



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE
MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

DIFRACCIÓN TEMPORAL
RELATIVISTA PARA PARTÍCULAS
ESCALARES

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
FÍSICO

PRESENTA:

KAREN SUSANA VILLA AGUIRRE



DIRECTOR DE TESIS:
DR. SALVADOR GODOY SALAS

México, D.F. 2016



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

1. Datos del alumno

Villa
Aguirre
Karen Susana
55 61 81 39 95
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Física
305022626

2. Datos del tutor

Dr.
Godoy
Salas
Salvador Victor

3. Datos del sinodal 1

Dr.
Eduardo
Nahmad
Achar

4. Datos del sinodal 2

M. en C.
Mirna
Villavicencio
Torres

5. Datos del sinodal 3

Dr.
Angel
Sánchez
Cecilio

6. Datos del sinodal 4

Dr.
Isaac
Pérez
Castillo

7. Datos del trabajo escrito

Difracción relativista en el tiempo para partículas escalares.
p 33
2016

Esta tesis esta dedicada a mis Padres, Maestros y Hermanos.

Agradecimientos

Agradezco a la Universidad Nacional Autónoma de México; por permitirme, por medio de sus instituciones, el poder desarrollarme profesionalmente, en el nivel medio superior y superior; que, en tanto, me impulsa a seguir en este desarrollo.

Agradezco al Dr. Godoy Salas; asesor de esta tesis, por abrirme las puertas y proporcionarme los conocimientos necesarios para su realización, por compartirme, y que valoro en demasía, la experiencia en el labor de un científico. Agradezco al Dr. Nahmad Achar, a la M. en C. Villavicencio Torres, al Dr. Sánchez Cecilo y al Dr. Pérez Castillo; por su tiempo y dedicación en la revisión de esta tesis, por las considerables correcciones y por compartirme su visión del problema científico.

Agradezco a mis padres: Carlos Villa y Gloria Aguirre; por transmitirme su amor, sus valores y su fortaleza. A mis tres hermanos: Carolina, Estefani y Quetzalcóatl; por su compañía, alianza y comprensión. A mi cuñado: Luis Madariaga, que se ha convertido en un hermano más; A mis sobrinos: Emiliano e Iyari por darme tanta felicidad.

Agradezco a todos mis profesores, compañeros y alumnos; A aquellas personas que se han cruzado en mi camino; A todos aquellos de los cuales he aprendido, y a su vez, a aquellos que han aprendido de mí.

Agradezco la dicha que provee el conocimiento y los medios que nos llevan a él; A las adversidades que se muestran en el camino con el fin de fortalecernos; A los eventos fortuitos que se presentan, para dar a conocer, la virtuosa naturaleza.

Si el Universo tuviese voz
Nos contaría sus secretos
Nos confesaría las leyes que lo gobiernan
Nos hablaría de la creación
Más sin embargo
Creó al ser humano
Y le dió voz.

Resumen

En esta tesis se discute, usando la ecuación relativista de Klein-Gordon, la solución exacta del problema cuántico del obturador. La función de onda que resulta no se asemeja a la expresión matemática que aparece en la teoría óptica de la difracción de Fresnel. Sin embargo, la densidad exacta de carga relativista, cuando se grafica contra la variable tiempo, muestra oscilaciones transitorias, las cuales, además de presentar fenómenos relativistas, claramente se asemejan al patrón de difracción óptica de Fresnel. Se muestra de esta forma que la difracción en el tiempo es válida para el caso relativista.

Índice general

Agradecimientos	VII
1. Introducción	1
2. Difracción en el tiempo no relativista	5
3. Difracción en el tiempo relativista	11
3.1. Introducción	11
3.2. El problema del obturador relativista de Klein-Gordon	12
3.3. Variables adimensionales	13
3.4. Solución de difracción en el tiempo	15
3.5. La transformada inversa de Laplace	17
3.6. Soluciones equivalentes	19
3.7. Comprobación para el caso particular: $\mu = 0$	21
4. Densidad de carga relativista	23
4.1. Ecuación de Continuidad	23
4.2. Densidad Transitoria de Carga	24
4.3. Difracción con diferentes valores de energía	27
5. Límite no relativista	29

6. Conclusiones

33

Índice de figuras

1.1. Densidad de probabilidad para difracción en el tiempo no relativista.	2
2.1. Difracción no relativista en el tiempo.	10
4.1. Difracción relativista en el tiempo.	26
4.2. Diferentes energías en difracción relativista en el tiempo	28

Capítulo 1

Introducción

Similitudes entre las teorías de Óptica y Mecánica Cuántica son bien conocidas [1]. Un ejemplo de esta semejanza fue obtenida por M. Moshinsky [2], quien analizó el problema del obturador cuántico en 1D, para lo cual consideró un haz monoenergético de partículas libres, $\omega \equiv \hbar k^2/2m$, moviéndose en dirección paralela al eje-x. Para $t < 0$, el haz es interrumpido en $x = 0$, por un obturador de pared perfectamente absorbente (onda no reflejada) perpendicular al haz. Repentinamente, al tiempo $t = 0$ el obturador se abre, permitiendo para $t > 0$, la evolución libre del haz de partículas. ¿Cuál es la densidad de probabilidad a una distancia $x > 0$ a la derecha del obturador? Este problema implica resolver, como un problema de valores a la frontera, la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo con valores iniciales dados por:

$$\psi(x, 0) = e^{ikx} \Theta(-x) \quad (1.1)$$

donde $\Theta(x)$ denota la función escalón de Heaviside, definida como:

$$\Theta(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \quad (1.2)$$

En $t > 0$, Moshinsky mostró que para la propagación libre del haz, la función de onda de Schrödinger tiene una solución exacta dada por:

$$\psi(x, t) = \exp[i(kx - \omega t)] \frac{1}{\sqrt{2i}} \left\{ \frac{1+i}{2} + \mathcal{F}[\xi(x, t)] \right\} \quad (1.3)$$

donde $\mathcal{F}(\xi)$ denota la integral compleja de Fresnel:

$$\mathcal{F}(\xi) \equiv \int_0^\xi \exp \frac{i\pi u^2}{2} du \equiv C(\xi) + iS(\xi) \quad (1.4)$$

donde:

$$S(\xi) = \int_0^\xi \text{sen}\left(\frac{\pi u^2}{2}\right) du \quad y \quad C(\xi) = \int_0^\xi \text{cos}\left(\frac{\pi u^2}{2}\right) du \quad (1.5)$$

y ξ está dada por:

$$\xi(x, t) \equiv \sqrt{\frac{m}{\pi \hbar t}} \left(\frac{\hbar k}{m} t - x \right). \quad (1.6)$$

Para un haz de partículas, la densidad de probabilidad ρ es entonces:

$$\rho(x, t) = \psi^*(x, t)\psi(x, t) = \frac{1}{2} \left[C(\xi) + \frac{1}{2} \right]^2 + \frac{1}{2} \left[S(\xi) + \frac{1}{2} \right]^2. \quad (1.7)$$

La expresión matemática en el lado derecho de la ecuación (7), es idéntica a la expresión que se obtiene en Óptica para la intensidad de la luz en la difracción de Fresnel por una orilla recta [6]. Dada una posición fija $x > 0$, la gráfica de la densidad de probabilidad $\rho(x, t)$ es una función del tiempo, como lo muestra la Figura 1. A este comportamiento cuántico transitorio,

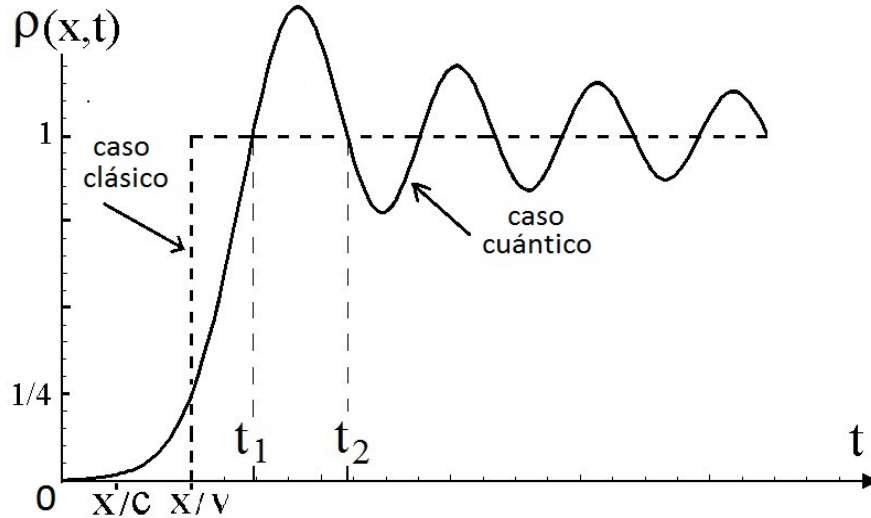


Figura 1.1: Densidad de probabilidad para difracción en el tiempo no relativista.

Moshinsky lo llamó *difracción en el tiempo*. Una medida del medio período de las oscilaciones, se puede obtener por la diferencia, $T \equiv t_2 - t_1$, entre dos tiempos en que ρ toma un valor asintótico ($\rho(x, t) = 1$) que coincide con el valor clásico. Se obtiene $T \approx (\pi m x / \hbar k^2)$. Por ejemplo, para neutrones térmicos (con una energía de 0.025eV a 0.1eV, y se encuentran en equilibrio térmico con el medio en que se hallan) y a una distancia de $x = 1\text{m}$, el intervalo sería $T \approx 10^{-9}\text{sec}$. Una evidencia experimental de estas predicciones cuánticas fueron confirmadas hasta el año 1996 por Szriftigiser, Guéry-Odelin, Arndt, and Dalibard [7].

Nótese que la densidad transitoria en la Figura 1, se incrementa monótonamente desde el instante en que se abre el obturador, $t = 0$, y por lo tanto, un observador situado a una distancia $x > 0$, podría detectar partículas a un tiempo previo a $t = x/c$. Esto implica que algunas de las partículas del haz viajan con velocidades mayores que la velocidad de la luz. En consecuencia, para tiempos muy cortos todas las predicciones de la ecuación de Schrödinger deben ser descartadas, el carácter no relativista de esta ecuación, es el origen de esta predicción errónea.

La analogía entre la densidad transitoria de probabilidad y la difracción óptica de Fresnel, sugiere preguntar si otras densidades, para otros tipos de ecuaciones de onda, muestran esta analogía. El profesor Moshinsky fue el primero en hacer notar esta cuestión y responderla [2]. Trabajando con la ecuación de onda ordinaria y la ecuación de Klein-Gordon, Moshinsky llega a la conclusión de que sólo para la ecuación de onda de Schrödinger (caso no relativista) la función de onda ψ muestra semejanza a la expresión que aparece en la teoría de difracción de Sommerfeld. Para el caso de fotones esto es claro, la solución de d'Alambert no permite tales oscilaciones. Sin embargo, para partículas con masa diferente de cero existen serias dudas referentes a sus conclusiones.

El propósito de esta tesis es revisar el problema del obturador en el marco teórico de la ecuación de Klein-Gordon. Se obtiene la solución analítica exacta para dicho problema usando condiciones iniciales similares a las usadas en el caso de Schrödinger. Esta solución se ve diferente a la reportada por Moshinsky. Sin embargo, en concordancia con sus conclusiones, también se encuentra que la función de onda de Klein-Gordon no se asemeja a la expresión analítica que aparece en la teoría de difracción de Sommerfeld. Aún así, cuando la densidad exacta relativista de carga se grafica contra el tiempo, dicha gráfica muestra oscilaciones transitorias que, aparte de presentar características relativistas, claramente se asemejan al patrón que aparece en la difracción óptica. Por esto, en esta tesis se demuestra que, la difracción en el tiempo sí existe para expresiones de densidad de carga en el caso de un haz de partículas relativistas.

Capítulo 2

Difracción en el tiempo no relativista

En este capítulo se muestra en un problema no relativista simple y bien conocido, la técnica matemática que se utilizará en el capítulo siguiente en el caso relativista. Se revisa el problema cuántico no relativista del obturador, donde la solución de Moshinsky de difracción en el tiempo es ampliamente conocida. Haciendo uso del método de transformada de Laplace para encontrar las soluciones de la ecuación de Schrödinger, se obtiene un resultado que muestra gráficamente las densidades transitorias en el problema del obturador cuántico no relativista.

Consideremos la función $\psi(x, t)$ definida por el siguiente problema de valores a la frontera:

1) La ecuación de Schrödinger:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = 0, \quad (2.1)$$

donde $\psi(x, t)$ está definida para $t \geq 0$ y es finita en el intervalo $-\infty < x < +\infty$.

2) Condición inicial:

$$\psi(x, 0) = \begin{cases} e^{ikx} & \text{para } x \leq 0 \\ 0 & \text{para } x > 0 \end{cases} \equiv e^{ikx} \theta(-x) \quad (2.2)$$

3) Condiciones a la frontera, para un $M \in \mathbb{R}$ arbitrario, dadas por:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} |\psi(x, t)| < M, \text{ es decir, } \psi \text{ está acotada en } \pm\infty. \quad (2.3)$$

Como es conocido, este problema de valores a la frontera define la función de Moshinsky para *difracción en el tiempo no relativista*, la cual se mostró en la ecuación (3) en la Introducción. Obtengamos dicha solución, haciendo uso de la transformada de Laplace, denotada por:

$$\mathcal{L}[\psi(t)](s) \equiv \int_0^{\infty} e^{-st} \psi(x, t) dt \equiv \phi(x, s). \quad (2.4)$$

Debido a la necesidad de una comparación de la presente solución con la posterior solución del caso relativista y por simplicidad matemática, se escribe primero la ecuación de Schrödinger en variables adimensionales. Por conveniencia, se usan las mismas escalas que en el caso relativista, esto es: utilizamos la longitud de Compton, $\lambda_c \equiv \hbar/mc$, para definir variables adimensionales χ y τ , para posición y tiempo, definidas respectivamente como:

$$\chi \equiv \frac{x}{\lambda_c}, \quad \tau \equiv \frac{ct}{\lambda_c}. \quad (2.5)$$

Entonces, la ecuación de Schrödinger (2.1), en variables adimensionales, se puede reescribir como:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \chi^2} + 2i \frac{\partial \psi}{\partial \tau} = 0. \quad (2.6)$$

La condición inicial (2.2) para el problema del obturador también se puede escribir en forma adimensional:

$$\psi(\chi, 0) = \exp[i(k\lambda_c)\left(\frac{x}{\lambda_c}\right)] \theta\left(\frac{-x}{\lambda_c}\right) \equiv e^{i\kappa\chi} \theta(-\chi), \quad (2.7)$$

donde se ha definido un ‘número de onda’ adimensional: $\kappa \equiv k\lambda_c$.

Empecemos tomando la transformada de Laplace de la Ec.(2.6); de donde obtenemos:

$$\frac{d^2 \phi(\chi, s)}{d\chi^2} + 2i(s\phi - \phi(\chi, 0)) = 0, \quad (2.8)$$

esto nos proporciona una ecuación diferencial ordinaria para $\phi(x, s)$:

$$\frac{d^2 \phi}{d\chi^2} + 2is\phi = 2ie^{i\kappa\chi} \theta(-\chi) \quad (2.9)$$

Debido a la presencia de la función escalón $\theta(-\chi)$, el origen $\chi = 0$ es un punto singular de la ecuación (2.9). Es condición necesaria, sin embargo, que la función de onda y su primera derivada sean continuas en el origen. Esta circunstancia sugiere separar el dominio infinito, $-\infty < \chi < +\infty$, en dos dominios: el positivo, $\chi \geq 0$, y el negativo $\chi \leq 0$. Ahora cada

dominio tiene su correspondiente (y diferente) ecuación diferencial.

Para el dominio negativo, $\chi \leq 0$, definimos la función $\phi_{<}(\chi, s)$ como la solución de la ecuación:

$$\frac{d^2\phi_{<}}{d\chi^2} + 2is\phi_{<} = 2ie^{i\kappa\chi}, \quad (2.10)$$

y para el dominio positivo, $\chi \geq 0$, definimos $\phi_{>}(\chi, s)$ como la solución de:

$$\frac{d^2\phi_{>}}{d\chi^2} + 2is\phi_{>} = 0. \quad (2.11)$$

Lo anterior implica, que la función de onda de Schrödinger, $\phi(\chi, s)$, está expresada por:

$$\phi(x, s) = \begin{cases} \phi_{>}(\chi, s) & \text{para } x \geq 0 \\ \phi_{<}(\chi, s) & \text{para } x \leq 0 \end{cases}. \quad (2.12)$$

Ambas funciones $\phi_{<}$ y $\phi_{>}$ deben estar acotadas: ($\phi_{<}$ en $-\infty$) y ($\phi_{>}$ en $+\infty$). Lo importante es la condición de frontera, donde el par de funciones $\phi_{<}$ y $\phi_{>}$ y sus correspondientes derivadas $d\phi_{<}/d\chi$ y $d\phi_{>}/d\chi$ deben ser continuas en la interfaz $\chi = 0$.

Las ecuaciones (2.10) y (2.11) son ecuaciones diferenciales ordinarias, lineales y con coeficientes constantes, por tanto su solución es inmediata. Tomando en cuenta las condiciones de acotamiento en $\pm \infty$, tenemos:

Para el dominio positivo, $\chi \geq 0$, la solución está dada por la solución general de la ecuación homogénea:

$$\phi_{>}(\chi, s) = B \exp(-\chi\sqrt{-2is}), \quad (2.13)$$

y para el dominio negativo, $\chi \leq 0$, la solución está dada por la solución general de la ecuación homogénea y una solución particular de la inhomogénea:

$$\phi_{<}(\chi, s) = A \exp(+\chi\sqrt{-2is}) - \frac{2i}{\kappa^2 - 2is} \exp(i\kappa\chi), \quad (2.14)$$

Nótese que en estas soluciones, el símbolo $\sqrt{-i}$ denota la raíz con parte real positiva, esto es:

$$\sqrt{-i} = e^{-i\pi/4} = \frac{+1}{\sqrt{2}} - i \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Las constantes A y B se determinan de las dos condiciones de continuidad en la interfaz:

$$\begin{aligned}\phi_{<}(0, s) &= \phi_{>}(0, s), \\ \frac{d\phi_{<}(0, s)}{d\chi} &= \frac{d\phi_{>}(0, s)}{d\chi}.\end{aligned}$$

Tenemos entonces el sistema de ecuaciones algebraicas:

$$A - \frac{2i}{\kappa^2 - 2is} = B, \quad (2.15)$$

$$A\sqrt{-2is} + \frac{2\kappa}{\kappa^2 - 2is} = -B\sqrt{-2is}, \quad (2.16)$$

cuyas soluciones son:

$$A = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{s}(\sqrt{s} + \kappa/\sqrt{2i})} \quad (2.17)$$

$$B = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{s}(\sqrt{s} - \kappa/\sqrt{2i})} \quad (2.18)$$

Sustituyendo el valor de las constantes A y B , en las funciones (2.13) y (2.14) se obtiene la solución exacta, en las variables (χ, s) , del problema de difracción en el tiempo no relativista. Para $(\chi \leq 0)$ tenemos una solución:

$$\phi_{<}(\chi, s) = \frac{1}{2} \frac{\exp(+\chi\sqrt{-2i}\sqrt{s})}{\sqrt{s}(\sqrt{s} + \kappa/\sqrt{2i})} + \frac{\exp(i\kappa\chi)}{s + i\kappa^2/2}, \quad (2.19)$$

y para $(\chi \geq 0)$ se tiene otra solución:

$$\phi_{>}(\chi, s) = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{s}(\sqrt{s} - \kappa/\sqrt{2i})} \exp(-\chi\sqrt{-2i}\sqrt{s}) \quad (2.20)$$

El paso final es obtener la solución en la variable temporal, τ . Ase se debe invertir la transformada de Laplace. Denotando

$$\mathcal{L}^{-1}[\phi(\chi, s)](\tau) = \psi(\chi, \tau),$$

y consultando tablas de transformadas de Laplace [12], se encuentra el siguiente resultado:

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-\alpha\sqrt{s}}}{\sqrt{s}(\sqrt{s}+\beta)}\right](\tau) = e^{\alpha\beta} e^{\beta^2\tau} \operatorname{erfc}\left[\beta\sqrt{\tau} + \frac{\alpha}{2\sqrt{\tau}}\right]. \quad (2.21)$$

Por lo tanto, sustituyendo $\alpha \rightarrow \chi\sqrt{2/i}$ y $\beta \rightarrow -\kappa/\sqrt{2i}$ tenemos:

$$\begin{aligned} 2\psi_{>}(\chi, \tau) &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\exp(-\sqrt{-2i}\chi\sqrt{s})}{\sqrt{s}(\sqrt{s}-\kappa/\sqrt{2i})}\right](\tau) \\ &= e^{-i\kappa\chi} e^{-i\kappa^2\tau/2} \operatorname{erfc}\left[-\kappa\sqrt{\frac{\tau}{2i}} + \frac{\chi}{2}\sqrt{\frac{2}{i\tau}}\right] \\ &= e^{i(\kappa\chi-\kappa^2\tau/2)} \left\{ 1 + \operatorname{erf}\left[\sqrt{\frac{1}{2i\tau}}(\kappa\tau - \chi)\right] \right\} \end{aligned} \quad (2.22)$$

Se puede reescribir esta solución en términos más familiares, usando las funciones $S(z)$ y $C(z)$, seno y coseno de Fresnel respectivamente. Para esto, utilicemos la identidad [12]:

$$\mathcal{F}(z) \equiv \int_0^z e^{i\pi/2u} du = C(z) + iS(z) = \sqrt{\frac{i}{2}} \operatorname{erf}\left[z\sqrt{\frac{\pi}{2i}}\right]$$

y entonces tenemos en variables adimensionales el resultado de Moshinsky:

$$\psi_{>}(\chi, \tau) = e^{i(\kappa\chi-\kappa^2\tau/2)} \frac{1}{\sqrt{2i}} \left[\frac{1+i}{2} + C(\xi) + iS(\xi) \right] \quad (2.23)$$

donde el argumento $\xi(\chi, \tau)$ está dado por:

$$\xi(\chi, \tau) \equiv \sqrt{\frac{1}{\pi\tau}} (\kappa\tau - \chi). \quad (2.24)$$

Esta es la solución exacta, para $\chi \geq 0$, de difracción en el tiempo no relativista.

En la Figura 1.1 se grafica la densidad de probabilidad $|\psi_{>}|^2$ en términos de variables adimensionales. Nótese que en esta figura la escala de tiempos: es tal que una unidad corresponde a $\tau \times 10^5$. Para un mesón- π con $\chi = 10^3$, lo cual implica, $x = 10^3 \times \hbar/mc \approx 10^3$ radios nucleares $\approx 10^{-12}$ m, el período de oscilación es del orden de magnitud de $T \approx 10^5 \times \hbar/mc^2 \approx 10^{-18}$ sec.

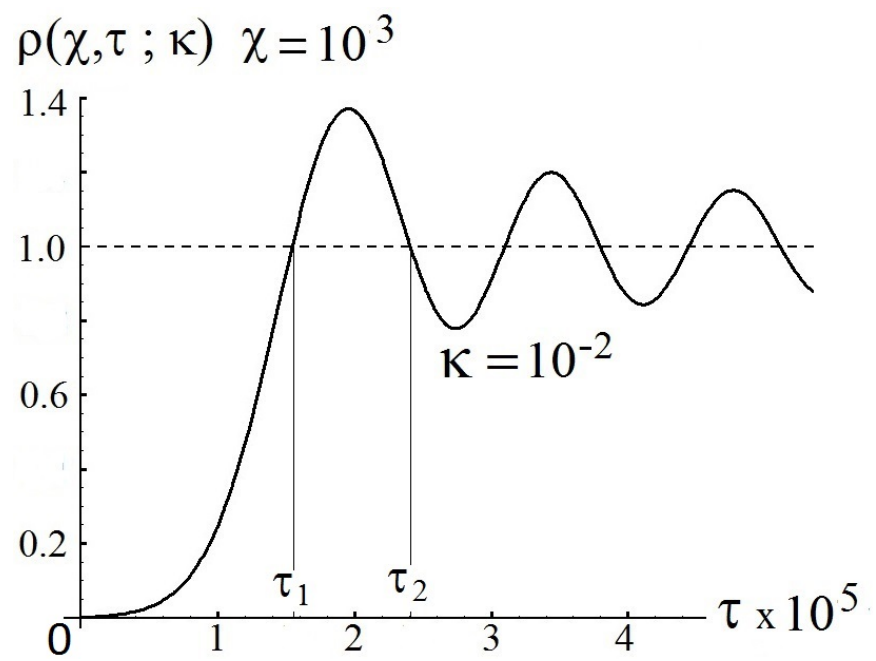


Figura 2.1: Difracción no relativista en el tiempo.

Capítulo 3

Difracción en el tiempo relativista

3.1. Introducción

El problema relativista de difracción en el tiempo tiene su origen en el trabajo de M. Moshinsky en 1952 [3]. Dado que la relación entre el espín y la estadística de partícula libre es irrelevante en el análisis del problema relativista del obturador, Moshinsky toma por simplicidad, en lugar de la ecuación de *Dirac* a la ecuación de *Klein-Gordon* y la ecuación de onda ordinaria. Moshinsky encuentra que únicamente para la ecuación de Schrödinger (caso no-relativista) la función de onda ψ se asemeja a la expresión de Sommerfeld en la teoría de difracción. Por esta razón, Moshinsky niega la existencia de difracción en el tiempo en el caso relativista.

En esta tesis, se revisa la ecuación de *Klein-Gordon* para el problema del obturador, se encuentra que, efectivamente, la función de onda relativista ψ no se asemeja a la expresión de Sommerfeld en la teoría de difracción. Sin embargo, y aquí a diferencia del trabajo de Moshinsky, se establece que el hecho de que la función de onda relativista ψ no tenga la misma estructura matemática que la expresión de Sommerfeld, no impide que existan oscilaciones transitorias semejantes a las de difracción.

El propósito de este capítulo es resolver el problema del obturador usando la ecuación de *Klein-Gordon*. Se utilizarán métodos matemáticos diferentes a los utilizados por Moshinsky, para obtener la solución exacta para la función de onda relativista. En completa concordancia con Moshinsky, se encuentra que, efectivamente la solución de la función de onda relativista, no se asemeja a la expresión de Sommerfeld. Sin embargo, cuando se grafica la densidad de

carga contra el tiempo, la gráfica muestra oscilaciones transitorias que claramente se asemejan a un patrón de difracción óptico. Por esta razón, se reporta que un inherente fenómeno de difracción en el tiempo sí existe en la teoría relativista.

3.2. El problema del obturador relativista de Klein-Gordon

Es bien conocido que la ecuación de *Klein-Gordon* describe partículas escalares (espín cero), como es el caso de piones, cuando su energía cinética resulta comparable a su energía en reposo ($m_0c^2 \simeq 140\text{Mev}$), y entonces los efectos relativistas deben ser tomados en cuenta.

En resumen, el problema relativista de difracción en el tiempo para una partícula libre con estados de energía positivos y negativos disponibles, se define por el siguiente problema de valores a la frontera:

1) Una función de onda escalar $\Psi(x, t)$ que satisface la ecuación de *Klein-Gordon* para una partícula libre, es decir:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = \mu^2 \Psi. \quad (3.1)$$

Esta ecuación está definida en la región del espacio infinito: $-\infty < x < \infty$, y

$$\mu \equiv \frac{m_0 c}{\hbar} = \frac{1}{\lambda_c}, \quad (3.2)$$

donde $\lambda_c \equiv$ longitud de onda de Compton.

2) Condiciones iniciales:

$$\Psi(x, 0) = e^{ikx} \theta(-x), \quad \frac{\partial \Psi}{\partial t}(x, 0) = -i\omega e^{ikx} \theta(-x) \quad (3.3)$$

donde

$$\omega(k) = c\sqrt{k^2 + \mu^2} = \mu c\sqrt{1 + (k/\mu)^2} \quad (3.4)$$

3) Condiciones a la frontera: La función de onda $\Psi(x, t)$ está acotada en todo el espacio:

$$|\Psi(x, t)| \leq M, \quad \text{para toda } x. \quad (3.5)$$

Este problema de valores a la frontera define a la función de onda relativista $\Psi(x, t)$.

En el trabajo de Moshinsky [3], usando transformadas de Fourier, la solución reportada es:

$$\Psi(x, t) = \theta(ct - x) \left\{ e^{i(kx - \omega t)} + \frac{1}{2} J_0(\mu \sqrt{(ct)^2 - x^2}) - \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sqrt{\frac{ct+x}{ct-x}} \frac{1}{iz} \right]^n J_n(\mu \sqrt{(ct)^2 - x^2}) \right\}, \quad (3.6)$$

donde $\theta(x)$ es la función escalón unitario de Heaviside y $z = (k + \sqrt{k^2 + \mu^2})/\mu$. La presencia de la serie infinita impide graficar una solución exacta del problema. Esto es claro, porque para que la serie sea convergente, las bases de las potencias sucesivas deben ser menor a la unidad. Por lo tanto, la serie sólo se puede aproximar numéricamente con la condición:

$$\left| \frac{1}{z} \sqrt{\frac{ct+x}{ct-x}} J_n(\mu \sqrt{(ct)^2 - x^2}) \right| \ll 1 \quad (3.7)$$

Es de notar que en su artículo, Moshinsky no intentó graficar el resultado de su solución.

El objetivo de esta tesis es revisar el mismo problema relativista del obturador con la ecuación de *Klein-Gordon*. Haciendo uso de transformadas de Laplace para obtener una solución *exacta* al problema relativista que nos graficar dicha solución.

Se hará ver que esta solución algebraica se puede obtener de forma exacta hasta cuadraturas. Las integrales que se obtienen se pueden resolver fácilmente en forma numérica, cuyos valores para la función de onda, nos permitirá graficar la densidad de carga.

3.3. Variables adimensionales

Para empezar, nótese que la ecuación de *Klein-Gordon* se puede reescribir de la siguiente manera:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial(\mu x)^2} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial(\mu ct)^2} = \Psi, \quad (3.8)$$

lo cual hace ver que la ecuación de *Klein-Gordon* tiene, en forma natural, las variables adimensionales:

$$\tau \equiv \mu ct, \quad \chi \equiv \mu x. \quad (3.9)$$

Por otro lado, para el caso específico del problema del obturador, la primera condición inicial se pueden reescribir como:

$$\Psi(x, 0) = \theta(-x) \exp(ikx) = \theta(-\mu x) \exp\left(i\frac{k}{\mu}\mu x\right) = \theta(-\chi) \exp(i\kappa\chi), \quad (3.10)$$

donde el número de onda adimensional se define por: $\kappa \equiv k/\mu$. La segunda condición inicial se puede reescribir como:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\Psi(x, 0)}{\partial(\mu ct)} &= -i\frac{\omega}{\mu c} e^{i(\frac{k}{\mu}\mu x)} \theta(-\mu x) \\ &= -i\Omega e^{i\kappa\chi} \theta(-\chi) \end{aligned} \quad (3.11)$$

donde Ω es la frecuencia angular adimensional, definida por:

$$\Omega \equiv \frac{\omega(k)}{\mu c} = \sqrt{1 + (k/\mu)^2} = \sqrt{1 + \kappa^2} \quad (3.12)$$

Todas las variables $(\chi, \tau, \kappa, \Omega)$ son adimensionales y por lo tanto el problema de difracción en el tiempo queda expresado totalmente en términos de ellas.

En resumen, el caso relativista de difracción en el tiempo queda definido por el siguientes problema de valores a la frontera:

1) La ecuación de *Klein-Gordon* en variables adimensionales:

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial\chi^2} - \frac{\partial^2\Psi}{\partial\tau^2} = \Psi(\chi, \tau) \quad (3.13)$$

2) Condiciones iniciales:

$$\Psi(\chi, 0) = e^{i\kappa\chi} \theta(-\chi), \quad \frac{\partial\Psi(\chi, 0)}{\partial\tau} = -i\Omega e^{i\kappa\chi} \theta(-\chi) \quad (3.14)$$

3) Condiciones a la frontera:

$$|\Psi(\chi, \tau)| \leq M \quad \text{para toda } \chi. \quad (3.15)$$

Estas tres condiciones definen perfectamente a la función de onda relativista Ψ en variables adimensionales.

Debe notarse que de las cantidades χ, τ , son variables adimensionales independientes, y en cambio κ, Ω , son parámetros adimensionales, pero dependientes uno del otro:

$$\Omega = \sqrt{1 + \kappa^2} \quad (3.16)$$

Por lo tanto, se denota:

$$\Psi \equiv \Psi(\chi, \tau; \kappa) \quad (3.17)$$

A continuación se procede a resolver este problema.

3.4. Solución de difracción en el tiempo

Tomemos la transformada de Laplace de la Ec. (3.13). Denotando esta transformada como en la Ec. (1.4), donde el parámetro s puede ser real o complejo. La ecuación de *Klein-Gordon* para $\Psi(\chi, \tau)$ se convierte en una ecuación diferencial ordinaria, es decir:

$$\frac{d^2\phi(\chi, s)}{d\chi^2} - [s^2\phi(\chi, s) - s e^{i\kappa\chi}\theta(-\chi) + i\Omega e^{i\kappa\chi}\theta(-\chi)] = \phi(\chi, s), \quad (3.18)$$

Por lo tanto, se tiene que resolver la ecuación diferencial inhomogénea:

$$\frac{d^2\phi}{d\chi^2} - [s^2 + 1]\phi = -(s - i\Omega) e^{i\kappa\chi}\theta(-\chi) \quad (3.19)$$

definida en el intervalo $(-\infty < \chi < \infty)$ y acotada en todos los puntos de dicho intervalo.

En la ecuación anterior vemos que la segunda derivada con respecto a χ genera una función escalón $\theta(-\chi)$. Esto implica que el origen $\chi = 0$ es un punto singular del problema, donde $\partial\phi/\partial\chi$ debe ser continua, con diferentes pendientes en ambos lados del punto singular, y la función misma $\phi(\chi, s)$ también debe ser continua en $\chi = 0$.

Este razonamiento sugiere separar el problema en dos regiones semi-infinitas, esto es para, $\chi < 0$ y $\chi > 0$. Específicamente:

1) Para el intervalo positivo $\chi \geq 0$ definimos la función $\phi_{>}(\chi, \tau)$ como solución de la ecuación:

$$\frac{d^2\phi_{>}}{d\chi^2} - (s^2 + 1)\phi_{>} = 0 \quad (3.20)$$

acotada en $\chi \rightarrow +\infty$.

2) Para el intervalo negativo ($\chi \leq 0$) definimos la función $\phi_{<}(\chi, \tau)$ como solución de la ecuación:

$$\frac{d^2\phi_{<}}{d\chi^2} - (s^2 + 1) \phi_{<} = -(s - i\Omega)e^{i\kappa\chi} \quad (3.21)$$

acotada en $\chi \rightarrow -\infty$.

Ambas funciones $\phi_{<}(\chi, s)$, $\phi_{>}(\chi, s)$ y sus primeras derivadas deben ser continuas en la interfaz $\chi = 0$. Las anteriores ecuaciones son simples ecuaciones diferenciales ordinarias lineales con coeficientes constantes, sus soluciones son triviales, y están dadas por:

$$\begin{aligned} \phi_{>}(\chi, s) &= B e^{-\chi\sqrt{s^2+1}} \\ \phi_{<}(\chi, s) &= A e^{+\chi\sqrt{s^2+1}} + \frac{e^{i\kappa\chi}}{s + i\Omega}, \end{aligned} \quad (3.22)$$

donde ya se han incluidos las condiciones en las fronteras ($|\chi| = \infty$) y donde A y B son constantes (independientes de χ , pero pueden ser funciones de s). Para su uso posterior escribimos las primeras derivadas:

$$\begin{aligned} \frac{d\phi_{<}(\chi, s)}{d\chi} &= A\sqrt{s^2+1} e^{+\chi\sqrt{s^2+1}} + \frac{i\kappa}{s + i\Omega} e^{i\kappa\chi} \\ \frac{d\phi_{>}(\chi, s)}{d\chi} &= -B\sqrt{s^2+1} e^{-\chi\sqrt{s^2+1}}. \end{aligned} \quad (3.23)$$

En estas ecuaciones, las constantes A y B se determinan de las condiciones de continuidad en la interfaz $\chi = 0$:

$$\begin{aligned} \phi_{>}(0, s) &= \phi_{<}(0, s) \\ \frac{d\phi_{>}(0, s)}{d\chi} &= \frac{d\phi_{<}(0, s)}{d\chi} \end{aligned} \quad (3.24)$$

lo cual nos lleva a un sistema de ecuaciones algebraicas simultaneas para A y B :

$$\begin{aligned} B &= A + \frac{1}{s + i\Omega}, \\ -B\sqrt{s^2+1} &= +A\sqrt{s^2+1} + \frac{i\kappa}{s + i\Omega}. \end{aligned} \quad (3.25)$$

La solución de este sistema algebraico está dada por:

$$\begin{aligned} A(s) &= -\frac{1}{2} \frac{1}{s + i\Omega} \left[1 + \frac{i\kappa}{\sqrt{s^2 + 1}} \right] \\ B(s) &= \frac{1}{2} \frac{1}{s + i\Omega} \left[1 - \frac{i\kappa}{\sqrt{s^2 + 1}} \right] \end{aligned} \quad (3.26)$$

Sustituyendo estos valores de A y B en las ecuaciones (2.15) y (2.16) se obtiene:

$$\phi_{>}(\chi, s) = \frac{1}{2} \frac{1}{s + i\Omega} \left[1 - \frac{i\kappa}{\sqrt{s^2 + 1}} \right] e^{-\chi\sqrt{s^2+1}}, \quad (3.27)$$

$$\phi_{<}(\chi, s) = -\frac{1}{2} \frac{1}{s + i\Omega} \left[1 + \frac{i\kappa}{\sqrt{s^2 + 1}} \right] e^{+\chi\sqrt{s^2+1}} + \frac{e^{i\kappa\chi}}{s + i\Omega}. \quad (3.28)$$

Estas dos ecuaciones definidas en el espacio (χ, s) son la soluciones *exactas* del problema relativista de difracción en el tiempo. Estas soluciones proveen información valiosa respecto del problema, como es el hecho de que el comportamiento asintótico de las funciones $\phi(\chi, s)$ cerca del origen $s = 0$ nos dan información del comportamiento asintótico de la función $\Psi(x, t)$ a tiempos grandes. El inverso es cierto, es decir, $\phi(\chi, s)$ para s grandes ($|s| \rightarrow \infty$) nos da información de la función $\Psi(x, t)$ a tiempos cortos. Nótese que los puntos singulares de la solución están localizados en el eje imaginario ($s = -i\Omega$, polo simple y $s = \pm i$, puntos ramales) esto garantiza que nuestra solución es convergente y oscilatoria en el tiempo.

3.5. La transformada inversa de Laplace

En la sección anterior se obtuvo en el espacio (χ, s) la solución exacta del problema relativista de difracción en el tiempo en las regiones positiva $\phi_{>}(\chi, s)$ y negativa $\phi_{<}(\chi, s)$. En la presente sección se calcula “exclusivamente” para $x > 0$ la solución en el espacio (χ, τ) , tomando el inverso de la transformada de Laplace:

$$\Psi_{>}(\chi, \tau) = \frac{1}{2} \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s + i\Omega} \left(1 - \frac{i\kappa}{\sqrt{s^2 + 1}} \right) e^{-\chi\sqrt{s^2+1}} \right] (\tau). \quad (3.29)$$

Esta operación se realiza formalmente en el plano complejo s , sobre el llamado contorno de Bromwich. En el presente caso, esto puede resultar muy laborioso, debido a la presencia de los puntos ramales ($s = \pm i$). Afortunadamente hay un atajo a este problema y es tener acceso a tablas de transformadas de Laplace, donde encontramos la transformada inversa de

cada una de las funciones que necesitamos. De las tablas del Abramowitz [12], encontramos:

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+i\Omega}\right](\tau) = e^{-i\Omega\tau}, \quad (3.30)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-\chi\sqrt{s^2+1}}}{\sqrt{s^2+1}}\right](\tau) = J_0(\sqrt{\tau^2-\chi^2})\theta(\tau-\chi), \quad (3.31)$$

$$\mathcal{L}^{-1}[e^{-\chi\sqrt{s^2+1}}](\tau) = \delta(\tau-\chi) - \chi\frac{J_1(\sqrt{\tau^2-\chi^2})}{\sqrt{\tau^2-\chi^2}}\theta(\tau-\chi). \quad (3.32)$$

Sustituyendo las anteriores expresiones en la ecuación (3.29) y utilizando el Teorema de Convención:

$$\mathcal{L}^{-1}[f(s)g(s)](\tau) = \int_0^\tau F(\tau-u)G(u)du, \quad (3.33)$$

se obtiene la solución hasta cuadraturas:

$$\begin{aligned} \psi(\chi, \tau; \kappa) = & \frac{1}{2}\theta(\tau-\chi) \left\{ e^{i\Omega(\chi-\tau)} \right. \\ & \left. - \int_\chi^\tau du e^{i\Omega(u-\tau)} \left[\chi\frac{J_1(\sqrt{u^2-\chi^2})}{\sqrt{u^2-\chi^2}} + i\kappa J_0(\sqrt{u^2-\chi^2}) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (3.34)$$

que es la solución *exacta* relativista para la región $\chi \geq 0$.

Nótese que en esta solución aparece la función $\theta(\tau-\chi)$ la cual muestra la propiedad distintiva de una solución relativista. Esto es, la solución es cero para tiempos $t < x/c$, lo cual es la condición matemática que impide la propagación de señales a una velocidad mayor que la velocidad de la luz. Esta condición no aparece en la teoría de Schrödinger, la cual es no relativista.

3.6. Soluciones equivalentes

En la sección anterior se obtuvo la solución de *Klein-Gordon* para el problema de difracción en el tiempo en el intervalo positivo dada por:

$$2\Psi_{>}(\chi, \tau) = \left\{ e^{i\Omega(\chi-\tau)} - \chi \int_{\chi}^{\tau} du \frac{J_1(\sqrt{u^2 - \chi^2})}{\sqrt{u^2 - \chi^2}} e^{i\Omega(u-\tau)} - i\kappa \int_{\chi}^{\tau} du J_0(\sqrt{u^2 - \chi^2}) e^{i\Omega(u-\tau)} \right\} \theta(\tau - \chi). \quad (3.35)$$

En esta sección se va a reescribir esta solución en formas equivalentes, usando relaciones que son bien conocidas.

De las fórmulas de recurrencia para funciones Bessel, se conoce la identidad:

$$\frac{J_1(x)}{x} = \frac{1}{2}[J_0(x) + J_2(x)] \quad (3.36)$$

Sustituyendo esta relación en (3.35) obtenemos:

$$2\Psi_{>}(\chi, \tau) = \left\{ e^{i\Omega(\chi-\tau)} - \left(\frac{\chi}{2} + i\kappa\right) \int_{\chi}^{\tau} du e^{i\Omega(u-\tau)} J_0(\sqrt{u^2 - \chi^2}) - \frac{\chi}{2} \int_{\chi}^{\tau} du e^{i\Omega(u-\tau)} J_2(\sqrt{u^2 - \chi^2}) \right\} \theta(\tau - \chi). \quad (3.37)$$

La virtud de esta expresión radica en que, para propósitos de *cálculo numérico*, podemos definir por medio de integrales, las siguientes funciones \mathcal{G}_n definidas por:

$$\mathcal{G}_n(\chi, \tau; \kappa) \equiv \int_{\chi}^{\tau} du e^{i\Omega(u-\tau)} J_n(\sqrt{u^2 - \chi^2}) \quad (3.38)$$

donde $\Omega = \sqrt{1 + \kappa^2}$. En términos de estas funciones complejas \mathcal{G}_n se puede reescribir la solución (3.35) en forma compacta como:

$$2\Psi_{>}(\chi, \tau; \kappa) = \theta(\tau - \chi) \left\{ e^{i\Omega(\chi-\tau)} - \left(\frac{\chi}{2} + i\kappa\right) \mathcal{G}_0(\chi, \tau; \kappa) - \frac{\chi}{2} \mathcal{G}_2(\chi, \tau; \kappa) \right\}. \quad (3.39)$$

Las funciones \mathcal{G}_n reemplazan en el presente problema a las funciones de Fresnel

$$\mathcal{F}(z) \equiv \int_0^z e^{i\frac{\pi}{2}u^2} du, \quad (3.40)$$

que aparecen en el problema no relativista (Schrödinger) de difracción en el tiempo.

Otra posible expresión equivalente, se puede obtener haciendo uso de la relación:

$$\frac{dJ_0(x)}{dx} = -J_1(x), \quad (3.41)$$

lo que permite obtener:

$$\frac{J_1(\sqrt{u^2 - \chi^2})}{\sqrt{u^2 - \chi^2}} = -\frac{1}{u} \frac{d}{du} J_0(\sqrt{u^2 - \chi^2}). \quad (3.42)$$

Esta relación permite hacer una integración por partes donde se obtiene:

$$\begin{aligned} I \equiv \int_{\chi}^{\tau} du \frac{J_1(\sqrt{u^2 - \chi^2})}{\sqrt{u^2 - \chi^2}} e^{i\Omega u} &= -\frac{e^{i\Omega u}}{\tau} J_0(\sqrt{\tau^2 - \chi^2}) \\ &+ \frac{1}{\chi} e^{i\Omega u} + \int_{\chi}^{\tau} du J_0(\sqrt{u^2 - \chi^2}) e^{i\Omega u} \left(-\frac{1}{u^2} + i\Omega \frac{1}{u}\right) \end{aligned} \quad (3.43)$$

Usando esta relación y después de simplificaciones evidentes, se obtiene una expresión hasta cuadraturas como lo es la solución de Moshinsky [3]:

$$\begin{aligned} 2\Psi_{>}(\chi, \tau) &= \theta(\tau - \chi) \left\{ \frac{\chi}{\tau} J_0(\sqrt{\tau^2 - \chi^2}) \right. \\ &\left. + \int_{\chi}^{\tau} du e^{i\Omega(u-\tau)} J_0(\sqrt{u^2 - \chi^2}) \left[\frac{\chi}{u^2} - i\Omega \frac{\chi}{u} - i\kappa \right] \right\}. \end{aligned} \quad (3.44)$$

3.7. Comprobación para el caso particular: $\mu = 0$

Consideremos, en la ecuación de *Klein-Gordon* (3.1), el caso particular: $\mu = 0$. La ecuación de *Klein-Gordon* se transforma entonces en una ecuación ordinaria de onda;

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial ct^2} = 0, \quad (3.45)$$

donde, dadas las condiciones iniciales, $\Psi(x, 0) = f(x)$ y $\partial\Psi(x, 0)/\partial t = g(x)$, conocemos la solución general de D'Alembert:

$$2\Psi(x, t) = f(x + ct) + f(x - ct) + \frac{1}{c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(u) du. \quad (3.46)$$

Comprobemos que la presente solución relativista para difracción en el tiempo posee este límite.

Para difracción en el tiempo tenemos:

$$f(x) = e^{ikx}\theta(-x), \quad g(x) = -i\omega e^{ikx}\theta(-x), \quad (3.47)$$

donde $\omega = c\sqrt{k^2 + \mu^2}$. La solución exacta para $x > 0$ está dada por la Ec. (3.34), que en variables normales (x, t) se escribe como:

$$2\Psi_{>}(x, t) = \theta(ct - x) \left\{ e^{i\omega/c(x-ct)} - \int_x^{ct} dy e^{i\omega/c(y-ct)} \left[\mu x \frac{J_1(\mu\sqrt{y^2 - x^2})}{\sqrt{y^2 - x^2}} + ikJ_0(\mu\sqrt{y^2 - x^2}) \right] \right\}, \quad (3.48)$$

En el límite: $\mu \rightarrow 0$, y para $x > 0$, tenemos: $\omega \rightarrow ck$,

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} 2\Psi_{>}(x, t) \rightarrow \theta(ct - x) [e^{ik(x-ct)} - i\frac{\omega}{c} \int_x^{ct} dy e^{ik(y-ct)}]. \quad (3.49)$$

En la integral hacemos un cambio de variable: $u = y - ct$ y obtenemos para $x > 0$:

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} 2\Psi_{>}(x, t) = \theta(ct - x) e^{ik(x-ct)} + \frac{1}{c} \int_{x-ct}^0 du [-i\omega e^{iku}\theta(-u)], \quad (3.50)$$

la comprobación, en el límite $\mu \rightarrow 0$, es correcta.

Capítulo 4

Densidad de carga relativista

4.1. Ecuación de Continuidad

Una de las propiedades de la ecuación de *Klein-Gordon* es dar origen a la Ecuación de Continuidad:

$$\nabla \cdot \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \quad (4.1)$$

donde :

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \frac{\hbar}{2imc^2} \left(\Psi \frac{\partial \Psi^*}{\partial t} - \Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial t} \right), \quad (4.2)$$

y

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \frac{\hbar}{2im} (\Psi^* \nabla \Psi - \Psi \nabla \Psi^*). \quad (4.3)$$

La expresión para \mathbf{j} obtenida de la ecuación de *Klein-Gordon*, es idéntica al vector densidad de corriente de probabilidad obtenido para el caso no relativista de *Schrödinger*. Esta analogía nos induce a pensar que $\rho(\mathbf{r}, t)$, dada por la ecuación (4.2), se le puede dar la misma interpretación que en el caso no relativista, es decir, $\rho(\mathbf{r}, t)d^3x$ es la probabilidad de que la partícula se encuentre en el instante dado t en el elemento de volumen d^3x localizado en la vecindad del punto \mathbf{r} . Sin embargo, esta interpretación tropieza con una dificultad: ρ , dada por la ecuación (4.2), no es una cantidad positiva definida. La razón de esto es que en una ecuación de segundo orden, como lo es la ecuación de *Klein-Gordon*, a la función de onda Ψ y a su derivada $\partial\Psi/\partial t$ se les puede dar valores arbitrarios en un instante cualquiera, y por lo que podría suceder que con estos valores arbitrarios, la expresión (4.2) resulte negativa. De acuerdo con la reinterpretación de la teoría presentada por Pauli y Weisskopf [5], la cantidad

$e\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$ denota el vector *densidad de corriente eléctrica* y la cantidad $e\rho(\mathbf{r}, t)$ representa una *densidad de carga eléctrica*. La ecuación (4.1) es por lo tanto una ecuación para la conservación de la carga y no para la conservación de la masa (partículas). En cualquier teoría cuántica relativista, el número de partículas no se conserva; esto se explica por la posibilidad de creación y aniquilación de pares de carga opuesta. Cuando estos fenómenos se toman en cuenta, la teoría de *Klein-Gordon* es una teoría de una partícula cargada y no una teoría de una partícula masiva.

Dada la función de onda relativista, $\Psi(x, t)$, se tiene (con $e = 1$) la densidad de carga, en variables adimensionales, $\rho(\chi, \tau)$, dada por:

$$\begin{aligned}\rho(\chi, \tau; \kappa) &= \frac{i}{2} \left(\Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial(\mu ct)} - \Psi \frac{\partial \Psi^*}{\partial(\mu ct)} \right) \\ &= -\text{Im} \left(\Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial \tau} \right).\end{aligned}\quad (4.4)$$

Escribiendo $\Psi = \text{Re } \Psi + i \text{Im } \Psi$ se llega a una expresión cerrada para la densidad de carga:

$$\rho(\chi, \tau; \kappa) = \text{Im } \Psi \text{Re } \frac{\partial \Psi}{\partial \tau} - \text{Re } \Psi \text{Im } \frac{\partial \Psi}{\partial \tau}.\quad (4.5)$$

4.2. Densidad Transitoria de Carga

Como se vió en la sección anterior, para la región positiva $x > 0$ la densidad de carga se calcula como:

$$\rho_{>}(\chi, \tau; \kappa) = \text{Im } \Psi_{>} \text{Re } \frac{\partial \Psi_{>}}{\partial \tau} - \text{Re } \Psi_{>} \text{Im } \frac{\partial \Psi_{>}}{\partial \tau}.\quad (4.6)$$

Necesitamos entonces, separar en sus partes real e imaginaria tanto de la función de onda, $\Psi_{>}(\chi, \tau)$, como de su derivada $\partial \Psi_{>}/\partial \tau$. El cálculo es largo pero directo. Para propósitos de cálculo numérico, con $\Omega = \sqrt{1 + \kappa^2}$, se reportan los valores exactos de dichas cantidades.

Para la función dada en (3.44) tenemos:

$$\rho_{>}(\chi, \tau; \kappa) = \text{Im } \Psi_{>} \text{Re } \frac{\partial \Psi_{>}}{\partial \tau} - \text{Re } \Psi_{>} \text{Im } \frac{\partial \Psi_{>}}{\partial \tau}.\quad (4.7)$$

Necesitamos entonces, separar en sus partes real e imaginaria tanto la función de onda $\Psi_{>}(\chi, \tau)$ como su derivada $\partial \Psi_{>}/\partial \tau$. El cálculo es largo pero directo. Para propósitos de cálculo numérico, con $\Omega = \sqrt{1 + \kappa^2}$, reportamos los valores exactos de dichas cantidades.

Para la función dada en (3.44) tenemos:

$$\begin{aligned}
2 \operatorname{Re} \Psi_{>}(\chi, \tau) &= \theta(\tau - \chi) \{ \cos[\Omega(\chi - \tau)] \\
&\quad - \chi \int_{\chi}^{\tau} du \frac{J_1(\sqrt{u^2 - \chi^2})}{\sqrt{u^2 - \chi^2}} \cos[\Omega(u - \tau)] \\
&\quad + \kappa \int_{\chi}^{\tau} du J_0(\sqrt{u^2 - \chi^2}) \sin[\Omega(u - \tau)] \} \quad (4.8)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2 \operatorname{Im} \Psi_{>}(\chi, \tau) &= \theta(\tau - \chi) \{ \sin[\Omega(\chi - \tau)] \\
&\quad - \chi \int_{\chi}^{\tau} du \frac{J_1(\sqrt{u^2 - \chi^2})}{\sqrt{u^2 - \chi^2}} \sin[\Omega(u - \tau)] \\
&\quad - \kappa \int_{\chi}^{\tau} du J_0(\sqrt{u^2 - \chi^2}) \cos[\Omega(u - \tau)] \} \quad (4.9)
\end{aligned}$$

Y para las derivadas tenemos:

$$\begin{aligned}
2 \operatorname{Re} \frac{\partial \Psi_{>}(\chi, \tau)}{\partial \tau} &= \theta(\tau - \chi) \{ \Omega \sin[\Omega(u - \tau)] - \chi \frac{J_1(\sqrt{\tau^2 - \chi^2})}{\sqrt{\tau^2 - \chi^2}} \\
&\quad - \Omega \kappa \int_{\chi}^{\tau} du J_0(\sqrt{u^2 - \chi^2}) \cos[\Omega(u - \tau)] \\
&\quad - \chi \Omega \int_{\chi}^{\tau} du \frac{J_1(\sqrt{u^2 - \chi^2})}{\sqrt{u^2 - \chi^2}} \sin[\Omega(u - \tau)] \} \quad (4.10)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2 \operatorname{Im} \frac{\partial \Psi_{>}(\chi, \tau)}{\partial \tau} &= \theta(\tau - \chi) \{ -\Omega \cos[\Omega(u - \tau)] - \kappa J_0(\sqrt{u^2 - \chi^2}) \\
&\quad + \chi \Omega \int_{\chi}^{\tau} du \frac{J_1(\sqrt{u^2 - \chi^2})}{\sqrt{u^2 - \chi^2}} \cos[\Omega(u - \tau)] \\
&\quad - \kappa \Omega \int_{\chi}^{\tau} du J_0(\sqrt{u^2 - \chi^2}) \sin[\Omega(u - \tau)] \} \quad (4.11)
\end{aligned}$$

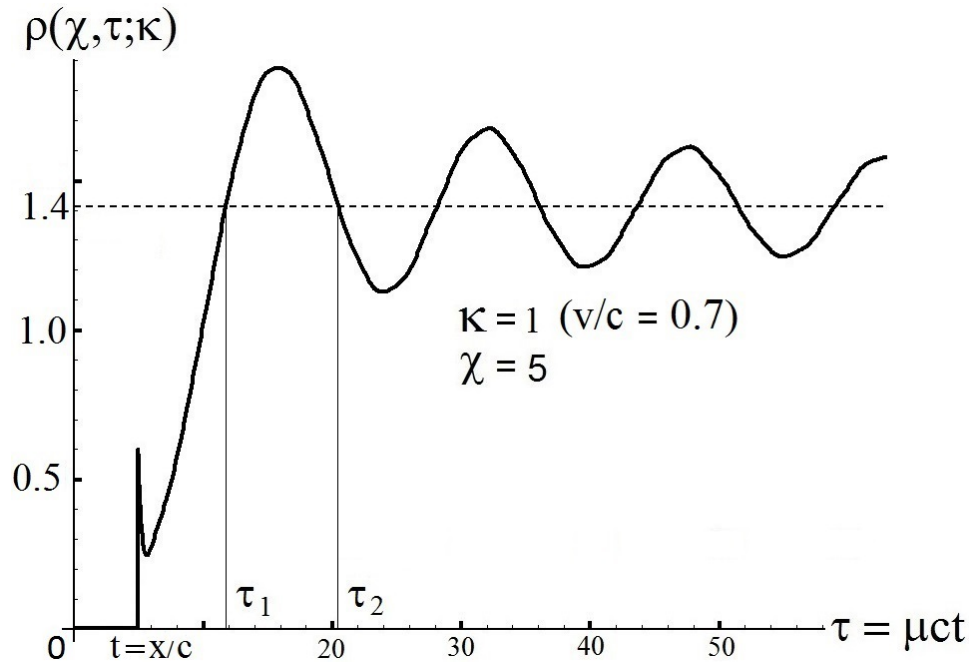


Figura 4.1: Difracción relativista en el tiempo.

Las principales características de la gráfica (realizada en la versión 9 de *WolframMathematica*) que se muestra a continuación y que describen *difracción relativista en el tiempo*, son:

1) Valor cero para la densidad de carga, en el intervalo, $0 \leq t \leq x/c$; esto es evidentemente necesario en una descripción relativista, donde la señal no puede exceder la velocidad de la luz c . Este resultado es inexistente en la ecuación de *Schrödinger*.

2) Nótese en la Fig. 4.1 la oscilación descendente, inmediatamente posterior al tiempo $t = x/c$, Esta curvatura hacia abajo es totalmente un efecto relativista, inexistente en la teoría de *Schrödinger*, en donde la densidad de carga es monótona creciente.

3) Así mismo, nótese de la Fig. 4.1, que el valor medio de las oscilaciones ρ_0 (valor estacionario cuando $\tau \rightarrow \infty$) no es igual a 1 como ocurre en el caso no relativista, sino un valor de $\sqrt{2}$. Este valor proviene de la normalización inicial de la función de onda, debido a las condiciones iniciales:

$$\Psi(\chi, 0) = e^{i\kappa\chi\theta(-\chi)}, \quad \frac{\partial\Psi(\chi, 0)}{\partial\tau} = -i\Omega e^{i\kappa\chi\theta(-\chi)}, \quad (4.12)$$

donde $\Omega = \omega/\mu c = \sqrt{1 + \kappa^2}$. Para estas condiciones iniciales, la densidad inicial de carga

relativista resulta:

$$\begin{aligned}\rho_0 = \rho(\chi, 0) &= -\text{Im}[\Psi^*(\chi, 0) \frac{\partial \Psi(\chi, 0)}{\partial \tau}] \\ &= \Omega \theta(-\chi) = \sqrt{1 + \kappa^2} \theta(-\chi),\end{aligned}\tag{4.13}$$

que, para el caso de $\kappa = 1$, da un valor para la densidad inicial de $\rho_0 = \sqrt{2}$.

4) La expresión (4.13) para ρ_0 implica que, conforme tomemos valores hacia el límite no-relativista, $\kappa \ll 1$, la densidad inicial de carga también se mueve hacia el valor no-relativista de 1 predicho por la solución de *Schrödinger*.

5) Los medios períodos relativistas de oscilación son mucho más pequeños que los períodos correspondientes de la teoría de *Schrödinger*. De acuerdo a la Fig. 4.1 cuando tenemos $\chi = 5$, o sea $x = 5 \times \hbar/mc \approx 5$ radios nucleares $\approx 10^{-14}$ m., vemos que el intervalo de tiempo que se necesita para un medio período de oscilación es: $\tau \equiv (\tau_2 - \tau_1)$ que para el caso particular de $\kappa = 1$ ($v/c = 7/10$), nos da un valor aproximado de $\tau \sim 9$. Esto implica un intervalo de tiempo de: $T \equiv t_2 - t_1 \approx 9\hbar/mc^2$. Para un mesón- π tenemos: $T \approx 10^{-23}$ sec., lo cual es impresionantemente pequeño. En la siguiente sección se mostrará, que en el límite no relativista, $\kappa \ll 1$, el intervalo de tiempo T aumenta dramáticamente conforme el valor de κ decrece.

4.3. Difracción con diferentes valores de energía

Hasta ahora se ha graficado la densidad de carga para un solo valor de κ . La pregunta obvia es: ¿como se comparan gráficamente las densidades para diferentes valores de κ ? En la Fig. 4.2, se grafican simultáneamente las densidades de carga para una posición fija, $\chi = 5$, y tres valores diferentes de: $\kappa = 0.9, 0.7$ y 0.03 , respectivamente.

Los principales resultados de esta gráfica son:

1) Como se esperaba, el valor estacionario de la densidad está de acuerdo con el valor predicho de $\rho_0 = \sqrt{\kappa^2 + 1}$.

2) Mientras más pequeños son los valores de κ , más grandes son los períodos de oscilación; para $\kappa = 0.3$, el período de oscilación, para el mesón- π , es un valor alrededor de $T \approx 10^{-23}$ sec, diez veces más grande que para $\kappa = 0.9$. Conforme nos movemos hacia la región no-relativista, con $\kappa \ll 1$, donde la ecuación de *Schrödinger* es válida, las oscilaciones empiezan

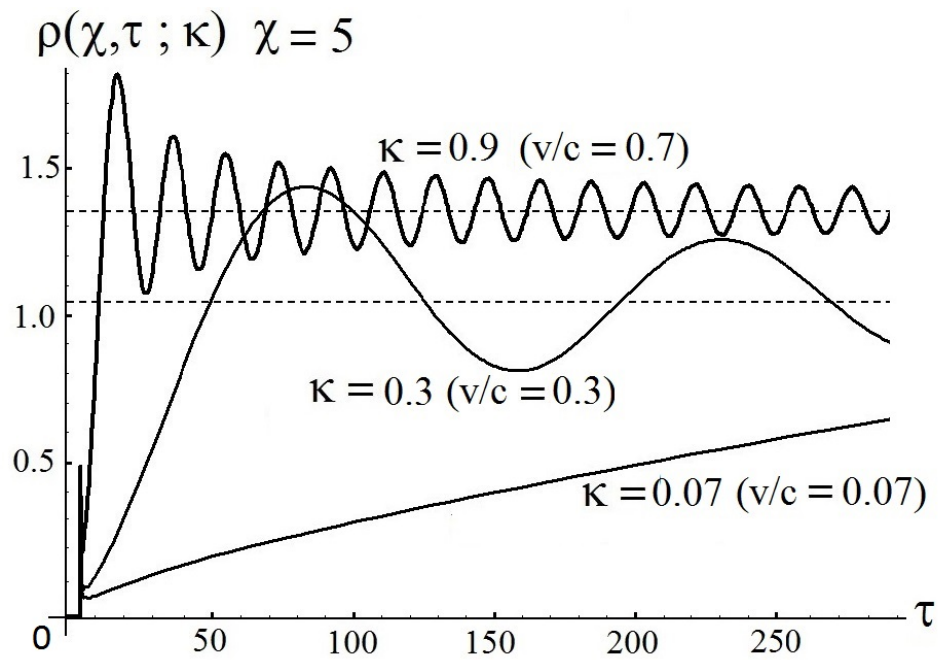


Figura 4.2: Diferentes energías en difracción relativista en el tiempo

a tener períodos que son órdenes de magnitud mayores que en el caso relativista.

3) Debido a esta diferencia de escalas de tiempo, no es posible mostrar las oscilaciones de *Schrödinger* y de *Klein-Gordon* en la misma gráfica.

Capítulo 5

Límite no relativista

Conocemos en Ec. (3.37) la función de onda de *Klein-Gordon* para el problema del obturador:

$$2\Psi_{>}(\chi, \tau) = \left\{ e^{i\Omega\chi} - \left(\frac{\chi}{2} + i\kappa \right) \int_{\chi}^{\tau} du e^{i\Omega u} J_0(\sqrt{u^2 - \chi^2}) - \frac{\chi}{2} \int_{\chi}^{\tau} du e^{i\Omega u} J_2(\sqrt{u^2 - \chi^2}) \right\} \theta(\tau - \chi). \quad (5.1)$$

Por definición de κ :

$$\kappa \equiv \frac{k}{\mu} = \frac{\hbar k}{mc} = \frac{v/c}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}}, \quad (5.2)$$

en el límite no relativista ($v \ll c$), tenemos $\kappa \approx v/c \ll 1$, y esto implica que:

$$\Omega = (1 + \kappa^2)^{1/2} \approx 1 + \kappa^2/2. \quad (5.3)$$

En este límite, la función de onda se factoriza como:

$$\Psi(\chi, \tau) = e^{-i\Omega\tau} \varphi(\chi, \tau) \approx e^{-i\tau} \lim_{v \ll c} \varphi(\chi, \tau) \rightarrow e^{-i\tau} \psi(\chi, \tau), \quad (5.4)$$

donde se ha extraído la energía en reposo (m_0c^2) de la fase de evolución temporal. Sabemos que en el límite no relativista la función, $\psi(\chi, \tau)$, debe satisfacer la ecuación de *Schrödinger*. Encontremos esta función a partir de la solución *exacta* de la ecuación de *Klein-Gordon* (3.34).

Para obtener la función de onda de *Schrödinger* correspondiente, usemos una técnica matemática que, hasta donde se sabe, nunca ha sido utilizada anteriormente.

Nótese que si tomamos la transformada de Laplace de la función de onda de *Klein-Gordon*, tenemos:

$$\mathcal{L}[\Psi(\chi, \tau)](s) = \mathcal{L}[e^{-i\tau}\varphi(\chi, \tau)](s) = \mathcal{L}[\varphi(\chi, \tau)](s + i). \quad (5.5)$$

Esta relación sugiere un método para encontrar la función de onda de *Schrödinger*.

Método: Si tenemos, para la solución exacta de *Klein-Gordon*, $\Psi(\chi, \tau)$, la transformada exacta de Laplace, $\mathcal{L}[\Psi(\chi, \tau)](s)$, y la reescribimos como una función de $s + i$, y se tiene, digamos $F(s + i)$, entonces, en el límite no relativista, $\kappa \ll 1$, y con tiempos largos, $|s| \ll 1$, la función $F(s)$ tiende al límite de la transformada de Laplace de la función de *Schrödinger*, $\psi(\chi, \tau)$, esto es:

$$\mathcal{L}^{-1}[\lim_{v \ll c} F(s)] = \psi(\chi, \tau) \quad \text{para } \kappa \ll 1 \text{ and } s \ll 1 \quad (5.6)$$

Usemos este método en la solución de *Klein-Gordon* para difracción en el tiempo, para encontrar la función correspondiente de *Schrödinger* (función de *Moshinsky*).

En la Ec. (3.27), ya se conoce la transformada exacta de Laplace de la función de *Klein-Gordon*:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\psi(\chi, \tau)](s) &\equiv \phi_{>}(\chi, s) \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{s + i\Omega} \left(1 - \frac{i\kappa}{\sqrt{s^2 + 1}}\right) \exp(-\chi\sqrt{s^2 + 1}). \end{aligned} \quad (5.7)$$

A continuación, reescribiendo $\phi_{>}(\chi, s)$ como una función $F(s + i)$, tenemos:

$$\begin{aligned} s + i\Omega &= (s + i) + i(\Omega - 1), \\ s^2 + 1 &= (s + i - i)^2 + 1 = (s + i)^2 - 2i(s + i). \end{aligned}$$

Así tenemos a $F(s)$ como

$$F(s) = \frac{1}{2} \frac{1}{s + i(\Omega - 1)} \left(1 - \frac{i\kappa}{\sqrt{s^2 - 2is}}\right) \exp(-\chi\sqrt{s^2 - 2is}). \quad (5.8)$$

En esta función $F(s)$, se obtiene el límite no-relativista de pequeñas velocidades $\kappa \ll 1$,

y tiempos largos, $|s| \ll 1$, se tiene

$$s^2 - 2is \approx -2is, \quad \text{y} \quad \Omega - 1 \approx \kappa^2/2 \quad (5.9)$$

por tanto:

$$F(s) \approx \frac{1}{2} \frac{1}{s + i\kappa^2/2} \left(1 - \frac{i\kappa}{\sqrt{-2is}}\right) \exp(-\chi\sqrt{-2is}). \quad (5.10)$$

Utilizando la identidad

$$\frac{1}{s + i\kappa^2/2} \left(1 - \frac{i\kappa}{\sqrt{-2is}}\right) = \frac{1}{\sqrt{s}(\sqrt{s} - \kappa/\sqrt{2i})}, \quad (5.11)$$

se obtiene:

$$F(s) \approx \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{s}(\sqrt{s} - \kappa/\sqrt{2i})} \exp(-\chi\sqrt{-2i}\sqrt{s}) \equiv \phi(\chi, s). \quad (5.12)$$

Comparando con la ecuación, $\phi_{>}(\chi, s)$, dada en la Ec. (2.20), reconocemos que $\phi(\chi, s)$ es en verdad la transformada exacta de Laplace de la función de onda de *Schrödinger*.

Esto prueba que la solución *exacta* de *Klein-Gordon*, dada en la función de onda (3.27), tiene el límite no relativista correcto.

Capítulo 6

Conclusiones

En el artículo de *Moshinsky* sobre difracción relativista en el tiempo [3], el maestro enfáticamente declara que solamente para la ecuación de *Schrödinger* existe una solución semejante a la teoría de Óptica de la difracción, y no así para el caso relativista (*Klein-Gordon*). Si lo que buscaba el maestro eran funciones de onda relativistas, cuya estructura analítica fuesen semejantes a la expresión de Sommerfeld, esto es, expresadas en términos de funciones de *Fresnel* como ocurre en la teoría de *Schrödinger*, entonces *Moshinsky* acertó. De acuerdo a los cálculos elaborados en esta tesis, soluciones analíticas semejantes a la expresión de Sommerfeld *no aparecen* en la solución relativista exacta de Klein-Gordon. Pero en cambio, si lo que él quería era comparar únicamente las gráficas de densidades cuánticas contra la gráfica de la intensidad de la luz en Óptica, entonces como podemos observar en las Figuras 3 y 4, el profesor no acertó en encontrar esta semejanza.

Se declara enfáticamente que, con la teoría de *Klein-Gordon*, sí ocurre una semejanza entre la gráfica de la densidad de carga relativista y la gráfica de la intensidad de la luz en Óptica para el fenómeno de difracción.

En conclusión: *Difracción en el tiempo sí existe en el ámbito relativista.*

Bibliografía

- [1] M. O. Scully and S. Zubairy, *Quantum Optics*, Cambridge University Press, Cambridge, (1997); H. M. Nussenzveigh, *Introduction to Quantum Optics*, Gordon and Breach, London (1973).
- [2] M. Moshinsky, *Phys. Rev.* **84**, 525, (1951).
- [3] M. Moshinsky, *Phys. Rev.* **88**, 625, (1952).
- [4] M. Moshinsky, *Revista Mexicana de Física*, **I 3** (1952).
- [5] *Handbuch der Physik*, Vol. V/I, Springer-Verlag, Berlin, 1958.
- [6] M. Born and E. Wolf, *Principles of Optics*, Pergamon Press, Oxford, (1965). pp. 192-5.
- [7] P. Szriftigiser, D. Guery-Odelin, M. Arndt, and J. Dalibard, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 4 (1996).
- [8] D. Schneble, M. Hasuo, T. Anker, T. Pfau and J. Mlynek *J. Opt. Soc. Am. B* **20**, 648, (2003).
- [9] G. García-Calderón, G. Rubio and J. Villavicencio *Phys. Rev. A* **59**, 1758 (1999); F. Delgado, J. G. Muga, A. Ruschhaupt, G. García-Calderón and J. Villavicencio *Phys. Rev. A* **68**, 032101 (2003).
- [10] M. Brouard and J. G. Muga *Phys. Rev. A* **54**, 3055 (1996); G. García-Calderón and G. Rubio *Phys. Rev. A* **55**, 3361 (1997); G. García-Calderón and J. Villavicencio, F. Delgado, J. G. Muga *Phys. Rev. A* **66**, 042119 (2002); K. W. H. Stevens *Eur. J. Phys.* **1**, 98 (1980).
- [11] F. Delgado, H. Cruz and J. G. Muga *J. Phys. A: Math. Gen.* **35** 10377 (2002); F. Delgado, J. G. Muga and G. García-Calderón *J. Appl. Phys.* **97**, 013705 (2005).

[12] M. Abramowitz and I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*, Dover Publications, N.Y. (1965), pp. 1019-1030 and 301.

[13] D.G. Duffy, *Green Functions with Applications*, Chapman and Hall/CRC (2001), pp. 82-84.