



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

ECUACIONES INTEGRABLES Y
TRANSVERSALIDAD AL INFINITO

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
MATEMÁTICO

PRESENTA:
GILBERTO BRUNO PÉREZ

DIRECTORA DE TESIS:
DRA. LAURA ORTIZ BOBADILLA

2016

Ciudad Universitaria, D. F.





Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Hoja de datos del jurado

1.Datos del alumno	1.Datos del alumno
Apellido Paterno:	Bruno
Apellido Materno:	Pérez
Nombre:	Gilberto
Télefono:	57009101
Universidad:	Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad:	Facultad de Ciencias
Carrera:	Matemáticas
Número de cuenta:	306149126
2.Datos del tutor	2.Datos del tutor
Grado:	Dra.
Nombre:	Laura
Apellido Paterno:	Ortiz
Apellido Materno:	Bobadilla
3.Datos del sinodal 1	3.Datos del sinodal 1
Grado:	Dr.
Nombre:	Jawad
Apellido Paterno:	Snoussi
4.Datos del sinodal 2	4.Datos del sinodal 2
Grado:	Dr.
Nombres:	Vinicio antonio
Apellido Paterno:	Gómez
Apellido Materno:	Gutiérrez
5.Datos del sinodal 3	5.Datos del sinodal 3
Grado:	Dra.
Nombre:	Adriana
Apellido Paterno:	Ortiz
Apellido Materno:	Rodríguez
6.Datos del sinodal 4	6.Datos del sinodal 4
Grado:	Dr.
Nombres:	José Luis
Apellido Paterno:	Cisneros
Apellido Materno:	Molina
7.Datos del trabajo escrito.	7.Datos del trabajo escrito.
Título:	Ecuaciones integrables y transversalidad al infinito.
Número de páginas:	121 p
Año:	2016

*A mi pequeño Ian y a mi amada Dennys
por permitirme sonreír con ustedes cada día.*

Agradecimientos

Aprovecho este apartado para externar mis más sinceros agradecimientos a las personas que me han alentado siempre a seguir adelante.

Primero a mis padres porque con su ejemplo me enseñaron que ante cualquier situación es posible salir adelante. Mamá, por tu dedicación hacia mi y mis hermanos, por ser tan “luchona” y apoyarme en cada momento de mi vida. Papá, porque de ti aprendí a no ser conformista y que la mejor manera de ganarse las cosas es con el esfuerzo propio. A mis hermanas, Nely y Erika, por ser como mis segundas madres y por tantos lindos recuerdos a su lado. A Julio, mi hermano, porque mi memoria guarda lo mejor de mi infancia a su lado. A Ártico, mi cuñado, por estar al pendiente de mi avance en la licenciatura, por darme ánimos siempre y por concederme la oportunidad de comenzar mis experiencias como ayudante en la Facultad de Ciencias a su lado. A todos gracias por ser mi primer familia. Los amo.

Mi más profundo agradecimiento a Dennys por permitirme experimentar a su lado la dicha de ser papás de una maravillosa personita. No hay palabras para describir lo que por ti siento hermosa. A “Toñita”, mi suegra, por su incondicional apoyo en los últimos años. A Ian, mi amado hijo, porque su simple existencia lo vale todo, por tener esa maravillosa sonrisa que puede iluminarlo todo y por removerme las entrañas cada vez que me dice “papá”. Gracias por dejarme formar con ustedes una familia propia.

Un especial agradecimiento a Rosa María Bayona por el incondicional apoyo a mi madre y por tanto a mí y mis hermanos. Muchas gracias maestra y amiga.

Quiero agradecer también a mi familia académica. Ceci, Luis Felipe, Eugenio, Juan, Oziel, Miriam y particularmente a Jesús, Jessica, Jessie y Valente por tomarse el tiempo de escucharme en más de una ocasión y compartir conmigo sus opiniones, dudas y sugerencias a lo largo de este proceso. A nuestra “mamá académica” Laura, por aceptar dirigir esta tesis y por tomarse tan en serio su compromiso hacia nosotros, procurándonos como a sus verdaderos hijos, porque es un ejemplo a seguir académica y personalmente. En especial por cambiar nuestra forma de ver las matemáticas y por inculcarnos que de lo simple nace lo complejo y no al revés. Gracias a ustedes por dejarme formar parte de

una familia más.

Dicen que los amigos son la familia que uno mismo elige. Por tal motivo no puedo dejar de lado a quienes son para mí como mis hermanos. En CCH Tori, Israel, Enrique, Alejandro(John), Román, Manuel, Fernanda, Naie, Donají, Alan, Anadeli, Andrea, Paola, gracias por la enorme pila de recuerdos que con ustedes tengo. En la facultad (y lugares cercanos a ella) Memo, Axel, Mario, Sergio, Cesar, Tort, Roberto, Liliana, Siu, Andrea, gracias por todas las sonrisas, risas y carcajadas que hemos compartido. Mil gracias a todos ustedes por escogermé en esa especial familia.

Una vez concluidas las gratificaciones a las familias de las cuales soy orgullosa y afortunadamente miembro y en las que seguramente habré olvidado mencionar muchos nombres. Me gustaría agradecer a mis sinodales: la doctora Adriana Ortiz, por sus acertadas observaciones con las cuales mi trabajo tuvo una notable mejoría. A los doctores Jawad Snoussi y José Luis Cisneros, por su amabilidad, por abrirme un espacio en Cuernavaca para escuchar acerca de mi trabajo en y por permitirme agilizar mis trámites. También agradezco al doctor Vinicio Gómez por aceptar de una manera tan entusiasta ser parte de mi jurado y por ser tan cuidadoso al revisar esta tesis.

Igualmente quisiera agradecer a esta enorme institución, la UNAM, porque el simple hecho de estar en algún sitio que a ella pertenece es garantía de placer. A la Facultad de Ciencias, gracias por ser un espacio dedicado al conocimiento. Ahí conocí a grandes personajes que admiro hoy en día, por mencionar a algunos: Paco Struck, César Cedillo, Santiago López de Medrano, Erick Mier y algunos más. Al Instituto de Matemáticas por arroparme y darme la oportunidad de tener ahí un lugar de trabajo. A Universum, el museo de las ciencias, por ser un espacio abierto para la divulgación de la ciencia (que tanta falta hace). En este lugar agradezco especialmente a Ramón Acosta por su calidad de persona y sus atenciones conmigo durante mi estancia como becario en este museo.

Por último agradezco el apoyo de CONACYT por la beca recibida como parte del proyecto CB-2013/219722 bajo el nombre de Geometría de foliaciones holomorfas y singularidades. Asimismo, agradezco el apoyo de la DGAPA-UNAM a través del Programa de apoyo a Proyectos de Investigación e Innovación Tecnológica (PAPIIT) en el proyecto con clave IN102413 con nombre Geometría de foliaciones holomorfas y ecuaciones diferenciales analíticas. El apoyo de ambos proyectos fue vital para la elaboración de esta tesis.

Índice general

Agradecimientos	III
Índice general	VII
Introducción	VII
1. Ecuaciones diferenciales en \mathbb{C}^2	1
1.1. Equivalencia formal	9
1.2. Equivalencia analítica	20
1.3. Transformación de monodromía	27
1.4. Ecuación de primera variación	31
2. Ecuaciones integrables	35
2.1. La derivada de Lie	35
2.2. Ecuaciones hamiltonianas	39
3. Extensión de ecuaciones a $\mathbb{C}P^2$	43
3.1. Los exponentes característicos de ecuaciones hamiltonianas en ℓ_∞	54
3.2. La integrabilidad de (P_n, Q_n)	58
3.2.1. Un resultado que caracteriza ecuaciones hamiltonianas cuadráticas	60
4. Topología y transversalidad al infinito	63
4.1. Superficies de Riemann	67
4.2. La fórmula de Riemann-Hurwitz	74
4.3. Transversalidad al infinito	79
5. Una familia emblemática de ecuaciones	89
5.1. La familia crece en grado	100
5.2. Todos los integrantes hamiltonianos de la familia	105

Introducción

Prácticamente de la mano con el nacimiento del cálculo infinitesimal en la segunda mitad del siglo XVII surgen las ecuaciones diferenciales ordinarias. Por razones obvias Newton y Leibnitz fueron de los matemáticos más involucrados en intentar resolverlas y encontrar un algoritmo con el cual poder dar solución a cada una de ellas. Los nombres de estos dos matemáticos no son los únicos importantes que uno puede encontrar en la historia de las ecuaciones diferenciales. Durante finales del siglo XVII y buena parte del siglo XVIII más personajes de gran importancia como Lagrange, Euler, Riccati, D'Alembert, Hamilton, Picard, Cauchy, varios integrantes de la familia Bernoulli y algunos más también pretendían resolver cada ecuación diferencial que se les plantease. Se obtuvieron grandes logros y el desarrollo de diversos métodos para resolver familias de ecuaciones, sin embargo aún era sólo eso, ejemplos particulares. El teorema 1.1 enunciado en este trabajo asegura la existencia de una solución a cada ecuación diferencial la cual es única una vez fijada la condición inicial. Es en el siglo XIX cuando al fin Lyapunov y Poincaré sientan las bases de la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias. Éste último propone además dar prioridad al comportamiento geométrico de las soluciones en el espacio de las fases más que al cálculo de ellas y con ello da origen también a la teoría cualitativa de las ecuaciones diferenciales. Poincaré intenta dar una clasificación analítica de las ecuaciones diferenciales estudiando el campo vectorial que las define y por medio de ello lograr comprender la dinámica que presentan las soluciones a la ecuación.

Las ecuaciones hamiltonianas (parte central de este trabajo) son ecuaciones distinguidas desde la óptica del estudio cualitativo pues justo para ellas es relativamente sencillo describir las curvas solución, debido a que éstas pueden ser vistas como curvas de nivel de una función analítica de \mathbb{C}^2 en \mathbb{C} .

El presente trabajo es principalmente motivado por el resultado sobre ecuaciones hamiltonianas exhibido en la proposición 3.1, la cual muestra una propiedad muy peculiar sobre sus exponentes característicos en la línea al infinito al extender la ecuación diferencial al plano proyectivo complejo $\mathbb{C}P^2$. La pregunta natural era ¿Es ésta una propiedad única de ecuaciones hamiltonianas?. Es decir, si una ecuación diferencial polinomial tiene tal homogeneidad en cuanto a sus exponentes característicos, nos preguntamos, si es ella una ecuación hamiltoniana. Ejemplos como el 3.3 nos permitieron ver que la homogeneidad era una

condición necesaria, más no suficiente, pero no sólo eso, también posibilitó vislumbrar el resultado que caracteriza por completo a las ecuaciones diferenciales de grado n cuyos exponentes característicos son todos iguales.

La inquietud de no poder aún asegurar la integrabilidad de una ecuación, vía la información obtenida en la línea al infinito, nos llevo a la construcción de los ejemplos presentados en el capítulo 5 los cuales permitieron encontrar condiciones adicionales en la parte afín de $\mathbb{C}P^2$; estas condiciones completaron las hipótesis sobre la ecuación diferencial para asegurar que ésta fuese hamiltoniana. Los esfuerzos rindieron fruto dando lugar al teorema 3.2 el cual caracteriza a las ecuaciones hamiltonianas de grado 2.

Una vez que los ejemplos desarrollados en el último capítulo cumplieron su objetivo para con la integrabilidad, decidimos realizar un análisis de sus curvas solución por medio de su primer integral lo cual nos condujo a la noción de transversalidad al infinito y a estudiar algunas de las consecuencias de tan importante propiedad. En otras palabras, tal situación motivó el desarrollo del capítulo 4.

En el capítulo 1 presentamos algunas nociones básicas en ecuaciones diferenciales y realizamos un estudio local de sus soluciones por medio del campo vectorial que define a cada una de ellas. También dirigido al estudio del comportamiento de las soluciones definimos la transformación de monodromía, la cual permite estudiar la dinámica transversa de las curvas solución.

En el capítulo 2 desarrollamos la herramienta pertinente para hablar de ecuaciones hamiltonianas y es ahí donde las definimos formalmente y exhibimos su importancia.

En el capítulo 3 abordamos la extensión de ecuaciones diferenciales polinomiales al plano proyectivo complejo $\mathbb{C}P^2$ junto con las propiedades generales que esta extensión tiene. Es en este capítulo donde exponemos los resultados que motivaron este trabajo.

En el capítulo 4 definimos a las superficies de Riemann y exponemos brevemente dos invariantes topológicos para ellas: la característica de Euler-Poincaré y el género de una superficie. Además probamos la fórmula de Riemann-Hurwitz para aplicaciones analíticas entre superficies de Riemann compactas. Por último estudiamos la transversalidad al infinito y sus consecuencias sobre las curvas de nivel de un polinomio en dos variables.

A lo largo del capítulo 5 exponemos algunos ejemplos que hemos construido con el objetivo de completar las hipótesis necesarias para el enunciado del teorema 3.2. Asimismo desarrollamos los resultados sobre ellas que surgieron de analizar sus propiedades en el plano afín de $\mathbb{C}P^2$.

Capítulo 1

Ecuaciones diferenciales analíticas en \mathbb{C}^2

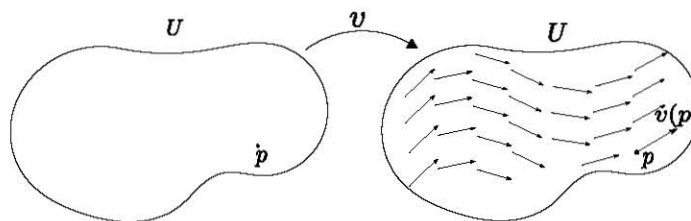
En este capítulo introduciremos la noción de *ecuación diferencial* definida por un campo de vectores, la solución a ella y lo que geoméricamente ésta representa. Asimismo, enunciamos el teorema de *existencia y unicidad de soluciones* y probamos el teorema de *rectificación*, este último nos permite rectificar las soluciones en vecindades de puntos no singulares. Estos conceptos y resultados son fundamentales para el desarrollo de los capítulos siguientes. Realizamos un estudio local de ecuaciones diferenciales por medio del campo vectorial que define a cada una de ellas y probamos el *teorema de linealización de Poincaré* en sus versiones formal y analítica. Además definiremos la *transformación de monodromía*. Esta transformación permite entender la dinámica transversa de las soluciones. Finalmente, estrechamente ligada a la transformación de monodromía, definiremos la *ecuación de primera variación*. Ésta nos proporciona información a primera aproximación lineal, de soluciones cercanas a una fija.

Definición 1.1. *Un campo vectorial analítico v , en un dominio abierto $U \subseteq \mathbb{C}^2$ es un par ordenado de funciones analíticas $v_i : U \rightarrow \mathbb{C}$, $i = 1, 2$,*

$$v = (v_1, v_2) : U \rightarrow \mathbb{C}^2.$$

Denotamos por $\mathcal{D}(U)$ el espacio de campos vectoriales analíticos en U .

Geoméricamente representamos esta asignación como el vector $v(p)$ anclado en el punto $p \in U$.

Figura 1.1: Representación de un campo vectorial en U .

Podemos también asociar a cada punto p de U la recta (compleja) cuya dirección coincide con la dada por el vector $v(p)$. A una asociación de este estilo se le conoce como *campo de direcciones* en U .

Definición 1.2. Sea $U \subseteq \mathbb{C}^2$ un dominio abierto y $v \in \mathcal{D}(U)$ un campo vectorial. Definimos la **ecuación diferencial asociada a v** como¹:

$$\dot{z} = v(z) \quad z \in U \quad (1.1)$$

donde $\dot{z} = \frac{dz}{dt}$ y $z = (z_1, z_2)$, con t una variable en \mathbb{C} .

Una *solución* a la ecuación diferencial (1.1) es una función analítica $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2) : V \rightarrow U$ definida en un abierto $V \subseteq \mathbb{C}$, cuya imagen vive en U y que satisface:

$$\dot{\varphi}(t) = v(\varphi(t)) \quad \forall t \in V \subseteq \mathbb{C}.$$

Es decir φ es una curva compleja plana, parametrizada por la variable t , cuyo vector derivada para cada $t_0 \in V$ coincide con el vector $v(\varphi(t_0))$. A ésta se le denomina *curva fase* o bien *curva integral de la ecuación*. A la representación gráfica de las soluciones en U se le conoce por *retrato de las fases*. (ver figura 1.2).

Observación 1.1. Si $v(p) \neq 0$, es claro que dado un complejo $c \in \mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$, el vector $c \cdot v(p)$ es también tangente a la solución en p , pues vive en el mismo subespacio vectorial.

Es importante destacar que al ser c un complejo no nulo, multiplicar por él resulta en una homotecia y una rotación del vector $v(p)$. Esto nos permite observar que hay todo un plano real tangente a la solución en p , lo cual es natural puesto que la solución está siendo parametrizada por un parámetro t complejo. La mayoría las representaciones que aparecen a lo largo del trabajo son basadas en lo que conocemos del caso real.

¹El concepto de campo vectorial es válido en dimensión n , para $n \geq 1$, considerando una n -ada ordenada $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$, de funciones analíticas definidas en un dominio abierto $U \subseteq \mathbb{C}^n$. Y la ecuación diferencial definida por él como

$$\dot{z} = v(z)$$

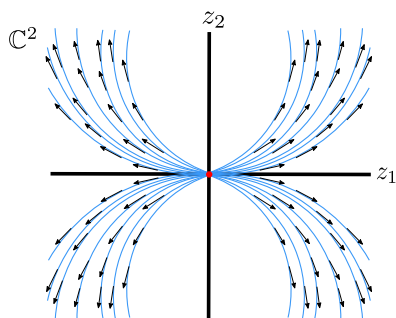


Figura 1.2: Retrato de las fases en \mathbb{C}^2 con punto singular en el origen.

Veamos algunos ejemplos y analicemos (cuando esto sea posible) el comportamiento de sus soluciones.

Ejemplo 1.1. Consideremos la ecuación diferencial dada por el campo vectorial constante $v_0(z_1, z_2) = (1, 0)$

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= 1 \\ \dot{z}_2 &= 0, \quad z \in \mathbb{C}^2 \end{aligned}$$

En este caso las soluciones pueden ser calculadas explícitamente, resolviendo por separado

$$\dot{z}_1 = 1 \quad \text{y} \quad \dot{z}_2 = 0,$$

que son dos ecuaciones independientes entre sí, quedando

$$\begin{aligned} z_1(t) &= t + c_1 \\ z_2(t) &= c_2 \quad c_1, c_2 \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

Es decir, las soluciones a la ecuación son de la forma $\varphi(t) = (t + c_1, c_2)$. Éstas para cada $(c_1, c_2) \in \mathbb{C}^2$, son parametrizaciones de rectas complejas paralelas al eje z_1 .

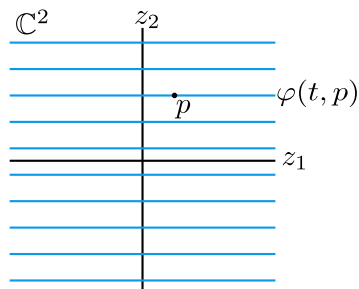


Figura 1.3: Soluciones de $\dot{z} = v_0(z)$.

Ejemplo 1.2. Consideremos ahora la ecuación diferencial definida por un campo vectorial lineal de la siguiente forma

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}, \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}^* \quad (1.2)$$

No es difícil convencerse de que todas las soluciones a esta ecuación son de la forma $\varphi(t) = (e^{\lambda_1 t} c_1, e^{\lambda_2 t} c_2)$, $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$. Derivemos con respecto de t para verificar que en efecto resuelven la ecuación (1.2)

$$\dot{\varphi}(t) = (\lambda_1 e^{\lambda_1 t} c_1, \lambda_2 e^{\lambda_2 t} c_2) = v(\varphi(t)) \quad \forall t \in \mathbb{C}.$$

La geometría de las soluciones de este ejemplo debe su comportamiento (local) al cociente $\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$. Sin embargo, por ahora no contamos aún con la herramienta suficiente para justificarlo, para ello tendremos que esperar hasta el final de este capítulo.

Analicemos un último ejemplo.

Ejemplo 1.3. Consideremos la ecuación dada por

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & n+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha z_1^{n+1} \end{bmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}$$

En este caso la ecuación $\dot{z}_1 = z_1$ es independiente de la variable z_2 y podemos resolverla como en el ejemplo anterior, teniendo

$$z_1(t) = e^t c_1, \quad c_1 \in \mathbb{C}.$$

Así, la ecuación en la variable z_2 se reescribe como

$$\dot{z}_2 = (n+1)z_2 + \tilde{\alpha} e^{(n+1)t}, \quad \tilde{\alpha} = \alpha c_1^{n+1}. \quad (1.3)$$

Las soluciones a la ecuación (1.3) forman un subespacio afín y pueden ser escritas de la forma $\varphi(t) = \psi_0(t) + \psi_1(t)$, donde $\psi_0(t)$ es una solución particular a la ecuación (1.3) y $\psi_1(t)$ es solución a la ecuación homogénea $\dot{z}_2 = (n+1)z_2$, es decir $\psi_1(t) = e^{(n+1)t} c_2$, $c_2 \in \mathbb{C}$. La demostración de este hecho es por completo análoga a la conocida para sistemas de ecuaciones lineales. Para encontrar una solución particular proponemos²

$$\psi_0(t) = f(t)e^{(n+1)t},$$

donde f es una función analítica. Derivando esta expresión con respecto a t se tiene

$$\dot{\psi}_0(t) = \dot{f}(t)e^{(n+1)t} + (n+1)f(t)e^{(n+1)t}.$$

²Este método es conocido como *variación de parámetros* o *variación de constantes*.

Si ψ_0 satisface la ecuación (1.3), entonces

$$\begin{aligned}\dot{\psi}_0(t) &= (n+1)\psi_0(t) + \tilde{\alpha}e^{(n+1)t} \\ \dot{f}(t)e^{(n+1)t} + (n+1)f(t)e^{(n+1)t} &= (n+1)f(t)e^{(n+1)t} + \tilde{\alpha}e^{(n+1)t} \\ \dot{f}(t)e^{(n+1)t} &= \tilde{\alpha}e^{(n+1)t} \\ \dot{f}(t) &= \tilde{\alpha}\end{aligned}$$

de donde se sigue que

$$f(t) = \tilde{\alpha}t + k, \quad k \in \mathbb{C}.$$

Entonces $\psi_0(t) = e^{(n+1)t}(\tilde{\alpha}t + k)$, $k \in \mathbb{C}$, es una solución particular de la ecuación (1.3) y por lo tanto el resto de las soluciones son de la forma

$$z_2(t) = e^{(n+1)t}(\tilde{\alpha}t + \tilde{k}), \quad \tilde{k} = k + c_2.$$

Por ahora nos interesa únicamente el comportamiento de las soluciones cerca del origen de \mathbb{C}^2 . Notemos que por lo anterior, las soluciones son de la forma

$$\varphi(t) = e^t(c_1, e^{nt}(\tilde{\alpha}t + \tilde{k})).$$

Sin importar el valor de las constantes c_1 y \tilde{k} las soluciones se aproximan al origen en el único caso en que e^t se aproxima a cero. Es por ello que analizamos el comportamiento asintótico de las soluciones cuando $Re(t)$ tiende a $-\infty$ y la relación que guardan entre sí las coordenadas $z_1(t)$ y $z_2(t)$, de la solución, en el límite.

$$\begin{aligned}\lim_{Re(t) \rightarrow -\infty} \frac{z_2(t)}{z_1(t)} &= \lim_{Re(t) \rightarrow -\infty} \frac{e^{(n+1)t}(\tilde{\alpha}t + \tilde{k})}{e^t c_1} \\ &= \lim_{Re(t) \rightarrow -\infty} \frac{e^{nt}(\tilde{\alpha}t + \tilde{k})}{c_1} \\ &= 0.\end{aligned}$$

Lo que geoméricamente representa que las soluciones se aproximan al origen de manera tangente al eje z_1 .

Observemos que en todos los ejemplos vistos se tiene que, dado un punto $p = (c_1, c_2)$ existe una y sólo una solución a la ecuación (1.1) que satisface $\varphi(0) = p$, tal situación no es una particularidad de nuestros ejemplos y esto se ve reflejado en el siguiente teorema, que es uno de los pilares en esta teoría.

Teorema 1.1 (de existencia y unicidad de soluciones). *Sea*

$$\dot{z} = v(z), \quad (t, z) \in V \times U \subset \mathbb{C} \times \mathbb{C}^2$$

una ecuación diferencial analítica en $V \times U$. Dado $(t_0, z_0) \in V \times U$ existe una vecindad $V_0 \subset V$ de t_0 y $U_0 \subset U$ de z_0 tal que para toda $z \in U_0$ existe una solución $\varphi : V_0 \rightarrow U_0$, $\varphi(t, z)$ $\varphi(t_0, z) = z$ de la ecuación y está definida para toda $t \in V_0$. Más aún la solución con condición inicial $\varphi(t_0, z) = z$ es única y depende analíticamente dicha condición inicial.

Este es un resultado que por sí solo destaca por su gran importancia. Una prueba de él puede ser consultada en [6]; gracias a él sabemos que toda ecuación diferencial definida por un campo $v \in \mathcal{D}(U)$ tiene solución única, una vez fija la condición inicial $p \in U$. Denotaremos por $\varphi(t, p)$ a la solución con condición inicial³ p (i.e. que satisface $\varphi(t_0, p) = p$).

Así, el retrato de las fases de una ecuación diferencial nos provee de una partición, por curvas solución, del dominio en donde está definido el campo vectorial por el cual está dada la ecuación. Además el teorema 1.2 nos permite entender la geometría local de este objeto llamado *espacio foliado* o simplemente *foliación*. Es decir, el retrato de las fases de una ecuación, nos permite un primer acercamiento al concepto de *foliación singular por curvas*, que a grandes rasgos es una partición del espacio fase en curvas conexas, llamadas hojas, que localmente lucen como planos paralelos entre sí⁴.

No siempre tendremos la fortuna, como en los ejemplos anteriores, de poder encontrar soluciones explícitas a una ecuación dada. Es por ello que se convierte en una necesidad realizar un estudio de las soluciones de una ecuación a partir del campo vectorial que la define.

Definición 1.3. Decimos que $p \in U$ es un **punto singular** del campo vectorial $v \in \mathcal{D}(U)$ (o bien, de la ecuación diferencial que él define) si $v(p) = 0$. En otro caso diremos que p es **no singular**. Al conjunto de puntos singulares del campo v lo denotaremos por $\text{sing}\{v\}$.

Además si p es un punto singular definimos la **parte lineal del campo** vectorial en p como

$$D_p v = \left[\frac{\partial v}{\partial z} \right]_{z=p} \quad (1.4)$$

donde $\left[\frac{\partial v}{\partial z} \right]_{z=p}$ es la matriz jacobiana de v , evaluada en el punto⁵ $z = p$.

Así, en los ejemplos 1.2 y 1.3 el único punto singular es el origen de \mathbb{C}^2 mientras que en el ejemplo 1.1, se tiene, $\text{sing}\{v\} = \emptyset$.

El comportamiento de las soluciones en vecindades de los puntos no singulares se entiende bien. Veremos ahora que es relativamente sencillo describirlo geoméricamente por medio de una equivalencia analítica local.

Teorema 1.2 (de rectificación). Sea $\dot{z} = v(z)$, $z \in U \subset \mathbb{C}^2$, $v \in \mathcal{D}(U)$ y sea $z_0 \in U$. Entonces en toda vecindad U_0 de z_0 que no tenga puntos singulares del campo v , existe un difeomorfismo

$$\phi : U_0 \rightarrow \phi(U_0) \subset \mathbb{C}^2$$

³Regularmente consideramos $t_0 = 0$.

⁴Una definición completa del concepto de *foliación singular por curvas* puede ser consultado en [6]

⁵En el resto del trabajo los teoremas enunciados suponen siempre que p es el origen de coordenadas, pues en caso contrario es suficiente una traslación del origen para lograrlo.

tal que $D\phi \cdot v = v_0$, donde $v_0(z) = (z_1, 0)$.

Demostración. Si $z_0 \in U_0$ es un punto no singular, es decir $v(z_0) \neq 0$, existe una transversal local Γ a $v(z_0)$ basada en z_0 .

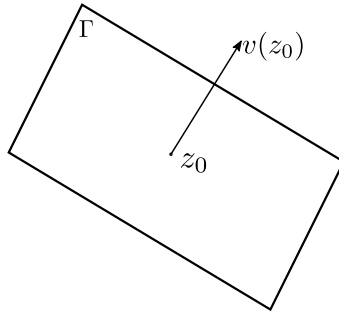


Figura 1.4: Transversal local a $v(z_0)$.

Supongamos sin pérdida de generalidad que existe una vecindad $B_\delta(z_0)$ de z_0 , contenida en U y tal que $\Gamma = \{z \in \mathbb{C}^2 | z_1 = c\} \cap B_\delta(z_0)$ es una transversal local⁶ en z_0 .

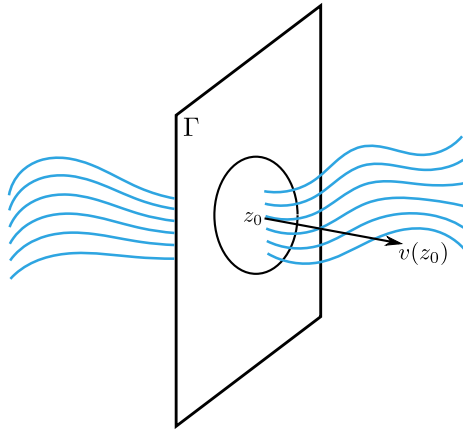


Figura 1.5: Transversal local a $v(z_0)$, paralela a $z_1 = 0$.

Consideremos ahora la transformación $\phi : V \times \Gamma \rightarrow \mathbb{C}^2$, $V \subset \mathbb{C}$ definida como

$$\phi(t, z) = \varphi(t, z)$$

⁶En otro caso es suficiente considerar un cambio de coordenadas lineal que la lleva localmente en un plano paralelo al eje z_2 .

donde $\varphi(t, z)$ es la única solución de $\dot{z} = v(z)$ con condición inicial $\varphi(0, z) = z$ y que está definida para todo $t \in V$.

Observación 1.2. Notemos que la expansión en serie de Taylor, en $t = 0$, de φ es

$$\begin{aligned}\varphi(t, z) &= \varphi(0, z) + t \frac{\partial \varphi}{\partial t}(0, z) + \dots \\ &= z + t \frac{\partial \varphi}{\partial t}(0, z) + \dots\end{aligned}$$

Por el teorema 1.1 sabemos que $\varphi(t, z)$ es también diferenciable con respecto a la variable z . De lo que deducimos que

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right|_{t=0} = Id.$$

Así las cosas,

$$D\phi = \left[\frac{\partial \varphi}{\partial t}, \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right] = \begin{bmatrix} v_1(z) & 0 \\ v_2(z) & 1 \end{bmatrix}$$

y puesto que $v_1(z_0) \neq 0$, pues hemos supuesto que $v(z_0) \notin \Gamma$, entonces $D\phi$ es invertible para $t = 0$ y por tanto ϕ es una transformación analítica con inversa analítica en una vecindad de z_0 . Además $D\phi \cdot e_1 = \begin{bmatrix} v_1(z) \\ v_2(z) \end{bmatrix}$

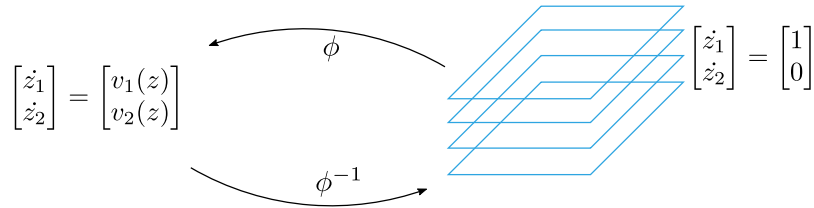


Figura 1.6: Rectificación local de las soluciones.

□

La prueba del teorema 1.2 nos dice que localmente, en vecindades de puntos no singulares, las soluciones son en esencia rectas, complejas, paralelas como las soluciones del ejemplo 1.1 en el que la ecuación está definida por un campo vectorial constante no nulo. Tratando de imitar el análisis local que hemos hecho antes, podemos esta vez examinar el comportamiento de las soluciones en vecindades de puntos singulares. Veremos que la dinámica en éstas es más rica en muchos sentidos.

1.1. Equivalencia formal

Hemos hecho uso ya, antes enunciar el teorema 1.2, de la palabra “equivalencia” sin decir previamente lo que por ella entendemos. Como es usual en las Matemáticas, buscaremos una manera de simplificar nuestro objeto de estudio. En nuestro caso nos gustaría encontrar una ecuación diferencial “sencilla”⁷ y una transformación que lleve sus soluciones en soluciones de nuestra ecuación inicial.

Supongamos que v y \tilde{v} son dos campos vectoriales analíticos definidos en abiertos U y \tilde{U} respectivamente y que $H : U \rightarrow \tilde{U}$ es una transformación analítica con inversa analítica, en otras palabras un biholomorfismo de U en \tilde{U} . Supongamos además que H manda soluciones de la ecuación $\dot{z} = v(z)$ en soluciones de la ecuación $\dot{z} = \tilde{v}(z)$, es decir, si $\varphi_v(t, p)$ es solución a la ecuación diferencial que define v , con condición inicial $\varphi(0, p) = p$, entonces

$$H(\varphi_v(t, p)) = \varphi_{\tilde{v}}(t, H(p)), \quad \forall t \quad (1.5)$$

donde $\varphi_{\tilde{v}}(t, H(p))$ es la solución a la ecuación $\dot{z} = \tilde{v}(z)$ que al tiempo $t = 0$ pasa por $H(p)$. Derivando, con respecto de t la igualdad (1.5), se tiene

$$\frac{d}{dt} H(\varphi_v(t, p)) = \frac{d}{dt} \varphi_{\tilde{v}}(t, H(p)).$$

Puesto que φ_v y $\varphi_{\tilde{v}}$ son soluciones de $\dot{z} = v(z)$ y $\dot{z} = \tilde{v}(z)$, respectivamente, se sigue que

$$\left[\frac{\partial H}{\partial z} \right]_{\varphi_v(t, p)} \cdot v(\varphi_v(t, p)) = \tilde{v}(\varphi_{\tilde{v}}(t, H(p))),$$

y como esto es válido para todo t , en particular para $t = 0$ se obtiene

$$\left[\frac{\partial H}{\partial z} \right]_p \cdot v(p) = \tilde{v}(H(p)). \quad (1.6)$$

La transformación H que hemos considerado satisface $H(0, 0) = (0, 0)$ y su matriz jacobiana $\left[\frac{\partial H}{\partial z} \right]$ en $(0, 0)$ es invertible, pues partimos de que H es un biholomorfismo. A una transformación como ésta le llamamos *cambio de coordenadas analítico local*.

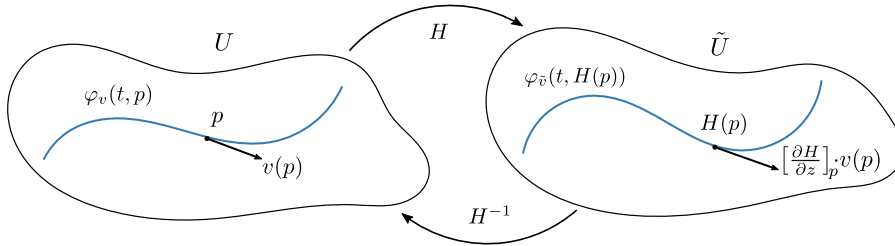


Figura 1.7: Cambio de coordenadas local.

⁷Esta noción de sencillez dependerá siempre de las propiedades que estemos interesados en conservar.

Hagamos ahora un pequeño paréntesis para tratar de entender un poco mejor lo que acabamos de hacer con el uso de la transformación H en el desarrollo anterior.

Al pensar en una transformación analítica f , de \mathbb{C}^2 en \mathbb{C} , en un punto, debemos recordar que ella admite una representación como serie de potencias convergente, a saber, por su serie de Taylor, en toda una vecindad del punto. Para fijar ideas pensemos que dicho punto es el origen de \mathbb{C}^2 y que $f(0,0) = 0$, entonces existe una vecindad abierta U del origen de tal forma que para todo $z \in U$

$$f(z) = \sum_{|\alpha|=1}^{\infty} a_{\alpha} z^{\alpha}, \quad \alpha \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^2, a_{\alpha} \in \mathbb{C}$$

donde

$$z^{\alpha} = z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2}, \quad \alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \quad \text{y} \quad |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2.$$

Decimos además que f es de orden k si $k = \min \{|\alpha| \mid a_{\alpha} \neq 0\}$.

Ahora bien, si tenemos una serie de potencias arbitraria de este estilo, ésta no siempre representa una función pues la convergencia es un elemento clave para que ésto suceda. Tal situación nos conduce a la siguiente definición.

Definición 1.4. Una *serie formal* en el origen de \mathbb{C}^2 es una serie

$$\tilde{h}(z) = \sum_{|\alpha|=1}^{\infty} a_{\alpha} z^{\alpha}, \quad \alpha \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^2, a_{\alpha} \in \mathbb{C}.$$

La serie \tilde{h} es formal en el sentido que no se garantiza su convergencia en alguna vecindad del origen. El conjunto constituido por todas las series formales en dos variables es denotado por $\mathbb{C}[[z]] = \mathbb{C}[[z_1, z_2]]$. Éste forma un anillo con unidad.

Ya con la noción de series formales, podemos decir lo que entenderemos por un cambio de coordenadas formal de \mathbb{C}^2 como:

$$\tilde{H}(z) = (\tilde{h}_1(z), \tilde{h}_2(z)),$$

donde $\tilde{h}_1 = \sum_{|\alpha|=1}^{\infty} a_{\alpha} z^{\alpha}$ y $\tilde{h}_2 = \sum_{|\alpha|=1}^{\infty} b_{\alpha} z^{\alpha}$ son series formales en el origen (co-

mo en la definición 1.4) y de tal forma que la matriz $\left[\frac{\partial \tilde{H}}{\partial z} \right] := \begin{bmatrix} a_{10} & a_{01} \\ b_{10} & b_{01} \end{bmatrix}$, es invertible⁸. Por último, tenemos también la noción de *campo vectorial formal*, definido como la pareja

$$\tilde{v}(z) = (\tilde{v}_1(z), \tilde{v}_2(z)),$$

donde \tilde{v}_1, \tilde{v}_2 son series formales en dos variables, con término constante nulo.

⁸Bajo esta suposición se tiene el teorema de la función inversa para series formales, es decir si \tilde{H} es un *cambio de coordenadas formal* y $\left[\frac{\partial \tilde{H}}{\partial z} \right]$ es invertible, entonces existe un cambio de coordenadas formal G tal que $\tilde{G}(\tilde{H}(z)) = \tilde{H}(G(z)) = z$.

Observación 1.3. Es necesario remarcar la diferencia entre un cambio de coordenadas y un campo vectorial, la cual en el caso analítico es clara. Por un lado, un cambio de coordenadas es una correspondencia biyectiva punto a punto mientras que un campo vectorial va de un abierto U de \mathbb{C}^2 en el espacio vectorial \mathbb{C}^2 , es decir es una correspondencia punto vector. Es de esta manera que debemos entender como objetos distintos un cambio de coordenadas y un campo vectorial formales.

Regresando a nuestro problema inicial. La igualdad (1.6) nos sugiere la siguiente definición de equivalencia entre campos vectoriales así como de las ecuaciones diferenciales que ellos definen.

Definición 1.5. Sean v y \tilde{v} campos vectoriales analíticos. Decimos que v y \tilde{v} son **analíticamente (formalmente) equivalentes** si existe H un biholomorfismo (serie formal invertible) tal que⁹

$$D_z H \cdot v(z) = \tilde{v}(H(z)). \quad (1.7)$$

En el caso especial en que $\tilde{v}(z) = D_0 v \cdot z$ (i.e. \tilde{v} es la parte lineal de v en el origen) diremos que v es **analíticamente (formalmente) linealizable**.

Además decimos que las ecuaciones diferenciales definidas como $\dot{z} = v(z)$ y $\dot{z} = \tilde{v}(z)$ son **analíticamente (formalmente) equivalentes** si y solamente si v y \tilde{v} lo son.

Es claro de la definición misma, que si dos campos vectoriales v y \tilde{v} son analíticamente equivalentes, lo son también en el sentido formal. Es decir, si aspiramos a encontrar una equivalencia analítica entre dos campos vectoriales dados, es necesario que ellos sean primero formalmente equivalentes. Es por esta razón que iniciamos la búsqueda de condiciones para que la equivalencia en este último sentido sea posible.

Observación 1.4. La igualdad (1.7) coincide con la siguiente:

$$D_z H_{H^{-1}(z)} \cdot v(z)|_{H^{-1}} = \tilde{v}(z). \quad (1.8)$$

Misma que por comodidad será la que usemos en los cálculos.

Pensemos primero en campos vectoriales en una sola variable¹⁰, pues los cálculos que haremos en este caso son, salvo algunas obstrucciones, muy parecidos a los que posteriormente realizaremos al considerar campos vectoriales en \mathbb{C}^2 .

Proposición 1.1. Si $H(z) = z + h_k z^k$, entonces su inversa respecto a la composición es de la forma $H^{-1}(z) = z - h_k z^k + \dots$

⁹La igualdad en el caso formal se entiende coeficiente a coeficiente.

¹⁰Las definiciones dadas previamente son válidas para campos vectoriales en \mathbb{C}^n , para $n \geq 1$ realizando los cambios pertinentes.

Demostración. Buscamos $G(z) = c_1z + c_mz^m + \dots$ que satisfaga la relación $H(G(z)) = G(H(z)) = z$. Desarrollemos la composición $G(H(z))$

$$\begin{aligned} G(H(z)) &= c_1(z + h_kz^k) + c_m(z + h_kz^k)^m + \dots \\ &= c_1z + c_1h_kz^k + c_mz^m + mc_mz^{m-1}h_kz^k + \dots \\ &= c_1z + c_1h_kz^k + c_mz^m + mc_mh_kz^{m+k-1} + \dots \end{aligned}$$

Puesto que lo que pretendemos es que se cumpla la identidad $z = G(H(z))$, entonces $c_1 = 1$, $h_k = -c_m$ y $k = m$. Por lo tanto

$$H^{-1}(z) = G(z) = z - h_kz^k + \dots$$

□

Consideremos la ecuación diferencial $\dot{z} = v(z)$, $z \in \mathbb{C}$ con $v(z) = a_1z + a_2z^2 + \dots$, $a_1 \neq 0$, donde los puntos denotan términos de orden superior al lineal en z y nos preguntamos si será o no posible que los campos vectoriales $v(z)$ y $v_1(z) = a_1z$ sean equivalentes; es decir, ¿es la ecuación $\dot{z} = v(z)$ linealizable?. Veamos primero bajo qué condiciones es posible encontrar un cambio de coordenadas, formal por el momento, que haga equivalentes a $v(z)$ y $v_k(z) = a_1z + \tilde{a}_kz^k + \dots$.

Comencemos con $v_3(z) = a_1z + \tilde{a}_3z^3 + \dots$, $\tilde{a}_3 \in \mathbb{C}$, es decir nos gustaría eliminar el término cuadrático en v . Consideremos $H_2(z) = z + h_2z^2$. Si H_2 es el cambio de coordenadas que deseamos, entonces debe satisfacer la igualdad (1.8).

$$\left[\frac{\partial H_2}{\partial z} \right]_{H_2^{-1}(z)} \cdot v(H_2^{-1}(z)) = v_3(z).$$

Es decir¹¹,

$$(1 + 2h_2z)|_{H_2^{-1}(z)} \cdot (a_1z + a_2z^2 + \dots)|_{H_2^{-1}(z)} = a_1z + \tilde{a}_3z^3 + \dots$$

Desarrollemos el lado izquierdo de esta igualdad, recordando que, por la proposición 1.1, sabemos de que forma es H_2^{-1} .

$$\begin{aligned} &= (1 + 2h_2(z - h_2z^2 + \dots)) \cdot (a_1(z - h_2z^2 + \dots) + a_2(z - h_2z^2 + \dots)^2 + \dots) \\ &= (1 + 2h_2z - 2h_2^2z^2 + \dots) \cdot (a_1z - a_1h_2z^2 + a_2z^2 + \dots) \\ &= a_1z - a_1h_2z^2 + a_2z^2 + 2a_1h_2z^2 + \dots \\ &= a_1z + (a_1h_2 + a_2)z^2 + \dots \end{aligned}$$

Puesto que lo que pretendemos es deshacernos del término cuadrático es suficiente tomar el coeficiente $h_2 = -\frac{a_2}{a_1}$, el cual está bien definido pues $a_1 \neq 0$. Así,

¹¹Por ser H_2 en una sola variable, entonces $\left[\frac{\partial H_2}{\partial z} \right]$ no es más que la derivada $H_2'(z)$ de H_2 . Sin embargo decidimos conservar la notación para futuras generalizaciones.

$v(z)$ es equivalente al campo $v_3(z) = a_1z + \tilde{a}_3z + \dots$ para algún $\tilde{a}_3 \in \mathbb{C}$ (observemos que en general $a_3 \neq \tilde{a}_3$). Pensemos ahora que hemos logrado eliminar los términos de grado $2, \dots, k-1$ y veamos que condición es necesaria para eliminar el término de grado k del campo vectorial $v_k(z) = a_1z + a_kz^k + \dots$, $k > 2$.

Comencemos nuevamente considerando un cambio de coordenadas, polinomial, de la forma $H(z) = z + h_kz^k$ y busquemos, como en el caso $k = 2$, si existe alguna obstrucción que nos impida definir un coeficiente adecuado h_k de modo tal que con él podamos eliminar el término deseado. Buscamos que se satisfaga

$$\left[\frac{\partial H_k}{\partial z} \right]_{H_k^{-1}(z)} \cdot v_k(H_k^{-1}(z)) = v_{k+1}(z)$$

con $v_{k+1}(z) = a_1z + \tilde{a}z^{k+1} + \dots$. Es decir,

$$(1 + kh_kz^{k-1}) \Big|_{H_k^{-1}(z)} \cdot (a_1z + a_kz^k + \dots) \Big|_{H_k^{-1}(z)} = a_1z + b_{k+1}z^{k+1} + \dots$$

y desarrollemos sólo el lado izquierdo de la igualdad

$$\begin{aligned} &= (1 + kh_k(z - h_kz^k + \dots)^{k-1}) \cdot (a_1(z - h_kz^k + \dots) + \tilde{a}_k(z - h_kz^k + \dots)^k + \dots) \\ &= (1 + kh_kz^{k-1} + \dots) \cdot (a_1z - a_1h_kz^k + \tilde{a}_kz^k + \dots) \\ &= a_1z - a_1h_kz^k + \tilde{a}_kz^k + a_1kh_kz^k + \dots \\ &= a_1z + (a_1h_k(k-1) + \tilde{a}_k)z^k + \dots \end{aligned}$$

Como lo que deseamos es anular el coeficiente del término de grado k , es suficiente definir $h_k = \frac{-\tilde{a}_k}{a_1(k-1)}$, ésto es siempre posible pues $a_1 \neq 0$ y $k > 2$.

Notemos que hasta el momento todos los cambios de coordenadas H_k que hemos hecho son polinomiales y puesto que todos ellos tienen parte lineal no nula, por el teorema de la función inversa, sabemos que H_k^{-1} está definida y es analítica en una vecindad del cero. Con esto, pretendemos destacar que podemos siempre hacer equivalente el campo $v(z) = a_1z + a_2z^2 + \dots$ con el campo $v_k(z) = a_1z + \tilde{a}_kz^k + \dots$ con un número finito de cambios de coordenadas analíticos, y por tanto la composición de este número finito resulta en un solo cambio de coordenadas analítico, para k tan grande como deseemos. Y a pesar de no poder asegurar nada de la analiticidad al eliminar todos los términos de grados superiores al lineal es posible obtener el siguiente resultado en el sentido formal.

Teorema 1.3. *Sea $v(z) = a_1z + a_2z^2 + \dots$, $z \in \mathbb{C}$, $a_1 \neq 0$, un campo vectorial, entonces v es formalmente linealizable.*

La demostración está prácticamente concluida con el trabajo que hemos desarrollado en los párrafos previos. Basta considerar el cambio de coordenadas que resulta de componer aquellos que eliminaban, uno a uno, los términos de grados superiores al lineal, esto es:

$$H := \lim_{k \rightarrow \infty} H_k \circ \dots \circ H_2$$

donde $H_r = z + h_r z^r$ con $h_r = \frac{-a_r}{a_1(r-1)}$.¹²

Es justo en la definición de H como un límite de composiciones donde ya no podemos, a priori, asegurar su analiticidad, aunque si sabemos, al menos, que es un cambio de coordenadas formal.

Una vez que hemos experimentado la búsqueda de condiciones para la equivalencia formal en una variable, a nivel de los cálculos, podemos dar el salto al problema que en realidad nos interesa. Esto es, para campos vectoriales en dos variables.

Consideremos la ecuación diferencial

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{1k} z^k \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.9)$$

con $z^k = z_1^{k_1} z_2^{k_2}$ y $|k| = k_1 + k_2$, como antes.

Como hicimos para campos vectoriales en una variable, trataremos de encontrar algunas condiciones bajo las cuales sea posible hallar un cambio de coordenadas formal mediante el cual $v(z)$ y el campo

$$D_0 v \cdot z = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$$

sean equivalentes, con $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$.

Procedamos de igual forma que en una dimensión. Deseamos primero eliminar el término $a_{1k} z^k$. Para lograrlo proponemos el cambio de coordenadas $H(z) = (z_1, z_2) + (h_{1k} z^k, 0)$. De manera análoga a como pasa en dimensión uno, $H_k^{-1}(z) = (z_1, z_2) + (-h_{1k} z^k + \dots, 0)$. De acuerdo a la definición de equivalencia formal encontraremos una condición sobre el coeficiente h_{1k} que nos permita eliminar el término $a_{1k} z^k$. Obteniendo

$$\left[\frac{\partial H_k}{\partial z} \right]_{H_k^{-1}(z)} \cdot v(z)_{H_k^{-1}(z)} = D_0 v \cdot z + \begin{bmatrix} \tilde{a}_{k+1} z^{k+1} + \dots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Notemos primero que,

$$\left[\frac{\partial H_k}{\partial z} \right]_{H_k^{-1}(z)} = \begin{bmatrix} 1 + k_1 h_{1k} \frac{z^k}{z_1} & k_2 h_{1k} \frac{z^k}{z_2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{H_k^{-1}(z)}.$$

¹²Cabe mencionar que cada cambio H_j de coordenadas modificará los términos de orden mayor que j , por lo que a cada paso, la constante h_j se define en relación con el coeficiente a_j que corresponda (una vez realizado el cambio que elimina el término de grado $r-1$).

Así, desarrollando $\left[\frac{\partial H_k}{\partial z}\right]_{H_k^{-1}(z)} \cdot v(z)_{H_k^{-1}(z)}$ se tiene

$$\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} 1 + k_1 h_{1k} \frac{z^k}{z_1} & k_2 h_{1k} \frac{z^k}{z_2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{H_k^{-1}(z)} \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1 z_1 + a_{1k} z^k \\ \lambda_2 z_2 \end{bmatrix}_{H_k^{-1}(z)} \\
&= \begin{bmatrix} (1 + k_1 h_{1k} \frac{z^k}{z_1})(\lambda_1 z_1 + a_{1k} z^k) + \lambda_2 z_2 (k_2 h_{1k} \frac{z^k}{z_2}) \\ \lambda_2 z_2 \end{bmatrix}_{H_k^{-1}(z)} \\
&= \begin{bmatrix} \lambda_1 z_1 + \lambda_1 k_1 h_{1k} z^k + a_{1k} z^k + \lambda_2 k_2 h_{1k} z^k \\ \lambda_2 z_2 \end{bmatrix}_{H_k^{-1}(z)} \\
&= \begin{bmatrix} \lambda_1 z_1 + (a_{1k} + \lambda_1 k_1 h_{1k} + \lambda_2 k_2 h_{1k}) z^k \\ \lambda_2 z_2 \end{bmatrix}_{H_k^{-1}(z)} \\
&= \begin{bmatrix} \lambda_1 (z_1 - h_{1k} z^k + \dots) + (a_{1k} + h_{1k} (\lambda_1 k_1 + \lambda_2 k_2)) (z_1 - h_{1k} z^k + \dots)^{k_1} z_2^{k_2} \\ \lambda_2 z_2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \lambda_1 z_1 - \lambda_1 h_{1k} z^k + (a_{1k} + h_{1k} (\lambda_1 k_1 + \lambda_2 k_2)) z^k + \dots \\ \lambda_2 z_2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \lambda_1 z_1 + (a_{1k} + h_{1k} (\lambda_1 k_1 + \lambda_2 k_2 - \lambda_1)) z^k + \dots \\ \lambda_2 z_2 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Pretendemos deshacernos del término de grado k y esto puede lograrse tomando h_{1k} de forma tal que

$$a_{1k} + h_{1k} (\lambda_1 k_1 + \lambda_2 k_2 - \lambda_1) = 0.$$

Es decir,

$$h_{1k} = \frac{a_{1k}}{\lambda_1 - (\lambda_1 k_1 + \lambda_2 k_2)} = \frac{a_{1k}}{\lambda_1 - \langle \lambda, k \rangle}.$$

con $\langle \lambda, k \rangle = \lambda_1 k_1 + \lambda_2 k_2$. Para que éste quede bien definido es necesario que

$$\lambda_1 \neq \langle \lambda, k \rangle \quad (1.10)$$

Tal situación será importante en nuestro estudio de la equivalencia formal y analítica. Ello motiva a la siguiente definición.

Definición 1.6. Dada una pareja $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2$ decimos que ésta es **resonante**, si existen $m_1, m_2 \in \mathbb{Z}_+ \cup \{0\}$, con $|m| = m_1 + m_2 \geq 2$ tales que se satisface

$$\lambda_j = \lambda_1 m_1 + \lambda_2 m_2, \quad \text{para algún } j \in \{1, 2\}.$$

En tal caso, dicha pareja tiene asociado al monomio $a_{jm} z^m$ con $z^m = z_1^{m_1} z_2^{m_2}$ y al cual denominamos **monomio resonante**.

Observación 1.5. Dada esta definición concluimos que, si el monomio $a_{1k}z_1^{k_1}z_2^{k_2}$ es no resonante, entonces el coeficiente

$$h_{1k} = \frac{a_{1k}}{\lambda_1 - \langle \lambda, k \rangle}$$

está bien definido. Como consecuencia también, se tiene el siguiente resultado.

Teorema 1.4 (de Poincaré formal). Sea $\dot{z} = v(z)$ una ecuación diferencial analítica en una vecindad de $(0, 0)$, con $v(z) = Az + v_m(z) + \dots$, donde A es la matriz de la parte lineal en el origen y $v_m(z)$, $|m| = m_1 + m_2$, contiene al primer término no lineal distinto de cero. Si el espectro¹³ de A forma una pareja no resonante, entonces la ecuación $\dot{z} = v(z)$ es formalmente linealizable.

Demostración. Supongamos sin pérdida de generalidad que A es una matriz diagonal

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

y supongamos también que $v_m(z) = (a_{1m}z_1^{m_1}z_2^{m_2} + \dots, 0)$, $a_{1m} \neq 0$. Ahora bien, por hipótesis la pareja (λ_1, λ_2) es no resonante, consecuentemente, por la observación 1.5, es siempre posible definir un cambio de coordenadas de la forma

$$H_{1m}(z) = (z_1, z_2) + (h_{1m}z_1^{m_1}z_2^{m_2}, 0)$$

con

$$h_{1m} = \frac{a_{1m}}{\lambda_1 - \langle \lambda, m \rangle}.$$

Este cambio de coordenadas realiza la equivalencia formal entre los campos vectoriales $v(z)$ y $v_k(z) = (\lambda_1 z_1 + \tilde{a}_{1k}z_1^{k_1}z_2^{k_2} + \dots, \lambda_2 z_2)$ con $|k| = k_1 + k_2 \geq m_1 + m_2 + 1$.

Teniendo así, nuevamente, la situación inicial.

Observación 1.6. Observemos que cada vez que componemos el campo v con la transformación H_{1m}^{-1} los términos de grado menor a $|m|$ no se ven afectados en la primer coordenada y en la segunda esta transformación se comporta como la identidad.

Por lo tanto la demostración a este teorema concluye al considerar la serie formal que resulta de la composición de todos los cambios de coordenadas que eliminan, uno a uno, los términos de grado superior al lineal en (z_1, z_2) .

$$H := \lim_{|k| \rightarrow \infty} H_{1k} \circ \dots \circ H_{1m}.$$

Así definida, H realiza la linealización formal¹⁴ del campo vectorial $v(z)$. \square

¹³El espectro de una matriz A es el conjunto cuyos elementos son los valores propios de A .

¹⁴El resultado del límite de composiciones es de la forma $z + \tilde{h}(z)$, $z \in \mathbb{C}^2$ y $\tilde{h} \in \mathbb{C}^2[[z]]$.

Es importante resaltar que en la prueba anterior los obstáculos, para conseguir la linealización formal eran, en caso de aparecer, los monomios resonantes. Así, el siguiente resultado es también válido.

Teorema 1.5 (de Poincaré-Dulac formal). *Sea $\dot{z} = v(z)$, $v(z) = Az + \dots$, una ecuación diferencial analítica y supongamos que los valores propios de A forman una pareja resonante. Entonces $\dot{z} = v(z)$ es formalmente equivalente a la ecuación $\dot{z} = W(z)$, donde $W(z) = Az + q(z)$ y $q(z)$ es la serie (o suma) formada por monomios resonantes.*

La prueba de este teorema es prácticamente la misma que la dada para el teorema 1.4. Omitiendo los cambios de coordenadas que no pueden ser definidos debido a las resonancias presentes.

Veamos ahora, que la posición de los valores propios λ_1, λ_2 en el plano complejo \mathbb{C} , determina los casos en los que la cantidad de resonancias en un campo vectorial es finita o infinita. Supongamos que $(\lambda_1, \lambda_2) \in (\mathbb{C}^*)^2$ es una pareja resonante y supongamos además, sin pérdida de generalidad, que existen dos enteros $m_1, m_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ tales que $|m| = m_1 + m_2 \geq 2$ y

$$\lambda_2 = \lambda_1 m_1 + \lambda_2 m_2.$$

Entonces

$$\lambda_2(1 - m_2) = \lambda_1 m_1$$

o equivalentemente

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{m_1}{1 - m_2}.$$

de donde se sigue que si (λ_1, λ_2) es resonante, entonces necesariamente $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \in \mathbb{Q}$. Examinemos los distintos tipos de resonancias.

a) Si $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} > 0$, entonces $m_2 = 0$ y por tanto $\lambda_2 = \lambda_1 m_1$ con $m_1 \geq 2$. En tal caso $\dot{z} = v(z)$ es formalmente equivalente a

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha z_1^{m_1} z_2^0 \end{bmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{C}$$

Análogamente, si $\lambda_1 = \lambda_2 m_2$, $m_2 \geq 2$ se tiene equivalencia formal con el campo

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta z_1^0 z_2^{m_2} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \beta \in \mathbb{C}$$

debido al teorema 1.5.

b) Si $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} < 0$, entonces $m_2 > 1$ y $m_1 \neq 0$, así, de la igualdad $\lambda_2 = \lambda_1 m_1 + \lambda_2 m_2$ obtenemos

$$0 = \lambda_1 m_1 + \lambda_2 (m_2 - 1)$$

y por tanto

$$\lambda_2 = n[\lambda_1 m_1 + \lambda_2(m_2 - 1)] + \lambda_2, \quad \forall n \in \mathbb{Z}_+.$$

De donde, si $\alpha = m_1$ y $\beta = m_2 - 1$, los monomios resonantes son de la forma

$$c_{2n} z_2 (z_1^\alpha z_2^\beta)^n$$

Análogamente, la resonancia $\lambda_1 = \lambda_1 k_1 + \lambda_2 k_2$ con $k_1 > 1$ y $k_2 \neq 0$ implica

$$0 = \lambda_1(k_1 - 1) + \lambda_2 k_2$$

y por lo tanto

$$\lambda_1 = n[\lambda_1(k_1 - 1) + \lambda_2 k_2] + \lambda_1.$$

Tomando $\tilde{\alpha} = k_1 - 1$ y $\tilde{\beta} = k_2$, los monomios resonantes son de la forma

$$\tilde{c}_{1n} z_1 (z_1^{\tilde{\alpha}} z_2^{\tilde{\beta}})^n.$$

En conclusión, si (λ_1, λ_2) es una pareja resonante y satisface $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} < 0$, entonces la ecuación diferencial

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \dots$$

es formalmente equivalente a la ecuación

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \sum_{n=1}^{\infty} \begin{bmatrix} \tilde{c}_{1n} z_1 (z_1^{\tilde{\alpha}} z_2^{\tilde{\beta}})^n \\ c_{2n} z_2 (z_1^\alpha z_2^\beta)^n \end{bmatrix}$$

por el teorema 1.5.

c) Si $\lambda_1 = 0$ entonces las resonancias son de la forma

$$0 = \lambda_1 = \lambda_1 m_1 + \lambda_2 \cdot 0, \quad \forall m_1 \geq 2$$

y también

$$\lambda_2 = \lambda_1 k_1 + \lambda_2 \cdot 1, \quad k_1 \geq 1$$

Por lo que los monomios resonantes correspondientes son de la forma $c_{1m_1} z_1^{m_1}$ y $\tilde{c}_{2k_1} z_1^{k_1} z_2$, respectivamente. Esto nos permite concluir que la ecuación

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \dots$$

es, en virtud del teorema 1.5, formalmente equivalente a la ecuación

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \sum_{k=1}^{\infty} \begin{bmatrix} c_{1k} z_1^{k+1} \\ \tilde{c}_{2k} z_1^k z_2 \end{bmatrix}.$$

Observación 1.7. En resumen, si el espectro de la parte lineal, en el punto singular, forma una pareja resonante hemos observado en **a)** que esto ocurre sólo cuando el cociente $\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$, o bien $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ es un número natural y en tal caso se tiene una única posible resonancia. Por el contrario en los casos **b)** y **c)**, es decir si $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \in \mathbb{Q}^- \cup \{0\}$, es posible tener una infinidad de resonancias.

Definición 1.7. Decimos que una pareja $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$ está en el **dominio de Poincaré**, $\lambda \in \mathcal{P}$, si el segmento de recta que une λ_1 y λ_2 no contiene a $0 \in \mathbb{C}$.

Definición 1.8. Decimos que una pareja $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$ está en el **dominio de Siegel**, $\lambda \in \mathcal{S}$, si el segmento de recta que une λ_1 y λ_2 pasa por $0 \in \mathbb{C}$.

Los dominios de Poincaré y Siegel rescatan información importante respecto al número de resonancias posibles, como hicimos ver en la observación 1.7.

Proposición 1.2. Sea $\dot{z} = v(z)$ una ecuación diferencial analítica. Si el espectro de la parte lineal del campo en un punto singular está en el dominio de Poincaré, entonces el número de resonancias es finito.

Más aún, el conjunto $\{\lambda_i - \langle \lambda, m \rangle \neq 0 \mid i = 1, 2 \ m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^2\}$ tiene una distancia mínima, distinta de cero, con el origen de \mathbb{C}^2 .

Demostración. Por hipótesis la pareja $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$ está en el dominio de Poincaré. En consecuencia existe una recta ℓ en el plano complejo que separa a los eigenvalores del cero. Consideremos la recta perpendicular a ℓ , ℓ^\perp que pasa por $0 \in \mathbb{C}$ y consideremos la proyección ortogonal de los puntos λ_1 , λ_2 en dicha recta (como en la figura 1.8).

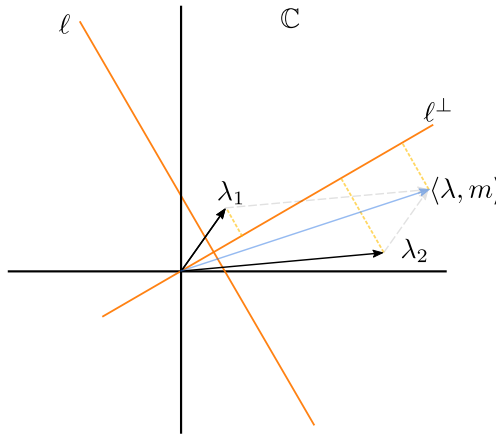


Figura 1.8: $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathcal{P}$.

Cada proyección no es menor que la distancia de 0 a ℓ . Por otra parte la definición de resonancia está dada para combinaciones lineales con coeficientes enteros no negativos. Consecuentemente para $|m|$ suficientemente grande la proyección de $\langle \lambda, m \rangle$ en la recta ℓ^\perp será mayor que la proyección más

grande de los valores propios y por lo tanto si $|m|$ es suficientemente grande $\lambda_i - < \lambda, m > \neq 0$. \square

1.2. Equivalencia analítica

Hemos encontrado ya condiciones suficientes bajo las cuales es posible linealizar formalmente la ecuación $\dot{z} = v(z)$, $z \in \mathbb{C}^2$, donde

$$v(z) = Az + \tilde{v}(z)$$

con $A := D_0v$ la parte lineal del campo vectorial en el origen y \tilde{v} el campo vectorial que consta del resto de los términos de la expansión en serie de Taylor de v alrededor del origen. Ahora buscamos linealizar esta ecuación de manera analítica. Como antes, supongamos que existe H un cambio de coordenadas analítico que linealiza la ecuación. Es decir

$$\left[\frac{\partial H}{\partial z} \right] \cdot Az = v(H(z)). \quad (1.11)$$

Además por como sucede en el caso formal es razonable suponer también que dicho cambio de coordenadas es de la forma $H(z) = z + h(z)$, con $h(z)$ una función analítica tal que $\left[\frac{\partial h}{\partial z} \right] (0) = 0$. Reescribiendo la ecuación (1.11) se tiene que

$$\left(id + \left[\frac{\partial h}{\partial z} \right] \right) \cdot Az = A(z + h(z)) + \tilde{v}(z + h(z)).$$

Desarrollando obtenemos

$$Az + \left[\frac{\partial h}{\partial z} \right] \cdot Az = Az + Ah(z) + \tilde{v}(z + h(z))$$

y simplificando

$$\left[\frac{\partial h}{\partial z} \right] \cdot Az - Ah(z) = \tilde{v}(z + h(z)). \quad (1.12)$$

Definimos el operador lineal \mathcal{L}_A como:

$$\mathcal{L}_A[h](z) := \left[\frac{\partial h}{\partial z} \right] \cdot Az - Ah(z) \quad (1.13)$$

Así, la igualdad (1.12) se reescribe como:

$$\mathcal{L}_A[h](z) = \tilde{v}(z + h(z))$$

Si \mathcal{L}_A fuese invertible se tendría además que

$$h(z) = \mathcal{L}_A^{-1}[\tilde{v}(z + h(z))]. \quad (1.14)$$

En conclusión, si $S_{\tilde{v}}$ está definido como $S_{\tilde{v}}(\cdot) := \tilde{v}(z + \cdot)$, entonces la transformación h que buscamos es necesariamente invariante por el operador $\mathcal{L}_A^{-1} \circ S_{\tilde{v}}$, en otras palabras es un “punto fijo” del operador. Este razonamiento nos dice que nuestro problema puede ser resuelto también, si logramos hallar una función h que satisfaga $\left[\frac{\partial h}{\partial z} \right] (0) = 0$ y la igualdad (1.14). Para atacar el problema desde esta óptica recurriremos al teorema de punto fijo de Banach.

Definición 1.9. Sea $\psi : M \rightarrow M$ una transformación de un espacio en sí mismo. Decimos que x^* es un **punto fijo** de ψ si $\psi(x^*) = x^*$.

Definición 1.10. Sea M un espacio dotado de una métrica $\tilde{\mu}$ y sea $\psi : M \rightarrow M$ una transformación de M en sí mismo. Decimos que ψ es una **contracción** si existe $\alpha \in (0, 1)$ tal que para cualesquiera x, y en M

$$\tilde{\mu}(\psi(x), \psi(y)) \leq \alpha \tilde{\mu}(x, y).$$

Denotemos por ψ^k la composición

$$\psi^k = \underbrace{\psi \circ \dots \circ \psi}_{k\text{-veces}}, \quad k \in \mathbb{N}, \quad \psi^0 = id_M$$

Teorema 1.6 (del punto fijo de Banach). Sea $(M, \tilde{\mu})$ un espacio métrico completo y sea $\psi : M \rightarrow M$ una contracción. Entonces ψ tiene un único punto fijo.

Observación 1.8. Si x^* es un punto fijo para la transformación ψ y ésta es una contracción, verificar que no hay más puntos fijos es inmediato. Supongamos que y^* satisface $\psi(y^*) = y^*$, entonces

$$\tilde{\mu}(x^*, y^*) = \tilde{\mu}(\psi(x^*), \psi(y^*)) \leq \alpha \tilde{\mu}(x^*, y^*). \quad (1.15)$$

Dado que $\alpha \in (0, 1)$, la desigualdad (1.15) sólo es posible si $\tilde{\mu}(x^*, y^*) = 0$ y por tanto cuando $x^* = y^*$. Así ψ tiene a lo más un punto fijo.

Una vez hecha esta observación respecto a la unicidad demostremos que bajo las hipótesis del teorema tal punto existe.

Demostración. Sea x_0 un punto arbitrario de M . Por hipótesis existe un número $\alpha \in (0, 1)$ tal que

$$\tilde{\mu}(\psi(y), \psi(x_0)) \leq \alpha \tilde{\mu}(y, x_0), \quad \forall y \in M.$$

En particular para $y = \psi(x_0)$, es decir

$$\tilde{\mu}(\psi^2(x_0), \psi(x_0)) \leq \alpha \tilde{\mu}(\psi(x_0), x_0).$$

Observemos también que

$$\tilde{\mu}(\psi^3(x_0), \psi^2(x_0)) \leq \alpha \tilde{\mu}(\psi^2(x_0), \psi(x_0)) \leq \alpha^2 \tilde{\mu}(\psi(x_0), x_0).$$

E inductivamente

$$\tilde{\mu}(\psi^{k+1}(x_0), \psi^k(x_0)) \leq \alpha^k \tilde{\mu}(\psi(x_0), x_0), \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Consideremos la serie dada por

$$\sum_{k=0}^{\infty} \tilde{\mu}(\psi^{k+1}(x_0), \psi^k(x_0))$$

claramente se satisface la desigualdad

$$\sum_{k=0}^{\infty} \tilde{\mu}(\psi^{k+1}(x_0), \psi^k(x_0)) \leq \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k \tilde{\mu}(\psi(x_0), x_0)$$

y puesto que $\alpha \in (0, 1)$ se tiene que

$$\sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k \tilde{\mu}(\psi(x_0), x_0) = \frac{1}{1-\alpha} \tilde{\mu}(\psi(x_0), x_0).$$

Por lo tanto la serie $\sum_{k=0}^{\infty} \tilde{\mu}(\psi^{k+1}(x_0), \psi^k(x_0))$ es convergente. Consideremos ahora

la sucesión $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset M$, con $x_k = \psi^k(x_0)$. Afirmamos que ésta es una sucesión de Cauchy. En efecto, sea $\varepsilon > 0$ y sean $n, m \in \mathbb{N}$ suficientemente grandes y tales que $n > m$, por la desigualdad del triángulo se tiene que

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}(x_n, x_m) &\leq \tilde{\mu}(x_n, x_{n-1}) + \cdots + \tilde{\mu}(x_{m+1}, x_m) \\ &= \sum_{k=m}^{n-1} \tilde{\mu}(x_{k+1}, x_k) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \tilde{\mu}(x_{k+1}, x_k) - \sum_{k=0}^{m-1} \tilde{\mu}(x_{k+1}, x_k). \end{aligned}$$

Puesto que la serie $\sum_{k=0}^{\infty} \tilde{\mu}(x_{k+1}, x_k) = \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{\mu}(\psi^{k+1}(x_0), \psi^k(x_0))$ es convergente, existe un natural $N(\varepsilon) = N \in \mathbb{N}$ tal que si $n, m \geq N$, entonces

$$\sum_{k=m}^{n-1} \tilde{\mu}(x_{k+1}, x_k) < \varepsilon$$

Por lo tanto $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy y puesto que M es un espacio métrico completo, existe $x^* \in M$ tal que $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x^*$. Notemos ahora que como ψ es una contracción, es también, por definición, una función Lipschitz y por tanto continua. Así,

$$\psi(x^*) = \psi\left(\lim_{k \rightarrow \infty} x_k\right) = \psi\left(\lim_{k \rightarrow \infty} \psi^k(x_0)\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \psi^{k+1}(x_0) = x^*.$$

Lo cual demuestra que x^* es un punto fijo de ψ y por la observación 1.15, el único. \square

Con este teorema a nuestra disposición, situaremos ahora nuestro problema en un espacio métrico adecuado en el cual el operador \mathcal{L}_A^{-1} está definido¹⁵ y es poco más que una contracción. Como hemos de ver, esto es suficiente para demostrar la existencia del cambio de coordenadas deseado.

¹⁵Bajo algunas hipótesis sobre el espectro de la matriz A .

Definición 1.11. Sea $\mathbb{C}[[z]]$ el anillo de series de potencias formales, $z \in \mathbb{C}^2$. Definimos el **operador mayorante** $\mu : \mathbb{C}[[z]] \rightarrow \mathbb{C}[[z]]$ como:

$$\mu \left(\sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^2} a_\alpha z^\alpha \right) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^2} |a_\alpha| z^\alpha$$

Definición 1.12. Si $f \in \mathbb{C}[[z]]$ definimos la **norma ρ -mayorante** como el funcional en $\mathbb{C}[[z]]$ dado por:

$$\|f\|_\rho := \sup_{|z| < \rho} |\mu(f(z))| = |\mu(f(\rho))|$$

Además, si $F = (f_1, f_2)$ con $f_i \in \mathbb{C}[[z]]$, $i = 1, 2$, definimos

$$\|F\|_\rho := \|f_1\|_\rho + \|f_2\|_\rho$$

Definimos el **espacio ρ -mayorante** \mathcal{B}_ρ como el subespacio de las funciones vectoriales formales, con norma finita

$$\mathcal{B}_\rho := \{F \in \mathbb{C}^2[[z]] \mid \|F\|_\rho < \infty\}.$$

Asimismo denotamos por \mathcal{A}_ρ el conjunto de funciones holomorfas en el polidisco $D_\rho = \{|z| < \rho\}$, continuas en \bar{D}_ρ y dotado de la norma uniforme

$$\|f\|_\rho = \max_{|z| \leq \rho} |f(z)|$$

Observación 1.9. La contención $\mathcal{B}_\rho \subset \mathcal{A}_\rho$ es válida para todo $\rho > 0$ pues si $F \in \mathcal{B}_\rho$ entonces F es absolutamente convergente en \bar{D}_ρ

Lema 1.1. El espacio \mathcal{B}_ρ con la norma ρ -mayorante es un espacio de Banach.

La demostración a este lema puede ser consultada en [6].

Dadas $f = \sum a_\alpha z^\alpha$, $g = \sum b_\alpha z^\alpha \in \mathbb{C}[[z]]$ con a_α, b_α reales positivos, diremos que $f \ll g$ si $a_\alpha \leq b_\alpha$, $\forall \alpha \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^2$. Si $F, G \in \mathbb{C}^2[[z]]$, entonces $F \ll G$ si pasa entrada a entrada.

Lema 1.2. Para toda $\rho > 0$ se satisfacen las siguientes propiedades:

a) Para cualesquiera $f, g \in \mathbb{C}[[z]]$

$$\|f \cdot g\|_\rho \leq \|f\|_\rho \cdot \|g\|_\rho.$$

b) Si F, \tilde{F} son dos series formales en $\mathbb{R}^2[[z]]$ tales que $F \ll \tilde{F}$ y G es una serie con coeficientes no negativos, entonces $G \circ F \ll G \circ \tilde{F}$.

c) si $F, G \in \mathbb{C}^2[[z]]$ son series formales tales que $F(0) = G(0) = 0$, entonces

$$\|F \circ G\|_\rho \leq \|F\|_\sigma, \quad \sigma = \|G\|_\rho.$$

Demostración. Supongamos que $f = \sum a_\alpha z^\alpha$, $g = \sum b_\beta z^\beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}^2 \cup \{0\}$. No es difícil verificar que $f \cdot g$ es nuevamente una serie formal $f \cdot g = \sum c_m z^m$, $m \in \mathbb{Z}^2 \cup \{0\}$, cuyos coeficientes son de la forma:

$$c_m = \sum_{\alpha+\beta=m} a_\alpha \cdot b_\beta$$

y puesto que $\mu(f) = \sum |a_\alpha| z^\alpha$ y $\mu(g) = \sum |b_\beta| z^\beta$ se tiene que $\mu(f) \cdot \mu(g) = \sum \tilde{c}_m z^m$ con

$$\tilde{c}_m = \sum_{\alpha+\beta=m} |a_\alpha| \cdot |b_\beta|.$$

De esto es claro que $|c_m| \leq |\tilde{c}_m| \forall m \in \mathbb{Z}^2 \cup \{0\}$, por lo que $\mu(f \cdot g) \leq \mu(f) \cdot \mu(g)$. Esta desigualdad se extiende a $z = \rho$ y por tanto

$$\|f \cdot g\|_\rho \leq \|f\|_\rho \cdot \|g\|_\rho.$$

b) Un argumento análogo al anterior, en el que queda excluida la posibilidad de que algunos términos se cancelen, prueba la segunda propiedad entrada a entrada.

c) Para probar esta última propiedad, también es suficiente analizar entrada a entrada. Por el argumento en a) y usando b) tenemos que:

$$\mu(f \circ g) \leq \mu(f) \circ \mu(g).$$

Sea $\sigma := \|g\|_\rho$, entonces

$$|\mu(f \circ g)(\rho)| \leq |\mu(f)(\sigma)|.$$

En consecuencia $\|f \circ g\|_\rho \leq \|f\|_\sigma$. □

Definición 1.13. Decimos que $S : \mathcal{B}_\rho \rightarrow \mathcal{B}_\rho$ es una **contracción fuerte** si satisface:

i) $\|S(0)\|_\rho = O(\rho^2)$

ii) S es Lipschitz en la bola $\tilde{\mathcal{B}}_\rho = \{\|h\|_\rho \leq \rho\} \subset \mathcal{B}_\rho$ con constante de Lipschitz no mayor que $O(\rho)$.

$$\|S(f)\|_\rho \leq c(\rho) \|f\|_\rho, \quad c(\rho) = O(\rho), \quad \|f\|_\rho \leq \rho.$$

Es decir $S(\tilde{\mathcal{B}}_\rho) \subset \tilde{\mathcal{B}}_\rho$.

Teorema 1.7 (de Poincaré analítico). Sea $\dot{z} = v(z)$ una ecuación diferencial y v un campo vectorial analítico tal que el espectro de su parte lineal en el punto singular $z = 0$ es no resonante y está en el dominio de Poincaré. Entonces $\dot{z} = v(z)$ es analíticamente linealizable.

Demostración. Sea $A := D_0 v^{16}$ y por tanto el campo vectorial v se escribe como $v(z) = Az + \tilde{v}(z)$, con $\left[\frac{\partial \tilde{v}}{\partial z}\right](0) = 0$. Consideremos el operador $S_{\tilde{v}} : \mathcal{B}_\rho \rightarrow \mathcal{B}_\rho$ dado por $S_{\tilde{v}}(\cdot) = \tilde{v}(z + \cdot)$. Afirmamos que $S_{\tilde{v}}$ es una contracción fuerte en \mathcal{B}_ρ . En efecto, por hipótesis $\tilde{v}(z) = O(z^2)$ pues $\left[\frac{\partial \tilde{v}}{\partial z}\right](0) = 0$, además $S_{\tilde{v}}(0) = \tilde{v}(z+0) = \tilde{v}(z)$, por lo que, es inmediato que se satisface $\|S_{\tilde{v}}\|_\rho = O(\rho^2)$. Ahora sean $h_1, h_2 \in \tilde{B}_\rho$. Definimos $g(z) := S_{\tilde{v}}(h_2) - S_{\tilde{v}}(h_1)$ y consideramos

$$\gamma(\tau) = z + \tau h_2 + (1 - \tau)h_1, \quad \text{con } \tau \in [0, 1].$$

Entonces, por el teorema fundamental del cálculo

$$\begin{aligned} g(z) &= \tilde{v}(z + h_2) - \tilde{v}(z + h_1) = \int_{\gamma(0)}^{\gamma(1)} \left[\frac{\partial \tilde{v}}{\partial z} \right]_{\gamma} d\gamma \\ &= \int_0^1 \left[\frac{\partial \tilde{v}}{\partial z} \right]_{\gamma(\tau)} \cdot \dot{\gamma}(\tau) d\tau \\ &= \int_0^1 \left[\frac{\partial \tilde{v}}{\partial z} \right]_{\gamma(\tau)} \cdot (h_2 - h_1) d\tau. \end{aligned}$$

Así, por el lema 1.2 se tiene que

$$\begin{aligned} \|g\|_\rho &\leq \int_0^1 \left\| \left[\frac{\partial \tilde{v}}{\partial z} \right]_{\gamma(\tau)} \right\|_\rho \cdot \|h_2 - h_1\|_\rho d\tau \\ &\leq \int_0^1 \left\| \left[\frac{\partial \tilde{v}}{\partial z} \right]_{\sigma} \right\|_\rho \cdot \|h_2 - h_1\|_\rho d\tau \end{aligned}$$

con $\sigma = \|\gamma(\tau)\|_\rho = \|z + \tau h_2 + (1 - \tau)h_1\|_\rho$. Dado que $h_1, h_2 \in \tilde{B}_\rho$ y $\|z\|_\rho = \|(z_1, z_2)\|_\rho = \|z_1\|_\rho + \|z_2\|_\rho = 2\rho$, entonces

$$\sigma \leq \|z\|_\rho + \|h_1\|_\rho + \|h_2\|_\rho \leq 2\rho + \rho + \rho = 4\rho.$$

Además como $\left\| \left[\frac{\partial \tilde{v}}{\partial z} \right]_{\sigma} \right\|_\rho = O(\sigma)$, existe un escalar k tal que $\left\| \left[\frac{\partial \tilde{v}}{\partial z} \right]_{\sigma} \right\|_\rho \leq k\sigma$. Y dado que $\sigma \leq 4\rho$, entonces $\left\| \left[\frac{\partial \tilde{v}}{\partial z} \right]_{\sigma} \right\|_\rho \leq c\rho$, con $c = 4k\rho$.

Así,

$$\|S_{\tilde{v}}(h_2) - S_{\tilde{v}}(h_1)\|_\rho \leq c\rho \|h_2 - h_1\|_\rho. \quad (1.16)$$

Por lo tanto $S_{\tilde{v}}$ es una contracción fuerte en \mathcal{B}_ρ .

Ahora bien, recordemos que en las primeras líneas de esta sección definimos el operador \mathcal{L}_A como, $\mathcal{L}_A[h] = \left[\frac{\partial h}{\partial z} \right] \cdot Az - Ah(z)$ el cual, dado que $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$ es no resonante, es invertible en el anillo de series formales y puesto que hemos supuesto a la matriz A diagonal, su inversa, \mathcal{L}_A^{-1} , está dada por

$$\mathcal{L}_A^{-1} \left[\sum_{k,m} a_{km} z^m \frac{\partial}{\partial z_k} \right] = \sum_{k,m} \frac{a_{km}}{\lambda_k - \langle \lambda, m \rangle} \frac{\partial}{\partial z_k}.$$

¹⁶Supondremos además que A es una matriz diagonal.

También por hipótesis $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathcal{P}$ y por la proposición 1.2 existe $r > 0$ tal que

$$|\lambda_k - \langle \lambda, m \rangle| > r \quad \forall k, m.$$

Así, si $h \in \mathcal{B}_\rho$, con $h(z) = \sum_{k,m} a_{km} z^m \frac{\partial}{\partial z_k}$, entonces

$$\begin{aligned} \|\mathcal{L}_A^{-1}(h)\|_\rho &= \sup_{|z| < \rho} \left| \mu \left(\sum_{k,m} \frac{a_{km}}{\lambda_k - \langle \lambda, m \rangle} z^m \frac{\partial}{\partial z_k} \right) \right| \\ &\leq \frac{1}{r} \sum_{k,m} |a_{km}| \rho^m \frac{\partial}{\partial z_k} \\ &= \frac{1}{r} \|h\|_\rho. \end{aligned}$$

Por tanto, $\mathcal{L}_A^{-1}(h) \in \mathcal{B}_\rho$ para cualquier $h \in \mathcal{B}_\rho$. Además puesto que \mathcal{L}_A^{-1} es una transformación lineal y $S_{\bar{v}}$ es una contracción fuerte en \mathcal{B}_ρ , entonces $\mathcal{L}_A^{-1} \circ S_{\bar{v}}$ es también una contracción fuerte. En efecto, si $h_1, h_2 \in \tilde{\mathcal{B}}_\rho$

$$\begin{aligned} \|\mathcal{L}_A^{-1} \circ S_{\bar{v}}(h_2) - \mathcal{L}_A^{-1} \circ S_{\bar{v}}(h_1)\|_\rho &= \|\mathcal{L}_A^{-1} \circ (S_{\bar{v}}(h_2) - S_{\bar{v}}(h_1))\|_\rho \\ &\leq \frac{1}{r} \|S_{\bar{v}}(h_2) - S_{\bar{v}}(h_1)\|_\rho \\ &\leq \frac{1}{r} c\rho \|h_2 - h_1\|_\rho. \end{aligned}$$

Por el lema 1.1 sabemos que \mathcal{B}_ρ es un espacio métrico completo. Así, por el teorema del punto fijo de Banach $\mathcal{L}_A^{-1} \circ S_{\bar{v}}$ tiene un único punto fijo, digamos $h \in \mathcal{B}_\rho$, es decir

$$\begin{aligned} h &= \mathcal{L}_A^{-1} \circ S_{\bar{v}}(h) \\ \mathcal{L}_A(h) &= S_{\bar{v}}(h) \end{aligned}$$

Por lo tanto $H(z) = z + h(z)$ es el biholomorfismo que linealiza (localmente) a la ecuación diferencial $\dot{z} = v(z)$. □

De manera análoga al caso formal el siguiente resultado es válido también en el sentido analítico.

Teorema 1.8 (de Poincaré-Dulac analítico). *Sea $\dot{z} = v(z)$ una ecuación diferencial analítica, con $v(z) = Az + \dots$ una ecuación diferencial analítica. Si la pareja $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$ de valores propios de A está en el dominio de Poincaré y es resonante, entonces $\dot{z} = v(z)$ es analíticamente equivalente a la ecuación $\dot{z} = W(z)$ donde $W(z) = Az + p(z)$, $p(z)$ polinomial en ambas coordenadas.*

La demostración de este teorema es nuevamente muy similar a la dada para el caso sin resonancias. Los detalles de las modificaciones pertinentes se encuentran en [6].

1.3. Transformación de monodromía

Continuaremos con el análisis local de las soluciones a una ecuación diferencial en vecindades de sus puntos singulares. Pues recordemos que por el teorema 1.2, en vecindades de los puntos no singulares, las soluciones se rectifican. Desarrollamos en esta sección una importante herramienta en dicho análisis que nos permite entender la dinámica trasversa de las soluciones.

Definición 1.14. Sea $\varphi(t, q)$ una solución a la ecuación diferencial $\dot{z} = v(z)$. Decimos que φ es una **separatriz** (compleja) en el punto singular p si localmente $\varphi(t, q)$ es el germen de una curva analítica y $p \in \varphi(t, q)$.

Ejemplo 1.4. Consideremos la ecuación diferencial lineal dada en el ejemplo 1.3

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}, \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}^*$$

Los ejes coordenados $Z_1 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid z_2 = 0\}$ tanto como $Z_2 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid z_1 = 0\}$ son separatrices, de la ecuación, en el origen de \mathbb{C}^2 .

Definamos ahora la transformación de monodromía. Sean $\dot{z} = v(z)$ una ecuación diferencial analítica y $\varphi(t, q)$ una separatriz de la ecuación en p y sea $a \in \varphi(t, q)$ un punto no singular. Consideremos además una curva $\gamma(\tau) \subset \varphi(t, q)$, $\tau \in [0, 1]$ tal que $\gamma(0) = a$. Consideremos también una familia, $\Gamma_{\gamma(\tau)}$, de transversales locales a la solución $\varphi(t, q)$ basadas en $\gamma(\tau)$. Notemos que para todo $\tau \in [0, 1]$ se tiene que

$$\dim_{\mathbb{R}} T_{\gamma(\tau)}(\varphi(t, q)) + \dim_{\mathbb{R}} T_{\gamma(\tau)}(\Gamma_{\gamma(\tau)}) - \dim_{\mathbb{R}} T_{\gamma(\tau)}(\varphi(t, q) \cap \Gamma_{\gamma(\tau)}) = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C}^2$$

y recordemos que por la observación 1.1, $\dim_{\mathbb{R}} T_{\gamma(\tau)}(\varphi(t, q)) = 2$. También sabemos que $\dim_{\mathbb{R}} T_{\gamma(\tau)}(\Gamma_{\gamma(\tau)}) = 2$ y $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C}^2 = 4$. Por lo tanto

$$\dim_{\mathbb{R}} T_{\gamma(\tau)}(\varphi(t, q) \cap \Gamma_{\gamma(\tau)}) = 0. \quad (1.17)$$

Es decir, $\Gamma_{\gamma(\tau)}$ interseca a la solución $\varphi(t, a_0)$ únicamente en un punto, digamos a_τ el cual se proyecta en $\gamma(\tau)$ a lo largo de Γ_τ . Veamos ahora que es siempre posible definir una transformación $\Delta_{\Gamma_a \Gamma_{\gamma(\tau)}}$ que asocia el punto a_0 en Γ_a con el punto $a_\tau \in \Gamma_{\gamma(\tau)}$ para a_0 suficientemente cercano al punto base a . En efecto, por el teorema de rectificación para cada punto de $\gamma(\tau)$ existe una vecindad $U_\tau \subset \mathbb{C}^2$ de tal forma que en ella las soluciones se rectifican. La unión de dichas vecindades forma una cubierta abierta de la curva γ . Por la compacidad de γ , es posible extraer una subcubierta finita de $\bigcup U_\tau$, $U_{\tau_0}, U_{\tau_1}, U_{\tau_2}, \dots, U_{\tau_s}$, de modo que con ella podemos asegurar la validez del teorema de rectificación en toda una vecindad¹⁷ de γ . Así las cosas, para las transversales consecutivas $\Gamma_{\gamma(\tau_k)}$, $\Gamma_{\gamma(\tau_{k+1})}$ y un punto $a_{\tau_k} \in U_{\tau_k} \cap \Gamma_{\gamma(\tau_k)}$ suficientemente cercano a $\gamma(\tau_k)$ la solución $\varphi(t, a_{\tau_k})$ es rectificable en el abierto $\bigcup_j U_{\tau_j}$ y por la igualdad 1.17 corta una sola vez a cada transversal, por lo que podemos hacer corresponder a_{τ_k} con un punto

¹⁷Podemos suponer sin pérdida de generalidad $0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_s = 1$

$a_{\tau_{k+1}} \in \Gamma_{\gamma(\tau_{k+1})}$, es decir, es posible definir una transformación de $\Gamma_{\gamma(\tau_k)}$ en $\Gamma_{\gamma(\tau_{k+1})}$ como $\Delta_{\Gamma_{\gamma(\tau_k)}\Gamma_{\gamma(\tau_{k+1})}}(a_{\tau_k}) = a_{\tau_{k+1}}$. Esta construcción puede ser repetida para cualesquiera tres transversales consecutivas $\Gamma_{\gamma(\tau_{k-1})}$, $\Gamma_{\gamma(\tau_k)}$ y $\Gamma_{\gamma(\tau_{k+1})}$ primero definiendo de $\Gamma_{\gamma(\tau_{k-1})}$ en $\Gamma_{\gamma(\tau_k)}$ y después de $\Gamma_{\gamma(\tau_k)}$ en $\Gamma_{\gamma(\tau_{k+1})}$ (ver figura 1.9). Es decir podemos definir $\Delta_{\Gamma_{\gamma(\tau_{k-1})}\Gamma_{\gamma(\tau_{k+1})}}$ como

$$\Delta_{\Gamma_{\gamma(\tau_{k-1})}\Gamma_{\gamma(\tau_{k+1})}} := \Delta_{\Gamma_{\gamma(\tau_k)}\Gamma_{\gamma(\tau_{k+1})}} \circ \Delta_{\Gamma_{\gamma(\tau_{k-1})}\Gamma_{\gamma(\tau_k)}} \quad (1.18)$$

Finalmente, es posible así definir la transformación $\Delta_\gamma : \Gamma_a \rightarrow \Gamma_{\gamma(\tau)}$ componiendo las transformaciones correspondientes de transversal en transversal, hasta llegar a $\Gamma_{\gamma(\tau)}$ lo que requiere componer no más de un número finito de transformaciones. En particular para $\tau = 1$ queda definida la transformación Δ_γ como

$$\Delta_\gamma := \Delta_{\Gamma_{\gamma(\tau_{k-1})}\Gamma_{\gamma(1)}} \circ \cdots \circ \Delta_{\Gamma_a\Gamma_{\gamma(\tau_1)}}$$

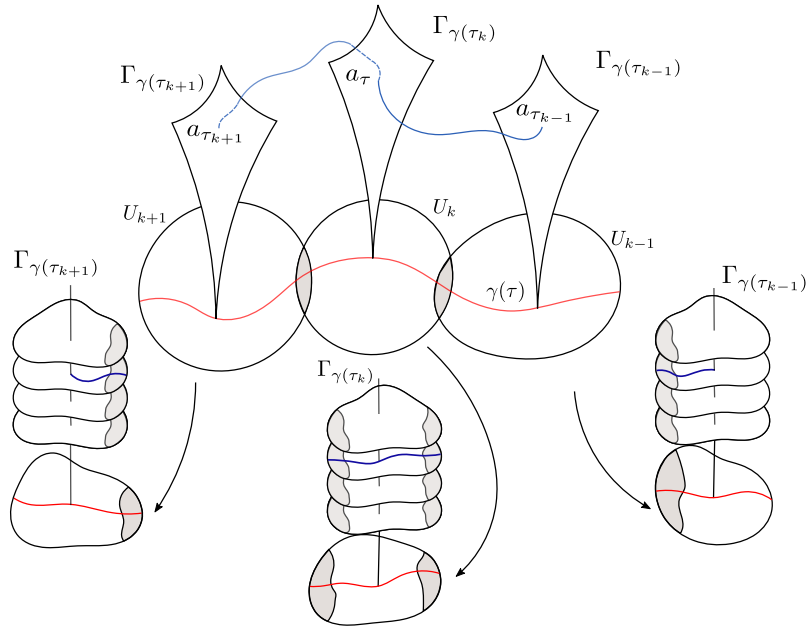


Figura 1.9: Transformación de correspondencia.

A la curva descrita por los puntos a_τ se le conoce como el *levantamiento* de γ a la solución $\varphi(t, a_0)$. A su vez a la transformación $\Delta_{\Gamma_a\Gamma_{\gamma(\tau)}}$ se le llama **transformación de correspondencia** entre las transversales Γ_a y $\Gamma_{\gamma(\tau)}$. Ahora bien, si $\gamma(1) = \gamma(0) = a$ y γ está recorrida en el sentido positivo, entonces la transformación $\Delta_\gamma : \Gamma_a \rightarrow \Gamma_a$ es la que conocemos por **transformación de monodromía**.

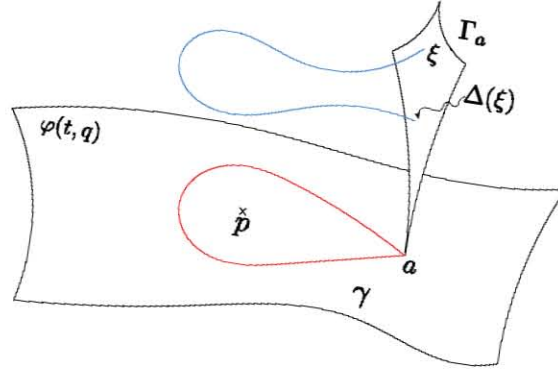


Figura 1.10: Transformación de monodromía.

Es claro que las transformaciones de correspondencia satisfacen

$$\Delta_{\Gamma_{\gamma(\tau_k)}\Gamma_{\gamma(\tau_{k+2})}} = \Delta_{\Gamma_{\gamma(\tau_{k+1})}\Gamma_{\gamma(\tau_{k+2})}} \circ \Delta_{\Gamma_{\gamma(\tau_k)}\Gamma_{\gamma(\tau_{k+1})}} \quad (1.19)$$

Observación 1.10. La igualdad (1.19) nos permite asegurar que Δ no depende de las transversales intermedias, así si $\tilde{\gamma}$ es una curva suficientemente cercana a γ , la transformación de monodromía calculada a lo largo de la curva $\tilde{\gamma}$ coincide con la primera. Es decir, la transformación de monodromía depende únicamente de la clase de homotopía de γ (con extremos fijos) $\gamma \in \pi_1(\varphi(t, q), a)$.

Sea \tilde{a} otro punto no singular en $\varphi(t, q)$ y $\Gamma_{\tilde{a}}$ una transversal local a la solución basada en \tilde{a} . Las transformaciones $\Delta : \Gamma_a \rightarrow \Gamma_a$ y $\tilde{\Delta} : \Gamma_{\tilde{a}} \rightarrow \Gamma_{\tilde{a}}$ son conjugadas por la transformación de correspondencia $\Delta_{\Gamma_{\tilde{a}}\Gamma_a}$, es decir

$$\tilde{\Delta} = \Delta_{\Gamma_{\tilde{a}}\Gamma_a}^{-1} \circ \Delta \circ \Delta_{\Gamma_{\tilde{a}}\Gamma_a}$$

En efecto, consideremos una curva $\tilde{\gamma}(\tau) \subset \varphi(t, q)$ de tal forma que $\tilde{\gamma}(0) = \tilde{a}$ y $\tilde{\gamma}(1) = a$, entonces $\Delta_{\tilde{\gamma}} = \Delta_{\Gamma_{\tilde{a}}\Gamma_a}$ y es claro que $\Delta_{\Gamma_a\Gamma_{\tilde{a}}} = \Delta_{\tilde{\gamma}}^{-1} = \Delta_{\tilde{\gamma}^{-1}}$ donde $\tilde{\gamma}^{-1}$ es $\tilde{\gamma}$ recorrida en el sentido inverso (ver figura 1.11).

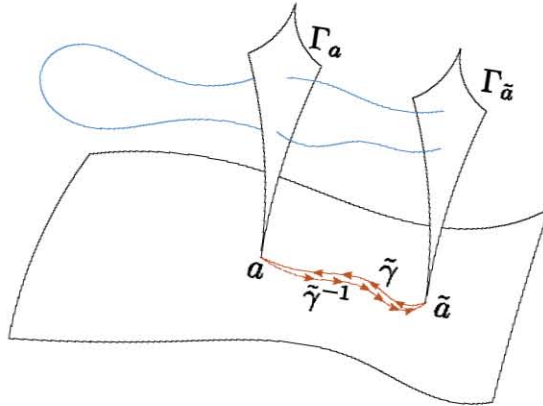


Figura 1.11: Conjugación de las transformaciones de monodromía.

Observación 1.11. Si $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ generan el grupo fundamental de $\overline{\varphi(t, q)}$, entonces estos lazos inducen un grupo de transformaciones generado por las transformaciones de monodromía correspondientes, $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$. A tal grupo se le conoce como grupo de monodromía. Analizar la dinámica transversa de las soluciones se traduce en comprender la dinámica generada por los elementos del grupo de monodromía.

Realicemos un ejemplo para fijar ideas. Consideremos nuevamente la ecuación diferencial dada por

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}, \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}^2 \quad (1.20)$$

Sabemos que los ejes coordenados son separatrices de la ecuación en el origen de \mathbb{C}^2 . Consideremos como a el punto $a = (1, 0)$ y la transversal al eje Z_1 basada en a , $\Gamma_a = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid z_1 = 1\}$. Si tomamos un punto $c \in \Gamma_a$, $c = (1, c_2)$, nos preguntamos para qué valores de $t \in \mathbb{C}$ la solución $\varphi(t, c)$ con condición inicial $\varphi(0, c) = c$, interseca a la transversal Γ_a , además de $t = 0$. Es decir, para qué valores de $t \in \mathbb{C}$ se satisface la igualdad

$$e^{\lambda_1 t} \cdot 1 = 1.$$

Tomando logaritmo complejo a esta expresión se tiene que

$$\lambda_1 t = \ln |1| + i \arg(1) = 2\pi i n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Notemos que el número n se corresponde con los valores de las distintas ramas del logaritmo complejo. Entonces, si $t = \frac{2\pi i n}{\lambda_1}$, $n \in \mathbb{Z}$ se tiene que

$$e^{\lambda_1 \frac{2\pi i n}{\lambda_1}} = 1, \quad n \in \mathbb{Z}$$

y por tanto

$$\Delta(1, c_2) = \varphi\left(\frac{2\pi i}{\lambda_1}, c\right) = (1, e^{2\pi i \frac{\lambda_2}{\lambda_1}} c_2)$$

y sus iteraciones son de la forma

$$\Delta^n(1, c_2) = \varphi\left(\frac{2\pi i n}{\lambda_1}, c\right) = (1, e^{2\pi i n \frac{\lambda_2}{\lambda_1}} c_2), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Hagamos ahora el cálculo explícito de la transformación de monodromía para justificar lo anterior. Consideremos un lazo alrededor del origen, partiendo de la transversal Γ_a y totalmente contenida en la separatriz $z_2 = 0$.

$$\gamma(\tau) = e^{i\tau}, \quad \tau \in [0, 2\pi].$$

Consideremos también la ecuación asociada a la ecuación diferencial (1.20) definida por el campo de direcciones

$$\frac{dz_2}{dz_1} = \frac{dz_2}{dt} \cdot \frac{dt}{dz_1} = \frac{\lambda_2 z_2}{\lambda_1 z_1} \quad (1.21)$$

Para resolverla multiplicamos ambos lados de la igualdad por z_2^{-1} , para $z_2 \neq 0$, quedando

$$\frac{1}{z_2} \cdot \frac{dz_2}{dz_1} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1 z_1}.$$

Integrando ahora con respecto a z_1 y evaluando a lo largo de $\gamma(\tau)$ se tiene

$$\int_{\gamma(\tau)} \frac{1}{z_2} \cdot \frac{dz_2}{dz_1} dz_1 = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \int_{\gamma(\tau)} \frac{1}{z_1} dz_1$$

así

$$\ln(z_2(\gamma(2\pi))) - \ln(z_2(\gamma(0))) = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} 2\pi i.$$

Por lo que, si $c_2 := z_2(\gamma(0))$, obtenemos

$$\ln\left(\frac{z_2(\gamma(2\pi))}{c_2}\right) = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} 2\pi i.$$

Por lo tanto

$$\Delta(1, c_2) = z_2(\gamma(2\pi)) = e^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1} 2\pi i} c_2.$$

Observemos que si γ es recorrida varias veces

$$\gamma^n = \underbrace{\gamma \circ \dots \circ \gamma}_{n\text{-veces}}, \quad n \in \mathbb{Z},$$

entonces se tiene

$$\Delta^n(1, c_2) = z_2(\gamma^n(2\pi)) = e^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1} 2\pi i n} c_2, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Por último recordemos que al ser (1.20) una ecuación lineal el único punto singular es el origen de \mathbb{C}^2 , en consecuencia γ genera al grupo fundamental de la curva solución $\pi_1(\varphi(t, a)) = \pi_1(\mathbb{C} \setminus \{0\})$. Esto, por la observación 1.11 induce un grupo de transformaciones generado por $\Delta(\xi) = e^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1} 2\pi i} \xi$. Lo anterior demuestra la afirmación que hicimos para el ejemplo 1.3, pues el cociente $\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$ determina la dinámica transversa de las soluciones cerca del punto singular.

1.4. Ecuación de primera variación

Para cerrar este capítulo, en esta sección analizaremos la primera variación respecto a una solución conocida. Esto nos permite dar una expresión de la parte lineal de la transformación de monodromía de una ecuación diferencial analítica a lo largo de un lazo contenido en dicha solución. Consideremos el campo vectorial $\tilde{v} \in \mathcal{D}(U)$, $U \subseteq \mathbb{C}^2$ abierto y la ecuación diferencial

$$\frac{dz}{dw} = \tilde{v}(z, w) \quad (z, w) \in U. \quad (1.22)$$

y sea $\varphi(w, z)$ una solución de ella con condición inicial $\varphi(w_0, z) = z$. Si consideramos la expansión en serie de Taylor de φ con respecto a z alrededor del punto (z_0, w) , se tiene

$$\varphi(w, z) = \varphi(w, z_0) + \left. \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right|_{z=z_0} (z - z_0) + \left. \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right|_{z=z_0} (z - z_0)^2 + \dots$$

A $\varphi_j := \left. \frac{\partial^j \varphi}{\partial z^j} \right|_{z=z_0}$ se le conoce como la j -ésima variación de $\varphi(w, z_0)$. Por el momento es de nuestro interés solamente la primera variación

$$\varphi_1 := \left. \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right|_{z=z_0}. \quad (1.23)$$

Lema 1.3. *Sea $\tilde{v} \in \mathcal{D}(U)$, entonces la primera variación φ_1 satisface la ecuación diferencial lineal*

$$\frac{d\xi}{dw} = \tilde{v}_z(\varphi(w, z_0), w) \cdot \xi, \quad \xi(w_0) = 1 \quad (1.24)$$

Demostración. Para probar el lema es suficiente considerar la derivada de φ_1 respecto a w y verificar que en efecto satisface la ecuación.

$$\frac{d\varphi_1}{dw} = \frac{\partial}{\partial w} \left(\left. \frac{\partial \varphi}{\partial z}(w, z) \right) \right)_{z=z_0} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\left. \frac{\partial \varphi}{\partial w}(w, z) \right) \right)_{z=z_0}$$

Puesto que $\varphi(w, z)$ es solución de la ecuación (1.22) entonces

$$\frac{d\varphi_1}{dw} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\tilde{v}(\varphi(w, z), w) \right) \Big|_{z=z_0} = \tilde{v}_z(\varphi(w, z_0), w) \cdot \left. \frac{\partial \varphi}{\partial z}(w, z) \right|_{z=z_0}.$$

Por lo tanto

$$\frac{d\varphi_1}{dw} = \tilde{v}_z(\varphi(w, z_0), w) \cdot \varphi_1(w)$$

Observación 1.12. *Como $\varphi(w_0, z) = z$, entonces $\left. \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right|_{w_0} = id$, por consiguiente $\varphi_1(w_0) = 1$*

□

La ecuación enunciada en el lema 1.3 es conocida como *ecuación de primera variación* a lo largo de la solución φ .

Solución a la ecuación de primera variación

Consideremos la ecuación

$$\frac{d\varphi_1}{dw} = \tilde{v}_z(\varphi(w, z_0), w) \varphi_1. \quad (1.25)$$

Ésta es una ecuación lineal en φ_1 , no autónoma, cuya solución puede ser calculada de la manera habitual considerando, para $\varphi_1 \neq 0$, la ecuación

$$\frac{1}{\varphi_1} \cdot \frac{d\varphi_1}{dw} = \tilde{v}_z(\varphi(w, z_0), w),$$

e integrando de w_0 a w .

$$\int_{w_0}^w \frac{1}{\varphi_1(\tilde{w})} \frac{d\varphi_1}{d\tilde{w}} d\tilde{w} = \int_{w_0}^w \tilde{v}_z(\varphi(\tilde{w}, z_0), \tilde{w}) d\tilde{w}.$$

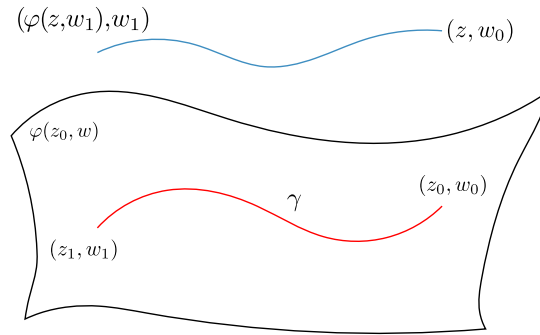
Es decir,

$$\ln \varphi_1(w) - \ln \varphi_1(w_0) = \int_{w_0}^w \tilde{v}_z(\varphi(\tilde{w}, z_0), \tilde{w}) d\tilde{w}.$$

Puesto que $\varphi_1(w_0) = 1$, entonces $\ln \varphi_1(w_0) = 0$ y por consiguiente,

$$\varphi_1(w) = e^{\int_{w_0}^w \tilde{v}_z(\varphi(\tilde{w}, z_0), \tilde{w}) d\tilde{w}} \quad (1.26)$$

Por medio de la ecuación de primera variación podemos obtener información sobre la transformación de monodromía. Consideremos una curva γ con extremos (z_0, w_0) y (z_1, w_1) totalmente contenida en la solución $\varphi(z, w)$ de la ecuación diferencial (1.22). El valor de $\varphi(z, w_1)$ como función de z nos proporciona el valor final $(\varphi(z, w_1), w_1)$ de la solución que tiene como condición inicial (z, w_0) cercana a (z_0, w_0) .



En particular si γ es un lazo basado en (z_0, w_0) , entonces $\varphi(z, w_1)$ nos proporciona el valor de la transformación de monodromía calculada a lo largo del lazo γ

$$\varphi(z, w)|_{\gamma} = \varphi(z_0, w) + \underbrace{\frac{\partial \varphi}{\partial z}(z_0, w)}_{\varphi_1(w)}(z - z_0) + \dots \Big|_{\gamma} \quad (1.27)$$

Así, la parte lineal de Δ_{γ} está dada por $\varphi_1(w)$, es decir la ecuación de primera variación nos proporciona la parte lineal de la transformación de monodromía.

Capítulo 2

Ecuaciones integrables

Como mencionamos en el capítulo anterior, encontrar una expresión explícita de las soluciones a una ecuación diferencial puede no ser inmediato. En este capítulo definimos el concepto de *curva invariante* por un campo vectorial con uso de la derivada de Lie y estudiamos una clase muy especial de ecuaciones que tiene como curvas invariantes a las curvas de nivel de una función analítica. Analizamos las ecuaciones diferenciales definidas por estos campos vectoriales. Definimos lo que es una ecuación diferencial *hamiltoniana*, damos una caracterización de ellas en dominios abiertos simplemente conexos y para ellas definimos el concepto de *Primera integral*.

A partir de este capítulo trabajaremos con el espacio complejo \mathbb{C}^2 dotándolo de las coordenadas (z, w) .

2.1. La derivada de Lie de una función

Sea $f : U \subseteq \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ una función analítica en U , $p \in U$ y v_p un vector con punto inicial en p . Definimos la *derivada de Lie* de f en la dirección de $v_p = (v_{p1}, v_{p2})$ como

$$L_{v_p} f := \left. \frac{d}{dt} (f \circ \gamma)(t) \right|_{t=0} \quad (2.1)$$

donde $\gamma : V \subseteq \mathbb{C} \rightarrow U$ es una curva analítica parametrizada, adaptada a v_p , es decir $\gamma(t) = (z(t), w(t))$

$$\begin{aligned} \gamma(0) &= p \\ \dot{\gamma}(0) &= v_p \end{aligned}$$

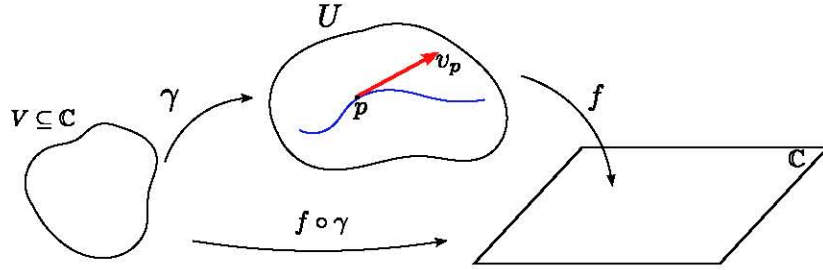


Figura 2.1: Derivada de Lie de la función f en dirección de v_p .

Es claro que existen muchas curvas γ adaptadas a v_p y esto podría ser un serio problema si la derivada de Lie con respecto a cada una de ellas fuese distinta, pues no tendríamos una buena definición. Veamos que ésto no sucede y para probarlo desarrollaremos la expresión¹ (2.1).

$$\begin{aligned}
 L_{v_p} f &= \left. \frac{d}{dt} (f \circ \gamma)(t) \right|_{t=0} = \left. \frac{\partial f}{\partial z}(\gamma(t)) \cdot \frac{dz}{dt} \right|_{t=0} + \left. \frac{\partial f}{\partial w}(\gamma(t)) \cdot \frac{dw}{dt} \right|_{t=0} \\
 &= \frac{\partial f}{\partial z}(\gamma(0)) \cdot \dot{z}(0) + \frac{\partial f}{\partial w}(\gamma(0)) \cdot \dot{w}(0) \\
 &= f_z(p) \cdot v_{p1} + f_w(p) \cdot v_{p2} \\
 &= \langle \nabla_p f, \bar{v}_p \rangle
 \end{aligned}$$

Esto nos permite dar una definición de la *derivada de Lie* independiente de la curva

$$L_{v_p} f := \langle \nabla_p f, \bar{v}_p \rangle \quad (2.2)$$

Ahora, sea $v \in \mathcal{D}(U)$ un campo vectorial y f como antes, una función analítica en U . Definimos la *derivada de Lie* de f a lo largo del campo vectorial v como:

$$\begin{aligned}
 L_v f &: U \rightarrow \mathbb{C} \\
 L_v f(p) &= L_{v(p)} f
 \end{aligned} \quad (2.3)$$

Proposición 2.1. Sean $f, g : U \rightarrow \mathbb{C}$ funciones analíticas en U y sean $v_1, v_2 \in \mathcal{D}(U)$ campos vectoriales, entonces la derivada de Lie de f satisface las siguientes propiedades:

- i) $L_{v_1+v_2} f = L_{v_1} f + L_{v_2} f$
- ii) $L_{cv_1} = cL_{v_1}, \quad \forall c \in \mathbb{C}$
- iii) $L_{gv_1} f = gL_{v_1} f$
- iv) $L_{v_1}(f \cdot g) = g \cdot L_{v_1} f + f \cdot L_{v_1} g$

¹Donde f_z y f_w denotan las parciales de f respecto de z y w respectivamente.

Demostración. Consideremos la derivada de Lie de la función f a lo largo del campo $v = gv_1 + v_2$. Sea $p \in U$

$$\begin{aligned} L_v f(p) &= \langle \nabla f, \bar{v} \rangle|_p \\ &= \langle \nabla f, \overline{gv_1 + v_2} \rangle|_p \\ &= \langle \nabla f, \bar{g}\bar{v}_1 + \bar{v}_2 \rangle|_p \\ &= \bar{g}(p) \langle \nabla f, \bar{v}_1 \rangle|_p + \langle \nabla f, \bar{v}_2 \rangle|_p \\ &= g(p) L_{v_1} f(p) + L_{v_2} f(p). \end{aligned}$$

Lo que demuestra *i*), tomando $g \equiv 1$; *iii*) al considerar $v_2 \equiv (0, 0)$ y *ii*) como caso particular donde además $g \equiv c$. Ahora para demostrar *iv*), recordemos que el gradiente satisface la propiedad de Leibnitz para el producto, por lo tanto

$$\begin{aligned} L_{v_1}(f \cdot g)(p) &= \langle \nabla(f \cdot g), \bar{v}_1 \rangle|_p \\ &= \langle g\nabla f + f\nabla g, \bar{v}_1 \rangle|_p \\ &= g(p) \langle \nabla f, \bar{v}_1 \rangle|_p + f(p) \langle \nabla g, \bar{v}_1 \rangle|_p \\ &= g(p) L_{v_1} f(p) + f(p) L_{v_1} g(p), \quad \forall p \in U \end{aligned}$$

□

Nos gustaría ahora rescatar la noción geométrica de ortogonalidad que teníamos para el espacio vectorial \mathbb{R}^{2n} y traducir tal propiedad en una condición algebraica para el producto hermitiano en \mathbb{C}^n . Primero para $\mathbb{C} \approx \mathbb{R}^2$.

Sean $z = a + ib$, $w = u + iv$ dos números complejos y (a, b) , $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ los vectores asociados a ellos. Éstos últimos son ortogonales si satisfacen² $(a, b) \cdot (u, v) = 0$, es decir

$$au + bv = 0. \quad (2.4)$$

Por otra parte el producto hermitiano de z con w , $\langle z, w \rangle$ es

$$\begin{aligned} \langle z, w \rangle &= z\bar{w} \\ &= (a + ib)(u - iv) \\ &= au + bv + i(bu - av) \end{aligned}$$

Por lo que z y w forman un ángulo recto si y sólo si

$$Re\langle z, w \rangle = 0.$$

Este resultado es cierto también en \mathbb{C}^n .

Lema 2.1. Sean $u = u_1 + iu_2$, $v = v_1 + iv_2 \in \mathbb{C}^n$, con $u_j, v_j \in \mathbb{R}^n$, $j = 1, 2$. Entonces los vectores $\tilde{u} = (u_1, u_2)$ y $\tilde{v} = (v_1, v_2)$ de \mathbb{R}^{2n} son ortogonales si y sólo si

$$Re\langle u, v \rangle = 0$$

²Con el producto interior usual en \mathbb{R}^2 .

Demostración. Observemos primero que

$$\begin{aligned}\langle u, v \rangle &= \langle u_1 + iu_2, v_1 + iv_2 \rangle \\ &= \langle u_1, v_1 \rangle + \langle u_2, v_2 \rangle + i(\langle u_2, v_1 \rangle - \langle u_1, v_2 \rangle)\end{aligned}$$

por lo que $Re\langle u, v \rangle = \langle u_1, v_1 \rangle + \langle u_2, v_2 \rangle = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2$. Si $u_j = (u_{j1}, u_{j2}, \dots, u_{jn})$ y $v_j = (v_{j1}, v_{j2}, \dots, v_{jn})$, $j = 1, 2$, entonces

$$u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 = \sum_{k=1}^n u_{1k} \cdot v_{1k} + \sum_{k=1}^n u_{2k} \cdot v_{2k}.$$

Por otro lado los vectores \tilde{u} , \tilde{v} son de la forma $\tilde{u} = (u_{11}, u_{12}, \dots, u_{1n}, u_{21}, u_{22}, \dots, u_{2n})$ y $\tilde{v} = (v_{11}, v_{12}, \dots, v_{1n}, v_{21}, v_{22}, \dots, v_{2n})$ por lo que el producto interior usual de \mathbb{R}^n entre ellos, es nuevamente

$$\tilde{u} \cdot \tilde{v} = \sum_{k=1}^n u_{1k} \cdot v_{1k} + \sum_{k=1}^n u_{2k} \cdot v_{2k}.$$

Así $\tilde{u} \cdot \tilde{v} = Re\langle u, v \rangle$ lo que demuestra el lema. \square

Definición 2.1. Sea \mathcal{C} una curva analítica irreducible³. Si f es una función analítica irreducible⁴ tal que $\mathcal{C} = \{f = 0\}$ decimos que \mathcal{C} es invariante bajo el campo vectorial $v \in \mathcal{D}(U)$ si se satisface alguna de las dos siguientes condiciones

a) $L_v f = f \cdot g$ para alguna función g .

b) $L_v f|_{\mathcal{C}} \equiv 0$.

La interpretación geométrica de la definición de curva invariante, así como su consecuencia sobre la ecuación diferencial que define el campo vectorial en cuestión quedaran en evidencia con el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.1. Consideremos una función analítica $H : U \rightarrow \mathbb{C}$, con $U \subseteq \mathbb{C}^2$ abierto y la ecuación diferencial dada por el campo vectorial v_H en U

$$\left. \begin{aligned} \dot{z} &= H_w \\ \dot{w} &= -H_z \end{aligned} \right\} v_H \quad (2.5)$$

Examinemos el comportamiento del campo vectorial, en cada punto, respecto al vector gradiente de la función H .

$$\begin{aligned}\langle \nabla H, v_H \rangle &= \langle (H_z, H_w), (H_w, -H_z) \rangle \\ &= H_z \bar{H}_w - H_w \bar{H}_z \\ &= 2i \operatorname{Im}(H_z \bar{H}_w)\end{aligned}$$

³Es decir, que no puede ser expresada como unión de dos o más curvas.

⁴Es decir si $f = f_1 \cdot f_2$, entonces $f_1(0) \neq 0$, es decir es una unidad en el anillo de series convergentes $\mathbb{C}\{z, w\}$.

Por lo que

$$\operatorname{Re}\langle \nabla H, v_H \rangle = 0.$$

Así, por el lema 2.1, el campo vectorial y el vector gradiente son ortogonales en todo punto. Más aún, consideremos una solución $\varphi(t, p)$ de la ecuación diferencial (2.5) y la composición de funciones $(H \circ \varphi)(t)$. Puesto que $\varphi(t, p)$ es solución, satisface

$$\frac{d\varphi}{dt} = v_H(\varphi(t, p))$$

es decir, φ es una curva adaptada a $v_H(\varphi(t, p))$ para cada t . Así

$$\frac{d}{dt}(H \circ \varphi)(t) = L_{v_H}H.$$

Por último, calculemos $L_{v_H}H$

$$\begin{aligned} L_{v_H}H &= \langle \nabla H, \bar{v}_H \rangle \\ &= \langle (H_z, H_w), (\bar{H}_w, -\bar{H}_z) \rangle \\ &= H_z \bar{H}_w - H_w \bar{H}_z \\ &= H_z H_w - H_w H_z \\ &\equiv 0. \end{aligned}$$

Lo que nos permite concluir que $(H \circ \varphi)(t) \equiv c$ para alguna $c \in \mathbb{C}$, es decir la función H es constante a lo largo de las soluciones, o dicho de otra manera las curvas $L_c = \{H - c = 0\}$ son invariantes bajo el campo vectorial v_H .

Observación 2.1. Como resultado del ejemplo 2.1 podemos concluir toda curva invariante por un campo vectorial es parametrizada por una solución a la ecuación diferencial que él define. En el caso particular de la ecuación (2.5) se tiene además que sus soluciones parametrizan a las curvas de nivel de la función H . Ésto último nos dota de una amplia familia de ecuaciones diferenciales analíticas de las cuales conocemos las curvas solución⁵.

2.2. Ecuaciones hamiltonianas

Hemos encontrado a partir de una función $H : U \rightarrow \mathbb{C}$, $U \subseteq \mathbb{C}^2$ una ecuación diferencial cuyas soluciones parametrizan a las curvas de nivel de la función H . Pensemos en la situación inversa. Es decir, supongamos que tenemos una ecuación diferencial definida por un campo vectorial v y podríamos preguntarnos si tenemos una manera de saber si existe una función analítica H de tal manera que sus curvas de nivel están parametrizadas por las soluciones de la ecuación diferencial definida por el campo vectorial v .

El siguiente teorema da respuesta afirmativa a nuestra pregunta, más aún, caracteriza a las ecuaciones diferenciales que están definidos en dominios simplemente conexos y que cumplen tal propiedad.

⁵A pesar de no conocer la parametrización para la cual son soluciones a la ecuación diferencial.

Teorema 2.1. Sea $U \subset \mathbb{C}^2$ un abierto simplemente conexo y

$$\begin{aligned} \dot{z} &= A(z, w) \\ \dot{w} &= B(z, w) \end{aligned}, \quad (z, w) \in U$$

Una ecuación diferencial analítica en U . Si $A_z = -B_w$, entonces existe una función analítica $H : U \rightarrow \mathbb{C}$, tal que

$$\begin{aligned} A(z, w) &= H_w \\ B(z, w) &= -H_z. \end{aligned}$$

Demostración. Sea $(z_0, w_0) \in U$ y definimos la función $H : U \rightarrow \mathbb{C}$ como

$$H(z, w) = \int_{z_0}^z -B(s, w_0) ds + \int_{w_0}^w A(z, s) ds.$$

Observemos que la función H queda así bien definida, pues al ser U simplemente conexo las integrales en cuestión sólo dependen de los extremos. Además,

$$\begin{aligned} H_z &= -B(z, w_0) + \int_{w_0}^w A_z(z, s) ds \\ &= -B(z, w_0) + \int_{w_0}^w -B_w(z, s) ds \\ &= -B(z, w_0) + B(z, w_0) - B(z, w) \\ &= -B(z, w) \end{aligned}$$

y

$$H_w = A(z, w).$$

□

Observación 2.2. La condición $A_z = -B_w$ es claramente equivalente a la igualdad $A_z + B_w = 0$. Los campos vectoriales que satisfacen esto son también llamados *campos conservativos* y en general la suma $A_z + B_w$ es conocida como la *divergencia del campo vectorial*.

Las ecuaciones diferenciales que caracteriza el teorema 2.1 son el objeto central de este trabajo, ello mismo motiva la siguiente definición.

Definición 2.2. Sea $(\dot{z}, \dot{w}) = v(z, w)$, $(z, w) \in U$, $v \in \mathcal{D}(U)$ una ecuación diferencial analítica. Si ésta satisface las condiciones del teorema 2.1 decimos que es una ecuación diferencial **hamiltoniana** y la función H , de la cual el mismo teorema asegura su existencia, es una **primera integral** de la ecuación⁶.

⁶La función H recibe también el nombre de *hamiltoniano* asociado a la ecuación.

Ejemplo 2.2. Consideremos la ecuación diferencial dada por

$$\begin{aligned}\dot{z} &= 3w^2 \\ \dot{w} &= 3z^2 - 6z + 2\end{aligned}\quad (2.6)$$

Veamos primero si cumple las condiciones de una ecuación hamiltoniana.

$$\begin{aligned}A(z, w) &= 3w^2 \\ B(z, w) &= 3z^2 - 6z + 2\end{aligned}$$

Entonces, $A_z = -B_w = 0$, además el campo vectorial claramente está definido en todo \mathbb{C}^2 que es un abierto simplemente conexo. Por lo tanto la ecuación (2.6) es hamiltoniana. Calculemos ahora, su primera integral, H . Puesto que se debe satisfacer $H_w = 3w^2$, entonces

$$\begin{aligned}H(z, w) &= \int 3w^2 dw + h_1(z) \\ &= w^3 + h_1(z)\end{aligned}$$

donde $h_1(z)$ es una función analítica que sólo depende de z . Por otro lado $-H_z = 3z^2 - 6z + 2$, así

$$\begin{aligned}H(z, w) &= - \int 3z^2 - 6z + 2 dz + h_2(w) \\ &= -z^3 + 3z^2 - 2z + h_2(w)\end{aligned}$$

con $h_2(w)$ una función analítica que sólo depende de w . Por lo que

$$H(z, w) = w^3 - z^3 + 3z^2 - 2z$$

es el hamiltoniano asociado a la ecuación (2.6).

Analicemos ahora el caso en el que la ecuación diferencial está definida por un campo vectorial lineal.

Ejemplo 2.3.

$$\begin{bmatrix} \dot{z} \\ \dot{w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ w \end{bmatrix}\quad (2.7)$$

¿Puede ser la ecuación diferencial (2.7) hamiltoniana?. Para responder a esta pregunta notemos primero que el campo que define a la ecuación es válido en todo \mathbb{C}^2 que es un abierto simplemente conexo. Resta verificar si es posible o no que se satisfaga la condición sobre las parciales para asegurar la existencia de la primera integral. Así, notemos que $A(z, w) = \lambda_1 z$ y $B(z, w) = \lambda_2 w$ y en consecuencia

$$\begin{aligned}A_z &= \lambda_1 \\ B_w &= \lambda_2.\end{aligned}$$

Por lo tanto, la ecuación (2.7) es hamiltoniana si y sólo si $\lambda_2 = -\lambda_1$. En tal caso la función $H(z, w) = \lambda z w$ es primera integral de la ecuación diferencial lineal

$$\begin{bmatrix} \dot{z} \\ \dot{w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ w \end{bmatrix}.$$

Para que una ecuación lineal sea hamiltoniana hemos visto en el ejemplo anterior que sus valores propios están forzados a tener una relación muy especial. Este es el caso para cualquier punto singular de una ecuación hamiltoniana.

Proposición 2.2. *Sea p un punto singular de la ecuación hamiltoniana*

$$\begin{aligned}\dot{z} &= A(z, w) \\ \dot{w} &= B(z, w)\end{aligned}$$

Entonces la matriz de la parte lineal del campo en p tiene valores propios λ y $-\lambda$, p.a. $\lambda \in \mathbb{C}$.

Demostración. Supongamos que $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ es la matriz jacobiana del campo vectorial evaluada en el punto singular p y calculemos su polinomio característico.

$$\begin{aligned}p(\mu) &= \det(M - \mu id) = \det \begin{bmatrix} a - \mu & b \\ c & d - \mu \end{bmatrix} \\ &= (a - \mu)(d - \mu) - bc \\ &= \mu^2 - (a + d)\mu + ad - bc \\ &= \mu^2 - \text{tr}M\mu + \det M\end{aligned}$$

Ahora bien, por hipótesis la ecuación es hamiltoniana y en consecuencia satisface la identidad $A_z + B_w \equiv 0$, por lo tanto $a + d = A_z(p) + B_w(p) = 0$. Así, los valores propios de M son las raíces cuadradas de $-\det M$ las cuales solo difieren por un factor menos uno. \square

La siguiente es una propiedad muy importante de una ecuación hamiltoniana y que más adelante pondremos en contraste con el comportamiento que tienen este tipo de ecuaciones para valores muy grandes de z y w cuando su primera integral es polinomial.

Proposición 2.3. *Si $(\dot{z}, \dot{w}) = v(z, w)$, $(z, w) \in U$ es una ecuación diferencial hamiltoniana. Entonces sus soluciones no se acumulan en puntos ni a otras soluciones.*

Demostración. Por hipótesis existe una función analítica $H : U \rightarrow \mathbb{C}$, $U \subset \mathbb{C}^2$ tal que $v(z, w) = (H_w, -H_z)$. Sean $p, q \in U$ puntos en distintas curvas de nivel y supongamos por contradicción que $\overline{\varphi(t, p)} \cap \overline{\varphi(t, q)} \neq \emptyset$. Sabemos por la observación 2.1 que $H(\varphi(t, p)) \equiv c_1$ y $H(\varphi(t, q)) \equiv c_2$. Sea $x \in \overline{\varphi(t, p)} \cap \overline{\varphi(t, q)}$ y sea $\varepsilon > 0$, entonces por la continuidad de H existe $\delta(\varepsilon) = \delta > 0$ tal que $H(B_\delta(x)) \subset B_\varepsilon(H(x))$. Así $|c_1 - c_2| < \varepsilon$ y por tanto $c_1 = c_2$, lo que además implica que H es localmente constante y por tanto v tiene una infinidad de puntos singulares lo cual es una contradicción. \square

Capítulo 3

Extensión de ecuaciones diferenciales polinomiales a $\mathbb{C}P^2$

En este capítulo realizamos la extensión de ecuaciones diferenciales en \mathbb{C}^2 , definidas por un campo vectorial polinomial, al proyectivo complejo $\mathbb{C}P^2$. Trabajaremos en el caso no dicrítico, donde la recta al infinito resulta ser una separatriz de la ecuación extendida. Asimismo hacemos uso de la transformación de monodromía para obtener información de las soluciones desde tal recta invariante. Analizamos en especial la extensión a $\mathbb{C}P^2$ de ecuaciones hamiltonianas polinomiales y caracterizamos a una familia especial de ecuaciones diferenciales por medio de sus exponentes característicos en la línea al infinito.

Consideremos la ecuación diferencial dada por

$$\begin{aligned} \dot{z} &= P(z, w) \\ \dot{w} &= Q(z, w), \quad (z, w) \in \mathbb{C}^2 \end{aligned} \tag{3.1}$$

donde P, Q son polinomios en dos variables, $P, Q \in \mathbb{C}[z, w]$ y supongamos además que $\deg P = \deg Q = n$.

Observación 3.1. *Dado un polinomio en dos variables $f \in \mathbb{C}[z, w]$ de grado d , siempre es posible escribirlo como suma de polinomios homogéneos¹*

$$f = f_d + f_{d-1} + \cdots + f_0, \quad f_k = \sum_{j+l=k} a_{kj} z^j w^l, \quad k = 0, 1, \dots, d$$

Decimos, además que f_d es la parte principal homogénea de f y en el caso de la ecuación (3.1) diremos que (P_n, Q_n) es la parte principal del campo vectorial.

¹El grado de un monomio $z^j w^k$ es, por definición, $j + k$ y decimos que un polinomio $f \in \mathbb{C}[z, w]$ tiene grado d si el monomio de grado máximo en f es de grado exactamente d . Un polinomio homogéneo es aquel que solo consta de monomios de un solo grado.

Toda ecuación polinomial como en (3.1) tiene una extensión natural a $\mathbb{C}P^2$. A saber, si consideramos el cambio de coordenadas² $(z_1, w_1) = (\frac{1}{z}, \frac{w}{z})$ se tiene

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= -\frac{\dot{z}}{z^2} = \frac{-P(z, w)}{z^2} \Big|_{(z, w) = (\frac{1}{z_1}, \frac{w_1}{z_1})} \\ &= \frac{P_n(z, w) + P_{n-1}(z, w) + \cdots + P_1(z, w) + P_0}{-z^2} \Big|_{(z, w) = (\frac{1}{z_1}, \frac{w_1}{z_1})} \\ \dot{w}_1 &= \frac{\dot{z}w - z\dot{w}}{-z^2} \\ &= \frac{R_{n+1}(z, w) + R_n(z, w) + \cdots + R_1(z, w)}{-z^2} \Big|_{(z, w) = (\frac{1}{z_1}, \frac{w_1}{z_1})}. \end{aligned}$$

Donde

$$R_{j+1}(z, w) = wP_j(z, w) - zQ_j(z, w) = wz^j P_j(1, \frac{w}{z}) - z^{j+1} Q_j(1, \frac{w}{z}), \quad j = 0, 1, \dots, n$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned} R_{j+1}(z, w) \Big|_{(z_1, w_1) = (\frac{1}{z_1}, \frac{w_1}{z_1})} &= \frac{w_1}{z_1} \cdot \frac{1}{z_1^j} P_j(1, w_1) - \frac{1}{z_1^{j+1}} Q_j(1, w_1) \\ &= \frac{1}{z_1^{j+1}} (w_1 P_j(1, w_1) - Q_j(1, w_1)). \end{aligned}$$

Observación 3.2. En especial el polinomio $R_{n+1}(z, w)$, que será de suma importancia en nuestro estudio de ecuaciones diferenciales en $\mathbb{C}P^2$, quedará definido como

$$R_{n+1}(z, w) = wP_n(z, w) - zQ_n(z, w) \quad (3.2)$$

y en la carta (z_1, w_1) como

$$R_{n+1}(1, w_1) = w_1 P_n(1, w_1) - Q_n(1, w_1). \quad (3.3)$$

Así, para estudiar el comportamiento de las curvas solución en el plano de las fases (z_1, w_1) consideramos

$$\frac{dz_1}{dw_1} = \frac{dz_1}{dt} \cdot \frac{dt}{dw_1} = \frac{\frac{z_1^2}{z_1^n} [P_n(1, w_1) + z_1 P_{n-1}(1, w_1) + \cdots + z_1^n P_0]}{\frac{z_1^2}{z_1^{n+1}} [R_{n+1}(1, w_1) + z_1 R_n(1, w_1) + \cdots + z_1^n R_1(1, w_1)]},$$

es decir

$$\frac{dz_1}{dw_1} = \frac{z_1 [P_n(1, w_1) + z_1 P_{n-1}(1, w_1) + \cdots + z_1^n P_0]}{R_{n+1}(1, w_1) + z_1 R_n(1, w_1) + \cdots + z_1^n R_1(1, w_1)} \quad (3.4)$$

²Es posible también, de manera análoga, realizar la extensión de la ecuación a la carta $(z_2, w_2) = (\frac{z}{w}, \frac{1}{w})$ del proyectivo complejo $\mathbb{C}P^2$.

De esta última expresión es posible distinguir dos casos:

a) Si $R_{n+1} \equiv 0$, entonces

$$\frac{dz_1}{dw_1} = \frac{P_n(1, w_1) + z_1 P_{n-1}(1, w_1) + \cdots + z_1^n P_0}{R_n(1, w_1) + \cdots + z_1^{n-1} R_1(1, w_1)}$$

Todas las soluciones intersectan transversalmente a la recta $\ell_\infty := \{z_1 = 0\}$ salvo en las raíces de $P_n(1, w_1)$. En dichas raíces (genéricamente n distintas) las soluciones son tangentes a la recta $z_1 = 0$. A éste se le conoce como el *caso dicrítico*.

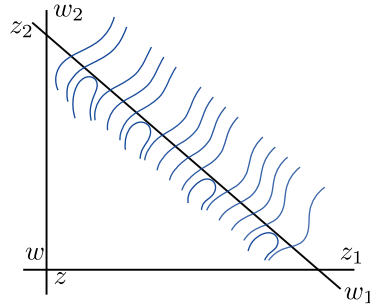


Figura 3.1: Soluciones a una ecuación en el caso dicrítico.

b) Si $R_{n+1} \not\equiv 0$, entonces la recta $\ell_\infty = \{z_1 = 0\}$ es invariante por la ecuación extendida. De hecho la recta $\ell_\infty \setminus \{(0, a_1), \dots, (0, a_{n+1})\}$, donde a_1, \dots, a_{n+1} son raíces del polinomio R_{n+1} , es solución de la ecuación (3.4) y los puntos $(0, a_1), (0, a_2), \dots, (0, a_{n+1})$ son puntos singulares de la ecuación extendida. Éste es llamado el *caso no dicrítico*. Así, la ecuación (3.4) tiene la forma

$$\frac{dz_1}{dw_1} = \frac{z_1 A(z_1, w_1)}{B(z_1, w_1)} \quad (3.5)$$

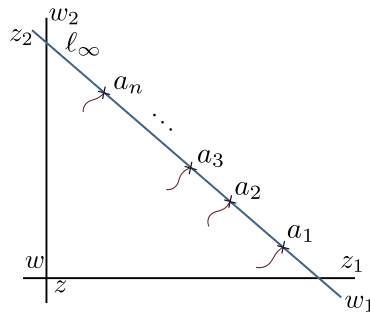


Figura 3.2: Recta ℓ_∞ invariante por la ecuación extendida.

Recordemos que en general encontrar de manera explícita una solución a una ecuación diferencial puede convertirse en un trabajo muy complicado. Es por ello que trabajar con una ecuación no dicrítica y encontrar, sin mayor esfuerzo, una solución que además es una recta es realmente sorprendente y tal situación debe ser aprovechada.

Conocer una solución de (3.5) nos permite extraer información sobre el comportamiento de las soluciones cercanas a ella haciendo uso de la ecuación de primera variación con respecto a la solución conocida como hemos hecho ver al final del capítulo 1 vía la transformación de monodromía. A continuación calculemos dicha ecuación. Sea $\tilde{v} = \frac{dz_1}{dw_1}$ y calculemos la expresión \tilde{v}_{z_1} obtenida en el lema 1.3

$$\tilde{v}_{z_1}|_{(0, w_1)} = \frac{(A + z_1 A_{z_1}) \cdot B + z_1 A \cdot B_{z_1}}{B^2} \Big|_{(0, w_1)} = \frac{A(0, w_1)}{B(0, w_1)} = \frac{P_n(1, w_1)}{R_{n+1}(1, w_1)}.$$

Recordemos que la información que rescata la ecuación de primera variación está directamente ligada a la transformación de monodromía proporcionándonos la parte lineal de ésta, misma que permite entender el comportamiento transverso de las soluciones. Notemos primero que al ser ℓ_∞ una recta proyectiva, es de hecho una esfera de Riemann³ (ver ejemplo 4.1) cuyo grupo fundamental es generado por pequeños lazos que rodean a los puntos singulares $(0, a_1), (0, a_2), \dots, (0, a_{n+1})$.

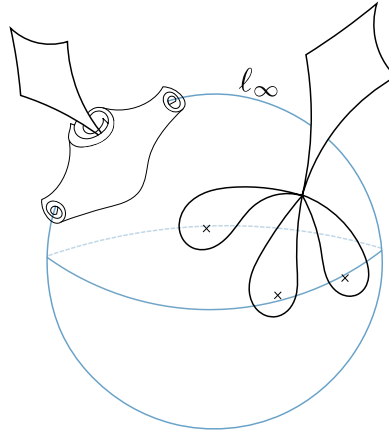


Figura 3.3: Comportamiento de las soluciones cerca de ℓ_∞ .

Sabemos también que la solución a la ecuación de primera variación en este caso está dada por

$$\varphi_1(w_1) = e^{\int_{w_0}^{w_1} \tilde{v}_{z_1}(\varphi(\tilde{w}, z_0), \tilde{w}) d\tilde{w}}.$$

³La cual está perforada en los puntos singulares.

Por consiguiente, si $\overline{\gamma_k}$ es un lazo que rodea únicamente al punto singular $(0, a_k)$ se tiene entonces que

$$\varphi(\gamma_k) = e^{\int_{\gamma_k} \tilde{v}_z(\varphi(z_0, \tilde{w}), \tilde{w}) d\tilde{w}} = e^{2\pi i \operatorname{Res}_{w_1=a_k} \frac{P_n(1, w_1)}{R_{n+1}(1, w_1)}}$$

Sean a_1, \dots, a_{n+1} las raíces de $R_{n+1}(1, w_1)$ y supongamos que son distintas dos a dos. Entonces,

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{w_1=a_j} \frac{P_n(1, w_1)}{R_{n+1}(1, w_1)} &= \lim_{w_1 \rightarrow a_j} (w_1 - a_j) \frac{P_n(1, w_1)}{R_{n+1}(1, w_1)} \\ &= \lim_{w_1 \rightarrow a_j} \frac{P_n(1, w_1)}{\frac{R_{n+1}(1, w_1)}{w_1 - a_j}} \\ &= \frac{P_n(1, a_j)}{R'_{n+1 w_1}(1, a_j)}. \end{aligned}$$

Denotemos por $\hat{\lambda}_j := \frac{P_n(1, a_j)}{R'_{n+1 w_1}(1, a_j)}$. Como las raíces de $R_{n+1}(1, w_1)$ son distintas dos a dos y $\deg P_n(1, w_1) < \deg R_{n+1}(1, w_1) = n + 1$, el cociente $\frac{P_n(1, w_1)}{R_{n+1}(1, w_1)}$ puede expresarse en fracciones parciales como

$$\frac{P_n(1, w_1)}{R_{n+1}(1, w_1)} = \sum_{j=1}^{n+1} \frac{\hat{\lambda}_j}{w_1 - a_j}$$

Por lo tanto la transformación de monodromía asociada al lazo γ_k es de la forma

$$\Delta_k(\xi) = e^{2\pi i \hat{\lambda}_k} \xi + \dots \quad (3.6)$$

Lema 3.1. Sea $f(w_1) = \sum_{j=1}^{n+1} \frac{\hat{\lambda}_j}{w_1 - a_j}$. Entonces

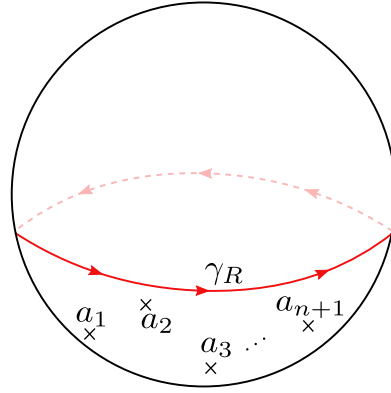
$$\sum_{j=1}^{n+1} \operatorname{Res}_{w_1=a_j} f(w_1) = \operatorname{Res}_{u=0} f\left(\frac{1}{u}\right) \cdot \frac{1}{u^2}$$

Demostración. Consideramos $f(w_1) = \sum_{j=1}^{n+1} \frac{\hat{\lambda}_j}{w_1 - a_j}$ y sea $\gamma_R = \{Re^{i\theta}, \theta \in [0, 2\pi]\}$

un círculo de radio R de tal modo que los puntos a_1, \dots, a_{n+1} quedan contenidos⁴ en el disco $D_R = \{w_1 \in \mathbb{C} \mid |w_1| \leq R\}$. Así para calcular la suma de los residuos

$\sum_{j=1}^{n+1} \operatorname{Res}_{w_1=a_j} f(w_1)$ basta calcular la integral $\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_R} f(w_1) dw_1$.

⁴Esto es siempre posible pues al ser un número finito de puntos podemos elegir una carta adecuada en la que esto suceda.

Figura 3.4: $a_j \in D_R$, $j = 1, 2, \dots, n+1$.

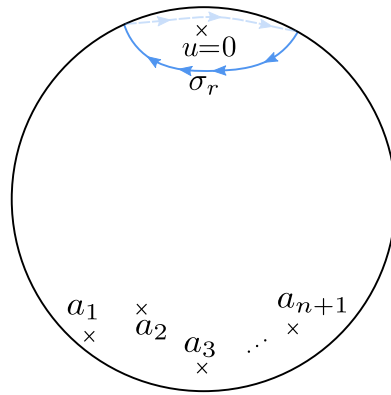
Por consiguiente

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_R} f(w_1) dw_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} f(Re^{i\theta}) \cdot iRe^{i\theta} d\theta.$$

Sea $u = \frac{1}{w_1}$, entonces $dw_1 = -\frac{1}{u^2} du$ y por tanto,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_R} f(w_1) dw_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_R} f\left(\frac{1}{u}\right) \left(-\frac{1}{u^2}\right) du = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} f\left(\frac{1}{re^{i\alpha}}\right) \left(\frac{-1}{(re^{i\alpha})^2}\right) \cdot re^{i\alpha} (-1) d\alpha$$

con $r = \frac{1}{R}$, $\alpha = -\theta$, $d\theta = -d\alpha$.

Figura 3.5: Tomado desde la carta $\frac{1}{w_1}$.

Finalmente⁵,

$${}^5 w_1 = \frac{1}{u} \Rightarrow Re^{i\theta} = \frac{1}{re^{i\alpha}} \Rightarrow R = \frac{1}{r}, e^{i\theta} = e^{-i\alpha}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_R} f(w_1) dw_1 &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} f\left(\frac{1}{re^{i\alpha}}\right) \left(\frac{-1}{(re^{i\alpha})^2}\right) \cdot re^{i\alpha}(-1) d\alpha \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_r} f\left(\frac{1}{u}\right) \cdot \frac{1}{u^2} du, \quad \sigma_r = re^{i\alpha}, \alpha \in [0, 2\pi] \\
&= \operatorname{Res}_{u=0} f\left(\frac{1}{u}\right) \cdot \frac{1}{u^2}
\end{aligned}$$

□

Observación 3.3. Para generar el grupo fundamental de la curva solución obtenida al extender la ecuación a $\mathbb{C}P^2$, $\ell_\infty \setminus \{(0, a_1), (0, a_2), \dots, (0, a_{n+1})\}$ son solamente necesarios n lazos independientes entre sí. Es decir, si $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{n+1}$ son pequeños lazos, basados en un mismo punto, que rodean a a_1, a_2, \dots, a_{n+1} respectivamente, entonces γ_{n+1} puede expresarse como una composición de $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ (ver figura 3.6).

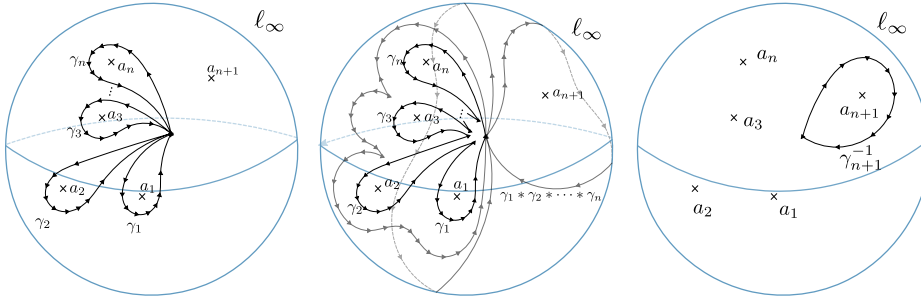


Figura 3.6: Generadores del grupo fundamental de ℓ_∞ .

Tal situación también es perceptible desde los exponentes característicos asociados a los puntos singulares en ℓ_∞ pues el lazo $\gamma_1 * \gamma_2 * \dots * \gamma_{n+1}$ es trivial, es decir homótopo a un punto, y por tanto la transformación de monodromía a lo largo de tal lazo debe ser la identidad.

Teorema 3.1. Sea

$$\begin{aligned}
\dot{z} &= P(z, w) \\
\dot{w} &= Q(z, w)
\end{aligned}$$

una ecuación diferencial polinomial con $P(z, w) = P_n(z, w) + \dots + P_0$, $Q(z, w) = Q_n(z, w) + \dots + Q_0$, P_j, Q_j polinomios homogéneos de grado j , $j = 0, 1, \dots, n$.

Supongamos que la extensión a $\mathbb{C}P^2$ satisface $R_{n+1}(1, w_1) \neq 0$, es decir la ecuación es no dicrítica y $\deg P_n(1, w_1) = n$, entonces los exponentes característicos $\hat{\lambda}_1, \dots, \hat{\lambda}_{n+1}$ asociados a los puntos singulares $(0, a_1), \dots, (0, a_{n+1})$ satisfacen

$$\sum_{j=1}^{n+1} \hat{\lambda}_j = 1$$

Cabe hacer notar que este teorema contiene algo mucho más profundo de lo que aparenta. El invariante $\sum \hat{\lambda}_j = 1$ nos indica la forma en la que la esfera $\mathbb{C}P^1$ está encajada en el haz normal (que en este caso es lineal por ser $\mathbb{C}P^2$). Este invariante conocido como el índice de Camacho-Sad es además como veremos independiente del campo vectorial que define a la ecuación.

Demostración. Consideremos

$$\begin{aligned} f(w_1) &= \frac{P_n(1, w_1)}{w_1 P_n(1, w_1) - Q_n(1, w_1)} \\ &= \frac{p_n w_1^n + p_{n-1} w_1^{n-1} + \dots + p_0}{w_1(p_n w_1^n + p_{n-1} w_1^{n-1} + \dots + p_0) - (q_n w_1^n + \dots + q_0)}. \end{aligned}$$

Para el cálculo de la suma de los residuos $\sum_{j=1}^{n+1} \hat{\lambda}_j$ tomemos primero

$$\begin{aligned} \frac{1}{u^2} \cdot f\left(\frac{1}{u}\right) &= \frac{1}{u^2} \cdot \frac{p_n \frac{1}{u^n} + p_{n-1} \frac{1}{u^{n-1}} + \dots + p_1 \frac{1}{u} + p_0}{\frac{1}{u}(p_n \frac{1}{u^n} + \dots + p_1 \frac{1}{u} + p_0) - (q_n \frac{1}{u^n} + q_{n-1} \frac{1}{u^{n-1}} + \dots + q_0)} \\ &= \frac{1}{u^2} \cdot \frac{\frac{1}{u^n}(p_n + p_{n-1}u + \dots + p_0 u^n)}{\frac{1}{u^{n+1}}[(p_n + p_{n-1}u + \dots + p_0 u) - u(q_n + \dots + q_0 u^n)]} \\ &= \frac{1}{u} \cdot \frac{p_n + p_{n-1}u + \dots + p_0 u^n}{p_n + p_{n-1}u + \dots + p_0 u - u(q_n + \dots + q_0 u^n)}. \end{aligned}$$

Así las cosas, por el lema 3.1 sólo resta calcular el residuo en $u = 0$

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{u=0} \frac{1}{u^2} f\left(\frac{1}{u}\right) &= \lim_{u \rightarrow 0} u \cdot \frac{1}{u^2} f\left(\frac{1}{u}\right) \\ &= \lim_{u \rightarrow 0} u \cdot \frac{1}{u} \cdot \frac{p_n + p_{n-1}u + \dots + p_0 u^n}{p_n + p_{n-1}u + \dots + p_0 u - u(q_n + \dots + q_0 u^n)} \\ &= \frac{p_n}{p_n} \\ &= 1 \end{aligned}$$

□

Veamos algunos ejemplos. Como antes comencemos por una ecuación lineal

Ejemplo 3.1. Consideremos la ecuación diferencial dada por

$$\begin{bmatrix} \dot{z} \\ \dot{w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i & -3 \\ 3 & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ w \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

y su extensión a $\mathbb{C}P^2$ en la carta (z_1, w_1) .

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= \frac{\dot{z}}{-z^2} \Big|_{(z,w)=(\frac{1}{z_1}, \frac{w_1}{z_1})} = \frac{iz - 3w}{-z^2} \Big|_{(z,w)=(\frac{1}{z_1}, \frac{w_1}{z_1})} \\ &= \frac{\frac{1}{z_1}[-3w_1 + i]}{-\frac{1}{z_1^2}} \\ &= -\frac{z_1^2}{z_1} \cdot [-3w_1 + i] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{w}_1 &= \frac{\dot{w}z - w\dot{z}}{z^2} \Big|_{(z,w)=(\frac{1}{z_1}, \frac{w_1}{z_1})} = \frac{w[iz - 3w] - z[3z + iw]}{-z^2} \Big|_{(z,w)=(\frac{1}{z_1}, \frac{w_1}{z_1})} \\ &= \frac{izw - 3w^2 - 3z^2 - izw}{-z^2} \Big|_{(z,w)=(\frac{1}{z_1}, \frac{w_1}{z_1})} \\ &= \frac{\frac{1}{z_1^2} \cdot [-3w_1^2 - 3]}{-\frac{1}{z_1^2}} \\ &= \frac{z_1^2}{z_1^2} \cdot [3w_1^2 + 3], \end{aligned}$$

y para analizar el comportamiento de las curvas solución en el retrato de las fases en la carta (z_1, w_1) consideremos el campo de direcciones

$$V = \frac{dz_1}{dw_1} = \frac{z_1[3w_1 - i]}{3w_1^2 + 3}.$$

Observemos que la ecuación (3.7) es no dicrítica. Ésto es fácil de verificar puesto que el polinomio $R_2(z, w) = 3w^2 + 3z^2 \neq 0$. Así, la recta $\ell_\infty = \{z_1 = 0\}$ es invariante por la ecuación extendida. Además sabemos que los puntos singulares de la ecuación, $(0, a_1), (0, a_2)$, en la recta al infinito están determinados por las raíces de $R_2(1, w_1) = 3[w_1^2 + 1]$, es decir $(0, i), (0, -i)$ son los puntos singulares en ℓ_∞ de la ecuación (3.7), extendida a $\mathbb{C}P^2$. Calculemos ahora los exponentes característicos asociados a ellos. Para realizar el cálculo, consideremos primero la ecuación de primera variación del campo $V = \frac{dz_1}{dw_1}$ a lo largo de $z_1 = 0$

$$\left[\frac{\partial V}{\partial z_1} \right]_{z_1=0} = \frac{3w_1 - i}{3w_1^2 + 3}$$

El exponente característico, $\hat{\lambda}_1$, asociado al punto singular $(0, i)$ está dado por

$$\begin{aligned}\hat{\lambda}_1 &= \operatorname{Res}_{w_1=i} \frac{3w_1 - i}{3w_1^2 + 3} = \lim_{w_1 \rightarrow i} (w_1 - i) \cdot \frac{3w_1 - i}{3w_1^2 + 3} \\ &= \lim_{w_1 \rightarrow i} \frac{3w_1 - i}{3(w_1 + i)} \\ &= \frac{2i}{6i} \\ &= \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

Ahora calculemos el exponente característico, $\hat{\lambda}_2$, que cooresponde al punto singular $(0, -i)$

$$\begin{aligned}\hat{\lambda}_2 &= \operatorname{Res}_{w_1=-i} \frac{3w_1 - i}{3w_1^2 + 3} = \lim_{w_1 \rightarrow -i} (w_1 + i) \cdot \frac{3w_1 - i}{3w_1^2 + 3} \\ &= \lim_{w_1 \rightarrow -i} \frac{3w_1 - i}{3(w_1 - i)} \\ &= \frac{-4i}{-6i} \\ &= \frac{2}{3}.\end{aligned}$$

Para verificar lo obtenido en el teorema 3.1 realicemos la suma $\hat{\lambda}_1 + \hat{\lambda}_2$

$$\hat{\lambda}_1 + \hat{\lambda}_2 = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1.$$

Por último consideremos la ecuación hamiltoniana dada en el ejemplo 2.2.

Ejemplo 3.2. Sea

$$\begin{aligned}\dot{z} &= 3w^2 \\ \dot{w} &= 3z^2 - 6z + 2\end{aligned}$$

Consideremos su extensión a $\mathbb{C}P^2$ en la carta (z_1, w_1)

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= \frac{\dot{z}}{-z^2} \Big|_{(z,w)=(\frac{1}{z_1}, \frac{w_1}{z_1})} = \frac{3w^2}{-z^2} \Big|_{(z,w)=(\frac{1}{z_1}, \frac{w_1}{z_1})} \\ &= \frac{\frac{1}{z_1^2} [3w_1^2]}{-\frac{1}{z_1^2}} \\ &= -\frac{z_1^2}{z_1^2} [3w_1^2]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{w}_1 &= \frac{\dot{w}z - w\dot{z}}{z^2} \Big|_{(z,w)=(\frac{1}{z_1}, \frac{w_1}{z_1})} = \frac{w[3w^2] - z[3z^2 - 6z + 2]}{-z^2} \Big|_{(z,w)=(\frac{1}{z_1}, \frac{w_1}{z_1})} \\
&= \frac{3w^2 - 3z^3 + 6z^2 - 2z}{-z^2} \Big|_{(z,w)=(\frac{1}{z_1}, \frac{w_1}{z_1})} \\
&= \frac{\frac{1}{z_1^3} [3w_1^3 - 3 + 6z_1 - 2z_1^2]}{-\frac{1}{z_1^2}} \\
&= -\frac{z_1^2}{z_1^3} \cdot [3w_1^3 - 3 + 6z_1 - 2z_1^2]
\end{aligned}$$

y consideremos el campo de direcciones

$$V = \frac{dz_1}{dz_2} = \frac{z_1[3w_1^2]}{3w_1^3 - 3 + 6z_1 - 2z_1^2}$$

Observemos que esta ecuación es no dicrítica y que los puntos singulares en $\ell_\infty = \{z_1 = 0\}$ son $(0, j)$, $(0, j^2)$, $(0, j^3)$, donde j es una raíz cúbica de la unidad distinta de uno. En efecto, pues el polinomio $R_3(z, w) = w[3w^2] - z[3z^2] = 3[w^3 - z^3]$ el cual no se anula idénticamente, además $R_3(1, w_1) = 3[w_1^3 - 1]$. Calculemos los exponentes característicos asociados a los puntos singulares en ℓ_∞ con uso de la ecuación de primera variación a lo largo de la recta invariante $z_1 = 0$

$$\left[\frac{\partial V}{\partial z_1} \right]_{z_1=0} = \frac{3w_1^3}{3[w_1^3 - 1]}.$$

Dado que los puntos singulares son distintos dos a dos podemos calcular el residuo en ellos de la siguiente forma

$$\begin{aligned}
\hat{\lambda}_k &= \frac{3w_1^2}{\frac{d}{dw_1}(3w_1^3 - 3)} \Big|_{w_1=j^k}, & k = 1, 2, 3. \\
&= \frac{3w_1^2}{9w_1^2} \Big|_{w_1=j^k}, & k = 1, 2, 3. \\
&= \frac{1}{3} \Big|_{w_1=j^k}, & k = 1, 2, 3. \\
&= \frac{1}{3}, & k = 1, 2, 3.
\end{aligned}$$

Es decir cada punto singular tiene el mismo exponente característico.

En la siguiente sección veremos que el hecho de que la ecuación sea hamiltoniana tiene directamente como consecuencia esta homogeneidad presentada en los exponentes característicos, de hecho podremos caracterizar las ecuaciones que tienen dicha propiedad.

3.1. Los exponentes característicos de ecuaciones hamiltonianas en ℓ_∞

El siguiente lema nos permite evitar realizar repetidamente algunos cálculos innecesarios.

Lema 3.2 (Identidad de Euler). *Sea $P \in \mathbb{C}[z, w]$ un polinomio homogéneo de grado d , entonces*

$$z \frac{\partial P}{\partial z} + w \frac{\partial P}{\partial w} = d \cdot P$$

Demostración. Puesto que P es homogéneo de grado d , entonces es de la forma

$$P = \sum_{k+j=d} a_k z^j w^k, \quad a_k \in \mathbb{C}.$$

Así,

$$\begin{aligned} z \frac{\partial P}{\partial z} + w \frac{\partial P}{\partial w} &= z \sum_{k+j=d} k a_k z^{k-1} w^j + w \sum_{k+j=d} j a_k z^k w^{j-1} \\ &= \sum_{k+j=d} k a_k z^k w^j + \sum_{k+j=d} j a_k z^k w^j \\ &= \sum_{k+j=d} (k+j) a_k z^k w^j \\ &= \sum_{k+j=d} d \cdot a_k z^k w^j \\ &= d \cdot \sum_{k+j=d} a_k z^k w^j \\ &= d \cdot P \end{aligned}$$

□

Observación 3.4. *Consideremos la ecuación hamiltoniana polinomial*

$$\begin{aligned} \dot{z} &= P_n(z, w) + P_{n-1}(z, w) + \cdots + P_0 \\ \dot{w} &= Q_n(z, w) + Q_{n-1}(z, w) + \cdots + Q_0. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Afirmamos que la ecuación (3.8) es no dicrítica. En efecto, al ser una ecuación hamiltoniana definida en todo \mathbb{C}^2 existe una función $H : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ la cual cumple que

$$\dot{z} = \frac{\partial H}{\partial w} \quad \text{y} \quad \dot{w} = -\frac{\partial H}{\partial z}$$

Aún más, H es necesariamente polinomial de grado $n+1$ por lo que podemos escribirla como

$$H = H_{n+1} + H_n + \cdots + H_1$$

con $H_j(z, w) \in \mathbb{C}[z, w]$ homogéneo de grado j ; en consecuencia $P_j = \frac{\partial H_{j+1}}{\partial w}$ y $Q_j = -\frac{\partial H_{j+1}}{\partial z}$. Así las cosas, el polinomio R_{n+1} , por medio del cual podemos saber si la recta $z_1 = 0$ es o no invariante por la ecuación extendida, está dado por

$$\begin{aligned} R_{n+1}(z, w) &= wP_n(z, w) - zQ_n(z, w) \\ &= w \frac{\partial H_{n+1}}{\partial w}(z, w) - z \left[-\frac{\partial H_{n+1}}{\partial z}(z, w) \right]. \end{aligned}$$

Puesto que H_{n+1} es un polinomio homogéneo de grado $n+1$, por el lema 3.2 se tiene que

$$R_{n+1}(z, w) = (n+1)H_{n+1}(z, w).$$

Por lo que la ecuación (3.8) es no dicrítica y por tanto toda ecuación hamiltoniana extendida a $\mathbb{C}P^2$ siempre tiene como recta invariante a la línea al infinito.

Proposición 3.1. *Sea*

$$\begin{aligned} \dot{z} &= P(z, w) \\ \dot{w} &= Q(z, w) \end{aligned} \tag{3.9}$$

una ecuación diferencial polinomial hamiltoniana, con $\deg P = \deg Q = n$. Supongamos que los puntos singulares en $\ell_\infty = \{z_1 = 0\}$ son distintos dos a dos, entonces todos ellos tienen igual exponente característico.

Demostración. Por hipótesis la ecuación (3.9) satisface $\frac{\partial P}{\partial z} = -\frac{\partial Q}{\partial w}$ y está definida en todo \mathbb{C}^2 por lo tanto existe una función analítica $H : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$, misma que por la observación 3.4 es polinomial y puede ser escrita de la forma $H = H_{n+1} + H_n \cdots + H_1$ y es tal que $P_j = \frac{\partial H_{j+1}}{\partial w}$, $Q_j = -\frac{\partial H_{j+1}}{\partial z}$, $j = 0, 1, \dots, n$. Consideremos la extensión de la ecuación (3.9) a $\mathbb{C}P^2$ en la carta (z_1, w_1) y sean $(0, a_1), (0, a_2), \dots, (0, a_{n+1})$ los puntos singulares en $\ell_\infty = \{z_1 = 0\}$. Para cada $i = 1, 2, \dots, n+1$ el exponente característico correspondiente está dado por

$$\begin{aligned} \hat{\lambda}_i &= \frac{P_n(1, a_i)}{\left(\frac{d}{dw_1} R_{n+1} \right) (1, a_i)} \\ &= \frac{P_n(1, a_i)}{\left(\frac{d}{dw_1} (n+1)H_{n+1} \right) (1, a_i)} \\ &= \frac{P_n(1, a_i)}{(n+1)P_n(1, a_i)} \\ &= \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

□

La proposición anterior prueba de hecho que las transformaciones de monodromía calculadas a lo largo de los lazos generadores del grupo fundamental de

$\ell_\infty \setminus \{(0, a_1), (0, a_2), \dots, (0, a_{n+1})\}$ tienen todas ellas parte lineal $e^{\frac{2\pi i}{n+1}}$. Es decir, son de la forma $\Delta(\xi) = e^{\frac{2\pi i}{n+1}}\xi + \dots$.

Por la proposición 3.1 sabemos ahora que las ecuaciones hamiltonianas tienen esta peculiaridad sobre sus exponentes característicos, en la línea al infinito. Si reflexionemos un poco sobre tal situación notaremos que a pesar de que los exponentes característicos $\hat{\lambda}_j$ están sujetos a satisfacer la relación que hemos probado en el teorema 3.1, $\hat{\lambda}_1 + \hat{\lambda}_2 + \dots + \hat{\lambda}_{n+1} = 1$, las posibilidades para elegir $n + 1$ números complejos que satisfagan dicha ecuación son demasiadas. ¿Será posible que al pedir además que sean todos iguales, podamos asegurar que la ecuación en cuestión sea también hamiltoniana?

El siguiente ejemplo dará respuesta inmediata a nuestra pregunta.

Ejemplo 3.3. Consideremos la ecuación dada por

$$\begin{aligned}\dot{z} &= z^2 - 3w^2 + z \\ \dot{w} &= -2zw + w.\end{aligned}\tag{3.10}$$

Observemos primero que se trata de una ecuación no dicrítica pues el polinomio $R_3(z, w)$ está dado por

$$\begin{aligned}R_3(z, w) &= w[z^2 - 3w^2] - z[-2zw] \\ &= -3w^3 + 3zw^2\end{aligned}$$

y éste no es el polinomio cero. Extendamos ahora la ecuación a $\mathbb{C}P^2$ para calcular los puntos singulares en $\ell_\infty = \{z_1 = 0\}$ y sus respectivos exponentes característicos.

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= \frac{\dot{z}}{-z^2} \Big|_{(z,w)=(\frac{1}{z_1}, \frac{w_1}{z_1})} = \frac{z^2 - 3w^2 + z}{-z^2} \Big|_{(z,w)=(\frac{1}{z_1}, \frac{w_1}{z_1})} \\ &= \frac{\frac{1}{z_1^2}[1 - 3w_1^2 + z_1]}{-\frac{1}{z_1^2}} \\ &= -\frac{z_1^2}{z_1^2} \cdot [-3w_1^2 + 1 + z_1]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \dot{w}_1 &= \frac{\dot{w}z - w\dot{z}}{z^2} \Big|_{(z,w)=(\frac{1}{z_1}, \frac{w_1}{z_1})} = \frac{w[z^2 - 3w^2 + z] - z[-2zw + w]}{-z^2} \Big|_{(z,w)=(\frac{1}{z_1}, \frac{w_1}{z_1})} \\
 &= \frac{z^2w - 3w^3 + zw + 2z^2w - zw}{-z^2} \Big|_{(z,w)=(\frac{1}{z_1}, \frac{w_1}{z_1})} \\
 &= \frac{\frac{1}{z_1^3}[3w_1 - 3w_1^3]}{\frac{1}{z_1^2}} \\
 &= -\frac{z_1^2}{z_1^3} \cdot [3w_1 - 3w_1^3].
 \end{aligned}$$

Consideremos el campo de direcciones

$$V = \frac{dz_1}{dw_1} = \frac{z_1[-3w_1^2 + 1 + z_1]}{-3w_1[w_1^2 - 1]}$$

y calculemos la ecuación de primera variación a lo largo de la recta invariante $z_1 = 0$

$$\left[\frac{\partial V}{\partial z_1} \right]_{z_1=0} = \frac{-3w_1^2 + 1}{-3w_1[w_1^2 - 1]}.$$

Calculemos ahora los exponentes característicos que corresponden a los puntos singulares $(0, 0)$, $(0, 1)$, y $(0, -1)$

$$\begin{aligned}
 \hat{\lambda}_1 &= Res_{w_1=0} \frac{-3w_1^2 + 1}{-3w_1[w_1^2 - 1]} \\
 &= \lim_{w_1 \rightarrow 0} w_1 \cdot \frac{-3w_1^2 + 1}{-3w_1[w_1^2 - 1]} \\
 &= \lim_{w_1 \rightarrow 0} \frac{-3w_1^2 + 1}{-3[w_1^2 - 1]} \\
 &= \frac{1}{3} \\
 \hat{\lambda}_2 &= Res_{w_1=1} \frac{-3w_1^2 + 1}{-3w_1[w_1^2 - 1]} \\
 &= \lim_{w_1 \rightarrow 1} (w_1 - 1) \cdot \frac{-3w_1^2 + 1}{-3w_1[w_1^2 - 1]} \\
 &= \lim_{w_1 \rightarrow 1} \frac{-3w_1^2 + 1}{-3w_1[w_1 + 1]} \\
 &= \frac{-3 + 1}{-3[1 + 1]} \\
 &= \frac{1}{3}.
 \end{aligned}$$

No es necesario calcular el tercer exponente característico pues sabemos que satisface la relación $\hat{\lambda}_1 + \hat{\lambda}_2 + \hat{\lambda}_3 = 1$ por lo que $\hat{\lambda}_3 = \frac{1}{3}$. Sin embargo, a pesar de que el campo vectorial está definido en todo \mathbb{C}^2 que es un abierto simplemente conexo observemos que

$$\begin{aligned}\frac{\partial \dot{z}}{\partial z} &= 2z + 1 \\ \frac{\partial \dot{w}}{\partial w} &= -2z + 1\end{aligned}$$

y por lo tanto $\frac{\partial \dot{z}}{\partial z} \neq -\frac{\partial \dot{w}}{\partial w}$; es decir, la ecuación no es hamiltoniana como esperábamos.

Si recordamos como están definidos los exponentes característicos notaremos que sólo dependen de la parte principal del campo. Retomando el ejemplo 3.3 veamos que la ecuación que define la parte principal del campo es

$$\begin{aligned}\dot{z} &= z^2 - w^2 \\ \dot{w} &= -2zw\end{aligned}$$

la cual sí es hamiltoniana.

El resultado que encabeza la última sección de este capítulo caracteriza por completo a las ecuaciones que tienen exponentes característicos iguales en ℓ_∞ .

3.2. La integrabilidad de (P_n, Q_n) sí depende de los exponentes característicos

El siguiente resultado prueba que aquellas ecuaciones diferenciales no dicríticas definidas por campos vectoriales cuya parte principal está dada por un campo vectorial conservativo, son las únicas con la propiedad $\hat{\lambda}_j = \frac{1}{n+1} \forall j = 1, 2, \dots, n+1$.

Proposición 3.2. *Sea*

$$\begin{aligned}\dot{z} &= P(z, w) \\ \dot{w} &= Q(z, w)\end{aligned}$$

Una ecuación diferencial polinomial con $\deg P = \deg Q = n$ no dicrítica con puntos singulares $(0, a_1), (0, a_2), \dots, (0, a_{n+1})$ en ℓ_∞ , $a_i \neq a_j$ para $i \neq j$. Si n de los $n+1$ exponentes característicos son iguales a $\frac{1}{n+1}$, entonces la parte principal del campo, (P_n, Q_n) , satisface

$$\frac{\partial P_n}{\partial z} = -\frac{\partial Q_n}{\partial w}.$$

Es decir, define una ecuación hamiltoniana.

Demostración. Sabemos, por el teorema 3.1, que los exponentes característicos de los puntos singulares en la recta invariante $\ell_\infty = \{z_1 = 0\}$ suman 1, es decir, si $(0, a_1), (0, a_2), \dots, (0, a_{n+1})$ son los puntos singulares en la línea al infinito y $\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \dots, \hat{\lambda}_{n+1}$ sus respectivos exponentes característicos, entonces

$$\hat{\lambda}_1 + \hat{\lambda}_2 + \dots + \hat{\lambda}_{n+1} = 1 \quad (3.11)$$

Ahora bien, por hipótesis, n de ellos son iguales a $\frac{1}{n+1}$; supongamos sin pérdida de generalidad que

$$\hat{\lambda}_i = \frac{1}{n+1}, \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, n.$$

Entonces de la expresión (3.11) se sigue que

$$\frac{n}{n+1} + \hat{\lambda}_{n+1} = 1$$

y por lo tanto

$$\hat{\lambda}_{n+1} = \frac{1}{n+1}.$$

Mostraremos ahora que la función $H : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ definida como:

$$H(z, w) = \frac{1}{n+1} R_{n+1}(z, w)$$

es primera integral para la ecuación que define la parte principal del campo. Donde $R_{n+1}(z, w) = wP_n(z, w) - zQ_n(z, w)$.

Recordemos también que $a_i \neq a_j \forall i \neq j$ y por lo tanto

$$\hat{\lambda}_i = \frac{P_n(1, a_i)}{\left(\frac{d}{dw_1} R_{n+1}\right)(1, a_i)} = \frac{1}{n+1}.$$

Así las cosas, el polinomio $\tilde{f}(w_1) = (n+1)P_n(1, w_1) - \frac{d}{dw_1} R_{n+1}(1, w_1)$ se anula en a_1, a_2, \dots, a_{n+1} y puesto que $\deg \tilde{f} = n$ entonces se anula idénticamente. En consecuencia, el polinomio definido por

$$f(z, w) = (n+1)P_n(z, w) - \frac{\partial}{\partial w} R_{n+1}(z, w)$$

es también el polinomio cero pues, se anula en cada una de las $n+1$ rectas $w = a_i z$ siendo un polinomio homogéneo de grado n . De donde se sigue que

$$P_n(z, w) = \frac{1}{n+1} \frac{\partial}{\partial w} R_{n+1}(z, w) = \frac{\partial}{\partial w} H(z, w). \quad (3.12)$$

Por otra parte H es un polinomio homogéneo de grado $n+1$, entonces por el lema 3.2

$$(n+1)H = z \frac{\partial H}{\partial z} + w \frac{\partial H}{\partial w}$$

y también

$$(n+1)H = R_{n+1} = wP_n - zQ_n.$$

De estas dos igualdades se tiene que

$$z \frac{\partial H}{\partial z} + w \frac{\partial H}{\partial w} = wP_n - zQ_n$$

y de la igualdad (3.12) se sigue que

$$z \frac{\partial H}{\partial z} + wP_n = wP_n - zQ_n;$$

en consecuencia

$$z \frac{\partial H}{\partial z} = -zQ_n$$

y por lo tanto

$$-\frac{\partial H}{\partial z} = Q_n. \quad (3.13)$$

Así, las ecuaciones 3.12 y 3.13 demuestran que la parte principal del campo define una ecuación diferencial hamiltoniana. \square

En conclusión. El hecho de que una ecuación no dicrítica tenga sus $n+1$ exponentes característicos en ℓ_∞ iguales, es equivalente a pedir que la parte principal del campo defina una ecuación diferencial hamiltoniana. Para ecuaciones diferenciales definidas por campos vectoriales polinomiales de grado dos es suficiente una condición extra sobre un punto singular de la parte afín para poder caracterizar a la ecuación como hamiltoniana.

3.2.1. Un resultado que caracteriza ecuaciones hamiltonianas cuadráticas

Los ejemplos que presentamos en el capítulo 5, así como los resultados que hemos obtenido sobre ellos, enunciados en la proposición 5.2 fueron vitales para completar las hipótesis necesarias para asegurar la existencia de una primera integral para la ecuación diferencial definida por un campo vectorial cuadrático.

Teorema 3.2. *Sea*

$$\begin{aligned} \dot{z} &= P(z, w) \\ \dot{w} &= Q(z, w) \end{aligned} \quad (3.14)$$

una ecuación diferencial polinomial cuadrática, $\deg P = \deg Q = 2$, cuya extensión a $\mathbb{C}P^2$ tiene como recta invariante a ℓ_∞ (i.e. es no dicrítica) Si dos de los puntos singulares en la línea al infinito tienen exponente característico $\frac{1}{3}$ y la matriz derivada del campo vectorial en algún punto singular tiene valores propios no nulos λ y $-\lambda$, p.a. $\lambda \in \mathbb{C}$, entonces la ecuación (3.14) es hamiltoniana.

Demostración. Que la ecuación 3.14 esté definida en un abierto simplemente conexo es inmediato pues al ser polinomial está definida de hecho en todo \mathbb{C}^2 . Ahora bien, para probar que satisface la condición sobre las parciales vayamos directamente al cálculo de la divergencia del campo vectorial. Si $P(z, w) = P_2(z, w) + P_1(z, w) + P_0$ y $Q(z, w) = Q_2(z, w) + Q_1(z, w) + Q_0$. Entonces

$$P_z + Q_w = P_{2z} + P_{1z} + Q_{2w} + Q_{1w}. \quad (3.15)$$

Por hipótesis dos de los exponentes característicos al infinito son iguales a $\frac{1}{3}$, consecuentemente, por la proposición 3.2 se tiene que $P_{2z} = -Q_{2w}$; por lo que $P_z + Q_w$ es constante. Ahora bien, sabemos que existe un punto singular $p \in \mathbb{C}$ que satisface que la matriz

$$\left[\frac{\partial v}{\partial(z, w)} \right]_{(z, w)=p} = \begin{bmatrix} P_z(p) & P_w(p) \\ Q_z(p) & Q_w(p) \end{bmatrix}$$

tiene valores propios $\lambda, -\lambda$ por lo que $\left[\frac{\partial v}{\partial(z, w)} \right]_{(z, w)=p}$ y $\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{bmatrix}$ son conjugadas. Recordemos además que la traza de una matriz es invariante bajo conjugación, en consecuencia

$$P_z(p) + Q_w(p) = \lambda - \lambda = 0$$

Así, $P_z + Q_w$ es constante y se anula en un punto. Por lo tanto $P_z + Q_w \equiv 0$, lo que demuestra el resultado. \square

El teorema 3.2 tiene especial importancia pues la hipótesis que lo hacen verdadero las entendemos geoméricamente gracias a la transformación de monodromía, contrario a la definición de ecuación hamiltoniana que hasta ahora había sido para nosotros únicamente una condición algebraica. De hecho, como hemos de ver en el siguiente capítulo, la homogeneidad presentada en los exponentes característicos de una ecuación hamiltoniana nos permitirá ver que las soluciones se acumulan en los puntos singulares que se encuentran en ℓ_∞ , contrario a su comportamiento en \mathbb{C}^2 .

Capítulo 4

Topología de polinomios transversales al infinito

Con la finalidad de poder analizar las soluciones a una ecuación hamiltoniana por medio de su primera integral, en este capítulo realizamos un análisis de la topología de curvas complejas planas definidas por los ceros de un polinomio en dos variables, las cuales pueden ser vistas también como superficies de Riemann compactas. Probaremos la conocida fórmula de Riemann-Hurwitz. Definimos la noción de transversalidad al infinito en polinomios y para las curvas de nivel, no singulares, de polinomios de esta clase calculamos explícitamente la dimensión del primer grupo de homología de sus curvas de nivel no singulares, en términos del grado del polinomio.

Para comenzar con el análisis de las curvas de nivel de un polinomio consideremos la ecuación dada en el ejemplo 2.2

Ejemplo 4.1.

$$\begin{aligned} \dot{z} &= 3w^2 \\ \dot{w} &= 3z^2 - 6z + 2 \end{aligned} \tag{4.1}$$

Recordemos que ésta es hamiltoniana y cuya primera integral es el polinomio $H(z, w) = w^3 - z^3 + 3z^2 - 2z$. Analicemos la curva de nivel 0, es decir $H(z, w) = 0$. Por definición la curva de nivel $L_0 = H^{-1}(0)$ consta de los puntos (z, w) que satisfacen

$$w^3 - z^3 + 3z^2 - 2z = 0$$

o equivalentemente, la igualdad

$$w^3 = z(z - 1)(z - 2). \tag{4.2}$$

Podemos observar que en la ecuación (4.2) hemos podido poner a la variable w en función de z . Sin embargo la potencia que acompaña a la primera convierte esto

en una función multivaluada. Para poder analizar la superficie L_0 procedemos realizando prolongaciones analíticas.

Sacando logaritmo complejo a la ecuación (4.2) se tiene

$$3 \ln w = \ln z + \ln(z-1) + \ln(z-2).$$

Sea $c(\tau) = re^{i\tau}$, $\tau \in [0, 2\pi]$ una curva contenida en el plano z y restringimos $\ln w = \frac{1}{3} \ln z + \frac{1}{3} \ln(z-1) + \frac{1}{3} \ln(z-2)$ a $c(\tau)$

$$\ln w(c(\tau)) = \frac{1}{3} \ln c(\tau) + \frac{1}{3} \ln(c(\tau)-1) + \frac{1}{3} \ln(c(\tau)-2).$$

Derivando e integrando respecto a τ obtenemos

$$\int_0^{2\pi} \frac{w'(c(\tau))c'(\tau)}{w(c(\tau))} d\tau = \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} \frac{c'(\tau)}{c(\tau)} d\tau + \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} \frac{c'(\tau)}{c(\tau)-1} d\tau + \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} \frac{c'(\tau)}{c(\tau)-2} d\tau.$$

Del lado izquierdo de la igualdad anterior se tiene que

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{w'(c(\tau))c'(\tau)}{w(c(\tau))} d\tau &= \int_{c(0)}^{c(2\pi)} \frac{1}{w} dw = \ln c(2\pi) - \ln c(0) \\ &= \ln |c(2\pi)| + i \arg(c(2\pi)) - [\ln |c(0)| + i \arg(c(0))] \\ &= i[\arg(c(2\pi)) - \arg(c(0))]. \end{aligned}$$

Es decir, estamos obteniendo la variación del argumento de la coordenada w como función de z . Así las cosas, si $r \in (0, 1)$, entonces

$$\int_0^{2\pi} \frac{c'(\tau)}{c(\tau)} d\tau = 2\pi i, \quad \int_0^{2\pi} \frac{c'(\tau)}{c(\tau)-1} d\tau = 0 \quad \text{y} \quad \int_0^{2\pi} \frac{c'(\tau)}{c(\tau)-2} d\tau = 0$$

por lo tanto

$$\int_{c(0)}^{c(2k\pi)} \frac{1}{w} dw = \frac{2k\pi i}{3}, \quad k = 1, 2, 3.$$

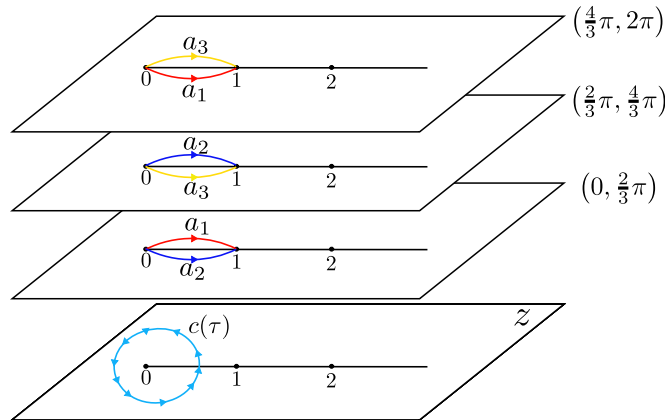


Figura 4.1: Continuación analítica a lo largo de $c(\tau)$, $r \in (0, 1)$.

Si $r \in (1, 2)$, entonces

$$\int_0^{2\pi} \frac{c'(\tau)}{c(\tau)} d\tau = 2\pi i, \quad \int_0^{2\pi} \frac{c'(\tau)}{c(\tau) - 1} d\tau = 2\pi i \quad \text{y} \quad \int_0^{2\pi} \frac{c'(\tau)}{c(\tau) - 2} d\tau = 0$$

en consecuencia

$$\int_{c(0)}^{c(2k\pi)} \frac{1}{w} dw = \frac{4k\pi i}{3}, \quad k = 1, 2.$$

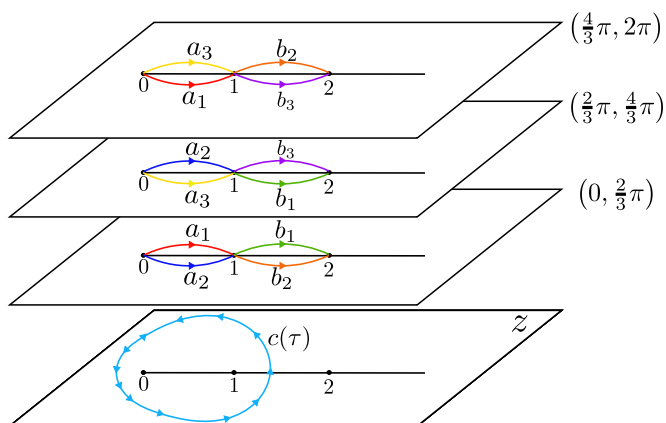


Figura 4.2: Continuación analítica a lo largo de $c(\tau)$, $r \in (1, 2)$.

Por último, si $r > 2$ se sigue que

$$\int_0^{2\pi} \frac{c'(\tau)}{c(\tau)} d\tau = 2\pi i, \quad \int_0^{2\pi} \frac{c'(\tau)}{c(\tau) - 1} d\tau = 2\pi i \quad \text{y} \quad \int_0^{2\pi} \frac{c'(\tau)}{c(\tau) - 2} d\tau = 2\pi i$$

por lo que

$$\int_{c(0)}^{c(2k\pi)} \frac{1}{w} dw = 2\pi i \quad \forall k \in \mathbb{N}^*.$$

Es decir, el argumento se mantuvo igual.

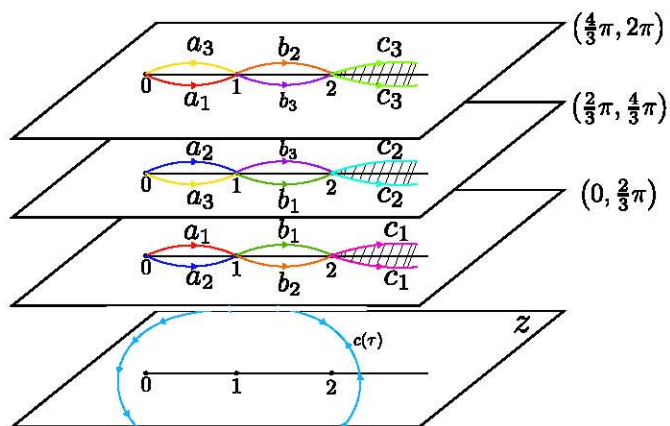
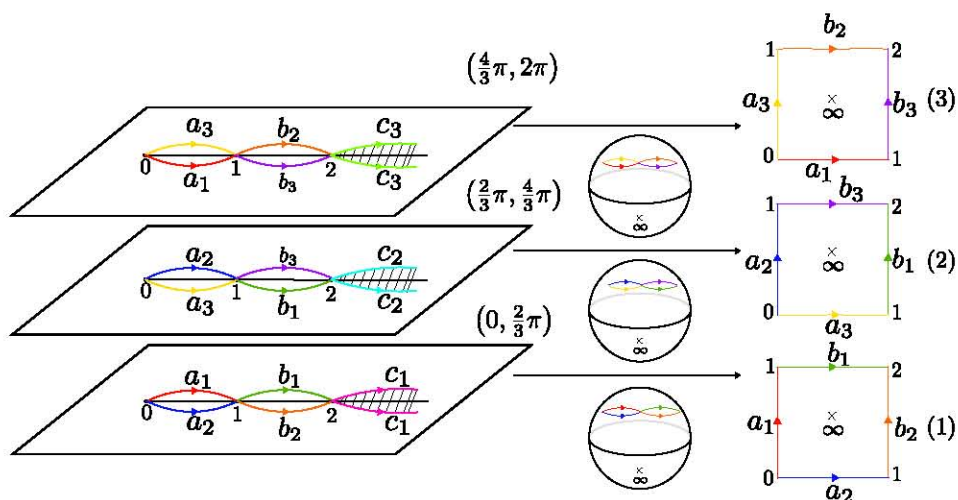


Figura 4.3: Continuación analítica a lo largo de $c(\tau)$, $r \in (2, \infty)$.

Reunamos ahora la información obtenida.



De los polígonos (1) y (2) se obtiene

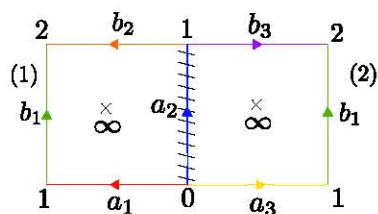


Figura 4.4: Pegados por el lado a_2 .

y este a su vez junto con (3)

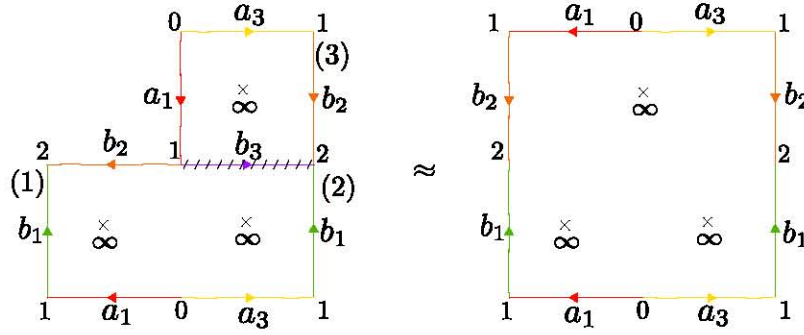


Figura 4.5: Pegados por el lado b_3 .

Por lo que hemos obtenido un toro sin 3 puntos¹ que concuerdan con los infinitos de los planos correspondientes a los intervalos de variación del argumento. Sabemos además que L_0 es parametrizada por una solución de la ecuación (4.1).

De hecho L_0 es una superficie de Riemann compacta (ver teorema 4.1).

4.1. Superficies de Riemann

Definición 4.1. Una **superficie de Riemann** X es un espacio topológico Hausdorff y dos numerable provisto de una cubierta por abiertos

$$X = \bigcup_{i \in I} U_i$$

de tal forma que para cada abierto U_i se tiene un homeomorfismo sobre un abierto de \mathbb{C}

$$\varphi_i : U_i \rightarrow V_i \subset \mathbb{C}.$$

Satisfaciendo que para toda interseccion no vacía $U_i \cap U_j$ la función

$$\Phi_{ij} := \varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i \cap U_j) \rightarrow \varphi_j(U_i \cap U_j)$$

es analítica. A la función Φ_{ij} se le denomina **función de transición**. Diremos que el conjunto $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i) | i \in I\}$ es un **atlas analítico** para X y cuyos elementos llamamos **cartas**.

¹Como el dado en la figura 5.3.

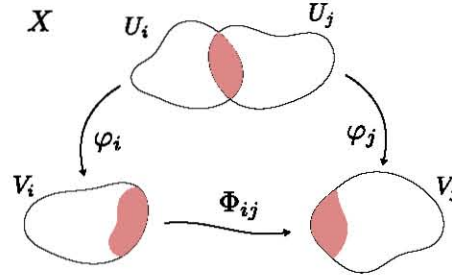


Figura 4.6: Función de transición.

Si $p \in U_\alpha$ decimos que $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ es una carta en p y $z_\alpha = \varphi_\alpha(p)$ es una coordenada local² en p .

Observación 4.1. Nosotros supondremos además a lo largo de este capítulo que las superficies de Riemann con las que trabajamos son conexas.

Notemos que si $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ y (U_β, φ_β) son cartas en $p \in X$ con coordenadas locales z_α y z_β , entonces las funciones de transición nos permiten, de manera natural, dar un cambio de coordenadas local como:

$$z_\beta = \Phi_{\alpha\beta}(z_\alpha).$$

Puesto que muy pronto hablaremos de aplicaciones analíticas entre superficies de Riemann es necesario decir qué entendemos por éstas sin necesidad de especificar cada vez un atlas en particular. Así, diremos que dos atlas analíticos $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i)\}$ y $\mathcal{B} = \{(W_j, \psi_j)\}$ son *compatibles* si para cada pareja de cartas $(U_i, \varphi_i) \in \mathcal{A}$ y $(W_j, \psi_j) \in \mathcal{B}$ tales que $U_i \cap W_j \neq \emptyset$ se tiene que

$$\psi_j \circ \varphi_i^{-1} : \varphi(U_i \cap W_j) \rightarrow \psi(U_i \cap W_j) \quad (4.3)$$

resulta ser una función analítica. En otras palabras \mathcal{A} y \mathcal{B} son compatibles si $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ es también un atlas analítico para X . Es claro que la compatibilidad de atlas induce una relación de equivalencia y a cada clase de equivalencia se le denomina *estructura compleja*.

Ejemplo 4.2. Todo subconjunto abierto U de una superficie de Riemann X es en sí mismo una superficie de Riemann. Es inmediato que U es nuevamente un espacio topológico Hausdorff y dos numerable, pues está dotado de la topología relativa. Si $\{(U_i, \varphi_i)\}$ es un atlas analítico en X , entonces $\mathcal{A}_U = \{(\tilde{U}_j, \tilde{\varphi}_j)\}$ con

²La cual siempre podemos suponer, sin pérdida de generalidad, centrada en cero.

$\tilde{U}_j = U \cap U_j \neq \emptyset$ y $\tilde{\varphi}_j = \varphi_j|_U$ es un atlas analítico para U . En efecto, pues

$$\begin{aligned} \bigcup_j \tilde{U}_j &= \bigcup_{U_j \cap U \neq \emptyset} (U_j \cap U) \\ &= \bigcup_{i \in I} (U_i \cap U) \\ &= \left(\bigcup_{i \in I} U_i \right) \cap U \\ &= X \cap U \\ &= U \end{aligned}$$

y para cada $(\tilde{U}_j, \tilde{\varphi}_j), (\tilde{U}_\ell, \tilde{\varphi}_\ell) \in \mathcal{A}_U$ con $\tilde{U}_j \cap \tilde{U}_\ell \neq \emptyset$ la correspondiente función de transición $\tilde{\Phi}_{\ell j}$ no es más que la restricción de $\Phi_{\ell j}$ a U la cual es por supuesto analítica. Así, U es también una superficie de Riemann. Un razonamiento análogo nos permite ver que atlas compatibles en X inducen atlas compatibles en U y por tanto cada estructura compleja de X induce, también, una única estructura compleja en U .

Ejemplo 4.3. Sea $X = \mathbb{C}$ y $\mathcal{A} = \{(\mathbb{C}, \text{id} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C})\}$ un atlas para \mathbb{C} que consiste de una única carta; claramente \mathcal{A} es analítico. Así \mathbb{C} es una superficie de Riemann.

El siguiente ejemplo es una de las superficies de Riemann más importantes y es conocida como la *esfera de Riemann*.

Ejemplo 4.4. Sea $X = \mathbb{C}P^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Para construirla, consideremos la compactificación de Alexandrov de \mathbb{C} . Es decir, si $\tau_{\mathbb{C}}$ es la topología usual de \mathbb{C} entonces

$$\tau_{\mathbb{C}P^1} = \tau_{\mathbb{C}} \cup \{B \subset \mathbb{C}P^1 \mid \infty \in B, \mathbb{C}P^1 \setminus B \text{ es compacto en } \mathbb{C}\}.$$

La importancia de esta compactificación radica en que $\mathbb{C}P^1$ dotado de esta topología es un espacio de Hausdorff. Consideremos ahora las cartas (U_1, φ_1) y (U_2, φ_2) , donde $U_1 := \mathbb{C}P^1 \setminus \{\infty\} = \mathbb{C}$ y $U_2 := \mathbb{C}P^1 \setminus \{0\} = \mathbb{C}^* \cup \{\infty\}$ y φ_1, φ_2 están definidas por $\varphi_1 : U_1 \rightarrow \mathbb{C}$ como la identidad en \mathbb{C} y φ_2 de la siguiente manera

$$\varphi_2(z) = \begin{cases} \frac{1}{z} & \text{si } z \in \mathbb{C}^* \\ 0 & \text{si } z = \infty \end{cases}.$$

Es claro que φ_1, φ_2 así definidas son homeomorfismos. Resta ver que las cartas son compatibles, es decir que la función de transición, $\phi_{12} := \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$ es analítica en $U_1 \cap U_2 = \mathbb{C}^*$. Para ello notemos que $\varphi_1(\mathbb{C}^*) = \varphi_2(\mathbb{C}^*) = \mathbb{C}^*$, entonces $\phi_{12} : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$ está dada por $\phi_{12}(z) = \frac{1}{z}$ que claramente es analítica en \mathbb{C}^* .

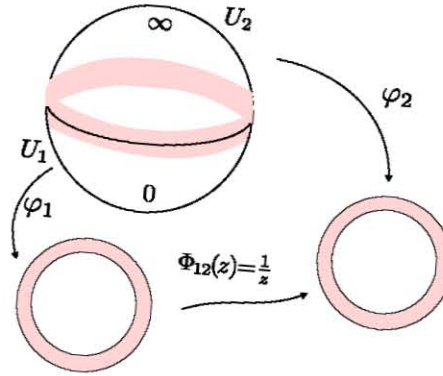


Figura 4.7: Esfera de Riemann.

Más ejemplos de superficies de Riemann podemos encontrarlos en curvas planas complejas definidas por los ceros de un polinomio, $\mathcal{C} = \{P = 0\}$, la cual denominamos *curva algebraica*, podemos asociar a cada una de ellas una superficie de Riemann compacta.

Teorema 4.1. *Sea $P \in \mathbb{C}[z, w]$ un polinomio irreducible; él define la curva plana compleja*

$$\mathcal{C}_P := \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid P(z, w) = 0\}.$$

Entonces, existe una superficie de Riemann compacta $X_P \subset \mathbb{C}P^2$ que coincide con \mathcal{C}_P salvo en un número finito de puntos.

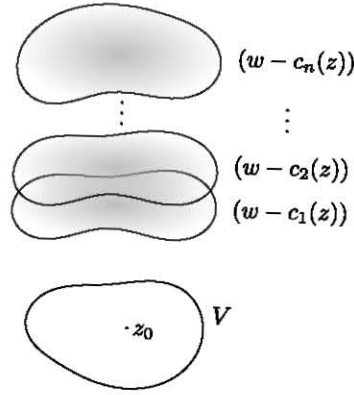
Si bien la demostración a este teorema no será propiamente parte de este trabajo daremos un bosquejo de ella. La idea de la prueba es expresar a P como un polinomio en w y coeficientes en el anillo de polinomios en z . Es decir si P es un polinomio de grado n , entonces

$$P = a_n w^n + a_{n-1} w^{n-1} + \cdots + a_0, \quad a_j \in \mathbb{C}[z], \quad \deg a_j \leq n - j$$

y observemos que para cada $z_0 \in \mathbb{C}$ el polinomio

$$P = a_n(z_0)w^n + a_{n-1}(z_0)w^{n-1} + \cdots + a_0(z_0)$$

genéricamente tiene exactamente n raíces, de hecho los valores de z para los que esto no sucede son un número finito, por lo que en general para los puntos de la forma (z_0, w) sobre la curva \mathcal{C}_P es válido el teorema de la función implícita teniendo así, en toda una vecindad V de z_0 en \mathbb{C} en la que \mathcal{C}_P puede ser vista como el producto $(w - c_1(z))(w - c_2(z)) \cdots (w - c_n(z))$, donde c_j es una función analítica en V para cada j , que parametriza localmente las ramas de \mathcal{C}_P que se encuentran por encima de V .

Figura 4.8: Ramas de \mathcal{C}_P sobre V .

Luego, en los puntos donde esto no es posible se realizan prolongaciones analíticas de estas funciones a lo largo de lazos que rodean los puntos en cuestión lo que provoca una permutación de las ramas $w - c_j(z)$ y por último, como hemos hecho en el ejemplo 4.1, se construye una superficie con estos abiertos y se consideran los homeomorfismos que resultan de aplicar el teorema de la función implícita en los puntos regulares y en el resto se realizan ajustes, que son en realidad la parte delicada de la prueba, los cuales permiten dar un atlas analítico a \mathcal{C}_P . Los detalles completos se encuentran en [8].

Hablaremos ahora de transformaciones entre superficies de Riemann compactas y algunas de sus características.

Definición 4.2. Sean X, Y dos superficies de Riemann. Decimos que la transformación $f : X \rightarrow Y$ es **analítica en** $x \in X$ si para cualesquiera cartas $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ en x y $(\tilde{U}_\beta, \psi_\beta)$ en $f(x)$, la función dada por

$$\hat{f} := \psi_\beta \circ f \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha) \rightarrow \psi_\beta(\tilde{U}_\beta)$$

es analítica en $\varphi_\alpha(x)$.

Decimos que f es **analítica** si lo es para cada $x \in X$.

Así, al considerar una transformación analítica entre superficies de Riemann, sabemos que la función \hat{f} puede ser escrita como su serie de Taylor en toda una vecindad del cero, es decir

$$\hat{f}(\xi) = \sum_{n=k}^{\infty} a_n \xi^n. \quad (4.4)$$

A la constante k en la serie $\hat{f}(\xi) = \sum_{n=k}^{\infty} a_n \xi^n$ se le llama **orden o índice de ramificación** y se denota como $k = e_x(f)$.

Definición 4.3. Sea $f : X \rightarrow Y$ una transformación analítica entre dos superficies de Riemann. Decimos que $x \in X$ es un **punto de ramificación** si y sólo si $e_x(f) > 1$.

Observación 4.2. Si x es un punto de orden $k = e_x(f) \geq 1$, entonces localmente \hat{f} se escribe como $\hat{f}(\xi) = \sum_{n=k}^{\infty} a_n \xi^n$. Así

$$\hat{f}(\xi) = \xi^k \underbrace{(a_k + a_{k+1}\xi + \cdots)}_{u(\xi)}.$$

Notemos que $u(0) = a_k \neq 0$, por lo que u es invertible, multiplicativamente, en una vecindad del cero. En consecuencia es posible definir el cambio

$$\zeta = u^{\frac{1}{k}} \xi$$

y observemos que $\zeta^k = u\xi^k$, por lo que en esta carta \hat{f} se escribe como

$$\hat{f}(\zeta) = \zeta^k.$$

Entonces $\hat{f}'(\zeta) = k\zeta^{k-1}$ y por tanto $\hat{f}'(0) = 0$ si y sólo si $k > 1$.

Tenemos ahora el siguiente resultado que nos permite imaginar un esquema del comportamiento, en general, de aplicaciones analíticas entre superficies de Riemann compactas.

Teorema 4.2. Sea $f : X \rightarrow Y$ una transformación analítica no constante entre dos superficies de Riemann compactas, entonces

- i) f tiene un número finito de puntos de ramificación x_1, x_2, \dots, x_m .
- ii) Fuera de las fibras de la forma $f^{-1}(f(x_j))$, f define una cubierta con fibras finitas de cardinalidad constante n .
- iii) Para todo punto $y \in Y$

$$\sum_{f(x)=y} e_x(f) = n$$

Demostración. i) Por la observación 4.2 para cada $x \in X$ existe una vecindad U_x de x de tal forma que en ella \hat{f} se escribe como $\hat{f}(\zeta) = \zeta^{e_x(f)}$. Así, por ser X compacta existen abiertos $U_{x_1}, U_{x_2}, \dots, U_{x_s}$ tales que $\hat{f}'(\zeta) = e_{x_i}(f)\zeta^{e_{x_i}(f)-1}$ sólo se anula en el caso que $\zeta = 0$ y $e_x > 1$, es decir en puntos de ramificación y en ninguno más en dicha vecindad. Notemos además que fuera de los puntos de ramificación f es un isomorfismo local, pues $\hat{f}'(0) \neq 0$. Por lo tanto f no tiene más que un número finito de puntos de ramificación, digamos x_1, x_2, \dots, x_m .

ii) Puesto que X es una superficie compacta y f es continua, entonces se sigue que f es una función propia³, es decir $f^{-1}(K)$ es compacto para cada $K \subseteq Y$ compacto. Así, si x_1, x_2, \dots, x_m son los puntos de ramificación de f , se sigue que para cada $y \in Y \setminus \{f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_m)\}$ la fibra $f^{-1}(y)$ es finita, $f^{-1}(y) =$

³Pues todo compacto $K \subseteq Y$ es cerrado en Y por ser éste un espacio de Hausdorff y por continuidad, $f^{-1}(K)$ es cerrado en X (que es un compacto) por lo que $f^{-1}(K)$ resulta ser también compacto.

$\{p_1, p_2, \dots, p_r\}$. Recordando que fuera de los puntos de ramificación f define un isomorfismo local, entonces existen vecindades U_j de p_j , $j = 1, 2, \dots, r$ y una vecindad V de y tales que f es un isomorfismo de U_j en V . Ahora consideremos la imagen del cerrado $X \setminus \bigcup_j U_j$ bajo f , la cual es nuevamente un cerrado⁴ y que no tiene como elemento al punto y . Es por ello que $\hat{V} = V \setminus f(X \setminus \bigcup_j U_j)$ es un abierto que contiene a y y tal que $f^{-1}(\hat{V}) \subseteq \bigcup_j U_j$, en consecuencia

$$f^{-1}(\hat{V}) = \bigsqcup_{j=1}^r (U_j \cap f^{-1}(\hat{V})) \approx \{p_1, p_2, \dots, p_r\} \times \hat{V}$$

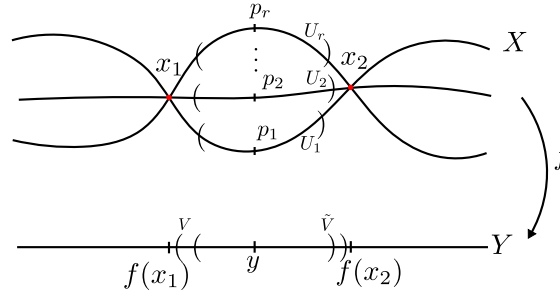


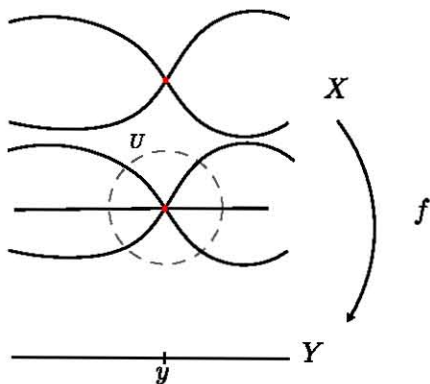
Figura 4.9: Cubriente local.

Lo cual implica que f tiene fibras finitas y de cardinalidad localmente constante. Ahora bien, $Y \setminus \{f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_r)\}$ es también conexo⁵ y por tanto la cardinalidad de las fibras es finita.

iii) Sea $y \in Y$ y consideremos un punto $x \in X$ tal que $f(x) = y$, U una vecindad de x de forma que $U \cap f^{-1}(y) = \{x\}$. Podemos suponer además que en U la transformación \hat{f} es de la forma $\xi \mapsto \xi^{e_x(f)}$. Por lo que en todo punto cercano a y hay exactamente $e_x(f)$ puntos de U que corresponden a las raíces $e_x(f)$ -ésimas de y que satisfacen no ser puntos de ramificación de f y por consiguiente la función $g(y) = \sum_{f(x)=y} e_x(f)$ es una función localmente constante.

⁴Por un argumento análogo al anterior usando la compacidad de X , la continuidad de f y el uso de Y como espacio compacto y de Hausdorff.

⁵Pues Y es una superficie conexa, por lo que al remover un número finito de puntos no pierde dicha propiedad.



Nuevamente, por la conexidad de Y se sigue que g es constante en Y . \square

El teorema 4.2 prueba que toda transformación analítica entre superficies de Riemann compactas es lo que se conoce como un *cubriente ramificado*. A la constante $\sum_{f(x)=y} e_x(f) = n$ se le conoce por *grado de f* .

Corolario 4.1. *Si f es una función meromorfa sobre una superficie de Riemann X compacta, $f : X \rightarrow \mathbb{C}$. Entonces el número de ceros y de polos de f coincide (contados con multiplicidades)*

Demostración. Vista f como la transformación $f : X \rightarrow \mathbb{C}P^1$ es una transformación analítica entre superficies de Riemann compactas. Por lo tanto los ceros de f pueden ser contados usando el índice de ramificación, obteniendo $\sum_{f(x)=0} e_x(f)$. De manera análoga el número de polos de f es $\sum_{f(x)=\infty} e_x(f)$ contados con multiplicidad en ambos casos. Así, en virtud del teorema 4.2 se tiene que

$$\sum_{f(x)=0} e_x(f) = \sum_{f(x)=\infty} e_x(f)$$

\square

4.2. La fórmula de Riemann-Hurwitz

Hablaremos ahora de dos invariantes topológicos muy importantes para superficies de Riemann compactas. El primero es el género.

Definición 4.4. *Sea X una superficie de Riemann compacta. Decimos que X tiene género g_X si justamente g_X es el número máximo de lazos ajenos entre sí $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{g_X}$ tales que el complemento de su unión, en X , es conexo.*

Ejemplo 4.5. *Consideremos la esfera de Riemann $\mathbb{C}P^1$. Al remover cualquier lazo cerrado γ en $\mathbb{C}P^1$, $\mathbb{C}P^1 \setminus \gamma$ es disconexo. En efecto, $\mathbb{C}P^1 \setminus \gamma$ puede ser cubierto por dos abiertos ajenos, a saber $\mathbb{C}P^1 \setminus \gamma = \text{int}\gamma \cup \text{ext}\gamma$ (ver figura 4.10)*

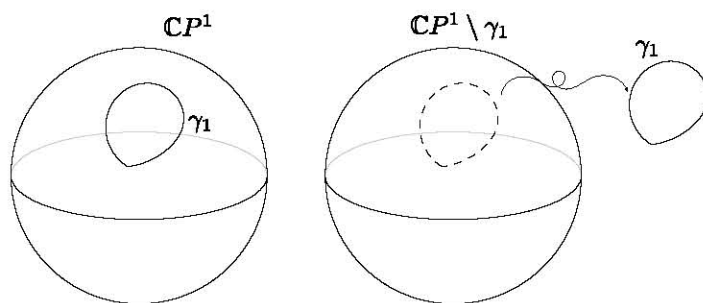


Figura 4.10: Género de $\mathbb{C}P^1$.

Por lo que $g_{\mathbb{C}P^1} = 0$

Ejemplo 4.6. Consideremos el toro topológico T

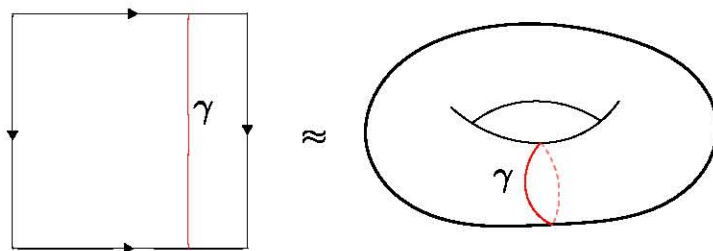


Figura 4.11: Lazo en T .

y en él, el lazo γ como se muestra en la figura 4.11. No hay más lazos que remover sin desconectar antes a T . Cualquier lazo $\tilde{\gamma}$ ajeno a γ o bien nos permite remover un disco como en el ejemplo anterior o es homotópico a γ lo cual tiene como consecuencia que $T \setminus \{\gamma, \tilde{\gamma}\}$ sea disconexo.

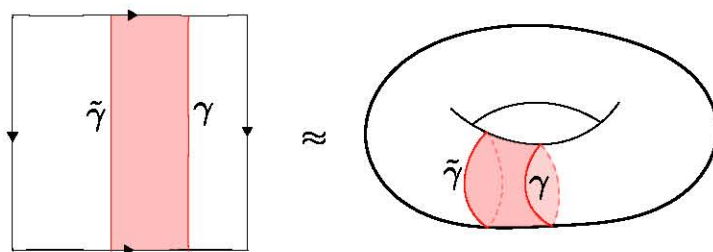


Figura 4.12: $T \setminus \{\gamma, \tilde{\gamma}\}$.

Es decir $g_T = 1$.

Podríamos dar una infinidad de ejemplos agregando cada vez un “hoyo” más a la superficie obteniendo así el g -Toro y verificar que éste tiene género g . Este

invariante es de tal importancia que de hecho con el se puede dar una clasificación completa de las superficies de Riemann compactas. Es decir, si X es una superficie de Riemann compacta, entonces X es homeomorfa a $\mathbb{C}P^1$ o bien a algún g -Toro.

El segundo invariante del que hemos de hablar es también bastante geométrico y es posible calcularlo por medio de triangulaciones de la superficie de Riemann X . La triangulación de una superficie de Riemann⁶ es justo lo que intuimos del nombre mismo. Definámoslo formalmente.

Definición 4.5. Denotemos por T el triángulo con vértices $0, 1, e^{i\frac{\pi}{3}}$ en $\mathbb{C} \approx \mathbb{R}^2$. Un triángulo en X es la imagen continua de T bajo una aplicación inyectiva $T \hookrightarrow X$.

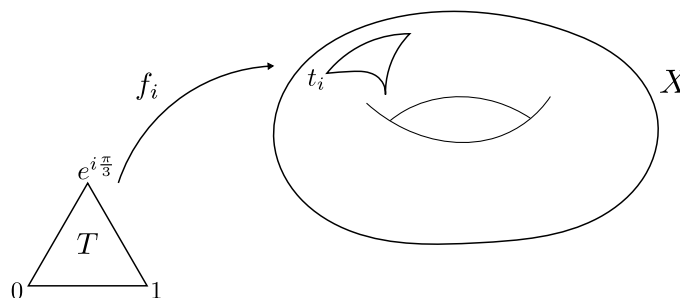


Figura 4.13: Triángulo t_i en X .

Decimos que la superficie X es **triangulable** si ella admite una **triangulación**, es decir los triángulos $f_j : T \hookrightarrow X$ forman una cubierta de X y son tales que para todo punto $p \in X$

- a) Si p no está en alguna arista, entonces pertenece a un único triángulo $f_i(T) := t_i$ que es a su vez una vecindad de p .
- b) Si p está sobre una arista a más no es un vértice, entonces él pertenece exactamente a dos triángulos $t_i = f_i(T)$ y $t_j = f_j(T)$, tales que $t_i \cap t_j = a$ y $t_i \cup t_j$ es una vecindad de p .
- c) Si p es un vértice, entonces él pertenece a un número finito de triángulos t_1, \dots, t_k ; que lo tienen como vértice y la unión de ellos es una vecindad de p . Además si $t_i \cap t_j \neq p$ entonces t_i y t_j tienen una arista en común.

Es un hecho conocido que toda superficie (no necesariamente de Riemann) compacta es triangulable. De hecho al ser compacta admite una triangulación finita.⁷

⁶De hecho este concepto es válido para superficies en general, no necesariamente de Riemann.

⁷Una prueba de este hecho puede ser consultada en [8].

Definición 4.6. Sea X una superficie de Riemann compacta y una triangulación de ella que consta de V vértices, A aristas y C caras. Definimos la **característica de Euler-Poincaré** de X como el número entero:

$$\chi(X) = V - A + C. \quad (4.5)$$

Es de hacer notar que la característica de Euler-Poincaré de la superficie X no depende de la triangulación y además se relaciona con el género de X de la siguiente manera,

$$\chi(X) = 2 - 2g_X$$

Por lo que toda superficie de Riemann compacta queda también completamente determinada por este último invariante, pues hemos observado con anterioridad que el género de una superficie la determina por completo (salvo homeomorfismos).

Ahora estamos en condiciones de enunciar y dar una prueba del teorema que le da nombre a esta sección

Teorema 4.3 (Fórmula de Riemann-Hurwitz). Sean X y Y superficies de Riemann compactas y $f : X \rightarrow Y$ una transformación analítica no constante y sobre de grado⁸ n . Entonces

$$\chi(X) = n\chi(Y) - \sum_{x \in X} (e_x(f) - 1)$$

Demostración. Consideremos una triangulación de Y que tenga a las imágenes de los puntos de ramificación x_1, x_2, \dots, x_m bajo f como algunos de sus vértices

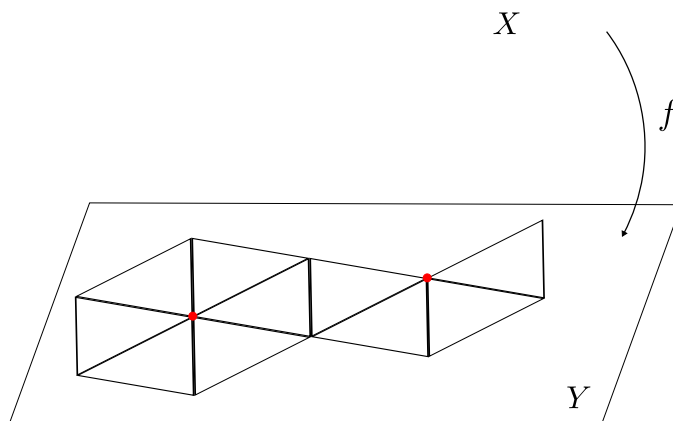


Figura 4.14: Triangulación en Y .

Sean V, A y C el número de vértices, aristas y caras, respectivamente, de la triangulación. Entonces

$$\chi(Y) = V - A + C.$$

⁸Como cubriente ramificado.

Consideremos el levantamiento de la triangulación a X . Este levantamiento induce de manera natural una triangulación en X .

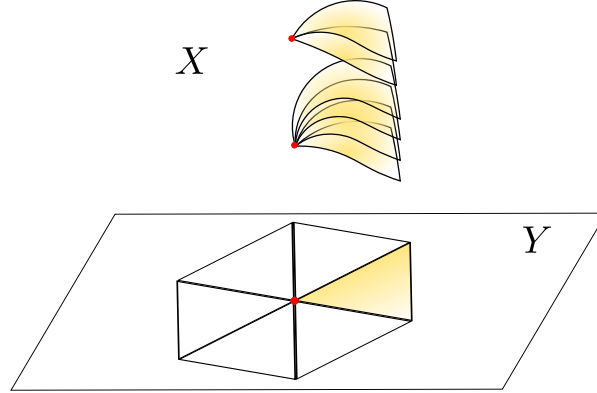


Figura 4.15: Levantamiento de la triangulación a X .

En virtud del teorema 4.2 todo punto $y \in Y \setminus \{f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_m)\}$ tiene exactamente n preimágenes, en consecuencia (por como hemos tomado la triangulación en Y) el número de caras y aristas de la triangulación en Y se multiplica en n para la triangulación en X . La misma situación se tiene para cada vértice que no es imagen de algún punto de ramificación. Para aquellos que si lo son, observemos que en cada punto de ramificación x_i colapsan exactamente $e_{x_i}(f)$ vértices. Así, el vértice $f(x_i)$ de la triangulación en Y induce $n - \sum_{f(x)=f(x_i)} e_x(f)$ vértices en X . Por lo que la característica de Euler de X es

$$\begin{aligned} \chi(X) &= \left(nV - \sum_{f(x)=f(x_i)} (e_x(f) - 1) \right) - nA + nC \\ &= n \underbrace{(V - A + C)}_{\chi(Y)} - \sum_{f(x)=f(x_i)} (e_x(f) - 1) \\ &= n\chi(Y) - \sum_{f(x)=f(x_i)} (e_x(f) - 1). \end{aligned}$$

Dado que para cada punto $x \in X$ que no es de ramificación $e_x(f) - 1 = 0$ se sigue que

$$\chi(X) = n\chi(Y) - \sum_{x \in X} (e_x(f) - 1)$$

como queríamos demostrar. \square

4.3. Transversalidad al infinito

Recordemos que todo polinomio de grado d en dos variables, $f \in \mathbb{C}[z, w]$ puede escribirse como suma de polinomios homogéneos

$$f = f_d + f_{d-1} + \cdots + f_0$$

Definición 4.7. Sea $f \in \mathbb{C}[z, w]$ un polinomio de grado $n + 1 \geq 2$. Decimos que f es **transversal al infinito** si se satisface alguna de las siguientes dos condiciones equivalentes:

- a) La parte principal homogénea de f se descompone en $n + 1$ rectas distintas dos a dos.
- b) La parte principal homogénea de f tiene un punto crítico aislado de multiplicidad n^2 en el origen.

La definición de transversalidad al infinito sugiere, al menos en el nombre, una noción más geométrica, la cual tomará todo el sentido en la siguiente proposición.

Proposición 4.1. Sea $f \in \mathbb{C}[z, w]$ un polinomio de grado $n + 1$ transversal al infinito, entonces la compactificación proyectiva \overline{L}_c de toda curva de nivel $L_c = f^{-1}(c)$ tiene intersección transversal con la línea al infinito.

Demostración. Sabemos por la observación (2.1) que las curvas de nivel de f son parametrizadas por las soluciones a la ecuación

$$\begin{aligned} \dot{z} &= f_w \\ \dot{w} &= -f_z. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Consideremos la extensión de ésta a $\mathbb{C}P^2$. Por ser una ecuación hamiltoniana, es no dicrítica como hemos observado ya con ayuda de la identidad de Euler. Además por hipótesis f es transversal al infinito, es decir

$$f_{n+1}(z, w) = (w - a_1 z)(w - a_2 z) \cdots (w - a_{n+1} z), \quad a_i \neq a_j \quad \forall i \neq j$$

Por lo que el polinomio R_{n+1} en la carta (z_1, w_1) definido por la ecuación (3.2) es

$$R_{n+1}(1, w_1) = (w_1 - a_1)(w_1 - a_2) \cdots (w_1 - a_{n+1}) \quad (4.7)$$

el cual tiene raíces simples. Entonces, por la proposición 3.1 los puntos singulares en ℓ_∞ de la ecuación extendida tienen, todos, exponente característico $\frac{1}{n+1}$. En consecuencia, en vecindades de cada punto singular, salvo un cambio de coordenadas lineal que fija a la recta $\ell_\infty = \{z_1 = 0\}$, la ecuación extendida es de la forma

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{w}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & n+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ w_1 \end{bmatrix} + \cdots \quad (4.8)$$

Notemos que la pareja de valores propios $(1, n + 1)$ de la parte lineal de la ecuación (4.8) está en el dominio de Poincaré y es resonante. Así, por el teorema 1.8 la ecuación (4.8) es analíticamente equivalente (localmente) a la ecuación

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{w}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & n+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ w_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha z_1^{n+1} \end{bmatrix}, \quad \text{p.a. } \alpha \in \mathbb{C}. \quad (4.9)$$

Por el análisis hecho en el ejemplo 1.3 sabemos que las soluciones a esta ecuación se aproximan al punto singular de manera tangente al eje $Z_1 = \{w_1 = 0\}$ y por lo tanto transversales a la recta $\ell_\infty = \{z_1 = 0\}$

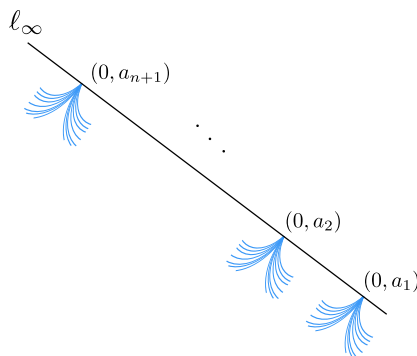


Figura 4.16: Soluciones transversales a ℓ_∞ .

Es decir las curvas solución llegan a ℓ_∞ paralelas al eje Z_1 y por tanto transversales a la línea al infinito en los puntos $(0, a_1), (0, a_2), \dots, (0, a_{n+1})$ pero estas curvas son precisamente las curvas de nivel de f . \square

Dada una curva algebraica plana en $\mathbb{C}P^2$, ésta siempre es conexa. Como consecuencia de la transversalidad al infinito se tiene el siguiente resultado.

Corolario 4.2. *Si f es transversal al infinito, entonces todas las curvas de nivel afines $L_c = f^{-1}(c) \subset \mathbb{C}^2$ son conexas.*

Demostración. Consideramos la descomposición en curvas irreducibles C_j de la compactificación proyectiva de $L_c = f^{-1}(c)$, $\overline{L_c} = \bigsqcup_j C_j$. Toda componente irreducible $C_j \subset \mathbb{C}P^2$ es conexa y cualesquiera dos componentes irreducibles en $\mathbb{C}P^2$ necesariamente se intersecan.⁹ La intersección de componentes diferentes necesariamente es singular y por la proposición (4.1) no puede vivir en la línea al infinito ℓ_∞ pues ésta no es parte de las curvas de nivel de f y en consecuencia cualesquiera dos componentes se intersecan en algún lugar de la parte finita (afín) $\mathbb{C}^2 \subset \mathbb{C}P^2$, por lo tanto las curvas de nivel afín son conexas. \square

Como sabemos ya por el teorema 4.1 toda curva algebraica tiene asociada una superficie de Riemann compacta. Veremos ahora que la transversalidad al infinito nos permite de hecho decir de que tipo de $g - \text{Toro}$ se trata.

Teorema 4.4. *Sea $f \in \mathbb{C}[z, w]$ un polinomio homogéneo de grado $n + 1$ transversal al infinito, entonces la dimensión del primer grupo de homología de toda fibra no singular es igual a n^2 .*

⁹Por el teorema de Bézout, esto ocurre en tantos puntos como el producto de los grados de las componentes (contando multiplicidades).

Demostración. Puesto que f es un polinomio homogéneo, él coincide con su parte principal f_{n+1} . La superficie $L_c = \{f = c\}$ es una superficie de Riemann compacta de algún género g_{L_c} el cual podemos calcular haciendo uso de la fórmula de Riemann-Hurwitz, para ello consideremos la proyección canónica $\pi(z, w) = z$ restringida a L_c , ésta define un cubriente ramificado $\overline{L_c} \rightarrow \mathbb{C}P$ de multiplicidad $n + 1$. Para $c \neq 0$ los puntos de ramificación son aquellos que satisfacen el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial w} &= 0 \\ f &= c \end{aligned}$$

Por nuestra suposición inicial $\frac{\partial f}{\partial w}$ es un polinomio homogéneo de grado n ; consideremos pues, su descomposición en rectas por el origen

$$\frac{\partial f}{\partial w} = (w - \beta_1 z)^{m_1} (w - \beta_2 z)^{m_2} \cdots (w - \beta_\ell z)^{m_s}$$

donde $m_1 + m_2 + \cdots + m_s = n$.

La restricción de L_c a cada una de éstas rectas es descrita por una ecuación polinomial homogénea de grado $n + 1$ en una variable

$$f(z, \beta_j z) = c \quad j = 1, 2, \dots, \ell \tag{4.10}$$

que determina los puntos de ramificación del cubriente $\overline{L_c} \rightarrow \mathbb{C}P$.

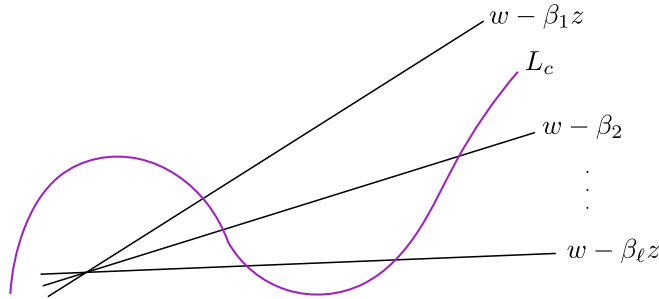


Figura 4.17: Puntos de ramificación del cubriente.

Notemos que al ser f un polinomio homogéneo y transversal al infinito, no tiene factores en común con $\frac{\partial f}{\partial w}$ y por tanto $f(z, \beta_j z)$ no se anula idénticamente. Así, para cada j fija, la ecuación (4.10) se reescribe como

$$f(1, \beta_j)z^{n+1} = c.$$

Esto puesto que f es homogéneo de grado $n + 1$. En tanto que $c \neq 0$ esta ecuación tiene exactamente $n + 1$ soluciones distintas, las cuales determinan la primer coordenada de los puntos de ramificación que están sobre la recta

$w = \beta_j z$. Calculemos ahora su orden de ramificación. Sea α una solución de (4.10), $f(\alpha, \beta_j \alpha) = c$

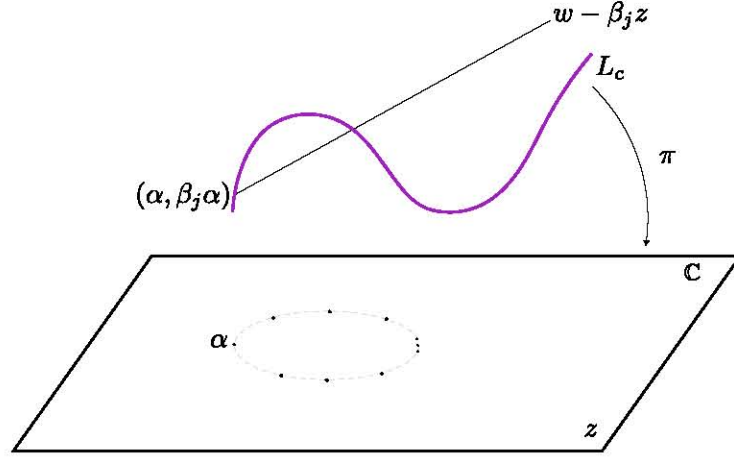


Figura 4.18: Primer coordenada de los puntos de ramificación.

El punto de ramificación correspondiente es $(\alpha, \beta_j \alpha)$. Notemos que el polinomio $g(w) = f(\alpha, w) - c$ satisface $g^{(k)}(\beta_j \alpha) = 0$ para $k = 0, 1, \dots, m_j$, pues

$$\begin{aligned} g(\beta_j \alpha) &= f(\alpha, \beta_j \alpha) - c \\ &= c - c \\ &= 0 \end{aligned}$$

y

$$g'(w) = f'(\alpha, w) = \frac{\partial f}{\partial w} \Big|_{z=\alpha} = (w - \beta_1 \alpha)^{m_1} (w - \beta_2 \alpha)^{m_2} \dots (w - \beta_j \alpha)^{m_j} \dots (w - \beta_\ell \alpha)^{m_\ell}.$$

Lo que implica que $\beta_j \alpha$ también es raíz de las primeras m_j derivadas de g y así

$$g(w) = (w - \beta_j \alpha)^{m_j+1} q(w), \quad q(\beta_j \alpha) \neq 0, \quad q \in \mathbb{C}[w].$$

Lo mismo ocurre para cada una de las soluciones restantes de la ecuación (4.10). Por lo tanto cada recta $w - \beta_i z$, $i = 1, \dots, \ell$ contribuye con $n + 1$ puntos de ramificación cuyo orden es exactamente $m_i + 1$. Así, por la fórmula de Riemann-Hurwitz obtenida en el teorema 4.3 se tiene que

$$\begin{aligned} \chi(\overline{L_c}) &= (n + 1)\chi(\mathbb{C}P) - [(n + 1)(m_1 + 1 - 1) + \dots + (n + 1)(m_\ell + 1 - 1)] \\ &= 2(n + 1) - (n + 1)(m_1 + m_2 + \dots + m_\ell) \\ &= (n + 1)(2 - n) \end{aligned}$$

Entonces

$$g_{\overline{L}_c} = \frac{n(n-1)}{2} \quad (4.11)$$

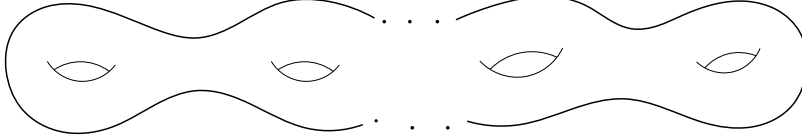


Figura 4.19: El $g_{\overline{L}_c}$ toro.

El primer grupo de homología de L_c es generado por $2g_{L_c}$ lazos canónicos que forman la base de la homología de la compactificación proyectiva \overline{L}_c y n de los $n+1$ pequeños lazos alrededor de cada uno de los $n+1$ puntos eliminados al considerar L_c (se consideran n pues la suma de los $n+1$ lazos es homóloga a cero). Todo lazo cerrado en L_c es una combinación lineal, con coeficientes enteros, de estos ciclos (pues $H_1(L_c; \mathbb{Z})$ es un grupo libre generado por lazos canónicos). Por lo tanto

$$\dim H_1(L_c; \mathbb{Z}) = 2g_{L_c} + n = n(n-1) + n = n^2$$

Esto prueba el teorema para $c \neq 0$ ¹⁰. □

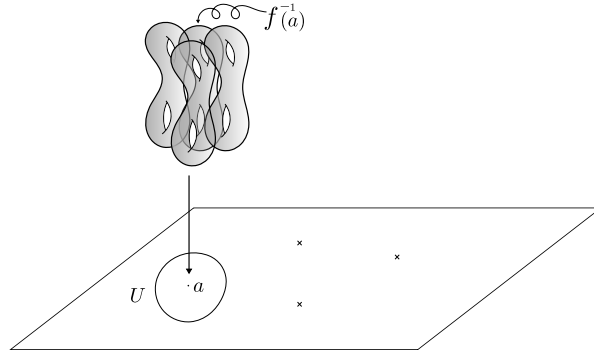
Este teorema es cierto también para polinomios transversales al infinito no homogéneos. Para ello el siguiente resultado nos permitirá concluir la afirmación más general.

Denotaremos por Σ el conjunto de valores críticos de f

$$\Sigma = \{c \in \mathbb{C} \mid \exists (z, w) \in \mathbb{C}^2 \text{ tal que } f_z = f_w = 0 \text{ y } f = 0 \text{ en } (z, w)\}$$

Teorema 4.5. *Si un polinomio $f \in \mathbb{C}[z, w]$ es transversal al infinito, entonces la transformación $f : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ define un haz topológico sobre el conjunto de todos los valores regulares $\mathbb{C} \setminus \Sigma$ de f .*

¹⁰Al ser f un polinomio homogéneo, la curva de nivel cero es un cono.

Figura 4.20: $f^{-1}(U) \approx U \times f^{-1}(a)$.

Este teorema es consecuencia de un resultado más general en el que se considera la familia de polinomios de grado $n+1$ en \mathbb{C}^2 con parte principal homogénea fija, f_{n+1} , transversal al infinito (*i.e.* f_{n+1} es factorizable en $n+1$ rectas por el origen). Describimos a dicha familia como:

$$\Phi_\lambda(z, w) = \Phi(\lambda, z, w) = f_{n+1} + \sum_{0 \leq i+j \leq n} \lambda_{ij} z^i w^j$$

Esta familia está en correspondencia con el espacio afín

$$\Lambda = \mathbb{C}^r, \quad r = \frac{(n+1)(n+2)}{2}, \quad \text{de coeficientes } \lambda_{ij} \in \mathbb{C}.$$

Consideremos el espacio fibrado $\Lambda \times \mathbb{C}P^2$ sobre Λ y en él consideremos la hipersuperficie compleja

$$X = \{(\lambda; z, w) \mid \Phi(\lambda; z, w) = 0\}, \quad \dim X = r - 1$$

La compactificación de ésta la denotaremos por \bar{X} , $\bar{X} \subset \Lambda \times \mathbb{C}P^2$. Denotemos asimismo por π a la proyección canónica $\pi : \Lambda \times \mathbb{C}P^2 \rightarrow \Lambda$ y sea $\pi_{\bar{X}} = \pi|_{\bar{X}} : \bar{X} \rightarrow \Lambda$. Las preimágenes $\pi_{\bar{X}}^{-1}(\lambda)$ son la compactificación proyectiva de las curvas de nivel cero de los correspondientes polinomios $\Phi_\lambda(z, w)$ contenidos en $\Lambda \times \mathbb{C}P^2$.

Sea

$$\Sigma_\Lambda = \left\{ \lambda \in \Lambda \mid \exists (z, w) \in \mathbb{C}^2, \frac{\partial \Phi_\lambda}{\partial z} = \frac{\partial \Phi_\lambda}{\partial w} = 0 \text{ y } \Phi_\lambda = 0 \text{ en } (z, w) \right\}$$

Teorema 4.6. *Sea f un polinomio transversal al infinito, entonces la proyección $\pi_{\bar{X}} : \bar{X} \rightarrow \Lambda$, así como la restricción $\pi_{\bar{X}}|_X$, son haces topológicos, localmente triviales en $\Lambda \setminus \Sigma_\Lambda$.*

Demostración. Para cada $\lambda \notin \Sigma_\Lambda$ y todo punto $a = (\lambda; z, w) \in \bar{X}$ consideremos el espacio tangente en a a X , $T_a X$. Como $\pi_{\bar{X}}(a) = \lambda$, el espacio tangente $T_a X$ se proyecta a su vez, (con $D\pi_{\bar{X}}$) suprayectivamente en $T_\lambda \Lambda \simeq \mathbb{C}^r$

$$D_a \pi_{\bar{X}} x = [Id_{r \times r} [0, 0]_{r \times 2}]_{r \times (r+2)} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \\ x_{r+1} \\ x_{r+2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_r \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

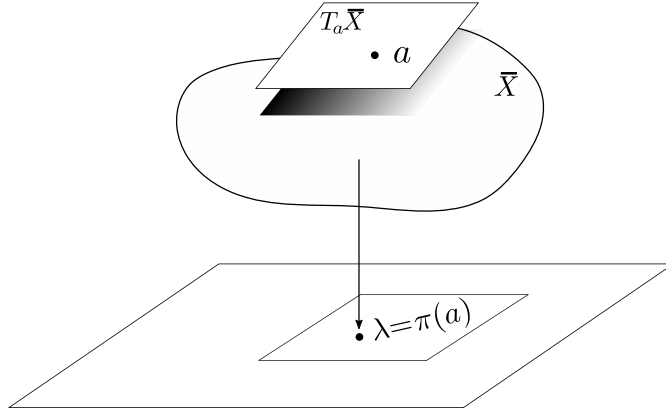


Figura 4.21: Proyección de $T_a \bar{X}$ en $T_\lambda \Lambda$.

Esta afirmación se sigue del hecho de que $\lambda \notin \Sigma_\Lambda$ pues esto implica que o bien $\frac{\partial \Phi_\lambda}{\partial z} \neq 0$ o bien $\frac{\partial \Phi_\lambda}{\partial w} \neq 0$. Para probar que la proyección es suprayectiva también para los puntos al infinito $\bar{X} \setminus X$, consideremos el cambio usual de coordenadas en $\mathbb{C}P^2$ $z_1 = \frac{1}{z}$, $w_1 = \frac{w}{z}$. En estas coordenadas

$$\Phi \left(\lambda; \frac{1}{z_1}, \frac{w_1}{z_1} \right) = f_{n+1} \left(\frac{1}{z_1}, \frac{w_1}{z_1} \right) + \sum_{0 \leq i+j \leq n} \lambda_{ij} \frac{1}{z_1^{i+j}} w_1^j = 0$$

multiplicando esta expresión por z_1^{n+1} se tiene

$$\Phi(\lambda; z_1, w_1) = f_{n+1}(1, w_1) + z_1 g(\lambda; z_1, w_1) = 0,$$

con $g(\lambda; z_1, w_1)$ un polinomio en z_1, w_1 . Denotemos por η_j , $j = 1, 2, \dots, n+1$ a las $n+1$ raíces de $f_{n+1}(1, w_1)$. Observemos que

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial w_1} \right|_{z_1=0} = \left. \frac{\partial f_{n+1}}{\partial w_1} + z_1 \frac{\partial g}{\partial w_1} \right|_{z_1=0} = \left. \frac{\partial f_{n+1}}{\partial w_1} \right|_{z_1=0} (1, w_1).$$

Como las $n+1$ raíces de f_{n+1} son simples, entonces $\left. \frac{\partial f_{n+1}}{\partial w_1} \right|_{z_1=0} (1, \eta_j) \neq 0$ en la recta $\xi = 0$ (para toda λ). Por consiguiente, por el teorema de la función implícita, en

una vecindad de cada raíz $(1, \eta_j)$ de $f_{n+1}(1, w_1)$ se tiene que $\Phi(\lambda; z_1, w_1(z_1)) = 0$ (independientemente del valor de λ).

Consideremos un marco de $2r$ vectores V_1, \dots, V_{2r} en $T\Lambda$ tales que, $[V_j, V_k] = 0 \forall j, k \ j \neq k, \ j, k \in \{1, \dots, 2r\}$. Es decir, conmutan dos a dos (podemos considerar los vectores canónicos en $T\Lambda$ $\frac{\partial}{\partial \lambda_{ij}}, \sqrt{-1} \frac{\partial}{\partial \lambda_{ij}}$)

El hecho de que $D\pi_{\bar{X}}$ sea una transformación sobreyectiva de TX a $T\Lambda$ nos asegura que la preimagen $\pi^{-1}(U)$ de un abierto suficientemente pequeño que tenga intersección vacía con Σ_Λ , $U \cap \Sigma_\Lambda = \emptyset$ puede ser cubierto por una unión de abiertos $U_{\bar{X}\alpha}$, $U_{\bar{X}\alpha} \subset \bar{X}$, tal que en cada abierto $U_{\bar{X}\alpha}$ exista un marco en $TU_{\bar{X}\alpha} \subset T\bar{X}$ formado por $2r$ vectores $\bar{V}_{k,\alpha}$, $k = 1, \dots, 2r$ que dependen de manera real analítica de (λ, z, w) tales que $D_a\pi(\bar{V}_{k,\alpha}) = V_k$, $a = (\lambda, z, w)$

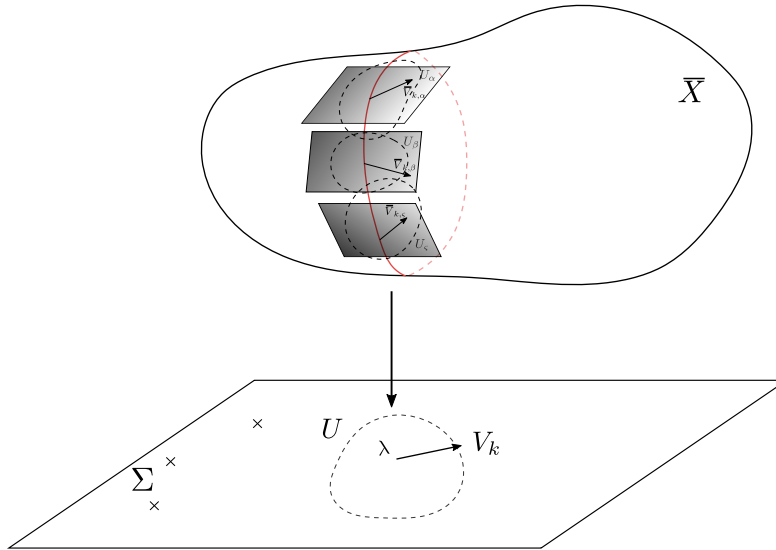


Figura 4.22: $D_a\pi(\bar{V}_{k,\alpha}) = V_k$.

Observación 4.3. Destacamos el hecho de que para cada λ fija $\pi^{-1}(\lambda)$ es una superficie definida por $\Phi(\lambda; z, w) = 0$ que tiene su extensión a $\mathbb{C}P^2$ totalmente contenida en X

Por la manera que hemos definido a π , se tiene que para cada λ , $\pi^{-1}(\lambda)$ es una curva compacta contenida en $\Lambda \times \mathbb{C}P^2$. Esto significa que π es propia y por tanto podemos asumir que la cubierta $\bigcup_{\alpha \in \{1, \dots, m\}} U_{\bar{X}\alpha}$ es finita. Por consiguiente si consideramos una partición de la unidad $\{\psi_\alpha \geq 0\}$ subordinada a la cubierta U_α , podemos suponer además que los vectores $\bar{V}_k = \sum \psi_\alpha \bar{V}_{k,\alpha}$ están π relacionados con V_k y son tangentes a \bar{X} . Como por construcción V_k y V_j conmutan, entonces su conmutador está contenido en $T_\lambda\Lambda$ para cualquier λ . Por consiguiente

te para cada $\lambda [V_k, V_j]$ es una combinación lineal de $\{V_{k\alpha}\}$ y por tanto, $[\overline{V}_k \overline{V}_j]$ está en el tangente de la fibra $\pi^{-1}(\lambda)$. Esto demuestra que $\{\overline{V}_1, \dots, \overline{V}_{2r}\}$ es una distribución involutiva en $T\pi^{-1}(U) \subset T\overline{X}$. Conseguir una combinación lineal de estos vectores que formen un marco tal que sus elementos conmuten dos a dos es ahora sencillo. En efecto, si \overline{V}_k y \overline{W}_k están en la distribución generada por $\{\overline{V}_1, \dots, \overline{V}_{2r}\}$ y son linealmente independientes en un punto $q = (\lambda, z, w)$, entonces sin pérdida de generalidad supongamos que el vector $\overline{V}_k(q) \in T\Lambda \times \mathbb{C}P^2 \approx \mathbb{R}^{2r+4}$ está dado por $\overline{V}_k(q) = (a_{k1}(q), \dots, a_{k,2r}(q), a_{k,2r+1}(q), \dots, a_{k,2r+4}(q))$, entonces

$$\det A(q) = \det \begin{bmatrix} a_{11}(q) & \cdots & a_{2r,1}(q) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{1,2r}(q) & \cdots & a_{2r,2r}(q) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{1,2r+1}(q) & \cdots & a_{2r,2r+1}(q) & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ a_{1,2r+4}(q) & \cdots & a_{2r,2r+4}(q) & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \neq 0$$

Así, la matriz $A(\lambda, z, w)$ es invertible en una vecindad de q , sea A^{-1} dicha inversa. Entonces si denotamos por $\hat{V}_k := A^{-1}\overline{V}_k$, $\hat{V} = e_k$ (o equivalentemente $Ae_k = \overline{V}_k$) y por consiguiente, los vectores \hat{V}_k están en el tangente a \overline{X} y $[\hat{V}_k, \hat{V}_j] = 0 \forall j, k \in \{1, \dots, 2r\}$. Es decir, del marco involutivo $\{\overline{V}_1, \dots, \overline{V}_{2r}\}$ en $T_{\pi^{-1}(\lambda)}U \subset T\overline{X}$ hemos definido un marco conmutativo $\{\hat{V}_1, \dots, \hat{V}_{2r}\}$ generado por combinaciones lineales de $\{\overline{V}_1, \dots, \overline{V}_{2r}\}$ y; en $T_{\pi^{-1}U} \subset T\overline{X}$. Esto nos permite definir un flujo a lo largo del marco conmutativo $\{\hat{V}_1, \dots, \hat{V}_{2r}\}$ que transforma una fibra en otra y por tanto podemos ver a $\pi^{-1}(U)$ como un producto directo $\pi^{-1}(U) \simeq U \times \pi^{-1}(a)$

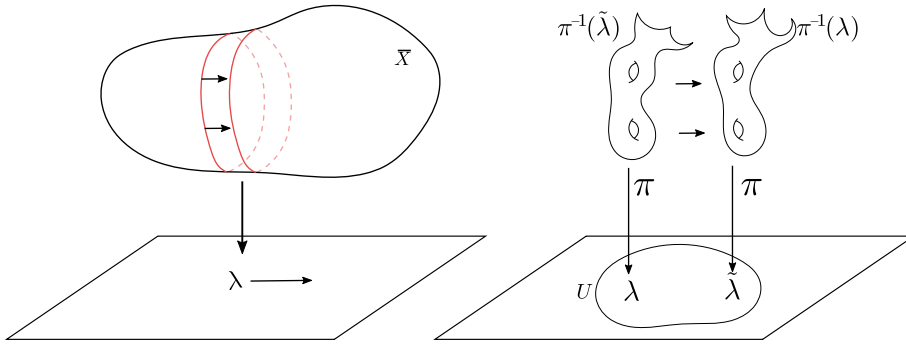


Figura 4.23: $\pi^{-1}(U) \simeq U \times \mathbb{C}P^2$.

□

Ahora estamos en condiciones de probar el teorema 4.4 en el caso general.

Teorema 4.7. *Sea $f \in \mathbb{C}[z, w]$ un polinomio de grado $n + 1$ transversal al infinito, entonces la dimensión del primer grupo de homología de toda fibra no singular es igual a n^2 .*

Demostración. Observemos primero que para $c \in \mathbb{C}$ suficientemente grande la superficie $L_c = \{f = c\}$ es una perturbación de la curva de nivel del polinomio f_{n+1} , $\tilde{L}_c = \{f_{n+1} = c\}$. En efecto pues

$$\begin{aligned} f_{n+1}(z, w) + f_n(z, w) + \cdots + f_0 &= c \\ z^n[f_{n+1}(z, w) + \frac{1}{z}f_n(z, w) + \cdots + \frac{1}{z^n}f_0] &= c \end{aligned}$$

En la carta (z_1, w_1)

$$\begin{aligned} f_{n+1}(1, w_1) + z_1 f_n(1, w_1) + \cdots + z_1^n &= z_1^n c \\ f_{n+1}(1, w_1) + O(z_1) &= z_1^n c. \end{aligned}$$

Así las cosas, para c suficientemente grande (y en consecuencia z_1 muy pequeño) las curvas de nivel L_c son perturbaciones de \tilde{L}_c . En consecuencia, por el teorema de la función implícita L_c y \tilde{L}_c son difeomorfas para $c \in \mathbb{C} \setminus \Sigma$ suficientemente grande.

Por que, en virtud del teorema 4.5 todas las curvas de nivel L_c , $c \notin \Sigma$ son homeomorfas y por lo tanto $\dim H_1(L_c, \mathbb{Z}) = \dim H_1(\tilde{L}_1, \mathbb{Z}) = n^2$ \square

Capítulo 5

Una familia emblemática de ecuaciones diferenciales

En este capítulo presentamos la construcción de una familia de ecuaciones diferenciales polinomiales que en un principio fue pensada exclusivamente para dar respuesta a la pregunta que precedió al resultado obtenido en la proposición 3.1. Con el fin de realizar un análisis similar al que hemos hecho en la línea al infinito para ecuaciones no dicríticas es que decidimos incluir rectas invariantes que nos lo permitieran.

Comenzamos con la familia de ecuaciones (5.1) para la cual hemos obtenido resultados en el caso genérico. Estos resultados se concentran en la proposición 5.1 y las enunciadas en la proposición 5.3 con las que caracterizamos las ecuaciones hamiltonianas que pertenecen a esta familia.

Por último conseguimos generalizar la familia de grado dos dada en (5.1) con las ecuaciones de la forma (5.10) y mejor aún, logramos nuevamente caracterizar a todos los miembros hamiltonianos de esta nueva familia de ecuaciones diferenciales, las cuales en el caso genérico nuevamente tienen propiedades similares a las de el caso cuadrático.

Consideremos primero la ecuación de grado dos dada por

$$\left. \begin{aligned} \dot{z} &= (z-1)(p_0z + p_1w) \\ \dot{w} &= (w-1)(q_0z + q_1w) \end{aligned} \right\} v_2 \quad (5.1)$$

con $p_j, q_j \in \mathbb{C}^*$, $j = 0, 1$. Analicemos las propiedades de la ecuación (5.1). Primero notemos que las rectas $z = 1$ y $w = 1$ son invariantes bajo el campo que define a la ecuación. En efecto, consideremos las funciones $f(z, w) = z - 1$ y $g(z, w) = w - 1$. La derivada de Lie de f y g a lo largo del campo vectorial v_2

está dada, respectivamente, por

$$\begin{aligned} L_{v_2}f &= \langle \nabla f, \bar{v}_2 \rangle = \langle (1, 0), ((z-1)(p_0z + p_1w), (w-1)(q_0z + q_1w)) \rangle \\ &= (z-1)(p_0z + p_1w) \\ &= f \cdot (p_0z + p_1w) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} L_{v_2}g &= \langle \nabla g, \bar{v}_2 \rangle = \langle (0, 1), ((z-1)(p_0z + p_1w), (w-1)(q_0z + q_1w)) \rangle \\ &= (w-1)(q_0z + q_1w) \\ &= g \cdot (q_0z + q_1w) \end{aligned}$$

Así, las rectas $z = 1$ y $w = 1$ son invariantes por la ecuación (5.1). El punto $(1, 1)$ es singular por ser cruce de curvas invariantes, asimismo $(1, -\frac{q_0}{q_1})$ y $(-\frac{p_1}{p_0}, 1)$ son también puntos singulares sobre las rectas $z = 1$ y $w = 1$ respectivamente, además del origen de coordenadas. Veamos bajo qué condiciones es la ecuación (5.1) no dicrítica.

$$\begin{aligned} R_3(z, w) &= wP_2(z, w) - zQ_2(z, w) \\ &= wz(p_0z + q_0w) - zw(q_0z + q_1w) \\ &= zw[(p_0 - q_0)z + (p_1 - q_1)w]. \end{aligned}$$

Para que $R_3 \neq 0$ es suficiente que $(p_0 - q_0) \cdot (p_1 - q_1) \neq 0$, por lo que podemos decir que genéricamente la ecuación (5.1) es no dicrítica.

Al ser la recta $z = 1$ y el eje coordenado W rectas paralelas, ellas se intersectan sobre la línea al infinito $\ell_\infty = \{w_2 = 0\}$. Análogamente, el eje coordenado Z y la recta $w = 1$ se intersectan en la recta $\ell_\infty = \{z_1 = 0\}$. Es por ello que genéricamente los orígenes de las cartas (z_1, w_1) y (z_2, w_2) son puntos singulares de la ecuación extendida, nuevamente por ser cruce de rectas invariantes.

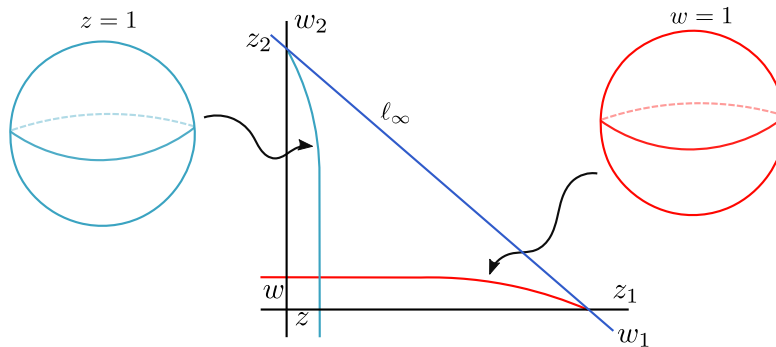


Figura 5.1: Rectas invariantes por la ecuación (5.1).

Al tener las rectas $z = 1$ y $w = 1$ invariantes podemos, así como lo hemos hecho para los puntos singulares en ℓ_∞ , asignar a cada punto singular sobre

ellas exponentes característicos, pensando nuevamente en rescatar información de la transformación de monodromía calculada a partir de transversales a estas soluciones. En la siguiente proposición reunimos las observaciones hechas y un par de propiedades más de esta familia de ecuaciones.

Proposición 5.1. *La ecuación (5.1) satisface las siguientes propiedades:*

Sean λ_1, λ_2 los exponentes característicos asociados a los puntos singulares (en la recta $z = 1$) $(1, 1)$ y $(-\frac{p_1}{p_0}, 1)$ respectivamente. Similarmente, sean μ_1, μ_2 los exponentes característicos de los puntos singulares $(1, 1)$ y $(1, -\frac{q_0}{q_1})$ (en la recta $w = 1$). Entonces

a)

$$\mu_1 + \mu_2 = \frac{p_1}{q_1} \quad y \quad \lambda_1 + \lambda_2 = \frac{q_0}{p_0}$$

Al considerar la extensión de la ecuación (5.1) a $\mathbb{C}P^2$ los orígenes de las cartas $(z_1, w_1) = (\frac{1}{z}, \frac{w}{z})$ y $(z_2, w_2) = (\frac{z}{w}, \frac{1}{w})$ son puntos singulares de la ecuación extendida con exponentes característicos λ_∞ y μ_∞ respectivamente. Entonces

b)

$$\mu_1 + \mu_2 + \frac{1}{\mu_\infty} = 1 \quad y \quad \lambda_1 + \lambda_2 + \frac{1}{\lambda_\infty} = 1$$

Demostración. a) Sabemos ya que las rectas $z = 1$ y $w = 1$ son invariantes por la ecuación (5.1) y por tanto podemos considerar la ecuación de primera variación a lo largo de cada una de ellas. Sea V el campo de direcciones dado por $V = \frac{dz}{dw}$ y la ecuación de primera variación del mismo a lo largo de la recta $z = 1$, es decir

$$V = \frac{dz}{dw} = \frac{(z-1)(p_0z + p_1w)}{(w-1)(q_0z + q_1w)}.$$

Así,

$$\left[\frac{\partial V}{\partial z} \right]_{z=1} = \frac{p_1w + p_0}{(w-1)(q_1w + q_0)}. \quad (5.2)$$

Calculemos directamente la suma $\mu_1 + \mu_2$ con ayuda del lema 3.1

$$\begin{aligned} \mu_1 + \mu_2 &= Res_{u=0} \frac{1}{u^2} \cdot \frac{p_1 \frac{1}{u} + p_0}{(\frac{1}{u} - 1)(q_1 \frac{1}{u} + q_0)} \\ &= Res_{u=0} \frac{1}{u^2} \cdot \frac{\frac{p_1 + up_0}{u}}{(\frac{1-u}{u})(\frac{q_1 + uq_0}{u})} \\ &= Res_{u=0} \frac{1}{u} \cdot \frac{p_1 + p_0u}{(1-u)(q_1 + q_0u)} \\ &= \frac{p_1}{q_1}. \end{aligned}$$

De manera análoga podemos considerar el campo de direcciones $X = \frac{dw}{dz}$ y la ecuación de primera variación a lo largo de la recta invariante $w = 1$. Donde

$$X = \frac{dw}{dz} = \frac{(w-1)(q_0z + q_1w)}{(z-1)(p_0z + p_1w)}.$$

En consecuencia

$$\left[\frac{\partial X}{\partial w} \right]_{w=1} = \frac{q_0z + q_1}{(z-1)(p_0z + p_1)}. \quad (5.3)$$

A partir de esta expresión podemos también calcular directamente la suma $\lambda_1 + \lambda_2$

$$\begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_2 &= \operatorname{Res}_{u=0} \frac{1}{u^2} \cdot \frac{q_0 \frac{1}{u} + q_1}{\left(\frac{1}{u} - 1\right)(p_0 \frac{1}{u} + p_1)} \\ &= \operatorname{Res}_{u=0} \frac{1}{u^2} \cdot \frac{\frac{q_0 + uq_1}{u}}{\left(\frac{1-u}{u}\right)\left(\frac{p_0 + up_1}{u}\right)} \\ &= \operatorname{Res}_{u=0} \frac{1}{u} \cdot \frac{q_0 + q_1u}{(1-u)(p_0 + p_1u)} \\ &= \frac{q_0}{p_0} \end{aligned}$$

b) Consideremos ahora la extensión de la ecuación (5.1) a $\mathbb{C}P^2$ en la carta $(z_1, w_1) = \left(\frac{1}{z}, \frac{w}{z}\right)$; es decir,

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= -\frac{\dot{z}}{z^2} = \frac{-(z-1)(p_0z + p_1w)}{z^2} \Big|_{(z,w)=\left(\frac{1}{z_1}, \frac{w_1}{z_1}\right)} \\ &= \frac{-\frac{1}{z_1^2}(1-z_1)(p_1w_1 + p_0)}{\frac{1}{z_1^2}} \\ &= \frac{z_1^2}{z_1^2}(z_1 - 1)(p_1w + p_0). \end{aligned}$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned} \dot{w}_1 &= \frac{\dot{w}z - w\dot{z}}{z^2} = \frac{z(w-1)(q_0z + q_1w) - w(z-1)(p_0z + p_1w)}{z^2} \Big|_{(z,w)=\left(\frac{1}{z_1}, \frac{w_1}{z_1}\right)} \\ &= \frac{\frac{1}{z_1^3}[(w_1 - z_1)(q_1w + q_0) - w_1(1 - z_1)(p_1w + p_0)]}{\frac{1}{z_1^2}} \\ &= \frac{z_1^2}{z_1^3}[(q_1 - p_1)w_1^2 + (q_0 - p_0)w_1 + p_1z_1w_1^2 + (p_0 - q_1)z_1w_1 - q_0z_1]. \end{aligned}$$

Consideremos ahora el campo de direcciones dado por $\tilde{X} = \frac{dz_1}{dw_1}$ para así analizar las curvas solución (en particular para calcular exponentes característicos)

$$\tilde{X} = \frac{dz_1}{dw_1} = \frac{z_1(z_1 - 1)(p_1 w_1 + p_0)}{(q_1 - p_1)w_1^2 + (q_0 - p_0)w_1 + z_1[p_1 w_1^2 + (p_0 - q_1)w_1 - q_0]}.$$

De aquí que la ecuación extendida tenga como puntos singulares a $(0, 0)$ y $(0, \frac{p_0 - q_0}{q_1 - p_1})$ en la recta $\ell_\infty = \{z_1 = 0\}$. Realicemos el cálculo de λ_∞ , el exponente característico asociado al punto singular $(0, 0)$. Para ello consideremos primero la ecuación de primera variación a lo largo de la solución $z_1 = 0$.

$$\left[\frac{\partial \tilde{X}}{\partial z_1} \right]_{z_1=0} = \frac{-(p_1 w + p_0)}{w_1[(q_1 - p_1)w_1 + (q_0 - p_0)]}. \quad (5.4)$$

Así,

$$\lambda_\infty = \operatorname{Res}_{w_1=0} \frac{-(p_1 w + p_0)}{w_1[(q_1 - p_1)w_1 + (q_0 - p_0)]} = \frac{p_0}{p_0 - q_0}.$$

Recordemos ahora que por **a)** sabemos que $\lambda_1 + \lambda_2 = \frac{q_0}{p_0}$ y en consecuencia

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \frac{1}{\lambda_\infty} = \frac{q_0}{p_0} + \frac{p_0 - q_0}{p_0} = 1.$$

Análogamente, consideremos la extensión de la ecuación (5.1) a $\mathbb{C}P^2$ en la carta $(z_2, w_2) = (\frac{z}{w}, \frac{1}{w})$, es decir

$$\begin{aligned} \dot{z}_2 &= \frac{\dot{z}w - z\dot{w}}{w^2} = \frac{w(z-1)(p_0z + p_1w) - z(w-1)(q_0z + q_1w)}{w^2} \Big|_{(z,w)=(\frac{z_2}{w_2}, \frac{1}{w_2})} \\ &= \frac{\frac{1}{w_2^2}[(z_2 - w_2)(p_0z_2 + p_1) - z_2(1 - w_2)(q_0z_2 + q_1)]}{\frac{1}{w_2^2}} \\ &= \frac{w_2^2}{w_2^3}[(p_0 - q_0)z_2^2 + (p_1 - q_1)z_2 + q_0w_2z_2^2 + (q_1 - p_0)w_2z_2 - p_1w_2] \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \dot{w}_2 &= -\frac{\dot{w}}{w^2} = -\frac{(w-1)(q_0z + q_1w)}{w^2} \Big|_{(z_2, w_2)=(\frac{z}{w}, \frac{1}{w})} \\ &= -\frac{\frac{1}{w_2^2}(1 - w_2)(p_0z_2 + p_1)}{\frac{1}{w_2^2}} \\ &= \frac{w_2^2}{w_2^2}(w_2 - 1)(p_0z_2 + p_1). \end{aligned}$$

Ahora, para analizar las curvas solución de la ecuación en el espacio de las fases (z_2, w_2) , consideremos el campo de direcciones

$$\tilde{V} = \frac{dw_2}{dz_2} = \frac{w_2(w_2 - 1)(p_0z_2 + p_1)}{(p_0 - q_0)z_2^2 + (p_1 - q_1)z_2 + w_2[q_0z_2^2 + (q_1 - p_0)z_2 - p_1]}.$$

De aquí que $(0, 0)$ y $(\frac{q_1 - p_1}{p_0 - q_0}, 0)$ son puntos singulares de la ecuación extendida, ambos sobre la recta $\tilde{\ell}_\infty = \{w_2 = 0\}$. Pasemos a realizar el cálculo del exponente característico μ_∞ asociado al punto singular $(0, 0)$ con el uso de la ecuación de primera variación a lo largo de la recta invariante $w_2 = 0$

$$\left[\frac{\partial \tilde{V}}{\partial w_2} \right]_{w_2=0} = \frac{-(q_0 z_2 + q_1)}{z_2[(p_0 - q_0)z_2 + (p_1 - q_1)]}. \quad (5.5)$$

De lo que se sigue que

$$\mu_\infty = \operatorname{Res}_{z_2=0} \frac{-(q_0 z_2 + q_1)}{z_2[(p_0 - q_0)z_2 + (p_1 - q_1)]} = \frac{q_1}{q_1 - p_1}.$$

Ahora bien, nuevamente por **a)** sabemos que $\mu_1 + \mu_2 = \frac{p_1}{q_1}$ y por lo tanto

$$\mu_1 + \mu_2 + \frac{1}{\mu_\infty} = \frac{p_1}{q_1} + \frac{q_1 - p_1}{q_1} = 1.$$

□

En los resultados obtenidos en la parte **b)** de la proposición 5.1 no es casual su parecido al obtenido en el lema 3.1. Esto tiene que ver nuevamente con el espacio ambiente en el que se encuentran las rectas $z = 1$, $w = 1$, $\tilde{\ell}_\infty$ y ℓ_∞ , es decir $\mathbb{C}P^2$ y es de hecho el índice de Camacho-Sad de estas rectas proyectivas.

Puesto que la parte central de este trabajo refiere a las ecuaciones integrables, es natural que nos preguntemos ¿bajo qué condiciones la ecuación diferencial (5.1) es una ecuación hamiltoniana?. Veamos el siguiente ejemplo en particular

Ejemplo 5.1.

$$\begin{aligned} \dot{z} &= (z - 1)(z + 2w) \\ \dot{w} &= (1 - w)(2z + w) \end{aligned} \quad (5.6)$$

Es decir, la ecuación (5.1) tomando $p_0 = 1$, $p_1 = 2$, $q_0 = -2$ y $q_1 = -1$. Esta es una ecuación bien definida en todo \mathbb{C}^2 y que además satisface

$$\begin{aligned} \frac{\partial \dot{z}}{\partial z} &= (z + 2w) + (z - 1) \\ &= 2z + 2w - 1 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \frac{\partial \dot{w}}{\partial w} &= -(2z + w) + (1 - w) \\ &= -2z - 2w + 1. \end{aligned}$$

De donde $\frac{\partial \dot{z}}{\partial z} = -\frac{\partial \dot{w}}{\partial w}$ y por lo tanto la ecuación (5.6) es hamiltoniana. Encontramos los puntos singulares en \mathbb{C}^2 de la ecuación (5.6) que viven sobre las rectas

invariantes $z = 1$ y $w = 1$. Ellos pueden ser evidenciados por las ecuaciones de primera variación correspondientes a las rectas invariantes. Retomando la expresión (5.2), consideremos primero

$$\left[\frac{\partial V}{\partial z} \right]_{z=1} = \frac{p_1 w + p_0}{(w-1)(q_1 w + q_0)} = \frac{2w+1}{(1-w)(w+2)}$$

De esta expresión es claro que los puntos singulares sobre la recta $z = 1$ son $(1, 1)$ y $(1, -2)$. Calculemos sus exponentes característicos

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \operatorname{Res}_{w=1} \frac{2w+1}{(1-w)(w+2)} \\ &= \lim_{w \rightarrow 1} (w-1) \frac{2w+1}{(1-w)(w+2)} \\ &= \frac{2+1}{-(1+2)} \\ &= \frac{3}{-3} \\ &= -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mu_2 &= \operatorname{Res}_{w=-2} \frac{2w+1}{(1-w)(w+2)} \\ &= \lim_{w \rightarrow -2} (w+2) \frac{2w+1}{(1-w)(w+2)} \\ &= \frac{-4+1}{1+2} \\ &= \frac{-3}{3} \\ &= -1. \end{aligned}$$

Esto nos dice además, que las transformaciones de monodromía calculadas a lo largo de los lazos que rodean a $(1, 1)$ y $(1, -2)$ en la recta proyectiva $z = 1$ son de la forma $\Delta(\xi) = e^{-2\pi i} \xi + \dots$, es decir $\Delta(\xi) = \xi + \dots$ tiene parte lineal la identidad.

Análogamente, para la recta $w = 1$, consideramos la ecuación de primera variación (5.3) a lo largo de la recta invariante $w = 1$

$$\left[\frac{\partial X}{\partial w} \right]_{w=1} = \frac{q_0 z + q_1}{(z-1)(p_0 z + p_1)} = \frac{-(2z+1)}{(z-1)(z+2)}.$$

Lo que nos permite observar que $(1, 1)$ y $(-2, 1)$ son los puntos singulares sobre la recta invariante $w = 1$ y con ellos podemos también calcular de manera

explícita los correspondientes exponentes característicos λ_1 y λ_2

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \operatorname{Res}_{z=1} \frac{-(2z+1)}{(z-1)(z+2)} \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \frac{-(2z+1)}{(z-1)(z+2)} \\ &= \frac{-(2+1)}{1+2} \\ &= \frac{-3}{3} \\ &= -1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lambda_2 &= \operatorname{Res}_{z=-2} \frac{-(2z+1)}{(z-1)(z+2)} \\ &= \lim_{z \rightarrow -2} (z+2) \frac{-(2z+1)}{(z-1)(z+2)} \\ &= \frac{-(-4+1)}{-2-1} \\ &= \frac{3}{-3} \\ &= -1.\end{aligned}$$

Nuevamente las transformaciones de monodromía calculadas desde transversales a la recta $w = 1$ tienen parte lineal la identidad.

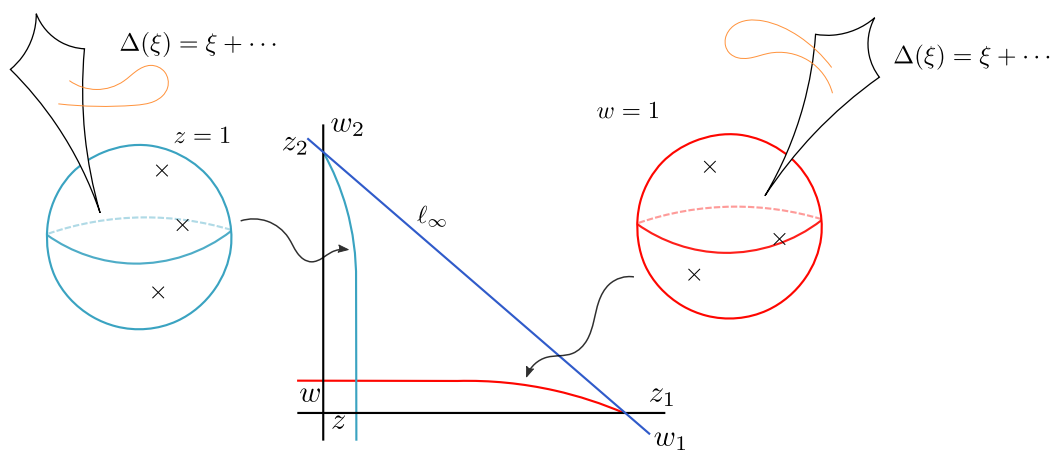


Figura 5.2: Transformación de monodromía sobre $z = 1$ y $w = 1$.

Para estos momentos, tal regularidad en una ecuación hamiltoniana ya no

debería parecer extraña. Recordemos que al ser la ecuación (5.6) una ecuación hamiltoniana sus soluciones parametrizan a las curvas de nivel de su primera integral la cual podemos rescatar directamente de la expresión del campo vectorial, pues éste es de la forma

$$\begin{aligned}\dot{z} &= H_w \\ \dot{w} &= -H_z.\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}H(z, w) &= \int \dot{z}dw = \int (z-1)(z+2w)dw \\ &= (z-1)(zw+w^2) + h_1(z) \\ &= z^2w + zw^2 - zw - w^2 + h_1(z)\end{aligned}$$

con $h_1(z)$ una función analítica que sólo depende de z . Por otro lado

$$\begin{aligned}H(z, w) &= \int -\dot{w}dz = \int (w-1)(2z+w)dz \\ &= (w-1)(z^2 + zw) + h_2(w) \\ &= z^2w + zw^2 - z^2 - zw + h_2(w)\end{aligned}$$

donde $h_2(w)$ es una función analítica que sólo depende de la variable w . Por lo que la función polinomial

$$H(z, w) = z^2w + zw^2 - z^2 - zw - w^2 \quad (5.7)$$

es primera integral de la ecuación (5.6). Observemos que la primera integral tiene parte principal $H_3(z, w) = z^2w + zw^2 = zw(z+w)$. Es decir, H es transversal al infinito. En virtud del teorema 4.7 sabemos que la dimensión del primer grupo de homología de las curvas de nivel no singulares es 2^2 . Más aún son topológicamente toros de género $\frac{2(2-1)}{2} = 1$ con tres puntos removidos que corresponden cada una de las direcciones de las rectas $z = 0$, $w = 0$ y $z + w = 0$

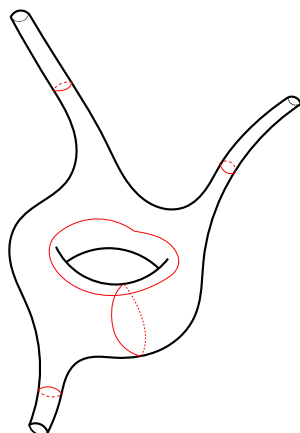


Figura 5.3: $H^{-1}(c)$, $c \neq 0, -1$.

Veamos ahora que toda ecuación hamiltoniana de esta familia está definida por un múltiplo constante de la ecuación (5.6). En efecto, calculemos las parciales $\frac{\partial \dot{z}}{\partial z}$ y $\frac{\partial \dot{w}}{\partial w}$ en la ecuación diferencial (5.1)

$$\begin{aligned}\frac{\partial \dot{z}}{\partial z} &= (p_0 z + p_1 w) + p_0(z - 1) \\ &= 2p_0 z + p_1 w - p_0\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\frac{\partial \dot{w}}{\partial w} &= (q_0 z + q_1 w) + q_1(w - 1) \\ &= q_0 z + 2q_1 w - q_1.\end{aligned}$$

Así, $\frac{\partial \dot{z}}{\partial z} = -\frac{\partial \dot{w}}{\partial w}$ si y sólo si los complejos p_0 , p_1 , q_0 y q_1 satisfacen el siguiente sistema de ecuaciones lineales homogéneo

$$\begin{aligned}2p_0 + q_0 &= 0 \\ p_1 + 2q_1 &= 0 \\ p_0 + q_1 &= 0\end{aligned}\tag{5.8}$$

Las soluciones al sistema de ecuaciones (5.8) pueden ser puestas en términos de p_0 . Más específicamente $p_1 = 2p_0$, $q_0 = -2p_0$ y $q_1 = -p_0$, $p_0 \in \mathbb{C}^*$ son todas las soluciones a este sistema de ecuaciones lineales. Por lo tanto la ecuación (5.1) es hamiltoniana si y sólo si es de la forma

$$\begin{aligned}\dot{z} &= p_0(z - 1)(z + 2w) \\ \dot{w} &= p_0(1 - w)(2z + w)\end{aligned}$$

A lo largo de este trabajo nos hemos ocupado de encontrar condiciones bajo las cuales una ecuación diferencial sea hamiltoniana. En tal dirección la siguiente proposición da respuesta a nuestra pregunta para las ecuaciones de la familia (5.1).

Proposición 5.2. *Para la ecuación diferencial (5.1) con $(p_0 + p_1)(q_0 + q_1) \neq 0$, las siguientes condiciones son equivalentes:*

- a)** *La ecuación es hamiltoniana.*
- b)** *La ecuación (5.1) está definida por un múltiplo constante del campo vectorial que define a la ecuación diferencial (5.6).*
- c)** *Los exponentes característicos μ_1 , μ_2 y λ_2 son iguales a -1 .*

Demostración. La implicación **a)** \Rightarrow **b)** queda demostrada por la observación previa al enunciado de la proposición.

b) \Rightarrow **c)** Hemos calculado ya los exponentes característicos de los puntos singulares para la ecuación (5.6) y por hipótesis la ecuación (5.1) es un múltiplo constante de ella. Así, los puntos singulares coinciden con los de la ecuación

(5.6) y sus respectivos exponentes característicos son iguales a los calculados anteriormente.

c) \Rightarrow **a)** Veamos primero que en general $\mu_1 = \frac{1}{\lambda_1}$. Calculemos cada uno de ellos

$$\begin{aligned}\mu_1 &= \operatorname{Res}_{w=1} \frac{p_1 w + p_0}{(w-1)(q_1 w + q_0)} \\ &= \lim_{w \rightarrow 1} (w-1) \frac{p_1 w + p_0}{(w-1)(q_1 w + q_0)} \\ &= \frac{p_1 + p_0}{q_1 + q_0}.\end{aligned}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \operatorname{Res}_{z=1} \frac{q_0 z + q_1}{(z-1)(p_0 z + p_1)} \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \frac{q_0 z + q_1}{(z-1)(p_0 z + p_1)} \\ &= \frac{q_0 + q_1}{p_0 + p_1}.\end{aligned}$$

Así, $\mu_1 = \frac{1}{\lambda_1}$ y por lo tanto $\lambda_1 = -1$. Ahora bien, por la parte **b)** de la proposición 5.1 sabemos que

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \frac{1}{\lambda_\infty} = 1 \quad \text{y} \quad \mu_1 + \mu_2 + \frac{1}{\mu_\infty} = 1.$$

Consecuentemente, dado que $\mu_1 = \lambda_1 = \mu_2 = \lambda_2 = -1$ se sigue que $\frac{1}{\lambda_\infty} = 3$ y $\frac{1}{\mu_\infty} = 3$ o equivalentemente

$$\lambda_\infty = \frac{1}{3} \quad \text{y} \quad \mu_\infty = \frac{1}{3}.$$

Por lo tanto, al ser (5.1) una ecuación cuadrática y en virtud del teorema 3.2 la ecuación resulta ser hamiltoniana. \square

La primera integral de esta familia de ecuaciones diferenciales en el caso hamiltoniano está dada por

$$H(z, w) = p_0[zw^2 + z^2w - z^2 - zw - w^2] \quad (5.9)$$

Los puntos críticos de H son $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(1, -2)$ y $(-2, 1)$. Veamos sobre qué curva de nivel de H vive cada uno de ellos.

$$\begin{aligned}H(0, 0) &= p_0[0 \cdot 0^2 + 0^2 \cdot 0 - 0^2 - 0 \cdot 0 - 0^2] = 0 \\ H(1, 1) &= p_0[1 \cdot 1^2 + 1^2 \cdot 1 - 1^2 - 1 \cdot 1 - 1^2] = -p_0 \\ H(1, -2) &= p_0[1 \cdot (-2)^2 + 1^2 \cdot (-2) - 1^2 - 1 \cdot (-2) - (-2)^2] = -p_0 \\ H(-2, 1) &= p_0[-2 \cdot 1^2 + (-2)^2 \cdot 1 - (-2)^2 - (-2) \cdot 1 - 1^2] = -p_0\end{aligned}$$

Con lo que podemos concluir que las curvas de nivel de H son, salvo las correspondientes a 0 y $-p_0$, toros con tres puntos removidos, ésto debido al teorema 4.7. Más aún la curva de nivel $L_{-p_0} = H^{-1}(-p_0)$ está descrita por la ecuación $(z-1)(w-1)(z+w+1) = 0$, es decir es la unión de tres rectas complejas.

5.1. La familia crece en grado

Consideremos ahora la ecuación diferencial

$$\begin{aligned} \dot{z} &= (z-1)(p_0z^n + p_1z^{n-1}w + \cdots + p_{n-1}zw^{n-1} + p_nw^n) \\ \dot{w} &= (w-1)(q_0z^n + q_1z^{n-1}w + \cdots + q_{n-1}zw^{n-1} + q_nw^n) \end{aligned} \quad (5.10)$$

Es claro que para la ecuación¹ (5.10) las rectas $z = 1$ y $w = 1$ son invariantes². Nuevamente haciendo uso de la ecuación de primera variación a lo largo de dichas rectas podemos detectar los puntos singulares sobre ellas. En efecto, al considerar el campo de direcciones $V = \frac{dz}{dw}$ y la ecuación de primera variación a lo largo de la recta $z = 1$

$$\left[\frac{\partial V}{\partial z} \right]_{z=1} = \frac{\sum_{k=0}^n p_k w^k}{(w-1) \sum_{k=0}^n q_k w^k}. \quad (5.11)$$

podemos observar que además del punto singular $(1, 1)$ el resto de los puntos singulares son de la forma $(1, b_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$, donde b_i es raíz del polinomio $\sum_{k=0}^n q_k w^k$ las cuales son généricamente distintas dos a dos. A dichos puntos singulares corresponden exponentes característicos μ_{i+1} respectivamente.

Similarmente podemos considerar la ecuación de primera variación a lo largo de la recta invariante $w = 1$ y el campo de direcciones $X = \frac{dw}{dz}$

$$\left[\frac{\partial X}{\partial w} \right]_{w=1} = \frac{\sum_{k=0}^n q_k z^{n-k}}{(w-1) \sum_{k=0}^n p_k z^{n-k}} \quad (5.12)$$

Por lo que los puntos singulares sobre la recta $w = 1$ son $(1, 1)$ y el resto son todos de la forma $(c_i, 1)$, $i = 1, 2, \dots, n$ donde c_i es raíz del polinomio $\sum_{k=0}^n p_k z^{n-k}$;

¹La ecuación (5.10) puede ser escrita de manera más compacta como

$$\begin{aligned} \dot{z} &= (z-1) \sum_{k=0}^n p_k z^{n-k} w^k \\ \dot{w} &= (w-1) \sum_{k=0}^n q_k z^{n-k} w^k \end{aligned}$$

²Un cálculo análogo al realizado en el caso $n = 1$ es suficiente.

a estos puntos asociamos los exponentes característicos λ_{i+1} .

Así como hemos estudiado algunas propiedades de la ecuación (5.1) la siguiente proposición enlista las correspondientes para la ecuación diferencial (5.10).

Proposición 5.3. *La ecuación diferencial (5.10) satisface genéricamente las siguientes propiedades:*

Sean $\lambda_1, \lambda_{i+1}, i = 2, \dots, n$ los exponentes característicos de los puntos singulares $(1, 1), (c_i, 1)$ $i = 1, 2, \dots, n$, respectivamente. Análogamente sean μ_1, μ_{i+1} los exponentes característicos de los puntos singulares $(1, 1), (1, b_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$, respectivamente. Entonces

a)

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_{n+1} = \frac{q_0}{p_0} \quad y \quad \mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_{n+1} = \frac{p_n}{q_n}.$$

La ecuación (5.10) extendida a \mathbb{CP}^2 tiene como puntos singulares a los orígenes de las cartas $(z_1, w_1), (z_2, w_2)$ cuyos exponentes característicos λ_∞ y μ_∞ respectivamente, satisfacen

b)

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_{n+1} + \frac{1}{\lambda_\infty} = 1 \quad y \quad \mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_{n+1} + \frac{1}{\mu_\infty} = 1.$$

Demostración. a) Retomemos la expresión de la ecuación de primera variación a lo largo de la recta invariante $z = 1$ obtenida en (5.11) y calculemos directamente la suma $\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_{n+1}$ con ayuda del lema 3.1. A saber,

$$\begin{aligned} \mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_{n+1} &= \operatorname{Res}_{u=0} \frac{1}{u^2} \cdot \frac{\sum_{k=0}^n p_k \frac{1}{u^k}}{\left(\frac{1}{u} - 1\right) \sum_{k=0}^n q_k \frac{1}{u^k}} \\ &= \operatorname{Res}_{u=0} \frac{1}{u^2} \cdot \frac{\frac{1}{u^n} \sum_{k=0}^n p_k u^{n-k}}{\frac{1}{u^{n+1}} (1-u) \sum_{k=0}^n q_k u^{n-k}} \\ &= \operatorname{Res}_{u=0} \frac{1}{u} \cdot \frac{\sum_{k=0}^n p_k u^{n-k}}{(1-u) \sum_{k=0}^n q_k u^{n-k}} \\ &= \frac{p_n}{q_n}. \end{aligned}$$

Análogamente, con uso de la ecuación de primera variación a lo largo de $w = 1$, misma que obtuvimos en (5.12), podemos calcular la suma

$$\begin{aligned}
 \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_{n+1} &= \operatorname{Res}_{u=0} \frac{1}{u^2} \cdot \frac{\sum_{k=0}^n q_k \frac{1}{u^{n-k}}}{\left(\frac{1}{u} - 1\right) \sum_{k=0}^n p_k \frac{1}{u^{n-k}}} \\
 &= \operatorname{Res}_{u=0} \frac{1}{u^2} \cdot \frac{\frac{1}{u^n} \sum_{k=0}^n q_k u^k}{\frac{1}{u^{n+1}} (1-u) \sum_{k=0}^n p_k u^k} \\
 &= \operatorname{Res}_{u=0} \frac{1}{u} \cdot \frac{\sum_{k=0}^n q_k u^k}{(1-u) \sum_{k=0}^n p_k u^k} \\
 &= \frac{q_0}{p_0}.
 \end{aligned}$$

b) Consideremos ahora la extensión de la ecuación (5.10) a $\mathbb{C}P^2$ en la carta $(z_1, w_1) = \left(\frac{1}{z}, \frac{w}{z}\right)$. Entonces

$$\begin{aligned}
 \dot{z}_1 = -\frac{\dot{z}}{z^2} &= -\frac{(z-1) \sum_{k=0}^n p_k z^{n-k} w^k}{z^2} \Bigg|_{(z,w) = \left(\frac{1}{z_1}, \frac{w_1}{z_1}\right)} \\
 &= \frac{-\frac{1}{z_1^{n+1}} (1-z_1) \sum_{k=0}^n p_k w_1^k}{\frac{1}{z_1^2}} \\
 &= \frac{z_1^2}{z_1^{n+1}} (z_1 - 1) \sum_{k=0}^n p_k w_1^k
 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \dot{w}_1 &= \frac{\dot{w}z - w\dot{z}}{z^2} = \frac{z(w-1) \sum_{k=0}^n q_k z^{n-k} w^k - w(z-1) \sum_{k=0}^n p_k z^{n-k} w^k}{z^2} \Bigg|_{(z,w)=\left(\frac{1}{z_1}, \frac{w_1}{z_1}\right)} \\ &= \frac{\frac{1}{z_1^{n+2}} \left[(w_1 - z_1) \sum_{k=0}^n q_k w_1^k - w_1(1 - z_1) \sum_{k=0}^n p_k w_1^k \right]}{\frac{1}{z_1^2}} \\ &= \frac{z_1^2}{z_1^{n+2}} \left[\sum_{k=0}^n (q_k - p_k) w_1^{k+1} + z_1 \left(\sum_{k=0}^n p_k w_1^{k+1} - \sum_{k=0}^n q_k w_1^k \right) \right]. \end{aligned}$$

Consideremos nuevamente el campo de direcciones $\tilde{X} = \frac{dz_1}{dw_1}$ y la ecuación de primera variación a lo largo de la recta invariante $z_1 = 0$. Es decir,

$$\tilde{X} = \frac{z_1(z_1 - 1) \sum_{k=0}^n p_k w_1^k}{\sum_{k=0}^n (q_k - p_k) w_1^{k+1} + z_1 \left[\sum_{k=0}^n p_k w_1^{k+1} - \sum_{k=0}^n q_k w_1^k \right]}$$

y por lo tanto la ecuación de primera variación queda de la forma

$$\left[\frac{\partial \tilde{X}}{\partial z_1} \right]_{z_1=0} = \frac{- \sum_{k=0}^n p_k w_1^k}{w_1 \sum_{k=0}^n (q_k - p_k) w_1^k}.$$

De lo anterior es posible deducir que los puntos singulares en la recta $\ell_\infty = \{z_1 = 0\}$ son $(0, 0)$ y los de la forma $(0, a_i)$ con a_i raíz del polinomio $\sum_{k=0}^n (q_k - p_k) w_1^k$. Así, el exponente característico de $(0, 0)$, λ_∞ está dado por

$$\begin{aligned} \lambda_\infty &= \operatorname{Res}_{w_1=0} \frac{- \sum_{k=0}^n p_k w_1^k}{w_1 \sum_{k=0}^n (q_k - p_k) w_1^k} \\ &= \lim_{w_1 \rightarrow 0} w_1 \cdot \frac{- \sum_{k=0}^n p_k w_1^k}{w_1 \sum_{k=0}^n (q_k - p_k) w_1^k} \\ &= \frac{p_0}{p_0 - q_0}. \end{aligned}$$

En consecuencia, haciendo uso de lo obtenido en **a)** se tiene que

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_{n+1} + \frac{1}{\lambda_\infty} = \frac{q_0}{p_0} + \frac{p_0 - q_0}{p_0} = 1.$$

Similarmente, al considerar la extensión de la ecuación diferencial (5.10) a $\mathbb{C}P^2$ desde la carta $(z_2, w_2) = (\frac{z}{w}, \frac{1}{w})$ obtenemos

$$\begin{aligned} \dot{z}_2 = \frac{\dot{z}w - z\dot{w}}{w^2} &= \frac{w(z-1) \sum_{k=0}^n p_k z^{n-k} w^k - z(w-1) \sum_{k=0}^n q_k z^{n-k} w^k}{w^2} \Bigg|_{(z,w)=(\frac{z_2}{w_2}, \frac{1}{w_2})} \\ &= \frac{\frac{1}{w_2^{n+2}} \left[(z_2 - w_2) \sum_{k=0}^n p_k z_2^{n-k} - z_2(1 - w_2) \sum_{k=0}^n q_k z_2^{n-k} \right]}{\frac{1}{w_2^2}} \\ &= \frac{w_2^2}{w_2^{n+2}} \left[\sum_{k=0}^n (p_k - q_k) z_2^{n+1-k} + w_2 \left(\sum_{k=0}^n q_k z_2^{n+1-k} - \sum_{k=0}^n p_k z_2^{n-k} \right) \right] \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \dot{w}_2 = -\frac{\dot{w}}{w^2} &= -\frac{(w-1) \sum_{k=0}^n q_k z^{n-k} w^k}{w^2} \Bigg|_{(z,w)=(\frac{z_2}{w_2}, \frac{1}{w_2})} \\ &= \frac{-\frac{1}{w_2^{n+1}} (1 - w_2) \sum_{k=0}^n q_k z_2^{n-k}}{\frac{1}{w_2^2}} \\ &= \frac{w_2^2}{w_2^{n+1}} (w_2 - 1) \sum_{k=0}^n q_k z_2^{n-k}. \end{aligned}$$

Ahora para poder examinar las soluciones en el plano de las fases (z_2, w_2) consideremos el campo de direcciones $\tilde{V} = \frac{dw_2}{dz_2}$ y la ecuación de primera variación a lo largo de la recta w_2 , la cual es invariante por la ecuación extendida³. Donde

$$\tilde{V} = \frac{w_2(w_2 - 1) \sum_{k=0}^n q_k z_2^{n-k}}{\sum_{k=0}^n (p_k - q_k) z_2^{n+1-k} + w_2 \left[\sum_{k=0}^n q_k z_2^{n+1-k} - \sum_{k=0}^n p_k z_2^{n-k} \right]}.$$

³En realidad la recta $w_2 = 0$ es la misma que $z_1 = 0$ sólo que vista desde otra carta.

En consecuencia, la ecuación de primera variación está dada por

$$\left[\frac{\partial \tilde{V}}{\partial w_2} \right]_{w_2=0} = \frac{-\sum_{k=0}^n q_k z_2^{n-k}}{z_2 \sum_{k=0}^n (p_k - q_k) z_2^{n-k}}$$

Así, los puntos singulares en la línea al infinito vista desde esta carta son el origen de coordenadas y los de la forma $(b_i, 0)$, $i = 1, 2, \dots, n$ donde $b_i = a_i^{-1}$. Calculemos μ_∞ , el exponente característico de $(0, 0)$

$$\begin{aligned} \mu_\infty &= \operatorname{Res}_{z_2=0} \frac{-\sum_{k=0}^n q_k z_2^{n-k}}{z_2 \sum_{k=0}^n (p_k - q_k) z_2^{n-k}} \\ &= \lim_{z_2 \rightarrow 0} z_2 \cdot \frac{-\sum_{k=0}^n q_k z_2^{n-k}}{z_2 \sum_{k=0}^n (p_k - q_k) z_2^{n-k}} \\ &= \frac{q_n}{q_n - p_n}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, usando lo obtenido en **a)** se tiene que

$$\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_{n+1} + \frac{1}{\mu_\infty} = \frac{p_n}{q_n} + \frac{q_n - p_n}{q_n} = 1.$$

□

Los resultados de la parte **b)** en las proposiciones 5.1 y 5.3 reflejan nuevamente el índice de Camacho-Sad de estas rectas en el plano proyectivo $\mathbb{C}P^2$.

5.2. Todos los integrantes hamiltonianos de la familia

Es claro que la familia de ecuaciones (5.10) generaliza la obtenida por la ecuación (5.1); de hecho lo hace también en el caso hamiltoniano y determina por completo a las ecuaciones polinomiales hamiltonianas definidas por campos vectoriales que constan de términos de dos grados consecutivos y que tienen como rectas invariantes a $z = 1$ y $w = 1$.

Proposición 5.4. *Sea*

$$\begin{aligned} \dot{z} &= P_{n+1} + P_n \\ \dot{w} &= Q_{n+1} + Q_n \end{aligned} \tag{5.13}$$

una ecuación diferencial polinomial. Si las rectas $z = 1$ y $w = 1$ son invariantes bajo el campo que define a la ecuación y ésta es hamiltoniana, entonces ella está definida por un múltiplo constante de l campo que define a la ecuación

$$\begin{aligned}\dot{z} &= (z-1)[z^n + 2z^{n-1}w + \cdots + nzw^{n-1} + (n+1)w^n] \\ \dot{w} &= (1-w)[(n+1)z^n + nz^{n-1}w + \cdots + 2zw^{n-1} + w^n]\end{aligned}\quad (5.14)$$

Equivalentemente, podemos decir que la foliación asociada a la ecuación (5.14) caracteriza a las foliaciones definidas por cualquier ecuación diferencial polinomial hamiltoniana de la forma (5.13) y que tiene como rectas invariantes a $z = 1$ y $w = 1$.

Demostración. Por hipótesis la ecuación (5.13) tiene a $z = 1$ como recta invariante y por tanto para $f(z, w) = z - 1$

$$L_v f|_{z=1} \equiv 0.$$

Es decir,

$$\begin{aligned}0 &= L_v f|_{z=1} = (1, 0) \cdot (P_{n+1}(z, w) + P_n(z, w), Q_{n+1}(z, w) + Q_n(z, w))|_{z=1} \\ &= P_{n+1}(1, w) + P_n(1, w)\end{aligned}$$

Por lo tanto existe un polinomio $\tilde{P} \in \mathbb{C}[z, w]$ de forma tal que

$$P_{n+1}(z, w) + P_n(z, w) = (z-1)\tilde{P}(z, w).$$

Análogamente, dado que $w = 1$ es invariante, existe $\tilde{Q} \in \mathbb{C}[z, w]$ que cumple

$$Q_{n+1}(z, w) + Q_n(z, w) = (w-1)\tilde{Q}(z, w).$$

Notemos que como consecuencia de las igualdades anteriores \tilde{P} y \tilde{Q} son polinomios homogéneos de grado n , digamos

$$\begin{aligned}\tilde{P}(z, w) &= \sum_{k=0}^n p_k z^{n-k} w^k \\ \tilde{Q}(z, w) &= \sum_{k=0}^n q_k z^{n-k} w^k.\end{aligned}$$

Así las cosas, la ecuación (5.13) tiene la forma siguiente:

$$\begin{aligned}\dot{z} &= (z-1) \sum_{k=0}^n p_k z^{n-k} w^k \\ \dot{w} &= (w-1) \sum_{k=0}^n q_k z^{n-k} w^k.\end{aligned}$$

Además por hipótesis sabemos que

$$\frac{\partial \dot{z}}{\partial z} + \frac{\partial \dot{w}}{\partial w} = 0,$$

donde

$$\frac{\partial \dot{z}}{\partial z} = \sum_{k=0}^n (n+1-k)p_k z^{n-k} w^k - \sum_{k=0}^n (n-k)p_k z^{n-k-1} w^k$$

y

$$\frac{\partial \dot{w}}{\partial w} = \sum_{k=0}^n (k+1)q_k z^{n-k} w^k - \sum_{k=0}^n kq_k z^{n-k} w^{k-1}.$$

De lo que se tiene el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{aligned} (n+1-k)p_k + (k+1)q_k &= 0 & k = 0, 1, \dots, n \\ (n-k)p_k + (k+1)q_k &= 0 & k = 0, 1, \dots, n-1 \end{aligned}$$

el cual es un sistema de $2n+1$ ecuaciones lineales y $2n+2$ incógnitas. Es por esta razón que las soluciones pueden ser puestas en términos de p_0 , el coeficiente del término z^{n+1} en el polinomio $P_{n+1} + P_n$. Sea $a := p_0 \in \mathbb{C}^*$ dicho término. Entonces el sistema tiene como solución:

$$\begin{aligned} p_k &= a(k+1) & k = 0, \dots, n \\ q_k &= -a(n+1-k) & k = 0, \dots, n \end{aligned}$$

y por tanto podemos reescribir la ecuación (5.13) como:

$$\begin{aligned} \dot{z} &= a(z-1) \sum_{k=0}^n (k+1)z^{n-k} w^k \\ \dot{w} &= a(1-w) \sum_{k=0}^n (n+1-k)z^{n-k} w^k. \end{aligned}$$

□

Analicemos ahora las soluciones a la ecuación diferencial hamiltoniana

$$\begin{aligned} \dot{z} &= (z-1)[z^n + 2z^{n-1}w + \dots + nzw^{n-1} + (n+1)w^n] \\ \dot{w} &= (1-w)[(n+1)z^n + nz^{n-1}w + \dots + 2zw^{n-1} + w^n] \end{aligned} \quad (5.15)$$

Por ahora nos interesa solamente conocer la parte principal de su primera integral para saber si estamos en condiciones de usar el teorema 4.7 y con ello conocer la topología de las curvas de nivel no singulares. Concretamente, nos interesa saber si la integral primera es un polinomio transversal al infinito y para ello recordemos que la parte principal de la primera integral coincide en este caso, salvo un factor constante no nulo, con el polinomio $R_{n+2}(z, w)$. Es decir, si $H \in \mathbb{C}[z, w]$ es el hamiltoniano que define a la ecuación (5.15), entonces

su parte principal está dada por

$$\begin{aligned}
(n+2)H_{n+2}(z, w) &= R_{n+2}(z, w) \\
&= wP_{n+1}(z, w) - zQ_{n+1}(z, w) \\
&= wz \sum_{k=0}^n (k+1)z^{n-k}w^k + zw \sum_{k=0}^n (n+1-k)z^{n-k}w^k \\
&= (n+2)zw \sum_{k=0}^n z^{n-k}w^k.
\end{aligned}$$

Para que H sea un polinomio transversal al infinito es necesario que el polinomio $\tilde{R}(z, w) = \sum_{k=0}^n z^{n-k}w^k$ sea factorizable en n rectas distintas dos a dos. Para verificarlo notemos primero que \tilde{R} es un polinomio homogéneo de grado n y consideremos \tilde{R} desde la carta (z_1, w_1) de $\mathbb{C}P^2$, es decir $z^n \tilde{R}(1, \frac{w}{z}) = \frac{1}{z_1} \tilde{R}(1, w_1)$. Así

$$\tilde{R}(1, w_1) = \sum_{k=0}^n w_1^k$$

y observemos que si α es una raíz $(n+1)$ -ésima distinta de uno, entonces $\tilde{R}(1, \alpha) = 0$. Efectivamente, pues

$$\tilde{R}(1, \alpha) = 1 + \alpha + \alpha^2 + \cdots + \alpha^n$$

Multiplicando ambos lados por α se tiene que

$$\alpha \tilde{R}(1, \alpha) = \alpha + \alpha^2 + \cdots + \alpha^{n+1};$$

puesto que $\alpha^{n+1} = 1$, se sigue que

$$\alpha \tilde{R}(1, \alpha) = \alpha + \alpha^2 + \cdots + \alpha^n + 1$$

y equivalentemente, $\alpha \tilde{R}(1, \alpha) = \tilde{R}(1, \alpha)$. En consecuencia y dado que $\alpha \neq 1$ se tiene que $\tilde{R}(1, \alpha) = 0$. Por lo tanto las raíces de $\tilde{R}(1, w_1)$ son distintas dos a dos pues son las n raíces $(n+1)$ -ésimas de la unidad distintas de uno. Así las cosas, $\tilde{R}(1, w_1)$ se factoriza como

$$\tilde{R}(1, w_1) = \prod_{j=1}^n (w_1 - r^j), \quad r = e^{\frac{2\pi}{n+1}i}$$

y en consecuencia

$$\begin{aligned}
\tilde{R}(z, w) &= z^n \tilde{R}(1, w_1) \\
&= z^n \prod_{j=1}^n \left(\frac{w}{z} - r^j \right) \\
&= \prod_{j=1}^n (w - r^j z)
\end{aligned}$$

Por consiguiente, el polinomio H es transversal al infinito. En virtud del teorema 4.7 toda curva de nivel no singular tiene por dimensión de su primer grupo de homología $(n+1)^2$. Más aún sabemos que topológicamente son toros de género $g_{L_c} = \frac{(n+1)(n+1-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$ con $n+2$ puntos removidos que se corresponden con los factores de H_{n+2} .

Para cerrar solo nos gustaría agregar que esta familia de ejemplos fue muy productiva y definitivamente limpió para nosotros el panorama y permitió mejorar nuestro entendimiento sobre ecuaciones diferenciales hamiltonianas. Por ella misma la familia de ecuaciones (5.10) puede también ser considerada con cualesquiera dos rectas paralelas a las originales y que no sean los ejes coordenados y para la familia resultante los coeficientes son afectados por factores que dependen del cociente entre las coordenadas del punto de intersección de las rectas invariantes y para ella es posible conseguir resultados totalmente análogos a los enunciados en las proposiciones 5.3 y 5.10.

Bibliografía

- [1] V.I. ARNOLD, *Ordinary Differential Equations*, Springer-Verlag, New York, 1992.
- [2] V.I. ARNOLD, S.M. GUSEIN-ZADE, A.N. VARCHENKO, *Singularity of differentiable maps, Vol. I*, Birkhäuser, Boston, 1985.
- [3] X. GÓMEZ-MONT, L. ORTIZ BOBADILLA, *Sistemas dinámicos holomorfos en superficies*, Aportaciones Matemáticas, Sociedad Matemática Mexicana, México 2004.
- [4] G. FISCHER *Plane algebraic curves*, American Mathematical Society, 2001.
- [5] FORSTER O., *Lectures on Riemann Surfaces*, Springer-Verlag, New York, 1991.
- [6] Y. ILYASHENKO, S. YAKOVENKO, *Lectures on Analytic Differential Equations*, American Mathematical Society, Rhode Island, 2008.
- [7] JONES, GARETH A., SINGERMAN, DAVID, *Complex functions: an algebraic and geometric view point*, Cambridge University, 1987.
- [8] E. REYSSAT *Quelques aspects des Surfaces de Riemann*, Birkhäuser, Boston, 1989.