



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Estadística del transporte de un plasma
magnetizado con flujos zonales

T E S I S

PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Físico

QUE PRESENTA:

Héctor Augusto Velasco Pérez

TUTOR

Dr. Julio Javier Martinell Benito



Ciudad Universitaria, D. F.



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

*Dedicado a
mi familia*

Agradecimientos

Agradezco mucho a mi asesor, el Dr. Julio Javier Martinell Benito por su enorme apoyo, conocimiento y consejos para realizar este proyecto.

También agradezco al Dr. Damián Hernández Herrán y al Dr. Gerónimo Uribe Bravo por su apoyo en la teoría matemática, la cual fue muy necesaria para concluir este trabajo.

Finalmente agradezco al Dr. Jorge Xicotencatl Velasco Hernández por su gran interés en este trabajo.

Gracias a CONACYT por su apoyo económico.

Resumen

En este trabajo se presenta un estudio numérico utilizando el lenguaje de programación CUDA/C de la estructura del flujo y el transporte poloidal de partículas y cómo éstas se ven afectadas por los efectos del radio finito de Larmor, el transporte no difusivo y flujos zonales. Se utiliza un modelo de transporte de partículas de prueba basado en un Hamiltoniano $\vec{E} \times \vec{B}$ reducido. Este Hamiltoniano es una aproximación de la solución de la ecuación de Hasegawa-Mima y está compuesto por un flujo zonal y dos ondas (modos). El Hamiltoniano resulta no integrable lo que da lugar a caos lagrangiano. El sistema se estudia haciendo mapeos de Poincaré y variando las amplitudes de los modos y la magnitud del radio de Larmor con condiciones no periódicas.

El estudio realizado aquí es de carácter estadístico y no topológico. En particular se busca estudiar los diferentes regímenes de transporte (superdifusivo, balístico y turbulento difusivo) analizando el escalamiento temporal de la media (χ) y la varianza (γ) de las distribuciones de partículas. También se hace un ajuste a las distribuciones, es decir, se buscan modelos matemáticos que se ajusten a ellas. En particular se busca estudiar los ajustes a leyes de potencia en los que el exponente de decaimiento α se encuentre entre 1 y 3, ya que éstos sugieren la presencia de transporte anómalo (vuelos de Lévy).

Para describir la evolución del sistema se utilizó la teoría de los vuelos de Lévy truncados y se encuentra una buena congruencia con este modelo. Se encontró que los valores de χ y de γ tienden a disminuir conforme el radio de Larmor aumenta. En este trabajo se analizaron las distribuciones de partículas a dos tiempos distintos (cortos y largos), los cuales son lo suficientemente largos para hacer estadística. A tiempos largos el escalamiento del desplazamiento medio y la varianza parecen ser independientes del tipo de distribución ajustada a los datos. Se encuentra una clara diferencia en el comportamiento de las distribuciones de partículas. Las partículas que presentan transporte anómalo se van en una dirección y las que son balísticas se van en la dirección contraria.

Finalmente se proponen métodos y modelos para mejorar el análisis realizado.

Índice general

Agradecimientos	III
Resumen	V
Lista de figuras	IX
Lista de tablas	XI
1. Introducción	1
1.1. Fusión nuclear	1
1.2. Plasmas magnetizados en tokamaks	3
1.3. Ondas de deriva electrostáticas y flujo zonal	5
2. Modelo de partículas de prueba para transporte	9
2.1. Planteamiento del modelo	10
2.2. Modelo de transporte de partícula de prueba	11
2.3. Barreras de transporte	17
3. Características del transporte de partículas	21
3.1. Difusión normal	21
3.2. Difusión anómala	23
3.3. Estadística de Lévy	26
3.3.1. Vuelos de Lévy truncados	28
3.4. Momentos estadísticos del desplazamiento de las partículas: escalamien- to temporal	29
3.5. Función de distribución de probabilidad de los desplazamientos: es- calamiento espacial	30
4. Métodos numéricos	33
4.1. Estructura del GPU (hardware)	33
4.2. Modelo de programación de CUDA	34
4.3. Descripción del programa	36

4.4.	Métodos numéricos utilizados en la simulación	37
4.4.1.	Regla de Simpson 3/8	37
4.4.2.	Método de la bisección	38
4.4.3.	Interpolación por splines cúbicos	38
4.4.4.	Integrador de ecuaciones diferenciales ordinarias: Dormand-Prince	38
4.5.	Métodos para el análisis estadístico	39
4.5.1.	Estimación del parámetro de escalamiento $\hat{\alpha}$	39
4.5.2.	Estadística de Kolmogorov-Smirnov	40
4.5.3.	Estimación del parámetro \hat{x}_{\min}	40
4.5.4.	El p_{value} y su estimación	41
4.5.5.	Prueba del cociente de verosimilitud	42
4.5.6.	Estimación de otros resultados	43
4.5.7.	Estimación de errores	43
4.5.8.	Discusión de los métodos utilizados	44
5.	Resultados	47
6.	Análisis de resultados	53
6.1.	Evolución del sistema	54
6.2.	Caracterización del transporte	56
6.3.	Discusión de los resultados	60
7.	Conclusiones	63
A.	Propiedades generales de los plasmas	67
A.1.	Frecuencia y radio de Larmor	67
A.2.	Velocidad de deriva $\vec{E} \times \vec{B}$	69
B.	Resultados obtenidos de las FDP	73
C.	Funciones de distribución acumulada complementaria y su ajuste de máxima verosimilitud a la ley de potencia	77
C.1.	Distribuciones a tiempos largos (L)	77
C.2.	Distribuciones a tiempos cortos (C)	82
	Bibliografía	87

Índice de figuras

1.1.	Direcciones principales en la geometría de un tokamak	5
1.2.	Esquema simplificado de los componentes que generan una onda de deriva	7
1.3.	Esquema de una onda de deriva en un tokamak	8
1.4.	Los cinturones Jovianos son ejemplos de flujos zonales en la naturaleza	8
2.1.	Configuración del campo magnético y eléctrico	11
2.2.	En ambas imágenes se muestran los isocontornos del potencial electrostático ϕ . En (a) se muestra a ϕ obtenido a partir de una solución numérica de la ecuación de Hasegawa-Mima. En (b) se muestra ϕ de acuerdo al modelo del hamiltoniano. La línea gruesa cerrada (b) es la separatriz. Las partículas que se encuentran dentro de la separatriz se encuentran atrapadas; las partículas fuera de ella son transportadas por el flujo zonal en la dirección que indican las flechas. El modelo de Hamiltoniano en (b) nos permite hacer una descripción reducida del modelo de Hasegawa-Mima. Imagen tomada de [16].	14
2.3.	Transformación de coordenadas polares a coordenadas cartesianas	15
2.4.	Flujo zonal con diferentes radios de Larmor (ρ) y la velocidad $\eta = 0.3$	17
2.5.	En el lado izquierdo (a) se muestra la gráfica de los isocontornos del Hamiltoniano (2.14) con $\varepsilon_2 = 0$; las barras verticales, $x = \pm x_1$, cruzan al flujo zonal en $x_1 = \eta$ creando un par de secuencias de islas o resonancias. En el lado derecho (b) cuando el segundo modo es añadido, un par más de resonancias aparece en el sistema. Imagen obtenida de [6]	18
3.1.	Trayectorias de un caminante aleatorio en 2 y 3 dimensiones después 450 y 350 pasos respectivamente. En ambas caminatas, los pasos ocurren solamente entre los puntos adyacentes de una malla cúbica con probabilidad $\frac{1}{2d}$ con d la dimensión del espacio. El círculo corresponde a la posición inicial del caminante, mientras que el asterisco a la posición final. Imagen tomada de [19]	23

3.2.	Trayectorias de movimiento Browniano (izquierda) y trayectorias de vuelos de Lévy (derecha) con $\gamma = 1.5$ cada una con el mismo número de pasos ($\simeq 7000$). Imagen tomada de [23].	26
3.3.	Descripción gráfica de la evolución del sistema. Imagen tomada de [21].	28
4.1.	<i>Grid, block's y thread's</i> de CUDA. Fuente [28]	35
5.1.	Aquí se presenta una trayectoria de una partícula que presenta desplazamientos de tipo vuelo pegajoso. Se puede ver que la partícula alterna de forma impredecible entre estar atrapada en los vórtices de $\vec{E} \times \vec{B}$ y las corrientes del flujo zonal	48
6.1.	Evolución de la estructura heteroclínica con condiciones periódicas. Los parámetros de la imagen superior son: $\varepsilon_1 = 0.3$, $\varepsilon_2 = 0.2$, $\eta = 0.38$ y $r_L = 1.0$ y los parámetros de la inferior son iguales excepto que $r_L = 2.0$	57
6.2.	Ejemplo de una distribución a tiempos cortos de partículas en el sistema completo. La población marcada con 1 presenta en general transporte anómalo en la dirección superior. La población 3 es balística y se dirige hacia abajo. La población 2 es de carácter anómalo; esta población surge de la población 3 al tiempo 700 aproximadamente y va en la dirección superior. Para el ciclo 5000 la población 2 se encuentra mezclada con la 1.	61
A.1.	Órbitas de Larmor en un campo magnético	69
C.1.	Estructura heteroclínica, sección superior	78
C.2.	Estructura heteroclínica, sección inferior	79
C.3.	Estructura homoclínica, sección superior	80
C.4.	Estructura homoclínica, sección superior	81
C.5.	Estructura heteroclínica, sección superior	83
C.6.	Estructura heteroclínica, sección inferior	84
C.7.	Estructura homoclínica, sección superior	85
C.8.	Estructura: homoclínica, sección: superior	86

Índice de tablas

List of Abbreviations	XIII
5.1.	49
5.2.	49
5.3.	49
5.4.	50
5.5.	50
5.6.	50
5.7.	51
5.8.	51
5.9.	51
5.10.	52
5.11.	52
5.12.	52
6.1. Síntesis de los datos de la estructura heteroclínica, sección superior .	56
6.2. Síntesis de los datos de la estructura heteroclínica, sección inferior . .	58
6.3. Síntesis de los datos de la estructura homoclínica, sección superior . .	59
6.4. Síntesis de los datos de la estructura homoclínica, sección inferior . .	59
B.1.	73
B.2.	74
B.3.	74
B.4.	74
B.5.	75
B.6.	75
B.7.	75
B.8.	76

Simbología

- IGT: Inestabilidades del gradiente de temperatura de iones
- RFL: Radio finito de Larmor
- CATC: Caminata aleatoria de tiempo continuo
- FDP: Función de densidad de probabilidad
- FDA: Función de distribución acumulada
- CUDA: Compute Unified Device Architecture (Arquitectura Unificada de Dispositivos de Cómputo)
- hilo: Secuencia de tareas que realiza un procesador.
- warp: Conjunto mínimo de hilos paralelizables. Está compuesto de 32 hilos.
- AMV: Ajuste de máxima verosimilitud

Capítulo 1

Introducción

En la época actual nos enfrentamos a una gran cantidad de problemas para satisfacer la enorme cantidad de necesidades que tenemos todos los seres humanos alrededor del planeta. Nos encontramos en una crisis severa. Nuestras fuentes energéticas más utilizadas, baratas y eficientes se están agotando rápidamente, no sin de paso dañar el medio ambiente, generar crisis económica, provocar conflictos bélicos, etc. Es claro que es importante encontrar una solución buena y rápida a este problema. Algunas de estas soluciones incluyen buscar alternativas energéticas que satisfagan nuestras demandas y cambiar nuestros hábitos de consumo. Existen diversas opciones en cuanto a energías alternativas: solar, eólica, nuclear, etc.

En este trabajo nos centraremos en los procesos y aspectos particulares de la generación de energía nuclear por medio de fusión. En este trabajo se estudiarán los procesos de transporte de partículas de plasma que ocurren dentro de un reactor de fusión. Para tener una buena noción de esto es necesario entender físicamente de manera general lo que es la fusión nuclear. Es importante ser conscientes también de las implicaciones económicas y tecnológicas y así comparar la fusión nuclear con otras formas de energía existentes, ya que gran parte del interés por estudiar los fenómenos físicos involucrados en la generación de energía por fusión provienen de la necesidad de nuestra sociedad de continuar con el ritmo de vida actual por un tiempo considerable.

1.1. Fusión nuclear

La fusión nuclear es una reacción que se produce cuando dos núcleos de átomos ligeros se unen para formar un núcleo más pesado. Éste es un proceso que genera energía, y a ésta se le denomina energía nuclear. La principal aplicación para la que se piensa utilizar de este tipo de energía es el de la producción de energía eléctrica. El proceso básico por el que se lleva a cabo involucra la unión de elementos ligeros, entre los cuales se encuentran el hidrógeno (H), deuterio (D) y tritio (T), los cuales

son los más usados y estudiados [15].

La fusión atómica tiene tres ventajas principales: las grandes reservas de materia prima que existen, el impacto ambiental y la seguridad. Para fines de producción eficiente de energía eléctrica, existen dos reacciones principales: la reacción deuterio-deuterio (D-D) y la reacción deuterio-tritio (D-T). El deuterio se encuentra en forma natural en el agua de los océanos; existe un átomo de deuterio por cada 6700 átomos de hidrógeno y éste puede ser extraído a un costo muy bajo. Si todo el deuterio del océano fuera usado para producir energía por fusión a la tasa de consumo actual, nuestra energía se agotaría en 2 mil millones de años.

La reacción D-D produce más energía que la reacción D-T; sin embargo, la mayor ventaja de la reacción D-T es que ocurre a temperaturas más bajas. Esto significa que las primeras generaciones de reactores de fusión utilizarán la reacción D-T. El tritio es un isótopo radioactivo con una vida media de 12 años, por lo que no existe tritio en forma natural en la Tierra, por esta razón el tritio debe ser extraído del Li^6 , el cual sí se encuentra de forma natural en la Tierra. Así, la producción de electricidad por medio de la reacción D-T está sujeta a las reservas de Li^6 , las cuales se calcula que se podrían agotar en 20 000 años (suponiendo que se mantiene la tasa de consumo energético actual).

La siguiente ventaja de la fusión nuclear es que no impacta de manera severa en el medio ambiente, o al menos no en la magnitud en que los hidrocarburos y la fisión lo hacen. Una de las características más notables de las reacciones de fusión es que no producen CO_2 y ninguna sustancia nociva para la salud. El mayor problema ambiental que tienen cualquiera de las reacciones anteriores es que uno de los productos del proceso es la emisión de un neutrón de alta energía el cual es capturado por la sábana protectora del reactor; sin embargo, cuando el neutrón impacta y comienza a atravesar la sábana, éste causa que la estructura de la sábana se active, provocando así radioactividad en ella; la vida media de este material activado es de aproximadamente 100 años. A pesar de esto, dada la situación ambiental actual, la fusión nuclear sigue siendo una alternativa muy viable.

La última gran ventaja de la fusión nuclear se refiere a la seguridad. Debido a que la fusión es un proceso “nuclear” a veces surge la pregunta de la posibilidad de un accidente tal como ha ocurrido en varias plantas de fisión nuclear. En las plantas de fisión la energía que va a ser producida en los años venideros se encuentra almacenada en el núcleo del reactor a cualquier tiempo; es esta cantidad enorme de energía la que produce los terribles desastres nucleares. El funcionamiento de un reactor de fusión no depende de la necesidad de mantener una reacción nuclear con una gran cantidad de combustible; en este caso el combustible debe ser inyectado dentro del reactor de acuerdo a la rapidez de consumo del propio reactor, así el combustible es consumido en el momento y la masa efectiva de combustible es sólo de algunos gramos.

Se han mencionado tres de las principales ventajas de la energía nuclear obtenida por fusión de átomos. Ahora es tiempo de enlistar las principales desventajas de este proceso.

La primera es que la fusión es un proceso muy complicado. Por ejemplo, para llevar a cabo la reacción D-T es necesario tener temperaturas de alrededor de 10^5K , la cual es más alta que la temperatura del núcleo del Sol. Es a estas temperaturas que el combustible está totalmente ionizado, es decir, se encuentra en estado de plasma. Una vez que el plasma se encuentra “caliente” es necesario confinarlo y controlarlo. El método principal para llevar a cabo esto es una configuración compleja de campos magnéticos. La configuración de estos campos magnéticos es esencial para obtener la mayor eficiencia en el proceso; esta última tarea ha sido uno de los principales problemas a los que se han enfrentado los físicos e ingenieros en los últimos 60 años y todo parece indicar que la solución se encuentra todavía muy distante.

En materia de retos tecnológicos se puede decir que es necesario desarrollar materiales de baja activación, es decir, que sean poco susceptibles al constante bombardeo de neutrones de alta energía generados en la reacción. También es necesario desarrollar imanes superconductores de alta intensidad para confinar el plasma. Es necesario desarrollar tecnología para poder llegar a las altas temperaturas buscadas. En conjunto, un reactor de fusión es realmente complejo debido a la gran cantidad y variedad de tecnologías que es necesario integrar.

1.2. Plasmas magnetizados en tokamaks

Existen diversas formas de producir energía nuclear por fusión. Algunos de los métodos utilizados son: sistemas cerrados (toros), sistemas abiertos (espejos magnéticos), tecnología “pinch” y fusión por láseres. Los sistemas cerrados llevan altas corrientes generando su propio campo magnético, lo que autoconfina el plasma. Los sistemas abiertos se basan en el efecto de espejo magnético. La fusión por láseres funciona por efectos inerciales en vez de magnéticos; esta tecnología tiene la ventaja de que no sufre de inestabilidades magnéticas aunque está sujeta a inestabilidades de tipo gravitacional. De todas estas tecnologías la más prometedora y en la que está basada esta tesis es la de los sistemas cerrados toroidales, en particular los tokamaks.

Un tokamak tiene un campo magnético toroidal (figura 1.1) muy intenso, el cual es auxiliado por una componente poloidal producida por una corriente generada en el mismo plasma.

Como ya mencionamos antes, las reacciones nucleares más prometedoras son la D-D y la D-T. De estas dos la más prometedora es la D-T debido a que esta reacción tiene una probabilidad de colisión más alta. La reacción que se lleva a cabo es la siguiente.



Esta expresión nos puede decir muchas cosas; sin embargo, lo que es de interés en este trabajo es la presencia de partículas masivas (partículas alfa), lo que sugiere la necesidad de incluir la contribución de ciertas propiedades que normalmente son ignoradas cuando se trabaja con partículas ligeras; en particular se considerará el efecto que tienen partículas de alta energía tal como los efectos generados por incluir el radio finito de Larmor.

En este trabajo se va a estudiar el transporte de partículas en un plasma magnetizado (confinamiento magnético). En particular se va a estudiar el transporte perpendicular a la dirección del campo magnético.

Existen tres tipos principales de transporte de partículas de un plasma: el transporte clásico o por colisiones, el transporte neoclásico (el cual es por colisiones pero incluye los efectos de la geometría) y el transporte anómalo (el cual se debe a la turbulencia). El transporte clásico considera los efectos de las colisiones entre partículas; estas colisiones a veces son referidas como colisiones coulombianas y está basado esencialmente en el intercambio de momento entre las partículas. Este tipo de transporte es el más sencillo de estudiar; sin embargo, se ha visto que en el transporte anómalo radican muchas de las propiedades conocidas del plasma, tal como su naturaleza difícil de estudiar, lo cual trae como consecuencia que la fusión nuclear no ha sido llevada a cabo de manera eficiente.

Existen varias fuentes de transporte anómalo [11]: inestabilidades del gradiente de temperatura de iones (IGT), fluctuaciones en ondas de deriva, inestabilidades debidas a islas magnéticas, inestabilidades del gradiente de resistividad y presión, entre otras. Para entender los mecanismos de transporte se requiere una formulación teórica de los mismos y a su vez poner a prueba estas teorías de manera experimental. Por muchos años la teoría ha identificado diversos mecanismos que producen turbulencia en plasmas confinados y a partir de ellos se han desarrollado diversas expresiones para las difusividades turbulentas. La determinación de estas difusividades, no es directa pero es necesaria en este tipo de teorías. En esta tesis nos interesaremos en estudiar el transporte generado por inestabilidades de ondas de deriva [5].

Una de las dificultades más grandes para poder llevar a cabo la fusión nuclear es la confinación del plasma dentro del tokamak. Esto puede ser entendido de manera relativamente sencilla si imaginamos una geometría toroidal como la de la figura 1.1 y se estudian las ondas de deriva que aparecerán dentro del tokamak [8].

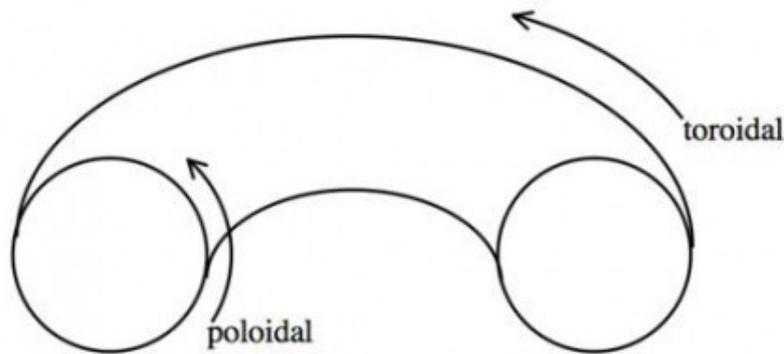


Figura 1.1: Direcciones principales en la geometría de un tokamak

1.3. Ondas de deriva electrostáticas y flujo zonal

Los campos eléctricos en un plasma sólo pueden existir cuando no hay un equilibrio estático, pues en este caso son cancelados por las cargas libres que mantienen al plasma neutro. Campos eléctricos cambiantes en el tiempo pueden subsistir a escalas más pequeñas que la longitud de Debye, que es donde puede haber separación de carga positiva y negativa. En esta categoría están las fluctuaciones térmicas de las densidades de iones y de electrones que producen separación de carga a pequeña escala. En los tokamaks y stellarators también puede aparecer un campo eléctrico radial cuando el flujo de iones centrífugo es distinto al de los electrones, pues esto produce un exceso de carga de un signo en la parte externa, lo que da lugar a un campo eléctrico que tiende a hacer los dos flujos iguales, frenando a los rápidos y acelerando a los lentos. Este campo da lugar a una rotación poloidal del plasma debido a la velocidad de deriva $\vec{E} \times \vec{B}$, en donde \vec{E} es el campo eléctrico y \vec{B} es el campo magnético externo. Por lo general estos aparecen en una región localizada del plasma por lo que se producen los llamados flujos zonales.

Las fluctuaciones eléctricas están usualmente asociadas con ondas que pueden ser electrostáticas (cuando la presencia de un campo magnético en las oscilaciones es despreciable) o electromagnéticas. Aquí nos interesan las fluctuaciones electrostáticas. Las más fundamentales son las ondas de Langmuir (u ondas de plasma) que hacen oscilar al plasma globalmente con la frecuencia $\omega_k = (4\pi n e^2 / m_k)^{1/2}$, donde $k = \text{electrón, ión}$ es la especie que responde a la oscilación y n es la densidad del plasma.

Cuando el plasma se encuentra inmerso en un campo magnético y existe un gradiente en la presión (p) aparece otra onda electrostática llamada onda de deriva, que se propaga con la velocidad diamagnética $v_D = -\nabla p \times \vec{B} / (qnB^2)$ en donde q es la carga eléctrica. La velocidad diamagnética es la velocidad macroscópica que tiene una especie o componente del plasma (iones y electrones) cuando la cantidad de

partículas que giran en el campo magnético o su energía cambia con la posición, o sea cuando hay un gradiente de densidad o de temperatura (en conjunto, un gradiente de presión). Físicamente, esta velocidad es el resultado de que en un punto dado pasan más partículas en una dirección (provenientes de órbitas cuyo centro está en donde la densidad es mayor) en la dirección opuesta (que provienen de órbitas con centro en la región de menor densidad). Resulta que la velocidad de la onda de deriva es en dirección de la velocidad diamagnética de los electrones $q = -e$ que es $v_{De} = \nabla p_e \times \vec{B} / (enB^2)$

Cuando el plasma presenta esta situación, las fluctuaciones térmicas, que siempre están presentes, son arrastradas por la velocidad diamagnética de los electrones. Si la fluctuación tiene una longitud de onda λ se verá que fluctúan con una frecuencia $\omega_* = v_{De}2\pi/\lambda = kv_D$ (frecuencia Doppler). Las fluctuaciones se manifiestan como campos eléctricos oscilantes con frecuencia ω_* . Normalmente las fluctuaciones térmicas son muy pequeñas pero resulta que estas ondas son inestables cuando se toman en cuenta las colisiones entre partículas, pues éstas hacen que se produzca una diferencia de fase entre las oscilaciones de la densidad y del campo eléctrico, lo que hace que la velocidad incremente la densidad donde ya era elevada produciendo que la amplitud de la oscilación aumente. Así que las fluctuaciones térmicas crecen y se observan como ondas de deriva. De hecho estas ondas crecen hasta un punto en que se satura su amplitud por efectos no lineales y dan lugar a un estado turbulento del plasma, con fluctuaciones de gran amplitud.

El mecanismo que mantiene a las ondas de deriva puede explicarse por la dinámica de los electrones y los iones en presencia del campo magnético. Para esta explicación fenomenológica se hace referencia a la figura 1.2. En ella se representa al campo magnético saliendo del plano de la figura 1.2 y es uniforme, mientras que el gradiente de densidad del plasma es en dirección horizontal apuntando a la izquierda. En este plasma se introduce una oscilación eléctrica dirigida verticalmente de modo que las direcciones del campo eléctrico alternan hacia arriba y hacia abajo. Bajo estas condiciones los iones que giran alrededor de las líneas de campo magnético experimentan la velocidad de deriva eléctrica $v_E = \vec{E} \times \vec{B} / B^2$ que es horizontal. Los electrones también la sienten, pero como éstos se pueden mover libremente a lo largo del campo magnético, se uniformiza cualquier variación que genere v_E . Para los iones el gradiente de densidad hace que la densidad de iones aumente en donde la deriva es a la derecha y disminuya en donde la deriva es a la izquierda. Inicialmente los puntos (nodos) de donde salen las líneas de campo eléctrico son zonas de carga positiva y los puntos donde convergen las líneas de campo eléctrico son zonas de carga negativa. La variación de la densidad de iones por las derivas, según se acaba de explicar, ocurre en los valles y picos de la onda por lo que ahora los nodos estarán donde antes había cimas o valles. Como resultado la onda se desplaza un cuarto de longitud de onda hacia abajo. La velocidad de la onda es entonces en dirección $\nabla n \times \vec{B}$. Por otro lado, el movimiento de los electrones a lo largo del campo

magnético da lugar a una variación paralela a \vec{B} que está asociada a una componente de la onda paralela a \vec{B} . El papel de los electrones es entonces simplemente mantener la neutralidad de carga (de manera oscilatoria). Se ve entonces que con esta fenomenología la oscilación eléctrica se puede mantener desplazándose longitudinalmente (las ondas electrostáticas son ondas longitudinales) y esto es precisamente una onda de deriva.

La descripción que se acaba de hacer es la descripción lineal (sin colisiones) del fenómeno.

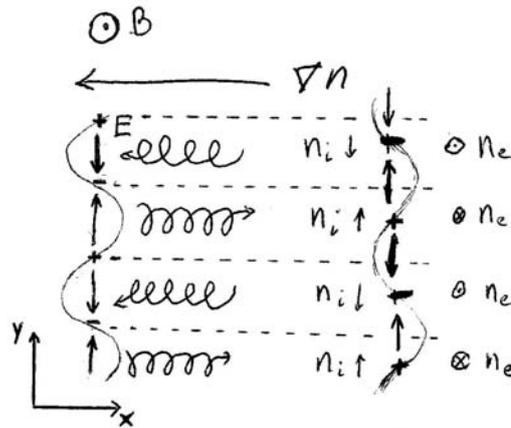


Figura 1.2: Esquema simplificado de los componentes que generan una onda de deriva

En un tokamak, el esquema de la figura 1.2 debe ser transformado a una geometría polar como en la figura 1.3. En este trabajo vamos a suponer una simetría toroidal.

Los flujos zonales son flujos de cizalla o flujos de Couette que surgen en muchas áreas. Son particularmente conocidos los ejemplos de los cinturones Jovianos en Júpiter (ver la figura 1.4) y las corrientes atmosféricas en la Tierra surgidas de la fuerza de Coriolis. En el caso de nuestro sistema el flujo zonal surge de la amplificación del efecto de la deriva $\vec{E} \times \vec{B}$ provocado por estreses turbulentos (es decir, transporte de momento turbulento) [12]. Estos flujos zonales han demostrado generar propiedades propicias para el confinamiento del plasma debido a que generan barreras de transporte que limita el escape de partículas.

El estudio de los flujos zonales ha tenido un gran impacto en la investigación en fusión nuclear. Por ejemplo, se han resuelto algunas confusiones que se tenían con respecto al confinamiento del plasma dentro del reactor, ha ayudado a mejorar los diseños de los laboratorios de fusión más modernos tal como es el caso del

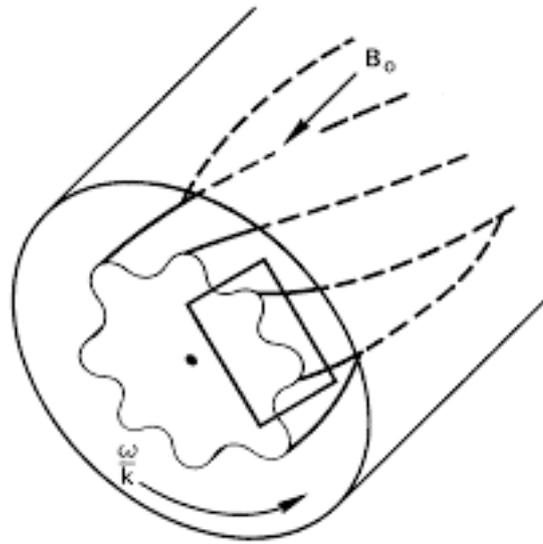


Figura 1.3: Esquema de una onda de deriva en un tokamak

Reactor Experimental Termonuclear Internacional (ITER por sus siglas en inglés) y ha ayudado a entender la formación de estructuras y auto-organización de sistemas turbulentos con flujos zonales [12].

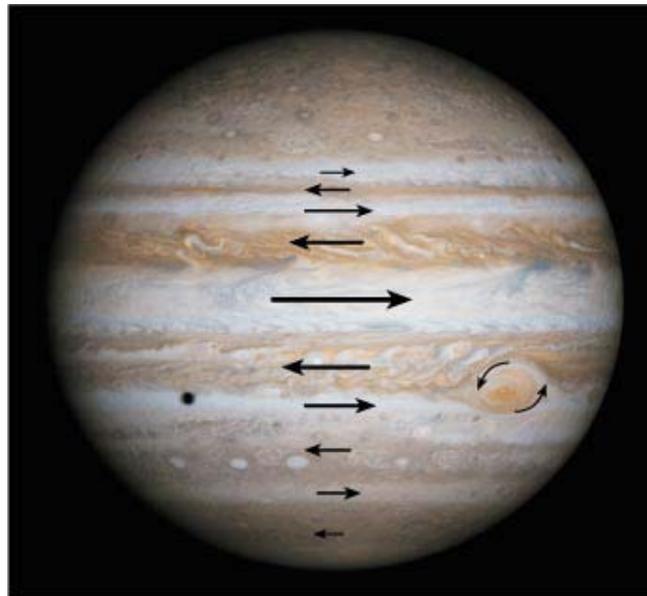


Figura 1.4: Los cinturones Jovianos son ejemplos de flujos zonales en la naturaleza

Capítulo 2

Modelo de partículas de prueba para transporte

Ha habido importantes esfuerzos para entender y mejorar la fusión nuclear controlada. Muchos de estos esfuerzos se han enfocado en el confinamiento de plasmas de altas temperaturas. Para entender mejor este proceso se necesita un mejor entendimiento de la dinámica de las partículas, en particular en los movimientos de deriva. Uno de los enfoques más comunes para atacar este problema es la deriva de $\vec{E} \times \vec{B}$, el cual es una aproximación de la deriva del centro guía de partículas cargadas. Este enfoque es suficiente para describir una gran cantidad de fenómenos, sin embargo en el caso de partículas de alta energía, tal como partículas alfa [22] producidas en reacciones nucleares o en presencia de inhomogeneidades de campos que sean de la escala del radio de Larmor de las partículas [13], es necesario tomar en cuenta la contribución de los efectos del radio finito de Larmor (RFL o FLR en inglés) para poder describir correctamente el transporte de partículas.

En esta tesis se estudiará el transporte de un plasma dentro de un reactor de fusión (tokamak) por medio de un sistema Hamiltoniano. El estudio se centrará especialmente en el régimen de transporte caótico, esto es, cuando el sistema no es integrable debido a la interacción mutua de las ondas de deriva. Se estudiará la influencia de un flujo zonal no monótono y el RFL de las partículas. Este modelo ha sido estudiado anteriormente desde el punto de vista topológico [22].

Se consideran dos problemas de transporte en los que el flujo zonal juega un papel importante: la destrucción de las barreras de transporte y la estadística de las partículas de prueba. El primer problema es importante para entender las propiedades del confinamiento de un plasma de fusión. Por otro lado, debido a la variabilidad espacial y temporal de los flujos zonales en presencia de ondas de deriva, el movimiento de las partículas se vuelve típicamente caótico y uno se ve forzado a tomar un enfoque estadístico en donde el transporte se encuentra caracterizado por las propiedades promediadas del ensamble.

2.1. Planteamiento del modelo

El problema de la advección, es decir, de transporte por flujo, es enfrentado tradicionalmente utilizando el enfoque Euleriano o el enfoque Lagrangiano. En el enfoque Euleriano, la propiedad de advección es descrita por el campo escalar $\theta(x, y)$ que puede evolucionar de acuerdo a la ecuación de advección-difusión:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \vec{U} \cdot \nabla \theta = \kappa \nabla^2 \theta \quad (2.1)$$

Aquí la función \vec{U} es una función conocida que en general depende de x, y, z y el tiempo t ; el término de difusividad κ es normalmente tomada como constante. Dentro del marco de la ecuación (2.1) es posible encontrar advección laminar y turbulenta la cual va a ir de acuerdo al flujo \vec{U} . En muchos tratamientos teóricos de esta ecuación se introduce (de manera convencional) un flujo \vec{U} determinístico para estudiar problemas de advección laminar. Cuando se busca estudiar advección turbulenta el flujo \vec{U} sólo es especificado de manera probabilística.

En el enfoque Lagrangiano las trayectorias de las partículas son modeladas expresando el problema de la siguiente manera:

$$\dot{x} = u(x, y, z, t), \quad \dot{y} = v(x, y, z, t) \quad \dot{z} = w(x, y, z, t) \quad (2.2)$$

En donde u, v, w son los componentes de \vec{u} . Las ecuaciones (2.2) reducen el problema de advección a un sistema dinámico de dimensión finita. La idea de estudiar la advección utilizando el tratamiento Lagrangiano por medio de (2.2) no es nueva; en realidad esta idea está íntimamente relacionada con los fundamentos cinemáticos de la mecánica de fluidos. Consideremos ahora un flujo estacionario, incompresible y bidimensional. Estas condiciones nos garantizan que el problema de advección (2.2) es integrable; más aún, la propiedad de incompresibilidad nos garantiza la existencia de una función de corriente $\psi(x, y)$ y que las líneas de corriente (streamlines) coinciden con las líneas de trayectoria (pathlines); dicho esto, uno puede plantear las siguientes ecuaciones:

$$\dot{x} = -\frac{\partial \psi}{\partial y} \quad \dot{y} = \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (2.3)$$

Las cuales son simplemente las ecuaciones de Hamilton para un grado de libertad, en donde x y y equivalen a la coordenada y al momento respectivamente y ψ equivale al Hamiltoniano. La correspondencia entre el flujo de espacio fase en un sistema

dinámico Hamiltoniano y el movimiento de una partícula transportada en el espacio de configuración (para un fluido incompresible en el plano) va mas allá de mero formalismo. Esta correspondencia sugiere que debe ser posible encontrar casos de (2.2) y (2.3) en los que se tengan movimientos de partículas muy complejos si uno escoge el campo de flujo de tal forma que el sistema dinámico se vuelva no integrable. Sin embargo, en el caso especial de flujos bidimensionales e incompresibles será suficiente que u y v tengan dependencia en el tiempo. Es preciso decir que ni el campo de flujo ni la función de corriente tienen que ser muy complejas. Así, tenemos una situación en la que un campo de velocidades simple y completamente determinista desde el punto de vista Euleriano produce una respuesta estocástica desde la perspectiva de advección Lagrangiana. Dicho esto, se sugiere nombrar a esta situación o régimen *caos advectivo* [1] (también conocido como turbulencia Lagrangiana [16]).

2.2. Modelo de transporte de partícula de prueba

Hasta ahora se presentaron las herramientas básicas que van a ser utilizadas en el desarrollo del modelo desde la perspectiva de la mecánica de fluidos. Es necesario exponer ahora cómo se van a integrar al modelo las propiedades electromagnéticas del plasma.

Tenemos una geometría toroidal con un campo magnético circular de magnitud constante el cual va estar dirigido en la dirección toroidal (figura 1.1) a la cual llamaremos z , es decir, $\vec{B} = B_0 \hat{z}$; esto es, se aproximan las líneas de campo curvas cerradas a líneas rectas abiertas (modelo cilíndrico periódico). Vamos a suponer que existe un campo eléctrico perpendicular a \vec{B} tal como se muestra en la figura 2.1 que apunta en la dirección radial el cual genera la velocidad de deriva dada por la siguiente ecuación (para la deducción de ésta ecuación, ver el apéndice A)

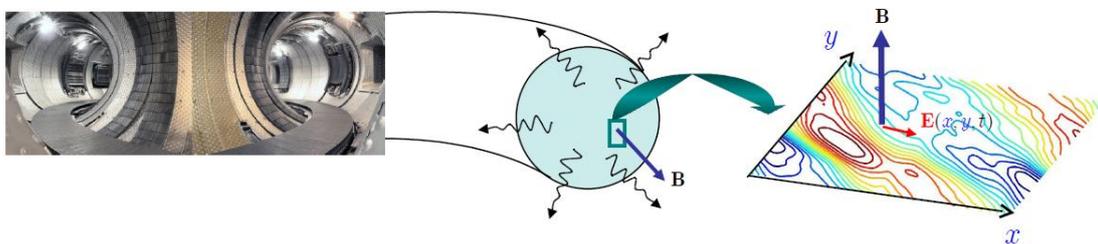


Figura 2.1: Configuración del campo magnético y eléctrico

$$\vec{v}_E = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{B^2} \quad (2.4)$$

Tomando la aproximación electrostática, podemos escribir al campo eléctrico como $\vec{E} = -\nabla\phi$ en donde $\phi = \phi(x, y, t)$ es el potencial eléctrico, así escribir la ecuación (2.4) como:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{-\nabla\phi \times \vec{B}}{B^2} \quad (2.5)$$

Y simplificando esta ecuación obtenemos:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{B_0} \begin{bmatrix} \partial_y\phi \\ -\partial_x\phi \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

Las ecuaciones (2.6) son idénticas en forma a las ecuaciones (2.3) por lo que es posible aplicar la teoría hamiltoniana para poder resolverlas. En este caso el Hamiltoniano va a ser de la forma $\hat{\phi}(x, y, t) = B_0\phi(x, y, t)$. El siguiente paso es encontrar la forma del potencial eléctrico.

Una de las motivaciones para estudiar plasmas utilizando las ideas antes descritas son los flujos zonales que ocurren naturalmente en fluidos geofísicos. Algunos ejemplos de estos son los flujos zonales en Júpiter, eyecciones (jets) de grandes escalas en la estratósfera de la Tierra y jets oceánicos tal como la corriente del Golfo. Estos flujos zonales producen barreras que tienen una gran influencia en el confinamiento y mezcla de los fluidos. Por otro lado, los flujos zonales también han sido observados en experimentos de fusión en plasmas y su papel en la reducción de transporte ha sido ampliamente reconocido. Basándose en la analogía entre ondas de Rossby (también llamadas ondas planetarias) en flujos cuasigeostróficos y las ondas de deriva en plasmas confinados magnéticamente, algunos modelos y experimentos de laboratorio desarrollados para estudiar la dinámica de fluidos geofísicos han sido discutidos en el contexto de la física de plasmas.

Los plasmas y flujos geofísicos son hallados típicamente en un estado turbulento; sin embargo, en sistemas bidimensionales, los cuales son los de interés en esta tesis, los estados turbulentos vienen acompañados usualmente de estructuras coherentes de grandes escalas tales como flujos zonales y vórtices. En consecuencia, un modelo realista de transporte debe incluir los elementos “estocásticos” de la turbulencia y “deterministas” de las estructuras coherentes de grandes escalas [6].

En principio, el Hamiltoniano $\phi(\psi)$ debe de ser obtenido resolviendo la ecuación (2.7) conocida como la ecuación de Hasegawa-Mima, que describe la evolución de

las ondas de deriva, con las condiciones de frontera adecuadas.

$$[\partial_t + (\vec{z} \times \nabla \phi \cdot \nabla)]q = 0 \quad q = \nabla^2 \phi - \phi + \beta x \quad (2.7)$$

en donde ϕ es el potencial electrostático y $\beta = n'_0/n_0$ es la escala característica del gradiente de densidad. Lamentablemente es una tarea no trivial el encontrar soluciones analíticas con variabilidad espacial y temporal, por esta razón uno se ve forzado a simplificar el modelo del Hamiltoniano. Una manera de hacer esto es linearizando (2.7) (de ahora en adelante nos referiremos únicamente al potencial ϕ ; sin embargo ya se sabe que los resultados para ϕ son aplicables para ψ a menos que se diga explícitamente lo contrario) y modelar ϕ utilizando las eigenfunciones de la ecuación (2.7). En la figura 2.2 se muestra la comparación entre la solución de la ecuación de Hasegawa-Mima (a) y el hamiltoniano (b)

$$\phi = \varphi_0(x) + \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon_j \varphi_j(x) \cos k_j(y - c_j t) \quad (2.8)$$

en donde el término φ_0 de la expansión corresponde a un flujo de corte zonal de equilibrio.

Para un plasma no uniforme, inmerso en un campo magnético y con parámetro β pequeño, se ha predicho la aparición de muchas inestabilidades en ondas con vector \vec{k} en la dirección perpendicular al campo magnético \vec{B} y con frecuencia ω , las cuales son mucho más pequeñas que la frecuencia de Larmor ω_L [17].

El primer paso pasa determinar la forma de ϕ es tomar la mínima cantidad de modos normales que nos puedan dar un comportamiento caótico (no existe mucho interés en estudiar sistemas en equilibrio). Si truncamos la serie (2.8) a el primer modo normal se obtiene

$$\phi = \varphi_0(x) + \varepsilon_1 \varphi_1(x) \cos k_1(y - c_1 t) \quad (2.9)$$

Hay que hacer notar que estamos tratando con partículas de prueba por lo que éstas no interactúan con otras partículas del sistema.

Si ahora hacemos una transformación galileana y nos cambiamos al sistema de referencia de la onda es posible omitir la parte temporal de la ecuación (2.9) y así obtener un sistema totalmente integrable en el cual no se presentará caos. De aquí se puede ver que el mínimo número de modos normales necesarios para que se presenten comportamientos caóticos de las partículas son 2. Si además nos cambiamos al sistema de referencia de la primera onda, la ecuación para ϕ que resulta es:

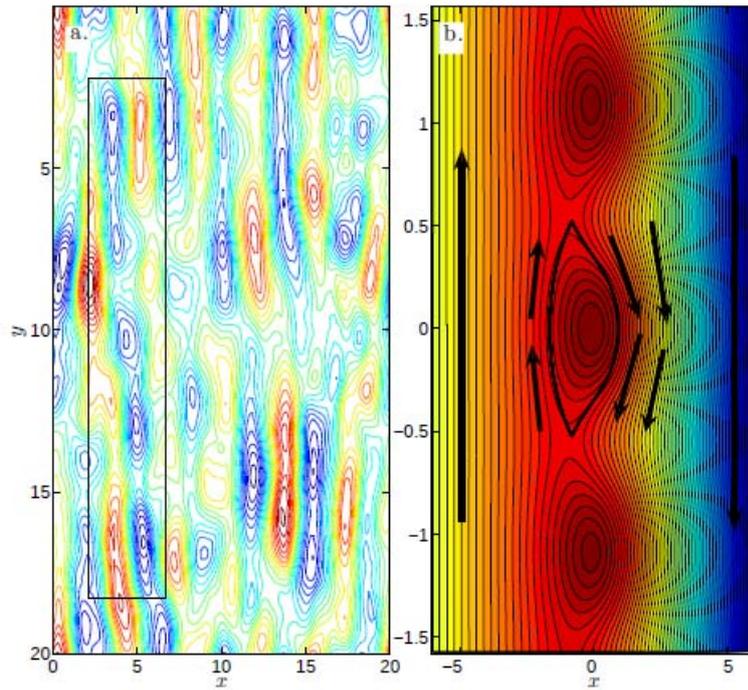


Figura 2.2: En ambas imágenes se muestran los isocontornos del potencial electrostático ϕ . En (a) se muestra a ϕ obtenido a partir de una solución numérica de la ecuación de Hasegawa-Mima. En (b) se muestra ϕ de acuerdo al modelo del hamiltoniano. La línea gruesa cerrada (b) es la separatriz. Las partículas que se encuentran dentro de la separatriz se encuentran atrapadas; las partículas fuera de ella son transportadas por el flujo zonal en la dirección que indican las flechas. El modelo de Hamiltoniano en (b) nos permite hacer una descripción reducida del modelo de Hasegawa-Mima. Imagen tomada de [16].

$$\phi = \varphi_0(x) - \eta x + \varepsilon_1 \varphi_1(x) \cos(k_1 y) + \varepsilon_2 \varphi_2(x) \cos k_2(y - c_2 t) \quad (2.10)$$

Para simplificar y tener un mejor entendimiento del sistema vamos a mapear las coordenadas polares de una sección circular del toro a coordenadas cartesianas como se muestra en la figura 2.3.

De esta manera podemos transformar $r \rightarrow x$ y $\theta \rightarrow y$.

El siguiente paso es establecer las características del flujo zonal de equilibrio. Vamos a suponer ahora que el flujo zonal ya está dado (no es generado por el sistema). Este flujo va a tener la ecuación general

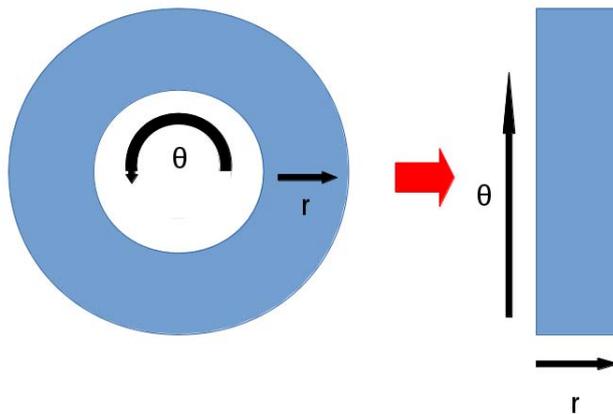


Figura 2.3: Transformación de coordenadas polares a coordenadas cartesianas

$$\vec{u}_0 = u_0(x)\hat{y} = \hat{z} \times \nabla\phi_0 \quad (2.11)$$

En donde u_0 va a ser una distribución localizada

$$u_0(x) = U + \text{sech}^2 x \quad (2.12)$$

O escrito en términos del potencial electrostático:

$$\varphi_0(x) = \tanh x \quad (2.13)$$

Finalmente, motivado por el análisis de estabilidad lineal en [7], se propone como modelo de función de potencial electrostático ϕ una superposición de flujo zonal y dos modos (2.14):

$$\phi = \tanh(x) - \eta x + \varepsilon_1 \text{sech}^2(x) \cos(k_1 y) + \varepsilon_2 \text{sech}^2(x) \cos(k_2 y - \omega t) \quad (2.14)$$

en donde $\eta = c_1 - U$, lo que significa que se va a estudiar el sistema en el sistema de referencia del primer modo de oscilación.

Todas las variables han sido normalizadas a su longitud característica L y a la velocidad V del flujo zonal, por lo que estamos trabajando con magnitudes adimensionales.

Para partículas de alta energía, o para un flujo que cambia relativamente rápido en el espacio, la aproximación de que la partícula tiene radio de Larmor cero puede fallar y es necesario incorporar los efectos de éste.

El siguiente paso es incluir la contribución del radio de Larmor r_L a la función potencial. Para incluir el radio de Larmor se tienen que tomar los campos en la trayectoria circular de la partícula y para ello se promedia sobre el círculo que describe en un ciclo.

$$\frac{dx}{dt} = -\left\langle \frac{\partial \phi}{\partial y} \right\rangle_{\theta}, \quad \frac{dy}{dt} = \left\langle \frac{\partial \phi}{\partial x} \right\rangle_{\theta} \quad (2.15)$$

en donde el promedio sobre el radio de giro $\langle \rangle_{\theta}$ está definido como:

$$\langle \Psi \rangle_{\theta} \equiv \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Psi(x + r_L \cos \theta, y + r_L \sin \theta) d\theta \quad (2.16)$$

Al aplicar la ecuación (2.16) al potencial, expandiendo el coseno de una suma y aplicando propiedades de paridad de las funciones obtenidas podemos definir la siguiente función, la cual tiene que ser resuelta numéricamente.

$$L_{kr_L}(x) = \int_0^{\pi} \tanh(x + r_L \cos \theta) \cos(kr_L \sin \theta) d\theta \quad (2.17)$$

El promedio (2.17) es una buena aproximación siempre y cuando la frecuencia de Larmor sea mucho mayor que las frecuencias del sistema físico, es decir $\omega_L \gg \omega$. El radio de Larmor también está escrito en su forma adimensional $r_L = \hat{r}_L / L$ en donde \hat{r}_L es el radio de Larmor dimensional. El potencial electrostático promediado queda escrito como:

$$\langle \phi \rangle_{\theta} = L_{0r_L}(x) - \eta x + \varepsilon_1 L'_{k_1 r_L}(x) \cos(k_1 y) + \varepsilon_2 L'_{k_2 r_L}(x) \cos(k_2 y - \omega t) \quad (2.18)$$

Finalmente el sistema Hamiltoniano queda escrito de la siguiente manera:

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon_1 k_1 L'_{k_1 r_L}(x) \sin(k_1 y) + \varepsilon_2 k_2 L'_{k_2 r_L}(x) \sin(k_2 y - \omega t) \quad (2.19)$$

$$\frac{dy}{dt} = L'_{0r_L}(x) - \eta + \varepsilon_1 L''_{k_1 r_L}(x) \cos(k_1 y) + \varepsilon_2 L''_{k_2 r_L}(x) \cos(k_2 y - \omega t) \quad (2.20)$$

Los métodos numéricos por los que serán resueltas estas dos ecuaciones serán descritos en el capítulo 4.

Antes de terminar este capítulo es importante reescribir la ecuación del flujo zonal como

$$\langle u_0 \rangle_\theta \equiv \frac{\partial \langle \phi_0 \rangle_\theta}{\partial x} = L'_{0r_L}(x) \quad (2.21)$$

Algunos de los perfiles de flujo zonal se muestran en la figura 2.4, donde se puede notar que para radios de giro suficientemente grandes hay una bifurcación a dos máximos.

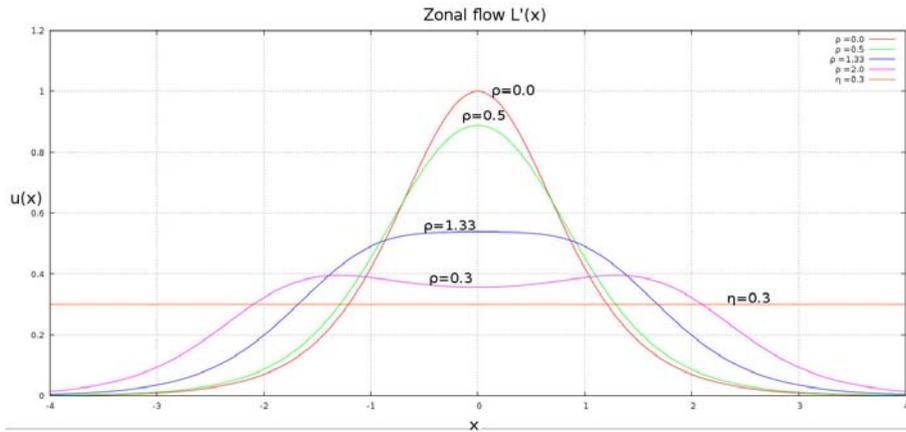


Figura 2.4: Flujo zonal con diferentes radios de Larmor (ρ) y la velocidad $\eta = 0.3$

El radio de Larmor de iones térmicos en plasmas de fusión es típicamente pequeño en comparación con el ancho del flujo zonal; sin embargo, éste no es necesariamente el caso en partículas alfa en reacciones D-T ya que éstas pueden tener radios mayores a L y por lo tanto pueden influir fuertemente en el sistema [22].

2.3. Barreras de transporte

En esta sección vamos a describir el papel de las ondas de deriva en la destrucción de las barreras de transporte en el flujo zonal de cizalla (shear flow).

En general, los Hamiltonianos de un grado de libertad como el (2.6) que incluyen una dependencia no trivial en el tiempo no son integrables y el espacio fase exhibe una compleja mezcla de trayectorias caóticas no integrables. Los sistemas hamiltonianos de espacio fase de dos dimensiones con un grado de libertad y con trayectorias integrables, también llamadas KAM (Kolmogorov-Arnold-Moser), forman barreras de transporte. Así, desde el punto de vista de los sistemas dinámicos, el estudio de la destrucción de las barreras de transporte en flujos bidimensionales e incompresibles

es equivalente a estudiar la transición de los sistemas hamiltonianos al caos. Aquí vamos a utilizar la conexión con los sistemas dinámicos para estudiar la destrucción de las barreras de transporte.

Consideremos ahora el sistema (2.6) y el modelo del potencial ϕ (2.14) con $\varepsilon_2 = 0$. Este sistema es integrable ya que el Hamiltoniano es una constante de movimiento y las partículas de prueba siguen a los contornos $\phi(x, y) = \text{constante}$ tal como se muestra en la figura 2.5.

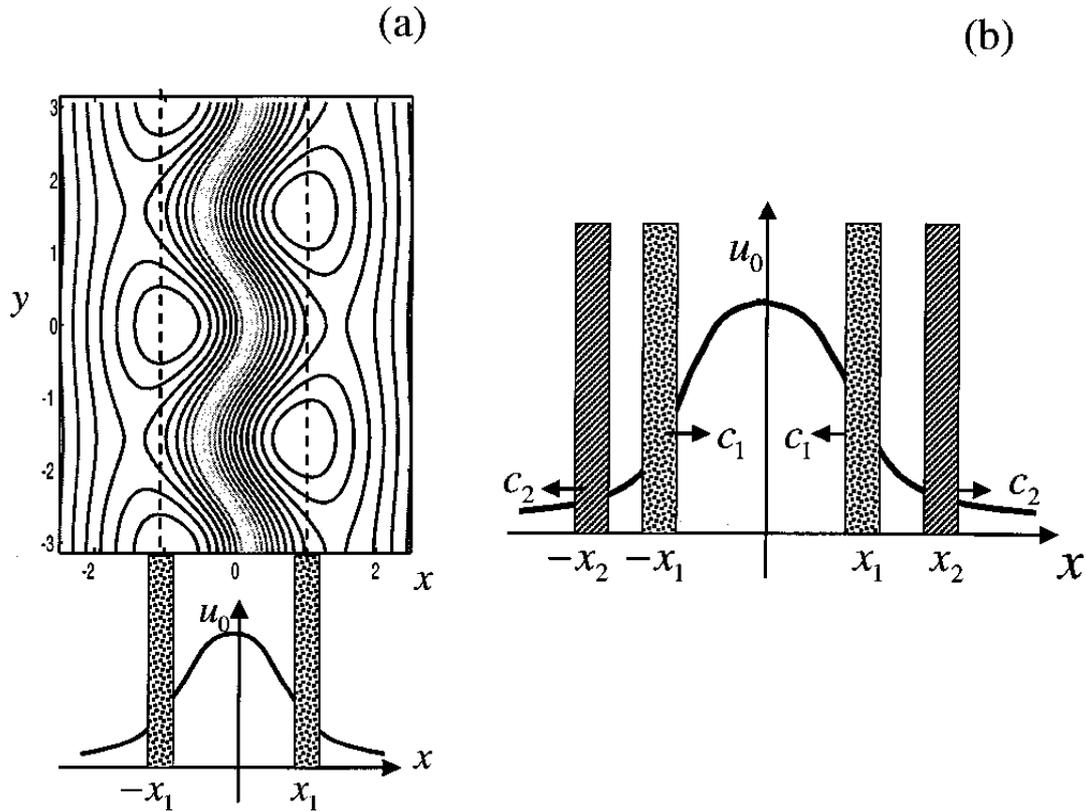


Figura 2.5: En el lado izquierdo (a) se muestra la gráfica de los isocontornos del Hamiltoniano (2.14) con $\varepsilon_2 = 0$; las barras verticales, $x = \pm x_1$, cruzan al flujo zonal en $\text{sech } x_1 = \eta$ creando un par de secuencias de islas o resonancias. En el lado derecho (b) cuando el segundo modo es añadido, un par más de resonancias aparece en el sistema. Imagen obtenida de [6]

En la topología del espacio fase de la figura 2.5(a) se aprecia un jet serpenteante en medio de dos resonancias (o cadenas de islas) formadas en dos puntos críticos $x = \pm x_1$ en donde $\text{sech}(x_1) = \eta$. La razón por la que un sólo modo de oscilación crea dos resonancias se debe a que la velocidad $\vec{E} \times \vec{B}$ del Hamiltoniano no perturbado (2.12) no es monótonamente creciente (también es conocido en la literatura como Hamiltoniano non-twist). La no monotonidad de $\vec{u}_0(x)$ tiene consecuencias impor-

tantes en el transporte y provoca el surgimiento de importantes fenómenos en los sistemas dinámicos incluyendo la invalidación de algunas suposiciones del teorema de KAM y cambios globales en la topología del espacio fase conocidos como *reconexión de separatriz* [6], la cual se refiere al cambio de la estructura de homoclínica a heteroclínica.

Cuando hay un segundo modo con velocidad c_2 otro par de resonancias aparecen en el sistema. Esta situación es esquemáticamente descrita en la figura 2.5(b); cuando las resonancias se superponen, el sistema $\vec{E} \times \vec{B}$ es caótico y las barreras de transporte que se encuentran entre las resonancias superpuestas son destruidas. Debido a que en este problema las resonancias aparecen en parejas existen dos tipos de superposición. Una ocurre cuando las resonancias se superponen del mismo lado del jet, por ejemplo, si las dos resonancias del lado izquierdo en la figura 2.5(b) se superponen entre si y por otro lado las del lado derecho, dejando la barrera o jet del centro intacto; a este tipo de superposición se le llama *caos acotado*. El segundo tipo de superposición ocurre cuando las resonancias del lado izquierdo y derecho se superponen entre si dando lugar a lo que se le conoce como *reconexión de separatriz*.

La *reconexión de separatriz* será el motor principal que definirá la dinámica de las distintas distribuciones de partículas en el sistema. Son estas distribuciones las que nos darán evidencia de la presencia de transporte anómalo superdifusivo. En estos casos el caos se empieza a desarrollar en la separatriz, particularmente en el punto hiperbólico. Los sistemas hamiltonianos no monótonos son más resistentes al caos global ya que tienen una superficie de cizalla nula la cual es la última superficie en romperse cuando hay caos. Esta superficie se encuentra en medio del jet serpenteante de la figura 2.5.

Capítulo 3

Características del transporte de partículas

3.1. Difusión normal

En este capítulo nos centraremos en dar una explicación de lo que es la difusión anómala, ya que como veremos más adelante, se encontrará evidencia de la presencia de ésta en el transporte de las partículas de plasma en la dirección \hat{y} .

La difusión es un proceso de migración o transporte de materia. Las características de dicho transporte pueden estar relacionadas a diferentes propiedades físicas tales como la geometría del espacio, la temperatura, la interacción entre la materia que se difunde, el medio en el que lo está haciendo y fuerzas externas. Para entender el transporte difusivo es conveniente simplificar el problema a sus componentes esenciales y estudiar el movimiento de partículas de prueba en sólo la dirección x . Una de las maneras más comunes de hacer esto es a través de las caminatas aleatorias. Un caminante aleatorio se puede pensar como una partícula puntual que realiza una serie de desplazamientos aleatorios en un espacio y en un tiempo determinados. Vamos a suponer que las partículas parten de el tiempo $t = 0$ en la posición $x = 0$ y ejecutan un caminatas aleatorias de acuerdo a las siguientes reglas [4]:

1. Cada partícula se mueve a la izquierda o a la derecha una vez cada τ segundos una distancia $\delta = \pm\Delta x$.
2. La probabilidad de que la partícula se mueva a la izquierda o a la derecha es $1/2$ en un medio isotrópico (a este tipo de caminata también se le llama caminata aleatoria simple o de Bernoulli). Las partículas "se olvidan" de lo que hicieron en los pasos anteriores, esto es, pasos sucesivos son estadísticamente independientes.

3. El movimiento de cada partícula es independiente de las otras. Las partículas no interactúan entre ellas (partícula de prueba).

Estas tres reglas tienen dos consecuencias importantes. Si escribimos la posición del caminante como:

$$X = \sum_{i=1}^N x_i \quad (3.1)$$

en donde X es una suma de variables aleatorias (lo cual la hace también sea una variable aleatoria), x es el vector que describe el salto y N es el número de saltos dados, entonces la primera consecuencia es que las partículas no van a ningún lado en promedio, es decir el desplazamiento medio es 0. La segunda es que el desplazamiento cuadrático medio es finito.

Si escribimos el número de saltos en función del tiempo utilizando la relación $t = N\tau$, podemos escribir la media y la varianza como $\langle X(t) \rangle = 0$ y $\langle X^2(t) \rangle = 2Dt$ respectivamente, en donde $D = \delta^2/2\tau$ es el coeficiente de difusión. En 3 dimensiones esto puede ser escrito como:

$$\langle R(t) \rangle = 0 \quad \langle R^2(t) \rangle = 2dDt \quad (3.2)$$

en donde $R^2 = X^2 + Y^2 + Z^2$ y d es la dimensión en donde se lleva a cabo la caminata. Este resultado es una de las características de la difusión normal y es consecuencia del teorema de *límite central*. *Grosso modo*, el teorema dice que la distribución de probabilidad que define a una suma de variables aleatorias independientes (en este caso los desplazamientos de las partículas), igualmente distribuidas y con primer y segundo momento finito, se aproxima a una función Gaussiana cuando el número de variables aleatorias que se suman es muy grande.

En la figura 3.1 se muestran ejemplos de caminatas aleatorias en 2 y 3 dimensiones.

Es sencillo demostrar que $\langle X^2(N) \rangle = N\delta^2$. Así podemos observar que

$$\langle X^2(t) \rangle = \frac{t}{\tau} \delta^2 = \frac{\delta^2}{\tau} t = 2 \left(\frac{\delta^2}{2\tau} \right) t \quad (3.3)$$

Nótese que si el tiempo entre saltos consecutivos τ crece, el coeficiente de difusión será más pequeño lo que resulta en una difusión de partículas más lenta. Por otro lado si la distancia recorrida en cada paso δ crece, el coeficiente de difusión será mayor y, en consecuencia, la difusión será más rápida. En la siguiente sección se verá que

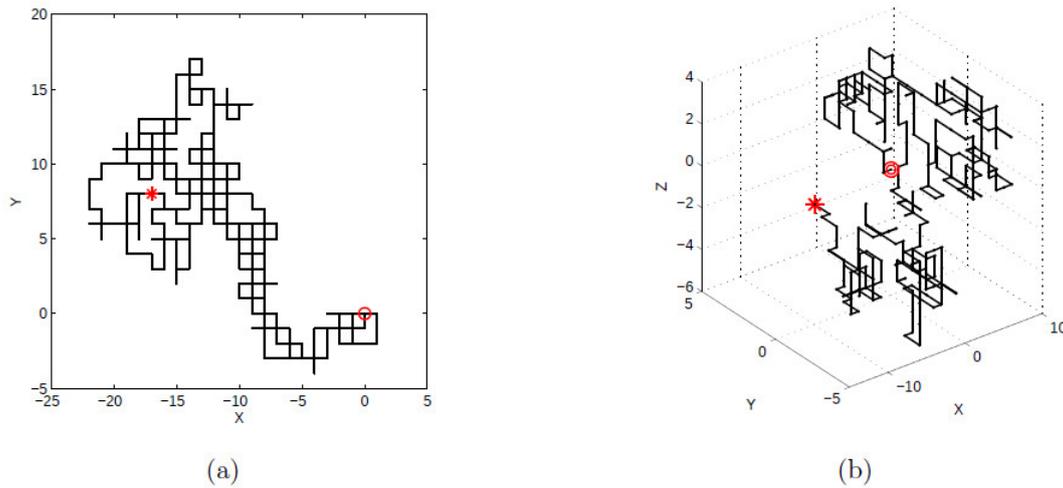


Figura 3.1: Trayectorias de un caminante aleatorio en 2 y 3 dimensiones después 450 y 350 pasos respectivamente. En ambas caminatas, los pasos ocurren sólo entre los puntos adyacentes de una malla cúbica con probabilidad $\frac{1}{2d}$ con d la dimensión del espacio. El círculo corresponde a la posición inicial del caminante, mientras que el asterisco a la posición final. Imagen tomada de [19]

si alguna de estas dos cantidades diverge, se obtendrán fenómenos conocidos como *subdifusión* y *superdifusión*, de los cuales el segundo será un componente central del transporte en este trabajo.

3.2. Difusión anómala

Para entender en qué consiste la difusión anómala es conveniente introducir el concepto de *caminatas aleatorias de tiempo continuo* o CATC [19]).

La teoría de CATC describe el movimiento aleatorio de una partícula asignándole una longitud de desplazamiento x y un tiempo entre un paso y otro sucesivo τ los cuales provienen de dos distribuciones de probabilidad continuas [23].

La primera distribución de probabilidad (distribución de tiempos de espera) define la probabilidad que el caminante de un salto al tiempo t , y es denotada por $\psi(t)$. La variable aleatoria obtenida a través de ψ corresponde al tiempo que transcurre entre dos pasos consecutivos. La segunda distribución (distribución de saltos) define la probabilidad que el caminante haga un salto descrito por el vector \vec{x} , es decir, que el caminante de un salto de magnitud $\|\vec{x}\|$ y en la dirección \hat{x} ; esta distribución es denotada por $\lambda(x)$. Para simplificar el problema, los resultados que se dan a continuación están en una dimensión, de esta manera se puede definir $\langle \tau' s \rangle$ y $\langle x' s \rangle$

(antes $\delta's$) con una magnitud arbitraria de la siguiente manera:

$$\langle x^2(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \lambda(x) dx, \quad \langle \tau \rangle = \int_0^{\infty} \tau \psi(\tau) d\tau \quad (3.4)$$

La difusión anómala surge en sistemas desordenados y/o fuera del equilibrio termodinámico en donde las heterogeneidades del sistema inducen un comportamiento anómalo en el desplazamiento cuadrático medio de las partículas que se difunden en el medio, el cual generalmente toma la siguiente forma:

$$\langle R^2(t) \rangle \propto t^\gamma, \quad \gamma \neq 1 \quad (3.5)$$

En los casos en que $\gamma < 1$ se le llama *subdifusión* y en los casos en los que $\gamma > 1$ se le llama *superdifusión*. Esto implica que algunas de las condiciones para que se cumpla el teorema de límite central pueden fallar. Existen tres razones por las que el teorema puede fallar:

1. Las distribuciones de probabilidad que definen la caminata aleatoria, es decir, las distribuciones ψ y λ resultan libres de escala, también conocidas como distribuciones de colas anchas (no se cumple la regla 1 de la difusión normal).
2. Las distribuciones de probabilidad que definen la caminata aleatoria, es decir, las distribuciones ψ y λ son dependientes entre si.
3. Cuando existen correlaciones de largo alcance entre los pasos del caminante (no se cumple la regla 3 de la difusión normal).

Nos limitaremos a describir la razón 1 ya que a partir de ella podremos llegar a algunos conceptos de interés para este trabajo.

Cuando las distribuciones decaen como una ley de potencias, es decir, como:

$$\lambda(x) \sim |x|^{-\alpha}, \quad \psi(t) \sim t^{-\beta} \quad |x| \gg 1, t \gg 1, N \gg 1 \quad (3.6)$$

Las distribuciones (3.6) resultan libres de escala si los exponentes α y β cumplen que $2 < \alpha < 3$ y $1 < \beta < 2$ (estos resultados sólo son válidos para sistemas en una dimensión), ya que estos valores garantizan que las ecuaciones (3.4) tomen valores infinitos. Los saltos y los tiempos de espera se consideran como variables aleatorias independientes.

La divergencia del segundo momento de las posiciones implica que las magnitudes de los saltos que puede dar una partícula pueden ser de tamaños totalmente arbitrarios y estos pueden acontecer con una probabilidad no despreciable. De manera análoga la divergencia del primer momento del tiempo entre pasos consecutivos puede tener una duración arbitraria con una probabilidad de ocurrir considerable.

En particular en una CATC en un medio isotrópico y unidimensional ocurren *vuelos de Lévy* cuando sólo la distribución de saltos es libre de escala y los saltos son variables aleatorias independientes. De aquí surge el problema de que en la naturaleza no existen saltos infinitos, por lo que es necesario truncar las distribuciones. Para esto consideremos la probabilidad de que el salto de longitud más grande x_c ocurra en N saltos:

$$P_{x_c,t} = N\lambda(x_c) \left(\int_0^{x_c} \lambda(x) dx \right)^{N-1} \quad (3.7)$$

En el límite cuando $N \gg 1$, el máximo de (3.7) ocurre cuando x_c es del orden de $x \sim N^{1/\alpha}$. A partir de esto es posible estimar el desplazamiento cuadrático medio en función del número de saltos como:

$$\langle X_N(t) \rangle^2 \sim N \int_0^{x_c} x^2 \lambda(x) dx \sim N^{\frac{2}{\alpha-1}} \quad (3.8)$$

En la evaluación de la integral (3.8) se tomaron sólo en cuenta las colas de la distribución, es decir, la contribución asociada al decaimiento descrito por la ley de potencias. Escribiendo N en términos de t obtenemos la expresión (3.5):

$$\langle X_N(t) \rangle^2 \sim \left(\frac{t}{\langle \tau \rangle} \right)^{\frac{2}{\alpha-1}}, \quad \frac{2}{\alpha-1} = \gamma > 1 \quad (3.9)$$

Esto convierte a los vuelos de Lévy en un proceso superdifusivo [19].

Siguiendo un procedimiento análogo se puede encontrar que la desviación cuadrática media (3.5) queda escrita como:

$$\langle X_N(t) \rangle^2 \sim t^{\beta-1}, \quad 1 < \beta < 2 \quad (3.10)$$

En la imagen (3.2) se muestra un ejemplo de la diferencia cualitativa entre la difusión normal y la superdifusión.

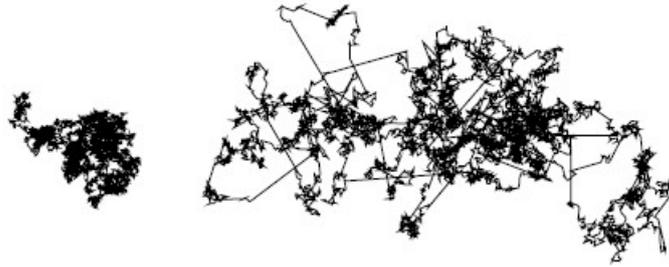


Figura 3.2: Trayectorias de movimiento Browniano (izquierda) y trayectorias de vuelos de Lévy (derecha) con $\gamma = 1.5$ cada una con el mismo número de pasos ($\simeq 7000$). Imagen tomada de [23].

3.3. Estadística de Lévy

En esta sección se describe la teoría matemática que unifica y relaciona los vuelos de Lévy con el movimiento Browniano.

Consideremos un caminante que da saltos con probabilidad $\lambda(\vec{x})$ entre pasos sucesivos. Cuando el desplazamiento medio cuadrático $\langle \|\vec{x}\|^2 \rangle$ por paso es finito entonces la densidad de probabilidad para la posición del caminante después de muchos pasos es Gaussiana. Cuando $\langle \|\vec{x}\|^2 \rangle$ es infinito el proceso aleatorio no presenta longitud característica y el conjunto de sitios visitados por el caminante es un fractal [26]. Este proceso aleatorio es llamado vuelo de Lévy y la función de densidad de probabilidad que gobierna es llamada una *distribución estable de Lévy*.

La idea de la *distribución estable de Lévy* (la cual enunciaremos en un momento) surge justo de la necesidad de Lévy de generalizar el teorema del límite central para incluir la posibilidad de tener distribuciones con momentos infinitos. Él consideró la distribución de sumas de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con momentos infinitos X_i ; en donde el valor de cada X_i puede ser interpretado como un paso del caminante aleatorio. La longitud del paso es tomado de la distribución $\lambda(\vec{x})$. Lévy se preguntó cuándo la distribución de la suma de n pasos $\lambda_n(\vec{x})$ (y algunos factores de escala) sería igual a la distribución de cualquiera de los términos de la suma (n es el número de eventos independientes o intervalos de tiempo. Esto es básicamente la pregunta que se hace cuando uno busca fractales: ¿Cuándo el total (la suma) se parece a una de sus partes?; una de las respuestas a esta pregunta es bien conocida: la suma de gaussianas es una gaussiana. Observemos que (en una dimensión) si la distribución de X_i es:

$$\lambda(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \quad (3.11)$$

La distribución de la suma de X_i es:

$$\lambda_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_i^n X_i = \frac{1}{\sqrt{2n\pi}} e^{-x^2/2} \quad (3.12)$$

así $\lambda(x)$ y $\lambda_n(x)$ tienen la misma forma excepto por un factor de escala. En el espacio de Fourier $\lambda_n(k)$ (en una dimensión) tiene la forma

$$\lambda_n(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda_n(x) e^{ikx} dx = e^{-nk^2/2}. \quad (3.13)$$

Obsérvese que el segundo momento de $\lambda_n(k)$ es $\langle x^2 \rangle = -\partial \lambda_n(k=0) / \partial k^2 = n$. Lévy descubrió que existían otras soluciones tales que $\lambda_n(x)$ tuviera la misma forma que $\lambda(x)$. En el espacio de Fourier esto se ve como

$$\lambda_n(k) = \exp(-\text{constante} \times n|k|^\alpha) \quad 0 < \alpha \leq 2 \quad (3.14)$$

Nótese que en el caso de $\alpha = 2$ se obtiene la Gaussiana y que el segundo momento es finito. Los caminantes aleatorios con varianza infinita son conocidos como *vuelos de Lévy*. Si uno aplica la transformada inversa de Fourier se llega a la ecuación

$$\lambda_n(x) \sim \text{constante} \times \frac{n}{x^{1+\alpha}} \quad (3.15)$$

Es claro que (3.15) diverge cuando $x \rightarrow 0$ por lo que (3.15) no puede estar definida en todos los números reales por lo que es necesario acotarla; a esta cota se le llamaremos x_{\min} . Renombrando el exponente $1 + \alpha$ de (3.15) simplemente como α reescribimos (3.15) como:

$$\lambda_n(x) = \frac{\alpha - 1}{x_{\min}} \left(\frac{x}{x_{\min}} \right)^{-\alpha} \quad 1 < \alpha \leq 3 \quad (3.16)$$

Lo cual la convierte en una función de densidad de probabilidad.

Una forma alternativa de ver el por qué de la restricción en los valores de α es observando los momentos $E[X^m]$ de la distribución $\lambda_n(x)$. Ver la siguiente ecuación:

$$E[X^m] = \int_{x_{\min}}^{\infty} x^m \lambda_n(x) dx = \frac{\alpha - 1}{\alpha - 1 - m} x_{\min}^m, \quad \text{si} \quad \alpha > m + 1 \quad (3.17)$$

Así:

- $1 < \alpha \leq 2$, todos los momentos divergen, es decir, $E[X] = \infty$
- $2 < \alpha \leq 3$, el segundo momento y los mayores divergen, es decir, $E[X^2] = \infty$
- $3 < \alpha \leq m + 1$, todos los momentos mayores e iguales que m divergen, es decir, $E[X^m] = \infty$.

Vemos que para tener distribuciones libres de escala es necesario sumar variables aleatorias que tenegan estas mismas características. Hay que enfatizar que las sumas gobernadas por (3.16) son dominadas por eventos raros e intermitentes.

3.3.1. Vuelos de Lévy truncados

La varianza de un proceso estacionario en un sistema físico es finita, por lo que se espera un comportamiento Gaussiano cuando no existen correlaciones de largo alcance.

En los sistemas físicos es inevitable la presencia de una cota en las distribuciones. Los vuelos de Lévy tienen propiedades que conceptualmente podrían entrar en conflicto con los sistemas físicos. La primer propiedad es la varianza infinita y la segunda es que sólo se tiene una forma analítica para casos muy especiales. Para poder superar esta paradoja y poder explicar nuestros resultados se introduce una variación de los vuelos de Lévy llamado *vuelos de Lévy truncados* (VLT) los cuales tienen la característica de tener varianza finita [21] y [20], lo cual trae naturalmente la consecuencia de una inevitable convergencia a una distribución Gaussiana. Sin embargo, esta convergencia resulta ser bastante lenta. El efecto sobre $\lambda_n(x)$ es una transición del comportamiento de una distribución tipo Lévy a un comportamiento Gaussiano a lo largo del tiempo tal como se muestra en la figura 3.3. La convergencia a una Gaussiana puede ser explicada por medio del análisis de la distribución estable de Lévy [21] y [20] o por el uso del teorema de Berry-Esséen [25]. De [21] también se ve que el tiempo de transición al régimen Gaussiano n_\times es proporcional a la longitud de corte; obsérvese que n_\times crece muy rápido con l .

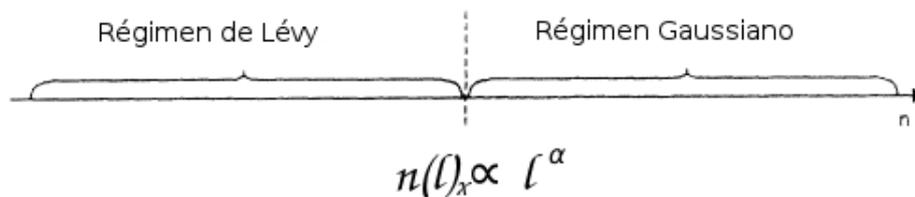


Figura 3.3: Descripción gráfica de la evolución del sistema. Imagen tomada de [21].

Como ya se mencionó, debido a que el segundo momento de la distribución de los VLT es finito se espera una convergencia a la Gaussiana; sin embargo, esta

3.4. MOMENTOS ESTADÍSTICOS DEL DESPLAZAMIENTO DE LAS PARTÍCULAS: ESCALAMIENTO

convergencia puede ser tan lenta que para fines prácticos el proceso puede ser considerado no-Gaussiano, pero sin ser descrito por una distribución estable de Lévy; así, de acuerdo con [21], los VLT se definen como un proceso estocástico con una distribución de probabilidad simétrica:

$$T_1(x) \equiv \begin{cases} 0, & x > l \\ L(x), & -l \leq x \leq l \\ 0, & x < -l \end{cases} \quad (3.18)$$

en donde

$$L(x) \equiv \int_0^\infty \exp(-\text{constante} \times n|k|^\alpha) e^{-ikx} dk \quad 0 < \alpha \leq 2 \quad (3.19)$$

En [20] se presenta una distribución de probabilidad alterna de VLT

$$T_2(x) \equiv \begin{cases} A_- e^{-\lambda|x|} |x|^{-\alpha}, & x < 0 \\ A_+ e^{-\lambda x} x^{-\alpha}, & x \geq 0 \end{cases}, \quad 1 < \alpha \leq 3. \quad (3.20)$$

Las distribuciones T_1 y T_2 tienen la particularidad de que tienen expresiones analíticas.

Los VLT no están limitados a estas distribuciones por lo que pueden ser generados por otras funciones de carácter más complejo. El objetivo de presentar estos dos modelos de VLT es ilustrar la variedad de mecanismos por los que estos pueden ocurrir y así poderlos aplicar para tratar de entender el comportamiento complejo del sistema.

Los VLT nos ayudan a entender y justificar los resultados experimentales obtenidos, ya que poseen la naturaleza de los vuelos de Lévy convencionales pero con la particularidad de que la distribución de las variables aleatorias se encuentra acotada, lo cual le da un carácter más realista. El objetivo de este trabajo no se centra en estudiar la transición de la distribución a una Gaussiana, pero es importante tener en cuenta este fenómeno para poder explicar los resultados.

3.4. Momentos estadísticos del desplazamiento de las partículas: escalamiento temporal

Ya se ha hecho una descripción teórica de la forma en la que las partículas se desplazarán en el sistema. Esto nos da una buena idea de los resultados que esperamos encontrar. Nuestro sistema es una simulación computacional por lo cual se tiene la capacidad de observar y hacer estadística de manera precisa en cada una de las partículas del sistema. Para simplificar la discusión, nos limitaremos a estudiar

el transporte en una dimensión, es decir, en la dirección poloidal y . En el caso particular de este problema de transporte, la dirección y es la dirección de propagación del flujo zonal y las ondas de deriva, y es ortogonal al gradiente de densidad y al campo magnético.

Las partículas siguen trayectorias $y_i(t)$ con $i = 1, 2, \dots, N_p$ en donde N_p es el número total de partículas que van a ser estudiadas. El ensamble $\{y_i(t)\}$ contiene toda la información de la evolución temporal de las partículas en y . A partir de esto podemos definir el ensamble de desplazamientos de partículas $\{\delta y_i(t)\}$ en donde $\delta y_i(t) = y_i(t) - y_i(0)$.

La forma más natural y simple de caracterizar el transporte lagrangiano es utilizando los momentos estadísticos de las partículas. En particular nos interesan el primer momento y la varianza, los cuales corresponden a la media $M(t) = \langle \delta y \rangle$ y a $\sigma^2(t) = \langle [\delta y - \langle \delta y \rangle]^2 \rangle$, en donde $\langle \rangle$ denotan el promedio. En el caso de tener transporte difusivo (como movimiento Browniano), los momentos exhibirán escalamiento lineal asintótico en el tiempo, lo cual permite definir la velocidad de transporte efectiva $V_{\text{eff}} = \lim_{t \rightarrow \infty} M(t)/t$ y la difusión efectiva $D_{\text{eff}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \sigma^2(t)/2t$. Sin embargo, en el caso de transporte no difusivo los momentos presentan escalamiento temporal anómalo de la forma $M \sim t^\chi$ y $\sigma^2 \sim t^\gamma$ en donde $\chi \neq 1$ y $\gamma \neq 1$. Si $0 < \gamma < 1$, el esparcimiento de partículas es más lento que en el caso difusivo y se le denomina subdifusivo. Para el caso $\gamma > 1$ el esparcimiento es más rápido que el caso difusivo y se le denomina superdifusivo. Se hace una clasificación similar para la subadvección $0 < \chi < 1$ y la superadvección $1 < \chi < 2$. Calcular los momentos estadísticos es una tarea sencilla y fácil de implementar, la clave entonces es graficar en log-log la evolución temporal de los momentos cuando $t \rightarrow \infty$ y determinar las pendientes de las líneas.

3.5. Función de distribución de probabilidad de los desplazamientos: escalamiento espacial

La función de densidad de probabilidad (FDP) de los desplazamientos de una partícula $P(\delta y, t)$ contiene toda la información estadística de los desplazamientos más allá del primer y segundo momentos. Numéricamente la FDP se construye a partir del histograma normalizado de las posiciones de las partículas a un tiempo dado. De aquí se espera que si las partículas presentan movimiento Browniano, P tienda asintóticamente a una distribución Gaussiana, debido al teorema del límite central.

Una de las formas más simples de determinar si los desplazamientos de las partículas ya no tienden a una Gaussiana es por medio de decaimiento algebraico (también llamado de ley de potencia o polinomial) o equivalentemente “colas gor-

3.5. FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD DE LOS DESPLAZAMIENTOS: ESCALAMIENTOS

das” en la FDP, es decir, $\lambda \sim \delta y^{-\alpha}$. Cuando este comportamiento es encontrado, el valor del exponente de escalamiento α es un buen indicador de la presencia de intermitencia en el proceso, esto es, que la probabilidad de grandes atrapamientos y grandes vuelos se vuelve no despreciable. En esta tesis nos enfocaremos a detectar los vuelos y no los grandes atrapamientos, o lo que es lo mismo, nos enfocaremos en encontrar la función $\lambda(\delta y)$ y no $\psi(\delta t)$.

Capítulo 4

Métodos numéricos

Con los avances recientes en capacidades computacionales de los procesadores gráficos (GPU's), ha habido un incremento en el interés por parte de la comunidad de científicos computacionales para mejorar simulaciones numéricas que demanden un alto poder computacional. Hoy en día existen dos lenguajes de programación para programar en GPU's: el primero es «Compute Unified Device Architecture» o en sus siglas CUDA, el cual es desarrollado y mantenido por la empresa NVIDIA y el segundo es «Open Computing Language» llamado también OpenCL.

El lenguaje utilizado en este trabajo es CUDA, en particular CUDA C (existen otras versiones de CUDA enfocadas a otros lenguajes como Fortran y Python). Se eligió CUDA C ya que es la versión más completa, desarrollada y mantenida de todas. La plataforma de cálculo en paralelo CUDA C proporciona un conjunto de extensiones de C y C++ que permiten implementar el paralelismo en el procesamiento de tareas y datos. Las principales razones por las que se eligió CUDA entre otras plataformas de cómputo en paralelo (como MPI) fueron dos: la primera es por la capacidad de hacer cómputo en paralelo masivo y la segunda es por el bajo costo monetario que implica adquirir un GPU en comparación con un *cluster* de CPU's.

4.1. Estructura del GPU (hardware)

A continuación daré una descripción de la estructura interna del hardware del GPU. Esto es importante ya que sólo de esta manera se puede sacar el máximo provecho del hardware y el software que ofrece NVIDIA.

Los GPU's de NVIDIA están compuestos de varios *Streaming Multiprocessors* (SM's), cada uno de los cuales consiste en un número de *Scalar Processors* (SP's). También existen tres tipos de memoria de acceso rápido: *memoria compartida*, *memoria constante* y *memoria de textura* las cuales están directamente vinculadas con los SMs y las últimas dos son memorias sólo de lectura. El GPU tiene un cuarto tipo de memoria llamada *memoria global* la cual puede ser accedida por cualquier

SM; ésta memoria también tiene varias particularidades, entre ellas están que puede ser accesada por el CPU, tiene una alta capacidad de memoria (del orden de unos cuantos gigabytes) y un acceso lento a ella.

Desde un punto de vista práctico, las capacidades del GPU en cuanto a poder computacional pueden ser medidas con el número de núcleos-CUDA (*CUDA cores*), el cual nos indica el número total de SP's en el dispositivo. El número de SP's por SM y el número de SM's depende del modelo de GPU con el que se cuente. Cada multiprocesador (SM) se ejecuta en paralelo con los demás y es el responsable de crear, manejar y despachar un grupo de hilos de procesamiento (*threads*) y los SP's. Estos grupos de hilos son llamados bloques y son ejecutados en un SM en subgrupos de 32 hilos (los cuales son llamados *warps* por NVIDIA). Dependiendo del número de núcleos-CUDA por SM, un número distinto de ciclos de reloj será requerido para completar las operaciones en el *warp*. En cuanto todos los hilos dentro de un bloque terminen de realizar sus procesos, un nuevo bloque es inicializado en los hilos desocupados, este proceso se repite hasta el momento en el que todos los bloques hayan sido ejecutados.

4.2. Modelo de programación de CUDA

El modelo de programación de CUDA está construido en base a la estructura interna antes descrita. Un código en CUDA consiste en un conjunto de funciones que pueden ser clasificadas de manera general en dos grupos: funciones que son ejecutadas en el CPU (llamado *host* en CUDA) y funciones ejecutadas en el GPU (*device*); las funciones que se ejecutan en el GPU también son llamadas *kernels*.

Cualquier programa en CUDA empieza su ejecución en el *host*. Cuando un programa invoca un kernel, una retícula (*grid*) de hilos es generada. Esta retícula está compuesta de bloques (*blocks*) y cada bloque está compuesto de hilos como se muestra en la Figura 4.1.

Los parámetros para inicializar la retícula, es decir el número de bloques e hilos, son especificados durante la ejecución del programa. La sintaxis utilizada por CUDA C para la invocación de una función tipo *kernel* es la siguiente:

```
1. NombreKernel <<< tamaño de grid , tamaño de block >>> .
```

estos parámetros definen las dimensiones de la *grid* y del *block* respectivamente. Los bloques en la grid pueden ser organizados en arreglos de una o dos dimensiones, mientras que los hilos pueden ser organizados en arreglos de una, dos o tres dimensiones. Si consideramos el ejemplo de la Figura 1, en él se tienen seis bloques organizados en un arreglo bidimensional y en cada bloque se tiene un arreglo bidimensional de doce hilos. El número de bloques por *grid* y el número de hilos

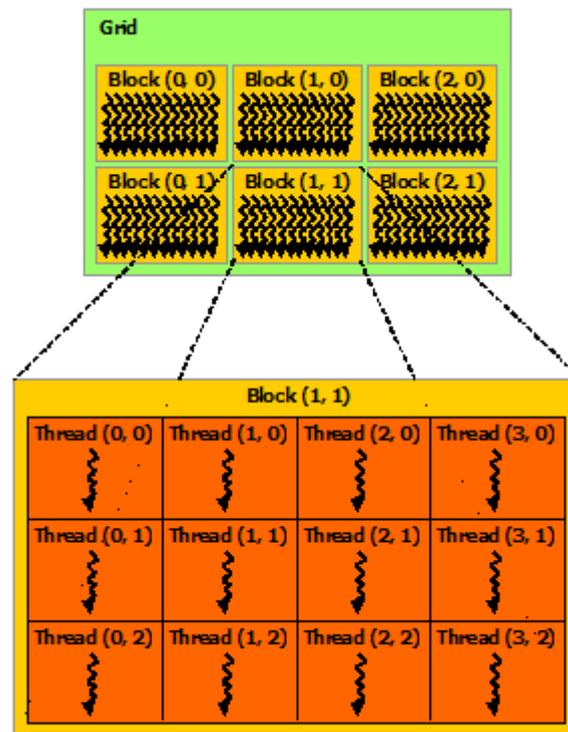


Figura 4.1: *Grid, block's y thread's* de CUDA. Fuente [28]

por bloque pueden variar de acuerdo a las necesidades del programador. El número máximo de bloques por *grid* es 65535 en cada dimensión y el número máximo de hilos por bloque puede variar de acuerdo a la *capacidad de procesamiento* (*compute capability*) del GPU.

Es importante mencionar que el desarrollo y desempeño de un código en CUDA depende fuertemente de la comunicación entre los hilos de procesamiento y el uso de los distintos tipos de memoria disponibles. Los hilos de un bloque pueden comunicarse eficientemente a través de la memoria compartida. Sin embargo, la comunicación entre bloques es mucho más lenta ya que está basada en el uso de memoria global, la cual tiene un acceso más lento; es por esto que se recomienda limitar este tipo de comunicaciones cuando sea posible. También es necesario optimizar los patrones de acceso a la memoria, ya que éstos pueden afectar fuertemente el ancho de banda de la memoria y los procesadores.

4.3. Descripción del programa

En cada experimento se utilizaron 11520 partículas dispuestas en conjuntos de 192 partículas por bloque (60 bloques en total). Este número de partículas permite hacer una buena estadística sin perder mucha velocidad de procesamiento; el número de bloques es el óptimo calculado con la **CUDA GPU Occupancy Calculator** (developer.nvidia.com/cuda-toolkit-31-downloads).

El código que a continuación se va a describir contiene funciones que se ejecutan en el CPU y en GPU. El código se centra en resolver las ecuaciones (4.1) y (4.2) para cada partícula de la simulación,

$$\dot{x} = \varepsilon_1 k_1 L'_{k_1 r_L}(x) \sin(k_1 y) + \varepsilon_2 k_2 L'_{k_2 r_L}(x) \sin(k_2 y - \omega t), \quad (4.1)$$

$$\dot{y} = L'_{0r_L}(x) - \eta + \varepsilon_1 L''_{k_1 r_L}(x) \cos(k_1 y) + \varepsilon_2 L''_{k_2 r_L}(x) \cos(k_2 y - \omega t), \quad (4.2)$$

en donde la función L está definida como la ecuación (4.3). Hay que observar que esta ecuación sólo se puede resolver numéricamente para $r_L > 0$.

$$L_{kr_L}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tanh(x + r_L \cos \theta) \cos(kr_L \sin \theta) d\theta \quad (4.3)$$

Cada una de las funciones numéricas (4.3) contiene 100 puntos en el dominio de x .

La siguiente lista es una síntesis de los pasos que se llevan a cabo en el programa (los métodos numéricos utilizados serán discutidos más adelante):

1. Invocar bibliotecas y declarar parámetros generales (número de partículas, constantes generales, número de ciclos y tamaño de los boques).
2. Declarar las funciones que se utilizarán (*prototypes*).
3. Inicializar constantes y arreglos en memoria (en el CPU y el GPU).
4. Calcular la integral de la ecuación (4.3).

Se resuelve la integral (4.3) y sus derivadas con la regla de *Simpson 3/8* para cada valor de x en el intervalo $[-4, 4]$.

Se calculan los coeficientes necesarios para realizar una interpolación por *splines* cúbicos [24] de las funciones L 's.

5. Calcular el punto hiperbólico del sistema utilizando el método de la *bisección* (en el siguiente capítulo se explicará cuál es el punto hiperbólico).

6. Declarar las condiciones iniciales de todas las partículas como una distribución de probabilidad uniforme alrededor del punto hiperbólico.
7. Copiar los arreglos de memoria correspondientes a los coeficientes de los *splines* y las condiciones iniciales de la memoria *host* (CPU) a la memoria *device* (GPU).
8. Inicializar el *kernel*.

Copiar los datos de la memoria global (*device*) a la memoria compartida. Resolver las ecuaciones (4.1) y (4.2) con el método de Dormand-Prince. Para evaluar las *L*'s se hace una interpolación por *splines* utilizando el método de la *bisección* [24].
Se itera 50 veces este procedimiento hasta resolver un ciclo temporal.
9. Se repite el punto 8 un número total de veces correspondiente al número de ciclos definido en el punto 1.
10. Análisis de datos: se obtienen promedios, varianzas, histogramas.
11. Generar gráficas.

Recuerdese que estamos trabajando con magnitudes adimensionales.

4.4. Métodos numéricos utilizados en la simulación

En esta sección se van a describir brevemente los algoritmos utilizados que requieren un mayor entendimiento.

4.4.1. Regla de Simpson 3/8

La regla de Simpson es un conjunto de métodos para realizar integrales definidas de funciones de forma numérica. En particular aquí se está utilizando una versión estándar 3/8 la cual está basada en interpolación cúbica. La regla es la siguiente,

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{3h}{8} \left[f(a) + 3f\left(\frac{2a+b}{3}\right) + 3f\left(\frac{a+2b}{3}\right) + f(b) \right], \quad (4.4)$$

en donde $b - a = 3h$ El error está dado por

$$E_{Simp} = \left| \frac{h^5}{6480} f^{(4)}(\xi) \right|, \quad (4.5)$$

en donde ξ es un número entre a y b [24]. Hay que recalcar que en esta parte del

procedimiento buscamos una buena precisión en los resultados y no velocidad de procesamiento.

4.4.2. Método de la bisección

El método de bisección es un método para encontrar raíces de funciones. En este caso es utilizado para obtener $s_i(x_0)$, donde $s_i(x)$ es el spline en donde se encuentra el punto x_0 que se necesita evaluar. La idea del método de la bisección es muy simple. Si se quiere encontrar la raíz de la función $s(x)$, se debe saber de antemano que en cierto intervalo la función cruza el cero y por lo tanto cambia de signo. Ahora se evalúa la función en el punto medio del intervalo y se evalúa si cambió de signo. Se descarta el subintervalo en donde el límite del intervalo y el de la evaluación coincidan. Este proceso se repite n – veces hasta llegar a un intervalo de tamaño ϵ en donde se sabe que está la raíz.

Este método garantiza que encuentra la raíz. Si el intervalo contiene más de una raíz, la bisección debe de encontrar una de ellas [24].

Este método se eligió por su simple implementación y porque no requiere grandes requerimientos de memoria.

4.4.3. Interpolación por splines cúbicos

En situaciones en las que se requiere una buena interpolación debido a que no conocemos perfectamente el comportamiento de una función, es conveniente utilizar la interpolación por *splines*, la cual nos asegura continuidad en las derivadas hasta cierto orden y polinomios de fácil evaluación debido a su grado bajo. Los splines cúbicos son los más populares y son los que se utilizan aquí. Estos producen una función interpolada que es continua hasta la segunda derivada. El método de splines tiende a ser más estable que los métodos que interpolan una función utilizando un sólo polinomio, tal como interpolación de Lagrange ya que éstos tienen una posibilidad más alta de no tener oscilaciones fuertes entre los puntos tabulados. Incrementando el orden de la interpolación no necesariamente incrementa la precisión. En este trabajo se implementaron splines cúbicos [24].

4.4.4. Integrador de ecuaciones diferenciales ordinarias: Dormand-Prince

El método para integrar numéricamente el sistema de ecuaciones diferenciales es llamado “Dormand-Prince de orden 4^{to} y 5^{to} fusionados”. Es un método explícito que pertenece a la familia de los Runge-Kutta’s; éste evalúa seis veces la función para calcular las soluciones de cuarto y quinto orden. Los coeficientes de este método fueron escogidos para minimizar el error de la solución de quinto orden. Este método

se encuentra implementado en el software **Matlab** en su famoso paquete **ode45**. El sistema que se va a resolver es del tipo $\dot{y} = f(t, y)$ con $y(t_0) = y_0$. La implementación para avanzar en el tiempo es la siguiente.

$$\begin{aligned}
k_1 &= f(t_n, y_n) \\
k_2 &= f\left(t_n + \frac{2}{9}h, y_n + \frac{2}{9}hk_1\right) \\
k_3 &= f\left(t_n + \frac{3}{9}h, y_n + \frac{1}{12}h(k_1 + 3k_2)\right) \\
k_4 &= f\left(t_n + \frac{5}{9}h, y_n + \frac{1}{324}h(55k_1 - 75k_2 + 200k_3)\right) \\
k_5 &= f\left(t_n + \frac{6}{9}h, y_n + \frac{1}{330}h(83k_1 - 195k_2 + 305k_3 + 27k_4)\right) \\
k_6 &= f\left(t_n + h, y_n + \frac{1}{28}h(-19k_1 + 63k_2 + 4k_3 - 108k_4 + 88k_5)\right) \\
k_7 &= f\left(t_n + h, y_n + \frac{1}{400}h(38k_1 + 240k_3 - 243k_4 + 330k_5 + 36k_6)\right) \\
y_{n+1} &= y_n + h\left(\frac{431}{5000}k_1 + \frac{333}{500}k_3 - \frac{7857}{10000}k_4 + \frac{957}{1000}k_5 + \frac{193}{2000}k_6 - \frac{1}{50}k_7\right)
\end{aligned}$$

Aquí n es el número de iteración y h es el tamaño del paso. El método no está implementado con paso adaptativo ya que esto disminuía el desempeño en el GPU.

4.5. Métodos para el análisis estadístico

Primero se describirán brevemente los métodos estadísticos utilizados para el análisis de los datos y luego la manera en la que fueron aplicados para calcular los resultados. Empezaremos por los procedimientos más engorrosos.

4.5.1. Estimación del parámetro de escalamiento $\hat{\alpha}$

Formalmente, la estimación del parámetro de escalamiento $\hat{\alpha}$ se hace utilizando el ajuste de máxima verosimilitud para datos discretos:

$$\frac{\zeta'(\hat{\alpha}, x_{\min})}{\zeta(\hat{\alpha}, x_{\min})} = -\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln x_i, \quad (4.6)$$

en donde ζ es la función zeta de Hurwitz:

$$\zeta(\alpha, x_{\min}) = \sum_{n=0}^{\infty} (n + x_{\min})^{-\alpha} \quad (4.7)$$

La prima implica la diferenciación con respecto al primer argumento. Utilizaremos símbolos con “gorrito” para representar los valores estimados a partir de los datos; se espera que $\hat{\alpha} \rightarrow \alpha$ cuando $n \rightarrow \infty$. En la práctica se requiere una evaluación numérica para obtener $\hat{\alpha}$, lo cual la hace computacionalmente difícil de ejecutar por lo que en este trabajo se utiliza una aproximación continua del caso discreto

$$\hat{\alpha} \simeq 1 + n \left[\sum_{i=1}^n \ln \frac{x_i}{x_{\min} - \frac{1}{2}} \right]^{-1} \quad (4.8)$$

Las deducciones de las fórmulas (4.6) y (4.8) se encuentran en [9]. En esta misma referencia se analizan las circunstancias óptimas para utilizar (4.8) y se encuentra que el error de ésta fórmula en función de x_{\min} se encuentra por debajo del 1% cuando $x_{\min} \geq 6$. El error también disminuye por debajo del 1% cuando $n \geq 50$. Éstas especificaciones fueron tomadas en consideración en esta tesis.

4.5.2. Estadística de Kolmogorov-Smirnov

La estadística de Kolmogorov-Smirnov (KS) es un método para cuantificar la distancia entre dos distribuciones de probabilidad cuando estas no son gaussianas. El método simplemente busca la distancia entre la FDA de los datos experimentales y la de un modelo o ajuste de esos datos.

$$D = \max_{x \geq x_{\min}} |S(x) - P(x)|, \quad (4.9)$$

en donde $S(x)$ es la FDA de los datos con valores mayores a x_{\min} y $P(x)$ es la FDA para el modelo de ley de potencia que mejor se ajusta a los datos. Es importante recalcar que las FDA's son utilizadas no por que las hipótesis del ajuste sean más válidas, sino por que las fluctuaciones estadísticas de la FDA (función de distribución acumulada) son típicamente más pequeñas que las de la FDP (función de densidad de probabilidad) y por lo tanto el error en el parámetro de escalamiento $\hat{\alpha}$ es más pequeño.

4.5.3. Estimación del parámetro \hat{x}_{\min}

Para estimar el parámetro \hat{x}_{\min} se utiliza el método KS y la ecuación (4.8). El objetivo es encontrar la x_i en donde $i = 1, \dots, n$, cuando n es el tamaño de la muestra de datos, tal que D sea mínima. El procedimiento es el siguiente: primero se genera la FDA $S(x)$, luego se elige una \hat{x} del conjunto, por ejemplo x_1 y con ella se aplica la ecuación (4.8) para generar $\hat{\alpha}_1$, una vez seleccionada una \hat{x}_i y obtenida la $\hat{\alpha}_i$ es posible construir $P(x)$ ($P(X \leq x) = \zeta(\alpha, x_i)/\zeta(\alpha, x_{\min})$) y obtener D_i , este

procedimiento es repetido una vez por cada x_i de la lista por lo que por cada x_i se genera una D_i y finalmente se busca la D_i mínima de la lista y su \hat{x}_i correspondiente. Ésta \hat{x}_i es renombrada como \hat{x}_{\min} . Obsevación: en el procedimiento ya se obtuvo la $\hat{\alpha}$ asociada a \hat{x}_{\min} .

4.5.4. El p_{value} y su estimación

El p_{value} nos ayuda a responder la pregunta: ¿Es el modelo de distribución de ley de potencia un buen modelo para los datos?. Debido a que es posible hacer un ajuste de distribución de ley de potencia a cualquier conjunto de datos, es conveniente determinar si efectivamente los datos siguen esta tendencia. Para obtener el p_{value} se realiza una prueba de calidad-de-ajuste o mejor conocida como “goodness-of-fit” la cual consiste en hacer un procedimiento de remuestreo o “bootstrapping” basado en Monte Carlo [9].

Antes de explicar con más detalle cómo se calcula el p_{value} explicaré un poco mejor qué es lo que representa y para qué sirve.

El p_{value} es una herramienta para descartar modelos y no para admitirlos, es decir, nos puede decir cuando un modelo, tal como la ley de potencia, es probablemente equivocado, pero no nos puede decir cuando es correcto. Es una variable puramente estadística, es una probabilidad, por lo que no se tienen en cuenta consideraciones físicas.

En este trabajo se está investigando si las distribuciones de partículas siguen una ley de potencia, por lo tanto la hipótesis es: los datos generados provienen de una distribución de ley de potencia. Si el p_{value} es grande ($p_{\text{value}} > 0.1$) significa que, siendo cierta la hipótesis, la diferencia entre los datos empíricos y el modelo pueden ser explicados en términos de fluctuaciones estadísticas. Por el contrario, si el $p_{\text{value}} \simeq 0$, ello indicaría que, siendo cierta la hipótesis, era muy difícil que el modelo se ajustara a los datos. En este sentido podría haber otro modelo que sea más apropiado para ajustarse a los datos. Para este trabajo se considera que el modelo no es aceptable si el $p_{\text{value}} \leq 0.1$, éste valor es modificable y depende del criterio de la persona (algunas personas utilizan $p_{\text{value}} \leq 0.05$, pero en mi opinión se podrían admitir más modelos que tienen baja probabilidad de satisfacer la hipótesis).

Es importante recalcar que si el p_{value} es alto no significa que la hipótesis es correcta. Existen dos razones por las que esto sucede. La primera es que pueden existir otras distribuciones igual o mejor a los datos (en realidad siempre se puede encontrar una distribución que se ajuste mejor a los datos) y en estos casos puede ser necesario someter los datos a otras pruebas y tener criterio físico. La segunda es que el p_{value} depende implícitamente de la cantidad de datos observados; si se está trabajando con pocos datos el efecto de las fluctuaciones estadísticas puede ser mayor y es posible encontrar p_{value} 's altos por accidente.

El algoritmo para calcular el p_{value} se basa en generar conjuntos de datos sintéticos y compararlos con el original. El procedimiento es el siguiente:

1. Calcular el \hat{x}_{\min} y $\hat{\alpha}$ para el conjunto de datos original.
2. Calcular KS para los datos originales. Llamemosle KS_d .
3. Llamemos n_1 al número de partículas localizadas por debajo de \hat{x}_{\min} y n_2 al resto ($n_2 = n - n_1$).
4. Inicializar un contador $P = 0$.
5. Realizar el siguiente procedimiento M veces (remuestreo):
 - Simular con Monte Carlo n_1 valores de una distribución uniforme $U(1, \hat{x}_{\min})$ y n_2 valores de una distribución de ley de potencia con parámetros \hat{x}_{\min} y $\hat{\alpha}$.
 - Obtener KS de la muestra sintética (KS mínima). Llamémosle KS_{sim} .
 - Si $KS_d > KS_{\text{sim}}$ entonces $P = P + 1$
6. $p_{\text{value}} = P/M$.

¿A qué nos referimos con “Realizar el siguiente procedimiento M veces”? Una regla empírica basada en el peor desempeño esperado del método es la siguiente: si queremos que el p_{value} tenga una precisión de q decimales, se deben generar $\frac{1}{4}\epsilon^{-2}$ muestras en donde $\epsilon = 10^{-q}$. En este caso trabajamos con una precisión de 2 cifras decimales lo que conlleva hacer $M = 2500$ muestras.

Hay que mencionar que este algoritmo es computacionalmente costoso ya que para generar los números aleatorios de la ley de potencia hay que invertir numéricamente la FDA discreta. Por otro lado, si $\hat{\alpha} \leq 2$ la media y la varianza divergen y si $\hat{\alpha} \leq 3$ la varianza diverge por lo que en cualquiera de los dos casos la probabilidad de obtener número grandes es alta. Es por esto que este proceso fue corrido en paralelo en 4 CPU's.

4.5.5. Prueba del cociente de verosimilitud

Si se tienen dos FDP que se consideran aptas para ajustarse a los datos, es conveniente tener un método para poder saber cuál de ellas es mejor. La prueba del cociente de verosimilitud (likelihood ratio test en inglés) sirve para determinar cuál FDP se ajusta mejor a los datos. La que tenga mayor “verosimilitud” es la mejor distribución. Las “verosimilitudes” de las FDP $p_1(x_i)$ y $p_2(x_i)$ son:

$$L_1 = \prod_{i=1}^n p_1(x_i) \quad L_2 = \prod_{i=1}^n p_2(x_i) \quad (4.10)$$

Y el cociente de verosimilitud es:

$$R = \frac{L_1}{L_2} = \prod_{i=1}^n \frac{p_1(x_i)}{p_2(x_i)} \quad (4.11)$$

En la práctica se utiliza más el logaritmo de R :

$$\mathfrak{R} = \ln R = \sum_{i=1}^n [\ln p_1(x_i) - \ln p_2(x_i)] \quad (4.12)$$

Así el signo de \mathfrak{R} define cuál de las FDP es más apropiada. En éste trabajo $p_1(x) \sim x^{-\alpha}$ y $p_2(x) \sim e^{-\lambda x}$ por lo que si $\mathfrak{R} > 0$ se favorece la ley de potencia. Hay que remarcar que \mathfrak{R} sólo es un indicador de cuál de las dos distribuciones es mejor, no nos indica si las FDP propuesta son buenos ajustes para los datos. Para mayor información de cómo utilizar \mathfrak{R} ver [9].

4.5.6. Estimación de otros resultados

El tamaño de la muestra de datos n se refiere a la cantidad de partículas que el usuario seleccionó para ser analizada y n_{cola} se refiere a la cantidad de partículas que hay en el subconjunto de la muestra que satisfacen que las posiciones de ellas se encuentran en $x \geq \hat{x}_{\min}$.

El exponente advectivo χ y el difusivo γ son calculados obteniendo la pendiente de un ajuste lineal de la distribución de los logaritmos del desplazamiento promedio y la varianza de las partículas respectivamente con respecto a su posición inicial.

4.5.7. Estimación de errores

el error estándar de la estimación de $\hat{\alpha}$ es el siguiente:

$$\sigma = \frac{\hat{\alpha} - 1}{\sqrt{n}} + O(1/n) \quad (4.13)$$

En donde la corrección de orden alto es positiva. El error estándar de \hat{x}_{\min} utilizamos el mismo algoritmo para obtener el p_{value} y le añadimos la cálculo de la desviación standard de todas las x_{\min} simuladas. El valor obtenido es redondeado a su entero más cercano.

El error estándar en n_{cola} es obtenido a partir del error en \hat{x}_{\min} . Se cuenta el número de partículas dentro del rango de incertidumbre de \hat{x}_{\min} y se divide entre 2.

4.5.8. Discusión de los métodos utilizados

Es normal hacerse la pregunta ¿y por qué utilizar métodos tan raros y engorrosos para todo esto?. La forma más sencilla y directa de poner a prueba la hipótesis de que los datos generados provienen de una distribución de ley de potencia es por medio del aspecto visual de los datos. Este procedimiento puede ser engañoso ya que existen otro tipo de distribuciones tal como la exponencial y la log-normal, las cuales pueden ser muy similares visualmente a la ley de potencia en la escala log-log.

Otra forma tradicional pero mal utilizada de buscar leyes de potencia es utilizando el método de regresión lineal (mínimos cuadrados). Este método es utilizado porque la ley de potencia $p(x) \sim x^{-\alpha}$ implica una forma lineal en escala log-log:

$$\log p(x) = -\alpha \log x + c \quad (4.14)$$

Ciertamente la regresión lineal podría simplificarlos mucho la obtención de $\hat{\alpha}$ y su respectivo coeficiente de determinación r^2 (el cual comúnmente es utilizado como medida de error), además de que ésta se encuentra implementada en casi cualquier paquete computacional para hacer estadística; sin embargo, en muchos casos y en particular en éste, es erróneo utilizarla. Existen diversos problemas con la regresión lineal. El primero es que el cálculo de la pendiente de (4.14) es susceptible de errores sistemáticos potencialmente grandes. Segundo, los errores son difíciles de estimar por que no pueden ser descritos por las fórmulas comunes de regresión lineal ya que éstas están basadas en suposiciones que no aplican en este caso. Tercero, en general los ajustes obtenidos a partir de métodos de regresión no satisfacen los requerimientos básicos de las distribuciones de probabilidad tal como la normalización y por ende no pueden ser correctos.

La fórmula ordinaria para el cálculo del error estándar en la pendiente de la línea obtenida por regresión lineal es correcto cuando las condiciones de la regresión lineal se cumplen; éstas incluyen ruido Gaussiano independiente en la variable dependiente en cada valor de la variable independiente. Cuando se hace un ajuste a un histograma de la FDP, el ruido en la frecuencia es Gaussiano e independiente, por lo que el ruido en los logaritmos de la frecuencia no puede ser Gaussiano. Para que $\ln p(x)$ tuviera ruido Gaussiano, $p(x)$ tendría que tener fluctuaciones de tipo log-normal. Es por esto que la fórmula del error no es aplicable en este caso.

El coeficiente de determinación r^2 es muchas veces utilizado como una medida del error del ajuste lineal, pero desafortunadamente éste no puede ser tomado como evidencia que favorezca el modelo de ley de potencia. Algunas distribuciones como la log-normal pueden aproximar una ley de potencia lo que resulta en un r^2 grande. Aún cuando un modelo se ajusta pobremente, éste puede influir en una fracción significativa de la varianza por lo que también se obtiene un r^2 alto. El coeficiente de determinación es un valor informativo pero la probabilidad de que éste detecte

acertadamente una violación a nuestra hipótesis es baja; por esto se dice que r^2 tiene poco *poder* para poner a prueba una hipótesis.

Para más información ver [9].

Todos los métodos y procedimientos de esta sección (con excepción del cálculo de χ y γ) vienen implementados en el paquete **powerLaw** de **R**. Para más información de cómo utilizar el software **powerLaw** viste: tuvalu.santafe.edu/~aaronc/powerlaws y github.com/csgillespie/powerLaw.

Capítulo 5

Resultados

Se realizaron dos ensambles de experimentos numéricos: un ensamble a tiempos cortos y un ensamble a tiempos largos. Las características de los dos ensambles son exactamente las mismas excepto por el tiempo de simulación. Las partículas que son estudiadas son aquellas que pasaron por un proceso de filtrado de vuelos de Lévy, esto es, un filtrado de partículas que asegura que las partículas que se analizaron presentaron vuelos de Lévy, en particular “trayectoria de vuelos atrapables” (conocidos en inglés como sticky-flights) y no partículas que siguieron al flujo zonal o que se quedaron permanentemente atrapadas en un eddy.

En todas la tablas, la primera columna indica la región del espacio en la que se realizó el análisis de la distribución (en general las partículas del sistema completo se distribuyen en dos subdistribuciones separadas por una distancia y).

En la segunda columna se encuentra el número del experimento realizado. La numeración coincide en los dos ensambles, es decir, el experimento 1 en el ensamble de tiempos largos tiene los mismos parámetros que el experimento 1 en el ensamble de tiempos cortos.

El ensamble de experimentos a tiempos largos consistió en experimentos de 11520 partículas cada uno de 5000 ciclos (unidades de tiempo), los parámetros utilizados en cada experimento ε_1 , ε_2 , ρ y η se encuentran especificados en la tablas 5.5, 5.6, 5.7 y 5.8, los parámetros k_1 y k_2 tienen el valor de 1 en todos los experimentos. Asimismo en estas tablas se encuentran los exponentes χ y γ hallados. El símbolo “-” indica la ausencia de datos. Las condiciones iniciales de las partículas se encuentran distribuidas de forma uniforme dentro de un círculo de radio 0.1 centrado en el punto hiperbólico. El punto hiperbólico satisface la condición $v_x = L'_{0r_L}(x) = \eta$.

De manera análoga las tablas 5.1, 5.2, 5.3 y 5.4 contienen los parámetros y resultados obtenidos para el ensamble de experimentos a tiempos cortos.

Las tablas 5.9, 5.10, 5.11 y 5.12 contienen un resumen de los datos de las tablas del apéndice B.

El proceso para determinar la FDP que mejor se ajusta a los datos es el siguiente:

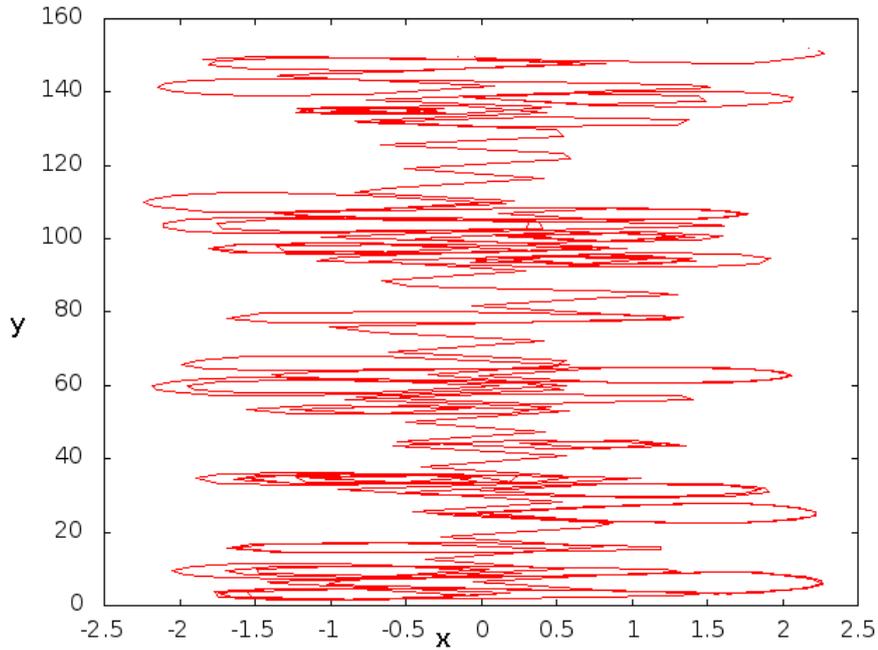


Figura 5.1: Aquí se presenta una trayectoria de una partícula que presenta desplazamientos de tipo vuelo pegajoso. Se puede ver que la partícula alterna de forma impredecible entre estar atrapada en los vórtices de $\vec{E} \times \vec{B}$ y las corrientes del flujo zonal

(1) Si el parámetro de escalamiento cumple que $1 < \hat{\alpha} \leq 3$ y el $p_{\text{value}}(\text{Lévy}) > 0.1$ entonces se concluye que se tiene una distribución estable de Lévy. (2) En el caso de que el modelo de distribución estable de Lévy no sea apropiado, se analiza si el $p_{\text{value}}(\text{Exp}) > 0.1$; si es así, entonces la distribución de partículas se ajusta a una distribución exponencial. (3) Si no se tiene un modelo exponencial y $1 < \hat{\alpha} \leq 3$, entonces se aplica la prueba del cociente de verosimilitud \mathfrak{R} para la distribución estable de Lévy y la exponencial. Obsérvese que si $\hat{\alpha} > 3$ no tiene sentido obtener \mathfrak{R} por que ya se sabe que la ley de potencia es un modelo malo (no hay vuelos de Lévy) (4). Si no se satisfacen las condiciones anteriores se considera que se tiene una distribución de VLT.

Las distribuciones marcadas con asterisco (*) son FDP que fueron determinadas con el procedimiento anterior y que por lo tanto se ajustan “bien” a los datos; sin embargo, el proceso físico por el cual surgieron no ha sido bien entendido. Estos casos serán discutidos en el siguiente capítulo.

Heteroclínica (tiempo corto)							
Región	Exp	ε_1	ε_2	r_L	η	χ	γ
Superior	1	0.3	0.05	0	0.38	1.05	2.07
	2	0.3	0.2	0	0.38	1.16	2.26
	3	0.3	0.2	0.05	0.38	1.16	2.26
	4	0.3	0.2	0.5	0.38	1.06	2.09
	5	0.3	0.2	1	0.38	0.98	1.85
	6	0.3	0.2	1.33	0.38	1.21	2.10
	7	0.3	0.2	2	0.37	—	—

Tabla 5.1

Heteroclínica (tiempo corto)							
Región	Exp	ε_1	ε_2	r_L	η	χ	γ
Inferior	1	0.3	0.05	0	0.38	1.05	2.07
	2	0.3	0.2	0	0.38	—	—
	3	0.3	0.2	0.05	0.38	—	—
	4	0.3	0.2	0.5	0.38	0.97	1.96
	5	0.3	0.2	1	0.38	0.99	2.0
	6	0.3	0.2	1.33	0.38	1.0	2.01
	7	0.3	0.2	2	0.37	1.03	2.30

Tabla 5.2

Homoclínica (tiempo corto)							
Región	Exp	ε_1	ε_2	r_L	η	χ	γ
Superior	8	1	0.05	0	0.38	0.90	1.77
	9	1	0.9	0	0.38	1.15	2.20
	10	1	0.9	0.05	0.38	1.15	2.20
	11	1	0.9	0.5	0.38	1.20	2.27
	12	1	0.9	1	0.38	0.87	1.67
	13	1	0.9	1.33	0.38	—	—
	14	1	0.9	2	0.37	—	—

Tabla 5.3

Homoclínica (tiempo corto)							
Región	Exp	ε_1	ε_2	r_L	η	χ	γ
Inferior	8	1	0.05	0	0.38	0.98	1.97
	9	1	0.9	0	0.38	0.94	1.89
	10	1	0.9	0.05	0.38	0.93	1.88
	11	1	0.9	0.5	0.38	0.92	1.86
	12	1	0.9	1	0.38	0.91	1.85
	13	1	0.9	1.33	0.38	0.88	1.78
	14	1	0.9	2	0.37	0.98	2.01

Tabla 5.4

Heteroclínica (tiempo largo)							
Región	Exp	ε_1	ε_2	r_L	η	χ	γ
Superior	1	0.3	0.05	0	0.38	1.06	2.07
	2	0.3	0.2	0	0.38	1.41	2.67
	3	0.3	0.2	0.05	0.38	1.16	2.22
	4	0.3	0.2	0.5	0.38	1.11	2.09
	5	0.3	0.2	1	0.38	1.3	2.49
	6	0.3	0.2	1.33	0.38	1.56	2.71
	7	0.3	0.2	2	0.37	1.04	2.09

Tabla 5.5

Heteroclínica (tiempo largo)							
Región	Exp	ε_1	ε_2	r_L	η	χ	γ
Inferior	1	0.3	0.05	0	0.38	1.0	2.0
	2	0.3	0.2	0	0.38	—	—
	3	0.3	0.2	0.05	0.38	1.0	2.0
	4	0.3	0.2	0.5	0.38	1.0	2.0
	5	0.3	0.2	1	0.38	1.0	2.02
	6	0.3	0.2	1.33	0.38	1.0	2.0
	7	0.3	0.2	2	0.37	1.06	2.18

Tabla 5.6

Homoclínica (tiempo largo)							
Región	Exp	ε_1	ε_2	r_L	η	χ	γ
Superior	8	1	0.05	0	0.38	0.95	1.88
	9	1	0.9	0	0.38	1.19	2.19
	10	1	0.9	0.05	0.38	1.19	2.19
	11	1	0.9	0.5	0.38	1.27	2.22
	12	1	0.9	1	0.38	1.02	1.69
	13	1	0.9	1.33	0.38	0.90	1.77
	14	1	0.9	2	0.37	—	—

Tabla 5.7

Homoclínica (tiempo largo)							
Región	Exp	ε_1	ε_2	r_L	η	χ	γ
Inferior	8	1	0.05	0	0.38	1.01	2.02
	9	1	0.9	0	0.38	1.19	2.19
	10	1	0.9	0.05	0.38	1.01	2.01
	11	1	0.9	0.5	0.38	1.01	2.01
	12	1	0.9	1	0.38	1.01	2.02
	13	1	0.9	1.33	0.38	1.02	2.04
	14	1	0.9	2	0.37	0.99	2.0

Tabla 5.8

Heteroclínica: superior									
Exp	Tiempos cortos					Tiempos largos			
	$\hat{\alpha}$	p_{value} (Lévy)	p_{value} (Exp)	Modelo		$\hat{\alpha}$	p_{value} (Lévy)	p_{value} (Exp)	Modelo
1	3.3(5)	0.61	0.05	Potencia	\Rightarrow	9(3)	0.63	0.08	VLT
2	3.7(4)	0.0	0.14	Exp		6.1(8)	0.04	0.26	Exp
3	4.2(6)	0.50	0.08	VLT		7.6(8)	0.47	0.79	Exp
4	2.6(2)	0.74	0.78	Potencia		5(2)	0.46	0.36	Exp
5	2.3(3)	0.81	0.0	Potencia		5(2)	0.48	0.09	VLT
6	1.6(1)	0.42	0.24	Potencia		3.2(2)	0.05	—	VLT
7	—	—	—	—		1.53(4)	0.0	0.25	Exp

Tabla 5.9

Heteroclínica: inferior										
Exp	Tiempos cortos					Tiempos largos				
	$\hat{\alpha}$	p_{value} (Lévy)	p_{value} (Exp)	Modelo		$\hat{\alpha}$	p_{value} (Lévy)	p_{value} (Exp)	Modelo	
1	2.9(1)	0.29	0.64	Potencia	⇒	7(2)	0.51	0.10	VLT	
2	—	—	—	—		—	—	—	—	—
3	—	—	—	—		5(2)	0.23	0.15	Exp	
4	1.68(9)	0.36	0.07	Potencia		7(2)	0.76	0.90	Exp	
5	3(1)	0.93	0.61	Potencia		5(1)	0.65	0.25	Exp	
6	1.58(9)	0.19	0.45	Potencia		5(2)	0.86	0.38	Exp	
7	2.0(2)	0.69	0.90	Potencia		2(1)	0.0	0.31	Exp	
7	—	—	—	—		1.9(1)	0.0	0.0	Potencia	

Tabla 5.10

Homoclínica: superior									
Exp	Tiempos cortos					Tiempos largos			
	$\hat{\alpha}$	p_{value} (Lévy)	p_{value} (Exp)	Modelo		$\hat{\alpha}$	p_{value} (Lévy)	p_{value} (Exp)	Modelo
8	6.8(1)	0.28	0.77	Exp	⇒	6(1)	0.89	0.45	Exp
9	1.56(2)	0.0	0.50	Exp		2.4(2)	0.01	0.38	Exp
10	7(3)	0.85	0.45	Exp		2.02(9)	0.0	0.04	Potencia*
11	7(2)	0.74	0.49	Exp		1.9(1)	0.0	0.30	Exp
12	4(1)	0.40	0.30	Exp		7(3)	0.47	0.17	Exp
13	—	—	—	—		2.4(5)	0.26	0.11	Potencia
14	—	—	—	—		—	—	—	—

Tabla 5.11

Homoclínica: inferior									
Exp	Tiempos cortos					Tiempos largos			
	$\hat{\alpha}$	p_{value} (Lévy)	p_{value} (Exp)	Modelo		$\hat{\alpha}$	p_{value} (Lévy)	p_{value} (Exp)	Modelo
8	1.55(5)	0.0	0.36	Exp	⇒	2.5(2)	0.13	0.09	Potencia*
9	2.0(1)	0.0	0.40	Exp		9(3)	0.01	0.38	Exp
10	12(4)	0.94	0.96	Exp		5(2)	0.0	0.61	Exp
11	5(3)	0.33	0.50	Exp		2.1(2)	0.0	0.46	Exp
12	5(2)	0.69	0.33	Exp		10(3)	0.47	0.04	VLT*
13	3(1)	0.30	0.74	Exp		5(2)	0.26	0.10	VLT*
14	2.36(4)	0.0	0.62	Exp		5(2)	0.40	0.04	VLT*

Tabla 5.12

Capítulo 6

Análisis de resultados

Como es sabido, la dinámica de perturbaciones que dependen del tiempo puede ser representada por mapeos de Poincaré, en donde las curvas integrables se muestran como curvas unidimensionales bien definidas, mientras que las órbitas caóticas se propagan aleatoriamente en un dominio bidimensional.

De [22] se sabe que para r_L y ε_2 pequeños, la superficie de cizalla nula es una curva unidimensional bien definida que actúa como una barrera de transporte central. Cuando ε_2 aumenta, la superficie de cizalla nula se vuelve estocástica y deja de ser una curva bien definida, sin embargo, la barrera de transporte central aún puede evitar el cruce de partículas. Finalmente para ε_2 grande hay caos global, lo que indica que las barreras de transporte fueron destruidas. Si el radio de Larmor aumenta las barreras de transporte pueden ser restauradas.

Ahora analizaremos la consecuencia del transporte caótico en el sistema, en particular analizaremos el escalamiento temporal (χ y γ) y el escalamiento espacial α .

La primera observación que me gustaría hacer es que las partículas presentan comportamientos colectivos distintos e inesperados por lo que para dar información confiable de la dinámica del sistema es necesario especificar el tiempo y la región del espacio en la que se está haciendo el análisis.

Hay que recordar que nuestro sistema presenta caos determinista y que en principio las trayectorias de las partículas se encuentran bien definidas o equivalentemente, no son aleatorias. Sin embargo, la impredecibilidad de la trayectoria de las partículas hace que este sistema pueda ser analizado macroscópicamente como un conjunto de partículas que se mueven aleatoriamente. Por esta razón, para analizar el comportamiento colectivo de las partículas es preferible hacer un estudio estadístico de éstas.

Para la estadística se utilizaron ensambles de 11520 partículas y se integraron

las ecuaciones de movimiento para cada una de ellas. Las condiciones iniciales de las partículas se encuentran en un punto hiperbólico del Hamiltoniano. Debido a que estamos utilizando partículas de prueba, éstas no interactúan entre sí ni interactúan con la onda de deriva ϕ .

Hay que recordar que se realizaron dos ensambles de experimentos, una para tiempos de simulación largos y otro para cortos.

6.1. Evolución del sistema

Esperamos encontrar dos tipos principales de distribuciones: distribuciones estables de Lévy y Gaussianas ya que estos dos tipos de distribuciones representan distribuciones “límites”. Esto significa que las distribuciones de las partículas pueden ser complejas al principio (tiempos cortos), pero éstas tenderán a convertirse en una o la otra. Los mecanismos por los cuales las distribuciones tienden a una o la otra pueden ser muy diversos y complejos.

Las características de la distribución estable de Lévy han sido descritas anteriormente, por lo que sólo cabe resaltar que el sistema se está estudiando con una simulación computacional y por lo tanto la varianza de cualquier distribución será finita; por lo que en principio es imposible observar distribuciones estables de Lévy en el sistema. En la práctica lo que ocurre es que cuando surgen distribuciones estables de Lévy (o al menos buenas aproximaciones de ella), éstas tienden a convertirse en Gaussianas. El proceso por el cual una distribución estable de Lévy se convierte en Gaussiana es explicado por medio de las distribuciones de VLT.

No es claro cuál modelo de VLT es el que describe mejor a la transición de la distribución (aquí se presentan dos, pero es obvio que puede haber más). Esto se debe a que existen muchos modelos de VLT y cada uno de ellos tiene propiedades que son congruentes con ciertas características del sistema. Por ejemplo, la distribución $T_1(x)$ (ecuación (3.18)) explica la transición de las distribuciones por medio del hecho de que el dominio del sistema es finito y la distribución $T_2(x)$ (ecuación 3.20) sugiere que las distribuciones pueden contener partículas provenientes de distintas regiones del sistema las cuales pueden ser caóticas o no caóticas. Dada la complejidad del sistema, este modelo no puede ser descartado.

La teoría de los VLT indica que el proceso por el cual una distribución estable de Lévy se convierte en una Gaussiana debe ser el siguiente:

$$\text{Lévy} \rightarrow \text{VLT} \rightarrow \text{Exp} \rightarrow \text{Gauss} \quad (6.1)$$

Este proceso es congruente con varios de nuestros resultados. Hay que recalcar que en la práctica hacemos estadística para ajustar la FDP a una ley exponencial (Exp) y no directamente a la Gaussiana. Esto es por dos razones.

La primera es que el límite Gaussiano puede ocurrir a tiempos “largos”, y con largos uno quiere decir inciertos. Es preferible entonces no buscar directamente la distribución Gaussiana, si no buscar indicios de que la transición del régimen de distribuciones de colas largas (distribución estable de Lévy) a colas cortas ya está ocurriendo. El indicador de que la FDP se encuentra en el régimen de distribuciones de cola corta es la aparición de colas exponenciales. Esto es, por que la definición de que una FDP arbitraria B en el dominio $(0, \infty)$ sea de cola larga es si $\int_0^\infty e^{\epsilon x} B dx = \infty$ para todo $\epsilon > 0$ [2]. Obviamente el punto de transición entre regímenes podría ser cualquier otro, pero este punto es usado frecuentemente además de que hay una amplia teoría alrededor de ésta distribución.

La segunda razón se debe a que, de acuerdo a la teoría de los VLT, el límite Gaussiano es alcanzado en tiempos muy largos, lo que sugiere que en general no será posible observar una Gaussiana en las escalas de tiempo que se utilizaron.

El proceso (6.1) ocurre en todos los experimentos de la estructura heteroclínica y en la mayor parte de los de la homoclínica. Se puede observar que hay una gran variedad de procesos. En algunos casos la convergencia hacia la exponencial es muy rápida por lo que alguna de las distribuciones del proceso no fue detectada. En otros casos las distribuciones se quedaron “estancadas” y no se aprecia ninguna transición. En resumen, todas las ditribuciones que no fueron marcadas con un asterísco (*) cumplen con la teoría de VLT.

Hay ocasiones en las que el proceso ocurre en la dirección contraria a (6.1). La razón por la que ocurre esto no está bien entendida, así que en estos casos sólo se buscó una distribución que únicamente se ajuste estadísticamente a los histogramas. En el caso particular de las distribuciones de VLT, no se tienen métodos estadísticos para determinar si los VLT son o no un modelo apropiado para describir los datos, así que se considera que la distribución es de VLT cuando ya han sido descartadas las otras dos distribuciones. Esto puede resultar extraño y uno podría preguntarse: “si no hay evidencia de que la distribución sea distribución estable de Lévy o exponencial y no se tienen métodos para determinar que la distribución es de VLT, ¿por qué afirmar que el modelo que se ajusta es VLT?”. La respuesta es que, como se ha visto, las distribuciones de VLT se encuentran muy ligadas al sistema físico, o equivalentemente, a las distribuciones estables de Lévy y exponencial. Siempre es posible encontrar alguna otra distribución que se ajuste mejor a los datos (log-normal, etc), sin embargo si se toma este camino es necesario explicar de qué manera esta distribución se relaciona con el sistema.

6.2. Caracterización del transporte

En esta sección analizaremos el desplazamiento medio M y el desplazamiento medio cuadrático σ^2 de las partículas, en particular buscaremos escalamientos anómalos del tipo $M \sim t^\chi$ y $\sigma^2 \sim t^\gamma$ en donde $0 < \chi < 1$ (subadvección), $1 < \chi < 2$ (superadvección), $0 < \gamma < 1$ (subdifusión), $1 < \gamma < 2$ (superdifusión), $\gamma = 2$ (transporte balístico) y $2 < \gamma < 3$ (difusión turbulenta). Las tablas utilizadas en este análisis serán 5.1, 5.2, 5.3, 5.4 (resultados a tiempos cortos) y 5.5, 5.6, 5.7, 5.8 (resultados a tiempos largos); en cada una de estas tablas se fijan todos los parámetros y se varía el r_L .

Primero observemos que en cada tabla los valores de χ y de γ tienden a disminuir conforme el radio de Larmor aumenta. El primer experimento de cada tabla (experimentos 1 y 8) es una excepción a este comportamiento debido a que la ε_2 es tomada en estos casos con valor de 0.05. Este comportamiento es un indicador de que el desplazamiento de las partículas disminuye conforme el radio de Larmor aumenta y por ende, el sistema es menos caótico. Esta observación se vuelve más evidente a tiempos cortos.

En la tabla 6.1 se observa que (a tiempos cortos) los experimentos con distribuciones expo. y VLT presentan exponentes γ significativamente mayores que 2, lo que indica la presencia de transporte de difusión turbulenta. En este mismo regimen de tiempo los experimentos con FDP de ley de potencia tienen $\chi \gtrsim 1$ y $\gamma \gtrsim 2$ por lo que el transporte es superadveectivo y balístico con presencia minoritaria de difusión turbulenta.

A tiempos largos todos los experimentos presentan $1 < \chi < 2$ y $\gamma > 2$ lo que indica partículas con transporte superadveectivo y difusión turbulenta. En general χ y γ aumentaron en el tiempo, lo que implica que las partículas parecen estar acelerándose. El escalamiento del desplazamiento medio y la varianza parecen ser independientes del tipo de distribución ajustada a los datos.

Heteroclínica: superior									
Exp	Tiempos cortos					Tiempos largos			
	$\hat{\alpha}$	χ	γ	Modelo		$\hat{\alpha}$	χ	γ	Modelo
1	3.3(5)	1.05	2.07	Potencia	⇒	9(3)	1.06	2.07	VLT
2	3.7(4)	1.16	2.26	Exp		6.1(8)	1.41	2.67	Exp
3	4.2(6)	1.16	2.26	VLT		7.6(8)	1.16	2.22	Exp
4	2.6(2)	1.06	2.09	Potencia		5(2)	1.11	2.09	Exp
5	2.3(3)	0.98	1.85	Potencia		5(2)	1.30	2.49	VLT
6	1.6(1)	1.21	2.10	Potencia		3.2(2)	1.56	2.71	VLT
7	—	—	—	—		1.53(4)	1.04	2.09	Exp

Tabla 6.1: Síntesis de los datos de la estructura heteroclínica, sección superior

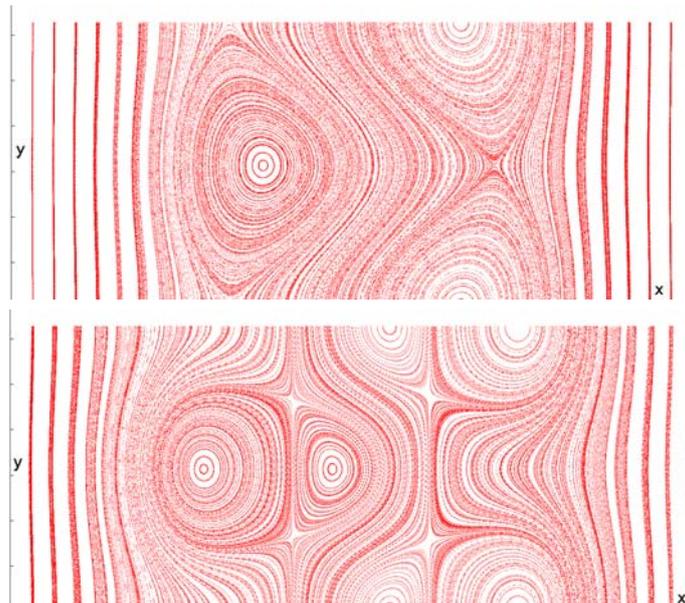


Figura 6.1: Evolución de la estructura heteroclínica con condiciones periódicas. Los parámetros de la imagen superior son: $\varepsilon_1 = 0.3$, $\varepsilon_2 = 0.2$, $\eta = 0.38$ y $r_L = 1.0$ y los parámetros de la inferior son iguales excepto que $r_L = 2.0$

En la tabla 6.2 (a tiempos cortos) $\chi \approx 1$ y $\gamma \approx 2$ en todos los casos excepto cuando $r_L = 2$. Esta excepción puede ser el resultado del cambio de topología en el sistema debido al valor del radio de Larmor tan alto. Otra posible causa es la distribución inicial de partículas uniforme alrededor del punto hiperbólico (lo cual implica que haya partículas desplazándose en muchas direcciones); esto, combinado con la topología puede resultar en una dinámica muy complicada. El cambio en la topología se aprecia en la figura 6.1. Esta se debe a la bifurcación en el flujo zonal mostrada en la figura 2.4.

A tiempos largos, la convergencia al régimen balístico se ve más clara. Esto se aprecia aún en el experimento 7, en donde χ sufrió un ligero aumento y γ disminuyó.

Todos los experimentos de la sección inferior heteroclínica tienden a ser balísticos a tiempos largos. Esto sugiere que la presencia del RFL tiene poca relevancia y que sólo grandes cambios en la topología afectan el transporte.

En la tabla 6.3 a tiempos cortos los experimentos 8 y 12 presentan transporte subadvectivo y superdifusivo. Esto coincide con el hecho de que en estos experimentos $\varepsilon_2 \approx 0$ y el radio de Larmor es alto, lo cual significa que hay poco caos. En los experimentos 9, 10 y 11 hay comportamiento de difusión turbulenta. En ninguno de los casos parece haber relación entre $\hat{\alpha}$ y los escalamientos temporales de la media y la varianza.

Heteroclínica: inferior									
	Tiempos cortos					Tiempos largos			
Exp	$\hat{\alpha}$	χ	γ	Modelo		$\hat{\alpha}$	χ	γ	Modelo
1	2.9(1)	1.05	2.07	Potencia		7(2)	1.0	2.0	VLT
2	—	—	—	—		—	—	—	—
3	—	—	—	—		5(2)	1.0	2.0	Exp
4	1.68(9)	0.97	1.96	Potencia	\Rightarrow	7(2)	1.0	2.0	Exp
5	3(1)	0.99	2.0	Potencia		5(1)	1.0	2.02	Exp
6	1.58(9)	1.0	2.01	Potencia		5(2)	1.0	2.0	Exp
7	2.0(2)	1.03	2.30	Potencia		2(1)	1.06	2.18	Exp
7	—	—	—	—		1.9(1)	1.06	2.18	Potencia

Tabla 6.2: Síntesis de los datos de la estructura heteroclínica, sección inferior

A tiempos largos se observa que en los experimentos 8 y 12, $\chi \approx 1$, se sigue teniendo transporte superdifusivo. En los experimentos 9, 10 y 11 la superadvección aumenta y la difusión turbulenta tiende a $\gamma \approx 2.2$. Se observan similitudes en el valor de χ y γ entre los experimentos 2 y 3 y los experimentos 9 y 10 en las secciones superiores de la estructura heteroclínica y homoclínica. También los experimentos 5 y 12 son similares en cuanto a que tienen un aumento de γ , haciendo que el sistema pase de tener transporte superdifusivo a turbulento difusivo.

Parece ser que en el caso de las secciones superiores de las estructuras heteroclínica y homoclínica a tiempos largos, el escalamiento del desplazamiento medio y la dispersión son independientes del tipo de distribución ajustada a los datos. Esto significa que hay distribuciones que no son distribuciones estables de Lévy que tienen media y varianza que escalan de forma anómala. Esto parece contradecir la teoría, la cual nos dice que los escalamientos anómalos sólo se pueden dar en distribuciones estables de Lévy. Los exponentes χ y γ revelan mayor información sobre el transporte que el tipo de FDP ajustada; esto sucede particularmente en los experimentos de la estructura homoclínica superior, ya que en ellos las FDP's ajustadas parecen no evolucionar en el tiempo, o en todo caso evolucionan a distribuciones que no siguen el proceso (6.1).

Todo parece indicar que en las secciones superiores de la estructura heteroclínica y homoclínica siempre hay transporte anómalo y éste se ve incrementado a tiempos largos.

En la tabla 6.4 a tiempos cortos todos los experimentos con excepción de el 8 y 14 presentan transporte subadveectivo y superdifusivo. En los experimentos 8 y 14 el caos está casi eliminado de tal manera que el transporte es adveectivo y balístico.

A tiempos largos todos los experimentos de la tabla 6.4 presentan transporte

Homoclínica: superior									
	Tiempos cortos					Tiempos largos			
Exp	$\hat{\alpha}$	χ	γ	Modelo		$\hat{\alpha}$	χ	γ	Modelo
8	6.8(1)	0.90	1.77	Exp		6(1)	0.95	1.88	Exp
9	1.56(2)	1.15	2.20	Exp		2.4(2)	1.19	2.19	Exp
10	7(3)	1.15	2.20	Exp		2.02(9)	1.19	2.19	Potencia*
11	7(2)	1.20	2.27	Exp	\Rightarrow	1.9(1)	1.27	2.22	Exp
12	4(1)	0.87	1.67	Exp		7(3)	1.02	1.69	Exp
13	—	—	—	—		2.4(5)	0.90	1.77	Potencia
14	—	—	—	—		—	—	—	—

Tabla 6.3: Síntesis de los datos de la estructura homoclínica, sección superior

balístico con excepción de el experimento 9 en donde hay superadvección y difusión turbulenta debida a la gran cantidad de caos presente.

Podemos afirmar ahora con mucha seguridad que las secciones superiores presentan en general transporte superdifusivo o turbulento difusivo y las secciones inferiores presentan transporte balístico. Esto es más apreciable a tiempos largos.

Se podría pensar que la distribución exponencial está relacionada con el comportamiento advectivo y balístico, pero esto contradiría los ajustes de otros experimentos.

Homoclínica: inferior									
	Tiempos cortos					Tiempos largos			
Exp	$\hat{\alpha}$	χ	γ	Modelo		$\hat{\alpha}$	χ	γ	Modelo
8	1.55(5)	0.98	1.97	Exp		2.5(2)	1.01	2.02	Potencia*
9	2.0(1)	0.94	1.89	Exp		9(3)	1.19	2.19	Exp
10	12(4)	0.93	1.88	Exp		5(2)	1.01	2.01	Exp
11	5(3)	0.92	1.86	Exp	\Rightarrow	2.1(2)	1.01	2.01	Exp
12	5(2)	0.91	1.85	Exp		10(3)	1.01	2.02	VLT*
13	3(1)	0.88	1.78	Exp		5(2)	1.02	2.04	VLT*
14	2.36(4)	0.98	2.01	Exp		5(2)	0.99	2.0	VLT*

Tabla 6.4: Síntesis de los datos de la estructura homoclínica, sección inferior

La estructura heteroclínica parece seguir siendo la estructura en donde el desplazamiento medio y la dispersión son mayores, sin embargo, esto no se ve reflejado en el tipo de distribuciones que se encontraron.

Cuando la influencia del caos es fuerte en las secciones superiores, χ y γ tienden a aumentar en el tiempo. El cambio es más evidente cuando $\varepsilon_2 = 0.2$ ó 0.9 y $r_L = 0$.

Sin embargo, el caos se ve fácilmente influenciado por el radio de Larmor, lo que provoca que el aumento de χ y γ sea significativamente menor que en los casos en los que $r_L = 0$.

Uno de los resultados que más llamó la atención es el comportamiento de χ y γ en el tiempo. Se puede observar que hay una tendencia de estos exponentes a aumentar con el tiempo, lo que significa que de alguna manera las partículas se están acelerando. Estos exponentes no sólo están aumentando, sino que su valor en muchos casos es mayor que 2, lo que implica que el sistema está pasando de un estado superdifusivo $1 < \gamma < 2$ a un comportamiento balístico $\gamma = 2$ y entrando a un estado de difusión turbulenta o aumentada $\gamma \simeq 3$. Ver [18] [27] [26].

El mecanismo que está provocando esto en el sistema no es claro. Este efecto puede ser el resultado de la interacción entre el flujo zonal y la destrucción y generación de barreras de transporte en el tiempo. Para entender estos fenómenos es necesario mejorar el modelo de transporte (vuelos de Lévy y transporte balístico) e incorporar distribuciones de tiempos de espera $\psi(t)$ (ecuación 3.6), es decir, analizar mejor las características de los vuelos pegajosos (sticky flights) y también una distribución de los tiempos que le toma a una partícula trasladarse de un lugar a otro. Estas consideraciones parecen simples pero complican considerablemente el modelo de transporte y requieren de hacer un análisis de datos más extenso, en particular, un análisis de Fourier en el espacio de velocidades de las partículas.

Brevemente, el modelo que incorpora todos estos elementos es conocido como *caminatas de Lévy* (Levy walks en inglés) [27]. Este modelo es una extensión del CATC visto en capítulo 3, el cual considera el tiempo que le toma a la partícula para llegar de un punto a otro. Este modelo preserva la característica de los vuelos de Lévy de autosimilitud. Otra característica es que la longitud de desplazamiento está asociada al tiempo de tal forma que la longitud depende de la velocidad. Finalmente, la FDP asociada a los caminantes de Lévy tiene un acoplamiento espacio-temporal, por lo que los desplazamientos y el tiempo ya no se consideran como variables aleatorias independientes.

6.3. Discusión de los resultados

La distribución espacial de todos los sistemas resulta difícil de estudiar ya que se observa una dinámica de partículas complicada tal como poblaciones que cambian de dirección y velocidad a diferentes tiempos y límites entre poblaciones difíciles de distinguir (ver figura 6.2). Se intentó hacer el análisis lo más detallado posible y al mismo tiempo se buscó el poder dar conclusiones generales y simples.

Por ejemplo, una de las simplificaciones que hubo que hacer fue clasificar las distribuciones entre superiores e inferiores. Esto permite seleccionar fácilmente las

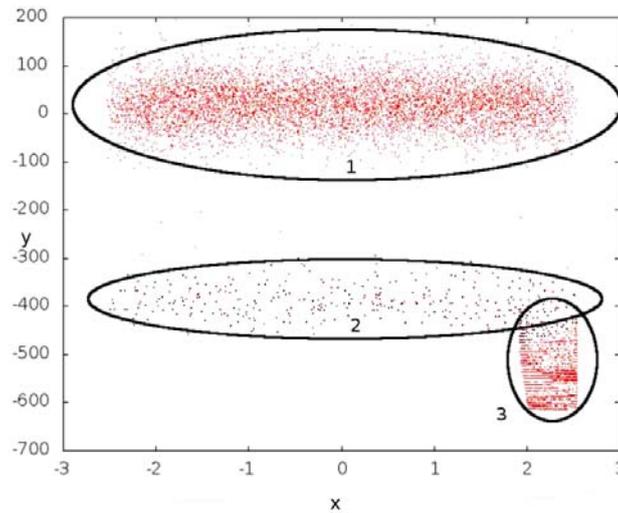


Figura 6.2: Ejemplo de una distribución a tiempos cortos de partículas en el sistema completo. La población marcada con 1 presenta en general transporte anómalo en la dirección superior. La población 3 es balística y se dirige hacia abajo. La población 2 es de carácter anómalo; esta población surge de la población 3 al tiempo 700 aproximadamente y va en la dirección superior. Para el ciclo 5000 la población 2 se encuentra mezclada con la 1.

partículas para estudiarlas y a la vez permite analizar su comportamiento de las partículas de manera más universal. El precio que se paga es el de no poder estudiar los detalles de la dinámica del sistema, los cuales pueden ser muy diversos y complicados y por lo mismo, prácticamente imposibles de estudiar. Es impresionante observar como en un flujo zonal continuo y simétrico, la interacción entre dos ondas armónicas y la consideración del radio de Larmor promediado pueden resultar en un comportamiento del sistema tan complejo.

Las causas de estos comportamientos inesperados no son claras. Se busca comparar los resultados obtenidos con trabajos anteriores, particularmente [22] y [16], en los cuales se hace un estudio topológico del sistema que se está estudiando aquí y un estudio del transporte de partículas en un sistema similar al presente, respectivamente.

El sistema estudiado en [22] fue totalmente reproducido. El trabajo realizado por [16] es muy similar a éste ya que en él se hace un estudio estadístico de un sistema muy similar (la diferencia radica en el uso de un flujo monótono). En ambos trabajos se encontró evidencia de transporte anómalo y balístico, se encontró la presencia de transporte anómalo en la sección superior y balística en la inferior y la asimetría en

las distribuciones de partículas (esta asimetría viene indicada en el “lado” de la cola de la distribución en las tablas del apéndice B).

Sin embargo algunas de las consideraciones y técnicas de análisis fueron diferentes. Por ejemplo, el proceso de filtrado de partículas con vuelos de Lévy que se utilizó aquí está basado en detectar cambios de dirección de las partículas; el filtro utilizado por Gustafson se basa en un análisis de velocidades en el espacio de Fourier. Gustafson también utilizó una distribución Maxwelliana de radios de Larmor (o equivalentemente de velocidades) para cada experimento, cuando aquí se manejó sólo un valor de radio de Larmor por cada experimento; el utilizar un sólo valor para r_L permitió hacer una mejor estadística y analizar con más detalle los diferentes regimenes de energía del sistema. Un aspecto que es muy importante resaltar es que los métodos de análisis estadístico que se utilizaron aquí se eligieron por estar específicamente diseñados para el tipo de datos que se obtuvieron y por ser de buena calidad.

Para futuros trabajos se propone utilizar un modelo de caminatas de Lévy. Este modelo es naturalmente más sofisticado pero incluye la mayor parte de las propiedades de este sistema. Para esto será necesario implementar un algoritmo de tipo Fourier que no sólo detecte tiempos de residencia de las partículas (vuelos pegajosos), sino que también pueda detectar tiempos de traslación de las partículas de un punto a otro.

Otra propuesta para mejorar la calidad de los resultados es determinar cual es la frecuencia de oscilación que mejor representa la solución de la ecuación de Hasegawa-Mima.

Capítulo 7

Conclusiones

Se planteó un modelo para estudiar el transporte de partículas con el objetivo de entender el por qué de la dificultad de confinar un plasma cuando éste presenta fluctuaciones turbulentas y partículas de alta energía. En este modelo la dificultad radica en la presencia de partículas con transporte no difusivo.

En esta tesis se presentó un estudio numérico, implementado con el lenguaje de programación CUDA, del efecto del radio finito de Larmor en transporte no difusivo de partículas de prueba en un sistema dominado por un flujo zonal con cizalla y remolinos $\vec{E} \times \vec{B}$ de gran escala. Se modeló el flujo utilizando un sistema dinámico Hamiltoniano que consiste en la superposición de un flujo zonal y eigenmodos de la ecuación de Hasegawa-Mima. Debido a los parámetros considerados, el Hamiltoniano causa transporte caótico. Las partículas de prueba alternan estocásticamente entre estar atrapadas en los remolinos y ser transportadas por el flujo zonal. Para exponer las propiedades del transporte no difusivo del sistema se aplicó estadística a la evolución Lagrangiana. Esta estadística se aplicó para obtener el escalamiento temporal de los momentos estadísticos y las FDP de los desplazamientos de las partículas.

Los efectos del radio finito de Larmor fueron incorporados en la dinámica de las partículas generada por la velocidad $\vec{E} \times \vec{B}$ sustituyendo la posición del centro guía por el valor promediado sobre un anillo de radio r_L , en donde r_L es el radio de Larmor. Se consideró una distribución uniforme de radios de Larmor ya que esto permite hacer estadística con un mayor número de partículas, mejorando así la calidad de los resultados. Los mapeos de Poincaré revelaron que el radio de Larmor tiene un efecto directo y no trivial en la topología del flujo y el nivel de caos en las partículas. En particular se observó que la cantidad de caos disminuye conforme el radio de Larmor aumenta.

Las simulaciones computacionales se realizaron utilizando el lenguaje CUDA. El

desempeño en las simulaciones fue mayor que en **MatLab**, sin embargo, no se alcanzó el desempeño óptimo que se esperaba. Esta baja en desempeño se debe probablemente a el hecho de que cada micropocesor tiene que buscar las raíces de los splines de las funciones $L_{kr_L}(x)$ (4.3) (utilizadas en las ecuaciones de movimiento) en la memoria. Es muy probable que más de un hilo en un warp esté tratando de acceder a la misma información lo que provoca la serialización del proceso dentro del mismo warp.

En este trabajo se analizaron las distribuciones de partículas a dos tiempos distintos. Ambos tiempos son estadísticamente largos de tal manera que podemos asegurar que las partículas han convergido a cierta distribución. Sin embargo, los resultados que son de mayor relevancia son los resultados a tiempos cortos ya que se considera que éstos son más representativos de un sistema físico real.

En trabajos como este y otros se busca mostrar evidencia de la presencia de transporte anómalo ya que éste puede ayudar a entender y mejorar las técnicas de confinamiento magnético de plasmas en tokamaks. Debido al carácter caótico y en general complejo de este tipo de sistemas, una forma relativamente directa y recurrente de buscarlos es por medio de FDP que sean distribuciones estables de Lévy. Este procedimiento es aceptable, sin embargo, no sólo hay que ser conscientes de la gran complejidad del sistema, sino de los métodos estadísticos que se están utilizando para analizarlo, ya que si no se tiene cuidado se pueden confundir datos que siguen una distribución estable de Lévy cuando en realidad se trata de otra distribución y viceversa; esto naturalmente podría traer serias consecuencias. Es por ello que aquí se hace un gran énfasis en los métodos estadísticos utilizados.

Se modeló la evolución de las FDP de partículas por medio de la teoría de los vuelos de Lévy truncados. Este modelo permite describir el proceso de transformación de una distribución estable de Lévy a una distribución Gaussiana. Este modelo es consistente con la mayor parte de los resultados.

Los valores de χ y γ tienden a disminuir conforme el radio de Larmor aumenta. El primer experimento de cada tabla es una excepción a este comportamiento debido a que la ε_2 es distinta. Pero estos casos son consistentes con que para ε_2 bajo hay menos caos y por lo tanto son menos anómalos.

A tiempos largos el escalamiento del desplazamiento medio y la varianza parecen ser independientes del tipo de distribución ajustada a los datos.

Todos los experimentos de la sección inferior heteroclínica tienden a ser balísticos a tiempos largos. Esto sugiere que la presencia del RFL tiene poca relevancia y que solo grandes cambios en la topología afectan el transporte. También puede ser debido a que la parte inferior es la asociada al flujo a lo largo de la barrera de transporte y este es más robusto que el de la sección superior que se vuelve caótico antes.

Parece ser que en el caso de las secciones superiores de las estructuras heteroclínica y homoclínica a tiempos largos, el escalamiento del desplazamiento medio y la dispersión son independientes del tipo de distribución ajustada a los datos. Todo parece indicar que en las secciones superiores de la estructura heteroclínica y homoclínica siempre hay transporte anómalo de tipo superdifusivo o turbulento difusivo y éste se va incrementando a tiempos largos. Las secciones inferiores presentan transporte balístico. Estas tendencias son más apreciables a tiempos largos.

Apéndice A

Propiedades generales de los plasmas

A.1. Frecuencia y radio de Larmor

Un plasma se define como *un gas cuasineutral de partículas neutras y cargadas que presenta un comportamiento colectivo* [8]; es decir, el gas tiene densidades de iones y de electrones muy similares y la dinámica del gas se presenta en diversas escalas (locales y no locales). Otro de los criterios utilizados para determinar si un gas ionizado es plasma o no es la frecuencia de oscilación del gas ω y el tiempo promedio entre colisiones τ de las partículas; estos deben satisfacer que $\omega\tau > 1$.

Una de las mejores formas de entender un objeto complejo es entender a sus partes. Esto adquiere aun más sentido en el caso de los plasmas, ya que estos pueden comportarse a veces como un fluido denso en donde el comportamiento individual de las partículas que lo componen deja de cobrar importancia y a veces como un conjunto de partículas independientes de baja densidad. Los parámetros del plasma que resultan ser más importantes para su entendimiento (y para esta tesis) resultan ser simples y se deducirán a continuación.

Vamos a suponer que tenemos la capacidad de analizar partículas individuales y que sólo existen campos eléctricos y magnéticos \vec{E} y \vec{B} externos (los campos producidos por las partículas cargadas son despreciables). Si el campo eléctrico $\vec{E} = \vec{0}$ entonces la ecuación de movimiento que se obtiene es:

$$m\dot{\vec{v}} = q\vec{v} \times \vec{B} \tag{A.1}$$

Tomando la dirección de \vec{B} como \hat{z} ($\vec{B} = B\hat{z}$) obtenemos que:

$$m\dot{v}_x = qBv_y \quad m\dot{v}_y = -qBv_x \quad m\dot{v}_z = 0 \quad (\text{A.2})$$

$$\ddot{v}_x = \frac{qB}{m}\dot{v}_y = -\left(\frac{qB}{m}\right)^2 v_x \quad (\text{A.3})$$

$$\ddot{v}_y = -\frac{qB}{m}\dot{v}_x = -\left(\frac{qB}{m}\right)^2 v_y \quad (\text{A.4})$$

Estas ecuaciones describen a un oscilador armónico simple con frecuencia de oscilación ω_L data por:

$$\omega_L = \frac{|q|B}{m} \quad (\text{A.5})$$

En física de plasmas la frecuencia de oscilación ω_L es mejor conocida como frecuencia de ciclotrón o frecuencia de Larmor. Por convención, se ha elegido a ω_L como no negativa. La solución de las ecuaciones (A.3 y A.4) es la siguiente:

$$v_y = v_\perp \exp(\pm i\omega_L t + \delta_{x,y}) \quad (\text{A.6})$$

En donde \pm denota el signo de la carga q y δ es la fase de la onda. Podemos elegir a δ de tal manera que obtengamos lo siguiente:

$$v_x = v_\perp \exp(i\omega_L t) = \dot{x} \quad (\text{A.7})$$

$$v_y = v_\perp \exp(-i\omega_L t) = \dot{y} \quad (\text{A.8})$$

en donde $v_\perp = v_x^2 + v_y^2$ es una constante positiva que representa la velocidad en el plano perpendicular a \vec{B} (el plano xy). Las soluciones de las ecuaciones (A.7 y A.8) son:

$$x - x_0 = -i\frac{v_\perp}{\omega_L} \exp(i\omega_L t) \quad (\text{A.9})$$

$$y - y_0 = i\frac{v_\perp}{\omega_L} \exp(-i\omega_L t) \quad (\text{A.10})$$

A partir de las éstas ecuaciones podemos definir el *radio de Larmor* como:

$$r_L = \frac{v_\perp}{\omega_L} = \frac{mv_\perp}{|q|B} \quad (\text{A.11})$$

Si tomamos la parte real de las funciones obtenemos finalmente:

$$x - x_0 = r_L \sin \omega_L t \quad (\text{A.12})$$

$$y - y_0 = \pm r_L \cos \omega_L t \quad (\text{A.13})$$

$$z - z_0 = v_{\parallel} t \quad (\text{A.14})$$

En donde el signo \pm proviene de la posibilidad de tener una carga positiva o negativa. Las ecuaciones (A.12 y A.13) describen una órbita circular alrededor del centro (x_0, y_0) . Las direcciones de las partículas (positivas y negativas) siempre son tales que los campos magnéticos generados son opuestos uno al otro, por lo que el efecto neto es un plasma formado de partículas que tienden a anular el campo magnético externo, es decir, es un gas diamagnético. Hay que hacer notar que la velocidad de la partícula en el eje z no se ve afectada por el campo magnético. En la figura A.1 se muestra de manera esquemática el movimiento de dos partículas de carga contraria y masas distintas en un campo magnético externo.

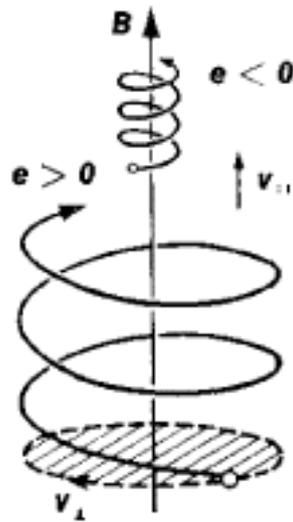


Figura A.1: Órbitas de Larmor en un campo magnético

A.2. Velocidad de deriva $\vec{E} \times \vec{B}$

En todo el análisis que se ha llevado a cabo se ha considerado sólo la presencia de un campo magnético externo. Si ahora incluimos la presencia de un campo eléctrico

externo constante, la dinámica de las partículas estará definida por la mezcla de dos movimientos: el giro de las partículas con radio y frecuencia de Larmor y una deriva provocada por el campo eléctrico. Vamos a elegir al plano xz como la dirección del campo eléctrico, entonces tendremos $\vec{E} = E_x \hat{x} + E_z \hat{z}$.

La ecuación de movimiento que hay que resolver es:

$$m\dot{\vec{v}} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad (\text{A.15})$$

Así obtenemos las siguientes ecuaciones diferenciales.

$$m\dot{v}_x = qE_x \pm \omega_L v_y \quad m\dot{v}_y = \mp \omega_L v_x \quad m\dot{v}_z = qE_z \quad (\text{A.16})$$

La solución de la ecuación diferencial de v_z es trivial.

$$v_z = \frac{qE_z}{m}t + v_{z0} \quad (\text{A.17})$$

Haciendo un procedimiento similar al anterior se obtienen dos ecuaciones diferenciales de segundo orden para v_x y v_y .

$$\ddot{v}_x = -\omega_L^2 v_x \quad (\text{A.18})$$

$$\ddot{v}_x = \mp \omega_L \left(\frac{q}{m} E_x \pm \omega_L v_y \right) = -\omega_L^2 \left(\frac{E_x}{B} + v_y \right) \quad (\text{A.19})$$

Podemos reescribir la ecuación (A.19) como:

$$\frac{d^2}{dt^2} \left(v_y + \frac{E_x}{B} \right) = -\omega_L^2 \left(v_y + \frac{E_x}{B} \right) \quad (\text{A.20})$$

La solución de estas ecuaciones es la siguiente:

$$v_x = v_{\perp} \exp(i\omega_L t) \quad (\text{A.21})$$

$$v_y = \pm i v_{\perp} \exp(i\omega_L t) - \frac{E_x}{B} \quad (\text{A.22})$$

El movimiento oscilatorio es el mismo pero ahora hay una velocidad \vec{v}_E impuesta al centro guía de la partícula en la dirección $-y$ (para $E_x > 0$).

La fórmula general puede ser obtenida tomando la velocidad a partir de la cual la partícula no siente el campo eléctrico externo, por lo que $m \frac{d\vec{v}}{dt} = 0$, así:

$$\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} = \vec{0} \quad (\text{A.23})$$

Si tomamos el producto vectorial de ambos lados obtenemos:

$$\vec{E} \times \vec{B} = \vec{B} \times (\vec{v} \times \vec{B}) = \vec{v}B^2 - \vec{B}(\vec{v} \cdot \vec{B}) \quad (\text{A.24})$$

La componente transversal es:

$$\vec{v}_\perp = \vec{v}_E = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{B^2} \quad (\text{A.25})$$

Apéndice B

Resultados obtenidos de las FDP

En las tablas B.1, B.2, B.3 y B.4 se encuentran los resultados a tiempos largos (L) y en las tablas B.5, B.6, B.6 y B.8 están los resultados a tiempos cortos (C).

La información está organizada de la siguiente manera: primero se indica el lado de la distribución que se analizó, es decir, hacia qué lado se extiende la cola del histograma de las partículas (FDP), el número total de partículas utilizadas en la muestra n , el valor de x_{min} el cual es el valor del dominio tal que $x \geq x_{min}$, el parámetro de escalamiento $\hat{\alpha}$ calculado a partir de los datos, el subconjunto de partículas $n_{cola} \leq n$ de la muestra que pertenecen al dominio de $\lambda(x)$, el $pvalue$ y el valor de la prueba Kolmogorov-Smirnov o KS.

El símbolo “—” significa que no había suficientes partículas para poder hacer el análisis.

Para leer los datos escritos de la forma A.B(C) se considera el orden de la cifra significativa más pequeña, en este caso el orden de B es de 10^{-1} , por lo que los datos se leen como $A.B \pm 10^{-1} \times C$. Los ajustes de ley de potencia de los histogramas de datos en log-log con su respectiva línea de tendencia se encuentran en el apéndice C.

Heteroclínica								
Región	Exp	Lado	n	x_{min}	$\hat{\alpha}$	n_{cola}	$pvalue$	KS
Superior	1	Derecho	1869	32 ± 9	9(3)	1463 ± 232	0.63	0.10
	2	Derecho	5612	38 ± 3	6.1(8)	3872 ± 89	0.04	0.01
	3	Derecho	4764	65 ± 4	7.6(8)	834 ± 167	0.47	0.09
	4	Derecho	1185	9 ± 2	5(2)	1095 ± 22	0.46	0.06
	5	Izquierdo	186	4 ± 1	5(2)	182 ± 2	0.48	0.06
	6	Izquierdo	224	1	3.2(2)	224 ± 2	0.05	0.02
	7	Izquierdo	4927	1 ± 1	1.53(4)	4927 ± 305	0.0	0.08

Tabla B.1

Heteroclínica								
Región	Exp	Lado	n	x_{min}	$\hat{\alpha}$	n_{cola}	$pvalue$	KS
Inferior	1	Derecho	2464	42 ± 12	7(2)	1097 ± 236	0.51	0.11
	2	—	—	—	—	—	—	—
	3	Derecho	1194	25 ± 9	5(2)	503 ± 174	0.23	0.12
	4	Derecho	3609	60 ± 24	7(2)	625 ± 405	0.76	0.09
	5	Derecho	2130	28 ± 3	5(1)	1238 ± 29	0.65	0.07
	6	Derecho	2484	51 ± 17	5(2)	328 ± 253	0.86	0.09
	7	Izquierdo	404	1	2.0(1)	404 ± 4	0.0	0.09
	7	Derecho	3103	15 ± 6	2.3(3)	2542 ± 317	0.09	0.09

Tabla B.2

Homoclínica								
Región	Exp	Lado	n	x_{min}	$\hat{\alpha}$	n_{cola}	$pvalue$	KS
Superior	8	Izquierdo	550	5 ± 1	6(1)	528 ± 3	0.89	0.03
	9	Izquierdo	908	9 ± 2	4(1)	841 ± 13	0.03	0.10
	10	Izquierdo	500	1	2.01(9)	500 ± 14	0.0	0.08
	11	Izquierdo	754	6 ± 3	3.8(8)	734 ± 20	0.05	0.09
	12	Derecho	1452	34 ± 14	7(3)	459 ± 450	0.47	0.12
	13	Izquierdo	1528	114 ± 6	2.4(5)	762 ± 204	0.26	0.10
	14	—	—	—	—	—	—	—

Tabla B.3

Homoclínica								
Región	Exp	Lado	n	x_{min}	$\hat{\alpha}$	n_{cola}	$pvalue$	KS
Inferior	8	Derecho	3518	14 ± 4	2.5(2)	3076 ± 194	0.13	0.07
	9	Derecho	1114	18 ± 5	9(3)	859 ± 78	0.55	0.09
	10	Derecho	351	6 ± 2	5(2)	308 ± 13	0.81	0.05
	11	Derecho	1221	21 ± 8	9(3)	875 ± 134	0.63	0.1
	12	Derecho	1415	26 ± 10	10(3)	873 ± 178	0.79	0.10
	13	Derecho	1077	17 ± 6	5(2)	711 ± 115	0.29	0.10
	14	Izquierdo	1352	26 ± 12	5(2)	912 ± 171	0.40	0.11

Tabla B.4

Heteroclínica								
Región	Exp	Lado	n	x_{min}	$\hat{\alpha}$	n_{cola}	p_{value}	KS
Superior	1	Derecho	6128	39 ± 9	3.3(5)	3780 ± 438	0.61	0.06
	2	Derecho	6033	34 ± 5	3.7(4)	4084 ± 220	0.0	0.09
	3	Derecho	6208	40 ± 5	4.2(6)	3791 ± 243	0.50	0.06
	4	Derecho	5810	21 ± 5	2.6(2)	4551 ± 454	0.74	0.04
	5	Izquierdo	1113	5 ± 2	2.3(3)	1104 ± 3	0.81	0.04
	6	Izquierdo	4358	8 ± 7	1.6(1)	3129 ± 1404	0.42	0.07
	7	—	—	—	—	—	—	—

Tabla B.5

Heteroclínica								
Región	Exp	Lado	n	x_{min}	$\hat{\alpha}$	n_{cola}	p_{value}	KS
Inferior	1	Derecho	2597	50 ± 3	2.9(1)	2213 ± 23	0.29	0.06
	2	—	—	—	—	—	—	—
	3	—	—	—	—	—	—	—
	4	Derecho	4522	4 ± 4	1.68(9)	4440 ± 150	0.36	0.06
	5	Derecho	6043	102 ± 44	3(1)	406 ± 235	0.93	0.08
	6	Derecho	6422	4 ± 5	1.58(9)	6041 ± 941	0.19	0.07
	7	Izquierdo	5070	19 ± 9	2.0(2)	4306 ± 921	0.69	0.06

Tabla B.6

Homoclínica								
Región	Exp	Lado	n	x_{min}	$\hat{\alpha}$	n_{cola}	p_{value}	KS
Superior	8	Derecho	2804	26 ± 2	6.8(1)	2087 ± 57	0.28	0.08
	9	Izquierdo	2556	1 ± 1	1.56(5)	2556 ± 41	0.0	0.12
	10	Izquierdo	2630	39 ± 16	7(3)	1148 ± 464	0.85	0.09
	11	Izquierdo	4583	63 ± 15	7(2)	1150 ± 422	0.74	0.09
	12	Derecho	7446	83 ± 18	4(1)	745 ± 534	0.40	0.1
	13	—	—	—	—	—	—	—
	14	—	—	—	—	—	—	—

Tabla B.7

Homoclínica								
Región	Exp	Lado	n	x_{min}	$\hat{\alpha}$	n_{cola}	$pvalue$	KS
Inferior	8	Derecho	4590	1 ± 1	1.55(5)	4590 ± 32	0.0	0.07
	9	Derecho	502	1 ± 1	2.0(1)	502 ± 6	0.0	0.06
	10	Derecho	526	9 ± 3	12(4)	468 ± 21	0.94	0.04
	11	Derecho	573	9 ± 4	5(3)	497 ± 31	0.33	0.08
	12	Derecho	901	9 ± 2	5(2)	858 ± 14	0.69	0.05
	13	Derecho	1369	12 ± 3	3(1)	1167 ± 23	0.30	0.08
	14	Derecho	5068	52 ± 2	2.36(4)	5068 ± 5	0.0	0.07

Tabla B.8

Apéndice C

Funciones de distribución acumulada complementaria y su ajuste de máxima verosimilitud a la ley de potencia

C.1. Distribuciones a tiempos largos (L)

Las gráficas fueron obtenidas utilizando el paquete **powerLaw** implementado en el software **R** (www.r-project.org). El paquete utiliza la función de distribución acumulada complementaria (FDAC) para crear los puntos de la gráfica y hace un “Ajuste de máxima verosimilitud” AMV o mejor conocido en inglés como “Maximum likelihood estimator” MLE para calcular la pendiente de la línea de tendencia.

La FDAC está definida como:

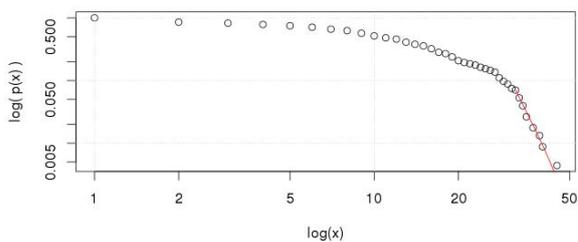
$$\bar{F}(x) = P(X > x) = 1 - F(x) \quad (\text{C.1})$$

En donde $F(x)$ es la FDA.

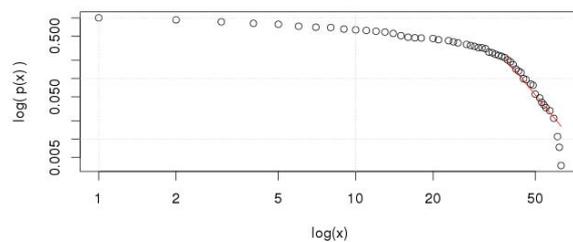
La razón por la que la FDAC es utilizada es por que es más sencilla de generar que la FDP y es posible graficarla en log-log de manera directa.

Las etiquetas de las imagenes se leen de la siguiente manera:

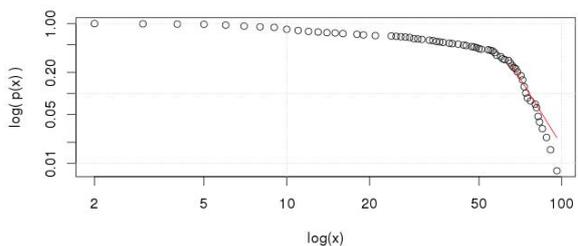
(Escala de la gráfica)-(tipo de ensamble)-(región de la distribución)-(número del experimento).



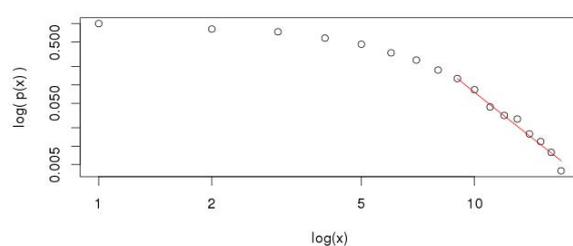
(log-L-sup-1)



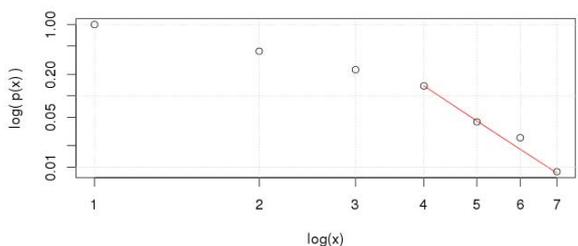
(log-L-sup-2)



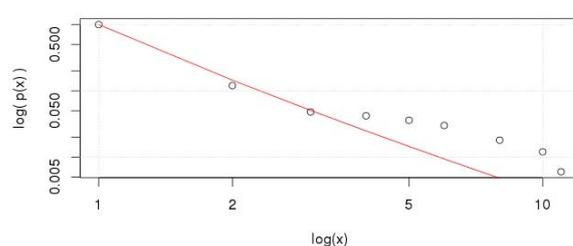
(log-L-sup-3)



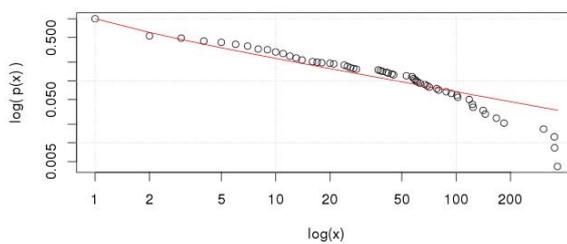
(log-L-sup-4)



(log-L-sup-5)

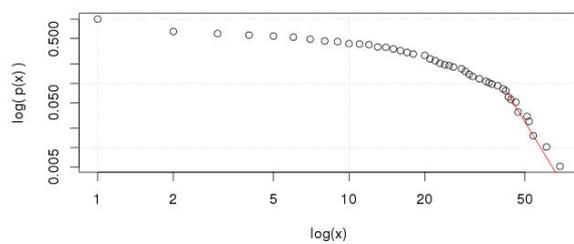


(log-L-sup-6)

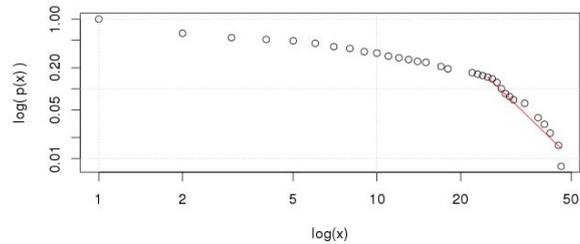


(log-L-sup-7)

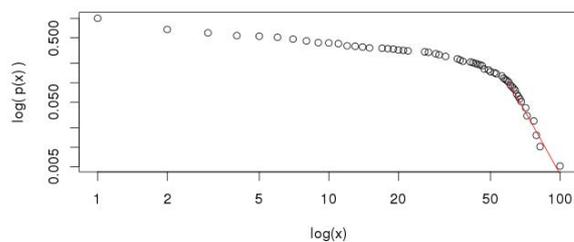
Figura C.1: Estructura heteroclínica, sección superior



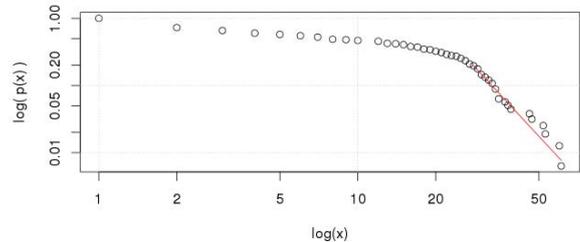
(log-L-inf-1)



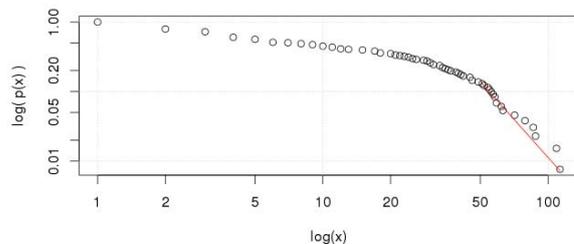
(log-L-inf-3)



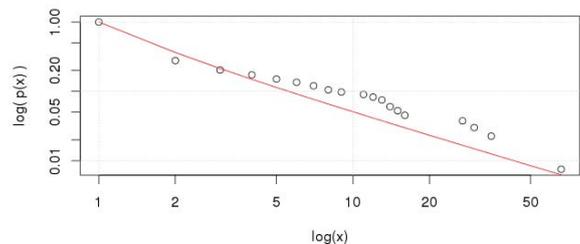
(log-L-inf-4)



(log-L-inf-5)

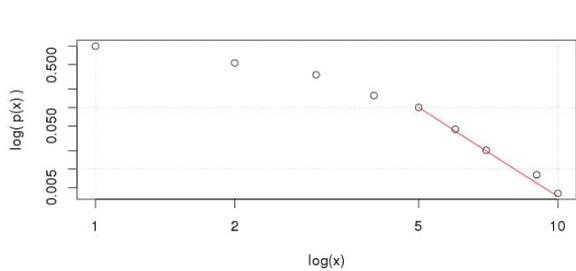


(log-L-inf-6)

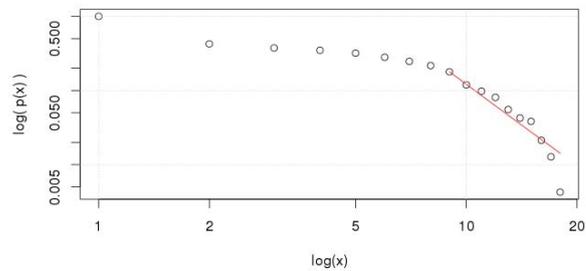


(log-L-inf-7)

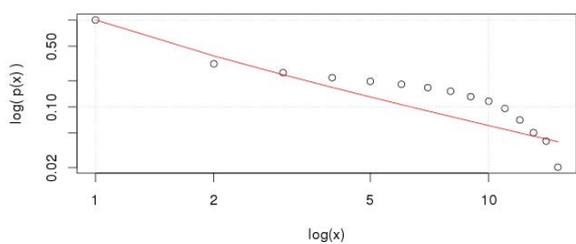
Figura C.2: Estructura heteroclínica, sección inferior



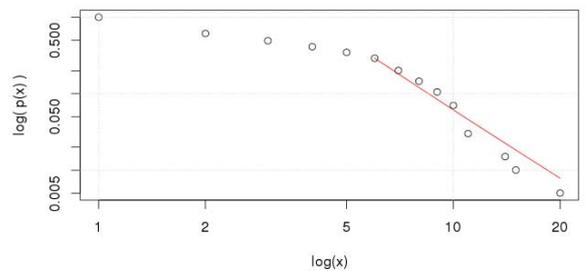
(log-L-sup-8)



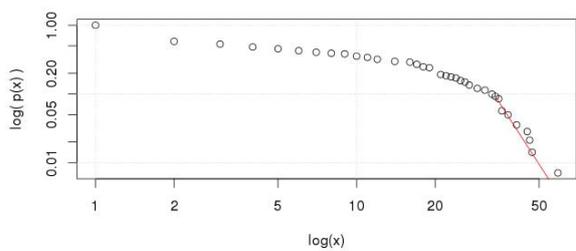
(log-L-sup-9)



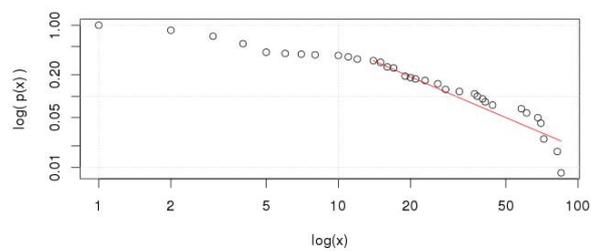
(log-L-sup-10)



(log-L-sup-11)

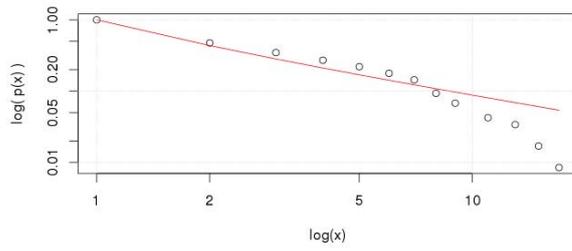


(log-L-sup-12)

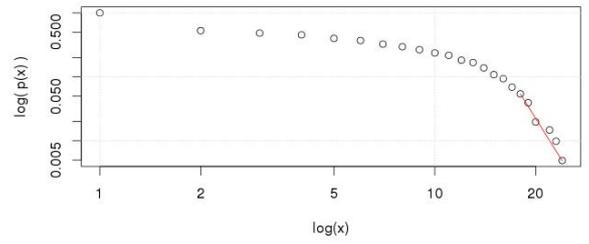


(log-L-sup-13)

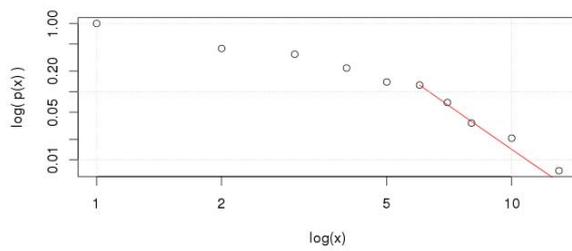
Figura C.3: Estructura homoclínica, sección superior



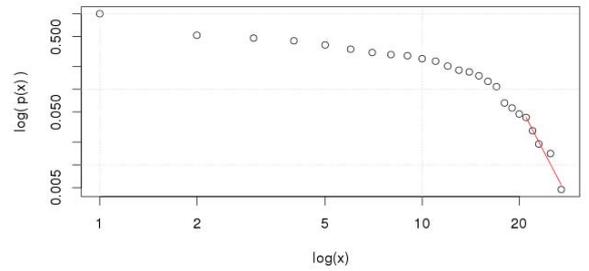
(log-L-inf-8)



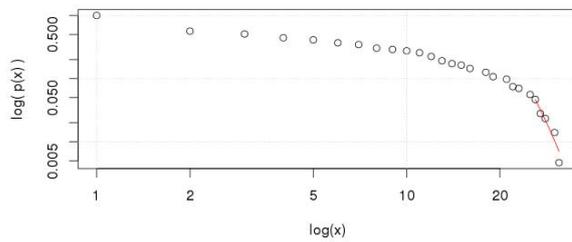
(log-L-inf-9)



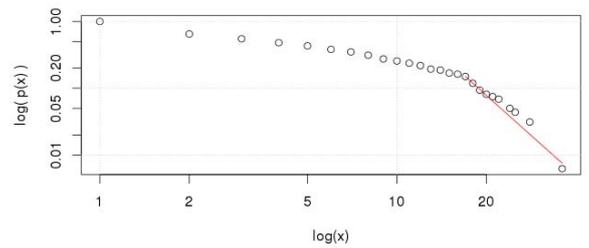
(log-L-inf-10)



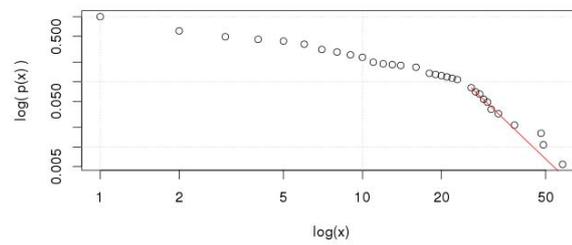
(log-L-inf-11)



(log-L-inf-12)



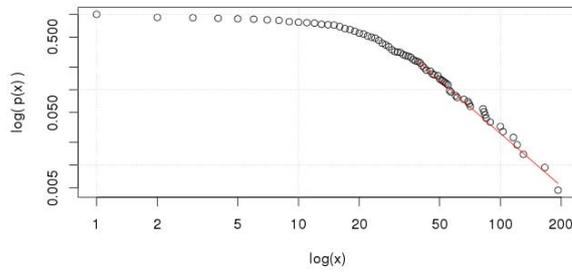
(log-L-inf-13)



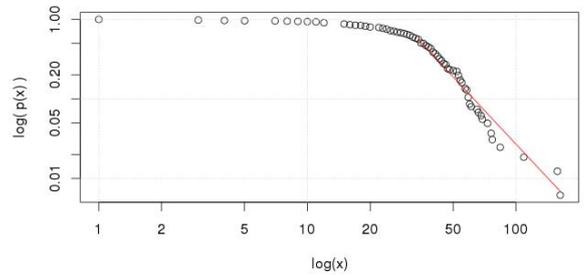
(log-L-inf-14)

Figura C.4: Estructura homoclínica, sección superior

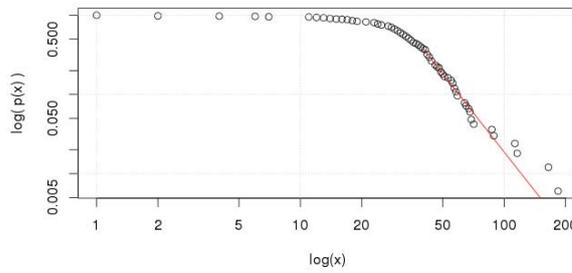
C.2. Distribuciones a tiempos cortos (C)



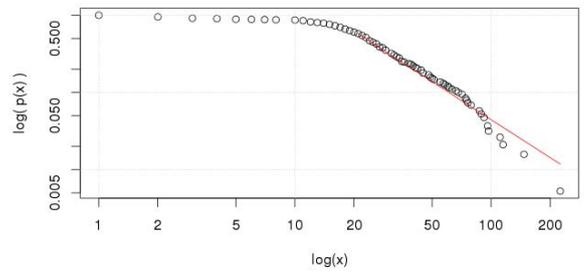
(log-C-sup-1)



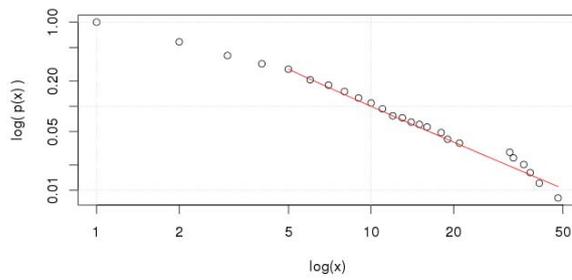
(log-C-sup-2)



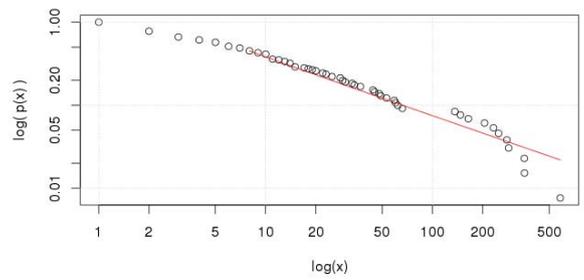
(log-C-sup-3)



(log-C-sup-4)

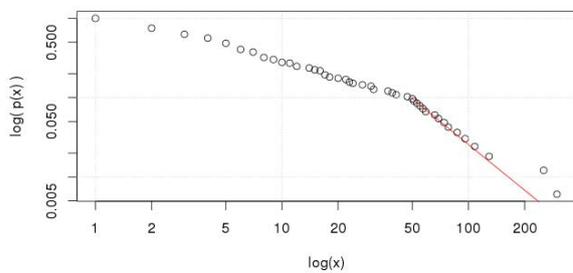


(log-C-sup-5)

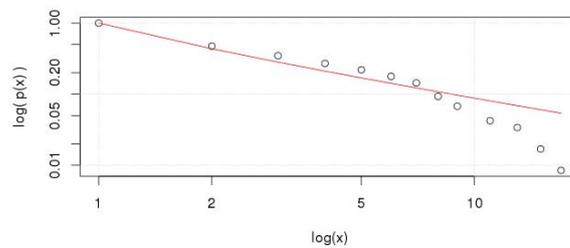


(log-C-sup-6)

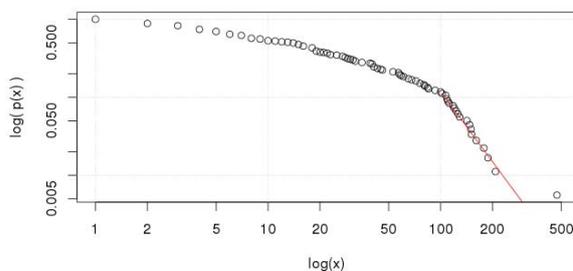
Figura C.5: Estructura heteroclínica, sección superior



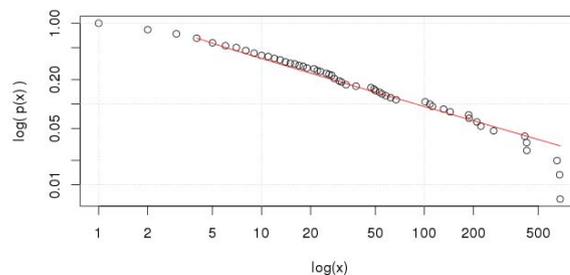
(log-C-inf-1)



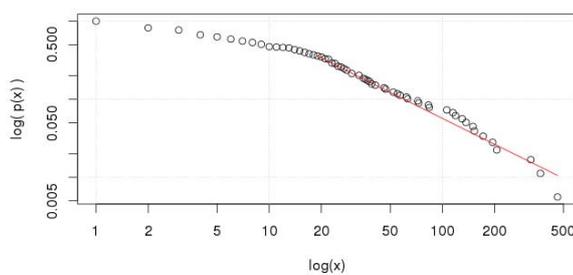
(log-C-inf-4)



(log-C-inf-5)

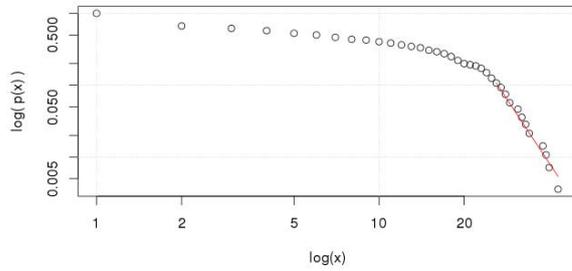


(log-C-inf-6)

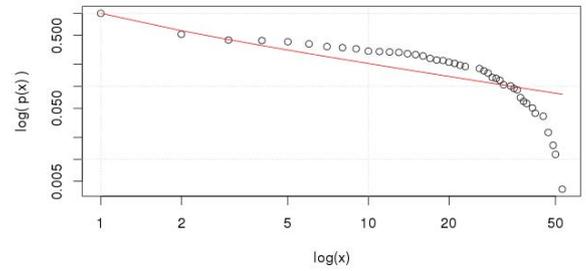


(log-C-inf-7)

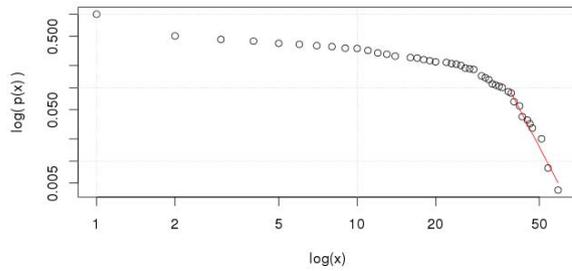
Figura C.6: Estructura heteroclínica, sección inferior



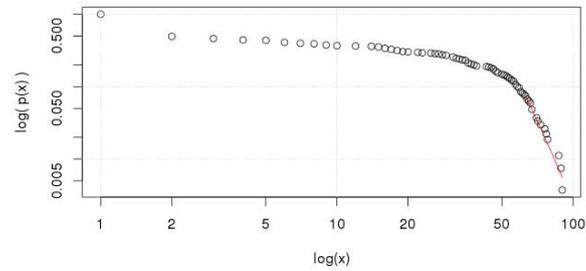
(log-C-sup-8)



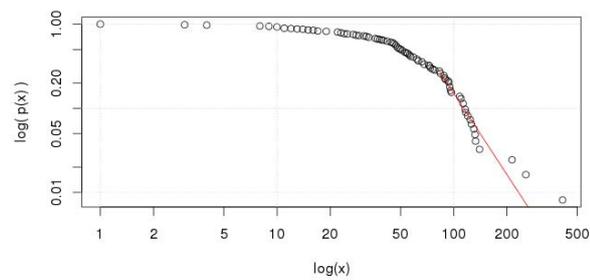
(log-C-sup-9)



(log-L-sup-10)

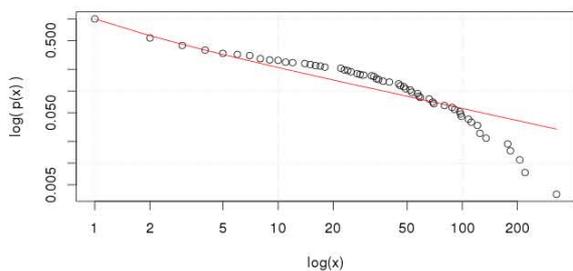


(log-L-sup-11)

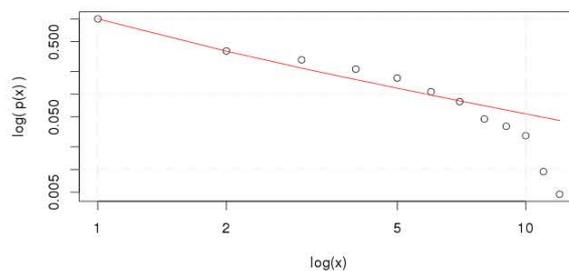


(log-C-inf-12)

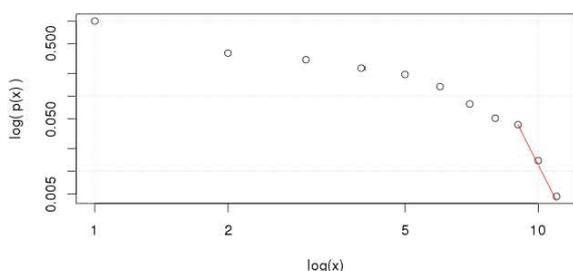
Figura C.7: Estructura homoclínica, sección superior



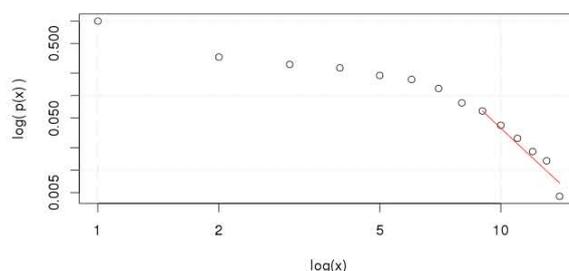
(log-C-inf-8)



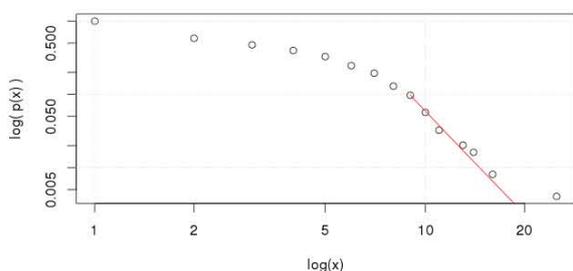
(log-C-inf-9)



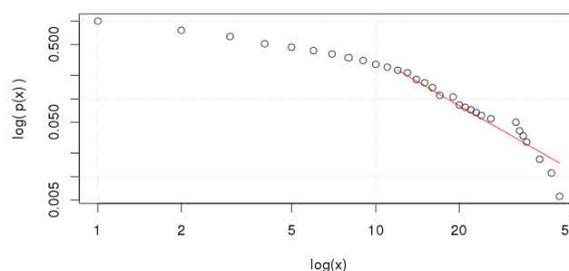
(log-C-inf-10)



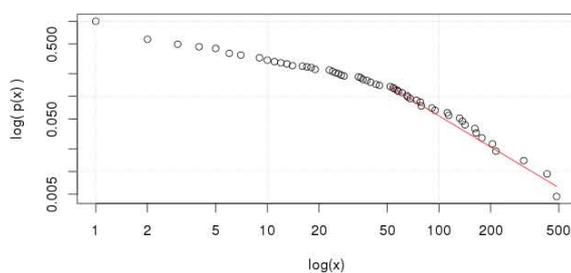
(log-C-inf-11)



(log-C-inf-12)



(log-C-inf-13)



(log-C-inf-14)

Figura C.8: Estructura: homoclínica, sección: superior

Bibliografía

- [1] H. Aref, Stirring by chaotic advection, *Journal of fluid mechanics*, 143, 1-21 (1984).
- [2] Soren Asmussen, *Applied Probability and Queues*, EUA, Springer-Verlag, 2003.
- [3] M. Astorino, J. Becerra Sagredo, A. Quarteroni, A modular Lattice-Boltzmann solver for GPU computing processors, *MATHICSE Technical Report* (2011).
- [4] Howard C. Berg, *Random Walks in Biology*, EUA, Princeton, 1993.
- [5] Benjamin A. Carreras, Progress in Anomalous Transport Research in Toroidal Magnetic Confinement Devices, *Transactions in Plasma Science*, vol. 25, 6, 1281-1321 (1997).
- [6] D. del-Castillo-Negrete, Chaotic transport in zonal flows in analogous geophysical and plasma systems, *Phys. of Plasmas*, 7, 5, 1702-1711 (2000).
- [7] D. del-Castillo-Negrete, P. J. Morrison, Chaotic transport by Rossby waves in shear flow. *Physics of Fluids*, 5, 948, 948-965 (1993).
- [8] F. Francis Chen, *Introduction to Plasma Physics*, EUA, Plenum Press, 1974.
- [9] A. Clauset, Shalzhini, Rohilla, Newman, E. J., Power-law distribution in empirical data, *SIAM Review* 51(4), 661-703 (2009).
- [10] Colin S. Gillespie, Fitting heavy tailed distributions: the **powerLaw** package, *Journal of Statistical Software*, 64(2) 2015.
- [11] J. W. Connor, H. R. Wilson, Survey of theories of of anomalous transport, *Plasma Physics Control Fusion*, 36, 719-795 (1993).
- [12] P. H. Diamond, K. Itoh, T.S. Hahm, Zonal Flows in Plasma -A Review, *Plasma Physics Control Fusion*, 47, R35-R161 (2005).

- [13] J. D. Fonseca, D. del-Castillo-Negrete y I. D. Caldas, Area-preserving maps models of gyroaveraged $E \times B$ chaotic transport, *Physics of Plasmas*, 21, 092310 (2014).
- [14] Larss Fredriksson, A brief survey of Lévy walks with applications to probe diffusion, Bachelor Degree Project, Karlstad University.
- [15] Jeffery Friedberg, *Plasma Physics and Fusion Energy*, EUA, Cambridge University Press.
- [16] K. Gustafson, D. del-Castillo-Negrete, W. Dorland, Finite Larmor radius effects on nondiffusive tracer transport in a zonal flow, *Phys. of Plasmas*, 15, 102309 (2008).
- [17] A. Hasegawa y K. Mima, Pseudo-three-dimensional turbulence in magnetized nonuniform plasma, *Phys. of Fluids*, 21, 87 (1978).
- [18] H. G. E. Henstchel, Procaccia Itamar, Relative diffusion in turbulent media: The fractal dimension of clouds, *Phys. Rev. Letters*, 29(3), 1461-1470 (1984).
- [19] Damián Hernández Herrán, *Difusión Anómala: Fundamentos y Aplicaciones*, *Micelánea Matemática*, 58 (2014).
- [20] Ismo Koponen, Analytic approach to the problem of convergence of truncated Lévy flights towards the Gaussian stochastic process, *Phys. Rev. E* 52, 1, 1197-1199, (1995).
- [21] R. N. Mantegna, H. E. Stanley, Stochastic Process with Ultraslow Convergence to a Gaussian: The Truncated Lévy Flight, *Phys. Rev. Letters*, 73, 2946-2949 (1994).
- [22] J. Martinell y D. del-Castillo-Negrete, Gyroaverage effects on chaotic transport by drift waves in zonal flows, *Phys. of Plasmas* 20, 022303 (2013).
- [23] Ralf Metzler, Aleksei Chechkin, Joseph Klafter, Lévy Statistics and Anomalous Transport: Lévy Flights and Subdiffusion, arXiv:0706.3553v1 (2007).
- [24] W. Press, W. Vatterling, S. Teukolsky, B. Flannery, *Numerical Recipes in Fortran: The Art Of Scientific Computing*, 2^{da} edición, Reino Unido, Cambridge University Press, 1992.
- [25] M. F. Shlesinger, Comment on: Stochastic Process with Ultraslow Convergence to a Gaussian: The Truncated Lévy Flight, *Phys. Rev. Letters*, 74, 4959-4959 (1995).

- [26] M. F. Shlesinger, B. J. West, J. Klafter, Lévy Dynamics of Enhanced Diffusion: Application to Turbulence, *Phys. Rev. Letters*, 58, 1100-1103 (1987).
- [27] M. F. Shlesinger, G. M. Zaslavsky, J. Klafter, Strange Kinetics, *Nature*, 363, 31-37, 1993.
- [28] NVIDIA CUDA. *CUDA C Programming Guide*, Version 6.0, 2014.