UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MEXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS Y DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA

SUCESIONES ESPECTRALES Y EL TEOREMA DE HOCHSCHILD-SERRE

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

PRESENTA:
JOSÉ MARTÍN MIJANGOS TOVAR

DIRECTOR DE TESIS:
ROLANDO JIMÉNEZ BENITEZ
ENTIDAD DE ADSCRIPCIÓN:
INSTITUTO DE MATEMATICAS

MÉXICO D.F., A 20 DE OCTUBRE DE 2015.

Índice

Agradecimientos

Quiero agradecer, y dedicar, este trabajo a mis padres, que siempre han sido una gran motivación para mi, y me han dado fuerzas para seguir adelante. Agradezco a mis hermanos que también han sido parte importante en esta etapa de mi formación profesional.

Agradezco a los profesores que tuve durante la maestría por la experiencia y conocimientos que me han transmitido, además por haberme contagiado con ese buen ánimo de seguir aprendiendo. Agradezco sobre todo al Dr. Rolando Jiménez por haberme guiado académicamente durante esta etapa, y por su apoyo y consejos que me han motivado a seguir siempre adelante.

Introducción

Las sucesiones espectrales, inventadas en los 40's independientemente por J. Leray y R. C. Lyndon, han sido una herramienta para hallar o aproximar los grupos de homología y cohomología. Un ejemplo importante es la sucesión espectral de Hochschild-Serre, la cual da aproximaciones sucesivas a los grupos de homología y cohomología de una extensión de grupos, es decir, dada una sucesión exacta de grupos $1 \to H \to G \to Q \to 1$, calcula los grupos $H_*(G, M)$ y $H^*(G, M)$ en términos de la homología y cohomología de H y Q. Aunque en teoría la idea es simple, en la práctica no siempre es una tarea fácil, incluso a veces sólo podemos obtener una aproximación de la homología que buscamos.

La idea central de este trabajo es llevar a algunas extensiones comunes la aplicación de esta sucesión espectral para hallar grupos de homología. Veremos cuán útil es, pero también las dificultades que presenta. Entre estas dificultades se encuentra el hecho de que para el uso del Teorema de Hochschild-Serre es necesaria una resolución de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$ para hallar la acción de Q sobre $H_*(H, M)$. Tal resolución no siempre es fácil de econtrar pero veremos que es posible usar en su lugar sólo resoluciones sobre $\mathbb{Z}H$ y $\mathbb{Z}Q$.

Para esto, en el Capítulo 3 daremos la definición de la sucesión espectral de Hochschild-Serre, y haremos los cálculos para obtener las homologías de grupos como $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_n$, $\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}_n$ y el grupo dihedrico. En los capítulos 1 y 2, daremos definiciones y propiedades básicas de los grupos de homología y cohomología y de las sucesiones espectrales respectivamente.

Capítulo 1

Homología y cohomología de grupos

1.1 Coinvariantes

Empecemos por dar la definición del grupo de coinvariantes y algunas de sus propiedades ([1]).

Definición 1.1.1. Sea G un grupo y M un G-módulo. El grupo de coinvariantes de M, denotado por M_G, es el cociente de M con su subgrupo generado por los elementos de la forma $gm - m$, con $g \in G$ y $m \in M$. Por lo tanto, M_G puede verse como el cociente más grande en el que G actúa trivialmente (mientras que M^G es el submódulo más grande donde G actúa trivialmente).

Teorema 1.1.2. *Existe un isomorfismo $M_G \cong \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}G} M$, con $\mathbb{Z}$ considerado como G-módulo derecho con acción trivial.*

Demostración. Sean $m \in M$ y $g \in G$. Consideremos $1 \otimes (gm - m) \in \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}G} M$. Entonces $1 \otimes (gm - m) = 1 \otimes gm - 1 \otimes m = 1g \otimes m - 1 \otimes m = 0$ pues la acción sobre $\mathbb{Z}$ es trivial. Tenemos así un homomorfismo de grupos bien definido $M_G \to \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}G} M$ dado por $\overline{m} \mapsto 1 \otimes m$. Usando la propiedad universal del producto tensorial tenemos otro homomorfismo $\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}G} M \to M_G$ dado por $1 \otimes m \mapsto \overline{m}$ □

Definición 1.1.3. Definimos el ideal aumentación I de $\mathbb{Z}G$ como $I = ker\, \epsilon$, donde $\epsilon : \mathbb{Z}G \to \mathbb{Z}$, con $\epsilon(g) = 1$. Notemos que como $\{1\} \cup \{g - 1 | g \in G\}$ es una base de $\mathbb{Z}G$ como $\mathbb{Z}$-módulo libre, I es un $\mathbb{Z}$-módulo libre con base $\{g - 1 | g \in G\}$ y $\mathbb{Z}G/I = \mathbb{Z}$. Además, dado M un G-módulo, los coinvariantes se pueden ver como $M_G = M/IM$.

Lema 1.1.4. *Si M es un G-módulo y $H \lhd G$, entonces G induce una acción de G/H sobre M_H y además $(M_H)_{G/H} \cong M_G$*

Demostración. Consideremos la acción

$$\begin{array}{ccc} G \times M_H & \longrightarrow & M_H \\ (g, \overline{m}) & \mapsto & \overline{gm}. \end{array}$$

Para ver que esta acción está bien definida observemos que si $m = hn - n$ para algún $n \in M$, $h \in H$, entonces $gm = ghn - gn$. Como $H \triangleleft G$, $\exists h' \in H$ tal que $gh = h'g$, luego $gm = h'(gn) - (gn)$, es decir, $\overline{gm} = 0 \in M_H$, por lo tanto la acción está bien definida. Como H actúa trivialmente sobre M_H, tenemos entonces una acción inducida de G/H sobre M_H. Esto prueba la primera afirmación. Sea $\varphi : M_H \to M_G$ el homomorfismo de grupos tal que $\varphi(\overline{m}) = \overline{m}$, el cual está bien definido. Verifiquemos que

$$ker\,\varphi = \{\overline{g}\,\overline{m} - \overline{m} | g \in G,\, m \in M\}.$$

Si $\overline{m} \in ker\,\varphi$ entonces $m = \sum_{\alpha \in A} g_\alpha m_\alpha - m_\alpha$, con A un conjunto finito, $g_\alpha \in G$ y $m_\alpha \in M$. Pero $\overline{g}\,\overline{m}_\alpha = \overline{gm_\alpha}$ y se tiene entonces que $\overline{m} = \sum \overline{g_\alpha m_\alpha - m_\alpha} = \sum \overline{g_\alpha}\,\overline{m_\alpha} - \overline{m_\alpha} \in \{\overline{gm} - \overline{m} | g \in G,\, m \in M\}$. Esto prueba que $ker\,\varphi \subseteq \{\overline{g}\,\overline{m} - \overline{m} | g \in G,\, m \in M\}$. La otra inclusión es clara y tenemos entonces la igualdad. Por el primer Teorema de isomorfismo de grupos tenemos entonces que

$$(M_H)_{G/H} \cong M_G.$$

□

Lema 1.1.5. *Sean M, G y H como en el lema anterior. Existe un isomorfismo de G/H-módulos $M_H \cong \mathbb{Z}[G/H] \otimes_{\mathbb{Z}G} M$, donde la acción de $\mathbb{Z}[G/H]$ sobre $\mathbb{Z}[G/H] \otimes_{\mathbb{Z}G} M$ está inducida por la traslación izquierda de $\mathbb{Z}[G/H]$ sobre $\mathbb{Z}[G/H]$.*

Demostración. Consideremos el homomorfismo de grupos

$$\varphi : M_H \to \mathbb{Z}[G/H] \otimes_{\mathbb{Z}G} M$$

dado por $\varphi(\overline{m}) = \overline{1} \otimes m$. Puesto que la acción de H sobre $\mathbb{Z}[G/H]$ es trivial, $\varphi(\overline{hm - m}) = \overline{1} \otimes (hm - m) = \overline{1}h \otimes m - \overline{1} \otimes m = 0$ y entonces φ está bien definido. Además, como $\overline{g}\varphi(\overline{m}) = \overline{g}(\overline{1} \otimes m) = \overline{g} \otimes m = \overline{1} \otimes gm = \varphi(\overline{g}\,\overline{m})$, se sigue que φ es $\mathbb{Z}[G/H]$ invariante, por lo tanto es un homomorfismo de $\mathbb{Z}[G/H]$-módulos. Se prueba de forma análoga que el homomorfismo

$$\psi : \mathbb{Z}[G/H] \otimes_{\mathbb{Z}G} M \to M_H$$

dado por $\psi(\overline{1} \otimes m) = \overline{m}$ es homomorfismo de $\mathbb{Z}[G/H]$-módulos y es el inverso de ψ. □

Consideremos dos R-módulos M y N con R un anillo arbitrario. Para que el producto $M \otimes_R N$ esté bien definido necesitamos que M sea un módulo derecho y N un módulo izquierdo. Pero cuando el anillo R es un anillo de grupo, es decir, $R = \mathbb{Z}G$ para algún grupo G, podemos quitar esta restricción de la siguiente manera. Supongamos que M y N son ambos $\mathbb{Z}G$-módulos izquierdos. Podemos darle a M estructura de $\mathbb{Z}G$-módulo derecho mediante la siguiente acción:

$$\begin{array}{ccc} M \times G & \longrightarrow & M \\ (m, g) & \mapsto & g^{-1}m. \end{array}.$$

Entonces tenemos definido el producto $M \otimes_{\mathbb{Z}G} N$ de G-módulos izquierdos, el cual denotaremos por $M \otimes_G N$. Notemos que en tal caso, $M \otimes_G N$ se obtiene de $M \otimes N$ introduciendo las relaciones $g^{-1}m \otimes n = m \otimes gn$ con $n \in N$ y $m \in M$.

Como $g \in G$ determina un automorfismo en M, sin pérdida de generalidad podemos sustituir en la igualdad anterior a m por gm. Entonces vemos así que $M \otimes_G N$ se obtiene de $M \otimes N$ introduciendo las relaciones $m \otimes n = gm \otimes gn$. Si consideramos a $M \otimes N$ como G-módulo con acción diagonal, es decir $g(m \otimes n) = gm \otimes gn$, tenemos el isomorfismo

$$M \otimes_G N = (M \otimes N)_G.$$

1.2 Homología y cohomología de grupos

Sean G un grupo, M un G-módulo y F una resolución proyectiva de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$, donde $\mathbb{Z}$ lo consideramos como un G-módulo con acción trivial. Consideremos el complejo de cadenas $F \otimes_G M$ y el complejo de cocadenas (diferencial de grado 1) $Hom_G(F, M)$. Definimos la homología de G con coeficientes en M como la homología de $F \otimes_G M$:

$$H_*(G, M) = H_*(F \otimes_G M)$$

y la cohomología de G con coeficientes en M como la cohomología del complejo $Hom_G(F, M)$:

$$H^*(G, M) = H^*(Hom_G(F, M))$$

En particular, si M es el grupo cíclico infinito $\mathbb{Z}$ y G actúa de forma trivial sobre él, denotamos simplemente por $H_*(G)$ y $H^*(G)$ a los grupos $H_*(G, \mathbb{Z})$ y $H^*(G, \mathbb{Z})$ respectivamente.

Como las resoluciones proyectivas son únicas salvo homotopía y los funtores $- \otimes_G M$ y $Hom_G(-, M)$ preservan homotopías, estos grupos de homología y cohomología están bien definidos.

Veamos algunas propiedades de los grupos de homología.

Teorema 1.2.1. *Dada una sucesión exacta* $0 \to M \to M' \to M'' \to 0$ *de* G*-módulos, existe una sucesión exacta larga*

$$\cdots \to H_1(G, M') \to H_1(G, M'') \to H_0(G, M) \to H_0(G, M') \to H_0(G, M'') \to 0$$

([1, III.6)].

Demostración. Sea F una resolución proyectiva de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$. Como cada F_i es proyectivo, se tiene que cada sucesión $0 \to F_i \otimes_G M \to F_i \otimes_G M' \to F_i \otimes_G M'' \to 0$ es exacta, por lo cual tenemos definida la sucesión exacta de G-cadenas $0 \to F \otimes_G M \to F \otimes_G M' \to F \otimes_G M'' \to 0$ la cual induce una sucesión exacta larga en homología, la cual es precisamente la sucesión dada. $\square$

Teorema 1.2.2. *Sea* G *un grupo y* M *un* G*-módulo. Entonces* $H_0(G, M) = M_G$.

Demostración. Consideremos una resolución proyectiva F de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$ de la forma $\cdots \to F_1 \xrightarrow{d_1} F_0 \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z} \to 0$. Puesto que el funtor $- \otimes_G M$ es exacto por la derecha, $F_1 \otimes_G M \xrightarrow{d_1 \otimes 1} F_0 \otimes_G M \xrightarrow{\epsilon \otimes 1} \mathbb{Z} \otimes_G M \to 0$ es exacta, y por lo tanto $Im\,(d_1 \otimes 1) = ker\,(\epsilon \otimes 1)$ y como $\epsilon \otimes 1$ es sobre, $F_o \otimes_G M / ker\,(\epsilon \otimes 1) \cong \mathbb{Z} \otimes_G M = M_G$ donde M_G denota los coinvariantes. De $H_0(G, M) = F_0 \otimes_G M / Im\, d_1 \otimes 1$ se tiene el isomorfismo buscado. $\square$

Veamos ahora cómo está dado el grupo $H_1(G, M)$ ([3, VI.1]). Haremos uso del siguiente lema.

Lema 1.2.3. *Sea G un grupo e I el ideal aumentación. Entonces $G/[G, G] \cong I/I^2$ donde $[G, G]$ es el subgrupo de G generado por los conmutadores, es decir, por los elementos de G de la forma $ghg^{-1}h^{-1}$, con $g, h \in G$.*

Demostración. Usaremos notación aditiva para el grupo I y multiplicativa para G. Sea $\varphi : G \to I/I^2$ dada por $\varphi(g) = \overline{g-1}$. Entonces

$$\begin{aligned}
\varphi(gh) - \varphi(g) - \varphi(h) &= \overline{gh-1} - \overline{g-1} - \overline{h-1} \\
&= \overline{gh-1-g+1-h+1} \\
&= \overline{gh-g-h+1} \\
&= \overline{(g-1)(h-1)} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Por lo tanto φ es homomorfismo de grupos. Es claro que $[G, G] \subseteq ker\,\varphi$, y entonces tenemos un homomorfismo inducido $\overline{\varphi} : G/[G, G] \to I/I^2$ tal que $\overline{\varphi}(\bar{g}) = \overline{g-1}$. Por otra parte consideremos $\psi : I \to G/[G, G]$ dado por $\psi(g-1) = \bar{g}$. Esta función es un homomorfismo de grupos tal que $I^2 \subseteq ker\,\psi$, por lo tanto induce un homomorfismo de grupos $\overline{\psi} : I/I^2 \to G/[G, G]$ tal que $\psi(\overline{g-1}) = \bar{g}$. Es claro que $\overline{\psi}$ y $\overline{\varphi}$ son inversos uno del otro, y de aquí se tiene el isomorfismo que queríamos probar.

□

Teorema 1.2.4. *Sea G un grupo, entonces $H_1(G) \cong G/[G, G]$*

Demostración. Consideremos $0 \to I \to \mathbb{Z}G \to \mathbb{Z} \to 0$ una sucesión exacta corta de G-módulos, entonces tenemos una sucesión exacta larga

$$H_1(G, \mathbb{Z}G) \to H_1(G, \mathbb{Z}) \to H_0(G, I) \to H_0(G, \mathbb{Z}G) \to H_0(G, \mathbb{Z}) \to 0$$

Como $H_1(G, \mathbb{Z}G) = 0$ pues $\mathbb{Z}G$ es plano, la sucesión anterior queda como

$$0 \to H_1(G) \to I_G \to (\mathbb{Z}G)_G \to \mathbb{Z} \to 0.$$

El homomorfismo $(\mathbb{Z}G)_G \to \mathbb{Z}$ es el isomorfismo $(\mathbb{Z}G)_G \cong \mathbb{Z}G/I \cong \mathbb{Z}$, por lo tanto $H_1(G) \cong I_G \cong I/I^2$ y por el lema anterior $H_1(G) \cong G/[G, G]$. □

Corolario 1.2.5. *Sean G un grupo y M un G-módulo con acción trivial. Entonces existe un ismomorfismo $H_1(G, M) \cong G/[G, G] \otimes M$.*

Demostración. Dada una resolución proyectiva de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$, como la acción es trivial sobre M, tenemos un isomorfismo $F \otimes_G M \cong (F \otimes_G \mathbb{Z}) \otimes M$, y al aplicar el teorema de los coeficientes universales obtenemos

$$H_1(G, M) \cong (H_1(G, \mathbb{Z}) \otimes M) \oplus Tor_1^{\mathbb{Z}}(H_0(\mathbb{Z}, G), M)$$

pero $Tor_1^{\mathbb{Z}}(H_0(\mathbb{Z}, G), M) = Tor_1^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, M) = 0$ y se sigue el corolario. □

Una resolución libre de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$, con G un grupo arbitrario, que nos será de utilidad más adelante es la resolución estándar ([1,I.5]). Está dada de la siguiente manera. Sea F_n el grupo abeliano libre generado por las $(n+1)$-adas $(g_0, g_1, ..., g_n)$ con cada $g_i \in G$. Consideremos una acción de G sobre este conjunto dada por $g(g_0, g_1, ..., g_n) = (gg_0, gg_1, ..., gg_n)$ con $g, g_i \in G$ y extendida linealmente a todo F_n, entonces F_n es un G-módulo. Sea $d : F_{n+1} \to F_n$ el diferencial de este complejo dado por

$$d(g_0, ..., g_n) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i (g_0, ..., \hat{g}_i, ...g_n)$$

donde el "gorro" denota que ese elemento ha sido omitido. Definimos la aumentación $\epsilon : F_0 \to \mathbb{Z}$ como $\epsilon(g) = 1$. Es claro que tanto el diferencial como la aumentación son homomorfismos de G-módulos. Para ver que cada F_n es un G-módulo libre basta notar que F_n tiene una base sobre $\mathbb{Z}G$ dada por todas las $(n+1)$-adas tales que su primer elemento es un uno. Veamos que $d^2 = 0$, denotemos por $(\hat{g}_i)$ la $(n+1)$-ada donde se ha omitido g_i y por $(\hat{g}_i, \hat{g}_j)$ la $(n+1)$-ada donde se ha omitido g_i y g_j (en ese orden):

$$\begin{aligned} d^2(g_0, ..., g_n) &= \sum_{i=0}^{n} (-1)^i d(\hat{g}_i) \\ &= \sum_{i=0}^{n} (-1)^i [\sum_{j<i} (-1)^j (\hat{g}_j, \hat{g}_i) + \sum_{i<j} (-1)^{j-1} (\hat{g}_i, \hat{g}_j)] \\ &= 0 \end{aligned}$$

Tenemos entonces un complejo de cadenas, sólo falta ver que es acíclico. Para ver esto, podemos verificar que el complejo que construimos es contraíble, o equivalentemente, que la identidad en F es homotópica al homomorfismo de cadenas cero, $id_F \simeq 0$, incluso sólo como $\mathbb{Z}$-módulos (pues la aciclicidad no depende de la estructura de G-módulo). Sea entonces $h : F_n \to F_{n+1}$ el homomorfismo de $\mathbb{Z}$-módulos dado por $h(g_0, ..., g_n) = h(g_i) = (1, g_0, ..., g_n) = (1, g_i)$ para $n \geq 0$ y $h(1) = (1)$ para $n = -1$ y veamos que es la homotopía buscada. Si $n > 0$

$$\begin{aligned} (dh + hd)(g_i) &= dh(g_i) + hd(g_i) \\ &= d(1, g_i) + h \sum_{i=0}^{n} (-1)^i (\hat{g}_i) \\ &= (g_i) + \sum_{i=0}^{n} (-1)^{i+1} (1, \hat{g}_i) + \sum_{i=0}^{n} (-1)^i (1, \hat{g}_i) \\ &= (g_i) \end{aligned}$$

Si $n = 0$

$$\begin{aligned} (dh + h\epsilon)(g_0) &= dh(g_0) + h\epsilon(g_0) \\ &= d(1, g_0) + h(1) \\ &= (g_0) - (1) + (1) \\ &= (g_0) \end{aligned}$$

lo cual muestra que h es una homotopía entre id_F y 0.

Notemos que los elementos de la base de F_n pueden ser escritos como

$$\begin{aligned} (g_0, ..., g_n) &= g_0(1, g_0^{-1} g_1, ..., g_0^{-1} g_n) \\ &= g_0(1, g_0^{-1} g_1, g_0^{-1} g_1 g_1^{-1} g_2, ..., g_0^{-1} g_1 g_1^{-1} \cdots g_{n-1}^{-1} g_n) \\ &= g_0(1, g_1', g_1' g_2', ..., g_1' g_2' \cdots g_n') \end{aligned}$$

donde $g_i' = g_{i-1}^{-1} g_i$, $i = 1, 2, ..., n$. Vemos entonces que F_n tiene una base de la forma $(1, g_1, g_1 g_2, ..., g_1 \cdots g_n)$ la cual denotaremos por $[g_1 | g_2 | \cdots | g_n]$. Se tiene entonces con esta notación barra que $d = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i d_i$ donde cada d_i está dado por

$$d_i[g_1|g_2|\cdots|g_n] = \begin{cases} g_1[g_2|\cdots|g_n] & si \quad i=0 \\ [g_1|\cdots|g_{i-1}|g_ig_{i+1}|g_{i+2}|\cdots|g_n] & si \quad 0<i<n \\ [g_1|g_2|\cdots|g_{n-1}] & si \quad i=n \end{cases}$$

Podemos normalizar esta resolución tomando el cociente $\bar{F}_* = F_*/D_*$ donde D_* es el subcomplejo de F_* dado por los elementos $(g_0, g_1, ..., g_n)$ tales que $g_i = g_{i+1}$ para algún i, o en la notación barra, D_* es el subcomplejo generado por los elementos $[g_1|\cdots|g_n]$ tales que $g_i = 1$ para algún i. Es claro que $hD_* \subseteq D_*$, donde h es la homotopía de contracción de F_*, la cual induce entonces una homotopía de contracción en $\bar{F}$, y por lo tanto $\bar{F}$ también es resolución libre de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$.

Sea M un G-módulo. Con esta resolución barra tenemos que el complejo $F \otimes_G M$, al que denotaremos por $C_*(G,M)$, son sumas finitas de la forma $m \otimes [g_1|,\cdots|g_n]$ y el operador frontera $d : C_n(G,M) \to C_{n-1}(G,M)$ está dado por

$$d(m \otimes [g_1|\cdots|g_n]) = mg_1 \otimes [g_2|\cdots|g_n] +$$

$$\sum_{i=2}^{n-1}(-1)^i m \otimes [g_1|\cdots|g_{i-1}g_i|\cdots|g_n] + (-1)^n m \otimes [g_1|\cdots|g_{n-1}].$$

Análogamente, un elemento en $Hom_G(F,M) = C^*(G,M)$ se puede considerar como una función de n variables $f : G^n \to M$ pues a cada elemento $[g_1|\cdots|g_n]$ le podemos asociar $(g_1,...,g_n) \in G^n$. El operador cofrontera $\delta : C^{n-1}(G,M) \to C^n(G,M)$ es de la forma

$$\delta f(g_1,...,g_n) = g_1 f(g_2,...,g_n)$$

$$+\sum_{i=2}^{n-1}(-1)^i f(g_1,...,g_{i-1}g_i,...g_n) + (-1)^n f(g_1,...,g_{n-1}).$$

Podemos usar la resolución barra normalizada y en tal caso obtenemos el complejo $C_N^*(G,M) \subseteq C^*(G,M)$ donde $f(g_1,...,g_n) = 0$ si $g_i = 1$ para algún i.

1.3 Módulos Inducidos y Co-inducidos

Daremos ahora la definición de módulos inducidos y coinducidos como en [1, III.5].

Sean R y S anillos y $\alpha : R \to S$ homomorfismo de anillos. A un S-módulo M podemos darle estructura de R-módulo con la acción dada por $r \cdot m = \alpha(r)m$. Se dice que éste módulo se obtiene por restricción de escalares.

Supongamos ahora que tenemos un R-módulo M. Consideremos el producto tensorial $S \otimes_R M$, donde la acción de R sobre S es la inducida por el homomorfismo α. Como la estructura natural de S como S-módulo izquierdo conmuta con la estructura de R-módulo derecho, podemos darle a $S \otimes_R M$ estructura de S-módulo izquierdo. Se dice entonces que $S \otimes_R M$ se obtiene mediante extensión de escalares de R a S. Consideremos el homomorfismo natural $i : M \to S \otimes_R M$ dado por $m \mapsto 1 \otimes m$. Puesto que $1 \otimes rm = \alpha(r) \otimes m = \alpha(r)(1 \otimes M)$, se tiene que $i(rm) = \alpha(r)i(m)$, es decir, i es un homomorfismo de R-módulos. Más aún, tenemos la siguiente propiedad universal: Dado un S-módulo N y un homomorfismo de $f : M \to N$ de R-módulos, hay un único homomorfismo de S-módulos $g : S\otimes_R \to N$ tal que $gi = f$, es decir, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} S \otimes_R M \arrow[dr, dashed, "g"] & \\ M \arrow[u, "i"] \arrow[r, "f"] & N \end{tikzcd} .$$

Tenemos entonces

$$Hom_S(S \otimes_R M, N) \cong Hom_R(M, N). \tag{1.3.1}$$

Podemos hacer una construcción análoga a la anterior, pero en lugar de usar $\otimes$ usaremos Hom. Para esto consideremos ahora R-módulos derechos M y S, S con la acción inducida por α. Puesto que la acción natural (izquierda) de S sobre S conmuta con la acción derecha de R sobre S, podemos darle estructura de S-módulo izquierdo al grupo $Hom_R(S, M)$, con la acción dada por $(sf)(s') = f(ss')$. Este S-módulo se dice que se obtiene de M mediante co-extensión de escalares de R a S. Tenemos un homomorfismo natural $\pi : Hom_R(S, M) \to M$ dado por $\pi(f) = f(1)$. Notemos esta vez que $\pi(\alpha(r)f) = \alpha(r)f(1) = f(\alpha(r)) = rf(1) = r\pi(f)$ y por lo tanto π es un homomorfismo de R-módulos (aquí $Hom_R(S, M)$) es considerado R-módulo mediante restricción de escalares). Además tenemos la siguiente propiedad universal: Dado un S-módulo N y un homomorfismo $f : N \to M$ de R-módulos, existe un único homomorfismo $g : N \to Hom_R(S, M)$ tal que $\pi g = f$, es decir, el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} & Hom_R(S, M) \arrow[d, "\pi"] \\ N \arrow[ur, dashed, "g"] \arrow[r, "f"] & M \end{tikzcd} .$$

Tenemos entonces

$$Hom_S(N, Hom_R(S, M)) \cong Hom_R(N, M). \tag{1.3.2}$$

Consideremos ahora las construcciones anteriores pero con el homomorfismo de anillos $\mathbb{Z}H \to \mathbb{Z}G$ donde G es un grupo y H es un subgrupo de G. En este caso la extensión y co-extensión de escalares es llamada inducción y co-inducción respectivamente de H a G. En tales casos denotaremos los módulos obtenidos como

$$Ind_H^G M = \mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}H} M$$

y

$$Coind_H^G M = Hom_{\mathbb{Z}H}(\mathbb{Z}G, M)$$

Teorema 1.3.3 (Lema de Shapiro)**.** *Sean G, H grupos con $H < G$, M un H-módulo. Se tienen los isomorfismos*

$$H_*(H, M) \cong H_*(G, Ind_H^G M)$$

y

$$H^*(H, M) \cong H^*(G, Coind_H^G M).$$

Demostración. Sea F una resolución de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$. El primer isomorfismo se sigue de los isomorfismos $F \otimes_{\mathbb{Z}H} M \cong F \otimes_{\mathbb{Z}G} (\mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}H} M) = F \otimes_{\mathbb{Z}G} Ind_H^G M$. Para demostrar el segundo isomorfismo notemos que de la propiedad universal de co-inducción (1.3.2) se sigue que $Hom_H(F, M) \cong Hom_G(F, Coind_H^G M)$. $\square$

Definición 1.3.4. Un G-módulo P se dice que es H_*-acíclico si $H_n(G, P) = 0$ $\forall n > 0$. Un módulo Q se dice H^*-acíclico si $H^n(G, Q) = 0$ $\forall n > 0$.

Corolario 1.3.5. *Sea M un grupo abeliano. Los módulos inducidos $\mathbb{Z}G \otimes M$ son H_*-acíclicos y los módulos coinducidos $Hom(\mathbb{Z}G, M)$ son H^*-acíclicos.*

Demostración. Consideremos el subgrupo trivial H de G. En tal caso, $\mathbb{Z}H = \mathbb{Z}$, por lo tanto una resolución de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}H$ es $0 \to \mathbb{Z} \overset{\varepsilon = id_{\mathbb{Z}}}{\to} \mathbb{Z} \to 0$. De esto y del Lema de Shapiro se sigue la proposición. $\square$

Teorema 1.3.6. *Sea M un G-módulo y sea M_0 el grupo abeliano obtenido de M olvidando su estructura de G-módulo. Existe entonces un isomorfismo de $\mathbb{Z}G$-módulos $\mathbb{Z}G \otimes M \cong Ind_{\{1\}}^G M_0$, donde $\mathbb{Z}G$ actúa diagonalmente sobre $\mathbb{Z}G \otimes M$.*

Demostración. Por la propiedad universal del producto tensorial, está definido el homomorfismo $\varphi : \mathbb{Z}G \otimes M \to \mathbb{Z}G \otimes M_0$ definido en los generadores por $\varphi(g \otimes m) = g \otimes g^{-1}m$. Se tiene entonces que $\varphi(g'(g \otimes m)) = \varphi(g'g \otimes g'm) = g'g \otimes g^{-1}m = g'(g \otimes g^{-1}m) = g'\varphi(g \otimes m)$, es decir, φ es un homomorfismo de G-módulos. Análogamente se prueba que el homomorfismo $\mathbb{Z}G \otimes M_0 \to \mathbb{Z}G \otimes M$ dado por $g \otimes m \mapsto g \otimes gm$ es de G-módulos, y es claro que es el inverso del homomorfismo anterior, por lo tanto φ es el isomorfismo buscado. $\square$

1.4 Acciones sobre la homología

Consideremos la categoría $\mathcal{C}$ cuyos objetos son pares (G, M), donde G es un grupo y M un G-módulo, y los morfismos son pares $(\alpha, f) : (G, M) \to (G', M')$ con $\alpha : G \to G'$ un homomorfismo de grupos y $f : M \to M'$ un homomorfismo de grupos abelianos tal que $f(gm) = \alpha(g)f(m)$ con $g \in G$, $m \in M$ (es decir f es un homomorfismo de G-módulos si consideramos a M' un G-módulo mediante α). Consideremos un morfismo $(\alpha, f) : (G, M) \to (G', M')$ y resoluciones proyectivas F y F' de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$ y $\mathbb{Z}G'$ respectivamente. La resolución F' puede verse como una resolución de G-módulos mediante α (aunque no necesariamente formada de G'-módulos proyectivos), y entonces existe un homomorfismo τ de G-cadenas, único salvo homotopía, que preserva aumentación ([1] Lema I.7.4), donde la condición de ser homomorfismo de G-cadenas quiere decir que $\tau(gx) = \alpha(g)\tau(x)$, $x \in F$, $g \in G$. Tenemos así un homomorfismo de cadenas $\tau \otimes f : F \otimes_G M \to F' \otimes_{G'} M'$ el cual induce un homomorfismo en homología $(\alpha, f)_* : H_*(G, M) \to H_*(G', M')$. De este modo hemos construido una familia de funtores covariantes $(-, -)_* : \mathcal{C} \to \mathbf{Ab}$ donde $\mathbf{Ab}$ denota la categoría de los grupos abelianos.

Sean H y G grupos con $H < G$, M un G-módulo y $g \in G$, y consideremos el caso particular en el que $\alpha : H \to gHg^{-1}$ está dado por $\alpha(h) = ghg^{-1}$ y $f : M \to M$ por $f(m) = gm$, y denotemos por

$$c(g) : (H, M) \to (gHg^{-1}, M) \tag{1.4.1}$$

el isomorfismo (α, f). Tenemos así un isomorfismo inducido en homología $c(g)_* : H_*(H,M) \to H_*(gHg^{-1}, M)$. Para ver cómo está dado $c(g)_*$ a nivel de cadenas, usamos una sola resolución F de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$ para calcular tanto $H_*(H,M)$ como $H_*(gHg^{-1}, M)$. Sea $\tau : F \to F$ dado por $\tau(x) = gx$, $g \in G$, $x \in F$. Como F es resolución sobre $\mathbb{Z}G$, τ es un homomorfismo de cadenas que preserva aumentación, y puesto que $\tau(g'x) = gg'x = gg'g^{-1}gx = gg'g^{-1}\tau(x)$, $g' \in G$, es decir, τ es compatible con α, $c(g)_*$ está inducido a nivel de cadenas por $F \otimes_H M \to F \otimes_{gHg^{-1}} M$ dado por $x \otimes m \to gx \otimes gm$.

Teorema 1.4.2. *Si $h \in H$ entonces $c(h)_*(z) = z \ \forall z \in H_*(H,M)$*

Demostración. Esto se sigue de que $c(h) : F \otimes_H M \to F \otimes_H M$ es la identidad, pues en este caso, usando la descripción anterior a nivel de cadenas, $hx \otimes hm = xh^{-1} \otimes hm = x \otimes m$. Por lo tanto $c(h)_*$ también es la identidad. $\square$

Corolario 1.4.3. *Si $H \lhd G$ y M es un G-módulo, la conjugación de G sobre H induce una acción de G/H sobre $H_*(H,M)$, dada por $\overline{g}z = c(g)_*(z)$.* $\square$

Se pueden hacer construcciones duales en cohomología ([1, III.8]) pero no serán usadas mas adelante.

Capítulo 2

Sucesiones Espectrales

2.1 Definición de sucesión espectral

En esta sección daremos la terminología y definiciones básicas de sucesiones espectrales. Usaremos la notación de [2,XI.1].

Definición 2.1.1. Un módulo $\mathbb{Z}$-bigraduado es una familia $E = \{E_{p,q}\}$, $p, q \in \mathbb{Z}$, de módulos. Un diferencial $d : E \to E$ de grado $(-r, r-1)$ es una familia de homomorfismos $\{d_{p,q} : E_{p,q} \to E_{p-r,q+r-1}\}$ tal que $d^2 = 0$. La homología de éste módulo $\mathbb{Z}$-bigraduado, $H(E)$, bajo un diferencial d, es otro módulo $\mathbb{Z}$-bigraduado dado por

$$H_{p.q}(E) = Ker\, d_{p,q}/Im\, d_{p+r,q-r+1}.$$

Definición 2.1.2. Una sucesión espectral $E = \{E^r, d^r\}$ es una sucesión de módulos $\mathbb{Z}$-bigraduados $E^2, E^3...$, tales que cada E^r posee un diferencial $d^r : E^r_{p,q} \to E^r_{p-r,q+r-1}$, $r = 2, 3, ...$ de grado $(-r, r-1)$ y tal que se cumple el isomorfismo $H(E^r, d^r) \cong E^{r+1}$. Observemos entonces que cada pareja (E^r, d^r) determina a E^{r+1} pero no a d^{r+1}. El módulo bigraduado E^2 es llamado término inicial.

Sean E y E' sucesiones espectrales con términos iniciales E^a y E'^a respectivamente. Un homomorfismo $f : E \to E'$ es una familia de homomorfismos

$$f^r : E^r \to E'^r, \qquad r \in \mathbb{Z},\, r \geq a$$

de módulos bigraduados, es decir, de grado $(0, 0)$ tales que $d^r f = f d^r$ y f^{r+1} es el inducido por f^r en homología.

Sea E una sucesión espectral con término inicial (E^a, d^a). Definimos los submódulos bigraduados C^a y B^a de E^a como $C^a = ker\, d^a$ y $B^a = Im\, d^a$. Podemos ver entonces al siguiente término de la sucesión como $E^{a+1} = C^a/B^a$ y $d^{a+1} : C^a/B^a \to C^a/B^a$. Definimos ahora C^{a+1} y B^{a+1} como los submódulos bigraduados de E^a tales que

$$ker\, d^{a+1} = C^{a+1}/B^a \quad e \quad Im\, d^{a+1} = B^{a+1}/B^a. \tag{2.1.3}$$

Se tiene entonces que $B^a \subseteq B^{a+1} \subseteq C^{a+1} \subseteq C^a$ y por lo tanto $E^{a+2} = (C^{a+1}/B^a)/(B^{a+1}/B^a) = C^{a+1}/B^{a+1}$. Iterando este proceso, podemos encontrar submódulos bigraduados de E^a, C^r y B^r, tales que $ker\, d^r = C^r/B^{r-1}$ e

$Im\, d^r = B^r/B^{r-1}$. Se va a cumplir entonces

$$B^a \subseteq B^{a+1} \subseteq \ldots B^r \subseteq C^r \ldots \subseteq C^{a+1} \subseteq C^a$$

y $E^{r+1} = C^r/B^r$. Definimos los módulos bigraduados C^∞ y B^∞ como $C^\infty = \cap_{r\geq a} C^r$ y $B^\infty = \cup_{r\geq a} B^r$. Tenemos entonces que $B^\infty \subseteq C^\infty$ (de lo contrario existiría un elemento $x \in B^k$ para algún k, tal que $x \notin C^l$ para algún l, lo cual no puede ser pues si $k \leq l$ $B^k \subseteq B^l \subseteq C^l$ y si $k > l$ $B^k \subseteq C^k \subseteq C^l$). Definimos

$$E^\infty = C^\infty/B^\infty \tag{2.1.4}$$

Considerando lo anterior, tener un homomorfismo $f : E \to E'$ entre dos sucesiones espectrales con términos iniciales E^a y E'^a, es equivalente a tener un homomorfismo $f : E^a \to E'^a$ de módulos bigraduados tal que $f(C^r) \subseteq C'^r$, $f(B^r) \subseteq B'^r$ y tal que todos los diagramas

$$\begin{tikzcd}
C^{r-1}/B^{r-1} \arrow[r, "d^r"] \arrow[d, "f_*"] & C^{r-1}/B^{r-1} \arrow[d, "f_*"] \\
C'^{r-1}/B'^{r-1} \arrow[r, "d^r"] & C'^{r-1}/B'^{r-1}
\end{tikzcd}$$

son conmutativos. Es claro así que $f : E \to E'$ induce un homomorfismo $f^\infty : E^\infty = C^\infty/B^\infty \to E'^\infty = C'^\infty/B'^\infty$.

Definición 2.1.5. Sea E una sucesión espectral con término inicial E^a. La sucesión se llama de primer cuadrante si $E^r_{p,q} = 0$ para $p < 0$ o $q < 0$. Se llama acotada por abajo si para cada $n \in \mathbb{Z}$ existe un entero $s(n)$ tal que si $p < s(n)$ entonces $E^r_{p,q} = 0$ $\forall q \in \mathbb{Z}$ tal que $p + q = n$.

Teorema 2.1.6. *Sea $f : E \to E'$ un homomorfismo de sucesiones espectrales con términos iniciales E^a y E'^a. Si existe $r \in \mathbb{Z}$ tal que $f^r : E^r \to E'^r$ es un isomorfismo, entonces $f^s : E^s \to E'^s$ es un isomorfismo $\forall s \geq r$. Más aún, si las sucesiones son acotadas por abajo, $f^\infty : E^\infty \to E'^\infty$ es también un isomorfismo.*

Demostración. La primera afirmación es clara puesto que $E^{r+1} = H(E^r, d^r)$ y f^{r+1} está inducido por f^r. Para probar la segunda afirmación, consideremos enteros p y q fijos. Como las sucesiones son acotadas por abajo, la imagen de los homomorfismos $d^r_{p,q} : E^r_{p,q} \to E^r_{p-r,q+r-1}$ es cero para r suficientemente grande, por lo tanto $C^r_{p,q} = C^{r+1}_{p,q} = \cdots = C^\infty_{p,q}$ y $C'^r_{p,q} = C'^{r+1}_{p,q} = \cdots = C'^\infty_{p,q}$. Veamos que f^∞ es un epimorfismo. Sea $\overline{x'} \in E'^\infty_{p,q} = C'^\infty_{p,q}/B'^\infty_{p,q}$, entonces $x' \in C'^\infty_{p,q} = C'^r_{p,q}$, y como f^r es un epimorfismo, existe $x \in C^r_{p,q}$ tal que $f^r(\overline{x}) = \overline{x'}$, en particular, $f^a(x) = x'$ y por lo tanto $f^\infty(\overline{x}) = \overline{x'}$, luego f^∞ es un epimorfismo. Para verificar que es un monomorfismo consideremos un elemento $\overline{x} \in E^\infty_{p,q}$ tal que $f^\infty(\overline{x}) = 0$. Esto implica que $f^a(x) \in B'^\infty_{p,q} = \cup_{t\geq a} B'^t_{p,q}$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $f^a(x) \in B'^r_{p,q}$ y, como f^r es monomorfismo, $x \in B^r_{p,q} \subseteq B^\infty_{p,q}$. Por lo tanto f^∞ es monomorfismo. □

2.2 Filtraciones

Sea M un $R-$módulo. Una filtración de M es una familia de submódulos F_pM de M, $p \in \mathbb{Z}$, tales que

$$\cdots \subseteq F_{p-1}M \subseteq F_pM \subseteq F_{p+1}M \subseteq \cdots .$$

Decimos que una filtración es finita si $F_pM = 0$ para un $p \in \mathbb{Z}$ lo suficientemente pequeño y $F_pM = M$ para un $p \in \mathbb{Z}$ suficientemente grande. Una filtración induce un módulo graduado al que llamaremos módulo graduado asociado, denotado por $Gr\, M$, y que está dado por $Gr_p\, M = F_pM/F_{p-1}M$. Si el módulo M es un módulo graduado, una filtración de M es una filtración $\{F_pM_n\}_{p\in\mathbb{Z}}$ para cada $n \in \mathbb{Z}$. Tenemos así un módulo bigraduado, $Gr_{p,q}M$, dado por

$$Gr_{p,q}M = Gr_pM_{p+q} = F_pM_{p+q}/F_{p-1}M_{p+q}$$

Diremos que un elemento en $Gr_{p,q}M$ tiene grado de filtración p, grado complementario q y grado total $p+q$. Para simplificar la notación es costumbre suprimir el subíndice q y escribir $Gr_pM = F_pM/F_{p-1}M$ Diremos que la filtración anterior es acotada si para cada $n \in \mathbb{Z}$ la filtración $\{F_pM_n\}_{p\in\mathbb{Z}}$ es finita.

Teorema 2.2.1. *Sea F_pM una filtración finita del módulo M. Si existe $q \in \mathbb{Z}$ tal que $Gr_pM = 0$ para todo $p \neq q$, entonces $Gr\, M = M$.*

Demostración. Como la filtración es finita y $Gr_pM = 0$ para $p \neq q$, tenemos que $F_qM = F_{q+1}M = \cdots = M$ y $F_{q-1}M = F_{q-2}M = \cdots = 0$, por lo tanto $Gr\, M = Gr_qM = F_qM/F_{q-1}M = M$ □

Definición 2.2.2. Sean M y M' R-módulos con filtraciones F_pM y F_pM'. Diremos que un homomorfismo $f : M \to M'$ preserva filtraciones si $f(F_pM) \subseteq F_pM'$. En tal caso hay un homomorfismo inducido $Gr\, f : Gr\, M \to Gr\, M'$ definido por componentes $Gr_pf : Gr_pM \to Gr_pM'$ donde $Gr_pf(\overline{x}) = \overline{f(x)}$

Teorema 2.2.3. *Sean M y M' módulos con filtraciones finitas F_pM y F_pM' respectivamente, y sea $f : M \to M'$ un homomorfismo que preserva estas filtraciones. Si $Gr\, f$ es un isomorfismo entonces f es un isomorfismo.*

Demostración. Supongamos sin pérdida de generalidad que $F_0M = 0$ y $F_nM = M$, $n \in \mathbb{N}$. Como $Gr\, f$ es un isomorfismo también tenemos que $F_0M' = 0$ y $F_nM' = M'$.

Sea $x \in M$ tal que $f(x) = 0$. Supongamos que $x \in F_iM$ para algún $i \in \mathbb{N}$. Como Gr_ifes un isomorfismo y $Gr_if(x) = 0$, $\overline{x} = 0 \in F_iM/F_{i-1}M$, por lo tanto $x \in F_{i-1}M$. Argumentando de la misma manera tenemos que $x \in F_{i-2}M$, y de manera sucesiva, que $x \in F_0M$, lo cual implica que $x = 0$ y entonces f es monomorfismo.

Verifiquemos que f es epimorfismo. Sea $y \in M'$ y supongamos que $y \in F_iM'$ para algún $i \in \mathbb{N}$. Como Gr_if es un ismorfismo, existe $x_1 \in F_iM$ tal que $Gr_if(\overline{x_1}) = \overline{y}$, es decir, tal que $y - f(x_1) \in F_{i-1}M'$. Como $Gr_{i-1}f$ es un isomorfismo, existe $x_2 \in F_{i-1}M$ tal que $y - f(x_1) - f(x_2) \in F_{i-2}M'$. De esta manera existen $x_k \in F_{i-k+1}M$, $k \in \{1, 2, \cdots, i\}$, tales que $y - \sum_{k=1}^{i} f(x_k) \in F_0M'$, es decir, $y - \sum_{k=1}^{i} f(x_k) = 0$ y por lo tanto $y = f(\sum_{k=1}^{i} x_k)$. Luego, f es epimorfismo y entonces isomorfismo. □

Sea C un complejo de cadenas con filtración F_pC acotada. Tenemos entonces una filtración inducida $F_pH(C)$ del módulo graduado $H(C)$ dada por

$$\begin{aligned} F_pH(C) &= Im\,\{H(F_pC) \to H(C)\} \\ &= \{\overline{x} | x \in Z \cap F_pC\} \\ &= \tfrac{(Z\cap F_pC)+B}{B} \end{aligned}$$

donde Z es el subcomplejo de los ciclos de C y B el subcomplejo de las fronteras. Nótese que en la última igualdad es necesario tomar la suma de los módulos $Z \cap F_pC$ y B pues este último no necesariamente es un submódulo de $Z \cap F_pC$. Tenemos así entonces

$$\begin{aligned} Gr_pH(C) &= F_pH(C)/F_{p-1}H(C) \\ &= \tfrac{Z\cap F_pC+B}{Z\cap F_{p-1}C+B} \\ &= \tfrac{Z\cap F_pC+(Z\cap F_{p-1}C+B)}{Z\cap F_{p-1}C+B} && \text{Pues } F_{p-1}C \subseteq F_pC \\ &= \tfrac{Z\cap F_pC}{(Z\cap F_pC)\cap(Z\cap F_{p-1}C+B)} && \text{Por el 2o Teo. de isomorfismo} \\ &= \tfrac{Z\cap F_pC}{Z\cap F_{p-1}C+B\cap F_pC} \end{aligned}$$

es decir,

$$Gr_pH(C) = \frac{Z \cap F_pC}{Z \cap F_{p-1}C + B \cap F_pC} \tag{2.2.4}$$

Definición 2.2.5. Una sucesión espectral $\{E^r, d^r\}$ se dice que converge a un módulo graduado H si existe una filtración acotada F de H tal que para cada $p \in \mathbb{Z}$ se tienen isomorfismos $E_p^\infty \cong F_pH/F_{p-1}H$ de módulos graduados, es decir, $Gr\, H_n = \bigoplus_{p+q=n} E_{p,q}^\infty$. Denotaremos esto por $E^2 \Rightarrow H$.

Teorema 2.2.6. [2, XI.3.1] Una filtración F de un complejo de cadenas (C, d) induce una sucesión espectral $E = \{E^r, d^r\}_{r\in\mathbb{N}}$ tal que

$$E_p^0 \cong F_pC/F_{p-1}C \quad y \quad E_p^1 \cong H(F_pC/F_{p-1}C),$$

es decir,

$$E_{p,q}^0 \cong F_pC_{p+q}/F_{p-1}C_{p+q} \quad y \quad E_{p,q}^1 \cong H_{p+q}(F_pC/F_{p-1}C).$$

Demostración. Definimos $Z_p^r = F_pC \cap d^{-1}F_{p-r}C$, es decir,

$$Z_{p,q}^r = F_pC_{p+q} \cap d^{-1}F_{p-r}C_{p+q-1} = \{x \in F_pC_{p+q} | dx \in F_{p-r}C_{p+q-1}\}$$

y $B_p^r = F_pC \cap dF_{p+r-1}C$, es decir,

$$B_{p,q}^r = F_pC_{p+q} \cap dF_{p+r-1}C_{p+q+1} = dZ_{p+r-1,q-r+2}^{r-1}.$$

Sea $Z_p^\infty = F_pC \cap Z$ y $B_p^\infty = F_pC \cap B$, donde Z y B son los submódulos de los ciclos y las fronteras del complejo (C, d) respectivamente. Observemos que $B_p^0 \subseteq B_p^1 \subseteq \cdots \subseteq B_p^\infty \subseteq Z_p^\infty \subseteq \cdots \subseteq Z_p^1 \subseteq Z_p^0$. Definimos entonces los términos E_p^r, $r \in \mathbb{N}$, como:

$$E_p^r = \frac{Z_p^r}{B_p^r + Z_{p-1}^{r-1}}.$$

Consideremos el diferencial $d^r : E^r \to E^r$ de módulos bigraduados de grado $(-r, r-1)$ dado por

$$d_{p,q}^r : \frac{Z_{p,q}^r}{B_{p,q}^r + Z_{p-1,q+1}^{r-1}} \to \frac{Z_{p-r,q+r-1}^r}{B_{p-r,q+r-1}^r + Z_{p-r-1,q+r}^{r-1}}$$

$$\overline{x} \mapsto \overline{dx}$$

Notemos que este homomorfismo está bien definido ya que $d(B^r_{p,q}+Z^{r-1}_{p-1,q+1}) = dZ^{r-1}_{p-1,q+1} = B^r_{p-r,q+r-1}$. Para ver que $\{E^r, d^r\}$ es una sucesión espectral falta ver que $E^{r+1} = H(E^r)$, o de manera más precisa, $E^{r+1}_p = ker\, d^r_p / Im\, d^r_{p-r}$. Consideremos entonces el diferencial $d^r_p : E^r_p \to E^r_{p-r}$. Tenemos que

$$\begin{aligned} ker\, d^r_p &= \{\overline{x} \in E^r_p | dx \in B^r_{p-r} + Z^{r-1}_{p-r-1}\} \\ &= \{\overline{x} \in E^r_p | dx \in dZ^{r-1}_{p-1}\} + \{\overline{x} \in E^r_p | dx \in F_{p-r-1}\} \end{aligned}$$

Analicemos el primer conjunto del lado derecho de esta última igualdad. Si $dx \in dZ^{r-1}_{p-1}$ entonces $\exists y \in Z^{r-1}_{p-1}$ tal que $dx = dy$. Tenemos entonces que $x - y \in Z^\infty_p$ pues $d(x-y) = 0$, y como $x = (x-y)+y$, esto implica que $\{x \in Z^r_p | dx \in dZ^{r-1}_{p-1}\} = Z^\infty_p + Z^{r-1}_{p-1}$ Por lo tanto

$$\begin{aligned} ker\, d^r_p &= \{\overline{x} \in E^r_p | dx \in dZ^{r-1}_{p-1}\} + \{\overline{x} \in E^r_p | dx \in F_{p-r-1}C\} \\ &= \{\overline{x} \in E^r_p | x \in Z^\infty_p + Z^{r-1}_{p-1}\} + \{\overline{x} \in E^r_p | x \in Z^{r+1}_p\} && \text{Por def. de } Z^{r+1}_p \\ &= (Z^\infty_p + Z^{r-1}_{p-1} + Z^{r+1}_p)/(B^r_p + Z^{r-1}_{p-1}) \\ &= (Z^{r-1}_{p-1} + Z^{r+1}_p)/(B^r_p + Z^{r-1}_{p-1}) && \text{Pues } Z^\infty_p \subseteq Z^{r+1}_p \end{aligned}$$

Por otra parte

$$\begin{aligned} im\, d^r_p &= \{\overline{dx} \in E^r_{p-r} | x \in Z^r_p\} \\ &= \{\overline{y} \in E^r_{p-r} | y \in B^{r+1}_{p-r}\} \\ &= (B^{r+1}_{p-r} + Z^{r-1}_{p-r-1})/(B^r_{p-r} + Z^{r-1}_{p-r-1}) \end{aligned}$$

Es decir,

$$im\, d^r_{p+r} = (B^{r+1}_p + Z^{r-1}_{p-1})/(B^r_p + Z^{r-1}_{p-1}),$$

y al hacer el cociente obtenemos

$$H_p(E^r) = \frac{ker\, d^r_p}{im\, d^r_{p-r}} = \frac{Z^{r-1}_{p-1} + Z^{r+1}_p}{B^{r+1}_p + Z^{r-1}_{p-1}}$$

Reescribiendo este cociente y por el segundo teorema de isomorfismo de grupos tenemos:

$$H_p(E^r) = \frac{Z^{r-1}_{p-1} + Z^{r+1}_p}{B^{r+1}_p + Z^{r-1}_{p-1}} = \frac{(B^{r+1}_p + Z^{r-1}_{p-1}) + Z^{r+1}_p}{B^{r+1}_p + Z^{r-1}_{p-1}} = \frac{Z^{r+1}_p}{(B^{r+1}_p + Z^{r-1}_{p-1}) \cap Z^{r+1}_p}$$

Puesto que $B^{r+1}_p \subseteq Z^{r+1}_p$ y $Z^{r-1}_{p-1} \cap Z^{r+1}_p = Z^r_p$ tenemos

$$H_p(E^r) = \frac{Z^{r+1}_p}{B^{r+1}_p + Z^r_{p-1}} = E^{r+1}_p$$

Por lo tanto hemos probado que $E^{r+1} = H(E^r)$, de lo cual se sigue que $\{E^r, d^r\}$ es una sucesión espectral.

Observemos que en el caso particular $r = 0$ tenemos que $Z^0_{p,q} = F_pC_{p+q} \cap d^{-1}F_pC_{p+q-1} = F_pC_{p+q}$, $Z^{-1}_{p-1,q+1} = F_{p-1}C_{p+q} \cap d^{-1}F_pC_{p+q-1} = F_{p-1}C_{p+q}$ y $B^0_{p,q} = F_pC_{p+q} \cap dF_{p-1}C_{p+q+1} \subseteq F_{p-1}C_{p+q}$, de lo cual se sigue

$$E^0_p = \frac{Z^0_p}{B^0_p + Z^{-1}_{p-1}} = F_pC/F_{p-1}C$$

y

$$E^1_p \cong H(F_pC/F_{p-1}C).$$

□

Teorema 2.2.7. *Si en el Teorema 2.2.6 la filtración F es acotada, la sucesión inducida converge a $H(C)$, $E^2 \Rightarrow H(C)$, es decir, $E_p^\infty \cong Gr_p H(C)$.*

Demostración. Hemos visto ya (ecuación 2.2.4) que la filtración F de C induce una filtración en $H(C)$ tal que $Gr_p H(C) = \frac{Z \cap F_p C}{Z \cap F_{p-1} C + B \cap F_p C}$.

Para definir el término E^∞ de la sucesión hay que encontrar los submódulos de los ciclos y las fronteras en el sentido de la ecuación 2.1.3. Usando la notación del Teorema 2.2.6 definimos submódulos de E_p^0, C_p^r y D_p^r, como

$$C_p^r = \frac{F_{p-1}C + Z_p^{r+1}}{F_{p-1}C} \quad y \quad D_p^r = \frac{F_{p-1}C + B_p^{r+1}}{F_{p-1}C}$$

Tenemos entonces que $C_p^0 = ker\, d_p^0$, $D_p^0 = Im\, d_p^0$ y además

$$C_p^r / D_p^{r-1} = \frac{F_{p-1}C + Z_p^{r+1}}{F_{p-1}C + B_p^r} \cong ker\, d_p^r$$

y

$$D_p^r / D_p^{r-1} = \frac{F_{p-1}C + B_p^{r+1}}{F_{p-1}C + B_p^r} \cong Im\, d_{p+r}^r$$

Tenemos entonces que

$$C_p^\infty = \bigcap_{r \geq 0} C_p^r = \frac{F_{p-1}C + F_p C \cap Z}{F_{p-1}C}$$

Esta última igualdad la obtenemos gracias a que, para un grado fijo n, existe $p \in \mathbb{Z}$ tal que $F_l C_n = 0$ $\forall l \leq p$. Como para cada grado n existe $q \in \mathbb{Z}$ tal que $F_l C_n = C_n$ $\forall l \geq q$ también se tiene que

$$D_p^\infty = \bigcup_{r \geq 0} D_p^r = \frac{F_{p-1}C + F_p C \cap B}{F_{p-1}C}$$

Así tenemos

$$\begin{aligned} E_p^\infty &= \frac{C_p^\infty}{D_p^\infty} \\ &= \frac{F_{p-1}C + F_p C \cap Z}{F_{p-1}C + F_p C \cap B} \\ &= \frac{F_p C \cap Z}{F_p C \cap Z \cap (F_{p-1}C + F_p C \cap B)} \\ &= \frac{F_p C \cap Z}{F_p C \cap B + F_{p-1} C \cap Z} \\ &= Gr_p H(C). \end{aligned}$$

□

Definición 2.2.8. [3, V.5.2.7] Una sucesión espectral con término inicial E^a se dice que colapsa en E^r, $r \geq 2$, si en $E_{p,q}^r$ hay exactamente una columna o un renglón distinto de cero. Notemos que en tal caso $E^r = E^{r+1} = \cdots = E^\infty$.

Teorema 2.2.9. *Sea $\{E^r, d^r\}$ una sucesión espectral que converge a un módulo graduado H, $E \Rightarrow H$. Si la sucesión colapsa en E^s, entonces $H_n \cong E_{p,q}^s$ donde $E_{p,q}^s$ es el único módulo distinto de cero con $p + q = n$.*

Demostración. El Teorema se sigue de la definición de convergencia y del Teorema 2.2.1. □

Teorema 2.2.10. *Sea $\{E^r, d^r\}$ una sucesión espectral que converge a un módulo graduado H, $E \Rightarrow H$. Si $E^2_{p,q} = 0$ excepto para $q = 0$ y $q = 1$, entonces existe una sucesión exacta larga*

$$\cdots \to H_{p+1} \to E^2_{p+1,0} \xrightarrow{d^2} E^2_{p-1,1} \to H_p \to E^2_{p,0} \xrightarrow{d^2} E^2_{p-1,1} \to H_{p-1} \to \cdots .$$

Demostración. Tenemos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
\cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
\cdots & E_{p-2,1} & E_{p-1,1} & E_{p,1} & E_{p+1,1} & \cdots \\
\cdots & E_{p-2,0} & E_{p-1,0} & E_{p,0} \arrow[ull, "d^2"] & E_{p+1,0} \arrow[ull, "d^2"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Sea F_pH una filtración acotada tal que $E^\infty_{p,q} \cong F_pH_{p+q}/F_{p-1}H_{p+q}$. Notemos primero que $F_nH_n = H_n$ pues $E^\infty_{n+1,-1} = E^\infty_{n+2,-2} = \cdots = 0$ implica que

$$F_nH_n = F_{n+1}H_n = F_{n+2}H_n = \cdots = H_n.$$

Análogamente, puesto que $E^\infty_{n-2,2} = E^\infty_{n-3,3} = \cdots = 0$ se tiene que

$$F_{n-2}H_n = F_{n-3}H_n = \cdots = 0.$$

Además $E^\infty_{p-1,1} = E^3_{p-1,1} = E^2_{p-1,1}/Im\, d^2$ y $E^\infty_{p,0} = E^3_{p,0} = ker\, d^2$.

Tenemos la sucesión exacta $E^2_{p+1,0} \xrightarrow{d^2} E^2_{p-1,1} \to E^2_{p-1,1}/Im\, d^2 \to 0$, que en vista de las observaciones anteriores la podemos escribir como

$$E^2_{p+1,0} \xrightarrow{d^2} E^2_{p-1,1} \to E^\infty_{p-1,1} \to 0. \tag{2.2.11}$$

Por otra parte $0 \to F_{p-1}H_p \to F_pH_p \to F_pH_p/F_{p-1}H_p \to 0$ es exacta, y como $E^\infty_{p-1,1} = F_{p-1}H_p/F_{p-2}H_p = F_{p-1}H_p$ y $F_pH_p = H_p$ la podemos escribir como

$$0 \to E^\infty_{p-1,1} \to H_p \to E^\infty_{p,0} \to 0. \tag{2.2.12}$$

Por último $0 \to ker\, d^2 \to E^2_{p,0} \xrightarrow{d^2} E^2_{p-2,1}$ es exacta, y puede ser escrita como

$$0 \to E^\infty_{p,0} \to E^2_{p,0} \xrightarrow{d^2} E^2_{p-2,1} \tag{2.2.13}$$

Al pegar en una sola las sucesiones (2.2.11), (2.2.12) y (2.2.13), se obtiene la sucesión exacta larga buscada.

□

2.3 Bicomplejos

Llamaremos bicomplejo ([1, VII.3]) a un módulo $\mathbb{Z}$-bigraduado $C = \{C_{p,q}\}$ con dos diferenciales, uno horizontal d' de grado (-1,0) y otro vertical d'' de grado (0,-1) tal que $d'd'' = d''d'$

$$\begin{tikzcd} C_{p-1,q} \arrow[d, "d''"'] & C_{p,q} \arrow[l, "d'"'] \arrow[d, "d''"'] \\ C_{p-1,q-1} & C_{p,q-1} \arrow[l, "d'"'] \end{tikzcd}$$

Podemos convertir un bicomplejo C en un complejo de cadenas usual TC al que llamaremos complejo total y que está dado por $(TC)_n = \bigoplus_{p+q=n} C_{p,q}$ con diferencial d de grado -1 dado por $d|_{C_{p,q}} = d' + (-1)^p d''$.

Definimos una filtración de TC a la que llamaremos primera filtración dada por $F_p(TC)_n = \bigoplus_{i \leq p} C_{i,n-i}$. Si el bicomplejo C es tal que para cada grado n sólo un número finito de módulos $C_{p,q}$, $p+q=n$, es distinto de cero, entonces la filtración es finita y se tiene una sucesión espectral inducida $\{E^r\}$ la cual converge a $H_*(TC)$ por el Teorema 2.2.7. En esta sucesión espectral se tiene que

$$E^0_{p,q} = \frac{F_p(TC)_{p+q}}{F_{p-1}(TC)_{p+q}} = C_{p,q}$$

El diferencial $d^0_p : E^0_p \longrightarrow E^0_p$ está dado por $d^0_p(\overline{x}) = \overline{d'(x) + (-1)^p d''(x)}$ para $x \in C_{p,q}$. En vista del isomorfismo anterior, y puesto que $d'x \in C_{p-1,q}$, podemos considerar al diferencial como $d^0_p = (-1)^p d''$. Por lo tanto $E^1_{p,q} = H_q(C_{p,*})$, la homología vertical del bicomplejo C. Consideremos $x \in C_{p,q} = E^0_{p,q}$ un ciclo del complejo $C_{p,*}$. Al aplicarle el diferencial total tenemos que $dx = d'x + (-1)^p d''x = d'x$. Por lo tanto, el diferencial $d^1_p : E^1_p \longrightarrow E^1_{p-1}$ está dado por $d^1_p\overline{x} = \overline{dx} = \overline{d'x}$. Así, podemos ver que el término E^2_p de la sucesión espectral es la homología horizontal de la homología vertical del bicomplejo C.

Análogamente, podemos considerar la filtración del bicomplejo C dada por $F_p(TC)_n = \bigoplus_{j \leq p} C_{n-j,j}$, a la cual llamaremos segunda filtración. En este caso también tenemos una sucesión espectral asociada, la cual converge a $H(TC)$ y tal que $E^0_{p,q} = C_{q,p}$, $d^0_p = d'$, $E^1_{p,q} = H_q(C_{*,p})$ y $d^1_p\overline{x} = \overline{(-1)^q d''x}$. Hay que observar que, aunque estas dos filtraciones inducen sucesiones espectrales convergentes al mismo módulo, estas en general no tienen el mismo término $E^\infty_p = Gr_p H(TC)$ ya que las filtraciones no son las mismas.

2.4 Homología con coeficientes en un complejo de cadenas

En esta sección definiremos los grupos de homología con coeficientes en un complejo de cadenas como en [1,VII.5].

Definición 2.4.1. Sean G un grupo, F una resolución de $\mathbb{Z}$ de $\mathbb{Z}G$-módulos y $C = (C_n)_{n \geq 0}$ un complejo de cadenas no negativo. Definimos la homología de G con coeficientes en C como

$$H_*(G, C) = H_*(F \otimes_G C).$$

Esta homología está bien definida salvo isomorfismos. En el caso que el complejo es cero salvo en dimensión cero, con $C_0 = M$, la homología $H_*(G, C)$ se reduce a $H_*(G, M)$, la homología usual con coeficientes.

Puesto que el complejo $F \otimes_G C$ es el complejo total del bicomplejo de grupos abelianos $(F_p \otimes_G C_q)$, y para cada grado n sólo un número finito de estos módulos es distinto de cero, tenemos dos sucesiones espectrales que convergen a $H_*(G, C)$. Analicemos cada una de estas.

Con la primera filtración tenemos que $E^1_{p,q} = H_q(F_p \otimes_G C_*) = F_p \otimes_G H_q(C)$ pues $F_p \otimes_G -$ es un funtor exacto ya que F_p es proyectivo. Y tomando ahora la homología con respecto a p tenemos $E^2_{p,q} = H_p(F_* \otimes_G H_q C) = H_p(G, H_q C)$. Por lo tanto esta sucesión espectral tiene la forma

$$E^2_{p,q} = H_p(G, H_q C) \Rightarrow H_{p+q}(G, C)$$

De esto se sigue el siguiente:

Teorema 2.4.2. *Si $\tau : C \to C'$ es una equivalencia débil de G-complejos de cadenas, entonces τ induce un isomorfismo $H_*(G, C) \cong H_*(G, C')$.*

Demostración. Puesto que $F_n = C_n = C'_n = 0$ para $n < 0$, las sucesiones espectrales inducidas por los bicomplejos $F_p \otimes_G C_q$ y $F_p \otimes_G C'_q$ son de primer cuadrante (en particular acotadas por abajo) y por lo tanto, por el Teorema 2.1.6, se tiene un isomorfismo $GrH(G, C) \cong GrH(G, C')$. Como la primera filtración es finita, se sigue por el Teorema 2.2.3 que $H(G, C) \cong H(G, C')$. □

Con la segunda filtración tenemos que $E^1_{p,q} = H_q(F_* \otimes_G C_p) = H_q(G, C_p)$, es decir

$$E^1_{p,q} = H_q(G, C_p) \Rightarrow H_{p+q}(G, C)$$

Tenemos así un par de sucesiones espectrales que pueden considerarse como aproximaciones de $H_*(G, C)$ en términos de la homología "ordinaria" de grupos $H_*(G, M)$.

Teorema 2.4.3. *Sea C un complejo de cadenas no negativo de G-módulos tal que cada C_n es H_*-acíclico. Entonces hay una sucesión espectral de la forma*

$$E^2_{p,q} = H_p(G, H_q C) \Rightarrow H_{p+q}(C_G).$$

Demostración. La sucesión inducida por la segunda filtración $E^1_{p,q} \Rightarrow H_{p+q}(G, C)$ cumple que

$$E^1_{p,q} = H_q(G, C_p) = \begin{cases} 0 & si \quad q \neq 0 \\ H_0(G, C_p) = (C_p)_G & si \quad q = 0 \end{cases}$$

pues cada C_p es H_*-acíclico. Esto implica

$$E^2_{p,q} = \begin{cases} 0 & si \quad q \neq 0 \\ H_p(C_G) & si \quad q = 0 \end{cases},$$

es decir, la sucesión colapsa en E^2. Por el Teorema 2.2.9 se tiene que $H_*(G, C) \cong H_*(C_G)$. Por otra parte, hemos visto que la primera filtración del bicomplejo $F \otimes_G C$ induce una sucesión espectral de la forma

$$E^2_{p,q} = H_p(G, H_q C) \Rightarrow H_{p+q}(G, C).$$

De esto y del isomorfismo anterior se sigue el Teorema. □

Capítulo 3

La sucesión espectral de Hochschild-Serre

3.1 Extensiones de grupos

Definición 3.1.1. Sean A y G grupos. Una extensión de A por G es una sucesión exacta corta de grupos

$$1 \to A \to E \to G \to 1$$

Una segunda extensión $1 \to A \to E' \to G \to 1$ se dice equivalente a la anterior si existe un un homomorfismo de grupos $E \to E'$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
 & & E \arrow[dd] \arrow[dr] & & \\
1 \arrow[r] & A \arrow[ur] \arrow[dr] & & G \arrow[r] & 1 \\
 & & E' \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}$$

El problema consiste entonces en encontrar todas las posibles extensiones de A por G salvo equivalencia. Puesto que nuestro caso de aplicación será aquel en el que los grupos implicados serán grupos de homología (y entonces grupos abelianos), sólo estudiaremos el caso de las extensiones con núcleo abeliano, es decir, en el que el grupo A es abeliano. En tal caso denotaremos al grupo A de forma aditiva y representaremos la extensión por

$$0 \to A \xrightarrow{i} E \xrightarrow{\pi} G \to 1$$

Una característica de las extensiones con núcleo abeliano es que hay una acción de G sobre A dada de la siguiente manera. Como $A = ker\, i$, E actúa sobre A por conjugación, y esta acción restringida a A (o estrictamente hablando a $i(A)$) es trivial, por lo tanto hay una acción bien definida de $E/A = G$ sobre A inducida por la acción de E, la cual está dada por $i(ga) = ei(a)e^{-1}$, donde $\pi(e) = g$. Podemos reescribir esta acción como $ei(a) = i(ga)e$.

Con esta estructura sobre A de G-módulo, podemos refinar un poco más el problema de hallar las extensiones de A por G, considerando sólo aquellas que den lugar a la acción fijada de G sobre A.

Teorema 3.1.2. *Sea A un G-módulo, y sea $\mathcal{E}(G,A)$ el conjunto de clases de equivalencia de extensiones de A por G que dan lugar a la estructura dada de A como G-módulo. Entonces hay una biyección entre $\mathcal{E}(G,A)$ y $H^2(G,A)$* ([1, IV.3.12]).

Demostración. Consideremos la extensión

$$0 \to A \xrightarrow{i} E \xrightarrow{\pi} G \to 1 \tag{3.1.3}$$

tal que la acción inducida de G sobre A coincide con la estructura dada de G-módulo. Sea $s : G \to E$ una sección, es decir, una función (de conjuntos) tal que $\pi s = id_G$. Supongamos que s está normalizada, es decir, $s(1) = 1$. Dados $g, h \in G$, $\pi[s(g)s(h)] = \pi s(g)\pi s(h) = gh = \pi s(gh)$, por lo tanto, existe un elemento $f(g,h) \in A$ tal que

$$s(g)s(h) = i(f(g,h))s(gh). \tag{3.1.4}$$

Esto define entonces una función $f : G \times G \to A$ que además está normalizada, es decir,

$$f(g,1) = f(1,g) = 0 \;\; \forall g \in G. \tag{3.1.5}$$

Más aún, puesto que

$$\begin{array}{rcl} [s(g)s(h)]s(k) & = & i(f(g,h))s(gh)s(k) \\ & = & i(f(g,h) + f(gh,k))s(ghk) \end{array}$$

y por otro lado

$$\begin{array}{rcl} s(g)[s(h)s(k)] & = & s(g)i(f(h,k))s(hk) \\ & = & i(gf(h,k))s(g)s(hk) \\ & = & i(gf(h,k) + f(g,hk))s(ghk) \end{array}$$

de la asociatividad de E se sigue que $f(g,h) + f(gh,k) = gf(h,k) + f(g,hk)$. Reescribiendo esto como

$$gf(h,k) - f(gh,k) + f(g,hk) - f(g,h) = 0, \tag{3.1.6}$$

podemos ver que f es un cociclo del complejo estándar $C^2(G,A)$, de hecho, por (3.1.5), f es una cociclo del complejo normalizado $C^2_N(G,A)$ (ver Sección 1.2).

Recíprocamente, consideremos un cociclo normalizado $f \in C^2_N(G,A)$. Podemos asociarle a este cociclo una extensión de la siguiente manera: Construimos el grupo E_f que como conjunto es $A \times G$ y cuya estructura de grupo está dada por la operación

$$(a,g)(b,h) = (a + gb + f(g,h), gh).$$

Gracias a (3.1.6) esta operación es asociativa. De (3.1.5) se sigue que el elemento neutro es $(0,1)$ pues $(0,1)(a,g) = (0 + 1a + f(1,g), g) = (a,g) = (a + g0 + f(g,1), g) = (a,g)(0,1)$. El elemento (a,g) tiene inverso izquierdo $(-g^{-1}a - f(g^{-1},g), g^{-1})$ e inverso derecho $(-g^{-1}a - g^{-1}f(g,g^{-1}), g^{-1})$ los cuales son el mismo elemento pues

$$\begin{array}{rcl} 0 & = & g^{-1}f(g,g^{-1}) - f(g^{-1}g,g^{-1}) + f(g^{-1},gg^{-1}) - f(g^{-1},g) \\ & = & g^{-1}f(g,g^{-1}) - f(g^{-1},g). \end{array}$$

Tenemos así que E_f es un grupo. Consideremos los homomorfismos $i' : A \to E_f$ dado por $i(a) = (a, 1)$ y $\pi' : E_f \to G$ dado por $\pi'(a, g) = g$. Por lo tanto la siguiente sucesión es exacta y entonces una extensión de A por G

$$0 \to A \xrightarrow{i'} E_f \xrightarrow{\pi'} G \to 1 \tag{3.1.7}$$

que además induce la estructura ya dada de A como G-módulo.

Se cumple además que dada una extensión $0 \to A \xrightarrow{i} E \xrightarrow{\pi} G \to 1$ (3.1.3), el cociclo f definido por (3.1.4) induce una extensión $0 \to A \xrightarrow{i'} E_f \xrightarrow{\pi'} G \to 1$ (3.1.7) que es equivalente con la que empezamos, e inversamente, dado un cociclo $f \in C^2_N(G, A)$, el cociclo definido por (3.1.4) pero de la extensión (3.1.7) con sección dada por $g \mapsto (0, g)$ es igual al cociclo f con el que empezamos. Hemos definido así hasta ahora, una biyección entre las extensiones (3.1.3) con una sección normalizada y $C^2_N(G, A)$.

Veamos que sucede si cambiamos la sección normalizada s. Sea s' otra sección normalizada. Como $\pi s'(g) = \pi s(g)$, $g \in G$, existe un elemento $c(g) \in A$ tal que $s'(g) = i(c(g))s(g)$. Esto nos define una función $c : G \to A$ tal que $c(1) = 0$. Calculamos el 2-cociclo f' dado por (3.1.4) asociado a esta sección

$$\begin{aligned} i(c(g))s(g)i(c(h))s(h) &= i(c(g) + gc(h))s(g)s(h) \\ &= i(c(g) + gc(h) + f(g, h))s(gh) \\ &= i(c(g) + gc(h) + f(g, h) - c(gh))i(c(gh))s(gh) \end{aligned}$$

Por lo tanto $f'(g, h) = gc(h) - c(gh) + c(g) + f(g, h)$, es decir, $f' = f + \delta c$ donde δ es la cofrontera de $C^*_N(G, M)$ y esto prueba el teorema,

□

3.2 La sucesión espectral de Hochschild-Serre

Supongamos que tenemos una extensión de grupos $1 \to H \to G \to Q \to 1$. En esta sección analizamos cómo podemos calcular la homología del grupo G en término de las homologías del subgrupo H y el cociente Q ([1,VII.6]). Para esto consideremos una resolución F de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$ y un G-módulo M.

Por el Lema 1.1.4 tenemos que

$$F \otimes_G M = (F \otimes M)_G = ((F \otimes M)_H)_Q = (F \otimes_H M)_Q$$

donde la acción de Q sobre $F \otimes_H M$ es diagonal. Sea $C = F \otimes_H M$. Podemos entonces escribir la homología de G con coeficientes en M como $H_*(G, M) = H_*(F \otimes_G M) = H_*(C_Q)$ Además, como F también es una resolución proyectiva de Z sobre $\mathbb{Z}H$, tenemos $H_*(H, M) \cong H_*(C)$, donde éste es un isomorfismo de Q-módulos, donde la estructura de Q-módulo de $H_*(H, M)$ es la dada en el Corolario (1.4.3).

Lema 3.2.1. *Los Q-módulos $F_p \otimes_H M$ son H_*-acíclicos*

Demostración. Puesto que la homología de un grupo con coeficientes en una suma directa es la suma directa de las homologías, basta probar que los módulos $\mathbb{Z}G \otimes_H M$ son H_*-acíclicos. Por el Corolario 1.3.5 sólo es necesario demostrar que $\mathbb{Z}G \otimes_H M$ es un módulo inducido de la forma $\mathbb{Z}Q \otimes A$, con A un grupo abeliano, pero esto se sigue de los siguientes isomorfismos

$\mathbb{Z}G \otimes_H M$	$= (\mathbb{Z}G \otimes M)_H$	con acción diagonal de H sobre $\mathbb{Z}G \otimes M$.
	$\cong (\mathbb{Z}G \otimes M)_H$	con acción de H sobre $\mathbb{Z}G$ como en el Teorema 1.3.6
	$\cong \mathbb{Z}[G/H] \otimes_{\mathbb{Z}G} (\mathbb{Z}G \otimes M)$	Por el Lema 1.1.5
	$\cong \mathbb{Z}[G/H] \otimes M$	
	$\cong \mathbb{Z}Q \otimes M$	

□

Teorema 3.2.2 (Hochschild-Serre)**.** *Para cualquier extensión de grupos* $1 \to H \to G \to Q \to 1$ *y cualquier* G*-módulo* M*, hay una sucesión espectral de la forma*

$$E^2_{p,q} = H_p(Q, H_q(H, M)) \Rightarrow H_{p+q}(G, M)$$

Demostración. Sean F y C como se definió más arriba. Por el Teorema 2.4.3 existe una sucesión espectral de la forma

$$E^2_{p,q} = H_p(Q, H_q C) \Rightarrow H_{p+q}(C_Q).$$

Pero ya habíamos observado que $H_* C = H_*(H, M)$ y $H_*(C_Q) = H_*(G, M)$, por lo tanto la sucesión espectral toma la forma

$$E^2_{p,q} = H_p(Q, H_q(H, M)) \Rightarrow H_{p+q}(G, M).$$

□

Corolario 3.2.3. *Sean* $1 \to H \to G \to Q \to 1$ *una extensión de grupos y* M *un* G*-módulo. Sean* F' *una resolución de* $\mathbb{Z}$ *sobre* $\mathbb{Z}Q$ *y* F'' *resolución de* $\mathbb{Z}$ *sobre* $\mathbb{Z}H$ *tal que hay una acción de* Q *sobre* $F'' \otimes_H M$ *de tal manera que la acción inducida sobre* $H_*(H, M)$ *coincide con la acción dada en el Corolario 1.4.3. Entonces hay una sucesión espectral de la forma*

$$E'^0_{p,q} = F'_p \otimes_Q (F''_q \otimes_H M) \Rightarrow H_{p+q}(G, M)$$

Demostración. Si consideramos el complejo total del bicomplejo

$$\begin{array}{ccc} F'_p \otimes_Q (F''_{q+1} \otimes_H M) & \xleftarrow{d'\otimes 1} & F'_{p+1} \otimes_Q (F''_{q+1} \otimes_H M) \\ \downarrow{\scriptstyle 1\otimes d''} & & \downarrow{\scriptstyle 1\otimes d''} \\ F'_p \otimes_Q (F''_q \otimes_H M) & \xleftarrow{d'\otimes 1} & F'_{p+1} \otimes_Q (F''_q \otimes_H M) \end{array}$$

y lo filtramos con la primera filtración, tenemos el término E'^0 dado, y además hay un isomorfismo $E'^2 \cong E^2$ con E^2 del Teorema anterior, pues $E'^2_{p,q} = H_p(Q, H_q(H, M))$ (ver Sección 2.3). El corolario se sigue entonces del Teorema 2.1.6.

□

3.3 Ejemplos

Ejemplo 1. Calculemos $H_*(Z \times \mathbb{Z}_n, M)$ donde M es un $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_n$-módulo con acción trivial y sin elementos de orden n, es decir, $nm = 0$ sólo si $m = 0$, $m \in M$.

Para simplificar un poco la notación denotaremos los grupos $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_n$ y $\mathbb{Z}_n$ por H, G y Q respectivamente. Así, tenemos una sucesión exacta corta $1 \to H \to G \to Q \to 1$. Para usar la sucesión espectral de Hochschild-Serre, calculemos primero los grupos $H_q(H, M)$, donde la acción del subgrupo H de G sobre M está inducida por la acción de Q, y como ésta es trivial, M es un H-módulo con acción trivial. Como el subgrupo H es un grupo cíclico infinito, digamos con generador t, tenemos que

$$F'' : \ 0 \to \mathbb{Z}H \stackrel{t-1}{\to} \mathbb{Z}H \stackrel{\epsilon}{\to} \mathbb{Z} \to 0$$

es una resolución libre de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}H$, donde $t-1$ denota el homomorfismo multiplicación por $t-1$. Entonces

$$F'' \otimes_H M : \ 0 \to \mathbb{Z}H \otimes_H M \stackrel{1 \otimes t-1}{\to} \mathbb{Z}H \otimes_H M.$$

Puesto que tenemos el isomorfismo $\mathbb{Z}H \otimes_H M \to M$ donde $h \otimes m \mapsto hm$, el complejo puede escribirse como

$$F'' \otimes_H M : \ 0 \to M \stackrel{t-1}{\to} M$$

donde el homomorfismo $t-1$ es multiplicación por $t-1$. Como la acción de H sobre M es trivial, $Im\,(t-1) = 0$ y $ker\,(t-1) = M$. De aquí tenemos que

$$H_q(H, M) = \begin{cases} M/Im\,(t-1) = M & q = 0 \\ ker\,(t-1)/0 = M & q = 1 \\ 0 & q > 1 \end{cases}$$

Para calcular los grupos $H_p(Q, H_q(H, M))$ debemos de determinar la acción de Q sobre $H_q(H, M)$ (dada en el Corolario 1.4.3). Para evitar el uso de una resolución de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$, vemos que la acción está inducida por el isomorfismo (1.4.1), $c(g) : (H, M) \to (H, M)$, dado por $c(h, m) = (ghg^{-1}, gm) = (h, m)$, $g \in G$ $h \in H$ $m \in M$, el cual es la identidad en (H, M), y entonces la acción inducida de Q sobre $H_*(H, M)$ es la trivial. Podemos calcular entonces los grupos $H_p(Q, H_q(H, M))$. Sea s un generador de Q. Una resolución de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}Q$ está dada por

$$F' : \ \cdots \to \mathbb{Z}Q \stackrel{N}{\to} \mathbb{Z}Q \stackrel{s-1}{\to} \mathbb{Z}Q \stackrel{N}{\to} \mathbb{Z}Q \stackrel{s-1}{\to} \mathbb{Z}Q \stackrel{\epsilon}{\to} \mathbb{Z} \to 0$$

donde N es el operador norma, que es multiplicar por $1 + s + s^2 + \cdots s^{n-1}$. Luego

$$F' \otimes_Q H_q(H, M) : \ \cdots \to M \stackrel{N}{\to} M \stackrel{s-1}{\to} M \stackrel{N}{\to} M \stackrel{s-1}{\to} M$$

con $q = 0, 1$. Como la acción de Q sobre $H_q(H, M)$ es trivial, el operador $s-1$ es cero y N es multiplicación por n. Además $ker\,N = 0$ pues M no tiene elementos de orden n. Tenemos entonces, para $q = 0, 1$

$$H_p(Q, H_q(H, M)) = \begin{cases} M/Im\,(s-1) = M & p = 0 \\ ker\,(s-1)/Im\,N = M/nM & p \text{ impar} \\ ker\,N/Im\,(s-1) = 0 & p \text{ par}, p > 0 \end{cases}$$

Resumiendo, hemos obtenido

$$E^2_{p,q} = \begin{cases} M & q = 0, 1 \text{ y } p = 0 \\ M/nM & q = 0, 1 \text{ y } p \text{ impar} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$\begin{tikzcd}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
M & M/nM & 0 & M/nM & 0 & M/nM & \cdots \\
M & M/nM & 0 & M/nM \arrow[ull, "d^2"'] & 0 & M/nM \arrow[ull, "d^2"'] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Al aplicar el Teorema 2.2.10 obtenemos una sucesión exacta larga de la forma

$$\cdots \xrightarrow{d^2} E^2_{p,1} \to H_{p+1}(G, M) \to E^2_{p+1,0} \xrightarrow{d^2} E^2_{p-1,1} \to H_p(G, M) \to E^2_{p,0} \xrightarrow{d^2} \cdots$$

Puesto que $E^2_{p,q} = 0$ si $p > 1$ y p es par, esta sucesión da lugar a sucesiones exactas cortas de la forma

$$0 \to H_{p+1}(G, M) \to E^2_{p+1,0} \xrightarrow{d^2_{p+1,0}} E^2_{p-1,1} \to H_p(G, M) \to 0$$

con $p > 1$ par, es decir,

$$0 \to H_{p+1}(G, M) \to M/nM \xrightarrow{d^2} M/nM \to H_p(G, M) \to 0.$$

De esto se sigue que $H_p(G, M) = \mathit{coker}\, d^2_{p+1,0}$ y $H_{p+1}(G, M) = \mathit{ker}\, d^2_{p+1,0}$ con p par, $p > 1$. Analicemos el diferencial d^2. Consideremos a la resolución F'' con una acción trivial de Q, y a $F'' \otimes_H M$ con acción diagonal de Q. En tal caso se tiene una acción inducida de Q sobre $H_*(H, M)$ la cual es trivial, y, por lo tanto, coincidente con la acción ya encontrada al inicio del ejemplo. Entonces, para conocer el diferencial d^2, por el Corolario 3.2.3, basta analizar el bicomplejo

$$\begin{tikzcd}
F'_p \otimes_Q (F''_{q+1} \otimes_H M) \arrow[d, "1\otimes d''"'] & F'_{p+1} \otimes_Q (F''_{q+1} \otimes_H M) \arrow[l, "d'\otimes 1"'] \arrow[d, "1\otimes d''"'] \\
F'_p \otimes_Q (F''_q \otimes_H M) & F'_{p+1} \otimes_Q (F''_q \otimes_H M) \arrow[l, "d'\otimes 1"']
\end{tikzcd}$$

donde F' y F'' son las resoluciones ya dadas de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}Q$ y $\mathbb{Z}H$, respectivamente. Denotemos por $C_{p,q}$ los grupos $F'_p \otimes_Q (F''_q \otimes_H M)$. Al sustituir F' y F'' y seguir algunos isomorfismos, el bicomplejo queda como:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[d, "0"] & 0 \arrow[l, "0"'] \arrow[d, "0"] & 0 \arrow[l, "0"'] \arrow[d, "0"] & 0 \arrow[l, "0"'] \arrow[d, "0"] & 0 \arrow[l, "0"'] \arrow[d, "0"] & \cdots \arrow[l, "0"'] \\
M \arrow[d, "t-1"] & M \arrow[l, "s-1"'] \arrow[d, "t-1"] & M \arrow[l, "N"'] \arrow[d, "t-1"] & M \arrow[l, "s-1"'] \arrow[d, "t-1"] & M \arrow[l, "N"'] \arrow[d, "t-1"] & \cdots \arrow[l, "s-1"'] \\
M & M \arrow[l, "s-1"'] & M \arrow[l, "N"'] & M \arrow[l, "s-1"'] & M \arrow[l, "N"'] & \cdots \arrow[l, "s-1"']
\end{tikzcd}$$

El diferencial d^2 está inducido por $d|_{C_{p,q}} = d' + (-1)^p d''$, el diferencial del complejo total de este bicomplejo filtrado con la primera filtración, tal como se definió en el Teorema 2.2.6. Pero $d|_{C_{p+1,0}} = s-1$ para $p>0$ par, y como la acción sobre M es trivial, $d|_{C_{p+1.0}} = 0$. Esto implica que $d^2_{p+1,0} = 0$ y como $H_p(G,M) = coker\, d^2_{p+1,0}$ y $H_{p+1}(G,M) = ker\, d^2_{p+1,0}$ hemos calculado entonces que

$$H_p(G,M) = M/nM = H_{p+1}(G,M)$$

para $p>1$ par.

Por otra parte, por el Corolario 1.2.5 se tiene que $H_1(G,M) = G/[G,G]\otimes M = (Z\times\mathbb{Z}_n)\otimes M$, y por el Teorema 1.2.4 $H_0(G,M) = M_G = M$. Resumiendo todo lo anterior concluimos que

$$H_m(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}_n) = \begin{cases} M & m=0 \\ (\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}_n)\otimes M & m=1 \\ M/nM & m>1 \end{cases}$$

Ejemplo 2. Calculemos $H_*(\mathbb{Z}\rtimes\mathbb{Z}_n, M)$ donde n es par, el generador de $\mathbb{Z}_n$ actúa como multiplicación por -1 sobre $\mathbb{Z}$ y M es un $\mathbb{Z}\rtimes\mathbb{Z}_n$-módulo con acción trivial y sin elementos de orden n, es decir, $nm=0$ sólo si $m=0$.

Para simplificar la notación, denotaremos por H, G y Q a los grupos $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}\rtimes\mathbb{Z}_n$ y $\mathbb{Z}_n$ respectivamente. Tenemos así la extensión $1\to H\to G\to Q\to 1$. Para calcular $H_q(H,M)$ con acción de H sobre M trivial podemos usar, como en el Ejemplo 1, la resolución libre de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}H$

$$F'':\ 0\to\mathbb{Z}H \xrightarrow{t-1} \mathbb{Z}H \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z}\to 0$$

y tenemos entonces que

$$H_q(H,M) = \begin{cases} M_H = M & q=0 \\ ker\,(t-1)/0 = M & q=1 \\ 0 & q>1 \end{cases}$$

Calculemos ahora la acción de Q sobre $H_q(H,M)$. Para esto, fijemos $g\in G$, $g\neq 1$ y veamos como está dado el isomorfismo $c(g)$ dado en (1.4.1), donde $\alpha: H\to H$ está dado por $\alpha(h) = ghg^{-1}$ y $f: M\to M$ dado por $f(m) = gm = m$. Para ver cómo está dada la conjugación por g, consideremos a g como $(u,v)\in G = \mathbb{Z}\rtimes\mathbb{Z}_n$ y a $h\in H\lhd G$ como $(h,1)$ y calculemos

$$\begin{aligned} (u,v)(h,1)(u,v)^{-1} &= (u(v\cdot h),v)(u,v^{-1}) \\ &= (uh^{-1},v)(u,v^{-1}) \\ &= (uh^{-1}(v\cdot u),1) \\ &= (uh^{-1}u^{-1},1) \\ &= (h^{-1},1) \end{aligned}$$

por lo tanto, $\alpha(h) = h^{-1}$. Definamos ahora el homomorfismo de H-cadenas $\tau: F''\to F''$ definido en el generador como $\tau_0(1) = 1$ y $\tau_1(1) = -t^{-1}$:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z}H & \xrightarrow{t-1} & \mathbb{Z}H & \xrightarrow{\epsilon} & \mathbb{Z} \\ & & \downarrow{\scriptstyle\tau_1} & & \downarrow{\scriptstyle\tau_0} & & \downarrow{\scriptstyle id_{\mathbb{Z}}} \\ 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z}H & \xrightarrow{t-1} & \mathbb{Z}H & \xrightarrow{\epsilon} & \mathbb{Z} \end{array}$$

donde la condición de ser de H-cadenas significa que $\tau(hx) = \alpha(h)\tau(x) = t^{-1}\tau(x)$. Estos homomorfismos cumplen:

$\epsilon\tau_0(1) = \epsilon(1) = 1$

$\tau_0(t-1)(1) = \tau_0(t-1) = \tau_0(t) - \tau_0(1) = t^{-1}\tau_0(1) - 1 = t^{-1}-1$

$(t-1)\tau_1(1) = (t-1)(-t^{-1}) = -1 + t^{-1} = t^{-1}-1$

lo cual verifica que τ es homomorfismo de cadenas que preserva aumentación. Por lo tanto tenemos bien definido

$$\tau \otimes 1 : F'' \otimes_H M \to F'' \otimes_H M$$

dado por

$\tau_0 \otimes 1(1 \otimes m) = 1 \otimes m$

$\tau_1 \otimes 1(1 \otimes m) = -t^{-1} \otimes m = -(1 \otimes t^{-1}m) = -(1 \otimes m)$

Así, $c_*(g) : H_q(H,M) \to H_q(H,M)$ es la identidad en $H_0(G,M)$ y es la multiplicación por -1 en $H_1(H,M)$, y de acuerdo al Corolario 1.4.3, Q actúa trivialmente sobre $H_0(H,M) = M$ y como multiplicación por -1 sobre $H_1(H,M) = M$.

Ahora si podemos calcular los términos $E^2_{p,q} = H_p(Q, H_q(H,M))$ de la sucesión espectral de Hochschild-Serre. De los cálculos hechos en el Ejemplo 1 tenemos que los grupos $E^2_{p,0}$, donde la acción de Q sobre M es trivial, están dados por

$$E^2_{p,0} = H_p(Q,M) = \begin{cases} M_Q = M & p = 0 \\ ker\,(s-1)/Im\,N = M/nM & \text{p impar} \\ ker\,N/Im\,(s-1) = 0 & \text{p par }, p > 0. \end{cases}$$

Para $E^2_{p,1}$ la acción de Q sobre M es multiplicación por -1 y entonces

$$E^2_{p,1} = H_p(Q,M) = \begin{cases} M_Q = M/2M & p = 0 \\ ker\,(s-1)/Im\,N = 0 & \text{p impar} \\ ker\,N/Im\,(s-1) = M/2M & \text{p par}, p > 0. \end{cases}$$

Aquí $ker\,(s-1) = 0$ pues M no tiene elementos de orden dos, y $ker\,N = M$ pues n es par y entonces $(1 + s + \cdots + s^{n-1})(m) = m - m + m - m + \cdots m - m = 0$. Por último, $E^2_{p,q} = 0$ para $q > 1$. La sucesión en E^2 queda como

$$\begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \\ M/2M & 0 & M/2M & 0 & M/2M & \cdots \\ \\ M & M/nM & 0 & M/nM & 0 & \cdots. \end{array}$$

Por el Teorema 2.2.10 tenemos una sucesión exacta larga

$$\cdots \xrightarrow{d^2} E^2_{p,1} \to H_{p+1}(G,M) \to E^2_{p+1,0} \xrightarrow{d^2} E^2_{p-1,1} \to H_p(G,M) \to E^2_{p,0} \xrightarrow{d^2} \cdots$$

que en nuestro caso toma la forma

$$\cdots \to 0 \to M/2M \to H_{p+1}(G,M) \to M/nM \to 0 \to H_p(G,M) \to 0 \to \cdots$$

donde p es un entero par. Nótese que la sucesión espectral sólo nos permite conocer $H_{p+1}(G,M)$ salvo extensión. Resumiendo lo anterior tenemos

$$H_p(G,M) = \begin{cases} M & p = 0 \\ 0 \to M/2M \to H_p(\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}_n, M) \to M/nM \to 0 & p \text{ impar} \\ 0 & p \text{ par}, p > 1 \end{cases}$$

Ejemplo 3. Calculemos $H_*(\mathbb{Z}_n \rtimes \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}) = H_*(\mathbb{Z}_n \rtimes \mathbb{Z}_2)$ con n impar y donde la acción de $\mathbb{Z}_2$ sobre $\mathbb{Z}_m$ es multiplicación por -1.

Denotemos a los grupos $\mathbb{Z}_n$, $\mathbb{Z}_n \rtimes \mathbb{Z}_2$ y $\mathbb{Z}_2$ por H, G y Q respectivamente. Tenemos entonces la extensión $1 \to H \to G \to Q \to 1$. Calculemos $H_q(H, M)$. Una resolución libre de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}H$ es

$$F'' : \; \cdots \to \mathbb{Z}H \xrightarrow{N} \mathbb{Z}H \xrightarrow{t-1} \mathbb{Z}H \xrightarrow{N} \mathbb{Z}H \xrightarrow{t-1} \mathbb{Z}H \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z} \to 0$$

y como en los ejemplos anteriores se tiene que

$$H_q(H,\mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z}_H = \mathbb{Z} & q = 0 \\ ker\,(t-1)/Im\,N = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_n & q \text{ impar} \\ ker\,N/Im\,(t-1) = 0 & p \text{ par },q > 0 \end{cases}$$

Calculemos ahora la acción de Q sobre $H_q(H,\mathbb{Z})$. Fijemos $g \in G$, $g \neq 1$ Análogamente al Ejemplo 2, tenemos que el homomorfismo $\alpha : H \to H$ dado por la conjugación por g es $\alpha(h) = h^{-1}$, $h \in H$. Entonces $c(g) : (H,\mathbb{Z}) \to (H,\mathbb{Z})$ está dado por $c(g)(h,m) = (h^{-1},m)$, $m \in \mathbb{Z}$. Sea $\tau : F'' \to F''$ dado en el generador de $\mathbb{Z}H$ por

$$\tau_i(1) = \begin{cases} 1 & i \equiv 0\,mod\,4 \\ -t^{-1} & i \equiv 1\,mod\,4 \\ -1 & i \equiv 2\,mod\,4 \\ t^{-1} & i \equiv 3\,mod\,4 \end{cases}$$

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "N"] & \mathbb{Z}H \arrow[r, "t-1"] \arrow[d, "\tau_5"] & \mathbb{Z}H \arrow[r, "N"] \arrow[d, "\tau_4"] & \mathbb{Z}H \arrow[r, "t-1"] \arrow[d, "\tau_3"] & \mathbb{Z}H \arrow[r, "N"] \arrow[d, "\tau_2"] & \mathbb{Z}H \arrow[r, "t-1"] \arrow[d, "\tau_1"] & \mathbb{Z}H \arrow[r, "\epsilon"] \arrow[d, "\tau_0"] & \mathbb{Z} \\
\cdots \arrow[r, "N"] & \mathbb{Z}H \arrow[r, "t-1"] & \mathbb{Z}H \arrow[r, "N"] & \mathbb{Z}H \arrow[r, "t-1"] & \mathbb{Z}H \arrow[r, "N"] & \mathbb{Z}H \arrow[r, "t-1"] & \mathbb{Z}H \arrow[r, "\epsilon"] & \mathbb{Z}
\end{tikzcd}$$

Tenemos que $\epsilon\tau_0(1) = \epsilon(1) = 1$ por lo que τ preserva aumentación. Además, para cualquier entero $k \geq 0$ se cumple

$$\begin{aligned}
\tau_{4k}(t-1)(1) &= \tau_{4k}(t-1) \\
&= t^{-1}\tau_{4k}(1) - \tau_{4k}(1) \\
&= t^{-1} - 1 \\
&= (t-1)(-t^{-1}) \\
&= (t-1)\tau_{4k+1}(1) \\
\tau_{4k+1}N(1) &= \tau_{4k+1}(N) \\
&= \tau_{4k+1}(1 + t + \cdots t^{n-1}) \\
&= (1 + t^{-1} + \cdots t^{-(n-1)})\tau_{4k+1}(1) \\
&= N(-t^{-1}) \\
&= -N \\
&= N\tau_{4k+2}(1) \\
\tau_{4k+2}(t-1)(1) &= \tau_{4k+2}(t-1) \\
&= t^{-1}\tau_{4k+2}(1) - \tau_{4k+2}(1) \\
&= t^{-1}(-1) - (-1) \\
&= (t-1)t^{-1} \\
&= (t-1)\tau_{4k+3}(1) \\
\tau_{4k+3}N(1) &= \tau_{4k+3}(1 + t + \cdots t^{n-1}) \\
&= (1 + t^{-1} + \cdots + t^{-(n-1)})\tau_{4k+3}(1) \\
&= N(t^{-1}) \\
&= N \\
&= N\tau_{4k+4}(1).
\end{aligned}$$

Todo esto nos dice que τ es un homomorfismo de H-cadenas que preserva aumentación, y entonces tenemos bien definido $\tau \otimes_H 1 : F'' \otimes_H \mathbb{Z} \to F'' \otimes_H \mathbb{Z}$, y puesto que la acción de H sobre $\mathbb{Z}$ es trivial, tenemos que

$\tau_{4k} \otimes 1(1 \otimes m) = 1 \otimes m$
$\tau_{4k+1} \otimes 1(1 \otimes m) = -t^{-1} \otimes m = -(1 \otimes t^{-1}m) = -(1 \otimes m)$
$\tau_{4k+2} \otimes 1(1 \otimes m) = -1 \otimes m = -(1 \otimes m)$
$\tau_{4k+3} \otimes 1(1 \otimes m) = t^{-1} \otimes m = 1 \otimes t^{-1}m = 1 \otimes m$

Así, $c_*(g) : H_q(H, \mathbb{Z}) \to H_q(H, \mathbb{Z})$ es la identidad en $H_0(H, \mathbb{Z})$ y $H_{4k+3}(H, \mathbb{Z})$ y multiplicación por -1 en $H_{k+1}(H, \mathbb{Z})$, y de acuerdo al Corolario 1.4.3, Q actúa precisamente de esta manera sobre estos grupos.

Calculemos ahora si los grupos $E^2_{p,q} = H_p(Q, H_q(H, \mathbb{Z}))$ de la sucesión espectral de Hochschild-Serre. Consideremos la resolución libre F' de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}Q$ dada por

$$F' : \cdots \to \mathbb{Z}Q \xrightarrow{N} \mathbb{Z}Q \xrightarrow{s-1} \mathbb{Z}Q \xrightarrow{N} \mathbb{Z}Q \xrightarrow{s-1} \mathbb{Z}Q \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z} \to 0$$

donde s es el generador de Q. Notemos que en este caso el operado norma es $N = s + 1$.

Para calcular $E^2_{p,0}$ consideramos una acción trivial de Q sobre $\mathbb{Z}$, y por los cálculos hechos en el Ejemplo 1 sobre la homología de un grupo cíclico finito se tiene

$$H_p(Q, \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z}_Q = \mathbb{Z} & p = 0 \\ ker\,(s-1)/Im\,(s+1) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_2 & p \text{ impar} \\ ker\,(s+1)/Im\,(s-1) = 0 & p \text{ par}, p > 1 \end{cases}$$

Para calcular $E^2_{p,4k+1}$ consideramos a Q actuando como multiplicación por -1 sobre $\mathbb{Z}_n$

$$H_p(Q, \mathbb{Z}_n) = \begin{cases} (\mathbb{Z}_n)_Q = \mathbb{Z}_n/2\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}_n/\mathbb{Z}_n = 0 & p = 0 \\ ker\,(s-1)/Im\,(s+1) = 0/0 = 0 & p \text{ impar} \\ ker\,(s+1)/Im\,(s-1) = \mathbb{Z}_n/2\mathbb{Z}_n = 0 & p \text{ par}, p > 1 \end{cases}$$

Aquí, el hecho de que $2\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}_n$ y $ker\,(s-1) = 0$ se debe a que n es impar.

Para calcular $E^2_{p,4k+3}$ consideramos a Q actuando trivialmente sobre $\mathbb{Z}_n$

$$H_p(Q, \mathbb{Z}_n) = \begin{cases} (\mathbb{Z}_n)_Q = \mathbb{Z}_n & p = 0 \\ ker\,(s-1)/Im\,(s+1) = \mathbb{Z}_n/2\mathbb{Z}_n = 0 & p \text{ impar} \\ ker\,(s+1)/Im\,(s-1) = 0/0 = 0 & p \text{ par}, p > 1 \end{cases}$$

Resumiendo lo obtenido obtenemos

$$E^2_{p,q} = \begin{cases} \mathbb{Z} & q = 0 \text{ y } p = 0 \\ \mathbb{Z}_2 & q = 0 \text{ y } p \text{ impar} \\ \mathbb{Z}_n & q \equiv 3\, mod\, 4 \text{ y } p = 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Vemos entonces que $E^2_{p,q} = E^\infty_{p,q}$ pues todos los diferenciales d^r, $r \geq 2$, que salen o llegan a un grupo $E^2_{p,q}$ son cero, ya que $E^2_{p,q} = 0$ si $p + q$ es par mayor que cero, y todo diferencial va de un término $E^2_{p,q}$ con $p + q$ par a uno con $p + q$ impar o viceversa. Sólo $E^2_{0,0}$ es distinto de cero, pero en este caso los diferenciales se salen del primer cuadrante y entonces todos son cero. Entonces, como $E^2 \Rightarrow H_*(G)$, existe una filtración acotada $F_pH_*(G)$ de $H_*(G)$ tal que $Gr\, H_n(G) = \bigoplus_{p+q=n} E^2_{p,q}$.

Si n es par mayor que cero, como la filtración es acotada y $E^2_{p,q} = 0$ con $p+q=n$, $H_n(G) = 0$.

Si $n \equiv 1\, mod\, 4$, sólo $E^2_{n,0} = \mathbb{Z}_2 \neq 0$ y por el Teorema 2.2.1 se tiene que $H_n(G) = \mathbb{Z}_2$.

Y por último, si $n \equiv 3\, mod\, 4$, $Gr\, H_n(G) = E^2_{n,0} \oplus E^2_{0,n} = \mathbb{Z}_n \oplus \mathbb{Z}_2$. Esto implica que la filtración $F_pH_n(G)$ cumple que $H_n(G)/F_{n-1}H_n(G) = E^2_{n,0} = \mathbb{Z}_2$ y $F_0H_n(G)/F_{-1}H_n(g) = F_{n-1}H_n(G)/F_{-1}H_n(G) = E^2_{0,n} = \mathbb{Z}_n$. Como $F_{-1}H_n(G) = 0$ se tiene que $F_{n-1}H_n(G) = \mathbb{Z}_n$. Esto da lugar a una sucesión exacta corta $0 \to F_{n-1}H_n(G) \to H_n(G) \to H_n(G)/F_{n-1}H_n(G) \to 0$, es decir, $0 \to \mathbb{Z}_n \to H_n(G) \to \mathbb{Z}_2 \to 0$ la cual es una extensión de $\mathbb{Z}_n$ por $\mathbb{Z}_2$, en la que la acción inducida de $\mathbb{Z}_2$ sobre $\mathbb{Z}_n$ es trivial pues el grupo $H_n(G)$ es abeliano. Para ver cuántas extensiones de este tipo hay, por el Teorema 3.1.2 basta calcular $H^2(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_n)$. Para esto usamos la resolución F' y aplicamos el funtor $Hom_{\mathbb{Z}_2}(-, \mathbb{Z}_n)$ para obtener

$$Hom_{\mathbb{Z}_2}(\mathbb{Z}[\mathbb{Z}_2], \mathbb{Z}_n) \overset{(s-1)^*}{\to} Hom_{\mathbb{Z}_2}(\mathbb{Z}[\mathbb{Z}_2], \mathbb{Z}_n) \overset{(s+1)^*}{\to} Hom_{\mathbb{Z}_2}(\mathbb{Z}[\mathbb{Z}_2], \mathbb{Z}_n) \overset{(s-1)^*}{\to} \cdots$$

y puesto que $Hom_{\mathbb{Z}_2}(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_n) = \mathbb{Z}_n$ con el isomorfismo dado por $f \mapsto f(1)$ (usando notación multiplicativa) podemos reescribir este complejo como

$$\mathbb{Z}_n \overset{s-1}{\to} \mathbb{Z}_n \overset{s+1}{\to} \mathbb{Z}_n \overset{s-1}{\to} \mathbb{Z}_n \to \cdots .$$

De aquí que $H^2(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_n) = ker\,(s-1)/Im\,(s+1) = \mathbb{Z}_n/2\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}_/\mathbb{Z}_n = 0$, luego, sólo hay una extensión de $\mathbb{Z}_n$ por $\mathbb{Z}_2$, salvo equivalencia, la cual es $0 \to \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_n \oplus \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_2 \to 0$, y entonces $H_n(G) = \mathbb{Z}_n \oplus \mathbb{Z}_2 = \mathbb{Z}_{2n}$

Resumiendo todo lo anterior tenemos:

$$H_n(\mathbb{Z}_n \rtimes \mathbb{Z}_2) = \begin{cases} \mathbb{Z} & n = 0 \\ \mathbb{Z}_2 & n \equiv 1\, mod\, 4 \\ \mathbb{Z}_{2n} & n \equiv 3\, mod 4 \\ 0 & n \text{ par}, n > 0. \end{cases}$$

Ejemplo 4. Calculemos $H_*(\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}, M)$ donde el generador de $\mathbb{Z}$ actúa sobre $\mathbb{Z}$ como multiplicación por -1 y M es un $\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}$-módulo con acción trivial. Como en los ejemplos anteriores denotemos por H, G y Q a los grupos $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}$ y $\mathbb{Z}$ respectivamente, donde el generador del grupo cíclico infinito Q actúa sobre H como multiplicación por -1. Calculemos primero los grupos $H_q(H, M)$. Como la acción de G sobre M es trivial, lo es la acción de H sobre M, y entonces, como en el Ejemplo 1, tenemos que

$$H_q(H, M) = \begin{cases} M & q = 0 \\ M & q = 1 \\ 0 & q > 1. \end{cases}$$

De manera análoga al Ejemplo 2 vemos que la acción de Q sobre $H_0(H, M) = M$ es trivial y sobre $H_1(H, M)$ actúa como multiplicación por -1. Calculemos entonces los grupos $E^2_{p,q} = H_p(Q, H_q(H, M))$. De los cálculos ya hechos para un grupo cíclico infinito tenemos

$$E^2_{p,0} = H_p(Q, M) = \begin{cases} M_Q = M & p = 0 \\ ker\,(s-1) = M & p = 1 \\ 0 & p > 1 \end{cases}$$

pues Q actúa trivialmente sobre M, y

$$E^2_{p,1} = H_p(Q, M) = \begin{cases} M_Q = M/2M & p = 0 \\ ker\,(s-1) & p = 1 \\ 0 & p > 1 \end{cases}$$

pues Q actúa como multiplicación por -1 sobre M. Aquí s denota al generador del grupo Q y $s-1$ el homomorfismo $M \to M$ dado por la multiplicación por $s-1$. En este segundo caso denotemos por M' al grupo $ker\,(s-1)$. Resumiendo lo anterior, los grupos $E^2_{p,q}$ están dados por

$$E^2_{p,q} = \begin{cases} M & q = 0 \text{ y } p = 0, 1 \\ M/2M & q = 1 \text{ y } p = 0 \\ M' & q = 1 \text{ y } p = 1 \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Tenemos entonces que $E^2_{p,q} = E^\infty_{p,q}$ y, de manera análoga a la última parte del Ejemplo 3, se cumple

$$H_n(\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}, M) = \begin{cases} M & n = 0 \\ 0 \to M \to H_n(\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}, M) \to M/2M \to 0 & n = 1 \\ M' & n = 2 \\ 0 & n > 2. \end{cases}$$

Bibliografía

[1] Brown, Kenneth S., Cohomology of groups. Springer-Verlag, 1982

[2] MacLane, Saunders, Homology, Springer-Verlag, 1963

[3] Weibel, Charles A., An Introduction to Homological Algebra, Cambridge University Press, 1994

[4] Passman, Donald S., A course in ring theory. AMS Chelsea Publishing, 2004