UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MEXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS Y DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA

MÓDULOS Y ANILLOS ESENCIALMENTE COMPRIMIBLES

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO (A) EN CIENCIAS

PRESENTA:
ALICIA LEÓN GALEANA

DIRECTOR DE LA TESIS:
DRA. BERTHA MARÍA TOMÉ ARREOLA
FACULTAD DE CIENCIAS, UNAM

CIUDAD UNIVERSITARIA, FEBRERO 2016

Agradecimientos

- A Dios por la vida y la oportunidad de culminar este trabajo.
- A mi papy por todo su apoyo.
- A la Dra. Bertha María Tomé Arreola por su tiempo y dedicación durante la elaboración de este trabajo.
- A los revisores de la tesis por sus comentarios y sugerencias.
    - Dra. Diana Avella Alaminos.
    - Dr. Hugo Alberto Rincón Mejía.
    - Dr. José Ríos Montes.
    - Dr. Alejandro Alvarado García.

Dedicatorias

A la memora
de mi mamy.

A la memoria del
Dr. Francisco Raggi Cardenaas
con quien inicie este trabajo.

Introducción

Este trabajo consta de seis capítulos en los que se desarrolla el artículo *Essentially compressible modules and rings* de *P. F. Smith* y *M. R Vedadi*, el cual se encuentra en *Journal of Algebra 304 (2006) 812-831*. El trabajo está organizado de la siguiente manera: en el capítulo 1 se encuentran los conceptos y resultados básicos que utilizaremos en los capítulos siguientes. En el capítulo 2 se define un módulo M como esencialmente comprimible si M se sumerge en cada submódulo esencial de M y se prueba que cada módulo M esencialmente comprimible y nosingular es isomorfo a un submódulo de un módulo libre. Posteriormente, en el capítulo 3 se estudian los módulos esencialmente comprimibles sobre ciertos anillos y se muestra que la afirmación recíproca del enunciado anterior se tiene cuando R es un anillo goldiano derecho y semiprimo. En el capítulo 4 se estudia la propiedad de ser esencialmente comprimible en las clases de R-módulos cíclicos, co-cíclicos e inyectivos. Se define una clase de módulos como esencialmente comprimible cuando cada uno de sus miembros es esencialmente comprimible y se caracterizan los anillos R para los cuales la clase Mod-R de todos los R-módulos derechos es esencialmente comprimible. En el capítulo 5 se estudia la clase de anillos esencialmente comprimibles derechos y se demuestra que R es esencialmente comprimible derecho si y sólo si existen un entero positivo n e ideales primos P_i con $1 \leq i \leq n$ tales que $\bigcap_{i=1}^{n} P_i = 0$ y el anillo primo $\dfrac{R}{P_i}$ es esencialmente comprimible para cada $1 \leq i \leq n$. Finalmente, en el capítulo 6 se citan algunos anillos que son extensiones de anillos esencialmente comprimiblesn y se prueba que un anillo R es semiprimo y artiniano si y sólo si es directamente finito y su cápsula inyectiva es un R-módulo esencialmente comprimible derecho.

Índice general

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo se verán los conceptos y resultados básicos que utilizaremos en los capítulos siguientes. La mayoría de ellos no se demuestran, el lector interesado podrá encontrar las demostraciones en alguna de las siguientes referencias [1, 6, 5, 7, 11].

Todos los anillos que aparecen en este trabajo tienen elemento unitario y los módulos son derechos y unitarios, a menos que se indique otra cosa.

Anuladores

Definición 1.1 *El* ***anulador derecho de un R-módulo*** **M** *es el conjunto* $an_d(M) = \{r \in R \mid mr = 0 \text{ para todo } m \in M\}$ *y el* ***anulador derecho de un elemento*** $\mathbf{m} \in \mathbf{M}$ *es el conjunto* $an_d(m) = \{r \in R \mid mr = 0\}$. *Definimos respectivamente los* ***anuladores izquierdos*** $an_i(M) = \{r \in R \mid rm = 0 \text{ para todo } m \in M\}$ *y* $an_i(m) = \{r \in R \mid rm = 0\}$.

Notemos que $an_d(m)$ es un ideal derecho de R, en tanto que $an_d(M)$ es un ideal de R.

Definición 1.2 *Un elemento* $c \in R$ *se llama* ***regular derecho*** *si* $an_d(c) = 0$ *y* ***regular izquierdo*** *si* $an_i(c) = 0$. *Un elemento* $c \in R$ *se llama regular si es regular derecho e izquierdo.*

Definición 1.3 *Un* **R-*módulo*** M *es* ***fiel*** *si* $an_d(M) = 0$.

Observemos que M es un módulo fiel sobre $\dfrac{R}{an_d(M)}$.

Ideales primos

Definición 1.4 *Un* ***ideal primo*** *en un anillo* R *es un ideal propio* P *de* R *tal que para cualesquiera dos ideales* I *y* J *de* R *que cumplen que* $IJ \leq P$ *se tiene que* $I \leq P$ *ó* $J \leq P$. *Un* ***anillo primo*** *es un anillo en el cual* 0 *es un ideal primo.*

Proposición 1.1 *Para un ideal propio* P *en un anillo* R, *las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

a) P *es un ideal primo.*

b) $\dfrac{R}{P}$ *es un anillo primo.*

c) *Si* I *y* J *son ideales derechos de* R *tales que* $IJ \leq P$, *entonces* $I \leq P$ *ó* $J \leq P$.

d) *Si* I *y* J *son ideales izquierdos de* R *tales que* $IJ \leq P$, *entonces* $I \leq P$ *ó* $J \leq P$.

e) *Si* $x, y \in R$ *son tales que* $xRy \subseteq P$, *entonces* $x \in P$ *ó* $y \in P$.

Definición 1.5 *Un* ***ideal primo mínimo*** *en un anillo* R *es cualquier ideal primo de* R *que no contiene propiamente a ningún otro ideal primo.*

Notemos que si R es un anillo primo, entonces 0 es el único ideal primo mínimo de R.

Proposición 1.2 *Cualquier ideal primo en un anillo* R *contiene un ideal primo mínimo.*

Ideales semiprimos

Definición 1.6 *Un* ***ideal semiprimo*** *en un anillo R es un ideal que es una intersección de ideales primos. Un* ***anillo semiprimo*** *es un anillo en el cual 0 es un ideal semiprimo.*

Notemos que un ideal P en un anillo R es semiprimo si y sólo si $\dfrac{R}{P}$ es un anillo semiprimo.

Proposición 1.3 *Para un ideal I en un anillo R, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

a) *I es un ideal semiprimo.*

b) *Si J es cualquier ideal de R tal que $J^2 \leq I$, entonces $J \leq I$.*

c) *Si J es cualquier ideal derecho de R tal que $J^2 \leq I$, entonces $J \leq I$.*

d) *Si J es cualquier ideal izquierdo de R tal que $J^2 \leq I$, entonces $J \leq I$.*

e) *Si $x \in R$ es tal que $xRx \subseteq I$, entonces $x \in I$.*

Definición 1.7 *Un ideal derecho ó izquierdo en un anillo R es* ***nilpotente*** *si $J^n = 0$ para algún entero positivo n.*

Proposición 1.4 *Sea R un anillo. Entonces R es semiprimo si y sólo si el único ideal derecho (izquierdo) nilpotente es 0.*

Demostración

Sea R un anillo semiprimo y supongamos que U es un ideal derecho (izquierdo) de R tal que $U^n = 0$ para algún $n \in \mathbb{N}$. Probaremos por inducción sobre n que U es igual a cero.

- Si $n = 1$, no hay nada que probar.

- Sea $n > 1$. Como $n \geq 2$, entonces $2n - 2 \geq n$ y por lo tanto $(U^{n-1})^2 = U^{2n-2} \subseteq U^n = 0$. Como R es semiprimo, se tiene que $U^{n-1} = 0$ y por la hipótesis de inducción, se tiene que $U = 0$.

Ahora supongamos que R no tiene ningún ideal derecho (izquierdo) nilpotente distinto de cero, se sigue de la *Proposición 1.3* que cero es un ideal semiprimo y por lo tanto R es un anillo semiprimo. ■

Definición 1.8 *El **radical primo** de un anillo R es la intersección de todos los ideales primos.*

Notemos que si R es distinto de cero, entonces R tiene al menos un ideal máximo, el cual es primo. Así el radical primo de un anillo distinto de cero es un ideal propio.

Proposición 1.5 *Sea R un anillo. Entonces:*

a) *El radical primo de R es la intersección de los ideales primos mínimos de R.*

b) *R es semiprimo si y sólo si su radical primo es cero.*

Demostración

a) Por la *Proposición 1.2*, cada ideal primo contiene un ideal primo mínimo. Así la intersección de todos los ideales primos contiene a la intersección de todos los ideales primos mínimos. La otra contención es clara.

b) Supongamos que R es un anillo semiprimo. Entonces 0 es un ideal semiprimo, luego 0 es una intersección de ideales primos por lo que contiene al radical primo.

Ahora supongamos que el radical primo de R es 0. Entonces 0 es la intersección de todos los ideales primos. Así 0 es un ideal semiprimo y por lo tanto R es un anillo semiprimo. ■

Submódulos esenciales

Definición 1.9 *Sea M un R-módulo. Un submódulo N de M se llama* ***esencial*** *en M, lo que se denota por $N \trianglelefteq M$, si $N \cap K \neq 0$ para cada submódulo distinto de cero K de M.*

Proposición 1.6 *Sean K y N submódulos de M. Entonces se cumplen las siguientes afirmaciones:*

a) *$N \trianglelefteq M$ si y sólo si $N \cap mR \neq 0$ para todo $0 \neq m \in M$.*

b) *Si K es un submódulo de N, entonces $K \trianglelefteq M$ si y sólo si $K \trianglelefteq N$ y $N \trianglelefteq M$.*

c) *Si $N \trianglelefteq M$, entonces $N \cap K \trianglelefteq K$.*

d) *Si N y K son esenciales en M, entonces $N \cap K \trianglelefteq M$.*

e) *Si K es un submódulo de N y $\dfrac{N}{K} \trianglelefteq \dfrac{M}{K}$, entonces $N \trianglelefteq M$.*

f) *Si $N \trianglelefteq M$ y $m \in M$, entonces $Nm^{-1} = \{r \in R \mid mr \in N\}$ es un ideal derecho esencial de R.*

g) *Si $M = \bigoplus\limits_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda$ es una suma directa de módulos M_λ con $\lambda \in \Lambda$ y $N_\lambda \trianglelefteq M_\lambda$ para cada $\lambda \in \Lambda$, entonces $\bigoplus\limits_{\lambda \in \Lambda} N_\lambda \trianglelefteq M$.*

h) *Sean K, L y M R-módulos. Si $f : K \longrightarrow M$ es un homomorfismo y $L \trianglelefteq M$, entonces $f^{-1}(L) \trianglelefteq K$.*

Definición 1.10 *Un* ***monomorfismo*** *$f : L \longrightarrow M$ se llama* ***esencial*** *si $Im\, f \trianglelefteq M$.*

Lema 1.1 *Un monomorfismo $f : L \longrightarrow M$ es esencial si y sólo si para cada homomorfismo $g : M \longrightarrow N$ tal que $g \circ f$ es un monomorfismo se tiene que g es un monomorfismo.*

Seudocomplementos

Definición 1.11 *Sea M un R-módulo. Un submódulo K de M es* ***cerrado*** *en M si K no tiene extensiones esenciales propias en M, es decir, si L es un submódulo de M tal que K es esencial en L, entonces $K = L$.*

Definición 1.12 *Sea N un submódulo de M. Un submódulo N' de M es un* ***seudocomplemento de N en M*** *si N' es máximo en la colección de submódulos K de M tales que $K \cap N = 0$.*

Proposición 1.7 *Sea M un R-módulo. Entonces cada submódulo N de M tiene un seudocomplemento. Si N' es un seudocomplemento de N en M, entonces se cumple lo siguiente:*

a) $N \oplus N' \trianglelefteq M$.

b) $\dfrac{N \oplus N'}{N'} \trianglelefteq \dfrac{M}{N'}$.

Proposición 1.8 *Sea K un submódulo de un módulo M. Entonces K es cerrado en M si y sólo si K es un seudocomplemento de uno de sus seudocomplementos.*

Módulos semisimples

Definición 1.13 *Sea M un R-módulo. Definimos el* ***zoclo de M*** *como*

$$Zoc\,(M) \;\; = \sum \{K \leq M \mid K\, es\, simple\}\,.$$

Se sabe que que $Zoc\,(M) = \cap \{L \leq M \mid L \trianglelefteq M\}$

Proposición 1.9 *Sean M, K y N R-módulos. Entonces se cumplen las siguientes afirmaciones:*

a) *Si $f : M \longrightarrow N$ es un homomorfismo, entonces $f\,(Zoc\,(M)) \leqslant Zoc\,(N)$.*

b) *Si K es un submódulo de M, entonces $Zoc\,(K) = K \cap Zoc\,(M)$. En particular,* $Zoc\,(Zoc\,(M)) = Zoc\,(M)$.

c) *Si K es un submódulo esencial de M, entonces $Zoc\,(K) = Zoc\,(M)$.*

d) *Si $\{M_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ es una familia de R-módulos, entonces* $Zoc\left(\bigoplus\limits_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda\right) = \bigoplus\limits_{\lambda\in\Lambda} Zoc\,(M_\lambda)$.

Definición 1.14 *Un R-módulo M es* ***semisimple*** *si es una suma de submódulos simples.*

Proposición 1.10 *Sea M un R-módulo. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

a) *M es semisimple.*

b) *Cada submódulo de M es un sumando directo de M.*

c) *M no contiene ideales propios esenciales.*

d) $Zoc\,(M) = M$.

Proposición 1.11 *Un anillo R es* ***semisimple*** *si es una suma directa de ideales mínimos.*

Módulos y anillos artinianos

Definición 1.15 *Un módulo M es* ***artiniano*** *si M satisface la condición de cadena descendente sobre sus submódulos. Un anillo R es* ***artiniano derecho*** *si el módulo derecho R_R es artiniano.*

En capítulos posteriores utilizaremos el siguiente resultado de E. Noether.

Proposición 1.12 *Para un anillo R las siguientes condiciones son equivalentes:*

a) *R es artiniano derecho y semiprimo.*

b) *R es artiniano izquierdo y semiprimo.*

c) *R es semisimple.*

Dimensión uniforme

Definición 1.16 *Un R-módulo $M \neq 0$ se llama **uniforme** si cualesquiera dos submódulos distintos de cero de M se intersecan no trivialmente, equivalentemente, si cualquier submódulo distinto de cero de M es esencial en M.*

Por ejemplo, para cualquier anillo R, un R-módulo simple es uniforme y si R es conmutativo, el R-módulo $\dfrac{R}{P}$ es uniforme para cualquier ideal primo P. Además, todo submódulo no nulo y toda extensión esencial de un módulo uniforme son también uniformes.

Definición 1.17 *Un R-módulo M tiene **dimensión uniforme n** ($dim\, u\,(M) = n$) si tiene un submódulo esencial V que es una suma directa de n submódulos uniformes. De lo contrario, M tiene **dimensión uniforme infinita** ($dim\, u\,(M) = \infty$).*

Proposición 1.13 *Un R-módulo M tiene dimensión uniforme finita si y sólo si no contiene sumas directas infinitas de submódulos distintos de cero.*

Proposición 1.14 *Sea K un submódulo de un R-módulo M y supongamos que M tiene dimensión uniforme finita. Entonces K es cerrado en M si y sólo si K y $\dfrac{M}{K}$ tienen dimensión uniforme finita y $dim\, u\,(M) = dim\, u\,(K) + dim\, u\left(\dfrac{M}{K}\right)$.*

Módulos singulares y nosingulares

Definición 1.18 *El **submódulo singular** de M está definido por*

$$Z\,(M) = \{x \in M \mid an_d\,(x) \trianglelefteq R\} = \{m \in M \mid mA = 0 \text{ para algún } A \trianglelefteq R\}$$

*Se dice que M es **singular** si $Z\,(M) = M$ y **nosingular** si $Z\,(M) = 0$.*

Proposición 1.15 *Un módulo es singular si y sólo si* $M \cong \dfrac{L}{N}$ *para algún módulo* L *y algún submódulo esencial* N *de* L.

Proposición 1.16 *Se cumplen las siguientes afirmaciones:*

a) *Todos los submódulos, módulos cocientes y sumas directas de módulos singulares son singulares.*

b) *Todos los submódulos, productos directos y extensiones esenciales de módulos nosingulares son nosingulares.*

c) *Sea* N *un submódulo de un módulo* M. *Si* N *y* $\dfrac{M}{N}$ *son ambos nosingulares entonces* M *es nosingular.*

Definición 1.19 *Un* ***anillo*** R *es* ***nosingular derecho*** *si el módulo derecho* R_R *es nosingular.*

Proposición 1.17 *Sea* R *un anillo nosingular derecho. Entonces se cumplen las siguientes afirmaciones:*

a) *Para todo* R*-módulo* M, *el módulo cociente* $\dfrac{M}{Z(M)}$ *es nosingular.*

b) *Si* N *es un submódulo del* R*-módulo* M *tal que* N *y* $\dfrac{M}{N}$ *son singulares, entonces* M *es singular.*

c) *Todas las extensiones esenciales de* R*-módulos singulares son singulares.*

Anillos goldianos

Definición 1.20 *Un anillo* R *es* ***goldiano derecho*** *si* R *tiene dimensión uniforme derecha finita y* R *cumple la condición de cadena ascendente en anuladores derechos.*

Lema 1.2 *Si* R *es un anillo semiprimo con condición de cadena ascendente en anuladores derechos, entonces* R *es un anillo nosingular derecho.*

Demostración

Sea $Z = Z(R_R)$. Queremos demostrar que $Z = 0$. Como R es semiprimo, basta demostrar que Z es nilpotente. Observemos que $an_d(Z) \leq an_d(Z^2) \leq \ldots$. Como R tiene condición de cadena ascendente sobre anuladores derechos, $an_d\left(Z^k\right) = an_d\left(Z^{k+1}\right)$ para algún $k \in \mathbb{N}$. Afirmamos que $Z^k = 0$.

En caso contrario, podemos tomar $x \in R \setminus an_d\left(Z^k\right)$ tal que $an_d(x)$ sea máximo. Si $a \in Z$, entonces $an_d(a) \cap xR \neq 0$ ya que $an_d(a) \trianglelefteq R$. Luego existe $s \in R$ tal que $axs = 0$ pero $xs \neq 0$. Entonces $an_d(x) < an_d(ax)$ y por la maximidad de $an_d(x)$, se tiene que $ax \in an_d\left(Z^k\right)$, de donde $Z^k ax = 0$. Como esto vale para todo $a \in Z$, se tiene que $x \in an_d\left(Z^{k+1}\right) = an_d\left(Z^k\right)$, lo que contradice la elección de x. Luego $Z^k = 0$. ■

Lema 1.3 *[6, Lema 5.8] Si R es un anillo semiprimo y goldiano derecho, entonces R tiene condición de cadena descendente en anuladores derechos.*

Proposición 1.18 *[6, Proposición 5.9] Sean R un anillo semiprimo y goldiano derecho e I un ideal derecho de R. Entonces I es un ideal esencial derecho de R si y sólo si I contiene un elemento regular.*

Teorema 1.1 *[7, Teorema 11.13] Para un anillo R los siguientes enunciados son equivalentes:*

a) *R es semiprimo y goldiano derecho.*

b) *R es semiprimo, nosingular derecho y tiene dimensión uniforme derecha finita.*

Módulos y anillos neterianos

Proposición 1.19 *Para un módulo M, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

a) *M cumple la condición de cadena ascendente sobre sus submódulos.*

b) *Cada familia distinta del vacío de submódulos de M tiene un elemento máximo.*

c) *Cada submódulo de M es finitamente generado.*

Definición 1.21 *Un módulo M es **neteriano** si cumple alguna de las condiciones equivalentes de la proposición anterior. Un anillo R es **neteriano derecho** si el módulo derecho R_R es neteriano.*

Proposición 1.20 *Sea N un submódulo de un R-módulo M. Entonces M es neteriano si y sólo si N y $\frac{M}{N}$ son ambos neterianos.*

Proposición 1.21 *Si R es un anillo neteriano derecho, entonces cada R-módulo derecho finitamente generado es neteriano.*

Proposición 1.22 *Todo anillo neteriano derecho es un anillo goldiano derecho.*

Demostración

Sea R un anillo neteriano derecho. Basta probar que $dim\, u\,(R_R) < \infty$. Supongamos lo contrario. Entonces R contiene una suma directa infinita de ideales derechos no nulos. Luego R contiene una familia independiente numerable $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de ideales derechos no nulos. Pero entonces $A_1 < A_1 \oplus A_2 < A_1 \oplus A_2 \oplus A_3 < \ldots$ es una cadena estrictamente ascendente de ideales derechos no nulos de R, lo cual es una contradicción. ■

La categoría $\sigma\,[M]$

Definición 1.22 *Sea M un R-módulo. Un R-módulo N es **M-generado** si existe un epimorfismo desde una suma directa de copias de M a N. Se denota como $\sigma\,[\mathbf{M}]$ la subcategoría plena de Mod-R cuyos objetos son todos los R-módulos isomorfos a submódulos de módulos M-generados.*

Definición 1.23 *Un R-módulo U se llama **M-inyectivo** si para cada monomorfismo $f : K \longrightarrow M$ y cada homomorfismo $\gamma : K \longrightarrow U$ hay un homomorfismo $\bar{\gamma} : M \longrightarrow U$ tal que el siguiente diagrama conmuta.*

$$\begin{array}{ccc} K & \xrightarrow{f} & M \\ \downarrow^{\gamma} & \swarrow^{\bar{\gamma}} & \\ U & & \end{array}$$

Un módulo U en $\sigma[M]$ se llama **inyectivo en** $\sigma[M]$ si U es N-inyectivo para cada $N \in \sigma[M]$. El módulo U es inyectivo en $\sigma[M]$ si y sólo si es M-inyectivo.

Proposición 1.23 *Sean M un R-módulo y A un submódulo de M el cual es M-inyectivo. Entonces A es un sumando directo de M.*

Demostración

Sea $\iota : A \longrightarrow M$ la inclusión. Entonces el siguiente diagrama con renglón exacto conmuta.

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{\iota} & M \\ & & \downarrow^{1} & \swarrow_{\gamma} & \\ & & A & & \end{array}$$

Por lo tanto $M = Im\iota \oplus Nu\gamma = A \oplus B$, donde $B = Nu\gamma$. ■

Definición 1.24 *Si N es un submódulo esencial de un módulo M-inyectivo E en $\sigma[\mathbf{M}]$, entonces E es la **cápsula M-inyectiva** de N y usualmente se denota como $\hat{N}$. La cápsula inyectiva de N en Mod-R es la R-cápsula inyectiva y se denota por $E(N)$.*

Proposición 1.24 *Sea M un R-módulo. Entonces se cumple lo siguiente.*

a) *Cada módulo N en $\sigma[M]$ tiene una cápsula inyectiva $\hat{N}$ en $\sigma[M]$.*

b) *Cada módulo N en Mod-R tiene una cápsula inyectiva $E(M)$ en Mod-R. Si $N \in \sigma[M]$ entonces $\hat{N} = tr(M, E(N)) = \sum \{f(M) \mid f \in Hom(M, E(N))\}$.*

c) *La cápsula inyectiva de un módulo en $\sigma[M]$ ó Mod-R es única salvo isomorfismo.*

Capítulo 2

Módulos esencialmente comprimibles

Sea R un anillo. Recordemos que un R-módulo M se llama *comprimible* si para todo submódulo distinto de cero N de M existe un monomorfismo $\theta : M \longrightarrow N$.

Definición 2.1 *Un R-módulo M se llama **esencialmente comprimible** si para cada submódulo esencial N de M existe un monomorfismo $\theta : M \longrightarrow N$.*

Claramente cada módulo comprimible es esencialmente comprimible.

Definición 2.2 *Un R-módulo M es **subisomorfo** a un R-módulo M' si existen monomorfismos $\alpha : M \longrightarrow M'$ y $\beta : M' \longrightarrow M$. En este caso diremos que los R-módulos M y M' son **subisomorfos**.*

Se comenzará este trabajo caracterizando los módulos esencialmente comprimibles.

Proposición 2.1 *Los siguientes enunciados son equivalentes para un R-módulo M.*

a) *M es esencialmente comprimible.*

b) *M es subisomorfo a un módulo esencialmente comprimible.*

c) *M contiene un submódulo esencialmente comprimible N tal que existe un monomorfismo $\varphi : M \longrightarrow N$.*

d) *Hay un monomorfismo esencial $\psi : M \longrightarrow M'$, para algún módulo esencialmente comprimible M'.*

Demostración

a) $\Longrightarrow$ b) M es esencialmente comprimible y subisomorfo a sí mismo.

a) $\Longrightarrow$ d) 1_M es un monomorfismo esencial.

b) $\Longrightarrow$ c) Sean M' un R-módulo esencialmente comprimible subisomorfo a M y $\alpha : M \longrightarrow M'$ y $\beta : M' \longrightarrow M$ monomorfismos. Entonces $\beta(M') \subseteq M$ y $\beta(M')$ es isomorfo a M'. Si $N = \beta(M')$ entonces N es un submódulo esencialmente comprimible de M y $\beta\mid_N \alpha : M \longrightarrow N$ es un monomorfismo.

c) $\Longrightarrow$ a) Sea L un submódulo esencial de M. Por hipótesis, existe un submódulo esencialmente comprimible N de M y un monomorfismo $\varphi : M \longrightarrow N$. Entonces $L \cap N$ es un submódulo esencial de N, por lo que existe un monomorfismo $\theta : N \longrightarrow L \cap N$. Sea $\iota : L \cap N \longrightarrow L$ la inclusión. Entonces $\iota\theta\varphi : M \longrightarrow L$ es un monomorfismo y por lo tanto M es esencialmente comprimible.

d) $\Longrightarrow$ b) Sea M' un R-módulo esencialmente comprimible tal que $\psi : M \longrightarrow M'$ es un monomorfismo esencial. Entonces $N = \psi(M)$ es un submódulo esencial de M', por lo que existe un monomorfismo $\theta : M' \longrightarrow N$. Luego $(\psi\mid_N)^{-1}\theta : M' \longrightarrow M$ es un monomorfismo y por lo tanto M es subisomorfo a M'. ■

Proposición 2.2 *Cada suma directa de módulos esencialmente comprimibles es esencialmente comprimible.*

Demostración

Sean I un conjunto de índices distinto del vacío y $\{M_i\}_{i\in I}$ una familia de módulos esencialmente comprimibles. Si $M = \bigoplus_{i\in I} M_i$ y L es un submódulo esencial de M, entonces para cada $i \in I$, $L \cap M_i$ es un submódulo esencial de M_i, por lo que existen monomorfismos $\theta_i : M_i \longrightarrow L \cap M_i$. Definimos $\theta : M \longrightarrow L$ como $\theta(x) = \sum_{i \in I} \theta_i(x_i)$, donde $x = \sum_{i \in I} x_i$. Notemos que $\theta(x) = \sum_{i \in I} \theta_i(x_i) \in \bigoplus_{i \in I} L \cap M_i$, así que si $\theta(x) = 0$ entonces $\theta_i(x_i) = 0$ para todo $i \in I$. Luego $x_i = 0$ para todo $i \in I$, es decir, θ es un monomorfismo y por lo tanto M es esencialmente comprimible. ∎

Recordemos que dos anillos R y S son equivalentes de Morita si sus categorías de módulos $Mod\, R$ y $Mod\, S$ son equivalentes. Si $F : Mod\, R \longrightarrow Mod\, S$ es una equivalencia y $f : M \longrightarrow M'$ es un homomorfismo de R-módulos, entonces f es un monomorfismo si y sólo si $F(f)$ es un monomorfismo. Más aún, f es un monomorfismo esencial si y sólo si $F(f)$ es un monomorfismo esencial [1, Proposiciones 21.6 y 21.7].

Proposición 2.3 *Ser esencialmente comprimible es una propiedad invariante de Morita.*

Demostración

Como un módulo M es esencialmente comprimible si y sólo si para cualquier $N \in Mod\, R$ con un monomorfismo esencial de N en M, hay un monomorfismo de M en N, el resultado se sigue de lo dicho en el párrafo anterior. ∎

Definición 2.3 *Se dice que un módulo M es* ***co-hopfiano*** *si cada endomorfismo inyectivo de M es un isomorfismo.*

La siguiente proposición contiene más propiedades de los módulos esencialmente comprimibles.

Proposición 2.4 *Sea M un R-módulo no nulo esencialmente comprimible. Entonces se cumplen las siguientes afirmaciones.*

a) *Si N es un submódulo esencial de M ó N es un submódulo invariante bajo endomorfismos inyectivos de M, entonces N es un submódulo esencialmente comprimible.*

b) *Si N es un submódulo de M tal que $\theta(N)+\theta^{-1}(N)\subseteq N$ para cada monomorfismo $\theta: M \longrightarrow M$, entonces $\dfrac{M}{N}$ es un módulo esencialmente comprimible.*

c) *M es semisimple y co-hopfiano si y sólo si M tiene un submódulo esencialmente comprimible y co-hopfiano que es esencial en M.*

d) *$an_d(M)$ es un ideal semiprimo de R.*

e) *La cápsula M-inyectiva $\hat{M}$ de M no contiene submódulos esenciales totalmente invariantes.*

f) *Si M es finitamente generado, entonces M no contiene sumas directas infinitas de submódulos totalmente invariantes distintos de cero.*

Demostración

a) Supongamos primero que N es un submódulo esencial de M. Se demostrará que N es esencialmente comprimible. Sea L un submódulo esencial de N, entonces L es un submódulo esencial de M. Por hipótesis, existe un monomorfismo $\theta: M \longrightarrow L$. Sea $\iota: N \longrightarrow M$ la inclusión. Entonces $\theta\iota: N \longrightarrow L$ es un monomorfismo y por lo tanto N es esencialmente comprimible.

Supongamos ahora que N es invariante bajo endomorfismos inyectivos de M. Se demostrará que N es esencialmente comprimible. Sean K un submódulo esencial de N y N' un seudocomplemento de N en M. Entonces $N\oplus N'$ es un submódulo esencial de M y $K\cap N'=0$. Como K es un submódulo esencial de N y N' es un submódulo esencial de N', entonces $K\oplus N'$ es esencial en $N\oplus N'$. Así $K\oplus N'$ es esencial en M y existe un monomorfismo $\theta: M \longrightarrow K\oplus N'$. Sea $\iota: K\oplus N' \longrightarrow M$ la inclusión, entonces $\iota\theta: M \longrightarrow M$ es un endomorfismo inyectivo. Por hipótesis, $\theta(N)=\iota\theta(N)\subseteq N$, de donde $\theta(N)\cap N'=0$.

Por otro lado, consideremos la proyección $\rho: K\oplus N' \longrightarrow \dfrac{K\oplus N'}{N'}$. Se demostrará que $\rho\theta|_N$ es un monomorfismo. Sea $x\in N$ tal que $\rho\theta(x)=0$. Entonces $\theta(x)\in N'$ y así $\theta(x)\in\theta(N)\cap N'=0$. Luego $x\in Nu\,\theta$, por lo que $x=0$. Así $\rho\theta|_N$ es un monomorfismo. Además, $\dfrac{K\oplus N'}{N'}\cong\dfrac{K}{K\cap N'}\cong K$. Sea $\varphi:\dfrac{K\oplus N'}{N'}\longrightarrow K$ el isomorfismo anterior. Entonces $\varphi\rho\theta\mid_N: N\longrightarrow K$ es un monomorfismo y por lo tanto N es esencialmente comprimible.

b) Sean $N\subseteq L\subseteq M$ y supongamos que $\dfrac{L}{N}$ es un submódulo esencial de $\dfrac{M}{N}$. Por la *Proposición 1. 6 e)*, L es esencial en M por lo que existe un monomorfismo $\theta: M\longrightarrow L$. Además, por hipótesis $\theta(N)\subseteq N$. Luego existe un homomorfismo $\bar{\theta}:\dfrac{M}{N}\longrightarrow\dfrac{L}{N}$ tal que el siguiente diagrama con renglones exactos conmuta.

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & N & \xrightarrow{\iota} & M & \xrightarrow{\rho} & \frac{M}{N} & \longrightarrow & 0\\
 & & \downarrow^{\theta|_N} & & \downarrow^{\theta} & & \downarrow^{\bar{\theta}} & & \\
0 & \longrightarrow & N & \xrightarrow{\iota'} & L & \xrightarrow{\rho'} & \frac{L}{N} & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

Como $\theta^{-1}(N)\subseteq N$ se tiene que $\bar{\theta}$ es un monomorfismo, demostrando así que $\dfrac{M}{N}$ es un módulo esencialmente comprimible.

c) La condición necesaria se cumple porque M es un submódulo esencial de sí mismo y por hipótesis, M es esencialmente comprimible y co-hopfiano.

Supongamos que N es un submódulo esencialmente comprimible de M, co-hopfiano y esencial en M. Primero se demostrará que N es semisimple. Sea L un submódulo esencial de N, entonces existe un monomorfismo $\theta: N\longrightarrow L$. Si consideramos la inclusión $\iota: L\longrightarrow N$ se tiene que $\iota\theta: N\longrightarrow N$ es un monomorfismo que por hipótesis, es un isomorfismo. Luego ι es suprayectivo y por lo tanto $N=L$, esto es, N no contiene submódulos esenciales propios. Consecuentemente N es semisimple y $N=Zoc(N)$.

Por otro lado, como N es un submódulo esencial de M, por la *Proposición 1.9 c)*, $Zoc(M)=Zoc(N)=N$. Luego $Zoc(M)$ es un submódulo esencial en M, por lo que existe un monomorfismo $\theta: M\longrightarrow Zoc(M)$. Considerando la inclusión $\iota: Zoc(M)\longrightarrow M$, se tiene que $\theta\iota: Zoc(M)\longrightarrow Zoc(M)$ es un monomorfismo y por hipótesis, $\theta\iota$ es un isomorfismo. Sea $x\in M$, entonces $\theta(x)\in Zoc(M)$, por lo que existe un único $m \in Zoc(M)$ tal que $\theta\iota(m) = \theta(x)$. Luego $\theta(m) = \theta(x)$ y por lo tanto $x = m \in Zoc(M)$. Esto implica que $M \subseteq Zoc(M)$ y por lo tanto M es semisimple y co-hopfiano.

d) Sea $A = an_d(M)$. Como $M \neq 0$ entonces A es un ideal propio de R. Sea B un ideal de R tal que $B^2 \subseteq A$ y consideremos el submódulo L de M definido por $L = \{m \in M \mid mB = 0\}$. Si $0 \neq m \in M$ entonces se tienen dos casos.

1. Si $m \in L$ entonces $mB = 0$ y $mR \neq 0$.
2. Si $m \notin L$ entonces $mB \neq 0$ y $mB^2 \subseteq mA = 0$.

Si hacemos $B^0 = R$, entonces existe $n \in \{0,1\}$ tal que $mB^n \neq 0$ y $mB^{n+1} = 0$. Luego $0 \neq mB^n \subseteq mR \cap L$, lo que implica que existe $r \in R$ tal que $0 \neq mr \in L$. Esto demuestra que L es un submódulo esencial de M. Por hipótesis, existe un monomorfismo $\theta : M \longrightarrow L$. θ es tal que $\theta(MB) = \theta(M)B \subseteq LB = 0$. Entonces $MB = 0$ y así $B \subseteq A$. Por la *Proposición 1.3*, A es un ideal semiprimo de R.

e) Sea N un submódulo totalmente invariante y esencial de $\hat{M}$. Entonces $N \cap M$ es un submódulo esencial de M, por lo que existe un monomorfismo $\theta : M \longrightarrow N \cap M$. Sea $L = \theta(M)$. Entonces L es un submódulo de N que es isomorfo a M. Consideremos $(\theta\mid_N)^{-1} : L \longrightarrow M$. Como $\hat{M}$ es M-inyectivo entonces existe un homomorfismo $\varphi : \hat{M} \longrightarrow \hat{M}$ tal que el siguiente diagrama con renglón superior exacto conmuta.

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & L & \xrightarrow{\iota} & \hat{M} \\ & & \downarrow^{\theta^{-1}} & & \downarrow^{\varphi} \\ & & M & \xrightarrow{\iota'} & \hat{M} \end{array}$$

Así θ^{-1} se puede extender a un endomorfismo $\varphi : \hat{M} \longrightarrow \hat{M}$. Entonces $M = \theta^{-1}(L) = \varphi(L) \subseteq \varphi(N) \subseteq N$. Se sigue que $End_R\left(\hat{M}\right)M \subseteq End_R\left(\hat{M}\right)N \subseteq N$. Por otro lado, $\hat{M} = tr(M, E(M)) = \sum\{f(M) \mid f \in Hom(M, E(M))\}$. Demostraremos que $\hat{M} \subseteq End\left(\hat{M}\right)M$. Sea $g \in Hom(M, E(M))$, entonces $g(M) \subseteq$

$\sum \{f(M) \mid f \in Hom(M, E(M))\} = \hat{M}$. Como $\hat{M}$ es M-inyectivo, $\hat{M}$ es inyectivo en $\sigma[M]$, por lo que existe $h : \hat{M} \longrightarrow \hat{M}$ tal que el siguiente diagrama con renglón superior exacto conmuta.

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & g(M) & \xrightarrow{\iota} & \hat{M} \\ & & \downarrow^{\iota} & \swarrow^{h} & \\ & & \hat{M} & & \end{array}$$

Así $g(M) = h(M) = h \cdot M$ con $h \in End\left(\hat{M}\right)$. Se tiene entonces que $\hat{M} \subseteq End_R\left(\hat{M}\right) M \subseteq End_R\left(\hat{M}\right) N \subseteq N$. Luego $N = \hat{M}$.

f) Sea $N = N_1 \oplus N_2 \oplus \ldots$ una suma de submódulos totalmente invariantes de M. Sea K un seudocomplemento de N en M. Entonces $N \cap K = 0$ y $N \oplus K$ es un submódulo esencial de M. Luego hay un monomorfismo $\theta : M \longrightarrow N \oplus K$. Como M es finitamente generado entonces $\theta(M) \subseteq N_1 \oplus \ldots \oplus N_t \oplus K$ para algún $t \geq 0$. Por la hipótesis $\theta(N_{t+1} \oplus N_{t+2} \oplus \ldots) \subseteq N_{t+1} \oplus N_{t+2} \oplus \ldots$; luego $\theta(N_{t+1} \oplus N_{t+2} \oplus \ldots) \subseteq \theta(M) \cap (N_{t+1} \oplus N_{t+2} \oplus \ldots) \subseteq (N_1 \oplus \ldots \oplus N_t \oplus K) \cap (N_{t+1} \oplus N_{t+2} \oplus \ldots) = 0$. Así $N_{t+1} \oplus N_{t+2} \oplus \ldots \subseteq Nu\,\theta = 0$ y por lo tanto la suma es finita. ■

Corolario 2.1 *Sea M un módulo finitamente generado y esencialmente comprimible sobre un anillo conmutativo R. Si $S = End_R(M)$, entonces la dimensión uniforme de ${}_SM$ es finita.*

Demostración

Sean N un S-submódulo de M y $r \in R$. Definimos $\theta_r : M \longrightarrow M$ como $\theta_r(m) = mr$. Como R es conmutativo θ_r es un homomorfismo y por lo tanto $\theta_r \in S$. Como N es un S-submódulo de M entonces $\theta_r(N) \subseteq N$; esto implica que $Nr = \theta_r(N) \subseteq N$ para todo $r \in R$. Entonces N es un R-submódulo de M y además es totalmente invariante. Así todo S-submódulo de ${}_SM$ es un R-submódulo totalmente invariante de M_R.

Si $(V_1 \oplus V_2 \oplus \ldots)$ es un submódulo esencial de ${}_SM$, donde cada V_i es uniforme, entonces $(V_1 \oplus V_2 \oplus \ldots) \subseteq M_R$ es una suma directa de R-submódulos totalmente invariantes.

Como M es finitamente generado, por la *Proposición 2.4 (f)*, la suma directa es finita y por lo tanto $dim\, u\,({}_SM) = n < \infty$. ■

Definición 2.4 *Se dice que un R-módulo M distinto de cero es* ***primo*** *si $an_d\,(M) = an_d\,(N)$ para todo submódulo N distinto de cero de M.*

La siguiente proposición da información de los módulos finitamente generados y esencialmente comprimibles.

Proposición 2.5 *Sean M_R un módulo esencialmente comprimible y finitamente generado y $S = End_R\,(M)$. Si ${}_SM$ es un módulo primo, entonces para cada submódulo U distinto de cero de M_R, existen un entero positivo n y $f_i \in Hom_R\,(U, M)$, para $1 \leq i \leq n$, tales que M se puede sumergir dentro de $\sum_{i=1}^{n} f_i\,(U)$. Además, si M_R es nosingular, entonces M_R tiene dimensión uniforme finita si y sólo si M_R tiene un submódulo uniforme.*

Demostración

Sean U un submódulo distinto de cero de M y $N = \sum\{f\,(U) \mid f \in Hom_R\,(U, M)\}$. Consideremos el homomorfismo inclusión $\iota : U \longrightarrow M$ que es distinto de cero. Entonces $\iota\,(U) \subseteq N$ y por lo tanto $N \neq 0$. Se demostrará que N es un submódulo totalmente invariante de M. Sea $g : M_R \longrightarrow M_R$ un homomorfismo, entonces $g\,(N) = g\left(\sum_{f \in Hom(U,M)} f\,(U)\right) = \sum_{f \in Hom(U,M)} gf\,(U)$. Como $gf \in Hom\,(U, M)$ entonces los sumandos de $g\,(N)$ son algunos de los sumandos de N, esto es, $g\,(N) \subseteq N$ y por lo tanto N es totalmente invariante.

Sea K un seudocomplemento de N en M. Entonces $N \oplus K$ es un submódulo esencial de M, por lo que existe un monomorfismo $\theta : M \longrightarrow N \oplus K$. Sean $\pi : N \oplus K \longrightarrow K$ la proyección e $i : K \longrightarrow M$ la inclusión. Entonces $\varphi = \iota\pi\theta$ es un endomorfismo de M y como N es un submódulo totalmente invariante de M se tiene que $\varphi\,(N) \subseteq N$. También $\varphi\,(N) = \iota\pi\theta\,(N) \subseteq \iota\pi\,(N \oplus K) = \iota\,(K) = K$ y así $\varphi\,(N) \subseteq N \cap K = 0$. De aquí se sigue que $\varphi \in an_i\,({}_SN) = an_i\,({}_SM)$ ya que ${}_SM$ es primo. Luego $\varphi\,(M) = 0$, lo que implica que $\pi(\theta(M)) = \iota\pi\theta(M) = \varphi(M) = 0$. Entonces $\theta(M) \subseteq N = \sum\{f(U) \mid f \in Hom_R(U,M)\}$. Por hipótesis M es finitamente generado, así que existen $n \in \mathbb{Z}^+$ y $f_i \in Hom_R(U,M)$ con $1 \leq i \leq n$ tales que $\theta(M) \subseteq f_1(U) + \cdots + f_n(U)$. Por lo tanto M puede sumergirse en $f_1(U) + \cdots + f_n(U)$.

Ahora, sea M_R nosingular y supongamos que U es un submódulo uniforme de M. Definamos $\phi : U^{(n)} \longrightarrow f_1(U) + \cdots + f_n(U)$ como $\phi(u_1, \cdots, u_n) = f_1(u_1) + \cdots + f_n(u_n)$ para todo $u_i \in U$ con $1 \leq i \leq n$. Claramente ϕ es un homomorfismo. Notemos que ϕ es un epimorfismo y que $U^{(n)}$ tiene dimensión uniforme n. Así $\dfrac{U^{(n)}}{Nu\,\phi}$ es isomorfo a $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} f_i(U) \subseteq M$, lo que implica que $\dfrac{U^{(n)}}{Nu\,\phi}$ es nosingular. Ahora demostraremos que $Nu\,\phi$ es cerrado en $U^{(n)}$. Sea B un submódulo de $U^{(n)}$ tal que $Nu\,\phi$ es un submódulo esencial de B. Por la *Proposición 1.15*, $\dfrac{B}{Nu\,\phi}$ es singular. Como $\dfrac{B}{Nu\,\phi}$ es un submódulo de $\dfrac{U^{(n)}}{Nu\,\phi}$, por la *Proposición 1.16*, $\dfrac{B}{Nu\,\phi}$ es nosingular. Por lo tanto $B = Nu\,\phi$ y $Nu\,\phi$ es cerrado en $U^{(n)}$. Entonces, por la *Proposición 1.14*, la dimensión uniforme de $\dfrac{U^{(n)}}{Nu\,\phi}$ es finita. Luego la dimensión uniforme de $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} f_i(U)$ y en consecuencia la de M también son finitas.

La afirmación recíproca es clara. ■

Lema 2.1 *Sean M un R-módulo e I un conjunto de índices distinto del vacío tales que $M = \bigoplus_{i\in I} M_i$, donde M_i es un módulo uniforme para todo $i \in I$. Sea $0 \neq N \subseteq M$. Entonces existen $I' \subseteq I$ y un monomorfismo esencial $\theta : N \longrightarrow \bigoplus_{i\in I'} M_i$.*

Demostración

1. Supongamos que $N \cap M_i \neq 0$ para todo $i \in I$. Se demostrará que N es un submódulo esencial de M. Por hipótesis, M_i es un módulo uniforme para todo $i \in I$, lo que implica que $0 \neq N \cap M_i$ es un submódulo esencial de M_i. Así $\bigoplus_{i\in I}(N \cap M_i)$ es un submódulo esencial de $\bigoplus_{i\in I} M_i$. Sea $0 \neq \bar{x} \in \bigoplus_{i\in I} M_i$. Entonces existe $r \in R$ tal que $0 \neq \bar{x}r \in \bigoplus_{i\in I}(N \cap M_i)$. Luego $\bar{x}r = \sum_{i\in I} x_i r$ con $x_i r \in N \cap M_i$

para todo $i \in I$ y $x_i r = 0$ para casi todo $i \in I$. En particular, $x_i r \in N$ para todo $i \in I$, por lo que $0 \neq \bar{x}r = \sum_{i\in I} x_i r \in N$. Por lo tanto N es un submódulo esencial de $\underset{i\in I}{\oplus} M_i$ y la inclusión $\iota : N \longrightarrow \underset{i\in I}{\oplus} M_i$ es un monomorfismo esencial.

2. Supongamos ahora que $N \cap M_j = 0$ para algún $j \in I$. Sea $\mathcal{F} = \{J \subseteq I \mid N \bigcap \underset{j\in J}{\oplus} M_j = 0\}$. Entonces $\{j\} \in \mathcal{F}$ y $\mathcal{F} \neq \phi$. Con la relación de orden "$\subseteq$", $\mathcal{F}$ es un conjunto parcialmente ordenado. Sean $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{F}$ una cadena y $K = \bigcup_{J\in\mathcal{C}} J$. Entonces K es una cota superior de $\mathcal{C}$. Se demostrará que $K \in \mathcal{F}$. Sea $\bar{x} \in N \bigcap \underset{j\in K}{\oplus} M_j$, luego $\bar{x} \in N$ y $\bar{x} = \sum_{j\in K} x_j$ con $x_j \in M_j$ y $x_j = 0$ para casi todo $j \in K$. Como sólo hay un número finito de subíndices j para los cuales $x_j \neq 0$ y $\mathcal{C}$ es una cadena entonces existe $J' \in \mathcal{C}$ tal que J' contiene a todos estos subíndices. Luego $\bar{x} \in \underset{j\in J'}{\oplus} M_j \bigcap N = 0$. Por lo tanto $\bar{x} = 0$ y así $N \bigcap \underset{j\in K}{\oplus} M_j = 0$, lo que implica que $K \in \mathcal{F}$. Por el *Lema de Zorn*, $\mathcal{F}$ tiene un elemento máximo I'' tal que $N \bigcap \underset{i\in I''}{\oplus} M_i = 0$. Como $N \bigcap \underset{i\in I}{\oplus} M_i = N \neq 0$ entonces $I'' \subsetneqq I$. Sea $I' = I \backslash I'' \neq \phi$. Consideremos la proyección $\pi : \underset{i\in I}{\oplus} M_i \longrightarrow \underset{i\in I'}{\oplus} M_i$. Sea $\pi\mid_N$ la restricción sobre N, esto es, $\pi\mid_N : N \longrightarrow \underset{i\in I'}{\oplus} M_i$. Entonces $Nu\,(\pi\mid_N) = (Nu\,\pi) \bigcap N = \underset{i\in I''}{\oplus} M_i \bigcap N = 0$, por lo que $\pi\mid_N$ es un monomorfismo. Sea $k \in I'$, entonces $N \cap \left\{ M_k \bigoplus \left(\underset{i\in I''}{\oplus} M_i \right) \right\} \neq 0$ por la maximidad de I''; luego $\pi(N) \cap M_k \neq 0$. Se sigue que $\pi(N) \cap M_i \neq 0$ para todo $i \in I'$. Por una demostración análoga a la realizada en el caso anterior se tiene que $\pi(N)$ es un submódulo esencial de $\underset{i\in I'}{\oplus} M_i$. Así se concluye que $\pi\mid_N : N \longrightarrow \underset{i\in I'}{\oplus} M_i$ es un monomorfismo esencial. ■

Proposición 2.6 *Sea $M = \underset{i\in I}{\oplus} M_i$, donde M_i es un R-módulo uniforme y comprimible para todo $i \in I$. Entonces cualquier submódulo N distinto de cero de M es un R-módulo esencialmente comprimible.*

Demostración

Por el lema anterior, existen $I' \subseteq I$ y un monomorfismo esencial $\theta : N \longrightarrow \underset{i\in I'}{\oplus} M_i$. Como cada M_i es comprimible entonces M_i es esencialmente comprimible para todo $i \in I'$. Por la *Proposición 2.2*, $\underset{i\in I'}{\oplus} M_i$ es esencialmente comprimible. Ya que $\theta(N)$

es un submódulo esencial de $\underset{i\in I'}{\oplus} M_i$, por la *Proposición 2.4 a)*, $\theta(N)$ es esencialmente comprimible. Finalmente, como N es isomorfo a $\theta(N)$, N es esencialmente comprimible. ■

Lema 2.2 *Sean M un R-módulo esencialmente comprimible, $Z = Z(M)$ el submódulo singular de M y $S = Zoc(M)$ el zoclo de M. Entonces se cumplen las siguientes proposiciones:*

a) *Z es esencialmente comprimible.*

b) *S es esencialmente comprimible.*

c) *$\frac{M}{Z}$ es esencialmente comprimible.*

d) *$\frac{M}{S}$ es esencialmente comprimible.*

Demostración

a) Sabemos que $f(Z) \subseteq Z$ para cualquier homomorfismo $f : M \longrightarrow M$, en particular para los endomorfismos inyectivos. Por la *Proposición 2.4 a)*, Z es esencialmente comprimible.

b) Sabemos que $f(S) \subseteq S$ para cualquier homomorfismo $f : M \longrightarrow M$, en particular para los endomorfismos inyectivos. Por la *Proposición 2.4 a)*, S es esencialmente comprimible.

c) Sabemos que si $\theta : M \longrightarrow M$ es un monomorfismo se cumple que $\theta(Z) \subseteq Z$. Además, $\theta^{-1}(Z) = \{m \in M \mid \theta(m) \in Z\} = \{m \in M \mid an_d(\theta(m))$ es un ideal esencial de $R\}$. Como θ es un monomorfismo se tiene que $an_d(m) = an_d(\theta(m))$. De aquí $\theta^{-1}(Z) = \{m \in M \mid an_d(m)$ es un ideal esencial de $R\} = Z$. Por lo tanto $\theta(Z) + \theta^{-1}(Z) \subseteq Z$. Por la *Proposición 2.4 b)*, $\frac{M}{Z}$ es esencialmente comprimible.

d) Sea $\theta : M \longrightarrow M$ un monomorfismo, entonces $M \cong \theta(M)$. Luego $S \cong \theta(S)$ y $\theta^{-1}(S) \cong S$, lo que implica que $\theta^{-1}(S)$ es un submódulo semisimple de M. Además

$$\theta^{-1}(S) = \theta^{-1}(\cap\{L \mid L \trianglelefteq M\}) = \cap\{\theta^{-1}(L) \mid L \trianglelefteq M\}.$$

Por la *Proposición 1.6 h)*, $\theta^{-1}(L)$ es un submódulo esencial de M. Entonces $S \subseteq \theta^{-1}(S)$ y como S es el submódulo semisimple más grande de M se tiene que $S = \theta^{-1}(S)$. Por lo tanto $\theta(S) + \theta^{-1}(S) \subseteq S$. Por la *Proposición 2.4 b)* $\dfrac{M}{S}$ es esencialmente comprimible. ■

Proposición 2.7 *Supongamos que la cápsula M-inyectiva $\hat{M}$ de M es esencialmente comprimible. Entonces se cumplen las siguientes afirmaciones.*

a) *M es un módulo semisimple ó M tiene una cadena descendente infinita $B_1 \supset A_1 \supset B_2 \supset A_2 \supset \cdots$ tal que cada A_i es un submódulo esencial de B_i y cada B_i es un submódulo de M isomorfo a $\hat{M}$.*

b) *Si M cumple la condición de cadena descendente sobre sumandos directos, entonces M es un módulo semisimple.*

c) *$\hat{M} = Z\left(\hat{M}\right) \oplus L$ para algún submódulo esencialmente comprimible L.*

Demostración

a) Supongamos que M no es semisimple. Entonces M contiene un submódulo esencial propio N. Como M es un submódulo esencial de $\hat{M}$ se tiene que N es un submódulo esencial propio de $\hat{M}$ y por lo tanto $\hat{M}$ no es semisimple. Además, existe un monomorfismo $\theta : \hat{M} \longrightarrow N$. Sea $B_1 = \theta\left(\hat{M}\right) \subseteq N \subseteq M$. Entonces B_1 es isomorfo a $\hat{M}$ y por lo tanto B_1 es M-inyectivo y no es semisimple. Así B_1 contiene un submódulo esencial propio A_1.

Como B_1 es isomorfo a $\hat{M}$ entonces es esencialmente comprimible y existe un monomorfismo $\theta_1 : B_1 \longrightarrow A_1$. Sea $B_2 = \theta_1(B_1) \subseteq A_1$. Entonces B_2 es isomorfo a B_1, así que B_2 es M-inyectivo y no es semisimple. Por otro lado, se demostrará que A_1 no es M-inyectivo. Supongamos que sí lo es, entonces $A_1 = \hat{A}_1$. Además, A_1 es un submódulo esencial de B_1, lo que implica que $\hat{A}_1 = \hat{B}_1$ y por lo tanto

$A_1 = \hat{A}_1 = \hat{B}_1 = B_1$. Esto contradice el que A_1 sea un submódulo propio de B_1. Luego A_1 no es M-inyectivo y así B_2 es un submódulo propio de A_1 isomorfo a $\hat{M}$. Continuando este procedimiento obtenemos una cadena descendente infinita $B_1 \supset A_1 \supset B_2 \supset A_2 \supset \cdots$ con las propiedades requeridas.

b) Si M cumple la condición de cadena descendente sobre sumandos directos, entonces por *a)*, M debe ser semisimple pues en caso contrario existe la cadena descendente infinita en la que cada B_i es un sumando directo de M ya que B_i es M-inyectivo.

c) Sean $Z' = Z\left(\hat{M}\right)$ y K un seudocomplemento de Z' en $\hat{M}$. Entonces $N = Z' \oplus K$ es un submódulo esencial de $\hat{M}$. Por hipótesis, existe un monomorfismo $\theta : \hat{M} \longrightarrow N$. Sea $A = \theta\left(\hat{M}\right)$, entonces A es un submódulo de N isomorfo a $\hat{M}$, de donde A es M-inyectivo. Por la *Proposición 1.23*, $N = A \oplus B$ para algún submódulo B de N. Además, $Z\left(Z'\right) = Z\left(Z\left(\hat{M}\right)\right) = Z\left(\hat{M}\right) = Z'$ y $Z\left(K\right) = K \cap Z\left(\hat{M}\right) = K \cap Z' = 0$. Así $Z\left(N\right) = Z\left(Z' \oplus K\right) = Z\left(Z'\right) \oplus Z\left(K\right) = Z' \oplus 0 = Z'$, por lo que $Z' = Z\left(N\right) = Z\left(A \oplus B\right) = Z\left(A\right) \oplus Z\left(B\right)$ y por lo tanto $N = Z' \oplus K = Z\left(A\right) \oplus Z\left(B\right) \oplus K$. Sea $C = Z\left(B\right) \oplus K$. Entonces $A \subseteq N = Z\left(A\right) \oplus C$, de donde $A = Z\left(A\right) \oplus \left(C \cap A\right)$. Como A es isomorfo a $\hat{M}$ se tiene que $Z\left(A\right) \cong Z'$. Entonces $\hat{M} = Z' \oplus L$ para algún submódulo L de $\hat{M}$. Por otro lado, $\dfrac{\hat{M}}{Z'} = \dfrac{Z' \oplus L}{Z'} \cong \dfrac{L}{L \cap Z'} \cong L$. Por el *Lema 2.2 c)*, $\dfrac{\hat{M}}{Z'}$ es esencialmente comprimible y por lo tanto L también lo es. ■

El siguiente teorema muestra que el estudio de módulos esencialmente comprimibles se reduce al estudio de tales módulos cuando éstos son singulares o nosingulares.

Teorema 2.1 *Los siguientes enunciados son equivalentes para un R-módulo M.*

a) *M es esencialmente comprimible.*

b) *$M \cong M_1 \oplus M_2$, donde M_1 es un módulo semisimple y M_2 es un módulo esencialmente comprimible con zoclo cero.*

c) *M es subisomorfo a $M_1 \oplus M_2$, donde M_1 es un módulo nosingular esencialmente comprimible y M_2 es un módulo singular esencialmente comprimible.*

Demostración

b) $\Longrightarrow$ a) Si M_1 es semisimple, entonces M_1 es esencialmente comprimible. Por la *Proposición 2.2*, $M_1 \oplus M_2$ es esencialmente comprimible y por lo tanto M también lo es.

c) $\Longrightarrow$ a) La *Proposición 2.2* implica que $M_1 \oplus M_2$ es esencialmente comprimible. Por la *Proposición 2.1 b)*, M es esencialmente comprimible.

a) $\Longrightarrow$ b) Sean M un módulo esencialmente comprimible, $S = Zoc\,(M)$ y K un seudocomplemento de S en M. Entonces $N = S \oplus K$ es un submódulo esencial de M y por hipótesis, existe un monomorfismo $\theta : M \longrightarrow N$. Sea $U = Zoc\,(\theta\,(M))$, entonces $U \subseteq Zoc\,(N) = S$. Como S es semisimple entonces $S = U \oplus L$ para algún submódulo L de S. Luego $U \subseteq \theta\,(M) \subseteq N = S \oplus K = U \oplus L \oplus K$, por lo que U es un sumando directo de $\theta\,(M)$.

Como M es isomorfo a $\theta\,(M)$ se tiene que $U = \theta\,(S) \cong S$. Luego $M = S \oplus N'$ para algún submódulo N' de M. Además, $\dfrac{M}{S} = \dfrac{S \oplus N'}{S} \cong \dfrac{N'}{N' \cap S} \cong N'$. Por el *Lema 2.2 d)*, $\dfrac{M}{S}$ es esencialmente comprimible y por lo tanto N' es esencialmente comprimible.

a) $\Longrightarrow$ c) Sean $Z = Z\,(M)$ el submódulo singular de M y L un seudocomplemento de Z en M. Entonces $Z \oplus L$ es un submódulo esencial de M. Como M es esencialmente comprimible, la *Proposición 2.4 a)* implica que $Z \oplus L$ es esencialmente comprimible. Además, existe un monomorfismo $\theta : M \longrightarrow Z \oplus L$. Como la inclusión $\iota : Z \oplus L \longrightarrow M$ también es un monomorfismo se tiene que M es subisomorfo a $Z \oplus L$. Más aún, por el *Lema 2.2 a)* y *c)*, se tiene que tanto Z como $\dfrac{Z \oplus L}{Z} \cong \dfrac{L}{Z \cap L} \cong L$ son esencialmente comprimibles. ■

El siguiente teorema da información sobre módulos nosingulares esencialmente comprimibles.

Teorema 2.2 *Para cualquier anillo R, cada R-módulo nosingular, esencialmente comprimible es isomorfo a un submódulo de un R-módulo libre.*

Demostración

Sean $M \neq 0$ un módulo nosingular y esencialmente comprimible y $\mathcal{F} = \{\{m_j R\}_{j \in J} \mid m_j \in M$ para cada $j \in J$ y $\{m_j R\}_{j \in J}$ es independiente $\}$. Claramente, $\mathcal{F}$ es un conjunto no vacío que está parcialmente ordenado con la inclusión.

Como la familia $\mathcal{F}$ es de carácter finito por el *Lema de Tukey*, tiene un elemento máximo $\{m_i R\}_{i \in I}$. Entonces $\sum\limits_{i \in I} m_i R$ es directa y es esencial en M. De no ser así, $\bigoplus\limits_{i \in I} m_i R$ tiene un seudocomplemento N en M, el cual contiene un submódulo cíclico distinto de cero de M. Esto contradice la maximidad de $\{m_i R\}_{i \in I}$.

Sean $i \in I$ y $A_i = an_d(m_i)$. Entonces A_i es un ideal derecho de R que no es esencial pues M es nosingular. Sea B_i un seudocomplemento de A_i en R, entonces $A_i \oplus B_i$ es un ideal derecho esencial de R. Sea $r \in R$ tal que $0 \neq m_i r$. Por la *Proposición 1.6 f)*, existe un ideal derecho esencial E de R tal que $rE \subseteq A_i \oplus B_i$. Como M es nosingular, el único elemento $m \in M$ tal que $mA = 0$ para algún ideal derecho esencial A de R es $m = 0$. Esto implica que $0 \neq m_i r E \subseteq m_i(A_i \oplus B_i) = m_i B_i$. Así $m_i B_i$ es un submódulo esencial de $m_i R$, por lo que $\bigoplus\limits_{i \in I} m_i B_i$ es un submódulo esencial de $\bigoplus\limits_{i \in I} m_i R$ y por lo tanto de M. Como M es esencialmente comprimible hay un monomorfismo $\theta : M \longrightarrow \bigoplus\limits_{i \in I} m_i B_i$. Consideremos ahora la función $\varphi_i : B_i \longrightarrow m_i B_i$ definida como $\varphi_i(b) = m_i b$ para todo $b \in B_i$. Claramente φ_i es un isomorfismo. Sea $\varphi = \bigoplus\limits_{i \in I} \varphi_i : \bigoplus\limits_{i \in I} B_i \longrightarrow \bigoplus\limits_{i \in I} m_i B_i$ la función dada por $\varphi(\{b_i\}_{i \in I}) = \{\varphi_i(b_i)\}_{i \in I}$. Entonces φ es un isomorfismo y por lo tanto

$$M \xrightarrow{\theta} \bigoplus_{i \in I} m_i B_i \xrightarrow{\varphi^{-1}} \bigoplus_{i \in I} B_i \subseteq R^{(I)}$$

es un monomorfismo. ■

Definición 2.5 *Sea $M \neq 0$ un R-módulo. Se dice que M* ***tiene suficientes uniformes*** *si cada submódulo distinto de cero de M contiene un submódulo uniforme.*

Teorema 2.3 *Los siguientes enunciados son equivalentes para un R-módulo $M \neq 0$.*

a) *M es nosingular, esencialmente comprimible y tiene suficientes uniformes.*

b) *M es subisomorfo a $\bigoplus_{i\in I} A_i$, donde para cada $i \in I$, A_i es un ideal derecho de R, nosingular, uniforme y tal que no contiene ningún ideal derecho nilpotente distinto de cero.*

c) *M es nosingular y se sumerge en una suma directa de R-módulos uniformes y comprimibles.*

Demostración

a) $\Longrightarrow$ b) Sea $\mathcal{F} = \{\{U_j\}_{j\in J} \mid U_j$ es un submódulo cíclico y uniforme de M y $\{U_j\}_{j\in J}$ es independiente$\}$. Como M tiene suficientes uniformes, M tiene un submódulo uniforme U. Sea $0 \neq x \in U$. Entonces xR es un submódulo cíclico uniforme de M y $0 \neq \{xR\} \in \mathcal{F}$. Por lo tanto $\mathcal{F}$ es distinto del vacío. Con la relación de orden "$\subseteq$", $\mathcal{F}$ es un conjunto parcialmente ordenado. Sean $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{F}$ una cadena y $K = \bigcup_{C\in\mathcal{C}} C = \{U_j\}_{j\in J}$. Entonces K es una cota superior de $\mathcal{C}$. Se demostrará que K está en $\mathcal{F}$. Sea $y \in U_i \bigcap \sum_{j\in J\, j\neq i} U_j$. Entonces $y = x_i$ para algún $x_i \in U_i$ y $y = \sum_{j\in J\, j\neq i} x_j$, donde $x_j \in U_j$ y para casi todo $j \in J$, salvo una cantidad finita, $x_j = 0$. Como $\mathcal{C}$ es una cadena, existe $C' = \{U_l\}_{l\in L}$ en $\mathcal{C}$ que contiene a x_i y a los x_j's y como C' es independiente, se tiene que $y = 0$. Luego $K = \{U_j\}_{j\in J}$ es independiente, lo que implica que $K \in \mathcal{F}$. Por el *Lema de Zorn*, $\mathcal{F}$ tiene un elemento máximo $\{U_i\}_{i\in I}$.

Notemos que $\bigoplus_{i\in I} U_i$ es un submódulo esencial de M, pues en caso contrario podemos tomar un seudocomplemento N de $\bigoplus_{i\in I} U_i$ en M, el cual contiene un submódulo cíclico uniforme. Esto contradice la maximidad de $\{U_i\}_{i\in I}$.

Sea $U = U_i$ para algún $i \in I$ y sea $0 \neq x \in U$ tal que $xR = U$. Por hipótesis, M es nosingular, luego U es nosingular. Esto implica que $C = an_d\,(x)$ no es un ideal derecho esencial de R, por lo que existe un ideal derecho A distinto de cero de R

tal que $A \cap C = 0$. Consideremos la función $f : A \longrightarrow xA$ dada por $f(r) = xr$ para todo $r \in A$, que es claramente un isomorfismo. Como $A \cong xA$, A es un ideal derecho de R, nosingular y uniforme. Sea B un ideal derecho de R tal que $B^2 = 0$ y $B \subseteq A$. Notemos que $MB^2 = 0$, de donde $B^2 \subseteq an_d(M)$. Por la *Proposición 2.4 d)*, $an_d(M)$ es semiprimo, entonces $B \subseteq an_d(M)$. Así $MB = 0$, lo cual implica que $xB = 0$ y por lo tanto $B \subseteq A \cap C = 0$. Concluimos que A no contiene ideales derechos, nilpotentes, distintos de cero de R.

Consecuentemente, para todo $i \in I$ existe un ideal derecho A_i de R, uniforme, nosingular y tal que no contiene ideales derechos, nilpotentes, distintos de cero de R. Más aún, A_i es isomorfo a x_iA_i para algún $0 \neq x_i \in U_i$. De aquí se concluye que $\bigoplus_{i\in I} A_i$, es isomorfo a $\bigoplus_{i\in I} x_iA_i$ que es un submódulo esencial de $\bigoplus_{i\in I} U_i$. Ya que $\bigoplus_{i\in I} U_i$ es un submódulo esencial de M y M es esencialmente comprimible se sigue que existe un monomorfismo $\theta : M \longrightarrow \bigoplus_{i\in I} A_i$.

b) $\Longrightarrow$ **c)** Sea I un conjunto de índices distinto del vacío y para cada $i \in I$ sea A_i un ideal derecho de R, nosingular y uniforme tal que no contiene ningún ideal derecho, nilpotente, distinto de cero de R. Supongamos que M es subisomorfo a $\bigoplus_{i\in I} A_i$. Entonces existe un monomorfismo $\theta : M \longrightarrow \bigoplus_{i\in I} A_i$. Luego $\theta(M)$ es un submódulo de $\bigoplus_{i\in I} A_i$ isomorfo a M. Como cada A_i es nosingular, se tiene que $\bigoplus_{i\in I} A_i$ es nosingular. Por lo tanto $\theta(M)$ y M son nosingulares.

Se demostrará que A_i es un R-módulo comprimible para cada $i \in I$. Sea $A = A_i$ para algún $i \in I$ y sea $B \neq 0$ un submódulo de A. Por hipótesis, $0 \neq BB \subseteq BA$, por lo que existe $b \in B$ tal que $bA \neq 0$. Consideremos la función $\theta_b : A \longrightarrow B$ definida por $\theta_b(a) = ba$ para todo $a \in A$. Entonces θ_b es un homomorfismo distinto de cero. Como A es nosingular, B es nosingular y por lo tanto $\dfrac{A}{Nu\,\theta_b} \cong Im\,\theta_b$ es también nosingular. Supongamos que $Nu\,\theta_b$ es un submódulo de A distinto de cero. Entonces $Nu\,\theta_b$ es un submódulo esencial de A pues A es uniforme. Luego $\dfrac{A}{Nu\,\theta_b}$ es singular, lo que implica que $\dfrac{A}{Nu\,\theta_b}$ es singular y nosingular. Por lo tanto $Nu\,\theta_b = 0$ y así θ_b es un monomorfismo, lo que prueba que A es comprimible.

c) $\Longrightarrow$ **a)** Por hipótesis, M es nosingular y por la *Proposición 2.6*, M es isomorfo a un módulo esencialmente comprimible; luego M es esencialmente comprimible. Ahora se demostrará que M tiene suficientes uniformes. Sea $0 \neq x \in M$, entonces xR es un submódulo distinto de cero de M. Sabemos que existe un monomorfismo $\theta : M \longrightarrow \bigoplus_{i \in I} U_i$, donde U_i es un R-módulo uniforme y comprimible para todo $i \in I$. Notemos que $\theta\,(xR)$ es un submódulo distinto de cero de una suma directa finita de módulos uniformes. Por [5, 5.7 y 5.1], $\theta\,(xR)$ contiene un submódulo uniforme. Como lo mismo le ocurre a xR, hemos probado que M tiene suficientes uniformes. ■

Definición 2.6 *Se dice que un R-módulo M distinto de cero es* ***críticamente comprimible*** *si es comprimible y no se puede sumergir en ningún módulo cociente propio.*

Proposición 2.8 *Los módulos comprimibles, uniformes y nosingulares son críticamente comprimibles.*

Demostración

Sean M un módulo comprimible, uniforme y nosingular y N un submódulo distinto de cero de M. Entonces N es un submódulo esencial de M y así $\frac{M}{N}$ es singular. Supongamos que hay un monomorfismo $g : M \longrightarrow \frac{M}{N}$. Entonces $Im\, g \cong M$, por lo que $Im\, g$ es nosingular. Además $Im\, g \leq \frac{M}{N}$ implica que $Im\, g$ es singular. Por lo tanto $Im\, g = 0$, esto es, g es el homomorfismo cero, con lo que concluimos que M es críticamente comprimible. ■

Capítulo 3

Módulos esencialmente comprimibles sobre ciertos anillos

En este capítulo estudiaremos los módulos esencialmente comprimibles sobre anillos hereditarios derechos y anillos totalmente acotados, neterianos derechos. Además caracterizaremos los módulos esencialmente comprimibles, nosingulares sobre anillos semiprimos y goldianos derechos.

Definición 3.1 *Un anillo R es **semiartiniano derecho** si $\frac{R}{A}$ tiene un zoclo distinto de cero para cada ideal derecho propio A de R.*

Proposición 3.1 *Sobre un anillo semiartiniano derecho cada módulo esencialmente comprimible es semisimple.*

Demostración

Sean R un anillo semiartiniano derecho y M un R-módulo esencialmente comprimible. Por el *Teorema 2.1*, existe un isomorfismo $\varphi : M \rightarrow M_1 \oplus M_2$, donde M_1 es un módulo semisimple y M_2 es un módulo esencialmente comprimible tal que $Zoc\,(M_2) = 0$. Sea $0 \neq x \in M$, entonces existen $y \in M_1$ y $z \in M_2$ únicos tales que $\varphi\,(x) = y + z$. Así zR es un submódulo de M_2, lo que implica que $Zoc\,(zR) = Zoc\,(M_2) \bigcap zR = 0$. Por otro lado, $zR \cong \dfrac{R}{an_d\,(z)}$, así que $Zoc\left(\dfrac{R}{an_d\,(z)}\right) = 0$. Como R es semiartiniano derecho,

$an_d(z) = R$; luego $z = 0$ y por lo tanto $\varphi(x) = y$. Así $M \cong M_1$, de donde M es semisimple. ■

Definición 3.2 *El anillo R es* ***hereditario derecho*** *si cada ideal derecho de R es proyectivo.*

Se sabe que un anillo R es hereditario derecho si y sólo si cada cociente de un R-módulo inyectivo es inyectivo si y sólo si cada submódulo de un R-módulo proyectivo es proyectivo [2, Teorema 5.4].

Proposición 3.2 *Los anillos hereditarios derechos son anillos nosingulares derechos.*

Demostración

Sean R un anillo hereditario derecho y $r \in Z(R_R)$. Entonces $rR \cong \dfrac{R}{an_d(r)}$. Por hipótesis, rR es proyectivo. Entonces $\dfrac{R}{an_d(r)}$ también lo es y por lo tanto existe un homomorfismo φ tal que el siguiente diagrama con renglón exacto conmuta.

$$\begin{tikzcd} & \dfrac{R}{an_d(r)} \arrow[dl, "\varphi"'] \arrow[d, "1"] & \\ R \arrow[r, "\rho"] & \dfrac{R}{an_d(r)} \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Así $R = an_d(r) \oplus Im\,\varphi$, lo que implica que $an_d(r) \cap Im\,\varphi = 0$. Ahora, como $an_d(r)$ es un ideal esencial de R entonces $Im\,\varphi = 0$. Esto implica que $R = an_d(r)$, de donde se deduce que $r = 0$. Por lo tanto $Z(R_R) = 0$ y R es nosingular derecho. ■

Proposición 3.3 *Sobre un anillo hereditario derecho R, un R-módulo M es esencialmente comprimible si y sólo si $M = M_1 \oplus M_2$, donde M_1 es un submódulo esencialmente comprimible, singular y M_2 es un submódulo esencialmente comprimible, proyectivo.*

Demostración

Supongamos que $M = M_1 \oplus M_2$ y que M_i es esencialmente comprimible para $i = 1, 2$. Por la *Proposición 2.2*, $M = M_1 \oplus M_2$ es esencialmente comprimible.

Supongamos ahora que M es esencialmente comprimible y denotemos por $Z = Z(M)$ el submódulo singular de M. Por hipótesis, R es hereditario derecho y por la *Proposición 3.2*, R es nosingular derecho. Entonces, por la *Proposición 1.17* $\dfrac{M}{Z}$ es nosingular. Además, el *Lema 2.2* implica que $\dfrac{M}{Z}$ es esencialmente comprimible. Así, por el *Teorema 2.2*, $\dfrac{M}{Z}$ se sumerge en un módulo libre. Como R es hereditario derecho y cada R-módulo libre es proyectivo, se tiene que $\dfrac{M}{Z}$ es proyectivo. Entonces existe un homomorfismo φ tal que el siguiente diagrama con renglón exacto conmuta.

$$\begin{array}{ccccc} & & \dfrac{M}{Z} & & \\ & {}^{\varphi}\swarrow & \downarrow^{1} & & \\ M & \xrightarrow{\rho} & \dfrac{M}{Z} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Luego $M = Z \oplus im\,\varphi$. Ya que φ es un monomorfismo, $im\,\varphi$ es isomorfo a $\dfrac{M}{Z}$. Así $im\,\varphi$ es proyectivo y esencialmente comprimible. Además, por el *Lema 2.2*, Z es esencialmente comprimible y claramente es singular. ■

Proposición 3.4 *Sea R un anillo con dimensión uniforme derecha finita. Entonces se cumplen los siguientes enunciados.*

a) *Un R-módulo nosingular M es esencialmente comprimible si y sólo si M se sumerge en una suma directa de R-módulos uniformes, comprimibles.*

b) *Cada submódulo de un R-módulo esencialmente comprimible, nosingular es esencialmente comprimible.*

c) *Si M es un R-módulo esencialmente comprimible, nosingular entonces $\dfrac{R}{an_d(M)}$ es un anillo semiprimo, goldiano derecho.*

Demostración

a) Supongamos que M es un R-módulo nosingular y esencialmente comprimible. Demostraremos que M se sumerge en una suma directa de R-módulos comprimibles y uniformes. Por el *Teorema 2.3* , basta probar que M tiene suficientes uniformes.

Sean $0 \neq m \in M$ y $A = an_d(m)$, entonces $mR \cong \dfrac{R}{A}$. Como M es nosingular, mR también lo es. Por lo tanto $\dfrac{R}{A}$ es nosingular. Probaremos que A es esencialmente cerrado en R. Supongamos que B es un ideal derecho de R en el que A es esencial. Entonces $\dfrac{B}{A}$ es singular y como también es nosingular, $\dfrac{B}{A} = 0$. Por lo tanto $B = A$ y A es esencialmente cerrado. Por la *Proposición 1.13*, la dimensión uniforme derecha de $\dfrac{R}{A}$ es finita y por lo tanto la de mR también lo es. Así mR tiene un submódulo uniforme y consecuentemente M tiene suficientes uniformes.

La afirmación recíproca se sigue del *Teorema 2.3, c)* implica *a)*.

b) Sean M un módulo esencialmente comprimible, nosingular y N un submódulo de M distinto de cero. Entonces N es nosingular. Por *a)*, existen un conjunto de índices I distinto del vacío y módulos comprimibles, uniformes $\{U_i\}_{i \in I}$ tales que existe un monomorfismo $\varphi : M \longrightarrow \bigoplus_{i \in I} U_i$. Consideremos la inclusión $\iota : N \longrightarrow M$, entonces se tiene el monomorfismo $\varphi\iota : N \longrightarrow \bigoplus_{i \in I} U_i$. Por *a)*, N es esencialmente comprimible.

c) Sea $A = an_d(M)$ y supongamos que B es un ideal derecho de R en el cual A es esencial. Entonces $\dfrac{B}{A}$ es singular, por lo que si tomamos $x + A \in \dfrac{B}{A}$ se tiene que existe un ideal esencial derecho E de R tal que $xE \subseteq A$. Entonces $MxE \subseteq MA = 0$, lo que implica que $Mx \subseteq Z(M) = 0$. Así $x \in A$ y por lo tanto $B = A$, esto es, A es esencialmente cerrado en R. Por la *Proposición 1.14* y [1, Corolario 2.12], $dim\, u \left(\dfrac{R}{A}_{\frac{R}{A}} \right) = dim\, u \left(\dfrac{R}{A}_R \right)$ es finita.

Ahora mostraremos que $\dfrac{R}{A}$ es un anillo nosingular derecho. Sea $x + A \in Z\left(\dfrac{R}{A}_{\frac{R}{A}} \right)$. Entonces, por la *Proposición 1.6 f)*, existe un ideal esencial derecho E de R tal que $xE \subseteq A$. Luego $MxE \subseteq MA = 0$, de donde $Mx \subseteq Z(M) = 0$. Por lo tanto $x \in A$ y $Z\left(\dfrac{R}{A}_{\frac{R}{A}} \right) = 0$.

Por la *Proposición 2.4 d)*, A es un ideal semiprimo de R, así que $\dfrac{R}{A}$ es un anillo semiprimo. Finalmente, por el *Teorema 1.1*, $\dfrac{R}{A}$ es un anillo semiprimo, goldiano derecho. ■

Teorema 3.1 *Sea R un anillo semiprimo, goldiano derecho. Entonces un R-módulo M es nosingular y esencialmente comprimible si y sólo si M se sumerge en un R-módulo libre.*

Demostración

La condición necesaria se cumple por el *Teorema 2.2*.

Supongamos que M se puede sumergir en un R-módulo libre F. Por hipótesis, R es un anillo goldiano derecho, así que cumple la condición de cadena ascendente en anuladores derechos. Además R es semiprimo, así que por el *Lema 1.2*, R es un anillo nosingular derecho. Entonces el producto directo de copias de R es no singular. Como $R^{(A)} \subseteq R^A$ para cualquier conjunto A, se sigue que cualquier suma directa de copias de R es nosingular. En particular, F es nosingular y por lo tanto M también lo es.

Ya que R es un anillo goldiano derecho, R tiene dimensión uniforme derecha finita, es decir, existen $m \in \mathbb{N}$ e ideales derechos uniformes U_i $(1 \leq i \leq m)$ de R tales que $\bigoplus_{i=1}^{m} U_i$ es un ideal esencial de R. Por la *Proposición 1.18*, se cumple que $\bigoplus_{i=1}^{m} U_i$ contiene un elemento regular c de R. Además, $R \simeq cR \subseteq \bigoplus_{i=1}^{m} U_i$. Así F, y por lo tanto M, se sumergen en una suma directa $\oplus_{i \in I} A_i$ de ideales derechos uniformes A_i con $i \in I$ de R. Por el *Teorema 2.3*, M es esencialmente comprimible. ■

Corolario 3.1 *Se cumplen las siguientes proposiciones:*

a) *Sobre un anillo semiprimo y goldiano derecho cada módulo proyectivo es esencialmente comprimible.*

b) *Sobre un anillo semiprimo y goldiano derecho e izquierdo cada módulo nosingular, finitamente generado es esencialmente comprimible.*

Demostración

a) Sea R un anillo semiprimo, goldiano derecho y P un R-módulo proyectivo. Entonces P es isomorfo a un sumando directo de un módulo libre F. Así existe un monomorfismo de P en F. Por el teorema anterior, P es esencialmente comprimible.

b) Sea M un R-módulo nosingular, finitamente generado. Por [6, Proposiciónes 6.9 y 6.19], M se sumerge en un R-módulo libre, finitamente generado. Finalmente, por el teorema anterior, M es esencialmente comprimible. ■

Definición 3.3 *Definimos la **dimensión de Krull** de un módulo M sobre un anillo R por inducción transfinita y la denotamos por* $\mathbf{dim\,K\,(M)}$.

1. *La dimensión de Krull de M es -1 para $M = 0$.*

2. *Consideremos un ordinal $\alpha \geq 0$ y supongamos que hemos definido cuáles módulos tienen dimensión de Krull igual a β para ordinales $\beta < \alpha$. Diremos que $\dim K\,(M) = \alpha$ si:*

   a) *no hemos definido $\dim K\,(M) = \beta$ para algún $\beta < \alpha$ y*

   b) *para cada cadena descendente numerable $M_0 \geq M_1 \geq M_2 \geq \ldots$ de submódulos de M, tenemos que $\dim K\left(\dfrac{M_i}{M_{i+1}}\right) < \alpha$ para todos, salvo una cantidad finita de índices i.*

En caso de que $\dim K\,(M) = \alpha$ no valga para ningún ordinal α, diremos que $\dim K\,(M)$ no está definida o que M no tiene dimensión de Krull.

Lema 3.1 *Sea M un R-módulo. Entonces $\dim K\,(M) = 0$ si y sólo si M es artiniano, distinto de cero.*

Demostración

Si M es un R-módulo, entonces $dimK\,(M) = 0$ si y sólo si $M \neq 0$ y para cada cadena descendente $M_0 \geq M_1 \geq \ldots$ de submódulos de M, tenemos que $\dfrac{M_i}{M_{i+1}} = 0$ para todos, salvo una cantidad finita de índices i, esto es, M satisface la condición de cadena descendente sobre sus submódulos. Entonces $dim\,K\,(M) = 0$ si y sólo si $M \neq 0$ y M es artiniano.$\blacksquare$

En [6, Lema 13.1] se prueba que si M es un módulo con dimensión de Krull y N es un submódulo de M, entonces $dim\,K\,(N)$ y $dim\,K\left(\frac{M}{N}\right)$ existen. Además,

$$dim\,K\,(M) = max\left\{dim\,K\,(N)\,,\, dim\,K\left(\frac{M}{N}\right)\right\}. \tag{3.1}$$

Lema 3.2 *Si M es un módulo neteriano, entonces tiene dimensión de Krull.*

Demostración

Supongamos que la dimensión de Krull de M no está definida. Por inducción neteriana [6, Página 26], podemos suponer que todos los cocientes propios de M tienen dimensión de Krull. Sea $\alpha = sup\{dim\,K\left(\frac{M}{N}\right) \mid 0 \neq N < M\}$. Enseguida demostraremos que $dim\,K\,(M) \leq \alpha + 1$, con lo cual obtendremos una contradicción.

Sea $M_0 \geq M_1 \geq \ldots$ una cadena de submódulos de M. Probaremos que $dim\,K\left(\frac{M_i}{M_{i+1}}\right) \leq \alpha$ para casi todo i. Si algún $M_n = 0$, entonces $dim\,K\left(\frac{M_i}{M_{i+1}}\right) = -1$ para todo $i \geq n$ y así la condición se cumple para este caso. Si todo $M_i \neq 0$, entonces $dim\,K\left(\frac{M_i}{M_{i+1}}\right) \leq dim\,K\left(\frac{M}{M_{i+1}}\right) \leq \alpha$ para todo i. De la definición de dimensión de Krull se sigue que $dim\,K\,(M) \leq \alpha + 1$. $\blacksquare$

Definición 3.4 *Sea α un ordinal, $\alpha \geq 0$. Un módulo M se llama **$\boldsymbol{\alpha}$- crítico** si $dim\,K\,(M) = \alpha$ y $dim\,K\left(\frac{M}{N}\right) < \alpha$ para todo submódulo $N \neq 0$ de M. Un módulo M se llama **crítico** si éste es α-crítico para algún ordinal α.*

Notemos que los módulos 0-críticos son los módulos simples, mientras que un módulo M con dimensión de Krull es 1-crítico si y sólo si M no es artiniano, pero todos sus módulos cocientes propios son artinianos.

Lema 3.3 *Si M es un módulo crítico, entonces M es uniforme.*

Demostración

Supongamos que M es α-crítico para algún ordinal $\alpha \geq 0$. Probaremos primero que todo submódulo $N \neq 0$ de M es α-crítico. Sea $0 \neq N < M$. Como $dim\,K\left(\dfrac{M}{N}\right) < \alpha$, por la *ecuación* 3.1, $dim\,K\,(N) = \alpha$. Además, si L es un submódulo distinto de cero de N, entonces $dim\,K\left(\dfrac{N}{L}\right) \leq dim\,K\left(\dfrac{M}{L}\right) < \alpha$. Luego N es α-crítico.
Probaremos ahora que M es uniforme. Supongamos lo contrario. Entonces existen N_1 y N_2 submódulos distintos de cero de M tales que $N_1 \cap N_2 = 0$. Así $N_1 \oplus N_2$ es un submódulo no nulo de M. Por el párrafo anterior, N_1, N_2 y $N_1 \oplus N_2$ son α-críticos. Luego $dim\,K\,(N_1) = dim\,K\,(N_2) = dim\,K\,(N_1 \oplus N_2) = \alpha$. Por otro lado, $\dfrac{N_1 \oplus N_2}{N_1} \cong \dfrac{N_2}{N_1 \cap N_2} = N_2$, por lo que $dim\,K\,(N_2) = dim\,K\left(\dfrac{N_1 \oplus N_2}{N_1}\right) < \alpha$. La contradicción anterior muestra que M es uniforme. ■

Lema 3.4 *Si $M \neq 0$ es un módulo con dimensión de Krull, entonces M tiene un submódulo crítico, distinto de cero.*

Demostración

Escojamos un submódulo N_0 de M con dimensión de Krull mínima (esto se puede hacer porque los ordinales satisfacen la condición de cadena descendente). Sea $dim\,K\,(N_0) = \alpha$. Si N_0 no es α-crítico, entonces N_0 contiene un submódulo distinto de cero N_1 tal que $dim\,K\left(\dfrac{N_0}{N_1}\right) = \alpha$. Notemos que $dim\,K\,(N_1) \leq dim\,K\,(N_0)$ y como α es la dimensión de Krull más pequeña para cualquier submódulo distinto de cero de M, se tiene que $dim\,K\,(N_1) = \alpha$. Así podemos construir una cadena de submódulos de M distintos de cero $N_0 \geq N_1 \geq \ldots \geq N_k$ tales que $dim\,K\,(N_i) = dim\,K\left(\dfrac{N_{i-1}}{N_i}\right) = \alpha$ para $i = 1, \ldots, k$. Supongamos que N_k no es crítico. Entonces hay un submódulo distinto de cero $N_{k+1} \leq N_k$ tal que $dim\,K\,(N_{k+1}) = dim\,K\left(\dfrac{N_k}{N_{k+1}}\right) = \alpha$. Como $dim\,K\,(N_0) = \alpha$, este proceso no puede continuar indefinidamente. Por lo tanto existe un submódulo N_k de M que es crítico. ■

Lema 3.5 *Un módulo comprimible M con dimensión de Krull es crítico.*

Demostración

Sea M un módulo comprimible con dimensión de Krull. Como $M \neq 0$, por el *Lema 3.4*, M tiene un submódulo crítico y distinto de cero N. Entonces N es α-crítico para algún ordinal $\alpha \geq 0$. Ya que M es comprimible, existe un monomorfismo $\theta : M \longrightarrow N$. Así $M \cong \theta(M) \subseteq N$ y por lo tanto M es α-crítico. ■

Los lemas anteriores y el siguiente (que no tiene que ver con los módulos críticos) nos serán de utilidad en la demostración del último resultado de este capítulo.

Lema 3.6 *Sea U un ideal derecho uniforme de un anillo primo, goldiano derecho R. Entonces U es comprimible.*

Demostración

Sea $V \neq 0$ un ideal derecho de U. Por [8, 3.3.3], V contiene una copia isomorfa de U, es decir, existe un ideal derecho U' de R tal que $U \cong U' \subseteq V$. Llamemos φ al isomorfismo de U en U'. Entonces $U \xrightarrow{\varphi} U' \xrightarrow{\iota} V$, donde $\iota : U' \longrightarrow V$ es la inclusión, es un monomorfismo. Por lo tanto U es comprimible. ■

En particular, $\dfrac{R}{P}$ es comprimible para cualquier ideal primo P de un anillo conmutativo y neteriano R.

Definición 3.5 *Un anillo primo R se llama **acotado derecho** si cada ideal derecho esencial de R contiene un ideal bilateral distinto de cero.*

Definición 3.6 *Un anillo R es **totalmente acotado derecho** si $\dfrac{R}{P}$ es acotado derecho para cada ideal primo P de R.*

Notemos que cada anillo conmutativo es totalmente acotado.

Teorema 3.2 *Sea R un anillo totalmente acotado y neteriano derecho. Entonces un R-módulo no nulo M es esencialmente comprimible si y sólo si M se sumerge en una suma directa de R-módulos comprimibles y críticos.*

Demostración

Primero supongamos que M es un R-módulo no nulo tal que existe un monomorfismo de M en $\underset{i\in I}{\oplus} M_i$, donde M_i es un módulo comprimible y crítico para todo $i \in I$. Por el *Lema 3.3*, cada M_i es comprimible y uniforme y por la *Proposición 2.6*, M es esencialmente comprimible.

Ahora supongamos que M es esencialmente comprimible. Consideremos $0 \neq x \in M$. El submódulo cíclico xR es finitamente generado, luego es neteriano y tiene dimensión de Krull por el *Lema 3.2*. El *Lema 3.4* implica que xR tiene un submódulo crítico U distinto de cero. Consecuentemente, cada submódulo no nulo de M contiene un submódulo crítico no nulo.

Sea $\mathcal{F} = \{\{U_j\}_{j\in J} \mid U_j$ es un submódulo crítico de M y $\{U_j\}_{j\in J}$ es independiente$\}$. Por el parrafo anterior, M tiene un submódulo crítico no nulo U. Claramente $\{U\} \in \mathcal{F}$, lo que implica que $\mathcal{F}$ es distinto del vacío. Con la relación de orden " $\subseteq$ ", $\mathcal{F}$ es un conjunto parcialmente ordenado. Como la familia $\mathcal{F}$ es de carácter finito, por el *Lema de Tukey*, existe un conjunto máximo $\{U_i\}_{i\in I}$ con U_i crítico para todo $i \in I$.

Notemos que $\underset{i\in I}{\oplus} U_i$ es un submódulo esencial de M, pues en caso contrario existiría un submódulo N de M tal que $\underset{i\in I}{\oplus} U_i \oplus N$ es esencial en M; pero N contiene un submódulo crítico, lo que contradice la maximidad de $\{U_i\}_{i\in I}$.

Sean $i \in I$ y $U = U_i$. Definamos $P = \{r \in R \mid Vr = 0$ para algún submódulo distinto de cero V de $U\}$. Del hecho de que U es uniforme se sigue que P es un ideal de R. Por otro lado, como R es neteriano derecho, P es un ideal derecho finitamente generado. Sea $\{x_1, \ldots, x_n\}$ un conjunto de generadores. Entonces existen submódulos distintos de cero $V_1, \ldots, V_n$ de U tales que $V_i x_i = 0$ para todo $i = 1, \ldots, n$. Como U es uniforme entonces $U' = \bigcap_{i=1}^{n} V_i$ es un submódulo distinto de cero de U. Ahora probaremos que $P = an_d\,(U')$. Sea $r \in P$, entonces existen $r_1, \ldots, r_n \in R$ tales que $r = \sum_{i=1}^{n} x_i r_i$. Así $U'r = U'\left(\sum_{i=1}^{n} x_i r_i\right) \subseteq \sum_{i=1}^{n} (U'x_i)\, r_i = 0$; luego $r \in an_d\,(U')$. Ahora sea $s \in an_d\,(U')$, entonces $U's = 0$. Por la definición de P se tiene que $s \in P$, mostrando así que

$P = an_d(U')$.

Enseguida demostraremos que P es un ideal primo de R. Sean I y J ideales derechos de R tales que $IJ \subseteq P$.

- Supongamos que $I \nsubseteq P$. Entonces $0 \neq U'I \subseteq U' \subseteq U$. Luego $U'I$ es un submódulo distinto de cero de U tal que $(U'I)J \subseteq U'P = 0$. Por la definición de P se tiene que $J \subseteq P$.

- Supongamos que $J \nsubseteq P$ y que $U'IJ = 0$. Entonces $U'I = 0$, de lo contrario $U'I$ es un submódulo distinto de cero de U tal que $U'IJ = 0$, lo que implica que $J \subseteq P$. Por lo tanto $U'I = 0$ y así $I \subseteq an_d(U') = P$.

De aquí concluimos que P es un ideal primo de R, así que $\frac{R}{P}$ es un anillo primo. Por hipótesis, $\frac{R}{P}$ es un anillo acotado derecho. Ya que R es neteriano derecho, $\frac{R}{P}$ también lo es y por lo tanto $\frac{R}{P}$ es un anillo goldiano derecho. Como $an_d(U') = P$ entonces U' tiene estructura de $\frac{R}{P}$-módulo y cumple que $an_{\frac{R}{P}}(U') = \bar{0}$, luego U' es fiel como $\frac{R}{P}$-módulo. Por [6, 8.3], U' es un $\frac{R}{P}$-módulo nosingular. Además, $U' \neq 0$ implica que $Z(U') \neq U'$, por lo que U' no es singular. Por [6, 6.17], U' tiene un $\frac{R}{P}$-submódulo uniforme Y isomorfo a un ideal derecho distinto de cero L de $\frac{R}{P}$. Así L es uniforme. Por el *Lema 3.6*, L es comprimible. Por otro lado, como $\frac{R}{P}$ es neteriano derecho, L también lo es y por el *Lema 3.2*, L tiene dimensión de Krull. Finalmente, por el *Lema 3.5*, L es crítico. Esto implica que Y es un $\frac{R}{P}$-submódulo comprimible y crítico de U'. Por [1, Corolario 2.12 y 4.3], Y es un R-módulo comprimible y crítico.

Así para todo $i \in I$, U_i contiene un submódulo comprimible, crítico y distinto de cero Y_i. Como $\bigoplus_{i\in I} U_i$ es uniforme y $\bigoplus_{i\in I} Y_i$ es un submódulo distinto de cero de $\bigoplus_{i\in I} U_i$, entonces $\bigoplus_{i\in I} Y_i$ es un submódulo esencial de $\bigoplus_{i\in I} U_i$, que a su vez es un submódulo esencial de M. Por lo tanto $\bigoplus_{i\in I} Y_i$ es un submódulo esencial de M y como M es esencialmente comprimible existe un monomorfismo $\theta : M \longrightarrow \bigoplus_{i\in I} Y_i$. ■

El teorema anterior aplica para anillos neterianos, conmutativos.

Teorema 3.3 *Sea R un anillo conmutativo y neteriano. Entonces un R-módulo M es esencialmente comprimible si y sólo si M se sumerge en una suma directa de R-módulos de la forma $\dfrac{R}{P}$, donde P es un ideal primo de R.*

Demostración

Primero supongamos que M se sumerge en una suma directa de R-módulos de la forma $\dfrac{R}{P}$, donde P es un ideal primo de R. Por hipótesis, R es conmutativo y neteriano, así que $\dfrac{R}{P}$ es comprimible. Además como $\dfrac{R}{P}$ es neteriano, tiene dimensión de Krull. Por el *Lema 3.5*, $\dfrac{R}{P}$ es crítico. Así M se sumerge en una suma directa de R-módulos críticos comprimibles. Por el teorema anterior, M es esencialmente comprimible.

Ahora supongamos que M es esencialmente comprimible. Por hipótesis, R es conmutativo y neteriano, luego R es un anillo neteriano, totalmente acotado. Como en la demostración del teorema anterior, existe un monomorfismo $\theta : M \longrightarrow \bigoplus\limits_{i\in I} Y_i$, donde Y_i es un submódulo crítico comprimible de M que es isomorfo al ideal derecho L_i del dominio entero $\dfrac{R}{P_i}$. Así se tiene el siguiente monomorfismo

$$M \xrightarrow{\theta} \bigoplus_{i\in I} Y_i \cong \bigoplus_{i\in I} L_i \xrightarrow{\iota} \bigoplus_{i\in I} \frac{R}{P_i},$$

donde $\iota : \bigoplus\limits_{i\in I} L_i \longrightarrow \bigoplus\limits_{i\in I} \dfrac{R}{P_i}$ es la inclusión. ■

Capítulo 4

Clases esencialmente comprimibles

En este capítulo estudiaremos la propiedad de ser *esencialmente comprimible* en las clases de R-módulos cíclicos, co-cíclicos e inyectivos. Además, caracterizaremos los anillos R para los cuales la clase Mod-R de todos los R-módulos derechos es esencialmente comprimible.

Definición 4.1 *Una clase C de módulos se llama* ***esencialmente comprimible*** *si todos sus miembros son esencialmente comprimibles.*

Definición 4.2 *Un R-módulo M distinto de cero se llama* ***co-semisimple*** *ó* ***V-módulo*** *si cada módulo simple en $\sigma[M]$ es M-inyectivo. Un anillo R es un* ***V-anillo derecho*** *si el módulo derecho R_R es co-semisimple.*

Definición 4.3 *Un anillo R en el cual cada elemento $a \in R$ puede ser escrito en la forma axa, para algún $x \in R$, se llama* ***regular de von Neumann****.*

Se sabe que un anillo conmutativo R es un V-anillo derecho si y sólo si R es un anillo regular de von Neumann [7, Corolario 3.73] y [11, Propiedades 23.5].

Definición 4.4 *Un R-módulo se llama* ***co-cíclico*** *si éste contiene un submódulo simple esencial.*

Proposición 4.1 *Sea R cualquier anillo. Las siguientes afirmaciones son equivalentes para un R-módulo M.*

a) *M es co-semisimple.*

b) *En $\sigma[M]$ cada R-módulo co-cíclico es esencialmente comprimible.*

c) *En $\sigma[M]$ cada R-módulo cíclico y co-cíclico es esencialmente comprimible.*

Demostración

a) $\Longrightarrow$ b) Sean M un R-módulo co-semisimple y $N \in \sigma[M]$ un R-módulo co-cíclico. Entonces N tiene un submódulo simple esencial S que pertenece a $\sigma[M]$. Por hipótesis, S es M-inyectivo, lo que implica que S es N-inyectivo. Así el siguiente diagrama con renglón exacto conmuta.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & S \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "1"] & N \arrow[dl, "f"] \\ & S & \end{tikzcd}$$

Por lo tanto $N = S \oplus Nuf$. Como $S \cap Nuf = 0$ implica que $Nuf = 0$ entonces N es simple. Luego N es esencialmente comprimible.

b) $\Longrightarrow$ c) Por hipótesis, todo R-módulo co-cíclico en $\sigma[M]$ es esencialmente comprimible. En particular, los R-módulos co-cíclicos y cíclicos son esencialmente comprimibles.

c) $\Longrightarrow$ a) Sea S un R-módulo simple en $\sigma[M]$. Demostraremos que S es M-inyectivo. Consideremos la cápsula M-inyectiva $\hat{S}$ de S. Sea $0 \neq x \in \hat{S}$ entonces $0 \neq xR$ es un módulo cíclico. Probaremos que xR es un módulo co-cíclico. Ya que S es un submódulo esencial de $\hat{S}$, entonces existe $r \in R$ tal que $0 \neq xr \in S$. Así $0 \neq xr \in S \cap xR \subseteq S$. Como S es simple, $S \cap xR = S$ y por lo tanto $S \subseteq xR$. Además, $S = S \cap xR$ es un submódulo esencial de $\hat{S} \cap xR = xR$, probando así que xR es un módulo cíclico y co-cíclico. Por hipótesis, xR es esencialmente comprimible, luego existe un monomorfismo $\theta : xR \to S$. Como $\theta(xR)$ es un submódulo no nulo de S y S es simple, $\theta(xR) = S$. Además, xR es isomorfo a $\theta(xR)$, por lo que xR es simple. Luego $S = xR$ y entonces $x \in S$. Por lo tanto $\hat{S} = S$. ■

Definición 4.5 *Una **serie de composición** para un módulo M es una cadena de submódulos*

$$0 = M_0 < M_1 < \cdots < M_n = M$$

*tal que cada uno de los cocientes $\dfrac{M_i}{M_{i-1}}$ es un módulo simple. Se dice que la **longitud de la serie es n**, mientras que los cocientes $\dfrac{M_i}{M_{i-1}}$ se llaman **factores de composición de M**. Un módulo de **longitud finita** es cualquier módulo que tiene una serie de composición.*

Proposición 4.2 *Los siguientes enunciados son equivalentes para un anillo R.*

a) *R es un V-anillo derecho.*

b) *Cada R-módulo co-cíclico es esencialmente comprimible.*

c) *Cada R-módulo cíclico y co-cíclico es esencialmente comprimible.*

Además, si R es un anillo hereditario y neteriano, a)-c) son equivalentes a

d) *Cada R-módulo finitamente generado y distinto de cero es esencialmente comprimible.*

Demostración

a) $\Longleftrightarrow$ **b)** $\Longleftrightarrow$ **c)** Se siguen de la proposición anterior tomando $M = R$.

d) $\Longrightarrow$ **c)** Sea M un R-módulo cíclico y co-cíclico. Entonces M es finitamente generado y por *d)*, M es esencialmente comprimible.

Ahora sea R un anillo hereditario y neteriano.

a) $\Longrightarrow$ d) Supongamos que $M \neq 0$ es finitamente generado. Sean $Z = Z(M)$ y $0 \neq x \in Z$. Entonces $an_d(x)$ es un ideal esencial de R. Por [8, 5.4.5], $\dfrac{R}{an_d(x)}$ tiene longitud finita. Consideremos la siguiente serie de composición de $\dfrac{R}{an_d(x)} \cong xR$:

$$0 = \frac{J_0}{an_d(x)} \leq \frac{J_1}{an_d(x)} \leq, \ldots, \frac{J_{n-1}}{an_d(x)} \leq \frac{J_n}{an_d(x)} = \frac{R}{an_d(x)} \cong xR.$$

Como $\dfrac{J_1}{an_d(x)}$ es simple, xR contiene un submódulo simple S isomorfo a $\dfrac{J_1}{an_d(x)}$. Así existe $r \in R$ tal que $0 \neq xr \in S \subseteq xR \subseteq Z$. Ya que S es un submódulo simple de Z se tiene que $0 \neq xr \in S \subseteq \oplus\{L \mid L \text{ es un submódulo simple de } Z\} = Zoc(Z)$. Por lo tanto $Zoc(Z)$ es un submódulo esencial de Z. Ahora, por hipótesis, R es un V-anillo, luego por [5, 2.13], cada submódulo simple de Z es inyectivo y como la suma directa de inyectivos es inyectivo se concluye que $Zoc(Z)$ es inyectivo. Así $Z = Zoc(Z) \oplus T$ para algún submódulo T de Z. Pero $Zoc(Z)$ es un submódulo esencial de Z, lo cual implica que $T = 0$. Luego $Z = Zoc(Z)$ y por lo tanto $M = Z \oplus L$ para algún submódulo L de M. Además, $L \cong \dfrac{L}{L \cap Z} \cong \dfrac{L+Z}{Z} = \dfrac{M}{Z}$. Ya que R es hereditario, por la *Proposición 3.2*, R es nosingular y entonces por la *Proposición 1.17*, $\dfrac{M}{Z}$ es nosingular. Luego L es nosingular y finitamente generado. Ahora demostraremos que R es un anillo semiprimo. Ya que R es un V-anillo, por [5, 2.13], cada ideal derecho de R es idempotente. Por inducción matemática probaremos que R no contiene ideales derechos nilpotentes. Sea J un ideal derecho de R tal que $J^n = 0$.

- Si $n = 1$, entonces $J = 0$.
- Si $n = 2$, entonces $0 = J^2 = J$.
- Supongamos que para $k \geq 3$, si $J^k = 0$, entonces $J = 0$. Si $0 = J^{k+1} = J^2 J^{k-1} = JJ^{k-1} = J^k$, por hipótesis de inducción, $J = 0$.

Por lo tanto el único ideal derecho nilpotente de R es cero. Por la *Proposición 1.5*, R es semiprimo. Más aún, por la *Proposición 1.21*, R es un anillo goldiano. Así por el *Corolario 3.1 b)*, L es esencialmente comprimible. Además, $Z = Zoc\,(Z)$ es un submódulo semisimple, luego es esencialmente comprimible. Por la *Proposición 2.2*, M es esencialmente comprimible. ■

Definición 4.6 *Un R-módulo M se llama* ***localmente neteriano*** *si cada submódulo finitamente generado de M es neteriano.*

Proposición 4.3 *Sea M un R-módulo. Si cada R-módulo cíclico $X \in \sigma\,[M]$ es esencialmente comprimible entonces M es localmente neteriano y co-semisimple.*

Demostración

Por hipótesis, cada R-módulo cíclico en $\sigma\,[M]$ es esencialmente comprimible. Entonces por la *Proposición 4.1*, M es co-semisimple.

Sean N cualquier módulo semisimple en $\sigma\,[M]$, $\hat{N}$ la cápsula M-inyectiva de N y $0 \neq x \in \hat{N}$. Entonces xR es un módulo cíclico en $\sigma\,[M]$ y por hipótesis, xR es esencialmente comprimible. Sea $S = Zoc\,(xR) = Zoc\left(\hat{N}\right) \cap xR$. Como N es esencial en $\hat{N}$, entonces $N = Zoc\,(N) = Zoc\left(\hat{N}\right)$ y así $S = N \cap xR$. Además, $S = N \cap xR$ es un submódulo esencial de xR; luego existe un monomorfismo $\theta : xR \longrightarrow S$. Como $xR \neq 0$ entonces $0 \neq \theta\,(xR) \subseteq S$, lo que implica que $\theta\,(xR)$ es un módulo semisimple. Además, xR es isomorfo a $\theta\,(xR)$, por lo que xR también es semisimple y consecuentemente $xR = Zoc\,(xR) = N \cap xR$. Entonces $x \in N$ y por lo tanto $N = \hat{N}$. Concluimos que cada módulo semisimple en $\sigma\,[M]$ es M-inyectivo.

Sean I un conjunto numerable de índices y $\{S_i\}_{i\in I}$ una familia de módulos simples tales que $S_i \in \sigma\,[M]$ para todo $i \in I$. Si $\hat{S}_i$ es la cápsula M-inyectiva de S_i entonces $\hat{S}_i = S_i$ ya que M es co-semisimple. Así $\bigoplus\limits_{i\in I} \hat{S}_i = \bigoplus\limits_{i\in I} S_i$ es un módulo semisimple. Por el parrafo anterior, $\bigoplus\limits_{i\in I} \hat{S}_i$ es M- inyectivo. Por lo tanto cada suma directa numerable de cápsulas M-inyectivas de módulos simples en $\sigma\,[M]$ es un módulo M-inyectivo. Por [5, 2.5], M es localmente neteriano.■

Corolario 4.1 *Un anillo conmutativo R es semiprimo y artiniano si y sólo si cada R-módulo cíclico es esencialmente comprimible.*

Demostración

Primero supongamos que R es semiprimo y artiniano. Por la *Proposición 1.12*, R es semisimple. Sabemos que para cualquier ideal I de R se cumple que $\dfrac{R}{I}$ es semisimple. Sea xR un R-módulo cíclico. Como xR es isomorfo a $\dfrac{R}{an_d(x)}$ entonces xR es semisimple. Así xR es esencialmente comprimible.

Ahora supongamos que cada R-módulo cíclico es esencialmente comprimible. Entonces por la *Proposición 4.3*, R es un V-anillo localmente neteriano. Por [7, Corolario 3.73], R es regular de von Neumann y localmente neteriano y por [11, 37.5], R es semisimple. Luego, por la *Proposición 1.12*, R es semiprimo artiniano. ■

Lema 4.1 *Sean U un R-módulo uniforme y $\hat{U}$ su cápsula M-inyectiva. Entonces $\hat{U}$ es uniforme.*

Demostración

Sean K y L submódulos distintos de cero de $\hat{U}$. Demostraremos que $K \cap L \neq 0$. Como U es un submódulo esencial de $\hat{U}$ entonces $U \cap K$ y $U \cap L$ son submódulos de U distintos de cero. Ya que U es uniforme, $(U \cap K) \cap (U \cap L) \neq 0$. Pero $(U \cap K) \cap (U \cap L) = U \cap (K \cap L)$. Luego $K \cap L \neq 0$, lo que implica que $\hat{U}$ es uniforme. ■

Proposición 4.4 *Los siguientes enunciados son equivalentes para un R-módulo M.*

a) *M es semisimple.*

b) *La clase $\sigma[M]$ es esencialmente comprimible.*

c) *En $\sigma[M]$ cada módulo inyectivo es esencialmente comprimible.*

d) *Para todo $K \in \sigma[M]$, la cápsula M-inyectiva $\hat{K}$ puede sumergirse en K.*

e) *Para todo $M_1, M_2 \in \sigma[M]$, si $\hat{M}_1$ es isomorfo a $\hat{M}_2$ entonces M_1 es subisomorfo a M_2.*

f) *En $\sigma[M]$ cada R-módulo cíclico y cada R-módulo uniforme es esencialmente comprimible.*

Demostración

a) $\Longrightarrow$ b) Sea $N \in \sigma[M]$, entonces N es M-generado. Así existen un conjunto de índices I y un epimorfismo $\varphi : M^{(I)} \longrightarrow N$. Luego $N = \varphi\left(M^{(I)}\right)$. Por hipótesis, M es semisimple, lo que implica que $M^{(I)}$ también lo es. Entonces N es semisimple y por lo tanto N es esencialmente comprimible.

b) $\Longrightarrow$ c) Por hipótesis, cada módulo en $\sigma[M]$ es esencialmente comprimible. En particular, cada módulo inyectivo es esencialmente comprimible.

c) $\Longrightarrow$ d) Sea $K \in \sigma[M]$. Si $\hat{K}$ es su cápsula M-inyectiva, entonces por hipótesis, $\hat{K}$ es esencialmente comprimible. Como K es un submódulo esencial de $\hat{K}$ entonces existe un monomorfismo $\theta : \hat{K} \longrightarrow K$.

d) $\Longrightarrow$ e) Sean $M_1, M_2 \in \sigma[M]$ tales que $\hat{M}_1$ y $\hat{M}_2$ son isomorfos. Sea $\varphi : \hat{M}_1 \longrightarrow \hat{M}_2$ el isomorfismo. Consideremos la inclusión $\iota : M_1 \longrightarrow \hat{M}_1$. Por hipótesis, hay un monomorfismo $\theta : \hat{M}_2 \longrightarrow M_2$. Así $\theta\varphi\iota : M_1 \longrightarrow M_2$ es un monomorfismo. Similarmente se construye un monomorfismo $\phi : M_2 \longrightarrow M_1$.

e) $\Longrightarrow$ f) Sea $U \in \sigma[M]$ un R-módulo uniforme. Demostraremos que U es esencialmente comprimible. Sea K un submódulo esencial de U, entonces $\hat{U}$ es isomorfo a $\hat{K}$. Por hipótesis, K es subisomorfo a U. Así existe un monomorfismo $\theta : U \longrightarrow K$. Por lo tanto U es esencialmente comprimible.

Procedemos de manera análoga si xR es un R-módulo cíclico en $\sigma[M]$.

f) $\Longrightarrow$ a) Por la *Proposición 4.3*, M es localmente neteriano. Supongamos ahora que U es un R-módulo uniforme en $\sigma[M]$. Probaremos que U es M-inyectivo. Por el lema anterior, $\hat{U}$ también es uniforme y por hipótesis, $\hat{U}$ es esencialmente comprimible. Como U es un submódulo esencial de $\hat{U}$, entonces existe un monomorfismo $\theta : \hat{U} \longrightarrow U$. Luego $0 \neq \theta\left(\hat{U}\right)$ es isomorfo a $\hat{U}$. Esto implica que $\theta\left(\hat{U}\right)$ es un submódulo M- inyectivo de U, por lo que $U = \theta\left(\hat{U}\right) \oplus A$ para algún submódulo

A de U. Pero $\theta\left(\hat{U}\right) \cap A = 0$ implica que $A = 0$ ya que U es uniforme. Por lo tanto $U = \theta\left(\hat{U}\right)$. Concluimos que en $\sigma[M]$ cada módulo uniforme es M-inyectivo.

Ahora demostraremos que U es un módulo simple. Sea $K \neq 0$ un submódulo de U. Entonces K es un submódulo esencial de U y como por hipótesis U es esencialmente comprimible, existe un monomorfismo $\varphi : U \longrightarrow K$. Luego $0 \neq \varphi(U)$ es isomorfo a U, lo que implica que $\varphi(U)$ es un submódulo M- inyectivo de K. Entonces $K = \varphi(U) \oplus B$ para algún submódulo B de K. Como $\varphi(U)$ es esencial en K pues K es uniforme, se tiene que $B = 0$. Por lo tanto $K = \varphi(U)$. Así K es un submódulo M-inyectivo de U, de donde $U = K \oplus C$ para algún submódulo C de U. Pero $K \cap C = 0$ implica que $C = 0$ ya que U es uniforme. Por lo tanto $U = K$. Concluimos que en $\sigma[M]$ cada módulo uniforme es simple y M-inyectivo.

Ya que M es localmente neteriano, por [5, Corolario 5.4], cada módulo distinto de cero en $\sigma[M]$ contiene un submódulo esencial que es suma directa de submódulos uniformes. En particular, para M existe una familia de submódulos uniformes $\{U_i\}_{i\in I}$ tales que $\oplus_{i\in I} U_i$ es un submódulo esencial de M. Sabemos que U_i es M-inyectivo para todo $i \in I$, luego por [5, 2.5], $\underset{i\in I}{\oplus} U_i$ también es M-inyectivo. Así $M = \underset{i\in I}{\oplus} U_i \bigoplus A$ para algún submódulo A de M. Como $\underset{i\in I}{\oplus} U_i$ es un submódulo esencial de M se tiene que $A = 0$. Por lo tanto $M = \underset{i\in I}{\oplus} U_i$ que es semisimple. ■

Corolario 4.2 *Para un anillo R los siguientes enunciados son equivalentes.*

a) *R es semiprimo y artiniano.*

b) *Cada R-módulo es esencialmente comprimible.*

c) *Cada R-módulo inyectivo es esencialmente comprimible.*

d) *Cada R-módulo cíclico y cada R-módulo uniforme es esencialmente comprimible*

Demostración

Se sigue de la equivalencia entre (a), (b), (c) y *(f)* de la proposición anterior tomando $M = R$ ya que, por la *Proposición 1.12*, el que R sea semisimple es equivalente a que R sea artiniano y semiprimo. ■

Capítulo 5

Anillos esencialmente comprimibles

En este capítulo estudiaremos la clase de anillos esencialmente comprimibles derechos cuya definición daremos a continuación.

Definición 5.1 *Sea R un anillo. Decimos que R es un **anillo esencialmente comprimible derecho** si R como R-módulo derecho es esencialmente comprimible.*

Claramente, cualquier dominio es un anillo esencialmente comprimible derecho.

Recordemos que un elemento $c \in R$ se llama **regular derecho** si $an_d(c) = 0$ y **regular izquierdo** si $an_i(c) = 0$. Un elemento $c \in R$ se llama *regular* si es regular derecho e izquierdo.

Lema 5.1 *Un anillo R es esencialmente comprimible derecho si y sólo si cada ideal derecho esencial contiene un elemento regular derecho de R.*

Demostración

Supongamos que R es esencialmente comprimible derecho y sea I un ideal derecho esencial de R. Entonces existe un monomorfismo $f : R \longrightarrow I$. Notemos que $f(1) \in I$. Además, $f(1)s = 0$ si y sólo si $f(s) = 0$ si y sólo si $s \in Nu\, f$ si y sólo si $s = 0$. Por lo tanto $an_d(f(1)) = 0$. Así $f(1)$ es un elemento regular derecho de R.

Ahora supongamos que cada ideal derecho esencial de R contiene un elemento regular derecho. Sea I un ideal esencial derecho de R y $x \in I$ un elemento regular derecho de R. Como $an_d(x) = 0$, entonces $R \cong xR$. Llamemos φ al isomorfismo anterior y consideremos la inclusión $\iota : xR \longrightarrow I$. Entonces $\iota\varphi : R \longrightarrow I$ es un monomorfismo y por lo tanto R es esencialmente comprimible. ■

Proposición 5.1 *Cualquier anillo semiprimo y goldiano derecho es esencialmente comprimible derecho.*

Demostración

Sean R un anillo goldiano derecho y semiprimo e I un ideal derecho esencial de R. Por la *Proposición 1.18*, existe un elemento regular derecho x en I. Por el *Lema 5.1*, R es esencialmente comprimible derecho. ■

Lema 5.2 *Sean R un anillo semiprimo y U un ideal de R. Entonces $an_d(U) = an_i(U)$*

Demostración

Sabemos que $an_d(U)$ y $an_i(U)$ son ideales de R. Notemos que $[Uan_i(U)]^2 = [Uan_i(U)]$ $[Uan_i(U)] = U[an_i(U)U]an_i(U) = 0$. Por la *Proposición 1.4*, $Uan_i(U) = 0$. Esto implica que $an_i(U) \subseteq an_d(U)$. Similarmente, $an_d(U) \subseteq an_i(U)$. Por lo tanto $an_d(U) = an_i(U)$. ■

Corolario 5.1 *Sea R un anillo semiprimo que satisface las condiciones de cadena ascendente y descendente en anuladores derechos. Entonces cada R-módulo derecho (izquierdo) libre es esencialmente comprimible.*

Demostración

Sea I un ideal derecho (izquierdo) esencial de R. Por el *Lema 5.2* y [4, Teorema 1.19], para cada $x \in R$ se cumple que $x + I$ contiene un elemento regular de R. En particular, si $x \in I$, entonces $I = x + I$ contiene un elemento regular de R. Por el *Lema 5.1*, R es esencialmente comprimible derecho (izquierdo). Por la *Proposición 2.2*, cada R-módulo derecho (izquierdo) libre es esencialmente comprimible. ■

Corolario 5.2 *Sea R un anillo semiprimo y goldiano izquierdo. Entonces cada R-módulo derecho libre es esencialmente comprimible.*

Demostración

Se sigue del *Lema 1.3* y el *Corolario 5.1.* ■

Proposición 5.2 *Sea R un anillo esencialmente comprimible derecho. Entonces se cumplen las siguientes afirmaciones.*

a) *Cada ideal de R es un R-módulo derecho esencialmente comprimible.*

b) *Cada submódulo esencial de un R-módulo libre es esencialmente comprimible.*

c) *Si A es un ideal propio de R tal que $A^2 \neq A$, entonces $\dfrac{R}{A^2}$ no es un R-módulo esencialmente comprimible.*

Demostración

a) Sea I un ideal de R. Demostraremos que I es invariante bajo endomorfismos inyectivos de R. Sean $f : R \longrightarrow R$ un monomorfismo y $y \in f(I)$, entonces existe $x \in I$ tal que $y = f(x)$. Así $y = f(x) = f(1)\, x \in I$ ya que I es un ideal de R. Por lo tanto $f(I) \subseteq I$. Por la *Proposición 2.4 a)*, I es un R-módulo esencialmente comprimible.

b) Sea F un R-módulo libre, entonces F es una suma directa de copias del anillo. Por la *Proposición 2.2*, F es esencialmente comprimible. Sea I un submódulo esencial de F. Por la *Proposición 2.4 a)*, I es un R-módulo esencialmente comprimible.

c) Sea A un ideal propio de R tal que $A^2 \neq A$. Supongamos que $\dfrac{R}{A^2}$ es un R-módulo esencialmente comprimible. Por la *Proposición 2.4 d)*, $an_R\left(\dfrac{R}{A^2}\right)$ es un ideal semiprimo de R. Notemos que $A^2 \subseteq an_R\left(\dfrac{R}{A^2}\right) = \{r \in R \mid (x + A^2)\, r = \bar{0}$ para todo $x + A^2 \in \dfrac{R}{A^2}\}$. Luego $A \subseteq an_R\left(\dfrac{R}{A^2}\right)$. Sean $a \in A$ y $1 + A^2 \in \dfrac{R}{A^2}$. Entonces $a + A^2 = (1 + A^2)\, a = \bar{0}$, de donde $a \in A^2$. Como $A^2 \subseteq A$, entonces $A = A^2$, lo que contradice la hipótesis $A \neq A^2$. Por lo tanto $\dfrac{R}{A^2}$ no es un R-módulo esencialmente comprimible. ■

Proposición 5.3 *Cada anillo esencialmente comprimible derecho es un anillo semiprimo y nosingular derecho.*

Demostración

Sea R un anillo esencialmente comprimible derecho. Por la *Proposición 2.4 d)*, $an_d(R) = 0$ es un ideal semiprimo de R. Entonces R es un anillo semiprimo. Por el *Teorema 2.1*, existe un monomorfismo $\theta : R \longrightarrow Z \oplus A$, donde Z es un R-módulo singular y A es un R-módulo nosingular. Sea $\theta(1) = c$, entonces existen $x \in Z$ y $a \in A$ únicos tales que $c = x + a$. Notemos que $cr = 0$ si y sólo si $\theta(1)r = 0$ si y sólo si $\theta(r) = 0$ si y sólo si $r = 0$. Por lo tanto $an_d(c) = 0$. Además, $an_d(c) = an_d(x) \cap an_d(a)$. Como $x \in Z$ entonces $an_d(x)$ es un ideal derecho esencial de R, lo que implica que $an_d(a) = 0$. Así $R \cong aR \subseteq A$. Sabemos que A es un R-módulo no singular, luego su submódulo aR también es nosingular. Por lo tanto R es nosingular derecho. ■

Proposición 5.4 *Cada anillo esencialmente comprimible derecho no contiene sumas directas infinitas de ideales distintos de cero.*

Demostración

Sea R un anillo esencialmente comprimible derecho. Demostraremos que cada ideal distinto de cero de R es un ideal derecho totalmente invariante. Sean I un ideal de R distinto de cero y $f : R \longrightarrow R$ un homomorfismo. Tomemos un elemento $y \in f(I)$, entonces existe $x \in I$ tal que $y = f(x) = f(1)x \in I$. Por lo tanto $f(I) \subseteq I$. Luego cada ideal distinto de cero de R es un ideal derecho totalmente invariante. Ya que R como R-módulo derecho es finitamente generado, por la *Proposición 2.4 f)*, R no contiene ninguna suma directa infinita de ideales distintos de cero. ■

Corolario 5.3 *Un anillo conmutativo R es esencialmete comprimible si y sólo si R es un anillo goldiano y semiprimo.*

Demostración

Primero supongamos que R es un anillo semiprimo y goldiano. Por la *Proposición 5.1*, R es esencialmente comprimible.

Ahora supongamos que R es esencialmente comprimible. Por la *Proposición 5.3*, R es semiprimo y nosingular y por la *Proposición 5.4*, R no contiene ninguna suma directa infinita de ideales distintos de cero. Luego la dimensión uniforme de R es finita. Por el *Teorema 1.1*, R es semiprimo y goldiano. $\blacksquare$

Definición 5.2 *Sea R un anillo. Un elemento $e \in R$ es **idempotente** si $e^2 = e$.*

Observemos que un anillo tiene al menos dos elementos idempotentes, el 0 y el 1.

Definición 5.3 *Sea R un anillo. Un elemento $c \in R$ es* central *si $cx = xc$ para todo $r \in R$.*

Notemos que si R es un anillo esencialmente comprimible derecho, entonces por la *Proposición 5.3*, R es un anillo semiprimo. Recordemos que en anillos semiprimos el zoclo derecho coincide con el zoclo izquierdo, por eso simplemente nos referiremos a él como el zoclo.

Teorema 5.1 *Sea R un anillo esencialmente comprimible derecho. Entonces $Zoc(R) = eR$ para algún idempotente central $e \in R$. Consecuentemente, R es suma directa de un anillo semiprimo y artiniano y un anillo esencialmente comprimible derecho con zoclo derecho cero.*

Demostración

Sean R un anillo esencialmente comprimible derecho y $S = Zoc(R)$. Por el *Teorema 2.1 b)*, S es un sumando directo de R. Por [1, Proposición 7.1], $S = eR$ para algún elemento idempotente $e \in R$ y $R = eR \oplus (1-e)R$. Como $e \in S$ y S es un ideal entonces $Re \subseteq S = eR$, lo que implica que $(1-e)Re \subseteq (1-e)eR = 0$. Así $re = ere$ para todo $r \in R$. Además, $[eR(1-e)R]^2 = [eR(1-e)R][eR(1-e)R] = eR[(1-e)Re]R(1-e)R = 0$. Probaremos que $eR(1-e)R = 0$. Supongamos que $eR(1-e)R \neq 0$, entonces $eR(1-e)R \neq [eR(1-e)R]^2$. Por la *Proposición 5.2 c)*, $\dfrac{R}{[eR(1-e)R]^2} = \dfrac{R}{0} \cong R$ no es esencialmente comprimible, lo que contradice la hipótesis. Por lo tanto $eR(1-e)R = 0$. Luego $eR(1-e) \subseteq an_i(R) = 0$. Así $eR(1-e) = 0$, lo que implica que $er = ere = re$

para todo $r \in R$. Concluimos que e es un elemento central. Como eR es un anillo semisimple, por la *Proposición 1.12*, eR es un anillo artiniano y semiprimo.
Ahora, por el *Lema 2.2 d)*, $\frac{R}{S}$ es esenciamente comprimible como R-módulo derecho y por lo tanto es esencialmente comprimible como $\frac{R}{S}$-módulo derecho. Luego $\frac{R}{S}$ es un anillo esencialmente comprimible derecho. Además, $\frac{R}{S} = \frac{Re + R(1-e)}{Re} \cong \frac{R(1-e)}{Re \cap R(1-e)} = \frac{R(1-e)}{0} \cong R(1-e)$. Por lo tanto $R(1-e)$ es un anillo esencialmente comprimible derecho. ■

Lema 5.3 *Sean I un ideal de un anillo semiprimo R y S el conjunto de ideales primos mínimos de R que no contienen I. Entonces $an(I) = \cap\{P \mid P \in S\}$.*

Demostración

Sea $B = \cap\{P \mid P \in S\}$. Notemos que $I \cap B$ está contenido en la intersección de todos los ideales primos mínimos de R, que es el radical primo de R. Como R es semiprimo entonces $I \cap B = 0$. Además, $IB \subseteq I$ e $IB \subseteq B$ porque I y B son ideales de R. Así $IB \subseteq I \cap B = 0$, lo que implica que $B \subseteq an(I)$.
Por otro lado, $Ian(I) = 0 \subseteq P$ para cualquier $P \in S$. Como P es primo entonces $I \subseteq P$ ó $an(I) \subseteq P$. Sabemos que $I \nsubseteq P$ porque $P \in S$, luego $an(I) \subseteq P$ para todo $P \in S$. Esto implica que $an(I) \subseteq B$. Por lo tanto $an(I) = B$. ■

Definición 5.4 *Sean R un anillo e I un ideal de R. Definimos al conjunto*

$$C'(I) = \left\{ c \in R \mid c + I \text{ es un elemento regular derecho del anillo } \frac{R}{I} \right\}$$

El siguiente resultado muestra que el estudio de anillos esencialmente comprimibles derechos se reduce al estudio de tales anillos cuando éstos son primos.

Teorema 5.2 *Un anillo R es esencialmente comprimible derecho si y sólo si existen un entero positivo n e ideales primos P_i de R con $1 \leq i \leq n$ tales que $\bigcap_{i=1}^{n} P_i = 0$ y el anillo $\frac{R}{P_i}$ es esencialmente comprimible derecho, para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$.*

Demostración

Supongamos que R es esencialmente comprimible derecho. Entonces, por la *Proposición 5.3*, R es semiprimo. La *Proposición 5.4* implica que la dimensión uniforme de ${}_RR_R$ es finita. Por [7, Teorema 11.43], el número de ideales primos mínimos de R es finito. Sean $P_1, \ldots, P_n$ los ideales primos mínimos de R. Por el lema anterior $P_i = an\left(\bigcap_{j=1\, j\neq i}^{n} P_j\right)$. Así cada P_i $(1 \leq i \leq n)$ es un ideal primo mínimo y un anulador. Por [7, 11.41], $P_i = an\,(U_i)$, donde U_i es un ideal uniforme de R para $i = 1, \ldots, n$. Como R es semiprimo entonces el radical primo de R es cero, esto es, $\bigcap_{i=1}^{n} P_i = 0$.

Sean $i \in \{1, \ldots, n\}$, $P = P_i$ y $U = U_i$. Consideremos un ideal derecho E de R tal que $\frac{E}{P}$ sea un ideal derecho esencial de $\frac{R}{P}$. Entonces E es un ideal derecho esencial de R. Por la *proposición 5.1*, E contiene un elemento regular derecho $c \in R$. Demostraremos que $c+P$ es un elemento regular derecho de $\frac{R}{P}$. Notemos que $an_d\,(c+P) = \{r+P \in \frac{R}{P} \mid (c+P)\,(r+P) = P\}$. Ahora $cr+P = P$ si y sólo si $cr \in P$ si y sólo si $crU = 0$ si y sólo si $rU \in an_d\,(c) = 0$ si y sólo si $rU = 0$ si y sólo si $r \in an_i\,(U)$. Como R es semiprimo, $an_i\,(U) = an_d\,(U) = P$. Luego $cr + P = P$ si y sólo si $r + P = P$. Por lo tanto $c+P$ es un elemento regular derecho de $\frac{R}{P}$. Por el *Lema 5.1*, $\frac{R}{P}$ es esencialmente comprimible.

Recíprocamente, supongamos que $\bigcap_{i=1}^{n} P_i = 0$ para algún entero positivo n y para ideales primos P_i tales que $\frac{R}{P_i}$ es un anillo esencialmente comprimible para $1 \leq i \leq n$. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $P_i \nsubseteq P_j$ para $1 \leq i \neq j \leq n$. Sea F un ideal derecho esencial de R. Queremos demostrar que $\dfrac{\left[F \cap \bigcap_{i=2}^{n} P_i\right] + P_1}{P_1}$ es un ideal derecho esencial de $\frac{R}{P_1}$. Sea A un ideal derecho de R tal que $\frac{A}{P_1} \cap \dfrac{\left[F \cap \bigcap_{i=2}^{n} P_i\right] + P_1}{P_1} = \bar{0}$. Entonces $A \cap F \cap \bigcap_{i=2}^{n} P_i \subseteq P_1$. Consecuentemente $F \cap \left[A \cap \bigcap_{i=2}^{n} P_i\right] \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} P_i = 0$, de donde

$A\cap\bigcap_{i=2}^{n} P_i = 0 \subseteq P_1$ ya que F es esencial en R. Pero P_1 es un ideal primo, lo que implica que $A \subseteq P_1$ ó $\bigcap_{i=2}^{n} P_i \subseteq P_1$. Supongamos que $\bigcap_{i=2}^{n} P_i \subseteq P_1$. Como P_1 es primo, entonces $P_j \subseteq P_1$ para algún $2 \leq j \leq n$, lo que contradice el hecho de que $P_j \nsubseteq P_i$ para $1 \leq i \neq j \leq n$. Por lo tanto $A \subseteq P_1$ y $\dfrac{A}{P_1} = \bar{0}$. Concluimos que $\dfrac{\left[F \cap \bigcap_{i=2}^{n} P_i\right] + P_1}{P_1}$ es un ideal derecho esencial de $\dfrac{R}{P_1}$. Por el *lema 5.1*, existe un elemento regular derecho $d_1 + P_1 \in \dfrac{\left[F \cap \bigcap_{i=2}^{n} P_i\right] + P_1}{P_1}$. Así $d_1 \in C'(P_1) \cap F \cap \bigcap_{i=2}^{n} P_i$.

De manera similar, para $2 \leq i \leq n$ existe $d_i \in C'(P_i) \cap F \cap \bigcap_{j=1\, i\neq j}^{n} P_j$. Entonces $d = d_1 + \cdots + d_n \in F$. Probaremos que d es un elemento regular derecho de R. Sea $s \in R$ tal que $0 = ds = d_1 s + \cdots + d_n s$. Entonces $d_1 s = -d_2 s - \cdots - d_n s$. Notemos que para $2 \leq i \leq n$ se tiene que $d_i s \in F \cap \bigcap_{j=1\, j\neq i}^{n} P_j \subseteq P_1$. Por lo tanto $-d_2 s - \cdots - d_n s \in P_1$, lo que implica que $d_1 s \in P_1$. Entonces $P_1 = d_1 s + P_1 = (d_1 + P_1)(s + P_1)$. Como $d_1 + P_1$ es regular derecho, se tiene que $s + P_1 = P_1$, esto es, $s \in P_1$. De manera similar, $s \in P_i$ para $2 \leq i \leq n$. Concluimos que $s \in \bigcap_{i=1}^{n} P_i = 0$. Por lo tanto $an_d(d) = 0$, lo que demuestra que $d \in F$ es un elemento regular derecho de R. Por el *Lema 5.1*, R es esencialmente comprimible derecho. ■

Teorema 5.3 *Para un anillo R los siguientes enunciados son equivalentes.*

a) *R es un anillo primo y goldiano derecho.*

b) *R es un anillo primo y esencialmente comprimible derecho con al menos un ideal derecho uniforme.*

Demostración

a) $\Longrightarrow$ b) Supongamos que R es un anillo primo y goldiano derecho. Entonces,R es un anillo semiprimo y goldiano derecho. Luego por la *Proposición 5.1*, R es esencialmente comprimible derecho. Además, por ser R goldiano derecho, tiene dimensión uniforme derecha finita; luego contiene al menos un ideal derecho uniforme

b) $\Longrightarrow$ **a)** Ahora supongamos que R es un anillo primo y esencialmente comprimible derecho con al menos un ideal derecho uniforme. Como R es esencialmente comprimible, por la *Proposición 5.3*, R es un anillo semiprimo y nosingular derecho. Probaremos primero que R_R es un módulo primo(ver definición 2.4). Sea $U \neq 0$ un ideal derecho de R y sea $I = an_d(U)$. Entonces $UI = 0$ y como R es un anillo primo, $I = 0$. Entonces por la *Proposición 2.5*, R tiene dimensión uniforme derecha finita. Así R es un anillo semiprimo y goldiano derecho. ■

Capítulo 6

Anillos extensiones de anillos esencialmente comprimibles

En este capítulo estudiaremos algunos anillos que son extensiones de anillos esencialmente comprimibles.

Proposición 6.1 *Sea R un anillo esencialmente comprimible derecho. Entonces el anillo de polinomios $R[x]$ también es un anillo esencialmente comprimible derecho.*

Demostración

Sea A un ideal derecho esencial de $R[x]$. Definimos $l(A) = \{l(f) \mid f \in A\}$ donde $l(f)$ es el coeficiente principal de f. Demostraremos que $l(A)$ es un ideal derecho esencial de R.

Primero veamos que $l(A)$ es un ideal derecho de R. Convenimos en que $l(0) = 0$. Sean $l(f), l(g) \in l(A)$ y $r \in R$. Supongamos que $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_0$ y $g(x) = b_m x^m + \cdots + b_0$, donde $a_n, b_m \neq 0$.

- Si $n = m$ entonces

$$l(f) - l(g) = \begin{cases} l(f-g) \;\; si \;\; a_n \neq b_m \\ 0 \;\; si \;\; a_n = b_m \end{cases}$$

  En cualquier caso $l(f) - l(g) \in l(A)$.

- Si $n > m$, sea $h(x) = x^{n-m}$. Entonces $l(gh) = l(g)$ y $hg \in A$, por lo que $l(f) - l(g) \in l(A)$ como en el caso anterior. Procedemos de manera análoga si $m > n$. Por lo tanto $l(f) - l(g) \in l(A)$.

- $l(f)\,r = l(fr) \in l(A)$.

Sea $0 \neq a \in R \subseteq R[x]$. Como A es un ideal derecho esencial de $R[x]$, existe $h \in R[x]$ tal que $0 \neq ah \in A$. Si $h(x) = c_n x^n + \cdots + c_0$, entonces debe haber un c_k con $0 \leq k \leq n$ tal que $ac_k \neq 0$. Luego $0 \neq l(ah) \in aR$. Así $0 \neq l(ah) \in l(A) \cap aR$, lo que prueba que $l(A)$ es un ideal derecho esencial de R. Por el *Lema 5.1*, $l(A)$ contiene un elemento regular derecho de R, $l(f)$ con $f \in A$. Probaremos que f es un elemento regular derecho en $R[x]$. Sea $h \in R[x]$ tal que $fh = 0$. Entonces $l(f)\,l(h) = 0$, de donde $l(h) = 0$ ya que $l(f)$ es regular derecho. Por lo tanto $h = 0$, lo que prueba que $f \in A$ es un elemento regular derecho de $R[x]$. Por el *Lema 5.1*, se tiene que $R[x]$ es un anillo esencialmente comprimible derecho. ■

Proposición 6.2 *Sea R un anillo conmutativo tal que $R[x]$ es esencialmente comprimible. Entonces R es esencialmente comprimible.*

Demostración

Por hipótesis, $R[x]$ es un anillo conmutativo y esencialmente comprimible. Luego, por el *Corolario 5.3*, $R[x]$ es un anillo semiprimo y goldiano y por [7, Corolario 11.19], R también lo es. Aplicando el *Corolario 5.3* nuevamente, se tiene que R es esencialmente comprimible. ■

La prueba del siguiente resultado se puede consultar en [3, Proposición 5.1].

Proposición 6.3 *Supongamos que R es un álgebra sobre un campo no numerable K con $dim_K R < |K|$. Entonces $f(x) \in R[x]$ es regular derecho si y sólo si existe $\lambda \in K$ tal que $f(\lambda)$ es un elemento regular derecho de R.*

Proposición 6.4 *Supongamos que R es un álgebra sobre un campo no numerable K con $dim_K R < |K|$. Si $R[x]$ es un anillo esencialmente comprimible derecho entonces R también lo es.*

Demostración

Sea I un ideal derecho esencial de R. Demostraremos que $I[x]$ es un ideal derecho esencial de $R[x]$. Sea $0 \neq \sum_{i=0}^{m} a_i x^i = f(x) \in R[x]$. Como I^n es un R-submódulo derecho esencial de R^n para $n \geq 1$, dado $0 \neq (a_0, \ldots, a_m) \in R^{m+1}$ existe $r \in R$ tal que $0 \neq (a_0, \ldots, a_m) r \in I^{m+1}$. Así $a_i r \in I$ y $a_i r \neq 0$ para algún $1 \leq i \leq m$. Entonces $0 \neq f(x) r \in I[x]$. Por lo tanto $I[x]$ es un ideal derecho esencial de $R[x]$. Por el *Lema 5.1*, existe un elemento regular derecho $f(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i \in I[x]$ y por la *Proposición 6.3*, existe $\lambda \in K$ tal que $f(\lambda)$ es un elemento regular derecho de R. Como $f(\lambda) = \sum_{i=0}^{m} a_i \lambda^i \in I$, el *Lema 5.1* implica que R es un anillo esencialmente comprimible derecho. ■

Definición 6.1 *Un R-módulo P se llama* ***casi proyectivo*** *si es P-proyectivo, es decir, si para cada epimorfismo $\rho : P \longrightarrow N$ y cada homomorfismo $\varphi : P \longrightarrow N$ existe $\gamma \in End_R(P)$ tal que el siguiente diagrama conmuta.*

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, "\gamma"'] \arrow[d, "\varphi"] \\ P \arrow[r, "\rho"] & N \end{tikzcd}$$

Lema 6.1 *Sea M un R-módulo distinto de cero tal que $Hom_R(M, N) \neq 0$ para todo submódulo distinto de cero N de M y sea $S = End_R(M)$.*

a) *Si J es un ideal derecho esencial de S, entonces JM es un submódulo esencial de M.*

b) *Si M es casi proyectivo y N es un submódulo esencial de M, entonces $Hom_R(M, N)$ es un ideal derecho esencial de S.*

Demostración

a) Supongamos que JM no es un submódulo esencial de M. Entonces existe un submódulo distinto de cero N de M tal que $JM \cap N = 0$. Por hipótesis, existe $0 \neq f \in Hom_R(M, N)$ para el cual ocurre que $JM \cap f(M) \subseteq JM \cap N = 0$.

Ahora supongamos que $J \cap fS \neq 0$. Entonces existe $g \in S$ tal que $0 \neq fg \in J$. Luego, para algún $0 \neq m \in M$ se tiene que $fg(m) \neq 0$. Entonces $fg \cdot m = fg(m) = f(g(m)) \in f(M)$ ya que $g \in S = End_R(M)$. Como además $fg \cdot m \in JM$, se tiene que $0 \neq fg \cdot m \in JM \cap f(M)$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto $J \cap fS = 0$, lo que contradice la hipótesis de que J es un ideal derecho esencial de S. Concluimos con esto que JM es un submódulo esencial de M.

b) Sean N un submódulo esencial de M, $0 \neq g \in S$ e $I = Hom_R(M, N)$. Como $g(M)$ es un submódulo distinto de cero de M y N es un submódulo esencial de M, entonces $N \cap g(M) \neq 0$. Luego, por la hipótesis, $0 \neq Hom_R(M, N \cap g(M)) \subseteq I \cap Hom_R(M, g(M)) \subseteq I \cap Hom_R(M, (gS)M)$. Como M es casi proyectivo y gS es un ideal derecho finitamente generado de S, por [5, 3.4], se tiene que $Hom_R(M, (gS)M) = gS$. Por lo tanto $I \cap gS \neq 0$, lo que implica que I es un ideal derecho esencial de S. ■

Proposición 6.5 *Supongamos que M es casi proyectivo y $Hom_R(M, N) \neq 0$ para todo submódulo distinto de cero N de M y sea $S = End_R(M)$. Entonces se cumplen las siguientes afirmaciones.*

a) *Si M es finitamente generado y esencialmente comprimible entonces S es un anillo esencialmente comprimible derecho.*

b) *Si S es un anillo esencialmente comprimible derecho entonces M es esencialmente comprimible.*

Demostración

a) Sea I un ideal derecho esencial de S. Por el *Lema 6.1 a)*, IM es un submódulo esencial de M. Como M es esencialmente comprimible, existe un monomorfismo $f : M \longrightarrow IM$ y como M es finitamente generado, por [5, 3.4], $Hom_R(M, IM) = I$. Ya que $f \in I$ es un monomorfismo, $an_d(f) = 0$, esto es, f es un elemento regular derecho de S. Por el *Lema 5.1*, S es un anillo esencialmente comprimible derecho.

b) Sea N un submódulo esencial de M. Por el *Lema 6.1 b)*, $I = Hom_R(M, N)$ es un ideal derecho esencial de S. Como S es esencialmente comprimible, por el *Lema 5.1*, I contiene un elemento regular derecho f de S. Entonces $0 = an_d(f) = Hom_R(M, Nu\, f)$. Luego $Nu\, f = 0$, esto es, f es un monomorfismo y por lo tanto M es esencialmente comprimible. ■

Corolario 6.1 *Sea $n \geq 1$. Si R es un anillo esencialmente comprimible derecho, entonces también lo es el anillo de matrices $Mat_{nxn}(R)$.*

Demostración

Aplicando la *Proposición 6.5 a)* para $M = R_R^n$. ■

Teorema 6.1 *Sea R un anillo esencialmente comprimible derecho que es subanillo de un anillo S y tal que R es un submódulo esencial del R-módulo derecho S. Entonces S es un anillo esencialmente comprimible derecho.*

Demostración

Sea A un ideal derecho esencial del anillo S. Demostraremos que $A \cap R$ es un ideal derecho esencial de R. Sea B un ideal derecho de R tal que $(A \cap R) \cap B = A \cap (R \cap B) = A \cap B = 0$. Ahora consideremos $a \in A \cap BS$. Entonces $a = b_1 s_1 + \cdots + b_n s_n$ para algunos $n \in \mathbb{N}$, $b_i \in B$ y $s_i \in S$ con $1 \leq i \leq n$. Como R_R es un submódulo esencial de S_R, existen ideales esenciales derechos E_i de R tales que $s_i E_i \subseteq R$ para $1 \leq i \leq n$. Sea $E = E_1 \cap \cdots \cap E_n$. Entonces $aE = (b_1 s_1 + \cdots + b_n s_n) E \subseteq B$ pues $b_i s_i E \subseteq b_i s_i E_i \subseteq b_i R \subseteq B$.

Además, $aE \subseteq A$, por lo que $aE \subseteq A \cap B = 0$; luego $a \in Z(S_R)$. Por hipótesis, R es esencialmente comprimible y por la *Proposición 5.3*, R es nosingular derecho. Luego, por la *Proposición 1.17 c)*, S es un R-módulo nosingular derecho, mostrando así que $a = 0$. Entonces $A \cap BS = 0$ y como A es un ideal derecho esencial de S, se tiene que $BS = 0$. Por lo tanto $B = 0$, lo que prueba que $A \cap R$ es un ideal derecho esencial de R. Como R es esencialmente comprimible, por el *Lema 5.1*, existe un elemento regular derecho c de R tal que $c \in A$. Entonces se tiene que $0 = an_R(c) = \{r \in R \mid cr = 0\}$. Por otro lado, $an_S(c) = \{s \in S \mid cs = 0\}$ es un R-submódulo de S_R tal que $R_R \cap an_S(c) = \{r \in R \mid cr = 0\} = 0$. Como R_R es un submódulo esencial de S_R, se tiene que $an_S(c) = 0$, mostrando así que c es un elemento regular de S. Por el *Lema 5.1*, S es un anillo esencialmente comprimible derecho. $\blacksquare$

Definición 6.2 *Sean R un anillo y E un R-módulo que contiene a R_R como submódulo de E_R. Una* ***estructura de anillo*** *sobre E es* ***compatible*** *con su estructura de R-módulo si:*

1. *La suma en el anillo E es la misma que la suma en el R-módulo E.*
2. *Para cualesquier $x \in E$ y $r \in R$, su producto en el anillo E es igual a su producto en el R-módulo de E.*

Corolario 6.2 *Si R es un anillo nosingular derecho y esencialmente comprimible derecho entonces la cápsula inyectiva $E(R_R)$ de R es un anillo esencialmente comprimible derecho.*

Demostración

Como R es nosingular derecho, por [6, Proposición 4.26], se tiene que $E(R_R)$ tiene una única estructura de anillo compatible con su estructura de R-módulo. Por el teorema anterior, se tiene que $E(R_R)$ es un anillo esencialmente comprimible derecho. $\blacksquare$

Definición 6.3 *Un R-módulo M se llama* ***finito de Dedekind*** *si la condición $M \cong M \oplus N$ en Mod-R implica que $N = 0$. Un anillo R es* ***directamente finito*** *si el R-*

módulo R_R es finito de Dedekind. Equivalentemente, si para cualesquier $x, y \in R$ tales que $xy = 1$, se tiene que $yx = 1$ [7, página 5].

Lema 6.2 *Sea R un anillo neteriano. Entonces R es directamente finito.*

Demostración

Sean $x, y \in R$ tales que $xy = 1$. Definimos el endomorfismo $\varphi : R \longrightarrow R$ por $\varphi(r) = ry$ para todo $r \in R$. Notemos que si $r \in R$ entonces

$$r = r1 = r(xy) = (rx)y = \varphi(rx).$$

Por lo tanto φ es un epimorfismo.

Por otro lado, $Nu\,\varphi^n = \{r \in R \mid \varphi^n(r) = 0\} = \{r \in R \mid \varphi\varphi^{n-1}(r) = 0\}$ para $n \in \mathbb{N}$. Así se tiene una cadena ascendente infinita

$$Nu\,\varphi \subseteq Nu\,\varphi^2 \subseteq \ldots.$$

Por hipótesis, R es neteriano, lo que implica que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $Nu\,\varphi^m = Nu\,\varphi^{m+1}$.

Ya que φ es un epimorfismo, entonces φ^m también lo es y como $yx - 1 \in R$, existe $s \in R$ tal que $yx - 1 = \varphi^m(s)$. Luego

$$\varphi^{m+1}(s) = \varphi\varphi^m(s) = \varphi(yx - 1) = (yx - 1)y = y(xy) - y = y - y = 0.$$

Así $s \in Nu\,\varphi^{m+1} = Nu\,\varphi^m$, lo que implica que $0 = \varphi^m(s) = yx - 1$. Por lo tanto $yx = 1$ y R es directamente finito. ■

Definición 6.4 *Un anillo R es **autoinyectivo** si el R-módulo R_R es inyectivo.*

Teorema 6.2 *Sea R un anillo. Las siguientes proposiciones son equivalentes.*

a) *R es un anillo artiniano y semiprimo.*

b) *R es un anillo directamente finito tal que $E(R_R)$ es un R-módulo esencialmente comprimible.*

Demostración

a) $\Longrightarrow$ b) Sea R un anillo artiniano y semiprimo. Por la *Proposición 1.12*, R es semisimple, lo que implica que R es un anillo esencialmente comprimible derecho. Por la *Proposición 5.3*, R es nosingular derecho y por el *Corolario 6.2*, $E(R_R)$ es un anillo esencialmente comprimible derecho.

Por otro lado, como R es artiniano, por [6, Teorema 3.15], R es neteriano. Por el lema anterior, R es directamente finito.

b) $\Longrightarrow$ a) Sea $Q = E(R_R)$. Como Q_R es esencialmente comprimible, por la *Proposición 2.4 a)*, R es un anillo esencialmente comprimible derecho. Entonces, por la *Proposición 5.3*, R es un anillo semiprimo y nosingular derecho. Por [6, Proposición 4.26], Q adquiere una estructura de anillo que es compatible con su estructura de R-módulo. De hecho, la función $f \longrightarrow f(1)$ da un isomorfismo de $End_R(Q)$ sobre Q y así $Q \cong Q_{max}$ el anillo de cocientes derecho máximo del anillo nosingular derecho R [10, Capítulo XII Corolario 2.3]. Luego, por el *Corolario 6.1*, Q es un anillo esencialmente comprimible derecho. Por otro lado, por la *Proposición 1.14 b)*, Q_R es nosingular y por [7, Proposición 13.1] Q es un anillo autoinyectivo derecho.

Probaremos ahora que Q es un anillo directamente finito. Ya que Q_R es esencialmente comprimible e inyectivo hay un monomorfismo escindible $\theta : Q_R \longrightarrow R$ pues Q_R es inyectivo. Así Q es isomorfo a un sumando directo de R, esto es, $Q \cong eR$ para algún idempotente $e \in R$. Supongamos que $Q = X \oplus Y$ para algunos Q-módulos X y Y con $Q \cong X$. Como R-módulos, $Q = X \oplus Y$ con $Q \cong X$ y por lo tanto $eR \cong eR \oplus Y$, de donde $R = eR \oplus (1-e)R \cong R \oplus Y$. Como R es directamente finito se tiene que $Y = 0$, probando así que Q es directamente finito.

Notemos que Q_Q es cohopfiano. En efecto, si $\varphi : Q \longrightarrow Q$ es un monomorfismo, este se escinde pues Q_Q es inyectivo. Luego $Q \cong Q \oplus L$ para algún Q-módulo L y como Q es directamente finito, $L = 0$, esto es, φ es un isomorfismo.

Ahora, ya que Q_Q es cohopfiano y esencialmente comprimible, por la *Proposición 2.4 c)*, Q_Q es semisimple. Entonces, por [10, Capítulo XII Teorema 2.5], R tiene dimensión uniforme derecha finita y por lo tanto es un anillo goldiano derecho. Luego, por el *Lema 1.3*, R tiene condición de cadena descendente en anuladores derechos. Como cada sumando directo de R es de la forma $eR = an_d(1-e)$ para algún idempotente $e \in R$, se tiene que R tiene condición de cadena descendente en sumandos directos. Así, por la *Proposición 2.7 b)*, R es un anillo semisimple y por lo tanto es semiprimo y artiniano. ■

Bibliografía

[1] Frank W. Anderson y Kent R. Fuller, *Rings and Categories of Modules*, Grad. Texts in Math.,vol. 13, Springer-Verlag, New York, 1992.

[2] Henri Cartan y Samuel Eilenberg, *Homological Algebra*, London: Geoffrey Cumberlege Oxford University Press Princeton, 1973.

[3] F. Cedo y D.Herbera, *The Ore condition for polynomial and power series rings*, Comm. Algebra 23 (14)(1995) 5131-5159.

[4] A. W. Chatters y C. R. Hajarnavis, *Rings with Chain Conditions*, Pitman, Boston, 1980

[5] N. V. Dung, D. V. Huynh, P. F. Smith y R. Wisbauer, *Extending Modules*, Longman, Harlow, 1994.

[6] K. R. Goodearl y R. B. Warfield Jr., *An Introduction to Non-commutative Noetherian Rings*, London Math. Soc. Stud. Texts, vol. 16, 1989.

[7] T. Y. Lam, *Lectures on Modules and Rings*, Grad. Texts in Math.,vol. 139, Springer, New York, 1998.

[8] J. C. Mc Connell y J. C. Robson, *Non-commutative Noetherian Rings*, Wiley-Interscience, New York, 1987.

[9] P. F. Smith y M. R. Vedadi, *Essentially compressible modules and rings*, Journal of Algebra 304 (2006) 812-831.

[10] BO STENSTROM, *Rings of Quotients*, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen, Band 217, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 1975

[11] ROBERT WISBAUER, *Foundations of Module and Ring Theory A Handbook for Study and Research*, University of Dusseldorf, Gordon and Breach Science Publishers, Reading, 1991.