Universidad Nacional Autónoma de México
Maestría en ciencias Matemáticas.

El funtor global de representaciones como funtor de biconjuntos de Green.

Tesis
para obtener el grado de Maestra en Ciencias Matemáticas

Presenta:
Karley Tatiana Cardona Echenique

Tutor principal:
Dr. Alberto Gerardo Raggi Cárdenas
UNAM - CCM

Morelia, Michoacán - Febrero de 2016.

"Necesitamos unas supermatemáticas en la
que las operaciones sean tan desconocidas
como las cantidades sobre las que se operan
y un supermátematico que no sepa que está
haciendo cuando realiza esas operaciones.
Esas supermatemáticas son la teoría de grupos."
Sir. Arthur Stanley.

CONTENTS

AGRADECIMIENTOS

A mi familia por todo el apoyo y cariño que apesar de la distancia me hicieron sentir, en especial a mis padres Joche y Yamile, a Ilancho, Julieth, Marthik y mamá Vilma a ellos va dedicado este trabajo.

A todos mis amigos y compañeros del posgrado conjunto por hacer de mi estadía en México toda una aventura, siempre los recordaré. En especial a Lili, Leidy, Sonia, Yess, Ana, Magno, Claudia, Rubencho, Fredy, Jhon, Novo, Cesar, Victor e Israel a todos ellos gracias por ser, estar y coincidir.

A los profesores Gerardo Raggi y Roberto Martinez por haberme enseñado álgebra y haber compartido conmigo tan valioso conocimiento.

A los sinodales el Dr. Baptiste, el Dr. Luis Valero, la Dra. Rita Rolland y Dr. Daniel Juan por la revisión de este trabajo, por sus valiosos comentarios y correcciones. También a la Lic. Morelia Alvarez por toda su ayuda en los procesos administrativos y sus bonitos concejos.

Al posgrado conjunto en ciencias matemáticas UNAM - UMSNH por la excelente formación académica, científica y humana que recibí. Por último a CONACyT por todo el apoyo económico de los que fui beneficiaria.

A todos muchas gracias y espero que la luz siempre los alcance.

RESUMEN

En este trabajo se estudiará de forma detallada la construcción y algunas propiedades importantes del anillo global de representaciones que generaliza y relaciona las propiedades del anillo de representaciones, el anillo monomial y el anillo de Burnside. también se estudiará los morfismos de anillos que van del anillo global de representaciones a los números complejos. Dado que el anillo de representaciones y el anillo de Burnside inducen funtores de biconjuntos se definirá un nuevo funtor apartir del anillo global de representaciones de forma natural, este se llamará **el funtor global de representaciones** en especial se busca mostrar que dicho funtor resulta también un funtor de biconjuntos y se comprabará que el funtor global de representaciones es también un funtor de Green.

Palabras Claves: La representación de grupo, anillos de Burnside, anillos de caracteres, biconjuntos, funtor de Green.

Abstrac

This paper will examine in detail the construction and some important properties of the global representation rings that generalizes and related properties of representations ring, the monomial ring and ring Burnside. morphisms of rings ranging global ring representations to complex numbers will also be considered. Since representations ring and ring Burnside induce functors biconjuntos a new functor is defined starting in the Global representations ring naturally, this is called **global functor representations** in particular it seeks to show that the functor is also a functor of biconjuntos and comprabará that global funtor representations is also a functor Green.

Keywords: Group representation, burnside rings, character rings, biset, Green's funtor.

INTRODUCCIÓN

La teoría de representación de grupos finitos ha probado ser una área muy fuerte para el estudio de los grupos finitos, en particular la clasificación de los grupos simples no habría sido posible sin las técnicas modulares de las representaciones de grupos.

La teoría de representaciones y caracteres fue introducida por Frobenious y otros alrededor del 1896. Dicha teoría tiene una invaluable aplicación a la teoría de grupos así como en otras áreas aparte de las matemáticas, como lo son la mecánica cuántica, la química y la física teórica. Aunque al principio los caracteres no se asociaban a las representaciones lineales ni mucho menos como módulos sobre el álgebra de grupo Frobenius los definió como funciones de G a $\mathbb{C}$ asociadas a los $\mathbb{C}G$-módulos, donde es G un grupo finito. Apesar de que esta teoría tiene más de cien años, aún siguen apareciendo nuevos resultados.

Tomando el grupo de Grothendieck sobre los $\mathbb{C}G$-módulos (hasta isomorfismo) con respecto a la suma directa a este se le puede dar una estructura de anillo definiendo el producto como el producto tensorial y se le llama el **anillo de representaciones del grupo G o anillo de Green de G**. La evaluación de los caracteres sobre los elementos del grupo G son precisamente todos los morfismos de anillos que van del anillo de representaciones a los números complejos. Relacionado a lo anterior se encuentra el **anillo monomial de representaciones** de un grupo que se centra en la representación compleja unidimensional de los subgrupos de G (Ver Dress [1]).

Por otra parte, el **anillo de Burnside de G** se puede definir usando también el anillo de Grothendieck en este caso de los G-conjuntos finitos (hasta isomorfismo) con respecto a la unión disjunta y el producto cartesiano. Este anillo también proporciona muchas ideas útiles en la teoría de grupos ya que muestra las propiedades de acción de grupos sobre conjuntos finitos. Una observación interesante del anillo de Burnside del grupo G es que es un subanillo de $\mathbb{Z}^n$ (donde n es el número de clases de conjugación de subgrupos de G), este abarca las columnas de la tabla de marcas (Ver 2.5.1 [15]), y resulta que cualquier morfismo del anillo de Burnside a $\mathbb{Z}$ es una marca.

Como se puede observar, cada uno de los tres anillos mencionados tiene sus morfismos sobre $\mathbb{C}$ (o más precisamente $\mathbb{Z}$ en el caso de de $B(G)$) y estudiarlos como estructuras independientes es de gran interés; sin embargo, Raggi y Valero en [3] definen un nuevo anillo, el anillo global de representaciones el cuál generaliza y relaciona las propiedades del anillo de representaciones, el anillo monomial y el anillo de Burnside.

Este trabajo se centrará en primer lugar en entender la construcción y definición dada por ellos, luego se probará en detalle algunas propiedades importantes de este nuevo anillo, también se estudiará los morfismos de anillos que van del anillo global de representaciones a los números complejos. Además en este trabajo se mostrará que efectivamente cada uno de los anillos que hemos mencionado antes están incluidos hasta isomorfismo en el anillo global de representaciones.

En años recientes las técnicas para el estudio de grupos finitos han avanzado mucho y en relación a esto otro objeto de estudio en este trabajo tiene que ver con los funtores de biconjuntos introducidos en 1996 por Bouc [17]. Estos funtores son una generalización de los funtores de Mackey que fuerón estudiados a principios de la década de 1970 por Green [5] y Dress [2] a su vez como una generalización de los procesos de inducción y restricción presentes en la teoría de representaciones de grupos finitos (Ver Boltje [10] y Webb [8]). Lo anterior tiene aplicación a la cohomología de grupos (vease por ejemplo [9]), la topología algebraíca y mayormente en la teoría de inducción [10]. De igual modo es posible encontrar ejemplos de funtores de biconjuntos en otras áreas de las matemáticas.

El anillo de representaciones y el anillo de Burnside inducen funtores de biconjuntos (Ver 5.1 y 7.1 en Bouc [15]). Resulta ser que también puede definirse un nuevo funtor apartir del anillo global de representaciones de forma natural, este se llamará **el funtor global de representaciones** en especial con este trabajo se busca mostrar que dicho funtor resulta también un funtor de biconjuntos. La categoría de biconjuntos que se denota por Ω y tiene por objetos los grupos finitos tal que $Hom_{\Omega}(G,H) = B(H,G) = B(H \times G)$ donde G y H son grupos finitos, una característica importante de esta categoría es que permite simplificar algunos resultados y expresar con sencilles algunos conceptos debido al teorema de descomposición de Bouc que se puede encontrar en 2.3.26 en [15]. Aprovechando lo anterior y que los funtores de biconjuntos están definidos en una subcategoría plena de Ω (ver definición 4.13 de Bouc [15]) se estudiará explícitamente este nuevo funtor. Como resultado final se comprabará que el funtor global de representaciones es también un funtor de Green de acuerdo a la definicion dada en 4.2.2. de [7] . En conclusión, esta tesis busca formalizar algunos detalles sobre el anillo global de representaciones, establecer las relaciones que este tiene con respecto a los anillos anteriormente mencionados y formalizar el concepto de funtor global de representaciones como funtor de biconjuntos y funtor de Green, esto con el fin de que más adelante se pueda utilizar propiedades de este funtor para extraer información importante, tal cual como se hace con los funtores que inducen el anillo de Burnside y el anillo de representaciones.

El presente trabajo está dividido en tres capítulos: en el primero se describe la categoría de biconjuntos con algunas de sus propiedades que serán importantes para el desarrollo de esta tesis. Como se mencionó antes, es muy importante comprender las propiedades del anillo de representaciones, el anillo de Burnside y el anillo monomial, por esto se dará una breve introducción de estos anillos, se definirán y enunciarán algunas propiedades importantes. Por último se dará una descripción sencilla de los funtores de biconjuntos y funtores de Green. En el segundo capítulo se introduce el anillo global de representaciones de un grupo finito, no sin antes definir el anillo $T(G)$ que resulta de la construcción del grupo de Grothendieck $G_0(\mathfrak{L})$, donde $\mathfrak{L}$ es la categoría que tiene como objetos los pares (X, V) con X es un G-conjunto y V un $\mathbb{C}G$-módulo que es X-graduado. También se mostrarán todos los homomorfismos de anillos que van del anillo global de representaciones a los números complejos, y se describirá la tabla de especies. Por último se comprueba que el anillo de Burnside y el anillo de representaciones del grupo finito G se encuentran incluídos en el anillo global de representaciones del grupo G. Finalmente el capítulo tercero se dedicará a estudiar el funtor global de representaciones, se probará que este resulta ser un funtor de biconjuntos sobre una subcategoría preaditiva plena de la categoría de biconjuntos. Considerando los básicos de la categoría de biconjuntos, se podrá deducir de forma más explícita la estructura del funtor. Por último, se muestra que dicho funtor cumple con los axiomas necesarios para ser funtor de biconjuntos de Green según la definición dada en el primer capítulo.

CHAPTER 1

PRELIMINARES

En este primer capítulo se enunciarán algunas definiciones y propiedades de biconjuntos, el anillo de representaciones, el anillo monomial, el anillo de Burnside y funtores de biconjuntos que permitirán el desarrollo de este trabajo.

A continuación se consideran G y H grupos finitos y en adelante los grupos que se enuncien serán de orden finitos. Lo siguiente ha sido tomado de Bouc [15].

1.1 G - Conjuntos y (H, G) - Biconjuntos

Definición 1.1. *X es un G-**conjunto izquierdo** es un conjunto (finito) de G está equipado con una acción de G a izquierda, esto es una función $G \times X \to X$ (denotado por $(g, x) \to g \cdot x$, o $(g, x) \to gx$) de tal forma que las siguientes condiciones se satisfacen:*

(a) Para $g, h \in G$, $x \in X$ se tiene $g \cdot (h \cdot x) = (g \cdot h) \cdot x$.

(b) Si 1_G es el elemento identidad de G, entonces $1_G \cdot x = x$, para cualesquiera $x \in X$.

*De forma similar es un G- **conjunto derecho** si X es un conjunto (finito) equipado con una acción de G a derecha esto es un mapa $(x, g) \in X \times G \to x \cdot g \in X$ tal que*

(a) Si $g,\ h \in G$ y $x \in X$ entonces $(x \cdot g) \cdot h = x \cdot (g \cdot h)$.

(b) Para todo $x \in X$ se satisface $x \cdot 1_G = x$.

Considere X un G-conjunto izquierdo. Si H es un subgrupo de G y $x \in X$ el conjunto

$$Hx = \{y \in X : \exists h \in H,\ hx = y\},$$

es llamada la H**-orbita de** x. El conjunto de H-orbitas en X es denotado por $H\backslash X$, la cual es una partición de X, y tiene una estructura natural de $(N_G(H)/H)$-conjunto, definiendo

$$\forall nH \in N_G(H)/H,\ \forall x \in X,\ (nH)(Hx) = Hnx.$$

El **conjunto de puntos fijos** de H sobre X es el conjunto

$$X^H = \{x \in X : \forall h \in H, hx = x\},$$

este también es un $(N_G(H)/H)$-conjunto, mediante la acción

$$\forall nH \in N_G(H)/H, \forall x \in X, (nH)x = nx.$$

Equivalentemente es definida la orbita de un elemento $x \in X$ y el conjunto de puntos fijos de H subgrupo de G en el caso de que G-actue a derecha en X.

Definición 1.2. *Un G conjunto X es llamado **transitivo** si existe una única G-orbita sobre X.*

Si X es un G-conjunto transitivo entonces para cualquier elemento $x \in X$ la función $m_x : G \longrightarrow X$ dada por $m_x(g) = g\cdot x$ es sobreyectivo. Además, dos elementos g y g_o de G tienen la misma imagen por m_x si y solo si $g \in g_o G_x$, siendo

$$G_x = \{g \in X : g\, cdotx = x\}$$

el **estabilizador** de $x \in G$. Lo cual deduce que m_x induce una biyección $\overline{m_x}$ del conjunto G/G_x el conjunto de clases izquierdas de G_x en G a X. Inversamente, si H es cualquier subgrupo de G, el conjunto G/H de clases laterales izquierdas de H en G es un G-conjunto transitivo, mediante la acción definida tal que

$$\forall g \in G, \forall \gamma H \in G/H,\ g \cdot \gamma H = g\gamma H.$$

Dado que la biyección $\overline{m_x} : G/G_x \longrightarrow X$ es un isomorfismo de G-conjuntos, se demuestra la primera afirmación del siguiente Lema.

Notación 1.

Dado $H \leq G$ y $g \in G$, entonces ${}^gH$ denota gHg^{-1} y H^g denota $g^{-1}Hg$.

Lema 1.1. *Considere un grupo G.*

(a) Cualquier G-conjunto transitivo es isomorfo a G/H, para algún subgrupo H de G.

(b) Para H, K subgrupos de G, los G-conjuntos G/H y G/K son isomorfos si y sólo si H y K son conjugados en G.

Proof. Si $K = {}^gH$, entonces la función $f : G/K \longrightarrow G/H$ dada por $f(xK) = xgH$ es un isomorfismo de G-conjuntos. Por otra parte, si $f : G/K \longrightarrow G/H$ es un isomorfismo de G-conjuntos, existe $g \in G$ tal que $f(K) = gH$ y por tanto $f(xK) = xgH$ para cualesquiera $x \in G$. Como $kK = K$ para todo $k \in K$, se sigue que $kgH = gH$, así $k^g \in H$ por lo que $K^g \leq H$. Ahora, para $h \in H$ se observa

$$f({}^ghK) = {}^ghgH = ghH = gH = f(K),$$

y como consecuencia ${}^gh \in K$, de esto se infiere que $gH \leq K$ o $H \leq K^g$. Luego $H = K^g$, así el Lema queda demostrado. □

Definición 1.3. *Sean G y H grupos. Se dice que U es un (H,G)-**biconjunto** si este es un H-conjunto izquierdo y un G-conjunto derecho de tal forma que la H- acción y la G- acción conmutan esto es:*

$$\forall h \in H, \forall u \in U, \forall g \in G,\ (h \cdot u) \cdot g = h \cdot (u \cdot g),$$

*este elemento se denota simplemente por hug. Se denotará por ${}_HU_G$ a U un (H,G)-**biconjunto**.*

Dado U un (H,G)-biconjunto este es un $(H \times G)$-conjunto con la acción

$$(h,g) \cdot u = h \cdot u \cdot g^{-1}$$

es por eso que todas las nociones que se aplican a $(H \times G)$-conjuntos también se aplican a (H,G)-biconjuntos: Pueden considerarse uniones disjuntas o productos de biconjuntos. Si U y V son (H,G)-biconjuntos entonces un homomorfismo de (H,G)-biconjuntos f de U a V es una función

$$f : U \longrightarrow V$$

de tal forma que $f(h \cdot u \cdot g) = h \cdot f(u) \cdot g$, para cada $h \in H$, $u \in U$ y $g \in G$.

Si U es un (H,G)- biconjunto, el conjunto $(H \times G)\backslash U$ es llamado el **conjunto de** (H,G)-**orbitas** en U, el cuál es denotado por $H\backslash U/G$. El biconjunto U se dice que es **transitivo** si $H\backslash U/G$ tiene cardinalidad 1. Equivalentemente, para $u, v \in U$, existe $(h,g) \in H \times G$ tal que $hug = v$.

Lema 1.2 (Lema 2.3.4 en [15])**.** *Considere G y H grupos.*

1. *Si L es un subgrupo de $H \times G$, se tiene que $(H \times G)/L$ es un (H,G) biconjunto transitivo bajo la acción definida por*

$$\forall h \in H, \forall (b,a)L \in (H \times G)/L, \forall g \in G,$$

$$h \cdot (b,a)L \cdot g := (hb, g^{-1}a)L.$$

2. *Suponga que U es un (H,G)-biconjunto, se escoge un $[H\backslash U/G]$ de representaciones de (H,G)-orbitas en U. Entonces existe un isomorfismo de (H,G)-biconjuntos*

$$U \cong \bigsqcup_{u \in [H\backslash U/G]} (H \times G)/L_u,$$

donde $L_u = (H,G)_u$ es el estabilizador de u en $H \times G$, esto es el subgrupo de $H \times G$ definido por

$$(H,G)_u = \{(h,g) \in H \times G : hu = ug\}.$$

En particular, cualquier (H,G)-biconjunto transitivo es isomorfo a $(H \times G)/L$, para algún subgrupo L de $H \times G$.

Para un grupo G, los siguientes ejemplos de biconjuntos a considerar son fundamentales:

- Si H es un subgrupo de G, el conjunto ${}_HG_G$ es un (H,G)-biconjunto bajo la acción dada por la multiplicación a izquierda y derecha en G. Este es denotado por res_H^G (donde res significa **restricción**).

- De forma similar se entiende a ${}_GG_H$ como un (G,H)-biconjunto, el cuál se denota por ind_H^G (donde ind significa **inducción**).

- Si $N \trianglelefteq G$ y si $H = G/N$, el conjunto ${}_GH_H$ es un (G,H)-biconjunto siendo la acción derecha de H la multiplicación de grupo y la acción izquierda de G la proyección a H, por tanto multiplicación izquierda en H. Este es denotado por inf_H^G, (donde inf significa **inflación**).

- Bajo las mismas hipotesis del ejemplo anterior, ${}_HH_G$ es un (H,G)-biconjunto, siendo la multiplicación en H la acción izquierda de H y la proyección a H la acción derecha de G, este es denotado por def_H^G (donde def significa **deflación**).

- Si $\alpha : G \longrightarrow H$ es un morfismo de grupos, entonces el conjunto H es un (H,G)-biconjunto, definiendo la acción izquierda de H como la multiplicación del grupo, y la acción izquierda de G esta dada al tomar la imagen mediante α y luego multiplicar a derecha en H. Se denota como ${}_G\alpha H_H$ y ${}_HH\alpha_G$ respectivamente, aunque si es claro a través de que morfismo está dada la acción, no se escribirá la letra α. Si α es un isomorfismo de grupos entonces este es denotado por $\mathrm{iso}(\alpha)$ o iso_G^H. Si $\alpha = Id : G \to G$ entonces Id_G denota a $iso(\alpha)$.

Definición 1.4. *Considere los grupos G, H y K. Si U es un (H,G)-biconjunto y V un (K,H)-biconjunto, la composición de V y U es el conjunto de H-órbitas sobre el producto cartesiano $V \times U$, donde la acción a derecha de H esta dada por*

$$(v,u)\cdot h = (vh, h^{-1}u)$$

para todo $(v,u) \in V \times U$ y $h \in H$, esto se denota por $V \times_H U$. La H-órbita de $(v,u) \in V \times U$ se denotará por $(v,_H u)$ o $[v,u]$. El conjunto $V \times_H U$ es un (K,G)-biconjunto bajo la acción definida por $k \cdot [v,u] \cdot g = [kv, ug]$ para $k \in K$, $g \in G$ y $[v,u] \in V \times_H U$.

Proposición 1.1. *Sean G, H, K y L grupos.*

1. *Si U es un (H,G)-biconjunto, V un (K,H)-biconjunto y W un (L,K)-biconjunto, entonces existe un isomorfismo canónico de (L,G)-biconjuntos*

$$ {}_LW_K \times_K \ ({}_KV_H \times_H \ {}_HU_G) \xrightarrow{\cong} ({}_LW_K \times_K \ {}_KV_G) \times_H \ {}_HU_G, $$

   dada por $[w,[v,u]] \to [[w,v],u]$, para todo $(w,v,u) \in W \times V \times U$.

2. *Si U es un (H,G)-biconjunto y V un (K,H)-biconjunto, existe un isomorfismo canónico de (G,K)-biconjuntos*

$$(V \times_H U) \xrightarrow{\cong} U \times_H V,$$

   dado por $[v,u] \to [u,v]$.

3. *Si U y U' son (H, G)-biconjuntos y V, V' son (K, H)-biconjuntos, entonces existe un isomorfismo canónico de (K, G)-biconjuntos.*

$$V \times_H (U \sqcup U') \cong (V \times_H U) \sqcup (V \times_H U')$$
$$(V \sqcup V') \times_H U \cong (V \times_H U) \sqcup (V' \times_H U).$$

4. *Si U es un (H, G)-biconjunto, entonces existe un isomorfismo canónico de (H, G)-biconjuntos*

$$Id_H \times_H U \xrightarrow{\cong} U \xleftarrow{\cong} U \times_G Id_G,$$

definido por $(h,_H u) \to (hu)$ y $(u,_G g) \to ug$ para todo $(h, u, g) \in H \times U \times G$.

La proposición anterior se sigue directo de la definición 1.4.

Se denotará $W \times_K V \times_H U$ en lugar de $W \times_K (V \times_H U)$ o $(W \times_K V) \times_H U$, y de mánera similar se denota $[w, v, u]$ en lugar de $[[w, v], u]$ o $[w, [v, u]]$.

Si $X \cong (G \times H)/L$ es un (G, H)-biconjunto transitivo. Considere p_G y p_H las proyecciones de $G \times H$ en G y H respectivamente, se define entonces

$$A = p_G(L) \leq G \qquad C = p_H(L) \leq H,$$
$$A_1 = \{g \in G : (g, 1) \in L\} \trianglelefteq A, \qquad C_1 = \{h \in H : (1, h) \in L\} \trianglelefteq C.$$

Lema 1.3 (Lema de Bouc 2.3.25 en [15]). *Con esta notación se tiene que*

$$A/A_1 \cong C/C_1.$$

Proof. Considere $a \in A$, existe algún $c \in H$ tal que (a, c) está en L, luego $c \in C$. Se define

$$f : A/A_1 \longrightarrow C/C_1$$

por $f(aA_1) = cC_1$. Suponga $aA_1 = a'A_1$, entonces $a^{-1}a' \in A_1$ es decir, $(a^{-1}a', 1) \in L$. Pero $f(aA_1) = cC_1$ y $f(a'A_1) = c'C_1$, donde $(a, c) \in L$ y $(a', c') \in L$, entonces se sigue

$$(1, cc'^{-1}) = (a, c)(a^{-1}a', 1)(a'^{-1}, c'^{-1}) \in L,$$

así se infiere que $cC_1 = c'C_1$. Además tomando $a = a'$ se observa que esta definición no depende de el c que se tome y por lo tanto f está bien definida. Se utiliza un argumento similar para probar que f es inyectiva y se observa claramente que f es sobreyectiva. Para verificar que f es un morfismo de grupos considere aA_1, $a'A_1$ en A/A_1, entonces existen c y c' en C tales que $(a, c) \in L$ y $(a', c') \in L$, luego $(aa', cc') \in L$, así que $f(aA_1, a'A_1) = f(aA_1)f(a'A_1)$. Por lo tanto f es un isomorfismo de grupos. □

Se denota por B a C/C_1, tenemos entonces morfismos suprayectivos $\pi : C \longrightarrow B$ y $\rho : A \longrightarrow B$, donde ρ es la proyección de A en A/A_1 compuesta con la función f definida en el lema anterior.

Lema 1.4 (Descomposición de Bouc 2.3.26 en [15]). *Considere H y G grupos. Si L es un subgrupo de $G \times H$. Con la notación anterior se tiene el siguiente isomorfismo de (G, H)-biconjuntos*

$$(G \times H)/L \cong {}_G G_A \times {}_A \rho B_B \times {}_B B \pi_C \times {}_C H_H. \tag{1.1}$$

Proof. Se define

$$\begin{array}{rcl}\varphi : (G\times H)/L & \longrightarrow & {}_GG_A \times {}_A\rho B_B \times {}_BB\pi_C \times {}_CH_H \\ (g,h)L & \longrightarrow & [g,1,1,h^{-1}].\end{array}$$

Suponga que $(g,h)L = (g',h')L$. entonces $(g,h) = (g',h')(a,c)$ para alguna pareja $(a,c) \in L$, así que $g = g'a$ y $h = h'c$, luego $\varphi((g,h)L) = [g'a,1,1,c^{-1}h'^{-1}]$ y se tiene que

$$\begin{array}{rcl}[g'a,1,1,c^{-1}h'^{-1}] & = & [g',a\cdot 1_{C/C_1},1_{C/C_1}\cdot c^{-1},h'^{-1}] \\ & = & [g',f(aA_1),c^{-1}C1,h'^{-1}].\end{array}$$

Como se observó en la demostración del lema anterior, $f(aA_1) = cC_1$ dado que (a,c) pertenece a L, entonces

$$\varphi((g,h)L) = [g'a,1,1,c^{-1}h_o^{-1}] = [g',1,1,h'^{-1}] = \varphi((g',h')L),$$

por lo tanto, φ está bien definida.
Note que si $\varphi((g,h)L) = \varphi((g',h')L)$, se tiene que

$$(g',1,1,h'^{-1}) = (ga,a^{-1}\cdot xC_1,x^{-1}C_1\cdot c,c^{-1}h^{-1})$$

para algún $a \in A$ y $x,c \in C$. Entonces $g' = ga$, $h' = hc$ y si $f(aA_1) = wC_1$, se sigue que $(a,w) \in L$. Por la igualdad anterior se infiere que $w^{-1}x$ y $x^{-1}c$ pertenecen a C_1, luego $(1,w^{-1}x)$ y $(1,x^{-1}c)$ pertenecen a L, de esto se concluye que $(a,c) \in L$ y por lo tanto $(g,h)L = (g',h')L$, es decir, se verificó que φ es inyectiva.
Observe que si $[g,xC_1,yC_1,h] \in {}_GG_A \times {}_A\rho B_B \times {}_BB\pi_C \times {}_CH_H$ dado que f es sobreyectiva se tiene

$$\begin{array}{rcl}[g,xC_1,yC_1,h] & = & [g,f(aA_1),yC_1,h] \\ & = & [g,a\cdot 1,1\cdot y,h] \\ & = & [ga,1,1,yh],\end{array}$$

para alguna $a \in A$, así que se infiere $\varphi((ga,h^{-1}y^{-1})L) = [g,xC_1,yC_1,h]$. Por lo tanto φ es sobreyectiva.
Ahora, para verificar que φ es de $(G\times H)$-conjuntos tome $(a,b) \in G\times H$ y $(g,h)L \in (G\times H)/L$, entonces

$$\begin{array}{rcl}\varphi((a,b)\cdot(g,h)L) & = & [ag,1,1,h^{-1}b^{-1}] \\ & = & a[g,1,1,h^{-1}]b^{-1} \\ & = & (a,b)\cdot[g,1,1,h^{-1}] \\ & = & (a,b)\cdot\varphi((g,h)L).\end{array}$$

Así queda comprobado este lema. □

Si $A \leq G$ y $C \leq H$, a los biconjuntos ${}_GG_A$ y ${}_CH_H$ los llamamos de tipo de inducción y restricción respectivamente. Analogamente ${}_A\rho B_B$ y ${}_BB\pi_C$ son de tipo de inflación y deflación.

Para biconjuntos se tiene una propiedad análogas a las que se tienen en la teoría de representaciones que se estudiará más adelante, ejemplo de ello es la transitividad y la fórmula de Mackey.

Lema 1.5. *Considere G, H y K grupos con $f : H \longrightarrow G$ y $g : K \longrightarrow H$ morfismos de grupos. Entonces*

(a) ${}_G G_{f_H} \times {}_H H_{g_K} \cong {}_G G_{f \circ g_K}$.

(b) ${}_{K^g} H_H \times_{H^f} G_G \cong {}_{K^{f \circ g}} G_G$.

(c) ***(Mackey)*** *Si H y K son subgrupos de G y $c_g : K \longrightarrow {}^g K$ es la conjugación por g, entonces*

$$ {}_H G_G \times {}_G G_K \cong \bigsqcup_{g \in [H \backslash G/K]} HgK \cong \bigsqcup_{g \in [H \backslash G/K]} {}_H H_{H \cap {}^g K} \times {}_{H \cap {}^g K} {}^g K c_{g_K}, \tag{1.2} $$

donde $[H \backslash G/K]$ es un sistema de representantes de las clase dobles de H y K en G.

Proof. Las pruebas de los incisos (a) y (b) son similares a la del Lema 1.4. Para (c) se tiene que

$$ {}_H G_G \times {}_G G_K \cong_H G_K $$

y claramente

$$ {}_H G_K \cong \bigsqcup_{g \in [H \backslash G/K]} HgK. $$

Además , si g es un representante de las clases dobles de H y K en G, considerando el morfismo

$$ f :_H H_{H \cap {}^g K} \times {}_{H \cap {}^g K} {}^g K c_{g_K} \longrightarrow HgK $$

de forma que $f([h, gkg^{-1}]) = hgk$, entonces f resulta un isomorfismo, así

$$ HgK \cong_H H_{H \cap {}^g K} \times_{H \cap {}^g K} {}^g K_{c_{g_K}}. $$

Y con esto queda demostrado el lema. □

1.2 El grupo de Grothendieck de una categoría aditiva.

El **grupo de Grothendieck** de una categoría aditiva es un grupo abeliano que se asigna a una categoría aditiva por una propiedad universal de mapeo aditivo. Más exactamente, si C es una categoría aditiva pequeña con un conjunto de objetos *Obj (C)* y G es un grupo abeliano, se dice que un mapeo φ : *Obj(C)* $\longrightarrow G$ es aditivo si para cualquier sucesión exacta $0 \to L \to M \to N \to 0$ en C, se cumple que $\varphi(M) = \varphi(L) + \varphi(N)$.

Existe un grupo denotado $G_o(C)$ que se llama el grupo de Grothendieck de C y un mapeo aditivo

$$ \theta : Obj(C) \longrightarrow G_o(C), $$

que se llama el mapeo universal tal que para cualquier otro mapeo aditivo

$$ \beta : Obj(C) \longrightarrow G, $$

existe un homomorfismo único

$$ \alpha : G_o(C) \longrightarrow G $$

que satisface la condición $\beta = \alpha \circ \theta$.

Esta construcción fue estudiada por primera vez por Grothendieck para las categorías de gavillas coherentes y localmente libres en esquemas para demostrar el teorema de Riemann-Roch. El grupo de Grothendieck de la categoría C es el cociente de el grupo libre abeliano con base en el conjunto de clases de isomorfismo de los elementos de $Obj(C)$ sobre el subgrupo generado por los elementos de la forma $[L] - [N] - [M]$ para cada sucesión exacta $0 \to L \to M \to N \to 0$ y se denotará por $G_o(C, \theta)$.

1.3 Anillo de Burnside

Sea G un grupo finito. El grupo de Burnside $B(G)$ de G es el grupo de Grothendieck de la categoría de G-conjuntos finitos con respecto a $\sqcup$, esto significa que

$$B(G) = G_o(G - \text{conjuntos finitos}, \sqcup).$$

Si se considera los grupos finitos G y H. El **grupo de Burnside de biconjuntos** $B(H, G)$ es el grupo de Burnside $B(H \times G)$. Se sigue el siguiente corolario.

Corolario 1.1. *Considerando G, H y K grupos finitos.*

(a) Existe una única función bilineal

$$\times_H : B(K, H) \times B(H, G) \to B(K, G),$$

tal que $[V] \times_H [U] = [V \times_H U]$, donde U es un (H, G)-biconjunto finito y V es un (K, H)-biconjunto finito.

(b) Existe una única función lineal $u \in B(H, G) \to u \in B(G, H)$ tal que $[U] \to [U]$ para cada (H, G)-biconjunto finito.

Note que $\times_H$ está bien definida ya que por la definición 1.4 se tiene que es compatible con las clases de isomorfismo, es decir, si $U \cong V$ se tiene que $U \times_H W \cong V \times_H W$.

Bajo esta notación y teniendo en cuenta la Proposición 1.1 se deduce lo siguiente.

Proposición 1.2. *Sean G, H, K y L grupos finitos.*

1. *Si $u \in B(H, G)$, $v \in B(K, H)$ y $w \in B(L, K)$, entonces*

$$w \times_K (v \times_H u) = (w \times_K v) \times_H u \text{ en } B(L, G).$$

2. *Si $u \in B(H, G)$ y $v \in B(K, H)$, entonces*

$$(v \times_H u) = v \times_H u \text{ en } B(G, K).$$

3. *Si $u, u' \in B(H, G)$ y $v, v' \in B(K, H)$ en $B(G, K)$ se cumple*

$$v \times_H (u + u') = (v \times_H u) + (v \times_H u'),$$

$$(v + v') \times_H u = (v \times_H u) + (v' \times_H u).$$

4. *Si $u \in B(H,G)$, entonces*

$$[id_H] \times_H u = u = u \times_G [id_G], \text{ en } B(H,G).$$

Definición 1.5. ***El anillo de Burnside de un grupo finito.*** *Si G es un grupo finito. El grupo de Burnside tiene una estructura natural de anillos, donde el producto está definido por $[X] \cdot [Y] = [X \times Y]$, para X y Y G-conjuntos. Este anillo es conmutativo, y la identidad multiplicativa es la clase $[\cdot]$ de un G-conjunto con cardinalidad 1 y $[\emptyset]$ es el cero del anillo. En adelante mientras que sea claro se denotará X en vez de $[X]$ a los elementos de $B(G)$.*

Puede encontrarse el siguiente contenido en [14].

Lema 1.6. ***Propiedad universal del grupo de Burnside.*** *Si φ es una función definida sobre la clase de G-conjuntos finitos con valores en un grupo abeliano A, tal que:*

(a) Si X, Y son G-conjuntos finitos, entonces $\varphi(X) = \varphi(Y)$.

(b) Para cada G- conjuntos finitos X y Y

$$\varphi(X \sqcup Y) = \varphi(X) + \varphi(Y),$$

entonces existe un único homorfismo de grupos $\tilde{\varphi} : B(G) \longrightarrow A$ tal que $\varphi(X) = \tilde{\varphi}([X])$ para cualquier G-conjunto finito X.

En general, esta es la propiedad universal para los grupos de Grothendieck, como se mencionó antes.

Teorema 1.1. *(Teorema 2.3.2 en [14]) Considere G un grupo finito. Para X, Y G-conjuntos finitos, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) Los G-conjuntos X y Y son isomorfos.

(b) Para cada subgrupo H y G los conjuntos de puntos fijos X^H y Y^H tienen la misma cardinalidad.

Una prueba de esto se puede conseguir en Teorema 2.3.2. en [14].

Corolario 1.2. *Sean X y Y G conjuntos finitos . Entonces $[X]$ y $[Y]$ tienen la misma imagen en $B(G)$ si y sólo si X y Y son isomorfos.*

Proof. En caso de que $[X]$ y $[Y]$ tienen la misma imagen en $B(G)$ si y sólo si existen enteros positivos $m \leq n$, finitos G-conjuntos Z_i y T_i para $i = 1, \ldots n$ y un isomorfismo de G-conjuntos

$$X \sqcup \bigsqcup_{i=1}^{m} (Z_i \sqcup T_i) \sqcup \left(\bigsqcup_{i=m+1}^{n} Z_i \right) \sqcup \left(\bigsqcup_{i=m+1}^{n} T_i \right) \cong Y \sqcup \left(\bigsqcup_{i=1}^{m} Z_i \right) \sqcup \left(\bigsqcup_{i=1}^{m} T_i \right) \sqcup \bigsqcup_{i=m+1}^{n} (Z_i \sqcup T_i).$$

Contando puntos fijos bajo un subgrupo H de G en cada lado de la expresión anterior se concluye $|X^H| = |Y^H|$. Como esto se satisface para cualesquiera H, los G-conjuntos X y Y son isomorfos. Con esto se completa la demostración. $\square$

Si G es un grupo finito y H un subgrupo de G, entonces existe una única forma lineal

$$\varphi_H : B(G) \longrightarrow \mathbb{Z}$$

tal que $\varphi_H(X) = \left|X^H\right|$ para cada X un G-conjunto. Teniendo en cuenta el lema 1.6 se tiene que φ_H cumple las siguientes propiedades:

(a) $\varphi_H(\emptyset) = 0$

(b) $\varphi_H(\cdot) = 1$

(c) $\varphi_H(X \sqcup Y) = \varphi_H(X) + \varphi_H(Y)$

(d) $\varphi_H(X \times Y) = \varphi_H(X)\,\varphi_H(Y)$

(e) Si $X \cong Y$ entonces $\varphi_H(X) = \varphi_H(Y)$.

Debido a las propiedades enlistadas anteriormente es claro que φ_H es un morfismo de anillos. A $\varphi_H(X)$ se le llama **la marca de H en X.**

Se define

$$\begin{array}{rcl} \varphi : B(G) & \longrightarrow & \prod\limits_{H \leq_G G} \mathbb{Z} \\ X & \longmapsto & (\varphi_H(X))_{H \leq_G G} \end{array}$$

Donde $H \leq_G G$ denota el conjunto de subgrupos de G hasta conjugación y $(\varphi_H(X))_{H \leq_G G} \in \prod_{H \leq_G G} \mathbb{Z}$ la columna indexada por $H \leq_G G$. La transpuesta de la matriz asociada a φ se le llama la **tabla de marca de** G y se denotará por $\Gamma(G)$, esta es una matriz cuadrada cuyas columnas y filas son indexados por las clases de conjugación de subgrupos de G y en cuya entrada (H, K) donde H y K son subgrupos de G se encuentra $\varphi_H(G/K)$, que es la marca de H en G/K, es decir el número de puntos fijos de G/K en el marco de la acción de H. Se puede verificar que las marcas son todos los morfismos de anillos que se pueden definir de $B(G)$ a $\mathbb{Z}$ es decir, si $f : B(G) \longrightarrow \mathbb{Z}$ es un morfismo de anillos entonces existe $H \leq G$ talque $f(G/K) = \varphi_H(G/K)$ para todo $K \leq G$.

Con lo anterior se deduce que el anillo de Burnside del grupo G es un subanillo de $\mathbb{Z}^n$ (donde n es el número de clases de conjugación de subgrupos de G). Una observación interesante es que si $G_o \cong G_1$ entonces $\Gamma(G_o) \cong \Gamma(G_1)$, así que $B(G_o) \cong B(G_1)$; el recíproco es un problema abierto (Ver [4]).

Ejemplo 1.

Si $G = C_p$ es el grupo cíclico multiplicativo de orden p-primo, los únicos subgrupos de G son $\{1\}$ y G, entonces

$$B(G) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}[G],$$

en general si $G = C_n$ con $n \in \mathbb{N}$ entonces

$$B(G) = \bigoplus_{d|n} \mathbb{Z}[G/C_d].$$

1.4 Anillo de representaciones de un grupo.

Esta sección fue tomada de 1.1 en [15].

Considere un campo $\mathbb{F}$. Para un grupo finito G se denota por $R_{\mathbb{F}}(G)$ al **grupo de representaciones de grupo** de G sobre $\mathbb{F}$, esto es el grupo de Grothendieck de la categoría de $\mathbb{F}G$-módulos finitamente generados, con respecto a $\oplus$. Para nuestro interés se considerará $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, y en vez de $R_{\mathbb{C}}(G)$ se denotará $R(G)$.

Existen varias operaciones naturales conectando el grupo $R(G)$ y $R(H)$ para grupos finitos G y H:

- Si H es un subgrupo de G, la restricción de módulos de $\mathbb{C}G$ a $\mathbb{C}H$ induce un **mapeo de restricción**.
$$\mathrm{res}_H^G : R(G) \longrightarrow R(H).$$
- Bajo las mismas hipótesis, la inducción de módulos de $\mathbb{C}H$ a $\mathbb{C}G$ da un **mapeo de inducción**.
$$\mathrm{ind}_H^G : R(H) \longrightarrow R(G).$$
- Si $\varphi : G \longrightarrow H$ es un isomorfismo de grupos existe un mapeo lineal natural.
$$\mathrm{iso}(\varphi) : R(G) \longrightarrow R(H).$$
- Si N es un subgrupo normal de G, y $H = G/N$, la inflación de módulos de $\mathbb{C}H$ a $\mathbb{C}G$ da un **mapeo de inflación**.
$$\mathrm{inf}_{G/N}^G : R(G/N) \longrightarrow R(G).$$
- Otra operación puede ser definida en la misma situación, partiendo de un $\mathbb{C}G$ -módulo V puede considerarse el módulo V_N de covariantes de N a V, esto es el espacio vectorial cociente de V más grande en el cuál N actua trivialmente. De esta forma V_N es un $\mathbb{C}H$-módulo y la construcción $V \to V_N$ es un funtor exacto de la categoría de $\mathbb{C}G$-módulos a la categoría de $\mathbb{C}H$-módulos, pues se cumple que $V_N \cong \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{C}N} V$ y el $\mathbb{C}N$-módulo $\mathbb{C}$ es proyectivo, por lo tanto plano. Así la correspondencia $V \to V_N$ induce un **mapeo de deflación**
$$\mathrm{def}_{G/N}^G : R(G) \longrightarrow R(G/N).$$

Lo primero a observar es que para cada una de las operaciones definidas anteriormente el mapeo $R(G) \longrightarrow R(H)$ es inducido por un funtor que envía un $\mathbb{C}G$-módulo M a el $\mathbb{C}H$-módulo $L \otimes_{\mathbb{C}G} M$, donde L es alguno de los siguientes $(\mathbb{C}H, \mathbb{C}G)$-bimódulos finito dimensionales.

- En caso de que H sea un subgrupo de G y M un $\mathbb{C}(G)$-módulo, se tiene
$$\mathrm{res}_H^G(M) \cong \mathbb{C}G \otimes_{\mathbb{C}G} M,$$
así $L = \mathbb{C}G$ en este caso, donde la estructura de $(\mathbb{C}H, \mathbb{C}G)$-bimódulo está dada por la multiplicación a izquierda por elementos de $\mathbb{C}H$ y por derecha la multiplicación por elementos de $\mathbb{C}G$.

- Bajo las mismas hipótesis, si N es un $\mathbb{C}H$-módulo, se observa
$$\mathrm{ind}_H^G(N) \cong \mathbb{C}G \otimes_{\mathbb{C}H} N,$$
así $L = \mathbb{C}G$ nuevamente, pero en este caso su estructura de $(\mathbb{C}G, \mathbb{C}H)$-bimódulo está dada por la multiplicación izquierda por$\mathbb{C}G$ y a derecha la multiplicación por $\mathbb{C}H$.

- Si $\varphi : G \longrightarrow H$ es un isomorfismo de grupo, y M es un $\mathbb{C}G$-módulo, entonces la imágen de M por $\mathrm{iso}(\varphi)$ es el $\mathbb{C}H$-módulo
$$\mathrm{iso}(\varphi)(M) \cong \mathbb{C}H \otimes_{\mathbb{C}G} M,$$
así $L = \mathbb{C}H$ en este caso para la extructura de $(\mathbb{C}H, \mathbb{C}G)$-bimódulo esta dada a izquierda por la multiplicación por $\mathbb{C}H$ y primero tomando la inversa de φ de un elemento de $\mathbb{C}G$ y luego multiplicandolo a derecha.

- Para un subgrupo normal N de G, y $H = G/N$, entonces
$$\mathrm{inf}_H^G(V) \cong \mathbb{C}H \otimes_{\mathbb{C}H} V,$$
así $L = \mathbb{C}H$ en este caso, con la estructura de $(\mathbb{C}G, \mathbb{C}H)$-bimódulo dada por la multiplicación a derecha por $\mathbb{C}H$ y la proyección de $\mathbb{C}G$ a $\mathbb{C}H$ seguido de la multiplicación a izquierda.

- En la misma situación anterior, el módulo de covariantes por N a el $\mathbb{C}G$-módulo M es isomorfo a $\mathbb{C}H \otimes M$, así $L = \mathbb{C}H$ en este caso, donde la estructura de $(\mathbb{C}H, \mathbb{C}G)$-bimódulo se define revirtiendo la acción en el caso anterior.

Todas las operaciones anteriores están sujetas a varias condiciones de compatibilidad, en la siguiente lista se enunciarán algunas propiedades que cumplen estas operaciones.

1. **Condición de transitividad**

   (a) Para $K,\ H$ subgrupos de G con $K \leq H \leq G$ se cumple
   $$\mathrm{res}_K^H \circ \mathrm{res}_H^G = \mathrm{res}_K^G, \quad \mathrm{ind}_H^G \circ \mathrm{ind}_K^H = \mathrm{ind}_K^G.$$

   (b) Si $\varphi : G \to H$ y $\psi : H \to K$ son isomorfismos de grupos, entonces
   $$\mathrm{iso}(\psi) \circ \mathrm{iso}(\varphi) = \mathrm{iso}(\psi\varphi)$$

   (c) Siendo $N,\ M$ subgrupos normales de G con $N \leq M$ se satisface
   $$\mathrm{inf}_{G/N}^G \circ \mathrm{inf}_{G/M}^{G/N} = \mathrm{inf}_{G/M}^G, \quad \mathrm{def}_{G/M}^{G/N} \circ \mathrm{def}_{G/N}^G = \mathrm{def}_{G/M}^G.$$

2. **Condición de conmutatividad**

   (a) Considere $\varphi : G \to H$ isomorfismo de grupos y K un subgrupo de G, luego
   $$\mathrm{iso}(\varphi') \circ \mathrm{res}_K^G = \mathrm{res}_{\varphi(K)}^H \circ \mathrm{iso}(\varphi)$$
   siendo $\varphi' : K \to \varphi(K)$ la restricción de φ.

(b) Si $\varphi : G \to H$ isomorfismo de grupos y N un subgrupo normal de G, se tiene

$$\mathrm{iso}(\varphi'') \circ \mathrm{def}^G_{G/N} = \mathrm{def}^H_{H/\varphi(N)} \circ \mathrm{iso}(\varphi)$$

$$\mathrm{iso}(\varphi) \circ \mathrm{inf}^G_{G/N} = \mathrm{inf}^H_{H/\varphi(N)} \circ \mathrm{iso}(\varphi'')$$

donde $\varphi'' : G/N \to H/\varphi(N)$ es el isomofismo de grupo inducido por φ.

(c) (*Fórmula de Mackey*) Para los subgrupos H y K de G se cumple

$$\mathrm{res}^G_H \circ \mathrm{ind}^G_K = \sum_{x \in [H \backslash G/K]} \mathrm{ind}^H_{H \cap {}^xK} \circ \mathrm{iso}(\gamma_x) \circ \mathrm{res}^K_{H \cap {}^xK} \tag{1.3}$$

siendo $[H\backslash G/K]$ el conjunto de representantes de las clases dobles en G y

$$\gamma_x : H \cap {}^xK \to H \cap {}^xK$$

es el isomorfismo de grupos inducido al conjugar por x.

(d) Si N, M son subgrupos normales de G, se observa

$$\mathrm{def}^G_{G/N} \circ \mathrm{inf}^G_{G/M} = \mathrm{inf}^{G/N}_{G/N\,M} \circ \mathrm{def}^{G/M}_{G/N\,M}$$

(e) Si H es un subgrupo de G y N es un subgrupo normal de G, se satisface

$$\mathrm{def}^G_{G/N} \circ \mathrm{ind}^G_H = \mathrm{ind}^{G/N}_{HN/N} \circ \mathrm{iso}(\varphi) \circ \mathrm{def}^H_{H/(H \cap N)} \tag{1.4}$$

$$\mathrm{res}^G_H \circ \mathrm{inf}^G_{G/N} = \mathrm{inf}^H_{H/(H \cap N)} \circ \mathrm{iso}(\varphi^{-1}) \circ \mathrm{res}^{G/N}_{HN/N} \tag{1.5}$$

con $\varphi : H/H \cap N \to HN/N$ el canónico isomofismo de grupos.

(f) Si H es un subgrupo de G, si N es un subgrupo normal de G y $N \leq H$ entonces

$$\mathrm{res}^{G/N}_{H/N} \circ \mathrm{def}^G_{G/N} = \mathrm{def}^H_{H/N} \circ \mathrm{res}^G_H \tag{1.6}$$

$$\mathrm{ind}^G_H \circ \mathrm{inf}^H_{H/N} = \mathrm{inf}^G_{G/N} \circ \mathrm{ind}^{G/N}_{H/N} \tag{1.7}$$

3. **Condición de trivialidad**

Para cualquier grupo G, y φ un automorfismo de G en G se cumple

$$\mathrm{res}^G_G = \mathrm{id},\ \mathrm{ind}^G_G = \mathrm{id},\ \mathrm{def}^G_{G/1} = \mathrm{id},\ \mathrm{inf}^G_{G/1} = \mathrm{id},$$

$$\mathrm{iso}(\varphi) = \mathrm{id}.$$

Estas relaciones se pueden encontrar en 1.1.3 de [15], además, todas las anteriores también están dadas para la composición de los biconjuntos básicos.

Caracteres

A continuación se explorará algunos resultados de la teoría de caracteres de grupos finitos.

A lo largo de este capítulo G denota un grupo finito, y todos los $\mathbb{C}G$-módulos estan finitamente generados (o de forma equivalente tienen dimensión finita como espacios vectoriales sobre $\mathbb{C}$). Como $\mathbb{C}$ es un campo algebráicamente cerrado de característica cero, se obtiene de la teoría de Wedderburn información específica acerca de la naturaleza del álgebra $\mathbb{C}G$.

A continuación se denota por $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ la $\mathbb{C}$-álgebra de matrices de tamaño $n \times n$ sobre $\mathbb{C}$.

Teorema 1.2. *Existe un $r \in \mathbb{N}$ y algunos $f_1, \ldots, f_r \in \mathbb{N}$ tal que*

$$\mathbb{C}G \cong \mathcal{M}_{f_1}(\mathbb{C}) \oplus \ldots \oplus \mathcal{M}_{f_r}(\mathbb{C})$$

como $\mathbb{C}$-álgebras. Además de esto, existen exactamente r clases de isomorfismos de $\mathbb{C}G$-módulos simples y si se consideran $S_1, \ldots, S_r$ representaciones de estas r clases, entonces pueden ser reordenados los S_i de tal forma que $\mathbb{C}G \cong f_1S_1 \oplus \ldots \oplus f_rS_r$ como $\mathbb{C}G$-módulos, donde $dim_{\mathbb{C}}S_i = f_i$ para cada i. Cualquier $\mathbb{C}G$-módulo puede ser escrito únicamente como $a_1S_1 \oplus \ldots a_rS_r$, donde los a_i son enteros no negativos.

Las $\mathbb{C}$-dimensiones $f_1, \cdots, f_r$ de los r simples $\mathbb{C}G$-módulos son llamados los **grados** de G. El $\mathbb{C}G$ módulo trivial $\mathbb{C}$ es unidimensional y por tanto simple, luego G siempre tiene al menos uno de sus grados igual a 1, y por convención este siempre se denotará por f_1.

Corolario 1.3. *Siempre se cumple que $\sum\limits_{i=1}^{r} f_i^2 = |G|$.*

Proof. Del teorema 1.2 se sigue

$$\begin{aligned} |G| &= \dim_{\mathbb{C}}\mathbb{C}G = \dim_{\mathbb{C}}\left(\bigoplus_{i=1}^{r}\mathcal{M}_{f_i}(\mathbb{C})\right) \\ &= \sum_{i=1}^{r}\dim_{\mathbb{C}}\mathcal{M}_{f_i}(\mathbb{C}) = \sum_{i=1}^{r} f_i^2. \end{aligned}$$

□

Definición 1.6. *Si U es un $\mathbb{C}G$-módulo, entonces cada $g \in G$ define una transformación lineal invertible de U que envía $u \in U$ a gu. Se define el **caracter** de U como el función*

$$\mathcal{X}_U : G \longrightarrow \mathbb{C}$$

donde $\mathcal{X}_U(g)$ es la traza de esta transformación lineal de U definido por g. Por ejemplo $\mathcal{X}_U(1) = dim_{\mathbb{C}}(U)$.

Si $\rho : G \to GL(U)$ es la representación correspondiente a U, entonces $\mathcal{X}_U$ es justamente la traza de el mapeo $\rho(g)$. Cabe notar que dos $\mathbb{C}G$-módulos isomorfos tienen igual caracteres. Observese también que para cualesquiera $g, h \in G$, la transformación lineal de U definida por g y hgh^{-1} son similares y así tienen la misma traza. De esto se concluye que cualquier caracter de G es constante a cada clase de conjugación de G, lo cual significa que el valor del caracter sobre elementos conjugados es el mismo.

Por ejemplo, considere $U = \mathbb{C}G$ y tome $g \in G$. Por tanto la matriz de transformaciones lineales definida por g con respecto a la base G de $\mathbb{C}G$, vemos que $\mathcal{X}_U(g)$ es igual a el número de elementos $x \in G$ para los cuales $gx = x$, en consecuencia $\mathcal{X}_U(1) = |G|$ y $\mathcal{X}_U(g) = 0$ para cada $1 \neq g \in G$. Este caracter es llamado el **caracter regular** de G.

En adelante se denotarán los caracteres de r simples $\mathbb{C}G$- módulos por $\mathcal{X}_1, \ldots, \mathcal{X}_r$ estos caracteres se conocen como los **carácteres irreducibles** de G. Siempre que se diga que $S_1, \cdots, S_r$ son los distintos $\mathbb{C}G$ módulos simples, los cuales estan implicitamente ordenados de tal forma que $\mathcal{X}_{S_i} = \mathcal{X}_i$ para cada i. Manteniendo la convención de que f_1 denota el grado de la representación trivial, $\mathcal{X}_1$ será el caracter de la representación trivial el cual se conoce como **caracter principal** de G y por tanto $\mathcal{X}_1(g) = 1$ para todo $g \in G$.

Un caracter de un $\mathbb{C}G$-módulo uno dimensional es llamado un **caracter lineal**. Como cada módulo uno dimensional es simple se observa que todos los caracteres son irreducibles.

Considere $\mathcal{X}$ el caracter lineal asignado al $\mathbb{C}G$-módulo U y tome $g, h \in G$, al ser U uno dimensional, se cumple que para cada $u \in U$ se tiene que $gu = \mathcal{X}(g)u$ y $hu = \mathcal{X}(h)u$, de esta forma

$$\mathcal{X}(gh)u = ghu = \mathcal{X}(g)\mathcal{X}(h)u,$$

en consecuencia $\mathcal{X}$ es un morfismo de G al grupo multiplicativo $\mathbb{C}^\times$ de números complejos diferentes de cero. Por otra parte, dado un homomorfismo $\varphi : G \to \mathbb{C}^\times$, se define un $\mathbb{C}G$-módulo U unidimensional por $gu = \varphi(g)u$ para $g \in G$ y $u \in U$ y de esta forma $\mathcal{X}_U = \varphi$. De esto se infiere que los carácteres lineales de G coincide con el grupo de morfismos de G a $\mathbb{C}^\times$.

Ahora se establecerá una importante conexión entre el número de $\mathbb{C}G$-módulos simples y la estructura de G.

Teorema 1.3. *El número de r de $\mathbb{C}G$-módulos simples es igual al número de clases conjugadas de G.*

La prueba de este teorema está basado en la teoría de caracteres (Ver teorema 3. del capítulo 6 en [6]). Cabe mencionar que en general no existe una biyección natural entre las clases conjugadas de G y los $\mathbb{C}G$-módulos simples, sin embargo cuando el grupo G es algún grupo de simétria, existe tal correspondencia.

La siguiente proposición compila resultados básicos acerca de la teoría de caracteres, que se utilizarán en los próximos capítulos.

Proposición 1.3. *Considere U un $\mathbb{C}G$-módulo, $\rho : G \to GL(U)$ la representación correspondiente a U, y $g \in G$ un elemento de orden n. Entonces*

1. *$\rho(g)$ es diagonalizable.*
2. *$\mathcal{X}_U(g)$ es igual a la suma (contando multiplicidades) de los autovalores de $\rho(g)$.*
3. *$\mathcal{X}_U(g)$ es una suma de $\mathcal{X}_U(1)$ raíces de la unidad.*
4. *$\mathcal{X}_U(g^{-1}) = \overline{\mathcal{X}_U(g)}$ (Aquí $\overline{z}$ denota el complejo conjugado de z).*
5. *$|\mathcal{X}_U(g)| \leq \mathcal{X}_U(1)$.*
6. *$\{x \in G : \mathcal{X}_U(x) = \mathcal{X}_U(1)\}$ es un subgrupo normal de G.*

Proof. Como $g^n = 1$, $\rho(g)$ es una raíz del polinomio $X^n - 1$, mas este se factoriza en diferentes factores lineales en $\mathbb{C}[X]$ y así se sigue que el polinomio mínimo de $\rho(g)$ también se factoriza en factores lineales, de lo que se concluye que $\rho(g)$ es diagonalizable, quedando así demostrado 1. De esto se sigue que la traza de $\rho(g)$ es la suma de sus autovalores, concluyendose así 2. Estos autovalores son exactamente las raíces del polinómio mínimo de $\rho(g)$, el cual divide a $X^n - 1$ y por tanto estas raíces son las n raíces de la unidad, lo cual demuestra 3. Se observa que un autovalor para $\rho(g)$ es también un autovector de $\rho(g^{-1})$, con los autovalores de $\rho(g^{-1})$ dados por el inverso de los autovalores de $\rho(g)$, como estos autovalores son raíces de la unidad, se sigue que los autovalores de $\rho(g^{-1})$ son los conjugados de los autovalores de $\rho(g)$, combinando esto con 2 se completa la demostración de 4. La afirmación 5 se sigue directamente de 3. Recuerde que $\mathcal{X}_U(g)$ es la suma de sus autovalores de ρ que son raíces de la unidad, en caso de que esta suma sea igual a $\mathcal{X}_U(1)$ se deduciria que cada uno de estos autovalores debe ser 1, de lo cual $\rho(g)$ debe ser la función identidad. Además, si $\rho(g)$ es la función identidad, se tiene que $\mathcal{X}_U(g) = \dim_{\mathbb{C}}(U) = \mathcal{X}_U(1)$; en consecuencia $\{x \in G : \mathcal{X}_U(x) = \mathcal{X}_U(1)\} = \ker\rho \trianglelefteq G$,demostrando 6. □

Suponga que $\mathcal{X}$ y ψ son caracteres de G, se definen las funciones $\mathcal{X} + \psi$ y $\mathcal{X}\psi$ de G a $\mathbb{C}$ por $(\mathcal{X} + \psi)(g) = \mathcal{X}(g) + \psi(g)$ y $(\mathcal{X}\psi)(g) = \mathcal{X}(g)\psi(g)$ para $g \in G$. estas nuevas funciones obtenidas de caracteres no son a priori caracteres. También puede ser definida para un $\lambda \in \mathbb{C}$ una nueva función $\lambda\mathcal{X} : G \to \mathbb{C}$, dada por $(\lambda\mathcal{X})(g) = \lambda\mathcal{X}(g)$ y por tanto los caracteres de G pueden ser vistos como elementos de un $\mathbb{C}$-espacio vectorial de funciones de G a $\mathbb{C}$.

Proposición 1.4. *Los caracteres irreducibles de G son linealmente independientes sobre $\mathbb{C}$.*

Proof. Del Teorema 1.2 se sabe que $\mathbb{C}G \cong \mathcal{M}_{f_1}(\mathbb{C}) \oplus ... \oplus \mathcal{M}_{f_r}(\mathbb{C})$. Considere los $S_1, \ldots, S_r$ todos los $\mathbb{C}G$-módulos simples distintos hasta isomorfismo y para cada i se denota por e_i el elemento identidad de $\mathcal{M}_{f_i}(\mathbb{C})$. Se toma fijo i, recuerde que para cada $g \in G$, $\mathcal{X}_i(g)$ es la traza de la transformación lineal sobre S_i definida por $g \in G$. Se extiende linealmente $\mathcal{X}_i$ a un mapeo lineal de $\mathbb{C}G$ a $\mathbb{C}$, así que $\mathcal{X}_i(a)$ para cada $a \in \mathbb{C}G$ es la traza de la transformación lineal sobre S_i definida por a, observe que la transformación lineal sobre S_i dada por e_i es el mapeo identidad, y por tanto $\mathcal{X}_i(e_i) = \dim_{\mathbb{C}} S_i = f_i$. Además, si $j \neq i$, la transformación lineal sobre S_j dado por

e_i es el mapeo trivial y por tanto $\mathcal{X}_j(e_i) = 0$. Ahora para $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{C}$ tales que $\sum_{j=1}^{r} \lambda_j \mathcal{X}_j = 0$. De lo anterior se sigue que $0 = \sum_{j=1}^{r} \lambda_j \mathcal{X}_j(e_i) = \lambda_i f_i$ para i; así $\lambda_j = 0$ para todo j, de esta forma el resultado ha sido demostrado; es decir, la familia de caracteres irreducibles es una familia libre. □

Lema 1.7. *$\mathcal{X}_{U \oplus V} = \mathcal{X}_U + \mathcal{X}_V$ para cada $\mathbb{C}G$-módulos U y V.*

Proof. Para considerar una $\mathbb{C}$-base para $U \oplus V$, primero tome $\dim_{\mathbb{C}}(U)$ elementos básicos para $U \oplus \{0\}$ y los elementos restantes que sean básicos para $\{0\} \oplus V$, de esto se observa que $\mathcal{X}_{U \oplus V}(g) = \mathcal{X}_U(g) + \mathcal{X}_V(g)$, para todo $g \in G$. □

Ahora es posible verificar que los carácteres de $\mathbb{C}G$-módulos distinguen $\mathbb{C}G$-módulos salvo isomorfismo.

Teorema 1.4. *Si $S_1, \ldots, S_r$ son los distintos $\mathbb{C}G$- módulos simples, entonces los carácteres de $\mathbb{C}G$-módulos $a_1 S_1 \oplus \ldots a_r S_r$ (donde los a_i son enteros no negativos) es $a_1 \mathcal{X}_1 \oplus \ldots \oplus a_r \mathcal{X}_r$. Consecuentemente, dos $\mathbb{C}G$- módulos son isomorfos si y sólo si sus carácteres son iguales.*

Proof. La primera afirmación se sigue directamente del Lema 1.7. ahora suponga que $\mathcal{X}_U = \mathcal{X}_V$ para algunos $\mathbb{C}G$-módulos U y V. Como $\mathbb{C}G$ es semisimple, pueden escribirse U y V como $U \cong \oplus_i a_i S_i$ y $V \cong \oplus_i b_i S_i$, donde los a_i y b_i son enteros no negativos. Al tomar caracteres se observa $0 = \mathcal{X}_U - \mathcal{X}_V = \sum_i (a_i - b_i) \mathcal{X}_i$, combinando esto con la Proposición 1.4 se concluye que $a_i = b_i$ para todo i, así $U \cong V$. □

Aunque cada caracter determina un $\mathbb{C}G$-módulo salvo isomorfismos, no existe una forma genérica de construir un módulo de su correspondiente caracter, y así cierta información se pierde al estudiar caracteres en lugar de módulos, Sin embargo, son una manera eficaz de convertir información sobre la teoría de representaciones de G en teoría sobre G.

Proposición 1.5. *(Proposición 6.8 en [6]) Considere U y V $\mathbb{C}G$-módulos, entonces*

1. *$\mathcal{X}_{U \otimes V} = \mathcal{X}_U \mathcal{X}_V$.*
2. *$\mathcal{X}_{U*} = \overline{\mathcal{X}_U}$, recuerdese que $U^* = Hom(U, F)$.*
3. *$\mathcal{X}_{Hom(U,V)} = \overline{\mathcal{X}_U} \mathcal{X}_U$.*

Considerando G un grupo finito. **La tabla de caracteres de** G es una matriz cuadrada, cuyas columnas son indexadas por la conjugación clases de elementos g de G, y cuyas filas son indexados por clases de isomorfismo de simples $\mathbb{C}G$-módulos S, y la entrada en dicha columna y fila está dada por $\mathcal{X}_S(g)$, que es la traza de la matriz por el cual g actúa sobre S. Dicha matriz es invertible por lo que la evaluación de los caracteres en los elementos del grupo g son precisamente los morfismos del anillo de representaciones a los números complejos, es decir, dado un morfismo de anillos $f : R(G) \longrightarrow \mathbb{C}$, existe una en $a \in G$ única hasta conjugación tal que $f(M) = \mathcal{X}_M(a)$ para todos los $\mathbb{C}G$-módulos M (ver proposición 5.2.3 en [18]).

Ejemplo 2.

$G = C_p$ con p-primo, entonces $R(G) = \mathbb{C} \oplus \mathrm{Sgn} \oplus \mathbb{C}G$.

Inducción de $\mathbb{C}G$-módulos.

Como antes si $H \leq G$, y sea V un $\mathbb{C}H$-módulo, entonces $\mathrm{ind}_H^G(V) = \mathbb{C}G \otimes_{\mathbb{C}H} V$ es un $\mathbb{C}G$-módulo por la acción

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{C}G \times \mathrm{ind}_H^G(V) & \longrightarrow & \mathrm{ind}_H^G(V) \\ \left(g\,,\ \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i g_i \otimes v_i) \right) & \longrightarrow & \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i g g_i \otimes v_i) \end{array}$$

esta definición es también dada para cualquier campo (F) en lugar de $\mathbb{C}$.

Lema 1.8. *Sea V es un $\mathbb{C}H$-módulo y $g \in G$, se define $g \otimes_{\mathbb{C}H} V = \{g \otimes v \mid v \in V\}$ y se tiene lo siguiente:*

(a) $g \otimes_{\mathbb{C}H} V$ es un subespacio vectorial de $ind_H^G(V)$.

(b) $g \otimes_{\mathbb{C}H} V$ sólo depende de las clases de g en G/H. Así, si $\sigma \in G/H$ entonces $\sigma \otimes_{\mathbb{C}H} V = g \otimes_{\mathbb{C}H} V$ para $g \in \sigma$.

(c) Se tiene que

$$ind_H^G(V) = \bigoplus_{\sigma \in G/H} \sigma \otimes_{\mathbb{C}H} V.$$

y más precisamente, si $[G/H]$ es un conjunto de representantes de G/H entonces

$$ind_H^G(V) \cong \bigoplus_{g \in [G/H]} g \otimes_{\mathbb{C}H} V,$$

como $\mathbb{C}G$-módulos, donde la estructura de $\mathbb{C}G$-módulo de

$$\bigoplus_{g \in [G/H]} g \otimes_{\mathbb{C}H} V$$

está dada por:

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{C}G \times \bigoplus_{g \in [G/H]} g \otimes_{\mathbb{C}H} V & \longrightarrow & \bigoplus_{g \in [G/H]} g \otimes_{\mathbb{C}H} V \\ (\ x\,,\ g \otimes v) & \longrightarrow & g_o \otimes h \cdot v) \end{array}$$

donde $g_o \in [G/H]$ y $h \in H$ son tal que $x = g_o h$.

Proof. Considerando $g \in G$, $u \in V$ y $v \in V$ se tiene que $g \otimes 0 = 0$, $\lambda g \otimes u = g \otimes \lambda u$ para $\lambda \in \mathbb{C}$ y $(g \otimes u) + (g \otimes v) = g \otimes (u + v)$, por lo tanto $g \otimes_{\mathbb{C}H} V$ es un subespacio vectorial de $\mathrm{ind}_H^G(V)$. Si $h \in H$ y $g_o = gh \in gH$ entonces

$$g_o \otimes v = gh \otimes v = g \otimes hv,$$

donde $hv \in V$ porque V es un $\mathbb{C}H$-módulo entonces $g \otimes_{\mathbb{C}H} V = g_o \otimes_{\mathbb{C}H} V$, así que $g \otimes_{\mathbb{C}H} V$ solo depende de la clase de g. Se deduce de lo anterior que $\sum_{\sigma \in G/H} \sigma \otimes V$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{C}G \otimes_{\mathbb{C}H} V$ se puede verificar que en efecto son iguales, así

$$\mathbb{C}G \otimes_{\mathbb{C}H} V = \sum_{\sigma \in G/H} \sigma \otimes V,$$

además si $\sigma \neq \sigma_o$ entonces $(\sigma \otimes V) \cap (\sigma_o \otimes V) = 0$, por lo tanto

$$\mathbb{C}G \otimes_{\mathbb{C}H} V = \bigoplus_{\sigma \in G/H} \sigma \otimes V,$$

y la acción de G permuta las componentes. Además, si $[G/H]$ es un conjunto de representantes de G/H se define

$$\phi : \mathbb{C}G \otimes_{\mathbb{C}H} V \longrightarrow \bigoplus_{g \in [G/H]} g \otimes V$$

tal que $\phi(x \otimes v) = g_o \otimes h \cdot v$, donde $x = g_o h$ donde $g_o \in [G/H]$ y $h \in H$, y se extiende linealmente a $\mathbb{C}G \otimes_{\mathbb{C}H} V$. Note que

$$\phi(xh_o \otimes h_o{}^{-1} v) = g_o \otimes hh_o h_o{}^{-1} v = g_o \otimes hv = \phi(x \otimes v),$$

donde $x = g_o h$ y $xh_o = g_o hh_o$, así que ϕ está bien definida. Se define tambien

$$\begin{aligned} \psi : \bigoplus_{g \in [G/H]} g \otimes V &\longrightarrow \mathbb{C}G \otimes_{\mathbb{C}H} V \\ g \otimes v &\longrightarrow g \otimes_{\mathbb{C}H} v \end{aligned}$$

Observe que

$$\phi \circ \psi(g \otimes v) = \phi(g \otimes_{\mathbb{C}H} v) = g \otimes v$$

y

$$\psi \circ \phi(g \otimes v) = \psi(g_o \otimes hv) = g_o \otimes hv = g_o h \otimes v = x \otimes v,$$

por lo anterior ϕ y ψ son inversos. Veamos que ϕ y ψ son morfismos de $\mathbb{C}G$-módulos. Sea $e \in G$ y $x \in G$ entonces existe $g_o \in G$ y $h \in H$ tal que $x = g_o h$ así se tiene que $eg_o = g_1 k$ para algún $g_1 \in [G/H]$ y algún $k \in H$, por lo que $ex = eg_o h = g_1 kh$ donde $kh \in H$, entonces $\phi(ex \otimes v) = g_1 \otimes (kh \cdot v)$ y por otra parte $e \cdot \phi(x \otimes v) = e \cdot (g_o \otimes hv) = g_1 \otimes (kh \cdot v)$. De lo anterior se deduce que ϕ es un morfismo de $\mathbb{C}G$-módulos. Conversamente suponga que $eg = g_o h$ donde $g_o \in G$ y $h \in H$ entonces

$$\psi(e \cdot (g \otimes v)) = \psi(g_o \otimes hv) = g_o \otimes_{\mathbb{C}H} hv = g_o h \otimes_{\mathbb{C}H} v = e \cdot (g \otimes_{\mathbb{C}H} v) = e \cdot \psi(g \otimes v)$$

así ψ es también morfismo de $\mathbb{C}G$-módulos. Se concluye que ϕ es un isomorfismo, esto significa

$$\operatorname{ind}_H^G(V) = \bigoplus_{\sigma \in G/H} \sigma \otimes_{\mathbb{C}H} V.$$

$\square$

Recordando también que si U un $\mathbb{C}G$-módulo, este se puede ver como $\mathbb{C}H$-módulo y se escribe $\operatorname{res}_H^G(U)$ en vez de U, este $\mathbb{C}H$-módulo se llama la restricción de V. Teniendo en cuenta esto se enuncia el próximo teorema de gran importancia.

Teorema 1.5 (Teorema de reciprocidad de Frobenius)**.** *Si U es un $\mathbb{C}G$-módulo, y $H \leq G$, y sea V un $\mathbb{C}H$-módulo. Entonces como C espacios vectoriales se tiene que*

$$Hom_{\mathbb{C}H}(V, res_H^G(U)) \cong Hom_{\mathbb{C}G}(ind_H^G(V), U).$$

Es natural en V y U, en efecto lo anterior es una adjunción entre funtores.

Proof. Tomese $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}H}(V, \mathrm{res}_H^G)$. Considere el mapeo

$$f_\varphi : \mathbb{C}G \otimes V \longrightarrow U$$

que manda (g, v) a $g\varphi(v)$. Si $h \in H$, entonces se tiene

$$f_\varphi(gh, v) = gh\varphi(v) = g\varphi(hv) = f_\varphi(h, gv),$$

de esto se puede deducir que f_φ es balanceada. Además se obtiene un elemento $\Gamma(\varphi)$ de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}H}(\mathrm{ind}_H^G(V), U)$ enviando $g \otimes v$ a $g \cdot \varphi(v)$, y se consigue un mapeo

$$\Gamma : \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}H}(V, \mathrm{res}_H^G(U)) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(\mathrm{ind}_H^G(V), U).$$

Claramente Γ es $\mathbb{C}$-lineal, y también $\Gamma(\varphi) = 0$ implica que $\varphi = 0$ así que Γ es inyectiva. Si $\theta : \mathrm{ind}_H^G(V) \longrightarrow U$ es un morfismo de $\mathbb{C}G$-módulos, entonces se define un morfismo de $\mathbb{C}H$-módulos $\varphi : V \longrightarrow \mathrm{res}_H^G(U)$, dada por $\varphi(v) = \theta(1 \otimes v)$, y se tiene

$$\Gamma(\varphi)(g \otimes v) = g\varphi(v) = g\theta(1 \otimes v) = \theta(g \otimes v),$$

lo que demuestra que $\Gamma(\varphi) = \theta$ y se sigue que Γ es sobreyectiva. □

1.5 La categoría monomial

Se pueden encontrar algunos resultados sobre este tema en [12], y [1].

Definición 1.7. *(R. Boltje, 1990). Se denota $\tilde{G}$ el conjunto de homomorfismos de grupos de G a $\mathbb{C}^*$ donde $\mathbb{C}^*$ es el c onjunto de las unidades de los números complejos. La categoría monomial ${}_{\mathbb{C}G}mon$ es la categoría cuyos objetos son los pares (V, L), donde V es un $\mathbb{C}G$-módulo de dimensión finita, y L es un conjunto finito de subespacios 1-dimensionales de V, cuya suma es directas es V que son permutados por los elementos de G. Un morfismo $f : (V, L) \longrightarrow (W, M)$ es un morfismo de CG-módulos y f que envía cada línea en L para una línea en M o en cero.*

Teniendo en cuenta que la categoría monomial no es aditiva una variante aditiva de esta categoría se introdujo en [11]. Se puede agregar dos objetos en la categoría monomial tomando la suma directa de los $\mathbb{C}G$-módulos y la unión de los conjuntos de sumandos 1-dimensionales. El producto es el producto tensorial de los módulos y la familia de todos los productos tensoriales de los espacios 1-dimensiones. De esta manera se crear **el anillo monomial** $D(G)$ como el grupo de Grothendieck de la categoría ${}_{CG}mon$, con sumas directas y productos tensoriales. La identidad es el módulo trivial. Los homomorfismo de anillos del anillo monomio a C se llaman las especies.

1.6 Funtores de biconjuntos

Los funtores de biconjuntos fueron introducidos la decada antespasada por Bouc. Se ha tomado lo siguiente de [15].

Recuerde que un funtor $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ entre categorias preaditivas es llamado **aditivo** si para objetos cualesquiera X y Y de $\mathcal{A}$, el mapeo $f \to F(f)$ de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X,Y)$ a $\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(F(X),F(Y))$ es un homomorfismo de grupos. Una **subcategoría preaditiva** de $\mathcal{B}$ es una subcategoría $\mathcal{A}$ tal que el funtor inclusión $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$ es aditivo.

De forma similar, cuando R es un anillo conmutativo con identidad un funtor entre R-categorias lineales es llamado **R-lineal** si el mapeo que induce entre conuntos de mosfismos es R-lineal. Una **subcategoría R-lineal** de una categoría R-lineal es una subcategoría tal que el fuctor de inclusión es R-lineal.

Definición 1.8. ***La categoría de biconjuntos de grupos finitos.*** *La categoría de biconjuntos Ω de grupos finitos es la categoría definida como sigue:*

- *Los objetos de Ω son los grupos finitos.*
- *Si G y H son grupos finitos, entonces $Hom_{\Omega}(G,H) = B(H,G)$.*
- *Si G, H y K son grupos finitos, Si $U \in Hom_{\Omega}(G,H)$ y $V \in Hom_{\omega}(H,K)$ la composición está dada por ${}_GU_H \times_H {}_HV_K$.*

  la composición $v \circ u$ del morfismo $u \in Hom_{\Omega}(G,H)$ y el morfismo $v \in Hom_{\Omega}(H,K)$ es igual para $v \times_H u$.
- *Para cualquier grupo finito G, el morfismo identidad de G en Ω es igual a $[Id_G]$.*

Se desprende de esta definición que la categoría es una categoría preaditiva, en el sentido de Mac Lane, [13] *I* sección 8.

Ejemplo 3.

Considere una subcategoría preaditiva $\mathcal{D}$ de una categoría de biconjuntos $\mathcal{C}$, entoces $R\mathcal{D}$ puede ser vista como una subcategoría e $R\mathcal{C}$.

Definición 1.9. ***Fuctores de Biconjuntos.*** *Considere $\mathcal{D}$ una clase de grupos finitos, y para cada $G, H \in \mathcal{D}$ tome $\beta(H,G)$ una clase de (H,G)-biconjuntos finitos. Un **functor de biconjuntos** F (para $\mathcal{D}$ y β) con valores en la categoría R-Mod de R-módulos, donde R es un anillo conmutativo con identidad, consistente de los siguientes datos*

1. *Para cada $G \in \mathcal{D}$, un R-módulo $F(G)$.*
2. *Para cada G y H en $\mathcal{D}$ y para cada (H,G)-biconjunto U en $\beta(H,G)$, un mapeo de R-módulos $F(U) : F(G) \to F(H)$.*

Estos datos son subconjuntos de las siguientes condiciones:

(a) *Si G y H estan en $\mathcal{D}$, entonces $\beta(H,G)$ es cerrado por un isomorfismo de (H,G)-biconjuntos y*
$$\forall U_1, U_2 \in \beta(H,G), U_1 \cong U_2 \Rightarrow F(U_1) = F(U_2).$$

(b) *Si G y H estan en $\mathcal{D}$, entonces $\beta(H,G)$ es cerrado bajo la unión disjuntas de (H,G)-biconjuntos y*
$$\forall U, U' \in \beta(H,G),\ F(U \sqcup U') = F(U) + F(U').$$

(c) *Si G, H y K están en $\mathcal{D}$, entonces $\beta(K,H) \times_H \beta(H,G) \subset \beta(K,G)$, y*
$$\forall V \in \beta(K,H), \forall U \in \beta(H,G)\ F(V) \circ F(U) = F(V \times_H U).$$

(d) *Si $G \in \mathcal{D}$, entonces el (G,G)-biconjunto Id_G está en $\beta(G,G)$ y*
$$F(Id_G) = Id_{F(G)}.$$

Otra definición de funtores de biconjuntos se puede encontrar en 3.2.2 de [15].

1.7 Funtores de Green

La definición que se da a continuación será útil para nuestro objetivo en el capítulo 3, esta es equivalente a la definición dada por Bouc en [16], una demostración de esto se puede encontrar en 4.2.3. de [7].

Definición 1.10. *Un funtor de Green A (sobre $\mathcal{D}$) es un funtor de biconjuntos tal que para todo par G, H de grupos finitos en la categoría $\mathcal{D}$ existe*
$$\times : A(G) \times A(H) \longrightarrow A(G \times H) \tag{1.8}$$

R-bilineal, denotada por $(a,b) \longrightarrow a \times b$, que cumple las siguientes condiciones:

1. ***Asociatividad.*** *Para G, H y K en la categoría $\mathcal{D}$ el siguiente diagrama conmuta.*

$$\begin{tikzcd} A(G) \times A(H) \times A(K) \arrow[r, "(id_G,\times)"] \arrow[d, "(\times,id_K)"'] & A(G) \times A(H \times K) \arrow[d, "\times"] \\ A(G \times H) \times A(K) \arrow[r, "\alpha\circ\times"'] & A(G \times (H \times K)) \end{tikzcd}$$

Donde α es un isomorfismo entre $A((G \times H) \times K)$ y $A(G \times (H \times K))$ dado un isomorfismo natural de $G \times (H \times K)$ y $(G \times H) \times K$.

2. ***Es unitaria.*** *Existe $\epsilon_A \in A(\mathbf{1})$ tal que para todo G grupo finito en la categoría $\mathcal{D}$.*

$$A({}_GG_G \times 1_{G\times 1})(a \times \epsilon_A) = a = A({}_G1 \times {}_GG_{1\times G})(\epsilon_A \times a). \tag{1.9}$$

3. ***Es natural con respecto a biconjuntos.*** *Si* G, H, K *y* L *están en la categoría* $\mathcal{D}$ *y* X *un* (L, G)*-biconjunto y* Y *un* (K, L)*-biconjunto entonces el siguiente diagrama conmuta.*

$$\begin{tikzcd} A(G) \times A(H) \arrow[r, "\times"] \arrow[d, "(A({}_LX_G),A({}_KY_H))"'] & A(G \times H) \arrow[d, "A({}_{L\times K}X\times{}_{G\times K})"] \\ A(L) \times A(K) \arrow[r, "\times"'] & A(L \times K) \end{tikzcd}$$

CHAPTER 2

ANILLO GLOBAL DE REPRESENTACIONES

Este capítulo se centra en estudiar el anillo global de representaciones que presentarón Raggi y Valero en [3]. Las definiciones y propiedades que se exponen en esta parte del trabajo están motivadas por [3].

2.1 El anillo T(G)

Definición 2.1. *Dado X un G-conjunto, se dice que un $\mathbb{C}G$-módulo V es X-graduado si*

$$V = \bigoplus_{x \in X} V_x,\ V_x \neq 0$$

donde cada V_x es un $\mathbb{C}$-subespacio vectorial tal que $gV_x = V_{gx}$ para todo $x \in X$.

Si V y W son $\mathbb{C}G$-modulo se define $\alpha : V \longrightarrow W$ un morfismo de $\mathbb{C}G$-módulos X-graduados si $\alpha(V_x) \subseteq W_x$.

Note que dada la acción de G en X, si se considera $[G\backslash X] = \{x_1, \cdots, x_r\}$ un conjunto de representantes de las orbitas y $X_i = Gx_i$ para cada $i = 1, \cdots, r$, se tiene que $X = \sqcup_{1=i}^{r} X_i$, por lo tanto

$$V = \bigoplus_{i=1}^{r} \bigoplus_{x \in X_i} V_x.$$

Ejemplo 4.

Dado $H \leq G$ y V un $\mathbb{C}H$-módulo entonces $\operatorname{ind}_H^G(V)$ es un módulo G/H-graduado, esto por lo visto en el lema 1.8.

Definición 2.2. *Se define como $\mathfrak{L}$ la categoría cuyos objetos son de la forma (X, V) donde X es un G-conjunto y V es un $\mathbb{C}G$-módulo que es X-graduado. Si (X, V) y (Y, W) son tales que X es isomorfa a Y y V a W, entonces son considerados el mismo objeto en la categoría $\mathfrak{L}$.*

Si (X, V) y (Y, W) son objetos de $\mathfrak{L}$ un morfismo de (X, V) a (Y, W) es un par de la forma

(f, α) donde $f : X \longrightarrow Y$ de G-conjuntos y $\alpha : V \longrightarrow W$ morfismo de $\mathbb{C}G$-módulo, y además f y α son compatibles, lo que quiere decir que $\alpha(V_x) \subseteq W_{f(x)}$ para todo $x \in X$.

Si $(f, \alpha) : (X, V) \longrightarrow (Y, W)$ y $(g, \beta) : (Y, W) \longrightarrow (Z, U)$, se define la composición de morfismos en la categoría $\mathfrak{L}$ por $(g, \beta) \circ (f, \alpha) = (g \circ f, \beta \circ \alpha)$, donde

$$(g, \beta) \circ (f, \alpha) : (X, V) \longrightarrow (Z, U).$$

Note que si toma $x \in X$ entonces

$$(\beta \circ \alpha)(V_x) \subseteq \beta(W_{f(x)}) \subseteq U_{(g \circ f)(x)},$$

por lo que la composición en $\mathfrak{L}$ tiene sentido y se puede observar que es asociativa, además para cada $(f, \alpha) : (X, V) \longrightarrow (Y, W)$ se tiene una identidad local dada por $\mathrm{id}_{(X,V)} = (\mathrm{id}_X, \mathrm{id}_V)$ tal que $(f, \alpha) \circ \mathrm{id}_{(X,V)} = (f, \alpha)$. A continuación se explorará otras propiedades que posee esta categoría.

Propiedades de la categoría $\mathfrak{L}$.

- $(\emptyset, 0)$ es el elemento 0 de la categoría.
- $(\cdot, \mathbb{C})$ se llama la unidad, donde $\mathbb{C}$ denota el $\mathbb{C}G$-módulo trivial.
- Se define la suma por

$$(X, V) + (Y, W) := (X \sqcup Y, V \oplus W), \tag{2.1}$$

que es el coproducto de (X, V) y (Y, W). Note que

$$V \oplus W = \left(\bigoplus_{x \in X} V_x \right) \oplus \left(\bigoplus_{y \in Y} W_y \right) = \bigoplus_{z \in X \sqcup Y} (V \oplus W)_z ,$$

donde $(V \oplus W)_z = V_z$ si $z \in X$ o $(V \oplus W)_z = W_z$ si $z \in Y$, por lo que $V \oplus W$ es $X \sqcup Y$-graduado y por consiguiente la suma está bien definida.

Para comprobar que $(X, V) + (Y, W)$ es el coproducto de (X, V) y (Y, W) en $\mathfrak{L}$ se debe verificar la propiedad universal. Para esto considere el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & (Z, U) & \\
 & & \\
(X, V) \arrow[uur, "{(f,\alpha)}"] \arrow[r, "i_1"'] & (X \sqcup Y, V \oplus W) \arrow[uu, dotted, "{(h,\gamma)}"] & (Y, W) \arrow[uul, "{(g,\beta)}"'] \arrow[l, "i_2"]
\end{tikzcd}$$

donde $(f, \alpha) : (X, V) \longrightarrow (Z, U)$, $(g, \beta) : (Y, W) \longrightarrow (Z, U)$, y también se tienen las inyecciones canónica

$$i_1 : (X, V) \longrightarrow (X \sqcup Y, V \oplus W),$$

y

$$i_2 : (Y, W) \longrightarrow (X \sqcup Y, V \oplus W).$$

Se define

$$(h, \gamma) : (X \sqcup Y, V \oplus W) \longrightarrow (Z, U),$$

tal que $h : X \sqcup Y \longrightarrow Z$ definida por $h(a) = f(a)$ si $a \in X$ o $h(a) = g(a)$ si $a \in Y$, y $\gamma : V \oplus W \longrightarrow U$ dada por $\gamma(v, w) = \alpha(v) + \beta(w)$. Debido a esta definición se puede ver que (h, γ) hace conmutar el diagrama. Supongase que existe

$$(l, \eta) : (X \sqcup Y, V \oplus W) \longrightarrow (Z, U)$$

de forma que también hace que el diagrama conmute, es decir,

$$(l, \eta) \circ i_1 = (f, \alpha)$$

y

$$(l, \eta) \circ i_2 = (g, \beta),$$

entonces para $(x, v) \in (X, V)$ y $(y, w) \in (Y, W)$ se tiene

$$(f(x), \alpha(v)) = (f, \alpha)(x, v) = ((l, \eta) \circ i_1)(x, v) = (l(x), \eta(v, 0))$$

y

$$(g(y), \beta(w)) = (f, \beta)(y, w) = ((l, \eta) \circ i_2)(y, w) = (l(y), \eta(0, w)),$$

de esto se infiere $l(x) = f(x)$, $\eta(v, 0) = \alpha(v)$, $l(y) = g(y)$ y $\eta(0, w) = \beta(w)$. En general, si $z \in X \sqcup Y$ y $(v, w) \in V \oplus W$ entonces $l(z) = f(z)$ si $z \in X$ o $l(z) = g(z)$ si $z \in Y$, es decir, $l = h$. Además

$$\eta(v, w) = \eta(v, 0) + \eta(0, w) = \alpha(v) + \beta(w) = \gamma(v, w).$$

Por lo anterior se concluye que se cumple la propiedad universal del coproducto. Note que $(\emptyset, 0)$ es unidad para $+$.

- Se define

$$(X, V) \otimes (Y, W) := (X \times Y, V \otimes_{\mathbb{C}} W), \tag{2.2}$$

como el producto de (X, V) y (Y, W). Observe que

$$V \otimes W = \left(\bigoplus_{x \in X} V_x \right) \otimes_{\mathbb{C}} \left(\bigoplus_{y \in Y} W_y \right) = \bigoplus_{x \in X, y \in Y} \left(V_x \otimes_{\mathbb{C}} W_y \right) = \bigoplus_{(x,y) \in X \times Y} (V \otimes_{\mathbb{C}} W)_{(x,y)}$$

donde $(V \otimes_{\mathbb{C}} W)_{(x,y)} = \left(V_x \otimes_{\mathbb{C}} W_y \right)$, por lo que el producto está bien definido. Observe que $(\cdot, \mathbb{C})$ es una unidad para $\otimes$.

- Se cumple también

$$((X, V) + (Y, W)) \otimes (Z, U) = ((X, V) \otimes (Z, U)) + ((Y, W) \otimes (Z, U)), \tag{2.3}$$

esto se tiene porque

$$\begin{aligned}((X,V)+(Y,W))\otimes(Z,U) &= (X\sqcup Y, V\oplus W)\otimes(Z,U)\\ &= ((X\sqcup Y)\times Z, (V\oplus W)\otimes U)\\ &\cong ((X\times Z)\sqcup(Y\times Z), (V\otimes U)\oplus(W\otimes U))\\ &\cong ((X,V)\otimes(Z,U))+((Y,W)\otimes(Z,U)).\end{aligned}$$

De forma similar es el argumento para mostrar que

$$(Z,U)\otimes((X,V)+(Y,W))\cong((Z,U)\otimes(X,V))+((Z,U)\otimes(Y,W)). \tag{2.4}$$

Note que con las propiedades anteriores se le da a la categoría $\mathfrak{L}$ estructura de monoide.

Lema 2.1. *Considere X un G-conjunto transitivo y V un $\mathbb{C}G$-módulo X-graduado, entonces para cada x en X se tiene que V_x es un $\mathbb{C}G_x$-módulo y además*

$$(X,V)\cong\left(G/G_x, ind_{G_x}^{G}(V_x)\right)$$

en la categoría $\mathfrak{L}$.

Proof. En primer lugar tomese x en X fijo y $g\in g_x$ note que

$$gV_x=V_{gx}=V_x,$$

por lo que V_x es un $\mathbb{C}G_x$-módulo.

Para la segunda parte recordando que $[G/G_x]$ es el conjunto de representantes de G/G_x note que para cualquier $y\in X$ existe un único $\gamma_y\in[G/G_x]$ tal que $y=\gamma_y\cdot x$, teniendo en cuenta esto se define

$$\alpha:\ X\longrightarrow G/G_x$$

dada por $\alpha(y)=\gamma_y G_x$. Por otra parte se define

$$\beta:\ G/G_x\ \longrightarrow\ X$$

dada por $\beta(gG_x)=g\cdot x$. Observe que α y β son morfismos de G-conjuntos que son inversos, luego α es un isomorfismo de G-conjuntos.

Ahora, para que $(X,V)\cong\left(G/G_x,\operatorname{ind}_{G_x}^{G}(V_x)\right)$ en la categoría $\mathfrak{L}$, se debe definir un morfismo

$$\phi: V\longrightarrow \operatorname{ind}_H^G(V_x),$$

que sea compatible con la graduación de estos $\mathbb{C}G$-módulos. Note que si $v\in V$ dado que $V=\oplus_{y\in X}V_y$ entonces $v=\sum_{y\in X}v_y$, donde $v_y\in V_y$ para cada $y\in X$ y esta descomposición es única, así que basta con definir ϕ sobre un subespacio vectorial V_y y luego extenderlo linealmente. Siguiendo la idea de la primera parte, si $v\in V_y$

entonces existe un único $\gamma_y \in [G/G_x]$ tal que $y = \gamma_y \cdot x$ así que ${\gamma_y}^{-1} \cdot v \in V_{{\gamma_y}^{-1} \cdot y}$ donde $V_{{\gamma_y}^{-1} \cdot y} = V_x$, es decir ${\gamma_y}^{-1} \cdot v \in V_x$. Recuerde que por lema 1.8 se tiene que

$$\mathrm{ind}_{G_x}^{G}(V_x) = \bigoplus_{\gamma \in [G/G_x]} (\gamma \otimes V_x),$$

entonces se define ϕ de forma que manda $v \in V_y$ a $(\gamma_y \otimes {\gamma_y}^{-1} \cdot v)$ que está en $\gamma_y \otimes V_x$. Se puede ver que ϕ está bien definida y que además $\phi(V_y) \subseteq \gamma_y \otimes V_x = \alpha(y) \otimes V_x$ es decir que respeta la graduación de estos $\mathbb{C}G$-módulos. Ahora veamos que ϕ es un morfismo de $\mathbb{C}G$-módulos, para esto tome $g \in G$ entonces se tiene $g \cdot v \in V_{g \cdot y}$ y $\gamma_{gy} \in [G/G_x]$ tal que $\gamma_{gy} \cdot x = g \cdot y$ así que

$$\phi(g \cdot v) = \gamma_{gy} \otimes (\gamma_{gy}^{-1} \cdot v).$$

Por otra parte $y = \gamma_y \cdot x$ así que $g \cdot y = g\gamma_y \cdot x$ pero dado que γ_{gy} es uníco, existe $h \in G_x$ tal que $g\gamma_y = \gamma_{gy} h$ así que $\gamma_{gy} = g\gamma_y h^{-1}$ se sique que

$$\phi(g \cdot v) = \gamma_{gy} \otimes (h\gamma_y^{-1} g^{-1}) g \cdot v = \gamma_{gy} \otimes (h\gamma_y^{-1} \cdot v),$$

por otra parte

$$g\phi(v) = g(\gamma_y \otimes ({\gamma_y}^{-1} \cdot v)) = g\gamma_y \otimes {\gamma_y}^{-1} v = \gamma_{gy} \otimes (h\gamma_y^{-1} \cdot v)$$

de lo anterior se tiene que $\phi(g \cdot v) = g\phi(v)$ por lo tanto ϕ es un morfismo de $\mathbb{C}G$-modulos. Falta comprobar que ϕ es un isomorfismo, para esto nos fijamos en el siguiente morfismo

$$\delta : \ \mathrm{ind}_{G}^{G_x}(V_x) \longrightarrow V$$

que se definirá sobre un subespacio vectorial $\gamma \otimes V_x$ de $\mathrm{ind}_{G}^{G_x}(V_x)$ donde $\gamma \in [G/G_x]$ y luego extendemos linealmente, de mánera que si $\gamma \otimes v \in \gamma \otimes V_x$ entonces

$$\delta(\gamma \otimes v) = \gamma \cdot v \ \in \ V_{r \cdot x},$$

se puede verificar que δ es un morfismo de $\mathbb{C}G$-módulos que es inverso a ϕ, así que ϕ es un isomorfismo y en conclusión se tiene que

$$(X, V) \cong \left(G/G_x, \mathrm{ind}_{G_x}^{G}(V_x)\right)$$

en la categoría $\mathfrak{L}$.

$\square$

Ahora se definirá el anillo $T(G)$ a partir de la categoría $\mathfrak{L}$, este es un anillo preparatorio para la construcción del anillo global de representaciones que se definirá luego.

Definición 2.3. *Considerando categoría $\mathfrak{L}$ se construye el grupo de Grothendieck $G_o(\mathfrak{L}, \sqcup)$ y se define*

$$T(G) = G_o(\mathfrak{L}, \sqcup) = \frac{\mathfrak{L}}{\langle (X \sqcup Y, V \oplus W) - (X, V) - (Y, W) \rangle}. \tag{2.5}$$

En $T(G)$ la suma está definida como en la categoría $\mathfrak{L}$ teniendo en cuenta el paso a el cociente, es decir,

$$\overline{(X,V)} + \overline{(Y,W)} = \overline{(X,V) + (Y,W)} = \overline{(X \sqcup Y, V \oplus W)}.$$

De igual mánera el producto está dado por

$$\overline{(X,V)} \otimes \overline{(Y,W)} = \overline{(X \times Y, V \otimes W)}.$$

Vía lo anterior y las propiedades de $\mathfrak{L}$ se comprueba que efectivamente $T(G)$ tiene estructura de anillo.

En adelante se denotará los elementos de $T(G)$ también por (X,V) en vez de $\overline{(X,V)}$ pero teniendo en cuenta el paso a el cociente.

Como se vió antes si H es un subgrupo de G y W es un $\mathbb{C}H$-módulo entonces G/H es un G-conjunto y $\mathrm{ind}_H^G(W)$ es G/H-graduado. Abusando de la notación consideraremos $[H,W]$ como la clase de isomorfismo de $(G/H, \mathrm{ind}_H^G(W))$ en $\mathfrak{L}$, es decir, $[H,W] = \overline{(G/H, \mathrm{ind}_H^G(W))}$ en $T(G)$. Se debe tener en cuenta entonces que $[H,W] \neq (H,W)$.

Recuerde que si $(X,V) \in \mathfrak{L}$ entonces

$$X = \bigsqcup_{H \leq G} G/H$$

y

$$V \cong \bigoplus_{H \leq G} \mathrm{ind}_H^G(V_H),$$

donde V_H es un $\mathbb{C}H$-módulo para cada $H \in G$. De esto se infiere

$$(X,V) \cong \sum_{H \leq G} (G/H, \mathrm{ind}_H^G(V_H)),$$

lo que implica que elementos de la forma $(G/H, \mathrm{ind}_H^G(W))$ (donde W es un $\mathbb{C}H$-módulo) son generadores de $T(G)$. Así

$$T(G) = \sum_{H \leq G} \mathbb{Z}(G/H, \mathrm{ind}_H^G(W)) = \sum_{H \leq G} \mathbb{Z}[H,W].$$

Proposición 2.1. *Considere $[H,W]$, $[K,V]$ elementos en el anillo $T(G)$, entonces $[H,W] \cong [K,V]$ si y solo si existe $g \in G$ tal que ${}^gK = H$ y ${}^gV \cong W$ como $\mathbb{C}H$-módulos.*

Proof. Suponga que $[H,W] \cong [K,V]$ entonces existe

$$(\alpha, \phi) : (G/K, \mathrm{ind}_H^G(W)) \longrightarrow (G/K, \mathrm{ind}_K^G(V))$$

un isomorfismo de módulos graduados, así que $\alpha : G/H \longrightarrow G/K$ es un isomorfismo de G-conjuntos así para algún $g \in G$ se tiene $\alpha(H) = gK$ y $HgK = gK$ entonces $g^{-1}Hg \leq K$ pero $|G/H| = |G/K|$, lo que implica que $|H| = |K|$ así $g^{-1}Hg = K$ es decir, ${}^{g}K = H$.

Por otra parte ϕ es un isomorfismo de $\mathbb{C}G$-módulos tal que

$$\phi(1 \otimes w) \cong \alpha(1) \otimes v \cong g \otimes v.$$

Así

$$W \cong (1 \otimes V) \cong g \otimes V,$$

como espacio vectorial. Dado que ϕ es de $\mathbb{C}G$-módulos es claro que

$$\phi : 1 \otimes W \longrightarrow g \otimes V$$

es un morfismo de $\mathbb{C}H$-módulos, pero $g \otimes V$ es isomorfo a ${}^{g}V$ como $\mathbb{C}H$-módulos, así que W es necesariamente isomorfo a ${}^{g}V$ como $\mathbb{C}G$-módulo. Conversamente supóngase que para algún $g \in G$ se tiene que $H = gKg^{-1}$ y $f : W \longrightarrow^{g} V$ un isomorfismo como $\mathbb{C}H$-módulos, a continuación se define

$$\begin{aligned} \alpha : G/H &\longrightarrow G/K \\ xH &\longrightarrow xgK \end{aligned}$$

Es claro que α es un isomorfismo de G-conjuntos. Ahora considere $[G/H]$ un conjunto de representaciones de G/H y T el conjunto de representaciones de G/K consistiendo de $\{\alpha(g) \mid g \in [G/H]\}$, entonces

$$\begin{aligned} \phi : \bigoplus_{g\in[G/H]} g \otimes W &\longrightarrow \bigoplus_{t\in T} t \otimes V. \\ g \otimes w &\longrightarrow \alpha(g) \otimes f(w) \end{aligned}$$

donde $\alpha(g) \otimes f(w)$ está en $\alpha(g) \otimes V$. Así tenemos a ϕ un isomorfismo de $\mathbb{C}G$-módulos compatibles con las graduaciones respectiva, con lo que se concluye que $[H, W] \cong [K, V]$. $\square$

Teorema 2.1. *Se tiene la siguiente fórmula para el producto en $T(G)$:*

$$[H, W] \cdot [K, U] = \sum_{x\in[H\backslash G/K]} [H \cap^{x} K, res^{H}_{H\cap^{x}K}(W) res^{K}_{H\cap^{x}K}({}^{x}U)]. \tag{2.6}$$

Proof. Considere $[H, W]$ y $[K, U]$ en $T(G)$, entonces el producto queda como sigue

$$\begin{aligned} [H, W][K, U] &= (G/H, \mathrm{ind}^{G}_{H}(W))(G/K, \mathrm{ind}^{G}_{K}(U)) \\ &= (G/H \times G/K, \mathrm{ind}^{G}_{H}(W) \otimes \mathrm{ind}^{G}_{K}(U)). \end{aligned}$$

Considere a $G/H \times G/K$ como un G-conjunto con la acción $g \circ (aH, bK) = (gaH, gbK)$. Observe que la orbita de (aH, bK) esta dada por

$$G(aH, bK) = G(H, a^{-1}bK) = G(H, xK)$$

donde $x = a^{-1}b$. Si $G(H, xK) = G(H, yK)$ entonces para algún $g \in G$ se tiene

$$(H, xK) = g \circ (H, yK) = (gH, gyK),$$

esto implica que $g \in H$ y $xk = gy$ por ende $HxK = HxkK = HgyK = HyK$, es decir, dos orbitas iguales representan la misma clase doble, así

$$G/H \times G/K = \bigsqcup_{x \in [H \backslash G/K]} G(H, xK),$$

además recordando que $G(H, xK) = G/G_{(H,xK)}$ (con $G_{(H,xK)}$ el estabilizador de (H, xK) mediante la acción de G) y

$$\begin{aligned} G(H, xK) &= \{g \in G | g \circ (H, xK) = (H, xK)\} \\ &= \{g \in G | g \in H, gxK = xK\} \\ &= \{g \in G | g \in H, ^x g \in K\} \\ &= H \cap ^x K, \end{aligned}$$

se sigue

$$G/H \times G/K \cong \bigsqcup_{x \in [H \backslash G/K]} \frac{G}{H \cap ^x K}. \tag{2.7}$$

Por otra parte, aplicando la reciprocidad de Frobenius 1.5 y la fórmula de Mackey (1.3) se tiene

$$\begin{aligned} \mathrm{ind}_H^G(W) \otimes \mathrm{ind}_K^G(U) &\cong \mathrm{ind}_H^G \left(W \otimes \mathrm{res}_H^G \mathrm{ind}_K^G(U) \right) \\ &\cong \mathrm{ind}_H^G \left(W \otimes \left(\bigoplus_{x \in [H \backslash G/K]} \mathrm{ind}_{H \cap ^x K}^H \mathrm{res}_{H \cap ^x K}^{^x K}(^x U) \right) \right) \\ &\cong \bigoplus_{x \in [H \backslash G/K]} \mathrm{ind}_H^G (W \otimes \mathrm{ind}_{H \cap ^x K}^H \mathrm{res}_{H \cap ^x K}^{^x K}(^x U)) \\ &\cong \bigoplus_{x \in [H \backslash G/K]} \mathrm{ind}_H^G \mathrm{ind}_{H \cap ^x K}^H (\mathrm{res}_{H \cap ^x K}^H(W) \otimes \mathrm{res}_{H \cap ^x K}^{^x K}(^x U)) \\ &\cong \bigoplus_{x \in [H \backslash G/K]} \mathrm{ind}_{H \cap ^x K}^G (\mathrm{res}_{H \cap ^x K}^H(W) \otimes \mathrm{res}_{H \cap ^x K}^{^x K}(^x U)). \end{aligned}$$

Se puede comprobar que teniendo el anterior isomorfismo de $\mathbb{C}G$-módulos y (2.7) se tiene un isomorfismo en $\mathfrak{L}$, de forma que

$$\begin{aligned} [H, W][K, U] &= \left(\bigsqcup_{x \in [H \backslash G/K]} \frac{G}{H \cap ^x K}, \bigoplus_{x \in [H \backslash G/K]} \mathrm{ind}_{H \cap ^x K}^G (\mathrm{res}_{H \cap ^x K}^H(W) \otimes \mathrm{res}_{H \cap ^x K}^{^x K}(^x U)) \right) \\ &= \sum_{x \in [H \backslash G/K]} \left(\frac{G}{H \cap ^x K}, \mathrm{ind}_{H \cap ^x K}^G (\mathrm{res}_{H \cap ^x K}^H(W) \otimes \mathrm{res}_{H \cap ^x K}^{^x K}(^x U)) \right) \\ &= \sum_{x \in [H \backslash G/K]} \left[H \cap ^x K, \mathrm{res}_{H \cap ^x K}^H(W) \otimes \mathrm{res}_{H \cap ^x K}^{^x K}(^x U) \right]. \end{aligned}$$

Así queda comprobada la fórmula (2.6). □

Acontinuación se estudiarán los morfismos de anillos que van de $T(G)$ a $\mathbb{C}$.

Proposición 2.2. *Si H es un subgrupo de G y $c \in H$, se define la siguiente aplicación*

$$\mathcal{S}_{H,c} : \mathfrak{L} \longrightarrow \mathbb{C}$$

dada por

$$\mathcal{S}_{H,c}((X,V)) = \sum_{x \in X, H \leq G_x} \mathcal{X}_{V_x}(c), \tag{2.8}$$

que cumple las siguientes propiedades:

(a) *Si* $(X,V) \cong (Y,W)$ *entonces* $\mathcal{S}_{H,c}(X,V) = \mathcal{S}_{H,c}(Y,W)$.

(b) $\mathcal{S}_{H,c}\left((X,V) + (Y,W)\right) = \mathcal{S}_{H,c}(X,V) + \mathcal{S}_{H,c}(Y,W)$.

(c) $\mathcal{S}_{H,c}\left((X,V) \otimes (Y,W)\right) = \mathcal{S}_{H,c}(X,V)\, \mathcal{S}_{H,c}(Y,W)$.

(d) *Considerando el paso a el cociente,*

$$\mathcal{S}_{H,c} : T(G) \longrightarrow \mathbb{C}$$

es un morfismo de anillos tal que para cada $[K,S]$ en $T(G)$ se tiene

$$\mathcal{S}_{H,c}([K,S]) = \sum_{x \in [G/K], H \leq {}^xK} \mathcal{X}_{{}^xS}(c) = \mathcal{X}_S\left(\sum_{x \in [G/K], H \leq {}^xK} c^x\right). \tag{2.9}$$

Proof.

(a) Suponga que $(f,\alpha) : (X,V) \longrightarrow (Y,W)$ es un isomorfismo, esto significa que $f : X \longrightarrow Y$ es un isomorfismo de G-conjuntos y $\alpha : V \longrightarrow W$ es un isomorfismo de $\mathbb{C}G$-módulos, además son compatible, es decir, $\alpha(V_x) = W_{f(x)}$. Para cada $x \in X$ se tiene que V_x es un $\mathbb{C}G_x$-modulo ya que si escogemos $g \in G_x$ entonces $gV_x = V_{gx} = V_x$. Por un argumento similar $W_{f(x)}$ es un $\mathbb{C}G_{f(x)}$-módulo. Observe que dado $g \in G_x$ se tiene que $g \circ f(x) = f(gx) = f(x)$, así que $G_x \leq G_{f(x)}$. Tome $\alpha_x : V_x \longrightarrow W_{f(x)}$ de forma que $\alpha_x = \alpha|_{V_x}$, por lo anterior este es un isomorfismo de $\mathbb{C}G_x$-módulo, es decir $V_x \cong W_{f(x)}$. Considerando esto se tiene

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_{H,c}(X,V) &= \sum_{x \in X, H \leq G_x} \mathcal{X}_{V_x}(c) \\
&= \sum_{x \in X, H \leq G_x} \mathcal{X}_{W_{f(x)}}(c) \\
&= \sum_{y \in Y, H \leq G_y} \mathcal{X}_{W_y}(c) \ \text{ donde } \ y = f(x), \\
&= \mathcal{S}_{H,c}(Y,W).
\end{aligned}$$

(b) Tome (X,V) y (Y,W) en $T(G)$, así se sigue

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_{H,c}((X,V)+(Y,W)) &= \mathcal{S}_{H,c}(X\sqcup Y, V\oplus W)\\ &= \sum_{z\in X\sqcup Y, H\leq G_z} \mathcal{X}_{(V\oplus W)_z}(c)\\ &= \sum_{z\in X, H\leq G_z} \mathcal{X}_{V_z}(c) \;+ \sum_{z\in Y, H\leq G_z} \mathcal{X}_{W_z}(c)\\ &= \mathcal{S}_{H,c}(X,V)+\mathcal{S}_{H,c}(Y,W).\end{aligned}$$

(c) Considere X y Y son G-conjuntos. Recuerde que G actúa en $X\times Y$ de forma que $g\circ(x,y)=(gx,gy)$, así que para $g\in G_{(x,y)}$ se tiene que $gx=x$ y $gy=y$, es decir, $g\in G_x$ y $g\in G_y$. Note que si $g\in G_x\cap G_y$ entonces $g\in G_{(x,y)}$, por lo tanto $G_{(x,y)}=G_x\cap G_y$.
Teniendo en cuenta lo anterior y el Teorema 1.3 se infiere

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_{H,c}((X,V)\otimes(Y,W)) &= \mathcal{S}_{H,c}((X\times Y, V\otimes W)\\ &= \sum_{(x,y)\in X\times Y,\ H\leq G_{(x,y)}} \mathcal{X}_{(V\otimes W)_{(x,y)}}(c)\\ &= \sum_{(x,y)\in X\times Y,\ H\leq G_x\cap G_y} \mathcal{X}_{(V_x\otimes W_y)}(c)\\ &= \sum_{x\in X,\ y\in Y,\ H\leq G_x\cap G_y} \mathcal{X}_{V_x}(c)\mathcal{X}_{W_y}(c)\\ &= \left(\sum_{x\in X,\ H\leq G_x} \mathcal{X}_{V_x}(c)\right)\left(\sum_{y\in Y,\ H\leq G_y} \mathcal{X}_{W_y}(c)\right)\\ &= \mathcal{S}_{H,c}(X,V)\ \mathcal{S}_{H,c}(Y,W).\end{aligned}$$

(d) Considere $[K,S]$ en $T(G)$, entonces

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_{H,c}([K,S]) &= \mathcal{S}_{H,c}(G/K, \mathrm{ind}_K^G(S))\\ &= \sum_{a\in[G/K],\ H\leq G_{(aK)}} \mathcal{X}_{S_a}(c),\end{aligned}$$

pero $G_{(aK)}=\{g\in G \mid gaK=aK\}={}^{a}K$, además

$$\mathrm{ind}_K^G(S)\cong \bigoplus_{a\in[G/K]} a\otimes S\cong \bigoplus_{a\in[G/K]} {}^{a}S,$$

entonces para cada $a\in[G/K]$ se toma $S_a={}^{a}S$ y se sigue

$$\mathcal{S}_{H,c}([K,S])=\sum_{a\in[G/K],H\leq {}^{a}K} \mathcal{X}_{{}^{a}S}(c).$$

Observe que $\mathcal{S}_{H,c}\left((\cdot\ ,\mathbb{C})\right) = \mathcal{X}_{\mathbb{C}}(c) = 1$ por lo que $\mathcal{S}_{H,c}$ es no trivial. Teniendo en cuenta lo anterior se tiene directamente que $\mathcal{S}_{H,c} : T(G) \longrightarrow \mathbb{C}$ está bien definida y que es un morfismo de anillos.

□

Nota 2.1.

Note que $T(G)$ es un anillo graduado, cuya graduación natural esta dada por

$$T(G) = \bigoplus_{n\in N} T_n(G),$$

con

$$T_n(G) = \langle\overline{(X,V)}|V = \bigoplus_{x\in X} V_x, \dim(V_x) = n\rangle.$$

$T_1(G)$ se llama el anillo monomial (ver [1]).

Observemos que si $\overline{(X,V)} = \overline{(Y,W)}$ entonces existe $(f,\alpha) : (X,V) \longrightarrow (Y,W)$ un isomorfismo de tal forma que $V_x \cong W_{f(x)}$, así que $\dim(V_x) = \dim(W_{f(x)})$, por lo que esta graduación no depende de los representantes que se escojan. Si $\overline{(X,V)}$ y $\overline{(Y,W)}$ están en $T_n(G)$ se tiene

$$\overline{(X,V)} + \overline{(Y,W)} = \overline{(X \sqcup Y, V \oplus W)}$$

pero $(V \oplus W) = \oplus_z (V \oplus W)_z$ donde $(V \oplus W)_z = V_z$ si $z \in X$ y $(V \oplus W)_z = W_z$ si $z \in Y$, por lo que $\dim((V \oplus W)_z) = n$, y se infiere que $T_n(G) \leq T(G)$.

Como $T(G)$ está generado por los elementos $[K,S] = \overline{(G/K, \mathrm{ind}_K^G(S))}$ donde

$$\mathrm{ind}_K^G(S) = \bigoplus_{a\in[G/K]} (a \otimes S),$$

y $\dim(a \otimes S) = \dim(S) = m$ para algún $m \in \mathbb{N}$, entonces

$$T(G) = \bigoplus_{n\in N} T_n(G).$$

Además, si $\overline{(X,V)} \in T_n(G)$ y $\overline{(Y,W)} \in T_m(G)$, se tiene

$$\overline{(X,V)} \otimes \overline{(Y,W)} = \overline{(X \times Y, V \otimes W)},$$

pero $\dim((V \otimes W)_{(x,y)}) = \dim(V_x \otimes W_y) = nm$, que implica

$$T_n(G)T_m(G) \subseteq T_{mn}(G).$$

Si V y W son $\mathbb{C}G$-módulos X-graduados entonces note que $(X, V \oplus W) \neq (X,V) + (X,V)$ en $T(G)$, sin embargo se tiene

$$\mathcal{S}_{H,c}(X, V \oplus W) = \mathcal{S}_{H,c}(X,V) + \mathcal{S}_{H,c}(X,V).$$

Esto muestra que el anillo $T(G)$ es bastante grande. En adelante interesará particularmente el anillo cociente de $T(G)$, que será precisamente el anillo global de representaciones.

2.2 Anillo global de representaciones

Definición 2.4. *Se define el anillo global de representaciones de el grupo G como el cociente*

$$\mathbb{D}(G) = \frac{T(G)}{\langle (X, V \oplus W) - (X,V) - (X,W) \rangle} \tag{2.10}$$

donde V y W son $\mathbb{C}G$-módulos X-graduados. Se denotará por I a

$$\langle (X, V \oplus W) - (X,V) - (X,W) \rangle.$$

Si $(Y,U) \in T(G)$ note que

$$(Y,U) \otimes ((X, V \oplus W) - (X,V) - (X,W))$$

es igual a

$$((Y \times X, U \otimes (V \oplus W)) - (Y \times X, U \otimes V) - (Y \times X, U \otimes W)),$$

es decir, $(Y,U) \otimes ((X, V \oplus W) - (X,V) - (X,W))$ vuelve a estar en I, esto demuestra que I es un ideal de $T(G)$. Se denotará también por (X,V) a los elementos de $\mathbb{D}(G)$ (teniendo en cuenta que son los elementos del anillo cociente $T(G)/I$), así que en cada caso se especificará donde se va a tomar (X,V).

Considere H un subgrupo G y W un $\mathbb{C}H$-módulo. Recordando que $W = \bigoplus_i S_i$ donde $S_i \in Irr(H)$ (donde $Irr(H)$ son los irreducible de H). se sigue

$$\begin{aligned}
[H,W] &= (G/K, \mathrm{ind}_K^G(W)) \\
&= (G/K, \mathrm{ind}_K^G(\oplus_i S_i)) \\
&= (G/K, \oplus_i \mathrm{ind}_K^G(S_i)) \\
&= \sum_i (G/K, \mathrm{ind}_K^G(S_i)) \\
&= \sum_i [H, S_i],
\end{aligned}$$

Lo que indica que $\mathbb{D}(G)$ está generado por los elementos $[H,S]$, donde H un subgrupo G y S un $\mathbb{C}H$-módulo irreducible. Es decir,

$$\mathbb{D}(G) = \sum_{H \in [G \backslash sub(G)],\ S \in Irr(H)} \mathbb{Z}[H,S]. \tag{2.11}$$

Así que $\mathbb{D}(G)$ es finitamente generado.

Ejemplo 5.

- Si $G = \{\cdot\}$ se tiene $\mathbb{D}(G) = \mathbb{Z}[\cdot, \mathbb{C}] \cong \mathbb{Z}$.
- Si $G = C_2$ entonces $\mathbb{D}(G) = \mathbb{Z}[\cdot, \mathbb{C}] + \mathbb{Z}[C_2, \mathbb{C}] + \mathbb{Z}[C_2, sgn]$. Incluso podemos exponer una tabla de multiplicación para sus básicos utilizando el Teorema 2.6, como sigue

- $[C_2, \mathbb{C}]$ es el uno de $\mathbb{D}(G)$.
- $[\cdot, \mathbb{C}][\cdot, \mathbb{C}] = [\cdot, \mathbb{C}] + [\cdot, \mathbb{C}]$.
- $[\cdot, \mathbb{C}][C_2, sgn] = [\cdot, \mathbb{C}]$.
- $[C_2, sgn][C_2, sgn] = [C_2, \mathbb{C}]$.

2.3 Homomomorfismos de anillos de $\mathbb{D}(G)$a $\mathbb{C}$.

Definición 2.5. *Considere $\mathcal{S}_{H,c} : T(G) \longrightarrow \mathbb{C}$ como en la Definición 2.9, se induce un morfismo de anillos denotado $\mathcal{S}_{H,c} : \mathbb{D}(G) \longrightarrow \mathbb{C}$ considerando el paso a el cociente y está dada por*

$$\mathcal{S}_{H,c}(X, V) = \sum_{x \in \mathcal{X}, H \leq G_x} \mathcal{X}_{V_x}(c). \tag{2.12}$$

Para cada (X, V) en $\mathbb{D}(G)$.

Teorema 2.2.

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{H,1}([K, S]) &= \varphi_H(G/K) dim(S), &(2.13)\\ \mathcal{S}_{H,1}([K, \mathbb{C}]) &= \varphi_H(G/K). &(2.14) \end{aligned}$$

Proof. Recordando el teorema 1.3

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{H,1}([K, S]) &= \sum_{x \in [G/K], H \leq^x K} \mathcal{X}_{^xS}(1) \\ &= \sum_{x \in [G/K], H \leq^x K} \dim(^xS) \\ &= \sum_{x \in [G/K], H \leq^x K} \dim(S) \\ &= (\#\{x \in [G/K], H \leq^x K\}) \dim(S), \end{aligned}$$

pero $\#\{x \in [G/K], H \leq^x K\} = \left|(G/K)^H\right| = \varphi_H(G/K)$, por lo tanto

$$\mathcal{S}_{H,1}([K, S]) = \varphi_H(G/K) \dim(S).$$

Además,

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{H,c}([K, \mathbb{C}]) &= \sum_{x \in [G/K], H \leq^x K} \mathcal{X}_{^x\mathbb{C}}(c) \\ &= \sum_{x \in [G/K], H \leq^x K} 1 \\ &= \varphi_H(G/K). \end{aligned}$$

□

Lema 2.2. *Si consideramos X un G-conjunto y V un $\mathbb{C}G$-módulo X-graduado entonces para cada $a \in G$, $g \in G$ y $y \in X$ se tiene que $\mathcal{X}_{V_{g^{-1}y}}(a^g) = X_{V_y}(a)$.*

Proof. Escogiendo $v_1, ..., v_r$ una base de V_y con la acción de G, entonces $g^{-1}v_1, ..., g^{-1}v_r$ es base de $V_{g^{-1}}y$ y como multiplicar por g^{-1} es un isomorfismo se infiere que hay una biyección entre estas bases. Si $av_i = \alpha v_i$ para algún $\alpha \in \mathbb{C}$, se sigue que

$$a^g(g^{-1}v_i) = g^{-1}av_i = g^{-1}(\alpha v_i),$$

y de esto se tiene directamente que $\mathcal{X}_{V_{g^{-1}y}}(a^g) = X_{V_y}(a)$.

□

Proposición 2.3. *$\mathcal{S}_{H,b} = \mathcal{S}_{K,c}$ si y solo si existe $g \in G$ tal que ${}^gH = K$ y ${}^gb = c$.*

Proof. Primero supongase que existe $g \in G$ tal que ${}^gH = K$ y ${}^gc = b$. Recuerde que para cada $h \in H$ se tiene

$$\mathcal{X}_{V_{g^{-1}y}}(h^g) = \mathcal{X}_{g^{-1}V_y}(h^g) = \mathcal{X}_{V_y}((h^g)^{-1}) = \mathcal{X}_{V_y}(h)$$

por Lema 2.2, teniendo en cuenta esto se sigue

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{H,b}(X,V) &= \sum_{x\in X, H\leq G_x} \mathcal{X}_{V_x}(b) \\ &= \sum_{x\in X, K^g\leq G_x} \mathcal{X}_{V_x}(c^g), \end{aligned}$$

como $K^g \leq G_x$ lo que implica $K \leq \ {}^g(G_x)$, pero ${}^g(G_x) = G_{gx}$, así que $K \leq \ (G_{gx})$. Ahora se hace un cambio de variable de forma que $y = gx$, así queda

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{H,b}(X,V) &= \sum_{g^{-1}y\in X, K\leq G_y} \mathcal{X}_{V_y}(c) \\ &= \sum_{y\in X, K\leq G_y} \mathcal{X}_{V_y}(c) \\ &= \mathcal{S}_{K,c}(X,V). \end{aligned}$$

Es decir $\mathcal{S}_{H,b} = \mathcal{S}_{{}^gH,{}^gb}$.

Para el recíproco suponga que $\mathcal{S}_{H,b} = \mathcal{S}_{K,c}$. considerando la evaluación en $[K,\mathbb{C}]$ queda que

$$\varphi_H(G/K) = \mathcal{S}_{H,b}([K,\mathbb{C}]) = \mathcal{S}_{K,c}([K,\mathbb{C}]) = \varphi_K(G/K) = |G/K|,$$

entonces $H \leq_G K$. Con un argumento similar evaluando esta vez en $[H,\mathbb{C}]$ queda $K \leq_G H$.
Sin pérdida de generalidad escogemos $g \in G$, entonces $K = \ {}^g({}^{g^{-1}}K) \leq \ {}^gH \leq K$, así que ${}^gH = K$. Ahora se verifica que b y c son conjugados en $N_G(H)$, para esto note que

$$\{x \in [G/H] | H \leq \ {}^xH\} = \{x \in [G/H] | H^x \leq H\} = \{x \in G | H \leq \ {}^xH\}/H = N_G(H)/H.$$

Si S un $\mathbb{C}H$-módulo simple, entonces se tiene que

$$\mathcal{S}_{H,b}([H,S]) = \sum_{x\in[G/H], H\leq \ {}^xH} \mathcal{X}_{{}^xS}(b) = \sum_{x\in[N_G(H)/H]} \mathcal{X}_S(b^x). \tag{2.15}$$

Por otra parte,

$$\mathcal{S}_{K,c}([H,S]) = \sum_{x\in[G/H],K\leq {}^xH} \mathcal{X}_{{}^xS}(c) = \sum_{x\in[G/H],K\leq {}^xH} \mathcal{X}_S(c^x), \tag{2.16}$$

pero $\mathcal{S}_{K,c} = \mathcal{S}_{{}^gH,c} = \mathcal{S}_{{}^gH,{}^gc}$, entonces

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_{{}^gH,{}^gc}([H,S]) &= \sum_{x\in[G/H],{}^gH\leq {}^xH} \mathcal{X}_{{}^xS}({}^gc) \\
&= \sum_{x\in[G/H],{}^{x^{-1}g}H\leq H} \mathcal{X}_S(({}^gc)^x) \\
&= \sum_{x\in[G/H],{}^{xg}H\leq H} X_S(({}^{xg}c)) \\
&= \sum_{y\in[G/H],{}^yH\leq^H} \mathcal{X}_S({}^yc), \text{ con } y = xg \\
&= \sum_{y\in[N_G(H)/H]} \mathcal{X}_S({}^yc).
\end{aligned}$$

Como $\mathcal{S}_{H,b} = \mathcal{S}_{K,c}$ se tiene

$$\sum_{x\in[N_G(H)/H]} \mathcal{X}_S(b^x) = \sum_{y\in[N_G(H)/H]} \mathcal{X}_S({}^yc),$$

se sigue

$$\mathcal{X}_S\left(\sum_{x\in[N_G(H)/H]}(b^x)\right) = \mathcal{X}_S\left(\sum_{y\in[N_G(H)/H]}({}^yc)\right),$$

observe que esto se cumple para cualquier $S \in irr(H)$.
Recordando que los caracteres distinguen las clases de conjugación por Teorema 1.3, se infiere que existe $t \in H$ tal que

$${}^t\left(\sum_{x\in[N_G(H)/H]}(b^x)\right) = \sum_{y\in[N_G(H)/H]}({}^yc) = \sum_{x\in[N_G(H)/H]}({}^{xg}c),$$

así que para algún $x \in N_G(H)$ se cumple que ${}^tb = {}^{xg}c$ entonces $b = {}^{t^{-1}xg}c$ donde $t^{-1}xg \in N_G(H)$ teniendo en cuenta que $t^{-1}x \in N_G(H)$. Ahora considerando $l = t^{-1}xg \in G$, se tiene que ${}^lH = {}^{t^{-1}xg}H = {}^{t^{-1}x}({}^gH) = {}^gH = K$ y además ${}^lc = {}^{t^{-1}xg}c = b$.

□

A continuación se estudiará la relación entre los pares (H,b) donde H un subgrupo de G y $b \in H$ con los pares $[K,S]$ donde K es un subgrupo de G y S es un $\mathbb{C}K$-módulo simple.

En adelante si H es un subgrupo de G se denotará $N = N_G(H)$. Claramente $H \trianglelefteq$

$N = N_G(H) \leq G$ donde N actúa en $\mathbb{C}H$ y $R(H)$ por conjugación en cada uno de los casos.

Definición 2.6. *Para cada $b \in H$ se define*

$$\overline{b} = \sum_{x \in [N/C_N(b)]} {}^x b. \tag{2.17}$$

Para comprobar que $\overline{b}$ no depende de el conjunto de representantes que se escoja de $[N/C_N(b)]$ suponga que $xC_N(b) = x_o C_N(b)$, entonces $x^{-1}x_o \in C_N(b)$ y por lo tanto ${}^{x^{-1}x_o}b = b$ lo que implica ${}^{x_o}b =^x b$, de esto se concluye que (2.17) esta bien definida, además $\overline{b} \in \mathbb{C}H$.

Definición 2.7. *Para cada caracter irreducible $\mathcal{X}_S$ de H se define*

$$\overline{\mathcal{X}_S} = \sum_{x \in [N/C_N(S)]} \mathcal{X}_{{}^x S}. \tag{2.18}$$

Notese que si $xC_N(S) = yC_N(S)$ entonces $y^{-1}x \in C_N(S)$ luego ${}^{y^{-1}x}S \cong S$ entonces ${}^x S \cong^y S$, lo que implica que $\mathcal{X}_{{}^x S} = \mathcal{X}_{{}^y S}$. De esto se infiere directamente que $\overline{\mathcal{X}_S}$ no depende de los representantes que escojamos de $[N/C_N(S)]$, por lo tanto (2.18) está bien definida.

Lema 2.3. $(\mathbb{C}H)^N$ *(el conjunto de elementos de $\mathbb{C}H$ que quedan fijos con la acción de N) es una $\mathbb{C}$-álgebra con base $\{ \overline{b} \mid b \in H\}$.*

Proof. Considere

$$(\mathbb{C}H)^N = \{ \sum_{h \in H} \lambda_h h \mid \sum_{h \in H} \lambda_h \, {}^a h = \sum_{h \in H} \lambda_h h \ \text{ para todo } a \in N\}.$$

donde $(\mathbb{C}H)^N \leq \mathbb{C}H$ así que claramente $(\mathbb{C}H)^N$ es una $\mathbb{C}$- álgebra. Además, Se tiene que N actúa a izquierda en H por conjugación, considerando $[N\backslash H] = \{h_1, ..., h_r\} \subseteq H$ se comprobará que $B = \{\overline{h}_1, ..., \overline{h}_r\}$ es una base de $(\mathbb{C}H)^N$. Como se notó antes, para cada $b \in H$ y $a \in N$ se tiene que $\overline{b} = \overline{{}^a b}$, así que B no depende de los representantes de las orbitas que se escojan en $[N\backslash H]$.
Tomando $a \in N$ y $h_i \in [N\backslash H]$ se tiene

$$N = \bigsqcup_{i=1}^{r} xC_N(h_i)$$

pero

$$N = aN = \bigsqcup_{i=1}^{r} (ax)C_N(h_i),$$

entonces

$$\begin{aligned} {}^{a}\left(\overline{h_i}\right) &= {}^{a}\left(\sum_{x\in[N/C_N(h_i)]} {}^{x}h_i\right) \\ &= \sum_{x\in[N/C_N(h_i)]} {}^{a}(\,{}^{x}h_i) \\ &= \sum_{x\in[N/C_N(h_i)]} {}^{ax}h_i \\ &= \overline{h}_i, \end{aligned}$$

de esto se infiere claramente que $h_i \in (\mathbb{C}H)^N$. Para verificar que B es linealmente independiente considere $\overline{h}_i \neq \overline{h}_j$. si existe $x \in [N/C_N(h_i)]$ y $y \in [N/C_N(h_j)]$ tal que ${}^{x}h_i = {}^{y}h_j$ entonces $h_i = {}^{x^{-1}y}h_j$ lo que implicaría $\overline{h}_i = \overline{h}_j$ que es una contradicción, por lo tanto ${}^{x}h_i \neq {}^{y}h_j$ para todo $x \in [N/C_N(h_i)]$ y $y \in [N/C_N(h_j)]$, esto nos garantiza que B es linealmente independiente.

Si $\sum\limits_{h\in H} \lambda_h h \in (\mathbb{C}H)^N$ se puede ver que está en lo generado por B, para esto considere $a \in N$ entonces

$$\sum_{h\in H} \lambda_h\, {}^{a}h = {}^{a}\left(\sum_{h\in H} \lambda_h h\right) = \sum_{h\in H} \lambda_h h,$$

que implica

$$\sum_{h\in H} \lambda_h\, {}^{a}h = \sum_{h\in H} \lambda_{{}^{a}h}\, {}^{a}h,$$

se sabe que los elementos de H son linealmente independientes, así que para cada $h \in H$ se tiene que $\lambda_h = \lambda_{{}^{a}h}$, y de esto se infiere que los conjugados tienen el mismo coeficiente en cada caso, y en consecuencia

$$\sum_{h\in H} \lambda_h h = \sum_{h\in[H\backslash N]} \lambda_h(\overline{h}) = \sum_{1\leq i\leq r} \lambda_{h_i}(\overline{h}_i).$$

Así se concluye que B es una base para $(\mathbb{C}H)^N$. □

Teorema 2.3. *$(R(H))^N$ es una $\mathbb{C}$-álgebra con base $\{\, \overline{\mathcal{X}_S} \mid \mathcal{S}\ \mathbb{C}H$- módulo simple $\}$.*

Proof. Considere $S \in Irr(H)$ y $a \in N$ entonces

$$\begin{aligned} a(\,\overline{\mathcal{X}_S}\,) &= a\left(\sum_{x\in[N/C_N(S)]} \mathcal{X}_{{}^{x}S}\right) \\ &= \sum_{x\in[N/C_N(S)]} a(\mathcal{X}_{{}^{x}S}) \\ &= \sum_{x\in[N/C_N(S)]} \mathcal{X}_{{}^{xa}S} \\ &= \sum_{x\in[N/C_N(S)]} \mathcal{X}_{{}^{x}S} \\ &= \overline{\mathcal{X}_S}, \end{aligned}$$

con esto se verifica que $\overline{\mathcal{X}_S} \in (R(H))^N$. Tome $A = \{{}^aS \mid a \in [N/C_N(S)]\}$, observe que en A están todos los conjugados de S. Ahora se verifica que A es una base para $(R(H))^N$.

Si $\overline{\mathcal{X}_S} \neq \overline{\mathcal{X}_T}$ se tiene que

$$\sum_{x\in[N/C_N(S)]} \mathcal{X}_{{}^xS} \neq \sum_{y\in[N/C_N(T)]} \mathcal{X}_{{}^yT}.$$

Suponga que para algún $x \in [N/C_N(S)]$ y $y \in [N/C_N(T)]$ se tiene $\mathcal{X}_{{}^xS} = \mathcal{X}_{{}^yT}$, esto implica que ${}^xS \cong {}^yT$, entonces ${}^{y^{-1}x}S \cong T$ y por lo tanto $\overline{\mathcal{X}_S} = \overline{\mathcal{X}_T}$, lo que es una contradicción. Entonces, para todo $x \in [N/C_N(S)]$ y $y \in [N/C_N(T)]$ se tiene $\mathcal{X}_{{}^xS} \neq \mathcal{X}_{{}^yT}$, De esto se deduce que A es linealmente independiente. Para comprobar que A genera a $(R(H))^N$ considere

$$\sum_{S\in irr(H)} \lambda_S \mathcal{X}_S \in (R(H))^N,$$

si $a \in N$, entonces

$$\sum_{S\in irr(H)} \lambda_S \mathcal{X}_{{}^aS} = a\left(\sum_{S\in irr(H)} \lambda_S \mathcal{X}_S\right) = \sum_{S\in irr(H)} \lambda_S \mathcal{X}_S,$$

lo que implica

$$\sum_{S\in irr(H)} \lambda_S \mathcal{X}_{{}^aS} = \sum_{S\in irr(H)} \lambda_{{}^aS} \mathcal{X}_{{}^aS}$$

como consecuencia $\lambda_S = \lambda_{{}^aS}$ para cada $S \in irr(H)$, por lo tanto

$$\sum_{S\in irr(H)} \lambda_S \mathcal{X}_S = \sum_{S\in irr(H)} \lambda_S \overline{\mathcal{X}_S}.$$

Así concluímos que A es base de $(R(H))^N$. $\square$

De los teoremas anteriores se concluye que

$$(\mathbb{C}H)^N \cong \bigoplus_{b\in[N\backslash H]} \mathbb{C}\overline{b},$$

y

$$\mathbb{C}(R(H))^N \cong \sum_{S\in[N\backslash(H)]} \mathbb{C}\overline{S}.$$

Teorema 2.4. *Considere la forma bilineal*

$$\langle\ ,\ \rangle : (\mathbb{C}H)^N \times \mathbb{C}(R(H))^N \longrightarrow \mathbb{C}$$

dada por

$$\langle \overline{b}, \overline{\mathcal{X}_S}\rangle = \mathcal{X}_S\left(\sum_{x\in[N/H]} b^x\right). \tag{2.19}$$

donde $b \in H$ y S es un $\mathbb{C}H$-módulo simple. $\langle\ ,\ \rangle$ Está bien definida, es decir, no depende de los representantes que se escojan de $\overline{b}$, x o $\mathcal{X}_S$, y es no degenerada en ambas variables. En particular las dimensiones de $(\mathbb{C}H)^N$ y $(R(H))^N$ coinciden.

Proof. Primero se prueba que está bien definida, para esto considere $S \in irr(H)$ fijo y suponga que $\overline{b} = \overline{c}$, entonces para algún $a \in N$ se tiene $b = c^a$ así

$$\begin{aligned}
\langle \overline{b}, \overline{\mathcal{X}_S} \rangle &= \mathcal{X}_S \left(\sum_{x \in [N/H]} b^x \right) \\
&= \mathcal{X}_S \left(\sum_{x \in [N/H]} c^{ax} \right) \\
&= \sum_{x \in [N/H]} \mathcal{X}_S(c^{ax}) \\
&= \sum_{x \in [N/H]} \mathcal{X}_{{}^{ax}S}(c) \\
&= \sum_{x \in [N/H]} \mathcal{X}_{{}^{x}S}(c) \\
&= \langle \overline{c}, \overline{\mathcal{X}_S} \rangle.
\end{aligned}$$

Así es claro que no depende de el representantes $\overline{b}$ que se escoja. Tome $\overline{b}$ fijo y suponga que $S \cong T$, entonces $\mathcal{X}_S = \mathcal{X}_T$ de esto se obtiene

$$\langle \overline{b}, \overline{\mathcal{X}_S} \rangle = \mathcal{X}_S \left(\sum_{x \in [N/H]} b^x \right) = \mathcal{X}_T \left(\sum_{x \in [N/H]} b^x \right) = \langle \overline{b}, \overline{\mathcal{X}_T} \rangle.$$

Por lo tanto (2.19) está bien definida.

Para verificar que es una forma bilineal no degenarada considere $b_o \in (\mathbb{C}H)^N$ fijo, tal que

$$b_o = \sum_{b \in [N \backslash H]} \lambda_{\overline{b}} \, \overline{b},$$

y para cada $S \in irr(H)$ se tiene que $\langle \overline{b_o} , \overline{\mathcal{X}_S} \rangle = 0$ entonces como $\langle \ , \ \rangle$ es bilineal se sigue que

$$\begin{aligned}
\langle \overline{b_o}, \overline{\mathcal{X}_S} \rangle &= \sum_{b \in [N \backslash H]} \lambda_{\overline{b}} \langle \overline{b}, \overline{\mathcal{X}_S} \rangle \\
&= \sum_{b \in [N \backslash H]} \lambda_{\overline{b}} \, \mathcal{X}_S \left(\sum_{x \in [N/H]} b^x \right) \\
&= \mathcal{X}_S \left(\sum_{b \in [N \backslash H]} \lambda_{\overline{b}} \left(\sum_{x \in [N/H]} b^x \right) \right),
\end{aligned}$$

entonces

$$\mathcal{X}_S \left(\sum_{b \in [N \backslash H]} \lambda_{\overline{b}} \left(\sum_{x \in [N/H]} b^x \right) \right) = 0$$

lo que implica

$$\sum_{b\in[N/H]} \lambda_{\overline{b}} \left(\sum_{x\in[N/H]} b^x \right) = 0,$$

se sabe que los $\overline{b}$ representan diferentes orbitas de $N\backslash H$, teniendo en cuenta esto considere $\eta_b = \#\{a \in [N/H] \mid \overline{a} = \overline{b}\}$ y así

$$\sum_{b\in[N/H]} \lambda_{\overline{b}} \left(\sum_{x\in[N/H]} b^x \right) = \sum_{b\in[N\backslash H]} \eta_b \lambda_{\overline{b}} \left(\sum_{x\in[N/H]} b^x \right) = 0,$$

luego

$$\eta_b \lambda_{\overline{b}} \left(\sum_{x\in[N/H]} b^x \right) = 0,$$

pero para cada $b \in [N\backslash H]$ se tiene $\eta_b > 0$ lo que implica que $\lambda_{\overline{b}} = 0$, y se concluye que $b_o = 0$.
Ahora, suponga $S_o \in R(H)^N$ fijo tal que

$$S_o = \sum_{S\in[N\backslash Irr(H)]} \lambda_{\overline{S}} \overline{\mathcal{X}_S},$$

y para todo $b \in H$ se tiene

$$\langle\, \overline{b}\,,\, S_o \,\rangle = 0.$$

como $\langle\;,\;\rangle$ es bilinealse sigue que

$$\begin{aligned}
\langle \overline{b}, S_o \rangle &= \langle \overline{b}, \left(\sum_{S\in[N\backslash Irr(H)]} \lambda_{\overline{S}} \overline{\mathcal{X}_S} \right) \rangle \\
&= \sum_{S\in[N\backslash Irr(H)]} \lambda_{\overline{S}} \langle \overline{b}, \overline{\mathcal{X}_S} \rangle \\
&= \sum_{S\in[N\backslash Irr(H)]} \lambda_{\overline{S}} \mathcal{X}_S \left(\sum_{x\in[N/H]} b^x \right) \\
&= \sum_{S\in[N\backslash Irr(H)]} \lambda_{\overline{S}} \left(\sum_{x\in[N/H]} \mathcal{X}_S(b^x) \right) \\
&= \sum_{S\in[N\backslash Irr(H)]} \lambda_{\overline{S}} \left(\sum_{x\in[N/H]} \mathcal{X}_{{}^xS}(b) \right),
\end{aligned}$$

Observe que para cada $S \in irr(H)$ se tiene que $H \leq C_N(S) \leq N$, luego

$$\begin{aligned} N &= \bigsqcup_{x \in [N/C_N(S)]} xC_N(S) \\ &= \bigsqcup_{x \in [N/C_N(S)]} x \left(\bigsqcup_{y \in [C_N(S)/H]} yH \right) \\ &= \bigsqcup_{x \in [N/C_N(S)]} \left(\bigsqcup_{y \in [C_N(S)/H]} xyH \right). \end{aligned}$$

Por lo anterior se sigue que

$$\langle \, \overline{b} \, , \, S_o \rangle = \sum_{S \in [N \backslash irr(H)]} \lambda_{\overline{S}} \left(\sum_{x \in [N/C_N(S)]} \left(\sum_{y \in [C_N(S)/H]} \mathcal{X}_{{}^{yx}S}(b) \right) \right),$$

pero los caracteres no dependen más que de las clases de conjugación ya que $\mathcal{X}_{{}^{yx}S} = \mathcal{X}_{{}^{x}S}$ para cada $y \in [C_N(S)/H]$, esto que implica

$$\langle \, \overline{b} \, , S_o \rangle = \sum_{S \in [N \backslash irr(H)]} \left(\sum_{x \in [N/C_N(S)]} \lambda_{\overline{S}} \, |C_N(S)/H| \, \mathcal{X}_{{}^{x}S}(b) \right) = 0.$$

Note que $irr(H) = \{ {}^{x}S \mid x \in [N/C_N(S)], \; S \in [N \backslash irr(H)] \}$ es linealmente independiente, así que $\lambda_{\overline{S}} = 0$ para todo $S \in [N \backslash Irr(H)]$ por consiguiente $S_o = 0$. Por lo tanto se concluye que la forma $\langle \, , \, \rangle$ es no degenarada en ambas variables.

□

Teorema 2.5. *Se tiene que:*

(a) $I \subseteq Ker(\mathcal{S}_{H,b})$ *para todo* (H, b).

(b) $I = \cap_{(H,b)} Ker(\mathcal{S}_{H,b})$.

Proof. .

(a) Sea $[X, V_1 \oplus V_2] - [X, V_1] - [X, V_2]$ uno de los generadores de I, dado (H, b) con H un subgrupo de G y $b \in H$ entonces se tiene que

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{H,b}([X, V_1 \oplus V_2] - [X, V_1] - [X, V_2]) &= \mathcal{S}_{H,b}([X, V_1 \oplus V_2]) - \mathcal{S}_{H,b}([X, V_1]) - \mathcal{S}_{H,b}([X, V_2]) \\ &= \sum_{x \in [G/K], H \leq x^K} (\mathcal{X}_{V_1 \oplus V_2} - \mathcal{X}_{V_1} - \mathcal{X}_{V_2})(x^b) \\ &= 0 \end{aligned}$$

esto porque

$$\mathcal{X}_{V_1 \oplus V_2} = \mathcal{X}_{V_1} + \mathcal{X}_{V_2},$$

por el Teorema 1.3, entonces $[X, V_1 \oplus V_2] - [X, V_1] - [X, V_2]$ está en $Ker(\mathcal{S}_{H,b})$, y esto implica directamente que $I \subseteq Ker(\mathcal{S}_{H,b})$ para todo (H, b).

(b) Para ver que $\cap_{(H,b)} Ker(\mathcal{S}_{H,b}) = I$, se define la función

$$\mathcal{S} : T(G) \longrightarrow \prod_{(H,b)} \mathbb{C}$$

dada por

$$[K, S] \longrightarrow (\mathcal{S}_{H,b}([K, S]))_{(H,b)}$$

que está bien definida. Note que

$$\begin{aligned} Ker(\mathcal{S}) &= \{[K, S] | \forall (H, b), \mathcal{S}_{H,b}([K, S]) = 0\} \\ &= \{[K, S] | \forall (H, b), [K, S] \in Ker(\mathcal{S}_{H,b})\} \\ &= \cap_{(H,b)} Ker(\mathcal{S}_{H,b}). \end{aligned}$$

entonces $I \subseteq ker(\mathcal{S})$ por (a), así que se puede considerar el paso a el cociente en $\mathcal{S}$, de forma que

$$\mathcal{S} : \mathbb{D}(G) \longrightarrow \prod_{(H,b)} \mathbb{C}.$$

Recuerde que

$$\mathbb{D}(G) = \sum_{H \in [G \backslash Sub(G)], S \in irr(H)} \mathbb{Z}[H, S],$$

y el conjunto de generadores $\{[H, S] \mid H \in [G\backslash Sub(G)], S \in irr(H)\}$ es base canónica de $\mathbb{D}(G)$. Ahora, suponga que $\{H_1, H_2, ..., H_n\}$ son todos los subgrupos de G (hasta isomorfismo), de tal manera que $H_1 = \{1\}$, $H_n = G$ y $|H_i| < |H_j|$ si $i < j$ (se escogen los subconjuntos con esta propiedad).
Observe que para cada $k = 1, ..., n$, se sigue que $[G\backslash H_k]$ y $irr(H_k)$ tienen la misma cardinalidad por el Teorema 1.3, entonces tomese $[G\backslash H_k] = \{b^k_1, ..., b^k_{r_k}\}$ y $irr(H_k) = \{S^k_1, ..., S^k_{r_k}\}$.
Se denota por **A** la matriz asociada a la transformación de $\mathcal{S}$ que está dada como sigue

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & . & . & . & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & . & . & . & A_{2n} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ A_{n1} & A_{n2} & . & . & . & A_{nn} \end{pmatrix}$$

,

donde $A_{ij} \in M_{r_i \times r_j}(\mathbb{C})$ representa el bloque

$$\begin{pmatrix} \mathcal{S}_{H_i,b^i_1}([H_j, S^j_1]) & \mathcal{S}_{H_i,b^i_1}([H_j, S^j_2]) & . & . & . & \mathcal{S}_{H_i,b^i_1}([H_j, S^j_{r_j}]) \\ \mathcal{S}_{H_i,b^i_2}([H_j, S^j_1]) & \mathcal{S}_{H_i,b^i_2}([H_j, S^j_2]) & . & . & . & \mathcal{S}_{H_i,b^i_2}([H_j, S^j_{r_j}]) \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ \mathcal{S}_{H_i,b^i_{r_i}}([H_j, S^j_1]) & \mathcal{S}_{H_i,b^i_{r_i}}([H_j, S^j_2]) & . & . & . & \mathcal{S}_{H_i,b^i_{r_i}}([H_j, S^j_{r_j}]) \end{pmatrix}$$

.

Note que si $i > j$ entonces $\mathcal{S}_{H_i,b}([H_j,S]) = \sum_{x\in[G/H_j],H_i\leq^x H_j} \mathcal{X}_{^xS}(b) = 0$ porque $H_i \nleq {}^xH_j$ debido a que $|H_i| > |H_j|$, por lo tanto $A_{ij} = 0$ si $i > j$. Ahora, se denota por A_i a A_{ii}, observemos que para cada $i \in \{1, ..., r\}$ se tiene que

$$\begin{aligned}
(A_i)_{kl} &= \mathcal{S}_{H_i,b_k}([H_i,S_l]) \\
&= \sum_{x\in[G/H_i],H_i\leq^x H_i} \mathcal{X}_{^xS_l}(b_k) \\
&= \sum_{x\in[N_G(H_i)/H_i]} \mathcal{X}_{^xS_l}(b_k) \\
&= \sum_{x\in[N_G(H_i)/H_i]} \mathcal{X}_{S_l}((b_k)^x) \\
&= \mathcal{X}_{S_l}\left(\sum_{x\in[N_G(H_i)/H_i]} ((b_k)^x)\right) \\
&= \langle \overline{b_k}, \overline{\mathcal{X}_{S_l}} \rangle.
\end{aligned}$$

entonces la matriz A_i nos queda

$$\begin{pmatrix}
\langle \overline{b_1}, \overline{\mathcal{X}_{S_1}} \rangle & \langle \overline{b_1}, \overline{\mathcal{X}_{S_2}} \rangle & . & . & . & \langle \overline{b_1}, \overline{\mathcal{X}_{S_r}} \rangle \\
\langle \overline{b_2}, \overline{\mathcal{X}_{S_1}} \rangle & \langle \overline{b_1}, \overline{\mathcal{X}_{S_2}} \rangle & . & . & . & \langle \overline{b_1}, \overline{\mathcal{X}_{S_r}} \rangle \\
. & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . \\
\langle \overline{b_r}, \overline{\mathcal{X}_{S_1}} \rangle & \langle \overline{b_r}, \overline{\mathcal{X}_{S_2}} \rangle & . & . & . & \langle \overline{b_r}, \overline{\mathcal{X}_{S_r}} \rangle
\end{pmatrix}$$

.

Concluimos por el Teorema 2.4 que A_i es una matriz bilineal y no degenerada, por lo tanto es una matriz invertible.
Además, notese que $\mathrm{Det}(\mathbf{A}) = \mathrm{Det}(A_1)\ \mathrm{Det}(A_2)\ ...\mathrm{Det}(A_n) \neq 0$ por lo que la que la matriz A es invertible sobre los complejos, así que $\mathcal{S}$ es biyectiva y en particular $I = Ker(\mathcal{S})$ que es $\cap_{(H,b)} Ker(S_{H,b})$.

□

Definición 2.8. *La matriz cuadrada A del teorema 2.5 indicada por $[H,b]$ en las filas y en $[K,S]$ en las columnas, cuyas entradas son $\mathcal{S}_{H,b}([K,S])$ se le llama la tabla de especies. Esta matriz consiste en bloques (dados por las clases de conjugacion de los subgrupos de G) en la diagonal, ceros abajo y además el último bloque de la diagonal (es decir, A_n) , es la tabla de caracteres. Esta matriz es invertible como se vió en el teorema anterior.*

Con lo siguiente se probará que los $S_{H,b}$ son todos los morfismos de anillos de $\mathbb{D}(G)$ a $\mathbb{C}$.

Teorema 2.6. *Sea R un anillo comutativo, $a_1, ..., a_n \in R$ generadores de R como grupo abeliano y $f_1, ..., f_n$ morfismo de anillos de R a $\mathbb{C}$. Si la matriz $(f_i(a_j))$ es invertible, entonces $\{a_1, ..., a_n\}$ es una base de R sobre $\mathbb{Z}$ y cualquier morfismo de anillos de R a $\mathbb{C}$ es uno de los f_i.*

Proof. Por hipotesis se tiene que

$$R = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{Z}a_i,$$

para ver que $\{a_1, ..., a_n\}$ es linealmente independiente, supongase que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i = 0$ entonces

$$\begin{pmatrix} f_1(a_1) & . & . & . & f_1(a_n) \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ f_n(a_1) & . & . & . & f_n(a_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ . \\ . \\ . \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} \lambda_j f_1(a_j) \\ . \\ . \\ . \\ \sum_{j=1}^{n} \lambda_j f_n(a_j) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1\left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j (a_j)\right) \\ . \\ . \\ . \\ f_n\left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j (a_j)\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ . \\ . \\ . \\ 0 \end{pmatrix},$$

Como por hipotesis $(f_i(a_j))$ es invertible entonces se tiene que $\lambda_i = 0$ para cada $i = 1, ..., n$ por lo tanto $\{a_1, ..., a_n\}$ es linealmente independiente. En conclusión $\{a_1, ..., a_n\}$ es una base de R sobre $\mathbb{Z}$.
Si $f : R \longrightarrow \mathbb{C}$ morfismo de anillos, este se extiende a

$$(1 \otimes f) : \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Z}} R \longrightarrow \mathbb{C}$$

que en los básicos se define por $(1 \otimes f)(c \otimes r) = cf(r)$. Por otra parte también considerese

$$(1 \otimes f_i) : \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Z}} R \longrightarrow \mathbb{C}$$

que en los básicos está dada por $(1 \otimes f_i)(c \otimes r) = cf_i(r)$. Ahora, defina

$$\alpha : \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Z}} R \longrightarrow \prod_{i=1}^{n} \mathbb{C}$$

que en los básicos está dada por $\alpha(c \otimes r) = (cf_i(r))_i$, luego se extiende linealmente a todo $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Z}} R$. Note que α tiene como matriz asociada a $(f_i(a_j))$ que por hipotesis es invertible, por lo tanto α es un isomorfismo.
Considere para cada $i \in \{1, ..., n\}$ la i-ésima proyección canónica $\pi_i : \prod_{i=1}^{n} \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, observe que $1 \otimes f_i = \pi_i \circ \alpha$. Además

$$(1 \otimes f) \circ \alpha^{-1} : \prod_{i=1}^{n} \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C},$$

pero las únicos morfismos de este tipo son las proyecciones, por lo tanto existe algún $j \in \{1, ..., n\}$ tal que $(1 \otimes f) \circ \alpha^{-1} = \pi_j$ entonces $1 \otimes f = \pi_j \circ \alpha = 1 \otimes f_i$ por consiguiente $f = f_j$.

□

Definición 2.9. *Se define el automorfismo de anillos $\sigma : \mathbb{D}(G) \longrightarrow \mathbb{D}(G)$ de forma que envía (X, V) a (X, V^*) donde $V^* = Hom(V, \mathbb{C})$.*

Dado X un G-conjunto y $V = \oplus V_x$ un $\mathbb{C}G$-módulo X-graduado. Se tiene

$$V^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(V, \mathbb{C}) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(\oplus V_x, \mathbb{C}) \cong \oplus \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(V_x, \mathbb{C}) = \oplus (V_x)^*$$

en lo anterior se puede verificar que se trata de un isomorfismo de $\mathbb{C}G$-módulos X-graduados, esto significa que $g(V_x)^* \subseteq (V_{gx})^*$. Por lo tanto σ tiene sentido. Para ver que es un morfismo de anillos basta con probar $\sigma((X, V) \otimes (Y, W)) = \sigma((X, V)) \otimes \sigma((Y, W))$, pero antes se comprueba la siguiente proposición.

Proposición 2.4. *Para todo (H, b) se tiene que $\mathcal{S}_{H,b} \circ \sigma = \mathcal{S}_{H,b^{-1}}$.*

Proof. Por el Teorema 1.3 se tiene que

$$\mathcal{X}_{V^*}(a) = \overline{\mathcal{X}_V(a)} = \mathcal{X}_V(a^{-1}),$$

de esto se sigue

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{H,b}(\sigma(X, V)) &= \mathcal{S}_{H,b}(X, V^*) \\ &= \sum_{x \in X, H \leq G_x} \mathcal{X}_{V^*}(b^x) \\ &= \sum_{x \in X, H \leq G_x} \mathcal{X}_V((b^{-1})^x) \\ &= \mathcal{S}_{H,b^{-1}}(X, V)), \end{aligned}$$

Por lo tanto $\mathcal{S}_{H,b} \circ \sigma = \mathcal{S}_{H,b^{-1}}$. □

Teniendo en cuenta la anterior proposición, se considera (X, V) y (Y, W) en $\mathbb{D}(G)$ y se sigue

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{H,b}(\sigma((X, V) \otimes (Y, W))) &= \mathcal{S}_{H,b^{-1}}(X, V)\, \mathcal{S}_{H,b^{-1}}(Y, W) \\ &= \mathcal{S}_{H,b}(\sigma(X, V))\, \mathcal{S}_{H,b}(\sigma(Y, W)) \\ &= \mathcal{S}_{H,b}(\sigma(X, V)) \otimes \sigma(Y, W)), \end{aligned}$$

pero $\mathcal{S}_{H,b}$ es un morfismo inyectivo, así que $\sigma((X, V) \otimes (Y, W)) = \sigma(X, V)) \otimes \sigma(Y, W)$. Es decir, σ es efectivamente un morfismo de anillos.

Acontinuación veremos que el anillo global de representaciones contiene a el anillo de Burnside y el anillo de representaciones.

Teorema 2.7. *Se define*

$$\gamma : B(G) \longrightarrow \mathbb{D}(G)$$

dada por $\gamma(X) = (X, \mathbb{C})$ para cada X en $B(G)$. γ es un morfismo de anillos y además existe

$$\beta : \mathbb{D}(G) \longrightarrow B(G)$$

tal que $\beta\gamma \cong id_{B(G)}$.

Proof. Note γ está dada por $\gamma(G/H) = (G/H, \mathrm{ind}_H^G(\mathbb{C})) = [H, \mathbb{C}]$ sobre los básicos de $B(G)$. Para mostrar que es morfismo de anillos nbasta con comprobar las propiedades sobre los básicos. Supongase que G/H, $G/K \in B(G)$ tal que $G/H \cong G/K$, esto implica que $H = {}^gK$ para algún $g \in G$, por lo tanto

$$[H, \mathbb{C}] = [{}^gK, \mathbb{C}] = [K, \mathbb{C}],$$

de lo cual se infiere que γ esta bien definida.

Considere $G/G \in B(G)$, de la definición de γ se tiene $\gamma(G/G) = [G, \mathbb{C}] \in \mathbb{D}(G)$, y por esto se observa que γ manda unidad en unidad. Así que para verificar que es morfismo de anillos sólo es necesario mostrar que

$$\gamma(G/H \times G/K) = \gamma(G/H)\gamma(G/K). \tag{2.20}$$

Para esto es preciso observar que

$$G/H \times G/K = \bigcup_{x \in [H \backslash G/K]} \frac{G}{H \cap {}^xK},$$

por el Teorema 1.5, lo cual implica

$$\gamma(G/H \times G/K) = \sum_{x \in [H \backslash G/K]} [H \cap {}^xK, \mathbb{C}]. \tag{2.21}$$

Por otra parte teniendo en cuenta el Teorema 2.6

$$\begin{aligned} \gamma(G/H)\gamma(G/K) &= [H, \mathbb{C}][K, \mathbb{C}] \\ &= \sum_{x \in [H \backslash G/K]} [H \cap {}^xK, \mathrm{res}^H_{H \cap {}^xK}(\mathbb{C}) \mathrm{res}^{{}^xK}_{H \cap {}^xK}(\mathbb{C})] \\ &= \sum_{x \in [H \backslash G/K]} [H \cap {}^xK, \mathbb{C}]. \end{aligned} \tag{2.22}$$

y de 2.21 y 2.22 se obtiene el resultado deseado, lo cual implica que γ es un morfismo de anilo. Claramente es γ es inyectivo ya que si $[H, \mathbb{C}] = [K, \mathbb{C}]$ entonces existe algún $g \in G$ tal que ${}^gH = K$ luego $G/H \cong G/K$.

Ahora se define $\beta : \mathbb{D}(G) \longrightarrow B(G)$ que está dada por

$$\beta(X, V) = X$$

donde (X, V) es un generador de $\mathbb{D}(G)$, es decir, X un G-conjunto y V un $\mathbb{C}G$-módulo que es X-graduado. y se puede verificar facilmente que β es morfismo de anillos, además

$$\beta\gamma(G/H) = \beta(G/H, \mathrm{ind}_H^G(\mathbb{C})) = G/H,$$

lo cual implica que $\beta\gamma = \mathrm{id}_{B(G)}$, es decir γ es una sección pero no tiene inversa ya que β no puede ser inyectiva ya que $\mathbb{D}(G)$ tiene rango mayor que el de $B(G)$. $\square$

Teorema 2.8. *Se define*
$$\theta : R(G) \longrightarrow \mathbb{D}(G)$$
cque en los básicos de $R(G)$ está dada por $\theta(S) = (\ \cdot\ , S)$ donde S es un $\mathbb{C}G$-módulo. θ es un morfismo de anillos y existe
$$\alpha : \mathbb{D}(G) \longrightarrow R(G)$$
dada por $\alpha(X, V) = V$. Además $\alpha\theta = \ id_{R(G)}$.

Proof. Note que $\theta(\mathbb{C}) = (\ \cdot\ , \mathbb{C})$. Además si S y T están en $R(G)$ por definición de θ se tiene que

$$\begin{aligned} \theta(S \otimes T) &= (\ \cdot\ , S \otimes T) \\ &= (\ \cdot\ , S) \otimes (\ \cdot\ , T) \\ &= \theta(S) \otimes \theta(T), \end{aligned}$$

y en consecuencia θ es un morfismo de anillos.

Ahora, considere $\alpha : \mathbb{D}(G) \longrightarrow R(G)$ que está dada por $\alpha(X, V) = V$. Claramente α está definida. Para verificar que es un morfismo de anillos basta con notar que $\alpha(\ \cdot\ , \mathbb{C}) = \mathbb{C}$ y que

$$\begin{aligned} \alpha((X, V) \otimes (Y, W)) &= \alpha(X \times Y, V \otimes W) \\ &= V \otimes W \\ &= \alpha(X, V) \otimes \alpha(Y, W). \end{aligned}$$

Por lo tanto α es un morfismo de anillos. Además

$$\alpha\theta(S) = \alpha(\theta(S)) = \alpha(\ \cdot\ , S) = S = \mathrm{id}_{R(G)}(S).$$

Es decir, $\alpha\theta = \ \mathrm{id}_{R(G)}$. □

CHAPTER 3

EL FUNTOR GLOBAL DE REPRESENTACIONES

Para este capítulo se considera $\mathcal{D}$ Una subcategoría preaditiva de la categoría de biconjuntos Ω. Se muestra acontinuación que el funtor que induce el anillo global de representaciones resulta ser un funtor de biconjuntos, luego se estudiará explícitamente como se define en algunos morfismos generadores de la categoría $\mathcal{D}$ (inducción, restricción, inflación y deflación). Por último, a través de algunas propiedades se observará que este funtor resulta ser un funtor de biconjuntos de Green.

Definición 3.1. *El funtor global de representaciones se define de tal mánera que a cada objeto G en $\mathcal{D}$ le asigna $\mathbb{D}(G)$, además si U es un (H,G)-biconjunto finito entonces*

$$\mathbb{D}({}_HU_G) : \mathbb{D}(G) \longrightarrow \mathbb{D}(H), \tag{3.1}$$

está dada por la aplicación que envía $(X,V) \in \mathbb{D}(G)$ a $(U \times_G X, \mathbb{C}U \otimes_{\mathbb{C}G} V)$ que está en $\mathbb{D}(H)$. Se denotará este funtor por $\mathbb{D}(\_)$.

Para comprobar que $\mathbb{D}(\_)$ en (3.1) está bien definida se debe verificar que $(U \times X, \mathbb{C}U \otimes V)$ está en $\mathbb{D}(H)$ en primer lugar. Note que $U \times X$ es un H-conjunto izquierdo y $\mathbb{C}U \otimes V$ un $\mathbb{C}H$-módulo, así que basta con mostrar que $\mathbb{C}U \otimes V$ es $(U \times X)$-graduado.

Suponga que V es X-graduado de forma que $V = \oplus_{x \in X} V_x$ donde cada V_x es $\mathbb{C}$-espacio. Se afirma que

$$\mathbb{C}U \bigotimes_{\mathbb{C}G} V = \bigoplus_{[u,x] \in\, U \times_G X} (u \otimes V_x)\,, \tag{3.2}$$

donde $u \otimes V_x = \{\, u \otimes v \mid v \in V_x \,\}$ y $(\mathbb{C}U \otimes V)_{[u,x]} = u \otimes V_x$.

Antes de probar lo anterior observe primero que si $[u,x] = [u_o, x_o]$ entonces $(u,x) = (u_o g, g^{-1} x_o)$ para algún $g \in G$, entonces $u = u_o g$ y $x = g^{-1} x_o$ lo que implica

$$\begin{aligned} u \otimes V_x &= u_o g \otimes V_{g^{-1}x_o} \\ &= u_o \otimes g V_{g^{-1}x} \\ &= u_o \otimes V_{gg^{-1}x_o} \\ &= u_o \otimes V_{x_o}. \end{aligned}$$

Así que es claro que (3.2) no depende de los representantes que se escojan de cada clase $[u, x]$.

Note que por definición del producto tensorial se tiene

$$\mathbb{C}U \bigotimes_{\mathbb{C}G} V = \sum_{[u,x]\in U \times X} (u \otimes V_x),$$

así que para (3.2) basta probar que si

$$\sum_{[u,x]\in U\times X} \lambda_{[u,x]}(u \otimes v_x) = 0,$$

entonces $\lambda_{[u,x]} = 0$ para cada $[u, x] \in U \times X$.

Ahora, defina

$$t : \mathbb{C}U \times V \longrightarrow \bigoplus_{[u,x]\in U\times_G X} u \otimes V_x$$

de forma que si (u, v) con $u \in U$ y $v \in V$ tal que $v \in V_{x_o}$ para algún $x_o \in X$, se tiene que t manda a (u, v) a la n-ada (donde $n = |U \times X|$) que en la entrada $[u, v_o]$ tiene a $u \otimes v$ y ceros en las demás; luego, esta definición se extiende de forma bilineal a $\mathbb{C}U \times V$, no es díficil ver que t está bien definida y además es balanceada. Teniendo en cuenta la propiedad universal de el producto tensorial si considera

$$h : \mathbb{C}U \times V \longrightarrow \mathbb{C}U \otimes_{\mathbb{C}G} V$$

de forma que $h([u_o, v_o]) = u_o \otimes v_o$ que es bilineal y balanceada por definición del producto tensorial. Existe

$$t' : \mathbb{C}U \otimes_{\mathbb{C}G} V \longrightarrow \bigoplus_{[u,x]\in U\times X} u \otimes V_x$$

de forma que $t' \circ h = t$, de esta mánera $t(u, v) = (t' \circ h)(u, v) = t'(u \otimes v)$. Si

$$\sum_{[u,x]\in U\times X} \lambda_{[u,x]}(u \otimes v_x) = 0,$$

notando que

$$h\left(\sum_{[u,x]\in U\times X} \lambda_{[u,x]}(u, v_x)\right) = \sum_{[u,x]\in U\times X} \lambda_{[u,x]}(u \otimes v_x),$$

se tiene lo siguiente

$$\begin{aligned}
\bigoplus_{[u,x]\in U\times X} \alpha_{[u,x]}(u\otimes v_x) &= t\left(\sum_{[u,x]\in U\times X} \alpha_{[u,x]}(u,v_x)\right)\\
&= t'\circ h\left(\sum_{[u,x]\in U\times X} \alpha_{[u,x]}(u,v_x)\right)\\
&= t'\left(\sum_{[u,x]\in U\times X} \alpha_{[u,x]}(u\otimes v_x)\right)\\
&= t'(0)\\
&= 0,
\end{aligned}$$

luego $\alpha_{[u,x]} = 0$ para cada $[u,x] \in U \times X$, así que se infiere (3.2). Además, si $h \in H$ se tiene

$$h(\mathbb{C}U \otimes V)_{[u,x]} = h(u \otimes V_x) = hu \otimes V_x = (\mathbb{C}U \otimes V)_{[hu,x]} = (\mathbb{C}U \otimes V)_{h[u,x]}.$$

Por lo tanto se concluye que $\mathbb{C}U \otimes V$ es $(U \times X)$-graduado y es claro que $(U \times X, \mathbb{C}U \otimes V) \in \mathbb{D}(H)$.

Si $(X,V) \cong (Y,W)$, existe un par (f,α) tal que $f : X \longrightarrow Y$ es un isomorfismo de G-conjuntos y $\alpha : V \longrightarrow W$ un morfismo de $\mathbb{C}G$-módulos que son compatibles, es decir que $\alpha(V_x) = W_{f(x)}$. Para verificar que $\mathbb{D}({}_HU_G)(X,V) = \mathbb{D}({}_HU_G)(Y,W)$, se define

$$f_o : U \times X \longrightarrow U \times Y$$

dada por $f_o([u,x]) = [u, f(x)]$ que claramente está bien definida y es biyectiva dado que f es isomorfismo. además para cada $h \in H$ se tiene que

$$f_o(h[u,x]) = f_o([hu,x]) = [hu, f(x)] = h[u,f(x)] = h\, f_o([u,x]),$$

y con esto se deduce que f_o es un isomorfismo de H-conjuntos. De una mánera similar se define $\alpha_o : (\mathbb{C}U \otimes V) \longrightarrow (\mathbb{C}U \otimes W)$ tal que $\alpha_o(u \otimes v) = u \otimes \alpha(v)$ que resulta isomorfismo de $\mathbb{C}H$-módulos. Ahora se comprueba que f_o y α_o son compatibles, así se sigue

$$\begin{aligned}
\alpha_o((\mathbb{C}U\otimes V)_{[u,x]}) &= \alpha_o(u\otimes V_x)\\
&= u\otimes\alpha(V_x)\\
&= u\otimes W_{f(x)}\\
&= (\mathbb{C}U\otimes W)_{[u,f(x)]}\\
&= (\mathbb{C}U\otimes W)_{f_o([u,x])}.
\end{aligned}$$

Así que $(U \times X, \mathbb{C}U \otimes V) \cong (U \times Y, \mathbb{C}U \otimes W)$, y se concluye que $\mathbb{D}({}_HU_G)$ está bien definida.

3.1 El funtor global de representaciones como funtor de biconjuntos.

Teorema 3.1. *El funtor global de representaciones $\mathbb{D}(\_)$ es un funtor de biconjuntos.*

Proof. Se debe comprobar las propiedades dadas en la Definición 1.9. Para $\mathbb{D}(\_)$. Debido a la propiedad universal de Burnside (ver lema 1.6) solo basta comprobar (c) y (d) de la Definición 1.9 para decir que $\mathbb{D}(\_)$ es funtor de biconjuntos.

Considere H, G y K que están en $\mathcal{D}$. si $U \in B(H,G)$ y $V \in B(G,K)$ debemos verificar que

$$\mathbb{D}({}_HU_G) \circ \mathbb{D}({}_GV_K) = \mathbb{D}({}_HU_G \times_G {}_GV_K).$$

Tome $(Z,W) \in \mathbb{D}(K)$, entonces se tiene

$$\begin{aligned}
\mathbb{D}({}_HU_G) \circ \mathbb{D}({}_GV_K)(Z,V) &= \mathbb{D}({}_HU_G)\left(\mathbb{D}({}_GV_K)(Z,W)\right)\\
&= \mathbb{D}({}_HU_G)\left(V \times_K Z, \mathbb{C}V \otimes_{\mathbb{C}K} W\right)\\
&= \left(U \times_G (V \times_K Z), \mathbb{C}U \otimes_{\mathbb{C}G} (\mathbb{C}V \otimes_{\mathbb{C}K} W)\right)\\
&= \left(U \times_G V \times_K Z, \mathbb{C}U \otimes_{\mathbb{C}G} \mathbb{C}V \otimes_{\mathbb{C}K} W\right),
\end{aligned}$$

por otra parte teniendo en cuenta que $\mathbb{C}\,(U \times_G V) \cong \mathbb{C}U \otimes_{\mathbb{C}G} \mathbb{C}V$ se sigue

$$\begin{aligned}
\mathbb{D}({}_HU_G \times_G {}_GV_K)(Z,V) &= \left((U \times_G V) \times Z, \mathbb{C}(U \times_G V) \otimes_{\mathbb{C}K} W\right)\\
&= \left((U \times_G V) \times_K Z, (\mathbb{C}U \otimes_{\mathbb{C}G} \mathbb{C}V) \otimes_{\mathbb{C}K} W)\right)\\
&= \left(U \times_G V \times_K Z, \mathbb{C}U \otimes_{\mathbb{C}G} \mathbb{C}V \otimes_{\mathbb{C}K} W\right),
\end{aligned}$$

entonces de lo anterior se tiene que $\mathbb{D}({}_HU_G \times_G V_K) = \mathbb{D}({}_HU_G) \circ \mathbb{D}({}_GV_K)$.

Note además que si G está en $\mathcal{D}$ entonces ${}_GG_G = id(G)$ es un (G,G)-biconjunto. Considerando $(X,V) \in \mathbb{D}(G)$ se sabe que $G \times_G X \cong X$ y $\mathbb{C}G \otimes_{\mathbb{C}G} V \cong V$ por lo tanto

$$\mathbb{D}({}_GG_G)(X,V) = (G \times_G X, \mathbb{C}G \otimes_{\mathbb{C}G} V) = (X,V) = \mathrm{id}_{\mathbb{D}(G)}(X,V),$$

entonces

$$\mathbb{D}({}_GG_G) = \mathrm{id}_{\mathbb{D}(G)},$$

es decir, $\mathbb{D}(\_)$ manda identidades locales en el morfismos identidad. De lo anterior se infiere que $\mathbb{D}(\_)$ es un funtor de biconjuntos. $\square$

En el capítulo 1, Se Observó que dado X un (G,H)-biconjunto este se descompone en subconjuntos transitivos que corresponden a las orbitas de X bajo la acción de $(G \times H.)$ A su vez estos transitivos tienen una descomposición en elementos básicos de la categoría de biconjuntos (ver descomposición de Bouc 1.1). A continuación se estudiará de forma más explícita lo que pasa con estos básicos mediante el funtor $\mathbb{D}(\_)$. Si no es claro a donde pertenece $[K,S]$ se denotará $[K,S]_G$ para aclarar que $[K,S] = (G/K, \mathrm{ind}_K^G(S))$, es decir que $[K,S]$ está en $\mathbb{D}(G)$.

Teorema 3.2. *Si H es un subgrupo de G, considerando la inducción ${}_GG_H$, se satisface que*

$$\mathbb{D}({}_GG_H) : \mathbb{D}(H) \longrightarrow \mathbb{D}(G)$$

está dada por $\mathbb{D}({}_GG_H)(X,V) = (ind_H^G(X), ind_H^G(V))$. Se sigue que $\mathbb{D}({}_GG_H)([K,S]_H) = [K,S]_G$ para $[K,S]$ en $\mathbb{D}(H)$. Además $\mathbb{D}({}_GG_H)$ no es un morfismo de anillos.

Proof. Se tiene directamente que

$$\mathbb{D}({}_GG_H)(X,V) = (G \times_H X, \mathbb{C}G \otimes_{\mathbb{C}H} V) = (\mathrm{ind}_H^G(X), \mathrm{ind}_H^G(V)).$$

Se considera $[K,S]$ en $\mathbb{D}(H)$, por la Definición 2.4 se sigue que

$$\begin{aligned}
\mathbb{D}({}_GG_H)([K,S]_H) &= \mathbb{D}({}_GG_H)\left(H/K, \mathrm{ind}_K^H(S)\right) \\
&= \left(G \times_H H/K, \mathbb{C}G \otimes_{\mathbb{C}H} \mathrm{ind}_K^H(S)\right) \\
&= \left(G \times_H H/K, \mathbb{C}G \otimes_{\mathbb{C}G} \mathbb{C}H \otimes_{\mathbb{C}K} S\right),
\end{aligned}$$

se define

$$\begin{aligned}
f : G \times_H H/K &\longrightarrow G/K \\
[g, hK] &\longrightarrow ghK.
\end{aligned}$$

Si $[g,hK] = [g_o, h_oK]$ en $G \times_H H/K$ entonces para algún $a \in H$ se tiene que $(ga, a^{-1}hK) = (g_o, h_oK)$, entonces

$$f[g_o, h_oK] = g_oh_oK = (ga)(a^{-1}h)K = ghK = f[g,hK],$$

así que f está bien definida. Para verificar que es un isomorfismo note que si $ghK = K$ entonces $gh = k$ para algún $k \in K$, por lo que $g = kh^{-1} \in H$, y esto implica

$$[g,hK] = [1, ghK] = [1, kK] = [1, K],$$

se infiere que f es inyectiva. Además si $gK \in G/K$ claramente $f([g,K]) = gK$ por lo tanto f es sobreyectiva. Note que para cada $g \in G$ se tiene

$$f(g[a,hK]) = f([ga,hK]) = (ga)hK = g(ah)K = g\, f([a,hK])$$

de lo anterior se infiere que f es un isomorfismo de G-conjuntos.

Por otra parte observe que $\mathbb{C}G \otimes_{\mathbb{C}H} \mathbb{C}H \otimes_{\mathbb{C}K} S$ es $(G \times H/K)$-graduado de forma que

$$\mathbb{C}G \otimes_{\mathbb{C}H} \mathbb{C}H \otimes_{\mathbb{C}K} S \cong \bigoplus_{[g,hK] \in\, G \times H/K} g \otimes_{\mathbb{C}H} h \otimes_{\mathbb{C}K} S,$$

considerando

$$(\mathbb{C}G \otimes \mathbb{C}H \otimes S)_{[g,hK]} = g \otimes h \otimes S.$$

También se tiene

$$\mathbb{C}G \otimes_{\mathbb{C}K} S = \bigoplus_{g \in [G/K]} g \otimes S,$$

tomando

$$(\mathbb{C}G \otimes_{\mathbb{C}K} S)_{gK} = g \otimes S.$$

Dado lo anterior, se define

$$\begin{array}{rcl} \alpha \;:\; \mathbb{C}G \otimes_{\mathbb{C}H} \mathbb{C}H \otimes_{\mathbb{C}K} S & \longrightarrow & \mathbb{C}G \otimes_{\mathbb{C}K} S \\ g \otimes h \otimes s & \longrightarrow & gh \otimes s. \end{array}$$

donde α resulta ser un isomorfismo de $\mathbb{C}G$-módulos. Observe además que

$$\begin{array}{rcl} \alpha\left((\mathbb{C}G \otimes \mathbb{C}H \otimes S)_{[g,hK]}\right) & = & \alpha(g \otimes h \otimes S) \\ & = & gh \otimes S \\ & = & (\mathbb{C}G \otimes_{\mathbb{C}K} S)_{ghK} \\ & = & (\mathbb{C}G \otimes_{\mathbb{C}K} S)_{f([g,hK])}, \end{array}$$

es decir, f y α son compatibles. Entonces

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{D}({}_GG_H)([K,S]_H) & = & (G/K, \mathbb{C}G \otimes_{\mathbb{C}K} S) \\ & = & \left(G/K, \mathrm{ind}_K^G(S)\right) \\ & = & [K,S]_G. \end{array}$$

Note que $\mathbb{D}({}_GG_H)([H,\mathbb{C}]_H) = [H,\mathbb{C}]_G$ es decir, mediante $\mathbb{D}({}_GG_G)$ la imagen de la unidad de $\mathbb{D}(H)$ no va a la unidad de $\mathbb{D}(G)$ que es $[G,\mathbb{C}]$, de esto se deduce que el morfismo $\mathbb{D}({}_GG_H)$ no es de anillos.

□

Teorema 3.3. *Si H es un subgrupo G, considerando la restricción ${}_HG_G$, se satisface que*

$$\mathbb{D}({}_HG_G) : \mathbb{D}(G) \longrightarrow \mathbb{D}(H)$$

está dada por $\mathbb{D}({}_HG_G)(X,V) = (res_H^G(X), res_H^G(V))$ (donde ${}_HX$ significa que se considera a X con la restriccion de G-conjunto a H-conjunto). De esta definición se tiene

$$\mathbb{D}({}_HG_G)([K,S]) = \sum_{x \in [H\backslash G/K]} \left[H \cap {}^xK \,,\, res_{H\cap {}^xK}^{{}^xK}({}^xS)\right],$$

para cada $[K,S]$ en $\mathbb{D}(G)$. Además $\mathbb{D}({}_HG_G)$ es un morfismo de anillos.

Proof. Considere X un G-conjunto, observe que ${}_HG_G \times_G X \cong \mathrm{res}_H^G(X)$ como H-conjuntos. Tomando (X,V) en $\mathbb{D}(G)$, vía la Definición 2.4 se sigue

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{D}({}_GG_H)(X,V) & = & ({}_HG_G \times_G X, \mathbb{C}G \otimes_{\mathbb{C}G} V) \\ & = & \left(\mathrm{res}_H^G(X), \mathrm{res}_H^G(V)\right). \end{array}$$

En este sentido para $[K,S]$ en $\mathbb{D}(G)$ se sigue

$$\begin{aligned}\mathbb{D}({}_HG_G)([K,S]) &= \mathbb{D}({}_HG_G)\left(G/K, \mathrm{ind}_K^G(S)\right)\\ &= \left(\mathrm{res}_H^G\,(G/K)\,, \mathrm{res}_H^G\mathrm{ind}_K^G(S)\right).\end{aligned}$$

Por la fórmula de Mackey 1.5 se tiene

$$\mathrm{res}_H^G\mathrm{ind}_K^G(S) = \sum_{x\in[H\backslash G/K]} \mathrm{ind}_{H\cap {}^xK}^H \mathrm{res}_{H\cap {}^xK}^{{}^xK}({}^xS),$$

y por la proposición 1.3 se tiene

$$\mathrm{res}_H^G(G/K) \cong \bigsqcup_{x\in[H\backslash G/K]} (H/H\cap\, {}^xK)\,,$$

además para cada $x\in[H\backslash G/K]$ se tiene

$$\mathrm{ind}_{H\cap {}^xK}^H \mathrm{res}_{H\cap {}^xK}^{{}^xK}({}^xS) \;=\; \bigoplus_{a\in[H/H\cap\, {}^xK]} \left(a\otimes \mathrm{res}_{H\cap {}^xK}^{{}^xK}({}^xS)\right),$$

es decir, $\mathrm{ind}_{H\cap {}^xK}^H \mathrm{res}_{H\cap {}^xK}^{{}^xK}({}^xS)$ es $(H/H\cap\, {}^xK)$-graduado. Teniendo en cuenta lo anterior se sigue que

$$\begin{aligned}\mathbb{D}({}_HG_G)([K,S]) &= \left(\bigsqcup_{x\in[H\backslash G/K]} (H/H\cap\, {}^xK)\,, \sum_{x\in[H\backslash G/K]} \mathrm{ind}_{H\cap {}^xK}^H \mathrm{res}_{H\cap {}^xK}^{{}^xK}({}^xS)\right)\\ &= \sum_{x\in[H\backslash G/K]} \left(H/H\cap\, {}^xK\,,\ \mathrm{ind}_{H\cap {}^xK}^H \mathrm{res}_{H\cap {}^xK}^{{}^xK}({}^xS)\right)\\ &= \sum_{x\in[H\backslash G/K]} \left[H\cap\, {}^xK\,,\ \mathrm{res}_{H\cap {}^xK}^{{}^xK}({}^xS)\right].\end{aligned}$$

Observe que

$$\mathbb{D}({}_HG_G)(\,\cdot\,,\mathbb{C}) = (\,\cdot\,,\mathrm{res}_H^G(\mathbb{C})) = (\cdot\,,\mathbb{C}),$$

así que para verificar que es de anillos basta con comprobar que

$$\mathbb{D}({}_HG_G)((X,V)\otimes(Y,W)) \;=\; \mathbb{D}({}_HG_G)(X,V)\otimes\mathbb{D}({}_HG_G)(Y,W).$$

para (X,V), (Y,W) en $\mathbb{D}(G)$, pero esto se tiene porque

$$\begin{aligned}\mathbb{D}({}_HG_G)((X,V)\otimes(Y,W)) &= \mathbb{D}({}_HG_G)(X\times Y\,,\ V\otimes W)\\ &= (\mathrm{res}_H^G(X\times Y)\,,\ \mathrm{res}_H^G(V\otimes W))\\ &= (\mathrm{res}_H^G(X)\times\mathrm{res}_H^G(Y)\,,\ \mathrm{res}_H^G(V)\otimes\mathrm{res}_H^G(W))\\ &= (\mathrm{res}_H^G(X)\,,\ \mathrm{res}_H^G(V))\otimes(\mathrm{res}_H^G(Y)\,,\ \mathrm{res}_H^G(W))\\ &= \mathbb{D}({}_HG_G)(X,V)\otimes\mathbb{D}({}_HG_G)(Y,W).\end{aligned}$$

Por lo tanto $\mathbb{D}({}_HG_G)$ es un morfismo de anillos. $\square$

Teorema 3.4. *Si N es un subgrupo normal de G. si se considera $H = G/N$, para la inflación que se denota ${}_GH_H$, se satisface que*

$$\mathbb{D}({}_GH_H) : \mathbb{D}(H) \longrightarrow \mathbb{D}(G)$$

está dada por $\mathbb{D}({}_GH_H)([K,S]) = [G_o, inf_H^{G_o}(S)]$ donde $K = G_o/N$. Además, $\mathbb{D}({}_GH_H)$ es un morfismo de anillos.

Proof. Considere (X, V) en $\mathbb{D}(H)$, vía la Definición 2.4 se sigue

$$\mathbb{D}({}_HH_G)(X,V) = ({}_GH_H \times X, \mathbb{C}H \otimes_{\mathbb{C}H} V) = ({}_GH_H \times X, \mathrm{inf}_H^G(V)) = (\mathrm{inf}_H^G(X), \mathrm{inf}_H^G(V))$$

Tomando $[K, S]$ en $\mathbb{D}(H)$ entonces $K \leq H$ es decir $K = G_o/N$ para algún $G_o \leq G$, así que

$$\begin{aligned} \mathbb{D}({}_GH_H)[K,S] &= \mathbb{D}({}_GH_H)(H/K, \mathrm{ind}_K^H(S)) \\ &= ({}_GH_H \times H/K, \mathbb{C}H \otimes_{\mathbb{C}H} \mathbb{C}H \otimes_{\mathbb{C}K} \otimes S). \end{aligned}$$

Se prueba a continuación que

$${}_GH_H \ \times \ H/K \cong \ G/G_o.$$

Considere

$$f : \ {}_GH_H \ \times \ H/K \longrightarrow \ G/G_o$$

dada de forma que

$$f([g_1N, g_2N(G_o/N))]) = (g_1g_2)G_o.$$

Note que $[g_1N, g_2N(G_o/N))] = [N, g_1g_2N(G_o/N)]$ así es claro que f está bien definida, ya que f es de cierta mánera natural. Suponga que $f([g_1N, g_2N(G_o/N)]) = G_o$ lo que implica que $g_1g_2 \in G_o$ entonces

$$[g_1N, g_2N(G_o/N)] = [N, g_1g_2N(G_o/N)] = [N, (G_o/N)],$$

así que f es inyectiva. Para $gG_o \in (G/G_o)$ se tiene que $f([gN, (G_o/N)]) = gG_o$ por lo que f es sobreyectiva y así resulta un isomorfismo de G-conjuntos.
Por otra parte utilizando la relación (1.7) se obtiene

$$\begin{aligned} \mathbb{C}H \otimes_{\mathbb{C}H} \mathbb{C}H \otimes_{\mathbb{C}K} S &= \mathrm{inf}_H^G \mathrm{ind}_K^H(S) \\ &= \mathrm{inf}_{G/N}^G \mathrm{ind}_{G_o/N}^{G/N}(S) \\ &= \mathrm{ind}_{G_o}^G \mathrm{inf}_{G_o/N}^{G_o}(S) \\ &= \mathbb{C}G \otimes_{\mathbb{C}G_o} \mathbb{C}K \otimes_{\mathbb{C}K} S. \end{aligned}$$

Note que $[(G/N)/(G_o/N)] = [G/G_o]$ y se sigue

$$\mathbb{C}H \ \otimes_{\mathbb{C}H} \ \mathbb{C}H \ \otimes_{\mathbb{C}K} S \cong \bigoplus_{a \in [G/G_o]} N \otimes_{\mathbb{C}H} aN \otimes_{\mathbb{C}K} S,$$

Considerando

$$(\mathbb{C}H \otimes_{\mathbb{C}H} \mathbb{C}H \otimes_{\mathbb{C}K} S)_{aN(G_o/N)} = N \otimes_{\mathbb{C}H} aN \otimes_{\mathbb{C}K} S$$

para cada $aN(G_o/N) \in H/K$. Por lo tanto $(\mathbb{C}H \otimes_{\mathbb{C}H} \mathbb{C}H \otimes_{\mathbb{C}K} S)$ es H/K-graduado de forma que

De igual mánera $\mathbb{C}G \otimes_{\mathbb{C}G_o} \mathbb{C}K \otimes S$ es G/G_o graduado como sigue

$$\mathbb{C}G \otimes_{\mathbb{C}G_o} \mathbb{C}K \otimes S = \bigoplus_{a \in [G/G_o]} a \otimes N \otimes S,$$

tomando

$$\left(\mathbb{C}G \otimes_{\mathbb{C}G_0} \mathbb{C}K \otimes_{\mathbb{C}K} S\right)_{aG_0} = a \otimes N \otimes S.$$

Ahora, defína

$$\alpha : \quad \mathbb{C}G \otimes_{\mathbb{C}H} \mathbb{C}K \otimes_{\mathbb{C}K} S \quad \longrightarrow \quad \mathbb{C}G \otimes_{\mathbb{C}G_0} \mathbb{C}K \otimes_{\mathbb{C}K} S$$

De forma que $\alpha(g_1N \otimes g_2N \otimes s) = g_1g_2 \otimes N \otimes s$. Noteque $g_1N \otimes g_2N \otimes s = g_1g_2N \otimes N \otimes s$ así que claramente α está bien definido y corresponde a un isomorfismo de $\mathbb{C}G$-módulos. Se debe comprobar que f y α son compatibles, para esto observe que

$$\begin{aligned}
\alpha\left((\mathbb{C}H \otimes_{\mathbb{C}H} \mathbb{C}H \otimes S)_{aN(G/N)}\right) &= \alpha\left(N \otimes aN \otimes S\right) \\
&= a \otimes N \otimes S \\
&= (\mathbb{C}G \otimes_{\mathbb{C}G_0} \mathbb{C}K \otimes_{\mathbb{C}K} S)_{aG_0} \\
&= (\mathbb{C}G \otimes_{\mathbb{C}G_0} \mathbb{C}K \otimes_{\mathbb{C}K} S)_{f(aN(G_0/N))}.
\end{aligned}$$

De lo que se infiere que $D({}_GH_H)([K,S]) = [G_0, \inf_K^{G_0}(S)]$. □

Teorema 3.5. *Si N es un subgrupo normal de G. Considerando $H = G/N$, para la deflación que se denota por ${}_HH_G$, se satisface que*

$$\mathbb{D}({}_HH_G) : \mathbb{D}(G) \longrightarrow \mathbb{D}(H),$$

está definida por $\mathbb{D}({}_HH_G)([K,S]) = [KN/N, iso\,(\varphi) \circ def\,{}^{K}_{K/(K\cap N)}(S)]$ para cada $[K,S]$ en $\mathbb{D}(G)$, donde $\varphi : KN/N \longrightarrow K/(K \cap N)$ el isomorfismo natural. Además $\mathbb{D}({}_HH_G)$ no es morfismo de anillos.

Proof. Considere $[K,S]$ en $\mathbb{D}(G)$ entonces

$$\begin{aligned}
\mathbb{D}({}_HH_G)([K,S]) &= \mathbb{D}({}_HH_G)(G/K, \operatorname{ind}{}^{G}_{K}(S)) \\
&= \left({}_HH_G \times G/K, \mathbb{C}H \otimes_{\mathbb{C}G} \mathbb{C}G \otimes_{\mathbb{C}K} S\right).
\end{aligned}$$

Si $[gN, GK] \in_H H_G \times\ _G(G/K)$ se tiene

$$[gN, g_0K] = [gg_0N, K] = gg_0N[N,K],$$

lo que significa que ${}_H H_G \times {}_G(G/K)$ es un H-conjunto transitivo, y por tanto

$$ {}_H H_G \times {}_G(G/K) = \frac{(G/N)}{E}, $$

donde E el estabilizador de $[N, K]$ mediante la acción de H, es decir

$$ \begin{aligned} E &= \{gN \in (G/N) : gN[N, K] = [N, K]\} \\ &= \{gN \in (G/N) : [gN, K] = [N, K]\}, \end{aligned} $$

Observe que si $[gN, K] = [N, K]$, entonces para algún $a \in G$ se tiene

$$ (gN, K) = (N \circ a, a^{-1} \circ K) = (aN, a^{-1}K), $$

y como consecuencia de esto $gN = aN$ y $K = a^{-1}K$, lo cual es equivalente a tener que $a \in K$ y $g \in KN$. Así que $E = KN/N$, entonces se concluye

$$ {}_H H_G \times G/K = (G/N)/(KN/N). $$

Además de lo anterior, note

$$ \begin{aligned} \mathbb{C}H \otimes_{\mathbb{C}G} \mathbb{C}G \otimes_{\mathbb{C}K} S &= \mathbb{C}(G/N) \otimes_{\mathbb{C}G} CG \otimes_{\mathbb{C}K} S \\ &\cong \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{C}N} \mathbb{C}G \otimes_{\mathbb{C}K} S. \end{aligned} $$

Defíniendo

$$ \alpha : \quad \mathbb{C}(G/N) \otimes_{\mathbb{C}G} \otimes \mathbb{C}G \otimes_{\mathbb{C}K} S \longrightarrow \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{C}N} \mathbb{C}G \otimes_{\mathbb{C}K} S \tag{3.3} $$

De forma que $\alpha(gN \otimes g_0 \otimes s) = 1 \otimes gg_0 \otimes s$. Se observa que α no depende del representante que se tome de gN, ya que $\alpha(gnN \otimes g_0 \otimes s) = 1 \otimes gng_0 \otimes s$ y por ser N normal se tiene $gn = n_0 g$ para algún $n_0 \in N$ y por lo tanto

$$ \begin{aligned} \alpha(gnN \otimes g_0 \otimes s) &= 1 \otimes n_0 gg_0 \otimes S \\ &= n_0 \otimes gg_0 \otimes S \\ &= 1 \otimes gg_0 \otimes S. \end{aligned} $$

Debido a que N actua trivialmente en $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{C}N} \mathbb{C}G \otimes_{\mathbb{C}K} S$, se infiere que α es un isomorfismo de $\mathbb{C}(G/N)$-módulos.

Por la propiedad (1.4), se deduce

$$ \operatorname{ind}{}^{G/N}_{KN/N} \circ \operatorname{iso}(\varphi) \circ \operatorname{def}{}^{K}_{K/(K\cap N)}(S) \cong \operatorname{def}{}^{G}_{G/N} \circ \operatorname{ind}{}^{G}_{K}(S), $$

siendo $\varphi : KN/N \longrightarrow K/(K \cap N)$ el isomorfismo natural. Como

$$ \operatorname{def}{}^{G}_{G/N} \circ \operatorname{ind}{}^{G}_{K}(S) = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{C}N} \mathbb{C}G \otimes_{\mathbb{C}K} S = \mathbb{C}(G/N) \otimes_{\mathbb{C}G} \mathbb{C}G \otimes_{\mathbb{C}K} S, $$

se sigue directamente e lo anterior que

$$ \mathbb{C}(G/N) \otimes_{\mathbb{C}G} \mathbb{C}G \otimes_{\mathbb{C}K} S = \operatorname{ind}{}^{G/N}_{KN/N} \operatorname{def}{}^{K}_{K/K\cap N}(S). \tag{3.4} $$

Note que $[G/K] \cong [(G/N)/(KN/N)]$ y

$$\mathbb{C}(G/N) \otimes_{\mathbb{C}G} \mathbb{C}G \otimes_{\mathbb{C}K} S \cong \bigoplus_{a \in [G/K]} N \otimes a \otimes S,$$

tomando

$$(\mathbb{C}(G/N) \otimes_{\mathbb{C}G} \mathbb{C}G \otimes_{\mathbb{C}K} S)_{aN(KN/N)} = N \otimes a \otimes S.$$

Y además

$$\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{C}N} \mathbb{C}G \otimes_{\mathbb{C}K} S \cong \bigoplus_{a \in [G/K]} (1 \otimes a \otimes S),$$

tomando

$$(\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{C}N} \mathbb{C}G \otimes_{\mathbb{C}K} S)_{aN(KN/N)} = 1 \otimes a \otimes S.$$

Ahora, de la definición de α se tiene

$$\begin{aligned} \alpha\left((\mathbb{C}(G/N) \otimes_{\mathbb{C}G} \mathbb{C}G \otimes_{\mathbb{C}K} S)_{aN(KN/N)}\right) &= \alpha\,(N \otimes a \otimes S) \\ &= 1 \otimes a \otimes S \\ &= (\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{C}N} \mathbb{C}G \otimes_{\mathbb{C}K} S)_{aN(KN/N)}, \end{aligned}$$

y en consecuencia α es compatible con la función identidad de $(G/N)/(KN/N)$. Esto implica

$$\begin{aligned} \mathbb{D}({}_H H_G)([K,S]) &= \left((G/N)/(KN/N), \mathrm{ind}\,{}^{G/N}_{KN/N} \circ \mathrm{iso}\,(\varphi) \circ \mathrm{def}^{K}_{K/K\cap N}(S)\right) \\ &= \left[KN/N, \mathrm{iso}\,(\varphi) \circ \mathrm{def}\,{}^{K}_{K/K\cap N}(S)\right]. \end{aligned}$$

Así el teorema queda demostrado porque $\mathbb{D}(\mathrm{iso}(\varphi))(X,V) = ({}_{\varphi}X.{}_{\varphi}V)$. □

3.2 El funtor global de representaciones como funtor de Green.

En esta sección se probará un último teorema que constituye el resultado principal de este trabajo, se mostrará que el funtor global de representaciones es un funtor de biconjuntos de Green, teniendo en cuenta la Definición 1.10.
Recuerde que dado G en la categoría $\mathcal{D}$, por (2.11) se tiene

$$\mathbb{D}(G) = \sum_{H \in [G \backslash sub(G)],\ S \in Irr(H)} \mathbb{Z}[H,S],$$

así que $\mathbb{D}(G)$ es un $\mathbb{Z}$-álgebra asociativa y con $(\,\cdot\,,\mathbb{C})$ como unidad. Una vez dicho esto, se procede a enunciar el siguiente teorema.

Teorema 3.6. *EL funtor global de representaciones $\mathbb{D}(\_)$ es un funtor de biconjuntos de Green.*

Proof. En la sección anterior se probó que $\mathbb{D}(\_)$ es un funtor de biconjuntos, se verificará a continuación las propiedades mencionadas en la Definición 1.10.

Dados el par G, H de grupos en la categoría $\mathcal{D}$, se define

$$\pi : \mathbb{D}(G) \times \mathbb{D}(H) \longrightarrow \mathbb{D}(G \times H) \tag{3.5}$$

que manda $((X,V),(Y,W))$ a $\mathbb{D}({}_{G\times H p_1}G_G)(X,V) \otimes \mathbb{D}({}_{G\times H p_2}H_H)(Y,W)$, donde p_1 y p_2 son las proyecciones de G y H respectivamente. En adelante omitiremos p_1 y p_2 en la notación.

Note que

$$\mathbb{D}({}_{G\times H}G_G)(X,V) = ({}_{G\times H}G_G \times_G {}_G X, \mathbb{C}G \otimes_{\mathbb{C}G} V)$$

y

$$\mathbb{D}({}_{G\times H}H_H)(Y,W) = ({}_{G\times H}H_H \times_H {}_H Y, \mathbb{C}H \otimes_{\mathbb{C}H} W),$$

así que denotaremos

$$\pi((X,V),(Y,W)) = (X \times Y, V \otimes_{\mathbb{C}} W)$$

donde $X \times Y$ es un $(G \times H)$-conjunto con la acción $(g,h) \circ (x,y) = (gx, hy)$, y $V \otimes_{\mathbb{C}} W$ un $\mathbb{C}(G \times H)$-módulo que es $(X \times Y)$-graduado.

Como $\mathbb{D}({}_{G\times H}G_G)$ y $\mathbb{D}({}_{G\times H}H_H)$ son morfismos de anillos se infiere que π es $\mathbb{Z}$-bilineal. Ahora, se demuestran las siguientes condiciones:

- **Asociatividad.** Tomese G, H y K en la categoría $\mathcal{D}$ y $\gamma : (G \times H) \times K \longrightarrow G \times (H \times K)$ el isomorfismo natural. Considere el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathbb{D}(G) \times \mathbb{D}(H) \times \mathbb{D}(K) \arrow[r, "(\mathrm{id}_G,\pi)"] \arrow[d, "(\pi,\mathrm{id}_K)"'] & \mathbb{D}(G) \times \mathbb{D}(H \times K) \arrow[d, "\pi"] \\ \mathbb{D}(G \times H) \times \mathbb{D}(K) \arrow[r, "\alpha\circ\pi"'] & \mathbb{D}(G \times (H \times K)) \end{tikzcd}$$

Donde α es el morfismo de anillos que induce γ, es decir,

$$\alpha = \mathbb{D}\left({}_{G\times(H\times K)\gamma}(G \times H) \times K_{(G\times H)\times K}\right).$$

Ahora, tomando $(X,V) \in \mathbb{D}(G)$, $(Y,V) \in \mathbb{D}(H)$ y $(Z,U) \in \mathbb{D}(K)$, entonces se sigue

$$(\pi, \mathrm{id}_K)((X,V),(Y,V),(Z,W)) = (\mathbb{D}({}_{G\times H}G_G)(X,V) \otimes \mathbb{D}({}_{G\times H}H_H)(Y,W),(Z,U))$$

luego $\pi(\mathbb{D}({}_{G\times H}G_G)(X,V) \otimes \mathbb{D}({}_{G\times H}H_H)(Y,W),(Z,U))$ es

$$\mathbb{D}({}_{(G\times H)\times K}G \times H_{G\times H})\,(\mathbb{D}({}_{G\times H}G_G)(X,V) \otimes \mathbb{D}({}_{G\times H}H_H)(Y,W)) \otimes \mathbb{D}({}_{(G\times H)\times K}K_K)(Z,U),$$

teniendo en cuenta que $\mathbb{D}({}_{(G\times H)\times K}G\times H_{G\times H})$ es un morfismo de anillos y que

$$ {}_{(G\times H)\times K}G\times H_{G\times H}\times_{G\times H}{}_{G\times H}G_G\cong {}_{(G\times H)\times K}G_G, $$

e igualmente

$$ {}_{(G\times H)\times K}G\times H_{G\times H}\times_{G\times H}{}_{G\times H}H_H\cong {}_{(G\times H)\times K}H_H, $$

entonces queda

$$ \mathbb{D}({}_{(G\times H)\times K}G_G)(X,V)\otimes\mathbb{D}({}_{(G\times H)\times K}H_H)(Y,W)\otimes\mathbb{D}({}_{(G\times H)\times K}K_K)(Z,U), $$

y α lo manda a

$$ \mathbb{D}({}_{G\times(H\times K)}G_G)(X,V)\otimes\mathbb{D}({}_{G\times(H\times K)}H_H)(Y,W)\otimes\mathbb{D}({}_{G\times(H\times K)}K_K)(Z,U). $$

que está en $\mathbb{D}(G\times(H\times K))$.

Por otra parte,

$$ (\mathrm{id}_G,\pi)((X,V),(Y,W),(Z,U))=((X,V),\mathbb{D}({}_{H\times K}H_H)(Y,W)\otimes\mathbb{D}({}_{H\times K}K_K)(Z,U)), $$

aplicando π queda que

$$ \mathbb{D}({}_{G\times(H\times K)}G_G)(X,V)\otimes\mathbb{D}({}_{G\times(H\times K)}H\times K_{H\times K})\,(\mathbb{D}({}_{H\times K}H_H)(Y,W)\otimes\mathbb{D}({}_{H\times K}K_K)(Z,U)) $$

dado que $\mathbb{D}({}_{G\times(H\times K)}H\times K_{H\times K})$ es un morfismo de anillos y

$$ {}_{(G\times H)\times K}H\times K_{H\times K}\times_{H\times K}{}_{H\times K}H_H\cong {}_{H\times K}H_H, $$

y de la misma forma

$$ {}_{(G\times H)\times K}H\times K_{H\times K}\times_{H\times K}{}_{H\times K}K_K\cong {}_{H\times K}K_K, $$

entonces queda

$$ \mathbb{D}({}_{G\times(H\times K)}G_G)(X,V)\otimes\mathbb{D}({}_{G\times(H\times K)}H_H)(Y,W)\otimes\mathbb{D}({}_{G\times(H\times K)}K_K)(Z,U). $$

que está en $\mathbb{D}(G\times(H\times K))$.

De lo anterior se concluye que el diagrama conmuta.

- **Es unitaria.** Considere $\epsilon_{\mathbb{D}}=(\cdot\,,\mathbb{C})$ que está en $\mathbb{D}(\mathbf{1})$, si $G\in\mathcal{D}$

$$ \begin{aligned} \mathbb{D}({}_GG\times 1_{G\times 1})\pi((X,V)\times(\cdot\,,\mathbb{C})) &= \mathbb{D}({}_GG\times 1_{G\times 1})({}_{G\times 1}(X\times\{\cdot\},V\otimes_{\mathbb{C}}\mathbb{C}) \\ &= ({}_GG\times 1_{G\times 1}\times_{G\times 1}(X\times\{\cdot\}),\mathbb{C}(G\times 1)\otimes_{G\times 1}V\otimes\mathbb{C}) \\ &= ({}_GX,V). \end{aligned} $$

por otro lado

$$ \begin{aligned} \mathbb{D}({}_G1\times G_{1\times G})\pi((\cdot\,,\mathbb{C})\times(X,V)) &= \mathbb{D}({}_G1\times G_{1\times G})(\mathbb{D}({}_{1\times G}1_1)(\cdot\,,\mathbb{C})\otimes\mathbb{D}({}_{1\times G}G_G)(X,V)) \\ &= ({}_{1\times G}G\times_G X,\mathbb{C}\otimes_{\mathbb{C}}V) \\ &= ({}_GX,V). \end{aligned} $$

Por lo que se deduce que $\mathbb{D}$ es unitaria.

- **Es natural con respecto a biconjuntos.** Si G, H, K y L están en la categoría $\mathcal{D}$ y M un (L,G)-biconjunto y N un (K,H)-biconjunto entonces se debe probar que el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{D}(G)\times\mathbb{D}(H) \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "(\mathbb{D}(_LM_G),\mathbb{D}(_KN_H))"'] & \mathbb{D}(G\times H) \arrow[d, "\mathbb{D}(_{L\times K}M\times N\ _{G\times K})"] \\
\mathbb{D}(L)\times\mathbb{D}(K) \arrow[r, "\pi"'] & \mathbb{D}(L\times K)
\end{tikzcd}$$

Note que

$(\mathbb{D}(_LM_G),\mathbb{D}(_KN_H)((X,V),(Y,W)) = ((_LM_G\times_G\ _GX,\mathbb{C}M\otimes_{\mathbb{C}G}V),(_KN_H\times_H\ _HY,\mathbb{C}N\otimes_{\mathbb{C}H}W)))$

aplicando π queda

$$\mathbb{D}(_{L\times K}L_L)(_LM_G\times_G\ _GX)\otimes\mathbb{D}(_{K\times L}K_K)(_KN_H\times_H\ _HY)$$

igual a

$(_{L\times K}L_L\times_L\ _LM_G\times_G\ _GX,\mathbb{C}L\otimes_{\mathbb{C}L}\mathbb{C}M\otimes_{\mathbb{C}G}V)\otimes(_{L\times K}K_K\times_K\ _KN_H\times_H\ _HY,\mathbb{C}K\otimes_{\mathbb{C}K}\mathbb{C}N\otimes_{\mathbb{C}H}W)$

y esto es

$$(_{L\times K}L_L\times_L\ _LM_G\times_G\ _GX,\mathbb{C}M\otimes_{\mathbb{C}G}V)\otimes(_{L\times K}K_K\times_K\ _KN_H\times_H\ _HY,\mathbb{C}N\otimes_{\mathbb{C}H}W)$$

igual a

$$((_{L\times K}L_L\times_L\ _LM_G\times_G\ _GX)\times\ (_{L\times K}K_K\times_K\ _KN_H\times_H\ _HY),\mathbb{C}N\otimes_{\mathbb{C}H}W\otimes_{\mathbb{C}}\mathbb{C}M\otimes_{\mathbb{C}G}V). \tag{3.6}$$

Por otra parte

$$\pi((X,V),(Y,W)) = D(_{G\times H}G_G)(X,V)\otimes\mathbb{D}(_{G\times H}H_H)(Y,W) = (_{G\times H}(X\times Y),V\otimes_{\mathbb{C}}W)$$

aplicando $\mathbb{D}(_{L\times K}M\times N_{G\times H})$ queda

$$(_{L\times K}M\times N_{G\times H}\times_{G\times H}\ _{G\times H}(X\times Y),\mathbb{C}(M\times N)\otimes_{\mathbb{C}(G\times H)}V\otimes_{\mathbb{C}}W). \tag{3.7}$$

Para ver que (3.6) y (3.7) coinciden basta con considerar

$\beta:(_{L\times K}L_L\times_L\ _LM_G\times_G\ _GX)\times\ (_{L\times K}K_K\times_K\ _KN_H\times_H\ _HY)\longrightarrow_{L\times K}M\times N_{G\times H}\times_{G\times H}\ _{G\times H}(X\times Y)$

dada por $\beta([l,m,x],[k,n,y]) = [(lm,kn),(x,y)]$, no es díficil ver que β es un isomorfismo de $(L\times K)$-conjuntos. Por lo tanto el diagrama Conmuta.

Vía las anteriores propiedades se concluye que $\mathbb{D}$ es un funtor de biconjuntos de Green.

$\square$

BIBLIOGRAPHY

[1] Andreas Dress, The ring of monomial representations. I Structure theory. J.Algebra 18 (1971) 137–157.

[2] Dress, Andreas W. M. Contributions to the theory of induced representations. Algebraic K-theory, II: ”Classical” algebraic K-theory and connections with arithmetic (Proc. Conf., Battelle Memorial Inst., Seattle, Wash., 1972), pp. 183–240. Lecture Notes in Math., Vol. 342, Springer, Berlin, 1973.

[3] Raggi-Cárdenas, Alberto G.; Valero-Elizondo, Luis. Global representation rings. J. Algebra 441 (2015), 426–440. 19A22.

[4] Luca, Florian; Raggi-Cárdenas, Alberto G. Composition factors from the table of marks. J. Algebra 244 (2001), no. 2, 737–743. 20C15 (19A22).

[5] Green, J. A. Axiomatic representation theory for finite groups. J. Pure Appl. Algebra 1 1971 no. 1, 41–77.20.80.

[6] Alperin, J. L.; Bell, Rowen B. Groups and representations. Graduate Texts in Mathematics, 162. Springer-Verlag, New York, 1995. x+194 pp. ISBN: 0-387-94525-3.

[7] Nadia Romero. 2011. Funtores de Mackey. Tesis Dr. Cien Mat. U N A M, Morelia, México. P.118.

[8] Webb, Peter. (1-MN-SM) A guide to Mackey functors. Handbook of algebra, Vol. 2, 805–836, North-Holland, Amsterdam, 2000. 20C99 (19A22 20J06 55P42 55P92).

[9] Webb, Peter. Two classifications of simple Mackey functors with applications to group cohomology and the decomposition of classifying spaces. J. Pure Appl. Algebra 88 (1993), no. 1-3, 265–304.

[10] Boltje, Robert; Külshammer, Burkhard Explicit and canonical Dress induction. Algebr. Represent. Theory 8 (2005), no. 5, 731–746.

[11] Boltje, Robert. Monomial resolutions. J. Algebra 246 (2001), no. 2, 811–848.

[12] Boltje, Robert. Representation rings of finite groups, their species and idempotent formulae. Preprints from the author's homepage athttp://boltje.math.ucsc.edu, 2001.

[13] Mac Lane, Saunders Categories for the working mathematician. Second edition. Graduate Texts in Mathematics, 5. Springer-Verlag, New York, 1998.

[14] Bouc, Serge Burnside rings. Handbook of algebra, Vol. 2, 739–804, North-Holland, Amsterdam, 2000.

[15] Bouc, Serge Biset functors for finite groups. Lecture Notes in Mathematics, 1990. Springer-Verlag, Berlin, 2010. x + 299 pp. ISBN: 978-3-642-11296-6

[16] Bouc, Serge Green functors and G-sets. Lecture Notes in Mathematics, 1671. Springer-Verlag, Berlin, 1997. viii+342 pp. ISBN: 3-540-63550-5

[17] Bouc, Serge Foncteurs d'ensembles munis d'une double action. (French) [Set functors equipped with a double action] J. Algebra 183 (1996), no. 3, 664–736.

[18] Benson, D. J. Representations and cohomology. I. Basic representation theory of finite groups and associative algebras. Second edition. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 30. Cambridge University Press, Cambridge, 1998.