UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

MAESTRÍA EN DOCENCIA PARA LA EDUCACIÓN MEDIA SUPERIOR

FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES ACATLÁN

EL USO DE LAS REPRESENTACIONES
NO DISCURSIVAS COMO MEDIADOR
EN EL PROCESO DE TRADUCCIÓN
DEL ENUNCIADO DE UN PROBLEMA
VERBAL DE ECUACIONES LINEALES

TESIS

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:

MAESTRO EN DOCENCIA PARA LA EDUCACIÓN MEDIA
SUPERIOR

PRESENTA: TANIA AYARI ZÚÑIGA ALCARAZ

TUTOR

DR. SERGIO CRUZ CONTRERAS

FES ACATLÁN

NAUCALPAN, DICIEMBRE 2015

Índice

CAPÍTULO IV. RESULTADOS Y SU ANÁLISIS

INTRODUCCIÓN

En el presente trabajo se busca averiguar, documentar y caracterizar, desde el enfoque semiótico propuesto por Raymond Duval, la forma en la que los estudiantes del primer semestre de bachillerato, realizan el proceso de traducción del enunciado de un problema verbal de ecuaciones lineales [PVEL], empleando representaciones no discursivas para evidenciar la información que no es explícita en el enunciado del problema, necesaria para el planteamiento de la expresión algebraica correcta que conduzca a su solución.

El interés por desarrollar este trabajo surgió a partir de la importancia que tiene en el aprendizaje de las Matemáticas y de otras disciplinas la traducción del enunciado de cualquier problema que está escrito en el lenguaje natural, al correspondiente modelo matemático que haga factible la solución del problema.

En varias líneas de investigación al respecto, se han reportado una serie de dificultades y errores que exhiben los alumnos en torno al proceso de segmentación del texto del enunciado para la obtención de las unidades que contienen la información relevante a: la selección de la incógnita y la formación de la relación de igualdad en la ecuación; su representación no discursiva mediante el uso de un sistema físico-visual que le permita explicitar lo que el enunciado del problema escrito en lenguaje natural no deja claro en torno a esta información, que es relevante para poder realizar su posterior conversión a las formas simbólico-algebraicas.

También, destaca la importancia de conocer las concepciones de los alumnos en torno a los objetos matemáticos implicados en el problema, que para nuestro estudio son: la variable, la igualdad y la ecuación, porque se pretende que los estudiantes sean capaces de reconocer dichos objetos independientemente de la forma en que estos sean representados.

Este reconocimiento está siempre asociado al significado que el objeto matemático tiene para el alumno.

El presente reporte, está conformado por cuatro capítulos, las conclusiones, el listado de referencias y nueve anexos.

En el primer capítulo se caracteriza y delimita el problema de investigación, se exponen sus antecedentes y se plantean las preguntas que guiaron nuestro trabajo.

El segundo capítulo está conformado por cuatro grandes apartados. En el primero se expone un breve acercamiento de los contenidos matemáticos que involucra un problema verbal de ecuaciones lineales. A nivel conceptual se define el problema desde una perspectiva general y el problema matemático como una tarea escolar, destacando el carácter verbal de los problemas que conducen a ecuaciones lineales en las que están implicados objetos matemáticos específicos: la variable como incógnita, la igualdad y la ecuación. En el segundo apartado se resume la revisión de la literatura en Educación Matemática que involucra investigaciones que incluyen: el definir y caracterizar al PVEL, determinar las características de los objetos matemáticos que implica; determinar las concepciones de ecuación, igualdad y variable que con mayor frecuencia exhiben los escolares; conocer las dificultades, los errores y los obstáculos que más frecuentemente muestran los alumnos en la traducción del enunciado de un PVEL dado en lenguaje natural a su ecuación correcta. En la tercera sección de este capítulo se expone brevemente la propuesta de Raymond Duval para el análisis desde un enfoque semiótico del proceso de traducción de un PVEL y el planteamiento de la ecuación que haga factible su solución. En el cuarto apartado se explica el diseño e implementación del ambiente de aprendizaje con base en lo propuesto por Bransford y Brown (1999), en la que se considera que la instrucción debe estar centrada simultáneamente en el estudiante, en los conocimientos, en la comunidad y en la evaluación.

En el tercer capítulo se realiza la caracterización metodológica del presente trabajo desde la perspectiva de la investigación y su vínculo con la didáctica. Se presentan las características de la población estudiada y posteriormente se explican las diferentes etapas consideradas en el diseño del ambiente de aprendizaje, la planeación de cada una de las sesiones de trabajo y el diseño metodológico empleado para la evaluación final de la instrucción. También, se describe el diseño de los instrumentos de enseñanza y evaluación, así como los procedimientos para el análisis y la discusión de los resultados que de ellos derivan.

En el cuarto y último capítulo se hace una breve descripción de cada una de las sesiones en las que se aplicó la instrucción, se presentan los resultados derivados de la evaluación final de la instrucción, a la par que se hace su discusión para tratar de responder, en la medida de lo posible, las preguntas de investigación planteadas en el primer capítulo en torno a: la segmentación semántica del texto de un PVEL para la selección de la incógnita, la formación de las relaciones entre la incógnita y las cantidades conocidas, la integración de la relación de equivalencia y el uso de las representaciones no discursivas para evidenciar lo que no es claro en el enunciado del texto del PVEL. Finalmente, en este capítulo se establecen las concepciones de los estudiantes respecto a los objetos matemáticos implicados en un PVEL al inicio y después del proceso de instrucción, y las conclusiones obtenidas con base a lo encontrado en el análisis y discusión de los resultados.

CAPÍTULO I.
DELIMITACIÓN DEL PROBLEMA

Introducción

El propósito del presente capítulo es delimitar nuestro problema objeto de estudio, clarificar las causas que lo motivan, resaltar su trascendencia e importancia y plantear una serie de cuestionamientos que orientan el desarrollo del trabajo.

Para poder caracterizar el problema que se estudia en este trabajo, es preciso tomar en cuenta algunos resultados de la investigación en Didáctica de las Matemáticas y, a ello nos avocamos a continuación.

1.1 Antecedentes

1.1.1 A nivel internacional

Los estudios aquí referidos, fueron el punto de partida para ubicar nuestra temática de estudio; tanto a nivel internacional, como a nivel nacional. En primera instancia, mencionaremos los resultados más sobresalientes respecto a las concepciones que los alumnos manifiestan sobre los objetos matemáticos implicados en la estructura de todo PVEL: variable, igualdad y ecuación.

La variable presenta una ambivalencia en cuanto a su significado e interpretación, por parte de los estudiantes, en el proceso de traducción de un PVEL dado en lenguaje natural (Duval, 1999). Esta dualidad en la concepción de la variable, está directamente relacionada a cada etapa del proceso de conversión del enunciado en las formas algebraicas simbólicas (NCTM, 1970; Puig, 1998; Duval, 1999). En la etapa de la segmentación semántica, la variable es vista como una incógnita específica por la mayoría de los alumnos (Usiskin, 1988) debido a que reconocen e identifican en el contenido cognitivo del enunciado del PVEL, la existencia de algo desconocido que no se puede determinar.

En este caso, interpretan el significado de la variable como una cantidad desconocida o número generalizado (Küchemann, 1981; Usiskin, 1988; Ursini, 1990; Kieran, 1981; Duval, 1999).

En el salto hacia el cambio de registro del lenguaje natural al simbólico algebraico, la variable se representa mediante una literal (Küchemann, 1981; Usiskin, 1988; Ursini, 1990), que permite que la igualdad sea verdadera, al momento de realizar los tratamientos entre las operaciones aritméticas y/o algebraicas necesarias para sustituir el valor de la incógnita (Küchemann, 1981; Kieran, 1981; Duval, 1999). Lo anterior evidencia, el carácter ambivalente en la concepción de variable asociada a la traducción de un PVEL, en la que es fundamental que el alumno comprenda su significado y lo identifique con parte del contenido cognitivo del enunciado.

La falta de comprensión de esta dualidad por parte de los alumnos, constituye una dificultad en la traducción del enunciado del PVEL, por dos razones: en primer lugar, necesitan entender que las frases del enunciado que describen la cantidad desconocida, semánticamente se refieren a la generalidad de un número, entendida como incógnita, que debe representarse simbólicamente con una literal. En segundo lugar, que esta incógnita forma parte de una relación de igualdad algebraica o ecuación, en la que al momento de solucionarla satisface un valor o número específico (Puig, 1998; Duval, 1999). Cuando el alumno tiene cierto grado de dominio en el proceso de traducción de un PVEL, las acepciones de la variable como número generalizado se amplían porque comprenden que representa un objeto matemático, con carácter ambivalente (Puig, 1998; NCTM, 1970; Duval, 1999, 2006).

Respecto a las concepciones, entorno a la igualdad, que exteriorizan los estudiantes, destaca la sinonimia que manejan entre la noción de igualdad y relación de equivalencia (Kieran, 1981, 1989; Paralea, 1998).

Sin embargo, esta concepción es errónea, debido a que la igualdad aritmética, se centra en las propiedades de reciprocidad, identidad y transitividad concretas de los de números (Kieran y Herscovics, 1980; Goodfrey y Thomas, 2003).

El símbolo de igualdad en las identidades aritméticas implica, para los estudiantes, la señal de hacer *algo*, como realizar una operación o dar un resultado (Kieran 1981; Kieran y Filloy, 1989). Además, la igualdad, en su carácter aritmético, requiere de la clausura de las expresiones numéricas que la forman (Falkner y Levi, 1999).

Por el contrario, la igualdad algebraica emplea las mismas propiedades de la identidad aritmética, pero en un sentido más amplio, porque estas son aplicadas a expresiones algebraicas, que son flexibles, lo que da la posibilidad de generar equivalencias; es decir, expresiones con el mismo significado semántico, pero diferente representación simbólica (Goodfrey y Thomas, 2003). En este contexto, surge la noción de variable como número generalizado o incógnita, adjudicándole a la igualdad algebraica su carácter equivalente (Ursini, 1990) del que deriva la noción de ecuación, en la que el símbolo de igualdad indica la existencia de dos expresiones algebraicas semejantes, una en cada lado de la ecuación (Kieran, 1980, 1981; Kieran y Filloy, 1989; Duval, 1999; Paralea, 1998; Godfrey y Thomas, 2003).

En lo que respecta al proceso de traducción de los PVEL, el National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], desde 1970, destaca la necesidad de que los alumnos aprendan a plantear y resolver problemas verbales, “que están escritos o formulados en proposiciones en español, mediante la práctica continua, el estudio de estos problemas debe estar orientado a atender al proceso empleado para la traducción matemática del problema verbal en una proposición matemática: ecuación.” (p. 15).

Por su parte Puig (1998), señala que el proceso de traducción del texto del enunciado un PVEL a una ecuación, es similar a la traducción entre dos idiomas diferentes, por lo que resulta fundamental que el alumno tenga un buen nivel en el dominio de ambos lenguajes. En el caso de los PVEL, el alumno debe dominar la lengua castellana, en cuanto a sus componentes semánticos y sintácticos; al mismo tiempo, debe conocer el lenguaje matemático implicado en lo que se refiere a: las cantidades, sus operaciones y relaciones.

El autor anterior señala tres tipos de dificultades implicadas en el proceso de traducción de un PVEL: al analizar el enunciado y determinar las cantidades a considerar para resolver el problema y las relaciones que de ellas derivan; las inherentes a la conversión del enunciado, específicamente, cuando el texto del problema no menciona todas las cantidades y, las que surgen al momento de la escritura de la ecuación, al igualar dos expresiones que no representen la misma cantidad.

Puig (1998), sugiere el uso de las representaciones geométricas y matriciales; como elementos auxiliares, para subsanar las dificultades descritas en el párrafo anterior. Por su parte, Paralea y Socas (1995), en un estudio acerca del carácter aritmético y/o algebraico de los PVEL, indican que están “dados en un sistema de representación verbal-sintáctico y su comprensión parte de una lectura adecuada, que exige toda una serie de habilidades lingüísticas.” (p. 29-30).

Los autores explican que la principal dificultad para los estudiantes, en el proceso de traducción, reside en el procesamiento de la información del enunciado del problema dado en lenguaje natural y su cambio al registro algebraico. Para superar tal dificultad, proponen el empleo de un “sistema de representación físico-visual que contiene diferentes subsistemas de representación: física, icónica, geométrica y diagramática” (p. 31).

Adicionalmente, señalan que la ausencia de una adecuada representación del problema constituye una dificultad para los alumnos, porque la representación intermedia tiene un carácter semántico, debido a que se refiere al contenido cognitivo, que está directamente relacionado con el reconocimiento y significado de los objetos matemáticos implicados.

En una investigación centrada en el estudio de las competencias algebraicas (2008), Filloy, Puig y Rojano, analizan la traducción de un PVEL desde una perspectiva lingüística, histórica y semiótica.

En su estudio, los autores anteriores destacan que el alumno debe tener competencia en el manejo de los elementos lingüísticos, para poder comprender lo que las proposiciones del enunciado del PVEL describen. A la par, necesitan haber desarrollado la competencia en la resolución de problemas.

Los investigadores, emplean el análisis del método cartesiano para la traducción de un PVEL. Al respecto, indican que la lectura analítica del enunciado del problema, involucra la competencia lingüística de los estudiantes que se despliega al discriminar la información evidente de la que no lo es, destacándose la que "tiene que ver con cantidades y relaciones de las que habla la historia del problema." (Filloy, Puig y Rojano, 2008, p. 330).

También, coinciden con lo propuesto por Duval (2006), en cuanto a la idea de la descomposición semántica del texto del enunciado, para convertirlo en un nuevo texto o forma no discursiva.

1.1.2 A nivel nacional

En primera instancia cabe aclarar que el presente estudio se llevó acabo con un grupo de estudiantes de primer semestre de bachillerato del Colegio de Ciencias y Humanidades [CCH], entidad perteneciente a la Universidad Nacional Autónoma de México [UNAM]. En consecuencia, incluimos como parte de los antecedentes de este estudio, los que destacan diversos documentos publicados por la UNAM y el CCH, en torno a la temática de los PVEL.

El primer documento que se revisó, fue el Programa de Estudios para el curso de Matemáticas I del CCH, que es donde aparecen los PVEL.

Entre sus contenidos temáticos, el Programa establece el estudio de las ecuaciones lineales con una incógnita, a través de la resolución de problemas verbales; mediante estrategias heurísticas que se apoyen en el uso de diagramas, para representar problemas específicos (CCH, 1996).

En cuanto a la traducción de los PVEL, el Programa indica que el alumno debe desarrollar la capacidad de "Interpreta[r] la expresión verbal o escrita de un problema y expresa[r] la relación entre datos e incógnita por medio de la ecuación lineal correspondiente." (CCH, 1996, p. 23).

En el año 2010, se inició una revisión del Plan y Programa de Estudios del CCH, con miras a su actualización. Como producto de esta revisión, se han realizado diferentes estudios diagnósticos de todas las áreas con el fin de determinar las condiciones académicas y curriculares del CCH.

En lo referente al primer curso de Matemáticas, destacan los siguientes resultados:

a. Las estadísticas de los índices de acreditación de la asignatura de Matemáticas I de las generaciones 2008 a 2012, presentan un rango de aprobación de entre el 73% a 74% (CCH, 2012a), lo que indica que aproximadamente una cuarta parte de la población que ingresa no acredita la asignatura.

b. Los resultados del Examen Diagnóstico de Ingreso [EDI] para Matemáticas I de la generación 2009 del CCH, muestran 30 % de aciertos en la temática de solución de ecuaciones de primer grado con una y dos incógnitas (CCH, 2012b).

c. En el Examen de Diagnóstico Académico [EDA] que se aplicó en el año 2011, se obtuvo un 43 % de aciertos en la resolución de ecuaciones lineales con una incógnita, asociando esta temática con un nivel de dificultad de comprensión, en el análisis de la relación existente entre el concepto de variable y el modelo algebraico que origina una ecuación lineal (CCH, 2012c).

Lo anterior, reveló la necesidad de hacer una revisión de los materiales escritos de bachillerato que contienen la temática de solución de problemas de ecuaciones lineales, publicados en diferentes espacios virtuales de la UNAM, incluyendo los del Portal Académico del CCH. Los resultados de la revisión realizada se ubican en los Anexo 1.

Como resultado de la revisión se encontró que en un portal no se da acceso a todo el público (UNAM, 2006), otro no contiene la temática analizada (UNAM-CUAED, 2011), en uno más no se aborda (UNAM-CCH, 2013) y en los que la contienen, se estudia con poca profundidad (UNAM-Media Campus, 2010; UNAM-NEWTON, 2008).

Se revisaron las guías para exámenes extraordinarios [Ver Anexo 1] impresas de los planteles que integran el CCH. En las guía del CCH Azcapotzalco (Mendoza y Moreno, 2013), CCH Vallejo (Bautista y Flores, 2013) y CCH Naucalpan (García y Landa, 2013) se presenta una metodología general para la solución de los problemas de ecuaciones lineales, en la que no se trabaja el desarrollo de los procesos cognitivos relacionados a la traducción de los enunciados de los PVEL dados en lenguaje natural a las correspondientes ecuaciones que conduzcan a su solución.

En la guías del plantel Sur (Becerril y Castro, 2006), la metodología aborda en forma más detallada el aspecto de la traducción. El material del plantel Oriente (Olguín y Popoca, 2012) contiene varias estrategias, orientadas a profundizar en el desarrollo de los procesos cognitivos asociados a la traducción un PVEL del lenguaje cotidiano a la correspondiente ecuación.

Para averiguar el nivel de manejo del lenguaje algebraico que los alumnos del CCH tienen en relación a la traducción del enunciado PVEL, a la expresión algebraica que puede conducir a su solución, se aplicó un estudio exploratorio a un grupo de 40 alumnos del CCH plantel Naucalpan. El instrumento diseñado [Ver Anexo 2], contiene tres PVEL tomados de tres de las guías para preparación de exámenes extraordinarios revisadas.

1.1.3 Estudio exploratorio

Los resultados del estudio exploratorio se analizaron mediante la técnica de análisis de contenido (Bermúdez, 1986), en la que se elaboró una categorización de las expresiones matemáticas escritas por los alumnos para cada enunciado. Las dos grandes categorías encontradas obedecen al tipo de expresión que puede ser: algebraica o aritmética.

El enunciado del primer problema presentado es: “La suma de dos números consecutivos es 51. Encontrar los dos números.” (García y Landa, 2013, p. 53). Se trata de un problema de contenido puramente matemático, de carácter aditivo. El alumno debe manejar el concepto de números consecutivos para poder establecer la ecuación correcta.

La frase que describe la cantidad desconocida en el enunciado del problema es “dos números consecutivos…” (García y Landa, 2013, p. 53), por lo que los estudiantes necesitan emplear tratamientos discursivos, para parafrasear en el lenguaje natural la expresión. Posteriormente, deben aplicar el concepto de números consecutivos, para segmentar el texto, e identificar que puede haber dos posibilidades de relación de la incógnita con la operación matemática necesaria para formar la ecuación. Estas dos alternativas se pueden enunciar como: *el primer número más el segundo número o el segundo número menos el primer número*.

Las expresiones simbólico-algebraicas, derivadas de la conversión de estas dos proposiciones discursivas, son: $x + (x+1)$ o $(x-1) + x$. El verbo que describe la relación de igualdad, corresponde a la palabra “es…” (García y Landa, 2013, p. 53). Las dos posibilidades de escritura de las ecuaciones correctas son: $x + (x+1) = 51$ o $(x-1) + x = 51$.

El 72.5 % de los estudiantes emplean procedimientos puramente algebraicos, para el planteamiento de la ecuación para el primer problema. El 22.5 % de los alumnos que llegaron a plantear la primera ecuación, que es escrita en el mismo orden en el que es leído el enunciado del problema, es decir, de izquierda a derecha. El 12 % de los alumnos intentan plantear el problema como un sistema de ecuaciones, empleando una sola ecuación del tipo: $a + b = 51$.

El 20.5 % lo plantea como un correcto sistema de ecuaciones, empleando expresiones como: $x + y = 51$, $y = x - 51$. El 7.5 % de los estudiantes elaboró una ecuación incorrecta como: $2x = 51$ y el resto de los estudiantes emplearon ecuaciones, también incorrectas como: $x + 1x + 2 = 51$ y $x1 + x2 = 51$.

El 25 % de los alumnos emplean procedimientos aritméticos para resolver el problema, que incluyen métodos de tanteo o aproximación. Las identidades aritméticas propuestas por los estudiantes son del tipo: $25 + 26 = 51$, $23 + 28 = 51$ y $\frac{50}{2} = 25.5$. Solamente un alumno no respondió este problema [2.5 %].

El segundo problema es una variante del problema número 78 de la guía de examen extraordinario del CCH Naucalpan. El enunciado del problema es: "El número de hombres en un club es 10 más que el número de mujeres. Si hay 30 hombres. ¿Cuántas personas hay entre hombre y mujeres en el club?" (García y Landa, 2013, p. 54). Este PVEL, se centra en la temática de proporciones y es de carácter aditivo.

La cantidad desconocida que puede asociarse a la incógnita corresponde a la frase "el número de mujeres" (García y Landa, 2013, p.54), que conduciría a plantear la relación de esta cantidad con la proporción que describe la frase "el número de hombres… es más… que el número de mujeres" (García y Landa, 2013, p.54).

En este caso, la segmentación y tratamiento discursivo del texto del enunciado del problema es forzoso, porque se requiere que el estudiante identifique el contenido cognitivo del problema en cada una de estas unidades significantes y que realice una serie de tratamientos discursivos sobre ellas, para poder sustituir estas expresiones por otras, de tal forma que las pueda reordenar, para que adquieran el sentido que necesitan para ser trasladadas a las formas simbólico-algebraicas.

El planteamiento inverso es el que considera *la proporción de hombres como la incógnita del problema*. La relación implicaría la sustracción de la proporción de mujeres, pero el proceso de segmentación y tratamiento sería más complicado.

La relación de igualdad debe formarse tomando en consideración la totalidad del enunciado; es decir, tras la segmentación y resignificación de los componentes del contenido cognitivo, será necesario establecer la relación entre la incógnita con respecto a la cantidad total de hombres en el club, que es de 30 individuos y con la pregunta: "¿Cuántas personas hay entre hombre y mujeres en el club?" (García y Landa, 2013, p.54). Así, las ecuaciones correctas del problema son: $x + 10 = 30$ o $x = 30 - 10$.

El 60 % de los estudiantes emplean procedimientos del tipo algebraico para plantear la ecuación de este PVEL. El 20 % encuentra la primera ecuación, el 10 % la segunda. Otro 10 % lo plantea como un sistema de ecuaciones y el resto de los estudiantes, correspondiente a un 20 %, plantea formas incorrectas como: $30 + 10 + n = 50$ y $10\ x + y$.

El 15 % de los estudiantes usan un procedimiento aritmético, obteniendo identidades como: $30 - 10 = 20$ y $20 + 20 = 10$. El 25 % de los alumnos no contestaron el problema.

El último problema del estudio exploratorio, tiene el siguiente enunciado: "Una niña se ha comido 120 uvas en 5 días, de tal forma que cada día comía 5 uvas más que el día anterior. ¿Cuántas uvas se comió el primer día?" (Olguín y Popoca, 2012, p. 100). Es un problema de estados, porque presenta una variación, de carácter aditivo, con respecto al tiempo. El concepto fundamental para poder plantearlo correctamente, involucra la noción de una fracción inicial que se va acumulando en el trascurso del tiempo con respecto a la cantidad total.

Este es un problema que precisa la segmentación semántica y de una serie de tratamientos no discursivos para el correcto planteamiento de la ecuación, debido a que el enunciado no permite evidenciar toda la información que transparente las relaciones entre la cantidad desconocida o incógnita que sería *el número de uvas que comió el primer día la niña* y las cantidades conocidas.

Las relaciones entre la incógnita y las cantidades conocidas, son secuenciales a la cantidad inicial de uvas que comió el primer día con incremento de 5 unidades por día, porque como dice el enunciado "cada día comía 5 uvas más que el día anterior…" (Olguín y Popoca, 2012, p. 100), de tal forma que conducen a su conversión en las formas simbólicas: $x + (x+5) + (x+10) + (x+15) + (x+20)$.

La relación de igualdad está dada al inicio del enunciado con el total de 120 uvas, mediado por el verbo "es…" (Olguín y Popoca, 2012, p. 100), esta es una información fácilmente perceptible para los estudiantes.

La ecuación correcta es: $x + (x+5) + (x+10) + (x+15) + (x+20) = 120$.

El 55 % de los alumnos aplicó un procedimiento algebraico para plantear la ecuación de este PVEL. El 12.5 % de los estudiante plantearon la ecuación correcta mencionada anteriormente. El 25 % generó la ecuación: $x + 5 = 24$. El 5 % planteó una expresión algebraica que involucra la operación de multiplicación de los días por el número de uvas que se comió el segundo día, esto es un reflejo del intento por denotar la acumulación que implica el problema, la ecuación escrita en este caso es: $(x+5)\,5 = 120$. El 12. 5 % de los estudiantes planteó formas incorrectas que reflejan únicamente el carácter aditivo del problema, pero no el acumulativo.

Los procedimientos aritméticos fueron usados por el 20 % de los alumnos, la identidad aritmética que con mayor frecuencia generaron los estudiantes fue del tipo: $120 \div 5 = 24$ y $\frac{120}{5} + 5$. El 25 % de los estudiantes no respondió el problema.

En las siguientes páginas se expone la delimitación del problema de estudio y una serie de preguntas de indagación que orientaron el desarrollo del presente trabajo.

1.2 El problema

1.2.1 Delimitación del problema

> ¿En qué forma y medida, una instrucción basada en el uso de representaciones no discursivas del tipo geométrico, gráfico y matricial, permite evidenciarle, a los alumnos que cursan el primer semestre del bachillerato, la información que no es explícita en el enunciado de un problema verbal de ecuaciones lineales, en torno a la selección de la incógnita y el establecimiento de las relaciones de equivalencia, necesarias para la traducción y conversión del enunciado del problema en la ecuación correcta que haga factible su solución?

Con el propósito de intentar contestar el problema anterior, se plantean las siguientes preguntas que guían este trabajo.

1.2.2 Preguntas de indagación

Los cuestionamientos planteados a continuación, constituyen las orientaciones que guían el desarrollo del presente trabajo.

Estas preguntas derivaron de lo expuesto en las secciones anteriores de este Capítulo y se buscará darles respuestas al finalizar el trabajo a partir de los resultados encontrados.

Las interrogantes clave de nuestro trabajo son:

1. ¿En qué medida los alumnos realizan la segmentación semántica del enunciado de un PVEL en las unidades significantes que asocian el contenido cognitivo que relaciona: la cantidad desconocida, las operaciones necesarias para la formación de la ecuación y la relación de equivalencia?

2. ¿En qué formas simbólicas el alumno es capaz de explicitar el contenido cognitivo que describe la unidad significante asociada a: la cantidad desconocida, las relaciones entre esta con las cantidades conocidas y la relación de equivalencia?

3. ¿En qué medida y cuáles son los tratamientos discursivos que los alumnos emplean con mayor frecuencia para realizar la sustitución de las unidades significantes del enunciado de un PVEL asociada a: la cantidad desconocida, sus relaciones con respecto a las cantidades conocidas y la relación de equivalencia?

4. ¿En qué proporción y cuáles son las formas en las que los alumnos pueden reconocer las diferentes posibilidades de selección de la incógnita, de tal manera que encuentre la que le proporciona una economía de tratamientos?

5. ¿En qué medida y de que forma el uso de las representaciones no discursivas es suficiente para que los alumnos puedan reconocer la información que no es evidente el enunciado del texto de un PVEL?

6. ¿Qué tipo y cuáles son las características de representaciones no discursivas que emplean los estudiantes, con mayor frecuencia como mediadores en el proceso de traducción de un PVEL?

7. ¿En qué medida y de qué forma, el trabajo en grupo pequeño puede mejorar la traducción de un PVEL?

8. ¿En qué aspectos cambian o se modifican, las concepciones de los estudiantes en torno a los objetos matemáticos implicados en un PVEL?

9. ¿En qué medida, el ambiente de aprendizaje, diseñado e implementado en el salón de clases, favoreció la conversión, de un problema sobre ecuaciones lineales de primer grado, planteado en lenguaje natural, al lenguaje propio del Álgebra?

Con la finalidad de contestar las preguntas anteriores, se diseñó un ambiente de aprendizaje que se llevó a la práctica, y en la novena sesión, de un total de doce, se aplicó una prueba de desarrollo escrito que al analizarla, a la luz de los referentes teóricos elegidos, proporcionó elementos para tener una aproximación de respuestas a las preguntas de indagación.

CAPÍTULO II.
REVISIÓN DE LA LITERATURA

Introducción

Este capítulo se divide en cuatro apartados. En la primera sección se abordan los contenidos matemáticos implicados en un PVEL, específicamente los referentes al concepto de problema en forma general y de problema matemático en su carácter particular como tarea escolar. También, se revisa en esta sección el carácter verbal de los problemas matemáticos, en particular los que conducen a ecuaciones lineales. La segunda parte del capítulo se dedica a la didáctica de los PVEL. Dado que el presente trabajo se diseñó para aplicarse con un grupo de primer semestre de bachillerato de CCH, incluimos las características generales del modelo educativo del CCH y su Plan de Estudios. Por otro lado, en este apartado se presenta la revisión de la literatura en Educación Matemática a nivel internacional referente a: los objetos matemáticos implicados en los PVEL que son la variable y la igualdad, así como, las concepciones que los estudiantes tienen en torno a estos objetos. También se presenta un breve recorrido por las investigaciones realizadas en torno al proceso traducción del enunciado de un PVEL y las dificultades, obstáculos y errores que exhiben los escolares en ese proceso. En la tercera sección se aborda la propuesta de la semiótica de Raymond Duval enfocada a la traducción del texto del enunciado de un PVEL escrito en lenguaje natural en la ecuación que puede conducir a su correspondiente solución. En esta perspectiva se revisan los conceptos relativos a las representaciones semióticas, las operaciones de conversión y tratamiento entre los registros de representación y los criterios de congruencia entre representaciones semióticas. En particular se abordan los aspectos más relevantes en relación a la comprensión de textos como un elemento indispensable para que los estudiantes puedan realizar la conversión del texto del enunciado de un PVEL del lenguaje natural a su ecuación algebraica, empleando algún tipo de representación no discursiva como mediador en la comprensión de la información que no es evidente en el enunciado descrito en lenguaje natural. La cuarta sección contiene las generalidades en el diseño del ambiente de aprendizaje tomando como base la propuesta de Bransford y Brown.

2.1 Contenidos matemáticos implicados en un PVEL

2.1.1 Concepto de problema

El problema, visto como un componente esencial en la construcción del conocimiento (Kieran, 1989; Frege, 1996; Duval, 1999; Puig, 2006; Godino y Batanero, 2009) propicia el planteamiento de cuestionamientos respecto a ¿Qué elementos lo integran? y ¿Cómo se caracteriza?.

Para intentar dar respuestas a estos cuestionamientos, partiremos de analizar las definiciones de problema aportadas por diferentes autores, en la perspectiva de la Psicología y la Educación Matemática, para posteriormente generar una definición local.

La palabra problema, en su componente etimológico, proviene del vocablo latino *problēma,* y del griego πρόβλημα. El diccionario de la Real Academia de la Lengua Española lo define como:

> **1.** m. Cuestión que se trata de aclarar.
>
> **2.** m. Proposición o dificultad de solución dudosa.
>
> **3.** m. Conjunto de hechos o circunstancias que dificultan la consecución de algún fin.
>
> **4.** m. Planteamiento de una situación cuya respuesta desconocida debe obtenerse a través de métodos científicos. (Diccionario de la Lengua Española, 2012, 23ª edición, versión electrónica).

En la perspectiva de Resnick y Glaser el problema se centra en “una situación en la que un sujeto[,] debe ejecutar una tarea con la que no ha tenido un contacto previo y para la [cual] las instrucciones dadas… no especifican completamente el modo de solución” (1976, pág. 208).

En palabras de H.A. Simon, “Un ser humano se enfrenta a un problema cuando intenta una tarea pero no puede llevarla a cabo [,] tiene algún criterio para determinar cuando la tarea ha sido completada satisfactoriamente” (1978, p. 198).

Para Greeno, “se presenta un problema cuando la respuesta que es necesaria para conseguir una meta es menos fuerte que otras respuestas, o cuando se requieren varias respuestas y es poco probable que todas ellas puedan ser ejecutadas” (1978, pág. 239).

En la perspectiva de Mazario y Sanz, el problema “es una situación o dificultad prevista o espontánea, con algunos elementos desconocidos para el sujeto, pero capaz de provocar la realización de acciones sucesivas para darle solución” (2009, p. 13).

En estas primeras definiciones, la noción de problema consiste en un cuestionamiento dado, una tarea o una situación desconocida para el sujeto que debe resolverla; para lo que necesita contar con los conocimientos fundamentales para llegar a una solución.

Para Polya, resulta preponderante el carácter temporal que ofrece la noción de problema “nuestra concepción del problema será probablemente incompleta al empezar a trabajar; nuestra visión será diferente cuando hayamos avanzado un poco y cambiará nuevamente cuando estemos a punto de lograr la solución” (1945, p. 28).

También, Mason hace referencia a esta característica dialéctica de los problemas de acuerdo a los estadios en la resolución, al argumentar que “un problema es largo y complicado.” (1982, p. 29), por lo que es necesario analizar su contenido, para poder descomponerlo y reconstruirlo, como un camino para resolverlo.

R. E. Mayer propone que "1) el problema está actualmente en un cierto estado, pero 2) se desea que esté en otro estado, y 3) no hay una manera obvia y directa de realizar el cambio" (1983, pág. 5).

En palabras de Ruesga y Sigaterra el problema se caracteriza de acuerdo a rasgos específicos*, "*debe existir una situación inicial y una final, en la que el paso de una a otra sea desconocida o cuya solución no sea inmediatamente accesible y que el resolutor posea los elementos necesarios para poder darle una solución" (2004, p. 79).

Para el NCTM, "Un verdadero problema… puede definirse como una situación que es nueva para el individuo a quien se pide resolverlo." (NCTM, 1970 p.11).

Tomando en consideración, los atributos y características vertidos en estas definiciones aportadas por varios autores; concluimos que el problema, visto en forma general, es un cuestionamiento que corresponde a una situación desconocida para el sujeto.

La novedad característica de esta situación, motiva al resolutor a intentar dar una respuesta a la pregunta planteada, con lo que dilucida una serie de posibles estrategias para su resolución, mediante la aplicación de los conocimientos con los que cuenta.

Es importante, resaltar que la resolución de problemas, es una competencia de carácter práctico, que un individuo puede desarrollar, en la medida que trabaje en la solución de diversos tipos de problemas.

2.1.2 Concepto de problema matemático

Una vez que hemos definido lo que es un problema en forma general, es necesario particularizar, elaborando una definición local para el problema matemático, en su carácter puramente disciplinario y en el contexto escolar. El problema, en la acepción matemática, se asocia a la idea propuesta por Pappus con su significado geométrico, en la que el término problema se usa como "*una indagación en la que se plantea (probálletai) hacer o construir algo, y el término teorema en el sentido de una indagación en la que investigan (theoreítai)*" (Thomas, 1941, p. 567 citado por Puig, 1998, p. 26). Esta concepción del problema matemático es compartida por Polya. En 1945, propone una división de los problemas matemáticos: problemas por resolver, cuya meta es develar un objeto determinado [incógnita] y los problemas por demostrar en los que se pretende generar una conclusión, entorno a la certeza o falsedad de una proposición, mediante la demostración.

En este sentido, una característica esencial a todo problema matemático es el efectuar una acción [sea la resolución o la demostración] sobre los objetos matemáticos contenidos en el problema (Puig, 1998); en esta acción, está embebida la noción de procedimiento, entendida como la serie de pasos producto del razonamiento (Kieran,1989; Paralea, 1998; Duval, 1999; NCTM, 2000; Godino y Batanero, 2009) y argumentación (Puig, 1998), que el sujeto emplea y con el que pretende resolver, probar o refutar el cuestionamiento planteado en el problema. La acción sobre los objetos matemáticos corresponde en el sentido general, al concepto de matematización (Duval, 1999; Freudenthal, 1991).

Para Díaz y Poblete, (2001, p.35), el problema matemático, "supone una referencia a cierta situación… a un contexto en donde se trata algunos objetos así como de relaciones y operaciones haciendo intervenir estos objetos. La situación evocada puede ser de naturaleza material, abstracta o de las dos a la vez".

Partiendo de esta tipificación de los problemas matemáticos, es posible, elaborar una definición local. El problema matemático es una pregunta, que corresponde a una situación desconocida, planteada a un sujeto, que moviliza los conocimientos que posee con respecto a los objetos matemáticos relacionados en el enunciado del problema, para intentar darle respuesta y solución, al ejecutar una serie de acciones sobre esos objetos. Tomando en consideración lo planteado por Díaz y Poblete, podemos emplear en forma equivalente los términos problema matemático y problema de contexto matemático.

2.1.2.1 El problema matemático como tarea escolar

El problema matemático visto como una tarea en el ámbito escolar, se sustenta en la relación existente entre la tarea y los efectos que causa en el estudiante que lo resolverá, en términos de ganancia de conocimientos (Cadwell y Goldwin, 1987). En este orden de ideas, citaremos lo que los autores opinan al respecto.

En palabras de Lester, el problema matemático visto como tarea se refiere a "una situación en la que se pide a un individuo realizar una tarea para la que no tiene un algoritmo fácilmente accesible que determine completamente el método de solución" (1980, p. 287).

Para Schoenfeld "La palabra problema se usa… como una tarea difícil para el resolutor que trata de resolverlo. Más aún, esa dificultad es un conflicto intelectual" (1985, p. 74).

Para Díaz y Poblete, es "una situación en donde el alumno intenta responder a una pregunta hecha o… una tarea determinada, a la vista de su experiencia y con informaciones que le son proporcionadas… además les es necesario buscar un medio para responder a la pregunta" (2001, p. 3).

Finalmente, para Puig, “un problema escolar en Matemáticas es una tarea de contenido matemático, cuyo enunciado es significativo para el alumno al que se ha plateado, que éste desea abordar y para la cual no ha producido sentido.” (1998, p. 30)

Todos los autores coinciden, en que el problema matemático visto como tarea escolar, consiste en una pregunta de carácter desconocido; en la que el alumno no cuenta con un algoritmo para su solución inmediata, lo que lo coloca en un conflicto cognitivo, al enfrentar una situación nueva que tiene cierto grado de dificultad, en la que empleando su experiencia y conocimientos accede a la posible solución, en el momento en que encuentra un sentido (Puig, 1998; Duval, 1999) y un significado (Godino y Batanero, 2009) entre estos, en relación con la información que el enunciado le proporciona.

En estos términos, los problemas matemáticos empleados como tareas se pueden clasificar de acuerdo a diferentes criterios.

En función del procedimiento para su solución los problemas (Butts, 1980) se pueden dividir en: ejercicios de reconocimiento en los que el alumno emplea la memoria para encontrar la solución inmediata; en los ejercicios algorítmicos el alumno dispone de un procedimiento previamente estudiado para su solución inmediata [automatización o mecanización]; problemas de aplicación cuando el resolutor ejecute un procedimiento en el que tenga que argumentar los pasos para su solución; problemas de búsqueda en los que el estudiante debe crear o generar el procedimiento para la solución; las situaciones problemáticas corresponden a condiciones que en el enunciado del problema no han quedado claras y el alumno debe buscar y determinar la pregunta y el procedimiento para solucionarlo.

En este contexto, Killpatric y Rico, definen a los algoritmos como “procesos bien definidos, que determinan o son determinantes, y garantizan una solución” (1998, p. 55)

Esta tipificación, tiene una correspondencia indirecta con la división realizada por Pappus y Polya, porque en los problemas de aplicación o por resolver, es necesarios *hacer algo* y en los problemas de búsqueda y demonstración, se debe *argumentar algo*.

Así, ambas acciones se efectúan sobre un *algo* que son los objetos matemáticos que constituyen el problema. Además, queda clara la línea que establece la diferencia entre el ejercicio matemático y el problema, porque en el ejercicio matemático el alumno tiene acceso a un algoritmo o esquema para darle una solución inmediata (Schoenfeld, 1985; Puig, 1996; Díaz y Poblete, 2001).

En cuanto a la temporalidad y al contexto de aplicación de los problemas, Polya (1945) los divide en: problemas rutinarios, son los que el alumno resuelve en forma cotidiana, porque cuentan con los conocimientos y procedimientos para su solución casi inmediata. En contraste, los problemas no rutinarios, son una total novedad para el alumno, porque nunca se ha enfrentado a una situación de estas características, por lo que precisan un esfuerzo adicional, en cuanto al razonamiento, argumentación y procedimiento para su solución.

En consistencia con lo anterior, Diaz y Poblete proponen una subclasificación de los problemas rutinarios de acuerdo al contexto en que se aplican y son:

> Problemas de contexto real: Si se producen efectivamente en la realidad y compromete al alumno a actuar…
> Problemas en contexto realista: Si es suceptible de producirse realmente. Si se trata de una simulación de la realidad o de una parte de esta…
> Problemas en contexto puramente matemático: Si se hace referencia exclusivamente a objetos matemáticos. (2001, p.5).

En concordancia con esta categorización de problemas matemáticos vistos como tarea, Ruesga, clarifica que

> Los problemas de aplicación son aquellos que reproducen o simulan la realidad o una parte de ésta y que para su solución requieren el uso de herramientas o recursos propiamente matemáticos… Los problemas puramente matemáticos, son aquellos en los que aparecen, de manera explícita, los diferentes objetos matemáticos” (2004, p. 79)

Killpatric y Rico (1998), señalan que los problemas contextualizados “son aquellos problemas situados, en donde los estudiantes pueden mejorar su rendimiento porque el problema tiene algún significado para ellos” (p. 57).

En este trabajo, consideraremos como equivalentes a los problemas de aplicación y los contextualizados, debido a que en ambos casos se busca una reproducción de la realidad o parte de ésta. Así, queda claro que los problemas puramente matemáticos, se refieren a los que engloban a los objetos matemáticos en un sentido único.

En algunas investigaciones se propone una clasificación de los problemas matemáticos [sean contextualizados o puramente matemáticos], vistos como tareas en función de su contenido, los procedimientos y métodos de solución. Existe una amplia discusión al respecto en la literatura matemática, debido a que muchos autores los clasifican en problemas aritméticos (Puig, 1998; Killpatrick y Rico, 1998), algebraicos (Clement, 1982) y geométricos (Duval, 1999, 2006) en el sentido estricto (Ruega, 2004). Sin embargo, otros señalan que es muy delgada la línea que los separa, porque un mismo problema puede ser resuelto por métodos aritméticos, algebraicos o geométricos en forma pura, o combinando elementos de cada uno (Polya, 1945; Puig, 1998; Schoenfeld, 1995; Paralea y Socas, 1995; Paralea, 1998; Filloy y Rojano, 2008).

2.1.3 El carácter verbal de los problemas matemáticos

Los problemas matemáticos vistos como tarea, presentan características específicas, que implican el uso de lenguaje común o natural para describir en forma verbal la situación que involucra la interrogante y la información adicional. En este discurso, se encuentra embebidos los objetos matemáticos con los que el sujeto deberá establecer una relación cuantitativa y cualitativa (Daroczy y Wolska, 2015).

Es de nuestro interés realizar una revisión de los elementos más importantes respecto a las implicaciones que tiene la comprensión de textos aplicada a los problemas matemáticos verbales (Mayer, 1983; Kintsch y Greeno, 1985); específicamente en lo que concierne a la noción de complejidad lingüística, que se puede definir como nivel en el que la redacción de un texto es variado y elaborado (Ellis, 2003). Esta noción tiene una correspondencia directa con el concepto de variación redaccional (Duval, 1999), e integra todos los componentes en un sistema lingüístico: “a partir de las palabras y sus aspectos léxicos y morfológicos, a través de la forma en que estas palabras se pueden combinar en la sintaxis para formar oraciones, a la estructura del texto, y el discurso general”. (Daroczy y Wolska, 2015).

La implicación directa que tiene la complejidad lingüística en los problemas matemáticos verbales, estriba en la codificación del mensaje que proporciona el enunciado del problema dado en lenguaje natural y su puesta en correspondencia con el lenguaje matemático o su simbolización (Duval, 1999).

Los factores que afectan la complejidad lingüística en los problemas verbales son: estructurales y semánticos; los que comprenden la estructura, tienen relación directa con las cuestiones sintácticas del enunciado del problema. Los factores semánticos, son los relacionados al significado de la información proporcionada por las premisas del enunciado (Nesher, 1976; Lepik, 1990).

En el análisis a nivel máximo los factores estructurales implicados, incluyen: longitud de la frase, el número de frases preposicionales, modificadores del participio y la presencia de la voz pasiva (Daroczy y Wolska, 2015).

En la estructura discursiva, el factor estructural determinante es la puesta en correspondencia, de los datos y la interrogante del problema, con respecto a la simbolización de la expresión matemática [aritmética o algebraica] que concierne a lo enunciado en el lenguaje natural (Searle y Lorton 1974).

Los factores semánticos, son determinantes en los problemas matemáticos verbales, debido a que tienen que ver con el significado de lo que plantea el enunciado del problema en lenguaje natural y su relación con el proceso de abstracción de los objetos matemáticos embebidos en el discurso, en la que las señales verbales lingüísticas [las conjunciones, adverbios y los determinantes] son los puntos críticos en la creación de las relaciones entre las diferentes representaciones de los objetos matemáticos y su interpretación (Nesher, 1976).

La existencia de pequeños cambios redaccionales, como el parafraseo pueden inducir modificaciones sustantivas en la interpretación (Ricoeur, 1995; Duval, 1999). En este sentido Daroczy y Wolska, señalan que el enunciado de “un problema puede reformularse, añadiendo pistas verbales que hacen que las relaciones semánticas se modifiquen, de modo que la relación matemática subyacente sea más explícita” (2015, p.1).

Acorde con lo propuesto por esta idea todo cambio en la organización del enunciado del problema, influye en su representación y en las relaciones semánticas [o de objeto] entre los objetos descritos en el problema.

2.1.4 Problemas verbales que conducen a ecuaciones lineales

Los problemas verbales permiten el abordaje de contenidos matemáticos determinados (Faddeyev y Sominskii, 1965), porque constituyen una familia de situaciones que involucran a los conceptos respecto a los objetos matemáticos estudiados que permiten caracterizarlos y generar los procedimientos que conducen a producir formas equivalentes para representarlos. Tal es el caso de los problemas verbales que involucran ecuaciones lineales de primer grado, en el que están implicados los objetos matemáticos de: variable, igualdad y ecuación algebraica (Godino y Batanero, 2009). Como se mencionó anteriormente, estos objetos no aparecen explícitamente en el enunciado del problema, es necesario que el resolutor los identifique en las diferentes formas en las que pueden estar representados (Faddeyev y Sominskii, 1965; Lehmann, 1992, Bello, 1999), es decir, sus formas equivalentes, para lo que debe tener claros los conceptos, características y propiedades que definen estos objetos (Kalnin, 1973; Potápov y Alexándrov, 1980; Baldor, 1997).

En el caso de los problemas verbales de ecuaciones lineales será necesario establecer en primera instancia la definición de ecuación algebraica (Faddeyev y Sominskii, 1965; Kalnin, 1973; Guelfond, 1979; Potápov y Alexándrov, 1980; Uspensky, 2000) en forma general, para posteriormente poder definir a la ecuación lineal (Kalnin, 1973; Potápov y Alexándrov, 1980; Baldor, 1997). Así como, los procedimientos implicados en su planteamiento, solución y comprobación (Faddeyev y Sominskii, 1965; Potápov y Alexándrov, 1980; Rees y Spark, 1981; Fuller, 1981; Lehmann, 1992; Uspensky, 2000).

Los problemas verbales de ecuaciones lineales contienen cantidades desconocidas, conocidas y frases que describen relaciones de equivalencia entre ellas (Faddeyev y Sominskii, 1965; NCTM, 1970; Baldor, 1997; Bello, 1999).

Las cantidades desconocidas deben ser tratadas mediante procedimientos discursivos, para poder realizar la selección y designación de alguna de estas cantidades como la incógnita del problema (Duval, 1999; 2006).

En función de la incógnita seleccionada y de las operaciones que describen las relaciones entre esta y las cantidades conocidas, se podrán generar formas simbólicas específicas para cada tipo de problema que exista (Faddeyev y Sominskii, 1965; NCTM, 2000; Baldor, 1997).

En la Figura 1, aparece un esquema en el que se ilustran los contenidos y objetos matemáticos asociados a un problema verbal de ecuaciones lineales (Potápov y Alexándrov, 1980; CCH, 1996; Baldor, 1997; Tartákov, 2009; Olguín y Popoca, 2012; CCSSI, 2012; Bautista y Flores, 2013; Becerril y Castro, 2013; García y Landa, 2013; Mendoza y Moreno, 2013).

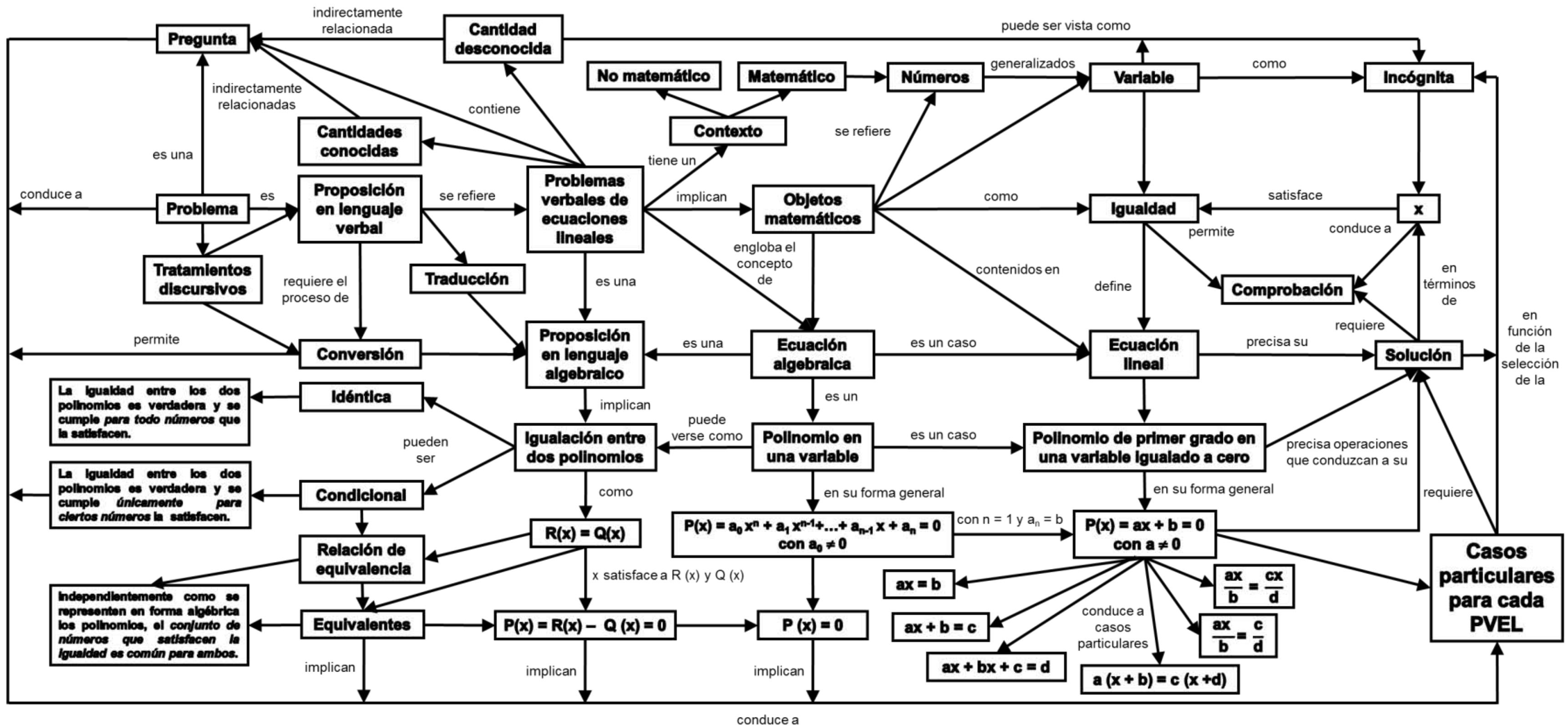


Figura 1. Contenidos y objetos matemáticos implicados en un problema verbal de ecuaciones lineales

2.1.5 Ecuación algebraica

Una ecuación algebraica puede ser definida en dos formas generales que se relacionan estrechamente. En su forma general, la ecuación corresponde a un polinomio en una variable igualado a cero (Faddeyev y Sominskii, 1965; Kalnin, 1973; Guelfond, 1979; Potápov y Alexándrov, 1980; Uspensky, 2000) que puede representarse como:

$$P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0 \qquad con\ a_0 \neq 0$$

En donde las literales que intervienen en la ecuación, como $a_0, a_1, \ldots, a_n$ son los coeficientes del polinomio, que a su vez son números reales. La literal x corresponde a la variable que adquiere el estatus de incógnita.

A partir de esta primera definición, es posible generar una segunda definición.

Sea $P(x) = 0$ y dos polinomios en una variable *S(x) y R (x). Si* $P(x) = S(x) + R(x)$, al aplicar la primera definición tenemos que $P(x) = S(x) + R(x) = 0$. Entonces $(Sx) = - R(x)$. Por lo tanto, podemos concluir que una ecuación algebraica puede ser vista como la igualación de dos polinomios (Kalnin, 1973; Guelfond, 1979; Potápov y Alexándrov, 1980).

En función del conjunto de valores que permiten que la igualación entre los polinomios *S(x) y R(x)* se cumpla, las ecuaciones algebraicas pueden clasificarse en idénticas y condicionales (Rees y Spark, 1981; Fuller, 1981; Lehmann, 1992). En las ecuaciones algebraicas idénticas cualquier número real permite que la igualdad entre *S(x) y R(x)* sea verdadera y se cumpla. En contraste, en las ecuaciones condicionales, solamente algunos números reales son admisibles para que la igualdad entre *S(x) y R(x)* sea verdadera y se cumpla. Estos números deben satisfacer también la igualdad dada por la primera definición $P(x) = 0$.

La incógnita *x* que condiciona que una ecuación algebraica sea verdadera y se cumpla, se denomina solución o raíz de la ecuación (Faddeyev y Sominskii, 1965; Kalnin, 1973; Guelfond, 1979; Potápov y Alexándrov, 1980; Uspensky, 2000). En el proceso de solución de cualquier ecuación algebraica, la incógnita corresponde a un número real relacionado a una cantidad desconocida. Para encontrar la solución o raíz de la ecuación, se requiere la aplicación de un procedimiento en el que se emplean las propiedades de la igualdad para poder obtener ecuaciones equivalentes.

Para el caso general planteado, *x* será la solución o raíz que condiciona la igualdad dada por $P(x) = S(x) + R(x) = 0$ (Kalnin, 1973; Guelfond, 1979; Potápov y Alexándrov, 1980). Por lo tanto, también satisface y hace válida la relación de identidad entre $(Sx) = - R(x)$. Resulta evidente, que ambas formas para representar una ecuación algebraica son totalmente diferentes en cuanto a los símbolos que emplean, pero representan el mismo concepto, por lo tanto, son ecuaciones equivalentes.

2.1.5.1 La ecuación lineal

La ecuación lineal es un caso específico que deriva de la primera definición dada para una ecuación algebraica (Faddeyev y Sominskii, 1965; Kalnin, 1973; Potápov y Alexándrov, 1980; Baldor, 1997; Bello, 1999).

En forma general se define como: $ax + b = 0$ con $a \neq 0$ y su solución es $x = -\frac{b}{a}$.

La ecuación lineal se puede presentar en diferentes formas que pueden ser considerados como casos particulares.

En el programa de Matemáticas I del CCH (CCH, 1996) se abordan las siguientes formas simbólicas como casos específicos de la ecuación lineal:

- $ax = b$
- $ax + b = c$
- $ax + bx + c = d$
- $a\ (x + b) = c\ (x + d\ )$
- $\frac{ax}{b} = \frac{c}{d}$
- $\frac{ax}{b} = \frac{cx}{d}$

Estas formas simbólicas al ser tratadas algebraicamente pueden reducirse a la forma de la solución general (Potápov y Alexándrov, 1980; CCH, 1996; Baldor, 1997; Tartákov, 2009; Olguín y Popoca, 2012; CCSSI, 2012; Bautista y Flores, 2013; Becerril y Castro, 2013; García y Landa, 2013; Mendoza y Moreno, 2013).

Los problemas verbales de ecuaciones lineales generan otro tipo de formas simbólicas específicas que dependen de la estructura de las proposiciones lógicas que conforman el enunciado del problema y la manera en la que se conectan y relacionan entre sí (Faddeyev y Sominskii, 1965; NCTM, 2000; Baldor, 1997; Duval, 1999).

Para ilustrar la anterior afirmación analizaremos el siguiente problema: “La suma de las edades de A y B es de 84 años, y B tiene 8 años menos que A. Hallar las edades” (Baldor, 1997, p. 131). En este problema se visualizan dos posibilidades en la selección de la incógnita.

Primera posibilidad: Si tomamos la edad de A como la incógnita y la designamos con la literal x, la edad de B queda en función de A.

Edad de A: x
Edad de B: $x – 8$

La ecuación resultante de este planteamiento es $x + (x - 8) = 84$, en forma general se puede expresar como $fx + (gx - m) = n$ [primera forma].

Segunda posibilidad: Si tomamos la edad de B como la incógnita y la designamos con la literal *x*, la edad de A queda en función de B.

Edad de B: x
Edad de A: $x + 8$

La ecuación resultante de este planteamiento es $x + (x + 8) = 84$, en forma general se puede expresar como $fx + (gx + m) = n$ [segunda forma].

En ambas formas generales la única variación existente se encuentra en la operación que relaciona ambas edades.

Los pasos para efectuar la reducción de la primera forma a la solución general para la ecuación de primer grado son:

$$fx + (gx - m) = n$$
$$fx + gx - m = n$$
$$(f + g)x - m = n$$
$$(f + g)x - m - n = n - n$$
$$(f + g)x - m - n = 0$$
$$\text{Si } f + g = a \quad y \quad -m - n = b$$
$$\text{Entonces } ax + b = 0 \text{ por lo tanto } x = -\frac{b}{a}$$

Tomando la segunda forma de la ecuación, la reducción a la forma general es:

$$fx + (gx + m) = n$$
$$fx + gx + m = n$$
$$(f + g)x + m = n$$
$$(f + g)x + m - n = n - n$$
$$(f + g)x + m - n = 0$$
$$\text{Si } f + g = a \quad y \quad m - n = b$$
$$\text{Entonces } ax + b = 0 \text{ por lo tanto } x = -\frac{b}{a}$$

En conclusión, todas las formas simbólico-algebraicas que derivan de un problema verbal de ecuaciones lineales o que simplemente se presentan como formas aisladas, generan ecuaciones lineales equivalentes cuya solución siempre se reduce a la forma $x = \pm \frac{b}{a}$.

2.2 Didáctica de los problemas verbales de ecuaciones lineales

2.2.1 Modelo educativo del CCH

El Colegio de Ciencias y Humanidades [CCH] tiene la función de "impartir enseñanza media superior en los términos de la Ley Orgánica y del Estatuto General de la Universidad" (CCH, 1996, p. 1).

A partir de estos lineamientos normativos, se materializa el proyecto educativo del Colegio en las siguientes dimensiones:

1. Identidad del bachillerato: El CCH busca favorecer el desarrollo de la personalidad de los estudiantes, adolescentes en su mayoría, con el propósito de alcanzar un grado de madurez que les permita insertarse satisfactoriamente en la sociedad y enfrentar los estudios superiores (CCH, 1996).

2. Bachillerato universitario: El CCH como instancia integrante de la Universidad Nacional Autónoma de México [UNAM] comparte la responsabilidad de

   > Construir, enseñar y difundir el conocimiento en las grandes áreas de las ciencias y las humanidades… que el alumno sepa… por qué sabe…
   > Esta característica implica el desarrollo de habilidades y actitudes de reflexión, racionalidad, curiosidad y deseo de saber, proceder sistemático y coherente, apego a la verdad y respeto al trabajo intelectual (CCH, 1996, p. 35)

3. Bachillerato de cultura básica: El Colegio buscará desarrollar en el alumno “las habilidades de trabajo intelectual, generales y propias de los distintos campos del saber,… aptitudes de reflexión sistemática, metódica y rigurosa, conocimientos y habilidades metodológicas y actitudes congruentes” (CCH, 1996, p. 36).

4. Concepción del conocimiento científico: En el CCH la ciencia se caracterizan por ser producto del proceso de construcción de un razonamiento crítico y social, vinculado al desarrollo sociocultural comunitario (CCH, 1996).

5. El alumno como sujeto de la cultura: En el Colegio, se privilegia que el alumno comprenda y analice los conocimientos que se le proporcionen, para poder juzgarlos con su realidad y experiencia, para poder asimilarlos o en su caso reelabóralos en forma crítica, para lograr movilizar la habilidad de la solución de problemas (CCH, 1996).

6. Bachillerato propedéutico, general y único: En la institución, se pretende que los alumnos adquieran la preparación básica para lograr cursar exitosamente los estudios superiores (CCH, 1996).

7. Formulaciones comunitarias: En este contexto, se destacan los tres principios respecto al trabajo comunitario y cooperativo dentro del Colegio, que se enuncia en los principios de *aprender a aprender, aprender a hacer, aprender a ser y alumno crítico* (CCH, 1996).

2.2.2 El Plan de Estudios del CCH

El Plan de Estudios fue actualizado en el año de 1996, con el propósito de "formar alumnos sujetos de la cultura, capaces de aprender a aprender, de acuerdo con el modelo educativo del Bachillerato del Colegio" (CCH, p. 9).

En este contexto, el modelo educativo del Colegio, pondera una formación orientada a atender al alumno, para que desarrolle y potencié la capacidad de aprender a aprender; a través de obtener, jerarquizar y valorar la información, ante cualquier situación problema que se le presente, tanto, en la escuela como en la vida cotidiana (CCH, 1996).

El enfoque de la enseñanza y aprendizaje en el CCH, está centrada en los alumnos, porque se pretende que sean los principales actores de su proceso educativo.

En el Plan de Estudios del Colegio se organizaron y jerarquizaron los contenidos destinados a la enseñanza, para proporcionar a los estudiantes una educación sistemática.

La estructuración de los contenidos básicos del Plan de Estudios del CCH, busca establecer conexiones internas entre los contenidos de una disciplina y con los de otras áreas del conocimiento (CCH, 1996).

En el área de Matemáticas, el Plan de Estudios del CCH establece "la preocupación por motivar a los alumnos al estudio interesado de las ciencias y las humanidades" (CCH, 1996, p. 27), su concreción se traduce en el sentido y orientación de las diferentes áreas académicas que integran el CCH.

En el caso del área de Matemáticas, se orienta a permitir que los alumnos perciban:

> Esta disciplina como una ciencia en constante desarrollo... [que] se origina en las necesidades de los hombres de conocer y descubrir su entorno físico y social.. lo mismo que el rigor, la exactitud y la formalización. Así mismo, los alumnos deben percibir que la Matemática posee una naturaleza dual: su propio carácter de ciencia y un valor funcional como herramienta.
>
> …la Matemática contribuye… al desarrollo de la personalidad del educando: a) le proporciona los elementos necesarios para interpretar los aspectos lógicos y numéricos de sus vivencias intelectuales; b) amplía su repertorio de respuestas ante situaciones distintas y cambiantes; e) fomenta la independencia intelectual y la toma de decisiones fundadas y razonadas; d) influye en su comprensión de los rasgos básicos de la revolución científico-tecnológica actual, así como de sus repercusiones en las formas de producción y organización social, y e) le ayuda a comprender y utilizar los desarrollos tecnológicos a su alcance (CCH, 1996, pp. 51 y 52).

En el perfil de egreso del alumno del CCH, se materializan los fines establecidos en el sentido y orientación del área de Matemáticas, los que se relacionan con el problema objeto de estudio del presente trabajo, los cuales son:

- Aprende por sí mismo y, en los campos del saber básicos -las matemáticas… la lengua materna-, posee habilidades de trabajo intelectual generales y propias de cada uno de aquéllos, las grandes generalizaciones o síntesis y los conocimientos específicos que le permiten adquirir o construir otros e ir generando estrategias propias para alcanzar aprendizajes cada vez más independientes y complejos.

- Ha adquirido una visión de conjunto y jerarquizada de los aspectos fundamentales de las distintas disciplinas, de sus elementos conceptuales, metodológicos y teóricos, así como de sus conocimientos propios…
- Mantiene una actitud de curiosidad intelectual y de cuestionamiento; posee la habilidad de plantear problemas teóricos y prácticos y de establecer relaciones con conocimientos ya adquiridos; formula hipótesis y las somete a verificación a través de procedimientos y métodos adecuados a cada campo del saber…
- Desarrolla, por medio del ejercicio en los procesos inductivos, deductivos y analógicos, y en íntima relación con problemas y conocimientos de las distintas disciplinas, un pensamiento lógico, reflexivo, crítico y flexible …
- A través de la resolución de problemas y de otras estrategias de trabajo, potencia su intuición, explora, conjetura, utiliza distintas formas de lenguaje y representación, varía condiciones y crea conocimientos matemáticos nuevos para él…
- Comprende las nociones básicas del álgebra, de los números reales, de la geometría sintética y sus aplicaciones inmediatas...
- Utiliza adecuadamente los algoritmos y la simbología involucrados en las nociones anteriores, de tal forma que resuelve los problemas donde sea posible aplicarlos, y expresa sus resultados y conclusiones en un lenguaje matemático.
- Se adelanta, frente a una situación problemática, a hacer un análisis de los elementos involucrados y de sus posibles relaciones lógicas o matemáticas; de ser factible, a interpretar con signos y símbolos matemáticos elementos y relaciones y, finalmente, es capaz de aplicar un criterio para decidir sobre la pertinencia de emplear alguno de los algoritmos elementales relacionados con las nociones básicas aprendidas.
- Comprende los aspectos fundamentales de la operación y del potencial de las computadoras en los diversos campos y los aprovecha, de manera inicial, como medio de trabajo académico (CCH, 1996, pp. 68-71).

2.2.3 El Programa de Estudios del CCH

Los programas de las asignaturas del Plan de Estudios del CCH, se conciben como "un instrumento que permite tener presentes los principales elementos que intervienen en un proceso de enseñanza-aprendizaje, para organizarlos sistemáticamente, de manera que orienten su planeación, ejecución y evaluación" (CCH, 1996, p.120).

El enfoque disciplinario que presenta el Programa de Estudios, contempla la manera de enfocar, presentar y trabajar los aprendizajes de los alumnos, en el que se pone de manifiesto la unicidad que las Matemáticas exhiben, independientemente de las disciplinas que de ella derivan, la cuales poseen principios, métodos y estrategias comunes.

Adicionalmente, generan conceptos y procedimientos que se relacionan, completan o abordan desde otras perspectivas. También, posee un conjunto de símbolos propios, con una estructura y reglas específicas, a partir de la construcción de representaciones de diferente nivel de generalización (CCH, 1996).

A partir de esta concepción, se estructuran los programas como una guía de carácter obligatorio que contiene las acciones a realizar, dando al docente una flexibilidad respecto a lo que puede hacer en cada clase, respetando así la libertad de cátedra. Así, el programa institucional es un marco en el que cada profesor, aporta sus ideas, experiencias y formación docente.

El Programa de Estudios de Matemáticas I a IV, establece que las Matemáticas posean un carácter dual:

> Es una ciencia y una herramienta. Como ciencia tiene un desarrollo que admite titubeos, conjeturas y aproximaciones, al igual que rigor, exactitud y formalidad, por ser el producto de una actividad humana que evoluciona, construye, organiza y

> sistematiza conocimientos, a partir de la necesidad de resolver problemas teóricos o prácticos. Como herramienta, constituye un poderoso instrumento que contribuye con técnicas, procedimientos, métodos y teorías a la obtención de conocimientos y sus aplicaciones en diversos campos del saber, tanto humanístico como científico y tecnológico (CCH, 1996, p. 6)

En los cuatro cursos de Matemáticas I a IV, el Programa de Estudios trata de proporcionar al estudiante una visión general de las Matemáticas para poder acceder a conocimientos especializados; que al integrarse, formen un constructo que se enriquezca y profundice al ir avanzando en cada uno de los semestres, mediante un abordaje bajo diferentes perspectivas de desarrollo metodológico, como son:

> Aproximaciones a la Resolución de Problemas; Dominio del Pensamiento Algebraico; Análisis Lógico de Argumentos; Construcción de Razonamientos; Planteamiento de Conjeturas a partir de descubrir Patrones de Comportamiento; Manejo de Transformaciones Geométricas en el Plano Cartesiano… e Identificación de Algoritmos y de Relaciones entre Algoritmos (CCH, 1996, p. 3).

Las habilidades matemáticas que se pretenden que el alumno desarrolle en su tránsito por los cuatro semestres son:

> …generalización (percibir relaciones, formas y estructuras; distinguir lo relevante de lo irrelevante y lo común de lo diferente); formalizar “Material Matemático” (operar con estructuras más que con el contexto de una situación, operar con numerales y símbolos, combinando reglas y estrategias); reversibilidad de pensamiento (invertir una secuencia de operaciones o un proceso de pensamiento); flexibilidad de pensamiento (disponibilidad para abandonar estereotipos o procedimientos en los que se ha tenido éxito para utilizar otros nuevos… (CCH, 1996, p. 4).

La resolución de problemas que propone el Programa de Matemáticas I, se centra en un enfoque heurístico (Polya, 1945), en la que el alumno debe contar con estrategias eficientes para resolver problemas complejos, empleando problemas similares, con los que haya trabajado en el pasado (CCH, 1996).

En lo concerniente a los problemas que involucran una ecuación, se enuncia lo siguiente:

> Además de la traducción de un problema que se resuelve con una ecuación, es importante que comprenda la riqueza de la estrategia algebraica que le permite establecer relaciones entre cantidades conocidas y desconocidas.” (CCH, 1996, p. 13).

En la Unidad III del Programa (CCH, 1996), se específica el uso de diagramas como representación de casos particulares de problemas. Además, se propone el trabajar con analogías de problemas, para poder desarrollar la habilidad de poder reducirlos o transferirlos a la solución de otros similares. El cálculo mental, es considerado como una estrategia para la resolución de problemas algorítmicos o de solución inmediata.

En el contexto de los problemas que se ubican entre lo aritmético y lo algebraico, se busca que el estudiante distinga “la información relevante de la irrelevante; así como también, los elementos conocidos de los que se desean conocer.” (CCH, 1996, p. 16).

En el caso de los problemas de ecuaciones lineales, destaca que el alumno podrá ser capaz de:

> Interpreta[r] la expresión verbal o escrita de un problema y expresa la relación entre datos e incógnita por medio de la ecuación lineal correspondiente.

> Interpreta[r] en el contexto del problema, el significado de la solución encontrada, en particular cuando se trata de números negativos o fracciones.
>
> Redacta[r] el contexto de una situación que corresponda a un modelo expresado por medio de una ecuación lineal con una incógnita, o bien, incorpora los cambios pertinentes en la redacción de una situación dada, al introducir modificación en el modelo que la representaba. (CCH, 1996, p. 23).

El tipo de problemas de contenido puramente matemático que se recomiendan son los de números y de corte geométrico. También, se propone el uso de problemas de aplicación en diferentes áreas del conocimiento, con temáticas que involucran las finanzas, dinero, compra de artículos, mezclas, proporciones, porcentajes, móviles y edades (CCH, 1996).

2.2.4 Objetos matemáticos implicados en los PVEL

Los objetos matemáticos desde el punto de vista filosófico clásico están constituidos por las nociones y estructuras matemáticas reales, que existen independientemente de la humanidad, constituyen la base del conocimiento matemático porque proporcionan un sistema de preceptos y verdades absolutas e invariantes (Godino y Batanero, 2009).

En la perspectiva del Constructivismo Social aplicado en la Educación Matemática, los objetos matemáticos son concebidos como representantes simbólicos producto de una cultura y se encuentran vinculados al proceso de solución de problemas que se realiza en el seno de un grupo social, en un tiempo y espacio determinado.

Estos objetos matemáticos son de naturaleza dinámica, porque cambian de acuerdo con la evolución social, por lo que su significación, también se modifica (Ernest, 1991).

El significado de los conceptos matemáticos está íntimamente relacionado con la naturaleza del objeto matemático, en la que además intervienen su signo y su referente. Así, el objeto se relaciona con el concepto, porque éste describe sus características y atributos que, bajo el enfoque constructivista, varía de sujeto a sujeto, debido a la dialéctica que propicia la dimensión subjetiva y personal (Godino y Batanero, 2009).

Las ecuaciones y los problemas verbales son objetos matemáticos, que presentan una estructura en el sentido aritmético y algebraico (Kieran, 1989; Godfrey y Thomas, 2003), que comprende al conjunto de números y variables numéricas, las operaciones que los involucran y sus propiedades (Kieran, 1989).

La estructura de la ecuación como objeto matemático se presenta en dos dimensiones: la superficial que se refiere a la forma o arreglo de los términos y operaciones que se encuentran sujetos a una jerarquía operativa; mientras que, la sistémica se centra en las propiedades de las operaciones y la relación con sus formas equivalentes (Kieran y Herscovics, 1980; Kieran, 1989; Godfrey y Thomas, 2003; Paralea, 1998; Frege, 1996).

El problema verbal visto como objeto matemático en el sentido algebraico, contiene a la ecuación que es otro objeto matemático (Kieran, 1981, 1989; Clement, 1982, Kieran y Filloy, 1989; Puig, 1998, Duval, 1999; Filloy y Puig, 2008), que incorpora las características de la estructura superficial de las expresiones algebraicas presentes en ambos lados del signo de igualdad.

En el sentido de la estructura sistémica, la ecuación implica la relación de equivalencia entre ambas expresiones algebraicas (Kieran y Herscovics, 1980, Kieran 1981, 1989; Paralea, 1998; Godfrey y Thomas, 2003).

En consecuencia, en el problema verbal, la estructura [superficial y sistémica] involucra las operaciones y relaciones que definen a la ecuación que conduce a la solución del problema, no a la serie de operaciones numéricas y algebraicas necesarias para resolverla (Vergnaud, 1982; Kieran, 1988).

Para comprender a las ecuaciones como objeto matemático, es fundamental entender los elementos que la conforman y sus propiedades (Godfrey y Thomas, 2003) como son: el signo de igual, las propiedades reflexivas, simétricas y transitivas de la igualdad (Kieran, 1981), los números, los términos desconocidos, los signos de operación [tanto para conformar su estructura, como para resolverla] y la relación de equivalencia de las ecuaciones (Kieran, 1988; Frege, 1996; Duval, 1999).

Por lo tanto, se requiere que cada estudiante construya un significado en torno al concepto de ecuación, (Kieran, 1980, 1981, 1989; Booth, 1989; Paralea, 1998, Godfrey y Thomas, 2003; Duval, 2006) lo que se constituye en un problema de carácter semiótico, concerniente a la relación entre el signo/el significado y el símbolo/lo simbolizado. (Paralea, 1998; Godfrey y Thomas, 2003; Duval, 1999, 2006).

Un punto de partida para la construcción del concepto de ecuación, es tomar la base de conocimientos aritméticos que los estudiantes de bachillerato poseen, para poder ampliarlos y transformarlos, logrando así la construcción de las nociones algebraicas fundamentales para comprender los objetos matemáticos asociados a la ecuación, que se basa en su relación con respecto a su construcción conceptual, sus elementos, procesos de formalización, formas de simbolización y representación (Kieran y Herscovics, 1980; Kieran, 1989; Chalouh y Herscovics, 1988; Falkner y Levi, 1999).

En esta perspectiva, se han realizado numerosos estudios para tratar de caracterizar la transición del pensamiento aritmético al algebraico que tienen los estudiantes, a través del establecimiento de las diferentes concepciones en torno a los objetos matemáticos: igualdad y variable (Herscovics, 1989; Paralea 1998). En los siguientes párrafos se presenta un breve recorrido de estos estudios.

La ecuación es vista como una relación de equivalencia entre dos expresiones algebraicas que tienen el mismo valor (Kieran 1980; Falkner y Levi, 1999; Godfrey y Thomas, 2003; Duval, 2006); en otros estudios se destaca a la ecuación como una representación de la relación de equivalencia o identidad entre dos expresiones algebraicas (Kieran y Herscovics, 1980; Goodfrey y Thomas, 2003); otros autores visualizan a la ecuación como una totalidad (Paralea 1998; Puig, 2006).

2.2.5 Concepciones en torno a los objetos matemáticos implicados en los PVEL

2.2.5.1 Concepciones respecto al símbolo de igualdad

En este contexto, surge como un común denominador el papel que juega el símbolo de igualdad como elemento que le proporciona la característica de equidad a toda ecuación; siendo necesario conocer las concepciones de los alumnos, en torno a este objeto matemático (Kieran y Herscovics, 1980; Kieran, 1981, 1989; Falkner y Levi, 1989; Godfrey y Thomas, 2003).

La noción de igualdad se refiere a un atributo o propiedad invariante de un objeto, es decir, que se mantiene en el tiempo, también se le denomina identidad, dados su carácter exclusivo y restrictivo (Kieran, 1981, 1989; Frege, 1996; Falkner y Levi, 1999).

En contraste, al hablar de relación de equivalencia, se hace referencia a una noción más amplia y menos restrictiva, en donde surge la posibilidad de la sustitución o modificación de algún elemento por otro (Kieran, 1981; Paralea, 1998; Goodfrey y Thomas, 2003)

Entonces, es posible definir la ecuación en un sentido más amplio, dependiendo de la condición de identidad o equivalencia dada. La ecuación vista como relación de equivalencia, se caracteriza cuando alguno de los elementos de las expresiones aritméticas o algebraicas en ambos lado de la igualdad, pueden ser sustituidos por otros sin alterar la identidad final (Kieran y Herscovics, 1980; Kieran, 1981; Godfrey y Thomas, 2003)

Los estudiantes de bachillerato, exhiben una serie de concepciones en torno la idea de igualdad, identidad y la relación de equivalencia, como si se tratase de la misma noción, que se simboliza a través del signo de igualdad (Gattegno, 1974, citado por Kieran, 1981), estas nociones se comienzan a construir en los estadios del aprendizaje de la Aritmética, en el que los estudiantes entienden al signo de igualdad como la acción de *hacer algo*, es decir, es usado como un símbolo operador, más que como un indicador de equidad (Falkner y Levi, 1999; Kieran 1981; Kieran y Filloy, 1989). En la transición hacia el Álgebra, se pretende ampliar esta idea para que logren comprender la noción de equilibrio entre la expresión ubicada en el lado derecho del símbolo de igualdad, con respecto a la expresión de la lado izquierdo (Falkner y Levi, 1999; Kieran, 1989, 1992).

También, durante esta transición, surge la posibilidad de que el alumno logre diferenciar la noción de igualdad de la equivalencia, que en términos del formalismo algebraico (Kieran y Filloy, 1989; Kieran, 1992; Paralea, 1998; Puig, 2006) resulta más útil, dada la posibilidad de la sustitución y flexibilidad, para las manipulaciones operatorias entre los términos que conforman las expresiones algebraicas (Kieran, 1981).

Los estudiantes visualizan al signo de igualdad como un separador entre un cuestionamiento o sentencia abierta y su respuesta (Kieran y Herscovics, 1980; Kieran, 1981; Godfrey y Thomas, 2003), esta concepción, es un punto de continuidad para pasar de la noción aritmética de igualdad a la algebraica, y por ende al de ecuación.

Adicionalmente, esta concepción refleja el sentido unidireccional de la identidad aritmética, en el que es leída, escrita, resuelta e interpretada de izquierda a derecha (Kieran, 1980, 1981; Kieran y Filloy, 1989; Duval, 1999; Paralea, 1998; Godfrey y Thomas, 2003).

El uso de identidades aritméticas o sentencias abiertas, se conforma en un puente para la compresión del concepto de ecuación algebraica, al presentar ecuaciones con solución y su correspondiente comprobación, alternadas con los casos en las que las ecuaciones no presentan una solución, permite la clarificación de la noción de equivalencia e igualdad en la ecuación (Kieran y Herscovis, 1980).

En este orden de ideas, destaca la necesidad de que los alumnos entiendan el uso de las propiedades, reflexiva, simétrica y transitiva de la igualdad, que permite dilucidar la diferencia entre igualdad restrictiva y relación de equivalencia, al sustituir, manipular y operar términos equivalentes en cada lado y dentro de la misma ecuación (Godfrey y Thomas, 2003).

La mecanización temprana de los procedimientos operativos de carácter algebraico, imponen una restricción para la comprensión del concepto de ecuación, debido a que se le presenta al estudiante como una estructura predeterminada, al igual que sus elementos constitutivos, especialmente, la variable dentro de las expresiones algebraicas (Kieran, 1989). Los alumnos no logran entender este concepto empleando conocimientos puramente aritméticos (Akgün y Ödezmir, 2006).

2.2.5.2 Concepciones respecto a la variable

La noción de variable corresponde al ámbito puramente algebraico y su simbolización se realiza mediante literales (Chalouh y Herscovis, 1988), que representan números generalizados (Usiskin, 1988; Booth 1989; Ursini, 1990; Kieran, 1989, Akgün y Ödezmir, 2006). La asimilación de este concepto, conlleva un análisis multidimensional dependiente del grado de generalización, formalización y representación (Paralea, 1998; Akgün y Ödezmir, 2006) que presentan los alumnos en el tránsito del Aritmética al Álgebra (Kieran, 1988; Kieran, Filloy 1989). La dilucidación de los diferentes estadios del proceso de comprensión de la noción de variable, es un elemento indicador del grado de consolidación del pensamiento algebraico.

También, es fuente de múltiples significados (Paralea, 1998, Duval, 1999; 2006) en torno a este objeto matemático que conducen a determinar los diferentes errores, obstáculos y dificultades en su comprensión (Booth, 1989; Kieran, 1988, 1989; Godfrey y Thomas, 2003; Akgün y Ödezmir, 2006).

En Aritmética, el uso de literales aparece en las fórmulas de áreas de figuras geométricas (Booth 1989; Kieran, 1988; Kieran y Filloy, 1989), en donde representan cantidades fijas, es decir, valores numéricos únicos. En el Álgebra la noción de variable adquiere múltiples acepciones, referentes y símbolos, que han sido descritas por diversos autores (Küchemann, 1981; Usiskin, 1988; Kieran, 1989; Urisni, 1990; Godfrey y Thomas, 2003; Kieran, Filloy 1989; Akgün y Ödezmir, 2006).

En un estudio realizado por Usinski, en 1988, respecto a la concepción de variable que manifiestan los estudiantes, el autor señala que esta depende del contexto algebraico en la que es usada, por lo tanto, en el caso de la Aritmética generalizada, la variable se relaciona con patrones, cuando es empleada como procedimiento para resolver problemas y se asocia con las cantidades desconocidas.

En otro estudio realizado en 1981, Küchemann centró su atención en el análisis de la interpretación, manipulación y clasificación de las literales como variables que realizan los estudiantes.

Las categorías mencionadas en dicho estudio son las siguientes:

- Letra evaluada: Rechazo de la letra como cantidad desconocida. El estudiante le asigna un valor numérico desde el principio.

- Letra ignorada: La literal no es interpretada como cantidad desconocida. Para el estudiante no tiene sentido la literal.

- Letra como objeto: La literal es comprendida como objeto concreto del mundo real. El estudiante simboliza objetos del mundo real a través de la variable.

- Letras como número desconocido específico: La literal es interpretada como una cantidad desconocida específica. El estudiante la asocia al uso de fórmulas de perímetros y áreas.

- Letra como número generalizado: La literal es entendida como un valor asignado a una cantidad desconocida única. El estudiante lo interpreta como solución única a una ecuación.

- Letra como incógnita: La literal es comprendida como una cantidad desconocida que puede tener un valor único o múltiple. El estudiante emplea la generalización y la simbolización para representarla en forma abreviada.

- Letra como variable: La letra es entendida como un valor cualquiera dentro del rango de valores del dominio de una función.

El proceso que muchos alumnos siguen para lograr la comprensión del concepto de variable, en su transición del Aritmética al Álgebra, comprende en un primer momento la sustitución de un número específico por una literal; posteriormente, emplean el método de ensayo y error en la sustitución de varios números por la literal; finalmente, generalizan un número como la variable, empleando a la x como símbolo predominante, al que le adjudican las mismas propiedades de un número (Kieran, 1992) al considerarse como indicador de cálculo en el sentido numérico (Paralea, 1998).

En la perspectiva semiótica, el concepto de variable engloba la noción de incógnita y su correspondiente valor como solución, teniendo la literal dos dimensiones, como incógnita y como número generalizado (Paralea, 1998, Duval, 2006).

En la ecuación, el valor que adquiere la variable como incógnita está condicionada por las operaciones aritméticas y algebraicas necesarias para solucionarla (Kieran, 1988; Paralea, 1998). El planteamiento y representación de la ecuación derivada del enunciado de un problema verbal, están sujetos a la noción de variable y a la condición de la ecuación en términos de las relaciones entre las cantidades conocidas y desconocidas, descritas en el lenguaje natural (Duval, 2006).

En consecuencia, en un mismo problema verbal se plantean dos situaciones en torno a la ecuación, la primera referente al planteamiento de la ecuación (Kieran, 1988) descrita anteriormente y la referente a la solución en la que cambia la interpretación del concepto de variable, lo que genera dificultad para poder determinar la concepción asociada: como cantidad conocida o número, incógnita, cantidad desconocida o número generalizado. Para poder determinar el estadio de la concepción de variable en el planteamiento y solución de un problema verbal es necesario, tratar de especificar el proceso de abstracción de las representaciones empleadas en las que no se modifica el objeto matemático, sea la variable, el signo de igualdad y la ecuación en sí misma (Duval, 2006).

2.2.6 El proceso de traducción del enunciado de un PVEL dado en lenguaje natural a una ecuación algebraica

La estructura de todo problema verbal de ecuaciones lineales es determinada por los símbolos que se emplean para representar los objetos matemáticos, tanto en el sentido aritmético como en el algebraico (Filloy y Puig, 2008), pero su significado no es el mismo para todos los estudiantes y por ende, sus concepciones al respecto, se diversifican (Kieran, 1989; Molina, 2014). Lo anterior es atribuible a las particularidades en la función de objetivación e interpretación (Duval, 1999) de sus componentes sintácticos y semánticos (Kirshner, 1989).

En este orden de ideas, se establece una dualidad fundamental, en términos del conocimiento, uso y dominio del lenguaje entendido como un sistema. La primera parte de esta dualidad, la conforma el lenguaje natural o sistema de representación verbal, que le proporciona el carácter discursivo al enunciado del problema, independientemente del formato en que sea presentado [escrito u oral]. En todo discurso están inmersos los elementos de la complejidad lingüística. La otra cara de la dualidad, la constituye el lenguaje matemático en sí mismo, con su propia complejidad determinada por sus diferentes estructuras y formalismos, es decir, todo lo que lo convierte en un sistema de representación simbólico.

Esta dualidad está presente, en el proceso del paso del enunciado de un problema verbal de ecuaciones lineales dado en lenguaje común a su correspondiente expresión matemática, en donde surge un conflicto en cuanto al significado y concepción de los objetos matemáticos contenidos en el texto del enunciado, dado que este discurso es expresado en lenguaje natural, la interpretación de las palabras [sintaxis y semántica lingüística] que describen dichos objetos, es flexible y su representación en el sistema simbólico algebraico, exige una interpretación precisa y compacta, en forma de una expresión matemática [sintaxis y semántica matemática]: la ecuación.

En torno a este proceso, se han realizado algunos estudios los cuales resumiremos a continuación.

En estas investigaciones, destacan dos vertientes de análisis; una en la que se enfatiza el salto de la expresión verbal del enunciado a su correspondiente ecuación y la otra, en la que se caracterizan, los diversos métodos de solución. Para propósitos del presente estudio, nos centraremos en describir la primera.

En una aproximación a la descripción de este proceso, Polya, nos muestra su visión desde la heurística,

> El planteo de la ecuación es semejante a una traducción... Plantear la ecuación es expresar por medio de símbolos matemáticos una condición formulada en palabras. Es traducir el lenguaje llano a fórmulas matemáticas. Las dificultades que podemos tener en plantear la ecuación de un problema son idénticas a las que nos ofrece una traducción... Se requiere comprender a fondo la condición y estar familiarizado con las formas de expresión matemáticas… (1945, p. 143-144)

Para Molina, la traducción del enunciado entre sistemas de representación "consiste en reproducir el mismo «contenido» en otros sistemas, es transformar los conceptos y atributos representados en un sistema a los correspondientes… en otro sistema, obteniendo una representación diferente a la de partida pero congruente en el significado" (2014, p. 562).

Filloy, Rojano y Puig (2008), conciben a la traducción del enunciado del problema verbal a la correspondiente ecuación, como la competencia que implica el manejo del lenguaje natural y el algebraico.

2.2.7 Dificultades, obstáculos y errores en la traducción de los PVEL

El error es inherente al proceso de aprendizaje y adquisición del conocimiento, porque se da en el contexto de un marco conceptual específico (Herscovics, 1989; Killpatrick y Rico, 1998). En el momento en el que se presenta un conflicto cognitivo entre los conocimiento anteriores y los que se van adquiriendo, surge la posibilidad del error como potencial fuente de aprendizaje, porque al resolver el conflicto, mediante la modificación del cuerpo de conceptos, se amplían o se forman nuevas estructuras cognitivas.

Bachelard en su obra *La formación del espíritu científico* (citado por Killpatrick y Rico, 1998, p. 74) formuló la noción de obstáculo epistemológico

> [C]omo explicación para esa aparición inevitable de errores que, hemos visto, constituye parte importante de nuestro avance en el conocimiento…
>
> - Cuando se investigan las condiciones psicológicas del progreso de la ciencia hay que plantear el problema del conocimiento científico en términos de obstáculos; en el acto mismo de conocer, íntimamente, es donde aparecen, por una especie de necesidad funcional, los entorpecimientos y las confusiones; es ahí donde mostraremos causas de estancamiento y hasta de retroceso, es ahí, donde discerniremos causas de inercia que llamaremos obstáculos epistemológicos…
>
> - La noción de obstáculo epistemológico puede ser estudiada en el desarrollo histórico del pensamiento científico y en la práctica de la educación.

Un camino para tratar de encontrar porque suceden las principales dificultades en el entendimiento del Álgebra es identificar los tipos de errores que los estudiantes comúnmente cometen (Herschovics, 1989; Booth, 1989).

En esta línea de investigación, se han realizado múltiples estudios de acuerdo a diferentes marcos teóricos. La clasificación generada por Movshovitz-Hadar, Zaslavksy e Inbar (1987, citado por Killpatrick y Rico, 1998, p. 90-91) es de carácter constructivo y fue categorizada en forma cualitativa en función del tipo de soluciones que producen los alumnos de nivel medio, estas son:

> Interpretación incorrecta del lenguaje. Se incluyen en este caso los errores debidos a una traducción incorrecta de hechos matemáticos descritos en un lenguaje simbólico a otro lenguaje simbólico distinto. Esto ocurre al poner un problema en ecuaciones expresando una relación diferente de la enunciada; también cuando se designa un concepto matemático mediante un símbolo distinto del usual y operando con él según las reglas usuales; a veces se produce también una interpretación incorrecta de símbolos gráficos como términos matemáticos y viceversa.
>
> Teoremas o definiciones deformados. Se incluyen aquí aquellos errores que se producen por deformación de un principio, regla o definición identificable. Tenemos en este caso la aplicación de un teorema sin las condiciones necesarias; aplicar la propiedad distributiva a una función no lineal; realizar una valoración o desarrollo inadecuado de una definición, teorema o fórmula reconocibles.

Las categorías citadas, son las que emplearemos para englobar los errores encontrados en la literatura.

Así, en la subdivisión titulada teoremas o definiciones deformados, incluiremos tres subcategorías para los errores relacionados con los objetos matemáticos embebidos en el problema verbal de ecuaciones lineales [ecuación, igualdad y variable como incógnita] y en la denominada interpretación incorrecta del lenguaje, consideraremos los errores derivados de la traducción del enunciado del problema dado en lenguaje natural a su correspondiente ecuación.

Las dificultades conceptuales inherentes a la formalidad del vocabulario algebraico, pueden ser atribuidas a la complejidad que implica el simbolismo de la notación algebraica usada para escribir las ecuaciones (Kieran y Herscovics, 1980). El vocabulario algebraico necesario para la construcción del concepto de ecuación es complejo y causa vaguedades en la generalidad, muchos maestros se refieran a esto como un obstáculo en el aprendizaje.

Estas dificultades tiene una implicación en la resolución ecuaciones con una incógnita, debido al cambio en las convenciones usadas en Aritmética, el reconocimiento y uso de estructuras (Kieran, 1989).

El formalismo de la notación algebraica es fuente de confusiones en los estudiantes porque impide la aplicación de las reglas de los sistemas y objetos algebraicos (Paralea, 1998).

Los estudiantes tienen seguro concepciones que involucran una resistencia al cambio y se convierten en obstáculos cognitivos cuando perciben el objeto matemático, como es el caso de una ecuación y sus propiedades. (Godfrey y Thomas, 2003).

La lectura y escritura de las ecuaciones los estudiantes la realizan de izquierda a derecha en tiempo real, esto se puede atribuir a la percepción de la ecuación como un suceso temporal, más que un estado estático (Kieran, 1989, Paralea, 1998).

Los estudiantes que se inician en el estudio del Álgebra, interpretan los símbolos de diferente forma que los que han logrado cierto dominio de la disciplina. No logran ver la ecuación como una identidad. El símbolo de igualdad es interpretado como la indicación que propicia el resultado de una operación aritmética entre dos números, es decir, como un separador entre operaciones, o la indicación de hacer *algo* (Kieran, 1981; Kieran y Filloy, 1989; Godfrey y Thomas, 2003)

El entendimiento y significado de las expresiones algebraicas es un obstáculo epistemológico en lo que concierne a la falta de clausura que presentan, que contrasta con lo que sucede con una identidad aritmética, en la que toda operación tiene una respuesta posterior al símbolo de igual (Kieran y Herscovics, 1980; Kieran, 1981; Herscovics 1989; Boulton y Cooper, 1998)

La noción de equivalencia algebraica tiene que ver con las propiedades reflexiva, asimétrica y transitiva de la igualdad, esto no se evidencia en el entendimiento de los alumnos (Kieran, 1981; Boulton y Cooper, 1998; Godfrey y Thomas, 2003).

Muchos alumnos cuando se les dice piensa un número no pueden aceptar la representación de ese número como una literal (Kieran y Herscovics, 1980; Kieran 1989).

Esta es una clara evidencia de que exhiben problemas de interpretación en cuanto al significado simbólico de las literales (Küchemann, 1981; Usisnki, 1988; Akgün y Özdemir, 2006), en el enfoque de la actividad algebraica y la naturaleza de las respuestas. Una de las principales dificultades es la interpretación de estas letras como números generalizados (Booth, 1989; Boulton y Cooper, 1998), esto indica la concepción de los alumnos novatos de que las variables representan números específicos.

Para entender tal uso de la variable, los estudiantes:

> Reconocen e identifican una situación problema en la que se encuentra presente una cantidad desconocida que debe de ser determinada… Interpretan símbolos que aparecen en la ecuación como la representación de números específicos…Sustituyen variables en una ecuación con números para generar las relaciones numéricas reales…Simbolizan las cantidades desconocidas identificadas en una situación problema y usan tales símbolos para plantear la ecuación”. (Akgün, 2006, p. 48 y 49)

Otra consecuencia de la falta de entendimiento de la variable como número generalizado es que los estudiantes no operan con ellas (Filloy y Rojano, 1989), lo anterior da origen a confusiones y dificultades en el proceso de traducción de un PVEL.

Cuando los estudiantes, van aceptando que la variable denotada mediante una literal representa una cantidad desconocida, llegan a la generalización de que la variable vista como incógnita en una ecuación implica la sustitución de un número por una letra. En general, extraen el concepto de que la incógnita representa número o cantidad desconocida y la representan con la literal *x* (Kieran 1989).

Es necesario que el alumno reconozca la estructura de la ecuación como objeto matemático en el enunciado de los problemas verbales (Paralea, 1998). Se ha evidenciado que tienen problemas para representarla y simbolizarla, (Kieran 1989; Herscovics, 1989; Duval, 2006).

En un gran número de libros de texto se introduce el concepto de ecuación desde la solución de problemas verbales (Kieran y Herscovics, 1980). Sin embargo, esto ha fallado porque no hay un desarrollo adecuado del significado de las ecuaciones para los alumnos (Booth, 1989), especialmente en el simbolismo matemático referente a la relación de equivalencia (Kieran, 1981; Goodfrey, 2003).

En Aritmética, los alumnos emplean métodos informales para la traducción de los enunciados de problemas verbales dados en lenguaje común y el planteamiento de su expresión matemática (Booth, 1989; Paralea, 1998; Kieran, 1992; Puig, 1998). La estructura del problema involucra una operación [artimética] que no es la misma que la implicada en la solución del problema (Kieran, 1989). En cambio, el Álgebra requiere la formalización de procedimientos, está tensión aritmético-algebraica se considera como un obstáculo para poder avanzar hacia la generalización y en consecuencia a la formalización de los métodos de planteamiento y resolución de problemas (Kieran, 1981, 1989; Clement, 1982; Booth, 1989; Kieran y Filloy, 2008).

También, se ha observado que los estudiantes plantean la ecuación de izquierda a derecha en el sentido en el que leen el enunciado del problema (Kieran, 1989; Paralea, 1998).

Además, muestran serias dificultades para simbolizar algebraicamente las relaciones entre las cantidades presentes en el enunciado de un problema verbal descrito en lenguaje natural (Clement, 1982; Puig, 1998), debido a que tienen la tendencia a tratar las variables numéricas como si representaran objetos, en lugar de números; para poder entender esta problemática es necesario, dilucidar las fuentes cognitivas, que provocan estas concepciones erróneas en los estudiantes (Paralea, 1998; Clement, 1982; Kieran, 1989, 1992)

El reconocimiento y la representación de los objetos matemáticos resulta un problema para la mayoría de los estudiantes en clase de matemáticas, porque no se les ha enseñado a usar sistemas de representación físico-visual, como intermediarios para develar la información que no es clara a la luz del enunciado del problema. Las representaciones dadas en este sistema pueden ser: física, icónica, geométricas y diagramáticas. (Paralea y Socas, 1995; Puig, 1998; Duval, 1999).

El planteamiento de la ecuación no es una simple traducción de las frases del enunciado del PVEL expresadas en lenguaje común a su ecuación (Paige y Simon, 1966), este salto implica el entendimiento de la abstracción que el alumno hace de los objetos matemáticos, como un proceso reductivo, que puede conducir a la correcta simbolización.

En este tránsito, el alumno tiene que demostrar su capacidad para comprender y procesar el texto (Nathan, 1992), como manifestación de la comprensión lingüística, tanto del lenguaje natural, como del matemático, lo que exige a los alumnos la modificación de sus concepciones, para poder superar las dificultades, modificar los obstáculos y corregir los errores, implicados en el proceso de traducción, representación y simbolización de una ecuación (Kieran, 1989, 1992; Puig, 1998; Paralea, 1998; Duval, 2006; Filloy y Puig, 2008).

2.3 La semiótica de Raymond Duval

2.3.1 Representaciones semióticas, conversión y tratamiento

Duval señala la jerarquía y distinción que tiene el objeto matemático sobre sus diferentes formas de representación, existiendo una relación íntima entre éste y el concepto. Además, establece que la confusión entre el objeto y sus representaciones conduce a inutilización de los conocimientos adquiridos.

El autor, enuncia la existencia de dos tipos de representaciones a nivel psicológico que son:

> las mentales, es decir, todo aquel conjunto de imágenes y de concepciones que un individuo puede tener sobre un objeto, sobre una situación y sobre aquello que les está asociado. Las representaciones semióticas, es decir, aquellas producciones constituidas por el empleo de signos (enunciado en lenguaje natural, fórmula algebraica, gráfico, figura geométrica...) (Duval, 1999, p. 3-4)

Las representaciones semióticas cumplen las funciones de comunicación que se requieren en el desarrollo de toda actividad matemática o matematización (Duval, 1999), porque a través de la movilización de la representación, que el estudiante hace, se conforma e incrementa su cuerpo de conocimientos. Entonces, la representación es producida como el resultado del proceso de aprehensión e interiorización de la representación del objeto matemático.

Los procesos cognitivos, relacionados con las representaciones semióticas son: la semiosis, entendida como su producción y la noesis, que es la "aprehensión conceptual de un objeto, la discriminación de una diferencia o la comprensión de una inferencia" (Duval, 1999, p.4).

El incremento de la aprehensión y generación de representaciones semióticas, se refleja en un aumento de la capacidad cognitiva de los estudiantes. En contraste, un pobre manejo de este tipo de representaciones conduce al fenómeno de encapsulamiento que sucede cuando "el individuo no reconocen el mismo objeto a través de las representaciones que pueden darse en sistemas semióticos diferentes" (Duval, 1999, p.6). Este no reconocimiento, se manifiesta en un "fenómeno de no-congruencia entre las representaciones de un mismo objeto que provienen de sistemas semióticos diferentes" (Duval, 1999, p.6).

El proceso de sustitución puede ser aplicado a las representaciones semióticas, porque pueden ser convertidas en representaciones equivalentes en otro sistema semiótico, sin perder su significado. Lo anterior, da lugar a la operación cognitiva de conversión, que Duval define como un "cambio de la forma en que un conocimiento está representado". (Duval, 1999, p.14)

Para Duval la importancia de las representaciones semióticas radica en la relación de la diversidad de formas representación en las que el contenido matemático puede ser representado.

El autor sostiene que “la operación de conversión no es ni trivial ni cognitivamente neutra… no se puede hacer como si el contenido representado fuera separable de la forma que lo representa, como si la noesis fuera independiente de la semiosis.” (Duval, 1999, p.15).

Además del análisis del papel que juega la semiosis en el funcionamiento cognitivo en relación a las dificultades que exhiben los alumnos en el aprendizaje, Duval se refiere a la necesidad de revelar la “diferenciación entre representante y representado, en las representaciones semióticas” (Duval, 1999, p.15)

Duval retoma el análisis lingüístico de Benveniste quien indica que el lenguaje natural es “la organización semiótica por excelencia” (1931, p. 61, citado por Duval, 1999, p.15).

A partir de este punto de vista, Duval explica la existencia de tres actividades cognitivas asociado a los sistemas semióticos, las cuales son:

> En primer lugar, constituir una marca o un conjunto de marcas perceptibles que sean identificables como una representación de alguna cosa en un sistema determinado. Luego, transformar las representaciones de acuerdo con las únicas reglas propias al sistema, de modo que se obtengan otras representaciones que puedan constituir una ganancia de conocimiento en comparación con las representaciones iniciales. Por último, convertir las representaciones producidas en un sistema de representaciones en otro sistema, de manera tal que éstas últimas permitan explicitar otras significaciones relativas a aquello que es representado…
>
> La cuestión de la relación entre semiosis y noesis concierne únicamente a los sistemas que permiten las tres actividades de representación y no a todos los sistemas semióticos. (1999, p. 16)

Para analizar los obstáculos que aparecen en el aprendizaje de los alumnos y por ende en el desarrollo de sus conocimientos, Duval reconoce la existencia de tres procesos vinculados íntimamente: la diversificación de los registros de representación semiótica, la diferenciación entre el representante y el representado y la coordinación entre los registros de representación.

Para que una representación le permita a un sujeto acceder al objeto representado, es necesario que se cumplan dos condiciones inherentes a la conversión entre registros de representación diferentes

> que dispongan de al menos dos sistemas semióticos diferentes para producir la representación de un objeto, de una situación, de un proceso... y que puedan convertir "espontáneamente" de un sistema semiótico a otro las representaciones producidas, sin siquiera notarlo. Cuando estas dos condiciones no se cumplen, la representación y el objeto representado se confunden, y no se pueden reconocer dos representaciones diferentes de un mismo objeto como representaciones del mismo objeto. (Duval, 1999, p. 17)

Duval establece la diferencia entre la operación de tratamiento y conversión, a través del registro de representación en el que el sujeto la efectúa, al señalar que "el tratamiento es una transformación que se efectúa al interior de un mismo registro… un tratamiento, pues, no moviliza más que un sólo registro de representación…. La conversión es… una transformación que hace pasar de un registro a otro…" (Duval, 1999, p. 17).

La separación entre estas dos operaciones, evidencia la necesidad de la puesta en correspondencia de dos registros de representación para la conversión. La ausencia de la conversión entre representaciones conduce al fenómeno de encapsulamiento de los registros (Duval, 1999).

Duval toma en consideración los estudios realizados por diferentes autores para caracterizar las representaciones, partiendo de la definición de la relación de oposición entre lo interno/externo y la oposición consciente/no-consciente, que surge cuando el individuo observa algún objeto, muchas de las características son percibidas por este, muchos otros atributos se escapan de la percepción. Así, la consciencia y la objetivación están relacionadas por el pasaje de lo no-consciente a lo consciente. (Duval, 1999, p. 18)

En esta relación surge el papel de la objetivación como el “descubrimiento por el sujeto mismo de aquello que hasta entonces no sospechaba, incluso si otros se lo hubieran explicado” (Duval, 1999, p. 18).

Duval señala que toda representación consciente tiene un carácter intencional, lo que posibilita

> tener en cuenta el papel fundamental de la significación en la determinación de los objetos que pueden ser observados por un sujeto…es siempre a través de una significación que se hace la aprehensión perceptiva o conceptual de un objeto… que presupone la aprehensión de una multiplicidad de datos, cuya cantidad y variedad exceden la capacidad de aprehensión simultánea, la aprehensión de esta multiplicidad como una unidad simple sólo puede hacerse bajo el modo de significación. (1999, p. 19)

Respecto a la definición entre la oposición externo/interno, el autor explica que lo externo se conforma de las características de un sujeto que son visibles y lo interno lo que no es observable. En esta forma, surgen las denominadas representaciones externas, que son producidas por el sujeto, mediante la aplicación de un sistema semiótico, adquiriendo el carácter de representaciones semióticas. En contraste, las representaciones internas pertenecen al individuo en su carácter inconsciente y no son comunicadas (Duval, 1999).

En consecuencia, la representación semiótica es una representación consciente y externa que cumple las funciones de objetivación, expresión y de tratamiento intencional (Duval, 1999). Las representaciones semióticas describen los elementos del objeto que tienen un valor significante. Por lo tanto, existirá una diversidad de representaciones semióticas, que se pueden clasificar de acuerdo a la conservación de estos elementos constitutivos del objeto, estas son de dos tipos:

> las representaciones analógicas (las imágenes, por ejemplo, cuyos elementos conservan las relaciones de vecindad existente entre los elementos del modelo) y las representaciones no-analógicas, como las lenguas, que no conservan ninguna relación del modelo pero que pueden representar operaciones o transformaciones de éste (Bresson, 1987, p. 941-943, citado por Duval, 1999, p. 20)

Bajo esta perspectiva, Duval sostiene que toda actividad cognitiva precisa de dos tipos de tratamientos: los cuasi-instantáneos, que son los que el sujeto ejecuta en forma automática o inconsciente y los intencionales, en los que el sujeto tiene un control consciente. Ambos tipos de tratamientos son complementarios (Duval, 1999).

El desarrollo de los tratamientos cuasi-instantáneos tiene una correspondencia con la experiencia práctica que el sujeto tiene en un dominio. Adicionalmente, el autor señala que "el carácter inmediato o evidente de una aprehensión, perceptiva o conceptual, implica la puesta en acto de un conjunto de tratamientos cuasi-instantáneos." (Duval, 1999, p. 25). En cambio, los tratamientos intencionales solamente pueden ejecutarse en forma secuencial (Duval, 1999)

El desarrollo de tratamientos cuasi-inmediatos nuevos, surge como un progreso al procesos de aprendizaje, que depende del paso por la fase de tratamientos intencionales (Duval, 1999).

Una importante conclusión al respecto de la relación entre el aprendizaje y estos tratamientos, radica en que los tratamientos intencionales, procedurales o declarativos pueden ser combinados y transformados en tratamientos cuasi-instantáneos (Duval, 1999).

Las tres actividades cognitivas de la representación vinculadas a la semiosis (Duval, 1999) son:

1. La formación de representación en un registro semiótico de partida, a partir de la elección de caracteres y reglas que conforman lo que se busca representar.
2. El tratamiento de la representación semiótica, consistente en su transformación dentro del mismo registro semiótico.
3. La conversión de la representación semiótica, cuando la transformación produce una representación en un registro distinto al de registro de partida.

En estas actividades se mantendrá la posibilidad de transformación de las representaciones, manteniendo invariante su contenido (Duval, 1999).

Para Duval, la producción y transformación de las representaciones se manifiesta mediante las tareas de producción y comprensión, que se define y caracteriza como:

> La producción de una respuesta, sea un texto o un esquema, movilizan simultáneamente la formación de representaciones semióticas y su tratamiento. La comprensión de una cuestión, sea un texto o una imagen, movilizan o bien actividades de conversión y de formación o bien las tres actividades cognitivas. (Duval, 1999, p. 26)

Duval describe la actividad de formación de una representación semiótica como el proceso en el que se actualiza la descripción del objeto, empleando los elementos constitutivos del sistema semiótico.

Las etapas de la formación son:

> la designación nominal de objetos, la reproducción de su contorno percibido, la codificación de relaciones o de algunas propiedades de un movimiento…las representaciones así formadas están, implícita o explícitamente, articuladas en representaciones de orden superior: frase, imagen, esquema, tabla... (Duval, 1999, p. 26-27)

Duval amplía el concepto de tratamiento al referirse a él como:

> la transformación de una representación (inicial) en otra representación (terminal), respecto a una cuestión, a un problema o a una necesidad, que proporcionan el criterio de interrupción en la serie de las transformaciones efectuadas. Un tratamiento es una transformación de representación interna a un registro de representación o a un sistema. (Duval, 1999, p. 28)

La importancia del tratamiento interno en el registro de escritura simbólico-algebraico, radica en la posibilidad de sustitución “expresiones nuevas por expresiones dadas”. (Duval, 1999, p. 28)

En palabras del autor la conversión es explicada como:

> la transformación de la representación de un objeto, de una situación o de una información dada en un registro, en una representación de este mismo objeto, esta misma situación o de la misma información en otro registro. Las operaciones que habitualmente se han designado con los términos “traducción”, “ilustración”, “transposición”, “interpretación”, “codificación”, etc., son operaciones que hacen corresponder una representación dada en un registro con otra representación en otro registro. (Duval, 1999, p. 29)

En el contexto particular del planteamiento en una ecuación de los datos del enunciado de un problema verbal descrito en lenguaje natural Duval señala que:

> Es la conversión de las diferentes expresiones lingüísticas de las relaciones en otras expresiones de esas relaciones en el registro de una escritura simbólica… el contenido de la representación obtenida puede cubrir sólo muy parcialmente el de la representación de partida: la puesta en correspondencia que permite la conversión, frecuentemente se efectúa al precio de una selección en el contenido de la representación de partida y también al precio de una reorganización de sus elementos. (Duval, 1999, p. 29)

En consecuencia, para que pueda suceder la actividad de conversión, el sujeto debe diferenciar “el sentido y la referencia de los símbolos o de los signos, o entre el contenido de una representación y lo que ésta representa.” (Duval, 1999, p. 29).

Es necesario analizar la problemática inherente al establecer si la naturaleza de las actividades de conversión y tratamiento es la misma, con miras a la adquisición de aprendizaje (Duval, 1999).

La conversión de representaciones favorece la coordinación los registros de representación (Duval, 1999). Sin embargo, surgen problemas inherentes a los cambios de registro, para lo que es necesario analizar la forma en la que se ponen en correspondencia los registros de representación, la cual es establecida por la:

> correspondencia asociativa entre las unidades significantes elementales constitutivas de cada uno de los dos registros… [es decir,] una correspondencia término a término entre las unidades significantes respectivas… de las dos expresiones: es necesaria una reorganización de la expresión dada del registro de partida para obtener la expresión correspondiente en el registro de llegada. (Duval, 1999, p. 32)

2.3.2 Criterios de congruencia entre representaciones semióticas

Las actividades de conversión de representaciones no se pueden favorecer cuando la coordinación cambia la naturaleza de las unidades significantes a identificar y su modo de discriminación, que es la condición necesaria para toda actividad de conversión, y por tanto, para el desarrollo de la coordinación de los registros de representación." (Duval, 199, p.54)

Para determinar si dos representaciones son congruentes o no, se precisa iniciar por segmentarlas en unidades significantes, posteriormente, comparar la correspondencia de su contenido, en forma directa o por medio de una representación alterna que "codifique las representaciones a comparar". (Duval, 1999, p. 33). Una vez realizado lo anterior es necesario establecer si se cumplen o no, los tres criterios de congruencia siguientes:

> El primero es la posibilidad de una correspondencia "semántica" de los elementos significantes: a cada unidad significante simple de una de las representaciones, se puede asociar una unidad significante elemental…
>
> El segundo criterio es la univocidad "semántica" terminal: a cada unidad significante elemental de la representación de salida, no le corresponde más que una única unidad significante elemental en el registro de la representación de llegada…
>
> El tercer criterio es relativo a la organización de las unidades significantes. Las organizaciones respectivas de las unidades significantes de las dos representaciones comparadas, conduce a aprehender las unidades en correspondencia semántica según el mismo orden en las dos representaciones. (Duval, 1999, p. 34)

En consecuencia, la congruencia entre dos representaciones se establece cuando se cumplen estos criterios. (Duval, 1999)

2.3.3 Comprensión de textos

El primer paso para lograr la comprensión de un texto es el identificar el contenido cognitivo que lo conforma, que deriva en dos "niveles de organización, uno relativo a los conocimientos expresados y el otro relativo a las estrategias fundamentadas prioritariamente en los criterios de objetivación y no de comunicación." (Duval, 1999, p. 219).

La producción de un texto obedece a su contenido cognitivo y organización redaccional que permitirá definir "las variables redaccionales de un texto, es decir, las variables relativas a la relación entre estos dos niveles de organización y los modos de explicitación redaccional del contenido cognitivo." (Duval, 1999, p. 219).

La situación de lectura se determina a partir de los factores que cambian las interacciones entre un lector y un texto, que respectivamente son: "la distancia entre el contenido cognitivo del texto y la base de conocimientos del lector y… la diferencia entre la organización propia al contenido cognitivo del texto y la organización redaccional del texto". (Duval, 1999, p. 229).

El texto, compuesto por frases se define bajo la perspectiva lingüística por su autonomía y por su clausura. Las frases se definen además por sus componentes fonológico, sintáctico y semántico (Duval, 1999); deben tener una coherencia dentro de la organización del texto, para lo que es fundamental diferenciar,

> lo implícito en todo discurso en la lengua natural… significa que la continuidad de un discurso y, en consecuencia, la coherencia de un texto exige una actividad de inferencia que no depende sólo de las reglas propuestas de la lengua, es decir, de un registro de representación. La actividad de inferencia debe entonces apoyarse en una base de conocimientos presupuestos por el redactor del texto... (Duval, 1999, p. 221-222)

En consecuencia, la organización de un texto puede no ser congruente con la organización de los conocimientos que este texto moviliza. (Duval, 1999).

Todo texto, constituye una forma de discurso complejo. La noción de redacción, es la que permite analizar al texto en relación con su producción: la variabilidad redaccional explica el cambio en la forma que cada sujeto redacta un texto con una misma temática, en las que está presente,

> *un invariante que llamaremos el contenido cognitivo del texto*… que se define… como el conjunto de los conocimientos que son necesarios para la comprensión del tema tratado, independientemente de los que el texto movilice o presente… en referencia a los conocimientos de que dispone. (Duval, 1999, p. 223)

La base de conocimientos de los lectores, puede variar de acuerdo a su nivel y cuerpo de conocimientos, por lo tanto, incide directamente en la comprensión de un texto (Duval, 1999). Para explicar la variación redaccional es necesario, considerar que en un texto están presentes dos tipos de relaciones: lo que está explícito y lo que permanece implícito. Así, las variaciones redaccionales se refieren “a la manera como se explicita un contenido cognitivo en el texto” (Duval, 1999, p. 224).

La organización redaccional de un conjunto de frases en un texto, se relaciona directamente a un contenido cognitivo. Así, para poder comprender un texto es necesario realizar la segmentación y recontextualización.

En la primera etapa, el texto se divide en unidades provenientes de las palabras y las frases, es la primera operación para su comprensión, que supone la aprehensión de la frase con la integración en la memoria de corto plazo de la secuencia de las palabras. En la recontextualización, las unidades segmentadas no vuelven a su posición original, esta se reorganizan de acuerdo a el contenido cognitivo temático tratado. Es a través de la red de relaciones inherente a la organización redaccional del texto. Así, se propicia una deslinealización del texto.

Sin embargo, se mantienen la idea general o el contenido cognitivo del texto mediante la inferencia que permite hacer desaparecer las ambigüedades respecto a la lectura (Duval, 1999).

Duval clasifica la operación de recontextualización, empleando como criterio la globalidad empleada para reintegrar las unidades producto de la segmentación, en la siguiente forma:

> La *recontextualización cognitiva* moviliza esencialmente los conocimientos relativos a las situaciones, a los objetos o a las preguntas que el texto evoca, o que trata, independientemente de lo que la redacción del texto explicita…el texto es comprendido sólo a partir de lo conocido sobre el tema que evoca o trata… las preguntas que permiten la segmentación cognitiva están organizadas en una red que representa los componentes y la estructura de una acción o de una situación… Cada red determina las relaciones entre los lugares que pueden ocupar los segmentos del texto, permitiendo así la *efectuación simultánea de las operaciones de segmentación y de recontextualización…*
>
> La *recontextualización redaccional* es la operación que explicita todas las relaciones que tienen entre sí las unidades discriminadas por segmentación funcional…. La comprensión de un texto se basa siempre en dos operaciones fundamentales: su segmentación en unidades y la recontextualización de las unidades obtenidas por segmentación. Pero la efectuación de estas dos operaciones puede tomar formas diferentes. La combinación de las diferentes formas de segmentación y de recontextualización da la manera de clasificar los variados modelos de comprensión de textos que han podido elaborarse. (Duval, 1999, p. 229)

Los procedimientos que permiten identificar estas unidades dentro del texto, se relacionan con el razonamiento inductivo y deductivo, que se aplican para realizar el reacomodo de estas unidades significantes en una nueva redacción del texto, en la que se clarifique el contenido cognitivo central del texto. El proceso inductivo corresponde a la organización redaccional porque existe un desconocimiento por parte del sujeto del contenido cognitivo que moviliza el texto. En contraste, el proceso deductivo reposa sobre un cuerpo cognitivo que rebasa el contenido cognitivo que el texto moviliza. En palabras de Duval, la comprensión del texto:

> *depende sólo del proceso inductivo* [porque es una forma de] comprensión que se limita a lo que el texto explicita de las situaciones… o los problemas que son tratados, sin que implique una real comprensión… en sí mismos. Al contrario, una *comprensión que dependa sólo del proceso deductivo* es la comprensión real de los fenómenos o de los problemas que el texto trata, pero en la cual la comprensión de la manera como el texto los explicita es secundario. Y una *comprensión que dependa de la interacción de estos dos procesos* es una comprensión evolutiva, es decir, que provoca una modificación sea en la comprensión de la organización del texto o bien en la de las situaciones, los fenómenos o los problemas que el texto trata. *La comprensión evolutiva es la que permite un aprendizaje a través de la lectura.* (Duval, 1999, p. 232)

Para poder llevar a cabo la comprensión efectiva del texto, es fundamental considerar los conocimientos previos del lector y la situación de lectura que se conforma por el "conjunto de parámetros que juegan simultáneamente en la selección de un proceso de comprensión, en la exigencia de su efectuación y en sus logros" (Duval, 1999, p. 232). Los dos factores que inciden en la efectividad de la comprensión del texto son: el grado de explicitación y la importancia de los elementos que se han dejado implícitos. En la redacción de un texto la información que es implícita se dice que esta redaccionalmente mencionada y es a partir de este tipo de información, que surgen las dificultades en la comprensión de un texto, debido a que el contenido cognitivo no queda del todo claro.

2.3.4 Representaciones no discursivas y su uso para la comprensión de enunciados de problemas matemáticos

Duval, destaca que este análisis de texto “puede extenderse a todos los enunciados de problemas de matematización” (Duval, 1999, p. 233), en la que la traducción del enunciado a su expresión simbólica, exige un cambio de registro de representación del lenguaje natural al simbólico algebraico (Duval, 2006). Así, la comprensión del texto del enunciado dependerá de su extensión y linealidad que permitirá una aprehensión parcial y sucesiva de las unidades discriminadas. La recontextualización precisa, una aprehensión de las unidades obtenidas en las que “se puedan percibir las relaciones con otras unidades más distantes” (Duval, 1999, p. 238). En consecuencia, el paso del texto al discurso que lo analiza no es directo, por lo que se necesita la producción de una “una representación no discursiva que sirva de representación intermediaria entre el texto a comprender y el discurso que lo explica” (Duval, 1999, p. 238).

Las representaciones intermedias para lograr el cambio de registro y por ende una comprensión efectiva del texto, se dividen en dos tipos: las que están centradas en el contenido cognitivo, que corresponden a la recontextualización cognitiva y las que se centran en el contenido redaccional, que responden a la segmentación funcional del texto.

Las representaciones no discursivas centradas en el contenido cognitivo son definidas por Duval como:

> las que representan las relaciones entre los objetos, los estados, las acciones, los conceptos... Las redes semánticas, los escritos, los escenarios... Estas representaciones pueden promover registros semióticos diferentes... La característica de estas representaciones es que siempre son relativas a un contenido cognitivo determinado….(Duval, 1999, p. 239)

Las representaciones no discursivas, exhiben un carácter múltiple y no existe un procedimiento específico para su producción, porque su elaboración depende del contenido cognitivo a representar.

En el contexto de los problemas matemáticos, el autor describe el cambio de registro de representación y los tratamientos al interior de cada registro para la comprensión de la redacción del texto del enunciado que es redactado para:

> aplicar un tratamiento matemático determinado…a una situación extra-matemática del entorno económico, social o físico. La descripción que el enunciado da de la situación escogida debe suministrar todas las informaciones necesarias para plantear el tratamiento matemático a aplicar... El contenido cognitivo de los enunciados de problemas de matematización está constituido por el tipo de tratamiento matemático a aplicar. Sólo puede variar la escogencia de las informaciones necesarias para plantear el tratamiento y la manera de explicitarlas. Enunciados de problemas muy diferentes pueden entonces tener el mismo contenido cognitivo si su resolución depende de la aplicación del mismo tratamiento (Duval, 1999, p. 239)

También, revela que aun cuando los tratamientos se ejecuten en forma efectiva, la comprensión del enunciado del texto puede seguir creando dificultades, en lo referente al establecimiento de las relaciones entre las unidades significantes del texto.

El uso de las representaciones no discursivas centradas en el contenido cognitivo, ofrecen una alternativa para poder subsanar estas dificultades, al establecer las relaciones no explícitas entre las unidades significantes. La elaboración de la representación no discursiva, es una forma de recontextualización redaccional del texto (Duval, 1999). Este tipo de representaciones permiten evidenciar la información que no es explícita o redaccionalmente mencionada en el texto.

2.3.5 Traducción del enunciado de un PVEL del lenguaje natural a la ecuación algebraica desde la semiótica de Duval

La traducción de un enunciado de un problema verbal a una ecuación, envuelve, por un lado los tratamientos matemáticos, como la sustitución de las unidades significantes de la representación semiótica al interior de un mismo registro. Por otro lado, precisa una trasformación de la representación, lo que exige un cambio del registro, que es inherente a la actividad de matematización (Duval, 1999, 2006).

Esta conversión es cognitivamente más importante porque “conduce a una economía de medios… potencia la generalización” (Duval, 2006, p. 149) para poder plantear la ecuación que conduzca a la solución, será necesario que el alumno sea capaz de reconocer el mismo objeto matemático en el contexto del enunciado del problema descrito en lenguaje común. Además, de

> usar menos símbolos que objetos para referirse a ellos. Para ello debe escribir una nueva expresión usando una operación aritmética y explicitar una relación para traducir el significado de la frase mediante una ecuación. Así, obtenemos una segmentación semántica de datos problemáticos en la expresión lingüística y en la expresión algebraica; es un primer salto. Pero también hay un segundo salto: en el tratamiento algebraico de los símbolos de operaciones prevalecen sobre los símbolos que representan los números… Es esencial que los estudiantes comprendan que las letras significan números, no objetos. (Duval, 2006, p.146-147)

El planteamiento de la ecuación a partir del enunciado encierra dos objetos matemáticos: “cantidades desconocidas y relaciones entre cantidades conocidas y desconocidas” (Duval, 2006, p. 154).

La traducción del enunciado engloba dos operaciones de carácter discursivo:

> 1. Volver a designar las cantidades desconocidas en el enunciado…pero utilizando una sola letra… para referirse a estos dos objetos. Este primer tipo de operación discursiva introduce pues la designación funcional que no existe en lenguaje natural, ya que es necesario una frase para describirla. Lo que se llama "elección de la incógnita" corresponde de hecho a una operación de reducción del léxico utilizable y a un renombramiento funcional de los otros objetos.
>
> 2. Formular una ecuación. Pero para formular una ecuación es necesario... establecer una relación de equivalencia entre las cantidades desconocidas designadas y la cantidad conocida. Pero la expresión de esta relación varıa considerablemente de un enunciado a otro. Puede estar indicada por una frase o por un verbo…A veces no hay ninguna formulación explıcita que indique esta relación (Duval, 2006, p.154)

Es evidente, que la noción que el alumno debe tener de variable en el contexto de las ecuaciones lineales es ambivalente, por un lado corresponde a un número generalizado, entendido como una cantidad desconocida, al momento del planteamiento de la ecuación y en la etapa de resolución corresponde a un número único que satisface la ecuación.

También, es un requisito indispensable que se establezca una relación entre esa incógnita y los datos que proporciona el enunciado del problema. Sin embargo, la dificultad estriba en el reconocimiento de esta cantidad desconocida en el contexto del problema descrito en lenguaje natural y el establecimiento de la relaciones internas con los demás datos que proporciona el enunciado del problema.

En este proceso el alumno debe identificar el contenido cognitivo del texto, para hacer una segmentación de las frases y palabras en las unidades significantes que engloban la noción del objeto matemático, para posteriormente, establecer las relaciones internas entre ellas.

En esta etapa del proceso, es donde entra el uso de las representaciones no discursivas o “representaciones auxiliares que pueden ayudar a los estudiantes a entender la forma de traducir la información dada.” (Duval, 2006, p. 164).

Finalmente, deberá simbolizar estas relaciones en una expresión algebraica que engloba la relación de equivalencia, que en términos del enunciado del problema está especificada en una frase o un verbo, lo que constituye otro punto de dificultad para los estudiantes (Duval, 1999; 2006), porque precisa la aplicación de tratamientos para la sustitución de los elementos que conforman las relaciones internas, por símbolos: números, literales, operadores y el símbolo de igual, que son los elementos conformacionales de la expresión algebraica denominada como ecuación. En este punto la representación no discursiva seleccionada deberá satisfacer la condición de congruencia que precisa “la doble descripción de texto… que corresponde a la INTERSECCIÓN DE DOS DETERMINACIONES SEMÁNTICAS DIFERENTES…” (Duval, 2006, p. 165), es decir, el significado flexible que tiene relación de equivalencia en el sentido del texto, a través del verbo o frase que la describe y el significado concreto que tiene como igualdad en el contexto simbólico algebraico de la ecuación formulada.

2.4 Generalidades en el diseño del ambiente de aprendizaje

2.4.1 Modelo de ambientes de aprendizaje

Bransford, Brown y Cocking (1999) propone que el diseño de un ambiente de aprendizaje implica la modificación de los paradigmas que el docente posee respecto a los contenidos que se enseñan a los estudiantes, las estrategias que emplea para enseñarlos y las formas que tiene para evaluar que los alumnos han adquirido una serie de conocimientos y habilidades derivados de los contenidos enseñados.

Los autores señalan que el cambio en estas concepciones conduce a que el docente prospecte nuevas metas educativas que se materialicen en el diseño de un ambiente de aprendizaje que relacione sistemática y equilibradamente a: la comunidad, el escolar que aprende, el conocimiento y la evaluación (Bransford y Brown, 1999).

2.4.1.1 Centrado en el estudiante

El ambiente de aprendizaje se centra en el sujeto que aprende porque el docente debe poner especial atención a los conocimientos, habilidades, concepciones y actitudes previas que el estudiante exhibe ante la comunidad establecida en el espacio escolar (Bransford y Brown, 1999). En consecuencia, el docente puede emplear la evaluación diagnóstica como un punto de partida en el diseño del ambiente de aprendizaje (Bransford y Brown, 1999) debido a que le permitirá determinar el nivel inicial de conocimientos del estudiante, los errores conceptuales que presenta con respecto a los contenidos a abordarse durante la instrucción y así, diseñar tareas ricas que le permitan a los escolares enlazar sus conocimientos previos con los nuevos.

Los investigadores explican que el lenguaje y el discurso son componentes esenciales en el diseño de una ambiente de aprendizaje centrado en el individuo que aprende (Bransford y Brown, 1999). En este ámbito el docente debe atender al tipo de léxico que los estudiantes emplean, que en un primer momento puede ser informal porque es producto de una comunidad que se encuentra inmersa en una cultura específica.

Sin embargo, al paso de la instrucción este lenguaje debe ser gradualmente modificado y llevado al terreno del discurso científico. En este proceso de formalización el estudiante crea, modifica y construye un nuevo lenguaje a partir de la resignificación de los elementos que componen su cuerpo cognitivo y conceptual.

En esta resignificación cognitivo-lingüística se intersectan los componentes del ambiente de aprendizaje que están centrados en el que aprende y los que se enfocan en los conocimientos (Bransford y Brown, 1999), porque el proceso de aprendizaje inicia con la modificación de las concepciones iniciales de los alumnos respecto a un contenido u objeto específico y la creación del nuevo significado de este.

2.4.1.2 Centrado en los conocimientos

El lenguaje y las habilidades son una forma en la que los escolares manifiestan sus conocimientos. En consecuencia, el docente debe guiar y monitorear el desarrollo de las habilidades metacognitivas de los estudiantes, con miras a que el alumno sea capaz de: resolver problemas al transferir y aplicar los conocimientos que ha adquirido al paso de la instrucción, conducir un aprendizaje autónomo basado en la comprensión y desarrollar las grandes habilidades del pensamiento (Bransford y Brown, 1999).

En este contexto, los autores exponen que es indispensable que el docente considere los contenidos y el tipo de tareas que le permitan al escolar el desarrollo de una comprensión a profundidad de los conceptos, objetos, hechos, fenómenos y procesos propios de una disciplina (Bransford y Brown, 1999).

El aprendizaje a profundidad implica la construcción del sentido y significado de tales informaciones por parte del estudiante (Bransford y Brown, 1999) que se manifiestan a través su discurso oral u escrito, en el que verbalizan la conexión entre los conocimientos adquiridos, especifican las diferentes formas de representarlos y explican diferentes fenómenos o procesos que implican dichos conocimientos.

2.4.1.3 Centrado en la evaluación

En consecuencia a lo anteriormente expuesto, el docente debe diseñar una evaluación que le permita determinar el grado de avance en la adquisición y construcción de los conocimientos que cada uno de los estudiantes que conforman la comunidad poseen con respecto a los contenidos que contempla la instrucción (Bransford y Brown, 1999). La evaluación del proceso de aprendizaje o formativa se prioriza sobre la evaluación aditiva o de los resultados.

La retroalimentación es un elemento esencial de la evaluación formativa (Bransford y Brown, 1999), porque permite que los estudiantes conozcan su grado de avance en el proceso de aprendizaje, con lo que se propicia el autoconocimiento en cuanto a lo que el escolar es capaz de hacer y las áreas en las que se requiere que ponga más énfasis.

Bransford, Brown y Cocking (1999) destacan que el docente debe diseñar una evaluación formativa orientada a profundizar en la compresión de los conceptos, hechos, fenómenos y procesos abordados en la instrucción y no en su memorización, por lo que puede emplear pruebas de desarrollo escrito que contengan problemas que se pueden resolver de diferentes maneras, así los estudiantes deberán hacer una comparación de las posibles soluciones y podrán explicar las diferencias y semejanzas existentes.

Los autores sugieren el portafolio de evidencias de aprendizajes como otro instrumento que permite llevar a cabo la evaluación formativa. En este portafolio, el estudiante conserva los trabajos producto de las tareas desarrolladas durante la instrucción, con lo que al momento de la retroalimentación y evaluación aditiva, puede rastrear su nivel de avance en el aprendizaje de los contenidos abordados en la instrucción (Bransford y Brown, 1999).

Los investigadores destacan que las tareas ricas permiten equilibrar el conocimiento de los contenidos y el desarrollo de las habilidades que el escolar debe exhibir como producto de la adquisición y construcción de conocimientos, después haber recibido la instrucción (Bransford y Brown, 1999). En consecuencia, estas tareas tienen una doble función: permiten evaluar el desarrollo proceso de aprendizaje y evidenciar sus resultados.

2.4.1.4 Centrado en la comunidad

Finalmente, Bransford, Brown y Cocking (1999) explican que el docente necesita considerar en el diseño del ambiente de aprendizaje a la comunidad, conformada por los estudiantes que se encuentran en el espacio del salón de clases. Dentro de esta comunidad existe una serie de normas no escritas que se ponen de manifiesto durante la instrucción (Bransford y Brown, 1999), estas normas son producto de la combinación de las diferentes concepciones que el docente tiene respecto a la educación, la enseñanza y el aprendizaje, el curriculum real y el oculto de la institución en la que se imparte la cátedra, la experiencia y concepciones producto de los aprendizajes previos y de las normas particulares de vida que tiene los integrantes de la comunidad.

Por lo tanto, estas normas inciden directamente en la promoción o estancamiento del aprendizaje (Bransford y Brown, 1999), por lo que el docente debe clarificar sus concepciones, expectativas y prácticas respecto a las reglas o normas que deben predominar durante el proceso de instrucción.

Además, constantemente deberá observar cuales son las normas que están impactando en forma negativa en el proceso de aprendizaje, ya sean producidas por el mismo o por los estudiantes e idear estrategias para su modificación.

2.4.2 Diseño del ambiente de aprendizaje para la instrucción enfocada en la traducción de los PVEL

Las tareas matemáticas son parte de la actividad que se desarrolla en ambiente de aprendizaje, permiten abordar una idea matemática en particular (Stein y Schawan, 2011), que promueva en los estudiantes la ampliación y modificación de sus concepciones respecto a los objetos de estudio. Además, de que les permita establecer conexiones entre estas concepciones (NCTM, 2000).

En el presente trabajo se buscó diseñar tareas matemáticamente ricas que den oportunidades de aprendizaje para todos los alumnos (NCTM, 2000, CCSSI, 2012).

Estas tareas se prospectaron enfocándose en los contenidos y su significado para quienes las desarrollan (Kieran, 2008). Entre sus principales características destacan su flexibilidad, apertura, contextualización en relación a la experiencia y proximidad de los intereses de los alumnos (Yoshinori, 2012; Stein y Schwan, 2011).

Este tipo de tareas tienen la doble función de promover el aprendizaje y servir como medio de evaluación (NCTM 2000; CCSSI; 2012).

El diseño de la tarea, parte de una relación entre el conocimiento nuevo que se busca que el alumno construya a través de la resignificación, ampliación y formalización con sus conocimientos previos (Bransford y Brown, 1999).

La tarea es una propuesta que desencadenará una o varias actividades, entendidas como procesos mentales que se traducen en acciones específicas (Stein y Schwan, 2011), que el alumno exhibe como resultado del aprendizaje alcanzado; este no es uniforme para todos (Grabinger y Dunlap, 1995), obedece a progresiones propias de cada estudiante (CCSSI, 2012), producto de los procesos individuales del pensamiento.

En este orden de ideas, resulta fundamental que todos alumnos entiendan los elementos de una tarea a abordarse durante el proceso de instrucción, para que puedan dimensionar lo que se espera de ellos y se minimice la ansiedad (CCSSI, 2012; Stein y Schwan, 2011).

En complemento a la anterior idea, en el ambiente de aprendizaje se busca la negociación de significados de las ideas matemáticas medulares de los contenidos abordados, que a su vez son consecuencia de la naturaleza de las Matemáticas bajo la que se diseñó la tarea (Bransford y Brown, 1999).

El enfoque de Matemáticas con la que diseñaron las tareas del presente trabajo, se centra en las ideas propuestas por Raymond Duval (1999; 2006), referentes al proceso de matematización implicado en la traducción de los enunciados de los PVEL descritos en lenguaje común y su relación con la habilidad de los alumnos para cambiar del registro de representación del lenguaje natural al algebraico, empleando representaciones no discursivas, a través de las actividades de conversión y tratamiento.

En cuanto a la estructuración de cada tarea, se especifica la relación entre el conocimiento a abordarse y el previo, que se traduce en el contenido base de la tarea principal, que a su vez, se subdivide en tareas menores que responden al orden de la progresión cognitivo-conceptual que se pretende que el alumno transite (CCSSI, 2012; Bransford y Brown, 1999).

En un primer momento, los tratamientos matemáticos iniciales de estas tareas son de carácter intencional, siendo la pretensión superior que se transformen en tratamientos cuasi-inmediatos (Duval, 1999) y metacognitivos, que conduzcan a la automatización (Bransford y Brown, 1999). En este salto, está siempre presente la inter-conversión entre los registros de representación, que implica una conexión entre conceptos y procedimientos y el entendimiento del significado del objeto matemático estudiado, independientemente de su representación (Duval, 2006).

La forma de presentar la tarea a los alumnos, depende en gran medida de la representación inicial y el registro de partida; en relación con las actividades de conversión y tratamiento necesarios para generar la representación final (Duval 1999, 2006). La presentación de la tarea propicia la aparición de las múltiples y simultáneas interacciones que surgen en el ambiente de aprendizaje al interior del aula. Estas interacciones pueden ser: alumno-alumno, alumno-profesor y alumno-tarea (Planas, 2009). Esta última implica la forma de trabajo seleccionada para desarrollar la tarea, que pretendiendo ser matemáticamente rica no obedece a contextos limitados por el tiempo o el programa, debido a que requieren la maduración en la reflexión por parte de los alumnos entorno a sus procesos de aprendizaje (Stein y Schwan, 2011; Yoshinori, 2012).

Los métodos de trabajo combinan la forma individual, en grupo pequeño y grupo operativo (Panitz, 1995; NCTM, 2000; Planas, 2009, 2011; Bórquez, 2012; López y López, 2003), que se implementan en diferentes momentos de una sesión, dependiendo del propósito de la progresión temática que se esté desarrollando.

En la forma individual, el alumno trabaja con tareas diferenciadas, que le permiten al profesor visualizar, orientar y evaluar la adquisición de conocimientos, el despliegue de habilidades y las formas de razonamiento empleadas por el alumno (NCTM, 2000).

El trabajo individual promueve la reflexión en los estudiantes en torno a sus procesos de aprendizaje, significado y construcción de los conceptos, manejo de los procedimientos y la aplicación del conocimiento adquirido a la resolución de problemas (CCSSI, 2012). Los métodos de trabajo individuales en combinación con tareas específicas, se aplican dentro y fuera del aula.

El trabajo en grupo pequeño, es una forma de trabajo colaborativo (Panitz, 1995) que conduce a la construcción del conocimiento (Bórquez, 2012) la unificación de los significados, a través de su socialización y negociación (Skovmose, 2013), producto de las interacciones cara a cara (Planas, 2011).

El trabajo en grupo pequeño en el aula, se traduce en el proceso de estimular la actividad de compartir, negociar y comparar nociones, opiniones e ideas y la conformación de las explicaciones matemáticas entre todos los miembro del equipo, en el que cada individuo distingue su función y lugar, lo que permite una aportación de conocimientos proporcional a la exigencia del mismo equipo (Skovmose, 2013).

El trabajo cooperativo (Panitz, 1995) se basa en un intercambio de opiniones abierto, en el que el diálogo efectivo es crucial, porque a través del lenguaje se construyen y dan sentido a las ideas que proponen los miembros de la comunidad.

El trabajo a nivel grupal que se pretende alcanzar, corresponde a la forma, organización y característica de los grupos operativos (Pansza, 1986) que permiten la adaptación del sujeto al grupo y del grupo con el sujeto (NCTM, 2000) lo que implica un cambio personal y la creación de nuevos vínculos con su grupo de trabajo. El trabajo grupal se logra mediante los debates direccionados en gran grupo, una vez que se ha reflexionado individualmente y se ha debatido en pequeño grupo.

Las técnicas empleadas bajo la forma de trabajo individual fueron: documento en un minuto, evaluación en una palabra (Herrán, 2011), mapa conceptual (Bixio, 1998). En la modalidad grupo pequeño las técnica utilizadas correspondieron a: el estudio del caso y solución estructurada de problemas (NCTM 2000; Eggen, 2005). A nivel grupal la utilizada en todas las sesiones fue el debate (Villalobos, 2002).

Las representaciones no discursivas que se emplearon en este trabajo para apoyar la traducción de los enunciados de los PVEL del lenguaje natural a su correspondiente ecuación algebraica, fueron de tres tipos: geométricas (Puig y Cerdán, 1988; Paralea y Socas, 1995) que son representaciones lineales; diagramas relacionales (Clement, 1982; Puig y Cerdán, 1988;); en las que se usan nodos y flechas; y matriciales (Puig y Cerdán, 1988; Bruño, 2011) que corresponden a tablas de doble entrada en los que se visualiza el estado de las cantidades involucradas en la formación de las relaciones entre la incógnita y las cantidades conocidas. En el Anexo 3 se especifican a detalle los gráficos y características generales de estos tres tipos de representaciones no discursivas.

La evaluación de los aprendizaje alcanzados por los alumnos, está íntimamente conectado con las características de las tareas matemáticamente ricas (NCTM, 2000; CCSSI, 2012), porque como producto de la adquisición de conocimientos y el desarrollo de habilidades, se generar las evidencias que permiten valorar el progreso de los estudiantes en este proceso, es decir, constituyen la evaluación formativa (Lafourcade, 1969; Pimienta, 2008).

La relación entre los instrumentos y los criterios es fundamental para la evaluación (Pimienta, 2008). Los instrumentos corresponden al tipo de evidencias generadas, producto del método de trabajo empleado en el desarrollo de la tarea, que responden a criterios cualitativos y cuantitativos específicos, que a su vez están subordinados a los propósitos de la tarea y al desarrollo de la progresión cognitiva (Bransford y Brown, 1999, CCSSI, 2012).

Un componente esencial en todo proceso de evaluación, es la retroalimentación continua por parte del profesor y de los pares (Pimienta, 2008), porque desencadena la reflexión en los estudiantes, en torno a sus procesos de aprendizaje.

La retroalimentación por parte del docente, puede generar cierto grado de ansiedad en el alumno (Planas, 2009), especialmente a nivel medio superior, debido al proceso de cambio psicoemocional en el que se encuentra el adolescente, que resulta en un factor que impacta directa y constantemente en el ambiente de aprendizaje (Bransford y Brown, 1999). En contraste, la evaluación entre pares, es una forma de evaluación que es aceptada por los estudiantes más naturalmente (Sancho, 2014), por lo tanto, debe estar diseñada en forma adecuada por parte del docente para que logre su propósito.

La autoevaluación resulta como producto de la retroalimentación y la evaluación entre pares (Bixio, 1998), porque es el resultado de la reflexión del alumno respecto a su aprendizaje.

CAPÍTULO III.
METODOLOGÍA

Introducción

El propósito de este capítulo consiste en describir las acciones prácticas que se llevaron a cabo para la realización de este trabajo. Estas acciones están orientadas a determinar de qué manera y en qué proporción la instrucción fundamentada en el uso de representaciones no discursivas del tipo geométrico, gráfico y matricial, permite revelarle, a los alumnos que cursan el primer semestre del bachillerato, la información que no es explícita en el enunciado de un problema verbal de ecuaciones lineales. En este capítulo se expone brevemente la conexión entre la investigación y la didáctica, se describen resumidamente diferentes tipologías de la investigación con las que se puede hacer una caracterización del presente trabajo. También, se explican las etapas de diseño metodológico, tanto para la instrucción como para la evaluación, su implementación, la recopilación, procesamiento y el análisis de los resultados de la evaluación.

3.1 El vínculo de la investigación y la didáctica

La investigación en un sentido estricto consiste en un proceso de búsqueda para dar respuesta a una problemática respecto a un objeto de estudio previamente delimitado (Briones, 2003; Martínez, 2006), [es decir, es un proceso que permite generar un conocimiento factual, formal y científico mediante la observación (Quiroz, 2003)]. Emplea una serie de estrategias, métodos y técnicas con las que pueden recolectar, procesar, sistematizar y analizar una serie de datos producto de las observaciones realizadas (Rojas, 1991).

La didáctica es la ciencia que estudia todo lo relacionado al proceso educativo, es decir, todos los factores que influyen e intervienen en el diseño de un ambiente de aprendizaje (Bransford y Brown, 1999), en este proceso el docente emplea estrategias, métodos y técnicas para diseñar, implementar, analizar y evaluar el proceso de enseñanza-aprendizaje (NCTM, 2000; Quiroz, 2003).

La investigación y la didáctica comparten características metodológicas en común (Quiroz, 2003): ambas emplean el método científico, establecen un objeto de estudio y plantean interrogantes en torno a este que intentan responder. El diseño metodológico considera estrategias, métodos y técnicas que producen resultados que tras su análisis, permiten caracterizar al objeto de estudio. Esta relación metodológica entre la investigación y la didáctica propicia que los docentes transformen su práctica en un proceso de investigación, al alinear indirectamente los propósitos de enseñanza-aprendizaje como parte de los propósitos de investigación en torno a alguna cuestión o problemática de interés observada en el proceso educativo (Quiroz, 2003; Briones, 2003).

3.1.1 Metodologías de investigación en Educación Matemática

En Educación Matemática existe una multiplicidad de metodologías empleadas para el diseño de una investigación (Schoenfeld, 2000), esta diversificación es consecuencia de la combinación de elementos provenientes de metodologías de varias disciplinas como son la Pedagogía, la Psicología, la Sociología, la Historia, la Antropología, la Lingüística y las Matemáticas (Santos, 2006). Es decir, todas estas disciplinas abordan el mismo objeto de estudio desde sus perspectivas particulares. En consecuencia, es necesario que el docente tenga cierta formación como investigador, lo que implica un conocimiento básico de la metodología de investigación puramente científica, además de que tenga la habilidad de aplicar este cuerpo cognitivo a su práctica docente (Quiroz, 2003). Así, simultáneamente, el objeto de instrucción se transforma en objeto de investigación.

En la Figura 2, se presenta un diagrama que muestra un resumen de los tipos de investigación (Rojas, 1991; Basoredo, 2008; Corral, 2010; Quiroz, 2003; Briones, 2003), que nos permitirán elaborar la caracterización metodológica del presente trabajo que se describe en la siguiente sección.

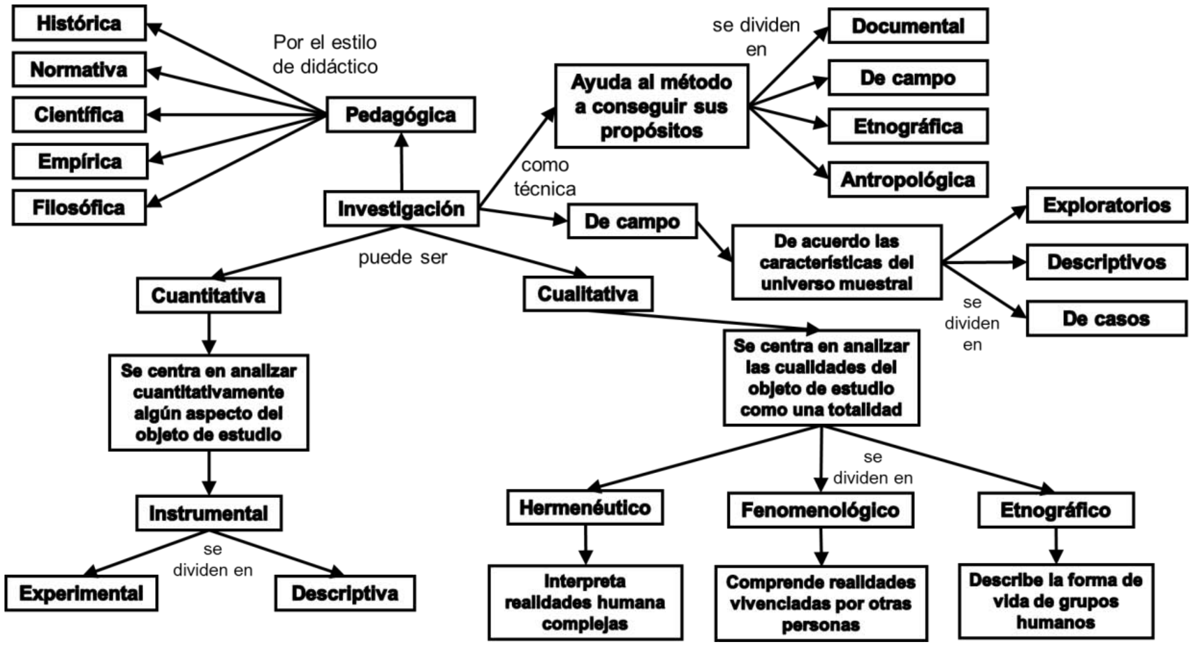


Figura 2. Tipos investigación.

3.2 Caracterización metodológica

Para poder realizar una caracterización del trabajo desarrollado desde el punto de vista metodológico, es necesario precisar algunas consideraciones para clarificar y delimitar hasta qué punto el presente trabajo puede ser considerado de investigación.

En la perspectiva pedagógico-didáctica el presente trabajo puede considerarse una intervención en la instrucción, en la que se pretende mejorar y modificar el proceso que los alumnos de primer semestre de bachillerato realizan en cuanto a la traducción del enunciado de un PVEL del lenguaje natural y su correspondiente conversión a la ecuación que haga factible su solución, empleando como mediador en la transformación el uso de representaciones no discursivas (Duval 1999; 2006). Para tal fin, empleamos la metodología descrita por Bransford y Brown para el diseño del ambiente de aprendizaje (1999), además de tratar de incorporar elementos de los estándares que propone el NCTM (2000).

En virtud de que esta intervención busca modificar un aspecto específico de la instrucción [traducción del enunciado y su conversión a un forma simbólico-algebraica], surgen en torno a este cambio y sus resultados, una serie de interrogantes que transforman nuestro trabajo pedagógico en un trabajo de investigación (Schoenfeld, 2000).

Este trabajo puede considerarse interdisciplinario (Santos, 2006), debido a que combina aspectos teóricos y prácticos provenientes de diversas áreas del conocimiento. En el aspecto matemático se consideraron los contenidos referentes a variable como incógnita, igualdad, ecuación, y problema verbal, como objetos matemáticos incorporando su naturaleza, características, propiedades, representaciones y operaciones (Potápov y Alexándrov, 1980; Baldor, 1997; Tartákov, 2009). En el ámbito lingüístico (Ricoeur, 1995; Duval, 1999, 2006) se trató de introducir los aspectos necesarios para la traducción del enunciado del PVEL descrito en el lenguaje común, como son: la redacción, la estructura del texto y su segmentación sintáctica y semántica, que son indispensables para su comprensión. En el aspecto pedagógico y didáctico se buscó incorporar todos los elementos teóricos y prácticos necesarios para fundamentar la intervención en la instrucción (CCH, 1999; Bransford y Brown, 1999; NCTM, 2000; Stein y Schwan, 2011; CCSSI; 2012). En el aspecto filosófico fue necesario analizar el carácter epistemológico de los objetos matemáticos implicados en un PVEL (Godino y Batanero, 2009), revisar algunas las corrientes filosóficas que sustenta el marco teórico semiótico propuesto por Raymond Duval (1999) [así como diversas teorías del aprendizaje, las corrientes en la didáctica y los paradigmas en los métodos de investigación].

Tomando como referencia las tipologías descritas en el diagrama de la Figura 2, trataremos de caracterizar algunos aspectos del trabajo realizado desde la perspectiva de la investigación.

La investigación realizada fue de tipo social (Rojas, 1991) y de campo (Rojas, 1991; Quiroz, 2003; Rosado, 2003) porque de alguna manera se buscó establecer relaciones e interacciones entre los factores sociológicos, psicológicos y educativos dentro de un grupo social conformado por estudiantes del primer semestre de bachillerato del CCH. También, es posible considerar el trabajo como investigación descriptiva (Rojas, 1991; Quiroz, 2003; Rosado, 2003) porque se pretendió hacer una descripción, análisis e interpretación de los resultados obtenidos tras la instrucción para poder dar respuesta a las preguntas de indagación previamente planteadas.

En cuanto a los paradigmas de los que derivó la metodología de investigación (Quiroz, 2003; Martínez, 2006), se podría considerar como fenomenológica, debido a que se trató de caracterizar la realidad vivencial del grupo de estudio en cuanto a su naturaleza, experiencia y estructura. Se incorpora parcialmente el paradigma hermenéutico (Quiroz, 2003; Martínez, 2006), porque se realizó una interpretación de la realidad vivencial a través del análisis de los resultados derivados de instrucción.

Fundamentalmente, el análisis de los resultados se realizó mediante técnicas cualitativas (Rojas, 1991; Briones, 2003; Quiroz, 2003) como el análisis de contenido por racimos (Bermúdez, 1986) para: caracterizar la segmentación semántica del enunciado del PVEL, analizar las características de las representaciones no discursivas empleadas por los alumnos y sus concepciones respecto a los objetos matemáticos implicados en un PVEL [variable como incógnita, igualdad y ecuación]. El aspecto cuantitativo de la investigación, radica en que los resultados derivados del análisis cualitativo fueron procesados y tratados mediante técnicas de estadística descriptiva para obtener sus proporciones y frecuencias de incidencia (Rojas, 1991; Briones, 2003; Quiroz, 2003). La calificación [numérica] de los instrumentos de evaluación (Lafourcade, 1969; Pimienta, 2008), es una forma de cuantificación de los resultados de la evaluación.

3.3 Perfil sociodemográfico y académico de los alumnos del CCH

En cuanto a las características de los adolescentes que ingresaban al CCH previo a la actualización del Plan y Programas de Estudios en el año de 1996, se realizó un diagnóstico del perfil de ingreso, en que destaca que:

> se trata de alumnos jóvenes… con deficiencias serias en aspectos fundamentales, tales como comprensión de lectura y en conocimientos y habilidades matemáticas; carentes de espacios físicos para el trabajo autónomo y originarios de ambientes lejanos a la cultura universitaria (CCH, 1996, p. 21).

Adicionalmente, se expone que los porcentajes de aciertos en los exámenes de diagnóstico de conocimientos y habilidades matemáticos, que se aplicaron en los años 1992, 1993 y 1994, oscilan entre el 31.9 % y 35.6 % para el rubro de conocimientos y para las habilidades entre el 31 % y 56.7 % (CCH, 1996).

Los datos anteriores, ponen de manifiesto el hecho de que los alumnos necesitan orientación y guía para desarrollar los conocimientos, habilidades y capacidades básicas para tener un desempeño escolar exitoso.

También, se hace referencia en el documento, al fenómeno de no acreditación, provocado por el bajo rendimiento escolar, el ausentismo y los problemas institucionales. El documento expone que la eficiencia terminal para las 10 generaciones precedentes a 1993 fue del orden del 30% (CCH, 1996).

Las características sociodemográficas y académicas de los estudiantes que ingresan al CCH han cambiado a lo largo de los años, los datos estadísticos de la generación 2014 formada por 30 033 estudiantes muestran este hecho. El 52.2 % de alumnos de la generación 2014 son hombres y el 47.8 % son mujeres (UNAM, 2014).

La distribución de edad de los estudiantes asignados al CCH en el año 2014 que tenían menos de 14 años fue del 23.4 %, los de 15 años el 58.2 %, los de 16 años el 12.1 % y los mayores de 17 años el 6.3 % (UNAM, 2014).

El promedio de secundaria es un indicador que permite inferir la probabilidad de egreso regular del bachillerato de un alumno. Para la generación 2014, el 26 % de los alumnos que ingresaron obtuvieron promedio de entre 7. y 7.9, el 37 % se encontraban en el rango de 8.0 a 8.9 y el 36 % se ubicaron en el intervalo de 9.0 a 10 de calificación (UNAM, 2014).

En cuanto a las costumbres de estudio (UNAM, 2014), el 63.2 % siempre estudia solo, el 30.8 % lo hace frecuentemente y el 6 % esporádicamente. Al estudiar el 49.1 % siempre lee todo el tema, el 42.8 % frecuentemente, el 6.96 % lo hace esporádicamente y 0.96 % nunca lee la totalidad del tema.

En lo referente a la resolución de ejercicios para reafirmar el tema el 23.8 % de los estudiantes lo realiza siempre, el 36.3 % frecuente, 36.3 % esporádicamente y 11.8 % nunca.

El principal sostén económico de la familia de los estudiantes (UNAM, 2014) lo constituyen ambos padres en el 97 % de los casos y en el 3 % de ellos es el mismo alumno o su cónyuge. El 80.7 % de los alumnos tienen una distribución del ingreso familiar mensual menor a 6 salarios mínimos y el 19.3 % tiene un ingreso superior a 6 salarios mínimos. El 84.3 % de los estudiantes no laboran, el 16.3 % laboran en empresas y negocios familiares.

El 34.8 % de los alumnos tiene computadora personal y el 65.2 % no cuentan con esta herramienta. El 87.6 % de los estudiantes tienen teléfono celular y el 11.6 % no poseen este dispositivo (UNAM, 2014).

3.3.1 La población de estudio

El estudio se realizó a un grupo de 32 estudiantes de primer semestre, del Colegio de Ciencias y Humanidades, del plantel Naucalpan turno vespertino. Para aproximarse a algunas características generales del grupo de estudio, se aplicó un cuestionario que se ubica en el Anexo 4, en su diseño se consideró: el género, la edad, el lugar de residencia, las condiciones familiares, las habilidades sociales y el manejo de las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC´s).

El 53 % de los estudiantes que participaron en el estudio son mujeres y el 47 % son hombres. El 6.3 % de los alumnos tenían 14 años al momento de aplicar el examen diagnóstico, el 43.8 % contaba con 15 años y el 49.9 % con 16 años. El 15.6 % viven en el Distrito Federal y el 84.4 % en el Estado de México.

En lo referente a las habilidades sociales, al 93.8 % de los estudiantes le gusta estar con sus amigos en la escuela y al 6.2 % le gusta estar solo; al 62.5 % le gusta trabajar en pequeño grupo y al 37.5 % le gusta trabajar individualmente.

El 34.4 % de los alumnos viven con ambos Padres, el 50 % de los estudiantes viven únicamente con su Papá, el 12.5 % de los escolares viven con su Mamá y el 3.1 % viven con otros familiares.

El 87.4 % de los estudiantes tienen de 1 a 2 hermanos, el 6.3 % tienen de 3 a 5 hermanos y 6.3 % más de 5 hermanos.

El 87.5 % de los alumnos cuentan con equipo de cómputo en casa con acceso a internet y el 12.5 % no cuenta con este recurso. El 3.1 % usa internet una vez por semana, el 12.5 % lo hace 2 veces y el 84.4 % accede a la red más de tres veces por semana.

Todos los alumnos cuentan con teléfono celular y con acceso a Facebook.

3.4 Diseño del ambiente de aprendizaje

3.4.1 Diagnóstico académico inicial

Se aplicó una prueba diagnóstica [Anexo 5] inicial (Lafourcade, 1969; Pimienta, 2008), para establecer el nivel de conocimientos de Aritmética y Álgebra que poseían los alumnos al inicio de la instrucción. Los contenidos considerados para el diseño de la prueba son los siguientes:

I. Operaciones aritméticas

a. Suma y resta de números reales: Uso del inverso aditivo en la identidad aritmética (CCSSI, 2012; Kieran, 1981; 1989), como una operación de tratamiento dentro del registro aritmético (Duval, 1999). En el aspecto algorítmico, la suma y la resta con números enteros y fraccionarios; que pueden ser vistos como tratamientos, debido que generan expresiones equivalentes entre números fraccionarios (Potápov y Alexándrov, 1980; CCH, 1996; Baldor, 1997; Tartákov, 2009; Olguín y Popoca, 2012; CCSSI, 2012; Bautista y Flores, 2013; Becerril y Castro, 2013; García y Landa, 2013; Mendoza y Moreno, 2013).

b. Multiplicación de números reales: La correspondencia entre la suma y la multiplicación de números enteros (NCTM, 2000; CCSSI, 2012), entendida como un tratamiento dentro del registro aritmético (Duval, 1999; Kieran, 1981). En el aspecto algorítmico, la obtención del producto de uno o varios números enteros y fraccionarios, en el que se aplican: las leyes de los signos, el uso de paréntesis, y se aborda la jerarquía de las operaciones de suma y resta (Potápov y Alexándrov, 1980; CCH, 1996; Baldor, 1997; Tartákov, 2009; Olguín y Popoca, 2012; CCSSI, 2012; Bautista y Flores, 2013; Becerril y Castro, 2013; García y Landa, 2013; Mendoza y Moreno, 2013).

c. División de números reales: La división como un tratamiento matemático, corresponde a un caso de identidad aritmética (Kieran, 1981; Duval, 1999). La idea de división como un cociente (Baldor, 1997). La operatividad algorítmica de la división con números enteros y fraccionarios, en la que se emplean: las leyes de los signos, el uso de los paréntesis y la jerarquía de la división, con respecto a las operaciones de suma, resta, multiplicación (Potápov y Alexándrov, 1980; CCH, 1996; Tartákov, 2009; Olguín y Popoca, 2012; CCSSI, 2012; Bautista y Flores, 2013; Becerril y Castro, 2013; García y Landa, 2013; Mendoza y Moreno, 2013).

II. Operaciones algebraicas.

Suma, resta, multiplicación y división de términos algebraicos: Uso del inverso aditivo, como una operación de tratamiento dentro del registro algebraico, que se relaciona con la ecuación entendida como la igualdad entre expresiones algebraicas (Vinográdov, 1971; Guelfond, 1979; Potápov y Alexándrov, 1980; Baldor, 1997; Duval, 1999; Uspensky, 2000; Godfrey y Thomas, 2003). En el aspecto algorítmico, se abordan contenidos similares a los descritos para el caso aritmético, con la salvedad de que se tratan expresiones algebraicas que combinan literales y números (Potápov y Alexándrov, 1980; CCH, 1996; Tartákov, 2009; Olguín y Popoca, 2012; CCSSI, 2012; Bautista y Flores, 2013; Becerril y Castro, 2013; García y Landa, 2013; Mendoza y Moreno, 2013).

III. Traducción de expresiones verbales de operaciones aritméticas y algebraicas descritas en lenguaje común a expresiones simbólicas.

La conversión de enunciados verbales de operaciones aritméticas y algebraicas (suma, resta, multiplicación y división) en expresiones simbólicas (NCTM, 2000; CCSSI, 2012; Duval, 1999, 2006).

IV. Concepciones en torno a los objetos matemáticos asociados a un PVEL.

Los estudiantes escriben su definición de variable, igualdad y ecuación (Kieran, 1980, 1981, 1989; Küchemann, 1981; Usisnki, 1988; Urisni, 1990; Godfrey y Thomas, 2003; Duval, 1999, 2006; Akgün y Ödezmir, 2006).

V. Planteamiento y solución de PVEL.

Problemas verbales de números reales (Baldor, 1997; Tartákov, 2009; Olguín y Popoca, 2012; CCSSI, 2012; Bautista y Flores, 2013; Becerril y Castro, 2013; García y Landa, 2013; Mendoza y Moreno, 2013).

Los contenidos descritos en la categorización anterior, los consideramos como parte de los conocimientos previos (NCTM, 2000; CCSSI, 2012), necesarios para lograr la traducción de un PVEL del lenguaje natural al algebraico. Asumimos la premisa de que todo estudiante posee conocimientos derivados del aprendizaje formal anterior o de sus experiencias previas, por lo que al momento de iniciar la instrucción, cuentan con una base de conocimientos y concepciones respecto a los contenidos a abordarse (Bransford y Brown, 1999; CCSSI, 2012).

Este es el punto de partida para el diseño de la instrucción centrada en el estudiante, en la que se busca que transite en forma gradual y progresiva de las ideas informales, las concepciones parciales y los procedimientos intencionales (Duval, 1999), a la construcción de conocimientos formales y concepciones con las que el alumno entiende el significado del objeto de aprendizaje (Bransford y Brown, 1999).

A partir de los resultados del diagnóstico académico inicial, se pudo ubicar el estadio en la transición del Aritmética al Álgebra (Herscovics, 1989, Paralea 1998) en la que se encontraban los alumnos; tanto en forma global, como a nivel individual.

Además, fue posible identificar los errores y las dificultades que exhibían en torno a cada uno de los contenidos de la prueba.

Lo anterior permitió el diseño del ambiente de aprendizaje, que se conformó de dos partes: La primera parte de la instrucción, en la que se plantearon una serie de tareas en las que se abordaron los contenidos considerados como conocimientos previos y la segunda parte, en la que la instrucción se centró en la traducción del enunciado de un PVEL dado en lenguaje natural a la ecuación correcta que conduce a su solución.

La metodología empleada en el diseño del ambiente de aprendizaje se muestra en la Figura 3 y se explica en las siguientes páginas. Posteriormente, se describen la secuencia planeada para cada una de las sesiones de trabajo.

3.4.2 Establecimiento de los propósitos del ambiente de aprendizaje

El proceso de enseñanza-aprendizaje se llevó a cabo en un total de doce sesiones: la primera se dedicó a la evaluación diagnóstica, las siguientes siete sesiones se enfocaron en la instrucción y las cuatro sesiones restantes fueron para la evaluación de la instrucción.

En la Tabla 1, aparece el número de sesiones que se dedicaron a la instrucción, su duración, las tareas principales a desarrollarse en cada sesión en relación a los propósitos generales y particulares del ambiente de aprendizaje.

En el diseño de cualquier ambiente de aprendizaje, es necesario el establecimiento de los propósitos generales y particulares que se pretende alcanzar al finalizar la instrucción (Bransford y Brown, 1999).

En el caso el presente trabajo los propósitos generales se centran en analizar la forma en la que los estudiantes que reciben la instrucción realizan la segmentación semántica del enunciado de un PVEL que deriva en el establecimiento de las formas simbólicas asociadas a: la cantidad desconocida, las relaciones entre esta con las cantidades conocidas y la relación de equivalencia, que son necesarias para el planteamiento de la ecuación que haga factible su solución. Estos propósitos generales permiten prospectar la calendarización de las tareas globales a efectuarse en cada sesión.

Los propósitos generales se subdividen en propósitos particulares, los cuales especifican las acciones a efectuarse y los contenidos a abordarse en cada sesión de trabajo. Los contenidos considerados en el diseño del ambiente de aprendizaje corresponden a cinco categorías de PVEL: números, porcentajes, costos, edades y fracciones acumulativas (CCH, 1996). Las acciones que se espera que los alumnos realicen sobre estos contenidos son: la segmentación semántica del enunciado en sus unidades significantes, el uso de una representación no discursiva que permita el establecimiento de las formas simbólicas necesarias para el planteamiento de la ecuación para el PVEL abordado.

Lo anterior, propicia que las tareas globales se dividan en tareas particulares que abordan los contenidos y las acciones en forma concreta.

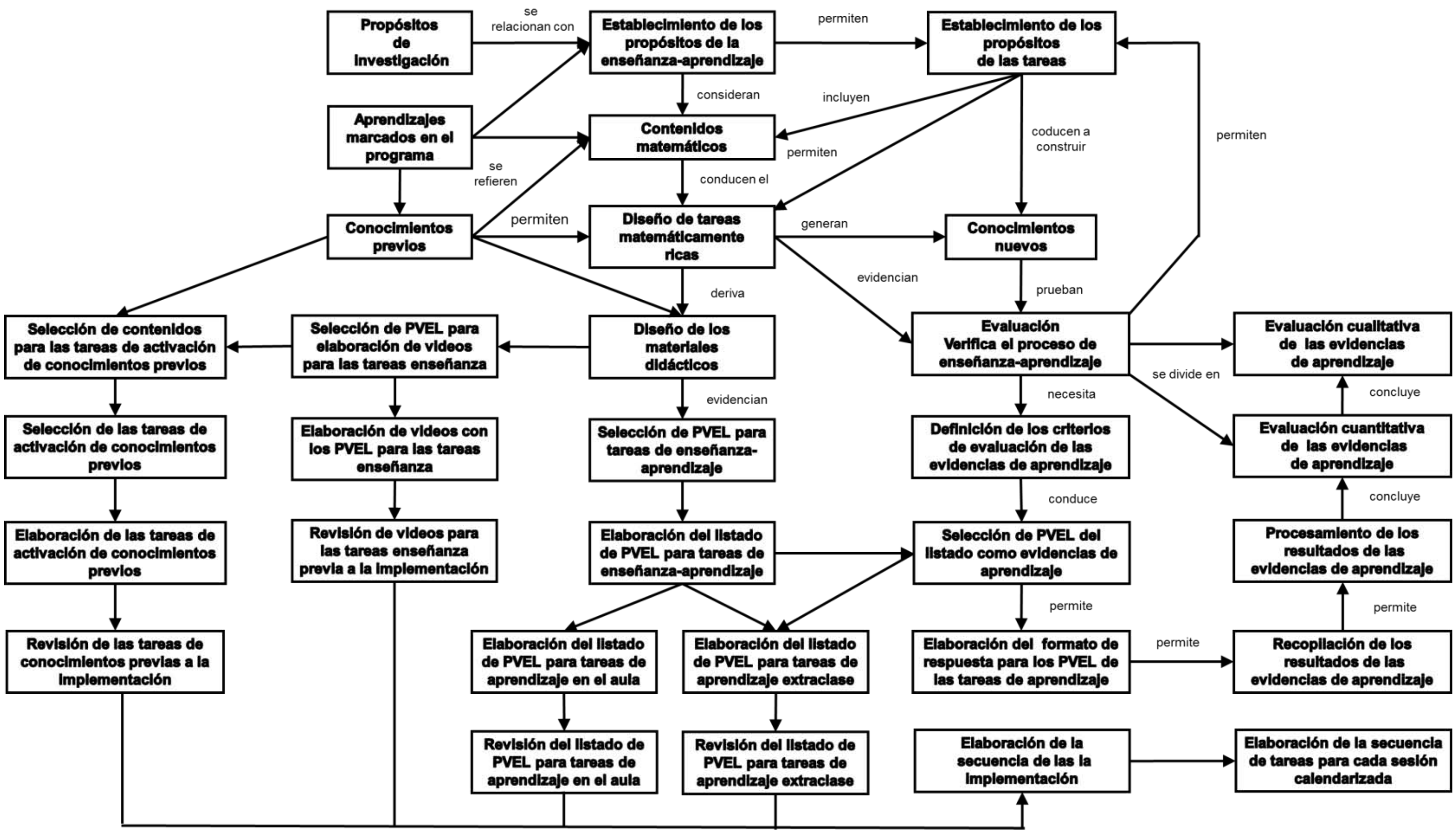


Figura 3. Metodología empleada para el diseño del ambiente de aprendizaje.

Tabla 1. Propósitos generales y particulares de la instrucción.

Número de sesión	2	3	4	5	6	7	8
Duración de la sesión	90 minutos en clase	90 minutos en clase	90 minutos en clase	40 minutos en clase	90 minutos en clase	90 minutos en clase	90 minutos en clase
	30 minutos extraclase	30 minutos extraclase	30 minutos extraclase	30 minutos extraclase	30 minutos extraclase	30 minutos extraclase	30 minutos extraclase
Tipos de PVEL	Números		Porcentajes	Costos	Edades		Fracciones acumulativas
Tarea global	T.14		T.15	T.16	T.17		T.18
Propósitos generales	Propósitos particulares						
Determinar la forma en la que los alumnos realizan la segmentación semántica del enunciado de un PVEL en las unidades significantes que asocian el contenido cognitivo que relaciona: la cantidad desconocida, las operaciones necesarias para la formación de la ecuación y la relación de equivalencia.	Determinar la forma en la que los alumnos realizan la segmentación semántica del enunciado de PVEL de números en las unidades significantes que asocian el contenido cognitivo que relaciona la cantidad desconocida.		Determinar la forma en la que los alumnos realizan la segmentación semántica del enunciado de PVEL de porcentajes en las unidades significantes que asocian el contenido cognitivo que relaciona la cantidad desconocida.	Determinar la forma en la que los alumnos realizan la segmentación semántica del enunciado de PVEL de costos en las unidades significantes que asocian el contenido cognitivo que relaciona la cantidad desconocida.	Determinar la forma en la que los alumnos realizan la segmentación semántica del enunciado de PVEL de edades en las unidades significantes que asocian el contenido cognitivo que relaciona la cantidad desconocida.		Determinar la forma en la que los alumnos realizan la segmentación semántica del enunciado de PVEL de fracciones acumulativas en las unidades significantes que asocian el contenido cognitivo que relaciona la cantidad desconocida.
	Determinar la forma en la que los alumnos realizan la segmentación semántica del enunciado de PVEL de números en las unidades significantes que asocian el contenido cognitivo que relacionan las operaciones necesarias para la formación de la ecuación y la relación de equivalencia.		Determinar la forma en la que los alumnos realizan la segmentación semántica del enunciado de PVEL de porcentajes s en las unidades significantes que asocian el contenido cognitivo que relacionan las operaciones necesarias para la formación de la ecuación y la relación de equivalencia.	Determinar la forma en la que los alumnos realizan la segmentación semántica del enunciado de PVEL de costos en las unidades significantes que asocian el contenido cognitivo que relacionan las operaciones necesarias para la formación de la ecuación y la relación de equivalencia.	Determinar la forma en la que los alumnos realizan la segmentación semántica del enunciado de PVEL de edades en las unidades significantes que asocian el contenido cognitivo que relacionan las operaciones necesarias para la formación de la ecuación y la relación de equivalencia.		Determinar la forma en la que los alumnos realizan la segmentación semántica del enunciado PVEL de fracciones acumulativas en las unidades significantes que asocian el contenido cognitivo que relacionan las operaciones necesarias para la formación de la ecuación y la relación de equivalencia.

	Determinar la forma en la que los alumnos realizan la segmentación semántica del enunciado de un PVEL de números en las unidades significantes que asocian el contenido cognitivo que relaciona la relación de equivalencia.	Determinar la forma en la que los alumnos realizan la segmentación semántica del enunciado de un PVEL de números en las unidades significantes que asocian el contenido cognitivo que relaciona la relación de equivalencia.	Determinar la forma en la que los alumnos realizan la segmentación semántica del enunciado de un PVEL de números en las unidades significantes que asocian el contenido cognitivo que relaciona la relación de equivalencia.	Determinar la forma en la que los alumnos realizan la segmentación semántica del enunciado de un PVEL de números en las unidades significantes que asocian el contenido cognitivo que relaciona la relación de equivalencia.	Determinar la forma en la que los alumnos realizan la segmentación semántica del enunciado de un PVEL de números en las unidades significantes que asocian el contenido cognitivo que relaciona la relación de equivalencia.
Establecer las diferentes formas simbólicas en las que el alumno es capaz de explicitar el contenido cognitivo que describe la unidad significante de un PVEL que asociada a: la cantidad desconocida, las relaciones entre esta con las cantidades conocidas y la relación de equivalencia.	Establecer las diferentes formas simbólicas en las que el alumno es capaz de explicitar el contenido cognitivo que describe la unidad significante de PVEL de números que asociada a: la cantidad desconocida, las relaciones entre esta con las cantidades conocidas y la relación de equivalencia.	Establecer las diferentes formas simbólicas en las que el alumno es capaz de explicitar el contenido cognitivo que describe la unidad significante de PVEL de porcentajes que asociada a: la cantidad desconocida, las relaciones entre esta con las cantidades conocidas y la relación de equivalencia.	Establecer las diferentes formas simbólicas en las que el alumno es capaz de explicitar el contenido cognitivo que describe la unidad significante de PVEL costos que asociada a: la cantidad desconocida, las relaciones entre esta con las cantidades conocidas y la relación de equivalencia.	Establecer las diferentes formas simbólicas en las que el alumno es capaz de explicitar el contenido cognitivo que describe la unidad significante de PVEL de edades que asociada a: la cantidad desconocida, las relaciones entre esta con las cantidades conocidas y la relación de equivalencia.	Establecer las diferentes formas simbólicas en las que el alumno es capaz de explicitar el contenido cognitivo que describe la unidad significante de PVEL fracciones acumulativas que asociada a: la cantidad desconocida, las relaciones entre esta con las cantidades conocidas y la relación de equivalencia.
Determinar las características de las representaciones no discursivas que emplean los estudiantes, con mayor frecuencia como mediadores en la traducción de un PVEL.	Determinar las características de las representaciones no discursivas que emplean los estudiantes, con mayor frecuencia como mediadores en el proceso de traducción de un PVEL de números.	Determinar las características de las representaciones no discursivas que emplean los estudiantes, con mayor frecuencia como mediadores en el proceso de traducción de un PVEL de porcentajes.	Determinar las características de las representaciones no discursivas que emplean los estudiantes, con mayor frecuencia como mediadores en el proceso de traducción de un PVEL de costos.	Determinar las características de las representaciones no discursivas que emplean los estudiantes, con mayor frecuencia como mediadores en el proceso de traducción de un PVEL de edades.	Determinar las características de las representaciones no discursivas que emplean los estudiantes, con mayor frecuencia como mediadores en el proceso de traducción de un PVEL de fracciones acumulativas.
Determinar la forma y características de las ecuaciones que derivan del planteamiento de un PVEL.	Determinar la forma y características de las ecuaciones escritas por los alumnos que derivan del planteamiento de PVEL de números.	Determinar la forma y características de las ecuaciones escritas por los alumnos que derivan del planteamiento de PVEL de porcentajes.	Determinar la forma y características de las ecuaciones escritas por los alumnos que derivan del planteamiento de PVEL costos.	Determinar la forma y características de las ecuaciones escritas por los alumnos que derivan del planteamiento de PVEL edades.	Determinar la forma y características de las ecuaciones escritas por los alumnos que derivan del planteamiento de PVEL fracciones acumulativas.

3.4.3 Diseño de las tareas y materiales didácticos

Las tareas particulares incluidas en el diseño del ambiente de aprendizaje de este trabajo, pueden clasificarse en dos tipos: *de activación de conocimientos previos y de enseñanza-aprendizaje* y por el lugar de ejecución pueden ser tareas en clase o extraclase. El procedimiento seguido para el diseño de las tareas [globales y particulares] se muestra en la Figura 4.

El primer material didáctico diseñado corresponde al listado de los PVEL presentado en el Anexo 6, que es la base para el diseño de las tareas de enseñanza-aprendizaje. Estructuralmente está dividido de acuerdo a las tareas globales abordas en cada sesión de trabajo y cada sección individual se refiere a las tareas particulares.

En forma general, los primeros PVEL de cada sección corresponden a la tarea de enseñanza [video para explicación cuyo diseño se explica más adelante], los PVEL de la segunda sección constituyen la tarea de aprendizaje que los alumnos ejecutan en clase y la tercera sección de los PVEL contenidos conforma la tarea extraclase de aprendizaje.

Los PVEL incluidos en este listado se tomaron de las guías para examen extraordinario del CCH (Olguín y Popoca, 2012; CCSSI, 2012; Bautista y Flores, 2013; Becerril y Castro, 2013; García y Landa, 2013; Mendoza y Moreno, 2013) y de diversos textos de Álgebra (Faddeyev y Sominskii, 1965; Kalnin, 1973; Potápov y Alexándrov, 1980; Baldor, 1997; Bello, 1999).

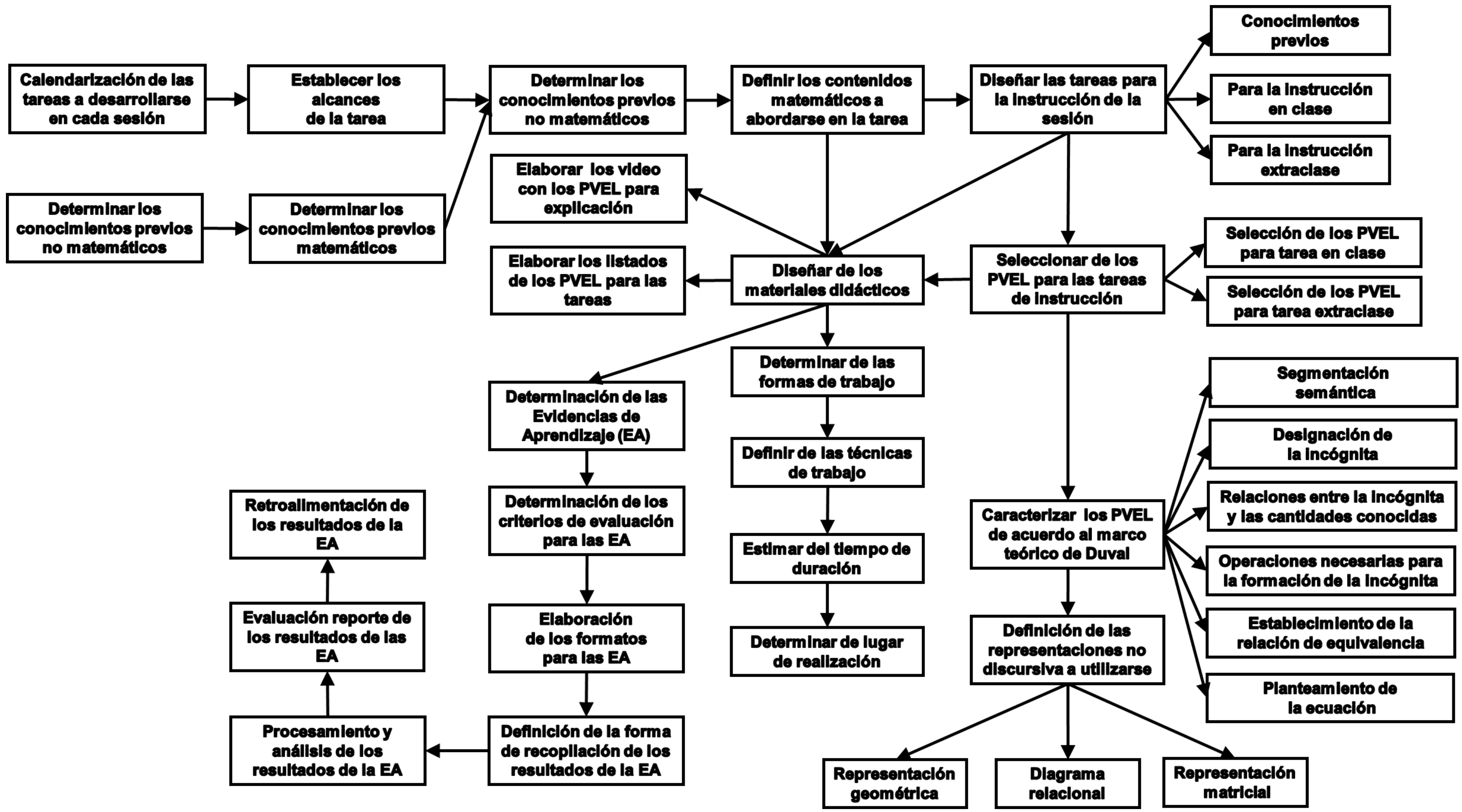


Figura 4. Secuencia en el diseño de las tareas.

En algunos casos se modificaron las cantidades conocidas para que los alumnos no tuvieran un acceso directo a la respuesta, en caso de que conozcan los materiales seleccionados.

Los criterios para la selección de los PVEL de listado son los siguientes:

1. Problemas estándar. Los PVEL seleccionados tienen una estructura sintáctica similar a la de problemas que aparecen comúnmente en diversos textos escolares de Álgebra.

2. No evidencia de la ecuación. El enunciado del PVEL no hace transparente la escritura de la ecuación con la que se concreta matemáticamente la situación descrita.

3. Segmentación semántica del enunciado del PVEL. Los alumnos pueden identificar las frases o palabras del enunciado del PVEL que describen: la cantidad desconocida, las cantidades conocidas y la relación de equivalencia.

4. Posibilidades en la selección de la incógnita. Los problemas incluyen dos o tres posibilidades en la selección de la incógnita a partir de la identificación de las cantidades desconocidas.

5. Designación de la incógnita. Los problemas permiten la selección de la incógnita que ofrece una economía de tratamientos de entre las posibilidades existentes.

6. Relaciones entre la incógnita y las cantidades conocidas. La incógnita seleccionada permite la formación de relaciones [aditivas, sustractivas, multiplicativas y/o de cociente] con respecto a las cantidades conocidas.

7. Operaciones para la formación de la ecuación. Las operaciones que permiten el establecimiento de las relaciones entre la incógnita y las cantidades conocidas se pueden diferenciar de las necesarias para relacionarlas entre sí, es decir, de las operaciones que se necesitan para formar cada miembro de la ecuación.

8. Relación de equivalencia. En los problemas es identificable la frase que designa la relación de igualdad necesaria para la formación de la ecuación.

9. Representaciones no discursivas. Al menos es factible emplear un tipo de representación no discursiva para poder representar la selección de la incógnita y sus relaciones con las cantidades conocidas.

Se diseñó un formato para responder todos los PVEL del listado tomando en cuenta los criterios anteriormente descritos.

En la Figura 5 se muestra el formato de respuesta de los PVEL.

<table>
<tr><td>Nombre:</td><td colspan="2"></td><td>Grupo:</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">Identificador de la tarea:</td><td></td><td>Problema Número:</td><td></td></tr>
<tr><td>Enunciado:</td><td colspan="4"></td></tr>
<tr><td colspan="2">Preguntas</td><td colspan="3">Representaciones algebraicas</td></tr>
<tr><td colspan="2">¿Cuál es la incógnita?</td><td colspan="3"></td></tr>
<tr><td colspan="2">¿Cuál es literal qué se emplea para representar la incógnita del problema?</td><td colspan="3"></td></tr>
<tr><td colspan="2">¿Qué operación(es) matemática(s) involucra(n) a la incógnita del problema?</td><td colspan="3"></td></tr>
<tr><td colspan="2">¿Cómo se relaciona la incógnita en el enunciado del problema?</td><td colspan="3"></td></tr>
<tr><td colspan="2"></td><td colspan="3"></td></tr>
<tr><td colspan="2"></td><td colspan="3"></td></tr>
<tr><td colspan="2"></td><td colspan="3"></td></tr>
<tr><td colspan="5">Representación gráfica o geométrica</td></tr>
<tr><td colspan="5"></td></tr>
<tr><td colspan="2">¿Qué expresión(es) algebraica(s) representa(n) la(s) relación(es) de la incógnita en el enunciado del problema?</td><td colspan="3"></td></tr>
<tr><td colspan="2">¿Qué expresión algebraica representa la(s) relación(es) de la incógnita con la operación matemática?</td><td colspan="3"></td></tr>
<tr><td colspan="2">¿A qué se iguala la expresión algebraica que involucra a la incógnita con la operación matemática?</td><td colspan="3"></td></tr>
</table>

Figura 5. Formato de respuesta de los PVEL.

Para la presentación de las *tareas de enseñanza* se diseñaron una serie de videos con los PVEL seleccionados para la explicación de los procesos de segmentación semántica de su enunciado, el uso de las representaciones no discursivas y el planteamiento de la ecuación derivada de los dos primeros procesos.

Los criterios fundamentales para la selección de los PVEL incluidos en estos videos son los mismos que para la selección de los PVEL del listado, exceptuado el 2 y el 9. Adicionalmente, los PVEL elegidos presentan una redacción clara y precisa, no dando lugar a ambigüedades de interpretación en la etapa de la segmentación semántica. En cuanto al uso de las representaciones no discursivas, para efectuar la puesta en correspondencia del contenido cognitivo dado en lenguaje natural al lenguaje algebraico, es posible emplear más de un tipo de representación no discursiva, por lo que se diversifica y complementa la explicación de la función de las representaciones no discursivas como mediadores en el paso del enunciado del PVEL descrito en lenguaje común a la ecuación que posibilite su solución.

Los videos diseñados fueron revisados antes de la implementación y después de la instrucción fueron puestos a disposición de los alumnos vía Facebook para su consulta en cualquier momento.

Los materiales didácticos diseñados para cada *tarea de conocimientos previos* son los siguientes:

a. T.14.1 Las fracciones de la unidad. Para aplicarse en la sesión 1. Se cortaron 32 trozos de papel de colores de diferentes tamaños que se doblaron de diferentes formas fraccionarias [dos, tres, cuatro partes, etc.]. Los alumnos iluminarán una sección del papel doblado y deberán escribir la expresión verbal que designa la fracción iluminada, para lo que necesitarán colores y un marcador. La evidencia de aprendizaje EA.1 de esta tarea será el papel iluminado y la expresión verbal que designa la fracción con respecto a la totalidad.

b. T.14.5 Números consecutivos. Para implementarse en la sesión 2. En una tabla impresa en una hoja se muestran a los estudiantes la secuencia de los números del 1 a 100. Se le solicitará a los alumnos que con un marcador de color rojo señalen los números pares y con un marcador azul los números impares. En la parte posterior de la hoja deberán escribir una expresión simbólica o fórmula para representar la secuencia en forma general de los números pares y otra para los números impares. La hoja que contenga las secuencias de números pares e impares y las fórmulas para designar en forma general a cada secuencia son consideradas la evidencia de aprendizaje EA.2.

c. T.15.1 Porcentajes. Para ejecutarse en la cuarta sesión. En 8 fichas de trabajo de color blanco se escribió el enunciado de cinco PVEL de porcentajes. Los estudiantes en grupo pequeño de cuatro integrantes deberán plantear y resolver los PVEL en una hoja de papel bond y posteriormente explicarlo al resto de los grupos. Además de los materiales mencionados los estudiantes usarán marcadores de diferentes colores y cinta adhesiva. El papel bond con el planteamiento y la solución del problema constituyen la evidencia de aprendizaje EA.6.

d. T.16.1 PVEL de diversos contextos. En 8 fichas bibliográficas se escribió un PVEL de proporciones [uno diferente para cada ficha]. Las fichas se repartirán a cada uno de los 8 grupos pequeños que deberán leer el problema y escribir en un papel bond un diagrama en el que se visualicen las posibilidades de la selección de la incógnita de acuerdo al enunciado del PVEL. Posteriormente, dos integrantes de cada equipo deberán exponer el diagrama ante el resto de los grupos. El papel bond con el diagrama será la evidencia de aprendizaje EA.8.

Los PVEL que corresponden a las *tareas de aprendizaje* extraclase serán considerados como las evidencias de aprendizaje de la instrucción. Las hojas de respuesta de cada uno de los PVEL de las tareas extraclase serán recopiladas para su captura, tratamiento y análisis [cualitativo y cuantitativo].

Para la recopilación de los resultados derivados de las hojas de respuesta se elaboró un formato electrónico [uno para cada problema] en el que se incluye el nombre de cada uno de los alumnos y las respuestas dadas a cada uno de los apartados incluidos en el formato.

El procesamiento y análisis cualitativo de los resultados derivados de las evidencias de aprendizaje se realizó mediante la técnica de análisis de contenido por racimos (Bermúdez, 1986) para la segmentación semántica y el resto de los resultados se trataron mediante estadística descriptiva para obtener las frecuencias de incidencia de las representaciones no discursivas empleadas y las formas simbólico-algebraicas que permiten el planteamiento de la ecuación para cada PVEL.

A continuación se describen brevemente bajo el formato de tablas la secuencia de las tareas diseñadas para cada sesión.

Tabla 2. Secuencia de las tareas para la sesión 1.

Sesión	1	Duración	90 minutos en clase
Tarea global	T.13 Diagnóstico		
Tarea diagnóstica	T.13.1 Planteamiento de PVEL de números		
Forma de trabajo	Individual	Duración	60 minutos en clase
Evidencia de aprendizaje	EA.1		
Tarea diagnóstica	T.13.2 Diagnóstico conceptual de variable, igualdad y ecuación		
Forma de trabajo	Individual	Duración	30 minutos en clase
Evidencia de aprendizaje	EA.2		

Tabla 3. Secuencia de las tareas para la sesión 2.

Sesión	2	Duración	90 minutos en clase
Tarea global	T.14 PVEL de números primera parte		
Tarea de activación de conocimientos previos	T.14.1 Las fracciones de la unidad		
Forma de trabajo	Dupla	Duración	15 minutos en clase
Evidencia de aprendizaje	EA.3		
Tarea de enseñanza	T.14.2 PVEL de números enteros		
Forma de trabajo	Grupal	Duración	30 minutos en clase
Tarea de aprendizaje	T.14.3 PVEL de números fraccionarios T.14.4 PVEL unirelacionales de números		
Forma de trabajo	Individual	Duración	45 minutos en clase
Evidencia de aprendizaje	No aplica		
Tarea de aprendizaje	T.14.8A Miscelánea de PVEL de números		
Forma de trabajo	Individual	Duración	30 minutos en extra clase
Evidencia de aprendizaje	EA.4A		

Tabla 4. Secuencia de las tareas para la sesión 3.

Sesión	3	Duración	90 minutos en clase
Tarea global	T.14 PVEL de números segunda parte		
Tarea de activación de conocimientos previos	T.14.5 Números consecutivos		
Forma de trabajo	Triada	Duración	15 minutos en clase
Evidencia de aprendizaje	EA.5		
Tarea de enseñanza	T.14.6 PVEL multirelacionales de números		
Forma de trabajo	Grupal	Duración	30 minutos en clase
Tarea de aprendizaje	T.14.7 PVEL de números consecutivos		
Forma de trabajo	Individual	Duración	45 minutos en clase
Evidencia de aprendizaje	No aplica		
Tarea de aprendizaje	T.14.8B Miscelánea de PVEL de números		
Forma de trabajo	Individual	Duración	30 minutos en extra clase
Evidencia de aprendizaje	EA.4B		

Tabla 5. Secuencia de las tareas para la sesión 4.

Sesión	4	Duración	90 minutos en clase
Tarea global	T.15 PVEL de porcentajes		
Tarea de activación de conocimientos previos	T.15.1 Porcentajes		
Forma de trabajo	grupo pequeño 4 integrantes	Duración	15 minutos en clase
Evidencia de aprendizaje	EA.6		
Tarea de enseñanza	T.15.2 PVEL de porcentajes numérico		
Forma de trabajo	Grupal	Duración	30 minutos en clase
Tarea de aprendizaje	T.15.3 PVEL de porcentajes de diversos contextos		
Forma de trabajo	Individual	Duración	45 minutos en clase
Evidencia de aprendizaje	No aplica		
Tarea de aprendizaje	T.15.4 Miscelánea de PVEL de porcentajes		
Forma de trabajo	Individual	Duración	30 minutos en extra clase
Evidencia de aprendizaje	EA.7		

Tabla 6. Secuencia de las tareas para la sesión 5.

Sesión	5	Duración	90 minutos en clase
Tarea global	T.16 PVEL de costos		
Tarea de activación de conocimientos previos	T.16.1 PVEL de diversos contextos		
Forma de trabajo	Grupo pequeño 4 integrantes	Duración	15 minutos en clase
Evidencia de aprendizaje	EA.8		
Tarea de enseñanza	T.16.2A PVEL de costos		
Forma de trabajo	Grupal	Duración	30 minutos en clase
Tarea de aprendizaje	T.16.2B PVEL de costos		
Forma de trabajo	Individual	Duración	45 minutos en clase
Evidencia de aprendizaje	No aplica		
Tarea de aprendizaje	T.16.3 Miscelánea de PVEL de costos		
Forma de trabajo	Individual	Duración	30 minutos en extra clase
Evidencia de aprendizaje	EA.9		

Tabla 7. Secuencia de las tareas para la sesión 6.

Sesión	6	Duración	90 minutos en clase
Tarea global	T.17 PVEL de edades primera parte		
Tarea de activación de conocimientos previos	T.17.CP Adivino tu edad		
Evidencia de aprendizaje	No aplica		
Forma de trabajo	individual	Duración	15 minutos en clase
Tarea de enseñanza	T.17.1A PVEL de edades que involucran tiempo presente y futuro		
Forma de trabajo	Grupal	Duración	30 minutos en clase
Tarea de aprendizaje	T.17.1B PVEL de edades que involucran tiempo presente y futuro		
Forma de trabajo	Individual	Duración	60 minutos en clase
Evidencia de aprendizaje	No aplica		
Tarea de aprendizaje	T.17.2 Miscelánea de PVEL que involucran tiempo presente y futuro		
Forma de trabajo	Individual	Duración	30 minutos en extra clase
Evidencia de aprendizaje	EA.10A		

Tabla 8. Secuencia de las tareas para la sesión 7.

Sesión	7	Duración	90 minutos en clase
Tarea global	T.17 PVEL de edades segunda parte		
Tarea de enseñanza	T.17.3 PVEL de edades que involucran tiempo presente y pasado		
Forma de trabajo	Grupal	Duración	30 minutos en clase
Tarea de aprendizaje	T.17.4 PVEL de edades que involucran suma de edades		
Forma de trabajo	Individual	Duración	60 minutos en clase
Evidencia de aprendizaje	No aplica		
Tarea de aprendizaje	T.17.5 Miscelánea de PVEL de edades		
Forma de trabajo	Individual	Duración	30 minutos en extra clase
Evidencia de aprendizaje	EA.10B		

Tabla 9. Secuencia de las tareas para la sesión 8.

Sesión	8	Duración	90 minutos en clase
Tarea global	T.18 PVEL de fracciones acumulativas		
Tarea de activación de conocimientos previos	T.18.1 Agrupación de fracciones		
Forma de trabajo		Duración	15 minutos en clase
Evidencia de aprendizaje	EA.11		
Tarea de enseñanza	T.18.2A PVEL de fracciones acumulativas		
Forma de trabajo	Grupal	Duración	30 minutos en clase
Tarea de aprendizaje	T.18.2B PVEL de fracciones acumulativas		
Forma de trabajo	Individual	Duración	60 minutos en clase
Evidencia de aprendizaje	No aplica		
Tarea de aprendizaje	T.18.3 PVEL de fracciones acumulativas de corte histórico		
Forma de trabajo	Individual	Duración	30 minutos en extra clase
Evidencia de aprendizaje	EA.12		

La secuencia general prospectada para la sesiones de trabajo se presenta en la Figura 6.

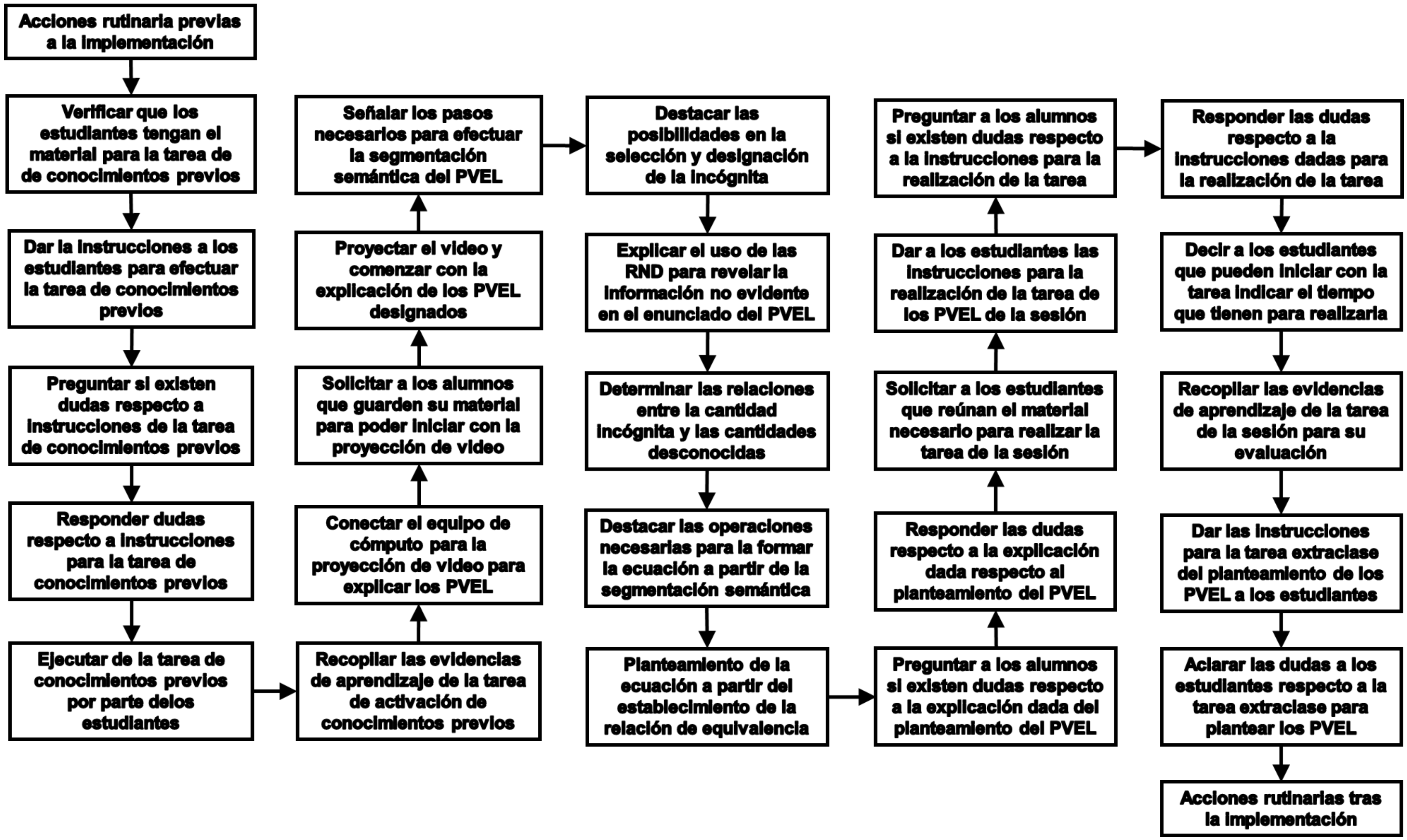


Figura 6. Secuencia general de una sesión de trabajo.

3.4.4 Evaluación de la instrucción

El proceso de evaluación de los aprendizajes adquiridos (Lafourcade, 1969; Pimienta, 2008; NCTM, 2000) por los alumnos en torno al proceso de traducción de un PVEL dado en lenguaje natural a la ecuación que haga factible su solución, se llevó a cabo en dos grandes etapas.

La primera corresponde a la evaluación de las evidencias de aprendizaje generadas durante las sesiones de trabajo [evaluación formativa] que son producto del desarrollo de las tareas prospectadas [tareas matemáticamente ricas, que permiten al mismo tiempo el aprendizaje y su evaluación].

La segunda corresponde a la evaluación final o sumativa (Pimienta, 2008) de la instrucción, que consistió en la aplicación de dos pruebas de desempeño de desarrollo escrito (Basoredo, 2008) una individual (Lafourcade, 1969) y una en pequeño grupo (Santos, 2006); la evaluación de las concepciones de los estudiantes respecto a los objetos matemáticos implicados en un PVEL, la autoevaluación, la autocalificación y la evaluación general de la instrucción. En la siguiente sección se detalla la metodología empleada para la segunda etapa de la evaluación [final].

En lo que se refiere a la primera etapa, en cada sesión de trabajo se retroalimentó a los estudiantes respecto a los resultados obtenidos en la evaluación formativa o del proceso (Pimienta, 2008), que se conformó de las evidencias de aprendizaje que al final de la instrucción se integrarían a un portafolio (Díaz-Barriga, 1998), en la Tabla 9 se muestra las 12 evidencias de aprendizaje producto del proceso de instrucción.

Tabla 9. Evidencias de aprendizaje generadas durante el proceso de instrucción.

Evidencia de aprendizaje	Nombre de la evidencia de aprendizaje	Sesión	Tipo de tarea
EA.1	T.13.1 Planteamiento de PVEL de números	1	Diagnóstico
EA.2	T.13.2 Diagnóstico conceptual de variable, igualdad y ecuación	1	Diagnóstico
EA.3	T.14.1 Las fracciones de la unidad	2	Activación de conocimientos previos
EA.4A	T.14.8A Miscelánea de PVEL de números	2	Aprendizaje
EA.5	T.14.5 Números consecutivos	3	Activación de conocimientos previos
EA.4B	T.14.8B Miscelánea de PVEL de números	3	Aprendizaje
EA.6	T.15.1 Porcentajes	4	Activación de conocimientos previos
EA.7	T.15.4 Miscelánea de PVEL de porcentajes	4	Aprendizaje
EA.8	T.16.1 PVEL de diversos contextos	5	Activación de conocimientos previos
EA.9	T.16.3 Miscelánea de PVEL de costos	5	Aprendizaje
EA.10A	T.17.2 Miscelánea de PVEL que involucran tiempo presente y futuro	6	Aprendizaje
EA.10B	T.17.5 Miscelánea de PVEL de edades	7	Aprendizaje
EA.11	T.18.1 Agrupación de fracciones	8	Activación de conocimientos previos
EA.12	T.18.3 PVEL de fracciones acumulativas de corte histórico	8	Aprendizaje

Al finalizar la instrucción y su evaluación se les proporcionaron a los alumnos los resultados de la evaluación sumativa (Pimienta, 2008) derivados de las pruebas escritas, cuyo diseño se describe más adelante.

Los criterios para la evaluación de las evidencias de aprendizaje de conocimientos previos [EA.3, EA.5, EA, 6, EA.8 y EA.11] fueron de carácter puramente cualitativo, debido a que en este tipo de tareas se pretende averiguar el nivel previo de conocimientos que los estudiantes poseen sobre un contenido en particular antes de ser abordado en la sesión de trabajo.

Para la evaluación de las evidencias derivadas de las tareas de aprendizaje [EA.3, EA.4A, EA.4B, EA.7, EA.9, EA.10A, EA.10B y EA.12] que involucran los PVEL del listado presentado en el Anexo 6, los criterios de evaluación son los siguientes:

1. Copia el enunciado del problema.
2. Designa y representa la cantidad desconocida mediante una literal.
3. Emplea una representación no discursiva.
    a. Diagrama relacional.
        i. Emplea nodos para representar a la cantidad desconocida.
        ii. Emplea nodos para representar a las cantidades conocidas.
        iii. Los nodos tienen una distribución jerárquica.
        iv. Emplea flechas para relacionar los nodos.
        v. Las flechas indican la dirección de la operación.
        vi. Emplea símbolos de operadores sobre las flechas.
        vii. Emplea el símbolo de igualdad para indicar la relación de equivalencia entre los nodos que representan las relaciones de internas.
    b. Representación geométrica.
        i. Emplea una recta para denotar la cantidad desconocida.
        ii. Emplea rectas para denotar las cantidades conocidas.
        iii. Relaciona las rectas designadas para la cantidad desconocida con las de la cantidad conocida.
        iv. Emplea el símbolo de igualdad para indicar la relación de equivalencia entre los segmentos que representan las relaciones internas.

c. Representación matricial.
    i. Dibuja una tabla de doble entrada.
    ii. Escribe el tiempo como encabezado de cada una de las columnas de la tabla.
    iii. Escribe el nombre del sujeto designado en el enunciado del PVEL en la primera columna.
    iv. Escribe las relaciones internas en forma de expresiones algebraicas en la tabla.
    v. Escribe la relación de equivalencia entre las relaciones internas en forma algebraica separada por el símbolo de igualdad.
4. Emplea algún otro tipo de representación no discursiva para el planteamiento de la ecuación lineal.
5. Emplea algún recurso discursivo como la paráfrasis o reescritura de frases del enunciado del problema para clarificar la información no evidente.
6. La ecuación lineal que escribe es la que conduce a la solución correcta del problema.

El propósito de la evaluación conceptual, fue el valorar el avance que los alumnos lograron en la progresión cognitivo-conceptual (Bransford y Brown, 1999) en torno a los objetos asociados al planteamiento de un PVEL: variable como incógnita, igualdad y ecuación. Al inicio de la instrucción se les solicitó a los estudiantes de elaboración de su definición de estos objetos y al final de la instrucción se repitió el proceso. En la etapa de la evaluación final se integran las definiciones que se muestran en el Anexo 7 y posteriormente, se evaluaron cualitativamente [categorización], conformándose así, los criterios para su evaluación.

En el siguiente capítulo referente a los resultados y su discusión se presentan en forma global los resultados cuantitativos de la calificación obtenida por cada estudiante, en relación a su autocalificación y la evaluación general de la instrucción.

3.5 Metodología para la evaluación final

En las siguientes secciones se describen las cuatro etapas consideradas en el diseño metodológico para la evaluación de los resultados de la instrucción, que permitirá responder los cuestionamientos de indagación planteados en el primer capítulo de este reporte.

En la Figura 7, se presenta un diagrama de la secuencia general de la metodología para la evaluación final de los resultados de la instrucción. Las cuatro etapas son:

Diseño metodológico

Etapa 1. Diseño
Esta fase comprende el diseño y elaboración de los instrumentos de evaluación y de los formatos para la recopilación de sus resultados.

Etapa 2. Implementación
Esta fase corresponde a la aplicación de los instrumentos de evaluación.

Etapa 3. Procesamiento y análisis
Esta etapa concierne la recopilación, procesamiento y análisis de los resultados derivados de la evaluación.

Etapa 4. Selección de resultados
Esta etapa incluye la selección de los resultados para su presentación y posterior discusión.

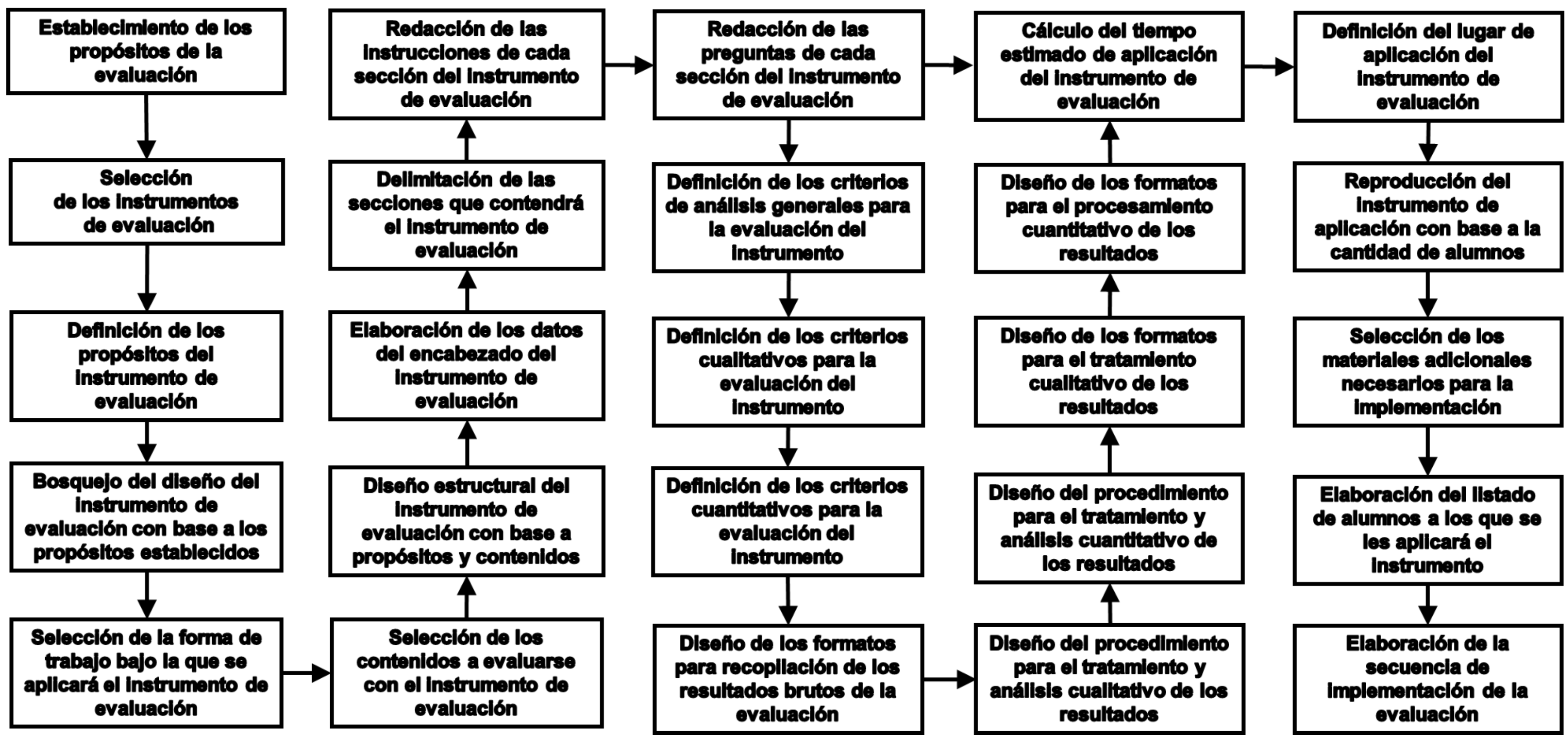


Figura 7. Secuencia general de la metodología para la evaluación final.

3.5.1 Etapa 1. Diseño

3.5.1.1 Diseño de los instrumentos de evaluación

Los instrumentos de evaluación empleado en este trabajo son pruebas de desempeño de desarrollo escrito, (Basoredo, 2008). A través de este tipo de pruebas se puede evaluar el grado de adquisición que los estudiantes han logrado de los aspectos teóricos y prácticos respecto a un cuerpo de conocimientos.

En el caso particular de este trabajo, el carácter teórico permite determinar el grado en el estudiante es capaz de comprender, recordar, relacionar y explicar los contenidos matemáticos asociados al proceso de traducción de un PVEL del lenguaje natural al algebraico, así como el nivel de dominio en el proceso de comprensión de un texto matemático descrito en lenguaje verbal.

El aspecto práctico se evidencia en el momento en que el alumno aplica el cuerpo de conocimientos matemáticos adquiridos al proceso de traducción del enunciado del PVEL dado en lenguaje natural que se concreta finalmente el planteamiento de la ecuación (Duval, 1999, 2006).

En este trabajo se diseñaron tres pruebas de desarrollo escrito, dos se aplicaron en forma individual (Laforucade, 1975) y una en pequeño grupo (Santos, 2006).

En las siguientes secciones se presentan las generalidades correspondientes al diseño de cada prueba y de los formatos para la recopilación de los resultados derivados.

3.5.1.1.1 Prueba de desempeño individual

Este instrumento que se encuentra en el Anexo 8, se conforma de dos grandes apartados que se complementan y corresponde al planteamiento de las ecuaciones para tres PVEL de números (Bruño, 2011), costos (Baldor, 1997) y edades (Santillana, 2007).

El primer apartado es un cuestionario con 7 preguntas abiertas de respuesta breve (Basoredo, 2008; Corral, 2010; Quiroz, 2003; Briones, 2003) para que el estudiante realice la segmentación semántica del enunciado de cada uno de los PVEL.

El segundo apartado corresponde al planteamiento del PVEL. El formato de respuesta de estos problemas es abierto (Jonassen, 1997), para que el estudiante pueda explayarse en la forma en que selecciona la incógnita del problema, hace uso de las representaciones no discursivas (Paralea y Socas, 1995; Puig, 1998) para establecer las relaciones de la incógnita con los demás datos dados en el enunciado del problema y finalmente escribe la ecuación lineal que haga factible su solución (Duval, 1999, 2006).

En los siguientes párrafos se describen para la prueba individual: los propósitos, la forma de trabajo, el tiempo de realización, los criterios de selección de los PVEL que la conforman y la forma de elaboración del cuestionario para la segmentación semántica.

1. Propósitos: En relación a los cuestionamientos de indagación planteados en el primer capítulo y su relación con los fines prospectados a alcanzar durante la instrucción, se elaboraron los propósitos de la prueba individual (Lafourcade, 1969; Pimienta, 2008; Corral, 2010).

1.1 Determinar la forma en la que el alumno realiza la segmentación semántica del enunciado de un PVEL en las unidades significantes que asocian el contenido cognitivo que relaciona: la cantidad desconocida, las operaciones necesarias para la formación de la ecuación y la relación de equivalencia.

1.2 Establecer las diferentes formas simbólicas en las que el alumno es capaz de explicitar el contenido cognitivo que describe la unidad significante asociada a: la cantidad desconocida, las relaciones entre esta con las cantidades conocidas y la relación de equivalencia.

1.3 Especificar la forma en la que alumno puede reconocer las diferentes posibilidades de selección de la incógnita en un PVEL.

1.4 Determinar las características de las representaciones no discursivas que emplea el estudiante, en el proceso de traducción de un PVEL.

2. Forma de trabajo: Para determinar el avance que cada alumno logró tras la instrucción, se decidió aplicar en primera instancia la prueba en forma individual.

3. Tiempo de realización: El tiempo promedio en la que un alumno realizó el planteamiento de un PVEL en clase en forma individual fue de 20 minutos en promedio. En la prueba se incluyen tres PVEL, por lo que se calculó un tiempo estimado para la su realización de 90 minutos en total.

4. Lugar de realización: Esta prueba se aplicó en aula de clases.

5. Tipo de pruebas: Se elaboraron dos tipos de pruebas A y B, que se encuentran en el Anexo 8.

6. Criterios de selección de los problemas: En este instrumento se incluyen tres PVEL. El criterio general para su selección fue el contenido temático, por lo que se presentan en el mismo orden en que se abordaron durante la instrucción. Así, el primer problema es de números, el segundo de costos y el tercero de edades.

   Los enunciados para cada tipo de prueba son equivalentes y solamente se modificaron las cantidades conocidas y en el caso del problema de costos los artículos a adquirirse.

   El segundo criterio para la selección corresponde a la forma en la que está redactado el enunciado de cada problema. Los problemas seleccionados no revelan toda la información necesaria para realizar en forma directa la conversión del enunciado del PVEL del lenguaje natural a la ecuación que haga factible su solución.

   En consecuencia, se espera que el alumno emplee los conocimientos, procedimientos y el uso representaciones no discursivas adquiridos durante la instrucción, para revelar la información que no explicita el texto del enunciado del PVEL.

   Los criterios particulares para caracterizar esta información no evidente (Duval, 1999, 2006) son:

   6.1 Selección de la incógnita.
      6.1.1 Identificación de la cantidad desconocida.
      6.1.2 Identificación de las posibilidades en la selección de la incógnita.
      6.1.3 Designación de la incógnita.

   6.2 Relaciones entre la incógnita y las cantidades conocidas.
      6.2.1 Identificación de las cantidades conocidas.

6.2.2 Reconocimiento de las operaciones necesarias para establecer las relaciones entre la incógnita y las cantidades conocidas.

6.2.3 Formación de las relaciones entre la incógnita y las cantidades conocidas.

6.2.4 Designación y representación algebraica para las relaciones entre la incógnita y las cantidades conocidas.

6.3 Diferenciación de las operaciones necesarias para la formación de la ecuación de las necesarias para establecer las relaciones entre la incógnita con las cantidades conocidas.

6.3.1 Designación y representación de las operaciones necesarias para la formación de la ecuación.

6.4 Planteamiento de la ecuación.

6.4.1 Identificación de la relación de equivalencia.

6.4.2 Formación de la ecuación con base en la igualación de las relaciones entre la incógnita y las cantidades conocidas y las operaciones matemáticas que las relacionan.

7. Elaboración del cuestionario para la segmentación semántica: En la Figura 8 se presenta el procedimiento general para el diseño de un cuestionario (Basoredo, 2008; Corral, 2010; Quiroz, 2003; Briones, 2003). En el primer apartado de la prueba se incluye el cuestionario para la segmentación semántica. En la Figura 9, se detalla la relación fundamental para el diseño del cuestionario en la que se enlazan los propósitos del instrumento con el contenido y luego se redacta la pregunta. Este proceso está íntimamente ligado con el análisis del contenido (Bermúdez, 1982, 1986; Quiroz, 2003) de las respuestas prospectado a realizar posteriormente, por lo que nos remitiremos a los criterios particulares descritos anteriormente para la caracterización de la información no explicitada en el enunciado del PVEL, para poder orientar dicho análisis por racimos (Bermúdez 1986).

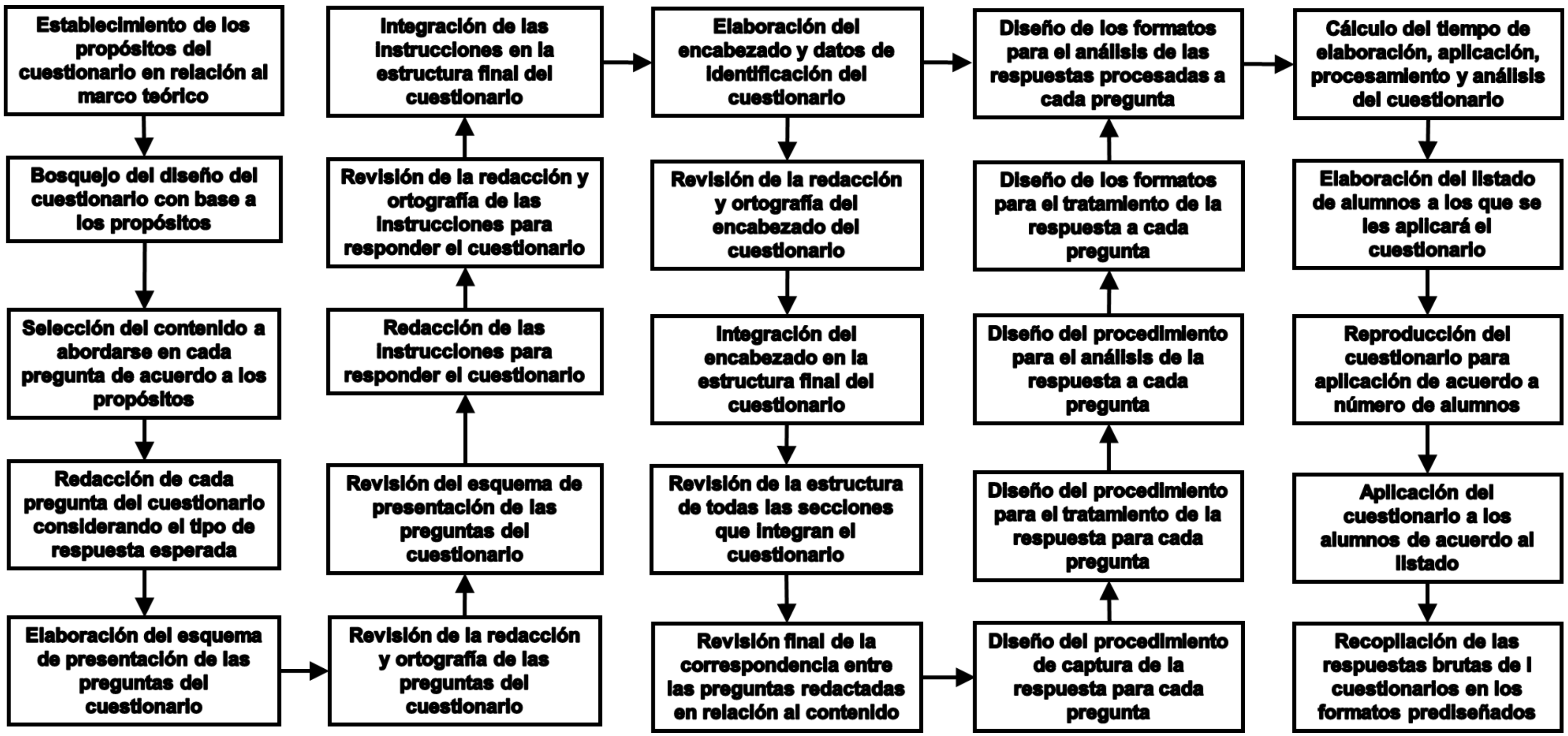


Figura 8. Procedimiento para el diseño y elaboración de un cuestionario.

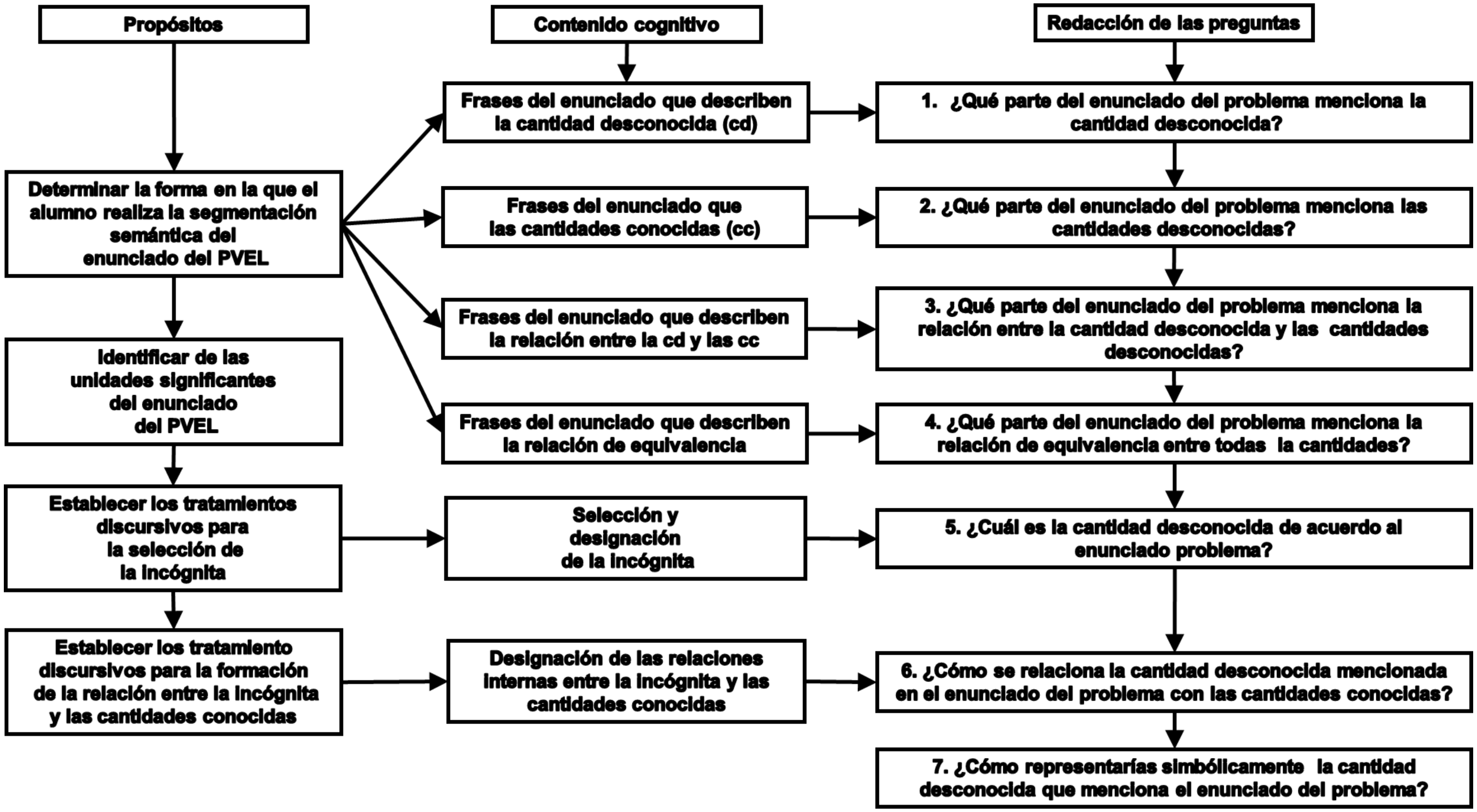


Figura 9. Esquema de relación propósito-contenido-pregunta para el diseño del cuestionario para la segmentación semántica del enunciado de un PVEL.

3.5.1.1.2 Prueba de desempeño en pequeño grupo

El segundo instrumento que se empleó se ubica en el Anexo 9 y está conformado por dos PVEL, uno sobre edades (Nazareno, 2014) y otro de fracciones acumulativas (Molina, 1996) en relación a una cantidad total. En esta prueba se omite la sección correspondiente al cuestionario de la segmentación semántica (Duval, 1999), debido a que bajo la modalidad de pequeño grupo se combinan las diferentes formas de segmentar el texto del enunciado del PVEL que cada alumno que integre el grupo realiza en forma particular.

El grupo se ve inmerso en un proceso interactivo de discusión, negociación, cooperación y consenso (Panitz, 1995; Santos, 2006; Planas, 2011; Bórquez, 2012), con lo que los tratamientos discursivos para la designación de la incógnita, formación de las relaciones entre esta y las cantidades conocida, se vuelven cuasi-inmediatos (Duval, 1999).

El formato de respuesta es abierto al igual que en la prueba individual (Jonassen, 1997). El trabajo en pequeño grupo permite visualizar la representación no discursiva construida por todos los integrantes. En consecuencia, incorpora las características de las representaciones individuales (Paralea y Socas, 1995; Puig, 1998). Este mismo fenómeno sucede en torno a las formas simbólicas escritas para plantear la ecuación para cada PVEL (Duval, 1999, 2006).

En las siguientes páginas se describe para la prueba en pequeño grupo: los propósitos, la forma de trabajo, el tiempo de realización y los criterios de selección de los dos PVEL que conforman la prueba.

1. Propósitos:

    1.1 Establecer las diferentes formas simbólicas en las que en grupo pequeño los alumnos son capaces de explicitar el contenido cognitivo que describe la unidad significante asociada a: la cantidad desconocida, las relaciones entre esta con las cantidades conocidas y la relación de equivalencia.

    1.2 Determinar las características de las representaciones no discursivas que emplea los estudiantes, en el proceso de traducción de un PVEL.

    1.3 Estipular la proporción y la forma en la que el trabajo en grupo pequeño puede mejorar la traducción de un PVEL.

2. Forma de trabajo: Para promover la reflexión, la discusión y la negociación de significados en los estudiantes, se decidió aplicar la segunda parte de la prueba en grupo pequeño (Planas, 2011).

    La participación cooperativa de los estudiantes permite que estos comuniquen sus ideas a los otros miembros del grupo, planteen argumentos, discutan conjeturas y usen distintas representaciones.

    Adicionalmente, la negociación y el consenso permiten la concreción y materialización de los resultados en los que están vertidas indirectamente las concepciones y conocimientos de todos los miembros del equipo (Santos, 2006).

    Para organizar y seleccionar los grupos pequeños con cuatro integrantes cada uno se empleó la técnica de números aleatorios (Mendenhall, 2010)

3. Tiempo de realización: El tiempo para la realización de esta prueba fue de 60 minutos.

4. Lugar de realización: Esta prueba se aplicó en aula de clases.

5. Tipo de pruebas: Se elaboró un solo tipo de prueba, en la que se incluyeron dos problemas.

6. Criterios para la selección de los problemas: El primer criterio para la selección del contenido temático de los problemas es similar al empleado en la prueba individual.

   Son dos los problemas que se incluyen en la prueba en pequeño grupo. El primero es el de *La edad de Diofanto* (Nazareno, 2014), este es un problema verbal de corte histórico. El segundo es un problema de fracciones acumulativas extraído de un acertijo matemático *El robo de las naranjas* (Molina, 1996).

   El segundo criterio referente a la redacción del enunciado y los criterios particulares para caracterizar la información no explicitada en el texto del enunciado del PVEL, son los mismos que los empleados en la prueba individual.

3.5.1.1.3 Cuestionario de concepciones de los estudiantes respecto a los objetos matemáticos implicados en un PVEL

El tercer instrumento diseñado es un cuestionario que se aplicó en dos momentos diferentes: al inicio de la instrucción y en la etapa de la evaluación, es decir, tras el proceso de instrucción. Se diseñó bajo el procedimiento descrito en la Figura 8.

El contenido abordado con este instrumento se centra en las concepciones de los estudiantes respeto a los objetos matemáticos implicados en un PVEL: variable como incógnita, igualdad y ecuación.

En los párrafos que se presentan enseguida se explican para el cuestionario de concepciones de los estudiantes: los propósitos, la forma de trabajo, el tiempo y lugar de realización, la selección de los objetos matemáticos implicados en los PVEL y los criterios para el diseño de las preguntas que integran el cuestionario.

1. Propósitos:

    1.1 Determinar las concepciones iniciales de los estudiantes en torno a los objetos matemáticos implicados en un PVEL.

    1.2 Determinar si existe una modificación sustancial y la medida en la que cambian las concepciones de los estudiantes en torno a los objetos matemáticos implicados en un PVEL: variable como incógnita, igualdad y ecuación, tras la instrucción e identificar en qué aspectos cambian.

2. Forma de trabajo: Individual.

3. Tiempo de realización: 60 minutos por sesión. Al inicio y fin de la instrucción.

4. Lugar de realización: Este instrumento se aplicó en aula de clases.

5. Selección de los objetos matemáticos: En la etapa de la revisión de la literatura, se definieron y caracterizaron los objetos que indirectamente están presentes en todo PVEL: variable como incógnita, igualdad y ecuación. Los estudiantes tienen una serie de concepciones en torno a estos objetos previas a la instrucción.

En muchas ocasiones estas nociones están desconectadas del objeto matemático (Godino y Batanero, 2009) que representa en sí mismo el PVEL, es decir, el alumno las mantiene en un nivel no consciente. Durante el proceso de instrucción se espera que estas nociones se hagan conscientes a través de su objetivación, designación y representación (Duval, 1999) y que se establezcan conexiones entre todos estos objetos matemáticos que puedan ser comunicadas verbalmente y por escrito por los alumnos, como una forma de concreción de sus ideas matemáticas (NCTM, 2000).

En este orden de ideas el uso y manejo del lenguaje matemático es prioritario, porque evidencia el nivel y profundidad en comprensión de los objetos matemáticos que son entes de naturaleza abstracta y cambiante (Godino y Batanero, 2009).

6. Criterios para el diseño de las preguntas: Los contenidos considerados para la elaboración de las preguntas se centran en los objetos matemáticos implicados en cualquier PVEL: variable como incógnita, igualdad y ecuación.

3.5.1.2 Diseño de los instrumentos para la recopilación de los resultados

Se diseñaron formatos específicos para la captura de los resultados brutos de cada instrumento de evaluación.

A continuación se enumeran los formatos que están agrupados por el instrumento del que derivan.

Todos los formatos [excepto el de las representaciones no discursivas] se diseñaron en una hoja de cálculo electrónica en forma de tablas para su posterior tratamiento cuantitativo mediante la estadística descriptiva. Este tratamiento de los datos se detalla en el apartado para el procesamiento y análisis.

a. *Formatos para la recopilación de los resultados de la prueba de desempeño individual y en pequeño grupo*.

a.1 Formatos para la recopilación de los resultados de la segmentación semántica [únicamente aplica para los resultados de la prueba individual]. Para cada una de las siete preguntas se diseñó un formato específico.

La tabla producida contiene en la primer columna la codificación para designar a cada uno de los alumnos [en sustitución de los nombre de los alumnos], en las segunda columna se capturó textualmente la respuesta dada por los alumnos a la pregunta realizada en el cuestionario.

a.2 Formato para la recopilación de los resultados del planteamiento del problema.

Es una lista de verificación para identificación de los elementos básicos en el planteamiento del PVEL.

Esta lista permite un primer acercamiento y filtro para establecer si están presentes los elementos básicos para el planteamiento del problema.

La tabla formada contiene en la primera columna la codificación para designar a cada alumno.

En las columnas subsecuentes la etiqueta del encabezado contiene los siguientes enunciados:

- Copia el enunciado del problema en la hoja anexa destinada para su solución.
- Selecciona la incógnita del problema.
- Realiza la representación geométrica y/o gráfica.
- Establece las relaciones de la incógnita con los demás datos dados en el enunciado del problema.
- Plantea la ecuación lineal que conduzca a la solución del problema.

Las respuestas capturadas son dicotómicas: Si lo realizó, no lo realizó.

a.3 Formato para la recopilación del tipo de representaciones no discursiva.

Este es el único formato que no se diseñó en hoja de cálculo. La captura de las representaciones no discursivas construidas por cada uno de los alumnos fue tal cual la escribió en la prueba. Todas las representaciones se dibujaron con un programa para diseño de diagramas.

a.4 Formato para la recopilación de las formas simbólicas.

La tabla formada en la primera columna contiene el identificador para los alumnos, en las columnas subsecuentes las etiquetas corresponden a las formas simbólicas para: la selección de la incógnita, las relaciones entre la incógnita y las cantidades conocidas, las operaciones necesarias para la formación de la relación de equivalencia y las ecuaciones planteadas.

b. *Formato para la recopilación de las concepciones iniciales y finales de los estudiantes respecto a los objetos matemáticos implicados en un PVEL*.

Es una tabla que en la primera columna tiene el identificador para cada alumno.

En la segunda y tercera columna la etiqueta principal del encabezado es para la variable como incógnita, se usan dos columnas porque en la primera se captura la respuesta dada por el alumno al inicio de la instrucción y en la segunda su repuesta tras el proceso de instrucción.

En la misma forma se diseñan las columnas subsecuentes, para las definiciones elaboradas por los alumnos para las nociones de igualdad y ecuación.

c. *Formato para la tabla de especificaciones*.

La tabla de especificaciones es una tabla de doble entrada que permite establecer los puntajes para calificar una prueba de desempeño.

En esta tabla se distribuyen en forma proporcional los contenidos a evaluarse en la prueba en relación al número total de reactivos.

El formato de la tabla de especificaciones diseñado, en la primera columna contiene el contenido temático a abordarse, la segunda columna corresponde al porcentaje en relación al total de los contenidos que abarcará la prueba, la tercera columna es para el propósito u objetivo a evaluarse, la cuarta columna contiene el número de reactivos para ese propósito, la quinta columna contiene los reactivos redactados, la sexta columna contiene el porcentaje asignado para determinar el puntaje de ese reactivo.

3.5.2 Etapa 2. Implementación

En la Figura 10 se presenta el diagrama que describe la secuencia general para la implementación de los instrumentos de evaluación. La salvedad presente es que en la prueba de pequeño grupo, se inserta dos paso previos, el correspondiente a la formación de los grupo mediante la técnica de números aleatorios (Mendenhall, 2010) y la notificación a los alumnos del grupo al que se deberían integrar al momento de la realización de la prueba.

3.5.3 Etapa 3. Procesamiento y análisis

3.5.3.1 Recopilación de los resultados de la evaluación

Todas las respuestas generadas por los estudiantes a cada instrumento fueron capturadas textualmente en cada uno de los formatos diseñados y descritos previamente. Estas respuestas constituyen los datos o resultados brutos, para efecto de la distinción de los resultados procesados.

3.5.3.2 Procesamiento y análisis de los resultados

3.5.3.2.1 Procesamiento y análisis de los resultados de la segmentación semántica

El análisis de contenido es una técnica de investigación cualitativa que permite la descripción, clasificación y caracterización objetiva y sistemática del contenido presente en comunicaciones verbales que surgen en el contexto social (Briones, 2003; Martínez, 2006). Esta técnica permite inferir e interpretar el contenido que no es evidente a la luz de la redacción del texto (Bermúdez, 1982, 1986; Quiroz, 2003).

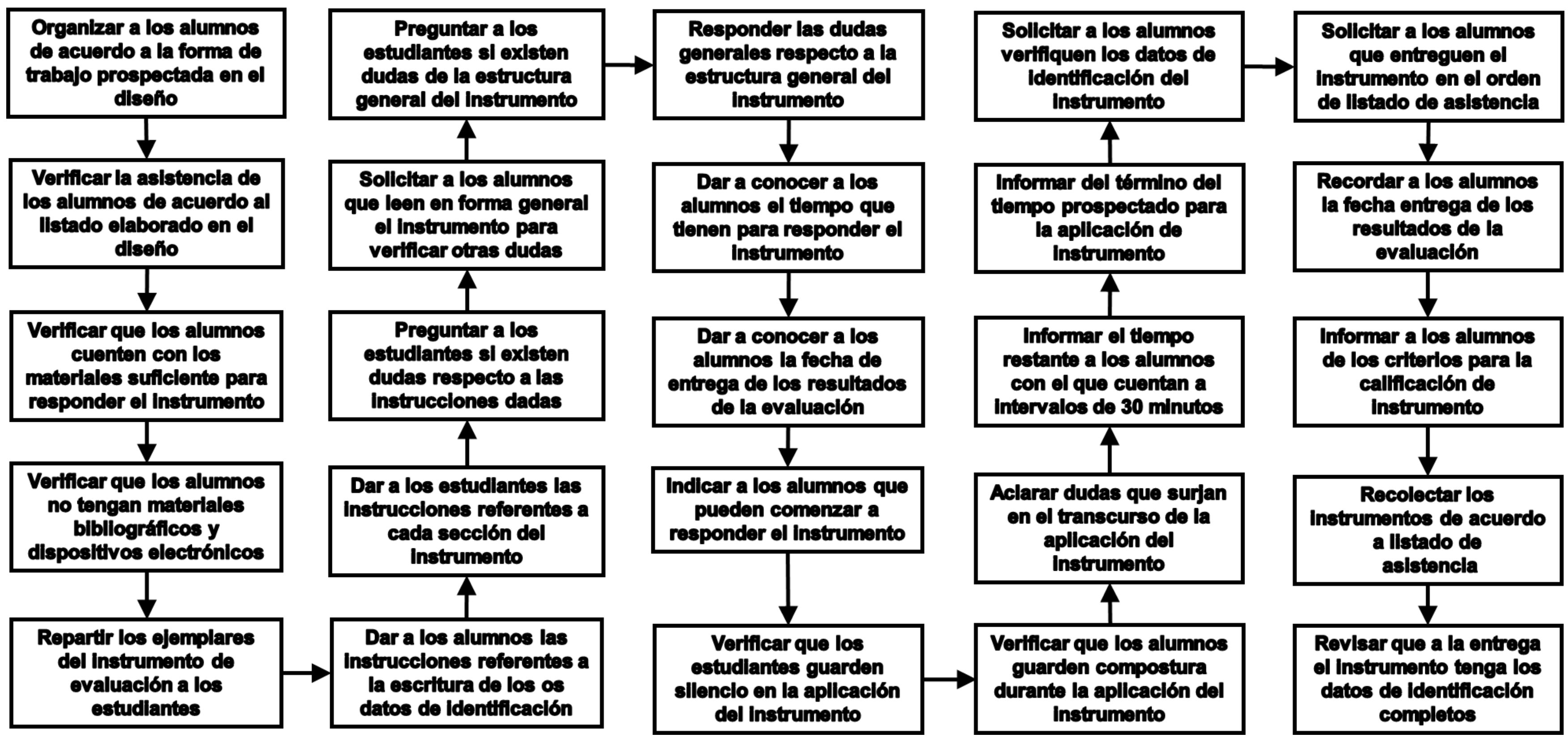


Figura 10. Esquema de secuencia general de aplicación de los instrumentos de evaluación.

El establecimiento de categorías para clasificar el contenido de la comunicación verbal es el elemento fundamental para poder efectuar objetivamente el análisis y la interpretación del contenido. Las categorías establecidas permiten la sistematización del discurso (Lafourcade, 1969; Bermúdez, 1986, Quiroz, 2003). En otras palabras, es una variante de segmentación semántica (Duval, 1999), porque el discurso presente en una comunicación es segmentado en las unidades significantes que envuelven el contenido categorizado y que posteriormente, es reconstruido en un nuevo discurso. La inferencia que realiza el docente debe permitir establecer una relación entre los propósitos derivados de las preguntas de investigación y el contenido que se pretende describir y caracterizar en el discurso (Ricoeur, 1995; Bermúdez, 1996).

El análisis de contenido por racimos (Bermúdez, 1986) es una variante de la técnica descrita anteriormente. Este tipo de análisis se puede emplear en comunicaciones verbales o escritas no extensas. La premisa de la que parte este análisis es que el discurso estructuralmente se conforma por enunciados o proposiciones generales que se enlazan a proposiciones particulares. Las proposiciones contienen un sujeto y un predicado que conforman la unidad significante que describe el contenido. El sujeto se transforma en el núcleo de referencia o categoría principal que se define a partir del contenido específico que se pretende inferir en la proposición. El predicado constituye la acción que recae sobre el sujeto, es decir, su atributo, característica o tratamiento. Al agrupar varias unidades que tienen un sujeto en común se forman racimos de proposiciones con los que es factible la reconstrucción del discurso en términos del contenido interpretado que deriva de los discursos individuales de cada sujeto.

Es claro que el análisis de contenido por racimos es una técnica de investigación de carácter cualitativo porque permite descripción de las propiedades, características, atributos y funciones en torno a un objeto de estudio o contenido específico.

Sin embargo, las categorías y los predicados pueden ser procesados y cuantificados mediante la estadística descriptiva, para poder determinar la frecuencia de incidencia con la que se presentan en el discurso individual.

En el presente trabajo se aplicó el análisis de contenido por racimos a la segmentación semántica para cada problema presentado en la prueba de desempeño individual y al cuestionario de concepciones de los estudiantes respecto a los objetos matemáticos implicados en un PVEL.

Las categorías derivadas de cada una de las siete preguntas fueron procesadas y tratadas estadísticamente para determinar la frecuencia con la que se presentaron, para posteriormente establecer su medida o proporción en relación con la totalidad de respuestas cuantificadas.

3.5.3.2.2 Procesamiento y análisis de las representaciones no discursivas

Las representaciones no discursivas producidas por los estudiantes para cada problema fueron copiadas íntegramente en un programa para elaborar gráficos, durante ese proceso de transcripción se realizó un filtrado del tipo de representaciones que con mayor frecuencia los alumnos emplearon en cada caso.

Posteriormente, se analizaron las características de estas representaciones discursivas.

a. Representación geométrica. Se observó si la representación geométrica contenía:

    - El segmento con el que se representa la incógnita.
    - El segmento en el que aparece la relación entre la incógnita y las diferentes cantidades conocidas, indicando los símbolos de los

operadores matemáticos para especificar las operaciones necesarias para la formación de la ecuación.

- El segmento con el que se representa la relación de equivalencia incluyendo el adecuado uso del símbolo de igualdad.

b. Diagrama relacional: Se cotejó si los gráficos producidos contenían:

- El nodo con el que se representa la incógnita.
- Los nodos con las representaciones simbólicas para las relaciones entre la incógnita y las cantidades desconocidas.
- El nodo con la cantidad conocida que permite la formación de la relación de equivalencia.
- La jerarquía entre el nodo con el que se designa la incógnita en relación a los nodos para las relaciones entre la incógnita y las cantidades desconocidas.
- Las flechas que indican el sentido en el que se relacionan los nodos.
- Los símbolos sobre las flechas que indican las operaciones matemáticas necesarias para formar la ecuación.
- El símbolo de igualdad con el que se designa la relación de equivalencia entre los nodos.

c. Representación matricial: Se revisó si la tabla de doble entrada contenía:

- Las etiquetas para los identificadores para los nombres de los sujetos que se mencionan en el enunciado del problema en la primera y las etiquetas para designar los tiempos [presente y futuro] en la segunda y tercera.
- La representación simbólica para designar: a la incógnita como la edad de un sujeto en tiempo presente, la relación entre la incógnita y la edad del segundo sujeto en tiempo presente, a la incógnita en el futuro, la relación entre la incógnita y la edad del segundo sujeto en el futuro.
- La ecuación formada.

En una hoja de cálculo se elaboró una lista de verificación en la que se indicaba el tipo de representación utilizada en cada problema, la presencia o ausencia de la característica y las variaciones observadas en las representaciones no discursivas producidas por los alumnos.

Posteriormente, las características de las representaciones no discursivas transcritas para cada tipo de representación fueron agrupadas y categorizadas [en forma similar al análisis de contenido por racimos]. Luego, se procesaron estadísticamente para establecer su frecuencia y porcentaje de incidencia.

Derivado del análisis de las representaciones no discursivas se extrajeron y capturaron en un formato electrónico las representaciones simbólicas producidas por los alumnos para representar la incógnita y su relación con las cantidades conocidas.

Adicionalmente, se elaboró otro formato electrónico para capturar las ecuaciones planteadas para cada problema. Al igual que los demás resultados obtenidos, las representaciones simbólicas se procesaron mediante estadística descriptiva para determinar su frecuencia y proporción de incidencia.

También, se analizó el carácter de las operaciones [aditivo, sustractivo, multiplicativo, racional] que reflejan las relaciones indicadas en las representaciones simbólicas planteadas.

En función del carácter de las operaciones descritas, se pueden distinguir las operaciones necesarias para formar las relaciones internas [entre la incógnita y las cantidades conocidas] y las necesarias para formar la ecuación, con lo que se puede inferir el carácter general al planteamiento del problema.

3.5.3.2.3 Procesamiento y análisis del cuestionario de concepciones

Las repuestas al cuestionario de las concepciones de los estudiantes respecto a los objetos matemáticos implicados en un PVEL, también fueron procesadas y tratadas por medio de la técnica de análisis de contenido por racimos. En igual forma, se realizó el tratamiento estadístico descriptivo de las categorías derivadas para determinar su frecuencia de incidencia y proporción. Este análisis se realizó al inicio y al final de la instrucción.

3.5.3.2.4 Calificación de las pruebas de desempeño

Para calificar las pruebas de desempeño [individual y en pequeño grupo] se elaboraron dos tablas de especificaciones (Lafourcade, 1969, CENEVAL, 2006) una para cada instrumento. La escala de calificación seleccionada fue de 0 a 10. La calificación de las pruebas concreta el aspecto cuantitativo de la evaluación.

3.5.4 Etapa 4. Selección de los resultados

Una vez que los resultados fueron procesados y analizados en forma cualitativa y cuantitativa, se procedió a hacer una revisión general para seleccionar los resultados que permiten sustentar la cobertura de los propósitos del presente trabajo y responder de alguna manera las preguntas de indagación planteadas en el primer Capítulo.

Los resultados que se presentan en el siguiente Capítulo, son una parte de la totalidad de los obtenidos en este trabajo, se tomó la decisión de seleccionar una fracción de ellos debido a que su escritura se extendería de manera innecesaria y esto conduciría a una repetición en la discusión y el análisis.

En consecuencia, los resultados de la prueba de desempeño individual elegidos para su presentación y discusión, corresponden a los derivados del Problema 1 [números] tanto para la segmentación semántica como para el planteamiento del problema. Los resultados de la prueba de desempeño en pequeño grupo presentados conciernen al problema de la edad de Diofanto.

Para el cuestionario de concepciones de los alumnos en torno a los objetos matemáticos asociados a un PVEL, se muestran las categorías por racimo establecidas [antes y después de la instrucción].

CAPÍTULO IV.
RESULTADOS Y SU ANÁLISIS

Introducción

Este capítulo contiene el análisis y discusión de los resultados obtenidos en este trabajo. Estructuralmente se divide en cuatro apartados. En la primera sección se presenta la descripción de las 8 sesiones que comprendió el proceso de instrucción y las 4 sesiones destinadas a la evaluación.

La segunda parte contiene los resultados del Problema 1 [números] de la prueba individual, su análisis y discusión.

En el tercer apartado se muestran los resultados del Problema 1 [edad de Diofanto] de la prueba en pequeño grupo. En igual forma que en la sección anterior se presenta su análisis y discusión.

En el cuarto y último segmento de este capítulo, se incluyen los resultados derivados del análisis de las concepciones [antes y después de la instrucción] que exhiben los escolares en torno a los objetos matemáticos implicados en un PVEL: variable como incógnita, igualdad y ecuación.

4.1 Primera Sesión

90 minutos de duración en clase

Se llevó a cabo la tarea *T.13.1 Planteamiento de PVEL de números*, cuyo propósito fue documentar y analizar la forma en la que los estudiantes planteaban la ecuación que conduce a la solución de los problemas.

La tarea es de tipo diagnóstico y se conformó de cinco problemas de números: cuatro de carácter aditivo [dos de números consecutivos] y uno aditivo-sustractivo (Puig y Cerdán, 1988).

Estos problemas fueron seleccionados con base a los siguientes criterios:

a. Tienen un contenido puramente matemático e involucran operaciones fundamentales como la suma y la resta, para el planteamiento de la ecuación (Duval, 2006; Kieran, 1981, 1989; Godfrey y Thomas, 2003).
b. La noción de variable como incógnita es identificable al estar explícitamente indicada en los enunciados de los problemas al describirse como *un número*, es decir, como una cantidad desconocida (Küchemann, 1981; Usiskin, 1988; Ursini, 1990; Duval, 2006).
c. La relación de igualdad es identificable claramente en el enunciado del problema porque está descrita mediante frases como: *es igual a…, es…, se obtiene como resultado… y da…* (Kieran, 1981; Puig y Cerdán, 1988; Duval, 2006).
d. En el caso de todos los problemas, la expresión algebraica para la ecuación correcta se escribe de izquierda a derecha, en el mismo sentido en el que es leído el enunciado del problema (Kieran, 1989).
e. Los problemas pueden ser planteados y resueltos, tanto por procedimientos aritméticos como algebraicos (Kieran, 1981, 1988, 1989, 2008; Paralea y Socas, 1995). Los estudiantes tuvieron oportunidad de resolverlos individualmente y en forma abierta.

Para el primer problema cuyo enunciado es: “Un número aumentado por una [tercera] parte del mismo número es igual a [20]. ¿Cuál es el número?” (Meléndez y Díaz, 2006, p. 6). El 34.4 % de los estudiantes plantearon la ecuación correcta que es: $x + \frac{x}{3} = 20$. El 59.4 % llegaron a ecuaciones incorrectas como: $x + \frac{3}{x} = 20$, $x\left(\frac{x}{3}\right) = 20$, $x + \frac{1}{3} = 20$, $x^3 = 20$ y $3x = 20$. El 6.3 % de los estudiantes no contestaron el problema.

El segundo problema tiene el siguiente enunciado: “Un número es 8 más que otro número. Si la suma de ambos números es igual a [40]. ¿Cuáles son los números?” (Meléndez y Díaz, 2006, p. 6-7). La ecuación correcta a este problema, fue encontrada únicamente por un alumno [3.1 %] y es: $x + x + 8 = 40$. El 90.6 % escribió formas erróneas como: $8+x = 40$, $x+8x = 40$, $8x+y = 40$, $x\ (8+x) = 40$, $y + 8x = 40$ y $x + 8y = 40$. El 6.3 % de los estudiantes no respondió el problema.

El tercer problema tiene el siguiente enunciado: “La suma de tres números enteros consecutivos es [276]. ¿Cuáles son estos números?” (Meléndez y Díaz, 2006, p. 6-7), para este problema ningún alumno planteó correctamente la ecuación [100 %]. El 78 % llegó a ecuaciones como: $x + x + x = 276$ y $3x = 276$. El 9.4 % de los alumnos no resolvieron el problema.

Para el cuarto problema el enunciado es: “Si a un número se le resta su tercera parte y se le suma su quinta parte se obtiene como resultado 13. ¿Cuál es el número?” (Coronil, 2013, p. 142). El 34.4 % de los jóvenes encontraron la ecuación correcta que es: $x-\frac{x}{3}+\frac{x}{5} = 13$, el 56.3 % lo hicieron en forma incorrecta al escribir ecuaciones como: $x-\frac{1}{3}+\frac{1}{5} = 13$, $x-\frac{3}{x}+\frac{1}{5} = 13$ y $x – 3 + 5 = 13$. El 9.4 % no contesto el problema.

En el último problema, el enunciado es: “Calcula el número que sumado con su anterior y su siguiente da [702]” (González, 2013, p. 1). El 6.3 % de los alumnos escribió la ecuación adecuada: $x + (x+1) + (x-1) = 702$, el 65.6 % no lo realizó y planteó ecuaciones incorrectas como: $y + x + z = 702$ y $x + x + x = 702$. El 28.1 % de los estudiantes no respondió el problema.

También, se aplicó la *T.13.2 concepto de variable, igualdad y ecuación* que corresponde al diagnóstico conceptual descrito anteriormente (CCSSI, 2012).

4.2 Segunda sesión

90 minutos de duración en clase y 60 minutos extraclase

Esta clase comenzó con la tarea *T.14.1 Las fracciones de la unidad* [tarea de activación de conocimientos previos] en la que se pretendió que los alumnos asociaran la noción de variable, a una cantidad desconocida fraccionaria como parte de la unidad.

La tarea se llevó a cabo en dupla. Para su desarrollo se les proporcionaron a los alumnos trozos de papel de diferente tamaño doblados en forma fraccionaria en: dos, tres, cuatro partes iguales, etc. Las parejas tenían que iluminar una sección del papel doblado; posteriormente, en las secciones sobrantes deberían escribir en forma verbal el enunciado que designaba la fracción de la sección iluminada con relación al total del papel. También, representaron en forma algebraica el enunciado descrito en lenguaje natural.

En la segunda parte de la sesión, se abordó el planteamiento de la *T.14.2 PVEL de números* enteros que se presentan en el Anexo 6, en los que se utilizó la representación geométrica, como forma no discursiva auxiliar para establecer las relaciones entre la incógnita y las cantidades conocidas.

Los PVEL planteados, corresponden a enunciados que involucran operaciones de suma, resta y multiplicación para la formación de la ecuación. Se enfatizó a los alumnos que las operaciones necesarias para platear la ecuación, no son las mismas que para la resolución de la ecuación. Los enunciados de los PVEL abordados, permiten escribir la ecuación en el mismo sentido en el que se leen, es decir, de izquierda a derecha. La relación de igualdad es fácilmente identificable en el enunciado por medio de la frase *es igual a…* en los tres primeros problemas y en el último con el verbo ser o estar. También se subrayó esta situación a los alumnos.

Los PVEL se presentaron en video, que posteriormente, fue puesto a disposición de los estudiantes vía Facebook, para su consulta.

En forma secuencial y general los pasos descritos a continuación se emplearon para abordar los PVEL en las sesiones 2 a la 8. En primer lugar, se muestra el enunciado; luego, se va cuestionando a los alumnos entorno a la identificación de la cantidad desconocida y las cantidades conocidas.

Las respuestas a las preguntas están temporizadas en el video para dar oportunidad a que los alumnos debatan en forma grupal las respuestas y lleguen a un consenso al respecto. Así, tras la discusión aparece la respuesta a la pregunta. También, se interroga respecto a la representación simbólica de la cantidad desconocida mediante una literal [selección y designación de la incógnita]. Para la relación de igualdad, se pregunta respecto al verbo o frase que la describe en el enunciado.

Posteriormente, se va mostrando la representación geométrica, que se relaciona con las respuestas a los primeros cuestionamientos y se establecen las relaciones internas, entre la cantidad desconocida y la cantidad conocida, además de las operaciones, denotadas por los símbolos de los operadores necesarios para formar la expresión algebraica en ambos miembros de la ecuación. También, se explicita la relación de equivalencia entre ambos, con respecto el verbo identificado en el enunciado y el símbolo de igualdad. Finalmente, se muestra la representación algebraica completa de la ecuación.

Los primeros cuestionamientos en torno a la segmentación semántica del texto del enunciado del PVEL, permiten identificar los tratamientos discursivos que hacen los estudiantes sobre las unidades significantes del texto, para lograr la variación redaccional, en la que emplean las reglas de formación y sustitución en el lenguaje verbal, para poder generar las nuevas expresiones que ordenen el contenido cognitivo del texto relativo a: la cantidad desconocida, las cantidades conocidas y la frase o verbo que describe la relación de equivalencia.

La representación geométrica, permite mantener el contenido cognitivo del enunciado, para poder realizar la conversión de todas las relaciones y concretarlas en la escritura de la forma simbólica algebraica de la ecuación.

A continuación, se muestran las imágenes del cuarto problema del video.

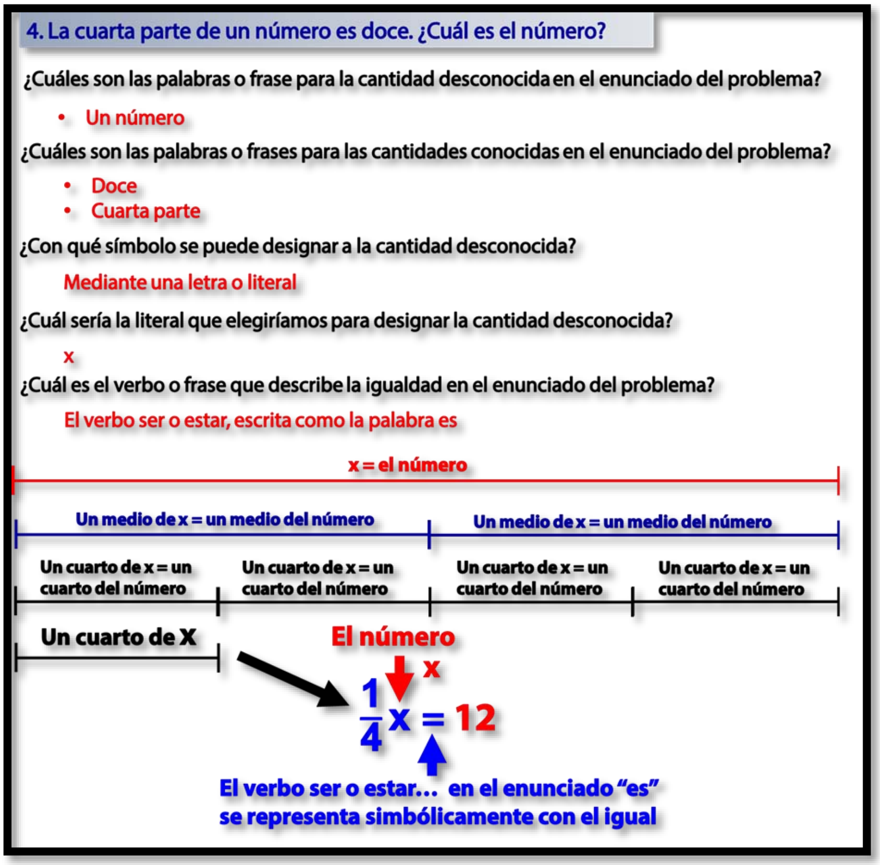


Figura 11. Planteamiento y representación geométrica de un PVEL de números fraccionarios.

Una vez realizada la primera parte de la tarea, se explicó con el video a los alumnos el uso del diagrama relacional de nodos y flechas (Puig y Cerdán, 1988) como otra representación no discursiva que se puede emplear en conjunto con la representación geométrica. En el Anexo 3 se presentan a detalle las características constitutivas de ambas representaciones. Para lograr la comprensión de su uso, se ejemplificó con tres problemas más. En el siguiente gráfico se muestra la imagen de uno de los problemas.

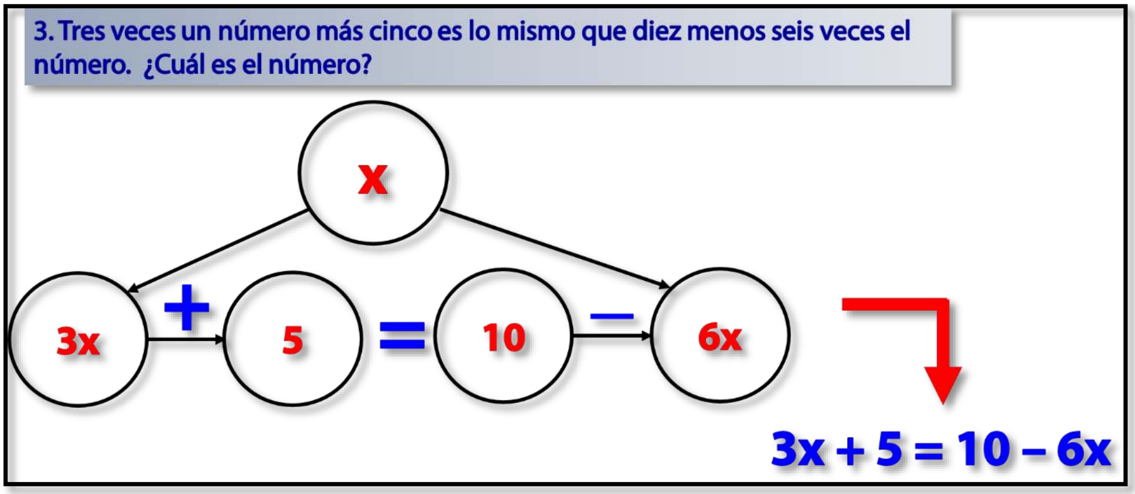
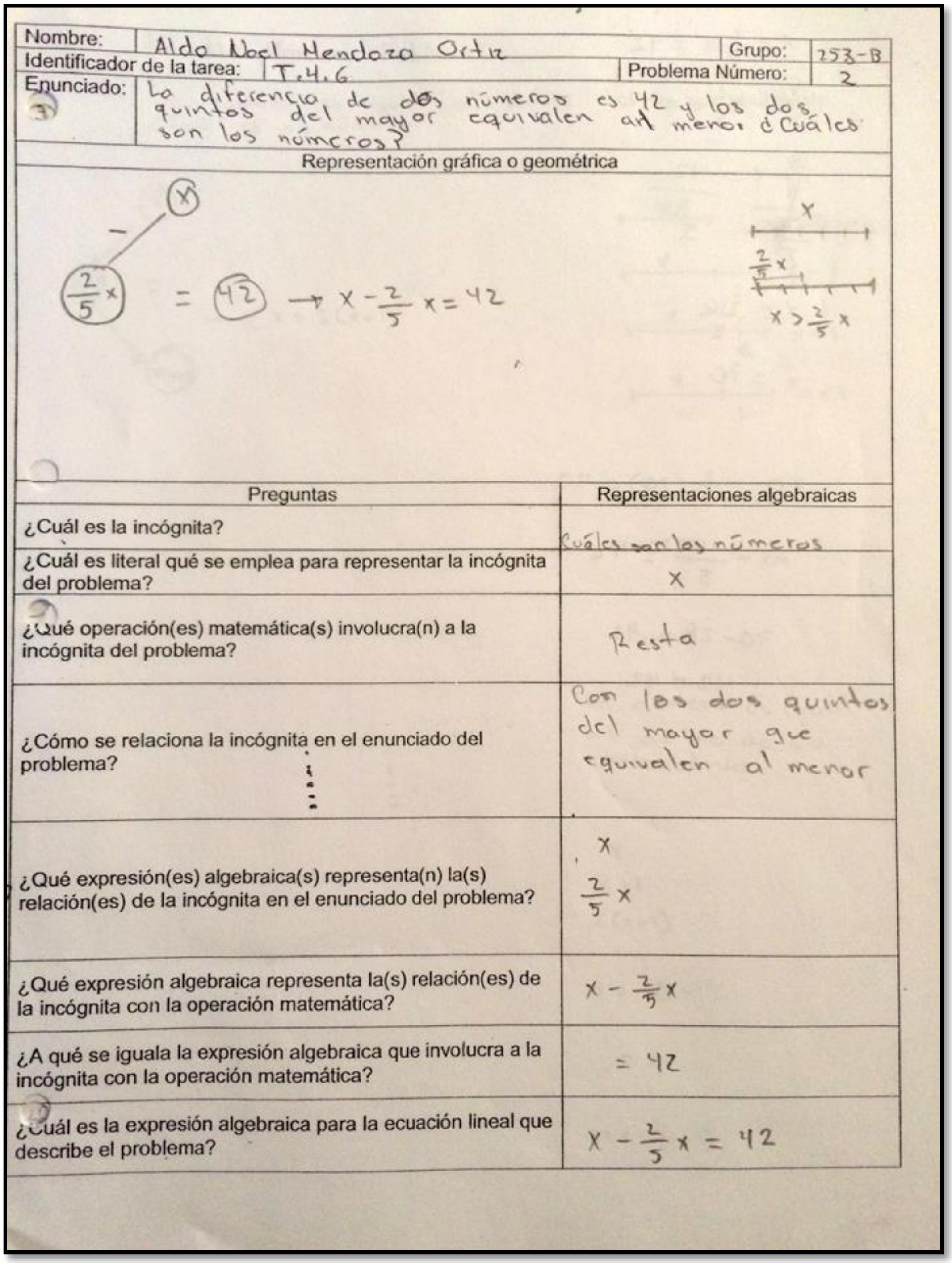


Figura 12. Planteamiento y representación con diagrama relacional de un PVEL de números enteros.

Para finalizar la sesión, los alumnos plantearon la serie de problemas de la *T.14.3 de números fraccionarios* y de la *T.14.4 PVEL unirelacionales de números con suma y resta*, empleando la secuencia y recursos abordados en la presentación. La tarea extraclase consistió en el continuar con los problemas de la *T.14.8A Miscelánea de PVEL de números*. Todos estos problemas están contenidos en el Anexo 6.

Las evidencias de aprendizaje, producto de la segunda sesión, las constituyen los PVEL planteados por los estudiantes en forma individual tanto en el aula, como en la tarea extraclase. Las siguientes imágenes son muestra del planteamiento del PVEL con el siguiente enunciado: La diferencia de dos números es 42 y los dos quintos del mayor equivalen al menor. ¿Cuáles son los números?. La ecuación correcta para este problema es: $x - \frac{2}{5}x = 42$.

En las siguientes figuras se muestran algunos ejemplos correspondientes a la *EA.4A Miscelánea de PVEL de números.* El primer ejemplo, es el caso de un alumno que logró el planteamiento correcto y completo del PVEL, incluyendo el uso de las dos formas de representación no discursiva.



Nombre: Aldo Noel Mendoza Ortiz | Grupo: 253-B

Identificador de la tarea: T.4.6 | Problema Número: 2

Enunciado: La diferencia de dos números es 42 y los dos quintos del mayor equivalen al menor. ¿Cuáles son los números?

Representación gráfica o geométrica

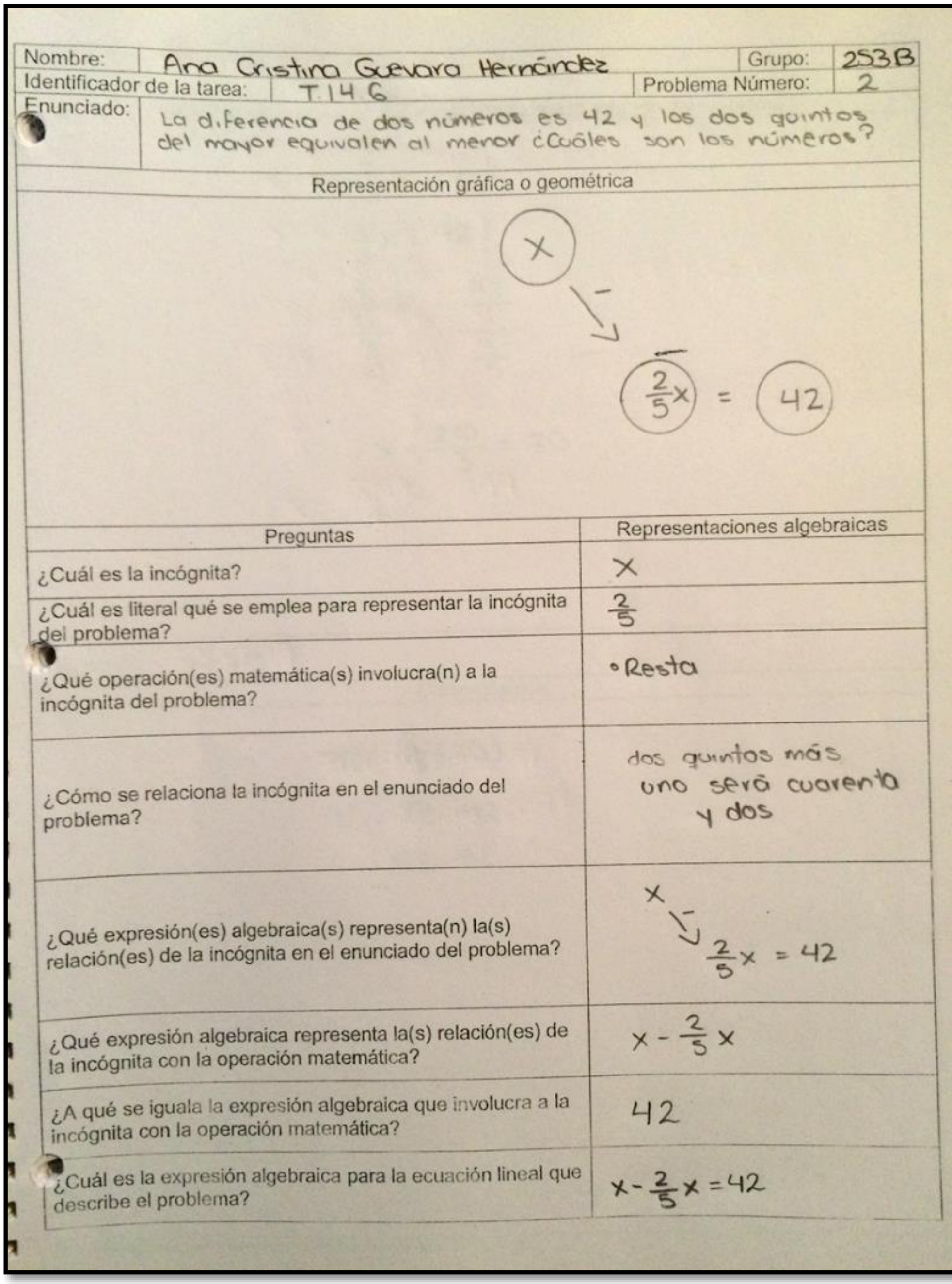
$$x - \frac{2}{5}x = 42$$

$x > \frac{2}{5}x$

Preguntas	Representaciones algebraicas
¿Cuál es la incógnita?	Cuáles son los números
¿Cuál es literal qué se emplea para representar la incógnita del problema?	x
¿Qué operación(es) matemática(s) involucra(n) a la incógnita del problema?	Resta
¿Cómo se relaciona la incógnita en el enunciado del problema?	Con los dos quintos del mayor que equivalen al menor
¿Qué expresión(es) algebraica(s) representa(n) la(s) relación(es) de la incógnita en el enunciado del problema?	x $\frac{2}{5}x$
¿Qué expresión algebraica representa la(s) relación(es) de la incógnita con la operación matemática?	$x - \frac{2}{5}x$
¿A qué se iguala la expresión algebraica que involucra a la incógnita con la operación matemática?	$= 42$
¿Cuál es la expresión algebraica para la ecuación lineal que describe el problema?	$x - \frac{2}{5}x = 42$

Figura 13. Ejemplo de del planteamiento correcto, representación con diagrama relacional y representación geométrica de un PVEL de números fraccionarios correspondiente a la EA.4A.

El segundo, corresponde a la evidencia de un alumno que logró el planteamiento de la ecuación empleando únicamente una de las formas de representación.



Nombre: Ana Cristina Guevara Hernández	Grupo: 253B
Identificador de la tarea: T.14.6	Problema Número: 2
Enunciado:	La diferencia de dos números es 42 y los dos quintos del mayor equivalen al menor ¿Cuáles son los números?

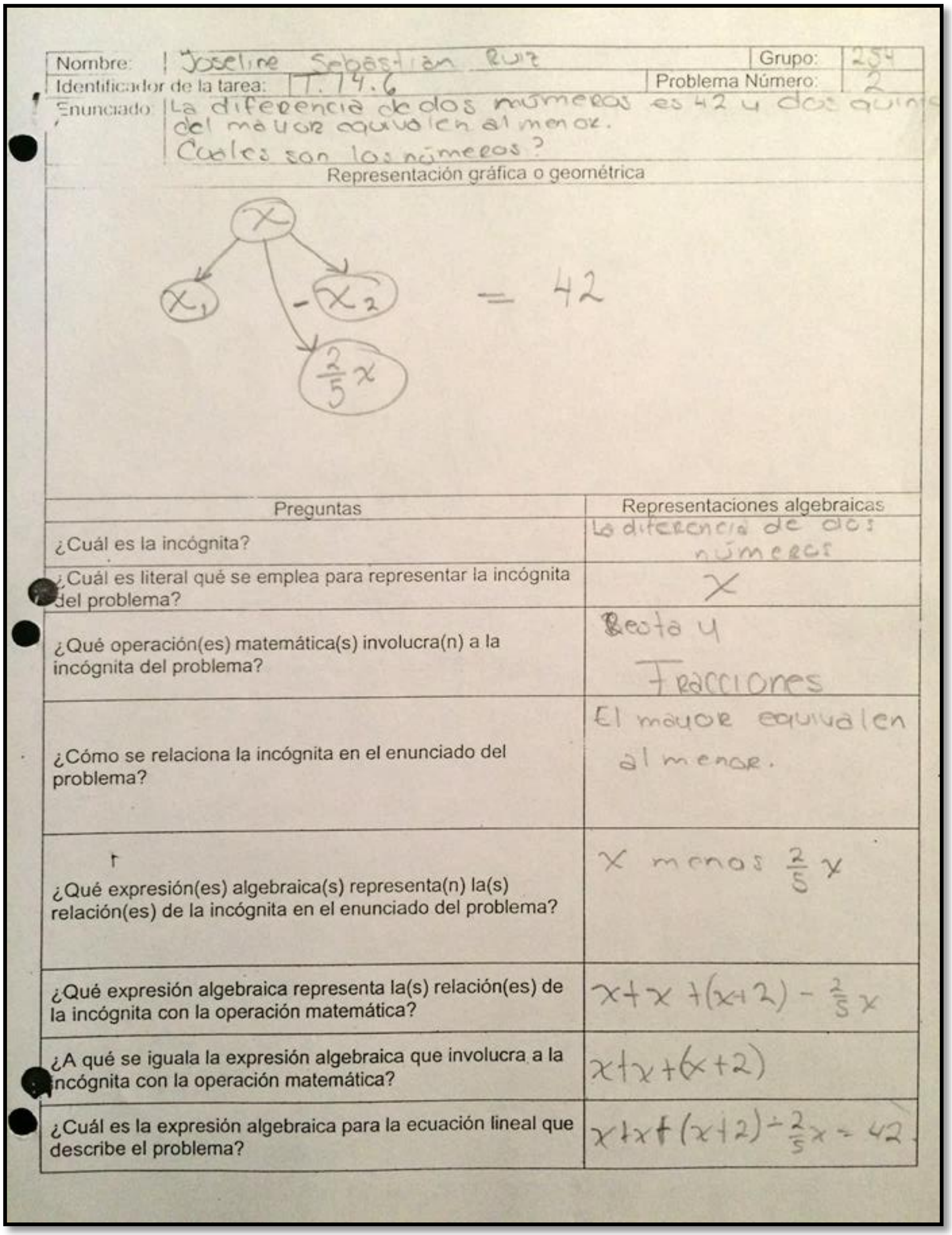
Representación gráfica o geométrica

$x \xrightarrow{-} \frac{2}{5}x = 42$

Preguntas	Representaciones algebraicas
¿Cuál es la incógnita?	x
¿Cuál es literal qué se emplea para representar la incógnita del problema?	$\frac{2}{5}$
¿Qué operación(es) matemática(s) involucra(n) a la incógnita del problema?	• Resta
¿Cómo se relaciona la incógnita en el enunciado del problema?	dos quintos más uno será cuarenta y dos
¿Qué expresión(es) algebraica(s) representa(n) la(s) relación(es) de la incógnita en el enunciado del problema?	$x \xrightarrow{-} \frac{2}{5}x = 42$
¿Qué expresión algebraica representa la(s) relación(es) de la incógnita con la operación matemática?	$x - \frac{2}{5}x$
¿A qué se iguala la expresión algebraica que involucra a la incógnita con la operación matemática?	42
¿Cuál es la expresión algebraica para la ecuación lineal que describe el problema?	$x - \frac{2}{5}x = 42$

Figura 14. Ejemplo de del planteamiento correcto planteamiento correcto y representación con diagrama relacional de un PVEL de números fraccionarios correspondiente a la EA.4A.

Finalmente, se ejemplifica la situación en donde un alumno plantea en forma errónea la ecuación y emplea una variante de las representaciones no discursivas propuestas.



Nombre:	Joseline Sebastián Ruiz	Grupo:	254
Identificador de la tarea:	T.14.6	Problema Número:	2
Enunciado:	La diferencia de dos números es 42 y dos quintos del mayor equivalen al menor. Cuales son los números?		

Representación gráfica o geométrica

x

x_1 $-x_2$ $= 42$

$\frac{2}{5}x$

Preguntas	Representaciones algebraicas
¿Cuál es la incógnita?	La diferencia de dos números
¿Cuál es literal qué se emplea para representar la incógnita del problema?	x
¿Qué operación(es) matemática(s) involucra(n) a la incógnita del problema?	Resta y Fracciones
¿Cómo se relaciona la incógnita en el enunciado del problema?	El mayor equivalen al menor.
¿Qué expresión(es) algebraica(s) representa(n) la(s) relación(es) de la incógnita en el enunciado del problema?	x menos $\frac{2}{5}x$
¿Qué expresión algebraica representa la(s) relación(es) de la incógnita con la operación matemática?	$x+x+(x+2)-\frac{2}{5}x$
¿A qué se iguala la expresión algebraica que involucra a la incógnita con la operación matemática?	$x+x+(x+2)$
¿Cuál es la expresión algebraica para la ecuación lineal que describe el problema?	$x+x+(x+2)-\frac{2}{5}x=42$

Figura 15. Ejemplo del planteamiento y representación incorrecta con diagrama relacional de un PVEL de números fraccionarios correspondiente a la EA.4A.

4.3 Tercera sesión

90 minutos de duración en clase y 60 minutos extraclase

Para dar inicio a la clase, se llevó a cabo la tarea *T.14.5 Números consecutivos* de activación de conocimientos previos que realizaron los estudiantes en forma de triada, consistió en determinar la diferencia entre los números pares e impares. En esta tarea, los estudiantes comenzaron escribiendo los números pares en el rango del 1 al 100, luego determinaron por discriminación de estos los números impares. Así, concluyeron una fórmula general para representar la serie de números pares y la serie de números impares.

Al término de la tarea inicial, se continuó con la *T.14.6 PVEL multirelacionales de números*, revisando el planteamiento de PVEL de números bajo la secuencia descrita en la primera sesión. Los contenidos de los PVEL abordados atienden a las temáticas de: suma de números consecutivos, pares e impares y diferencia entre dos números. En los siguientes gráficos se ejemplifican dos de los problemas presentados.

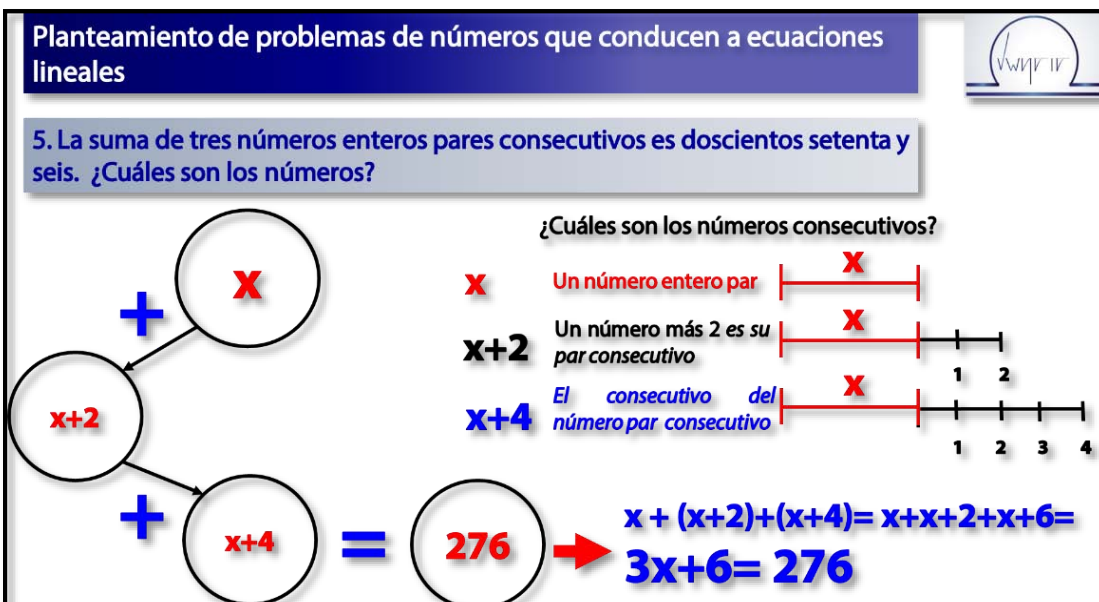


Figura 16. Planteamiento y representación con diagrama relacional de un PVEL que involucra la suma de números enteros pareas consecutivos.

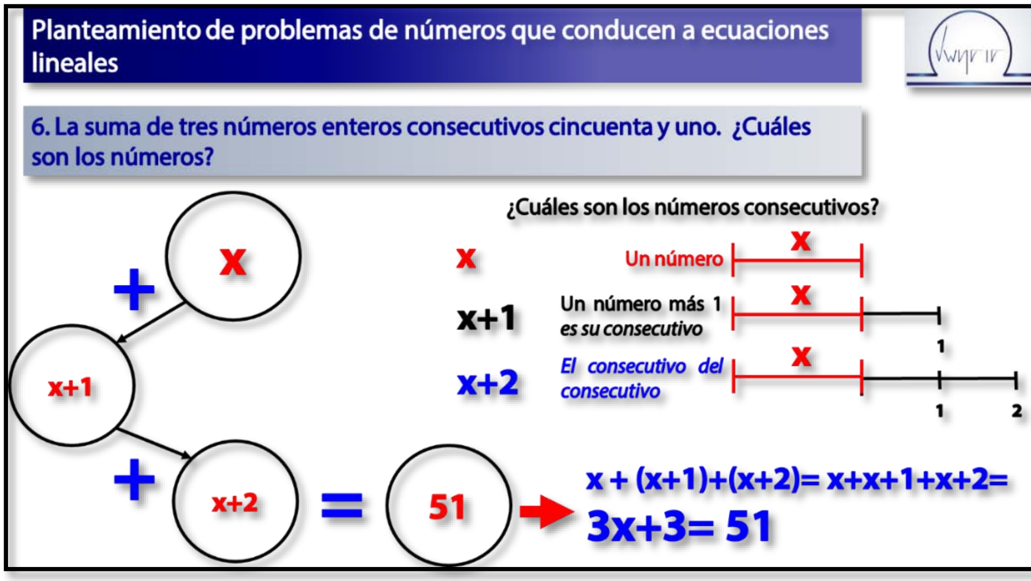
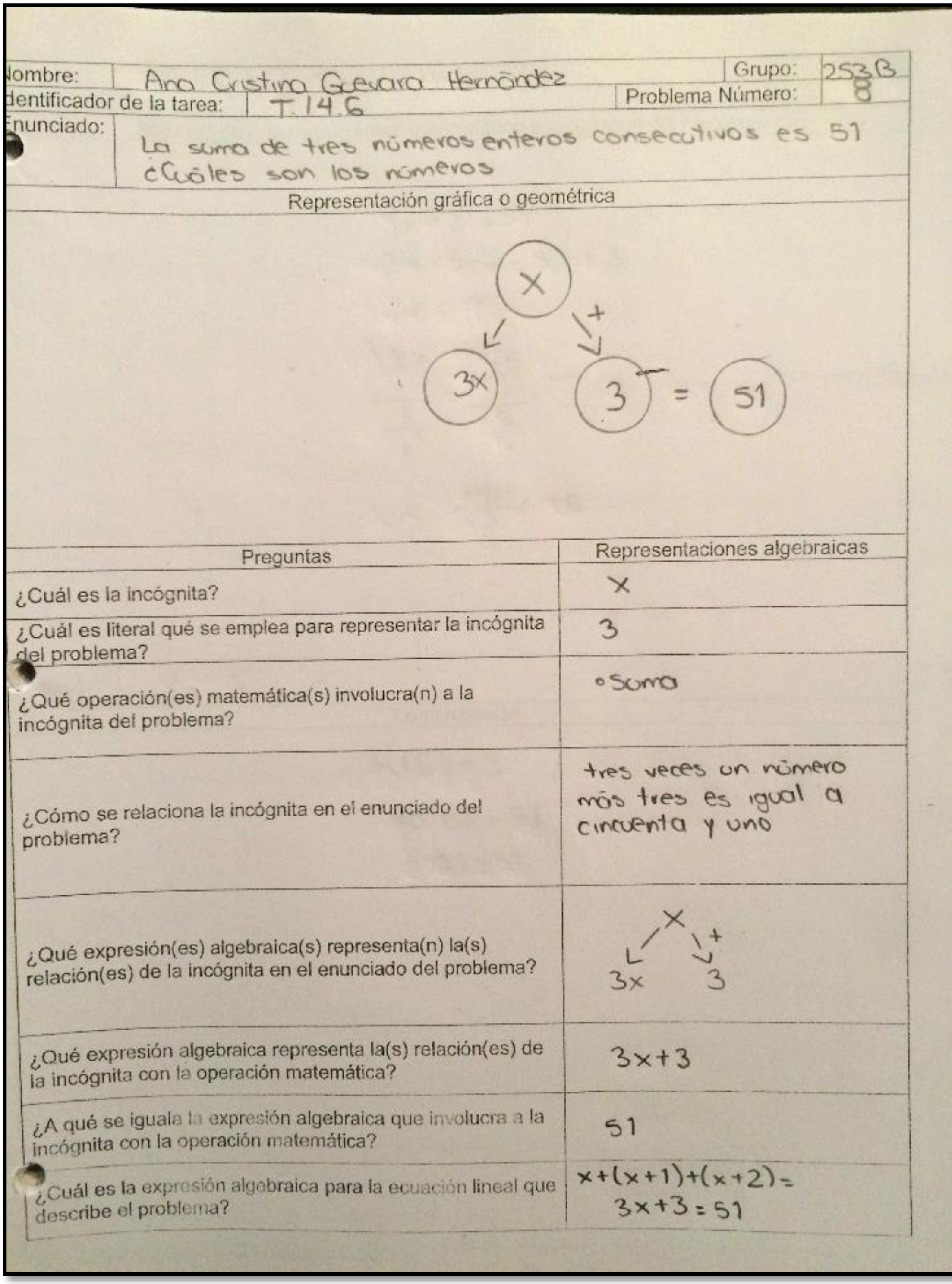


Figura 17. Planteamiento y representación con diagrama relacional de un PVEL que involucra la suma de números enteros consecutivos.

En el aula los alumnos plantearon la secuencia de problemas de la *T.14.7 PVEL de números consecutivos*, como tarea extraclase hicieron el planteamiento de la *T.14.8B Miscelánea de PVEL de números*. Estas series de PVEL se encuentran en el Anexo 6, junto con los revisados hasta la sesión 8.

Al igual que para la sesión anterior se muestran en las siguientes imágenes, ejemplos de las formas en la que tres alumnos plantean un PVEL. La selección de las evidencias obedece a los mismos criterios en todas las sesiones: se muestra una ejemplo en la que se logra el correcto planteamiento del problema y su ecuación, una donde existe cierta limitación en la interpretación del enunciado y la última corresponde al caso en el que no se concreta el planteamiento de la ecuación o es incorrecta.

El PVEL presentado en las imágenes involucra la suma de números enteros consecutivos y el enunciado es: la suma de dos números enteros consecutivos es 51. Encontrar los dos enteros. La ecuación correcta para este problema es: $x + (x + 1) = 51$.

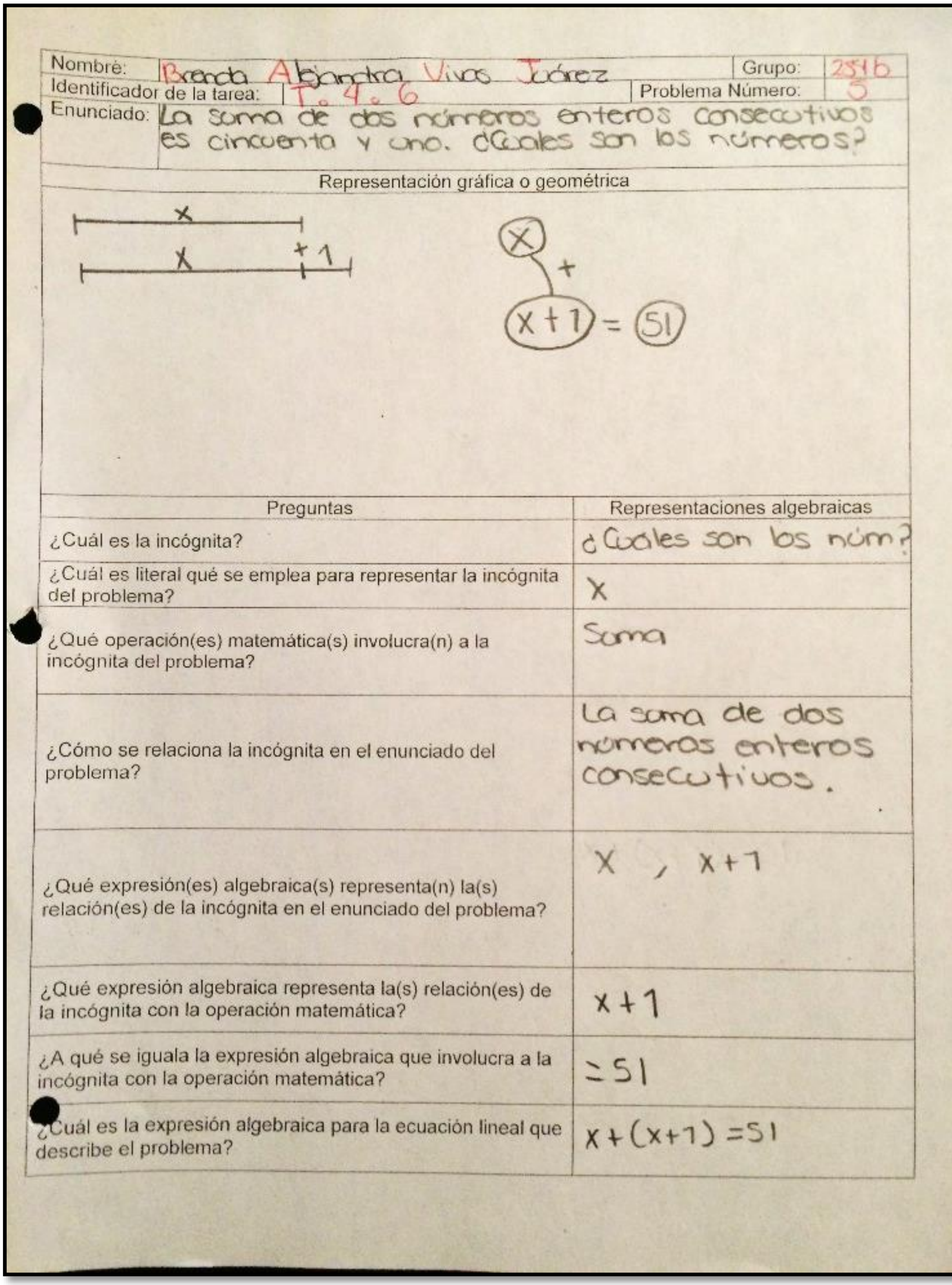


Nombre: Ana Cristina Guevara Hernández | Grupo: 253B
Identificador de la tarea: T.14.6 | Problema Número: 8
Enunciado: La suma de tres números enteros consecutivos es 51 ¿Cuáles son los números

Representación gráfica o geométrica

Preguntas	Representaciones algebraicas
¿Cuál es la incógnita?	x
¿Cuál es literal qué se emplea para representar la incógnita del problema?	3
¿Qué operación(es) matemática(s) involucra(n) a la incógnita del problema?	∘ Suma
¿Cómo se relaciona la incógnita en el enunciado del problema?	tres veces un número más tres es igual a cincuenta y uno
¿Qué expresión(es) algebraica(s) representa(n) la(s) relación(es) de la incógnita en el enunciado del problema?	x, 3x, + 3
¿Qué expresión algebraica representa la(s) relación(es) de la incógnita con la operación matemática?	$3x+3$
¿A qué se iguala la expresión algebraica que involucra a la incógnita con la operación matemática?	51
¿Cuál es la expresión algebraica para la ecuación lineal que describe el problema?	$x+(x+1)+(x+2)=$ $3x+3=51$

Figura 18. Ejemplo del planteamiento correcto con representación con diagrama relacional de un PVEL que involucra la suma de tres números enteros consecutivos correspondiente a la EA.4B.

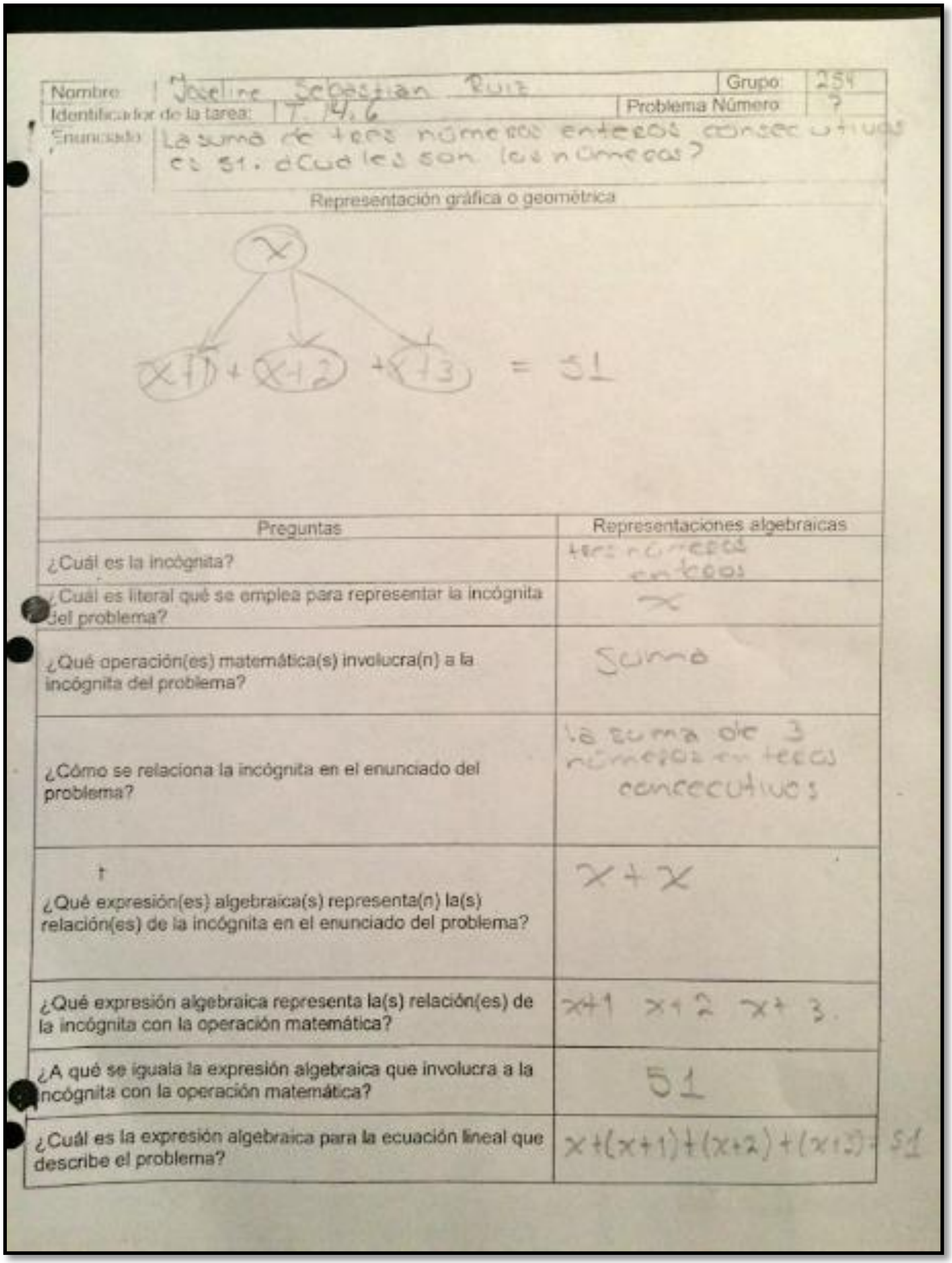


Nombre: Brenda Alejandra Vivas Juárez — Grupo: 2S1b
Identificador de la tarea: T. 4. 6 — Problema Número: 5
Enunciado: La suma de dos números enteros consecutivos es cincuenta y uno. ¿Cuáles son los números?

Representación gráfica o geométrica

Preguntas	Representaciones algebraicas
¿Cuál es la incógnita?	¿Cuáles son los núm?
¿Cuál es literal qué se emplea para representar la incógnita del problema?	x
¿Qué operación(es) matemática(s) involucra(n) a la incógnita del problema?	Soma
¿Cómo se relaciona la incógnita en el enunciado del problema?	La soma de dos números enteros consecutivos.
¿Qué expresión(es) algebraica(s) representa(n) la(s) relación(es) de la incógnita en el enunciado del problema?	x , x+1
¿Qué expresión algebraica representa la(s) relación(es) de la incógnita con la operación matemática?	x+1
¿A qué se iguala la expresión algebraica que involucra a la incógnita con la operación matemática?	=51
¿Cuál es la expresión algebraica para la ecuación lineal que describe el problema?	x+(x+1) =51

Figura 19. Ejemplo del planteamiento incorrecto con representación geométrica y con diagrama relacional de un PVEL que involucra la suma de tres números enteros consecutivos correspondiente a la EA.4B.



Nombre	Joseline Sebastian Ruiz	Grupo	254
Identificador de la tarea:	T.14.6	Problema Número	7
Enunciado	La suma de tres números enteros consecutivos es 51. ¿Cuales son los números?		

Representación gráfica o geométrica

Preguntas	Representaciones algebraicas
¿Cuál es la incógnita?	tres números enteros
¿Cuál es literal qué se emplea para representar la incógnita del problema?	x
¿Qué operación(es) matemática(s) involucra(n) a la incógnita del problema?	suma
¿Cómo se relaciona la incógnita en el enunciado del problema?	la suma de 3 números enteros concecutivos
¿Qué expresión(es) algebraica(s) representa(n) la(s) relación(es) de la incógnita en el enunciado del problema?	$x+x$
¿Qué expresión algebraica representa la(s) relación(es) de la incógnita con la operación matemática?	$x+1$ $x+2$ $x+3$
¿A qué se iguala la expresión algebraica que involucra a la incógnita con la operación matemática?	51
¿Cuál es la expresión algebraica para la ecuación lineal que describe el problema?	$x+(x+1)+(x+2)+(x+3)=51$

Figura 20. Ejemplo del planteamiento incorrecto con representación con diagrama relacional de un PVEL que involucra la suma de tres números enteros consecutivos correspondiente a la EA.4B.

4.4 Cuarta sesión

90 minutos de duración en clase y 60 minutos extraclase

Esta sesión se inició con la tarea *T.15.1 Porcentajes* de conocimientos previos referente al cálculo de porcentajes de diferentes cantidades por dos procedimientos diferentes: regla de tres y ecuación lineal. En equipos de cuatro personas los alumnos debían obtener el porcentaje indicado en los problemas de la *T.15.1*, cuyos enunciados se muestran a continuación:

1. ¿Cuánto es el cinco por ciento de dos mil treinta y siete?
2. ¿Cuánto es el once por ciento de veinte millones?
3. ¿Cuánto es el ochenta y dos por ciento de ciento noventa y dos?
4. ¿Cuántos el seis por ciento de trecientos cincuenta y uno?
5. ¿Cuánto es el nueve porcientos de ocho décimos?

A cada grupo pequeño se le proporcionó una tarjeta con el enunciado y en una hoja de papel bond el equipo resolvió el problema asignado y posteriormente explicó al resto del grupo el procedimiento empleado para su solución. Luego de concluidas las exposiciones, se les pidió que en la otra parte de la hoja del papel bond realizaran el planteamiento del problema empleando la metodología usada en las dos primeras sesiones. Acto seguido, los grupos efectuaron lo solicitado y volvieron a explicar a sus compañeros el planteamiento como PVEL.

Posteriormente, se presentó el video correspondiente a la *T.15.2 PVEL de porcentajes numérico*. En la segunda parte de la sesión, se presentó el video con ejemplos de PVEL de diferentes contextos que involucran el cálculo de porcentajes. En este conglomerado de problemas la representación no discursiva empleada es el diagrama relacional. En el aula los estudiantes plantearon los problemas correspondientes a la *T.15.3 PVEL de porcentajes de diversos contextos* y como tarea extraclase los de la *T.15.4 Miscelánea de PVEL de porcentajes*.

4.5 Quinta sesión

90 minutos de duración en clase y 60 minutos extraclase

La tarea *T.16.1 PVEL de diversos contextos,* de activación de conocimientos previos, tuvo el propósito de que los estudiantes analizaran las diferentes posibilidades de selección de la incógnita a partir del estudio del caso de un PVEL de diversos contextos. La tarea se llevó acabo en pequeños grupos de cuatro integrantes.

A cada grupo se le asignó un PVEL escrito en una tarjeta. Luego, en un papel bond para exposición, se les solicitó elaborar un diagrama en el que se anotarán las posibilidades de selección de la incógnita que el equipo visualizará. Acto seguido, explicaron a sus compañeros del resto del grupo el caso analizado. Estas exposiciones se documentaron con una videograbación.

A manera de ejemplo se presenta el enunciado de uno de los casos abordados. El texto del enunciado es: Emiliano gasta un total de novecientos cincuenta pesos al mes, en alimentos emplea el doble de lo que gasta en útiles escolares y en transporte emplea la cuarta parte de lo que gasta en alimentos. ¿Cuánto gasta Emiliano en transporte, útiles escolares y alimentos?, las posibilidades en la selección de la incógnita para este PVEL son:

a. Tomando como incógnita la cantidad de dinero que gasta en útiles, las relaciones con respecto para lo que gasta en alimentos y transporte son:

Gasto en útiles	x
Gasto en alimentos	$2x$
Gasto en transporte	$\frac{1}{4}(2x)$

La ecuación a la que conducen estas relaciones es: $x + 2x + \frac{1}{4}(2x) = 950$.

b. Tomando como incógnita la cantidad de dinero que gasta en alimentos, las relaciones derivadas para lo que gasta en útiles y transportes son:

Gasto en alimentos	x
Gasto en útiles	$\frac{1}{2}x$
Gasto en transporte	$\frac{1}{4}x$

La ecuación que se forma a partir de estas relaciones es: $x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x = 950$.

c. Tomando como incógnita la cantidad de dinero que gasta en transporte, las relaciones asociadas de lo que gasta en alimentos y útiles son:

Gasto en transporte	x
Gasto en alimentos	$4x$
Gasto en útiles	$2x$

La ecuación correcta que deriva de la integración de estas relaciones es: $x + 4x + 2x = 950$.

La designación de la incógnita corresponde a una operación que en primera instancia involucra tratamientos para discriminar todas las posibilidades en la selección de la incógnita y poder escoger la que involucre menor dificultad en términos de la formación de las relaciones internas. Sin embargo, la simbolización de esta incógnita encierra una operación de conversión (Duval, 2006).

La mayor parte de los grupos [siete grupos, equivalente al 87.5 % de los estudiantes] emplearon la selección de la incógnita planteada en el inciso a.

En los problemas abordados en la *T.16.1 PVEL de diversos contextos*, los estudiantes emplearon el diagrama relacional como forma no discursiva.

Las operaciones de los PVEL necesarias para formar la ecuación son de carácter aditivo, empleando números enteros y fraccionarios.

En la segunda parte de la sesión, se abordó el planteamiento de la *T.16.2A PVEL de costos,* con la mecánica de la presentación en video.

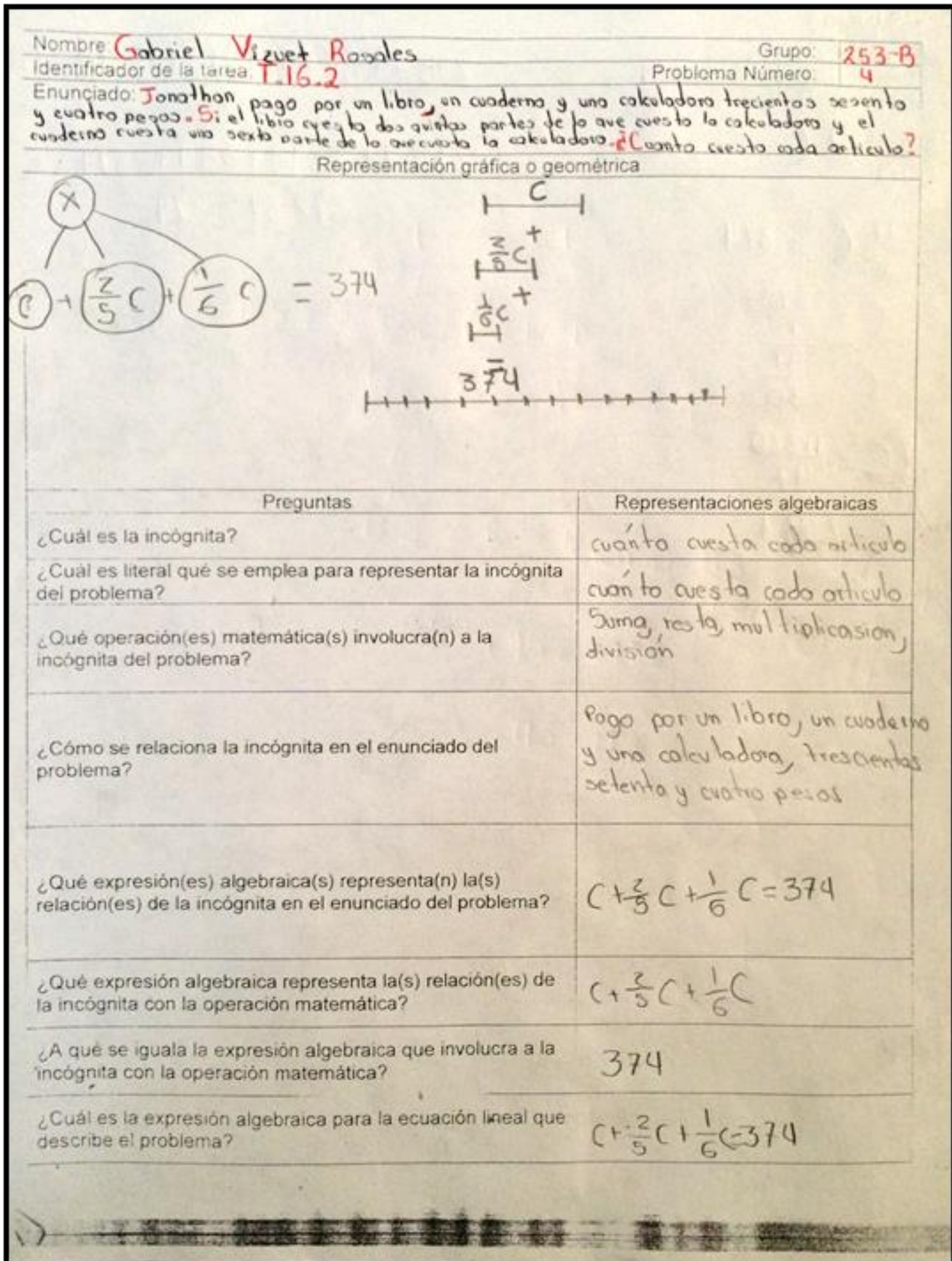
En los problemas incluidos en la *T.16.2A* se enfatizó a los estudiantes que establecieran todas las posibilidades en torno a la designación de la incógnita y el hecho de que independientemente de la selección realizada, la ecuación obtenida conducirá a la misma forma general.

En el aula los estudiantes plantearon el resto de los problemas de esta tarea; como tarea extraclase los alumnos realizaron la *T.16.3 Miscelánea de PVEL de costos*.

Derivadas de la tarea extraclase surgen los ejemplos de las evidencias de aprendizaje [EA.9] que se presentan en las Figuras 21 y 22.

El enunciado del problema presentado es: Jonathan pagó por un libro, un cuaderno y una calculadora trecientos sesenta y cuatro pesos. Si el libro cuesta dos quintas partes de lo que cuesta la calculadora y el cuaderno cuesta una sexta parte de lo que cuesta la calculadora. ¿Cuánto cuesta cada artículo?.

La ecuación correcta para este PVEL es: $x + \frac{2}{5}x + \frac{1}{6}x = 374$.



Nombre: Gabriel Vizuet Rosales Grupo: 253-B

Identificador de la tarea: T.16.2 Problema Número: 4

Enunciado: Jonathon pago por un libro, un cuaderno y una calculadora trecientos sesenta y cuatro pesos. Si el libro cuesta dos quintas partes de lo que cuesta la calculadora y el cuaderno cuesta una sexta parte de lo que cuesta la calculadora. ¿Cuanto cuesta cada articulo?

Representación gráfica o geométrica

Preguntas	Representaciones algebraicas
¿Cuál es la incógnita?	cuánto cuesta cada articulo
¿Cuál es literal qué se emplea para representar la incógnita del problema?	cuánto cuesta cada articulo
¿Qué operación(es) matemática(s) involucra(n) a la incógnita del problema?	Suma, resta, multiplicasion, division
¿Cómo se relaciona la incógnita en el enunciado del problema?	Pago por un libro, un cuaderno y una calculadora, trescientos setenta y cuatro pesos
¿Qué expresión(es) algebraica(s) representa(n) la(s) relación(es) de la incógnita en el enunciado del problema?	$C+\frac{2}{5}C+\frac{1}{6}C=374$
¿Qué expresión algebraica representa la(s) relación(es) de la incógnita con la operación matemática?	$C+\frac{2}{5}C+\frac{1}{6}C$
¿A qué se iguala la expresión algebraica que involucra a la incógnita con la operación matemática?	374
¿Cuál es la expresión algebraica para la ecuación lineal que describe el problema?	$C+\frac{2}{5}C+\frac{1}{6}C=374$

Figura 21. Ejemplo del planteamiento correcto, representación geométrica y con diagrama relacional de un PVEL que involucra el costo de tres artículos correspondiente a la EA.9.

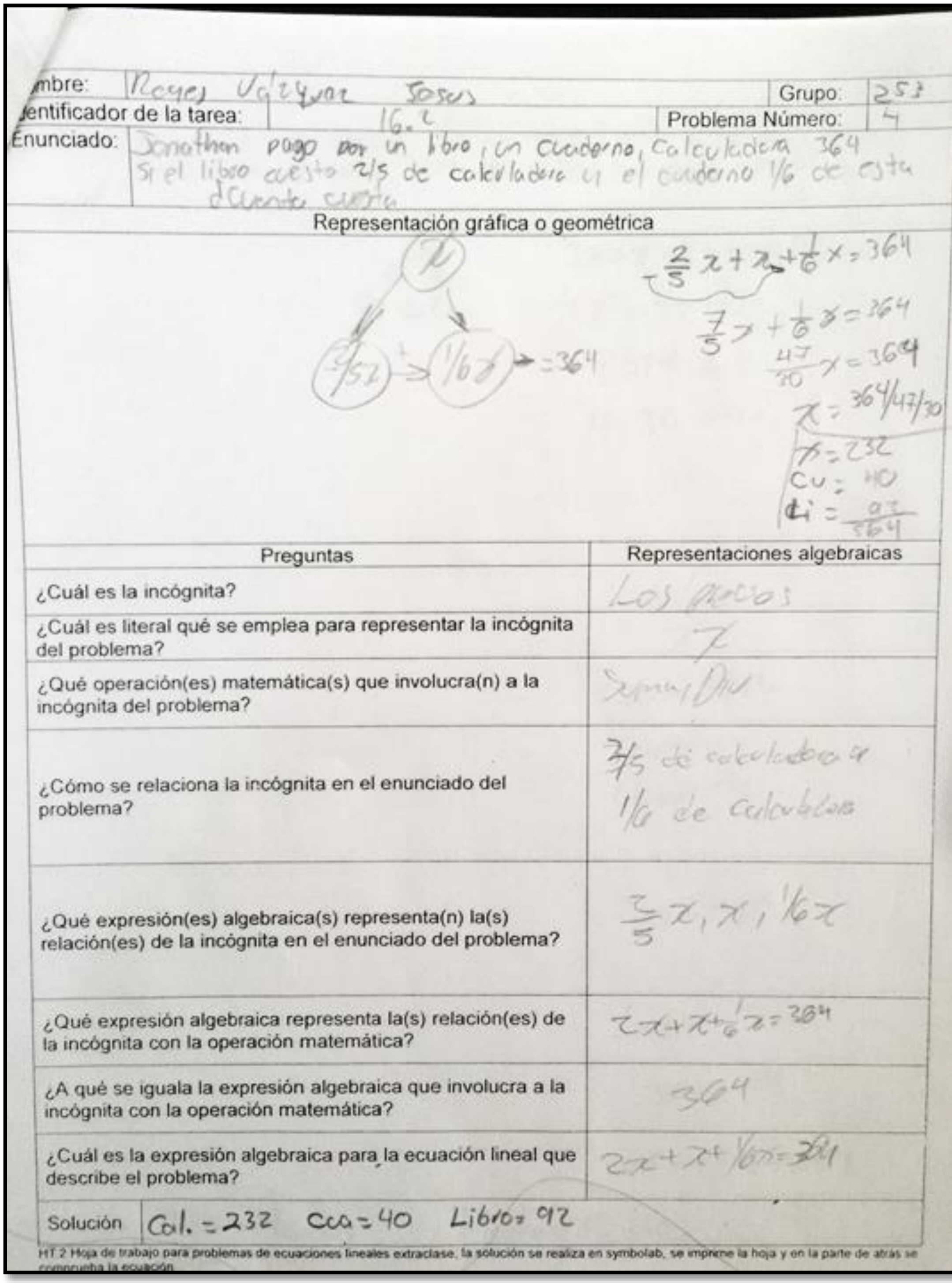


Figura 22. Ejemplo del planteamiento incorrecto y representación con diagrama relacional de un PVEL que involucra el costo de tres artículos correspondiente a la EA.9.

4.6 Sexta y séptima sesión

180 minutos de duración en clase y 90 minutos extraclase

Estas sesiones se centraron en el planteamiento de PVEL de edades, los cuales son considerados problemas de estado (Puig y Cerdán, 1988), porque involucran una dinámica relacionada con la ubicación de la edad de una persona en relación a la de otra en: el presente y el futuro, el presente y el pasado o en el presente, pasado y futuro. En consecuencia, es de especial atención el uso de las representaciones no discursivas para evidenciar la información que no se explícita en el enunciado del problema. A la par, es necesario que el estudiante tenga una adecuada identificación y práctica con la selección de la incógnita.

La tarea de activación de conocimientos previos consiste en un juego denominado *T.17.CP Adivino tu edad*. Al alumno se le pide seleccionar un número entre 1 y 10, luego que lo multipliquen por 2 y le añadan 5, posteriormente que lo multipliquen por 50. Acto seguido se les solicita que si la fecha de su cumpleaños ya pasó, le sume 1765 a la cantidad y si todavía no ha pasado le sume 1764. Finalmente, que al número obtenido le resten los cuatro dígitos del año de su nacimiento. El resultado será un número de tres dígitos donde el primero corresponde al número que seleccionaron al inicio y que su edad actual la indican los dos dígitos restantes.

Para lograr la comprensión a profundidad de estos aspectos, se inicia con el análisis del planteamiento de PVEL que involucran las edades de dos personas en tiempo presente y futuro, en las que las operaciones necesarias para formar la ecuación son la suma de las edades que están expresadas en números enteros.

Se emplea como representación no discursiva adicional a las empleadas en las sesiones anteriores, la representación matricial o tabla de doble entrada en la que se escriben las relaciones de orden lógico en el registro algebraico.

En este tipo de PVEL, se enfatizó la selección de la incógnita que involucra la operación de conversión, al traducir las unidades significantes producto de la segmentación del texto, en sus respectivas formas simbólico-algebraicas.

En la siguiente imagen se ejemplifica uno de los problemas abordados que pertenece al listado de la *T.17.1 PVEL de edades que involucran tiempo presente y futuro*.

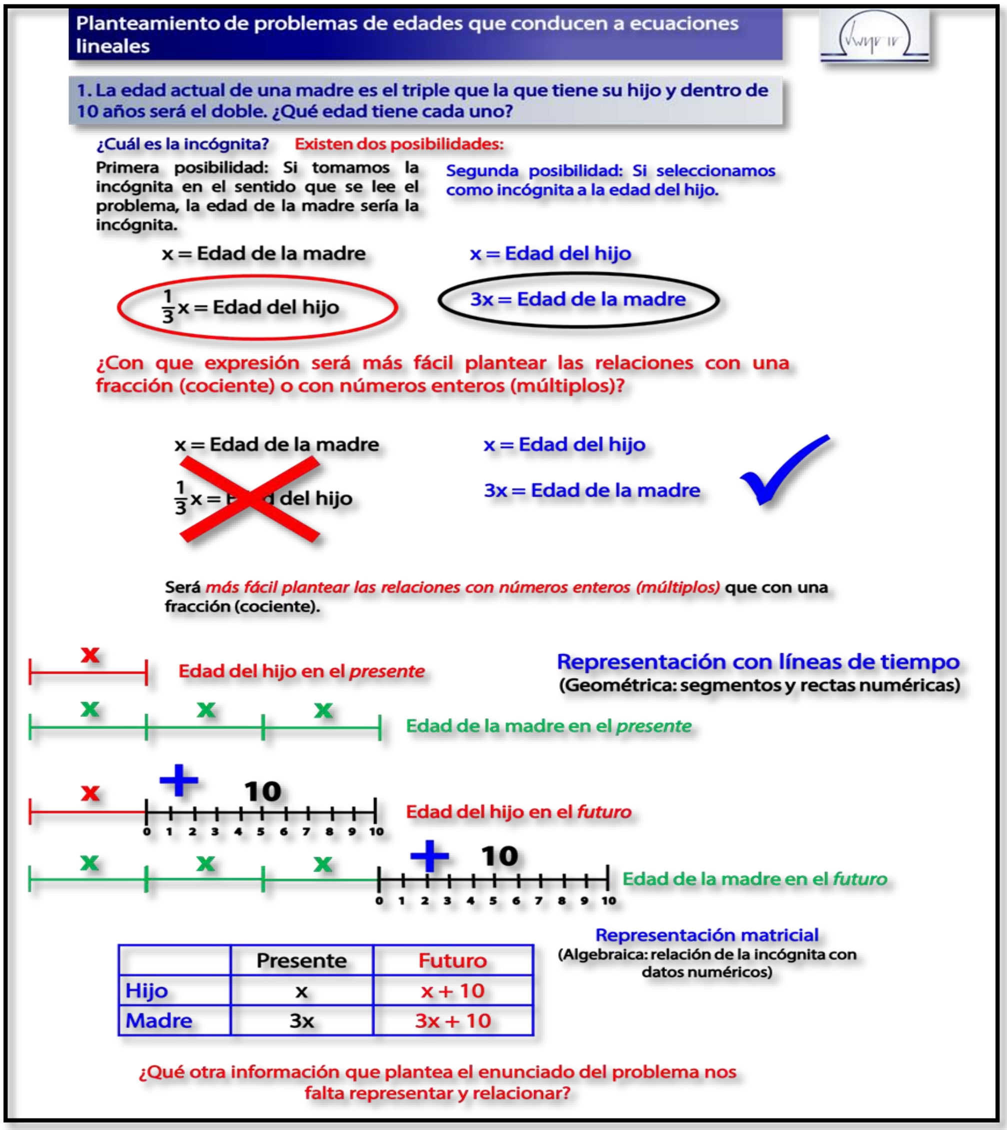


Figura 23. Planteamiento, representación geométrica y matricial de un PVEL de edades que involucra tiempo presente y futuro.

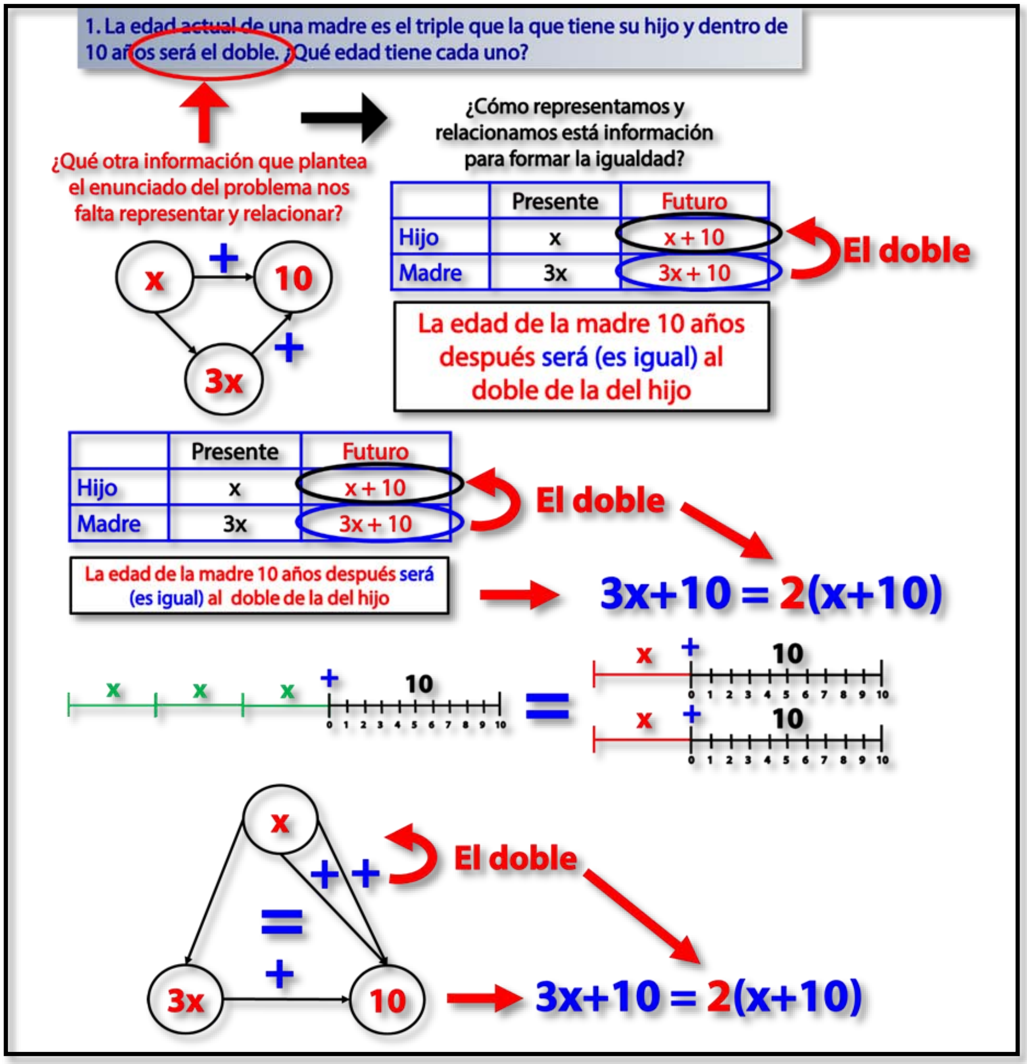


Figura 24. Planteamiento, representación geométrica, con diagrama relacional y representación matricial de un PVEL de edades que involucra tiempo presente y futuro.

En el resto de la sexta sesión los alumnos realizaron el planteamiento de la *T.17.1B PVEL de edades que involucran tiempo presente y futuro*, como tarea extraclase la *T.17.2 Miscelánea de PVEL de edades que involucran tiempo presente y futuro*.

En la séptima sesión, los estudiantes platearon en grupo pequeño de tres integrantes, los problemas de la *T.17.3 PVEL de edades que involucran tiempo presente y pasado*, al igual que la T*.17.4 PVEL que involucran suma de edades*.

Los grupos explicaron al resto de sus compañeros el problema planteado, la exposición fue video grabada con fines de documentación, posteriormente estos videos fueron analizados para su evaluación.

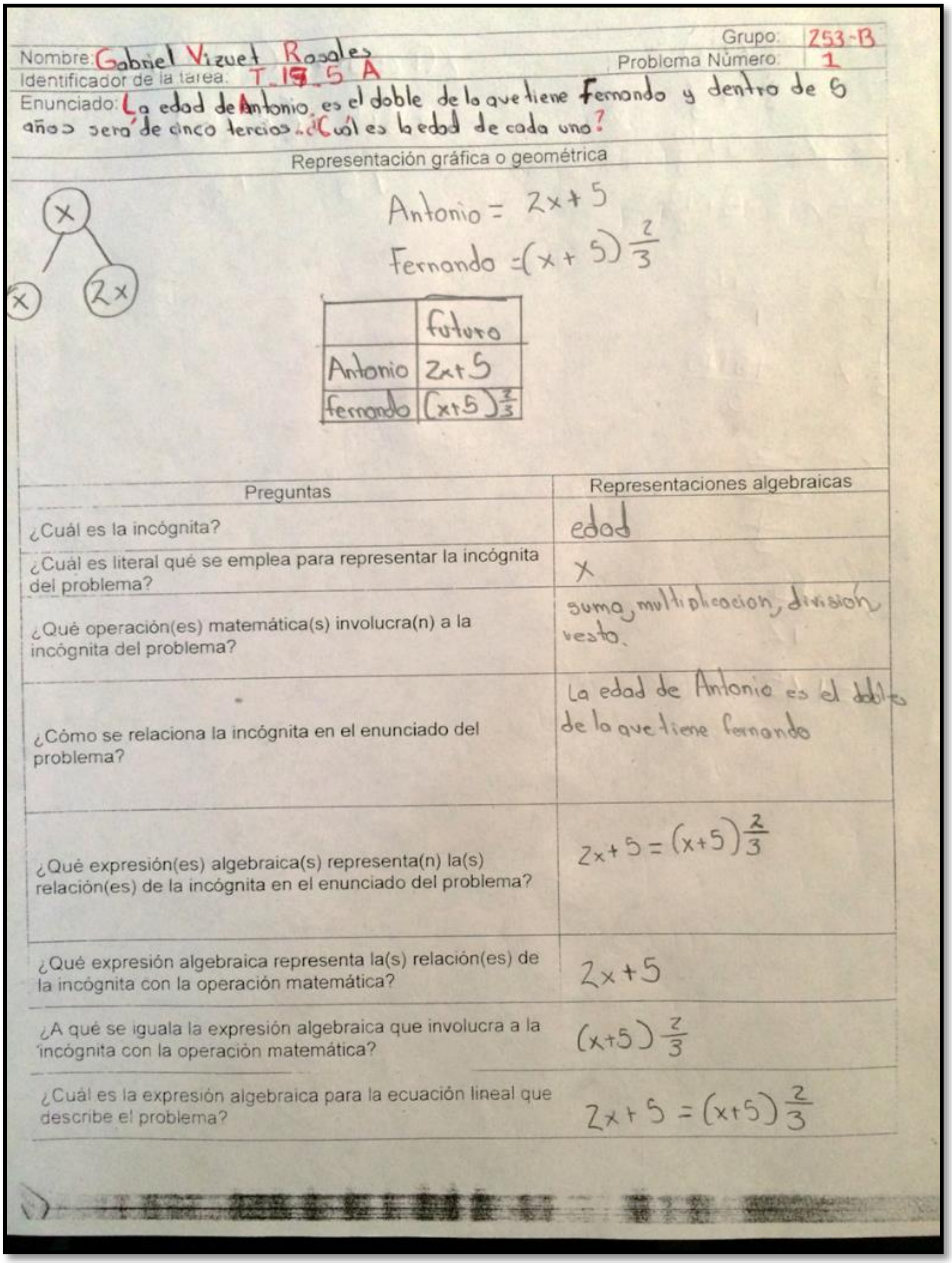
Al término de las exposiciones se llevó a cabo un debate grupal respecto a las conclusiones, en lo referente al planteamiento de este tipo de PVEL.

En la tarea extraclase los alumnos desarrollaron en forma individual la *T.17.5 Miscelánea de PVEL de edades*, en las siguientes imágenes se muestran evidencias del problema cuyo enunciado es: la edad de Antonio es el doble de la que tiene Fernando y dentro de 5 años será de cinco tercios. ¿Cuál es la edad de cada uno?.

La ecuación correcta para este enunciado es: $2x + 5 = \frac{5}{3}(x + 5)$.

En las siguientes imágenes se muestran las evidencias de aprendizaje correspondientes a la *EA.10B* elaboradas por tres escolares en la que se muestra el planteamiento de un PVEL de edades que involucra tiempo presente y futuro con números fraccionarios.

Las representaciones no discursivas más frecuentemente empleadas por los alumnos en la *T.17.5 Miscelánea de PVEL de edades* son la representación geométrica y con diagrama relacional.



Nombre: Gabriel Vizuet Rosales

Grupo: 253-B

Identificador de la tarea: T.19.5 A

Problema Número: 1

Enunciado: La edad de Antonio es el doble de la que tiene Fernando y dentro de 5 años será de cinco tercios. ¿Cuál es la edad de cada uno?

Representación gráfica o geométrica

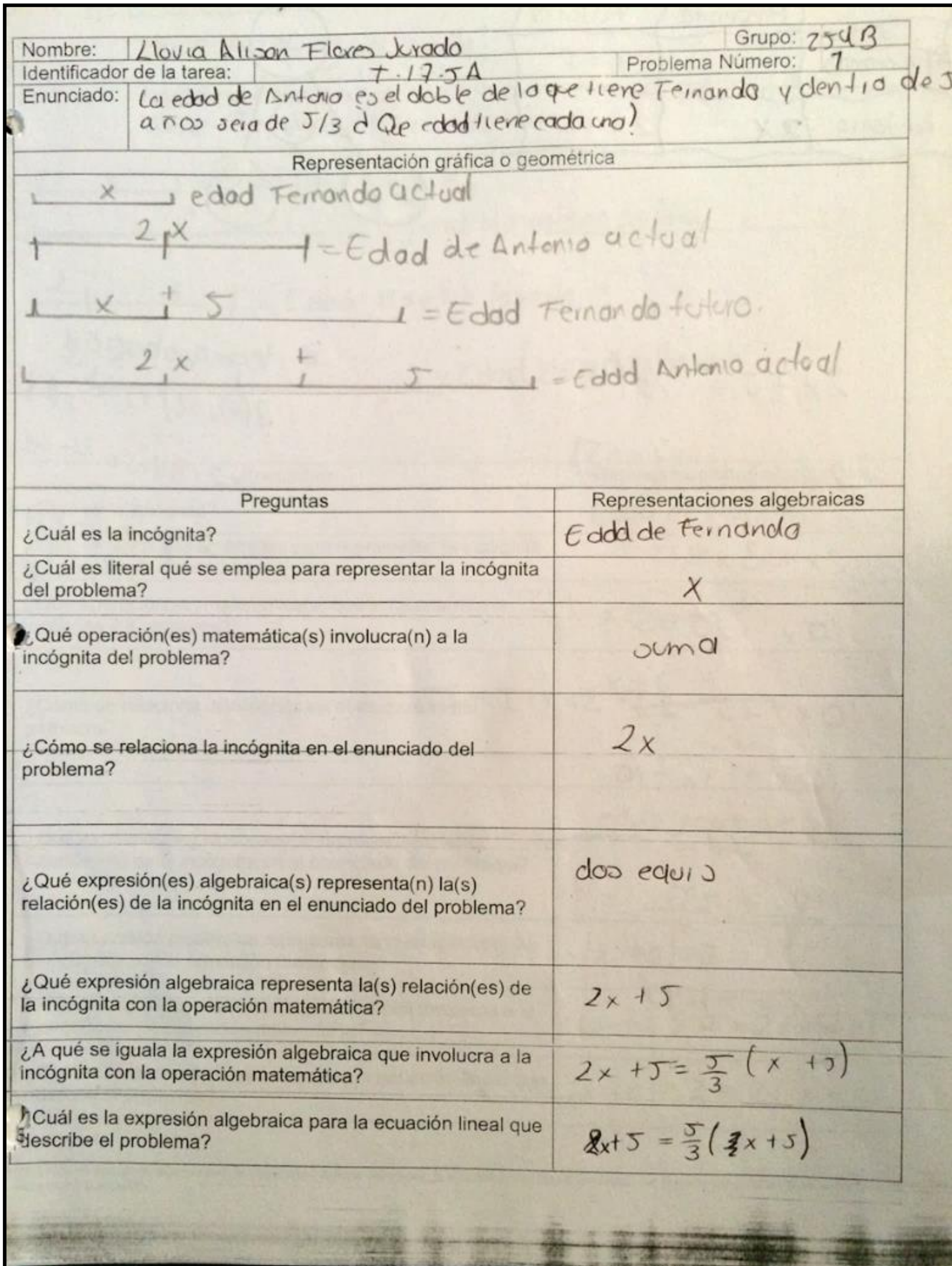
Antonio = 2x + 5

Fernando = $(x+5)\frac{2}{3}$

	futuro
Antonio	2x+5
fernando	$(x+5)\frac{2}{3}$

Preguntas	Representaciones algebraicas
¿Cuál es la incógnita?	edad
¿Cuál es literal qué se emplea para representar la incógnita del problema?	x
¿Qué operación(es) matemática(s) involucra(n) a la incógnita del problema?	suma, multiplicacion, division, resta.
¿Cómo se relaciona la incógnita en el enunciado del problema?	La edad de Antonio es el doble de la que tiene fernando
¿Qué expresión(es) algebraica(s) representa(n) la(s) relación(es) de la incógnita en el enunciado del problema?	$2x+5=(x+5)\frac{2}{3}$
¿Qué expresión algebraica representa la(s) relación(es) de la incógnita con la operación matemática?	$2x+5$
¿A qué se iguala la expresión algebraica que involucra a la incógnita con la operación matemática?	$(x+5)\frac{2}{3}$
¿Cuál es la expresión algebraica para la ecuación lineal que describe el problema?	$2x+5=(x+5)\frac{2}{3}$

Figura 25. Ejemplo del planteamiento, representación geométrica y con diagrama relacional de un PVEL de edades que involucra tiempo presente y futuro con números fraccionarios correspondiente a la EA.10B.

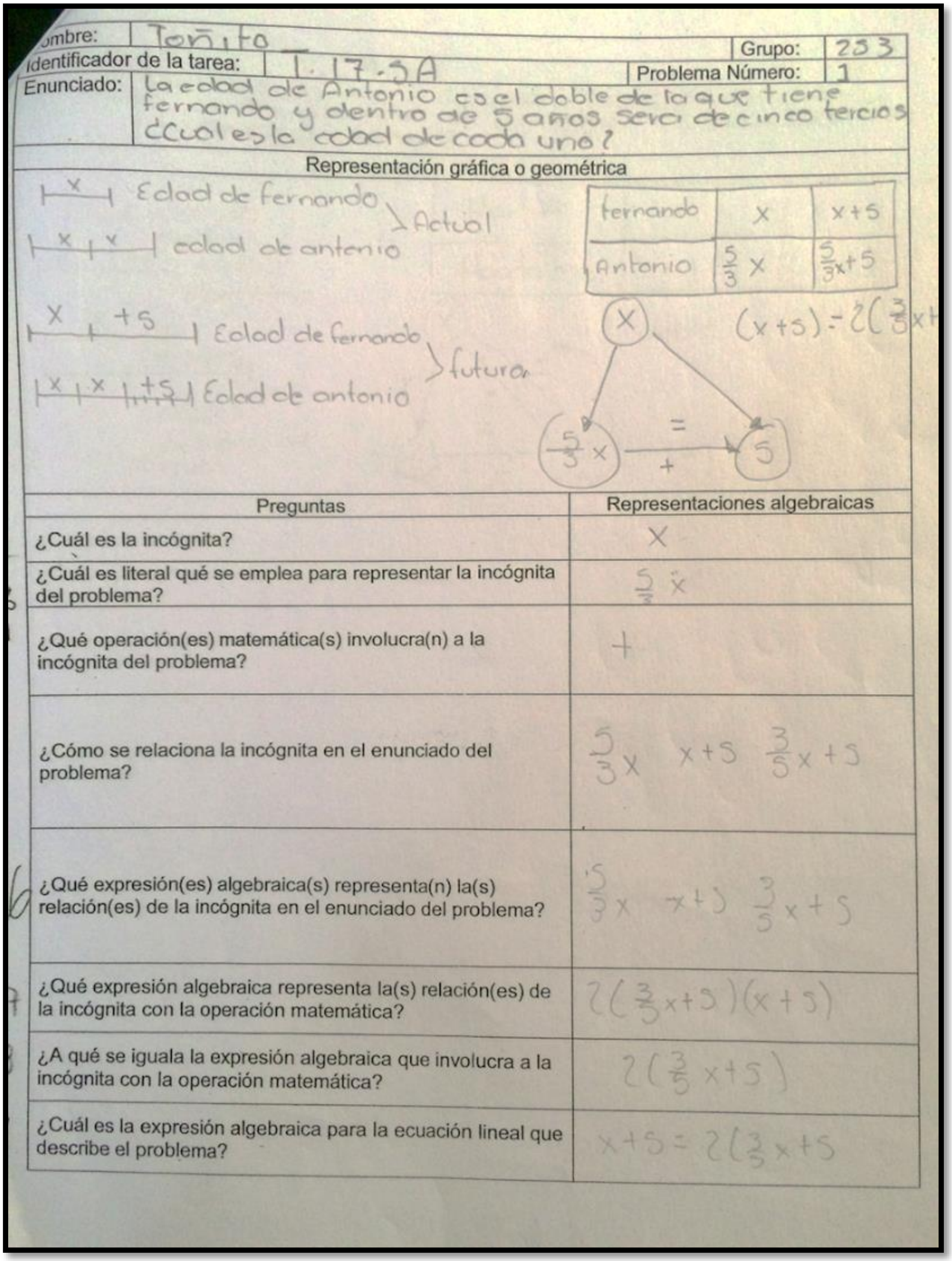


Nombre:	Llovia Alison Flores Jurado	Grupo:	254B
Identificador de la tarea:	T.17.5A	Problema Número:	1
Enunciado:	La edad de Antonio es el doble de lo qe tiene Fernando y dentro de 5 años seria de 5/3 ¿Qe edad tiene cada uno?		

Representación gráfica o geométrica

Preguntas	Representaciones algebraicas
¿Cuál es la incógnita?	Edad de Fernando
¿Cuál es literal qué se emplea para representar la incógnita del problema?	x
¿Qué operación(es) matemática(s) involucra(n) a la incógnita del problema?	suma
¿Cómo se relaciona la incógnita en el enunciado del problema?	$2x$
¿Qué expresión(es) algebraica(s) representa(n) la(s) relación(es) de la incógnita en el enunciado del problema?	dos equis
¿Qué expresión algebraica representa la(s) relación(es) de la incógnita con la operación matemática?	$2x+5$
¿A qué se iguala la expresión algebraica que involucra a la incógnita con la operación matemática?	$2x+5=\frac{5}{3}(x+5)$
¿Cuál es la expresión algebraica para la ecuación lineal que describe el problema?	$2x+5=\frac{5}{3}(x+5)$

Figura 26. Ejemplo del planteamiento, representación geométrica de un PVEL de edades que involucra tiempo presente y futuro con números fraccionarios correspondiente a la EA.10B.


Nombre: Toñito
Grupo: 253
Identificador de la tarea: 1.17.5A
Problema Número: 1
Enunciado: La edad de Antonio es el doble de lo que tiene fernando y dentro de 5 años será de cinco tercios ¿Cuál es la edad de cada uno?

Representación gráfica o geométrica

x — Edad de fernando
x, x — edad de antonio
Actual

x, +5 — Edad de fernando
x, x, +5 — Edad de antonio
futura

fernando	x	x+5
Antonio	$\frac{5}{3}x$	$\frac{5}{3}x+5$

$(x+5) = 2(\frac{3}{5}x+$

x; $\frac{5}{3}x$; =; +; 5

Preguntas	Representaciones algebraicas
¿Cuál es la incógnita?	x
¿Cuál es literal qué se emplea para representar la incógnita del problema?	$\frac{5}{3}x$
¿Qué operación(es) matemática(s) involucra(n) a la incógnita del problema?	+
¿Cómo se relaciona la incógnita en el enunciado del problema?	$\frac{5}{3}x$ $x+5$ $\frac{3}{5}x+5$
¿Qué expresión(es) algebraica(s) representa(n) la(s) relación(es) de la incógnita en el enunciado del problema?	$\frac{5}{3}x$ $x+5$ $\frac{3}{5}x+5$
¿Qué expresión algebraica representa la(s) relación(es) de la incógnita con la operación matemática?	$2(\frac{3}{5}x+5)(x+5)$
¿A qué se iguala la expresión algebraica que involucra a la incógnita con la operación matemática?	$2(\frac{3}{5}x+5)$
¿Cuál es la expresión algebraica para la ecuación lineal que describe el problema?	$x+5 = 2(\frac{3}{5}x+5$

Figura 27. Ejemplo del planteamiento, representación geométrica, matricial y con diagrama relacional de un PVEL de edades que involucra tiempo presente y futuro con números fraccionarios correspondiente a la EA.10B.

4.7 Octava sesión

90 minutos de duración en clase y 60 minutos extraclase

La última sesión de trabajo, inició con la tarea *T.18.1 Agrupación de fracciones* con la finalidad de activar los conocimientos previos, en la que se buscó que los estudiantes relacionaran el uso del paréntesis con el concepto de acumulación de la fracción de una cantidad desconocida con respecto a la totalidad.

Esta tarea se relaciona con las llevadas a cabo en la primera y segunda sesión. La forma de trabajo empleada fue la dupla. A cada pareja se le proporcionó una caja, que a su vez contenía dos cajas más que en el fondo tenía escrita una fracción. La caja más grande tenía escrita una literal como: *a, x, z*, etc.

Las parejas tuvieron que escribir, empleando paréntesis, la expresión matemática para establecer la proporción que representaba cada una de las fracciones escritas en el fondo de las cajas internas, con respecto a la incógnita escrita en la caja principal.

Luego, los estudiantes plantearon individualmente, los cuatro primeros problemas correspondientes al listado *T.18.2 PVEL de fracciones acumulativas*. En estos problemas además se enfatizó lo explicado en las sesiones anteriores, en lo que concierne a: la selección de la incógnita, el uso de múltiples representaciones no discursivas y lo dinámico en la temporalidad.

En este tipo de PVEL surge el carácter acumulativo de la fracción, por lo que en la segmentación semántica del enunciado del texto y su posterior variación redaccional, es necesario que el alumno identifique la totalidad y su relación con respecto a la cantidad desconocida que sufre una acumulación continua, asociada al cambio de estado que conduce a una nueva fracción. En este proceso están relacionadas las operaciones de tratamiento en forma secuencial, para poder ir generando expresiones equivalentes para expresar la nueva fracción.

Estos tratamientos son cuasi-inmediatos porque corresponden a representaciones mentales. La única representación externa es la forma no discursiva empleada para apuntalar la formación de las relaciones internas.

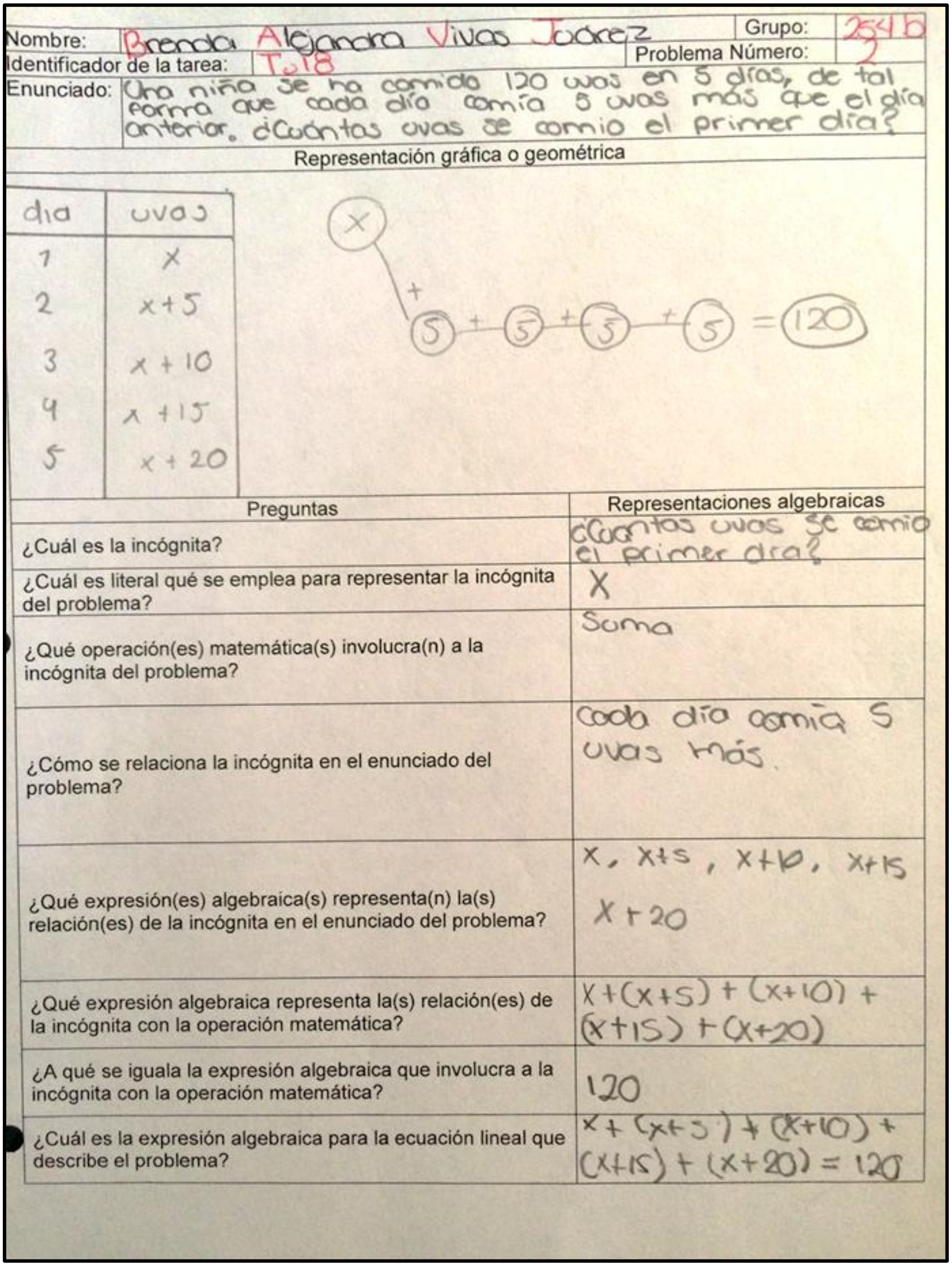
Además, está presente la operación de conversión de las unidades significantes del texto del enunciado del PVEL dado en lenguaje natural, que son transformadas en las representaciones simbólicas para cada fracción. Finalmente, como tarea extraclase debieron desarrollar el último problema del listado correspondiente a la *T.18.3 PVEL de fracciones acumulativas de corte histórico*.

En seguida se presenta evidencia de uno de los problemas planteados por los alumnos en clase, que es uno de los que se consideró en el instrumento del estudio exploratorio, descrito en el primer capítulo, cuyo enunciado es: Una niña se ha comido 120 uvas en 5 días, de tal forma que cada día comía 5 uvas más que el día anterior. ¿Cuántas uvas se comió el primer día?.

La ecuación correcta para este PVEL es: $x + (x+5) + (x+10) + (x+15) + (x+20) = 120$.

En las siguientes imágenes se muestran ejemplos de las evidencias de aprendizaje [EA.12] elaboradas por dos estudiantes en las que se aprecia el planteamiento de un PVEL de fracciones acumulativas con números enteros.

Las representación no discursivas producidas por los estudiantes para este PVEL son la geométrica y matricial.



Nombre: Brenda Alejandra Vivas Juárez | Grupo: 254 b

Identificador de la tarea: T.18 | Problema Número: 2

Enunciado: Una niña se ha comido 120 uvas en 5 días, de tal forma que cada día comía 5 uvas más que el día anterior. ¿Cuántas uvas se comió el primer día?

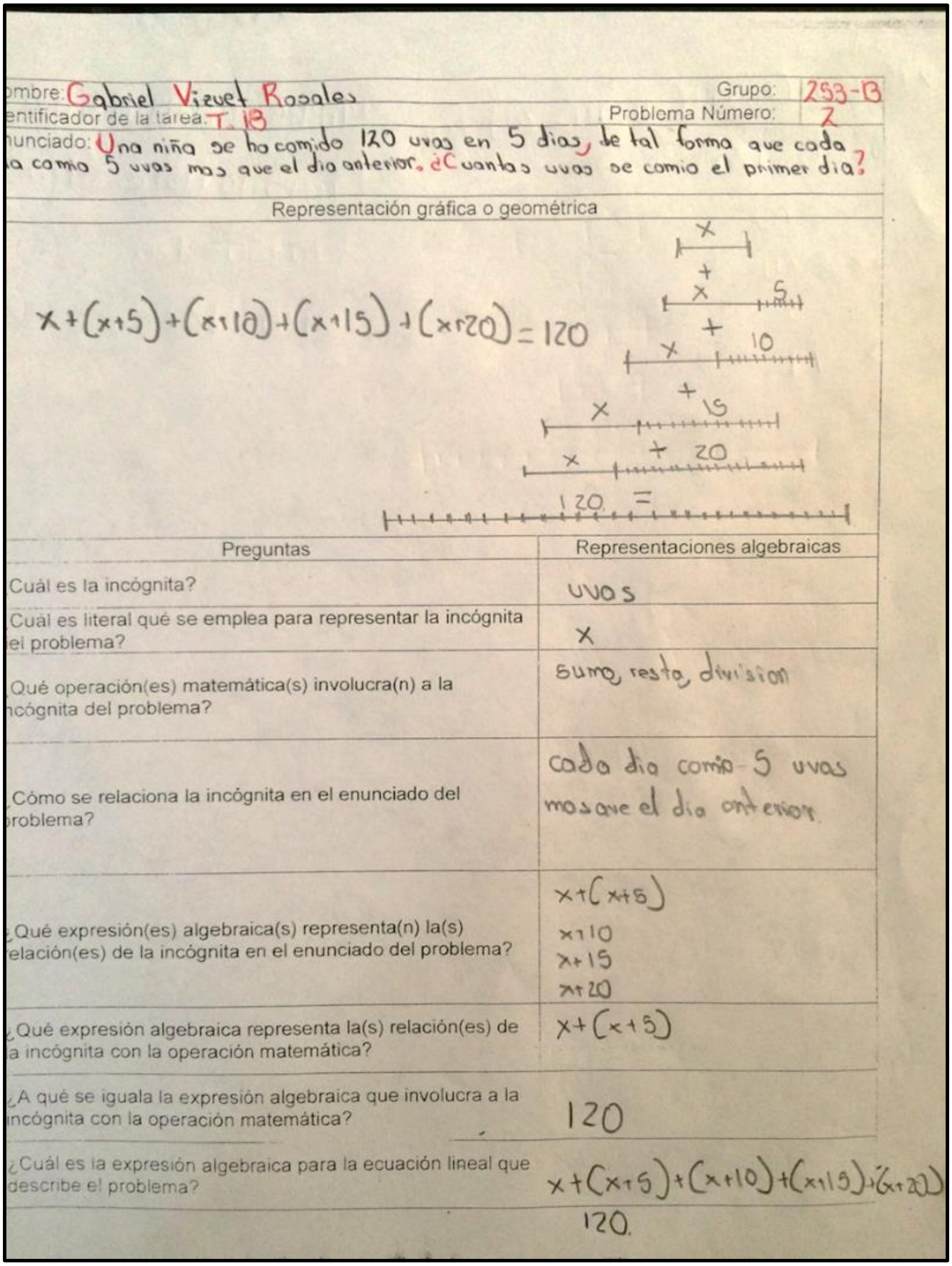
Representación gráfica o geométrica

día	uvas
1	x
2	x+5
3	x + 10
4	x + 15
5	x + 20

x + 5 + 5 + 5 + 5 = 120

Preguntas	Representaciones algebraicas
¿Cuál es la incógnita?	¿Cuántas uvas se comió el primer día?
¿Cuál es literal qué se emplea para representar la incógnita del problema?	X
¿Qué operación(es) matemática(s) involucra(n) a la incógnita del problema?	Suma
¿Cómo se relaciona la incógnita en el enunciado del problema?	Cada día comía 5 uvas más.
¿Qué expresión(es) algebraica(s) representa(n) la(s) relación(es) de la incógnita en el enunciado del problema?	X, X+5, X+10, X+15, X+20
¿Qué expresión algebraica representa la(s) relación(es) de la incógnita con la operación matemática?	X+(X+5) + (X+10) + (X+15) + (X+20)
¿A qué se iguala la expresión algebraica que involucra a la incógnita con la operación matemática?	120
¿Cuál es la expresión algebraica para la ecuación lineal que describe el problema?	X + (X+5) + (X+10) + (X+15) + (X+20) = 120

Figura 28. Ejemplo del planteamiento, representación geométrica y matricial de un PVEL de fracciones acumulativas con números enteros correspondiente a la EA.12.



ombre: Gabriel Vizuet Rosales Grupo: 253-B
entificador de la tarea: T. 13 Problema Número: 2
nunciado: Una niña se ha comido 120 uvas en 5 días, de tal forma que cada
a comio 5 uvas mas que el dia anterior. ¿Cuantas uvas se comio el primer dia?

Representación gráfica o geométrica

$x+(x+5)+(x+10)+(x+15)+(x+20)=120$

Preguntas	Representaciones algebraicas
Cuál es la incógnita?	uvas
Cuál es literal qué se emplea para representar la incógnita el problema?	x
Qué operación(es) matemática(s) involucra(n) a la incógnita del problema?	suma, resta, división
Cómo se relaciona la incógnita en el enunciado del problema?	cada dia comio 5 uvas mas que el dia anterior
¿Qué expresión(es) algebraica(s) representa(n) la(s) relación(es) de la incógnita en el enunciado del problema?	$x+(x+5)$ $x+10$ $x+15$ $x+20$
¿Qué expresión algebraica representa la(s) relación(es) de la incógnita con la operación matemática?	$x+(x+5)$
¿A qué se iguala la expresión algebraica que involucra a la incógnita con la operación matemática?	120
¿Cuál es la expresión algebraica para la ecuación lineal que describe el problema?	$x+(x+5)+(x+10)+(x+15)+(x+20)$ 120

Figura 29. Ejemplo del planteamiento, representación geométrica de un PVEL de fracciones acumulativas con números enteros correspondiente a la EA.12.

4.8 Novena, décima, onceava y doceava sesión

360 minutos de duración en clase

En las sesiones 9, 10 y 11, se llevaron a cabo las pruebas de desarrollo escrito para la evaluación del nivel alcanzado tras la instrucción en el planteamiento de los PVEL, tanto en forma individual, como en grupo pequeño. Además de la evaluación conceptual, autoevaluación, autocalificación y evaluación del curso.

La doceava sesión se dedicó a dar a conocer a los alumnos los resultados de la instrucción: la evaluación formativa o del proceso llevado a cabo en la sesiones 2 a 8 y de la evaluación final o de resultados de las sesiones 9 a 11.

4.9 Calificaciones obtenidas por los alumnos en la instrucción

En la Tabla 10 se presentan los resultados de las calificaciones obtenidas por los escolares en la instrucción.

En la primera fila de la tabla se presentan las calificaciones de la prueba diagnóstica. El 6.3 % de los estudiantes obtuvieron 6 de calificación [plantearon correctamente tres problemas]. El 93.7 % de los estudiantes no obtiene una calificación aprobatoria en la prueba diagnóstica [34.4 % plantearon correctamente 2 problemas, 15.6 % lo hicieron en forma errónea, el 43.7 % no plantearon correctamente ningún problema].

En la segunda fila se muestran el promedio de las calificaciones de las evidencias de aprendizaje EA.3, EA.4A, EA.4B, EA.7, EA.9, EA.10A, EA.10B y EA.12 correspondientes a la evaluación formativa o del proceso de instrucción. El 75 % de los estudiantes obtuvieron calificaciones aprobatorias. En contraste, el 25 % de los alumnos no consiguieron un puntaje aprobatorio en la evaluación formativa.

Tabla 10. Calificaciones obtenidas por los alumnos en la instrucción

Evaluación	Alumno 1	Alumno 2	Alumno 3	Alumno 4	Alumno 5	Alumno 6	Alumno 7	Alumno 8	Alumno 9	Alumno 10	Alumno 11	Alumno 12	Alumno 13	Alumno 14	Alumno 15	Alumno 16	Alumno 17	Alumno 18	Alumno 19	Alumno 20	Alumno 21	Alumno 22	Alumno 23	Alumno 24	Alumno 25	Alumno 26	Alumno 27	Alumno 28	Alumno 29	Alumno 30	Alumno 31	Alumno 32
Evaluación diagnóstica	0	0	0	2	2	0	0	0	2	2	2	2	0	2	2	0	6	2	4	0	2	4	0	0	4	0	4	4	0	2	0	6
Evaluación formativa	5	4	5	7	4	9	8	5	10	7	8	7	7	2	8	9	10	10	10	3	8	6	4	9	9	4	9	8	6	7	8	9
Prueba individual	3	7	7	10	7	7	9	7	10	8	9	7	3	5	8	8	8	8	9	8	8	7	3	10	10	3	8	8	1	8	8	10
Prueba en pequeño grupo	6	10	8	10	8	10	10	10	10	8	10	10	6	10	10	8	10	10	10	10	8	10	6	10	10	8	10	10	6	10	10	10
Promedio de pruebas	5	8	7	10	8	9	10	9	10	8	10	8	5	8	9	8	9	9	10	9	8	9	5	10	10	6	9	9	4	9	9	10
Autocalificación	6	6	8	8	7	8	9	9	9	6	8	8	6	6	8	8	9	9	10	6	6	7	6	9	10	6	9	6	6	8	8	10
Calificación final	5	6	7	8	6	8	9	7	10	7	9	8	6	5	8	8	9	9	10	6	7	7	5	9	10	5	9	8	5	8	8	10

4.10 Resultados de la evaluación final

4.10.1 Resultados de la prueba individual

Esta sección contiene los resultados del Problema 1 derivados de la prueba de desarrollo escrito individual [el instrumento se presenta en el Anexo 8], se incluye su análisis y discusión.

Los resultados de los Problemas 2 y 3 no se incluyen en este apartado debido a su extensión, pero fueron procesados, analizados y discutidos en forma análoga a los del Problema 1 que se presentan en las siguientes páginas.

En la Tabla 11 se muestra un concentrado que contiene el porcentaje de estudiantes que para el Problema 2: representan la cantidad desconocida mediante una literal, emplean algún tipo de representación no discursiva [el diagrama relacional, representación geométrica y/o matricial], recurren al uso de algún otro tipo de representación no discursiva para el planteamiento de la ecuación lineal, emplean algún recurso discursivo como la paráfrasis o reescritura de frases del enunciado del problema para clarificar la información no evidente y plantean la ecuación lineal correcta que conduce a la solución correcta del problema.

En la Tabla 12 se presentan los mismos elementos anteriormente descritos para el Problema 3.

A partir de los resultados de los tres PVEL incluidos en la prueba individual, fue posible responder las preguntas de investigación [1 a 9] planteadas en el primer capítulo, a través de la elaboración de las correspondientes conclusiones.

En las Figuras 30 a 41 se presenta ejemplos de las evidencias de aprendizaje derivadas de los tres PVEL incluidos en la prueba individual.

Tabla 11. Resultados generales para el problema 2 de la prueba individual.

Estructura del planteamiento del problema	Si	No	No contestó	Total
Representa la cantidad desconocida mediante una literal	6.3 %	84.4 %	9.4 %	100 %
Emplea el diagrama relacional	28.1 %	62.5 %	9.4 %	100 %
Emplea la representación geométrica	21.9 %	68.8 %	9.4 %	100 %
Emplea la representación matricial	71.9 %	18.8 %	9.4 5	100 %
Emplea algún otro tipo de representación no discursiva para el planteamiento de la ecuación lineal	34.4 %	56.3 %	9.4 %	100 %
Emplea algún recurso discursivo como la paráfrasis o reescritura de frases del enunciado del problema para clarificar la información no evidente.	6.3 %	84.4 %	9.4 %	100 %
La ecuación lineal que escribe es la que conduce a la solución correcta del problema	28.1 %	62.5 %	9.4 %	100 %

Tabla 12. Resultados generales para el problema 3 de la prueba individual.

Estructura del planteamiento del problema	Si	No	No contestó	Total
Copia el enunciado del problema	87.5 %	6.3 %	6.3 %	100 %
Representa la cantidad desconocida mediante una literal	93.8 %	No aplica	6.3 %	100 %
Emplea el diagrama relacional	53.1 %	40.6 %	6.3 %	100 %
Emplea la representación geométrica	37.5 %	56.3 %	6.3 %	100 %
Emplea la representación matricial	71.9 %	21.9 %	6.3 %	100 %
Emplea algún otro tipo de representación no discursiva para el planteamiento de la ecuación lineal	34.4 %	59.4 %	6.3 %	100 %
Emplea algún recurso discursivo como la paráfrasis o reescritura de frases del enunciado del problema para clarificar la información no evidente.	34.4 %	59.4 %	6.3 %	100 %
La ecuación lineal que escribe es la que conduce a la solución correcta del problema	53.1 %	40.6 %	6.3 %	100 %

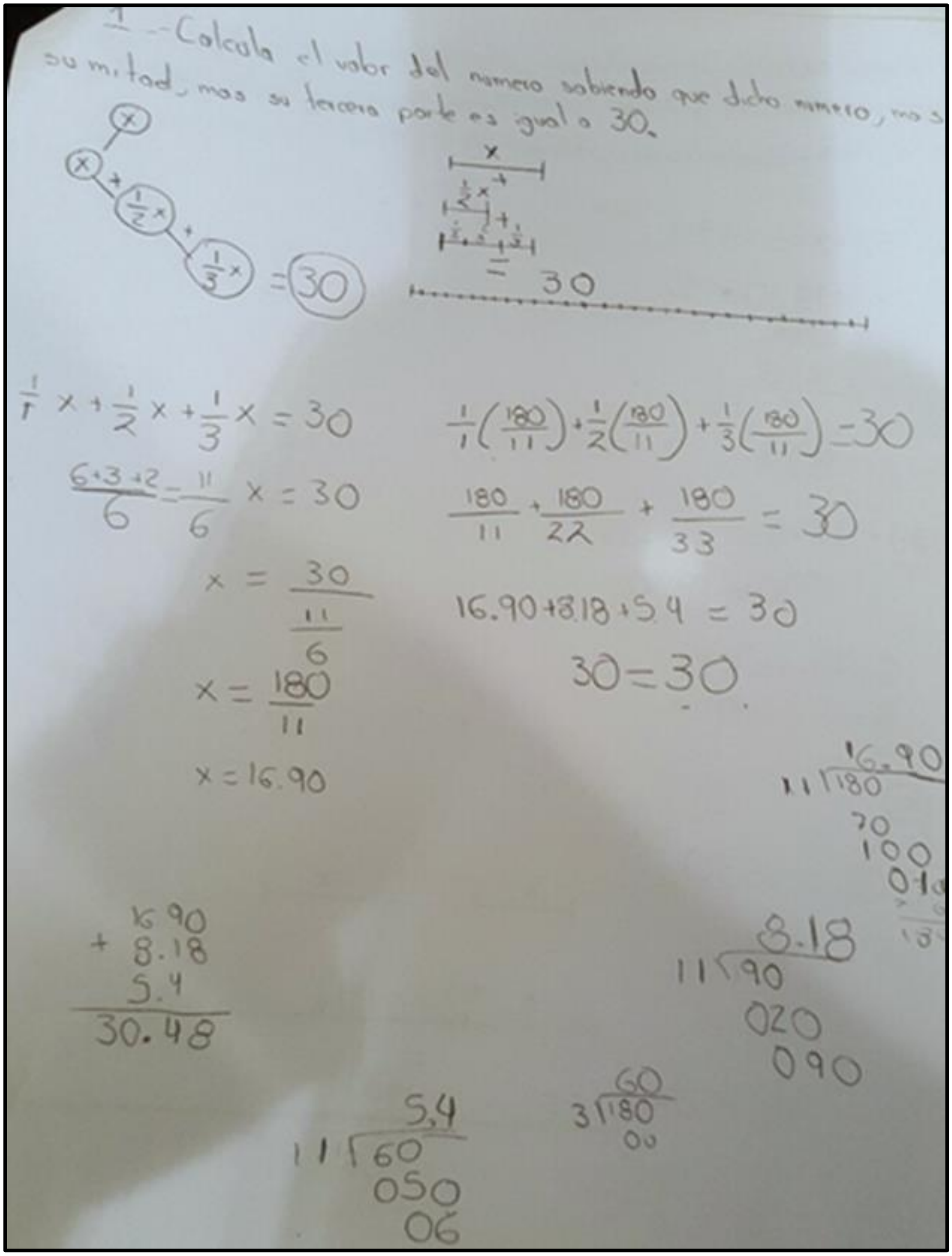


Figura 30. Ejemplo del planteamiento del problema 1 de la prueba individual tipo A con diagrama relacional, representación geométrica y solución correcta de la ecuación.

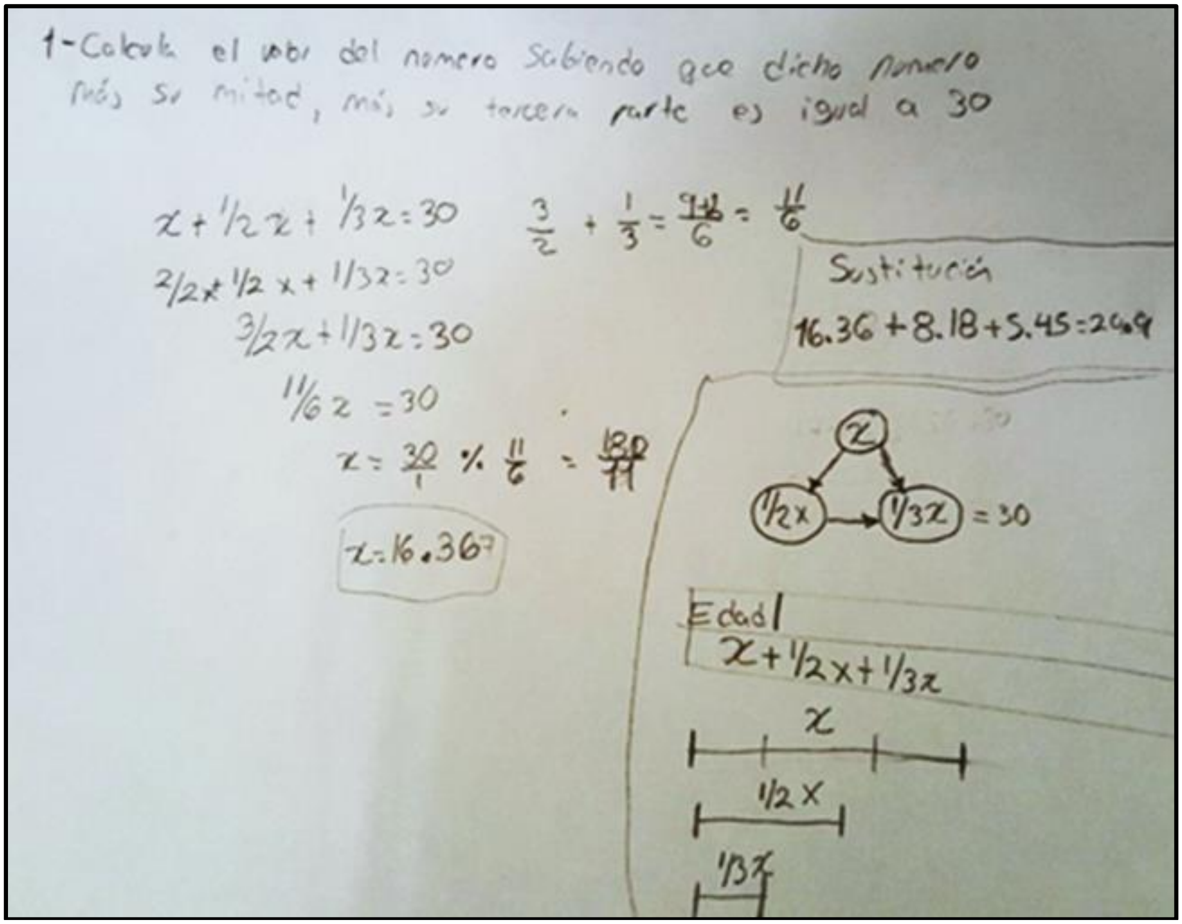


Figura 31. Ejemplo del planteamiento del problema 1 de la prueba individual tipo A con diagrama relacional, representación geométrica y solución incorrecta de la ecuación.

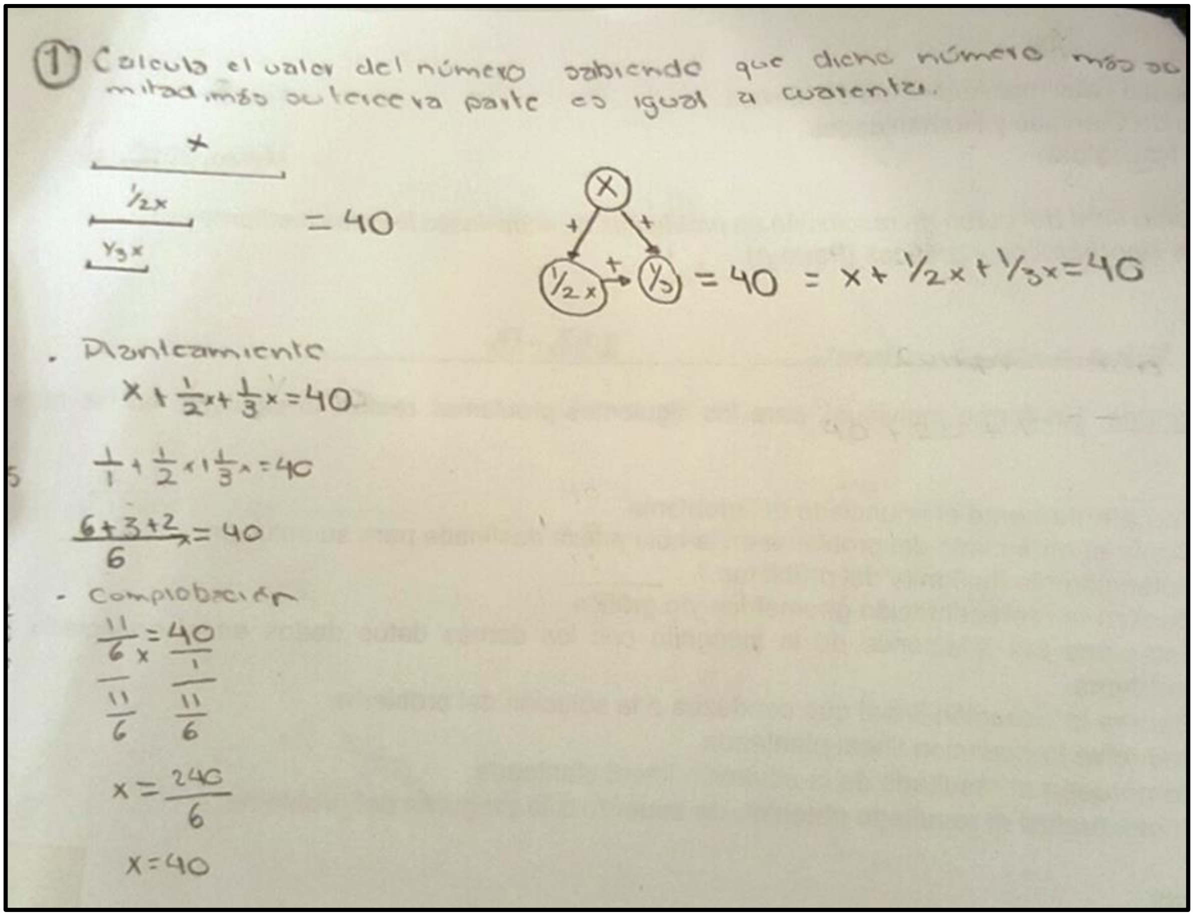


Figura 32. Ejemplo del planteamiento del problema 1 de la prueba individual tipo B con diagrama relacional y representación geométrica.

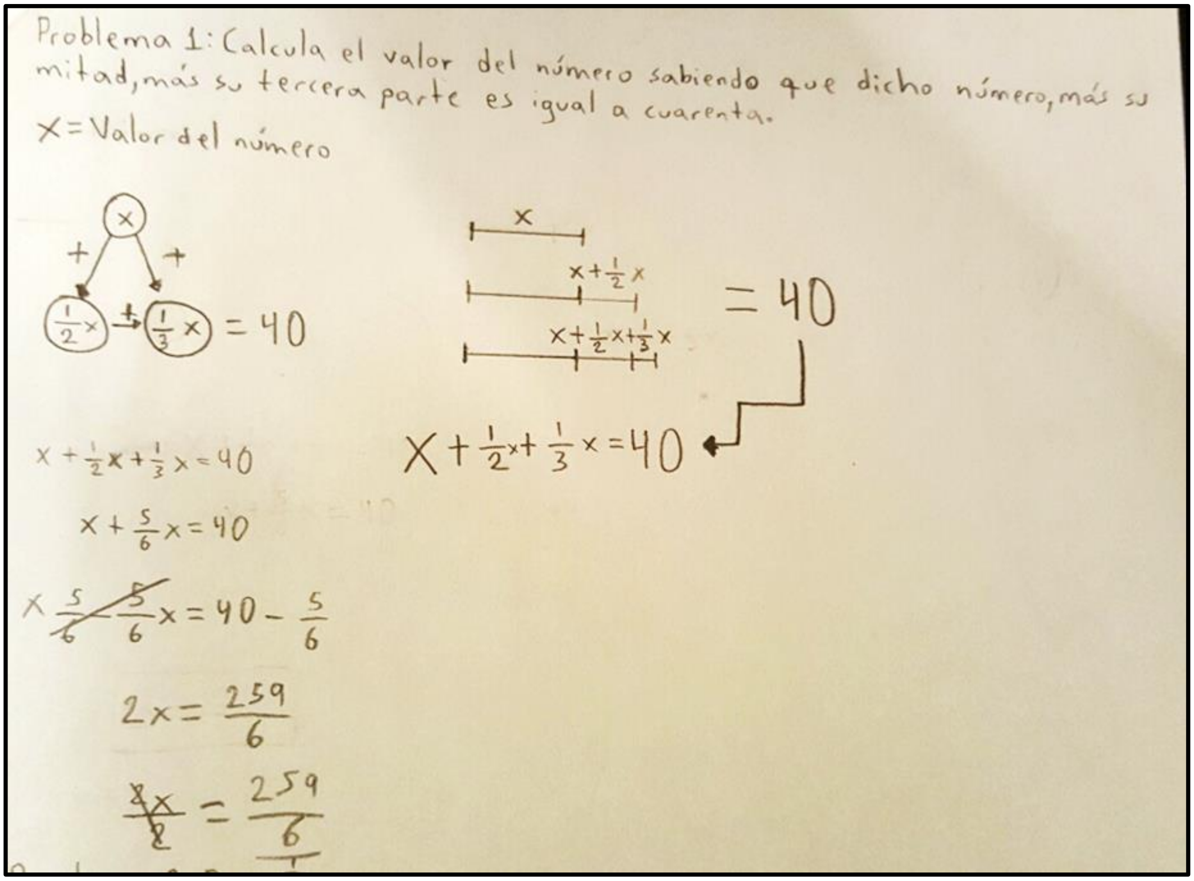


Figura 33. Ejemplo del planteamiento del problema 1 de la prueba individual tipo B con diagrama relacional completo y representación geométrica.

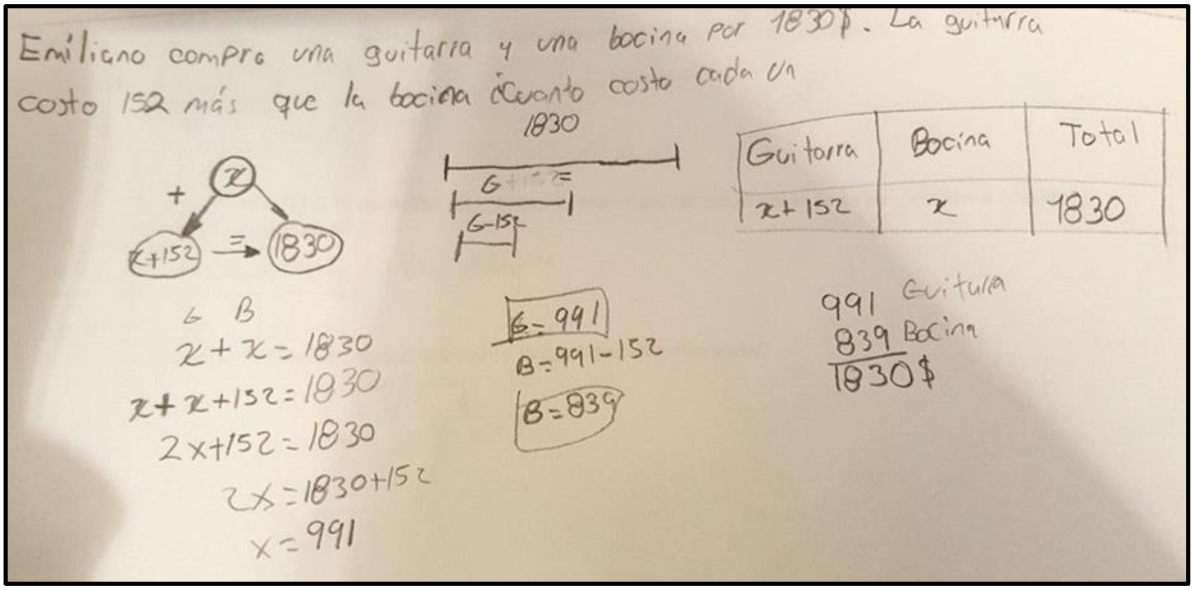


Figura 34. Ejemplo del planteamiento correcto del problema 2 de la prueba individual tipo A con diagrama relacional, representación geométrica y matricial.

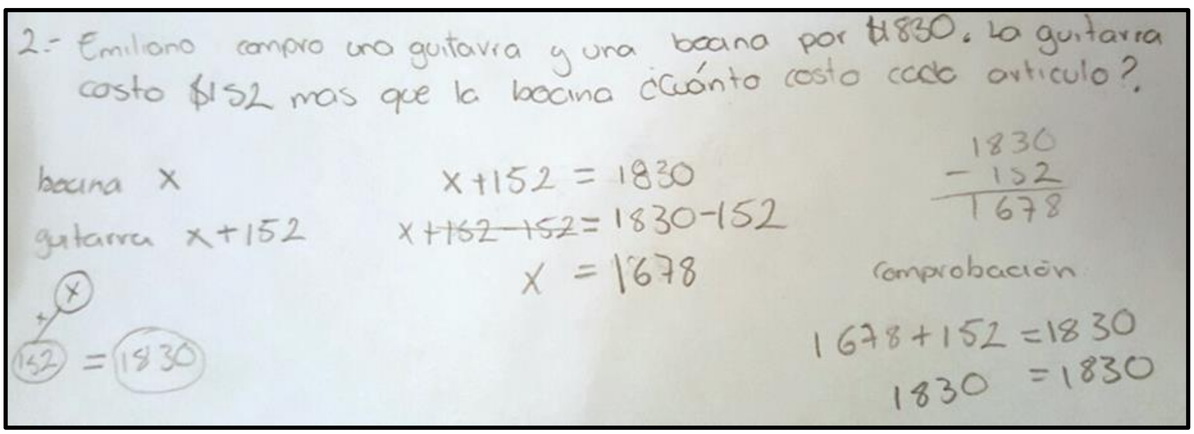


Figura 35. Ejemplo del planteamiento incorrecto del problema 2 de la prueba individual tipo A con diagrama relacional, representación geométrica y matricial.

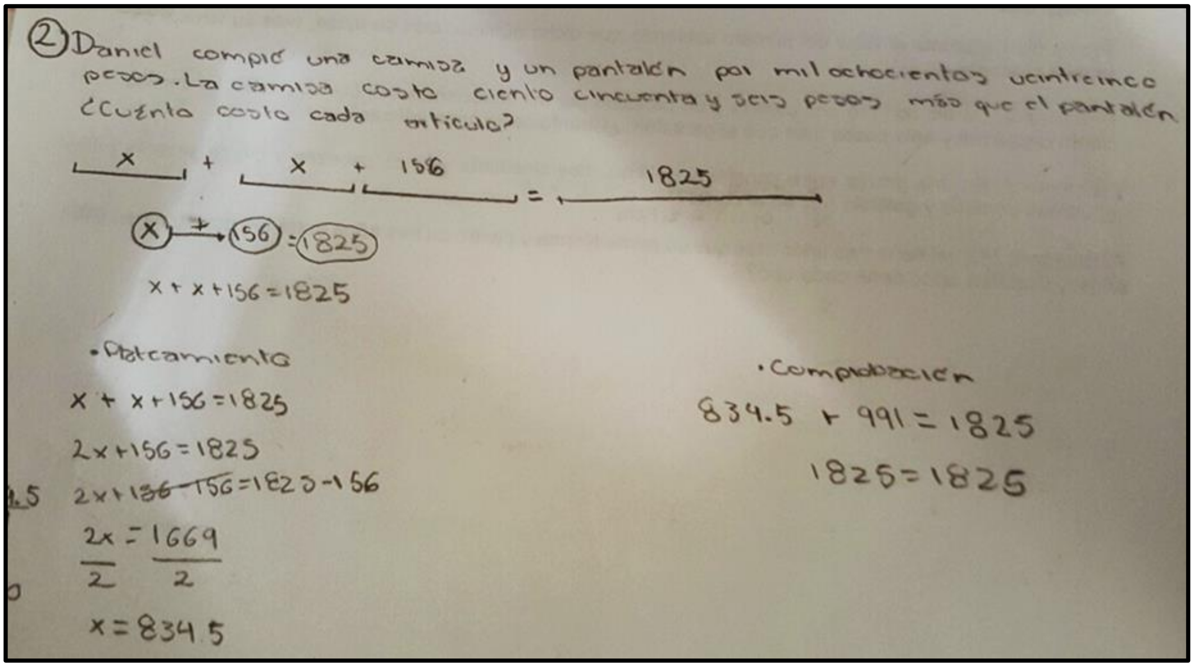


Figura 36. Ejemplo del planteamiento del problema 2 de la prueba individual tipo B con diagrama relacional y representación geométrica.

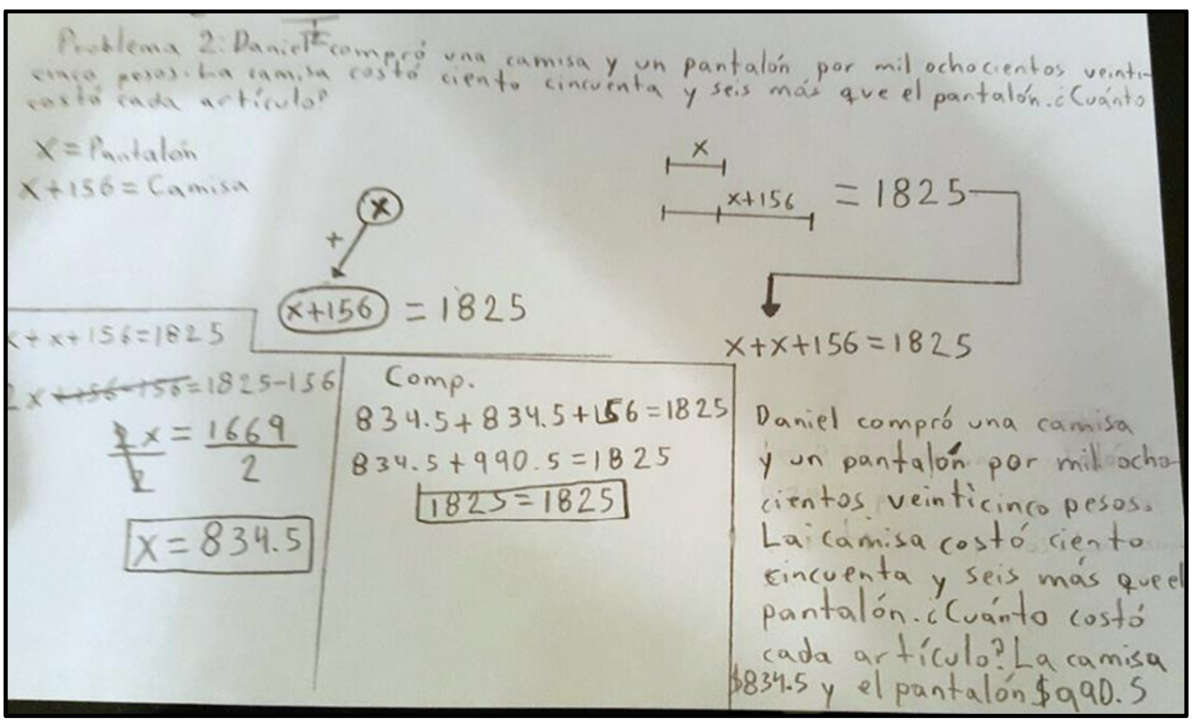


Figura 37. Ejemplo del planteamiento del problema 2 de la prueba individual tipo B con diagrama relacional, representación geométrica y tratamiento discursivo para la selección de la incógnita.

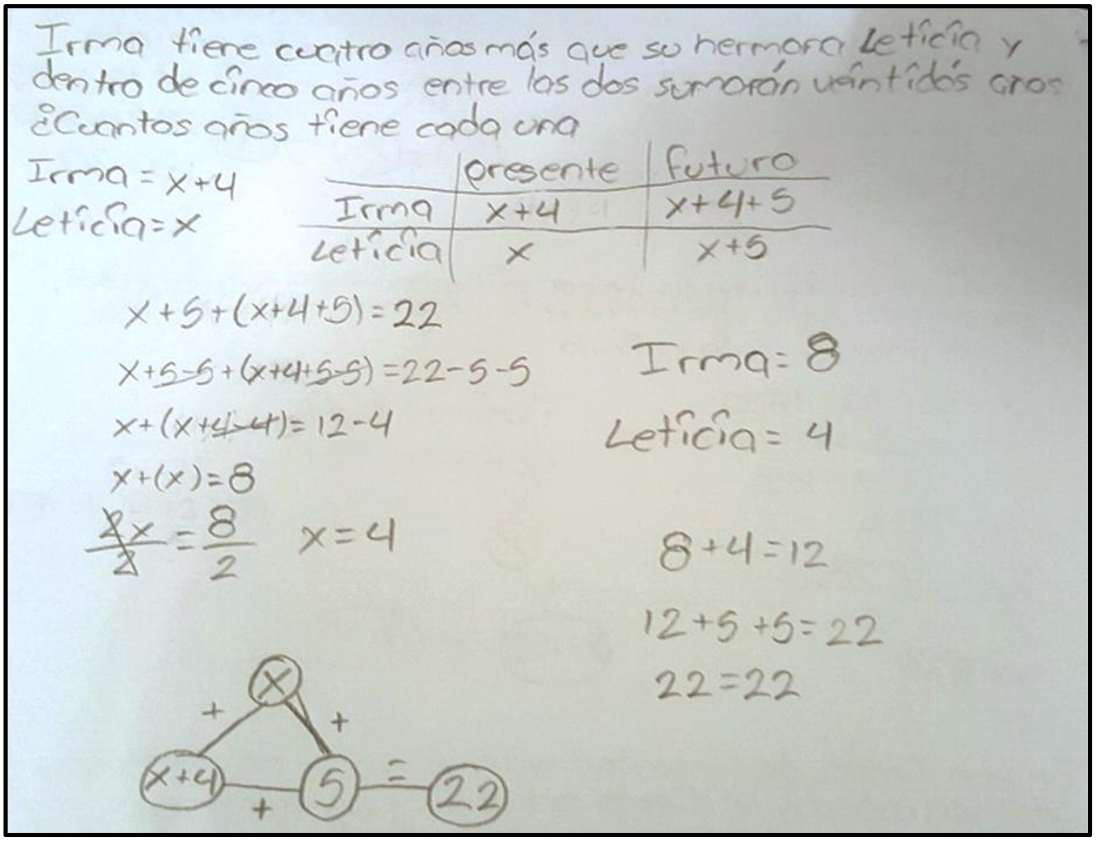


Figura 38. Ejemplo del planteamiento del problema 3 de la prueba individual tipo A con diagrama relacional y representación geométrica.

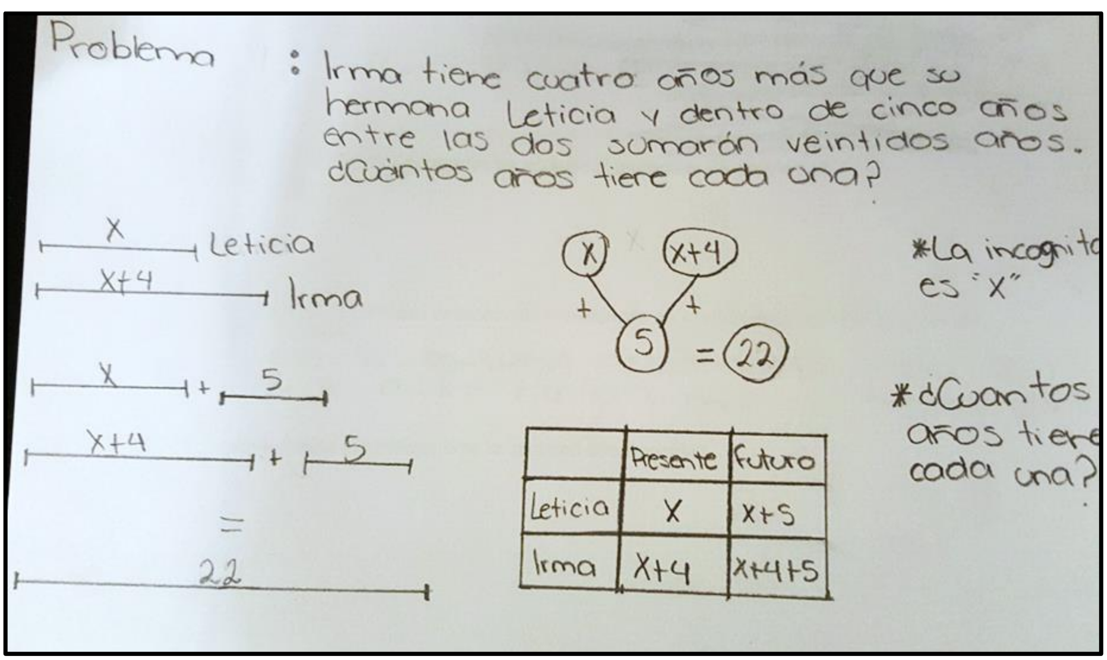


Figura 39. Ejemplo del planteamiento del problema 3 de la prueba individual tipo A con diagrama relacional, representación geométrica y matricial.

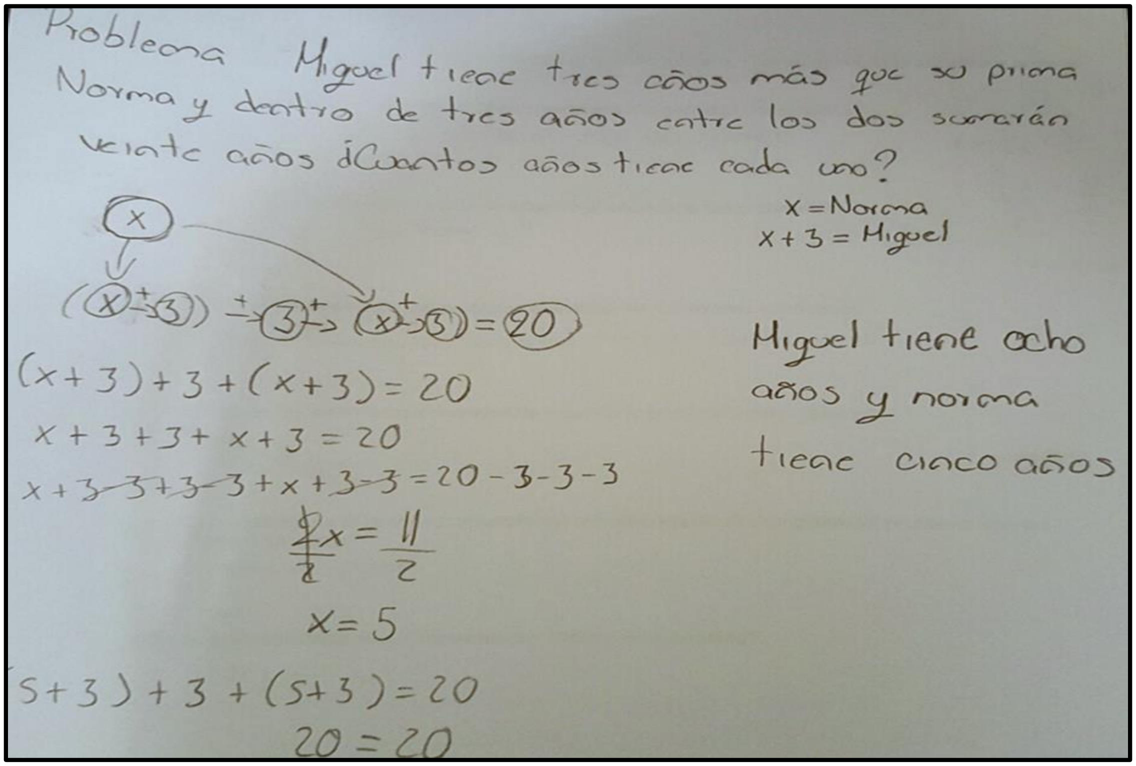


Figura 40. Ejemplo del planteamiento del problema 3 de la prueba individual tipo B con diagrama relacional.

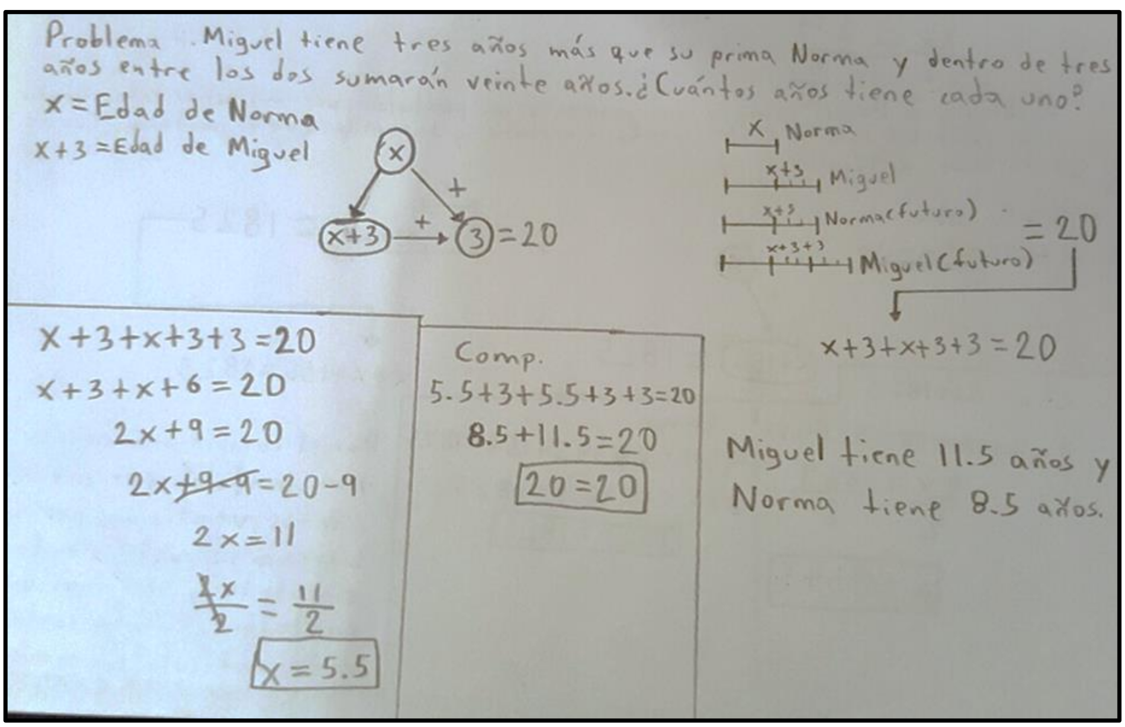


Figura 41. Ejemplo del planteamiento del problema 3 de la prueba individual tipo B con diagrama relacional y representación geométrica.

Para el Problema 1 de la prueba individual, se presenta en primera instancia la caracterización del problema que incluye: la segmentación semántica del enunciado del texto (Duval, 1999; 2006) que se espera que el estudiante realice; la selección y designación de la incógnita que proporciona una economía de tratamientos; las relaciones entre la incógnita y las cantidades conocidas; las representaciones no discursivas [representación geométrica, diagrama relacional y/o representación matricial] que es factible que los estudiantes empleen para develar la información que no es clara a la luz del enunciado.

Posteriormente, se muestran los resultados [categorías y porcentajes] obtenidos tras realizar el análisis de contenido por racimos (Bermúdez, 1996) de las respuestas dadas por los escolares al cuestionario para la segmentación semántica.

Derivado del análisis anterior se presentan los resultados [categoría y porcentaje] referentes al tipo de tratamientos discursivos que los alumnos realizan sobre las unidades significantes de forma tal que conduzca a una economía de tratamientos en la selección y designación de la incógnita.

También, se presenta los resultados [porcentaje y expresión] respecto a las formas simbólico-algebraicas que los alumnos producen con mayor frecuencia para representar la incógnita y las relaciones entre esta y las cantidades conocidas.

Se muestran los resultados referentes a las representaciones no discursivas [esquema de la representación, características y porcentaje] que más frecuentemente los alumnos generan en el proceso del planteamiento del PVEL.

Finalmente, se presentan los resultados referentes a la ecuación [porcentaje y expresión algebraica] que puede hacer factible la solución del problema.

4.10.1.1 Caracterización del Problema 1

El enunciado del primer problema es: “Calcula el valor del número sabiendo que dicho número, más su mitad, más su tercera parte es igual a [treinta/cuarenta].” (Bruño, 2011, p. 208). La variación en la cantidad descrita después de la palabra igual se debe a que se elaboraron dos tipos de examen: para la prueba tipo A se usó *treinta* y para la prueba tipo B se empleó *cuarenta*.

Se trata de un problema de carácter aditivo. El enunciado revela totalmente la información necesaria para plantear la ecuación, en el mismo sentido en el que se lee el texto, es decir, de izquierda a derecha. La segmentación semántica que se esperaría que los alumnos hicieran respecto a este problema es la siguiente:

1. La parte del enunciado del problema que menciona a la cantidad desconocida es: “Calcular el valor del número…” (Bruño, 2011, p. 208).
2. La parte del enunciado que señala la cantidad conocida es: “[treinta/cuarenta]” (Bruño, 2011, p. 208).
3. Las frases del enunciado que mencionan la relación entre la cantidad desconocida con las cantidades conocidas son: “dicho número, más su mitad, más su tercera parte” (Bruño, 2011, p. 208).
4. La parte del enunciado que menciona la relación de equivalencia está dada por la frase: “es igual a...” (Bruño, 2011, p. 208).

La selección de la incógnita que ofrece una economía de tratamientos, correspondería a la idea de seleccionar “el número” (Bruño, 2011, p. 208) que describe el enunciado del problema como la totalidad y a partir de ella plantear las relaciones fraccionarias que describen las frases “su mitad… su tercera parte…” (Bruño, 2011, p. 208). La literal x sería la que probablemente puedan elegir los alumnos para realizar la conversión de la frase “el número” (Bruño, 2011, p. 208) a su forma simbólica.

Las representaciones no discursivas que posiblemente puedan generar los alumnos *para revelar las relaciones fraccionarias que derivan de la totalidad dada por la incógnita y las operaciones necesarias para formar la ecuación [suma e igualación]*, que permitan la conversión a sus formas simbólico-algebraicas, son las que se muestran en las Figuras 42 y 43.

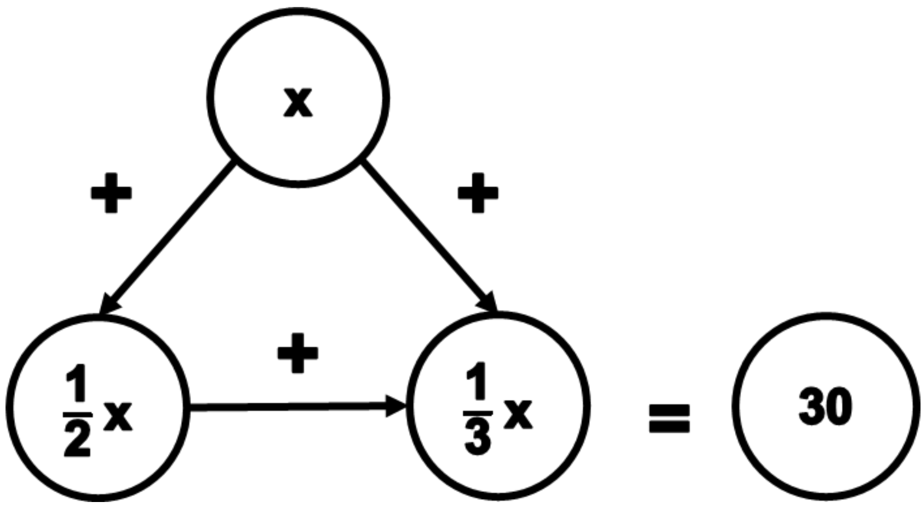


Diagrama relacional I [prueba tipo A]

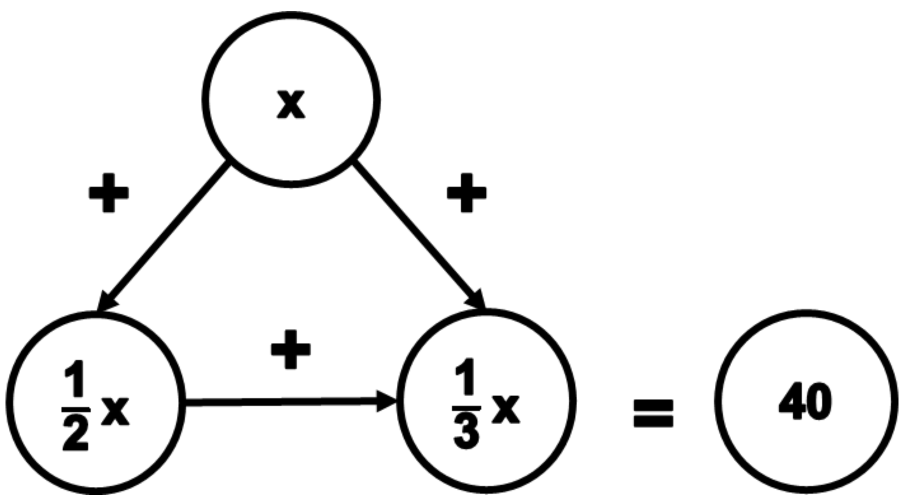
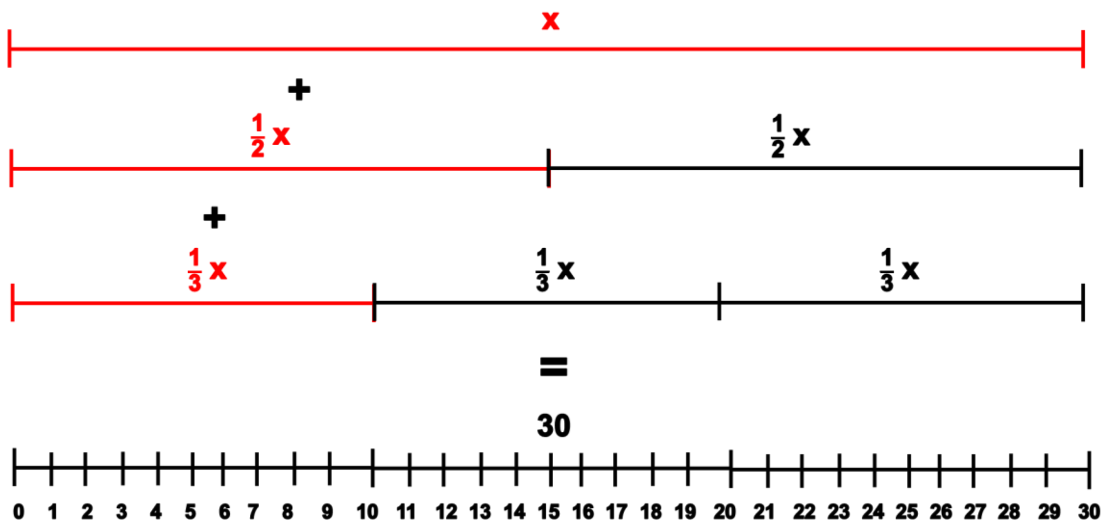
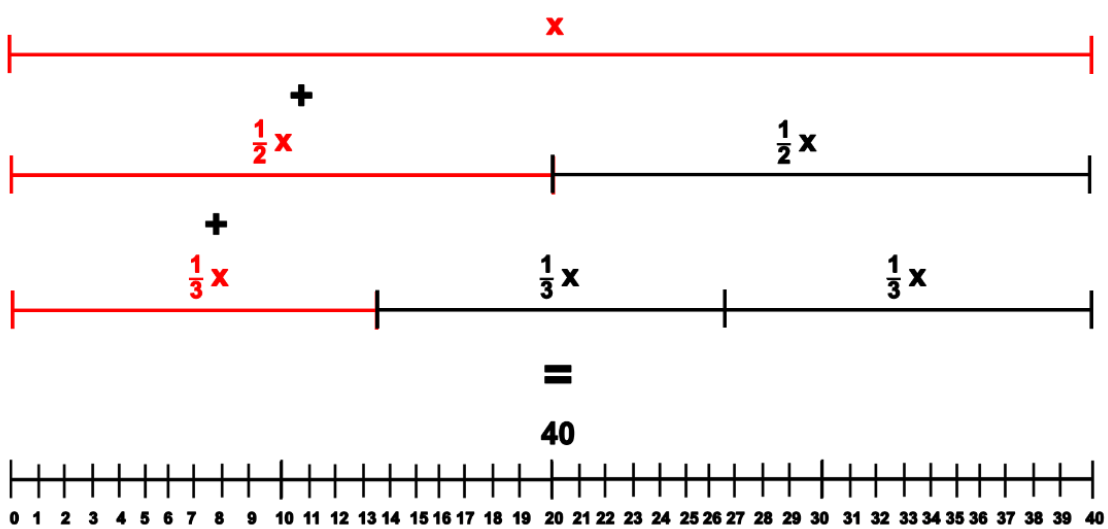


Diagrama relacional II [prueba tipo B]

Figura 42. Diagrama relacional I y II para el problema.



Representación geométrica I [Prueba tipo A]



Representación geométrica II [Prueba tipo B]

Figura 43. Representación geométrica I y II para el problema 1.

La ecuación correcta para este problema de acuerdo al procedimiento anteriormente descrito es: $x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x = 30$ [para la prueba tipo A] y $x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x = 40$ [para la prueba tipo B].

4.10.1.2 Resultados y discusión para el Problema 1

4.10.1.2.1 Segmentación semántica

Para analizar la manera en la que los estudiantes realizaron la segmentación semántica de cada uno de los problemas, en la prueba se incluyeron una serie de preguntas orientadas a identificar las unidades semánticas que designan: a la cantidad desconocida, las cantidades conocidas, la forma en la que se relacionan estas con la cantidad desconocida y la relación de equivalencia.

Una vez que los alumnos respondieron las preguntas, se analizaron las respuestas mediante la técnica de análisis de contenido por racimos (Martínez, 2006; Bermúdez, 1982, 1996). Posteriormente, se trataron mediante estadística descriptiva y se elaboró el gráfico del porcentaje de incidencia.

El 100 % [32] de los alumnos realizan la segmentación semántica del enunciado del Problema 1.

Los resultados que se presentan a continuación están divididos en dos secciones.

En la primera se muestran las categorías principales producto del análisis de contenido por racimos para las primeras cuatro preguntas del cuestionario de la segmentación semántica.

La segunda sección incluye los porcentajes para los tratamientos discursivos que efectúan los alumnos sobre las frases o unidades semánticas, necesarias para la designación de la incógnita y, las relaciones entre esta última y las cantidades conocidas.

4.10.1.2.2 Identificación unidades semánticas

Pregunta 1. ¿Qué parte del enunciado del problema menciona a la cantidad desconocida?

Categorías:

A. “Calcular el valor del número…” (Bruño, 2011, p. 208)
B. “Calcular el valor del número sabiendo que dicho número, más su mitad y tercera parte…” (Bruño, 2011, p. 208)
C. “…el número más su mitad y su tercera parte es igual a [treinta/cuarenta” (Bruño, 2011, p. 208)

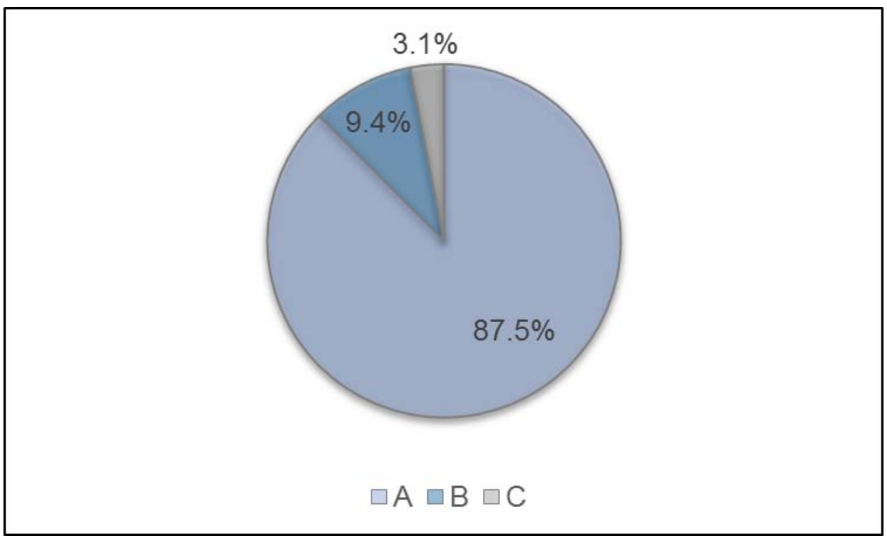


Figura 44. Identificación de la cantidad desconocida para el problema 1 de la prueba individual.

En la gráfica de la Figura 44, es posible apreciar que el 87. 5 % de los estudiantes identifica la frase “Calcular el valor del número…” (Bruño, 2011, p. 208) como la unidad semántica [categoría A] del enunciado del Problema 1 que contiene a la cantidad desconocida. Este resultado es coincidente con lo que se planteó en la caracterización del problema.

Pregunta 2. ¿Qué parte del enunciado del problema menciona a las cantidades conocidas?

Categorías:

A. “más su mitad, más su tercera parte es igual a [cuarenta/ treinta]” (Bruño, 2011, p. 208)
B. “más su mitad más su tercera parte” (Bruño, 2011, p. 208)
C. “es igual a [cuarenta/ treinta]” (Bruño, 2011, p. 208)

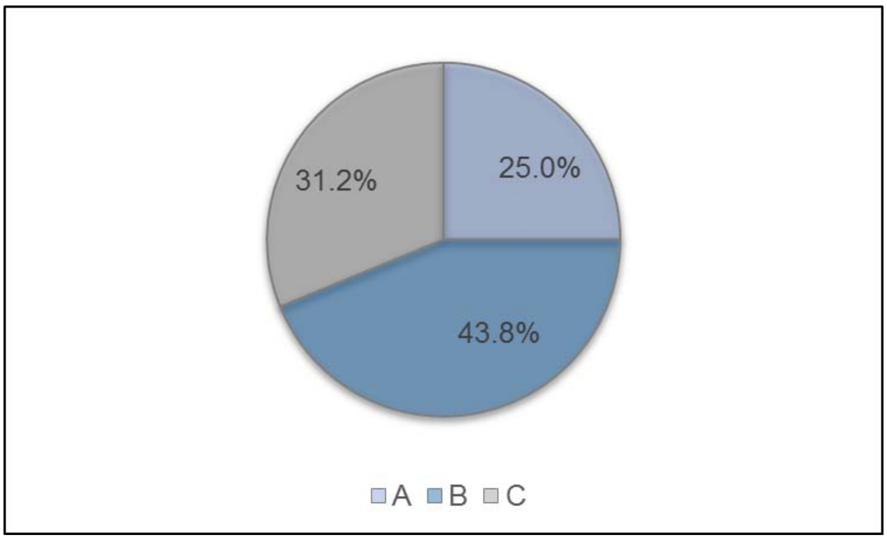


Figura 45. Identificación de las cantidades conocidas para el problema 1 de la prueba individual.

En la Figura 45 se muestra que el 43.8 % de los escolares identifican la frase “es igual a [cuarenta/ treinta]” (Bruño, 2011, p. 208) como la unidad significante [categoría c] que menciona la cantidad conocida.

Tal resultado nos permite afirmar parcialmente la idea propuesta al respecto en la caracterización del problema.

Pregunta 3. ¿Qué parte del enunciado del problema menciona la relación entre la cantidad desconocida y las cantidades conocidas?

Categoría:

A. “su mitad más su la tercera parte… [cuarenta/ treinta]” (Bruño, 2011, p. 208)
B. “dicho número, más su mitad, más su tercera parte” (Bruño, 2011, p. 208)
C. “[cuarenta/ treinta]” (Bruño, 2011, p. 208)

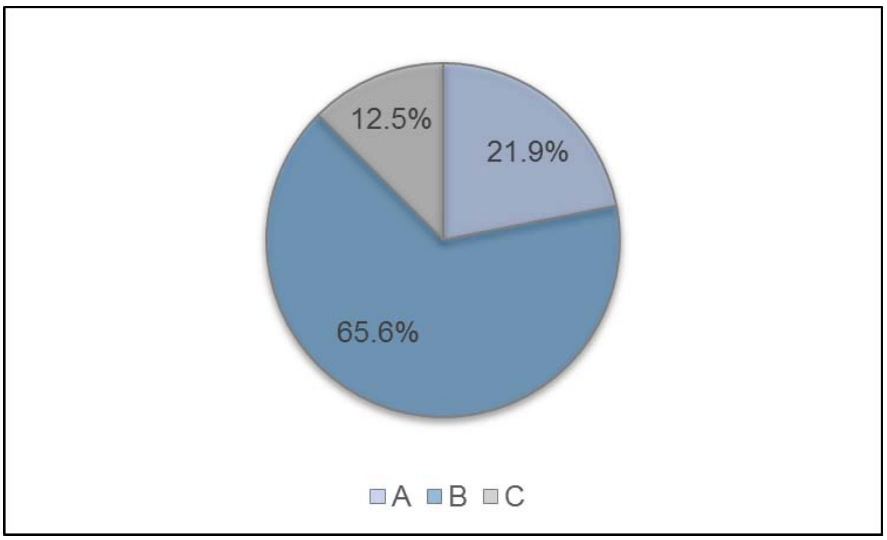


Figura 46. Identificación de las relaciones entre la cantidad desconocida con las cantidades conocidas para el problema 1 de la prueba individual.

A partir de la gráfica de la Figura 46 es posible apreciar que el 65.6 % de los alumnos refieren como la unidad significante que establece la relación entre la cantidad desconocida y las cantidades conocidas, con la frase que trata “dicho número, más su mitad, más su tercera parte” (Bruño, 2011, p. 208).

Este resultado nos permite afirmar la proposición establecida al respecto en la caracterización del problema.

Pregunta 4. ¿Qué parte del enunciado del problema menciona la relación de equivalencia entre todas las cantidades?

Categorías:

A. “es igual a” (Bruño, 2011, p. 208)
B. “es igual a [treinta/ cuarenta]” (Bruño, 2011, p. 208)

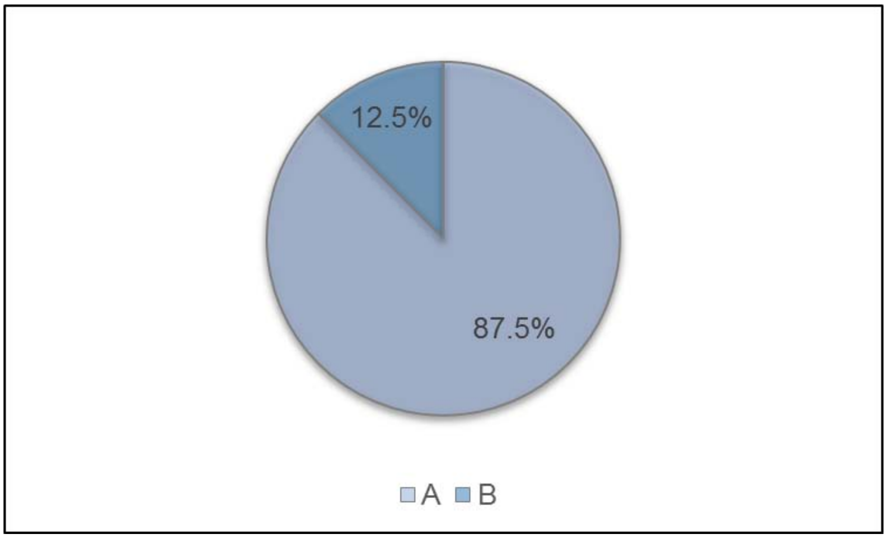


Figura 47. Identificación de la relación de equivalencia para el problema 1 de la prueba individual.

En la Figura 47, se presenta la gráfica que indica que el 87.5 % de los alumnos indican que la frase “es igual a” (Bruño, 2011, p. 208) corresponde a la unidad significante que se refiere a la igualdad.

Esto resulta muy evidente, porque la frase contiene la palabra igual. Además, el enunciado transparenta la escritura de la ecuación en el mismo sentido que se lee el texto, es decir, de izquierda a derecha.

4.10.1.2.3 Tratamientos discursivos sobre las unidades significantes

El 90.6 % de los estudiantes efectúan algún tipo de tratamiento discursivo sobre las frases identificadas en la segmentación semántica que permiten la designación de la incógnita *como el valor del número*.

El 65.6 % de los estudiantes realizan tratamientos discursivos sobre las frases que relacionan la cantidad desconocida designada como incógnita y las cantidades conocidas para poder establecer las relaciones internas con las que se estructuran las representaciones no discursivas y simbólico-algebraicas.

Estos tratamiento son cuasi-inmediatos (Duval, 1999, 2006) por lo que no se puede apreciar la trayectoria cognitiva que siguen los estudiantes para efectuarlos, solamente se puede apreciar su resultado.

4.10.1.2.4 Representaciones simbólico-algebraicas

El 100 % de los alumnos utilizan la literal *x* para designar a la incógnita del problema que es el número cuyo valor se está buscando.

Para representar las relaciones entre la incógnita y las cantidades conocidas el 71.9 % de los alumnos emplean fracciones algebraicas. La expresión algébrica relacionada con la mitad del número buscado es: $\frac{1}{2}x$, y la que asocia la tercera parte del número es: $\frac{1}{3}x$. El 25 % de los estudiantes emplean expresiones que corresponden a fracciones aritméticas [no asociada a la literal *x*] como son: $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{3}$. El 3.1 % de los escolares no respondieron el problema, únicamente realizaron la segmentación semántica del enunciado, por lo tanto no generaron algún tipo de representación algebraica.

4.10.1.2.5 Representaciones no discursivas

En esta sección se presentan las representaciones no discursivas empleadas por los alumnos para evidenciar las relaciones internas entre la incógnita y las cantidades conocidas, que corresponden a las fracciones algebraicas descritas anteriormente. Además, destaca la selección de la operación de adición para relacionar internamente las fracciones algebraicas. Finalmente, se muestra la formación de la ecuación a partir de la igualación de la expresión algebraica que contiene dichas fracciones con la cantidad conocida [treinta/cuarenta].

En la Tabla 13 que se muestra a continuación, se incluye la frecuencia y el porcentaje en el uso por parte de los escolares de los diagramas relacionales mostrados en la Figura 42 como representaciones no discursivas que permiten el planteamiento de la ecuación del Problema 1.

Tabla 13. Frecuencia y porcentaje en el uso de diagrama relacional para el Problema 1.

Aspecto	Frecuencia	Porcentaje
No contestaron el problema	2	6.3 %
No usaron diagrama relacional	2	6.3 %
Usaron el diagrama relacional I/II completo	6	18.8 %
Usaron el diagrama relacional I/II sin flechas	7	21.9 %
Usaron el diagrama relacional I/II sin signos	2	6.3 %
Usaron otro tipo de diagrama relacional	13	40.6%
Total	32	100 %

Acorde a lo que se esperaba, el 43.8 % de los estudiantes desarrollaron diagramas relacionales como los mostrados en la Figura 42 [I y II].

Entre las características más notables de este tipo de representación destaca que la incógnita [x] es escrita en un nodo que jerárquicamente se ubica por arriba de las relaciones entre esta y las cantidades conocidas, que a su vez son escritas en nodos independientes [$\frac{1}{2}x$, $\frac{1}{3}x$, respectivamente].

Los nodos están conectados por segmentos de recta, con los que se puede visualizar la relación. El 25.1 % de los estudiantes representan dichas relaciones por medio de flechas con las que se establece el sentido de la relación entre nodos, el 21.9 % solamente emplean segmentos de recta [no usa flechas].

El 37.5 % de los estudiantes emplean el símbolo de adición para representar la operación matemática que permite relacionar los nodos. El 6.3 % de los estudiantes no usan símbolos sobre los segmentos de recta para denotar las operaciones con las que se relacionan los nodos.

El 43.8 % de los escolares emplean el símbolo de igualdad para establecer la relación entre la totalidad de los nodos con respecto a la cantidad conocida.

El 40.6 % de los alumnos utilizaron algún tipo de diagrama relacional diferente al mostrado en la Figura 42, las variaciones con respecto al referido, se centran en la jerarquía de los nodos, la representaciones de las relaciones entre la incógnita y las cantidades conocidas [en lugar de ser representadas como fracciones algebraicas, son escritas como fracciones aritméticas] y la falta de los signos para denotar las operaciones que relacionan los nodos y las flechas, es un común denominador.

En la Tabla 14 se muestra la frecuencia en el uso de la representación geométrica como elemento auxiliar en el planteamiento de la ecuación correcta para el Problema 1.

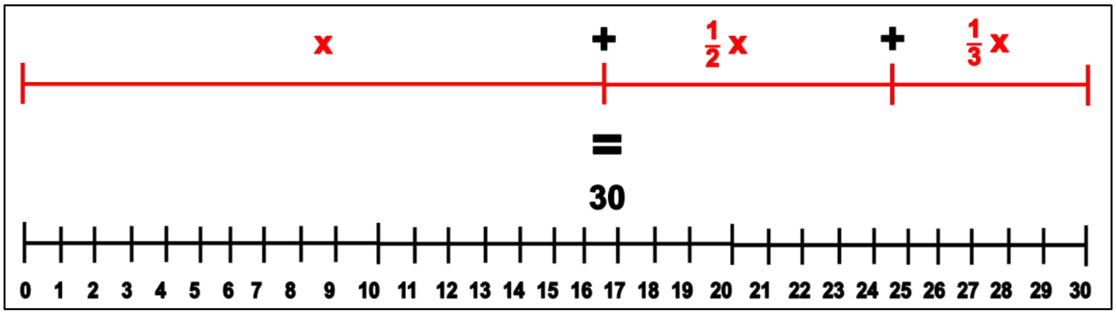
Tabla 14. Frecuencia y porcentaje en el uso de la representación geométrica para el problema 1.

Aspecto	Frecuencia	Porcentaje
No contestaron el problema	2	6.3 %
Usaron la representación geométrica A/B	9	28.1 %
No iguala en la representación geométrica A/B	5	15.6 %
Usaron otro tipo de representación geométrica I/II	2	6.3 %
No usaron la representación geométrica	14	43.8 %
Total	32	100 %

En la Figura 48 se exponen los dos tipos de representaciones geométricas [I y II] que emplearon los alumnos para el Problema 1.

En contraste con las representaciones de la Figura 43, en ésta se puede apreciar que los estudiantes simplifican la forma de representar las relaciones internas entre la incógnita y la cantidad conocida, ubicándolas a todas sobre un mismo segmento de recta.

En estas representaciones no se pierde el sentido de la totalidad que proporciona el enunciado del problema, es decir, se aprecian en su conjunto todos los elementos necesarios para formar la ecuación [incógnita, relaciones derivadas de la incógnita con las cantidades conocidas y la igualdad].



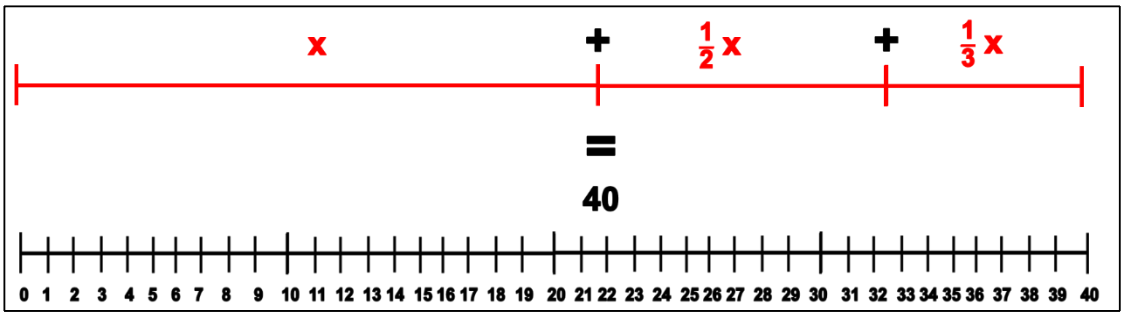


Figura 48. Representación geométrica IA y IIA para el problema 1.

4.10.1.3 Planteamiento de la ecuación

El 90.6 % [30] de los escolares plantearon la ecuación.

El 84.4 % de los estudiantes llegan a la ecuación correcta: $x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x = 30$ [para la prueba tipo A] y $x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x = 40$ [para la prueba tipo B]. El 12.5 % llegan a ecuaciones incorrectas como: $x + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = 30$, $x + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = 40$, $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = 30$ y $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = 40$.

El 3.1 % no plantearon el problema.

4.10.2 Resultados de la prueba en pequeño grupo

La segunda prueba de desarrollo escrito se llevó acabo en pequeño grupo de cuatro integrantes. El instrumento aplicado aparece en el Anexo 9. Al igual que en la prueba individual, para la prueba en pequeño grupo se muestran, con fines ilustrativos los resultados, discusión y análisis para el Problema 1 [La edad de Diofanto]. El segundo problema de la prueba se analizó en forma análoga.

En la Tabla 15 se muestran los porcentajes de estudiantes que para el Problema 2: representan la cantidad desconocida mediante una literal, emplean algún tipo de representación no discursiva [el diagrama relacional, representación geométrica y/o matricial], recurren al uso de algún otro tipo de representación no discursiva para el planteamiento de la ecuación lineal, emplean algún recurso discursivo como la paráfrasis o reescritura de frases del enunciado del problema para clarificar la información no evidente y plantean la ecuación lineal correcta que conduce a la solución del problema.

Tabla 15. Resultados generales para el problema 2 de la prueba en pequeño grupo.

Estructura del planteamiento del problema	Si	No	Total
Copia el enunciado del problema	12.5 %	87.5 %	100 %
Representa la cantidad desconocida mediante una literal	100 %	No aplica	100 %
Emplea el diagrama relacional	75 %	25 %	100 %
Emplea la representación geométrica	12.5 %	87.5 %	100 %
La ecuación lineal que escribe es la que conduce a la solución correcta del problema	100 %	No aplica	100 %

En las Figuras 49 a 51 se muestran algunas evidencias de las respuestas generadas para los dos problemas de la prueba en pequeño grupo.

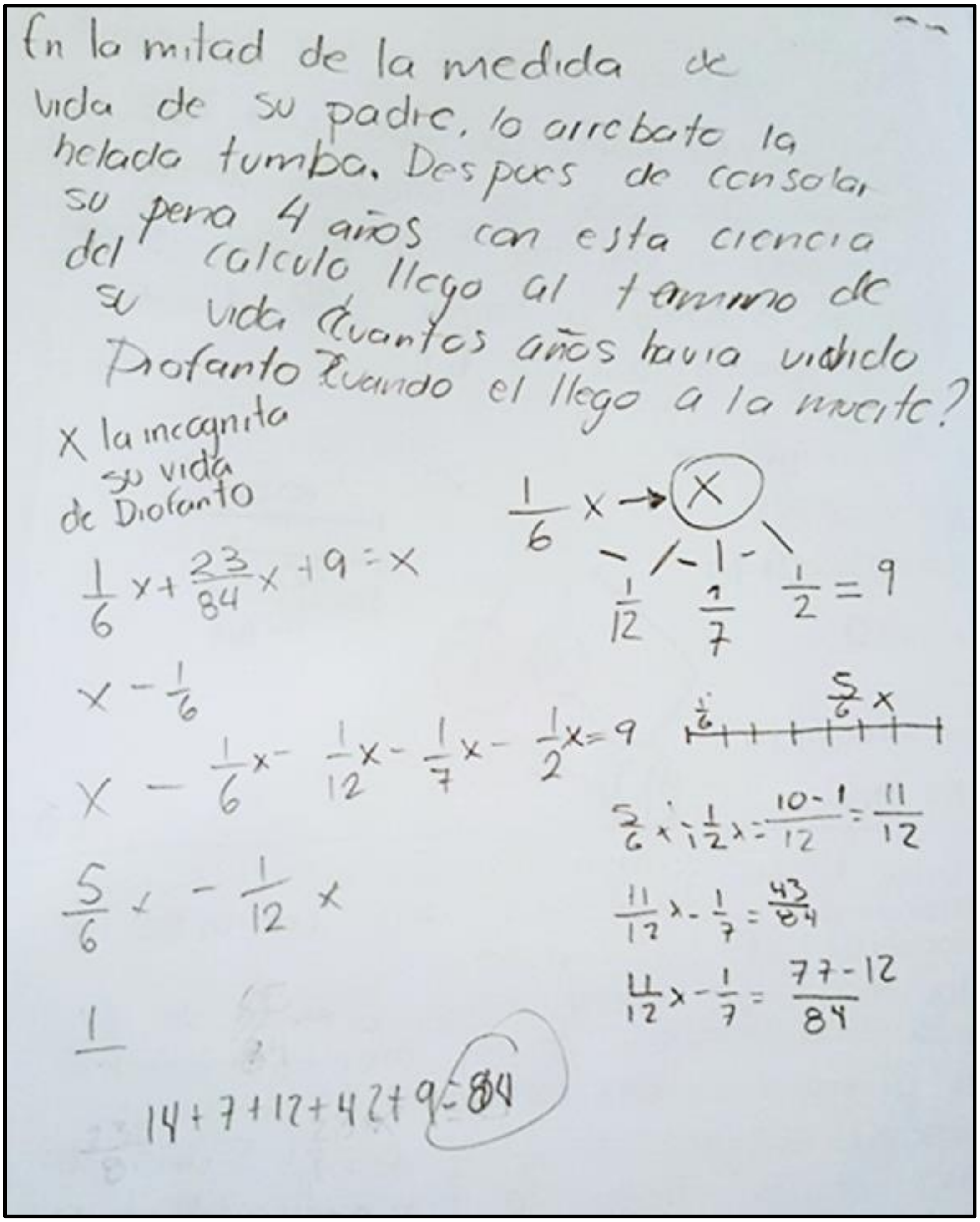


Figura 49. Ejemplo del planteamiento del problema 1 de la vida de Diofanto de la prueba en pequeño grupo con diagrama relacional y representación geométrica.

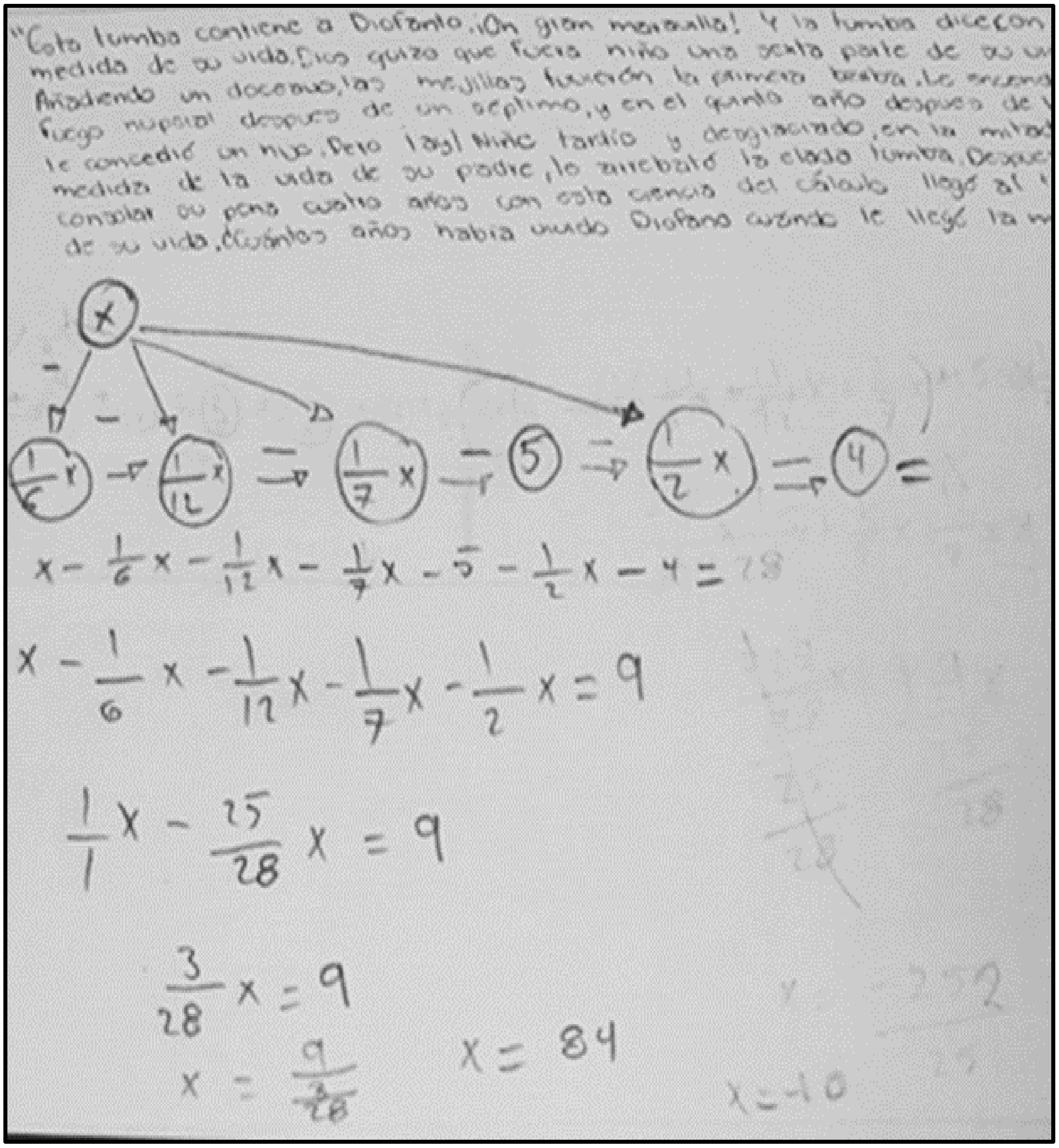


Figura 50. Ejemplo del planteamiento del problema 1 de la vida de Diofanto de la prueba en pequeño grupo con diagrama relacional.

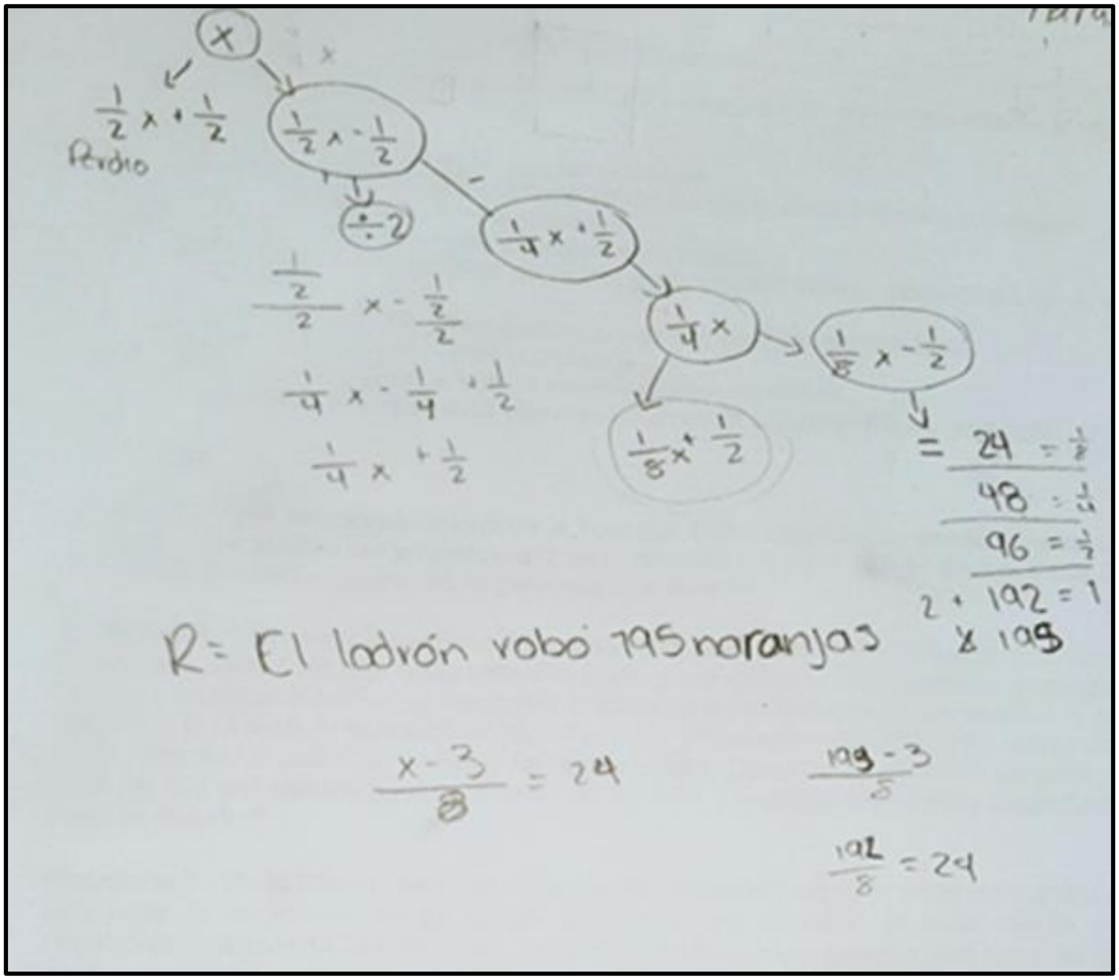


Figura 51. Ejemplo del planteamiento del problema 2 del robo de las naranjas de la prueba en pequeño grupo con diagrama relacional.

Para los problemas de la prueba escrita en pequeño grupo, no se consideró el análisis de la segmentación semántica del enunciado, debido a que en la prueba individual se analizó ampliamente este tópico. En esta prueba en grupo se espera que los alumnos apliquen lo aprendido, además de poner en juego otras competencias relacionadas con la resolución de problemas y la socialización del conocimiento.

En esta prueba escrita, no se les dan instrucciones puntuales a los estudiantes para la traducción de los problemas, a diferencia de la prueba individual en la que el instrumento contiene instrucciones que intencionalmente seccionan y orientan el planteamiento del problema.

4.10.2.1 Caracterización del Problema de la vida de Diofanto

El problema del epitafio de la tumba de Diofanto, tiene el siguiente enunciado:

> Esta tumba contiene a Diofanto. ¡Oh gran maravilla! Y la tumba dice con arte la medida de su vida. Dios hizo que fuera niño una sexta parte de su vida. Añadiendo un doceavo, las mejillas tuvieron la primera barba. Le encendió el fuego nupcial después de un séptimo, y en el quinto año después de la boda le concedió un hijo. Pero, ¡ay! Niño tardío y desgraciado, en la mitad de la medida de la vida de su padre, lo arrebató la helada tumba. Después de consolar su pena cuatro años con esta ciencia del cálculo llegó al término de su vida. ¿Cuántos años había vivido Diofanto cuando le llego la muerte? (Nazareno, 2014, p. 1).

Este es un problema clásico de corte histórico (Puig, 1998), y de estados porque involucra la línea de vida de Diofanto como la totalidad. El momento que indica su muerte puede ser tomado como un punto de partida para iniciar en forma regresiva con la segmentación semántica del enunciado del problema.

El enunciado proporciona informaciones fraccionarias de los puntos intermedios de su vida como son: el periodo en que fue niño, la etapa de la pubertad, su matrimonio, el nacimiento y muerte de su hijo. Por lo tanto, estas informaciones fraccionarias corresponden a las unidades semánticas del enunciado del problema y la cantidad desconocida o incógnita será el número de años que vivió Diofanto. *En términos de esta incógnita se plantearan las relaciones internas que corresponderán a cada una de las fracciones de la vida de Diofanto, con lo que se puede determinar el carácter del problema que puede ser: puramente aditivo, si cada una de las fracciones se suman y se igualan a la totalidad de los años que vivió Diofanto [incógnita] o aditivo-sustractivo, si a esta totalidad se le van restando cada una de las fracciones de su vida y se iguala a la suma de las cantidades conocidas*, que corresponden a los cinco años que transcurrieron entre su matrimonio y el nacimiento de su hijo, y los cuatro años que pasaron entre la muerte de su hijo y su propio deceso.

A partir de la descripción anterior, podemos proponer dos tipos de representaciones no discursivas: geométrica [Figura 52] y diagrama relacional [Figuras 53 y 54], para revelar el carácter del problema, tomando como base la forma de estructurar las relaciones fraccionarias desconocidas y conocidas de la vida de Diofanto con respecto a la totalidad de años que vivió.

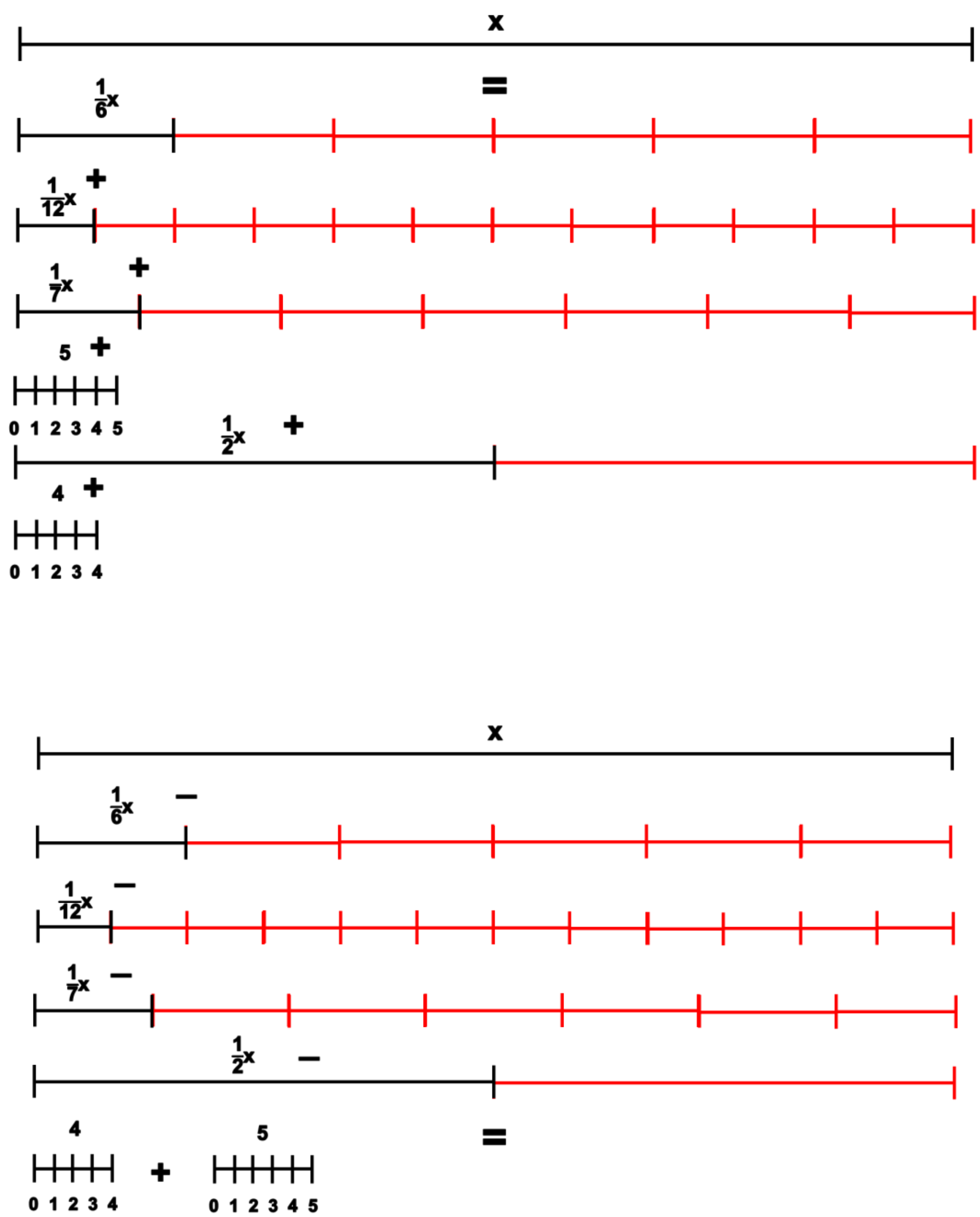


Figura 52. Representación geométrica I y II para el Problema 1.

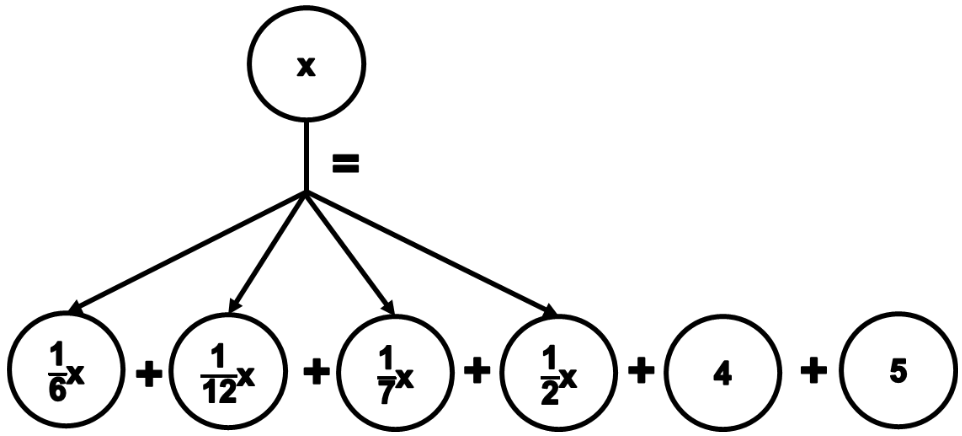


Figura 53. Diagrama relacional aditivo para el Problema 1.

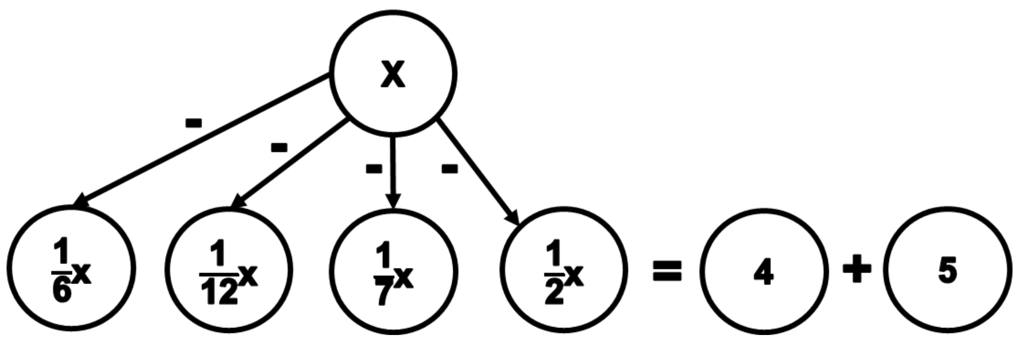


Figura 54. Diagrama relacional aditivo-sustractivo para el Problema 1.

La ecuación de carácter aditivo que puede conducir a la solución del problema es: $\frac{1}{6}x + \frac{1}{12}x + \frac{1}{7}x + 5 + \frac{1}{2}x + 4 = x$.

La ecuación de carácter aditivo-sustractivo que hace factible la solución del problema es: $x - \left[\frac{1}{6}x + \frac{1}{12}x + \frac{1}{7}x + \frac{1}{2}x\right] = 9$.

4.10.2.2 Representaciones simbólicas

El 100 % de los escolares designa a la incógnita como el número de años que vivió Diofanto y la representa mediante la literal *x.* Las formas simbólico-algebraicas con las que los estudiantes representan las relaciones entre la incógnita y las fracciones que describen las etapas de la vida de Diofanto son las siguientes: $\frac{1}{6}x$, $\frac{1}{12}x$, $\frac{1}{7}x$ y $\frac{1}{2}x$.

4.10.2.3 Representaciones no discursivas

El 50 % de los alumnos emplean alguno de los cuatro tipos de diagrama relacional que se muestran en la Figura 55, como mediador en la traducción de la información que describen el contenido cognitivo incluido en las frases del enunciado del problema referentes a cada una de las oraciones que indican algún hecho de la vida de Diofanto. El 50 % de los estudiantes no usa algún tipo de representación no discursiva para plantear la ecuación del problema.

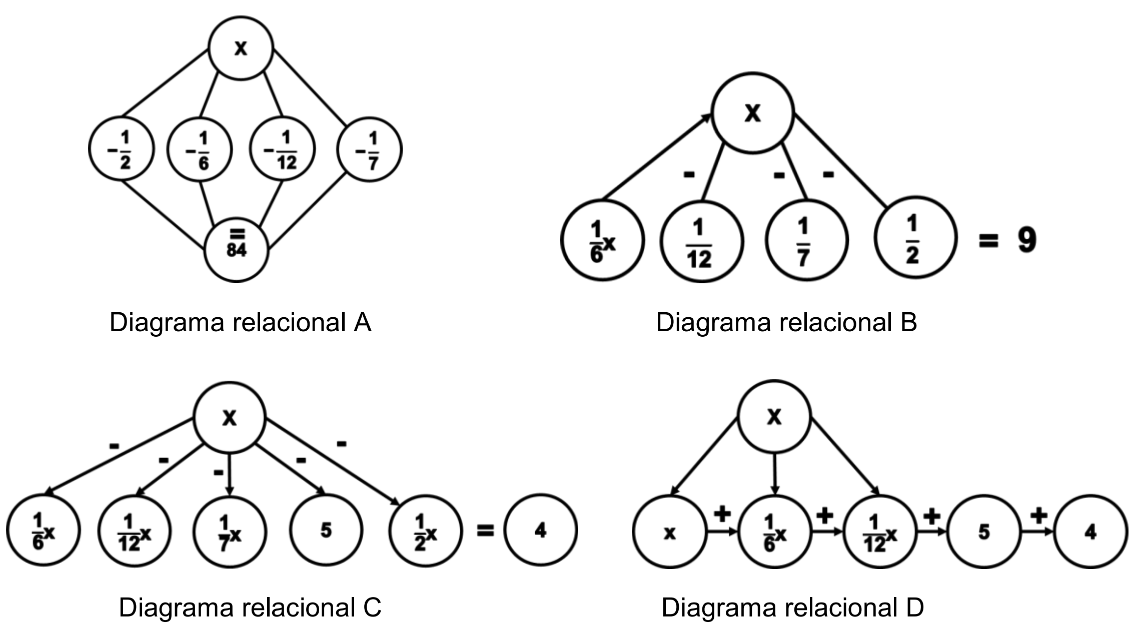


Figura 55. Diagramas relacionales elaborados por los alumnos para el problema de la vida de Diofanto.

Al comparar los diagramas de la Figura 54 [derivados de la caracterización del problema] y los de la Figura 55 [los que elaboraron los estudiantes] se pueden apreciar diferencias notables.

En el diagrama A de la Figura 55, se puede apreciar que los alumnos incluyen en los nodos secundarios las operaciones para relaciones simbólicas fraccionarias que derivan de la incógnita *x*. Además, no establecen el sentido de la operación mediante flechas. La relación de igualdad la representan con la solución del problema que es el total de años que vivió Diofanto.

En el diagrama B de la Figura 55, se muestran que las relaciones simbólicas fraccionarias son de carácter totalmente sustractivo y que provienen de la incógnita. Solamente en la relación fraccionaria de la sexta parte de la vida Diofanto se establece la dirección de la operación.

El diagrama C de la Figura 55, es muy similar con el propuesto para las relaciones de carácter puramente aditivo [Figura 54]. La única diferencia es que la cantidad conocida referente al quinto año después de la boda de Diofanto la ubican del lado derecho del diagrama, con lo que no queda establecido su carácter aditivo.

En el Diagrama D de la Figura 55, no se aprecian las representaciones simbólico-algebraicas referentes a la mitad y la séptima parte de la vida de Diofanto. Además, no se aprecia la relación de igualdad. El carácter del problema que describe este diagrama es totalmente aditivo y se indica el sentido de las operaciones mediante flechas.

Los estudiantes no emplearon representaciones geométricas o matriciales como alternativas para el planteamiento del problema.

4.10.2.4 Planteamiento de la ecuación

El 100 % de los escolares plantea ecuaciones correctas para el PVEL.

El 62.5 % de los alumnos llegan a la ecuación que combina el carácter aditivo-sustractivo y es: $x - \left[\frac{1}{6}x + \frac{1}{12}x + \frac{1}{7}x + \frac{1}{2}x\right] = 5 + 4$ [El 12.5 % usó el diagrama relacional A, un 12.5 % el B, otro 12.5 % el C y 12.5 25 % restante no emplearon representaciones discursivas].

El 37.5 % genera la ecuación de carácter puramente aditivo que es: $\frac{1}{6}x + \frac{1}{12}x + \frac{1}{7}x + 5 + \frac{1}{2}x + 4 = x$ [El 12.5 % usó el diagrama relacional D y el 25 % no empleo ningún tipo de representación no discursiva].

Los estudiantes no emplean representaciones matriciales, ni geométricas en la resolución del problema.

4.10.3 Calificaciones de la prueba individual y en grupo pequeño

El 81.2 % de los estudiantes alcanzaron una calificación aprobatoria en el rango de 6 a 10 puntos en la prueba individual y el 18.8 % de los escolares la reprobaron [los resultados se presentan en la Tabla 10].

El 100 % de los estudiantes aprobaron la prueba en pequeño grupo [Tabla 10].

El 87.5 % de los alumnos obtuvieron un promedio aprobatoria de calificaciones [Tabla 10] en las pruebas de desarrollo escrito [individual y grupal] y un 12.5 % alcanzaron un promedio menor o igual a 5.

4.10.4 Resultados del cuestionario de las concepciones de los estudiantes respecto a los objetos implicados en un PVEL

Para determinar las concepciones predominantes de los estudiantes antes y después de la instrucción, con respecto a los objetos matemáticos: variable como incógnita, igualdad y ecuación, se realizó el análisis de contenido por racimos (Bermúdez, 1996) de las definiciones que se presentan en el Anexo 7.

Para la concepción de incógnita, las categorías de análisis encontradas son las siguientes:

a. Valor, número o cantidad fija.
b. Valor, número o cantidad desconocida.
c. Número generalizado.
d. Diferencia entre dos números.
e. Valor, número o cantidad que cambia.
f. Asociada a función.
g. Literal.
h. Representación simbólica.

La concepción para la noción de incógnita, predominante entre los estudiantes al inicio de la instrucción es: como un valor, número o cantidad desconocida, representado por medio de una literal [incisos b y g]. Al final de la instrucción, los estudiantes completaron esta idea inicial, al señalar que la literal corresponde a la representación simbólica de la incógnita presente en cualquier ecuación [incisos b, g, c, g y h].

El 84 % de los estudiantes modificaron y/o ampliaron sus concepciones respecto a la noción de incógnita tras la instrucción. El 16% de los estudiantes mantuvieron su concepción inicial respecto a este objeto matemático durante y después de la instrucción.

Las categorías correspondientes a los incisos a, d, y e, se encuentran vertidas en las definiciones de los estudiantes con una frecuencia única.

Las categorías de análisis derivadas de las concepciones de igualdad que describen los estudiantes son las siguientes:

a. Despeje.
b. Relacionar dos números, valores o cantidades semejantes.
c. Comprobación de la ecuación.
d. Expresiones matemáticas con las que se puede saber el valor de algo.
e. Operación para resolver un problema.
f. Términos o expresiones iguales.
g. Relación de variables.
h. Relación de equilibrio entre operaciones.
i. Relación de equilibrio entre cantidades conocidas y desconocidas.
j. Relación de resultados que expresan la misma cantidad.
k. Resultados de una ecuación.
l. Método para formar ecuación.

La concepción para la noción de igualdad que con mayor frecuencia los alumnos manifestaron al inicio de la instrucción, es que en la igualdad se relacionan dos números, valores o cantidades semejantes [inciso b].

Tras el proceso de instrucción, esta concepción se mantiene y varios estudiantes indican que la igualdad es el resultado de: darle solución a la ecuación [incisos d y k], comprobar la ecuación [inciso c] y relacionar las cantidades conocidas con la cantidad desconocida o incógnita [inciso i].

El 97 % de los estudiantes modificaron sus concepciones iniciales respecto a la noción de igualdad tras la instrucción; solamente el 3 % mantuvo la misma postura en torno a este objeto matemático durante todo el proceso.

El resto de las categorías de análisis [incisos a, e, f, g, h, j y l] se encuentran vertidas en las definiciones de los estudiantes con una frecuencia de incidencia en las respuestas de 1 a 2 por el total de alumnos.

A partir de las definiciones de ecuación descritas se elaboraron las siguientes categorías de análisis:

a. Identidad aritmética.
b. Relación de equivalencia entre números.
c. Relación de equivalencia entre variables.
d. Identidad algebraica.
e. Comprobación de ecuación.
f. Conjunto de variables y números.
g. Operaciones algebraicas.
h. Conjunto de variables, números y operaciones.
i. Expresión algebraica con cantidades desconocidas.
j. Forma de simbolizar un problema.
k. Conjunto de números y literales.
l. Método para resolver un problema.
m. Representación de operaciones algebraicas.
n. Resultado de una operación aritmética.

Al inicio de la instrucción los alumnos refieren en forma más frecuente que una ecuación engloba operaciones algebraicas que incluyen un conjunto de variables y números que generan un resultado específico [incisos f, g, h, k y o].

Al finalizar el proceso de instrucción los estudiantes mantienen la idea de que la ecuación es el resultado de operaciones algebraicas que dan un resultado [incisos g, h y o] y la relacionan con la forma de representar y resolver un problema en el que están presentes cantidades desconocidas [incisos i, j y l].

El 78 % de los estudiantes modificaron y ampliaron su concepción de ecuación durante el proceso de instrucción y el 22 % de los mantuvo su postura inicial.

Las categorías restantes [incisos a-e] se encuentran presentes en las definiciones elaboradas por los alumnos con una frecuencia de incidencia en las respuestas de 1 a 2.

CONCLUSIONES

El análisis y discusión de los resultados derivados del presente estudio nos permiten sustentar las conclusiones que se exponen a continuación con las que intentamos dar respuesta a las preguntas de indagación planteadas inicialmente.

Los estudiantes realizan la segmentación semántica del texto del enunciado de un PVEL en sus unidades significantes en las siguientes proporciones: El 71.9 % identifican la sección de texto que corresponde a la cantidad desconocida. El 62.7 % de los escolares ubican las proposiciones que relacionan la cantidad desconocida con la cantidad conocida. El 51.6 % reconocen las frases que describen las operaciones matemáticas necesarias para formar la ecuación. El 86.7 % visualizan la parte del enunciado que se refiere a la relación de igualdad.

El 95.3 % de los estudiantes emplean la literal *x* para representar simbólicamente a la incógnita o cantidad desconocida en un PVEL.

El 85.9 % de los alumnos emplean fracciones algebraicas para explicitar las relaciones entre la incógnita y las cantidades conocidas que describe el enunciado de un PVEL de números y edades, en donde representan simbólicamente estas relaciones como un cociente o razón.

El 68.8 % de los educandos usa formas simbólico-algebraicas de carácter aditivo para representar las relaciones entre la incógnita y las cantidades conocidas vertidas en el enunciado de un PVEL de edades.

El 79.2 % de los estudiantes emplean la ecuación lineal correcta para representar la relación de igualdad descrita en el enunciado de un PVEL.

El 76.9 % de los estudiantes emplean tratamientos discursivos cuasi-instantáneos o automáticos como el parafraseo para realizar la sustitución sobre las unidades significantes del texto que representan objetos matemáticos específicos: incógnita e igualdad. La característica principal de estos tratamientos es que debe mantenerse una invarianza en cuanto al contenido cognitivo del enunciado del PVEL.

El 76.6 % de los escolares usan tratamientos discursivos para seleccionar la incógnita como parte de la segmentación semántica del texto del PVEL. Estos tratamientos se basan en la correferencia, que permite al estudiante establecer la correspondencia entre las frases que aparecen en distintas ubicaciones del enunciado del texto, pero que en común designan a la cantidad desconocida.

Esta correferencia lleva a los alumnos a realizar la sustitución de estas frases y su codificación, como las unidades significantes que mantienen la invarianza del contenido cognitivo, que se refleja en la reducción de todas las frases que relacionan la cantidad desconocida a una proposición que codifica su significado como incógnita y describe su contenido cognitivo asociado al contexto del PVEL.

Para la formación de las relaciones entre la incógnita y las cantidades conocidas, el 67.2 % de los estudiantes efectúa una conexión entre la unidad significante que designa a la incógnita con respecto a otros dos tipos de unidades significantes: las que describen las operaciones matemáticas y las que se refieren a las cantidades conocidas. Así, la incógnita se conecta con las cantidades conocidas mediante operaciones matemáticas específicas, diferentes a las que son necesarias para la formación de la ecuación.

Para la formación de la relación de igualdad el 86.7 % de los escolares emplean simultáneamente la correferencia, la conexión y la reorganización semántica de las relaciones individuales entre la incógnita y las cantidades conocidas, con respecto a la unidad significante del texto que designa la equivalencia total de todas estas relaciones con las que se integra la ecuación final.

El 65.6 % los alumnos seleccionan la incógnita que les ofrece una economía en los tratamientos, lo que le confiere un carácter aditivo al problema. Por el contrario, la selección de la incógnita que implica mayor número de tratamientos es la que combina el carácter aditivo-sustractivo.

Antes de la instrucción, solamente el 34 % de los estudiantes lograban plantear la ecuación correcta de un PVEL de números. Al final de la instrucción, el 84.3 % de los alumnos escriben la ecuación correcta de un PVEL de números empleando una representación no discursiva como mediador en la conversión del lenguaje natural al simbólico algebraico.

Antes del proceso de instrucción solamente el 28.1 % de los escolares llegaban a la ecuación correcta de un PVEL que involucra edades. Tras la instrucción, el 81.3 % de los estudiantes usa algún tipo de representación no discursiva como puente en la traducción del enunciado del PVEL de edades a la ecuación correcta que conduce a su solución.

El diagrama relacional es la representación no discursiva que emplean más frecuentemente los estudiantes [76.6 %] como mediador en el proceso de traducción de los PVEL de números, porcentajes, costos, dinero y edades.

La representación matricial es usada por el 71.9 % de los escolares como forma no discursiva para la traducción del enunciado de problemas que involucran edades.

La representación geométrica es empleada en menor proporción [28.1%] por los escolares como mediador en la conversión del enunciado de un PVEL dado en lenguaje natural a su ecuación algebraica.

El 100 % de los alumnos mejoró su proceso de traducción de un PVEL de edades cuando trabajó en grupo pequeño. Bajo esta forma de organización se ponen en práctica las habilidades sociales como son: la discusión, la negociación y el consenso, que conducen a la socialización del conocimiento y la unificación del significado, en torno a los objetos matemáticos implicados en el proceso de traducción de un PVEL: incógnita, igualdad y ecuación.

La concepción para la noción de variable como incógnita predominante entre los estudiantes, al inicio de la instrucción asocia a la incógnita como un valor, número o cantidad desconocida, representado por medio de una literal. Al final de la instrucción, los estudiantes completaron esta idea inicial, al señalar que la literal corresponde a la representación simbólica de la incógnita de cualquier ecuación.

La concepción para la noción de igualdad que con mayor frecuencia los alumnos manifestaron al inicio de la instrucción, es que en la igualdad se relacionan dos números, valores o cantidades semejantes. Tras el proceso de instrucción, esta concepción se mantiene y varios estudiantes indican que la igualdad es el resultado de: darle solución a la ecuación, comprobar la ecuación y relacionar las cantidades conocidas con la cantidad desconocida o incógnita.

Al inicio de la instrucción, los alumnos refieren en forma más frecuente que una ecuación engloba operaciones algebraicas que incluyen un conjunto de variables y números que generan un resultado específico. Al finalizar el proceso de instrucción, los estudiantes mantienen la idea de que la ecuación es el resultado de operaciones algebraicas que dan un resultado y la relacionan con la forma de representar y resolver un problema en el que están presentes cantidades desconocidas.

En forma general podemos concluir que un proceso de enseñanza-aprendizaje fundamentado en el uso de representaciones no discursivas [del tipo geométrico, gráfico y matricial] permite evidenciarle claramente a los alumnos de bachillerato, la información que no es evidente en el enunciado de un problema verbal de ecuaciones lineales en torno los objetos matemáticos que describe el texto del problema [la variable vista como la incógnita, la relación de igualdad y la ecuación] y que son necesarios para efectuar la traducción de dicho enunciado dado en lenguaje natural a la ecuación correcta que haga factible su solución.

Así, la representación no discursiva se transforma en un puente entre dos lenguajes diferentes: el natural y el algebraico. Por lo tanto, su función como intermediario en dicho proceso de traducción, radica en que permite poner en correspondencia y relacionar los componentes semánticos de los objetos matemáticos implicados en un PVEL que en el enunciado del problema están descritos en lenguaje natural con los apropiados símbolos del lenguaje algebraico con lo que es posible formar y representar la correspondiente ecuación lineal.

En el presente estudio solamente se emplearon como formas de representaciones no discursivas: la representación geométrica, el diagrama relacional y la representación matricial. En estudios futuros es factible explorar el uso de otro tipo de representaciones no discursivas como los diagramas bidimensionales (Duval, 2006) o los que emplean el método de análisis y síntesis (Puig y Cerdán, 1988).

Además, es posible extender el estudio a problemas verbales de ecuaciones lineales que impliquen contextos geométricos y ahondar más en los de corte histórico.

REFERENCIAS

Akgün, L. y Özdemir, M. (2006). Students' understanding of the variable as general number and unknown: A case study. *The Teaching of Mathematics*, *9*(1), 45-51.

Abreu, J. y Argueta, H. (2008). *Ecuaciones lineales. Resolución de problemas que dan lugar a ecuaciones lineales con una incógnita*. Recuperado el 20 de Octubre de 2013 de: http://newton.matem.unam.mx/arquimedes/algebra/index.html

Baldor, A. 1997. *Álgebra*. México. Editorial: Publicaciones Cultural.

Baldor, A. 1997. *Aritmética*. México. Editorial: Publicaciones Cultural.

Basoredo, C. (2008). El examen de desarrollo escrito, sus tipos y sus procedimientos de diseño y evaluación. Recuperado el 15 de julio de 2015 de: http://www.lenguaweb.info/evaluacion/1085-el-examen-de-desarrollo-escrito-sus-tipos-y-sus-procedimientos-de-diseno-y-evaluacion

Bautista, H. y Flores, M. (2013). *Guía de estudio para la presentación del examen extraordinario de Matemáticas I*. México. CCH-Plantel Vallejo. Editorial: CCH-UNAM

Bello, I. (1999). *Álgebra Elemental*. México: Internacional Thomson Editores.

Becerra, E. (2010). *UNAM Media Campus*. Ecuaciones de primer grado. Recuperado el 20 de Octubre de 2013 de: http://mediacampus.cuaed.unam.mx/node/1054

Becerril, H. y Castro, J. (2013). *Guía para la preparar el examen extraordinario de Matemáticas I*. CCH-Plantel Sur. México. Editorial: CCH-UNAM.

Bermúdez, M. (1982). El análisis de contenido procedimientos y aplicaciones. *Ciencias Sociales*, (24), 71-80.

Bermúdez, M. (1986). Aplicación del análisis de contenido a la entrevista. *Ciencias Sociales*, (33), 135-143.

Bixio, C. (1998). *Enseñar a aprender*. México: McGraw-Hill.

Booth, L. (1989). A question of structure or reaction a the early learning of algebra a structural perspective. En S. Wagner & C. Kiera. *Research issues in the learning and teaching of algebra*. 57-58. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Bórquez, S. (2012). *Trabajo en grupos y equipos*. Recuperado el 28 de febrero de 2014 de: http://paulina.wide.cl/pdf/05-

Boulton-Lewis, G., Cooper, T., et al. (1998). *Arithmetic, pre algebra and algebra: A model of transition*. Mathematics Education Research Group of Australasia. Recuperado el 3 de junio de 2014 de: http://www.merga.net.au/documents/RP_BoultonLewis_Cooper_Pillay_Wilss_1998.pdf

Bransford, J., Brown, A., y Cocking, R. (1999). *How people learn: Brain, mind, experience, and school*. Whashington D.C., USA. Editorial National Academy Press.

Briones, G. (2003-2011). *Métodos y técnicas de investigación para las Ciencias Sociales*. México: Trillas.

Bruño, J. (2011). Ecuaciones de primer grado. Recuperado el 9 de febrero de 2014 de:http://www.juntadeandalucia.es/averroes/~29700989/departamentos/departamentos/departamento_de_matemat/recursos/solucionario/bruno/primero/tema09.pdf

Butts, T. (1980). Posing problems properly. En Stephen Krulik and Robert E. Reys (Editors). *Problem solving in school mathematics*. 1980 Year book. 23-33. Reston VA: NCTM.

Cadwell, J. y Goldin, G. (1987). Variables affecting word problem difficulty in secondary school mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 187-196.

CCH-UNAM, (1996). *Programa de Estudios de Matemáticas I a IV*. México: UNAM.

CCH-UNAM. (2013). *Ecuaciones lineales*. Recuperado el 20 de Octubre de 2013 de:http://portalacademico.cch.unam.mx/alumno/aprende/matematicas1/ecuacioneslineales/page/0/8

CCSSI. (2012). *Common Core State Standards Initiative*. Recuperado el 10 de febrero de 2014 de: http://www.corestandards.org/Math/Content/HSS/introduction

Chalouh, L. y Herscovics, N. (1988). Teaching algebraic expressions in a meaningful way. En Coxford, A.F. and Shulte, A.P. (Eds.). *The Ideas ofAlgebra, K-12*. Reston, VA: NCTM, 33-42.

Clement, J. (1982). Algebra word problem solutions: Thought processes underlying a common misconception. *Journal for Research in Mathematics Education*, 16-30.

Corral, Y. (2010). Diseño de cuestionarios para la recolección de datos. *Revista de Ciencias de la Educación*, *36*(20), 152-167.

Coronil, I. (2013). *Solución a los ejercicios*. Recuperado el 12 de Enero de 2014 de:http://ieselcoronil.es/wp-content/uploads/2013/10/Pagina_142s.pdf

CUAED-UNAM. (2011). *Math-media*. Recuperado el 20 de Octubre de 2013 de: http://cuaed.unam.mx/math_media/aritmetica/intro_num_enteros/index.php

Daroczy, G. y Wolska, M. et al. (2015). *Word problems: a review of linguistic and numerical factors contributing to their difficulty*. Recuperado el 22 de julio de 2015 de: http://journal.frontiersin.org/article/10.3389/fpsyg.2015.00348/abstract

Díaz-Barriga, F. (1998). *Estrategias docentes para un aprendizaje significativo*. México: Mc Graw Hill.

Diccionario de La Real Academia de la lengua Española. (2013). Recuperado el 14 de junio de 2015 de: http://lema.rae.es/drae/?val=problema

DGCCH-UNAM (2011). *Plan de Trabajo 2011-2012*. Recuperado el 18 de julio de 2012 de: http://www.cch.unam.mx/sites/default/files/Area_Matematicas_final.pdf

DGCCH-UNAM (2012). *Modelo de Trayectoria 2012*. Recuperado el 14 de junio de 2012 de: http://www.cch.unam.mx/sites/default/files/PoblacionEstudiantilDelCCH.pdf

DGCCH-UNAM. (2012) *Orientaciones para el desarrollo de los proyectos de apoyo a la docencia 2012-2013*. Recuperado el 12 de Julio de 2012 de: http://www.cch.unam.mx/sites/default/files/Suplemento12.pdf

DGCCH-UNAM. (2012). *Reflexiones sobre los programas de estudio a partir de la construcción del Examen de Diagnóstico Académico (EDA) y el análisis de sus resultados, Área de Matemáticas*. Recuperado el 12 de junio de 2013 de: http://www.cch.unam.mx/sites/default/files/Plan%20de%20Trabajo%202011-2012.pdf

Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano*. Colombia. Editorial: Universidad del Valle.

Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española, 9*(1), 143-168.

Eggen, P. (2005). *Estrategias docentes. Enseñanza de contenidos curriculares y desarrollo de habilidades de pensamiento*. México. Editorial: Fondo de Cultura Económica.

Ellis, R. (2003). *Task-based Language Learning and Teaching*. Oxford: Oxford University Press.

Ernest, P. (1991). *The philosophy of mathematics education*. Inglaterra. Editorial: London Flamer Press.

Faddeyev, D. y Sominskii, I. (1965). *Elementary Algebra*. Londres: Pergamon Press.

Falkner, K., Levi, L., y Carpenter, T.. (1999). Children's understanding of equality: A foundation for algebra. *Teaching children mathematics, 6*(4), 232.

Filloy, E., Puig, L., y Rojano, T. (2008). El estudio teórico local del desarrollo de competencias algebraicas. *Enseñanza de las Ciencias*, (26), 327-342.

Frege, G. (1996). *Escritos filosóficos*. España. Editorial: Crítica Grijalbo Mondadori.

Freudental, H. (1991). *Revisiting Mathematics Education*. Noruega. Editorial: Kluwer Academic Publishers.

Fuller, G. (1981*). Álgebra elemental*. México: Compañía Editorial Continental.

García, H. y Landa, E. (2013). *Guía de estudio de Matemáticas I*. CCH-Plantel Naucalpan turno vespertino. México. Editorial: CCH-UNAM.

Godfrey, D., y Thomas, M. (2003). Student perspectives on equation: Constructing the mathematical object. En *Proceedings of the 26th Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia*, (1), 396-403.

Godino, J. y Batanero C. (2009). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Colecci.n Digital Eudoxus*, (11). Recuperado el 6 de febrero de 2014 de: http://www.cimm.ucr.ac.cr/ojs/index.php/eudoxus/article/view/428

González, M. (2013). *Problemas de ecuaciones*. Recuperado el 12 de enero de 2014 de: http://selectividad.intergranada.com/ESO/ESO-1/Problemas_ecuaciones.pdf

Grabinger, R. y Dunlap, J. (1995). Rich environments for active learning: A definition. *Research in learning Technology, 3*(2), 5-34.

Greeno, J. (1978). The nature of problem- solving abilities. In W.K. Estes (Ed.), *Handbook of Learning and Cognitive Processes*, Vol. 5 (pp. 239-270). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Guelfond, A. (1979). *Resolución de ecuaciones en números reales*. URSS. Editorial: Mir.

Herrán, A. (2011). *Técnicas didácticas para una enseñanza más formativa*. Cuba. Editorial Universidad de Camagüey.

Herscovics, N., y Kieran, C. (1980). Constructing meaning for the concept of equation. *The Mathematics Teacher*, 572-580.

Herscovics, N. (1989). Cognitive obstacles encountered in the learning of algebra. En S. Wagner y C. Kieran. *Research issues in the learning and teaching of algebra*. 60-92. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Jonassen, D. (1997). Instructional design models for well-structured and III-structured problem-solving learning outcomes. *Educational Technology Research and Development*, *45*(1), 65-94.

Kalnin, R. (1973). *Álgebra y Funciones Elementales*. URSS: Editorial Latinoamericana.

Kieran, C. (1980). *The interpretation of the equal sign: Symbol for an equivalence relation vs. an operator symbol*. Proceedings of the Fourth Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Berkeley, California. Editorial: University of California.

Kieran, C. (1981). Concepts associated with the equality symbol. *Educational studies in Mathematics*, *12*(3), 317-326.

Kieran, C. (1988). Two different approaches among algebra learners. En A. F. Coxford (Eds.). The ideas of algebra K-12. 91-96. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Kieran, C. (1989). The early learning of algebra: A structural perspective. En S. Wagner y C. Kieran (Eds.). *Research issues in the learning and teaching of algebra*. 33-56. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Kieran, C., y Filloy, E. (1989). El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica. En *Enseñanza de las Ciencias* (7), 229-240.

Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. En D. Grouws. *Handbook of research on mathematics teaching and learning*. 390-419. New York: Macmillan Publishing Company.

Kieran, C., y Saldanha, L. (2008). Designing tasks for the co-development of conceptual and technical knowledge in CAS activity: An example from factoring. *Research on technology and the teaching and learning of mathematics*, *2*, 393-414.

Kilpatrick, J. (1978). *Variables and methodologies in research on problem solving*. Recuperado el 20 de abril de 2014 de: http://files.eric.ed.gov/fulltext/ED156446.pdf#page=14

Killpatric, J. y Rico L. (1998). *Educación Matemática*. México. Editorial: Grupo Editorial Iberoamérica, S.A. de C.V.

Kirshner, D. (1989). Critical issues in current representation system theory. Kintsch, W., & Greeno, J. G. (1985). Understanding and solving word arithmetic problems. *Psychological review*, *92*(1), 109.

Kücheman, D. (1981). Algebra. In K. Hart. *Children´s understanding of mathemantics*. 102-119. London: John Murray.

Lafourcade, P. (1969). *Evaluación de los aprendizajes*. Madrid, España: Editorial Cincel.

Lepik, M. (1990). Algebraic word problems: Role of linguistic and structural variables. *Educational Studies in Mathematics*, *21*(1), 83-90.

Lehmann, C. (1992). *Álgebra*. México: Limusa.

López, G, y López, M. (2003). *Aprendizaje Cooperativo y Colaborativo. Su Implementación en Carreras Universitarias. Actas del Congreso Latinoamericano de Educación Superior del Siglo XXI, Universidad Nacional de San Luís, Argentina*. Volumen II. Recuperado de http://conedsup.unsl.edu.ar/Download_trabajos/Trabajos/Eje_6_Procesos_Formac_Grado_PostG_Distancia/Lopez%20y%20Otros.PDF

Mason, J. y Burton, L (1982). *Thinking Mathematically*. Inglaterra. Editorial: Pearson Education Limited.

Mayer, R. (1983). *Thinking, Problem Solving, Cognition*. New York: Freeman and Company. (Traducido por Baravalle, G. (1986). Pensamiento, Resolución de Problemas y Cognición. Barcelona: Paidós).

Martínez, M. (2006). *Ciencia y Arte en la Metodología Cualitativa*. México: Trillas.

Mazarío, T. y Sanz C. (2009). *Reflexiones sobre un tema polémico: la resolución de problemas*. Recuperado el 15 de mayo de 2015 de: http://libros.metabiblioteca.org/bitstream/001/358/5/978-959-16-0676-1.pdf

Meléndez, R. y Díaz, S. (2006). *Tutorial de problemas verbales*. Recuperado el 12 de nero de 2014 de: http://precalculo.carimobits.com/Material%20del%20Curso/PDF2/manual_verbales.pdf

Mendenhall, W. (2010). *Introducción a la probabilidad y la Estadística*. México: Cenage Learning.

Mendoza, F. y Moreno, S. (2013). *Guía de estudio de Matemáticas I*. CCH-Plantel Naucalpan turno matutino. México. Editorial: CCH-UNAM.

Molina, I. (1996). *El Señor del Cero*. México. Editorial: Alfaguara.

Molina, M. (2014). Traducción del simbolismo algebraico al lenguaje verbal: indagando en la comprensión de estudiantes de diferentes niveles educativos. *Gaceta de la Real Sociedad Matematica Española*, *17*(3), 559-579.

Nathan, M. J., Kintsch, W., y Young, E. (1992). A theory of algebra-word-problem comprehension and its implications for the design of learning environments. *Cognition and Instruction*, *9*(4), 329-389.

Nazareno, G. (2014). *Problemas de ecuaciones de primer grado*. Recuperado el 10 de diciembre de 2014 de: http://wikimates-msoto.wikispaces.com/file/view/PROBEC2_N2.pdf/403776446/PROBEC2_N2.pdf

Nesher, P. (1976). Three determinants of difficulty in verbal arithmetic problems. *Educational Studies in Mathematics*, *7*(4), 369-388.

NCTM. (2000). *Principios y Estándares para la Educación Matemática*. Sevilla, España: Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales

NCTM. (2014). *Principles to actions: Ensuring mathematical success for all*. Reston, VA: Author.

NCTM. (1970). *Sugerencias para resolver problemas*. México. Editorial: Trillas.

Olguín, G. y Popoca, M. (2012). *Paquete para la evaluación extraordinaria del curso de Matemáticas I.* CCH-Plantel Oriente. Distrito Federal, México. Editorial: CCH-UNAM.

Oteyza, E. (2004). *Proyecto Universitario de Enseñanza de las Matemáticas Asistida por Computadora, Introducción al Álgebra*. Recuperado el 20 de Octubre de 2013 de: http://132.248.17.238:8080/ejercicios/ServletJSPEjercicios

Oteyza, E. (2004). *Proyecto Universitario de Enseñanza de las Matemáticas Asistida por Computadora, Resolución de ecuaciones lineales*. Recuperado el 20 de Octubre de 2013 de: http://newton.matem.unam.mx:8080/ejercicios/ServletJSPEjercicios

Oteyza, E. (2006). *Conocimientos fundamentales de Álgebra*. Recuperado el 20 de Octubre de 2013 de: http://www.conocimientosfundamentales.unam.mx/matematicas/algebra/m03/index

Paige, J. y Simon, H. (1966). *Cognitive Processes in Solving Algebra Word Problem*. USA. Editorial: John Wiley & Sons.

Panitz, T. (1995). Aprendizaje Colaborativo Versus Aprendizaje Cooperativo... Recuperado de http://agualuz.blogspot.mx/2005/11/panitz-t-1995-aprendizaje-colaborativo.html

Pansza, M., Juárez, E. y Oviedo, (1986). *Fundamentación de la didáctic*a (Vol. 1). México. Ediciones Gernika.

Planas, N. (2009). *Educación Matemática y Buenas Prácticas*. España: Editorial Graó.

Planas, N. (2011). *Teoría, Critica y Práctica de la Educación Matemátca*. España. Editorial: Graó.

Paralea, M. y Socas, M. (1995). Sistemas de representación en la resolución de problemas algebraicos. *Suma: Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas*, (20), 29-36.

Paralea, M. (1998). *La adquisición del lenguaje algebraico y la detección de errores comunes cometidos en álgebra por alumnos de 12 a 14 años* (Doctoral dissertation, Universidad de La Laguna). Recuperado el 4 de enero de 2014 de: ftp://tesis.bbtk.ull.es/ccppytec/cp90.pdf

Pimienta, J. (2008). *Evaluación de los aprendizajes*. México. Editorial: Pearson Educación.

Polya, G. (1945). *Como plantear y resolver problemas*. México. Editorial: Trillas.

Potápov, M y Alexándrov, P. (1980). Álgebra. URSS. Editorial Mir.

Puig, L. y Cerdán, F. (1988). *Problemas aritméticos escolares*. España. Editorial: Síntesis.

Puig, L. (1998). *Poner un problema en ecuaciones*. Recuperado el 3 de enero de 2015 de: http://www.uv.es/puigl/ppe.pdf

Puig, L. (2006). *La resolución de problemas en la historia de las matemáticas*. En Aymerich, José V. y Macario, Sergio (eds.). *Matemáticas para el siglo XXI*, 39-57. España: Universitar Jaume.

Poblete, A. y Díaz, V. (marzo de 2001). Contextualizando tipos de problemas matemáticos en el aula. *Números Revista de la didáctica de las matemáticas*, (45), 33-41.

Quiroz, M. (2003). *Hacia una didáctica de la investigación*. México: Ediciones Castillo.

Rees, P. y Spark, F. (1981). *Álgebra*. México: Mc Graw Hill.

Resnick, L. y Glaser, R. (1976). Problem solving and intelligence. En L. B. Resnick (Ed.), *The nature of intelligence*. 205–230. Hillsdale, New Jersey. Editorial: Lawrence Erlbaum Associates.

Ricoeur, P. (1995). *Teoría de la interpretación*. México: Siglo XXI.

Rojas, R. (1991). Guía para realizar investigaciones sociales. México: Plaza y Valdes.

Rosado, M. (2003). *Metodología de investigación y evaluación*. México: Trillas.

Ruesga, M. y Sigaterra, J. (2004). Una estrategia específica para la resolución de problemas en función del contenido. *Docencia Universitaria*, (5). 75-93.

Sancho, T. (2014). *Estrategia para el seguimiento y evaluación de los aprendizajes en un MOOC*. Recuperado el 25 de julio de 2015 de: http://greav.ub.edu/der/

Santos, M. (2006). Aportaciones de la investigación en Educación Matemática a la Instrucción. *Revista Números*, (63) 25-40.

Searle, B., Lorton P., y Suppes, P. (1974). Structural variables affecting CAI performance on arithmetic word problems of disadvantaged and deaf students. *Educational Studies in Mathematics*, *5*(1), 371-384.

Simon, H. (1978), Information-processing theory of human problem solving. En: W. K. Estes (Ed.), *Handbook of learning and cognitives processes*, Vol 5: Human information processing. Hillsdale, Lawrence Erlbaum Associates.

Schoenfeld, A. y Herrmann, D. (septiembre de 1982). Problem perception and knowledge structure in expert and novice mathematical problem solvers. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition*, *8*(5), 484-494.

Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical problem solving*. Orlando, FL: Academic press.

Schoenfeld, A. (1995). A brief biography of calculus reform. *UME trends*, *6*(6), 3-5.

Schoenfeld, A. H. (2002). Research methods in (mathematics) education. *Handbook of international research in mathematics education*, 435-487.

Schoenfeld, A. H. (2000). Propósitos y métodos de investigación en educación matemática. *Notices of the AMS*, *47*(6), 1-19.

Skovmose, O. (08 de 09 de 2013). *Hacia una filosofía de la Educación Matemática Crítica*. Colombia. Editorial: Universidad de los Andes.

Tartákov, N. (2009). *Manual de Matemáticas Superiores*. Rusia. Editorial Krasand.

UNAM-CCH (1996). *Plan de Estudios Actualizado*. México: UNAM-CCH.

UNAM-CCH (1996). *Programa de Estudios de Matemáticas Semestres I a IV*. México: UNAM-CCH.

UNAM. (2014). Perfil alumnos de primer ingreso. http://www.estadistica.unam.mx/perfiles/

Usiskin, Z. (1988). Conceptions of school algebra and uses of variables. In A. F. Coxford (Ed.). *The Ideas of Algebra*, K-12. (pp. 8-19). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Uspensky, J. (2000). *Teoría de las ecuaciones*., México. Editorial: Limusa.

Ursini, S. (1990). Generalization processes in elementary algebra: Interpretation and symbolization. En *Proceedings of the Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education with the North American*, 149-156. Vol. II. México. PME 14.

Villalobos, E. (2002). *Didáctica Integrativa y el Proceso de Aprendizaje*. México. Editorial: Trillas.

Vinográdov, I. (1971). *Fundamentos de la teoría de los números*. URSS. Editorial: Mir.

Vergnaud, G. (1982). A classification of cognitive tasks and operations of thought involved in addition and subtraction problems. *Addition and subtraction: A cognitive perspective*, 39-59.

Yoshinori S. (2012). *Mathematical Tasks in Classrooms Around the World. Rotterdam*. The Netherlands. Editorial: Sense Publishers.

ANEXOS

Anexo 1.Revisión de la temática de problemas verbales de ecuaciones lineales en los materiales en línea para bachillerato publicados por la UNAM y en las guías de exámenes extraordinarios del CCH

En este Anexo se presenta la revisión de la temática de problemas verbales de ecuaciones lineales en los materiales en línea publicados por la UNAM hasta el año 2013 y en las guías para la preparación de exámenes extraordinarios de los cinco planteles que integran el CCH.

A1.1 Materiales en línea

El *Proyecto Universitario de Enseñanza de las Matemáticas Asistida por Computadora* (Oteyza y Lam, 2004) es un material multimedia interactivo en el que el proceso de traducción del enunciado de un PVEL se aborda parcialmente. En el capítulo denominado *Introducción al Álgebra*, se les presentan a los estudiantes una serie ejercicios [opción múltiple] que contienen un conjunto de enunciados escritos en lenguaje natural. El sistema proporciona cuatro expresiones algebraicas como opciones de respuesta de las que el estudiante debe seleccionar la que considere correcta. Si la respuesta es la adecuada el sistema lo indica; en caso de no ser así el sistema no proporciona la respuesta correcta.

En este material incluido en el *Proyecto Universitario de Enseñanza de las Matemáticas Asistida por Computadora* se abordan estrategias para la traducción de los enunciados que se presentan a su correspondiente expresión algebraica. Los enunciados contienen a los objetos matemáticos de variable como incógnita, igualdad y ecuación, pero no se les explica a los estudiantes que sección del enunciado que se presenta se refiere a cada uno de estos objetos. Tampoco se hace referencia lo relacionado con la definición de cada objeto.

El planteamiento y solución de PVEL no se aborda en el *Proyecto Universitario de Enseñanza de las Matemáticas Asistida por Computadora*, únicamente se presentan en el capítulo de *Resolución de ecuaciones* una serie de ejercicios de opción múltiple que contienen casos particulares deecuaciones lineales de primer grado en una variable.

Al igual que en primer capítulo, el estudiante debe seleccionar la respuesta que considere correcta en lo que respecta al valor de la incógnita que satisfaga la ecuación propuesta por el sistema.

En el portal que contiene el libro electrónico de *Conocimientos fundamentales de Álgebra* (Oteyza y Lam, 2006) en el módulo III de Resolución de ecuaciones de primer grado, no se da acceso a los usuarios para la consulta de este material, por lo tanto no fue posible revisar la temática de traducción de PVEL.

El portal interactivo de *Math-media* (CUAED-UNAM, 2011) no contiene la temática de PVEL.

En el portal de *UNAM Media Campus* en la sección de Ecuaciones de primer grado (Becerra, 2010), se presenta un video donde se explica el concepto de ecuación como igualdad entre expresiones: numéricas, algebraicas como una fórmula, algebraicas como una ecuación e identidades. Se aborda la distinción entre cantidad desconocida y conocida. Las ecuaciones de primer grado en una variable se clasifican de acuerdo a la naturaleza de las soluciones (raíces de la ecuación) en: enteras, literales, fraccionarias y con fracciones algebraicas. Se explica el proceso de comprobación de la ecuación, considerando el uso del inverso aditivo y multiplicativo.

En lo referente a los PVEL en el portal de la *UNAM Media Campus*, se les denomina problemas de aplicación y los dividen de acuerdo a los contextos que aborda en: números, edades, dinero, geométricos y tiempos de llenado de tanques.

Estos problemas incluyen ecuaciones en las que se trabajan con números enteros y fracciones. En el planteamiento de la ecuación que haga factible la solución de los PVEL se destaca la designación de la incógnita, no se profundiza en las posibilidades en su selección en función de las diferentes cantidades conocidas que proporciona el enunciado del problema.

Se presenta en el portal de la *UNAM Media Campus* un material interactivo en que se explica el procedimiento de solución de diferentes casos de ecuaciones lineales de primer grado por el método de transposición de términos.

En el portal del *Proyecto Newton* (Abreu y Argueta, 2008) se presenta el procedimiento de resolución de ecuaciones por transposición de términos. Los tipos de ecuaciones abordadas son:

- $ax = b$ con a y b enteros y racionales.
- $ax + b = c$ con a, b y c enteros y racionales.
- $a(x + b) = c(x + d)$ con a, b, c y d enteros y racionales.
- $a(x + b)^2 = (x + c)(x + d)$ con a, b, c y d enteros y racionales.
- $(x + a)(x + b) = (x + c)(x + d)$ con a, b, c y d enteros.

En lo referente al planteamiento de los PVEL en el *Proyecto Newton* se presenta un problema de la longitud de una cuerda en la que se pregunta la cantidad desconocida y las cantidades conocidas asociadas. Se destaca la designación de la incógnita, pero no su selección de entre las dos posibilidades. Se resuelve la ecuación resultante por transposición de términos. Se propone un ejercicio interactivo en el que proporciona el enunciado de un PVEL de la suma de las edades de tres personas. El sistema proporciona cuatro posibles ecuaciones (opción múltiple) para que el alumno seleccione la que considere correcta de acuerdo a las condiciones que plantea el enunciado.

En el *portal Académico del CCH* (UNAM, 2013) no se aborda la temática del planteamiento y traducción de PVEL a la forma simbólico-algebraica que haga factible su solución. En relación a la resolución de ecuaciones lineales en la *Unidad III de Matemáticas I* se presentan una serie de ejemplos y ejercicios interactivos de ecuaciones lineales correspondientes a los casos particulares que propone el Programa de Estudios (1996).

A1.2 Guía para exámenes extraordinarios del CCH

A1.2.1 Guía para exámenes extraordinarios del CCH Vallejo

1. Operación de ecuaciones lineales

   El material (Bautista y Flores, 2013) contiene una sección de ejercicios de resolución de ecuaciones lineales que incluyen la solución numérica a la que tiene que llegar el alumno.

Tabla 1A2. Tipos de ecuaciones lineales incluidas en la guía del CCH Vallejo

Tipo de ecuación	Número
$ax=b$	1
$ax+b=c$	No incluido
$ax+bx+c=d$	No incluido
$a(x+b)=c(x+d)$	10
$\frac{ax}{b}=\frac{cx}{d}$	4
$\frac{ax}{b}=\frac{c}{d}$	5
$(x+b)^2=(x+c)(x+d)$	No incluido
$\frac{x+a}{x+b}=\frac{x+c}{x+d}$	2
Total de ejercicios	22

2. Problemas de traducción de lenguaje algebraico. Presenta una sección de 15 ejercicios de traducción de frases del lenguaje común al matemático mediante una expresión algebraica.

2.1 Metodología. La metodología que sugiere la guía para la resolución del problema consta de los siguientes puntos:

a. Transformar el problema del lenguaje común a la expresión algebraica.
b. Leer el problema cuidadosamente.
c. Identificar cantidades conocidas y desconocidas que intervengan en el problema.
d. Representar mediante una letra la cantidad desconocida y expresar las demás en términos de esta.
e. Escribir una ecuación en la que se emplee esta información.
f. Resolver la ecuación.
g. Comprobar la solución.

2.2 Representación. El material emplea el modelo de la balanza para representar el proceso de solución de la ecuación lineal asociada a un problema, se trata de un diagrama unidimiensional en el que se representan ambos lados de la ecuación separados por un triángulo.

2.3 Concepto de variable. No incluye explicación respecto al concepto de variable.

2.4 Concepto de ecuación. Define una ecuación lineal como una igualdad entre dos expresiones algebraicas. En la comprobación del resultado numérico de la ecuación, implícitamente se esboza que es una condición que debe satisfacer un número buscado. No se establece como un caso particular de una función lineal.

2.5 Estructura de los problemas. La redacción de los enunciados de los problemas es clara, sencilla y concisa, la pregunta está claramente formulada, por incisos. El primero, corresponde a la traducción del enunciado del problema en la expresión algebraica que conduzca a su solución. El segundo inciso, corresponde al valor numérico de la solución de la ecuación.

Tabla 2A2. *Tipos de ecuaciones lineales incluidas en la guía del CCH Vallejo*

Temática del problema	Números Enteros	Números Decimales	Números Fracciones
Edades	2	No incluido	No incluido
Números	2	No incluido	No incluido
Peso	No incluido	1	No incluido
Porcentajes	2	No incluido	No incluido
Mezclas	No incluido	No incluido	No incluido
Superficies	3	No incluido	No incluido
Longitudes	No incluido	2	No incluido
Ángulos	1	No incluido	No incluido
Costos	No incluido	No incluido	No incluido
Dinero	1	1	No incluido
Tiempo	No incluido	No incluido	No incluido
Velocidad	No incluido	No incluido	No incluido
Total de problemas	15		

3. Autoevaluación. La sección se encuentra estructurada en tres partes: la primera, corresponde a la definición de ecuación lineal; en la segunda, se solicita al alumno la resolución de tres ecuaciones lineales (la primera de números enteros y paréntesis, las otra dos con fracciones); la última sección incluye la resolución de dos problemas de ecuaciones lineales (superficies y dinero). Las instrucciones para el alumno son claras y precisas.

A1.2.2 Guía para exámenes extraordinarios del CCH Azcapotzalco

1. Operación de ecuaciones lineales. El material (Mendoza y Moreno, 2013) contiene ejemplos de ecuaciones lineales resueltas y una sección de ejercicios propuestos para que el alumno encuentre la solución numérica. Todos los ejercicios incluyen la respuesta del valor numérico al que el estudiante tiene que llegar.

Tabla 3A2. Tipos de ecuaciones lineales incluidas en la guía del CCH Azcapotzalco

Tipo de ecuación	Número
$ax=b$	2
$ax+b=c$	5
$ax+bx+c=d$	1
$a(x+b)=c(x+d)$	6
$\frac{ax}{b}=\frac{cx}{d}$	3
$\frac{ax}{b}=\frac{c}{d}$	5
$(x+b)^2=(x+c)(x+d)$	3
$\frac{x+a}{x+b}=\frac{x+c}{x+d}$	10
Total de ejercicios	35

2. Problemas de ecuaciones lineales

   2.1 Metodología. Parte de la explicación de la solución a tres problemas: uno de velocidades, uno de superficie y uno de peso.

   En todos los casos, establecen la relación de la representación tabular de una función lineal, haciendo referencia al valor que satisface la condición inicial del problema.

Expresan la relación de las cantidades de ambos miembros de la ecuación, hasta conformar la ecuación. Así, la metodología propuesta para la solución del problema consta de:

a. Establecer la relación entre las cantidades conocidas del problema con la cantidad desconocida.
b. Plantear la ecuación inicial.
c. Resolver la ecuación.
d. Comprobar la solución.

2.2 Representación. El material emplea expresiones algebraicas para encontrar la solución numérica de las ecuaciones propuestas y lo relaciona con el modelo lineal, para interpretar la solución en el contexto de su gráfica.

2.3 Concepto de variable. No incluye explicación respecto al concepto de variable.

2.4 Concepto de ecuación. Define una ecuación como igualdad al utilizar el modelo de la balanza, únicamente para expresar el concepto, no para la resolución de la ecuación.

2.5 Estructura de los problemas. La redacción de los enunciados de los problemas es concreta y clara, la pregunta está claramente formulada para todos los casos, estableciendo la cantidad desconocida del problema.

No incluyen incisos.

Tabla 4A2. Tipos de ecuaciones lineales incluidas en la guía del CCH Azcapotzalco

Temática del problema	Números Enteros	Números Decimales	Números Fracciones
Edades	2	1	No incluido
Números	3	No incluido	No incluido
Peso	No incluido	1	No incluido
Porcentajes	1	3	No incluido
Mezclas	No incluido	No incluido	No incluido
Superficies	1	No incluido	No incluido
Longitudes	1	No incluido	No incluido
Ángulos	1	No incluido	No incluido
Costos	No incluido	2	No incluido
Dinero	No incluido	1	No incluido
Tiempo	No incluido	1	No incluido
Velocidad	1	3	No incluido
Otros	1	No incluido	No incluido
Total de problemas	23		

3. Autoevaluación. El examen de autoevaluación incluido al final del material, contempla tres secciones: en primera instancia, a partir de un problema del costo de un televisor se pide la ecuación correspondiente.

   En el segundo punto, se plantea un problema de proporción de hombres y mujeres en un salón de clases, en el que además de proponer la ecuación, el alumno debe resolver el problema. En el tercer apartado, se propone un problema de velocidad en el que el estudiante debe proceder igualmente que en el inciso anterior. Posteriormente, se plantean tres ecuaciones lineales para la resolución.

   En la última sección de la autoevaluación, a partir de dos ecuaciones el alumno deberá comprobar su solución mediante el modelo gráfico (asociado a una función lineal).

A1.2.3 Guía para exámenes extraordinarios del CCH Sur

1. Operación de ecuaciones lineales. La guía (Becerril y Castro, 2013) expone que para solucionar una ecuación lineal se requiere una simplificación, empelando las propiedades de los números reales.

   Ejemplifica la solución de tres ecuaciones lineales. No comprueba el resultado.

Tabla 5A2. Tipos de ecuaciones lineales incluidas en la guía del CCH Sur

Tipo de ecuación	Número
$ax=b$	3
$ax+b=c$	4
$ax+bx+c=d$	8
$a(x+b)=c(x+d)$	16
$\frac{ax}{b}=\frac{cx}{d}$	8
$\frac{ax}{b}=\frac{c}{d}$	No incluido
$(x+b)^2=(x+c)(x+d)$	No incluido
$\frac{x+a}{x+b}=\frac{x+c}{x+d}$	No incluido
Total de ejercicios	39

2. Problemas de traducción de lenguaje algebraico. Explica que una proposición es una expresión que se puede afirmar o negar y se refiere a los datos de un problema como la información que se conoce en el contexto del enunciado, en el que se establecen sus condiciones y valores numéricos.

   Adicionalmente, plantea a manera de ejercicio la relación entre variables por medio de una igualdad.

3. Problemas de ecuaciones lineales

3.1 Metodología. La metodología que sugiere la guía para la resolución del problema consta de los siguientes puntos:

a. Entender en que consiste el problema, elaborar dibujos o diagramas que representen la situación descrita en el enunciado.
b. Diseñar un plan para la resolución.
c. Aplicar una estrategia de resolución.
d. Encontrar la respuesta.
e. Comprobar la respuesta.

En la ejemplificación de los problemas, la explicación inicia a partir de una serie de preguntas que hacen referencia a las cantidades conocidas y al final pregunta respecto a la cantidad desconocida, que utiliza para asignarle una literal, especificando que se trata de la incógnita. Luego, relacionan esta incógnita, con cada una de las cantidades conocidas para expresar cada uno de los términos que integran la ecuación lineal.

3.2 Representación. La guía emplea representaciones algébricas para las ecuaciones. En dos problemas plantea un dibujo para ilustrar el enunciado. En la explicación de la construcción de la ecuación para los problemas ejemplificados, emplean líneas para identificar cada uno de los términos que conforman la ecuación lineal.

3.3 Concepto de variable. Expresa el concepto de incógnita, como la letra que se usa en una expresión matemática para denotar la cantidad desconocida cuyo valor se trata de obtener.

3.4 Concepto de ecuación. La definición de ecuación lineal no es clara, al expresarla como la relación de igualdad de primer grado con una variable.

En otra sección, define la ecuación como la relación de igualdad donde al menos hay una incógnita.

3.5 Estructura de los problemas. La redacción del enunciado de los problemas es clara y concreta, la pregunta de cada problema está claramente formulada.

Tabla 6A2. Tipos de ecuaciones lineales incluidas en la guía del CCH Sur

Temática del problema	Números Enteros	Números Decimales	Números Fracciones
Edades	No incluido	No incluido	No incluido
Números	2	No incluido	No incluido
Peso	No incluido	No incluido	No incluido
Porcentajes	No incluido	No incluido	No incluido
Mezclas	No incluido	No incluido	No incluido
Superficies	5	No incluido	No incluido
Longitudes	No incluido	No incluido	No incluido
Ángulos	No incluido	No incluido	No incluido
Costos	1	No incluido	No incluido
Dinero		No incluido	No incluido
Tiempo		No incluido	No incluido
Velocidad	2	No incluido	No incluido
Otros	3	No incluido	No incluido
Total de problemas	13		

4. Autoevaluación. No incluye sección de autoevaluación.

A1.2.4 Guía para exámenes extraordinarios del CCH Oriente

1. Operación de ecuaciones lineales. La guía (Olguín y Popoca, 2012) expone en forma perfectamente clara, la explicación de cada uno de los pasos para la resolución de todos los tipos de ecuaciones lineales, incluyendo la solución numérica, su comprobación e interpretación.

Tabla 7A2. Tipos de ecuaciones lineales incluidas en la guía del CCH Oriente

Tipo de ecuación	Número
$ax=b$	1
$ax+b=c$	2
$ax+bx+c=d$	2
$a(x+b)=c(x+d)$	2
$\frac{ax}{b}=\frac{cx}{d}$	1
$\frac{ax}{b}=\frac{c}{d}$	1
$(x+b)^2=(x+c)(x+d)$	1
$\frac{x+a}{x+b}=\frac{x+c}{x+d}$	1
Total de ejercicios	9

Cuenta con múltiples ejercicios en la sección del banco de reactivos para exámenes extraordinarios. Todos los ejercicios tienen respuestas.

2. Problemas de traducción de lenguaje algebraico. El material está organizado de acuerdo a los aprendizajes planteados en el Programa de Estudios de Matemáticas I a IV.

   Para el primer aprendizaje, explica dos ejemplos de problemas en la que conduce al alumno a entender la expresión verbal o escrita de un problema y expresa la relación entre datos e incógnita por medio de la ecuación lineal correspondiente. Partiendo de preguntar ¿Qué hacer cuando pide resolver un problema?, explican que es necesario organizar los datos, e interpretar sus relaciones existentes, posteriormente, realizar las operaciones algebraicas para solucionar el problema.

   Explica que una proposición, es una expresión que se puede afirmar o negar y se refiere a los datos del enunciado de un problema, como la información que se conoce, la que establece sus condiciones y valores numéricos.

Adicionalmente, plantea a manera de ejercicio, la relación de variables por medio de una igualdad.

2.1 Metodología. La metodología que sugiere la guía para la resolución del problema consta del empleo de diversas estrategias, básicamente la estructura general que siguen para resolver un problema es:

a. Leer el enunciado del problema.
b. Ordenar los datos.
c. Establecer la cantidad desconocida.
d. Establecer la relación de la cantidad desconocida en relación a las cantidades conocidas, mediante un arreglo tabular.
e. Expresar estas relaciones en lenguaje común.
f. Expresar estas relaciones en lenguaje algebraico.
g. Escribir la ecuación.
h. Resolver la ecuación.
i. Obtener el resultado.
j. Contextualizar el resultado en términos del enunciado del problema.
k. Comprobar el resultado.

2.2 Representación. Emplea diversas formas de representación, diagramas unidimensionales, dibujos, representaciones tabulares temporales.

2.3 Concepto de variable. Expresa el concepto de incógnita, como la letra que se usa en una expresión matemática, para denotar la cantidad desconocida cuyo valor se trata de obtener.

2.4 Concepto de ecuación. Definen la ecuación lineal en una incógnita, como una expresión de la forma: $ax + b = 0$ *con* $a \neq 0$. Además, analizan las formas de una ecuación, como:

a. Un caso especial de una igualdad entre expresiones algebraicas, cuando se tiene la igualdad entre cualquier expresión algebraica lineal, con las operaciones que permiten transformar las ecuaciones, que se puede expresar de la forma: $ax + b = 0$ con $a \neq 0$.
b. Una condición que debe satisfacer un número buscado, al explicar que existen ecuaciones que no son lineales, pero se pueden reducir a una ecuación lineal.
c. Un caso particular de una función lineal.

2.5 Estructura de los problemas. La redacción de los enunciados de todos los problemas, es excelentemente concisa y concreta, la pregunta está claramente formulada, para todos los problemas. Emplean diversas estructuras y estrategias para dar solución a los problemas, combinando diferentes tipos de representación.

Tabla 8A2. Tipos de ecuaciones lineales incluidas en la guía del CCH Oriente

Temática del problema	Números Enteros	Números Decimales	Números Fracciones
Edades	2	No incluido	No incluido
Números	6	No incluido	1
Peso	No incluido	No incluido	No incluido
Porcentajes	No incluido	No incluido	No incluido
Mezclas	1	No incluido	No incluido
Superficies	2	No incluido	1
Longitudes	1	No incluido	2
Ángulos	1	No incluido	No incluido
Costos	No incluido	No incluido	No incluido
Dinero	3	No incluido	No incluido
Tiempo	No incluido	No incluido	1
Velocidad	2	No incluido	1
Otros	No incluido	No incluido	9
Total de problemas	33		

3. Autoevaluación. Las instrucciones para el alumno son claras y precisas, especifica el tiempo aproximado en la que el alumno la debe resolver. En la primera sección, plantean dos ecuaciones lineales con paréntesis y fracciones.

En la sección de los problemas, se proponen dos que relacionan cantidades y proporciones. Adicionalmente, se plantea en un ejercicio el despeje de una fórmula. En esta sección de autoevaluación, se incluye una escala de calificación en la que especifican:

- Si el alumno resuelve correctamente bien 3 o menos, tiene que volver a estudiar los contenidos de la unidad, y hacer todos los ejercicios propuestos.
- Si contesta acertadamente 4 ejercicios, habrá aprendido sólo los conocimientos básicos.
- Si resuelve 5 o 6 habrá, aprendido el total de los contenidos planteados en la unidad.

A1.2.5 Guía para exámenes extraordinarios del CCH Naucalpan vespertino

1. Operación de ecuaciones lineales. El material ofrece un método algorítmico para la resolución de ecuaciones lineales que incluye la reducción a ecuaciones equivalentes. En la guía solamente se incluyen tres ejemplos resueltos. Los ejercicios propuestos no contienen la solución a la que el alumno tiene que llegar.

Tabla 9A2. Tipos de ecuaciones lineales incluidas en la guía del CCH Naucalpan vespertino

Tipo de ecuación	Número
$ax=b$	0
$ax+b=c$	9
$ax+bx+c=d$	6
$a(x+b)=c(x+d)$	12
$\frac{ax}{b}=\frac{cx}{d}$	0
$\frac{ax}{b}=\frac{c}{d}$	6
$(x+b)^2=(x+c)(x+d)$	2
$\frac{x+a}{x+b}=\frac{x+c}{x+d}$	5
Total de ejercicios	40

2. Problemas de ecuaciones lineales

2.1 Metodología. La metodología propuesta para la solución del problema consta de:

b. Leer el problema con detenimiento para definir lo que se está buscando.
c. Asignar variables a las cantidades que se desea encontrar, se propone el uso de la literales x y n, para tal fin.
d. Usar los datos para establecer la ecuación involucrando a las variables desconocidas.
e. Resolver la ecuación.
f. Comprobar la respuesta.

2.2 Representación. El material emplea únicamente expresiones algebraicas para encontrar la solución numérica de las ecuaciones propuestas.

2.3 Concepto de variable. No incluye explicación respecto al concepto de variable.

2.4 Concepto de ecuación. Define una ecuación como igualdad entre dos expresiones, resaltando el uso del signo de igualdad entre las dos (separando). Establece que las ecuaciones que son ciertas se denominan identidades y las que incluyen valores aceptados para algunas cantidades (variables) y falsa para otros, las denominan ecuaciones condicionales. Además, proponen ejemplos para la explicación de estos conceptos.

2.5 Estructura de los problemas. La redacción de los enunciados de los problemas es generalmente clara y precisa. Sin embargo, ninguno de los problemas propuestos incluye la solución numérica a la que el alumno tiene que llegar.

También, el material incluye ejercicios de opción múltiple de despeje de fórmulas y una sección de solución de problemas de ecuaciones a partir de una tabla. Ninguno de los ejercicios incluye explicación del procedimiento para la resolución, ni el resultado al que se espera que el estudiante llegué.

Tabla 10A2. Tipos de ecuaciones lineales incluidas en la guía del CCH Naucalpan vespertino

Temática del problema	Números Enteros	Números Decimales	Números Fracciones
Edades	5	No incluido	No incluido
Números	5	1	No incluido
Peso	No incluido	1	No incluido
Porcentajes	2	No incluido	No incluido
Mezclas	No incluido	No incluido	No incluido
Superficies	1	1	1
Longitudes	2	No incluido	No incluido
Ángulos	1	No incluido	No incluido
Costos	No incluido	2	No incluido
Dinero	2	2	No incluido
Tiempo	1	2	No incluido
Velocidad	1	No incluido	1
Otros	1	1	1
Total de problemas	34		

3. Autoevaluación. El examen en la primera parte, propone la resolución de cuatro ecuaciones lineales (con números enteros y decimales que usan paréntesis) y un ejercicio del despeje de una fórmula.

   En la segunda sección se proponen cinco problemas para ser resueltos por el estudiante. Las temáticas de los problemas son: ángulos, velocidad, edades y tiempo. No incluyen soluciones.

A1.2.6 Guía para exámenes extraordinarios del CCH Naucalpan matutino

1. Operación de ecuaciones lineales. La guía (Mendoza y Moreno, 2013) solamente explica dos ejemplos de ecuaciones lineales con fracciones. Los ejercicios propuestos no contienen la solución a la que el alumno tiene que llegar.

Tabla 11A2. Tipos de ecuaciones lineales incluidas en la guía del CCH Naucalpan matutino

Tipo de ecuación	Número
$ax=b$	1
$ax+b=c$	1
$ax+bx+c=d$	1
$a(x+b)=c(x+d)$	2
$\frac{ax}{b}=\frac{cx}{d}$	1
$\frac{ax}{b}=\frac{c}{d}$	2
$(x+b)^2=(x+c)(x+d)$	1
$\frac{x+a}{x+b}=\frac{x+c}{x+d}$	2
Total de ejercicios	11

2. Problemas de ecuaciones lineales

   2.1 Metodología. No incluye metodología.

   2.2 Representación. El material emplea únicamente expresiones algebraicas para encontrar la solución numérica de las ecuaciones propuestas.

   2.3 Concepto de variable. No incluye explicación respecto al concepto de variable.

   2.4 Concepto de ecuación. No incluye el concepto de ecuación.

2.5 Estructura de los problemas. La redacción de los enunciados de los problemas es concreta. Sin embargo, ninguno de los problemas propuestos incluye la solución numérica a la que el alumno tiene que llegar.

Tabla 12A2. Tipos de ecuaciones lineales incluidas en la guía del CCH Naucalpan matutino

Temática del problemas	Números Enteros	Números Decimales	Números Fracciones
Edades	1	No incluido	No incluido
Números	3	No incluido	No incluido
Peso	1	No incluido	No incluido
Porcentajes	No incluido	No incluido	No incluido
Mezclas	No incluido	No incluido	No incluido
Superficies	4	No incluido	No incluido
Longitudes	No incluido	No incluido	No incluido
Ángulos	No incluido	No incluido	No incluido
Costos	No incluido	No incluido	No incluido
Dinero	No incluido	No incluido	No incluido
Tiempo	No incluido	No incluido	No incluido
Velocidad	No incluido	No incluido	No incluido
Otros	No incluido	No incluido	No incluido
Total de problemas	9		

3. Autoevaluación. No incluyen autoevalución.

Anexo 2. Instrumento del estudio exploratorio

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
MAESTRÍA EN DOCENCIA PARA LA EDUCACIÓN
MEDIA SUPERIOR (MATEMÁTICAS)
CCH NAUCALPAN

EVALUACIÓN EXPLORATORIA

Nombre: ____ Número de cuenta: ___________

I. Supongamos que se hace referencia a algún número. Expresaremos este número por $\square$.

Instrucciones: Escribe la expresión matemática para cada una de las siguientes expresiones verbales:

Expresión verbal	Expresión matemática
a. Cinco más que un número:	
b. Tres menos que el número:	
c. Cuatro veces el número:	
d. El número dividido entre seis:	
e. Dos veces la suma del número y cinco:	
f. Diez veces tres menos que el número:	
g. El cociente obtenido cuando cuatro veces el número se divide entre siete:	

II. Supongamos que se hace referencia a la edad de Eduardo. Si representamos la edad de Eduardo en el presente por *n* años.

Instrucciones: Escribe la expresión matemática que le corresponda a cada una de las siguientes frases en términos de la edad de Eduardo.

Expresión verbal	Expresión matemática
a. La edad de Eduardo dentro de 3 años:	
b. La edad de Juan si su edad es la mitad de la edad de Eduardo:	
c. La edad de Juan dentro de 5 años:	
d. La edad de Juan dentro de 5 años, sustraída de la edad de Eduardo dentro de 3 años:	
e. La edad de Juan dentro de 8 años:	
f. La edad de Eduardo dentro de 6 años, sumada a la edad de Juan dentro de 8 años:	
g. Tres veces la edad de Eduardo dentro de 7 años:	

III. Instrucciones:

a. Resuelve los siguientes problemas de ecuaciones lineales, anota con bolígrafo todos los cálculos y pasos necesarios para su solución.
b. Si te equivocas, no taches el error solamente cancélalo con una línea diagonal.
c. Si es necesario puedes hacer un dibujo para resolver tu problema.
d. No olvides comprobar tu resultado.

Problema 1.
La suma de dos números enteros consecutivos es 51. Encontrar los dos números.

Problema 2.
El número de hombres en un club es 10 más que el número de mujeres. Si hay 30 hombres ¿Cuántas personas hay entre hombre y mujeres en el club?

Problema 3.
Una niña se ha comido 120 uvas en 5 días, de tal forma que cada día comía 5 uvas más que el día anterior. ¿Cuántas uvas se comió el primer día?

Anexo 3. Características generales de las representaciones no discursivas

Representación geométrica

La representación geométrica es un tipo de representación lineal sencilla, en la que se emplea un segmento de recta para denotar la cantidad desconocida y otros para denotar las cantidades conocidas. Los segmentos de recta se unen para formar un solo segmento que represente la relación de la incógnita con las cantidades conocidas descritas en el texto del enunciado del problema dado en lenguaje común. También emplea el símbolo de igualdad para indicar la relación de equivalencia entre los segmentos que representan las relaciones internas anteriormente descritas. En este tipo de representación las expresiones algebraicas designadas para denotar a: la incógnita, las cantidades conocidas y los símbolos de los operadores con las que forman tanto las relaciones internas como la relación de equivalencia, se escriben en la parte superior de cada segmento de recta que les corresponda. En la Figura A3.1 se muestra el gráfico de la representación geométrica para la ecuación: $x + a = b$.

Figura A3.1. Representación geométrica para la ecuación $x + a = b$.

Diagrama relacional

El diagrama se conforma de nodos que se representan por medio de círculos y líneas que los relacionan. Este tipo de diagrama es jerárquico, porque en el nodo superior se escribe la incógnita, del que parten las líneas que se dirigen hacia otros nodos que contienen las relaciones extraídas del enunciado del problema. Las operaciones que conectan a la incógnita con cada relación se representan con el signo de cada operación escrito sobre la línea que conecta los nodos.

El símbolo de la igualdad se escribe al finalizar el diagrama, para conectarlo con la cantidad o relaciones a las que se iguala. En la Figura A3.2 se presenta el diagrama relacional para la ecuación: *ax* + *b* = *c*.

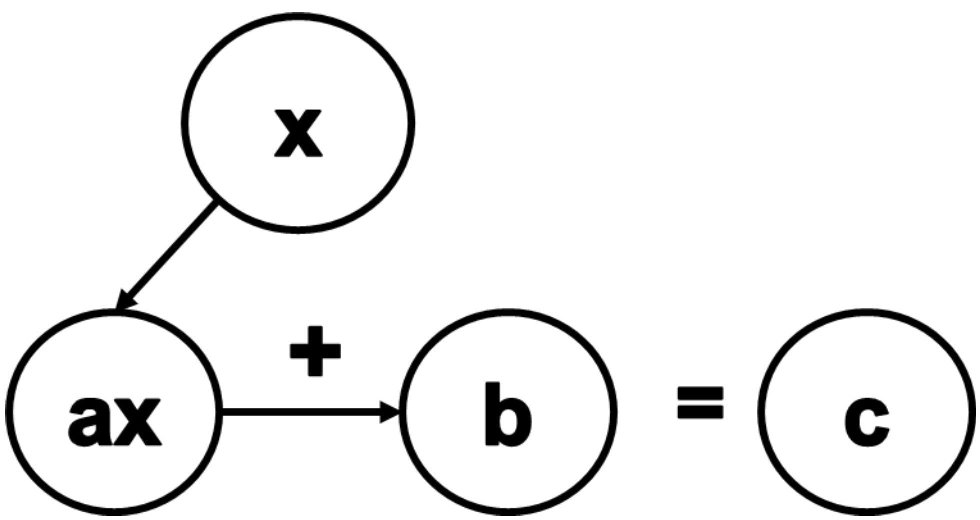


Figura A3.2. Diagrama relacional para la ecuación *ax* + *b* = *c*.

Representación matricial

Este tipo de representación es una tabla, en la que las etiquetas del encabezado de cada una de las columnas de la tabla corresponden a los diferentes estados descritos en el enunciado del problema dado en lenguaje natural. En la primera celda de la columna 2 generalmente se ubica la expresión algebraica para la incógnita designada, en la segunda celda la expresión simbólica para la relación interna entre la incógnita y la cantidad conocida para el estado inicial. En primera celda de la columna 3 se escribe la expresión matemática de la relación de la incógnita con la cantidad conocida en el estado posterior y en la segunda celda de la columna 3 se escribe la forma simbólico-algebraica para la relación interna de la incógnita y con otra cantidad conocida descrita en el enunciado del problema.

Finalmente, se escribe la relación de equivalencia entre las relaciones internas escritas en cada celda en una forma algebraica que contenga el símbolo de igualdad. Las columnas de la tabla se pueden ampliar dependiendo del número de estados y relaciones internas que describa el texto del problema formulado en lenguaje común. En la Figura A3.3 se ejemplifica la tabla de la representación matricial para la ecuación: $x + b = c\,(ax + b)$.

	Estado inicial	Estado final
Sujeto 1	x	x + b
Sujeto 2	ax	ax+ b

$$x + b = c\,(ax + b)$$

Figura A3.2. Representación matricial para la ecuación $x + b = c\,(ax + b)$.

Anexo 4. Cuestionario de las características de los estudiantes

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
COLEGIO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES
PLANTEL NAUCALPAN
MATEMÁTICAS I
CUESTIONARIO DE CARACTERÍSTICAS GENERALES T.2.1

Nombre: ____ Grupo: ________

I. INSTRUCCIONES: Selecciona y subraya la opción del inciso para indicar su respuesta a cada pregunta. Por favor seleccione solamente una respuesta para cada pregunta.

A. Características Generales

1. Edad:

a. 14 años b. 15 años c. 16 años d. 17 años e. 18 años f. 19 años

2. Sexo:

a. Femenino b. Masculino

3. Delegación o Municipio en la que vives:

a. Álvaro Obregón
b. Azcapotzalco
c. Benito Juárez
d. Coyoacán
e. Cuajimalpa
f. Cuauhtémoc
g. Gustavo A. Madero
h. Iztacalco
i. Iztapalapa
j. Magdalena Contreras
k. Miguel Hidalgo
l. Milpa Alta
m. Tláhuac
n. Tlalpan
o. Venustiano Carranza
p. Xochimilco
q. Nezahualcóyotl, Estado de México
r. Cuautitlán Izcalli, Estado de México

s. Tultitlán de Mariano Escobedo, Estado de México
t. Ecatepec de Morelos, Estado de México
u. Naucalpan de Juárez, Estado de México
v. Tlalnepantla de Baz, Estado de México
w. Villa Nicolás Romero, Estado de México
x. Huixquilucán, Estado de México
y. Otro (especifica el nombre): ______________________________

B. Habilidades Sociales

4. En la escuela me gusta:

a. Estar con mis amigos b. Estar solo

5. Me gusta trabajar:

a. En equipo b. Individualmente

C. Condiciones Socioeconómicas

6. Tu Papá estudio hasta:

a. Primaria b. Secundaria c. Bachillerato d. Licenciatura e. Posgrado

7. ¿Tu Papá en qué trabaja?

a. Empleado b. Por su cuenta c. Desempleado

8. Tu Mamá estudio hasta:

a. Primaria b. Secundaria c. Bachillerato d. Licenciatura e. Posgrado

9. ¿Tu Mamá en qué trabaja?

a. Empleada b. Por su cuenta c. Ama de Casa

10. ¿Cuántas habitaciones hay en tu casa?

a. 1 a 2 b. 3 a 5 c. Más de 5

11. ¿Cuántos baños hay en tu casa?

a. 1 b. 2 c. Más de 2

D. Relaciones Familiares

12. ¿Con quién vives?

a. Papá y Mamá b. Papá c. Mamá d. Solo e. Otros familiares

13. ¿Con quién platicas más frecuentemente?

a. Papá y Mamá b. Papá c. Mamá d. Hermanos e. Amigos

14. ¿Cuántos hermanos tienes?

a. 1 a 2 b. 3 a 5 c. Más de 5

E. Uso de la TIC´s

15. ¿Qué sabes usar de la Computadora?

a. Word b. Excel c. Power Point d. Internet e. Todas

16. ¿En tu casa tienes computadora?

a. Si b. No

17. ¿En tu casa hay Internet?

a. Si b. No

18. ¿Cuántas veces a la semana usas internet?

a. 1 b. 2 c. 3 o más

19. ¿Tienes teléfono celular?

a. Si b. No

Escribe tu cuenta de correo electrónico:
____

Escribe un teléfono de contacto:
____

Anexo 5. Prueba diagnóstica

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
COLEGIO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES
PLANTEL NAUCALPAN
MATEMÁTICAS I   T.1.1

PRUEBA DIAGNÓSTICA

Nombre: ____ Grupo: _________

INSTRUCCIONES: Resuelve los siguientes problemas, anotando en hojas blancas anexas todos los cálculos y operaciones matemáticas necesarias para llegar a la solución.

Problema 1. Un número aumentado por una tercera parte del mismo es igual a 20. ¿Cuál es el número?

Problema 2. Un número es 8 más que otro número. Si la suma de ambos números es igual a 40. ¿Cuáles son los números?

Problema 3. La suma de tres números enteros consecutivos es 276. ¿Cuáles son estos números?

Problema 4. Si a un número se le resta su tercera parte y se suma su quinta parte se obtiene como resultado 13. ¿Cuál es el número?

INSTRUCCIONES: Lee con atención las siguientes preguntas. Responde cada pregunta en el espacio en blanco que se encuentra a continuación de cada cuestionamiento.

1. ¿Qué es una variable?

2. ¿Qué es una igualdad?

3. ¿Qué es una ecuación?

Anexo 6. Listado de los PVEL

Este Anexo contiene los problemas verbales de ecuaciones lineales empleados en las sesiones de trabajo 2 a 8 dedicadas a la instrucción.

T.14.2 PVEL de números enteros

No.	Enunciado	Ecuación
1.	Un número más diez es igual a treinta. ¿Cuál es el número?	$x + 10 = 30$
2.	Un número menos diez es igual a treinta. ¿Cuál es el número?	$x - 10 = 30$
3.	Un número más dos veces el número es igual a treinta. ¿Cuál es el número?	$x + 2x = 30$
4.	Un número menos cuatro veces el número es igual a treinta. ¿Cuál es el número?	$x - 4x = 30$

T.14.3 PVEL de números fraccionarios

No.	Enunciado	Ecuación
1.	La cuarta parte de un número es doce. ¿Cuál es el número?	$\frac{1}{4}x = 12$
2.	La décima parte de un número es dieciocho. ¿Cuál es el número?	$\frac{1}{10}x = 18$
3.	La treintava parte de un número es once. ¿Cuál es número?	$\frac{1}{30}x = 11$
4.	La quinceava parte de un número es lo mismo que un sexto. ¿Cuál es el número?	$\frac{1}{15}x = \frac{1}{6}$
5.	Dos novenos es igual a tres cuartas partes de un número. ¿Cuál es el número?	$\frac{2}{9}x = \frac{3}{4}$
6.	La doceava parte de un número es igual su tercera parte más seis. ¿Cuál es el número?	$\frac{1}{12}x = \frac{1}{3} + 6$
7.	La quinta parte de un número equivale a doce menos el número. ¿Cuál es el número?	$\frac{1}{5}x = 12 - x$

T.14.4 PVEL unirelacionales de números con suma y resta

No.	Enunciado	Ecuación
1.	Un número menos la mitad del número es igual a diez. ¿Cuál es el número?	$x - \frac{1}{2}x = 10$
2.	La mitad de un número más el doble del número es veinte. ¿Cuál es el número?	$\frac{1}{2}x + 2x = 20$

3.	La tercera parte de un número más el quíntuple del número es cien. ¿Cuál es el número?	$\frac{1}{3}x - \frac{1}{5}x = 100$
4.	Cuatro restado de tres veces un número es veintinueve. ¿Cuál es el número?	$4 - 3x = 29$
5.	Si a un número le quitas trece, obtienes noventa y uno. ¿Cuál es el número?	$x - 13 = 91$
6.	Si al triple de un número le restas dieciséis, obtienes veintinueve. ¿Cuál es ese número?	$3x - 16 = 29$

T.14.6 PVEL multirelacionales de números

No.	Enunciado	Ecuación
1.	Encuentra el número entero que sumado con su anterior y su siguiente de setecientos dos.	$(x - 1) + x + (x + 1) = 702$
2.	La tercera parte de un número es lo mismo treinta menos que su doble. ¿Cuál es el número?	$\frac{1}{3}x = 30 - 2x$
3.	Nueve veces un número, más su tercera parte, menos cinco, más la sexta parte del número es cuarenta y dos. ¿Cuál es el número?	$9x + \frac{1}{3}x - 5 + \frac{1}{6}x = 42$
4.	Si a un número se le resta su tercera parte y se le suma su quinta parte se obtiene como resultado trece. ¿De qué número se trata?	$x - \frac{1}{3}x + \frac{1}{5}x = 13$
5.	Seis más nueve veces un número es lo mismo que dos menos diez veces el número. ¿Cuál es el número?	$6 + 9x = 2 - 10x$
6.	Un número es ocho unidades más que otro. Si la suma de ambos números es cuarenta y cuatro. ¿Cuáles son los números?	$x + (x + 8) = 44$

T.14.7 PVEL de números consecutivos

No.	Enunciado	Ecuación
1.	La suma de tres números es 2000. El mayor excede al del medio en 32 y al menor en 65. Determinar los números.	$(x + 65) + x + (x + 32) = 2000$
2.	La diferencia de dos números es 42 y los dos quintos del mayor equivalen al menor. ¿Cuáles son los números?	$x - \frac{2}{5}x = 42$
3.	Un número es igual al doble de su consecutivo. ¿Cuál es el número?	$x = 2(x + 1)$
4.	La suma de dos números consecutivos es 95. ¿Cuáles son esos números?	$x + (x + 1) = 95$

5.	La suma de dos números enteros consecutivos es 51. Encontrar los dos enteros.	$x + (x + 1) = 51$
6.	La suma de tres números enteros consecutivos es 312. Encuentra dichos números.	$x + (x + 1) + (x+2) = 312$
7.	La suma de tres números enteros pares consecutivos es 276. Determinar los números.	$x + (x + 2) + (x + 4) = 276$
8.	La suma de tres números enteros consecutivos es 51. ¿Cuáles son los números?	$x + (x + 1) + (x+2) = 51$

T.14.8A Miscelánea de PVEL de números

No.	Enunciado	Ecuación
1.	Un número más la sexta parte del número es igual doce. ¿Cuál es el número?	$x + \frac{1}{6}x = 12$
2.	Un número menos la octava parte del número es igual a catorce. ¿Cuál es el número?	$x - \frac{1}{8}x = 14$
3.	La mitad de un número más el cuádruple del número es veintitrés. ¿Cuál es el número?	$\frac{1}{2}x + 4x = 23$
4.	La novena parte de un número más la doceava del número es cien. ¿Cuál es el número?	$\frac{1}{9}x + \frac{1}{12}x = 100$
5.	Veintidós restado de doce veces un número treinta. ¿Cuál es el número?	$22 – 12 x = 30$
6.	Si a un número le quitas diez, obtienes noventa. ¿Cuál es el número?	$x – 10 = 90$
7.	Si al séptuple de un número le restas nueve, obtienes sesenta. ¿Cuál es ese número?	$7x – 9 = 70$
8.	Ocho veces un número menos cinco es lo mismo que diez y seis veces el número. ¿Cuál es el número?	$8x – 5 = 17x$
9.	Veinte veces un número, más su cuarta parte más cinco es igual que la sexta parte del número menos cuarenta. ¿Cuál es el número?	$20x + \frac{1}{4}x + 5 = \frac{1}{6}x - 40$

T.14.8B Miscelánea PVEL números

No.	Enunciado	Ecuación
1.	Si a un número se le resta su octava parte y se le suma su décima parte se obtiene como resultado treinta y cuatro. ¿Cuál es el número?	$x - \frac{1}{8}x + \frac{1}{10}x = 34$
2.	La suma de dos números consecutivos es 21. ¿Cuáles son dichos números?	$x + (x + 1) = 21$
3.	Encuentra tres números enteros consecutivos cuyas suma sea 528.	$x + (x + 1) + (x+2) = 528$

T.15.1 PVEL de porcentajes simples

No.	Enunciado	Ecuación
1.	¿Cuánto es el cinco por ciento de dos mil treinta y siete?	$\frac{x}{2037} = \frac{5}{100}$
2.	¿Cuánto es el once por ciento de veinte millones?	$\frac{x}{20000000} = \frac{11}{100}$
3.	¿Cuánto es el ochenta y dos por ciento de ciento noventa y dos?	$\frac{x}{192} = \frac{82}{100}$
4.	¿Cuántos el seis por ciento de trecientos cincuenta y uno?	$\frac{x}{351} = \frac{6}{100}$

T.15.2 PVEL de porcentajes de diversos contextos

No.	Enunciado	Ecuación
1.	El precio del dólar el lunes es de quince pesos con setenta y cinco centavos. La cotización del precio del dólar para el martes será de un cuatro punto tres por ciento más que el del lunes. ¿Cuál será el precio del dólar para el martes?	$\frac{x}{15.75} = \frac{4.3}{100}$ 15.75 + x = Precio del dólar para el martes

T.15.3 PVEL de porcentajes de diversos contextos

2.		
3.	La humedad relativa de la Ciudad de México es del quince por ciento en promedio. La humedad relativa de Toluca es una tercera parte mayor que la de la Ciudad de México. ¿Qué porcentaje de humedad relativa en promedio tiene la ciudad de Toluca?	$x = 15 + \frac{1}{3}(15)$
4.	En un grupo de veinticinco alumnos el seis por ciento son mujeres. ¿Cuántos hombres y cuántas mujeres hay en el grupo?	$\frac{x}{25} = \frac{12}{100}$

T.15.4 Miscelánea de PVEL de porcentajes

No.	Enunciado	Ecuación
1.	¿Cuánto es el diez por ciento de mil?	$\frac{x}{1000} = \frac{10}{100}$
2.	¿Cuánto es el trece punto dos por ciento de ciento ochenta y cuatro?	$\frac{x}{184} = \frac{13.2}{100}$

3.	¿Cuánto es el noventa por ciento de doce veinteavos?	$\frac{x}{\frac{12}{20}} = \frac{90}{100}$
4.	Una tienda de artículos deportivos redujo un par de tenis en un veinticuatro por ciento y el precio que tienen es de trecientos cincuenta y siete pesos. ¿Cuál es el precio final con el descuento?	$\frac{x}{357} = \frac{24}{100}$

T.16.2A PVEL de costos

No.	Enunciado	Ecuación
1.	El 14 de febrero Areli y Alex salen a celebrarlo a un antro, tienen setecientos ochenta y ocho pesos para pagar la cuenta. Necesitan considerar que a la cuenta de los alimentos que consuman le tiene que agregar el quince por ciento para la propina del mesero. ¿Cuánto es lo que les queda para consumir en alimentos?	$\frac{x}{780} = \frac{15}{100}$ 780 – x = Dinero que les queda para consumir los alimentos
2.	Una pluma cuesta treinta pesos más que un lápiz. Aldo compró ocho plumas y quince lápices. En total ha gastado setecientos pesos. ¿Cuánto vale cada lápiz y cada bolígrafo?	$x + (x+30) = 700$
3.	Yuridia pagó por un jeans, una blusa y unos zapatos ochocientos veinte pesos. Si el costo de los jeans excede en ciento ochenta y tres pesos al de los zapatos y el de la blusa en cien pesos. ¿Cuánto costó cada artículo?	$x + (x + 183) + (x + 100) = 820$

T.16.2B PVEL de costos

1.	Bruno debe sesenta mil pesos de una tarjeta de crédito, una departamental y una hipoteca bancaria. La deuda de la tarjeta de crédito es el doble de la tarjeta departamental y la hipoteca es una cuarta parte de la de la tarjeta de crédito. ¿Cuánto debe en la tarjeta departamental y en la tarjeta de crédito?	$x + 2x + \frac{1}{4}x = 70000$
2.	Gloria tiene el triple de monedas de cinco pesos que de diez pesos y doce monedas más de dos pesos que de cinco pesos. Si el total de dinero que tiene Gloria es de cuatrocientos veintidós pesos. ¿Cuántas monedas tiene Gloria de cada denominación?	$x + 3x + (x + 12) = 422$

T.16.3 Miscelánea de PVEL de costos

No.	Enunciado	Ecuación
1.	El promedio de calificaciones aprobatorias en un examen extraordinario es del cincuenta y dos por ciento, el número total de alumnos en el grupo que presentaron el examen es de ochenta. ¿Cuántos alumnos reprobaron en examen extraordinario?	$\frac{x}{80} = \frac{52}{100}$ $80 - x$ = Número de alumnos que reprobaron el examen
2.	Un teléfono celular y una Tablet costaron diez y siete mil pesos. El teléfono cuesta tres quintas partes de lo que cuesta la Tablet. ¿Cuál es el precio de cada cosa?	$x + \frac{3}{5}x = 17000$
3.	Por cuatro kilos de papas y tres de jitomate se pagaron ciento trece pesos y el kilo de papas cuesta la mitad de lo que cuesta el kilo de jitomates. ¿Cuánto cuesta el kilo de jitomate?	$3x + 4\left(\frac{1}{2}x\right) = 113$
4.	Jonathan pagó por un libro, un cuaderno y una calculadora trecientos sesenta y cuatro pesos. Si el libro cuesta dos quintas partes de lo que cuesta la calculadora y el cuaderno cuesta una sexta parte de lo que cuesta la calculadora. ¿Cuánto cuesta cada artículo?	$x + \frac{2}{5}x + \frac{1}{6}x = 374$

T.17.1A PVEL de edades que involucran tiempo presente y futuro

No.	Enunciado	Ecuación
1.	La edad actual de una madre es el triple que la que tiene su hijo y dentro de 10 años será el doble. ¿Qué edad tiene cada uno?	$3x + 10 = 2(x + 10)$
2.	Un padre tiene 40 años y dos hijas de 10 y 12 años ¿Cuántos años han de transcurrir para que entre las dos hijas igualen a la edad del padre?	$40 + x = (10 + x) + (12 + x)$
3.	Enrique tiene 12 años más que Glenda y dentro de 4 años tendrá el doble. ¿Qué edad tiene cada uno?	$x + 16 = 2(x + 4)$

T.17.1B PVEL de edades que involucran tiempo presente y futuro

No.	Enunciado	Ecuación
1.	La edad actual de Itzel es el triple que la de su hija y dentro de 14 años será el doble. ¿Qué edad tiene cada una?	$3x + 14 = 2(x + 14)$

T.17.2 Miscelánea de PVEL de edades que involucran tiempo presente y futuro

1.	Rubén tiene el triple de la edad que Nuria. ¿Cuántos años tiene cada uno? sabiendo que dentro de 12 años la edad de Rubén será solamente el doble que la de Nuria.	$3x + 12 = 2(x + 12)$
2.	Yoseluz tiene 16 años más que Gerardo y dentro de 5 años será el doble. ¿Qué edad tiene cada uno?	$x + 21 = 2(x + 5)$
3.	Paco tiene 35 años menos que su padre y dentro de 9 años, su padre tendrá el quíntuple de los que entonces tenga Paco. ¿Qué edad tiene cada uno?	$x + 9 = 5(x - 6)$

T.17.3 PVEL de edades que involucran tiempo presente y pasado

No.	Enunciado	Ecuación
1.	Ariel tiene 4 años más que su hermano. Hace 5 años tenía el doble de la edad de su hermano. ¿Cuántos años tiene actualmente cada uno?	$(x + 4) - 5 = 2(x - 5)$
2.	Un padre tiene 30 años y su hijo 10. ¿Cuántos años hace que la edad del padre era tres veces la del hijo?	$30 - x = 3(10 - x)$
3.	La edad de Sergio es tres quintas partes la de Antonio y hace cinco años era la mitad. ¿Cuál es la edad de ambos?	$\frac{3}{5}x - 5 = \frac{1}{2}(x - 5)$
4.	Pedro tiene 30 años menos que su madre y dentro de 5 años, su madre tendrá el triple de los que entonces tenga ella. ¿Qué edad tiene cada uno en la actualidad?	$x + 5 = 3((x - 30) + 5)$

T.17.4 PVEL de edades que involucran suma de edades

No.	Enunciado	Ecuación
1.	La edad de Omar es tres quintas partes de la de Alejandro y la edad de David es tres octavos la de Omar. Si las tres edades suman setenta y cinco años. ¿Cuáles son las edades de cada uno?	$x + \frac{3}{5}x + \frac{9}{40}x = 75$
2.	Tres hermanos nacieron a intervalos de tres años. Si la suma de sus edades es 51. ¿Qué edad tiene cada uno?	$x + 3 + x + 6 + x + 9 = 51$

T.17.5 Miscelánea de PVEL de edades

No.	Enunciado	Ecuación
1.	La edad de Antonio es el doble de la que tiene Fernando y dentro de 5 años será de cinco tercios. ¿Cuál es la edad de cada uno?	$2x + 5 = \frac{5}{3}(x + 5)$
2.	Magdalena tiene 6 años más que Martín y hace 2 años tenía el doble. ¿Qué edad tiene cada uno?	$(x + 6) - 2 = 2(x - 2)$
3.	Gerardo tiene cuatro años más que su hermano y dentro de cuatro años la suma de sus edades será de treinta y tres. ¿Qué edad tiene cada uno?	$x + 4 + (x + 4) + 4 = 33$
4.	La diferencia de edad entre un abuelo y su nieto es de 48 años y hace 4 años el abuelo tenía 5 veces la edad del nieto. ¿Qué edad tiene cada uno?	$x + 44 = 5(x - 4)$
5.	La edad de Bárbara es la mitad de la edad de Patricia. Si dentro de veinte años la edad de Patricia supera en 4 la de Bárbara. ¿Cuál es la edad actual de ambas?	$(x + 20) = \frac{1}{2}x + 20$
6.	Paco tiene veintisiete años y su hija Keyra tres. ¿Dentro de cuántos años la edad de Keyra será una cuarta parte de la de Paco?	$(3 + x) = \frac{1}{4}(27 + x)$
7.	Bruno tiene 42 años y Juan tiene 18 años. ¿En cuántos años Juan tendrá el doble de la edad de Bruno?	$42 + x = 2(18 + x)$
8.	Paulina tiene el triple de años que su hija. Hace 15 años la suma de las edades era 37 años. ¿Cuál es la edad de su hija?	$(3x - 15) + (x - 15) = 37$
9.	Rubí tiene 5 años más que su hermana Diana y dentro de 6 años la suma de las edades será 40 años. ¿Qué edad tiene cada una?	$(x + 6) + (x + 5) + 6 = 40$
10.	La diferencia de edad entre dos hermanas es de 4 años y dentro de 3 años una tendrá el doble de la otra. ¿Qué edad tiene cada una?	$(x + 4) + 3 = x + 3$
11.	La edad de tres hermanas es consecutiva. La suma de las edades es 45 años. ¿Cuál es la edad de cada una?	$x + (x + 1) + (x+2) = 45$
12.	La edad de Tania excede en cinco años a la de Adriana. La edad de Rosario es el promedio de edades de Tania y Adriana. La suma de las edades de todas es cincuenta y seis años. ¿Cuál es la edad de cada una?	$x + (x + 5) + \left(\frac{x + (x+5)}{2}\right) = 56$

T.18.2A PVEL de fracciones acumulativas

No.	Enunciado	Ecuación
1.	Un hombre recibe una herencia. Gasta un tercio de ella en pagar viejas deudas y pierde dos tercios del resto jugando a las cartas, quedándose sólo con $500,000. ¿De cuánto fue la herencia?	$x - \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}x\right) = 500000$
2.	Una niña se ha comido 120 uvas en 5 días, de tal forma que cada día comía 5 uvas más que el día anterior. ¿Cuántas uvas se comió el primer día?	$x+(x+5)+(x+10)+(x+15)+(x+20)=120$

T.18.2B PVEL de fracciones acumulativas

1.	En una librería Ana compra un libro con la tercera parte de su dinero y un comic con las tres cuartas partes de lo que le quedaba. Al salir de la librería tenía veinte pesos. ¿Cuánto dinero tenía Ana inicialmente?	$20 + \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}x = x$
2.	Un padre y su hijo van paseando juntos, aunque en cada paso el padre recorre cuatro quintos de metro y el hijo recorre un tercio de metro en cada paso. ¿Qué distancia han recorrido juntos, si sabemos que el hijo ha dado 700 pasos más que el padre?	$\frac{4}{5}x = \frac{1}{3}(x + 700)$

T.18.3 PVEL de fracciones acumulativas de corte histórico

1.	En cierta ocasión Aladino para complacer al Rey le regaló una bolsa con perlas, el Rey muy contento repartió las perlas de la siguiente forma: La mitad de las perlas más una perla se las dio a su esposa, de las perlas restantes la mitad más una se las regaló a su hija y del resto tomó la mitad más una perla y se las regaló a la esposa de su Visir, finalmente él se quedó con 21 perlas. ¿Podrías decir cuántas perlas en total le regaló Aladino al Rey?	$\frac{x - 14}{8} = 43$

Anexo 7. Definiciones respecto a los objetos matemáticos implicados en un PVEL

Alumno	Incógnita		Igualdad		Ecuación	
1	Un número desconocido.	Una letra que representa una cantidad desconocida.	La misma cantidad expresada de diferente forma.	Cuando hace una comprobación y se iguala el resultado.	Una operación donde encontramos x.	Una operación matemática donde hay incógnitas.
2	Valor que no conocemos y lo escribimos con una símbolo.	Una letra como x que significa un número no conocido.	Conjunto de letras como x y números enteros.	Una forma para hacer una ecuación en donde hay valores que no conocemos y números.	Expresión con números y letras que da un resultado.	Es una forma de representar un problema con operaciones con valores que no se saben y operaciones.
3	Una letra que sirve para ser la incógnita x.	Una cantidad o valor que se pone como un símbolo o letra.	Es una operación con números con la que se puede saber el valor de algo.	Es cuando igualas el resultado de dos operaciones con números.	Es cuando haces que las operaciones que tienen x sean iguales.	Es el resultado de unas operaciones con cantidades que no sabes pero luego de que hacer sumas y restas sale el resultado.
4	Un valor desconocido dentro de una ecuación.	La forma (letra) con la que se expresa la incógnita.	Cuando dos expresiones con números y letras son similares.	Cuando hace las comprobación e igualas el resultado.	Una operación donde encontramos x y números.	Una operación matemática donde tenemos incógnita, números y variables.
5	Una cantidad desconocida.	Una letra o símbolo que representa a la cantidad desconocida	Aquella que se asemeja, ya sea como múltiplo o común divisor.	Puede ser una cantidad que expresa exactamente lo mismo.	La operación que con incógnitas y números enteros y fraccionarios y signos da algo.	La que por medio de signos y cantidades desconocidas te lleva a un resultado exacto.

6	Una letra o literal para representar un número.	La representación de una cantidad desconocida.	Algo que se igual pero que se representa de otra forma pero siendo el mismo resultado.	El resultado de una operación matemática o algebraica.	Representación de operaciones algebraicas.	Una operación algebraica que se representa con un problema en un plano cartesiano.
7	Una letra para un valor que no conoces.	Un símbolo o literal para representar una cantidad desconocida como en los problemas de la clase.	Cuando haces que dos cosas valgan lo mismo.	Cantidades desconocidas que luego de que las igualas dan el mismo resultado.	Conjunto de operaciones con números y valores que no sabes que dan un resultado.	Operaciones que tienen cantidades que no conoces y números y que dan un resultado de un problema.
8	Valor que no sabemos.	Cantidad o número desconocido que se escribe con un símbolo como una letra	Son dos números que se escriben diferente como las fracciones que son valen lo mismo	El resultado de una ecuación que da un resultado después que haces las operaciones	Conjunto de valores que no conoces, operaciones y números	Resultado de una ecuación que sirve para saber el valor de x que es la cantidad que no sabemos
9	Es el valor que se va a descubrir	El valor desconocido.	Cuando aunque sea distinto número tiene el mismo valor.	Cuando un número tiene el mismo valor a otro.	Donde existen incógnitas.	Operación para saber el valor de algún número desconocido.
10	Es un símbolo que suplanta a un número.	El valor que toma una incógnita.	Es una operación en la que se tienen dos incógnitas y el valor de estas tiene que ser igual.	Es cuando un valor da lo mismo que otro pero se escriben diferente.	Es una operación que se usa para despejar un resultado.	Operación que se utiliza para resolver el valor de una o más incógnitas.

11	Valor o número desconocido.	Cantidad no fija, al principio es desconocida pero cuando la haces incógnita puedes saber su valor.	Operaciones con números que dan el resultado.	Es cuando tienes que comprobar el valor de x en la ecuación para saber que está bien tu resultado.	Es una fórmula que te da el valor de la letra que no sabías al principio.	Es una operación algebraica con números y cantidades desconocidas.
12	Lo que cambia.	La parte que buscamos en el problema ejemplo x, es el valor que toma la incógnita.	Lo que significa lo mismo.	Cuando comprobamos que el resultado es igual al de la ecuación.	La que tiene números y letras y da operaciones.	Una representación de un problema con cantidades desconocidas.
13	Es un término que cambia.	Es un valor que no se sabe con certeza cual es.	Es un valor que esta de igual forma pero se expresa diferente.	Son dos términos que están igualados.	Es una ecuación que esta igualada a algo.	Es una ecuación la cual está igualada a algo.
14	Es la letra utilizada para la representación de un número desconocido.	Es la pregunta que se hace en el problema que es una cantidad desconocida o incógnita.	Lo que vale la literal.	Es cuando un número resultado de una ecuación es prácticamente el mismo que otro.	Es una operación matemática la cual se resuelve con letras.	Es una operación matemática mediante la que se utilizan letras y números para resolver el problema.
15	Una serie de letras o valores que cambian.	Es un valor o cantidad que es desconocido en el problema.	Los valores que significan lo mismo pero se ponen en la operación diferentes.	Es cuando el resultado de una operación matemática es igual al otro valor que esta expresado diferente.	Un resultado que es el mismo para las operaciones.	Es una manera de encontrar el resultado de un problema que tiene valores que no conoces y haces la operación da el número.

16	Una cantidad que no es fija.	Una cantidad desconocida.	Una cantidad desconocida que equivale a la cantidad que está del otro lado y debe ser igual.	Un número desconocido o incógnita que da el resultado de ambos lados cuando estos son el mismo valor.	Una cantidad desconocida que se equilibra con la cantidad conocida.	Dos cantidades desconocidas o incógnitas que juntándolas se obtiene el mismo resultado.
17	Un valor o número el cual no se sabe cuánto es su valor el cual es representado por una literal (x, y, etc.).	El valor de las literales en una ecuación el cual al sustituirlo da el resultados esperado.	Son dos expresiones o ecuaciones las cuales son iguales o equivalentes en cuanto a su valor.	Es el valor de la literal representada por x, y, z, etc.	Es una forma de representación para cantidades que son equivalentes.	Un modo de representación para obtener el valor de una incógnita representada con una literal.
18	Se le asigna a una cantidad que se desea saber pero esta cantidad cambia.	Se determina la incógnita cuando no se sabe o se asigna un el valor a un número o una cantidad.	La representación de fracciones equivalentes.	Cuando se representa un resultado con el de la ecuación.	La representación algebraica con dos término y dan igualdad a una cantidad.	Una representación algebraica de un problema con cantidades conocidas y desconocidas.
19	Una cantidad que siempre se representa con letras o figuras.	Un número o cantidad que está presente en una ecuación pero esta cantidad varía.	Cuando las cantidades se asemejan.	Las cantidades, valores o números que son iguales.	Es una igualdad de las más sencillas en la que se busca encontrar una cantidad desconocida.	Un conjunto de operaciones y cantidades igualadas con el fin de encontrar alguna incógnita.
20	Un valor desconocido.	Una letra que se le puede otorgar cualquier valor.	Cuando el resultado es el mismo.	Dos resultados que son iguales.	Que al ser representadas dan una línea.	La que se utiliza donde hay un problema donde falta un valor.

21	La cantidad que desconocemos.	Valor o número no fijo que se escribe con una letra.	Las que son similares pero no se escriben exactamente igual.	Cantidades desconocidas o términos que dan el mismo resultado.	Conjunto de variables, operaciones y números que hacen otro número para x.	Es la igualdad entre operaciones que dan el resultado para la incógnita.
22	Es un valor desconocido.	Es un símbolo que puede representarse de diferentes formas y a la vez sirve para representar cantidades con cualquier valor.	Valores similares.	Cunado dos o más cantidades son lo mismo.	Es una expresión en donde hay operaciones.	Es una manera de representar un problema de manera algebraica.
23	Un valor, cantidad no determinada.	Es un símbolo o letra que utiliza para representar una cantidad desconocida.	Dos valores iguales.	Es un valor que sea igual al primer valor pero representado de diferente manera.	Es un conjunto de número y literales.	Conjunto de números, variables y operaciones elevadas a la uno que dan un resultado.
24	Es una letra que se utiliza para un número desconocido.	Es una incógnita que está en la ecuación.	Es que es igual a otra cantidad.	Es cuando dos partes de una ecuación son con igual valor.	Es una representación simbólica.	Es una operación que sirve para expresar un problema con literales, números y operaciones.
25	Un símbolo.	Es un número desconocido.	Cuando vale lo mismo.	Cuando un número se iguala a otro resultado.	Donde hay números y símbolos.	Son operaciones con literales.
26	Números.	Valores que primero no sabes y luego son numéricos.	Cosas iguales.	Números que dan un mismo resultado.	Las que tienen x.	Las operaciones que tienen números y símbolos.

27	Cantidades no se sabe bien que número son.	Números desconocidos que salen en la pregunta del problema.	Expresiones que son parecidas.	Términos con cantidades desconocidas que dan números iguales.	Incógnitas, números enteros y operaciones que dan un resultado.	Es la igualdad de las partes de las operaciones de la ecuación que se resuelve y da el número para la incógnita.
28	Es la forma en la que se pone un número desconocido.	Es la representación donde está un número con una incógnita.	Parecidos los valores o expresiones.	Es el resultado de una ecuación.	Las sumas y restas que tienen números y letras.	Es una representación en la cual se emplea una incógnita y una variable y alguna o muchas operaciones.
29	Las que en la fórmula del área dan diferentes números.	Los números que no tienen un valor como 2, 3, 4, etc.	No se.	La comprobación de la ecuación.	No se.	Los resultados que salen cuando haces las operaciones del problema.
30	Diferencia entre números.	Las cantidades que pueden ser diferentes.	Los que dan lo mismo.	Las operaciones que están como muy parecidas en la ecuación.	Operaciones con diferentes números así como las fracciones.	Es la igualdad entre la incógnita y los demás números que luego te dan el último resultado.
31	Un número desconocido.	El valor por encontrar.	Un valor que es lo mismo expresado de diferente manera.	Cuando un número es casi igual o igual a otro.	Donde encontramos x y y.	Operación matemática donde existe incógnita.
32	Es cuando representamos una cantidad que no sabemos con un símbolo.	Es un valor o cantidad desconocida de un problema que no sabemos.	Es cuando igualas dos resultados.	Una igualdad es cuando hace una comprobación de una ecuación y te debe dar un resultado.	La ecuación es cuando tienes las operaciones con literales.	Es un conjunto de números y literales para formar un resultado.

Anexo 8. Prueba de desarrollo escrito individual
Tipo A y B

Universidad Nacional Autónoma de México Tipo A
Colegio de Ciencias y Humanidades
Plantel Naucalpan

Evaluación final (Parte A)

Nombre: ____ Grupo: ___________

INSTRUCCIONES. En forma individual, para los siguientes problemas realiza lo siguiente en las hojas anexas:

a. Lee atentamente el enunciado del problema.
b. Responde las preguntas del cuestionario de acuerdo al enunciado.
c. Realiza la representación geométrica y/o gráfica.
d. Plantea la ecuación lineal que conduzca a la solución del problema.

Problema 1. Calcula el valor del número sabiendo que dicho número, más su mitad, más su tercera parte es igual a treinta.

1. ¿Qué parte del enunciado del problema menciona la cantidad desconocida?

2. ¿Qué parte del enunciado del problema menciona las cantidades conocidas?

3. ¿Qué parte del enunciado del problema menciona la relación entre la cantidad desconocida y las cantidades desconocidas?

4. ¿Qué parte del enunciado del problema menciona la relación de equivalencia entre todas las cantidades?

5. ¿Cuál es la cantidad desconocida de acuerdo al enunciado problema?

6. ¿Cómo se relaciona la cantidad desconocida mencionada en el enunciado del problema con las cantidades conocidas?

7. ¿Cómo representarías simbólicamente la cantidad desconocida que menciona el enunciado del problema?

Representación gráfica y/o geométrica del Problema 1.

Planteamiento de la ecuación para el Problema 1.

Problema 2. Emiliano compró una guitarra y una bocina por mil ochocientos treinta pesos. La guitarra costó ciento cincuenta y dos pesos más que la bocina. ¿Cuánto costó cada artículo?

1. ¿Qué parte del enunciado del problema menciona la cantidad desconocida?

2. ¿Qué parte del enunciado del problema menciona las cantidades conocidas?

3. ¿Qué parte del enunciado del problema menciona la relación entre la cantidad desconocida y las cantidades desconocidas?

4. ¿Qué parte del enunciado del problema menciona la relación de equivalencia entre todas las cantidades?

5. ¿Cuál es la cantidad desconocida de acuerdo al enunciado problema?

6. ¿Cómo se relaciona la cantidad desconocida mencionada en el enunciado del problema con las cantidades conocidas?

7. ¿Cómo representarías simbólicamente la cantidad desconocida que menciona el enunciado del problema?

Representación gráfica y/o geométrica del Problema 2.

Planteamiento de la ecuación para el Problema 2.

Problema 3. Irma tiene cuatros años más que su hermana Leticia y dentro de cinco años entre las dos sumarán veintidós años. ¿Cuántos años tiene cada una?

1. ¿Qué parte del enunciado del problema menciona la cantidad desconocida?

2. ¿Qué parte del enunciado del problema menciona las cantidades conocidas?

3. ¿Qué parte del enunciado del problema menciona la relación entre la cantidad desconocida y las cantidades desconocidas?

4. ¿Qué parte del enunciado del problema menciona la relación de equivalencia entre todas las cantidades?

5. ¿Cuál es la cantidad desconocida de acuerdo al enunciado problema?

6. ¿Cómo se relaciona la cantidad desconocida mencionada en el enunciado del problema con las cantidades conocidas?

7. ¿Cómo representarías simbólicamente la cantidad desconocida que menciona el enunciado del problema?

Representación gráfica y/o geométrica del Problema 3.

Planteamiento de la ecuación para el Problema 3.

Universidad Nacional Autónoma de México Tipo B
Colegio de Ciencias y Humanidades
Plantel Naucalpan

Evaluación final (Parte A)

Nombre: ____ Grupo: ___________

INSTRUCCIONES. En forma individual, para los siguientes problemas realiza lo siguiente en las hojas anexas:

a. Lee atentamente el enunciado del problema.
b. Responde las preguntas del cuestionario de acuerdo al enunciado.
c. Realiza la representación geométrica y/o gráfica.
d. Plantea la ecuación lineal que conduzca a la solución del problema.

Problema 1. Calcula el valor del número sabiendo que dicho número, más su mitad, más su tercera parte es igual a cuarenta.

1. ¿Qué parte del enunciado del problema menciona la cantidad desconocida?

2. ¿Qué parte del enunciado del problema menciona las cantidades conocidas?

3. ¿Qué parte del enunciado del problema menciona la relación entre la cantidad desconocida y las cantidades desconocidas?

4. ¿Qué parte del enunciado del problema menciona la relación de equivalencia entre todas las cantidades?

5. ¿Cuál es la cantidad desconocida de acuerdo al enunciado problema?

6. ¿Cómo se relaciona la cantidad desconocida mencionada en el enunciado del problema con las cantidades conocidas?

7. ¿Cómo representarías simbólicamente la cantidad desconocida que menciona el enunciado del problema?

Representación gráfica y/o geométrica del Problema 1.

Planteamiento de la ecuación para el Problema 1.

Problema 2. Daniel compró una camisa y un pantalón por mil ochocientos veinticinco pesos. La camisa costó ciento cincuenta y seis pesos más que el pantalón. ¿Cuánto costó cada artículo?

1. ¿Qué parte del enunciado del problema menciona la cantidad desconocida?

2. ¿Qué parte del enunciado del problema menciona las cantidades conocidas?

3. ¿Qué parte del enunciado del problema menciona la relación entre la cantidad desconocida y las cantidades desconocidas?

4. ¿Qué parte del enunciado del problema menciona la relación de equivalencia entre todas las cantidades?

5. ¿Cuál es la cantidad desconocida de acuerdo al enunciado problema?

6. ¿Cómo se relaciona la cantidad desconocida mencionada en el enunciado del problema con las cantidades conocidas?

7. ¿Cómo representarías simbólicamente la cantidad desconocida que menciona el enunciado del problema?

Representación gráfica y/o geométrica del Problema 2.

Planteamiento de la ecuación para el Problema 2.

Problema 3. Miguel tiene tres años más que su prima Norma y dentro de tres años entre los dos sumarán veinte años. ¿Cuántos años tiene cada uno?

1. ¿Qué parte del enunciado del problema menciona la cantidad desconocida?

2. ¿Qué parte del enunciado del problema menciona las cantidades conocidas?

3. ¿Qué parte del enunciado del problema menciona la relación entre la cantidad desconocida y las cantidades desconocidas?

4. ¿Qué parte del enunciado del problema menciona la relación de equivalencia entre todas las cantidades?

5. ¿Cuál es la cantidad desconocida de acuerdo al enunciado problema?

6. ¿Cómo se relaciona la cantidad desconocida mencionada en el enunciado del problema con las cantidades conocidas?

7. ¿Cómo representarías simbólicamente la cantidad desconocida que menciona el enunciado del problema?

Representación gráfica y/o geométrica del Problema 3.

Planteamiento de la ecuación para el problema 3.

Anexo 9. Prueba de desarrollo escrito en pequeño grupo

Universidad Nacional Autónoma de México
Colegio de Ciencias y Humanidades
Plantel Naucalpan

Evaluación final (Parte B) Grupo No. __________

Nombre: ____

Nombre: ____

Nombre: ____

Nombre: ____

INSTRUCCIONES. En grupos de 4 personas, para los siguientes problemas realicen lo siguiente en las hojas anexas:

a. Lean atentamente el enunciado del problema.
b. Realicen la representación geométrica y/o gráfica.
c. Planteen la ecuación lineal que conduzca a la solución del problema.

Problema 1. Esta tumba contiene a Diofanto. ¡Oh gran maravilla! Y la tumba dice con arte la medida de su vida. Dios hizo que fuera niño una sexta parte de su vida. Añadiendo un doceavo, las mejillas tuvieron la primera barba. Le encendió el fuego nupcial después de un séptimo, y en el quinto año después de la boda le concedió un hijo. Pero, ¡ay! Niño tardío y desgraciado, en la mitad de la medida de la vida de su padre, lo arrebató la helada tumba. Después de consolar su pena cuatro años con esta ciencia del cálculo llegó al término de su vida. ¿Cuántos años había vivido Diofanto cuando le llego la muerte?

Problema 2. Un ladrón un cesto de naranjas del mercado robó y por entre los huertos escapó; al saltar una valla, la mitad más media perdió; perseguido por un perro, la mitad menos media abandonó; tropezó en una cuerda, la mitad más media desparramó; en su guarida, dos docenas guardó. Vosotros, los que buscáis la sabiduría, decidnos: ¿Cuántas naranjas robó el ladrón?