



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MEXICO

**MAESTRIA EN DOCENCIA PARA LA
EDUCACIÓN MEDIA SUPERIOR**

FACULTAD DE CIENCIAS

**PROPUESTA DE SECUENCIA DIDÁCTICA PARA LA
ENSEÑANZA DEL TEMA DE FUNCIONES EN EL
BACHILLERATO**

TESIS

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:

**MAESTRO EN DOCENCIA PARA
LA EDUCACIÓN MEDIA SUPERIOR
(MATEMÁTICAS)**

PRESENTA:

FRANCISCO JAVIER PÉREZ TISCAREÑO

TUTOR:

**M. EN C. ELENA DE OTEYZA DE OTEYZA
FACULTAD DE CIENCIAS**

**COMITÉ TUTOR:
M. EN C. AGUSTÍN ONTIVEROS PINEDA
FACULTAD DE CIENCIAS
DRA. MILAGROS FIGUEROA CAMPOS
FACULTAD DE PSICOLOGÍA**

MÉXICO, D.F. ENERO DE 2016



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Agradecimientos

A Dios

A mi mamá y papá, ya que ellos me han impulsado y apoyado en todos los proyectos que he realizado a lo largo de mi vida.

A mis hermanos que siempre han estado a mi lado para darme animo.

A mi novia Natalia por todo el apoyo que me dio.

Al Programa de Becas para la Formación de Profesores para el Bachillerato Universitario por el apoyo brindado.

A mis compañeros de MADEMS-matemáticas por todos su apoyo, consejos y amistad que me brindados durante esta etapa de mi vida.

A mis sinodales quienes con sus críticas y sugerencias enriquecieron este trabajo.

Al CCH Sur, Colegio de Bachilleres Plantel 9, Escuela Nacional Preparatoria Plantel 3, Escuela Nacional Preparatoria Plantel 7 por abrimme las puertas para realizar mi trabajo de campo y práctica docente en sus instalaciones.

Resumen

En la actualidad la mayoría de los estudiantes del nivel medio superior muestran cierta dificultad en la materia de matemáticas, ya que lo ven como algo complicado y tedioso que tienen que memorizar para poder acreditar la materia. Es por eso que el objetivo de este trabajo es el desarrollo de una secuencia didáctica del tema de funciones a nivel medio superior, la cual permita a los alumnos analizar los contenidos que engloba el tema y ser partícipes de la clase para lograr una mejor comprensión.

Para lograr alcanzar el objetivo la secuencia didáctica se fundamentó en el aprendizaje por descubrimiento de Bruner, en especial aplicando el modelo inductivo, que para poder aplicarlo de manera satisfactoria se realizó un trabajo de campo para recabar ejemplos propuestos por alumnos de nivel medio superior. También se propone un material didáctico con el objetivo de facilitar la comprensión de las operaciones entre funciones.

Después de la implementación de la secuencia didáctica se observa una mejor comprensión del tema de funciones, ya que esta permite que el alumno analice, realice hipótesis y construya su conocimiento.

Abstract

Actually, most students from high school show a kind of difficulty on the field of mathematics, the reason of that is because they see it as something complicated and tedious that they have to memorize to approve the matter. That is because the goal of this work is the development of a didactic sequence about the theme of functions in the high school level, which it will allow students analyze the content that includes the theme, and they will be participants in the class to achieve a better understanding.

To achieve and reach the objective, the didactic sequence was based on learning by discovery of Bruner, particularly applying the inductive model, to apply it successfully, a fieldwork was realized to get examples proposed by high school students. Also, here it is proposing a didactic material with the aim of facilitating the understanding of operations between functions.

After the didactic sequence implementation there is a better understanding about the functions topic, it allows that the student analyze, realize and build his Knowledge.

Índice

INTRODUCCIÓN	1
1 CAPÍTULO I. LAS FUNCIONES EN MATEMÁTICAS: SU PAPEL E IMPORTANCIA EN EL APRENDIZAJE	3
1.1 Justificación	3
1.1.1 Justificación Teórica	3
1.1.2 Justificación Metodológica	4
1.2 Dificultades en la enseñanza matemática	5
1.2.1 Pensamientos negativos sobre las matemáticas.	5
1.2.2 Poco interés por la materia.	6
1.2.3 Conocimientos previos necesarios de los alumnos	6
1.2.4 Sistema de enseñanza receptiva	6
1.3 Objetivo general	7
1.4 Objetivos específicos	7
1.5 Importancia del tema de función en el contexto de la enseñanza de las matemáticas en el nivel medio superior	7
2 CAPÍTULO II MARCO TEÓRICO	12
2.1 Enseñanza de Conceptos	12
2.2 Aprendizaje	13
2.3 Aprendizaje por descubrimiento	15
2.4 Modelo inductivo	17
2.5 Método de División de la clase en grupos de aprendizaje (DCGA)	20
2.5.1 Aprendizaje Cooperativo	22
2.5.2 Organización de grupos de aprendizaje	24
2.6 Evaluación del aprendizaje en el aula	26
2.6.1 Funciones y ventajas de la evaluación	27
2.6.2 Momentos de la evaluación	28
3 CAPÍTULO III. DISEÑO DE LA SECUENCIA DIDÁCTICA	31
3.1 ¿Por qué se partió del tema de relación entre conjuntos?	31
3.2 ¿Cómo fue la elección de los ejemplos de relaciones y funciones?	31
3.3 ¿Cómo fue la elección de las indicaciones y preguntas que aparecen en las hojas de trabajo?	32
3.4 ¿Cómo fue evolucionando la secuencia didáctica?	33

3.5	Secuencia didáctica	37
4	CAPÍTULO IV. IMPLEMENTACIÓN Y EVALUACIÓN DE LA SECUENCIA DIDÁCTICA	70
4.1	Implementación de la secuencia didáctica en el Colegio de Bachilleres 70	
4.1.1	Colegio de Bachilleres Plantel 9 “Aragón”	70
4.2	Evaluación y análisis de resultados	72
4.2.1	Análisis del diagnóstico	73
4.2.2	Análisis de la prueba final respecto a los objetivos planteados en la secuencia didáctica	73
4.2.3	Análisis del trabajo cooperativo en el salón de clase	84
5	Conclusiones	85
6	Anexos	87
	Anexo 1	87
	Anexo 2	88
	Anexo 3	88
	Anexo 4	89
	Anexo 5	89
	Anexo 6	90
	Anexo 7	93
	Anexo 8	96
	Anexo 9	99
	Anexo 10	105
7	Bibliografía	108

INTRODUCCIÓN

El presente proyecto de tesis parte de un trabajo de campo, el cual tenía como objetivo detectar las dificultades que presentaban los alumnos en el nivel medio superior para la comprensión del concepto de la derivada y sus aplicaciones. Uno de los factores principales era la baja comprensión que tenían del tema de funciones, debido a esto se decidió realizar una secuencia didáctica con la finalidad de que los alumnos logaran comprender el tema de funciones, el cual es esencial para el estudio de la derivada y sus aplicaciones.

La elaboración de la secuencia didáctica fue el resultado del trabajo realizado durante los últimos tres semestres de la maestría en los cuales se llevó a cabo el trabajo de campo para poder investigar las dificultades que presentaban los alumnos en la comprensión del tema de funciones.

Posteriormente me sumergí en la literatura para poder encontrar la teoría que me ayudara a solucionar los diversos problemas que encontré. Una vez revisadas diversas teorías y diversos artículos sobre la enseñanza del tema de funciones, decidí trabajar bajo el aprendizaje por descubrimiento en su versión de modelo inductivo y para poder contrarrestar algunas deficiencias que tiene este tipo de aprendizaje se incorporó el aprendizaje cooperativo.

Teniendo en mente que se utilizaría el modelo inductivo, se llevó a cabo un trabajo de campo para poder determinar qué ejemplos eran atractivos para los alumnos para que trabajaran motivados. Además este trabajo de campo fue valioso porque gracias a él se fueron puliendo las instrucciones para que quedaran lo más claras posibles y los alumnos comprendieran mejor lo que tenían que hacer.

Tomando en cuenta todos los puntos anteriores se elaboró una secuencia didáctica, la cual contiene una propuesta para abordar los siguientes temas a nivel medio superior:

- Definición de relación.
- Definición de función.

- Dominio de funciones: racionales, logarítmicas y raíz cuadrada.
- Operaciones entre funciones: suma, resta, multiplicación, división y composición.

Esta secuencia didáctica se implementó en el Colegio de Bachilleres Plantel 9 “Aragón” al grupo 252 que corresponde al segundo semestre durante el tercer parcial en el turno vespertino. Al concluir se analizaron los resultados los cuales indicaron que la secuencia didáctica sí ayuda a una mejor comprensión del tema de funciones.

1 CAPÍTULO I. LAS FUNCIONES EN MATEMÁTICAS: SU PAPEL E IMPORTANCIA EN EL APRENDIZAJE

En este capítulo se mostrará la importancia del concepto de función en el desarrollo de las matemáticas además de algunos factores que impiden la comprensión del tema. También se presentan los objetivos del trabajo de tesis y para terminar se analizan los planes de estudios de distintos sistemas educativos de nivel medio superior para determinar la importancia que las instituciones le dan al tema de funciones.

1.1 Justificación

1.1.1 Justificación Teórica

El concepto de función resulta de fundamental importancia en el currículo de las matemáticas, tanto en el nivel medio superior como en el superior. Es considerada fundamental y central en Cálculo y en otras ramas de la matemática, como lo expresó Spivak (1992, p. 49), el cual señala al respecto:

“El concepto más importante de todas las matemáticas es, sin dudarlo, el de función: en casi todas las ramas de la matemática moderna, la investigación se centra en el estudio de funciones. No ha de sorprender, por lo tanto, que el concepto de función sea de una gran generalidad.”

Eisenberg (1992) señala que: “Desarrollar en los estudiantes una sensibilidad hacia las funciones debería ser un objetivo principal del currículo de las matemáticas de la escuela media y universitaria.”

Sin embargo, en la actualidad en base en mi experiencia como docente y estudiante la mayoría de los docentes no le prestan la debida importancia al concepto de función, simplemente se limitan a ver gráficas, clasificación y operaciones de funciones con un enfoque algebraico lo cual ayuda a memorizar los temas, pero están dejando de lado aspectos muy importantes del concepto de función, como es el dominio, contradominio y operaciones de funciones a partir de su gráfica, lo cual nos ayuda a razonar y comprender los temas.

1.1.2 Justificación Metodológica

La mayoría de docentes en México imparten la enseñanza de las matemáticas de una forma tradicional, es decir, es una enseñanza donde el docente es el actor principal de la clase mientras que los alumnos sólo se remiten a hacer anotaciones en su cuaderno. En el trabajo de Tall y Bakar publicado en 1992 el cual lleva por nombre “Students’ mental prototypes for functions and graphs” en el cual trabajaron con estudiantes de 16 y 17 años sostenían la hipótesis que los estudiantes desarrollan prototipos para el concepto de función del mismo modo que desarrollan prototipos para conceptos de la vida diaria, por ejemplo, todos tenemos una idea de qué es una silla, de esta manera si nos dan a clasificar diversos objetos podremos decidir cuáles son sillas, sin embargo existen objetos que están fuera de nuestro prototipo de silla y que si lo son, lo cual nos lleva a clasificarlos como si no fuera una silla.

“Nuestra hipótesis es que los estudiantes desarrollan ejemplos prototipos del concepto de función, tales como $y = x^2$, o un polinomio o $1/x$, o la función seno. Cuando se le pide la gráfica de una función, en ausencia de una definición operativa de función, la mente intenta responder por resonancia con estos prototipos mentales” (Tall y Bakar, 1992, p. 40)

En un cuestionario reconocieron que no sabían lo que era una función, de hecho nadie mencionó un cierto dominio o un rango. Aunque el estudio se realizó en 1992, podemos notar que tiene mucha similitud con la situación actual de la enseñanza de matemáticas en México.

Los investigadores concluyeron que “intentar enseñar la teoría como en las matemáticas de los años 60 es un fracaso. Pero la otra cara de la moneda, enseñar el concepto a través de ejemplos, como en el currículo actual, conduce a prototipos mentales que dan una impresión errónea de la noción de función. De la mayoría de los estudiantes que habían recibido enseñanza sobre función, sólo una pequeña minoría respondió coherentemente y consistentemente” (Tall y Bakar, p.49).

De lo anterior se puede deducir que lo realmente importante en una clase de matemáticas es que el alumno razone, lo cual es algo que muchos docentes no

se han puesto a reflexionar. Es por eso que debemos dejar de una buena vez la educación tradicionalista e iniciar a tener otra visión sobre la enseñanza de las matemáticas, la cual debe contemplar:

- El razonamiento matemático es más importante que la memorización de algoritmos o conceptos.
- La formulación de conjeturas, la invención y la resolución de problemas es más importante que el dictado de teoremas, fórmulas y ejercicios.
- El alumno debe de ser partícipe de la construcción de su conocimiento.

Es por eso que en el presente trabajo se realiza una secuencia didáctica basada en el aprendizaje por descubrimiento, ya que considero que al dar clases mediante esta metodología se logran cubrir los tres puntos anteriores.

1.2 Dificultades en la enseñanza matemática

En mi experiencia los docentes que imparten matemáticas en cualquier institución, suelen encontrarse con ciertas dificultades en el salón de clases. A continuación enlistaré las que considero más relevantes y posteriormente se profundizará en cada una de ellas.

1. Pensamientos negativos sobre las matemáticas.
2. Poco interés por la materia.
3. Conocimientos previos de los alumnos.
4. Sistemas de enseñanza receptiva.

1.2.1 Pensamientos negativos sobre las matemáticas.

Es muy normal escuchar a los alumnos decir que las matemáticas son complicadas, que no nacieron para hacer matemáticas, que las matemáticas son del diablo, que odian a las matemáticas, etc. Lo anterior se debe al contexto social en el que está inmerso el alumno, ya que, en la familia, los maestros y en los medios de comunicación califican a las matemáticas como una materia compleja y difícil que solo se les da a unas pocas personas.

1.2.2 Poco interés por la materia.

Este aspecto es una consecuencia de lo anterior, ya que, debido a los pensamientos negativos sobre las matemáticas, el alumno no le interesa aprender la materia. Además el alumno se cuestiona la importancia de algunos temas, ya que, argumentan que no los aplican en la vida cotidiana, lo cual provoca el poco interés.

1.2.3 Conocimientos previos necesarios de los alumnos.

Este aspecto es muy grave para los alumnos y maestros. Si el alumno no posee los conocimientos básicos de algún tema, es imposible que logre comprender el nuevo tema. Una forma de atacar este problema es haciendo un repaso de los conocimientos previos necesarios que se requieren para desarrollar el tema que se va a estudiar, sin embargo esto implica tiempo, el cual estaba destinado al nuevo tema, por lo que disminuye el número de horas destinadas al tema. Lo anterior provoca que se tenga que ver el tema de manera muy rápida o que se vea de forma muy superficial para que le entiendan los alumnos e inclusive que no se logre ver todo el tema por falta de tiempo.

1.2.4 Sistema de enseñanza receptiva

La mayoría de los docentes aún siguen impartiendo clase mediante una enseñanza receptiva, la cual lejos de propiciar el análisis y comprensión de los temas, lo que provoca en el alumno es que almacene la mayor cantidad de contenidos en su memoria a corto plazo para poder acreditar los exámenes.

En diversas instituciones se ha promovido mediante cursos que los profesores busquen diversos métodos para impartir su clase con la finalidad de involucrar más al alumno en el razonamiento matemático y evitar que memoricen sus conocimientos. Sin embargo la mayoría de los docentes no logran salir de su zona de confort, por lo que deciden seguir impartiendo sus clases mediante un método receptivo.

1.3 Objetivo general

El objetivo general del trabajo de tesis es el desarrollo de una secuencia didáctica del tema de funciones a nivel medio superior, la cual permita a los alumnos analizar los contenidos que engloba el tema y ser partícipes de la clase para lograr una mejor comprensión.

1.4 Objetivos específicos

Como se había dicho anteriormente el tema de funciones está compuesto por varios contenidos, debido a esto cada uno de estos va a tener objetivos específicos:

Que el alumno:

- Trabaje en grupos cooperativos.
- Diferencie las relaciones que son funciones.
- Diferencie la imagen y el contradominio.
- Ubique el dominio y rango de una relación a partir de su gráfica.
- Calcule algebraicamente el dominio de funciones.
- Resuelva gráficamente las operaciones entre funciones.
- Resuelva algebraicamente las operaciones entre funciones.
- Infiera el dominio de las operaciones entre funciones.

1.5 Importancia del tema de función en el contexto de la enseñanza de las matemáticas en el nivel medio superior

En este apartado se expondrán el lugar y extensión que ocupa el tema de funciones en los programas de matemáticas en instituciones de Educación Media Superior, como es el Colegio de Ciencias y Humanidades, Colegio de Bachilleres, la Dirección General del Bachillerato y la Escuela Nacional Preparatoria.

La información se presenta en las siguientes tablas, donde la primera columna indica la asignatura de la institución, la segunda columna muestra la unidad y propósito donde está dentro la secuencia didáctica que se propone en la tesis y por último, en la tercera columna se presentan los temas de la unidad que se pueden realizar con la secuencia didáctica propuesta.

Colegio de Ciencias y Humanidades

Asignatura	Unidad	Tema
<p>Matemáticas IV</p> <p>Semestre escolar en que se imparte: Cuarto</p> <p>Categoría de la asignatura: Obligatoria</p>	<p>Unidad I: Funciones Polinomiales</p> <p>Propósitos: Avanzar en el estudio de las funciones, introduciendo los conceptos de notación funcional, dominio y rango. Profundizar en la comprensión de las relaciones entre la expresión algebraica de una función polinomial, su comportamiento, aspecto y características principales de su gráfica.</p>	<p>*Noción generalizada de función:</p> <p>a) Relación entre dos variables que cumplen ciertas condiciones</p> <p>b) Conjuntos asociados: dominio y rango</p> <p>c) Regla de correspondencia</p> <p>d) Notación funcional $f(x)$</p>

Colegio de Bachilleres

Asignatura	Unidad	Tema
<p>Matemáticas III</p> <p>Semestre escolar en que se imparte: Tercero</p> <p>Categoría de la asignatura: Obligatoria</p>	<p>Bloque temático I: Creciendo con ritmo</p> <p>PROPÓSITO: El estudiante hace uso de las TIC, trabaja en forma colaborativa, relaciona los aspectos geométricos y algebraicos de las funciones exponenciales, logarítmicas y lineales, para que elabore y aplique diferentes estrategias, interprete y argumente la solución de problemáticas situadas, con base en experiencias lúdicas y aplicaciones en diferentes disciplinas.</p>	<p>*Funciones</p> <p>*Regla de correspondencia</p> <p>*Representaciones gráficas</p> <p>*Dominio y rango</p>

Dirección General del Bachillerato

Asignatura	Unidad	Tema
<p>Matemáticas IV</p> <p>Semestre escolar en que se imparte: Cuarto</p> <p>Categoría de la asignatura: Obligatoria</p>	<p>Bloque I: Reconoces y realizas operaciones con distintos tipos de funciones</p> <p>Propósitos: Utiliza los criterios que definen a una función para establecer si una relación dada es funcional o no. Describe una función empleando diferentes tipos de registros y refiere su dominio y rango. Emplea la regla de correspondencia de una función y los valores del dominio implícito o explícito, para obtener las imágenes correspondientes. Aplica</p>	<p>*Funciones</p> <p>*Relaciones</p> <p>*Dominio</p> <p>*Contradominio</p> <p>*Imagen</p> <p>*Regla de correspondencia</p>

	diferentes tipos de funciones en el análisis de situaciones. Utiliza operaciones entre funciones para simplificar procesos a través de nuevas relaciones. Aplica las nociones de relación y función para describir situaciones de su entorno.	
--	---	--

Escuela Nacional Preparatoria

Asignatura	Unidad	Tema
<p>Matemáticas V</p> <p>Clave: 1500</p> <p>Año escolar en que se imparte: Quinto</p> <p>Categoría de la asignatura: Obligatoria</p>	<p>PRIMERA UNIDAD: Relaciones y funciones</p> <p>Propósitos: Que el alumno comprenda el concepto de relación y sea capaz de establecer cuando una relación es función. Que distinga entre variable independiente y dependiente, así como entre dominio y rango. Que sea capaz de determinar las características de una función y que la grafique. Que sea capaz de expresar como función problemas de la vida cotidiana.</p>	<p>*Producto cartesiano</p> <p>*Relaciones</p> <p>*Funciones: Dominio y rango</p> <p>*Gráfica de una función</p>
<p>Matemáticas VI</p> <p>Áreas I y II</p> <p>Clave: 1600</p> <p>Año escolar en que se imparte: Sexto</p> <p>Categoría de la asignatura: Obligatoria</p>	<p>PRIMERA UNIDAD: Funciones</p> <p>Propósitos: Que el alumno identifique distintos tipos de funciones, establezca sus características y sea capaz de trazar sus gráficas. Establecerá relaciones entre su entorno real y las abstracciones matemáticas.</p>	<p>*Relaciones y funciones</p> <p>*Dominio y rango</p> <p>*Gráfica de $y=f(x)$</p> <p>*Algebra de funciones</p>

<p>Matemáticas VI Área III</p> <p>Clave: 1619</p> <p>Año escolar en que se imparte: Sexto</p> <p>Categoría de la asignatura: Obligatoria</p>	<p>SEGUNDA UNIDAD: Funciones</p> <p>Propósitos: Que el alumno conozca y maneje el concepto de función, que establezca y represente gráficamente funciones que describan el comportamiento de fenómenos económicos, administrativos y financieros lo que le permitirá vincular situaciones de la vida cotidiana con el estudio de las matemáticas aplicadas al comercio y la administración.</p>	<p>*Relaciones y funciones</p> <p>*Dominio y contradominio</p> <p>*Gráfica de $y=f(x)$</p> <p>*Álgebra de funciones</p>
<p>Matemáticas VI. Área IV</p> <p>Clave: 1620</p> <p>Año escolar en que se imparte: Sexto</p> <p>Categoría de la asignatura: Obligatoria</p>	<p>SEGUNDA UNIDAD: Función</p> <p>Propósitos: Que el alumno conozca y maneje el concepto de función, que establezca y represente gráficamente funciones que describan el comportamiento de fenómenos económicos, administrativos y financieros lo que le permitirá vincular situaciones de la vida cotidiana con el estudio de las Matemáticas.</p>	<p>*Relaciones y funciones</p> <p>*Dominio y contradominio</p> <p>*Gráfica de $y=f(x)$</p> <p>*Álgebra de funciones</p>

Como se logra observar en los planes de estudios de las diversas instituciones, al tema de función se le brinda mucha importancia debido a que es un concepto base en el desarrollo de las matemáticas, física y química, sin embargo, como ya se mencionó los docentes no le dan la debida importancia para lograr la comprensión de este concepto básico.

En el siguiente capítulo se hará el marco conceptual, en el cual se desarrollarán los conceptos en los que se va a fundamentar la secuencia didáctica que se presentará en el capítulo 3.

2 CAPÍTULO II MARCO TEÓRICO

En este capítulo se presentan las teorías y conceptos que se van a utilizar para fundamentar el diseño de la secuencia didáctica que se presenta en el capítulo 3.

Las teorías y conceptos que se desarrollarán son los siguientes:

- Enseñanza de conceptos.
- Aprendizaje.
- Aprendizaje por descubrimiento.
- Modelo inductivo.
- Método de división de la clase en grupos de aprendizaje.
- Aprendizaje cooperativo.
- Organización de grupos de aprendizaje.
- Evaluación.

2.1 Enseñanza de Conceptos

Existen diversos autores Ausbel (1976), Barrón (1993), Eggen y Kauchak (2002) Glaser (1974), Harold (1992), Morine y Morine (1998) los cuales hacen referencia a cómo las personas aprenden conceptos y a todo lo que interviene en el aprendizaje de conceptos lo llaman proceso de formación de conceptos, sin embargo Bruner hace una distinción entre la formación de conceptos y la adquisición de conceptos y adicionalmente sugiere que al profesor le corresponde enfocarse en la segunda:

“La formación de conceptos es esencialmente el primer paso en el camino a la adquisición de conceptos. En el caso de las setas (por ejemplo), la formación de la hipótesis de que algunas son comestibles y otras no, es el acto de formar conceptos. La adquisición se refiere al proceso de encontrar atributos predictivos definitorios que distingan los ejemplares y los no ejemplares de la clase que uno busca discriminar” (Morine & Morine, 1998, pág. 43)

De lo anterior nos percatamos que para Bruner, la formación de conceptos es el proceso de decidir que una clase o grupo existe, es por eso que considera que

el profesor no debe de enfocarse a ésta, ya que rara vez en la escuela los alumnos deben de inventar nuevos conceptos o descubran nuevos grupos cuya existencia sea desconocida anteriormente. Por ejemplo si quiero enfocarme en el concepto de función, la mayoría de los alumnos ya saben que existen las funciones, pero lo que no conocen son las características que las distinguen, lo cual implica un proceso de adquisición de conceptos, en el sentido como usa Bruner el término.

2.2 Aprendizaje

En la actualidad existen muchas definiciones de que es el aprendizaje algunas de ellas son:

- Es el proceso por medio del cual la persona se apropia del conocimiento, en sus distintas dimensiones: conceptos, procedimientos, actitudes y valores. (Rafael Ángel Pérez)
- Es todo aquel conocimiento que se va adquiriendo a través de las experiencias de la vida cotidiana, en la cual el alumno se apropia de los conocimientos que cree conveniente para su aprendizaje. (Margarita Méndez Gonzales)
- Proceso el cual es proporcionado por la experiencia del individuo y mediante ella se van adquiriendo habilidades, destrezas y conocimientos que son de utilidad en todo desarrollo de la persona. (Diana Gabriela Saldivar Morales)
- Proceso a través del cual se adquieren habilidades, destrezas, conocimientos,... como resultado de la experiencia, la instrucción o la observación. (Isabel García)

Sin embargo, Ausubel (1983, pág. 18) afirma que: "todo el aprendizaje en el salón de clase puede ser situado en dos dimensiones independientes: la dimensión recepción-descubrimiento y la dimensión repetición-aprendizaje significativo"

La primera dimensión se refiere al modo en que se adquiere el conocimiento, mientras que la segunda dimensión es relativa a la forma en que el conocimiento

es incorporado en la estructura de conocimiento o estructura cognitiva del aprendiz.

La dimensión que en este momento nos interesa es la primera, es por eso se va a definir el aprendizaje por recepción y por descubrimiento:

En el aprendizaje por recepción el contenido o la información que ha de ser aprendida, se le entrega totalmente acabado al estudiante, es decir, es un aprendizaje basado en la enseñanza explicativa.

En el aprendizaje por descubrimiento el contenido que ha de aprenderse no se le presenta al estudiante con el fin de que sea independientemente buscado y estudiado antes de ser asimilado en su estructura cognoscitiva.

Díaz Barriga (1999, pág. 23) sintetiza en el siguiente cuadro las ideas de Ausubel acerca de la segunda dimensión

Situaciones del aprendizaje (D. Ausubel)	
Primera dimensión: modo en que se adquiere la información	
Recepción	Descubrimiento
<ul style="list-style-type: none"> • El contenido se presenta en su forma final • El alumno debe interiorizarlo en su estructura cognitiva • No es sinónimo de memorización • Propio de etapas avanzadas del desarrollo cognitivo en la forma de aprendizaje verbal 	<ul style="list-style-type: none"> • El contenido principal a ser aprendido no se da, el alumno tiene que descubrirlo • Propio de la formación de conceptos y solución de problemas • Propio de las etapas iniciales del desarrollo cognitivo en el

hipotético sin referentes concretos	aprendizaje de conceptos y proposiciones
--	---

2.3 Aprendizaje por descubrimiento

El ser humano tiene un potencial natural para descubrir conocimientos, pero el sentido del aprendizaje por descubrimiento en el aula es de un descubrimiento asimilativo, ya que se trata de una experiencia de aprendizaje, no una experiencia científica.

En el aprendizaje por descubrimiento hay un cambio en el rol que tradicionalmente tiene el alumno con el profesor. El estudiante, que tiene que lograr el aprendizaje, ya no puede sólo sentarse en el salón de clase y escuchar, leer y responder preguntas de su profesor. A cambio lo que debe de hacer es explorar y observar la realidad, hacer preguntas sobre los ejemplos, debe experimentar, conjeturar, generalizar y resolver problemas. Por otro lado, el profesor ya no es el poseedor exclusivo del conocimiento, ahora se vuelve en un facilitador de un proceso de descubrimiento el cuál lleva acabo el alumno.

Algunas condiciones que se deben presentar para que se produzca un aprendizaje por descubrimiento son:

- El ámbito de búsqueda debe ser restringido, ya que así el individuo se dirige directamente al objetivo que se planteó en un principio. Los objetivos y los medios estarán bastante especificados y serán atractivos, ya que así el individuo se incentivará a realizar este tipo de aprendizaje.
- Se debe contar con los conocimientos previos de los individuos para poder así guiarlos adecuadamente, ya que si se le presenta un objetivo a un individuo del cual éste no tiene la base, no va a poder llegar a su fin.
- Los individuos deben percibir que la tarea tiene sentido y merece la pena, esto lo incentivará a realizar el descubrimiento.

Lo importante de una secuencia didáctica utilizando el aprendizaje por descubrimiento es que los conceptos que se pretendan aprender se descubran

con una cantidad mínima de orientación exterior, pero sin una orientación, el aprendizaje es muy lento.

La resolución no podrá ser calificada de descubrimiento si únicamente implica la reproducción de conocimientos ya poseídos o la aplicación de algoritmos proporcionados.

En los textos de Lee (1974), Barrón (1997) y Harold (1992) se analizan varias ventajas y desventajas del aprendizaje por descubrimiento las cuales vamos a enlistar.

Ventajas

- Produce activación y en consecuencia atención máxima.
- El alumno atribuye más valor a la tarea, porque le presenta más trabajo.
- Aumenta la expectación del alumno por su capacidad de resolver autónomamente problemas diferentes.
- Ayuda a los alumnos que tienen conflicto de dependencia pasiva con respecto al maestro.
- Integración significativa del conocimiento.
- Mejora de la retención del aprendizaje.
- Facilita al alumno la transición de sus conocimientos a otras áreas.
- Fortalece en los alumnos los sentimientos de seguridad y confianza.
- Estimula un modo de aprender las matemáticas, ya que de esta forma se ve más como proceso que como un producto acabado.

Desventajas

- Ignora el hecho de que los estudiantes carecen de los conocimientos previos necesarios para poder construir las hipótesis o desarrollar las inferencias que se esperan de ellos.
- Se requiere de más tiempo para ver un tema.
- Algunos alumnos no tienen la motivación inicial para realizar el esfuerzo máximo para lograr inferencias.
- Los alumnos impulsivos no reflexionan sobre su respuesta, por lo cual sus conclusiones son equivocadas.

- No existen muchos materiales didácticos que usen procedimientos de descubrimiento.
- En algunos casos los alumnos se sienten molestos o angustiados debido a que su concepto era erróneo.
- La presentación de los datos o ejemplos.

Para Piaget: “Conquistar por sí mismo un cierto saber ..., dará como resultado una mayor facilidad para recordarlo; ...; por lo menos, en lugar de dejar que su memoria domine a su razonamiento o de someter su inteligencia a unos ejercicios impuestos desde el exterior, aprenderá a hacer funcionar su razón por sí mismo y construirá libremente sus propios razonamientos ”. (Barrón Ruiz, 1997, pág. 91)

Mientras tanto, Ausubel (Ausubel D. P., 1976, pág. 540) manifiesta que “a pesar de la falta de testimonios empíricos concluyentes, parece razonable todavía suponer que el esfuerzo, la motivación, la excitación y la vivacidad mayores, asociada con el descubrimiento independiente, producen un grado algo mayor de aprendizaje y retención”.

Algunos autores como Bruner (1961) y Glaser (1974), identifican el aprendizaje por descubrimiento con secuencias inductivas, las cuales parten de la observación de datos particulares, a partir de las cuales el sujeto llega a descubrir la generalización subyacente.

2.4 Modelo inductivo

El modelo inductivo es una estrategia de aprendizaje en el cual se lleva un razonamiento, que partiendo de situaciones, casos o ejemplos específicos se llega a una nueva categoría, concepto o generalización.

En este modelo, el estudiante analiza ejemplos, identifica las características esenciales y llega a conclusiones acerca del significado o de las características, mientras que el profesor funge de guía mientras ellos forman su propia conclusión, ya que sin esta guía pueden no advertir las características importantes de los ejemplos, las discusiones podrían apartarse de la tarea.

Planeación de las lecciones con el modelo inductivo:

1. Identificación del tema. El profesor debe determinar cuáles contenidos va a enseñar. Cuando en los contenidos se encuentren conceptos, principios o generalizaciones puede emplearse con eficiencia este modelo.
2. Identificación de objetivos de aprendizaje. Una vez que se identifica el tema, el profesor debe tener en claro lo que quiere que los alumnos aprendan, es decir, debe tener los objetivos de aprendizaje claros, ya que de esta manera, durante la planeación el profesor va buscando ejemplos de tal forma que los objetivos que se planteó se cumplan. También el tener los objetivos claros nos sirven para elaborar preguntas de tal forma que guíen a los alumnos a llegar a la meta que se busca.
3. Identificar ejemplos y no ejemplos. Cuando ya se cuenta con los objetivos claros, es momento de que el profesor busque ejemplos que ilustren los temas que espera que el alumno comprenda. Hay una diversidad de ejemplos, los puede seleccionar de algunos libros o los puede inventar, pueden ser reales o imaginarios, imágenes o estudios de casos, pero lo que se recomienda es que sean de interés para los alumnos y que no se requieran conocimientos previos para entenderlos. Cuando se están enseñando conceptos es importante agregar no ejemplos de dicho concepto debido a que de esta manera los alumnos pueden observar que no todos los ejemplos pueden cumplir con el concepto con el que se está trabajando.

Cuando el profesor ya planeó los tres puntos anteriores, es momento de implementarlo en la clase, para lo cual se divide en cinco fases:

1. **Introducción.** Sirve para atraer la atención y ofrecer un marco conceptual a la lección. En esta fase el profesor explica que se va a hacer en la clase.
2. **La fase abierta.** En esta fase se busca la participación de los alumnos, en donde el profesor puede actuar de diferentes maneras:
 - Puede presentar ejemplos y que vean que tienen en común
 - Puede presentar ejemplos y no ejemplos y puede pedir que encuentren las diferencias.

También en esta fase el profesor puede realizar preguntas abiertas, las cuales deben ser claras y fáciles de responder, de esta manera aumenta la participación y ayuda a que la clase tenga un buen ritmo.

3. **Fase convergente.** En esta fase el docente realiza preguntas de tal manera que dirijan la clase hacia el concepto o principio que se planteó en los objetivos del tema. A diferencia de la fase abierta, las preguntas que se elaboran aquí deben de reducir las respuestas con el objetivo de particularizar.
4. **Cierre.** Es en esta fase cuando los estudiantes, una vez que han pasado por las fases anteriores, llegan a conclusiones, es decir, dado el contenido identifican el concepto, la regla o generalización, lo cual se logró hacer por el análisis de las características de los ejemplos y los no ejemplos.
5. **La aplicación.** Esta fase es muy importante, ya que, aunque en la anterior se definió un concepto o se describió una regla o una generalización, para que el aprendizaje sea significativo el alumno debe de aplicarlo, ya sea que el profesor les dé más ejemplos para analizar, pidiéndoles que busquen ejemplos del concepto o con la resolución de un problema el cual implique utilizar los conocimientos que aprendió.

Para Harold (1992, pág. 79) hay cuatro factores que influyen en la adquisición de conceptos mediante el modelo de inducción.

1. Factores relativos a los datos. En este aspecto se incluye las dificultades con las que los alumnos se enfrentan en el análisis de datos ya que en ocasiones son muy pocos, están mal organizados o son muy complejos para que los entiendan.
2. Factores relativos al contexto o área de búsqueda. Hace referencia al tipo de instrucciones que asignamos a los alumnos, ya que, si son muy abiertas se pueden alejar del concepto pero si son muy puntuales, no los dejamos que descubran, asimismo al uso de palabras que ocupamos, ya que hay que adecuarlas en el contexto en el que estemos trabajando.

3. Factores relativos al individuo implicado en el problema de adquisición de conceptos. Incluyen la formación, y los conocimientos, las actitudes y la capacidad cognitiva, conocimiento de los datos o la familiaridad con los datos.
4. Factores relativos al ambiente inmediato. El clima en el aula es sumamente importante ya que si los alumnos no son honestos, respetuosos ni tolerantes presenta un problema en la forma de adquisición de conceptos.

2.5 Método de División de la clase en grupos de aprendizaje (DCGA)

La DCGA fue desarrollado por Robert Salavin y es una forma de aprendizaje cooperativo que usa equipos de aprendizaje de multihabilidades, para enseñar formas específicas de contenido: hechos, conceptos, generalizaciones, principios, reglas académicas y habilidades.

Eggen y Kauchak (2002) explican que hay cinco pasos para planificar una clase según el método DCGA:

- 1) Planificar la enseñanza. Se debe de tomar en cuenta qué tipo de modelo se va a usar. El modelo inductivo (Conceptos, principios, generalizaciones o reglas académicas) o de enseñanza directa (habilidades o conceptos). En el primer caso se debe que identificar un tema, posteriormente especificar las metas que se desean y por último preparar ejemplos, mientras que en el segundo caso se realiza lo mismo pero también se pueden preparar problemas.
- 2) Organizar grupos. Este tema se abordará con detalle en el siguiente apartado.
- 3) Planificar actividades para la consolidación del equipo. Eggen y Kauchak (2002, pág. 387) citan a Scruggs y Richter (1988) en donde señalan que la investigación indica que el mero agrupamiento no asegura la confianza

y la cooperación. Por lo anterior se tiene que diseñar actividades que ayuden a los alumnos a aceptar a los demás y a confiar en ellos.

- 4) Planificar el estudio en equipos. El docente debe de responder la siguiente pregunta: ¿Qué conceptos o habilidades específicos están aprendiendo los estudiantes y cómo puedo diseñar materiales que les permitan aprender eficazmente en sus grupos? Es importante que los materiales de estudios impliquen respuestas que sean claramente correctas o incorrectas.
- 5) Cálculo de puntajes básicos. Los puntajes básicos se da mediante calificaciones anteriores o un examen diagnóstico. Los puntos de superación son puntos extras que se les otorgan al estudiante cuando obtiene una mejor calificación en una prueba que en el puntaje básico.

Eggen y Kauchak (2002) enlistan las etapas en la implementación de DCGA:

- 1) Enseñanza. Su propósito es introducir la clase y despertar la atención de los alumnos, así como activar su conocimiento previo mediante una revisión del conocimiento o de las habilidades indispensables y aquí se promueve la participación. Además es donde hay una explicación y modelización de los contenidos y se inicia una práctica guiada.
- 2) La transición al trabajo en equipos. Debe de explicarse muy detalladamente cómo funciona el aprendizaje cooperativo y los procedimientos específicos que deben seguirse para trabajar en equipo. En este punto los docentes pueden arreglar la distribución de las bancas para que los equipos trabajen de una forma más cómoda.
- 3) Estudio en quipos y monitoreos. Mientras se encuentre el trabajo en equipo, los docentes tienen que monitorear a los equipos para ver que trabajen adecuadamente.
- 4) Pruebas. Las pruebas tienen que evaluar los conceptos y habilidades importantes. Las pruebas tienen dos objetivos, el primero es proporcionar

al docente y a los alumnos acerca del progreso del aprendizaje y el segundo es para motivar al alumno.

Este método se va a emplear en la enseñanza del concepto de relación, ya que es un conocimiento previo que deben tener los alumnos cuando estén trabajando en la adquisición del concepto de función. Así de esta manera se trata de evitar la siguiente desventaja del aprendizaje por descubrimiento.

- Ignora el hecho de que los estudiantes carecen de los conocimientos previos necesarios para poder construir las hipótesis o desarrollar las inferencias que se esperan de ellos.

Un beneficio adicional de DCGA es que permite al docente alfabetizar matemáticamente a los alumnos, lo cual es importante ya que cuando estén los grupos cooperativos buscando características en los ejemplos, todos van a hablar el mismo lenguaje matemático.

2.5.1 Aprendizaje Cooperativo

El Aprendizaje cooperativo es una estrategia de enseñanza que compromete a los alumnos a trabajar en colaboración para alcanzar metas comunes. La labor del profesor es diseñar y mantener casi por completo el control en la estructura de interacción y de los resultados que se han de obtener.

Kagan (1994) sostiene que el Aprendizaje cooperativo “se refiere a una serie de estrategias instruccionales que incluyen a la interacción cooperativa de estudiante a estudiante, sobre algún tema, como una parte integral del proceso de aprendizaje”.

El aprendizaje cooperativo se cimienta en la teoría constructivista desde la que se otorga un papel fundamental a los alumnos, como actores principales de su proceso de aprendizaje. Pero también desde una perspectiva del desarrollo, el aprendizaje cooperativo funciona por la interacción que tienen los alumnos con sus iguales de los cuales aprenden. Desde una perspectiva conductista el

aprendizaje cooperativo funciona porque los alumnos son recompensados por trabajar juntos.

Eggen y Kauchak (2002, pág.375) cita a Slavin (1995) el cual nos dice que en el aprendizaje cooperativo es fundamental el trabajo en grupos pequeños, dichos grupos van a tener tres compones principales:

- a) Metas grupales.
- b) Responsabilidad individual.
- c) Igualdad de oportunidades para el logro del éxito.

A diferencia del aprendizaje individualista, aquí los alumnos deben de trabajar conjuntamente, ya que, los esfuerzos de los alumnos contribuyen al logro de la meta de los demás. Estas metas ayudan a crear un espíritu de equipo y alientan a los estudiantes a ayudarse entre sí.

La responsabilidad individual es muy importante, ya que, cada miembro, debe de asumir la responsabilidad de las metas que se le dieron en un principio, por eso cada uno de los alumnos es responsable de contribuir de algún modo al aprendizaje y al éxito del grupo.

La igualdad de oportunidades para el logro del éxito hace referencia a que no importan las habilidades o conocimientos previos que tenga el alumno, estos pueden esperar ser reconocidos por sus esfuerzos.

Algunas ventajas del aprendizaje cooperativo son:

- Fomenta la metacognición del estudiante.
- Responsabilidad, flexibilidad y autoestima.
- Promueve el aprendizaje profundo.
- Genera grupos de apoyo para los alumnos que tengan mayor dificultad.

En el aprendizaje por descubrimiento, aunque se requiera el comportamiento autorregulado del alumno, no está exento de la mediación social. Por eso las experiencias colectivas y cooperativas de aprendizaje por descubrimiento en la medida en que animan al sujeto a expresar y fundamentar su pensamiento, a descentrar su razonamiento, a coordinar su acción con los demás pueden

resultar altamente favorecidos de los descubrimientos cognitivos intrapersonales. (Vigotski 1970, Wertsch 1988, Perret Clermont 1984, Nelson 1988 citados en Barrón 1993, pág. 4)

Las experiencias colectivas y cooperativas de aprendizaje nos ayudan a solucionar algunas desventajas del aprendizaje por descubrimiento como son:

- Algunos alumnos no tienen la motivación inicial para realizar el esfuerzo máximo para lograr inferencias.
- Los alumnos impulsivos no reflexionan sobre su respuesta, por lo cual sus conclusiones son equivocadas.
- En algunos casos los alumnos se sienten molestos o angustiados debido a que su concepto era erróneo.

Debido a que si algún alumno cae en alguna actitud citadas anteriormente, sus compañeros pueden ayudarlo y él pueda salir del problema de una forma satisfactoria.

2.5.2 Organización de grupos de aprendizaje

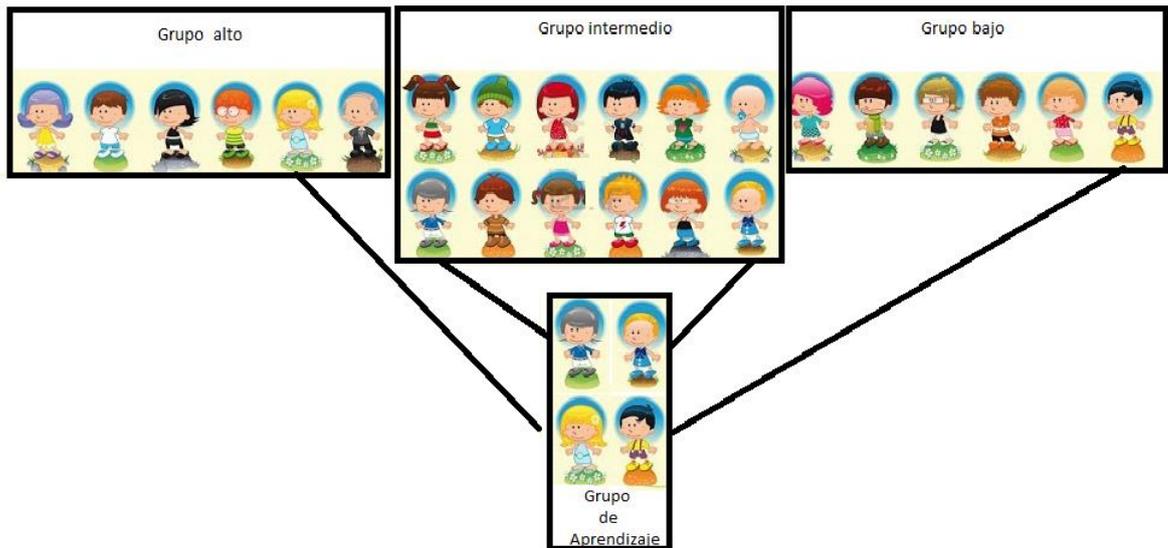
La organización de grupos es un aspecto importante en el aprendizaje cooperativo. Eggen y Kauchak (2002) , Cooper (2010) y Johnson (1994) afirman que los grupos más productivos en el rendimiento académico son los grupos heterogéneos, es decir, grupos compuestos por estudiantes con diferentes rendimientos, diferente sexo y distintos intereses lo cual permite que los alumnos tengan acceso a diversas perspectivas y métodos de resolución de problemas, además de que tienden a promover un pensamiento más profundo, un mayor intercambio de explicaciones y una mayor tendencia a asumir puntos de vista durante los análisis del material. También recomiendan que el tamaño de cada grupo debe de ser de cuatro o cinco integrantes.

En cierto modo, cada grupo debe reproducir la diversidad existente en el grupo en su conjunto, es decir debe ser un grupo clase en pequeño con todas sus características.

Para formar los grupos de aprendizaje, el docente puede seguir los siguientes pasos:

1. Conocer el nivel de aprovechamiento actual de cada uno de sus alumnos en el grupo. Esto lo puede lograr promediando las calificaciones en los cursos anteriores, aplicando una prueba o si ya se conoce a los alumnos, basta con la observación del docente. El producto final en esta etapa es una lista que se ordena desde el promedio más alto al más bajo.
2. Dividir a los alumnos en tres categorías:
 - I. El grupo alto, el cual va a incluir al 25% de alumnos.
 - II. El grupo intermedio, el cual van a estar conformado por los siguientes 50% de alumnos que están en la lista.
 - III. El grupo bajo, estará compuesto por los últimos 25% de alumnos que aparecen en la lista.
3. Conformar los grupos. Una vez que se tiene la división de los alumnos en tres grupos, ya podemos formar los grupos de aprendizaje, donde cada uno va a estar formado por un alumno del grupo más bajo, un alumno del grupo más alto y dos alumnos de grupo intermedio. En esta etapa es importante que el docente tenga claro que está buscando conformar grupos heterogéneos.

Otra manera de organizar los grupos es mediante el azar, ya que es más fácil. La estrategia más conocida es la de enumeración, la cual consiste en dividir la cantidad de alumnos del grupo entre la cantidad de alumnos que se quiera tener en cada grupo. Si el docente quiere grupos de 4 personas y tiene 28 alumnos, dividirá 28 entre 4. Luego enumera a los alumnos según el resultado de la división, que en nuestro ejemplo es 7. Los alumnos con el mismo número formarán entonces los grupos.



Una forma de organizar grupos que no se recomienda son los grupos seleccionados por los propios alumnos, ya que suelen ser homogéneos, es decir, que los miembros de un grupo son todos buenos alumnos, o todas mujeres, o puros amigos, etc. Esto da lugar a que los alumnos se distraigan de la tarea.

2.6 Evaluación del aprendizaje en el aula

Muchos docentes creen que evaluar simplemente es aplicar un examen de los conocimientos que se dieron en un tema y lo que saquen es lo que aprendieron, sin embargo evaluar es “el proceso de obtención de información y del empleo de la misma para formar juicios que, a su vez, se usan para la toma de decisiones” (Cooper, 2010, pág. 501), es decir, para obtener información no basta con un examen, ya que incluye todo tipo de métodos para observar y obtener muestras de las habilidades, conocimientos y capacidades de los estudiantes. Una vez que obtenemos la información la analizamos para formar juicios y así tomar una decisión.

Otra definición de evaluación es la siguiente: “es la verificación tanto como proceso y producto de los objetivos de aprendizaje. Es decir juzgar lo adquirido por los alumnos como resultado de un proceso instruccional” (Guzmán, 2003, pág. 13).

2.6.1 Funciones y ventajas de la evaluación

La evaluación tiene diversas funciones, sin embargo para Guzmán (2003, p. 13) las principales son:

- Es un instrumento que nos permite valorar la calidad educativa y dónde a partir de este conocimiento debemos tomar medidas pertinentes.
- Nos permite confrontar lo planeado con la realidad, es decir, nos ayuda a verificar en qué medida alcanzamos lo que previamente habíamos establecido.
- A partir de lo antes dicho, la evaluación cuando está bien dirigida nos sirve para ayudar a la superación académica de los directivos, profesores y alumnos.
- Valora el esfuerzo y el grado de compromiso de todos los involucrados en el acto educativo. O sea contrariamente de concebir a la evaluación como una persecución y descalificación personal por fijarse únicamente en las deficiencias, debe ser una herramienta que nos ayude a valorar lo bien realizado y la labor cotidiana de todos.

La evaluación tiene ventajas para los diferentes actores que intervienen en ella: alumnos, docentes, directivos e instituciones

- Alumnos. Les permite identificar en diferentes momentos el grado y calidad de los aprendizajes alcanzados. La relevancia de hacerlo es que les servirá como aliciente al estudiante si sus logros no son los adecuados y tendrán un carácter motivador o de estímulo si hay avances en lo adquirido.
- Docentes. Ayuda al docente a proporcionar elementos para orientar de mejor manera tanto sus estrategias de enseñanza como la planeación de su clase. Una evaluación centrada en conocer de manera clara el tipo de aprendizajes adquiridos por los alumnos, ayuda a que el fin de todas las acciones del maestro sea precisamente lograr lo anterior y evita que esta importante función se vea distorsionada como a veces sucede.
- Directivos e instituciones. La evaluación es uno de los principales instrumentos que ellos disponen para trabajar de manera clara a conseguir las finalidades institucionales que muchas veces se pierden entre tanto burocratismo. Si los instrumentos con los que se evalúan a los estudiantes son amplios, adecuados y bien hechos servirán no sólo para asignar una calificación justa sino también para ayudar a verificar la calidad de la instrucción proporcionada por la institución educativa.

2.6.2 Momentos de la evaluación

Para la obtención de información se consideran que la evaluación debería efectuarse en por lo menos tres amplios momentos: antes, durante y después de la instrucción, a las cuales se les conocen como evaluación diagnóstica, evaluación formativa y evaluación sumativa respectivamente. Cada una de ellas se considera necesaria y complementaria, además nos permite una valoración global y objetiva del proceso de enseñanza aprendizaje.

2.6.2.1 Evaluación diagnóstica.

Es la que se realiza antes de desarrollar cualquier proceso y tiene primordialmente dos funciones:

- I. Identificar cuáles son los conocimientos e ideas previas que tienen los alumnos sobre el tema, además nos ayuda a detectar las necesidades para poder desarrollar los nuevos aprendizajes.
- II. Sirve de parámetro para evaluar la efectividad del proceso de enseñanza, debido a que en esta evaluación el docente deberá incluir además de preguntas sobre conocimientos previos otras sobre los contenidos que se van a impartir.

Algunas de las características de la evaluación diagnóstica son:

- No puede llevar calificación, ya que la calificación tenderá a penalizar a los estudiantes, cuando lo que se busca es que se den cuenta de los conocimientos que manejan al iniciar un tema.
- No tiene por qué ser una prueba, podría ser una actividad previamente programada, pero lo importante es que se tenga muy clara la pauta de evaluación.
- Puede ser grupal o individual, esto depende si el docente quiere una visión global o particular de los alumnos.
- No sólo es información para el profesor, ya que debe ser devuelta a los alumnos con las observaciones para que ellos mismos puedan darse cuenta de su estado inicial ante los nuevos conocimientos.

En la secuencia didáctica que propongo, la evaluación diagnóstica es una prueba que se aplica de manera individual y en base a los resultados se planea la siguiente clase, para que tengan los conocimientos necesarios para entender el nuevo tema.

2.6.2.2 Evaluación formativa

Son evaluaciones que se realizan durante el transcurso del curso y sus principales funciones son:

- I. Guían al docente en el ajuste de su planeación, ya que les permite obtener información sobre los progresos, comprensión y aprendizajes de los contenidos.
- II. Ayuda a los estudiantes en las áreas que necesitan trabajar más

Algunos métodos que se utilizan en este tipo de evaluación son: tareas, exámenes rápidos, ejercicios de repaso, preguntas sobre lo que se vio en clase y autoevaluaciones.

En la secuencia didáctica que propongo, esta evaluación se refleja en el cierre de cada clase, ya que se pregunta a los alumnos ¿Qué fue lo que se vio en clase?, también durante la clase se dejan ejercicios.

2.6.2.3 Evaluación sumativa

Es la que se lleva a cabo cuando se termina la instrucción y su propósito consiste en permitir al docente y el alumno conocer el nivel de rendimiento alcanzado.

La diferencia entre la evaluación formativa y sumativa radica en la forma en que se utilizan los resultados, ya que en la formativa la meta es obtener información sobre el aprendizaje de los alumnos, con fines de planeación, mientras que en la evaluación sumativa el propósito es determinar el aprovechamiento final.

Al final de la secuencia didáctica se aplicará un examen el cual va a estar compuesto por preguntas que se realizaron en la prueba de diagnóstico referente al tema de funciones y operaciones.

Una vez que realice estas tres evaluaciones, voy a tener información que me va a ayudar a decidir si mi propuesta ayudó a los alumnos a comprender mejor el concepto de función.

3 CAPÍTULO III. DISEÑO DE LA SECUENCIA DIDÁCTICA

En este capítulo se presenta la secuencia didáctica que elaboré para el tema de funciones. Así mismo se responden las siguientes preguntas:

1. ¿Por qué se partió del tema de relación entre conjuntos?
2. ¿Cómo fue la elección de los ejemplos de relaciones y funciones?
3. ¿Cómo fue la elección de las indicaciones y preguntas que aparecen en las hojas de trabajo?
4. ¿Cómo fue evolucionando la secuencia didáctica?

3.1 ¿Por qué se partió del tema de relación entre conjuntos?

En el trabajo de Marnynskii (1979) el cual lleva por nombre “psychological characteristics of pupils’ assimilation of the concept of a function”, concluye dando orientaciones metodológicas para los profesores.

- La introducción de las relaciones funcionales en la escuela debe incluir la familiarización con los conceptos de conjunto y relaciones entre elementos de dos conjuntos.
- Es preciso desarrollar un sistema de ejercicios que ayude a los alumnos a reconocer las características poco relevantes de una función y a generalizar las características esenciales de una función.

Por lo anterior, en la secuencia didáctica partimos de relaciones entre conjuntos y siempre se busca que los alumnos encuentren ciertas características para lograr generalizarlas, ya sea mediante la discusión en equipo o en una discusión grupal.

3.2 ¿Cómo fue la elección de los ejemplos de relaciones y funciones?

Los ejemplos y ejercicios sobre relaciones y funciones que aparecen en la secuencia didáctica fueron una recopilación de ejemplos realizados por alumnos de la Escuela Nacional Preparatoria Plantel 3 Justo Sierra y del Colegio de Ciencias y Humanidades Plantel Sur.

Este proceso de recopilación se llevó a cabo durante la impartición de un taller en cada plantel, en el cual se explicó el concepto de relación y función entre conjuntos mediante instrucción directa y posteriormente se les pidió a los alumnos que buscaran ejemplos que estuvieran presente en la vida cotidiana. Adicionalmente se les solicitó que pasaran a exponer sus ejemplos para que todos sus compañeros los conocieran y para terminar se les pidió que indicaran cuales ejemplos les habían llamado más la atención. Una vez que obtuve la lista de ejemplos, se analizó cuáles eran los más idóneos para poder realizar las actividades planeadas en la secuencia didáctica.

3.3 ¿Cómo fue la elección de las indicaciones y preguntas que aparecen en las hojas de trabajo?

La elaboración de las instrucciones y preguntas fue una labor complicada, ya que se buscó que fueran claras para los alumnos. Este proceso se llevó a cabo en dos partes.

- a) Durante el curso de práctica docente II tuve la oportunidad de implementar las primeras cuatro sesiones en un grupo del Colegio de Bachilleres
 - Sesión 1 Diagnóstico.
 - Sesión 2 Repaso de conocimientos previos necesarios.
 - Sesión 3 Relaciones.
 - Sesión 4 Funciones.

Durante el trabajo en clase no se les proporcionó las indicaciones y preguntas por escrito, lo que hacía era escribirlas en el pizarrón y les pedía que las realizaran y contestaran en su cuaderno. Muchos alumnos no lograban entender lo que se les solicitaba hacer por lo que tenía que replantear la pregunta en más de una ocasión hasta que les quedaba claro lo que tenían que hacer. Al término de la clase se registraron las indicaciones y preguntas que hasta cierto punto los alumnos habían comprendido mejor.

- b) Durante el curso de práctica docente III realicé la segunda parte de la secuencia didáctica en la Escuela Nacional Preparatoria Plantel 7
 - Sesión 1 Diagnóstico.
 - Sesión 2 Repaso de conocimientos previos necesarios.
 - Sesión 3 Dominio de funciones.

- Sesión 4 Operaciones entre funciones.
- Sesión 5 Evaluación final.

Esta ocasión seguí la mecánica de escribir las indicaciones y preguntas en el pizarrón y sobre la marcha de la clase modificarlas hasta que los alumnos entendían lo que tenían que realizar.

3.4 ¿Cómo fue evolucionando la secuencia didáctica?

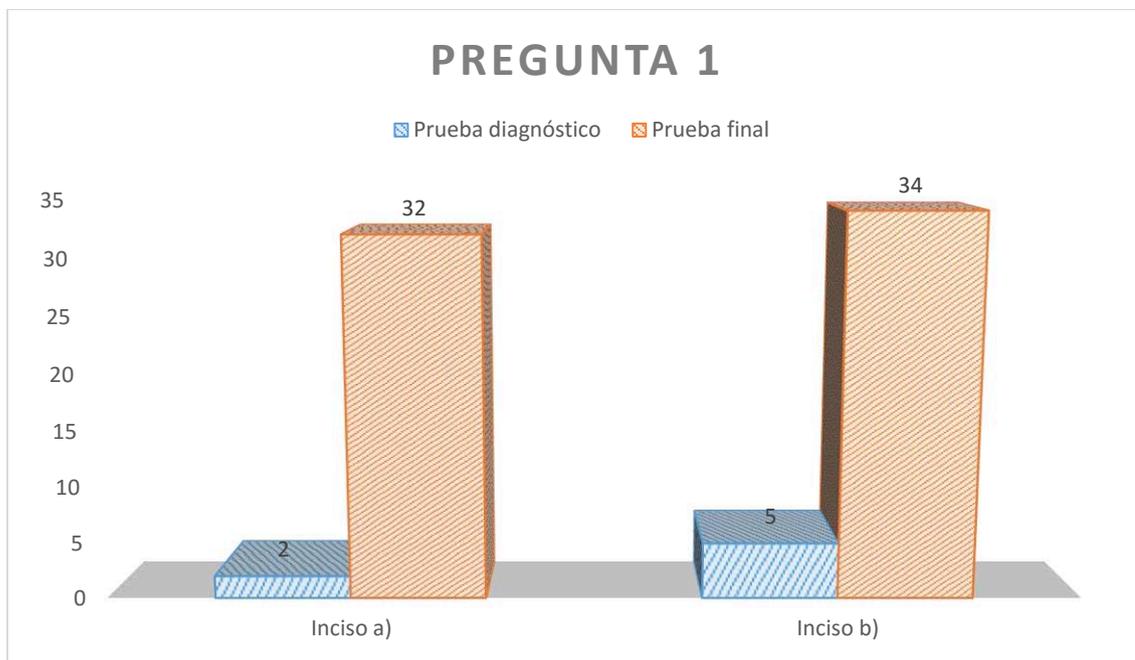
La secuencia didáctica que se presenta en el trabajo de tesis se realizó durante 3 semestres:

- Primer semestre. Se realizó un borrador de las actividades que se iban a implementar y posteriormente me di a la tarea de dar un taller para recopilar ejemplos que a los alumnos se les hicieran atractivos.
- Segundo semestre. En este semestre en la materia de práctica docente II tuve que ir a realizar una práctica de campo en el Colegio de Bachilleres. Como se mencionó en el apartado anterior sólo apliqué una parte de la secuencia y por cuestiones de tiempo no logré realizar una evaluación final, sin embargo durante las actividades detecté que a los alumnos si les había quedado claro el tema. En esta ocasión se encontraron problemas con algunas imágenes de los ejemplos las cuales se modificaron, ya que en las impresiones no se veían claras debido a la saturación de flechas lo cual en lugar de ayudar al alumno, era un obstáculo para realizar la actividad.
- Tercer semestre. Durante la implementación de la segunda parte en la Escuela Nacional Preparatoria Plantel 7, debido a que eran alumnos de sexto semestre en área 1 ya habían visto el tema de funciones en matemáticas V y en Matemáticas VI por lo que en la primer sesión se realizó una prueba diagnóstico donde se incluyeron los temas que se iban a implementar en las sesiones siguientes y en la última se volvió a aplicar la misma prueba para comparar los resultados.

A continuación se muestra el análisis de las preguntas de las pruebas, en las cuales se tuvo una población de 54 alumnos:

1. Encuentra el dominio natural de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \frac{3x+2}{(x-3)(x5)}$ b) $f(x) = +\sqrt{x-4}$



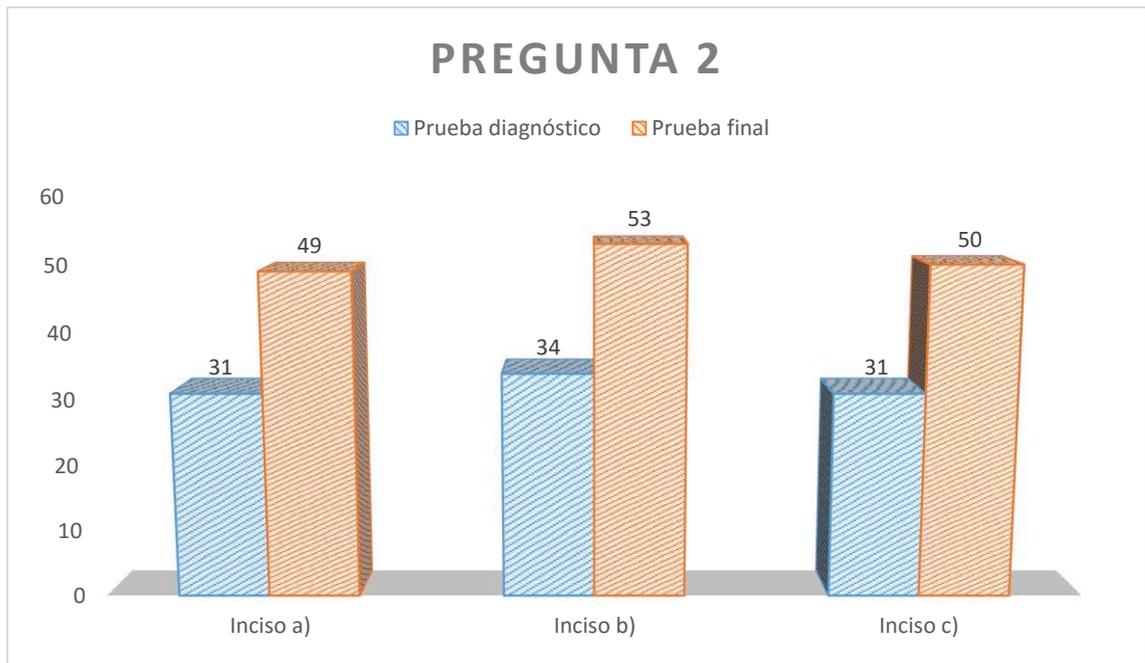
Al analizar las respuestas vemos que aumentó considerablemente el número de alumnos que contestaron correctamente ambos incisos, sin embargo los resultados no fueron los esperados, ya que el 40.7% y el 37% de los alumnos no contestaron correctamente los incisos a) y b) respectivamente.

Al analizar las respuestas me percaté que la razón por la que no habían contestado de manera correcta las preguntas no era por las estrategias que se emplearon para la enseñanza del tema, más bien es por una deficiencia que tienen los alumnos en el álgebra, en especial en resolver ecuaciones de segundo grado y en desigualdades.

Debido a lo anterior decidí hacer más énfasis en estos temas a la hora de realizar el repaso de conocimientos previos necesarios y adicionalmente dejarles tarea todos los días referentes a estos dos temas.

2. Sean $f(x) = \frac{3}{x+5}$ y $g(x) = x + 5$. Realiza las siguientes operaciones

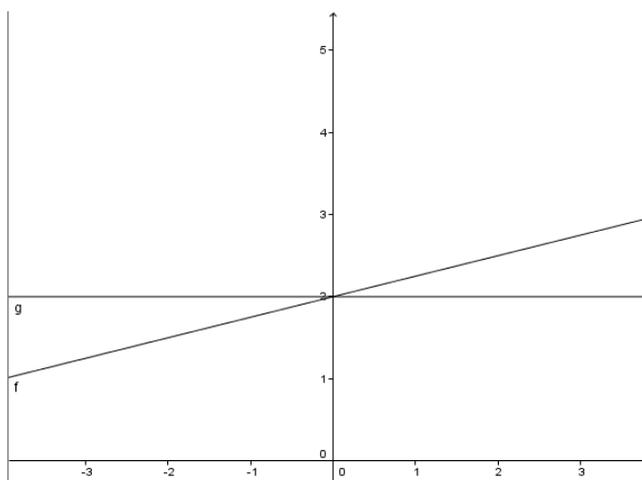
a) $f(x) + g(x)$ b) $f(x)g(x)$ c) $\frac{f(x)}{g(x)}$

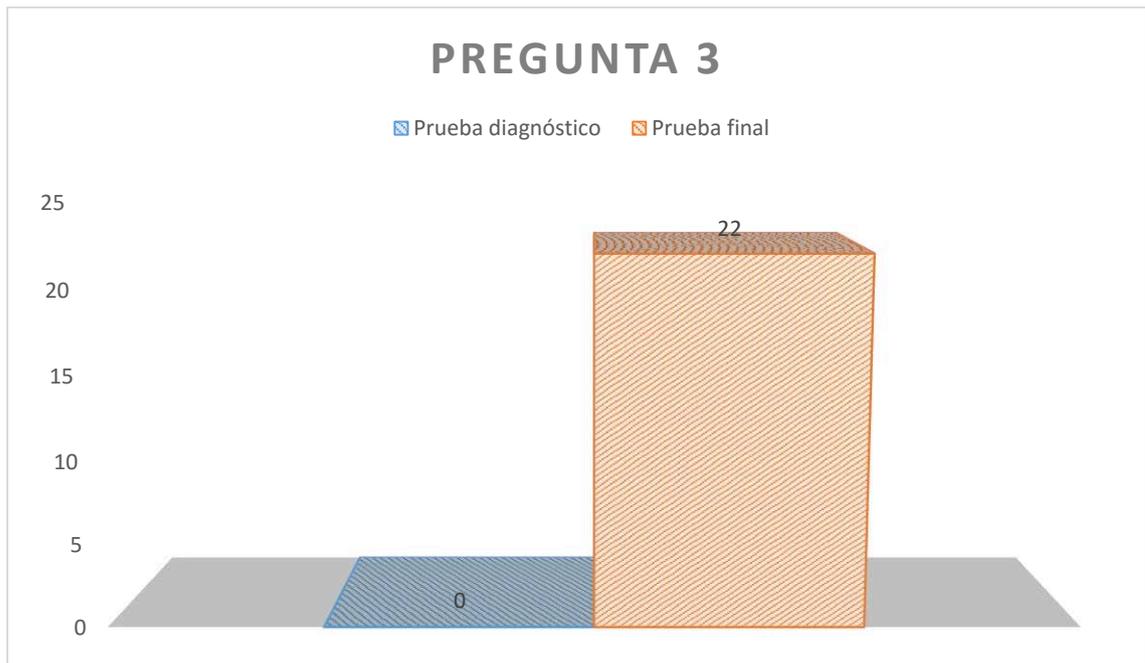


En este caso se muestra que las actividades realizadas para encontrar algebraicamente la suma de funciones fueron las idóneas, ya que al concluir la secuencia más del 90% , 98% y 92% de los alumnos contestaron correctamente el inciso a), b) y c) respectivamente.

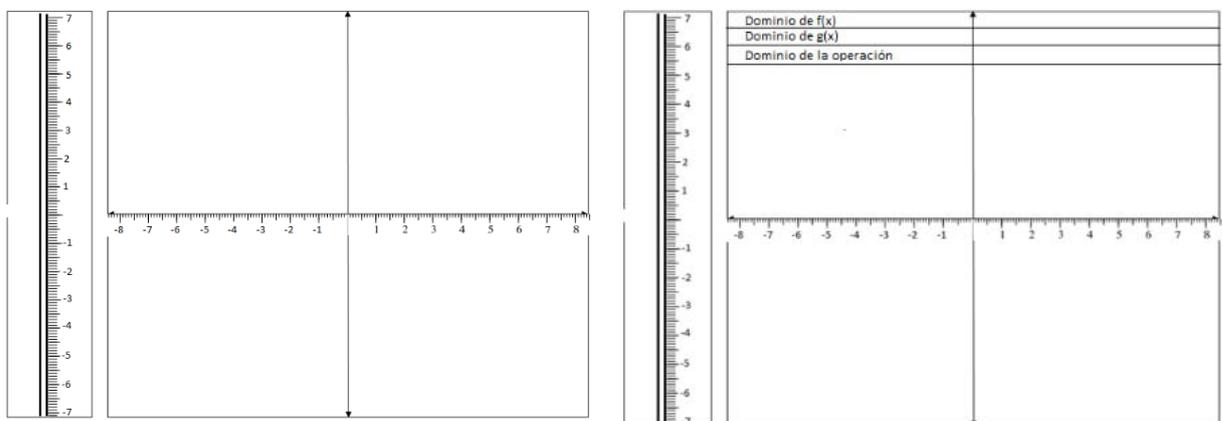
Debido a estos resultados se dejaron igual las actividades relacionadas con el tema operaciones algebraicas entre funciones.

3. Realiza un esbozo de la gráfica de la suma de la función $f(x)$ con $g(x)$





Vemos que aunque en la prueba final ya el 40% de los alumnos logra realizar el esbozo de la gráfica del producto hay un 60% que no logró realizarlo. Al analizar las respuestas notamos que la estrategia propuesta no estaba siendo tan clara para los alumnos, por lo que se decidió modificarla. En un principio la estrategia consistía en dar sólo el material de apoyo y el docente daba las instrucciones de forma oral, esto se cambió y se decidió dar una hoja con las instrucciones impresas para que los alumnos las tuvieran y en cualquier momento las pudieran leer. También se modificó el material de apoyo, se agregaron tres renglones en la parte superior donde se les pide que coloreen el dominio de las funciones, esto con la finalidad de que el alumno tenga un apoyo visual que le ayude a deducir el dominio de la operación del ejemplo que se esté analizando.



3.5 Secuencia didáctica

Con base en los análisis realizados en la sección anterior, la secuencia didáctica se modificó y el producto final se presenta a continuación.

PRIMERA SESIÓN

TEMA	Evaluación diagnóstica
OBJETIVO	Identificar las ideas previas sobre el concepto de función que tienen los estudiantes, así como sus habilidades para resolver ejercicios sobre ecuaciones, desigualdades y el manejo del plano cartesiano.
DURACIÓN	1 hora
MATERIAL DE APOYO	<ul style="list-style-type: none">• Fotocopias de la evaluación diagnóstica.

Apertura

El docente realiza las siguientes preguntas a los alumnos:

¿Qué es la evaluación diagnóstica?

¿Para qué sirve la evaluación diagnóstica?

Las preguntas anteriores se responden mediante una lluvia de ideas

Desarrollo

El docente entrega a cada uno de los alumnos una fotocopia de la evaluación diagnóstica y les indica que sólo van a tener 40 minutos para la resolución. Además les solicita que lean las instrucciones y posteriormente comiencen a responder la prueba.

Diagnóstico

Nombre:

Grupo:

Fecha:

Instrucciones: Contesta de manera individual las siguientes preguntas. Los resultados de esta prueba no tiene valor para la calificación final.

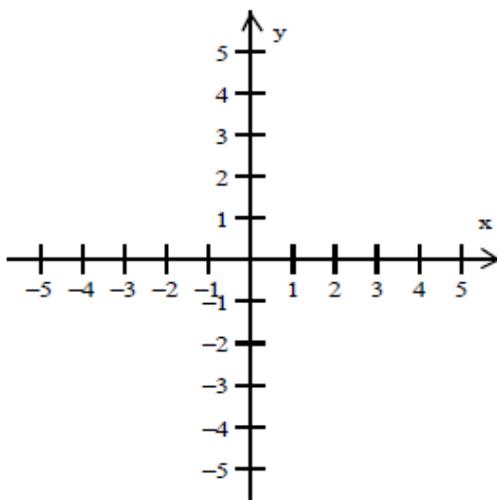
1. Encuentra en el plano cartesiano los siguientes puntos:

a) (3,4)

b) (-4,-5)

c) (-3,2)

d) (1,-4)



2. Si $A = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k\}$ y $B = \{c, a, m, e, t, i, r, o\}$.

Encuentra $A \cup B$ y $A \cap B$.

3. Resuelve la ecuación $x^2 + 6x + 9 = 0$

4. Resuelve las siguientes desigualdades:

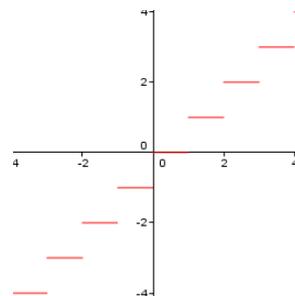
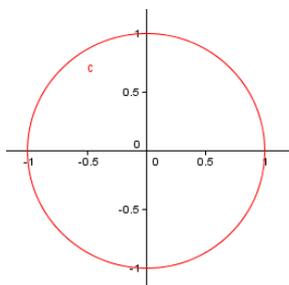
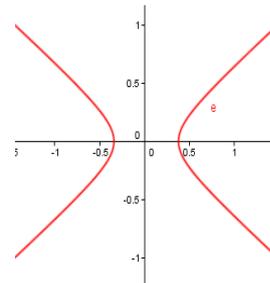
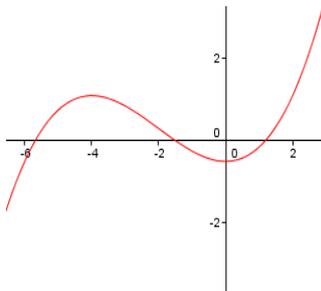
a) $-2x + 4 < -2$

b) $x^2 + 8x + 15 < 0$

5. En matemáticas ¿Qué es una función?

6. ¿Qué diferencia existe entre la imagen y el contradominio de una función?

7. De las siguientes gráficas, determina cuáles representan una función.



8. Encuentra el dominio natural de las siguientes funciones

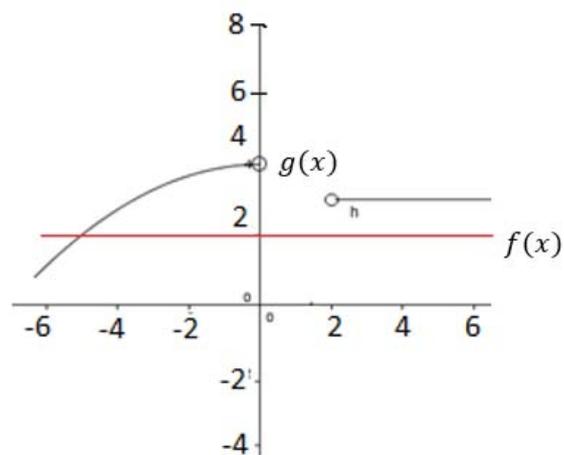
a) $f(x) = \frac{3x+2}{(x-3)(x+5)}$

b) $f(x) = +\sqrt{x-4}$

9. Sean $f(x) = \frac{3}{\sqrt{x-4}}$ y $g(x) = +\sqrt{x-4}$. Realiza las siguientes operaciones.

- $f(x) + g(x)$
- $f(x)g(x)$
- $\frac{f(x)}{g(x)}$
- $(f \circ g)(x)$

10. Realiza un esbozo del producto de la gráfica de $g(x)$ con $f(x)$



Una vez que terminen la prueba de diagnóstico, se va a revisar las primeras 4 preguntas de la siguiente forma:

- Los alumnos intercambian exámenes.
- El docente realiza los ejercicios en el pizarrón y les pide que revisen el ejercicio de su compañero.
- Al terminar la revisión el docente pide que levanten la mano quien tuvo mal la primera pregunta, la segunda, la tercera y por último la cuarta. Esto es con la finalidad de saber cómo está el grupo en los conocimientos necesarios para desarrollar el tema de función.

Al terminar con la revisión de las primeras cuatro preguntas el docente pide que le entreguen los exámenes y aclara que el resto de las preguntas las va a revisar fuera de clases.

Cierre

El profesor informa a los estudiantes que para la siguiente clase se integrarán en los grupos pequeños de aprendizaje, los cuales estarán conformados de acuerdo con los resultados de la prueba y de los intereses de cada alumno.

Nota: Si en el grupo en que se va a aplicar la secuencia didáctica no han estudiado antes el tema de funciones, en la evaluación diagnóstica sólo se les incluirían las preguntas de conocimientos previos necesarios y la pregunta 5, es decir, de la pregunta 1 a la 5.

SEGUNDA SESIÓN

TEMA	Repaso de los conocimientos necesarios para desarrollar el tema de función
OBJETIVO	Que el alumno active los conocimientos previos necesarios que se van a emplear durante el tema de funciones
DURACIÓN	1 hora
ESTRATEGIA EMPLEADA	La que considere adecuada el profesor para desarrollar conocimientos
MATERIAL DE APOYO	<ul style="list-style-type: none">• Cuaderno.• Pizarrón.• Marcador o gis para el pizarrón.

Apertura

Organización de la clase en grupos de aprendizaje

El docente les informa a los estudiantes que ya conformó los grupos de aprendizaje y les solicita su apoyo para acomodar el mobiliario del salón para poder trabajar en grupos (El docente previamente, debe diseñar la distribución del salón para trabajar con los grupos de aprendizaje de manera que los alumnos se sientan cómodos). Posteriormente les informa que va a anunciar a los integrantes de cada grupo y les solicita que una vez que los nombre, se acomoden en el lugar asignado.

El docente en este momento explica cómo funciona el aprendizaje cooperativo (véase 2.5.1) y los procedimientos específicos que deben seguirse para trabajar en equipo.

Repaso de los temas en los que se detectó, por medio de la prueba de diagnóstico, que los alumnos tienen menos habilidades.

El docente tiene libertad de elegir el método que va a emplear para la enseñanza de los temas.

Cierre

El docente comenta con los alumnos que durante su clase se trabajará en grupos de aprendizaje, por lo que al inicio de las clases se deberán sentar con su grupo correspondiente en el lugar asignado.

Posteriormente el docente les deja una tarea sobre los temas que se vieron en la clase.

Así mismo les informa la importancia de los temas que se vieron para las siguientes clases. Por ejemplo, si se vio el tema de ecuaciones o desigualdades, se hace énfasis que cuando se vea el tema de dominio de una función, se van a tener que resolver ecuaciones y desigualdades. Si se ve el plano cartesiano, se les informa que en muchos temas de la unidad se van a trabajar en el plano cartesiano.

TERCERA SESIÓN

TEMA	Relaciones
OBJETIVO	<ul style="list-style-type: none">• Que el alumno se familiarice con los términos que se van a utilizar en el tema de funciones.• Que el alumno comience a trabajar en grupos de aprendizaje.
DURACIÓN	1 hora
ESTRATEGIA EMPLEADA	Método de División de la clase en grupos de aprendizaje
MATERIAL DE APOYO	<ul style="list-style-type: none">• Cuaderno.• Pizarrón.• Marcador o gis para el pizarrón.

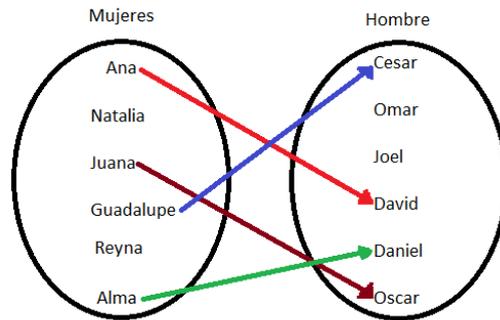
Apertura

Mediante una lluvia de ideas se tratará de definir lo que es una relación.

Desarrollo

El docente introduce el tema analizando algún ejemplo que considere adecuado para poder captar la atención de sus alumnos, por ejemplo:

- Relación de noviazgo. El docente pide cuatro voluntarias que tengan novio y dos que no tengan novio para participar en el ejemplo. El docente les pregunta su nombre para escribirlo en el conjunto del dominio y también les pide el nombre de sus novios, los cuales escribirá en el contradominio. Escribe un nombre de hombre en el contradominio. Traza las flechas correspondientes del dominio al contradominio.



La elección del ejemplo está sujeta a la presentación del grupo, ya que, en ese momento se puede lograr detectar los intereses y gustos que tienen en común los alumnos.

Posteriormente el docente escribe en el pizarrón la definición de relación.

Relación: Una relación está formada por dos conjuntos y una regla de correspondencia entre ellos, donde el primer conjunto es el dominio o conjunto de partida y el segundo conjunto es el contradominio o conjunto de llegada.

El docente explica otro ejemplo de relación poniendo énfasis en las componentes de una relación, lo recomendable es poner un ejemplo que esté presente en el salón de clase, como puede ser la relación de alumnos con su número de cuenta, relación de alumnos con sillas, la relación de los alumnos con sus padres, etcétera para que los alumnos se den cuenta que hay relaciones por todos lados. Al momento de ir explicando, el docente debe de hacer énfasis en llamar a cada elemento involucrado en la relación por su nombre, por ejemplo, elemento del dominio, elemento del contradominio, regla de correspondencia, dominio y contradominio, para que de esta forma los alumnos adquieran una buena alfabetización matemática.

Trabajo en los grupos de aprendizaje

El docente les pide a los alumnos que trabajen en los grupos que les fueron asignados y que busquen cuatro ejemplos de relación que esté presente en su vida cotidiana. Se les dice que deben de apuntarlos en su cuaderno pero que también deben de hacerlo en una hoja por equipo para entregarla al profesor.

Se les hace una invitación a que algún representante de un grupo de trabajo pase a explicar alguno de sus ejemplos.

Cierre

El docente realiza la siguiente pregunta a algún alumno:

¿Qué es una relación?

En dado caso que no la logre responder, se le pide a otro alumno que le ayude, así hasta que den la respuesta correcta y posteriormente el profesor dice de nuevo la definición de relación.

Por último se deja como tarea ejercicios sobre los temas de la clase de repaso.

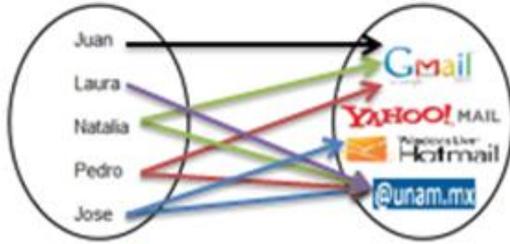
CUARTA SESIÓN

TEMA	Funciones
OBJETIVO	Que el alumno: <ul style="list-style-type: none">• Diferencie las relaciones que son funciones.• Ubique el dominio y rango de una relación.
DURACIÓN	1 hora
ESTRATEGIA EMPLEADA	Modelo inductivo
MATERIAL DE APOYO	<ul style="list-style-type: none">• Fotocopias suficientes para el alumno.• Pizarrón.• Marcadores o gis para el pizarrón.

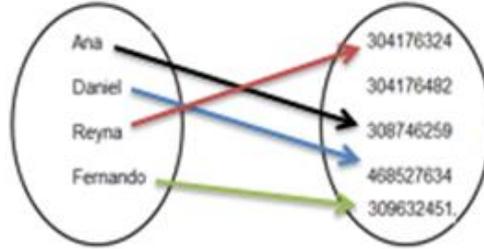
Apertura

Una vez que estén los alumnos acomodados en sus grupos de aprendizaje, el docente les pregunta a los alumnos ¿Qué es una relación?, una vez que la pregunta sea contestada correctamente el docente reparte una fotocopia del material a cada alumno, con el cual se va a estar trabajando.

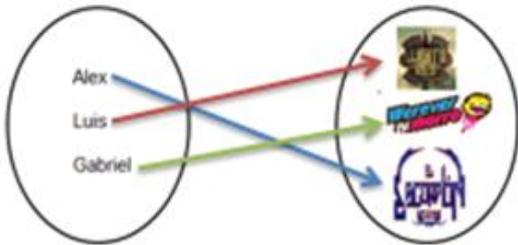
1 Personas \longrightarrow Correo electrónico



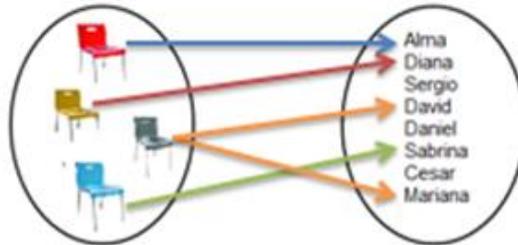
2 Alumnos \longrightarrow secuencia de números



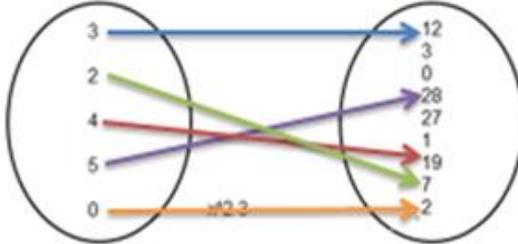
3 Vlogger \longrightarrow Canal de youtube



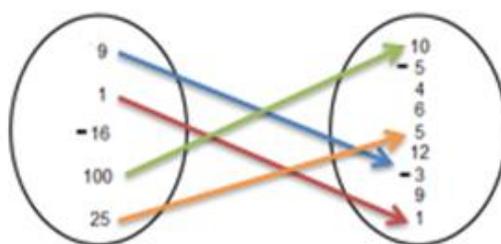
4 Sillas \longrightarrow Alumnos



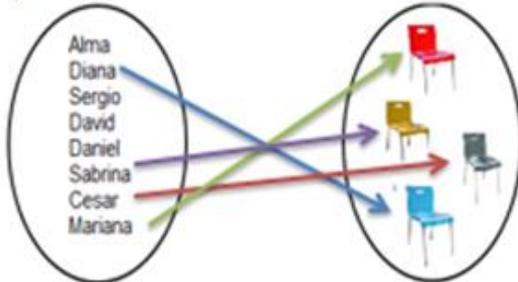
5 X \longrightarrow Y



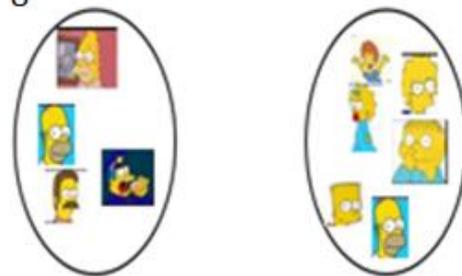
6 X \longrightarrow Y



7 Alumnos \longrightarrow Sillas



8 Personas \longrightarrow Personas



¿Qué diferencia tiene las relaciones del ejemplo 6 y 7 con el resto de los ejemplos?

Al observar el dominio de las relaciones 1, 2, 3, 4, 5 y 8 ¿Qué diferencia encuentras?

Desarrollo

Una vez que ya todos tengan fotocopia, el docente les pide a los grupos de aprendizaje que contesten la siguiente pregunta y cuando terminen escriban la respuesta en el pizarrón.

¿Qué diferencia tiene las relaciones del ejemplo 6 y 7 con el resto de los ejemplos?

Cuando ya todos los equipos tengan su respuesta en el pizarrón el docente las compara, si alguna respuesta es incorrecta se analiza.

Por último, el docente enfatiza la respuesta correcta:

Hay elementos en el dominio que no están relacionados con algún elemento del contradominio.

Posteriormente el docente les realiza la siguiente pregunta y les solicita que cuando tengan la respuesta la apunten en el pizarrón:

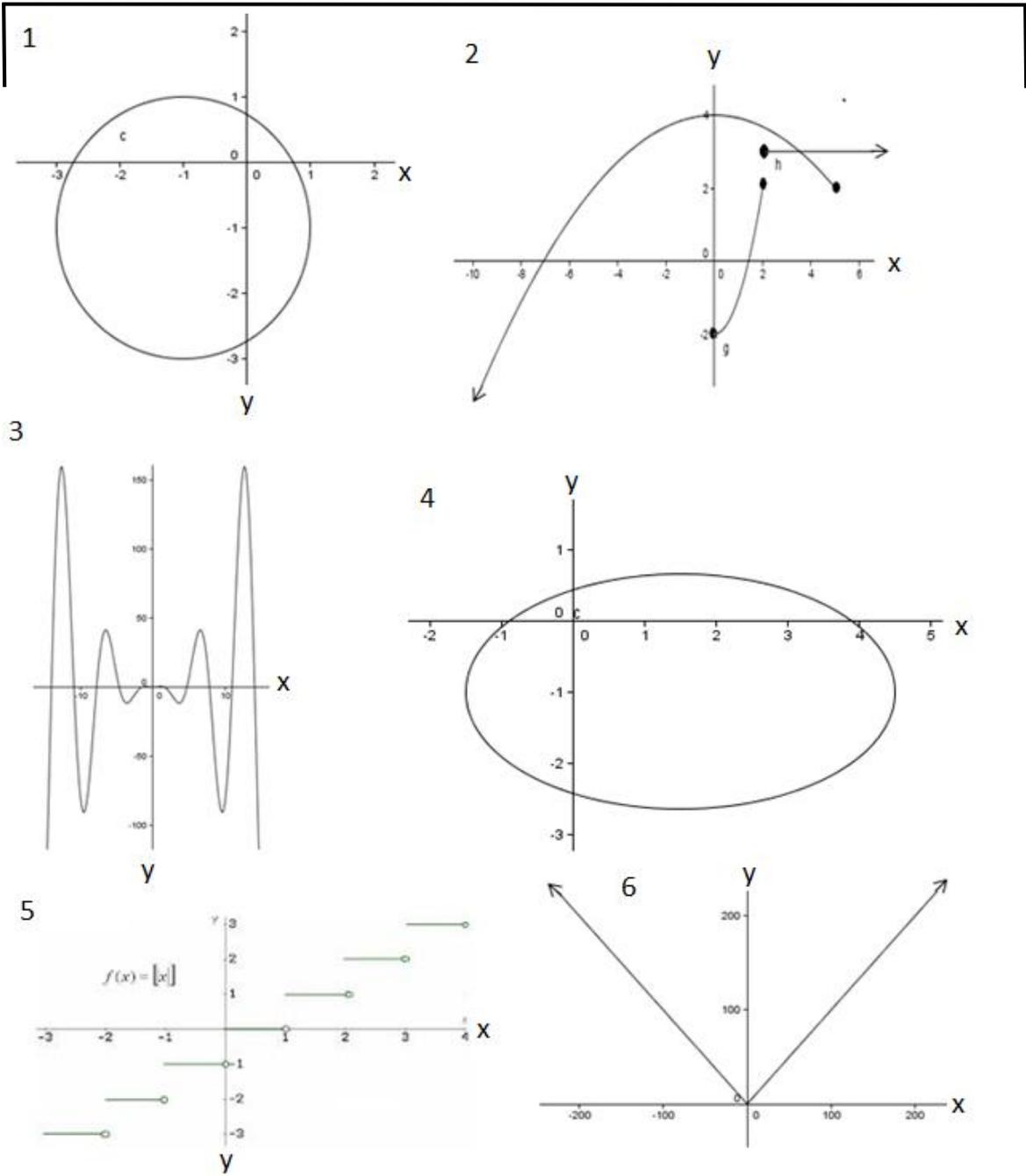
Al observar el dominio de las relaciones 1, 2, 3, 4, 5 y 8 ¿Qué diferencia encuentras?

Cuando ya todos los equipos tengan su respuesta en el pizarrón el docente las compara, si alguna respuesta es incorrecta se analiza.

Por último el docente les indica que lo que caracteriza a los ejemplos 2, 3 y 5 es que son funciones y escribe en el pizarrón lo siguiente:

Una función es una relación donde a cada elemento del dominio le corresponde uno y sólo un elemento del contradominio

Una vez terminada la discusión el docente le entrega a cada alumno una fotocopia del siguiente material:



1. ¿Qué tienen en común las relaciones 1, 2 y 4?

2. ¿Qué tienen en común las relaciones 3, 5 y 6?

Cuando ya todos los alumnos tengan la fotocopia del material, el docente realiza las siguientes preguntas y pide que cuando tengan la respuesta pasen a escribirla en el pizarrón:

1. ¿Qué tienen en común las relaciones 1, 2 y 4?
2. ¿Qué tienen en común las relaciones 3, 5 y 6?

Una vez que estén en el pizarrón todas las respuestas de los equipos, se realiza una discusión grupal para ver cuáles respuestas son correctas.

Una vez terminada la discusión el profesor escribe en el pizarrón lo siguiente:

Las relaciones 3, 5 y 6 son ejemplos de funciones en el plano cartesiano.

Cierre

El profesor realiza la siguiente pregunta al grupo:

¿Qué es una función?

Cuando los alumnos logren concluir la definición, el profesor la vuelve a decir:

Una función es una relación donde a cada elemento del dominio le corresponde uno y sólo un elemento del contradominio.

Por último el profesor les deja una tarea sobre los temas que se vieron en la clase de repaso. Adicionalmente les pide que busquen dos relaciones que estén presentes en su casa y sólo una de estas relaciones debe de ser función.

QUINTA SESIÓN

TEMA	Dominio de funciones: $f(x) = \frac{1}{x}, f(x) = \sqrt{x}, f(x) = \log x$
OBJETIVO	Que el alumno logre calcular algebraicamente el dominio de funciones.
DURACIÓN	2 horas
ESTRATEGIA UTILIZADA	Aprendizaje por descubrimiento
MATERIAL DE APOYO	<ul style="list-style-type: none">• Fotocopias suficientes para los alumnos.• Calculadora.• Pizarrón.• Marcadores o gis para pizarrón.

Apertura

Una vez que estén los alumnos en su grupo de aprendizaje asignado. El docente reitera la importancia del trabajo cooperativo.

El docente pide a dos alumnos que expongan sus ejemplos de relaciones que hicieron de tarea.

Una vez que terminen de exponer y se aclaren las dudas del grupo el docente reparte una fotocopia del material a cada alumno con el que se va a trabajar.

Ejercicio 1 ¿Para qué valores de x tiene sentido la función $f(x) = 1/x$?

Respuesta por equipo:

Respuesta discusión grupal:

Ejercicio 2. Determinar el dominio de las siguientes funciones:

a) $f(x) = 1/(-2x + 6)$

b) $f(x) = 1/(x^2 - 2x - 15)$

Ejercicio 3. ¿Para qué valores de x está definida la función $f(x) = \sqrt{x}$?

Respuesta por equipo:

Respuesta discusión grupal:

Ejercicio 4. Determinar el dominio de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \sqrt{-7x + 24}$

b) $f(x) = \sqrt{x^2 - 9}$

Ejercicio 5. ¿Para qué valores de x está definida la función $f(x) = \log(x)$?

Respuesta por equipo:

Respuesta discusión grupal:

Ejercicio 6. Determinar el dominio de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \log(x + 2)$

b) $f(x) = \log(x^2 - 3x)$

Desarrollo

El docente les pide a sus alumnos que respondan el ejercicio 1. Una vez que terminen todos los equipos se pasa a una discusión grupal con la finalidad de llegar a la respuesta correcta.

Como cierre de la discusión, el docente hace referencia al onceavo mandamiento de cualquier Dios, el cual dice:

“Nunca dividir entre cero”

Para el ejercicio 2, se les da tiempo suficiente para que intenten resolverlo. Posteriormente se inicia una discusión grupal para resolver el ejercicio en el pizarrón.

El docente les pide a sus alumnos que respondan el ejercicio 3. Si muestran dificultad para contestar a la pregunta se les dice que pueden ocupar su

calculadora para obtener la raíz cuadrada de varios números. Una vez que terminen todos los equipos se pasa a una discusión grupal con la finalidad de llegar a la respuesta correcta.

Como cierre de la discusión, el docente pregunta si el doceavo mandamiento de cualquier Dios, podría ser:

“En una raíz cuadrada de un número real, el radicando debe ser mayor o igual a cero”

Después de la discusión el docente hace referencia que en los números complejos $\sqrt{-1} = i$.

Para el ejercicio 4, se les da tiempo suficiente para que intenten resolverlo. Posteriormente se inicia una discusión grupal para resolver el ejercicio en el pizarrón.

El docente les pide a sus alumnos que respondan con ayuda de su calculadora el ejercicio 5, la cual la van a emplear al calcular logaritmos de varios números. Una vez que terminen todos los equipos se pasa a una discusión grupal con la finalidad de llegar a la respuesta correcta.

Como cierre de la discusión, el docente enfatiza:

Para que esté definido el logaritmo el argumento debe ser mayor que cero.

Para el ejercicio 6, se les da tiempo suficiente para que intenten resolverlo. Posteriormente se inicia una discusión grupal para resolver el ejercicio en el pizarrón.

Cierre

El docente pide a algún alumno que conteste las siguientes preguntas:

- 1) ¿Cómo debe ser el denominador para que la función $f(x) = \frac{1}{x}$ esté definida?
- 2) ¿Cómo debe ser el radicando para que la función $f(x) = \sqrt{x}$ esté definida?

3) ¿Cómo debe ser el argumento para que la función $f(x) = \log(x)$ esté definida?

Por último el docente les solicita que de tarea encuentren el dominio natural de las siguientes funciones.

a) $g(x) = \sqrt{2x - 9}$

b) $f(x) = \log(10x + 95)$

c) $h(x) = \frac{2}{x^2 - 4x - 12}$

SEXTA SESIÓN

TEMA	Operaciones entre funciones
OBJETIVO	Que el alumno: <ul style="list-style-type: none">• Logre resolver algebraicamente y gráficamente las operaciones de suma, resta, multiplicación y división entre dos funciones.• Infiera el dominio de las operaciones entre funciones.
DURACIÓN	2 horas
ESTRATEGIA EMPLEADA	Modelo inductivo.
MATERIAL DE APOYO	<ul style="list-style-type: none">• Fotocopias suficientes para los alumnos.• Material didáctico (anexo1, 2, 3, 4 y 5).• Colores.

Apertura

El docente solicita a los alumnos que conformen sus respectivos grupos de aprendizaje, posteriormente el docente solicita que intercambien sus tareas para realizar una revisión grupal, la cual consiste en que el docente realiza los tres ejercicios en el pizarrón y los alumnos van calificando la tarea de su compañero.

Una vez que se termine la revisión de la tarea y se resuelvan las dudas de los alumnos el docente reparte a cada alumno una fotocopia del material con el que se va a trabajar durante la clase.

Ejercicio 1. Sean $f(x) = x^2 - 2x$ y $g(x) = 3x + 2$

a) Calcula $f(1) + g(1)$ y $f(-3) + g(-3)$

b) Encuentra $f(x) + g(x)$

Ejercicio 2. Una vez que tengas el material de apoyo contesta lo siguiente:

a) Sobre el eje de las x marca con dos colores diferentes el dominio de $f(x)$ y de $g(x)$ respectivamente.

b) Sobre el material traza la gráfica de la suma de $f(x) + g(x)$

c) ¿Cuál es el dominio de la suma?

d) ¿Qué relación encuentran entre el dominio de las dos funciones y el dominio de la suma de las funciones? _____

Ejercicio 3. Sean $f(x) = x^2 - 2x$ y $g(x) = 3x + 2$

a) Calcula $f(1) - g(1)$ y $f(-3) - g(-3)$

b) Encuentra $f(x) - g(x)$

Ejercicio 4. Una vez que tengas el material de apoyo contesta lo siguiente:

a) Sobre el material traza la gráfica de la resta de $f(x)$ menos $g(x)$

b) ¿Cuál es el dominio de la resta?

- c) ¿Qué relación encuentran entre el dominio de las dos funciones y el dominio de la suma de las funciones? _____

Ejercicio 5. Sean $f(x) = x + 3$ y $g(x) = 3x + 2$

- a) Calcula $f(1) \times g(1)$ y $f(-3) \times g(-3)$

- b) ¿Quién es $f(x) \times g(x)$?

Ejercicio 6. Una vez que tengas el material de apoyo contesta lo siguiente:

- a) Sobre el eje de las x marca con dos colores diferentes el dominio de $f(x)$ y de $g(x)$ respectivamente.
- b) Sobre el material traza la gráfica del producto de $f(x)$ con $g(x)$
- c) ¿Cuál es el dominio del producto de $f(x)$ con $g(x)$?

- d) ¿Qué relación encuentran entre el dominio de las dos funciones y el dominio del producto? _____

Ejercicio 7. Sean $f(x) = 3x + 9$ y $g(x) = x + 3$

- a) Calcula $\frac{f(2)}{g(2)}$ y $\frac{f(-3)}{g(-3)}$

- b) Calcula $\frac{f(x)}{g(x)}$

Ejercicio 8. Una vez que tengas el material de apoyo contesta lo siguiente:

a) Sobre el material traza la gráfica de $\frac{f(x)}{g(x)}$

b) ¿Cuál es el dominio de $f(x)$ entre $g(x)$?

c) ¿Qué relación encuentran entre el dominio de las dos funciones y el dominio de la división?

Desarrollo

Para resolver el ejercicio 1 el docente da tiempo suficiente para que discutan en los grupos de aprendizaje y llegue a una respuesta. Posteriormente se pasa a una discusión grupal para determinar la solución correcta.

Para dar inicio al ejercicio 2 el docente entrega por equipo el material didáctico (anexo 2). En el siguiente link se puede ver un video donde se explica cómo utilizar el material didáctico https://youtu.be/ZkfE2gfE7_I. Dependiendo de las preguntas que realicen los equipos sobre cómo utilizar el material didáctico, el docente las va resolviendo. Cuando la mayoría de los equipos termine la actividad se pasa a una discusión grupal con la finalidad de analizar la respuesta correcta.

Para resolver el ejercicio 3 el docente da tiempo suficiente para que discutan en los grupos de aprendizaje y llegue a una respuesta. Posteriormente se pasa a una discusión grupal para determinar la solución correcta.

Para dar inicio al ejercicio 4 el docente entrega por equipo el material didáctico (anexo 3). En el siguiente link se puede ver un video donde se explica cómo utilizar el material didáctico <https://youtu.be/DeEyGfINWKs>. Cuando la mayoría de los equipos termine la actividad se pasa a una discusión grupal con la finalidad de analizar la respuesta correcta.

Para resolver el ejercicio 5 el docente da tiempo suficiente para que discutan en los grupos de aprendizaje y lleguen a una respuesta. Posteriormente se pasa a una discusión grupal para determinar la solución correcta.

Para dar inicio al ejercicio 6 el docente entrega por equipo el material didáctico (anexo 4). En el siguiente link se puede ver un video donde se explica cómo utilizar el material didáctico <https://youtu.be/tMELZ5c2GVg>. Cuando la mayoría de los equipos terminen la actividad se pasa a una discusión grupal con la finalidad de analizar la respuesta correcta.

Para resolver el ejercicio 7 el docente da tiempo suficiente para que discutan en los grupos de aprendizaje y lleguen a una respuesta. Posteriormente se pasa a una discusión grupal para determinar la solución correcta.

Para dar inicio al ejercicio 8 el docente entrega por equipo el material didáctico (anexo 5). En el siguiente link se puede ver un video donde se explica cómo utilizar el material didáctico https://youtu.be/cya0K_YiOwg. Cuando la mayoría de los equipos terminen la actividad se pasa a una discusión grupal con la finalidad de analizar la respuesta correcta.

Cierre

El docente le pide a algún alumno que conteste las siguientes preguntas:

- 1) ¿Para qué operaciones el dominio es la intersección de los dominios de cada función?
- 2) ¿Cuál es el dominio de la función $\frac{f(x)}{g(x)}$?

Una vez que contestan correctamente las preguntas anteriores el docente les pide que de tarea investiguen en que consiste la composición de funciones.

Por último el docente les informa que si se quedaron con dudas pueden ver los videos de cómo utilizar el material de apoyo en YouTube los cuales llevan por nombre:

- **Suma de funciones a partir de sus gráficas**
https://youtu.be/ZkfE2gfE7_I
- **Resta de funciones a partir de sus gráficas**
<https://youtu.be/DeEyGfINWks>
- **Multiplicación de funciones a partir de sus gráficas**

<https://youtu.be/tMELZ5c2GVg>

- **División de funciones a partir de sus gráficas**

https://youtu.be/cya0K_YiOwg

SEPTIMA SESIÓN

TEMA	Composición de funciones
OBJETIVO	Que el alumno: <ul style="list-style-type: none">• Comprenda la composición de funciones.• Infiera el dominio de la composición de funciones.
DURACIÓN	2 horas
ESTRATEGIA EMPLEADA	Modelo inductivo.
MATERIAL DE APOYO	<ul style="list-style-type: none">• Computadoras para trabajar en grupos de aprendizaje con el software GeoGebra instalado.• Proyector.

Apertura

El docente solicita a los alumnos que conformen sus respectivos grupos de aprendizaje, una vez conformados les pregunta a los alumnos:

¿Qué fue lo que vimos la clase pasada?

¿Cuál es el dominio de las operaciones que se vieron en la clase pasada?

Una vez que se contestan las preguntas anteriores el docente les solicita que socialicen en sus grupos de aprendizaje la investigación que realizaron de tarea sobre la composición de funciones.

Desarrollo

El docente solicita a los alumnos que ingresen al siguiente link <https://tube.geogebra.org/material/simple/id/780247> en el cual está un material elaborado en GeoGebra que les permitirá realizar la gráfica de la composición de dos funciones a partir de sus gráficas.

Una vez que todos tengan abierta la página de internet, el docente explica cómo ir creando la composición de las funciones que aparecen.

Cuando todos grupos de aprendizaje tengan la gráfica de la composición de las funciones el docente les solicita que cambien las funciones que aparecen en la página por las siguientes:

- $$f(x) = \begin{cases} \cos(x) & : 0 < x < 3 \\ x - 3 & : 4 < x < 8 \end{cases}$$

$$g(x) = \log_{10}(x) \quad (0.5 < x < 8)$$

Los comandos para introducir estas dos funciones en GeoGebra son:

$$f(x) = \text{Si}[0 < x < 3, \cos(x), 4 < x < 8, x - 3]$$

$$g(x) = \text{Si}[0.5 < x < 8, \lg(x)]$$

- $$f(x) = \begin{cases} x^2 & : -3 < x < 4 \\ \frac{x}{2} & : 7 < x < 20 \end{cases}$$

$$g(x) = \cos(x) \quad (-4 < x < 15)$$

Los comandos para introducir estas dos funciones en GeoGebra son:

$$f(x) = \text{Si}[-3 < x < 4, x^2, 7 < x < 20, x/2]$$

$$g(x) = \text{Si}[-4 < x < 15, \cos(x)]$$

- $$f(x) = \frac{5x + 8}{6} \quad (-8 < x < 13)$$

$$g(x) = \begin{cases} 3 \cdot \frac{x}{4} & : -6 < x < -2 \\ \sqrt{x} & : 0 < x < 9 \end{cases}$$

Los comandos para introducir estas dos funciones en GeoGebra son:

$$f(x) = \text{Si}[-8 < x < 13, (5x + 8)/6]$$

$$g(x) = \text{Si}[-6 < x < -2, 3x/4, 0 < x < 9, \text{sqrt}(x)]$$

También se les pide que contesten las siguientes preguntas:

1. ¿Cuál es la primera función que se aplica al valor de x ?
2. ¿Cuál es la importancia de la función identidad para encontrar la gráfica de la composición de las funciones?
3. ¿El dominio de la composición $(g \circ f)(x)$ es el dominio de $f(x)$?

4. ¿Cuál es el dominio de la composición de $(gof)(x)$?

Cuando ya los grupos de aprendizaje tengan las respuestas, en una plenaria se discutirá cada pregunta para llegar a la respuesta correcta.

El docente comenta que ahora se va a estudiar cómo realizar algebraicamente la composición, para lo cual les pide que resuelvan el siguiente ejercicio siempre teniendo en mente las preguntas que se respondieron anteriormente.

1. Si $f(x) = 2x - 4$ y $g(x) = 4x^2 - 4$.

a) Calcula $(gof)(2)$ y $(gof)(-3)$.

b) Calcula $(gof)(x)$.

Cuando ya todos los grupos de aprendizaje tengan resuelto el primer ejercicio, el docente solicita a un alumno que pase a resolverlo al pizarrón. Una vez que termine se analiza y si los alumnos tienen duda, se resuelven.

Posteriormente se les pide a los alumnos que realicen el siguiente ejercicio y cuando terminen tienen que escribir la respuesta en el pizarrón.

2. Si $f(x) = 4x^2$ y $g(x) = \frac{\sqrt{x}}{x-5}$.

a) Calcula $(gof)(3)$ y $(gof)(-2)$

b) Calcula $(gof)(x)$

Cuando ya todos los grupos de aprendizaje tengan la respuesta en el pizarrón, en una plenaria se determinará cuáles respuestas son correctas y las que tengan algún error se corregirán.

Cierre

Se les deja a los alumnos como ejercicio que encuentren $(gof)(x)$ sí:

$$f(x) = x - 4 \text{ y } g(x) = \sqrt{x^2 + x - 5}$$

Una vez que la mayoría termine se le pide a un alumno que pase al pizarrón a resolverlo. Si algún alumno tiene duda el docente las resuelve.

Por último se les deja de tarea que realicen el siguiente ejercicio:

- $(g \circ f)(x)$ si $f(x) = \sqrt{2x - 4}$ y $g(x) = 2x^2 + 3x$

OCTAVA SESIÓN

TEMA	Evaluación final sobre funciones
OBJETIVO	Observar el progreso del alumno en el tema de funciones.
DURACIÓN	2 horas
MATERIAL DE APOYO	Fotocopias suficientes de la prueba final.

El docente reparte una fotocopia de la prueba final a cada alumno y posteriormente les informa que cuentan con hasta dos horas para resolverla.

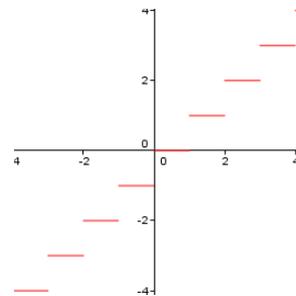
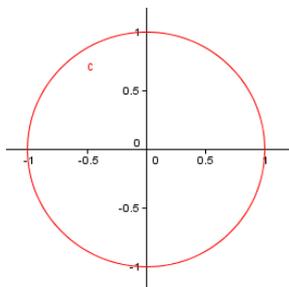
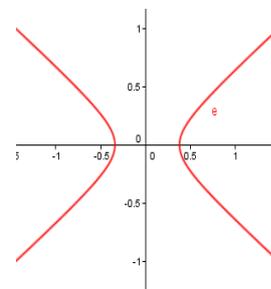
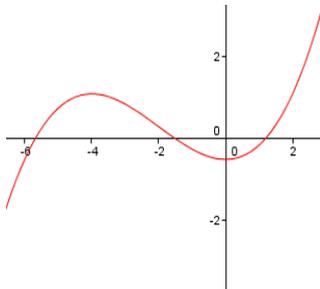
Prueba final

Nombre:

Grupo:

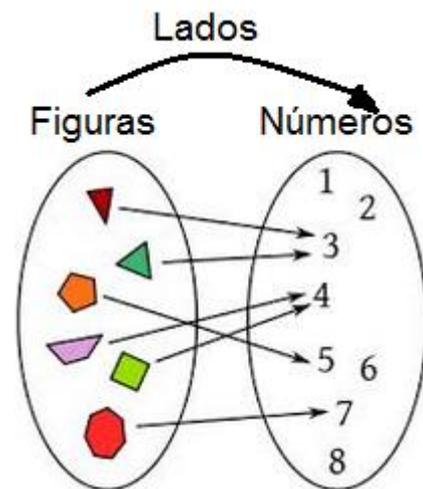
Fecha:

1. ¿Qué diferencia existe entre la imagen y el contradominio de una función?
2. De las siguientes gráficas, determina cuáles representan una función.



3. Con base en la siguiente función responde las siguientes preguntas:

- a) ¿Cuál es el dominio?
- b) ¿Cuál es el contradominio?
- c) ¿Cuál es la regla de correspondencia?
- d) ¿Cuál es la imagen?



4. Encuentra el dominio natural de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \frac{3x+2}{(x-3)(x+5)}$

b) $f(x) = \sqrt{x-4}$

5. Sean $f(x) = 2x^2 + 4x$ y $g(x) = 2x + 6$. Realiza las siguientes operaciones:

a) $f(x) + g(x)$

b) $f(x)g(x)$

c) $\frac{f(x)}{g(x)}$

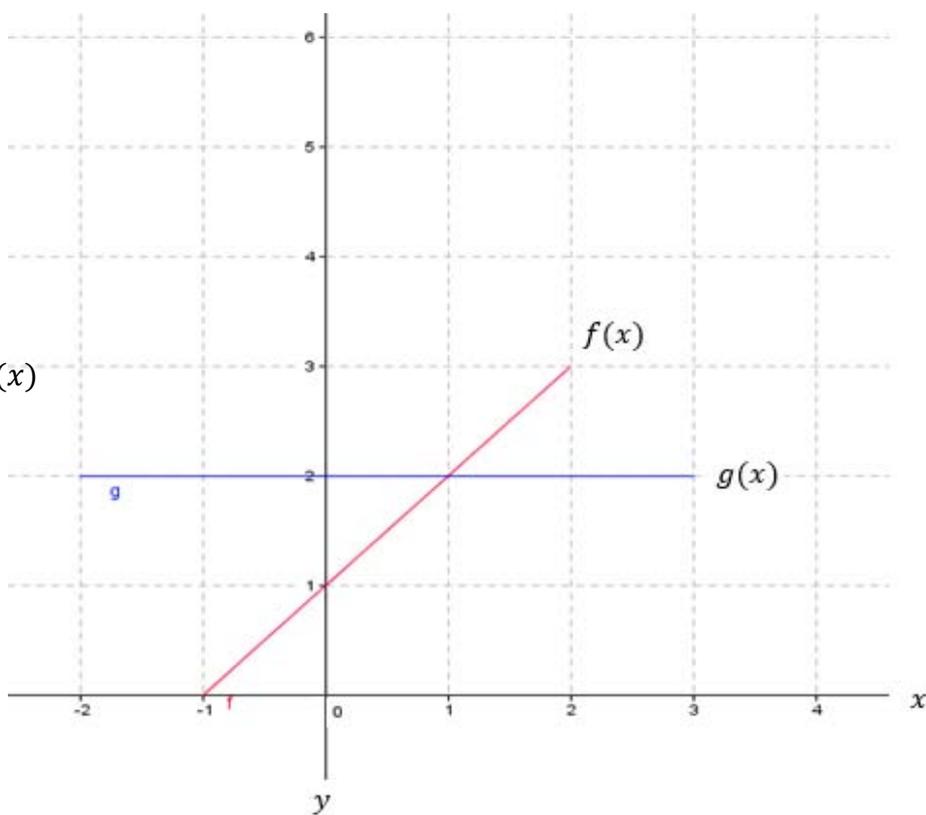
d) $(f \circ g)(x)$

6. Realiza un esbozo del producto de la gráfica de $g(x)$ con $f(x)$.
Determina el dominio de $f(x)$, $g(x)$ y el de $f(x) \times g(x)$.

a) Dominio de $f(x)$

b) Dominio de $g(x)$

c) Dominio de $f(x) \times g(x)$



4 CAPÍTULO IV. IMPLEMENTACIÓN Y EVALUACIÓN DE LA SECUENCIA DIDÁCTICA

En este capítulo se analizan algunos aspectos sobre el Colegio de Bachilleres para después continuar con algunas particularidades del Plantel 9 “Aragón”, ya que en este lugar se aplicó la secuencia didáctica. Para finalizar se analizan los resultados que se obtuvieron en la implementación de la secuencia.

4.1 Implementación de la secuencia didáctica en el Colegio de Bachilleres

El Colegio de Bachilleres es un organismo público descentralizado del Estado creado por Decreto Presidencial el 26 de septiembre de 1973. Su objeto es ofrecer estudios de bachillerato a los egresados de la educación secundaria, en las modalidades escolarizada y no escolarizada. (Colegio de Bachilleres, 2015)

El objetivo general del Colegio de Bachilleres es que sus alumnos egresen con una formación académica integral, de calidad, con motivación e interés por aprender, con adopción de los valores universales que les permitan una adecuada inserción en la sociedad y un buen desempeño en sus actividades académicas o laborales. (Colegio de Bachilleres, 2015)

Su misión es formar ciudadanos competentes para realizar actividades propias de su momento y condición científica, tecnológica, histórica, social, económica, política y filosófica, con un nivel de dominio que les permita movilizar y utilizar, de manera integral y satisfactoria, conocimientos, habilidades, destrezas y actitudes, pertenecientes a las ciencias naturales, las ciencias sociales y a las humanidades.

4.1.1 Colegio de Bachilleres Plantel 9 “Aragón”

La secuencia didáctica se aplicó en un grupo del Colegio de Bachilleres Plantel 9 “Aragón”, por esta razón se van a analizar algunos aspectos.

4.1.1.1 *Alumnos que atiende el plantel*

Para poder ingresar al plantel, el alumno debe de presentarse en el concurso de ingreso a la educación media superior de la zona metropolitana de la ciudad de México. En el año 2014 el plantel admitió a alumnos que tuvieran por lo menos 54 aciertos de 128 preguntas del examen de Comipems, sin embargo como media del plantel el número de aciertos fue 66.87, es decir los alumnos en promedio, contestaron correctamente al 52.24% de las preguntas.

En el caso de la materia de matemáticas, los conocimientos que los alumnos poseen al ingresar son muy escasos. La mayoría de los alumnos muestran

deficiencias en álgebra y aritmética. Sin embargo el Colegio de Bachilleres modifico el plan de estudios de matemáticas I para poder regularizar a los alumnos y que al concluir el curso tuvieran un mayor dominio en la aritmética y en el álgebra.

4.1.1.2 Datos sobre el rendimiento académico en la asignatura de matemáticas

La asignatura de matemáticas en el colegio de bachilleres es la que cuenta con un mayor índice de reprobación. En el plantel 9 durante el semestre 2014-B la aprobación en matemáticas fue de la siguiente manera:

- En el turno matutino la aprobación fue del 71.3% de los alumnos inscritos.
- En el turno vespertino la aprobación fue del 64.8% de los alumnos inscritos.
- En general 68% de los alumnos inscritos aprobó alguna de las materias de matemáticas.

Sin embargo, la secuencia didáctica va dirigida para la materia de matemáticas III donde la aprobación en el semestre 2014-B se comporta de la siguiente manera:

- En el turno matutino la aprobación es del 68.7% de los alumnos inscritos.
- En el turno vespertino la aprobación es del 67.9% de los alumnos inscritos.
- En general en la materia de matemáticas III la aprobación fue del 68.3% de los alumnos inscritos.

Otro dato importante es saber la aprobación tomando como parámetros los alumnos evaluados.

- En el turno matutino la aprobación fue del 76.14% de los alumnos evaluados.
- E el turno vespertino la aprobación fue del 76.19% de los alumnos evaluados.
- En general en la materia de matemáticas III la aprobación fue del 76.16% de loa alumnos evaluados.

4.1.1.3 Ausentismo de estudiantes durante el tercer parcial

Un problema al cual me enfrenté cuando apliqué la secuencia didáctica fue el ausentismo de alumnos el cual se debe a dos factores:

- 1) Cuando un alumno está reprobado en dos parciales se le hace imposible acreditar la materia y decide abandonar el curso.
- 2) Cuando los alumnos acreditan dos parciales con promedio superior a 8, algunos comienzan a hacer cuentas para ver cuánto necesitan en el tercer parcial para acreditar la materia con 6, esto provoca que no dediquen el tiempo necesario ni la atención debida a la materia. También hacen cuentas para ver cuántas veces pueden faltar a la clase sin que los den de baja.

El primer factor no influyó en la aplicación de la secuencia, ya que los alumnos no asistieron a ninguna de las sesiones, por lo que no fueron tomados en cuenta. Sin embargo el segundo factor tuvo mucha influencia, tanto en la aplicación de la secuencia como a la hora de analizar los resultados. Los principales problemas se enlistan a continuación:

- Retraso en la elaboración de las actividades debido a que los alumnos que faltaron no entendían ciertos términos y sus compañeros les tenían que explicar.
- Los alumnos que faltaron no logran seguir la secuencia, por lo que no adquiere la madurez deseada en algunos conceptos.
- Al momento de aplicar la prueba final los alumnos que faltaron no logran responder ni la mitad de la prueba, lo cual hace que el análisis de resultados esté sesgado.

4.2 Evaluación y análisis de resultados

Durante el semestre 2015-A lleve a cabo la implementación de la secuencia didáctica en el grupo 252 que corresponde al segundo semestre. Este grupo consta de 21 alumnos, sin embargo cuatro de estos alumnos, como ya tenían

calificación aprobatoria gracias a su trabajo en el primero y segundo parcial, no asistieron a más de la mitad de las sesiones durante la impartición de la secuencia didáctica, lo cual provocó que su aprendizaje no fuera el esperado.

4.2.1 Análisis del diagnóstico

El grupo donde se aplicó la secuencia didáctica es de segundo semestre, no había visto el tema de funciones, por lo que sólo se incorporaron a la prueba de diagnóstico las primeras cinco preguntas las cuales son de conocimientos previos necesarios para el desarrollo del tema de función.

En la sesión donde se aplicó la evaluación diagnóstico asistieron 18 alumnos. Los resultados fueron los siguientes:

- 15 alumnos mostraron dominio en ubicar puntos en el plano cartesiano.
- Ningún alumno respondió la pregunta de unión e intersección de conjuntos.
- 5 alumnos resolvieron de manera correcta la ecuación de segundo grado.
- 4 alumnos resolvieron de manera correcta las desigualdades.
- Ningún alumno contestó la pregunta sobre función.

Podemos observar que en promedio, el único tema que dominan es la ubicación de puntos en el plano cartesiano. Debido a estos resultados, en la sesión de repaso de conocimientos previos necesarios se trataron los temas de unión e intersección de conjuntos, ecuaciones de segundo grado y desigualdades

También se observó que los alumnos no muestran indicios de saber algo sobre el concepto de función.

4.2.2 Análisis de la prueba final respecto a los objetivos planteados en la secuencia didáctica

En la última sesión 21 alumnos realizaron la evaluación final. A continuación se presentan las respuestas que se obtuvieron de los alumnos.

Pregunta 1 ¿Qué diferencia existe entre la imagen y el contradominio de una función?

Los resultados obtenidos por los alumnos en esta pregunta fueron:

11 alumnos contestaron de manera correcta.

3 alumnos tuvieron una respuesta parecida a la siguiente: Al contradominio solo le llegan flechas y a la imagen no necesariamente.

2 alumnos no respondieron nada.

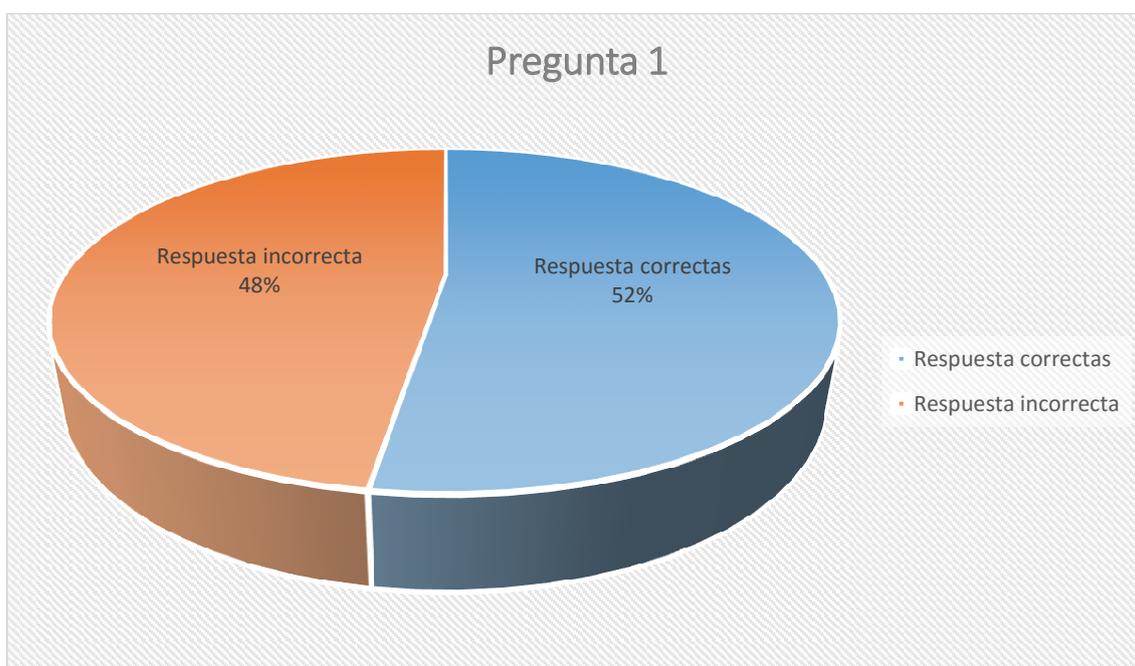
1 de los alumnos puso la definición de función.

1 alumno respondió que la imagen es el resultado y el contradominio es la operación.

1 alumno respondió que el contradominio es de donde salen las flechas y la imagen son los números que se repiten.

1 alumno contestó que era la relación de cada elemento del contradominio que le corresponde al dominio.

1 alumno respondió que jamás toca 2 veces el punto.



Esta pregunta sirve para analizar si se cumplió el siguiente objetivo:

- El alumno analiza la diferencia entre la imagen y contradominio de una función.

Al analizar las respuestas podemos ver que muchos alumnos no lograron madurar estos conceptos, ya que si revisamos la pregunta 3 incisos b) y d) las cuales hacen referencia a encontrar el contradominio y la imagen respectivamente en un ejemplo concreto de una función, en el inciso b) el 90% de los alumnos la tuvo correcta mientras en el inciso d) lo contestaron de manera correcta el 71% de los alumnos.

El 71% de alumnos que contestaron correctamente ambos incisos muestran que pueden aplicar los conceptos en ejemplos concretos, sin embargo sólo el 52% de estos alumnos han madurado los dos conceptos, de tal manera que pudieron escribir la diferencia entre el contradominio y la imagen.

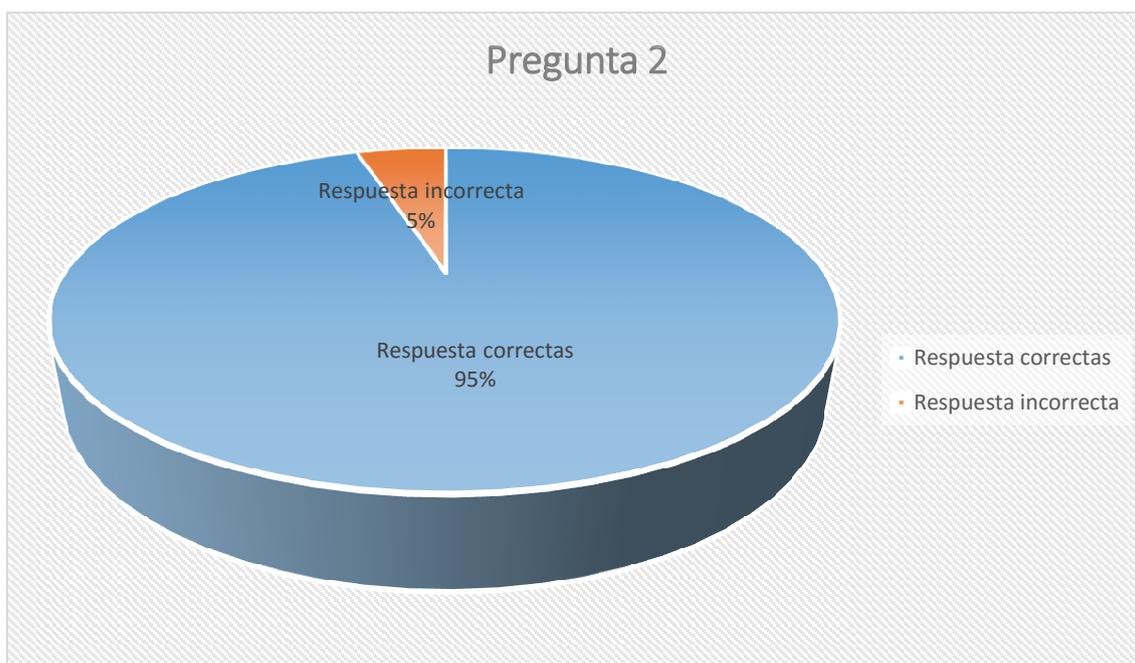
Lamentablemente no se cumplió este objetivo, ya que solo el 52% contestó de manera satisfactoria.

Pregunta 2. De las siguientes gráficas, determina cuáles representan una función

Los resultados de esta pregunta fueron:

20 de los alumnos contestaron de manera correcta los cuatro incisos.

1 alumno contestó de manera incorrecta los cuatro incisos.



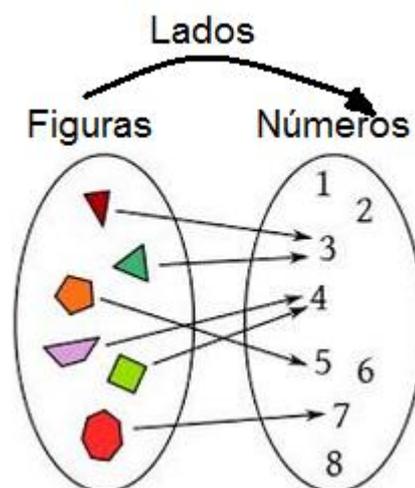
Esta pregunta nos ayuda a verificar si se cumplió el objetivo siguiente:

- El alumno diferencie las relaciones que son funciones.

Podemos observar que después de la aplicación de la secuencia didáctica sí se cumplió con el objetivo, ya que sólo un alumno no logro contestar de manera correcta.

Pregunta 3. Con base en la siguiente función responde las siguientes preguntas:

- ¿Cuál es el dominio?
- ¿Cuál es el contradominio?
- ¿Cuál es la regla de correspondencia?
- ¿Cuál es la imagen?

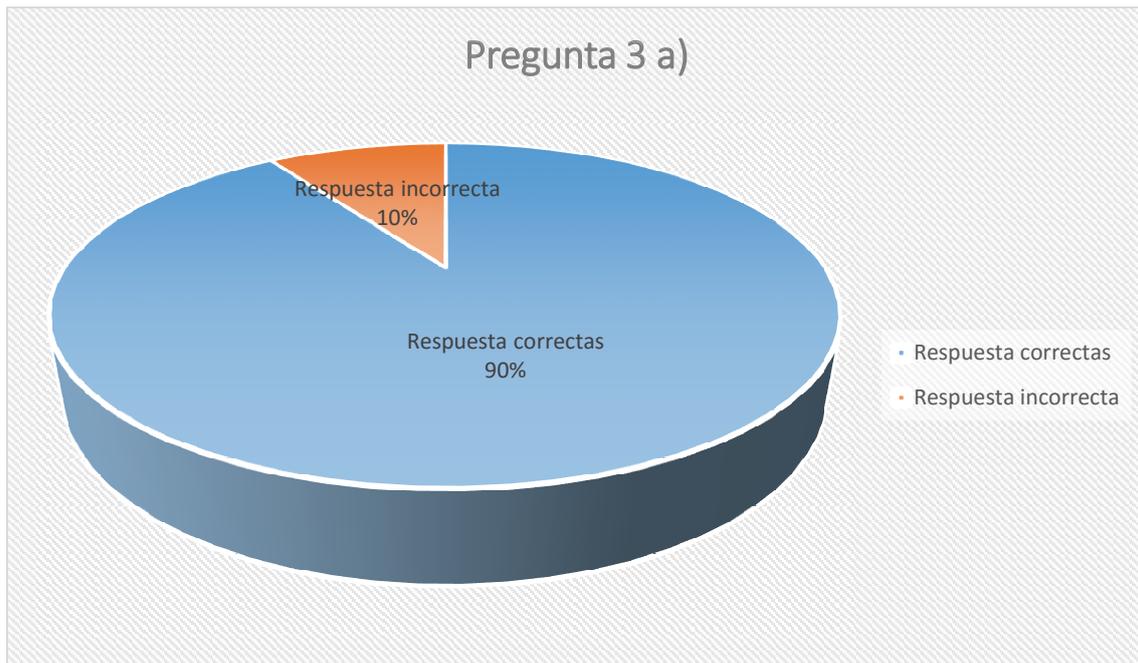


Los resultados para el inciso a) fueron los siguientes:

19 alumnos contestaron de forma correcta.

1 alumno respondió 5 y 7. (Elementos del contradominio a los que le llega solo una flecha).

1 alumno contestó que eran el 1, 2, 6 y 8 (Elementos del contradominio a los que no les llegan flechas).



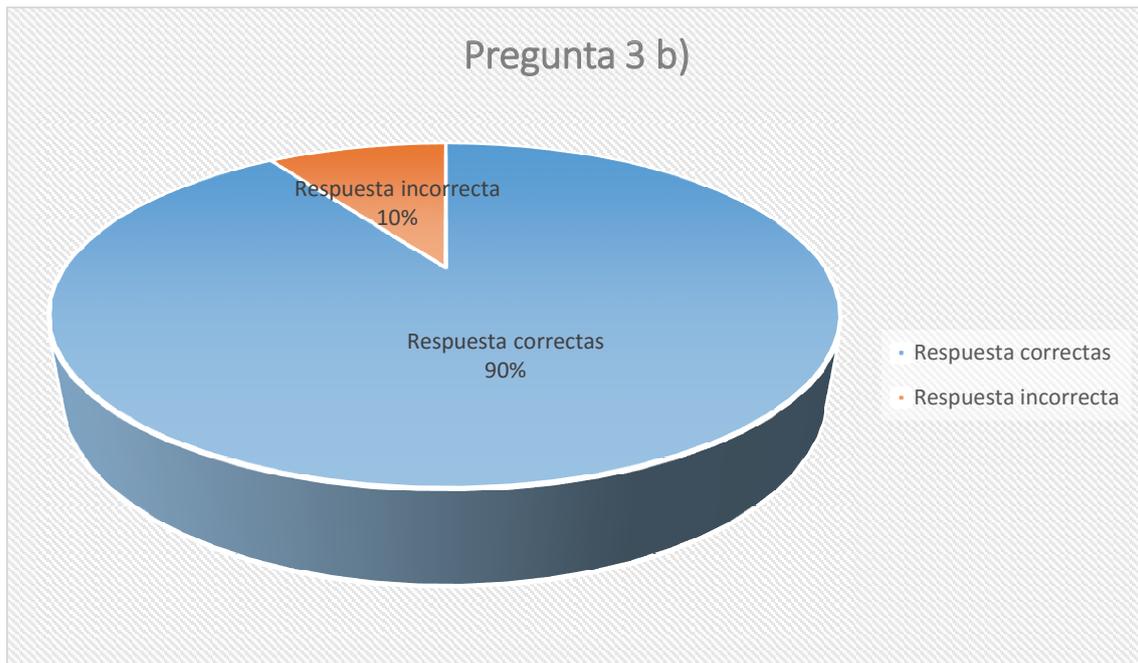
En la pregunta 3 a) podemos observar que sí se cumplió con el objeto de que el alumno identifica el dominio de una función, ya que sólo 2 alumnos contestaron de manera incorrecta a la pregunta.

Los resultados para el inciso b) fueron los siguientes:

19 alumnos contestaron de manera correcta

1 alumno contestó que eran el 3, 4, 5 y 7. Esta respuesta sólo corresponde a la imagen

1 alumno dijo que era aquel donde las flechas son apuntadas. En este caso le faltó decir a qué conjunto son apuntadas las flechas.



En la pregunta 3 b) podemos observar que sí se cumplió con el objeto de que el alumno identifica el contradominio de una función, ya que sólo 2 alumnos contestaron de manera incorrecta a la pregunta.

Los resultados para el inciso c) fueron los siguientes:

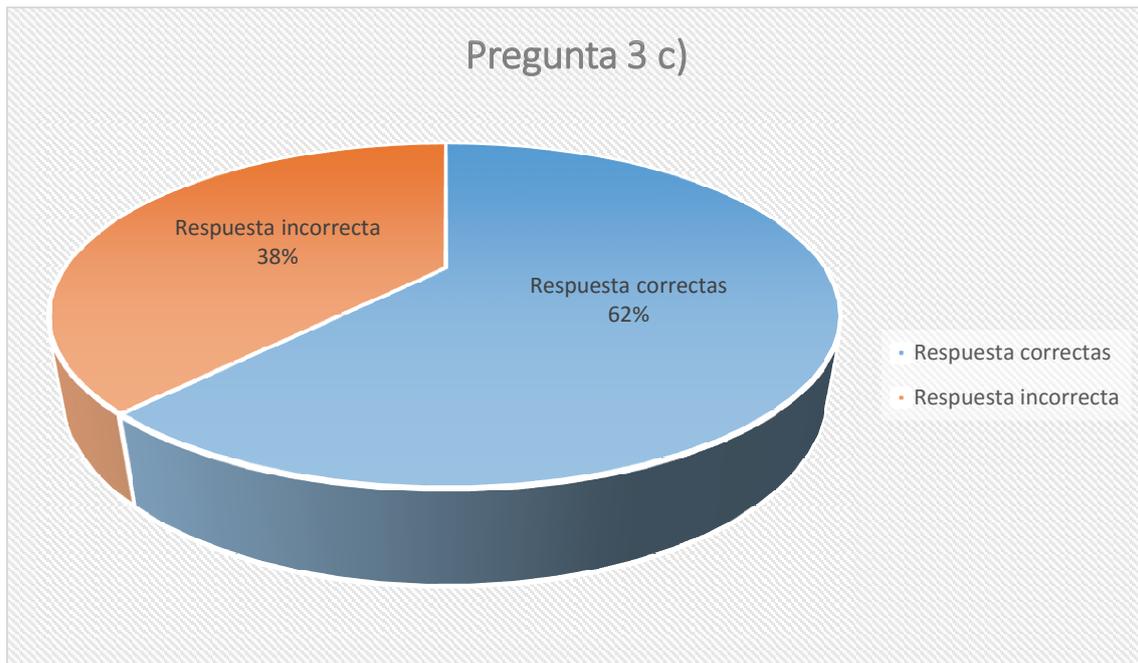
13 alumnos contestaron de manera correcta.

3 alumnos que respondieron que la regla de correspondencia eran las flecha.

3 alumnos no contestaron la pregunta.

1 alumno respondió que era la imagen.

1 alumno respondió que eran los números.



La pregunta 3 c) nos ayuda a verificar el cumplimiento del siguiente objetivo:

- El alumno identifica la regla de correspondencia.

Aunque en un principio sólo el 62% de los alumnos dijeron correctamente quien es la regla de correspondencia, 3 alumnos los cuales representan el 14.28% de los alumnos, muestran saber a qué se refiere el concepto de regla de correspondencia, sin embargo en la respuesta se limitaron a decir que la regla de correspondencia eran las flechas, pero no la escribieron explícitamente.

Por lo anterior considero que sí se cumplió el objetivo, ya que el 76.28% muestran conocimiento sobre la regla de correspondencia.

Los resultados para el inciso d) fueron los siguientes:

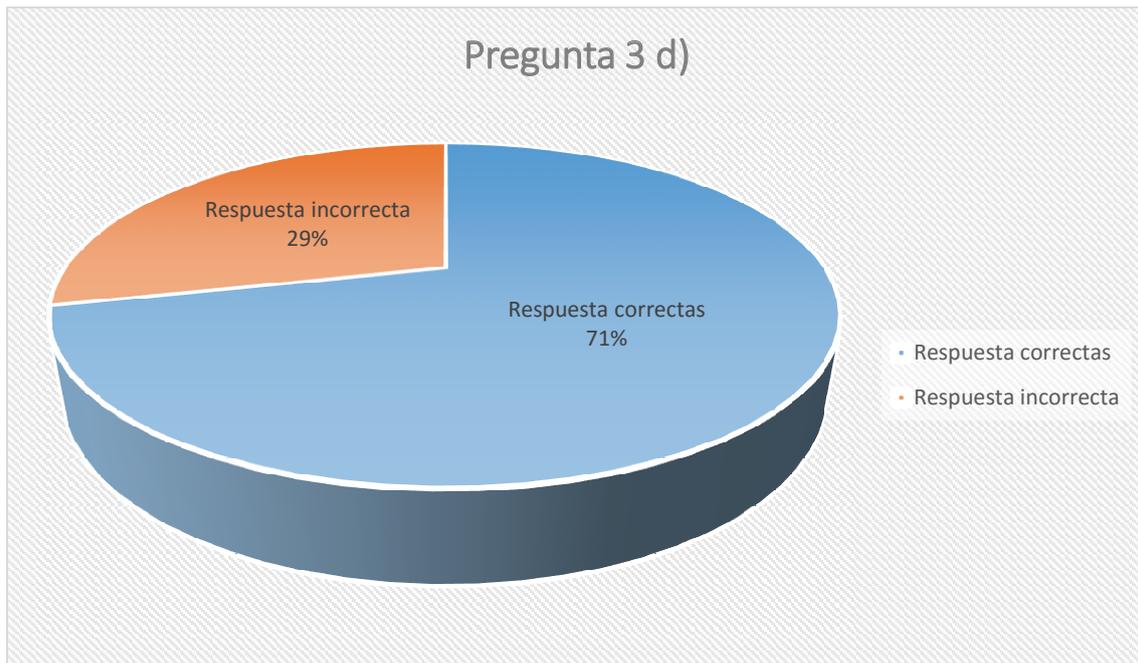
15 alumnos contestaron de manera correcta.

3 alumnos contestaron que los números (contradominio) eran la imagen.

1 alumno respondió que eran el 3 y 4 (Elementos del contradominio a los cuales les llegan más de una flecha).

1 alumno respondió que eran los lados y flechas.

1 alumno respondió que eran las figuras.



La pregunta 3 d) nos ayuda a verificar si se cumplió el objetivo siguiente:

- El alumno identifica la imagen de una función.

Podemos observar que el 71% de los alumnos identificaron correctamente la imagen de la función del ejemplo. Con respecto a los alumnos que no contestaron correctamente, el 19% muestra que saben que la imagen está contenida en el contradominio, sin embargo no lograron adquirir completamente el concepto de imagen.

Pregunta 4. Encuentra el dominio natural de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \frac{3x+2}{(x-3)(x+5)}$

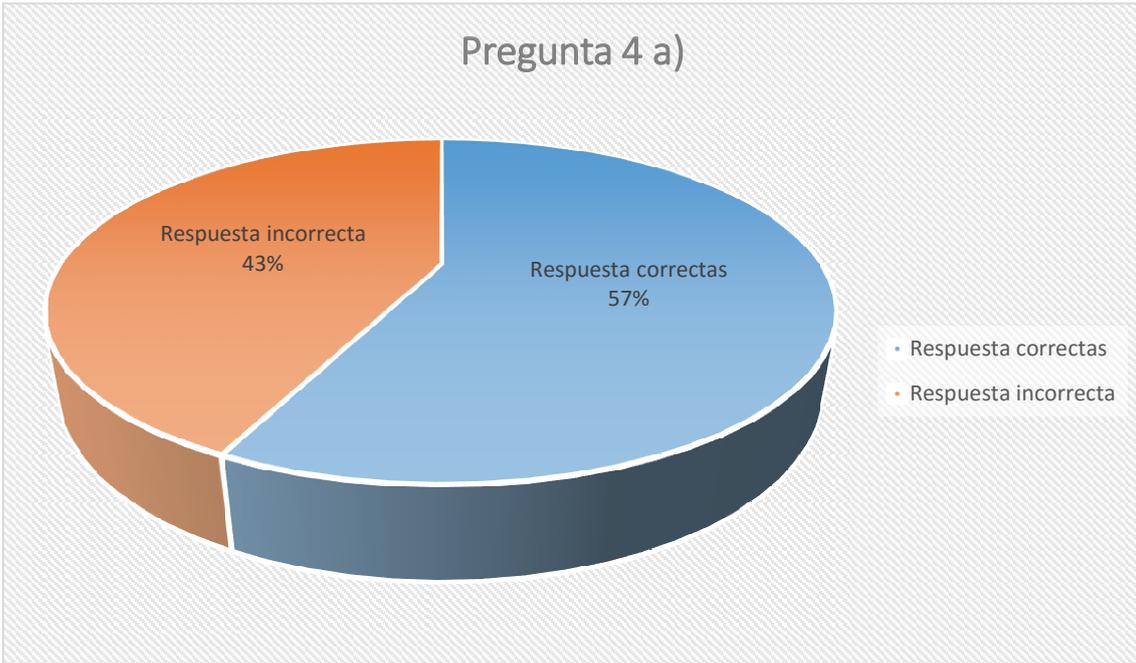
b) $f(x) = \sqrt{x-4}$

Los resultados para el inciso a) fueron los siguientes:

12 alumnos contestaron correctamente.

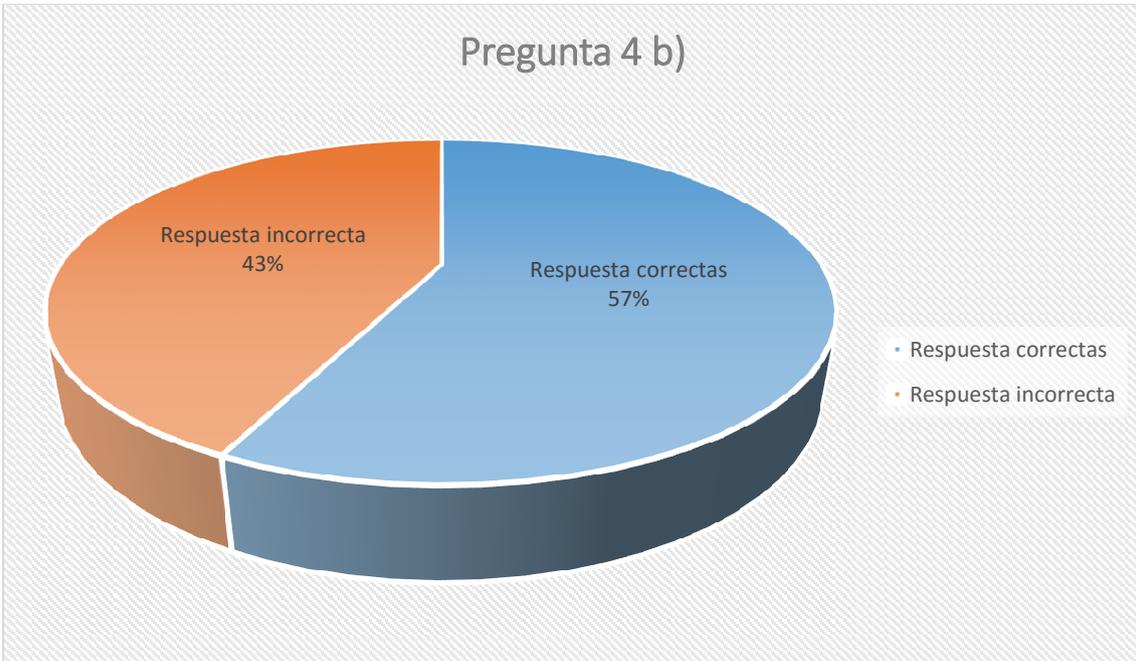
5 alumnos no respondieron la pregunta.

4 alumnos tuvieron problemas para resolver la ecuación de segundo grado, por lo que no contestaron correctamente.



Los resultados para el inciso b) fueron los siguientes:

- 12 alumnos contestaron de forma correcta.
- 5 alumnos no respondieron la pregunta.
- 4 alumnos tuvieron problemas al resolver la desigualdad por lo que no contestaron de manera correcta.



Pregunta 5. Sean $f(x) = 2x^2 + 4x$ y $g(x) = 2x + 6$. Realiza las siguientes operaciones:

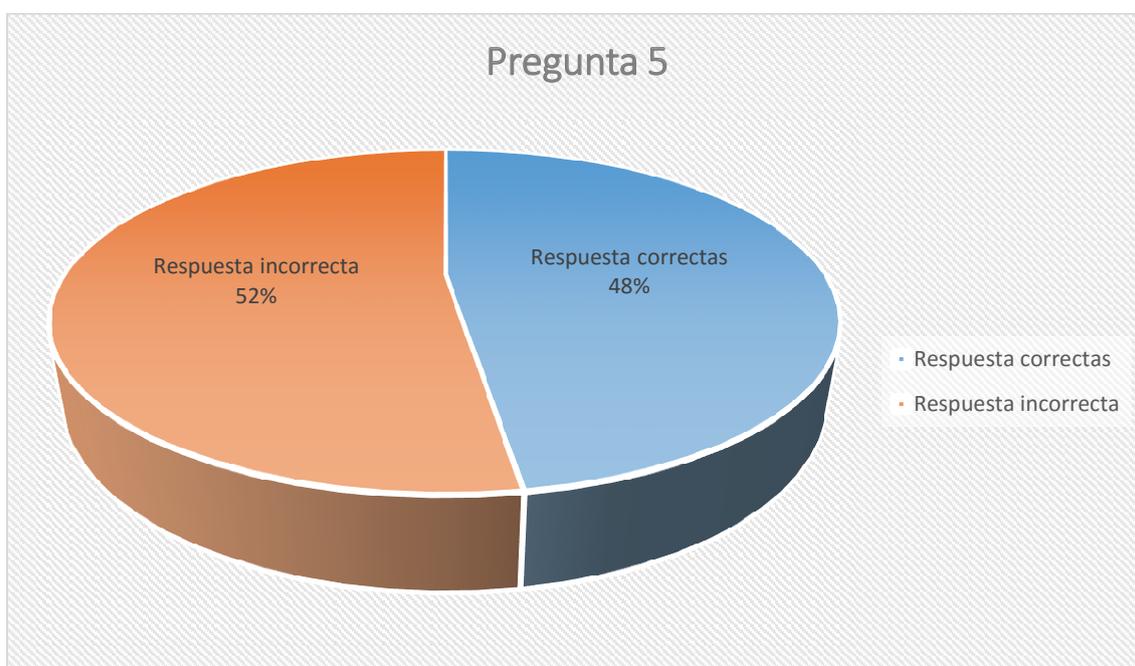
a) $f(x) + g(x)$ b) $f(x)g(x)$ c) $\frac{f(x)}{g(x)}$

En la pregunta 5 los resultados fueron los siguientes:

9 alumnos tuvieron correctamente tanto el inciso a), b) y c).

6 alumnos no contestaron nada.

6 alumnos mostraron problemas con operaciones algebraicas en los tres incisos por lo que no lograron responder de manera correcta.



En esta pregunta se puede analizar si se cumplió el siguiente objetivo:

El alumno logró resolver las operaciones entre funciones de manera algebraica.

Lamentablemente no se cumplió el objetivo ya que sólo el 48% de los alumnos lograron realizarlo. Entonces ¿La forma de ver el tema es inadecuado? Después de un análisis concluyo que no es inadecuada la forma de ver este tema. Si recordamos cuando se aplicó la secuencia didáctica en la preparatoria 7 al finalizar sólo un alumno tuvo mal esta pregunta. Entonces ¿Cuál fue la diferencia entre aplicar la secuencia didáctica en la preparatoria 7 de la UNAM y el plantel 9 del colegio de Bachilleres? La diferencia fue el manejo de operaciones algebraicas, ya que en el colegio de bachilleres el 28.5% de los alumnos

mostraron saber cómo plantear los problemas, sin embargo al momento de realizar operaciones algebraicas se equivocaron lo cual provocó que no tuvieran correcta la pregunta. Recordemos que la mayoría los alumnos que ingresan al Colegio de Bachilleres presentan problemas con operaciones algebraicas lo cual sí repercutió en este tema.

Lo que se debe de hacer es incluir en la clase de ejercicios de repaso de los conocimientos previos necesarios ejercicios de operaciones algebraicas, de esta manera los alumnos reactivan sus conocimientos y lograría concluir satisfactoriamente este tipo de ejercicios.

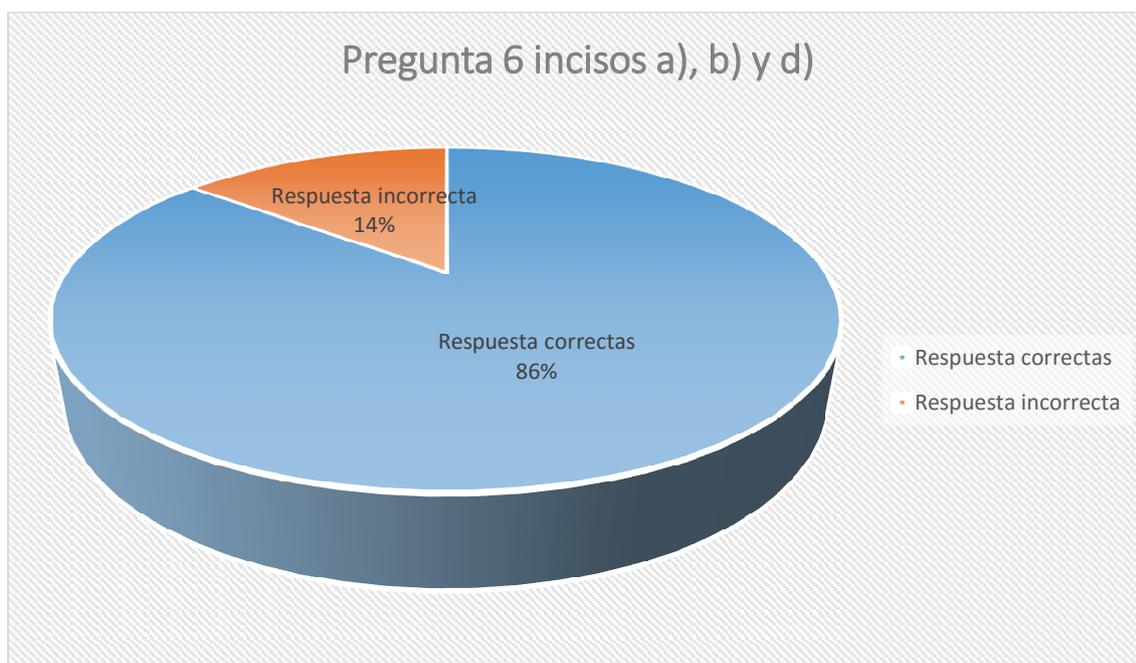
Pregunta 6. Realiza un esbozo del producto de la gráfica de $g(x)$ con $f(x)$. Determina el dominio de $f(x)$, $g(x)$ y el de $f(x) \times g(x)$.

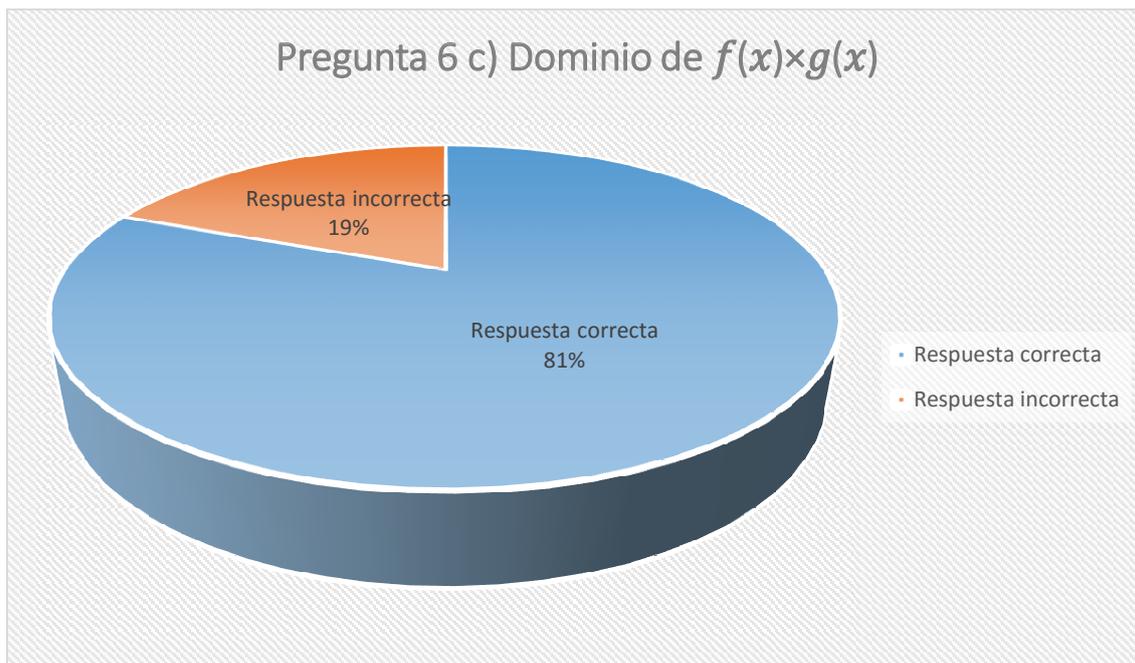
Los resultados de la pregunta 6 son los siguientes:

18 alumnos contestaron de manera correcta los 4 incisos.

2 alumnos no contestaron ningún inciso.

1 alumno logro encontrar sobre la gráfica el dominio de $f(x)$ y $g(x)$, sin embargo al escribir la respuesta se confundió en la escritura por lo cual fue incorrecta.





En la pregunta 6 podemos observar que varios objetivos sí se cumplieron, en primer lugar el alumno muestra que puede realizar gráficamente operaciones entre funciones, además es capaz de ubicar el dominio de una función a partir de su gráfica.

4.2.3 Análisis del trabajo cooperativo en el salón de clase

Durante la segunda sesión, donde se dieron a conocer los integrantes de cada grupo de aprendizaje, logre notar la inconformidad de los estudiantes por haberlos separado de sus amistades, sin embargo conforme fueron pasando las clases en la mayoría de los grupos se notaba que habían comprendido que era el trabajo cooperativo.

Durante las discusiones grupales lograba observar como en la mayoría de equipos tenían discusiones al tratar de responder una pregunta, pero posteriormente llegaban a un consenso, en base a los argumentos expuestos, para que de esta forma sólo tuvieran una respuesta.

Durante los ejercicios que se llevaban a cabo, se observaba el compañerismo, ya que, si algún integrante del equipo tenía ciertas dudas los otros integrantes del grupo le explicaban para que entendiera que es lo que se estaba haciendo

5 Conclusiones

El trabajo de tesis logró su objetivo principal, ya que se desarrolló una secuencia didáctica del tema de funciones la cual les permita a los alumnos analizar los contenidos que engloba el tema y ser partícipes de la clase para lograr una mejor comprensión.

Sin embargo algunos objetivos específicos que tenía el trabajo no se cumplieron

- Que el alumno diferencie entre la imagen y el contradominio. En este caso el 47% de los alumnos no lograron escribir cuál era la diferencia entre estos dos conceptos, es por eso que considero que faltaron más ejemplos para poder analizar y que los alumnos pudieran ser capaces de argumentar cuál es la diferencia entre estos dos conceptos, ya que, aunque son capaces de encontrar en ejemplos el contradominio y la imagen no logran argumentar en qué son diferentes estos dos conceptos.
- Que el alumno calcule algebraicamente el dominio de funciones. Aunque al analizar los resultados observamos que el 42% de los alumnos no lograron calcular el dominio de las funciones algebraicamente, considero que no fue por deficiencia en la secuencia didáctica, más bien es la falta de dominio en las operaciones algebraicas, ya que de los 42% de los alumnos el 20% de ellos planteó adecuadamente la forma algebraica para encontrar la respuesta, sin embargo en el camino tuvieron problemas en el álgebra, lo cual impidió que se llegara a la solución correcta.
Lo que propongo para evitar estos problemas es que continuamente se les dejen tareas a los alumnos para que sigan practicando este tipo de operaciones las cuales son básicas en las matemáticas.
- Que el alumno resuelva algebraicamente las operaciones entre funciones. En este caso el porcentaje de alumnos que no logró resolver correctamente algebraicamente las operaciones entre funciones fue del 57%, sin embargo la mitad de ellos fue debido a problemas a la hora de realizarlas operaciones algebraicas, lo cual provoco que no llegaran a la respuesta correcta.

Los objetivos específicos que sí se cumplieron fueron los siguientes:

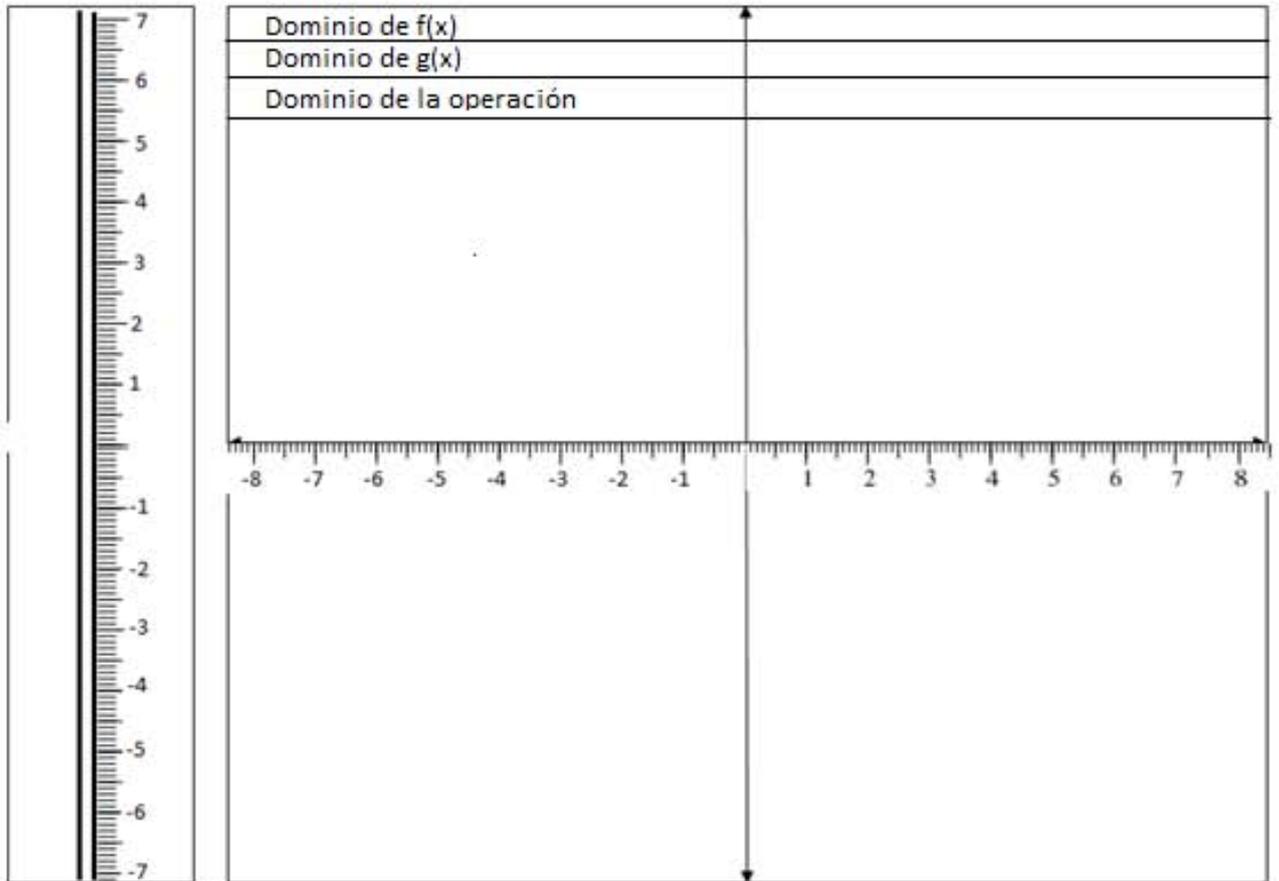
Que el alumno:

- Trabaje en grupos cooperativos.
- Diferencie las relaciones que son funciones.
- Ubique el dominio y rango de una relación a partir de su gráfica.
- Resuelva gráficamente las operaciones entre funciones.
- Infiera el dominio de las operaciones entre funciones.

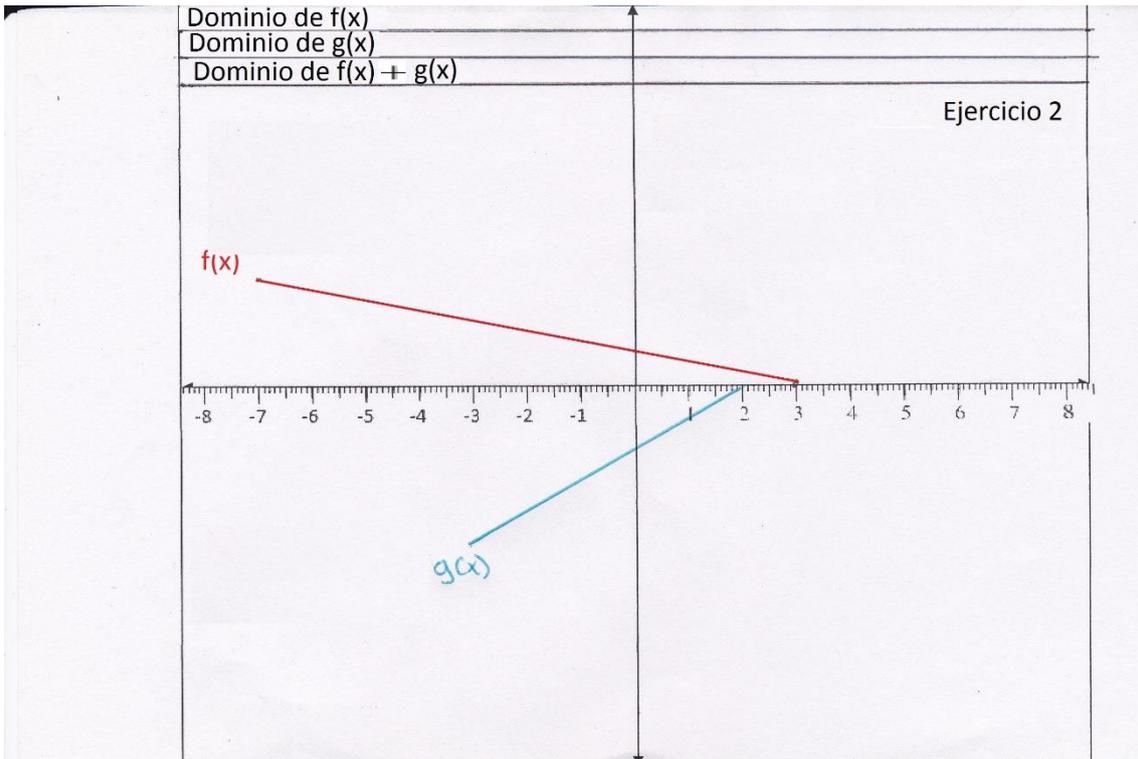
Considero que haber aplicado el aprendizaje por descubrimiento en su versión de modelo inductivo y haberlo hecho en trabajo colaborativo es adecuado, no sólo para la enseñanza del tema de funciones, si no para la enseñanza de las matemáticas, ya que permite que el alumno analice, realice hipótesis y construya su conocimiento. De esta manera el alumno no sólo aprende a realizar ejercicios, además comprende por qué se realizan de esa forma lo cual implica que no van a tener que memorizar procedimientos.

6 Anexos

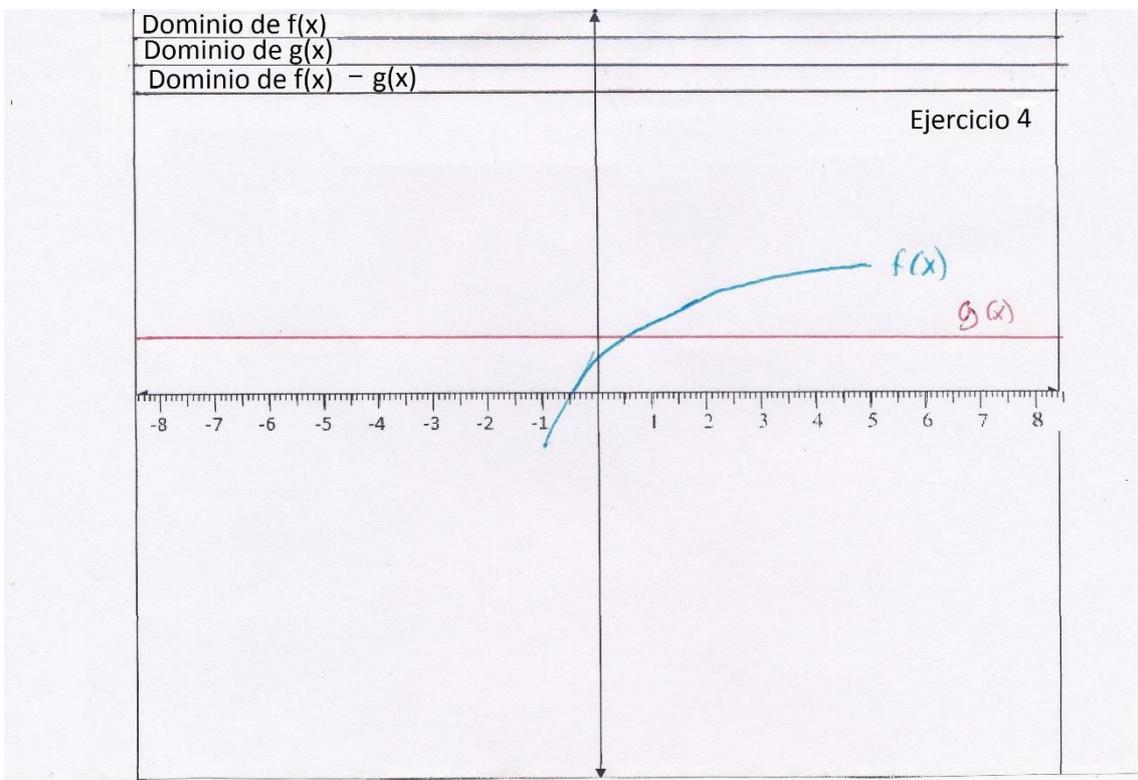
Anexo 1



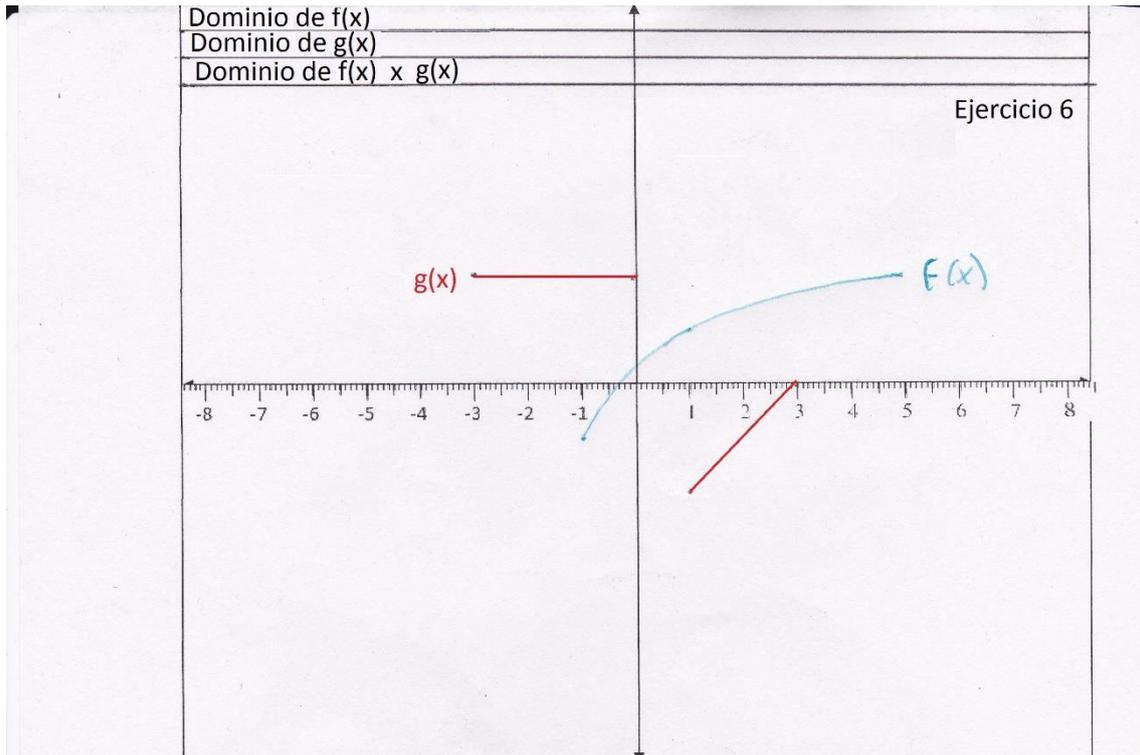
Anexo 2



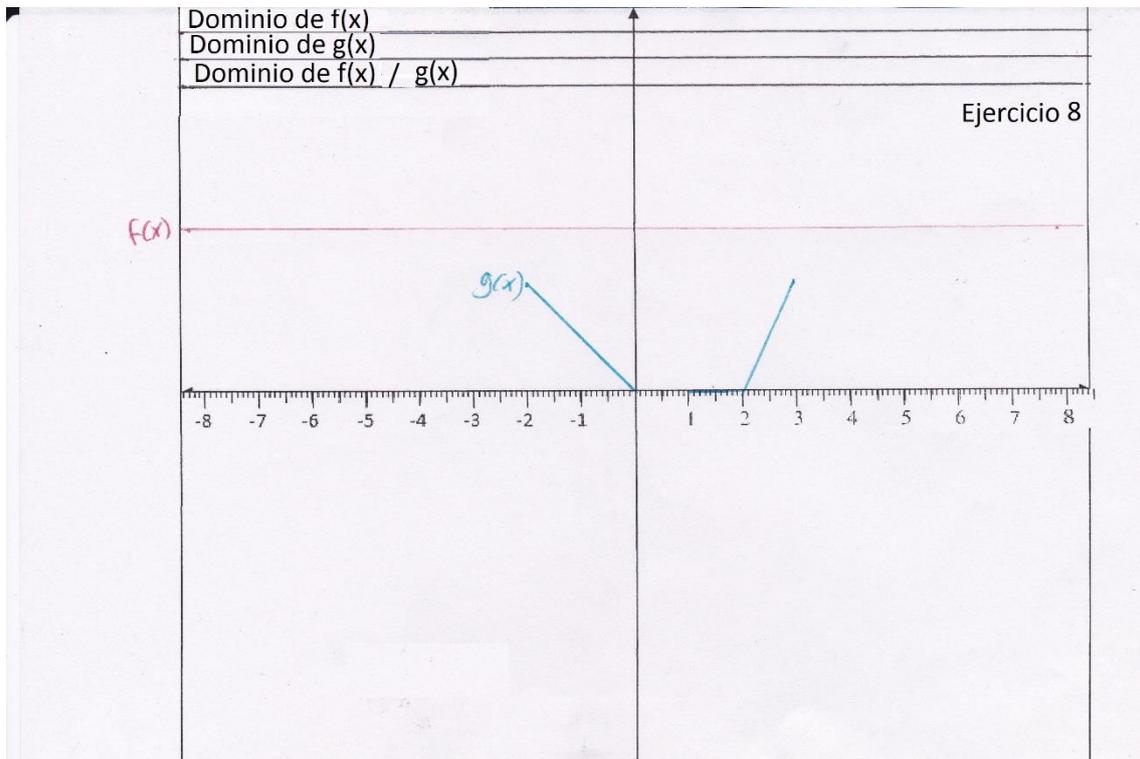
Anexo 3



Anexo 4



Anexo 5

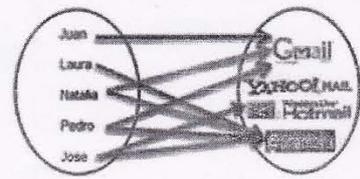


Anexo 6

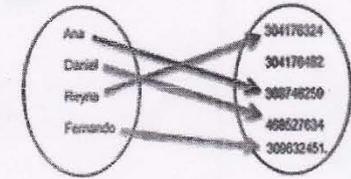
Equipo 1

función: Es una relación donde a cada elemento del dominio se relaciona (se le crea) con un solo elemento del codominio.

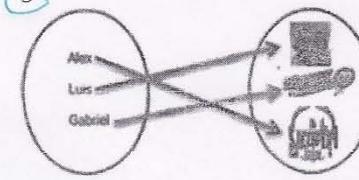
1 Personas → Correo electrónico



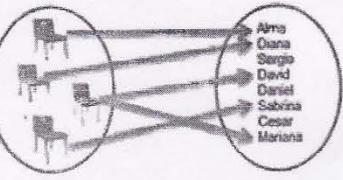
2 Alumnos → secuencia de números



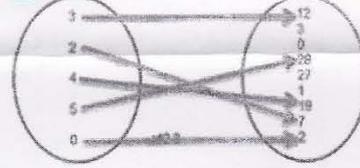
3 Vlogger → Canal de youtube



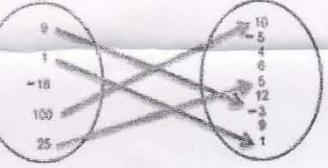
4 Sillas → Alumnos



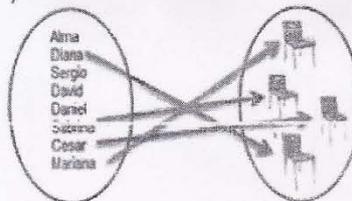
5 X → Y



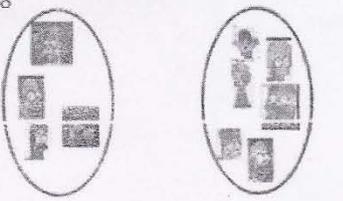
6 X → Y



7 Alumnos → Sillas



8 Personas → Personas

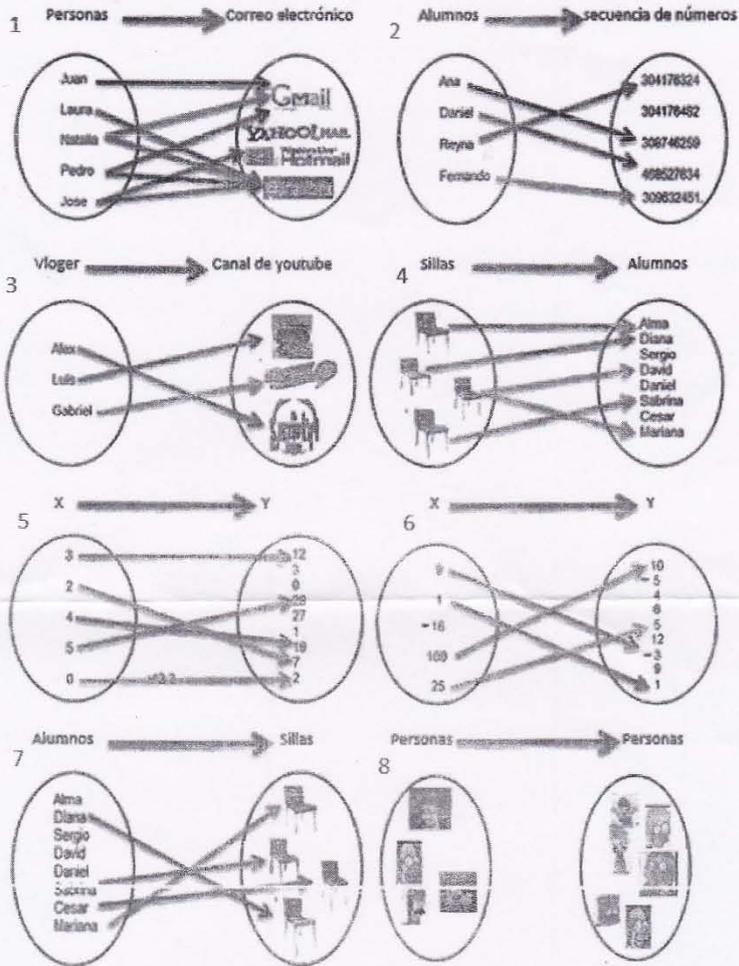


1. ¿Qué diferencia tiene las relaciones del ejemplo 6 y 7 con el resto de los ejemplos? hay elementos que no están relacionados.

2. Al observar el dominio de las relaciones 1, 2, 3, 4, 5 y 8 ¿Qué diferencia encuentras?

(Todos se relacionan) la 1 y la 2 tienen dominios con 2 flechas y la 2, 3 y 5 solo con una.

equipo 3



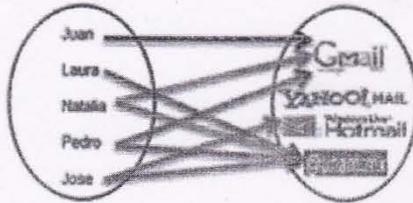
1. ¿Qué diferencia tiene las relaciones del ejemplo 6 y 7 con el resto de los ejemplos?

En ellos dejaron algunos dominios sin contradominio, son los únicos que no tienen flecha

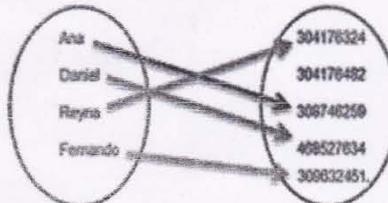
2. Al observar el dominio de las relaciones 1, 2, 3, 4, 5 y 8 ¿Qué diferencia encuentras?

De algunos dominios sale más de una flecha

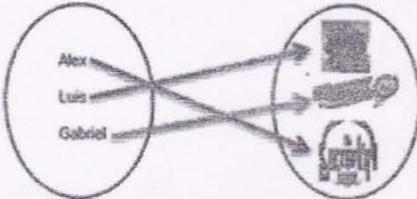
1 Personas → Correo electrónico



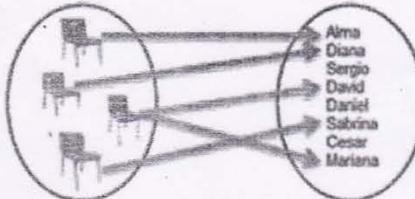
2 Alumnos → secuencia de números



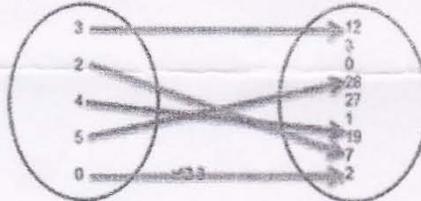
3 Vlogger → Canal de youtube



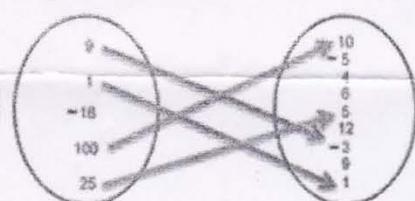
4 Sillas → Alumnos



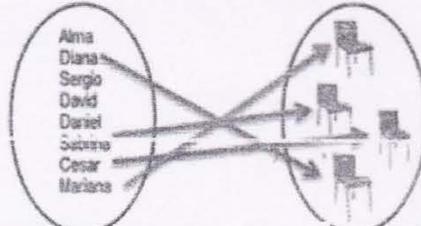
5 $X \rightarrow Y$



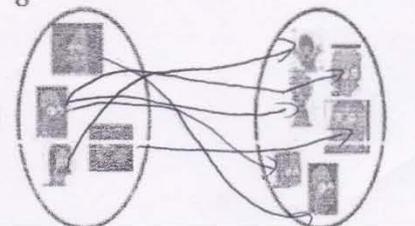
6 $X \rightarrow Y$



7 Alumnos → Sillas



8 Personas → Personas



1. ¿Qué diferencia tiene las relaciones del ejemplo 6 y 7 con el resto de los ejemplos?

Que en ambos ejemplos sobran en el dominio

2. Al observar el dominio de las relaciones 1, 2, 3, 4, 5 y 8 ¿Qué diferencia encuentras?

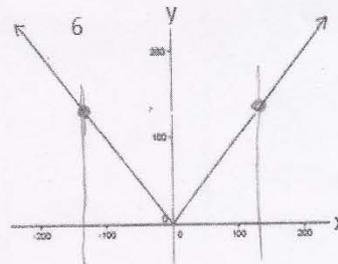
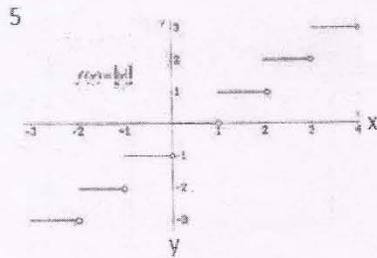
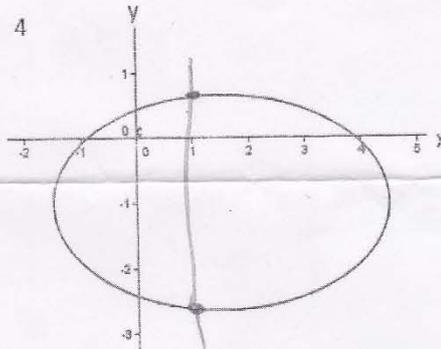
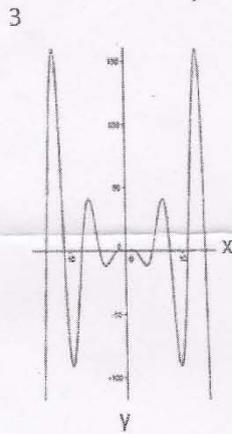
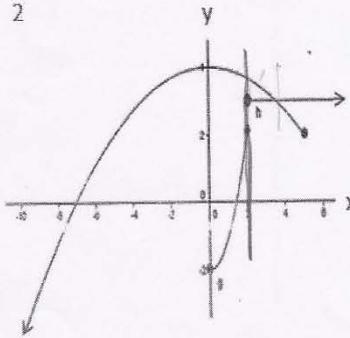
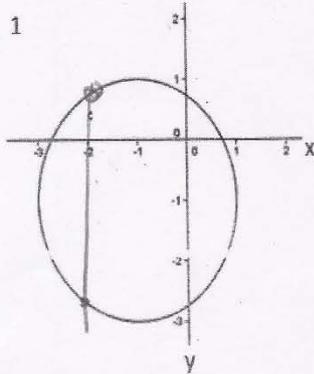
Que en los ejemplos no sobran ni Dominios ni Contra dominios.

En el 1, 4 algunos Elementos se usan 2 veces y en el 2, 3, 5 los Elementos solo se usan 1 vez

Anexo 7

Ruiz Sanchez Alberto

Equipo 1



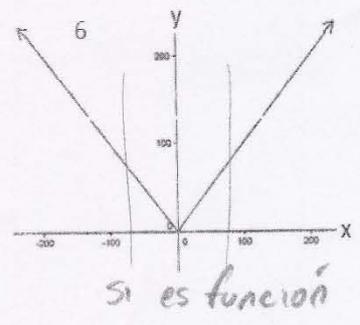
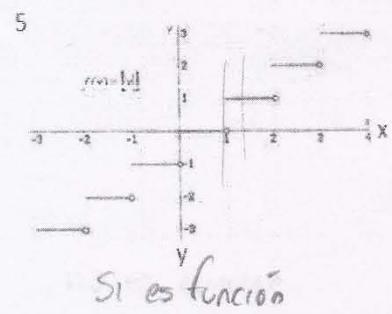
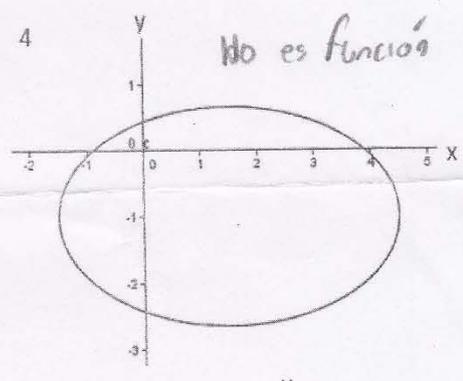
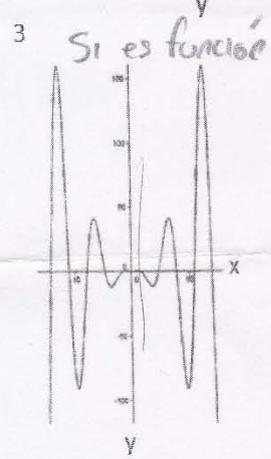
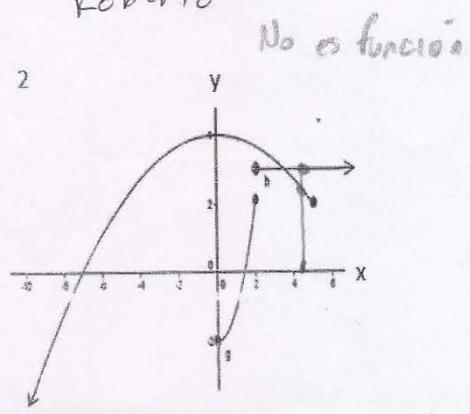
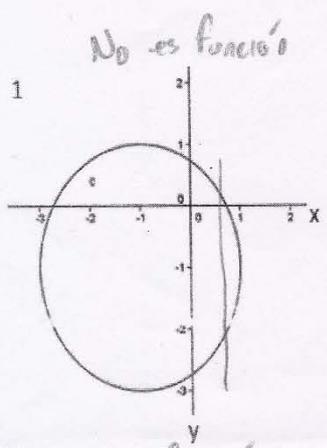
1. ¿Qué tienen en común las relaciones 1, 2 y 4?

No son funciones se cortan de 2 maneras diferentes

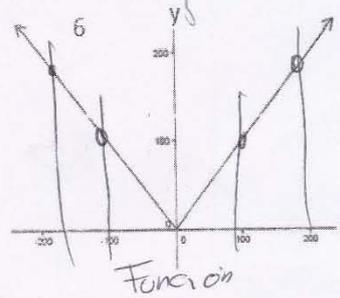
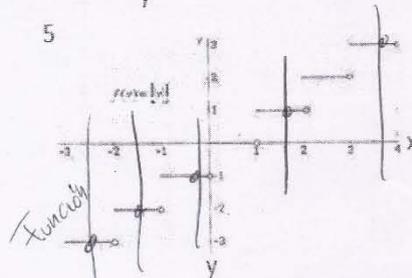
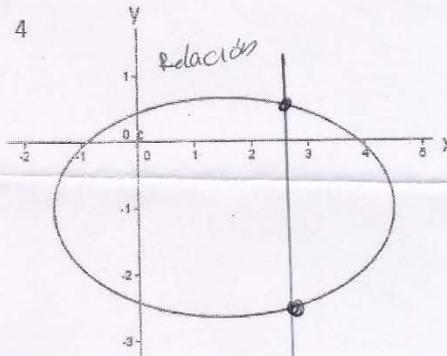
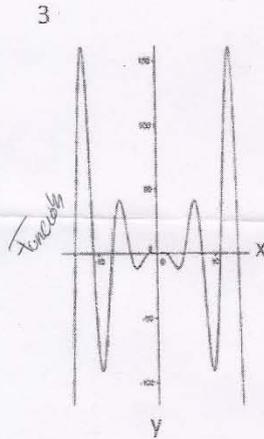
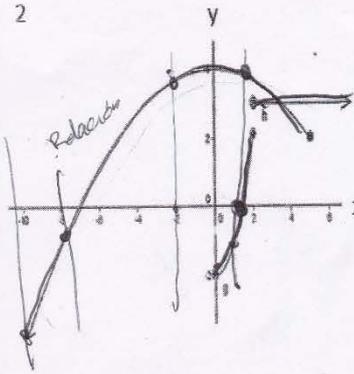
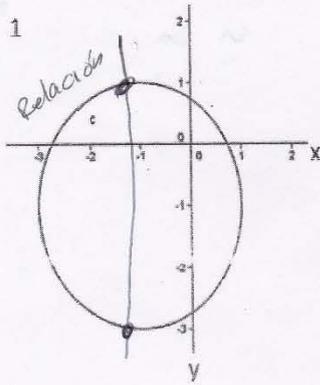
2. ¿Qué tienen en común las relaciones 3, 5 y 6?

Si son funciones

García Cantero equipo 3
Roberto



- ¿Qué tienen en común las relaciones 1, 2 y 4? *Que no son función*
- ¿Qué tienen en común las relaciones 3, 5 y 6? *Que si son función*



1. ¿Qué tienen en común las relaciones 1, 2 y 4?
que solo parten a la grafica en dos

2. ¿Qué tienen en común las relaciones 3, 5 y 6?
que tienen una función y pueden seguir elevando los puntos.

Anexo 8

Espejel Sanchez Carlos Varel 1-4

Dominio de funciones

Ejercicio 1 ¿Para qué valores de x tiene sentido la función $f(x) = 1/x$?

Respuesta por equipo:

Para todos los números menos el 0
el Cero

Respuesta discusión grupal:

James divididos entre Cero

Ejercicio 2. Determinar el dominio de las siguientes funciones:

Dominio
todas las
números
menor el
3

a) $f(x) = 1/(-2x + 6)$

$$f(x) = \frac{1}{-2x + 6} = 0$$

$$-2x + 6 = 0$$

$$-2x = -6$$

$$x = 3$$

b) $f(x) = 1/(x^2 - 2x - 15)$ $f(x) = \frac{1}{x^2 - 2x - 15}$

$$x^2 - 2x - 15 = 0$$

$$(x - 3)(x + 5) = 0$$

$$x = 3 \quad x = -5$$

Dominio
Todas las números
menor el 3 y el -5

Ejercicio 3. ¿Para qué valores de x está definida la función $f(x) = \sqrt{x}$?

Respuesta por equipo:

Para todos los números menos los negativos

Respuesta discusión grupal:

menos los negativo

Ejercicio 4. Determinar el dominio de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \sqrt{-7x + 24}$

$$f(x) = \sqrt{-7x + 24}$$

$$-7x + 24 \geq 0$$

$$-7x \geq -24$$

$$x \geq \frac{-24}{-7}$$

$$x \geq 3.42$$

b) $f(x) = \sqrt{x^2 - 9}$

$$x^2 \geq 9$$

$$x \geq \sqrt{9}$$

$$x \geq \pm 3$$

Dominio

Equipo

Dominio de funciones

Ejercicio 1 ¿Para qué valores de x tiene sentido la función $f(x) = 1/x$?

Respuesta por equipo:

solo 0 es el numero que no se puede dividir

Respuesta discusión grupal:

$\frac{1}{x}$ tiene sentido para todos los numeros menos el cero

Ejercicio 2. Determinar el dominio de las siguientes funciones:

a) $f(x) = 1/(-2x + 6)$

b) $f(x) = 1/(x^2 - 2x - 15)$

$$\begin{aligned} -2x + 6 & \neq 0 \\ -2x + 6 & = 0 \\ -2x & = 0 - 6 \\ 2x & = -6 \\ x & = \frac{-6}{2} \end{aligned}$$
 Dominio $\mathbb{R} - \{-3\}$

$$\begin{aligned} x^2 - 2x - 15 & \neq 0 \\ (x + 5)(x + 3) & \neq 0 \\ x & \neq -5 \quad x \neq -3 \end{aligned}$$
 Dominio $\mathbb{R} - \{-5, -3\}$

Ejercicio 3. ¿Para qué valores de x está definida la función $f(x) = \sqrt{x}$?

Respuesta por equipo:

\sqrt{x} tiene sentido para todos los numeros ~~menores~~ que son positivos

Respuesta discusión grupal:

Para las negativas no tiene sentido, tiene sentido para las positivas y el cero

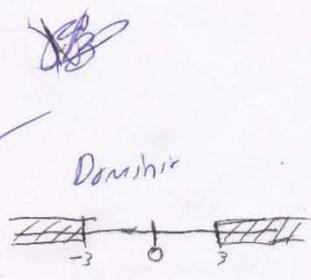
Ejercicio 4. Determinar el dominio de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \sqrt{-7x + 24}$

b) $f(x) = \sqrt{x^2 - 9}$

$$\begin{aligned} -7x + 24 & \geq 0 \\ -7x & \geq 0 - 24 \\ x & \leq \frac{-24}{-7} \\ x & = 3.42 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^2 - 9 & \geq 0 \\ x^2 & \geq +9 \\ x & \geq \sqrt{9} \\ x & \geq \pm 3 \end{aligned}$$



Dominio de funciones

Ejercicio 1 ¿Para qué valores de x tiene sentido la función $f(x) = 1/x$?

Respuesta por equipo:

Solo el numero cero es el que no se puede dividir

Respuesta discusión grupal:

$\frac{1}{x}$ tiene sentido para todos los numeros menos el cero.

Ejercicio 2. Determinar el dominio de las siguientes funciones:

a) $f(x) = 1/(-2x + 6)$

$$-2x + 6 = 0$$

$$-2x = -6$$

$$x = \frac{-6}{-2}$$

Dominio
 $\mathbb{R} - \left\{ \frac{-6}{-2} \right\}$

b) $f(x) = 1/(x^2 - 2x - 15)$

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 2x - 15} = 0$$

$$(x-5)(x+3)$$

$x = -5 \quad x = +3$

Ejercicio 3. ¿Para qué valores de x está definida la función $f(x) = \sqrt{x}$?

Respuesta por equipo:

\sqrt{x} tiene sentido para todos los numeros menos el cero menos los negativos

Respuesta discusión grupal:

para todas las numeros menos los negativos

Ejercicio 4. Determinar el dominio de las siguientes funciones:

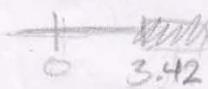
a) $f(x) = \sqrt{-7x + 24}$

$$-7x + 24 \geq 0$$

$$-7x \geq -24$$

$$x \geq \frac{-24}{-7}$$

$x \geq 3.42$



b) $f(x) = \sqrt{x^2 - 9}$

$$x^2 - 9 \geq 0$$

$$x^2 \geq +9$$

$$x \geq \sqrt{9}$$

$$x \geq +3$$

Dominio



Anexo 9

Equipo 1

$$f(-3) + g(-3) = 14 + (-7) = 8$$

Operaciones entre funciones

Ejercicio 1. Sean $f(x) = x^2 - 2x$ y $g(x) = 3x + 2$

a) Calcula $f(1) + g(1)$ y $f(-3) + g(-3)$

$$f(1) = (1)^2 - 2(1) = 1 - 2 = -1$$

$$g(1) = 3(1) + 2 = 5$$

$$f(-3) = (-3)^2 - 2(-3) = 9 + 6 = 15$$

$$g(-3) = 3(-3) + 2 = -7$$

$$f(1) + g(1) = -1 + 5 = 4$$

$$f(-3) + g(-3) = 15 + (-7) = 8$$

b) Encuentra $f(x) + g(x)$

$$x^2 - 2x + 3x + 2$$

$$x^2 + x + 2$$

Ejercicio 2. Una vez que tengas el material de apoyo contesta lo siguiente:

- Sobre el eje de las x marca con dos colores diferentes el dominio de $f(x)$ y de $g(x)$ respectivamente.
- Sobre el material traza la gráfica de la suma de $f(x) + g(x)$
- ¿Cuál es el dominio de la suma?
-3 a 2
- ¿Qué relación encuentran con el dominio de las dos funciones y con el dominio de la suma de las funciones? Es donde las dos funciones están definidas

Ejercicio 3. Sean $f(x) = x^2 - 2x$ y $g(x) = 3x + 2$

a) Calcula $f(1) - g(1)$ y $f(-3) - g(-3)$

$$f(1) = (1)^2 - 2(1) = 1 - 2 = -1$$

$$g(1) = 3(1) + 2 = 5$$

$$f(-3) = (-3)^2 - 2(-3) = 9 + 6 = 15$$

$$g(-3) = 3(-3) + 2 = -7$$

$$f(1) - g(1) = -1 - 5 = -6$$

$$f(-3) - g(-3) = 15 - (-7) = 22$$

b) Encuentra $f(x) - g(x)$

$$x^2 - 2x - (3x + 2) = x^2 - 2x - 3x - 2$$

$$x^2 - 5x - 2$$

Ejercicio 4. Una vez que tengas el material de apoyo contesta lo siguiente:

- Sobre el material traza la gráfica de la resta de $f(x)$ menos $g(x)$
- ¿Cuál es el dominio de la resta?
- ¿Qué relación encuentran con el dominio de las dos funciones y con el dominio de la suma de las funciones?

Ruiz Sanchez Alberto EQUIPO 1

Ejercicio 5. Sean $f(x) = x + 3$ y $g(x) = 3x + 2$

a) Calcula $f(1) \times g(1)$ y $f(-3) \times g(-3)$
 $f(1) = 1 + 3 = 4$ $g(1) = 3(1) + 2 = 5$ $(f(1) = 4)(g(1) = 5) = 20$
 $f(-3) = -3 + 3 = 0$ $g(-3) = 3(-3) + 2 = -7$ $(f(-3) = 0)(g(-3) = -7) = 0$

b) ¿Quién es $f(x) \times g(x)$?
 $f(x) \times g(x) = (x + 3)(3x + 2)$

Ejercicio 6. Una vez que tengas el material de apoyo contesta lo siguiente:

- a) Sobre el eje de las x marca con dos colores diferentes el dominio de $f(x)$ y de $g(x)$ respectivamente.
b) Sobre el material traza la gráfica del producto de $f(x)$ con $g(x)$
c) ¿Cuál es el dominio del producto de $f(x)$ con $g(x)$?
dominio de 1 a 0 y de 1 a 3
d) ¿Qué relación encuentran con el dominio de las dos funciones y con el dominio del producto? Intersección de $f(x)$ con $g(x)$

Ejercicio 7. Sean $f(x) = 3x + 9$ y $g(x) = x + 3$

a) Calcula $\frac{f(2)}{g(2)}$ y $\frac{f(-3)}{g(-3)}$
 $f(2) = 3(2) + 9 = 15$ $g(2) = 2 + 3 = 5$ $\frac{15}{5} = 3$
 $f(-3) = 3(-3) + 9 = 0$ $g(-3) = -3 + 3 = 0$ $\frac{0}{0} = \text{No se puede}$

b) Calcula $\frac{f(x)}{g(x)}$
 $\frac{3x + 9}{x + 3} = 3$

Ejercicio 8. Una vez que tengas el material de apoyo contesta lo siguiente:

- a) Sobre el material traza la gráfica de $\frac{f(x)}{g(x)}$
b) ¿Cuál es el dominio de $f(x)$ entre $g(x)$?
dominio -2 a 0 y de 2 a 3
c) ¿Qué relación encuentran con el dominio de las dos funciones y con el dominio de la división?
Intersección de $f(x)$ con $g(x)$ menos los $g(x)$ igual a 0

equipo 3

Operaciones entre funciones

Ejercicio 1. Sean $f(x) = x^2 - 2x$ y $g(x) = 3x + 2$

a) Calcula $f(1) + g(1)$ y $f(-3) + g(-3)$

$$f(-3) = (-3)^2 - 2(-3) = 15$$

$$g(-3) = 3(-3) + 2 = -7$$

b) Encuentra $f(x) + g(x)$

$$f(x) + g(x) = x^2 - 2x + 3x + 2 = x^2 + x + 2$$

$$f(-3) + g(-3) = 8$$

$$f(1) = 1^2 - 2(1) = -1$$

$$g(1) = 3(1) + 2 = 5$$

$$f(1) + g(1) = 4$$

Ejercicio 2. Una vez que tengas el material de apoyo contesta lo siguiente:

- Sobre el eje de las x marca con dos colores diferentes el dominio de $f(x)$ y de $g(x)$ respectivamente.
- Sobre el material traza la gráfica de la suma de $f(x) + g(x)$
- ¿Cuál es el dominio de la suma?

de -3 a 2

- ¿Qué relación encuentran con el dominio de las dos funciones y con el dominio de la suma de las funciones?

Que no se puede sumar todo lo rojo ya que lo azul es muy corto

Ejercicio 3. Sean $f(x) = x^2 - 2x$ y $g(x) = 3x + 2$

a) Calcula $f(1) - g(1)$ y $f(-3) - g(-3)$

$$f(1) = 1^2 - 2(1) = -1$$

$$g(1) = 3(1) + 2 = 5$$

$$f(1) - g(1) = -6$$

$$f(-3) = (-3)^2 - 2(-3) = 15$$

$$g(-3) = 3(-3) + 2 = -7$$

$$f(-3) - g(-3) = 22$$

b) Encuentra $f(x) - g(x)$

$$f(x) - g(x) = x^2 - 2x - 3x - 2 = x^2 - 5x - 2$$

$$f(x) - g(x) = x^2 - 2x - (3x + 2) = x^2 - 2x - 3x - 2$$

Ejercicio 4. Una vez que tengas el material de apoyo contesta lo siguiente:

- Sobre el material traza la gráfica de la resta de $f(x)$ menos $g(x)$
- ¿Cuál es el dominio de la resta?
- ¿Qué relación encuentran con el dominio de las dos funciones y con el dominio de la suma de las funciones?

equipo 3

Ejercicio 5. Sean $f(x) = x + 3$ y $g(x) = 3x + 2$

a) Calcula $f(1) \times g(1)$ y $f(-3) \times g(-3)$

$$f(1) = 1 + 3 \quad g(1) = 3(1) + 2 \quad f(-3) = -3 + 3 = 0$$
$$f(1) = 4 \quad g(1) = 5 = \boxed{20} \quad g(-3) = 3(-3) + 2 = -7$$

b) ¿Quién es $f(x) \times g(x)$?

$$(x+3)(3x+2) = 3x^2 + 2x + 9x + 6$$
$$\boxed{4x+3+2} = 3x^2 + 11x + 6$$

$$f(-3) \times g(-3) = \boxed{0}$$

Ejercicio 6. Una vez que tengas el material de apoyo contesta lo siguiente:

- a) Sobre el eje de las x marca con dos colores diferentes el dominio de $f(x)$ y de $g(x)$ respectivamente.
b) Sobre el material traza la gráfica del producto de $f(x)$ con $g(x)$
c) ¿Cuál es el dominio del producto de $f(x)$ con $g(x)$?

1 a 3 y -1 a 0 y 2 a 3
d) ¿Qué relación encuentran con el dominio de las dos funciones y con el dominio del producto? Es la intersección de los dos dominios

Ejercicio 7. Sean $f(x) = 3x + 9$ y $g(x) = x + 3$

a) Calcula $\frac{f(2)}{g(2)}$ y $\frac{f(-3)}{g(-3)}$

$$\frac{f(2) = 3(2) + 9 = 15}{g(2) = 2 + 3 = 5} = 3 \quad \frac{f(-3) = 3(-3) + 9 = 0}{g(-3) = -3 + 3 = 0} = \text{No existe}$$

b) Calcula $\frac{f(x)}{g(x)}$

Ejercicio 8. Una vez que tengas el material de apoyo contesta lo siguiente:

- a) Sobre el material traza la gráfica de $\frac{f(x)}{g(x)}$
b) ¿Cuál es el dominio de $f(x)$ entre $g(x)$?

-2 a 0 y 2 a 3
c) ¿Qué relación encuentran con el dominio de las dos funciones y con el dominio de la división?

Es la intersección de los dos dominios pero sin que $g(x)$ sea 0



Operaciones entre funciones

Ejercicio 1. Sean $f(x) = x^2 - 2x$ y $g(x) = 3x + 2$

a) Calcula $f(1) + g(1)$ y $f(-3) + g(-3)$

$$f(1) = (1)^2 - 2(1) = -1$$

$$g(1) = 3(1) + 2 = 5$$

$$f(-3) = (-3)^2 - 2(-3) = 15$$

$$g(-3) = 3(-3) + 2 = -7$$

b) Encuentra $f(x) + g(x)$

$$f(1) = (1)^2 - 2(1) = -1$$

$$g(1) = 3(1) + 2 = 5$$

Ejercicio 2. Una vez que tengas el material de apoyo contesta lo siguiente:

- a) Sobre el eje de las x marca con dos colores diferentes el dominio de $f(x)$ y de $g(x)$ respectivamente.
- b) Sobre el material traza la gráfica de la suma de $f(x) + g(x)$
- c) ¿Cuál es el dominio de la suma?

-3 a 2
 d) ¿Qué relación encuentran con el dominio de las dos funciones y con el dominio de la suma de las funciones? Se encuentran dentro de los 2 horizontes

-1-5)

Ejercicio 3. Sean $f(x) = x^2 - 2x$ y $g(x) = 3x + 2$

a) Calcula $f(1) - g(1)$ y $f(-3) - g(-3)$

$$f(1) = (1)^2 - 2(1) = -1$$

$$g(1) = 3(1) + 2 = 5$$

$$f(-3) = (-3)^2 - 2(-3) = 15$$

$$g(-3) = 3(-3) + 2 = -7$$

b) Encuentra $f(x) - g(x)$

$$f(1) = (1)^2 - 2(1) = -1$$

$$g(1) = 3(1) + 2 = 5$$

Ejercicio 4. Una vez que tengas el material de apoyo contesta lo siguiente:

- a) Sobre el material traza la gráfica de la resta de $f(x)$ menos $g(x)$
- b) ¿Cuál es el dominio de la resta?
- c) ¿Qué relación encuentran con el dominio de las dos funciones y con el dominio de la suma de las funciones?

[Handwritten initials]

Ejercicio 5. Sean $f(x) = x + 3$ y $g(x) = 3x + 2$

a) Calcula $f(1) \times g(1)$ y $f(-3) \times g(-3)$

$$f(x) = (1) + 3 = 4$$

$$g(x) = 3(1) + 2 = 5$$

b) ¿Quién es $f(x) \times g(x)$? $0x - 7 = 0$

$$f(x) = (-3) + 3 = 0$$

$$g(x) = 3(-3) + 2 = -7$$

Ejercicio 6. Una vez que tengas el material de apoyo contesta lo siguiente:

- Sobre el eje de las x marca con dos colores diferentes el dominio de $f(x)$ y de $g(x)$ respectivamente.
- Sobre el material traza la gráfica del producto de $f(x)$ con $g(x)$
- ¿Cuál es el dominio del producto de $f(x)$ con $g(x)$?

En -2 y 3
 c) ¿Qué relación encuentran con el dominio de las dos funciones y con el dominio del producto? $f(x) \times g(x)$
Intersección de $f(x)$ con $g(x)$

Ejercicio 7. Sean $f(x) = 3x + 9$ y $g(x) = x + 3$

a) Calcula $\frac{f(2)}{g(2)}$ y $\frac{f(-3)}{g(-3)}$

$$f(x) = 3(2) + 9 = 15$$

$$\frac{15}{5} = 3$$

$$g(x) = (2) + 3 = 5$$

b) Calcula $\frac{f(x)}{g(x)}$

$$f(x) = 3(-3) + 9 = 0$$

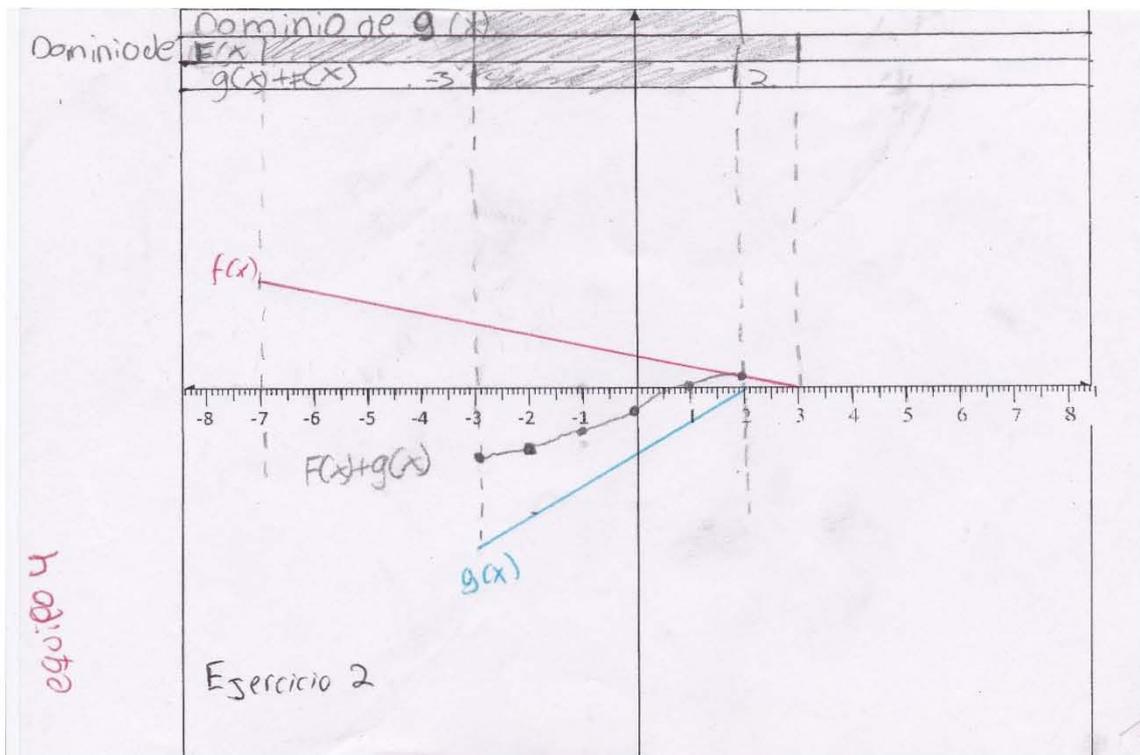
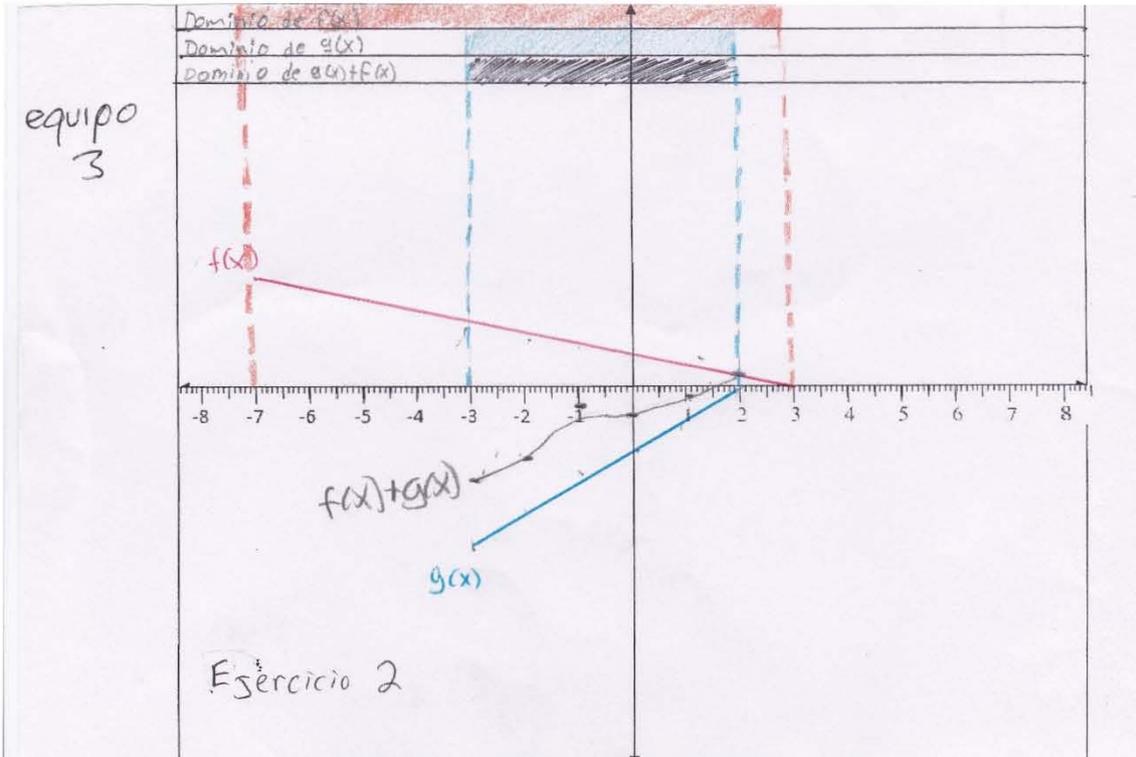
$$g(x) = (-3) + 3 = 0$$

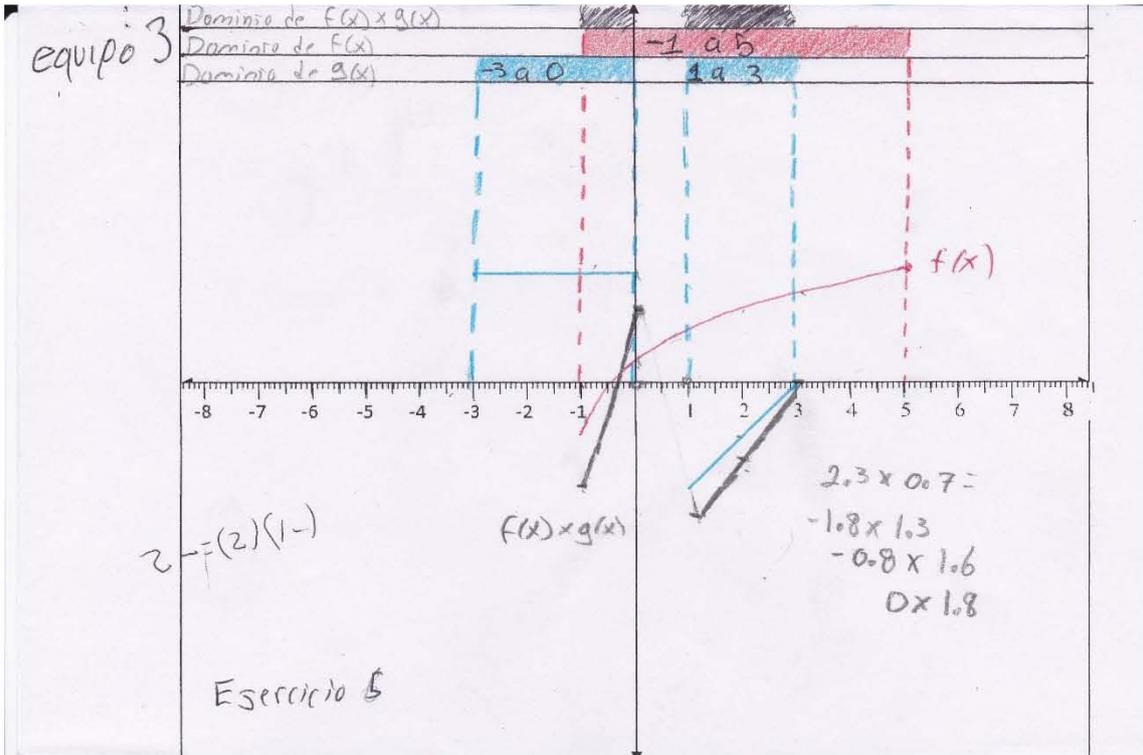
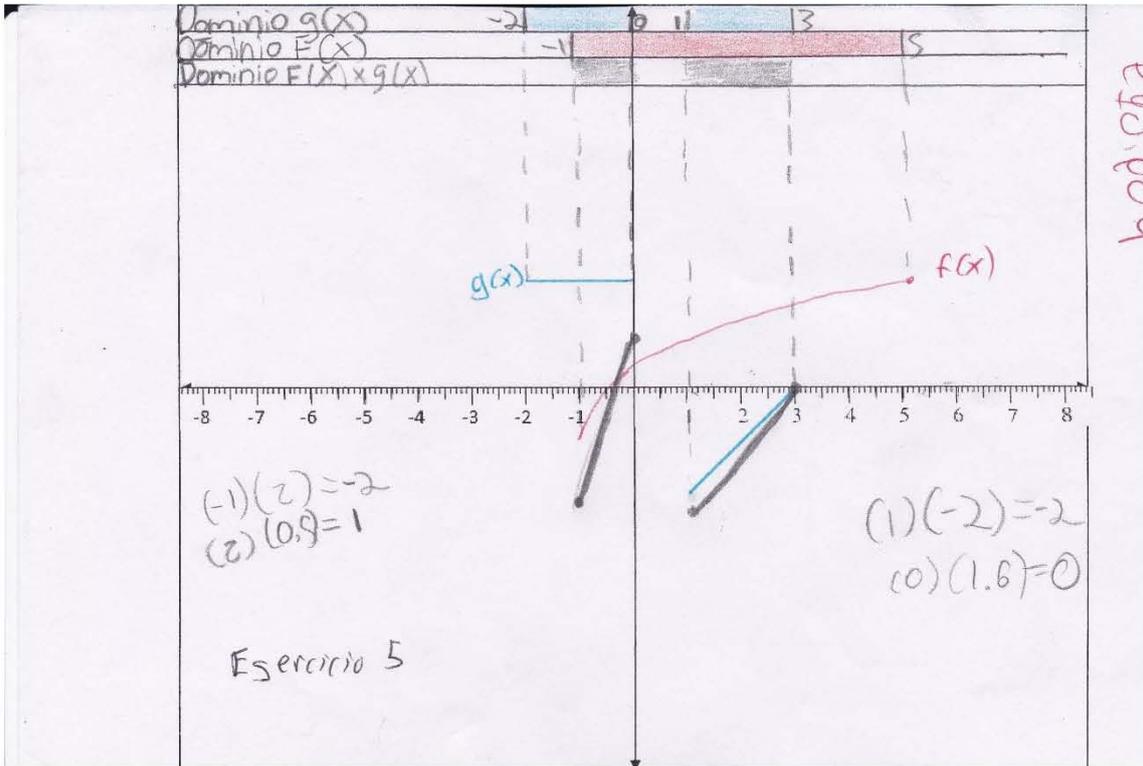
Ejercicio 8. Una vez que tengas el material de apoyo contesta lo siguiente:

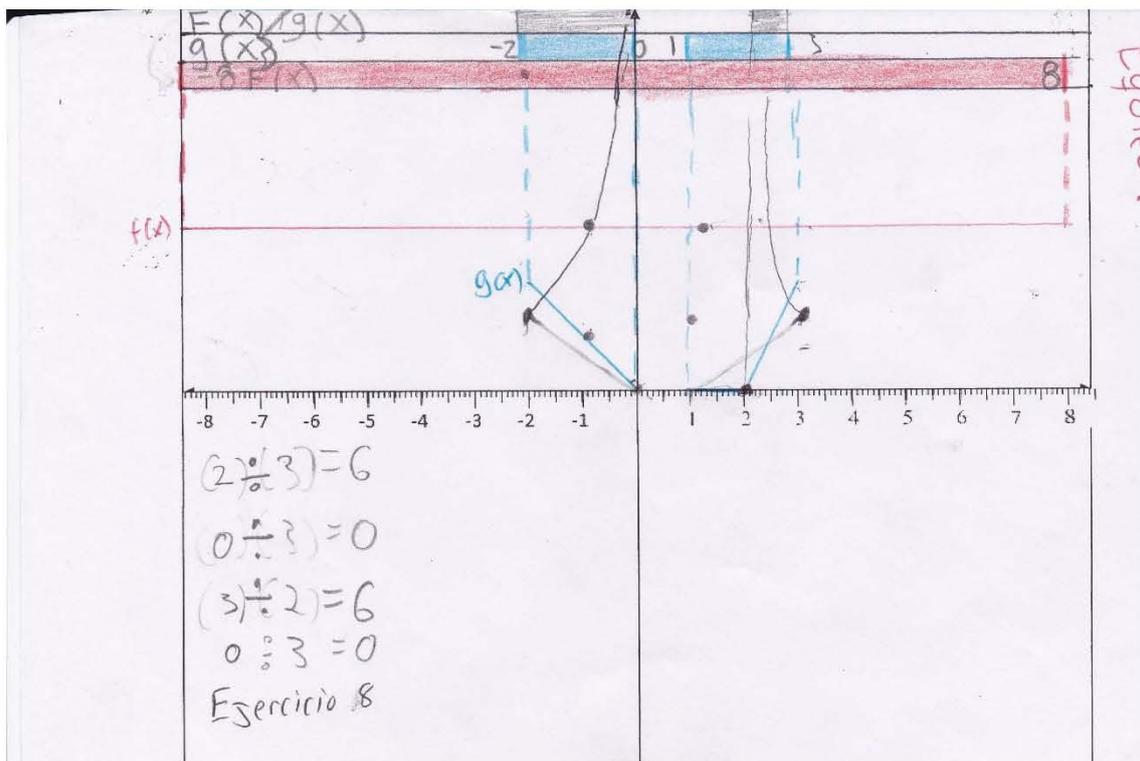
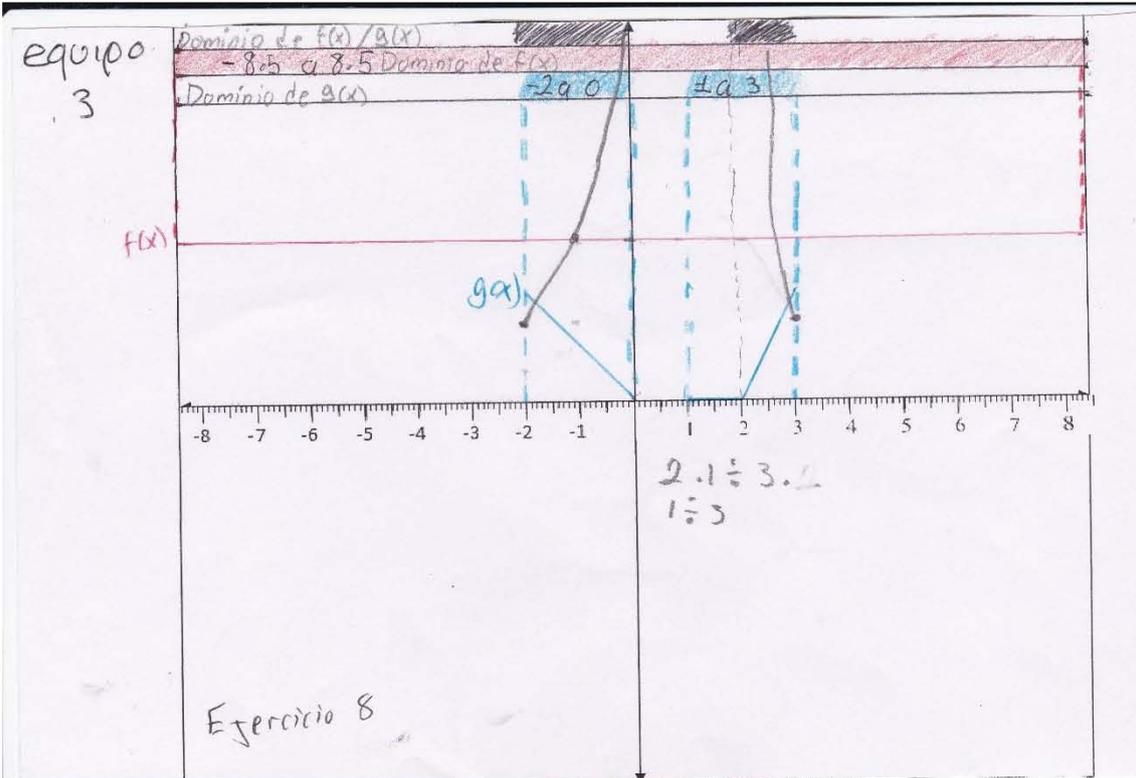
- Sobre el material traza la gráfica de $\frac{f(x)}{g(x)}$
- ¿Cuál es el dominio de $f(x)$ entre $g(x)$?
- ¿Qué relación encuentran con el dominio de las dos funciones y con el dominio de la división?

-2 a 0 y 2 a 3
Intersección de $f(x)$ con $g(x)$ menos los $g(x) = 0$

Anexo 10







7 Bibliografía

- Ausubel, D. P. (1976). *El aprendizaje por descubrimiento*. México: Trillas.
- Ausubel, D., Novak, J., & Hanesian, H. (1983). *Psicología Educativa. Un punto de vista cognoscitivo*. México: Trillas.
- Barrón Ruiz, A. (1997). *Aprendizaje por descubrimiento: Analisis crítico y reconstrucción teórica*. Salamanca: AMARÚ.
- Barrón Ruiz, A. (1993). Aprendizaje por descubrimiento: principios y aplicaciones inadecuadas. *Enseñanza de las ciencias, Vol. 11*, 3-11.
- Camargo Uribe, Á., & Hederich Martínez, C. (2010). Jerome Bruner: Dos teorías cognitivas, dos formas de significar, dos enfoques para la enseñanza de la ciencia. *Psicogente, 13 (24)*, 329-346.
- Colegio de Bachilleres*. (22 de octubre de 2015). Obtenido de <http://www.cbachilleres.edu.mx/cbportal/index.php/component/content/article/278>
- Cooper, J. (2010). *Estrategias de enseñanza: guía para una mejor instrucción*. México: Limusa.
- Díaz Barriga, F., & Hernández Rojas, G. (1999). *Estrategias Docentes para un Aprendizaje Significativo: Una interpretación constructivista*. México: Mc Graw Hill.
- Eggen Paul, D., & Kauchak Donald, P. (2006). *Estrategias docentes: enseñanza de contenidos curriculares y desarrollo de habilidades de pensamiento*. México: Fondo de Cultómicaura Económica.
- Eisenberg, T. (1992). On the development of a sense for functions. *The Concept of Function: Aspects of Epistemology and Pedagogy* (págs. 153-174). USA: Guershon Harel and Ed Dubinsky.
- Guzmán, J. C. (2003). *Manual para Evaluar los Aprendizajes Escolares*. Ciudad de México: Facultad de Psicología.
- Johnson, D., Johnson, R., & Holubec, E. (1994). *El aprendizaje cooperativo en el aula*. Buenos Aires: Paidós SAICF.
- Lee S., S., & Evan R., K. (1974). *Aprendizaje por descubrimiento: evaluación crítica*. México: Trillas.
- Morine, H., & Morine, G. (1998). *El descubrimiento: un desafío a los profesores*. México: Santillana.
- Spivak, M. (1992). *Calculus*. México: Reverté.

Tall, D., & Bakar, M. (1992). Students' mental prototypes for functions and graphs.
International Journal of Mathematical Education in Science and Technology (págs. 39-50). Taylor & Francis Ltd.

Woolfolk, A. (2010). *Psicología educativa*. México: PERSON EDUCACIÓN.