UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA EN CIENCIAS MATEMÁTICAS.

HIPERSUPERFICIES SEMI-RIEMANNIANAS CON DIRECCIÓN PRINCIPAL CANÓNICA

TESIS
PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN CIENCIAS

PRESENTA:
ADRIÁN GARCÍA DINORÍN

DIRECTOR DE TESIS
DR. GABRIEL RUIZ HERNÁNDEZ
INSTITUTO DE MATEMATICAS - UNAM

MÉXICO, D. F. ENERO 2016

Agradecimientos

Esta tesis, cuyo tiempo de elaboración no me es muy grato ni reconfortante dado las variadas situaciones en las que me he encontrado, pero que a final de cuentas es concluida gracias a personas que me rodean y han animado a concluir este ciclo de vida. Me considero alguien de pocas palabras, pero en verdad, agradezco sinceramente:

A mi asesor de tesis, el Dr.Gabriel Ruíz por su gran paciencia, enseñanza, tolerancia, ánimo y apoyo que me ha brindado para la realización de la misma.

A mis padres y hermano, Emma, Miguel y Erick, que siempre han estado cuando los he necesitado.

A mi pareja actual Angeles, que bien o mal hemos estado juntos y apoyándonos, además de aprender a desarrollarnos como adultos.

A mis mejores amigos Abigail, Karen, Vero y Victor por su incondicionable e inquebrantable amistad.

A mis colegas matemáticos Elisa, Josue y Marcos Jhonatan por las excelentes charlas y aprendizajes que vivimos en nuestra época de estudiantes.

A mis compañeros de trabajo Hector Laguna y Hugo Rojas por compartir su experiencia, amistad y confianza.

Al Dr.Francisco Marmolejo que me dio la bienvenida al Instituto de Matemáticas y me recibió con las puertas abiertas.

A mis alumnos del ITT2 por la confianza y admiración que recibo por parte de ellos.

Investigacion realizada gracias al Programa de Apoyo a Proyectos de Investigacion e Innovacion Tecnologica (PAPIIT) de la UNAM: PAPIIT IA100412, "Geometria Diferencial de Subvariedades "

Índice general

Introducción

Dada una variedad semi-Riemanniana N, un campo cerrado conforme Z en $\mathfrak{X}(N)$ es un campo vectorial tal que satisface $D_Y Z = \phi Y$ para todo Y en $\mathfrak{X}(N)$. Se dice además que M es una hipersuperficie con dirección principal canónica relativa a un campo vectorial $X \in \mathfrak{X}(N)$ si la proyección de X en el espacio tangente de la hipersuperficie M nos da una dirección principal.

Este trabajo está motivado en el Teorema 2.8 del artículo [9], el cual es un teorema de caracterización que nos dice las condiciones en que M, siendo una hipersuperficie tipo espacio cuyo ambiente es una variedad Lorentziana N que admite un campo cerrado conforme Z, tiene una dirección principal canónica relativa a Z. En su demostración, fue necesario introducir la noción de ángulo hiperbólico, ángulo formado por dos vectores tipo tiempo que se encuentran en un mismo cono de tiempo.

En este teorema de caracterización se pudo expresar a Z de la siguiente manera:

$$Z = |Z| \cdot (\sinh\theta \cdot T + \cosh\theta \cdot \xi)$$

donde se pudo observar lo siguiente:

- θ es el ángulo hiperbólico formado a partir del campo Z y el campo normal unitario ξ de M.
- T es una dirección principal.

Un resultado que se obtuvo del anterior teorema mencionado fue una generalización del mismo. Los cambios realizados en está generalización fueron los siguientes:

- N es una variedad semi-Riemanniana en lugar de Lorentziana.
- La hipersuperficie M se considera solamente no-degenerada.

Con estos supuestos, se obtuvo la siguiente descomposición para Z

$$Z = |Z| \cdot (|\lambda|^{1/2} \cdot T + |\mu|^{1/2} \cdot \xi)$$

donde $\lambda := |Z|^{-2} \cdot \left\langle Z^T, Z^T \right\rangle$ y $\mu := |Z|^{-2} \cdot \left\langle Z^\perp, Z^\perp \right\rangle$.

En este sentido, podemos observar que el ángulo hipérbolico formado por Z y ξ fue sustituido por un ángulo que no tiene una interpretación geométrica, pero está implícito en los parámetros λ y μ.

Continuando con ésta misma idea, se estudió otro tipo de situación. Esta vez se consideran las siguientes hipótesis:

- M es una subvariedad semi-Riemanniana.
- El ambiente N es una variedad semi-Riemanniana.
- La variedad N admite un campo vectorial sujeto a la condición de que $\langle Z^T, Z^T \rangle = \lambda$ es constante.

A este tipo de subvariedades las definiremos como subvariedades semi Riemannianas con ángulo constante. Su nombre viene del hecho de que Z se puede descomponer de la siguiente manera

$$Z = |\lambda|^{1/2} \cdot T + |\mu|^{1/2} \cdot \xi$$

donde $\lambda = \langle Z^T, Z^T \rangle$ y $\mu = \langle Z^\perp, Z^\perp \rangle$ y al igual que en el caso anterior, el ángulo formado entre Z y ξ no tiene una interpretación geométrica pero está implícito en los parámetros λ y μ y la diferencia está en que, por la tercera hipótesis, los parámetros λ y μ son constantes.

En este caso se estudian las circunstancias cuando M es una hipersuperficie no degenerada y totalmente geodésica. Para ello nos apoyaremos en algunos resultados importantes que se podrán encontrar en los Teoremas 3.1 y 3.2 del artículo [10] y la ecuación encontrada en la Proposición 6.7 del artículo [1].

Para este trabajo se toma como temas preliminares:

- Álgebra lineal de las formas bilineales, indispensable para abordar el tema de espacios vectoriales Lorentzianos y la definición de ángulo hiperbólico.
- Tópicos básicos de Geometría Riemanniana Intrínseca y Extrínseca, dándole mayor énfasis a la parte de curvatura y de campos cerrados conformes.

Capítulo 1

Ángulo Hiperbólico Lorentziano

En esta primera parte, empezaremos definiendo lo que es una forma bilineal simétrica, que no es más que una función $g\colon V \times V \to \mathbb{R}$, donde V es un espacio vectorial, g es bilineal y satisface $g(v, w) = g(w, v)$ para todo vector v, w en V. Se desarrollará el álgebra lineal relacionado a este tipo de funciones.

Se introducirá la noción de índice de una forma bilineal simétrica para así definir lo que son los espacios vectoriales de Lorentz (V, g), el cual V es un espacio vectorial equipado con una forma bilineal simétrica g de índice uno.

Se concluirá este preliminar con la definición de ángulo hiperbólico. Para ello clasificaremos los vectores como tipo espacio, tipo tiempo y tipo luz. Dicho ángulo, es aquel que es formado a partir de dos vectores tipo tiempo y es el que utilizaremos más adelante para demostrar uno de los teoremas importantes de ésta tesis.

Para este capítulo, fueron tomadas algunas definiciones y afirmaciones de las siguientes referencias bibliográficas:

- De [4] Cap.6 *Inner Product Spaces.*
- De [6] Cap.1 *The Lorentz-Minkowski space* E_1^3.
- De [8] Cap.2 *Tensors* y Cap.8 *Riemannian and Lorentz Geometry.*

1.1. Formas bilineales simétricas

Definición 1.1.1. Sea V un espacio vectorial sobre el campo de los reales. Una *forma bilineal simétrica* es una función $g\colon V \times V \to \mathbb{R}$ la cual es $\mathbb{R}$-

bilineal y además satisface que para todo $v, w \in V$, $g(v,w) = g(w,v)$.

Definición 1.1.2. Sea V un espacio vectorial sobre el campo de los reales y $g\colon V \times V \to \mathbb{R}$ una forma bilineal simétrica.

- Si para $v \neq 0$ se tiene que $g(v,v) > 0$ ($g(v,v) < 0$), decimos que g es *positiva (negativa) definida.*
- Si $g(v,v) \geq 0$ ($g(v,v) \leq 0$) para toda $v \in V$, decimos que g es *positiva (negativa) semidefinida.*
- Si $g(v,w) = 0$ para todo $w \in V$ implica que $v = 0$, decimos que g es *no-degenerada.*

Definición 1.1.3. Sea V un espacio vectorial sobre el campo de los reales. La función $q\colon V \to \mathbb{R}$ definida como $q(v) = g(v,v)$, se le conoce como la *forma cuadrática asociada a g.*

Corolario 1.1.4. Sea V un espacio vectorial sobre el campo de los reales, g una forma bilineal simétrica y q su forma cuadrática asociada. Para cualquier $x, y \in V$ se cumple la siguiente identidad

$$g(x,y) = \frac{1}{2}[q(x+y) - q(x) - q(y)]$$

Esta identidad se le como la *identidad de polarización de g.*

Demostración. Sean x, y en V, entonces

$$\begin{aligned} q(x+y) &= g(x+y, x+y) \\ &= g(x,x) + 2g(x,y) + g(y,y) \\ &= q(x) + q(y) + 2g(x,y) \end{aligned}$$

obteniendo así la identidad deseada. □

Definición 1.1.5. Sea V un espacio vectorial sobre el campo de los reales. El *índice* de una forma bilineal simétrica $g\colon V \times V \to \mathbb{R}$ es un número entero ν dado por

$$\nu = \max\left\{ k \in \mathbb{Z}\colon \begin{array}{c} W \subseteq V \text{ es un subespacio vectorial,} \\ \dim(W) = k \text{ y } g|_W \text{ es negativa definida} \end{array} \right\}$$

Definición 1.1.6. Sea V un espacio vectorial sobre el campo de los reales. Si $g\colon V \times V \to \mathbb{R}$ es una forma bilineal simétrica no-degenerada, decimos que g es un *producto escalar.*

Definición 1.1.7. Sea V un espacio vectorial sobre el campo de los reales, $g\colon V \times V \to \mathbb{R}$ una forma bilineal simétrica y $\dim V = n$. Si $\{e_1, \ldots, e_n\}$ es una base para V, la matriz simétrica de $n \times n$ $[g_{i,j}]$ donde $g_{i,j} = g(e_i, e_j)$ para $1 \leq i, j \leq n$, es llamada la *matriz relativa de g.*

Lema 1.1.8. *Sea V un espacio vectorial sobre el campo de los reales y g una forma bilineal simétrica. Entonces g es producto escalar si y sólo si la matriz relativa de g con cualquier base es invertible.*

Demostración. Sea $e_1, \ldots, e_n$ una base de V. Notemos que si $v \in V$, entonces $g(v, w) = 0$ para todo $w \in V$ si y sólo si $g(v, e_i) = 0$ para $i = 1, \ldots, n$. Fijémonos en el sistema de ecuaciones $[g_{i,j}]\ x = b$.

Supongamos ahora que la matriz $[g_{i,j}]$ es invertible. Si g es degenerada, entonces existe $v \in V$ distinto de cero tal que $g(v, w) = 0$ para todo $w \in V$, eso implica que $g(v, e_i) = 0$ para $i = 1, \ldots, n$, tenemos entonces que

$$[g_{i,j}] \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g(v, e_1) \\ \vdots \\ g(v, e_n) \end{pmatrix} = 0$$

equivalentemente

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = [g_{i,j}]^{-1} 0 = 0$$

lo cual implica una contradicción y por lo tanto g es no-degenerada. Por otro lado, supongamos que g es no-degenerada. Sea $v \in V$ tal que

$$[g_{i,j}] \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = 0$$

por lo que $g(v, e_i) = 0$ para $i = 1, \ldots, n$, y esto a su vez implica que $g(v, w) = 0$ para todo $w \in V$. Como g es no-degenerada, entonces $v = 0$, esto nos dice que el sistema homogéneo $[g_{i,j}]\ x = 0$ tiene solución trivial y esto es equivalente a que la matriz $[g_{i,j}]$ sea invertible. $\square$

Corolario 1.1.9. Sea V un espacio vectorial sobre el campo de los reales y g una forma bilineal simétrica. Si g es no degenerada entonces existe $v \neq 0$ tal que $g(v, v) \neq 0$.

Demostración. Supongamos lo contrario, para todo $w \in V$ se tiene que $g(w,w) = 0$. Usando la fórmula de polarización de g, Corolario 1.1.4, y el hecho anteriormente mencionado, tenemos que para todo $v, w \in V$ se tiene

$$g(v,w) = \frac{1}{2}[q(v+w) - q(v) - q(w)] = 0$$

es decir, $g = 0$, pero esto es una contradicción, ya que por Lema 1.1.8, la matriz asociada a g es invertible y por lo tanto $g \neq 0$. $\square$

Definición 1.1.10. Sea V un espacio vectorial sobre el campo de los reales y $g\colon V \times V \to \mathbb{R}$ una forma bilineal simétrica y $W \subseteq V$ un subespacio vectorial. Definimos el conjunto

$$W^{\perp} = \{v \in V\colon g(v,w) = 0 \text{ para todo } w \in W\}$$

el cual llamaremos el *ortogonal de* W. Note que $W^{\perp}$ es también un subespacio vectorial de V.

Lema 1.1.11. *Sea V un espacio vectorial sobre el campo de los reales y $g\colon V \times V \to \mathbb{R}$ un producto escalar y $W \subseteq V$ un subespacio vectorial. Entonces se tienen las siguientes propiedades*

1. *dim* $W +$ *dim* $W^{\perp} = n =$ *dim* V,
2. $\left(W^{\perp}\right)^{\perp} = W$

Demostración.

1. Supongamos que $\dim V = n$ y $\dim W = k$ donde $\{e_1, \ldots, e_n\}$ y $\{e_1, \ldots, e_k\}$ son bases de V y W respectivamente. Tenemos entonces las siguientes equivalencias

$$\begin{aligned} v \in W^{\perp} &\Leftrightarrow g(v,w) = 0 \quad \text{para todo } w \in W \\ &\Leftrightarrow g(v, e_i) = 0\ ,\ i = 1, \ldots, k \\ &\Leftrightarrow g\left(\sum_{j=1}^{n} v_j e_j, e_i\right) = 0\ ,\ i = 1, \ldots, k \\ &\Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} v_j g(e_j, e_i) = 0\ ,\ i = 1, \ldots, k \\ &\Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} v_j g_{ji} = \sum_{j=1}^{n} v_j g_{ij} = 0\ ,\ i = 1, \ldots, k \end{aligned}$$

Esto significa que tenemos un sistema de ecuaciones

$$\begin{pmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{k1} & \cdots & g_{kn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_k \\ v_{k+1} \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Por un argumento similar dado en la demostración del Lema 1.1.8, los renglones de la matriz de coeficientes son linealmente independientes, lo que implica que la matriz tiene rango k. Entonces, por el teorema de la dimensión para matrices, el espacio solución tiene dimensión $n - k$. Pero la solución de este sistema son las n-tuplas $(v_1, \dots, v_n)$, que por las equivalencias anteriores, tenemos que $v = \sum v_i e_i \in W^{\perp}$. Por lo tanto

$$\dim W + \dim W^{\perp} = k + (n-k) = n = \dim V$$

2. Tomemos $v \in W$, por definición $g(v,u) = 0$ para todo $u \in W^{\perp}$ y esto implica a su vez que $v \perp W^{\perp}$, es decir $v \in (W^{\perp})^{\perp}$, por lo que $W \subseteq (W^{\perp})^{\perp}$. Por (1), se tiene

$$\dim W^{\perp} + \dim (W^{\perp})^{\perp} = \dim V = \dim W + \dim W^{\perp}$$

es decir, que W y $(W^{\perp})^{\perp}$ tienen la misma dimensión y por lo tanto son iguales.

□

Definición 1.1.12. Sea V un espacio vectorial sobre el campo de los reales. Un subespacio W de V es llamado *no-degenerado* si $g|_W$ es no-degenerada.

Corolario 1.1.13. Sea V un espacio vectorial sobre el campo de los reales y g una forma bilineal simétrica. Entonces g es no-degenerada si y sólo si $V^{\perp} = \{0\}$.

Demostración. Sea $v \in V^{\perp}$, entonces para todo $w \in V$ se tiene que $g(v,w) = 0$, ya que g es no degenerada se tiene entonces que $v = 0$. Por otro lado, sea $V^{\perp} = \{0\}$, esto nos dice que cualquier v que cumpla que $g(v,w) = 0$ para todo $w \in V$, se tiene que $v = 0$ y por lo tanto g es no degenerada. □

Lema 1.1.14. *Sea V un espacio vectorial y tanto W_1 como W_2 son subespacios vectoriales, entonces*

$$dim\ (W_1 + W_2) = dim\ (W_1) + dim\ (W_2) - dim\ (W_1 \cap W_2)$$

Demostración. Sea $l = \dim(W_1)$, $m = \dim(W_2)$ y $k = \dim(W_1 \cap W_2)$. Es fácil ver que $W_1 \cap W_2$ es subespacio vectorial de W_1 y W_2. Tomemos las bases $\{e_1, \ldots, e_l\}$ y $\{f_1, \ldots, f_m\}$ de W_1 y W_2. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $\{e_1, \ldots, e_k\}$ es base de $W_1 \cap W_2$. Sea $v \in W_1 + W_2$, entonces existen $w_1 \in W_1$ y $w_2 \in W_2$ tal que $v = w_1 + w_2$. Notemos que $\{e_1, \ldots, e_k\} \subseteq W_1 \cap W_2 \subseteq W_2$, lo cual podemos escribir la base de $W_1 \cap W_2$ de la siguiente forma

$$\begin{aligned} e_1 &= \alpha_1^1 \ f_1 + \ldots + \alpha_m^1 \ f_m \\ \vdots \quad & \quad \vdots \\ e_k &= \alpha_1^k \ f_1 + \ldots + \alpha_m^k \ f_m \end{aligned}$$

escribiendo a v en términos de sus bases se tiene que

$$\begin{aligned} v &= w_1 + w_2 \\ &= a_1 e_1 + \ldots + a_n e_n + b_1 f_1 + \ldots + b_m f_m \\ &= a_{k+1} e_{k+1} + \ldots + a_n e_n + \beta_1 f_1 + \ldots + \beta_m f_m \end{aligned}$$

donde $\beta_i = b_i + \alpha_i^1 + \ldots + \alpha_i^n$ con $1 \leq i \leq k$. Por lo tanto tenemos que

$$\dim(W_1 + W_2) = n - k + m = n + m - k = \dim(W_1) + \dim(W_2) - \dim(W_1 \cap W_2)$$

$\square$

Lema 1.1.15. *Sea W_1 y W_2 subespacios de un espacio vectorial V de dimensión finita con producto escalar. Entonces $(W_1 + W_2)^\perp = W_1^\perp \cap W_2^\perp$ y $(W_1 \cap W_2)^\perp = W_1^\perp + W_2^\perp$.*

Demostración. Primero demostraremos que $(W_1 + W_2)^\perp = W_1^\perp \cap W_2^\perp$. Sea $v \in (W_1 + W_2)^\perp$, entonces para toda $w \in W_1 + W_2$ se tiene que $g(v, w) = 0$, en particular, como $W_1, W_2 \subseteq W_1 + W_2$, para todo $w_1 \in W_1$ y todo $w_2 \in W_2$, $g(v, w_1) = 0 = g(v, w_2)$, lo que implica que $v \in W_1^\perp \cap W_2^\perp$. Por otro lado, si $v \in W_1^\perp \cap W_2^\perp$, entonces para todo $w_1 \in W_1$ y todo $w_2 \in W_2$, $g(v, w_1) = 0 = g(v, w_2)$ y en particular para todo $w_1 + w_2 \in W_1 + W_2$, se tiene que $g(v, w_1 + w_2) = g(v, w_1) + g(v, w_2) = 0$ y por lo tanto $v \in (W_1 + W_2)^\perp$.

Para demostrar $(W_1 \cap W_2)^\perp = W_1^\perp + W_2^\perp$, tomamos $v \in W_1^\perp + W_2^\perp$, entonces $v = v_1 + v_2$ donde $v_1 \in W_1^\perp$ y $v_2 \in W_2^\perp$, entonces para todo $w \in W_1$ y todo $u \in W_2$ se tiene que $g(v_1, w) = 0 = g(v_2, u)$. Como $W_1 \cap W_2 \subseteq W_1, W_2$, en particular, para toda $\bar{w} \in W_1 \cap W_2$, se tiene que $g(v_1, \bar{w}) = 0 = g(v_2, \bar{w})$, obteniendo así $g(v, \bar{w}) = g(v_1 + v_2, \bar{w}) = 0$, por lo tanto $v \in (W_1 \cap W_2)^\perp$, es decir $W_1^\perp + W_2^\perp \subseteq (W_1 \cap W_2)^\perp$. Ahora sólo basta demostrar que dim $(W_1^\perp + W_2^\perp) = $ dim $((W_1 \cap W_2)^\perp)$. Usando los Lemas 1.1.11 y 1.1.14 se tiene que

$$\begin{aligned}
\dim\,(W_1^\perp + W_2^\perp) &= \dim\,(W_1^\perp) + \dim\,(W_2^\perp) - \dim\,(W_1^\perp \cap W_2^\perp) \\
&= \dim\,(V) - \dim\,(W_1) + \dim\,(V) - \dim\,(W_2) \\
&\quad\; - \dim\,(W_1^\perp \cap W_2^\perp) \\
&= n - l + n - m - \dim\,(V) + \dim\,(W_1 + W_2) \\
&= n - l - m + \dim\,(W_1) + \dim\,(W_2) - \dim\,(W_1 \cap W_2) \\
&= \dim\,(V) - \dim\,(W_1 \cap W_2) \\
&= \dim\,((W_1 \cap W_2)^\perp)
\end{aligned}$$

□

Lema 1.1.16. *Sea V un espacio vectorial sobre el campo de los reales. Un subespacio W de V es no-degenerado si y sólo si V es la suma directa de W y $W^\perp$.*

Demostración. Por el Lema 1.1.15, tenemos la siguiente identidad para espacios vectoriales

$$\dim(W + W^\perp) + \dim(W \cap W^\perp) = \dim W + \dim W^\perp$$

Por Lema 1.1.11, el lado derecho es igual a $n = \dim V$ y ya que también $W + W^\perp$ es un subespacio vectorial tenemos entonces que $W + W^\perp = V$ si y sólo si $W \cap W^\perp = 0$. Esta condición es equivalente a que $V = W \oplus W^\perp$. Notemos que

$$W \cap W^\perp = \{v \in W | v \perp W\} = \{v \in W | g(v, w) = 0 \text{ para todo } w \in W\}$$

obteniendo que $W \cap W^\perp = 0$, que es equivalente a que W sea no-degenerado. □

Corolario 1.1.17. Sea V un espacio vectorial no nulo y W un subespacio vectorial de V, entonces W es no degenerado si y sólo si $W^\perp$ es no degenerado.

Demostración. Denotemos $\bar{W} = W^\perp$. Por un lado tenemos que W es no degenerado, entonces por el Lema 1.1.16, V es la suma directa de W y $\bar{W}$ y por Lema 1.1.11 y 1.1.16 tenemos también que esto es equivalente a que $\bar{W}$ es no degenerado. □

Definición 1.1.18. Sea V un espacio vectorial no nulo y $v \in V$. La *norma* de v está definida como $|v| = |g(v, v)|^{1/2}$. Además, se dice que v es un vector unitario si $|v| = 1$, lo que es equivalente a que $g(v, v) = \pm 1$,

Definición 1.1.19. Sea V un espacio vectorial no nulo y $v \in V$. Si $v, w \in V$ son dos vectores unitarios tales que $v \perp w$, se dice que estos dos vectores son *ortonormales*. Si $\dim V = n$ y $\{v_1, \ldots, v_n\} \subseteq V$ son vectores mutuamente ortonormales, se dice que el conjunto $\{v_1, \ldots, v_n\}$ es una *base ortonormal* del espacio vectorial V.

Proposición 1.1.20. *Un espacio vectorial $V \neq 0$ con producto escalar tiene una base ortonormal.*

Demostración. Sea g el producto escalar de V, es decir, g es una forma bilineal simétrica no degenerada. Por Corolario 1.1.9, existe $v_1 \neq 0$ en V tal que $g(v_1, v_1) \neq 0$. Denotemos $\bar{v}_1 = v_1/|v_1|$. Si $W_1 = Span\{\bar{v}_1\}$, se tiene que W_1 es no degenerado y por Corolario 1.1.17 también $W_1^{\perp}$ es no degenerado. Esto implica que existe un $v_2 \in W_1^{\perp}$ distinto de cero tal que $g(v_2, v_2) \neq 0$. Si $\bar{v}_2 = v_2/|v_2|$, se tiene que $\bar{v}_2$ es unitario y además $g(\bar{v}_1, \bar{v}_2) = 0$. Análogamente, si $W_2 = Span\{\bar{v}_1, \bar{v}_2\}$, se tiene que W_2 es no degenerado y por lo tanto $W_2^{\perp}$ es no degenerado, entonces existe $v_3 \neq 0$ en $W_2^{\perp}$ tal que $g(v_3, v_3) \neq 0$, haciendo $\bar{v}_3 = v_3/|v_3|$, se tiene que $\bar{v}_3$ es unitario y además $g(\bar{v}_1, \bar{v}_2) = 0$, $g(\bar{v}_1, \bar{v}_3) = 0$ y $g(\bar{v}_2, \bar{v}_3) = 0$. Aplicando inducción a este proceso recursivo, podemos entonces obtener la base ortonormal $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_n\}$ de V. □

Lema 1.1.21. *Sea V un espacio vectorial no nulo tal que $\dim(V) \geq 2$. Para cualesquiera $v, w \in V$ distintos de cero, existen aproximaciones $\bar{v}, \bar{w} \in V$ de v, w respectivamente, tales que $\bar{v}, \bar{w}$ son vectores linealmente independientes.*

Demostración. Tomemos $v, w \in V$ arbitrarios distintos de cero y supongamos que v y w son colineales, es decir $w = kv$, para algún escalar k. Como $\dim(V) \geq 2$, existe un x en V tal que x, v son linealmente independientes. Denotemos $\bar{v} = v + \epsilon x$ y $\bar{w} = w$, donde $\epsilon \to 0$. Si a, b son escalares tales que $a\bar{v} + b\bar{w} = 0$, se tiene que

$$\begin{aligned} a\bar{v} + b\bar{w} &= 0 \\ av + bw + a\epsilon x &= 0 \\ (a + kb)v + a\epsilon x &= 0 \end{aligned}$$

Como v y x son independientes, entonces $a + kb = 0$ y $a\epsilon = 0$, pero como $\epsilon \neq 0$, se tiene que $a = 0$ y por lo tanto, también $b = 0$. Así se tiene entonces que $\bar{v}, \bar{w}$ son linealmente independientes y además se aproximan a v, w respectivamente. □

1.2. Espacios Vectoriales Lorentzianos

Definición 1.2.1. Un *espacio vectorial de Lorentz* es un espacio vectorial con producto escalar de índice 1 y dimensión≥ 2.

Definición 1.2.2. Un vector v en un espacio vectorial Lorentziano se dice que es

- *Tipo-espacio* si $g(v, v) > 0$ ó $v = 0$,
- *Nulo* si $g(v, v) = 0$ y $v \neq 0$,
- *Tipo-tiempo* si $g(v, v) < 0$.

Clasificaremos los subespacios de un espacio vectorial de Lorentz de la siguiente manera.

Definición 1.2.3. Sea W un subespacio de un espacio vectorial de Lorentz V, y sea g un producto escalar de V. Existen tres posibilidades mutuamente excluyentes para W:

- $g|_W$ es positiva definida, es decir, W es un espacio con producto interior. Entonces W se dice que es *tipo-espacio.*
- $g|_W$ es no degenerada de índice 1. Entonces W es *tipo-tiempo.*
- $g|_W$ es degenerada. Entonces W es *tipo-luz.*

Se le llama *carácter causal* al tipo de subespacio en que cae W.

Lema 1.2.4. *Si z es un vector tipo tiempo en un espacio vectorial Lorentziano V, entonces el subespacio $\mathbb{R}z$ es tipo-tiempo.*

Demostración. Sea $w = \alpha z \in \mathbb{R}z$ tal que $g(w, az) = 0$, para todo $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, entonces

$$g(w, az) = g(\alpha z, az) = \alpha a g(z, z) = 0$$

pero como z es tipo-tiempo, entonces $g(z, z) < 0$, obteniendo así $\alpha = 0$ y por lo tanto $w = 0$. Entonces $g|_{\mathbb{R}z}$ es no-degenerado y ya que $z \in \mathbb{R}z$ y éste es negativo-definido, entonces $\mathbb{R}z$ tiene índice 1, siendo así, $\mathbb{R}z$ un subespacio tipo-tiempo. □

Lema 1.2.5. *Si z es un vector tipo tiempo en un espacio vectorial Lorentziano V, entonces el subespacio $z^\perp$ es tipo espacio y $V = \mathbb{R}z \oplus z^\perp$.*

Demostración. Por Lema 1.1.16 y 1.2.4 se tiene que $V = \mathbb{R}z + z^\perp$ es suma directa y esto a su vez implica que $z^\perp$ es no-degenerado. Entonces ind $V =$ ind $\mathbb{R}z +$ ind $z^\perp$, lo cual implica que ind $z^\perp = 0$, es decir, $z^\perp$ es positiva definida. Entonces $z^\perp$ es tipo espacio. □

Corolario 1.2.6. Si $W \subset V$ es un subespacio, tenemos las siguientes equivalencias

(a) W es tipo-tiempo si y sólo si $W^{\perp}$ es tipo-espacio.

(b) W es tipo-espacio si y sólo si $W^{\perp}$ es tipo-tiempo.

Demostración.

(a) Tenemos las siguientes equivalencias, W es tipo-tiempo $\Leftrightarrow$ W es no-degenerado con índice 1 $\Leftrightarrow$ por Lema 1.1.16 $V = W \oplus W^{\perp}$ y además $\text{ind}V = \text{ind}W + \text{ind}W^{\perp}$, por lo cual $\text{ind}W^{\perp} = 0 \Leftrightarrow W^{\perp}$ es positiva-definida $\Leftrightarrow W^{\perp}$ es tipo-espacio.

(b) Simplemente usamos el mismo argumento y el hecho de que $W = (W^{\perp})^{\perp}$.

□

Lema 1.2.7. *En un espacio vectorial de Lorentz se tiene que*

(a) vectores nulos ortogonales son colineales.

(b) vectores ortogonales no tipo-espacio son nulos y por lo tanto colineales.

(c) no existen subespacios 2-dimensionales en donde el producto escalar es idénticamente cero.

Demostración.

(a) Sean v, w en V tales que $g(v,v) = g(w,w) = g(v,w) = 0$. Denotemos $W = Span\{v,w\}$. Sea $x \in W$, entonces $x = av + bw$ y así $g(x,v) = g(x,w) = 0$, por lo tanto $x \in W^{\perp}$, es decir, $W \subseteq W^{\perp}$. Esto nos dice también que W es un subespacio vectorial de $W^{\perp}$. Por Lema 1.1.11 *1.* tenemos
$$\text{dim}W + \text{dim}W^{\perp} = \text{dim}W^{\perp}$$
y por lo tanto $\text{dim}W = 0$, es decir que para todo $x \in W$ se tiene que
$$0 = x = av + bw$$
y por lo tanto, v y w son colineales.

(b) Sean u y v vectores ortogonales no tipo-espacio, tenemos entonces dos opciones:

- ambos vectores son nulos (no hay nada que hacer).

- al menos uno de ellos es tipo tiempo, digamos u, entonces $g(u,u) < 0$ y por Lema 1.2.5 $V = \mathbb{R}u + u^{\perp}$ donde $u^{\perp}$ es tipo-espacio. Por hipótesis tenemos que $g(u,v) = 0$ lo cual implica que $v \in u^{\perp}$ y por lo tanto v es tipo-espacio lo cual sería una contradicción.

Se tiene entonces que u y v son nulos y por inciso (a) colineales.

(c) Supongamos que existe un subespacio vectorial W de dimensión dos tal que $g|_W = 0$. Si $\{e_1, e_2\}$ es base de W, por hipótesis se tiene que $g(e_1,e_1) = g(e_1,e_2) = g(e_2,e_2) = 0$, es decir, e_1 y e_2 son vectores nulos y ortogonales y por inciso (a), e_1 y e_2 son colineales, lo cual es una contradicción.

□

Observación 1.2.8. Si W es un subespacio vectorial tipo-espacio, todo subespacio de W es también tipo-espacio y además se cumple la *desigualdad de Schwarz* $|g(v,w)| \leq |v||w|$ para todo $v, w \in W$, cumpliéndose la igualdad si y sólo si v y w son linealmente dependientes.

Lema 1.2.9. *Sea V un espacio vectorial de Lorentz y $W \subseteq V$ un subespacio vectorial con dim $W \geq 2$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *W es tipo-tiempo, entonces es a sí mismo un espacio vectorial de Lorentz.*
2. *W contiene dos vectores nulos linealmente independientes.*
3. *W contiene un vector tipo-tiempo.*

Demostración.

- (1)$\Rightarrow$(2) Sea $e_1, \ldots, e_m$ una base ortonormal para W tal que e_1 es un vector tipo-tiempo. Afirmamos que $e_1 \pm e_2$ son vectores nulos independientes ya que si a y b son escalares entonces $a(e_1+e_2)+b(e_1-e_2) = 0$ lo que es equivalente que $(a+b)e_1+(a-b)e_2 = 0$ y como e_1 y e_2 son linealmente independientes, entonces $a = b$ y $a+b = 2a = 0$, lo que implica que $a = b = 0$ y por lo tanto e_1+e_2 y e_1-e_2 son linealmente independientes. Además $g(e_1 \pm e_2, e_1 \pm e_2) = g(e_1,e_1) \pm 2g(e_1,e_2) + g(e_2,e_2) = -1+1 = 0$.

- (2)$\Rightarrow$(3) Sean u y v dos vectores nulos linealmente independientes, si $g(u,v) = 0$, esto quiere decir que $u \perp v$ y por Lema 1.2.7 (a) llegamos entonces a una contradicción, lo que implica que $g(u,v) \neq 0$. Fijémonos ahora en el vector $u \pm v$, $g(u \pm v, u \pm v) = g(u,u) \pm 2g(u,v) + g(v,v) = \pm 2g(u,v) \neq 0$. Entonces $u+v$ o $u-v$ tiene que ser un vector tipo-tiempo.

- (3)⇒(1) Sea z un vector tipo-tiempo en W, entonces $W^{\perp} \subset z^{\perp}$ y el Lema 1.2.5 nos dice que $z^{\perp}$ es tipo-espacio, entonces $g|_{z^{\perp}}$ es positiva-definida y en particular $g|_{W^{\perp}}$ es positiva-definida implicando que $W^{\perp}$ es tipo-espacio. Por lo tanto, por Corolario 1.2.6, tenemos que $(W^{\perp})^{\perp} = W$ es tipo-tiempo.

□

Corolario 1.2.10. Sea V un espacio vectorial de Lorentz y $W \subseteq V$ un subespacio vectorial. Las siguientes afirmaciones son equivalentes.

1. W es tipo-luz, es decir, es degenerado.
2. W contiene un vector nulo, pero no contiene un vector tipo-tiempo.
3. si L es un subespacio uno-dimensional y $\Lambda = \{v \in V : g(v,v) = 0\}$, se tiene que $W \cap \Lambda = L - \{0\}$.

Demostración.

- (1)⇒(2) Por definición, como W es degenerado, este contiene un vector nulo. Supongamos que W tiene un vector tipo tiempo, entonces por Lema 1.2.9, W sería tipo-tiempo lo cual es contradicción.

- (2)⇒(3) Como W contiene un vector nulo, $W \cap \Lambda$ no es vacío. Por Lema 1.2.9, dos vectores nulos linealmente independientes implicarían que W contiene un vector tipo-tiempo.

- (3)⇒(1) $W \cap \Lambda = L - \{0\}$ implica que W tiene al menos un vector nulo y por lo tanto W no es tipo-espacio, pero también implica que no contiene dos vectores nulos linealmente independientes, entonces, por Lema 1.2.9, W no es tipo-tiempo.

□

Definición 1.2.11. Sea $\mathcal{T}$ el conjunto de todos los vectores tipo-tiempo en un espacio vectorial Lorentziano V. Para $u \in \mathcal{T}$, se define el *Cono de Tiempo* de V que contiene a u como

$$C(u) = \{v \in \mathcal{T} : g(u,v) < 0\}$$

El *Cono de Tiempo Opuesto a* $C(u)$ está dado por

$$C(-u) = \{v \in \mathcal{T} : g(u,v) > 0\}$$

Observación 1.2.12. Sea $v \in \mathcal{T}$. Si $g(u,v) = 0$ entonces $v \in u^{\perp}$, y ya que $u^{\perp}$ es tipo-espacio, esto nos diría que v es tipo-espacio lo cual es contradicción, entonces $g(u,v) \neq 0$, es decir, $\mathcal{T} = C(u) \cup C(-u)$. Por otro lado, si $v \in C(u) \cap C(-u)$, entonces $g(u,v) = 0$, obteniendo nuevamente una contradicción, y por lo tanto $C(u) \cap C(-u) = \emptyset$.

Lema 1.2.13. *Dos vectores tipo-tiempo v y w en un espacio vectorial Lorentziano están en un mismo Cono de Tiempo si y sólo si $g(v,w) < 0$.*

Demostración. Sin pérdida de generalidad podémos suponer que $v \in C(u)$, para algún vector tipo-tiempo u. Afirmamos que $w \in C(u)$ si y sólo si $g(v,w) < 0$. Ya que $|u| > 0$, tenemos que $C\left(u/|u|\right) = C(u)$, podemos entonces considerar que u es un vector unitario tipo-tiempo, es decir, $g(u,u) = -1$.

Por Lema 1.2.5, podemos escribir $v = au + x$ y $w = bu + y$ con x, $y \in u^{\perp}$. Ya que $v \in \mathcal{T}$, tenemos que $g(v,v) < 0$, pero por otro lado

$$\begin{aligned} g(v,v) &= g(au + x, au + x) \\ &= a^2 g(u,u) + 2a g(u,x) + g(x,x) \\ &= -a^2 + 0 + g(x,x) \\ &= -a^2 + g(x,x) \end{aligned}$$

por lo tanto $g(x,x) < a^2$. Como $x \in u^{\perp}$ y $u^{\perp}$ es tipo-tiempo, entonces $g(x,x) \geq 0$ y aplicando raíz cuadrada a $g(x,x) < a^2$, se obtiene $|x| < |a|$. Análogamente obtenemos que $|y| < |b|$.

Ahora notemos que

$$\begin{aligned} g(v,w) &= g(au + x, bu + y) \\ &= ab g(u,u) + a g(u,y) + b g(u,x) + g(x,y) \\ &= -ab + 0 + 0 + g(x,y) \\ &= -ab + g(x,y) \end{aligned}$$

Ya que $u^{\perp}$ es tipo-espacio, por Observación 1.2.8, se cumple la desigualdad de Schwarz y por lo tanto $|g(x,y)| \leq |x||y| < |ab|$.

También tenemos que $v \in C(u)$, entonces

$$g(v,u) = g(au + x, u) = -a < 0 \quad \text{implicando que} \quad a > 0$$

Tenemos entonces las equivalencias $w \in C(u) \Leftrightarrow g(u, w) < 0 \Leftrightarrow b > 0$ y como

$$\begin{aligned} g(v, w) &= -ab + g(x, y) \\ &< -ab + |ab| \\ &= 0 \text{ , si } ab > 0 \qquad \text{y ya que } a > 0 \\ &= 0 \text{ , si } b > 0 \end{aligned}$$

es decir, $b > 0$ si y sólo si $g(v, w) < 0$, obteniendo así el resultado deseado. $\square$

Proposición 1.2.14. *Sean v y w vectores tipo tiempo en un espacio vectorial Lorentziano V. Entonces*

1. $|g(v, w)| \geq |v||w|$, *con igualdad si y sólo si v y w son colineales.*
2. *Si v y w están en un mismo Cono de Tiempo de V, existe un único número $\varphi \geq 0$, llamado el ángulo hiperbólico entre v y w tal que*

$$g(v, w) = -|v||w| \cosh \varphi$$

Demostración.

1. Por Lema 1.2.5 podemos escribir a V como $V = \mathbb{R}v + v^{\perp}$, y ya que $w \in V$ entonces $w = av + w_0$, con $w_0 \in v^{\perp}$. Ya que w es tipo tiempo,

$$\begin{aligned} g(w, w) &= g(av + w_0, av + w_0) \\ &= g(av, av) + 2g(av, w_0) + g(w_0, w_0) \\ &= a^2 g(v, v) + 2a g(v, w_0) + g(w_0, w_0) \\ &= a^2 g(v, v) + g(w_0, w_0) < 0 \end{aligned}$$

Por Lema 1.2.5 se tiene que $v^{\perp}$ es un subespacio vectorial Lorentziano tipo-espacio, entonces $g(w_0, w_0) \geq 0$ y por hipótesis teníamos que v es tipo-tiempo, es decir, $g(v, v) < 0$. Tenemos entonces

$$\begin{aligned} g(v, w)^2 &= g(v, av + w_0)^2 \\ &= (ag(v, v) + g(v, w_0))^2 = a^2 g(v, v)^2 = a^2 g(v, v) g(v, v) \\ &= (g(w, w) - g(w_0, w_0)) g(v, v) \geq g(w, w) g(v, v) = |v|^2 |w|^2 \end{aligned}$$

Se obtiene la igualdad cuando

$$(g(w, w) - g(w_0, w_0)) g(v, v) = g(w, w) g(v, v)$$

lo que equivale a que $g(w_0, w_0) = 0$, y eso implica $w_0 = 0$, es decir que $w = av$.

2. Si v y w están en un mismo Cono de Tiempo, entonces $g(v,w) < 0$, entonces
$$-\frac{g(v,w)}{|v||w|} \geq 1$$
Como la función coseno hiperbólico $\cosh\colon [0,\infty) \to [1,\infty)$ es inyectiva, existe un único número φ tal que
$$\cosh\varphi = -\frac{g(v,w)}{|v||w|}$$

□

Corolario 1.2.15. Si v y w son vectores tipo tiempo en un mismo Cono de Tiempo, entonces $|v| + |w| \leq |v + w|$, donde la igualdad se cumple si y sólo si v y w son linealmente dependientes.

Demostración. Como v y w están en un mismo Cono de Tiempo, por Lema 1.2.13 $g(v,w) < 0$, lo que implica $|g(v,w)| = -g(v,w)$. Por la Proposición 1.2.14 (1), se tiene $|v||w| \leq -g(v,w)$. Entonces

$$\begin{aligned}
(|v| + |w|)^2 &= |v|^2 + 2|v||w| + |w|^2 \\
&\leq |v|^2 - 2g(v,w) + |w|^2 = -g(v,v) - 2g(v,w) - g(w,w) \\
&= -\left(g(v,v) + 2g(v,w) + g(w,w)\right) = -g(v+w, v+w) \\
&= |v+w|^2
\end{aligned}$$

Si v y w son linealmente independientes, por la misma Proposición 1.2.14 (1), se cumple la igualdad $|v||w| = -g(v,w)$, obteniendo la igualdad en el cálculo anterior. □

Capítulo 2

Geometría Semi-Riemanniana Intrínseca

Empezaremos con la definición de variedad semi-Riemanniana y de manera inmediata abordaremos la parte de curvatura de dichas variedades. Se definirá el tensor de curvatura, la curvatura seccional constante de una variedad semi-Riemanniana y la curvatura de Ricci. También se demostrarán las distintas simetrías que cumple el tensor de curvatura, finalizando con el importante teorema de Schur, el cual determina bajo una cierta condición si una variedad tiene curvatura seccional constante. Dicho teorema será aplicado para la demostración de una afirmación importante en el cual se involucran los campos cerrados y conformes.

Por último, entraremos en detalle en unas variedades semi-Riemannianas del tipo producto, conocidas como los Productos Alabeados. El objetivo será dar expresiones explícitas de su conexión de Levi Civita y su tensor de curvatura que más adelante, estudiemos una breve aplicación en dichas variedades que tienen un campo cerrado conforme.

Cabe mencionar que para este capítulo, fueron tomadas algunas definiciones y afirmaciones de las siguientes referencias bibliográficas:

- De [8] cap.14 *Semi-Riemannian Manifolds - Curvature.*
- De [8] cap.14 *Causality in Lorentz Manifolds - Warped Products.*
- De [5] Cap.5 *Curvature and Space Forms.*

completando a detalle las demostraciones de las mismas.

2.1. Variedades Semi Riemannianas

Definición 2.1.1. Una variedad semi-Riemanniana M, es una variedad diferenciable equipada con un campo tensorial simétrico (0,2) g de índice constante, es decir, g asigna a cada punto p de M un producto escalar g_p sobre el espacio tangente T_pM y el índice de g_p es el mismo para todo punto $p$de M

Observación 2.1.2. En la mayoría de los casos se usará la notación $\langle\ ,\ \rangle$ para denotar a g, donde $g(u,v) = \langle u, v\rangle$.

Definición 2.1.3. Si M es una variedad semi-Riemanniana de índice uno, decimos entonces que M es una variedad Lorentziana. Notemos que los espacios tangentes de una variedad Lorentziana son espacios vectoriales Lorentzianos.

De la misma forma en que asignamos el carácter causal como en la Definición 1.2.2, se tiene la siguiente definición.

Definición 2.1.4. Sea $p \in M$. Un vector tangente $v \in T_pM$ es

- *Tipo-espacio* si $g_p(v,v) > 0$ ó $v = 0$,
- *Nulo* si $g_p(v,v) = 0$ y $v \neq 0$,
- *Tipo-tiempo* si $g_p(v,v) < 0$.

2.2. Curvatura

Observación 2.2.1. En ésta sección consideraremos M como una variedad semi-Riemmnaniana con métrica $g = \langle,\rangle$, ∇ como la conexión Levi-Civita de M y p como un punto arbitrario de M a menos que se especifique lo contrario.

Definición 2.2.2. La función $R\colon \mathfrak{X}(M)^3 \to \mathfrak{X}(M)$ dada por

$$R(X,Y,Z) := R_{XY}Z = \nabla_{[X,Y]}Z - \nabla_X\nabla_Y Z + \nabla_Y\nabla_X Z$$

se le conoce como el *tensor de curvatura de* M.

Demostración. La demostración de que R es un tensor se encuentra en el Lema 3.35, pág. 74 de [8]. Solo se detallará el hecho del porque R es $\mathfrak{F}(M)$-multilineal.

Sean $f, g, h \in \mathfrak{F}(M)$. Primero demostraremos que $R(X,Y,hZ) = hR(X,Y,Z)$. Notemos que

$$R(X,Y,hZ) = \nabla_{[X,Y]}hZ - [\nabla_X, \nabla_Y]hZ$$

del primer termino de la derecha obtenemos

$$\nabla_{[X,Y]}hZ = [X,Y]h\ Z + h\nabla_{[X,Y]}Z = (X(Yh) - Y(Xh))\,Z + h\nabla_{[X,Y]}Z$$

y del segundo tenemos

$$\begin{aligned}[\nabla_X, \nabla_Y]hZ &= \nabla_X(\nabla_Y hZ) - \nabla_Y(\nabla_X hZ)\\ &= \nabla_X((Yh)Z + h\nabla_Y Z) - \nabla_Y((Xh)Z + h\nabla_X Z)\\ &= X(Yh)Z + (Yh)\nabla_X Z + (Xh)\nabla_Y Z + h\nabla_X(\nabla_Y Z)\\ &\quad - Y(Xh)Z - (Xh)\nabla_Y Z - (Yh)\nabla_X Z - h\nabla_Y(\nabla_X Z)\\ &= (X(Yh) - Y(Xh))Z + h(\nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z)\\ &= (X(Yh) - Y(Xh))Z + h[\nabla_X, \nabla_Y]Z\end{aligned}$$

restando estas dos últimas igualdades obtenemos el resultado deseado. Ahora se demostrara que $R(fX, gY, Z) = fg\ R(X,Y,Z)$. Tenemos que

$$R(fX, gY, Z) = \nabla_{[fX,gY]}Z - [\nabla_{fX}, \nabla_{gY}]Z$$

Del primer término de la derecha tenemos

$$\nabla_{[fX,gY]}Z = fg\nabla_{[X,Y]}Z + f(Xg)\nabla_Y Z - g(Yf)\nabla_X Z$$

y del segundo obtenemos

$$\begin{aligned}[\nabla_{fX}, \nabla_{gY}]Z &= \nabla_{fX}(\nabla_{gY}Z) - \nabla_{gY}(\nabla_{fX}Z)\\ &= f\nabla_X(\nabla_{gY}Z) - g\nabla_Y(\nabla_{fX}Z)\\ &= f\nabla_X(g\nabla_Y Z) - g\nabla_Y(f\nabla_X Z)\\ &= f(Xg)\nabla_Y Z + fg\nabla_X(\nabla_Y Z) - g(Yf)\nabla_X Z - gf\nabla_Y(\nabla_X Z)\\ &= f(Xg)\nabla_Y Z - g(Yf)\nabla_X Z + fg[\nabla_X, \nabla_Y]Z\end{aligned}$$

restando estas dos últimas igualdades llegamos al resultado esperado. □

Observación 2.2.3. En Definición 2.2.2, se demostró que R es un tensor, entonces por Proposición 2.2, pág. 27 de [8], al tensor R podemos aplicarlo puntualmente, es decir, a vectores independientes.

Proposición 2.2.4. *Para todo $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M)$, se cumplen las siguientes igualdades:*

1. $R_{XY} = -R_{YX}$

2. $\langle R_{XY}Z, W\rangle = -\langle R_{XY}W, Z\rangle$

3. $R_{XY}Z + R_{YZ}X + R_{ZX}Y = 0$

4. $\langle R_{XY}Z, W\rangle = \langle R_{ZW}X, Y\rangle$

Demostración. Sean $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M)$, entonces

1.

$$\begin{aligned}
R_{XY}Z &= \nabla_{[X,Y]}Z - \nabla_X\nabla_Y Z + \nabla_Y\nabla_X Z \\
&= \nabla_{-[Y,X]}Z - \nabla_X\nabla_Y Z + \nabla_Y\nabla_X Z \\
&= -(\nabla_{[Y,X]}Z - \nabla_Y\nabla_X Z + \nabla_X\nabla_Y Z) \\
&= -R_{YX}Z
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
\langle R_{XY}Z, W\rangle &= \langle \nabla_{[X,Y]}Z, W\rangle - \langle \nabla_X\nabla_Y Z, W\rangle + \langle \nabla_Y\nabla_X Z, W\rangle \\
&= \langle \nabla_{[X,Y]}Z, W\rangle - \langle \nabla_X\nabla_Y Z, W\rangle + \langle \nabla_Y\nabla_X Z, W\rangle \\
&\quad + \langle Z, \nabla_{[X,Y]}W\rangle + \langle \nabla_Y Z, \nabla_X W\rangle + \langle \nabla_X Z, \nabla_Y W\rangle \\
&\qquad - \langle Z, \nabla_{[X,Y]}W\rangle - \langle \nabla_Y Z, \nabla_X W\rangle - \langle \nabla_X Z, \nabla_Y W\rangle \\
&= [X,Y]\langle Z, W\rangle - X\langle \nabla_Y Z, W\rangle + Y\langle \nabla_X Z, W\rangle \\
&\quad - \langle Z, \nabla_{[X,Y]}W\rangle + \langle \nabla_Y Z, \nabla_X W\rangle - \langle \nabla_X Z, \nabla_Y W\rangle \\
&= [X,Y]\langle Z, W\rangle - X\langle \nabla_Y Z, W\rangle + Y\langle \nabla_X Z, W\rangle \\
&\quad - \langle Z, \nabla_{[X,Y]}W\rangle + \langle \nabla_Y Z, \nabla_X W\rangle - \langle \nabla_X Z, \nabla_Y W\rangle \\
&\qquad - \langle Z, \nabla_Y\nabla_X W\rangle - \langle Z, \nabla_X\nabla_Y W\rangle + \langle Z, \nabla_Y\nabla_X W\rangle \\
&\qquad\quad + \langle Z, \nabla_X\nabla_Y W\rangle \\
&= [X,Y]\langle Z, W\rangle - X\langle \nabla_Y Z, W\rangle + Y\langle \nabla_X Z, W\rangle \\
&\quad - \langle Z, \nabla_{[X,Y]}W\rangle - \langle Z, \nabla_Y\nabla_X W\rangle + \langle Z, \nabla_X\nabla_Y W\rangle \\
&\qquad + Y\langle Z, \nabla_X W\rangle - X\langle Z, \nabla_Y W\rangle \\
&= [X,Y]\langle Z, W\rangle - XY\langle Z, W\rangle + YX\langle ZW\rangle \\
&\quad - (\langle Z, \nabla_{[X,Y]}W\rangle - \langle Z, \nabla_X\nabla_Y W\rangle + \langle Z, \nabla_Y\nabla_X W\rangle) \\
&= [X,Y]\langle Z, W\rangle - [X,Y]\langle Z, W\rangle - (\langle Z, R_{XY}W\rangle) \\
&= -\langle R_{XY}W, Z\rangle
\end{aligned}$$

3.
$$
\begin{aligned}
R_{XY}Z + R_{YZ}X + R_{ZX}Y &= \nabla_{[X,Y]}Z - \nabla_X\nabla_Y Z + \nabla_Y\nabla_X Z \\
&\quad + \nabla_{[Y,Z]}X - \nabla_Y\nabla_Z X + \nabla_Z\nabla_Y X \\
&\quad\ \ \nabla_{[Z,X]}Y - \nabla_Z\nabla_X Y + \nabla_X\nabla_Z Y \\
&= \nabla_{[X,Y]}Z + \nabla_Z(\nabla_Y X - \nabla_X Y) \\
&\quad + \nabla_{[Y,Z]}X + \nabla_Y(\nabla_X Z - \nabla_Z X) \\
&\quad\ \ + \nabla_{[Z,X]}Y + \nabla_X(\nabla_Z Y - \nabla_Y Z) \\
&= \nabla_{[X,Y]}Z - \nabla_Z[X,Y] \\
&\quad + \nabla_{[Y,Z]}X - \nabla_Y[Y,Z] \\
&\quad\ \ + \nabla_{[Z,X]}Y - \nabla_X[Z,X] \\
&= [[X,Y],Z] + [[Y,Z],X] + [[Z,X],Y] = 0
\end{aligned}
$$

4. Por los tres puntos anteriores, se tiene que
$$
\begin{aligned}
0 &= \langle R_{XY}Z, W\rangle + \langle R_{YZ}W, X\rangle + \langle R_{ZW}X, Y\rangle + \langle R_{WX}Y, Z\rangle \\
&\quad + \langle R_{YZ}X, W\rangle + \langle R_{ZW}Y, X\rangle + \langle R_{WX}Z, Y\rangle + \langle R_{XY}W, Z\rangle \\
&\quad\ \ + \langle R_{ZX}Y, W\rangle + \langle R_{WY}Z, X\rangle + \langle R_{XZ}W, Y\rangle + \langle R_{YW}X, Z\rangle \\
&= 2\langle R_{ZX}Y, W\rangle + 2\langle R_{YW}X, Z\rangle \\
&= \langle R_{ZX}Y, W\rangle - \langle R_{YW}Z, X\rangle
\end{aligned}
$$

□

Definición 2.2.5. La traza del tensor curvatura se le conoce como la *curvatura de Ricci*. Para cada $p \in M$ y una base ortonormal $e_1, \ldots, e_n$ de T_pM, la curvatura de Ricci está dada como una función bilineal simétrica

$$\mathrm{Ric}_p \colon T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$$

definida como

$$\mathrm{Ric}(v,w) = \sum_{i=1}^{n} \langle e_i, e_i\rangle \langle R_{e_i w} v, e_i\rangle$$

Definición 2.2.6. Si $\Gamma \subseteq T_pM$ es un subespacio vectorial de dimensión dos, decimos que Γ es un *plano tangente* de M en el punto p. Se define también la forma bilineal simétrica $Q \colon T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$ como

$$Q(v,w) = \langle v,v\rangle\langle w,w\rangle - \langle v,w\rangle^2$$

Corolario 2.2.7. Sea $\Gamma \subseteq T_pM$ un plano tangente con base $\{v, w\}$, entonces Γ es no degenerado si y sólo si el $Q|_\Gamma \neq 0$.

Demostración. Ya que Q es una forma bilineal simétrica restringida sobre Γ, por Lema 1.1.8 se tiene el resultado deseado. $\square$

Lema 2.2.8. *Sea $\Gamma \subseteq T_pM$ un plano tangente con base $\{v, w\}$, entonces:*

- *Si Γ es tipo-tiempo entonces $Q|_\Gamma < 0$, decimos que Γ es un plano tangente de M en p tipo-tiempo no-degenerado con signatura $(-, +)$.*

- *Si Γ es tipo-tiempo entonces $Q|_\Gamma > 0$, decimos que Γ es un plano tangente de M en p tipo-espacio no-degenerado con signatura $(+, +)$.*

- *Si Γ es tipo-tiempo entonces $Q|_\Gamma = 0$, decimos que Γ es un plano tangente de M en p tipo-luz degenerado con signatura $(0, +)$*

Demostración.

- Γ es tipo-tiempo.
  Al menos tiene un vector tipo-tiempo v, entonces podemos suponer que Γ es generado por dos vectores linealmente independientes v y w, donde v es tipo tiempo y ya que $-\langle v, w\rangle^2 < 0$ y $\langle v, v\rangle\langle w, w\rangle \leq 0$, entonces

$$Q(v, w) = \langle v, v\rangle\langle w, w\rangle - \langle v, w\rangle^2 < 0$$

- Γ es tipo-espacio.
  Γ es generado por dos vectores tipo-espacio linealmente independientes v, w, y por la desigualdad de Schwarz, tenemos que $\langle v, w\rangle^2 < \langle v, v\rangle\langle w, w\rangle$ y por lo tanto

$$Q(v, w) = \langle v, v\rangle\langle w, w\rangle - \langle v, w\rangle^2 > 0$$

- Γ es tipo-luz.
  Tenemos que $\langle , \rangle|_\Gamma$ es degenerada, entonces Γ tiene un vector no trivial v tipo-luz y además, existe un $w \in \Gamma$, con $w \neq 0$ y linealmente independiente con v tal que $\langle v, w\rangle = 0$, por lo tanto

$$Q(v, w) = \langle v, v\rangle\langle w, w\rangle - \langle v, w\rangle^2 = 0$$

$\square$

Lema 2.2.9. *Sea Γ un plano tangente no-degenerado sobre M en el punto p con base $\{v, w\}$. El número*

$$K(\Gamma) = K(v, w) = \frac{\langle R_{v,w}v, w\rangle}{Q(v, w)}$$

es independiente de la base $\{v, w\}$ que se pueda escoger para Γ. A $K(\Gamma)$ se le conoce como la curvatura seccional de Γ.

Demostración. Tomemos dos bases arbitrarias de Γ, $\{x, y\}$ y $\{v, w\}$. Entonces tenemos el siguiente par de ecuaciones

$$\begin{aligned} v &= ax + by \\ w &= cx + dy \end{aligned}$$

donde el determinante de los coeficientes $ad - bc \neq 0$ por la independencia de los conjuntos $\{x, y\}$ y $\{v, w\}$. Usando la Proposición 2.2.4 y el hecho de que $R_{xx} = R_{yy} = 0$ se tienen las siguientes igualdades:

- $\langle R_{vw}v, w\rangle = (ad - bc)^2\langle R_{xy}x, y\rangle$

$$\begin{aligned}
\langle R_{vw}v, w\rangle &= a\langle R_{vw}x, w\rangle + b\langle R_{vw}y, w\rangle \\
&= ac\langle R_{vw}x, x\rangle + ad\langle R_{vw}x, y\rangle \\
&\qquad + bc\langle R_{vw}y, x\rangle + bd\langle R_{vw}y, y\rangle \\
&= a^2d\langle R_{xw}x, y\rangle + abd\langle R_{yw}x, y\rangle + bc\langle R_{vw}y, x\rangle \\
&= a^2dc\langle R_{xx}x, y\rangle + a^2d^2\langle R_{xy}x, y\rangle \\
&\qquad + abd\langle R_{yw}x, y\rangle + bc\langle R_{vw}y, x\rangle \\
&= a^2d^2\langle R_{xy}x, y\rangle + abcd\langle R_{yx}x, y\rangle \\
&\qquad + abd^2\langle R_{yy}x, y\rangle + bc\langle R_{vw}y, x\rangle \\
&= a^2d^2\langle R_{xy}x, y\rangle - abcd\langle R_{xy}x, y\rangle \\
&\qquad + abc\langle R_{xw}y, x\rangle + b^2c\langle R_{yw}y, x\rangle \\
&= ad(ad - bc)\langle R_{xy}x, y\rangle + abc^2\langle R_{xx}y, x\rangle \\
&\qquad + abcd\langle R_{xy}y, x\rangle + b^2c\langle R_{yw}y, x\rangle \\
&= ad(ad - bc)\langle R_{xy}x, y\rangle - abcd\langle R_{xy}x, y\rangle \\
&\qquad + b^2c^2\langle R_{yx}y, x\rangle + b^2cd\langle R_{yy}y, x\rangle \\
&= ad(ad - bc)\langle R_{xy}x, y\rangle - abcd\langle R_{xy}x, y\rangle + b^2c^2\langle R_{yx}y, x\rangle \\
&= ad(ad - bc)\langle R_{xy}x, y\rangle - bc(ad - bc)\langle R_{xy}x, y\rangle \\
&= (ad - bc)(ad - bc)\langle R_{xy}x, y\rangle \\
&= (ad - bc)^2\langle R_{xy}x, y\rangle
\end{aligned}$$

- $Q(v, w) = (ad - bc)^2Q(x, y)$

Primero obtengamos el término $\langle v,v\rangle\langle w,w\rangle$

$$\begin{aligned}
\langle v,v\rangle\langle w,w\rangle &= \langle ax+by,ax+by\rangle\langle cx+dy,cx+dy\rangle \\
&= (a^2\langle x,x\rangle + 2ab\langle x,y\rangle + b^2\langle y,y\rangle)(c^2\langle x,x\rangle + 2cd\langle x,y\rangle + d^2\langle y,y\rangle) \\
&= a^2c^2\langle x,x\rangle^2 + 2a^2cd\langle x,x\rangle\langle x,y\rangle + a^2d^2\langle x,x\rangle\langle y,y\rangle \\
&\quad + 2abc^2\langle x,y\rangle\langle x,x\rangle + 4abcd\langle x,y\rangle^2 + 2abd^2\langle x,y\rangle\langle y,y\rangle \\
&\quad + b^2c^2\langle y,y\rangle\langle x,x\rangle + 2b^2cd\langle y,y\rangle\langle x,y\rangle + b^2d^2\langle y,y\rangle^2
\end{aligned}$$

por otro lado tenemos que $\langle v,w\rangle^2$ está dado por

$$\begin{aligned}
\langle v,w\rangle^2 &= \langle ax+by,cx+dy\rangle^2 = (\langle ax,cx+dy\rangle + \langle by,cx+dy\rangle)^2 \\
&= \langle ax,cx+dy\rangle^2 + 2\langle ax,cx+dy\rangle\langle by,cx+dy\rangle + \langle by,cx+dy\rangle^2 \\
&= (ac\langle x,x\rangle + ad\langle x,y\rangle)^2 + 2ac\langle x,x\rangle\langle by,cx+dy\rangle \\
&\quad + 2ad\langle x,y\rangle\langle by,cx+dy\rangle + (bc\langle x,y\rangle + bd\langle y,y\rangle)^2 \\
&= a^2c^2\langle x,x\rangle^2 + 2a^2cd\langle x,x\rangle\langle x,y\rangle + a^2d^2\langle x,y\rangle^2 \\
&\quad + 2abc^2\langle x,x\rangle\langle y,x\rangle + 2abcd\langle x,x\rangle\langle y,y\rangle \\
&\quad + 2abcd\langle x,y\rangle^2 + 2abd^2\langle x,y\rangle\langle y,y\rangle \\
&\quad + b^2c^2\langle x,y\rangle^2 + 2b^2cd\langle x,y\rangle\langle y,y\rangle + b^2d^2\langle y,y\rangle^2
\end{aligned}$$

Entonces se tiene que

$$\begin{aligned}
Q(v,w) &= \langle v,v\rangle\langle w,w\rangle - \langle v,w\rangle^2 \\
&= -\langle x,y\rangle^2(a^2d^2 - 2abcd + b^2c^2) + \langle x,x\rangle\langle y,y\rangle(a^2d^2 - 2abcd + b^2c^2) \\
&= (a^2d^2 - 2abcd + b^2c^2)(\langle x,x\rangle\langle y,y\rangle - \langle x,y\rangle^2) \\
&= (ad-bc)^2 Q(x,y)
\end{aligned}$$

Por lo tanto obtenemos

$$K(v,w) = \frac{\langle R_{vw}v,w\rangle}{Q(v,w)} = \frac{(ad-bc)^2\langle R_{xy}x,y\rangle}{(ad-bc)^2Q(x,y)} = \frac{\langle R_{xy}x,y\rangle}{Q(x,y)} = K(x,y)$$

□

Lema 2.2.10. *Dados dos vectores $v,w \in T_pM$, existen vectores $\bar{v}$ y $\bar{w}$ en T_pM arbitrariamente cerca de v,w respectivamente, tal que el subespacio vectorial Span$\{\bar{v},\bar{w}\}$ de T_pM es un plano tangente no-degenerado sobre M en p.*

Demostración. Sea p en M y $v,w \in T_pM$. Por Lema 1.1.21, sin pérdida de generalidad podemos suponer que v y w son linealmente independientes.

Si $Span\{v,w\}$ es un plano no degenerado no hay nada que hacer. Supongamos entonces que $Span\{v,w\}$ es un plano tangente degenerado, es decir $\langle,\rangle|_{Span\{v,w\}}$ es indefinido, es decir, existe en este plano un vector tipo luz. Tenemos entonces los siguientes casos:

- Si v es tipo luz, tomemos $x \in Span\{v,w\}$ tal que $\langle v,x\rangle \neq 0$ entonces

$$Q(v,x) = \langle v,v\rangle\langle x,x\rangle - \langle v,x\rangle^2 = -\langle v,x\rangle^2 < 0$$

- Si v no es tipo luz, se toma $x \in Span\{v,w\}$ tal que su carácter causal sea opuesto al carácter causal de v, lo cual implica que $\langle v,v\rangle\langle x,x\rangle < 0$, entonces
$$Q(v,x) = \langle v,v\rangle\langle x,x\rangle - \langle v,x\rangle^2 < 0$$

Denotemos $\bar{v} = v$ y $\bar{w} = w + \delta x$. Tenemos que

$$\begin{aligned}
Q(v, w+\delta x) &= \langle v,v\rangle\langle w+\delta x, w+\delta x\rangle - \langle v, w+\delta x\rangle^2\\
&= \langle v,v\rangle\langle w,w\rangle + 2\delta\langle v,v\rangle\langle w,x\rangle + \delta^2\langle v,v\rangle\langle x,x\rangle\\
&\quad - \langle v,w\rangle^2 - 2\delta\langle v,w\rangle\langle v,x\rangle - \delta^2\langle v,x\rangle^2\\
&= Q(v,w) + 2\delta b + \delta^2 Q(v,x)\\
&= 2\delta b + \delta^2 Q(v,x)
\end{aligned}$$

donde $b = \langle v,v\rangle\langle w,x\rangle - \langle v,w\rangle\langle v,x\rangle$ y $Q(v,w) = 0$ por Lema 1.1.8. Se tienen dos casos:

- Si $b \neq 0$, escogiendo δ suficientemente pequeño, se tiene que $Q(v, w + \delta x) = 2\delta b + \delta^2 Q(v,x) \approx 2\delta b \neq 0$

- Si $b = 0$, se tiene que $Q(v, w+\delta x) = 2\delta b + \delta^2 Q(v,x) = \delta^2 Q(v,x) < 0$

Ocupando de nuevo el Lema 1.1.8, se tiene que $Span\{\bar{v},\bar{w}\}$ genera un plano tangente no degenerado sobre M en p. □

Proposición 2.2.11. *Si para todo plano tangente no degenerado Γ se tiene que $K(\Gamma) = 0$, entonces $R_{xy}z = 0$ para todo $x, y, z \in T_pM$.*

Demostración. Demostraremos primero las siguientes afirmaciones

1. $\langle R_{vw}v, w\rangle = 0$ para todo $v, w \in T_pM$.
   Si v, w expanden un plano no-degenerado, entonces $\langle R_{vw}v, w\rangle = 0$ ya que $K = 0$. Si $v, w \in T_pM$ son arbitrarios, por el lema 2.2.10, existen

$\bar{v} = v + \delta x$ y $\bar{w} = w + \rho y$, con δ y ρ suficientemente chicos tales que estos expanden un plano no-degenerado. Tenemos entonces que

$$\begin{aligned}
\langle R_{vw}v, w\rangle &= \langle R_{vw}(\bar{v} - \delta x), \bar{w} - \rho y\rangle \\
&= \langle R_{vw}\bar{v}, \bar{w}\rangle - \rho\langle R_{vw}\bar{v}, y\rangle - \delta\langle R_{vw}x, \bar{w}\rangle + \delta\rho\langle R_{vw}, x, y\rangle \\
&= \langle R_{\bar{v}-\delta x, \bar{w}-\rho y}\bar{v}, \bar{w}\rangle - \rho\langle R_{vw}\bar{v}, y\rangle - \delta\langle R_{vw}x, \bar{w}\rangle + \delta\rho\langle R_{vw}, x, y\rangle \\
&= \langle R_{\bar{v}\bar{w}}\bar{v}, \bar{w}\rangle - \rho\langle R_{\bar{v}y}\bar{v}, \bar{w}\rangle - \delta\langle R_{x\bar{w}}\bar{v}, \bar{w}\rangle + \delta\rho\langle R_{xy}\bar{v}, \bar{w}\rangle \\
&\qquad - \rho\langle R_{vw}\bar{v}, y\rangle - \delta\langle R_{vw}x, \bar{w}\rangle + \delta\rho\langle R_{vw}, x, y\rangle
\end{aligned}$$

por lo que si $\delta, \rho \to 0$ entonces $\langle R_{vw}v, w\rangle = 0$ y por la continuidad multilineal de $\langle R_{vw}x, y\rangle$ sobre T_pM^4 se cumple por lo tanto (1).

2. $R_{vw}v = 0$ para todo $v, w \in T_pM$.
   Para x arbitrario tenemos

   $$\langle R_{v,w+x}v, w + x\rangle = \langle R_{vw}v, w\rangle + \langle R_{vx}v, w\rangle + \langle R_{vw}v.x\rangle + \langle R_{vx}v, x\rangle$$

   por (1) y por Proposición 2.2.4

   $$0 = \langle R_{vx}v, w\rangle + \langle R_{vw}v, x\rangle = 2\langle R_{vw}v, x\rangle$$

   por lo tanto $\langle R_{vw}v, x\rangle = 0$ para todo x.

3. $R_{vw}x = R_{wx}v$ para todo $v, w, x \in T_pM$.
   Notemos que

   $$R_{v+x,w}(v + x) = R_{vw}v + R_{xw}v + R_{vw}x + R_{xw}x$$

   Por (2) tenemos que $0 = R_{xw}v + R_{vw}x$ y por Proposición 2.2.4 (1) tenemos que $R_{vw}x = R_{wx}v$.

De acuerdo con (3), $R_{vw}x$ es constante por una permutación cíclica de los vectores v, w, x. Por la primera identidad de Bianchi, Proposición 2.2.4 (3), $R_{vw}x = 0$ para todo v, w, x y por lo tanto $R = 0$ en p. □

Definición 2.2.12. Decimos que la función multilineal $F\colon T_pM^4 \to \mathbb{R}$ es *tipo curvatura*, si para cualquier $x, y, z, w \in T_pM$, F cumple con las siguientes simetrías:

1. $F(x, y, \cdot, \cdot) = -F(y, x, \cdot, \cdot)$
2. $F(x, y, z, w) = -F(x, y, w, z)$
3. $F(x, y, z, \cdot) + F(y, z, x, \cdot) + F(z, x, y, \cdot) = 0$

4. $F(x, y, z, w) = F(z, w, x, y)$

Corolario 2.2.13. Sea F una función multilineal tipo curvatura. Sean $v, w \in T_pM$ tal que $Span\{v, w\}$ genera un plano tangente no degenerado sobre M en p. Si $F(v, w, v, w) = 0$ entonces $F = 0$.

Corolario 2.2.14. Sea F una función multilineal tipo curvatura. Supongamos que para todo $v, w \in T_pM$ tal que $\Gamma = Span\{v, w\}$ genera un plano tangente no degenerado sobre M en p se tiene que

$$K(\Gamma) = K(v, w) = \frac{F(v, w, v, w)}{\langle v, v\rangle\langle w, w\rangle - \langle v, w\rangle^2}$$

entonces para todo $v, w, x, y \in T_pM$

$$\langle R_{vw}x, y\rangle = F(v, w, x, y)$$

Demostración. Tomemos la función diferencia $\triangle(v, w, x, y) = F(v, w, x, y) - \langle R_{vw}x, y\rangle$. Por la multilinealidad y ya que tanto F y la función $(v, w, x, y) \to \langle R_{vw}x, y\rangle$ son tipo curvatura entonces $\triangle$ también es tipo curvatura. Si v y w expanden un plano no-degenerado, por hipótesis tenemos que $\triangle(v, w, v, w) = 0$, entonces por Corolario 2.2.13 tenemos que $\triangle = 0$. $\square$

Definición 2.2.15. Se dice que M *es una variedad de curvatura constante* si $K(\Gamma)$ es constante para todo plano no degenerado $\Gamma \subseteq T_pM$.

Corolario 2.2.16. Sea M una variedad semi-Riemanniana con curvatura constante C. Entonces para cualesquiera $x, y, z \in T_pM$ se tiene que

$$R_{xy}z = C\{\langle z, x\rangle y - \langle z, y\rangle x\}$$

Demostración. Definamos la función

$$F(x, y, v, w) = C\{\langle v, x\rangle\langle y, w\rangle - \langle v, y\rangle\langle x, w\rangle\}$$

Demostraremos que ésta función es una función tipo curvatura, es decir, demostraremos que se cumplen las simetrías dadas en la Proposición 2.2.4. Sean $x, y, z, v, w \in T_pM$

1. $F(x, y, v, w) = -F(y, x, v, w)$

$$\begin{aligned} -F(y, x, v, w) &= -C\{\langle v, y\rangle\langle x, w\rangle - \langle v, x\rangle\langle y, w\rangle\} \\ &= C\{\langle v, x\rangle\langle y, w\rangle - \langle v, y\rangle\langle x, w\rangle\} \\ &\qquad = F(x, y, v, w) \end{aligned}$$

2. $F(x,y,v,w) = -F(x,y,w,v)$

$$\begin{aligned} -F(x,y,w,v) &= -C\{\langle w,x\rangle\langle y,v\rangle - \langle w,y\rangle\langle x,v\rangle\} \\ &= C\{\langle v,x\rangle\langle y,w\rangle - \langle v,y\rangle\langle x,w\rangle\} \\ &= F(x,y,v,w) \end{aligned}$$

3. $F(x,y,z,w) + F(y,z,x,w) + F(z,x,y,w) = 0$

$$\begin{aligned} &F(x,y,z,w) + F(y,z,x,w) + F(z,x,y,w) \\ &\quad = C[\langle z,x\rangle\langle y,w\rangle - \langle z,y\rangle\langle x,w\rangle \\ &\quad + \langle x,y\rangle\langle z,w\rangle - \langle x,z\rangle\langle y,w\rangle \\ &\quad + \langle y,z\rangle\langle x,w\rangle - \langle y,x\rangle\langle z,w\rangle] \\ &\quad = 0 \end{aligned}$$

4. $F(x,y,v,w) = F(v,w,x,y)$

$$\begin{aligned} F(v,w,x,y) &= C\{\langle x,v\rangle\langle w,y\rangle - \langle x,w\rangle\langle v,y\rangle\} \\ &= C\{\langle v,x\rangle\langle y,w\rangle - \langle v,y\rangle\langle x,w\rangle\} \\ &= F(x,y,v,w) \end{aligned}$$

Ahora notemos que $F(x,y,x,y) = CQ(x,y)$. Entonces si x y y expanden un plano no-degenerado se tiene que

$$K(x,y) = C = \frac{F(x,y,x,y)}{Q(x,y)}$$

y por el Corolario 2.2.14, para todo $x,y,z,w \in T_pM$

$$\begin{aligned} \langle R_{xy}z,w\rangle &= F(x,y,z,w) \\ &= C\{\langle z,x\rangle\langle y,w\rangle - \langle z,y\rangle\langle x,w\rangle\} \\ &= \langle C\langle z,x\rangle y - C\langle z,y\rangle x, w\rangle \\ &= \langle C\{\langle z,x\rangle y - \langle z,y\rangle x\}, w\rangle \end{aligned}$$

y por lo tanto $R_{xy}z = C\{\langle z,x\rangle y - \langle z,y\rangle x\}$. $\square$

Teorema 2.2.17. *(Lema de Schur) Supongamos que M es de dimensión ≥ 3. Sea $\Gamma \subseteq T_pM$ un plano tangente no degenerado sobre M en p. Si la curvatura seccional de Γ, $K(\Gamma)$, depende sólo del punto $p \in M$, entonces M es una variedad de curvatura constante.*

Demostración. Sea $p \in M$ y Γ un plano tangente no degenerado en dicho punto. Por hipótesis se tiene que $K(\Gamma) = \lambda$, donde $\lambda \in C^\infty(M)$. Definamos ahora la función multilineal $F\colon T_pM^4 \to \mathbb{R}$ dada por

$$F(x, y, z, w) = \langle x, z\rangle\langle y, w\rangle - \langle y, z\rangle\langle x, w\rangle$$

Esta función, por la demostración del Corolario 2.2.16, es una función tipo curvatura, y además satisface

$$K(\Gamma) = \frac{\lambda(p) \cdot F(x, y, x, y)}{\langle x, x\rangle\langle y, y\rangle - \langle x, y\rangle^2}$$

Si $\bar{R}\colon T_pM^4 \to \mathbb{R}$ es tal que $\bar{R}(x, y, z, w) = \langle R_{xy}z, w\rangle$, por Corolario 2.2.14, se tiene que $\bar{R} = \lambda \cdot F$.

Se demostrará ahora que F es paralelo, es decir, $\nabla F = 0$. Por la regla del producto para tensores, para un campo vectorial V en $\mathfrak{X}(M)$ se tiene

$$\begin{aligned}(\nabla_V F)(X, Y, Z, W) = {} & \nabla_V(F(X, Y, Z, W)) - F(\nabla_V X, Y, Z, W) \\ & - F(X, \nabla_V Y, Z, W) - F(X, Y, \nabla_V Z, W) \\ & - F(X, Y, Z, \nabla_V W)\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}\nabla_V(F(X, Y, Z, W)) &= V(\langle X, Z\rangle\langle Y, W\rangle - \langle Y, Z\rangle\langle X, W\rangle) \\ &= (V\langle X, Z\rangle) \cdot \langle Y, W\rangle + \langle X, Z\rangle \cdot (V\langle Y, W\rangle) \\ &\quad - (V\langle Y, Z\rangle) \cdot \langle X, W\rangle - \langle Y, Z\rangle \cdot (V\langle X, W\rangle) \\ &= \langle \nabla_V X, Z\rangle\langle Y, W\rangle + \langle X, \nabla_V Z\rangle\langle Y, W\rangle \\ &\qquad \langle X, Z\rangle\langle \nabla_V Y, W\rangle + \langle X, Z\rangle\langle Y, \nabla_V W\rangle \\ &\qquad - \langle \nabla_V Y, Z\rangle\langle X, W\rangle - \langle Y, \nabla_V Z\rangle\langle X, W\rangle \\ &\qquad\quad - \langle Y, Z\rangle\langle \nabla_V X, W\rangle - \langle Y, Z\rangle\langle X, \nabla_V W\rangle \\ &= F(\nabla_V X, Y, Z, W) + F(X, \nabla_V Y, Z, W) \\ &\qquad + F(X, Y, \nabla_V Z, W) + F(X, Y, Z, \nabla_V W)\end{aligned}$$

y así se tiene que $\nabla_V(F(X, Y, Z, W)) = 0$ para cualesquiera campos vectoriales X, Y, Z, W en $\mathfrak{X}(M)$.

Aplicando el tensor derivación ∇ a $\bar{R} = \lambda \cdot F$ obtenemos

$$\nabla\bar{R} = \nabla(\lambda \cdot F) = (\nabla\lambda) \cdot F + \lambda \cdot (\nabla F) = (\nabla\lambda) \cdot F$$

Notemos que para cualesquiera campos vectoriales X, Y, Z, W en $\mathfrak{X}(M)$

$$\begin{aligned}(\nabla_V \bar{R})(X,Y,Z,W) &= \nabla_V(\bar{R}(X,Y,Z,W)) - \bar{R}(\nabla_V X, Y, Z, W)\\ &\quad - \bar{R}(X, \nabla_V Y, Z, W) - \bar{R}(X, Y, \nabla_V Z, W)\\ &\quad\quad - \bar{R}(X, Y, Z, \nabla_V W)\\ &= \nabla_V(\langle R_{XY}Z, W\rangle) - \langle R_{\nabla_V X, Y}Z, W\rangle\\ &\quad - \langle R_{X,\nabla_V Y}Z, W\rangle - \langle R_{XY}\nabla_V Z, W\rangle\\ &\quad\quad - \langle R_{XY}Z, \nabla_V W\rangle\\ &= \langle \nabla_V R_{XY}Z, W\rangle + \langle R_{XY}Z, \nabla_V W\rangle\\ &\quad - \langle R_{\nabla_V X, Y}Z, W\rangle - \langle R_{X,\nabla_V Y}Z, W\rangle\\ &\quad - \langle R_{XY}\nabla_V Z, W\rangle - \langle R_{XY}Z, \nabla_V W\rangle\\ &= \langle \nabla_V R_{XY}Z, W\rangle - \langle R_{\nabla_V X, Y}Z, W\rangle\\ &\quad - \langle R_{X,\nabla_V Y}Z, W\rangle - \langle R_{XY}\nabla_V Z, W\rangle\\ &= \langle (\nabla_V R)(X,Y)Z, W\rangle\end{aligned}$$

y así

$$\langle (\nabla_V R)(X,Y)Z, W\rangle = \langle (V\lambda)(\langle X,Z\rangle Y - \langle Y,Z\rangle X), W\rangle$$

y por lo tanto

$$(\nabla_V R)(X,Y)Z = (V\lambda)(\langle X,Z\rangle Y - \langle Y,Z\rangle X)$$

La segunda desigualdad de Bianchi nos dice que

$$(\nabla_V R)(X,Y)Z + (\nabla_X R)(Y,V)Z + (\nabla_Y R)(V,X)Z = 0$$

entonces

$$\begin{aligned}0 &= (V\lambda)(\langle X,Z\rangle Y - \langle Y,Z\rangle X)\\ &\quad + (X\lambda)(\langle Y,Z\rangle V - \langle V,Z\rangle Y)\\ &\quad\quad + (Y\lambda)(\langle V,Z\rangle X - \langle X,Z\rangle V)\end{aligned}$$

Como $\dim M \geq 3$, podemos considerar que X, Y, Z son parte de un marco ortonormal. Si en la última igualdad tomamos que $V = Z$, se tiene que

$$\begin{aligned}0 &= (Z\lambda)(\langle X,Z\rangle Y - \langle Y,Z\rangle X)\\ &\quad + (X\lambda)(\langle Y,Z\rangle Z - \langle Z,Z\rangle Y)\\ &\quad\quad + (Y\lambda)(\langle Z,Z\rangle X - \langle X,Z\rangle Z)\\ &= -(X\lambda)Y + (Y\lambda)X\end{aligned}$$

y ya que X, Y son linealmente independientes, se tiene que $X\lambda = Y\lambda = 0$ y por lo tanto, λ es constante. $\square$

2.3. Productos alabeados

Definición 2.3.1. Sean M^n y N^m variedades topológicas con atlas completos $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ respectivamente. Una *variedad producto* es el espacio topológico $M \times N$ equipado con el atlas completo $\mathcal{A} \times \mathcal{B} = \{(\varphi \times \eta, U \times V)\}$ donde $(\varphi, U) \in \mathcal{A}$, $(\eta, V) \in \mathcal{B}$ y las funciones $\varphi \times \eta \colon U \times V \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ están definidas como $\varphi \times \eta\ (p, q) = (\varphi(p), \eta(q))$ para todo $(p, q) \in U \times V$.

Definición 2.3.2. Sean M y N dos variedades y $\phi \colon M \to N$ una función diferenciable. Campos vectoriales X sobre M y Y sobre N se dicen que son *ϕ-relativos* siempre que $d\phi(X_p) = Y_{\phi(p)}$ para todo $p \in M$.

Definición 2.3.3. Para una variedad producto $M \times N$, sus *proyecciones* son las funciones $\pi \colon M \times N \to M$ dada por $\pi(p, q) = p$ y $\sigma \colon M \times N \to N$ dada por $\sigma(p, q) = q$ para todo $(p, q) \in M \times N$.

Observación 2.3.4.

1. Una función $\phi \colon P \to M \times N$ es diferenciable si y sólo si $\pi \circ \phi$ y $\sigma \circ \phi$ son diferenciables.

2. Para cada $(p, q) \in M \times N$, los subconjuntos $M \times q$ y $p \times N$ son subvariedades de $M \times N$.

3. Para cada (p, q), las funciones restringidas $\pi|_{M \times q}$ y $\sigma|_{p \times N}$ son difeomorfismos de $M \times q$ a M y $p \times N$ a N respectivamente.

4. Los espacios tangentes $T_pM \equiv T_{(p,q)}(M \times q)$ y $T_qN \equiv T_{(p,q)}(p \times N)$ son subespacios del espacio tangente $T_{(p,q)}(M \times N)$.

5. $T_{(p,q)}(M \times N)$ es la suma directa de sus subespacios $T_{(p,q)}(M \times q)$ y $T_{(p,q)}(p \times N)$.

Definición 2.3.5. A continuación se definirán los *levantamientos* relacionados con las variedades producto $M \times N$

1. Si $f \in C^\infty(M)$, el *levantamiento* de f sobre $M \times N$ es la función $\tilde{f} = f \circ \pi \in C^\infty(M \times N)$.

2. Si $x \in T_pM$ y $q \in N$, el *levantamiento* $\tilde{x}$ de x sobre (p, q), es el único vector en $T_{(p,q)}(M \times q)$ tal que $d\pi(\tilde{x}) = x$

3. Si $X \in \mathfrak{X}(M)$, el *levantamiento* de X sobre $M \times N$ es el campo vectorial $\tilde{X}$ tal que $\tilde{X}_{(p,q)}$ es el levantamiento de X_p sobre (p, q). Se tiene que el levantamiento de $X \in \mathfrak{X}(M)$ sobre $M \times N$ es el elemento único de $\mathfrak{X}(M \times N)$ tal que es π-relativo a X y es σ-relativo al campo vectorial cero en N.

4. Al levantamiento $\tilde{X}$ de $X \in \mathfrak{X}(M)$ se le llama *levantamiento horizontal.*

5. Al levantamiento $\tilde{Y}$ de $Y \in \mathfrak{X}(N)$ se le llama *levantamiento vertical.*

6. Denotamos los conjuntos

$$\mathcal{L}(M) = \{\tilde{X} \in \mathfrak{X}(M \times N) \colon \tilde{X} \text{ es levantamiento de algún } X \in \mathfrak{X}(M)\}$$

$$\mathcal{L}(N) = \{\tilde{Y} \in \mathfrak{X}(M \times N) \colon \tilde{Y} \text{ es levantamiento de algún } Y \in \mathfrak{X}(N)\}$$

como el conjunto de levantamientos horizontales y verticales respectivamente.

Observación 2.3.6.

1. Si $\tilde{X}, \tilde{Y} \in \mathcal{L}(M)$ entonces $[\tilde{X}, \tilde{Y}] = \widetilde{[X, Y]} \in \mathcal{L}(M)$ y análogamente para $\mathcal{L}(N)$.

2. Si $\tilde{X} \in \mathcal{L}(M)$ y $\tilde{Y} \in \mathcal{L}(N)$, entonces $[\tilde{X}, \tilde{Y}] = 0$.

Definición 2.3.7. Supongamos que M y N son variedades semi-Riemannianas con métricas g_M y g_N respectivamente, y sea $f > 0$ una función diferenciable sobre M. Definimos la *variedad producto alabeada* como la variedad producto $P = M \times_f N$ equipada con el tensor métrico $g = \langle , \rangle$ dado por

$$\langle u, v \rangle = g(u, v) = g_M(d\pi(u), d\pi(v)) + f^2(p) g_N(d\sigma(u), d\sigma(v))$$

para $(p, q) \in M \times N$ y para todo $u, v \in T_{(p,q)}(M \times N)$. A N se le llama la *fibra* y a M se le llama la *base* de $P = M \times_f N$.

Observación 2.3.8.

1. Si $f = 1$, entonces $M \times_f N$ se reduce a una variedad producto semi-Riemanniana.

2. Las *fibras* $p \times N = \pi^{-1}(p)$ y las *hojas* $M \times q = \sigma^{-1}(q)$ son subvariedades semi-Riemannianas de $P = M \times_f N$.

3. Para cada $q \in N$, la función $\pi|_{(M \times q)}$ es una isometría sobre M.

4. Para cada $p \in M$, la función $\sigma|_{(p \times N)}$ es una homotecia positiva sobre N con factor $1/f(p)$.

5. Para cada $(p, q) \in P$, la hoja $M \times q$ y la fibra $p \times N$ son ortogonales en (p, q).

6. $T_{(p,q)}(M \times q) = (T_{(p,q)}(p \times N))^{\perp}$

Lema 2.3.9. *Si $\varphi \in C^\infty(M)$, entonces el gradiente del levantamiento $\varphi \circ \pi$ de φ sobre $P = M \times_f N$ es el levantamiento a P de el gradiente de φ sobre M.*

Demostración. Habrá que mostrar que $grad(\varphi \circ \pi)$ es el levantamiento de $grad(\varphi)$, es decir, $grad(\varphi \circ \pi) \in \mathcal{L}(M)$ y $d\pi(grad(\varphi \circ \pi)) = grad(\varphi)$. Para todo $(p, q) \in M \times N$ y todo $v \in T_{(p,q)}(p \times N)$, se tiene que

$$\langle grad(\varphi \circ \pi), v\rangle = v(\varphi \circ \pi) = d\pi(v)\varphi = 0$$

ya que $d\pi(v) = 0$ y por lo tanto $grad(\varphi \circ \pi) \in (T_{(p,q)}(p \times N))^\perp = T_{(p,q)}(M \times q)$, por lo cual $grad(\varphi \circ \pi) \in \mathcal{L}(M)$. Sea ahora $v \in T_pM$ y supongamos que $\tilde{v}$ es el levantamiento de v sobre $T_{(p,q)}(M \times q)$, es decir, $d\pi(\tilde{v}) = v$. Se tiene entonces

$$\begin{aligned} g_M(d\pi(grad(\varphi \circ \pi)), v) &= g_M(d\pi(grad(\varphi \circ \pi)), d\pi(\tilde{v})) \\ &= \langle grad(\varphi \circ \pi), \tilde{v}\rangle \\ &= \tilde{v}(\varphi \circ \pi) = d\pi(\tilde{v})\varphi = v(\varphi) \\ &= g_M(grad(\varphi), v) \end{aligned}$$

□

Ahora supongamos que $\bar{D}$, D y ∇ son las conexiones Levi-Civita para las variedades semi-Riemannianas P, M y N respectivamente. Para simplificar notación, podemos suponer que para los levantamientos $X \in \mathcal{L}(M)$, $X \in \mathfrak{X}(M)$ y para $V \in \mathcal{L}(N)$, $V \in \mathfrak{X}(N)$.

Definición 2.3.10. Por Observación 2.3.4(2), Observación 2.3.8(6) y Lema 1.1.16, $p \times N$ es una subvariedad de $M \times N$ y además

$$\begin{aligned} T_{(p,q)}(M \times N) &= T_{(p,q)}(p \times N) \oplus (T_{(p,q)}(p \times N))^\perp \\ &= T_{(p,q)}(p \times N) \oplus T_{(p,q)}(M \times q) \end{aligned}$$

donde además podemos definir las siguientes funciones

$$\begin{aligned} ()^\top &: T_{(p,q)}(M \times N) \to T_{(p,q)}(p \times N) \\ ()^\perp &: T_{(p,q)}(M \times N) \to T_{(p,q)}(M \times q) \end{aligned}$$

Lema 2.3.11. *Sean $X, Y \in \mathcal{L}(M)$ y $Z \in \mathfrak{X}(M \times_f N)$. Entonces*

$$(Z)^\perp = X \textit{ si y sólo si } \langle Z, Y\rangle = \langle X, Y\rangle$$

Demostración. Primero supongamos que $(Z)^\perp = X$, entonces

$$\langle Z, Y\rangle = \langle Z^\top + Z^\perp, Y\rangle = \langle Z^\top, Y\rangle + \langle Z^\perp, Y\rangle = \langle Z^\perp, Y\rangle = \langle X, Y\rangle$$

Por otro lado, supongamos que para toda $Y \in \mathcal{L}(M)$ pasa que $\langle Z, Y\rangle = \langle X, Y\rangle$. Sea $V \in \mathfrak{X}(M \times_f N)$, entonces

$$\begin{aligned}\langle Z^\perp - X, V\rangle &= \langle Z^\perp, V\rangle - \langle X, V\rangle \\ &= \langle Z^\perp, V^\top + V^\perp\rangle - \langle X, V^\top + V^\perp\rangle \\ &= \langle Z^\perp, V^\perp\rangle - \langle X, V^\perp\rangle \\ &= \langle Z^\top + Z^\perp, V^\perp\rangle - \langle X, V^\perp\rangle \\ &= \langle Z, V^\perp\rangle - \langle X, V^\perp\rangle \\ &= \langle X, V^\perp\rangle - \langle X, V^\perp\rangle = 0\end{aligned}$$

ya que $V^\perp$ es levantamiento sobre M. □

Proposición 2.3.12. *Sobre $P = M \times_f N$, si $X, Y \in \mathcal{L}(M)$, $V, W \in \mathcal{L}(N)$ y $\tilde{f} = f \circ \pi$, entonces*

1. *$\bar{D}_X Y \in \mathcal{L}(M)$ es el levantamiento de $D_X Y$ sobre M.*
2. *$\bar{D}_X V = \bar{D}_V X = (X\tilde{f}/\tilde{f})V$ es levantamiento sobre N.*
3. *$(\bar{D}_V W)^\perp = \alpha(V, W) = -(\langle V, W\rangle/\tilde{f})\mathrm{grad}\ \tilde{f}$ es levantamiento sobre M.*
4. *$(\bar{D}_V W)^\top \in \mathcal{L}(N)$ es el levantamiento de $d\sigma(\bar{D}_V W) = \nabla_V W$ sobre N.*

Demostración.

1. La fórmula de Koszul y la Observación 2.3.6 nos dice que

$$\begin{aligned}2\langle \bar{D}_X Y, V\rangle &= X\langle Y, V\rangle + Y\langle V, X\rangle - V\langle X, Y\rangle \\ &\quad - \langle X, [Y, V]\rangle + \langle Y, [V, X]\rangle + \langle V, [X, Y]\rangle \\ &= -V\langle X, Y\rangle + \langle V, [X, Y]\rangle\end{aligned}$$

Como X, Y son levantamientos sobre M, $\langle X, Y\rangle$ es constante sobre las fibras y ya que V es levantamiento sobre N se tiene que $V\langle X, Y\rangle = 0$. Por otro lado, por la misma Observación 2.3.6, $[X, Y]$ es levantamiento sobre M y así se tiene $\langle V, [X, Y]\rangle = 0$. Por lo tanto, $\langle \bar{D}_X Y, V\rangle = 0$ para toda $V \in \mathcal{L}(N)$ y esto nos dice que $\bar{D}_X Y$ es levantamiento sobre M. Ya que $\pi|_{(M\times p)}$ es una isometría, se tiene entonces que $d\pi(\bar{D}_X Y) = D_X Y$.

2. Como $0 = [X, V] = \bar{D}_X V - \bar{D}_V X$ entonces $\bar{D}_X V = \bar{D}_V X$ y estos campos vectoriales son verticales ya que

$$0 = X\langle V, Y\rangle = \langle \bar{D}_X V, Y\rangle + \langle V, \bar{D}_X Y\rangle$$

y por (1), $\bar{D}_X Y$ es levantamiento sobre M y por lo tanto

$$\langle \bar{D}_X V, Y\rangle = -\langle \bar{D}_X Y, V\rangle = 0$$

Ahora, usando de nuevo la fórmula de Koszul para $2\langle \bar{D}_X V, W\rangle$ tenemos

$$\begin{aligned} 2\langle \bar{D}_X V, W\rangle &= X\langle V, W\rangle + V\langle W, X\rangle - W\langle X, V\rangle \\ &\quad - \langle X, [V, W]\rangle + \langle V, [W, X]\rangle + \langle W, [X, V]\rangle \\ &= X\langle V, W\rangle \end{aligned}$$

Por como definimos el tensor métrico del producto alabeado, se tiene

$$\begin{aligned} \langle V, W\rangle(p, q) &= g_M(d_p\pi(V), d_p\pi(W)) + f^2(p) g_N(d_q\sigma(V), d_q\sigma(W)) \\ &= g_M(0, 0) + f^2(p) g_N(V_q, W_q) \\ &= (f \circ \pi)^2(p, q) g_N(V, W)(\sigma(p, q)) \\ &= (f \circ \pi)^2(g_N(V, W) \circ \sigma)(p, q) \\ &= \tilde{f}^2(g_N(V, W) \circ \sigma)(p, q) \end{aligned}$$

lo cual implica que

$$\langle V, W\rangle = \tilde{f}^2(g_N(V, W) \circ \sigma)$$

además el término $(g_N(V, W) \circ \sigma)$ es constante sobre hojas, en las cuales, el campo vectorial X es tangente. Entonces

$$\begin{aligned} X\langle V, W\rangle &= X[\tilde{f}^2(g_N(V, W) \circ \sigma)] \\ &= (g_N(V, W) \circ \sigma)\ X(\tilde{f}^2) \\ &= (g_N(V, W) \circ \sigma)\ 2(\tilde{f}) X(\tilde{f}) \\ &= \frac{\langle V, W\rangle}{\tilde{f}^2} 2\tilde{f} X(\tilde{f}) \\ &= 2\frac{X(\tilde{f})}{\tilde{f}}\langle V, W\rangle \end{aligned}$$

regresando a la fórmula de Koszul, se tiene que

$$2\langle \bar{D}_X V, W\rangle = 2\frac{X(\tilde{f})}{\tilde{f}}\langle V, W\rangle$$

y por lo tanto $\bar{D}_X V = (X\tilde{f}/\tilde{f})V$.

3. Como
$$0 = V\langle W, X\rangle = \langle \bar{D}_V W, X\rangle + \langle W, \bar{D}_V X\rangle$$
entonces, usando (2)
$$\begin{aligned}\langle \bar{D}_V W, X\rangle &= -\langle W, \bar{D}_V X\rangle = -\langle W, (X\tilde{f}/\tilde{f})V\rangle \\ &= -(\langle \text{grad } \tilde{f}, X\rangle/\tilde{f})\langle W, V\rangle \\ &= \langle -(\langle W, V\rangle/\tilde{f})\text{grad } \tilde{f}, X\rangle\end{aligned}$$
y por otro lado
$$\langle \bar{D}_V W, X\rangle = \langle (\bar{D}_V W)^{\top} + (\bar{D}_V W)^{\perp}, X\rangle = \langle (\bar{D}_V W)^{\perp}, X\rangle$$
obteniendo así
$$\langle (\bar{D}_V W)^{\perp}, X\rangle = \langle -(\langle W, V\rangle/\tilde{f})\text{grad } \tilde{f}, X\rangle$$
y por los Lemas 2.3.9 y 2.3.11 llegamos al resultado deseado.

4. Por la Definición 2.3.10.

□

Sean ${}^M R$ y ${}^N R$ los levantamientos sobre $P = M \times_f N$ de los tensores de curvatura Riemanniano de M y N. Para simplificar la notación, f representa $f \circ \pi$, grad f es grad $f \circ \pi$ y si $V, W \in \mathcal{L}(N)$ supondremos que $(\bar{D}_V W)^{\top} = \nabla_V W$.

Proposición 2.3.13. *Sea $P = M \times_f N$ un producto alabeado cuyo tensor de curvatura Riemanniano es R. Si $X, Y, Z \in \mathcal{L}(M)$ y $U, V, W \in \mathcal{L}(N)$, entonces*

1. *$R_{XY}Z \in \mathcal{L}(M)$ es el levantamiento de ${}^M R_{XY}Z$ sobre M.*
2. *$R_{VX}Y = (H^f(X,Y)/f)V$, donde H^f es el Hessiano de f.*
3. *$R_{XY}V = R_{VW}X = 0$.*
4. *$R_{XV}W = (\langle V, W\rangle/f)\bar{D}_X(\text{grad } f)$.*
5. *$R_{VW}U = {}^N R_{VW}U - (\langle \text{grad } f, \text{grad } f\rangle/f^2)\{\langle V, U\rangle W - \langle W, U\rangle V\}$.*

Demostración.

1. Por Proposición 2.3.12 (1) tenemos que $\bar{D}_{[X,Y]}Z, \bar{D}_Y Z, \bar{D}_X Z \in \mathcal{L}(M)$ son los levantamientos de los campos vectoriales $D_{[X,Y]}Z, D_Y Z, D_X Z$ respectivamente, además $\bar{D}_X(\bar{D}_Y Z), \bar{D}_Y(\bar{D}_X Z) \in \mathcal{L}(M)$ son los levantamientos de $D_X(D_Y Z)$ y $D_Y(D_X Z)$ respectivamente. Por lo tanto $R_{XY}Z \in \mathcal{L}(M)$ es el levantamiento de ${}^M R_{XY}Z$ sobre M.

2. Como $[V, X] = 0$ y $\bar{D}_X Y$, $Y \in \mathcal{L}(M)$, entonces

$$\begin{aligned}
R_{VX}Y &= \bar{D}_{[V,X]}Y - [\bar{D}_V, \bar{D}_X]Y \\
&= -\bar{D}_V(\bar{D}_X Y) + \bar{D}_X(\bar{D}_V Y) \\
&= -\frac{(\bar{D}_X Y\ f)}{f}\ V + \bar{D}_X\left(\left(\frac{Yf}{f}\right) V\right) \\
&= -\frac{(\bar{D}_X Y\ f)}{f}\ V + X\left(\frac{Yf}{f}\right) V + \frac{Yf}{f}\ \bar{D}_X V \\
&= -\frac{(\bar{D}_X Y\ f)}{f}\ V + \frac{X(Yf)\cdot f - Xf\cdot Yf}{f^2}\ V + \frac{Yf}{f}\cdot\frac{Xf}{f}\ V \\
&= -\frac{(\bar{D}_X Y\ f)}{f}\ V + \frac{X(Yf)}{f}\ V - \frac{Xf\cdot Yf}{f^2}\ V + \frac{Yf\cdot Xf}{f^2}\ V \\
&= \frac{X(Yf) - (\bar{D}_X Y)f}{f}\ V \\
&= \left(\frac{H^f(X,Y)}{f}\right) V
\end{aligned}$$

3. Sea $\zeta \in \mathfrak{X}(P)$ entonces

$$\begin{aligned}
\langle R_{XY}V, \zeta\rangle &= \langle R_{XY}V, \zeta^{\top}\rangle + \langle R_{XY}V, \zeta^{\perp}\rangle \\
&= \langle R_{XY}V, \zeta^{\top}\rangle + \langle R_{V\zeta^{\perp}}X, Y\rangle \\
&= \langle R_{XY}V, \zeta^{\top}\rangle + (H^f(\zeta^{\perp}, X)/f)\langle V, Y\rangle \\
&= \langle R_{XY}V, \zeta^{\top}\rangle \\
&= \langle \bar{D}_{[X,Y]}V, \zeta^{\top}\rangle - \langle \bar{D}_X\bar{D}_Y V, \zeta^{\top}\rangle + \langle \bar{D}_Y\bar{D}_X V, \zeta^{\top}\rangle \\
&= \frac{[X,Y]f}{f}\ \langle V, \zeta^{\top}\rangle - \langle \bar{D}_X((Yf/f)V), \zeta^{\top}\rangle \\
&\quad + \langle \bar{D}_Y((Xf/f)V), \zeta^{\top}\rangle \\
&= \frac{[X,Y]f}{f}\ \langle V, \zeta^{\top}\rangle - X\left(\frac{Yf}{f}\right)\langle V, \zeta^{\top}\rangle - \frac{Yf}{f}\ \langle \bar{D}_X V, \zeta^{\top}\rangle \\
&\quad + Y\left(\frac{Xf}{f}\right)\langle V, \zeta^{\top}\rangle - \frac{Xf}{f}\ \langle \bar{D}_Y V, \zeta^{\top}\rangle \\
&= \frac{[X,Y]f}{f}\ \langle V, \zeta^{\top}\rangle - \frac{X(Yf)}{f}\langle V, \zeta^{\top}\rangle + \frac{Xf\cdot Yf}{f^2}\ \langle V, \zeta^{\top}\rangle \\
&\quad - \frac{Yf}{f}\cdot\frac{Xf}{f}\ \langle V, \zeta^{\top}\rangle + \frac{Y(Xf)}{f}\ \langle V, \zeta^{\top}\rangle \\
&\quad - \frac{Xf\cdot Yf}{f^2}\ \langle V, \zeta^{\top}\rangle + \frac{Xf}{f}\cdot\frac{Yf}{f}\ \langle V, \zeta^{\top}\rangle
\end{aligned}$$

$$\langle R_{XY}V, \zeta\rangle = \frac{[X,Y]f}{f}\ \langle V, \zeta^{\top}\rangle - \frac{X(Yf)}{f}\ \langle V, \zeta^{\top}\rangle + \frac{Y(Xf)}{f}\ \langle V, \zeta^{\top}\rangle = 0$$

Por otro lado

$$
\begin{aligned}
\langle R_{VW}X, \zeta\rangle &= \langle R_{VW}X, \zeta^{\top}\rangle + \langle R_{VW}X, \zeta^{\perp}\rangle \\
&= \langle R_{VW}X, \zeta^{\top}\rangle + \langle R_{X\zeta^{\perp}}V, W\rangle \\
&= \langle R_{VW}X, \zeta^{\top}\rangle \\
&= \langle \bar{D}_{[X,\zeta^{\top}]}V, W\rangle - \langle \bar{D}_X \bar{D}_{\zeta^{\top}}V, W\rangle + \langle \bar{D}_{\zeta^{\top}} \bar{D}_X V, W\rangle \\
&= -\langle \bar{D}_X \bar{D}_{\zeta^{\top}}V, W\rangle + \langle \bar{D}_{\zeta^{\top}} \bar{D}_X V, W\rangle \\
&= -\langle \bar{D}_X (\bar{D}_{\zeta^{\top}}V)^{\top}, W\rangle - \langle \bar{D}_X (\bar{D}_{\zeta^{\top}}V)^{\perp}, W\rangle \\
&\quad + \langle \bar{D}_{\zeta^{\top}}((Xf/f)V), W\rangle \\
&= -\langle \bar{D}_X (\bar{D}_{\zeta^{\top}}V)^{\top}, W\rangle + \langle \bar{D}_{\zeta^{\top}}((Xf/f)V), W\rangle \\
&= -\frac{Xf}{f}\ \langle (\bar{D}_{\zeta^{\top}}V)^{\top}, W\rangle + \zeta^{\top}\left(\frac{Xf}{f}\right)\langle V, W\rangle \\
&\quad + \frac{Xf}{f}\ \langle \bar{D}_{\zeta^{\top}}V, W\rangle \\
&= -\frac{Xf}{f}\ \langle (\bar{D}_{\zeta^{\top}}V)^{\top}, W\rangle + \frac{Xf}{f}\ \langle \bar{D}_{\zeta^{\top}}V, W\rangle \\
&= -\frac{Xf}{f}\ \langle (\bar{D}_{\zeta^{\top}}V)^{\top}, W\rangle + \frac{Xf}{f}\ \langle (\bar{D}_{\zeta^{\top}}V)^{\top}, W\rangle \\
&\quad + \frac{Xf}{f}\ \langle (\bar{D}_{\zeta^{\top}}V)^{\perp}, W\rangle
\end{aligned}
$$

$$
\langle R_{VW}X, \zeta\rangle = \frac{Xf}{f}\ \langle (\bar{D}_{\zeta^{\top}}V)^{\perp}, W\rangle = 0
$$

Por lo tanto tenemos que $R_{XY}V = R_{VW}X = 0$

4. Haciendo uso de la Proposición 2.3.12, y el hecho de que $[X, V] = 0$,

$X\langle V,W\rangle = 0$ y $V(Xf/f) = 0$, tenemos que

$$\begin{aligned}
R_{XV}W &= \bar{D}_{[X,V]}W - [\bar{D}_X, \bar{D}_V]W \\
&= -[\bar{D}_X, \bar{D}_V]W \\
&= -\bar{D}_X\bar{D}_VW + \bar{D}_V\bar{D}_XW \\
&= -\bar{D}_X((\bar{D}_VW)^\top) - \bar{D}_X((\bar{D}_VW)^\perp) + \bar{D}_V((Xf/f)W) \\
&= -\frac{Xf}{f}\ (\bar{D}_VW)^\top + \bar{D}_X\left(\frac{\langle V,W\rangle}{f}\ \text{grad}\ f\right) \\
&\quad + V\left(\frac{Xf}{f}\right)W + \frac{Xf}{f}\bar{D}_VW \\
&= -\frac{Xf}{f}\ (\bar{D}_VW)^\top + X\left(\frac{\langle V,W\rangle}{f}\right)\text{grad}\ f + \frac{\langle V,W\rangle}{f}\ \bar{D}_X(\text{grad}\ f) \\
&\quad + \frac{Xf}{f}\ (\bar{D}_VW)^\top + \frac{Xf}{f}\ (\bar{D}_VW)^\perp \\
&= \langle V,W\rangle\cdot X\left(\frac{1}{f}\right)\text{grad}\ f + \frac{\langle V,W\rangle}{f}\ \bar{D}_X(\text{grad}\ f) \\
&\quad - \frac{Xf}{f}\cdot\frac{\langle V,W\rangle}{f}\text{grad}\ f \\
&= -\langle V,W\rangle\frac{Xf}{f^2}\text{grad}\ f + \frac{\langle V,W\rangle}{f}\ \bar{D}_X(\text{grad}\ f) \\
&\quad - \frac{\langle (Xf/f)V,W\rangle}{f}\text{grad}\ f \\
&= -\frac{\langle V,(Xf/f)W\rangle}{f}\text{grad}\ f + \frac{\langle V,W\rangle}{f}\ \bar{D}_X(\text{grad}\ f) \\
&\quad - \frac{\langle (Xf/f)V,W\rangle}{f}\text{grad}\ f \\
&= -\frac{\langle V,\bar{D}_XW\rangle + \langle \bar{D}_XV,W\rangle}{f}\ \text{grad}\ f + \frac{\langle V,W\rangle}{f}\ \bar{D}_X(\text{grad}\ f) \\
&= -\frac{X\langle V,W\rangle}{f}\text{grad}\ f + \frac{\langle V,W\rangle}{f}\ \bar{D}_X(\text{grad}\ f)
\end{aligned}$$

y por lo tanto $R_{XV}W = (\langle V,W\rangle/f)\bar{D}_X(\text{grad}\ f)$.

5. Sabemos que $R_{VW}U = \bar{D}_{[V,W]}U - [\bar{D}_V, \bar{D}_W]U$. Por un lado tenemos

$$\begin{aligned}
\bar{D}_{[V,W]}U &= (\bar{D}_{[V,W]}U)^\top + (\bar{D}_{[V,W]}U)^\perp \\
&= \nabla_{[V,W]}U - \frac{\langle [V,W],U\rangle}{f}\ \text{grad}\ f
\end{aligned}$$

y por otro

$$\begin{aligned}
\bar{D}_V\bar{D}_W U &= \bar{D}_V(\bar{D}_W U)^{\top} + \bar{D}_V(\bar{D}_W U)^{\top}\\
&= \bar{D}_V(\nabla_W U) + \bar{D}_V(\bar{D}_W U)^{\top}\\
&= (\bar{D}_V(\nabla_W U))^{\top} + (\bar{D}_V(\nabla_W U))^{\perp} + \bar{D}_V(\bar{D}_W U)^{\top}\\
&= \nabla_V\nabla_W U - \frac{\langle V, \nabla_W U\rangle}{f}\text{ grad } f - \bar{D}_V\left(\frac{\langle W, U\rangle}{f}\text{ grad } f\right)\\
&= \nabla_V\nabla_W U - \frac{\langle V, \nabla_W U\rangle}{f}\text{ grad } f - \frac{1}{f}\, V\langle W, U\rangle\text{grad } f\\
&\quad - \frac{\langle W, U\rangle}{f}\bar{D}_V(\text{grad } f)\\
&= \nabla_V\nabla_W U - \frac{\langle V, \nabla_W U\rangle}{f}\text{ grad } f - \frac{\langle \nabla_V W, U\rangle}{f}\text{ grad } f\\
&\quad - \frac{\langle W, \nabla_V U\rangle}{f}\text{ grad } f - \frac{\langle W, U\rangle}{f}\frac{(\text{grad } f)f}{f}\, V\\
&= \nabla_V\nabla_W U - \frac{\langle V, \nabla_W U\rangle}{f}\text{ grad } f - \frac{\langle \nabla_V W, U\rangle}{f}\text{ grad } f\\
&\quad - \frac{\langle W, \nabla_V U\rangle}{f}\text{ grad } f - \frac{\langle W, U\rangle\langle \text{grad } f, \text{grad } f\rangle}{f^2}\, V
\end{aligned}$$

Análogamente

$$\begin{aligned}
\bar{D}_W\bar{D}_V U = \nabla_W\nabla_V U &- \frac{\langle W, \nabla_V U\rangle}{f}\text{ grad } f - \frac{\langle \nabla_W V, U\rangle}{f}\text{ grad } f\\
&- \frac{\langle V, \nabla_W U\rangle}{f}\text{ grad } f - \frac{\langle V, U\rangle\langle \text{grad } f, \text{grad } f\rangle}{f^2}\, W
\end{aligned}$$

Por lo cual se tiene entonces

$$\begin{aligned}
[\bar{D}_V, \bar{D}_W]U &= \bar{D}_V\bar{D}_W U - \bar{D}_W\bar{D}_V U\\
&= [\nabla_V, \nabla_W]U - \frac{\langle \nabla_V W - \nabla_W V, U\rangle}{f}\text{ grad } f\\
&\quad + \frac{\langle \text{grad } f, \text{grad } f\rangle}{f^2}\{\langle V, U\rangle W - \langle W, U\rangle V\}\\
&= [\nabla_V, \nabla_W]U - \frac{\langle [V, W], U\rangle}{f}\text{ grad } f\\
&\quad + \frac{\langle \text{grad } f, \text{grad } f\rangle}{f^2}\{\langle V, U\rangle W - \langle W, U\rangle V\}
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
R_{VW}U &= \bar{D}_{[V,W]}U - [\bar{D}_V, \bar{D}_W]U \\
&= \nabla_{[V,W]}U - \frac{\langle [V,W], U\rangle}{f}\ \mathrm{grad}\ f \\
&\quad - [\nabla_V, \nabla_W]U + \frac{\langle [V,W], U\rangle}{f}\ \mathrm{grad}\ f \\
&\quad - \frac{\langle \mathrm{grad}\ f, \mathrm{grad}\ f\rangle}{f^2}\{\langle V,U\rangle W - \langle W,U\rangle V\} \\
&= \ {}^{N}R_{VW}U - \frac{\langle \mathrm{grad}\ f, \mathrm{grad}\ f\rangle}{f^2}\{\langle V,U\rangle W - \langle W,U\rangle V\}
\end{aligned}$$

□

Capítulo 3

Geometría Semi-Riemanniana Extrínseca

Abordaremos los temas básicos sobre la teoría de subvariedades, que como se sabe, su base son las inmersiones isométricas. Temas importantes para la teoría de subvariedades son la segunda forma fundamental y las fórmulas de Gauss y de Weingarten que son ocupadas para las proyecciones de la conexión de la variedad ambiente en su respectiva subvariedad. Otro punto que es relevante es el vector de curvatura media, el cual es ocupado para definir las subvariedades mínimas.

Una vez obtenidas las fórmulas conocidas para subvariedades, definiremos el tensor de curvatura y sus respectivas proyecciones, obtenidas a partir de las proyecciones de la conexión. Con ello, podremos deducir las ecuaciones de Gauss y Codazzi.

Continuamos desglosando como ejemplo, los espacios de De Sitter y Anti De Sitter, dando una representación particular de dichos espacios para abarcar ambos espacios al mismo tiempo. Se obtienen explícitamente lo que son su conexión, su tensor de curvatura, su vector de curvatura media y su curvatura seccional que de hecho es constante.

Ya una vez cubiertos los temas fundamentales de la teoría de subvariedades, cerraremos ésta sección con uno de los temas clave de ésta tesis, que son los Campos Cerrados Conformes.

Para el desarrollo de este capítulo, se uso como apoyo las siguientes referencias bibliográficas:

- De [2] Cap.2 *Basics on Pseudo-Riemannian Submanifolds.*
- De [3] Cap.1 *The Basic Equations For Submanifolds* y Cap.2 *Hypersurfaces.*

3.1. Inmersiones isométricas

Definición 3.1.1. Sean M y N dos variedades y una función entre ellas $f: M \to N$. Decimos que la función f es una *inmersión* si $df_p : T_pM \to T_{f(p)}N$ es inyectiva en todo punto $p \in M$.

Definición 3.1.2. Decimos que una inmersión $f: M \to N$ es un *encaje* si f es un homeomorfismo sobre $f(M)$, donde $f(M)$ tiene la topología de subespacio inducida por N.

Observación 3.1.3. Sea $f: M \to N$ una inmersión. Entonces para todo $p \in M$, existe una vecindad $U \subseteq M$ de p tal que la restricción $f|_U$ es un encaje.

Definición 3.1.4. Por definición, tenemos que si $f: M \to N$ es una inmersión, entonces $\dim M \leq \dim N$. Al número $\dim N - \dim N$ se le conoce como la *codimensión* de dicha inmersión.

Definición 3.1.5. Sean M y N dos variedades semi-Riemannianas con métricas g_M y g_N respectivamente. Una inmersión $f: M \to N$ se dice que es *isométrica* si

$$g_M(u, v)_p = g_N(df_p(u), df_p(v))_{f(p)}$$

para todo $u, v \in T_pM$ y para todo $p \in M$.

Observación 3.1.6. Sea $f: M \to N$ una inmersión isométrica. Por la Observación 3.1.3, todo punto $p \in M$ tiene una vecindad U en la cual $f|_U$ es un encaje. Entonces todo vector $u \in T_pU$ le corresponde un sólo vector $df(u) \in T_{f(p)}N$. Podemos entonces, identificar cada $u \in T_pM$ con $df(u) \in T_{f(p)}N$. De ésta manera, podemos ver a cada espacio tangente T_pM como un subespacio no-degenerado de $T_{f(p)}N$.

Observación 3.1.7. Por Lema 1.1.11 y la observación anterior, se tiene que

$$T_{f(p)}N = T_pM \oplus T_p^{\perp}M$$

donde $T_p^{\perp}M = (T_pM)^{\perp}$ se le conoce como el *subespacio normal* de M en p y a sus vectores en dicho espacio como vectores normales a M.

Definición 3.1.8. Sea $f\colon M \to N$ una inmersión isométrica. Las funciones

$$\begin{aligned} ()^T &: T_{f(p)}N \to T_pM \\ ()^\perp &: T_{f(p)}N \to T_p^\perp M \end{aligned}$$

son las proyecciones ortogonales.

Observación 3.1.9. Las proyecciones ortogonales $()^T$ y $()^\perp$ son $\mathbb{R}$-lineales y por la Observación 3.1.7, si $v \in T_{f(p)}N$, v se puede expresar como

$$v = (v)^T + (v)^\perp$$

3.2. Fórmulas importantes y la Segunda Forma Fundamental

Sea $f\colon M \to N$ una inmersión isométrica donde D es la conexión Levi-Civita de N. Ya que en las siguientes afirmaciones estaremos estudiando las subvariedades de manera local, por Observación 3.1.3, podemos suponer que f es un encaje.

Definición 3.2.1. Sea el campo vectorial $X \in \mathfrak{X}(M)$. El campo vectorial $\tilde{X} \in \mathfrak{X}(N)$ se dice que es la *extensión de* X si $\tilde{X}|_{f(M)} = X$.

Observación 3.2.2. Supongamos que si $\tilde{X}$ y $\tilde{Y}$ son extensiones de X y Y respectivamente. Si $f \in C^\infty(M)$ y $p \in M$, se tiene que

$$\begin{aligned} \tilde{X}f(p) &= \tilde{X}_p(f) = X_p(f) = Xf(p) \\ \tilde{Y}f(p) &= \tilde{Y}_p(f) = Y_p(f) = Yf(p) \end{aligned}$$

lo cual implica que

$$\begin{aligned} [\tilde{X},\tilde{Y}]_p(f) &= \tilde{X}_p(\tilde{Y}f) - \tilde{Y}_p(\tilde{X}f) \\ &= X_p(\tilde{Y}f) - Y_p(\tilde{X}f) \\ &= X_p(Yf) - Y_p(Xf) \\ &= [X,Y] \end{aligned}$$

y por lo tanto $[\tilde{X},\tilde{Y}]|_M = [X,Y]$. Por otro lado, si $\tilde{X}_1$ es otra extensión de X, entonces $\tilde{X} - \tilde{X}_1 = 0$ sobre M, obteniendo así $D_{\tilde{X}}\tilde{X} = D_{\tilde{X}_1}\tilde{Y}$ sobre M. Análogamente, si $\tilde{Y}_1$ es otra extensión de Y entonces $\tilde{Y} - \tilde{Y}_1 = 0$ sobre M y por lo tanto $D_{\tilde{X}}\tilde{Y} = D_{\tilde{X}}\tilde{Y}_1$ sobre M entonces $D_{\tilde{X}}\tilde{Y}$ sobre M es independiente de las extensiones $\tilde{X},\tilde{Y}$ de X,Y.

Definición 3.2.3. Por la observación anterior, podemos definir entonces

$$\nabla_X Y = (D_{\tilde{X}}\tilde{Y})^T \quad \alpha(X,Y) = (D_{\tilde{X}}\tilde{Y})^\perp$$

teniendo así la fórmula conocida como *fórmula de Gauss*

$$D_{\tilde{X}}\tilde{Y} = \nabla_X Y + \alpha(X,Y)$$

Proposición 3.2.4. *Supongamos que $f\colon M \to N$ es una inmersión isométrica. Entonces*

1. *∇ definido como en Definición 3.2.3 es la conexión Levi-Civita de M.*
2. *$\alpha(X,Y)$ es $C^\infty(M)$-bilineal y simétrica.*

Demostración.

1. Como D es conexión sobre N y $()^T$ es transformación lineal, entonces $D_X Y$ es $C^\infty(N)$-lineal en X y es $\mathbb{R}$-lineal en Y. Si $g \in C^\infty(M)$ entonces

$$\begin{aligned}\nabla_X(gY) &= (D_{\tilde{X}}(g\tilde{Y}))^T \\ &= ((\tilde{X}g)\tilde{Y} + gD_{\tilde{X}}\tilde{Y})^T \\ &= (Xg)(\tilde{Y})^T + g(D_{\tilde{X}}\tilde{Y})^T \\ &= (Xg)Y + g\nabla_X Y\end{aligned}$$

También se tiene que

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = (D_{\tilde{X}}\tilde{Y} - D_{\tilde{Y}}\tilde{X})^T = ([\tilde{X},\tilde{Y}])^T = [X,Y]$$

Notemos ahora que

$$X\langle \tilde{Y},\tilde{Z}\rangle = \langle D_X\tilde{Y},\tilde{Z}\rangle + \langle \tilde{Y}, D_X\tilde{Z}\rangle$$

De la fórmula de Gauss se tiene

$$\langle D_X\tilde{Y},\tilde{Z}\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle \alpha(X,Y), Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle$$

y análogamente

$$\langle \tilde{Y}, D_X\tilde{Z}\rangle = \langle Y, \nabla_X Z\rangle$$

obteniendo así

$$X\langle Y,Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle$$

La unicidad de ∇ se obtiene de la misma unicidad de D.

2. Como, tanto ∇ y D son libres de torsión, se tiene

$$\begin{aligned} D_{\tilde{X}}\tilde{Y} &= \nabla_X Y + \alpha(X,Y) \\ D_{\tilde{Y}}\tilde{X} &= \nabla_Y X + \alpha(Y,X) \\ [\tilde{X},\tilde{Y}]|_M &= [X,Y] + \alpha(X,Y) - \alpha(Y,X) \\ 0 &= \alpha(X,Y) - \alpha(Y,X) \\ \alpha(X,Y) &= \alpha(Y,X) \end{aligned}$$

entonces $\alpha(X,Y)$ es simétrica. Si $g \in C^\infty(M)$, se tiene

$$\begin{aligned} \nabla_{gX}Y + \alpha(gX,Y) &= D_{gX}\tilde{Y} = gD_X\tilde{Y} \\ &= g(\nabla_X Y + \alpha(X,Y)) \\ &= g\nabla_X Y + g\alpha(X,Y) \end{aligned}$$

Tomando las proyecciones normales se tiene que $\alpha(gX,Y) = g\alpha(X,Y)$. Siendo α simétrica, obtenemos entonces que α es $C^\infty(M)$-bilineal.

□

Definición 3.2.5. La función $\alpha\colon \mathfrak{X}(M)\times\mathfrak{X}(M) \to T^\perp M$ se le conoce como la *segunda forma fundamental* de M para la inmersión dada.

Definición 3.2.6. Sea $f\colon M \to N$ una inmersión isométrica. Sea $\xi \in T^\perp M$ y $X \in \mathfrak{X}(M)$, se le conoce como la *fórmula de Weingarten* a la descomposición de $D_X\xi$ la cual está dada como

$$D_X\xi = -A_\xi X + \nabla^\perp_X \xi$$

donde $(D_X\xi)^T = -A_\xi X$ y $(D_X\xi)^\perp = \nabla^\perp_X\xi$ los cuales son campos vectoriales diferenciales sobre M. A la función $A_\xi\colon \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ se le conoce como el *operador de forma*.

Proposición 3.2.7. *Sea $f\colon M \to N$ una inmersión isométrica. Entonces*

(a) $A_\xi X$ es $C^\infty(M)$-bilineal sobre ξ y X; entonces, para cada punto $p \in M$, $A_\xi X$ depende sólo de ξ_p y X_p.

(b) Para un vector normal ξ y vectores tangentes X, Y de M se tiene que

$$\langle \alpha(X,Y), \xi\rangle = \langle A_\xi X, Y\rangle$$

(c) $\nabla^\perp$ *es la conexión métrica sobre el haz normal* $T^\perp M$ *con respecto a la métrica inducida sobre* $T^\perp M$*, es decir,*

$$X\langle \xi, \eta\rangle = \langle \nabla^\perp_X \xi, \eta\rangle + \langle \xi, \nabla^\perp_X \eta\rangle$$

se cumple para cualquier campo tangente X *y cualesquiera campos vectoriales normales* ξ, η*.*

Demostración.

(a) Sean $g, h \in C^\infty(M)$, entonces

$$\begin{aligned} D_{gX}(h\xi) &= gD_X(h\xi) \\ &= g\{(Xh)\xi + hD_X\xi\} \\ &= g(Xh)\xi - ghA_\xi X + gh\nabla^\perp_X \xi \end{aligned}$$

Obteniendo las proyecciones normales y tangentes se tiene

$$\begin{aligned} A_{h\xi}(gX) &= ghA_\xi X \\ \nabla^\perp_{gX}(h\xi) &= g(Xh)\xi + gh\nabla^\perp_X \xi \end{aligned}$$

Por lo tanto $A_\xi X$ es $C^\infty(M)$-bilineal sobre ξ y X.

(b) Para campos $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$

$$\begin{aligned} 0 &= X\langle Y, \xi\rangle \\ &= \langle D_X Y, \xi\rangle + \langle Y, D_X \xi\rangle \\ &= \langle \nabla_X Y, \xi\rangle + \langle \alpha(X,Y), \xi\rangle - \langle Y, A_\xi X\rangle + \langle Y, \nabla^\perp_X \xi\rangle \\ &= \langle \alpha(X,Y), \xi\rangle - \langle Y, A_\xi X\rangle \end{aligned}$$

(c) De la última igualdad obtenida en el inciso (a), $\nabla^\perp$ define una conexión afín sobre $T^\perp M$. Ahora, si ξ y η son campos vectoriales normales y X es un campo tangente, se tiene

$$\begin{aligned} D_X\xi &= -A_\xi X + \nabla^\perp_X \xi \\ D_X\eta &= -A_\eta X + \nabla^\perp_X \eta \end{aligned}$$

Lo cual implica que

$$\begin{aligned} \langle \nabla^\perp_X \xi, \eta\rangle + \langle \xi, \nabla^\perp_X \eta\rangle &= \langle D_X\xi + A_\xi X, \eta\rangle + \langle \xi, D_X\eta + A_\eta X\rangle \\ &= \langle D_X\xi, \eta\rangle + \langle \xi, D_X\eta\rangle \\ &= X\langle \xi, \eta\rangle \end{aligned}$$

Entonces, $\nabla^\perp$ es una conexión métrica sobre el haz normal con respecto a la métrica inducida sobre $T^\perp M$.

$\square$

Definición 3.2.8. Para una inmersión isométrica $f\colon M \to N$, si $\alpha \equiv 0$, decimos que f es *totalmente geodésica.*

Definición 3.2.9. Supongamos que $f\colon M \to N$ es una inmersión isométrica. Para un campo vectorial normal $\xi \in T^{\perp}M$, si $A_\xi = \lambda I$ para algún $\lambda \in C^\infty(M)$, decimos que ξ es una *sección umbílica.* También se dice que la subvariedad M es *umbílica* respecto al campo vectorial normal ξ. Si una subvariedad M es umbílica con respecto a todo campo vectorial normal, entonces a M se le conoce como una *subvariedad totalmente umbílica.*

Definición 3.2.10. El *vector de curvatura media* H de M en N se define como

$$H = \frac{1}{n} \text{ Traza } \alpha$$

donde $n = \dim M$ y α es la segunda forma fundamental. Si $\{e_1, \ldots, e_n\}$ es un marco ortonormal de M, entonces

$$H = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \epsilon_k \alpha(e_k, e_k)$$

donde $\epsilon_k = \langle e_k, e_k \rangle = \pm 1$.

Corolario 3.2.11. Sea M una subvariedad totalmente umbílica. Entonces la segunda forma fundamental satisface

$$\alpha(X,Y) = \langle X, Y \rangle\ H \qquad \text{para} \qquad X, Y \in \mathfrak{X}(M)$$

Demostración. Ya que M es una subvariedad totalmente umbílica, tenemos que para todo $\xi \in T^{\perp}M$, se tiene que $A_\xi = \lambda I$ para algún $\lambda \in C^\infty(M)$. Supongamos que $\{e_1, \ldots, e_n\}$ es un marco ortonormal de M, entonces

$$\begin{aligned}
\langle H(X,Y), \xi \rangle &= \langle \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \epsilon_k \alpha(e_k, e_k), \xi \rangle = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \epsilon_k \langle \alpha(e_k, e_k), \xi \rangle \\
&= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \epsilon_k \langle A_\xi e_k, e_k \rangle = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \epsilon_k \langle \lambda e_k, e_k \rangle \\
&= \lambda \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \epsilon_k \langle e_k, e_k \rangle = \lambda \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \epsilon_k \epsilon_k \\
&= \lambda \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \epsilon_k^2 = \lambda \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} 1 = \lambda \frac{1}{n} n = \lambda
\end{aligned}$$

Por otro lado, si $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, tenemos entonces que

$$\langle \alpha(X,Y), \xi \rangle = \langle A_\xi X, Y \rangle = \langle \lambda X, Y \rangle = \lambda \langle X, Y \rangle = \langle \langle X, Y \rangle H(X,Y), \xi \rangle$$

teniendo así el resultado deseado. □

Definición 3.2.12. A una subvariedad semi-Riemanniana M tal que su vector de curvatura se anula, es decir, $H \equiv 0$, se dice que M es una subvariedad *mínima.*

3.3. Ecuaciones Fundamentales

Sea $f\colon M \to N$ una inmersión isométrica, donde M y N son variedades semi-Riemannianas. Denotemos R^N el tensor de curvatura sobre N. Entonces para $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(N)$ se tiene que

$$R^N_{XY} Z = D_{[X,Y]} Z - D_X D_Y Z + D_Y D_X Z$$

Observación 3.3.1. Denotemos R^M el tensor de curvatura sobre M. Usando la fórmula de Gauss en el tensor de curvatura de N obtenemos

$$\begin{aligned} R^N_{XY} Z &= \nabla_{[X,Y]} Z + \alpha([X,Y],Z) - D_X(\nabla_Y Z + \alpha(Y,Z)) \\ &\quad + D_Y(\nabla_X Z + \alpha(X,Z)) \\ &= \nabla_{[X,Y]} Z + \alpha([X,Y],Z) - D_X(\nabla_Y Z) - D_X \alpha(Y,Z) \\ &\quad + D_Y(\nabla_X Z) + D_Y \alpha(X,Z) \\ &= \nabla_{[X,Y]} Z + \alpha([X,Y],Z) - \nabla_X \nabla_Y Z - \alpha(X, \nabla_Y Z) - D_X \alpha(Y,Z) \\ &\quad + \nabla_Y \nabla_X Z + \alpha(Y, \nabla_X Z) + D_Y \alpha(X,Z) \\ &= R^M_{XY} Z + \alpha([X,Y],Z) - \alpha(X, \nabla_Y Z) \\ &\quad + \alpha(Y, \nabla_X Z) - D_X \alpha(Y,Z) + D_Y \alpha(X,Z) \end{aligned}$$

Y usando la fórmula de Weingarten para $D_X \alpha(Y,Z)$ y $D_Y \alpha(X,Z)$ tenemos

$$\begin{aligned} R^N_{XY} Z = R^M_{XY} Z &+ \alpha([X,Y],Z) - \alpha(X, \nabla_Y Z) + \alpha(Y, \nabla_X Z) \\ &+ A_{\alpha(Y,Z)} X - \nabla^\perp_X \alpha(Y,Z) - A_{\alpha(X,Z)} Y - \nabla^\perp_Y \alpha(X,Z) \end{aligned}$$

Teorema 3.3.2. *Sea $f\colon M \to N$ una inmersión isométrica. Entonces para campos vectoriales $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M)$ se cumplen las siguientes ecuaciones*

(a) $\langle R^M_{XY} Z, W \rangle = \langle R^N_{XY} Z, W \rangle - \langle \alpha(X,W), \alpha(Y,Z) \rangle + \langle \alpha(X,Z), \alpha(Y,W) \rangle$

(b) $(R^N_{XY} Z)^\perp = (\nabla^\perp_Y \alpha)(X,Z) - (\nabla^\perp_X \alpha)(Y,Z)$

donde

$$\begin{aligned}(\nabla^{\perp}_Y\alpha)(X,Z) &= \nabla^{\perp}_Y\alpha(X,Z) - \alpha(\nabla_Y X,Z) - \alpha(X,\nabla_Y Z)\\ (\nabla^{\perp}_X\alpha)(Y,Z) &= \nabla^{\perp}_X\alpha(Y,Z) - \alpha(\nabla_X Y,Z) - \alpha(Y,\nabla_X Z)\end{aligned}$$

Las ecuaciones (a) y (b) se les conoce como la ecuación de Gauss y la ecuación de Codazzi respectivamente.

Demostración.

(a) Sean $X,Y,Z,W \in \mathfrak{X}(M)$, sabemos que

$$\begin{aligned}\langle\alpha([X,Y],Z),W\rangle = \langle\alpha(X,\nabla_Y Z),W\rangle = \langle\alpha(Y,\nabla_X Z),W\rangle = \cdots\\ \cdots = \langle\nabla^{\perp}_X\alpha(Y,Z),W\rangle = \langle\nabla^{\perp}_Y\alpha(X,Z),W\rangle = 0\end{aligned}$$

Por la Observación 3.3.1 y la Proposición 3.2.7

$$\begin{aligned}\langle R^M_{XY}Z,W\rangle &= \langle R^N_{XY}Z,W\rangle - \langle A_{\alpha(Y,Z)}X,W\rangle + \langle A_{\alpha(X,Z)}Y,W\rangle\\ &= \langle R^N_{XY}Z,W\rangle - \langle\alpha(X,W),\alpha(Y,Z)\rangle + \langle\alpha(Y,W),\alpha(X,Z)\rangle\end{aligned}$$

(b) Por la Observación 3.3.1

$$\begin{aligned}(R^N_{XY}Z)^{\perp} &= \alpha([X,Y],Z) - \alpha(X,\nabla_Y Z) + \alpha(Y,\nabla_X Z)\\ &\quad - \nabla^{\perp}_X\alpha(Y,Z) + \nabla^{\perp}_Y\alpha(X,Z)\\ &= \alpha(\nabla_X Y,Z) - \alpha(\nabla_Y X,Z) - \alpha(X,\nabla_Y Z)\\ &\quad + \alpha(Y,\nabla_X Z) - \nabla^{\perp}_X\alpha(Y,Z) + \nabla^{\perp}_Y\alpha(X,Z)\\ &= \big(\nabla^{\perp}_Y\alpha(X,Z) - \alpha(\nabla_Y X,Z) - \alpha(X,\nabla_Y Z)\big)\\ &\quad - \big(\nabla^{\perp}_X\alpha(Y,Z) - \alpha(\nabla_X Y,Z) - \alpha(Y,\nabla_X Z)\big)\\ &= (\nabla^{\perp}_Y\alpha)(X,Z) - (\nabla^{\perp}_X\alpha)(Y,Z)\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}(\nabla^{\perp}_Y\alpha)(X,Z) &= \nabla^{\perp}_Y\alpha(X,Z) - \alpha(\nabla_Y X,Z) - \alpha(X,\nabla_Y Z)\\ (\nabla^{\perp}_X\alpha)(Y,Z) &= \nabla^{\perp}_X\alpha(Y,Z) - \alpha(\nabla_X Y,Z) - \alpha(Y,\nabla_X Z)\end{aligned}$$

□

Observación 3.3.3. Para $X,Y \in \mathfrak{X}(M)$ y $\xi,\eta \in T^{\perp}M$ se tiene la siguiente igualdad

$$\langle\alpha(X,A_\xi Y),\eta\rangle = \langle A_\xi Y,A_\eta X\rangle = \langle\alpha(Y,A_\eta X),\xi\rangle = \langle Y,A_\xi A_\eta X\rangle$$

Teorema 3.3.4. *Sea $f\colon M \to N$ una inmersión isométrica. Entonces para $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ y $\xi, \eta \in T^{\perp}M$, se tiene la ecuación*

$$\langle R^{\perp}_{XY}\xi, \eta\rangle = \langle R^{N}_{XY}\xi, \eta\rangle + \langle [A_\eta, A_\xi](X), Y\rangle$$

donde

$$R^{\perp}_{XY}\xi = \nabla^{\perp}_{[X,Y]}\xi - \nabla^{\perp}_{X}\nabla^{\perp}_{Y}\xi + \nabla^{\perp}_{Y}\nabla^{\perp}_{X}\xi$$
$$[A_\eta, A_\xi] = A_\eta A_\xi - A_\xi A_\eta$$

Esta ecuación es conocida como la ecuación de Ricci.

Demostración. Sea $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ y $\xi, \eta \in T^{\perp}M$. Usando la Observación 3.3.1, 3.3.3 y las fórmulas de Gauss y Codazzi tenemos que

$$\begin{aligned}
\langle R^{N}_{XY}\xi, \eta\rangle &= \langle D_{[X,Y]}\xi, \eta\rangle - \langle D_X D_Y\xi, \eta\rangle + \langle D_Y D_X\xi, \eta\rangle \\
&= -\langle A_\xi[X,Y], \eta\rangle + \langle \nabla^{\perp}_{[X,Y]}\xi, \eta\rangle + \langle D_X(A_\xi Y), \eta\rangle \\
&\quad - \langle D_X(\nabla^{\perp}_{Y}\xi), \eta\rangle - \langle D_Y(A_\xi X), \eta\rangle + \langle D_Y(\nabla^{\perp}_{X}\xi), \eta\rangle \\
&= \langle \nabla^{\perp}_{[X,Y]}\xi, \eta\rangle + \langle A_{(\nabla^{\perp}_{Y}\xi)}X, \eta\rangle - \langle \nabla^{\perp}_{X}\nabla^{\perp}_{Y}\xi, \eta\rangle \\
&\quad - \langle A_{(\nabla^{\perp}_{X}\xi)}Y, \eta\rangle + \langle \nabla^{\perp}_{Y}\nabla^{\perp}_{X}\xi, \eta\rangle + \langle \nabla_X(A_\xi Y), \eta\rangle \\
&\quad + \langle \alpha(X, A_\xi Y), \eta\rangle - \langle \nabla_Y(A_\xi X), \eta\rangle - \langle \alpha(Y, A_\xi X), \eta\rangle \\
&= \langle R^{\perp}_{XY}\xi, \eta\rangle - \langle Y, A_\eta A_\xi X\rangle + \langle Y, A_\xi A_\eta X\rangle \\
&= \langle R^{\perp}_{XY}\xi, \eta\rangle - \langle Y, A_\eta A_\xi X - A_\xi A_\eta X\rangle \\
&= \langle R^{\perp}_{XY}\xi, \eta\rangle - \langle [A_\eta, A_\xi](X), Y\rangle
\end{aligned}$$

teniendo así el resultado deseado. □

3.4. Campos cerrados conformes

Definición 3.4.1. Sea N una variedad semi-Riemanniana. Un campo vectorial $Z \in \mathfrak{X}(N)$ es *cerrado conforme* si y sólo si existe $\varphi \in C^{\infty}(N)$ tal que para todo $Y \in \mathfrak{X}(N)$ se tiene que $D_Y Z = \varphi \cdot Y$.

Proposición 3.4.2. *Sea M una variedad semi-Riemanniana. Supongamos que para todo $p \in M$ y para todo $v \in T_pM$ existe un campo vectorial cerrado conforme Z tal que $Z(p) = v$. Entonces M tiene curvatura seccional constante.*

Demostración. Sea $p \in M$ y $\Gamma \subseteq T_pM$ un plano no degenerado cuya base ortonormal esta dada por $\{v, w\}$, entonces

$$K(\Gamma) = \frac{\langle R_{vw}v, w\rangle}{Q(v, w)}$$

Por hipótesis existen campos cerrados conformes $V, W \in \mathfrak{X}(M)$ tales que $V(p) = v$ y $W(p) = w$, entonces existen funciones $\phi, \varphi \in C^{\infty}(M)$ que satisfacen $\nabla_X V = \phi \cdot X$ y $\nabla_X W = \varphi \cdot X$ para todo campo vectorial X en $\mathfrak{X}(M)$. Calculamos $R_{VW}V$:

$$\begin{aligned}
R_{VW}V &= \nabla_{[V,W]}V - [\nabla_V, \nabla_W]V \\
&= \phi \cdot [V, W] - \nabla_V \nabla_W V + \nabla_W \nabla_V V \\
&= \phi \cdot [V, W] - \nabla_V(\phi \cdot W) + \nabla_W(\phi \cdot V) \\
&= \phi \cdot [V, W] - V\phi \cdot W - \phi \cdot \nabla_V W + W\phi \cdot V + \phi \cdot \nabla_W V \\
&= \phi \cdot [V, W] - V\phi \cdot W - \phi \cdot \varphi \cdot V + W\phi \cdot V + \phi^2 \cdot W \\
&= \phi \cdot \nabla_V W - \phi \cdot \nabla_W V - V\phi \cdot W - \phi \cdot \varphi \cdot V + W\phi \cdot V + \phi^2 \cdot W \\
&= \phi \cdot \varphi \cdot V - \phi^2 \cdot W - V\phi \cdot W - \phi \cdot \varphi \cdot V + W\phi \cdot V + \phi^2 \cdot W \\
&= -V\phi \cdot W + W\phi \cdot V
\end{aligned}$$

Entonces, puntualmente tenemos

$$\langle R_{vw}v, w \rangle = -v(\phi)\langle w, w \rangle + w(\phi)\langle v, w \rangle = \pm v(\phi) = V\phi(p)$$

Como V y ϕ dependen del vector v, y además como $K(\Gamma)$ es independiente de la base, entonces la función $V\phi := \lambda \in C^{\infty}(M)$ sólo depende del punto $p \in M$. Por lo tanto, por el Teorema 2.2.17, se tiene que M es de curvatura seccional constante.

$\square$

Proposición 3.4.3. *Sea M^m una hipersuperficie no-degenerada en una variedad semi-Riemanniana N con un campo normal unitario ξ, tal que M tiene curvatura media constante y N tiene curvatura seccional constante. Entonces para cada campo cerrado conforme Z en $\mathfrak{X}(N)$ se tiene que*

$$\triangle\langle Z, \xi \rangle + \langle \alpha, \alpha \rangle \cdot \langle Z, \xi \rangle + m \cdot \varphi \cdot \langle H, \xi \rangle = 0$$

donde:

- *$\varphi \colon N \to \mathbb{R}$ es tal que $D_X Z = \varphi \cdot X$ para todo campo X en $\mathfrak{X}(M)$*
- *H es el vector de curvatura media de M*
- *Si $\{X_1, \ldots, X_m\}$ es una base ortonormal de M entonces*

$$\langle \alpha, \alpha \rangle := \langle \xi, \xi \rangle \cdot \sum_{i,k} \epsilon_i \cdot \epsilon_k \cdot \langle \alpha(X_i, X_k), \xi \rangle^2$$

Demostración. Sea $p \in M$. Supongamos que $e_1, \dots, e_n$ es un marco local ortonormal de T_pM tal que $\nabla_{e_i} e_j|_p = 0$ para todo $1 \leq i, j \leq n$. Entonces se cumplen las siguientes afirmaciones (es importante hacer notar que todo lo desarrollado se hace sobre el punto $p \in M$):

(a) $\langle D_{e_i} e_j, e_i \rangle = 0$

Aplicando la fórmula de Gauss se tiene

$$\langle D_{e_i} e_j, e_i \rangle = \langle \nabla_{e_i} e_j, e_i \rangle + \langle \alpha(e_i, e_j), e_i \rangle = 0$$

(b) $\sum_i \epsilon_i \cdot \langle \xi, \alpha(e_i, e_i) \rangle = m \cdot \langle H, \xi \rangle$

La afirmación se da ya que

$$\sum_i \epsilon_i \cdot \langle \xi, \alpha(e_i, e_i) \rangle = \langle \xi, \sum_i \epsilon_i \cdot \alpha(e_i, e_i) \rangle = \langle \xi, m \cdot H \rangle = m \cdot \langle H, \xi \rangle$$

(c) $\langle D_{e_i} D_{e_j} Z, \xi \rangle = \langle D_{e_j} D_{e_i} Z, \xi \rangle$

Como N tiene curvatura seccional constante, para cualesquiera X, Y campos vectoriales en $\mathfrak{X}(N)$ tenemos

$$R^N_{XY} Z = c \cdot [\ \langle Z, X \rangle \cdot Y - \langle Z, Y \rangle \cdot X\ ]$$

y por otro lado, por la definición del tensor de curvatura

$$R^N_{XY} Z = D_{[X,Y]} Z - D_X D_Y Z + D_Y D_X Z$$

haciendo el producto de $R^N_{XY} Z$ con ξ se obtiene

$$c \cdot [\ \langle Z, X \rangle \cdot \langle Y, \xi \rangle - \langle Z, Y \rangle \cdot \langle X, \xi \rangle\ ] = 0$$

por lo tanto

$$\langle D_{[X,Y]} Z, \xi \rangle - \langle D_X D_Y Z, \xi \rangle + \langle D_Y D_X Z, \xi \rangle = 0$$

Sustituyamos $X = e_i$ e $Y = e_j$. Como $[e_i, e_j] = \nabla_{e_i} e_j - \nabla_{e_j} e_i = 0$ entonces $D_{[e_i, e_j]} Z = 0$, y así de la igualdad previa obtenida se tiene que

$$\langle D_{e_i} D_{e_j} Z, \xi \rangle = \langle D_{e_j} D_{e_i} Z, \xi \rangle$$

(d) $\nabla_{e_i} A_\xi e_i = \sum_k \epsilon_k \cdot \langle \xi, \nabla^{\perp}_{e_k} \alpha(e_i, e_i) \rangle \cdot e_k$

Notemos que

$$\begin{aligned}
\nabla_{e_i} A_\xi e_i &= \nabla_{e_i} \left(\sum_k \epsilon_k \cdot \langle A_\xi e_i, e_k \rangle \cdot e_k \right) \\
&= \sum_k \epsilon_k \cdot \nabla_{e_i} \left(\langle A_\xi e_i, e_k \rangle \cdot e_k \right) \\
&= \sum_k \epsilon_k \cdot \nabla_{e_i} \left(\langle \xi, \alpha(e_i, e_k) \rangle \cdot e_k \right) \\
&= \sum_k \epsilon_k \cdot [\ e_i \langle \xi, \alpha(e_i, e_k) \rangle \cdot e_k + \langle \xi, \alpha(e_i, e_k) \rangle \cdot \nabla_{e_i} e_k\ ] \\
&= \sum_k \epsilon_k \cdot e_i \langle \xi, \alpha(e_i, e_k) \rangle \cdot e_k \\
&= \sum_k \epsilon_k \cdot [\ \langle D_{e_i} \xi, \alpha(e_i, e_k) \rangle + \langle \xi, D_{e_i} \alpha(e_i, e_k) \rangle\ ] \cdot e_k \\
&= \sum_k \epsilon_k \cdot [\ -\langle A_\xi e_i, \alpha(e_i, e_k) \rangle + \langle \xi, D_{e_i} \alpha(e_i, e_k) \rangle\ ] \cdot e_k \\
&= \sum_k \epsilon_k \cdot \langle \xi, D_{e_i} \alpha(e_i, e_k) \rangle \cdot e_k \\
&= \sum_k \epsilon_k \cdot \langle \xi, D_{e_i} D_{e_k} e_i \rangle \cdot e_k \\
&= \sum_k \epsilon_k \cdot \langle \xi, D_{e_k} D_{e_i} e_i \rangle \cdot e_k \quad \textit{por (c)} \\
&= \sum_k \epsilon_k \cdot \langle \xi, D_{e_k} \alpha(e_i, e_i) \rangle \cdot e_k \\
&= \sum_k \epsilon_k \cdot [\ -\langle \xi, A_{\alpha(e_i, e_i)} e_k \rangle + \langle \xi, \nabla^{\perp}_{e_k} \alpha(e_i, e_i) \rangle\ ] \cdot e_k \\
&= \sum_k \epsilon_k \cdot \langle \xi, \nabla^{\perp}_{e_k} \alpha(e_i, e_i) \rangle \cdot e_k
\end{aligned}$$

(e) $\sum_i \epsilon_i \cdot \langle Z, \nabla_{e_i} A_\xi e_i \rangle = 0$

Por inciso *(d)*, tenemos que

$$\begin{aligned}
\sum_i \epsilon_i \cdot \langle Z, \nabla_{e_i} A_\xi e_i \rangle &= \sum_i \epsilon_i \cdot \langle\ Z, \left(\sum_k \epsilon_k \cdot \langle \xi, \nabla^{\perp}_{e_k} \alpha(e_i, e_i) \rangle \cdot e_k \right)\ \rangle \\
&= \sum_{i,k} \epsilon_i \cdot \epsilon_k \cdot \langle \xi, \nabla^{\perp}_{e_k} \alpha(e_i, e_i) \rangle \cdot \langle Z, e_k \rangle \\
&= \sum_k \epsilon_k \cdot \langle Z, e_k \rangle \cdot \langle\ \xi, \nabla^{\perp}_{e_k} \left(\sum_i \epsilon_i \cdot \alpha(e_i, e_i) \right)\ \rangle \\
&= \sum_k \epsilon_k \cdot \langle Z, e_k \rangle \cdot \langle\ \xi, \nabla^{\perp}_{e_k} (m \cdot H)\ \rangle \\
&= m \cdot \sum_k \epsilon_k \cdot \langle Z, e_k \rangle \cdot \langle\ \xi, \nabla^{\perp}_{e_k} H\ \rangle \\
&= 0 \quad \textit{ya que } M \textit{ tiene curvatura media constante}
\end{aligned}$$

(f) $\displaystyle\sum_i \epsilon_i \cdot \langle Z, \alpha(e_i, A_\xi e_i) \rangle = \langle \alpha, \alpha \rangle \cdot \langle Z, \xi \rangle$

Primero notemos que $A_\xi e_i = \displaystyle\sum_k \epsilon_k \cdot \langle A_\xi e_i, e_k \rangle \cdot e_k$ entonces

$$\begin{aligned}
\alpha(e_i, A_\xi e_i) &= \sum_k \epsilon_k \cdot \langle A_\xi e_i, e_k \rangle \cdot \alpha(e_i, e_k) \\
&= \sum_k \epsilon_k \cdot \langle \alpha(e_i, e_k), \xi \rangle \cdot \alpha(e_i, e_k)
\end{aligned}$$

y así tenemos que

$$\begin{aligned}
\sum_i \epsilon_i \cdot \langle Z, \alpha(e_i, A_\xi e_i) \rangle &= \sum_i \epsilon_i \cdot \langle Z, \left(\sum_k \epsilon_k \cdot \langle \alpha(e_i, e_k), \xi \rangle \cdot \alpha(e_i, e_k) \right) \rangle \\
&= \sum_{i,k} \epsilon_i \cdot \epsilon_k \cdot \langle \alpha(e_i, e_k), \xi \rangle \cdot \langle Z, \alpha(e_i, e_k) \rangle
\end{aligned}$$

y como

$$\alpha(e_i, e_k) = \langle \xi, \xi \rangle \cdot \langle \alpha(e_i, e_k), \xi \rangle \cdot \xi$$

entonces se tiene

$$\sum_i \epsilon_i \cdot \langle Z, \alpha(e_i, A_\xi e_i) \rangle = \langle \xi, \xi \rangle \cdot \left(\sum_{i,k} \epsilon_i \cdot \epsilon_k \cdot \langle \alpha(e_i, e_k), \xi \rangle^2 \right) \cdot \langle Z, \xi \rangle$$

Calculemos ahora el Laplaciano de $\langle Z, \xi \rangle$

$$
\begin{aligned}
\triangle\langle Z, \xi\rangle &= \operatorname{div}[\operatorname{grad}\langle Z, \xi\rangle] \\
&= \sum_i \epsilon_i \cdot \langle D_{e_i}(\operatorname{grad}\langle Z, \xi\rangle), e_i\rangle \\
&= \sum_i \epsilon_i \cdot \langle D_{e_i}\left(\sum_j \epsilon_j \cdot \langle \operatorname{grad}\langle Z, \xi\rangle, e_j\rangle \cdot e_j\right), e_i\rangle \\
&= \sum_i \epsilon_i \cdot \langle D_{e_i}\left(\sum_j \epsilon_j \cdot e_j\langle Z, \xi\rangle \cdot e_j\right), e_i\rangle \\
&= \sum_{i,j} \epsilon_i \cdot \epsilon_j \cdot \langle D_{e_i}\left(e_j\langle Z, \xi\rangle \cdot e_j\right), e_i\rangle \\
&= \sum_{i,j} \epsilon_i \cdot \epsilon_j \cdot \langle\ e_i(e_j\langle Z, \xi\rangle) \cdot e_j + e_j\langle Z, \xi\rangle \cdot D_{e_i} e_j, e_i\ \rangle \\
&= \sum_{i,j} \epsilon_i \cdot \epsilon_j \cdot [\ e_i(e_j\langle Z, \xi\rangle) \cdot \langle e_j, e_i\rangle + e_j\langle Z, \xi\rangle \cdot \langle D_{e_i} e_j, e_i\rangle\ ] \\
&= \sum_{i,j} \epsilon_i \cdot \epsilon_j \cdot e_i(e_j\langle Z, \xi\rangle) \cdot \langle e_j, e_i\rangle \quad \textit{por (a)} \\
&= \sum_i \epsilon_i^2 \cdot e_i(e_i\langle Z, \xi\rangle) \cdot \langle e_i, e_i\rangle = \sum_i \epsilon_i \cdot e_i(e_i\langle Z, \xi\rangle) \\
&= \sum_i \epsilon_i \cdot e_i(\ \langle D_{e_i} Z, \xi\rangle + \langle Z, D_{e_i}\xi\rangle\ ) \\
&= \sum_i \epsilon_i \cdot e_i(\ \varphi \cdot \langle e_i, \xi\rangle - \langle Z, A_\xi e_i\rangle\ ) \\
&= -\sum_i \epsilon_i \cdot e_i\langle Z, A_\xi e_i\rangle \\
&= -\sum_i \epsilon_i \cdot [\ \langle D_{e_i} Z, A_\xi e_i\rangle + \langle Z, D_{e_i} A_\xi e_i\rangle\ ] \\
&= -\sum_i \epsilon_i \cdot [\ \varphi \cdot \langle e_i, A_\xi e_i\rangle + \langle Z, \nabla_{e_i} A_\xi e_i\rangle + \langle Z, \alpha(e_i, A_\xi e_i)\rangle\ ] \\
&= -\sum_i \epsilon_i \cdot [\ \varphi \cdot \langle \xi, \alpha(e_i, e_i)\rangle + \langle Z, \nabla_{e_i} A_\xi e_i\rangle + \langle Z, \alpha(e_i, A_\xi e_i)\rangle\ ] \\
&= -m \cdot \varphi \cdot \langle H, \xi\rangle - \langle \alpha, \alpha\rangle \cdot \langle Z, \xi\rangle \quad \textit{por (b), (e) y (f)}
\end{aligned}
$$

□

Proposición 3.4.4. *(Ejemplo de un producto alabeado con un campo cerrado conforme) Sea* $\mathbb{R}^1_\nu$, *con* $\nu = 0, 1$ *y* N *una variedad semi-Riemanniana.*

Considere el producto alabeado $P = \mathbb{R}^1_\nu \times_f N$, donde $f \in C^\infty(\mathbb{R})$. Si $\bar{Z}$ es el levantamiento de $Z = f \cdot \partial_t \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^1_\nu)$, entonces $\bar{Z}$ es un campo cerrado conforme de P. Más aún , se tiene que $\bar{D}_X\bar{Z} = f' \cdot X$, para todo X en $\mathfrak{X}(P)$.

Demostración. Sea X cualquier campo vectorial de $P = \mathbb{R}^1_\nu \times_f N$. Por Definición 2.3.10, podemos descomponer X como $X = X_\mathbb{R} + X_N$, donde $X_\mathbb{R} := x \cdot \partial_t$ está en $\mathcal{L}(\mathbb{R}^1_\nu)$ y X_N está en $\mathcal{L}(N)$. Apoyándonos en Proposición 2.3.12, obtengamos $\bar{D}_X\bar{Z}$

$$
\begin{aligned}
\bar{D}_X\bar{Z} &= \bar{D}_{X_\mathbb{R}}(f \cdot \partial_t) + \bar{D}_{X_N}(f \cdot \partial_t) \\
&= D_{x \cdot \partial_t}(f \cdot \partial_t) + \bar{D}_{X_N}(f \cdot \partial_t) \\
&= x \cdot D_{\partial_t}(f \cdot \partial_t) + \bar{D}_{X_N}(f \cdot \partial_t) \\
&= x \cdot f' \cdot \partial_t + x \cdot f \cdot D_{\partial_t}\partial_t + \bar{D}_{X_N}(f \cdot \partial_t) \\
&= x \cdot f' \cdot \partial_t + \bar{D}_{X_N}(f \cdot \partial_t) \\
&= f' \cdot x \cdot \partial_t + \frac{f \cdot \partial_t f}{f} \cdot X_N \\
&= f' \cdot x \cdot \partial_t + f' \cdot X_N \\
&= f' \cdot [x \cdot \partial_t + X_N] \\
&= f' \cdot [X_\mathbb{R} + X_N] \\
&= f' \cdot X
\end{aligned}
$$

□

3.5. Espacio de De Sitter y Anti De Sitter

Definamos, para $\epsilon = \pm 1$, las siguientes subvariedades de $\mathbb{R}^{n+1}_{\frac{3-\epsilon}{2}}$

$$M^n_1(\epsilon, r) = \left\{ p \in \mathbb{R}^{n+1}_{\frac{3-\epsilon}{2}} \colon \langle p, p \rangle = \epsilon r^2 \right\}$$

Por la Proposición 4.17 de [8] y el argumento que se da al principio de la sección 4. Hipercuadricas de la misma referencia [8], se tienen que $M(\epsilon, r)$ son hipersuperficies, que de hecho en el texto se les conocen como una hipercuadricas de $\mathbb{R}^{n+1}_{\frac{3-\epsilon}{2}}$.

Analicemos entonces dichas hipersuperficies. Si $p \in M^n_1(\epsilon, r)$, entonces $p \in (T_p M^n_1(\epsilon, r))^\perp$ el cual además, por definición, $\langle p, p \rangle = \epsilon r^2$. Obtenemos de este punto, un vector unitario normal definido como $\xi(p) := \dfrac{p}{|p|} = \dfrac{p}{\sqrt{|\epsilon r^2|}} = \dfrac{p}{r}$.

Como $M_1^n(\epsilon, r)$ es una hipersuperficie, entonces

$$\begin{aligned}(T_pM_1^n(\epsilon, r))^\perp &= \{\lambda\xi\colon \lambda \text{ es un número real y } \xi \text{ es un vector normal unitario}\}\\ &= \left\{\lambda\frac{p}{r}\colon \lambda \text{ es un número real}\right\}\end{aligned}$$

De hecho, para cualquier vector normal $\eta \in (T_pM_1^n(\epsilon, r))^\perp$, entonces

$$\begin{aligned}\eta &= \langle\xi(p), \xi(p)\rangle\langle\eta, \xi(p)\rangle\xi(p)\\ &= \langle p/r, p/r\rangle\langle\eta, \xi(p)\rangle\xi(p)\\ &= \frac{1}{r^2}\langle p, p\rangle\langle\eta, \xi(p)\rangle\xi(p)\\ &= \frac{\epsilon r^2}{r^2}\langle\eta, \xi(p)\rangle\xi(p)\\ &= \epsilon\langle\eta, \xi(p)\rangle\xi(p)\end{aligned}$$

Podemos obtener el operador de forma de manera puntual. Sea $v \in T_pM_1^n(\epsilon, r)$ entonces

$$A_{\xi(p)}(v) = -D_v\xi(p) = -D_v\frac{p}{r} = -\frac{1}{r}D_vp = -\frac{1}{r}v$$

Por otro lado, notemos que

$$\langle\xi(p), \xi(p)\rangle = \frac{1}{r^2}\langle p, p\rangle = \frac{1}{r^2}\epsilon r^2 = \epsilon$$

así, ya calculado el operador de forma y con la anterior igualdad, se tiene que la segunda forma fundamental en el punto p está dada de la siguiente manera: Dados $x, y \in T_pM_1^n(\epsilon, r)$ tenemos

$$\begin{aligned}\alpha(x, y) &= \langle\xi(p), \xi(p)\rangle\langle\alpha(x, y), \xi(p)\rangle\xi(p)\\ &= \epsilon\langle\alpha(x, y), \xi(p)\rangle\xi(p)\\ &= \epsilon\langle A_{\xi(p)}x, y\rangle\xi(p)\\ &= \epsilon\langle -\frac{1}{r}x, y\rangle\frac{p}{r}\\ &= -\frac{\epsilon}{r^2}\langle x, y\rangle p\end{aligned}$$

Ahora, proseguimos a calcular el vector de curvatura media en el punto p. Tomemos un marco ortonormal $\{x_1, \ldots, x_n\}$ de $T_pM_1^n(\epsilon, r)$ donde además

$\epsilon_k = \langle x_k, x_k \rangle = \pm 1$. Se tiene entonces

$$\begin{aligned} H(p) &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \epsilon_j \alpha(x_j, x_j) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} -\frac{\epsilon \epsilon_j}{r^2} \langle x_j, x_j \rangle p \\ &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} -\frac{\epsilon \epsilon_j^2}{r^2} p \\ &= -\frac{\epsilon}{r^2 n} np = -\frac{\epsilon}{r^2} p \end{aligned}$$

Ya que $H(p) = -\frac{\epsilon}{r^2} p$, se tiene que $M_1^n(\epsilon, r)$ es una hipersuperficie totalmente umbílica. Se tiene también que la norma del vector de curvatura media es

$$|H(p)| = \frac{|\epsilon|}{r^2} \sqrt{|\epsilon r^2|} = \frac{1}{r}$$

Finalmente calculamos el tensor de curvatura y la curvatura seccional. Para eso, tomemos $x, y, z, w \in T_p M_1^n(\epsilon, r)$, se tiene entonces

$$\begin{aligned} \langle R_{xy} z, w \rangle &= \langle \alpha(x, z), \alpha(y, w) \rangle - \langle \alpha(x, w), \alpha(y, z) \rangle \\ &= \frac{\epsilon^2}{r^4} \langle x, z \rangle \langle y, w \rangle \langle p, p \rangle - \frac{\epsilon^2}{r^4} \langle x, w \rangle \langle y, z \rangle \langle p, p \rangle \\ &= \frac{\epsilon r^2}{r^4} \langle x, z \rangle \langle y, w \rangle - \frac{\epsilon r^2}{r^4} \langle x, w \rangle \langle y, z \rangle \\ &= \frac{\epsilon}{r^2} \left\langle \langle x, z \rangle y - \langle y, z \rangle x, w \right\rangle \end{aligned}$$

entonces tenemos que el tensor de curvatura es de la forma

$$R_{xy} z = -\frac{\epsilon}{r^2} \left[\langle y, z \rangle x - \langle x, z \rangle y \right] = -\frac{\epsilon}{r^2} (x \wedge y) z$$

y la curvatura seccional es de la forma

$$K(x, y) = \frac{\langle R_{xy} x, y \rangle}{Q(x, y)} = \frac{\epsilon}{r^2} \cdot \frac{\langle \langle x, x \rangle y - \langle y, x \rangle x, y \rangle}{\langle x, x \rangle \langle y, y \rangle - \langle x, y \rangle^2} = \frac{\epsilon}{r^2}$$

Una breve aplicación de la Definición 3.4.1 y la Proposición 3.4.2 para obtener el mismo resultado previo será la siguiente:

Sea $p \in M_1^n(\epsilon, r)$, $v \in T_p M_1^n(\epsilon, r)$ y el campo vectorial constante

$$X\colon \mathbb{R}^{n+1}_{\frac{3-\epsilon}{2}} \to T\mathbb{R}^{n+1}_{\frac{3-\epsilon}{2}} \text{ tal que } X(p) = v$$

Definamos ahora el campo vectorial

$$Z\colon \mathbb{R}^{n+1}_{\frac{3-\epsilon}{2}} \to T\mathbb{R}^{n+1}_{\frac{3-\epsilon}{2}} \text{ dado por } Z = X - \epsilon\langle X, \xi\rangle\xi$$

Para todo $q \in M_1^n(\epsilon, r)$, recordemos que $\xi(q) = \frac{q}{r}$, entonces

$$\begin{aligned} Z(q) &= X(q) - \epsilon\langle X(q), \xi(q)\rangle\xi(q) \\ &= X(q) - \epsilon\langle X(q), q/r\rangle q/r \\ &= X(q) - \frac{\epsilon}{r^2}\langle X(q), q\rangle q \end{aligned}$$

lo cual implica que

$$\begin{aligned} \langle Z(q), \xi(q)\rangle &= \frac{1}{r}\langle Z(q), q\rangle \\ &= \frac{1}{r}\langle X(q), q\rangle - \frac{\epsilon}{r^3}\langle X(q), q\rangle\langle q, q\rangle \\ &= \frac{1}{r}\langle X(q), q\rangle - \frac{\epsilon}{r^3}\epsilon r^2\langle X(q), q\rangle \\ &= \frac{1}{r}\langle X(q), q\rangle - \frac{\epsilon^2 r^2}{r^3}\langle X(q), q\rangle \\ &= \frac{1}{r}\langle X(q), q\rangle - \frac{1}{r}\langle X(q), q\rangle = 0 \end{aligned}$$

Esto nos dice que $Z(q) \in T_p M_1^n(\epsilon, r)$ para todo $q \in M_1^n(\epsilon, r)$. Si $Y \in TM_1^n(\epsilon, r)$, como X es un campo vectorial constante, se tiene entonces

$$\begin{aligned} \nabla_Y Z &= (D_Y Z)^T \\ &= (D_Y X - \epsilon D_Y\langle X, \xi\rangle\xi)^T \\ &= (-\epsilon D_Y\langle X, \xi\rangle\xi)^T \\ &= (-\epsilon Y\langle X, \xi\rangle\xi - \epsilon\langle X, \xi\rangle D_Y\xi)^T \\ &= \epsilon\langle X, \xi\rangle A_\xi Y \\ &= \epsilon\langle X, \xi\rangle(-1/r)Y \\ &= -\frac{\epsilon}{r}\langle X, \xi\rangle Y \end{aligned}$$

Por lo cual $\nabla_Y Z = \varphi Y$ donde $\varphi = -\dfrac{\epsilon}{r}\langle X, \xi\rangle$, siendo así Z, por Definición 3.4.1, un campo cerrado conforme. Por otro lado, si evaluamos Z en p se obtiene

$$\begin{aligned} Z(p) &= X(p) - \epsilon\langle X(p), \xi(p)\rangle \xi(p) \\ &= x(p) - \epsilon\langle v, p/r\rangle p/r \\ &= v - \frac{\epsilon}{r^2}\langle v, p\rangle = v \end{aligned}$$

cumpliendo así la condición inicial de que $Z(p) = v$. Por la Proposición 3.4.2, nos dice entonces que $M_1^n(\epsilon, r)$ tiene curvatura seccional constante, que con respecto a nuestros cálculos previamente obtenidos, está dada por $\dfrac{\epsilon}{r^2}$.

Capítulo 4

Dirección Principal Canónica

Una vez abordado todos los preliminares de los capítulos anteriores, daremos paso al estudio de las Hipersuperficies con Dirección Principal Canónica, objetivo central de ésta tesis.

Una dirección principal canónica relativa a un campo vectorial es una dirección principal obtenida por la proyección tangente de dicho campo sobre la hipersuperficie.

Analizaremos tres tipos particulares de hipersuperficies las cuales cumplen ciertas propiedades específicas. Los casos a estudiar son los siguientes:

- M es una hipersuperficie no degenerada, en un ambiente semi Riemanniano N el cual admite un campo vectorial paralelo.
- M es una hipersuperficie no degenerada, en un ambiente semi Riemanniano N el cual admite un campo cerrado conforme. Note que éste caso es muy parecido al anterior pero menos restrictivo ya que en el mencionado anteriormente, el campo admitido es paralelo.
- M es una hipersuperficie tipo espacio, en un ambiente Lorentziano el cual admite un campo cerrado conforme tipo tiempo. Encontrado en el Teorema 2.8 del artículo [10] como ya habíamos mencionado anteriormente. Cabe mencionar que el caso anterior es una generalización de éste.

Obtendremos una caracterización para que dichas hipersuperficies tengan una dirección principal canónica, además, examinaremos en que situaciones son totalmente geodésicas.

4.1. Subvariedades Semi-Riemannianas con Ángulo Constante

Definición 4.1.1. Sea M una subvariedad no degenerada equipada con la métrica inducida de una variedad semi-Riemanniana N, donde N admite un campo vectorial paralelo. Se dice que M es de ángulo constante si para el campo vectorial Z paralelo en N se tiene que $\left\langle Z^T, Z^T \right\rangle = \lambda$ es constante, donde $Z = Z^T + Z^\perp$.

Observación 4.1.2. Sea $X \in \mathfrak{X}(M)$, como Z es un campo paralelo, entonces $X\langle Z, Z\rangle = 2\langle D_X Z, Z\rangle = 0$, es decir, $\langle Z, Z\rangle$ es constante y ya que

$$\langle Z, Z\rangle = \lambda + \langle Z^\perp, Z^\perp\rangle$$

entonces $\mu\colon = \langle Z^\perp, Z^\perp\rangle$ es constante. Si suponemos que $\lambda, \mu \neq 0$ y además

$$T = \frac{Z^T}{|\langle Z^T, Z^T\rangle|^{1/2}} \qquad \xi = \frac{Z^\perp}{|\langle Z^\perp, Z^\perp\rangle|^{1/2}}$$

se tiene que Z se descompone de la siguiente manera

$$Z = |\lambda|^{1/2} \cdot T + |\mu|^{1/2} \cdot \xi$$

Observación 4.1.3. En las siguientes afirmaciones consideraremos a M como una subvariedad no-degenerada de ángulo constante de la variedad semi-Riemmaniana N que admite un campo vectorial paralelo Z y cuya descomposición esta dada por $Z = |\lambda|^{1/2} \cdot T + |\mu|^{1/2} \cdot \xi$, ya descrita en la Observación 4.1.2.

Proposición 4.1.4. *Tomemos M, N y Z como en Observación 4.1.3. Sea W en $\mathfrak{X}(M)$ y denotemos $\rho = |\lambda/\mu|^{1/2}$ (note que $\mu \neq 0$). Entonces*

1. $A_\xi T = 0$ *(es decir, T es dirección principal de A_ξ)*
2. $A_\xi W = \rho \cdot \nabla_W T$
3. $\rho \cdot \alpha(T, W) = -\nabla^\perp_W \xi$
4. $\rho \cdot \alpha(T, T) = -\nabla^\perp_T \xi$
5. $\nabla_T T = 0$ *(es decir, T es un campo geodésico)*
6. $\langle \alpha(W, T), \xi\rangle = 0$

Demostración. Sea $X \in \mathfrak{X}(M)$, ya que $D_X Z = 0$, entonces

$$\begin{aligned} 0 &= |\lambda|^{1/2} D_X T + |\mu|^{1/2} D_X \xi \\ &= |\lambda|^{1/2}(\nabla_X T + \alpha(X,T)) + |\mu|^{1/2}(-A_\xi X + \nabla^{\perp}_X \xi) \end{aligned}$$

obteniendo así las siguientes dos ecuaciones

$$\begin{cases} 0 &= \quad |\lambda|^{1/2}\nabla_X T - |\mu|^{1/2} A_\xi X \\ 0 &= |\lambda|^{1/2}\alpha(X,T) + |\mu|^{1/2}\nabla^{\perp}_X \xi \end{cases}$$

Los puntos *2* y *3* se obtienen directamente de las dos ecuaciones anteriores y para obtener *4* se sustituye $W = T$ en *3*. Ahora supongamos que $X = T$ en la primera ecuación obtenida anteriormente, entonces

$$0 = |\lambda|^{1/2}\nabla_T T - |\mu|^{1/2} A_\xi T$$

Sea W en $\mathfrak{X}(M)$, tenemos que

$$\begin{aligned} \langle \nabla_T T, W \rangle &= |\mu/\lambda|^{1/2} \langle A_\xi T, W \rangle \\ &= |\mu/\lambda|^{1/2} \langle \xi, \alpha(T,W) \rangle \\ &= |\mu/\lambda|^{1/2} \langle \xi, -|\mu/\lambda|^{1/2} \nabla^{\perp}_W \xi \rangle \\ &= -|\mu/\lambda| \ \langle \xi, \nabla^{\perp}_W \xi \rangle \\ &= -(1/2)|\mu/\lambda| \ W\langle \xi, \xi \rangle = 0 \end{aligned}$$

así, $\nabla_T T = 0$, implicando esto también que $A_\xi T = 0$. Esto demuestra *1* y *5*. Notemos que, por *1*, $\langle \alpha(W,T), \xi \rangle = \langle A_\xi T, X \rangle = 0$ obteniendo así el punto *6*. □

Corolario 4.1.5. Sea M, N y Z como en Observación 4.1.3. Supongamos que M es una hipersuperficie. Entonces para todo campo vectorial W en $\mathfrak{X}(M)$ se tiene que:

(a) $\alpha(W,T) = 0$

(b) $\nabla^{\perp}_W \xi = 0$

(c) T es un campo geodésico sobre el ambiente N

Demostración.

(a) Por la Proposición 4.1.4, inciso *6.*, se tiene que $\langle \alpha(W,T), \xi \rangle = 0$ y ya que M es hipersuperficie, entonces ξ genera $T^{\perp}M$, y por lo tanto $\alpha(W,T) = 0$.

(b) Usando inciso (a) sabemos que $\alpha(W,T)=0$ para todo campo vectorial W en $\mathfrak{X}(M)$ y por Proposición 4.1.4 inciso *3.*, se tiene entonces que

$$\nabla^{\perp}_{W}\xi = -\rho\cdot\alpha(T,W)=0$$

(c) Por inciso (a), sabemos que $\alpha(W,T)=0$ para todo campo vectorial W en $\mathfrak{X}(M)$, y en particular se tiene $\alpha(T,T)=0$. La Proposición 4.1.4 inciso *5.*, nos dice que $\nabla_T T=0$. Aplicando entonces la fórmula de Gauss a $D_T T$ se tiene

$$D_T T = \nabla_T T + \alpha(T,T) = 0$$

$\square$

Proposición 4.1.6. *Sea M, N y Z como en Observación 4.1.3. Supongamos que M es una hipersuperficie y que $\lambda=0$. Entonces M es ortogonal al campo vectorial paralelo Z y además es totalmente geodésica.*

Demostración. Como $\lambda=0$, Z se puede ver como $Z=|\mu|^{1/2}\cdot\xi$, entonces para todo W en $\mathfrak{X}(M)$, se tiene que $\langle W,Z\rangle = |\mu|^{1/2}\cdot\langle W,\xi\rangle=0$, por lo cual M es ortogonal a Z. Por otro lado, sean X,Y en $\mathfrak{X}(M)$, como $\rho=|\lambda/\mu|^{1/2}=0$, por Proposición 4.1.4 *(2)* se tiene que $A_\xi X=\rho\cdot\nabla_X T=0$, por lo cual $\langle\alpha(X,Y),\xi\rangle=\langle A_\xi X,Y\rangle=0$, por lo tanto $\alpha\equiv 0$, es decir, M es totalmente geodésico sobre N. $\square$

Proposición 4.1.7. *Sea M, N y Z como en Observación 4.1.3. Supongamos que M es una hipersuperficie con curvatura media constante, $\mu\neq 0$ y además A_ξ es diagonalizable. Entonces M es totalmente geodésica.*

Demostración. Como Z es paralelo, entonces $D_X Z=0$ para cualquier X en $\mathfrak{X}(M)$, siendo así un campo cerrado conforme donde $\varphi\equiv 0$ de acuerdo a la Definición 3.4.1 y ya que $\langle Z,\xi\rangle=\mathrm{sgn}(\mu)\cdot|\mu|^{1/2}\neq 0$ es constante, entonces $\triangle\langle Z,\xi\rangle=0$. Por la Proposición 3.4.3, entonces se tiene que $\langle\alpha,\alpha\rangle=0$. Como A_ξ es diagonalizable, existe una base ortonormal $\{X_1,\ldots,X_m\}$ de M

y escalares $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ tales que $A_\xi X_i = \lambda_i \cdot X_i$, entonces tenemos

$$\begin{aligned}
0 = \langle \alpha, \alpha \rangle = \langle \xi, \xi \rangle \cdot \sum_{i,k} \epsilon_i \cdot \epsilon_k \cdot \langle \alpha(X_i, X_k), \xi \rangle^2 \\
= \operatorname{sgn}(\mu) \cdot \sum_{i,k} \epsilon_i \cdot \epsilon_k \cdot \langle X_i, A_\xi X_k \rangle^2 \\
= \operatorname{sgn}(\mu) \cdot \sum_{i,k} \epsilon_i \cdot \epsilon_k \cdot \langle X_i, \lambda_k \cdot X_k \rangle^2 \\
= \operatorname{sgn}(\mu) \cdot \sum_{i} \epsilon_i^2 \cdot \langle X_i, \lambda_i \cdot X_i \rangle^2 \\
= \operatorname{sgn}(\mu) \cdot \sum_{i} \langle X_i, A_\xi X_i \rangle^2 \\
= \operatorname{sgn}(\mu) \cdot \sum_{i} \langle \xi, \alpha(X_i, X_i) \rangle^2
\end{aligned}$$

Se tiene entonces que para todo $1 \leq i \leq m$, $\langle \xi, \alpha(X_i, X_i) \rangle = 0$, y como M es una hipersuperfice, esto implica que $\alpha(X_i, X_i) = 0$. Por otro lado, para $i \neq j$, se tiene

$$\begin{aligned}
\alpha(X_i, X_j) &= \langle \xi, \xi \rangle \cdot \langle \alpha(X_i, X_j), \xi \rangle \cdot \xi = \operatorname{sgn}(\mu) \cdot \langle X_i, A_\xi X_j \rangle \cdot \xi \\
&= \operatorname{sgn}(\mu) \cdot \langle X_i, \lambda_j \cdot X_j \rangle \cdot \xi = \operatorname{sgn}(\mu) \cdot \lambda_j \cdot \langle X_i, X_j \rangle \cdot \xi = 0
\end{aligned}$$

por lo tanto $\alpha \equiv 0$, es decir, M es totalmente geodésica. □

Proposición 4.1.8. *Sea M, N y Z como en Observación 4.1.3. Supongamos que dim$(N) \geq 3$, M^2 es una superficie mínima y $\lambda \neq 0$. Entonces M es plana. Además, si dim$(N) = 3$, entonces M es totalmente geodésica.*

Demostración. Tomemos X en $\mathfrak{X}(M)$ tal que sea unitario y ortogonal a T. Basta demostrar que

$$\nabla_T T = \nabla_X T = \nabla_T X = \nabla_X X = 0$$

para concluir que M es plana.

- $\nabla_T T = 0$. Por la Proposición 4.1.4 *5* se tiene que $\nabla_T T = 0$.
- $\nabla_X T = 0$. Notemos que

  $$\langle \nabla_X T, T \rangle = (1/2)\ X \langle T, T \rangle = 0$$

  y además por Proposición 4.1.4 *2*,

  $$\langle \nabla_X T, X \rangle = (1/\rho)\ \langle A_\xi X, X \rangle = (1/\rho)\ \langle \alpha(X, X), \xi \rangle = 0$$

  esto implica que $\nabla_X T = 0$.

- $\nabla_X X = 0$. Como X, T son ortogonales, se tiene

$$0 = X\langle X, T\rangle = \langle \nabla_X X, T\rangle + \langle X, \nabla_X T\rangle$$

  entonces

$$\langle \nabla_X X, T\rangle = -\langle X, \nabla_X T\rangle = 0$$

  y como X es unitario

$$\langle \nabla_X X, X\rangle = (1/2)\ X\langle X, X\rangle = (1/2)\ X(1) = 0$$

  por lo tanto $\nabla_X X = 0$.

- $\nabla_T X = 0$. Tenemos las siguientes igualdades

$$\langle \nabla_T X, X\rangle = (1/2)\ T\langle X, X\rangle = 0$$

$$\langle \nabla_T X, T\rangle = T\langle X, T\rangle - \langle X, \nabla_T T\rangle = 0$$

  por lo tanto $\nabla_T X = 0$.

Ahora, si $\dim(N) = 3$ y suponemos que X, T es marco ortonormal de $\mathfrak{X}(M)$, estamos en el caso en que M es una hipersuperficie de N, por el Corolario 4.1.5 (a) $\alpha(X, T) = 0$ y $\alpha(T, T) = 0$. Por otro lado, como M es mínima, se tiene que $\alpha(X, X) + \alpha(T, T) = 0$, entonces $\alpha(X, X) = -\alpha(T, T) = 0$, por lo tanto $\alpha \equiv 0$, es decir, M es totalmente geodésica. □

Proposición 4.1.9. *Tomemos M, N y Z como en Observación 4.1.3. Sea M^2 una superficie mínima y $\dim(N) \geq 3$. Se tienen los siguientes casos:*

(a) Si M es tipo-tiempo y N tiene curvatura seccional no-positiva entonces M es totalmente geodésica.

(b) Si M es tipo-espacio y N tiene curvatura seccional no-negativa entonces M es totalmente geodésica.

Demostración.

(a) Tomemos X en $\mathfrak{X}(M)$ tal que sea unitario y ortogonal a T formando así un marco ortonormal para M. Por la Proposición 4.1.8, se tiene que M es plana, y por lo tanto $R^M_{TX}T = 0$. Usando la fórmula de Gauss tenemos entonces

$$\begin{aligned} 0 &= \langle R^M_{TX}T, X\rangle \\ &= \langle R^N_{TX}T, X\rangle - \langle \alpha(T, X), \alpha(X, T)\rangle + \langle \alpha(T, T), \alpha(X, X)\rangle \end{aligned}$$

obteniendo así la siguiente igualdad

$$\langle R^N_{TX}T, X\rangle = \langle \alpha(T,X), \alpha(X,T)\rangle - \langle \alpha(T,T), \alpha(X,X)\rangle$$

Como M es una superficie mínima se tiene que $\alpha(X,X)+\alpha(T,T) = 0$, equivalentemente $\alpha(X,X) = -\alpha(T,T)$ y así

$$\langle R^N_{TX}T, X\rangle = \langle \alpha(T,X), \alpha(X,T)\rangle + \langle \alpha(T,T), \alpha(T,T)\rangle$$

Por un lado, como M es tipo-tiempo, entonces $M^\perp$ es tipo espacio, por lo cual

$$\langle \alpha(T,X), \alpha(X,T)\rangle + \langle \alpha(T,T), \alpha(T,T)\rangle \geq 0$$

y por otro lado, N tiene curvatura seccional no-positiva, es decir, $R^N_{TX}T \leq 0$, por lo tanto

$$\|\alpha(T,X)\|^2 + \|\alpha(T,T)\|^2 = 0$$

lo cual implica que $\alpha(T,X) = 0$ y $\alpha(T,T) = -\alpha(X,X) = 0$ obteniendo así el resultado deseado.

(b) La demostración es análoga al inciso anterior simplemente invirtiendo los sentidos de las desigualdades.

□

4.2. Hipersuperficies con Dirección Principal Canónica

Lema 4.2.1. *Sea M^n una hipersuperficie no degenerada cuyo ambiente es una variedad semi-Riemanniana N^{n+1} que admite un campo vectorial cerrado conforme Z. Entonces Z se puede descomponer sobre M como*

$$Z = |Z| \cdot (|\lambda|^{1/2} \cdot T + |\mu|^{1/2} \cdot \xi)$$

donde T, ξ, λ y μ se definen como

- $T := \dfrac{Z^T}{|\langle Z^T, Z^T\rangle|^{1/2}}$
- $\lambda := \dfrac{1}{|Z|^2}\left\langle Z^T, Z^T\right\rangle$
- $\xi := \dfrac{Z^\perp}{|\langle Z^\perp, Z^\perp\rangle|^{1/2}}$
- $\mu := \dfrac{1}{|Z|^2}\left\langle Z^\perp, Z^\perp\right\rangle$

Demostración. Descomponiendo Z en su parte tangente y normal se tiene

$$\begin{aligned}
Z &= Z^T + Z^\perp \\
&= |\langle Z^T, Z^T\rangle|^{1/2} \cdot T + |\langle Z^\perp, Z^\perp\rangle|^{1/2} \cdot \xi \\
&= ||Z|^2 \cdot \lambda|^{1/2} \cdot T + ||Z|^2 \cdot \mu|^{1/2} \cdot \xi \\
&= |Z| \cdot (|\lambda|^{1/2} \cdot T + |\mu|^{1/2} \cdot \xi)
\end{aligned}$$

□

Proposición 4.2.2. *Sean M, N y Z como en el Lema 4.2.1. Entonces se cumplen las siguientes ecuaciones:*

(a) $\varphi \cdot X = X(\bar{\lambda}) \cdot T + \bar{\lambda} \cdot \nabla_X T - \bar{\mu} \cdot A_\xi X$

(b) $0 = X(\bar{\mu}) \cdot \xi + \bar{\lambda} \cdot \alpha(X, T)$

donde

- X *es un campo vectorial en* $\mathfrak{X}(M)$
- $\varphi \in C^\infty(N)$ *tal que* $D_X Z = \varphi X$
- $\bar{\lambda} = |Z| \cdot |\lambda|^{1/2}$ *y* $\bar{\mu} = |Z| \cdot |\mu|^{1/2}$

Demostración. Sea $X \in \mathfrak{X}(M)$, calculemos ahora $D_X Z$ con la descomposición de Z obtenida en Lema 4.2.1

$$\begin{aligned}
D_X Z &= D_X \left[|Z| \cdot (|\lambda|^{1/2} \cdot T + |\mu|^{1/2} \cdot \xi)\right] \\
&= X(|Z|) \cdot (|\lambda|^{1/2} \cdot T + |\mu|^{1/2} \cdot \xi) + |Z| \cdot D_X(|\lambda|^{1/2} \cdot T + |\mu|^{1/2} \cdot \xi) \\
&= X(|Z|) \cdot (|\lambda|^{1/2} \cdot T + |\mu|^{1/2} \cdot \xi) \\
&\quad + |Z| \cdot X(|\lambda|^{1/2}) \cdot T + |Z| \cdot |\lambda|^{1/2} \cdot D_X T \\
&\quad\quad + |Z| \cdot X(|\mu|^{1/2}) \cdot \xi + |Z| \cdot |\mu|^{1/2} \cdot D_X \xi \\
&= \left(X(|Z|) \cdot |\lambda|^{1/2} + |Z| \cdot X(|\lambda|^{1/2})\right) \cdot T \\
&\quad + \left(X(|Z|) \cdot |\mu|^{1/2} + |Z| \cdot X(|\mu|^{1/2})\right) \cdot \xi \\
&\quad\quad + |Z| \cdot |\lambda|^{1/2} \cdot (\nabla_X T + \alpha(X, T)) \\
&\quad\quad\quad + |Z| \cdot |\mu|^{1/2} \cdot \left(-A_\xi X + \nabla_X^\perp \xi\right) \\
&= X(|Z| \cdot |\lambda|^{1/2}) \cdot T + X(|Z| \cdot |\mu|^{1/2}) \cdot \xi \\
&\quad + |Z| \cdot |\lambda|^{1/2} \cdot (\nabla_X T + \alpha(X, T)) - |Z| \cdot |\mu|^{1/2} \cdot A_\xi X
\end{aligned}$$

por otro lado, como Z es cerrado conforme, existe una función $\varphi \in C^\infty(M)$ tal que $D_X Z = \varphi \cdot X$, teniendo así

$$\begin{aligned}\varphi \cdot X = {} & X(|Z| \cdot |\lambda|^{1/2}) \cdot T + X(|Z| \cdot |\mu|^{1/2}) \cdot \xi \\ & + |Z| \cdot |\lambda|^{1/2} \cdot (\nabla_X T + \alpha(X,T)) - |Z| \cdot |\mu|^{1/2} \cdot A_\xi X\end{aligned}$$

aplicando ahora proyecciones tangente y normal, se obtienen las siguientes ecuaciones

$$\varphi \cdot X = X(|Z| \cdot |\lambda|^{1/2}) \cdot T + |Z| \cdot |\lambda|^{1/2} \cdot \nabla_X T - |Z| \cdot |\mu|^{1/2} \cdot A_\xi X$$

$$0 = X(|Z| \cdot |\mu|^{1/2}) \cdot \xi + |Z| \cdot |\lambda|^{1/2} \cdot \alpha(X,T)$$

$\square$

Corolario 4.2.3. Sean M, N y Z como en el Lema 4.2.1. Si $W \in \mathfrak{X}(M)$ tal que W es ortogonal con T y denotando $u_\xi = \langle \xi, \xi \rangle = \pm 1$, se cumplen las siguientes ecuaciones:

(a) $A_\xi W = \dfrac{1}{\bar{\mu}} \cdot [W(\bar{\lambda}) \cdot T + \bar{\lambda} \cdot \nabla_W T - \varphi \cdot W]$

(b) $A_\xi T = \dfrac{T(\bar{\lambda}) - \varphi}{\bar{\mu}} \cdot T + \dfrac{\bar{\lambda}}{\bar{\mu}} \cdot \nabla_T T$

(c) $\alpha(W,T) = -\dfrac{W(\bar{\mu})}{\bar{\lambda}} \cdot \xi$

(d) $\alpha(T,T) = -\dfrac{T(\bar{\mu})}{\bar{\lambda}} \cdot \xi$

(e) $\langle \alpha(W,T), \xi \rangle = -\dfrac{W(\bar{\mu})}{\bar{\lambda}} \cdot u_\xi$

(f) $\langle \alpha(T,T), \xi \rangle = -\dfrac{T(\bar{\mu})}{\bar{\lambda}} \cdot u_\xi$

(g) $W(\bar{\mu}) = -\dfrac{\bar{\lambda}^2}{\bar{\mu}} \cdot u_\xi \cdot \langle \nabla_T T, W \rangle$

donde

- $\varphi \in C^\infty(N)$ tal que $D_X Z = \varphi X$
- $\bar{\lambda} = |Z| \cdot |\lambda|^{1/2}$ y $\bar{\mu} = |Z| \cdot |\mu|^{1/2}$

Demostración.

(a) De la Proposición 4.2.2 (a), hacemos $X = W$ y despejando A_ξ se tiene que
$$A_\xi W = \frac{1}{\bar{\mu}} \cdot [W(\bar{\lambda}) \cdot T + \bar{\lambda} \cdot \nabla_W T - \varphi \cdot W]$$

(b) Análogamento como en inciso (a) pero haciendo $X = T$
$$A_\xi T = \frac{T(\bar{\lambda}) - \varphi}{\bar{\mu}} \cdot T + \frac{\bar{\lambda}}{\bar{\mu}} \cdot \nabla_T T$$

(c) De la Proposición 4.2.2 (b), haciendo $X = W$ y despejando $\alpha(W,T)$ se obtiene
$$\alpha(W,T) = -\frac{W(\bar{\mu})}{\bar{\lambda}} \cdot \xi$$

(d) Análogamento como en inciso (c) pero haciendo $X = T$
$$\alpha(T,T) = -\frac{T(\bar{\mu})}{\bar{\lambda}} \cdot \xi$$

(e) Usando inciso (c) se tiene que
$$\langle \alpha(W,T), \xi \rangle = -\frac{W(\bar{\mu})}{\bar{\lambda}} \cdot \langle \xi, \xi \rangle = -\frac{W(\bar{\mu})}{\bar{\lambda}} \cdot u_\xi$$

(f) Análogamente, usando inciso (d) se tiene que
$$\langle \alpha(T,T), \xi \rangle = -\frac{T(\bar{\mu})}{\bar{\lambda}} \cdot \langle \xi, \xi \rangle = -\frac{T(\bar{\mu})}{\bar{\lambda}} \cdot u_\xi$$

(g) Usando la hipótesis de que W y T son ortogonales e inciso (b) tenemos que
$$\begin{aligned}\langle \alpha(W,T), \xi \rangle &= \langle W, A_\xi T \rangle \\ &= \frac{1}{\bar{\mu}} \cdot [T(\bar{\lambda}) - \varphi] \cdot \langle W, T \rangle + \frac{\bar{\lambda}}{\bar{\mu}} \cdot \langle W, \nabla_T T \rangle \\ &= \frac{\bar{\lambda}}{\bar{\mu}} \cdot \langle W, \nabla_T T \rangle\end{aligned}$$

por otro lado se tiene que
$$\langle \alpha(W,T), \xi \rangle = -\frac{W(\bar{\mu})}{\bar{\lambda}}$$

equivalentemente

$$-\frac{W(\bar{\mu})}{\bar{\lambda}} = \frac{\bar{\lambda}}{\bar{\mu}} \cdot \langle W, \nabla_T T \rangle$$

y por lo tanto

$$W(\bar{\mu}) = -\frac{\bar{\lambda}^2}{\bar{\mu}} \cdot u_\xi \cdot \langle \nabla_T T, W \rangle$$

$\square$

Teorema 4.2.4. *Sean M, N y Z como en el Lema 4.2.1. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

1. *M tiene una dirección principal canónica relativa a Z, es decir, T es dirección principal.*

2. *$\bar{\mu}$ es constante a lo largo de las direcciones tangentes a M y ortogonales a T.*

3. *Las curvas integrales de T son geodésicas en M.*

Demostración. Sea W un campo vectorial en $\mathfrak{X}(M)$ ortogonal a T. Se tienen entonces las siguientes implicaciones:

- *(1)⇒(2)*
  Como T es dirección principal, se tiene que $A_\xi T = \theta \cdot T$. Usando Corolario 4.2.3 (b), se tiene que

$$\theta \cdot T = A_\xi T = \frac{T(\bar{\lambda}) - \varphi}{\bar{\mu}} \cdot T + \frac{\bar{\lambda}}{\bar{\mu}} \cdot \nabla_T T$$

  despejando $\nabla_T T$ obtenemos

$$\nabla_T T = \left[\frac{\bar{\mu} \cdot \theta - T(\bar{\lambda}) - \varphi}{\bar{\lambda}} \right] \cdot T$$

  y sustituyendo este despeje en Corolario 4.2.3 (g) tenemos entonces

$$\begin{aligned} W(\bar{\mu}) &= -\frac{\bar{\lambda}^2}{\bar{\mu}} \cdot u_\xi \cdot \langle \nabla_T T, W \rangle \\ &= -\left[\frac{\bar{\mu} \cdot \theta - T(\bar{\lambda}) - \varphi}{\bar{\lambda}} \right] \cdot \frac{\bar{\lambda}^2}{\bar{\mu}} \cdot u_\xi \cdot \langle T, W \rangle = 0 \end{aligned}$$

  y por lo tanto

$$\bar{\mu} = |Z| \cdot |\mu|^{1/2} = |Z^\perp|$$

  es constante.

- *(2)⇒(3)*
  Como $\bar{\mu}$ es constante, por Corolario 4.2.3 (g) se tiene que $\langle \nabla_T T, W\rangle = 0$. Además, como T es unitario, se tiene que $\langle \nabla_T T, T\rangle = (1/2)\cdot T\langle T, T\rangle = 0$ y por lo tanto $\nabla_T T = 0$.

- *(3)⇒(1)*
  Tenemos que $\nabla_T T = 0$, entonces por Corolario 4.2.3 (b) tenemos que

  $$A_\xi T = \frac{T(\bar{\lambda}) - \varphi}{\bar{\mu}} \cdot T + \frac{\bar{\lambda}}{\bar{\mu}} \cdot \nabla_T T = \frac{T(\bar{\lambda}) - \varphi}{\bar{\mu}} \cdot T$$

  y por lo tanto, T es dirección principal.

□

4.3. Ángulo Hiperbólico en Hipersuperficies tipo-espacio

Definición 4.3.1. Sea N una variedad Lorentziana y suponga que M es una hipersuperficie tipo-espacio de N, entonces existe un campo vectorial unitario tipo-tiempo $\xi\colon M \to T^\perp M$. Sea Z un campo vectorial cerrado conforme sobre N tal que $Z_{|M}$ es tipo-tiempo y pertenece al mismo Cono de Tiempo de ξ para cada punto de M, que por Lema 1.2.13, $\langle Z(p), \xi(p)\rangle < 0$ para cada $p \in M$. Por la Proposición 1.2.14 podemos definir la función $\theta\colon M \to \mathbb{R}$ tal que $\theta(p)$ es el ángulo hiperbólico entre $Z(p)$ y $\xi(p)$ y está dado por

$$\cosh\theta(p) = -\langle \frac{Z(p)}{|Z(p)|}, \xi(p)\rangle$$

Lema 4.3.2. *Sea N una variedad Lorentziana y suponga que M es una hipersuperficie tipo-espacio de N, entonces existe un campo vectorial unitario tipo-tiempo $\xi\colon M \to T^\perp M$. Si Z y θ son como en la Definición 4.3.1. El campo vectorial Z se puede descomponer sobre M en términos de θ como*

$$Z = |Z|\,(\sinh\theta\ T + \cosh\theta\ \xi)$$

donde $T\colon = Z^T/|Z^T|$ y Z^T es la componente de Z en $\mathfrak{X}(M)$.

Demostración. Tomemos Z^T y $Z^\perp$ como las componentes de Z en $\mathfrak{X}(M)$ y $T^\perp M$ respectivamente, entonces $Z = Z^T + Z^\perp$. Como M tiene codimensión uno y ξ es tipo-tiempo, se tiene

$$Z^\perp(p) = -\langle Z(p), \xi(p)\rangle\ \xi(p) = |Z(p)|\cosh\theta\ \xi(p)$$

Tenemos entonces que

$$Z(p) = Z^T(p) - \langle Z(p), \xi(p) \rangle \; \xi(p) = Z^T(p) + |Z(p)| \cosh\theta(p) \; \xi(p)$$

Por ahora, omitiremos p en nuestra notación. Por otro lado

$$\begin{aligned}
\left\langle Z^T, Z^T \right\rangle &= \langle Z - |Z|\cosh\theta \; \xi, Z - |Z|\cosh\theta \; \xi \rangle \\
&= \langle Z, Z \rangle - 2|Z|\cosh\theta \, \langle Z, \xi \rangle + |Z|^2 \cosh^2\theta \;\; \langle \xi, \xi \rangle \\
&= -\left(-\langle Z, Z \rangle\right) - 2|Z|^2 \cosh\theta \;\; \langle Z/|Z|, \xi \rangle - |Z|^2 \cosh^2\theta \\
&= -|Z|^2 + 2|Z|^2 \cosh^2\theta - |Z|^2 \cosh^2\theta \\
&= -|Z|^2 + |Z|^2 \cosh^2\theta \\
&= -|Z|^2(1 - \cosh^2\theta) \\
&= |Z|^2(\cosh^2\theta - 1) \\
&= |Z|^2 \sinh^2\theta
\end{aligned}$$

Entonces podemos escribir Z^T como

$$\begin{aligned}
Z^T &= |Z^T| \; T = |\langle Z^T, Z^T \rangle|^{1/2} \; T \\
&= ||Z|^2|^{1/2} |\sinh^2\theta|^{1/2} \; T \\
&= |Z| \cdot |\sinh\theta| \; T \\
&= |Z| \sinh\theta \; T \qquad \text{ya que } \theta \geq 0
\end{aligned}$$

□

Observación 4.3.3. En las afirmaciones consecutivas de esta sección se tomarán en cuenta las siguientes hipótesis: N es una variedad Lorentziana que admite un campo vectorial cerrado conforme Z, M es una hipersuperficie de N tipo espacio con campo vectorial normal unitario $\xi \colon M \to T^{\perp}M$. Para Z, se tiene que $Z|_M$ es tipo tiempo, pertenece al mismo Cono de Tiempo de ξ para todo punto de M, existe una función $\varphi \in C^\infty(N)$ tal que para todo $X \in \mathfrak{X}(N)$ se tiene que $D_X Z = \varphi X$ y además, por el Lema 4.3.2, éste se descompone de la forma

$$Z = |Z| \left(\sinh\theta \; T + \cosh\theta \; \xi\right)$$

Observación 4.3.4. Notemos que Z y ξ son colineales si y sólo si $\sinh\theta = 0$, y a su vez, por la identidad hiperbólica $1 = \cosh^2\theta - \sinh^2\theta$, $\cosh\theta = 1$ y $\theta = 0$.

Proposición 4.3.5. *Considere las hipótesis de la Observación 4.3.3. Entonces para cada campo vectorial $Y \in \mathfrak{X}(M)$ se tiene las siguientes igualdades*

1. $\dfrac{\varphi}{|Z|}\, Y + \varphi\, \sinh^2\theta\, \dfrac{\langle Y, T\rangle}{|Z|}\, T = (Y\cdot\theta)\, \cosh\theta\, T + \sinh\theta\, \nabla_Y T - \cosh\theta\, A_\xi Y$

2. $\alpha(Y,T) + (Y\cdot\theta)\, \xi = \varphi \cosh\theta\, \dfrac{\langle Y, T\rangle}{|Z|}\, \xi$

Demostración. Como Z es cerrado conforme, $Y\cdot\langle Z, Z\rangle = 2\langle\bar\nabla_Y Z, Z\rangle = 2\varphi\,\langle Y, Z\rangle$. Notemos ahora que

$$2|Z|\,(Y\cdot|Z|) = Y\cdot|Z|^2 = -Y\cdot\langle Z, Z\rangle = -2\varphi\,\langle Y, Z\rangle$$

entonces

$$Y\cdot|Z| = -\varphi\,\langle Y, Z/|Z|\rangle$$

Aplicando ahora Lema 4.3.2 obtenemos

$$\begin{aligned}
Y\cdot|Z|^{-1} &= -\frac{1}{|Z|^2}\, Y\cdot|Z| = \frac{1}{|Z|^2}\,\varphi\,\langle Y, Z/|Z|\rangle = \frac{\varphi\,\langle Y, Z\rangle}{|Z|^3}\\
&= \frac{\varphi}{|Z|^3}\,\langle Y, |Z|\,(\sinh\theta\, T + \cosh\theta\, \xi)\rangle\\
&= \frac{\varphi}{|Z|^2}\,\left(\sinh\theta\,\langle Y, T\rangle + \cosh\theta\langle Y, \xi\rangle\right)\\
&= \frac{\varphi\,\sinh\theta}{|Z|^2}\,\langle Y, T\rangle
\end{aligned}$$

Ahora derivamos ambos lados de la igualdad de la descomposición de Z dada en Lema 4.3.2. Por un lado tenemos

$$\begin{aligned}
\bar\nabla_Y(Z/|Z|) &= \bar\nabla_Y(\sinh\theta\, T) + \bar\nabla_Y(\cosh\theta\,\xi)\\
&= Y\cdot(\sinh\theta)\, T + \sinh\theta\,\bar\nabla_Y T + Y\cdot(\cosh\theta)\,\xi + \cosh\theta\,\bar\nabla_Y\xi\\
&= \cosh\theta\, Y(\theta)\, T + \sinh\theta\,\nabla_Y T + \sinh\theta\,\alpha(Y,T)\\
&\quad + \sinh\theta\, Y(\theta)\,\xi - \cosh\theta\, A_\xi Y \quad \text{por ser } M \text{ hipersuperficie}
\end{aligned}$$

y por otro tenemos

$$\begin{aligned}
\bar\nabla_Y(Z/|Z|) &= Y\cdot|Z|^{-1}\, Z + \frac{1}{|Z|}\,\bar\nabla_Y Z\\
&= \frac{\varphi\,\sinh\theta}{|Z|^2}\,\langle Y, T\rangle\, Z + \frac{1}{|Z|}\,\varphi\, Y\\
&= \frac{\varphi\,\sinh\theta}{|Z|}\,\langle Y, T\rangle\,\frac{Z}{|Z|} + \frac{1}{|Z|}\,\varphi\, Y\\
&= \frac{\varphi\,\sinh\theta}{|Z|}\,\langle Y, T\rangle\,(\sinh\theta\, T + \cosh\theta\,\xi) + \frac{1}{|Z|}\,\varphi\, Y
\end{aligned}$$

De estos dos cálculos,

- igualando parte tangente obtenemos (1)

$$\cosh\theta\, Y(\theta)\, T + \sinh\theta\, \nabla_Y T - \cosh\theta\, A_\xi Y = \frac{\varphi\ \sinh^2\theta}{|Z|}\ \langle Y, T\rangle\ T + \frac{\varphi}{|Z|}\ Y$$

- igualando parte normal

$$\sinh\theta\ \alpha(Y,T) + \sinh\theta\ Y(\theta)\ \xi = \frac{\varphi\ \sinh\theta\ \cosh\theta}{|Z|}\ \langle Y, T\rangle\ \xi$$

y cancelando $\sinh\theta$ (suponiendo que $\theta \neq 0$) obtenemos (2)

$$\alpha(Y,T) + Y(\theta)\ \xi = \frac{\varphi\ \cosh\theta}{|Z|}\ \langle Y, T\rangle\ \xi$$

□

Corolario 4.3.6. Considere las hipótesis de la Observación 4.3.3. Tomemos W en $\mathfrak{X}(M)$ tal que T y W son ortogonales. Entonces

1. $A_\xi T = (T\cdot\theta)\ T + \tanh\theta\ \nabla_T T - \dfrac{\varphi}{|Z|}\cosh\theta\ T$
2. $A_\xi W = (W\cdot\theta)\ T + \tanh\theta\ \nabla_W T - \dfrac{\varphi}{|Z|}\text{sech}\ \theta\ T$
3. $\alpha(T,W) = -(W\cdot\theta)\ \xi$
4. $\alpha(T,T) = -(T\cdot\theta)\ \xi + \dfrac{\varphi}{|Z|}\cosh\theta\ \xi$
5. $W\cdot\theta = \tanh\theta\ \langle\nabla_T T, W\rangle$
6. $\langle\alpha(T,T),\xi\rangle = (T\cdot\theta) + \dfrac{\varphi\cosh\theta}{|Z|}$

Demostración. Si tomamos que $Y = W$ en las igualdades de la Proposición 4.3.5 y por la ortogonalidad entre T y W se tienen las siguientes igualdades

$$\varphi\frac{W}{|Z|} = (W\cdot\theta)\cosh\theta\ T + \sinh\theta\ \nabla_W T - \cosh\theta\ A_\xi W$$

$$\alpha(W,T) = -(W\cdot\theta)\ \xi$$

De la primera igualdad de arriba, despejamos $A_\xi W$ y obtenemos

$$A_\xi W = (W\cdot\theta)\ T + \tanh\theta\nabla_W T - \text{sech}\theta\ \frac{\varphi}{|Z|}\ W$$

obteniendo así (2) y (3). De la misma manera, ahora tomamos $Y = T$ en las igualdades de la Proposición 4.3.5 y usamos el hecho de que T es unitario obteniendo

$$\alpha(T,T) = -(T\cdot\theta)\ \xi + \frac{\varphi\cosh\theta}{|Z|}\ \xi$$

$$\varphi\frac{T}{|Z|} + \varphi\sinh^2\theta\frac{1}{|Z|}\ T = (T\cdot\theta)\cosh\theta\ T + \sinh\theta\ \nabla_T T - \cosh\theta\ A_\xi T$$

de ésta última, despejando $A_\xi T$ obtenemos

$$\begin{aligned}
A_\xi T &= (T\cdot\theta)\ T + \frac{1}{\cosh\theta}\left[\sinh\theta\ \nabla_T T - \frac{\varphi}{|Z|}\ T - \frac{\varphi\sinh^2\theta}{|Z|}\ T\right] \\
&= (T\cdot\theta)\ T + \tanh\theta\nabla_T T - \frac{\varphi}{|Z|\cosh\theta}(1+\sinh^2\theta)\ T \\
&= (T\cdot\theta)\ T + \tanh\theta\nabla_T T - \frac{\varphi}{|Z|\cosh\theta}\cosh^2\theta\ T \\
&= (T\cdot\theta)\ T + \tanh\theta\nabla_T T - \frac{\varphi\cosh\theta}{|Z|}\ T
\end{aligned}$$

teniendo como resultado las igualdades (1) y (4). Ahora, usando (1) y (3), por un lado tenemos que

$$\langle\alpha(T,W),\xi\rangle = -(W\cdot\theta)\langle\xi,\xi\rangle = W\cdot\theta$$

y por otro

$$\begin{aligned}
\langle\alpha(T,W),\xi\rangle &= \langle W, A_\xi T\rangle \\
&= \langle W, (T\cdot\theta)\ T + \tanh\theta\ \nabla_T T - \frac{\varphi}{|Z|}\cosh\theta\ T\rangle \\
&= \tanh\theta\ \langle W, \nabla_T T\rangle
\end{aligned}$$

demostrando así la ecuación (5). Para obtener la ecuación (6) notemos que

$$\langle T, \nabla_T T\rangle = (1/2)T\langle T,T\rangle = (1/2)T\cdot 1 = 0$$

entonces

$$\begin{aligned}
\langle \alpha(T,T), \xi\rangle &= \langle T, A_\xi T\rangle \\
&= (T\cdot\theta) + \tanh\theta \langle T, \nabla_T T\rangle - \frac{1}{\cosh\theta}\left[-\frac{\varphi}{|Z|} - \frac{\varphi\sinh^2\theta}{|Z|}\right] \\
&= (T\cdot\theta) - \frac{1}{\cosh\theta}\left[-\frac{\varphi}{|Z|} - \frac{\varphi\sinh^2\theta}{|Z|}\right] \\
&= (T\cdot\theta) + \frac{\varphi}{|Z|\cosh\theta}(1+\sinh^2\theta) \\
&= (T\cdot\theta) + \frac{\varphi}{|Z|\cosh\theta}\cosh^2\theta \\
&= (T\cdot\theta) + \frac{\varphi\cosh\theta}{|Z|}
\end{aligned}$$

□

Teorema 4.3.7. *Considere las hipótesis de la Observación 4.3.3. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

1. *M tiene una dirección principal canónica relativa a Z, es decir, T es dirección principal.*
2. *El ángulo θ entre Z y ξ es constante a lo largo de las direcciones tangentes a M y ortogonales a T.*
3. *Las curvas integrales de T son geodésicas en M.*

Demostración.

- *(1) implica (2)*: Si T es dirección principal, $A_\xi T$ es múltiplo de T, es decir, $A_\xi T = \lambda T$, entonces por la igualdad (1) del Corolario 4.3.6 se tiene que

$$\tanh\theta\ \nabla_T T = \left(\lambda - (T\cdot\theta) + \frac{\varphi\cosh\theta}{|Z|}\right)\ T$$

  es decir $(\tanh\theta)\nabla_T T$ es múltiplo de T, y por igualdad (5) del mismo corolario tenemos

$$W\cdot\theta = \tanh\theta\ \langle \nabla_T T, W\rangle = 0$$

  para cada campo vectorial W tangente a M y ortogonal a T.

- *(2) implica (1)* Por hipótesis e igualdad (5) del Corolario 4.3.6

$$W\cdot\theta = \tanh\theta\ \langle \nabla_T T, W\rangle = 0$$

pero como T es un campo vectorial unitario, $\langle \nabla_T T, T\rangle = 0$, así se tiene $\nabla_T T = 0$; sustituyendo en (1) del corolario 4.3.6, tenemos entonces

$$A_\xi T = \left[(T \cdot \theta) - \frac{\varphi}{|Z|}\cosh\theta\right]\ T$$

- *(3) implica (1)* Tenemos que $\nabla_T T = 0$, usando el Corolario 4.3.6 *1.* notamos que

$$A_\xi T = (T \cdot \theta) \cdot T - \frac{\varphi}{|Z|}\cosh(\theta) \cdot T$$

$$A_\xi T = \left[(T \cdot \theta) - \frac{\varphi}{|Z|}\cosh(\theta)\right] \cdot T$$

  por lo cual T es dirección principal.

- *(2) implica (3)* Usando la fórmula del Corolario 4.3.6, como θ es constante se tiene

$$0 = \tan(\theta) \cdot \langle \nabla_T T, W\rangle$$

  lo que implica que $\tan(\theta) = 0$ o $\langle \nabla_T T, W\rangle = 0$. Si $\tan(\theta) = 0$, entonces Z y ξ son colineales, y así Z no tiene parte tangente, es decir, $T = 0$, obteniendo así $\nabla_T T = 0$. Por otro lado tenemos que $\langle \nabla_T T, W\rangle = 0$ y ésto implica que $\nabla_T T = 0$.

□

Bibliografía

[1] C. Barrera, A. J. Di Scala, G. Ruiz-Hernández. *Helix Surfaces in Euclidean Space*, Beiträge zur Algebra und Geometrie / Contributions to Algebra and Geometry.56 (2015) 551-573.

[2] B. Y. Chen. *Pseudo-Riemannian Geometry, δ-Invariants and Applications.* World Scientific Publishing Co, Pte, Ltd., Singapore, 2011.

[3] M. Dajczer. *Submanifolds and Isometric Immersions.* Mathematics Lecture Series, 13. Publish or Perish, Inc., Houston, Texas, 1990.

[4] S. H. Friedberg, A. J. Insel, L. E. Spence. *Linear Algebra*, Second Edition. Prentice Hall, Inc., 1989.

[5] S. Kobayashi, K. Nomizu. *Foundations of Differential Geometry*, Volume I. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1963.

[6] R. López. *Differential Geometry of Curves and Surfaces in Lorentz-Minkowski Space.* Universidad de Granada, Dep. de Geometría y Topología, Granada, España, 2008.

[7] S. Montiel. *Unicity of Constant Mean Curvature Hypersurfaces in some Riemannian Manifolds*, Indiana Univ. Math J.48 (2) (1999) 711-748.

[8] B. O'Neill. *Semi-Riemannian Geometry with Applications to Relativity.* Academic Press, Inc., New York, 1983.

[9] O. Palmas, G. Ruiz-Hernández. *Spacelike Hypersurfaces with a Canonical Principal Direction*, Pure and Applied Differential Geometry - PADGE 2012 (2013) 253-260.

[10] G. Ruiz-Hernández. *Minimal Helix Surfaces in $N^n \times \mathbb{R}$*, Abh. Math. Semin. Univ. Hambg. 81 (2011) 55-67.