UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

MAESTRÍA EN DOCENCIA PARA LA
EDUCACIÓN MEDIA SUPERIOR

FACULTAD DE CIENCIAS

ESTRATEGIA DIDÁCTICA PARA LA ENSEÑANZA DE TRIGONOMETRÍA EN EL BACHILLERATO

TESIS

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:

**MAESTRA EN DOCENCIA PARA LA
EDUCACIÓN MEDIA SUPERIOR
MATEMÁTICAS**

PRESENTA

ILEANA GARCÍA CONDE

TUTOR PRINCIPAL:
M. EN C. FRANCISCO DE JESÚS STRUCK CHÁVEZ
FAC. CIENCIAS

COMITÉ TUTOR:
DRA. MILAGROS FIGUEROA CAMPOS. FAC. PSICOLOGÍA
M. EN C. AGUSTÍN ONTIVEROS PINEDA. FAC. CIENCIAS

MÉXICO D.F., ENERO DE 2016

Dedicatorias.

A mi compañero de vida, Fernando Enrique Loyola Ahedo por impulsarme y aventurarse en todos mis proyectos. Gracias por tu amor.

A mis hijos José Pablo, Sofía y Lorena por su alegría, entusiasmo, paciencia y por motivarme a seguir estudiando. Los amo profundamente.

A mi madre Iliana Conde Menéndez, por ser un ejemplo de vida. A mi padre Enrique García Hernández y a mis hermanos Enrique y Karina por su cariño y apoyo moral.

A mis amigos universitarios Madems por sus enseñanzas, camaradería y todos los gratos momentos que pasamos juntos, en especial Anahí, Lilian, Francisco, Hugo y Armando.

A todos mis amigos de vida que de alguna manera contribuyeron a alcanzar esta meta. Lo hago de forma general para evitar una lamentable omisión.

Agradecimientos.

M. en C. Francisco de Jesús Struck Chávez por su dirección, experiencia, paciencia y ayuda para la realización de este trabajo.

A los miembros del Comité Sinodal, M. en C. Agustín Ontiveros Pineda, Dra. Milagros Figueroa Campos, Dr. Juan Fidel Zorrilla Alcalá, Dr. Arturo Erdely Ruíz por su dedicación en la revisión de esta tesis y sus valiosos consejos que la enriquecieron.

A la Facultad de Ciencias.

A mis profesores de la Maestría en Docencia para la Educación Media Superior.

Al Colegio de Bachilleres plantel 13, en particular al Ing. Armando López Cruz por facilitarme un grupo para realizar la práctica docente.

A la Universidad Nacional Autónoma de México que a través de la beca que otorga la Coordinación de Estudios de Posgrado (CEP), me brindó un apoyo económico durante mis estudios de maestría.

Tabla de contenido.

Resumen.

En esta tesis se plantea y analiza una estrategia didáctica que considera un fragmento del desarrollo histórico de la Trigonometría y la recreación de la tabla de cuerdas de Ptolomeo para la construcción de las razones trigonométricas del seno y coseno. Para la definición de las identidades trigonométricas de la suma y diferencia de dos ángulos del seno y coseno se utiliza un esquema al que nos referimos como "una figura seis identidades".

En el análisis sobre su implementación y mi propia práctica docente, he considerado el modelo de práctica reflexiva, en donde la formación eficiente no puede basarse sólo en una formación científica-técnica, sino que parte de la práctica y se va ajustando mediante la reflexión para saber cómo actuar en la resolución de problemas que se van presentando en el aula.

Buscando responder a la pregunta ¿puede la enseñanza contextualizada de las razones trigonométricas ser parte de una estrategia de enseñanza que influya en el aprendizaje de la Trigonometría en los alumnos?, se diseñó la secuencia didáctica, misma que se aplicó a un grupo del nivel medio superior.

El marco teórico en el que se basa el planteamiento de la propuesta es el constructivismo. Se busca que los alumnos desarrollen y se interesen por el tema, que el aprendizaje no sea memorístico y que mejoren sus habilidades para la comprensión y manejo de las razones trigonométricas de seno y coseno. Así mismo se describen las características generales de la estrategia de enseñanza que se plantea en esta tesis. Gran parte de los alumnos estuvieron de acuerdo en que los contenidos vistos en el aula despertaron su interés en la Trigonometría y estuvieron de acuerdo en que las actividades realizadas en el aula les ayudaron a comprender mejor el tema.

En cuanto a la evaluación, algunos alumnos obtuvieron resultados positivos entre la primera y la última aplicación del cuestionario diagnóstico. Espero que el material presentado sea del interés del lector y enriquezca las herramientas de los docentes en la enseñanza de la Trigonometría.

Abstract.

This work presents and analyzes a teaching strategy that considers a fragment of the historical development of trigonometry and the Ptolemy´s table of chords for the construction of trigonometric ratios of sine and cosine. For the definition of the trigonometric angle addition identities it is used a diagram which we refer as “a diagram six identities”. The results of the teaching strategy proposal and my own teaching practice are presented considering the model of reflective practitioner, where the learning professional effectiveness cannot be based on technical-rationality basis. It starts with the practice and it is adjust by the reflection on how to act for solving problems in classroom.

The teaching strategy was designed for high school level and seeking to respond to the question “Can the contextualized teaching of trigonometric ratios be part of a teaching strategy that influence in the students´ understanding of trigonometry?”

The instruction paradigm is the constructivism, which encourages students to construct and be interested in the subject rather than memorizing, improving their skills for understanding and handling the trigonometric ratios of sine and cosine. General characteristics of teaching strategy used on the proposal are presented.

Most of the students agreed that the activities done in classroom kept them interested in trigonometry and helped them for a better understanding.

In terms of assessment, positive results were obtained by some students between the first and the last application of the diagnostic questionnaire. I hope the investigation presented would be of the reader´s interest and will enrich teachers´ alternatives for teaching trigonometry.

Capítulo 1. Fundamentación.

Introducción.

En este trabajo de tesis se presenta una estrategia didáctica que promueve en los alumnos del bachillerato, el aprendizaje de las razones e identidades trigonométricas de seno y coseno, a partir de la enseñanza contextualizada de su desarrollo. Con este tema se inicia el estudio de la Trigonometría en los diferentes planes de estudio del nivel medio superior; en el caso de la Escuela Nacional Preparatoria se presenta dentro del currículum de Matemáticas V[1], en el caso del Colegio de Ciencias y Humanidades dentro del currículum de Matemáticas II y Matemáticas IV[2], en el caso del Colegio de Bachilleres en Matemáticas II en el bloque temático II “Elementos de Trigonometría”[3] y en el caso del Instituto Politécnico Nacional que cuenta con un bachillerato tecnológico bivalente, en el segundo semestre “Geometría y Trigonometría”[4]. Es común encontrar que en el nivel medio, al tema de Trigonometría se le da un significado operativo asociado al triángulo rectángulo, en donde la resolución de problemas se orienta a determinar el cálculo de valores faltantes.

La Trigonometría surge en la antigüedad a partir de la necesidad de resolver cierto tipo de problemas relacionados con la astronomía y la navegación. Esta propuesta de tesis tiene como punto de partida la construcción de las razones trigonométricas del seno y coseno a partir de tomar un fragmento del desarrollo histórico de la Trigonometría (González Velasco, 2011). En particular, se utilizan las tablas de cuerdas de Ptolomeo[5] y se muestra cómo a partir del concepto de cuerda se llega a la definición del seno y posteriormente del coseno (Dorce, 2009). Una cuerda es un segmento de recta que une dos puntos en una curva. Para la

[1] http://dgenp.unam.mx/planesdeestudio/quinto/1500.pdf
[2] http://www.cch.unam.mx/sites/default/files/plan_estudio/mapa_mateiaiv.pdf
[3] http://www.cbachilleres.edu.mx/cb/comunidad/docentes/pdf/Reforma_curricular/Documentos/segundosemestre2014/AFB/Matematicas_II.pdf
[4] http://www.polivirtual.ipn.mx/OfertaEducativa/Paginas/OfertaEducativa_Bachillerato.aspx
[5] Claudius Ptolemaesus (90-168), escribió el Almagesto, un tratado sistemático de todos los aspectos de la astronomía conocidos en su época.

definición de las identidades trigonométricas de la suma y diferencia de dos ángulos del seno y coseno, se utiliza una representación geométrica a la que nos referimos como “una figura seis identidades”[6].

Se pretende que los alumnos puedan ubicar a las razones trigonométricas del seno y coseno como construcciones geométricas, sin perder de vista el sentido analítico que se desarrolla a partir del nacimiento del Álgebra.

El marco teórico en el que se basa el planteamiento de la propuesta es el constructivismo. Se busca que los alumnos desarrollen y se interesen por el tema, que el aprendizaje no sea memorístico y que mejoren sus habilidades para la comprensión y manejo de las razones trigonométricas de seno y coseno. Así mismo se describe las características generales de la estrategia de enseñanza que se plantea en esta tesis, el modelo de Instrucción Directa presentado por Eggen & Kauchak (2012). Se inicia el tema con una de las actividades presentadas por Zorrilla Alcalá (2008) bajo el modelo Didáctico en Matemáticas.

En términos generales, el modelo de Instrucción Directa deriva su sustento teórico a partir de la investigación de la eficiencia del maestro, la teoría cognitiva social basada en la obra de Albert Bandura y la influencia de la interacción en el aprendizaje, con base en la obra de Lev Vygotski[7]. Por otro lado, se tiene que el modelo Didáctico en Matemáticas se basa en la reconstrucción o invención de la matemática por el alumno, por lo que las construcciones de los estudiantes son fundamentales. La enseñanza de las matemáticas dentro de esta corriente se orienta básicamente a los procesos. Ambos modelos se describen con mayor detalle en el capítulo 2 de la presente tesis.

Para los docentes es de suma importancia tener claridad sobre el modelo de enseñanza y sobretodo analizar cómo influye en el proceso de aprendizaje de los alumnos.

[6] Mantilla Rodríguez, A., & Cogollo Torres, J.P, 2010. Enseñanza de las identidades trigonométricas de suma y diferencia de ángulo y del ángulo doble por medio de demostraciones sin palabras. (Tesis Licenciatura)
[7] Vygostski, Lev, 2012. El Desarrollo de los Procesos Psicológicos Superiores. Barcelona: Austral

El reporte de la Encuesta Nacional de Deserción en la Educación Media Superior (ENDEMS), realizada en julio de 2011, cuyos resultados permiten un acercamiento al fenómeno de la deserción, más allá de las percepciones y de las intuiciones que sobre su manifestación se hayan construido desde la escuela (como foco del problema) o desde las instancias de definición de las políticas educativas, señala entre otros datos, que cuando estudiaban los desertores[8] de la Educación Media Superior, la circunstancia más frecuente con la que se enfrentaron en un 30.1%, fue los problemas para entender a los maestros.

El reporte no hace mención de alguna materia en particular, sin embargo este dato es muy significativo e invita a los docentes a explorar alternativas que busquen la mejora en el proceso de enseñanza aprendizaje, con la esperanza de que el problema de entender a los maestros no sea una de las circunstancias latentes en la deserción de los alumnos.

[8] En la ENDEMS se define como un desertor a la persona que inició el grado o el nivel educativo correspondiente, no lo concluyó y no se encuentra realizando estudios para alcanzar dicha conclusión. Esta definición no debe interpretarse como un juicio de valor, ya que es un término utilizado sólo para caracterizar a aquellas personas que conforman el grupo de interés.

1.1 Identificación del problema.

Es común encontrar que cuando se presenta el tema de “Elementos de Trigonometría”, se muestran a las razones trigonométricas en su versión final de manera simplificada y se les da únicamente un significado operativo asociado al triángulo rectángulo, en donde el interés es simplemente calcular el dato faltante en la calculadora, dejando de lado el contexto histórico de donde nació. Bajo esta simplificación, la teoría pierde su sentido original y se reduce a un conjunto de símbolos y técnicas con escaso significado para los alumnos.

Un recurso utilizado por los docentes para la presentación de conceptos trigonométricos, es la mnemotecnia[9]. Un ejemplo de mnemotecnia usada en Trigonometría es la de “CO CA, CO CA, HIP, HIP” para referirse a las razones de seno, coseno y tangente del ángulo α.

- Sen α = $\frac{\text{co}}{\text{hip}}$ Cos α = $\frac{\text{ca}}{\text{hip}}$ Tan α = $\frac{\text{co}}{\text{ca}}$

Si los alumnos no están involucrados en su propio proceso de aprendizaje y no toman conciencia de que la mnemotecnia sólo facilita elementos para la asimilación de nuevos conceptos, se genera confusión y una idea errónea del objeto de estudio, puesto que sólo se está favoreciendo el aprendizaje memorístico, evitando así que los alumnos desarrollen competencias que los faculte a la formulación de modelos, que les permitan matematizar[10] una situación determinada.

Bajo estos enfoques, pareciera que el estudio de la Trigonometría implica memorizar gran cantidad de fórmulas para poder llegar a la solución de un ejercicio dado. Sin embargo, una manera adecuada de presentar los conceptos es deduciéndolos desde el sentido mismo de cómo fue que nació la Trigonometría; a partir de la geometría y sobretodo de la identificación de regularidades, para

[9] De acuerdo a la Real Academia de la Lengua (RAE), la mnemotecnia o nemotecnia se define como el procedimiento de asociación mental para facilitar el recuerdo de algo.
[10] Matematizar es organizar y estructurar la información que aparece en un problema, identificar los aspectos matemáticos relevantes, descubrir regularidades, relaciones y estructuras (Zorrila Alcalá, 2008).

que los alumnos perciban con mayor claridad los conceptos y se sientan motivados en el aprendizaje.

La forma de presentar los contenidos depende de los docentes, puesto que son quienes planifican, elaboran y ponen en acción las secuencias didácticas que incluyen actividades y materiales que se espera faciliten en los alumnos los objetivos de aprendizaje deseados. Surge la pregunta: ¿Puede la enseñanza contextualizada de las razones trigonométricas ser parte de una estrategia de enseñanza que influya en el aprendizaje de la Trigonometría en los alumnos? Buscando dar respuesta a esta interrogante, se presenta en este trabajo de tesis una secuencia didáctica que incluye:

- Breve reseña del contexto histórico en el que se desarrolló la Trigonometría.
- La recreación de la tabla de cuerdas de Ptolomeo.
- La construcción de las razones trigonométricas del seno y coseno.
- La definición de las identidades trigonométricas de la suma y diferencia de dos ángulos del seno y coseno, utilizando un esquema al que nos referimos como “una figura seis identidades”.

No puede dejarse de lado, la reflexión sobre la implementación de las secuencias didácticas en el aula, puesto que proporciona elementos de análisis que permiten a los docentes evaluar su propia práctica. En este trabajo de tesis, para la validación de la propuesta didáctica se ha considerado el modelo de pensamiento práctico de Donald Schön (Domingo Roget & Gómez Serés, 2014).

Capítulo 2. Marco Teórico.

Introducción.

En el mundo actual de grandes cambios políticos, económicos, sociales y ante el acceso al gran flujo de información a través de los medios electrónicos, uno de los propósitos centrales de la intervención educativa es que los estudiantes se conviertan en pensadores críticos y planificadores activos de su propio aprendizaje; la realidad es que esto sólo será posible si el tipo de experiencia interpersonal en la que los alumnos se involucran lo permitan (Díaz Barriga Arceo & Hernández Rojas, 2010).

El estilo de enseñanza tradicional en donde los alumnos tienen una actividad pasiva en su aprendizaje que los lleva simplemente a copiar y reproducir la realidad, no contribuye al desarrollo de la responsabilidad de los estudiantes en la toma de decisiones y no promueve un papel activo en su propio proceso de aprendizaje. Es innegable que los docentes tienen un papel determinante en el proceso de enseñanza aprendizaje, por lo que es necesario que se aborden diferentes estilos de enseñanza que conlleven la motivación y participación de los alumnos en los contenidos que configuran el currículum escolar.

En este trabajo de tesis, como marco teórico de referencia, se consideró para la elaboración de la propuesta de enseñanza de las razones trigonométricas de seno y coseno y de las identidades trigonométricas de suma y diferencia del seno y coseno de dos ángulos, el constructivismo.

Se mencionan las características generales del constructivismo y se describen las estrategias de enseñanza que se plantean en este trabajo de tesis, el modelo de Instrucción Directa presentado por Eggen & Kauchak (2012) y el modelo Didáctico en Matemáticas presentado por Zorrilla Alcalá (2008).

Finalmente se presenta un esquema general de la práctica reflexiva presentada por Donald Schön (Domingo Roget & Gómez Serés, 2014), mismo que se utilizó en el análisis sobre la implementación de la secuencia didáctica propuesta y mi propia práctica docente.

2.1 El Constructivismo.

Desde sus orígenes, el constructivismo no se presenta como una receta en donde simplemente se van siguiendo los pasos, lo que se plantea, es que las personas construimos activamente nuestro conocimiento, basados en lo que sabemos y en una relación también activa con los "otros" con quienes interactuamos (Pimienta Prieto, 2007).

Son fundamentales en la elaboración de la concepción constructivista en el ámbito educativo, las ideas de dos grandes pensadores (Santrock, 2003). La primera está representada por Jean Piaget, psicólogo francés (1896 – 1980), quién planteó que el conocimiento y la comprensión se dan individualmente, de acuerdo con el proceso evolutivo de la persona. La segunda está representada por Lev Vygotsky, ruso (1896 – 1934), quién planteó que el conocimiento y la comprensión se presentan tomando en cuenta la etapa evolutiva de la persona, el lenguaje y sus relaciones sociales.

De acuerdo al desarrollo evolutivo de los seres humanos, Piaget define cuatro estadios:

- Sensomotor desde el nacimiento hasta los 2 años; en este estadio los niños construyen la comprensión del mundo coordinando experiencias sensoriales con acciones físicas. Los niños se dan cuenta de la permanencia de los objetos y realizan la imitación diferida.
- Preoperacional de 2 a 7 años; en este estadio los niños generan una función semiótica, representan el mundo con imágenes y dibujos y muestran un rápido desarrollo del lenguaje. Piaget comenta que en este estadio, no tienen la habilidad de realizar operaciones y son altamente egocentristas.

- Operaciones concretas de 7 a 11 años; en este estadio los niños hacen una descentración de lo perceptual y son capaces de clasificar. Entienden el concepto de seriación, lo que les permite realizar operaciones y razonamiento lógico siempre y cuando, se utilicen ejemplos concretos y específicos. Además utilizan la conservación, término que empleaba Piaget para referirse a que los niños pueden reconocer que a pesar de transformar el aspecto de un objeto o sustancia, sus características como: volumen, área, masa, peso no se modifican y manejan la reversibilidad.
- Operaciones formales de 11 años en adelante; en este estadio se presenta el pensamiento lógico, abstracto e idealista en donde los adolescentes son capaces de diseñar planes para resolver problemas, utilizan la combinatoria y ponen a prueba hipótesis. Muestran un pensamiento abstracto, con un razonamiento hipotético-deductivo.

Entendiendo que el aprendizaje en cada estadio es cualitativo y conlleva organización y adaptación. En el proceso de organización los seres humanos utilizan esquemas; los esquemas son conceptos o marcos en la mente que permiten organizar e interpretar la información. El proceso de adaptación se lleva a cabo mediante la asimilación y la acomodación; la asimilación se refiere al modo en que las personas incorporan nueva información a sus esquemas preexistentes. La acomodación tiene lugar cuando un individuo ajusta sus esquemas con la información nueva. Piaget comenta que el mecanismo que explica cómo se cambia de un estadio a otro es la equilibración, es decir, el movimiento en la forma de pensar, siendo producto de conflictos cognitivos que llevan al individuo a un cambio conceptual, por lo que modifica sus esquemas y con ello se da un cambio de estadio.

La teoría de cognición social que fue desarrollada por Lev Vygotski ruso (1896 - 1934), establece principalmente que el conocimiento se produce en contexto e implica colaboración; es decir, las personas adquieren el conocimiento a través de la interacción social. Las habilidades cognitivas se adquieren a través de la participación activa con el medio ambiente y la colaboración con otras personas.

Para Vygotski la comunidad, los padres, la escolarización formal, los compañeros son fuerzas que influyen en el proceso cognitivo[11]. Un concepto importante en esta teoría es el de zona de desarrollo próxima (ZDP) que se refiere según los propios términos de Vygotski[12]:

> *No es otra cosa que la distancia entre el nivel real de desarrollo, determinado por la capacidad de resolver independientemente un problema, y el nivel de desarrollo potencial, determinado a través de la resolución de un problema bajo la guía de un adulto o en colaboración con un compañero más capaz.*

Este concepto se refiere al intervalo entre lo que una persona es capaz de hacer y lo que aún no puede lograr por sí misma. Con la orientación adecuada, que puede ser de un adulto o un compañero más avanzado, el estudiante puede realizar una tarea con éxito y por sí sólo.

Como señala Hernández Rojas (2013), para Vygotsky el problema epistemológico de la relación entre el sujeto y el objeto de conocimiento se resuelve con un planteamiento interaccionista dialéctico, en el que existe una relación de asociación, de interacción y de transformación recíproca iniciada por la actividad mediada del sujeto.

El sujeto al actuar sobre el objeto utiliza instrumentos de naturaleza sociocultural, los cuales de acuerdo a (Vygotski, 2012), pueden ser básicamente de dos tipos: las herramientas y los signos. Las herramientas producen transformaciones en el objeto de estudio y los signos producen cambios en los sujetos que realizan la actividad. El lenguaje tiene un papel importante dentro de los signos; el docente hace uso explícito del lenguaje con el fin de evitar significados inesperados y evitar rupturas e incomprensiones en la enseñanza.

---

[11] Santrock John W, 2003. Psicología del Desarrollo en la Adolescencia. Madrid: McGraw Hill Interamericana

[12] Citado en Carretero, M., 2011. Constructivismo y Educación. Buenos Aires: Paidós, p.29.

El desarrollo cognitivo es el resultado de un aprendizaje que ocurre mediante la participación guiada en actividades sociales con el acompañamiento de pares y adultos que apoyan y promueven el dominio de destrezas y entendimientos.

Bajo la postura de Vygotski se señala explícitamente que no es posible estudiar ningún proceso de desarrollo psicológico al margen del contexto histórico-cultural en que está inmerso, el cual trae consigo una serie de instrumentos y prácticas sociales históricamente determinados y organizados (Rogoff, 1993). Un punto importante a destacar, es que lo que una persona puede aprender no sólo depende de su actividad individual, sino que va a estar en función de las oportunidades de aprendizaje y de la información previamente adquirida.

No existe una sola mirada constructivista en la educación, se han desarrollado diferentes corrientes psicogenéticas que comparten el principio de la importancia de la actividad constructiva del alumno en la realización de los aprendizajes escolares.

Básicamente puede decirse que el constructivismo se fundamenta en la idea según la cual, el individuo (tanto en los aspectos cognitivos y sociales del comportamiento como en los afectivos), no es un mero producto del ambiente ni un simple resultado de sus disposiciones internas, sino una construcción propia que se va produciendo día a día como resultado de la interacción entre esos dos factores. En consecuencia, según la posición constructivista, el conocimiento no es una copia de la realidad, sino una construcción del ser humano. Entonces ¿con qué instrumentos realiza la persona dicha construcción? Principalmente con los esquemas que ya posee, es decir, con lo que ya construyó en su relación con el medio que lo rodea (Carretero, 2011).

Se dice que estamos aprendiendo significativamente cuando los esquemas de conocimiento que ya poseíamos, logramos integrarlos a los nuevos conocimientos, de manera que no sea acumulativamente, sino dando significado, integración, estructura y organización.

Los centros escolares tienen un papel muy importante en la construcción del conocimiento en los alumnos, básicamente en dos dimensiones, por un lado en la socialización porque se les acerca a la cultura de su medio social y por otro en su individualización, en la medida en que el alumno va a construir de dichos aspectos una interpretación personal, única, en la que su aportación es decisiva. Bajo la concepción constructivista, se asume que en la escuela los alumnos aprenden y se desarrollan en la medida en que puedan construir significados adecuados en torno a los contendidos que configuran el currículum escolar[13].

La concepción constructivista se organiza en torno a tres ideas fundamentales:[14]

1. El alumno es el responsable último de su propio proceso de aprendizaje. Él es quien construye (o mejor dicho reconstruye), los saberes de su grupo cultural y puede ser un sujeto activo cuando manipula, explora, descubre o inventa, incluso cuando lee o escucha la exposición de los otros.
2. La actividad mental constructiva del alumno se aplica a contenidos que poseen ya un grado considerable de elaboración. Esto quiere decir, que el alumno no tiene en todo momento qué descubrir o inventar en un sentido literal todo el conocimiento escolar. Debido a que el conocimiento que se enseña en las instituciones escolares, es en realidad el resultado de un proceso de construcción en el nivel social, los alumnos y profesores encontrarán ya elaborada y definida una buena parte de los contenidos curriculares.
3. La función del docente es engarzar los procesos de construcción del alumno, el saber colectivo culturalmente organizado. Esto implica que la función del profesor no se limita a crear condiciones óptimas para que el alumno despliegue una actividad mental constructiva, sino que debe orientar y guiar explícita y deliberadamente dicha actividad.

[13] Coll, Martín, Mauri, Miras, & Onrubia, 2007. El Constructivismo en el Aula. México: Grao, p. 19.
[14] Coll, 1990. Aprendizaje escolar y construcción del conocimiento, Paidos, Barcelona: Paidos, p. 441-442 citado por Díaz Barriga Arceo, F., & Hernández Rojas, G., 2010. Estrategias Docentes para un aprendizaje significativo. Una interpretación constructivista. México: Mc Graw Hill, p. 27-28

La concepción constructivista es un conjunto articulado de principios desde donde es posible diagnosticar, establecer juicios y tomar decisiones fundamentadas sobre la enseñanza (Coll, Martín, Mauri, Miras, & Onrubia, 2007). Aun cuando el constructivismo no ha delimitado un camino único en el proceso de enseñanza aprendizaje, si ha proporcionado elementos que deben seguirse en el planteamiento de las propuestas de enseñanza. En el caso particular de este trabajo de tesis, se busca que la propuesta de enseñanza favorezca el aprendizaje de las razones e identidades trigonométricas.

Díaz Barriga Arceo & Hernández Rojas (2010) citan a Mayer, 1984; Shuell, 1988; West Farmer y Wolf, 1991, para señalar que *las estrategias de enseñanza son procedimientos que el agente de enseñanza utiliza en forma reflexiva y flexible para promover el logro de aprendizajes significativos en los alumnos.* Es decir, son las herramientas que los docentes usan para facilitar el proceso de enseñanza.

En la elaboración de la secuencia didáctica de este trabajo de tesis, surge la pregunta: ¿Cuál es la mejor forma de presentar a los alumnos las razones e identidades trigonométricas? Sin perder de vista el rol del docente que es guiar, orientar, facilitar y mediar los aprendizajes significativos, los docentes tenemos que hacer uso de diferentes estrategias y adecuarlas al contexto de aprendizaje que se requiera. Una vez diseñadas la planeación y las actividades, la puesta en marcha se realizó bajo los siguientes modelos de enseñanza:

- Modelo de Instrucción Directa.
- Modelo Didáctico en Matemáticas.

2.2 Modelo de Instrucción Directa.

Arends (2007) señala que el modelo de Instrucción Directa, está orientado básicamente al logro de dos resultados en los alumnos:

- Dominio de conocimientos bien estructurados.
- Dominio de habilidades.

Es decir, este modelo está diseñado para promover el aprendizaje de conocimientos de contenidos bien estructurados (saber que) que se pueden enseñar paso a paso y para ayudar a los alumnos a dominar el conocimiento procedimental que se requiere a fin de llevar a cabo habilidades tanto sencillas como complejas. El entorno de aprendizaje de la Instrucción Directa se centra principalmente en las tareas académicas y pretende mantener la participación activa de los alumnos.

Por su parte, Eggen & Kauchak (2012) enuncian que la Instrucción Directa se basa en las explicaciones y el modelo del maestro, combinado con la práctica del alumno y una retroalimentación constante por parte del maestro. Señalan que los fundamentos teóricos en los que se basa el Modelo de Instrucción Directa son:

- Investigación de la eficiencia del maestro.
- Teoría cognitiva social basada en la obra de Albert Bandura.
- La influencia de la interacción en el aprendizaje, con base en la obra de Lev Vygotsky[15].

Para efectos de esta tesis, el modelo de Instrucción Directa que se plantea en la secuencia didáctica toma en consideración las ideas tanto de Arends (2007) como las de Eggen & Kauchak (2012), antes señaladas.

2.2.1 Investigación de la eficiencia del maestro.

Dentro de la eficiencia del maestro se contempla la profesionalización del docente, que incluye entre otros la comprensión y actualización del área de conocimiento, manejo de diferentes recursos didácticos, conocimientos acerca de cómo se desarrolla el proceso de aprendizaje en los adolescentes y el uso de diferentes instrumentos de evaluación para valorar el avance en la mediación.

[15] Vygostski, Lev, 2012. El Desarrollo de los Procesos Psicológicos Superiores. Barcelona: Austral

Barak Rosenshine (1979)[16] describió la instrucción directa de la siguiente manera:

Instrucción directa se refiere a las aulas con orden académico y dirigidas por el maestro que utilizan materiales estructurados y en secuencia. Se refiere a las actividades docentes en que las metas son claras para los alumnos, en que el tiempo asignado a la instrucción es suficiente y continuo, en que es extenso el trato del contenido, en que se supervisa el desempeño de los alumnos… y en que la retroalimentación es inmediata y de orientación académica. En la instrucción directa el maestro controla las metas de la docencia, elige materiales apropiados para la capacidad del alumno y lleva a un ritmo el episodio de la docencia. La interacción es estructurada pero no autoritaria. El aprendizaje ocurre en una atmósfera académica confiada.

2.2.2. Teoría cognitiva social.

La teoría cognitiva social también llamada teoría del aprendizaje social o sociocognitiva; siendo su principal representante Albert Bandura, nacido en Canadá en 1925. Esta teoría postula que gran parte de lo que aprenden los humanos proviene de la observación de los demás.

Bandura (1977)[17] escribió:

> *El aprendizaje sería excesivamente laborioso, e incluso peligroso, si las personas tuvieran que depender únicamente de los efectos de sus propias acciones para formarse una idea de lo que deben hacer. Por fortuna, la mayoría de la conducta humana se aprende por percibir, por medio del modelamiento: al observar a los demás, uno se forma una idea de cómo se llevan a cabo las conductas nuevas y, en ocasiones posteriores, esta información codificada sirve como guía para la acción. Debido a que las personas pueden aprender a partir de un ejemplo de lo que se debe hacer,*

[16] Citado en Eggen, P; Kauchak D., 2012. Estrategias Docentes, Enseñanza de contenidos curriculares y desarrollo de habilidades de pensamiento. México: Fondo de Cultura Económico, p.388
[17] Citado en Arends, Richard I., 2007. Aprender a enseñar. México: McGraw Hill Interamericana, p. 290

al menos en forma aproximada, antes de llevar a cabo cualquier conducta, evitan errores innecesarios.

Bandura se centra principalmente en que el aprendizaje se da a través de modelos, por lo que la utilización de modelos adecuados es primordial ya que los individuos los imitan y se sienten modelados por ellos.

El ambiente, el comportamiento y los factores personales/cognitivos interactúan recíprocamente; un cambio en uno de estos componentes tiene necesariamente efectos en los otros dos. De acuerdo a esta teoría, las pautas de comportamiento se pueden aprender por propia experiencia (aprendizaje directo) y mediante la observación de la conducta de otras personas (aprendizaje vicario).

2.2.3. Interacción en el aprendizaje con base en la obra de Lev Vygotsky.

El modelo de Instrucción Directa se cimienta en la interacción que existe entre el docente y los alumnos. Esta interacción se basa fundamentalmente en dos conceptos de la obra de Lev Vygotsky, el andamiaje y la zona de desarrollo próxima.

El andamiaje es el apoyo instructivo que los docentes proporcionan mientras los alumnos aprenden habilidades. Eggen & Kauchak (2012) señalan que el docente es el agente experto en mediar la situación de encuentro entre el alumno y los contenidos que forman parte de los currículos escolares. Esto significa, que el docente va realizando ajustes continuos a la mediación, haciendo preguntas, poniendo ejemplos, mostrando los procedimientos que se deben seguir para la resolución de problemas, como resultado del uso de métodos de evaluación, tanto informales como formales.

La zona de desarrollo próxima, como se señaló anteriormente, se refiere al intervalo entre lo que una persona es capaz de hacer y lo que aún no puede lograr por sí misma. La zona es propicia para la intervención de los docentes, es en donde se ayudan a los alumnos aprender. Fuera de esta zona los alumnos o bien no necesitan ayuda (ya dominan una nueva capacidad) o bien carecen de las habilidades indispensables o del conocimiento previo necesario.

La Instrucción Directa es una estrategia centrada en el docente, ya que es quien transmite, guía, orienta, facilita los conceptos y habilidades e identifica metas; desempeñando un papel activo entre los alumnos. Sin embargo, se busca una construcción proactiva del conocimiento, por lo que se promueve que el alumno haga uso autorregulado de los contenidos, de manera que el andamiaje externo tenga que retirarse por considerarse innecesario.

Tomando en consideración los sustentos teóricos presentados, en base a Eggen & Kauchak (2012) del modelo de Instrucción Directa, la planeación bajo este modelo requiere tener seis características:

- Revisar la labor del día anterior.
- Presentar el material nuevo en pasos claros y lógicos.
- Ofrecer práctica dirigida.
- Dar retroalimentación con correctivos.
- Ofrecer una práctica independiente.
- Revisar para consolidar lo aprendido.

Bajo este modelo las clases se deben impartir bajo cuatro fases, que se presentan en el cuadro siguiente:

Fase	Función de aprendizaje y motivación.
Fase 1. Introducción y revisión Se plantea la lección a los alumnos	Despierta atención. Activa el conocimiento previo indispensable.
Fase 2. Presentación	Comienza la producción de esquemas.

Se presenta y explica el nuevo contenido	Promueve la participación.
Fase 3. Práctica guiada Los alumnos practican el concepto o habilidad bajo la guía del maestro	Desarrolla percepciones de competencia. Asegura el acierto.
Fase 4. Práctica Independiente Los alumnos practican empleando el concepto o habilidad por sí mismo	Hace avanzar la producción de esquemas. Desarrolla la automaticidad.

2.3 Modelo Didáctico en Matemáticas.

Zorrilla Alcalá (2008) presenta el modelo didáctico en matemáticas en el manual titulado Desarrollo de Habilidades Verbales y Matemáticas II. El modelo busca trabajar con las habilidades que el alumno debe adquirir para la comprensión y manejo de los contenidos en cuestión.

El modelo considera como punto de partida la matematización. Matematizar es organizar y estructurar la información que aparece en un problema, identificar los aspectos matemáticos relevantes, descubrir regularidades, relaciones y estructuras, Treffers(1978)[18] distingue dos formas de matematización, horizontal y vertical.

La matematización horizontal nos lleva del mundo real al de los símbolos y posibilita tratar matemáticamente un conjunto de problemas.

[18] Citado en citado por Zorrilla Alcalá, J., 2008. Desarrollo de Habilidades Verbales y Matemáticas II. México: Ago Editorial, p. 83

En esta actividad son característicos los siguientes procesos:

- Identificar las matemáticas en contextos generales.
- Esquematizar.
- Formular y visualizar un problema de varias maneras.
- Descubrir relaciones y regularidades.
- Reconocer aspectos isomorfos en diferentes problemas.
- Transferir un problema real a uno matemático.
- Transferir un problema real a un modelo matemático conocido.

La matematización vertical consiste en el tratamiento específicamente matemático de las situaciones. En tal actividad son característicos los siguientes procesos.

- Representar una relación mediante una fórmula.
- Utilizar diferentes modelos.
- Combinar e integrar modelos.
- Probar regularidades.
- Formular un concepto matemático nuevo.
- Generalizar.

El estilo de enseñanza realista profundiza y sistematiza los aprendizajes, su principio didáctico es la reconstrucción o invención de las matemáticas por el alumno, por lo que las construcciones de los estudiantes son fundamentales. La enseñanza de las matemáticas dentro de esta corriente se orienta básicamente a los procesos. El punto de partida es la contextualización y problematización. Se debe procurar que el alumno entienda claramente la utilidad de los conceptos que estudia, como parte de las herramientas de solución de problemas reales que le permitirán adquirir otros conceptos en el futuro.

En la secuencia didáctica propuesta, una de las actividades está basada en el estilo de enseñanza realista; es decir, parte de la realidad; en particular de un fragmento del desarrollo histórico de la Trigonometría y se busca que los alumnos logren la matematización horizontal.

En la formulación de problemas es necesario tener presente las siguientes recomendaciones:

- Enunciar el problema como una situación abierta donde hay que tomar alguna decisión, en contraste con las situaciones prefabricadas sobre las que se formulan preguntas específicas.
- Formular al estudiante preguntas concisas que permitan respuestas cortas y muy concretas.
- Pedir al alumno actividades sencillas y fáciles de realizar.
- Intercalar entre las preguntas y actividades que realiza el estudiante, breves explicaciones y orientaciones que favorezcan la reflexión sobre las respuestas.
- Nunca dejar de lado la valiosa conducción del maestro pero sin contestar las preguntas con las respuestas “correctas”.
- Concluir con la explicación del sentido de la actividad.
- Recuperar el proceso de resolución para que el alumno tome conciencia del complejo proceso que realizó paso a paso. Que el estudiante explique con claridad el proceso.
- Introducir la herramienta matemática que puede resolver el problema al final de la actividad y explicar el por qué, debe ser utilizada para resolver problemas de ese tipo.

2.4 Evaluación.

La evaluación es el proceso por medio del cual se recaba información suficiente para conocer el grado de avance en el aprendizaje alcanzado por los alumnos. Por medio de ella se pueden determinar cuáles son las dificultades, errores o deficiencias que el estudiante tiene para llegar a una apropiación significativa del tema en cuestión y como consecuencia, sienta las bases para orientar y apoyar este proceso (Quesada Castillo, 2012).

La obtención de información y el empleo de la misma, ayuda a los docentes a percatarse sobre las interpretaciones significativa hechas por los alumnos sobre los contenidos presentados. En el proceso de construcción del conocimiento la retroalimentación constante y detallada, permite a los alumnos ir mediando su proceso de aprendizaje.

Se contemplan en la secuencia didáctica propuesta dos tipos de evaluación:

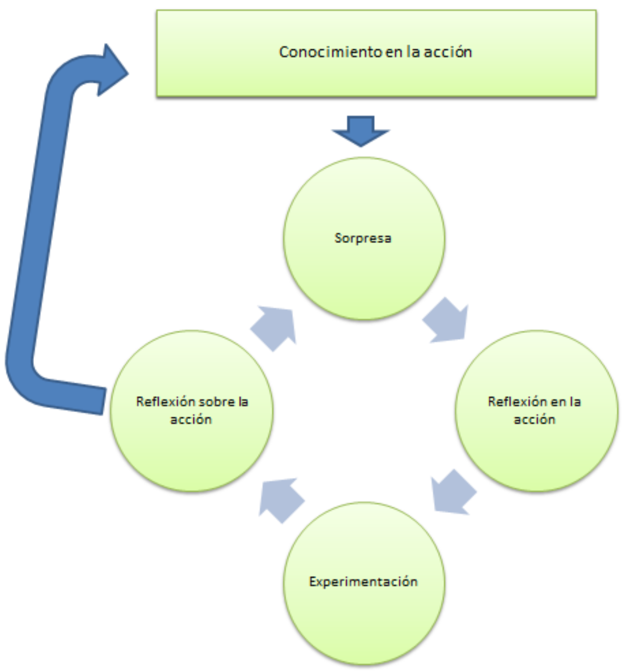
- Evaluación diagnóstica que proporciona un panorama general sobre los conocimientos previos de los alumnos, a fin de determinar el punto de partida, y de poder ajustar la planeación a los conocimientos que los alumnos poseen.
- Evaluación formativa que permite supervisar e identificar los posibles obstáculos o fallas que se presentan en el proceso y en qué medida es posible remediarlos con nuevas adaptaciones didácticas in situ.

2.5 Práctica Reflexiva.

Domingo Roget & Gómez Serés (2014) señalan que a mediados de los años 80, algunos teóricos, entre ellos Donald Schön, elaboraron estudios sobre el aprendizaje experiencial reflexivo de los docentes. Señalan la importancia de aprender de la práctica y defienden la adquisición de un conocimiento práctico a partir de procesos de reflexión, entendiendo la reflexión como la capacidad de reconocer, apropiarse y actuar sobre el aprendizaje adquirido en la experiencia. Díaz Barriga, F. (2006) comenta que el énfasis se situa en “aprender haciendo”.

Coll et al. (2007) puntualizan que no basta con evaluar los aprendizajes que llevan a cabo nuestros alumnos, sino que es necesario, además evaluar nuestra propia actuación como profesores y las actividades de enseñanza que planificamos y desarrollamos con ellos. En la última sesión de la intervención se le solicitó a los alumnos que completaran el cuestionario de evaluación docente[19]. Este cuestionario aporta elementos de análisis sobre mi práctica docente, puesto que retoma la reflexión de los alumnos con respecto al profesor en cuanto a los objetivos de la enseñanza, el método y organización de la clase y sobre todo de su propia actitud y comportamiento respecto al tema. Proporcionando así elementos valiosos para la reflexión de mi propia práctica docente.

Se utiliza el modelo de pensamiento práctico de Schön, para la presentación de los resultados de mi práctica docente, donde se aplicó la secuencia didáctica propuesta en este trabajo de tesis.



A continuación se describen[20] los fases que incluye el esquema anterior:

- Conocimiento en la acción. Se encuentra relacionado con el *saber-hacer*. Son las teoría implícitas[21] inherentes a la actividad que acompaña permanentemente a la persona que actúa. Schön distingue básicamente

[19] Cuestionario elaborado por Lilian Mendoza, Anahí Chávez, Armando López. La autora de la presente tesis añadió dos preguntas que considero pertinentes para el análisis de su propia práctica docente.
[20] Tomados de Domingo Roget A. & Gómez Serés M., 2014. La Práctica Reflexiva. Bases, modelos e instrumentos. Madrid: Narcea, S.A. de Ediciones, p87-90.
[21] Teorías implícitas. Se consideran las explicaciones, anticipaciones, valoraciones y juicios que las personas ponen en juego en los proceso de enseñanza aprendizaje.

dos subcomponentes el *saber del libro,* que incluye el saber proposicional de carácter teórico que corresponde a lo adquirido por medio del estudio científico, y el *saber-en-la-acción*, procedente de la práctica profesional, que es algo tácito, espontáneo y dinámico.

- Reflexión en y durante la acción. Viene marcado por la inmediatez del momento y la captación in situ de las diversas variables y los matices existentes en la situación que se está viviendo. Se trata de una reflexión que surge de la sorpresa ante lo inesperado.
- Reflexión sobre la acción. Se refiere al análisis efectuado a posteriori sobre los procesos y características sobre la acción de los docentes. Lo anterior lleva al cuestionamiento individual y colectivo sobre la situación de aprendizaje y su propio contexto en el que se desarrolló. Se puede decir, que la reflexión constituye el componente esencial del proceso de aprendizaje permanente por parte del profesor.

Estos tres componentes del pensamiento práctico no deben ser entendidos como elementos independientes entre sí, sino que al contrario, se necesitan mutuamente para garantizar una intervención práctica racional.

Capítulo 3. La Secuencia Didáctica y Resultados.

Introducción.

En este capítulo se presentan los elementos considerados en el diseño de la propuesta didáctica para la construcción de las razones trigonométricas del seno y coseno y de la definición de las identidades trigonométricas de la suma y diferencia de dos ángulos del seno y coseno, utilizando una misma figura a la que nos referimos como “una figura seis identidades”.

Cooper (2010) expone la analogía entre una planeación didáctica y un guión de una producción dramática, puntualiza que el escenario de los docentes es el salón de clases y a diferencia de las obras teatrales donde participan directores, actores, diseñadores de escena, en el salón de clases, los docentes somos los directores, diseñadores de escena, así como los autores y actores de los guiones. Siendo los encargados de promover el aprendizaje en los alumnos.

La secuencia didáctica propuesta se diseñó para 5 sesiones de 120 minutos e incluye:

I. **Objetivos de aprendizaje.** Lo que se espera que los alumnos aprendan:

   - Conozcan algunos pasajes relevantes del desarrollo histórico de la Trigonometría.
   - Comprendan el significado de la razón áurea.
   - Construyan la tabla de cuerda para los ángulos de 36°, 60°, 72°, 90° y de los ángulos suplementarios correspondientes.
   - Conozcan y utilicen el teorema de Ptolomeo para determinar la cuerda de los ángulos de 12°, 18°, 24° como suma o diferencia de ángulos.
   - Comprueben cómo a partir de las tablas de cuerdas de Ptolomeo surge el concepto de seno y coseno.

- Construyan las identidades trigonométricas de suma y diferencia de seno y coseno de dos ángulos, así como del ángulo doble.

II. **Modelo de enseñanza**. Eggen & Kauchak (2012) define que un modelo de enseñanza, es una estrategia de enseñanza específica basada en la teoría del aprendizaje y la motivación y es diseñada para ayudar a los estudiantes a alcanzar objetivos específicos de aprendizaje.

Los modelos de enseñanza que se utilizaron en la secuencia didáctica son:

- Modelo Didáctico en Matemáticas.
- Modelo de Instrucción Directa.

III. **Estrategias de aprendizaje**. Con el fin de complementar la forma de asimilación de los conocimientos y contribuir a que los alumnos pudieran alcanzar los objetivos de aprendizaje, la planeación didáctica incluye:

- Control de lecturas.
- Discusión grupal para llegar a los objetivos de aprendizaje.
- Actividades que contribuyen a la construcción de la definición de las razones trigonométricas de seno y coseno y que son:
    - Construcción geométrica y algebraica de la razón áurea para un segmento de recta.
    - Construcción de polígonos regulares con regla y compás.
    - Construcción de la tabla de cuerdas de Ptolomeo.
    - Construcción de las identidades trigonométricas de suma y diferencia de dos ángulos.
- Resolución de ejercicios.
- Retroalimentación en algunos casos inmediata y en otros en la siguiente sesión mediante la revisión de las actividades.

IV. Material didáctico.

- Para los alumnos:
  - Cuaderno, lápiz.
  - Compás, regla.
  - Calculadora.
- Para el docente:
  - Pizarrón blanco y plumones de colores.
  - Proyector. Se proyectó un PowerPoint que contiene una breve reseña histórica sobre el desarrollo de la Trigonometría e imágenes hechas con geogebra.
  - Material impreso (Anexos) con la finalidad de que los alumnos puedan organizar, programar y secuenciar los contenidos, llevándolos a la construcción de la tabla de cuerdas de Ptolomeo y de las identidades trigonométricas de suma y diferencia de dos ángulos.
  - Cuestionarios de evaluación.

V. Evaluación.

- Se aplicó un cuestionario diagnóstico al inicio de la práctica docente con el objeto de determinar los conocimientos previos de los alumnos.
- Se realizó una retroalimentación constante al trabajo de los alumnos mediante la revisión de los ejercicios, algunos de forma grupal y otros de manera individual.
- En la última sesión, los alumnos contestaron el cuestionario de evaluación docente. Los resultados del cuestionario se utilizaron para el análisis de la implementación de la secuencia didáctica.

3.1 Secuencia Didáctica.

A continuación se detalla la secuencia didáctica propuesta. Los modelos de enseñanza que se plantean se pueden adoptar para cualquier plan de estudio del nivel medio superior; particularmente se proponen para un grupo del Colegio de Ciencias y Humanidades, de segundo semestre.

I.DATOS GENERALES.

ASIGNATURA	Matemáticas II
CICLO ESCOLAR	2º Semestre

II.PROGRAMACIÓN.

UNIDAD TEMÁTICA	Elementos de Trigonometría.
PROPÓSITO(S) DE LA UNIDAD	Que el alumno conozca la notación matemática y los conceptos básicos que son utilizados en el estudio de Trigonometría y pueda emplearlos como herramientas para la construcción de las identidades trigonométricas de seno y coseno.
TEMA(S)	1. Marco histórico a. Aristarco de Samos, Hiparco de Nicea, Eratóstenes, Claudius Ptolomeo, contribución hindú y árabe a la Trigonometría. 2. Razón áurea. 3. Construcción del hexágono, decágono y pentágono con regla y compás, inscritos en una circunferencia. 4. Tablas de cuerdas de Ptolomeo. 5. Identidades Trigonométricas.

	a. Suma y diferencia de seno y coseno de dos ángulos.
OBJETIVOS DE APRENDIZAJE(S)	Que los alumnos: 1. Conozcan algunos pasajes relevantes del desarrollo histórico de la Trigonometría. 2. Comprendan el significado de la razón áurea. 3. Construyan la tabla de cuerda para los ángulos de 36°, 60°, 72°, 90° y de los ángulos suplementarios correspondientes. 4. Conozcan y utilicen el teorema de Ptolomeo para determinar la cuerda de los ángulos de 12°, 18°, 24° como suma o diferencia de dos ángulos. 5. Comprueben cómo a partir de las tablas de cuerdas de Ptolomeo surge el concepto de seno y coseno. 6. Construyan las identidades trigonométricas de suma y diferencia de seno y coseno de dos ángulos así como del ángulo doble.

III. ESTRATEGIA.

¿Qué?

Que el alumno conozca los conceptos básicos que se utilizaron para la construcción de las tablas de cuerdas de Ptolomeo y pueda emplearlos como herramienta en la resolución de problemas de diversa aplicación.

¿Cómo?

El profesor utilizará el modelo Didáctico de la Matemáticas (Zorrilla Alcalá, 2008) para contextualizar y problematizar el conocimiento de los griegos.

El profesor utilizará el modelo de Instrucción Directa (Eggen & Kauchak, 2012), para que el alumno:

- Conozca el concepto de razón áurea.
- Construya los polígonos regulares con regla y compás.

- Construya las tablas de cuerdas.
- Conozca y utilice el Teorema de Ptolomeo.
- Desarrollo de las identidades trigonométricas de suma y diferencia de seno y coseno de dos ángulos.

Los alumnos trabajarán en pequeños grupos para la resolución de los ejercicios.

¿Para qué?

Para lograr los objetivos antes señalados.

IV.SECUENCIA.

La secuencia incluye por un lado, el tiempo didáctico que es una estimación del tiempo para el desarrollo de las actividades y por el otro, la descripción de las actividades para el logro de los objetivos antes señalados.

Tiempo didáctico	**Desarrollo/ Actividades**
120 min.	**Sesión 1.**
40/120	**Encuadre.** Saludo y presentación de los alumnos y el docente. El docente solicita a los alumnos que cada uno diga su nombre y una característica que los identifique; puede ser algo que les guste o no. El docente entrega un cuestionario diagnóstico a los alumnos (Anexo 1). El docente entrega el temario a los alumnos (Anexo 2); se lee en voz alta, con la finalidad de que los alumnos tengan claro los objetivos a perseguir.
50/80	El docente solicita a los alumnos que se enumeren del 1 al 6 y les

	pide que dependiendo del número que les toque, investiguen datos bibliográficos de los siguientes personajes, mencionando principalmente su contribución a la Trigonometría: 1) Aristarco de Samos. 2) Hiparco de Nicea. 3) Eratóstenes. 4) Claudius Ptolomeo. 5) Participación de los hindúes en los inicios de Trigonometría. 6) Participación de los árabes en los inicios de Trigonometría.
15/30	La información la investigan en internet; se les solicita la investigación por escrito con la referencia de la página consultada.
10/15	El docente proyecta un PowerPoint (Anexo 3), se muestra una breve reseña histórica sobre el desarrollo de la Trigonometría; donde se va haciendo referencia a los personajes solicitados en la investigación. La información va siendo complementada por los alumnos con lo que han investigado.
5/5	El docente entrega a los alumnos un cuestionario (Anexo 5), con el fin de recuperar la información presentada. **Cierre**. Se les pregunta a los alumnos, ¿Con qué te vas?
120 min	**Sesión 2.**
40/120	Saludo y lluvia de ideas sobre lo visto en la sesión anterior. El docente les menciona que para construir las tablas de cuerdas, Ptolomeo utiliza algunos conceptos incluidos en los Elementos de Euclides; entre ellos el concepto de razón áurea. El docente solicita a los alumnos que saquen su tarjeta de metrobús,

	su credencial del INE o cualquier tarjeta de similar para que midan el largo y el ancho a fin de calcular la razón del largo entre el ancho. Se presenta un video de la razón áurea [22]. Se traza una línea recta cuyos extremos son A y B, la pregunta es: ¿Dónde se debe cortar el segmento AB para que se encuentre dividido en media y extrema razón? (Anexo 6). Se les pide que en parejas lo resuelvan. Posteriormente se hace la construcción algebraica en el pizarrón.
40/80	**Construcción del hexágono, decágono, pentágono regular.** Posteriormente, el docente solicita a los alumnos que al tiempo que traza en el pizarrón una circunferencia, ellos con ayuda de un compás tracen en su cuaderno una circunferencia del tamaño de la hoja. Se trazan los diámetros perpendiculares, se marcan los puntos A, B, C donde se intersectan los diámetros con la circunferencia y O para el centro de la circunferencia, luego se trazan dos semicírculos tomando como centro el punto A y el punto C, se unen los puntos de intersección con la circunferencia y se genera así un hexágono regular. Se toma el radio OC, se traza una línea perpendicular que pase por los puntos de intersección del semicírculo y se marca como el punto D. Este punto D se toma como centro y se toma como abertura del compás (radio) la distancia entre D y B, se marca la intersección con el radio AB como el punto E. (Anexo 7)
30/40	Se les solicita que en parejas resuelvan “Haciendo cuentas te das cuenta” (Anexo 8) y determinen la medida de los siguientes segmentos (tomando como referencia que Ptolomeo consideró un diámetro de 120 unidades): AO, OC, OB, OD, DB, OE, ED, EB. Se les solicita que calculen la relación $\frac{AO}{EO}$ y comenten sobre el resultado. Los resultados se revisan en el pizarrón.

[22] Razón áurea, https://www.youtube.com/watch?v=Qd5pTYSby1Y

10/10	**Cierre**. Se les solicita a los alumnos que definan con sus propias palabras el concepto de razón áurea y de tarea, busquen en su casa dos objetos que guarden esta proporción y le tomen fotografía.
120 min 50/115 35/65	**Sesión 3**. Saludo y lluvia de ideas sobre lo visto en la sesión anterior. Se revisa la tarea. Se les presenta a los alumnos la lectura “Elementos de Euclides: La razón áurea y los polígonos regulares”. Esta lectura incluye los teoremas utilizados por Ptolomeo que se encuentran en los elementos de Euclides: i. El lado de un hexágono y de un decágono inscrito en el mismo círculo están en la razón áurea. ii. Dado un pentágono regular inscrito en un círculo, el cuadrado de su lado es igual a la suma de los cuadrados de los lados de un hexágono y un decágono en el mismo círculo. Se aplican estos resultados en la circunferencia que se construyó en la sesión anterior. Sugerencia. Se puede mostrar en geogebra el dibujo del hexágono, decágono y pentágono inscritos en una misma circunferencia. Posteriormente se retoma lo visto en la clase pasada con el trazo del hexágono y el decágono inscritos en una circunferencia y en cuanto a las medidas de los lados AO, OC, OB, OD, DB, OE, ED, EB, inscritos en la circunferencia. Se determina la medida del pentágono, de acuerdo al Teorema (ii) antes señalado. Se muestra la relación entre cuerdas y el seno.

15/30 15/15	Se les entrega la tabla (Anexo 9) para que en parejas la completen: 1) La tabla de cuerdas para los ángulos de 36°, 60° y 72° y el seno de 18°, 30°, 36° respectivamente. 2) Con los ángulos de 108°, 120°, 144°, calculándolos como suplementarios de los ángulos anteriores; y el seno de 54°, 60°, 72° respectivamente. Se traza la tabla en el pizarrón y se completa con la participación del grupo. El docente entrega un cuestionario a los alumnos con el fin de recuperar la información presentada. (Anexo 10) **Cierre**. Se les pregunta a los alumnos ¿Qué te llevas de la clase?
120 min. 20/120 15/100 40/85	**Sesión 4.** Saludo y lluvia de ideas sobre lo visto en la sesión anterior. El docente enuncia en el pizarrón el Teorema de Ptolomeo (Anexo11): Dado un cuadrilátero inscrito en una circunferencia la suma de la multiplicación de la medida de los lados opuestos es igual a la multiplicación de la medida de las diagonales. Sugerencia. Con el uso de geogebra se les puede mostrar a los alumnos el resultado de este teorema. En el pizarrón, el docente utiliza el teorema de Ptolomeo para el cálculo de la cuerda del ángulo de 24°. (Anexo 11) El docente solicita a los alumnos que se enumeren del 1 al 4 y les pide que dependiendo del número que les toque se agrupen, todos

	los 1 juntos, todos los 2 juntos y así sucesivamente, posteriormente formen equipos de 4 personas.
10/45	Posteriormente a cada equipo se les solicita que usando el teorema de Ptolomeo calculen la medida de las cuerdas de los ángulos de 12°, 18° , 84°, 96° expresadas como la suma o diferencia de ángulos que ya se tienen determinado.
15/35	Una vez que todos los equipos han concluido, se revisan las respuestas con todo el grupo.
10/20	El docente dibuja en el pizarrón una circunferencia con un ángulo de 60° y junto con el grupo determinan el valor del coseno.
10/10	Posteriormente se les solicita a los alumnos que por equipos completen el valor del coseno en la tabla. (Anexo 9) **Cierre**. Se les pregunta a los alumnos ¿Qué te llevas de la clase?
120 min	**Sesión 5.**
15/120	Saludo y lluvia de ideas sobre lo visto en la sesión anterior. Se revisa la tarea.
20/105	En el pizarrón el docente junto con el grupo desarrolla geométricamente la identidad trigonométrica pitagórica de $sen^2(\alpha) + cos^2(\alpha) = 1$.
60/85	Tomando como punto de partida el esquema “Una figura seis identidades” (Anexo 12), el docente junto con los alumnos determinan sen (α + β) y cos (α + β). Se les solicita que por parejas determinen:

	a. sen (2 β), b. cos (2 β) Posteriormente, se les solicita que determinen lo siguiente: a. sen (α - β), b. cos (α - β),
15/25	Una vez que todos los equipos han concluido se revisan las respuestas con todo el grupo.
15/15	Cierre. Se les entrega a los alumnos el cuestionario diagnóstico (Anexo 1) y la evaluación docente para que la completen.

3.2. Validación de la estrategia didáctica.

Introducción.

La validación de la estrategia didáctica propuesta, se presenta bajo el modelo de práctica reflexiva de Donald Schön[23], puesto que se aplicó directamente en el salón de clase y se busca la reflexión sobre la experiencia; tiene una acción intencional de cara a comprobar la hipótesis que se planteó desde un inicio. Schön[24] concibe la reflexión –entendida como una forma de conocimiento- como un análisis y propuesta global que orienta la acción. El análisis conlleva de manera inseparable por un lado el aprendizaje experiencial (que parte de la experiencia) y por el otro el aprendizaje reflexivo (que requiere reflexión).

A continuación se desglosan cada una de las fases del esquema de Práctica Reflexiva[25], aplicado a la secuencia didáctica propuesta.

3.2.1Conocimiento en la acción.

Schön señala que el saber está en la acción, por lo que la secuencia didáctica propuesta conlleva a la presentación de los siguientes temas:

- La construcción de las razones trigonométricas del seno y coseno tomando como punto de partida el contexto histórico.
- La recreación de la tabla de cuerdas de Ptolomeo.
- Utilización del Teorema de Ptolomeo.
- La definición de las identidades trigonométricas de la suma y diferencia de dos ángulos del seno y coseno, utilizando una misma figura a la que nos referimos como "una figura seis identidades".

[23] Donald A. Schön (1930-1997) es un influyente pensador en el desarrollo de la teoría y práctica del aprendizaje del profesional reflexivo en el siglo XX.
[24] Citado en Domingo Roget A. & Gómez Serés M., 2014. La Práctica Reflexiva. Bases, modelos e instrumentos. Madrid: Narcea, S.A. de Ediciones, p. 87
[25] El esquema de Práctica Reflexiva se presentó en la p. 25 de la presente tesis.

3.2.2 Contextualización.

La práctica docente se realizó con un grupo del Colegio de Bachilleres plantel 13, grupo 660, de Matemáticas VI, con horario vespertino; lunes de 20 a 21 horas, martes de 17 a 19 horas y jueves de 19 a 21 horas.

El número de horas frente a grupo fue de 10 horas, repartidas en 6 sesiones, realizadas del 20 al 28 de abril del presente año.

Características del grupo 660.

- Alumnos de sexto semestre de Matemáticas VI.
- Alumnos con disposición al aprendizaje; sin problemas de disciplina.
- El primer acercamiento con el tema de Trigonometría, los alumnos lo tuvieron en Matemáticas II en el bloque temático II "Elementos de Trigonometría" posteriormente en Matemáticas IV en el bloque temático I "De tres en tres".
- De los 34 alumnos inscritos al grupo, sólo 9 alumnos asistieron a las 6 sesiones de mi práctica docente, el resto de los alumnos tuvieron una asistencia variada.
- En el caso de las inasistencias, se les proporcionó a los alumnos el material de la sesión que faltaron junto con las indicaciones de cómo resolverlo y se les solicitó que lo entregaran a la siguiente clase. Cabe señalar que no todos lo realizaron.

3.2.3 Sorpresa.

En este apartado se contempla la flexibilidad y adecuación de la secuencia didáctica al contexto del grupo. En un principio la secuencia didáctica fue diseñada principalmente para un grupo del Colegio de Ciencias y Humanidades, segundo semestre. Sin embargo el grupo en el que se realizó la intervención fue un grupo del sexto semestre del Colegio de Bachilleres. Fue necesario ser flexible en la implementación de la secuencia didáctica, puesto que no todas las sesiones fueron de 2 horas como estaba contemplado en un principio, por otro lado era un grupo que ya había tenido un acercamiento al tema previamente.

Los resultados del cuestionario diagnóstico no fueron muy alentadores, en la aplicación (20-abril) sólo una persona resolvió correctamente las preguntas relacionadas con el teorema de Pitágoras, por lo que empecé con una lluvia de ideas, para favorecer el repaso o recuerdo del tema.

3.2.4 Reflexión en la acción.

A continuación, se detallan las actividades realizadas docente-alumnos para el desarrollo de los temas propuestos de Trigonometría, con el grupo 660, de Matemáticas VI en el Colegio de Bachilleres, plantel 13.

Sesión	Objetivo	Estrategia enseñanza aprendizaje
20 – abril 60 min	- Encuadre. - Explorar los conocimientos previos.	Docente. - Presentación del temario. (Anexo 2) Alumnos. - Trabajo en equipos de 4 alumnos. - Presentación de cada uno y comentaron sobre la pregunta ¿Después del bachillerato qué? - Resolución del cuestionario diagnóstico. (Anexo 1)
21 – abril 120 min	- Repasar el teorema de Pitágoras. - Conocer algunos pasajes relevantes del desarrollo histórico de la	Docente. - Lluvia de ideas para repasar el teorema de Pitágoras.

	Trigonometría.	Alumnos. - Resolución de ejercicios y revisión en el pizarrón. - Lectura "Breve reseña histórica sobre el desarrollo de Trigonometría". (Anexo 4) - Resolución del cuestionario control. (Anexo 5) Docente, alumnos. - Proyección del PowerPoint (Anexo 3), y los alumnos fueron completando la información con la información de la lectura.
23 – abril 120 min	- Construir geométrica y algebraicamente la razón áurea en un segmento de recta.	Docente. - Lluvia de ideas y preguntas exploratorias para recuperar lo visto en la sesión anterior. - Presentación del concepto de razón áurea. Alumnos. - Midieron el largo y ancho de una tarjeta de metrobús, o la credencial del INE. - Construcción geométrica de la razón áurea con el método de triangulación pitagórica. (Anexo 6) - Construcción algebraica de

		la razón áurea para un segmento de recta en el pizarrón.
	- Construir un hexágono, pentágono y decágono regular con regla y compás	Docente. - Presentación del método para la construcción del hexágono, pentágono y decágono con regla y compás. Alumnos. - En su cuaderno construyen un pentágono, hexágono y decágono regular con regla y compás. (Anexo 7)
27 – abril 60 min	- Reflexionar sobre la relación pitagórica que existe entre los lados de un decágono, un hexágono y un pentágono regular. - Identificar la razón áurea en las longitudes de los lados del hexágono y el decágono.	Docente. - Lluvia de ideas y preguntas exploratorias para recuperar lo visto en la sesión anterior. - Promueve la participación. - Facilita la reflexión de la relación pitagórica, analizando las figuras regulares construidas la clase anterior. Alumnos - Resolución del ejercicio “Haciendo cuentas te das cuenta” (Anexo 8) - Revisión del ejercicio en voz alta.

		- Lectura “Elementos de Euclides: La razón áurea y los polígonos regulares”, se hace la generalización de la relación pitagórica de las longitudes de los lados de los polígonos construidos.
28 – abril 120 min	- Conocer el procedimiento que siguió Ptolomeo para determinar el valor de la cuerda de algunos ángulos. - Determinar la relación entre la cuerda y el seno. - Determinar el coseno. - Conocer y utilizar el teorema de Ptolomeo para determinar la cuerda de algunos ángulos.	Docente. - Lluvia de ideas y preguntas exploratorias para recuperar lo visto en la sesión anterior. - Promueve la participación. - Facilita el conocimiento siguiendo el procedimiento de Ptolomeo para: determinar la cuerda de los ángulos de 36°, 60° y 72° y para sus ángulos suplementarios de 108°, 120°, 144° respectivamente. Alumnos. - Completan la tabla de cuerdas. (Anexo 9) - Resuelven el cuestionario. (Anexo 10) - Lectura del “Teorema de Ptolomeo”. (Anexo 11) - Utilización del teorema de

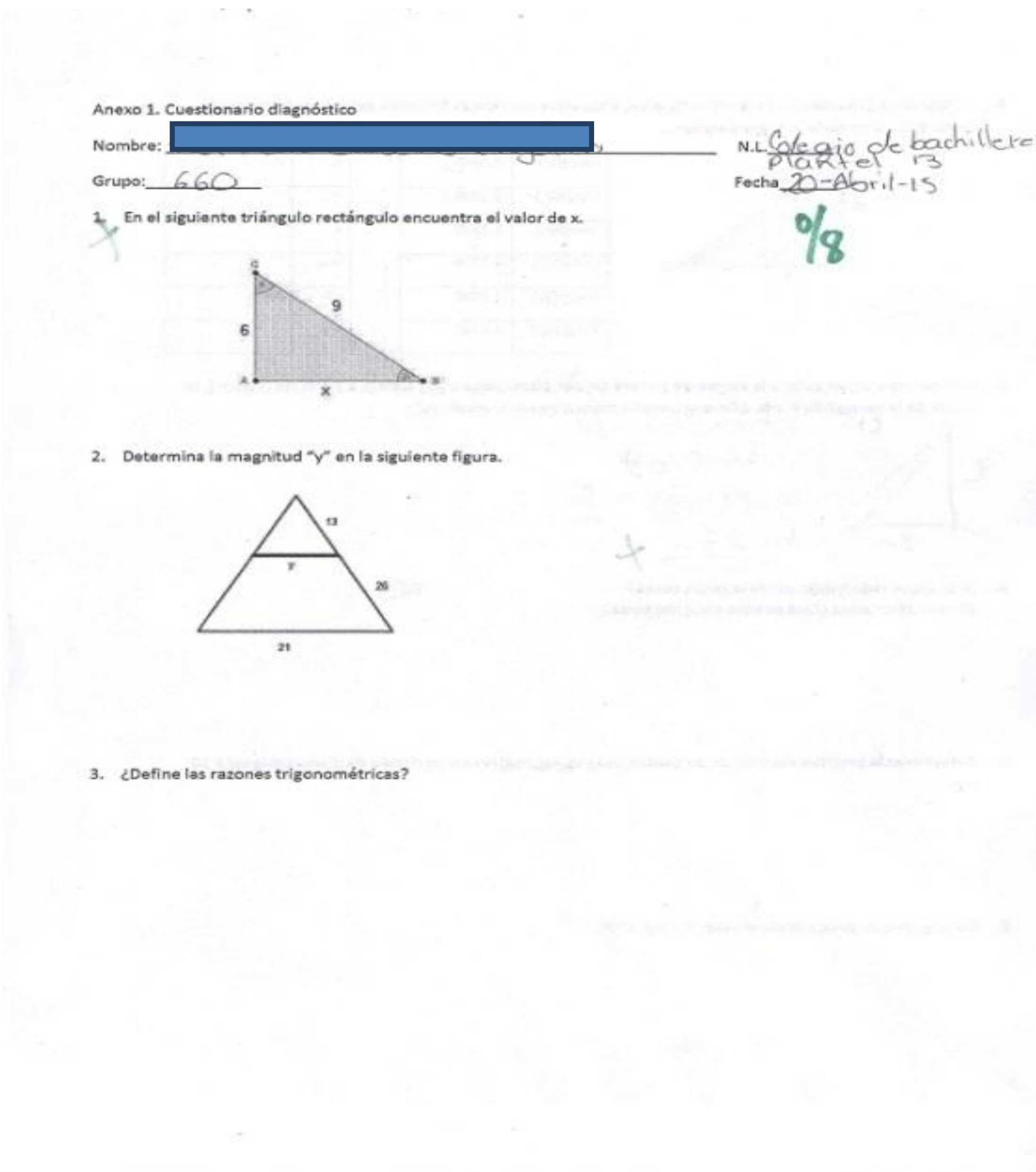
		Ptolomeo para determinar la cuerda de 12°, 18° y 24°. La actividad la resuelven de tarea.
30 –abril 120 min	- Conocer la relación pitagórica para el seno y coseno. - Conocer las identidades trigonométricas del seno y coseno para la suma y diferencia de dos ángulos. - Utilizar las identidades en la resolución de ejercicios.	Docente. - Lluvia de ideas y preguntas exploratorias para recuperar lo visto en la sesión anterior. - Promueve la participación - En el pizarrón junto con el grupo desarrolla geométricamente la identidad trigonométrica pitagórica $sen^2(\alpha) + cos^2(\alpha) = 1$. - Facilita la formación del conocimiento mediante la utilización de esquemas, el triángulo rectángulo y "una figura seis identidades". Alumnos. - Completan la actividad de "Una figura seis identidades" para la suma y diferencia de dos ángulos. (Anexo 12) - Resuelven ejercicios del seno y coseno de la suma y diferencia de dos ángulos

		utilizando los resultados de la tabla de cuerdas. (Anexo8) - Se revisan en el pizarrón los ejercicios. - Resuelven el cuestionario diagnóstico y el cuestionario de evaluación docente.

3.2.4.1Experimentación.

A los alumnos se les entregó material impreso (Anexos), que mayormente trabajaron en el salón de clases. A continuación se presentan algunas de las evidencias de los alumnos.

20 de abril. Cuestionario diagnóstico.


Anexo 1. Cuestionario diagnóstico

Nombre: [redacted] N.L. Colegio de bachilleres plantel 13

Grupo: 660 Fecha 20-Abril-15

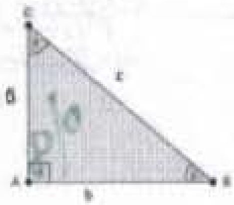
0/8

1. En el siguiente triángulo rectángulo encuentra el valor de x.

2. Determina la magnitud "y" en la siguiente figura.

3. ¿Define las razones trigonométricas?

4. Utilizando la información de la primera tabla, encuentra los valores faltantes del siguiente triángulo rectángulo. Completa la segunda tabla.

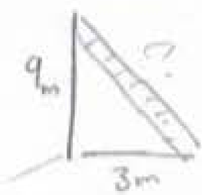


sen(60°)	0.8660
Cos(60°)	0.5000
Tan(60°)	1.7320
Cot (60°)	0.5774
Sec (60°)	2.0000
Csc (60°)	1.1547

a	5
b	
c	
< α	
<β	60°
<γ	

X

5. Una persona desea subir a la azotea de su casa de dos pisos, pone una escalera a 3 mts de la pared, la altura de la casa es de 9 mts. ¿De qué tamaño tiene que ser la escalera?



h = c.o c.a

h = (9)(3)

h = 27m X

6. ¿Has escuchado hablar sobre la razón aurea? Si/No
En caso afirmativo ¿Qué puedes decir del tema?

7. Determinar la longitud del lado de un pentágono regular inscrito en un círculo de diámetro igual a 10 cm.

8. Sin usar calculadora, calcula el valor del sen 150°.

30 de abril.

Anexo 1. Cuestionario diagnóstico

Nombre: [redacted] N.L. 12

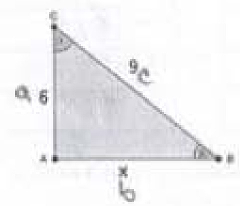
Grupo: 660 Fecha 30 Abril-15

$=6.7$

$5.5/8$

1. En el siguiente triángulo rectángulo encuentra el valor de x.

Si



$c^2 = a^2 + b^2$

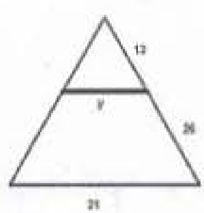
$b^2 = c^2 + a^2$

$b^2 = 9^2 - 6^2$

$b = \sqrt{81 - 36}$

$b = 6.7$

2. Determina la magnitud "y" en la siguiente figura.



X

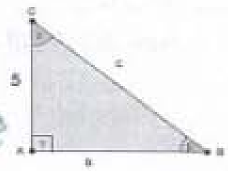
3. ¿Define las razones trigonométricas? ?

Son herramientas utilizadas para determinar algun lado de un triangolo.

30 de abril.

4. Utilizando la información de la primera tabla, encuentra los valores faltantes del siguiente triángulo rectángulo. Completa la segunda tabla.

f.d = 8/2.2

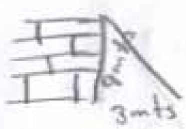


sen(60°)	0.8660
Cos(60°)	0.5000
Tan(60°)	1.7320
Cot (60°)	0.5774
Sec (60°)	2.0000
Csc (60°)	1.1547

a	5
b	
c	
<α	36°
<β	60°
<γ	90°

1/2

5. Una persona desea subir a la azotea de su casa de dos pisos, pone una escalera a 3 mts de la pared, la altura de la casa es de 9 mts. ¿De qué tamaño tiene que ser la escalera?



$c^2 = a^2 + b^2$
$c^2 = 9^2 + 3^2$
$c = \sqrt{81 + 9}$
$c = \sqrt{90}$

c = 9.48 mts

X

6. ¿Has escuchado hablar sobre la razón aurea? Si/No
En caso afirmativo ¿Qué puedes decir del tema?

Es la medida que se encuentra en el partenon y se encuentra cuando una recta es "cortado" y el cacho mayor es ala recta entera como el cacho mayor es al cacho pequeño.

7. Determinar la longitud del lado de un pentágono regular inscrito en un círculo de diámetro igual a 10 cm.

8. Sin usar calculadora, calcula el valor del sen 150°.

Sen (150°) = Sen (90°+60°) = Sen 60° Cos 90° + Cos 60° Sen 90° =
(0.8660)(0) + (0.5)(1) = 0.5

El alumno asistió a las 6 sesiones de la práctica docente.

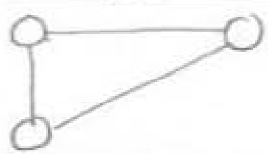
21 de abril, control de lectura, trabajo en parejas.

Anexo 3.

Nombre [redacted]

Institución Col. Bachilleres 13

Fecha 21-Abril-2015

Pregunta	Respuesta
Para los griegos ¿Por qué eran importantes las matemáticas?	Ya que eris ne explicación pará todo lo que veían ?
¿Cómo es que surge el desarrollo de la Trigonometría?	Surge a partir de la neresidad de poder explicar los fenemos que empezarón a traverz de la observación repefida de la sombra. ?
Define las razones trigonométricas	$sen = \frac{co}{hip}$ $cos = \frac{ca}{hip}$ $tan = \frac{co}{ca}$ $cot = \frac{ca}{co}$ $sec = \frac{hip}{ca}$ $csc = \frac{hip}{co}$
Realiza: Un esquema que represente el desarrollo de Erastóstenes para determinar la circunferencia de la Tierra. Desarrolla el procedimiento que siguió Erastóstenes. Un esquema que represente el desarrollo de Hiparco de Nicea para determinar la distancia de la Tierra a la Luna. Desarrolla el procedimiento que siguió Hiparco de Nicea.	 Atrás

Esquema de Erastóstenes

$3440\,Km$ —— $0.51°$

$2\pi R$ —— $360°$

$$2\pi R = \frac{3440 \cdot 360}{0.51}$$

$2\pi R = 2{,}428{,}235.29$

$R = \int 2{,}428{,}235.29$

$R = 386{,}465.65$

Esquema ~~de~~ Hiparco de Nicea

$3.440 \quad - 0.51$

$x \quad 360°$

$$x = \frac{3.440 \times 360}{0.51}$$

$x = 252{,}000$ estadios

$y = 39.690.000$ mts

$y = 40.000$ Km

Anexo 3.

Nombre [redacted]

Eduardo

Institución Colbach I5

Fecha 27-04-2015

Rev

Pregunta	Respuesta
Para los griegos ¿Por qué eran importantes las matemáticas?	Para explicar los fenomenos naturales La astronomia, geografia han echo posible el desarrollo de la trigonometria. Todo en conjunto servia para navegar
¿Cómo es que surge el desarrollo de la Trigonometría?	Gracias al estudio de la astronomia por Aristaco de Samos Erastostenes
Define las razones trigonométricas	X
Realiza: Un esquema que represente el desarrollo de Erastóstenes para determinar la circunferencia de la Tierra. Desarrolla el procedimiento que siguió Erastóstenes. Un esquema que represente el desarrollo de Hiparco de Nicea para determinar la distancia de la Tierra a la Luna. Desarrolla el procedimiento que siguió Hiparco de Nicea.	 3,440 → 0.51 360° (2πR) 3940 – 0.51° 2πR – 386,465.65 3440 km — 0.51° 2πR — 360° $2\pi R = \frac{(3440)(360)}{.51}$ 2πR = 2,428,235.29 $R = \frac{2,428,235.25}{2\pi}$ = 386,465.65 (Km) distancia entre la luna y la tierra

falta completar.

En este último reporte, los alumnos no definieron las razones trigonométricas y el último inciso no lo pudieron completar.

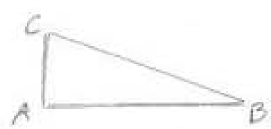
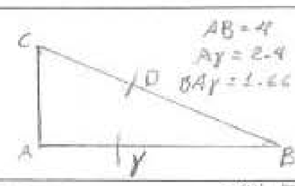
23 de abril. Construcción geométrica de la razón áurea.

[redacted]

Grupo: 660

TW.

Anexo 4. Cómo construir geométricamente la proporción áurea.

Para cortar cualquier línea de acuerdo con la proporción áurea, puedes usar el método de triangulación pitagórica del modo siguiente:	
1. Dibuja un segmento de recta con extremos A y B	
2 .Dibuja un segmento de recta que forme un ángulo recto en el punto B y denomina C a su extremo; la longitud de este segmento debe ser la mitad que la de la de AB.	
3. Dibuja una línea que conecte A con C. Has construido un triángulo rectángulo pitagórico.	
4. Sitúa la punta del compás en el punto C y, con un radio CB, dibuja un arco que corte AC en el punto X.	
5. Sitúa la punta del compás en A y con un radio AX, dibuja un arco que corte AB en el punto Y. Este punto Y divide la línea AB siguiendo la proporción áurea.	

$\frac{4}{y} = \frac{y}{4-y} =$

$4(4-y) = y^2$

$16 - 4y = y^2$

$0 = y^2 + 4y - 16$

$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$a = 1$
$b = 4$
$c = -16$

$x = \frac{-4 \pm \sqrt{(4)^2 - 4(1)(-16)}}{2(1)}$

$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4(1)(-16)}}{2}$

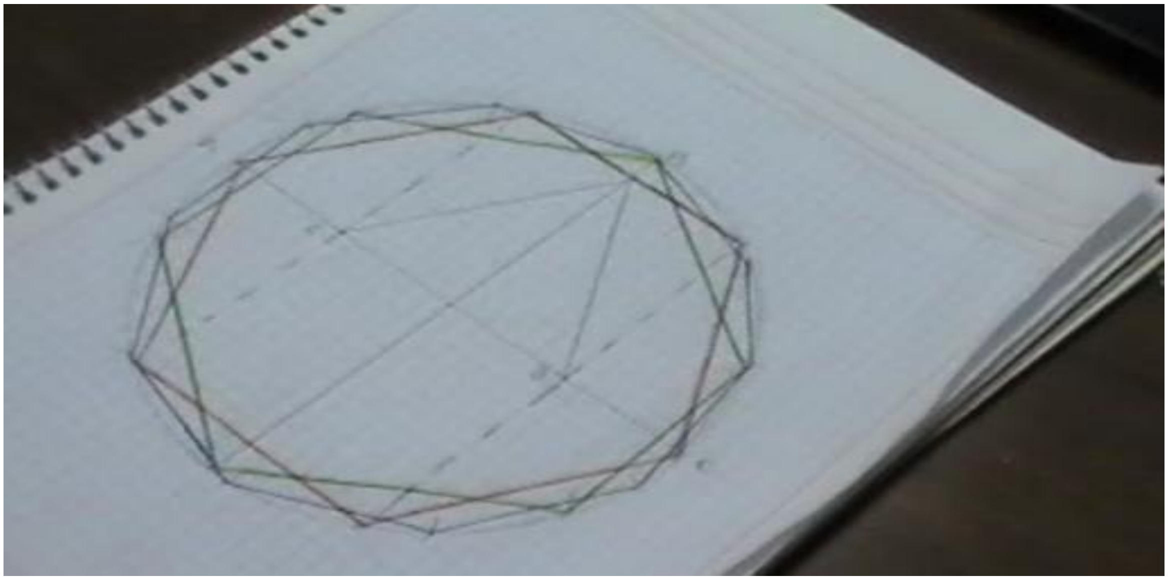
$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 64}}{2}$

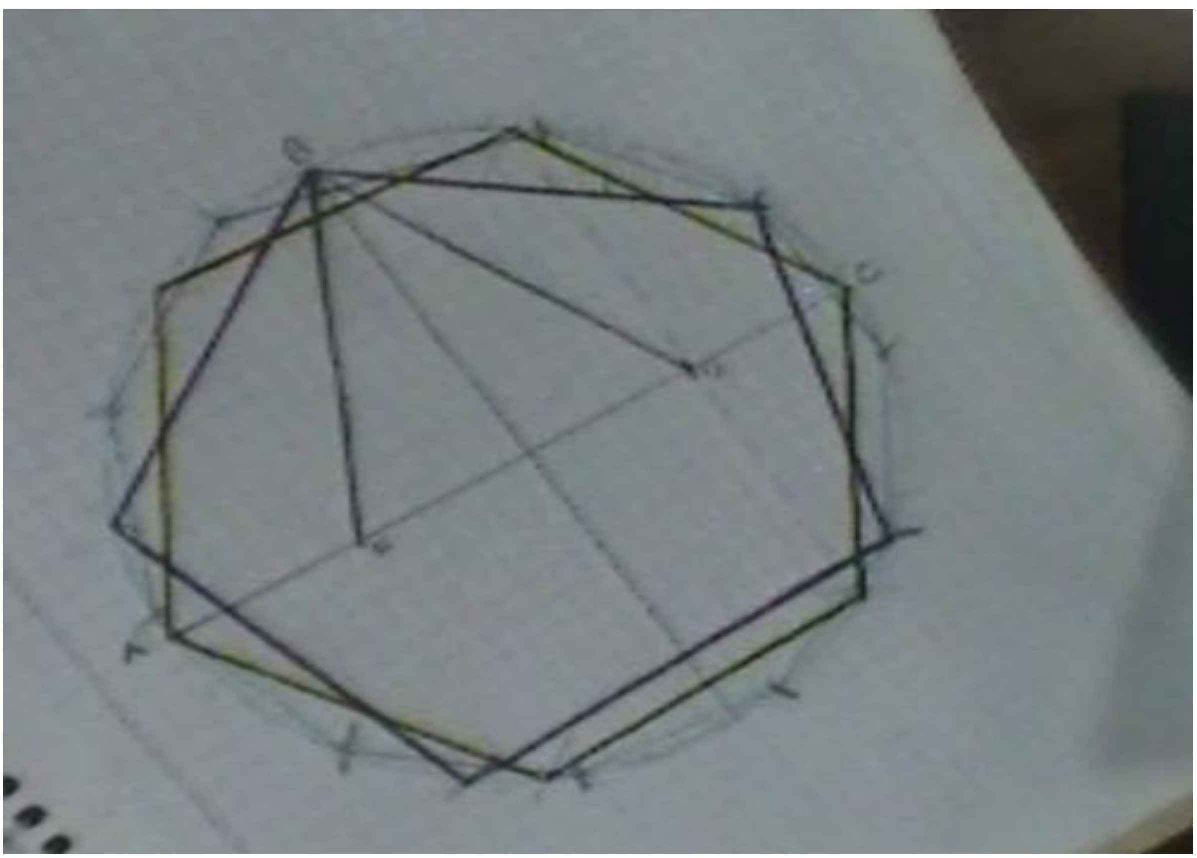
$x = \frac{-4 \pm \sqrt{80}}{2}$

$y_1 = \frac{-4 + 8.9}{2} = \frac{4.9}{2} = 2.95$

$y_2 = \frac{-4 - 8.9}{2} = \frac{-12.9}{2} = -6.45$

Construcción de polígonos regulares con regla y compás (fotografías de su cuaderno).



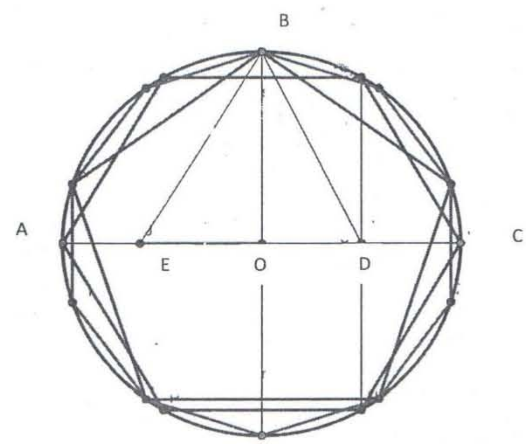


27 de abril “Haciendo cuentas te das cuenta”.

[redacted]

Anexo 6. “Haciendo cuentas te das cuenta”…

Considerando que la circunferencia que circunscribe a los polígonos, tiene un radio de 60 completa la siguiente tabla.



Segmento	Medida
OA	60
OB	60
OC	60
OD	30
DB	67.0820
OE	37.0820
ED	67.0820
EB	70.53470

Determina:

$$\frac{AO}{EO} = \frac{60}{37.08} = 1.68 \approx$$

*Nota: Fíjate que por construcción DB=ED y por ello OE es la diferencia entre DE y OD

28 de abril. Construcción de tabla de cuerdas.

Rev. Completar.

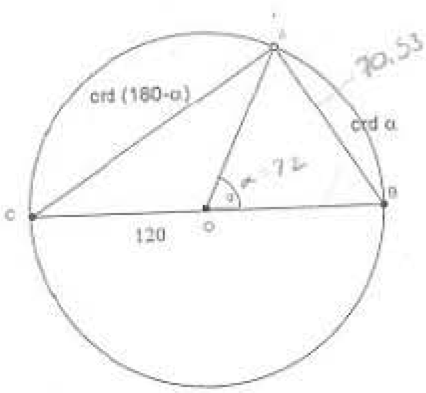
Nombre [redacted]

Institución Colegio de bachilleres No13 Xochimilco - tepepan

Fecha 27 / abril / 2015

A partir de la información obtenida en la construcción del decágono, hexágono, y pentágono regular sobre las medidas de las cuerdas, completa la siguiente tabla.

Ángulo α	Crd α	$\frac{\alpha}{2}$	$sen(\frac{\alpha}{2}) = \frac{crd\alpha}{120}$	Cos $(\frac{\alpha}{2})$
12°	12.06	6	0.10	0.97
18°	21.99	9	0.18	0.92
24°	25.12	12	0.20	0.90
36°	37.08°	13	0.309	0.79
60°	60°	30	0.5	0.57
72°	70.53°	36	0.58 775	0.33
90°	84.85	45	0.7070	0.089
108°	97.08	54	0.8	0.123
120°	103.47	60	0.86	0.24
144°	114.47	72	0.95	0.41



$Crd(180° - a) = \sqrt{(120)^2 - (crd\,\alpha)^2}$

$crd(180° - 60) = \sqrt{(120)^2 - (c}$

$= 103.92$

$crd\ C$

$Crd(180° - 36° = \sqrt{(120)^2 - (crd}$

$=$

Nombre [redacted]

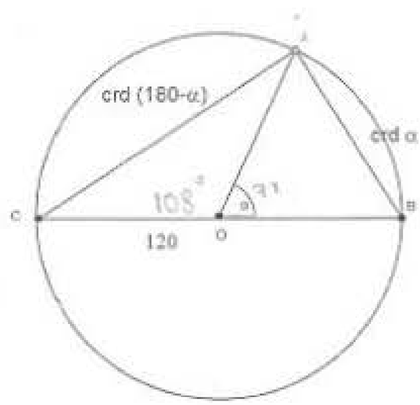
Institución Colegio de Bachilleres Plantel 13

Fecha 27 - Abril - 2015.

Bien.

A partir de la información obtenida en la construcción del decágono, hexágono, y pentágono regular sobre las medidas de las cuerdas, completa la siguiente tabla.

Ángulo α	Crd α	$\frac{\alpha}{2}$	$sen(\frac{\alpha}{2}) = \frac{crd\alpha}{120}$	Cos $(\frac{\alpha}{2})$
12°	13.66	6	0.108	0.994
18°	21.49	9	0.183	0.481
24°	25.12	12	0.209	0.978
36°	37.08	18	0.309	0.9510
60°	60	30	0.5	0.8660
72°	70.53	36	0.58775	0.8090
90°	84.85	45	0.7071	0.7071
108°	97.08	54	0.8090	0.5877
120°	103.92	60	0.8660	0.5
144°	114.47	72	0.9539	0.3090



Nombre [redacted]

Institución Colegio de Bachilleres Plantel 13

Fecha 28 - Abril - 2015

Rev.

Completa lo siguiente.

Preguntas	Respuestas
Con tus propias palabras puedes explicar ¿Qué es la razón aurea?	Es una proporción 1.68 ? ✓
Con tus propias palabras puedes explicar ¿Cuál es la relación entre las cuerdas y el seno?	En que si la cuerda se divide en 120 da el seno en el caso de un radio = 60
Puedes generalizar la fórmula para encontrar las cuerdas de ángulos suplementarios. ¿Cómo sería?	$(AB \cdot DC) + (AC \cdot BD) = AD \cdot BC$. ✗
Si sabemos que el sen 6° = 0.1045, ¿Cuál es la medida de la cuerda que le corresponde a un ángulo 12°?.	$AB \sqrt{(120)^2 - (crd\ 72°)^2} = 96.02$ $DC = crd\ 60° = 60$ $AC = 120$ $BD = ?\ 12.06$ ✓ $AD = crd\ 120° = 103.92$ $crd\ 72° = 70.53$

Nombre [redacted]

Institución Colegio de Bachilleres

Fecha 28/abril/2015

Rw

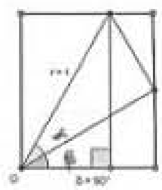
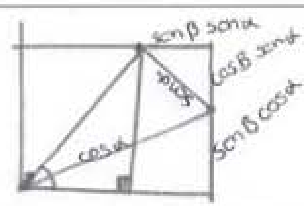
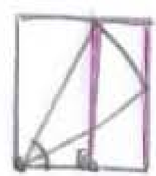
Completa lo siguiente.

Preguntas	Respuestas
Con tus propias palabras puedes explicar ¿Qué es la razón aurea?	es la medida que esta en el portonai ? y es una razón
Con tus propias palabras puedes explicar ¿Cuál es la relación entre las cuerdas y el seno?	que al dividir la cuerda de cualquier ángulo entre 120° da el valor del seno X
Puedes generalizar la fórmula para encontrar las cuerdas de ángulos suplementarios. ¿Cómo sería?	$Crd(180-\alpha)=\sqrt{120^2-crd\,\alpha^2}$
Si sabemos que el sen 6° = 0.1045, ¿Cuál es la medida de la cuerda que le corresponde a un ángulo 12°?.	13.06

30 de abril. Construcción de identidades trigonométricas.

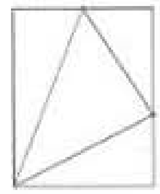
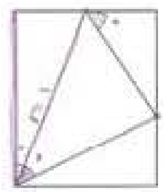
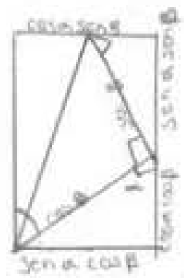
Construcción del seno y coseno de la suma de dos ángulos.

Completar

<table>
<tr><td>Construye "una figura seis identidades"</td><td></td></tr>
<tr><td>Define los ángulos α, β y la hipotenusa igual a 1 en el triángulo que contiene al ángulo (α + β)</td><td></td></tr>
<tr><td>Identifica las razones trigonométricas de seno y coseno en los triángulos rectángulos que se forman con los ángulos α y β</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Define el seno y coseno para el ángulo α en el triángulo rectángulo de menor área</td><td>sen C
</td></tr>
<tr><td>Identifica las razones trigonométricas de seno y coseno para el triángulo rectángulo en el cual está definido el ángulo (α + β)</td><td>sen (α + β) = Senα

cos (α + β) = cosα senβ − senβ senα</td></tr>
</table>

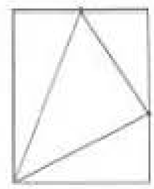
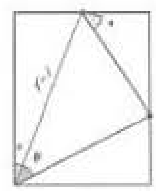
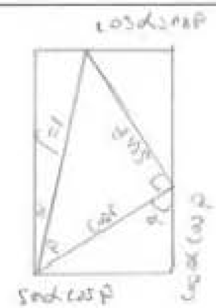
Construcción del seno y coseno de la diferencia de dos ángulos

Construye "una figura seis identidades"	
Define los ángulos α, β y la hipotenusa igual a 1 en el triángulo que contiene al ángulo (α - β)	
Identifica las razones trigonométricas de seno y coseno en todos los triángulos rectángulos que se forman con los ángulos α y β	
Identifica las razones trigonométricas de seno y coseno para el triángulo rectángulo en el cual está definido el ángulo (α - β)	sen(α - β) = sen α cos β + cos α sen β cos (α - β) = cos α cos β + sen α sen β

Revisar signo

[redacted]

Construcción del seno y coseno de la diferencia de dos ángulos

Construye "una figura seis identidades"	
Define los ángulos α, β y la hipotenusa igual a 1 en el triángulo que contiene al ángulo (α - β)	
Identifica las razones trigonométricas de seno y coseno en todos los triángulos rectángulos que se forman con los ángulos α y β	
Identifica las razones trigonométricas de seno y coseno para el triángulo rectángulo en el cual está definido el ángulo (α - β)	**sen(α - β) =** Senα cosβ − Cosα senβ cos (α - β) = Cosα cosβ + Senα Senβ

3.3 Informe de la intervención, resultados y valoración de la propuesta.

La reflexión sobre la acción se compone de tres rubros:

- Resultados del cuestionario diagnóstico, aplicado en la primera y última sesión de la intervención.
- Resultados de las actividades.
- Observaciones a posteriori.

3.3.1 Resultados del cuestionario diagnóstico.

El cuestionario de evaluación diagnóstica se aplicó a los alumnos en la primera y última sesión de la intervención. Siempre que se va a estudiar un tema nuevo, se utilizan conceptos de temas anteriores y es importante para los docentes saber si los alumnos los poseen. El cuestionario se aplicó a los alumnos del grupo 660 de Matemáticas VI del Colegio de Bachilleres; cabe señalar, que dada la estructura curricular de esta materia en el Colegio de Bachilleres, los alumnos ya habían recibido la instrucción correspondiente al tema, por lo que se esperaría que todos los alumnos pudieran resolverlo sin ningún contratiempo.

El cuestionario consta de 8 preguntas que abarcan diversos temas relacionados con la Trigonometría. El cuestionario diagnóstico se aplicó en la primera sesión (20-abril) a 21 personas. Cabe destacar, que sólo un alumno logró resolver correctamente las preguntas relacionadas con el teorema de Pitágoras. El resto del grupo tuvo problemas para interpretar y relacionar algunos conceptos de Trigonometría que ya habían estudiado, por lo que empecé con una lluvia de ideas, promoviendo la participación para favorecer el recuerdo del tema.

La siguiente tabla muestra el número de personas que contestaron correctamente a cada pregunta, para cada una de las dos fechas de aplicación. En ambas fechas el cuestionario se aplicó a 21 alumnos.

Pregunta/Tema	20-abr	30-abr
1. Teorema de Pitágoras	1	14
2. Proporcionalidad	3	6
3. Razones trigonométricas	1	3
4. Razones trigonométricas	0	5
5. Teorema de Pitágoras (problematización)	1	5
6. Razón áurea	0	6
7. Perímetro de una pentágono	0	7
8. Identidades trigonométricas	2	10

Como se puede observar, hay una mejoría del número de aciertos entre la primera fecha de aplicación y la última.

En relación a las preguntas del cuestionario diagnóstico que llevaron a evaluar el teorema de Pitágoras hubo un incremento en el número de aciertos, en especial en la pregunta, donde se presentó un esquema y los alumnos tenían que determinar la medida de un dato faltante; sin embargo, en el caso que tenían que problematizar, les costó mucho trabajo y sólo 4 alumnos más lograron resolverlo.

En las preguntas sobre las razones trigonométricas, tuvieron una mejoría en el caso operativo donde tenían que despejar y mostrar el manejo de las razones. En cuanto a las definiciones tuvieron confusión.

En relación a las preguntas sobre la razón áurea y el uso de las identidades trigonométricas, hubo una importante mejoría en su definición y utilización.

Este grupo del Colegio de Bachilleres tiene 34 alumnos inscritos. La asistencia fue muy variada tal como lo muestra el siguiente cuadro. En ninguna de las sesiones asistieron la totalidad de los alumnos.

Fecha	Asistencia
20-abr	21
21-abr	9
23-abr	19
27-abr	31
28-abr	17
30-abr	21

De los 21 alumnos que asistieron a la primera y última sesión, sólo 16 alumnos estuvieron presentes en ambas sesiones. De estos 16 alumnos, sólo 9 estuvieron presentes en las 6 sesiones de mi práctica docente.

La siguiente tabla muestra el número de alumnos por aciertos en el cuestionario diagnóstico en ambas sesiones.

Núm. de aciertos	20 - abr	30-abr
0	9	0
1	9	2
2	1	2
3	2	8
4	0	4
5	0	3
6	0	2
7	0	0
8	0	0
Total alumnos	21	21

El cuadro anterior muestra que en el cuestionario diagnóstico aplicado el 20 abril, ningún alumno obtuvo una calificación aprobatoria y la mayor concentración está en uno o ningún acierto. Después de la intervención, ningún alumno tuvo cero aciertos y la mayor concentración estuvo en 3 aciertos; definitivamente se tuvo un bajo resultado.

Considero que un factor determinante es la inasistencia, puesto que los 5 alumnos que obtuvieron una calificación aprobatoria asistieron a las 6 sesiones de la práctica docente.

Las cifras no son muy alentadoras puesto que son alumnos del último semestre y muy posiblemente en fechas próximas vayan a presentar un examen de admisión para ingreso a la universidad.

3.3.2. Resultados de las actividades.

A continuación se detallan algunos resultados de las actividades que se llevaron a cabo con el grupo 660 del Colegio de Bachilleres.

1) De acuerdo al cuestionario de evaluación docente, el 80% de los alumnos estuvieron de acuerdo en que los contenidos vistos en el aula despertaron su interés en la Trigonometría.
2) De acuerdo al cuestionario de evaluación docente, el 53% de los alumnos estuvieron totalmente de acuerdo en que las actividades realizadas en el aula, les ayudaron a comprender mejor el tema. Este dato me parece significativo, puesto que es una apreciación de los alumnos en su propio proceso de aprendizaje.
3) Por su diseño, los materiales que se utilizaron en la secuencia didáctica, favorecieron principalmente los estilos de aprendizaje kinestésico y visual.
4) Al final de cada clase les solicité el material con el que habían trabajado, se les devolvió la siguiente clase con las anotaciones que consideraba pertinentes. La evaluación fue formativa, tanto para los alumnos como para mí; los alumnos podían revisar en qué se habían equivocado y yo podía darme cuenta cuáles eran las áreas de oportunidad que había que trabajar.
5) El material didáctico se les fue entregando sesión por sesión, no obstante para algunos alumnos fue muy pesado e incluso me comentaron que hubiera sido mejor que desde la primera clase se les entregara todo completo, puesto que en ocasiones tienen que faltar.
6) En la actividad sobre la lectura de la breve reseña histórica de la Trigonometría, se esperaba que los alumnos pudieran desarrollar la manera en que Hiparco de Nicea obtuvo la distancia de la Tierra a la Luna y el desarrollo de Eratóstenes para determinar la circunferencia de la Tierra. Los alumnos en su mayoría no sabían cómo interpretar y modelar. Se les solicitó que trabajan en parejas; muy pocos pudieron completar la actividad.
7) En relación a la construcción de la proporción áurea, se esperaba que los alumnos comprendieran que el número (phi), no es racional y se construye considerando que es la razón en que un segmento puede ser dividido para

que toda su longitud sea a la parte más larga como la longitud de la parte más larga es a la de la más pequeña. Los alumnos realizaron tanto la construcción geométrica como algebraica. Se trabajó con el valor aproximado de 1.68 y no con $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Es conveniente hacer la aclaración con los alumnos.

8) En relación al esquema de “una figura seis identidades”, inicialmente los alumnos se mostraron confundidos ya que no sabían cómo empezar a ubicar los ángulos α y β, y sus correspondientes seno y coseno. Por lo que tuve que guiar a los alumnos en la ubicación de las medidas. Diciéndoles que le dieran el valor de 1 a la hipotenusa del triángulo rectángulo que se forma con la suma de dos ángulos o bien, con la diferencia de los dos ángulos, según fuera el caso. De esta manera los alumnos pudieron completar los valores de las medidas faltantes correctamente, deduciendo las identidades de seno y coseno para la suma y la diferencia de dos ángulos.
9) Después de deducir las identidades trigonométricas de seno y diferencia de dos ángulos, se les solicitó que calcularan el valor del seno y coseno de 30°, 54°, 84°, 114° y 132° como la suma o diferencia de dos ángulos. Estos cálculos debían hacerlos sin calculadora, usando los valores de las columnas de seno y coseno de la tabla de cuerdas que se había completado en clases anteriores. La gran mayoría pudo resolverlo sin problema alguno.
10) La inasistencia fue un factor que afectó fuertemente, sólo 9 alumnos pudieron completar todas las actividades. Los materiales siguen una secuencia, por lo que a pesar de que algunos alumnos me solicitaban el material de la clase a la que faltaron, se iban rezagando.
11) Casi la totalidad de los alumnos estuvieron de acuerdo en que aprendieron cosas nuevas sobre el tema y que el tiempo fue suficiente para concluir las actividades.

12) Un dato singular, es que alrededor del 57% de los alumnos estuvieron de acuerdo en memorizar fórmulas matemáticas. Este dato refleja que los alumnos no han desarrollado adecuadas habilidades matemáticas.

3.3.3. Observaciones a posteriori.

De acuerdo a los resultados del cuestionario diagnóstico, algunos alumnos obtuvieron resultados positivos entre la primera y última aplicación del mismo, a pesar de no haber logrado los resultados esperados después de mi intervención. Reflexionando sobre la acción, algunos puntos de la secuencia que sugiero modificar para una futura aplicación, básicamente serían:

1) El tiempo, para poder incluir mayor cantidad de ejercicios y trabajar en la ZDP de los alumnos; favoreciendo no sólo las posibilidades de aprendizaje en las que los alumnos pueden lograr por sí mismos, sino considerando también lo que pueden lograr con la ayuda del docente o de otro compañero más capaz.
2) Diseñar con el docente encargado incentivos para evitar que los alumnos falten, ya que la inasistencia fue uno de los factores que afectó fuertemente en su desempeño.
3) En relación a la proporción áurea, que se construye en el Anexo 6, el docente debe asegurarse que los alumnos la van utilizar como $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ y no como un valor aproximado de 1.68.
4) Hacer un seguimiento de los alumnos unos meses después para verificar que efectivamente los alumnos construyeron significados adecuados y mejoraron su aprendizaje en Trigonometría.
5) Solicitar a los alumnos al cierre de cada sesión, actividades que promuevan la toma de conciencia de los procesos que se realizaron.

Capítulo 4. Conclusiones.

La secuencia didáctica propuesta en este trabajo de tesis, proporciona elementos que favorecen el proceso de enseñanza aprendizaje en el nivel medio superior. Por un lado, plantea modelos de enseñanza y estrategias que se probaron con los alumnos; por el otro me permitió hacer un análisis sobre mi propia práctica docente, poniendo especial atención en el proceso de aprendizaje de los alumnos.

El haber considerado como punto de partida de la secuencia didáctica un fragmento del desarrollo histórico de la Trigonometría, permitió a los alumnos conocer el surgimiento de la Trigonometría, como una necesidad humana de entender algunos fenómenos de la naturaleza que a simple vista no se pueden explicar.

Durante mi práctica docente les manifesté que a través del tiempo, la notación se ha modificado pero el vínculo histórico sigue inherente a la fecha.

El proceso de determinar la tabla de cuerdas para algunos ángulos pudiera ser no del todo fascinante. El poder recrear su construcción, les permitió a los alumnos apreciar el razonamiento utilizado en la antigüedad y sobre todo apreciar cómo con pocas herramientas, se llega a resultados bastante precisos. Los alumnos percibieron que los resultados no aparecen por magia o porque sí, sino tienen todo un sustento metodológico. Hoy en día podemos determinar los valores rápidamente en una calculadora e incluso en la mayoría de los celulares, se puede determinar el valor del seno, coseno y tangente para cualquier ángulo. “Los conceptos, los axiomas y los teoremas establecidos son en su totalidad creados por seres humanos” (Kline, 2009).

En algunas ocasiones a los modelos de enseñanza centrados en el profesor se les asocia a modelos “tradicionalistas”, más como se expuso en la secuencia didáctica no tienen por qué asociarse a una enseñanza pasiva, sin participación de los alumnos. Se tomó en cuenta las ideas previas de los alumnos y se les proporcionó actividades para una participación activa, lo que les facilitó el logro de los objetivos de aprendizaje.

Gran parte de los contenidos en matemáticas, en los planes de estudio del nivel medio superior, contienen el aprendizaje de conceptos y del dominio de habilidades, por lo que el modelo de Instrucción Directa y el modelo Didáctico en las Matemáticas resultan, por su estructura, modelos viables, más no limitativos, para ser utilizados por los docentes.

A manera de una investigación posterior, se podría aplicar nuevamente la secuencia didáctica haciendo las modificaciones que se observaron a lo largo de este trabajo.

Es difícil poder reportar los sentimientos de los alumnos con respecto a matemáticas y en particular al tema de Trigonometría. Sintetizando los comentarios de los alumnos, se puede decir que la mayoría expresó que las clases fueron didácticas, les gustó darse cuenta como el conocimiento trigonométrico tuvo sus orígenes en la antigüedad y lo sorprendente es que se sigue utilizando hasta la fecha. Implícitamente los alumnos perciben a las matemáticas como algo permanente y duradero. Como dice Stewart (2007), “Las matemáticas no nacieron plenamente formadas. Fueron haciéndose gracias a los esfuerzos acumulativos de muchas personas que procedían de muchas culturas y hablaban diferentes lenguas. Ideas matemáticas que se siguen utilizando hoy datan de hace más de 4,000 años”.

Bibliografía.

1. Arends, R. I. (2007). *Aprender a enseñar.* México: McGraw-Hill Interamericana.

2. Carretero, M. (2011). *Constructivismo y Educación.* Argentina: Paidós.

3. Coll, C., Martín, E., Mauri, T., Miras, M., & Onrubia, J. (2007). *El Constructivismo en el aula.* México: Grao.

4. Cooper, J. M. (2010). Estrategias de enseñanza: Guía para una mejor instrucción. En J. M. Cooper, *Estrategias de enseñanza: Guía para una mejor instrucción* (pág. 501). México: Limusa.

5. Díaz Barriga Arceo, F., & Hernández Rojas, G. (2010). *Estrategias Docentes para un aprendizaje significativo. Una interpretación constructivista.* México: Mc Graw Hill.

6. Díaz Barriga, F. (2006). *Enseñanza Situada*. Vínculo entre la escuela y la vida. México: Mc Graw Hill.

7. Domingo Roget, A., & Gómez Serés, M. V. (2014). La Práctica Reflexiva, Bases, modelos e instrumentos. En A. Domingo Roget, & M. V. Gómez Serés, *La Práctica Reflexiva, Bases, modelos e instrumentos* (págs. 103-119). Madrid: Narcea.

8. Dorce C. (2009). *Ptolomeo El astrónomo de los círculos.* México: AGT Editor, S. A.

9. Eggen, P. D., & Kauchak, D. P. (2012). *Estrategias docentes. Enseñanza de contenidos curriculares y desarrollo de habilidades de pensamiento.* México: Fondo de Cultura Económico.

10. González Velasco, E. (2011). *Springer.* Obtenido de Journey through Mathematics: Creative episodes in its History: DOI 10.1007/978-0-387-92154-9_1, Springer science + Business Media,LLC 2011

11. Hernández Rojas, G. (2013). Paradigmas en psicología de la educación. México: Paidós Educador.

12. Kline, M. (2009). *Matemáticas para los estudiantes de humanidades.* México: Fondo de Cultura Económica.

13. Mantilla Rodríguez, A., & Cogollo Torres, J. P. (2010). *Enseñanza de las identidades trigonométricas de suma y diferencia de ángulos y del ángulo*

doble por medio de demostraciones sin palabras (Tesis Licenciatura). Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, España.

14. Montiel E., G. (2011). *Construcción de conocimiento trigonométrico. Un estudio socioepistemológico.* México: Ediciones Díaz de Santos.
15. Pickover, C. A. (2014). *El Libro de las Matemáticas.* China: Librero.
16. Pimienta Prieto, J. H. (2007). Metodología constructivistas. México: Pearson Educación.
17. Quesada Castillo, R. (2012). *Cómo planear la enseñanza estrátegica.* México: Limusa.
18. Rogoff, B. (1993). *Aprendices del pensamiento. El desarrollo cognitivo en el contexto social.* Barcelona: Paidos.
19. Salawizar G., L., & Bahena Román, H. (2011). *Geometría y Trigonometría.* México: Grupo Editorial Patria.
20. Santrock, J. W. (2003). *Psicología del Desarrollo en la Adolescencia.* Madrid: McGraw Hill Interamericana de España. S.A. U.
21. Stewart, I. (2007). *Historia de las Matemáticas. En los últimos 10.000 años.* Barcelona: Crítica.
22. Vygotski, L. S. (2012). *El Desarrollo de los Procesos Psicológicos Superiores*. Barcelona: Austral.
23. Zorrilla Alcalá, J. F. (2008). *Desarrollo de Habilidades Verbales y Matemáticas.* México: Ago.

Encuesta Nacional de la Deserción en la Educación Media Superior (ENDEMS) 2011. Consultado agosto 2015.
http://bdsocial.inmujeres.gob.mx/index.php/endems-424 .

Planes de Estudio de la Escuela Nacional Preparatoria. Consultado enero 2015.
http://dgenp.unam.mx/planesdeestudio/quinto/1500.pdf .

Planes de Estudio del Colegio de Ciencias y Humanidades. Consultado enero 2015.
http://www.cch.unam.mx/sites/default/files/plan_estudio/mapa_mateiaiv.pdf

Planes de Estudio del Colegio de Bachilleres. Consultado enero 2015.
http://www.cbachilleres.edu.mx/cb/comunidad/docentes/pdf/Reforma_curricular/Documentos/segundosemestre2014/AFB/Matematicas_II.pdf

Planes de Estudio del Instituto Politécnico Nacional. Consultado enero 2015
http://www.polivirtual.ipn.mx/OfertaEducativa/Paginas/OfertaEducativa_Bachillerato.aspx

Video de la razón áurea. Consultado noviembre 2014.
https://www.youtube.com/watch?v=Qd5pTYSby1Y

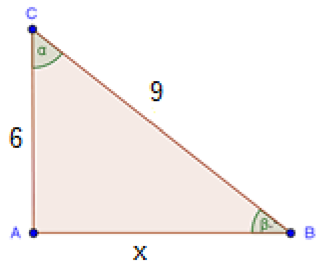
Anexos.

Anexo 1. Cuestionario diagnóstico

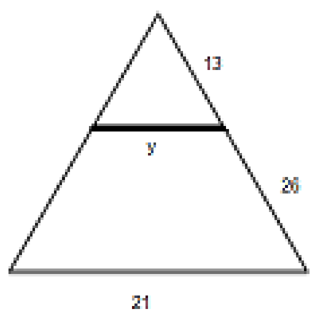
Nombre: ____ N.L._______

Grupo: ____________ Fecha______

1. En el siguiente triángulo rectángulo encuentra el valor de x.

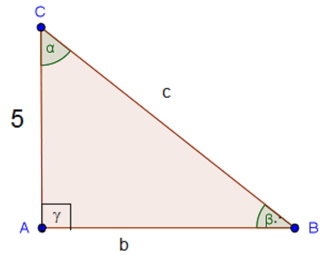


2. Determina la magnitud “y” en la siguiente figura.



3. ¿Define las razones trigonométricas?

4. Utilizando la información de la primera tabla, encuentra los valores faltantes del siguiente triángulo rectángulo. Completa la segunda tabla.



sen(60°)	0.8660
Cos(60°)	0.5000
Tan(60°)	1.7320
Cot (60°)	0.5774
Sec (60°)	2.0000
Csc (60°)	1.1547

a	5
b	
c	
< α	
<β	60°
<γ	

5. Una persona desea subir a la azotea de su casa de dos pisos, pone una escalera a 3 mts de la pared, la altura de la casa es de 9 mts. ¿De qué tamaño tiene que ser la escalera?

6. ¿Has escuchado hablar sobre la razón áurea? Si/No
   En caso afirmativo ¿Qué puedes decir del tema?

7. Determinar la longitud del lado de un pentágono regular inscrito en un círculo de diámetro igual a 10 cm.

8. Sin usar calculadora, calcula el valor del sen 150°.

Anexo 2.

Taller de Trigonometría.

Objetivo General.

Que el alumno conozca los conceptos básicos, que se utilizaron para la construcción de las tablas de cuerdas de Ptolomeo y pueda emplearlos como herramienta en la resolución de problemas de diversa aplicación.

Objetivos Particulares.

- Conocer algunos pasajes relevantes del desarrollo histórico de la Trigonometría.
- Comprender el significado de la razón áurea.
- Construir el hexágono, pentágono y decágono regular inscritos en una circunferencia, con regla y compás.
- Construir la tabla de cuerda para los ángulos de 36°, 60°, 72°, 90° y de los ángulos suplementarios correspondientes.
- Conocer y utilizar el teorema de Ptolomeo para determinar la cuerda de los ángulos de 12°, 18°, 24° como suma o diferencia de ángulos.
- Comprobar cómo a partir de las tablas de cuerdas de Ptolomeo surge el concepto de seno y coseno.
- Construir las identidades trigonométricas de suma y diferencia de seno y coseno de dos ángulos así como del ángulo doble.

Contenidos.

- Marco histórico.
    - Aristarco de Samos, Hiparco de Nicea, Eratóstenes, Claudius Ptolomeo, contribución hindú y árabe a la Trigonometría.
- Razón áurea.
- Tablas de cuerdas de Ptolomeo.
    - Construcción del hexágono, decágono y pentágono inscritos en una circunferencia.
    - Construcción de la tabla de cuerdas para los ángulos suplementarios.
- Identidades Trigonométricas.
    - Suma y diferencia de seno y coseno de dos ángulos.

Evaluación.

En la primera sesión se aplica un cuestionario diagnóstico y en cada una de las sesiones posteriores se van evaluando las actividades mediante una retroalimentación.

En la última sesión se aplica nuevamente la evaluación diagnóstico.

Material requerido.

Del alumno

- Compás, regla.

Del Docente

- Pizarrón.
- Marcadores.
- PC.
- Proyector.
- Material didáctico.

Bibliografía.

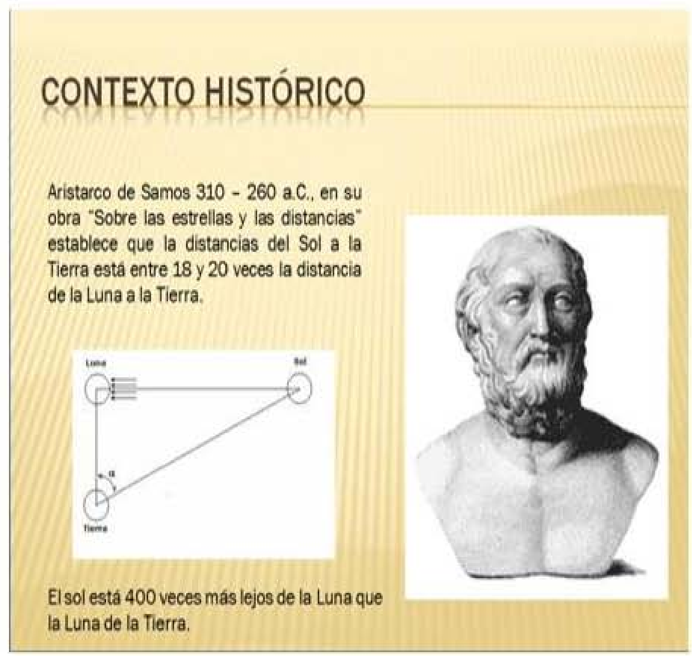
Alumnos.

- Salawizar G., L., Bahena Román, H. (2011). *Geometría y Trigonometría*. México: Grupo Editorial Patria.

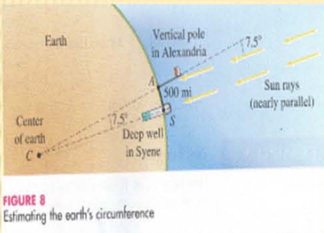
Docente.

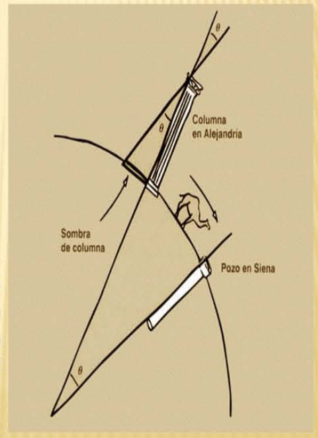
- Dorce C. (2009*). Ptolomeo El astrónomo de los círculos*. México: AGT Editor, S.A.
- Mantilla Rodríguez, A., & Cogollo Torres, J.P. (2010). Enseñanza de las identidades trigonométricas de suma y diferencia de ángulos y del ángulo doble por medio de demostraciones sin palabras (Tesis Licenciatura). Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, España.
- Montiel E., G. (2011). *Construcción de conocimiento trigonométrico. Un estudio socioepistemológico*. México: Ediciones Díaz de Santos.

Anexo 3. (Diapositivas del PowerPoint, sobre un fragmento del desarrollo histórico de la Trigonometría).



CONTEXTO HISTÓRICO



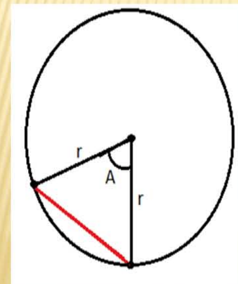


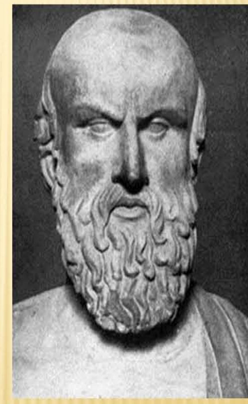
Eratóstenes 276 194 a. C. astrónomo, geógrafo, matemático y filósofo griego, vivió en Alejandría calculó la circunferencia de la tierra en 24,000 mi (38,624.26 Km).Hoy en día sabemos que la circunferencia en el ecuador es de aprox 25,000 mi (40,075 Km)

Barnett, Raymond A., y otros. 2009. *Analytic Trigonometry with Applications.* Jefferson City : John Wiley & Sons, Inc., 2009. pág. 7.

CONTEXTO HISTÓRICO

Hipárco de Nicea 180 – 125 a. C. astrónomo, construyó las primeras tablas de cuerdas. Estas tablas fueron construidas a partir de ángulos centrales entre 0° y 90° en múltiplos de 7.5°, no se tiene conocimiento del tamaño del radio que utilizó.





Dedicó su trabajo a la observación de los movimientos planetarios.

CONTEXTO HISTÓRICO

Claudius de Ptolomeo 87-150, astrónomo griego que trabajo en la biblioteca de Alejandría; es autor de "Sintaxis Matemática" mejor conocido como "Almagesto" . Incluye tablas de cuerdas de medio grado en medio grado hasta 180 grados, en un círculo de radio 60.

CONTEXTO HISTÓRICO

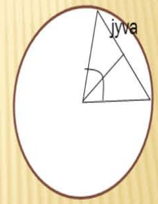
- Las culturas babilónicas, egipcias y griegas muestran la problemática de construir modelos a escala para dar respuesta a aspectos de la vida real; en particular utilizaban el triángulo.

CONTRIBUCIÓN DE LA CULTURA HINDÚ

- Con la caída del imperio romano, surgen centros de investigación en matemáticas en la India, alrededor de los siglos XV y XVI.

CONTRIBUCIÓN DE LA CULTURA HINDÚ

- Aparece el Aryabhatiya de Aryhabata (astrónomo), que es un texto escrito en verso. En este documento se habla de la media cuerda (denotada por jya, jyva) para los ángulos comprendidos entre 3°45´ y 90°.



CONTRIBUCIÓN DE LA CULTURA HINDÚ

- Los hindús remplazaron las medidas usadas por Ptolomeo del radio igual a 60 por la unidad. Dividieron el perímetro de la circunferencia en 21,600 partes que equivale a los minutos en una circunferencia completa.

CONTRIBUCIÓN DE LA CULTURA ÁRABE

- La cultura árabe no sólo asimiló los conocimientos producidos por otros pueblos sino que sirvieron como punto de partida para el desarrollo de las ciencias, en las que se destaca a la astronomía y por ende a la trigonometría.

- En el idioma árabe no existe sonido para la v por lo que jyva se cambió por jyba o jyba; la pronunciación se modifica a jaib en árabe significa seno (pecho o corazón), pliegue o bahía. Del árabe al latín jiba se traduce como sinus.

Abul Wefa (940-998)

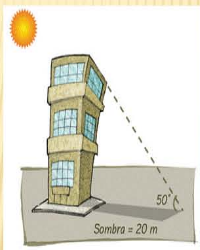
RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

Los árabes definieron las razones trigonométricas como las conocemos actualmente.

Sen $\alpha = \frac{co}{hip}$

Cos $\alpha = \frac{ca}{hip}$

Tan $\alpha = \frac{co}{ca}$



Cot $\alpha = \frac{ca}{co}$

Sec $\alpha = \frac{hip}{ca}$

Csc $\alpha = \frac{hip}{co}$

MADEMS
Maestría en Docencia para la Educación Media Superior

Gracias por su atención

Anexo 4.

Trigonometría, breve reseña histórica.[26]

La Trigonometría es una rama de las matemáticas que se encarga de estudiar las propiedades de los triángulos y las relaciones entre los ángulos y lados. En este sentido puede decirse que la Trigonometría nace desde que las primeras mediciones hechas por el hombre daban lugar a triángulos; posteriormente su estudio ha ido tomando gran importancia por sus múltiples aplicaciones. En la antigüedad todo empezó con un palo enterrado en la tierra y observando la dirección y longitud de la sombra proyectada. A través de la observación repetida de la sombra, los griegos pudieron determinar la duración del día, del año y las fechas de los solsticios. Los griegos nombraron este palo como gnomon, palabra griega que tiene las mismas raíces de "para aprender".

En todas las épocas, la curiosidad de los científicos no sólo se limita a explicar los fenómenos en la tierra, sino a descifrar los misterios del Sol, la Luna y las estrellas. Por lo que la astronomía junto con la geografía, han hecho posible el desarrollo de la Trigonometría.

El astrónomo griego Aristarco de Samos (310 – 230 a. C.) en su obra "Sobre las estrellas y las distancias al Sol y la Luna", argumentó que el Sol, la Luna y la Tierra forman un triángulo recto en el momento de cuarto creciente o menguante, estimaba que el ángulo opuesto al cateto mayor era de 87°, usó una correcta geometría pero datos de observación inexactos. Aristarco concluyó erróneamente que el Sol estaba 20 veces más lejos que la Luna. Realmente el Sol está 390 veces más lejos.

Otro cálculo que utilizó diferentes conceptos geométricos, fue el originado por la medida de la Tierra, una de las mediciones más precisas por los fundamentos involucrados fue la realizada por Eratóstenes (280 a. C) en la cual inventó y empleó un método trigonométrico, él sabía que en la ciudad de Siena (hoy Asuán en Egipto) el día del solsticio de verano los objetos no proyectaban sombra alguna y la luz alumbraba el fondo de los pozos, esto significaba que el Sol estaba directamente encima de la ciudad, es decir, en el cenit. Eratóstenes suponía que Siena y Alejandría tenían la misma longitud y el Sol se encontraba tan alejado de la Tierra que sus rayos podían suponerse paralelos; midió la sombra en Alejandría el mismo día del solsticio de verano al medio día, demostrando que los rayos del Sol inciden directamente en Siena pero en Alejandría formaban un ángulo con la vertical, ese ángulo es igual al que formarían las verticales de las dos ciudades si los prolongamos hasta el centro de la Tierra. Es decir, es igual a la diferencia geográfica entre Siena y Alejandría. Eratóstenes comprobó que el ángulo α era de alrededor de 7.5° y dado que la distancia entre las dos ciudades se calculaba en 5250 estadios [27]entonces la medida de la

[26] Tomada de Zorrilla Alcalá, J. F. (2008). *Desarrollo de Habilidades Verbales y Matemáticas.* México: Ago, pag 135-138

[27] Un estadio es una medida antigua que equivale a cerca de 157.5 metros.

circunferencia total de la Tierra se calculaba en 252,000 estadios, aproximadamente 40,000 Km.

Hasta el momento no hemos hablado de Trigonometría tal como se le designa en la matemática moderna, los antecedentes que dejaron las culturas babilónicas, griega y egipcia en sus inicios muestran que la problemática de construir un modelo a escala, con base en los datos empíricos acumulados, sienta las bases para la construcción de un cuerpo teórico que más adelante se llamaría Trigonometría.

El fundador de la Trigonometría fue el gran astrónomo, Hiparco de Nicea (190 – 120 a. C) y se considera que los cálculos y modelos que utilizó son algunas de las más importantes bases de la Trigonometría por dar aproximaciones muy buenas. Fue el primero en construir unas tablas trigonométricas.

En astronomía, determinó la primera medida del tamaño de la Luna y la distancia a la que se encuentra de nosotros. Utilizó el método que había ideado Aristarco de Samos ciento veinte años antes, cuando aún no se había determinado el tamaño de la Tierra. Se sabía que los eclipses de luna se producen porque la Tierra se interpone entre el sol y esta. Así la sombra de la Tierra proyectada sobre la superficie de la Luna va avanzando hasta que la cubre completamente. Una vez terminado el eclipse, Hiparco completó los círculos que corresponden a las sombras y midió la relación entre los círculos de la silueta de la Luna y la sombra de la Tierra. Finalmente, llegó a la conclusión de que la relación entre ambos radios era:

$$\frac{Radio\ Tierra}{Radio\ Luna} = 3.7$$

La medida que tenían en esos tiempos para el radio de la tierra era de 6,364 km por lo tanto el radio de la Luna resultaba ser de 1720 Km, valor muy aproximado al de la actualidad.

Una vez que se conoce el tamaño real de la Luna, es fácil calcular la distancia a la que se encuentra de la Tierra a partir del ángulo con que se ven los bordes más separados de la circunferencia que la limita. Este ángulo es de 0.51°, entonces una forma de calcular la distancia entre la Luna y la Tierra es utilizando la siguiente proporción:

Si al diámetro de la Luna (3,440 km) le corresponden 0.51°, a la longitud de la órbita lunar (2 π R) le corresponden 360°. El radio (R) de la órbita es la distancia entre la Luna y la Tierra, la cual resultó ser, aproximadamente, 386,465 km, cifra que constituye una estimación magnífica de la realidad.

Claudius de Ptolomeo (87-150), astrónomo griego que trabajó en la biblioteca de Alejandría; es autor de “Sintaxis Matemática” mejor conocido como “Almagesto”. Incluye tablas de cuerdas de medio grado en medio grado hasta 180 grados, en un círculo de radio 60.

Con la declinación del imperio romano, el centro de la investigación matemática comenzó a desplazarse hacia la India y más tarde se desplazó hacia Mesopotamia.

Aparece el Aryabhatiya de Aryhabata (astrónomo), que es un texto escrito en verso. En este documento se habla de la media cuerda (denotada por jya, jyva) para los ángulos comprendidos entre 3°45´ y 90°, variando de 3°45´. Los hindúes remplazaron las medidas usadas por Ptolomeo del radio igual a 60 por la unidad. Dividieron el perímetro de la circunferencia en 21,600 partes que equivale a los minutos en una circunferencia completa.

En lo que concierne a la historia de las matemáticas, los árabes fueron una especie de agentes del destino. El comercio con ellos y las invasiones de su territorio, hoy conocidas como las Cruzadas, sirvieron para que los europeos, que hasta entonces sólo disponían de fragmentos del saber griego, tuvieran acceso al nutrido arsenal de cultura helénica poseído por los árabes. La cultura árabe no sólo asimiló los conocimientos producidos por otros pueblos sino que sirvieron como punto de partida para el desarrollo de las ciencias, en las que se destaca a la Astronomía y por ende a la Trigonometría. En el idioma árabe no existe sonido para la v por lo que jyva se cambió por jyba o jyba; la pronunciación se modifica a jaib en árabe significa seno (pecho o corazón), pliegue o bahía. Del árabe al latín jiba se traduce como sinus. La principal contribución del mundo árabe a la Trigonometría es la introducción de las razones trigonométricas, tal como las conocemos hoy en día.

Razones trigonométricas.

- Sen $\alpha = \frac{\text{co}}{\text{hip}}$ Cos $\alpha = \frac{\text{ca}}{\text{hip}}$ Tan $\alpha = \frac{\text{co}}{\text{ca}}$
- Csc $\alpha = \frac{\text{hip}}{\text{co}}$ Sec $\alpha = \frac{\text{hip}}{\text{ca}}$ Cot $\alpha = \frac{\text{ca}}{\text{co}}$

Anexo 5.

Nombre____

Institución____

Fecha ____

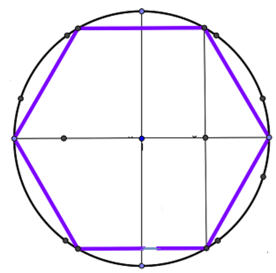
Pregunta	Respuesta
Para los griegos ¿Por qué eran importantes las matemáticas?	
¿Cómo es que surge el desarrollo de la Trigonometría?	
Define las razones trigonométricas.	
Realiza: Un esquema que represente el desarrollo de Eratóstenes para determinar la circunferencia de la Tierra. Desarrolla el procedimiento que siguió Eratóstenes. Un esquema que represente el desarrollo de Hiparco de Nicea para determinar la distancia de la Tierra a la Luna. Desarrolla el procedimiento que siguió Hiparco de Nicea.	

Anexo 6. Cómo construir geométricamente la proporción áurea.

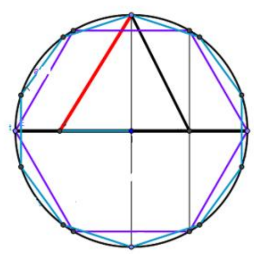
Para cortar cualquier línea de acuerdo con la proporción áurea, puedes usar el método de triangulación pitagórica del modo siguiente:	
1. Dibuja un segmento de recta con extremos A y B.	
2 .Dibuja un segmento de recta que forme un ángulo recto en el punto B y denomina C a su extremo; la longitud de este segmento debe ser la mitad que la de la de AB.	
3. Dibuja una línea que conecte A con C. Has construido un triángulo rectángulo pitagórico.	
4. Sitúa la punta del compás en el punto C y, con un radio CB, dibuja un arco que corte AC en el punto X.	
5. Sitúa la punta del compás en A y con un radio AX, dibuja un arco que corte AB en el punto Y. Este punto Y divide la línea AB siguiendo la proporción áurea.	

Anexo 7. Construcción de polígonos regulares.

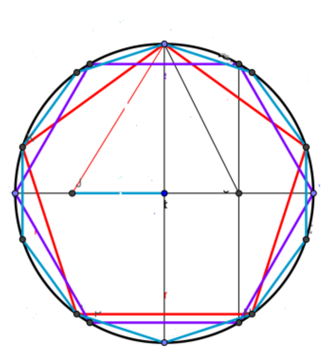
Utilizando sólo regla y compás construye un hexágono inscrito en una circunferencia.



Ahora construye un decágono.

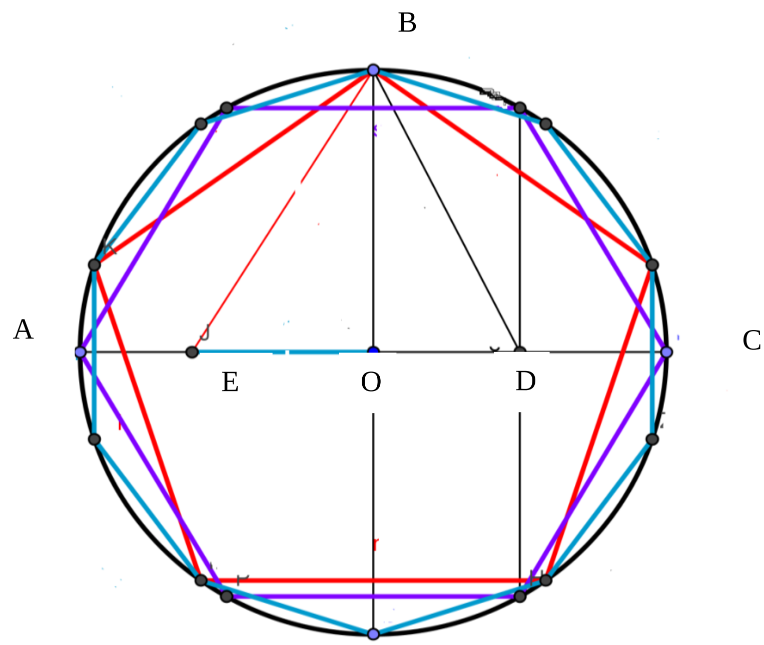


Y por último un pentágono.



Anexo 8. “Haciendo cuentas te das cuenta”…

Considerando que la circunferencia que circunscribe a los polígonos, tiene un radio de 60 completa la siguiente tabla.



Segmento	Medida
OA	
OB	
OC	
OD	
DB	
OE	
ED	
EB	

Determina:

$$\frac{AO}{EO} =$$

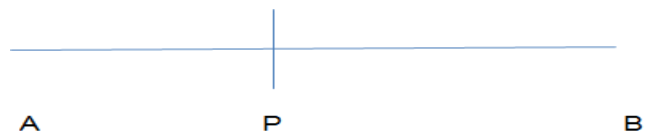
*Nota: Fíjate que por construcción DB=ED y por ello OE es la diferencia entre DE y OD

Elementos de Euclides: La razón áurea y los polígonos regulares.

La definición 3 del Libro Sexto de los Elementos de Euclides propone:

"Se dice que una recta ha sido cortada en razón extrema y media cuando la recta entera es al segmento mayor como el segmento mayor es al segmento menor".

Por lo que se tiene la siguiente definición:



Dado un segmento de recta AB, tal que A < B, y P es punto dentro del segmento, se dice que están en la proporción áurea si $\frac{AB}{AP} = \frac{AP}{PB} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = \varphi$, un valor aproximado para φ es 1.618.

El número φ es citado de muchas formas: el número áureo, dorado o de oro, razón dorada o áurea, media áurea, proporción áurea o divina proporción, entre otras.

Decágono.

La proposición 9 del libro XIII de los Elementos de Euclides dice:

"Si se unen el lado de un hexágono y el de un decágono inscritos en el mismo círculo, la recta entera queda cortada en razón extrema y media, y su segmento mayor es el lado del hexágono".

Notemos que el lado del hexágono que es el segmento mayor coincide con la longitud del radio del círculo donde está inscrito. De aquí se deriva el siguiente teorema.

<u>Teorema.</u> *El lado de un hexágono y de un decágono inscrito en el mismo círculo, están en razón áurea.*

Por otro lado, partamos del hecho de que la longitud de un pentágono regular inscrito en un círculo de radio r es

$$Longitud\ del\ lado\ de\ un\ pentágono\ regular = \frac{r * \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{2}$$

Ahora consideremos el triángulo rectángulo que tiene cateto mayor igual a la longitud de un hexágono, y como cateto menor la longitud de un decágono inscrito ambos en el mismo círculo. ¿Qué pasa con su respectiva hipotenusa?

En la tabla que completaste en la sección "***Haciendo cuentas te das cuenta"*** checa la relación pitagórica siguiente y escribe tus conclusiones al reverso de esta hoja:

$$OE^2 + OB^2 = EB^2$$

Anexo 9.

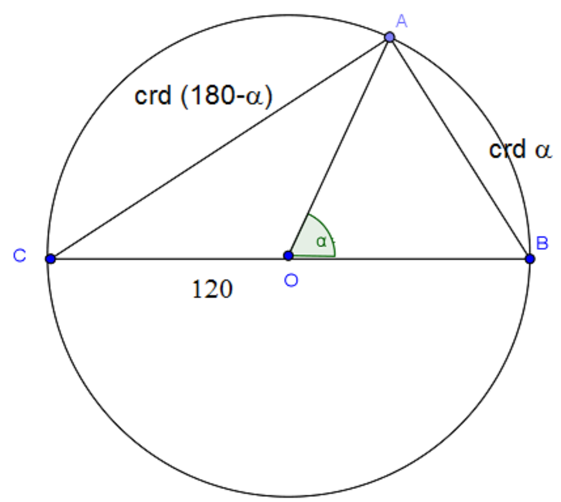
Nombre____

Institución____

Fecha ____

A partir de la información obtenida en la construcción del decágono, hexágono, y pentágono regular sobre las medidas de las cuerdas, completa la siguiente tabla.

Ángulo α	**Crd α**	$\frac{\alpha}{2}$	$sen(\frac{\alpha}{2}) = \frac{crd\alpha}{120}$	**Cos** $(\frac{\alpha}{2})$
36°				
60°				
72°				
90°				
108°				
120°				
144°				



Anexo 10.

Nombre____

Institución____

Fecha ____

Completa lo siguiente.

Preguntas	Respuestas
Con tus propias palabras puedes explicar ¿Qué es la razón áurea?	
Con tus propias palabras puedes explicar ¿Cuál es la relación entre las cuerdas y el seno?	
Puedes generalizar la fórmula para encontrar las cuerdas de ángulos suplementarios. ¿Cómo sería?	
Si sabemos que el sen 6° = 0.1045, ¿Cuál es la medida de la cuerda que le corresponde a un ángulo 12°?	

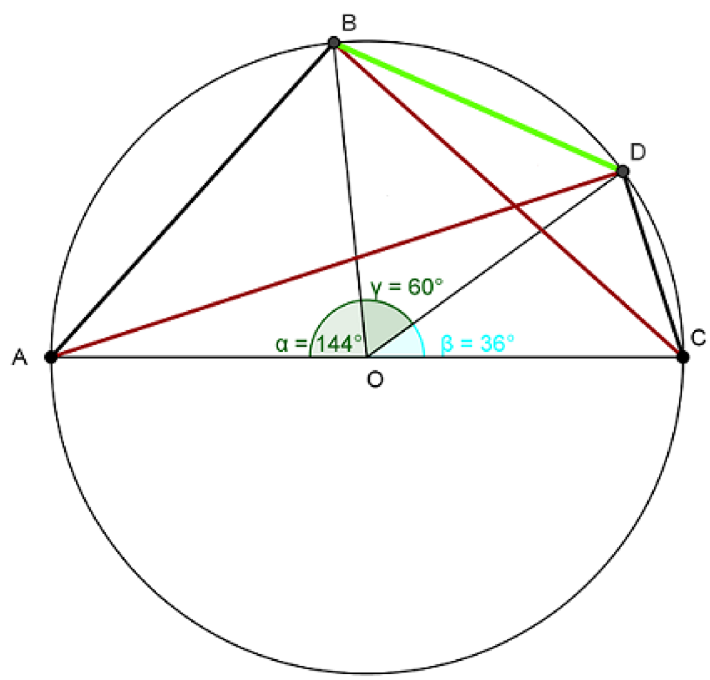
Anexo 11.

Teorema de Ptolomeo:

Dado un cuadrilátero inscrito en una circunferencia la suma de la multiplicación de la medida de los lados opuestos es igual a la multiplicación de la medida de las diagonales.

Usando el Teorema de Ptolomeo se puede determinar el valor de la cuerda para suma o diferencia de ángulos. Por ejemplo para una radio 60 podemos determinar la crd de 24° o la crd de 96°.

Para la crd 24° se tiene que (AB*CD) + (AC*BD)= AD*BC, se tienen dos triángulos rectángulos ABC y ADC.

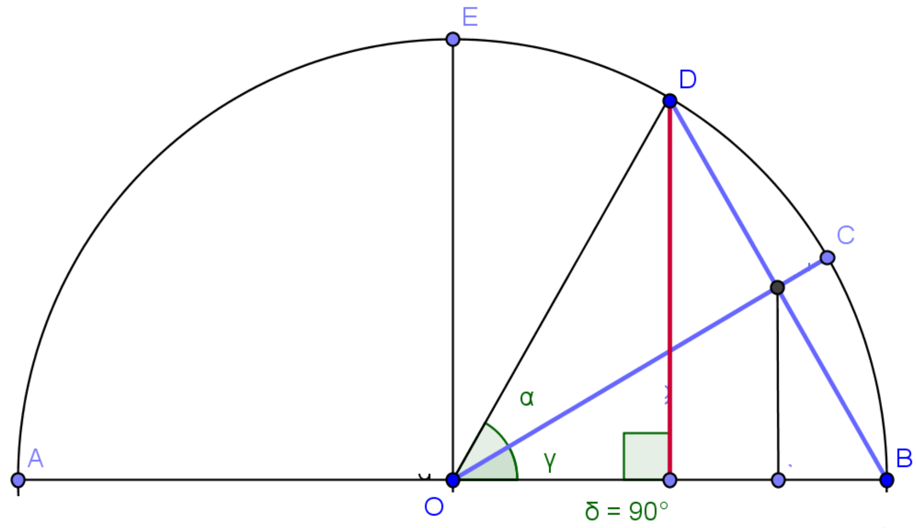


Se despeja BD.

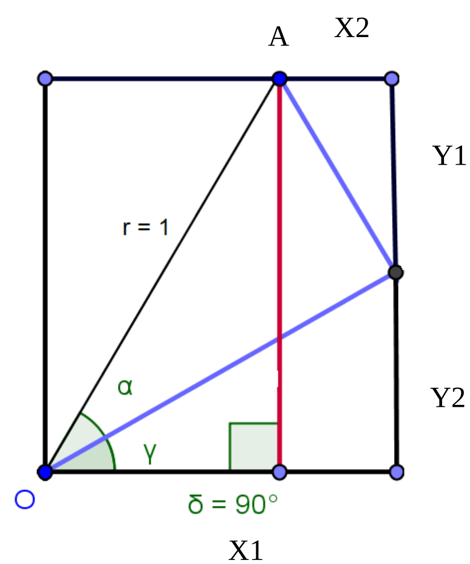
Utilizar este procedimiento para encontrar el valor de la cuerda de 12° y 18°.

Anexo 12. Identidades Trigonométricas

Utilizando la siguiente figura ¿Determinar sen (α +γ) y el cos (α +γ)?



Supongamos que hacemos un zoom a la parte que contiene al ángulo suma entonces nos queda la siguiente figura, la cual llamamos "Una figura seis identidades".

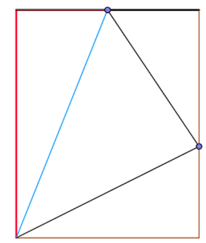
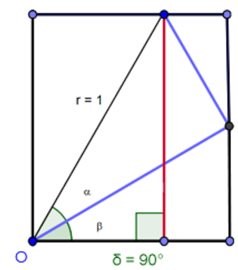


¿Cuál es el valor de y1, y2, x1, x2 en términos de las razones trigonométricas?

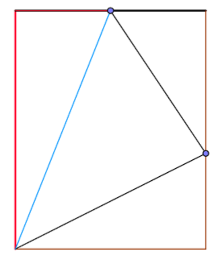
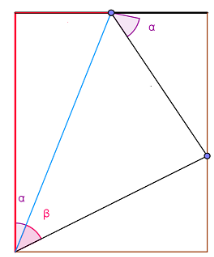
Encuentra el valor de:

Sen (α +γ) = **cos (α +γ) =**

Construcción del seno y coseno de la suma de dos ángulos.

Construye “una figura seis identidades”.	
Define los ángulos α, β y la hipotenusa igual a 1 en el triángulo que contiene al ángulo (α +β).	
Identifica las razones trigonométricas de seno y coseno en los triángulos rectángulos que se forman con los ángulos α yβ. Define el seno y coseno para el ángulo α en el triángulo rectángulo de menor área.	
Identifica las razones trigonométricas de seno y coseno para el triángulo rectángulo en el cual está definido el ángulo (α +β).	**sen (**α + β**) =** **cos (**α + β**) =**

Construcción del seno y coseno de la diferencia de dos ángulos.

Construye "una figura seis identidades".	
Define los ángulos α, β y la hipotenusa igual a 1 en el triángulo que contiene al ángulo (α -β).	
Identifica las razones trigonométricas de seno y coseno en todos los triángulos rectángulos que se forman con los ángulos α yβ.	
Identifica las razones trigonométricas de seno y coseno para el triángulo rectángulo en el cual está definido el ángulo (α -β).	**sen(**α - β) **=** cos (α - β) =

EVALUACION DEL PROFESOR

NOMBRE DEL PROFESOR ______________________________

Instrucciones. Lee cada una de las siguientes afirmaciones. Después, decide tu grado de acuerdo o desacuerdo con ellas y marca con un círculo relleno la puntuación de respuesta que mejor exprese tu opinión. Haz caso de tu primera impresión y no dediques un tiempo excesivo a meditar sobre cada enunciado. CONTESTA A TODAS LAS AFIRMACIONES.

	TOTALMENTE EN DESACUERDO	PARCIALMENTE EN DESACUERDO	PARCIALMENTE DE ACUERDO	TOTALMENTE DE ACUERDO
1. El profesor domina el tema.	1	2	3	4
2. Considero importante aprender el tema desarrollado por el profesor.	1	2	3	4
3. Los contenidos vistos en el aula me ayudaron a comprender mejor el tema.	1	2	3	4
4. Los contenidos vistos en el aula despertaron mi interés	1	2	3	4
5. Las actividades realizadas en el aula me ayudaron a comprender mejor el tema.	1	2	3	4
6. Las actividades realizadas en el aula fueron interesantes.	1	2	3	4
7. Usualmente memorizo las fórmulas matemáticas que se utilizan para la resolución de problemas.	1	2	3	4
8. El esquema "una figura seis identidades" me facilitó la deducción de las identidades trigonométricas.	1	2	3	4
9. La imagen del profesor es agradable.	1	2	3	4
10. Al iniciar la clase el profesor indicó siempre el objetivo de aprendizaje de la sesión.	1	2	3	4
11. El ambiente en el aula durante la intervención del profesor siempre fue respetuoso.	1	2	3	4
12. Durante la intervención del profesor me sentí valorado.	1	2	3	4
13. Durante el trabajo en equipo sentí empatía con mis compañeros.	1	2	3	4
14. El trabajo en equipo me facilitó la comprensión de los temas	1	2	3	4
15. Los materiales que empleó el profesor me facilitaron la comprensión del tema.	1	2	3	4
16. Los materiales que empleo el profesor me motivaron al aprendizaje.	1	2	3	4
17. El profesor utilizó adecuadamente los recursos en el aula. (Pizarrón, Proyector, etc)	1	2	3	4
18. El tiempo fue suficiente para concluir las actividades.	1	2	3	4
19. Aprendí cosas nuevas sobre el tema.	1	2	3	4
20. Me gustaría que me volviera a dar clases el profesor.	1	2	3	4

Cuestionario elaborado por Anahí Chávez, Armando López, Lilian Mendoza. La autora de la presente tesis añadió dos preguntas, que consideró pertinentes para el análisis de su propia práctica docente.