UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

LA INTEGRAL DEL MODELO DE WOLFES G2 ELÍPTICO

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICO

P R E S E N T A:

MIGUEL ANGEL GUADARRAMA AYALA

DIRECTOR DE TESIS:
DR. JUAN CARLOS LÓPEZ VIEYRA

2016

Ciudad Universitaria, D. F.

Hoja de Datos del Jurado

1. Datos del alumno
Guadarrama
Ayala
Miguel Angel
55 42 14 19
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Matemáticas
309067508

2. Datos del tutor
Dr
Juan Carlos
López
Vieyra

3.Datos del sinodal 1
Dr
Alexander
Turbiner
Rosenbaum

4.Datos del sinodal 2
Dr
Panayiotis
Panayotaros

5.Datos del sinodal 3
Dr
Carlos
Villegas
Blas

6.Datos del sinodal 4
Dr
José David
Vergara
Oliver

7. Datos del trabajo escrito
La Integral del Modelo de Wolfes G2 elíptico
92 p
2016

A mi amigo de cuatro patas,
que ya me espera junto al río.

Índice general

Agradecimientos

Es fácil agradecer a quien ha sido en gran medida responsable del buen término de este trabajo. Gracias al Dr. Juan Carlos López Vieyra por sus sugerencias, cuestionamientos y correcciones. Gracias por la confianza y más que otra cosa, gracias por su tiempo.

De la misma manera quiero expresar mi agradecimiento por los comentarios hechos acerca de mi trabajo al Dr. Alexander Turbiner. Sus observaciones y el interés mostrado en mi formación profesional tendrán un buen eco.

También agradezco los comentarios y las atenciones prestadas por parte de mis sinodales: Dr. Panayiotis Panayotaros, Dr. Carlos Villegas y el Dr. David Vergara.

Aprovecho este espacio para agradecer a mi abuela por el inmenso cariño que me tiene y porque nunca ha dejado de ver por mi bien.

Por último, Mamá, gracias infinitas para ti, porque a pesar de TODO, siempre estás para mi.

Introducción

El problema resuelto en este trabajo de Tesis se propuso a partir resultados obtenidos por V. Sokolov y A. Turbiner en la ref. [1], donde resuelven el modelo G_2 elíptico.

Existe una clase en particular, de sistemas integrables clásicos y cuánticos, asociados con los sistemas de raíces positivas de las álgebras de Lie clásicas y excepcionales (en la clasificación de Cartan existen cuatro familias infinitas de sistemas de raíces A_n, B_n, C_n, y D_n, llamados sistemas de raíces clásicos y cinco casos excepcionales E_6, E_7, E_8, F_4, G_2). El modelo cuántico de Wolfes G_2 elíptico de dos dimensiones es uno de ellos. Sin embargo, aunque se sabe que estos modelos son integrables, encontrar las soluciones explícitas, por ejemplo las eigenfunciones y eigenvalores de la ecuación de Schroedinger, ha sido una tarea realmente complicada, ya que en la mayoría de los casos las soluciones son muy complejas. Algunas de ellas se conocen desde principios de los años setenta [2–8]. Otras, como las soluciones explícitas para las versiones racionales y trigonométricas, se conocen desde hace poco tiempo (para un a revisión reciente véase por ejemplo [9, 10] y referencias allí citadas). Entre todos estos modelos, los casos elípticos han presentado un mayor reto, por ejemplo, sólo hasta principios del año 2015, pudo encontrarse la solución para el modelo cuántico G_2 elíptico (véase [11]).

Además de la solubilidad de la ecuación de Schroedinger, se sabe que el modelo G_2 elíptico posee una Integral, o constante de movimiento en forma de un operador diferencial de sexto orden en dos variables que conmuta con el Hamiltoniano (véase la referencia [12]). Esta Tesis de Licenciatura tuvo como objetivo principal encontrar la forma explícita de dicha Integral, la cual era desconocida hasta antes del presente trabajo. Este es un problema principalmente técnico, que requiere el uso de cálculos simbólicos muy complejos. La parte teórica que está detrás de este problema es muy profunda y actualmente sigue en desarrollo. Por esta razón el contenido teórico de la Tesis es mínimo y fue extraído principalmente de varias fuentes que se citan en las referencias.

Este trabajo de Tesis esta organizado de la siguiente manera:

En el capítulo 1 se introducen los conceptos básicos sobre sistemas Hamiltonianos y la noción de integrabilidad cuántica para poder entender el problema descrito aquí.

El punto de partida para este trabajo de Tesis fue el artículo [1], en donde se presenta la forma explícita de la Integral de movimiento del modelo cuántico A_2 elíptico, que es un caso particular del modelo de Wolfes G_2 elíptico. Por esta razón y con la finalidad de poder entender la estrategia necesaria para encontrar en forma explícita la Integral del modelo G_2 elíptico, en el capítulo 2, se presenta una revisión del problema A_2 elíptico. Además, para este caso se presentan algunos resultados nuevos, como la expresión explícita de la Integral en términos de monomios ordenados de generadores del álgebra $sl(3)$ en una representación de operadores diferenciales de primer orden, y el conmutador entre el Hamiltoniano del modelo A_2 y su Integral de movimiento en términos de generadores abstractos del álgebra $sl(3)$. Se hace una revisión de las relaciones entre generadores que se anulan debido a la representación (artefactos).

El capítulo 3 se hace una revisión de la solución de Sokolov y Turbiner [11] para el modelo cuántico de Wolfes G_2 elíptico y se detalla la forma en la que fue posible encontrar la Integral para este modelo. Además se presenta la forma explícita de la Integral para un caso particular (caso racional). La Integral de movimiento para el caso elíptico es una expresión muy larga y su forma explícita en forma de operador diferencial se incluye en uno de los Apéndices, y también se presenta en términos de generadores del álgebra $g^{(2)}$.

En el capítulo 4 se presentan las conclusiones generales del trabajo.

Todos los cálculos se hicieron con la ayuda de los programas de cálculo matemático simbólico (programas computacionales de álgebra) Maple 18 y Mathematica 10. Algunos ejemplos de los programas usados en los cálculos se incluyen en uno de los apéndices.

CAPÍTULO 1

Sistemas Integrables en Mecánica Cuántica

1.1. La ecuación de Schroedinger

La mecánica cuántica es la ciencia de lo muy pequeño: el cuerpo de principios que explican el comportamiento de la materia y sus interacciones con la energía en la escala de átomos y partículas subatómicas La ecuación fundamental que describe a los sistemas físicos microscópicos es la ecuación de Schroedinger:

$$\mathcal{H}\Psi(q_1,\dots q_n) = E\Psi(q_1,\dots q_n)\,, \quad n = 1,2,\dots \tag{1.1}$$

en donde $\mathcal{H}$ es el Hamiltoniano del sistema[1]

$$\mathcal{H}(q,p) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} p_j^2 + V(q_1,\dots q_n), \quad p_j = -i\frac{\partial}{\partial q_j}\,,$$

y $V(q_1,\dots q_n)$ es el potencial que describe las interacciones en el sistema. Así pues, el objetivo principal en la mecánica cuántica consiste en resolver la ecuación de valores propios de Schroedinger para $\Psi(q_1,\dots q_n)$ la función de onda (o eigenfunción) y el parámetro espectral E o energía del sistema. El número de grados de libertad n define la dimensión del espacio de configuración y $q_j, p_j\,,_{(j=1\dots n)}$ son las coordenadas y momentos del sistema.

El sistema de ecuaciones diferenciales que surge de la Ec.(1.1) puede resultar ser muy complicado. Usualmente los modelos asociados con sistemas físicos no pueden resolverse de manera analítica, y sus soluciones solo pueden encontrarse de manera aproximada usando técnicas sofisticadas. Existen muy pocos sistemas para los cuales existen soluciones exactas y explícitas de la ecuación de Schroedinger. Entre los sistemas exactamente solubles en

[1] Usualmente la relación de cuantización de los momentos es $p_j = -i\hbar\frac{\partial}{\partial q_j}$, en donde $\hbar$ es la constante fundamental de Planck. En este trabajo elegimos las unidades físicas en las que la constante de Planck toma el valor $\hbar = 1$.

mecánica cuántica podemos mencionar los casos excepcionales del oscilador armónico (en cualquier número de dimensiones) y el átomo de Hidrógeno. A este tipo de sistemas se les denomina sistemas integrables y exactamente solubles. En las siguientes secciones se hará un resumen de los principales conceptos relacionados con las nociones de integrabilidad en mecánica cuántica

1.2. Nociones básicas

La noción fundamental en la mecánica cuántica es la no conmutatividad de las coordenadas y los momentos del sistema. A estas relaciones se les denomina relaciones de cuantización canónica:

$$[q_j, p_k] = i\,\delta_{j,k}\,, \tag{1.2}$$

en donde $[\,,\,]$ representa el conmutador[2]. La consecuencia inmediata de esta no-conmutatividad es la imposibilidad de medir simultáneamente la posición y la velocidad (momento) de las partículas en el sistema (principio de incertidumbre de Heisenberg).

Para darle un sentido físico a las soluciones acotadas de la ecuación de Schroedinger (1.1) se impone la condición de que las funciones de onda $\Psi(\mathbf{q})$ pertenezcan a un espacio de Hilbert, es decir, que sean funciones complejas de cuadrado integrable $\Psi(\mathbf{q}) \in \mathcal{L}^2\,, \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$, con el producto interior $(\Psi, \Psi) = \int_{\mathbb{R}^n} \Psi^*(\mathbf{q})\Psi(\mathbf{q})\,d\mathbf{q} < \infty$. A estas soluciones se les denomina estados ligados.

Los observables físicos están representados en la teoría por operadores autoadjuntos que actúan sobre las funciones del espacio de Hilbert. Estos operadores son función de las coordenadas $\mathbf{q} = (q_1 \ldots q_n)$ y de los momentos $\mathbf{p} = (p_1 \ldots q_n)$. Si $\mathcal{A}$ es un operador autoadjunto se define el valor de expectación de $\mathcal{A}$ en un estado $\Phi(\mathbf{x}, t)$ como

$$\langle \mathcal{A} \rangle = \langle \Phi, \mathcal{A}\Phi \rangle = \langle \mathcal{A}\Phi, \Phi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi^*(\mathbf{q})\mathcal{A}\Phi(\mathbf{q})\,d\mathbf{q}\,.$$

La dependencia de los valores de expectación con respecto del tiempo obedece la relación[3]

$$\frac{d}{d\,t}\langle \mathcal{A} \rangle = i\langle \Phi, [\mathcal{H}, \mathcal{A}]\Phi \rangle\,,$$

en donde se ha supuesto que $\mathcal{A}$ no depende explícitamente del tiempo t. Una condición necesaria y suficiente para que el valor de expectación $\langle \mathcal{A} \rangle$ permanezca constante es que

$$[\mathcal{H}, \mathcal{A}] = 0\,.$$

En este caso se dice que $\mathcal{A}$ es una *constante o Integral de movimiento* del sistema. Mas aún, si $[\mathcal{H}, \mathcal{A}] = 0$, entonces podemos elegir una base del espacio de Hilbert que sea un conjunto de eigenfunciones simultáneas de $\mathcal{A}$ y $\mathcal{H}$.

[2] El conmutador entre dos objetos A, B se define como $[A, B] \equiv AB - BA$.

[3] Esta relación se deriva inmediatamente usando la ecuación de Schroedinger dependiente del tiempo

$$i\frac{\partial}{\partial t}\Phi = H\Phi\,.$$

Eigenfunciones simultáneas

Consideremos dos operadores que conmuten entre si

$$[A, B] = 0\,.$$

Si Φ es una eigenfunción del operador A con eigenvalor a:

$$A\Phi = a\Phi\,,$$

podemos multiplicar la ecuación anterior por el operador B para obtener

$$BA\Phi = aB\Phi\,.$$

Usando la conmutatividad de A, B, (*i.e.* $BA = AB$) podemos escribir

$$A(B\Phi) = a(B\Phi)\,,$$

es decir, $(B\Phi)$ es eigenfunción de A con el mismo eigenvalor a, es decir, que $(B\Phi)$ es un múltiplo[4] de Φ:

$$B\Phi = b\Phi\,,$$

y por lo tanto Φ es una eigenfunción de B con eigenvalor b. Entonces, si A y B conmutan, estos operadores tienen eigenfunciones simultáneas.

Integrabilidad

Los modelos integrables en la mecánica cuántica son sistemas que pueden resolverse de manera *exacta* (en forma analítica o numérica) debido a que poseen un número grande de cantidades conservadas y, por tanto, un alto grado de simetría.

Es importante determinar el conjunto completo de observables que conmutan para especificar completamente el estado del sistema. La noción de integrabilidad cuántica puede enunciarse en los siguientes términos:

> Un sistema mecánico cuántico de n dimensiones es integrable si existen n Integrales de movimiento $\mathcal{I}_j\,,_{(j=1\ldots n)}$ que satisfacen las siguientes condiciones
>
> - Son operadores autoadjuntos (Hermitianos) bien definidos que son funciones de las coordenadas y los momentos del sistema
> - Son algebraícamente independientes
> - Conmutan entre si (están en involución)

[4]Consideramos aquí el caso no-degenerado, i.e. que para cada eigenvalor existe una única solución, definida hasta una constante multiplicativa

Superintegrabilidad

Existen sistemas de n dimensiones para los cuales existen mas de n Integrales de movimiento. A estos sistemas se les llama superintegrables. Para un sistema n dimensional pueden existir a lo mas $2n-1$ Integrales de movimiento, una de las cuales (el Hamiltoniano) conmuta con todas las demás. A estos sistemas se les denomina maximalmente superintegrables (ver ref. [13]).

1.3. Modelos de Calogero-Sutherland-Moser

Quizá uno de los mayores avances en la teoría de sistemas integrables y solubles en mecánica cuántica se llevó cabo a finales de la década de los sesenta cuando Francesco Calogero resolvió un modelo de tres cuerpos en una dimensión que es exactamente soluble [2]. El Hamiltoniano del modelo Calogero tiene la forma[5]

$$\mathcal{H}_{\text{Calogero}} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{3}\left[-\frac{\partial^2}{\partial x_k^2} + \omega^2 x_k^2\right] + g\left(\frac{1}{(x_1-x_2)^2} + \frac{1}{(x_1-x_3)^2} + \frac{1}{(x_2-x_3)^2}\right), \quad (1.3)$$

en donde g es una constante de acoplamiento, ω es la frecuencia de un oscilador isotrópico en tres dimensiones. El espacio de configuración esta definido por $-\infty < x_1 < x_2 < x_3 < +\infty$. Posteriormente se propusieron diferentes generalizaciones del modelo tanto al nivel clásico como cuántico. Una de esas generalizaciones fue la versión trigonométrica del modelo de Calogero introducida por Bill Sutherland [4] cuyo Hamiltoniano es:

$$\mathcal{H}_{\text{Sutherland}} = -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial^2}{\partial x_k^2} + g\left(\frac{1}{\sin^2(x_1-x_2)} + \frac{1}{\sin^2(x_1-x_3)} + \frac{1}{\sin^2(x_2-x_3)}\right), \quad (1.4)$$

en donde g es una constante de acoplamiento. El modelo describe la interacción de tres partículas en un círculo y el espacio de configuración esta definido por los puntos en dicho círculo que satisfacen $x_1 < x_2 < x_3$. Este modelo también es integrable y exactamente soluble.

Poco después de su descubrimiento, Calogero generalizó el modelo al caso de N partículas idénticas con interacciones de pares de formas cuadráticas (de oscilador armónico) e inversamente cuadráticas (centrífugas) [3, 14] y Sutherland, por su parte, estudió estos sistemas de muchos cuerpos con condiciones a la frontera periódicas [4, 5, 7]. Todos estos modelos son integrables y exactamente solubles. Jürgen Moser demostró, entre otras cosas, que las contrapartes clásicas de los modelos de Calogero-Sutherland de n partículas constituye un sistema Hamiltoniano integrable en el sentido de Liouville-Arnold (véase la referencia [15]).

Otro avance notable en el estudio de sistemas integrables fue el descubrimiento de J. Wolfes [8] de un sistema integrable y soluble de tres cuerpos en una línea con interacciones

[5] En una notación moderna.

adicionales a las del modelo de Calogero. A este modelo se le conoce como modelo de Wolfes, y esta descrito por el Hamiltoniano

$$\mathcal{H}_{\text{Wolfes}} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{3}\left[-\frac{\partial^2}{\partial x_k^2} + \omega^2 x_k^2\right] + g_s\left(\frac{1}{(x_1-x_2)^2} + \frac{1}{(x_2-x_3)^2} + \frac{1}{(x_1-x_3)^2}\right)$$
$$+3\,g_\ell\left(\frac{1}{(2\,x_1-x_2-x_3)^2} + \frac{1}{(x_1-2\,x_2+x_3)^2} + \frac{1}{(x_1+x_2-2\,x_3)^2}\right) \qquad (1.5)$$

donde g_s y g_ℓ son dos constantes de acoplamiento.

Poco tiempo después de haber sido descubiertos los modelos de Calogero-Sutherland, M.A. Olshanetsky y A. M. Perelomov descubrieron que estos sistemas integrables eran casos particulares de modelos mas generales relacionados con álgebras de Lie. En palabras de Olshanetsky [16]:

> *Al mero principio de los setenta durante la visita de Francesco Calogero a ITEP Ascold Perelomov y yo nos dimos cuenta de que los Hamiltonianos de Calogero-Sutherland coinciden, hasta una conjugación, con las partes radiales de los operadores segundos de Casimir en* $sl(N,\mathbb{C})$ *y* $SL(N,\mathbb{C})$. *Esta observación fue el punto de partida de nuestras investigaciones de los sistemas integrables clásicos y cuánticos relacionados con álgebras de Lie.*

En 1982 M. A. Olshanetsky y A. M. Perelomov hicieron una revisión de los sistemas cuánticos de dimensión finita relacionados con álgebras de Lie [12]. Estos sistemas de n-partículas en una dimensión son completamente integrables ya que existen $n-1$ Integrales de movimiento I_k, $k = 1..n-1$ que se encuentran en involución con el Hamiltoniano del sistema, *i.e.* $[H, I_k] = 0$ [12]. Estos sistemas están descritos por un Hamiltoniano del tipo

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} p_j^2 + V(q_1,\ldots q_n), \quad p_j = -i\frac{\partial}{\partial q_j}\,. \qquad (1.6)$$

Los potenciales específicos incluídos en (1.6) describen sistemas con interacciones que se pueden clasificar en varios tipos:

$$V(q) = \begin{cases} q^{-2} & I \\ \sinh^{-2} q & II \\ \sin^{-2} q & III \\ \wp(q) & IV \\ q^{-2} + \omega^2 q^2 & V \\ \exp(q) & VI \end{cases} \qquad (1.7)$$

en donde $\wp(q)$ es la función elíptica de Weierstrass. Las primeras tres clases son simplemente subclases de la cuarta.

Los potenciales $V(q_1,\ldots q_n)$ en (1.6) se construyen por medio de los llamados sistemas de raíces de las álgebras de Lie semisimples. Un sistema de raíces es un sistema finito de vectores

$\mathcal{R} = \{\alpha\}$ en el espacio de configuraciones con algunas propiedades especiales. Usando estos sistemas de raíces se puede expresar el potencial en la forma

$$V(q_1, \dots q_n) = \sum_{\alpha \in \mathcal{R}_+} v(q_\alpha)\,, \quad q_\alpha = (q, \alpha)\,,$$

en donde $\mathcal{R}_+$ es el subsistema de raíces positivas y (q, α) es el producto interior usual.

Los sistemas de raíces estan canónicamente relacionados con las álgebras de Lie[6] o con algunos espacios homogéneos simples de los grupos de Lie (espacios simétricos). Además de las evidentes simetrías discretas (grupo de Weyl) de los potenciales considerados, existen simetrías ocultas generadas por las álgebras de Lie. El punto clave en la relación existente entre la teoría de espacios simétricos y los sistemas cuánticos descritos de los tipos I-V es la existencia de una transformación simple de los Hamiltonianos a operadores de Laplace Beltrami en dichos espacios simétricos.

En esta clasificación, los modelos de Calogero-Sutherland de n partículas corresponden a los sistemas de raíces del tipo A_{n-1} con interacciones de los tipos I,V (racional), y III (trigonométrico), y el modelo de Wolfes corresponde al sistema de raíces del tipo G_2 con interacciones del tipo V (racional).

En el caso cuántico del modelo racional A_n (con $\omega^2 > 0$)

$$\mathcal{H}_{A_{n-1}} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \left[-\frac{\partial^2}{\partial x_k^2} + \omega^2 x_k^2 \right] + g \sum_{i>j=1}^{n} \frac{1}{(x_i - x_j)^2} \quad , \tag{1.8}$$

el espectro de la ecuación estacionaria de Schroedinger es discreto y equiespaciado!, y esta dado por la siguiente fórmula simple[7]

$$E_k = \omega \left(k + \frac{n}{2} + \frac{n(n-1)}{2} \left(a + \frac{1}{2} \right) \right)\,, \quad k = 0, 1, 2 \dots$$

en donde

$$a = \frac{1}{2} \left(1 + 2g^2 \right)^{1/2}\,,$$

es decir, que el espectro corresponde al de un oscilador armónico. El efecto de las interacciones de cuadrado inverso en (1.8) consiste en cambiar la degeneración (*i.e.* en número de soluciones que corresponden al mismo eigenvalor de energía E).

1.3.1. Integrabilidad de los sistemas de Olshanetsky y Perelomov

Después de que Calogero encontrara que el problema cuántico de n cuerpos sobre la línea, interactuando bajo la influencia de un potencial proporcional al cuadrado inverso de la distancias entre pares, puede ser resuelto explícitamente, él mismo conjeturó que el

[6] En la clasificación de Cartan existen cuatro familias infinitas de sistemas de raíces (A_n, B_n, C_n, y D_n, llamados sistemas de raíces clásicos) y cinco casos excepcionales (E_6, E_7, E_8, F_4, G_2).

[7] Francesco Calogero (2008), Scholarpedia, 3(8):7216. doi:10.4249/scholarpedia.7216

sistema clásico correspondiente podría ser integrable. Para el caso de tres cuerpos fue resuelto por cálculo explícito por C. Marchioro [17]. La integrabilidad de los modelos de Calogero-Sutherland en caso clásico fue demostrada por Moser [15] en 1975 usando las ideas de Lax. La integrabilidad de los sistemas cuánticos asociados con las raíces de las álgebras de Lie fue demostrada por varios autores (véase p. ej. [12, 18]).

Gracias al trabajo de Olshanetsky y Perelomov [12] se conocen los órdenes de las Integrales de movimiento. Esto es de suma importancia si se quieren encontrar la expresiones explícitas de los operadores Integral.

Para los todos los Hamiltonianos de sistemas asociados a las álgebras de Lie en los casos racional y trigonométrico, que se puede decir que son casos particulares del modelo elíptico, existen formas algebraicas de hace algún tiempo (véase por ejemplo [9, 10]). En el Apéndice A, se puede encontrar la descripción de una de las maneras en que se puede encontrar la expresión algebraica para el Hamiltoniano modelo cuántico G_2 racional, mediante el uso de coordenadas polares.

Por último, es necesario enfatizar que la existencia misma de las Integrales de movimiento no garantiza que los sistemas sean exactamente solubles, o que se puedan encontrar algunas soluciones explícitas de la ecuación de Schroedinger.

CAPÍTULO 2

Modelo A_2 elíptico

2.1. Hamiltoniano del modelo A_2 elíptico

El modelo A_2 elíptico (modelo de 3-cuerpos elíptico de Calogero-Moser [12]) describe un sistema de tres partículas sobre la línea real con interacciones a pares dadas por la función $\wp$ de Weierstrass. Está caracterizado por el Hamiltoniano

$$
\begin{aligned}
\mathcal{H}^{(e)}_{A_2} &= -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \;+\; \nu(\nu-1)\,\Big(\wp(x_1-x_2) \;+\; \wp(x_2-x_3) \;+\; \wp(x_3-x_1)\Big) \\
&\equiv \;\; -\Delta^{(3)} + V \ ,
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

en donde $\Delta^{(3)}$ es el operador de Laplace-Beltrami en tres dimensiones y $\kappa \equiv \nu(\nu-1)$ es una constante de acoplamiento. La función de Weierstrass $\wp(x) \equiv \wp(x|g_2, g_3)$ se define como solución de la ecuación

$$
(\wp'(x))^2 \;=\; 4\,\wp^3(x) - g_2\,\wp(x) \;-\; g_3 \;=\; 4(\wp(x)-e_1)(\wp(x)-e_2)(\wp(x)-e_3), \tag{2.2}
$$

en donde $g_{2,3}$ son sus invariantes y $e_{1,2,3}$ sus raíces, usualmente, se eligen de manera que $e \equiv e_1 + e_2 + e_3 = 0$.

2.1.1. Forma algebraica del Hamiltoniano

Recientemente, en [11], se encontró un cambio de coordenadas que transforma el Hamiltoniano del modelo A_2 elíptico (Ec.(2.1)) en un operador algebraico de segundo orden, es decir, en un operador diferencial (de segundo orden) con coeficientes polinomiales. De esta forma se pueden encontrar soluciones polinomiales de la ecuación de Schroedinger correspondiente. A continuación se detalla dicho cambio de variables.

Ya que el Hamiltoniano que caracteriza el modelo A_2 elíptico es invariante bajo translaciones, es conveniente cambiar a coordenadas de Perelomov (coordenadas de centro de masa)

$$Y = \sum_1^3 x_i \ , \ y_i = x_i - \frac{1}{3} Y \ , \tag{2.3}$$

con la condición $\sum_1^3 y_i = 0$. En estas coordenadas, el Laplaciano $\Delta^{(3)} \equiv \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ toma la siguiente forma,

$$\Delta^{(3)} \ = \ 3\, \partial_Y^2 \ + \ \frac{2}{3} \left(\frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} - \frac{\partial^2}{\partial y_1 \partial y_2} \right) \ .$$

Después de separar la coordenada de centro de masa Y, se obtiene el siguiente Hamiltoniano en dos dimensiones

$$\mathcal{H}_{A_2} \ = \ -\frac{1}{3} \left(\frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} - \frac{\partial^2}{\partial y_1 \partial y_2} \right) + \nu(\nu-1) \left(\wp(y_1 - y_2) \ + \ \wp(2y_1 + y_2) \ + \ \wp(y_1 + 2y_2) \right) . \tag{2.4}$$

Para introducir las variables apropiadas que hacen que el Hamiltoniano sea algebraico, se considera en primer lugar una función $f(x)$ que sea solución no constante de la ecuación

$$f'(x)^2 = 4f(x)^3 - 12\tau f(x)^2 + 12\mu f(x)\,, \tag{2.5}$$

en donde μ, τ son parámetros. Las soluciones de esta ecuación corresponden a las formas funcionales de los potenciales en los casos racional, trigonométrico y elíptico:

- Caso racional $\mu = \tau = 0$,
$$f(x) = \frac{1}{x^2}\,.$$
- Caso trigonométrico $\mu = 0, \tau \neq 0$, por ejemplo
$$f(x) = \frac{1}{\sin^2(x)}\,, \qquad (\text{para } \tau = 1/3).$$
- Caso elíptico $\mu \neq 0, \tau \neq 0$,
$$f(x) \ = \ \wp(x|g_2, g_3) + \tau\ .$$

Por conveniencia los invariantes g_2, g_3 se parametrizan de la siguiente forma

$$g_2 = 12(\tau^2 - \mu)\ , \qquad g_3 = 4\tau(2\tau^2 - 3\mu)\,. \tag{2.6}$$

El caso racional corresponde a $g_2 = g_3 = 0$, y el caso trigonométrico ($\mu = 0, \tau = 1/3$) a $g_2 = 4/3, g_3 = 8/27$.

Ahora, usando las siguientes variables (estas son las coordenadas que hacen que el Hamiltoniano A_2 transformado sea algebraico)

$$x = \frac{f'(y_1) - f'(y_2)}{f(y_1)f'(y_2) - f(y_2)f'(y_1)}\,, \qquad y = \frac{2(f(y_1) - f(y_2))}{f(y_1)f'(y_2) - f(y_2)f'(y_1)}\ , \tag{2.7}$$

se encuentra que el potencial elíptico A_2 de Calogero-Moser (véase (2.1)) toma la forma racional

$$V(x,y) \;=\; \frac{3\nu(\nu-1)}{4}\,\frac{\Big(x + 2\tau x^2 + \mu x^3 - 6(\mu-\tau^2)y^2 + 3\mu\tau x y^2\Big)^2}{D}\ , \tag{2.8}$$

donde

$$12D(x,y) \;=\; 9\mu^2x^4y^2 + 54\tau\mu^2x^2y^4 + 27\mu^2(3\tau^2-4\mu)y^6 - 12\mu x^5 - 72\tau\mu x^3y^2 - \tag{2.9}$$

$$108\mu(\tau^2-2\mu)xy^4 - 12\tau\, x^4 - 18(4\tau^2+5\mu)x^2y^2 - 54\tau(2\tau^2 - 3\,\mu)y^4 - 4x^3 - 108\tau x y^2 - 27y^2\ .$$

Es importante mencionar que los ceros del polinomio D definen las fronteras del espacio de configuración, en donde el potencial es singular. Es claro que el estado base ψ_0 escrito en coordenadas x, y esta relacionado con D.

Con estas coordenadas (x, y), se obtiene que el Hamiltoniano rotado

$$h(x,y) \;\equiv\; -3D^{-\frac{\nu}{2}}\,(\mathcal{H}_{\mathrm{A}_2} - E_0)\,D^{\frac{\nu}{2}}\ , \tag{2.10}$$

donde $E_0 = 3\nu(3\nu+1)\tau$, es un operador algebraico que tiene soluciones polinomiales:

$$\begin{aligned} h(x,y) = {} & \Big(x + 3\tau x^2 + 3\mu x^3 + 3(\mu-\tau^2)y^2 - 3\mu\tau x y^2 - 3\mu^2x^2y^2\Big)\frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ & + y\Big(3 + 8\tau x + 7\mu x^2 - 3\mu\tau y^2 - 6\mu^2 x y^2\Big)\frac{\partial^2}{\partial x\partial y} \\ & + \frac{1}{3}\Big(-x^2 + 9\tau y^2 + 12\mu x y^2 - 9\mu^2 y^4\Big)\frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ & + (1+3\nu)\Big(1 + 4\tau x + 5\mu x^2 - 3\mu\tau y^2 - 6\mu^2 x y^2\Big)\frac{\partial}{\partial x} \\ & + 2(1+3\nu)y\Big(2\tau + 3\mu x - 3\mu^2 y^2\Big)\frac{\partial}{\partial y} \\ & + 3\nu(1+3\nu)\mu\Big(2x - 3\mu y^2\Big)\ . \end{aligned} \tag{2.11}$$

El Hamiltoniano $h(x, y)$ tiene como espacio invariante de dimensión finita al subespacio de polinomios

$$\mathcal{P}_n \;= < x^p y^q \mid 0 \le p+q \le n >\ , \quad \dim \mathcal{P}_n = \frac{(n+2)(n+1)}{2}\,, \tag{2.12}$$

para

$$-3\nu = n\,,$$

por lo tanto, solo para ciertos valores de la constante de acoplamiento $\kappa = \nu(\nu-1) = \frac{n(n+3)}{9}$ existe un número finito de soluciones polinomiales, es decir que el sistema es casi-exactamente soluble.

Ya que el Hamiltoniano transformado cumple la siguiente propiedad,

$$h(x,y) = h(x,-y) \ .$$

se sigue que en las variables $u = x, w = y^2$ el operador h sigue siendo algebraico[1]

$$\begin{aligned}
h(u,w) = &\Big(u + 3\tau u^2 + 3\mu u^3 + 3(\mu-\tau^2)w - 3\mu\tau uw - 3\mu^2u^2w\Big)\frac{\partial^2}{\partial u^2} \\
&+ 2w\Big(3 + 8\tau u + 7\mu u^2 - 3\mu\tau w - 6\mu^2 uw\Big)\frac{\partial^2}{\partial u \partial w} \\
&+ 4w\Big(-\frac{u^2}{3} + 3\tau w + 4\mu uw - 3\mu^2 w^2\Big)\frac{\partial^2}{\partial w^2} \\
&+ (1+3\nu)\Big(1 + 4\tau u + 5\mu u^2 - 3\mu\tau w - 6\mu^2 uw\Big)\frac{\partial}{\partial u} \\
&+ 2\Bigg(-\frac{u^2}{3} + \tau(7+12\nu)w + 2\mu(5+9\nu)uw - 9\mu^2(1+2\nu)w^2\Bigg)\frac{\partial}{\partial w} \\
&+ 3\nu(1+3\nu)\mu\Big(2u - 3\mu w\Big) \ .
\end{aligned} \tag{2.13}$$

El Hamiltoniano $h(u,w)$ tiene como espacios invariantes los subespacios

$$\mathcal{Q}_n \ = < u^r w^s \mid 0 \le r + 2s \le n > \tag{2.14}$$

para

$$-3\nu = n\,,$$

2.1.2. Hamiltoniano en generadores del Álgebra $sl(3)$

Los siguientes operadores definen una representación del álgebra de Lie $sl(3)$ en operadores diferenciales de primer orden [19].

$$J_0 = -x\frac{\partial}{\partial x} \ - y\frac{\partial}{\partial y} \ - 3\nu,$$

$$J_1 = \frac{\partial}{\partial x}\ ,\ J_2 = \frac{\partial}{\partial y}\ ,\ J_3 = x\frac{\partial}{\partial x}\ ,\ J_4 = y\frac{\partial}{\partial x}\ ,\ J_5 = x\frac{\partial}{\partial y}\ ,\ J_6 = y\frac{\partial}{\partial y}\ ,$$

$$J_7 = x(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + 3\nu) \quad , \quad J_8 = y(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + 3\nu)\ . \tag{2.15}$$

en donde ν es una constante arbitraria. Si se cumple la condición

$$-3\nu = n\,, \quad (n \in \mathbb{N})$$

[1] En [11], la notación para la variable que aquí se presenta como w es v, este cambio tuvo lugar para evitar confusión con el parámetro ν.

el espacio de polinomios

$$\mathcal{P}_n \;= < x^p y^q \mid 0 \le p+q \le n > \,, \quad \dim \mathcal{P}_n = \frac{(n+2)(n+1)}{2} \,, \tag{2.16}$$

se preserva bajo la acción de los operadores J_k, con k desde 1 hasta 8. Al número entero n se le denomina como el espín de la representación, por analogía con el caso sl_2.

Ya que $h(x,y)$, Ec. (2.11), preserva los mismos espacios de polinomios que los generadores de la representación en operadores diferenciales del Álgebra $sl(3)$, es natural pensar que el Hamiltoniano se pueda escribir en términos de estos operadores. Si esto pasa, se dice que $sl(3)$ es el álgebra escondida del modelo A_2 elíptico.

Una de la posibles formas de escribir Hamiltoniano del modelo A_2 elíptico (Ec. (2.11)) en términos de los generadores del álgebra $sl(3)$ (en la representación (2.15)) es,

$$\begin{aligned} h_{A_2} \;&=\; (1+3\nu)J_1J_3 - 3\nu J_3J_1 + 3J_1J_6 + 3\tau J_3^2 + 6\tau(1-4\nu)J_3J_6 \\ &\quad +3(\mu-\tau^2)J_4^2 \; + \tau(1+12\nu)(J_4J_5+J_5J_4) + 2(1+3\nu)\mu J_3J_7 \\ &\quad -3\mu\tau J_4J_8 - \frac{1}{3}J_5^2 + 3\tau J_6^2 \; + 4\mu J_6J_7 + \mu(1-6\nu)J_7J_3 - 3\mu^2 J_8^2 \;, \end{aligned}$$

la expresión anterior coincide con la Ec.(20) en [11].

Es muy posible que para el estudio y análisis de los resultados, sea más conveniente elegir un orden a los monomios de las expresiones en generadores del álgebra. Por esta razón, se decidió que la gran mayoría de la expresiones que involucran generadores del álgebra $s\ell_3$ en esta de Tesis de Licenciatura se presentaran con un orden descendente para los generadores J de los monomios que las conforman.[2] Las expresiones escritas siguiendo este orden eran desconocidas anteriormente.

Con el nuevo orden propuesto, el Hamiltoniano del modelo A_2 elíptico en coordenadas (u,w) (Ec. (2.11)) toma la forma,

$$\begin{aligned} h_{A_2} \;&=\; 3\,\tau\, J_8J_2 - 3\,\tau\,\mu\, J_8J_4 + 4\,\mu\, J_8J_5 - 3\mu^2J_8J_8 + 5\tau\, J_7J_1 + 3\mu J_7J_3 \\ &\quad +3J_6J_1 - \frac{1}{3}J_5J_5 - 3(\tau^2-\mu)J_4J_4 + J_3J_1 - 2\tau J_3J_3 \\ &\quad +(1+3\nu)J_1 \; + 3(2-\nu)\tau J_3 \; + (4+3\nu)\tau J_6 + 2(1+3\,\nu)\mu J_7 \,. \end{aligned}$$

El cálculo manual de las expresiones ordenadas, partiendo de las expresiones presentadas en [11], es un trabajo largo en el que se pueden cometer fácilmente muchos errores. Si la expresión es corta como la anterior, el trabajo es manejable. La forma en la que se hace es sustituyendo los pares de operadores no ordenados usando las reglas de conmutación del

[2] Este orden se sigue de forma análoga para las expresiones que involucran generadores del álgebra $g^{(2)}$ que se introduce más adelante.

álgebra $sl(3)$ presentadas en el Apéndice B. Sin embargo, el grado de dificultad y la longitud de la mayoría de las expresiones que fueron encontradas como objetivo principal de este trabajo, hace casi imposible que el ordenamiento se haga manualmente. Por esta razón, fue necesaria la creación de procedimientos, principalmente en Maple 18 y algunas veces en Mathematica 10, que lo hicieran de forma automática.

2.2. La Integral del modelo A_2 elíptico

En 1983, M. A. Olshanesky y A. M. Perelomov demostraron (véase [12]) que el modelo elíptico A_2 es completamente integrable, con un operador diferencial de tercer orden k_{A_2} como Integral, esto es

$$[h_{A_2}, k_{A_2}] = 0\,, \tag{2.17}$$

Fue hasta principios del 2015, cuando se encontró el cambio de coordenadas que transforma el Hamiltoniano del modelo cuántico A_2 elíptico en un operador algebraico (ver ref. [1]). En ese mismo estudio, se presentó la forma explícita de la Integral k_{A_2}. Tanto en operadores diferenciales como en términos de los generadores del álgebra escondida sl_3.

2.2.1. En forma de operador diferencial

La siguiente expresión es la forma explícita de la Integral del modelo A_2 elíptico como es presentada en [11], Ec.(24), en forma de operador diferencial de tercer orden con coeficientes polinomiales en coordenadas (x, y),

$$\begin{aligned}
k_{\mathrm{A}_2}(x,y) = &-2\nu(1+3\nu)(2+3\nu)\,\mu\,y\,(2\tau+3\mu x-3\mu^2y^2)\\
&+\frac{1}{3}\,(1+3\nu)(2+3\nu)y(\mu+8\tau^2+28\mu\tau x+21\mu^2x^2-9\mu^2\tau y^2-18\mu^3xy^2)\frac{\partial}{\partial x}\\
&-\frac{2}{9}\,(1+3\nu)(2+3\nu)\,(1+4\tau\,x+6\mu\,x^2-24\mu\,\tau y^2-36\mu^2xy^2+27\mu^3y^4)\frac{\partial}{\partial y}\\
&+(2+3\nu)y\Big(3\,\tau+4(2\tau^2+\mu)x+17\mu\tau x^2+8\mu^2x^3+3\mu(\tau^2-2\mu)y^2\\
&-6\mu^2\tau xy^2-6\mu^3x^2y^2\Big)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\\
&-\frac{2}{3}\,(2+3\nu)\Big(x+4\tau x^2+5\mu\,x^3+3(\mu-4\tau^2)y^2-27\mu^2x^2y^2-33\mu\,\tau xy^2\\
&+9\mu^2\tau y^4+18\mu^3xy^4\Big)\,\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\\
&-(2+3\nu)y(1+\frac{8}{3}\tau\,x+3\mu\,x^2-7\mu\tau y^2-10\mu^2xy^2+6\mu^3y^4)\frac{\partial^2}{\partial y^2}\\
&+y\Big(1+5\tau x+2(2\mu+3\tau^2)x^2+3\mu(\tau^2-2\mu)xy^2+9\mu\tau x^3\\
&-\tau(3\mu-2\tau^2)y^2+3\mu^2x^4-3\mu^2\tau x^2y^2-2\mu^3x^3y^2\Big)\frac{\partial^3}{\partial x^3}\\
&+\Big(-\frac{2}{3}x^2+2(5\tau^2+\mu)xy^2-2\tau x^3+3\tau y^2-2\mu\,x^4+3\mu(\tau^2-2\mu)y^4\\
&+19\mu\,\tau x^2y^2-6\mu^3x^2y^4+10\mu^2x^3y^2-6\mu^2\tau xy^4\Big)\frac{\partial^3}{\partial x^2\partial y}\\
&-y\Big(x+\frac{10}{3}\tau\,x^2+\frac{11}{3}\,\mu\,x^3-13\mu\,\tau xy^2+3(\mu-2\tau^2)y^2-11\mu^2x^2y^2
\end{aligned}$$

$$+ 3\mu^2\tau y^4 + 6\mu^3 xy^4\Big)\frac{\partial^3}{\partial x\partial y^2}$$
$$- \Big(y^2 + \frac{2}{27}x^3 + 2\tau\, xy^2 - 3\mu\,\tau y^4 + \frac{5}{3}\mu\, x^2y^2 - 4\mu^2 xy^4 + 2\mu^3 y^6\Big)\frac{\partial^3}{\partial y^3}\ .$$

Este operador, al igual que el Hamiltoniano (2.11) es invariante con respecto a $y \to -y$,

$$k_{A_2}(x,y) \ = \ k_{A_2}(x,-y)\ ,$$

Por esta razón, después del cambio de variables

$$(x,y) \to (u = x, w = y^2), \tag{2.18}$$

el Hamiltoniano y la Integral siguen siendo algebraicos.

Ya que el modelo elíptico A_2 es un caso particular del modelo de Wolfes G_2 elíptico, uno de los primeros pasos para encontrar la Integral del modelo G_2 fue tratar de reproducir los resultados ya conocidos sobre el modelo A_2, que se presentan en [1]. Gracias a este proceso fue posible revisar las expresiones que ahí se presentan. De esta manera se encontraron errores tipográficos en las ecuaciones (24) y (25) del artículo [1] que son las expresiones explícitas de la Integral k_{A_2}, en forma de operador diferencial y en términos de los generadores del álgebra sl_3 respectivamente. Las expresiones correctas ya se incluyen en el corrigendum [11].

La manera en que se pudo reproducir el resultado de la forma explícita de la Integral del modelo A_2 fue suponiendo que k_{A_2} es un operador diferencial en general de tercer orden cuyos coeficientes son funciones desconocidas de dos variables. Después, se resuelve el sistema de ecuaciones parciales que resulta, tomando en cuenta que la solución debe ser algebraica. Este proceso se detalla en el capítulo siguiente, en donde se especifican las estrategias usadas para encontrar la Integral del modelo cuántico G_2 elíptico.

2.2.2. Integral K_{A_2} en términos de generadores sl_3.

La Integral k_{A_2} también puede escribirse en generadores del álgebra $sl(3)$. La siguiente expresión es la Ec. (25) de [11] que como ya se mencionó, es la versión corregida de [1] .

$$\begin{aligned}
k_{A_2} \quad = \quad & J_1^2 J_4 + 3(2+3\nu)\tau J_1 J_3 J_4 - \frac{2}{9}(1+3\nu)(2+3\nu)J_1 J_3 J_5 \\
& + 3\tau J_1 J_4 J_6 + \nu(2+3\nu)J_1 J_5 J_3 - 3\nu J_1 J_6 J_5 - (1+9\nu)\tau J_3 J_1 J_4 \\
& + \frac{1}{3}\big(12\mu + 12\tau^2 - (1+3\nu)(11\mu + 16\tau^2) + (1+3\nu)^2(\mu + 8\tau^2)\big) J_3^2 J_4 \\
& - \frac{8}{9}(1+3\nu)(2+3\nu)\tau J_3^3 J_5 \ + 4(2+3\nu)(1-3\nu)\mu\tau J_3^2 J_8 \\
& + \frac{2}{3}\big(3\tau^2 + (1+3\nu)(5\mu + 4\tau^2) - (1+3\nu)^2(\mu + 8\tau^2)\big) J_3 J_4 J_3 \\
& + \big(\mu + 8\tau^2 + 2(1+3\nu)(\mu - 4\tau^2)\big) J_3 J_4 J_6 \\
& + \frac{2}{9}(1 + 36\nu + 72\nu^2)\tau J_3 J_5 J_3 - (1-3\nu) J_3 J_6 J_2
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&-\frac{4}{3}(1+6\nu)\tau J_3J_6J_5 + 2(2+3\nu)\mu^2 J_3J_7J_8 \\
&-4(1+3\nu)\mu\tau J_3J_8J_6 + \frac{1}{3}(1+3\nu)(2+3\nu)(\mu+8\tau^2)J_4J_3^2 \\
&-(\mu(1+6\nu) - 2(5+12\nu)\tau^2)J_4J_3J_6 - \frac{4}{3}(1+3\nu)(2+3\nu)\mu\tau J_4J_3J_7 \\
&-\tau(3\mu-2\tau^2)J_4^3 - 3\mu(2\mu-\tau^2)J_4^2J_8 \; - \; 3(\mu-2\tau^2)J_4J_6^2 \\
&+2(7+6\nu)\mu\tau J_4J_6J_7 - 3\mu^2\tau J_4J_8^2 \; - \; \frac{1}{9}(2+9\nu^2)J_5J_3J_1 \\
&-\frac{4}{9}(1+18\nu^2)\tau J_5J_3^2 \; - \frac{4}{3}(2+3\nu)\mu J_5J_3J_7 - \frac{2}{27}J_5^3 \\
&+\frac{2}{3}(1+6\nu)\mu J_5J_7J_3 - J_6J_2J_6 - 2(1-4\nu)\tau J_6J_5J_3 \\
&-2\tau J_6J_5J_6 - \frac{5}{3}\mu J_6J_5J_7 \; - \frac{1}{3}\mu\tau\big(5-72\nu^2\big)J_7J_3J_4 \\
&- \; \mu^2(1+6\nu)\mu^2\big)J_7J_3J_8 + 4\mu^2 J_7J_8J_6 \\
&+12\mu\tau J_8J_6^2 - 9\mu\tau J_6J_8J_6 - 2\mu^3 J_8^3 \; .
\end{aligned}
$$

A continuación se presenta la Integral del modelo A_2 siguiendo un orden descendente en los generadores del álgebra $sl(3)$ que se introdujo en la sección anterior. Esta expresión se calculó partiendo de la anterior usando las reglas de conmutación entre los generadores del álgebra,

$$
\begin{aligned}
k_{A_2} \;\; = \;\; & J_4J_1J_1 + 5\tau J_4J_3J_1 + (6\tau^2+4\mu)J_4J_3J_3 + \tau(2\tau^2-3\mu)J_4J_4J_4 \\
&-\frac{2}{3}J_5J_3J_1 - 2\tau J_5J_3J_3 - \frac{2}{27}\,J_5J_5J_5 \\
&-(1-3\nu)J_6J_3J_2 + 3\tau J_6J_4J_1 + 2(5\,\tau^2+\mu)J_6J_4J_3 \\
&-3\nu J_6J_5J_1 - \frac{10}{3}\tau J_6J_5J_3 - J_6J_6J_2 + 3(2\tau^2-\mu)J_6J_6J_4 - 2\,\tau\, J_6J_6J_5 \\
&+(1+6\nu)^2\tau\mu J_7J_4J_3 - 2\mu J_7J_5J_3 + 2(7+6\nu)\tau\mu J_7J_6J_4 - \frac{5}{3}\mu\, J_7J_6J_5 \\
&+4(1-3\nu)(2+3\nu)\tau\,\mu J_8J_3J_3 + 3\mu(\tau^2-2\mu)J_8J_4J_4 \\
&-4(1+3\nu)\tau\,\mu J_8J_6J_3 + 3\tau\mu J_8J_6J_6 + 3\mu^2 J_8J_7J_3 \\
&+4\mu^2 J_8J_7J_6 - 3\tau\mu^2 J_8J_8J_4 - 2\mu^3 J_8J_8J_8 \\
&-\frac{1}{9}(4-9\,\nu^2)J_3J_2 - (2-9\nu)\tau J_4J_1 - 6(1-2\nu)(2\tau^2+\mu)J_4J_3 \\
&-\frac{1}{9}(2+3\nu)(4+3\nu)J_5J_1 - \frac{2}{3}(5+12\nu)\tau J_5J_3 \\
&-(1+3\nu)J_6J_2 - 3(1-2\nu)(4\tau^2-\mu)J_6J_4 - \frac{2}{3}(5+12\nu)\tau J_6J_5 \\
&-\frac{1}{3}(29+36\,\nu^2)\tau\,\mu J_7J_4 - \frac{4}{3}(2+3\nu)\mu J_7J_5
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{4}{3}(1+3\nu)(2+3\nu)\tau\,\mu J_8 J_3+(5+12\nu)\tau\,\mu J_8 J_6+2(2+3\nu)\mu^2 J_8 J_7\\
&-\frac{2}{9}(2+3\nu)(1+3\nu)J_2+\frac{1}{3}\Big(2(11-36\nu+36\nu^2)\tau^2+(1-3\nu)(2-3\nu)\mu\Big)J_4\\
&-\frac{8}{9}(1+3\nu)(2+3\nu)\tau J_5+\frac{4}{3}(1+3\nu)(2+3\nu)\tau\,\mu J_8.
\end{aligned}
$$

2.3. Artefactos de la representación

La expresión en la sección anterior de la Integral k_{A_2} en generadores del álgebra $sl(3)$ en la representación en operadores diferenciales, conmuta con el Hamiltoniano del modelo cuántico A_2 elíptico, Ec. (2.11). Sin embargo, esto no sucede cuando se deja de lado la representación y sólo se consideran los elementos abstractos del álgebra $sl(3)$. Las reglas de conmutación del álgebra, por si solas, no bastan para hacer que el conmutador del Hamiltoniano y la Integral se anule.

Existen ciertas relaciones no triviales entre los generadores del álgebra $sl(3)$ que resultan ser cero únicamente cuando se considera la representación en operadores diferenciales. Estas mismas relaciones, cuando se consideran sólo los elementos abstractos del álgebra envolvente dejan de anularse. A estas relaciones se les conoce artefactos y son la razón por la cual la Ec. (2.17) es igual a cero solamente cuando se considera la representación en operadores diferenciales.

Las siguiente lista de artefactos independientes se puede encontrar en [20] con una notación diferente para los generadores de la representación en operadores diferenciales del álgebra sl_3,

$$
\begin{aligned}
T_1 &= J_7 J_6 - J_8 J_5 = 0, \\
T_2 &= J_8 J_3 - J_7 J_4 = 0, \\
T_3 &= -J_5 J_0 - J_5 - J_7 J_2 = 0, \\
T_4 &= -J_4 J_0 - J_4 - J_8 J_1 = 0, \\
T_5 &= -J_7 J_1 - J_3 - J_3 J_0 = 0, \\
T_6 &= -J_8 J_2 - J_6 - J_6 J_0 = 0, \\
T_7 &= J_5 J_4 - J_3 J_6 - J_3 = 0, \\
T_8 &= J_6 J_1 - J_4 J_2 = 0, \\
T_9 &= J_5 J_1 - J_3 J_2 = 0.
\end{aligned}
$$

La expresiones anteriores son diferentes de los operadores de Casimir del álgebra $sl(3)$, que en la representación (2.15) corresponden con las constantes

$$\mathcal{C}_1 = J_3 + J_6 + J_0 = -3\,\nu,$$

$$\mathcal{C}_2 = J_5 J_4 + J_4 J_5 - J_7 J_1 - J_1 J_7 - J_8 J_2 - J_2 J_8 + J_3^2 + J_6^2 + J_0^2 = 3\,\nu\,(3\,\nu - 2)$$

y

$$\mathcal{C}_3 = -\frac{1}{2}\,\mathcal{C}_1{}^3 + \frac{3}{2}\,\mathcal{C}_1\,\mathcal{C}_2 + 3\,\mathcal{C}_2 - 2\,\mathcal{C}_1{}^2 - 2\,\mathcal{C}_1 = -27\,\nu^3 + 36\,\nu^2 - 12\,\nu.$$

Ya que la Ec. (2.17) es distinta de cero si no se considera la representación particular, la expresión del conmutador en generadores abstractos del álgebra $sl(3)$ que resulta, debe poderse escribir en términos de artefactos. Sin embargo, llevarlo a cabo no es una tarea fácil. Los cálculos se tienen que realizar manualmente, ya que los programas computacionales no son muy precisos en estos aspectos, lo que hace que trabajar con ellos sea complicado. A pesar de esto, se sigue trabajando para obtener el resultado y se espera que un futuro, con el uso de paquetes externos a Mathematica se consiga.

El conmutador entre el Hamiltoniano y la Integral de movimiento escritos en generadores $J_{1\ldots8}$ del álgebra $sl(3)$ en forma abstracta[3] tiene la siguiente forma

$$
\begin{aligned}
[h_{A_2}, k_{A_2}] =& C_1 + C_2\mu^2\tau^2 + C_3\mu^2\tau + C_4\mu\tau^3 + C_5\mu\tau^2 + C_6\mu + C_7\mu^3\tau + C_8\mu\tau + C_9\mu^3 \\
& + C_{10}\tau^2 + C_{11}\mu^2 + C_{12}\tau + C_{13}\mu^4\,,
\end{aligned}
$$

en donde los coeficientes C_j, con j desde 1 hasta 13, son los siguientes elementos del álgebra envolvente de $sl(3)$:

$$
\begin{aligned}
C_1 =& (\frac{2}{3} + 5\nu - 3\nu^2)J_1J_2 - (\frac{2}{3} + 5\nu - 3\nu^2){J_1}^2J_5 \\
& - (\frac{2}{3} - 5\nu + 3\nu^2)J_1J_2J_3 + (\frac{2}{3} - 9\nu)J_1J_2J_6 - \frac{2}{3}{J_2}^2J_4 \\
& - 2\nu J_2{J_5}^2 + \frac{2}{3}{J_1}^2J_3J_5 - (\frac{4}{3} - 9\nu){J_1}^2J_5J_6 \\
& - \frac{2}{3}J_1J_2J_3J_3 + \frac{4}{3}J_1J_2J_4J_5 - 9\nu J_1J_2J_6J_3 \\
& + 2\nu J_1{J_5}^3 - 2\nu J_2{J_3}^2,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
C_2 =& -18\left(31 - 36\nu - 36\nu^2\right)J_4{J_8}^2 - 9\left(31 - 36\nu - 36\nu^2\right)J_3{J_8}^2J_4 \\
& + 9\left(23 - 36\nu - 36\nu^2\right){J_4}^2J_8J_7,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
C_3 =& \left(-5 + 6\nu\right)\left(23 - 12\nu + 108\nu^2\right)J_7J_8 \\
& + 2\left(136 - 279\nu - 144\nu^2 + 324\nu^3\right)J_3J_8J_7 \\
& + 9\left(103 + 150\nu - 216\nu^2\right){J_4}^2J_8 \\
& + 2\left(26 + 45\nu - 126\nu^2 - 324\nu^3\right)J_4{J_7}^2 \\
& + 3\left(41 + 144\nu^2\right)J_5J_8J_8 + 6\left(29 - 48\nu\right)J_7J_6J_8 \\
& - 18J_1J_4J_8J_8 - 3\left(1 + 84\nu + 36\nu^2\right){J_3}^2J_8J_7 \\
& + 3\left(1 + 84\nu + 36\nu^2\right)J_3J_4{J_7}^2 - 18\left(1 - 12\nu\right)J_3J_5{J_8}^2 \\
& - 3\left(97 + 72\nu - 144\nu^2\right)J_3J_6J_7J_8 + 9\left(35 + 48\nu - 72\nu^2\right)J_3J_8{J_4}^2 \\
& - 27\left(11 + 16\nu - 24\nu^2\right){J_4}^3J_7 + 18{J_4}^2J_6J_8
\end{aligned}
$$

[3] Aquí usamos la misma notación para los generadores como objetos abstractos que la notación usada en la representación en operadores diferenciales.

$$
\begin{aligned}
&+ 3\left(47 - 144\nu^2\right) J_4 J_6 {J_7}^2 - 63 J_5 J_6 {J_8}^2 \\
&- 105 {J_6}^2 J_7 J_8 - 12\,(1 + 12\nu)\, J_6 J_8 J_7 J_6 \\
&+ 12\,(1 + 12\nu)\, J_8 J_7 {J_6}^2 + 72\,(1 - 4\nu)\, J_3 J_6 J_8 J_7 J_6 \\
&- 72\,(1 - 4\nu)\, J_3 J_8 J_7 {J_6}^2 + 24\,(1 + 12\nu)\, J_4 J_5 J_8 J_7 J_6 \\
&- 24\,(1 + 12\nu)\, J_4 J_8 J_7 J_6 J_5 + 36 {J_6}^2 J_8 J_7 J_6 - 36 J_8 J_7 {J_6}^3,
\end{aligned}
$$

$$
C_4 = (2\nu + 1)(6\nu - 5)\left(162 {J_4}^2 J_8 + 54 J_3 J_8 {J_4}^2 - 54 {J_4}^3 J_7\right),
$$

$$
\begin{aligned}
C_5 = &- (102 + 576\nu - 216\nu^2 + 1296\nu^3) J_8 \\
&- 216(1 + \nu) {J_4}^3 - 72 J_3 {J_4}^3 \\
&- 2(3 + 258\nu + 216\nu^2 + 432\nu^3) J_3 J_8 \\
&- 72 {J_4}^3 J_6 - 12\left(18\nu^2 - 87\nu - 22\right) J_6 J_8 \\
&+ (168 - 732\nu - 432\nu^2 + 3024\nu^3) {J_3}^2 J_8 \\
&- 3(20\nu + 216\nu^2 + 1008\nu^3) J_3 J_4 J_7 \\
&+ 2(81 + 450\nu) J_3 J_6 J_8 \\
&- 2(29 + 348\nu + 36\nu^2 + 432\nu^3) J_4 J_5 J_8 \\
&- 2(7 + 822\nu + 720\nu^2 - 432\nu^3) J_4 J_7 J_6 \\
&- 6(30 + 72\nu) {J_6}^2 J_8 + 72 J_1 {J_4}^2 J_8 \\
&+ 18(4 - 44\nu + 12\nu^2 + 144\nu^3) {J_3}^3 J_8 \\
&- 3(24 - 264\nu + 72\nu^2 + 864\nu^3) {J_3}^2 J_4 J_7 \\
&- 3(34 + 48\nu - 72\nu^2) {J_3}^2 J_6 J_8 \\
&+ 6(1 + 24\nu + 180\nu^2 + 432\nu^3) J_3 J_4 J_5 J_8 \\
&+ 3(32 - 432\nu^2 - 864\nu^3) J_3 J_4 J_7 J_6 \\
&+ 12(-15 - 36\nu) J_3 {J_6}^2 J_8 \\
&+ 6(14 + 180\nu + 144\nu^2) J_4 J_5 J_6 J_8 \\
&+ 3(32 - 216\nu - 288\nu^2) J_4 {J_6}^2 J_7 \\
&- (8 + 420\nu + 792\nu^2 - 2160\nu^3) J_4 J_7,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
C_6 = 3\big(&(-31 - 63\nu + 477\nu^2 - 567\nu^3 + 162\nu^4) J_5 \\
&- (42 - 324\nu - 54\nu^2) J_1 J_4 \\
&+ (36 - 84\nu + 135\nu^2 - 54\nu^3) J_2 J_7 \\
&- (32 - 300\nu + 441\nu^2 - 135\nu^3) J_3 J_5 \\
&+ (23 + 378\nu - 1125\nu^2 + 648\nu^3) J_5 J_6 \\
&+ (63 - 54\nu) J_1 J_1 J_8 + (54 + 594\nu) J_1 J_3 J_4 \\
&+ (24 - 486\nu - 54\nu^2) J_1 J_4 J_6
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&- (55 + 18\nu - 36\nu^2) J_1 J_5 J_7 - 45 {J_1}^2 J_4 J_7 \\
&- (32 - 99\nu + 63\nu^2) J_2 J_3 J_7 + (120 - 162\nu + 54\nu^2) J_2 J_4 J_4 \\
&- (29 - 144\nu + 198\nu^2) J_2 J_6 J_7 + (75 - 153\nu + 27\nu^2) {J_3}^2 J_5 \\
&+ (68 - 459\nu + 468\nu^2) J_3 J_5 J_6 \\
&- (54 - 108\nu) J_4 {J_5}^2 + (35 - 441\nu + 522\nu^2) J_5 {J_6}^2 \\
&- 27 {J_1}^2 J_3 J_8 - 36 {J_1}^2 J_6 J_8 \\
&+ 72 J_1 {J_3}^2 J_4 + 90 J_1 J_3 J_4 J_6 + 42 J_1 J_3 J_5 J_7 \\
&- (36 - 162\nu) J_1 {J_4}^2 J_5 - (18 + 162\nu) J_1 J_4 {J_6}^2 \\
&- (15 - 108\nu) J_1 J_5 J_7 J_6 - 18 J_2 {J_3}^2 J_7 \\
&+ (54 - 162\nu) J_2 J_3 {J_4}^2 - (6 + 189\nu) J_2 J_3 J_6 J_7 \\
&+ (54 + 162\nu) J_2 {J_4}^2 J_6 + (27 - 108\nu) J_2 {J_6}^2 J_7 \\
&- 24 {J_3}^3 J_5 - (51 - 81\nu) {J_3}^2 J_5 J_6 \\
&+ 48 J_3 J_4 {J_5}^2 - (42 - 189\nu) J_3 J_5 {J_6}^2 \\
&+ 36 J_4 {J_5}^2 J_6 - (27 - 108\nu) J_5 {J_6}^3 \Big),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
C_7 = &- 216(1-\nu) {J_8}^3 - 36(5 - 6\nu) J_3 {J_8}^3 \\
&108(1 - 2\nu) J_4 J_8 J_8 J_7 + 36 J_6 J_8 J_8 J_8 \\
&+ 36 J_4 J_8 J_7 J_6 J_8 - 36 J_4 {J_8}^2 J_7 J_6,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
C_8 = &- 9(1 + 3\nu)(-7 + 5\nu + 18\nu^2 + 36\nu^3) J_4 \\
&+ (30 - 9\nu + 459\nu^2 + 324\nu^3) J_1 J_8 \\
&+ (108 - 45\nu + 2349\nu^3 + 2916\nu^4) J_3 J_4 \\
&+ (219 + 630\nu + 1107\nu^2 - 324\nu^3) J_4 J_6 \\
&- (148 + 720\nu - 792\nu^2) J_5 J_7 \\
&- (84 - 216\nu^2) J_4 {J_5}^2 J_7 \\
&- 3(1 + 3\nu)(-47 - 156\nu + 216\nu^2) J_1 J_3 J_8 \\
&+ (93 - 54\nu - 27\nu^2 + 972\nu^3) J_1 J_4 J_7 \\
&+ (69 + 432\nu + 27\nu^2) J_1 J_6 J_8 \\
&- (6 - 162\nu + 27\nu^2) J_2 J_4 J_8 \\
&+ (45 - 27\nu + 1215\nu^2 + 1944\nu^3) {J_3}^2 J_4 \\
&+ (24 + 297\nu + 3105\nu^2 + 3888\nu^3) J_3 J_4 J_6 \\
&- (162 - 504\nu - 648\nu^2) J_3 J_5 J_7 \\
&- (24 - 27\nu + 27\nu^2) {J_4}^2 J_5 \\
&+ (387 + 1620\nu + 972\nu^2) J_4 {J_6}^2 \\
&+ (148 + 1152\nu - 576\nu^2) {J_5}^2 J_8 \\
&+ (104 - 288\nu + 360\nu^2) J_5 J_7 J_6
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+ (207 - 540\nu - 1620\nu^2) J_1 {J_3}^2 J_8 \\
&- (207 - 432\nu - 1296\nu^2) J_1 J_3 J_4 J_7 \\
&+ (18 - 162\nu) J_1 J_4 J_5 J_8 \\
&+ 9(19 + 63\nu + 108\nu^2) J_1 J_4 J_7 J_6 \\
&+ (18 - 1080\nu - 1944\nu^2) J_1 J_6 J_3 J_8 \\
&- (162 + 243\nu) J_1 {J_6}^2 J_8 - (54 - 162\nu) J_2 J_3 J_4 J_8 \\
&- (81 + 81\nu) J_2 J_4 J_6 J_8 + 108\nu(1 + 3\nu) {J_3}^3 J_4 \\
&- (153 - 621\nu - 1296\nu^2) {J_3}^2 J_4 J_6 \\
&+ (108 + 918\nu + 972\nu^2) J_3 J_4 {J_6}^2 \\
&+ (78 - 504\nu - 432\nu^2) J_3 {J_5}^2 J_8 \\
&+ (6 + 504\nu + 216\nu^2) J_3 J_5 J_7 J_6 \\
&- (18 + 81\nu) {J_4}^2 J_5 J_6 + (243 + 324\nu) J_4 {J_6}^3 \\
&- (84 + 432\nu) {J_5}^2 J_6 J_8 + (84 + 432\nu) J_5 J_7 {J_6}^2,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
C_9 = {}& 18(17 + 9\nu) J_4 {J_8}^2 + 102 {J_7}^2 J_8 - 54 J_1 {J_8}^3 \\
&+ 180 J_3 J_8 J_8 J_4 - 54 {J_4}^2 J_8 J_7 - 18 J_4 J_6 {J_8}^2 \\
&- 18 J_5 J_7 {J_8}^2 - 66 J_6 {J_7}^2 J_8 + 48 J_7 J_6 J_8 J_7 J_6 \\
&- 48 J_7 J_8 J_7 {J_6}^2,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
C_{10} = {}& 2(28 + 126\nu + 666\nu^2) J_1 J_4 + 12(51\nu + 8) J_1 J_3 J_4 \\
&+ 2(38 + 387\nu + 333\nu^2) J_1 J_4 J_6 - 2(38 + 216\nu + 333\nu^2) J_2 {J_4}^2 \\
&+ 36(1 + 10\nu) J_1 J_3 J_4 J_6 + 6(2 - 9\nu) J_1 {J_4}^2 J_5 \\
&+ 6(6 + 45\nu) J_1 J_4 {J_6}^2 - 6(8 + 51\nu) J_2 J_3 {J_4}^2 \\
&- 18(2 + 15\nu) J_2 {J_4}^2 J_6,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
C_{11} = {}& (51 - 123 J_8 \nu - 108\nu^2 + 54\nu^3) J_8 \\
&- 2(43 - 60\nu + 180\nu^2 - 27\nu^3) J_3 J_8 \\
&- (163 - 126\nu - 252\nu^2) J_6 J_8 \\
&+ 54 J_2 J_8 J_8 + (25 - 171\nu + 18\nu^2) {J_3}^2 J_8 \\
&- 3(13 + 33\nu) J_3 J_4 J_7 \\
&+ 2(76 - 108\nu + 99\nu^2) J_3 J_6 J_8 \\
&+ 270(1 + \nu) J_4 J_4 J_4 + 2(10 - 9\nu^2) J_4 J_5 J_8 \\
&- 18(1 + 9\nu) J_4 J_7 J_6 - 10 J_5 {J_7}^2 \\
&+ 6(22 + 21\nu) {J_6}^2 J_8 + 33 J_1 J_3 J_8 J_7 \\
&- 90 J_1 {J_4}^2 J_8 - 54\nu J_1 J_5 {J_8}^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+27(1-2\nu)J_1J_6J_7J_8+36\nu J_1J_8J_7J_6\\
&-18(1-3\nu)J_2J_3{J_8}^2-36J_2J_6{J_8}^2\\
&-18{J_3}^3J_8-15{J_3}^2J_4J_7\\
&-3(7-18\nu){J_3}^2J_6J_8+90J_3{J_4}^3\\
&-24J_3J_4J_5J_8-87J_3J_4J_7J_6\\
&-12(2-9\nu)J_3{J_6}^2J_8+90{J_4}^3J_6\\
&+6{J_4}^2J_5J_7-54(1+\nu)J_4J_5J_6J_8\\
&-63J_4{J_6}^2J_7+2{J_5}^2J_7J_8\\
&+14{J_7}^2J_5J_6-36\nu J_8J_7J_6J_1\\
&+12J_1J_3J_8J_7J_6+36J_1J_6J_8J_7J_6\\
&-4{J_5}^2J_8J_7J_6-12J_8J_7J_6J_1J_3\\
&-36J_8J_7J_6J_1J_6+4J_8J_7J_6{J_5}^2\\
&-(18\nu^2-171\nu+16)J_1J_7J_8-3\left(45\nu^2+36\nu-2\right)J_4J_7,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
C_{12}=3\Big(&-2\left(162\nu^3-90\nu^2+45\nu+4\right)J_2\\
&+2\left(270\nu^3-441\nu^2+195\nu+28\right)J_1J_5\\
&-2\left(54\nu^3+261\nu^2-105\nu-5\right)J_2J_3\\
&-6\left(63\nu^2-63\nu-1\right)J_2J_6+72(12\nu+1){J_1}^2J_4\\
&+54J_1J_3J_5-6\left(36\nu^3-117\nu^2+50\nu+7\right)J_1J_3J_5\\
&-2\left(108\nu^3-612\nu^2+348\nu-7\right)J_1J_5J_6\\
&+6\nu\left(36\nu^2-117\nu+50\right)J_2J_3J_3\\
&+6\left(45\nu^2-4\right)J_2J_3J_6\\
&+2\left(108\nu^3-99\nu^2+42\nu-10\right)J_2J_4J_5\\
&-378\nu J_2J_6J_6+36(12\nu+1){J_1}^2J_4J_6\\
&-36(12\nu+1)J_1J_2{J_4}^2\\
&-6\left(108\nu^2-39\nu+4\right)J_1J_3J_5J_6\\
&+12J_1J_4J_5J_5-18\left(36\nu^2-18\nu+1\right)J_1J_5{J_6}^2\\
&-18J_2{J_3}^3+6\left(108\nu^2-63\nu-5\right)J_2{J_3}^2J_6\\
&+6(24\nu+7)J_2J_3J_4J_5-378\nu J_2J_3{J_6}^2\\
&+18\left(36\nu^2+3\nu+1\right)J_2J_4J_5J_6\Big),
\end{aligned}
$$

y

$$C_{13}=\ -72J_7J_8+36J_8J_6J_7{J_8}^2-36{J_8}^3J_6J_7.$$

Por ejemplo, la expresión en artefactos del coeficiente C_1 tiene la forma,

$$C_1=3T_9J_1\nu^2+(4T_9J_1+9J_6T_9J_1+2T_9J_5^2)\nu+\frac{2}{3}J_1T_9J_3+\frac{2}{3}J_2T_8-\frac{4}{3}J_1T_8J_5.$$

Por la forma en que se escribió el conmutador, fácilmente se obtiene que el coeficiente C_1 corresponde al caso racional $\mu = \tau = 0$. En principio todos los coeficientes C_k pueden reescribirse en términos de artefactos. Aunque esto no es sencillo.

CAPÍTULO 3

Modelo G_2 elíptico

3.1. Modelo G_2

El modelo cuántico integrable G_2 elíptico (también llamado modelo elíptico de tres cuerpos de Wolfes) está definido por interacciones de dos y tres cuerpos mediante la función elíptica de Weierstrass, función $\wp$, con argumentos dictados por las raíces positivas del álgebra de Lie G_2.

Se sabe (véase [11]) que si al operador $h(u,w)$, Ec.(2.13), se le suma el operador

$$h_m(u,w) \;=\; 6(1+2\tau u+\mu u^2)\frac{\partial}{\partial u} \;+4(-u^2+3\tau w+3\mu uw)\frac{\partial}{\partial w} \;+18\,\nu\mu\, u \tag{3.1}$$

el operador resultante

$$h_{G_2}(u,w) \;=\; h(u,w)+\lambda h_m(u,w)\ , \tag{3.2}$$

donde λ es un parámetro arbitrario, es una forma algebraica para el Hamiltoniano (rotado) del modelo elíptico G_2 en coordenadas (u,w) (véase 2.18). En coordenadas de Perelomov y_1, y_2, el Hamiltoniano correspondiente es[1]

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_{G_2} \;=\;& -\frac{1}{3}\left(\frac{\partial^2}{\partial {y_1}^2}-\frac{\partial^2}{\partial y_1\partial y_2}+\frac{\partial^2}{\partial {y_2}^2}\right)\\ &+\lambda(3\lambda-1)\Big(\wp(y_1)+\wp(y_2)+\wp(\,y_1+\,y_2)\Big)\\ &+(\nu-\lambda)(\nu-\lambda-1)\Big(\wp(y_1-y_2)+\wp(2\,y_2+y_1)+\wp(2\,y_1+y_2)\Big)\ .\end{aligned} \tag{3.3}$$

Este Hamiltoniano se reduce al Hamiltoniano del modelo A_2 elíptico (2.4) cuando $\lambda=0$.

[1]Ec. (34) en [1].

3.1.1. Hamiltoniano del modelo G_2 en generadores del Álgebra $g^{(2)}$

El álgebra de dimensión infinita $g^{(2)}$ fue introducida por A. Turbiner en [21] y está generada por los siguientes once operadores diferenciales en dos variables (u, w) :

$$\mathcal{J}_0(n) \ = \ u\partial_u \ + \ 2w\partial_w \ - \ n \ ,$$

$$\mathcal{J}_1 \ = \ \partial_u \ ,$$
$$\mathcal{J}_2(n) \ = \ u\partial_u \ - \ \frac{n}{3} \ ,$$
$$\mathcal{J}_3(n) \ = \ 2w\partial_w \ - \ \frac{n}{3} \ ,$$
$$\mathcal{J}_4(n) \ = \ u^2\partial_u \ + \ 2uw\partial_w \ - \ nu \ ,$$
$$\mathcal{R}_0 \ = \ \partial_w \ , \ \mathcal{R}_1 \ = \ u\partial_w \ , \ \mathcal{R}_2 \ = \ u^2\partial_w \ ,$$
$$\mathcal{T}_0 \ = \ w\partial_u^2 \ , \ \mathcal{T}_1 \ = \ w\partial_t\mathcal{J}_0(n) \ ,$$
$$\mathcal{T}_2 \ = \ w\mathcal{J}_0(n) \ (\mathcal{J}_0(n) + 1) = \ w\mathcal{J}_0(n) \ \mathcal{J}_0(n-1) \ ,$$

donde n es un parámetro. A $\mathcal{J}_0(n)$ se le conoce como el generador de Euler Cartan.

Si n toma un valor entero, el álgebra $g^{(2)}$ tiene como espacio invariante,

$$\mathcal{Q}_n \ = < u^p v^q \mid 0 \leq p + 2q \leq n > \ , \tag{3.4}$$

Es importante mencionar que para facilitar la escritura y la presentación de las expresiones explícitas del Hamiltoniano y la Integral de movimiento del modelo G_2, presentadas en este trabajo, se omite la notación para la dependencia de n, ya que en todas las expresiones se considera $n = -3\nu$.

La notación presentada par los generadores del Álgebra $g^{(2)}$ difiere de la usada en [11] en lo generadores $\mathcal{J}$ de la siguiente forma:

$$\mathcal{J}_0(n) \ \rightarrow \tilde{\mathcal{J}}_n^0$$

y

$$\mathcal{J}_j(n) \ \rightarrow \mathcal{J}_n^j$$

si j es 1,2,3 ó 4.

Se sabe, véase [11], que el álgebra $g^{(2)}$ es el álgebra oculta para el modelo G_2 elíptico. Esto significa que el Hamiltoniano del sistema se pude escribir en términos de los generadores del álgebra $g^{(2)}$. Una posible manera de hacerlo es,

$$
\begin{aligned}
h(u,w) \;=\;& -3\,\mu^2\mathcal{T}_2 - 3\,\mu\,\tau\,\mathcal{T}_1 - 3\left(\tau^2 -\,\mu\right)\mathcal{T}_0\\
&-\mu\,\mathcal{J}_4\mathcal{J}_2 + 4\,\mu\,\mathcal{J}_4\mathcal{J}_0 - 2\,\tau\,\mathcal{J}_2\mathcal{J}_2 - 2\,\mathcal{J}_2\mathcal{J}_1\\
&+2\,\tau\,\mathcal{J}_2\mathcal{J}_0 + 3\,\mathcal{J}_1\mathcal{J}_0 + 3\,\tau\,\mathcal{J}_0\mathcal{J}_0\\
&+\frac{2}{3}\,\mathcal{J}_2\mathcal{R}_2 - \frac{2}{3}\,\mathcal{J}_0\mathcal{R}_2\\
&-(5\,\nu-2)\,\mu\,\mathcal{J}_4 + (5\,\nu+3)\,\tau\,\mathcal{J}_3 + 3\,(\,\nu+1)\,\tau\,\mathcal{J}_2\\
&-2\,(2\,\nu+1)\,\mathcal{J}_1 - (13\,\nu+2)\,\tau\,\mathcal{J}_0\\
&-\frac{2}{3}\,(1-2\nu)\,\mathcal{R}_2
\end{aligned}
$$

y

$$
h_m(u,w) \;=\; 6\mathcal{J}^1 - 4\mathcal{R}_2 + 6\tau\mathcal{J}_2 + 6\tau\mathcal{J}_3 + 6\mu\mathcal{J}_4 - 12\tau\nu\ ,
$$

Para construir la expresión se siguió, de forma análoga, el orden descendente en los generadores que se presentó para el modelo A_2 elíptico en la sección anterior. El orden corresponde a escribir primero los operadores $\mathcal{T}$, luego los $\mathcal{J}$ y por último los operadores $\mathcal{R}$. Las expresiones explícitas que se presentan de la Integral del modelo G_2 tienen el este mismo orden en los generadores del álgebra.

3.2. Cálculo de la Integral

Se sabe que el modelo G_2 elíptico tiene una Integral, k_{G_2}, en forma de operador diferencial de sexto orden con coeficientes polinomiales (véase [12]), que conmuta con el Hamiltoniano elíptico G_2 (3.2)

$$[h_{G_2}, k_{G_2}] = 0 \ . \tag{3.5}$$

También se sabe (véase [11]), que debe existir un operador diferencial algebraico $k_m(u,w)$ de grado menor que seis tal que

$$k_{G_2} \ = \ k^2_{A_2}(u,w) + \lambda k_m(u,w) \ . \tag{3.6}$$

El objetivo principal de esta Tesis de Licenciatura fue encontrar la forma explícita de dicho operador, usando el programa computacional de cálculo simbólico Maple 18. Esta forma era desconocida previo a la realización del presente trabajo. En las siguientes líneas se detalla la forma en que fue posible encontrarla.

3.2.1. Caso racional ($\mu = \tau = 0$)

El primer paso para encontrar la Integral para el modelo G_2 elíptico consistió, como era de esperarse, en tratar de resolver los casos más sencillos. Por ejemplo, el caso racional, también llamado modelo G_2 del tipo Calogero, cuyo Hamiltoniano es (3.2), si se considera $\mu = \tau = 0$.

Para encontrar la solución de este caso en particular, se propuso un operador diferencial general $k_m(u,w)$ de orden 5 (véase (3.6)) de la forma

$$k_m(u,w) = \sum_{\substack{0\leq m\ ,n\\ m+n\leq 5}} f_{m,n}(u,w)\frac{\partial^{m+n}}{\partial u^m \partial w^n}\ , \tag{3.7}$$

donde las funciones coeficiente $f_{m,n}(u,w)$ son desconocidas. Dichas funciones, como ya fue mencionado, deben ser polinomios en coordenadas (u,w), que hagan posible 3.5.

Al calcular el conmutador

$$[h_{G_2}(u,w), k_{G_2} = k^2_{A_2}(u,v) + \lambda k_m(u,v)\ ], \tag{3.8}$$

se obtiene un operador diferencial del sexto orden en (u,w)[2] cuyos coeficientes son ecuaciones diferenciales parciales con $f_{m,n}(u,w)$ como las funciones a determinar.

El conjunto de estos coeficientes constituye un sistema de ecuaciones parciales que fue posible resolver. Para esto, se necesitó trabajar por separado con cada uno de los coeficientes que definen las ecuaciones. Cada una de la ecuaciones tuvo que resolverse por separado para poder exigir que las soluciones $f_{m,n}(u,w)$ fueran polinomios en (u,w).

[2]En general este conmutador es un operador diferencial de orden siete , sin embargo los términos de mayor orden vienen del conmutador $[h_{A_2}(u,w), k^2_{A_2}(u,w)] = 0$. La expresión explícita de $k^2_{A_2}(u,v)$ tuvo que se calculada, ya que no era conocida (ver Apéndice D.1 y D.3).

Entre estos coeficientes existe uno en particular que contiene una única función $f_{m,n}(u,w)$ como incógnita. A partir de la solución que Maple 18 proporciona para esta ecuación fue posible encontrar un solución para el sistema completo con tres constantes sin determinar.

La solución que se encontró para $k_m(u,w)$ (véase (3.6)) tiene la siguiente forma

$$k_m(u,w) = \lambda k_5(u,w) + \lambda^2 k_4(u,w) + \lambda^3 k_3(u,w) + \lambda^4 k_2(u,w) + \lambda^5 k_1(u,w) \ ,$$

donde k_j, con $j = 1..,5$, son operadores diferenciales de orden j. Explícitamente tienen la forma:

$$\begin{aligned}
k_5(u,w) =& \frac{1}{243}\Big(972\,u^2\frac{\partial^5}{\partial u^5} - 384\,w^2(u^3+9\,w)(2\,u^3+27\,w)\frac{\partial^5}{\partial w^5} - 3888\,w(2\,u^3-3\,w)\frac{\partial^5}{\partial w^2\partial u^3}\\
&- 288\,u^2w(8\,u^3+135\,w)\frac{\partial^5}{\partial w^3\partial u^2} - 576\,uw^2(13\,u^3+135\,w)\frac{\partial^5}{\partial w^4\partial u}\\
&- 1296\,u(u^3-3\,w)\frac{\partial^5}{\partial w\partial u^4}\\
&- 96\,w(32\,u^6+246\,wu^3\nu+1194\,u^3w+2592\,\nu\,w^2+7857\,w^2)\frac{\partial^4}{\partial w^4}\\
&+ 2916\,u(\nu+1)\frac{\partial^4}{\partial u^4} - 576\,uw(12\,\nu\,u^3+56\,u^3+297\,\nu\,w+702\,w)\frac{\partial^4}{\partial w^3\partial u}\\
&- 576\,u^2(4\,u^3+99\,\nu\,w+180\,w)\frac{\partial^4}{\partial w^2\partial u^2}\\
&- (7776\,u^3\nu+12096\,u^3-13608\,w\nu-15552\,w)\frac{\partial^4}{\partial w\partial u^3}\\
&- (6912\,\nu^2u^3w+1472\,u^6+82944\,wu^3\nu+233280\,\nu^2w^2+164832\,u^3w\\
&+ 1143072\,\nu\,w^2+1391904\,w^2)\frac{\partial^3}{\partial w^3} + (2916\,\nu^2+4860\,\nu+1620)\frac{\partial^3}{\partial u^3}\\
&- 144\,u(48\,\nu\,u^3+810\,\nu^2w+119\,u^3+2898\,\nu\,w+2535\,w)\frac{\partial^3}{\partial w^2\partial u}\\
&- 432\,u^2(45\,\nu^2+129\,\nu+85)\frac{\partial^3}{\partial w\partial u^2}\\
&- (6912\,u^3\nu^2+89424\,w\nu^3+34992\,u^3\nu+489888\,w\nu^2+39120\,u^3\\
&+ 855792\,w\nu+495288\,w)\frac{\partial^2}{\partial w^2} - 1296\,u(18\,\nu^3+66\,\nu^2+72\,\nu+25)\frac{\partial^2}{\partial w\partial u}\\
&- 72\,(2+3\,\nu)(54\,\nu^3+198\,\nu^2+189\,\nu+52)\frac{\partial}{\partial w}\Big),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_4(u,w) =& \frac{1}{243}\Big(-1152\,w(u^3+5\,w)(2\,u^3+27\,w)\frac{\partial^4}{\partial w^4} + 5832\,u\frac{\partial^4}{\partial u^4}\\
&- 1728\,uw(8\,u^3+45\,w)\frac{\partial^4}{\partial w^3\partial u} - (2592\,u^3-19440\,w)\frac{\partial^4}{\partial w\partial u^3}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&- 432\,u^2(8\,u^3 + 69\,w)\frac{\partial^4}{\partial w^2\partial u^2}\\
&- (3456\,u^6 + 48384\,\nu\,u^3w + 146880\,u^3w + 373248\,\nu\,w^2 + 723168\,w^2)\frac{\partial^3}{\partial w^3}\\
&+ (11664\,\nu + 7776)\frac{\partial^3}{\partial u^3} - 2592\,u(4\,\nu\,u^3 + 11\,u^3 + 63\,\nu\,w + 86\,w)\frac{\partial^3}{\partial w^2\partial u}\\
&- 2592\,u^2(12\,\nu + 11)\frac{\partial^3}{\partial w\partial u^2}\\
&- (10368\,\nu^2u^3 + 66528\,\nu\,u^3 + 268272\,\nu^2w + 79200\,u^3\\
&+ 781488\,\nu\,w + 573264\,w)\frac{\partial^2}{\partial w^2} - 2592\,u(27\,\nu^2 + 51\,\nu + 23)\frac{\partial^2}{\partial w\partial u}\\
&- (58320\,\nu^3 + 151632\,\nu^2 + 117936\,\nu + 30672)\frac{\partial}{\partial w}\Big),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
k_3(u,w) =&\frac{1}{243}\Big(- 1152\,u^3(2\,u^3 + 33\,w)\frac{\partial^3}{\partial w^3} + 11664\,\frac{\partial^3}{\partial u^3}\\
&- 5184\,u(u^3 - 15\,w)\frac{\partial^3}{\partial w^2\partial u} + 15552\,u^2\frac{\partial^3}{\partial w\partial u^2}\\
&- (25920\,\nu\,u^3 + 43200\,u^3 + 124416\,\nu\,w - 7776\,w)\frac{\partial^2}{\partial w^2}\\
&46656\,u\frac{\partial^2}{\partial w\partial u} - 2592\,(9\,\nu + 5)(3\,\nu + 1)\frac{\partial}{\partial w}\Big),
\end{aligned}
$$

$$
k_2(u,w) =(-\frac{128\,u^3}{3} + 704\,w)\frac{\partial^2}{\partial w^2} + 384\,u\frac{\partial^2}{\partial w\partial u} + (192\,\nu + 448)\frac{\partial}{\partial w},
$$

y

$$
k_1(u,w) =384\frac{\partial}{\partial w}
$$

La Integral también puede escribirse en generadores del álgebra $g^{(2)}$. Para realizar esto fue necesario escribir procedimientos en Maple 18 que lo hicieran automáticamente. A continuación se presenta la expresión de los coeficientes k_j en generadores para el caso racional,

$$
\begin{aligned}
k_5(u,w) = &- \frac{112}{3}\,\mathcal{T}_2\mathcal{J}_0\mathcal{R}_0^2 + \frac{224}{3}\,\mathcal{T}_1\mathcal{J}_0\mathcal{R}_1\mathcal{R}_0 + \frac{544}{27}\,\mathcal{T}_1\mathcal{R}_2\mathcal{R}_1^2 - 16\,\mathcal{T}_0\mathcal{J}_1^2\,\mathcal{R}_1\\
&+ 16\,\mathcal{T}_0\mathcal{J}_1\mathcal{J}_0\mathcal{R}_0 + \frac{80}{3}\,\mathcal{T}_0\mathcal{J}_1\mathcal{R}_2\mathcal{R}_1 - \frac{320}{27}\,\mathcal{T}_0\,\mathcal{R}_2^2\,\mathcal{R}_1 - \frac{160}{3}\,\mathcal{T}_0\mathcal{J}_0\mathcal{R}_1^2\\
&- \frac{64}{81}\,\mathcal{J}_2^2\,\mathcal{R}_2^3 + \frac{128}{81}\,\mathcal{J}_2\mathcal{J}_0\mathcal{R}_2^3 + 4\,\mathcal{J}_1^3\,\mathcal{J}_0^2 - \frac{64}{81}\,\mathcal{J}_0^2\,\mathcal{R}_2^3 - \frac{16}{3}\,\mathcal{J}_0^4\mathcal{R}_0\\
&- \frac{160}{9}\,\mathcal{T}_2^2 + \frac{8}{9}(162\nu - 479)\mathcal{T}_2\mathcal{R}_0^2 - \frac{224}{9}(9\nu - 19)\mathcal{T}_1\mathcal{R}_1\mathcal{R}_0\\
&+ 16(3 - \nu)\mathcal{T}_0\mathcal{J}_1\mathcal{R}_0 + \frac{8}{9}(96\nu - 251)\mathcal{T}_0\mathcal{R}_1^2 + \frac{16}{27}(34\nu - 103)\mathcal{J}_2\mathcal{J}_1\mathcal{R}_2^2\\
&+ \frac{128}{81}(2\nu - 3)\mathcal{J}_2\mathcal{R}_2^3 - 4(4 + 3\,\nu)\mathcal{J}_1^3\,\mathcal{J}_0 - \frac{16}{27}(83\nu - 219)\mathcal{J}_1\mathcal{J}_0\mathcal{R}_2^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{32}{9}(9\nu-5)\mathcal{J}_0^3\mathcal{R}_0+\frac{16}{27}(49\nu-132)\mathcal{J}_0^2\,\mathcal{R}_2\mathcal{R}_1-\frac{128}{81}(2\nu-3)\mathcal{J}_0\mathcal{R}_2^3\\
&+\frac{4}{3}(9\nu^2+24\nu+14)\mathcal{J}_1^3+\frac{8}{9}(189\nu^2-990\nu+1313)\mathcal{J}_1\mathcal{J}_0\mathcal{R}_1\\
&+\frac{16}{81}(312\nu^2-699\nu-173)\mathcal{J}_1\mathcal{R}_2^2-\frac{4}{9}(180\nu^2-750\nu+1057)\mathcal{J}_1^2\,\mathcal{R}_2\\
&-\frac{4}{9}(378\nu^2-1290\nu+1705)\mathcal{J}_0^2\mathcal{R}_0-\frac{16}{81}(549\nu^2-1665\nu+853)\mathcal{J}_0\mathcal{R}_2\mathcal{R}_1\\
&-\frac{64}{243}(12\nu^2-36\nu+23)\mathcal{R}_2^3-\frac{4}{9}(612\nu^3-2799\nu^2+2863\nu+886)\mathcal{J}_1\mathcal{R}_1\\
&+\frac{4}{9}(882\nu^3-4347\nu^2+6433\nu-1307)\mathcal{J}_0\mathcal{R}_0+\frac{32}{27}(54\nu^3-207\nu^2+258\nu-134)\mathcal{R}_2\mathcal{R}_1\\
&-\frac{4}{27}(972\nu^4-4563\nu^3+4419\nu^2+2910\nu-914)\mathcal{R}_0,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
k_4(u,w)=&-\frac{416}{3}\,\mathcal{T}_2\mathcal{R}_0^2+\frac{544}{3}\,\mathcal{T}_1\mathcal{R}_1\mathcal{R}_0+32\,\mathcal{T}_0\mathcal{J}_1\mathcal{R}_0-\frac{304}{3}\,\mathcal{T}_0\mathcal{R}_1^2\\
&-\frac{800}{27}\,\mathcal{J}_2\mathcal{J}_1\mathcal{R}_2^2+\frac{128}{27}\,\mathcal{J}_2\mathcal{R}_2^3+\frac{1600}{27}\,\mathcal{J}_1\mathcal{J}_0\mathcal{R}_2^2+24\,\mathcal{J}_1^3\,\mathcal{J}_0\\
&-\frac{128}{27}\,\mathcal{J}_0\mathcal{R}_2^3-\frac{1184}{27}\,\mathcal{J}_0^2\,\mathcal{R}_2\mathcal{R}_1-\frac{32}{3}\,\mathcal{J}_0^2\,\mathcal{R}_0\\
&-8(3\nu+5)\mathcal{J}_1^3-64(4\nu-13)\mathcal{J}_1\mathcal{J}_0\mathcal{R}_1+\frac{8}{3}(36\nu-133)\mathcal{J}_1^2\,\mathcal{R}_2\\
&-\frac{32}{27}(77\nu-69)\mathcal{J}_1\mathcal{R}_2^2+\frac{32}{9}(46\nu-53)\mathcal{J}_0\mathcal{R}_2\mathcal{R}_1\\
&+\frac{8}{3}(48\nu-211)\mathcal{J}_0^2\,\mathcal{R}_0+\frac{128}{27}(2\nu-3)\mathcal{R}_2^3\\
&+\frac{8}{9}(459\nu^2-1359\nu+94)\mathcal{J}_1\mathcal{R}_1-\frac{8}{9}(459\nu^2-2133\nu+937)\mathcal{J}_0\mathcal{R}_0\\
&-\frac{32}{27}(117\nu^2-306\nu+241)\mathcal{R}_2\mathcal{R}_1+\frac{8}{9}(135\nu^3-999\nu^2+888\nu-374)\mathcal{R}_0,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
k_3(u,w)=&48\,\mathcal{J}_1^3-96\,\mathcal{J}_1^2\,\mathcal{R}_2+160\,\mathcal{J}_1\mathcal{J}_0\mathcal{R}_1\\
&+\frac{512}{9}\,\mathcal{J}_1\mathcal{R}_2^2-\frac{704}{9}\,\mathcal{J}_0\mathcal{R}_2\mathcal{R}_1-\frac{256}{27}\,\mathcal{R}_2^3\\
&-16(14\nu-15)\mathcal{J}_1\mathcal{R}_1-16(16\nu+9)\mathcal{J}_0\mathcal{R}_0\\
&+\frac{128}{3}(3\nu-4)\mathcal{R}_2\mathcal{R}_1+\frac{16}{3}(90\nu^2-15\nu-49)\mathcal{R}_0,
\end{aligned}
$$

$$
k_2(u,w)=32\,\mathcal{J}_1\mathcal{R}_1+352\,\mathcal{J}_0\mathcal{R}_0-\frac{128}{3}\,\mathcal{R}_2\mathcal{R}_1-32(27\,\nu-13)\mathcal{R}_0
$$

y

$$
k_1(u,w)=384\,\mathcal{R}_0.
$$

Es de importancia mencionar, que con el procedimiento descrito también fue posible encontrar la forma explícita de la Integral de movimiento para el modelo cuántico racional A_2, la expresión encontrada coincide con la presentada en [1].

La expresión explícita de la Integral del modelo G_2 racional incluída aquí debe coincidir, después de un cambio de variables, con la presentada en la ref. [22].

3.2.2. Caso trigonométrico ($\mu = 0$) y el Caso elíptico

Para resolver el caso trigonométrico, también llamado modelo G_2 del tipo Sutherland, caracterizado por el Hamiltoniano (3.2) con $\mu = 0$, se intentó seguir el método que funcionó en el caso racional. Sin embargo, la solución no se pudo encontrar de esta manera, ya que no existe ningún coeficiente de (3.8) con solamente una función $f_{m,n}(u,w)$, como incógnita.

Otra forma de abordar el problema, que hizo uso de los resultados encontrados en el caso racional, fue suponer que la Integral tiene la forma (3.2.1), de esta manera es posible reproducir el procedimiento realizado en el caso racional pero por partes más pequeñas, aplicándolo a los coeficientes en λ de la expansión del conmutador (3.8). Siguiendo este método fue posible encontrar h_1 y h_2 de (3.2.1) para el caso trigonométrico, con varias constantes sin determinar. El número de estas constantes aumenta mientras más términos de la Integral se quieran conocer, haciendo muy complicado el cálculo.

El método con el que fue posible encontrar la forma explícita de la Integral del caso trigonométrico y eventualmente del caso elíptico, se basa en que el álgebra $g^{(2)}$ es el álgebra escondida del modelo cuántico G_2 elíptico. Esto quiere decir que la Integral del modelo puede escribirse en generadores del álgebra $g^{(2)}$ (véase [11]).

Proponiendo una expresión en general con todas las posibles combinaciones de composiciones de generadores del álgebra $g^{(2)}$ que no sobrepasen el orden cinco, con coeficientes constantes a determinar. Para que Maple 18 sea capaz de proporcionar una solución es necesario considerar un orden en los monomios para los generadores, para así, evitar muchas de las posibles combinaciones entre los generadores del álgebra $g^{(2)}$. El orden que se usó fue el mismo que se describe en la sección anterior para el Hamiltoniano.

Esta forma de abordar el problema tiene la ventaja de que además de poder encontrar la solución, facilita la presentación de forma ordenada en generadores del álgebra $g^{(2)}$.

Una vez que se tiene la solución que resulta en Maple 18 es necesario limpiarla de ceros triviales, el código que se usó puede encontrarse en el Apéndice C. En las expresiones resultantes es importante juntar términos y factorizar.

La solución que resultó para $k_m(u,w)$ del caso trigonométrico tiene la misma forma encontrada para el caso racional

$$k_m(u,w) = \lambda k_5(u,w) + \lambda^2 k_4(u,w) + \lambda^3 k_3(u,w) + \lambda^4 k_2(u,w) + \lambda^5 k_1(u,w)$$

además coincide con la solución explícita del caso racional si se considera $\tau = 0$.

El caso elíptico pudo ser resuelto siguiendo el método que dio resultado en el caso trigonométrico, usando generadores del álgebra $g^{(2)}$. La solución encontrada coincide con las soluciones encontradas para el caso racional y trigonométrico, cuando ($\mu = \tau = 0$) y ($\tau = 0$) respectivamente. También para el caso elíptico se conserva la forma presentada en la Ec. (3.2.1).

Ya que la forma explícita para el caso elíptico es muy grande, en el Apéndice D se presenta tanto en forma de operador diferencial, como en generadores del álgebra $g^{(2)}$.

3.3. Artefactos del Álgebra $g^{(2)}$

La situación descrita en el capítulo anterior sobre los generadores abstractos y la representación en operadores diferenciales del álgebra sl_3, se repite para el álgebra $g^{(2)}$. Cuando se consideran los generadores del álgebra $g^{(2)}$ como objetos abstractos y no como operadores diferenciales, la expresión que resulta del conmutador entre el Hamiltoniano y la Integral del modelo cuántico G_2 elíptico es distinta de cero. Esta expresión se debe poder escribir en artefactos del álgebra $g^{(2)}$. Sin embargo, en este caso, los artefactos se desconocen. Las siguientes relaciones fueron encontradas como parte de este trabajo de Tesis y algunas de ellas pueden ser la razón por la cual el conmutador del Hamiltoniano y la Integral se anula solamente cuando se consideran los generadores del álgebra $g^{(2)}$ como operadores diferenciales,

$$
\begin{aligned}
\mathcal{J}_0\mathcal{R}_2 - \mathcal{R}_1\mathcal{J}_4 &= 0\,,\\
\mathcal{R}_0\mathcal{J}_4 - \mathcal{R}_1\mathcal{J}_0 &= 0\,,\\
\mathcal{R}_0\mathcal{R}_2 - \mathcal{R}_1^2 &= 0\,,\\
\mathcal{T}_0\mathcal{T}_2 - \mathcal{T}_1^2 &= 0\ ,
\end{aligned}
$$

$$
\frac{n}{3} - \frac{n}{3}\mathcal{J}_0 + \mathcal{J}_2 - \mathcal{J}_2\mathcal{J}_0 + \mathcal{J}_4\mathcal{J}_1 = 0\,,
$$

y

$$
-\frac{n}{3} - \mathcal{J}_0 + \mathcal{J}_2 + \mathcal{J}_3 = 0\,.
$$

Escribir el conmutador del Hamiltoniano y la Integral en términos de artefactos es algo en lo que se sigue trabajando.

CAPÍTULO 4

Conclusiones

- La principal contribución y objetivo de este trabajo de Tesis fue llevar a cabo la parte técnica que permitió obtener resultados en forma explícita para la Integral de movimiento del modelo G_2 elíptico.

- En principio, se sabía que esta Integral es un operador diferencial de orden seis en dos variables con coeficientes polinomiales. Sin embargo, para encontrar la forma explícita de este operador no basta con programar el sistema de ecuaciones diferenciales que resulta de requerir que el conmutador se anule. Este sistema de ecuaciones es demasiado complejo y no puede ser resuelto de manera directa por los programas de cómputo simbólicos existentes.

- Encontrar la solución no hubiera sido posible sin el conocimiento del álgebra escondida del modelo. Además, la intoducción de un orden para los generadores del álgebra escondida $g^{(2)}$ en los monomios resultó crucial para resolver el problema.

- En la referencia [11] Sokolov y Turbiner mencionan que la Integral del modelo cuántico G_2 elíptico debería tener la forma

  $$k_{G_2} \;=\; k_{A_2}^2(u,w) + \lambda k_m(u,w)\,,$$

  donde $k_m(u,w)$ es un operador diferencial de quinto orden. La forma explícita de la Integral que se pudo calcular coincide con la descrita, pero ahora se conoce en su totalidad:

  $$k_{G_2} \;=\; k_{A_2}^2(u,w) + \lambda k_5(u,w) \;+ \lambda^2 k_4(u,w) \;+ \lambda^3 k_3(u,w) \;+ \lambda^4 k_2(u,w) \;+ \lambda^5 k_1(u,w)\,,$$

  donde k_j, con $j = 1\ldots5$, son operadores diferenciales de orden j. La expresión completa es demasiado larga para escribirla aquí, pero se puede encontrar en forma explícita en el Apéndice D.

- Se pudo calcular el conmutador entre el Hamiltoniano y la Integral del modelo cuántico A_2 elíptico cuando sólo se consideran los generadores abstractos del álgebra sl_3. Ya que es distinto de cero, el conmutador se puede escribir en términos de artefactos. Para el caso racional esta forma se pudo calcular. Sin embargo, para el caso elíptico no es un trabajo fácil y se sigue trabajando en ello, se espera tener en un futuro cercano.

- Se encontraron algunas relaciones no triviales entre los generadores de la representación del Álgebra $g^{(2)}$ que son cero y que posiblemente son la razón de que el conmutador del Hamiltoniano del modelo cuántico G_2 elíptico y la Integral presentada en este trabajo, conmuten cuando se considera la representación en operadores diferenciales.

- El haber obtenido en forma explícta la Integral de movimiento representa un primer paso para comprender mejor la estructura del modelo integrable G_2 elíptico. El análisis de los resultados obtenidos se encuentra fuera del objetivo de la Tesis pero se pretende continuar con ello en el futuro.

APÉNDICE A

Modelo G_2 racional

A.0.1. Raíces positivas del modelo G_2

En $E = \mathbb{R}^3$,con la base canónica $\{e_1, e_2, e_3\}$, el conjunto de seis raíces positivas correspondiente al sistema de raíces del álgebra G2 es[1]

$$R_+ = \{e_1 - e_2, e_1 - e_3, e_2 - e_3,\ 2\,e_1 - e_2 - e_3, 2\,e_2 - e_1 - e_3, 2\,e_3 - e_1 - e_2\}.$$

Todas las raíces de G_2 viven en un plano definido por la ecuación

$$x + y + z = 0\,.$$

Las raíces de la forma $\alpha_s = e_i - e_j$, con $i < j$, son llamadas raíces cortas ya que $(\alpha_s \cdot \alpha_s) = 2$, mientras que las de la forma $\alpha_\ell = 2e_i - e_j - e_k$, con $i \neq j \neq k$,son llamadas raíces largas pues $(\alpha_\ell \cdot \alpha_\ell) = 6$.

A.0.2. Hamiltoniano G2 racional

Siguiendo la definición general(1), el Hamiltoniano para el modelo G_2 racional es:

$$\begin{aligned}\mathcal{H} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{3}\left[-\frac{\partial^2}{\partial x_k^2} + \omega^2 x_k^2\right] + g_s\left(\frac{1}{(x_1 - x_2)^2} + \frac{1}{(x_2 - x_3)^2} + \frac{1}{(x_1 - x_3)^2}\right) \\ +3\,g_\ell\left(\frac{1}{(2\,x_1 - x_2 - x_3)^2} + \frac{1}{(x_1 - 2\,x_2 + x_3)^2} + \frac{1}{(x_1 + x_2 - 2\,x_3)^2}\right), \qquad \text{(A.1)}\end{aligned}$$

[1]véase N. Bourbaki, Éléments de Mathématique, Groupes et Algébres de Lie, Masson Ed. 1981, Chapitres 4,5, et 6, p. 220

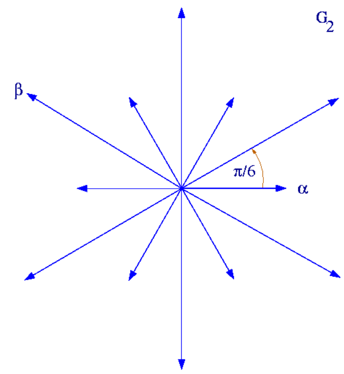

Figura A.1: Root system G_2.

donde g_s y g_ℓ son las constantes de acoplamiento para las raíces cortas largas y respectivamente. Estas constantes pueden ser parametrizadas convenientemente en términos de los parámetros μ y ν como $g_s = \nu(\nu-1), g_\ell = \mu(\mu-1)$, [2].

A.0.3. Cambio a coordenadas Perelomov

El modelo $G2$ en un sistema de rango 2, por esta razón es posible cambiar a coordenadas Perelomov

$$x_1, x_2, x_3 \to y_1, y_2, Y,$$

donde $Y = x_1 + x_2 + x_3$ y $y_i = x_i - \frac{1}{3}Y$, $(i = 1 \dots 3)$, tal que $\sum y_i = 0$. Se tiene que ,

$$x_1 = y_1 + \frac{1}{3}Y, \quad x_2 = y_2 + \frac{1}{3}Y, \quad x_3 = -y_1 - y_2 + \frac{1}{3}Y$$

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(y_1, y_2, Y) &= -\frac{3}{2}\frac{\partial^2}{\partial Y^2} + \frac{1}{6}\omega^2\, Y^2 \\ &-\frac{1}{3}\left(\frac{\partial^2}{\partial {y_1}^2} - \frac{\partial^2}{\partial y_1 \partial y_2} + \frac{\partial^2}{\partial {y_2}^2}\right) + \omega^2\left({y_1}^2 + {y_2}^2 + y_1 y_2\right) \\ &+\frac{1}{3}\,\mu(\mu-1)\left(\frac{1}{{y_1}^2} + \frac{1}{{y_2}^2} + \frac{1}{(\,y_1 +\, y_2)^2}\right) \\ &+\nu(\nu-1)\left(\frac{1}{(y_1 - y_2)^2} + \frac{1}{(2\,y_2 + y_1)^2} + \frac{1}{(2\,y_1 + y_2)^2}\right)\,. \end{aligned} \tag{A.2}$$

Podemos separar las variables (y_1, y_2) y Y. El Hamiltoniano resultante en variables (y_1, y_2) puede ser transformado a coordenadas polares.

[2] Esta forma del Hamiltoniano (A.1) coincide con ec. (17) en *Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications* SIGMA 7 (2011), 071, From Quantum A_N (Calogero) to H_4 (Rational) Model, Alexander V. Turbiner.

A.0.4. Modelo G2 racional en coordenadas polares

Antes de transformar el Hamiltoniano del caso racional a coordenadas polares es conveniente aplicarle el siguiente cambio de coordenadas:

$$y_1 = \frac{1}{2\sqrt{3}}\left(u_1 + \sqrt{3}u_2\right),\ y_2 = \frac{1}{2\sqrt{3}}\left(u_1 - \sqrt{3}u_2\right).$$

De esta manera se obtiene la siguiente forma libre de término combinado :

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(u_1,u_2) &= -\left(\frac{\partial^2}{\partial {u_1}^2} + \frac{\partial^2}{\partial {u_2}^2}\right) + \frac{\omega^2}{4}\left({u_1}^2 + {u_2}^2\right)\\ &+\nu\,(\nu-1)\left(\frac{1}{{u_2}^2} + \frac{12}{\left(-\sqrt{3}u_2 + 3\,u_1\right)^2} + \frac{12}{\left(\sqrt{3}u_2 + 3\,u_1\right)^2}\right)\\ &+\mu\,(\mu-1)\left(\frac{1}{{u_1}^2} + \frac{4}{\left(u_1 + \sqrt{3}u_2\right)^2} + \frac{4}{\left(u_1 - \sqrt{3}u_2\right)^2}\right).\end{aligned}$$

Ahora, haciendo el cambio a coordenadas polares,

$$u_1 = r\cos(\phi),\ u_2 = r\sin(\phi)$$

y después de simplificar, se obtiene:

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(r,\phi) &= -\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2} - \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\omega^2}{4}r^2\\ &+\mu\,(\mu-1)\,\frac{3^2}{r^2\cos^2(3\,\phi)} + \nu\,(\nu-1)\,\frac{3^2}{r^2\sin^2(3\,\phi)}.\end{aligned} \tag{A.3}$$

Esta forma del Hamiltoniano de modelo G_2 racional coincide con la Ec. (1) en el artículo [22] haciendo la identificación $k = 3, \omega = \omega/2, \alpha = \mu\,(\mu-1)\,, \beta = \nu\,(\nu-1)\,.$

La ecuación de Schroedinger correspondiente al Hamiltoniano puede resolverse por separación de variables.

A.0.5. Estado base

Haciendo el cálculo de manera directa se puede mostrar que

$$\psi_0 = r^{3\,\mu+3\,\nu}\,(\cos(3\,\phi))^{\mu}\,(\sin(3\,\phi))^{\nu}\,\partial e^{-\frac{1}{4}\,\omega\,r^2},$$

es solución para el estado base de la ecuación de Schroedinger $\mathcal{H}(r,\phi)\psi_0(r,\phi) = E_0\psi_0(r,\phi)$ con valor propio

$$E_0 = (3\,\mu + 3\,\nu + 1)\,\omega\,.$$

Esta ecuación coincide con la ec. (4) en [22] ,después de reemplazar $\omega \to \omega/2$.

A.0.6. Hamiltoniano rotado

Antes de encontrar otras soluciones es conveniente transformar el Hamiltoniano en una forma algebraica, tal que admita soluciones polinomiales. Suponiendo que las funciones propias de $\mathcal{H}$ pueden escribirse en forma factorizada como

$$\psi_n = \varphi_n \, \psi_0 \,, \tag{A.4}$$

se tiene que, la función $\varphi_n$es una función propia del Hamiltoniano

$$h \equiv \psi_0^{-1} \left(\mathcal{H} - E_0 \right) \psi_0 \,. \tag{A.5}$$

Por conveniencia, se resta el estado base de la energía E_0, así el punto de referencia para la energía del estado base (A.5) cambia a cero. El estado base se puede escribir como

$$\psi_0 = e^{-\phi_0} \,, \tag{A.6}$$

porque

$$\phi_0 \;=\; -\nu \, \ln\left(\sin\left(3\,\phi\right)\right) - \mu \, \ln\left(\cos\left(3\,\phi\right)\right) - 3\left(\mu+\nu\right)\ln\left(r\right) + 1/4\,\omega\, r^2 \,. \tag{A.7}$$

De esta forma, las derivadas $\partial/\partial q_i$ $(q_1 = r, q_2 = \phi)$ se transforman en derivadas covariantes

$$\frac{\partial}{\partial q_i} \to \mathcal{D}_i \equiv \frac{\partial}{\partial q_i} - \frac{\partial \phi_0}{\partial q_i} \,. \tag{A.8}$$

Lo que resulta en la expresión del Hamiltoniano transformado (A.5):

$$\begin{aligned} h \;\; = \;\; & -\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \left(\omega\, r - \frac{6\left(\mu+\nu\right)+1}{r}\right)\frac{\partial}{\partial r} \\ & +6\left(\mu\, \tan\left(3\,\phi\right) - \frac{\nu}{\tan\left(3\,\phi\right)}\right)\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial \phi} \,. \end{aligned} \tag{A.9}$$

A.0.7. Hamiltoniano algebraico

El último paso consiste en encontrar variables apropiadas donde el Hamiltoniano transformado sea algebraico. Debido a las simetrías del problemas es natural tratar de usar invariantes de Weyl como nuevas variables. En el caso racional se sabe que los grados de los invariantes polinomiales asociados al grupo de Weyl de G_2 son 2 y 6. Las siguientes Variables son resultado de las consideraciones anteriores[3]

$$t = r^2, \quad u = r^6 \sin^2(3\phi) \,,$$

[3]En términos de coordenadas de Perelomov (y_1, y_2) dichas variables son:

$$t = 4\left(y_1^2 + y_2^2 + y_1 y_2\right), \quad u = 16(y_1 - y_2)^2 \left(2y_1 + y_2\right)^2 \left(2y_2 + y_1\right)^2 .$$

Es de importancia mencionar que t coincide, salvo una constate, con la variable "u"$= x = -(y_1^2 + y_2^2 + y_1 y_2)$ usada por Sokolov y Turbiner en [1] (Ec. (8.1)). La relación exacta entre las variables usadas en [22] y las variables usadas por Sokolov y Turbiner en [1] son

$$u^{(ST)} = -\frac{t}{4} \,, \quad v^{(ST)} = -\frac{1}{432}\left(u - t^3\right)$$

o

$$\phi = 1/3 \ \arcsin\left(\sqrt{\frac{u}{t^3}}\right), r = \sqrt{t}\,. \tag{A.10}$$

Haciendo el cambio, se tiene que la forma algebraica del Hamiltoniano transformado es

$$\begin{aligned} h \quad = \quad & -4\,t\frac{\partial^2}{\partial t^2} - 24\,u\frac{\partial^2}{\partial t\partial u} - 36\,t^2 u\frac{\partial^2}{\partial u^2} + (2\,\omega\,t - 12\,\mu - 12\,\nu - 4)\,\frac{\partial}{\partial t} \\ & + \left(-36\,\nu\,t^2 + 6\,\omega\,u - 18\,t^2\right)\frac{\partial}{\partial u}\,. \end{aligned}$$

Esta forma algebraica coincide exactamente con la Ec. (16) en [22] para el caso $k = 3$, $\omega \to \omega/2$, $a = \mu, b = \nu$, (véase página 3 en J. Phys. A: Math. Theor. 42 (2009) 242001).

El Hamiltoniano (A.9) preserva el espacio de polinomios

$$\mathcal{P}_N^{(s)} = \langle t^p\, u^q | 0 \leq (p + sq) \leq N \rangle, \quad N = 0, 1, 2, \ldots$$

para $s \geq k-1$ y cualquier entero N.Por esto, tiene una infinidad de subespacios de dimensión finita $\mathcal{P}_N^{(s)}$. Esto espacios cumplen que

$$\mathcal{P}_0^{(s)} \subset \mathcal{P}_1^{(s)} \subset \mathcal{P}_2^{(s)} \cdots \mathcal{P}_N^{(s)} \ldots$$

por esta razón , el Hamiltoniano (A.9) es exactamente soluble.

APÉNDICE B

Reglas de conmutación para los generadores del álgebra sl_3

$$
\begin{array}{llll}
[J_0, J_1] = J_1, & [J_0, J_2] = J_2, & [J_0, J_3] = 0, & [J_0, J_4] = 0, \\
[J_0, J_5] = 0, & [J_0, J_6] = 0, & [J_0, J_7] = -J_7, & [J_0, J_8] = -J_8,
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{llll}
[J_1, J_2] = 0, & [J_1, J_3] = J_1, & [J_1, J_4] = 0, & [J_1, J_5] = J_2, \\
[J_1, J_6] = 0, & [J_1, J_7] = 2J_3 + J_6 + 3\nu, & [J_1, J_8] = J_4, &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{llll}
[J_2, J_3] = 0, & [J_2, J_4] = J_1, & [J_2, J_5] = 0, & [J_2, J_6] = J_2, \\
[J_2, J_7] = J_5, & [J_2, J_8] = J_3 + 2J_6 + 3\,\nu, & &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{llll}
[J_3, J_4] = -J_4, & [J_3, J_5] = J_5, & [J_3, J_6] = 0, & [J_3, J_7] = J_7, \\
[J_3, J_8] = 0, & & &
\end{array}
$$

$$
[J_4, J_5] = -J_3 + J_6, \quad [J_4, J_6] = -J_4, \quad [J_4, J_7] = J_8, \quad [J_4, J_8] = 0,
$$

$$
[J_5, J_6] = J_5, \quad [J_5, J_7] = 0, \quad [J_5, J_8] = J_7,
$$

$$
[J_6, J_7] = 0, \quad [J_6, J_8] = J_8,
$$

$$
[J_7, J_8] = 0,
$$

APÉNDICE C

Procedimientos Computacionales

C.1. Ejemplo de código en Maple

```
> lsol:=convert(SolEqs,list):
```

SolEqs es la solución que resulta del proceso descrito en el texto

```
> cts:=indets(lsol) minus {nu, lambda, tau, mu}:
> for i from 1 to nops(lsol) do
> lsol1[i]:=convert(lsol[i], list):
> od:
> for i from 1 to nops(lsol) do
> lsol2[i]:=convert(lsol1[i][2],list,`+`):
> lsol3[i]:=convert(lsol2[i], Array):
> od:
> for i from 1 to nops(lsol) do
> for j from 1 to ArrayNumElems(lsol3[i]) do
> if convert(lsol3[i](j), set) intersect cts <> {} then lsol3[i](j):=0;
> end if;
> od;
> od;
> solr:={}:
```

```
> for i from 1 to nops(lsol) do
> if convert(lsol3[i],set)<>{0} then
> solr:=solr union {[lsol1[i][1],add(lsol3[i](j), j=1..ArrayNumElems(lsol3[i]))]};
> end if;
> od;
```

solr es la solución sin ceros triviales

APÉNDICE D

La Integral del modelo cuántico G_2 elíptico

D.1. $K_{A_2}^2$ como operador diferencial

$$
\begin{aligned}
K_{A_2}^2(u,w) = \frac{1}{27}\Big(& 972\,\mu^6\nu\,(3\,\nu+5)(2+3\,\nu)(3\,\nu+4)(1+3\,\nu)(\nu+1)w^3 - 1944\,\mu^5\nu\,(3\,\nu+5)(2+3\,\nu)(3\,\nu+4)(1+3\,\nu)(\nu+1)w^2u \\
&+ \big(-162\,w^2\nu\,(2+3\,\nu)(1+3\,\nu)(\nu+1)(72\,\nu^2+207\,\nu+160)\tau + 486\,wu^2\nu\,(2+3\,\nu)(1+3\,\nu)(\nu+1)(18\,\nu^2+57\,\nu+40)\big)\mu^4 \\
&+ \big(108\,wu\nu\,(2+3\,\nu)(1+3\,\nu)(108\,\nu^3+414\,\nu^2+501\,\nu+200)\tau - 18\,\nu\,(2+3\,\nu)(1+3\,\nu)(108\,\nu^2u^3 \\
&+ 198\,u^3\nu - 81\,w\nu^2 + 80\,u^3 - 189\,w\nu - 144\,w)\big)\mu^3 \\
&+ \big(144\,w\nu\,(1+3\,\nu)(3\,\nu+4)^2(2+3\,\nu)^2\tau^2 - 144\,u^2\nu\,(6\,\nu+5)(1+3\,\nu)(2+3\,\nu)^2\tau \\
&- 36\,u\nu\,(3\,\nu+4)(1+3\,\nu)(2+3\,\nu)^2\big)\mu^2 + \big(-96\,u\nu\,(2+3\,\nu)^2(1+3\,\nu)^2\tau^2 - 24\,\nu\,(2+3\,\nu)^2(1+3\,\nu)^2\tau\big)\mu \\
&+ \Big(1944\,\mu^6(3\,\nu+5)(2+3\,\nu)(3\,\nu+4)(1+3\,\nu)(\nu+1)w^3u + \big(972\,w^3(3\,\nu+5)(2+3\,\nu)(3\,\nu+4)(1+3\,\nu)(\nu+1)\tau \\
&- 4212\,w^2u^2(3\,\nu+5)(2+3\,\nu)(3\,\nu+4)(1+3\,\nu)(\nu+1)\big)\mu^5 \\
&+ \big(-54\,w^2u(2+3\,\nu)(1+3\,\nu)(\nu+1)(882\,\nu^2+2529\,\nu+1852)\tau \\
&+ 54\,w(2+3\,\nu)(1+3\,\nu)(\nu+1)(378\,\nu^2u^3+1197\,u^3\nu-18\,w\nu^2+876\,u^3-72\,w\nu-40\,w)\big)\mu^4 \\
&+ \big(-108\,w^2(2+3\,\nu)(1+3\,\nu)(\nu+1)(126\,\nu^2+342\,\nu+253)\tau^2 + 108\,wu^2(2+3\,\nu)(1+3\,\nu)(378\,\nu^3+1476\,\nu^2+1839\,\nu+746)\tau \\
&+ 18\,u(2+3\,\nu)(1+3\,\nu)(-216\,\nu^2u^3+54\,\nu^3w-432\,u^3\nu+423\,w\nu^2-206\,u^3+741\,w\nu+412\,w)\big)\mu^3 \\
&+ \big(24\,wu(2+3\,\nu)(1+3\,\nu)(1080\,\nu^3+3924\,\nu^2+4569\,\nu+1730)\tau^2 \\
&+ 6\,(2+3\,\nu)(1+3\,\nu)(-1152\,\nu^2u^3+108\,\nu^3w-2052\,u^3\nu+765\,w\nu^2-904\,u^3+1275\,w\nu+704\,w)\tau \\
&- 54\,u^2(2+3\,\nu)(15\,\nu+16)(1+3\,\nu)(\nu+1)\big)\mu^2 + \big(192\,w(1+3\,\nu)(3\,\nu+4)^2(2+3\,\nu)^2\tau^3 \\
&- 32\,u^2(39\,\nu+31)(1+3\,\nu)(2+3\,\nu)^2\tau^2 - 8\,u(33\,\nu+29)(1+3\,\nu)(2+3\,\nu)^2\tau - 2\,(2+3\,\nu)^2(1+3\,\nu)^2\big)\mu \\
&- 64\,u(2+3\,\nu)^2(1+3\,\nu)^2\tau^3 - 16\,(2+3\,\nu)^2(1+3\,\nu)^2\tau^2\Big)\frac{\partial}{\partial u} \\
&+ \Big(25920\,\mu^6(9\,\nu^2+39\,\nu+43)w^7 - 51840\,\mu^5(15\,\nu^2+67\,\nu+76)uw^6 + \big(-288\,w^6(1908\,\nu^2+8595\,\nu+9850)\tau \\
&+ 288\,u^2w^5(3042\,\nu^2+14175\,\nu+16690)\big)\mu^4 + \big(96\,uw^5(11754\,\nu^2+55881\,\nu+67094)\tau \\
&- 96\,w^4(3906\,\nu^2u^3+19293\,u^3\nu-1008\,w\nu^2+23822\,u^3-4761\,w\nu-5678\,w)\big)\mu^3 + \big(1296\,w^5(243\,\nu^2+1181\,\nu+1451)\tau^2 \\
&- 96\,u^2w^4(6489\,\nu^2+33615\,\nu+43217)\tau + 48\,w^3u(993\,\nu^2u^3+5087\,u^3\nu-3060\,w\nu^2+6409\,u^3-15534\,w\nu-19652\,w)\big)\mu^2 \\
&+ \big(-864\,w^4u(288\,\nu^2+1621\,\nu+2228)\tau^2 + \frac{32}{3}\,w^3(8568\,\nu^2u^3+47862\,u^3\nu-9477\,w\nu^2+65072\,u^3-49086\,w\nu-63423\,w)\tau \\
&+ \frac{32}{3}\,w^2u^2(72\,\nu^2u^3+783\,u^3\nu+3429\,w\nu^2+1636\,u^3+20520\,w\nu+29355\,w)\big)\mu - 3456\,w^4(12\,\nu+29)\tau^3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+ 576\, w^3u^2(72\,\nu^2 + 440\,\nu + 651)\tau^2 + \frac{32}{9}\, w^2u(144\,\nu^2u^3 + 2016\,u^3\nu + 8748\,w\nu^2 + 5096\,u^3 + 58077\,w\nu + 92016\,w)\tau \\
&+ \frac{16}{9}\, w(72\,wu^3\nu^2 + 60\,u^6 + 1422\,wu^3\nu + 3159\,w^2\nu^2 + 4336\,wu^3 + 23571\,w^2\nu + 41283\,w^2)\Big)\frac{\partial^4}{\partial w^4} \\
&+ \Big(31104\,w^8(2\,\nu+5)\mu^6 - 6912\,uw^7(33\,\nu+85)\mu^5 + \big(-3456\,w^7(48\,\nu+125)\tau + 10368\,u^2w^6(28\,\nu+75)\big)\mu^4 \\
&+ \big(576\,uw^6(678\,\nu+1859)\tau - 192\,w^5(762\,u^3\nu + 2141\,u^3 - 216\,w\nu - 576\,w)\big)\mu^3 + \big(18144\,w^6(6\,\nu+17)\tau^2 \\
&- 576\,u^2w^5(462\,\nu+1361)\tau + 32\,uw^4(690\,u^3\nu + 1963\,u^3 - 2268\,w\nu - 6534\,w)\big)\mu^2 + \big(-1728\,uw^5(66\,\nu+211)\tau^2 \\
&+ 64\,w^4(804\,u^3\nu + 2510\,u^3 - 810\,w\nu - 2403\,w)\tau + 64\,u^2w^3(18\,u^3\nu + 83\,u^3 + 378\,w\nu + 1251\,w)\big)\mu - 10368\,\tau^3w^5 \\
&+ 1152\,u^2w^4(24\,\nu+83)\tau^2 + \frac{64}{3}\,uw^3(48\,u^3\nu + 278\,u^3 + 1134\,w\nu + 4239\,w)\tau \\
&+ \frac{32}{9}\,w^2(20\,u^6 + 108\,wu^3\nu + 774\,wu^3 + 1458\,w^2\nu + 6075\,w^2)\Big)\frac{\partial^5}{\partial w^5} \\
&+ \Big(25920\,\mu^6(18\,\nu^2 + 72\,\nu + 73)uw^6 + \big(12960\,w^6(18\,\nu^2 + 72\,\nu + 73)\tau - 4320\,u^2w^5(342\,\nu^2 + 1404\,\nu + 1459)\big)\mu^5 \\
&+ \big(-288\,uw^5(6192\,\nu^2 + 25254\,\nu + 26153)\tau + 288\,w^4(5292\,\nu^2u^3 + 22662\,u^3\nu + 396\,w\nu^2 + 24429\,u^3 + 1530\,w\nu + 1519\,w)\big)\mu^4 \\
&+ \big(-144\,w^5(4221\,\nu^2 + 17019\,\nu + 17489)\tau^2 + 288\,u^2w^4(9171\,\nu^2 + 39213\,\nu + 42298)\tau \\
&- 48\,w^3u(11547\,\nu^2u^3 + 53181\,u^3\nu + 1080\,w\nu^2 + 60721\,u^3 + 3996\,w\nu + 3714\,w)\big)\mu^3 \\
&+ \big(144\,w^4u(11196\,\nu^2 + 47502\,\nu + 51007)\tau^2 - 288\,w^3(3600\,\nu^2u^3 + 17022\,u^3\nu + 261\,w\nu^2 + 19837\,u^3 + 1089\,w\nu + 1147\,w)\tau \\
&+ 16\,w^2u^2(3492\,\nu^2u^3 + 17406\,u^3\nu - 7938\,w\nu^2 + 21011\,u^3 - 36234\,w\nu - 41184\,w)\big)\mu^2 + \big(2592\,w^4(144\,\nu^2 + 608\,\nu + 651)\tau^3 \\
&- 192\,w^3u^2(3276\,\nu^2 + 16146\,\nu + 19421)\tau^2 + \frac{32}{3}\,w^2u(8712\,\nu^2u^3 + 45648\,u^3\nu - 13446\,w\nu^2 + 57133\,u^3 - 61398\,w\nu - 68760\,w)\tau \\
&+ \frac{16}{3}\,w(360\,\nu\,u^6 + 5436\,wu^3\nu^2 + 984\,u^6 + 31140\,wu^3\nu + 1701\,w^2\nu^2 + 41600\,wu^3 + 14823\,w^2\nu + 25245\,w^2)\big)\mu \\
&- 3456\,w^3u(36\,\nu^2 + 196\,\nu + 255)\tau^3 + \frac{32}{3}\,w^2(3600\,\nu^2u^3 + 19584\,u^3\nu - 4374\,w\nu^2 + 24992\,u^3 - 24786\,w\nu - 33453\,w)\tau^2 \\
&+ 32\,wu^2(48\,u^3\nu + 738\,w\nu^2 + 148\,u^3 + 4338\,w\nu + 5843\,w)\tau + 16\,wu(24\,u^3\nu + 216\,w\nu^2 + 88\,u^3 + 1350\,w\nu + 1893\,w)\Big)\frac{\partial^4}{\partial w^3\partial u} \\
&+ \Big(51840\,uw^7(3\,\nu+7)\mu^6 + \big(25920\,w^7(3\,\nu+7)\tau - 8640\,u^2w^6(63\,\nu+151)\big)\mu^5 + \big(-2592\,uw^6(254\,\nu+607)\tau \\
&+ 288\,w^5(2238\,u^3\nu + 5579\,u^3 + 198\,w\nu + 456\,w)\big)\mu^4 + \big(-864\,w^6(273\,\nu+647)\tau^2 + 288\,u^2w^5(3900\,\nu+9769)\tau \\
&- 96\,uw^4(3027\,u^3\nu + 7984\,u^3 + 342\,w\nu + 849\,w)\big)\mu^3 + \big(864\,uw^5(807\,\nu+2023)\tau^2 \\
&- 192\,w^4(2973\,u^3\nu + 8068\,u^3 + 243\,w\nu + 621\,w)\tau + 32\,u^2w^3(1233\,u^3\nu + 3395\,u^3 - 2376\,w\nu - 6147\,w)\big)\mu^2 \\
&+ \big(5184\,w^5(33\,\nu+83)\tau^3 - 288\,u^2w^4(1272\,\nu+3605)\tau^2 + 96\,uw^3(790\,u^3\nu + 2300\,u^3 - 864\,w\nu - 2187\,w)\tau \\
&+ \frac{32}{3}\,w^2(60\,\nu\,u^6 + 329\,u^6 + 2736\,wu^3\nu + 8655\,wu^3 + 1215\,w^2\nu + 4941\,w^2)\big)\mu - 1728\,uw^4(48\,\nu+151)\tau^3 \\
&+ 64\,w^3(552\,u^3\nu + 1670\,u^3 - 567\,w\nu - 1836\,w)\tau^2 + \frac{32}{3}\,u^2w^2(48\,u^3\nu + 298\,u^3 + 2430\,w\nu + 7911\,w)\tau \\
&+ \frac{32}{3}\,uw^2(12\,u^3\nu + 89\,u^3 + 405\,w\nu + 1404\,w)\Big)\frac{\partial^5}{\partial w^4\partial u} \\
&+ \Big(38880\,\mu^6(3\,\nu+5)(6\,\nu^2 + 20\,\nu + 17)uw^5 + \big(19440\,w^5(3\,\nu+5)(6\,\nu^2 + 20\,\nu + 17)\tau \\
&- 6480\,u^2w^4(3\,\nu+5)(102\,\nu^2 + 352\,\nu + 309)\big)\mu^5 + \big(-216\,w^4u(11124\,\nu^3 + 56286\,\nu^2 + 95928\,\nu + 54943)\tau \\
&+ 216\,w^3(8028\,\nu^3u^3 + 42966\,\nu^2u^3 + 432\,\nu^3w + 76544\,u^3\nu + 1980\,w\nu^2 + 45459\,u^3 + 3138\,w\nu + 1700\,w)\big)\mu^4 \\
&+ \big(-216\,w^4(3591\,\nu^3 + 17883\,\nu^2 + 30165\,\nu + 17159)\tau^2 + 216\,w^3u^2(14076\,\nu^3 + 74493\,\nu^2 + 131759\,\nu + 77929)\tau \\
&- 72\,w^2u(6399\,\nu^3u^3 + 38034\,\nu^2u^3 + 324\,\nu^3w + 73146\,u^3\nu + 378\,w\nu^2 + 46058\,u^3 - 1476\,w\nu - 1983\,w)\big)\mu^3 \\
&+ \big(72\,w^3u(25596\,\nu^3 + 132804\,\nu^2 + 231363\,\nu + 135325)\tau^2 \\
&- 24\,w^2(34668\,\nu^3u^3 + 211122\,\nu^2u^3 + 1944\,\nu^3w + 412200\,u^3\nu + 8613\,w\nu^2 + 262364\,u^3 + 12393\,w\nu + 5694\,w)\tau \\
&+ 24\,wu^2(1080\,\nu^3u^3 + 7614\,\nu^2u^3 - 4050\,\nu^3w + 16359\,u^3\nu - 24408\,w\nu^2 + 11117\,u^3 - 48150\,w\nu - 31191\,w)\big)\mu^2 \\
&+ \big(144\,w^3(3\,\nu+5)(936\,\nu^2 + 3216\,\nu + 2843)\tau^3 - 72\,w^2u^2(6624\,\nu^3 + 41976\,\nu^2 + 83912\,\nu + 54267)\tau^2 \\
&+ 24\,wu(1584\,\nu^3u^3 + 11736\,\nu^2u^3 - 4428\,\nu^3w + 25822\,u^3\nu - 27108\,w\nu^2 + 17752\,u^3 - 53148\,w\nu - 33909\,w)\tau \\
&+ 9504\,\nu^3u^3w + 480\,\nu\,u^6 + 78624\,wu^3\nu^2 + 872\,u^6 + 648\,w^2\nu^3 + 182688\,wu^3\nu + 26352\,w^2\nu^2 + 130200\,wu^3 \\
&+ 90432\,w^2\nu + 80088\,w^2\big)\mu - 48\,w^2u(1728\,\nu^3 + 12024\,\nu^2 + 25512\,\nu + 17249)\tau^3 + 48\,w(288\,\nu^3u^3 + 2232\,\nu^2u^3 \\
&- 540\,\nu^3w + 4960\,u^3\nu - 4005\,w\nu^2 + 3366\,u^3 - 8940\,w\nu - 6302\,w)\tau^2
\end{aligned}
$$

$$+ 8\,u^2(864\,\nu^3 w + 48\,u^3\nu + 7398\,w\nu^2 + 98\,u^3 + 17148\,w\nu + 11799\,w)\tau$$

$$+ 8\,u(108\,\nu^3 w + 12\,u^3\nu + 990\,w\nu^2 + 29\,u^3 + 2355\,w\nu + 1594\,w)\Big)\frac{\partial^3}{\partial w^2 \partial u}$$

$$+ \Big(19440\,\mu^6(3\,\nu+5)(\nu+1)(3\,\nu+4)^2 w^4 u + \big(9720\,w^4(3\,\nu+5)(\nu+1)(3\,\nu+4)^2\tau$$

$$- 3240\,w^3u^2(3\,\nu+5)(45\,\nu+64)(3\,\nu+4)(\nu+1)\big)\mu^5 + \big(-1944\,w^3u(\nu+1)(828\,\nu^3 + 3582\,\nu^2 + 5197\,\nu + 2516)\tau$$

$$+ 216\,w^2(\nu+1)(4320\,\nu^3u^3 + 20178\,\nu^2u^3 + 81\,\nu^3 w + 30849\,u^3\nu + 189\,w\nu^2 + 15572\,u^3 + 180\,w\nu + 60\,w)\big)\mu^4$$

$$+ \big(-324\,w^3(\nu+1)(1512\,\nu^3 + 6363\,\nu^2 + 9111\,\nu + 4378)\tau^2$$

$$+ 108\,w^2u^2(15768\,\nu^4 + 87066\,\nu^3 + 177825\,\nu^2 + 159553\,\nu + 53016)\tau$$

$$- 36\,wu(3888\,\nu^4u^3 + 26811\,\nu^3u^3 - 324\,\nu^4 w + 63045\,\nu^2u^3 - 4644\,\nu^3 w + 62238\,u^3\nu$$

$$- 14634\,w\nu^2 + 22126\,u^3 - 17322\,w\nu - 6968\,w)\big)\mu^3 + \big(48\,w^2u(21708\,\nu^4 + 115587\,\nu^3 + 229050\,\nu^2 + 200511\,\nu + 65335)\tau^2$$

$$- 12\,w(20736\,\nu^4u^3 + 146340\,\nu^3u^3 + 162\,\nu^4 w + 345978\,\nu^2u^3 - 3078\,\nu^3 w + 341778\,u^3\nu - 13509\,w\nu^2$$

$$+ 121400\,u^3 - 18531\,w\nu - 8176\,w)\tau - 72\,u^2(-180\,\nu^3u^3 + 405\,\nu^4 w - 687\,\nu^2u^3 + 2943\,\nu^3 w - 853\,u^3\nu$$

$$+ 7416\,w\nu^2 - 346\,u^3 + 7890\,w\nu + 3014\,w)\big)\mu^2 + \big(384\,w^2(63\,\nu^2 + 156\,\nu + 94)(3\,\nu+4)^2\tau^3$$

$$- 32\,wu^2(4212\,\nu^4 + 30942\,\nu^3 + 73719\,\nu^2 + 72567\,\nu + 25561)\tau^2$$

$$- 16\,u(-1188\,\nu^3u^3 + 1782\,\nu^4 w - 4446\,\nu^2u^3 + 13446\,\nu^3 w - 5430\,u^3\nu + 33435\,w\nu^2 - 2170\,u^3 + 34740\,w\nu + 12976\,w)\tau$$

$$+ 4752\,\nu^3u^3 - 648\,\nu^4 w + 17568\,\nu^2u^3 - 972\,\nu^3 w + 21504\,u^3\nu + 3492\,w\nu^2 + 8800\,u^3 + 5400\,w\nu + 1672\,w\big)\mu$$

$$- 64\,wu(324\,\nu^4 + 2592\,\nu^3 + 6327\,\nu^2 + 6219\,\nu + 2155)\tau^3$$

$$+ (6912\,\nu^3u^3 - 5184\,\nu^4 w + 24768\,\nu^2u^3 - 46656\,\nu^3 w + 28608\,u^3\nu - 123048\,w\nu^2 + 10688\,u^3 - 128088\,w\nu - 46528\,w)\tau^2$$

$$+ 24\,\tau\,(144\,\nu^3 + 495\,\nu^2 + 545\,\nu + 196)u^2 + 8\,(6\,\nu+5)(3\,\nu+5)(2+3\,\nu)u\Big)\frac{\partial^2}{\partial w \partial u}$$

$$+ \Big(4860\,\mu^6(3\,\nu+5)(2+3\,\nu)(3\,\nu+4)(\nu+1)w^3u^2 + \big(4860\,w^3u(3\,\nu+5)(2+3\,\nu)(3\,\nu+4)(\nu+1)\tau$$

$$- 324\,w^2(3\,\nu+5)(2+3\,\nu)(3\,\nu+4)(\nu+1)(35\,u^3 - 6\,w)\big)\mu^5 + \big(-243\,w^3(3\,\nu+5)(2+3\,\nu)(3\,\nu+4)(\nu+1)\tau^2$$

$$- 162\,w^2u^2(2+3\,\nu)(\nu+1)(1179\,\nu^2 + 3411\,\nu + 2476)\tau$$

$$+ 81\,wu(2+3\,\nu)(\nu+1)(729\,\nu^2u^3 + 2295\,u^3\nu - 396\,w\nu^2 + 1716\,u^3 - 1332\,w\nu - 1024\,w)\big)\mu^4$$

$$+ \big(-324\,w^2u(2+3\,\nu)(\nu+1)(279\,\nu^2 + 747\,\nu + 521)\tau^2$$

$$+ 54\,w(2+3\,\nu)(2970\,\nu^3u^3 + 11763\,\nu^2u^3 - 405\,\nu^3 w + 15015\,u^3\nu - 1782\,w\nu^2 + 6232\,u^3 - 2493\,w\nu - 1116\,w)\tau$$

$$+ 18\,u^2(2+3\,\nu)(-513\,\nu^2u^3 + 837\,\nu^3 w - 1089\,u^3\nu + 4194\,w\nu^2 - 566\,u^3 + 6261\,w\nu + 2948\,w)\big)\mu^3$$

$$+ \big(-324\,w^2(2+3\,\nu)(\nu+1)(18\,\nu^2 + 18\,\nu - 5)\tau^3 + 24\,wu^2(2+3\,\nu)(6129\,\nu^3 + 23103\,\nu^2 + 28191\,\nu + 11233)\tau^2$$

$$+ 6\,u(2+3\,\nu)(-3492\,\nu^2u^3 + 3510\,\nu^3 w - 6966\,u^3\nu + 16155\,w\nu^2 - 3458\,u^3 + 23091\,w\nu + 10712\,w)\tau$$

$$+ 3\,(2+3\,\nu)(-1152\,\nu^2u^3 + 27\,\nu^3 w - 2376\,u^3\nu + 900\,w\nu^2 - 1192\,u^3 + 2445\,w\nu + 1724\,w)\big)\mu^2$$

$$+ \big(48\,wu(2+3\,\nu)(1080\,\nu^3 + 3843\,\nu^2 + 4407\,\nu + 1631)\tau^3$$

$$+ 6\,(2+3\,\nu)(-2520\,\nu^2u^3 + 1188\,\nu^3 w - 4536\,u^3\nu + 4689\,w\nu^2 - 2072\,u^3 + 5763\,w\nu + 2272\,w)\tau^2$$

$$- 18\,u^2(2+3\,\nu)(261\,\nu^2 + 459\,\nu + 208)\tau - 6\,u(15\,\nu+17)(2+3\,\nu)^2\big)\mu + 192\,w(3\,\nu+4)^2(2+3\,\nu)^2\tau^4$$

$$- 192\,u^2(6\,\nu+5)(2+3\,\nu)^2\tau^3 - 24\,u(21\,\nu+13)(2+3\,\nu)^2\tau^2 - 18\,\tau\,(1+3\,\nu)(2+3\,\nu)^2\Big)\frac{\partial^2}{\partial u^2}$$

$$+ \Big(1944\,\mu^6(3\,\nu+5)(2+3\,\nu)(3\,\nu+4)(6\,\nu+7)(\nu+1)w^4 - 3888\,\mu^5(3\,\nu+5)(2+3\,\nu)(3\,\nu+4)(7\,\nu+9)(\nu+1)w^3u$$

$$+ \big(-216\,w^3(2+3\,\nu)(\nu+1)(756\,\nu^3 + 3195\,\nu^2 + 4578\,\nu + 2180)\tau$$

$$+ 216\,w^2u^2(2+3\,\nu)(\nu+1)(756\,\nu^3 + 3465\,\nu^2 + 5154\,\nu + 2540)\big)\mu^4$$

$$+ \big(36\,w^2u(2+3\,\nu)(5616\,\nu^4 + 30654\,\nu^3 + 61935\,\nu^2 + 55235\,\nu + 18308)\tau$$

$$- 36\,w(2+3\,\nu)(648\,\nu^4u^3 + 4590\,\nu^3u^3 - 108\,\nu^4 w + 10683\,\nu^2u^3 - 1062\,\nu^3 w + 10335\,u^3\nu - 3012\,w\nu^2$$

$$+ 3604\,u^3 - 3398\,w\nu - 1304\,w)\big)\mu^3 + \big(72\,w^2(2+3\,\nu)(864\,\nu^4 + 4446\,\nu^3 + 8616\,\nu^2 + 7465\,\nu + 2435)\tau^2$$

$$- 144\,wu^2(2+3\,\nu)(216\,\nu^4 + 1611\,\nu^3 + 3810\,\nu^2 + 3724\,\nu + 1307)\tau$$

$$- 36\,u(2+3\,\nu)(-72\,\nu^3u^3 + 108\,\nu^4 w - 264\,\nu^2u^3 + 846\,\nu^3 w - 310\,u^3\nu + 2193\,w\nu^2 - 118\,u^3 + 2357\,w\nu + 908\,w)\big)\mu^2$$

$$+ \big(-32\,wu(2+3\,\nu)(324\,\nu^4 + 2646\,\nu^3 + 6399\,\nu^2 + 6249\,\nu + 2159)\tau^2$$

$$- 4\,(2+3\,\nu)(-864\,\nu^3u^3 + 648\,\nu^4 w - 3096\,\nu^2u^3 + 4644\,\nu^3 w - 3576\,u^3\nu + 11205\,w\nu^2 - 1336\,u^3 + 11463\,w\nu + 4288\,w)\tau$$

$$+ 4\,u^2(2+3\,\nu)(216\,\nu^3 + 747\,\nu^2 + 813\,\nu + 304)\big)\mu - 128\,w(3\,\nu+4)^2(2+3\,\nu)^2\tau^3 + \frac{128}{3}\,u^2(3\,\nu+4)^2(2+3\,\nu)^2\tau^2$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{16}{3}\,\tau\,(36\,\nu^2+87\,\nu+43)(2+3\,\nu)^2u+4/3\,(6\,\nu+11)(1+3\,\nu)(2+3\,\nu)^2\Big)\frac{\partial}{\partial w}\\
&+\Big(25920\,\mu^6u^2w^7+(25920\,\tau\,uw^7-1728\,w^6(55\,u^3-6\,w))\mu^5+\big(-1296\,\tau^2w^7-165024\,u^2w^6\tau+432\,uw^5(273\,u^3-20\,w)\big)\mu^4\\
&+\big(-87264\,uw^6\tau^2+2592\,w^5(102\,u^3-5\,w)\tau-96\,u^2w^4(581\,u^3+15\,w)\big)\mu^3\\
&+\big(-7776\,w^6\tau^3+228528\,u^2w^5\tau^2-129216\,u^4w^4\tau+16\,w^3(503\,u^6-840\,wu^3+567\,w^2)\big)\mu^2\\
&+\big(88128\,uw^5\tau^3-384\,w^4(284\,u^3+27\,w)\tau^2+32\,u^2w^3(490\,u^3-891\,w)\tau+32\,uw^2(4\,u^6+179\,wu^3+27\,w^2)\big)\mu\\
&+15552\,w^5\tau^4-34560\,u^2w^4\tau^3+64\,uw^3(119\,u^3-297\,w)\tau^2\\
&+32\,w^2(4\,u^6+174\,wu^3-81\,w^2)\tau+\frac{16}{3}\,u^2w^2(8\,u^3+189\,w)\Big)\frac{\partial^6}{\partial w^4\partial u^2}\\
&+\Big(17280\,\mu^6u^3w^6+\big(25920\,u^2w^6\tau-1728\,uw^5(35\,u^3-12\,w)\big)\mu^5+\big(-2592\,uw^6\tau^2-5184\,w^5(27\,u^3-2\,w)\tau\\
&+288\,u^2w^4(239\,u^3-138\,w)\big)\mu^4+\big(-5616\,w^6\tau^3-89424\,u^2w^5\tau^2+432\,uw^4(453\,u^3-124\,w)\tau\\
&-16\,w^3(1715\,u^6-1404\,wu^3-432\,w^2)\big)\mu^3+\big(-4320\,uw^5\tau^3+432\,w^4(484\,u^3-63\,w)\tau^2-96\,u^2w^3(773\,u^3-369\,w)\tau\\
&+48\,uw^2(64\,u^6-251\,wu^3+90\,w^2)\big)\mu^2+\big(10368\,w^5\tau^4+104832\,u^2w^4\tau^3-192\,uw^3(374\,u^3-81\,w)\tau^2\\
&+48\,w^2(120\,u^6-580\,wu^3-27\,w^2)\tau+16\,u^2w^2(112\,u^3-153\,w)\big)\mu+24192\,uw^4\tau^4-256\,w^3(97\,u^3-27\,w)\tau^3\\
&+384\,u^2w^2(7\,u^3-45\,w)\tau^2+32\,uw^2(52\,u^3-135\,w)\tau+16\,w^2(16\,u^3-27\,w)\Big)\frac{\partial^6}{\partial w^3\partial u^3}\\
&+\Big(77760\,\mu^6(\nu+2)u^3w^5+\big(116640\,u^2w^5(\nu+2)\tau-864\,w^4u(285\,u^3\nu+580\,u^3-108\,w\nu-216\,w)\big)\mu^5\\
&+\big(-11664\,uw^5(\nu+2)\tau^2-432\,w^4(1344\,u^3\nu+2699\,u^3-108\,w\nu-216\,w)\tau\\
&+1296\,w^3u^2(185\,u^3\nu+391\,u^3-138\,w\nu-294\,w)\big)\mu^4+\big(-25272\,w^5(\nu+2)\tau^3-5832\,u^2w^4(63\,\nu+122)\tau^2\\
&+72\,w^3u(9831\,u^3\nu+20444\,u^3-3240\,w\nu-6858\,w)\tau\\
&-24\,w^2(2907\,\nu\,u^6+6740\,u^6-4212\,wu^3\nu-9648\,wu^3-648\,w^2\nu-1620\,w^2)\big)\mu^3\\
&+\big(-432\,w^4u(33\,\nu+7)\tau^3+216\,w^3(3552\,u^3\nu+7198\,u^3-441\,w\nu-972\,w)\tau^2\\
&-144\,w^2u^2(1323\,u^3\nu+3089\,u^3-1125\,w\nu-2511\,w)\tau\\
&+216\,wu(20\,\nu\,u^6+54\,u^6-177\,wu^3\nu-404\,wu^3+30\,w^2\nu+134\,w^2)\big)\mu^2\\
&+\big(864\,w^4(42\,\nu+97)\tau^4+3024\,w^3u^2(126\,\nu+247)\tau^3-144\,w^2u(1224\,u^3\nu+2908\,u^3-612\,w\nu-1179\,w)\tau^2\\
&+216\,w(36\,\nu\,u^6+98\,u^6-344\,wu^3\nu-818\,wu^3-15\,w^2\nu-10\,w^2)\tau+72\,wu^2(32\,u^3\nu+88\,u^3-99\,w\nu-240\,w)\big)\mu\\
&+288\,uw^3(276\,\nu+541)\tau^4-192\,w^2(288\,u^3\nu+701\,u^3-135\,w\nu-252\,w)\tau^3+432\,u^2w(8\,u^3\nu+22\,u^3-86\,w\nu-213\,w)\tau^2\\
&+144\,uw(14\,u^3\nu+39\,u^3-57\,w\nu-146\,w)\tau+24\,w(12\,u^3\nu+34\,u^3-27\,w\nu-72\,w)\Big)\frac{\partial^5}{\partial w^2\partial u^3}\\
&+\Big(19440\,\mu^6(18\,\nu^2+66\,\nu+61)u^2w^5+\big(19440\,uw^5(18\,\nu^2+66\,\nu+61)\tau\\
&-1296\,w^4(810\,\nu^2u^3+3030\,u^3\nu-108\,w\nu^2+2855\,u^3-396\,w\nu-366\,w)\big)\mu^5\\
&+\big(-972\,w^5(18\,\nu^2+66\,\nu+61)\tau^2-216\,u^2w^4(8622\,\nu^2+31824\,\nu+29693)\tau\\
&+108\,w^3u(8982\,\nu^2u^3+35010\,u^3\nu-1872\,w\nu^2+34159\,u^3-7632\,w\nu-7628\,w)\big)\mu^4\\
&+\big(-216\,w^4u(4275\,\nu^2+15327\,\nu+13985)\tau^2\\
&+72\,w^3(31410\,\nu^2u^3+120564\,u^3\nu-2430\,w\nu^2+116240\,u^3-9720\,w\nu-9639\,w)\tau\\
&-216\,w^2u^2(1251\,\nu^2u^3+5381\,u^3\nu-486\,w\nu^2+5655\,u^3-2250\,w\nu-2491\,w)\big)\mu^3+\big(-216\,w^4(333\,\nu^2+981\,\nu+731)\tau^3\\
&+36\,w^3u^2(53640\,\nu^2+201024\,\nu+189949)\tau^2\\
&-24\,w^2u(25281\,\nu^2u^3+110169\,u^3\nu-4914\,w\nu^2+116606\,u^3-22140\,w\nu-24474\,w)\tau\\
&+12\,w(1332\,\nu^2u^6+6732\,\nu\,u^6-7092\,wu^3\nu^2+7899\,u^6-30204\,wu^3\nu+1350\,w^2\nu^2-31672\,wu^3+9666\,w^2\nu+13611\,w^2)\big)\mu^2\\
&+\big(144\,w^3u(4932\,\nu^2+17937\,\nu+16450)\tau^3-48\,w^2(9576\,\nu^2u^3+42786\,u^3\nu-459\,w\nu^2+45958\,u^3-594\,w\nu+492\,w)\tau^2\\
&+24\,wu^2(1080\,\nu^2u^3+5598\,u^3\nu-5670\,w\nu^2+6620\,u^3-25272\,w\nu-27207\,w)\tau\\
&+24\,u(288\,wu^3\nu^2+4\,u^6+1584\,wu^3\nu-279\,w^2\nu^2+1931\,wu^3-1017\,w^2\nu-917\,w^2)\big)\mu\\
&+1296\,w^3(72\,\nu^2+272\,\nu+259)\tau^4-768\,w^2u^2(153\,\nu^2+711\,\nu+781)\tau^3\\
&+48\,wu(216\,\nu^2u^3+1152\,u^3\nu-1170\,w\nu^2+1357\,u^3-5607\,w\nu-6290\,w)\tau^2\\
&+(5472\,wu^3\nu^2+96\,u^6+31248\,wu^3\nu-7128\,w^2\nu^2+37504\,wu^3-34344\,w^2\nu-38520\,w^2)\tau\\
&+4\,u^2(180\,w\nu^2+8\,u^3+1116\,w\nu+1345\,w)\Big)\frac{\partial^4}{\partial w^2\partial u^2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\Big(25920\,u^2w^6(6\,\nu+13)\mu^6+\big(25920\,uw^6(6\,\nu+13)\tau-1728\,w^5(300\,u^3\nu+665\,u^3-36\,w\nu-78\,w)\big)\mu^5\\
&+\big(-1296\,w^6(6\,\nu+13)\tau^2-4320\,u^2w^5(210\,\nu+461)\tau+432\,uw^4(1302\,u^3\nu+3001\,u^3-168\,w\nu-412\,w)\big)\mu^4\\
&+\big(-864\,uw^5(537\,\nu+1153)\tau^2+2592\,w^4(492\,u^3\nu+1125\,u^3-30\,w\nu-71\,w)\tau\\
&-96\,u^2w^3(2235\,u^3\nu+5522\,u^3-270\,w\nu-783\,w)\big)\mu^3+\big(-2592\,w^5(15\,\nu+28)\tau^3+3888\,u^2w^4(280\,\nu+631)\tau^2\\
&-96\,uw^3(5061\,u^3\nu+12689\,u^3-324\,w\nu-945\,w)\tau\\
&+16\,w^2(1428\,\nu\,u^6+3817\,u^6-3636\,wu^3\nu-8580\,wu^3+1458\,w^2\nu+4779\,w^2)\big)\mu^2\\
&+\big(864\,uw^4(474\,\nu+1045)\tau^3-192\,w^3(2022\,u^3\nu+5209\,u^3+81\,w\nu+324\,w)\tau^2\\
&+32\,u^2w^2(1254\,u^3\nu+3443\,u^3-3402\,w\nu-8451\,w)\tau+32\,uw(12\,u^6+384\,wu^3\nu+1123\,wu^3-81\,w^2\nu)\big)\mu\\
&+20736\,w^4(3\,\nu+7)\tau^4-1152\,u^2w^3(96\,\nu+259)\tau^3+32\,uw^2(552\,u^3\nu+1544\,u^3-1782\,w\nu-4887\,w)\tau^2\\
&+96\,w(4\,u^6+114\,wu^3\nu+337\,wu^3-81\,w^2\nu-216\,w^2)\tau+16\,u^2w(8\,u^3+108\,w\nu+333\,w)\Big)\frac{\partial^5}{\partial w^3\partial u^2}\\
&+\Big(19440\,\mu^6(3\,\nu+5)(2\,\nu+3)(3\,\nu+4)w^4u^2+\big(19440\,w^4u(3\,\nu+5)(2\,\nu+3)(3\,\nu+4)\tau\\
&-1296\,w^3(3\,\nu+4)(3\,\nu+5)(80\,u^3\nu+125\,u^3-12\,w\nu-18\,w)\big)\mu^5+\big(-972\,w^4(3\,\nu+5)(2\,\nu+3)(3\,\nu+4)\tau^2\\
&-216\,w^3u^2(7830\,\nu^3+35091\,\nu^2+52464\,\nu+26116)\tau\\
&+108\,w^2u(6534\,\nu^3u^3+31059\,\nu^2u^3-2160\,\nu^3w+48585\,u^3\nu-10656\,w\nu^2+25076\,u^3-16968\,w\nu-8824\,w)\big)\mu^4\\
&+\big(-108\,w^3u(7560\,\nu^3+32625\,\nu^2+47427\,\nu+23114)\tau^2\\
&+36\,w^2(48222\,\nu^3u^3+223407\,\nu^2u^3-4860\,\nu^3w+342393\,u^3\nu-23814\,w\nu^2+173912\,u^3-38016\,w\nu-19872\,w)\tau\\
&-72\,wu^2(1539\,\nu^3u^3+8748\,\nu^2u^3-1728\,\nu^3w+15390\,u^3\nu-9666\,w\nu^2+8629\,u^3-17016\,w\nu-9624\,w)\big)\mu^3\\
&+\big(-108\,w^3(2+3\,\nu)(180\,\nu^2+459\,\nu+295)\tau^3+72\,w^2u^2(21006\,\nu^3+94023\,\nu^2+139821\,\nu+69203)\tau^2\\
&-36\,wu(6984\,\nu^3u^3+40185\,\nu^2u^3-4158\,\nu^3w+70807\,u^3\nu-21987\,w\nu^2+39638\,u^3-37689\,w\nu-21128\,w)\tau\\
&+7992\,\nu^2u^6-41472\,\nu^3u^3w+23256\,\nu\,u^6-240408\,wu^3\nu^2+16680\,u^6+1944\,w^2\nu^3-436248\,wu^3\nu+46332\,w^2\nu^2\\
&-253872\,wu^3+129060\,w^2\nu+94320\,w^2\big)\mu^2+\big(72\,w^2u(7560\,\nu^3+32544\,\nu^2+46491\,\nu+22088)\tau^3\\
&-36\,w(5040\,\nu^3u^3+29736\,\nu^2u^3-1350\,\nu^3w+52636\,u^3\nu-5391\,w\nu^2+29384\,u^3-7005\,w\nu-2992\,w)\tau^2\\
&-36\,u^2(-360\,\nu^2u^3+1566\,\nu^3w-1030\,u^3\nu+9531\,w\nu^2-728\,u^3+17493\,w\nu+10188\,w)\tau\\
&-24\,u(-144\,\nu^2u^3+135\,\nu^3w-408\,u^3\nu+837\,w\nu^2-290\,u^3+1623\,w\nu+1035\,w)\big)\mu+2304\,w^2(3\,\nu+5)(3\,\nu+4)^2\tau^4\\
&-576\,wu^2(72\,\nu^3+441\,\nu^2+781\,\nu+429)\tau^3\\
&-72\,u(-72\,\nu^2u^3+252\,\nu^3w-200\,u^3\nu+1638\,w\nu^2-136\,u^3+2999\,w\nu+1692\,w)\tau^2\\
&+(2736\,\nu^2u^3-1944\,\nu^3w+7416\,u^3\nu-13608\,w\nu^2+4928\,u^3-25704\,w\nu-14904\,w)\tau+8\,u^2(45\,\nu^2+117\,\nu+73)\Big)\frac{\partial^3}{\partial w\partial u^2}\\
&+\Big(6480\,\mu^6(3\,\nu+5)(3\,\nu+4)(\nu+1)w^3u^3+\big(9720\,w^3u^2(3\,\nu+5)(3\,\nu+4)(\nu+1)\tau\\
&-648\,w^2u(3\,\nu+5)(3\,\nu+4)(\nu+1)(25\,u^3-12\,w)\big)\mu^5+\big(-972\,w^3u(3\,\nu+5)(3\,\nu+4)(\nu+1)\tau^2\\
&-108\,w^2(\nu+1)(3384\,\nu^2u^3+9891\,u^3\nu-324\,w\nu^2+7196\,u^3-972\,w\nu-720\,w)\tau\\
&+324\,wu^2(\nu+1)(279\,\nu^2u^3+870\,u^3\nu-396\,w\nu^2+656\,u^3-1278\,w\nu-988\,w)\big)\mu^4\\
&+(-2106\,w^3(3\,\nu+5)(3\,\nu+4)(\nu+1)\tau^3-324\,w^2u^2(\nu+1)(720\,\nu^2+1962\,\nu+1357)\tau^2\\
&+18\,wu(17469\,\nu^3u^3+69759\,\nu^2u^3-9072\,\nu^3w+90372\,u^3\nu-38394\,w\nu^2+38092\,u^3-52290\,w\nu-22968\,w)\tau\\
&-10854\,\nu^2u^6+56376\,\nu^3u^3w-24030\,\nu\,u^6+255960\,wu^3\nu^2-13116\,u^6-5832\,w^2\nu^3+363744\,wu^3\nu-17496\,w^2\nu^2\\
&+164448\,wu^3-12960\,w^2\nu-1296\,w^2)\mu^3+(-324\,w^2u(\nu+1)(18\,\nu^2-99\,\nu-158)\tau^3\\
&+108\,w(3510\,\nu^3u^3+13563\,\nu^2u^3-378\,\nu^3w+17079\,u^3\nu-1701\,w\nu^2+7028\,u^3-2478\,w\nu-1155\,w)\tau^2\\
&+36\,u^2(-846\,\nu^2u^3+3213\,\nu^3w-1818\,u^3\nu+13743\,w\nu^2-970\,u^3+18804\,w\nu+8304\,w)\tau\\
&+18\,u(-405\,\nu^2u^3+270\,\nu^3w-861\,u^3\nu+1602\,w\nu^2-450\,u^3+2724\,w\nu+1424\,w))\mu^2+(864\,w^2(\nu+1)(18\,\nu^2+72\,\nu+67)\tau^4\\
&+432\,wu^2(432\,\nu^3+1611\,\nu^2+1959\,\nu+779)\tau^3\\
&+36\,u(-756\,\nu^2u^3+1944\,\nu^3w-1548\,u^3\nu+7713\,w\nu^2-796\,u^3+9945\,w\nu+4180\,w)\tau^2\\
&+(-12420\,\nu^2u^3+3402\,\nu^3w-24516\,u^3\nu+17982\,w\nu^2-12192\,u^3+29592\,w\nu+15336\,w)\tau\\
&-6\,u^2(207\,\nu^2+387\,\nu+190))\mu+288\,wu(108\,\nu^3+387\,\nu^2+447\,\nu+167)\tau^4\\
&+(-7776\,\nu^2u^3+11664\,\nu^3w-14688\,u^3\nu+41796\,w\nu^2-7008\,u^3+47628\,w\nu+17280\,w)\tau^3\\
&-12\,u^2(423\,\nu^2+729\,\nu+316)\tau^2-36\,\tau\,(9\,\nu+7)(2+3\,\nu)u-6\,(2+3\,\nu)(1+3\,\nu)\Big)\frac{\partial^3}{\partial u^3}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\Big(6480\,\mu^6u^4w^5+\big(12960\,u^3w^5\tau-864\,u^2w^4(25\,u^3-18\,w)\big)\mu^5+\big(-1944\,u^2w^5\tau^2-1728\,uw^4(37\,u^3-9\,w)\tau\\
&+72\,w^3(307\,u^6-468\,wu^3+54\,w^2)\big)\mu^4+\big(-8424\,uw^5\tau^3-1944\,w^4(25\,u^3+w)\tau^2+72\,u^2w^3(1109\,u^3-864\,w)\tau\\
&-216\,u^4w^2(31\,u^3-95\,w)\big)\mu^3+\big(-324\,w^5\tau^4+4752\,u^2w^4\tau^3+108\,uw^3(973\,u^3-342\,w)\tau^2\\
&-216\,w^2(101\,u^6-198\,wu^3+12\,w^2)\tau+72\,u^2w(6\,u^6-85\,wu^3+33\,w^2)\big)\mu^2\\
&+\big(15984\,uw^4\tau^4+72\,w^3(896\,u^3-45\,w)\tau^3-216\,u^2w^2(110\,u^3-153\,w)\tau^2+72\,uw(12\,u^6-190\,wu^3+21\,w^2)\tau\\
&+72\,w(4\,u^6-27\,wu^3-9\,w^2)\big)\mu+2592\,w^4\tau^5+17136\,u^2w^3\tau^4-432\,uw^2(20\,u^3-29\,w)\tau^3\\
&+36\,w(12\,u^6-212\,wu^3+63\,w^2)\tau^2+72\,u^2w(4\,u^3-31\,w)\tau+24\,uw(2\,u^3-9\,w)\Big)\frac{\partial^6}{\partial w^2\partial u^4}\\
&+\Big(648\,\mu^6(3\,\nu+5)w^3u^5+\big(1620\,w^3u^4(3\,\nu+5)\tau-108\,w^2u^3(17\,u^3-24\,w)(3\,\nu+5)\big)\mu^5\\
&+\big(-324\,w^3u^3(3\,\nu+5)\tau^2-54\,w^2u^2(390\,u^3\nu+641\,u^3-216\,w\nu-360\,w)\tau\\
&+54\,wu(72\,\nu\,u^6+123\,u^6-294\,wu^3\nu-508\,wu^3+108\,w^2\nu+180\,w^2)\big)\mu^4\\
&+\big(-2106\,w^3u^2(3\,\nu+5)\tau^3-108\,w^2u(186\,u^3\nu+292\,u^3+27\,w\nu+45\,w)\tau^2\\
&+162\,w(123\,\nu\,u^6+206\,u^6-252\,wu^3\nu-434\,wu^3+18\,w^2\nu+30\,w^2)\tau\\
&+54\,u^2(-3\,u^6+132\,wu^3\nu+239\,wu^3-162\,w^2\nu-258\,w^2)\big)\mu^3\\
&+\big(-162\,w^3u(3\,\nu+5)\tau^4+54\,w^2(102\,u^3\nu+224\,u^3-63\,w\nu-105\,w)\tau^3+162\,wu^2(225\,u^3\nu+369\,u^3-150\,w\nu-268\,w)\tau^2\\
&+162\,u(-4\,u^6+153\,wu^3\nu+265\,wu^3-66\,w^2\nu-107\,w^2)\tau-270\,u^6+3888\,wu^3\nu+6966\,wu^3-972\,w^2\nu-1296\,w^2\big)\mu^2\\
&+\big(324\,w^3(3\,\nu+5)\tau^5+54\,w^2u^2(228\,\nu+425)\tau^4+54\,wu(522\,u^3\nu+840\,u^3+24\,w\nu+13\,w)\tau^3\\
&+(-810\,u^6+27216\,wu^3\nu+45522\,wu^3-972\,w^2\nu-2268\,w^2)\tau^2\\
&+162\,u^2(-4\,u^3+49\,w\nu+84\,w)\tau+18\,u(-7\,u^3+36\,w\nu+63\,w)\big)\mu+108\,w^2u(24\,\nu+49)\tau^5\\
&+324\,w(24\,u^3\nu+38\,u^3+3\,w\nu+6\,w)\tau^4+54\,u^2(-6\,u^3+174\,w\nu+283\,w)\tau^3+54\,u(-7\,u^3+69\,w\nu+114\,w)\tau^2\\
&+(-144\,u^3+486\,w\nu+810\,w)\tau-18\,u^2\Big)\frac{\partial^5}{\partial u^5}\\
&+\Big(3240\,\mu^6(6\,\nu+11)w^4u^4+\big(6480\,w^4u^3(6\,\nu+11)\tau-432\,w^3u^2(135\,u^3\nu+250\,u^3-108\,w\nu-198\,w)\big)\mu^5\\
&+\big(-972\,u^2w^4(6\,\nu+11)\tau^2-1296\,w^3u(137\,u^3\nu+250\,u^3-36\,w\nu-66\,w)\tau\\
&+36\,w^2(1374\,\nu\,u^6+2633\,u^6-2664\,wu^3\nu-5124\,wu^3+324\,w^2\nu+594\,w^2)\big)\mu^4\\
&+\big(-4212\,w^4u(6\,\nu+11)\tau^3-108\,w^3(1272\,u^3\nu+2219\,u^3+54\,w\nu+99\,w)\tau^2\\
&+72\,w^2u^2(2652\,u^3\nu+4979\,u^3-2484\,w\nu-4752\,w)\tau\\
&-36\,wu(234\,\nu\,u^6+522\,u^6-1434\,wu^3\nu-2933\,wu^3+324\,w^2\nu+468\,w^2)\big)\mu^3\\
&+\big(-162\,w^4(6\,\nu+11)\tau^4+216\,w^3u^2(63\,\nu+188)\tau^3+54\,w^2u(4902\,u^3\nu+8939\,u^3-1656\,w\nu-3306\,w)\tau^2\\
&-108\,w(264\,\nu\,u^6+591\,u^6-1104\,wu^3\nu-2168\,wu^3+108\,w^2\nu+180\,w^2)\tau\\
&-108\,u^2(-2\,u^6+86\,wu^3\nu+192\,wu^3-78\,w^2\nu-181\,w^2)\big)\mu^2+\big(324\,w^3u(122\,\nu+255)\tau^4\\
&+36\,w^2(4548\,u^3\nu+8026\,u^3-90\,w\nu-285\,w)\tau^3-324\,wu^2(94\,u^3\nu+213\,u^3-298\,w\nu-551\,w)\tau^2\\
&-216\,u(-2\,u^6+88\,wu^3\nu+201\,wu^3-48\,w^2\nu-101\,w^2)\tau+144\,u^6-2808\,wu^3\nu-6552\,wu^3-648\,w^2\nu-756\,w^2\big)\mu\\
&+216\,w^3(24\,\nu+55)\tau^5+72\,w^2u^2(552\,\nu+949)\tau^4-36\,wu(288\,u^3\nu+666\,u^3-834\,w\nu-1453\,w)\tau^3\\
&+(216\,u^6-9288\,wu^3\nu-21924\,wu^3+5508\,w^2\nu+9666\,w^2)\tau^2\\
&-36\,u^2(-4\,u^3+72\,w\nu+177\,w)\tau-24\,u(-u^3+9\,w\nu+24\,w)\Big)\frac{\partial^5}{\partial w\partial u^4}\\
&+\Big(1620\,\mu^6(3\,\nu+4)(3\,\nu+5)w^3u^4+\big(3240\,w^3u^3(3\,\nu+4)(3\,\nu+5)\tau-432\,w^2u^2(3\,\nu+4)(3\,\nu+5)(10\,u^3-9\,w)\big)\mu^5\\
&+\big(-486\,w^3u^2(3\,\nu+4)(3\,\nu+5)\tau^2-18\,w^2u(6822\,\nu^2u^3+20133\,u^3\nu-1944\,w\nu^2+14728\,u^3-5832\,w\nu-4320\,w)\tau\\
&+18\,w(1431\,\nu^2u^6+4410\,\nu\,u^6-3744\,wu^3\nu^2+3324\,u^6-11736\,wu^3\nu+486\,w^2\nu^2-8968\,wu^3+1458\,w^2\nu+1080\,w^2)\big)\mu^4\\
&+\big(-2106\,w^3u(3\,\nu+4)(3\,\nu+5)\tau^3-18\,w^2(5436\,\nu^2u^3+15264\,u^3\nu+243\,w\nu^2+10730\,u^3+729\,w\nu+540\,w)\tau^2\\
&+54\,wu^2(2043\,\nu^2u^3+6144\,u^3\nu-2376\,w\nu^2+4540\,u^3-7434\,w\nu-5688\,w)\tau\\
&+54\,u(-39\,\nu\,u^6+549\,wu^3\nu^2-50\,u^6+1818\,wu^3\nu-288\,w^2\nu^2+1444\,wu^3-792\,w^2\nu-520\,w^2)\big)\mu^3\\
&+\big(-81\,w^3(3\,\nu+4)(3\,\nu+5)\tau^4+54\,w^2u^2(171\,\nu^2+909\,\nu+902)\tau^3\\
&+27\,wu(6165\,\nu^2u^3+18063\,u^3\nu-2016\,w\nu^2+13052\,u^3-6624\,w\nu-5332\,w)\tau^2\\
&+(-7128\,\nu\,u^6+81324\,wu^3\nu^2-8964\,u^6+255960\,wu^3\nu-10692\,w^2\nu^2+196272\,wu^3-30618\,w^2\nu-21168\,w^2)\tau
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+18\,u^2(-129\,u^3\nu+441\,w\nu^2-158\,u^3+1530\,w\nu+1268\,w)\big)\mu^2\\
&+\big(18\,w^2u(1368\,\nu^2+4797\,\nu+4012)\tau^4+18\,w(5832\,\nu^2u^3+16650\,u^3\nu+45\,w\nu^2+11736\,u^3-90\,w\nu-260\,w)\tau^3\\
&+18\,u^2(-423\,u^3\nu+3843\,w\nu^2-516\,u^3+11520\,w\nu+8504\,w)\tau^2\\
&+18\,u(-264\,u^3\nu+621\,w\nu^2-308\,u^3+2016\,w\nu+1620\,w)\tau-702\,u^3\nu+162\,w\nu^2-756\,u^3+972\,w\nu+1224\,w\big)\mu\\
&+144\,w^2(18\,\nu^2+72\,\nu+67)\tau^5+2592\,wu^2(9\,\nu^2+25\,\nu+17)\tau^4+18\,u(-144\,u^3\nu+1008\,w\nu^2-168\,u^3+2853\,w\nu+1964\,w)\tau^3\\
&+(-2322\,u^3\nu+3483\,w\nu^2-2520\,u^3+9963\,w\nu+6876\,w)\tau^2-36\,\tau\,(17+18\,\nu)u^2-18\,u(2+3\,\nu)\Big)\frac{\partial^4}{\partial u^4}\\
&+\Big(12960\,\mu^6(3\,\nu+5)^2w^4u^3+\big(19440\,u^2w^4(3\,\nu+5)^2\tau-1296\,w^3u(3\,\nu+5)(85\,u^3\nu+145\,u^3-36\,w\nu-60\,w)\big)\mu^5\\
&+\big(-1944\,w^4u(3\,\nu+5)^2\tau^2-72\,w^3(11106\,\nu^2u^3+36846\,u^3\nu-972\,w\nu^2+30671\,u^3-3240\,w\nu-2700\,w)\tau\\
&+72\,w^2u^2(3681\,\nu^2u^3+12888\,u^3\nu-3672\,w\nu^2+11198\,u^3-13014\,w\nu-11364\,w)\big)\mu^4+\big(-4212\,w^4(3\,\nu+5)^2\tau^3\\
&-108\,w^3u^2(4680\,\nu^2+14859\,\nu+11939)\tau^2\\
&+12\,w^2u(69345\,\nu^2u^3+237240\,u^3\nu-28188\,w\nu^2+202229\,u^3-99468\,w\nu-86778\,w)\tau\\
&-12\,w(3618\,\nu^2u^6+14931\,\nu\,u^6-11484\,wu^3\nu^2+14523\,u^6-43992\,wu^3\nu-324\,w^2\nu^2-40964\,wu^3-2268\,w^2\nu-2988\,w^2)\big)\mu^3\\
&+\big(-216\,w^3u(72\,\nu^2-93\,\nu-298)\tau^3+36\,w^2(25992\,\nu^2u^3+86112\,u^3\nu-3024\,w\nu^2+71326\,u^3-11205\,w\nu-10275\,w)\tau^2\\
&-72\,wu^2(1692\,\nu^2u^3+7029\,u^3\nu-3339\,w\nu^2+6838\,u^3-12222\,w\nu-11062\,w)\tau\\
&-36\,u(-60\,\nu\,u^6+810\,wu^3\nu^2-98\,u^6+3363\,wu^3\nu-162\,w^2\nu^2+3307\,wu^3-1224\,w^2\nu-1584\,w^2)\big)\mu^2\\
&+\big(144\,w^3(288\,\nu^2+1143\,\nu+1093)\tau^4+72\,w^2u^2(6408\,\nu^2+20466\,\nu+16319)\tau^3\\
&-72\,wu(1512\,\nu^2u^3+6390\,u^3\nu-1962\,w\nu^2+6240\,u^3-6462\,w\nu-5353\,w)\tau^2\\
&+(3888\,\nu\,u^6-49680\,wu^3\nu^2+6264\,u^6-213840\,wu^3\nu+972\,w^2\nu^2-213000\,wu^3+11664\,w^2\nu+18036\,w^2)\tau\\
&-12\,u^2(-96\,u^3\nu+414\,w\nu^2-152\,u^3+1881\,w\nu+1973\,w)\big)\mu+48\,w^2u(1800\,\nu^2+5652\,\nu+4381)\tau^4\\
&-48\,w(648\,\nu^2u^3+2808\,u^3\nu-639\,w\nu^2+2742\,u^3-1962\,w\nu-1474\,w)\tau^3\\
&-24\,u^2(-72\,u^3\nu+846\,w\nu^2-114\,u^3+3798\,w\nu+3773\,w)\tau^2-24\,u(-42\,u^3\nu+162\,w\nu^2-65\,u^3+783\,w\nu+801\,w)\tau\\
&+144\,u^3\nu-216\,w\nu^2+216\,u^3-1188\,w\nu-1236\,w\Big)\frac{\partial^4}{\partial w\partial u^3}\\
&+\Big(12960\,\mu^6(6\,\nu+11)(6\,\nu^2+22\,\nu+21)w^6-25920\,\mu^5(54\,\nu^3+306\,\nu^2+585\,\nu+377)uw^5\\
&+\big(-864\,w^5(1116\,\nu^3+6354\,\nu^2+12245\,\nu+7965)\tau+864\,u^2w^4(1584\,\nu^3+9396\,\nu^2+18685\,\nu+12465)\big)\mu^4\\
&+\big(144\,w^4u(11826\,\nu^3+71127\,\nu^2+143559\,\nu+97217)\tau\\
&-48\,w^3(9846\,\nu^3u^3+63009\,\nu^2u^3-2268\,\nu^3w+132841\,u^3\nu-14202\,w\nu^2+92863\,u^3-29664\,w\nu-20580\,w)\big)\mu^3\\
&+\big(72\,w^4(6696\,\nu^3+40518\,\nu^2+82632\,\nu+56707)\tau^2-48\,w^3u^2(15012\,\nu^3+100728\,\nu^2+220506\,\nu+159091)\tau\\
&+24\,w^2u(1872\,\nu^3u^3+12942\,\nu^2u^3-5940\,\nu^3w+28652\,u^3\nu-39222\,w\nu^2+20637\,u^3-85326\,w\nu-61270\,w)\big)\mu^2\\
&+\big(-48\,w^3u(5616\,\nu^3+40968\,\nu^2+95388\,\nu+72329)\tau^2\\
&+16\,w^2(4464\,\nu^3u^3+33480\,\nu^2u^3-5994\,\nu^3w+79040\,u^3\nu-39717\,w\nu^2+60082\,u^3-87165\,w\nu-63303\,w)\tau\\
&+16\,wu^2(144\,\nu^2u^3+1458\,\nu^3w+756\,u^3\nu+11961\,w\nu^2+937\,u^3+29781\,w\nu+23439\,w)\big)\mu\\
&-96\,w^3(648\,\nu^2+2520\,\nu+2501)\tau^3+32\,w^2u^2(864\,\nu^3+6984\,\nu^2+17616\,\nu+14215)\tau^2+\\
&\frac{16}{3}\,wu(288\,\nu^2u^3+3240\,\nu^3w+1872\,u^3\nu+28728\,w\nu^2+2722\,u^3+77292\,w\nu+65469\,w)\tau\\
&+3264\,wu^3\nu+\frac{160}{9}\,u^6+70968\,w^2+77040\,w^2\nu+\frac{16816}{3}\,wu^3+2592\,w^2\nu^3+25920\,w^2\nu^2+384\,wu^3\nu^2\Big)\frac{\partial^3}{\partial w^3}\\
&+\Big(19440\,\mu^6(3\,\nu+4)(3\,\nu+5)(3\,\nu^2+9\,\nu+7)w^5-12960\,\mu^5(3\,\nu+4)(3\,\nu+5)(12\,\nu^2+38\,\nu+31)w^4u\\
&+\big(-216\,w^4(4374\,\nu^4+26946\,\nu^3+62820\,\nu^2+65415\,\nu+25600)\tau\\
&+216\,w^3u^2(5346\,\nu^4+34614\,\nu^3+83610\,\nu^2+89475\,\nu+35800)\big)\mu^4\\
&+\big(72\,w^3u(19602\,\nu^4+127197\,\nu^3+309168\,\nu^2+333708\,\nu+134792)\tau\\
&-72\,w^2(4050\,\nu^4u^3+29313\,\nu^3u^3-810\,\nu^4w+76536\,\nu^2u^3-6156\,\nu^3w+86764\,u^3\nu-16920\,w\nu^2\\
&+36296\,u^3-20007\,w\nu-8616\,w)\big)\mu^3+\big(12\,w^3(34344\,\nu^4+219024\,\nu^3+527859\,\nu^2+568665\,\nu+230320)\tau^2\\
&-24\,w^2u^2(17172\,\nu^4+130248\,\nu^3+351045\,\nu^2+407835\,\nu+174056)\tau\\
&+12\,wu(1296\,\nu^4u^3+11232\,\nu^3u^3-5508\,\nu^4w+32679\,\nu^2u^3-41634\,\nu^3w+39645\,u^3\nu-114120\,w\nu^2\\
&+17312\,u^3-135288\,w\nu-58784\,w)\big)\mu^2+\big(-8\,w^2u(18144\,\nu^4+149688\,\nu^3+424512\,\nu^2+511137\,\nu+224228)\tau^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+ 8\,w(2592\,\nu^4u^3 + 24408\,\nu^3u^3 - 5508\,\nu^4w + 74520\,\nu^2u^3 - 40581\,\nu^3w + 93390\,u^3\nu - 109557\,w\nu^2 + 41728\,u^3\\
&- 129033\,w\nu - 55988\,w)\tau + 8\,u^2(3\,\nu+4)(216\,\nu^3w + 24\,u^3\nu + 2061\,w\nu^2 + 49\,u^3 + 4809\,w\nu + 3245\,w)\big)\mu\\
&- 192\,w^2(216\,\nu^3 + 954\,\nu^2 + 1416\,\nu + 707)\tau^3 + \frac{256}{3}\,wu^2(9\,\nu^2 + 66\,\nu + 94)(3\,\nu+4)^2\tau^2\\
&+ \frac{8}{3}\,u(1296\,\nu^4w + 144\,\nu^2u^3 + 14580\,\nu^3w + 576\,u^3\nu + 48744\,w\nu^2 + 536\,u^3 + 64017\,w\nu + 29020\,w)\tau\\
&+ \frac{38368}{3}\,w + \frac{1504}{3}\,u^3 + 27228\,w\nu + 19524\,w\nu^2 + 456\,u^3\nu + 96\,\nu^2u^3 + 432\,\nu^4w + 5400\,\nu^3w\Big)\frac{\partial^2}{\partial w^2}\\
&+ 27\,w\Big(2\,\mu^3u^3w + 3\,\mu^2\tau\,u^2w - 3\,\mu^2u^4 - 3\,\mu\,\tau^2uw - 9\,\mu\,\tau\,u^3 + 6\,\mu^2uw - 2\,\tau^3w - 6\,\tau^2u^2 + 3\,\mu\,\tau\,w - 4\,\mu\,u^2 - 5\,\tau\,u - 1\Big)^2\frac{\partial^6}{\partial u^6}\\
&+ \frac{64}{27}\,w^3\Big(54\,\mu^3w^3 - 108\,\mu^2uw^2 - 81\,\mu\,w^2\tau + 45\,\mu\,u^2w + 54\,\tau\,uw + 2\,u^3 + 27\,w\Big)^2\frac{\partial^6}{\partial w^6}\\
&+ 36\,w\Big(2\,\mu^3u^3w + 3\,\mu^2\tau\,u^2w - 3\,\mu^2u^4 - 3\,\mu\,\tau^2uw - 9\,\mu\,\tau\,u^3 + 6\,\mu^2uw - 2\,\tau^3w - 6\,\tau^2u^2\\
&+ 3\,\mu\,\tau\,w - 4\,\mu\,u^2 - 5\,\tau\,u - 1)(18\,\mu^3u^2w^2 + 18\,\mu^2\tau\,uw^2 - 30\,\mu^2u^3w - 9\,\mu\,\tau^2w^2 - 57\,\mu\,\tau\,u^2w + 6\,\mu\,u^4\\
&+ 18\,\mu^2w^2 - 30\,\tau^2uw + 6\,\tau\,u^3 - 6\,\mu\,uw - 9\,\tau\,w + 2\,u^2\Big)\frac{\partial^6}{\partial w\partial u^5}\\
&+ \frac{64}{3}\,w^3\Big(54\,\mu^3w^3 - 108\,\mu^2uw^2 - 81\,\mu\,w^2\tau + 45\,\mu\,u^2w + 54\,\tau\,uw + 2\,u^3 + 27\,w)(18\,\mu^3uw^2\\
&+ 9\,\mu^2\tau\,w^2 - 33\,\mu^2u^2w - 39\,\mu\,\tau\,uw + 11\,\mu\,u^3 - 18\,\tau^2w + 10\,\tau\,u^2 + 9\,\mu\,w + 3\,u\Big)\frac{\partial^6}{\partial w^5\partial u}\Big)
\end{aligned}
$$

D.2. K_m como operador diferencial

$$
\begin{aligned}
k_1(u,w) = \frac{2}{243}\Big(&\big(209952\,\mu^2 uw + (6718464\,\tau^2 uw + 209952\,\tau\, w - 23328\,u^2)\mu \\
&+ 6718464\,\tau^3 w - 2239488\,\tau^2 u^2 + 93312\,\tau\, u + 46656\big)\frac{\partial}{\partial w} \\
&+ 104976\,(32\,\tau^2 + \mu)(\mu\, u^2 + 2\,\tau\, u + 1)\frac{\partial}{\partial u} \\
&+ 104976\,\nu\,(32\,\tau^2 + \mu)(3\,\mu\, u + 4\,\tau)\Big)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
k_2(u,w) = \frac{2}{243}\Big(& - 157464\,\nu\, w(3\,\nu + 1)\mu^3 + \big(-5038848\,\nu\, w(3\,\nu + 1)\tau^2 + 839808\,\nu\, u^2(3\,\nu + 1)\tau - 52488\,\nu\, u(4\,\nu - 3)\big)\,\mu^2 \\
&+ \big(419904\,\nu\, u(8\,\nu + 87)\tau^2 - 5832\,\nu\,(99\,\nu - 115)\tau\big)\,\mu - 559872\,\nu\,(19\,\nu - 78)\tau^3 \\
&+ \Big(- 104976\,uw(3\,\nu + 1)\mu^3 + \big(-3359232\,uw(3\,\nu + 1)\tau^2 + 17496\,(32\,u^3 - 3\,w)(3\,\nu + 1)\tau + 5832\,u^2(27\,\nu + 22)\big)\,\mu^2 \\
&+ \big(-1679616\,w(3\,\nu + 1)\tau^3 + 139968\,u^2(68\,\nu + 107)\tau^2 + 11664\,u(144\,\nu + 61)\tau - 52488\,\nu + 58320\big)\,\mu \\
&+ 279936\,u(8\,\nu + 87)\tau^3 + (-559872\,\nu + 11617344)\,\tau^2\Big)\frac{\partial}{\partial u} \\
&+ \Big(- 209952\,\mu^3 uw^2 + \big(-6718464\,uw^2\tau^2 + 34992\,w(32\,u^3 - 3\,w)\tau + 198288\,u^2 w\big)\,\mu^2 \\
&+ \big(-3359232\,\tau^3 w^2 + 11244096\,\tau^2 u^2 w - 15552\,u(23\,u^3 - 87\,w)\tau + 77760\,u^3 + 151632\,w\big)\,\mu + 11290752\,\tau^3 uw \\
&+ (-715392\,u^3 + 4478976\,w)\tau^2 - 248832\,u^2\tau + 46656\,u\Big)\frac{\partial^2}{\partial w\partial u} \\
&+ \Big(- 52488\,\mu^3 u^2 w + \big(-1679616\,\tau^2 u^2 w + 17496\,u(16\,u^3 - 3\,w)\tau + 75816\,u^3 + 52488\,w\big)\,\mu^2 \\
&+ \big(-1679616\,\tau^3 uw + (2799360\,u^3 + 1627128\,w)\tau^2 + 670680\,u^2\tau + 40824\,u\big)\,\mu \\
&- 1679616\,\tau^4 w + 2799360\,\tau^3 u^2 + 1702944\,\tau^2 u + 291600\,\tau\Big)\frac{\partial^2}{\partial u^2} \\
&+ \Big(- 209952\,\mu^3 w^3 + \big(-6718464\,\tau^2 w^3 + 1119744\,\tau\, u^2 w^2 + 93312\,uw^2\big)\,\mu^2 \\
&+ \big(11290752\,uw^2\tau^2 - 15552\,w(46\,u^3 + 3\,w)\tau + 155520\,u^2 w\big)\,\mu + 8024832\,\tau^3 w^2 - 1430784\,\tau^2 u^2 w \\
&+ 15552\,u(8\,u^3 + 17\,w)\tau - 5184\,u^3 + 85536\,w\Big)\frac{\partial^2}{\partial w^2} \\
&+ \Big(- 314928\,w^2(2\,\nu + 1)\mu^3 + \big(-10077696\,w^2(2\,\nu + 1)\tau^2 + 1679616\,u^2 w(2\,\nu + 1)\tau + 198288\,uw\big)\,\mu^2 \\
&+ \big(46656\,uw(411\,\nu + 764)\tau^2 + (-1073088\,\nu\, u^3 - 715392\,u^3 - 279936\,\nu\, w + 583200\,w)\tau + 15552\,u^2(18\,\nu + 7)\big)\,\mu \\
&+ 93312\,w(99\,\nu + 323)\tau^3 + 31104\,u^2(51\,\nu - 271)\tau^2 + 186624\,u(\nu - 1)\tau + 23328\,\nu + 54432\Big)\frac{\partial}{\partial w}\Big)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
k_3(u,w) = \frac{2}{243}\Big(&\big(-857304\,\nu\, uw(3\,\nu + 2)(3\,\nu + 1)\tau + 2916\,\nu\,(3\,\nu + 1)(6\,\nu\, u^3 + 4\,u^3 + 90\,\nu\, w + 3\,w)\big)\,\mu^3 \\
&+ \big(34992\,\nu\, w(3\,\nu + 1)(93\,\nu - 488)\tau^2 + 11664\,\nu\, u^2(105\,\nu + 268)(3\,\nu + 1)\tau - 2916\,\nu\, u(93\,\nu^2 + 227\,\nu - 193)\big)\,\mu^2 \\
&+ \big(-11664\,\nu\, u(225\,\nu^2 - 1839\,\nu - 3430)\tau^2 + 972\,\nu\,(108\,\nu^2 - 93\,\nu + 5429)\tau\big)\,\mu + 7776\,\nu\,(495\,\nu^2 - 2053\,\nu + 4970)\tau^3 \\
&+ \Big(\big(-857304\,u^2 w(3\,\nu + 2)(3\,\nu + 1)\tau + 5832\,u(3\,\nu + 1)(3\,\nu\, u^3 + 2\,u^3 + 6\,\nu\, w - 15\,w)\big)\,\mu^3 \\
&+ \big(-116640\,uw(3\,\nu + 112)(3\,\nu + 1)\tau^2 + 972\,(3\,\nu + 1)(1776\,\nu\, u^3 + 2768\,u^3 \\
&-972\,\nu\, w - 129\,w)\tau - 972\,u^2(129\,\nu^2 + 20\,\nu - 266)\big)\,\mu^2 \\
&+ \big(23328\,w(3\,\nu + 1)(51\,\nu - 259)\tau^3 + 3888\,u^2(225\,\nu^2 + 9507\,\nu + 5936)\tau^2 \\
&+1944\,u(807\,\nu^2 + 3121\,\nu + 1209)\tau - 37908\,\nu^2 - 153576\,\nu + 204120\big)\,\mu \\
&- 7776\,u(225\,\nu^2 - 1839\,\nu - 3430)\tau^3 + (244944\,\nu^2 + 1994544\,\nu + 11492928)\tau^2\Big)\frac{\partial}{\partial u} \\
&+ \Big(\big(-2286144\,\tau\, uw^4 + 15552\,w^3(u^3 + 12\,w)\big)\,\mu^3 + (-2472768\,\tau^2 w^4 + 3841344\,\tau\, u^2 w^3 - 419904\,uw^3)\mu^2 \\
&+ \big(5769792\,uw^3\tau^2 - 5184\,w^2(232\,u^3 + 63\,w)\tau - 5184\,u^2 w(u^3 - 30\,w)\big)\,\mu + 2612736\,\tau^3 w^3 - 1005696\,\tau^2 u^2 w^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+ 15552\, uw(4\, u^3 + 5\, w)\tau - 576\, u^3(2\, u^3 + 33\, w)\Big) \frac{\partial^3}{\partial w^3} \\
&+ \Big(\big(-1714608\, uw^2(3\,\nu + 2)^2\tau + 5832\, w(18\,\nu^2 u^3 + 24\,\nu\, u^3 + 252\,\nu^2 w + 8\, u^3 + 216\,\nu\, w + 51\, w)\big)\, \mu^3 \\
&+ \big(34992\, w^2(213\,\nu^2 - 2031\,\nu - 1082)\tau^2 + 11664\, u^2 w(1161\,\nu^2 + 2517\,\nu + 1030)\tau - 1944\, uw(741\,\nu^2 + 953\,\nu + 3)\big)\, \mu^2 \\
&+ \big(-23328\, uw(63\,\nu^2 - 3406\,\nu - 3000)\tau^2 + (-279936\,\nu^2 u^3 - 4377888\,\nu\, u^3 - 845640\,\nu^2 w - 2794176\, u^3 + 1331640\,\nu\, w \\
&+2846016\, w)\tau - 648\, u^2(15\,\nu^2 - 473\,\nu + 64)\big)\, \mu - 7776\, w(747\,\nu^2 - 4443\,\nu - 5984)\tau^3 \\
&- 7776\, u^2(99\,\nu^2 - 239\,\nu + 1300)\tau^2 - 2592\, u(27\,\nu^2 - 30\,\nu + 371)\tau - 1296\,(9\,\nu + 5)(3\,\nu + 1)\Big) \frac{\partial}{\partial w} \\
&+ \Big(\big(-1714608\, u^2 w^2(6\,\nu + 5)\tau + 11664\, uw(6\,\nu\, u^3 + 5\, u^3 + 6\,\nu\, w - 15\, w)\big)\, \mu^3 \\
&+ \big(-116640\, uw^2(81\,\nu + 299)\tau^2 + 1944\, w(5676\,\nu\, u^3 + 6668\, u^3 - 2034\,\nu\, w - 1191\, w)\tau - 1944\, u^2 w(246\,\nu + 43)\big)\, \mu^2 \\
&+ \big(93312\, w^2(9\,\nu - 146)\tau^3 + 7776\, u^2 w(1698\,\nu + 6827)\tau^2 - 2592\, u(234\,\nu\, u^3 + 737\, u^3 - 1827\,\nu\, w - 2937\, w)\tau \\
&+77760\,\nu\, u^3 + 106272\, u^3 - 221616\,\nu\, w + 52488\, w\big)\, \mu + 15552\, uw(12\,\nu + 2785)\tau^3 + \\
&(-186624\,\nu\, u^3 - 2794176\, u^3 + 209952\,\nu\, w + 17122752\, w)\tau^2 + 2592\, u^2(45\,\nu - 439)\tau + 23328\, u\Big) \frac{\partial^2}{\partial w \partial u} \\
&+ \Big(\big(-857304\, u^3 w(3\,\nu + 2)\tau + 2916\, u^2(6\,\nu\, u^3 + 4\, u^3 - 66\,\nu\, w - 63\, w)\big)\, \mu^3 + \big(-11664\, u^2 w(339\,\nu + 776)\tau^2 \\
&+972\, u\,\big(2292\,\nu\, u^3 + 2320\, u^3 - 1296\,\nu\, w - 345\, w\big)\,\tau + 110808\,\nu\, u^3 + 152604\, u^3 - 87480\,\nu\, w + 20412\, w\big)\, \mu^2 \\
&+ \big(-11664\, uw(105\,\nu + 656)\tau^3 + (3277584\,\nu\, u^3 + 11539584\, u^3 - 2029536\,\nu\, w + 5549148\, w)\tau^2 \\
&+2916\, u^2(660\,\nu + 907)\tau + 972\, u(36\,\nu + 67)\big)\, \mu + 23328\, w(51\,\nu - 259)\tau^4 \\
&+ 7776\, u^2(75\,\nu + 1253)\tau^3 + 3888\, u(204\,\nu + 1397)\tau^2 + (145800\,\nu + 781488)\tau\Big) \frac{\partial^2}{\partial u^2} \\
&+ \Big((-3429216\,\tau\, u^2 w^3 + 23328\, u^4 w^2)\mu^3 + \big(-5832000\, uw^3\tau^2 + 7776\, w^2(650\, u^3 - 177\, w)\tau - 233280\, u^2 w^2\big)\, \mu^2 \\
&+ \big(-1026432\,\tau^3 w^3 + 10847520\,\tau^2 u^2 w^2 - 18144\, uw(52\, u^3 - 141\, w)\tau \\
&-2592\, u^6 + 116640\, u^3 w - 23328\, w^2\big)\, \mu + 5769792\,\tau^3 uw^2 \\
&- 20736\, w(58\, u^3 - 117\, w)\tau^2 - 2592\, u^2(2\, u^3 + 143\, w)\tau - 2592\, u(u^3 - 15\, w)\Big) \frac{\partial^3}{\partial w^2 \partial u} \\
&+ \Big(\big(-1714608\,\tau\, u^3 w^2 + 11664\, u^2 w(u^3 - 12\, w)\big)\, \mu^3 + \big(-3977424\,\tau^2 u^2 w^2 + 3888\, uw(559\, u^3 - 231\, w)\tau + 69984\, u^3 w\big)\, \mu^2 \\
&+ \big(-2122848\,\tau^3 uw^2 + 3888\, w(1486\, u^3 - 27\, w)\tau^2 - 7776\, u^2(22\, u^3 - 277\, w)\tau + 11664\, u(2\, u^3 + 5\, w)\big)\, \mu - 513216\,\tau^4 w^2 \\
&+ 3981312\,\tau^3 u^2 w - 15552\, u(11\, u^3 - 195\, w)\tau^2 + (-33696\, u^3 + 618192\, w)\tau + 7776\, u^2\Big) \frac{\partial^3}{\partial w \partial u^2} \\
&+ \Big(\big(-285768\,\tau\, u^4 w + 1944\, u^3(u^3 - 24\, w)\big)\, \mu^3 + \big(-839808\,\tau^2 u^3 w + 11664\, u^2(26\, u^3 - 9\, w)\tau + 40824\, u^4\big)\, \mu^2 \\
&+ \big(-804816\,\tau^3 u^2 w + 11664\, u(77\, u^3 + 19\, w)\tau^2 + (482112\, u^3 + 274104\, w)\tau + 29160\, u^2\big)\, \mu + 5832 - 536544\,\tau^4 uw \\
&+ (598752\, u^3 - 279936\, w)\tau^3 + 544320\,\tau^2 u^2 + 132192\,\tau\, u\Big) \frac{\partial^3}{\partial u^3} \\
&+ \Big(\big(-10287648\, uw^3(\nu + 1)\tau + 34992\, w^2(2\,\nu\, u^3 + 2\, u^3 + 26\,\nu\, w + 19\, w)\big)\, \mu^3 \\
&+ \big(-69984\, w^3(44\,\nu + 449)\tau^2 + 23328\, u^2 w^2(564\,\nu + 755)\tau - 7776\, uw^2(189\,\nu + 157)\big)\, \mu^2 \\
&+ \big(7776\, uw^2(1137\,\nu + 7054)\tau^2 - 2592\, w(768\,\nu\, u^3 + 2006\, u^3 + 387\,\nu\, w - 192\, w)\tau \\
&-2592\, u^2(3\,\nu\, u^3 + 4\, u^3 - 99\,\nu\, w - 142\, w)\big)\, \mu \\
&+ 15552\, w^2(15\,\nu + 2032)\tau^3 - 10368\, u^2 w(48\,\nu + 703)\tau^2 - 2592\, u(42\,\nu\, u^3 - 124\, u^3 + 3\,\nu\, w + 119\, w)\tau \\
&- 12960\,\nu\, u^3 - 21600\, u^3 - 62208\,\nu\, w + 3888\, w\Big) \frac{\partial^2}{\partial w^2}\Big)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
k_4(u, w) = \frac{2}{243}\Big(&\big(669222\,\nu\, w^2(3\,\nu + 2)(3\,\nu + 1)(\nu + 1)\tau - 39366\,\nu\, u^2 w(3\,\nu + 2)(3\,\nu + 1)(\nu + 1)\big)\, \mu^4 \\
&+ \big(-52488\,\nu\, uw(3\,\nu + 2)(3\,\nu + 1)(8\,\nu + 53)\tau + 1458\,\nu\,(3\,\nu + 1)(72\,\nu^2 u^3 + 108\,\nu\, u^3 - 78\,\nu^2 w + 40\, u^3 + 116\,\nu\, w - 205\, w)\big)\, \mu^3 \\
&+ \big(-11664\,\nu\, w(3\,\nu + 1)(162\,\nu^2 - 321\,\nu + 1397)\tau^2 + 1944\,\nu\, u^2(3\,\nu + 1)(36\,\nu^2 + 2169\,\nu + 1616)\tau \\
&+486\,\nu\, u(288\,\nu^3 + 717\,\nu^2 - 1561\,\nu + 1763)\big)\, \mu^2 + (34992\,\nu\, u(51\,\nu^3 + 41\,\nu^2 + 518\,\nu + 533)\tau^2 \\
&+ 162\,\nu\,(111\,\nu^3 + 4370\,\nu^2 - 19308\,\nu + 52927)\tau)\mu - 1944\,\nu\,(399\,\nu^3 - 3232\,\nu^2 + 5165\,\nu - 8128)\tau^3 \\
&+ \Big(\big(892296\, uw^2(3\,\nu + 2)(3\,\nu + 1)(\nu + 1)\tau - 17496\, w(3\,\nu + 2)(3\,\nu + 1)(\nu + 1)(3\, u^3 - 4\, w)\big)\, \mu^4
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+ \big(393660\, w^2(3\,\nu+2)(3\,\nu+1)(\nu+1)\tau^2 - 8748\, u^2 w(3\,\nu+2)(3\,\nu+1)(107\,\nu+377)\tau \\
&+972\, u(3\,\nu+1)(162\,\nu^2 u^3 + 252\,\nu\, u^3 - 303\,\nu^2 w + 96\, u^3 - 331\,\nu\, w - 403\, w)\big)\,\mu^3 \\
&+ \big(-3888\, uw(3\,\nu+1)(594\,\nu^2 + 1743\,\nu + 4264)\tau^2 \\
&+ 162\,(3\,\nu+1)(4608\,\nu^2 u^3 + 38016\,\nu\, u^3 - 45\,\nu^2 w + 24784\, u^3 - 14781\,\nu\, w - 1857\, w)\tau \\
&+162\, u^2(2151\,\nu^3 + 3201\,\nu^2 + 2387\,\nu + 2872)\big)\,\mu^2 + \big(-1944\, w(3\,\nu+1)(297\,\nu^2 - 615\,\nu + 3382)\tau^3 \\
&+ 648\, u^2(4347\,\nu^3 + 22050\,\nu^2 + 58821\,\nu + 23852)\tau^2 - 324\, u(1224\,\nu^3 - 18681\,\nu^2 - 19871\,\nu - 6855)\tau \\
&-13122\,\nu^3 + 92826\,\nu^2 - 374058\,\nu + 245592\big)\,\mu + 23328\, u(51\,\nu^3 + 41\,\nu^2 + 518\,\nu + 533)\tau^3 \\
&+ (-87480\,\nu^3 + 1831248\,\nu^2 + 1743768\,\nu + 4608576)\tau^2\Big)\,\frac{\partial}{\partial u} \\
&+ \Big(\big(16061328\, uw^3(\nu+1)^2\tau - 314928\, w^2(\nu+1)^2(3\, u^3 - 4\, w)\big)\,\mu^4 \\
&+ \big(7085880\, w^3(\nu+1)^2\tau^2 - 157464\, u^2 w^2(164\,\nu^2 + 527\,\nu + 333)\tau \\
&+1944\, uw(567\,\nu^2 u^3 + 1125\,\nu\, u^3 - 843\,\nu^2 w + 564\, u^3 - 1681\,\nu\, w - 1213\, w)\big)\,\mu^3 + \big(-7776\, uw^2(2943\,\nu^2 + 10293\,\nu + 10465)\tau^2 \\
&+ 324\, w(30420\,\nu^2 u^3 + 162900\,\nu\, u^3 - 9279\,\nu^2 w + 123856\, u^3 - 46209\,\nu\, w - 24051\, w)\tau \\
&-324\, u^2(252\,\nu^2 u^3 + 516\,\nu\, u^3 - 2571\,\nu^2 w + 264\, u^3 - 4507\,\nu\, w - 4757\, w)\big)\,\mu^2 \\
&+ \big(-3888\, w^2(891\,\nu^2 + 2445\,\nu + 5848)\tau^3 + 3888\, u^2 w(3069\,\nu^2 + 17471\,\nu + 22657)\tau^2 \\
&+ 432\, u(738\,\nu^2 u^3 - 4662\,\nu\, u^3 + 2007\,\nu^2 w - 7109\, u^3 + 44088\,\nu\, w + 39666\, w)\tau - 202176\,\nu^2 u^3 - 391392\,\nu\, u^3 - 125388\,\nu^2 w \\
&-193968\, u^3 - 518076\,\nu\, w + 31428\, w\big)\,\mu + 2592\, uw(1800\,\nu^2 + 5712\,\nu + 19999)\tau^3 \\
&+ (311040\,\nu^2 u^3 - 1275264\,\nu\, u^3 + 1003104\,\nu^2 w - 3062880\, u^3 + 5388768\,\nu\, w + 19950624\, w)\tau^2 \\
&- 3888\, u^2(17\,\nu^2 + 129\,\nu + 302)\tau - 1296\, u(27\,\nu^2 + 51\,\nu + 23)\Big)\,\frac{\partial^2}{\partial w\partial u} \\
&+ \Big(\big(3569184\, uw^4(3\,\nu+4)\tau - 69984\, w^3(3\, u^3 - 4\, w)(3\,\nu+4)\big)\,\mu^4 + \big(1574640\, w^4(3\,\nu+4)\tau^2 - 34992\, u^2 w^3(663\,\nu + 1211)\tau \\
&+11664\, uw^2(72\,\nu\, u^3 + 97\, u^3 - 90\,\nu\, w - 140\, w)\big)\,\mu^3 + \big(-34992\, uw^3(665\,\nu + 1447)\tau^2 \\
&+3888\, w^2(3336\,\nu\, u^3 + 8674\, u^3 - 1035\,\nu\, w - 2103\, w)\tau - 1296\, u^2 w(69\,\nu\, u^3 + 89\, u^3 - 450\,\nu\, w - 744\, w)\big)\,\mu^2 \\
&+ \big(-69984\, w^3(47\,\nu + 133)\tau^3 + 27216\, u^2 w^2(672\,\nu + 2141)\tau^2 - 3888\, uw(38\,\nu\, u^3 + 952\, u^3 - 840\,\nu\, w - 3501\, w)\tau \\
&-25920\,\nu\, u^6 - 48816\, u^6 - 373248\,\nu\, u^3 w - 519696\, u^3 w - 349920\,\nu\, w^2 - 486000\, w^2\big)\,\mu + 116640\, uw^2(56\,\nu + 225)\tau^3 \\
&+ 5184\, w(48\,\nu\, u^3 - 787\, u^3 + 405\,\nu\, w + 2031\, w)\tau^2 - 432\, u^2(48\,\nu\, u^3 + 106\, u^3 + 252\,\nu\, w + 4473\, w)\tau \\
&- 1296\, u(4\,\nu\, u^3 + 11\, u^3 + 63\,\nu\, w + 86\, w)\Big)\,\frac{\partial^3}{\partial w^2\partial u} \\
&+ \Big(\big(1338444\, u^2 w^2(\nu+1)(3\,\nu+2)\tau - 26244\, uw(\nu+1)(3\,\nu+2)(3\, u^3 - 8\, w)\big)\,\mu^4 \\
&+ \big(1180980\, uw^2(\nu+1)(3\,\nu+2)\tau^2 - 8748\, w(3\,\nu+2)(225\,\nu\, u^3 + 495\, u^3 + 41\,\nu\, w + 41\, w)\tau \\
&+486\, u^2(540\,\nu^2 u^3 + 864\,\nu\, u^3 - 1869\,\nu^2 w + 336\, u^3 - 3157\,\nu\, w - 1591\, w)\big)\,\mu^3 \\
&+ \big(603612\, w^2(\nu+1)(3\,\nu+2)\tau^3 - 972\, u^2 w(5589\,\nu^2 + 22431\,\nu + 19202)\tau^2 \\
&+ 162\, u(14940\,\nu^2 u^3 + 60264\,\nu\, u^3 - 4905\,\nu^2 w + 34280\, u^3 - 18129\,\nu\, w - 1929\, w)\tau \\
&+336798\,\nu^2 u^3 + 546750\,\nu\, u^3 - 150174\,\nu^2 w + 372114\, u^3 - 369846\,\nu\, w - 6318\, w\big)\,\mu^2 \\
&+ \big(-1944\, uw(621\,\nu^2 + 4245\,\nu + 6478)\tau^3 + (2630232\,\nu^2 u^3 + 14084280\,\nu\, u^3 + 753786\,\nu^2 w + 14884560\, u^3 \\
&-3423870\,\nu\, w + 5203602\, w)\tau^2 + 1458\, u^2(269\,\nu^2 + 4093\,\nu + 2383)\tau + 162\, u(393\,\nu^2 + 589\,\nu + 555)\big)\,\mu \\
&- 1944\, w(297\,\nu^2 - 615\,\nu + 3382)\tau^4 + 648\, u^2(1143\,\nu^2 + 6723\,\nu + 14258)\tau^3 - 648\, u(72\,\nu^2 - 5469\,\nu - 6476)\tau^2 \\
&+ (-72900\,\nu^2 + 644436\,\nu + 339876)\tau\Big)\,\frac{\partial^2}{\partial u^2} \\
&+ \Big(\big(1784592\, u^2 w^4\tau - 34992\, uw^3(3\, u^3 - 8\, w)\big)\,\mu^4 + \big(1574640\, uw^4\tau^2 - 11664\, w^3(396\, u^3 + 41\, w)\tau + 11664\, u^2 w^2(13\, u^3 - 40\, w)\big)\,\mu^3 \\
&+ \big(804816\, w^4\tau^3 - 6689304\, u^2 w^3\tau^2 + 38880\, uw^2(83\, u^3 - 30\, w)\tau - 1944\, w(9\, u^6 - 104\, u^3 w + 78\, w^2)\big)\,\mu^2 \\
&+ \big(-2752704\, uw^3\tau^3 + 19440\, w^2(316\, u^3 + 3\, w)\tau^2 - 2592\, u^2 w(58\, u^3 - 789\, w)\tau - 1296\, u(4\, u^6 + 45\, u^3 w - 3\, w^2)\big)\,\mu \\
&- 583200\, w^3\tau^4 + 3203712\, u^2 w^2\tau^3 - 2592\, uw(49\, u^3 - 813\, w)\tau^2 \\
&+ (-5184\, u^6 - 88992\, u^3 w + 349920\, w^2)\tau - 216\, u^2(8\, u^3 + 69\, w)\Big)\,\frac{\partial^4}{\partial w^2\partial u^2} \\
&+ \Big(\big(892296\, u^2 w^3(6\,\nu+7)\tau - 17496\, uw^2(3\, u^3 - 8\, w)(6\,\nu+7)\big)\,\mu^4 + \big(787320\, uw^3(6\,\nu+7)\tau^2 \\
&-5832\, w^2(1863\,\nu\, u^3 + 3069\, u^3 + 246\,\nu\, w + 287\, w)\tau + 5832\, u^2 w(69\,\nu\, u^3 + 80\, u^3 - 222\,\nu\, w - 284\, w)\big)\,\mu^3
\end{aligned}
$$

$$+\bigl(402408\,w^3(6\,\nu+7)\tau^3-5832\,u^2w^2(2256\,\nu+4817)\tau^2+1944\,uw(2958\,\nu\,u^3+6628\,u^3-1161\,\nu\,w-1743\,w)\tau-31104\,\nu\,u^6$$
$$-37584\,u^6+513216\,\nu\,u^3w+715392\,u^3w-349920\,\nu\,w^2-379080\,w^2\bigr)\,\mu^2+\bigl(-11664\,uw^2(381\,\nu+1162)\tau^3$$
$$+1944\,w(4308\,\nu\,u^3+13420\,u^3+63\,\nu\,w+330\,w)\tau^2+1944\,u^2(10\,\nu\,u^3-288\,u^3+1359\,\nu\,w+4549\,w)\tau$$
$$-648\,u(96\,\nu\,u^3+104\,u^3-99\,\nu\,w-180\,w)\bigr)\,\mu-23328\,w^2(33\,\nu+137)\tau^4+7776\,u^2w(348\,\nu+1873)\tau^3$$
$$+3888\,u(14\,\nu\,u^3-132\,u^3+285\,\nu\,w+2558\,w)\tau^2$$
$$+(-29808\,\nu\,u^3-216864\,u^3+17496\,\nu\,w+1778760\,w)\tau-1296\,u^2(12\,\nu+11)\Bigr)\frac{\partial^3}{\partial w\partial u^2}$$
$$+\Bigl((594864\,u^3w^3\tau-34992\,u^2w^2(u^3-4\,w))\mu^4+\bigl(787320\,u^2w^3\tau^2-11664\,uw^2(125\,u^3+41\,w)\tau$$
$$+1944\,u^3w(25\,u^3-136\,w)\bigr)\,\mu^3+\bigl(804816\,uw^3\tau^3-5832\,w^2(414\,u^3+47\,w)\tau^2+3888\,u^2w(247\,u^3-61\,w)\tau$$
$$-1944\,u(2\,u^6-59\,u^3w+54\,w^2)\bigr)\,\mu^2+(279936\,w^3\tau^4-1597968\,u^2w^2\tau^3+3888\,uw(486\,u^3+85\,w)\tau^2$$
$$+(-11664\,u^6+848880\,u^3w+256608\,w^2)\tau-648\,u^2(8\,u^3-93\,w))\mu-723168\,uw^2\tau^4+54432\,w(18\,u^3-5\,w)\tau^3$$
$$-1296\,u^2(6\,u^3-599\,w)\tau^2-1296\,u(5\,u^3-138\,w)\tau-1296\,u^3+9720\,w\Bigr)\frac{\partial^4}{\partial w\partial u^3}$$
$$+\Bigl(\bigl(74358\,u^4w^2\tau-1458\,u^3w(3\,u^3-16\,w)\bigr)\,\mu^4+\bigl(131220\,u^3w^2\tau^2-2916\,u^2w(59\,u^3+41\,w)\tau+1458\,u^4(4\,u^3-33\,w)\bigr)\,\mu^3$$
$$+\bigl(201204\,u^2w^2\tau^3-2916\,uw(103\,u^3+47\,w)\tau^2+(110808\,u^6+3888\,u^3w+68526\,w^2)\tau+486\,u^2(46\,u^3-39\,w)\bigr)\,\mu^2$$
$$+\bigl(139968\,uw^2\tau^4-1458\,w(176\,u^3+95\,w)\tau^3+486\,u^2(432\,u^3+143\,w)\tau^2+972\,u(118\,u^3+41\,w)\tau+15552\,u^3+1458\,w\bigr)\,\mu$$
$$+69984\,\tau^5w^2-128304\,u^2w\tau^4+972\,u(108\,u^3-47\,w)\tau^3+(94284\,u^3-1458\,w)\tau^2+28512\,\tau\,u^2+2916\,u\Bigr)\frac{\partial^4}{\partial u^4}$$
$$+\Bigl(\bigl(892296\,u^3w^2(\nu+1)\tau-52488\,u^2w(u^3-4\,w)(\nu+1)\bigr)\,\mu^4+(1180980\,u^2w^2(\nu+1)\tau^2$$
$$-8748\,uw(193\,\nu\,u^3+283\,u^3+82\,\nu\,w+82\,w)\tau+1944\,u^3(33\,\nu\,u^3+32\,u^3-186\,\nu\,w-198\,w))\mu^3$$
$$+\bigl(1207224\,uw^2(\nu+1)\tau^3-2916\,w(738\,\nu\,u^3+1598\,u^3+141\,\nu\,w+141\,w)\tau^2+1944\,u^2(462\,\nu\,u^3+836\,u^3-129\,\nu\,w+3\,w)\tau$$
$$+5832\,u(25\,\nu\,u^3+28\,u^3-21\,\nu\,w-17\,w)\bigr)\,\mu^2+\bigl(419904\,w^2(\nu+1)\tau^4-139968\,u^2w(7\,\nu+27)\tau^3$$
$$+1944\,u(648\,\nu\,u^3+1776\,u^3+21\,\nu\,w+533\,w)\tau^2+(515160\,\nu\,u^3+1511784\,u^3-78732\,\nu\,w+817452\,w)\tau$$
$$+1944\,u^2(33\,\nu+34)\bigr)\,\mu-46656\,uw(3\,\nu+43)\tau^4+(419904\,\nu\,u^3+1881792\,u^3+64152\,\nu\,w-832032\,w)\tau^3$$
$$+648\,u^2(375\,\nu+2257)\tau^2+648\,u(81\,\nu+449)\tau+5832\,\nu+3888\Bigr)\frac{\partial^3}{\partial u^3}$$
$$+\Bigl(\bigl(892296\,w^3(6\,\nu+5)(3\,\nu+2)(\nu+1)\tau-52488\,u^2w^2(6\,\nu+5)(3\,\nu+2)(\nu+1)\bigr)\,\mu^4$$
$$+\bigl(-17496\,uw^2(3\,\nu+2)(363\,\nu^2+1561\,\nu+928)\tau$$
$$+2916\,w(342\,\nu^3u^3+846\,\nu^2u^3-138\,\nu^3w+700\,\nu\,u^3+115\,\nu^2w+192\,u^3-397\,\nu\,w-251\,w)\bigr)\,\mu^3$$
$$+\bigl(-11664\,w^2(1323\,\nu^3+2289\,\nu^2+8936\,\nu+4210)\tau^2+3888\,u^2w(963\,\nu^3+13626\,\nu^2+18940\,\nu+6794)\tau$$
$$-324\,u(216\,\nu^3u^3+540\,\nu^2u^3-2088\,\nu^3w+444\,\nu\,u^3-2775\,\nu^2w+120\,u^3-3205\,\nu\,w-4559\,w)\bigr)\,\mu^2$$
$$+\bigl(1296\,uw(6318\,\nu^3+21474\,\nu^2+80745\,\nu+49592)\tau^2$$
$$+(466560\,\nu^3u^3-1601856\,\nu^2u^3+542376\,\nu^3w-5869584\,\nu\,u^3+771768\,\nu^2w-3062880\,u^3+8447976\,\nu\,w+5327856\,w)\tau$$
$$-216\,u^2(801\,\nu^3+2670\,\nu^2+194\,\nu+1189)\bigr)\,\mu+1296\,w(2700\,\nu^3-1413\,\nu^2+24069\,\nu+24832)\tau^3$$
$$+432\,u^2(864\,\nu^3-4329\,\nu^2-687\,\nu-11996)\tau^2$$
$$-864\,u(189\,\nu^3+333\,\nu^2+741\,\nu+593)\tau-29160\,\nu^3-75816\,\nu^2-58968\,\nu-15336\Bigr)\frac{\partial}{\partial w}$$
$$+\Bigl(\bigl(3569184\,w^5(2\,\nu+3)\tau-209952\,u^2w^4(2\,\nu+3)\bigr)\,\mu^4+\bigl(-69984\,uw^4(235\,\nu+471)\tau$$
$$+7776\,w^3(75\,\nu\,u^3+115\,u^3+24\,\nu\,w+27\,w)\bigr)\,\mu^3+\bigl(-11664\,w^4(954\,\nu+2143)\tau^2+46656\,u^2w^3(217\,\nu+625)\tau$$
$$-1296\,uw^2(42\,\nu\,u^3+53\,u^3-198\,\nu\,w-330\,w)\bigr)\,\mu^2+\bigl(23328\,uw^3(516\,\nu+1597)\tau^2$$
$$-2592\,w^2(192\,\nu\,u^3+2150\,u^3-135\,\nu\,w-519\,w)\tau-864\,u^2w(60\,\nu\,u^3+125\,u^3+495\,\nu\,w+774\,w)\bigr)\,\mu$$
$$+15552\,w^3(234\,\nu+841)\tau^3-15552\,u^2w^2(24\,\nu+301)\tau^2-2592\,uw(44\,\nu\,u^3-30\,u^3+252\,\nu\,w+505\,w)\tau$$
$$-1728\,u^6-24192\,\nu\,u^3w-73440\,u^3w-186624\,\nu\,w^2-361584\,w^2\Bigr)\frac{\partial^3}{\partial w^3}$$
$$+\Bigl(\bigl(892296\,w^4(18\,\nu^2+42\,\nu+25)\tau-52488\,u^2w^3(18\,\nu^2+42\,\nu+25)\bigr)\,\mu^4+\bigl(-34992\,uw^3(801\,\nu^2+2850\,\nu+2122)\tau$$
$$+1944\,w^2(594\,\nu^2u^3+1404\,\nu\,u^3+21\,\nu^2w+852\,u^3+209\,\nu\,w-226\,w)\bigr)\,\mu^3+\bigl(-1944\,w^3(9639\,\nu^2+29553\,\nu+37540)\tau^2$$
$$+2592\,u^2w^2(4302\,\nu^2+27234\,\nu+25259)\tau-648\,uw(171\,\nu^2u^3+369\,\nu\,u^3-1086\,\nu^2w+200\,u^3-1708\,\nu\,w-2430\,w)\bigr)\,\mu^2$$

$$
\begin{aligned}
&+ \big(1296\, uw^2(11160\,\nu^2 + 51879\,\nu + 80498)\tau^2 \\
&+ 216\, w(3168\,\nu^2 u^3 - 31932\,\nu\, u^3 + 3213\,\nu^2 w - 51956\, u^3 + 11403\,\nu\, w + 31722\, w)\tau \\
&-216\, u^2(144\,\nu^2 u^3 + 510\,\nu\, u^3 + 2499\,\nu^2 w + 424\, u^3 + 5629\,\nu\, w + 3786\, w)\big)\, \mu + 7776\, w^2(597\,\nu^2 + 1833\,\nu + 5428)\tau^3 \\
&+ 864\, u^2 w(279\,\nu^2 - 3309\,\nu - 13564)\tau^2 - 144\, u(144\,\nu^2 u^3 + 1080\,\nu\, u^3 + 4050\,\nu^2 w - 640\, u^3 + 8937\,\nu\, w + 16557\, w)\tau \\
&- 5184\,\nu^2 u^3 - 33264\,\nu\, u^3 - 134136\,\nu^2 w - 39600\, u^3 - 390744\,\nu\, w - 286632\, w\Big)\, \frac{\partial^2}{\partial w^2} \\
&+ 288\, w\Big(4131\,\mu^4 \tau\, w^5 - 243\,\mu^4 u^2 w^4 - 11826\,\mu^3 \tau\, uw^4 + 378\,\mu^3 u^3 w^3 - 8829\,\mu^2 \tau^2 w^4 + 9936\,\mu^2 \tau\, u^2 w^3 - 27\,\mu^2 u^4 w^2 \\
&+ 189\,\mu^3 w^4 + 12744\,\mu\,\tau^2 uw^3 - 1728\,\mu\,\tau\, u^3 w^2 - 72\,\mu\, u^5 w + 108\,\mu^2 uw^3 + 4536\,\tau^3 w^3 - 1548\,\tau^2 u^2 w^2 - 72\,\tau\, u^4 w \\
&- 4\, u^6 + 243\,\mu\,\tau\, w^3 - 369\,\mu\, u^2 w^2 - 810\,\tau\, uw^2 - 74\, u^3 w - 270\, w^2\Big)\, \frac{\partial^4}{\partial w^4} \\
&+ 864\, w\Big(2754\,\mu^4 \tau\, uw^4 - 162\,\mu^4 u^3 w^3 + 1215\,\mu^3 \tau^2 w^4 - 7506\,\mu^3 \tau\, u^2 w^3 + 243\,\mu^3 u^4 w^2 + 216\,\mu^4 w^4 - 8559\,\mu^2 \tau^2 uw^3 \\
&+ 5706\,\mu^2 \tau\, u^3 w^2 - 27\,\mu^2 u^5 w - 270\,\mu^3 uw^3 - 1350\,\mu\,\tau^3 w^3 + 9540\,\mu\,\tau^2 u^2 w^2 - 582\,\mu\,\tau\, u^4 w - 24\,\mu\, u^6 - 1566\,\mu^2 \tau\, w^3 \\
&+ 162\,\mu^2 u^2 w^2 + 4248\,\tau^3 uw^2 - 576\,\tau^2 u^3 w - 24\,\tau\, u^5 + 1980\,\mu\,\tau\, uw^2 - 184\,\mu\, u^3 w \\
&+ 1674\,\tau^2 w^2 - 354\,\tau\, u^2 w - 8\, u^4 - 189\,\mu\, w^2 - 45\, uw\Big)\, \frac{\partial^4}{\partial w^3 \partial u}\Big)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
k_5(u,w) = \frac{2}{243}\Big(&26244\,\nu\, uw^2(3\,\nu + 2)(3\,\nu + 4)(3\,\nu + 1)(\nu + 1)\mu^5 + \big(-6561\,\nu\, w^2(3\,\nu + 2)(60\,\nu - 217)(3\,\nu + 1)(\nu + 1)\tau \\
&-2187\,\nu\, u^2 w(60\,\nu + 71)(3\,\nu + 2)(3\,\nu + 1)(\nu + 1)\big)\, \mu^4 + \big(486\,\nu\, uw(3\,\nu + 2)(3\,\nu + 1)(936\,\nu^2 - 3114\,\nu - 4075)\tau \\
&+ 81\,\nu\,(3\,\nu + 1)(1944\,\nu^3 u^3 + 5076\,\nu^2 u^3 + 216\,\nu^3 w + 4134\,\nu\, u^3 - 3690\,\nu^2 w + 1076\, u^3 + 7416\,\nu\, w - 4305\, w)\big)\mu^3 \\
&+ \big(1944\,\nu\, w(3\,\nu + 1)(594\,\nu^3 - 2043\,\nu^2 + 807\,\nu - 3275)\tau^2 - 648\,\nu\, u^2(3\,\nu + 2)(3\,\nu + 1)(198\,\nu^2 - 969\,\nu - 542)\tau \\
&- 486\,\nu\, u(3\,\nu + 1)(6\,\nu^3 - 482\,\nu^2 + 783\,\nu - 479)\big)\mu^2 + \big(- 3888\,\nu\, u(3\,\nu + 1)(198\,\nu^3 - 822\,\nu^2 + 653\,\nu - 773)\tau^2 \\
&+ 27\,\nu\,(18\,\nu^4 - 2229\,\nu^3 + 75234\,\nu^2 - 97538\,\nu + 104735)\tau\big)\mu - 216\,\nu\,(2862\,\nu^4 - 11826\,\nu^3 + 11268\,\nu^2 - 4559\,\nu - 7025)\tau^3 \\
&+ \Big(43740\, u^2 w^2(3\,\nu + 2)(3\,\nu + 4)(3\,\nu + 1)(\nu + 1)\mu^5 + \big(- 4374\, uw^2(3\,\nu + 2)(105\,\nu - 454)(3\,\nu + 1)(\nu + 1)\tau \\
&- 1458\, w(3\,\nu + 2)(3\,\nu + 1)(\nu + 1)(165\,\nu\, u^3 + 202\, u^3 + 24\,\nu\, w + 24\, w)\big)\mu^4 \\
&+ \big(- 4374\, w^2(3\,\nu + 2)(54\,\nu - 223)(3\,\nu + 1)(\nu + 1)\tau^2 + 486\, u^2 w(3\,\nu + 2)(3\,\nu + 1)(1098\,\nu^2 - 5343\,\nu - 6466)\tau \\
&+ 162\, u(3\,\nu + 1)(1944\,\nu^3 u^3 + 5346\,\nu^2 u^3 + 423\,\nu^3 w + 4695\,\nu\, u^3 - 294\,\nu^2 w + 1330\, u^3 + 3243\,\nu\, w - 1233\, w)\big)\mu^3 \\
&+ \big(648\, uw(3\,\nu + 1)(3132\,\nu^3 - 9621\,\nu^2 - 13596\,\nu - 13654)\tau^2 \\
&- 27\,(3\,\nu + 1)(15984\,\nu^3 u^3 - 115992\,\nu^2 u^3 - 13338\,\nu^3 w - 181584\,\nu\, u^3 + 20187\,\nu^2 w - 64768\, u^3 + 18531\,\nu\, w + 10383\, w)\tau \\
&+ 27\, u^2(3\,\nu + 1)(1530\,\nu^3 + 12099\,\nu^2 - 6831\,\nu + 8777)\big)\mu^2 + \big(648\, w(3\,\nu + 1)(432\,\nu^3 - 2016\,\nu^2 - 651\,\nu - 4307)\tau^3 \\
&- 216\, u^2(3\,\nu + 1)(5508\,\nu^3 - 21132\,\nu^2 - 6459\,\nu - 17767)\tau^2 - 324\, u(3\,\nu + 1)(474\,\nu^3 - 1784\,\nu^2 - 1961\,\nu - 1591)\tau \\
&- 27\,(3\,\nu + 1)(126\,\nu^3 - 1059\,\nu^2 + 2733\,\nu - 1321)\big)\mu - 2592\, u(3\,\nu + 1)(198\,\nu^3 - 822\,\nu^2 + 653\,\nu - 773)\tau^3 \\
&- 216\,(3\,\nu + 1)(594\,\nu^3 - 2475\,\nu^2 + 1947\,\nu - 2323)\tau^2\Big)\, \frac{\partial}{\partial u} \\
&+ \Big(699840\, uw^6(\nu + 2)\mu^5 + \big(- 34992\, w^6(4\,\nu - 107)\tau - 3888\, u^2 w^5(492\,\nu + 1007)\big)\mu^4 \\
&+ \big(- 69984\, uw^5(13\,\nu + 183)\tau + 1296\, w^4(1206\,\nu\, u^3 + 2530\, u^3 - 408\,\nu\, w - 789\, w)\big)\mu^3 \\
&+ \big(746496\, w^5(\nu - 9)\tau^2 + 7776\, u^2 w^4(230\,\nu + 1573)\tau - 2592\, uw^3(122\,\nu\, u^3 + 251\, u^3 - 435\,\nu\, w - 924\, w)\big)\mu^2 \\
&+ \big(- 38880\, uw^4(13\,\nu - 264)\tau^2 - 1296\, w^3(524\,\nu\, u^3 + 2160\, u^3 - 648\,\nu\, w - 1431\, w)\tau \\
&- 144\, u^2 w^2(222\,\nu\, u^3 + 704\, u^3 + 3384\,\nu\, w + 8145\, w)\big)\mu - 46656\, w^4(17\,\nu - 54)\tau^3 - 10368\, u^2 w^3(37\,\nu + 189)\tau^2 \\
&- 864\, uw^2(46\,\nu\, u^3 + 104\, u^3 + 621\,\nu\, w + 1701\, w)\tau - 48\, w(32\, u^6 + 246\,\nu\, u^3 w + 1194\, u^3 w + 2592\,\nu\, w^2 + 7857\, w^2)\Big)\, \frac{\partial^4}{\partial w^4} \\
&+ \Big(174960\, u^2 w^4(18\,\nu^2 + 54\,\nu + 41)\mu^5 + (-17496\, uw^4(198\,\nu^2 - 1332\,\nu - 2141)\tau \\
&- 5832\, w^3(1278\,\nu^2 u^3 + 3876\,\nu\, u^3 + 180\,\nu^2 w + 2983\, u^3 + 528\,\nu\, w + 396\, w))\mu^4 + \big(- 17496\, w^4(99\,\nu^2 - 663\,\nu - 1067)\tau^2 \\
&+ 1944\, u^2 w^3(1557\,\nu^2 - 32742\,\nu - 48721)\tau \\
&+ 648\, uw^2(7722\,\nu^2 u^3 + 23877\,\nu\, u^3 + 1134\,\nu^2 w + 18710\, u^3 + 4212\,\nu\, w + 3711\, w)\big)\mu^3 \\
&+ \big(11664\, uw^3(830\,\nu^2 - 4477\,\nu - 8150)\tau^2 + 648\, w^2(2010\,\nu^2 u^3 + 67704\,\nu\, u^3 + 5661\,\nu^2 w + 94924\, u^3 - 3474\,\nu\, w - 10962\, w)\tau \\
&- 216\, u^2 w(3618\,\nu^2 u^3 + 11706\,\nu\, u^3 - 5832\,\nu^2 w + 9440\, u^3 - 16002\,\nu\, w - 11367\, w)\big)\mu^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+ \big(7776\,w^3(87\,\nu^2-1326\,\nu-2546)\tau^3-648\,u^2w^2(12312\,\nu^2-65688\,\nu-123923)\tau^2\\
&-648\,uw(1772\,\nu^2u^3+7136\,\nu\,u^3+2220\,\nu^2w+8436\,u^3-12612\,\nu\,w-25855\,w)\tau-17280\,\nu\,u^6-458784\,\nu^2u^3w\\
&-31608\,u^6-1591488\,\nu\,u^3w-174960\,\nu^2w^2-1381320\,u^3w-865080\,\nu\,w^2-963576\,w^2\big)\mu\\
&-1296\,uw^2(3408\,\nu^2-10704\,\nu-23807)\tau^3-432\,w(960\,\nu^2u^3+4368\,\nu\,u^3+3213\,\nu^2w+8072\,u^3-11466\,\nu\,w-26688\,w)\tau^2\\
&-72\,u^2(192\,\nu\,u^3+4734\,\nu^2w+398\,u^3+17316\,\nu\,w+25095\,w)\tau\\
&-72\,u(48\,\nu\,u^3+810\,\nu^2w+119\,u^3+2898\,\nu\,w+2535\,w)\Big)\frac{\partial^3}{\partial w^2\partial u}\\
&+\Big(233280\,u^2w^5(6\,\nu+11)\mu^5+\big(46656\,uw^5(3\,\nu+172)\tau-15552\,w^4(237\,\nu\,u^3+442\,u^3+33\,\nu\,w+60\,w)\big)\mu^4\\
&+\big(11664\,w^5(9\,\nu+349)\tau^2-287712\,u^2w^4(9\,\nu+85)\tau+3888\,uw^3(735\,\nu\,u^3+1403\,u^3+108\,\nu\,w+248\,w)\big)\mu^3\\
&+\big(23328\,uw^4(19\,\nu-978)\tau^2+7776\,w^3(442\,\nu\,u^3+2558\,u^3+177\,\nu\,w-153\,w)\tau\\
&-864\,u^2w^2(651\,\nu\,u^3+1264\,u^3-1053\,\nu\,w-1827\,w)\big)\mu^2\\
&+\big(-233280\,w^4(2\,\nu+21)\tau^3-31104\,u^2w^3(17\,\nu-741)\tau^2-1728\,uw^2(582\,\nu\,u^3+1787\,u^3+63\,\nu\,w-2754\,w)\tau\\
&-144\,w(120\,\nu\,u^6+400\,u^6+3660\,\nu\,u^3w+7980\,u^3w+1863\,\nu\,w^2+5103\,w^2)\big)\mu-995328\,uw^3(\nu-9)\tau^3\\
&-1728\,w^2(216\,\nu\,u^3+1148\,u^3+135\,\nu\,w-2133\,w)\tau^2-576\,u^2w(24\,\nu\,u^3+92\,u^3+693\,\nu\,w+2349\,w)\tau\\
&-288\,uw(12\,\nu\,u^3+56\,u^3+297\,\nu\,w+702\,w)\Big)\frac{\partial^4}{\partial w^3\partial u}\\
&+\Big(262440\,uw^3(3\,\nu+4)(3\,\nu+2)(\nu+1)^2\mu^5+\big(-26244\,w^3(\nu+1)(3\,\nu+2)(114\,\nu^2-352\,\nu-375)\tau\\
&-2916\,u^2w^2(\nu+1)(3\,\nu+2)(522\,\nu^2+1212\,\nu+715)\big)\mu^4+\big(972\,uw^2(3\,\nu+2)(4266\,\nu^3-13032\,\nu^2-37425\,\nu-20102)\tau\\
&+162\,w(14580\,\nu^4u^3+58104\,\nu^3u^3-2160\,\nu^4w+86058\,\nu^2u^3-16614\,\nu^3w+56088\,\nu\,u^3\\
&-2259\,\nu^2w+13480\,u^3-9819\,\nu\,w-6387\,w)\big)\mu^3+\big(972\,w^2(11124\,\nu^4-19386\,\nu^3-54213\,\nu^2-83689\,\nu-33110)\tau^2\\
&-324\,u^2w(3\,\nu+2)(3780\,\nu^3-20118\,\nu^2-48901\,\nu-27503)\tau\\
&-108\,u(1944\,\nu^4u^3+8532\,\nu^3u^3-4212\,\nu^4w+13392\,\nu^2u^3-30285\,\nu^3w+8988\,\nu\,u^3-13035\,\nu^2w+2184\,u^3\\
&-20088\,\nu\,w-12089\,w)\big)\mu^2+\big(-216\,uw(39528\,\nu^4-91044\,\nu^3-156456\,\nu^2-263133\,\nu-121082)\tau^2\\
&+(-279936\,\nu^4u^3-1111968\,\nu^3u^3+303264\,\nu^4w-2086560\,\nu^2u^3+921456\,\nu^3w-2066904\,\nu\,u^3\\
&+2469690\,\nu^2w-724752\,u^3+6317838\,\nu\,w+3130218\,w)\tau-18\,u^2(3888\,\nu^4+17640\,\nu^3+28923\,\nu^2+16017\,\nu+5933)\big)\mu\\
&-432\,w(7776\,\nu^4-20304\,\nu^3+1188\,\nu^2-28065\,\nu-21893)\tau^3-144\,u^2(648\,\nu^4+2160\,\nu^3+5760\,\nu^2+2955\,\nu+4819)\tau^2\\
&-72\,u(3\,\nu+2)(216\,\nu^3+792\,\nu^2+735\,\nu+586)\tau-36\,(3\,\nu+2)(54\,\nu^3+198\,\nu^2+189\,\nu+52)\Big)\frac{\partial}{\partial w}\\
&+\Big(174960\,u^2w^3(3\,\nu+4)(6\,\nu+7)(\nu+1)\mu^5+(-17496\,uw^3(\nu+1)(414\,\nu^2-1746\,\nu-2173)\tau\\
&-17496\,w^2(\nu+1)(378\,\nu^2u^3+942\,\nu\,u^3+54\,\nu^2w+593\,u^3+126\,\nu\,w+76\,w))\mu^4\\
&+(-8748\,w^3(\nu+1)(423\,\nu^2-1710\,\nu-2147)\tau^2+972\,u^2w^2(9504\,\nu^3-57069\,\nu^2-148668\,\nu-82070)\tau\\
&+324\,uw(11421\,\nu^3u^3+40122\,\nu^2u^3+1800\,\nu^3w+46929\,\nu\,u^3+5727\,\nu^2w+18265\,u^3+11325\,\nu\,w+2205\,w))\mu^3\\
&+\big(648\,uw^2(22518\,\nu^3-65682\,\nu^2-195861\,\nu-133283)\tau^2\\
&-54\,w(36504\,\nu^3u^3-592704\,\nu^2u^3-66636\,\nu^3w-1342548\,\nu\,u^3+40437\,\nu^2w-728500\,u^3+172755\,\nu\,w+91059\,w)\tau\\
&-54\,u^2(6480\,\nu^3u^3+24984\,\nu^2u^3-13320\,\nu^3w+31224\,\nu\,u^3-53079\,\nu^2w+12720\,u^3-31335\,\nu\,w-28327\,w)\big)\mu^2\\
&+\big(1296\,w^2(1296\,\nu^3-6147\,\nu^2-17220\,\nu-15881)\tau^3-648\,u^2w(15192\,\nu^3-47904\,\nu^2-116168\,\nu-87741)\tau^2\\
&-72\,u(7128\,\nu^3u^3+25938\,\nu^2u^3+21330\,\nu^3w+37008\,\nu\,u^3-66969\,\nu^2w+19415\,u^3-219267\,\nu\,w-161292\,w)\tau\\
&-128304\,\nu^3u^3-508032\,\nu^2u^3-49572\,\nu^3w-648000\,\nu\,u^3-35478\,\nu^2w-272520\,u^3-816642\,\nu\,w+14094\,w\big)\mu\\
&-432\,uw(10800\,\nu^3-28476\,\nu^2-37716\,\nu-55903)\tau^3+(-186624\,\nu^3u^3-616896\,\nu^2u^3-1376352\,\nu^3w-979776\,\nu\,u^3\\
&+3825792\,\nu^2w-724752\,u^3+4668840\,\nu\,w+8624880\,w)\tau^2-648\,u^2(144\,\nu^3+512\,\nu^2+679\,\nu+451)\tau\\
&-648\,u(18\,\nu^3+66\,\nu^2+72\,\nu+25)\Big)\frac{\partial^2}{\partial w\partial u}\\
&+\Big(87480\,u^3w^2(3\,\nu+2)(3\,\nu+4)(\nu+1)\mu^5+\big(-4374\,u^2w^2(3\,\nu+2)(120\,\nu-731)(\nu+1)\tau\\
&-4374\,uw(\nu+1)(3\,\nu+2)(120\,\nu\,u^3+151\,u^3+12\,\nu\,w+8\,w)\big)\mu^4+\big(-4374\,uw^2(3\,\nu+2)(156\,\nu-677)(\nu+1)\tau^2\\
&+486\,w(3\,\nu+2)(963\,\nu^2u^3-10872\,\nu\,u^3+612\,\nu^2w-11860\,u^3-1215\,\nu\,w-1827\,w)\tau\\
&+81\,u^2(9234\,\nu^3u^3+26298\,\nu^2u^3-144\,\nu^3w+24114\,\nu\,u^3-2913\,\nu^2w+7124\,u^3-69\,\nu\,w-2445\,w)\big)\mu^3
\end{aligned}
$$

$$+\big(-13122\,w^2(32\,\nu-105)(3\,\nu+2)(\nu+1)\tau^3+162\,u^2w(21654\,\nu^3-87957\,\nu^2-185493\,\nu-97742)\tau^2$$
$$-27\,u(5076\,\nu^3u^3-278964\,\nu^2u^3-16254\,\nu^3w-429696\,\nu\,u^3+36387\,\nu^2w-160976\,u^3-35469\,\nu\,w-33681\,w)\tau$$
$$+265356\,\nu^3u^3+895941\,\nu^2u^3-23328\,\nu^3w+546993\,\nu\,u^3+7047\,\nu^2w+340821\,u^3-356481\,\nu\,w+48033\,w\big)\mu^2$$
$$+\big(324\,uw(4104\,\nu^3-14832\,\nu^2-37203\,\nu-26788)\tau^3$$
$$+(-1772928\,\nu^3u^3+8817984\,\nu^2u^3-51030\,\nu^3w+11661084\,\nu\,u^3+748197\,\nu^2w+6502896\,u^3-989739\,\nu\,w+1870047\,w)\tau^2$$
$$-81\,u^2(4050\,\nu^3-28017\,\nu^2-40617\,\nu-17077)\tau+27\,u(630\,\nu^3+3327\,\nu^2-525\,\nu+2009)\big)\mu$$
$$+648\,w(432\,\nu^3-2016\,\nu^2-651\,\nu-4307)\tau^4-216\,u^2(4320\,\nu^3-16200\,\nu^2-10377\,\nu-13129)\tau^3$$
$$-108\,u(3834\,\nu^3-13995\,\nu^2-10542\,\nu-9466)\tau^2-162\,(3\,\nu+2)(75\,\nu^2-320\,\nu-118)\tau\Big)\frac{\partial^2}{\partial u^2}$$
$$+\Big(233280\,u^3w^5\mu^5+\big(373248\,u^2w^5\tau-93312\,uw^4(7\,u^3+w)\big)\mu^4$$
$$+\big(268272\,uw^5\tau^2-1399680\,u^3w^4\tau+3888\,u^2w^3(139\,u^3+40\,w)\big)\mu^3$$
$$+\big(34992\,w^5\tau^3-1271376\,u^2w^4\tau^2+3888\,uw^3(335\,u^3+36\,w)\tau-432\,w^2(265\,u^6-234\,u^3w+324\,w^2)\big)\mu^2$$
$$+\big(-536544\,uw^4\tau^3+7776\,w^3(154\,u^3+27\,w)\tau^2-864\,u^2w^2(281\,u^3-324\,w)\tau-432\,uw(8\,u^6+230\,u^3w+81\,w^2)\big)\mu$$
$$-139968\,w^4\tau^4+435456\,u^2w^3\tau^3-864\,uw^2(146\,u^3-297\,w)\tau^2$$
$$-432\,w(8\,u^6+234\,u^3w-81\,w^2)\tau-144\,u^2w(8\,u^3+135\,w)\Big)\frac{\partial^5}{\partial w^3\partial u^2}$$
$$+\Big(116640\,u^4w^4\mu^5+(221616\,u^3w^4\tau-314928\,u^5w^3)\mu^4+\big(157464\,u^2w^4\tau^2-3888\,uw^3(200\,u^3-9\,w)\tau$$
$$+648\,w^2(373\,u^6-108\,w^2)\big)\mu^3+\big(23328\,uw^4\tau^3-5832\,w^3(134\,u^3-21\,w)\tau^2+3888\,u^2w^2(166\,u^3+3\,w)\tau$$
$$-1944\,uw(22\,u^6-37\,u^3w+30\,w^2)\big)\mu^2+\big(-46656\,w^4\tau^4-408240\,u^2w^3\tau^3$$
$$+3888\,uw^2(170\,u^3+21\,w)\tau^2-3888\,w(21\,u^6-59\,u^3w-3\,w^2)\tau-648\,u^2w(40\,u^3-27\,w)\big)\mu-132192\,uw^3\tau^4$$
$$+2592\,w^2(98\,u^3-9\,w)\tau^3-3888\,u^2w(10\,u^3-47\,w)\tau^2-1296\,uw(19\,u^3-39\,w)\tau-1944\,w(2\,u^3-3\,w)\Big)\frac{\partial^5}{\partial w^2\partial u^3}$$
$$+\Big(174960\,u^3w^3(3\,\nu+4)^2\mu^5+\big(-8748\,u^2w^3(144\,\nu^2-1470\,\nu-1919)\tau$$
$$-2916\,uw^2(1224\,\nu^2u^3+3258\,\nu\,u^3+144\,\nu^2w+2177\,u^3+348\,\nu\,w+216\,w)\big)\mu^4$$
$$+\big(-8748\,uw^3(243\,\nu^2-1197\,\nu-1733)\tau^2+972\,w^2(45\,\nu^2u^3-32850\,\nu\,u^3+1224\,\nu^2w-39532\,u^3-2226\,\nu\,w-4263\,w)\tau$$
$$+324\,u^2w(6642\,\nu^2u^3+17847\,\nu\,u^3+810\,\nu^2w+12029\,u^3+2412\,\nu\,w+1752\,w)\big)\mu^3+\big(-8748\,w^3(183\,\nu^2-433\,\nu-755)\tau^3$$
$$+5832\,u^2w^2(799\,\nu^2-5704\,\nu-8405)\tau^2+324\,uw(3993\,\nu^2u^3+59127\,\nu\,u^3+3771\,\nu^2w+65525\,u^3-3258\,\nu\,w+486\,w)\tau$$
$$-215784\,\nu^2u^6-633096\,\nu\,u^6+589032\,\nu^2u^3w-456624\,u^6+1389960\,\nu\,u^3w-192456\,\nu^2w^2$$
$$+836568\,u^3w-659016\,\nu\,w^2-556956\,w^2\big)\mu^2+\big(5832\,uw^2(364\,\nu^2-2176\,\nu-3955)\tau^3$$
$$-324\,w(8400\,\nu^2u^3-66984\,\nu\,u^3-1107\,\nu^2w-93986\,u^3-2304\,\nu\,w-6507\,w)\tau^2$$
$$-108\,u^2(3240\,\nu^2u^3+9240\,\nu\,u^3+7173\,\nu^2w+7372\,u^3-55296\,\nu\,w-77985\,w)\tau$$
$$-108\,u(864\,\nu^2u^3+2544\,\nu\,u^3-432\,\nu^2w+1850\,u^3-513\,\nu\,w+33\,w)\big)\mu+3888\,w^2(96\,\nu^2-555\,\nu-1286)\tau^4$$
$$-3888\,u^2w(484\,\nu^2-2018\,\nu-3353)\tau^3-432\,u(324\,\nu^2u^3+879\,\nu\,u^3+2484\,\nu^2w+799\,u^3-9279\,\nu\,w-16800\,w)\tau^2$$
$$+(-73872\,\nu^2u^3-205200\,\nu\,u^3-128304\,\nu^2w-168264\,u^3+469476\,\nu\,w+999216\,w)\tau-216\,u^2(45\,\nu^2+129\,\nu+85)\Big)\frac{\partial^3}{\partial w\partial u^2}$$
$$+\Big(349920\,u^3w^4(3\,\nu+5)\mu^5+\big(17496\,u^2w^4(24\,\nu+361)\tau-5832\,uw^3(456\,\nu\,u^3+767\,u^3+60\,\nu\,w+96\,w)\big)\mu^4$$
$$+\big(-34992\,uw^4(3\,\nu-155)\tau^2-5832\,w^3(462\,\nu\,u^3+3026\,u^3-68\,\nu\,w+203\,w)\tau$$
$$+15552\,u^2w^2(123\,\nu\,u^3+211\,u^3+27\,\nu\,w+52\,w)\big)\mu^3+\big(-34992\,w^4(13\,\nu-58)\tau^3-23328\,u^2w^3(13\,\nu+907)\tau^2$$
$$+3888\,uw^2(701\,\nu\,u^3+3221\,u^3+213\,\nu\,w-108\,w)\tau$$
$$-648\,w(492\,\nu\,u^6+886\,u^6-636\,\nu\,u^3w-840\,u^3w+504\,\nu\,w^2+1017\,w^2)\big)\mu^2$$
$$+\big(11664\,uw^3(7\,\nu-792)\tau^3+1944\,w^2(148\,\nu\,u^3+8704\,u^3+264\,\nu\,w+525\,w)\tau^2$$
$$-648\,u^2w(826\,\nu\,u^3+1824\,u^3+120\,\nu\,w-7221\,w)\tau-432\,u(8\,u^6+432\,\nu\,u^3w+807\,u^3w+18\,\nu\,w^2+234\,w^2)\big)\mu$$
$$-23328\,w^3(\nu+84)\tau^4-15552\,u^2w^2(43\,\nu-499)\tau^3-1296\,uw(170\,\nu\,u^3+468\,u^3+417\,\nu\,w-3669\,w)\tau^2$$
$$+(-3456\,u^6-157680\,\nu\,u^3w-358128\,u^3w-104976\,\nu\,w^2+752328\,w^2)\tau-288\,u^2(4\,u^3+99\,\nu\,w+180\,w)\Big)\frac{\partial^4}{\partial w^2\partial u^2}$$
$$+\Big(14580\,u^5w^2(3\,\nu+4)\mu^5+\big(729\,u^4w^2(60\,\nu+377)\tau-243\,u^3w(420\,\nu\,u^3+551\,u^3-168\,\nu\,w-240\,w)\big)\mu^4$$

$$
\begin{aligned}
&+ \big(- 1458\, u^3w^2(36\,\nu - 247)\tau^2 - 486\, u^2w(405\,\nu\, u^3 + 1409\, u^3 - 312\,\nu\, w + 465\, w)\tau \\
&+ 243\, u(234\,\nu\, u^6 + 304\, u^6 - 336\,\nu\, u^3w - 469\, u^3w - 252\,\nu\, w^2 - 336\, w^2)\big)\mu^3 \\
&+ \big(- 1458\, u^2w^2(108\,\nu - 299)\tau^3 - 1458\, uw(62\,\nu\, u^3 + 659\, u^3 - 146\,\nu\, w + 101\, w)\tau^2 \\
&+ (142884\,\nu\, u^6 + 398520\, u^6 - 138996\,\nu\, u^3w + 93312\, u^3w - 67068\,\nu\, w^2 + 126117\, w^2)\tau \\
&+ 81\, u^2(774\,\nu\, u^3 + 994\, u^3 + 180\,\nu\, w + 165\, w)\big)\mu^2 + \big(- 1458\, uw^2(99\,\nu - 164)\tau^4 \\
&+ 243\, w(156\,\nu\, u^3 - 3232\, u^3 + 528\,\nu\, w - 1071\, w)\tau^3 + 243\, u^2(438\,\nu\, u^3 + 2312\, u^3 - 392\,\nu\, w + 669\, w)\tau^2 \\
&+ 162\, u(588\,\nu\, u^3 + 1610\, u^3 - 15\,\nu\, w + 807\, w)\tau + 18954\,\nu\, u^3 + 23004\, u^3 + 5832\,\nu\, w + 5103\, w\big)\mu \\
&- 2916\, w^2(21\,\nu - 46)\tau^5 + 1944\, u^2w(21\,\nu - 187)\tau^4 + 486\, u(42\,\nu\, u^3 + 488\, u^3 - 13\,\nu\, w - 289\, w)\tau^3 \\
&+ (29646\,\nu\, u^3 + 175770\, u^3 - 5832\,\nu\, w - 5103\, w)\tau^2 + 324\, u^2(37\,\nu + 113)\tau + 1458\, u(\nu + 1)\Big) \frac{\partial^4}{\partial u^4} \\
&+ \Big(87480\, u^4w^2(3\,\nu + 4)(\nu + 1)\mu^5 + \big(- 8748\, u^3w^2(\nu + 1)(15\,\nu - 277)\tau \\
&- 2916\, u^2w(\nu + 1)(195\,\nu\, u^3 + 251\, u^3 - 18\,\nu\, w - 36\, w)\big)\mu^4 \\
&+ \big(- 39366\, u^2w^2(\nu + 1)(16\,\nu - 77)\tau^2 - 162\, uw(1737\,\nu^2u^3 + 32814\,\nu\, u^3 - 4158\,\nu^2w + 31102\, u^3 + 6156\,\nu\, w + 10314\, w)\tau \\
&+ 293058\,\nu^2u^6 + 659502\,\nu\, u^6 - 169128\,\nu^2u^3w + 364446\, u^6 - 431568\,\nu\, u^3w - 104976\,\nu^2w^2 \\
&- 265032\, u^3w - 244944\,\nu\, w^2 - 139968\, w^2\big)\mu^3 + \big(- 8748\, uw^2(\nu + 1)(99\,\nu - 311)\tau^3 \\
&+ 486\, w(1206\,\nu^2u^3 - 12612\,\nu\, u^3 + 990\,\nu^2w - 14654\, u^3 - 351\,\nu\, w - 1341\, w)\tau^2 \\
&+ 324\, u^2(1008\,\nu^2u^3 + 8850\,\nu\, u^3 - 801\,\nu^2w + 7412\, u^3 + 18\,\nu\, w + 3240\, w)\tau \\
&+ 162\, u(1215\,\nu^2u^3 + 2733\,\nu\, u^3 + 162\,\nu^2w + 1511\, u^3 + 180\,\nu\, w - 54\, w)\big)\mu^2 + \big(- 17496\, w^2(\nu + 1)(21\,\nu - 46)\tau^4 \\
&+ 972\, u^2w(612\,\nu^2 - 3432\,\nu - 5273)\tau^3 - 324\, u(486\,\nu^2u^3 - 10818\,\nu\, u^3 + 639\,\nu^2w - 10051\, u^3 - 714\,\nu\, w - 3414\, w)\tau^2 \\
&+ (70956\,\nu^2u^3 + 1307664\,\nu\, u^3 - 59778\,\nu^2w + 1058508\, u^3 + 205092\,\nu\, w + 525852\, w)\tau + 162\, u^2(207\,\nu^2 + 453\,\nu + 253)\big)\mu \\
&+ 648\, uw(360\,\nu^2 - 1440\,\nu - 3029)\tau^4 + (-186624\,\nu^2u^3 + 1306368\,\nu\, u^3 + 49572\,\nu^2w + 1222344\, u^3 - 225504\,\nu\, w - 537840\, w)\tau^3 \\
&- 324\, u^2(291\,\nu^2 - 2468\,\nu - 2063)\tau^2 - 324\, u(21\,\nu^2 - 394\,\nu - 275)\tau + 1458\,\nu^2 + 2430\,\nu + 810\Big) \frac{\partial^3}{\partial u^3} \\
&+ \Big(174960\, u^4w^3(2\,\nu + 3)\mu^5 + \big(34992\, u^3w^3(7\,\nu + 62)\tau - 3888\, u^2w^2(219\,\nu\, u^3 + 328\, u^3 - 9\,\nu\, w - 18\, w)\big)\mu^4 \\
&+ \big(- 26244\, u^2w^3(7\,\nu - 92)\tau^2 - 5832\, uw^2(207\,\nu\, u^3 + 974\, u^3 - 86\,\nu\, w + 176\, w)\tau \\
&+ 324\, w(1701\,\nu\, u^6 + 2576\, u^6 - 384\,\nu\, u^3w - 576\, u^3w - 540\,\nu\, w^2 - 828\, w^2)\big)\mu^3 \\
&+ \big(- 17496\, uw^3(31\,\nu - 107)\tau^3 - 2916\, w^2(120\,\nu\, u^3 + 2624\, u^3 - 173\,\nu\, w + 44\, w)\tau^2 \\
&+ 1944\, u^2w(521\,\nu\, u^3 + 1857\, u^3 - 80\,\nu\, w + 180\, w)\tau - 324\, u(180\,\nu\, u^6 + 296\, u^6 - 783\,\nu\, u^3w - 1064\, u^3w + 108\,\nu\, w^2 + 288\, w^2)\big)\mu^2 \\
&+ \big(- 104976\, w^3(3\,\nu - 4)\tau^4 + 66096\, u^2w^2(3\,\nu - 76)\tau^3 + 3888\, uw(105\,\nu\, u^3 + 1308\, u^3 - 47\,\nu\, w + 248\, w)\tau^2 \\
&+ (-104976\,\nu\, u^6 - 171072\, u^6 + 203472\,\nu\, u^3w + 1839024\, u^3w - 145800\,\nu\, w^2 + 664848\, w^2)\tau \\
&- 108\, u^2(288\,\nu\, u^3 + 464\, u^3 - 477\,\nu\, w - 576\, w)\big)\mu + 23328\, uw^2(10\,\nu - 87)\tau^4 - 1296\, w(48\,\nu\, u^3 - 1768\, u^3 - 96\,\nu\, w + 537\, w)\tau^3 \\
&- 1296\, u^2(36\,\nu\, u^3 + 58\, u^3 + 43\,\nu\, w - 1219\, w)\tau^2 - 216\, u(126\,\nu\, u^3 + 200\, u^3 - 45\,\nu\, w - 1377\, w)\tau \\
&- 3888\,\nu\, u^3 - 6048\, u^3 + 6804\,\nu\, w + 7776\, w\Big) \frac{\partial^4}{\partial w \partial u^3} \\
&+ \Big(349920\, uw^5(6\,\nu^2 + 20\,\nu + 17)\mu^5 + \big(- 34992\, w^5(84\,\nu^2 - 386\,\nu - 773)\tau - 11664\, u^2w^4(444\,\nu^2 + 1510\,\nu + 1311)\big)\mu^4 \\
&+ \big(1296\, uw^4(2799\,\nu^2 - 32760\,\nu - 58939)\tau + 432\, w^3(8667\,\nu^2u^3 + 30168\,\nu\, u^3 - 2646\,\nu^2w + 26765\, u^3 - 8370\,\nu\, w - 6897\, w)\big)\mu^3 \\
&+ \big(3888\, w^4(1527\,\nu^2 - 4857\,\nu - 11732)\tau^2 + 7776\, u^2w^3(28\,\nu^2 + 4497\,\nu + 7599)\tau \\
&- 432\, uw^2(1575\,\nu^2u^3 + 5505\,\nu\, u^3 - 4725\,\nu^2w + 4834\, u^3 - 16488\,\nu\, w - 14787\, w)\big)\mu^2 \\
&+ \big(- 1296\, uw^3(4560\,\nu^2 - 18768\,\nu - 44543)\tau^2 \\
&- 432\, w^2(2256\,\nu^2u^3 + 13848\,\nu\, u^3 - 3321\,\nu^2w + 21848\, u^3 - 10728\,\nu\, w - 14763\, w)\tau \\
&- 144\, u^2w(144\,\nu^2u^3 + 936\,\nu\, u^3 + 4671\,\nu^2w + 1303\, u^3 + 18576\,\nu\, w + 18561\, w)\big)\mu \\
&- 15552\, w^3(204\,\nu^2 - 319\,\nu - 1021)\tau^3 - 864\, u^2w^2(456\,\nu^2 + 3588\,\nu + 7423)\tau^2 \\
&- 48\, uw(288\,\nu^2u^3 + 3060\,\nu\, u^3 + 12636\,\nu^2w + 2236\, u^3 + 54000\,\nu\, w + 67437\, w)\tau \\
&- 3456\,\nu^2u^3w - 736\, u^6 - 41472\,\nu\, u^3w - 116640\,\nu^2w^2 - 82416\, u^3w - 571536\,\nu\, w^2 - 695952\, w^2\Big) \frac{\partial^3}{\partial w^3} \\
&+ \Big(174960\, uw^4(3\,\nu + 4)(6\,\nu^2 + 16\,\nu + 11)\mu^5 + \big(- 8748\, w^4(936\,\nu^3 - 2034\,\nu^2 - 8582\,\nu - 5905)\tau
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&- 2916\,u^2w^3(2376\,\nu^3 + 9630\,\nu^2 + 13194\,\nu + 6095)\big)\mu^4 + \big(5832\,uw^3(2115\,\nu^3 - 8649\,\nu^2 - 30795\,\nu - 21251)\tau \\
&+ 972\,w^2(4446\,\nu^3u^3 + 18342\,\nu^2u^3 - 1128\,\nu^3w + 25562\,\nu\,u^3 - 4697\,\nu^2w + 12010\,u^3 - 4721\,\nu\,w - 2948\,w)\big)\mu^3 \\
&+ \big(648\,w^3(19170\,\nu^3 - 32913\,\nu^2 - 144273\,\nu - 126875)\tau^2 - 216\,u^2w^2(16362\,\nu^3 - 163179\,\nu^2 - 508383\,\nu - 356821)\tau \\
&- 216\,uw(2916\,\nu^3u^3 + 12492\,\nu^2u^3 - 7497\,\nu^3w + 17676\,\nu\,u^3 - 33843\,\nu^2w + 8308\,u^3 - 39027\,\nu\,w - 23866\,w)\big)\mu^2 \\
&+ \big(- 216\,uw^2(52272\,\nu^3 - 112392\,\nu^2 - 418143\,\nu - 397490)\tau^2 \\
&- 36\,w(22464\,\nu^3u^3 + 118800\,\nu^2u^3 - 30294\,\nu^3w + 277344\,\nu\,u^3 - 99387\,\nu^2w + 213860\,u^3 - 234477\,\nu\,w - 250614\,w)\tau \\
&- 36\,u^2(576\,\nu^2u^3 + 10350\,\nu^3w + 1962\,\nu\,u^3 + 50253\,\nu^2w + 1592\,u^3 + 72879\,\nu\,w + 39836\,w)\big)\mu \\
&- 1296\,w^2(3744\,\nu^3 - 5280\,\nu^2 - 13635\,\nu - 19528)\tau^3 - 288\,u^2w(864\,\nu^3 + 6768\,\nu^2 + 13710\,\nu + 19721)\tau^2 \\
&- 24\,u(576\,\nu^2u^3 + 11988\,\nu^3w + 2682\,\nu\,u^3 + 57942\,\nu^2w + 1316\,u^3 + 95967\,\nu\,w + 72801\,w)\tau \\
&- 3456\,\nu^2u^3 - 44712\,\nu^3w - 17496\,\nu\,u^3 - 244944\,\nu^2w - 19560\,u^3 - 427896\,\nu\,w - 247644\,w\Big)\frac{\partial^2}{\partial w^2} \\
&+ 288\,w^2\Big(810\,\mu^5u^2w^4 + 1053\,\mu^4\tau\,uw^4 - 2349\,\mu^4u^3w^3 + 567\,\mu^3\tau^2w^4 - 4455\,\mu^3\tau\,u^2w^3 + 2052\,\mu^3u^4w^2 - 324\,\mu^4w^4 \\
&- 3078\,\mu^2\tau^2uw^3 + 4806\,\mu^2\tau\,u^3w^2 - 456\,\mu^2u^5w + 297\,\mu^3uw^3 - 972\,\mu\,\tau^3w^3 + 3591\,\mu\,\tau^2u^2w^2 - 1230\,\mu\,\tau\,u^4w \\
&- 45\,\mu\,u^6 + 486\,\mu^2\tau\,w^3 + 837\,\mu^2u^2w^2 + 1134\,\tau^3uw^2 - 708\,\tau^2u^3w - 42\,\tau\,u^5 + 729\,\mu\,\tau\,uw^2 - 669\,\mu\,u^3w + 648\,\tau^2w^2 \\
&- 675\,\tau\,u^2w - 13\,u^4 - 405\,\mu\,w^2 - 135\,uw\Big)\frac{\partial^5}{\partial w^4\partial u} \\
&+ 324\,\Big(3\,\mu^2u^2w + 3\,\mu\,\tau\,uw - 3\,\mu\,u^3 + 3\,\tau^2w - 3\,\tau\,u^2 - 3\,\mu\,w - u)(30\,\mu^3u^3w^2 + 36\,\mu^2\tau\,u^2w^2 - 48\,\mu^2u^4w \\
&- 27\,\mu\,\tau^2uw^2 - 111\,\mu\,\tau\,u^3w + 6\,\mu\,u^5 + 54\,\mu^2uw^2 - 12\,\tau^3w^2 - 66\,\tau^2u^2w + 6\,\tau\,u^4 \\
&+ 18\,\mu\,\tau\,w^2 - 30\,\mu\,u^2w - 39\,\tau\,uw + 2\,u^3 - 6\,w\Big)\frac{\partial^5}{\partial w\partial u^4} \\
&+ 486\,u\Big(2\,\mu^3u^3w + 3\,\mu^2\tau\,u^2w - 3\,\mu^2u^4 - 3\,\mu\,\tau^2uw - 9\,\mu\,\tau\,u^3 + 6\,\mu^2uw - 2\,\tau^3w - 6\,\tau^2u^2 \\
&+ 3\,\mu\,\tau\,w - 4\,\mu\,u^2 - 5\,\tau\,u - 1)(3\,\mu^2u^2w + 3\,\mu\,\tau\,uw - 3\,\mu\,u^3 + 3\,\tau^2w - 3\,\tau\,u^2 - 3\,\mu\,w - u\Big)\frac{\partial^5}{\partial u^5} \\
&+ 192\,w^2(54\,\mu^3w^3 - 108\,\mu^2uw^2 - 81\,\mu\,\tau\,w^2 + 45\,\mu\,u^2w + 54\,\tau\,uw + 2\,u^3 + 27\,w)(9\,\mu^2uw^2 + 9\,\mu\,\tau\,w^2 \\
&- 9\,\mu\,u^2w - 15\,\tau\,uw - u^3 - 9\,w)\frac{\partial^5}{\partial w^5}\Big)
\end{aligned}
$$

D.3. $K^2_{A_2}$ en generadores del álgebra $g^{(2)}$

$$
\begin{aligned}
K^2_{A_2}(u,w) = \frac{1}{27}\Big(&(-1296\,\tau^3 - 2592\,\mu\,\tau)\mathcal{T}_0(\mathcal{J}_0)(\mathcal{J}_0)(\mathcal{J}_0)(\mathcal{R}_2)\\
&+ (1620\,\tau^3 + 1566\,\mu\,\tau)\mathcal{T}_0(\mathcal{J}_1)(\mathcal{J}_0)(\mathcal{J}_0)(\mathcal{J}_0)\\
&+ (-3240\,\mu\,\tau^2 - 1080\,\mu^2)\mathcal{T}_0(\mathcal{J}_4)(\mathcal{J}_0)(\mathcal{J}_0)(\mathcal{R}_2)\\
&+ (2916\,\mu\,\tau^3 + 2754\,\mu^2\tau)\mathcal{T}_0(\mathcal{J}_4)(\mathcal{J}_0)(\mathcal{J}_0)(\mathcal{J}_0)\\
&+ (3159\,\mu^2\tau^2 + 648\,\mu^3)\mathcal{T}_0(\mathcal{J}_4)(\mathcal{J}_4)(\mathcal{J}_0)(\mathcal{J}_0)\\
&+ (972\,\tau^4 + 3726\,\mu\,\tau^2 + 594\,\mu^2)T_0(\mathcal{J}_0)(\mathcal{J}_0)(\mathcal{J}_0)(\mathcal{J}_0)\\
&- \frac{128}{3}\,\mu\,\mathcal{T}_1(\mathcal{J}_0)(\mathcal{R}_2)(\mathcal{R}_2)(\mathcal{R}_2) + \frac{160}{3}\,\mu\,\mathcal{T}_2(\mathcal{J}_0)(\mathcal{R}_2)(\mathcal{R}_2)(\mathcal{R}_1)\\
&- 4\,\mu^2\mathcal{T}_0(\mathcal{J}_4)(\mathcal{J}_4)(\mathcal{R}_2)(\mathcal{R}_2) + 200\,\mu^2\mathcal{T}_1(\mathcal{J}_4)(\mathcal{J}_0)(\mathcal{R}_2)(\mathcal{R}_2)\\
&+ 236\,\mu^2\mathcal{T}_2(\mathcal{J}_0)(\mathcal{J}_0)(\mathcal{R}_2)(\mathcal{R}_2) - 648\,\mu^3\mathcal{T}_0(\mathcal{J}_4)(\mathcal{J}_4)(\mathcal{J}_4)(\mathcal{R}_2)\\
&+ 243\,\mu^4\mathcal{T}_0(\mathcal{J}_4)(\mathcal{J}_4)(\mathcal{J}_4)(\mathcal{J}_4) + \frac{128}{3}\,\tau\,\mathcal{T}_0(\mathcal{J}_0)(\mathcal{R}_2)(\mathcal{R}_2)(\mathcal{R}_2)\\
&+ 528\,\tau\,\mathcal{T}_0(\mathcal{J}_0)(\mathcal{J}_0)(\mathcal{R}_2)(\mathcal{R}_1) - 576\,\tau\,\mathcal{T}_0(\mathcal{J}_0)(\mathcal{J}_0)(\mathcal{J}_0)(\mathcal{R}_0)\\
&- 224\,\tau\,\mathcal{T}_0(\mathcal{J}_1)(\mathcal{J}_0)(\mathcal{R}_2)(\mathcal{R}_2) + 270\,\tau\,\mathcal{T}_0(\mathcal{J}_1)(\mathcal{J}_1)(\mathcal{J}_1)(\mathcal{J}_0)\\
&- \frac{64}{3}\,\tau\,\mathcal{T}_0(\mathcal{J}_2)(\mathcal{R}_2)(\mathcal{R}_2)(\mathcal{R}_2) + 128\,\tau\,\mathcal{T}_0(\mathcal{J}_2)(\mathcal{J}_1)(\mathcal{R}_2)(\mathcal{R}_2)\\
&- \frac{256}{3}\,\tau\,\mathcal{T}_1(\mathcal{J}_0)(\mathcal{R}_2)(\mathcal{R}_2)(\mathcal{R}_1) - 576\,\tau\,\mathcal{T}_1(\mathcal{J}_0)(\mathcal{J}_0)(\mathcal{R}_1)(\mathcal{R}_1)\\
&+ 64\,\tau\,\mathcal{T}_2(\mathcal{J}_0)(\mathcal{R}_2)(\mathcal{R}_1)(\mathcal{R}_1) + 432\,\tau\,\mathcal{T}_2(\mathcal{J}_0)(\mathcal{J}_0)(\mathcal{R}_1)(\mathcal{R}_0)\\
&+ (-1512\,\tau^2 - 504\,\mu)\mathcal{T}_0(\mathcal{J}_0)(\mathcal{J}_0)(\mathcal{J}_0)(\mathcal{R}_1) + (-384\,\tau^2 - 240\,\mu)\mathcal{T}_1(\mathcal{J}_0)(\mathcal{J}_0)(\mathcal{R}_2)(\mathcal{R}_1)\\
&+ (-160\,\tau^2 + 192\,\mu)\mathcal{T}_0(\mathcal{J}_2)(\mathcal{J}_0)(\mathcal{R}_2)(\mathcal{R}_2) + (80\,\tau^2 - 16\,\mu)\mathcal{T}_0(\mathcal{J}_2)(\mathcal{J}_2)(\mathcal{R}_2)(\mathcal{R}_2)\\
&+ (432\,\tau^2 + 360\,\mu)\mathcal{T}_2(\mathcal{J}_0)(\mathcal{J}_0)(\mathcal{R}_1)(\mathcal{R}_1) + (464\,\tau^2 - 8\,\mu)\mathcal{T}_0(\mathcal{J}_0)(\mathcal{J}_0)(\mathcal{R}_2)(\mathcal{R}_2)\\
&+ (999\,\tau^2 + 216\,\mu)\mathcal{T}_0(\mathcal{J}_1)(\mathcal{J}_1)(\mathcal{J}_0)(\mathcal{J}_0) - \frac{32}{3}\,\mu\,\mathcal{T}_0(\mathcal{J}_4)(\mathcal{R}_2)(\mathcal{R}_2)(\mathcal{R}_2)\\
&+ 224\,\mu\,\tau\,\mathcal{T}_0(\mathcal{J}_4)(\mathcal{J}_0)(\mathcal{R}_2)(\mathcal{R}_2) + 80\,\mu\,\tau\,\mathcal{T}_0(\mathcal{J}_4)(\mathcal{J}_2)(\mathcal{R}_2)(\mathcal{R}_2)\\
&- 112\,\mu\,\tau\,\mathcal{T}_1(\mathcal{J}_0)(\mathcal{J}_0)(\mathcal{R}_2)(\mathcal{R}_2) + 672\,\mu\,\tau\,\mathcal{T}_2(\mathcal{J}_0)(\mathcal{J}_0)(\mathcal{R}_2)(\mathcal{R}_1)\\
&- 2592\,\mu^2\tau\,\mathcal{T}_0(\mathcal{J}_4)(\mathcal{J}_4)(\mathcal{J}_0)(\mathcal{R}_2) + 1458\,\mu^3\tau\,\mathcal{T}_0(\mathcal{J}_4)(\mathcal{J}_4)(\mathcal{J}_4)(\mathcal{J}_0)\\
&+ \frac{64}{27}\,\mathcal{T}_0(\mathcal{R}_2)(\mathcal{R}_2)(\mathcal{R}_2)(\mathcal{R}_2) + \frac{160}{3}\,\mathcal{T}_0(\mathcal{J}_0)(\mathcal{R}_2)(\mathcal{R}_2)(\mathcal{R}_1)\\
&+ 252\,\mathcal{T}_0(\mathcal{J}_0)(\mathcal{J}_0)(\mathcal{R}_1)(\mathcal{R}_1) - \frac{64}{3}\,\mathcal{T}_0(\mathcal{J}_1)(\mathcal{R}_2)(\mathcal{R}_2)(\mathcal{R}_2)\\
&- 160\,\mathcal{T}_0(\mathcal{J}_1)(\mathcal{J}_0)(\mathcal{R}_2)(\mathcal{R}_1) - 72\,\mathcal{T}_0(\mathcal{J}_1)(\mathcal{J}_0)(\mathcal{J}_0)(\mathcal{R}_0)\\
&+ 64\,\mathcal{T}_0(\mathcal{J}_1)(\mathcal{J}_1)(\mathcal{R}_2)(\mathcal{R}_2) + 27\,\mathcal{T}_0(\mathcal{J}_1)(\mathcal{J}_1)(\mathcal{J}_1)(\mathcal{J}_1)\\
&- \frac{128}{27}\,\mathcal{T}_1(\mathcal{R}_2)(\mathcal{R}_2)(\mathcal{R}_2)(\mathcal{R}_1) - 64\,\mathcal{T}_1(\mathcal{J}_0)(\mathcal{R}_2)(\mathcal{R}_1)(\mathcal{R}_1)\\
&- 216\,\mathcal{T}_1(\mathcal{J}_0)(\mathcal{J}_0)(\mathcal{R}_1)(\mathcal{R}_0) + \frac{64}{27},\mathcal{T}_2(\mathcal{R}_2)(\mathcal{R}_2)(\mathcal{R}_1)(\mathcal{R}_1)\\
&+ 32\,\mathcal{T}_2(\mathcal{J}_0)(\mathcal{R}_1)(\mathcal{R}_1)(\mathcal{R}_1) + 108\,\mathcal{T}_2(\mathcal{J}_0)(\mathcal{J}_0)(\mathcal{R}_0)(\mathcal{R}_0)\\
&+ (-1728\,\tau^4 + 324\,\mu\,\tau^2 - 3510\,\mu^2)\mathcal{T}_1(\mathcal{T}_0)(\mathcal{J}_0)(\mathcal{R}_1)\\
&+ (324\,\tau^4 - 324\,\mu\,\tau^2 - 324\,\mu^2)\mathcal{T}_0(\mathcal{T}_0)(\mathcal{J}_1)(\mathcal{J}_0)\\
&+ (360\,\tau^4 - 2592\,\mu\,\tau^2 + 1242\,\mu^2)\mathcal{T}_0(\mathcal{T}_0)(\mathcal{J}_0)(\mathcal{R}_2)\\
&+ (-216\,\tau^5 + 1512\,\mu\,\tau^3 - 1944\,\mu^2\tau)\mathcal{T}_0(\mathcal{T}_0)(\mathcal{J}_2)(\mathcal{J}_0)\\
&+ (216\,\tau^5 - 432\,\mu\,\tau^3 + 162\,\mu^2\tau)\mathcal{T}_0(\mathcal{T}_0)(\mathcal{J}_2)(\mathcal{J}_2)\\
&+ (648\,\tau^5 - 810\,\mu\,\tau^3 - 648\,\mu^2\tau)\mathcal{T}_0(\mathcal{T}_0)(\mathcal{J}_0)(\mathcal{J}_0)\\
&+ (108\,\mu\,\tau^4 + 972\,\mu^2\tau^2 - 2592\,\mu^3)\mathcal{T}_0(\mathcal{T}_0)(\mathcal{J}_4)(\mathcal{J}_0)\\
&+ (540\,\mu\,\tau^4 - 1134\,\mu^2\tau^2 + 324\,\mu^3)\mathcal{T}_0(\mathcal{T}_0)(\mathcal{J}_4)(\mathcal{J}_2)\\
&+ (1296\,\mu\,\tau^4 - 3402\,\mu^2\tau^2 + 864\,\mu^3)\mathcal{T}_1(\mathcal{T}_0)(\mathcal{J}_0)(\mathcal{J}_0)\\
&- 72\,\mathcal{T}_1(\mathcal{T}_0)(\mathcal{R}_0)(\mathcal{R}_0)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+ 1296\,\mu\,\mathcal{T}_1(\mathcal{T}_0)(\mathcal{R}_1)(\mathcal{R}_1) - 1400\,\mu^3\mathcal{T}_2(\mathcal{T}_1)(\mathcal{R}_2)(\mathcal{R}_2)\\
&- 1408\,\mu^3\mathcal{T}_2(\mathcal{T}_2)(\mathcal{R}_2)(\mathcal{R}_1) + 504\,\mu^4\mathcal{T}_2(\mathcal{T}_1)(\mathcal{J}_4)(\mathcal{R}_2)\\
&+ 1224\,\mu^4\mathcal{T}_2(\mathcal{T}_2)(\mathcal{J}_0)(\mathcal{R}_2) + 108\,\mu^5\mathcal{T}_2(\mathcal{T}_1)(\mathcal{J}_4)(\mathcal{J}_4)\\
&- 432\,\mu^5\mathcal{T}_2(\mathcal{T}_2)(\mathcal{J}_4)(\mathcal{J}_0) + 432\,\tau\,\mathcal{T}_0(\mathcal{T}_0)(\mathcal{R}_1)(\mathcal{R}_1)\\
&- 216\,\tau\,\mathcal{T}_0(\mathcal{T}_0)(\mathcal{J}_1)(\mathcal{R}_0) + 288\,\tau\,\mathcal{T}_1(\mathcal{T}_0)(\mathcal{R}_1)(\mathcal{R}_0)\\
&+ 504\,\tau\,\mathcal{T}_1(\mathcal{T}_1)(\mathcal{R}_0)(\mathcal{R}_0) - 648\,\mu\,\tau\,\mathcal{T}_2(\mathcal{T}_2)(\mathcal{R}_0)(\mathcal{R}_0)\\
&+ (-1296\,\tau^2 + 648\,\mu)\mathcal{T}_2(\mathcal{T}_1)(\mathcal{R}_0)(\mathcal{R}_0) + (-864\,\tau^2 - 756\,\mu)\mathcal{T}_0(\mathcal{T}_0)(\mathcal{J}_0)(\mathcal{R}_0)\\
&+ (-432\,\tau^2 + 108\,\mu)\mathcal{T}_0(\mathcal{T}_0)(\mathcal{J}_1)(\mathcal{R}_1) + (576\,\tau^2 - 144\,\mu)\mathcal{T}_0(\mathcal{T}_0)(\mathcal{R}_2)(\mathcal{R}_1)\\
&+ (2160\,\tau^2 - 720\,\mu)\mathcal{T}_1(\mathcal{T}_1)(\mathcal{R}_1)(\mathcal{R}_0) + (-2592\,\tau^3 + 432\,\mu\,\tau)\mathcal{T}_2(\mathcal{T}_1)(\mathcal{R}_1)(\mathcal{R}_0)\\
&+ (-1512\,\tau^3 - 3456\,\mu\,\tau)\mathcal{T}_1(\mathcal{T}_0)(\mathcal{J}_0)(\mathcal{R}_0) + (-576\,\tau^3 + 432\,\mu\,\tau)\mathcal{T}_0(\mathcal{T}_0)(\mathcal{J}_1)(\mathcal{R}_2)\\
&+ (-432\,\tau^3 - 1728\,\mu\,\tau)\mathcal{T}_0(\mathcal{T}_0)(\mathcal{J}_0)(\mathcal{R}_1) + (-320\,\tau^3 + 1632\,\mu\,\tau)\mathcal{T}_1(\mathcal{T}_0)(\mathcal{R}_2)(\mathcal{R}_1)\\
&+ (108\,\tau^3 - 162\,\mu\,\tau)\mathcal{T}_0(\mathcal{T}_0)(\mathcal{J}_1)(\mathcal{J}_1) + (320\,\tau^3 - 192\,\mu\,\tau)\mathcal{T}_0(\mathcal{T}_0)(\mathcal{R}_2)(\mathcal{R}_2)\\
&+ (1728\,\tau^3 + 648\,\mu\,\tau)\mathcal{T}_1(\mathcal{T}_1)(\mathcal{R}_1)(\mathcal{R}_1) + (-8748\,\mu\,\tau^2 - 54\,\mu^2)\mathcal{T}_1(\mathcal{T}_1)(\mathcal{J}_0)(\mathcal{R}_0)\\
&+ (-4752\,\mu\,\tau^2 + 1296\,\mu^2)\mathcal{T}_2(\mathcal{T}_1)(\mathcal{R}_1)(\mathcal{R}_1) + (-1296\,\mu\,\tau^2 - 864\,\mu^2)\mathcal{T}_2(\mathcal{T}_2)(\mathcal{R}_1)(\mathcal{R}_0)\\
&+ (480\,\mu\,\tau^2 - 168\,\mu^2)\mathcal{T}_1(\mathcal{T}_0)(\mathcal{R}_2)(\mathcal{R}_2) + (1248\,\mu\,\tau^2 + 96\,\mu^2)\mathcal{T}_1(\mathcal{T}_1)(\mathcal{R}_2)(\mathcal{R}_1)\\
&+ (216\,\tau^4 - 324\,\mu\,\tau^2)\mathcal{T}_0(\mathcal{T}_0)(\mathcal{J}_2)(\mathcal{J}_1) + (-2592\,\mu\,\tau^3 - 2916\,\mu^2\tau)\mathcal{T}_1(\mathcal{T}_1)(\mathcal{J}_0)(\mathcal{R}_1)\\
&+ (-1008\,\mu\,\tau^3 - 540\,\mu^2\tau)\mathcal{T}_1(\mathcal{T}_0)(\mathcal{J}_0)(\mathcal{R}_2) + (-720\,\mu\,\tau^3 + 756\,\mu^2\tau)\mathcal{T}_0(\mathcal{T}_0)(\mathcal{J}_4)(\mathcal{R}_2)\\
&+ (1944\,\mu\,\tau^3 - 648\,\mu^2\tau)\mathcal{T}_2(\mathcal{T}_1)(\mathcal{J}_0)(\mathcal{R}_0) + (-2700\,\mu^2\tau^2 + 2412\,\mu^3)\mathcal{T}_1(\mathcal{T}_1)(\mathcal{J}_0)(\mathcal{R}_2)\\
&+ (108\,\mu^2\tau^2 + 108\,\mu^3)\mathcal{T}_1(\mathcal{T}_0)(\mathcal{J}_4)(\mathcal{R}_2) + (486\,\mu^2\tau^2 + 216\,\mu^3)\mathcal{T}_2(\mathcal{T}_2)(\mathcal{J}_0)(\mathcal{R}_0)\\
&+ (5022\,\mu^2\tau^2 - 1512\,\mu^3)\mathcal{T}_2(\mathcal{T}_1)(\mathcal{J}_0)(\mathcal{R}_1) + (-486\,\mu^2\tau^3 - 810\,\mu^3\tau)\mathcal{T}_1(\mathcal{T}_1)(\mathcal{J}_0)(\mathcal{J}_0)\\
&+ (-108\,\mu^2\tau^3 - 324\,\mu^3\tau)\mathcal{T}_0(\mathcal{T}_0)(\mathcal{J}_4)(\mathcal{J}_4) + (1404\,\mu^2\tau^3 - 3456\,\mu^3\tau)\mathcal{T}_1(\mathcal{T}_0)(\mathcal{J}_4)(\mathcal{J}_0)\\
&+ (-1134\,\mu^3\tau^2 + 324\,\mu^4)\mathcal{T}_2(\mathcal{T}_1)(\mathcal{J}_0)(\mathcal{J}_0) + (-702\,\mu^3\tau^2 + 432\,\mu^4)\mathcal{T}_1(\mathcal{T}_0)(\mathcal{J}_4)(\mathcal{J}_4)\\
&+ (216\,\mu^3\tau^2 - 2160\,\mu^4)\mathcal{T}_1(\mathcal{T}_1)(\mathcal{J}_4)(\mathcal{J}_0) + (-360\,\tau^4 + 432\,\mu\,\tau^2 - 54\,\mu^2)\mathcal{T}_0(\mathcal{T}_0)(\mathcal{J}_2)(\mathcal{R}_2)\\
&- 48\,\mu^2\tau\,\mathcal{T}_1(\mathcal{T}_1)(\mathcal{R}_2)(\mathcal{R}_2) - 3408\,\mu^2\tau\,\mathcal{T}_2(\mathcal{T}_1)(\mathcal{R}_2)(\mathcal{R}_1)\\
&- 2808\,\mu^2\tau\,\mathcal{T}_2(\mathcal{T}_2)(\mathcal{R}_1)(\mathcal{R}_1) + 468\,\mu^3\tau\,\mathcal{T}_1(\mathcal{T}_1)(\mathcal{J}_4)(\mathcal{R}_2)\\
&+ 3096\,\mu^3\tau\,\mathcal{T}_2(\mathcal{T}_1)(\mathcal{J}_0)(\mathcal{R}_2) + 1728\,\mu^3\tau\,\mathcal{T}_2(\mathcal{T}_2)(\mathcal{J}_0)(\mathcal{R}_1)\\
&- 54\,\mu^4\tau\,\mathcal{T}_1(\mathcal{T}_1)(\mathcal{J}_4)(\mathcal{J}_4) - 1080\,\mu^4\tau\,\mathcal{T}_2(\mathcal{T}_1)(\mathcal{J}_4)(\mathcal{J}_0)\\
&- 324\,\mu^4\tau\,\mathcal{T}_2(\mathcal{T}_2)(\mathcal{J}_0)(\mathcal{J}_0) + 144\,\mathcal{T}_0(\mathcal{T}_0)(\mathcal{R}_1)(\mathcal{R}_0)\\
&+ (324\,\mu\,\tau^5 - 1134\,\mu^2\tau^3 + 972\,\mu^3\tau)\mathcal{T}_1(\mathcal{T}_0)(\mathcal{T}_0)\\
&+ 108\,\mu^6\mathcal{T}_2(\mathcal{T}_2)(\mathcal{T}_2) + 324\,\mu^5\tau\,\mathcal{T}_2(\mathcal{T}_2)(\mathcal{T}_1)\\
&+ (-702\,\mu^3\tau^3 + 1296\,\mu^4\tau)\mathcal{T}_1(\mathcal{T}_1)(\mathcal{T}_1) + (-81\,\mu^4\tau^2 + 648\,\mu^5)\mathcal{T}_2(\mathcal{T}_1)(\mathcal{T}_1)\\
&+ (108\,\tau^6 - 324\,\mu\,\tau^4 + 243\,\mu^2\tau^2)\mathcal{T}_0(\mathcal{T}_0)(\mathcal{T}_0) + (-81\,\mu^2\tau^4 - 486\,\mu^3\tau^2 + 972\,\mu^4)\mathcal{T}_1(\mathcal{T}_1)(\mathcal{T}_0)\\
&+ (-324\,\tau^3 - 648\,\mu\,\tau)\mathcal{J}_0(\mathcal{J}_0)(\mathcal{J}_0)(\mathcal{J}_0)(\mathcal{J}_0)\\
&+ (-810\,\mu\,\tau^2 - 270\,\mu^2)\mathcal{J}_4(\mathcal{J}_0)(\mathcal{J}_0)(\mathcal{J}_0)(\mathcal{J}_0)\\
&- 18\,\mathcal{J}_1(\mathcal{J}_1)(\mathcal{J}_1)(\mathcal{J}_0)(\mathcal{J}_0)\\
&- 162\,\mu^3\mathcal{J}_4(\mathcal{J}_4)(\mathcal{J}_4)(\mathcal{J}_0)(\mathcal{J}_0) + 144\,\tau\,\mathcal{J}_0(\mathcal{J}_0)(\mathcal{J}_0)(\mathcal{J}_0)(\mathcal{R}_1)\\
&- 144\,\tau\,\mathcal{J}_1(\mathcal{J}_1)(\mathcal{J}_0)(\mathcal{J}_0)(\mathcal{J}_0) + 432\,\mu\,\tau\,\mathcal{J}_4(\mathcal{J}_0)(\mathcal{J}_0)(\mathcal{J}_0)(\mathcal{R}_2)\\
&+ (-\frac{896}{27} + \frac{128\,\nu}{9})\mathcal{J}_2(\mathcal{J}_0)(\mathcal{R}_2)(\mathcal{R}_2)(\mathcal{R}_2) + (-\frac{64\,\nu}{9} + \frac{448}{27})\mathcal{J}_0(\mathcal{J}_0)(\mathcal{R}_2)(\mathcal{R}_2)(\mathcal{R}_2)\\
&+ (-\frac{64\,\nu}{9} + \frac{448}{27})\mathcal{J}_2(\mathcal{J}_2)(\mathcal{R}_2)(\mathcal{R}_2)(\mathcal{R}_2) + (-378\,\tau^2 - 126\,\mu)\mathcal{J}_1(\mathcal{J}_0)(\mathcal{J}_0)(\mathcal{J}_0)(\mathcal{J}_0)\\
&+ (216\,\tau^2 + 144\,\mu)\mathcal{J}_0(\mathcal{J}_0)(\mathcal{J}_0)(\mathcal{J}_0)(\mathcal{R}_2) + 216\,\mu^2\mathcal{J}_4(\mathcal{J}_4)(\mathcal{J}_0)(\mathcal{J}_0)(\mathcal{R}_2)\\
&- 648\,\mu^2\tau\,\mathcal{J}_4(\mathcal{J}_4)(\mathcal{J}_0)(\mathcal{J}_0)(\mathcal{J}_0) + 24\,\mathcal{J}_0(\mathcal{J}_0)(\mathcal{J}_0)(\mathcal{J}_0)(\mathcal{R}_0)\\
&+ ((-2376\,\nu + 11952)\mu^2 + (-3672\,\nu - 1440)\tau^2\mu)\mathcal{T}_1(\mathcal{J}_0)(\mathcal{J}_0)(\mathcal{R}_2)\\
&+ ((-1512\,\nu + 6804)\mu + (2808\,\nu - 6372)\tau^2)\mathcal{T}_0(\mathcal{J}_1)(\mathcal{J}_0)(\mathcal{R}_2)\\
&+ ((-1296\,\nu + 2880)\mu + (-1728\,\nu + 3600)\tau^2)\mathcal{T}_2(\mathcal{J}_0)(\mathcal{R}_1)(\mathcal{R}_1)\\
&+ ((-1296\,\nu + 4680)\mu + (1296\,\nu - 5292)\tau^2)\mathcal{T}_1(\mathcal{J}_0)(\mathcal{J}_0)(\mathcal{R}_0)
\end{aligned}
$$

$$+((-648\,\nu-810)\mu+(-2268\,\nu-2835)\tau^2)\mathcal{T}_0(\mathcal{J}_1)(\mathcal{J}_1)(\mathcal{J}_0)$$
$$+((-648\,\nu+594)\mu^3+(-1458\,\nu-243)\tau^2\mu^2)\mathcal{T}_0(\mathcal{J}_4)(\mathcal{J}_4)(\mathcal{J}_0)$$
$$+((-112\,\nu+136)\mu+(320\,\nu-960)\tau^2)\mathcal{T}_0(\mathcal{J}_2)(\mathcal{R}_2)(\mathcal{R}_2)$$
$$+((144\,\nu-876)\mu^2+(144\,\nu+1464)\tau^2\mu)\mathcal{T}_0(\mathcal{J}_4)(\mathcal{J}_2)(\mathcal{R}_2)$$
$$+((384\,\nu-688)\mu+(1920\,\nu-3776)\tau^2)\mathcal{T}_1(\mathcal{J}_0)(\mathcal{R}_2)(\mathcal{R}_1)$$
$$+((432\,\nu-1512)\mu+(-432\,\nu+2808)\tau^2)\mathcal{T}_0(\mathcal{J}_2)(\mathcal{J}_1)(\mathcal{R}_2)$$
$$+((480\,\nu-1752)\mu+(-1088\,\nu+1280)\tau^2)\mathcal{T}_0(\mathcal{J}_0)(\mathcal{R}_2)(\mathcal{R}_2)$$
$$+((648\,\nu-4320)\mu^2+(648\,\nu-2160)\tau^2\mu)\mathcal{T}_2(\mathcal{J}_0)(\mathcal{J}_0)(\mathcal{R}_1)$$
$$+((2016\,\nu-2112)\mu^2+(1584\,\nu+9264)\tau^2\mu)\mathcal{T}_0(\mathcal{J}_4)(\mathcal{J}_0)(\mathcal{R}_2)$$
$$+((4104\,\nu-8460)\mu+(648\,\nu+11124)\tau^2)\mathcal{T}_0(\mathcal{J}_0)(\mathcal{J}_0)(\mathcal{R}_1)$$
$$+((-8262\,\nu-1134)\tau\,\mu^2+(-6804\,\nu-1296)\tau^3\mu)\mathcal{T}_0(\mathcal{J}_4)(\mathcal{J}_0)(\mathcal{J}_0)$$
$$+((-6156\,\nu-5184)\tau\,\mu+(-5184\,\nu-4158)\tau^3)\mathcal{T}_0(\mathcal{J}_1)(\mathcal{J}_0)(\mathcal{J}_0)$$
$$+((-3240\,\nu+11772)\tau\,\mu+(1296\,\nu-9504)\tau^3)\mathcal{T}_1(\mathcal{J}_0)(\mathcal{J}_0)(\mathcal{R}_1)$$
$$+((-1368\,\nu+7332)\tau\,\mu+(2208\,\nu-5392)\tau^3)\mathcal{T}_0(\mathcal{J}_2)(\mathcal{J}_0)(\mathcal{R}_2)$$
$$+((504\,\nu-1716)\tau\,\mu+(-480\,\nu+2080)\tau^3)\mathcal{T}_0(\mathcal{J}_2)(\mathcal{J}_2)(\mathcal{R}_2)$$
$$+((648\,\nu-2700)\tau\,\mu+1296\,\tau^3)\mathcal{T}_2(\mathcal{J}_0)(\mathcal{J}_0)(\mathcal{R}_0)$$
$$+((7776\,\nu-2376)\tau\,\mu+(-1728\,\nu+15408)\tau^3)\mathcal{T}_0(\mathcal{J}_0)(\mathcal{J}_0)(\mathcal{R}_2)$$
$$+((-3240\,\nu-1350)\mu^2+(-17496\,\nu-6642)\tau^2\mu+(-3888\,\nu-1296)\tau^4)\mathcal{T}_0(\mathcal{J}_0)(\mathcal{J}_0)(\mathcal{J}_0)$$
$$+1296\,\tau\,\mathcal{T}_0(\mathcal{J}_1)(\mathcal{J}_1)(\mathcal{R}_2)+432\,\mathcal{T}_0(\mathcal{J}_1)(\mathcal{J}_1)(\mathcal{R}_1)$$
$$+(-2172+1080\,\nu)\mathcal{T}_1(\mathcal{J}_0)(\mathcal{R}_1)(\mathcal{R}_0)+(-664+336\,\nu)\mathcal{T}_0(\mathcal{J}_1)(\mathcal{R}_2)(\mathcal{R}_1)$$
$$+(-432+216\,\nu)\mathcal{T}_0(\mathcal{J}_1)(\mathcal{J}_0)(\mathcal{R}_0)+(288-128\,\nu)\mathcal{T}_0(\mathcal{R}_2)(\mathcal{R}_2)(\mathcal{R}_1)$$
$$+(432-192\,\nu)\mathcal{T}_2(\mathcal{R}_1)(\mathcal{R}_1)(\mathcal{R}_1)+(1464-648\,\nu)\mathcal{T}_2(\mathcal{J}_0)(\mathcal{R}_0)(\mathcal{R}_0)$$
$$+(1500-864\,\nu)\mathcal{T}_0(\mathcal{J}_0)(R_1)(\mathcal{R}_1)+(256\,\nu-\frac{1712}{3})\mathcal{T}_1(\mathcal{R}_2)(\mathcal{R}_1)(\mathcal{R}_1)$$
$$+(-\frac{1504}{3}+256\,\nu)\tau\,\mathcal{T}_1(\mathcal{R}_2)(\mathcal{R}_2)(\mathcal{R}_1)+(\frac{832}{3}-\frac{320\,\nu}{3})\tau\,\mathcal{T}_0(\mathcal{R}_2)(\mathcal{R}_2)(\mathcal{R}_2)$$
$$+(\frac{1232}{3}-192\,\nu)\mu\,\mathcal{T}_2(\mathcal{R}_2)(\mathcal{R}_2)(\mathcal{R}_1)+(\frac{2080}{3}-320\,\nu)\tau\,\mathcal{T}_2(\mathcal{R}_2)(\mathcal{R}_1)(\mathcal{R}_1)$$
$$+(-2160\,\nu+4824)\tau\,\mathcal{T}_2(\mathcal{J}_0)(\mathcal{R}_1)(\mathcal{R}_0)+(-1896\,\nu+2420)\mu^3\mathcal{T}_1(\mathcal{J}_4)(\mathcal{J}_4)(\mathcal{R}_2)$$
$$+(-1584\,\nu+2232)\tau\,\mathcal{T}_0(\mathcal{J}_0)(\mathcal{R}_2)(\mathcal{R}_1)+(-696\,\nu-1448)\mu^3\mathcal{T}_2(\mathcal{J}_4)(\mathcal{J}_0)(\mathcal{R}_2)$$
$$+(-324\,\nu-540)\tau\,\mathcal{T}_0(\mathcal{J}_1)(\mathcal{J}_1)(\mathcal{J}_1)+(-216\,\nu+236)\mu^2\mathcal{T}_1(\mathcal{J}_4)(\mathcal{R}_2)(\mathcal{R}_2)$$
$$+(-72\,\nu-424)\mu^2\mathcal{T}_2(\mathcal{J}_0)(\mathcal{R}_2)(\mathcal{R}_2)+(544\,\nu-1264)\tau\,\mathcal{T}_0(\mathcal{J}_1)(\mathcal{R}_2)(\mathcal{R}_2)$$
$$+(864\,\nu-1440)\tau\,\mathcal{T}_0(\mathcal{J}_1)(\mathcal{J}_0)(\mathcal{R}_1)+(972\,\nu-162)\mu^4\mathcal{T}_1(\mathcal{J}_4)(\mathcal{J}_4)(\mathcal{J}_4)$$
$$+(1728\,\nu-180)\tau\,\mathcal{T}_0(\mathcal{J}_0)(\mathcal{J}_0)(\mathcal{R}_0)+(2592\,\nu-5040)\tau\,\mathcal{T}_1(\mathcal{J}_0)(\mathcal{R}_1)(\mathcal{R}_1)$$
$$+(-6336\,\nu+10320)\tau\,\mu^2\mathcal{T}_1(\mathcal{J}_4)(\mathcal{J}_0)(\mathcal{R}_2)+(-1632\,\nu+2864)\tau\,\mu\,\mathcal{T}_2(\mathcal{J}_0)(\mathcal{R}_2)(\mathcal{R}_1)$$
$$+(16\,\nu-688)\tau\,\mu\,\mathcal{T}_0(\mathcal{J}_4)(\mathcal{R}_2)(\mathcal{R}_2)+(216\,\nu-6084)\tau\,\mu^2\mathcal{T}_2(\mathcal{J}_0)(\mathcal{J}_0)(\mathcal{R}_2)$$
$$+(672\,\nu-1760)\tau\,\mu\,\mathcal{T}_1(\mathcal{J}_0)(\mathcal{R}_2)(\mathcal{R}_2)+(936\,\nu+624)\tau\,\mu^2\mathcal{T}_0(\mathcal{J}_4)(\mathcal{J}_4)(\mathcal{R}_2)$$
$$+(2430\,\nu-162)\tau\,\mu^3\mathcal{T}_0(\mathcal{J}_4)(\mathcal{J}_4)(\mathcal{J}_4)+\frac{272}{3}\,\mu\,\mathcal{T}_1(\mathcal{R}_2)(\mathcal{R}_2)(\mathcal{R}_2)$$
$$+(4374\,\mu^3\tau+(972\,\nu-3078)\tau^3\mu^2)\mathcal{T}_1(\mathcal{T}_1)(\mathcal{J}_0)$$
$$+((-1620\,\nu+1368)\mu^3+(2916\,\nu-3456)\tau^2\mu^2)\mathcal{T}_1(\mathcal{T}_1)(\mathcal{R}_2)$$
$$+((-1296\,\nu+3456)\mu^4+(2268\,\nu-3618)\tau^2\mu^3)\mathcal{T}_2(\mathcal{T}_1)(\mathcal{J}_0)$$
$$+((-648\,\nu+2808)\mu^3+(-486\,\nu+1620)\tau^2\mu^2)\mathcal{T}_2(\mathcal{T}_2)(\mathcal{R}_0)$$
$$+((324\,\nu-972)\mu+(648\,\nu+972)\tau^2)\mathcal{T}_0(\mathcal{T}_0)(\mathcal{R}_0)$$
$$+((2592\,\nu-4752)\mu^4+(-1620\,\nu+3132)\tau^2\mu^3)\mathcal{T}_1(\mathcal{T}_1)(\mathcal{J}_4)$$
$$+((3672\,\nu-15732)\mu^3+(-324\,\nu+16254)\tau^2\mu^2)\mathcal{T}_2(\mathcal{T}_1)(\mathcal{R}_1)$$
$$+((1296\,\nu-3456)\tau\,\mu+(-432\,\nu+3960)\tau^3)\mathcal{T}_0(\mathcal{T}_0)(\mathcal{R}_1)$$
$$+((1620\,\nu-6480)\tau\,\mu^2+(-432\,\nu+5616)\tau^3\mu)\mathcal{T}_1(\mathcal{T}_0)(\mathcal{R}_2)$$
$$+((1944\,\nu-7776)\tau\,\mu^2+(-1944\,\nu+10368)\tau^3\mu)\mathcal{T}_2(\mathcal{T}_1)(\mathcal{R}_0)$$

$$
\begin{aligned}
&+((1944\,\nu-5508)\tau\,\mu^2+(5184\,\nu-2160)\tau^3\mu)\mathcal{T}_1(\mathcal{T}_1)(\mathcal{R}_1)\\
&+((1944\,\nu-1404)\tau\,\mu^3+(-1620\,\nu+1944)\tau^3\mu^2)\mathcal{T}_1(\mathcal{T}_0)(\mathcal{J}_4)\\
&+((3240\,\nu-3132)\tau\,\mu+(3240\,\nu-2268)\tau^3)\mathcal{T}_1(\mathcal{T}_0)(\mathcal{R}_0)\\
&+(324\,\mu^2+(324\,\nu+648)\tau^2\mu+(-216\,\nu-540)\tau^4)\mathcal{T}_0(\mathcal{T}_0)(\mathcal{J}_1)\\
&+(4536\,\mu^2\tau+(1728\,\nu-3078)\tau^3\mu+(-1080\,\nu+324)\tau^5)\mathcal{T}_0(\mathcal{T}_0)(\mathcal{J}_0)\\
&+((-3888\,\nu+7128)\mu^3+(6804\,\nu-5346)\tau^2\mu^2+(-2592\,\nu+1080)\tau^4\mu)\mathcal{T}_1(\mathcal{T}_0)(\mathcal{J}_0)\\
&+((-1458\,\nu+9288)\mu^2+(20412\,\nu-38556)\tau^2\mu+5184\,\tau^4)\mathcal{T}_1(\mathcal{T}_1)(\mathcal{R}_0)\\
&+((-432\,\nu+54)\mu^2+(1512\,\nu-3132)\tau^2\mu+(-720\,\nu+3240)\tau^4)\mathcal{T}_0(\mathcal{T}_0)(\mathcal{R}_2)\\
&+((1620\,\nu-1944)\mu^3+(-1782\,\nu+4860)\tau^2\mu^2+(432\,\nu-2106)\tau^4\mu)\mathcal{T}_0(\mathcal{T}_0)(\mathcal{J}_4)\\
&+((4860\,\nu-12690)\mu^2+(-4536\,\nu+16200)\tau^2\mu+(3456\,\nu-4896)\tau^4)\mathcal{T}_1(\mathcal{T}_0)(\mathcal{R}_1)\\
&+(648\,\mu^2\nu\,\tau+(-756\,\nu+1350)\tau^3\mu+(216\,\nu-864)\tau^5)\mathcal{T}_0(\mathcal{T}_0)(\mathcal{J}_2)\\
&+(-216\,\nu+3024)\mu^4\mathcal{T}_2(\mathcal{T}_2)(\mathcal{R}_2)+(648\,\nu-1296)\mu^5\mathcal{T}_2(\mathcal{T}_2)(\mathcal{J}_4)\\
&+(-1512\,\nu+7164)\tau\,\mu^3\mathcal{T}_2(\mathcal{T}_2)(\mathcal{R}_1)+(648\,\nu-756)\tau\,\mu^4\mathcal{T}_2(\mathcal{T}_2)(\mathcal{J}_0)\\
&+(972\,\nu-1998)\tau\,\mu^4\mathcal{T}_2(\mathcal{T}_1)(\mathcal{J}_4)+(5616\,\nu-2628)\tau\,\mu^3\mathcal{T}_2(\mathcal{T}_1)(\mathcal{R}_2)\\
&+((648\,\nu^2-4536\,\nu+6732)\mu^4+(-1134\,\nu^2+5022\,\nu-6840)\tau^2\mu^3)\mathcal{T}_2(\mathcal{T}_1)\\
&+((-2916\,\nu+3240)\tau\,\mu^3-54\,(3\,\nu-5)(3\,\nu-16)\tau^3\mu^2)\mathcal{T}_1(\mathcal{T}_1)\\
&+((1944\,\nu^2-5832\,\nu+5400)\mu^3+(-3402\,\nu^2+9234\,\nu-12420)\tau^2\mu^2+(1296\,\nu^2-3240\,\nu+5040)\tau^4\mu)\mathcal{T}_1(\mathcal{T}_0)\\
&+((162\,\nu^2-1458\,\nu-432)\tau\,\mu^2+(-432\,\nu^2+1080\,\nu-2088)\tau^3\mu+(216\,\nu^2-108\,\nu+1440)\tau^5)\mathcal{T}_0(\mathcal{T}_0)\\
&+(-324\,\nu^2+810\,\nu-774)\tau\,\mu^4\mathcal{T}_2(\mathcal{T}_2)\\
&+((-\frac{1336}{3}-256\,\nu^2+944\,\nu)\mu+(704\,\nu^2-2880\,\nu+\frac{13840}{3})\tau^2)\mathcal{T}_0(\mathcal{R}_2)(\mathcal{R}_2)\\
&+((\frac{16456}{3}+384\,\nu^2-2736\,\nu)\mu-\frac{1}{3}(384\,\nu-640)(21\,\nu-46)\tau^2)\mathcal{T}_1(\mathcal{R}_2)(\mathcal{R}_1)\\
&+((-6912\,\nu^2+21060\,\nu-13092)\mu+(4968\,\nu^2-24300\,\nu+1500)\tau^2)\mathcal{T}_0(\mathcal{J}_0)(\mathcal{R}_1)\\
&+((-2808\,\nu^2+15336\,\nu-17400)\mu^2+(-3888\,\nu^2+10152\,\nu+432)\tau^2\mu)\mathcal{T}_2(\mathcal{J}_0)(\mathcal{R}_1)\\
&+((-144\,\nu^2-1428\,\nu+3864)\mu^2+(-576\,\nu^2+768\,\nu-10632)\tau^2\mu)\mathcal{T}_0(\mathcal{J}_4)(\mathcal{R}_2)\\
&+((216\,\nu^2-2430\,\nu+7554)\mu^3+(729\,\nu^2-891\,\nu-972)\tau^2\mu^2)\mathcal{T}_2(\mathcal{J}_0)(\mathcal{J}_0)\\
&+((810\,\nu^2-6966\,\nu+11682)\mu^3+(648\,\nu^2+3726\,\nu-11520)\tau^2\mu^2)\mathcal{T}_0(\mathcal{J}_4)(\mathcal{J}_4)\\
&+((1368\,\nu^2-6408\,\nu+8104)\mu+(2592\,\nu^2-11520\,\nu+13536)\tau^2)\mathcal{T}_2(\mathcal{R}_1)(\mathcal{R}_1)\\
&+((1512\,\nu^2-4104\,\nu-4464)\mu-216\,\nu\,(10\,\nu-19)\tau^2)\mathcal{T}_0(\mathcal{J}_1)(\mathcal{R}_2)\\
&+((3888\,\nu^2-16416\,\nu-2232)\mu^2+(-1728\,\nu^2+23112\,\nu-15216)\tau^2\mu)\mathcal{T}_1(\mathcal{J}_0)(\mathcal{R}_2)\\
&+((5184\,\nu^2-21600\,\nu+15984)\mu+(-5832\,\nu^2+22464\,\nu-15588)\tau^2)\mathcal{T}_1(\mathcal{J}_0)(\mathcal{R}_0)\\
&+((-1296\,\nu^3+4644\,\nu^2-2880\,\nu+3732)\mu^3+(243\,\nu^4+486\,\nu^3-5481\,\nu^2+10476\,\nu-5712)\tau^2\mu^2)\mathcal{T}_2(\mathcal{J}_4)(\mathcal{J}_1)\\
&+((1296\,\nu^3-5184\,\nu^2+7254\,\nu-24588)\mu^3+(-243\,\nu^4-486\,\nu^3+13095\,\nu^2-24246\,\nu+26520)\tau^2\mu^2)\mathcal{T}_1(\mathcal{J}_4)(\mathcal{J}_0)\\
&+((-324\,\nu-2916)\tau\,\mu+(864\,\nu^2-1944\,\nu+3756)\tau^3)\mathcal{T}_0(\mathcal{J}_2)(\mathcal{J}_1)\\
&+(18\,(3\,\nu+8)(3\,\nu+7)\mu+(1296\,\nu^2+3564\,\nu+2232)\tau^2)\mathcal{T}_0(\mathcal{J}_1)(\mathcal{J}_1)\\
&+((-6624\,\nu^2+7176\,\nu-17808)\tau\,\mu+(3840\,\nu^2-14864\,\nu-11104)\tau^3)\mathcal{T}_0(\mathcal{J}_0)(\mathcal{R}_2)\\
&+((-2916\,\nu^2+10152\,\nu-10944)\tau\,\mu+(-5184\,\nu+9072)\tau^3)\mathcal{T}_2(\mathcal{J}_0)(\mathcal{R}_0)\\
&+((-648\,\nu^2+2592\,\nu-7272)\tau\,\mu^2+(2916\,\nu^2-7452\,\nu+12312)\tau^3\mu)\mathcal{T}_1(\mathcal{J}_0)(\mathcal{J}_0)\\
&+((-486\,\nu^2+1458\,\nu-7560)\tau\,\mu^2+(1296\,\nu^2-3240\,\nu+6768)\tau^3\mu)\mathcal{T}_0(\mathcal{J}_4)(\mathcal{J}_2)\\
&+((1152\,\nu^2-4344\,\nu+1596)\tau\,\mu+(-1344\,\nu^2+3760\,\nu-3872)\tau^3)\mathcal{T}_0(\mathcal{J}_2)(\mathcal{R}_2)\\
&+((5832\,\nu^2+12150\,\nu+10422)\tau\,\mu+(4644\,\nu^2+12474\,\nu+762)\tau^3)\mathcal{T}_0(\mathcal{J}_1)(\mathcal{J}_0)\\
&+((7884\,\nu^2-32724\,\nu+18240)\tau\,\mu+(-7776\,\nu^2+35856\,\nu-22464)\tau^3)\mathcal{T}_1(\mathcal{J}_0)(\mathcal{R}_1)\\
&+((8100\,\nu^2-10530\,\nu+17028)\tau\,\mu^2+(4536\,\nu^2+11988\,\nu-12276)\tau^3\mu)\mathcal{T}_0(\mathcal{J}_4)(\mathcal{J}_0)\\
&+((-1782\,\nu^2+10044\,\nu-21888)\mu^2+(8100\,\nu^2-35478\,\nu+48024)\tau^2\mu+(-864\,\nu^2+9072\,\nu-14880)\tau^4)\mathcal{T}_0(\mathcal{J}_2)(\mathcal{J}_0)\\
&+((567\,\nu^2-2997\,\nu+4446)\mu^2+(-1296\,\nu^2+6804\,\nu-12330)\tau^2\mu+(864\,\nu^2-3888\,\nu+7104)\tau^4)\mathcal{T}_0(\mathcal{J}_2)(\mathcal{J}_2)\\
&+((6237\,\nu^2-2349\,\nu+19746)\mu^2+(18630\,\nu^2+50868\,\nu-27774)\tau^2\mu+(5832\,\nu^2+1296\,\nu+10044)\tau^4)\mathcal{T}_0(\mathcal{J}_0)(\mathcal{J}_0)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+(-1728\,\nu^2+7128\,\nu-7428)\mathcal{T}_1(\mathcal{R}_1)(\mathcal{R}_0)+(-216\,\nu^2+864\,\nu-912)\mathcal{T}_0(\mathcal{J}_1)(\mathcal{R}_0)\\
&+(720\,\nu^2-2808\,\nu+3256)\mathcal{T}_0(\mathcal{R}_1)(\mathcal{R}_1)+(1404\,\nu^2-6336\,\nu+7320)\mathcal{T}_2(\mathcal{R}_0)(\mathcal{R}_0)\\
&+(-3744\,\nu^2+14688\,\nu-13816)\tau\,\mathcal{T}_1(\mathcal{R}_1)(\mathcal{R}_1)+(-648\,\nu^2-1728\,\nu-1044)\tau\,\mathcal{T}_0(\mathcal{J}_0)(\mathcal{R}_0)\\
&+(-648\,\nu^2+2160\,\nu-3312)\tau\,\mathcal{T}_0(\mathcal{J}_1)(\mathcal{R}_1)+(-504\,\nu^2+3600\,\nu-2320)\mu^3\mathcal{T}_2(\mathcal{J}_4)(\mathcal{R}_2)\\
&+(-180\,\nu^2+888\,\nu-912)\mu^2\mathcal{T}_2(R_2)(\mathcal{R}_2)+(972\,\nu^2+162\,\nu-270)\mu^4\mathcal{T}_2(\mathcal{J}_4)(\mathcal{J}_4)\\
&+(1440\,\nu^2-5760\,\nu+7256)\tau\,\mathcal{T}_0(\mathcal{R}_2)(\mathcal{R}_1)+(3888\,\nu^2-17568\,\nu+20496)\tau\,\mathcal{T}_2(\mathcal{R}_1)(\mathcal{R}_0)\\
&+(\frac{7328}{3}-240\,\nu^2-96\,\nu)\tau\,\mu\,\mathcal{T}_1(\mathcal{R}_2)(\mathcal{R}_2)+(\frac{21136}{3}+1248\,\nu^2-5472\,\nu)\tau\,\mu\,\mathcal{T}_2(\mathcal{R}_2)(\mathcal{R}_1)\\
&+(-4644\,\nu^2+22356\,\nu-10572)\tau\,\mu^2\mathcal{T}_2(\mathcal{J}_0)(\mathcal{R}_2)+(1620\,\nu^2-1620\,\nu-72)\tau\,\mu^2\mathcal{T}_1(\mathcal{J}_4)(\mathcal{R}_2)\\
&+(1836\,\nu^2-3402\,\nu+5700)\tau\,\mu^3\mathcal{T}_2(\mathcal{J}_4)(\mathcal{J}_0)+(7884\,\nu^2-8910\,\nu-2568)\tau\,\mu^3\mathcal{T}_1(\mathcal{J}_4)(\mathcal{J}_4)\\
&+((-576\,\nu-192)\mu+(-864\,\nu-288)\tau^2)\mathcal{J}_0(\mathcal{J}_0)(\mathcal{J}_0)(\mathcal{R}_2)\\
&+((810\,\nu+504)\mu+(2214\,\nu+1260)\tau^2)\mathcal{J}_1(\mathcal{J}_0)(\mathcal{J}_0)(\mathcal{J}_0)\\
&+((1728\,\nu-144)\mu^2+(4536\,\nu-1188)\tau^2\mu)\mathcal{J}_4(\mathcal{J}_0)(\mathcal{J}_0)(\mathcal{J}_0)\\
&+((4968\,\nu+936)\tau\,\mu+(2268\,\nu+216)\tau^3)\mathcal{J}_0(\mathcal{J}_0)(\mathcal{J}_0)(\mathcal{J}_0)\\
&+(72-144\,\nu)\mathcal{J}_0(\mathcal{J}_0)(\mathcal{J}_0)(\mathcal{R}_0)+(90+54\,\nu)\mathcal{J}_1(\mathcal{J}_1)(\mathcal{J}_1)(\mathcal{J}_0)\\
&+(-\frac{544}{27}+\frac{1312\,\nu}{27}-\frac{160\,\nu^2}{9})\mathcal{J}_2(\mathcal{R}_2)(\mathcal{R}_2)(\mathcal{R}_2)+(-624\,\nu+\frac{7312}{9}+128\,\nu^2)\mathcal{J}_2(\mathcal{J}_1)(\mathcal{R}_2)(\mathcal{R}_2)\\
&+(1416\,\nu-304\,\nu^2-\frac{15656}{9})\mathcal{J}_1(\mathcal{J}_0)(\mathcal{R}_2)(\mathcal{R}_2)+(-\frac{1312\,\nu}{27}+\frac{160\,\nu^2}{9}+\frac{544}{27})\mathcal{J}_0(\mathcal{R}_2)(\mathcal{R}_2)(\mathcal{R}_2)\\
&+(176\,\nu^2-792\,\nu+\frac{8632}{9})\mathcal{J}_0(\mathcal{J}_0)(\mathcal{R}_2)(\mathcal{R}_1)+(-720\,\nu+120)\tau\,\mathcal{J}_0(\mathcal{J}_0)(\mathcal{J}_0)(\mathcal{R}_1)\\
&+(-432\,\nu+288)\mu^2\mathcal{J}_4(\mathcal{J}_4)(\mathcal{J}_0)(\mathcal{R}_2)+(324\,\nu-594)\mu^3\mathcal{J}_4(\mathcal{J}_4)(\mathcal{J}_4)(\mathcal{J}_0)\\
&+(648\,\nu+684)\tau\,\mathcal{J}_1(\mathcal{J}_1)(\mathcal{J}_0)(\mathcal{J}_0)+(-\frac{16688}{9}+1584\,\nu-352\,\nu^2)\tau\,\mathcal{J}_2(\mathcal{J}_0)(\mathcal{R}_2)(\mathcal{R}_2)\\
&+(-\frac{344}{3}-48\,\nu^2+168\,\nu)\mu\,\mathcal{J}_4(\mathcal{J}_2)(\mathcal{R}_2)(\mathcal{R}_2)+(\frac{632}{3}+48\,\nu^2-168\,\nu)\mu\,\mathcal{J}_4(\mathcal{J}_0)(\mathcal{R}_2)(\mathcal{R}_2)\\
&+(\frac{10240}{9}-960\,\nu+224\,\nu^2)\tau\,\mathcal{J}_0(\mathcal{J}_0)(\mathcal{R}_2)(\mathcal{R}_2)+(-624\,\nu+\frac{7312}{9}+128\,\nu^2)\tau\,\mathcal{J}_2(\mathcal{J}_2)(\mathcal{R}_2)(\mathcal{R}_2)\\
&+(-1296\,\nu+216)\tau\,\mu\,\mathcal{J}_4(\mathcal{J}_0)(\mathcal{J}_0)(\mathcal{R}_2)+(2592\,\nu-1836)\tau\,\mu^2\mathcal{J}_4(\mathcal{J}_4)(\mathcal{J}_0)(\mathcal{J}_0)\\
&+((-4536\,\nu^3+25596\,\nu^2-44964\,\nu+30384)\mu+(4536\,\nu^3-21708\,\nu^2+36972\,\nu-24696)\tau^2)\mathcal{T}_1(\mathcal{R}_0)\\
&+((-1944\,\nu^3+12744\,\nu^2-27162\,\nu+14766)\mu^3+3\,(3\,\nu-4)(27\,\nu^3-18\,\nu^2-516\,\nu+929)\tau^2\mu^2)\mathcal{T}_2(\mathcal{J}_0)\\
&+((-648\,\nu^3+1188\,\nu^2+8388\,\nu-4992)\mu^2+(1728\,\nu^2-20736\,\nu+21264)\tau^2\mu)\mathcal{T}_1(\mathcal{R}_2)\\
&+((648\,\nu^3-13284\,\nu^2+44694\,\nu-21636)\mu^3+(243\,\nu^4-2430\,\nu^3+10881\,\nu^2-38286\,\nu+26112)\tau^2\mu^2)\mathcal{T}_1(\mathcal{J}_4)\\
&+((1296\,\nu^3-9936\,\nu^2+27288\,\nu-27912)\mu^2+(2592\,\nu^3-6048\,\nu^2-1152\,\nu+5712)\tau^2\mu)\mathcal{T}_2(\mathcal{R}_1)\\
&+((2592\,\nu^3-10044\,\nu^2+13320\,\nu-8928)\mu+(-2592\,\nu^3+12312\,\nu^2-15156\,\nu+20160)\tau^2)\mathcal{T}_0(\mathcal{R}_1)\\
&+((-5832\,\nu^3+34992\,\nu^2-64368\,\nu+48564)\tau\,\mu+(5184\,\nu^3-27648\,\nu^2+44352\,\nu-29952)\tau^3)\mathcal{T}_1(\mathcal{R}_1)\\
&+((-2430\,\nu^3+7776\,\nu^2-13986\,\nu+2376)\tau\,\mu^2+(648\,\nu^3-10692\,\nu^2+9540\,\nu+792)\tau^3\mu)\mathcal{T}_0(\mathcal{J}_4)\\
&+((-972\,\nu^3-5022\,\nu^2-12690\,\nu-5724)\tau\,\mu+(-216\,\nu^3-9828\,\nu^2-1668\,\nu+1164)\tau^3)\mathcal{T}_0(\mathcal{J}_1)\\
&+((936\,\nu^3-1716\,\nu^2+10140\,\nu-4296)\tau\,\mu+(-768\,\nu^3+3520\,\nu^2-5584\,\nu+21216)\tau^3)\mathcal{T}_0(\mathcal{R}_2)\\
&+((2268\,\nu^3-8748\,\nu^2+24912\,\nu-27504)\tau\,\mu+(7776\,\nu^2-25920\,\nu+24576)\tau^3)\mathcal{T}_2(\mathcal{R}_0)\\
&+((-972\,\nu^4+7776\,\nu^3-23436\,\nu^2+31536\,\nu-11208)\tau\,\mu^2+(972\,\nu^4-7776\,\nu^3+21168\,\nu^2-26676\,\nu+6168)\tau^3\mu)\mathcal{T}_1(\mathcal{J}_0)\\
&+((972\,\nu^4-4860\,\nu^3+5130\,\nu^2+3942\,\nu+3576)\tau\,\mu^2+(-972\,\nu^4+3888\,\nu^3-3348\,\nu^2-9504\,\nu-912)\tau^3\mu)\mathcal{T}_2(\mathcal{J}_1)\\
&+((810\,\nu^3-3159\,\nu^2+45\,\nu+14058)\mu^2+(-2268\,\nu^3+5994\,\nu^2+9324\,\nu-29934)\tau^2\mu\\
&+(864\,\nu^3-5616\,\nu^2+3216\,\nu+6528)\tau^4)\mathcal{T}_0(\mathcal{J}_2)\\
&+((-405\,\nu^4+2106\,\nu^3-8190\,\nu^2+1269\,\nu-12786)\mu^2+(1620\,\nu^4-10206\,\nu^3+684\,\nu^2-40824\,\nu+24150)\tau^2\mu\\
&+(-756\,\nu^4+5184\,\nu^3-16260\,\nu^2+7200\,\nu-6696)\tau^4)\mathcal{T}_0(\mathcal{J}_0)\\
&+((405\,\nu^4-6156\,\nu^3+16857\,\nu^2-28710\,\nu-120)\mu^2+(-1620\,\nu^4+10854\,\nu^3-72450\,\nu^2+59544\,\nu+672)\tau^2\mu\\
&+(756\,\nu^4-8208\,\nu^3+15396\,\nu^2-18456\,\nu-1632)\tau^4)\mathcal{T}_1(\mathcal{J}_1)\\
&+(1620\,\nu^3-6588\,\nu^2+4680\,\nu-6792)\tau\,\mu^2\mathcal{T}_2(\mathcal{R}_2)\\
&+(972\,\nu^2-324\,\nu+2088)\tau\,\mathcal{T}_0(\mathcal{R}_0)+(-1620\,\nu^3+9342\,\nu^2-22068\,\nu+13308)\tau\,\mu^3\mathcal{T}_2(\mathcal{J}_4)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+((-\frac{9572}{3}+144\,\nu^3-1128\,\nu^2+3200\,\nu)\mu+(-576\,\nu^3+3936\,\nu^2-9344\,\nu+\frac{24512}{3})\tau^2)\mathcal{J}_2(\mathcal{J}_2)(\mathcal{R}_2)\\
&+((\frac{6632}{3}+72\,\nu^3-204\,\nu^2-488\,\nu)\mu+(1440\,\nu^3-9840\,\nu^2+23504\,\nu-\frac{57824}{3})\tau^2)\mathcal{J}_2(\mathcal{J}_0)(\mathcal{R}_2)\\
&+((-3726\,\nu^2+162\,\nu-486)\mu^2+(-8748\,\nu^2+4212\,\nu-1278)\tau^2\mu)\mathcal{J}_4(\mathcal{J}_0)(\mathcal{J}_0)\\
&+((-1728\,\nu^2-2646\,\nu-1014)\mu+(-4590\,\nu^2-6156\,\nu-1902)\tau^2)\mathcal{J}_1(\mathcal{J}_0)(\mathcal{J}_0)\\
&+((-216\,\nu^3+2196\,\nu^2-1560\,\nu+1748)\mu+(-864\,\nu^3+7200\,\nu^2-12720\,\nu+11608)\tau^2)\mathcal{J}_0(\mathcal{J}_0)(\mathcal{R}_2)\\
&+((-13716\,\nu^2-7236\,\nu-1608)\tau\,\mu+(-5832\,\nu^2-1728\,\nu-204)\tau^3)\mathcal{J}_0(\mathcal{J}_0)(\mathcal{J}_0)\\
&+(\frac{160}{9}-\frac{1088\,\nu}{27}-\frac{64\,\nu^3}{9}+\frac{832\,\nu^2}{27})\mathcal{R}_2(\mathcal{R}_2)(\mathcal{R}_2)\\
&+(-\frac{6080}{9}-\frac{11632\,\nu}{9}-416\,\nu^3+1568\,\nu^2)\tau\,\mathcal{J}_0(\mathcal{R}_2)(\mathcal{R}_2)\\
&+(-\frac{4400}{3}+144\,\nu^3-984\,\nu^2+2408\,\nu)\tau\,\mu\,\mathcal{J}_4(\mathcal{J}_2)(\mathcal{R}_2)\\
&+(\frac{5912}{3}-144\,\nu^3+2280\,\nu^2-2264\,\nu)\tau\,\mu\,\mathcal{J}_4(\mathcal{J}_0)(\mathcal{R}_2)\\
&-6\,(3\,\nu+5)(3\,\nu+4)\mathcal{J}_1(\mathcal{J}_1)(\mathcal{J}_1)\\
&+(1408+\frac{7472\,\nu}{9}+352\,\nu^3-1392\,\nu^2)\mathcal{J}_1(\mathcal{R}_2)(\mathcal{R}_2)+(-\frac{12872\,\nu}{3}-624\,\nu^3+3000\,\nu^2+\frac{3800}{3})\mathcal{J}_0(\mathcal{R}_2)(\mathcal{R}_1)\\
&+(-648\,\nu^3+4644\,\nu^2-9864\,\nu+7548)\mathcal{J}_0(\mathcal{J}_0)(\mathcal{R}_0)+(-432\,\nu^3+2808\,\nu^2-6144\,\nu+4980)\mathcal{J}_1(\mathcal{J}_1)(\mathcal{R}_2)\\
&+(1080\,\nu^3-7092\,\nu^2+15864\,\nu-12328)\mathcal{J}_1(\mathcal{J}_0)(\mathcal{R}_1)+(8-96\,\nu^3+336\,\nu^2-\frac{976\,\nu}{3})\mu\,\mathcal{J}_4(\mathcal{R}_2)(\mathcal{R}_2)\\
&+(\frac{5360}{9}+\frac{5776\,\nu}{9}+224\,\nu^3-896\,\nu^2)\tau\,\mathcal{J}_2(\mathcal{R}_2)(\mathcal{R}_2)+(-972\,\nu^2-2268\,\nu-1188)\tau\,\mathcal{J}_1(\mathcal{J}_1)(\mathcal{J}_0)\\
&+(-162\,\nu^2+594\,\nu-480)\mu^3\mathcal{J}_4(\mathcal{J}_4)(\mathcal{J}_4)+(216\,\nu^2-288\,\nu-24)\mu^2\mathcal{J}_4(\mathcal{J}_4)(\mathcal{R}_2)\\
&+(-1512\,\nu^3+11484\,\nu^2-22728\,\nu+17672)\tau\,\mathcal{J}_0(\mathcal{J}_0)(\mathcal{R}_1)+(-864\,\nu^3+5616\,\nu^2-12288\,\nu+9960)\tau\,\mathcal{J}_2(\mathcal{J}_1)(\mathcal{R}_2)\\
&+(2376\,\nu^3-15660\,\nu^2+35304\,\nu-27024)\tau\,\mathcal{J}_1(\mathcal{J}_0)(\mathcal{R}_2)+(-3240\,\nu^2+4536\,\nu-1980)\tau\,\mu^2\mathcal{J}_4(\mathcal{J}_4)(\mathcal{J}_0)\\
&+((-\frac{3460}{3}+576\,\nu^4-4044\,\nu^3+5972\,\nu^2-\frac{15404\,\nu}{3})\mu+(1368\,\nu^4-9024\,\nu^3+13048\,\nu^2-\frac{2272\,\nu}{3}-13712)\tau^2)\mathcal{J}_0(\mathcal{R}_2)\\
&+((\frac{1204}{3}+144\,\nu^4-1308\,\nu^3+4412\,\nu^2-\frac{15956\,\nu}{3})\mu+(-792\,\nu^4+4224\,\nu^3-5432\,\nu^2-\frac{19792\,\nu}{3}+13312)\tau^2)\mathcal{J}_2(\mathcal{R}_2)\\
&+((-810\,\nu^3+4806\,\nu^2-9900\,\nu+6144)\mu^2+(324\,\nu^4-1296\,\nu^3+2628\,\nu^2-2016\,\nu+784)\tau^2\mu)\mathcal{J}_4(\mathcal{J}_2)\\
&+((3564\,\nu^3-4914\,\nu^2+10242\,\nu-6780)\mu^2+(-324\,\nu^4+8424\,\nu^3-6624\,\nu^2+5220\,\nu-1348)\tau^2\mu)\mathcal{J}_4(\mathcal{J}_0)\\
&+((-648\,\nu^4+5022\,\nu^3-15138\,\nu^2+20340\,\nu-11072)\mu+(648\,\nu^4-4536\,\nu^3+14004\,\nu^2-19260\,\nu+10496)\tau^2)\mathcal{J}_2(\mathcal{J}_1)\\
&+((648\,\nu^4-3726\,\nu^3+19134\,\nu^2-16596\,\nu+12068)\mu+(-648\,\nu^4+8586\,\nu^3-4716\,\nu^2+25614\,\nu-9188)\tau^2)\mathcal{J}_1(\mathcal{J}_0)\\
&+((-648\,\nu^4+5508\,\nu^3-18378\,\nu^2+28170\,\nu-17768)\tau\,\mu+(648\,\nu^4-5184\,\nu^3+16920\,\nu^2-25200\,\nu+15344)\tau^3)\mathcal{J}_2(\mathcal{J}_2)\\
&+((-324\,\nu^4+18144\,\nu^3+6822\,\nu^2+31734\,\nu-16576)\tau\,\mu+(4536\,\nu^3+16416\,\nu^2-19908\,\nu+13896)\tau^3)\mathcal{J}_0(\mathcal{J}_0)\\
&+((972\,\nu^4-7614\,\nu^3+29214\,\nu^2-51912\,\nu+34848)\tau\,\mu+(-648\,\nu^4+7776\,\nu^3-28584\,\nu^2+46368\,\nu-29120)\tau^3)\mathcal{J}_2(\mathcal{J}_0)\\
&+(\frac{640}{3}+\frac{12880\,\nu}{9}+704\,\nu^3-\frac{16832\,\nu^2}{9}-64\,\nu^4)\tau\,\mathcal{R}_2(\mathcal{R}_2)\\
&+(\frac{19744}{3}-34668\,\nu^3+77592\,\nu^2-65160\,\nu+4968\,\nu^4)\tau\,\mathcal{J}_0(\mathcal{R}_1)\\
&+(\frac{112160}{3}+10584\,\nu^3-8712\,\nu^2-26160\,\nu-2160\,\nu^4)\tau\,\mathcal{J}_1(\mathcal{R}_2)\\
&+(16+288\,\nu^4-2400\,\nu^3+4456\,\nu^2-\frac{10168\,\nu}{3})\tau\,\mu\,\mathcal{J}_4(\mathcal{R}_2)\\
&+18\,(3\,\nu+5)(3\,\nu+2)(3\,\nu+4)\tau\,\mathcal{J}_1(\mathcal{J}_1)\\
&+(-1512\,\nu^4+9180\,\nu^3-17592\,\nu^2+7764\,\nu+\frac{19096}{3})\mathcal{J}_1(\mathcal{R}_1)\\
&+(288\,\nu^4-1440\,\nu^3+2408\,\nu^2-1472\,\nu+\frac{4688}{9})\mathcal{R}_2(\mathcal{R}_1)\\
&+(2160\,\nu^4-14904\,\nu^3+34008\,\nu^2-28692\,\nu+\frac{10364}{3})\mathcal{J}_0(\mathcal{R}_0)\\
&+(1296\,\nu^3-2700\,\nu^2+1908\,\nu-960)\tau\,\mu^2\mathcal{J}_4(\mathcal{J}_4)\\
&+((96-288\,\nu^5+1896\,\nu^4-3652\,\nu^3+\frac{8644\,\nu^2}{3}+\frac{3920\,\nu}{3})\mu
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+ (720\,\nu^5 - 7080\,\nu^4 + 27376\,\nu^3 - \frac{133240\,\nu^2}{3} + 27824\,\nu + \frac{1088}{3})\tau^2)\mathcal{R}_2 \\
&+ ((-2106\,\nu^4 + 9450\,\nu^3 - 19476\,\nu^2 + 12900\,\nu - 192)\mu^2 \\
&+ (648\,\nu^5 - 4698\,\nu^4 + 6228\,\nu^3 - 5886\,\nu^2 + 2108\,\nu - 128)\tau^2\mu)\mathcal{J}_4 \\
&+ ((-1296\,\nu^5 + 9234\,\nu^4 - 26550\,\nu^3 + 22716\,\nu^2 - 3712\,\nu - 11440)\mu \\
&+ (1296\,\nu^5 - 9720\,\nu^4 + 18936\,\nu^3 - 29628\,\nu^2 - 572\,\nu + 10144)\tau^2)\mathcal{J}_1 \\
&+ ((-1944\,\nu^5 + 16686\,\nu^4 - 64530\,\nu^3 + 102402\,\nu^2 - 99294\,\nu + 30392)\tau\,\mu \\
&+ (1944\,\nu^5 - 16524\,\nu^4 + 54000\,\nu^3 - 100116\,\nu^2 + 84984\,\nu - 26064)\tau^3)\mathcal{J}_2 \\
&+ ((-1296\,\nu^5 + 11826\,\nu^4 - 51660\,\nu^3 + 96714\,\nu^2 - 125680\,\nu + 61024)\tau\,\mu \\
&+ (1296\,\nu^5 - 11340\,\nu^4 + 42264\,\nu^3 - 97380\,\nu^2 + 109672\,\nu - 51936)\tau^3)\mathcal{J}_3 \\
&+ ((1296\,\nu^5 - 17010\,\nu^4 + 33732\,\nu^3 - 105516\,\nu^2 + 95506\,\nu - 30504)\tau\,\mu \\
&+ (-648\,\nu^5 + 7128\,\nu^4 - 48672\,\nu^3 + 89424\,\nu^2 - 82568\,\nu + 26000)\tau^3)\mathcal{J}_0 \\
&+ (-648\,\nu^5 + 3348\,\nu^4 - 2556\,\nu^3 - 9528\,\nu^2 + 15664\,\nu - \frac{11816}{3})\mathcal{R}_0 \\
&+ (-\frac{30592}{3} - 36\,\nu^3 - 30828\,\nu^2 + 42536\,\nu - 1296\,\nu^5 + 6048\,\nu^4)\tau\,\mathcal{R}_1\Big)
\end{aligned}
$$

D.4. K_m en generadores del álgebra $g^{(2)}$

$$
\begin{aligned}
k_1(u,w) \quad = \quad & \left(27648\,\mu\,\tau^2 + 864\,\mu^2\right)\mathcal{J}_4 + \left(27648\,\tau^2 + 864\,\mu\right)\mathcal{J}_1 \\
& + \left(27648\,\tau^3 + 864\,\mu\,\tau\right)\mathcal{J}_0 + \left(27648\,\tau^3 + 864\,\mu\,\tau\right)\mathcal{J}_2 \\
& + \left(-18432\,\tau^2 - 192\,\mu\right)\mathcal{R}_2 + 768\,\tau\,\mathcal{R}_1 + 384\,\mathcal{R}_0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
k_2(u,w) \quad = \quad & 32\,\mathcal{J}_1\,(\mathcal{R}_1) \\
& +1024\,\tau\,\mathcal{R}_2\,(\mathcal{R}_2) + 1088\,\tau\,\mathcal{J}_0\,(\mathcal{R}_1) \\
& -3136\,\tau\,\mathcal{J}_1\,(\mathcal{R}_2) + 2400\,\tau\,\mathcal{J}_1\,(\mathcal{J}_1) \\
& + \left(-5888\,\tau^2 + 640\,\mu\right)\mathcal{J}_0\,(\mathcal{R}_2) + \left(-4416\,\tau^2 - 288\,\mu\right)\mathcal{J}_2\,(\mathcal{J}_1) \\
& + \left(18432\,\tau^2 + 624\,\mu\right)\mathcal{J}_1\,(\mathcal{J}_0) + \left(-6912\,\tau^3 - 144\,\mu\,\tau\right)\mathcal{J}_2\,(\mathcal{J}_2) \\
& + \left(13440\,\tau^3 + 5760\,\mu\,\tau\right)\mathcal{J}_2\,(\mathcal{J}_0) + \left(16512\,\tau^3 - 96\,\mu\,\tau\right)\mathcal{J}_0\,(\mathcal{J}_0) \\
& + \left(-192\,\mu\,\tau^2 + 432\,\mu^2\right)\mathcal{J}_4\,(\mathcal{J}_2) + \left(23232\,\mu\,\tau^2 + 192\,\mu^2\right)\mathcal{J}_4\,(\mathcal{J}_0) \\
& -2944\,\mu\,\tau\,\mathcal{J}_4\,(\mathcal{R}_2) + 2304\,\mu^2\tau\,\mathcal{J}_4\,(\mathcal{J}_4) \\
& -\frac{128}{3}\,\mathcal{R}_2\,(\mathcal{R}_1) + 352\,\mathcal{J}_0\,(\mathcal{R}_0) \\
& + \left(-13824\,\tau^4 + 13392\,\mu\,\tau^2 + 432\,\mu^2\right)(\mathcal{T}_0) \\
& + \left(-13824\,\mu\,\tau^3 - 432\,\mu^2\tau\right)(\mathcal{T}_1) + \left(-13824\,\mu^2\tau^2 - 432\,\mu^3\right)(\mathcal{T}_2) \\
& + (-1728\,\nu + 3648)\,\tau\,\mathcal{R}_1 \\
& + (-864\,\nu + 416)\,\mathcal{R}_0 + \left((-2016\,\nu - 144)\,\mu + (-55488\,\nu + 77184)\,\tau^2\right)\mathcal{J}_1 \\
& \left((-1584\,\nu + 432)\,\mu^2 + (-60288\,\nu + +100224)\,\tau^2\mu\right)\mathcal{J}_4 \\
& + \left((384\,\nu - 384)\,\mu + (30720\,\nu - 57600)\,\tau^2\right)\mathcal{R}_2 \\
& + \left((-6336\,\nu + 2592)\,\tau\,\mu + (-74496\,\nu + 91008)\,\tau^3\right)\mathcal{J}_0 \\
& + \left((-2016\,\nu - 2256)\,\tau\,\mu + (-46080\,\nu + 86400)\,\tau^3\right)\mathcal{J}_2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
k_3(u,w) \quad = \quad & \frac{1}{27}\Big(\left((-3888\,\nu - 16200)\,\mu^3 + (-447120\,\nu + 1146960)\,\tau^2\mu^2\right)\mathcal{T}_1\,(\mathcal{J}_4)\,(\mathcal{J}_0) \\
& + \left((3888\,\nu + 16200)\,\mu^3 + (447120\,\nu - 1146960)\,\tau^2\mu^2\right)\mathcal{T}_2\,(\mathcal{J}_4)\,(\mathcal{J}_1) \\
& + \left((3888\,\nu + 648)\,\mu^3 + (447120\,\nu - 1264896)\,\tau^2\mu^2\right)\mathcal{T}_1\,(\mathcal{J}_4) \\
& + \left((3888\,\nu + 21384)\,\mu^3 + (447120\,\nu - 1215648)\,\tau^2\mu^2\right)\mathcal{T}_2\,(\mathcal{J}_0) \\
& + \left((-19440\,\nu + 57672)\,\tau\,\mu^2 + (-435456\,\nu + 1041984)\,\tau^3\mu\right)\mathcal{T}_2\,(\mathcal{J}_1) \\
& \left((19440\,\nu - 134136)\,\tau\,\mu^2 + (+435456\,\nu - 1099008)\,\tau^3\mu\right)\mathcal{T}_1\,(\mathcal{J}_0) \\
& + \left((-19440\,\nu + 4536)\,\mu^2 + (-476928\,\nu + 1122984)\,\tau^2\mu + (497664\,\nu - 1161216)\,\tau^4\right)\mathcal{T}_0\,(\mathcal{J}_0) \\
& + \left((19440\,\nu - 4536)\,\mu^2 + (476928\,\nu - 1134648)\,\tau^2\mu + (-497664\,\nu + 1104192)\,\tau^4\right)\mathcal{T}_1\,(\mathcal{J}_1) \\
& -63504\,\mu^3\tau\,\mathcal{T}_2\,(\mathcal{J}_4) \\
& +78624\,\tau\,\mathcal{T}_0\,(\mathcal{R}_0) + 78624\,\mu^2\tau\,\mathcal{T}_2\,(\mathcal{R}_2) \\
& + \left(27648\,\tau^2 - 15552\,\mu\right)\mathcal{T}_1\,(\mathcal{R}_0) + \left(162432\,\tau^2 + 2592\,\mu\right)\mathcal{T}_0\,(\mathcal{R}_1) \\
& + \left(-120960\,\tau^3 - 232416\,\mu\,\tau\right)\mathcal{T}_2\,(R_0) + \left(-62208\,\tau^3 + 60912\,\mu\,\tau\right)\mathcal{T}_0\,(\mathcal{J}_1) \\
& + \left(84672\,\tau^3 + 106272\,\mu\,\tau\right)\mathcal{T}_1\,(\mathcal{R}_1) + \left(122688\,\tau^3 - 38016\,\mu\,\tau\right)\mathcal{T}_0\,(\mathcal{R}_2) \\
& + \left(-78624\,\mu\,\tau^2 - 41472\,\mu^2\right)\mathcal{T}_2\,(\mathcal{R}_1) + \left(165024\,\mu\,\tau^2 + 2592\,\mu^2\right)\mathcal{T}_1\,(\mathcal{R}_2) \\
& + \left(-62208\,\tau^4 + 60912\,\mu\,\tau^2\right)\mathcal{T}_0\,(\mathcal{J}_2) + \left(-121824\,\mu\,\tau^3 + 53136\,\mu^2\tau\right)\mathcal{T}_0\,(\mathcal{J}_4) \\
& +1296\,\mathcal{J}_1\,(\mathcal{J}_1)\,(\mathcal{J}_1) \\
& -576\,\mu\,\mathcal{J}_4\,(\mathcal{R}_2)\,(\mathcal{R}_2) + 432\,\mu^3\,\mathcal{J}_4\,(\mathcal{J}_4)\,(\mathcal{J}_4) \\
& +6912\,\tau\,\mathcal{J}_0\,(\mathcal{R}_2)\,(\mathcal{R}_2) + 4320\,\tau\,\mathcal{J}_0\,(\mathcal{J}_0)\,(\mathcal{R}_1) \\
& -49824\,\tau\,\mathcal{J}_1\,(\mathcal{J}_0)\,(\mathcal{R}_2) + 29376\,\tau\,\mathcal{J}_1\,(\mathcal{J}_1)\,(\mathcal{J}_0) \\
& -8064\,\tau\,\mathcal{J}_2\,(\mathcal{R}_2)\,(\mathcal{R}_2) + 38016\,\tau\,\mathcal{J}_2\,(\mathcal{J}_1)\,(\mathcal{R}_2)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\left(-55872\,\tau^2+8640\,\mu\right)\mathcal{J}_0\left(\mathcal{J}_0\right)\left(\mathcal{R}_2\right)+\left(-21888\,\tau^2-4320\,\mu\right)\mathcal{J}_2\left(\mathcal{J}_0\right)\left(\mathcal{R}_2\right)\\
&+\left(39744\,\tau^2+864\,\mu\right)\mathcal{J}_2\left(\mathcal{J}_2\right)\left(\mathcal{R}_2\right)+\left(120960\,\tau^2+6480\,\mu\right)\mathcal{J}_1\left(\mathcal{J}_0\right)\left(\mathcal{J}_0\right)\\
&+\left(133056\,\tau^3+107136\,\mu\,\tau\right)\mathcal{J}_0\left(\mathcal{J}_0\right)\left(\mathcal{J}_0\right)+\left(199584\,\mu\,\tau^2+9072\,\mu^2\right)\mathcal{J}_4\left(\mathcal{J}_0\right)\left(\mathcal{J}_0\right)\\
&-66816\,\mu\,\tau\,\mathcal{J}_4\left(\mathcal{J}_0\right)\left(\mathcal{R}_2\right)+28800\,\mu\,\tau\,\mathcal{J}_4\left(\mathcal{J}_2\right)\left(\mathcal{R}_2\right)\\
&+67392\,\mu^2\tau\,\mathcal{J}_4\left(\mathcal{J}_4\right)\left(\mathcal{J}_0\right)-256\,\mathcal{R}_2\left(\mathcal{R}_2\right)\left(\mathcal{R}_2\right)\\
&-2112\,\mathcal{J}_0\left(\mathcal{R}_2\right)\left(\mathcal{R}_1\right)+1536\,\mathcal{J}_1\left(\mathcal{R}_2\right)\left(\mathcal{R}_2\right)\\
&+4320\,\mathcal{J}_1\left(\mathcal{J}_0\right)\left(\mathcal{R}_1\right)-2592\,\mathcal{J}_1\left(\mathcal{J}_1\right)\left(\mathcal{R}_2\right)\\
&+\left((-40176\,\nu-14904)\,\mu+(-743904\,\nu+1242432)\,\tau^2\right)\mathcal{J}_1\left(\mathcal{J}_0\right)\\
&+\left((-38880\,\nu-21168)\,\mu^2+(-1069200\,\nu+1881360)\,\tau^2\mu\right)\mathcal{J}_4\left(\mathcal{J}_0\right)\\
&+\left((-18144\,\nu+27864)\,\mu^2+(1296\,\nu+84240)\,\tau^2\mu\right)\mathcal{J}_4\left(\mathcal{J}_2\right)\\
&+\left((-322704\,\nu-319680)\,\tau\,\mu+(-821664\,\nu+1096416)\,\tau^3\right)\mathcal{J}_0\left(\mathcal{J}_0\right)\\
&+\left((-219024\,\nu+670032)\,\tau\,\mu+(-495072\,\nu+1170720)\,\tau^3\right)\mathcal{J}_2\left(\mathcal{J}_0\right)\\
&+\left((5184\,\nu-84024)\,\tau\,\mu+(248832\,\nu-501120)\,\tau^3\right)\mathcal{J}_2\left(\mathcal{J}_2\right)\\
&+(150912\,\nu-234432)\,\tau\,\mu\,\mathcal{J}_4\left(\mathcal{R}_2\right)\\
&+(-4608+3456\,\nu)\,\mathcal{R}_2\left(\mathcal{R}_1\right)+(-3888-6912\,\nu)\,\mathcal{J}_0\left(\mathcal{R}_0\right)\\
&+(6480-6048\,\nu)\,\mathcal{J}_1\left(\mathcal{R}_1\right)+\left((-19008\,\nu-2304)\,\mu+(301824\,\nu-430848)\,\tau^2\right)\mathcal{J}_0\left(\mathcal{R}_2\right)\\
&+\left((9072\,\nu+9936)\,\mu+(194400\,\nu-398304)\,\tau^2\right)\mathcal{J}_2\left(\mathcal{J}_1\right)+(-55728\,\nu+114912)\,\tau\,\mathcal{J}_1\left(\mathcal{J}_1\right)\\
&+(-36864\,\nu+76032)\,\tau\,\mathcal{R}_2\left(\mathcal{R}_2\right)+(-26784\,\nu+48096)\,\tau\,\mathcal{J}_0\left(\mathcal{R}_1\right)\\
&+(138240\,\nu-216864)\,\tau\,\mathcal{J}_1\left(\mathcal{R}_2\right)+(-111456\,\nu+231552)\,\tau\,\mu^2\mathcal{J}_4\left(\mathcal{J}_4\right)\\
&+\left(\left(-10800\,\nu^2+40464\,\nu-25344\right)\mu+\left(-547776\,\nu^2+1788480\,\nu-1232640\right)\tau^2\right)\mathcal{R}_2\\
&+\left(\left(33048\,\nu^2-13392\,\nu+41688\right)\mu^2+\left(1215648\,\nu^2-4139424\,\nu+2963520\right)\tau^2\mu\right)\mathcal{J}_4\\
&+\left(\left(44712\,\nu^2+1944\,\nu+53784\right)\mu+\left(1003104\,\nu^2-2867616\,\nu+1190592\right)\tau^2\right)\mathcal{J}_1\\
&+\left(\left(43416\,\nu^2+24408\,\nu-363096\right)\tau\,\mu+\left(699840\,\nu^2-2603232\,\nu+1747872\right)\tau^3\right)\mathcal{J}_2\\
&+\left(\left(214488\,\nu^2+302184\,\nu+511920\right)\tau\,\mu+\left(1731456\,\nu^2-4607712\,\nu+2280096\right)\tau^3\right)\mathcal{J}_0\\
&+\left(12960\,\nu^2-2160\,\nu-7056\right)\mathcal{R}_0+\left(25920\,\nu^2-179712\,\nu+290880\right)\tau\,\mathcal{R}_1)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
k_4(u,w) \;=\;& \frac{1}{27}\Big(16524\,\mu^4\tau\,\mathcal{T}_2\,(\mathcal{T}_2) + \left(31104\,\mu\,\tau^4 - 30456\,\mu^2\tau^2\right)\mathcal{T}_1\,(\mathcal{T}_0) + \left(44712\,\mu^2\tau^3 - 26568\,\mu^3\tau\right)\mathcal{T}_1\,(\mathcal{T}_1)\\
&+\left(29160\,\mu^3\tau^2 + 5184\,\mu^4\right)\mathcal{T}_2\,(\mathcal{T}_1) + \left(15552\,\tau^5 - 30780\,\mu\,\tau^3 + 15228\,\mu^2\tau\right)\mathcal{T}_0\,(\mathcal{T}_0)\\
&+\left(\left(-3564\,\nu^2 + 12852\,\nu - 17388\right)\mu^3 + \left(-166212\,\nu^2 + 771120\,\nu - 841212\right)\tau^2\mu^2\right)\mathcal{T}_2\,(\mathcal{J}_4)\,(\mathcal{J}_1)\\
&+\left(\left(3564\,\nu^2 - 12852\,\nu + 7884\right)\mu^3 + \left(166212\,\nu^2 - 771120\,\nu + 777060\right)\tau^2\mu^2\right)\mathcal{T}_1\,(\mathcal{J}_4)\,(\mathcal{J}_0)\\
&+1296\,\mu^2\mathcal{T}_2\,(\mathcal{R}_2)\,(\mathcal{R}_2) + 432\,\mu^3\mathcal{T}_2\,(\mathcal{J}_4)\,(\mathcal{R}_2)\\
&-972\,\mu^4\mathcal{T}_2\,(\mathcal{J}_4)\,(\mathcal{J}_4) + 4128\,\tau\,\mathcal{T}_0\,(\mathcal{R}_2)\,(\mathcal{R}_1)\\
&+26208\,\tau\,\mathcal{T}_0\,(\mathcal{J}_0)\,(\mathcal{R}_0) - 11808\,\tau\,\mathcal{T}_0\,(\mathcal{J}_1)\,(\mathcal{R}_1)\\
&-5184\,\tau\,\mathcal{T}_1\,(\mathcal{R}_1)\,(\mathcal{R}_1) - 10080\,\tau\,\mathcal{T}_2\,(\mathcal{R}_1)\,(\mathcal{R}_0)\\
&+\left(-23184\,\tau^2 - 3024\,\mu\right)\mathcal{T}_0\,(\mathcal{J}_1)\,(\mathcal{R}_2) + \left(-21312\,\tau^2 - 3600\,\mu\right)\mathcal{T}_2\,(\mathcal{R}_1)\,(\mathcal{R}_1)\\
&+\left(-2304\,\tau^2 - 3552\,\mu\right)\mathcal{T}_1\,(\mathcal{R}_2)\,(\mathcal{R}_1) + \left(-324\,\tau^2 + 324\,\mu\right)\mathcal{T}_0\,(\mathcal{J}_1)\,(\mathcal{J}_1)\\
&+\left(5760\,\tau^2 + 1104\,\mu\right)\mathcal{T}_0\,(\mathcal{R}_2)\,(\mathcal{R}_2) + \left(31536\,\tau^2 + 11664\,\mu\right)\mathcal{T}_0\,(\mathcal{J}_0)\,(\mathcal{R}_1)\\
&+\left(38448\,\tau^2 - 15984\,\mu\right)\mathcal{T}_1\,(\mathcal{J}_0)\,(\mathcal{R}_0) + \left(-30240\,\tau^3 + 28512\,\mu\,\tau\right)\mathcal{T}_0\,(\mathcal{J}_1)\,(\mathcal{J}_0)\\
&+\left(-17280\,\tau^3 + 3528\,\mu\,\tau\right)\mathcal{T}_0\,(\mathcal{J}_2)\,(\mathcal{R}_2) + \left(-10368\,\tau^3 - 49032\,\mu\,\tau\right)\mathcal{T}_2\,(\mathcal{J}_0)\,(\mathcal{R}_0)\\
&+\left(10368\,\tau^3 - 7992\,\mu\,\tau\right)\mathcal{T}_0\,(\mathcal{J}_0)\,(\mathcal{R}_2) + \left(20088\,\tau^3 - 19656\,\mu\,\tau\right)\mathcal{T}_0\,(\mathcal{J}_2)\,(\mathcal{J}_1)\\
&+\left(48384\,\tau^3 + 38232\,\mu\,\tau\right)\mathcal{T}_1\,(\mathcal{J}_0)\,(\mathcal{R}_1) + \left(-20736\,\mu\,\tau^2 - 432\,\mu^2\right)\mathcal{T}_0\,(\mathcal{J}_4)\,(\mathcal{R}_2)\\
&+\left(8640\,\mu\,\tau^2 - 9072\,\mu^2\right)\mathcal{T}_2\,(\mathcal{J}_0)\,(\mathcal{R}_1) + \left(58752\,\mu\,\tau^2 - 4752\,\mu^2\right)\mathcal{T}_1\,(\mathcal{J}_0)\,(\mathcal{R}_2)\\
&+\left(-55728\,\mu\,\tau^3 + 47952\,\mu^2\tau\right)\mathcal{T}_0\,(\mathcal{J}_4)\,(\mathcal{J}_0) + \left(-32400\,\mu\,\tau^3 - 37584\,\mu^2\tau\right)\mathcal{T}_1\,(\mathcal{J}_0)\,(\mathcal{J}_0)\\
&+\left(31104\,\mu\,\tau^3 - 9504\,\mu^2\tau\right)\mathcal{T}_0\,(\mathcal{J}_4)\,(\mathcal{J}_2) + \left(-35316\,\mu^2\tau^2 + 756\,\mu^3\right)\mathcal{T}_2\,(\mathcal{J}_0)\,(\mathcal{J}_0)\\
&+\left(32724\,\mu^2\tau^2 - 1944\,\mu^3\right)\mathcal{T}_0\,(\mathcal{J}_4)\,(\mathcal{J}_4) + \left(-32400\,\tau^4 + 3240\,\mu\,\tau^2 - 8424\,\mu^2\right)\mathcal{T}_0\,(\mathcal{J}_0)\,(\mathcal{J}_0)\\
&+\left(-15552\,\tau^4 + 30240\,\mu\,\tau^2 + 5184\,\mu^2\right)\mathcal{T}_0\,(\mathcal{J}_2)\,(\mathcal{J}_0)\\
&+\left(19440\,\tau^4 - 18036\,\mu\,\tau^2 - 972\,\mu^2\right)\mathcal{T}_0\,(\mathcal{J}_2)\,(\mathcal{J}_2)\\
&+4608\,\mu\,\tau\,\mathcal{T}_1\,(\mathcal{R}_2)\,(\mathcal{R}_2) - 22464\,\mu\,\tau\,\mathcal{T}_2\,(\mathcal{R}_2)\,(\mathcal{R}_1)\\
&-13824\,\mu^2\tau\,\mathcal{T}_1\,(\mathcal{J}_4)\,(\mathcal{R}_2) + 30240\,\mu^2\tau\,\mathcal{T}_2\,(\mathcal{J}_0)\,(\mathcal{R}_2)\\
&+9072\,\mu^3\tau\,\mathcal{T}_1\,(\mathcal{J}_4)\,(\mathcal{J}_4) - 47304\,\mu^3\tau\,\mathcal{T}_2\,(\mathcal{J}_4)\,(\mathcal{J}_0)\\
&-2736\,\mathcal{T}_0\,(\mathcal{R}_1)\,(\mathcal{R}_1) + 864\,\mathcal{T}_0\,(\mathcal{J}_1)\,(\mathcal{R}_0)\\
&+4896\,\mathcal{T}_1\,(\mathcal{R}_1)\,(\mathcal{R}_0) - 3744\,\mathcal{T}_2\,(\mathcal{R}_0)\,(\mathcal{R}_0)\\
&-800\,\mathcal{J}_2\,(\mathcal{J}_1)\,(\mathcal{R}_2)\,(\mathcal{R}_2)\\
&-1152\,\mu\,\mathcal{J}_4\,(\mathcal{J}_0)\,(\mathcal{R}_2)\,(\mathcal{R}_2) - 864\,\mu^2\mathcal{J}_4\,(\mathcal{J}_4)\,(\mathcal{J}_0)\,(\mathcal{R}_2)\\
&+1296\,\mu^3\mathcal{J}_4\,(\mathcal{J}_4)\,(\mathcal{J}_4)\,(\mathcal{J}_0) - 1152\,\tau\,\mathcal{J}_0\,(\mathcal{J}_0)\,(\mathcal{R}_2)\,(\mathcal{R}_2)\\
&-1440\,\tau\,\mathcal{J}_0\,(\mathcal{J}_0)\,(\mathcal{J}_0)\,(\mathcal{R}_1) + 6336\,\tau\,\mathcal{J}_1\,(\mathcal{J}_1)\,(\mathcal{J}_0)\,(\mathcal{J}_0)\\
&+\left(-1728\,\tau^2 - 1152\,\mu\right)\mathcal{J}_0\,(\mathcal{J}_0)\,(\mathcal{J}_0)\,(\mathcal{R}_2) + \left(20952\,\tau^2 + 3456\,\mu\right)\mathcal{J}_1\,(\mathcal{J}_0)\,(\mathcal{J}_0)\,(\mathcal{J}_0)\\
&+\left(23328\,\tau^3 + 25488\,\mu\,\tau\right)\mathcal{J}_0\,(\mathcal{J}_0)\,(\mathcal{J}_0)\,(\mathcal{J}_0) + \left(46656\,\mu\,\tau^2 + 4968\,\mu^2\right)\mathcal{J}_4\,(\mathcal{J}_0)\,(\mathcal{J}_0)\,(\mathcal{J}_0)\\
&-2592\,\mu\,\tau\,\mathcal{J}_4\,(\mathcal{J}_0)\,(\mathcal{J}_0)\,(\mathcal{R}_2) + 24624\,\mu^2\tau\,\mathcal{J}_4\,(\mathcal{J}_4)\,(\mathcal{J}_0)\,(\mathcal{J}_0)\\
&-128\,\mathcal{J}_0\,(\mathcal{R}_2)\,(\mathcal{R}_2)\,(\mathcal{R}_2) - 1184\,\mathcal{J}_0\,(\mathcal{J}_0)\,(\mathcal{R}_2)\,(\mathcal{R}_1)\\
&-288\,\mathcal{J}_0\,(\mathcal{J}_0)\,(\mathcal{J}_0)\,(\mathcal{R}_0) + 1600\,\mathcal{J}_1\,(\mathcal{J}_0)\,(\mathcal{R}_2)\,(\mathcal{R}_2)\\
&+648\,\mathcal{J}_1\,(\mathcal{J}_1)\,(\mathcal{J}_1)\,(\mathcal{J}_0) + 128\,\mathcal{J}_2\,(\mathcal{R}_2)\,(\mathcal{R}_2)\,(\mathcal{R}_2)\\
&+\left((31104\,\nu - 8208)\,\mu^2 + (31104\,\nu - 228528)\,\tau^2\mu\right)\mathcal{T}_2\,(\mathcal{R}_1)\\
&+\left(\left(-3564\,\nu^2 + 8964\,\nu - 11880\right)\mu^3 + \left(-166212\,\nu^2 + 885816\,\nu - 1012284\right)\tau^2\mu^2\right)\mathcal{T}_2\,(\mathcal{J}_0)\\
&+\left(\left(-3564\,\nu^2 + 24516\,\nu - 18252\right)\mu^3 + \left(-166212\,\nu^2 + 983016\,\nu - 1272456\right)\tau^2\mu^2\right)\mathcal{T}_1\,(\mathcal{J}_4)\\
&+\left((-134352\,\nu + 346536)\,\tau\,\mu + (-155520\,\nu + 263520)\,\tau^3\right)\mathcal{T}_1\,(\mathcal{R}_1)\\
&+\left((-83376\,\nu + 135432)\,\tau\,\mu + (84888\,\nu - 134352)\,\tau^3\right)\mathcal{T}_0\,(\mathcal{J}_1)\\
&+\left((-81864\,\nu + 169560)\,\tau\,\mu^2 + (174960\,\nu - 358992)\,\tau^3\mu\right)\mathcal{T}_0\,(\mathcal{J}_4)\\
&+\left((35136\,\nu - 102456)\,\tau\,\mu + (-122688\,\nu + 355968)\,\tau^3\right)\mathcal{T}_0\,(\mathcal{R}_2)\\
&+\left((231768\,\nu - 598032)\,\tau\,\mu + (108864\,\nu - 365472)\,\tau^3\right)\mathcal{T}_2\,(\mathcal{R}_0)\\
&+\left(\left(-7452\,\nu^2 + 224100\,\nu - 445284\right)\tau\,\mu^2 + \left(-163296\,\nu^2 + 724464\,\nu - 661392\right)\tau^3\mu\right)\mathcal{T}_1\,(\mathcal{J}_0)\\
&+\left(\left(7452\,\nu^2 - 109404\,\nu + 233388\right)\tau\,\mu^2 + 432\,(126\,\nu - 181)\,(3\,\nu - 7)\,\tau^3\mu\right)\mathcal{T}_2\,(\mathcal{J}_1)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\left((-1944\,\nu+972)\,\mu^2+(-59184\,\nu+161676)\,\tau^2\mu+(62208\,\nu-173664)\,\tau^4\right)\mathcal{T}_0\,(\mathcal{J}_2)\\
&+((-10368\,\nu^2+22896\,\nu-17388)\mu^2+(-233064\,\nu^2+914760\,\nu-788508)\tau^2\mu\\
&+(244944\,\nu^2-890352\,\nu+740448)\tau^4)\mathcal{T}_1(\mathcal{J}_1)\\
&+((10368\,\nu^2-16416\,\nu+15444)\mu^2+(233064\,\nu^2-950832\,\nu+779868)\tau^2\mu\\
&+(-244944\,\nu^2+1014768\,\nu-870048)\tau^4)\mathcal{T}_0(\mathcal{J}_0)\\
&+\left(432\,\mu^2+(-217728\,\nu+480816)\,\tau^2\mu\right)\mathcal{T}_1\,(\mathcal{R}_2)\\
&+\left((-10368\,\nu+17712)\,\mu+(-189648\,\nu+473184)\,\tau^2\right)\mathcal{T}_0\,(\mathcal{R}_1)\\
&+\left((28512\,\nu-63504)\,\mu+(-105408\,\nu+177264)\,\tau^2\right)\mathcal{T}_1\,(\mathcal{R}_0)+(-98064\,\nu+236304)\,\tau\,\mathcal{T}_0\,(\mathcal{R}_0)\\
&+(-108864\,\nu+250560)\,\tau\,\mu^2\mathcal{T}_2\,(\mathcal{R}_2)+(110808\,\nu-224208)\,\tau\,\mu^3\mathcal{T}_2\,(\mathcal{J}_4)\\
&+\left((-27216\,\nu+6480)\,\mu^2+(-279936\,\nu+487296)\,\tau^2\mu\right)\mathcal{J}_4\,(\mathcal{J}_0)\,(\mathcal{J}_0)\\
&+\left((-16848\,\nu-6048)\,\mu+(-134568\,\nu+199296)\,\tau^2\right)\mathcal{J}_1\,(\mathcal{J}_0)\,(\mathcal{J}_0)\\
&+\left((-2592\,\nu-5400)\,\mu+(58752\,\nu-161280)\,\tau^2\right)\mathcal{J}_0\,(\mathcal{J}_0)\,(\mathcal{R}_2)\\
&+\left((-1440\,\nu+4728)\,\mu+(-39744\,\nu+108288)\,\tau^2\right)\mathcal{J}_2\,(\mathcal{J}_2)\,(\mathcal{R}_2)\\
&+\left((576\,\nu-3936)\,\mu+(8640\,\nu-45504)\,\tau^2\right)\mathcal{J}_2\,(\mathcal{J}_0)\,(\mathcal{R}_2)\\
&+\left((-191376\,\nu+183024)\,\tau\,\mu+(-186624\,\nu+278208)\,\tau^3\right)\mathcal{J}_0\,(\mathcal{J}_0)\,(\mathcal{J}_0)\\
&+(63072\,\nu-186624)\,\tau\,\mu\,\mathcal{J}_4\,(\mathcal{J}_0)\,(\mathcal{R}_2)\\
&+(-15192+3456\,\nu)\,\mathcal{J}_0\,(\mathcal{J}_0)\,(\mathcal{R}_0)+(-9576+2592\,\nu)\,\mathcal{J}_1\,(\mathcal{J}_1)\,(\mathcal{R}_2)\\
&+(-5088+4416\,\nu)\,\mathcal{J}_0\,(\mathcal{R}_2)\,(\mathcal{R}_1)+(-1080-648\,\nu)\,\mathcal{J}_1\,(\mathcal{J}_1)\,(\mathcal{J}_1)\\
&+(-384+256\,\nu)\,\mathcal{R}_2\,(\mathcal{R}_2)\,(\mathcal{R}_2)+(2208-2464\,\nu)\,\mathcal{J}_1\,(\mathcal{R}_2)\,(\mathcal{R}_2)\\
&+(22464-6912\,\nu)\,\mathcal{J}_1\,(\mathcal{J}_0)\,(\mathcal{R}_1)+(-38592\,\nu+103440)\,\tau\,\mathcal{J}_2\,(\mathcal{J}_1)\,(\mathcal{R}_2)\\
&+(-26352\,\nu+32976)\,\tau\,\mathcal{J}_1\,(\mathcal{J}_1)\,(\mathcal{J}_0)+(-5760\,\nu+20160)\,\tau\,\mathcal{J}_0\,(\mathcal{R}_2)\,(\mathcal{R}_2)\\
&+(-1296\,\nu+2160)\,\mu^3\mathcal{J}_4\,(\mathcal{J}_4)\,(\mathcal{J}_4)+(864\,\nu+288)\,\mu^2\mathcal{J}_4\,(\mathcal{J}_4)\,(\mathcal{R}_2)\\
&+(1152\,\nu-480)\,\mu\,\mathcal{J}_4\,(\mathcal{R}_2)\,(\mathcal{R}_2)+(6912\,\nu-29376)\,\tau\,\mathcal{J}_0\,(\mathcal{J}_0)\,(\mathcal{R}_1)\\
&+(8064\,\nu-19968)\,\tau\,\mathcal{J}_2\,(\mathcal{R}_2)\,(\mathcal{R}_2)+(38016\,\nu-113616)\,\tau\,\mathcal{J}_1\,(\mathcal{J}_0)\,(\mathcal{R}_2)\\
&+(-95904\,\nu+188784)\,\tau\,\mu^2\mathcal{J}_4\,(\mathcal{J}_4)\,(\mathcal{J}_0)+(-35424\,\nu+85536)\,\tau\,\mu\,\mathcal{J}_4\,(\mathcal{J}_2)\,(\mathcal{R}_2)\\
&+\left(\left(-1080\,\nu^2-11304\,\nu+23400\right)\mu+\left(-106920\,\nu^2+476280\,\nu-384624\right)\tau^2\right)\mathcal{J}_2\,(\mathcal{J}_1)\\
&+\left(\left(2304\,\nu^2+20832\,\nu+1824\right)\mu+\left(-191808\,\nu^2+589248\,\nu-155328\right)\tau^2\right)\mathcal{J}_0\,(\mathcal{R}_2)\\
&+\left(\left(6588\,\nu^2-8676\,\nu-8028\right)\mu^2+\left(-9072\,\nu^2-57240\,\nu+226728\right)\tau^2\mu\right)\mathcal{J}_4\,(\mathcal{J}_2)\\
&+\left(\left(23004\,\nu^2+26028\,\nu-9468\right)\mu+\left(338256\,\nu^2-1046520\,\nu+572616\right)\tau^2\right)\mathcal{J}_1\,(\mathcal{J}_0)\\
&+\left(\left(44928\,\nu^2-25344\,\nu+36504\right)\mu^2+\left(593568\,\nu^2-2038392\,\nu+1292472\right)\tau^2\mu\right)\mathcal{J}_4\,(\mathcal{J}_0)\\
&+\left(\left(-108\,\nu^2+95724\,\nu-254880\right)\tau\,\mu+\left(-111456\,\nu^2+419472\,\nu-238896\right)\tau^3\right)\mathcal{J}_2\,(\mathcal{J}_2)\\
&+\left(\left(82080\,\nu^2-550296\,\nu+928224\right)\tau\,\mu+\left(204768\,\nu^2-953424\,\nu+931248\right)\tau^3\right)\mathcal{J}_2\,(\mathcal{J}_0)\\
&+\left(\left(351216\,\nu^2-209952\,\nu-628740\right)\tau\,\mu+\left(491184\,\nu^2-1281744\,\nu+362880\right)\tau^3\right)\mathcal{J}_0\,(\mathcal{J}_0)\\
&+\left(71280\,\nu^2-254016\,\nu+232704\right)\tau\,\mu^2\mathcal{J}_4\,(\mathcal{J}_4)\\
&+\left(-11016\,\nu^2+51192\,\nu-22488\right)\mathcal{J}_0\,(\mathcal{R}_0)+\left(-3744\,\nu^2+9792\,\nu-7712\right)\mathcal{R}_2\,(\mathcal{R}_1)\\
&+\left(11016\,\nu^2-32616\,\nu+2256\right)\mathcal{J}_1\,(\mathcal{R}_1)+\left(-70704\,\nu^2+242304\,\nu-115008\right)\tau\,\mathcal{J}_1\,(\mathcal{R}_2)\\
&+\left(-22032\,\nu^2+42336\,\nu+106608\right)\tau\,\mathcal{J}_0\,(\mathcal{R}_1)+\left(5832\,\nu^2+20952\,\nu-15768\right)\tau\,\mathcal{J}_1\,(\mathcal{J}_1)\\
&+\left(14976\,\nu^2-56640\,\nu+38144\right)\tau\,\mathcal{R}_2\,(\mathcal{R}_2)+\left(-95904\,\nu^2+308448\,\nu-127776\right)\tau\,\mu\,\mathcal{J}_4\,(\mathcal{R}_2)\\
&+\left(\left(-20196\,\nu^3+52200\,\nu^2-157680\,\nu+63468\right)\mu^2+\left(-379728\,\nu^3+1893024\,\nu^2-2761488\,\nu+1381536\right)\tau^2\mu\right)\mathcal{J}_4\\
&+\left(\left(-12528\,\nu^3-6948\,\nu^2-82116\,\nu+66636\right)\mu+\left(-281880\,\nu^3+1180008\,\nu^2-1148976\,\nu+231264\right)\tau^2\right)\mathcal{J}_1\\
&+\left(\left(8784\,\nu^3-45120\,\nu^2+76224\,\nu-33072\right)\mu+\left(190080\,\nu^3-841824\,\nu^2+1039392\,\nu-433152\right)\tau^2\right)\mathcal{R}_2\\
&+\left(\left(-95688\,\nu^3-462636\,\nu^2+765468\,\nu+832464\right)\tau\,\mu+\left(-593568\,\nu^3+2329776\,\nu^2-2265696\,\nu+1052496\right)\tau^3\right)\mathcal{J}_0\\
&+\left(\left(-13392\,\nu^3+48312\,\nu^2+137376\,\nu-592020\right)\tau\,\mu+\left(-165888\,\nu^3+871776\,\nu^2-1254960\,\nu+353808\right)\tau^3\right)\mathcal{J}_2\\
&+\left.\left(3240\,\nu^3-23976\,\nu^2+21312\,\nu-8976\right)\mathcal{R}_0+\left(6480\,\nu^3+83376\,\nu^2-406800\,\nu+287952\right)\tau\,\mathcal{R}_1\right)
\end{aligned}
$$

$$
k_5(u,w) \;=\; \frac{1}{81}\Big(5832\,\tau^3+11664\,\mu\,\tau)\mathcal{J}_0(\mathcal{J}_0)(\mathcal{J}_0)(\mathcal{J}_0)(\mathcal{J}_0)
$$

$$
\begin{aligned}
&+(14580\,\mu\,\tau^2+4860\,\mu^2)\mathcal{J}_4(\mathcal{J}_0)(\mathcal{J}_0)(\mathcal{J}_0)(\mathcal{J}_0)\\
&-64\,\mathcal{J}_2(\mathcal{J}_2)(\mathcal{R}_2)(\mathcal{R}_2)(\mathcal{R}_2)\\
&-3888\,\mu^2\mathcal{J}_4(\mathcal{J}_4)(\mathcal{J}_0)(\mathcal{J}_0)(\mathcal{R}_2)+2916\,\mu^3\mathcal{J}_4(\mathcal{J}_4)(\mathcal{J}_4)(\mathcal{J}_0)(\mathcal{J}_0)\\
&-2592\,\tau\,\mathcal{J}_0(\mathcal{J}_0)(\mathcal{J}_0)(\mathcal{J}_0)(\mathcal{R}_1)+2592\,\tau\,\mathcal{J}_1(\mathcal{J}_1)(\mathcal{J}_0)(\mathcal{J}_0)(\mathcal{J}_0)\\
&+(-3888\,\tau^2-2592\,\mu)\mathcal{J}_0(\mathcal{J}_0)(\mathcal{J}_0)(\mathcal{J}_0)(\mathcal{R}_2)+(6804\,\tau^2+2268\,\mu)\mathcal{J}_1(\mathcal{J}_0)(\mathcal{J}_0)(\mathcal{J}_0)(\mathcal{J}_0)\\
&-7776\,\mu\,\tau\,\mathcal{J}_4(\mathcal{J}_0)(\mathcal{J}_0)(\mathcal{J}_0)(\mathcal{R}_2)+11664\,\mu^2\tau\,\mathcal{J}_4(\mathcal{J}_4)(\mathcal{J}_0)(\mathcal{J}_0)(\mathcal{J}_0)\\
&-64\,\mathcal{J}_0(\mathcal{J}_0)(\mathcal{R}_2)(\mathcal{R}_2)(\mathcal{R}_2)-432\,\mathcal{J}_0(\mathcal{J}_0)(\mathcal{J}_0)(\mathcal{J}_0)(\mathcal{R}_0)\\
&+324\,\mathcal{J}_1(\mathcal{J}_1)(\mathcal{J}_1)(\mathcal{J}_0)(\mathcal{J}_0)+128\,\mathcal{J}_2(\mathcal{J}_0)(\mathcal{R}_2)(\mathcal{R}_2)(\mathcal{R}_2)\\
&+(-3888\,\tau^4-4860\,\mu\,\tau^2+972\,\mu^2)\mathcal{T}_0(\mathcal{J}_0)(\mathcal{J}_0)(\mathcal{J}_0)\\
&-3024\,\mathcal{T}_2(\mathcal{J}_0)(\mathcal{R}_0)(\mathcal{R}_0)\\
&-288\,\mu\,\mathcal{T}_1(\mathcal{R}_2)(\mathcal{R}_2)(\mathcal{R}_2)-2016\,\mu\,\mathcal{T}_2(\mathcal{R}_2)(\mathcal{R}_2)(\mathcal{R}_1)\\
&-720\,\mu^2\mathcal{T}_1(\mathcal{J}_4)(\mathcal{R}_2)(\mathcal{R}_2)+3312\,\mu^2\mathcal{T}_2(\mathcal{J}_0)(\mathcal{R}_2)(\mathcal{R}_2)\\
&+1080\,\mu^3\mathcal{T}_1(\mathcal{J}_4)(\mathcal{J}_4)(\mathcal{R}_2)+4752\,\mu^3\mathcal{T}_2(\mathcal{J}_4)(\mathcal{J}_0)(\mathcal{R}_2)\\
&-4860\,\mu^4\mathcal{T}_1(\mathcal{J}_4)(\mathcal{J}_4)(\mathcal{J}_4)-960\,\tau\,\mathcal{T}_0(\mathcal{R}_2)(\mathcal{R}_2)(\mathcal{R}_2)\\
&-6480\,\tau\,\mathcal{T}_0(\mathcal{J}_0)(\mathcal{R}_2)(\mathcal{R}_1)+648\,\tau\,\mathcal{T}_0(\mathcal{J}_0)(\mathcal{J}_0)(\mathcal{R}_0)\\
&+4320\,\tau\,\mathcal{T}_0(\mathcal{J}_1)(\mathcal{R}_2)(\mathcal{R}_2)-3888\,\tau\,\mathcal{T}_0(\mathcal{J}_1)(\mathcal{J}_1)(\mathcal{R}_2)\\
&+1344\,\tau\,\mathcal{T}_1(\mathcal{R}_2)(\mathcal{R}_2)(\mathcal{R}_1)+15552\,\tau\,\mathcal{T}_1(\mathcal{J}_0)(\mathcal{R}_1)(\mathcal{R}_1)\\
&-2688\,\tau\,\mathcal{T}_2(\mathcal{R}_2)(\mathcal{R}_1)(\mathcal{R}_1)-9072\,\tau\,\mathcal{T}_2(\mathcal{J}_0)(\mathcal{R}_1)(\mathcal{R}_0)\\
&+(-17496\,\tau^2+18792\,\mu)\mathcal{T}_0(\mathcal{J}_0)(\mathcal{J}_0)(\mathcal{R}_1)+(-6480\,\tau^2+2592\,\mu)\mathcal{T}_0(\mathcal{J}_2)(\mathcal{J}_1)(\mathcal{R}_2)\\
&+(-5184\,\tau^2-5184\,\mu)\mathcal{T}_2(\mathcal{J}_0)(\mathcal{R}_1)(\mathcal{R}_1)+(-5184\,\tau^2+5184\,\mu)\mathcal{T}_0(\mathcal{J}_0)(\mathcal{R}_2)(\mathcal{R}_2)\\
&+(-972\,\tau^2+972\,\mu)\mathcal{T}_0(\mathcal{J}_1)(\mathcal{J}_1)(\mathcal{J}_0)+(1944\,\tau^2-14256\,\mu)\mathcal{T}_1(\mathcal{J}_0)(\mathcal{J}_0)(\mathcal{R}_0)\\
&+(2880\,\tau^2-720\,\mu)\mathcal{T}_0(\mathcal{J}_2)(\mathcal{R}_2)(\mathcal{R}_2)+(8424\,\tau^2-16200\,\mu)\mathcal{T}_0(\mathcal{J}_1)(\mathcal{J}_0)(\mathcal{R}_2)\\
&+(12672\,\tau^2+4176\,\mu)\mathcal{T}_1(\mathcal{J}_0)(\mathcal{R}_2)(\mathcal{R}_1)+(-20736\,\tau^3+17496\,\mu\,\tau)\mathcal{T}_0(\mathcal{J}_0)(\mathcal{J}_0)(\mathcal{R}_2)\\
&+(-11664\,\tau^3-15552\,\mu\,\tau)\mathcal{T}_2(\mathcal{J}_0)(\mathcal{J}_0)(\mathcal{R}_0)+(-4320\,\tau^3+3240\,\mu\,\tau)\mathcal{T}_0(\mathcal{J}_2)(\mathcal{J}_2)(\mathcal{R}_2)\\
&+(-4212\,\tau^3+2916\,\mu\,\tau)\mathcal{T}_0(\mathcal{J}_1)(\mathcal{J}_0)(\mathcal{J}_0)+(9504\,\tau^3-18792\,\mu\,\tau)\mathcal{T}_0(\mathcal{J}_2)(\mathcal{J}_0)(\mathcal{R}_2)\\
&+(15552\,\tau^3-36936\,\mu\,\tau)\mathcal{T}_1(\mathcal{J}_0)(\mathcal{J}_0)(\mathcal{R}_1)+(-6480\,\mu\,\tau^2+5184\,\mu^2)\mathcal{T}_0(\mathcal{J}_4)(\mathcal{J}_0)(\mathcal{R}_2)\\
&+(-3888\,\mu\,\tau^2+1944\,\mu^2)\mathcal{T}_0(\mathcal{J}_4)(\mathcal{J}_2)(\mathcal{R}_2)+(2592\,\mu\,\tau^2-28512\,\mu^2)\mathcal{T}_1(\mathcal{J}_0)(\mathcal{J}_0)(\mathcal{R}_2)\\
&+(-9720\,\mu\,\tau^3-9720\,\mu^2\tau)\mathcal{T}_0(\mathcal{J}_4)(\mathcal{J}_0)(\mathcal{J}_0)+(-17496\,\mu^2\tau^2-7452\,\mu^3)\mathcal{T}_0(\mathcal{J}_4)(\mathcal{J}_4)(\mathcal{J}_0)\\
&+1728\,\mu\,\tau\,\mathcal{T}_0(\mathcal{J}_4)(\mathcal{R}_2)(\mathcal{R}_2)+7488\,\mu\,\tau\,\mathcal{T}_1(\mathcal{J}_0)(\mathcal{R}_2)(\mathcal{R}_2)\\
&-1440\,\mu\,\tau\,\mathcal{T}_2(\mathcal{J}_0)(\mathcal{R}_2)(\mathcal{R}_1)-15552\,\mu\,\tau^2\mathcal{T}_2(\mathcal{J}_0)(\mathcal{J}_0)(\mathcal{R}_1)\\
&+3240\,\mu^2\tau\,\mathcal{T}_0(\mathcal{J}_4)(\mathcal{J}_4)(\mathcal{R}_2)-11664\,\mu^2\tau\,\mathcal{T}_1(\mathcal{J}_4)(\mathcal{J}_0)(\mathcal{R}_2)\\
&+2592\,\mu^2\tau\,\mathcal{T}_2(\mathcal{J}_0)(\mathcal{J}_0)(\mathcal{R}_2)-16524\,\mu^3\tau\,\mathcal{T}_0(\mathcal{J}_4)(\mathcal{J}_4)(\mathcal{J}_4)\\
&-960\,\mathcal{T}_0(\mathcal{R}_2)(\mathcal{R}_2)(R_1)-4320\,\mathcal{T}_0(\mathcal{J}_0)(\mathcal{R}_1)(\mathcal{R}_1)\\
&+2160\,\mathcal{T}_0(\mathcal{J}_1)(\mathcal{R}_2)(R_1)+1296\,\mathcal{T}_0(\mathcal{J}_1)(\mathcal{J}_0)(\mathcal{R}_0)\\
&-1296\,\mathcal{T}_0(\mathcal{J}_1)(\mathcal{J}_1)(\mathcal{R}_1)+1632\,\mathcal{T}_1(\mathcal{R}_2)(\mathcal{R}_1)(\mathcal{R}_1)\\
&+6048\,\mathcal{T}_1(\mathcal{J}_0)(\mathcal{R}_1)(R_0)-1440\,\mathcal{T}_2(\mathcal{R}_1)(\mathcal{R}_1)(\mathcal{R}_1)\\
&-11664\,\mu^4\mathcal{T}_2(\mathcal{T}_2)(\mathcal{R}_2)+1944\,\mu^5\mathcal{T}_2(\mathcal{T}_2)(\mathcal{J}_4)\\
&+(-1944\,\tau^2+1944\,\mu)\mathcal{T}_0(\mathcal{T}_0)(\mathcal{R}_0)+(-6480\,\tau^3+7776\,\mu\,\tau)\mathcal{T}_0(\mathcal{T}_0)(\mathcal{R}_1)\\
&+(648\,\tau^3-1944\,\mu\,\tau)\mathcal{T}_1(\mathcal{T}_0)(\mathcal{R}_0)+(-23328\,\mu\,\tau^3+11664\,\mu^2\tau)\mathcal{T}_2(\mathcal{T}_1)(\mathcal{R}_0)\\
&+(-7776\,\mu\,\tau^3+11664\,\mu^2\tau)\mathcal{T}_1(\mathcal{T}_0)(\mathcal{R}_2)+(-50544\,\mu^2\tau^2+22680\,\mu^3)\mathcal{T}_2(\mathcal{T}_1)(\mathcal{R}_1)\\
&+(-5832\,\mu^2\tau^2-3888\,\mu^3)\mathcal{T}_2(\mathcal{T}_2)(\mathcal{R}_0)+(9720\,\mu^2\tau^2-3888\,\mu^3)\mathcal{T}_1(\mathcal{T}_1)(\mathcal{R}_2)\\
&+(-4860\,\mu^2\tau^3+5832\,\mu^3\tau)\mathcal{T}_1(\mathcal{T}_0)(\mathcal{J}_4)+(-4860\,\mu^3\tau^2+7776\,\mu^4)\mathcal{T}_1(\mathcal{T}_1)(\mathcal{J}_4)\\
&+(6804\,\mu^3\tau^2-3888\,\mu^4)\mathcal{T}_2(\mathcal{T}_1)(\mathcal{J}_0)+(-15552\,\tau^4+44712\,\mu\,\tau^2-25272\,\mu^2)\mathcal{T}_1(T_1)(\mathcal{R}_0)\\
&+(-6480\,\tau^4+9720\,\mu\,\tau^2-1944\,\mu^2)\mathcal{T}_0(\mathcal{T}_0)(\mathcal{R}_2)+(10368\,\tau^4-33048\,\mu\,\tau^2+25272\,\mu^2)\mathcal{T}_1(\mathcal{T}_0)(\mathcal{R}_1)\\
&+(-3888\,\tau^5+9720\,\mu\,\tau^3-5832\,\mu^2\tau)\mathcal{T}_0(\mathcal{T}_0)(\mathcal{J}_0)+(1944\,\tau^5-4860\,\mu\,\tau^3+2916\,\mu^2\tau)\mathcal{T}_0(\mathcal{T}_0)(\mathcal{J}_2)\\
&+(-7776\,\mu\,\tau^4+20412\,\mu^2\tau^2-11664\,\mu^3)\mathcal{T}_1(\mathcal{T}_0)(\mathcal{J}_0)+(2916\,\mu\,\tau^4-8748\,\mu^2\tau^2+5832\,\mu^3)\mathcal{T}_0(\mathcal{T}_0)(\mathcal{J}_4)\\
&+7776\,\mu^2\tau\,\mathcal{T}_1(\mathcal{T}_1)(\mathcal{R}_1)+2916\,\mu^2\tau^3\mathcal{T}_1(\mathcal{T}_1)(\mathcal{J}_0)\\
&-26568\,\mu^3\tau\,\mathcal{T}_2(\mathcal{T}_1)(\mathcal{R}_2)-20088\,\mu^3\tau\,\mathcal{T}_2(\mathcal{T}_2)(\mathcal{R}_1)\\
&+2916\,\mu^4\tau\,\mathcal{T}_2(\mathcal{T}_1)(\mathcal{J}_4)+1944\,\mu^4\tau\,\mathcal{T}_2(\mathcal{T}_2)(\mathcal{J}_0)\\
&+((3888\,\nu-19440)\mu^4+(-72900\,\nu+219672)\tau^2\mu^3)\mathcal{T}_2(\mathcal{T}_1)\\
&+((66096\,\nu-214812)\tau\,\mu^3+(-102060\,\nu+314928)\tau^3\mu^2)\mathcal{T}_1(\mathcal{T}_1)\\
&+((11664\,\nu-19440)\mu^3+(45684\,\nu-171072)\tau^2\mu^2+(-58320\,\nu+190512)\tau^4\mu)\mathcal{T}_1(\mathcal{T}_0)
\end{aligned}
$$

$$+((-30132\,\nu+95742)\tau\,\mu^2+(61236\,\nu-192942)\tau^3\mu+(-31104\,\nu+97200)\tau^5)\mathcal{T}_0(\mathcal{T}_0)$$
$$+(-34992\,\nu+102546)\tau\,\mu^4\mathcal{T}_2(\mathcal{T}_2)$$
$$+((-51192\,\nu+84672)\mu+(-36936\,\nu+217296)\tau^2)\mathcal{T}_0(\mathcal{J}_0)(\mathcal{R}_1)$$
$$+((-3312\,\nu+5112)\mu+(-11520\,\nu+33984)\tau^2)\mathcal{T}_0(\mathcal{R}_2)(\mathcal{R}_2)$$
$$+((-648\,\nu-10152)\mu^2+(46656\,\nu-114048)\tau^2\mu)\mathcal{T}_0(\mathcal{J}_4)(\mathcal{R}_2)$$
$$+((972\,\nu-486)\mu+(-972\,\nu+486)\tau^2)\mathcal{T}_0(\mathcal{J}_1)(\mathcal{J}_1)$$
$$+((1296\,\nu-18954)\mu^3+(66096\,\nu-202176)\tau^2\mu^2)\mathcal{T}_2(\mathcal{J}_0)(\mathcal{J}_0)$$
$$+((3168\,\nu-24048)\mu+(-10368\,\nu-8640)\tau^2)\mathcal{T}_1(\mathcal{R}_2)(\mathcal{R}_1)$$
$$+((6912\,\nu-42696)\mu+(44928\,\nu-150336)\tau^2)\mathcal{T}_2(\mathcal{R}_1)(\mathcal{R}_1)$$
$$+((10368\,\nu+52056)\mu^2+(2592\,\nu+73872)\tau^2\mu)\mathcal{T}_2(\mathcal{J}_0)(\mathcal{R}_1)$$
$$+((12960\,\nu-4104)\mu+(45792\,\nu-146664)\tau^2)\mathcal{T}_0(\mathcal{J}_1)(\mathcal{R}_2)$$
$$+((13608\,\nu-35640)\mu^3+(-73872\,\nu+253692)\tau^2\mu^2)\mathcal{T}_0(\mathcal{J}_4)(\mathcal{J}_4)$$
$$+((42768\,\nu-46440)\mu^2+(-127008\,\nu+432864)\tau^2\mu)\mathcal{T}_1(\mathcal{J}_0)(\mathcal{R}_2)$$
$$+((58320\,\nu-89640)\mu+(-95904\,\nu+315792)\tau^2)\mathcal{T}_1(\mathcal{J}_0)(\mathcal{R}_0)$$
$$+((-9720\,\nu^3+69822\,\nu^2-199422\,\nu+196722)\mu^3$$
$$+(-84564\,\nu^3+536544\,\nu^2-1056240\,\nu+305748)\tau^2\mu^2)\mathcal{T}_1(\mathcal{J}_4)(\mathcal{J}_0)$$
$$+((9720\,\nu^3-69822\,\nu^2+197154\,\nu-113778)\mu^3$$
$$+(84564\,\nu^3-536544\,\nu^2+1161216\,\nu-752868)\tau^2\mu^2)\mathcal{T}_2(\mathcal{J}_4)(\mathcal{J}_1)$$
$$+((-89424\,\nu+369360)\tau\,\mu^2+(112752\,\nu-349920)\tau^3\mu)\mathcal{T}_0(\mathcal{J}_4)(\mathcal{J}_0)$$
$$+((-63180\,\nu+185652)\tau\,\mu+(65772\,\nu-186300)\tau^3)\mathcal{T}_0(\mathcal{J}_1)(\mathcal{J}_0)$$
$$+((-22680\,\nu+261684)\tau\,\mu+(-134784\,\nu+373248)\tau^3)\mathcal{T}_1(\mathcal{J}_0)(\mathcal{R}_1)$$
$$+((-3672\,\nu+26460)\tau\,\mu+(34560\,\nu-104544)\tau^3)\mathcal{T}_0(\mathcal{J}_2)(\mathcal{R}_2)$$
$$+((7128\,\nu-46116)\tau\,\mu+(-1728\,\nu+92448)\tau^3)\mathcal{T}_0(\mathcal{J}_0)(\mathcal{R}_2)$$
$$+((22032\,\nu-42768)\tau\,\mu^2+(-66096\,\nu+182088)\tau^3\mu)\mathcal{T}_0(\mathcal{J}_4)(\mathcal{J}_2)$$
$$+((44064\,\nu-118908)\tau\,\mu+(-44712\,\nu+122148)\tau^3)\mathcal{T}_0(\mathcal{J}_2)(\mathcal{J}_1)$$
$$+((62208\,\nu-157464)\tau\,\mu^2+(66096\,\nu-248832)\tau^3\mu)\mathcal{T}_1(\mathcal{J}_0)(\mathcal{J}_0)$$
$$+((129600\,\nu-187380)\tau\,\mu+(46656\,\nu-86832)\tau^3)\mathcal{T}_2(\mathcal{J}_0)(\mathcal{R}_0)$$
$$+((-16524\,\nu+85536)\mu^2+(-48276\,\nu+123120)\tau^2\mu+(23328\,\nu-76464)\tau^4)\mathcal{T}_0(\mathcal{J}_2)(\mathcal{J}_0)$$
$$+((4860\,\nu-14418)\mu^2+(33372\,\nu-92502)\tau^2\mu+(-38880\,\nu+110160)\tau^4)\mathcal{T}_0(\mathcal{J}_2)(\mathcal{J}_2)$$
$$+((12636\,\nu-70956)\mu^2+(-4860\,\nu+121500)\tau^2\mu+(77760\,\nu-241056)\tau^4)\mathcal{T}_0(\mathcal{J}_0)(\mathcal{J}_0)$$
$$+(-34488+11664\,\nu)\mathcal{T}_2(\mathcal{R}_0)(\mathcal{R}_0)+(-18072+6912\,\nu)\mathcal{T}_0(\mathcal{R}_1)(\mathcal{R}_1)$$
$$+(3888-1296\,\nu)\mathcal{T}_0(\mathcal{J}_1)(\mathcal{R}_0)+(38304-18144\,\nu)\mathcal{T}_1(\mathcal{R}_1)(\mathcal{R}_0)$$
$$+(-54864\,\nu+182520)\tau\,\mathcal{T}_0(\mathcal{J}_0)(\mathcal{R}_0)+(-11232\,\nu-16272)\tau\,\mathcal{T}_1(\mathcal{R}_1)(\mathcal{R}_1)$$
$$+(-9720\,\nu+3078)\mu^4\mathcal{T}_2(\mathcal{J}_4)(\mathcal{J}_4)+(-5760\,\nu+21024)\tau\,\mathcal{T}_0(\mathcal{R}_2)(\mathcal{R}_1)$$
$$+(-4752\,\nu+6768)\mu^2\mathcal{T}_2(\mathcal{R}_2)(\mathcal{R}_2)+(-2592\,\nu+2808)\mu^3\mathcal{T}_2(\mathcal{J}_4)(\mathcal{R}_2)$$
$$+(25488\,\nu-69552)\tau\,\mathcal{T}_0(\mathcal{J}_1)(\mathcal{R}_1)+(28512\,\nu-96624)\tau\,\mathcal{T}_2(\mathcal{R}_1)(\mathcal{R}_0)$$
$$+(-72576\,\nu+235224)\tau\,\mu^2\mathcal{T}_2(\mathcal{J}_0)(\mathcal{R}_2)+(-65124\,\nu+127008)\tau\,\mu^3\mathcal{T}_1(\mathcal{J}_4)(\mathcal{J}_4)$$
$$+(-13824\,\nu+20448)\tau\,\mu\,\mathcal{T}_1(\mathcal{R}_2)(\mathcal{R}_2)+(39744\,\nu-152064)\tau\,\mu\,\mathcal{T}_2(\mathcal{R}_2)(\mathcal{R}_1)$$
$$+(40176\,\nu-97848)\tau\,\mu^2\mathcal{T}_1(\mathcal{J}_4)(\mathcal{R}_2)+(82620\,\nu-286092)\tau\,\mu^3\mathcal{T}_2(\mathcal{J}_4)(\mathcal{J}_0)$$
$$+((-31104\,\nu+5076)\mu^2+(-147744\,\nu+228744)\tau^2\mu)\mathcal{J}_4(\mathcal{J}_0)(\mathcal{J}_0)(\mathcal{J}_0)$$
$$+((-14580\,\nu-7344)\mu+(-61884\,\nu+49140)\tau^2)\mathcal{J}_1(\mathcal{J}_0)(\mathcal{J}_0)(\mathcal{J}_0)$$
$$+((10368\,\nu+2880)\mu+(15552\,\nu+4320)\tau^2)\mathcal{J}_0(\mathcal{J}_0)(\mathcal{J}_0)(\mathcal{R}_2)$$
$$+((-111456\,\nu+57240)\tau\,\mu+(-73872\,\nu+99792)\tau^3)\mathcal{J}_0(\mathcal{J}_0)(\mathcal{J}_0)(\mathcal{J}_0)$$
$$+(23328\,\nu-5184)\tau\,\mu\,\mathcal{J}_4(\mathcal{J}_0)(\mathcal{J}_0)(\mathcal{R}_2)$$
$$+(-6336+2352\,\nu)\mathcal{J}_0(\mathcal{J}_0)(\mathcal{R}_2)(\mathcal{R}_1)+(-4944+1632\,\nu)\mathcal{J}_2(\mathcal{J}_1)(\mathcal{R}_2)(\mathcal{R}_2)$$
$$+(-1440+2592\,\nu)\mathcal{J}_0(\mathcal{J}_0)(\mathcal{J}_0)(\mathcal{R}_0)+(-1296-972\,\nu)\mathcal{J}_1(\mathcal{J}_1)(\mathcal{J}_1)(\mathcal{J}_0)$$
$$+(-384+256\,\nu)\mathcal{J}_0(\mathcal{R}_2)(\mathcal{R}_2)(\mathcal{R}_2)+(384-256\,\nu)\mathcal{J}_2(\mathcal{R}_2)(\mathcal{R}_2)(\mathcal{R}_2)$$
$$+(10512-3984\,\nu)\mathcal{J}_1(\mathcal{J}_0)(\mathcal{R}_2)(\mathcal{R}_2)+(-15336\,\nu+1080)\tau\,\mathcal{J}_1(\mathcal{J}_1)(\mathcal{J}_0)(\mathcal{J}_0)$$
$$+(-5832\,\nu+11340)\mu^3\mathcal{J}_4(\mathcal{J}_4)(\mathcal{J}_4)(\mathcal{J}_0)+(-1440\,\nu+1248)\tau\,\mathcal{J}_2(\mathcal{J}_0)(\mathcal{R}_2)(\mathcal{R}_2)$$
$$+(-720\,\nu+624)\mu\,\mathcal{J}_4(\mathcal{J}_2)(\mathcal{R}_2)(\mathcal{R}_2)+(720\,\nu-2928)\mu\,\mathcal{J}_4(\mathcal{J}_0)(\mathcal{R}_2)(\mathcal{R}_2)$$
$$+(1440\,\nu-3552)\tau\,\mathcal{J}_0(\mathcal{J}_0)(\mathcal{R}_2)(\mathcal{R}_2)+(7776\,\nu-5616)\mu^2\mathcal{J}_4(\mathcal{J}_4)(\mathcal{J}_0)(\mathcal{R}_2)$$
$$+(12960\,\nu-2880)\tau\,\mathcal{J}_0(\mathcal{J}_0)(\mathcal{J}_0)(\mathcal{R}_1)+(-79704\,\nu+137376)\tau\,\mu^2\mathcal{J}_4(\mathcal{J}_4)(\mathcal{J}_0)(\mathcal{J}_0)$$

$$
\begin{aligned}
&+((-68040\,\nu^2+232632\,\nu-235224)\mu+(185976\,\nu^2-830952\,\nu+644328)\tau^2)\mathcal{T}_1(\mathcal{R}_0)\\
&+((-15552\,\nu^2-49248\,\nu+173880)\mu^2+(41472\,\nu^2-134784\,\nu-238464)\tau^2\mu)\mathcal{T}_2(\mathcal{R}_1)\\
&+((-9720\,\nu^2+13608\,\nu+27648)\mu^2+(212544\,\nu^2-935712\,\nu+749520)\tau^2\mu)\mathcal{T}_1(\mathcal{R}_2)\\
&+((29160\,\nu^2-82944\,\nu+68256)\mu+(141264\,\nu^2-736992\,\nu+776304)\tau^2)\mathcal{T}_0(\mathcal{R}_1)\\
&+((9720\,\nu^3-75654\,\nu^2+251586\,\nu-170100)\mu^3\\
&+(84564\,\nu^3-677484\,\nu^2+1644300\,\nu-931392)\tau^2\mu^2)\mathcal{T}_2(\mathcal{J}_0)\\
&+((9720\,\nu^3-52326\,\nu^2+71118\,\nu-6210)\mu^3\\
&+(84564\,\nu^3-827172\,\nu^2+2478276\,\nu-1922184)\tau^2\mu^2)\mathcal{T}_1(\mathcal{J}_4)\\
&+((-182088\,\nu^2+660852\,\nu-908712)\tau\,\mu+(-69984\,\nu^2+316224\,\nu-523008)\tau^3)\mathcal{T}_2(\mathcal{R}_0)\\
&+((-14472\,\nu^2+98064\,\nu-127116)\tau\,\mu+(70848\,\nu^2-444960\,\nu+581184)\tau^3)\mathcal{T}_0(\mathcal{R}_2)\\
&+((79380\,\nu^2-252396\,\nu+5184)\tau\,\mu+(-81648\,\nu^2+254340\,\nu-6048)\tau^3)\mathcal{T}_0(\mathcal{J}_1)\\
&+((81000\,\nu^2-547992\,\nu+656316)\tau\,\mu+(222912\,\nu^2-855360\,\nu+493920)\tau^3)\mathcal{T}_1(\mathcal{R}_1)\\
&+((83916\,\nu^2-387504\,\nu+237168)\tau\,\mu^2+(-180792\,\nu^2+770472\,\nu-600696)\tau^3\mu)\mathcal{T}_0(\mathcal{J}_4)\\
&((-1944\,\nu^3-242838\,\nu^2+1176930\,\nu-1137510)\tau\,\mu^2\\
&+(93312\,\nu^3-552096\,\nu^2+904608\,\nu-55296)\tau^3\mu)\mathcal{T}_1(\mathcal{J}_0)\\
&+((1944\,\nu^3+136890\,\nu^2-702594\,\nu+560142)\tau\,\mu^2\\
&+(-93312\,\nu^3+384912\,\nu^2-399168\,\nu+208224)\tau^3\mu)\mathcal{T}_2(\mathcal{J}_1)\\
&+((7776\,\nu^2-17820\,\nu-40662)\mu^2+(21708\,\nu^2-162972\,\nu+249318)\tau^2\mu\\
&+(-31104\,\nu^2+203472\,\nu-278208)\tau^4)\mathcal{T}_0(\mathcal{J}_2)\\
&+((-10692\,\nu^3+44712\,\nu^2-123120\,\nu+89370)\mu^2+(-150336\,\nu^3+899748\,\nu^2-1459944\,\nu+358614)\tau^2\mu\\
&+(163296\,\nu^3-997920\,\nu^2+1733616\,\nu-524016)\tau^4)\mathcal{T}_0(\mathcal{J}_0)\\
&+((10692\,\nu^3-80676\,\nu^2+224208\,\nu-73818)\mu^2+(150336\,\nu^3-772740\,\nu^2+1058184\,\nu-538758)\tau^2\mu\\
&+(-163296\,\nu^3+807408\,\nu^2-1163376\,\nu+604368)\tau^4)\mathcal{T}_1(\mathcal{J}_1)\\
&+(114048\,\nu^2-513864\,\nu+469584)\tau\,\mu^2\mathcal{T}_2(\mathcal{R}_2)\\
&+(82296\,\nu^2-395280\,\nu+386208)\tau\,\mathcal{T}_0(\mathcal{R}_0)+(-146772\,\nu^2+652212\,\nu-594972)\tau\,\mu^3\mathcal{T}_2(\mathcal{J}_4)\\
&+((-16200\,\nu^2-5832\,\nu-28404)\mu+(-60480\,\nu^2+168480\,\nu-225648)\tau^2)\mathcal{J}_0(\mathcal{J}_0)(\mathcal{R}_2)\\
&+((-1512\,\nu^2-4464\,\nu-9432)\mu+(16416\,\nu^2-62208\,\nu+22176)\tau^2)\mathcal{J}_2(\mathcal{J}_0)(\mathcal{R}_2)\\
&+((2160\,\nu^2-12168\,\nu+21276)\mu+(20736\,\nu^2-118368\,\nu+148320)\tau^2)\mathcal{J}_2(\mathcal{J}_2)(\mathcal{R}_2)\\
&+((31104\,\nu^2+39204\,\nu+14688)\mu+(126684\,\nu^2-27756\,\nu-19332)\tau^2)\mathcal{J}_1(\mathcal{J}_0)(\mathcal{J}_0)\\
&+((67068\,\nu^2-16524\,\nu+11232)\mu^2+(355752\,\nu^2-833976\,\nu+434052)\tau^2\mu)\mathcal{J}_4(\mathcal{J}_0)(\mathcal{J}_0)\\
&+((335016\,\nu^2-196128\,\nu+70632)\tau\,\mu+(237168\,\nu^2-408240\,\nu+70344)\tau^3)\mathcal{J}_0(\mathcal{J}_0)(\mathcal{J}_0)\\
&+(124416\,\nu^2-368712\,\nu+277776)\tau\,\mu^2\mathcal{J}_4(\mathcal{J}_4)(\mathcal{J}_0)\\
&+(-\frac{1472}{3}-256\,\nu^2+768\,\nu)\mathcal{R}_2(\mathcal{R}_2)(\mathcal{R}_2)+(-13608\,\nu^2+46440\,\nu-61380)\mathcal{J}_0(\mathcal{J}_0)(\mathcal{R}_0)\\
&+(-8784\,\nu^2+26640\,\nu-13648)\mathcal{J}_0(\mathcal{R}_2)(\mathcal{R}_1)+(-6480\,\nu^2+27000\,\nu-38052)\mathcal{J}_1(\mathcal{J}_1)(\mathcal{R}_2)\\
&+(972\,\nu^2+2592\,\nu+1512)\mathcal{J}_1(\mathcal{J}_1)(\mathcal{J}_1)+(4992\,\nu^2-11184\,\nu-2768)\mathcal{J}_1(\mathcal{R}_2)(\mathcal{R}_2)\\
&+(13608\,\nu^2-71280\,\nu+94536)\mathcal{J}_1(\mathcal{J}_0)(\mathcal{R}_1)+(-40824\,\nu^2+84240\,\nu-102168)\tau\,\mathcal{J}_0(\mathcal{J}_0)(\mathcal{R}_1)\\
&+(-3888\,\nu^2+5616\,\nu+576)\mu^2\mathcal{J}_4(\mathcal{J}_4)(\mathcal{R}_2)+(-3168\,\nu^2+18432\,\nu-17600)\tau\,\mathcal{J}_2(\mathcal{R}_2)(\mathcal{R}_2)\\
&+(-1512\,\nu^2+17280\,\nu-59472)\tau\,\mathcal{J}_1(\mathcal{J}_0)(\mathcal{R}_2)+(-1440\,\nu^2+3552\,\nu-336)\mu\,\mathcal{J}_4(\mathcal{R}_2)(\mathcal{R}_2)\\
&+(288\,\nu^2-11328\,\nu+19232)\tau\,\mathcal{J}_0(\mathcal{R}_2)(\mathcal{R}_2)+(2916\,\nu^2-11340\,\nu+9684)\mu^3\mathcal{J}_4(\mathcal{J}_4)(\mathcal{J}_4)\\
&+(16416\,\nu^2-103536\,\nu+131544)\tau\,\mathcal{J}_2(\mathcal{J}_1)(\mathcal{R}_2)+(17496\,\nu^2+38664\,\nu+4752)\tau\,\mathcal{J}_1(\mathcal{J}_1)(\mathcal{J}_0)\\
&+(-52272\,\nu^2+160704\,\nu-215856)\tau\,\mu\,\mathcal{J}_4(\mathcal{J}_0)(\mathcal{R}_2)+(28944\,\nu^2-149472\,\nu+159408)\tau\,\mu\,\mathcal{J}_4(\mathcal{J}_2)(\mathcal{R}_2)\\
&+((-59616\,\nu^3+94716\,\nu^2-261684\,\nu+164088)\mu^2\\
&+(-361584\,\nu^3+1447632\,\nu^2-2384856\,\nu+994104)\tau^2\mu)\mathcal{J}_4(\mathcal{J}_0)\\
&+((-22356\,\nu^3-76950\,\nu^2-71658\,\nu-49950)\mu\\
&+(-156492\,\nu^3+487296\,\nu^2-1526688\,\nu+822420)\tau^2)\mathcal{J}_1(\mathcal{J}_0)\\
&+((-4212\,\nu^3+32832\,\nu^2-33696\,\nu+59436)\mu+(56376\,\nu^3-451332\,\nu^2+1019844\,\nu-528912)\tau^2)\mathcal{J}_2(\mathcal{J}_1)\\
&+((324\,\nu^3-16470\,\nu^2+99522\,\nu-79002)\mu^2+(19440\,\nu^3-100440\,\nu^2+22896\,\nu+219096)\tau^2\mu)\mathcal{J}_4(\mathcal{J}_2)\\
&+((13392\,\nu^3-28224\,\nu^2+110304\,\nu+14880)\mu+(131328\,\nu^3-586656\,\nu^2+772416\,\nu-36768)\tau^2)\mathcal{J}_0(\mathcal{R}_2)\\
&+((-327564\,\nu^3-172368\,\nu^2+262224\,\nu-536706)\tau\,\mu\\
&+(-318816\,\nu^3+811296\,\nu^2-1008720\,\nu+335376)\tau^3)\mathcal{J}_0(\mathcal{J}_0)\\
&+((-32724\,\nu^3+269460\,\nu^2-1003320\,\nu+1087740)\tau\,\mu
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+(-85536\,\nu^3+561168\,\nu^2-1232064\,\nu+678096)\tau^3)\mathcal{J}_2(\mathcal{J}_0)\\
&+((-4212\,\nu^3-51894\,\nu^2+381942\,\nu-416412)\tau\,\mu\\
&+(62208\,\nu^3-381024\,\nu^2+638928\,\nu-119952)\tau^3)\mathcal{J}_2(\mathcal{J}_2)\\
&-324\,(3\,\nu+2)(9\,\nu^2+24\,\nu+14)\tau\,\mathcal{J}_1(\mathcal{J}_1)\\
&+(-22032\,\nu^3+100764\,\nu^2-103068\,\nu-31896)\mathcal{J}_1(\mathcal{R}_1)+(5184\,\nu^3-19872\,\nu^2+24768\,\nu-12864)\mathcal{R}_2(\mathcal{R}_1)\\
&+(31752\,\nu^3-156492\,\nu^2+231588\,\nu-47052)\mathcal{J}_0(\mathcal{R}_0)+(-6336\,\nu^3+34560\,\nu^2-46144\,\nu+9280)\tau\,\mathcal{R}_2(\mathcal{R}_2)\\
&+(27648\,\nu^3-194760\,\nu^2+398448\,\nu-163872)\tau\,\mathcal{J}_1(\mathcal{R}_2)\\
&+(73224\,\nu^3-268056\,\nu^2+247896\,\nu+105768)\tau\,\mathcal{J}_0(\mathcal{R}_1)\\
&+(-56376\,\nu^3+231336\,\nu^2-320112\,\nu+156096)\tau\,\mu^2\mathcal{J}_4(\mathcal{J}_4)\\
&+(65664\,\nu^3-304992\,\nu^2+387936\,\nu-45744)\tau\,\mu\,\mathcal{J}_4(\mathcal{R}_2)\\
&+((-8640\,\nu^4+44352\,\nu^3-111204\,\nu^2+25812\,\nu-16284)\mu\\
&+(-86832\,\nu^4+473472\,\nu^3-791568\,\nu^2+360576\,\nu-140832)\tau^2)\mathcal{R}_2\\
&+((-5508\,\nu^4+82836\,\nu^3+5616\,\nu^2+110340\,\nu+64116)\mu\\
&+(136080\,\nu^4-771444\,\nu^3+1664820\,\nu^2-6768\,\nu-524520)\tau^2)\mathcal{J}_1\\
&+((19116\,\nu^4-100494\,\nu^3+382806\,\nu^2-342630\,\nu+51732)\mu^2\\
&+(158436\,\nu^4-953208\,\nu^3+2242836\,\nu^2-1761984\,\nu+667872)\tau^2\mu)\mathcal{J}_4\\
&+((-1296\,\nu^4-37800\,\nu^3+152550\,\nu^2+374850\,\nu-838368)\tau\,\mu\\
&+(68040\,\nu^4-365472\,\nu^3+578664\,\nu^2-21888\,\nu-106416)\tau^3)\mathcal{J}_2\\
&+((66744\,\nu^4+483840\,\nu^3-145800\,\nu^2-48996\,\nu+907866)\tau\,\mu\\
&+(248832\,\nu^4-1198800\,\nu^3+2678400\,\nu^2-1418112\,\nu+372672)\tau^3)\mathcal{J}_0\\
&+(-11664\,\nu^4+54756\,\nu^3-53028\,\nu^2-34920\,\nu+10968)\mathcal{R}_0\\
&+(-23328\,\nu^4+11664\,\nu^3+364608\,\nu^2-712512\,\nu+248160)\tau\,\mathcal{R}_1\Big)
\end{aligned}
$$

Bibliografía

[1] V. V. Sokolov and A. V. Turbiner, Quasi-exact-solvability of the A_2/G_2 elliptic model: algebraic forms, $sl(3)/g^{(2)}$ hidden algebra, and polynomial eigenfunctions, Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical **48**(15), 155201 (2015).

[2] F. Calogero, Solution of a Three-Body Problem in One Dimension, Journal of Mathematical Physics **10**(12), 2191–2196 (1969).

[3] F. Calogero, Solution of the One-Dimensional N-Body Problems with Quadratic and/or Inversely Quadratic Pair Potentials, Journal of Mathematical Physics **12**, 419–436 (Mar. 1971).

[4] B. Sutherland, Quantum many body problem in one-dimension, J. Math. Phys. **12**, 251–256 (1971).

[5] B. Sutherland, Exact Results for a Quantum Many-Body Problem in One Dimension. II, Phys. Rev. A **5**, 1372–1376 (mar 1972).

[6] B. Sutherland, Exact Results for a Quantum Many-Body Problem in One Dimension, Phys. Rev. A **4**, 2019–2021 (Nov. 1971).

[7] B. Sutherland, Further Results for the Many-Body Problem in One Dimension, Physical Review Letters **20**, 98–100 (Jan. 1968).

[8] J. Wolfes, On the three-body linear problem with three-body interaction, Journal of Mathematical Physics **15**(9), 1420–1424 (1974).

[9] A. V. Turbiner, From Quantum A_N (Calogero) to H_4 (Rational) Model, SIGMA **7**, 071 (July 2011).

[10] A. V. Turbiner, From Quantum A_N to E_8 Trigonometric Model: Space-of-Orbits View, SIGMA **9**, 3 (Jan. 2013).

[11] V. V. Sokolov and A. V. Turbiner, Corrigendum: Quasi-exact-solvability of the A_2/G_2 Elliptic model: algebraic forms, $sl(3)/g^{(2)}$ hidden algebra, polynomial eigenfunctions, (2005 J. Phys. A: Math. Theor. 48 155201), Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical **48**(35), 359501 (2015).

[12] M. A. Olshanetsky and A. M. Perelomov, Quantum integrable systems related to lie algebras, Physics Reports **94**, 313–404 (Mar. 1983).

[13] W. Miller, Jr., S. Post, and P. Winternitz, Classical and quantum superintegrability with applications, Journal of Physics A Mathematical General , 3001P (Oct. 2013).

[14] F. Calogero, Ground State of a One-Dimensional N-Body System, Journal of Mathematical Physics **10**, 2197–2200 (Dec. 1969).

[15] J. Moser, Three integrable Hamiltonian systems connected with isospectral deformations, Advances in Mathematics **16**(2), 197 – 220 (1975).

[16] M. A. Olshanetsky, Universality of Calogero-Moser Model, Journal of Nonlinear Mathematical Physics **12**, 522 (2005).

[17] C. Marchioro, Solution of a Three-Body Scattering Problem in One Dimension, Journal of Mathematical Physics **11**, 2193–2196 (July 1970).

[18] E. Corrigan and R. Sasaki, Quantum versus classical integrability in Calogero–Moser systems, Journal of Physics A: Mathematical and General **35**(33), 7017 (2002).

[19] W. Rühl and A. Turbiner, Exact Solvability of the Calogero and Sutherland Models, Modern Physics Letters A **10**, 2213–2221 (1995).

[20] Y. F. Smirnov and A. V. Turbiner, gl_n+1 algebra of Matrix Differential Operators and Matrix Quasi-exactly-solvable Problems, ArXiv e-prints (June 2013).

[21] M. Rosenbaum, A. Turbiner, and A. Capella, Solvability of the G_2 integrable system, International Journal of Modern Physics A **13**(22), 3885–3903 (1998).

[22] F. Tremblay, A. V. Turbiner, and P. Winternitz, FAST TRACK COMMUNICATION: An infinite family of solvable and integrable quantum systems on a plane, Journal of Physics A Mathematical General **42**(24), 242001 (June 2009).