UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

“UN ACERCAMIENTO A LA (57,5) – JAULA”

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

A C T U A R I A

P R E S E N T A :

CLAUDIA MARLENE DE LA CRUZ TORRES

DIRECTOR DE TESIS:
DRA. MARTHA GABRIELA ARAUJO PARDO

2016
CIUDAD UNIVERSITARIA, D.F.

1. Datos de la alumna
De la Cruz
Torres
Claudia Marlene
58 48 16 61
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Actuaría
304188431

2. Datos de la Tutora
Doctora
Araujo
Pardo
Martha Gabriela

3. Datos de la Co-Tutora
Doctora
López
Chávez
Gloria

4. Sinodal 1
Doctora
Balbuena
Martínez
María Camino Teófila

5. Sinodal 2
Doctor
Montellano
Ballesteros
Juan José

6. Sinodal 3
Doctor
González
Moreno
Diego Antonio

7. Datos de la tesis
Un acercamiento a la $(57,5)-$jaula
50 páginas
2016

La sabiduría es la cosa principal.
Adquiere sabiduría; y con todo lo que
adquieres, adquiere entendimiento.
(Proverbios 4:7)

Agradecimientos

Estoy agradecida a Jehová Dios quien nos da lo necesario para vivir y la fuerza necesaria para alcanzar las metas. También debo agradecer a mi familia, en especial a mis queridos padres por el apoyo que siempre me brindan.

Agradezco a Gaby por todas las clases de apoyo que me ofreció para realizar esta tesis, no pude estar en mejores manos, y claro, sin la colaboración de otra gran persona, Gloria, este trabajo no sería lo que es. Muchas gracias a las dos, es el mejor equipo de trabajo que pude tener.

Le doy gracias a todas las personas con las que compartí estos anos de formación académica y experiencias de vida, a mis profesores que compartieron tantos conocimientos, a los companeros que me ayudaron y a todos a los que llegué a considerar mis amigos.

Gracias a los doctores que componen el jurado por la revisión que hicieron de esta tesis y por las correciones que aportaron; gracias Christian por la gran ayuda que me proporcionaste.

También agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por el apoyo económico que me brindó como parte del proyecto CB-2012/178395, así como al Instituto de Matemáticas de la UNAM por la beca de lugar dentro de sus instalaciones.

Índice general

Agradecimientos **III**

Índice de figuras **VII**

Introducción **1**

1. Preliminares **3**

2. Reducciones y Amalgamas **23**

2.1. Reduccciones 24

2.2. Amalgamas 28

3. Construcción principal **33**

A. Anexo **45**

Índice de figuras

1.1. Representación de la $(3, 5)$-jaulita y la $(3, 6)$-jaulita, respectivamente. 6

1.2. Representación de la gráfica de Heawood y de Tutte-Coxeter, es decir, la $(3, 6)$-jaulita y la $(3, 8)$-jaulita, respectivamente. 8

1.3. La gráfica de Benson es la $(3, 12)$-jaulita. 9

1.4. La gráfica de Robertson. 10

1.5. Representación del Plano de Fano. 15

1.6. Representación de la gráfica de Heawood. 15

1.7. Representación de los planos proyectivos algebraicos PG(2,2) y PG(2,3), respectivamente. 17

1.8. Gráfica de Levi del plano proyectivo algebraico PG(2,2). 18

1.9. Gráfica de Levi del plano proyectivo algebraico PG(2,3). 18

1.10. Del plano algebraico PG(2,3) elegimos la bandera $(p\ \ , l\ \ )$ que define al subconjunto Baer, las líneas punteadas y diamantes, el cual será eliminado para obtener al semiplano elíptico $\mathcal{C}_2$ 21

22

2.1. Ejemplo de la operación de Reducción 1 sobre la gráfica B_q, en este caso específico $S = \ \ 0, 1, \alpha\ \ $ y $T = \ \ 0, 1\ \ $, observamos que los vértices adyacentes a los vértices de S_0 y T_0 pierden un grado al quitar la arista punteada que los hacía adyacentes. 25

2.2. Ejemplo de la gráfica $B_q(S, T, u)$, donde $S = \ \ 0, 1, \alpha\ \ $, $T = \ \ 0, 1\ \ $ y $u = \alpha$. 27

2.3. Un ejemplo sencillo de una amalgama de Γ_1 en Γ_2. 28

3.1. Representación de las gráficas H_1 y H_2, respectivamente. Las aristas de línea continua representan el $13-ciclo$ del conjunto A, las del estilo - - - al $13-ciclo$ del conjunto B y las de estilo $\cdots$ es el apareamiento del conjunto C. 34

3.2. Después de eliminar las parejas de aristas de los conjuntos D_1 y D_1, anadimos el conjunto de vértices y las aristas de los conjuntos E_1 y E_1, y obtenemos la gráfica G_1. 39

3.3. Aplicando el método a H_2, obtenemos G_2. 40

3.4. Aplicando el método a G_1 obtenemos G_1. 41

3.5. Representación de la gráfica G_2, resultado de aplicar el método a G_2. 42

3.6. Gráfica G_2. 43

Introducción

El tema de esta tesis está enmarcado dentro del área de las gráficas extremales, en particular, uno de los problemas de gran interés es determinar, dados dos enteros $k \geq 2$ y $g \geq 3$, el mínimo número de vértices de una gráfica k-regular de cuello g, donde el cuello de una gráfica es la longitud del ciclo más pequeno que contiene.

Dicho de otro modo, una gráfica k-regular con cuello dado g y que además cumple con ser la de menor número de vértices, entre todas las gráficas de la misma regularidad y el mismo cuello, se define como una $(k, g) - jaula$.

En la siguiente sección describiremos las cotas inferiores de las jaulas llamadas cotas de Moore y más adelante veremos que existen pocas jaulas que alcanzan dicha cota. A las jaulas que alcanzan la cota de Moore se les llama en la literatura gráficas de Moore , sin embargo, en México las hemos llamado familiarmente jaulitas .

En este trabajo abordamos el problema de jaulitas de cuello impar, las cuales se sabe que existen solamente para cuello igual a tres (gráficas completas), para cuello impar g y 2-regular (ciclos de longitud g) y para cuello cinco: el ciclo de tamano cinco (2-regular), la gráfica de Petersen (3-regular), la gráfica de Hoffman-Singleton (7-regular) y posiblemente, para este mismo cuello, la 57-regular. La existencia, o no de esta gráfica es un problema relevante en el área que permanece abierto aproximadamente desde los anos cincuentas, y ya que varios matemáticos han dedicado horas de trabajo a la búsqueda y al estudio de las propiedades de esta gráfica (en caso de existir), la comunidad dedicada a las gráficas extremales la llama coloquialmente el

"Monstruo".

El trabajo que demuestra que las gráficas de cuello cinco enlistadas en el párrafo anterior son las únicas jaulitas de cuello impar consiste en un análisis algebraico de ciertas matrices de incidencia y para mayor información consultar el capítulo 23 del libro de Biggs [3].

Sobre la existencia de jaulitas k-regulares de cuello par, en [3] también se prueba que estas sólo existen para cuellos 4, 6, 8 y 12, y para los tres últimos solamente para ciertos valores específicos de r, todas ellas relacionadas con la existencia de ciertas geometrías finitas, de las que hablaremos con más detalle en la siguiente sección.

Debido al análisis anterior, es claro notar que existen pocas jaulitas, así el problema de las jaulas se ha convertido actualmente en construir gráficas k-regulares de cuello fijo con pocos vértices . Biggs llama exceso de una gráfica a la diferencia entre el orden de G y la cota de Moore.

Existen varias maneras de relajar el problema de las jaulas , una de ellas es construir gráficas con poco exceso , otra es fijar el número de vértices en la cota de Moore y modificar la regularidad o el cuello.

En esta línea el objetivo de esta tesis fue construir una gráfica lo más parecida a el monstruo, la $(57, 5)$-jaulita. Para ello nos concentramos en la segunda opción, es decir, fijamos el cuello y el número de vértices que tendría el monstruo y modificamos su regularidad, esto es, construir una $(43, 5)$-gráfica con 3250 vértices. Hasta el momento nuestra gráfica es la de mayor regularidad que se ha construido de cuello cinco y orden 3250.

Capítulo 1

Preliminares

Las gráficas que consideraremos a lo largo de esta tesis son finitas, simples y no dirigidas. A continuación enunciamos algunos conceptos fundamentales de las gráficas, para profundizar más puede consultar [4]. Más adelante, para sustentar el desarrollo de esta tesis, mostraremos la relación que existe entre la teoría de gráficas y la teoría de las geometrías finitas.

Sea $G = (V(G), E(G))$ una *gráfica* que consta de un conjunto de vértices $V = V(G)$ y un conjunto de aristas $E = E(G)$. El *orden* de G es igual al número de vértices, $V(G)$, mientras que el número de aristas, $E(G)$, es igual al *tamaño* de G. En una gráfica G, un vértice u es *vecino* de un vértice v si existe una arista a la que ambos sean adyacentes, en este caso diremos que u es *adyacente* a v. El *grado* de un vértice v V es el número de vértices adyacentes a él. Y el *conjunto de grados* $D(G)$ de una gráfica G es el conjunto de grados de todos lo vértices de G. La *vecindad* $N(v)$ de un vértice v es el conjunto de vecinos de v $V(G)$. Una gráfica G de orden n es *completa* si todos sus vértices son adyacentes y se denota como K_n.

Sean u, v $V(G)$, una $uv - trayectoria$ es una sucesión alternada de vértices adyacentes y aristas de G, que empieza en u y termina en v, tal que no repite vértices. La *longitud* de una *uv*-trayectoria es igual a la cantidad de aristas que contiene. Un *ciclo* es una uv-trayectoria de longitud al menos 3 en la que $u = v$. El *cuello* de una gráfica G es la longitud $g = g(G)$ del ciclo más pequeno que contiene. Una gráfica es llamada *bipartita* si su conjunto de vértices $V(G)$ puede separarse en dos subconjutos no vacíos tales que cualquier arista en $E(G)$, es adyacente a un vértice de uno de los subconjuntos y a otro vértice del otro subconjunto. Una gráfica H es *subgráfica* de G si $V(H) \subseteq V(G)$ y $E(H) \subseteq E(G)$.

Una *acción* de un grupo $(\Gamma, *)$ sobre un conjunto X es una aplicación $\phi : \Gamma \times X \quad X$ que cumple 1) $\quad x \quad X$, $\phi(e, x) = x$, donde e es el elemento neutro de Γ, y 2) $\quad x \quad X$, $h, k \quad \Gamma$, $\phi(h * k, x) = \phi(h, \phi(k, x))$. Un grupo Γ que actúa sobre un conjunto V se dice que actúa *transitivamente* en V si para cualesquiera $u, v \quad V$, existe un elemento en $h \quad \Gamma$ tal que asigna u a v. El concepto de *isomorfismo* da la idea de tener la misma estructura, así un isomorfismo entre dos conjuntos ordenados $(X, \leq)$ y $(Y, \leq\ )$ es una función biyectiva $f : X \quad Y$ tal que para todo $x_1, x_2 \quad X$ se tiene que $x_1 \leq x_2$ si y sólo si $f(x_1) \leq\ f(x_2)$. Si $X = Y$ se dice que el isomorfismo es un *automosfismo*.

Una gráfica G es *vértice-transitiva* si $Aut(G)$, el grupo de automorfismos de G, actúa transitivamente en el conjunto de vértices $V(G)$. Por lo que las gráficas que son vértice-transitivas tienen la misma apariencia en cada vértice, y todos los vértices de estas gráficas se encuentran en el mismo número de ciclos de cierta longitud. En particular, cada vértice se encuentra en un ciclo de misma longitud que el cuello de la gráfica, además Lovász planteó la conjetura de que toda gráfica vértice-transitiva, a excepción de cinco, es *hamiltoniana* [12], es decir contienen un ciclo que pasa por todos los vértices de la gráfica exactamente una vez.

Una gráfica es llamada *k-regular* si todos sus vértices tienen grado k, y es *bi-regular* o (k_1, k_2)-regular si todos sus vértices tienen grado ya sea k_1 o k_2. Asimismo, una *(k, g)-gráfica* es una gráfica k-regular de cuello g, y una *(k, g)-jaula* es una (k, g)-gráfica con el menor número de vértices posible. La construcción de este tipo de gráficas es un problema que examinó Tutte [16] por primera vez en 1947, y en 1960 Erdos y Sachs probaron que para cualesquiera enteros k y g existe al menos una (k,g)-gráfica, y por ende la existencia de una (k,g)-jaula.

El mínimo número de vértices que puede tener una (k,g)-gráfica se denota por $n_0(k,g)$, y se conoce como Cota de Moore 1.1, la cual depende de la paridad del cuello, como se indica a continuación:

$$n_0(k,g) = \begin{cases} 1 + k + k(k-1) + \cdots + k(k-1)^{\frac{g-3}{2}} & \text{si } g \text{ es impar;} \\ 2(1 + (k-1) + \cdots + (k-1)^{\frac{g}{2}-1}) & \text{si } g \text{ es par.} \end{cases} \tag{1.1}$$

El siguiente Teorema da la prueba de esta cota.

Teorema 1.0.1 *Si G es una (k,g)-gráfica de orden n, entonces $n \geq n_0(k,g)$.*

Demostración. Haremos la prueba por casos dependiendo de la paridad de g.

Si g es impar, es decir, si $g = 2r+1$ para algún entero positivo r, sea $u \quad V(G)$ y para $1 \geq i \geq r$, el número de vértices a distancia i de u es igual a $k(k-1)^{i-1}$, entonces claramente $n \geq 1 + k + k(k-1) + \cdots + k(k-1)^{r-1}$.

Dado que $g = 2r+1$ tenemos que $r - 1 = \frac{g-1}{2} - 1 = \frac{g-3}{2}$, por lo tanto tenemos la siguiente desigualdad $n \geq 1 + k + k(k-1) + \cdots + k(k-1)^{\frac{g-3}{2}}$.

Ahora, si g es par, es decir, $g = 2r$ para algún $r \geq 2$, sea $e = uv \quad E(G)$ y para $1 \geq i \geq r-1$, el número de vértices a distancia i de u o de v es igual a $2(k-1)^i$, por lo que $n \geq 2 + 2(k-1) + \cdots + 2(k-1)^{r-1}$ y ya que $g = 2r$, $r = \frac{g}{2}$ y $r - 1 = \frac{g}{2} - 1$.

Es decir, $n \geq 2(1 + (k-1) + \cdots + (k-1)^{\frac{g}{2}-1})$, y por lo tanto $n \geq n_0(k,g)$. ■

Las (k,g)-gráficas que alcanzan dicha cota son conocidas como *gráficas de Moore* y en México las hemos llamado familiarmente *jaulitas*.

La Figura 1.1 muestra dos ejemplos de gráficas *3-regulares* de cuello 5 y 6, respectivamente, que alcanzan la Cota de Moore, nótese que los árboles generadores de las dos jaulitas están representados por las aristas continuas e ilustran la cota inferior para cuello 5 y 6, respectivamente. Árboles similares pueden construirse para jaulitas con cuellos mayores.

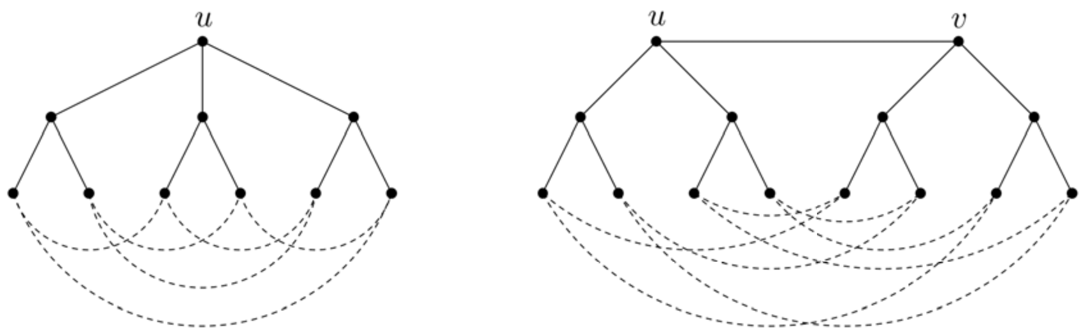
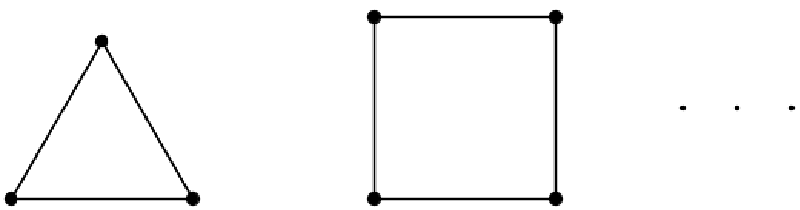


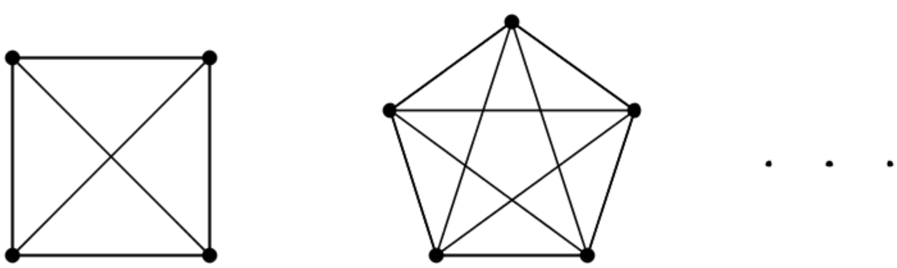
Figura 1.1: Representación de la $(3, 5)$-jaulita y la $(3, 6)$-jaulita, respectivamente.

Se ha probado que una (k, g)-gráfica es una gráfica de Moore o jaulita si y sólo si [3]:

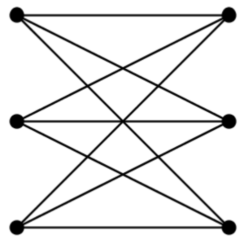
I) $k = 2$ y $g \geq 3$, ciclos C_g;



II) $g = 3$ y $k \geq 2$, gráficas completas K_{k+1};

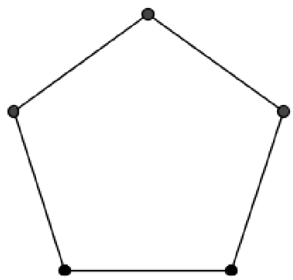


III) $g = 4$ y $k \geq 2$, gráficas completas bipartitas balanceadas $K_{k,k}$;

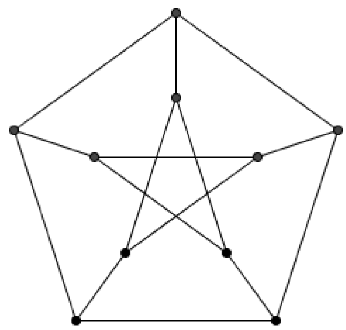


IV) $g = 5$ y :

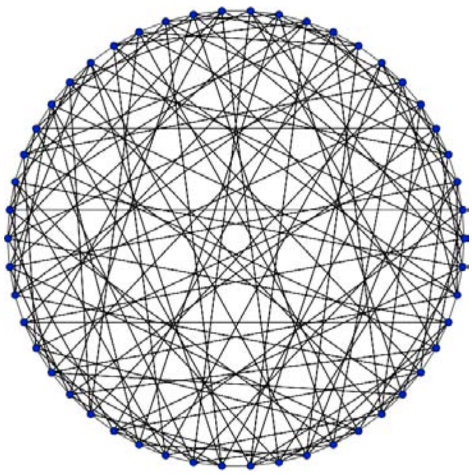
a) $k = 2$, el 5-ciclo C_5:



b) $k = 3$, la gráfica de Petersen:



c) $k = 7$, la gráfica de Hoffman-Singleton;



d) y posiblemente $k = 57$;

V) $g = 6$,8 o 12, y existe un n-ágono simétrico generalizado de orden $k - 1$ una potencia de primo [7].

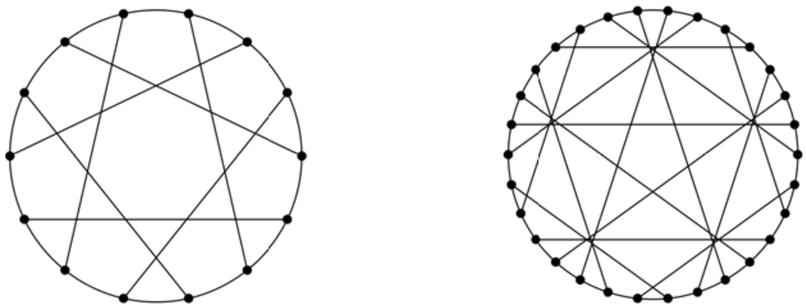


Figura 1.2: Representación de la gráfica de Heawood y de Tutte-Coxeter, es decir, la $(3, 6)$-jaulita y la $(3, 8)$-jaulita, respectivamente.

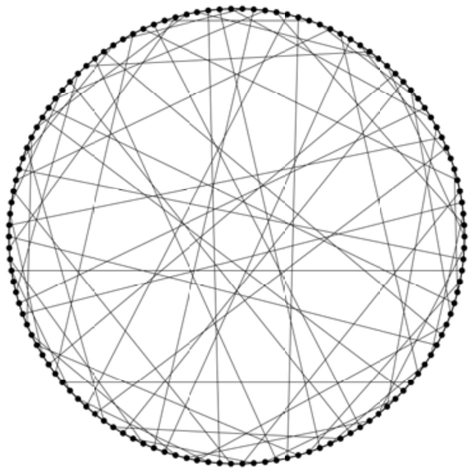


Figura 1.3: La gráfica de Benson es la $(3, 12)$-jaulita.

A la fecha no ha sido posible resolver el problema sobre la existencia de la $(57, 5)$-jaulita o gráfica de Moore de cuello $g = 5$ y regularidad $k = 57$, a la cual también se le ha dado el sobrenombre de el *"Monstruo"*, debido a esto, esta tesis tiene como objetivo principal construir una gráfica que sea regular, de cuello $g = 5$, que tenga el mismo orden que el *"Monstruo"*, es decir con $1 + 57 + 57(56) = 3250$ vértices, y que esta sea de regularidad la máxima que podemos obtener.

Dado que esta tesis estudia jaulas de cuello cinco, es decir hacemos un análisis detallado del artículo [1] y utilizamos herramientas que también se dan en el artículo [2], nos parece importante describir brevemente algunas jaulas de cuello cinco que no alcanzan la cota de Moore, sin embargo, se ha probado mediante distintas técnicas que no es posible construir gráficas regulares de cuello cinco con menos vértices [7]. Un ejemplo es la gráfica de Robertson, la única $(4, 5)$-jaula de orden 19, la cual no es vértice-transitiva, a diferencia de las jaulas que alcanzan la cota de Moore que sí lo son. Existen cuatro $(5, 5)$-jaulas de orden 30, una de ellos es una subgráfica de la gráfica de Hoffman-Singleton [7]. La $(6, 5)$-jaula es única y tiene orden 40, puede construirse eliminando vértices de las gráficas de Petersen en la gráfica de Hoffman-Singleton, y aunque no alcanza la cota de Moore es vértice-transitiva [7].

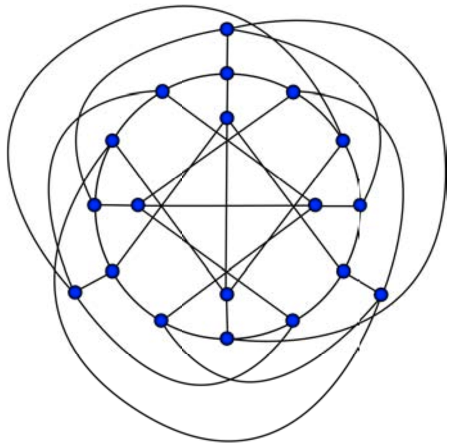


Figura 1.4: La gráfica de Robertson.

Como mencionamos en un principio, para el desarrollo de esta tesis nos apoyamos en estructuras de incidencias que son llamadas geometrías finitas, por ello a continuación mostraremos una breve resena sobre ellas [9].

Una estructura de incidencia consiste de un conjunto de puntos P, un conjunto de líneas L y una relación $I \subseteq P \times L$. Si $(p, l) \quad I$ diremos que el punto p y la línea l son incidentes, si dos puntos son incidentes en una línea común diremos que son colineales y dos líneas son concurrentes si son incidentes a un punto común.

Si tenemos una estructura de incidencia $\mathcal{I} = (P, L, I)$, entonces su dual también es una estructura de incidencia $\mathcal{I}^* = (L, P, I^*)$, donde $I^* = \quad (l, p)\ (p, l) \quad I \;$, es decir, su dual es el resultado de intercambiar puntos por líneas y líneas por puntos.

La gráfica de incidencia $X(\mathcal{I})$ de una estructura de incidencia $\mathcal{I} = (P, L, I)$ es una gráfica bipartita en donde los vértices de una parte de la partición corresponden a los puntos P de $\mathcal{I}$, y los vértices de la otra parte a las líneas de $\mathcal{I}$; dos vértices de $X(\mathcal{I})$ son adyacentes si y sólo si ellos pertenecen a I. Las gráficas de incidencia fueron introducidas por Levi [14] en 1942, por lo cual también se les asocia con el nombre de gráficas de Levi, es así como nos referiremos a las gráficas de incidencia en esta tesis.

También se puede definir una estructura de incidencia a partir de una gráfica bipartita dada, nombrando a una de las partes de la partición como puntos, a la otra como líneas y decir que un punto es incidente a una línea si los vértices que los representan son adyacentes en la gráfica bipartita. Nótese que la estructura dual también queda determinada ya que la elección del conjunto de puntos es arbitraria y una vez que este se define determina al conjunto de líneas.

Definición 1.0.2 *Un* **espacio parcialmente lineal** *es una estructura de incidencia que satisface que entre cualesquiera dos puntos hay a lo más una línea que los contiene.*

Definición 1.0.3 *Un* **espacio lineal** *es un espacio parcialmente lineal que satisface que entre cualquier par de puntos hay exactamente una línea que los contiene.*

Lema 1.0.4 *La gráfica de Levi $X(\mathcal{I})$ de un espacio parcialmente lineal $\mathcal{I} = (P, L, I)$ tiene cuello al menos 6.*

Demostración. Sea $\mathcal{C}$ un ciclo en X. Como X es bipartita entonces $\mathcal{C} \; \geq 4$. Si $\mathcal{C} \; = 4$ entonces $\mathcal{C} = (p, l, q, m)$, donde $p, q \quad P$ y $l, m \quad L$, es decir $p, q \; \subset l$ y $p, q \; \subset m$, lo cual es una contradicción.

Por lo tanto $\mathcal{C} \; \geq 6$ para todo ciclo $\mathcal{C}$ en X. ■

La base de nuestra gráfica objetivo es la gráfica de Levi del semiplano elíptico, estructura definida más adelante y motivo por el cual es muy importante que conozcamos sus características. Además, veremos que es posible obtener semiplanos elípticos a partir de las estructuras de incidencia llamadas planos proyectivos finitos. En los siguientes párrafos nos enfocaremos en dar la definición de plano proyectivo finitos y observaremos algunas de sus características, pues algunas las heredarán a los semiplanos elípticos que a su vez facilitarán su descripción.

Presentaremos dos definiciones de plano proyectivo finito, una combinatoria y otra algebraica, sin embargo nos centraremos en la definición algebraica, pues es la que utilizamos en la construcción de nuestra gráfica. Comenzamos con la definición combinatoria.

Definición 1.0.5 *Un* **plano proyectivo finito** *es un espacio lineal* $\Pi = (P, L, I)$ *que satisface los siguientes tres axiomas:*

1. *Para todo par* $x_1, x_2 \quad P$*, existe una línea* $l \quad L$ *tal que* $\ x_1, x_2 \ \subset l$*.*

2. *Para todo* $l_1, l_2 \quad L$*, se tiene que* $\ l_1 \quad l_2 \ = 1$*, es decir, cualquier par de líneas se intersectan en exactamente un punto.*

3. *Existe un conjunto* $\mathcal{F}$ *de 4 elementos,* $\mathcal{F} \subseteq P$*, tal que* $\ l \quad \mathcal{F} \ \leq 2$ *para toda* $l \quad L$*.*

De acuerdo con esta definición, los planos proyectivos finitos cumplen la siguiente proposición:

Proposición 1.0.6 *Sea* $\Pi = (P, L, I)$ *un plano proyectivo finito. Si* l*,* $l \quad L$ *entonces* $\ l \ = \ l \ $*.*

Demostración. Sean l, $l \quad L$. Por definición de plano proyectivo finito, sabemos que existe un conjunto $\mathcal{F}$ de cuatro puntos no colineales tales que $\ l \quad \mathcal{F} \ \leq 2$ y $\ l \quad \mathcal{F} \ \leq 2$. Primero demostraremos por casos que existe $z \quad P$ tal que $z \quad l$ y $z \quad l$.

Caso 1) Si $\mathcal{F} \subseteq l \quad l$, entonces existe z que no pertenece ni a l ni a l .

Caso 2) Si $\mathcal{F} \subseteq l \quad l$, entonces 2 puntos de $\mathcal{F}$ intersectan a l (digamos a, b) y los otros 2 intersectan a l (sean c, d). Sea $l_1 = \overline{ac}$ y $l_2 = \overline{bd}$. Si z es la intersección de l_1 y l_2, entonces $z \quad l \quad l$.

Ahora veremos que l y l tienen el mismo orden. Sean $z \quad l \quad l$ y $\psi_z : l \quad l$ tal que a cada $x \quad l$ le corresponda la intersección de la línea $\overline{zx}$ con l , la cual es única. Veamos ahora que ψ_z es una biyección. Sea $y \quad l$ y consideremos la línea $\overline{zy}$. Si x es el punto de intersección con l, entonces $\overline{zy}$ y $\overline{zx}$ tienen que ser la misma línea, es decir $y = \psi_z(x)$. Por lo tanto ψ_z es una biyección y $\ l \ = \ l \ $. ∎

Demostrado lo anterior, la siguiente definición resulta natural y es esencial en la caracterización de los planos proyectivos finitos.

Definición 1.0.7 *El* **orden** *de un plano proyectivo finito* $\Pi = (P, L, I)$ *se define como* $\ l\ - 1 = n$. *Un plano proyectivo finito de orden* n *se denota por* Π_n.

Anteriormente habíamos mencionado que el dual de una estructura de incidencia se obtiene intercambiando puntos por líneas y líneas por puntos, teniendo esto presente, mostraremos dos proposiciones relacionadas con la definición de orden de un plano proyectivo finito desde el enfoque dual, es decir, nos proporcionan caracteristicas de los puntos. Ahora llamaremos a los planos proyectivos finitos simplemente planos proyectivos.

Proposición 1.0.8 *Sea* $\Pi_n = (P, L, I)$ *un plano proyectivo de orden* n. *Si* $x \quad P$, *entonces existen exactamente* $n + 1$ *líneas que pasan por* x.

Demostración. Sean $a, b, x \quad P$ y $l \quad L$, tales que $x \quad l$ y $l = \overline{ab}$. Por el axioma 1) hay una línea por cada punto de l que pasa por x, y como $\ l\ = n + 1$ entonces por x pasan al menos $n + 1$ líneas.

Además, cualquier línea que contiene a x se intersecta con l en algún punto $y \quad l$, y por lo tanto ya fue contada dentro de las $n + 1$ líneas que pasan por x.

Por lo tanto, por x pasan exactamente $n + 1$ líneas. ■

Proposición 1.0.9 *Si* $\Pi_n = (P, L, I)$ *es un plano proyectivo de orden* n, *entonces* $\ P\ = n^2 + n + 1$.

Demostración. Sea $l = \ x_0, x_1, \ldots, x_n \quad L$ y un punto $a \quad l$. Sea l_i la línea $\overline{ax_i}$, $i = 0, 1, \ldots, n$. De acuerdo con $(P1)$, cualesquiera 2 rectas l_i y l_j, se intersectan en un sólo punto, el cual debe ser a. Las rectas $l_0, l_1, \ldots, l_n$ tienen cada una n puntos sin incluir a a, que es un punto común a todas las l_i, por lo que todas juntas tienen $n(n + 1) + 1 = n^2 + n + 1$ puntos distintos, con esto ya incluimos a todo $x \quad X$, ya que la recta $\overline{ax}$, por $(P1)$, se interseca con l en algún x_i, y por $(P0)$, la recta $\overline{ax}$

coincide con l_i. ■

De forma similar y debido a que el dual es el resultado de intercambiar puntos por líneas y líneas por puntos, se tiene que por cada punto inciden $n+1$ líneas y que $|L| = n^2+n+1$.

De las observaciones anteriores se concluye el siguiente teorema con relación a la gráfica de Levi de un plano proyectivo Π_n.

Teorema 1.0.10 *La gráfica de Levi de un plano proyectivo* Π_n *es una gráfica bipartita, de orden* $2(n^2+n+1)$ *y es* $(n+1)$*-regular.*

Demostración. Sea X la gráfica de Levi de Π_n. Como $|P| = n^2+n+1$ y $|L| = n^2+n+1$, el orden de X es $2(n^2+n+1)$; en Π_n sucede que por cada punto pasan $n+1$ líneas y cada línea tiene $n+1$ puntos, por lo que X es $(n+1)$-regular. Finalmente, X es bipartita ya que es la gráfica de Levi de Π_n. ■

Además, por el axioma 3), en cualquier plano proyectivo existen 3 puntos no colineales, y por el axioma 1) se tiene que estos puntos forman un triángulo, es decir existe la sucesión de puntos y líneas $(p_1, l_1, p_2, l_2, p_3, l_3, p_1)$, por lo que el cuello de la gráfica de Levi de un plano proyectivo Π_n es seis y ya que es $(n+1)$-regular y de orden $2(n^2+n+1) = n_0(n+1, 6)$, la gráfica de Levi de Π_n es una $(n+1, 6)$-jaula que alcanza la cota de Moore, es decir, es una jaulita.

Un ejemplo de plano proyectivo finito es Π_2, el cual es conocido como el plano de Fano, el cual tiene orden 2 ya que cada línea tiene 3 puntos, por cada punto pasan 3 líneas y tiene $7 = 2^2+2+1$ puntos (líneas), como se observa en la Figura 1.5.

Por los párrafos anteriores sabemos que la gráfica de Levi de un plano proyectivo es una jaula de cuello 6, por lo que la gráfica de Levi del plano de Fano es una jaula, de hecho es la $(3, 6)$-jaulita, conocida como la gráfica de Heawood, la Figura 1.6 muestra una representación de esta gráfica.

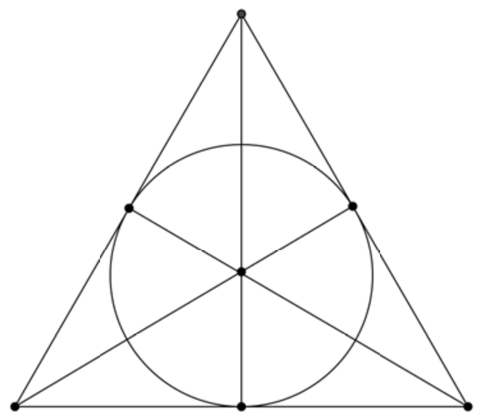


Figura 1.5: Representación del Plano de Fano.

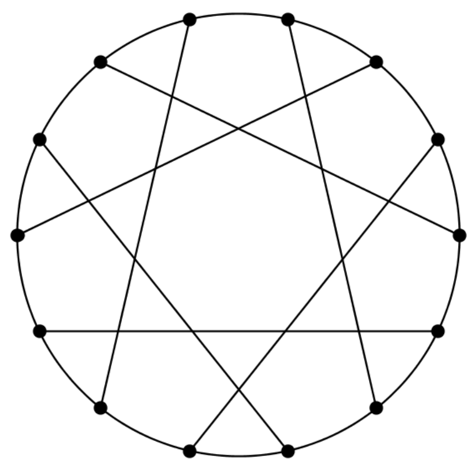


Figura 1.6: Representación de la gráfica de Heawood.

En relación a la definición algebraica de plano proyectivo finito, es necesario definir algunos conceptos previos que acontinuación hacemos.

Para $q = p^n \geq 2$ una potencia de primo y α una $(q-1)$-ésima raíz primitiva de la unidad, es decir, $\alpha^{q-1} = 1$, se define el campo finito de orden q como $GF(q) = \ \ 0, 1, \alpha, \alpha^2, \ldots, \alpha^{q-2}\ \ $.

Con q^2 parejas ordenadas de elementos de $GF(q)$, definimos el conjunto de puntos $P_A := \ \ (x, y)_0 : x, y \quad GF(q)\ \ $, y entonces se tiene lo siguiente.

Si $m, b \quad GF(q)$, entonces $(m, b)_1 = \ \ (x, y)_0 \quad P_A : y = mx + b\ \ $ es una línea y $L_m = \ \ (m, b)_1 : b \quad GF(q)\ \ $ es el conjunto de líneas con pendiente $m \quad GF(q)$, asimismo $(*, b)_1 = \ \ (b, y)_0 \quad P_A : y \quad GF(q)\ \ $ es la línea que satisface la ecuación $x = b$, es decir, es una línea con pendiente *infinito* y por tanto el conjunto $L_* = \ \ (*, b)_1 : b \quad GF(q)\ \ $ es el conjunto de líneas con pendiente *infinito*.

Además si $p_i := \bigcap_{l \quad L_i} l$, para cada $i \quad GF(q)$ y $p \quad := \bigcap_{l \quad L_*} l$, entonces el conjunto de puntos al *infinito* es $\ \ p_0, \ldots, p_{\alpha^{q-2}}, p \quad$ con $(q+1)$ elementos los cuales conforman la *línea al infinito*, $l \quad$.

Ahora podemos definir al ***plano proyectivo algebraico de orden q*** como una estructura de incidencia $\mathbb{P} = (P, L, I)$, donde $P := P_A \quad p_0, \ldots, p_{\alpha^{q-2}}, p \quad$, el conjunto $L := \bigcup_{i \quad GF(q)} L_i \quad L_* \quad l \quad$ y $(p, l) \quad I$ en cualquiera de los siguientes casos:

(a) $p = (x, y)_0$, $l = (m, b)_1$ y $y = mx + b$, $x, y, m, b \quad GF(q)$,

(b) $p = (x, y)_0$, $l = (*, b)_1$ y $x = b$, $x, y, b \quad GF(q)$,

(c) $p \quad l \quad$ y $l = l \quad$.

Un plano proyectivo algebraico de orden q es denotado por $PG(2, q)$, donde los parámetros se refieren a la dimensión y orden del plano, respectivamente, y su existencia depende de la existencia del Campo Finito $GF(q)$.

Dos ejemplos de planos proyectivos algebraicos son $PG(2, 2)$ y $PG(2, 3)$, ver Figura 1.7 a modo de ilustración, ambos isomorfos a los planos proyectivos combinatorios Π_2 y Π_3, respectivamente, lo que en general no sucede como más adelante notaremos.

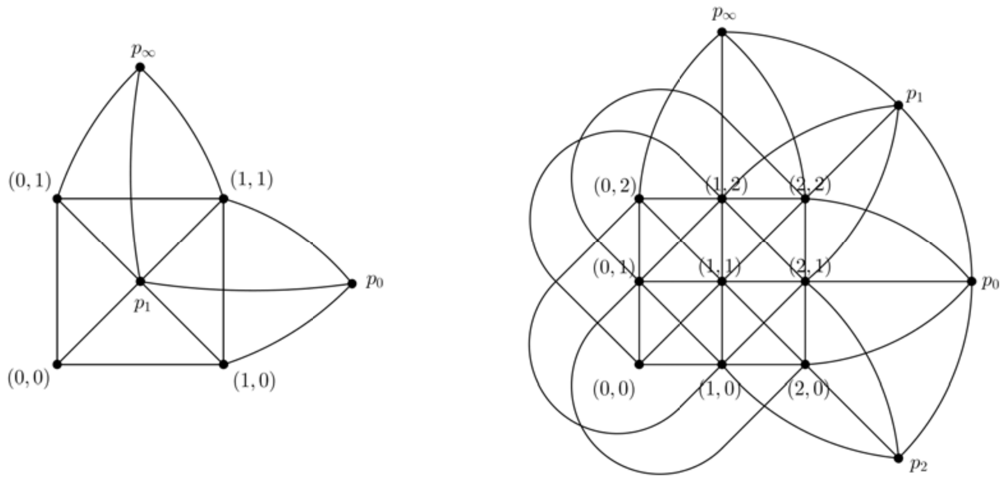


Figura 1.7: Representación de los planos proyectivos algebraicos PG(2,2) y PG(2,3), respectivamente.

Respecto a la gráfica de Levi de un plano proyectivo $PG(2, q)$, así como en general lo es cualquier gráfica de Levi de una estructura de incidencia, es bipartita, $(q + 1)$-regular y tiene $2(q^2 + q + 1)$ vértices; los vértices que representan a las líneas tienen las siguientes vecindades (ver Figura 1.8 y Figura 1.9):

1. $N(l \quad) = \quad p_0, \ldots, p_{\alpha^{q-2}}, p \quad ,$
2. $N((*, b)_1) = \quad (b, y)_0 : y \quad GF(q) \qquad p \quad$ y
3. $N((m, b)_1) = \quad (x, y)_0 : y = mx + b \;.$

Sobre la existencia de los planos proyectivos de orden q, de lo anterior se tiene que cuando q es potencia de primo, esta queda determinada por el campo $GF(q)$ [6]. En general la existencia de planos proyectivos cuando q no es potencia de primo aún es un problema abierto, sin embargo se conocen resultados que prueban que los planos proyectivos de orden q no existen para ciertos valores de q, uno de estos resultados es el teorema siguiente.

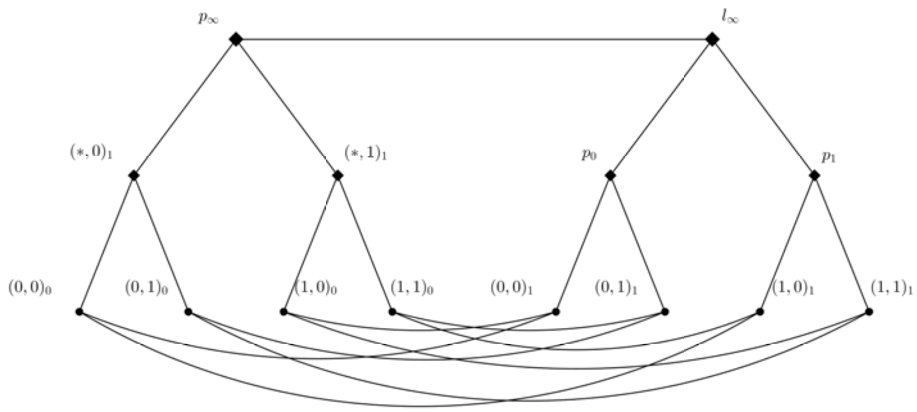


Figura 1.8: Gráfica de Levi del plano proyectivo algebraico PG(2,2).

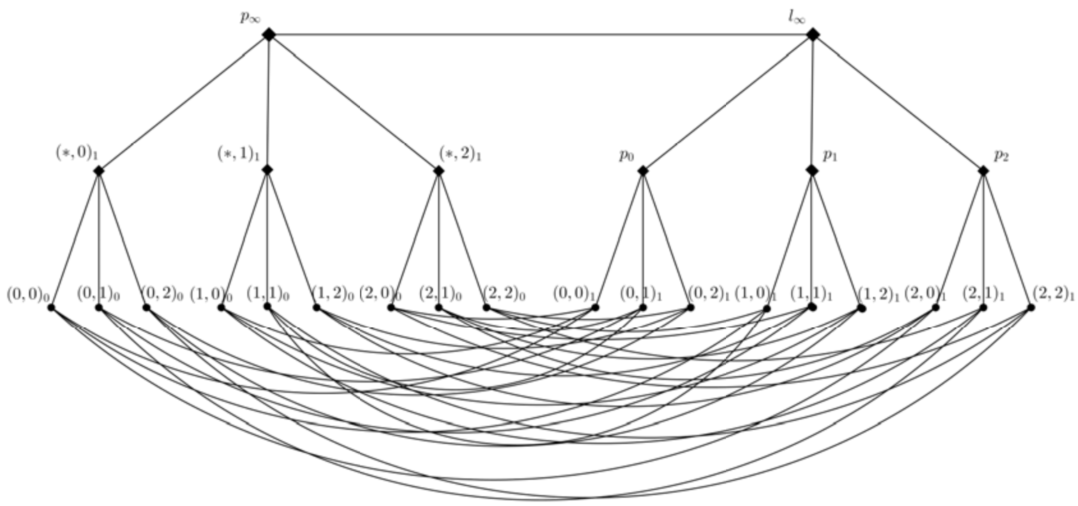


Figura 1.9: Gráfica de Levi del plano proyectivo algebraico PG(2,3).

Teorema 1.0.11 *Si el número q es dividido por 4 y el residuo es 1 o 2 y q no puede ser escrito como la suma del cuadrado de dos números enteros, entonces el plano proyectivo de orden q no existe.*

La prueba de este teorema no es trivial. Y aunque descarta la existencia de planos proyectivos de orden 6, 14 y de muchos otros, faltan muchos órdenes posibles por cubrir. Por ejemplo, no nos dice nada acerca de los planos proyectivos de orden $n = 10$ o 12. Sin embargo ya ha sido probada la inexistencia de planos proyectivos de orden 6 y 10 con otros métodos. La prueba para el de orden 6 fue intentada por Euler, pero fue hasta 1900 cuando Tarry dio una prueba convincente [17]. Y para el de orden 10, la prueba se llevó a cabo en el siglo pasado haciendo multiples cálculos mediante computadoras [13]. Para el siguiente orden superior, 12, la existencia de un plano proyectivo sigue siendo un problema abierto. Es claro que el problema también podría ser resuelto mediante la comprobación de un número finito de configuraciones, pero el número de configuraciones parece ser demasiado gigantesco para la tecnología informática actual [15]. Sobre la existencia de los planos proyectivos de órdenes $2, 3, 5$ y 7 se sabe que estos existen y son únicos (en particular, el plano combinatorio es isomorfo al algebraico) y respecto al orden 9, se ha probado que existen 4 planos proyectivos no isomorfos con este orden [17].

Dicho todo lo anterior sobre planos proyectivos finitos, presentamos en seguida un par de conceptos necesarios para entonces hablar del semiplano elíptico y algunas de sus características.

En una estructura de incidencia (P, L, I) se dice que dos líneas l_1 y l_2 son *paralelas*, $l_1 \quad l_2$, si sucede que $l_1 = l_2$ o si $l_1 \quad l_2 = \quad$. Análogamente, dos puntos p_1 y p_2 son *paralelos* si $p_1 = p_2$ o si no existe una línea que no pasa por los dos puntos. El término *bandera* se refiere a una pareja $(p, l) \quad I$ y, por tanto, una *antibandera* es una pareja $(p, l) \quad I$.

Definición 1.0.12 *Un* **semiplano elíptico** *de orden $n - 1$ es una estructura de incidencia que satisface que cada punto es incidente con n líneas y cada línea es* *incidente con n puntos, tiene la misma cantidad de puntos que de líneas y cumplen los siguientes axiomas de paralelas:*

Por cada antibandera (p,l) se tiene:

1. *existe a lo más una línea l   L tal que p   l y l l ,*
2. *existe a lo más un punto p   l tal que p y p' son paralelos.*

Como ya habíamos mencionado, un semiplano elíptico se puede construir a través de un plano proyectivo finito adecuado, dicha construcción se muestra en seguida.

En un plano proyectivo elegimos un punto y una línea (p, l) particulares, y definimos un *subconjunto Baer* como la unión de todas las líneas y puntos incidente con p y l, según corresponda. Escribimos $B(p\ l)$ o $B(p \nmid l)$, si p y l son o no incidentes, respectivamente. Se sabe que los semiplanos elípticos se obtienen mediante la eliminación de un subconjunto Baer de un plano proyectivo [6]. Dembowski probó que en un semiplano elíptico (P, L, I) de orden $v = n - 1$ (i.e. con $n = v + 1$ puntos en cada línea) todas las clases de paralelas en P y L tienen el mismo tamano, digamos m, y que m divide a $n(n-1)$. También probó que el número total de puntos (líneas) es $n(n-1) + m$ y clasificó a los semiplanos elípticos dependiendo del valor de la m en:

- impropios, si $m = 1$,
- tipo $\mathcal{C}$, si $m = n$,
- tipo $\mathcal{L}$, si $m = n - 1$,
- tipo $\mathcal{D}$, si $m = n - \ \overline{n}$,
- tipo $\mathcal{B}$, si $m < n - \ \overline{n}$.

El trabajo realizado en esta tesis se desarrolla sobre la gráfica de Levi de un semiplano elíptico de tipo $\mathcal{C}$, por lo que en seguida se describirá el subconjunto Baer que debe ser eliminado del plano proyectivo para obtener dicha estructura.

El punto y la línea elegidos en el plano proyectivo $PG(2, q)$ que definen a nuestro subconjunto Baer deben ser adyacentes y, por la simetría del plano proyectivo es equivalente tomar cualesquiera, por comodidad se eligió la bandera $(p\quad, l\quad)$. Así, se define el semiplano elíptico de tipo $\mathcal{C}$ como el complemento del subconjunto Baer $B(p\quad l\quad)$ en $PG(2, q)$, es decir, $\mathcal{C}_{q-1} = PG(2, q) - B(p\quad l\quad)$, siempre que exista $PG(2, q)$. La siguiente figura ilustra cómo obtener $\mathcal{C}_2$ a partir del plano $PG(2, 3)$.

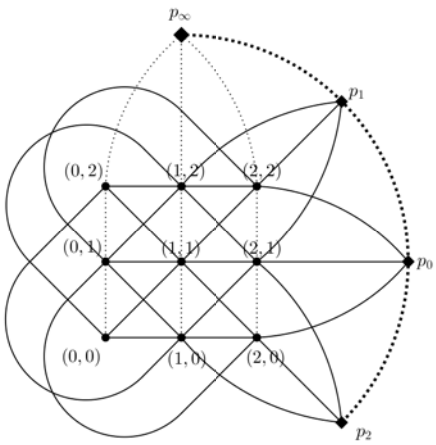


Figura 1.10: Del plano algebraico PG(2,3) elegimos la bandera $(p\quad, l\quad)$ que define al subconjunto Baer, las líneas punteadas y diamantes, el cual será eliminado para obtener al semiplano elíptico $\mathcal{C}_2$.

También mostraremos cómo se obtiene, análogamente, la gráfica de Levi de $\mathcal{C}_{q-1}$ a partir de la gráfica de Levi de $PG(2, q)$ y enunciaremos algunas de sus propiedades que serán de gran utilidad más adelante.

De la gráfica de Levi de $PG(2, q)$ se eliminan los conjuntos de vértices $\quad l\quad, p_0, \ldots, p_{\alpha^{q-2}}, p\quad \bigcup\ (*, b)_1 : b\quad GF(q)$ y así se obtiene la gráfica de Levi de $\mathcal{C}_{q-1}$, la cual es denotada por B_q. En [1] se hace una descripción completa de la gráfica B_q, nosotros enunciamos algunas características que nos facilitarán la construcción de nuestras gráficas.

Los vértices de B_q heredan las etiquetas de la gráfica de Levi de $PG(2, q)$ y tiene la siguiente partición $V_0 = P_A$ y $V_1 = \bigcup_{m\quad GF(q)} L_m$, además un vértice $(x, y)_0\quad V_0$ es adyacente a un vértice $(m, b)_1 \quad V_1$ si satisfacen la ecuación $y = mx + b$. Además, si definimos los siguientes conjuntos: $P_x = \ (x, y)_0\ y \quad GF(q)\ $, para $x \quad GF(q)$ y $L_m = \ (m, b)_1\ b \quad GF(q)\ $, para $m \quad GF(q)$, es posible verificar la siguiente proposición de la gráfica B_q.

Proposición 1.0.13 *Sea B_q la gráfica de Levi de $\mathcal{C}_{q-1}$, entonces:*

1. *Es q-regular, bipartita, vértice-transitivas, de orden $2q^2$ y tiene cuello 6;*
2. *Permite una partición $V_0 = \bigcup_{x \quad GF(q)} P_x$ y $V_1 = \bigcup_{m \quad GF(q)} L_m$ en su conjunto de vértices;*
3. *Cada bloque P_x está asociado a cada bloque L_m por un apareamiento perfecto, para $x, m \quad GF(q)$;*
4. *Cada vértice en P_0 y L_0 tiene un* ***apareamiento directo*** *con todos sus vecinos en B_q, es decir, para $p = (0, y)_0$, $N(p) = \ (i, y)_1\ i \quad GF(q)\ $, y análogamene para $l = (0, b)_1$, $N(l) = \ (j, b)_0\ j \quad GF(q)\ $;*
5. *Los apareamientos entre P_x y L_m, para $x, m = 0$, son traslaciones de la identidad y la regla algebraica es $y = mx + b$.*

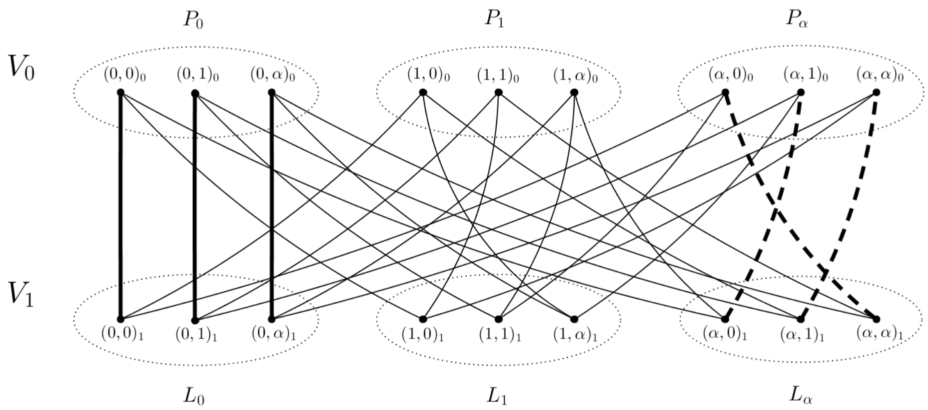


Figura 1.11: Representación de B_3. Las aristas que resaltan con línea continua son un ejemplo de un apareamiento directo entre P_0 y L_0, mientras que las del estilo - - - son un ejemplo de un apareamiento entre P_α y L_α trasladado.

Capítulo 2

Reducciones y Amalgamas

El problema sobre la construcción de (k, g)-gráficas con el menor orden posible ha sido de gran interés para distintos matemáticos, quienes han expuesto diversos métodos para construir familias de dichas gráficas. En este capítulo hacemos una descripción de los resultados dados por Abreu *et al*. en [1]. En el artículo se construyen $(k, 5)$-gráficas con pocos vértices, para $k \geq 3$, de la siguiente manera: para $n = k - r$ y algún $r \geq 1$, se toma la gráfica de Levi de un semiplano elíptico $\mathcal{S}$ de orden una potencia de primo $q = n - 1$, la cual es una gráfica n-regular de cuello 6, después se eliminan algunos de sus elementos y finalmente, para alcanzar la regularidad deseada, se anaden gráficas r-regulares adecuadas de cuello al menos 5.

Las dos últimas operaciones mencionadas son nombradas por primera vez por Funk en [8], respectivamente con los términos reducción y amalgama , y fueron la base del artículo descrito en esta sección y también serán fundamentales para el desarrollo de esta tesis ya que serán empleadas para hacer la modificación sobre la gráfica B_q, con el objetivo de acercarnos lo más posible a el *"Monstruo"*.

En esta sección describiremos a detalle lo hecho en [1] y estas operaciones, iniciando con la operación de reducción.

2.1. Reduccciones

La operación reducción se refiere a la acción de eliminar conjuntos de vértices de manera conveniente a una gráfica. Cuando se aplica esta operación su orden se reduce, por lo cual es utilizada en la construcción de (k, r)-jaulas. En [1] se aplican dos tipos de reducciones a la gráfica B_q, a continuación damos las descripciones.

Reducción 1 Eliminar vértices de P_0 y L_0.

Sean $T \subseteq S \subseteq GF(q)$, $S_0 = \quad (0, y)_0\ y \quad S \quad \subseteq P_0$, $T_0 = \quad (0, b)_1\ b \quad T \quad \subseteq L_0$ y $B_q(S, T) := B_q - S_0 - T_0$.

Lema 2.1.1 *Sean $T \subseteq S \subseteq GF(q)$. Entonces $B_q(S, T)$ es bi-regular, con conjunto de grados $\quad q-1, q \quad$, de orden $2q^2 - \quad S \quad - \quad T \quad$. Más aún, los vértices $(i, t)_0 \quad V_0$ y $(j, s)_1 \quad V_1$, para cada $i, j \quad GF(q) - \quad 0 \quad$, $s \quad S$ y $t \quad T$, son los vértices de grado $q-1$ en $B_q(S, T)$, junto con los vértices $(0, s)_1 \quad V_1$, para $s \quad S - T$, si $T \subsetneq S$.*

Demostración. Por la Proposición 1.0.13 sabemos que B_q es de orden $2q^2$, de manera que al quitar $\quad S \quad + \quad T \quad$ vértices, $B_q(S, T)$ queda de orden $2q^2 - \quad S \quad - \quad T \quad$.

Además, como se menciona también en la Proposición 1.0.13, B_q es q-regular y los bloques P_i, $i \quad GF(q)$, tienen un apareamiento directo con L_0, cuando quitamos los vértices del conjunto $T_0 = \quad (0, t)_1\ t \quad T \quad \subseteq L_0$, los vértices $(i, t)_0 \quad V_0$, para $i \quad GF(q) - \quad 0 \quad$ y $t \quad T$, pierden los vértices que eran sus vecinos en L_0 quedando de grado $q-1$.

Análogamente, los bloques L_j, $j \quad GF(q)$ tienen un apareamiento directo con P_0, y cuando quitamos los vértices de $S_0 = \quad (0, s)_0\ s \quad S \quad \subseteq P_0$, los vértices $(j, s)_1 \quad V_1$, para $j \quad GF(q) - \quad 0 \quad$ y $s \quad S$, quedan de grado $q-1$.

Ahora, como P_0 y L_0 tienen un apareamiento directo y $T \subseteq S$, cuando quitamos los vértices de T_0 y de S_0, todos los vértices que quedan de P_0 tienen grado q, y si $T \subsetneq S$, los vértices $(0, s)_1 \quad V_1$, para $s \quad S - T$, quedan de grado $q-1$ al perder el apareamiento directo con S_0.

Por lo que $B_q(S,T)$ es birregular con conjunto de grados $\;q-1, q\;$. ■

En caso de que $S = \;$, entonces $T = \;$ y $B_q(S,T) = B_q$.

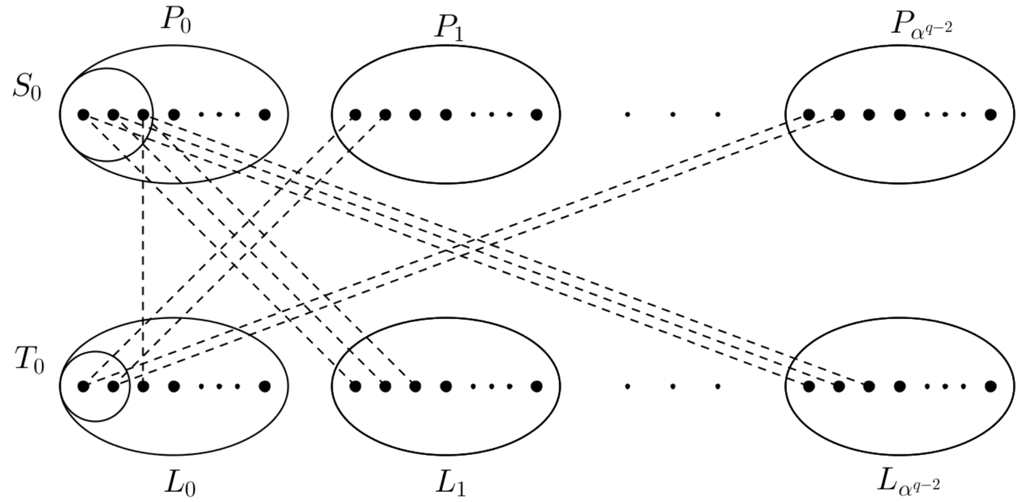


Figura 2.1: Ejemplo de la operación de Reducción 1 sobre la gráfica B_q, en este caso específico $S = \; 0, 1, \alpha\;$ y $T = \; 0, 1\;$, observamos que los vértices adyacentes a los vértices de S_0 y T_0 pierden un grado al quitar la arista punteada que los hacía adyacentes.

Reducción 2 Eliminar parejas de bloques (P_i, L_i) de B_q.

Sea $u \quad 1, \alpha, \ldots, \alpha^{q-3}$ y $\quad 1, \ldots, u \quad = u^*$. Se define $B_q(u)$ como la gráfica que se obtiene de B_q después de eliminar las últimas u^* parejas de bloques (P_i, L_i), es decir, $B_q(u) = B_q - \bigcup_{i=1}^{u}(P_{\alpha^{q-2}-i} \quad L_{\alpha^{q-2}-i})$, y se define a $B_q(S,T,u)$ como la gráfica que resulta de eliminar en B_q las últimas u^* parejas de bloques (P_i, L_i) y los subconjuntos de vértices $T \subseteq S \subseteq GF(q)$ de los bloques P_0 y L_0 como en la Reducción 1, es decir, $B_q(S,T,u) = B_q - S_0 - T_0 - \bigcup_{i=1}^{u}(P_{\alpha^{q-2}-i} \quad L_{\alpha^{q-2}-i})$.

Lema 2.1.2 *Sea* $u \quad 1, \alpha, \ldots, \alpha^{q-3}$ *y* $\quad 1, \ldots, u \quad = u^*$. *La gráfica* $B_q(u)$ *es* $(q-u^*)$*-regular de orden* $2(q^2 - qu^*)$*, y la gráfica* $B_q(S,T,u)$ *es bi-regular con con-*

junto de grados $D = \ \ q - u^* - 1, q - u^* \ \ $ *y de orden* $2(q^2 - qu^*) - \ S \ - \ T \ $. *Más aún, en la gráfica* $B_q(S, T, u)$ *los vértices de grado* $q - u^* - 1$ *son* $(i, t)_0 \quad V_0$ *y* $(j, s)_1 \quad V_1$*, para cada* $i, j \quad\ 0, 1, \ldots, \alpha^{q-2} - u \ \ , s \quad S$ *y* $t \quad T$*, junto con los vértices* $(0, s)_1 \quad V_1$*, para* $s \quad S - T$ *si* $T \subsetneq S$.

Demostración. Por la Proposición 1.0.13 sabemos que B_q es q-regular de orden $2q^2$, y que cada bloque P_i está asociado con cada bloque L_j por un apareamiento perfecto, para $i, j \quad GF(q)$, además cada uno de los bloques P_i y L_j tiene q vértices, así al quitar las últimas u^* parejas de bloques $P_{\alpha^{q-2}-i}$, $L_{\alpha^{q-2}-i}$, $i = 1, \cdots, u$, $B_q(u)$ queda de orden $2(q^2 - qu^*)$, y cada uno de sus vértices pierde u^* vecinos que están en los bloques que quitamos, por lo que $B_q(u)$ queda $(q - u^*)$-regular.

Ahora, si a $B_q(u)$ le quitamos los conjuntos de vértices $S_0 = \ \ (0, s)_0 \ s \quad S \ \subseteq P_0$ y $T_0 \ = \ \ (0, t)_1 \ t \quad\ T \ \subseteq \ L_0$, por el Lema 2.1.1, $B_q(S, T, u)$ queda de orden $2(q^2 - qu^*) - \ S \ - \ T \ $ y birregular con conjunto de grados $D = \ \ q - u^* - 1, q - u^* \ \ $, y los vértices de grado $(q - u^*) - 1$ son los mismos que en el lema quedaban de grado $q - 1$, es decir, los vértices $(i, t)_0 \quad V_0$ y $(j, s)_1 \quad V_1$, para cada $i, j \quad\ 0, 1, \ldots, \alpha^{q-2} - u \ \ $, $s \quad S$ y $t \quad T$, junto con $(0, s)_1 \quad V_1$ para $s \quad S - T$ si $T \subsetneq S$. ■

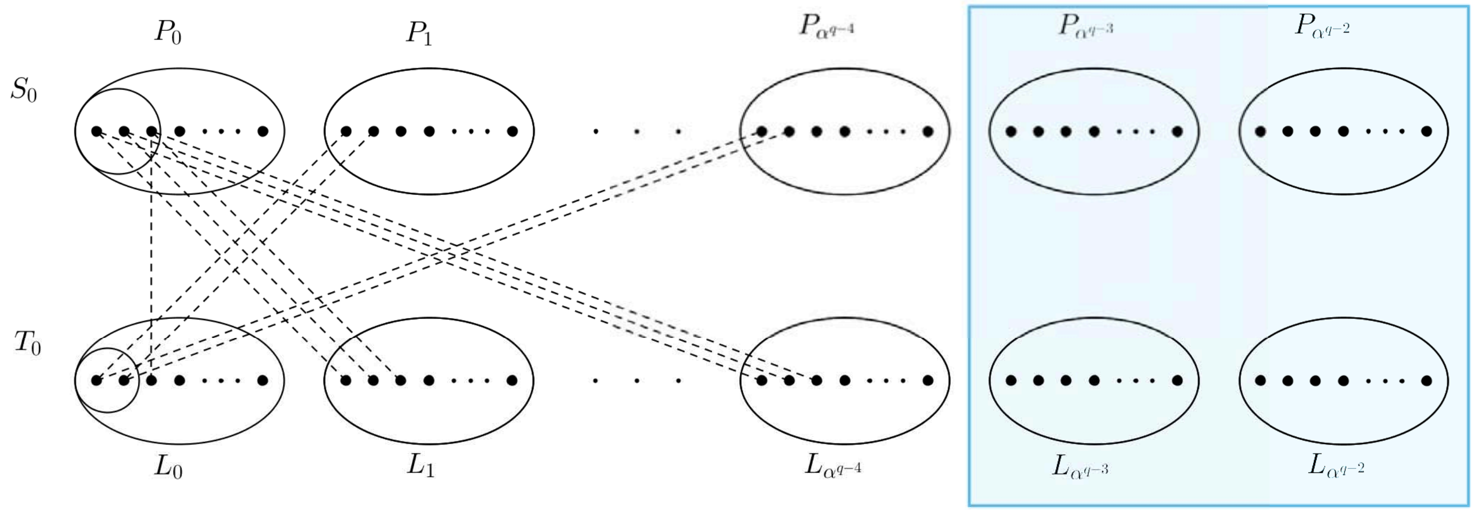


Figura 2.2: Ejemplo de la gráfica $B_q(S, T, u)$, donde $S = \;\; 0, 1, \alpha \;\;$, $T = \;\; 0, 1 \;\;$ y $u = \alpha$.

2.2. Amalgamas

El término amalgama se refiere, de manera abstracta, a la unión de dos objetos o cosas, dependiendo del contexto en el que se encuentre; las amalgamas o la técnica de amalgamar ha sido empleada en distintas áreas de las matemáticas, como en álgebra, en geometría finita y como se verá en el área de teoría de gráficas. De hecho, Higman utilizó la técnica de amalgamar para probar varios resultados sobre subgrupos isomorfos [10]; Kegel y Schleiermacher utilizaron la misma técnica sobre planos proyectivos [11]. En particular, en [1] y en [8] el término amalgama es empleado para referirse a la operación que agrega aristas de una gráfica a otra, en [1] fue empleada para construir gráficas regulares de cuello cinco con menos vértices de las que ya se conocían.

A continuación describimos formalmente esta operación.

Sean Γ_1 y Γ_2 dos gráficas del mismo orden y con las mismas etiquetas en sus vértices. Una *amalgama de* Γ_1 *en* Γ_2 es la gráfica que obtenemos al agregar todas las aristas de Γ_1 en Γ_2.

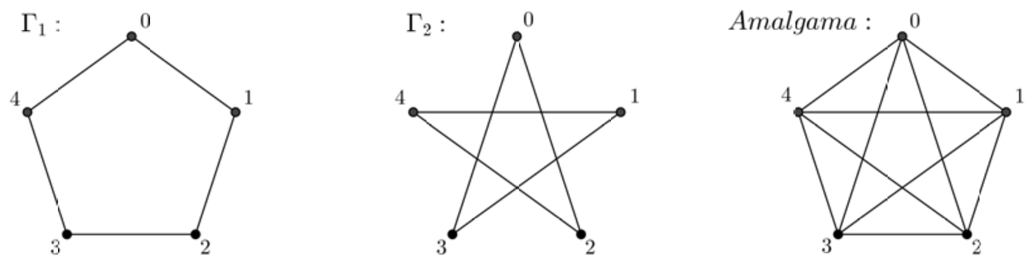


Figura 2.3: Un ejemplo sencillo de una amalgama de Γ_1 en Γ_2.

Ya que hemos descrito las operaciones utilizadas en el método, mostraremos cómo se aplican sobre la gráfica $B_q(S,T,u)$ para construir nuestra gráfica objetivo.

Considerar la gráfica $B_q(S,T,u)$, para algunos $T \subseteq S \subseteq GF(q)$, $S =$, y

$u \quad 1, \alpha, \ldots, \alpha^{q-3}$, con $\quad 1, \alpha, \ldots, u \quad = u^*$. Sean $S_0 \subseteq P_0$, $T_0 \subseteq L_0$ definidos como en la Reducción 1, y sean $P_0 := P_0 - S_0$ y $L_0 := L_0 - T_0$ los bloques en $B_q(S, T, u)$ de orden $q - \ S$ y $q - \ T$, respectivamente.

A continuación describiremos cuatro gráficas que serán amalgamadas en $B_q(S, T, u)$, el comportamiento de cada una de estas gráficas dependerá a su vez de cómo definamos los conjuntos S y T, con el fin de que, al aplicar la operación de amalgamar, la gráfica resultante sea regular.

Sea H_1 es una gráfica k-regular, si $\ S \ = \ T$, entonces H_2 deberá ser también una gráfica k-regular, sin embargo, si $\ S \ = \ T$, entonces H_2 deberá ser una gráfica birregular, con conjunto de grados $\ k, k+1$, donde $\ S - T \ $ vértices tendrán grado $k+1$. Por otro lado, si $T =$, entonces G_1 deberá ser una gráfica k-regular y si $T =$, entonces G_1 será birregular con conjunto de grados $\ k, k+1 \ $ y con $\ T \ $ vértices de grado $k+1$. Finalmente, G_2 deberá ser considerada como una gráfica birregular con conjunto de grados $\ k, k+1 \ $ y con $\ S \ $ vértices de grado $k+1$.

Sean H_1, H_2, G_1 y G_2, gráficas cualesquiera de cuello al menos 5 y orden $q - \ S$, $q - \ T$, q y q, respectivamente, que cumplen las condiciones de regularidad mencionadas en el párrafo anterior.

Definimos $B_q^*(S, T, u)$ como la gráfica que resulta de amalgamar H_1 en P_0, H_2 en L_0, G_1 en P_i y G_2 en L_i, para $i \quad 1, \ldots, \alpha^{q-2} - u - 1$. También definimos $B_q^*(S, T, \alpha^{q-3})$ como la gráfica que resulta de amalgamar H_1 en P_0 y H_2 en L_0.

Para simplificar la notación utilizada, utilizaremos las mismas etiquetas en P_i y L_i como en la Proposición 1.0.13, pero asumiendo que las etiquetas de H_1, H_2, G_1 y G_2, corresponden a la segunda coordenada de los vértices de P_0, L_0, P_i y L_i respectivamente para $i \quad 1, \ldots, \alpha^{q-2} - u - 1$. También supondremos que los vértices de grado $k+1$, si los hay, en H_2, G_1 y G_2, son etiquetados en correspondencia con la segunda coordenada de los vértices de $S - T$, T y S respectivamente.

Con tales etiquetas, sea ab una arista en H_1, H_2, G_1 o G_2, definimos los pesos o el color de Cayley de ab como $b - a \quad GF(q)$. Sea $\mathcal{P}_\omega$ el conjunto de pesos en H_1 y G_1, y sea $\mathcal{L}_\omega$ el conjunto de pesos en H_2 y G_2.

A continuación enunciamos un teorema que da las condiciones suficientes sobre los pesos de las aristas de $B_q^*(S,T,u)$ para obtener una gráfica $(q+k-u^*)$-regular con cuello al menos 5.

Teorema 2.2.1 *Si* $\mathcal{P}_\omega \quad \mathcal{L}_\omega = \quad$, *entonces la gráfica* $B_q^*(S,T,u)$ *es* $(q+k-u^*)$*-regular, con cuello al menos* 5 *y orden* $2(q^2 - qu^*) - \quad S \quad - \quad T \quad$.

Demostración. El orden y la regularidad de $B_q^*(S,T,u)$ se siguen del Lema 2.1.2 y de amalgamar correctamente las gráficas H_1, H_2, G_1 y G_2, es decir etiquetamos a los vértices de grado $k+1$ de G_2 con las mismas etiquetas que tienen los vértices de grado $q - u^* - 1$ de L_i en $B_q(S,T,u)$, para $i \quad 1, \ldots, \alpha^{q-2} - u - 1 \quad$, de manera que en $B_q^*(S,T,u)$ tienen grado $q + k - u^*$. Y etiquetamos de una manera análoga los vértices de H_2 con los de L_0, lo mismo hacemos con los vértices de grado $k+1$ de G_1 respecto de los de P_i, para $i \quad 1, \ldots, \alpha^{q-2} - u - 1 \quad$.

Ahora, para ver que el cuello es al menos 5, supongamos lo contrario. Sea C el ciclo de longitud mínima en $B_q^*(S,T,u)$ y que $\quad C \quad \leq 4$, es decir, $C = (xyz)$ o $C = (wxyz)$. Dado que B_q tiene cuello 6 y que H_1, H_2, G_1 y G_2 tienen cuello al menos 5, entonces C no puede estar completamente contenido ni en B_q o en alguna de las gráficas H_i o G_i para $i = 1, 2$. Sin pérdida de generalidad sea xyz una trayectoria en C, tal que $x, y \quad P_i$ y $z \quad L_m$ para algunos $i, m \quad 0, 1, \ldots, \alpha^{q-2} - u - 1 \quad$. Dado que entre P_i y L_m hay un apareamiento, ocurre que $xz \; / \; E(B_q)$, y por tanto $xz \; / \; E(B_q^*(S,T,u))$. De manera que $\quad C \quad > 3$ y podemos asumir que $\quad C \quad = 4$ y $C = (wxyz)$.

Por la misma razón del apareamiento entre P_i y L_m, no puede suceder que $w \quad P_i$. Además, como no hay aristas entre P_i y P_j en $B_q^*(S,T,u)$, para $j \quad 0, 1, \ldots, \alpha^{q-2} - u - 1 \quad - \quad i \quad$, ni entre L_m y L_n en $B_q^*(S,T,u)$, para $n \quad 0, 1, \ldots, \alpha^{q-2} - u - 1 \quad - \quad m \quad$, al igual que z, $w \quad L_m$. Sean $x = (i,a)_0$, $y = (i,b)_0$, $z = (m,c)_1$ y $w = (m,d)_1$, como las etiquetas que elegimos al principio. Si $wx, yz \quad E(B_q^*(S,T,u))$, entonces $a = mi + d$ y $b = mi + c$, respectivamente, con lo que tenemos que $b - a = c - d$. Pero si $xy, wz \quad E(B_q^*(S,T,u))$ implica que $ab \quad E(H_1) \quad E(G_1)$ y $cd \quad E(H_2) \quad E(G_2)$, con lo que tendríamos que $a - b \quad \mathcal{P}_\omega$ y $c - d \quad \mathcal{L}_\omega$, lo que contradice la hipótesis de que $\mathcal{P}_\omega \quad \mathcal{L}_\omega = \;$. ■

Capítulo 3

Construcción principal

En este capítulo construiremos la gráfica 43-regular, de orden 3250 y cuello cinco, aplicando operaciones de reducción y amalgamas sobre la gráfica B_{41}; el procedimiento está basado en la construcción que aparece el capítulo anterior y que fue expuesto en [1], sin embargo en este capítulo generalizamos algunas ideas utilizadas en dicho artículo.

Siguiremos con la notación anterior para hacer la construcción, pero para facilitar dicha notación trabajaremos sobre el grupo $\mathbb{Z}_{41}$, el cual es isomorfo a $GF(41)$ ya que 41 es número primo. Dicho lo anterior, construiremos la gráfica $B^{*}_{41}(S,T,u)$, donde $S = T = \quad 26, 27, \cdots, 40 \quad$ y $u = 1$, la cual cumplirá las hipótesis del Teorema 2.2.1 y por lo tanto será una la gráfica 43-regular, de orden 3250 y cuello cinco. Note que $\ S \ = \ T \ = 15$ y $u = 1$ para que el orden de la gráfica sea 3250.

A continuación describiremos las gráficas H_1, H_2, G_1 y G_2 que serán amalgamadas en $B_{41}(S,T,u)$. Además, para ser consistentes con las hipótesis requeridas en el Teorema 2.2.1, los pesos de las aristas de H_1 y G_1 serán ajenos a los pesos de las aristas de H_2 y G_2.

La gráfica H_i, para $i = 1, 2$, tiene conjunto de vértices $V(H_i) = \quad 0, 1, 2, \ldots, 25 \quad$ y conjunto de aristas $E(H_i) = A_i \quad B_i \quad C_i$, además a las aristas ab las denotaremos como (a, b) para evitar mayores confusiones.

Los conjuntos A_1, B_1 y C_1 para H_1 son:

- $A_1 = \;\; (i, i+1)\; i = 0, 1, \ldots, 11 \qquad (12, 0)\;$, el $13 - \textit{ciclo}$ tiene pesos $\;1, 12\;$,
- $B_1 = \;\; (i, i+2)\; i = 13, 14, \ldots, 23 \qquad (24, 13), (25, 14)\;$, el $13 - \textit{ciclo}$ tiene pesos $\;2, 11\;$,
- $C_1 = \;\; (i, i+13)\; i = 0, 1, \ldots, 12\;$, las aristas del apareamiento tienen peso $\;13\;$.

Mientras que para H_2:

- $A_2 = \;\; (i, i+3)\; i = 0, 1, \ldots, 9 \qquad (10, 0), (11, 1), (12, 2)\;$, el $13 - \textit{ciclo}$ con pesos $\;3, 10\;$,
- $B_2 = \;\; (i, i+4)\; i = 13, 14, \ldots, 21 \qquad (22, 13), (23, 14), (24, 15), (25, 16)\;$, el $13 - \textit{ciclo}$ con pesos $\;4, 9\;$,
- $C_2 = \;\; (i, i+17)\; i = 0, 1, \ldots, 8 \qquad (9, 13), (10, 14), (11, 15), (12, 16)\;$, las aristas del apareamiento con pesos $\;4, 17\;$.

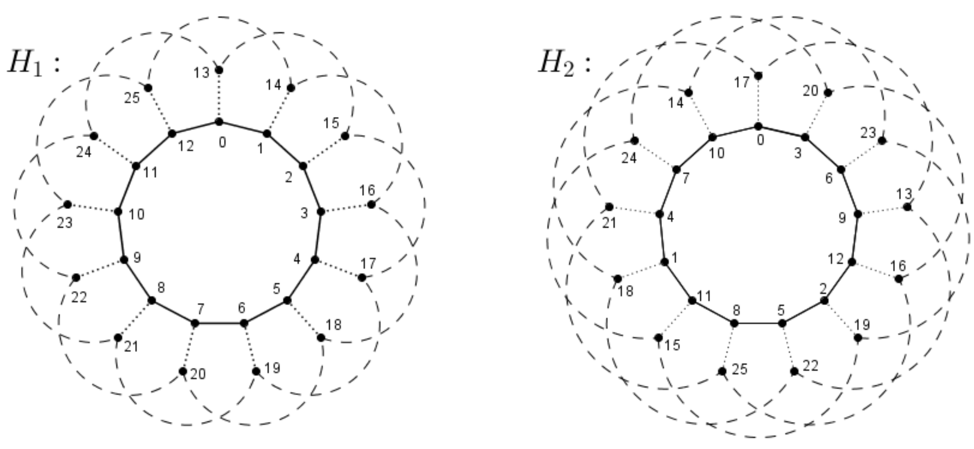


Figura 3.1: Representación de las gráficas H_1 y H_2, respectivamente. Las aristas de línea continua representan el $13 - \textit{ciclo}$ del conjunto A, las del estilo - - - al $13 - \textit{ciclo}$ del conjunto B y las de estilo $\cdots$ es el apareamiento del conjunto C.

Como observamos en la Figura 3.1, las gráficas H_1 y H_2 son de orden 26 y con conjunto de pesos $1, 2, 11, 12, 13$ y $3, 4, 9, 10, 17$ respectivamente; además para asegurar que $B^*_{41}(S, T, u)$ tiene cuello cinco, probaremos que el cuello de H_1 es cinco y que el de H_2 es al menos cinco.

Lema 3.0.1 *La gráfica H_1 tiene cuello cinco.*

Demostración. Sea C el ciclo de longitud mínima en H_1. Si $E(C) \subseteq A_1$ o $E(C) \subseteq B_1$, entonces $C \;\; > 5$. De lo contrario hay dos casos posibles, (1) existe una trayectoria xyz en C tal que $x, y \quad 0, \cdots, 12$ y $z \quad 13, \cdots, 25$ o, (2) el vértice $x \quad 0, \cdots, 12$ y $y, z \quad 13, \cdots, 25$. En (1) se tienen los siguientes subcasos:

(a) $x = 0$, $y = 12$, $z = 25$

(b) $x = i$, $y = i - 1$, $z = 13 + i - 1$, para $i = 1, \cdots, 12$

(c) $x = i$, $y = i + 1$, $z = 13 + i + 1$, para $i = 0, \cdots, 11$

(d) $x = 12$, $y = 0$, $z = 13$

Si mostramos que $z \ / \ N_{H_1}(x)$, entonces $C \;\; = 3$, y si $\;\; y \;\; = N_{H_1}(x) \quad N_{H_1}(z)$, entonces $C \;\; = 4$. Analizaremos sólo los subcasos (a) y (b), ya que la prueba de los otros dos es análoga.

En el subcaso (a) las vecindades de x y z en H_1 son $N_{H_1}(x) = \quad 1, 12, 13$ y $N_{H_1}(z) = \quad 12, 14, 23$, respectivamente. Es decir, $z \ / \ N_{H_1}(x)$ y además $\;\; y \;\; = \;\; 12 \;\; = N_{H_1}(x) \quad N_{H_1}(z)$. Y para el subcaso (b) tenemos otros tres subcasos, en los cuales las vecindades de x y z en H_1 son:

- $N_{H_1}(x) = \quad i - 1, i + 1, i + 13$ y $N_{H_1}(z) = \quad i - 1, i + 14, i + 23$, cuando $x = i = 1, 2$
- $N_{H_1}(x) = \quad i - 1, i + 1, i + 13$ y $N_{H_1}(z) = \quad i - 1, i + 10, i + 14$, cuando $x = i = 3, \cdots, 11$
- $N_{H_1}(x) = \quad i - 12, i - 1, i + 13$ y $N_{H_1}(z) = \quad i - 1, i + 1, i + 10$, cuando $x = i = 12$

En cada uno de los subcasos anteriores $z = (13 + i - 1) \ / \ N_{H_1}(x)$ y además

$y = i - 1 = N_{H_1}(x) \quad N_{H_1}(z)$. Como ya habíamos observado, en los subcasos (c) y (d) pasa algo análogo. Por lo tanto $C \geq 5$ en cada uno de los subcasos (a), (b), (c) y (d). De forma análoga se hace el análisis para (2).

El ciclo $(0, 1, 2, 15, 13)$ es un 5-ciclo en H_1, lo que muestra que el cuello de H_1 es cinco. ■

Lema 3.0.2 *La gráfica H_2 tiene cuello al menos cinco.*

Demostración. La prueba es muy parecida a la del Lema 3.0.1. Sea C el ciclo de longitud mínima en H_2. Si $E(C) \subseteq A_2$ entonces $C = 13$, lo mismo ocurre si $E(C) \subseteq B_2$. De no ser así hay dos casos posibles para la trayectoria xyz en C, (1) $x, y \quad 0, \cdots, 12$ y $z \quad 13, \cdots, 25$ o, (2) el vértice $x \quad 0, \cdots, 12$ y $y, z \quad 13, \cdots, 25$. En (1) se tienen los siguientes subcasos:

(a) $x = i$, $y = i + 10$, $z = 4 + i + 10$, para $i = 0, 1, 2$

(b) $x = i$, $y = i - 3$, $z = 17 + i - 3$, para $i = 3, \cdots, 11$

(c) $x = 12$, $y = 9$, $z = 13$

(d) $x = i$, $y = i + 3$, $z = 17 + i + 3$, para $i = 0, \cdots, 5$

(e) $x = i$, $y = i + 3$, $z = 4 + i + 3$, para $i = 6, 7, 8, 9$

(f) $x = i$, $y = i - 10$, $z = 17 + i - 10$, para $i = 10, 11, 12$

Si mostramos que en cada uno de los casos $z \;/\; N_{H_2}(x)$, entonces $C = 3$, y si $y = N_{H_2}(x) \quad N_{H_2}(z)$, entonces $C = 4$. Analizaremos sólo los subcasos (c) y (d), ya que la prueba de los otros cuatro es análoga.

En el subcaso (c) las vecindades de x y z en H_2 son $N_{H_2}(x) = \quad 2, 9, 16$ y $N_{H_2}(z) = \quad 9, 17, 22$, respectivamente. De manera que $z \;/\; N_{H_2}(x)$ y además $y = 9 = N_{H_2}(x) \quad N_{H_2}(z)$, por lo que $C > 4$ en este caso.

El subcaso (d) se divide a su vez en otros tres subcasos, en los que las vecindades de x y z en H_2 son:

- $N_{H_2}(x) = \ \ i+3, i+10, i+17$ y $N_{H_2}(z) = \ \ i+3, i+16, i+24$, cuando $x = i = 0, 1$

- $N_{H_2}(x) = \ \ i+3, i+10, i+17$ y $N_{H_2}(z) = \ \ i+3, i+11, i+16$, cuando $x = i = 2$

- $N_{H_2}(x) = \ \ i-3, i+3, i+17$ y $N_{H_2}(z) = \ \ i+3, i+11, i+16$, cuando $x = i = 3, 4, 5$

En cada uno de los subcasos anteriores $z = (17 + i + 3) \ / \ N_{H_2}(x)$ y además $\ y \ = \ \ i+3 \ = N_{H_2}(x) \quad N_{H_2}(z)$. Como ya habíamos observado, en los subcasos (a), (b), (e) y (f) pasa algo análogo. Por lo tanto $\ C \ \geq 5$ en cada uno de los subcasos (a), (b), (c), (d), (e) y (f). De forma análoga se hace el análisis para (2). ■

Se utilizó el programa (software) *Maple* para verificar las propiedades de las gráficas construidas en este capítulo, en el Anexo encontramos los resultados, y en el caso de la gráfica H_2 se observa que es de cuello seis. Un ciclo de longitud seis en H_2 es $(0, 3, 6, 9, 13, 17)$.

Antes de continuar con la descripción de las gráficas G_1 y G_2, mostraremos un método con el que, al modificar cualquier gráfica de cuello al menos cinco y con ciertas propiedades estructurales, se construye una nueva gráfica que conserva la propiedad de que el cuello es al menos cinco.

MÉTODO: Modificación de una gráfica.

Sea G una gráfica de cuello al menos cinco, que además contenga $m \geq 2$ parejas de aristas independientes, $\ x_1^s x_2^s, x_3^s x_4^s \ s = 1, \cdots, m\ $, tales que entre los vértices de cada pareja de aristas $N(x_i^s) \quad N(x_j^s) = \ $, para todo $i, j \quad\ 1, 2, 3, 4$, $i = j$, $s = 1, \cdots, m$.

Por otro lado, si definimos $e_i^s := x_i^s x_{i+1}^s$, para $i = 1, 3$ y $s = 1, \cdots, m$, el conjunto de parejas de aristas cumple que $V(\ e_1^s, e_3^s \ ) \quad V(\ e_1^t, e_3^t \ ) \ \leqslant 1$, para todo $t \quad\ 1, \cdots, m \ $ y $t = s$, es decir a lo más puede haber un vértice común entre cualesquiera dos parejas de aristas independientes.

Sean $s = 1, \ldots, m$ y $\ v^1, v^2, \ldots, v^m\ $ vértices nuevos, definimos la gráfica $G\ $ como:

$$G\ = G - \ x_1^s x_2^s, x_3^s x_4^s \qquad (v^s, x_i^s)\ i = 1, 2, 3, 4\ \ .$$

La nueva gráfica $G\ $ es de orden $\ V(G)\ + m$, además el conjunto $\ v^1, \cdots, v^m\ = V(G\ ) - V(G)$ es un conjunto de vértices independientes de grado 4, y los vértices $V(G) \subseteq V(G\ )$, conservan el grado que tenían en G.

Dada la construcción anterior probaremos que $G\ $ conserva cuello al menos cinco.

Lema 3.0.3 *La gráfica $G\ $ tiene cuello al menos cinco.*

Demostración. Sea C el ciclo de longitud más corta en $G\ $. Si $E(C) \subset E(G)$, entonces por hipótesis $\ C\ > 4$. De otro modo existe v^s, para algún $s \quad 1, \cdots, m\ $, tal que $v^s \quad V(C)$, y dado que $\ v^s\ s = 1, \cdots, m\ $ es un cojunto de vértices independientes, entonces en C existe una trayectoria $x_i^s v^s x_j^s$, para algunos $i, j \quad 1, 2, 3, 4\ , i = j$. Dada la contrucción de $G\ $ y las propiedades de G, el conjunto $\ x_i^s\ i = 1, 2, 3, 4\ $ resulta ser un conjunto de vértices independientes en $G\ $, por lo que $\ C\ > 3$. Y como en G el par de aristas $\ e_1^s, e_3^s\ $ se intersecta en a lo más un vértice con algún otro par de aristas, en $G\ $ a lo más un vértice del conjunto $\ x_i^s\ i = 1, 2, 3, 4\ $ puede ser adyacente a algún otro vértice v^t, $t \quad 1, \cdots, m\ , t = s$, de manera que $N(x_i^s) \quad N(x_j^s) = v^s$, y por lo tanto $\ C\ > 4$. ■

Aplicando dos veces este método, construiremos las gráficas G_i a partir de H_i.

Primero notemos que la gráfica H_i tiene las propiedades necesarias requeridas para que a partir de ella se construya la nueva gráfica, tiene cuello al menos cinco y además contiene 11 parejas de aristas independientes que cumplen con las propiedades necesarias para aplicar el método anterior.

El conjunto de aristas independientes en H_1 es $D_1 \quad D_1$:

- $D_1 = \ (i, i+2), (i-6, i+7)\ i = 13, \ldots, 18\ $,
- $D_1 = \ (i, i+2), (i-17, i-16)\ i = 19, \ldots, 23\ $,

y en H_2 es $D_2 \quad D_2$:

- $D_2 = \quad (i, i-3), (i+12, i-5) \; i = 5, \ldots, 12 \;$,
- $D_2 = \quad (i, i+4), (i-3, i+1) \; i = 13, 14, 15 \;$.

Primera aplicación del método:

Construimos la gráfica G_i que resulta de eliminar aristas de H_i y anadir un nuevo conjunto de vértices y otro de aristas, de manera que $V(G_i) = V(H_i) \quad 26, \ldots, 36$ y $E(G_i) = \; E(H_i) - (D_i \quad D_i) \quad (E_i \quad E_i)$, para $i \quad 1, 2$.

Donde D_1 y D_1 son los conjuntos de aristas descritos arriba, mientras que para H_1, los conjuntos E_1 y E_1 son:

- $E_1 = \quad (i, i+13), (i+2, i+13), (i-6, i+13), (i+7, i+13) \; i = 13, \ldots, 18 \;$, con pesos $\; 6, 11, 13, 19 \;$,
- $E_1 = \quad (i, i+13), (i+2, i+13), (i-17, i+13), (i-16, i+13) \; i = 19, \ldots, 23$ con pesos $\; 11, 12, 13 \;$, recordémos que los pesos están en modulo $q = 41$.

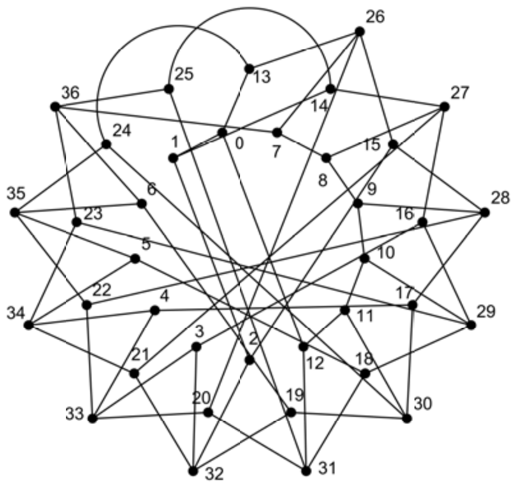


Figura 3.2: Después de eliminar las parejas de aristas de los conjuntos D_1 y D_1, anadimos el conjunto de vértices y las aristas de los conjuntos E_1 y E_1, y obtenemos la gráfica G_1.

y en H_2:

- $E_2 = \quad (i, i+21), (i-3, i+21), (i+12, i+21), (i-5, i+21) \; i = 5, \ldots, 12 \quad$, con pesos $\quad 9, 15, 17, 20 \quad$,
- $E_2 = \quad (i, i+21), (i+4, i+21), (i-3, i+21), (i+1, i+21) \; i = 13, 14, 15 \quad$, con pesos $\quad 17, 20 \quad$.

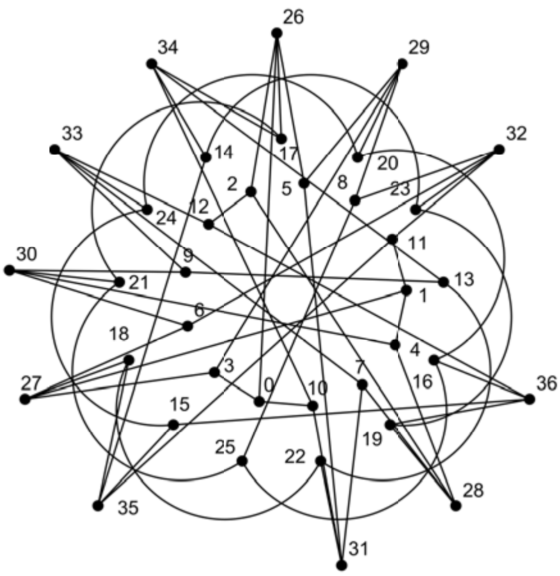


Figura 3.3: Aplicando el método a H_2, obtenemos G_2.

Por el Lema 3.0.3 aseguramos que en G_i no hay ciclos de longitud menor a cinco, para $i = 1, 2$. Por lo tanto G_i es una gráfica de orden 37 y cuello al menos cinco, además como H_i era 3-regular, G_i resulta ser birregular con conjunto de grados $\quad 3, 4 \quad$.

Observemos que G_1 también tiene 4 parejas de aristas independientes que cumplen con las propiedades necesarias para aplicar el método, construiremos a partir de ella la gráfica G_1. De igual forma la gráfica G_2 se obtendrá a través de G_2 al aplicarle el método, aunque esta vez G_2 sólo tiene 3 parejas de aristas independientes.

El conjunto de aristas independientes en G_1 es F_1:

- $F_1 = \quad (i, i+13), (i-11, i-10) \; i = 18, 19, 20, 21 \quad$, y en G_2 es F_2:

- $F_2 = \ (i, i+4), (i+18, i+1) \ i = 16, 17, 18 \ .$

SEGUNDA APLICACIÓN DEL MÉTODO:

El conjunto de vértices que anadiremos en G_1 tendrá las etiquetas $37, 38, 39, 40$ y en G_2 las etiquetas $37, 38, 39$, es decir, $V(G_1) = V(G_1) \quad 37, 38, 39, 40$ y $V(G_2) = V(G_2) \quad 37, 38, 39$, y tendrán los siguientes conjuntos de aristas $E(G_1) = (E(G_1) - F_1) \quad K_1$ y $E(G_2) = (E(G_2) - F_2) \quad K_2$.

En G_1, el conjunto K_1 es:

- $K_1 = \ (i, i+19), (i+13, i+19), (i-11, i+19), (i-10, i+19) \ i = 18, \ldots, 21$, con pesos $6, 11, 12, 19$,

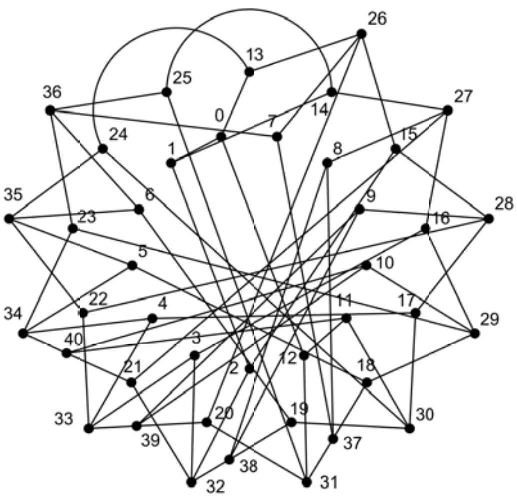


Figura 3.4: Aplicando el método a G_1 obtenemos G_1.

y en G_2:

- $K_2 = \ (i, i+21), (i+4, i+21), (i+18, i+21), (i+1, i+21) \ i = 16, 17, 18$, con pesos $3, 17, 20$.

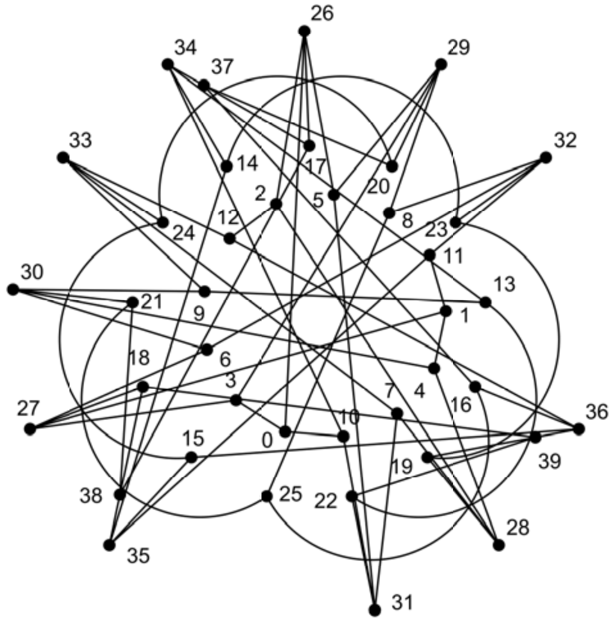


Figura 3.5: Representación de la gráfica G_2, resultado de aplicar el método a G_2.

Finalmente, hay un par de aristas independiente en G_2, $(19, 23), (37, 20)$. Aplicando una vez más el método ahora a G_2, agregamos un vértice, eliminamos el par de aristas independientes y anadimos las siguientes cuatro, y obtendremos la gráfica G_2:

$(19, 40), (23, 40), (37, 40), (20, 40)$, con pesos $3, 17, 20$.

Nuevamente por el Lema 3.0.3, G_1 y G_2 resultan ser gráficas sin ciclos de longitud menor a 5, de orden 41 y con conjuntos de grados $3, 4$, donde los vértices que tienen grado 3 son los que tienen etiquetas del conjunto $0, 1, \ldots, 25$ y los restantes tienen grado 4; al agregar vértices el peso de algunas aristas cambió a $1, 6, 11, 12, 13, 19$ y $3, 4, 9, 10, 15, 17, 20$, respectivamente.

Resumiendo, los pesos de H_1 y G_1 son:

$$\mathcal{P}_\omega := \begin{cases} \pm \ 1, 2, 11, 12, 13 \\ \pm \ 1, 6, 11, 12, 13, 19 \end{cases} \tag{3.1}$$

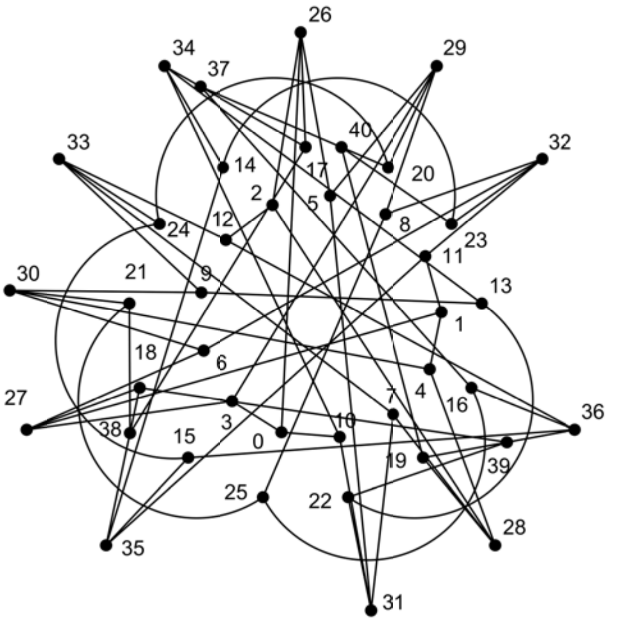


Figura 3.6: Gráfica G_2.

y los de H_2 y G_2:

$$\mathcal{L}_\omega := \begin{cases} \pm\ 3, 4, 9, 10, 17 \\ \pm\ 3, 4, 9, 10, 15, 17, 20 \end{cases} \tag{3.2}$$

En el Anexo están las pruebas de estas características hechas por el programa (software) *Maple*.

Si $S = T = \ 26, 27, \cdots, 40\ $, $u = \ 1\ $ y H_i y G_i , para $i = 1, 2$, son como las acabamos de describir, podemos enunciar el siguiente lema:

Lema 3.0.4 *La gráfica $B^*_{41}(S, T, u)$ es una gráfica 43-regular de cuello 5 y de orden 3250.*

Demostración. Los pesos de estas gráficas son $\mathcal{P}_\omega = \pm\ 1, 2, 6, 11, 12, 13, 19$ y $\mathcal{L}_\omega = \pm\ 3, 4, 9, 10, 15, 17, 20$, respectivamente; y por el Teorema 2.2.1, la gráfica $B^*_{41}(S, T, u)$ es una gráfica 43-regular de cuello 5 y de orden 3250. ∎

Apéndice A

Anexo

Se hizo una comprobación sobre el cuello de las gráficas construidas en el Capítulo 3 con el programa (software) $Maple$, el presente anexo muestra los resultados obtenidos siendo todos satisfactorios.

> *with*(*GraphTheory*)

[*AcyclicPolynomial*, *AddArc*, *AddEdge*, *AddVertex*, *AdjacencyMatrix*, *AllPairsDistance*, *Arrivals*, *ArticulationPoints*, *BellmanFordAlgorithm*, *BiconnectedComponents*, *BipartiteMatching*, *Blocks*, *CartesianProduct*, *CharacteristicPolynomial*, *ChromaticIndex*, *ChromaticNumber*, *ChromaticPolynomial*, *CircularChromaticIndex*, *CircularChromaticNumber*, *CircularEdgeChromaticNumber*, *CliqueNumber*, *CompleteGraph*, *ConnectedComponents*, *Contract*, *ConvertGraph*, *CopyGraph*, *CycleBasis*, *CycleGraph*, *Degree*, *DegreeSequence*, *DelaunayTriangulation*, *DeleteArc*, *DeleteEdge*, *DeleteVertex*, *Departures*, *Diameter*, *Digraph*, *DijkstrasAlgorithm*, *DiscardEdgeAttribute*, *DiscardGraphAttribute*, *DiscardVertexAttribute*, *DisjointUnion*, *Distance*, *DrawGraph*, *DrawNetwork*, *DrawPlanar*, *EdgeChromaticNumber*, *EdgeConnectivity*, *Edges*, *ExportGraph*, *FlowPolynomial*, *FundamentalCycle*, *GetEdgeAttribute*, *GetEdgeWeight*, *GetGraphAttribute*, *GetVertexAttribute*, *GetVertexPositions*, *Girth*, *Graph*, *GraphComplement*, *GraphEqual*, *GraphJoin*, *GraphNormal*, *GraphPolynomial*, *GraphPower*, *GraphRank*, *GraphSpectrum*, *GraphUnion*, *GreedyColor*, *HasArc*, *HasEdge*, *HighlightEdges*, *HighlightSubgraph*, *HighlightTrail*, *HighlightVertex*, *HighlightedEdges*, *HighlightedVertices*, *ImportGraph*, *InDegree*, *IncidenceMatrix*, *IncidentEdges*, *IndependenceNumber*, *InducedSubgraph*, *IsAcyclic*, *IsBiconnected*, *IsBipartite*, *IsClique*, *IsConnected*, *IsCutSet*, *IsDirected*, *IsEdgeColorable*, *IsEulerian*, *IsForest*, *IsGraphicSequence*, *IsHamiltonian*, *IsIntegerGraph*, *IsIsomorphic*, *IsNetwork*, *IsPlanar*, *IsRegular*, *IsStronglyConnected*, *IsTournament*, *IsTree*, *IsTwoEdgeConnected*, *IsVertexColorable*, *IsWeighted*, *IsomorphicCopy*, *KruskalsAlgorithm*, *LaplacianMatrix*, *LineGraph*, *ListEdgeAttributes*, *ListGraphAttributes*, *ListVertexAttributes*, *MakeDirected*, *MakeWeighted*, *MaxFlow*, *MaximumClique*, *MaximumDegree*, *MaximumIndependentSet*, *MinimalSpanningTree*, *MinimumDegree*, *Mycielski*, *Neighborhood*, *Neighbors*, *NonIsomorphicGraphs*, *NumberOfEdges*, *NumberOfSpanningTrees*, *NumberOfVertices*, *OddGirth*, *OutDegree*, *PathGraph*, *PermuteVertices*, *PlaneDual*, *PrimsAlgorithm*, *RandomGraphs*, *RankPolynomial*, *RelabelVertices*, *ReliabilityPolynomial*, *SHARCorder*, *SeidelSpectrum*, *SeidelSwitch*, *SequenceGraph*, *SetEdgeAttribute*, *SetEdgeWeight*, *SetGraphAttribute*, *SetVertexAttribute*, *SetVertexPositions*, *ShortestPath*, *SpanningPolynomial*, *SpanningTree*, *SpecialGraphs*, *StronglyConnectedComponents*, *Subdivide*, *Subgraph*, *TensorProduct*, *TopologicSort*, *TravelingSalesman*, *TreeHeight*, *TuttePolynomial*, *TwoEdgeConnectedComponents*, *UnderlyingGraph*, *VertexConnectivity*, *Vertices*, *WeightMatrix*] **(1)**

> *with*(*SpecialGraphs*)

[*AntiPrismGraph*, *CageGraph*, *ClebschGraph*, *CompleteBinaryTree*, *CompleteKaryTree*, *CoxeterGraph*, *DesarguesGraph*, *DodecahedronGraph*, *DoubleStarSnark*, *DyckGraph*, *FlowerSnark*, *FosterGraph*, *GeneralizedBlanusaSnark*, *GeneralizedHexagonGraph*, *GeneralizedPetersenGraph*, *GoldbergSnark*, *GridGraph*, *GrinbergGraph*, *GrotzschGraph*, **(2)** *HeawoodGraph, HerschelGraph, HoffmanSingletonGraph, HypercubeGraph, IcosahedronGraph, KneserGraph, LCFGraph, LeviGraph, McGeeGraph, MobiusKantorGraph, OctahedronGraph, OddGraph, PappusGraph, PayleyGraph, PetersenGraph, PrismGraph, RobertsonGraph, ShrikhandeGraph, SoccerBallGraph, StarGraph, SzekeresSnark, TetrahedronGraph, ThetaGraph, TorusGridGraph, Tutte8CageGraph, WebGraph, WheelGraph*]

> $H1 := Graph(\{\{0, 1\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}, \{5, 6\}, \{6, 7\}, \{7, 8\}, \{8, 9\}, \{9, 10\}, \{10, 11\}, \{11, 12\}, \{12, 0\}, \{0, 13\}, \{1, 14\}, \{2, 15\}, \{3, 16\}, \{4, 17\}, \{5, 18\}, \{6, 19\}, \{7, 20\}, \{8, 21\}, \{9, 22\}, \{10, 23\}, \{11, 24\}, \{12, 25\}, \{13, 15\}, \{14, 16\}, \{15, 17\}, \{16, 18\}, \{17, 19\}, \{18, 20\}, \{19, 21\}, \{20, 22\}, \{21, 23\}, \{22, 24\}, \{23, 25\}, \{24, 13\}, \{25, 14\}\})$

H1 := Graph 1: an undirected unweighted graph with 26 vertices and 39 edge(s) **(3)**

> $Girth(H1);$

5 **(4)**

> $H2 := Graph(\{\{0, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 5\}, \{3, 6\}, \{4, 7\}, \{5, 8\}, \{6, 9\}, \{7, 10\}, \{8, 11\}, \{9, 12\}, \{10, 0\}, \{11, 1\}, \{12, 2\}, \{0, 17\}, \{1, 18\}, \{2, 19\}, \{3, 20\}, \{4, 21\}, \{5, 22\}, \{6, 23\}, \{7, 24\}, \{8, 25\}, \{9, 13\}, \{10, 14\}, \{11, 15\}, \{12, 16\}, \{13, 17\}, \{14, 18\}, \{15, 19\}, \{16, 20\}, \{17, 21\}, \{18, 22\}, \{19, 23\}, \{20, 24\}, \{21, 25\}, \{22, 13\}, \{23, 14\}, \{24, 15\}, \{25, 16\}\})$

H2 := Graph 2: an undirected unweighted graph with 26 vertices and 39 edge(s) **(5)**

> $Girth(H2);$

6 **(6)**

> $G1i := Graph(\{\{13, 26\}, \{14, 27\}, \{15, 28\}, \{16, 29\}, \{17, 30\}, \{22, 35\}, \{23, 36\}, \{18, 31\}, \{19, 32\}, \{20, 33\}, \{21, 34\}, \{15, 26\}, \{16, 27\}, \{17, 28\}, \{18, 29\}, \{19, 30\}, \{20, 31\}, \{21, 32\}, \{22, 33\}, \{23, 34\}, \{24, 35\}, \{25, 36\}, \{7, 26\}, \{8, 27\}, \{9, 28\}, \{10, 29\}, \{11, 30\}, \{12, 31\}, \{2, 32\}, \{3, 33\}, \{4, 34\}, \{5, 35\}, \{6, 36\}, \{7, 8\}, \{8, 9\}, \{9, 10\}, \{10, 11\}, \{20, 26\}, \{21, 27\}, \{22, 28\}, \{23, 29\}, \{24, 30\}, \{25, 31\}, \{3, 32\}, \{4, 33\}, \{5, 34\}, \{6, 35\}, \{7, 36\}, \{0, 1\}, \{1, 2\}, \{11, 12\}, \{12, 0\}, \{0, 13\}, \{1, 14\}, \{2, 15\}, \{3, 16\}, \{4, 17\}, \{5, 18\}, \{6, 19\}, \{24, 13\}, \{25, 14\}\})$

G1i := Graph 5: an undirected unweighted graph with 37 vertices and 61 edge(s) **(7)**

> $Girth(G1i);$

5 **(8)**

> $G1 := Graph(\{\{13, 26\}, \{14, 27\}, \{15, 28\}, \{16, 29\}, \{17, 30\}, \{22, 35\}, \{23, 36\}, \{18, 37\}, \{19, 38\}, \{20, 39\}, \{21, 40\}, \{15, 26\}, \{16, 27\}, \{17, 28\}, \{18, 29\}, \{19, 30\}, \{20, 31\}, \{21, 32\}, \{22, 33\}, \{23, 34\}, \{24, 35\}, \{25, 36\}, \{31, 37\}, \{32, 38\}, \{33, 39\}, \{34, 40\}, \{7, 26\}, \{8, 27\}, \{9, 28\}, \{10, 29\}, \{11, 30\}, \{12, 31\}, \{2, 32\}, \{3, 33\}, \{4, 34\}, \{5, 35\}, \{6, 36\}, \{7, 37\}, \{8, 38\}, \{9, 39\}, \{10, 40\}, \{20, 26\}, \{21, 27\}, \{22, 28\}, \{23, 29\}, \{24, 30\}, \{25, 31\}, \{3, 32\}, \{4, 33\}, \{5, 34\}, \{6, 35\}, \{7, 36\}, \{8, 37\}, \{9, 38\}, \{10, 39\},$

{11, 40}, {0, 1}, {1, 2}, {11, 12}, {12, 0}, {0, 13}, {1, 14}, {2, 15}, {3, 16}, {4, 17}, {5, 18}, {6, 19}, {24, 13}, {25, 14}})

G1 := Graph 6: an undirected unweighted graph with 41 vertices and 69 edge(s) **(9)**

> *Girth*(*G1*);

5 **(10)**

> *G2i* := *Graph*({{1, 11}, {1, 4}, {1, 27}, {10, 0}, {10, 31}, {22, 31}, {31, 5}, {31, 7}, {10, 34}, {0, 26}, {0, 3}, {3, 29}, {3, 27}, {6, 32}, {6, 30}, {6, 27}, {9, 13}, {9, 30}, {9, 33}, {12, 2}, {12, 33}, {12, 36}, {8, 29}, {8, 32}, {8, 25}, {11, 32}, {11, 35}, {7, 28}, {7, 33}, {2, 26}, {2, 28}, {5, 26}, {5, 29}, {20, 24}, {33, 24}, {20, 16}, {20, 29}, {23, 14}, {23, 19}, {13, 34}, {13, 22}, {16, 36}, {16, 25}, {19, 36}, {19, 28}, {28, 4}, {22, 18}, {25, 21}, {15, 24}, {21, 17}, {26, 17}, {32, 23}, {36, 15}, {35, 15}, {35, 14}, {35, 18}, {27, 18}, {30, 21}, {30, 4}, {34, 14}, {34, 17}})

G2i := Graph 9: an undirected unweighted graph with 37 vertices and 61 edge(s) **(11)**

> *Girth*(*G2i*);

5 **(12)**

> *G2ii* := *Graph*({{1, 11}, {1, 4}, {1, 27}, {10, 0}, {10, 31}, {22, 31}, {31, 5}, {31, 7}, {10, 34}, {0, 26}, {0, 3}, {3, 29}, {3, 27}, {6, 32}, {6, 30}, {6, 27}, {9, 13}, {9, 30}, {9, 33}, {12, 2}, {12, 33}, {12, 36}, {8, 29}, {8, 32}, {8, 25}, {11, 32}, {11, 35}, {7, 28}, {7, 33}, {2, 26}, {2, 28}, {5, 26}, {5, 29}, {20, 24}, {33, 24}, {20, 29}, {23, 14}, {23, 19}, {13, 34}, {13, 22}, {16, 36}, {16, 25}, {19, 39}, {39, 36}, {19, 28}, {28, 4}, {22, 39}, {39, 18}, {25, 21}, {15, 24}, {26, 17}, {32, 23}, {36, 15}, {35, 15}, {35, 14}, {35, 38}, {38, 18}, {27, 18}, {30, 21}, {30, 4}, {34, 14}, {34, 37}, {37, 17}, {16, 37}, {37, 20}, {17, 38}, {38, 21}})

G2ii := Graph 12: an undirected unweighted graph with 40 vertices and 67 edge(s) **(13)**

> *Girth*(*G2ii*);

5 **(14)**

> *G2* := *Graph*({{2, 26}, {3, 27}, {4, 28}, {5, 29}, {6, 30}, {7, 31}, {8, 32}, {9, 33}, {13, 34}, {14, 35}, {15, 36}, {16, 37}, {17, 38}, {18, 39}, {19, 40}, {5, 26}, {6, 27}, {7, 28}, {8, 29}, {9, 30}, {10, 31}, {11, 32}, {12, 33}, {21, 38}, {22, 39}, {23, 40}, {17, 26}, {18, 27}, {19, 28}, {20, 29}, {21, 30}, {22, 31}, {23, 32}, {24, 33}, {10, 34}, {11, 35}, {12, 36}, {34, 37}, {35, 38}, {36, 39}, {37, 40}, {0, 26}, {1, 27}, {2, 28}, {3, 29}, {4, 30}, {5, 31}, {6, 32}, {7, 33}, {14, 34}, {15, 35}, {16, 36}, {17, 37}, {18, 38}, {19, 39}, {20, 40}, {0, 3}, {1, 4}, {10, 0}, {11, 1}, {12, 2}, {8, 25}, {9, 13}, {20, 24}, {21, 25}, {22, 13}, {23, 14}, {24, 15}, {25, 16}})

G2 := Graph 13: an undirected unweighted graph with 41 vertices and 69 edge(s) **(15)**

> *Girth*(*G2*);

5 **(16)**

>

Bibliografía

[1] M. Abreu, G. Araujo-Pardo, C. Balbuena, D. Labbate, Families of small regular graphs of girth 5, Discrete Math. 312 (2012) 2832-2842.

[2] G. Araujo-Pardo, C. Balbuena, G. López-Chávez, L. Montejano, Bi regular small graphs of even girth at least 8.

[3] N.L. Biggs, Algebraic graph theory (2nd Ed.), Cambridge University Press, 1993.

[4] J.A. Bondy, U.S.R. Murty, Graph theory, in: Springer Series: Graduate Texts in Mathematics, vol. 244, 2008.

[5] G. Chartrand, L. Lesniak, P. Zhang, Graphs and digraphs, Chapman and Hall, 1996.

[6] P. Dembowski, Finite geometries, Springer, New York, 1968, reprint 1997.

[7] G. Exoo, R. Jajcay, Dynamic cage survey, Electron. J. Combin. 15 (2008) #DS16.

[8] M. Funk, Girth 5 graphs from elliptic semiplanes, Note Mat. 29 (suppl. 1) 91-114, 2009.

[9] C. Godsil, G. Royle, Algebraic graph theory , vol. 207, Springer-Verlag, 2001.

[10] G. Higman, Amalgams of p-groups, J. Algebra, 1 (1964), pp. 301-305.

[11] O.H. Kegel, A. Schleiermacher, Amalgams and embeddings of projective planes, Geometriae Dedicata, 2(3), (1973) 379-395.

[12] K. Kutnar, D. Marušič, Hamilton cycles and paths in vertex-transitive graphs-current directions, Discrete Mathematics, 309(17), 5491-5500, 2009.

[13] C. W. H. Lam, L. Thiel and S. Swiercz, The nonexistence of finite projective planes of order 10, Canad. J. Math. 41 (1991) 1117-1123. Math, 41(6), 1117-1123.

[14] F.W. Levi, Finite geometrical systems, University of Calcutta, 1942.

[15] J. Matoušek, J. Nešetřil. Invitation to discrete mathematics, Oxford University Press, 1998.

[16] W.T. Tutte, A family of cubical graphs, Proc. Cambridge Philos. Soc. 43 (1947) 459-474.

[17] J.H. van Lint and R.M. Wilson, A course in combinatorics, 2nd Ed., Cambridge University Press, 2001.