{\{a=b\}} + \pi_{aa}(i) \cdot z \mathbf{1}_{\{i=j\}} \mathbf{1}_{\{a=b\}} + g_{ii} \cdot z \mathbf{1}_{\{i=j\}} \mathbf{1}_{\{a=b\}} \\ &+ o(z) \mathbf{1}_{\{i=j\}} \mathbf{1}_{\{a=b\}}, \end{aligned}$$

reacomodando términos y factorizando,

$$\begin{aligned} &= \left[ 1 + r_i^h z (\hat{\psi}_{i,a}^h(x_h, t) - 1) + r_i^k z (\hat{\psi}_{i,a}^k(x_k, t) - 1) \right] \mathbf{1}_{\{i=j\}} \mathbf{1}_{\{a=b\}} \\ &+ (\pi_{ab}(i) + \pi_{aa}(i)) \cdot z \mathbf{1}_{\{i=j\}} + (g_{ij} + g_{ii}) \cdot z \mathbf{1}_{\{a=b\}} + o(z) \mathbf{1}_{\{i=j\}} \mathbf{1}_{\{a=b\}}, \end{aligned}$$

y al aplicar la notación de matrices de dos dimensiones nos queda que efectivamente,

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(\mathbf{x}_h, \mathbf{x}_k; \mathbf{z}, \mathbf{t}) &= \mathbf{I} + \mathbf{R}^h \otimes \left( \hat{\Psi}^h(x_h, t) - \mathbf{I} \right) \cdot z + \mathbf{R}^k \otimes \left( \hat{\Psi}^k(x_k, t) - \mathbf{I} \right) \cdot z \\ &\quad + \hat{\Pi} \cdot z + \hat{G} \cdot z + \mathbf{o}(z) \end{aligned}$$

por lo tanto, se da por concluida la prueba.  $\square$

Una vez demostradas las dos proposiciones anteriores, estamos listos para derivar el sistema de ecuaciones diferenciales para la transformada de Laplace-Stieltjes de la distribución de los reclamos agregados descontados.

**Proposición 3.3.4.** *Sean  $h, k$ , dos líneas de negocio,  $x_h \geq 0$ ,  $x_k \geq 0$ . Para cada pareja  $(h, k)$  se tiene que  $F(x_h, x_k; t, 0)$  es la solución al siguiente problema de valor inicial:*

$$\frac{\partial}{\partial t} F(x_h, x_k; t, 0) = F(x_h, x_k; t, 0) \otimes \left[ \hat{G} + \hat{\Pi} + \sum_{w \in \{h, k\}} R^w \otimes \left( \hat{\Psi}^w(x_w, t) - \mathbf{I} \right) \right], \quad (3.49)$$

con condición inicial,

$$I = F(x_h, x_k; 0, 0). \quad (3.50)$$

*Demostración.* Considere las expresiones (3.24) y (3.27), sea  $z = \Delta t$ , si se sustituye este valor de  $z$  en ambas expresiones, entonces tendríamos las siguientes ecuaciones:

$$F(x_h, x_k; t + \Delta t, 0) = F(x_h, x_k; t, 0) \otimes F(x_h, x_k; \Delta t, t), \quad (3.51)$$

y

$$F(x_h, x_k; \Delta t, t) = I + \sum_{w \in \{h, k\}} \left[ R^w \otimes \left( \hat{\Psi}^w(x_w, t) - \mathbf{I} \right) + \hat{G} + \hat{\Pi} \right] \cdot \Delta t + o(\Delta t), \quad (3.52)$$

al sustituir (3.52) en (3.51)

$$\begin{aligned} F(x_h, x_k; t + \Delta t, 0) &= F(x_h, x_k; t, 0) \otimes \left[ I + \sum_{w \in \{h, k\}} \left[ R^w \otimes \left( \hat{\Psi}^w(x_w, t) - \mathbf{I} \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \hat{G} + \hat{\Pi} \right] \cdot \Delta t + o(\Delta t) \right], \end{aligned} \quad (3.53)$$

Ahora bien, se agregará el término  $-F(x_h, x_k; t, 0)$  en ambos lados de la ecuación (3.53) y además se dividirán por  $\Delta t$ , así, al tomar el límite cuando  $\Delta t \rightarrow 0$  en ambos lados de la ecuación se obtiene que:

$$\frac{\partial}{\partial t} F(x_h, x_k; t, 0) = F(x_h, x_k; t, 0) \otimes \left[ \hat{G} + \hat{\Pi} + \sum_{w \in \{h, k\}} R^w \otimes \left( \hat{\Psi}^w(x_w, t) - \mathbf{I} \right) \right],$$

Finalmente, para probar la condición inicial (3.50), basta con sustituir los valores  $z = 0$  y  $t = 0$  en la ecuación (3.27), por lo tanto,  $F(x_h, x_k, 0, 0) = I$ , con lo cual se concluye la demostración.  $\square$

Una vez que hemos encontrado el sistema de ecuaciones diferenciales para la transformada de Laplace Stieltjes conjunta del proceso de reclamos agregados descontado, tenemos las herramientas necesarias para el cálculo los dos primeros momentos de dicho proceso para las líneas de negocio  $h$  y  $k$ .

**Definición 3.3.3.** Sean  $h, k$  dos líneas de negocio.  $\mathbb{E}_{[u, u]}^{(r, s)}(t)$  denotará a la matriz bi dimensional de tamaño  $u \times u$ , cuya entrada  $((i, a), (j, b))$  es de la forma:

$$\mathbb{E}_{\begin{bmatrix} |i| & |j| \\ |a| & |b| \end{bmatrix}}^{(r, s)}(t) = \mathbb{E}_{(i, a)} \left[ (L_{(t, 0)}^h)^r (L_{(t, 0)}^k)^s 1_{\{Y_t = j, \delta_t = b\}} \right], \quad (3.54)$$

donde  $r, s \in \{0, 1, 2\}$  tal que  $0 < r + s < 3$ , es decir,  $\mathbb{E}_{\begin{bmatrix} |i| & |j| \\ |a| & |b| \end{bmatrix}}^{(r, s)}(t)$  son el  $r$ -ésimo y  $s$ -ésimo momentos conjuntos para los procesos de reclamos agregados descontados para las líneas de negocio  $h$  y  $k$  respectivamente, dado que al tiempo  $t$  el proceso subyacente  $Y$  y el proceso de tasas de interés  $\delta$  estarán en los estados  $j$  y  $b$  respectivamente, para alguna  $j \in S$ ,  $b \in I$ . Por lo tanto, el  $r$ -ésimo y  $s$ -ésimo momento total para los procesos  $L_{(t, 0)}^h$  y  $L_{(t, 0)}^k$  esta dado por:

$$\mu_{(i, a)}^{(r, s)}(t) = \mathbb{E}_{(i, a)} \left[ (L_{(t, 0)}^h)^r (L_{(t, 0)}^k)^s \right] = \sum_{j \in S} \sum_{b \in I} \mathbb{E}_{\begin{bmatrix} |i| & |j| \\ |a| & |b| \end{bmatrix}}^{(r, s)}(t). \quad (3.55)$$

y que apartir de la transformada de Laplace conjunta  $f_{\begin{bmatrix} i & j \\ a & b \end{bmatrix}}(x_h, x_k, t, 0)$ , al calcular las siguientes derivadas parciales se obtienen los momentos conjuntos:

$$M_{\begin{bmatrix} |i| & |j| \\ |a| & |b| \end{bmatrix}}^{(r,s)}(t) = \frac{\partial^r}{\partial x_h^r} \frac{\partial^s}{\partial x_k^s} f_{\begin{bmatrix} i & j \\ a & b \end{bmatrix}}(x_h, x_k, t, 0) \Big|_{x_h, x_k=0}. \quad (3.56)$$

Cabe hacer mención, que por propiedades que posee la transformada de Laplace conjunta, en general, los momentos conjuntos se pueden calcular como:

$$M_{\begin{bmatrix} |i| & |j| \\ |a| & |b| \end{bmatrix}}^{(r,s)}(t) = (-1)^{r+s} \mathbb{E}_{\begin{bmatrix} |i| & |j| \\ |a| & |b| \end{bmatrix}}^{(r,s)}(t). \quad (3.57)$$

El siguiente teorema nos dice cuáles son las expresiones explícitas para el cálculo del primer momento en el proceso de reclamos en cada una de las líneas de negocio  $h, k$ , así como el momento del producto cruzado entre ambas líneas de negocio.

**Teorema 3.3.5.** *Sean  $(h, k)$  dos líneas de negocio,  $\Lambda$  el generador infinitesimal bi dimensional del proceso de Markov a tiempo continuo con espacio de estados  $S \times I$  correspondiente al proceso  $(Y, \delta)$ . Para toda  $t \geq 0$  ocurre que:*

$$M^{(1,0)}(t) = \int_0^t e^{\Lambda \cdot y} \otimes R^h \otimes \Psi e^h(y) \otimes e^{[\hat{G} + \hat{\Pi}] \cdot (t-y)} dy, \quad (3.58)$$

$$M^{(0,1)}(t) = \int_0^t e^{\Lambda \cdot y} \otimes R^k \otimes \Psi e^k(y) \otimes e^{[\hat{G} + \hat{\Pi}] \cdot (t-y)} dy, \quad (3.59)$$

$$\begin{aligned} M^{(1,1)}(t) &= \int_0^t e^{\Lambda \cdot y} \otimes R^h \otimes \Psi e^h(y) \otimes Int^k(y, t) dy \\ &+ \int_0^t e^{\Lambda \cdot y} \otimes R^k \otimes \Psi e^k(y) \otimes Int^h(y, t) dy, \end{aligned} \quad (3.60)$$

donde  $Int^w(y, t)$ ,  $w \in \{h, k\}$  es la matriz cuyos elementos  $Int_{\begin{bmatrix} i & j \\ a & b \end{bmatrix}}^w(y, t)$  son iguales a:

$$\frac{-r_j^w \hat{\psi}_{j,b}^w(x_w, t) e^{(-y \cdot \Lambda_{\begin{bmatrix} i & j \\ a & b \end{bmatrix}} + t \cdot \Lambda_{\begin{bmatrix} j & j \\ b & b \end{bmatrix}})}}{\Lambda_{\begin{bmatrix} i & j \\ a & b \end{bmatrix}} - \Lambda_{\begin{bmatrix} j & j \\ b & b \end{bmatrix}} - b} \left( e^{\Lambda_{\begin{bmatrix} i & j \\ a & b \end{bmatrix}} - \Lambda_{\begin{bmatrix} j & j \\ b & b \end{bmatrix}} - b)t} - e^{\Lambda_{\begin{bmatrix} i & j \\ a & b \end{bmatrix}} - \Lambda_{\begin{bmatrix} j & j \\ b & b \end{bmatrix}} - b)y} \right). \quad (3.61)$$



*Demostración.* Primeramente vamos a calcular las derivadas parciales de primer orden de las expresiones (3.49) y (3.50) con respecto a  $x_k$  y  $x_h$ , así:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial x_h} \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial t} F(x_h, x_k; t, 0) \\
&= \frac{\partial}{\partial x_h} \frac{\partial}{\partial x_k} \left[ F(x_h, x_k; t, 0) \otimes \left[ \hat{G} + \hat{\Pi} + \sum_{w \in \{h, k\}} R^w \otimes \left( \hat{\Psi}^w(x_w, t) - \mathbf{I} \right) \right] \right] \\
&= \frac{\partial}{\partial x_h} \left[ \frac{\partial}{\partial x_k} F(x_h, x_k; t, 0) \otimes \left[ \hat{G} + \hat{\Pi} + \sum_{w \in \{h, k\}} R^w \otimes \left( \hat{\Psi}^w(x_w, t) - \mathbf{I} \right) \right] \right. \\
&\quad \left. + F(x_h, x_k; t, 0) \otimes \left[ R^k \otimes \frac{\partial}{\partial x_k} \hat{\Psi}^k(x_k, t) \right] \right] \\
&= \frac{\partial}{\partial x_h} \frac{\partial}{\partial x_k} F(x_h, x_k; t, 0) \otimes \left[ \hat{G} + \hat{\Pi} + \sum_{w \in \{h, k\}} R^w \otimes \left( \hat{\Psi}^w(x_w, t) - \mathbf{I} \right) \right] \\
&+ \frac{\partial}{\partial x_k} F(x_h, x_k; t, 0) \otimes \left[ R^h \otimes \frac{\partial}{\partial x_h} \hat{\Psi}^h(x_h, t) \right] \\
&+ \frac{\partial}{\partial x_h} F(x_h, x_k; t, 0) \otimes \left[ R^k \otimes \frac{\partial}{\partial x_k} \hat{\Psi}^k(x_k, t) \right]. \tag{3.62}
\end{aligned}$$

además,

$$\frac{\partial}{\partial x_h} \frac{\partial}{\partial x_k} F(x_h, x_k; t, 0) = 0. \tag{3.63}$$

Ahora bien, por propiedades de derivadas parciales podemos intercambiar el orden de derivación, y al aplicarlo a la igualdad (3.62) se obtiene la siguiente equivalencia:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x_h} \frac{\partial}{\partial x_k} F(x_h, x_k; t, 0) &= \frac{\partial}{\partial x_h} \frac{\partial}{\partial x_k} F(x_h, x_k; t, 0) \\
&\otimes \left[ \hat{G} + \hat{\Pi} + \sum_{w \in \{h, k\}} R^w \otimes \left( \hat{\Psi}^w(x_w, t) - \mathbf{I} \right) \right] \\
&+ \frac{\partial}{\partial x_k} F(x_h, x_k; t, 0) \otimes \left[ R^h \otimes \frac{\partial}{\partial x_h} \hat{\Psi}^h(x_h, t) \right] \\
&+ \frac{\partial}{\partial x_h} F(x_h, x_k; t, 0) \otimes \left[ R^k \otimes \frac{\partial}{\partial x_k} \hat{\Psi}^k(x_k, t) \right] \tag{3.64}
\end{aligned}$$

Vamos a encontrar una expresión para  $\frac{\partial}{\partial x_w} \hat{\Psi}^w(x_w, t)$ , para  $w \in \{h, k\}$ . De la proposición (3.3.3) sabemos que:

$$\hat{\Psi}^w(x_w, t) = \left( \hat{\psi}_{\begin{bmatrix} i & j \\ a & b \end{bmatrix}}^w(x_w, t) \right) = \begin{cases} \hat{\psi}_{i,a}^w(x_w, t) & \text{si } i = j, a = b, \\ 0 & \text{e.o.c.} \end{cases}$$

donde,

$$\hat{\psi}_{i,a}^w(x_w, t) = \mathbb{E}_{(i,a)} \left[ e^{-x_w X_1^w e^{-at}} \right] 1_{\{i=j\}} 1_{\{a=b\}},$$

con  $X_1^w$ , la variable aleatoria que representa el monto del primer reclamo en la línea de negocio  $w$ ,  $w \in \{h, k\}$ . Al derivar un elemento de la matriz  $\hat{\Psi}^w(x_w, t)$  con respecto a  $x_w$ , cuya coordenada es  $((i, a), (j, b))$ ,  $i, j \in S$ ,  $a, b \in I$  se obtiene que:

$$\frac{\partial}{\partial x_w} \hat{\Psi}_{\begin{bmatrix} i & j \\ a & b \end{bmatrix}}^w(x_w, t) = \begin{cases} \mathbb{E}_{(i,a)} \left[ -X_1^w e^{-at} e^{-x_w X_1^w e^{-at}} \right] & \text{si } i = j, a = b, \\ 0 & \text{e.o.c.} \end{cases} \quad (3.65)$$

que al evaluar  $x_w$  en cero,

$$\left. \frac{\partial}{\partial x_w} \hat{\Psi}_{\begin{bmatrix} i & j \\ a & b \end{bmatrix}}^w(x_w, t) \right|_{x_w=0} = \begin{cases} \mathbb{E}_{(i,a)} \left[ -X_1^w e^{-at} \right] & \text{si } i = j, a = b, \\ 0 & \text{e.o.c.} \end{cases}$$

sea  $\psi_{i,a}^w = \mathbb{E}_{(i,a)}[X_1^w]$ , por lo tanto hemos encontrado que para  $w \in \{h, k\}$ :

$$\left. \frac{\partial}{\partial x_w} \hat{\Psi}_{\begin{bmatrix} i & j \\ a & b \end{bmatrix}}^w(x_w, t) \right|_{x_w=0} = \begin{cases} -\psi_{i,a}^w e^{-at} & \text{si } i = j, a = b, \\ 0 & \text{e.o.c.} \end{cases} := \Psi e_{\begin{bmatrix} i & j \\ a & b \end{bmatrix}}^w(t). \quad (3.66)$$

Con lo cual, al combinar los resultados (3.56) y (3.66), al evaluar  $x_k, x_h$  en cero y al sustituir en (3.64):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} M^{(1,1)}(t) &= M^{(1,1)}(t) \otimes \left[ \hat{G} + \hat{\Pi} + \sum_{w \in \{h,k\}} R^w \otimes \left( \hat{\Psi}^w(0, t) - \mathbf{I} \right) \right] \\ &+ M^{(0,1)}(t) \otimes \left[ R^h \otimes \Psi e^h(t) \right] + M^{(1,0)}(t) \otimes \left[ R^k \otimes \Psi e^k(t) \right]. \end{aligned} \quad (3.67)$$

Obsérvece que  $\hat{\Psi}^w(0, t) = I$ , por lo tanto (3.67) se reduce a:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}M^{(1,1)}(t) &= M^{(1,1)}(t) \otimes [\hat{G} + \hat{\Pi}] + M^{(0,1)}(t) \otimes [R^h \otimes \Psi e^h(t)] \\ &\quad + M^{(1,0)}(t) \otimes [R^k \otimes \Psi e^k(t)]. \end{aligned} \quad (3.68)$$

Para llegar a una expresión más concreta para  $M^{(1,1)}(t)$ , es necesario encontrar representaciones explícitas para  $M^{(1,0)}(t)$  y  $M^{(0,1)}(t)$ . Con este fin vamos a considerar  $x_k = 0$  dentro de la ecuación (3.49).

$$\frac{d}{dt}F(x_h, 0; t, 0) = F(x_h, 0; t, 0) \otimes \left[ \hat{G} + \hat{\Pi} + R^h \otimes \left( \hat{\Psi}^h(x_h, t) - \mathbf{I} \right) \right],$$

al derivar con respecto a  $x_h$ ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_h} \frac{\partial}{\partial t} F(x_h, 0; t, 0) &= \frac{\partial}{\partial x_h} F(x_h, 0; t, 0) \otimes \left[ \hat{G} + \hat{\Pi} + R^h \otimes \left( \hat{\Psi}^h(x_h, t) - \mathbf{I} \right) \right] \\ &\quad + F(x_h, 0; t, 0) \otimes \left[ R^h \otimes \frac{\partial}{\partial x_h} \hat{\Psi}^h(x_h, t) \right], \end{aligned}$$

e intercambiar el orden en las derivadas del lado izquierdo, combinar nuevamente las expresiones en (3.56) y (3.66), haciendo  $x_h \rightarrow 0$  y considerando que  $\hat{\Psi}^h(0, t) = I$ ,

$$\frac{d}{dt}M^{(1,0)}(t) = M^{(1,0)}(t) \otimes [\hat{G} + \hat{\Pi}] + F(0, 0; t, 0) \otimes R^h \otimes \Psi e^h(t). \quad (3.69)$$

adicionalmente,  $F_{\begin{bmatrix} i & j \\ a & b \end{bmatrix}}(0, 0; t, 0) = \mathbb{E}_{(i,a)}[1_{Y_t=j, \delta_t=b}]$ , es equivalente a la entrada  $((i, a), (j, b))$  de la matriz de probabilidades de transición al tiempo  $t$  de los procesos de Markov a tiempo continuo  $(Y, \delta)$ , que por propiedades que posee el generadora infinitesimal  $\Lambda$  correspondiente a estos procesos conjuntos, la siguiente expresión es válida::

$$F_{\begin{bmatrix} i & j \\ a & b \end{bmatrix}}(0, 0; t, 0) = \mathbb{E}_{(i,a)}[1_{Y_t=j, \delta_t=b}] = e^{t \cdot \Lambda}_{\begin{bmatrix} i & j \\ a & b \end{bmatrix}},$$

que al sustituirlo en (3.69) produce,

$$\frac{d}{dt}M^{(1,0)}(t) = M^{(1,0)}(t) \otimes [\hat{G} + \hat{\Pi}] + e^{t \cdot \Lambda} \otimes R^h \otimes \Psi e^h(t),$$

como puede observar tenemos una ecuación diferencial, cuya solución será precisamente la expresión explícita para  $M^{(1,0)}(t)$ , así pues, al multiplicar ambos lados de la igualdad por el factor  $e^{-t[\hat{G} + \hat{\Pi}]}$ ,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} M^{(1,0)}(t) \otimes e^{-t \cdot [\hat{G} + \hat{\Pi}]} - M^{(1,0)}(t) \otimes [\hat{G} + \hat{\Pi}] \otimes e^{-t \cdot [\hat{G} + \hat{\Pi}]} &= e^{t \cdot \Lambda} \otimes R^h \otimes \Psi e^h(t) \\ &\otimes e^{-t \cdot [\hat{G} + \hat{\Pi}]}, \end{aligned}$$

lo cual es equivalente a,

$$\frac{d}{dt} \left[ M^{(1,0)}(t) \otimes e^{-t \cdot [\hat{G} + \hat{\Pi}]} \right] = e^{t \cdot \Lambda} \otimes R^h \otimes \Psi e^h(t) \otimes e^{-t \cdot [\hat{G} + \hat{\Pi}]},$$

integrando ambos lados en el intervalo  $[0, t]$  y aplicando teorema fundamental del cálculo,

$$M^{(1,0)}(t) \otimes e^{-t \cdot [\hat{G} + \hat{\Pi}]} = \int_0^t e^{y \cdot \Lambda} \otimes R^h \otimes \Psi e^h(y) \otimes e^{-y \cdot [\hat{G} + \hat{\Pi}]} dy,$$

por lo tanto,

$$M^{(1,0)}(t) = \int_0^t e^{y \cdot \Lambda} \otimes R^h \otimes \Psi e^h(y) \otimes e^{(t-y) \cdot [\hat{G} + \hat{\Pi}]} dy. \quad (3.70)$$

por un argumento simétrico es posible demostrar la expresión (3.59), es decir, que se cumple que:

$$M^{(0,1)}(t) = \int_0^t e^{y \cdot \Lambda} \otimes R^k \otimes \Psi e^k(y) \otimes e^{(t-y) \cdot [\hat{G} + \hat{\Pi}]} dy. \quad (3.71)$$

Una vez que hemos encontrado expresiones explícitas para los primeros momentos  $M^{(1,0)}(t)$  y  $M^{(0,1)}(t)$  podemos ver qué pasa con la expresión para  $M^{(1,1)}(t)$ . Para ello regresando a la igualdad en (3.68), la vamos a reescribir como sigue:

$$\frac{d}{dt} M^{(1,1)}(t) = M^{(1,1)}(t) \otimes [\hat{G} + \hat{\Pi}] + C(t), \quad (3.72)$$

donde

$$C(t) = M^{(0,1)}(t) \otimes R^h \otimes \Psi e^h(t) + M^{(1,0)}(t) \otimes R^k \otimes \Psi e^k(t). \quad (3.73)$$

Al multiplicar la expresión (3.72) por el factor de integración  $e^{-t \cdot [\hat{G} + \hat{\Pi}]}$  en ambos lados de la igualdad resulta que,

$$\frac{d}{dt} M^{(1,1)}(t) \otimes e^{-t \cdot [\hat{G} + \hat{\Pi}]} - M^{(1,1)}(t) \otimes [\hat{G} + \hat{\Pi}] \otimes e^{-t \cdot [\hat{G} + \hat{\Pi}]} = C(t) \otimes e^{-t \cdot [\hat{G} + \hat{\Pi}]},$$

lo cual es equivalente a,

$$\frac{d}{dt} \left[ M^{(1,1)}(t) \otimes e^{-t \cdot [\hat{G} + \hat{\Pi}]} \right] = C(t) \otimes e^{-t \cdot [\hat{G} + \hat{\Pi}]},$$

integrando ambos lados en el intervalo  $[0, t]$  y aplicando teorema fundamental del cálculo,

$$M^{(1,1)}(t) \otimes e^{-t \cdot [\hat{G} + \hat{\Pi}]} = \int_0^t C(z) \otimes e^{-z \cdot [\hat{G} + \hat{\Pi}]} dz,$$

por lo tanto, la solución a la ecuación diferencial (3.72) es,

$$M^{(1,1)}(t) = \int_0^t C(z) \otimes e^{(t-z) \cdot [\hat{G} + \hat{\Pi}]} dz, \quad (3.74)$$

Ahora bien, al sustituir (3.73) en (3.74),

$$\begin{aligned} M^{(1,1)}(t) &= \int_0^t \left[ M^{(0,1)}(z) \otimes R^h \otimes \Psi e^h(z) + M^{(1,0)}(z) \otimes R^k \otimes \Psi e^k(z) \right] \\ &\quad \otimes e^{(t-z) \cdot [\hat{G} + \hat{\Pi}]} dz, \end{aligned}$$

además, al sustituir también las expresiones (3.70) y (3.71) que representan a  $M^{(1,0)}$  y  $M^{(0,1)}$ , respectivamente

$$\begin{aligned} M^{(1,1)}(t) &= \int_0^t \left[ \left[ \int_0^z e^{y \cdot \Lambda} \otimes R^k \otimes \Psi e^k(y) \otimes e^{(z-y) \cdot [\hat{G} + \hat{\Pi}]} dy \right] \otimes R^h \otimes \Psi e^h(z) \right. \\ &\quad \left. + \left[ \int_0^z e^{y \cdot \Lambda} \otimes R^h \otimes \Psi e^h(y) \otimes e^{(z-y) \cdot [\hat{G} + \hat{\Pi}]} dy \right] \otimes R^k \otimes \Psi e^k(z) \right] \\ &\quad \otimes e^{(t-z) \cdot [\hat{G} + \hat{\Pi}]} dz, \\ &= \int_0^t \int_0^z \left[ e^{y \cdot \Lambda} \otimes R^k \otimes \Psi e^k(y) \otimes e^{(z-y) \cdot [\hat{G} + \hat{\Pi}]} \right] dy \otimes R^h \otimes \Psi e^h(z) \\ &\quad \otimes e^{(t-z) \cdot [\hat{G} + \hat{\Pi}]} dz + \int_0^t \int_0^z \left[ e^{y \cdot \Lambda} \otimes R^h \otimes \Psi e^h(y) \otimes e^{(z-y) \cdot [\hat{G} + \hat{\Pi}]} \right] dy \\ &\quad \otimes R^k \otimes \Psi e^k(z) \otimes e^{(t-z) \cdot [\hat{G} + \hat{\Pi}]} dz, \end{aligned}$$

haciendo un cambio en el dominio de integración,

$$\begin{aligned}
M^{(1,1)}(t) &= \int_0^t \left[ e^{y \cdot \Lambda} \otimes R^k \otimes \Psi e^k(y) \otimes \int_y^t e^{(z-y) \cdot [\hat{G} + \hat{\Pi}]} \otimes R^h \otimes \Psi e^h(z) \right. \\
&\quad \left. \otimes e^{(t-z) \cdot [\hat{G} + \hat{\Pi}]} dz \right] dy + \int_0^t \left[ e^{y \cdot \Lambda} \otimes R^h \otimes \Psi e^h(y) \otimes \int_0^z e^{(z-y) \cdot [\hat{G} + \hat{\Pi}]} \right. \\
&\quad \left. \otimes R^k \otimes \Psi e^k(z) \otimes e^{(t-z) \cdot [\hat{G} + \hat{\Pi}]} dz \right] dy. \tag{3.75}
\end{aligned}$$

Estamos casi por concluir la prueba, únicamente hace falta demostrar la expresión equivalente para  $Int^w(y, t)$ ,  $w \in \{h, k\}$  de (3.60), para ello vamos a considerar al elemento  $((i, a)(j, b))$  generado en la multiplicación de las matrices correspondientes a la segunda integral del primer término de la expresión (3.75), de tal forma que al descomponer los productos matriciales se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}
&\left[ \int_y^t e^{(z-y) \cdot [\hat{G} + \hat{\Pi}]} \otimes R^h \otimes \Psi e^h(z) \otimes e^{(t-z) \cdot [\hat{G} + \hat{\Pi}]} dz \right] \begin{bmatrix} i & j \\ a & b \end{bmatrix} \\
&= \sum_{k_1, k_2, k_3 \in S} \sum_{c_1, c_2, c_3 \in I} \int_y^t e^{(z-y) \cdot \left[ \hat{G} \begin{bmatrix} i & k_1 \\ a & c_1 \end{bmatrix} + \hat{\Pi} \begin{bmatrix} i & k_1 \\ a & c_1 \end{bmatrix} \right]} \cdot R^h \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \\ c_1 & c_2 \end{bmatrix} \cdot \Psi e^h \begin{bmatrix} k_2 & k_3 \\ c_2 & c_3 \end{bmatrix} (z) \\
&\quad \cdot e^{(t-z) \cdot \left[ \hat{G} \begin{bmatrix} k_3 & j \\ c_3 & b \end{bmatrix} + \hat{\Pi} \begin{bmatrix} k_3 & j \\ c_3 & b \end{bmatrix} \right]} dz \\
&= \sum_{k_1, k_2, k_3 \in S} \sum_{c_1, c_2, c_3 \in I} \int_y^t e^{(z-y) \cdot \left[ g_{ik_1} 1_{\{a=c_1\}} + \pi_{ac_1}(i) 1_{\{i=k_1\}} 1_{\{a=c_1\}} \right]} \cdot r_{k_1}^h 1_{\{k_1=k_2\}} 1_{\{c_1=c_2\}} \\
&\quad \cdot \left( -\psi_{k_2, c_2}^h e^{-c_2 z} 1_{\{k_2=k_3\}} 1_{\{c_2=c_3\}} \right) \cdot e^{(t-z) \cdot \left[ g_{k_3 j} 1_{\{c_3=b\}} + \pi_{c_3 b}(k_3) 1_{\{k_3=j\}} 1_{\{c_3=b\}} \right]} dz \\
&= \int_y^t e^{(z-y) \cdot \left[ g_{ij} 1_{\{a=b\}} + \pi_{ab}(i) 1_{\{i=j\}} 1_{\{a=b\}} \right]} \cdot r_j^h \cdot \left( -\psi_{j, b}^h e^{-bz} \right) \cdot e^{(t-z) \cdot \left[ g_{jj} + \pi_{bb}(j) \right]} dz \\
&= r_j^h \left( -\psi_{j, b}^h \right) \int_y^t e^{(z-y) \cdot \Lambda \begin{bmatrix} i & j \\ a & b \end{bmatrix}} e^{-bz} e^{(t-z) \cdot \Lambda \begin{bmatrix} j & j \\ b & b \end{bmatrix}} dz, \quad \text{ésto fue por definición de } \Lambda \\
&= r_j^h \left( -\psi_{j, b}^h \right) e^{-y \cdot \Lambda \begin{bmatrix} i & j \\ a & b \end{bmatrix} + t \cdot \Lambda \begin{bmatrix} j & j \\ b & b \end{bmatrix}} \int_y^t e^{z \cdot \left( \Lambda \begin{bmatrix} i & j \\ a & b \end{bmatrix} - \Lambda \begin{bmatrix} j & j \\ b & b \end{bmatrix} - b \right)} dz, \quad \text{integrando,} \\
&= \frac{r_j^h \left( -\psi_{j, b}^h \right) e^{-y \cdot \Lambda \begin{bmatrix} i & j \\ a & b \end{bmatrix} + t \cdot \Lambda \begin{bmatrix} j & j \\ b & b \end{bmatrix}}}{\Lambda \begin{bmatrix} i & j \\ a & b \end{bmatrix} - \Lambda \begin{bmatrix} j & j \\ b & b \end{bmatrix} - b} \left[ e^{t \cdot \left( \Lambda \begin{bmatrix} i & j \\ a & b \end{bmatrix} - \Lambda \begin{bmatrix} j & j \\ b & b \end{bmatrix} - b \right)} - e^{y \cdot \left( \Lambda \begin{bmatrix} i & j \\ a & b \end{bmatrix} - \Lambda \begin{bmatrix} j & j \\ b & b \end{bmatrix} - b \right)} \right].
\end{aligned}$$

Por lo tanto, hemos encontrado que,

$$Int^h(y, t) = \frac{r_j^h(-\psi_{j,b}^h)e^{-y \cdot \Lambda \begin{bmatrix} i & j \\ a & b \end{bmatrix} + t \cdot \Lambda \begin{bmatrix} j & j \\ b & b \end{bmatrix}}{\Lambda \begin{bmatrix} i & j \\ a & b \end{bmatrix} - \Lambda \begin{bmatrix} j & j \\ b & b \end{bmatrix} - b} \left[ e^{t \cdot (\Lambda \begin{bmatrix} i & j \\ a & b \end{bmatrix} - \Lambda \begin{bmatrix} j & j \\ b & b \end{bmatrix} - b)} - e^{y \cdot (\Lambda \begin{bmatrix} i & j \\ a & b \end{bmatrix} - \Lambda \begin{bmatrix} j & j \\ b & b \end{bmatrix} - b)} \right]. \quad (3.76)$$

Con un procedimiento análogo se desarrolla la expresión para la segunda integral del segundo término de (3.75), que corresponde a la línea de negocio  $k$  con lo cual,

$$Int^k(y, t) = \frac{r_j^k(-\psi_{j,b}^k)e^{-y \cdot \Lambda \begin{bmatrix} i & j \\ a & b \end{bmatrix} + t \cdot \Lambda \begin{bmatrix} j & j \\ b & b \end{bmatrix}}{\Lambda \begin{bmatrix} i & j \\ a & b \end{bmatrix} - \Lambda \begin{bmatrix} j & j \\ b & b \end{bmatrix} - b} \left[ e^{t \cdot (\Lambda \begin{bmatrix} i & j \\ a & b \end{bmatrix} - \Lambda \begin{bmatrix} j & j \\ b & b \end{bmatrix} - b)} - e^{y \cdot (\Lambda \begin{bmatrix} i & j \\ a & b \end{bmatrix} - \Lambda \begin{bmatrix} j & j \\ b & b \end{bmatrix} - b)} \right]. \quad (3.77)$$

Por lo tanto al sustituir (3.76) y (3.77) en (3.75) se da por concluida la prueba.  $\square$

Hemos encontrado ya el primero momento para los montos de reclamos de las líneas de negocio  $h$  y  $k$ , así como los momentos cruzados. Sin embargo también estamos interesados en las expresiones para los segundos momentos de los montos de reclamos para ambas líneas de negocio, por lo cual del teorema anterior se desprende el siguiente corolario.

**Corolario 3.3.6.** *Para cada pareja de líneas de negocio  $(h, k)$  y para todo  $t \geq 0$  resulta que:*

$$M^{(2,0)}(t) = 2 \int_0^t e^{\Lambda \cdot y} \otimes R^h \otimes \Psi e^h(y) \otimes Int^h(y, t) dy + \int_0^t e^{\Lambda \cdot y} \otimes R^h \otimes (\Psi e^h(y))^2 \otimes e^{(t-y) \cdot [\hat{G} + \hat{\Pi}]} dy \quad (3.78)$$

$$M^{(0,2)}(t) = 2 \int_0^t e^{\Lambda \cdot y} \otimes R^k \otimes \Psi e^k(y) \otimes Int^k(y, t) dy + \int_0^t e^{\Lambda \cdot y} \otimes R^k \otimes (\Psi e^k(y))^2 \otimes e^{(t-y) \cdot [\hat{G} + \hat{\Pi}]} dy \quad (3.79)$$

*Demostración.* Comenzaremos por demostrar la igualdad (3.78). Para ello vamos a considerar la expresión (3.49) que establece que para  $w \in \{h, k\}$  se cumple lo siguiente:

$$\frac{\partial}{\partial t} F(x_h, x_k; t, 0) = F(x_h, x_k; t, 0) \otimes \left[ \hat{G} + \hat{\Pi} + \sum_{w \in \{h, k\}} R^w \otimes \left( \hat{\Psi}^w(x_w, t) - \mathbf{I} \right) \right].$$

Como buscamos el segundo momento en los montos de reclamos para la línea de negocio  $h$ , es decir  $M^{(2,0)}(t)$ , consideraremos  $x_k = 0$  de tal forma que la expresión anterior se reduce a:

$$\frac{\partial}{\partial t} F(x_h, 0; t, 0) = F(x_h, 0; t, 0) \otimes \left[ \hat{G} + \hat{\Pi} + R^h \otimes \left( \hat{\Psi}^h(x_h, t) - \mathbf{I} \right) \right].$$

Para encontrar el segundo momento bastará con calcular la segunda derivada parcial con respecto a  $x_h$  y al final hacer  $x_h = 0$ . Derivamos,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x_h^2} \frac{\partial}{\partial t} F(x_h, 0; t, 0) &= \frac{\partial^2}{\partial x_h^2} \left[ F(x_h, 0; t, 0) \otimes \left[ \hat{G} + \hat{\Pi} + R^h \otimes \left( \hat{\Psi}^h(x_h, t) - \mathbf{I} \right) \right] \right] \\ &= \frac{\partial}{\partial x_h} \left[ \frac{\partial}{\partial x_h} F(x_h, 0; t, 0) \otimes \left[ \hat{G} + \hat{\Pi} + R^h \otimes \left( \hat{\Psi}^h(x_h, t) - \mathbf{I} \right) \right] \right. \\ &\quad \left. + F(x_h, 0; t, 0) \otimes R^h \otimes \frac{\partial}{\partial x_h} \hat{\Psi}^h(x_h, t) \right] \\ &= \frac{\partial^2}{\partial x_h^2} F(x_h, 0; t, 0) \otimes \left[ \hat{G} + \hat{\Pi} + R^h \otimes \left( \hat{\Psi}^h(x_h, t) - \mathbf{I} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x_h} F(x_h, 0; t, 0) \\ &\quad \otimes R^h \otimes \frac{\partial}{\partial x_h} \hat{\Psi}^h(x_h, t) + \frac{\partial}{\partial x_h} F(x_h, 0; t, 0) \otimes R^h \otimes \frac{\partial}{\partial x_h} \hat{\Psi}^h(x_h, t) \\ &\quad + F(x_h, 0; t, 0) \otimes R^h \otimes \frac{\partial^2}{\partial x_h^2} \hat{\Psi}^h(x_h, t) \\ &= \frac{\partial^2}{\partial x_h^2} F(x_h, 0; t, 0) \otimes \left[ \hat{G} + \hat{\Pi} + R^h \otimes \left( \hat{\Psi}^h(x_h, t) - \mathbf{I} \right) \right] + 2 \frac{\partial}{\partial x_h} F(x_h, 0; t, 0) \\ &\quad \otimes R^h \otimes \frac{\partial}{\partial x_h} \hat{\Psi}^h(x_h, t) + F(x_h, 0; t, 0) \otimes R^h \otimes \frac{\partial^2}{\partial x_h^2} \hat{\Psi}^h(x_h, t). \end{aligned}$$



Por propiedades de derivadas parciales podemos intercambiar el orden de derivación, por lo tanto llegamos a la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial^2}{\partial x_h^2} F(x_h, 0; t, 0) &= \frac{\partial^2}{\partial x_h^2} F(x_h, 0; t, 0) \otimes \left[ \hat{G} + \hat{\Pi} + R^h \otimes \left( \hat{\Psi}^h(x_h, t) - \mathbf{I} \right) \right] \\ &+ 2 \frac{\partial}{\partial x_h} F(x_h, 0; t, 0) \otimes R^h \otimes \frac{\partial}{\partial x_h} \hat{\Psi}^h(x_h, t) \\ &+ F(x_h, 0; t, 0) \otimes R^h \otimes \frac{\partial^2}{\partial x_h^2} \hat{\Psi}^h(x_h, t), \end{aligned} \quad (3.80)$$

con lo cual, al evaluar  $x_h$  en cero habremos terminado. Para ello observe que por (3.66) de la demostración del teorema anterior, sabemos que para cada línea de negocio  $w$ ,  $w \in \{h, k\}$ ,

$$\frac{\partial}{\partial x_w} \hat{\Psi}_{[a \ b]}^w(x_w, t) \Big|_{x_w=0} = \begin{cases} -\psi_{i,a}^w e^{-at} & \text{si } i = j, a = b \\ 0 & \text{e.o.c.} \end{cases} := \Psi_{[a \ b]}^w(t), \quad (3.81)$$

donde,  $\psi_{i,a}^w = \mathbb{E}_{(i,a)}[X_1^w]$ . Sin embargo, aún no tenemos una expresión para  $\frac{\partial^2}{\partial x_w^2} \hat{\Psi}^w(x_w, t) \Big|_{x_w=0}$  por lo cual trabajaremos en ello.

De (3.65) sabemos que para la entrada  $((i, a), (j, b))$  con  $i, j \in S$  y  $a, b \in I$ ,

$$\frac{\partial}{\partial x_w} \hat{\Psi}_{[a \ b]}^w(x_w, t) = \begin{cases} \mathbb{E}_{(i,a)} \left[ -X_1^w e^{-at} e^{-x_w X_1^w e^{-at}} \right] & \text{si } i = j, a = b, \\ 0 & \text{e.o.c.} \end{cases}$$

al calcular la segunda derivada parcial con respecto a  $x_w$ ,  $w \in \{h, k\}$ ,

$$\frac{\partial^2}{\partial x_w^2} \hat{\Psi}_{[a \ b]}^w(x_w, t) = \begin{cases} \mathbb{E}_{(i,a)} \left[ (X_1^w e^{-at})^2 e^{-x_w X_1^w e^{-at}} \right] & \text{si } i = j, a = b, \\ 0 & \text{e.o.c.} \end{cases}$$

que al evaluar  $x_w$  en cero,

$$\frac{\partial^2}{\partial x_w^2} \hat{\Psi}_{[a \ b]}^w(x_w, t) \Big|_{x_w=0} = \begin{cases} \mathbb{E}_{(i,a)} \left[ (X_1^w e^{-at})^2 \right] & \text{si } i = j, a = b, \\ 0 & \text{e.o.c.} \end{cases}$$

sea  $(\psi_{i,a}^w)^2 = \mathbb{E}[(X_1^w)^2]$ , entonces la expresión anterior se reduce a:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial x_w^2} \hat{\Psi}_{\begin{bmatrix} i & j \\ a & b \end{bmatrix}}^w(x_w, t) \Big|_{x_w=0} &= \begin{cases} (\psi_{i,a}^w)^2 e^{-2at} & \text{si } i = j, a = b, \\ 0 & \text{e.o.c.} \end{cases} \\
&= \begin{cases} (\psi_{i,a}^w e^{-at})^2 & \text{si } i = j, a = b, \\ 0 & \text{e.o.c.} \end{cases} \\
&= \left( \Psi e_{\begin{bmatrix} i & j \\ a & b \end{bmatrix}}^w(t) \right)^2. \tag{3.82}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, ahora sí al evaluar la expresión (3.80) considerando  $x_h = 0$ , al combinarlo con (3.56) y al sustituir los resultados en (3.81) y (3.82), obtenemos que,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} M^{(2,0)}(t) &= M^{(2,0)}(t) \otimes [\hat{G} + \hat{\Pi} + R^h \otimes (\hat{\Psi}^h(0, t) - I)] \\
&\quad + 2M^{(1,0)}(t) \otimes R^h \otimes \Psi e^h(t) + F(0, 0; t, 0) \otimes R^h \otimes (\Psi e^h(t))^2, \tag{3.83}
\end{aligned}$$

además observe que  $\hat{\Psi}^h(0, t) = I$ .

Adicionalmente  $F(0, 0; t, 0) = \mathbb{E}_{(i,a)}[1_{\{Y_t=j, \delta_t=b\}}]$ , lo cual es equivalente a la entrada  $((i, a), (j, b))$  de la matriz de probabilidades de transición al tiempo  $t$  del proceso de Markov a tiempo continuo  $(Y, \delta)$ , que por propiedades que posee el generador infinitesimal  $\Lambda$  correspondiente a estos procesos conjuntos, la siguiente igualdad es equivalente:

$$F_{\begin{bmatrix} i & j \\ a & b \end{bmatrix}}(0, 0; t, 0) = \mathbb{E}_{(i,a)}[1_{\{Y_t=j, \delta_t=b\}}] = e^{t \cdot \Lambda}_{\begin{bmatrix} i & j \\ a & b \end{bmatrix}}. \tag{3.84}$$

Así, aplicando estas dos últimas observaciones en la igualdad (3.83) se reduce a:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} M^{(2,0)}(t) &= M^{(2,0)}(t) \otimes [\hat{G} + \hat{\Pi}] + 2M^{(1,0)}(t) \otimes R^h \otimes \Psi e^h(t) + e^{\Lambda t} \otimes R^h \\
&\quad \otimes (\Psi e^h(t))^2. \tag{3.85}
\end{aligned}$$

$$\text{Sea } D(t) = 2M^{(1,0)}(t) \otimes R^h \otimes \Psi e^h(t) + e^{\Lambda t} \otimes R^h \otimes (\Psi e^h(t))^2, \tag{3.86}$$

entonces (3.85) toma la forma de la ecuación diferencial:

$$\frac{d}{dt} M^{(2,0)}(t) = M^{(2,0)}(t) \otimes [\hat{G} + \hat{\Pi}] + D(t),$$

que al multiplicar ambos lados de la ecuación por el factor de integración  $e^{-[\hat{G}+\hat{\Pi}] \cdot t}$ ,

$$\frac{d}{dt} M^{(2,0)}(t) \otimes e^{-[\hat{G}+\hat{\Pi}] \cdot t} - M^{(2,0)}(t) \otimes [\hat{G} + \hat{\Pi}] \otimes e^{-[\hat{G}+\hat{\Pi}] \cdot t} = D(t) \otimes e^{-[\hat{G}+\hat{\Pi}] \cdot t},$$

donde dicha expresión es equivalente a la siguiente derivada:

$$\frac{d}{dt} \left[ M^{(2,0)}(t) \otimes e^{-[\hat{G}+\hat{\Pi}] \cdot t} \right] = D(t) \otimes e^{-[\hat{G}+\hat{\Pi}] \cdot t},$$

al integrar ambos lados en el intervalo  $[0, t]$ ,

$$\int_0^t \frac{d}{dt} \left[ M^{(2,0)}(z) \otimes e^{-[\hat{G}+\hat{\Pi}] \cdot z} \right] dz = \int_0^t D(z) \otimes e^{-[\hat{G}+\hat{\Pi}] \cdot z} dz,$$

que al aplicar el Teorema fundamental de cálculo se simplifica a

$$M^{(2,0)}(t) \otimes e^{-[\hat{G}+\hat{\Pi}] \cdot t} = \int_0^t D(z) \otimes e^{-[\hat{G}+\hat{\Pi}] \cdot z} dz,$$

por lo tanto,

$$M^{(2,0)}(t) = \int_0^t D(z) \otimes e^{(t-z) \cdot [\hat{G}+\hat{\Pi}]} dz, \quad (3.87)$$

al sustituir (3.86) en (3.87),

$$\begin{aligned} M^{(2,0)}(t) &= \int_0^t \left[ 2M^{(1,0)}(z) \otimes R^h \otimes \Psi e^h(z) + e^{\Lambda \cdot z} \otimes R^h \otimes (\Psi e^h(z))^2 \right] \\ &\quad \otimes e^{(t-z) \cdot [\hat{G}+\hat{\Pi}]} dz, \end{aligned}$$

sustituyendo la expresión de  $M^{(1,0)}(z)$ ,

$$\begin{aligned} M^{(2,0)}(t) &= \int_0^t \left[ 2 \left[ \int_0^z e^{\Lambda \cdot y} \otimes R^h \otimes \Psi e^h(y) \otimes e^{(z-y) \cdot [\hat{G}+\hat{\Pi}]} dy \right] \otimes R^h \otimes \Psi e^h(z) \right. \\ &\quad \left. + e^{\Lambda \cdot z} \otimes R^h \otimes (\Psi e^h(z))^2 \right] \otimes e^{(t-z) \cdot [\hat{G}+\hat{\Pi}]} dz \\ &= 2 \int_0^t \int_0^z \left[ e^{\Lambda \cdot y} \otimes R^h \otimes \Psi e^h(y) \otimes e^{(z-y) \cdot [\hat{G}+\hat{\Pi}]} dy \right] \otimes R^h \otimes \Psi e^h(z) \\ &\quad \otimes e^{(t-z) \cdot [\hat{G}+\hat{\Pi}]} dz + \int_0^t e^{\Lambda \cdot z} \otimes R^h \otimes (\Psi e^h(z))^2 \otimes e^{(t-z) \cdot [\hat{G}+\hat{\Pi}]} dz \end{aligned}$$

haciendo un cambio en el dominio de integración en la integral del primer término,

$$\begin{aligned}
&= 2 \int_0^t \left[ e^{\Lambda \cdot y} \otimes R^h \otimes \Psi e^h(y) \otimes \int_y^t e^{(z-y) \cdot [\hat{G} + \hat{\Pi}]} \otimes R^h \otimes \Psi e^h(z) \right. \\
&\quad \left. \otimes e^{(t-z) \cdot [\hat{G} + \hat{\Pi}]} dz \right] dy + \int_0^t e^{\Lambda \cdot z} \otimes R^h \otimes (\Psi e^h(z))^2 \otimes e^{(t-z) \cdot [\hat{G} + \hat{\Pi}]} dz.
\end{aligned} \tag{3.88}$$

Ahora bien, en el desarrollo de la demostración del Teorema anterior encontramos que para línea de negocio  $w \in \{h, k\}$  se cumple la siguiente igualdad:

$$Int^w(y, t) = \int_y^t e^{(z-y) \cdot [\hat{G} + \hat{\Pi}]} \otimes R^w \otimes \Psi e^w(z) \otimes e^{(t-z) \cdot [\hat{G} + \hat{\Pi}]} dz. \tag{3.89}$$

Por lo tanto al sustituir (3.89) en (3.88) encontramos que:

$$\begin{aligned}
M^{(2,0)}(t) &= 2 \int_0^t e^{\Lambda \cdot y} \otimes R^h \otimes \Psi e^h(y) \otimes Int^h(y, t) dy \\
&\quad + \int_0^t e^{\Lambda \cdot z} \otimes R^h \otimes (\Psi e^h(z))^2 \otimes e^{(t-z) \cdot [\hat{G} + \hat{\Pi}]} dz,
\end{aligned} \tag{3.90}$$

que al hacer  $z = y$  en la segunda integral damos por concluida la demostración para la expresión (3.78).

La demostración de la expresión (3.79) que pertenece al segundo momento de los montos de reclamación para la línea de negocio  $k$ , es análogo al procedimiento que acabamos de hacer para la línea de negocio  $h$ .

□

## Capítulo 4

# Aplicación del modelo de Riesgo Modulado de Markov con tasas de interés estocásticas

En este capítulo se concluye con la implementación del modelo de Riesgo modulado de Markov con tasas de interés estocásticas, dándole una aplicación al caso de una compañía aseguradora de autos, para ello nos basamos en el modelo clásico de Cramer Lundberg modulado de Markov. Vamos a suponer que la aseguradora cuenta de antemano con una cartera de asegurados los cuales le pagarán a la compañía un monto por concepto de primas con el fin de ser protegidos en caso de que les ocurra un siniestro y en contraparte, la compañía aseguradora tendrá la obligación de cubrir los gastos de dichos siniestros en el momento en que éstos se presenten. La finalidad de esta implementación es saber cuál es el capital de la compañía aseguradora en un tiempo presente, al descontar todos los montos por reclamos por parte de los asegurados así como los montos por concepto de primas.

Suponga además que la compañía aseguradora maneja distintas líneas de negocio a las cuales veremos como los tipos de cobertura que tendrán los asegurados. En nuestro caso habrán dos tipos de coberturas: cobertura por accidente y cobertura por robo.

En la primera sección se hace una descripción de la implementación, introduciendo los datos que emplearemos al momento de las simulaciones. Se trabajará con un proceso de saltos de Markov que será el proceso subyacente que modela las condiciones económicas del mercado y de acuerdo a la situa-

ción económica en que éste se encuentre será el comportamiento del proceso de Cramer Lundberg y también el proceso de tasas de interés que son con las que se traerán a tiempo presente los montos por concepto de reclamos y de primas generados en el proceso de Cramer Lundberg. Y entonces, dependiendo de la situación económica que haya en el mercado en un cierto tiempo, se tendrá una tasa de frecuencia de los reclamos, además, el proceso subyacente también influirá en los tipos de reclamos que predomina al momento en que ocurra un siniestro (accidente o robo) y el tamaño de los mismos.

En el último apartado se analizan los resultados obtenidos en las simulaciones, observando cuántas veces se arruina la compañía aseguradora dado que inició con cierto capital y se hará un desglose de los montos de reclamos descontados para saber qué proporción hay de reclamos por accidentes y la proporción de reclamos por robos.

## 4.1. Implementación del modelo

Imagine que el dueño de una compañía aseguradora con el fin de prevenir una ruina desea saber si dado que inicia con cierto capital, éste más los montos recibidos por primas por parte de los asegurados serán suficientes para hacerle frente a los montos de reclamos que ocurran en un cierto periodo de tiempo. El dueño está interesado no sólo en saber cuáles serían los montos de reclamos y los montos por primas percibidas en este intervalo de tiempo, sino que además quisiera saber a cuánto equivalen esos montos el día de hoy de tal manera que pueda calcular el capital total con que contaría a tiempo presente y que con ello pudiera estar seguro de que puede hacerle frente a sus obligaciones o bien, tomar las medidas necesarias para prevenir la ruina.

El dueño no sólo desea saber cuál es el monto total por concepto de reclamos, sino que también desea saber cuánto capital corresponde a reclamos por accidentes y cuánto capital corresponde a reclamos por robos. Sin embargo, determinar la frecuencia con la que ocurren los reclamos, así como el tipo de reclamo (accidente o robo) dependen de la situación económica en que se halle el mercado (buena, regular, mala), donde se esperaría que si se encuentra en una situación buena, entonces no habrían tantos reclamos, mientras que si la situación económica en el mercado fuera mala entonces habrían muchos reclamos, por tal razón es necesario agregar un proceso de saltos de Markov que será un proceso subyacente el cual modelará los cambios entre las con-

diciones económicas del mercado, de tal modo que tanto el tipo de reclamo, como la frecuencia en que se da cada uno de ellos dependerá en gran medida del estado en que se encuentre este proceso subyacente, pero haciendo énfasis en que esta dependencia no ocurre en su totalidad, pues si así fuera, caeríamos en un modelo determinista, por tanto lo que hace el proceso subyacente es marcar una tendencia en el tipo de reclamo que ocurrirá de acuerdo al estado que tome, así como la frecuencia de los mismos.

Recordemos que en el Capítulo 3 se introdujo el modelo de Cramer Lundberg modulado de Markov con tasas de interés estocásticas, que es el proceso a tiempo continuo  $C^* = \{C_t^*, t \geq 0\}$ , donde  $C_t^*$  se definió en la ecuación (3.5) como:

$$C_t^* = u + \sum_{n=1}^{N_t^h} cJ_n e^{-\delta_{J_n} \cdot J_n} - \sum_{n=1}^{N_t^h} X_n^h e^{-\delta_{J_n} \cdot J_n}, \quad (4.1)$$

donde  $u \geq 0$  es el capital inicial de la compañía aseguradora,  $cJ_n e^{-\delta_{J_n} \cdot J_n}$  es la entrada por primas hasta el tiempo del  $n$ -ésimo reclamo  $J_n$  descontada a valor presente con las mismas tasas de interés con que se descuenta el  $n$ -ésimo monto por reclamo, observe que habrán tantos montos por primas descontadas como número de reclamos ocurran en el intervalo  $[0, t]$ , con  $c > 0$  constante. Por último  $\sum_{n=1}^{N_t^h} X_n^h e^{-\delta_{J_n} \cdot J_n}$  es el proceso de reclamos agregados descontados hasta el tiempo  $t$ .

Sea  $Y = \{Y_t, t \geq 0\}$  un proceso de saltos de Markov con espacio de estados  $S = \{Buena, Regular, Mala\}$ , donde la variable  $Y_t$  representa la condición económica del mercado al tiempo  $t$ . Este será el proceso subyacente mediante el cual obtendremos las trayectorias que siguen las condiciones económicas en el mercado a través del tiempo. Sea  $G$  el generador infinitesimal que caracteriza al proceso  $Y$ , que para fines de la implementación los valores que lo componen han sido propuestos de acuerdo a ciertas hipótesis. Primeramente vamos a suponer que nos encontramos en un tipo de mercado económico estable el cual la mayor parte del tiempo se encuentra en una situación económica buena y por tanto no hay tanta frecuencia en los reclamos para este estado. La unidad de tiempo con la que trabajaremos será en horas. Vamos a proponer que en una situación económica buena se tiene una tasa de  $1/50$  que nos dice que en promedio ocurrirá un reclamo cada 50 horas; por otro lado, si la situación económica en el mercado pasa a una situación regular, entonces la frecuencia de reclamos tendrá que ser un poco mayor, por tal razón se

propone una tasa de  $1/25$ , que nos dice que en promedio ocurrirá un accidente cada 25 horas y por último, si ocurriera que el estado de la economía en el mercado estuviera en una situación mala entonces la frecuencia en la ocurrencia de los reclamos sería aún más marcada, así pues, proponemos una tasa de  $1/10$  con lo cual en promedio estaría ocurriendo un reclamo cada 10 horas.

Por otro lado, vamos a suponer que una vez que la situación económica en el mercado es buena, habrá mayor probabilidad de que el proceso pase a una situación económica mala en comparación con la probabilidad de pasar a una situación económica regular, así se proponen las tasas  $1/200$  y  $3/200$  para pasar de una situación buena a una situación regular o mala, respectivamente. Si el proceso de las condiciones económicas se encuentra en una situación económica regular, supondremos que habrá la misma probabilidad de pasar a una situación económica buena o mala, para ello se proponen las tasas  $2/200$  y  $2/200$ , respectivamente, y por último, si el proceso de las condiciones económicas ya se encontrara en una situación económica mala, entonces se propone que haya una mayor probabilidad de regresar a un estado económico bueno que a un estado regular, así las tasas que se sugieren son  $3/40$  y  $1/40$ , para pasar de un estado malo a uno bueno o regular, respectivamente. Entonces el generador infinitesimal  $G$  que caracteriza a nuestro proceso  $Y$  queda definido como:

$$G = \begin{array}{c} \textit{Buena} \\ \textit{Regular} \\ \textit{Mala} \end{array} \begin{array}{ccc} \textit{Buena} & \textit{Regular} & \textit{Mala} \\ \left( \begin{array}{ccc} -1/50 & 1/200 & 3/200 \\ 2/100 & -1/25 & 2/100 \\ 3/40 & 1/40 & -1/10 \end{array} \right), \end{array}$$

A partir del cual se obtiene la siguiente matriz de probabilidades de saltos  $Q$ , en la cual como puede observar se ven reflejadas las probabilidades de salto entre estados que hemos propuesto:

$$Q = \begin{array}{c} \textit{Buena} \\ \textit{Regular} \\ \textit{Mala} \end{array} \begin{array}{ccc} \textit{Buena} & \textit{Regular} & \textit{Mala} \\ \left( \begin{array}{ccc} 0 & 1/4 & 3/4 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 3/4 & 1/4 & 0 \end{array} \right), \end{array}$$

Además, haciendo uso de la Proposición (2.2.6), donde  $\pi G = 0$ , la distribución estacionaria del proceso subyacente  $Y$  es:



$$\pi = (\pi_1, \pi_2, \pi_3) = (0.6896552 \quad 0.1724138 \quad 0.1379310),$$

Que como se puede corroborar, redondeando las cifras nos indica que el proceso permanecerá aproximadamente un 69% del tiempo en una situación económica buena, el 17% en una situación económica regular y apenas un 14% del tiempo en situación económica mala.

Supongamos además que el dueño de la compañía aseguradora desea saber si el capital con el que cuenta el día de hoy es suficiente para hacerle frente a los montos por reclamos de los asegurados durante en un intervalo de 200 horas. En el apéndice podrá encontrar el código en R para generar las trayectorias de un proceso de saltos de Markov que cumplan con las características mencionadas en la Sección 2.2, con lo cual podrá observar el comportamiento las condiciones económicas en el mercado a través del tiempo.

Una vez que se sabe cómo es el comportamiento del proceso que modela las condiciones económicas en el mercado, el siguiente paso es generar las trayectorias del modelo de riesgo modulado de Markov que en nuestro caso es el proceso de Cramer Lundberg modulado de Markov, donde las trayectorias de este proceso mostrarán los tiempos en que ocurre un reclamo, además se podrá apreciar el tamaño del reclamo ocurrido en cada momento así como el incremento en el capital debido a los ingresos por primas que tiene la compañía aseguradora por parte de su cartera de asegurados.

Supongamos que la compañía aseguradora el día de hoy cuenta con \$20,000 pesos. Además estará recibiendo un monto por primas que será constante en el tiempo y éste será de \$800 pesos por unidad de tiempo. Ahora bien, dado que ya sabemos cómo son las trayectorias del proceso de saltos de Markov subyacente que modela las condiciones económicas del mercado y éste tiene tres estados (situación económica buena, regular y mala), las tasas de ocurrencia de los reclamos dependerán del estado en que se encuentre el proceso subyacente, por lo cual tendremos tres tasas de ocurrencia distintas para los reclamos, además, al suponer que la compañía de seguros maneja dos tipos de cobertura (accidente y robo) entonces también deberá de haber una tasa de ocurrencia para accidentes y otra tasa de ocurrencia para robos por cada estado del proceso subyacente, vamos a suponer las siguientes tasas para la ocurrencia de los reclamos:

$$\text{tasas ocurrencia reclamos accidentes} = (1/9, 1/7, 1/5)$$

$$\text{tasas ocurrencia reclamos robos} = (1/12, 1/9, 1/3),$$

Por lo tanto asumimos que los reclamos ocurren con mayor frecuencia en la cobertura que corresponde a los accidente, pero sólo para el caso cuando la condición económica en el mercado es buena o regular, mientras que para el caso con una condición mala los reclamos por robo ocurren con mayor frecuencia que los reclamos por accidente. Además, si fijamos alguna de las coberturas, la frecuencia es más alta para el estado 3 del proceso subyacente que corresponde a una mala condición en el mercado.

Asumiremos que los tamaños de los reclamos se distribuyen exponencialmente con parámetros  $1/2000$  y  $1/5000$  para accidentes y robos, respectivamente, sin importar el estado en que se halle el proceso subyacente, por lo cual:

$$\begin{aligned} \text{tasas monto reclamo accidente} &= (1/2000, 1/2000, 1/2000) \\ \text{tasas monto reclamo robo} &= (1/5000, 1/5000, 1/5000), \end{aligned}$$

donde se puede apreciar que el valor esperado para los montos de reclamos por accidente es más pequeño que por robo, ya que en este último caso, si suponemos que la aseguradora maneja ciertas condiciones de póliza, puede ocurrir que tenga que pagarle al asegurado un monto equivalente al valor de la factura de su auto, que supondremos que es una cantidad mayor que si el asegurado sólo presenta un accidente.

Ahora bien, de acuerdo a la fórmula (3.7) la distribución estacionaria para el modelo de riesgo de Cramer Lundberg modulado de Markov correspondiente a cada una de las coberturas (accidente y robo), son las siguientes :

$$\begin{aligned} \eta^{\text{accidentes}} &= (\eta_{\text{buena}}^{\text{accidentes}}, \eta_{\text{regular}}^{\text{accidentes}}, \eta_{\text{mala}}^{\text{accidentes}}), \\ &= (0.8112179996, 0.1303743214, 0.0540767904), \\ \eta^{\text{robos}} &= (\eta_{\text{buena}}^{\text{robos}}, \eta_{\text{regular}}^{\text{robos}}, \eta_{\text{mala}}^{\text{robos}}) \\ &= (0.7537688706, 0.1256281451, 0.1206029843). \end{aligned}$$

Ahora bien, de acuerdo a los datos que se han proporcionado veamos si realmente hacen que se cumpla la condición de ganancia neta para este modelo de riesgo modulado de Markov dada por la fórmula (3.6). La condición de ganancia neta correspondiente a cada una de las coberturas que ofrece la compañía es la siguiente:

$$d^{\text{accidentes}} = \sum_{i \in S} \eta_i^{\text{accidentes}} \left( \frac{c_i^{\text{accidentes}}}{r_i^{\text{accidentes}}} - \mu_i^{\text{accidentes}} \right) = 4795.834736 > 0,$$

$$d^{robos} = \sum_{i \in S} \eta_i^{robos} \left( \frac{c_i^{robos}}{\eta_i^{robos}} - \mu_i^{robos} \right) = 3430.150965 > 0,$$

que como podemos observar en ambos casos la condición de ganancia neta resulta ser positiva, lo cual nos indica que el monto cobrado por primas resulta ser eficiente para hacerle frente al monto esperado por reclamos y con ello asegurar que la compañía aseguradora no entre en ruina.

Con los datos proporcionados hasta ahora, posibles trayectorias de este proceso se muestran en las Figuras 4.1 y 4.2

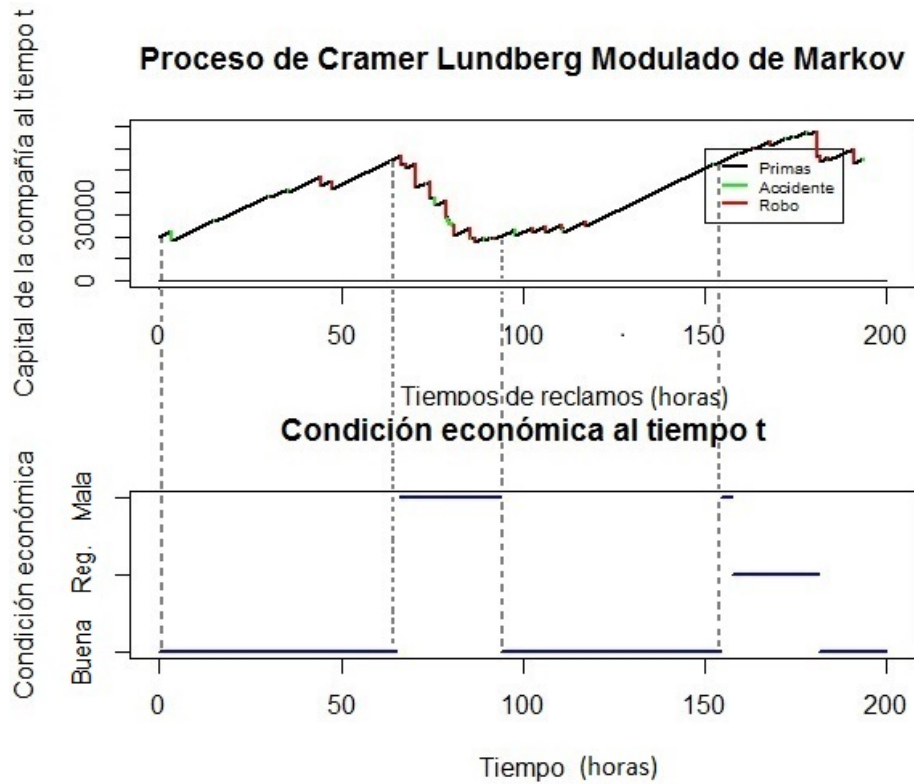


Figura 4.1: Trayectoria proceso Cramer Lundberg modulado de Markov

La Figura 4.1 nos muestra una posible trayectoria del proceso subyacente que modela las condiciones económicas en el mercado y una trayectoria de su respectivo proceso de Cramer Lundberg modulado de Markov y como se puede apreciar, cuando el proceso subyacente permanece en el estado 1 que corresponde a una condición económica buena, el modelo de riesgo no

presenta tantos reclamos por parte de los asegurados y entonces el tiempo que transcurre entre un reclamo y el siguiente es mayor en comparación al tiempo que transcurre entre los reclamos cuando la situación económica en el mercado es mala como se puede observar en la gráfica, pues en el tramo donde la situación económica es mala hay mayor frecuencia en los reclamos. Además cabe hacer mención que cuando el proceso subyacente se encuentra en una situación buena, hay una mayor tendencia en el número de reclamos provenientes por accidente en comparación a los reclamos por robo, mientras que cuando el proceso subyacente se encuentra en una situación mala ocurre lo contrario, es decir, hay mayor número de reclamos por robo que por accidente y entonces como hemos supuesto que el valor esperado de los montos de reclamos por robo es mayor que el de accidente, cuando se está en una situación económica en el mercado mala la compañía aseguradora tiene mayor probabilidades de entrar en ruina, lo cual se puede apreciar en la gráfica, pues al inicio, cuando había una situación económica buena el capital de la aseguradora creció, mientras que cuando se entró en una situación económica mala, el capital de la compañía comenzó a decrecer debido a que hubo mayor número de reclamos y en su mayoría provenientes por robo. En este caso la compañía aseguradora logró estabilizarse sin llegar a la ruina.

En la Figura 4.2 se presentan otras posibles trayectorias tanto para el proceso de Cramer Lundberg modulado de Markov como para el proceso subyacente de las condiciones económicas en el mercado, pero en este caso al inicio se tiene una situación económica regular y de acuerdo a las suposiciones que hemos hecho en los datos, se esperaría tener un equilibrio entre en número de reclamos provenientes por accidentes y por robos lo cual sí se puede apreciar, además, la frecuencia de los reclamos no es tan acelerada como en una situación mala ni tampoco muy escasa como en la situación económica buena sino que hay una frecuencia media en comparación a estas dos. Sin embargo, en este caso a pesar de que en un inicio el capital de la compañía se encontraba estabilizado, conforme va transcurriendo el tiempo comienza a decrecer, de tal forma que cuando se entra en situación económica mala la frecuencia de los reclamos incrementa, dominando los reclamos por robo y como consecuencia parece ser ocurre una ruina.

Hasta ahora ya hemos visto cómo se comportan algunas de las trayectorias del modelo de riesgo modulado de Markov dependiendo de cómo se mueve el proceso de saltos de Markov subyacente que en nuestro caso modela la situación económica en el mercado, sin embargo, aún no logramos nuestro

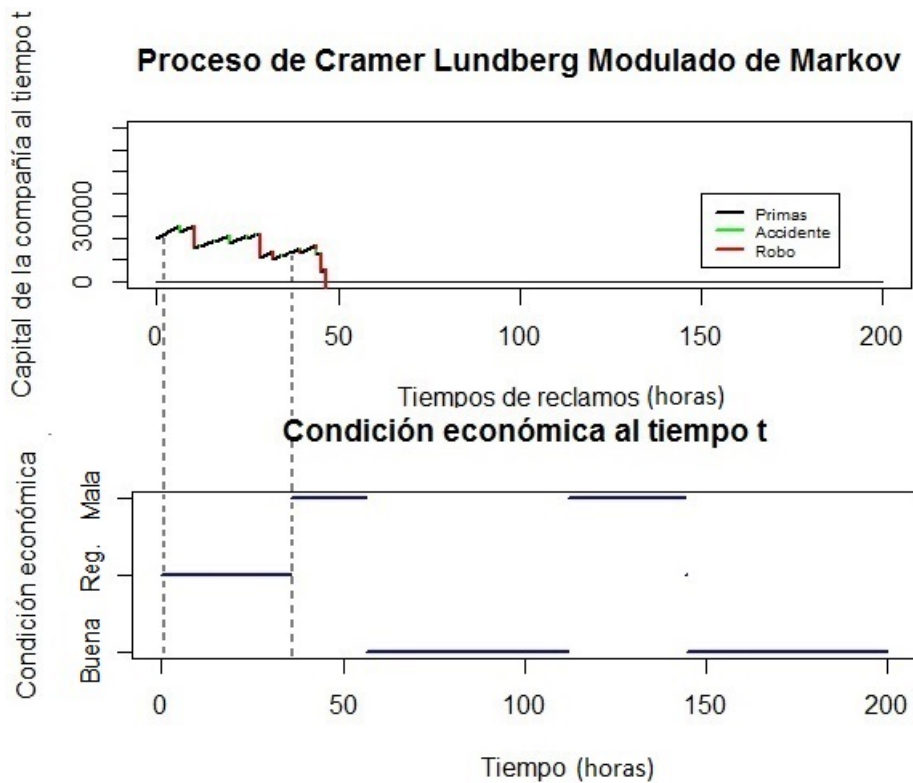


Figura 4.2: Trayectoria proceso Cramer Lundberg modulado de Markov

objetivo por completo que es traer a valor presente todos los montos por primas y por reclamos y con base en éstos decir si dado que la compañía comienza con cierto capital, éste más las primas recibidas en el transcurso de tiempo es suficiente para cubrir los montos por reclamos que hayan ocurrido.

Sea  $\delta = \{\delta_t, t \geq 0\}$  un proceso de saltos de Markov, donde  $\delta_t$  es la tasa de interés instantánea al tiempo  $t$  cuyo espacio de estados es  $I = \{0.001, 0.03, 0.07\}$ . Vamos a suponer que la tasa más favorable es 0.001, una tasa de interés regular será de 0.03, mientras que la tasa 0.07 la veremos como la más desfavorable. Tenga en consideración que un modelo más apegado a la realidad sería aquel que tuviera un espacio de estados continuo, pero para efectos de nuestro trabajo sólo nos limitaremos a tres posibles estados. Estas tasas de interés también las podemos ver como tasas libres de riesgo. La dinámica del proceso  $\delta$  se describe mediante un generador infinitesimal  $\Pi(i) = \{\pi_{ab}(i)\}_{a,b \in I}, i \in S = \{Buena, Regular, Mala\}$ , es decir, vamos a tener tantos generadores infinitesimales diferentes como estados tenga el proce-

so subyacente y dado que éste último tiene tres estados, entonces tendremos tres procesos de saltos de Markov diferentes que describirán el comportamiento de las tasas de interés, los vamos a denotar como  $\delta_{Buena}, \delta_{Regular}, \delta_{Mala}$ , y entonces cada proceso se comportará dependiendo de la situación económica en el mercado. Proponemos los siguientes generadores infinitesimales, cuyos valores se han elegido siguiendo un razonamiento similar al que se efectuó para el generador infinitesimal G:

$$\Pi(Buena) = \begin{matrix} & 0.001 & 0.03 & 0.07 \\ 0.001 & \begin{pmatrix} -1/15 & 1/15 & 0 \\ 1/40 & -1/40 & 0 \\ 1/25 & 0 & -1/25 \end{pmatrix}, \\ 0.03 & \\ 0.07 & \end{matrix}$$

$$\Pi(Regular) = \begin{matrix} & 0.001 & 0.03 & 0.07 \\ 0.001 & \begin{pmatrix} -1/20 & 1/20 & 0 \\ 1/30 & -1/15 & 1/30 \\ 0 & 1/10 & -1/10 \end{pmatrix}, \\ 0.03 & \\ 0.07 & \end{matrix}$$

$$\Pi(Mala) = \begin{matrix} & 0.001 & 0.03 & 0.07 \\ 0.001 & \begin{pmatrix} -1/25 & 0 & 1/25 \\ 0 & -1/30 & 1/30 \\ 0 & 1/20 & -1/20 \end{pmatrix}. \\ 0.03 & \\ 0.07 & \end{matrix}$$

A partir de los cuales se obtienen las matrices de probabilidades de saltos  $Q_j, j = \{Buena, Regular, Mala\}$ :

$$Q_{Buena} = \begin{matrix} & 0.001 & 0.03 & 0.07 \\ 0.001 & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ 0.03 & \\ 0.07 & \end{matrix}$$

$$Q_{Regular} = \begin{matrix} & 0.001 & 0.03 & 0.07 \\ 0.001 & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ 0.03 & \\ 0.07 & \end{matrix}$$

$$Q_{Mala} = \begin{matrix} & 0.001 & 0.03 & 0.07 \\ 0.001 & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \\ 0.03 & \\ 0.07 & \end{matrix}$$

Con la información proporcionada hasta ahora, veamos cómo se comportan las tasas de interés instantáneas a través del tiempo. En el apéndice podrá encontrar el código en R para generar estas trayectorias.

La Figura 4.3 muestra una trayectoria para cada proceso  $\delta_i$ ,  $i \in \{Buena, Regular, Mala\}$ , donde al observar la trayectoria del proceso  $\delta_{Buena}$ , donde el proceso depende de que la condición económica en el mercado sea buena, podemos observar que hay mayor prevalencia en las tasas de interés que hemos considerado como las más favorables, que son: 0.001 y 0.03; si nos vamos a la trayectoria del proceso  $\delta_{Regular}$ , las tasas se estarán moviendo entre los tres posibles valores que puede tomar, esto se adjudica a que normalmente cuando la situación económica en el mercado se encuentra un poco estable, tiene igual probabilidad de irse a una situación económica mala o bien, de estabilizarse por completo, por esta razón la trayectoria de este proceso se mueve entre los 3 estados. Por último, si nos posicionamos en la trayectoria del proceso  $\delta_{Mala}$ , veremos que la tasa permanece casi siempre en la peor tasa, 0.07 y en la tasa regular 0.03.

Por último, ya que sabemos cómo son las trayectorias tanto del proceso subyacente, del proceso de Cramer Lundberg modulado de Markov y de los procesos de tasas de interés  $\delta_i, i \in \{Buena, Regular, Mala\}$ , estamos listos para descontar cada uno de los montos por reclamos y por primas ocurridos en un intervalo de tiempo dado.

Hemos dicho que  $J_n, n = 1, 2, \dots$  son los tiempos en que ocurre el  $n$ -ésimo reclamo al cual denotamos como  $X_{J_n}$ , donde al mismo tiempo la aseguradora recibe un capital por primas igual a  $cJ_n$ . Dado que ya sabemos el tiempo en que ocurre cada reclamo, nos iremos al proceso de saltos de Markov subyacente y veremos a ese tiempo en cuál de los estados  $i \in S$ ,  $S = \{Buena, Regular, Mala\}$  se encuentra el proceso, y dependiendo de ello nos iremos al proceso de saltos de Markov de tasas de interés  $\delta_i$  correspondiente a ese estado, es decir si por ejemplo al tiempo  $J_1$  el proceso subyacente se encontrara en una situación económica mala, nos iríamos al proceso de tasas de interés  $\delta_{Mala}$  que corresponde a la trayectoria que siguen las tasas de interés en situación económica mala, y una vez que nos hallamos en este proceso de tasas, nos posicionaremos en el tiempo  $J_1$  que fue en el que ocurrió el reclamo y veremos cuál fue la trayectoria que siguió el proceso desde el tiempo cero hasta ese momento. Vamos a extraer la información de los tiempos totales en que el proceso permaneció en cada uno de sus estados, es decir, en cada una de las tasas, así, si denotamos como  $t_{0.001}, t_{0.03}$  y  $t_{0.07}$  a estos

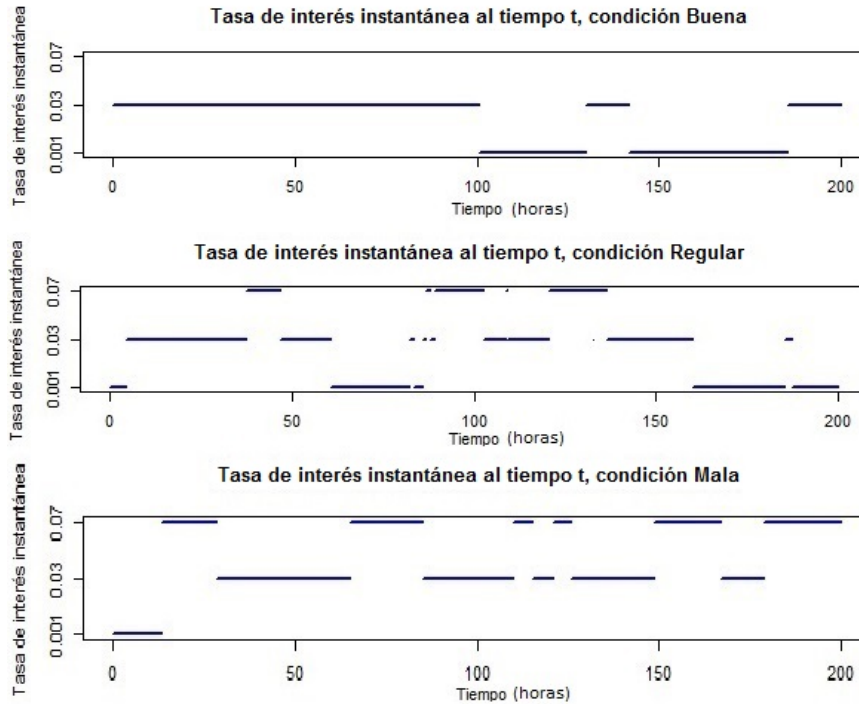


Figura 4.3: Trayectorias Proceso de tasas de interés instantáneas

tiempos totales, con  $J_1 = t_{0.001} + t_{0.03} + t_{0.07}$ , entonces el primer reclamo se descontaría como sigue:

$$\text{monto reclamo descontado} = X_{J_1} * e^{-0.001*t_{0.001}} * e^{-0.03*t_{0.03}} * e^{-0.07*t_{0.07}},$$

y con estas mismas tasas vamos a descontar el monto por primas acumuladas al tiempo  $J_1$  que fue cuando ocurrió el primer reclamo, del tal forma que:

$$\text{monto prima descontada} = cJ_1 * e^{-0.001*t_{0.001}} * e^{-0.03*t_{0.03}} * e^{-0.07*t_{0.07}}.$$

Se procede de la misma manera para cada uno de los reclamos ocurridos en el intervalo de 200 horas que es en el que está interesado el dueño de la compañía aseguradora.

En el apéndice se encuentra el código en R para el proceso de descuento de Cramer Lundberg modulado de Markov, así mismo encontrará el código cuya función es calcular el capital total con que contaría la compañía aseguradora



a tiempo presente al sumar el capital inicial más todos los montos recibidos por primas descontadas menos todos los montos por reclamos descontados. Si este capital resulta positivo significa que el capital con el que se iniciaron operaciones más los montos recibidos por primas son suficientes para cubrir los montos por reclamos, pero si este capital resulta negativo, entonces pasa todo lo contrario, pues el capital inicial y las primas recibidas no son suficientes para que la aseguradora haga frente a sus obligaciones, lo cual la llevaría a ruina. Aplicando estos dos códigos en las trayectorias de los procesos de Cramer Lundberg modulado de Markov de las Figuras 4.1 y 4.2, encontramos que el capital total a tiempo presente con que contaría la aseguradora, la cual comienza operaciones con \$20,000 pesos es:

	Primas	Reclamos descontados			Capital total
	descontadas	accidentes	robos	total	
1	\$13,189.982	\$8,224.039	\$4,345.719	\$12,569.758	\$20,620.224
2	\$18,249.001	\$7,280.851	\$24,628.398	\$31,909.249	\$6,339.752

Observe que de acuerdo a las gráficas correspondientes a cada proceso, la trayectoria de la Figura 4.1 muestra que aparentemente después de 200 horas no hay ruina, sin embargo cuando traemos a valor presente todos los montos de primas y también los de reclamos, al agregarle a éstos el capital con que había iniciado la compañía aseguradora, resulta que al día de hoy contaría con un capital total de \$20,620,224, y por tanto el capital inicial más las primas que se le cobran a los asegurados le permitirán a la aseguradora tener una estabilidad económica después de 200 horas.

Por otro lado, si nos fijamos en la trayectoria de la Figura 4.2, ésta nos indica que a la hora 45 la empresa entra en ruina pues el capital se hace negativo, sin embargo aún sería muy pronto para concluir con certeza que la compañía ha entrado en ruina pues faltaría descontar esos montos y una vez que todos ellos se encuentran en un mismo tiempo, ahora sí se procede a calcular el capital de la compañía. Resulta que una vez descontados todos los montos por primas y por reclamos, al agregar el capital con el que había iniciado la aseguradora al día de hoy contaría con \$6,339,752 pesos que si bien es un capital pequeño la compañía no entra en ruina, como se había especulado con la gráfica del proceso de Cramer Lundberg modulado de Markov.

En la siguiente sección se hace un análisis del proceso de riesgo modulado de Markov con tasas de interés estocásticas, variando el monto del capital inicial así como el monto que se cobra por primas para un número diferente de simulaciones.

## 4.2. Análisis de resultados

En esta última sección haremos el análisis con distintas simulaciones del modelo de Cramer Lundberg modulado de Markov con tasas de interés estocásticas. Emplearemos los mismos datos que se han usado en la sección anterior, sin embargo, iremos variando el monto del capital con que inicia la compañía aseguradora así como el monto por primas que se cobrará por unidad de tiempo y con la información arrojada en las simulaciones calcularemos el monto promedio proveniente de los reclamos por accidentes y por robos así como el monto promedio recibido por concepto de primas que se han traído a valor presente y se hará una comparación en el número de ocasiones en que la empresa se arruina estando en tiempo presente y el número de ocasiones en que de acuerdo al proceso de Cramer Lundberg modulado de Markov había ocurrido la ruina.

La Figura 4.4 nos muestra una de las trayectorias del proceso de saltos de Markov subyacente que modela la condición económica en el mercado a través del tiempo que emplearemos como base para las simulaciones.

El cuadro 4.1 nos muestra los resultados de las simulaciones, donde se imprimen los montos promedio por primas descontadas, los montos promedio de reclamos por accidente y por robo descontados y el capital total promedio con el que contaría la aseguradora trayendo todo a tiempo presente, las dos últimas columnas nos dan el número de veces que se presentó ruina del total de simulaciones hechas; la diferencia entre estas dos últimas columnas radica en que la penúltima columna nos indica las ruinas que se habría pensado que ocurrieron si sólo nos guiáramos en el proceso de Cramer Lundberg modulado de Markov, mientras que la última columna nos indica el número de ruinas que hubo con el modelo de Cramer Lundberg modulado de Markov con tasas de interés estocásticas y las dos últimas columnas nos muestran la probabilidad de ruina en ambos casos. De estas dos variables la que más nos interesa es la última pues es la que nos estaría indicando en forma más real si el capital con que la aseguradora inicia operaciones más el monto cobrado

por primas son suficientes para hacerle frente a sus obligaciones durante un periodo de tiempo determinado, lo que nos gustaría es que esta probabilidad se acercara mucho a cero.

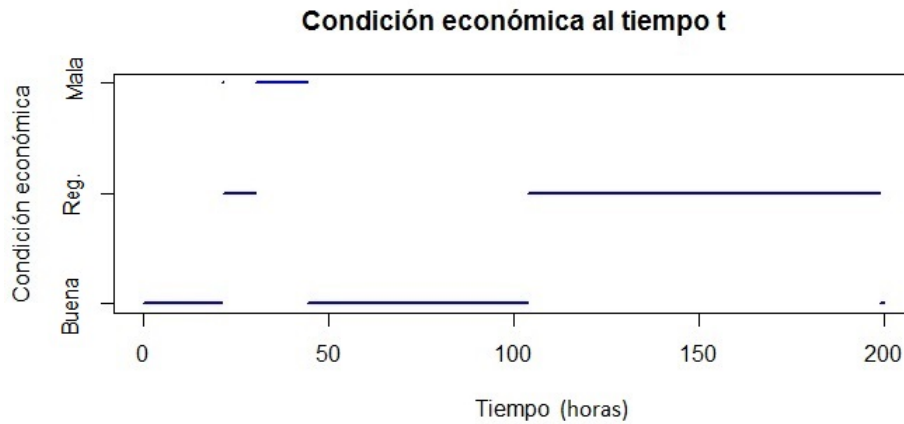


Figura 4.4: Condición económica en el mercado

Proceso de Cramer L. modulado de Markov con tasas de interés estocásticas								
Sim.	Montos descontados				Ruinas		Prob. Ruina	
	Primas	Accidentes	Robos	Cap. total	Cramer	Presente	Cramer	Presente
100	\$23,200.423	\$8,430.248	\$16,395.492	\$18,374.682	63	3	0.63	0.03
500	\$23,517.790	\$8,341.899	\$18,039.988	\$17,135.903	288	7	0.58	0.01
1000	\$28,445.82	\$9,651.95	\$19,325.87	\$19,468.00	581	60	0.58	0.06
1500	\$21,499.039	\$7,500.985	\$17,056.179	\$16,941.874	889	40	0.59	0.03
2000	\$25,445.516	\$8,773.413	\$16,736.119	\$19,935.983	1,169	117	0.58	0.06
5000	\$24,694.33	\$8,482.17	\$21,464.59	\$14,747.56	2,918	350	0.58	0.07
10000	\$26,576.22	\$9,220.98	\$18,383.96	\$18,971.28	5,867	507	0.59	0.05

Cuadro 4.1: Simulaciones con capital inicial \$20,000 y primas de \$800 pesos.

Como se puede observar en el Cuadro 4.1, el monto promedio de los reclamos descontados provenientes por Accidentes varía entre los \$7,500 y los \$9,500 pesos, mientras que el monto promedio de los reclamos descontados provenientes por robos oscila entre los \$16,000 y los \$21,000 pesos, entonces en forma general los montos descontados promedio por robos resultan ser mayores que los montos descontados promedio por accidente, lo cual se ajusta

a lo que habíamos supuesto en un inicio. Otra cuestión que hay que observar es que el Capital a tiempo presente promedio con que contaría la empresa toma valores que van de los \$14,000 a los \$19,500, lo cual nos indica que la aseguradora en promedio tendrá un capital positivo que no le permitirá irse a ruina, sin embargo lo que esto nos dice es que en un lapso de 200 horas la compañía realmente no estará teniendo rendimientos ya que si bien no se arruina, su capital estaría por debajo del monto con el que inició operaciones.

Ahora bien, vamos a analizar las últimas columnas del Cuadro 4.1. Como podemos observar, en todas las simulaciones el número de veces que la compañía se arruina en el proceso de Cramer Lundberg modulado de Markov siempre es mayor en comparación al número de veces en que el proceso se arruina una vez que se le agregan las tasas de interés estocásticas para traer todos los montos a valor presente. Entonces algo muy importante que se concluye es que si la compañía aseguradora sólo se guiara en los resultados arrojados en el proceso de Cramer Lundberg modulado de Markov, en promedio éste nos diría que se estaría arruinando con una probabilidad muy próxima al 60% del total de las simulaciones, lo cual indica que el capital con el que inicia operaciones más los montos cobrados por primas son insuficientes para hacerle frente a todos los reclamos por parte de los asegurados y entonces la compañía comenzaría a tomar malas decisiones para modificar el monto cobrado por primas. Sin embargo estaría errando pues este resultado no es del todo veraz ya que realmente no se pueden equiparar los montos en el tiempo, pues éstos no valen igual a los distintos puntos del tiempo, en cambio cuando todos los montos son descontados y se calcula el Capital total de la compañía, se observa que el número de ruinas se reduce significativamente pues esta vez sólo se tiene una probabilidad de ruina del 4% aproximadamente que aún cuando es pequeña, a la aseguradora le gustaría que esta probabilidad fuera casi cero pues de esta forma se tendría la certeza de que no se arruinará.

Veamos qué ocurre cuando se trabaja con una tasa de interés fija para descontar todos los montos por primas y por reclamos.

El Cuadro 4.2 muestra mismo número de simulaciones que el Cuadro 4.1, pero en esta ocasión utilizando la misma tasa de interés constante  $\delta = 0.0337$  sin importar en cuál de los estados se encuentra el proceso de las condiciones económicas en el mercado. Dicha tasa se obtuvo calculando la media de los valores de los elementos del espacio de estados  $I, I = \{0.001, 0.03, 0.07\}$  que es el correspondiente al proceso de tasas de interés. Un primer cambio es que

Proceso de Cramer L. modulado de Markov con tasa de interés constante								
Sim.	Montos descontados				Ruinas		Prob. Ruina	
	Primas	Accidentes	Robos	Cap. total	Cramer	Presente	Cramer	Presente
100	\$17,986.957	\$6,722.522	\$14,207.763	\$17,056.672	62	2	0.62	0.02
500	\$17,443.084	\$6,086.658	\$14,620.330	\$16,736.096	295	12	0.59	0.02
1000	\$17,611.496	\$6,297.203	\$14,559.880	\$16,754.413	604	18	0.60	0.02
1500	\$17,615.067	\$6,146.672	\$14,314.181	\$17,154.214	855	31	0.57	0.02
2000	\$17,752.840	\$6,312.903	\$14,083.643	\$17,356.294	1,147	36	0.57	0.02
5000	\$17,639.866	\$6,248.788	\$14,394.166	\$16,996.912	2,924	93	0.58	0.02
10000	\$17,649.460	\$6,264.999	\$14,268.844	\$17,115.617	5,888	187	0.59	0.02

Cuadro 4.2: Simulaciones con capital inicial \$20,000  
Primas de \$800 pesos, con tasa de interés  $\delta$  constante.

en estas simulaciones los montos descontados promedio por primas, reclamos y el capital no presentan mucha variación como en los montos del Cuadro 4.1 que variaban más debido al cambio de las tasas de interés. Además el número promedio de ruinas que ocurren en el proceso de Cramer Lundberg modulado de Markov realmente no varían en comparación a Cuadro 4.1 pues éstos no son afectados por las tasas de descuento, sin embargo, donde si se muestra diferencia es en las probabilidades de ruina una vez descontados todos los montos, pues en estas simulaciones la probabilidad de ruina disminuye al 2% del total de las simulaciones. Cabe hacer mención que a pesar de que esta probabilidad es muy baja, no es factible tomar decisiones con base en ella pues en la vida real las tasas de interés no son fijas sino que varían en el tiempo, por lo tanto al usar una única tasa de interés para descontar los montos lo único que provocaría es un sesgo en el número de veces en que la compañía aseguradora realmente se arruina.

Hagamos ahora un análisis variando el capital con el que la compañía aseguradora inicia operaciones de tal forma que nos permita observar qué tanto cambian las probabilidades de ruina en el intervalo de 200 unidades.

En el Cuadro 4.3 podemos ver que las probabilidades de ruina en ambos casos siguen siendo mayores en los procesos de Cramer Lundberg modulado de Markov que en el proceso traído a valor presente, sin embargo como uno esperaría, las probabilidades de ruina decrecen conforme mayor es el monto con el que comienza a operar la compañía aseguradora, pues en este caso se puede observar que conforme mayor es el monto, menor la probabilidad de ruina, ésta va convergiendo a cero. Observe que a pesar de que en ambos

Proceso de Cramer L. modulado de Markov con tasas de interés estocásticas						
C. inicial	\$15,000			\$35,000		
Sim.	C. total	P.R. Cramer	P.R. Presente	C. total	P.R. Cramer	P.R. Presente
100	\$13,395.535	0.65	0.05	\$26,588.08	0.37	0.06
500	\$12,650.10	0.65	0.06	\$33,959.09	0.38	0.00
1000	\$12,362.459	0.68	0.09	\$33,067.25	0.36	0.01
1500	\$13,530.599	0.66	0.11	\$35,365.86	0.38	0.006
2000	\$13,936.168	0.66	0.09	\$35,703.95	0.37	0.008
5000	\$12,317.215	0.66	0.06	\$30,868.64	0.38	0.005
10000	\$14,028.816	0.66	0.06	\$31,332.534	0.36	0.0007

Cuadro 4.3: Simulaciones variando el Capital inicial  
Primas de \$800 pesos.

casos la probabilidad de ruina es muy pequeña, el capital total promedio con que contaría la empresa a tiempo presente se acerca mucho al capital inicial pero realmente no se está teniendo rendimiento, lo cual quiere decir que el monto que se está cobrando por primas no es el óptimo, ello implica otro tipo de cálculos, sin embargo por ahora no entraremos en detalles.

# Capítulo 5

## Conclusiones

Con base en el artículo de Guglielmo D'Amico [1]. se ha hecho una réplica de las expresiones explícitas para los primeros dos momentos de un modelo de riesgo modulado de Markov con tasas de interés estocásticas cuando una compañía aseguradora trabaja con distintas líneas de negocio, que para efectos de implementación vimos a estas líneas de negocio como los tipos de cobertura que la compañía ofrece a sus asegurados. Además, haciendo uso de la teoría de matrices bidimensionales se ha mostrado que es posible llevar un marco de trabajo complejo a un camino que resulta ser más natural y sencillo de manejar.

Por otro lado se ha realizado una implementación donde se simulan ciertos procesos del modelo de riesgo de Cramer Lundberg modulado de Markov con tasas de interés estocásticas con el fin de mostrar la aplicabilidad del modelo. De estas simulaciones se puede concluir que el modelo de Riesgo de Cramer Lundberg modulado de Markov con tasas de interés estocásticas utilizadas para descontar los montos por primas y por reclamos resulta ser más eficiente y veraz en comparación con el modelo de riesgo de Cramer Lundberg clásico, ya que el modelo de riesgo modulado de Markov con tasas de interés estocásticas al permitir descontar a valor presente todos los montos recibidos por primas así como los montos por reclamos haciendo uso de tasas de interés instantáneas, nos muestra con una mejor precisión cuál sería el capital total con que contaría la aseguradora si dejara pasar cierto tiempo y con ello concluir si el capital inicial y los montos por primas que le cobra a los asegurados le darán cierto rendimiento después de cierto tiempo o bien, si lo que tendrá como resultado es una ruina.

Se logró el objetivo inicial que era definir y estudiar un nuevo modelo pero no sólo desde un punto de vista teórico sino también desde un punto de vista más práctico, logrando la aplicación del modelo al campo de las compañías aseguradoras ya que éstas están expuestas a los riesgos de tasas de interés.

Cabe recalcar que el modelo tiene una restricción importante y ésta es la limitación a sólo 3 estados en el proceso de tasas de interés, lo ideal es que el modelo se pudiera extender a un espacio de estados no numerable, pues es la forma como realmente se mueven las tasas de interés aplicándolo a la vida real. Además, otra limitante es que por ahora no se logró llevar a cabo el cálculo en la parte aplicada de los dos primeros momentos en los reclamos para las dos coberturas que ofrece la aseguradora y esto debido a que se requiere de un desarrollo un tanto riguroso y mayor conocimiento en el cálculo de integrales con matrices bidimensionales que por ahora está fuera de nuestro alcance.

Por último, es bueno mencionar que el presente trabajo deja abiertos varios temas que le pueden dar continuidad, por ejemplo:

1. La ejecución de una aplicación con datos reales.
2. El desarrollo del modelo que permita encontrar expresiones explícitas para las probabilidades de ruina de un modelo de riesgo modulado de Markov con tasas de interés estocásticas.
3. El desarrollo de este mismo modelo pero ahora suponiendo que el espacio de estados para el proceso de tasas de interés es continuo.
4. Por último, me han comentado que existe el algoritmo de Viterbi en cadenas de Markov ocultas, con el cual se podría encontrar la secuencia de los estados en que estuvieron los procesos de saltos de Markov que modelan tanto la condición económica en el mercado, así como el proceso de tasas de interés instantáneas modelando aquella secuencia óptima que mejor explica las observaciones o bien, el algoritmo de Baum-Welch en cadenas de Markov ocultas para estimar los parámetros del modelo que maximizan los datos de las trayectorias observadas.



# Apéndice A

## Matrices de dos dimensiones

**Definición A.0.1.** Sea  $C$  un campo, una matriz de dimensión cero es un elemento del campo.

**Definición A.0.2.** Una matriz de una dimensión  $A_{[f_1 \ c_1]}$ , es una matriz cuyos elementos son de dimensión cero.  $f_1$  y  $c_1$ , denotan respectivamente el orden de la fila y la columna de la matriz.

Inductivamente, es posible definir una matriz de dos dimensiones.

**Definición A.0.3.** Una matriz de dos dimensiones  $A_{\begin{bmatrix} f_1 & c_1 \\ f_2 & c_2 \end{bmatrix}}$ , es una matriz cuyos elementos son matrices de una dimensión.

Un elemento de  $A_{\begin{bmatrix} f_1 & c_1 \\ f_2 & c_2 \end{bmatrix}}$ , es denotado por,  $A_{\begin{bmatrix} f_1 & c_1 \\ i_2 & j_2 \end{bmatrix}}$ , donde  $i_2 \in \{1, 2, \dots, f_2\}$  y  $j_2 \in \{1, 2, \dots, c_2\}$ .

Los vectores  $f_2 = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}$  y  $c_2 = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$ , son llamados el orden de la fila y la columna de la matriz de dos dimensiones  $A$  respectivamente.

Dadas dos matrices de dos dimensiones  $A_{\begin{bmatrix} f_1 & a_1 \\ f_2 & a_2 \end{bmatrix}}$  y  $B_{\begin{bmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{bmatrix}}$ , donde  $a_2 = b_2$ , su producto

$$C_{\begin{bmatrix} f_1 & c_1 \\ f_2 & c_2 \end{bmatrix}} = A_{\begin{bmatrix} f_1 & a_1 \\ f_2 & a_2 \end{bmatrix}} \otimes B_{\begin{bmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{bmatrix}},$$

es la matriz de dos dimensiones de orden  $f_2, c_2$ , cuyo elemento simple es:

$$C_{\begin{bmatrix} i_1 & j_1 \\ i_2 & j_2 \end{bmatrix}} = \sum_{d_1=1}^{a_1} \sum_{d_2=1}^{a_2} A_{\begin{bmatrix} i_1 & d_1 \\ i_2 & d_2 \end{bmatrix}} \cdot B_{\begin{bmatrix} d_1 & j_1 \\ d_2 & j_2 \end{bmatrix}}.$$

## Apéndice B

### Regla de la derivación de Leibniz

**Corolario B.0.1.** Sean  $I, J$  intervalos reales no triviales, con  $I$  compacto y  $J$  abierto. Sea  $f : I \times J \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua en  $I \times J$  tal que  $f(x, \cdot)$  es derivable en  $J$  para todo  $x \in I$ . Supongamos además, que  $\frac{\partial f}{\partial \lambda}$  es continua en  $I \times J$ .

Sea  $t_0 \in I$  y  $g : J \rightarrow I$  una función derivable. Entonces,

a)  $\frac{\partial f}{\partial \lambda}(\cdot, \lambda)$  es integrable para todo  $\lambda \in J$ ,

b)  $\int_{t_0}^{g(\lambda)} f(x, \lambda) dx$  es derivable en  $J$  para todo  $x \in I$ ,

y se cumple la regla de la derivación de Leibniz,

$$\frac{d}{d\lambda} \int_{t_0}^{g(\lambda)} f(x, \lambda) dx = f(g(\lambda), \lambda)g'(\lambda) + \int_{t_0}^{g(\lambda)} \frac{\partial f}{\partial \lambda}(x, \lambda) dx, \quad \forall \lambda \in J.$$

# Apéndice C

## Códigos en R

### C.1. Matriz de probabilidades de saltos

```
#####  
#       Genera la matriz de probabilidades de saltos       #  
#               de un proceso de Markov                   #  
#####
```

Descripcion:

matrizProbSaltos calcula la matriz de probabilidades de saltos a partir del generador infinitesimal.

Uso:

```
matrizProbSaltos(G)
```

Argumentos:

G: matriz que contiene los valores del generador infinitesimal del proceso de Markov

```
matrizProbSaltos <- function(G){  
  n <- length(G[1,]) #Dimension de G  
  Q <- matrix(0,n,n) #Matriz probab. de saltos  
  
  #Se obtienen los valores de Q  
  for(i in 1:n){  
    if(G[i,i] != 0){  
      Q[i,] <- (-G[i,])/G[i,i]  
      Q[i,i] <- 0  
    }  
  }  
}
```

```

    else{
      Q[i,] <- 0
      Q[i,i] <- 1
    }
  }

  Matriz<-matrix(Q,n,n)
  return(Matriz)
}

```

Ejemplo:

```

G <- matrix(c(-1/50,3/200,1/200,3/100,-1/25,1/100,3/40,1/
  40,-1/10),3,3,byrow=TRUE)
mps <- matrizProbSaltos(G)
mps

```

## C.2. Proceso de saltos de Markov

```

#####
#   Genera una trayectoria de un proceso de saltos   #
#           de Markov                               #
#####

```

Descripcion:

proceso\_saltos\_markov\_subyacente arroja una matriz con los datos de la trayectoria del proceso de Markov. Las columnas muestran los siguientes datos:

1. Estado: Muestra los estados por los que pasa el proceso
2. Tiempo de salto: Muestra los tiempos en que el proceso salta de estado
3. Tiempos de estancia: Muestra el tiempo de estancia de cada uno de los estados que el proceso visito.

Uso:

```
proceso_saltos_markov_subyacente(G,T)
```

Argumentos:

G: Matriz que contiene los valores del generador infinitesimal del proceso de Markov

T: Horizonte de tiempo en que se observara el proceso

```

proceso_saltos_markov_subyacente<- function(G,T){
  n <- length(G[1,])
  tiempo <- numeric() #tiempos de salto
  Sn<-numeric() #Tiempos de estancia en el estado j
  Xt<-numeric() # Estado el proceso de MARKov continuo
  Y<-numeric() #Estado del proceso de Markov discreto
  dis_estacionaria<-distribucion_estacionaria(G)
  Q<-matrizProbSaltos(G)
  tiempo[1] <- 0
  #estado inicial
  Y[1] <- sample(seq(1,n), 1, replace=FALSE,dis_estacionaria)
  Xt[1] <- Y[1]
  j <- 1
  k <- 0
  repeat{
    Sn[j] <- rexp(1,-G[Y[j],Y[j]])
    tiempo[j+1] <- tiempo[j]+Sn[j]
    Xt[j] <- Y[j]
    Y[j+1] <- sample(seq(1,length(Q[Y[j],])), 1,replace=FALSE
      ,prob=Q[Y[j],])
    k<-k+1
    if(tiempo[j+1]>T)
    {
      tiempo[j+1] <- T
      Xt[j] <- Y[j]
      break
    }
    j <- j+1
  }
  X <- matrix(c(Xt[1:k], tiempo[1:k], Sn[1:k]),k,3)
  n <- length(X[,1])
  X <- rbind(X,c(X[n,1],X[n,2],(T-X[n,2])))
  X_final <- X[-n,]
  return (X_final)
}

```

Ejemplo:

```
T<-200
```

```
G<-matrix(c(-1/50,3/200,1/200,3/100,-1/25,1/100,3/40,1/40,-1/10),3,3,byrow=TRUE)
```

```
a<-proceso_saltos_markov_subyacente(G,tiempo)
```

### C.3. Proceso de Cox modulado de Markov

```
#####  
#       Proceso de Cox modulado de Markov           #  
#       en el intervalo de tiempo [0,T]           #  
#####  
  
#Simula las ventas de bebidas frias y calientes en una  
#cafeteria  
  
proceso_Cox<-function(X,prob_bebida_fria,lambda,T){  
  n<-length(X[,1])  
  tiempo<-numeric() #tiempos de ocurrencia  
  #estado actual del proceso de saltos de Markov  
  estado_actual_subyacente<-numeric()  
  Sn<-numeric() #Tiempos de interarribo  
  ventas<-numeric() #Numero de ventas en el tiempo  
  bebida_fria_o_caliente<-numeric() #v.a Bernoulli  
  tiempo[1] <- 0  
  ventas[1]<-0  
  estado_actual_subyacente<-X[1,1]  
  bebida_fria_o_caliente[1]<-2 #2:aun no hay ventas  
  
  k<-1  
  if(tiempo[k]<0){  
    ventas[k]<-0  
    break  
  }  
  
  repeat{  
    for(i in 1:length(X[,1])){ #Se ejecuta para cada estado  
      #que visito el proceso de saltos de Markov  
      if(tiempo[k]>=X[i,2] && tiempo[k]<(X[i,2]+X[i,3])){  
        estado_actual_subyacente[k]<-X[i,1]  
        Sn[k]<-rexp(1,lambda[estado_actual_subyacente[k]])  
      }  
    }  
  }  
  
  if(tiempo[k]+Sn[k] > T){  
    break  
  }  
  tiempo[k+1] <- tiempo[k]+Sn[k] #Tiempo en que ocurre la  
  #siguiente venta  
  for(i in 1:length(X[,1])){
```

```

        if(tiempo[k+1]>=X[i,2] && tiempo[k+1]<(X[i,2]+X[i,3])){
            estado_actual_subyacente[k+1]<-X[i,1]
        }
    }

    ventas[k+1]<-ventas[k]+1    #Ocurrio una venta bebida_fria
        _o_caliente[k+1]<-rbinom(1,1,
            prob_bebida_fria[estado_actual_subyacente[k+1]])
    #1: bebida fria, 0:bebida caliente
    k<-k+1
}
P<-matrix(c(tiempo[1:k],Sn[1:k],ventas[1:k],bebida_fria_o_
    caliente[1:k]),k,4)
dim<-length(P[,1])
P<-rbind(P,c(P[dim,1],(T-P[dim,1]),P[dim,3],P[dim,4]))
P_final<-P[-dim,]
return (P_final)
}

```

## C.4. Proceso de Cramer Lundberg modulado de Markov

```

#####
# Proceso de Cramer Lundberg modulado de Markov en el #
#           intervalo de tiempo [0,T]                #
#####

```

Descripcion:

Genera una trayectoria para el proceso de Cramer Lundberg de acuerdo a un proceso subyacente de saltos de Markov a tiempo continuo en un intervalo de tiempo [0,T] con dos lineas de negocio distintas

Uso:

```

proceso_Cramer_Lundberg_modulado_Markov(X,capital_inicial,
    prima,tasas_ocurrencia_reclamos_accidentes,tasas_
    ocurrencia_reclamos_robos,tasas_monto_reclamo_accidente,
    tasas_monto_reclamo_robo,T)

```

Argumentos:

X: Matriz de (nx3) que guarda la informacion del proceso subyacente de saltos de Markov de las condiciones economicas

```

prima: Monto constante que se cobrara por unidad de tiempo
tasas_ocurrencia_reclamos_accidentes: vector de (1x3) con las
    tasas de reclamos por accidente correspondiente a cada
    uno de los estado del proceso subyacente.
tasas_ocurrencia_reclamos_robos: vector de (1x3) con las
    tasas de reclamos por robos correspondiente a cada uno de
    los estado del proceso subyacente.
tasas_monto_reclamo_accidente: vector de (1x3) que contiene
    las tasas de los montos de reclamos por accidente
    correspondiente a cada uno de los estados del proceso sub.
tasas_monto_reclamo_robo: vector de (1x3) que contiene las
    tasas de los montos de reclamos por accidente
    correspondiente a cada uno de los estados del proceso sub.
T: Horizonte de tiempo en que se observara el proceso

proceso_Cramer_Lundberg_modulado_Markov<function(X, capital_
    inicial, prima, tasas_ocurrencia_reclamos_accidentes, tasas_
    ocurrencia_reclamos_robos, tasas_monto_reclamo_accidente,
    tasas_monto_reclamo_robo, T){
n<-length(X[,1])
tiempo<-numeric()
capital<-numeric()
monto_por_primas<-numeric() #Guarda los montos recibidos
    por primas
monto_siniestro<-numeric() #Guarda los montos que se
    generan en cada reclamo
capital_mas_primas<-numeric()
estado_actual_subyacente<-numeric()
Tn<-numeric() #Tiempo en que ocurrira la
    proxima reclamacion
accidente_robo<-numeric() # V.a.Bernoulli (1: accidente;
    0:robo)
tiempo[1] <- 0
#tasa de ocurrencia de los reclamos
lambdas<-c(tasas_ocurrencia_reclamos_accidentes[1]+tasas_
    ocurrencia_reclamos_robos[1],tasas_ocurrencia_reclamos_
    accidentes[2]+tasas_ocurrencia_reclamos_robos[2],tasas_
    ocurrencia_reclamos_accidentes[3]+tasas_ocurrencia_
    reclamos_robos[3])
prob_accidente<-c(tasas_ocurrencia_reclamos_accidentes/
    lambdas)
#Esta sera la tasa de la v.a. accidente_robo
#Inicializamos variables:
monto_siniestro[1]<-0
monto_por_primas[1]<-0

```



```

capital_mas_primas[1] <- 0
capital[1] <- capital_inicial
estado_actual_subyacente <- X[1,1]
accidente_robos[1] <- 2 #aun no ha habido algun siniestro
k <- 1

if(capital[k] < 0){
  break
}

repeat{
  for(i in 1:length(X[,1])){ #Se ejecuta para cada estado
    que visito el proceso de saltos de Markov
    if(tiempo[k] >= X[i,2] && tiempo[k] < (X[i,2] + X[i,3])){
      estado_actual_subyacente[k] <- X[i,1]
      Tn[k] <- rexp(1, lambdas[estado_actual_subyacente[k]])
    }
  }

  if(tiempo[k] + Tn[k] > T){ #Se detiene cuando se sobrepasa
    el tiempo de estancia del estado
    break
  }

  tiempo[k+1] <- tiempo[k] + Tn[k] #Tiempo en que ocurre el
  siguiente reclamo

  for(i in 1:length(X[,1])){
    if(tiempo[k+1] >= X[i,2] && tiempo[k+1] < (X[i,2] + X[i,3])){
      estado_actual_subyacente[k+1] <- X[i,1] #Se actualiza
      el estado en que se encuentra el proceso de saltos
      de acuerdo al nuevo valor del tiempo[k+1]
    }
  }

  monto_por_primas[k+1] <- prima * Tn[k]
  capital_mas_primas[k+1] <- capital[k] + monto_por_primas[
    k+1]
  accidente_robos[k+1] <- rbinom(1, 1, prob_accidente[estado_
    actual_subyacente[k+1]])
  #Se genera una v.a Bernoulli que nos indicara
  #Si accidente_robos = 1... ocurre un accidente
  #Si accidente_robos = 0... Ocurre un robo
  if(accidente_robos[k+1] == 1){
    monto_siniestro[k+1] <- rexp(1, tasas_monto_reclamo_
      accidente[estado_actual_subyacente[k+1]])
  }
}

```

```

    #Capital total despues de un reclamo por accidente
    capital[k+1] <- capital_mas_primas[k+1] - monto_
      siniestro[k+1]
  }
  if(accidente_ robo[k+1]==0){ #ocurrio un robo
    monto_siniestro[k+1]<-rexp(1,tasas_monto_reclamo_robo[
      estado_actual_subyacente[k+1]])
    #Capital total despues de un reclamo por robo
    capital[k+1] <- capital_mas_primas[k+1] -monto_
      siniestro[k+1]
  }
  if(capital[k+1] < 0){
    break
  }

  if(tiempo[k+1] >= T){
    break
  }

  k<-k+1
}
P<-matrix(c(tiempo[1:(k+1)],monto_por_primas[1:(k+1)],
  capital_mas_primas[1:(k+1)],monto_siniestro[1:(k+1)],
  capital[1:(k+1)],estado_actual_subyacente[1:(k+1)],
  accidente_robo[1:(k+1)],Tn[1:(k+1)]),k+1,8)
P[is.na(P)] <- 0
return(P)
}

```

## C.5. Proceso de Cramer Lundberg modulado de Markov con tasas de interés estocásticas

```
#####  
# Funcion que trae a valor presente los montos #  
# generados por reclamos y por primas #  
# del proceso de Cramer Lundberg modulado de Markov #  
#####
```

Descripcion:

Genera una tabla la cual contiene los montos por reclamos generados por accidentes y por robos descontados a tiempo presente de acuerdo al proceso de tasas de interes, ademas tambien trae a valor presente los montos recibidos por primas.

Uso:

```
proceso_descuento_Cramer_Lundberg(X,P,tasas_instantaneas_  
interes_1,tasas_instantaneas_interes_2,tasas_instantaneas_  
interes_3,tasas_interes,T)
```

Argumentos:

X: Guarda la informacion del proceso subyacente de saltos de Markov de las condiciones economicas

P: Guarda informacion del proceso de Cramer Lundberg modulado de Markov

tasas\_instantaneas\_interes\_1: Guarda la informacion de trayectorias de un proceso de saltos de Markov de las tasas de interes generadas si el proceso subyacente esta en situacion buena

tasas\_instantaneas\_interes\_2: Guarda la informacion de trayectorias de un proceso de saltos de Markov de las tasas de interes generadas si el proceso subyacente esta en situacion regular

tasas\_instantaneas\_interes\_3: Guarda la informacion de trayectorias de un proceso de saltos de Markov de las tasas de interes generadas si el proceso subyacente esta en situacion mala

tasas\_interes: Guarda los valores de las tasas de interes instantaneas que emplearemos para traer a valor presente

T: Horizonte de tiempo en que se observara el proceso

```

proceso_descuento_Cramer_Lundberg<- function(X,P,tasas_
  instantaneas_interes_1,tasas_instantaneas_interes_2,tasas_
  instantaneas_interes_3,tasas_interes,T){

  tiempo1<-numeric()
  tiempo2<-numeric()
  tiempo3<-numeric()
  ruina_en_cramer<-numeric()
  estado_actual_subyacente<-numeric()
  monto_reclamo_descontado<-numeric()
  monto_por_prima_descontado<-numeric()
  suma_montos_descontados<-numeric()
  monto_total_descontado<-numeric()
  tam_matriz_proceso_sub<-length(X[,1])
  if(P[length(P[,1]),1]==0){
    tam_matriz_proceso_cramer<-length(P[,1])-1
    ruina_en_cramer<-0
  }else{
    tam_matriz_proceso_cramer<-length(P[,1])
    ruina_en_cramer<-1
  }

  tam_tasas_interes_1<-length(tasas_instantaneas_interes_
    1[,1])
  tam_tasas_interes_2<-length(tasas_instantaneas_interes_
    2[,1])
  tam_tasas_interes_3<-length(tasas_instantaneas_interes_
    3[,1])
  capital_inicial<-P[1,5]
  capital_mas_primas_t1<-P[2,3]
  #tiempo_primera_reclamacion<-P[2,1]
  tiempo1[1]<-0
  tiempo2[1]<-0
  tiempo3[1]<-0
  k<-2

  for(k in 2:tam_matriz_proceso_cramer){
    ruina_en_cramer[k]<-ruina_en_cramer
    monto_por_prima_descontado[k]<-0
    estado_actual_subyacente<-P[k,6]
    if(estado_actual_subyacente==1){ #entramos al estado
      subyacente 1
      for(c in 1:tam_tasas_interes_1){
        if(P[k,1]>=tasas_instantaneas_interes_1[c,2] && P

```

```

        [k,1]<(tasas_instantaneas_interes_1[c,2]+tasas
        _instantaneas_interes_1[c,3])){
        estado_actual_tasas_interes_1<tasas_
        instantaneas_interes_1[c,1]
        iteraciones<-c
    }
}

for(d in 1:iteraciones){
    if(tasas_instantaneas_interes_1[d,1]==1){
        tiempo1<-tiempo1 +tasas_instantaneas_interes_1[
        d,3]
    }else if(tasas_instantaneas_interes_1[d,1]==2){
        tiempo2<-tiempo2 +tasas_instantaneas_interes_1[
        d,3]
    }else{
        tiempo3<-tiempo3 +tasas_instantaneas_interes_1[
        d,3]
    }
}
if(estado_actual_tasas_interes_1==1){
    tiempo1<-tiempo1-(tasas_instantaneas_interes_1[
    iteraciones,2]+tasas_instantaneas_interes_1[
    iteraciones,3]-P[k,1])
}else if(estado_actual_tasas_interes_1==2){
    tiempo2<-tiempo2-(tasas_instantaneas_interes_1[
    iteraciones,2]+tasas_instantaneas_interes_1[
    iteraciones,3]-P[k,1])
}else{
    tiempo3<-tiempo3-(tasas_instantaneas_interes_1[
    iteraciones,2]+tasas_instantaneas_interes_1[
    iteraciones,3]-P[k,1])
}
}else if(estado_actual_subyacente==2){ #entramos al
estado subyacente 2
for(c in 1:tam_tasas_interes_2){
    if(P[k,1]>=tasas_instantaneas_interes_2[c,2] && P
    [k,1]<(tasas_instantaneas_interes_2[c,2]+tasas
    _instantaneas_interes_2[c,3])){
        estado_actual_tasas_interes_2<tasas_
        instantaneas_interes_2[c,1]
        iteraciones<-c
    }
}
}

```

```

for(d in 1:iteraciones){
  if(tasas_instantaneas_interes_2[d,1]==1){
    tiempo1<-tiempo1 +tasas_instantaneas_interes_2[
      d,3]
  }else if(tasas_instantaneas_interes_2[d,1]==2){
    tiempo2<-tiempo2 +tasas_instantaneas_interes_2[
      d,3]
  }else{
    tiempo3<-tiempo3 +tasas_instantaneas_interes_2[
      d,3]
  }
}
if(estado_actual_tasas_interes_2==1){
  tiempo1<-tiempo1-tasas_instantaneas_interes_2[
    iteraciones,2]+tasas_instantaneas_interes_2[
    iteraciones,3]-P[k,1])
}else if(estado_actual_tasas_interes_2==2){
  tiempo2<-tiempo2-(tasas_instantaneas_interes_2[
    iteraciones,2]+tasas_instantaneas_interes_2[
    iteraciones,3]-P[k,1])
}else{
  tiempo3<-tiempo3-(tasas_instantaneas_interes_2[
    iteraciones,2]+tasas_instantaneas_interes_2[
    iteraciones,3]-P[k,1])
}
}else {
  for(c in 1:tam_tasas_interes_3){
    if(P[k,1]>=tasas_instantaneas_interes_3[c,2] && P
      [k,1]<(tasas_instantaneas_interes_3[c,2]+tasas
        _instantaneas_interes_3[c,3])){
      estado_actual_tasas_interes_3<-tasas_
        instantaneas_interes_3[c,1]
      iteraciones<-c
    }
  }
}

for(d in 1:iteraciones){
  if(tasas_instantaneas_interes_3[d,1]==1){
    tiempo1<-tiempo1 +tasas_instantaneas_interes_3[
      d,3]
  }else if(tasas_instantaneas_interes_3[d,1]==2){
    tiempo2<-tiempo2 +tasas_instantaneas_interes_3[
      d,3]
  }else{
    tiempo3<-tiempo3 +tasas_instantaneas_interes_3[

```

```

        d,3]
    }
}
if(estados_actuales_tasas_interes_3==1){
    tiempo1<-tiempo1-(tasas_instantaneas_interes_3[
        iteraciones,2]+tasas_instantaneas_interes_3[
        iteraciones,3]-P[k,1])
}else if(estados_actuales_tasas_interes_3==2){
    tiempo2<-tiempo2-(tasas_instantaneas_interes_3[
        iteraciones,2]+tasas_instantaneas_interes_3[
        iteraciones,3]-P[k,1])
}else{
    tiempo3<-tiempo3-(tasas_instantaneas_interes_3[
        iteraciones,2]+tasas_instantaneas_interes_3[
        iteraciones,3]-P[k,1])
}
}

monto_reclamo_descontado[k]<-P[k,4]*
    exp(-tasas_interes[1]*tiempo1)*
    exp(-tasas_interes[2]*tiempo2)*
    exp(-tasas_interes[3]*tiempo3)
monto_por_prima_descontado[k]<-P[k,2]*
    exp(-tasas_interes[1]*tiempo1)*
    exp(-tasas_interes[2]*tiempo2)*
    exp(-tasas_interes[3]*tiempo3)

tiempo1<-0
tiempo2<-0
tiempo3<-0
}

M<-matrix(c(P[2:k,2],P[2:k,3],
    monto_por_prima_descontado[2:k],
    monto_reclamo_descontado[2:k],
    P[2:k,7],ruina_en_cramer[2:k]),(k-1),6)
return (M)
}

```

# Bibliografía

- [1] D'amico, G., *Moments analysis of a Markov-Modulated risk model with stochastic interest rates*, *Communications on Stochastic Analysis*, No. 2 , 227-246, 8 (2014).
- [2] Durrett, R. *Essentials of Stochastic Processes*, 2nd ed. USA: Springer, (2012).
- [3] Feller, W. *Introducción a la teoría de probabilidades y sus aplicaciones. Volumen II.*, segunda ed. México: Limusa, (1971).
- [4] Kim, B. and Kim, H., *Moments of claims in a Markovian environment*, *Insurance: Mathematics and Economics*, 40 , 485-497, (2007).
- [5] Lefebvre, M. *Applied Stochastic Processes*, Canada: Springer, (2007).
- [6] Lu, Y. and Li, S., *On the probability of ruin in a Markov-modulated risk model*, *Insurance: Mathematics and Economics*, 37(3) , 522-532, (2005).
- [7] Norris, J.R. *Markov Chains*, 1st ed. University of Cambridge: Cambridge University press, (1997).
- [8] Obregón, S. I. *Teoría de la probabilidad*, México: Limusa, (1980).
- [9] Rincón, L. *Introducción a los procesos estocásticos*, México: Las prensas de ciencias, (2012).