



# UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MEXICO

PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS Y DE  
LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA

**“MULTICOMPLEJOS EXTREMALES EN MATROIDES DE  
EMPEDRADO”**

**T E S I S**

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:

**MAESTRO EN CIENCIAS**

PRESENTA:

**PEDRO ALBERTO ANTONIO SOTO**

DIRECTOR DE TESIS:

**DR. CRIEL MERINO LÓPEZ**

INSTITUTO DE MATEMÁTICAS.

**OAXACA DE JUÁREZ, OAXACA, OCTUBRE DE 2015.**



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



# Agradecimientos

Muchas personas contribuyeron a la realización de este trabajo, mis más sinceros agradecimientos a cada uno de ellos por las palabras de apoyo que me sirvieron para seguir adelante con este proyecto. Gracias a mis padres y hermanos por su apoyo incondicional, gracias a toda mi familia que siempre estuvo alentándome, gracias a Citlalliy por su apoyo y gracias a mis amigos que hicieron más ameno el tiempo que pasé realizando este trabajo, aunque no mencione sus nombres en el desarrollo de la tesis, sin ellos no hubiera sido posible su realización.

Le debo un agradecimiento especial al profesor Criel Merino López por haber sido mi tutor durante la maestría y asesor de tesis, por su paciencia, tiempo y apoyo durante la elaboración de este trabajo, gracias por ser una gran persona, por la enseñanza, la confianza y la oportunidad que me brindó.

También agradezco a los profesores Laura Elena Chávez Lomelí, Carlos Segovia González, Gilberto Calvillo Vives y Juan José Montellano Ballesteros por haber revisado este trabajo, por todo el tiempo invertido y por sus acertados comentarios y correcciones que me ayudaron a mejorar en gran medida el presente escrito, muchas gracias.

Gracias a todos los profesores del Instituto de Matemáticas en Oaxaca por haberse tomado su tiempo para compartir sus conocimientos.

Agradezco al CONACYT por la beca que me otorgó para realizar mis estudios de maestría, así como al instituto de matemáticas de la UNAM y a la coordinación de posgrado en ciencias matemáticas por todo el apoyo brindado.

Investigación realizada gracias al Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e Innovación Tecnológica (PAPIIT) IN102315 Estructuras algebraicas y combinatorias asociadas

II

a las gráficas y los matroides. Agradezco a la DGAPA-UNAM la beca recibida.

# Índice general

<b>1. Preliminares</b>	<b>3</b>
1.1. Matroides . . . . .	3
1.2. El polinomio de Tutte . . . . .	7
1.3. El invariante de Möbius . . . . .	11
1.4. El polinomio característico . . . . .	15
1.5. El h-vector de un matroide . . . . .	16
<b>2. Planteamiento del problema</b>	<b>23</b>
2.1. Multicomplejos y conjeturas . . . . .	23
2.2. Prueba parcial de la conjetura MNRV . . . . .	26
2.3. Sobre la conjetura MNRV . . . . .	30
<b>3. Resultados</b>	<b>33</b>
3.1. Análisis de la función $f(r, d)$ . . . . .	33
3.1.1. El caso $f(r, 3)$ . . . . .	33
3.1.2. El caso $f(3, d)$ . . . . .	40
3.2. Funciones generatrices . . . . .	42
<b>4. Conclusiones</b>	<b>51</b>
Bibliografía.....	53



# Introducción

Este trabajo se realizó inspirado en la prueba de un caso particular de una conjetura planteada por R. P. Stanley en 1977, en dicha prueba se estudia el  $h$ -vector de un complejo matroidal considerando matroides de empedrado. Para poder calcular dicho vector se introducen nuevas funciones con ayuda de ciertos multicomplejos y gráficas cuyos vértices son monomios. Son estas nuevas funciones las que estudiamos con el objetivo de obtener más información sobre la mismas para poder probar una nueva conjetura la cual llamaremos *conjetura MNRV*, que relaciona estas funciones con el número de collares binarios aperiódicos de cierta longitud y densidad, todo con la finalidad de que la información obtenida de este análisis pueda ser de utilidad para intentar probar la conjetura de Stanley.

El trabajo se distribuye de la siguiente forma: En el primer capítulo damos una introducción de la teoría necesaria para nuestro trabajo, a saber, comenzamos con la teoría de matroides y en seguida definimos ciertos invariantes de estos objetos que son de nuestro interés. En el segundo capítulo presentamos la conjetura de Stanley así como la conjetura MNRV que nos interesa estudiar; en este capítulo también traemos a la vista un resultado que prueba una parte de la conjetura MNRV, involucrando la función asociada a las gráficas, además empezamos con el análisis de la función asociada a los multicomplejos para dar los primeros resultados. En el tercer capítulo analizamos la función asociada a los multicomplejos para obtener los resultados principales de este trabajo: una prueba de un caso particular de la conjetura MNRV; después mencionamos otros resultados que se obtuvieron durante la investigación y finalizamos con las conclusiones de nuestro trabajo.



# Capítulo 1

## Preliminares

### 1.1. Matroides

La teoría de Matroides es un área de las matemáticas cuya motivación surge en gran medida del álgebra lineal y la teoría de las gráficas. Esta teoría es un área relativamente nueva, pues ha sido desarrollada en los últimos cien años. Daremos a continuación una breve introducción sobre esta teoría, no sin antes persuadir al lector en consultar el libro de James G. Oxley [5] donde podrá encontrar un extenso estudio de esta teoría, que no solamente es interesante sino que también tiene incontables aplicaciones en otras ramas de las matemáticas, así como también fuera de ellas. Además, en este libro el lector podrá encontrar las pruebas de los resultados que enunciaremos a continuación. Comenzamos con la definición de nuestro objeto de estudio.

**Definición 1.1.1.** *Un matroide  $M$  es un par ordenado  $(E, \mathcal{I})$ , donde  $E$  es un conjunto finito e  $\mathcal{I}$  es una colección de subconjuntos de  $E$  que satisface las siguientes condiciones:*

- $\emptyset \in \mathcal{I}$ .
- Si  $I \in \mathcal{I}$  e  $I' \subset I$ , entonces  $I' \in \mathcal{I}$ .
- Si  $I_1, I_2 \in \mathcal{I}$  son tales que  $|I_1| < |I_2|$ , entonces existe un elemento  $e \in I_2 \setminus I_1$  tal que  $I_1 \cup \{e\} \in \mathcal{I}$ .

El conjunto  $E$  se llama *conjunto base*, mientras que a los conjuntos en  $\mathcal{I}$  se les llama conjuntos independientes y los conjuntos que no pertenecen a  $\mathcal{I}$  se denominan dependientes.

El nombre de matroide es debido a Whitney [9] pues una clase importante de estos objetos provienen de las matrices, siendo  $E$  el conjunto de columnas de una matriz e  $\mathcal{I}$  los subconjuntos de columnas de esta matriz que forman un conjunto linealmente independiente. La teoría de matroides es muy rica, pues existen muchas definiciones equivalentes a la que mencionamos antes, por ejemplo, un matroide puede definirse en término de sus conjuntos dependientes, pues como vimos antes, estos determinan por completo a los conjuntos independientes. Algunas otras caracterizaciones de matroides pueden formularse en términos de las siguientes definiciones:

**Definición 1.1.2.** Sean  $M = (E, \mathcal{I})$  un matroide y  $P(E)$  el conjunto potencia de  $E$ .

- Definimos la función de rango de  $M$  como la función  $r : P(E) \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$ , tal que  $r(X) = \max\{|Y| : Y \subset X, Y \text{ es independiente en } M\}$ .
- Definimos la función cerradura como la función  $Cl : P(E) \rightarrow P(E)$ , tal que  $Cl(X) = \{e \in E : r(X \cup e) = r(X)\}$ .
- Si  $X \subset E$  es tal que  $Cl(X) = X$  decimos que  $X$  es cerrado en  $M$ .
- Si  $X \subset E$  es independiente maximal decimos que  $X$  es una base de  $M$ .
- Si  $X \subset E$  es dependiente minimal decimos que  $X$  es un circuito de  $M$ .

Un matroide puede definirse en términos de cualquiera de las estructuras anteriores, es decir, basta conocer el conjunto de bases o circuitos; o la función de rango o cerradura para construir un matroide, cabe mencionar que cada estructura tiene un conjunto de axiomas que las definen. Por esta razón conviene tener una notación general para referirnos a un matroide, sin importar las estructuras que lo definen denotaremos un matroide por  $M(E)$  entendiendo que su conjunto base es  $E$  y, cuando no haya confusión escribiremos solamente  $M$ . También mencionamos a continuación algunas propiedades que utilizaremos en las siguientes secciones de este trabajo.

**Proposición 1.1.1** (Propiedad de intercambio en las bases). Sean  $M(E)$  un matroide y  $\mathcal{B}$  el conjunto de bases de  $M$ , entonces para cualquier par de bases  $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$  se cumple: Para todo  $b_1 \in B_1 \setminus B_2$  existe  $b_2 \in B_2 \setminus B_1$  tal que  $(B_1 \setminus b_1) \cup b_2$  es una base de  $M$ .

**Proposición 1.1.2.** Sean  $M(E)$  un matroide y  $\mathcal{C}$  su conjunto de circuitos, entonces para cualquier par de circuitos  $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$  cuya intersección sea no vacía, digamos  $e \in C_1 \cap C_2$ , se cumple que existe otro circuito  $C_3 \in \mathcal{C}$  tal que  $C_3 \subset (C_1 \cup C_2) \setminus e$ .

Al igual que en muchas áreas de las matemáticas en teoría de matroides también existe el concepto de dualidad, esta noción también fue introducida por Whitney (ver [9]) en 1935. A continuación presentamos al dual de un matroide, que resulta ser también un matroide sobre el mismo conjunto base.

**Definición 1.1.3.** Sea  $M(E)$  un matroide sobre  $E$ . Definimos el matroide dual de  $M$ , denotado  $M^*$ , como el matroide cuyas bases están formadas por los complementos de las bases de  $M$ , es decir, el conjunto de bases de  $M^*$  es  $\mathcal{B}^* = \{E \setminus B \mid B \text{ es base de } M\}$ .

Cabe mencionar que antes de la definición es necesario probar que el conjunto  $\mathcal{B}^*$  es en verdad el conjunto de bases de un matroide, nuevamente se invita al lector para consultar [5], donde podrá encontrar la prueba de esta afirmación. Con la noción de dualidad en la teoría podemos hablar de las estructuras del objeto dual; sin embargo, dado que durante el estudio de matroides estas estructuras aparecen con mucha frecuencia conviene tener una terminología para dichas estructuras duales. De esta forma cuando hablemos de una estructura en el matroide dual  $M^*$ , diremos que es una co-estructura en nuestro matroide  $M$ . Por ejemplo, para un circuito  $C$  de  $M^*$ , diremos que  $C$  es un co-circuito de  $M$ , así también para bases, independientes y demás estructuras del matroide dual.

Dado un matroide  $M(E)$  y una base  $B$  de  $M$ , entonces para cualquier elemento fuera de la base, digamos  $p \in E \setminus B$ , existe un único circuito contenido en  $B \cup p$  y que contiene a  $p$ , a este circuito lo llamamos un *circuito fundamental* y lo denotamos  $cf(B, p)$ . De forma dual, para cualquier elemento en la base, digamos  $b \in B$ , existe un único co-circuito contenido en  $(E \setminus B) \cup b$  el cual se denomina *co-circuito fundamental* y se denota  $ccf(B, b)$ .

Para el desarrollo de este trabajo también necesitaremos la *función nulidad*, la cual para un matroide  $M(E)$  está definida como la función  $n : P(E) \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$  tal que para todo  $X \subset E$  satisface  $n(X) = |X| - r(X)$ . Un resultado que utilizaremos en este trabajo es que los conjuntos cerrados de un matroide forman una *retícula* con la relación de orden:  $X \leq Y$  si  $X \subset Y$ , es decir, forman un conjunto parcialmente ordenado donde para cualquier par de elementos existe el supremo e ínfimo.

Uno de los problemas más interesantes en matemáticas es el de clasificación de objetos. Para resolver el problema de clasificar matroides una herramienta muy útil es la teoría de invariantes, es decir, propiedades del objeto que se conservan bajo cierto tipo de transformaciones. En teoría de matroides decimos que dos matroides  $M(E)$  y  $N(E')$  son isomorfos si existe una biyección  $g : E \rightarrow E'$  tal que  $I$  es independiente en  $M$  si y sólo si  $g(I)$  es independiente en  $N$ , también tenemos la siguiente definición de invariante.

**Definición 1.1.4.** *Un invariante matroidal es una función  $f$  en la clase de todos los matroides tal que*

$$f(M) = f(N) \text{ si } M \cong N. \quad (1.1)$$

Existen invariantes que juegan un papel muy importante en teoría de matroides ya que estos satisfacen ciertas relaciones que nos ayudan a tener una noción de inducción en los matroides, antes de introducir estos invariantes debemos definir los *menores* de un matroide.

**Definición 1.1.5.** *Sean  $M = (E, \mathcal{I})$  un matroide,  $e \in E$  un elemento de  $M$  y  $r$  la función de rango en  $M$ .*

*Definimos  $M \setminus e = (E \setminus e, \mathcal{I}')$  como el borrado de  $e$  en el matroide  $M$ , donde  $\mathcal{I}' = \{I \in \mathcal{I} : I \subset E \setminus e\}$ .*

*Definimos  $M/e = (E \setminus e, \mathcal{I}'')$  como la contracción de  $e$  en el matroide  $M$ , donde  $\mathcal{I}'' = \{I \setminus e : e \in I \in \mathcal{I}\}$  si  $r(e) = 1$ . Si  $r(e) = 0$  se define  $M/e = M \setminus e$ .*

Puede probarse que  $M \setminus e$  y  $M/e$  son matroides definidos sobre  $E \setminus e$ , además de satisfacer  $(M \setminus e)/e' = (M/e) \setminus e'$  para cualesquiera elementos  $e, e' \in E$ . De esta forma podemos decir que dado un matroide  $M$ , un *menor* de  $M$  es un matroide  $N$  obtenido al realizar una sucesión de borrados y contracciones en  $M$ . Además de la definición de *menor* necesitamos definir dos tipos de elementos importantes en un matroide.

**Definición 1.1.6.** *Sean  $M = (E, \mathcal{I})$  un matroide y  $e \in E$  un elemento de  $M$ .*

*Decimos que  $e$  es un lazo si no pertenece a ninguna base y decimos que  $e$  es un istmo si está en toda base de  $M$ .*

Podemos ahora hablar de los invariantes que nos interesan estudiar, es fácil ver que algunos números asociados a matroides como el número de bases y el número de independientes

son invariantes. Más aún, estos invariantes satisfacen además las siguientes relaciones de recurrencia:

Para un matroide  $M$  y un elemento  $e \in M$

$$f(M) = f(M \setminus e) + f(M/e) \text{ si } e \text{ no es lazo ni istmo,} \quad (1.2)$$

$$f(M) = f(M(e))f(M \setminus e) \text{ si } e \text{ es lazo o istmo.} \quad (1.3)$$

En este trabajo nos interesan los invariantes que satisfacen las relaciones anteriores, por lo cual introducimos la siguiente definición.

**Definición 1.1.7.** *Sea  $\mathcal{K}$  una clase de matroides cerrada bajo isomorfismos y menores. Sea  $f$  una función en  $\mathcal{K}$  tal que satisface (1.1), (1.2) y (1.3) entonces a  $f$  se le llama un invariante de Tutte-Grothendieck (invariante T-G). Si además,  $f$  satisface la siguiente generalización de (1.2) para  $\sigma, \tau \in \mathbb{R}$ :*

$$f(M) = \sigma f(M \setminus e) + \tau f(M/e) \text{ si } e \text{ no es lazo ni istmo,}$$

entonces a  $f$  se le llama un invariante T-G generalizado.

## 1.2. El polinomio de Tutte

Ahora introducimos un polinomio asociado a los matroides cuyo estudio es de suma importancia pues de este polinomio se pueden obtener muchas propiedades de los matroides. El lector puede encontrar en [2] un extenso estudio de este polinomio.

**Definición 1.2.1.** *Sea  $M(E)$  un matroide con funciones de rango  $r$  y nulidad  $n$ . Definimos el polinomio generado por rango como:*

$$S(M; x, y) = \sum_{X \subset E} x^{r(E)-r(X)} y^{n(X)}.$$

**Lema 1.2.1.**  *$S(M; x, y)$  es un invariante T-G generalizado en la clase de todos los matroides.*

*Demostración.* Sea  $e$  un elemento del matroide, se tiene que:

$$S(M; x, y) = \sum_{\substack{X \subset E \\ e \notin X}} x^{r(E)-r(X)} y^{n(X)} + \sum_{\substack{X \subset E \\ e \in X}} x^{r(E)-r(X)} y^{n(X)}. \quad (1.4)$$

Consideremos el primer término del lado derecho de (1.4):

$$\sum_{\substack{X \subset E \\ e \notin X}} x^{r(E)-r(X)} y^{n(X)} = \sum_{X \subset X \setminus e} x^{r(E)-r(X)} y^{n(X)}.$$

Además,

$$r(E) = \begin{cases} r(E \setminus e) + 1 & \text{si } e \text{ es istmo,} \\ r(E) & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

De donde

$$\begin{aligned} \sum_{X \subset E \setminus e} x^{r(E)-r(X)} y^{n(X)} &= \begin{cases} x \sum_{X \subset E \setminus e} x^{r(E \setminus e)-r(X)} y^{n(X)} & \text{si } e \text{ es istmo,} \\ \sum_{X \subset E \setminus e} x^{r(E \setminus e)-r(X)} y^{n(X)} & \text{en otro caso.} \end{cases} \\ &= \begin{cases} xS(M \setminus e; x, y) & \text{si } e \text{ es istmo,} \\ S(M \setminus e; x, y) & \text{en otro caso.} \end{cases} \end{aligned}$$

Donde la última igualdad se sigue ya que las funciones de rango y nulidad de  $M \setminus e$  coinciden con las funciones en la suma.

Si  $r'$  y  $n'$  son las funciones de rango y nulidad respectivamente de  $M/e$ , entonces para todo  $Y \subset E \setminus e$  tenemos:

$$r'(Y) = \begin{cases} r(Y \cup e) & \text{si } e \text{ es lazo,} \\ r(Y \cup e) - 1 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

y

$$n'(Y) = \begin{cases} n(Y \cup e) - 1 & \text{si } e \text{ es lazo,} \\ n(Y \cup e) & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Luego, para el segundo término del lado derecho en (1.4) se cumple:

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{X \subset E \\ e \in X}} x^{r(E)-r(X)} y^{n(X)} &= \sum_{Y \subset E \setminus e} x^{r((E \setminus e) \cup e)-r(Y \cup e)} y^{n(Y \cup e)} \\ &= \begin{cases} y \sum_{Y \subset E \setminus e} x^{r'(E \setminus e)-r'(Y)} y^{n'(Y)} & \text{si } e \text{ es lazo,} \\ \sum_{Y \subset E \setminus e} x^{r'(E \setminus e)-r'(Y)} y^{n'(Y)} & \text{en otro caso.} \end{cases} \\ &= \begin{cases} yS(M/e; x, y) & \text{si } e \text{ es lazo,} \\ S(M/e; x, y) & \text{en otro caso.} \end{cases} \end{aligned}$$

De donde

$$\begin{aligned}
 S(M; x, y) &= \begin{cases} S(M \setminus e; x, y) + S(M/e; x, y) & \text{si } e \text{ no es lazo ni istmo,} \\ xS(M \setminus e; x, y) + S(M/e; x, y) & \text{si } e \text{ es istmo,} \\ S(M \setminus e; x, y) + yS(M/e; X, y) & \text{si } e \text{ es lazo.} \end{cases} \\
 &= \begin{cases} S(M \setminus e; x, y) + S(M/e; x, y) & \text{si } e \text{ no es lazo ni istmo,} \\ S(M(e); x, y)S(M \setminus e; x, y) & \text{si } e \text{ es istmo o lazo.} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Donde la última igualdad se sigue pues si  $e$  es lazo o istmo, entonces  $M \setminus e = M/e$ . Además,  $S(I; x, y) = x + 1$  y  $S(L; x, y) = y + 1$ .  $\square$

Ahora podemos definir el polinomio de Tutte de un matroide  $M$ .

**Definición 1.2.2.** *Para un matroide  $M$ , definimos su polinomio de Tutte  $T(M; x, y)$  como:*

$$T(M; x, y) = S(M; x - 1, y - 1) = \sum_{X \subset E} (x - 1)^{r(E) - r(X)} (y - 1)^{n(X)}.$$

El Lema 1.2.1 nos dice que  $T(M; x, y)$  es un invariante matroidal en la clase de todos los matroides. Más aún, el siguiente teorema nos muestra que este polinomio caracteriza a todos los invariantes que satisfacen las relaciones de recurrencia anteriores. Denotemos por  $\mathcal{M}$  a la clase de matroides bajo isomorfismo y  $\mathcal{M}'$  a la clase de matroides no vacíos.

**Teorema 1.2.1. (Brylawski, 1972)** *Existe una única función  $T$  de  $\mathcal{M}$  en el anillo de polinomios  $\mathbb{Z}[x, y]$  con las siguientes propiedades:*

- i)  $T(I; x, y) = x$  y  $T(L; x, y) = y$ ,
- ii)  $T(M; x, y) = T(M \setminus e; x, y) + T(M/e; x, y)$  si  $e$  no es lazo ni istmo,
- iii)  $T(M; x, y) = T(M(e); x, y)T(M \setminus e; x, y)$  si  $e$  es lazo o istmo.

Más aún, si  $\mathcal{R}$  es un anillo conmutativo y  $f$  es una función de  $\mathcal{M}'$  en  $\mathcal{R}$  tal que satisface (1.2) y (1.3) para todo matroide  $M(E)$  con  $|E| \geq 2$ , entonces para todo  $M \in \mathcal{M}'$  se cumple:

$$f(M) = T(M; f(I), f(L)).$$

*Demostración.* Para la existencia basta tomar  $T(M; x, y) = S(M; x - 1, y - 1)$ , la unicidad se sigue por inducción usando las relaciones de recurrencia (1.2) y (1.3). La segunda parte del teorema se sigue también por inducción.  $\square$

A continuación mencionamos algunos resultados acerca del polinomio de Tutte.

**Proposición 1.2.1.** *Para todo matroide  $M$  se tiene  $T(M^*; x, y) = T(M; y, x)$ .*

*Demostración.* Se tiene que  $r^*(X) = |X| - r(E) + r(E \setminus X)$ , además  $T(M; x, y) = S(M; x - 1, y - 1)$ , de donde

$$\begin{aligned} T(M^*; x, y) &= \sum_{X \subset E} (x - 1)^{r^*(E) - r^*(X)} (y - 1)^{n^*(X)} \\ &= \sum_{X \subset E} (x - 1)^{|E \setminus X| - r(E \setminus X)} (y - 1)^{r(E) - r(E \setminus X)} \\ &= \sum_{X \subset E} (x - 1)^{n(X)} (y - 1)^{r(E) - r(X)} \\ &= T(M; y, x). \end{aligned}$$

□

El siguiente resultado puede demostrarse por inducción utilizando las relaciones de recurrencia que definen el polinomio de Tutte.

**Teorema 1.2.2. (Oxley & Welsh, 1979)** *Sean  $\sigma$  y  $\tau$  elementos no cero de un campo  $\mathbb{F}$ . Entonces existe una única función  $T'$  de  $\mathcal{M}$  en  $\mathbb{F}[x, y]$  tal que:*

i)  $T'(I; x, y) = x$  y  $T'(L; x, y) = y$ .

ii) Si  $e$  es un elemento de  $M$  que no es lazo ni istmo, entonces

$$T'(M; x, y) = \sigma T'(M \setminus e; x, y) + \tau T'(M/e; x, y).$$

iii) Si  $e$  es un lazo o un istmo de  $M$ , entonces

$$T'(M; x, y) = T'(M(e); x, y) T'(M \setminus e; x, y).$$

Más aún, esta función está por  $T'(M; x, y) = \sigma^{|E| - r(E)} \tau^{r(E)} T(M; x/\sigma, y/\tau)$ .

Este resultado es una generalización del resultado original de Brylawski en 1972, además, nos da razones para tener la siguiente definición.

**Definición 1.2.3.** *Una función  $f$  de  $\mathcal{M}$  en un conjunto  $\Omega$  se llama un invariante de Tutte si para cualesquiera matroides  $M_1$  y  $M_2$ ,  $T(M_1; x, y) = T(M_2; x, y)$  implica  $f(M_1) = f(M_2)$ .*

Podemos ver que todos los invariantes  $T$ - $G$  generalizados son invariantes de Tutte. Algunos ejemplos sencillos son  $r(M)$ ,  $n(M)$  y  $|E|$ . Pues  $r(M)$  es la potencia más grande de  $x$  que aparece en el  $T(M; x, y)$ ,  $n(M)$  es la potencia más grande de  $y$  que aparece en  $T(M; x, y)$  y  $|E| = r(M) + n(M)$ . La siguiente proposición nos da otros ejemplos de invariantes de Tutte, además de una fórmula explícita de como encontrarlos si conocemos  $T(M; x, y)$ , una prueba puede encontrarse en [2].

**Proposición 1.2.2.** *Denotemos por  $b(M)$ ,  $i(M)$  y  $s(M)$  el número de bases, conjuntos independientes y conjuntos generadores de  $M$  respectivamente. Para todo matroide  $M$  se tiene:*

$$i) \quad b(M) = T(M; 1, 1),$$

$$ii) \quad i(M) = T(M; 2, 1),$$

$$iii) \quad s(M) = T(M; 1, 2) \text{ y}$$

$$iv) \quad 2^{|E|} = T(M; 2, 2).$$

### 1.3. El invariante de Möbius

En esta sección introducimos una teoría general de la función de Möbius, que se puede definir de forma general en conjuntos parcialmente ordenados, por ejemplo, la retícula de cerrados asociada a un matroide, el lector puede consultar [10] para conocer más sobre esta teoría.

**Definición 1.3.1.** *Sea  $P$  un conjunto finito parcialmente ordenado. Definimos la función de Möbius de  $P$  como la función  $\mu : P \times P \rightarrow \mathbb{Z}$  tal que*

$$\sum_{x \leq y \leq z} \mu(x, y) = \delta(x, z) \text{ si } x \leq z \tag{1.5}$$

y

$$\mu(x, z) = 0 \text{ si } x \not\leq z,$$

donde  $\delta$  es la función de Kronecker.

Podemos ver que la función  $\mu$  de  $P$  existe y además es única, dado que podemos sustituir (1.5) en la definición por las siguientes ecuaciones:

i)  $\mu(x, x) = 1$  y

ii)  $\mu(x, z) = -\sum_{x \leq y < z} \mu(x, y)$  si  $x < z$ .

Estas ecuaciones nos dan un método para calcular  $\mu(x, z)$  de forma recursiva, si  $x = z$  el valor es 1, en otro caso usamos inducción sobre la longitud de la cadena más larga entre  $x$  y  $z$ . Más aún, esta forma de calcular  $\mu$  nos dice que el valor de  $\mu(x, z)$  sólo depende de la estructura de orden en el intervalo  $[x, z]$  y no del resto de  $P$ .

Otra forma de introducir la función de Möbius de  $P$  es considerando el álgebra incidencial  $I(P)$  en el conjunto de todas las funciones  $\Phi : P \times P \rightarrow \mathbb{Z}$  tal que

$$\Phi(x, z) = 0 \text{ si } x \not\leq z.$$

Con suma puntual y producto convolución

$$(\Phi * \Psi)(x, z) = \sum_{x \leq y \leq z} \Phi(x, y)\Psi(y, z).$$

Este producto convolución puede verse como multiplicación de matrices de la siguiente forma: Extendemos el orden  $\leq_P$  de  $P$  a un orden lineal en  $P$ , es decir,  $p_i <_P p_j$  implica  $i < j$ . Luego, toda función de incidencia está representada por una única matriz de tamaño  $|P| \times |P|$ , además todas las matrices obtenidas de funciones tienen la forma:

$$\begin{pmatrix} \Phi(p_1, p_1) & \Phi(p_1, p_2) & \dots & \Phi(p_1, p_n) \\ 0 & \Phi(p_2, p_2) & \dots & \Phi(p_2, p_n) \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \Phi(p_n, p_n) \end{pmatrix}$$

Ahora la convolución de funciones de incidencia es el producto de sus matrices asociadas. De donde se obtiene que la convolución es asociativa y además la  $\delta$  de Kronecker es la identidad. Más aún, toda función de incidencia con  $\Phi(x, x) = 1$  para todo  $x \in P$  es invertible. Definimos la función de incidencia  $\zeta$  dada por

$$\zeta(x, z) = 1 \text{ si } x \leq z.$$

Ahora podemos definir la función  $\mu$  como la inversa izquierda de  $\zeta$ , es decir,

$$\delta(x, z) = (\mu * \zeta)(x, z) = \sum_{x \leq y \leq z} \mu(x, y)\zeta(y, z) = \sum_{x \leq y \leq z} \mu(x, y).$$

Las igualdades anteriores nos dicen que la definición anterior coincide con la definición mediante el álgebra incidencial. A continuación presentamos un teorema que tiene muchas aplicaciones en distintas ramas de las matemáticas, además de ser una generalización de su homónimo en teoría de números.

**Teorema 1.3.1. (Inversión de Möbius)** *Sea  $P$  un conjunto finito parcialmente ordenado. Sean  $f$  y  $g$  funciones en  $P$  con valores en un anillo. Entonces*

$$g(x) = \sum_{y \geq x} f(y) \Leftrightarrow f(x) = \sum_{y \geq x} \mu(x, y)g(y)$$

y

$$g(y) = \sum_{x \leq y} f(x) \Leftrightarrow f(y) = \sum_{x \leq y} \mu(x, y)g(x).$$

*Demostración.* Para una función de incidencia  $\Phi$  denotemos a su matriz asociada como  $M^\Phi$ . Sea  $L : x_1 < \dots < x_n$  la extensión lineal de  $P$  usada para construir  $I(P)$  y sean  $v^f = [f(x_1), \dots, f(x_n)]$  y  $v^g = [g(x_1), \dots, g(x_n)]$ , luego

$$\begin{aligned} \forall y \in P : g(y) = \sum_{x \leq y} f(x) &\Leftrightarrow \forall y \in P : g(y) = \sum_{x \in P} f(x)\zeta(x, y) \\ &\Leftrightarrow v^g = v^f M^\zeta \\ &\Leftrightarrow v^f = v^g (M^\zeta)^{-1} \\ &\Leftrightarrow v^f = v^g M^\mu \\ &\Leftrightarrow \forall y \in P : f(y) = \sum_{x \in P} g(x)\mu(x, y) \\ &\Leftrightarrow \forall y \in P : f(y) = \sum_{x \leq y} g(x)\mu(x, y). \end{aligned}$$

□

Con la teoría general desarrollada podemos trasladar la función de Möbius a la teoría de matroides.

**Definición 1.3.2.** *Para un matroide  $M(E)$  con retícula de cerrados  $L = L(M)$  denotamos por  $\mu_L$  a la función de Möbius asociada y definimos el invariante de Möbius de  $M$  como  $\mu(M) = \mu_L(0, 1)$ .*

Además, podemos extender la función de Möbius de la siguiente forma:

$$\mu_M(X, F) = \mu_L(X, F) \text{ si } X, F \in L,$$

$$\mu_M(X, F) = 0 \text{ si } X \notin L, F \in L.$$

El siguiente resultado será útil para probar en la siguiente sección que el invariante de Möbius es un invariante de Tutte.

**Teorema 1.3.2.** *Sea  $M = M(E)$  un matroide con retícula de cerrados  $L$  y función de cerradura  $Cl(\cdot)$ . Sean  $W \subset E$  y  $F \in L$ , entonces*

$$\sum_{\substack{X \subset E \\ Cl(X)=F}} \mu(W, X) = \mu_M(W, F),$$

donde  $\mu$  es la función de Möbius asociada al conjunto potencia de  $E$  ordenado por contención.

*Demostración.* Tenemos que

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{X \subset E \\ Cl(X)=F}} \mu(W, X) &= \sum_X \mu(W, X) \delta(Cl(X), F), \\ &= \sum_{X, Y \in L} \mu(W, X) \zeta(Cl(X), Y) \mu_M(Y, F), \\ &= \sum_{X, Y \in L} \mu(W, X) \zeta(X, Y) \mu_M(Y, F), \text{ (pues } X \leq Y \Leftrightarrow Cl(X) \leq Y) \\ &= \sum_{Y \in L} \delta(W, Y) \mu_M(Y, F) = \mu_M(W, F). \end{aligned}$$

□

En general, para cualquier conjunto potencia ordenado por contención su función de Möbius es de la forma  $\mu(X, Y) = (-1)^{|Y \setminus X|}$  para  $X \subset Y$ . Esta observación junto con el teorema anterior nos permite tener la siguiente igualdad que se denomina la *Fórmula de Expansión Booleana* de la función de Möbius, para  $W \subset E$  y  $F \in L$  se cumple:

$$\mu_M(W, F) = \sum_{\substack{W \subset X \subset F \\ Cl(X)=F}} (-1)^{|X \setminus W|}. \quad (1.6)$$

## 1.4. El polinomio característico

El polinomio característico de un matroide es el análogo al polinomio cromático de una gráfica. A pesar de que en un matroide no tenemos la noción de coloración por vértices, el polinomio característico conserva muchas propiedades algebraicas del polinomio cromático.

**Definición 1.4.1.** Sea  $M(E)$  un matroide con función de rango  $r$  y sea  $L$  su retícula de cerrados. Definimos el polinomio característico de  $M$  como:

$$\psi(M; \lambda) = \sum_{F \in L} \mu_M(\emptyset, F) \lambda^{r(M) - r(F)}.$$

Podemos ver que  $\psi(M; \lambda)$  es mónico de grado  $r(M)$  si  $\emptyset \in L$ . En otro caso  $\psi(M; \lambda) \equiv 0$ . Además, podemos ver que  $\mu(M) = \psi(M; 0)$ , de donde muchas propiedades del invariante de Möbius pueden ser obtenidas a través de  $\psi(M; \lambda)$ . Sustituyendo la *Fórmula de Expansión Booleana* (1.6) en la definición del polinomio característico obtenemos la siguiente expresión equivalente de este polinomio.

$$\psi(M; \lambda) = \sum_{X \subset E} (-1)^{|X|} \lambda^{r(M) - r(X)}.$$

Con ayuda de esta expresión podemos probar el siguiente resultado.

**Proposición 1.4.1.** El polinomio característico de un matroide  $M(E)$  satisface

i) *Propiedad de contracción y borrado.* Si  $e$  no es un istmo de  $M$ , entonces

$$\psi(M; \lambda) = \psi(M \setminus e; \lambda) - \psi(M/e; \lambda).$$

ii) *Propiedad de la suma directa.* Si  $M = M_1 \oplus M_2$ , entonces

$$\psi(M; \lambda) = \psi(M_1; \lambda) \psi(M_2; \lambda).$$

*Demostración.* i) Si  $e$  no es istmo, entonces

$$\begin{aligned} \psi(M; \lambda) &= \sum_{X \subset E} (-1)^{|X|} \lambda^{r(M) - r(X)}, \\ &= \sum_{X \subset E \setminus e} (-1)^{|X|} \lambda^{r(M) - r(X)} - \sum_{\substack{X \subset E \\ e \in X}} (-1)^{|X \setminus e|} \lambda^{r(M/e) - r(X \setminus e)}, \\ &= \psi(M - e; \lambda) - \psi(M/e; \lambda). \end{aligned}$$

ii) Si  $M_1$  y  $M_2$  son matroides sobre los conjuntos disjuntos  $E_1$  y  $E_2$  respectivamente, tenemos

$$\begin{aligned}\psi(M; \lambda) &= \sum_{X \subset E} (-1)^{|X|} \lambda^{r(M)-r(X)}, \\ &= \sum_{\substack{X_1 \subset E_1 \\ X_2 \subset E_2}} (-1)^{|X_1|} (-1)^{|X_2|} \lambda^{r(M_1)+r(M_2)-r(X_1)-r(X_2)}, \\ &= \psi(M_1; \lambda) \psi(M_2; \lambda).\end{aligned}$$

□

Esta proposición junto con el teorema (1.2.2), nos dice que  $\psi(M; \lambda)$  es un invariante T-G generalizado y más aún, nos da una fórmula explícita de él:

$$\psi(M; \lambda) = (-1)^{r(M)} T(M; 1 - \lambda, 0).$$

Esta última relación implica que  $\mu(M) = (-1)^{r(M)} T(M; 1, 0)$ , de donde el invariante de Möbius es también un invariante de Tutte.

## 1.5. El h-vector de un matroide

El siguiente invariante en la teoría de complejos simpliciales será útil en el segundo capítulo, el lector interesado puede ver las pruebas de los resultados que aquí aparecen en [1], además de otras propiedades asociadas a estos invariantes. Comenzamos con definiciones necesarias para el desarrollo de la teoría.

**Definición 1.5.1.** *Un complejo simplicial  $\Delta$  sobre un conjunto de vértices  $V = \{x_1, \dots, x_n\}$  es una colección de subconjuntos de  $V$  tal que*

- i)  $\{x_i\} \in \Delta$  para todo  $i$ .
- ii) Si  $F \in \Delta$  y  $F' \subset F$ , entonces  $F' \in \Delta$ .

Los conjuntos en  $\Delta$  se llaman caras y su dimensión es  $i$  si tienen  $i + 1$  elementos, las caras maximales de un complejo simplicial se llaman facetas y la dimensión de  $\Delta$ , denotada  $\dim(\Delta)$ , es el máximo entre las dimensiones de sus caras. Para un complejo simplicial  $\Delta$  definimos su numerador de caras como el polinomio

$$f_{\Delta}(x) = \sum_{i=0}^d f_i x^{d-i}$$

donde  $f_i$  es el número de caras con  $i$  elementos, es decir, de dimensión  $i - 1$ . Cuando todas las facetas de  $\Delta$  tienen el mismo número de elementos, decimos que  $\Delta$  es puro. Es conveniente definir subestructuras, para esto, fijamos un orden lineal en el conjunto de facetas de  $\Delta$ , digamos  $F_1, \dots, F_t$ ; definimos el subcomplejo simplicial  $\Delta_j$  como el conjunto de todas las caras en  $\Delta$  contenidas en alguna faceta  $F_i$  para algún  $i \leq j$ . Para un complejo simplicial puro  $\Delta$ , un enconchado es un orden lineal en sus facetas de tal forma que cada careta  $F_j$  interseca al complejo generado por sus predecesores  $\Delta_{j-1}$  en una unión no vacía de caras maximales propias. De manera formal, un enconchado es un orden lineal  $F_1, \dots, F_t$  de tal forma que para cada par de caretas  $F_i, F_j$  con  $1 \leq i < j \leq t$  existe una careta  $F_k$  con  $1 \leq k < j$  y un elemento  $x \in F_j$  tales que  $F_i \cap F_j \subset F_k \cap F_j = F_j \setminus x$ . De esta forma decimos que un complejo es enconchable si admite un enconchado. La idea intuitiva de un enconchado es que podemos construir el complejo  $d$ -dimensional  $\Delta$  paso a paso introduciendo una careta a la vez, de tal forma que se pegue al complejo previamente construido y que la intersección sea topológicamente una bola  $d - 1$ - dimensional. Para  $1 \leq l \leq t$  definimos el conjunto  $R(F_l) = \{x \in F_l : F_l \setminus x \in \Delta_{l-1}\}$ , donde por convención  $\Delta_0 = \emptyset$ ; de forma intuitiva, cuando la careta  $F_i$  es agregada al complejo  $\Delta_{i-1}$  en el proceso de enconchado,  $R(F_i)$  es la única cara minimal de  $F_i$  que es “nueva” en  $\Delta_i$ , es decir, que está en  $\Delta_i \setminus \Delta_{i-1}$ . Asociado al enconchado de un complejo  $\Delta$  tenemos el *polinomio de enconchado*  $h_\Delta(x)$  definido como

$$h_\Delta(x) = \sum_{i=1}^t x^{|F_i \setminus R(F_i)|}. \quad (1.7)$$

Con el polinomio de enconchado podemos definir el  $h$ -vector de un complejo simplicial.

**Definición 1.5.2.** *Sea  $\Delta$  un complejo simplicial, definimos su  $h$ -vector como la sucesión  $(h_0, h_1, \dots)$  donde  $h_i$  es el coeficiente que acompaña a  $x^i$  en el polinomio de enconchado  $h_\Delta(x)$ .*

A continuación presentamos algunos resultados cuyas demostraciones puede verse en [1]. El primer resultado nos dice que existe una relación entre el polinomio de enconchado y el polinomio numerador de caras.

$$h_\Delta(1 + x) = f_\Delta(x). \quad (1.8)$$

Más aún, esta relación nos dice que el  $h$ -vector no depende del enconchado, pues el polinomio numerador de caras sólo depende de las caras y no de ningún orden.

Ahora estamos en condiciones de pasar a la teoría de matroides, dado un matroide  $M(E)$ , el conjunto de independientes del matroide forma un complejo simplicial de dimensión  $r(M)-1$  y lo denotamos por  $\Delta(M)$ , estos complejos simpliciales son llamados complejos matroidales y es fácil ver que todos son puros, además, puede mostrarse que todo complejo matroidal es enconchable.

Por un matroide ordenado  $M(E, \omega)$  nos referimos a un matroide  $M(E)$  junto con un orden lineal  $\omega$  del conjunto base  $E$ . Denotemos por  $[x_1, \dots, x_k]$  a una  $k$ -tupla ordenada bajo  $\omega$  y, dotemos al conjunto de  $k$ -tuplas del orden lexicográfico, con este orden podemos hablar de un orden en el conjunto de bases de un matroide ordenado. A continuación presentaremos algunos resultados que nos servirán para probar el resultado principal de esta sección, a saber, el polinomio de enconchado es un invariante de Tutte.

**Lema 1.5.1.** *Sean  $M(E)$  un matroide,  $B$  una base de  $M$  y  $p \in E \setminus B$  un elemento que no está en  $B$ . Entonces las siguientes son equivalentes.*

**a)**  $b \in cf(B, p)$ .

**b)**  $(B \setminus b) \cup p$  es una base.

**c)**  $p \in ccf(B, b)$ .

*Demostración.* Veamos primero que **a)** implica **b)**. Falta verificar que  $(B \setminus b) \cup p$  es independiente, pues tiene el mismo número de elementos que una base. Supongamos que no es el caso, luego existe un circuito en  $(B \setminus b) \cup p$ , digamos  $C$ . Además, este circuito no puede estar contenido completamente en  $B \setminus b$  pues este conjunto es independiente, de donde  $p \in C$ . Ahora tenemos que  $p \in cf(B, p) \cap C$ , pero esto implica que existe un circuito  $C' \subset (cf(B, p) \cup C) \setminus p \subset B \setminus b$ , contradiciendo el hecho de que este último es independiente.

Para ver que **b)** implica **a)** basta observar que  $((B \setminus b) \cup p) \cup b = B \cup p$  es dependiente, más aún, el único circuito que está contenido en  $B \cup p$  es  $C = cf(B, p)$ . Si  $b \notin C$ , entonces  $C \subset (B \setminus b) \cup p$  contradiciendo el hecho de que es base.

La equivalencia de **b)** y **c)** se sigue por dualidad y usando los argumentos anteriores.  $\square$

**Lema 1.5.2.** *Sea  $M(E, \omega)$  un matroide ordenado. Supongamos que  $B$  precede a la base  $C$  con el orden lexicográfico. Entonces  $B \cap C \subset A \cap C$  para alguna base  $A$  que también precede a  $C$  y es tal que  $|A \cap C| = |C| - 1$ .*

*Demostración.* Sean  $B = [b_1, \dots, b_r]$ ,  $C = [c_1, \dots, c_r]$  y supongamos que  $b_i = c_i$  para  $i = 1, \dots, e-1$ , y  $b_e \neq c_e$ . Entonces  $b_e < c_i$  para  $i = e, e+1, \dots, r$ . Por la propiedad de intercambio en las bases de un matroide existe un elemento  $y \in C \setminus B$  tal que  $A_1 = (C \setminus y) \cup b_e$  es una base. Basta tomar  $A = A_1$  para obtener el resultado.  $\square$

Este último resultado es equivalente al siguiente teorema, la equivalencia se sigue dado que siempre es posible encontrar la base  $A$  que menciona el resultado anterior cuya intersección con el complejo construido hasta ese paso es 1 menos que la cardinalidad de cualquier base, es decir, siempre puede encontrarse un orden de las bases para formar un enconchado del complejo.

**Teorema 1.5.1.** *Sea  $M(E, \omega)$  un matroide ordenado. Si dotamos a las bases de  $M$  con el orden lineal heredado del orden lexicográfico, entonces este orden es un enconchado del complejo matroidal  $\Delta(M)$ , en particular, todos los complejos matroidales son enconchables.*

Continuamos desarrollando las herramientas necesarias para obtener el resultado principal de esta sección, que relaciona el polinomio de enconchado de un complejo matroidal con el polinomio de Tutte del matroide. Sea  $M(E, \omega)$  un matroide ordenado y  $B$  una base de  $M$ . Un elemento  $p \in E \setminus B$  se dice *externamente activo en  $B$*  si  $p$  es el menor elemento en el circuito fundamental  $cf(B, p)$ , en otro caso  $p$  se dice que es *externamente pasivo en  $B$* . De forma dual, un elemento  $p \in B$  se dice *internamente activo en  $B$*  si  $p$  es el menor elemento en el co-circuito fundamental  $ccf(B, p)$ , en otro caso se dice que es *internamente pasivo en  $B$* . Denotemos por  $EA(B)$ ,  $EP(B)$ ,  $IA(B)$  e  $IP(B)$  a los conjuntos de elementos externamente activos, externamente pasivos, internamente activos e internamente pasivos en  $B$ , llamamos al número  $i(B) = |IA(B)|$  la *actividad interna de  $B$*  y a  $e(B) = |EA(B)|$  la *actividad externa de  $B$* . El lema 1.5.1 nos dice que si  $B$  es una base y  $b \in B$ , entonces  $B \setminus b$  está contenido en una base que precede a  $B$  si y sólo si  $b$  es internamente pasivo en  $B$ , de donde

$$R(B) = IP(B).$$

Luego, el polinomio de enconchado del complejo matroidal  $\Delta(M)$  es igual a

$$h_{\Delta}(x) = \sum_B x^{|B \setminus R(B)|} = \sum_B x^{|IA(B)|} = \sum_B x^{i(B)}.$$

Dualmente, el polinomio de enconchado para el complejo matroidal  $\Delta(M^*)$  es igual a

$$h_{\Delta^*}(y) = \sum_B y^{e(B)}.$$

Donde en ambos casos las sumas son sobre todas las bases del matroide  $M$ . Podemos ahora dar otra definición del polinomio de Tutte  $T(x, y)$  del matroide  $M$  como:

$$T_M(x, y) = \sum_B x^{i(B)} y^{e(B)}.$$

Veamos que esta definición coincide con la que dimos anteriormente, para esto necesitamos el siguiente resultado técnico cuya demostración aparece en [1].

**Proposición 1.5.1.** *Sea  $M(E, \omega)$  un matroide ordenado. Entonces la familia de intervalos  $[IP(B), E \setminus EP(B)]$ , uno por cada base  $B$  de  $M$ , particionan el álgebra Booleana de subconjuntos de  $E$ .*

El siguiente resultado nos dice que nuestras definiciones del polinomio de Tutte coinciden.

**Teorema 1.5.2.** *Sea  $M(E, \omega)$  un matroide ordenado con polinomio de Tutte  $T_M(x, y)$ . Entonces se cumple*

$$T_M(1+x, 1+y) = \sum_{A \subseteq E} x^{r(E)-r(A)} y^{r^*(E)-r^*(E \setminus A)},$$

donde  $r$  y  $r^*$  denotan las funciones de rango de  $M$  y  $M^*$  respectivamente.

*Demostración.* Sea  $B$  una base de  $M$  y supongamos que  $IP(B) \subset A \subset E \setminus EP(B)$ . Podemos observar que  $EA(B)$  está contenida en la cerradura de  $IP(B)$ , de donde  $r(A) = |A \cap B|$  y así  $r(E) - r(A) = |B \setminus A|$ . Dualmente,  $r^*(E) - r^*(E \setminus A) = |(E \setminus B) \setminus (E \setminus A)| = |A \setminus B|$ . Luego, utilizando la proposición 1.5.1 obtenemos

$$\begin{aligned} \sum_{A \subseteq E} x^{r(E)-r(A)} y^{r^*(E)-r^*(E \setminus A)} &= \sum_{B \text{ base}} \sum_{IP(B) \subset A \subseteq E \setminus EP(B)} x^{|B \setminus A|} y^{|A \setminus B|}, \\ &= \sum_{B \text{ base}} \sum_{j,k=0}^{\infty} \binom{i(B)}{j} \binom{e(B)}{k} x^j y^k, \\ &= \sum_{B \text{ base}} (1+x)^{i(B)} (1+y)^{e(B)}, \\ &= T_M(1+x, 1+y). \end{aligned}$$

□

Más aún, usando la segunda definición del polinomio de Tutte es claro que el polinomio de enconchado es una evaluación del polinomio de Tutte, y por lo tanto es un invariante de Tutte. A saber, tenemos el siguiente teorema que es el resultado principal de esta sección.

**Teorema 1.5.3.** *Sea  $M$  un matroide y  $\Delta = \Delta(M)$  su complejo matroidal asociado. Entonces*

$$h_{\Delta}(x) = T(M; x, 1). \quad (1.9)$$



## Capítulo 2

# Planteamiento del problema

### 2.1. Multicomplejos y conjeturas

En este capítulo introducimos un problema planteado por Stanley en 1977, así como un resultado parcial sobre este problema, que a su vez da pie al estudio de otros problemas y con esto introducimos la nueva conjetura MNRV, esta última es la que nos interesa en este trabajo. Antes de presentar las primeras definiciones vamos a acordar la terminología que usaremos en el resto del presente trabajo. Para números enteros  $p, q$  denotamos su máximo común divisor por  $(p, q)$ .

Las relación de orden que utilizamos para monomios es la usual, es decir, decimos que  $m' \leq m$  si  $m'|m$ . Por los modelos que utilizaremos para los resultados principales diremos que un monomio  $m$  cubre a  $m'$  si  $m'|m$ , de forma análoga diremos que un conjunto de monomios  $M$  cubre a  $M'$  si cualquier monomio en  $M'$  es cubierto por al menos un monomio en  $M$ . Con la terminología acordada comenzamos con las definiciones.

**Definición 2.1.1.** *Un conjunto no vacío de monomios  $M$  es un multicomplejo si siempre que  $m \in M$  y  $m'|m$ , entonces  $m' \in M$ . Un multicomplejo  $M$  se dice puro si todos sus elementos maximales son del mismo grado.*

**Definición 2.1.2.** *Una sucesión  $h = (h_1, h_2, \dots)$  de enteros es una  $O$ -sucesión si existe un multicomplejo que contiene exactamente  $h_i$  monomios de grado  $i$ . Una  $O$ -sucesión es pura si el multicomplejo asociado es puro.*

El problema que plantea Stanley es el siguiente (véase [7]).

**Conjetura 2.1.1.** (*Stanley, 1977*) *El  $h$ -vector de un complejo matroidal es una  $O$ -sucesión pura.*

La relación (1.9) en el capítulo anterior nos muestra la importancia de estudiar los invariantes de Tutte para poder analizar este problema.

Sobre la conjetura (2.1.1) se conocen algunos resultados parciales, uno de los más significativos puede encontrarse en [4], pues se demuestra la conjetura para los matroides de empedrado, los cuales se presume ser una clase muy grande de matroides.

**Definición 2.1.3.** *Un matroide  $M(E)$  se dice que es de empedrado si todos sus circuitos tienen cardinalidad al menos  $r(M)$ .*

En [4] puede encontrarse la prueba del siguiente resultado.

**Teorema 2.1.1.** *El  $h$ -vector de un complejo matroidal de un matroide de empedrado es una  $O$ -sucesión pura.*

La técnica para probar el teorema anterior es estudiar los multicomplejos, pues el  $h$ -vector de un matroide de empedrado es fácil de calcular. Por esta razón se introduce el multicomplejo  $\mathcal{M}_{r,d}$  que es tal que sus elementos maximales son todos los monomios de grado  $r$  en las  $d$  variables  $x_0, \dots, x_{d-1}$ . Una función que surge durante la investigación de los multicomplejos es la siguiente:

$$f(r, d) = \min\{h_r \mid (h_0, \dots, h_r) \text{ es la } O\text{-sucesión pura de } \mathcal{M} \supset \mathcal{M}_{r-1,d}\}.$$

Es decir,  $f(r, d)$  es el mínimo número de monomios de grado  $r$  que son necesarios para que un multicomplejo puro con monomios de grado a lo más  $r$  contenga a todos los monomios de grado  $r - 1$  en las  $d$  variables  $x_0, \dots, x_{d-1}$ . El cálculo de esta función es un problema muy interesante, sin embargo, complicado. El problema de encontrar el conjunto mínimo que satisfaga la función  $f(r, d)$  puede atacarse introduciendo una familia de gráficas  $G_{r,d}$  cuyos vértices son todos los monomios de grado  $r$  en las  $d$  variables  $x_0, \dots, x_{d-1}$  y existe una arista entre dos monomios  $m$  y  $m'$  si  $m = \frac{x_i}{x_j} m'$  para  $i \neq j$ . Para la gráfica  $G_{r,d}$  definimos la coloración estándar  $\rho_{r,d}$  que asigna al monomio  $x_0^{t_0}, \dots, x_{d-1}^{t_{d-1}}$  el color  $0(t_0) + \dots + (d-1)t_{d-1} \pmod{d}$ . Además, para esta coloración se define la función  $\bar{f}(r, d)$  a ser el tamaño de la clase cromáticas más pequeña en  $\rho_{r,d}$ . En [4] puede encontrarse un estudio de esta función y la coloración  $\rho_{r,d}$ , más

aún, es aquí donde se plantea la siguiente conjetura que es el problema que se investiga en este trabajo.

**Conjetura 2.1.2.** *Merino, Noble, Ramírez y Villarroel (MNRV).*

$$f(r, d) = L_2(r, d) = \bar{f}(r, d).$$

Donde  $L_2(r, d)$  es el número de collares binarios aperiódicos con  $r$  perlas blancas y  $d$  negras, una fórmula explícita para estos collares se demuestra a continuación.

**Proposición 2.1.1.**  $L_2(r, d) = \frac{1}{r+d} \sum_{k|(r+d, d)} \mu(k) \binom{r+d/k}{d/k}$ , donde  $\mu$  es la bien conocida función de Möbius en los naturales.

*Demostración.* Para  $r, d$  fijos, sea  $P$  la retícula de divisores de  $(r, d)$  y sea  $n = r + d$ . Definimos las funciones  $f_{r,d}$  y  $g_{r,d}$  en  $P$  dadas por

$$f_{r,d}(z) = \frac{n}{z} L_2\left(\frac{r}{z}, \frac{d}{z}\right)$$

y

$$g_{r,d}(z) = \binom{n/z}{d/z}.$$

El total de configuraciones de arreglos circulares binarios de longitud  $n$  con  $r$  perlas blancas y  $d$  negras está dado por  $\binom{n}{d}$ . Además, cada una de estas configuraciones tiene un periodo mínimo, digamos  $n/z$  donde  $z|(n, d)$ , las perlas en este periodo corresponden a configuraciones aperiódicas, y contribuyen  $n/z$  veces en el número de configuraciones. Más aún, toda configuración se obtiene de esta forma, luego, dado que  $L_2(x, y)$  denota el número de collares binarios aperiódicos de longitud  $x + y$  con  $x$  perlas blancas y  $y$  negras, tenemos la siguiente igualdad.

$$\binom{n}{d} = \sum_{k|(n, d)} \frac{n}{k} L_2\left(\frac{r}{k}, \frac{d}{k}\right).$$

Equivalentemente, en  $P$  tenemos la relación

$$g_{r,d}(1) = \sum_{y \geq 1} f_{r,d}(y).$$

Por el teorema (1.3.1) de inversión de Möbius tenemos

$$f_{r,d}(1) = \sum_{y \geq 1} \mu_P(1, y) g_{r,d}(y).$$

Notando que  $\mu_P(1, y) = \mu(y)$  tenemos la relación

$$(r + d)L_2(r + d, d) = \sum_{k|(r+d,d)} \mu(k) \binom{r + d/k}{d/k}.$$

□

Si  $L_2(n)$  denota el número de collares binarios aperiódicos de longitud  $n$ , un argumento similar al de la prueba anterior nos dice

$$2^n = \sum_{k|n} \frac{n}{k} L_2\left(\frac{n}{k}\right).$$

Por el teorema de inversión de Möbius en la retícula de divisores de  $n$ , tenemos

$$nL_2(n) = \sum_{k|n} \mu(k) 2^{n/k}.$$

El lector interesado puede consultar en [8] las fórmulas de collares binarios de longitud  $n$  y los collares binarios de longitud  $n$  con  $r$  perlas blancas y  $d = n - r$  negras, que respectivamente están dadas por

$$N_2(n) = \frac{1}{n} \sum_{k|n} \phi(k) 2^{n/k}$$

y

$$N_2(n, d) = \frac{1}{n} \sum_{k|(n,d)} \phi(k) \binom{n/k}{d/k},$$

donde  $\phi(k)$  es la conocida función de Euler en los naturales.

## 2.2. Prueba parcial de la conjetura MNRV

Con la fórmula obtenida en la sección anterior para  $L_2(r, d)$  podemos ver que la segunda igualdad de la conjetura MNRV (2.1.2) es cierta. En este punto debemos hacer un reconocimiento y un agradecimiento a *Tristram Bogart* por habernos comentado acerca del artículo [3] donde se da una fórmula explícita para el número  $a_k(n, m)$  de soluciones del sistema

$$\sum_{j=0}^{n-1} j\lambda_j \equiv k \pmod{n}; \quad \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i = m; \quad (2.1)$$

donde  $k$  y  $\lambda_i$  son enteros no negativos.

Antes de enunciar el resultado principal de esta sección damos la notación que utilizaremos. Denotamos por  $p(N, M, s)$  el número de particiones de  $s$  en a lo más  $M$  partes cada una de estas de tamaño a lo más  $N$ , donde  $N, M$  y  $s$  son números enteros no negativos. Con esta notación podemos definir lo que se conoce como polinomio de Gauss, a saber, es la siguiente función generatriz:

$$G(N, M; t) = \sum_s p(N, M, s)t^s.$$

Observamos que esta función es un polinomio en  $t$ , pues para valores de  $s > NM$  tenemos que  $p(N, M, s) = 0$ .

También necesitamos la suma de Ramanujan  $c_n(k)$ , es decir, la suma de las  $k$ -ésimas potencias de las  $n$ -ésimas raíces primitivas de la unidad. Antes de proseguir tenemos un resultado técnico que utilizaremos más adelante.

**Proposición 2.2.1.** *Para todo  $n > 0$  y todo  $k \neq 0$  se cumple:*

$$c_n(k) = \sum_{d|(n,k)} \mu(n/d)d.$$

*En particular se cumple que  $c_n(-k) = c_n(k)$  y además  $c_n(1) = \mu(n)$ .*

*Demostración.* Definimos  $\eta_n(k)$  como la suma de las  $k$ -ésimas potencias de todas las raíces  $n$ -ésimas de la unidad, es decir,

$$\eta_n(k) = \sum_{j=1}^n \zeta_n^{jk}, \text{ donde } \zeta_n = e^{\frac{2\pi i}{n}}.$$

Luego, dado que las sumas de Ramanujan sólo consideran raíces primitivas, tenemos la siguiente igualdad:

$$\eta_n(k) = \sum_{d|n} c_d(k).$$

Usando el teorema de inversión de Möbius para números naturales tenemos

$$c_n(k) = \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right)\eta_d(k).$$

De donde

$$c_n(k) = \sum_{d|(n,k)} \mu(n/d)d.$$

Pues utilizando la fórmula  $1 - x^n = (1 - x)(1 + x + \dots + x^{n-1})$  se demuestra que

$$\eta_n(k) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \nmid k, \\ n & \text{si } n \mid k. \end{cases}$$

□

Presentamos ahora el teorema principal de esta sección, en cual aparece en [3]. Este teorema nos da las herramientas necesarias para probar la segunda igualdad de la conjetura MNRV (2.1.2).

**Teorema 2.2.1.** *Para todos los enteros  $k, n, m \geq 0$  se cumple*

$$a_k(n, m) = \frac{1}{n + m} \sum_{d|(n, m)} c_d(k) \binom{n/d + m/d}{n/d}.$$

En particular  $a_k(n, m) = a_k(m, n)$ .

*Demostración.* Dado que  $a_k(n, m)$  denota el número de soluciones del sistema (2.1), podemos contar cada solución por su valor en la suma  $\sum j\lambda_j$  antes de tomar el módulo, más aún, la segunda restricción para las soluciones nos dice que cada solución del sistema puede verse como una partición del número  $\sum j\lambda_j$  en a lo más  $m$  partes pues  $0 \leq \lambda_i \leq m$  y cada parte con tamaño a lo más  $n - 1$ , de donde tenemos la siguiente igualdad.

$$a_k(n, m) = \sum_j p(n - 1, m, jn + k). \quad (2.2)$$

Es decir, la ecuación anterior nos dice que  $a_k(n, m)$  es la suma de los coeficientes del polinomio de Gauss  $G(n - 1, m; t)$  que corresponden a aquellas potencias que son congruentes con  $k$  módulo  $n$ . En general, para cualquier polinomio  $f(t) = \sum f_\nu t^\nu$  se cumple

$$\sum_{\nu \equiv k \pmod{n}} f_\nu = \frac{1}{n} \sum_{\zeta^n=1} \zeta^{-k} f(\zeta),$$

donde la suma de la derecha es sobre todas las raíces  $n$ -ésimas de la unidad. Esto es debido a la siguiente igualdad

$$\sum_{\zeta^n=1} \zeta^\nu = \begin{cases} n & \text{si } n \mid \nu, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Que en nuestro caso, la ecuación 2.2 queda de la siguiente forma:

$$a_k(n, m) = \frac{1}{n} \sum_{\zeta^n=1} \zeta^{-k} G(n-1, m; \zeta).$$

Los valores del polinomio de Gauss en las raíces de la unidad son conocidos (ver [6]), a saber, para una raíz  $n$ -ésima de la unidad  $\zeta$  tal que esta sea una  $d$ -ésima raíz primitiva de la unidad para algún  $d \mid n$ , se cumple:

$$G(n-1, m; \zeta) = \begin{cases} \binom{m/d+n/d-1}{m/d} & \text{si } d \mid m, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

De donde

$$a_k(n, m) = \frac{1}{n} \sum_{d \mid n} \sum_{\text{ord}(\zeta)=d \mid m} \zeta^{-k} \binom{m/d+n/d-1}{m/d}.$$

donde  $\text{ord}(\zeta)$  es el orden de  $\zeta$  en el grupo de raíces unitarias de la unidad. Además,  $\zeta$  tiene orden  $d$  si y sólo si  $\zeta$  es una raíz primitiva de orden  $d$ . Luego,

$$\begin{aligned} a_k(n, m) &= \frac{1}{n} \sum_{d \mid (n, m)} c_d(-k) \binom{m/d+n/d-1}{m/d} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{d \mid (n, m)} c_d(k) \frac{\binom{m+n}{d} - 1!}{\left(\frac{n}{d} - 1\right)! \frac{m!}{d!}} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{d \mid (n, m)} c_d(k) \frac{\frac{d}{m+n} \frac{m+n!}{d}}{\frac{d}{n} \frac{n!}{d!} \frac{m!}{d!}} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{d \mid (n, m)} c_d(k) \frac{n}{m+n} \binom{m/d+n/d}{n/d} \\ &= \frac{1}{m+n} \sum_{d \mid (n, m)} c_d(k) \binom{m/d+n/d}{n/d}. \end{aligned}$$

□

El teorema anterior nos dice que el número de monomios en  $G_{r,d}$  con color  $k$  es exactamente  $a_k(d, r) = a_k(r, d)$ . Ahora, para conocer el valor de la función  $\bar{f}$  sólo basta encontrar un número minimal en  $\{a_k(n, m) \mid k = 1, \dots, n\}$ . Sin embargo, en [3] tenemos el siguiente resultado que nos dice que la clase cromática del 1 es de tamaño mínimo y por lo tanto su tamaño nos da el valor que buscamos de la función  $\bar{f}$ .

**Proposición 2.2.2.** *Para todos los enteros  $k, n, m \geq 0$  se cumple*

$$a_k(n, m) = \sum_{d'|(n, m, k)} a_1(n/d', m/d').$$

*Demostración.* Calculamos directamente:

$$\begin{aligned} \sum_{d'|(n, m, k)} a_1(n/d', m/d') &= \sum_{d'|(n, m, k)} \frac{1}{n/d' + m/d'} \sum_{d''|(n/d', m/d')} \mu(d'') \binom{\frac{n+m}{d'd''}}{\frac{n}{d'd''}}, \\ &= \sum_{d|(n, m)} \frac{1}{n+m} \sum_{d'|(d, k)} d' \mu(d/d') \binom{\frac{n+m}{d}}{\frac{n}{d}}, \\ &= \frac{1}{n+m} \sum_{d|(n, m)} c_d(k) \binom{n/d + m/d}{n/d}, \\ &= a_k(n, m). \end{aligned}$$

□

Ahora tenemos las herramientas necesarias para probar la segunda igualdad de la conjetura MNRV mediante las siguientes igualdades:

$$\bar{f}(r, d) = a_1(r, d) = \frac{1}{r+d} \sum_{k|(r+d, d)} \mu(k) \binom{r+d/k}{d/k} = L_2(r, d).$$

### 2.3. Sobre la conjetura MNRV

Con la segunda igualdad de la conjetura MNRV probada, el siguiente paso es estudiar la función  $f(r, d)$  para intentar probar el resultado completo. El siguiente resultado muestra que la primer igualdad de la conjetura es valida para cuando  $r$  o  $d$  son iguales a 1 o 2, pues es fácil observar que que la función  $L_2(r, d)$  satisface las igualdades:  $L_2(r, 1) = 1$ ,  $L_2(1, d) = 1$ ,  $L_2(r, 2) = \lceil r/2 \rceil$  y  $L_2(2, d) = \lceil d/2 \rceil$ .

**Proposición 2.3.1.** *Para todo  $r, d \geq 1$  se tiene*

i)  $f(r, 1) = 1$ ,

ii)  $f(1, d) = 1$ ,

iii)  $f(r, 2) = \lceil r/2 \rceil$  y

$$iv) f(2, d) = \lceil d/2 \rceil.$$

*Demostración.* Para probar *i)* basta observar que sólo se tiene la variable  $x_0$ , de donde  $x_0^r$  es divisible por todos los monomios de menor grado con esta única variable.

Para *ii)* basta tomar cualquiera de las  $d$  variables, pues cualquier  $x_i$  es divisible por el monomio constante 1.

Para *iii)* queremos que el multicomplejo puro contenga a  $\mathcal{M}_{r-1,2}$ , este último tiene como elementos maximales a  $\{x_0^{r-1}, x_0^{r-2}x_1, \dots, x_0x_1^{r-2}, x_1^{r-1}\}$ , tomando los monomios  $x_0^{r-1}x_1, x_0^{r-3}x_1^3, \dots, x_0x_1^{r-1}$  en caso de que  $r$  sea par y a los monomios  $x_0^{r-1}x_1, x_0^{r-3}x_1^3, \dots, x_0^2x_1^{r-2}, x_1^r$  si  $r$  es impar. Además, dado que sólo hay dos variables, cada monomio sólo puede dividirse por alguna de estas, de donde a lo más puede ser divisible por dos monomios grado exactamente uno menos, de donde no es posible mejorar el número de monomios para formar el multicomplejo puro.

Para el caso *iv)* tenemos a los monomios de grado 1 en  $d$  variables, es decir, tenemos exactamente a las variables  $x_0, \dots, x_{d-1}$ . Basta tomar los monomios  $x_0x_1, x_2x_3, \dots, x_{d-2}x_{d-1}$  si  $d$  es par y a los monomios  $x_0x_1, x_2x_3, \dots, x_{d-1}x_{d-2}, x_{d-1}^2$  si  $d$  es impar. Al igual que en el caso anterior no es posible que un monomio sea divisible por más de 2 monomios de grado menor, de donde no puede mejorarse el número de monomios.  $\square$



# Capítulo 3

## Resultados

En este capítulo damos una prueba de la primer igualdad de la conjetura MNRV (2.1.2) para los casos particulares donde  $r = 3$  y  $d = 3$ . Además mencionamos algunos resultados obtenidos durante la investigación.

### 3.1. Análisis de la función $f(r, d)$

#### 3.1.1. El caso $f(r, 3)$

Analizaremos primero el caso donde fijamos el número de variables, es decir, fijamos las variables a ser  $x_0, x_1$  y  $x_2$ . Para este caso particular nos interesa calcular el mínimo número de monomios en estas tres variables y de grado  $r$  necesarios para añadirlos a  $\mathcal{M}_{r-1,3}$  de tal forma que se forme un multicomplejo puro. Dado que  $\mathcal{M}_{r-1,3}$  es un multicomplejo, basta que los monomios añadidos cubran a todos los monomios maximales en  $\mathcal{M}_{r-1,3}$ , es decir, todos los monomios de grado  $r - 1$ , que también son elementos de la gráfica  $G_{r-1,3}$ , así, el problema se reduce a cubrir esta gráfica con monomios de grado  $r$ . Otra razón por la cual utilizamos estas gráficas es debido a que podemos usarlas para hablar del conjunto de monomios de grado  $r - 1$  en  $\mathcal{M}_{r-1,3}$ , así como también para hablar del conjunto de monomios de grado  $r$  que cubre a  $G_{r-1,3}$ . Además, la forma en que está construida la gráfica  $G_{r-1,3}$  nos ayuda a visualizar el cubrimiento formado por los monomios de grado  $r$ . Para ver esto, en la figura 3.1 podemos apreciar la gráfica  $G_{4,3}$ , mientras que en la figura 3.2 podemos apreciar los monomios de grado 5 que pertenecen a la gráfica  $G_{5,3}$ , más aún, en esta última tenemos resaltados en rojo los

monomios que utilizaremos para cubrir a la gráfica  $G_{4,3}$ .

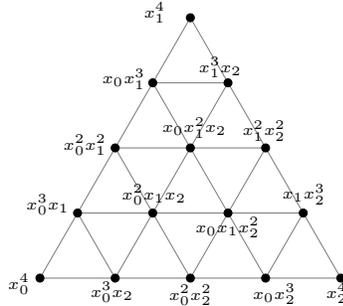


Figura 3.1: Gráfica  $G_{4,3}$ .

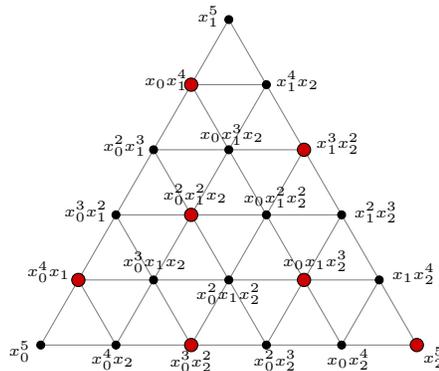


Figura 3.2: Gráfica  $G_{5,3}$  con los monomios de la clase cromática del 1 en rojo.

El cubrimiento formado por los monomios resaltados en  $G_{5,3}$  puede apreciarse en la figura 3.3, por ejemplo, el monomio  $x_0^2x_1^2x_2$  corresponde al triángulo de la izquierda, pues este monomio cubre a los tres monomios en las esquinas de este triángulo. En general, todos los cubrimientos de  $G_{r-1,3}$  usan triángulos, líneas y puntos, cabe mencionar que los únicos triángulos que aparecen en el cubrimiento son triángulos que apuntan hacia abajo como en el ejemplo, pues los triángulos que apuntan hacia arriba no corresponden a ningún monomio de grado  $r$ , pues el monomio de grado mínimo que cubre a estos monomios es de grado  $r + 1$ , véase figura 3.4.

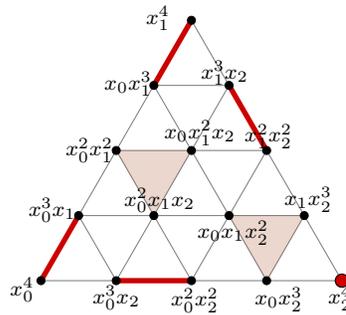


Figura 3.3: Gráfica  $G_{4,3}$  con un cubrimiento formado por monomios de grado 5.

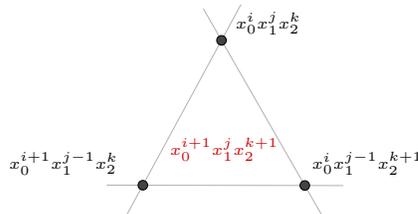


Figura 3.4: Triángulo hacia arriba, el monomio que cubre este triángulo es de grado al menos  $r + 1$ , pues  $i + j + k = r$ .

De forma general, la clase cromática del 1 en  $G_{r,3}$  tiene un patrón sencillo, de donde el cubrimiento asociado a esta clase también sigue un patrón que se puede apreciar en la figura 3.5, llamamos a este el cubrimiento estándar ya que este cubrimiento es el que estudiamos.



*Demostración.* Esta proposición nos dice que tal configuración es una traslación del cubrimiento estándar, es decir, tiene la forma de la figura 3.6. El resultado se sigue observando que si existen dos triángulos separados por un triángulo no usado, esto obliga a tener una configuración como en la figura 3.1.1.a), donde los puntos rojos no pueden ser cubiertos si  $r \neq 5$  ya que cualquier triángulo que los cubra intersecta a los triángulos anteriores. Además, si existe una separación de más de dos triángulos, entonces, como se aprecia en la figura 3.1.1.b) los puntos rojos no pueden ser ambos cubiertos sin que se forme una intersección de triángulos. Para la segunda parte el lector puede verificar fácilmente que para los casos donde  $r \equiv 1, 2$  módulo 3, cualquier configuración que satisfaga la primer parte también satisface que utiliza un triángulo con dos vértices en la frontera; Para el caso donde  $r \equiv 0$  módulo 3 sólo existen dos configuraciones posibles, es fácil ver que la configuración que utiliza un triángulo con dos vértices frontera maximiza el número de triángulos disjuntos.  $\square$

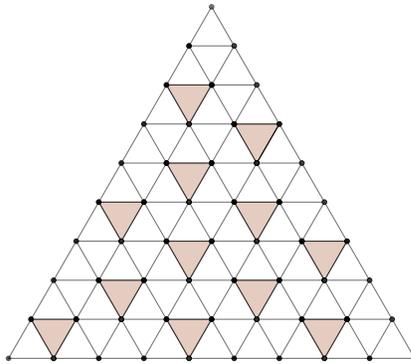


Figura 3.6: Cubrimiento con el máximo número triángulos disjuntos de los vértices interiores.

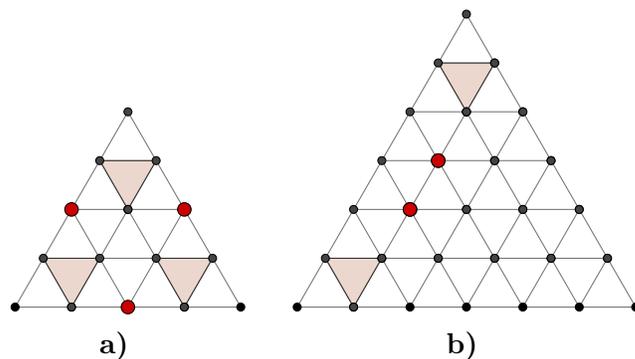


Figura 3.7: Cubrimiento de vértices internos con triángulos disjuntos.

El resultado que presentamos a continuación nos dice que el número mínimo buscado coincide con las funciones  $L_2$  y  $\bar{f}$ , más aún, nos da un conjunto de monomios, a saber, los monomios de grado  $r$  en  $G_{r,3}$  que pertenecen a la clase cromática del 1.

**Teorema 3.1.1.** *Para todo  $d \geq 0$  se cumple  $f(r, 3) = \bar{f}(r, 3) = L_2(r, 3)$ .*

*Demostración.* Haremos inducción sobre  $r$  en cada caso según la congruencia módulo 3, pues como se puede apreciar en la figura 3.8 el caso  $(r - 3, 3)$  se anida en  $(r, 3)$ .

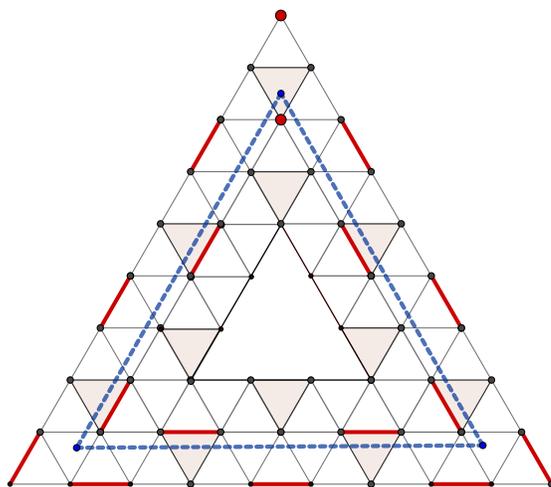


Figura 3.8: Cubrimiento estándar del caso  $(r - 3, 3)$  anidado en  $(r, 3)$ .

Veamos primero que el cubrimiento estándar utiliza el mínimo número de triángulos nece-

sarios, pues los vértices interiores sólo pueden ser cubiertos por triángulos. Los casos base son cuando  $r = 1, 2, 3$ , en cada uno de ellos puede comprobarse que no se puede cubrir la gráfica con menos triángulos de los que utiliza el cubrimiento estándar. Para el paso de inducción argumentamos que cualquier cubrimiento restringido a la gráfica interior es un cubrimiento del caso  $r - 3$ , luego no puede usar menos triángulos que los utilizados en el cubrimiento estándar del caso  $r - 3$ . Además, dado que en el cubrimiento estándar los triángulos son disjuntos por pares, por conteo, con este número de triángulos el cubrimiento estándar maximiza el número de puntos cubiertos en la frontera de la gráfica  $G_{r-3,3}$ , ahora sólo falta cubrir algunos vértices frontera de la gráfica interior  $G_{r-3,3}$  que son vértices interiores de la gráfica  $G_{r,3}$ . Pero los triángulos utilizados para cubrir estos vértices se utilizan de forma óptima ya que se maximiza el número de triángulos que cubren dos puntos interiores y sólo un punto frontera, de donde el cubrimiento estándar utiliza el mínimo número de triángulos necesarios para cualquier cubrimiento.

Veamos ahora que ningún cubrimiento de la gráfica  $G_{r,3}$  con más triángulos que el cubrimiento estándar puede mejorar el número de elementos utilizados. Analicemos los tres casos según la congruencia módulo 3, en la figura 3.9 pueden apreciarse los tres casos, es fácil probar que en general los casos se comportan de esta forma, es decir, puede apreciarse (figura 3.9 a) que en el caso  $r \equiv 2 \pmod{3}$  se utiliza el triángulo más cercano al monomio  $x_2^{r-1}$  y los otros triángulos más cercanos a las otras variables no son utilizados; de forma similar en el caso  $r \equiv 1 \pmod{3}$  (figura 3.9 b) de los tres triángulos más cercanos a los monomios  $x_i^{r-1}$ ,  $i = 0, 1, 2$  sólo se utiliza el correspondiente al monomio  $x_1^{r-1}$  y, finalmente para el caso  $r \equiv 0 \pmod{3}$  ninguno de estos triángulos se utiliza (figura 3.9 c).

Para los casos en que  $r \equiv 1, 2 \pmod{3}$ , el cubrimiento estándar satisface las propiedades de la proposición anterior, es decir, incrementar el número de triángulos hace que existan intersecciones entre estos, a pesar de que el caso  $r = 5$  no está considerado en la proposición, este puede verificarse como cubrimiento óptimo fácilmente. Luego, si se agregan  $l$  triángulos al menos aparecen  $l$  intersecciones, pues si quitamos un triángulo con intersección, tendremos por inducción al menos  $l - 1$  intersecciones, junto con el punto de este triángulo tenemos al menos  $l$ . Con este argumento tendríamos que al agregar  $l$  triángulos se cubren a lo más  $3l - l = 2l$  vértices más que con los triángulos del cubrimiento estándar, que a lo más pueden mejorar en  $\frac{2l}{2} = l$  líneas el cubrimiento, de donde el cubrimiento estándar no se mejora. Para el

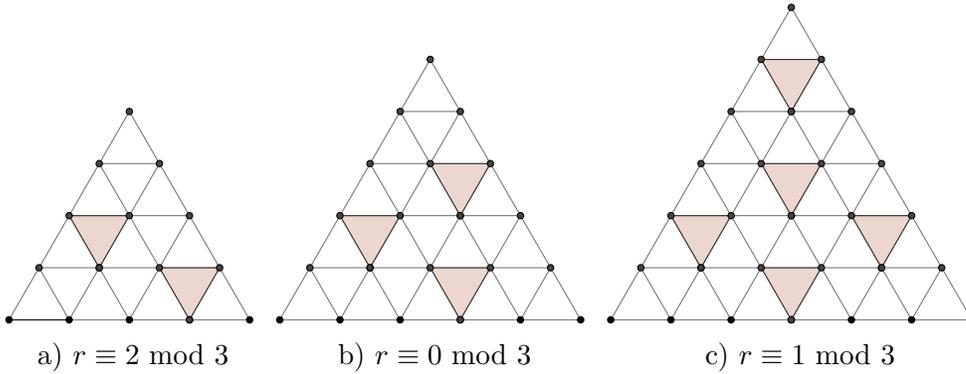


Figura 3.9: Casos según congruencia módulo 3.

caso en que  $r \equiv 0$  módulo 3, es posible aumentar un triángulo y cubrir exactamente 3 vértices frontera más que con el cubrimiento estándar, pero este nuevo cubrimiento coincide con la configuración de la proposición anterior y es tal que deja aislados a los vértices del triángulo más grande, lo que obliga a que el cubrimiento no mejore, pues a pesar de cubrir tres vértices más con un triángulo, se deben usar tres monomios para cubrir sólo estos tres vértices. Si aumentamos el número de triángulos el argumento de antes nos dice que al aumentar  $l \geq 2$  triángulos, cubre a lo más  $2l$  vértices más que el cubrimiento estándar, pero las líneas sólo mejoran en a lo más  $l$ , de donde el cubrimiento no mejora.

Lo anterior nos dice que no es posible mejorar el cubrimiento estándar aumentando el número de triángulos, además, el cubrimiento estándar utiliza el mayor número de líneas posibles para cubrir los vértices frontera restantes. De donde el cubrimiento estándar es un cubrimiento óptimo de la gráfica  $G_{r,3}$  y esto nos dice que el mínimo número de monomios para formar un multicomplejo puro coincide con la clase cromática del 1 y con los collares aperiódicos correspondientes.  $\square$

### 3.1.2. El caso $f(3, d)$

Es esta sección probaremos que la primer parte de la conjetura 2.1.2 es cierta para cuando el grado de los monomios maximales es 3 y tenemos las  $d$  variables  $x_1, x_2, \dots, x_{d-1}$ . Iniciamos con algunos resultados que nos ayudaran en la prueba del teorema principal de esta sección.

**Proposición 3.1.2.** *La coloración estándar  $\rho_{r,d}$  es una coloración propia de la gráfica  $G_{r,d}$ .*

Más aún, se cumple  $\chi(G_{r,d}) \leq d$ .

*Demostración.* Sean  $m$  y  $m'$  dos monomios adyacentes en  $G_{r,d}$ , es decir, existen dos variables distintas  $x_i$  y  $x_j$  tales que  $m = \frac{x_i}{x_j}m'$ . De donde  $\rho(m) - \rho(m') = i - j \not\equiv 0 \pmod{d}$ , luego  $m$  y  $m'$  tienen diferente color y  $\rho$  es una  $d$ -coloración propia.  $\square$

**Proposición 3.1.3.** *Cada clase cromática en  $G_{r,d}$  es un conjunto cubriente en  $G_{r-1,d}$ .*

*Demostración.* Sea  $m$  un monomio en  $G_{r-1,d}$  y consideremos todos los monomios  $x_0m, \dots, x_{d-1}m$ , los cuales forman una gráfica completa  $K_d$  en  $G_{r,d}$ . Como  $\rho$  es una coloración propia, entonces cada color aparece exactamente una vez en  $K_d$ , es decir, cada monomio  $m$  en  $G_{r-1,d}$  está cubierto por al menos un monomio de  $G_{r,d}$  de cada color.  $\square$

**Proposición 3.1.4.** *Para cada clase cromática  $A$  en  $G_{r,d}$  y para cualesquiera dos monomios  $m, m' \in A$ , definimos  $B_m$  y  $B_{m'}$  como el conjunto de monomios en  $G_{r-1,d}$  cubierto por  $m$  y  $m'$  respectivamente. Entonces  $B \cap B_{m'} = \emptyset$ . Es decir, dos elementos en la misma clase cromática cubren vértices disjuntos en  $G_{r-1,d}$ .*

*Demostración.* Supongamos que no es cierto, es decir, existe una clase cromática  $A$  y dos monomios  $m, m' \in A$  tales que  $B \cap B_{m'} \neq \emptyset$ . Luego, existe  $m''$  tal que es cubierto por  $m$  y  $m'$ , de donde  $m = x_i m''$  y  $m' = x_j m''$ , pero entonces  $m = \frac{x_i}{x_j} m'$  contradiciendo el hecho de que la coloración  $\rho$  es propia. Por lo tanto  $B \cap B_{m'} = \emptyset$ .  $\square$

Estamos listos para probar el resultado principal de esta sección que prueba un caso más de la conjetura 2.1.2.

**Teorema 3.1.2.** *Para todo  $d \geq 0$  se cumple  $f(3, d) = \bar{f}(3, d) = L_2(3, d)$ .*

*Demostración.* Observemos que basta probar que la clase cromática del 1 en  $G_{3,d}$  cubre de forma óptima a la gráfica  $G_{2,d}$ . Consideremos los vértices en  $G_{2,d}$  que son de la forma  $x_i^2$ , estos vértices sólo pueden ser cubiertos usando vértices en  $G_{3,d}$  de la forma  $x_i^3$  o  $x_i^2 x_j$  donde  $i \neq j$ . Mostraremos que para cualquier  $d \geq 0$  se usa a lo más un vértice de la forma  $x_i^3$ . Para  $d \leq 1$  el resultado es claro. Dado que el vértice  $x_i^3$  tiene color  $3i \pmod{d}$ , este está en la clase cromática del 1 si y sólo si la siguiente ecuación tiene solución para  $i$  con  $1 \leq i \leq d-1$  (pues suponemos  $d \geq 2$ ):

$$3i - 1 \equiv 0 \pmod{d}. \quad (3.1)$$

Observemos que se tiene la siguiente desigualdad  $1 \leq 3i - 1 \leq 3d - 4$ , luego, la ecuación 3.1 tendría dos soluciones si se satisface  $3i_0 - 1 = d$  y  $3i_1 - 1 = 2d$  para algunos  $i_0 \leq i_1$ , entonces  $3(i_1 - i_0) = d(2 - 1) = d$ , es decir,  $d$  es múltiplo de 3, lo cual es una contradicción pues la ecuación 3.1 no tiene solución para  $d = 3k$ , de donde existe a lo más una solución de 3.1.

Para concluir la prueba basta observar que después de cubrir los vértices de la forma  $x_i^2$  en  $G_{2,d}$  todos los demás monomios son cubiertos por monomios de la forma  $x_i x_j x_k$  con  $i < j < k$ , más aún, la proposición 3.1.4 nos dice que se cubren de forma óptima debido a que cada monomio cubre disjuntamente de los otros a 3 monomios en  $G_{2,d}$ , de donde no pueden ser cubiertos los monomios en  $G_{2,d}$  con menos monomios que  $\bar{f}(3, d)$ . En la figura 3.1.2 se puede observar el caso  $d = 8$ .  $\square$

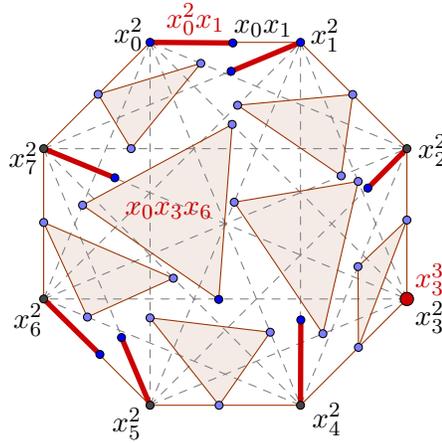


Figura 3.10: Cubrimiento de los monomios en  $G_{2,d}$  con la clase cromática del 1 en  $G_{3,d}$ . Por ejemplo,  $x_0^2 x_1$  cubre a  $x_0^2$  y  $x_0 x_1$ , mientras que  $x_0 x_3 x_6$  cubre a  $x_0 x_3$ ,  $x_0 x_6$  y  $x_3 x_6$ , y  $x_3^3$  cubre a  $x_3^2$ .

### 3.2. Funciones generatrices

Durante la investigación para demostrar el teorema 3.1.1 se encontró una fórmula alternativa para  $\bar{f}(r, 3)$ , la cual puede considerarse como un polinomio en dos variables, a saber, si  $r = 3m + k$ , donde  $m = \lfloor \frac{r}{3} \rfloor$  y  $k \equiv r \pmod{3}$ , entonces tenemos la siguiente igualdad:

$$\bar{f}(r, 3) = (m + 1) \frac{3m + 2k}{2}.$$

Para verificar esta fórmula basta ver que  $\bar{f}(r, 3) = \sum_{i=0}^{i=r} a_i$ , donde  $\{a_i\}$  es la sucesión  $(0, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, \dots)$ , esto puede verse utilizando la gráfica  $G_{r,3}$ , o de forma más sencilla podemos evaluar cada uno de los casos  $k = 0, 1, 2$  en la fórmula de  $L_2$ . Esta fórmula nos condujo a investigar si de forma similar existían polinomios  $p$  en dos variables cuya evaluación en ciertos puntos dieran como resultado la relación  $p = \bar{f} = L_2$ . Para encontrar tales polinomios se puede proceder como el caso de  $\bar{f}(r, 3)$  y encontrar una sucesión  $\{a_i\}$  tal que  $\bar{f} = \sum a_i$ . Cabe mencionar que la sucesión  $\{a_i\}$  puede ser muy complicada para encontrar una fórmula con la que pueda ser fácil trabajar, sin embargo, es posible realizar el mismo proceso con la sucesión  $\{a_i\}$ , es decir, encontrar una sucesión  $\{b_i\}$  con  $a_i = \sum_{0 \leq j \leq i} b_j$ , luego, tendríamos la relación  $\bar{f} = \sum_i \sum_{j=0}^i b_j$ . Continuando con este proceso podemos encontrar el polinomio deseado.

Con ayuda de un programa pudimos obtener las sucesiones necesarias para encontrar algunos polinomios, la tabla siguiente muestra las sucesiones de las funciones  $L_2(r, k)$  para  $k$  fijo.

$r$	$L_2(r, 0)$	$L_2(r, 1)$	$L_2(r, 2)$	$L_2(r, 3)$	$L_2(r, 4)$	$L_2(r, 5)$	$L_2(r, 6)$	$L_2(r, 7)$	$L_2(r, 8)$
0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	0	1	1	2	2	3	3	4	4
3	0	1	2	3	5	7	9	12	15
4	0	1	2	5	8	14	20	30	40
5	0	1	3	7	14	25	42	66	99
6	0	1	3	9	20	42	75	132	212
7	0	1	1	12	30	66	132	245	429
8	0	1	4	15	40	99	212	429	800
9	0	1	5	18	55	143	333	715	1430

Cuadro 3.1: Tabla de valores de la función  $L_2 = \bar{f}$ .

A continuación presentamos un ejemplo de como obtener el polinomio correspondiente a  $\bar{f}(r, 9)$ , la siguiente es la tabla de las sucesiones obtenidas para este caso, en esta se puede

observar que la suma sobre un renglón hasta la columna  $i$  da como resultado la entrada correspondiente a la columna  $i$  en el renglón anterior.

Caso $(r, 9)$										
0	1	5	18	55	143	333	715	1430	2700	4862
0	1	4	13	37	88	190	382	715	1270	2162
0	1	3	9	24	51	102	192	333	555	892
0	1	2	6	15	27	51	90	141	222	337
0	1	1	4	9	12	24	39	51	81	115
0	1	0	3	5	3	12	15	12	30	34
0	1	-1	3	2	-2	9	3	-3	18	4

Cuadro 3.2: Tabla de las sucesiones de diferencias para el caso  $\bar{f}(r, 9)$ .

Notemos que en la fórmula de  $L_2(r, 9)$ , el índice de la suma que es  $d|(r+9, 9)$ , puede tomar solamente los valores 1, 3 y 9, sin embargo, dado que  $\mu(9) = 0$  este valor puede omitirse. Este argumento nos da indicios para descomponer a  $r$  utilizando módulo 3, es decir, consideramos  $r = 3m + k$ .

Como en el caso de  $\bar{f}(r, 3)$ , buscamos un polinomio en función de  $m$  y  $k$ , donde  $m = \lfloor \frac{r}{3} \rfloor$  y  $k \equiv 3 \pmod{r}$ , observando el comportamiento de la última sucesión en la tabla 3.2 podemos obtener un polinomio para la penúltima sucesión, a saber es la suma de las siguientes dos sucesiones: la primera es  $(0, 1, -1, 0, 2, -2, 0, 3, -3, \dots)$ , mientras que la segunda sucesión es  $(0, 3, 12, 30, 60, \dots)$  cuyas fórmulas en términos de  $m$  y  $k$  son  $(m+1)(2k-k^2)$  y  $(\frac{m(m+1)(m+2)}{2})$  respectivamente. De donde obtenemos un polinomio  $p_6$  en dos variables para la sucesión del penúltimo renglón, a saber,  $p_6(m, k) = \frac{1}{2}\{m^3 + 3m^2 + 2m + 4mk - 2mk^2 + 4k - 2k^2\}$ .

Ahora debemos encontrar un polinomio  $p_5(m, k)$  para la sucesión del renglón anterior que es el quinto, buscamos que el polinomio evaluado en  $(m, k)$  sea igual al  $n$ -ésimo término, donde  $n = 3m + k$ . Es decir, tenemos la siguiente relación  $p_5(m, k) = \sum_{i=0}^n p_6(m_i, k_i)$ , donde  $n_i = 3m_i + k_i$  es el  $n_i$ -ésimo término de la sucesión en el sexto renglón.

Utilizando el polinomio encontrado para  $p_6$  obtenemos la relación:

$$p_6(m, k) = \frac{1}{2} \left\{ \sum m_i^3 + 3 \sum m_i^2 + 2 \sum m_i + 4 \sum m_i k_i - 2 \sum m_i k_i^2 + 4 \sum k_i - 2 \sum k_i^2 \right\}.$$

Donde todas las sumas son sobre  $i = 0, 1, \dots, n$  y  $n = 3m + k$ . Para encontrar el polinomio solo falta encontrar expresiones de las sumas  $\sum_{i=0}^n m_i^l$  ( $l = 1, 2, 3$ ),  $\sum_{i=0}^n k_i^l$  ( $l = 1, 2$ ), y  $\sum_{i=0}^n m_i k_i^l$  ( $l = 1, 2$ ) en términos de  $m$  y  $k$ , donde  $n = 3m + k$  y además en cada suma  $i = 3m_i + k_i$ . Una vez que encontramos las expresiones para las sumas anteriores podemos sustituir sus valores para obtener el polinomio  $p_5(m, k)$ , después debemos encontrar el polinomio  $p_4$  y así sucesivamente hasta encontrar el polinomio  $p_1(m, k)$  que es el polinomio que representa la primer sucesión que corresponde a  $L_2(r, 9)$ . Durante este proceso se deben encontrar expresiones para sumas cuya forma general es:

$$\sum_{i=0}^n m_i^a k_i^b, \text{ donde } i = 3m_i + k_i. \quad (3.2)$$

Es posible encontrar las expresiones de estas sumas utilizando las fórmulas para la suma de las  $q$ -ésimas potencias de los primeros números naturales, es decir, sumas de la forma  $\sum_{i \leq n} i^q$ . Además, estas expresiones deben estar en términos de  $m$  y  $k$ , donde  $n = 3m + k$ , veamos el siguiente ejemplo para calcular  $\sum_{i=0}^n k_i^2$ , tenemos que

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n k_i^2 &= \underbrace{(0^2 + 1^2 + 2^2) + \dots + (0^2 + 1^2 + 2^2)}_{m \text{ veces}} + 0^2 + \dots + k^2 \\ &= 5m + \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} \\ &= \frac{1}{30} \{30m + 2k^3 + 3k^2 + k\}. \end{aligned}$$

Sin embargo, para nuestro caso particular sólo utilizamos valores de  $k$  entre 0 y  $m - 1$ , de donde basta encontrar polinomios en  $k$  que tengan los valores que buscamos en los puntos  $0, \dots, m - 1$ . En el ejemplo anterior necesitamos un polinomio en  $k$  que tome los valores 0, 1 y 5 en 0, 1 y 2 respectivamente, luego la expresión queda:

$$\sum_{i=0}^n k_i^2 = \frac{1}{2} \{10m + 3k^2 - k\}.$$

Esta última expresión es más sencilla que la de antes. En general podemos utilizar polinomios en  $k$  de grado mínimo que satisfagan las  $m$  relaciones necesarias. Este proceso reduce significativamente la complejidad de los polinomios encontrados en cada paso.

Al finalizar el proceso obtenemos un polinomio  $p = p_1$  en dos variables que coincide con las funciones  $L_2$  y  $\bar{f}$ , sin embargo debemos probar esta igualdad, lo cual se puede hacer separando cada caso según  $r = 3m$ ,  $r = 3m + 1$  o  $r = 3m + 2$  y hacer la evaluación de la fórmula obtenida para  $L_2$ , una vez hecho esto, tenemos las herramientas necesarias para enunciar el siguiente resultado.

**Proposición 3.2.1.** *Para todo  $r \geq 0$  tal que  $r = 3m + k$ , donde  $m = \lfloor \frac{r}{3} \rfloor$  y  $k \equiv r \pmod{3}$  se cumple:*

$$\begin{aligned} \bar{f}(r, 9) = L_2(r, 9) &= \frac{1}{13440} \{ 243m^8 + 2916m^7 + 14742m^6 + 40824m^5 + 67347m^4 + \\ &67284m^3 + 38628m^2 + 9936m + 648m^7k + 6804m^6k + 28476m^5k + \\ &59220m^4k + 59612m^3k + 17976m^2k - 11456mk + 756m^6k^2 + \\ &8316m^5k^2 + 37380m^4k^2 + 87780m^3k^2 + 113064m^2k^2 + 75264mk^2 + \\ &20160k^2 - 6720k \}. \end{aligned}$$

Otra forma de obtener polinomios en dos variables que cumplan las mismas condiciones que los polinomios encontrados con el procedimiento anterior es multiplicar por polinomios en  $k$  en la fórmula de  $L_2$ . Veamos como encontrar el polinomio para  $\bar{f}(r, 9)$ . Tenemos la siguiente igualdad.

$$\begin{aligned} \bar{f}(r, 9) &= \frac{1}{r+9} \sum_{d|(r+9,9)} \mu(d) \binom{(r+9)/d}{9/d} \\ &= \frac{1}{r+9} \left\{ \binom{r+9}{9} - p(k) \binom{(r+9)/3}{3} \right\}. \end{aligned}$$

Donde  $p(k)$  es un polinomio que toma el valor 1 si  $3|r$  y 0 en otro caso, es decir,  $p(k) = 1$  si  $k = 0$  y  $p(k) = 0$  si  $k = 1, 2$ . El polinomio de grado mínimo que satisface lo anterior es  $p(k) = \frac{1}{2}k^2 - \frac{3}{2}k + 1$ . Ahora podemos escribir  $r = 3m + k$  y sustituir en la expresión anterior para encontrar el polinomio.

$$\begin{aligned} \bar{f}(3m+k, 9) &= \frac{1}{3m+k+9} \left\{ \binom{3m+k+9}{9} - p(k) \binom{(3m+k+9)/3}{3} \right\} \\ &= \frac{1}{3m+k+9} \left\{ \binom{3m+k+9}{9} - \frac{1}{2}(k^2 - 3k + 2) \binom{(3m+k+9)/3}{3} \right\}. \end{aligned}$$

Es fácil ver que la expresión anterior nos da un polinomio en dos variables que satisface las condiciones deseadas, sin embargo, el polinomio resultante es mucho más complicado que el polinomio encontrado en la proposición 3.2.1, pues aparecen muchos más términos, como los términos donde  $k$  tiene potencia mayor a 2.

Cabe mencionar que durante esta investigación pudimos encontrar un error en la sucesión **A011845** en *The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences*, pues esta sucesión contaba el número de collares aperiódicos con 9 perlas negras y  $r$  perlas blancas con la fórmula  $\lfloor \frac{\binom{r+9}{9}}{r+9} \rfloor$ , sin embargo esta no coincide con la fórmula  $L_2(r, 9)$ . Cuando  $r$  es divisible por 3 tenemos que la fórmula de  $L_2(r, 9)$  queda:

$$\begin{aligned} L_2(r, 9) &= \frac{1}{r+9} \left\{ \binom{r+9}{9} - \binom{(r+9)/3}{3} \right\} \\ &= \frac{\binom{r+9}{9}}{r+9} - \frac{1}{162}(r^2 + 9r + 18). \end{aligned}$$

Observamos que  $\frac{1}{162}(r^2 + 9r + 18) > 1$  si  $r > 8$ , de donde la expresión anterior no coincide con la parte entera  $\lfloor \frac{\binom{r+9}{9}}{r+9} \rfloor$  mencionada anteriormente, luego las fórmulas difieren. Con este análisis corregimos la definición de la sucesión **A011845** y añadimos la sucesión nueva **A263318** que contiene la descripción de los collares aperiódicos con 9 perlas negras y  $r$  perlas blancas. Además, con ayuda del polinomio que encontramos para  $\bar{f}(r, 9)$  realizamos un programa que puede calcular fácilmente los valores de  $\bar{f}(r, 9)$ , con ello agregamos a la sucesión nueva una tabla con los primeros 100 valores de dicha función.

Otra aplicación inmediata del polinomio encontrado para  $\bar{f}(r, 9)$  es la facilidad para encontrar la función generatriz de la sucesión que representa. Veamos como encontrar la función generatriz de la sucesión  $\bar{f}(r, 9)$ , es decir, buscamos una función racional para la expresión  $\sum_{r \geq 0} \bar{f}(r, 9)x^r$ . Observemos que podemos separar la suma según la congruencia módulo 3 del índice, después utilizamos para cada caso el valor del polinomio cuando fijamos la variable  $k$ , es decir, sustituimos la variable que corresponde al residuo módulo 3. Así, podemos obtener las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned}
\sum_{r \geq 0} \bar{f}(r, 9)x^r &= \sum_{r \geq 0} \bar{f}(3r, 9)x^{3r} + \sum_{r \geq 0} \bar{f}(3r+1, 9)x^{3r+1} + \sum_{r \geq 0} \bar{f}(3r+2, 9)x^{3r+2} \\
&= \sum_{r \geq 0} \bar{f}(3r, 9)x^{3r} + x \sum_{r \geq 0} \bar{f}(3r+1, 9)x^{3r} + x^2 \sum_{r \geq 0} \bar{f}(3r+2, 9)x^{3r} \\
&= \frac{1}{13440} \left\{ \sum_{r \geq 0} r^8 x^{3r} p_8(r) + \dots + \sum_{r \geq 0} r x^{3r} p_1(r) + \sum_{r \geq 0} x^{3r} p_0(r) \right\},
\end{aligned}$$

donde los  $p_i(r)$  son polinomios de grado 2. Luego, para encontrar la función generatriz basta encontrar expresiones para cada suma  $\sum_{r \geq 0} r^i x^{3r}$  con  $i = 0, \dots, 8$ , después sustituir en la expresión anterior para encontrar la suma. Para el caso de  $\bar{f}(r, 9)$  tenemos el siguiente resultado.

**Proposición 3.2.2.** *Para todo  $x$  tal que  $|x| < 1$ , se sumple:*

$$\sum_{r \geq 0} L_2(r, 9)x^r = \frac{x(x^4 - x^3 + 3x^2 - x + 1)}{(x^2 + x + 1)^3(1 - x)^9}.$$

Siguiendo el mismo procedimiento que antes podemos encontrar polinomios para los casos  $\bar{f}(r, 2)$ ,  $\bar{f}(r, 3)$ ,  $\bar{f}(r, 4)$  y  $\bar{f}(r, 5)$ , los cuales pueden ser verificados realizando las operaciones correspondientes. Podemos observar que estos casos son de la forma  $\bar{f}(r, p^q)$  para algún primo  $p$ , luego, dado que  $\mu(p^q) = 0$  si  $q \geq 2$ , podemos descomponer en cada caso a  $r$  utilizando el módulo  $p$ , es decir, en cada caso consideramos  $r = pm + k$ , donde  $m = \lfloor \frac{r}{p} \rfloor$  y  $k \equiv r \pmod{p}$ .

A continuación presentamos los polinomios que encontramos durante la investigación.

**Proposición 3.2.3.** *Para todo  $r \geq 0$  tal que  $r = pm + k$ , donde  $m = \lfloor \frac{r}{p} \rfloor$  y  $k \equiv r \pmod{p}$  se cumple:*

$$\begin{aligned}
\bar{f}(r, 2) &= L_2(r, 2) = m + k, \text{ tomando } p = 2, \\
\bar{f}(r, 3) &= L_2(r, 3) = (m + 1) \frac{3m + 2k}{2}, \text{ tomando } p = 3, \\
\bar{f}(r, 4) &= L_2(r, 4) = (m + 1)(m + 2) \frac{2m + 3k}{6}, \text{ tomando } p = 2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{f}(r, 5) = L_2(r, 5) &= \frac{1}{240} \{ 1250m^4 + 2500m^3 + 1750m^2 + 500m + \\
&1000m^3k + 1500m^2k + 700mk + 300mk^2 + 40mk^3 + 300m^2k^2 + \\
&128k + 126k^2 - 15k^3 - 5k^4 + 7k^5 - k^6 \}, \text{ tomando } p = 5.
\end{aligned}$$

De la misma forma que en el caso  $\bar{f}(r, 9)$  estos polinomios nos ayudan a encontrar fácilmente las funciones generatrices correspondientes.

**Proposición 3.2.4.** *Para todo  $x$  tal que  $|x| < 1$ , se sumple:*

$$\begin{aligned}\sum_{n \geq 0} L_2(n, 2)x^n &= \frac{x^2}{(1+x)(x-1)^2}, \\ \sum_{n \geq 0} L_2(n, 3)x^n &= \frac{x}{(1-x)^2(1-x^3)}, \\ \sum_{n \geq 0} L_2(n, 4)x^n &= \frac{x}{(x-1)^4(x+1)^2}, \\ \sum_{n \geq 0} L_2(n, 5)x^n &= \frac{x^5(1-x+x^2)}{(1-x)^5(1+x+x^2+x^3+x^4)}.\end{aligned}$$



## Capítulo 4

# Conclusiones

Para finalizar daremos las conclusiones obtenidas durante la investigación para la realización de este trabajo.

- En primer lugar tenemos los teoremas 3.1.1 y 3.1.2 que prueban la conjetura 2.1.2 para dos familias infinitas, implicando la relación entre las funciones  $f$ ,  $\bar{f}$  y  $L_2$  que en principio no era evidente.
- Con ayuda de la teoría general de la función de Möbius pudimos hacer una demostración de la fórmula  $L_2$  que cuenta collares binarios aperiódicos, la cual a pesar de ser conocida, no encontramos ninguna demostración escrita.
- También pudimos obtener los polinomios en dos variables para algunas sucesiones de la función  $L_2$ , cabe mencionar que estos polinomios pueden ayudar a calcular de forma más rápida estas sucesiones, debido a que los polinomios encontrados con esta técnica tienen menor complejidad que los obtenidos mediante hacer la sustitución  $r = pm + k$  en la fórmula de  $L_2$  correspondiente. Otra aplicación de estos polinomios es que facilitan encontrar las funciones generatrices correspondientes a cada sucesión, además, el procedimiento puede ser aplicado para encontrar más sucesiones y así también sus funciones generatrices.
- Debemos mencionar la recopilación que se hizo en este trabajo sobre las distintas teorías, pues pudimos apreciar como se relacionan entre ellas, así como dar una aplicación importante para obtener nuevos resultados.

- A pesar de haber utilizado un resultado publicado para demostrar la segunda igualdad de la conjetura MNRV (2.1.2), la conexión entre este resultado con las gráficas  $G_{r,d}$ , los collares y los multicomplejos resulta ser muy interesante y nos da una opción para hacer investigación. Otro trabajo a futuro puede ser intentar incorporar nuevas teorías para poder demostrar las conjeturas, por ejemplo, la teoría de Ehrhart donde intervienen politopos y cuasipolinomios, que pueden considerarse como las gráficas  $G_{r,d}$  y los polinomios en dos variables encontrados, esto para tener un resultado general sobre las funciones generatrices de las sucesiones.

# Bibliografía

- [1] A. Björner. *Matroid Applications*, volume 40 of *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Cambridge, 1992. Chapter Homology and shellability of matroids and geometric lattices.
- [2] Thomas Brylawski and James Oxley. *Matroid Applications*, volume 40 of *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Cambridge, 1992. Chapter The Tutte Polynomial and its Applications.
- [3] A. Elashvili, M. Jibladze, and D. Pataraiia. Combinatorics of necklaces and “hermite reciprocity”. *Journal of Algebraic Combinatorics*, 10(2):173–188, 1999.
- [4] Criel Merino, Steven D. Noble, Marcelino Ramírez-Ibañez, and Rafael Villarroel-Flores. On the structure of the h-vector of a paving matroid. *European Journal of Combinatorics*, 33(8):1787 – 1799, 2012.
- [5] James G. Oxley. *Matroid Theory*. Oxford Graduate Texts in Mathematics. Oxford University Press, 1997.
- [6] R. Stanley. *Enumerative Combinatorics*, volume I. Wadsworth & Brooks/Cole, 1986. Chapter 3.
- [7] Richard P. Stanley. Cohen-macaulay complexes. *Higher Combinatorics*, Volume 31:51–62, 1977.
- [8] Jacobus H. van Lint and Richard M. Wilson. *A course in combinatorics*. Cambridge University Press, 1992.

- [9] Hassler Whitney. On the abstract properties of linear dependence. *Amer. J. Math.*, (57):509–533, 1935.
  
- [10] Thomas Zaslavsky. *Combinatorial Geometries*, volume 29 of *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Cambridge, 1987. Chapter The Mobius Function and the Characteristic Polynomial.