UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE FILOSOFÍA Y LETRAS

COLEGIO DE FILOSOFÍA

LÓGICA DE SEGUNDO ORDEN Y ESTRUCTURALISMO

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE

LICENCIADO EN FILOSOFÍA

PRESENTA:

DAVID VALENCIA GÓMEZ

TUTOR: MARIO GÓMEZ TORRENTE

CIUDAD UNIVERSITARIA, D.F. ENERO 2016

Facultad de Filosofía y Letras

ÍNDICE

Agradecimientos

En primer lugar, me gustaría agradecer a mi familia por el esfuerzo que hicieron para mantenerme en la universidad, indudablemente sufrieron por ello.

En segundo lugar, quisiera agradecer a mi profesor, entrenador y amigo Dr. Eleazar Navarro por inculcarme el amor a la lógica. Los primeros pasos nunca se olvidan.

En tercer lugar, con todo corazón, al Dr. Cristian Gutiérrez pues este trabajo fue el resultado de varias de sus réplicas en las ponencias que impartí como estudiante asociado del instituto de investigaciones filosóficas, algunas correcciones del capítulo dos salieron como notas que tomé del curso que impartió el Dr. Cristian en el posgrado de filosofía de las matemáticas junto con el Dr. Luis Estrada.

En cuarto lugar, a mi tutor de tesis Dr. Mario Gómez Torrente quien me ha brindado su apoyo en tres ocasiones, lo cual me ha dejado impactado y serán anécdotas que contaré innumerables veces. Siempre admiraré la agudeza de sus observaciones, pues donde él decía que estaba mal, por lo general, sí lo estaba. Nunca olvidaré lo que me dijo en una de sus clases de filosofía del lenguaje: “Al parecer llevas bastante tiempo estudiando lógica pero todavía estas arañando el problema, aún no lo observas con profundidad”.

En quinto lugar, quiero agradecer al Maestro Javier Salcedo por permitirme ser su ayudante y ahorrarme un difícil servicio social: “gracias viejo” (así siempre me decías).

En sexto lugar, a mis amigos que tomaron clases de lógica conmigo: Manuel Tapia y Daniel Garibay, realmente me gustaba vernos en el anexo discutiendo las tareas, lástima que cada quien tomó su camino. A mis demás amigos que conocí en filosofía Raúl Ibarra por su compañerismo, nunca olvidaré que nos rolábamos para ir a algunas clases feas de Hegel. Y a Afra o Aframir quien me debe boletos para ir a la premier de Star Wars, y a todos los demás que me caen bien pero que no les hablo mucho. Y a Dante mi amigo inseparable que no tiene nada que ver con filosofía pero que me ha apoyado en mi estancia en el DF.

Quiero hacer hincapié en que el orden en que aparecieron mis agradecimientos es irrelevante, los ordené según me acordaba, si alguien se me olvido probablemente esté en mi lista de “me cae bien” pero no le hablo mucho.

A mi familia

"Mi madre es una mujer con rebozo, humilde y trabajadora

Mi padre un marinero enloquecido por el mar

Mis hermanas la dualidad dispar inseparable

Yo, soy ese niño que contempla las montañas"

Paxuco

S. 119

Introducción

Parece algo muy natural en el hombre formar relaciones sobre los objetos que observa en su entorno. Alguien camina por la calle, mira una sombra moverse por el suelo y, al voltear hacia arriba ve un pájaro volando, de tal manera que dicha persona puede formar una relación entre el pájaro volando y la proyección de su sombra. Si los seres humanos hacemos relaciones entre objetos, lo cual me parece verdadero, sería provechoso tener un lenguaje lo bastante rico que nos permitiera hablar sobre dichas relaciones; de alguna forma nos gustaría poder expresar oraciones como: *1) Existe una relación tal que todos los objetos mantienen consigo mismos, 2) Todas las relaciones que se satisfacen entre a y b son satisfechas por cualesquiera dos objetos, etc.* Es un hecho innegable que estas oraciones las podemos expresar en nuestro lenguaje natural, prueba de ello es que las pude escribir y comunicar a alguien más. En este sentido, ¿no sería igual de natural querer expresar en nuestros lenguajes formales proposiciones que refieran a las relaciones que hay entre objetos? Supongamos que estamos en un momento de la historia donde nadie ha realizado tal formalización. En este escenario si alguien nos preguntara: ¿por qué queremos formalizar un lenguaje que nos permita expresar relaciones de relaciones? La respuesta sería inmediata: ¿y por qué no? Si en nuestro lenguaje natural podemos realizar tal proyecto, ¿por qué no podemos hacerlo en nuestros lenguajes formales?

Cuando tenemos un lenguaje formal cuyas variables ligadas a los cuantificadores (universal "$\forall$" y particular "$\exists$") son individuos u objetos concretos de nuestro dominio de discurso, decimos que nuestro lenguaje es de primer orden; por ejemplo, la fórmula $\forall x(Px \rightarrow Qx)$ es de primer orden. En cambio, cuando las variables ligadas a los cuantificadores "$\forall$" y "$\exists$" pueden ser tanto individuos concretos como las relaciones y funciones que ellos mantienen entre sí, decimos que nuestro lenguaje es de segundo orden. Expresiones como 1) y 2) pueden ser expresadas en un lenguaje de segundo orden (y no por fórmulas de primer orden), pues los cuantificadores tienen como variables las relaciones; por ejemplo, 1) puede ser formalizada como $\exists P \forall x(Pxx)$.

Los lenguajes formales son empleados por matemáticos con el fin de clarificar las demostraciones de sus teoremas, evitar paradojas o contradicciones, presentar los axiomas de sus teorías, etc. Es en esta última donde se necesita con mayor apremio el empleo de los lenguajes formales, puesto que los axiomas de nuestras teorías matemáticas describen los objetos de estudio de éstas mismas, y de algún modo señalan nuestros compromisos[1] a través de los teoremas que podemos deducir de ellos; por ejemplo, la axiomática de Peano describe los números naturales y nos compromete con ciertas propiedades o características que deben tener dichos números. Así ninguna persona sostendría que los números naturales son densos[2], pues no es algo que se deduzca de los axiomas de Peano, además intuitivamente nadie piensa que entre el 1 y el 2 existe un número natural; en este sentido la axiomática de Peano no nos compromete con que los números naturales sean densos. Si lo que buscamos es axiomatizar nuestras teorías a través de lenguajes formales, entonces ¿debemos formalizar dichos axiomas en un lenguaje de primer orden o en el lenguaje de la lógica de segundo orden? La resolución de este problema es el objetivo central de este trabajo. Me referiré a ella como “el problema de la elección de un lenguaje formal”.

La discusión principal en este trabajo versa pues, en general, sobre el problema de emplear un lenguaje de segundo orden (S.O.) para formalizar los axiomas de una teoría matemática. Como dichos axiomas, en algún sentido, son los que describen los objetos de la teoría a través de los teoremas que se pueden deducir de éstos, se requiere una teoría filosófica que nos explique la naturaleza de dichos objetos. Esta clarificación de la naturaleza ontológica de los objetos convergerá en una filosofía de las matemáticas que tomaré como base para resolver el problema de la elección de un lenguaje formal. Al considerar las propiedades de dichas entidades explicadas por una teoría filosófica se puede elegir el lenguaje formal con el cual presentaremos los axiomas de las teorías que capturen dicha naturaleza de los objetos. Por ejemplo, si consideramos que las entidades matemáticas como los números tienen una referencia determinada, entonces se tendría que optar por un lenguaje formal que sea consistente con esta postura; de igual manera, si consideramos que dichas entidades no tienen referencia definida y que todo depende del modelo de interpretación, esperaríamos que nuestra elección de un determinado lenguaje formal sea igualmente consistente con ello.

[1] No me estoy refiriendo aquí a compromisos ontológicos

[2] Decimos que cierto conjunto de números es denso si y sólo si para cualesquiera dos de ellos, tal que uno es menor con respecto al orden que el otro, existe un número que pertenece a ese mismo conjunto que se encuentra en medio de ellos dos con respecto al orden.

Desde esta perspectiva, deben desarrollarse simultáneamente estos tres temas: 1) elegir un determinado lenguaje formal para axiomatizar las teorías; 2) sostener una determinada postura filosófica que nos explique el conocimiento matemático, tales como el realismo, intuicionismo, formalismo, estructuralismo, etc., y; 3) clarificar la noción de consecuencia lógica. La adopción de una determinada postura filosófica permeará nuestra elección de un determinado lenguaje formal, asimismo tener una determinada noción de consecuencia lógica afectará dicha elección, pues si se considera que la noción de consecuencia lógica no es adecuada en la lógica de segundo orden, ya sea por la falta de algunos teoremas como el de *compacidad* y *completud*, o bien por la interferencia de la teoría de conjuntos en la noción de consecuencia lógica. Éstas podrían ser razones de peso para elegir los lenguajes de primer orden en vez de los de segundo orden para formalizar nuestras teorías matemáticas. De manera recíproca, presentar los axiomas de una teoría en un determinado lenguaje afectará nuestra postura filosófica y nuestra noción de consecuencia lógica.

Tomando en cuenta esta relación indisoluble para poder responder a la pregunta, ¿qué lenguaje formal es el más adecuado para formalizar los axiomas de nuestras teorías? Es igualmente importante responder las siguientes cuestiones: ¿qué postura filosófica adoptaremos?; y, ¿con qué noción de consecuencia lógica nos comprometeremos? *En el presente trabajo defenderé la tesis de que los lenguajes de segundo orden son más adecuados que los lenguajes de primer orden para formalizar los axiomas de nuestras teorías matemáticas*. Para lo cual me apoyaré en el estructuralismo *Ante Rem* de Shapiro, y me comprometeré con la noción de consecuencia lógica de los lenguajes de segundo orden que presupone el empleo de los principios de reflexión.

En 1973 Paul Benacerraf escribe un artículo titulado "Mathematical Truth" que fue el parte aguas de muchas discusiones en filosofía de las matemáticas. Paul Benacerraf señala que "el concepto de verdad matemática […] debe encajar en una explicación global del conocimiento, de manera que haga inteligible cómo poseemos el conocimiento matemático que poseemos. Una semántica aceptable para la matemática debe encajar en una epistemología aceptable"[3]. Por una parte, cualquier postura filosófica que pretenda explicarnos el conocimiento matemático debe reposar en una epistemología razonable. Y,

[3] Paul Benacerraf, *La verdad Matemática*, p.240.

por otra parte, debe disponer de una semántica homogénea que abarque tanto las proposiciones matemáticas como las oraciones del lenguaje natural.

El estructuralismo es una postura filosófica que pretende dar respuesta al reto de Benacerraf. De manera muy sintetizada y general, podemos decir que el estructuralismo (no necesariamente el *Ante Rem,* sino cualquier tipo de estructuralismo) considera que la matemática es una ciencia que estudia diversas estructuras como la estructura de los números naturales, de los racionales, de los reales etc. Estas estructuras son una especie de abstracciones generales de los modelos que satisfacen las teorías. En este sentido, a las estructuras no le son relevantes los objetos que pertenecen al dominio del modelo, sino las relaciones que hay entre ellos; por ejemplo, los números naturales no es el conjunto que tiene como miembros a $\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset\ \{\emptyset\}\}, \ldots$ sino la abstracción de las relaciones que mantienen dichos objetos.

La exposición detallada sobre el estructuralismo y sus distintas ramificaciones, así como la relación que tiene esta postura filosófica con la adopción de un lenguaje de segundo orden para formalizar los axiomas de las teorías matemáticas serán expuestas en el capítulo I.

En el capítulo segundo nos enfocaremos precisamente en ahondar en las propiedades que tienen estos lenguajes de orden superior, así como de los argumentos a favor y en contra del empleo de estos lenguajes para axiomatizar las teorías matemáticas. Por lo que en este capítulo se expondrán las distintas semánticas que existen para los lenguajes de segundo orden, concluyéndose que las semánticas estándar son las indicadas para desembarazarnos de los lenguajes de primer orden, pues, con estas se pueden caracterizar de manera adecuada las estructuras de los números naturales, reales, racionales y sobre todo logran capturar nuestras intuiciones con respecto a nuestra pretensión de referirnos a la totalidad de relaciones que se pueden dar en un dominio de objetos.

Ahora bien, desde la perspectiva de Quine, una teoría está obligada a admitir como parte de su ontología aquellos objetos que pertenecen al dominio del modelo. Las variables de relación en un modelo estándar se interpretan como subconjuntos que pertenecen al dominio; por consiguiente, una teoría en segundo orden estaría comprometida ontológicamente con entidades que son conjuntos. Este supuesto compromiso de la lógica de segundo orden con el realismo ontológico ha llevado al mismo Quine a tomar una postura en contra de la lógica de segundo orden. Este problema igualmente será tratado en el capítulo II.

Por otro lado, Ignasi Jane, en su artículo “Higher-order Logic Reconsidered”, hace una serie de críticas a la lógica de segundo orden. La primera tiene que ver con el presupuesto realista en valor de verdad en la noción de consecuencia lógica. La segunda con la indeterminación del contenido del conjunto potencia del dominio de las variables individuales donde van a ser mapeadas las variables de relación. Y la tercera con la necesidad de la compleción en la lógica para caracterizar las teorías matemáticas. Estas tres críticas serán replicadas y expuestas a detalle igualmente en el capítulo segundo.

Finalmente, en el mismo capítulo, se presentará un “puzzle” para el estructuralismo desarrollado por Agustín Rayo y Gabriel Uzquiano. Para que el estructuralismo pueda explicarnos cómo es que un matemático elige una determinada estructura de una teoría no algebraica, por ejemplo, la de los números naturales, en vez de las estructuras ejemplificadas por sus modelos no estándar se deben cumplir tres cosas: 1) la teoría debe ser categórica 2) satisfacible y 3) finitamente axiomatizable. Estas tres características deben de satisfacerse en todas las teorías no algebraicas, sin embargo, la teoría de conjuntos en un lenguaje de segundo orden no cumple con categoricidad. En primer lugar se pide que la teoría de conjuntos sea categórica por dos razones i) si la teoría de conjuntos no es categórica, entonces no estamos en condiciones para asegurar la unicidad de las estructuras de las teorías no algebraicas; y ii) si la teoría de conjuntos no es categórica, no podríamos determinar cuál es la estructura de la teoría de conjuntos, lo que provocaría a su vez un problema epistemológico, pues al mismo tiempo en que sostenemos que las matemática es la ciencia de las estructuras no podemos determinar cuál es la estructura de la teoría de conjuntos. Así este pequeño “Puzzle” representa un verdadero problema para el estructuralismo.

Algunos filósofos, como Lucas Rosenblatt, Ignasi Jane, Agustín Rayo y Gabriel Uzquiano, que se oponen a la lógica de segundo orden con semánticas estándar han dirigido sus críticas apuntando hacia su concepto de consecuencia lógica relacionado con este lenguaje. Estas críticas van dirigidas a dos puntos “débiles” del empleo de las semánticas estándar, a saber: 1) la incompletud semántica, 2) la interferencia de la teoría de conjuntos en el concepto de consecuencia lógica y, 3) el empleo de principios de reflexión. Temas que serán estudiados en el capítulo tercero de esta tesis. En torno a los principios de reflexión se examinará el problema de la coextencionalidad del concepto de “verdad lógica tarskiana” con el de verdad lógica en su sentido intuitivo.

Capítulo 0: Conocimientos Preliminares y Simbología[4]

A lo largo de la presente tesis voy a hacer uso de algunos conceptos básicos empleados en la lógica y en teoría de conjuntos, por lo cual parece prudente y necesario que todas estas nociones sean desarrolladas antes de comenzar para no dejar lugar a ambigüedades y confusiones de algún tipo.

0.1. Lenguajes de Primer Orden

Al igual que los lenguajes naturales, como el español, las expresiones de los lenguajes formales son ristras o sucesiones de símbolos. En el lenguaje de la lógica de primer orden los símbolos empleados son los siguientes:

- Símbolos lógicos:
  1. Paréntesis: (,)
  2. Conectivos lógicos: $\wedge$ conjunción, $\vee$ disyunción, $\longrightarrow$ implicación, $\sim$ negación.
  3. Símbolo de igualdad = (opcional)
  4. Variables individuales: $x_1, x_2, \ldots$
- Parámetros:
  5. Variables constantes: $c_1, c_2, \ldots$
  6. Símbolo del cuantificador universal $\forall$, símbolo del cuantificador existencial o particular $\exists$
  7. Símbolos de predicados de la forma P_i^j con $i, j \in \omega$ que denota la i-ésima letra predicativa de j-ésimos argumentos.

[4] Como este capítulo no pretende dar un desarrollo matemático de la lógica sino únicamente brindarle al lector los requisitos básicos para poder entender los problemas desarrollados en los capítulos siguientes, si el lector necesita de un conocimiento más minucioso sobre estos temas puede consultar el libro: "Una Introducción matemática a la lógica" de Herbert Enderton.

8. Símbolos de funciones de la forma f_i^j con $i, j \in \omega$ que denota la i-ésima letra de función de j-ésimos argumentos.

Con estos símbolos se pueden formar cualquier expresión (una secuencia finita de símbolos) como $\forall\exists \wedge\vee\ xPf$, sin embargo, este tipo de expresiones carecen de completo sentido o, en otras palabras, no son fórmulas bien formadas. Antes de pasar directamente a la definición de fórmulas bien formadas hay que abordar la noción de términos misma que nos ayudará a definir las fórmulas.

Un término es aquella expresión que puede construirse a partir de los símbolos de constantes y variables prefijándoles una o más veces letras de función. Por ejemplo, $f_2^2(x_1, c_3)$ y $f_7^2(x_5, f_2^2(x_1, c_3))$ son términos. Formalmente decimos que t es un término si y sólo si t es un símbolo de constante o una variable, o bien existen $i, j \in \omega$ tales que $t = f_i^j(d_1, \dots, d_j)$ donde para cada k$\in \{1, \dots, j\}$ d_k es un término.

Asimismo, decimos que una fórmula atómica es una fórmula de la forma $P_i^n(t_1, \dots, t_n)$ donde t_j con $j \in \{1, \dots, n\}$ es un término y en caso de que el símbolo "=" forme parte de nuestro lenguaje también $t_i = t_j$ será una fórmula atómica. De igual manera construimos las demás fórmulas del lenguaje por medio de las siguientes operaciones:

1. Si A es una fórmula, entonces ~A es una fórmula.
2. Si A y B son fórmulas, entonces A∧B, A∨B y A$\longrightarrow B$ son fórmulas
3. Si A es una fórmula, entonces $\forall x_i A$ y $\exists x_i A$ son fórmulas

De esta manera tenemos que el conjunto de fórmulas (o formulas bien formadas) es el conjunto de expresiones que pueden construirse a partir de las fórmulas atómicas al aplicar (cero o más veces) las operaciones 1, 2 y 3.

Así una fórmula en nuestro lenguaje podría ser i)$\forall x_1(P_1^1(x_1) \longrightarrow P_2^1(x_1))$ o bien ii) $\forall x_1(P_1^1(x_1) \longrightarrow P_2^1(x_2))$, sin embargo, hay una importante diferencia entre estas dos fórmulas. Supongamos que a los símbolos P_1^1 y P_2^1 los interpretamos[5] como "ser hombre" y "ser Mortal" y consideremos como dominio de discurso al conjunto de los filósofos, Así i) puede ser traducida como "Todo filósofo si es hombre, entonces es mortal" mientras que ii)

[5] En la siguiente sección se definirá de manera formal el concepto de interpretación en un modelo.

se interpretaría como "Todo filósofo si es hombre, entonces _ es mortal"; es decir, para poder terminar el enunciado tenemos que determinar el valor que está tomando la variable x_2. De manera intuitiva, en este tipo de casos (ii) decimos que la variable x_2 es libre mientras que x_1 está ligada por el cuantificador universal.

Consideremos cualquier variable x. Decimos que x ocurre libre en α[6] si ocurre una de las siguientes cuatro condiciones:

A. Para α atómica, x ocurre libre en α *sii* x ocurre en (i.e. es símbolo de) α
B. x ocurre libre en $\sim\alpha$ sii x ocurre libre en α.
C. x ocurre libre en $\alpha \wedge \beta$, $\alpha \vee \beta$ y $\alpha \longrightarrow \beta$ sii x ocurre libre en α o en β.
D. x ocurre libre en $\forall x_i \alpha$ o en $\exists x_i$ sii x ocurre libre en α y $x_i \neq x$.

Y denotaremos por $\alpha(x)$ cuando la variable x se encuentre libre en α.

0.2.Estructuras y Modelos de los Lenguajes de Primer Orden

De manera intuitiva una estructura es una función que interpreta las fórmulas bien formadas de nuestro lenguaje formal. Una estructura nos proporciona el conjunto de objetos a los cuales se refiere el parámetro ∀ y las denotaciones de los símbolos de constante, funciones y predicados.

De manera formal "una estructura E para nuestro lenguaje dado de primer orden es una función cuyo dominio es el conjunto de parámetros y tal que:

1. E asigna al símbolo de cuantificador ∀ un conjunto no vacío $|E|$, llamado el universo de E o universo de discurso.
2. E asigna a cada símbolo de predicado P de n argumentos una relación n-aria $P^E \subseteq |E|^n$; es decir, E le asigna a P un conjunto de n-adas de elementos del universo.
3. E asigna a cada símbolo de constante c un elemento c^E del universo de discurso.

[6] Notemos que el símbolo α no pertenece a nuestro lenguaje sino es más bien una meta-variable que denota a cualquier fórmula de nuestro lenguaje

4. E asigna a cada símbolo de función f de n argumentos una operación n-aria f^E sobre $|E|$; es decir, $f^E\colon |E|^n \longrightarrow |E|$"[7]

De manera intuitiva decimos que una estructura E satisface a una fórmula (E$\vDash_s \varphi$) si su interpretación en la estructura es verdadera para esa estructura. Formalmente decimos que una estructura E satisface la fórmula φ con s tal que $s\colon V \longrightarrow |E|$ donde V es el conjunto de las variables.

Para dar la definición formal consideremos una extensión de s que denotaremos como $\hat{s}$ tal que $\hat{s}\colon T \longrightarrow |E|$ con T el conjunto de términos definida como sigue:

1. $\hat{s}(x) = s(x)$ con x una variable
2. $\hat{s}(c) = c^E$ con c una constante
3. $\hat{s}(f(t_1, \dots t_n)) = f^E(\hat{s}\,(t_1), \dots, \hat{s}\,(t_n))$

Por otra parte definimos $s(x_k/a)$ como una función igual a s pero que a la variable x_k le asigna el elemento a del dominio de la estructura; es decir, $s(x_k/a)\colon V \longrightarrow |E|$ tal que si $x_k \neq y\ entonces\ s(x_k/a)(y) = s(y)$ y si $x_k = y\ entonces\ s(x_k/a)(y) = a$. A $s(x_k/a)$ se le conoce como la sustitución de x_k por a.

De esta manera se tienen las siguientes condiciones de satisfacción para fórmulas:

Sean $\alpha\ y\ \beta$ fórmulas del lenguaje de primer orden y E una estructura

1. E$\vDash_s (t_1 = t_2)$ sii $\hat{s}\,(t_1) = \hat{s}\,(t_2)$
2. E$\vDash_s P(t_1, \dots t_n)$ sii $\hat{s}\,(t_1), \dots, \hat{s}\,(t_n) \in P^E$
3. E$\vDash_s \alpha \wedge \beta$ sii E$\vDash_s \alpha$ y E$\vDash_s \beta$ Una estructura satisface una conjunción sii satisface a cada conyunto.
4. E$\vDash_s \alpha \vee \beta$ sii E$\vDash_s \alpha$ o E$\vDash_s \beta$ Una estructura satisface a una disyunción sii satisface al menos un disyunto.
5. E$\vDash_s \sim\alpha$ sii E$\nvDash_s \alpha$ Una estructura satisface a una negación sii no satisface a la fórmula negada.
6. E$\vDash_s \alpha \rightarrow \beta$ sii E$\nvDash_s \alpha$ o E$\vDash_s \beta$ Una estructura satisface una implicación sii o bien no satisface al antecedente o satisface al consecuente.

[7] Herbert B. Enderton, *Una Introducción matemática a la lógica*, p.122

7. E$\vDash_s$ $\forall x_k\ \alpha$ sii $\forall a \in |E|\ \ ocurre\ que\ E \vDash_{s(x_k/a)} \alpha$ Una estructura satisface a un "para todo x_k en α" sii para todo elemento a del dominio de la estructura la sustitución de x_k por a satisface la fórmula α.
8. E$\vDash_s$ $\exists x_k\ \alpha$ sii $\exists a \in |E|\ \ ocurre\ que\ E \vDash_{s(x_k/a)} \alpha$ Una estructura satisface a un "existe un x_k en α" sii para algún elemento a del dominio de la estructura la sustitución de x_k por a satisface la fórmula α.

De manera general decimos que una estructura es modelo de un conjunto de fórmulas si la estructura las satisface. Asimismo, decimos que φ es consecuencia semánticamente de Γ ($\Gamma \vDash \varphi$) si y sólo si todos los modelos de Γ son también modelos de φ.

0.3.Sistema Deductivo para la lógica de Primer Orden.

Un sistema deductivo para la lógica de primer orden está conformado por reglas de inferencia y axiomas lógicos los cuales son:

Sean α, β fórmulas cualesquiera

- Regla de inferencia:
  1. Modus Ponens: $\alpha, \alpha \longrightarrow \beta \vdash \beta$
- Axiomas lógicos:
  2. Instancias de Tautologías de la Lógica Proposicional o de Enunciados
  3. $\forall x\alpha \longrightarrow \alpha(x\backslash t)$ donde $\alpha(x\backslash t)$ significa sustituir toda variable x dondequiera que ocurra libre en la fórmula α por el término t.
  4. $\forall x(\alpha \longrightarrow \beta) \longrightarrow (\forall x\alpha \longrightarrow \forall x\beta)$
  5. $\alpha \longrightarrow \forall x\alpha$, donde x no ocurre libre en α
- Axiomas lógicos con respecto a la identidad
  1. $x = x$
  2. $x = y \longrightarrow (\alpha \longrightarrow \alpha')$, donde α es atómica y α' se obtiene de α al reemplazar x por y en cero o más lugares (aunque no necesariamente en todos)

Dado un sistema deductivo decimos que φ es consecuencia sintáctica de Γ ($\Gamma \vdash \varphi$) si y sólo si existe una ristra finita de fórmulas que son axiomas lógicos o se justifican por la regla de inferencia modus ponens tal que φ es la última fórmula en esta sucesión.

0.4.Teoremas Importantes en la Lógica de Primer Orden

Teorema de Correctud: Sea Γ un conjunto de fórmulas en un lenguaje de primer orden y φ una fórmula. Si $\Gamma \vdash \varphi$, entonces $\Gamma \vDash \varphi$ i.e. si una fórmula φ se sigue deductivamente de un conjunto de fórmulas Γ, entonces todo modelo que satisfaga a Γ también hará verdadera a φ. Otra forma de decirlo es que nuestro sistema deductivo saca conclusiones verdaderas de premisas verdaderas para un modelo.

Teorema de Completud: Si $\Gamma \vDash \varphi$, entonces $\Gamma \vdash \varphi$; es decir, si semánticamente de Γ se sigue φ, entonces existe una deducción de Γ a φ. Este teorema nos permite saber que todas las verdades de la lógica son derivables a nuestro sistema deductivo.

Teorema de Compacidad: Si cada subconjunto finito $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ es satisfacible, entonces Γ también es satisfacible.

Teorema de Lowenheim-Skolem[8]: Sea Γ un conjunto de enunciados, en un lenguaje de cardinalidad λ, si Γ tiene modelo, entonces tiene modelo de cardinalidad $\leq \lambda$.

Teorema de Löwenheim-Skolem-Tarski: Sea Γ un conjunto de fórmulas, en un lenguaje de cardinalidad λ, si Γ admite modelo M con un dominio con cardinalidad α-infinito, entonces para todo cardinal $\beta \geq \alpha$ existe una estructura M' que es modelo de Γ con un dominio $|M'|$ con cardinalidad igual a β.

Al combinar estos dos últimos teoremas tenemos que si una teoría Th1 (con un lenguaje infinito) es consistente y admite modelo infinito, entonces admite modelos de cualquier cardinalidad infinita.

[8] La definición de un conjunto cardinal puede verse en la sección 9 de este capítulo.

0.5.Modelos no Estándar en lógica de Primer Orden

En la presente sección desarrollaré la idea formal de modelos no estándar para la aritmética de Peano, pues en algunas partes de la tesis hablaré de éstos y serán un tema importante en la discusión, en particular en la problemática referente al teorema de Löwenheim Skolem.

Se pueden construir modelos no estándar para los números enteros, los racionales y los reales; sin embargo, únicamente desarrollaré la construcción de los modelos no estándar de los números naturales, pues lo único que necesito es la idea intuitiva de lo que significa ser un modelo no estándar.

Como bien sabemos la aritmética de Peano está dada por los siguientes axiomas:

1. 0 es número natural (en notación conjuntista $0 \in N$)
2. Si n es un número natural, entonces el sucesor de n es número natural ($\forall n(n \in N \longrightarrow s(n) \in N)$)
3. 0 no es sucesor de ningún numero natural ($\forall n(s(n) \neq 0)$)
4. Si el sucesor de n es igual al sucesor de m entonces n=m ($\forall n, m(s(n) = s(m) \longrightarrow n = m$)
5. Si P es una propiedad acerca de números naturales tal que 0 cumple P y para todo número natural n, si n cumple P entonces el sucesor de n cumple P, implica que todos los números naturales cumplen P. ($0 \in P \wedge \forall n(P(n) \longrightarrow P\big(s(n)\big)) \longrightarrow \forall n(p(n))$

Dados los axiomas de Peano decimos que una estructura $\langle N, 0, s\rangle$ es un modelo para la teoría de los números naturales si satisface a los axiomas de Peano. De manera particular el conjunto $\mathbb{N} = \{0,1, \dots\}$ es modelo de dicha teoría y es considerado el modelo estándar de la aritmética. Sin embargo, existen otros modelos de la axiomática de Peano que no son isomorfos a $\mathbb{N}$ (es decir, tienen una estructura distinta) a dichos modelos les llamamos modelos no estándar.

De manera formal decimos que E y E' estructuras son isomorfas $E \cong E'$ si y sólo si existe una función $h: |E| \longrightarrow |E'|$ biyectiva tal que:

1. Para cada parámetro de predicado P de n argumentos y para cada n-ada $\langle a_1, \dots a_n\rangle$ de elementos de $|E|$ se tiene que: $\langle a_1, \dots a_n\rangle \in P^E$ si y sólo si $\langle h(a_1), \dots h(a_n)\rangle \in P^{E'}$

2. Para cada símbolo de función f de n argumentos y para cada n-ada $\langle a_1, \dots a_n \rangle$ de elementos de $|E|$ se tiene que: $h(f^E\langle a_1, \dots a_n\rangle)$=$f^{E'}\langle h(a_1), \dots h(a_n)\rangle$
3. Y para cada símbolo de constante c, $h(C^E) = c^{E\prime}$

De manera intuitiva, como lo mencioné anteriormente, dos modelos son isomorfos si tienen la misma estructura o equivalentemente si ambas estructuras satisfacen las mismas propiedades (y solamente esas) salvo un isomorfismo.

Ahora bien, para poder construir un modelo no estándar de la aritmética tenemos que demostrar que existe un modelo de la teoría de números que no es isomorfo a ℕ, en particular que nuestro candidato a modelo no estándar cumpla con más propiedades que ℕ.

Sea L_N el lenguaje de primer orden para la teoría de números naturales y consideremos un elemento c tal que $c \notin \mathbb{N}$. Ahora consideremos la teoría $T = TN \cup \{c > n/\forall n \in \mathbb{N}\}$ donde $TN = \{\varphi \in L_N/AP \vdash \varphi\}$. Como para toda $T_k = TN \cup \{c > n/\forall n(k > n)\}$ tiene modelo (en particular considérese el modelo $\langle \mathbb{N}, k\rangle$ tal que $c^{\langle \mathbb{N}, k\rangle} = k$ y en todas las demás interpretaciones es igual a ℕ) por el teorema de compacidad T admite modelo M_c. Además, como $TN \subseteq T = TN \cup \{c > n/\forall n \in \mathbb{N}\}$ entonces M_c es modelo de TN. Por otra parte, como $c \notin \mathbb{N}$ entonces $c \notin L_N$; sin embargo, para arreglar este pequeño detalle consideremos la reducción[9] de M_c al lenguaje L_N que denotaremos como M, i.e. $\exists a(a \in \mathbb{N} \wedge c^M = a) \wedge M \cong M_c$ de tal manera que el lenguaje de M es L_N. Por consiguiente, M es modelo de TN pero $M \vDash \forall n(a > n)$ y $\mathbb{N} \vDash \sim\forall n(a > n)$, es decir $M \ncong \mathbb{N}$. Por tanto, M es un modelo no estándar de TN.

Teniendo en cuenta la existencia de los modelos no estándar de la aritmética la pregunta que inmediatamente surge es ¿Cuántos modelos no estándar de la aritmética hay?

Para responder esta pregunta primero hay que demostrar el siguiente teorema: "un elemento no estándar a con $a \in \mathbb{N}$ codifica un subconjunto $S \subseteq \mathbb{N}$, i.e. podemos expresar a S como $S = \{n \in \mathbb{N}/M \vDash \varphi(n, a)\}$ $\ donde\ M$ es un modelo no estándar de ℕ y φ una propiedad"[10]

[9] No es necesario considerar una reducción pues la prueba sería válida sin ella, sin embargo, el empleo de reducciones nos facilitará la demostración de que la cardinalidad de todos los modelos no estándar es igual a $2^{\aleph_0}$

[10] Vid. Richard Kaye, *Models of Peano Arithmetic,* p. 10

Demostración. Sea $S \subseteq \mathbb{N}$ y c una constante tal que $c \notin L_N$. Consideramos la teoría T tal que $T = TN \cup \{c > n / \forall n \in \mathbb{N}\} \cup \{\forall x \sim (p_k \cdot x = c)/k \notin S\} \cup \{\exists x(p_k \cdot x = c)/k \in S\}$ donde p_k es el k-esimo primo. De esta forma se tiene que para toda $T_l = TN \cup \{c > n / \forall n(n < l)\} \cup \{\forall x \sim (p_k \cdot x = c)/k \notin S \wedge k < l\} \cup \{\exists x(p_k \cdot x = c)/k \in S \wedge k < l\}$ tiene modelo $\langle \mathbb{N}, r \rangle$ con $r = q \cdot \prod_{\substack{k<l,\\ k \in S}} p_K$ [11] donde q es un primo mayor que l tal que $c^{\langle \mathbb{N}, r \rangle} = r$ y todas las demás fórmulas se interpretan igual que $\mathbb{N}$. Por consiguiente, por el teorema de compacidad T admite modelo M_c; esto implica que M_c es modelo de TN. Consideremos M una reducción de M_c al lenguaje de los números naturales tal que $\exists a(a \in \mathbb{N} \wedge c^M = a)$. De esta forma se tiene que M es un modelo no estándar de TN tal que a codifica a S, i.e. $S = \{n \in \mathbb{N} / M \vDash \exists x(p_n \cdot x = a)\}$ esto último es consecuencia del tercer conjunto de axiomas de T. Obsérvese que este teorema nos permite asignar a cada subconjunto de números naturales un elemento de un modelo no estándar.

Con el teorema anterior se puede demostrar fácilmente que la cardinalidad de modelos no estándar contables para la aritmética es igual a $2^{\aleph_0}$.

Demostración: Sea M cualquier modelo contable de TN y supongamos que la cardinalidad de modelos no estándar contables para la aritmética es $k < 2^{\aleph_0}$ (y sea I un conjunto de indices de cardinalidad k). Sabemos que todo subconjunto de los números naturales es codificado por algún miembro del modelo, entonces el número de subconjuntos es a lo más $\sum_{i \in I} card(M_i)$ [12] $= k \cdot \aleph_0 = max\{k, \aleph_0\} < 2^{\aleph_0}$ y esto es una contradicción pues la cardinalidad de los subconjuntos es $2^{\aleph_0}$. Por lo tanto, el número de modelos no estándar numerables es $2^{\aleph_0}$.

---

[11] Si $j \in S$ se tiene que $P_j \left(q \cdot \prod_{\substack{k<l,\\ k \in S\\ k \neq j}} p_K \right) = q \cdot \prod_{\substack{k<l,\\ k \in S}} p_K = r$ con lo cual se satisface que $\exists x(p_j \cdot x = c)/j \in S \wedge j < l \wedge c^{\langle \mathbb{N}, r \rangle} = r$

[12] Como cada subconjunto es codificado por al menos un elemento del modelo en el caso extremo donde todos los elementos de M codifican algún subconjunto, entonces hay a lo más k veces el número de elementos del modelo; es decir, k veces la cardinalidad del modelo.

0.6. Lenguajes de Segundo Orden

Los lenguajes de segundo orden son una extensión de los lenguajes de primer orden. Esto quiere decir que todas las fórmulas del lenguaje de primer orden también son fórmulas del lenguaje de segundo orden. Sin embargo, hay fórmulas del lenguaje de segundo orden que no son de primer orden. Para construir las nuevas fórmulas tenemos que añadir los siguientes símbolos:

1. Variables de Predicado: $X_1^1, X_1^2, \dots, X_2^1, \dots X_i^j$ (la i-esima variable de predicado de aridad j).
2. Variables de letras de función: $f_1^1, f_1^2, \dots, f_2^1, \dots f_i^j$ (la i-esima variable de función de aridad j).

Para construir las nuevas fórmulas añadimos las siguientes operaciones de construcción:

Sea φ una fórmula, entonces

1. $\forall X_i^j \varphi$ y $\exists X_i^j \varphi$ son fórmulas
2. $\forall f_i^j \varphi$ y $\exists f_i^j \varphi$ son fórmulas.

De esta manera tenemos que las fórmulas $\forall X_2^2 \forall f_1^1 \forall x (X_2^2(f_1^1(x), x))$ y $\exists f_3^2 \forall X_1^2 \exists x (X_1^2(x, f_3^2(x, x)))$ pertenecen a nuestro lenguaje de segundo orden.

- Sistema deductivo D2 para lenguajes de segundo Orden[13]

1. $\forall X^n \Phi(X^n) \longrightarrow \Phi(T^n)$ donde T es una letra de relación que no es libre para X^n en Φ
2. $\forall f^n \Phi(f^n) \longrightarrow \Phi(g^n)$ donde g es una letra de función que no es libre para f^n en Φ
3. De $\Phi \longrightarrow \Psi(X^n)$ se infiere $\Phi \longrightarrow \forall X^n \Psi(X^n)$ siempre y cuando X^n no ocurre libre para Φ o en cualquier premisa de la deducción

[13] Vid. Shapiro, Stewart, *Foundation Without Foundationalism: A Case for Second Order Logic, p. 66-67*

4. De $\Phi \longrightarrow \Psi(f^n)$ se infiere $\Phi \longrightarrow \forall f^n \Psi(f^n)$ siempre y cuando f^n no ocurre libre para Φ o en cualquier premisa de la deducción
5. $\exists X^n \forall \langle x \rangle_n (X^n \langle x \rangle_n \equiv \Phi \langle x \rangle_n)$ siempre y cuando X^n no ocurre libre para Φ y $\langle x \rangle_n$ es la abreviatura de $x_1, x_2, \dots x_n$ (este es el esquema de comprensión)
6. $\forall X^{n+1}(\forall \langle x \rangle_n \exists y X^{n+1} \langle x \rangle_n y \longrightarrow \exists f^n \forall \langle x \rangle_n X^{n+1} \langle x \rangle_n f^n \langle x \rangle_n)$

0.7. Axiomas de la Teoría de Conjuntos ZFC en un Lenguaje de Primer Orden

Es altamente conocida la enorme relación entre la teoría de conjuntos y la lógica, por ende, no es de extrañarse que en la presente tesis la mencione frecuentemente. Por este motivo en esta sección mencionaré los axiomas de la teoría de conjuntos ZFC[14] (Zermelo Fraenkel con elección) en un lenguaje de primer orden y estos son[15]:

A. Axioma del vacío: "existe un conjunto que no tiene ningún elemento"
   $\exists x(\forall y(y \notin x))$ que denotaremos como $\emptyset$.
B. Axioma de Extensionalidad: "Dos conjuntos que tienen los mismos elementos son iguales"
   $$\forall x \forall y(\forall z(z \in x \leftrightarrow z \in y) \longrightarrow x = y)$$
C. Axioma del Par: "Para cualesquiera dos conjuntos hay un conjunto que tiene exactamente a esos dos como sus elementos"
   $$\forall x \forall y \exists z \forall w(w \in z \leftrightarrow (w = x \vee w = y))$$
D. Axioma de Unión: "para todo conjunto existe otro cuyos elementos son elementos de los elementos del primero"
   $$\forall x \exists y \forall z(z \in y \leftrightarrow \exists w(w \in x \wedge z \in w))$$
E. Axioma del conjunto potencia: "para cualquier conjunto existe un conjunto cuyos elementos son subconjuntos del primero"
   $$\forall x \exists y \forall z(z \in y \leftrightarrow \forall w(w \in z \longrightarrow w \in x))$$

---

[14] Hay otros sistemas axiomáticos de la teoría de conjuntos diferentes a los de ZFC como la de "Bernays-Gödel", sin embargo, usaré la axiomática de ZFC pues es la más usual.
[15] Vid. Amor Montaño, J.A., Campero Arena, G., & Miranda Perea, *Teoría de conjuntos: Curso Intermedio*, p.171.

F. Esquema de Comprensión o Separación: “para cualquier propiedad P y un conjunto existe un conjunto cuyos elementos son aquellos que cumplen con la propiedad P y pertenecen al primer conjunto”

$\forall x \exists y \forall z(z \in y \leftrightarrow (z \in x \wedge \varphi(z)))$ donde φ es una formula escrita en un lenguaje de primer orden. Nótese que este axioma es en realidad un esquema de axiomas que es generado para cada fórmula en el lenguaje de la teoría de conjuntos.

G. Axioma de Infinito: “existe un conjunto que tiene al conjunto vacío como elemento y que para cada uno de sus elementos x, tiene como elemento al conjunto cuyos elementos son exactamente x y los elementos de x”.

$$\exists x(\emptyset \in x \wedge \forall y(y \in x \longrightarrow y \cup \{y\} \in x))$$

H. Esquema de Reemplazo o Sustitución: “la imagen de un conjunto bajo un funcional φ es un conjunto”

$$\forall x \forall y \forall z((\varphi(x, y) \wedge \varphi(x, z) \longrightarrow y = z) \longrightarrow \forall u \exists v \forall z(z \in v \leftrightarrow \exists x(x \in u \wedge \varphi(x, z)))$$

Nótese que este axioma es en realidad un esquema de axiomas que es generado para cada fórmula en el lenguaje. Lo cual implica que la axiomática de ZFC no es finitamente axiomatizable; es decir, el conjunto de los axiomas de ZFC no es finito pues por cada fórmula en el lenguaje el axioma de reemplazo nos arrojará un axioma.

I. Axioma de regularidad o buena fundación: “todo conjunto no vacío tiene un elemento cuyos elementos no pertenecen al primero”

$$\forall x(\exists z(z \in x) \longrightarrow \exists y(y \in x \wedge \forall w(w \in y \longrightarrow w \notin x)))$$

J. Axioma de Elección: “si x es un conjunto de conjuntos no vacíos y ajenos dos a dos, entonces existe un conjunto que tiene exactamente un elemento en común con cada elemento de x”

$$\forall a\Big(\big(a \neq \emptyset \wedge \emptyset \notin a \wedge \forall x \forall y((x \in a \wedge y \in a \wedge x \neq y) \longrightarrow x \cap y = \emptyset)\big)$$
$$\longrightarrow \exists c\Big(\forall w(w \in a \longrightarrow \exists z(w \cap c = \{z\}))$$
$$\wedge \forall u(u \in c \longrightarrow \exists v(v \in a \wedge u \in v))\Big)\Big).$$

Una formulación un poco más entendible, intuitivamente hablando, del axioma de elección es: “para todo conjunto no vacío de conjuntos no vacíos, existe una función de elección que elige un elemento de cada uno de los conjuntos no vacíos” o de manera más precisa "para todo conjunto A existe una función f tal que $f: A \longrightarrow \cup A$ tal que $\forall x(f(x) \in x)$.

0.8.Axiomas de la Teoría de Conjuntos ZFC2 en un Lenguaje de Segundo Orden

La axiomática de la teoría de conjuntos en un lenguaje de segundo orden consta de los axiomas A, B, C, D, E, G, I, J que se pueden formular de manera finita en un lenguaje de primer orden más la unión de los siguientes dos axiomas que como puede observarse son las reformulaciones del axioma de comprensión y reemplazo respectivamente:

F'. $\forall x \exists y \forall z \forall R \left(z \in y \leftrightarrow \left(z \in x \wedge R(z)\right)\right)$

H'.$\forall R \forall x \forall y \forall z((R(x,y) \wedge R(x,z) \longrightarrow y = z) \longrightarrow \forall u \exists v \forall z(z \in v \leftrightarrow \exists x\left(x \in u \wedge R(x,z)\right))$ con la introducción de estos dos axiomas presentados en un lenguaje de segundo orden conseguimos que la axiomática de la teoría de conjuntos sea finitamente axiomatizable, es decir, que puede escribirse con una colección finita de axiomas.

0.9 Conjuntos y Cardinales Infinitos

Supongamos que tenemos dos bolsas negras llenas de canicas y queremos determinar cuál de estas dos tiene el mayor número de canicas o si ambas poseen la misma cantidad. Lo primero que a alguien se le ocurriría sería contar las canicas de una bolsa y luego contar las de la otra bolsa, y posteriormente comparar las dos cantidades para saber cuál de las dos tiene la mayor cantidad de canicas. Sin embargo, para poder usar este método se necesita que de ante mano "sepamos contar"; pero si fuera el caso que no sabemos contar ¿cómo resolveríamos el problema? Una forma sería sacando una canica de cada una de las bolsas simultáneamente e ir repitiendo este paso hasta que en alguna de las bolsas ya no se puedan sacar más canicas. De esta manera si en la primera bolsa todavía quedan canicas mientras que en la segunda ya no se pueden sacar más canicas diremos que la primera bolsa tiene más canicas que la segunda o si en ambas ya no se pueden sacar más canicas resultara que las dos bolsas tienen la misma cantidad de canicas.

Inspirándose en el segundo método antes descrito podemos definir cuándo un conjunto tiene la misma cantidad de elementos. Dados dos conjuntos A y B decimos que tienen la misma cantidad de elementos o que son equipotentes ($A \sim B$), si y sólo si, existe una función $f: A \longrightarrow B$ biyectiva i.e. una función que es inyectiva ($\forall x, y \in A(f(x) = f(y) \longrightarrow x = y)$) y suprayectiva ($\forall x \in B \exists y \in A(f(y) = x)$. Intuitivamente, la inyectividad nos garantiza que estamos sacando exactamente una canica de cada una de las bolsas y que no las estamos volviendo a meter, mientras que la suprayectividad garantiza que en un determinado momento (simultáneamente) las dos bolsas se han quedado vacías. Por otro lado, decimos que A tiene menos elementos que B o que A es dominado por B ($A \prec B$), si y sólo si, existe una función $f: A \longrightarrow B$ inyectiva y no existe ninguna función de A a B que sea suprayectiva. Ahora dado A un conjunto podemos considerar: $C_A \coloneqq \{B: A \sim B\}$ que generalmente no es un conjunto sino una clase propia. Pero olvidándonos del formalismo o rigor matemático, supongamos que tenemos una forma de elegir un conjunto $B_A \in C_A$[16] para todo conjunto A al que llamaremos número cardinal y que denotaremos como $|A|$. Formalmente no podemos construir a los números cardinales de esta manera pues C_A es una clase y además no contamos con un mecanismo con el que podamos elegir conjuntos de clases para cada clase contenida en el universo conjuntista. Sin embargo, verlo de esta manera nos brinda una imagen intuitiva de lo que es un cardinal de un conjunto A determinado, a saber, como un conjunto que representa la cantidad de elementos que tiene A.

Por otro lado, inspirándose en el primer método para saber cuál de las dos bolsas tiene más canicas podríamos resolver el problema "aprendiendo a contar" que, por lo dicho en el párrafo anterior sería construyendo a los números cardinales. Parece claro que, si el conjunto es finito podemos elegir como su cardinal al número natural al que es equipotente. Lo que genera la idea de que los números cardinales para conjuntos "infinitos" se podrían formar generalizando nuestra definición de número natural.

Dentro de la teoría de conjuntos es posible definir a los números naturales de la siguiente manera. Decimos que n es un número natural, si y sólo si:

1. n es un conjunto transitivo ($\forall z(z \in n \longrightarrow z \subseteq n)$

[16] Esta expresión es una fórmula que no pertenece a nuestro lenguaje de la teoría de conjuntos pues C_A es una clase propia.

2. $\langle n, \in \rangle$ es un buen orden
3. n tiene máximo ($\exists m \in n \forall k \in n(k \leq m)$)

Una forma de generalizar un concepto es hacerlo lo menos específico posible o, dicho de otra forma, se generaliza un concepto quitándole características. Pero ¿Cuál de estas tres propiedades tenemos que quitar para generalizar la idea de número natural? Después de un análisis minucioso podemos observar que la condición 3, la de tener máximo, garantiza que el número natural sea finito por lo que parece razonable quitar la condición 3 para poder generalizar el concepto de número natural y poder considerar conjuntos infinitos.

Así las cosas, decimos que α es un ordinal si y sólo si

1. α es un conjunto transitivo ($\forall z(z \in \alpha \longrightarrow z \subseteq \alpha)$
2. $\langle \alpha, \in \rangle$ es un buen orden

Con esta definición podemos notar que $\omega = \{n : n\ es\ un\ número\ natural\}$ y $\omega \cup \{\omega\}$ son ordinales, sin embargo, si consideramos $f: \omega \cup \{\omega\} \longrightarrow \omega$ definida como:

$f(x) = \begin{cases} 0, & x = \omega \\ n+1, & x = n \end{cases}$ es una función biyectiva con lo que se demostraría que $\omega \cup \{\omega\}$ y ω tienen la misma cantidad de elementos. Por lo que los ordinales no nos sirven como representantes. Sin embargo, podemos construir a los cardinales por medio de los ordinales.

Formalmente decimos que k es un cardinal, si y sólo si, k es un ordinal inicial, es decir, un ordinal no biyectable con ningún ordinal menor. Con esta definición podemos observar que todos los números naturales y ω son cardinales, lo cual no debería sorprendernos pues en un inicio queríamos que los números naturales fueran representantes de los conjuntos finitos. También cabe mencionar que ω es un cardinal infinito y que además es el primero de ellos, no obstante, todavía nos falta determinar quiénes son los demás cardinales infinitos no numerables (i.e. no equipotentes con ω).

Una mente brillante podría preguntarnos ¿por qué los cardinales no terminan en ω? La respuesta a esta pregunta se puede develar en uno de los teoremas de Cantor que afirma lo siguiente: "Todo conjunto es dominado por su conjunto potencia $\forall A(A \prec \wp(A))$" lo que implicaría que $\forall A(|A| < |\wp(A)|)$, en particular $|\omega| < |\wp(\omega)|$ lo que quiere decir que hay conjuntos que tienen más elementos que ω, por lo que necesitamos todavía más cardinales.

Por recursión podemos definir la siguiente sucesión de ordinales $\{\omega_\alpha : \alpha\ es\ un\ ordinal\}$ como:

1. $\omega_0 = \omega$
2. Si $\alpha = \beta + 1$, entonces $\omega_\alpha = min\{\delta : \delta\ es\ un\ ordinal\ y\ \forall C(C \subseteq \omega_\beta \longrightarrow C \nsim \delta)\}$
3. Si α es límite, $\omega_\alpha = \bigcup\{\omega_\beta : \beta < \alpha\}$

Se puede demostrar que esta sucesión de $\{\omega_\alpha : \alpha\ es\ un\ ordinal\}$ son todos los cardinales infinitos. En algunos textos esta sucesión puede denotarse como $\{\aleph_\alpha : \alpha\ es\ un\ ordinal\}$ para hacer explícito que nos estamos refiriendo a ellos como cardinales y no como ordinales, en el presente trabajo utilizare las dos notaciones de manera indistinta.

Ya hemos construido a los cardinales infinitos, sin embargo, todavía queda un pequeño hueco. Todavía no estamos del todo seguros que para cualquier conjunto A exista un ω_α tal que $|A| = \omega_\alpha$, únicamente podemos garantizarlo cuando A puede bien ordenarse. Este problema se soluciona haciendo uso del Axioma de Elección AE. Una de las equivalencias del AE es el “teorema del buen orden” que afirma precisamente que todo conjunto puede bien ordenarse. Lo que implicaría que ha todo conjunto le podemos asignar un número cardinal. Los detalles formales son un poco largos y rebasaría las pretensiones de esta sección, lo único importante de esto es resaltar el hecho de que se necesita el Axioma de elección para poder garantizar que $\forall A \exists \alpha(|A| = \omega_\alpha)$.

Capítulo I: Estructuralismo

"Hay un único valor de verdad: la verdad"
Luciano Büchler

En general, la discusión principal de este trabajo versa sobre la pertinencia de usar un lenguaje de segundo orden (S.O.) para formalizar los axiomas de una teoría matemática. Como dichos axiomas, en algún sentido, son los que describen los objetos de la teoría a través de los teoremas deducidos de éstos, se requiere de una teoría filosófica que nos explique la naturaleza de los mismos. Únicamente considerando las propiedades de dichas entidades explicadas por una teoría filosófica se puede elegir el lenguaje formal, con el cual presentaremos los axiomas de las teorías, que capturen dicha naturaleza de los objetos. Hay muchas posturas filosóficas que nos pueden dar cuenta de la naturaleza de los objetos matemáticos, sin embargo, será el estructuralismo *Ante Rem* la postura que tomaré como base; por lo que en el presente capítulo daré algunas razones por las cuales elegí esta postura en vez de las otras.

La elección del estructuralismo Ante Rem no es casual, sino que tiene que ver con la resolución de un problema filosófico presentado por Benacerraf, mismo que se desarrollará en la primera sección. Veremos que el estructuralismo es una teoría que responde al famoso "reto de Benacerraf". Es cierto que hay otras posturas filosóficas que pueden resolver el problema de Benacerraf, sin embargo, considero que el estructuralismo Ante Rem ofrece una respuesta adecuada; no obstante, no entraré en detalle sobre esta cuestión pues no es el objetivo de este trabajo.

Puesto que el estructuralismo tiene una gama de ramificaciones, otro de los objetivos de este capítulo será esbozar la distinción que hay entre ellos. Por consiguiente, serán expuestos: el estructuralismo metodológico, relativista, universalista, modal y el *Ante Rem*.

1.1 Reto de Benacerraf

En 1973 Paul Benacerraf escribe un artículo titulado "Mathematical Truth" que fue el parte aguas de muchas discusiones en filosofía de las matemáticas. Benacerraf observa que hay dos clases de preocupaciones que han motivado las explicaciones sobre la naturaleza de la verdad matemática, a saber:

> "1) la preocupación por disponer de una semántica homogénea en la cual la semántica para las proposiciones de la matemática sea análoga a la semántica para el resto del lenguaje, y 2) la preocupación porque la explicación de la verdad matemática se combine con una epistemología razonable"[17]

Esto sugiere que una postura satisfactoria sobre la verdad matemática debe disponer de una semántica que pueda aplicarse tanto al lenguaje formal de las matemáticas como al lenguaje natural y, al mismo tiempo tener una epistemología razonable. Paul Benacerraf señala que "el concepto de verdad matemática […] debe encajar en una explicación global del conocimiento, de manera que haga inteligible cómo poseemos el conocimiento matemático que poseemos. Una semántica aceptable para la matemática debe encajar en una epistemología aceptable"[18]. Es decir, el reto para cualquier postura filosófica que pretenda explicarnos el conocimiento matemático debe reposar en una epistemología razonable. Y, por otra parte, debe disponer de una semántica homogénea que abarque tanto las proposiciones matemáticas como las oraciones del lenguaje natural.

La tesis principal de Benacerraf en su artículo *La verdad matemática* es que las posturas que se habían brindado hasta ese momento sobre la verdad matemática, o resuelven el problema semántico dejando sin resolver la dificultad epistémica o bien dan solución al problema epistémico, pero dejan de lado la dificultad semántica. El dilema de Benacerraf radica precisamente en que solamente se puede dar solución a uno de los dos problemas, o se resuelve el problema semántico o el epistémico.

Consideremos los siguientes dos enunciados

1) Existen al menos dos ciudades con un mayor índice de población que el Distrito Federal.

[17] Paul Benacerraf, *La verdad Matemática*, p.233, 234.
[18] Paul Benacerraf, *La verdad Matemática*, p.240.

2) Existen al menos dos números primos mayores que siete.

Inmediatamente podemos darnos cuenta de que ambas oraciones inician con la misma palabra "existen" y más aún si cambiamos la palabra "ciudades" en el enunciado 1 por "números primos", la relación "tener un mayor índice de población que" por "ser mayor que" y por último en el enunciado 1 modificamos "distrito federal" por "siete" habremos transformado la oración 1 en la afirmación 2. Aún sin saber nada de lógica sospecharíamos que ambas oraciones son muy semejantes, en particular podríamos pensar que ambos enunciados tienen la misma forma lógica y que pueden ser traducidos como:

3) $\exists x \exists y (x \neq y \wedge Px \wedge Py \wedge Rxd \wedge Ryd)$

Si interpretamos 1) como la fórmula lógica 3) y empleamos una semántica de tipo Tarskiana estaríamos afirmando que existen dos cosas distintas que tienen la propiedad de ser ciudades y que mantienen una relación de "tener un mayor índice de población" con el Distrito Federal. Esta interpretación es de tipo referencial por lo que si interpretamos 1) como 3) nos estamos comprometiendo con la existencia de al menos dos objetos. De igual forma si interpretamos 2) como 3) nos estaríamos comprometiendo ontológicamente con la existencia de al menos dos números (entidades abstractas). De esta forma, si interpretamos oraciones semejantes a 1) y 2) como 3) empleando una semántica de tipo Tarskiana, habremos conseguido una semántica homogénea, tanto para las proposiciones de la matemática como para las del lenguaje natural. A costa de aceptar la existencia de entidades abstractas, con lo que surge ahora un problema epistemológico: qué tipo de acceso tenemos para los objetos abstractos.

Teorías como la platonista, que postula que las entidades matemáticas son entidades reales, debe explicarnos la manera cómo tenemos acceso a dichas entidades. Gödel, partidario de la teoría platónica, consideraba que era por medio de nuestra "intuición matemática" la forma en la que podemos adquirir conocimiento de los objetos matemáticos. En palabras de Gödel:

> "…los objetos de la teoría de conjuntos transfinita…está claro que no pertenecen al mundo físico e incluso que su conexión indirecta con la experiencia física es muy remota… Pero, a pesar de su lejanía de la experiencia sensible, tenemos algo parecido a una percepción de los objetos de la teoría de conjuntos, como se puede ver por el hecho de que los axiomas mismos nos fuerzan a aceptarlos como verdaderos. No veo ninguna razón por la cual debamos tener menos confianza

en este tipo de percepción, es decir, en la intuición matemática, que, en la percepción sensible, que nos induce a construir teorías físicas y a esperar que futuras percepciones sensibles concuerden con ellas y, además, a creer que cuestiones no decidibles por el momento tengan significado y puedan ser decididas en el futuro." [19]

No obstante, este acceso epistémico por medio de la "intuición matemática" parece un tanto *ad hoc*. Podemos tener intuiciones sobre qué propiedades deben cumplir dichos objetos, pero de ahí no se sigue que dichos objetos existan. Por otra parte, Benacerraf en su artículo "Mathematical Truth" señala que es "partidario de una explicación causal del conocimiento en la que, para que X sepa que S es verdadero, se requiere que alguna relación causal se dé entre X y los referentes de los nombres, predicados y cuantificadores de S"[20]. Así, dado que parece que los objetos abstractos no se encuentran localizados en el espacio tiempo, entonces no existe un nexo causal entre S y dichos objetos abstractos; por lo que se abre la cuestión sobre el acceso epistémico que tiene el sujeto y los objetos abstractos. Si queremos rescatar el realismo matemático tendremos que hacer explícita la epistemología que utilizaremos. Por consiguiente, el reto para el realista ontológico será proporcionar el acceso epistémico que tiene el sujeto con los objetos abstractos.

Una estrategia seguida por el realista sería criticar la "epistemología causal", a la que hace alusión Benacerraf, pero siendo caritativos lo que muestra el artículo de este filósofo es que el realismo se enfrenta con un problema epistemológico que tiene que resolver. Shapiro nos dice que "la teoría causal del conocimiento es una instancia de un género muy extendido llamado epistemología naturalizada, cuya tesis es que el sujeto humano es un ser completamente natural situado en el universo físico. Por lo que cualquier facultad del cognoscente debe incluir procesos naturales susceptibles de escrutinio científico ordinario"[21]. Siguiendo con la argumentación de Shapiro, aun cuando la epistemología causal es altamente

[19] Gödel, K., *Obras completas,* p. 359.
[20] Paul Benacerraf, *La verdad Matemática*, p.244.
[21] La traducción es mía. "That the causal theory of knowledge is an instance of a widely held genre called naturalized epistemology, whose thesis is that the human subject is a thoroughly natural being situated in the physical universe. Any faculty that the knower has and can invoke in pursuit of knowledge must involve only natural processes amenable to ordinary scientific scrutiny" Stewart Shapiro, Philosophy of mathematics: Structure and Ontology, p. 110.

cuestionable el realista todavía sigue teniendo problemas frente a una postura naturalizada de la epistemología. Por lo que el reto para el realista será mostrar que el realismo es compatible con una epistemología naturalizada.

El estructuralismo *Ante Rem*[22], considerando únicamente el cuerno epistemológico del reto de Benacerraf, es una modificación del realismo platónico con el fin de que la epistemología naturalizada nos sirva para esclarecer el acceso epistémico a dichas entidades. Y, por otra parte, considerando el cuerno semántico del reto, el estructuralismo *Ante Rem* considera que las semánticas de tipo tarskeanas pueden abarcar tanto las proposiciones matemáticas como las oraciones del lenguaje natural. De esta manera, el estructuralismo se puede ver como una respuesta al reto de Benacerraf tanto del cuerno epistemológico como del semántico.

1.2. El Estructuralismo y sus diversificaciones

Una de las razones por las cuales es muy complicado dar una definición exhaustiva y clarificadora del estructuralismo es por su gran diversificación. Hay distintos tipos de estructuralismo tales como: el estructuralismo metodológico, relativista, universalista, modal, formalista, *In Re y el Ante Rem*. En esta sección pretenderé, en la medida de lo posible, dar una definición general e ir señalando sus diferencias.

El estructuralismo considera, de manera general, que la matemática es la ciencia de las estructuras. Los números naturales, los racionales, reales, etc. son estructuras que estudian las matemáticas. He aquí la interrogante ¿qué son las estructuras? Shapiro nos dice que "una estructura es la forma abstracta de un sistema, destacando las interrelaciones entre los objetos, y haciendo caso omiso de aquellas características que no afectan a su relación con otros objetos en el sistema"[23]. Asimismo "un sistema es una colección de objetos con una cierta relación"[24] y más específicamente decimos que "un sistema es un par ordenado que consiste

[22] Existen distintos tipos de estructuralismo y no todos se comprometen con el realismo.
[23] La traducción es mía. "A structure is the abstract form of a system, highlighting the interrelationships among the objects, and ignoring any features of them that do not affect how they relate to other objects in the system". Stewart Shapiro, Philosophy of mathematics: Structure and Ontology, p. 74
[24] La traducción es mía. "a system to be a collection of objects with certain relations" Ibid. p. 73.

de un dominio y un conjunto de relaciones y funciones sobre él"[25]. Es decir, un sistema es lo que en teoría de modelos conocemos como modelo, y la estructura es la abstracción de dicho modelo, considerando únicamente las relaciones que hay entre los objetos, dejando de lado las características accidentales o peculiares que tienen los objetos del dominio. Visto de otra forma, una estructura es un modelo sin objetos que únicamente conserva las relaciones que hay entre dichos objetos; utilizando terminología de filosofía del lenguaje, podemos afirmar que una estructura es el *type* de un modelo determinado.

Sin embargo, ¿cuál es la naturaleza de las estructuras?; y, ¿cuál es la relación que mantienen con la referencia y la verdad de las expresiones matemáticas? La respuesta a estas preguntas genera la diversificación del estructuralismo como lo veremos a continuación.

1.2.1. El Estructuralismo Metodológico y el Formalista.

El estructuralismo metodológico acepta que la matemática es la ciencia de las estructuras pero no se compromete con responder preguntas de carácter filosófico, como las citadas anteriormente. Esta neutralidad es para algunos matemáticos y científicos de gran utilidad pues les permite hacer su trabajo sin tener que lidiar con posturas de corte filosófico. En pocas palabras la metodología a desarrollar en este estructuralismo es muy simple, a saber, que el matemático únicamente debe preocuparse por las relaciones que satisface un determinado objeto, o colección de estos, dejando a un lado sus características intrínsecas. De esta manera

> "los matemáticos con una metodología estructuralista siguen los siguientes dos principios 1) lo que mayormente hacemos en matemáticas (o, en cualquier caso, que deberíamos hacer) es estudiar las características estructurales de dichas entidades. En otras palabras, nosotros las estudiamos como estructuras en medida de que son estructuras. 2) Al mismo tiempo, es (o debería ser) que en las matemáticas no tiene

[25] La traducción es mía. "A system is an ordered pair that consists of a domain and a set of relations and functions on it". Ibid. p.92.

> importancia real la naturaleza intrínseca de dichas entidades más allá de sus características estructurales"[26].

Es decir, al matemático lo único que le debe preocupar son las propiedades estructurales que cumplen determinados objetos, por ejemplo, que tal colección cumpla con los axiomas de Peano, que satisfagan las propiedades de grupo o de espacio vectorial, que formen un anillo conmutativo con unidad, que tal conjunto de objetos y una determinada relación formen una métrica, etc. Sin embargo, cabe recalcar, nuevamente, que esta postura no responde a las preguntas semánticas y metafísicas que mencioné anteriormente con respecto a la verdad y referencia de las expresiones matemáticas y naturaleza de las estructuras.

Una forma de responder a estas preguntas filosóficas de forma negativa y sin comprometerse demasiado es por medio de estas tres opciones:

1) Negarse a proporcionar una respuesta filosófica ya sea por considerar que carecen de completo sentido o se encuentran en cierto sentido equivocadas, y por ende deben evitarse tanto en el quehacer matemático como filosófico. Esta opción es un poco inadecuada desde el punto de vista filosófico, ya que podemos observar en los desarrollos de las teorías matemáticas el empleo de una metodología estructuralista, que incita a cuestionarnos sobre la relación existente entre las referencias de las expresiones matemáticas y la estructura que describen.
2) Considerar que las fórmulas matemáticas son expresiones que no se encuentran interpretadas o en otras palabras sostener que las expresiones matemáticas no tienen referencia. Desde esta óptica los matemáticos únicamente trabajan con símbolos vacíos y hacen uso de reglas de inferencia como si fueran las normas que debe de seguir una persona si quiere hacer matemáticas. Uno de los problemas de esta postura es que no nos explica el conocimiento matemático que de hecho tenemos. Parece que

[26] La traducción es mía. "Mathematicians with a structuralist methodology stress the following two principles in connection with them: (i) What we usually do in mathematics (or, in any case, what we should do) is to study the structural features of such entities. In other words, we study them as structures, or insofar as they are structures. (ii) At the same time, it is (or should be) of no real concern in mathematics what the intrinsic nature of these entities is, beyond their structural features". Reck, E. H., y Price, M. P. *Structures and structuralism in contemporary philosophy of mathematics,* p. 345.

el conocimiento matemático, con esta posición, es el resultado de haber elegido correctamente las reglas del juego.

3) Sostener que las matemáticas únicamente se preocupan por las relaciones inferenciales o patrones de inferencia. Sin embargo, al hablar de “relaciones inferenciales” surgen las siguientes preguntas: ¿Qué es aquello que se relaciona? Y ¿Cuál es su naturaleza? Si bien con esta postura se respondieron las preguntas iniciales, en el fondo origina nuevas cuestiones como las mencionadas anteriormente.

Según el análisis que realizan Reck, E. H., y Price, M. P. en su “artículo Structures and structuralism in contemporary philosophy of mathematics”, sobre los diversos estructuralismos, se llama estructuralismo formalista a la postura que acepta una metodología estructuralista y que responde las preguntas semánticas y metafísicas por medio de alguna de las tres opciones antes mencionadas. En sentido estricto, el estructuralismo formalista solamente es considerado como tal porque emplea una metodología estructuralista, aunque no sostenga propiamente una postura filosófica estructuralista, donde se asevere que la referencia de las expresiones matemáticas esté de algún modo relacionada con la estructura. Reck, E. H., y Price lo nombran como estructuralismo formalista para poder hacer un contraste con las demás posturas, considero que esto es muy útil, en particular porque esta postura formalista le brinda al matemático una metodología estructuralista y responde a las preguntas filosóficas de forma tal que éste no tiene que preocuparse por su resolución ya sea porque 1) carecen de sentido, 2) las expresiones matemáticas no tienen referencia alguna, 3) únicamente se tiene que preocupar por “patrones de inferencia”.

1.2.2. Estructuralismo Relativista.

El estructuralismo relativista, como su nombre lo indica, asevera que no existe una única referencia determinada para las expresiones matemáticas, sino que la referencia depende del modelo de interpretación de la teoría. Para poner un ejemplo o profundizar en el asunto consideremos cualquier proposición de la aritmética como p: 2+2=4 o $\forall x \forall y(x+y=y+x)$ y los símbolos no lógicos “0” y “s”, como bien sabemos los símbolos “+, 1, 2,…,” pueden traducirse en términos del "0" y "*s*"[27], de esta forma podemos considerar la traducción p1(0,*s*) para p. Notemos que para esta traducción la referencia queda determinada únicamente considerando los referentes para los símbolos "0" y "s" de un determinado modelo. Y dado que la teoría tiene una cantidad infinita de modelos, al escoger uno de éstos la referencia se vuelve relativa al modelo que se ha elegido (de ahí su nombre).

Asimismo, se debe notar que para que la referencia no sea vacua, se debe asumir la existencia de al menos un modelo para la teoría o bien asumir la existencia de conjuntos infinitos. Esto último se puede obtener fácilmente teniendo como teoría de fondo a la teoría de conjuntos, pues con el axioma de infinito y potencia se asegura la existencia de conjuntos infinitos con distintas cardinalidades, sin embargo, se podría cuestionar el hecho de que en este caso los conjuntos reciben una especie de categoría superior frente a los demás objetos[28].

Sintéticamente, el estructuralismo relativista acepta igualmente que la matemática es la ciencia de las estructuras (en el sentido del estructuralismo metodológico), pero la referencia de los términos queda determinada por sus instancias; es decir por sus modelos. En sentido estricto, no hay un compromiso con un realismo, ni en valor de verdad ni ontológico; sin embargo, es compatible con ellos. Su compatibilidad depende de la adopción de un lenguaje de primer orden o de segundo orden. Si se escoge el primero no habrá un compromiso con el realismo en valor de verdad ni con el ontológico, en cambio, si se escoge el de segundo orden existirán dichos compromisos. En cambio, en caso de optar por un lenguaje de segundo orden se tendrá la ventaja de contar con modelos isomorfos y con ello poder justificar, en cierto sentido, que aunque la referencia es relativa a un modelo el valor de verdad siempre será el mismo.

Al igual que el estructuralismo formalista, tampoco éste sostiene propiamente una postura filosófica estructuralista, pues, no ratifica que la referencia de los términos matemáticos quede determinada estructuralmente; sin embargo, este estructuralismo es considerado como tal, igualmente por emplear una metodología estructuralista. En este sentido se podría afirmar

[27] El 1 lo podríamos traducir como s(0), el 2 como s(s(0)) y así sucesivamente. Asimismo, el símbolo + se puede definir por recursión de la siguiente manera 1) x+0=x y 2) x+s(y)=s(x+y).

[28] No obstante, pueden existir cierto tipo de teorías (categóricas) para las cuales la teoría de conjuntos en el caso en que no sea categórica no podrá garantizar la existencia de un modelo para esa teoría. Esta discusión se hará con más detalle en la sección 6 del capítulo II "Cuasi-categoricidad de la teoría de conjuntos"

que tanto el estructuralismo formalista como el relativista son variaciones del estructuralismo metodológico que no se comprometen con una postura filosófica propiamente estructuralista.

Uno de los problemas del estructuralismo relativista es la ambigüedad de la referencia. Considero que una postura relativista con respecto a la referencia va en contra de nuestras intuiciones, que puede develarse considerando la siguiente pregunta: ¿qué fue primero la idea de número natural o la axiomatización de esta? Por sentido común diríamos que primero se necesita tener la idea de número natural para que posteriormente se pueda axiomatizar la teoría. Viéndolo en esta perspectiva parece claro pensar que, independientemente de los axiomas, nosotros tenemos ciertas nociones de lo que es un número natural y que objetos no son números naturales; por lo que no es del todo claro que tengamos que considerar que la referencia es relativa al modelo, si en un principio ya teníamos un modelo pretendido y nociones claras de los que es un número natural. Cuando un matemático hace uso de un modelo no estándar le específica a sus receptores la referencia de los términos que va a emplear (a qué modelo no estándar se va a referir) pues de otra manera nadie podría entenderle, pues de ante mano tenemos un modelo pretendido al que queremos referirnos. Hasta en el uso de los modelos no estándar se presupone la existencia del modelo pretendido.

1.2.3. Estructuralismo Universalista

El estructuralismo universalista sostiene que las expresiones matemáticas refieren a todos los objetos que satisfacen dicha expresión para algún modelo determinado. En el caso de las expresiones numéricas éstas denotarán a todos los objetos que satisfacen dicha fórmula interpretada en algún modelo. Por ejemplo, la expresión $x < 7$ refiere a todos los objetos y que satisfacen la fórmula $y <_M 7^M$ donde "$<_M$" y "7^M" son las interpretaciones de $<$ y 7 bajo el modelo M. Si bien en el estructuralismo relativista el término "0" refiere al elemento base de algún modelo elegido de la aritmética de Peano, en el estructuralismo universalista se pretende que el término "0" refiera a todos los elementos base de los modelos de la aritmética de Peano.

Para conseguir esto último cada fórmula φ en el lenguaje de los números naturales[29] será transformada a una fórmula $\varphi(o, s, \mathbb{N})$, es decir, la fórmula φ se transforma a una que tenga explícito el elemento distinguido de los números naturales, la función sucesor y se añade una nueva letra de predicado $\mathbb{N}(x)$ que se lee como "x es un número natural" tal que todas las variables libres se ligan a un cuantificador universal y se restringen a $\mathbb{N}$; por ejemplo la expresión $x < 2$ se transforma a $\forall x(\mathbb{N}(x) \longrightarrow x < s(s(0)))$. Del mismo modo todos los axiomas de Peano se relativizan al predicado $\mathbb{N}$ y se unen en conjunción (llamemos $AP_{\mathbb{N}}$ a dicha conjunción). Así $AP_{\mathbb{N}}$ es la conjunción de los siguientes axiomas de Peano:

1) $\mathbb{N}(0)$ el cero es un número natural.
2) $\forall x(\mathbb{N}(x) \longrightarrow \mathbb{N}(s(x)))$ si x es un número natural, entonces su sucesor también lo es.
3) $\forall x(\mathbb{N}(x) \longrightarrow s(x) \neq 0)$ el cero no es sucesor de ningún número natural.
4) $\forall x \forall y((\mathbb{N}(x) \wedge \mathbb{N}(y) \wedge (x \neq y)) \longrightarrow s(x) \neq s(y))$ si dos números naturales son distintos, entonces sus sucesores también lo son.
5) $\forall Y(Y(0) \wedge \forall x\left(\left(\mathbb{N}(x) \wedge Y(x)\right) \longrightarrow Y(s(x))\right) \longrightarrow \forall x(\mathbb{N}(x) \longrightarrow Y(x)))$ si el cero cumple la propiedad Y y sucede que para cualquier natural que cumpla Y su sucesor también la cumple, entonces todos los naturales cumplen la propiedad Y.

Considerando lo anterior, podemos construir una nueva fórmula a saber $AP_{\mathbb{N}}(0, s, \mathbb{N}) \longrightarrow \varphi(o, s, \mathbb{N})$, y, por último, añadirle cuantificadores universales irrestrictos obteniendo la expresión $\varphi' := \forall x \forall f \forall X(AP_{\mathbb{N}}(x, f, X) \longrightarrow \varphi(x, f, X))$ que de manera intuitiva dice que φ es verdadera en todas las estructuras que satisfacen los axiomas de Peano gracias a que los cuantificadores universales son irrestrictos. En síntesis, nuestra fórmula inicial φ es transformada a φ' y con esto se logra que φ refiera a todos los objetos que satisfacen la fórmula de algún modelo. Esto es de nuevo una tesis semántica, es decir, el estructuralismo universalista sostiene, que cada vez que utilizamos una expresión aritmética φ lo que realmente queremos afirmar es una expresión universal-implicativa φ' que es una afirmación sobre todos los objetos, funciones de un argumento, relaciones o conjuntos precisamente porque los cuantificadores universales son irrestrictos. Nótese de lo anterior que este carácter

[29] Restringiré el análisis al lenguaje de los números para que la explicación sea más clara, aunque el proceso a seguir también es válido para fórmulas en otros lenguajes numéricos.

universalista elimina toda referencia a modelos pretendidos, no requiere comprometerse con la existencia de estos últimos y, sobre todo, no necesita de la postulación de objetos abstractos, o, dicho en otras palabras, no sostiene un realismo ontológico.

Según el estructuralismo universalista la referencia de una proposición φ queda determinada por su transformación φ'. Del mismo modo, la verdad de φ quedará determinada por ella. Decimos que φ es verdadera si y sólo si su transformación es verdadera, i.e. si existe un modelo de su transformación. Es en este punto donde surge un problema para este tipo de estructuralismo, conocido como el problema de no vacuidad.

Como la transformación de φ es una implicación, entonces un modelo M hará verdadera la transformación si y sólo si no satisface el antecedente o se satisface el consecuente. Ahora supongamos que $AP_{\mathbb{N}}(0, s, \mathbb{N})$ no admite modelo, entonces cualquier modelo va a satisfacer la transformación φ' pues el antecedente nunca será satisfecho. Esto representa un grave problema, pues considerando proposiciones falsas, como 2+3=3, serán verdaderas porque el antecedente no puede ser satisfecho. Este problema puede verse más claramente considerando que la expresión $\varphi' := \forall x \forall f \forall X\big(AP_{\mathbb{N}}(x, f, X) \longrightarrow \varphi(x, f, X)\big)$ de manera intuitiva dice que φ es verdadera en todas las estructuras que satisfacen los axiomas de Peano, es decir, que para que φ' sea falsa debe existir al menos una estructura que satisfaga los axiomas de Peano y, al mismo tiempo, esa misma estructura no debe satisfacer φ. Por tanto, en el caso que los axiomas de Peano no admitan modelo (i.e. ninguna estructura los satisfaga) la proposición φ' será vacuamente verdadera, sin importar cuál sea el contenido de φ (puede ser algo falso como 2+3=3)

La resolución a este problema puede ser mediante las siguientes dos opciones 1) asumir una teoría de fondo como ZFC para garantizar la existencia de modelos o 2) optar por un estructuralismo modal. Elegir la primera opción eliminaría por completo el atractivo de este estructuralismo pues se estaría asumiendo la existencia de objetos abstractos para su funcionamiento. La segunda opción será expuesta en la siguiente sección.

1.2.4. Estructuralismo Modal

El estructuralismo modal intenta rescatar, en cierto sentido, las ideas del estructuralismo universalista con respecto a la referencia sin caer en el problema de vacuidad. De manera general el estructuralismo modal sostiene que las expresiones matemáticas refieren a todos los objetos que satisfacen dicha expresión para algún modelo posible determinado.

Para lograr esto, la transformación de una proposición φ en el lenguaje de los números naturales[30] se va a dar en términos de operadores modales, a saber, $\varphi' := \Box\forall x\forall f\forall X\big(AP_{\mathbb{N}}(x,f,X) \longrightarrow \varphi(x,f,X)\big)$ donde “$\Box$" es el operador de necesidad[31], los cuantificadores “$\forall x, \forall f$" quedan restringidos al conjunto X y el cuantificador "$\forall X$” es irrestricto. De esta forma se tiene que la expresión φ' refiere a todos los objetos que satisfacen φ para algún modelo posible. Nuevamente de manera intuitiva φ' afirma que φ es verdadera en todas las estructuras posibles que satisfacen los axiomas de Peano.

Al igual que el estructuralismo universalista, el modal también sostiene una tesis semántica, a saber, que cada vez que utilizamos una expresión aritmética φ lo que realmente queremos afirmar es una expresión modal-universal-implicativa φ'. Nótese de lo anterior que este carácter modal-universalista elimina toda referencia a modelos pretendidos, no requiere comprometerse con la existencia de estos últimos y sobre todo no necesita de la postulación de objetos abstractos, o dicho en otras palabras, no sostiene un realismo ontológico.

Esta transformación modal parece resolver el problema de vacuidad. Si consideramos la expresión $\varphi' := \Box\forall x\forall f\forall X\big(AP_{\mathbb{N}}(x,f,X) \longrightarrow \varphi(x,f,X)\big)$ que de manera intuitiva dice que φ es verdadera en todas las estructuras posibles que satisfacen los axiomas de Peano, esto implicaría, que para que φ' sea falsa debe de ser posible que exista al menos una estructura que satisfaga los axiomas de Peano y, al mismo tiempo, esa misma estructura no debe de satisfacer φ. Por tanto, en el caso de que sea imposible la existencia de una estructura que satisfaga los axiomas de Peano la proposición φ' será vacuamente verdadera, sin importar cuál sea el contenido de φ (puede ser algo falso como 2+3=3). Pese a que podría repetirse el

[30] Nuevamente el análisis será únicamente para la teoría de números naturales con el fin de quitar complejidad y que la exposición se torne más comprensible. Cabe recordar que el proceso puede generalizarse a cualquier teoría numérica.
[31] Cabe señalar que en el estructuralismo modal las nociones modales son conceptos básicos y no son definidos por medio de semánticas de mundos posibles.

problema de vacuidad, al menos éste es más débil, a causa del operador posibilidad que se ha agregado obteniéndose, en vez de un supuesto de existencia, un supuesto de posibilidad.

Si aceptamos el supuesto de posibilidad $\lozenge \exists x, f, X(AP_{\mathbb{N}}(x, f, X)$ estamos postulando que es posible que los axiomas de Peano admitan modelo. De esta forma al ser el antecedente de φ' siempre satisfecho la falsedad o la verdad de la transformación recaerá en la verdad o la falsedad del consecuente. En el estructuralismo universalista, proposiciones falsas como "2+2=5" eran verdaderas al ser transformadas por la vacuidad del antecedente. Este problema se resuelve en el estructuralismo modal, dado que el valor de verdad de la transformación depende del consecuente, ya que el antecedente siempre se satisface con el supuesto de posibilidad que es más fácil de aceptar que el de existencia.

Sin embargo, todavía hay algunas cuestiones que el estructuralista modal e incluso el universalista tiene que responder. En primer lugar, como el estructuralismo modal sostiene una tesis semántica, a saber, que cada vez que utilizamos una expresión aritmética φ, lo que realmente queremos afirmar es una expresión modal φ'; surge la siguiente pregunta: ¿nuestras proposiciones aritméticas realmente tienen una forma semántica tan complicada escondida debajo de su forma sintáctica habitual que hasta incluye un componente modal?[32] ¿Cuando decimos que $2 + 2 = 4$ queremos decir que es necesario?

Por otra parte, si el estructuralista modal justifica la posibilidad de la existencia de estructuras que satisfagan los axiomas de Peano, es decir, si justifica el supuesto modal $\lozenge \exists x, f, X(AP_{\mathbb{N}}(x, f, X)$ con el cual se libra del problema de vacuidad, entonces me parece plausible considerar que esta misma justificación podría utilizarse para garantizar la existencia de estructuras abstractas o mínimamente nos proveería de una epistemología adecuada, con la cual podríamos garantizar el conocimiento de las estructuras[33]. En ambos casos esto resultaría ser un beneficio para el estructuralismo Ante Rem que será expuesto en la sección 1.2.5.

---

[32] Cfr. Erick Reck y Michel Price, *Structures and Structuralism in contemporary philosophy of mathematics, p. 360*

[33] Como lo veremos en la siguiente sección este argumento no afecta al estructuralismo modal de Chihara

1.2.4.1 La teoría de la Constructibilidad de Charles S. Chihara

Un tipo particular de estructuralismo modal lo podemos observar en el trabajo realizado por Charles S. Chihara, que, como buen nominalista, niega la existencia de objetos abstractos. Chihara observa un carácter modal en los postulados de la Geometría de Euclides, interpretándolos de la siguiente manera:

> "Postulado 1: Una línea recta puede ser construida desde un punto hasta cualquier otro punto.
>
> Postulado 2: Un segmento de recta puede extenderse indefinidamente en una línea recta
>
> Postulado 3: Un circulo puede ser construido con su centro en cualquier punto y con cualquier radio"[34]

Como puede observarse, los tres postulados de Euclides interpretados de esta manera no afirman la existencia de ningún objeto abstracto (puntos en el espacio, líneas rectas o círculos) sino simplemente afirman la posibilidad de hacer una construcción geométrica (construir una línea recta, alargar un segmento, formar un círculo). Precisamente aquí se puede ver la idea de fondo que está presente en la "teoría de la constructibilidad" de Chihara, la cual consiste en pensar a las proposiciones matemáticas como oraciones posibles o constructibles. "La idea básica -nos dice Chihara- […] es desarrollar un sistema matemático en el que los teoremas existenciales de las matemáticas tradicionales sean remplazados por teoremas constructibles"[35], es decir, las afirmaciones existenciales serán reemplazadas por oraciones que afirman que tal objeto puede ser construido.

Chihara nos dice que "la Teoría de la constructibilidad es una teoría sobre las oraciones-abiertas: esta nos dice que oraciones-abiertas (de cierto tipo) son construibles y cómo estas oraciones-abiertas construibles estarían relacionadas entre sí por la relación de

---

[34] La traducción es mía: "Postulate 1: A straight line can be constructed from any point to any point. Postulate 2: A straight line can be extended indefinitely in a straight line. Postulate 3: A circle can be constructed with its center at any point and with any radius." Charles S. Chihara, *A Structural Account of Mathematics,* p. 23

[35] Charles S. Chihara, *Constructibility and Mathematical Existence,* p. 25

satisfacción"[36]. Para lograr esto Chihara introduce los cuantificadores de constructibilidad[37] $(C\varphi)$ y $(A\varphi)$ que se interpretan de la siguiente manera:

- $(C\varphi)\Psi\varphi$ se interpreta como "es posible construir una oración-abierta φ tal que φ satisface Ψ".
- $(A\varphi)\Psi\varphi$ se interpreta como "toda oración-abierta φ que es posible construir satisface Ψ"

El tipo de posibilidad al que Chihara se está refiriendo es, en sus propias palabras, a una posibilidad conceptual, lógica o un tipo de posibilidad metafísica[38]. Además, hay que notar que del hecho de que "es posible construir una oración-abierta φ" no se sigue que se tenga un algoritmo para construirla.

Para ejemplificar lo anterior consideremos $\mathrm{L(x)} \coloneqq$ "x es una línea" y $\mathrm{T(x,y,z)} \coloneqq$ "x pasa por los puntos y y z". De esta forma podemos simbolizar el primer postulado de Euclides como $(Cx)\forall y\forall z(\mathrm{L(x)} \wedge \mathrm{T(x,y,z)})$ el cual afirmaría que: "Es posible construir una x tal que x es una línea y pasa por cualesquiera dos puntos".

Lo interesante de esta postura modal es que, a diferencia del estructuralismo de Hellman, no se tiene que asumir un supuesto modal como $\Diamond\, \exists x, f, X(AP_{\mathbb{N}}(x, f, X)$. Por lo que mi argumento de que la justificación a la posibilidad de la existencia de dicha estructura (en este caso la estructura que satisface los axiomas de Peano) podría utilizarse para garantizar el conocimiento de las estructuras abstractas, no aplicaría al estructuralismo de Chihara. No obstante, la postura de Chihara no se libra de la cuestión formulada anteriormente: ¿realmente nuestras proposiciones matemáticas tienen una forma semántica tan complicada escondida debajo de su forma sintáctica habitual que hasta incluye un componente modal?

[36] Charles S. Chihara, *A Structural Account of Mathematics,* p. 185
[37] Para Chihara estos cuantificadores deben de ser tomados como primitivos y no deben de interpretarse por medio de semánticas de tipo Tarskiano. Chihara desarrolla una semántica de mundos posibles de tipo Tarskiano con un motivo pedagógico para hacer las ideas comprensibles. Vid. Charles S. Chihara, *Constructibility and Mathematical Existence,* p. 42
[38] Vid. Charles S. Chihara, *A Structural Account of Mathematics,* p. 186

1.2.5. Estructuralismo *Ante Rem*

Como lo dije anteriormente una estructura es la abstracción de un modelo considerando únicamente las relaciones que hay entre los objetos y dejando de lado las características accidentales o peculiares que tienen los objetos del dominio. Pero, ¿cuál es la naturaleza de las estructuras?; ¿cuál es la relación que mantienen con sus ejemplificaciones o modelos?; y, ¿cuál es la relación que mantiene con la referencia?[39]

El estructuralismo Ante Rem, propuesto por Stewart Shapiro, se compromete con un realismo en valor de verdad y con un realismo ontológico. El primero sostiene que toda proposición matemática (de una teoría con un modelo pretendido, a las que nos referiremos como teorías no-algebraicas) tiene valor de verdad aún en el caso de enunciados indecidibles donde no se conoce epistémicamente cuál es el valor de verdad. Sin embargo, esto no implica que dicho enunciado indecidible no tenga valor de verdad. A su vez, el realismo ontológico sostiene que las entidades matemáticas existen independientemente de la mente humana.

De esta manera el estructuralismo Ante Rem, de acuerdo con el realismo ontológico, sostiene que las estructuras existen independientemente de la mente humana. Por otra parte, como su nombre lo indica, también sostiene que existen las estructuras independientemente de la existencia de sus ejemplificaciones o sus instancias (los modelos), e incluso puede que anteriores a estos. Al contrario del estructuralismo In Re, que sostiene que las estructuras no pueden existir con independencia de sus ejemplificaciones[40]. En el caso del estructuralismo *in re* el valor semántico de las proposiciones dependen del sistema que ejemplifica a la estructura o bien del sistema posible en el caso del estructuralismo modal. El estructuralismo In Re también es conocido como eliminativo pues de alguna forma no se necesita presuponer la existencia ontológica de estructuras abstractas para darle un valor semántico a las proposiciones matemáticas.

Por otra parte, el estructuralismo Ante Rem propone que las expresiones numéricas denotan a los lugares de la estructura. Así pues, la referencia no depende del modelo de interpretación,

[39] Como puede observarse tanto en la definición de estructura y el tipo de preguntas que se generan existe un paralelismo o semejanza a las discusiones filosóficas sobre lo universales.
[40] El estructuralismo relativista y modal son casos de estructuralismo In Re

sino que hay un modelo abstracto llamado estructura que determina la referencia. Por ejemplo, las expresiones que pertenecen al lenguaje de los números naturales tienen una referencia muy determinada dada por la estructura a la que pertenecen; la expresión “0” refiere al primer lugar de la estructura de los números naturales, s(0) refiere a la segunda posición y así consecutivamente. Sin embargo, ¿qué sería un lugar en la posición i sin los demás lugares? No podríamos determinar la posición de un lugar sin los demás espacios y, por ende, no conseguiríamos determinar la referencia; es decir, que la referencia de $s_i(s(\ldots s(0))\ldots)$ no solamente depende del lugar i, sino también de los demás lugares en la estructura con los cuales se puede fijar dicha posición i. En este sentido, la esencia de los números está dada por sus relaciones con el resto de los números, es decir, su esencia es estructural. El número 7 no es un objeto abstracto que exista en sí mismo, sino que este existe dentro de una estructura; es decir en relación con el resto de los números naturales. Así el estructuralismo Ante Rem no defiende la existencia ontológica de objetos abstractos aislados de su estructura[41], sino únicamente se compromete con la existencia de las estructuras.

1.2.5.1. Epistemología del Estructuralismo Ante Rem y el reto de Benacerraf

Como lo mencioné en la sección 1.1 de este capítulo, el reto de Benacerraf para cualquier postura filosófica que pretenda explicarnos el conocimiento matemático consiste en que dicha explicación debe reposar en una epistemología aceptable, en especial posturas que se comprometan con el realismo ontológico. Esto implicaría que, si el estructuralismo pretende explicar el conocimiento matemático comprometiéndose tanto con el realismo en valor de verdad como el ontológico, debe de estar sustentado por una epistemología aceptable.

Shapiro nos dice que “la teoría causal del conocimiento es una instancia de un género muy extendido llamado epistemología naturalizada, cuya tesis es que el sujeto humano es un ser completamente natural situado en el universo físico. Por lo que cualquier facultad del

[41] En este punto el estructuralismo Ante Rem se diferencia del simple realismo pues en este último la esencia de los objetos abstractos puede no depender de la estructura a la que pertenecen y por ende pueden existir independientemente de esta.

cognoscente debe incluir procesos naturales susceptibles de escrutinio científico ordinario”[42]. Siguiendo con la argumentación de Shapiro, aun cuando la epistemología causal es altamente cuestionable, el realista todavía sigue teniendo problemas frente a una postura naturalizada de la epistemología. Por lo que el reto para el realista será mostrar que el realismo es compatible con una epistemología naturalizada.

Según Stewart Shapiro, es a través de 1) la abstracción de patrones, 2) definición implícita y 3) abstracción lingüística por las cuales se puede tener conocimiento de las estructuras. Antes de empezar a describir cada uno de ellos me gustaría ofrecer una especie de “hipótesis de lectura” sobre el texto de Stewart Shapiro titulado *Philosophy of mathematics: Structure and Ontology,* ya que es en este texto donde esclarece con un poco más de detalle los tres métodos antes citados. Stewart Shapiro nos dice:

> “No pretendo comprender los mecanismos psicológicos implicados, pero el reconocimiento de patrones es una facultad que los humanos claramente tienen. Mi modesto propósito es ilustrar algunos casos del procedimiento llevado a cabo, mostrando cómo se puede llegar a una aprehensión de independientes estructuras Ante Rem”[43].

Mi “hipótesis de lectura” de la precedente cita que tomo como base para poder interpretar el trabajo de Stewart Shapiro es que este autor no nos está proporcionando el medio preciso por el cual llegamos a obtener un conocimiento de las estructuras, porque de hecho este es el trabajo que le corresponde a la ciencia contestar (él no pretende comprender los mecanismos psicológicos), sino en realidad lo que Shapiro está mostrándonos es que es posible llegar a tener conocimiento de la estructuras por medio de los tres métodos ya mencionados. Así pues, la abstracción de patrones, lingüística y la definición implícita son

[42] La traducción es mía. “That the causal theory of knowledge is an instance of a widely held genre called naturalized epistemology, whose thesis is that the human subject is a thoroughly natural being situated in the physical universe. Any faculty that the knower has and can invoke in pursuit of knowledge must involve only natural processes amenable to ordinary scientific scrutiny” Stewart Shapiro, Philosophy of mathematics: Structure and Ontology, p. 110.

[43] La traducción es mía. I do not claim to understand the psychological mechanisms involved, but pattern recognition is a faculty that humans clearly do have. My modest purpose is to illustrate a few instances of the procedure at work, showing how it can lead to an apprehension of freestanding, ante rem structures. Stewart Shapiro, *Philosophy of Mathematics: Structure and Ontology,* p.113.

maneras por las cuales podemos llegar a tener conocimiento de las estructuras, pero esto no quiere decir que (de hecho) así obtenemos conocimiento de ellas. Teniendo en cuenta lo anterior procedo con la explicación de cada una de las tres formas en que es posible obtener conocimiento de las estructuras.

1.2.5.1.1. Abstracción de Patrones

El primer mecanismo, con el cual es posible obtener conocimiento de las estructuras, es la abstracción basada en reconocimiento de patrones. Este consiste en la percepción de las instancias de una estructura para después abstraer los rasgos comunes que tienen cada una de estas. Shapiro pone de ejemplo el aprendizaje que tienen los niños con respecto a las letras, el niño observa distintas instancias de la letra "E" como: e, E, e, E, etc., seguido del sonido "eeee" y eventualmente el niño llega a entender que cada uno de los símbolos "e, E, e, E," son instancias de la letra "E"; de hecho decimos que el niño aprendió la letra E cuando se le muestra al niño nuevas instancias y él puede decirnos que se trata de la letra "E", es decir, el niño aprende la letra cuando puede distinguirla de sus instancias. Este mismo mecanismo sirve para poder aprender cardinales finitos como el número "7" percibimos sus instancias como "siete patos", "siete conejos", etc. Para posteriormente abstraer el número "siete" y así sucesivamente con los distintos cardinales finitos.

Como se requiere de la percepción de la ejemplificación de una estructura este mecanismo solamente es útil para aprender estructuras finitas. Entonces, ¿Cómo podemos obtener conocimiento de estructuras infinitas? Shapiro responde que es por medio de la definición implícita y abstracción lingüística las cuales serán presentadas a continuación.

1.2.5.1.2. Abstracción Lingüística

La abstracción lingüística como su nombre lo indica es un mecanismo que opera sobre el lenguaje mediante una abstracción de este último. Está inspirada en el principio de identidad de los indiscernibles de Leibniz: "si dos objetos no pueden distinguirse entre sí, i.e. tienen las mismas propiedades, entonces los objetos son idénticos" y de la sutil observación de que la discernibilidad depende del conjunto de propiedades que se tenga para diferenciar a los objetos en cuestión.

En un primer momento consideremos un lenguaje, por ejemplo, el español junto con su ontología y ahora consideremos un sub-lenguaje de éste que conste únicamente de la propiedad "ser matemático", por consiguiente, en este sub-lenguaje la única propiedad que tenemos para distinguir objetos es la propiedad de "ser matemático", pues como lo había mencionado anteriormente la discernibilidad depende del conjunto de propiedades que se tenga para diferenciar a los objetos en cuestión y en este caso solamente se tiene la propiedad de "ser matemático". De esta manera se obtiene que con este sub-lenguaje que consta de una propiedad es imposible diferenciar a Gödel de Cantor pues ambos son matemáticos; y, por consiguiente, aplicando el principio de Leibniz (como ambos tienen las mismas propiedades) se tendría que identificar como el mismo individuo a Cantor y a Gödel.

Ahora bien, si suponemos que en nuestro sub-lenguaje tenemos a todas las profesiones podríamos de algún modo agrupar a todas las personas de acuerdo a su ocupación. De esta forma podríamos considerar a las agrupaciones como objetos de la ontología para nuestro sub-lenguaje, es decir, nuestra nueva ontología será la ontología inicial modulo la relación de equivalencia "tener la misma profesión"[44] cuyos elementos serán las clases de equivalencia de la relación o dicho de otra manera la nueva ontología identifica a aquellos individuos que tienen la misma profesión y los considera un solo objeto que pertenecerá a esta nueva ontología.

En síntesis, primero consideramos un lenguaje junto con su ontología y un sub-lenguaje que sirve para generar clases de equivalencia sobre el lenguaje de fondo. La idea según Shapiro es que "el lenguaje y el sub-lenguaje juntos caracterizan una estructura, la estructura ejemplificada por las clases de equivalencia y las relaciones entre ellas formuladas en el sub-lenguaje"[45]

[44] Una relación de equivalencia es una relación que es 1) reflexiva, 2) transitiva y 3) simétrica. Podemos observar que la relación "tener la misma profesion" es de euivalencia.

[45] Stewart Shapiro, *Philosophy of mathematics: structure and ontology,* p. 123.

Se podría acusar de que este mecanismo es un tanto artificial ya que el tipo de estructuras generadas no se parecen del todo a estructuras con las que trabajan los matemáticos y asimismo no parece ser un mecanismo que sea empleado cotidianamente por los humanos para adquirir conocimiento de estructuras, sin embargo, no hay que olvidar nuestra "hipótesis de lectura" sobre el trabajo de Shapiro. No estamos explicando como de hecho adquirimos conocimiento de las estructuras sino únicamente que es posible adquirirlo. Por tanto, las críticas de anti-naturalidad de los mecanismos no son relevantes. No obstante, Shapiro menciona un tercer medio por el cual se podría adquirir conocimiento de las estructuras infinitas, a saber, la definición implícita misma que será expuesta a continuación.

1.2.5.1.3. Definición Implícita

La primera observación que se debe notar es que hay distintas maneras en el que se puede conocer un objeto, por ejemplo, en el caso de personajes históricos a los cuales no tuvimos una percepción sensible logramos conocerlos mediante descripciones que leíamos en libros, enciclopedias o que otras personas nos enseñaban. Para poner un ejemplo tenemos conocimiento de Platón mediante descripciones como: "Platón fue discípulo de Sócrates, autor del diálogo de la Republica, maestro de Aristóteles, fundador de la academia, etc... El conocimiento por descripción es la idea de fondo de la definición implícita. Desde la óptica de este mecanismo los axiomas de una teoría, por ejemplo, la axiomática de Peano, fungen como descripciones que definen a una estructura. Además, hay que recalcar que este mecanismo parece brindarle al sujeto un acceso epistémico a las estructuras sin pasar por sus ejemplificaciones que beneficia a una postura estructuralista Ante Rem frente a un estructuralismo In Re. Es en este último punto donde radica la verdadera importancia de la definición implícita.

A simple vista la definición implícita parece ser un excelente mecanismo con el cual obtenemos conocimiento de las estructuras ya que esto se puede corroborar en la práctica matemática, por ejemplo, los estudiantes de matemáticas aprenden a distinguir lo números racionales de los reales mediante el axioma del supremo como un criterio de completud para la recta; en cierto sentido se conoce la estructura mediante descripciones que nos brindan el significado de sus propiedades. No obstante, de manera intuitiva y retomando el ejemplo de Platón, en el caso en que las descripciones empleadas tuvieran dos referentes parece intuitivo pensar que en realidad todavía no se conoce a Platón porque podría confundirse con otro individuo. Por este motivo se pide que las descripciones tengan únicamente un solo referente y en el caso de las definiciones implícitas se requerirá que los axiomas definan a una única estructura.

Es en este último punto donde parece surgir un problema pues en el caso de que los axiomas de la teoría se presenten en un lenguaje de primer orden estos podrán satisfacerse por modelos no isomorfos (con distinta estructura), lo que implicaría que no se está definiendo a una única estructura y con ello que el sujeto en realidad no está conociendo la estructura. Este problema podría solucionarse fácilmente adoptando un lenguaje de segundo orden que nos garantizaría que los modelos de los axiomas son categóricos, i.e. preservan la misma estructura. La discusión sobre esta cuestión será tratada en la sección 1.4. Antes de entrar directo al problema es menester precisar con más cuidado que axiomas de las teorías matemáticas nos podrían brindar descripciones de estructuras, este pequeño detalle será resuelto en la siguiente sección.

1.3. Teorías Algebraicas y No Algebraicas

Si aceptamos que las matemáticas es la ciencia de las estructuras, parecería casi inmediato pensar que cada teoría matemática tiene como objeto de estudio una y sólo una estructura. No obstante, esto no es del todo correcto, pues la teoría de grupos estudia las estructuras conocidas como grupos, que son conjuntos no vacíos provistos de una operación binaria asociativa, tal que para cada elemento del conjunto existe un elemento neutro y tiene inverso; por ejemplo, los números enteros con la suma usual forman un grupo. Sin embargo, también hay teorías donde parece claro que hay una estructura pretendida como la teoría de los números naturales o axiomática de Peano.

Shapiro clasifica las teorías matemáticas en dos grupos dependiendo de si su objeto de estudio tiene una estructura pretendida o es toda una colección de estructuras las que pretende estudiar. A las primeras las llamó “no algebraicas”, y a las segundas “algebraicas”. Dentro de las no algebraicas encontramos la teoría de los números naturales, los enteros, los racionales, la teoría de los números reales y la teoría de conjuntos; mientras que en las algebraicas se encuentran teorías como la topología, teoría de grupos y la teoría de campos. Con esta clasificación de las teorías matemáticas se puede notar que el requisito de categoricidad es únicamente para las teorías no algebraicas.

1.4. El Estructuralismo y los Lenguajes de Segundo Orden

El giro estructuralista se caracteriza por dejar de tomar en cuenta los objetos del dominio, y se enfoca en las relaciones que mantienen entre sí. Este vuelco a las relaciones necesita de un lenguaje lo suficientemente rico para poder hablar de ellas, y en especial de un lenguaje formal, pues las teorías estudiadas son matemáticas. Este lenguaje no puede ser otro que uno de segundo orden, pues este nos permite cuantificar sobre relaciones.

En el estructuralismo universalista se utilizaba un lenguaje en segundo orden para hacer las transformaciones dada una proposición, pues se cuantificaba sobre las relaciones, las funciones y el conjunto dominio. Sin embargo, hay una necesidad aún más básica de necesitar un lenguaje de segundo orden para lograr cualquier proyecto estructuralista.

Supóngase que tenemos una teoría no algebraica en un lenguaje numerable de primer orden tal que admite modelo M cuya cardinalidad de su dominio es $\aleph_0$. Entonces por el teorema de Löwenheim-Skolem admite modelo M' con cardinalidad $\aleph_\alpha > \aleph_0$. En el capítulo 2 ahondaré más sobre el teorema de Löwenheim-Skolem, por lo que aquí sólo quisiera rescatar la idea de que hay una teoría con dos modelos de interpretación cuyas cardinalidades son distintas. Si abstraemos dichos modelos nos quedarían dos estructuras E y E' de cardinalidades distintas y que, por ende, no son isomorfas. Habíamos quedado que las teorías no algebraicas únicamente tenían una estructura que era su objeto de estudio. Entonces ¿cómo decidiremos cuál de las dos estructuras será la indicada? Éste parece ser un grave problema para el estructuralismo en general.

Ahora supóngase que la interpretación del modelo M de x_i es a_j un objeto del dominio que se encuentra en la j-esima posición, mientras que la interpretación M' de x_i es b_k un objeto que se encuentra en la k-esima posición del modelo M' tal que $a_j \neq b_k$. Si aceptamos el estructuralismo Ante Rem que sostiene que la referencia de x_i es el hueco de la estructura, ¿cuál será la referencia de x_i?, ¿el hueco en la j-esima posición de la estructura E, o el hueco de la k-esima posición de E'? Este sería el segundo problema al que se enfrenta el estructuralismo Ante Rem con respecto a la referencia de los términos.

La aceptación del estructuralismo en general parece que depende de la adopción de un lenguaje de segundo orden donde se pueda demostrar la categoricidad de las teorías algebraicas; es decir, que para cualesquiera dos modelos de la teoría son isomorfos. De manera general, decimos que dos estructuras son isomorfas si y sólo si satisfacen los mismos enunciados, en especial los correspondientes al tipo de orden. Como lo mencione anteriormente el problema para el estructuralista Ante Rem es de acceso epistémico por lo que se requiere de un lenguaje que nos permita tener acceso a la única estructura correcta lo que se logra cuando los modelos son isomorfos.

Adoptando los lenguajes de segundo orden tenemos que los modelos de la teoría son isomorfos y por tanto se puede acceder a una única estructura con lo que el problema de la referencia queda resuelto.

Asimismo, como se señaló en una sección precedente adoptando un lenguaje de segundo orden, que implica que todos los modelos de los axiomas de las teorías matemáticas preservan la misma estructura, se podría utilizar este hecho para sostener que un mecanismo por el cual podemos adquirir conocimiento epistémico de las estructuras es por medio de la definición implícita. De esta manera los axiomas de las teorías funcionarían como descripciones que nos brindarían las propiedades de las estructuras sin tener el problema de que dichas definiciones refirieran a estructuras distintas.

Como podemos observar de lo mencionado anteriormente el estructuralismo Ante Rem requiere de la adopción de los lenguajes de segundo orden.

Conclusiones del Capítulo

A modo de conclusión para este capítulo sobre las cuestiones que se desarrollaron quiero resaltar los siguientes puntos

- Tomando en cuenta el dilema de Benacerraf el reto para cualquier postura filosófica que pretenda explicarnos el conocimiento matemático debe de reposar en una epistemología razonable. Y por otra parte debe de disponer de una semántica homogénea que abarque tanto las proposiciones matemáticas como oraciones en el lenguaje natural. Así el estructuralismo Ante Rem aceptando el reto nos proporciona una epistemología de tipo naturalista y una semántica homogénea de tipo Tarskiana.

- De los tres métodos que Stewart Shapiro nos menciona para poder tener acceso epistémico a las estructuras, a saber, la abstracción de patrones, abstracción lingüística y la definición implícita es este último medio el más importante; puesto que este mecanismo parece brindarle al sujeto un acceso epistémico a las estructuras sin pasar por sus ejemplificaciones que beneficia a una postura estructuralista Ante Rem frente a un estructuralismo In Re.

- Como el problema para el estructuralista Ante Rem es de acceso epistémico se requiere de un lenguaje que nos permita tener acceso a la única estructura correcta (sólo para las teorías no algebraicas pues estas son las que tienen un modelo pretendido) lo que se logra cuando los modelos de las teorías no algebraicas son isomorfos. Por lo que esta postura filosófica requiere que el lenguaje con el que se axiomatizan las teorías no algebraicas sea de segundo orden donde se satisface la categoricidad en los modelos.

Capítulo II: Lógica de Segundo Orden

En el capítulo precedente mostramos la necesidad del proyecto estructuralista por utilizar un lenguaje de segundo orden (S.O.) para axiomatizar las teorías. En el presente capítulo nos enfocaremos precisamente en ahondar en las propiedades que tienen estos lenguajes de orden superior, así como de los argumentos a favor y en contra del empleo de estos lenguajes para axiomatizar las teorías matemáticas. Para esta última cuestión, no hay que olvidar que el uso de un lenguaje formal debe ir acompañado con un proyecto filosófico que nos explique la naturaleza de los objetos matemáticos, como el estructuralismo.

Elegir entre un lenguaje de primer orden (P.O.) y uno de segundo orden debe de tomar en cuenta la naturaleza de las entidades matemáticas, pues es a través de los axiomas de una teoría donde se describen tales objetos. Si únicamente queremos determinar qué proposiciones se siguen de nuestros axiomas, nos conformaríamos con un lenguaje de primer orden. En cambio, si queremos buscar el significado de los enunciados matemáticos tendremos que elegir un lenguaje de segundo orden donde no se pueda demostrar el teorema de Löwenheim-Skolem, pues este nos impide determinar la referencia. Es por esto que en este capítulo profundizaremos en este teorema.

Antes que nada, es imprescindible en un primer momento exponer las distintas semánticas que existen para los lenguajes de segundo orden, concluyéndose que las semánticas estándar son las indicadas para desembarazarnos de los lenguajes de primer orden mismas que se abordaran en la primera sección de este capítulo. Asimismo, expondré el poder expresivo que tienen estos lenguajes en comparación con los de primer orden, se ahondará sobre las complicaciones que genera el teorema de Löwenheim-Skolem, la necesidad de los teoremas de categoricidad, se analizarán las críticas de Quine sobre el presupuesto realista en la lógica de segundo orden y por último se abordarán los argumentos de Jane en contra de los lenguajes de segundo orden.

2.1 Semánticas para los lenguajes de Segundo Orden

En esta sección analizaremos tres distintos tipos de semánticas para los lenguajes de segundo orden que son: semánticas Estándar, de Henkin y de Primer Orden con Dos Funciones de Interpretación. Las características principales de estas semánticas serán expuestas a continuación.

Recordemos que de manera intuitiva una estructura es una función que interpreta las fórmulas bien formadas de nuestro lenguaje formal. Una estructura nos proporciona el conjunto de objetos a los cuales se refiere el parámetro ∀ y las denotaciones de los símbolos de constante, funciones y predicados.

De manera formal una estructura-estandar E para nuestro lenguaje de segundo orden es una función cuyo dominio es el conjunto de parámetros y tal que:

I. E asigna al símbolo de cuantificador "$\forall x$" un conjunto no vacío $|E|$, al cuantificador "$\forall R^n$" un conjunto no vacío $\wp|E|^n$ y como toda función n-aria puede verse como una relación n+1-aria al cuantificador "$\forall f^n$" se le asigna el conjunto $\wp|E|^{n+1}$ (restringido a las relaciones que son funciones) así para cada $n \in \omega$. Con esto se logra que el cuantificador universal realmente signifique "para todo elemento del dominio", "para toda relación n-aria" y "para toda función n-aria".
II. E asigna a cada símbolo de constante c un elemento c^E del universo de discurso.

De manera intuitiva decimos que una estructura E satisface a una fórmula (E$\vDash_s \varphi$) si su interpretación en la estructura es verdadera para esa estructura. Formalmente decimos que una estructura E satisface la fórmula φ con s tal que $s: V \longrightarrow \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \wp|E|^n$ donde V es el conjunto de las variables. Hay que tomar en cuenta que para el caso de los lenguajes de segundo orden el conjunto de variables posee tanto variables individuales como variables de relación y función. Así $s(x_i)$ es un elemento del universo, $s(R_i^n)$ es una relación n-aria sobre el universo y $s(f_i^n)$ es una operación n-aria (i.e. $s(f_i^n): |E|^n \longrightarrow |E|$).

Para dar la definición formal de satisfacción consideremos una extensión de s que denotaremos como $\hat{s}$ tal que $\hat{s}: T \longrightarrow |E|$ con T el conjunto de términos definida como sigue:

1) $\hat{s}(x) = s(x)$ con x una variable
2) $\hat{s}(c) = c^E$ con c una constante
3) $\hat{s}(f_i^n(t_1, \ldots t_n)) = s(f_i^n)(\hat{s}(t_1), \ldots, \hat{s}(t_n))$

Por otra parte, definimos la sustitución $s(w_k/\xi)$ como una función igual a s pero que a la variable w_k le asigna ξ que puede ser tanto un elemento a del dominio de la estructura, como una relación o una operación n-aria sobre la estructura según sea el caso. De manera formal definimos la sustitución de la siguiente manera:

a) Si w_k es una variable individual, es decir $w_k = x_k$, definimos $s(x_k/a): V \longrightarrow \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \wp|E|^n$ tal que si $k \neq i$ $entonces$ $s(x_k/a)(x_i) = s(x_i)$ y si $k = i$ $entonces$ $s(x_k/a)(x_i) = a$ donde a es un elemento del dominio $|E|$.
b) Si w_k es una variable de relación, es decir $w_k = R_k^n$, definimos $s(R_k^n/P): V \longrightarrow \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \wp|E|^n$ tal que si $k \neq i$ $entonces$ $s(R_k^n/P)(R_i^n) = s(R_i^n)$ y si $k = i$ $entonces$ $s(R_k^n/P)(R_i^n) = P$ donde P es una relación en $|E|^n$.
c) Si w_k es una variable de función, es decir $w_k = f_k^n$, definimos $s(f_k^n/g): V \longrightarrow \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \wp|E|^n$ tal que si $k \neq i$ $entonces$ $s(f_k^n/g)(f_i^n) = s(f_i^n)$ y si $k = i$ $entonces$ $s(f_k^n/g)(f_i^n) = g$ donde g es una función en $|E|^{n+1}$.

De esta manera se tiene que las condiciones de satisfacción para fórmulas resultan de añadirle las siguientes cláusulas de satisfacción a las condiciones que ya se tenían para los lenguajes de primer orden expuestas en el capítulo cero.

Sean α una fórmula del lenguaje de segundo orden y E una estructura

I. E$\vDash_s R_i^n(t_1, \dots t_n)$ sii $\hat{s}\,(t_1), \dots, \hat{s}\,(t_n) \in s(R_i^n)$
II. E$\vDash_s \forall R_k^n\, \alpha$ sii $\forall P^n \in \wp(|E|^n)$ $ocurre\ que\ E \vDash_{s(R_k^n/P^n)} \alpha$ Una estructura satisface a un "para toda relación R_k^n en α" sii para toda relación $P^n \in \wp(|E|^n)$ la sustitución de R_k^n por P^n satisface la fórmula α.
III. E$\vDash_s \exists R_k^n\, \alpha$ sii $\exists P^n \in \wp(|E|^n)$ $ocurre\ que\ E \vDash_{s(R_k^n/P^n)} \alpha$ Una estructura satisface a un "existe una relación R_k^n en α" sii para alguna relación $P^n \in \wp(|E|^n)$ la sustitución de R_k^n por P^n satisface la fórmula α.
IV. E$\vDash_s \forall f_k^n\, \alpha$ sii $\forall g^n \in \wp(|E|^{n+1})$$ocurre\ que\ E \vDash_{s(f_k^n/g^n)} \alpha$ Una estructura satisface a un "para toda función f_k^n en α" sii para toda función $g^n \in \wp(|E|^{n+1})$ la sustitución de f_k^n por g^n satisface la fórmula α.

V. $E \vDash_s \exists f_k^n\, \alpha$ sii $\exists g^n \in \wp(|E|^{n+1})$ $ocurre\ que\ E \vDash_{s(f_k^n/g^n)} \alpha$ Una estructura satisface a un "existe una función f_k^n en α" sii para alguna función $g^n \in \wp(|E|^{n+1})$ la sustitución de f_k^n por g^n satisface la fórmula α.

Del mismo modo que en los lenguajes de primer orden, decimos que una estructura estándar es modelo de un conjunto de fórmulas si la estructura las satisface. Así una fórmula Φ del lenguaje de segundo orden es una "verdad lógica estándar" sii todas las "estructuras estándar" que interpretan el lenguaje de segundo orden satisface a Φ. Asimismo, definimos consecuencia lógica como sigue: Sea Γ un conjunto de fórmulas y Φ una fórmula en un lenguaje de segundo orden decimos que Γ es "consecuencia lógica estándar" de Φ sii todos las "estructuras estándar" de Γ son modelos de Φ.

Análogamente una estructura-Henkin E^H para nuestro lenguaje de segundo orden es una función cuyo dominio es el conjunto de parámetros y tal que:

1. E^H asigna al símbolo de cuantificador "$\forall x$" un conjunto no vacío $|d|$, al cuantificador "$\forall R^n$" un conjunto no vacío D^n tal que $D^n \subseteq \wp|d|^n$ y como toda función n-aria puede verse como una relación n+1-aria al cuantificador "$\forall f^n$" se le asigna el conjunto $F^n \subseteq \wp|d|^{n+1}$ así para cada $n \in \mathbb{N}$.
2. E^H asigna a cada símbolo de constante c un elemento c^E del universo de discurso.

Como puede observarse la gran diferencia que hay entre una semántica estándar y una de Henkin es que en esta última el conjunto donde son mapeadas los símbolos de relación y función es un subconjunto del conjunto potencia del dominio de discurso para las variables individuales, que en principio puede ser un subconjunto propio. Más adelante haré énfasis en esta enorme diferencia.

Asimismo, las condiciones de satisfacción se definen de una manera muy similar a las estructuras estándar. Sean α una fórmula del lenguaje de segundo orden y E^H una estructura de Henkin

1. $E^H \vDash_s R_i^n(t_1, \dots t_n)$ sii $\hat{s}\,(t_1), \dots, \hat{s}\,(t_n) \in s(R_i^n)$
2. $E^H \vDash_s \forall R_k^n\, \alpha$ sii $\forall P^n \in D^n$ $ocurre\ que\ E^H \vDash_{s(R_k^n/P^n)} \alpha$ Una estructura satisface a un "para toda relación R_k^n en α" sii para toda relación $P^n \in D^n$ la sustitución de R_k^n por P^n satisface la fórmula α.

3. $E^H \vDash_s \exists R_k^n\, \alpha$ sii $\exists P^n \in D^n$ $ocurre\ que\ E^H \vDash_{s(R_k^n/P^n)} \alpha$ Una estructura satisface a un “existe una relación R_k^n en α” sii para alguna relación $P^n \in D^n$ la sustitución de R_k^n por P^n satisface la fórmula α.
4. $E^H \vDash_s \forall f_k^n\, \alpha$ sii $\forall g^n \in F^n$ $ocurre\ que\ E^H \vDash_{s(f_k^n/g^n)} \alpha$ Una estructura satisface a un “para toda función f_k^n en α” sii para toda función $g^n \in F^n$ la sustitución de f_k^n por g^n satisface la fórmula α.
5. $E^H \vDash_s \exists f_k^n\, \alpha$ sii $\exists g^n \in F^n$ $ocurre\ que\ E^H \vDash_{s(f_k^n/g^n)} \alpha$ Una estructura satisface a un “existe una función f_k^n en α” sii para alguna función $g^n \in F^n$ la sustitución de f_k^n por g^n satisface la fórmula α.

Así una estructura de Henkin es modelo de un conjunto de fórmulas si la estructura las satisface. Una fórmula Φ del lenguaje de segundo orden es una “verdad lógica de Henkin” sii todas las “estructuras de Henkin” que interpretan el lenguaje de segundo orden satisface a Φ. Asimismo, definimos consecuencia lógica como sigue: Sea Γ un conjunto de fórmulas y Φ una fórmula en un lenguaje de segundo orden decimos que Γ es “consecuencia lógica de Henkin” de Φ sii todos las “estructuras de Henkin” de Γ son modelos de Φ.

Finalmente, una estructura de primer orden con dos funciones de interpretación E^1 para nuestro lenguaje de segundo orden es una función cuyo dominio es el conjunto de parámetros y tal que:

I. E^1 asigna al símbolo de cuantificador "$\forall x$" un conjunto no vacío $|d_1|$, para cada $n \in \mathbb{N}$ al cuantificador "$\forall R^n$" un subconjunto $E^{1P}(n) \subseteq d_1^n \times d_2(n)$ no vacío y al cuantificador "$\forall f^n$" un subconjunto $E^{1F}(n) \subseteq d_1^{n+1} \times d_3(n)$ no vacío donde $d_2(n)$ y $d_3(n)$ también son conjuntos no vacíos. Nótese que los conjuntos d_1, d_2 y d_3 pueden no estar relacionados de alguna manera. Aquí la idea es que $E^{1P}(n)$ es la interpretación de la relación “_se predica de_”; es decir, la relación entre una n-ada de elementos de d_1 y una “relación” que pertenece a $d_2(n)$ que es verdadera sobre esta n-ada. Del mismo modo $E^{1F}(n)$ es la interpretación de la relación “_ser aplicable a_”; es decir, la relación entre una n-ada de elementos de d_1 y una “función” que pertenece a $d_3(n)$ que es aplicable a esta n-ada.

II. E^1 asigna a cada símbolo de constante c un elemento c^{E^1} del universo de discurso.

Formalmente decimos que una estructura E^1 satisface la fórmula φ con s tal que $s: V \longrightarrow d_1 \cup d_2 \cup d_3$ donde V es el conjunto de las variables. Así $s(x_i) \in d_1$, $s(R_i^n) \in d_2(n)$ y $s(f_i^n) \in d_3(n)$. Para dar la definición formal de satisfacción consideremos una extensión de s que denotaremos como $\hat{s}$ tal que como sigue:

1) $\hat{s}(x) = s(x)$ con x una variable
2) $\hat{s}(c) = c^{E^1}$ con c una constante
3) $\hat{s}(f_i^n(t_1, \dots t_n)) = E^{1F}(n)$ $((\hat{s}\,(t_1), \dots, \hat{s}\,(t_n), \mathrm{s}(f_i^n))$

De esta manera se tiene que las condiciones de satisfacción son: Sea α una fórmula del lenguaje de segundo orden y E^1 una estructura

1. $E^1 \vDash_s R_i^n(t_1, \dots t_n)$ sii $(\hat{s}\,(t_1), \dots, \hat{s}\,(t_n), s(R_i^n)) \in E^{1P}(n)$
2. $E^1 \vDash_s \forall R_k^n\, \alpha$ sii $\forall P^n \in d_2(n)\ ocurre\ que\ E^1 \vDash_{s(R_k^n/P^n)} \alpha$
3. $E^1 \vDash_s \exists R_k^n\, \alpha$ sii $\exists P^n \in |E|^n\ \ ocurre\ que\ E^1 \vDash_{s(R_k^n/P^n)} \alpha$
4. $E^1 \vDash_s \forall f_k^n\, \alpha$ sii $\forall g^n \in |E|^n\ \ ocurre\ que\ E^1 \vDash_{s(f_k^n/g^n)} \alpha$
5. $E^1 \vDash_s \exists f_k^n\, \alpha$ sii $\exists g^n \in |E|^n\ \ ocurre\ que\ E^1 \vDash_{s(f_k^n/g^n)} \alpha$

La verdad lógica y consecuencia lógica quedan definidas del mismo modo que las semánticas anteriores. Cabe señalar que lo interesante de esta semántica es que las relaciones "_ser predicable a_" y "_ser aplicable a_" no quedan determinadas por la contención como en las estructuras anteriores sino que dependen de la interpretación en la estructura.

A pesar de que estas semánticas, expuestas anteriormente, se emplean para los lenguajes de segundo orden, tienen propiedades que las hacen radicalmente diferentes. En particular, podemos resaltar que las semánticas de Henkin y las de primer orden con dos funciones de interpretación resultan ser completas, cumplen el teorema de compacidad y además satisfacen los teoremas de Lowenheim-Skolem[46]. Contrariamente, las semánticas estándar resultan ser incompletas, no admiten compacidad y no satisfacen los teoremas de Lowenheim-Skolem[47]. Gracias a esta discrepancia de propiedades entre estas semánticas,

[46] Vid. Shapiro, Stewart, *Foundation Without Foundationalism: A Case for Second Order Logic,* p. 89-95.

[47] Vid. Herbert B. Enderton, "Una Introducción matemática a la lógica", p. 409-410

algunos filósofos, como Putnam[48], han desvalorado su utilidad argumentando que se necesita un criterio para determinar cuál de las dos semánticas se debe de emplear; puesto que dependiendo de la elección de la semántica se tendrán propiedades distintas. A continuación, brindaré argumentos por los cuales considero que debemos aceptar las semánticas estándar frente a las otras dos opciones.

De manera intuitiva la diferencia que hay entre las semánticas estándar con las de Henkin y las de primer orden con dos funciones de interpretación es que, en la primera, las relaciones y las funciones están mapeadas sobre todo al conjunto potencia del dominio de los individuos, mientras que en las de Henkin y las de primer orden con dos funciones de interpretación se puede restringir el dominio bajo el cual van a estar mapeadas, de tal manera que puede tomarse un subconjunto propio del conjunto potencia. Es aquí donde radica la razón de nuestra preferencia por los modelos estándar, pues intuitivamente, cuando axiomatizamos una teoría en un lenguaje de segundo orden queremos que el cuantificador universal que liga a las relaciones y funciones no esté restringido. De manera natural, cuando decimos "todas las relaciones", queremos referirnos a todas ellas y no a un subconjunto propio. En pocas palabras, las semánticas estándar, a diferencia de las otras, rescata nuestras intuiciones sobre el cuantificador universal ligado a las relaciones y funciones.

Por otro lado, como en las semánticas estándar y las de primer orden con dos funciones de interpretación se toma un subconjunto propio de la potencia del dominio donde van a estar mapeadas las relaciones, entonces puede ser el caso que en algunas estructuras no se satisfaga el axioma de comprensión $\exists X^n \forall \langle x \rangle_n (X^n \langle x \rangle_n \equiv \Phi \langle x \rangle_n)$; pues tal relación X^n puede no estar en la estructura. Lo que implica que las semánticas estándar no cumplen el teorema de correctud, que es una propiedad básica que debe cumplir un sistema lógico con su respectiva semántica (pues siempre queremos que nuestro sistema deductivo deduzca formulas verdaderas). No obstante, para arreglar este problema los defensores de las semánticas de Henkin y de las semánticas de primer orden dividen las estructuras en dos tipos: 1) fieles y 2) no fieles, donde las estructuras fieles son aquellas que satisfacen el axioma de comprensión; de esta forma considerando únicamente las estructuras fieles se satisface el teorema de correctud en las semánticas de Henkin. No obstante, pedir únicamente estructuras

48 Vid. Putnam, H. "Models and Reality", p. 481.

fieles es un requisito demasiado ad hoc. Lo cual es otro punto a favor del empleo de las semánticas estándar para los lenguajes de segundo orden.

De aquí en adelante, al referirme a la lógica de segundo orden, debe pensarse acompañada de una semántica estándar.

2.2 Poder Expresivo de los Lenguajes de Segundo Orden

Uno de los conceptos más utilizados por los matemáticos es el de "cierre minimal" o "conjunto minimal cerrado bajo una función, una relación o una operación etc.". Por ejemplo, el conjunto de los números naturales es un conjunto cerrado bajo la función sucesor, i.e. si x pertenece al conjunto de los números naturales, entonces el sucesor de x, "S(x)", pertenece también a dicho conjunto. Este concepto también es utilizado por los lógicos para definir distintos conjuntos claves como: el conjunto de las fórmulas bien formadas, que es definido como el conjunto cerrado bajo las operaciones de construcción de fórmulas; el conjunto de todas las consecuencias lógicas, que es definido como el conjunto cerrado bajo la relación de consecuencia lógica, etc. Además, se utiliza en la definición de espacio vectorial para afirmar que el espacio vectorial es cerrado por la suma y la multiplicación. También se utiliza en la definición de campo y anillo.

El "cierre minimal" puede expresarse por medio de una fórmula de segundo orden (S.O.), a saber, $MC(x, Y, R): \forall X\big[(\forall y(Yy \rightarrow Xy) \wedge \forall y \forall z\big((Xy \wedge Ryz) \rightarrow Xz\big)) \rightarrow Xx\big]$, i.e. x pertenece al cierre minimal de Y bajo R sii x pertenece a todos los conjuntos que tienen contenido a Y y es cerrado por la relación R. Se pide que x pertenezca a todos los conjuntos X para garantizar que es la minimal. La existencia del cierre minimal está dado por el esquema de comprensión $\exists X^n \forall \langle x \rangle_n (X^n \equiv \Phi\langle x \rangle_n)$ del sistema deductivo D2[49] aplicado a $MC(x, Y, R)$, i.e. $\exists Z \forall x(Zx \equiv Mc(x, Y, R))$. Este Z es el cierre minimal Y bajo R[50]. Obsérvese

[49] El sistema deductivo D2 puede verse en el capítulo cero

[50] Si se quiere definir cierre minimal bajo una función o una operación simplemente cambie la relación R por una función F o por una operación O.

que dicha fórmula no puede ser expresada en primer orden (P.O.) por la cuantificación sobre las relaciones. La demostración formal se da a continuación.

Sea T una teoría en un lenguaje de primer orden, M modelo de T, y Γ un conjunto de fórmulas que contienen un predicado P (que no ocurre en T) que caracteriza el cierre minimal de la extensión de una fórmula ϕ bajo una función f unaria. Supongamos que M también es modelo de $T \cup \Gamma$. Sea b una constante que no ocurre en $T \cup \Gamma$. Consideremos el siguiente conjunto de fórmulas: $T' \coloneqq T \cup \Gamma \cup \{Pb, \sim\phi(b), \forall x(\phi(x) \longrightarrow f(x) \neq b), \forall x(\phi(x) \longrightarrow f(f(x)) \neq b), \dots\}$ Por el teorema de compacidad en la lógica de primer orden T' admite modelo, digamos M'; entonces se tiene una interpretación del cierre minimal donde b es parte del cierre minimal (Pb), pero al mismo tiempo no fue el resultado de aplicar f a los elementos de la extensión de ϕ; i.e. b no pertenece al cierre minimal (contradicción). Por lo tanto P no caracteriza el cierre minimal.

Otro de los conceptos utilizados por los matemáticos es el de Infinitud, que puede expresarse por la siguiente fórmula en S.O.: INF(X): $\exists f(\forall x \forall y(f(x) = f(y) \longrightarrow x = y) \wedge \forall x(Xx \longrightarrow Xf(x)) \wedge \exists y(Xy \wedge \forall x(Xx \longrightarrow f(x) \neq y)))$, i.e. existe una función inyectiva de X en X que no es suprayectiva; es decir, existe una función biyectiva de X a un subconjunto propio suyo. Como puede observarse, esta fórmula expresa la definición de Dedekind-infinito. Dada la fórmula INF(X), puede expresarse la relación de finitud como: FIN(X):~INF(X). En los lenguajes de P.O. se pueden expresar oraciones como "hay a lo más n individuo" y "hay exactamente n objetos", pero no puede expresarse oraciones como "esto o aquello es finito", ni "esto o aquello es infinito", que, como lo hemos visto, pueden ser expresados en S.O. La prueba formal de que en la lógica de primer orden no se puede expresar el concepto de finitud se da a continuación.

Sea S un conjunto de oraciones de primer orden, y $\phi(x)$ una fórmula con x libre. Supongamos que para cada $n \in \omega$ hay un modelo en que la extensión de $\phi(x)$ tiene al menos n elementos ($\phi(x)$ tiene una extensión finita). Sean $c_0, c_1, \dots c_n, \dots$ constantes nuevas que no ocurren en S ni en ϕ. Consideremos el conjunto $S' \coloneqq S \cup \{\phi(c_n) \ / \ n \in \omega\}$. Por hipótesis, cada subconjunto finito es satisfacible. Por teorema de compacidad, S' admite modelo M', el cual es infinito, pues agregamos a la extensión de ϕ una cantidad numerable de c_n. Como

$S \subseteq S'$, entonces M' es modelo de S; esto implica que S admite modelo donde la extensión de ϕ es infinita. Por lo tanto, ϕ no puede caracterizar el concepto de finitud.

Igualmente, en los lenguajes de S.O. puede ser expresado el concepto de tener la misma cardinalidad o la misma cantidad de elementos como:

$|X| = |Y|$:

$$\exists f \left(\forall x \forall y \left((Xx \wedge Xy \wedge \mathrm{f(x)} = \mathrm{f(y)}) \longrightarrow \mathrm{x} = \mathrm{y} \right) \wedge \forall \mathrm{x}(\mathrm{Xx} \rightarrow \mathrm{Yf(x)}) \right.$$
$$\left. \wedge \forall \mathrm{y}(\mathrm{Yy} \longrightarrow \exists \mathrm{x}(\mathrm{Xx} \wedge \mathrm{f(x)} = \mathrm{y})) \right)$$

i.e. existe una función biyectiva de X a Y. Con FIN(X) y $|X| = |Y|$ pueden ser expresadas relaciones como: "ser contable", "tener cardinalidad aleph alfa", "ser cofinal con", etc.

Además, en los lenguajes de S.O. pueden ser expresados axiomas que en P.O, solamente son presentados como esquemas de axiomas; por ejemplo, el axioma de inducción para naturales. En S.O. puede ser expresado como:

$$\forall \Phi \left\{ \left[\Phi(0) \wedge \forall \mathrm{n} \left[\mathrm{Nn} \longrightarrow \left(\Phi(\mathrm{n}) \longrightarrow \Phi(\mathrm{S(n)}) \right) \right] \right] \longrightarrow \left(\forall \mathrm{n}(\mathrm{Nn} \longrightarrow \Phi(\mathrm{n})) \right) \right\}$$

En cambio, en P.O. es presentado como un esquema de axioma a saber:

$$\left\{ \Phi(0) \wedge \forall \mathrm{n} \left[\mathrm{Nn} \longrightarrow \left(\Phi(\mathrm{n}) \longrightarrow \Phi(\mathrm{S(n)}) \right) \right] \right\} \longrightarrow \left(\forall \mathrm{n}(\mathrm{Nn} \longrightarrow \Phi(\mathrm{n})) \right)$$

para toda fórmula Φ que pertenezca al lenguaje (en este caso, nuestro lenguaje es numerable por lo que habría una cantidad numerable de axiomas). Por tanto, si buscamos que nuestras teorías sean finitamente axiomatizables tendremos que elegir un lenguaje de segundo orden.

Como lo hemos observado expresiones utilizadas por los matemáticos como: cierre minimal, infinitud, finitud, tener la misma cardinalidad, ser contable, tener cardinalidad aleph alfa y el axioma de inducción pueden ser expresadas por fórmulas en segundo orden. Tomando en cuenta que dichos conceptos no pueden ser expresados por fórmulas en primer orden, podría considerarse plausible que la lógica de segundo orden es más eficaz para fundamentar las matemáticas que la de primer orden; puesto que conceptos relevantes para el quehacer matemático pueden ser expresados en estos lenguajes.

2.3 Teorema de Löwenheim Skolem y La Búsqueda por la Discernibilidad de la Referencia

W.V.O. Quine en su artículo “Ontological Relativity” enuncia una tesis relativista, la cual puede glosarse de la siguiente manera: a través de los axiomas de las teorías no se pueden describir “la noción intuitiva de los objetos” a los que pretende referir una teoría, sino que las teorías pueden satisfacerse en diferentes modelos con universos o dominios ajenos; es decir, la ontología a la que está comprometida una teoría es relativa al modelo de interpretación. Esta tesis relativista no solamente aplica a teorías cuyos axiomas están escritos en un lenguaje de primer orden, sino también para las teorías con axiomas presentados en segundo orden. Si queremos rescatar la discernibilidad de la referencia, tendremos que optar por un proyecto que, a la par de un lenguaje de segundo orden, nos sea posible determinar cuál es la referencia de nuestros términos. Como lo vimos en el capítulo precedente, el estructuralismo Ante Rem requiere de un lenguaje de segundo orden y es una postura que nos permite explicar la objetividad de las matemáticas.

Parece ser un hecho innegable que los seres humanos tenemos conocimiento matemático. Si alguien afirma que "$2 + 2 = 4$", inmediatamente diremos que esa persona está diciendo una proposición verdadera, mientras que si afirmara que "$2 + 2 = 5$" inmediatamente diríamos que está diciendo algo falso. Parece claro y evidente que tenemos conocimiento matemático; sin embargo, si nuestras teorías no son objetivas, es decir, si no refieren a nada, ¿cómo podríamos garantizar que dicha proposición es verdadera? Por ejemplo, si el número “2” no tiene ninguna referencia, ¿en qué sentido podemos afirmar que "$2 + 2 = 4$" es verdadero?

Cuando nosotros decimos en el lenguaje natural que “los chinos tienen los ojos rasgados”, nos referimos a ciertos individuos que viven en Asia o cuyos ancestros provienen de esa zona geográfica, y sería un sinsentido que cuando a alguien se le dijera que “los chinos tienen los ojos rasgados”, esté pensando en los rusos, argumentándonos que todo depende del modelo de interpretación. Igualmente, tenemos ciertas intuiciones sobre los números naturales. Cuando alguien afirma algo sobre ellos, nadie se está imaginando un modelo no estándar, sino que hay un modelo pretendido. Parece que la tesis relativista de Quine va en contra de nuestras intuiciones. Sin embargo, ¿cómo rescataremos la discernibilidad de la referencia?

En un lenguaje de segundo orden podemos demostrar los teoremas de categoricidad para las teorías no algebraicas[51]; es decir, se puede demostrar que para cualesquiera dos modelos de una teoría no algebraica (por ejemplo, los axiomas de Peano para los números naturales), son isomorfos. De acuerdo al capítulo anterior, esto garantizaba la unicidad de las estructuras. Es decir, si aceptamos que los axiomas de nuestras teorías se presenten en un lenguaje de segundo orden, y sostenemos el estructuralismo Ante Rem, podemos rescatar nuestras intuiciones sobre la discernibilidad de la referencia y explicar la objetividad de las matemáticas.

En primera instancia, alguien podría objetar que se está cometiendo petición de principio, pues parecería que para sostener el estructuralismo se necesita aceptar los lenguajes de segundo orden, y uno de los argumentos para estar a favor de aceptar un lenguaje de S.O es que con éste se puede demostrar los teoremas de categoricidad que le permite al estructuralista concluir la unicidad de las estructuras.

Nosotros queremos que nuestros axiomas de las teorías puedan describir los objetos de las teorías, y para esto necesitamos de una postura filosófica que nos indique cuál es la naturaleza de dichos objetos, con el fin de que elijamos el mejor lenguaje que sea consistente con ello. Mi punto de vista es muy simple: elegir entre un lenguaje formal y otro no se puede desprender de la aceptación de una postura filosófica; aceptar el estructuralismo y elegir un lenguaje de segundo orden son las partes de un mismo paquete.

Ahora solamente nos falta explicar con más detalle porque los lenguajes de primer orden no son compatibles con el estructuralismo Ante Rem y porqué, a través de éste, no se puede rescatar la discernibilidad de la referencia.

En la teoría de modelos de primer orden no existe un único modelo que haga verdaderos a todos los miembros de Th1[52]. Por un lado, tenemos que el teorema de Lowenheim-Skolem (LS) dice: "Sea Γ un conjunto de enunciados, en un lenguaje de cardinalidad λ, si Γ tiene modelo, entonces tiene modelo de cardinalidad $\leq \lambda$". Sustituyamos Γ por Th1 y λ por $\aleph_0$. Entonces el teorema LS diría "Sea una teoría de primer orden Th1, en un lenguaje numerable,

[51] En la sección 2.6 discutiré sobre la cuasi-categoricidad de la teoría de conjuntos como teoría no algebraica.
[52] Llamaré Th1 a una teoría de primer orden

si Th1 tiene modelo infinito entonces Th1 admite modelo numerable". Por otro lado, tenemos que el teorema ascendente Löwenheim-Skolem-Tarski (LST) afirma que: "Sea Γ un conjunto de fórmulas, en un lenguaje de cardinalidad λ, Si Γ admite modelo M con un dominio con cardinalidad α-infinito, entonces para todo cardinal $\beta \geq \alpha$ existe una estructura M' que es modelo de Γ con un dominio $|M'|$ con cardinalidad igual a β". Al combinar estos dos teoremas, LS y LST, tenemos que, si una teoría Th1 es consistente y admite modelo infinito, entonces admite modelos de cualquier cardinalidad infinita. Por tal motivo, no existe un único modelo que haga verdaderos a todos los miembros de Th1. Por consiguiente, los lenguajes de primer orden son inadecuados para capturar el modelo pretendido por los axiomas de una teoría, pues ¿cómo fijar la referencia si hay muchos modelos que satisfacen la teoría? Asimismo, al tener modelos de distintas cardinalidades se tendrían estructuras distintas de diferente cardinalidad, y esto no es compatible con el estructuralismo Ante Rem.

De manera más concreta, tenemos que si Th1 admite modelo M cuyo dominio $|M|$ tiene una cardinalidad $\lambda > \aleph_0$, entonces por el teorema LS admite modelo M' cuyo dominio $|M'|$ tiene una cardinalidad de $\aleph_0$ y por el teorema LST Th1 admite modelos $\beta > \aleph_0$. Como $M \neq M'$, sus ontologías serán diferentes, pues sus cuantificadores corren por diferentes objetos. Cabe señalar que los objetos que pertenecen a $|M|$ no pueden distinguirse de los miembros de $|M'|$ por medio de los axiomas propios de Th1, puesto que M y M' son modelos de Th1. Para poner un ejemplo de lo que esto significa, definamos Th1 como la teoría de Conjuntos ZF; entonces, a través de los axiomas de ZF no se puede describir "la noción intuitiva de lo que es un conjunto", puesto que ZF tiene diferentes modelos no isomorfos. Esto es precisamente lo que expresa la tesis relativista de la que habla Quine, a saber, "no tiene sentido decir lo que los objetos de la teoría son, más allá de decir cómo interpreta o reinterpretar la teoría"[53].

Cuando un matemático intenta inventar un sistema axiomático para una teoría no algebraica, tiene una estructura determinada que pretende axiomatizar con su sistema, es decir, tiene un modelo pretendido. Nunca observaremos en la práctica matemática que alguien pretenda axiomatizar una estructura junto con todos sus modelos no estándar. Estos últimos son los

[53] La traducción es mía. "*it makes no sense to say what the objects of a theory are, beyond saying how to interpret or reinterpret that theory in another*" W.V.O Quine, *The Journal of Philosophy,* "ontological Relativity", p. 202.

fantasmas o epifenómenos que produce la lógica de primer orden por su incapacidad de modelar el razonamiento matemático. En cambio, la lógica de segundo orden, gracias a la categoricidad y en apoyo con el estructuralismo, nos permite modelar el razonamiento matemático que se lleva a cabo en el proceso de axiomatización de una estructura.

2.4 Ontología de los lenguajes de segundo orden

Desde el punto de vista de Quine "*una teoría está obligada a admitir aquellas entidades, y sólo aquéllas, a las cuales tienen que referirse las variables ligadas de la teoría para que las afirmaciones hechas en ésta sean verdaderas*"[54]. Es en este punto donde Quine cree que existe un problema con la lógica de segundo orden, pues los símbolos de relación en un modelo estándar se interpretan como subconjuntos que pertenecen al dominio del modelo de las variables individuales. Por consiguiente, una teoría en segundo orden estaría comprometida ontológicamente con objetos que son conjuntos. Para ilustrar esto con un ejemplo, tomemos a la teoría de los números naturales con axiomas en segundo orden. El dominio del modelo estándar estaría compuesto de la unión del conjunto de los números naturales y el conjunto potencia de los números naturales; por consiguiente, la cantidad de elementos que pertenecen a dicha ontología es igual a $2^{\aleph_0}$, donde algunas entidades del dominio no son números sino conjuntos.

En pocas palabras la lógica de segundo orden, con semántica estándar, presupone la existencia de conjuntos. Y si se acepta la tesis de que la lógica no debe de presuponer ninguna ontología sobre lo que hay en el mundo o en las teorías, entonces la lógica de segundo orden no sería realmente una verdadera lógica. Además, es la teoría de conjuntos ingenua[55] la que esta oculta en el metalenguaje de la lógica de segundo orden.

Sin embargo, como bien lo argumenta Shapiro, la noción de conjunto es completamente clara, puesto que, una vez que se ha determinado el dominio del modelo y con ello se ha fijado el rango donde van a ser mapeadas las variables de primer orden, se tiene una idea

[54] W.V.O. Quine, *Desde un punto de vista Lógico,* p. 40

[55] La teoría de conjuntos ingenua es aquella que afirma que cualquier propiedad caracteriza a un conjunto

clara de cuáles van a ser los subconjuntos que van a ser asignados a las variables de relación. Es decir, la teoría de conjuntos ingenua no está oculta en el metalenguaje, pues no es el caso que cualquier subconjunto de la jerarquía conjuntista va a pertenecer al dominio del modelo, sino sólo los subconjuntos del rango de las variables de primer orden. En pocas palabras, la interpretación de la $\in$ es clara una vez definido el contexto en el que se está utilizando; la $\in$ es, pues, una especie de indéxico.

Asimismo, al utilizar las semánticas estándar no nos estamos comprometiendo con la teoría de conjuntos simpliciter, sino únicamente con los conjuntos que pertenecen al conjunto potencia del dominio. En el caso de la teoría de los números naturales, nos estamos comprometiendo con conjuntos de números naturales; no obstante, ¿cómo no comprometernos con estos conjuntos de números?, si pretendemos hablar de las relaciones y funciones que hay entre los números. Por tal motivo, me comprometo con tales conjuntos de números porque esa era mi pretensión lingüística. Los conjuntos son una forma de representar matemáticamente las propiedades y las funciones. Por ende, me comprometo con ellos, pues mis intenciones eran referirme a las propiedades y funciones de los números.

Por otra parte, considero que el hecho de que se emplee la teoría de conjuntos en la teoría de modelos dentro de la semántica de la lógica de segundo orden para interpretar las relaciones es algo que debería de ser deseable y que proporciona el éxito de la teoría de modelos, pues, dado que toda oración de la matemática clásica puede interpretarse en el lenguaje de la teoría de conjuntos, nos garantiza que la interpretación de las relaciones como subconjuntos del dominio de las variables individuales está bien definida en cualquier lenguaje de la matemática clásica; es decir, si queremos un lenguaje que interprete las variables de relaciones necesitamos garantizar que la interpretación propuesta sea aplicable a los lenguajes matemáticos. Así, como toda relación se puede definir en términos conjuntistas, no hay mejor concepto que el de "conjunto" para interpretar las variables de relación.

Además, la neutralidad de la que supuestamente goza la lógica de primer orden es completamente falsa, pues algunos teoremas de la lógica de primer orden requieren de axiomas y resultados conjuntistas; por ejemplo, el teorema de Löwenheim necesita del axioma de infinito para garantizar modelos de cardinalidad infinita y en su demostración se emplea el axioma de elección.

Existen más críticas a la lógica de segundo orden en relación al realismo en valor de verdad que, según autores como Jane, se presupone en la utilización de la lógica de segundo orden, las cuales serán analizadas en la sección 2.5.

2.4.1. Semánticas Plurales

Otra alternativa para eliminar el incremento ontológico en la lógica de segundo orden sería adoptando cuantificadores plurales que restrinjan nuestra ontología inicial de primer orden con la que en primera instancia estábamos comprometidos. Esta postura se le debe al trabajo desarrollado por Boolos[56].

La idea fundamental puede ilustrarse del modo siguiente. Considérese la oración "algunos críticos se admiran solo entre sí" que puede formalizarse de la siguiente forma: $\exists X \exists x(Xx \wedge \forall y \forall z(Xy \wedge Ayz \rightarrow y \neq z \wedge Xz))$. Bajo la semántica usual, este enunciado expresa la idea de que existe un subconjunto X no vacío del dominio tal que sus elementos cumplen cierta relación que en el lenguaje natural correspondería a admirarse entre ellos mismo. Como lo he señalado anteriormente al emplear las semánticas estándar de segundo orden hay una inflación de nuestra ontología inicial de primer orden, pues ahora tendríamos que añadir subconjuntos a nuestro dominio. Lo que Boolos observó es que hay una forma alternativa de traducir los cuantificadores de segundo orden haciendo una interpretación plural. En el ejemplo anterior podríamos interpretar el enunciado como: "hay algunos elementos del dominio para los cuales ellos cumplen cierta relación (la de admirarse únicamente entre ellos)". La idea de fondo de Boolos es que en lugar de cuantificar singularmente sobre un nuevo objeto conjuntista se cuantifica pluralmente sobre los viejos objetos del dominio correspondiente al lenguaje de primer orden restringiendo con ello la inflación ontológica.

Formalmente esta idea de cuantificación plural se puede desarrollar de la siguiente manera. Construyamos un nuevo lenguaje L^P (lenguaje plural) que conste de los símbolos de primer orden más la adhesión de nuevos símbolos de variables $xx_1, xx_2, \ldots$, símbolos de

[56] Vid. George Boolos, "To Be is to be a value of a variable *(*or to some values of variables*)", The Journal of Phiosophy, pp. 430-449*

cuantificadores para estas variables $\forall xx_n$ y $\exists xx_n$ además añadiremos un nuevo símbolo de relación binario $x \ll xx$ que representa la relación "ser uno de estos". Con este nuevo lenguaje plural podemos formalizar la oración "algunos críticos se admiran solo entre sí" como: $\exists xx \exists x(x \ll xx \wedge \forall y \forall z(y \ll xx \wedge Axy \rightarrow x \neq y \wedge z \ll xx))$ que puede leerse como "hay algunos objetos del dominio para los cuales ellos cumplen cierta relación (la de admirarse unos a otros)".

Lo que Boolos notó en su artículo "Nominalist Platonism"[57] es que se puede interpretar las expresiones del lenguaje de segundo orden al lenguaje plural L^P que interpreta las variables de segundo orden como plurales y no como conjuntos. Definimos la traducción $Tr: L \longrightarrow L^P$ como:

1. $Tr(X_j x_i) = x_i \ll xx_j$
2. $Tr(\sim \varphi) = \sim Tr(\varphi)$
3. $Tr(\varphi \wedge \psi) = Tr(\varphi) \wedge Tr(\psi)$
4. $Tr(\exists x_i \varphi) = \exists x_i Tr(\varphi)$
5. $Tr(\exists X_j \varphi) = \exists xx_j Tr(\varphi) \vee Tr(\varphi')$ donde φ' es el resultado de substituir $X_j x_i$ por $x_i \neq x_i$. La segunda disyunción es necesaria en el caso de que "X_j" es interpretada como "no hay objetos que satisfacen esta propiedad". En pocas palabras este segundo disyunto es necesario por el hecho de que existen conjuntos vacíos, pero no existen pluralidades vacías.

Considero inadecuado el empleo de los lenguajes plurales por dos razones: 1) el concepto de pluralidad me parece todavía más oscuro que el de conjunto[58] y, más aún, considero que nuestra noción de pluralidad se sostiene de nuestra noción de conjunto; esto me parece claro al existir la traducción Tr que puede verse como la interpretación de un concepto a otro. Además, 2) si bien los lenguajes plurales representan adecuadamente algunas oraciones del lenguaje natural, no me parece del todo claro que el concepto de "pluralidad" pueda sustituir al concepto de "conjunto" para interpretar las relaciones de los lenguajes matemáticos, pues parece inadecuado frente al gran desarrollo de la teoría conjuntista. El éxito de esta teoría

[57] George Boolos, *Nominalist Platonism,* p.330.

[58] El concepto de "conjunto" se me hace más claro que el "pluralidad" gracias a todo el trabajo matemático que se ha realizado en la teoría de conjuntos.

matemática y la capacidad para formalizar el concepto de "relación" en cualquier lenguaje matemático en términos conjuntistas la hacen adecuada para interpretar las variables de relación.

2.5 Replica a las críticas de Jane

Jane, en su artículo "Higher-order Logic Reconsidered", hace una serie de críticas a la lógica de segundo orden, de las cuales en esta sección voy a analizar tres de ellas. La primera tiene que ver con el presupuesto realista en valor de verdad en la noción de consecuencia lógica. La segunda con la indeterminación del contenido del conjunto potencia del dominio de las variables individuales donde van a ser mapeadas las variables de relación. Y la tercera con la necesidad de la compleción en la lógica para caracterizar las teorías matemáticas.

Para poder exponer la primera crítica de Jane, hay que tomar en cuenta las siguientes fórmulas que son expresables en un lenguaje de segundo orden:

Sea $\varphi_1(X) \coloneqq \exists f(\forall x \forall y(f(x) = f(y) \longrightarrow x = y) \wedge \forall x(Xx \longrightarrow Xf(x)) \wedge \exists y\big(Xy \wedge \forall x(Xx \longrightarrow f(x) \neq y)\big))$; i.e. X es infinito.

Sea $\varphi_2(X, Y) \coloneqq \forall W \forall z((Wz \longrightarrow Xz) \leftrightarrow Y(W))$; i.e. Y es la potencia de X

Sea $\varphi_3(Z, Y) \coloneqq \forall w(Zw \longrightarrow Yw)$; i.e. Z es subconjunto de Y

Sea $\varphi_4(X, Y, Z) \coloneqq \big\{\exists f(\forall x \forall y\big((Xx \wedge Xy \wedge \mathrm{f(x) = f(y)}) \longrightarrow \mathrm{x = y}\big) \wedge \forall \mathrm{x(Xx \rightarrow Zf(x))} \wedge \forall \mathrm{y}\big(\mathrm{Zy} \longrightarrow \exists \mathrm{x(Xx \wedge f(x) = y)}\big))\big\} \vee \big\{\exists f(\forall x \forall y\big((Zx \wedge Zy \wedge \mathrm{f(x) = f(y)}) \longrightarrow \mathrm{x = y}\big) \wedge \forall \mathrm{x(Zx \rightarrow Yf(x))} \wedge \forall \mathrm{y}\big(\mathrm{Yy} \longrightarrow \exists \mathrm{x(Xx \wedge f(x) = y)}\big))\big\}$; i.e. $X \sim Z$ ó $Z \sim Y$, X es equipotente con Z o Z es equipotente con Y

Con estas cuatro fórmulas podemos construir otras dos nuevas fórmulas σ_1 y σ_2

Sea $\sigma_1 \coloneqq \forall X, Y, Z((\varphi_1(X) \wedge \varphi_2(X, Y) \wedge \varphi_3(Z, Y)) \longrightarrow \varphi_4(X, Y, Z)$

Y sea $\sigma_2 \coloneqq \forall X, Y \exists Z((\varphi_1(X) \wedge \varphi_2(X, Y)) \longrightarrow (\varphi_3(Z, Y) \wedge \sim \varphi_4(X, Y, Z))$

De tal manera que σ_1 será universalmente válida (en sentido estándar) sii la hipótesis generalizada del continuo es verdadera, o σ_2 será universalmente valida sii la hipótesis generalizada del continuo es falsa. Como una de las dos fórmulas tiene que ser universalmente valida, Jane argumenta que la lógica de segundo orden presupone un realismo en valor de verdad. "En otras palabras, alegando que la consecuencia lógica de segundo orden estándar está determinada [por la teoría de conjuntos], requiere tomar una fuerte visión realista de la teoría de conjuntos. Esto es un punto en contra del empleo de consecuencia lógica en segundo orden como consecuencia lógica, ya que el uso de la lógica, como tal, no debe depender de la adopción de una posición filosófica en disputa"[59].

A lo largo de este trabajo he señalado que elegir entre un lenguaje formal depende de la aceptación de una postura filosófica. El hecho de que la hipótesis generalizada del continuo tiene valor de verdad en la lógica de segundo orden es algo favorable para el estructuralismo, pues éste está comprometido con un realismo en valor de verdad. Jane parece considerar justamente lo opuesto a mi postura; es decir, él considera que la elección entre un lenguaje formal y otro no debe depender de la adopción de una postura filosófica. Sin embargo, esto no es del todo correcto, pues los axiomas de una teoría pretenden describir los objetos de la teoría. La elección entre un lenguaje formal y otro dependerá de una postura filosófica que nos explique la naturaleza de estos objetos, de tal manera que elegiremos el lenguaje formal que sea consistente con esta postura. Así las cosas, no se debe de descartar la lógica de segundo orden por tener un compromiso con el realismo en valor de verdad, pues precisamente nuestra postura filosófica (en este caso el estructuralismo) de la cual se tomó como base para la elección de nuestro lenguaje formal se compromete con un realismo en valor de verdad.

Por otro parte, cuando Jane afirma que la noción de consecuencia lógica no debe de depender de la adopción de una postura filosófica en disputa parece presuponer que la misma noción de consecuencia lógica per se no está en disputa, o, dicho de otra forma, que existe una noción clara de aquello que debe contar como consecuencia lógica; no obstante, es precisamente nuestra noción de consecuencia lógica lo que en el fondo está en juego y depende sobre todo

[59] La traducción es mía. "In other words, claiming that canonical second-order consequence is determinate requires taking a strong realist view of set theory. This counts against second-order consequence as being usable as logical consequence, since the use of logic as such should not depend on adopting a disputed philosophical position". Ignasi Jane, "Higher-order Logic Reconsidered", The Oxford *Handbook of philosophy of Mathematics and Logic,* p.798.

de nuestra postura filosófica. Si bien la noción de consecuencia lógica de segundo orden presupone un realismo en verdad, la lógica de primer orden depende de algunos resultados y axiomas de la teoría de conjuntos como el axioma de infinito que nos garantiza la existencia de un conjunto infinito, ya que sin este axioma el teorema de Löwenheim-Skolem no tendría sentido alguno. Asimismo, se puede demostrar que el axioma de completud fuerte es equivalente al axioma de elección[60].

Como podemos observar, la noción de consecuencia lógica de primer orden no es del todo pura sino también depende de ciertos supuestos conjuntistas. Se puede objetar que estos supuestos en la lógica de primer orden son meramente matemáticos y no dependen de alguna postura de corte filosófico, sin embargo, esto no es del todo cierto pues en el caso del axioma de elección su aceptación depende de nuestra postura filosófica, pues en el fondo este axioma repercute en nuestra noción de función, en nuestro concepto de lo que es una propiedad y fórmula matemática.

La segunda crítica que hace Jane es la siguiente:

> “Tanto la teoría de conjuntos y la lógica de segundo orden tienen que dar cuenta del conjunto potencia, pero no con la misma urgencia. Conjuntos (y sus conjuntos de potencia) son el objeto de la teoría de conjuntos, que de este modo se puede describir en términos generales a la teoría de conjuntos como una teoría que tiene como finalidad obtener conocimiento de los conjuntos. La falta de una explicación clara de la operación del conjunto potencia no es un defecto en la teoría de conjuntos, ya que tal explicación es, por el contrario, uno de los objetivos a alcanzar no un punto de partida. La Lógica de segundo orden, por su parte, hace uso de la operación de conjunto potencia, y un uso esencial, dado que en ella se apoya la determinación de la relación de consecuencia. Como comentamos anteriormente, cualquier divergencia en los contenidos del conjunto potencia va a perturbar la relación de consecuencia lógica en segundo orden; en otras palabras, diferentes cuentas de su contenido darán lugar a diferentes relaciones de consecuencia. En consecuencia, el uso autónomo en la

[60] Vid. J.L. Bell & A.B. Slomson, *Models and Ultraproducts,* p. 103

> relación de consecuencia en segundo orden […] requiere de una explicación de (1) lo que es un conjunto de objetos de un dominio y, más importante, de (2) cuál es el contenido exacto del conjunto potencia de un conjunto en términos del contenido del conjunto”[61]

En resumen, Jane sostiene que la lógica de segundo orden debe de explicar el contenido exacto del conjunto potencia, pues de esto depende la relación de consecuencia lógica. Jane asevera que la relación de consecuencia lógica depende del contenido del conjunto potencia porque la diferencia que hay entre las semánticas estándar y las de Henkin radica en que la primera mapea las relaciones y las funciones sobre todo el conjunto potencia, mientras que las de Henkin únicamente lo hacen sobre un subconjunto propio de éste. Para esta discusión hay que recordar que las semánticas de Henkin son en el fondo equivalentes a las de primer orden (pues satisface los teoremas de completud, compacidad, y Löwenheim Skolem), de este modo parece clara la importancia de que las relaciones y funciones se mapeen sobre todo el conjunto potencia del dominio de los objetos de primer orden y no tan sólo sobre un subconjunto propio.

Si bien es cierto que la relación de consecuencia lógica depende del contenido del conjunto potencia, no es del todo claro porque la lógica de segundo orden tenga que especificarnos el contenido exacto del conjunto potencia, así como su cardinalidad. Elegimos las semánticas estándar porque son éstas las que rescatan nuestras intuiciones sobre el cuantificador universal ligado a las relaciones y funciones, pues cuando decimos “todas las relaciones tales que…”, nos estamos refiriendo a todas las relaciones sin importar que las podamos expresar

---

[61] La traducción es mía. “Both set theory and second-order logic have to give some account of power sets, but not with the same urgency. Sets (and their power sets) are the subject matter of set theory, which thus can be loosely described as a theory pursued to gain knowledge of sets. Lacking a clear explanation of the power set operation is not a defect in set theory, since getting such an explanation is, rather, one of the aims it has to reach—not a starting point. Second-order logic, for its part, makes use of the power set operation, and an essential use at that, since on it rests the determinacy of the consequence relation. As we remarked above, any divergence in accounting for the content of power sets is bound to disturb canonical second-order consequence; in other words, different accounts of their content will give rise to different consequence relations. Accordingly, the autonomous use of second-order consequence (as opposed to its internal use in set theory, that is, to what we have described as its use in a set-theoretical setting) requires an explanation of (1) what is a set of objects of a domain and, most important, of (2) what is the exact content of the power set of a set—in terms of the content of the set”. Ignasi Jane, “Higher-order Logic Reconsidered”, The Oxford *Handbook of philosophy of Mathematics and Logic,* p.800.

en el lenguaje o tengamos conocimiento de ellas y por ello necesitamos mapear las relaciones a todo el conjunto potencia para garantizar que cuando empleamos un cuantificador universal sobre las relaciones nos estamos refiriendo exactamente a todas las relaciones que podemos formar.

Como lo señale anteriormente la lógica de primer orden depende de algunos resultados y axiomas de la teoría de conjuntos, en este sentido la teoría de conjuntos no es del todo ajena a lógica de primer orden sino es, en buena medida, un sostén teórico para esta. No estoy concibiendo a la teoría de conjuntos como la teoría de fondo para la lógica sino simplemente muestro que dichas disciplinas no son del todo ajenas y que, en este sentido, es plausible pensar a ambas desarrollándose conjuntamente. Por consiguiente, el uso autónomo de la relación de consecuencia en segundo orden no requiere de una explicación del contenido exacto del conjunto potencia de un conjunto, pues esta sigue siendo una tarea conjunta entre la lógica y la teoría de conjuntos.

Asimismo, considero que el hecho de que se emplee la teoría de conjuntos en la teoría de modelos dentro de la semántica de la lógica de segundo orden (y en general de la teoría de modelos) es algo que debería de ser deseable y que proporciona el éxito de la teoría de modelos, pues, dado que toda oración de la matemática clásica puede interpretarse en el lenguaje de la teoría de conjuntos nos garantiza que exista al menos una estructura (la estructura conjuntista) en la cual se puede interpretar el lenguaje de cualquier teoría matemática.

2.6. Cuasi-Categoricidad de la Teoría de Conjuntos

Para que el estructuralismo pueda explicarnos como es que un matemático elige una determinada estructura de una teoría no algebraica, por ejemplo, la de los números naturales, en vez de las estructuras ejemplificadas por sus modelos no estándar se deben de cumplir tres cosas: 1) la teoría debe ser categórica 2) satisfacible y 3) finitamente axiomatizable.

Como se mencionó en el capítulo anterior el problema para el estructuralista Ante Rem es sobre su acceso epistémico por lo que se requiere de un lenguaje que nos permita tener acceso a la única estructura correcta (sólo para las teorías no algebraicas, pues estas son las que tienen un modelo pretendido) lo que se logra cuando los modelos de las teorías no algebraicas son isomorfos. Por lo que esta postura filosófica requiere que el lenguaje con el que se axiomatizan las teorías no algebraicas sea de segundo orden donde se satisface la categoricidad en los modelos. Por otro lado, se pide que dicha teoría sea satisfacible para garantizar que por lo menos exista una estructura que sea ejemplificada por los modelos. Y por último se pide que la teoría sea finitamente axiomatizable para asegurarse de que una persona (con capacidades limitadas) pueda establecerlos. Esto se relaciona con la "definición implícita"[62] pues dado que la teoría tiene una cantidad finita de axiomas el sujeto, por medio de estos, puede tener acceso a la estructura.

Es aquí donde surge un problema pues la teoría de conjuntos no cumple con ser categórica, es decir, no todos sus modelos son isomorfos[63]. De manera inmediata esto parecería ser un gran reto para el estructuralismo, pues si consideramos que la teoría de conjuntos es una teoría no algebraica y además que ésta sirve como teoría de fondo para representar algunas estructuras matemáticas, al no ser categórica puede ocurrir que las representaciones conjuntistas de las teorías no algebraicas no sean isomorfas generando con ello que no haya una unicidad en las estructuras de las teorías no algebraicas. Por ejemplo, si tenemos dos modelos M y M' no isomorfos de la teoría de conjuntos y ejemplificamos con los elementos de sus respectivos dominios a los números naturales (llamaremos a dichas ejemplificaciones E y E' que se inducen en M y M' respectivamente), puede ser el caso que E y E' no sean isomorfos; y, por consiguiente, que ejemplifiquen a estructuras distintas de los números naturales. De manera más directa, podemos afirmar que, si la teoría de conjuntos no es categórica, entonces no estamos en condiciones para asegurar la unicidad de las estructuras de las teorías no algebraicas.

Si bien la teoría de conjuntos no es categórica en segundo orden, hay un sentido en el que casi lo es, Ernest Zermelo logró demostrar que la teoría de conjuntos en un lenguaje de segundo orden es cuasi-categoríca; es decir que para cualesquiera dos modelos uno es

[62] Uno de los métodos que Shapiro menciona con el cual tenemos acceso epistémico a las estructuras
[63] Para el resto de las teorías no algebraicas si se logra la categoricidad en sus modelos.

isomorfo a un segmento inicial del otro o viceversa. A continuación se hará un análisis más detallado al respecto.

2.6.1 Teoremas de Cuasi-Categoricidad de Zermelo

En 1930 Ernest Zermelo publica un artículo titulado "On Boundary Numbers and Domains of Sets: New Investigations in the Foundations of Set Theory" da una nueva axiomatización para la teoría de conjuntos a la que llama ZF' distinta a la que propuso en 1908 pues los axiomas están escritos en un lenguaje de segundo[64] orden (por lo que el axioma de separación y reemplazo dejan de ser esquemas de axiomas y se convierten en axiomas con cuantificadores en segundo orden), el axioma de infinito es omitido y además se permite la existencia de urelementos[65]. Para recalcar que estamos trabajando en un lenguaje de segundo orden con urelementos a ZF' la denotaré como $ZFC2U$[66]. Denotemos por UA al conjunto de urelementos que pertenecen a A un Dominio Normal al que llamaremos base de A.

Zermelo en su artículo define "Dominio Normal" como los dominios que están formados tanto por conjuntos como urelementos, que interpretan la "∈" como la pertenencia y satisfacen los axiomas ZF', es decir, en nuestro lenguaje moderno, los dominios normales son modelos de $ZFC2U$ que están contenidos en la jerarquía acumulativa de conjuntos con urelementos. Asimismo, dado que contamos con urelementos podemos definir "secuencias básicas" (así las llama Zermelo) que serán isomorfas a los ordinales, las definimos por recursión como sigue:

Dado u un urelemento

1. $g_{\alpha}^{u} = u$,
2. $g_{\alpha+1}^{u} = g_{\alpha}^{u} \cup \{g_{\alpha}^{u}\}$
3. Si α es límite, entonces $g_{\alpha}^{u} = \bigcup_{\beta<\alpha} g_{\beta}^{u}$

---

[64] La axiomática de la teoría de conjuntos en un lenguaje de segundo orden se puede ver en el capítulo 0 de esta tesis.

[65] Vid. Zermelo, E.F.F. "On Boudary Numbers and Domains of sets: New investigations in the Foundations of Set Theory", *From Kant to Hilbert: A source Book in the Foundations of Mathematics.* P. *1222*

[66] Agustín Rayo en su artículo *A Puzzle for Estructuralism* la denota simplemente como ZFC2

Notemos que si definimos $F: \alpha \longrightarrow g_\alpha$ tal que para cada $\beta < \alpha$ tenemos que $F(\beta) = g_\beta$ es un isomorfismo. Así podemos pensar a las "secuencias básicas" como los representantes de los ordinales en nuestro Dominio Normal que se construyen a partir de un urelemento. Sin embargo, como nuestros Dominios Normales son conjuntos este no puede contener a todos las "secuencias básicas"; pues de ser así el Dominio tendría tantos elementos como ordinales y por tanto sería una clase propia (no un conjunto), por lo que hay una "secuencia básica" que no pertenece al Dominio Normal y a la mínima de estas la llamaremos su característica[67]. Formalmente definimos la "característica" del Dominio Normal A como $\pi_A = \bigcup\{g_\alpha^u \in A: \alpha \in OR \wedge u \in UA\}$. Si no tuviéramos urelementos podemos pensar a la característica como $\pi_A = O(A) = A \cap OR$. Con estas definiciones podemos entender los siguientes teoremas de isomorfismo a los que llego Zermelo en su artículo.

> "Primer Teorema de Isomorfismo: Dos dominios normales con la misma característica y con bases equivalentes son isomorfos."[68]
>
> "Segundo Teorema de Isomorfismo: Dados dos dominios normales con bases equivalentes y diferentes características, es siempre el caso que uno es isomorfo a un segmento canónico del otro"[69]
>
> "Tercer Teorema de Isomorfismo: Dados dos dominios normales con la misma característica, uno siempre es isomorfo a un subdominio del otro"[70]

Así con los teoremas de Zermelo lo único que podemos garantizar es la cuasi-categoricidad de la teoría de conjuntos: dados dos modelos de ZFC2U, M y M', o bien son isomorfos o M es isomorfo a un segmento inicial de M' (o viceversa). Cabe señalar que, si se restringe las bases de los dominios normales a un único urelemento, estos dominios normales serían isomorfos a la jerarquía acumulativa pura; es decir, a la jerarquía acumulativa sin

[67] Zermelo también se refiere a la característica de un dominio como "Boundary number"

[68] La traducción es mía: "First isomorphism theorem. Two normal domains with the same characteristic and with equivalent bases are isomorphic" Zermelo, E.F.F. "On Boudary Numbers and Domains of sets: New investigations in the Foundations of Set Theory", *From Kant to Hilbert: A source Book in the Foundations of Mathematics.* P. *1228-1229*

[69] La traducción es mía. "Second isomorphism theorem. Given two normal domains with equivalent bases and different boundary numbers π and π', it is always the case that one is isomorphic to a canonical segment of the other" Ibid. 1229

[70] La traducción es mía. "Third isomorphism theorem. Given two normal domains with the same characteristic, one is always isomorphic to a (proper or improper) sub-domain of the other" Ibid. 1229

urelementos. Con lo que tendríamos el teorema de cuasi-categoricidad para dominios normales de ZFC2 sin urelementos. No obstante, aunque tenemos el teorema de cuasi-categoricidad para ZFC2 no hemos conseguido la categoricidad de sus modelos por lo que la teoría de conjuntos no cumple con la condición primera para las teorías no algebraicas expuestas al inicio de esta sección.

En principio se podría argüir que la teoría de conjuntos en realidad no es una teoría no algebraica, es decir, no se tiene un modelo pretendido de esta teoría; por lo que las tres condiciones para teorías no algebraicas no se aplicarían a la teoría de conjuntos. Sin embargo, me parece que hay buenas razones para considerar que sí tenemos un modelo pretendido para la teoría de conjuntos. A continuación, profundizaremos sobre esto.

2.6.2 La Jerarquía Acumulativa como Modelo Pretendido

George Kreisel en 1965 publica un artículo titulado "Informal Rigour and Completeness Proofs" donde argumenta que el papel de las teorías formales no es el de ofrecer una justificación última de los axiomas, ni de la elección de estos, pues la justificación de los axiomas está dada por las nociones básicas de una teoría. Así "uno obtiene reglas y definiciones al analizar las nociones intuitivas y capturando sus propiedades"[71]. En particular Kreisel argumenta a favor de que los axiomas de la teoría de conjuntos se deben de justificar por medio de las nociones básicas de lo que es un conjunto.

Los detractores de este punto de vista pueden argüir que las paradojas y las proposiciones indecidibles, como la hipótesis del continuo, dan cuenta de que nuestro concepto de conjunto es vago, y por ende no podemos justificar nuestros axiomas en nuestras nociones básicas ni mucho menos podemos afirmar que contamos con un modelo pretendido para la teoría de conjuntos[72].

Kreisel señala que cuando se empezó a desarrollar la teoría de conjuntos con George Cantor los reaccionarios de la teoría de conjuntos se encontraban justificados en no aceptar dicha teoría, puesto que la noción de conjunto o clase "se presentaba como una noción vaga, o,

[71] George Kreisel, *Informal Rigour and Completeness Proofs,* p. 138
[72] Con lo que podemos deducir que la teoría de conjuntos es una teoría algebraica.

específicamente, una mezcla de nociones que incluyen (i) conjuntos finitos de cosas (es decir, objetos sin miembros), (ii) conjuntos de algo (como en matemáticas, conjuntos de números, conjuntos de puntos), pero también (iii) propiedades o intensiones, donde uno no tiene, a priori, acotada la extensión (que son muy comunes en el pensamiento ordinario, pero no en matemáticas)”[73].

Sin embargo, lo que los reaccionarios de la teoría de conjuntos no contaban es que al menos una de estas nociones de dicha mescla, la de “conjunto de”, resulto ser una noción clara de tal suerte que se puede ver reflejada en la axiomatización de la teoría de conjuntos, por ejemplo, en el axioma de comprensión restringido $\forall\varphi\forall A\exists B\forall w(w \in B \leftrightarrow w \in A \wedge \varphi(x))$ donde se construye un nuevo conjunto separando los elementos de un conjunto ya dado mediante una fórmula. Asimismo, esta noción de “conjunto de” también se puede ver reflejada en la construcción de la jerarquía acumulativa donde los niveles superiores se construyen de los precedentes. Formalmente se construye la jerarquía acumulativa por recursión de la siguiente manera 1) $V_0 = \emptyset$, 2) $V_{\alpha+1} = \wp(V_\alpha)$, 3) y si α es límite $V_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} V_\beta$.

Ahora bien, considerando los teoremas de cuasi-categoricidad de la teoría de conjuntos para ZFC2 podemos tener una imagen clara de cómo se comportan los dominios normales (modelos de ZFC2 contenidos en la jerarquía), a saber, concatenándose unos a otros a segmentos iniciales mediante isomorfismos y como siempre podemos tomar modelos con características cada vez más grandes podemos pensar que los dominios normales de la teoría de conjuntos “tienden” a la jerarquía acumulativa completa y este será nuestro modelo pretendido. Así podemos considerar que la teoría de conjuntos es una teoría no-algebraica.

Ahora bien si consideramos que la teoría de conjuntos es no-algebraica, como lo hemos hecho, entonces, como lo he señalado al inicio de esta sección, la teoría de conjuntos debe de cumplir con las tres condiciones para teorías no algebraicas a saber: 1) la teoría debe ser categórica 2) satisfacible y 3) finitamente axiomatizable. Las condiciones 2) y 3) en los

[73] La traducción es mía. “class presented itself as a vague notion, or, specifically, a mixture of notions including (i) finite sets of individuals (i.e. objects without members), or (ii) sets of something (as in mathematics, sets of numbers, sets of points), but also (iii) properties or intensions where one has no a priori bound on the extension (which are very common in ordinary thought but not in mathematics)” George Kreisel*, Informal Rigour and Completeness Proofs,* p. 143.

lenguajes de segundo orden se satisfacen, sin embargo, no se tiene la categoricidad completa sino únicamente la cuasi-categoricidad entre sus modelos. A continuación se discutirá este problema.

2.6.3. Un Puzzle para el Estructuralismo

Regresando nuevamente al problema que nos compete en esta sección tenemos que la teoría de conjuntos no se libra completamente del desiderátum pues ésta, en un lenguaje de segundo orden, únicamente cumple con:1) cuasi-categoricidad, 2) ser satisfacible y 3) ser finitamente axiomatizable[74]. Así que, como podemos observar el problema radica en que la teoría de conjuntos no satisface categoricidad. En primer lugar se pide que la teoría de conjuntos sea categórica por dos razones i) si la teoría de conjuntos no es categórica, entonces no estamos en condiciones para asegurar la unicidad de las estructuras de las teorías no algebraicas, pues en la teoría de conjuntos se pueden representar dichas estructuras; y ii) si la teoría de conjuntos no es categórica, no podríamos determinar cuál es la estructura de la teoría de conjuntos, lo que provocaría a su vez un problema epistemológico pues al mismo tiempo en que sostenemos que las matemáticas es la ciencia de las estructuras no podemos determinar cuál es la estructura de la teoría de conjuntos. Para este último problema (II) podemos argüir que, si consideramos a la jerarquía acumulativa como nuestro modelo pretendido, entonces la estructura de la teoría de conjuntos sería aquella que ejemplificada por la jerarquía misma. Así únicamente tenemos que resolver el problema I).

Un intento para demostrar categoricidad para ZFC2 se la debemos a McGee quien permitiendo la cuantificación irrestricta a los cuantificadores de primer orden logro demostrar que para cualesquiera dos modelos de ZFC2U tienen isomorfa la parte pura de conjuntos. No obstante, como bien lo señala Rayo y Uzquiano en su artículo “A puzzle for estructuralism” el resultado de McGee es un tanto artificial pues no le permite al

---

[74] La teoría de conjuntos en segundo orden cumple con ser finitamente axiomatizables, pues como lo vimos en el capítulo cero la teoría en este lenguaje se puede presentar con una cantidad finita de axiomas. Por otro lado, a causa de los teoremas de incompletud de la Aritmética de Gödel no puede demostrar desde ZFC que ella misma es satisfacible, pero en la práctica matemática siempre se asume que existe un modelo para la teoría.

estructuralista tener una teoría satisfacible y categórica al mismo tiempo. La razón de esto último puede esbozarse de la siguiente manera.

Primero que nada, hay que tomar en cuenta que la cardinalidad de un modelo para ZFC debe de ser igual a la de un cardinal fuertemente inaccesible, i.e. un cardinal κ límite (no es el cero ni algún cardinal sucesor) cuya cofinalidad es el mismo[75] y que $\forall \delta, \lambda < \kappa(\delta^{\lambda} < \kappa)$ esto último quiere decir que un cardinal κ fuertemente inaccesible tiene la característica de no ser alcanzado por potencias de elementos menores que él. De manera intuitiva se requiere que el modelo de ZFC2 tenga una cardinalidad igual a la de un inaccesible para poder satisfacer el axioma de potencia, pues este nos dice que dado un conjunto A existe un conjunto B cuyos elementos son subconjuntos de A; en particular, el conjunto B tendrá una cardinalidad igual 2^{A}. Si el modelo de ZFC2 no fuera igual a un inaccesible habría un conjunto cuya potencia necesitaría tener más elementos de los que hay en el modelo. La condición de que $\forall \delta, \lambda < \kappa(\delta^{\lambda} < \kappa)$ nos garantiza que siempre podemos sacar potencia a los conjuntos que estén por debajo de κ.

Por otra parte, al meter los urelementos a la teoría y dejar los cuantificadores de primer orden irrestrictos, el teorema de McGee demostraría que la cardinalidad de "todo lo que hay" es igual a la de un inaccesible, pues puede ser biyectada con la parte pura de conjuntos. De esta forma tenemos que la teoría de conjuntos ZFCU2 es satisfacible sii la cardinalidad de "todo lo que hay" es igual a un cardinal fuertemente inaccesible. Rayo y Uzquiano critican este compromiso, pues si fuese el caso que la cardinalidad de todo lo que hay no es igual a la de un cardinal fuertemente inaccesible resultaría que ZFCU2 no sería satisfacible.

Por otro lado, en el artículo "A puzzle for estructuralism" Rayo y Uzquiano definen una propiedad para las teorías matemáticas que es la de "ser estable". Decimos que "una teoría T es estable si y sólo si hay algún cardinal k tal que T es satisfacible por un modelo de cardinalidad k y, para todo $\lambda > k$ T es satisfacible por algún modelo de cardinalidad λ"[76]. Bajo esta definición es claro que ZFCU2 no sería una teoría estable pues en primer lugar no

[75] Intuitivamente el hecho de que $cf(k) = k$ quiere decir que se necesitan al menos k-pasos para alcanzar a k.
[76]La traducción es mía. A theory T is stable if and only if there is some cardinal κ such that T is satisfied by a model of cardinality κ and, for all $\lambda > \kappa$, T is satisfied in a model of cardinality λ. Agustín Rayo y Gabriel Uzquiano, *A Puzzle for Estructuralism,* p.9.

podemos saber si es satisfacible y en caso de serlo no es posible encontrar un modelo con alguna cardinalidad superior pues inicialmente se cuantifico irrestrictamente sobre todo lo que hay con lo cual si existieran distintos modelos con cardinalidades distintas estaríamos afirmando que la cardinalidad de todo lo que hay no es fija. En palabras de Agustín Rayo y Uzquiano:

> "Los sistemas de axiomas inestables son problemáticos porque imponen limitaciones en el tamaño del universo a saber que el universo sea al menos de un cierto tamaño. Por ejemplo, una teoría inestable podría imponer una restricción en el sentido de que el universo contiene tantos objetos como la potencia de un cardinal inaccesible. Esto significa que diferentes teorías inestables pueden imponer limitaciones incompatibles en el tamaño del universo. Y es difícil ver cómo uno podría estar justificado en creer que las restricciones impuestas por una teoría dada sean verdaderas, en lugar de las restricciones incompatibles de sus rivales"[77]

En resumen, si tenemos categoricidad para la teoría de conjuntos (con el teorema de McGee) puede ser el caso que ZFCU2 no sea satisfacible y por otro lado tendríamos que comprometernos con que la cardinalidad de todo lo que hay es igual a la de un cardinal inaccesiblemente fuerte, lo que provocaría que nuestra teoría no es estable. De tal manera que no se podría tener simultáneamente la categoricidad y la satisfacción que son características que el estructuralista requiere para poder explicar cómo es que un matemático elige una estructura de todas las demás.

El problema de la no categoricidad puede ser resuelto observando que la teoría de conjuntos juega dos papeles importantes en la actividad matemática 1) como teoría de fondo, es decir, se utiliza a la teoría de conjuntos para ejemplificar otras teorías, y 2) como

[77] La traducción es mía. "Unstable axiom-systems are problematic because they impose constraints on the size of the universe other than the requirement that the universe be *at least* of a certain size. For instance, an unstable theory might impose a constraint to the effect that the universe contains power-of-an-inaccessible many objects. This means that different unstable theories might impose incompatible constraints on the size of the universe. And it is difficult to see how one could ever be justified in believing that the constraints imposed by a given theory obtain, rather than the incompatible constraints of its rivals". Agustín Rayo y Gabriel Uzquiano, *A Puzzle for Estructuralism,* p.10.

una teoría matemática más. De esta manera parece razonable pensar, como bien lo sugiere Cristian Gutiérrez en su tesis de maestría, que:

> "por su mismo origen y función esperamos de la teoría de conjuntos que sea tan poderosa que pueda reconstruir a todas (o casi todas) las teorías matemáticas, pero esto parece implicar que debe ser lo suficientemente flexible como para poder capturar la estructura de cualquier otra teoría matemática. Esta flexibilidad parece imponernos también un requisito que permita que la teoría de conjuntos, por lo menos en principio, no tenga una estructura completamente determinada, pues de ser así no tendríamos la certeza de poder analizar otras teorías."[78]

Si aceptamos, en vista de lo anterior, que se necesita que la teoría de conjuntos sea flexible, es decir, no sea categórica, para que pueda modelar las estructuras de otras teorías. Pues en el caso de que fuera categórica todos sus modelos tendrían la misma cardinalidad λ y si quisiéramos modelar en la teoría de conjuntos una estructura mayor que λ nos resultaría imposible. Por consiguiente, parece plausible pensar que no es necesario pedir que la teoría de conjuntos sea categórica, sino únicamente pedir la cuasi-categoricidad de Zermelo para poder garantizar que los modelos de las teorías no algebraicas como la axiomática de Peano sean categóricas, pues los modelos para estas teorías se pueden construir a niveles "muy bajos" de la jerarquía de los conjuntos.

Un poco de formalidad podría aclararnos este último punto. Dada la construcción de la jerarquía acumulativa de la teoría de conjuntos podemos definir el funcional rango $\rho: V \longrightarrow OR$ como $\rho(x) = \bigcap\{\alpha \in OR: x \in V_{\alpha+1}\}$[79], intuitivamente este funcional nos relaciona un conjunto con el primer nivel de la jerarquía acumulativa donde dicho conjunto se encuentra contenido; es decir, la función rango nos especifica el nivel de la jerarquía donde el conjunto aparece por primera vez.

---

[78] Cristian Gutiérrez, *Estructuralismo, Teoría de Conjuntos y Teoremas de Categoricidad,* p. 102

[79] Vid. Amor Montaño, J.A., Campero Arena, G., & Miranda Perea, *Teoría de conjuntos: Curso Intermedio*, p.90.

Con esta herramienta podemos demostrar que para todo ordinal α tenemos que $\rho(\alpha) = \alpha$, en particular $\rho(\omega) = \omega$ donde ω es el conjunto de los números naturales[80], es decir ω se puede construir en el nivel V_ω y como conjunto en $V_{\omega+1}$. A esto me refería con que las teorías no algebraicas se construyen a niveles muy bajos de la jerarquía.

Ahora bien, dado que los modelos de ZFC2 tienen como característica un cardinal fuertemente inaccesible, en particular el modelo mínimo (o de característica mínima) también tendría como característica un cardinal fuertemente inaccesible; por lo que todos los niveles "bajos" de la jerarquía, donde se construyen las representaciones conjuntistas de las teorías no algebraicas, pertenecerían a este modelo mínimo y por ello a todos los modelos de ZFC2 (pues estos contendrían al modelo mínimo). En este sentido podemos afirmar que es suficiente con el teorema de cuasi-categoricidad para asegurarnos que las teorías no algebraicas se pueden representar en la teoría de conjuntos de forma adecuada sin perder su categoricidad.

Como lo mencioné anteriormente uno de los problemas que resulta de la no-categoricidad de la teoría de conjuntos es que podría ocurrir que las representaciones conjuntistas de las teorías no algebraicas no sean isomorfas. No obstante, como se argumentó anteriormente este problema se soluciona si únicamente le pedimos cuasi-categoricidad a la teoría de conjuntos.

[80] Según la construcción conjuntista de los números naturales

Conclusiones del Capítulo

A modo de conclusión para este capítulo sobre las cuestiones que se desarrollaron quiero resaltar los siguientes puntos

- Como semántica para nuestros lenguajes de segundo orden se eligió la semántica estándar frente a la de Henkin y las de primer orden con dos funciones de interpretación puesto que en la semántica estándar las relaciones y las funciones están mapeadas sobre todo el conjunto potencia del dominio de los individuos, mientras que las otras se pueden restringir a un subconjunto propio del conjunto potencia. Las semánticas estándar, a diferencia de las otras, rescata nuestras intuiciones sobre el cuantificador universal pues cuando axiomatizamos una teoría en un lenguaje de segundo orden queremos que el cuantificador universal que liga a las relaciones y funciones no esté restringido. De manera natural, cuando decimos "todas las relaciones", queremos referirnos a todas ellas y no a un subconjunto propio.

- Como lo hemos observado conceptos relevantes para el quehacer matemático como: cierre minimal, infinitud, finitud, tener la misma cardinalidad, ser contable, tener cardinalidad aleph alfa y el axioma de inducción pueden ser expresadas por fórmulas en segundo orden y tomando en cuenta que dichos conceptos no pueden ser expresados por fórmulas en primer orden, representa un punto a favor a los lenguajes de segundo orden frente a los de primer orden.

- Considerando que en los lenguajes de segundo orden no son válidos los teoremas de Löwenheim-Skolem y que las teorías no algebraicas (salvo la teoría de conjuntos) son categóricas se tiene que este lenguaje es compatible con el estructuralismo Ante Rem.

- Como la elección entre un lenguaje formal y otro depende de una postura filosófica que nos explique la naturaleza de estos objetos, no se debe de descartar la lógica de segundo orden por tener un compromiso con el realismo en valor de verdad, pues precisamente nuestra postura filosófica (en este caso el estructuralismo) de la cual se tomó como base para la elección de nuestro lenguaje formal se compromete con un realismo en valor de verdad.

- El uso autónomo de la relación de consecuencia en segundo orden no requiere de una explicación del contenido exacto del conjunto potencia de un conjunto pues esta sigue siendo una tarea conjunta entre la lógica y la teoría de conjuntos.

- Si bien la teoría de conjuntos como teoría “no algebraica” no cumple con el requisito de categoricidad, sí satisface cuasi-categoricidad. Y, además, es suficiente con esta característica para eliminar algunos problemas que podrían suscitarse por la pérdida de categoricidad.

Capítulo III: Consecuencia Lógica

Algunos filósofos, como Lucas Rosenblatt[81] y Ignasi Jane[82], que se oponen a la lógica de segundo orden con semánticas estándar han dirigido sus críticas apuntando hacia su concepto de consecuencia lógica relacionado con este lenguaje. Estas críticas van dirigidas a dos puntos "débiles" del empleo de las semánticas estándar, a saber, 1) la incompletud semántica, 2) la interferencia de la teoría de conjuntos en el concepto de consecuencia lógica y 3) el empleo de principios de reflexión. Este capítulo tiene como objetivo responder a estas críticas.

3.1 Incompletud de las Semánticas Estándar para la Lógica de Segundo Orden

Los conceptos de corrección y completud sirven de puentes para relacionar un sistema deductivo con una semántica determinada. Por una parte, decimos que un sistema deductivo es correcto si dado un conjunto Γ y φ una fórmula bien formada en el lenguaje tal que $\Gamma \vdash \varphi$ entonces $\Gamma \vDash \varphi$ (i.e. si una fórmula es una consecuencia deductiva de un conjunto[83] de premisas, entonces también será una consecuencia semántica de estas). Y por otro lado decimos que un sistema lógico es completo semánticamente si sucede la conversa, esto es, si $\Gamma \vDash \varphi$ entonces $\Gamma \vdash \varphi$ (i.e. si una fórmula es una consecuencia semántica de un conjunto de premisas, entonces también será una consecuencia deductiva de estas). El rasgo de correctud nos permite saber que nuestro sistema lógico es consistente, i.e. nunca vamos a poder inferir una contradicción, mientras que la característica de completud nos permite garantizar que todas las verdades de la lógica (cuando $\Gamma = \emptyset$) y las consecuencias lógicas (cuando $\Gamma \neq \emptyset$) en un determinado lenguaje pueden ser capturadas por nuestro sistema deductivo.

[81] Vid. Rosenblatt, Lucas, Dependencia e indeterminación en la lógica de segundo orden en Cuadernos de filosofía, 2012

[82] Vid. Jane, Ignasi, "Higher-order Logic Reconsidered", 2007.

[83] Γ puede ser el conjunto vacío.

Como bien sabemos, en la lógica de primer orden se puede demostrar tanto corrección como completud. Sin embargo, en el caso de la lógica de segundo orden con semánticas estándar únicamente se puede demostrar corrección pero no completud. La razón es muy sencilla, como los lenguajes de segundo orden son lo suficientemente expresivos para axiomatizar la teoría de números naturales, por el primer teorema de Gödel existirán proposiciones verdaderas acerca de los números naturales que no podrán derivarse de ningún sistema de axiomas.

Este resultado de incompletud de la lógica de segundo orden es utilizado por algunos críticos para concluir que la lógica de S.O. no es adecuada para axiomatizar una teoría matemática. Frente a estas afirmaciones Shapiro ha argumentado en varios de sus textos[84] que una vez que se han olvidado las pretensiones fundacionistas no se requiere de la completud, pues esta sólo nos garantiza que todas las verdades de la lógica en un determinado lenguaje pueden ser capturadas por nuestro sistema deductivo. Si no se pretende encontrar principios indubitables en los cuales apoyar la teoría matemática parece que la completud es una característica que no es necesaria.

No obstante, dejando de lado la discusión del fundacionismo ¿Existirán razones para defender la característica de completud más allá de suministrar una base axiomática segura con la cual fundamentar las teorías matemáticas? Los detractores de la lógica de segundo orden consideran que sí. Tanto Ignasi Jane como Lucas Rosenblatt consideran que el rasgo de completud es necesario para poder tener un concepto de consecuencia lógica adecuado. En la siguiente subsección haré una presentación concisa de sus argumentos

3.1.1. Incompletud e Interferencias Conjuntistas en el Concepto de Consecuencia Lógica

Como lo he mencionado anteriormente definimos una teoría matemática como un conjunto cerrado bajo consecuencia lógica. Así una teoría es el conjunto de las consecuencias lógicas de sus propios axiomas, es decir, $T = \{\sigma : Ax_T \vDash \sigma\}$. Por otra parte, también podemos

[84] Vid. Shapiro, Stewart, *Foundation Without Foundationalism: A Case for Second Order Logic,* Oxford University Press, p. 47.

considerar a los axiomas de una teoría como definiciones implícitas, es decir, como un conjunto de proposiciones que proveen de significado a un término que está contenido en dichas proposiciones; por lo que todas las características que se presuponen en lo objetos de la teoría deben estar explícitamente mencionados en los axiomas de la teoría. Por ejemplo, la axiomática de la teoría de conjuntos visto como definiciones implícitas provee de significado al concepto de pertenencia y con éste al de conjunto.

Ahora consideremos al conjunto de axiomas de la lógica de segundo orden[85], siguiendo el razonamiento anterior, si concebimos los axiomas lógicos como definiciones implícitas éstos proveerán el significado al concepto de consecuencia lógica. Tanto Jane como Lucas Rosenblatt consideran que es aquí donde surge un problema, pues sostienen que existe una interferencia conjuntista en el concepto de consecuencia lógica.

Consideremos la fórmula σ_1 en un lenguaje de segundo orden tal que es válida, si y sólo si, la hipótesis del continuo es verdadera[86] HC, σ_2 la fórmula que es verdadera, si y sólo si, HC es falsa y sea ZFC2 el conjunto de axiomas de la teoría de conjuntos en un lenguaje de segundo orden. Como ambas fórmulas σ_1 y σ_2 son enunciados que no tienen parámetros no-lógicos, entonces cada una debe ser verdadera o falsa sin importar el modelo de interpretación; es decir, o bien son verdades lógicas o falsas en cualquier interpretación. Sin embargo, no pueden ser ambas verdaderas o ambas falsas pues son enunciados contrarios cuya verdad depende del valor de verdad de la hipótesis del continuo. De esta forma existen dos oraciones en un lenguaje de segundo orden tal que no podremos determinar cuál de ellas es una verdad lógica a causa de que no conocemos el valor de verdad de la hipótesis del continuo. Por lo cual, una indeterminación de una hipótesis conjuntista se convierte en una indeterminación en el concepto de consecuencia lógica.

Esta indeterminación en el cálculo deductivo provoca que el concepto de consecuencia lógica de según orden quede indeterminado. Como lo había señalado con anterioridad, según estos autores, son los axiomas lógicos vistos como definiciones implícitas los que proveen de significado al concepto de consecuencia lógica, de esta manera como existen proposiciones que no podemos determinar si son o no verdades lógicas (como σ_1 y σ_2), el concepto de

[85] El sistema axiomático de la lógica de segundo orden puede verse en el capítulo cero.
[86] La construcción de esta fórmula queda establecida en el capítulo 2 sección 2.5

consecuencia lógica de segundo orden no puede caracterizarse de manera adecuada. Y, por si fuera poco, esta indeterminación del concepto de consecuencia lógica es resultado de una interferencia de la teoría de conjuntos.

Cabe hacer notar que este tipo de argumento no afecta a la lógica de primer orden pues ésta no es lo suficientemente expresiva para poder formular un enunciado indecidible como la hipótesis del continuo. Además, según Jane, si tenemos un sistema deductivo completo, correcto y las consecuencias deductivas se pueden derivar de forma recursiva, entonces dado cualquier enunciado se puede determinar si es o no una consecuencia lógica de dicho sistema deductivo[87].

Por otra parte, desde el punto de vista de Lucas Rosenblatt, "tener un cálculo deductivo completo sirve para explicitar qué reglas y axiomas están en juego a la hora de realizar una demostración. Esto, por otra parte, es una manera de tener a la vista los compromisos ontológicos que a veces quedan implícitos en el lado semántico"[88]; por ejemplo, si vemos que en una deducción aparecen como hipótesis los enunciados σ_1 y σ_2 sabremos que dicha consecuencia deductiva depende de la hipótesis del continuo. De esta manera si queremos determinar que la lógica de segundo orden opera con supuestos conjuntistas es necesario explicitar la demostración.

Según este autor una demostración semántica de una fórmula no puede revelarnos si únicamente se están utilizando supuestos lógicos o hipótesis conjuntistas, pues cuando se hacen pruebas a nivel semántico en teoría de modelos se utilizan principios conjuntistas. Aunque Lucas Rosenblatt no lo exprese literalmente con esto parece decir que existe una interferencia semántica en la lógica de segundo orden por parte de la teoría de conjuntos, pues la teoría de modelos emplea principios conjuntistas e impide que semánticamente se observe si hay presupuestos conjuntistas.

Para los lenguajes de segundo orden, concluye Lucas Rosenblatt, el problema planteado carece de solución y de manera general "las teorías incompletas no pueden ayudarnos a

[87] Vid. Jane, Ignasi, "Higher-order Logic Reconsidered", p. 807.
[88] Lucas Rosenblatt, Dependencia e Indeterminación en la Lógica de Segundo Orden, p. 43.

distinguir cuando la validez de una demostración depende del contenido matemático y cuando no”[89].

Si bien Shapiro afirma que, si dejamos a un lado el proyecto fundacionista no es necesaria la cualidad de completud; tanto Jane como Lucas Rosenblatt intentan argüir de que existen buenas razones para defender la cualidad de completud más allá de suministrar una base axiomática segura con la cual fundamentar las teorías matemática.

Primero que nada, el argumento de Lucas Rosenblat parece suponer que hay una distinción clara entre lógica y matemáticas, pues nos argumenta que la compleción sirve para detectar cuando la validez de una demostración depende del contenido matemático y cuando no. La lógica y la teoría de conjuntos se han caracterizado por su estrecha relación, por ejemplo, la lógica de primer orden depende de algunos resultados y axiomas de la teoría de conjuntos como el axioma de infinito que nos garantiza la existencia de un conjunto infinito, ya que sin este axioma el teorema de Löwenheim-Skolem no tendría sentido alguno. Además, argumentar que se necesita el rasgo de completud para poder determinar cuando se están empleando supuestos matemáticos (no lógicos) es una postura en el fondo fundacionista; y siguiendo a Shapiro, dejando a un lado las pretensiones fundacionistas no parece necesario el rasgo de completud para que una lógica sea tal.

Por otro lado, no es del todo claro que se necesite del rasgo de completud para determinar si un enunciado es o no una consecuencia lógica de un sistema deductivo, como lo señala Jane, más bien esto depende únicamente del teorema de correctud y del supuesto de que existe un algoritmo para determinar si un enunciado es o no consecuencia deductiva. El mecanismo es el siguiente: si resulta que un enunciado σ es deducible de ciertos axiomas, mediante un algoritmo, aplicando el teorema de correctud se tendría que el enunciado es una fórmula universalmente valida, por tanto, es una consecuencia lógica; y así el enunciado σ queda determinado como una consecuencia lógica.

[89] Lucas Rosenblatt, Interferencia e Indeterminación en la Lógica de Segundo Orden, p. 10.

3.1.2 Contra la necesidad de una lógica completa

Como ya se ha mencionado el resultado de incompletud de la lógica de segundo orden es utilizado por algunos críticos para concluir que la lógica de S.O. no es adecuada para axiomatizar una teoría matemática. En la presente sección se hará un análisis detallado sobre lo que afirma el teorema de completud y se argumentará que dicho teorema depende de tres factores importantes: un sistema deductivo, una semántica y de la expresividad del lenguaje. Con lo que se podrá argumentar en contra de la necesidad de que una lógica necesita ser completa.

Primero que nada analicemos nuevamente lo que dice el teorema de completud analizando detalladamente sus dependencias: Dado un conjunto Γ de fórmulas y φ una fórmula bien formada en el lenguaje $\mathcal{L}$ decimos que un sistema lógico $\mathcal{S}$ es completo para una determinada semántica $\mathcal{M}$ si sucede que $\Gamma \vDash \varphi$ entonces $\Gamma \vdash \varphi$; es decir, si tenemos que todos los modelos de Γ según la semántica $\mathcal{M}$ también son modelos de la fórmula φ del lenguaje $\mathcal{L}$, entonces existe una prueba deductiva en el sistema $\mathcal{S}$ tomando como premisas el conjunto Γ y cuya conclusión será φ.

Desarrollado de esta forma podemos notar claramente que el teorema de completud es una propiedad metalógica que relaciona un sistema formal $\mathcal{S}$, una semántica $\mathcal{M}$ y un lenguaje $\mathcal{L}$. Así podemos decir que dada una tripleta $\langle \mathcal{S}, \mathcal{M}, \mathcal{L} \rangle$ ésta cumple o no completud.

Denotemos por $\langle \mathcal{S}_1, \mathcal{M}_1, \mathcal{L}_1 \rangle$ a la tripleta formada por $\mathcal{S}_1$ un sistema deductivo para los lenguajes de primer orden, $\mathcal{M}_1$ denota a las semánticas de estándar para los lenguajes de primer orden y donde $\mathcal{L}_1$ refiere precisamente al lenguaje de primer orden. Asimismo $\langle D2, \mathcal{M}_2, \mathcal{L}_2 \rangle$ refiere a la tripleta formada por $D2$ el sistema deductivo para los lenguajes de segundo orden[90], $\mathcal{M}_2$ las semánticas estándar para los lenguajes de segundo orden y $\mathcal{L}_2$ denota al lenguaje de segundo orden.

Utilizando la notación anterior podemos formular la siguiente pregunta ¿cuál es la diferencia entre $\langle \mathcal{S}_1, \mathcal{M}_1, \mathcal{L}_1 \rangle$ y $\langle D2, \mathcal{M}_2, \mathcal{L}_2 \rangle$ para que el primero sea completo y el segundo no?

---

[90] Se puede ver el sistema D2 en el capítulo 0.

Otávio Bueno en su artículo "A Defense of Second Order Logic" nos dice que "si la lógica de primer orden es completa, esto es, en parte, debido a su escaso poder expresivo. Varias sentencias no son (y no pueden ser) válidas en la lógica de primer orden, simplemente porque no son expresables en ella. Este es el caso, por ejemplo, de $\exists X \forall x(Xx)$ que es válida en la lógica de segundo orden"[91] pero que ni siquiera es expresable en un lenguaje de primer orden.

En síntesis, la postura de Otávio Bueno es que la diferencia que existe entre $\langle \mathcal{S}_1, \mathcal{M}_1, \mathcal{L}_1 \rangle$ y $\langle D2, \mathcal{M}_2, \mathcal{L}_2 \rangle$ por la cual el primero es completo y el segundo no lo es radica en que $\mathcal{L}_1 \subsetneq \mathcal{L}_2$, es decir el lenguaje de segundo orden tiene un mayor poder expresivo que el lenguaje de primer orden. Si este es el caso parece plausible pensar que el teorema de completud no es una condición necesaria que caracteriza a una verdadera lógica pues la validez de este teorema depende de la expresividad de nuestro lenguaje, por lo que si alguien está tentado en preferir una lógica de primer orden en vez de una de segundo orden argumentando que la lógica de segundo orden es incompleta el defensor de segundo orden podrá argumentar que tener completud implica tener un lenguaje limitado.

Denotemos ahora por $\langle D2, \mathcal{M}_2^H, \mathcal{L}_2 \rangle$ a la tripleta formada por $D2$ el sistema deductivo para los lenguajes de segundo orden, $\mathcal{M}_2^H$ las semánticas de Henkin para los lenguajes de segundo orden y $\mathcal{L}_2$ denota al lenguaje de segundo orden. Como es conocido esta tripleta resulta ser completa. Análogamente que en el caso anterior nos preguntamos ¿cuál es la diferencia entre $\langle D2, \mathcal{M}_2^H, \mathcal{L}_2 \rangle$ y $\langle D2, \mathcal{M}_2, \mathcal{L}_2 \rangle$ para que el primero sea completo y el segundo no? Parece que en este caso no podemos responder simplemente que es a causa de la expresividad del lenguaje pues éste es el mismo en ambas tripletas y en realidad lo único que cambia es el tipo de semántica.

Desde el punto de vista de Marcus Rossberg en su artículo "First-Order Logic, Second-Order Logic, and Completeness" menciona que **"**se podría pensar que las semánticas estándar (en oposición a las de Henkin) no proporcionan suficientes modelos para invalidar todas las

[91] La traducción es mía. "The problem with this argument is that it disregards an important point. If first order logic is complete, this is in part due to its weak expressive power. Several sentences are not (and cannot be) valid in first-order logic simply because they are not expressible in it. This is the case, for example, of $\exists X \forall x(Xx)$, which is valid in second-order logic, but not expressible in a first-order language" Otávio Bueno, "A Defense of Second Order Logic"*, Axiomathes,* p. 369.

oraciones del lenguaje de SOL [lenguaje de segundo orden] que no son teoremas"[92]. Siguiendo esta idea tendríamos que la razón por la cual en $\langle D2, \mathcal{M}_2^H, \mathcal{L}_2 \rangle$ se logra la completud mientras que en $\langle D2, \mathcal{M}_2, \mathcal{L}_2 \rangle$ falla es porque $\mathcal{M}_2 \subsetneq \mathcal{M}_2^H$, es decir, hay más estructuras de tipo Henkin que invalidan las oraciones de $\mathcal{L}_2$ que no son teoremas.

A simple vista, considerando este caso, parece que la opinión de Otávio Bueno no es del todo cierta pues tenemos dos tripletas $\langle D2, \mathcal{M}_2^H, \mathcal{L}_2 \rangle$ y $\langle D2, \mathcal{M}_2, \mathcal{L}_2 \rangle$ que tienen el mismo lenguaje, pero la primera es completa mientras que la segunda no lo es. Y siguiendo a Rossberg la razón por la que una es completa y la otra no se debe a que $\mathcal{M}_2 \subsetneq \mathcal{M}_2^H$. Así el defensor de segundo orden no podrá argumentar que tener completud implica tener un lenguaje limitado. Pero tal vez estamos entendiendo erróneamente la característica de tener "un lenguaje más expresivo" como explicaré a continuación.

Aun cuando $\langle D2, \mathcal{M}_2^H, \mathcal{L}_2 \rangle$ y $\langle D2, \mathcal{M}_2, \mathcal{L}_2 \rangle$ posean el mismo lenguaje $\mathcal{L}_2$ hay un sentido en el que se puede argumentar que $\langle D2, \mathcal{M}_2, \mathcal{L}_2 \rangle$ tiene un mayor poder expresivo, pues empleando $\langle D2, \mathcal{M}_2, \mathcal{L}_2 \rangle$ se puede demostrar todos los modelos de la aritmética de Peano y del Análisis resultan ser isomorfos[93]. En otras palabras, con $\langle D2, \mathcal{M}_2, \mathcal{L}_2 \rangle$ se puede caracterizar, salvo isomorfismo, la estructura de los números naturales y reales; mientras que en $\langle D2, \mathcal{M}_2^H, \mathcal{L}_2 \rangle$ no se puede caracterizar ninguna de estas dos estructuras, pues en esta tripleta es válido el teorema de Löwenheim-Skolem que afirma, intuitivamente, que si tenemos una teoría que tiene un modelo infinito entonces tiene modelos de cualquier cardinalidad infinita. De esta manera, si dicha teoría tiene modelos con distintas cardinalidades, entonces no podrán se isomorfos.

De lo anterior podemos observar que aun cuando $\mathcal{M}_2^H$ y $\mathcal{M}_2$ son semánticas sobre el mismo lenguaje $\mathcal{L}_2$ podemos decir que con $\mathcal{M}_2$ se alcanza un mayor poder expresivo que con $\mathcal{M}_2^H$, pues se pueden caracterizar estructuras como la de los números naturales y reales. De esta manera el defensor de la lógica de segundo orden podrá seguir afirmando que el teorema de completud se satisface sólo en lenguajes con un poder expresivo muy limitado.

---

[92] La traducción es mía. "one might think that standard (as opposed to Henkin) semantics does not provide *enough* models to invalidate all sentences of the language of SOL that are not theorems" Marcus Rossberg, "First-Order Logic, Second-Order Logic, and Completeness", p. 307

[93] Vid. Shapiro, Stewart, *Foundation Without Foundationalism: A Case for Second Order Logic,* p. 82-84.

Por otro lado, esta conclusión se puede notar más claramente observando que en el lenguaje de segundo orden la teoría de números naturales es finitamente axiomatizable, es decir, existe una cantidad finita de axiomas que caracteriza, salvo isomorfismo, a dicha estructura. De lo anterior se puede considerar a η como la conjunción de estos axiomas que al ser una conjunción finita resulta que η también es una fórmula de segundo orden y como los modelos para esta estructura son isomorfos, entonces $\alpha \in Th(\mathbb{N}) = \{\alpha \in \mathcal{L}_{\mathbb{N}}: \langle \mathbb{N}, 0, +, \cdot \rangle \vDash \alpha\}$ si y sólo si $\eta \longrightarrow \alpha$ es universalmente valida. Por lo que aplicando los mismos métodos para la demostración del teorema de Gödel se tendría que existe una fórmula universalmente valida que no es derivable desde $D2$, de esta forma resulta que $D2$ no es completo. De lo anterior podemos observar, nuevamente, que la incompletud de los lenguajes de segundo es el resultado de su poder expresivo; pues este argumento se basa fuertemente en que los axiomas de la teoría de números en un lenguaje de segundo orden es finitamente axiomatizables[94].

En vista de lo anterior, podemos concluir que es plausible que la completud no sea una condición necesaria que deba cumplir una lógica para ser considerada como tal.

3.2. Sobre el Esquema de Comprensión y la paradoja de Russell

Algunos de los detractores de la lógica de segundo orden con semánticas estándar, como Agustín Rayo[95], han cuestionado el punto de que se pueda axiomatizar la teoría de conjuntos con este lenguaje. En particular, ellos consideran que la semántica estándar falla a la hora de aplicar el esquema de comprensión del sistema deductivo D2[96], a saber, $\exists X^n \forall \langle x \rangle_n (X^n \langle x \rangle_n \equiv \Phi \langle x \rangle_n)$ siempre y cuando X^n no ocurre libre para Φ y $\langle x \rangle_n$ es la abreviatura de $x_1, x_2, \dots x_n$. De manera intuitiva lo que nos dice este axioma es que dada una propiedad $\Phi(x_1, x_2, \dots x_n)$ existe una relación $X^n(x_1, x_2, \dots x_n)$; es decir, para cada formula

[94] Cabe hacer la aclaración, que en los lenguajes de primer orden los axiomas de Peano (los axiomas para la teoría de números) no son finitamente axiomatizables pues el principio de inducción resulta ser un esquema de axioma, es decir, se tiene un axioma por cada formula de nuestro lenguaje. Por lo que en primer orden la aritmética de Peano tiene una cantidad numerable de axiomas.

[95] Vid. Agustín Rayo, "Toward a theory of second order consequence".

[96] D2 es el sistema deductivo para los lenguajes de segundo orden. El resto de los axiomas lógicos puede verse en el Capítulo cero.

hay una relación con la misma extensión. Es aquí donde parece haber un problema a la hora de axiomatizar la teoría de conjuntos pues consideremos $\Phi(x_1{,}x_2) = x_1 \notin x_1$, entonces el axioma de comprensión para esta fórmula sería $\exists X^1 \forall x_1(X^1 x_1 \equiv x_1 \notin x_1)$ que leído con una semántica estándar afirmaría que hay un conjunto cuyos elementos son aquellos que no se pertenecen a sí mismos. A primera vista parecería que hemos encontrado una contradicción pues sabemos, por la paradoja de Russell que no existe un conjunto con tales características sino es más bien una clase. Por consiguiente, podríamos concluir con ello que la semántica estándar para los lenguajes de S.O. no puede utilizarse para modelar la teoría de conjuntos de segundo orden, pues, producen contradicciones. La presente sección tiene como objetivo defender el hecho de que la semántica estándar es óptima para modelar la teoría de conjuntos sin producir paradojas.

En un primer momento pareciera que hay dos opciones a escoger: o bien nos olvidamos de las semánticas estándar o construimos una semántica que acepte relaciones que sean clases propias. Filósofos como Agustín Rayo y Uzquiano han decido optar por la opción uno y utilizar semánticas plurales para modelar la teoría de conjuntos[97].

Desde mi perspectiva este problema radica en una confusión que en la medida de lo posible intentaré resolver. Antes que nada, recordemos que en una estructura E estándar las variables de relación son mapeadas al conjunto potencia de las variables individuales. Llamemos d_1 al dominio de las variables individuales y d_2 al conjunto potencia de d_1, que por definición d_1 y d_2 son conjuntos distintos. Tomando en cuenta lo anterior desarrollaremos nuevamente el problema suscitado a modo de una prueba formal en la cual se concluya una contradicción, que desde mi punto de vista manifiesta la forma en que razonó Agustín Rayo:

1. $\exists X^1 \forall x_1(X^1(x_1) \equiv x_1 \notin x_1)$ por axioma de comprensión
2. $\forall x_1(R(x_1) \equiv x_1 \notin x_1)$ sustituyendo X^1 por R. Nótese que X^1 es una variable de relación
3. $(R(R) \equiv R \notin R)$ eliminación del cuantificador universal(contradicción). Nótese que $x_1$es una variable de relación

Así podemos concluir que el axioma de comprensión es falso al aplicarse al lenguaje de la teoría de conjuntos. Sin embargo, lo que refleja la prueba es una confusión a la hora de ir

97 Véase el artículo de Agustín Rayo "Toward a theory of second order consequence"

sustituyendo las variables. En la premisa 2 la sustitución se tiene que hacer por una constante de relación, mientras que en la premisa 3 la sustitución se tiene que hacer por una variable de relación. Por lo cual no es del todo claro que en (3) se pueda volver a sustituir por R.

En lógica de primer orden la paradoja de Russell si implica una contradicción porque no hay una distinción entre variables de relación e individuales, puesto que, en primer orden todas son variables individuales; y por ello la sustitución era válida. Sin embargo, la sustitución por el mismo término R para una variable individual como una de relación no es correcto. Esto quiere decir que el argumento (formal) no es del todo correcto y que es plausible afirmar que nuestro axioma de comprensión sigue siendo válido.

¿Esto quiere decir que hay un modelo de la teoría de conjuntos donde $\exists X^1 \forall x_1 (X^1(x_1) \equiv x_1 \notin x_1)$ se satisface? la respuesta es afirmativa. Si el problema radica en las sustituciones solamente tenemos que garantizar que la relación R no pertenezca al dominio de las variables individuales y ese será nuestro modelo. Consideremos una estructura donde $d_1 = k$ un cardinal inaccesible, así $k \in \wp(d_1) = d_2 \wedge k \notin d_1$. De esta manera si interpretamos X^1 como k se satisfacería $\exists X^1 \forall x_1 (X^1(x_1) \equiv x_1 \notin x_1)$ pues todos los elementos de k (que son todos los elementos de d_1) no se pertenecen a sí mismos. A mi modo de ver esto implicaría que la paradoja de Russel, en cierto sentido, se resolvería en un lenguaje de segundo orden donde hay una distinción entre variables individuales y de segundo orden.

3.3 Principios de Reflexión

En el capítulo 0 hemos definido verdad lógica para los lenguajes de primer orden de la siguiente manera:

> "Dada una fórmula Φ del lenguaje de primer orden decimos Φ que es una "verdad lógica" sii todas las "estructuras" que interpretan el lenguaje de primer orden satisfacen a Φ"

Análogamente en el capítulo II hemos definido verdad lógica para los lenguajes de segundo orden de la siguiente manera:

"Dada una fórmula Φ del lenguaje de segundo orden decimos Φ que es una "verdad lógica estándar" sii todas las "estructuras estándar" que interpretan el lenguaje de segundo orden satisfacen a Φ.

Estás dos definiciones de verdad lógica para un determinado lenguaje se las debemos al trabajo de Tarski. Podemos generalizar este concepto de verdad lógica Tarskiana como:

"(TLT) Para todo lenguaje L y toda oración S de L, S es (lógicamente verdadero)$_T$ si y sólo si S es verdadera en todas las interpretaciones (teorético-conjuntista) de L"[98]

La generalización (TLT) anterior fue presentada por Mario Gómez Torrente en su artículo "*Logical Truth and Tarskian Logical Truth*". En dicha definición emplea el subíndice T para recalcar o hacer énfasis en que se está refiriendo al concepto de verdad lógica Tarskiana para diferenciarlo del concepto de "lógicamente verdadero" (en algún sentido intuitivo). Uno de los problemas que Dr. Mario Gómez aborda en dicho artículo es si los conceptos de (lógicamente verdadero)$_T$ y lógicamente verdadero son coextensionales. Otra forma de abordar la cuestión sería preguntándonos si la proposición:

"Para cada lenguaje L y toda oración S de L, S es (lógicamente verdadero)$_T$, si y sólo si, S es lógicamente verdadero"[99]

En la presente sección se abordará este problema de la coextensionalidad entre (la verdad lógica)$_T$ y el concepto verdad[100]. En particular la discusión girará en torno a los lenguajes de segundo orden.

En 1967, Kreisel presentó un principio informal de consecuencia lógica. Dada una fórmula Φ en el lenguaje, un predicado V(Φ) que significa "Φ es válida en toda estructura"[101] y un predicado VC(Φ) que significa "Φ es válida en toda estructura cuyo dominio es un

---

[98] La traducción es mía. "For every language L and all sentences S of L, S is (logic ally true)$_T$ if and only if S is true in all the (set-theoretic) interpretations of L." Mario Gómez, *Logical Truth and Tarskian Logical Truth.* 376.

[99] La traducción es mía. "For every language L and all sentences S of L, S is (logically true)$_T$ if and only if S is logically true" Mario Gómez, *Logical Truth and Tarskian Logical Truth.* 377.

[100] Denotare como (lógicamente verdadero)$_I$ al concepto de lógicamente verdadero en su sentido intuitivo.

[101] Tanto para modelos cuyo dominio es un conjunto (estructura-conjunto) como para modelos que tiene como dominio a una clase (estructura-clase).

conjunto", podemos formular el principio de Kreisel como $\forall\Phi(VC(\Phi) \longrightarrow V(\Phi))$[102], i.e. si Φ es válida en toda estructura cuyo dominio es un conjunto, entonces es válida en toda estructura. A este tipo de principio se les conoce como principio de reflexión precisamente porque reflejan las propiedades satisfechas por una estructura cualquiera a una estructura cuyo dominio es un conjunto. De esta manera si consideramos que el concepto de "verdadero en toda estructura" es coextencional con el de (lógicamente verdadero)$_{I}$, entonces el principio de Kreisel estaría afirmando que: si algo es (lógicamente verdadero)$_{T,}$ entonces es (lógicamente verdadero)$_{I}$.

Por otro lado, en la teoría de conjuntos existe un interesante principio llamado principio de reflexión el cual afirma que: "Dada $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ una formula. Para cada M_0 existe un conjunto $M \supseteq M_0$ tal que $\varphi^M(x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow \varphi(x_1, \dots, x_n)$"[103], que podríamos parafrasear de la siguiente forma, para toda propiedad si el universo de la teoría de conjuntos la tiene, también hay un conjunto que la tiene". En pocas palabras el universo que es una clase "refleja" la propiedad a un conjunto.

Muy probablemente el empleo de este principio de reflexión en los lenguajes de segundo orden parece algo artificial y ad hoc en el caso de los lenguajes de segundo orden, puesto que este principio es derivable en la lógica de primer orden y no en la de segundo orden

La prueba intuitiva del principio de reflexión en primer orden es la siguiente: si una fórmula Φ en el lenguaje de primer orden se satisface en el universo conjuntista, entonces ha de ser consistente; y por el teorema de compleción Φ será satisfecha por un modelo conjuntista. Como es claro esta prueba no puede ser utilizada para la lógica de segundo orden a causa de la incompletud de este lenguaje. Sin embargo, existen buenas razones para aceptar el principio de reflexión para los lenguajes de segundo orden.

La principal razón por la cual se acepta dicho principio de reflexión es porque rescata una de nuestras intuiciones básicas con respecto al universo conjuntista, a saber, que el universo conjuntista es tan grande que no puede ser caracterizado por medio de una fórmula[104]. Al

[102] Note que el regreso es obvio dado que toda estructura-conjunto es una estructura-clase

[103] La traducción es mía. "Let $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ be a formula. For each M_0 there exists $M \supseteq M_0$ such that $\varphi^M(x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow \varphi(x_1, \dots, x_n)$" Thomas Jeck, *Set Theory,* p.168

[104] Vid. Penelope Maddy, "Believing the axioms I", *The Journal of Symbolic Logic,* p. 503

aceptar dicho principio de reflexión se garantiza que dada una fórmula Φ no podemos caracterizar al universo conjuntista como los x's que cumplen Φ, pues si aceptamos el principio de reflexión, existirá un conjunto cuyos miembros serán aquellos que cumplen Φ, por lo cual no podremos caracterizar a todo el universo conjuntista mediante Φ por unicidad, pues existirá un conjunto cuyos elementos también cumplen Φ. En particular, Maddy en su artículo "Believing the axioms I", emplea los principios de reflexión como un medio para justificar algunos axiomas sobre cardinales grandes en la teoría de conjuntos.

Si aceptamos como valido el principio de reflexión podemos demostrar el principio de Kreisel (asumiendo algunas otras premisas como verdaderas) de la siguiente manera: (La prueba será por transposición o contrapositiva) supongamos que Φ es falsa en alguna estructura. Si es falsa en una estructura-conjunto hemos terminado pues eso era lo que buscábamos, así podemos suponer que es falsa en alguna estructura-clase. Entonces si suponemos que toda clase es isomorfa a una clase de tipo conjuntista, entonces Φ es falsa en alguna estructura-clase de tipo conjuntista; por consiguiente también será falsa en todo el universo. Así por el principio de reflexión es falsa en alguna estructura-conjunto. Por lo tanto, por contrapositiva tenemos que el principio de kreisel es verdadero y así podemos garantizar que: si algo es (lógicamente verdadero)$_{T}$, entonces es (lógicamente verdadero)$_{I}$.

Si bien tenemos un lado del bicondicional (aceptando como ciertas algunas premisas), la otra implicación me resulta intuitivamente cierta; pues si algo es (lógicamente verdadero)$_{I}$ el éxito de la teoría de modelos refuerza nuestra intuición de que tiene que ser (lógicamente verdadero)$_{T}$.

Así si suponemos el principio de reflexión y que toda estructura-clase es isomorfa a una estructura-clase sobre el universo conjuntista, podemos garantizar que: "Para cada lenguaje L y toda oración S de L, S es (lógicamente verdadero)$_{T}$, si y sólo si, S es lógicamente verdadero". O, dicho en otras palabras, que tales conceptos son coextencionales.

Conclusiones del Capítulo

A modo de conclusión para este capítulo sobre las cuestiones que se desarrollaron quiero resaltar los siguientes puntos

- Una vez que sea ha abandonado un proyecto fundacionista de las matemáticas la exigencia de tener una lógica completa no resulta del todo importante. Si bien algunos autores argumentan que se necesita compleción para detectar cuando la validez de una demostración depende del contenido matemático y cuando no, se está presuponiendo que existe una distinción clara entre lógica y teoría de conjuntos.
- La completud no puede ser considerada una condición necesaria para que un sistema lógico, con su respectiva semántica, sea considerado como una verdadera lógica; pues, en el caso de la lógica de segundo esto se debe, en parte, por el poder expresivo que tiene. Si la lógica de primer orden es completa se debe a su escaso poder expresivo, pues algunas fórmulas validas no son expresables en un lenguaje de primer orden.
- Si suponemos el principio de reflexión y que toda estructura-clase es isomorfa a una estructura-clase sobre el universo conjuntista, podemos garantizar que: “Para cada lenguaje L y toda oración S de L, S es (lógicamente verdadero)$_T$, si y sólo si, S es lógicamente verdadero”. O, dicho en otras palabras, que tales conceptos son coextencionales.

Referencias

Amor Montaño, J.A., Campero Arena, G., & Miranda Perea, *Teoría de conjuntos: Curso Intermedio*, Facultad de Ciencias-UNAM, México D.F, 2011.

Benacerraf, Paul, "La verdad Matemática", Trad. Pere-Blai Fornés Ferrer y Francisco Santonja Gómez, *Ágora*, vol. 23, no. 2, pp. 233-253, 2004.

Boolos George, "To Be is to be a value of a variable *(*or to some values of variables*)", The Journal of Phiosophy, Vol. 81, No. 8 (Aug., 1984), pp. 430-449*

Boolos George, "Nominalist Platonism*", The philosophical Review,* Vol. 94, No. 3, pp. 327-344, 1985.

Chihara S. Charles, *A Structural Account of Mathematics,* Oxford University Press, 2004.

Chihara S. Charles, *Constructibility and Mathematical Existence,* Oxford University Press, New York, 1990.

George Kreisel*,* "Informal Rigour and Completeness Proofs"*,* Ed. I. Lakatos, *Problems in the Philosophy of Mathematics,* North Hollan Publishing Company, Armsterdam, 1965.

Gödel, K., *Obras completas,* trad. Jesús Mosterín, Alianza, Madrid, 1981.

Gómez Mario, "Logical Truth and Tarskian Logical Truth", *Synthese,* vol. 117, No. 3, pp. 375-408.

Gutiérrez Cristian, *Estructuralismo, Teoría de Conjuntos y Teoremas de Categoricidad,* "Tesis de maestría", UNAM, México, 2011.

Herbert B. Enderton, "Una Introducción matemática a la lógica", segunda edición, Trad. Jose Alfredo Amor Montaño, UNAM, México, 2004.

J.L. Bell & A.B. Slomson, *Models and Ultraproducts,* Tercera edición, North Holland Publishing, Amsterdam, 1969.

Jane, Ignasi, "Higher-order Logic Reconsidered", ed. Stewart Shapiro, *The Oxford Handbook of philosophy of Mathematics and Logic,* 2007.

Jeck Thomas, *Set Theory,* Tercera edición, Springer, 2006.

Penelope Maddy, “Believing the axioms I”, *The Journal of Symbolic Logic,* Vol. 53, No. 2, pp. 481-511.

Otávio Bueno, “A Defense of Second Order Logic”*, Axiomathes,* vol. 20, pp. 365-383, 2010

Putnam, H. “Models and Reality”, J Symbol Logic, Vol. 45, No. 3 (Sep., 1980), pp. 464-482

Rayo, A, & Uzquiano, G., *A Puzzle for Structuralism,* p.1-19

Rayo Agustín & Uzquiano Gabriel, “Toward a Theory of Second Order Consecuence”, *Notre Dame Journal of Formal Logic,* vol. 40, no. 3, pp. 1-11, 1999.

Reck, E. H., y Price, M. P. *Structures and structuralism in contemporary philosophy of mathematics,* Synthese, p. 341-383.

Richard Kaye, *Models of Peano Arithmetic*, Clarendon Press, Oxford, 1991.

Rosenblatt, Lucas, Dependencia e indeterminación en la lógica de segundo orden en Cuadernos de filosofía, Nº 57. Buenos Aires: Instituto de Filosofía, Facultad de Filosofía y Letras, Universidad de Buenos Aires pp. 31-49, 2012

Rosenblatt, Lucas, Interferencia e Indeterminación en la lógica de segundo orden

Rossberg Marcus, “First-Order Logic, Second-Order Logic, and Completeness”, Hendricks, V.F & Pedersen, *First Order Logic Revisited*, Logos, Berlín, p. 303-321.

Shapiro, Stewart, *Foundation Without Foundationalism: A Case for Second Order Logic,* Oxford University Press, United Kingdom, 2006.

Shapiro, Stewart, *Philosophy of mathematics: Structure and Ontology*, Oxford University Press, New York, 1997.

W.V.O., Quine, “Acerca de lo que hay”, *Desde un punto de vista lógico,* Trad. Manuel Sacristán, Ariel, Barcelona, 2002.

W.V.O., Quine, “Ontological Relativity”, *The Journal of Philosophy,* Vol. LXV, No. 7, pp. 185-212, 1968.

Zermelo, E.F.F. “On Boudary Numbers and Domains of sets: New investigations in the Foundations of Set Theory”, In W. Ewald (Ed), *From Kant to Hilbert: A source Book in the Foundations of Mathematics.* New York: Clarendon Press-Oxford University Press, 1996.