



# **UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**

## **POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS**

### **FACULTAD DE CIENCIAS**

#### **NOMBRE DE LA TESIS**

APLICACIONES DE LA TEORÍA DE CONTROL  
EN BIOLOGÍA

## **T E S I S**

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO ACADÉMICO DE  
MAESTRO(A) EN CIENCIAS ( MATEMÁTICAS )

#### **P R E S E N T A**

#### **NOMBRE DEL ALUMNO**

ARMANDO CARLOS MEZA ROMERO

**DIRECTOR(A) DE TESIS: Dr. MANUEL JESÚS FALCONI MAGAÑA**  
**FAC. CIENCIAS UNAM**

**COMITÉ TUTOR: JAVIER PULIDO CEJUDO**  
**TEC. MONTERREY CAMPUS SANTA FE**

MÉXICO, D.F. 2 DE DICIEMBRE 2015



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>5</b>
1.1. Introducción . . . . .	5
1.1.1. Problema de producción óptima . . . . .	8
1.1.2. Pesquerías . . . . .	8
1.1.3. Control biológico . . . . .	9
1.1.4. reconocimientos . . . . .	9
<b>2. Preliminares</b>	<b>11</b>
2.1. Preliminares . . . . .	11
2.1.1. Medida de Ejecución . . . . .	12
2.1.2. Principio de Pontryagin . . . . .	17
<b>3. Producción máxima sostenible</b>	<b>19</b>
3.1. Producción Máxima Sustentable . . . . .	19
3.1.1. Introducción . . . . .	20
3.1.2. El Modelo Presa-Depredador . . . . .	22
3.1.3. PMS de una Población, con Esfuerzo de Pesca Fijo sobre la otra Población . . . . .	25
3.1.4. PMS de una Población, para Producción Fija de la otra Población	33
3.1.5. Tres Niveles Tróficos . . . . .	37
3.1.6. Presas y Depredadores Compitiendo . . . . .	41
3.1.7. Conclusiones . . . . .	44
3.2. Figuras . . . . .	44

<b>4. Manejo de Pesquerías</b>	<b>53</b>
4.1. Manejo de Pesquerías Multi-Especies . . . . .	53
4.1.1. Un Modelo Presa-Depredador: Krill y Ballenas . . . . .	55
4.1.2. Solución de equilibrio y Producción Sustentable . . . . .	58
4.1.3. La Dinámica . . . . .	62
4.2. Figuras . . . . .	64
<b>5. Control óptimo</b>	<b>67</b>
5.1. Control Óptimo en un Sistema	
Presa- Depredador . . . . .	67
5.1.1. Introducción . . . . .	68
5.1.2. Un Sistema Presa-Depredador no Controlado . . . . .	68
5.1.3. Control con un Pesticida Ideal . . . . .	70
5.1.4. Control por un Insecticida que solo mata a los Depredadores .	72
5.1.5. Control por un Insecticida que Mata Presas y Depredadores.	74
5.1.6. Control por Liberación de Presas y Depredadores . . . . .	76
5.1.7. Conclusiones . . . . .	78
5.1.8. Apéndice 1. . . . .	80
5.1.9. Apéndice 2. . . . .	88
5.2. Figuras . . . . .	93
<b>6. Programas de control óptimo</b>	<b>97</b>
6.1. Programas de control . . . . .	97
6.1.1. Introducción . . . . .	98
6.1.2. El sistema Lotka-Volterra para presa-depredador . . . . .	98
6.1.3. Sistema presa-depredador sujeto a control . . . . .	99
6.1.4. Determinación del control óptimo . . . . .	101
6.1.5. Resumiendo de a dónde Ir . . . . .	107
6.1.6. Un programa de manejo óptimo de presas . . . . .	108
6.2. Figuras . . . . .	116
<b>7. Una política óptima</b>	<b>119</b>
7.1. Una Política Óptima para una Cosecha de Peces . . . . .	119

7.1.1. Introducción . . . . .	119
7.1.2. Problema de Control Óptimo . . . . .	120
7.1.3. Condiciones Necesarias . . . . .	122
7.1.4. Caso Especial . . . . .	127
7.1.5. Conclusiones . . . . .	133
7.2. Figuras . . . . .	134



# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1. Introducción

Si queremos hablar de la aplicación de la matemática para resolver problemas reales, tendríamos que recurrir a las áreas del conocimiento que resalten de un modo significativo la interacción entre ellas y la matemática. Un ejemplo bastante ilustrativo de lo que es la interdisciplina en la ciencia lo tenemos en la biología matemática. En este campo de estudio se necesita una comprensión profunda de los problemas biológicos y contar con las herramientas matemáticas necesarias para su posible solución. Lo anterior queda plasmado en forma de lo que se conoce como un modelo matemático. Un modelo matemático es una representación abstracta de un problema real a través del cual tratamos de analizar, describir, explicar, simular en general, explorar, controlar y, lo más importante, tratar de predecir un problema o fenómeno por medio de una formulación matemática.

El proceso que se sigue para generar un modelo matemático es el siguiente:

1. Se busca un problema del mundo real.
2. Se formula el modelo, identificando variables y estableciendo hipótesis lo suficientemente simples para tratarse de manera matemática.

3. Se aplican los conocimientos matemáticos.
4. Se comparan los datos obtenidos experimentalmente con los datos obtenidos a partir del modelo.

En este trabajo se presentan algunos ejemplos que tratan de resaltar lo anterior. En algunos de ellos el objetivo es determinar los máximos o mínimos en problemas sobre pesquerías aplicando la Teoría de Control Óptimo.

En este tipo de problemas, a diferencia de los problemas que se resuelven con la ayuda del Cálculo usual, el dominio de las funciones a ser minimizadas no es un subconjunto de un espacio de dimensión finita, más bien las funciones están definidas en alguna parte de un espacio de dimensión infinita.

Los ejemplos más antiguos sobre problemas de mínimos sobre espacios abstractos están en el cálculo de variaciones.

En el cálculo de variaciones se busca una curva que maximice o minimice cierta función  $J$ .

En este campo se tienen curvas en el plano dadas por  $x = x(t)$  donde  $x(\bullet)$  es una función suficientemente bien comportada en el intervalo  $[t_0, t_1]$ . Los puntos finales de las curvas admisibles están prescritos. La función  $J$  está dada por una integral sobre  $[t_0, t_1]$  que involucra a  $x(t)$  y su derivada  $\dot{x}(t)$ . Un ejemplo de lo anterior es

$$J(x) = \int_{t_0}^{t_1} [a(x(t))^2 + b(\dot{x}(t))^2] dt$$

En este ejemplo, la integral es cuadrática en  $x(t)$  y  $\dot{x}(t)$ . Como un ejemplo sencillo de lo anterior, se tiene la longitud de curva de la gráfica de una función  $x(t)$

$$J = \int_{t_0}^{t_1} [1 + (\dot{x}(t))^2] dt$$

en este caso el mínimo es alcanzado por la recta que une los puntos inicial y final.

El cálculo de variaciones inicia con el problema de la braquistócrona resuelto por Bernoulli hace más de 300 años. Este problema trata sobre las líneas de deslizamiento más rápido. Dados dos puntos  $A$  y  $B$ , que no pertenecen a una misma línea vertical, se trata de encontrar la curva que tenga la propiedad de que un punto material se deslice por dicha curva desde el punto  $A$  hasta el punto  $B$  en el menor tiempo posible.

La motivación original del cálculo de variaciones viene de la física clásica (mecánica, óptica) y geometría, pero alrededor de la mitad del siglo pasado parecía que el cálculo de variaciones no tenía una larga vida en la matemática. Sin embargo, en los años 50's del siglo pasado se encontraron nuevas aplicaciones.

A partir de las nuevas aplicaciones la teoría se extendió. Algunas de estas nuevas aplicaciones se dieron en las ciencias aeroespaciales, procesos de control industrial, y economía matemática. Típicamente, estos últimos problemas no son del todo el tipo de problemas considerados en el cálculo de variaciones, ya que algunas de las variables que aparecen están sujetas a restricciones. Ellos son sin embargo, de un tipo de problemas llamados problemas de control óptimo.

En los problemas aeroespaciales, los ingenieros estuvieron interesados en el problema de controlar un sistema gobernado por un conjunto de ecuaciones diferenciales. En muchos problemas lo que se quería era controlar el sistema con el propósito de que un índice de rendimiento en particular fuese minimizado. De lo anterior, resultó que se podían obtener grandes ahorros en el costo con una pequeña mejora en el rendimiento con lo que la operación óptima se convirtió en algo muy importante.

En el cálculo clásico de variaciones existen tres problemas de optimización que son equivalentes: el problema de Bolza, el problema de Lagrange, y el problema de Mayer, los cuales tratan de minimizar un índice de ejecución de un sistema gobernado por un sistema de ecuaciones diferenciales. Existen dos diferencias entre estos problemas y el problema de control óptimo. Las ecuaciones diferenciales involucradas son de un tipo ligeramente menos generales en los problemas de control óptimo y ciertas variables llamadas variables de control deben de pertenecer a un conjunto cerrado, mientras que para los problemas de Bolza, Lagrange y Mayer, las variables del problema se supone están en un conjunto abierto.

Las condiciones necesarias para la optimización del problema de control óptimo fueron derivadas por Pontryagin, Boltyanskii y Gamkrelidze. En la terminología común estas condiciones necesarias se conocen como el “Principio de Pontryagin”.

### 1.1.1. Problema de producción óptima

Para manejar eficientemente una población, lo primero que se tiene que hacer es entender su dinámica. El problema central es cómo producir la mayor cosecha posible sin comprometer la existencia del recurso cosechado.

Para muchas poblaciones en cosecha la unidad importante de medida es la producción. La producción puede ser expresada en número, o por peso de los individuos y siempre involucra una unidad de tiempo (generalmente la medida es un año). El objetivo es obtener la producción óptima de cualquier población en cosecha. El concepto de producción máxima sustentable ha sido la base para el manejo científico de recursos desde los años 30's del siglo pasado. Primero se considera la situación simple en la cual la máxima producción de biomasa define a la producción óptima. Implícitamente en este concepto está la idea de producción sustentable sobre un periodo de tiempo grande.

En una población que es explotada, usualmente habrá una parte de la población que no será capturada por el tipo de artes de pesca que se usen o que no está a propósito cosechada. En una pesquería, el interés, en general, se centra en la producción en peso. Existen dos factores que hacen que decrezca el peso del stock capturado durante un año: la mortalidad natural y la mortalidad por pesca. Similarmente hay factores que incrementan el peso del stock: el crecimiento y el reclutamiento.

### 1.1.2. Pesquerías

La pesca es una actividad multidisciplinaria donde están involucrados una gran cantidad de procesos de índole biológicos, económicos, sociales, energéticos, etc., los cuales se pueden separar en 3 grupos entrelazados:

1. Recursos
2. Unidad de pesca
3. Contexto socio-económico

Para aprovechar el recurso es necesaria la investigación biológica y conocer cómo es la dinámica de la población. El segundo grupo tiene que ver con la captura y el procesamiento de la biomasa capturada, y el tercer grupo se refiere a las actividades económicas y sociales que llevan el producto al consumidor.

En una pesquería se pretende diseñar políticas de explotación óptimas de acuerdo con ciertos criterios socio-económicos y ecológicos, que definen una serie de restricciones impuestas por el tipo de economía de la sociedad.

Una definición importante en las pesquerías es el esfuerzo de pesca. Esto representa el número de artes de pesca (equipo empleado para la captura) de un tipo específico utilizado en los caladeros (zonas donde se colocan las redes de pesca) en una unidad de tiempo determinada, por ejemplo el número de horas de arrastre, número de anzuelos lanzados o número de veces que se cobra una red de cerco por día.

Por último, se define biomasa como la materia total de los seres que viven en un lugar determinado, expresado en peso por unidad de área o de volumen.

### 1.1.3. Control biológico

Algunas especies interfieren con las actividades del hombre, en tales caso se etiquetan como plagas. La primera idea sobre las plagas es que hay que controlarlas. Los controles usados en este contexto deben entenderse como un control de daños. Una de las formas de controlar los daños es reducir el promedio de abundancia de las especies que son plagas, pero existen otras formas de reducir los daños causados por las plagas sin afectar la abundancia.

Una especie se define como controlada cuando no causa daños económicos excesivos y no controlada cuando se producen esos daños. La frontera entre estos dos estados dependerá de la plaga particular.

De los diferentes tipos de control, existen los que se llaman controles biológicos. El control biológico es un tipo especial de control en el cual el daño causado por una plaga es reducido o eliminado por un agente biológico. El control biológico es un intento de reducir la densidad promedio de la plaga por la acción de enfermedades, parásitos o depredadores. Esto es un aspecto del problema de regulación natural del tamaño de la población.

### 1.1.4. reconocimientos

Es trabajo se desarrolló dentro del proyecto PAPIIT IN112715 y se agradece el apoyo recibido.



# Capítulo 2

## Preliminares

### 2.1. Preliminares

Con el propósito de que el lector tenga una idea, aunque general, de lo que se discutirá en todas las secciones del material que aquí se presenta, a continuación se muestran los resultados más importantes que le dan sustento teórico a este trabajo. El control óptimo es un conjunto de técnicas matemáticas usadas para determinar el control y las trayectorias de un sistema dinámico que minimizan una funcional de costo sobre un intervalo de tiempo.

Una funcional es una función cuyo dominio de definición es un conjunto de funciones, en donde a cada función le asocia un número real. En nuestro caso las funcionales que nos interesan dependerán de un conjunto de funciones  $u_j(t)$  llamadas funciones de control, con las cuales el valor de la funcional puede ser modificado.

Con base en lo anterior, podemos centrarnos en el problema que queremos resolver: ¿Cómo escoger la función de control para que un sistema se comporte de manera deseada y con un costo mínimo? Por supuesto, la estrategia de control precisa dependerá del criterio usado para decidir qué es lo que se entiende por “costo mínimo”. Veamos el planteamiento teórico.

Para que la matemática nos pueda ayudar a resolver problemas de la vida real, necesitamos conocer el modelo matemático que describe al sistema físico de interés. Para ello, necesitamos conocer las ecuaciones diferenciales que relacionan el conjunto de entradas, salidas y las variables de estado que lo determinan. En el tipo de problemas que se tratan de resolver en este trabajo, las ecuaciones diferenciales dependen, entre otros factores, de ciertas variables (variables de control), las cuales se pueden modificar a lo largo de la evolución del sistema. El problema de control óptimo consiste en encontrar, de todas las posibles trayectorias del sistema, aquella que iniciando en  $t = 0$  en  $x_0$  y que termina en  $T = t$  en  $x_1$  minimiza el valor de cierta función costo  $J$ .

El estado de un sistema dinámico es el conjunto más pequeño de variables (llamadas variables de estado), tal que el conocimiento de esas variables en  $t = t_0$  conjuntamente con el conocimiento de la entrada para  $t \geq t_0$ , determinan completamente el comportamiento del sistema para cualquier tiempo. Dicho de otra manera, conocidas las variables de estado en el instante de tiempo inicial y las evoluciones de las entradas para tiempos  $t \geq t_0$ , el estado futuro del sistema queda determinado.

### 2.1.1. Medida de Ejecución

Tomemos el sistema determinado por  $n$  ecuaciones diferenciales no lineales de la forma

$$\dot{x}(t) = f(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m, t) \quad (2.1)$$

sujeto a la restricción

$$x(t_0) = x_0 \quad (2.2)$$

donde  $x(t)$  es el vector de estado y  $f$  es un vector con componentes

$$f_i(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m, t)$$

donde las  $f_i$  son continuas y tienen primeras derivadas parciales continuas y tal que la solución de la ecuación (2.1) existe y es única para una condición inicial dada. Un índice de ejecución, (o funcional de costo),  $J$  es un escalar que depende de las variables de control. Diferentes valores de las variables de control implican diferentes

trayectorias del sistema dinámico. Lo anterior se debe tener en cuenta para determinar el vector de control que maximice  $J$ . El problema central de cualquier intento de optimización dinámica es la búsqueda de un control que maximice o minimice un criterio representativo del sistema.

Nuestro problema en sí, es escoger  $u(t)$  que minimice

$$J(u) = \Phi[x(t_1), t_1] + \int_{t_0}^{t_1} F(x, u, t) dt \quad (2.3)$$

sujeto a (2.1) y (2.2) y tal que al tiempo  $t_1$ , el estado del sistema es  $x_1$ . Las funciones  $\Phi$  y  $F$  son funciones escalares, continuas y tienen primeras derivadas parciales continuas.

Si suponemos que no existen restricciones sobre los controles  $u_i(t)$  y que  $J(u)$  es diferenciable, es decir, que si  $u$  y  $u + \delta u$  son dos controles para los cuales  $J$  está definido, entonces

$$\Delta J = J(u + \delta u) - J(u) = \delta J(u, \delta u) + \beta(u, \delta u) \delta u \quad (2.4)$$

donde  $\delta J$  es lineal en  $\delta u$  y  $\beta(u, \delta u) = 0$  si  $\delta u = 0$ . En la ecuación (2.4), a  $\delta J$  es lo que se conoce como la **Variación** en  $J$  correspondiente a una variación  $\delta u$  en  $u$ . El control  $u^*$  es un extremal y la funcional  $J$  tiene un mínimo relativo en  $u^*$ , si existe  $\epsilon > 0$  tal que para todas las funciones  $u$  que cumplen con  $\|u - u^*\| < \epsilon$  y la diferencia  $J(u) - J(u^*)$  es no negativa. Un extremal es un punto en donde la variación es cero. Un resultado fundamental es el siguiente.

**Teorema 2.1** *Una condición necesaria para que  $J$  alcance un mínimo en  $u^*$  es que  $u^*$  sea un extremal; es decir*

$$\delta J(u^*, \delta u) = 0$$

para toda  $\delta u$ .

Para una demostración del teorema ver el libro de Kirk (1970, p.121). Con este teorema y la ecuación (2.3), introduzcamos un vector de multiplicadores de Lagrange

$$p = [p_1, p_2, \dots, p_n]^T$$

para formar una funcional aumentada incorporando la coacción:

$$J_a = \Phi[x(t_1), t_1] + \int_{t_0}^{t_1} [F(x, u, t) + p^T(f - \dot{x})]dt \quad (2.5)$$

Tomando al último término que aparece en el integrando, (2.5) y haciendo las operaciones que se indican, la integral se transforma en

$$J_a = \Phi[x(t_1), t_1] + \int_{t_0}^{t_1} [F(x, u, t) + p^T f - p^T \dot{x}]dt$$

Al integrar por partes el último término de la integral se tiene

$$\int_{t_0}^{t_1} p^T \dot{x} dt = [p^T x]_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} \dot{p}^T x dt$$

que al sustituir en  $J_a$  se obtiene

$$J_a = \Phi[x(t_1), t_1] - [p^T x]_{t_0}^{t_1} + \int_{t_0}^{t_1} [F(x, u, t) + p^T f + \dot{p}^T x]dt \quad (2.6)$$

Ahora definimos

$$H(x, u, t) = F(x, u, t) + p^T f \quad (2.7)$$

la ecuación (2.6) se transforma en

$$J_a = \Phi[x(t_1), t_1] - [p^T x]_{t_0}^{t_1} + \int_{t_0}^{t_1} [H(x, u, t) + \dot{p}^T x]dt$$

A  $H(x, u, t)$  se le llama el Hamiltoniano del sistema.

Suponemos que  $u$  es continua y diferenciable sobre  $t_0 \leq t \leq t_1$  y que  $t_0$  y  $t_1$  son fijos.

La variación de  $J_a$  correspondiente a una variación de  $\delta u$  en  $u$  es

$$\delta J_a = \left[ \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} - p^T \right) \delta x \right]_{t=t_1} + \int_{t_0}^{t_1} \left[ \frac{\partial H}{\partial x} \delta x + \frac{\partial H}{\partial u} \delta u + \dot{p}^T \delta x \right] dt \quad (2.8)$$

donde  $\delta x$  es la variación en  $x$  en la ecuación diferencial (2.1) debido a  $\delta u$ . En este punto se tiene que hacer la aclaración de que

$$\frac{\partial H}{\partial x} = \left[ \frac{\partial H}{\partial x_1}, \frac{\partial H}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial H}{\partial x_n} \right]$$

similarmente para  $\frac{\partial \Phi}{\partial x}$  y  $\frac{\partial H}{\partial u}$

Nótese que para  $x(t_0)$  está especificado, entonces  $(\delta x)_{t=t_0} = 0$ . Es conveniente quitar los términos que involucran a  $\delta x$  en (2.8). Para ello se elige a  $p$  como:

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.9)$$

y

$$p_i(t_1) = \left[ \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \right]_{t=t_1} \quad (2.10)$$

Con estos cambios, la ecuación (2.8) se reduce a

$$\delta J_a = \int_{t_0}^{t_1} \left[ \frac{\partial H}{\partial u} \delta u \right] dt \quad (2.11)$$

y por el teorema (2.1), la condición necesaria para que  $u^*$  sea un extremal es que

$$\left[ \frac{\partial H}{\partial u_i} \right]_{u=u^*} = 0, \quad t_0 \leq t \leq t_1; \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (2.12)$$

**Teorema 2.2** *Condición necesaria para que  $u^*$  sea un extremal para la ecuación (2.3), sujeto a las ecuaciones (2.1) y (2.2), es que las ecuaciones (2.9), (2.10) y (2.12) se cumplan.*

Las ecuaciones de estado (2.1) y las ecuaciones adjuntas (2.9) dan un total de  $2n$  ecuaciones diferenciales no lineales con las condiciones a la frontera mezcladas  $x(t_0)$  y  $p(t_1)$ . En general no es posible encontrar la solución analítica por lo que se tiene que recurrir a usar técnicas numéricas. Si las funciones  $f$  y  $F$  no dependen explícitamente de  $t$ , entonces derivando la ecuación (2.7) se tiene,

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial F}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial F}{\partial u} \dot{u} + \left[ \frac{\partial f}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial f}{\partial u} \dot{u} \right] p^T + \dot{p}^T f,$$

de lo anterior, agrupando términos

$$\frac{dH}{dt} = \left[ \frac{\partial F}{\partial x} + p^T \frac{\partial f}{\partial x} \right] \dot{x} + \left[ \frac{\partial F}{\partial u} + p^T \frac{\partial f}{\partial u} \right] \dot{u} + \dot{p}^T f,$$

pero de (2.7) se tiene

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial u} \dot{u} + \frac{\partial H}{\partial x} \dot{x} + \dot{p}^T f.$$

Pero como  $\dot{x}(t) = f(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_m, t)$

Entonces derivando en (2.7), se puede escribir como

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial u} \dot{u} + \left[ \frac{\partial H}{\partial x} + \dot{p}^T \right] f$$

Si sobre una trayectoria óptima las ecuaciones (2.9) y (2.12) se cumplen, se sigue entonces que  $\frac{dH}{dt} = 0$  cuando  $u = u^*$ , y tal que

$$(H)_{u=u^*} = \text{const}, \quad t_0 \leq t \leq t_1 \quad (2.13)$$

Se ha supuesto que  $t_1$  es fijo y que  $x(t_1)$  es libre. Si este no fuera el caso, entonces considerando la ecuación (2.6) con (2.7), el término en  $\delta J_a$  en (2.8) que está fuera de la integral, se obtiene

$$\left[ \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} - p^T \right) \delta x + \left( H + \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) \delta t \right]_{t=t_1, u=u^*} \quad (2.14)$$

Lo anterior por el teorema (2.1) debe ser cero, si las ecuaciones (2.9) y (2.12) se cumplen.

De lo anterior se tienen algunos casos especiales importantes que se enlistan a continuación: (la condición (2.2) se cumple en todos los casos).

Tiempo final  $t_1$  especificado

i)  $x(t_1)$  libre.

En la ecuación (2.14) se tiene  $\delta t_1 = 0$  pero  $\delta x(t_1)$  es arbitrario, entonces la condición dada por la ecuación (2.10) debe cumplirse.

ii)  $x(t_1)$  especificado.

En este caso  $\delta t_1 = 0$ ,  $\delta x(t_1) = 0$  y la ecuación (2.14) debe ser cero.

Las condiciones son por tanto

$$x^*(t_1) = x_f \quad (2.15)$$

y la ecuación (2.15) reemplaza a la ecuación (2.10).

Tiempo final libre.

iii)  $x(t_1)$  libre.

En este caso  $\delta t_1$  y  $\delta x(t_1)$  son arbitrarios por lo que la ecuación (2.14) debe ser el vacío, y la ecuación (2.10) debe cumplirse junto con

$$\left[ \left( H + \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) \right]_{t=t_1, u=u^*} = 0 \quad (2.16)$$

En particular si  $\Phi$  y  $\delta x(t_1)$  no dependen explícitamente de  $t$  entonces las ecuaciones (2.14) y (2.16) implican

$$(H)_{u=u^*} = 0, \quad t_o \leq t \leq t_1 \quad (2.17)$$

iv)  $x(t_1)$  no especificado.

Solamente  $\delta t_1$  es arbitrario en la ecuación (2.14), entonces las condiciones están dadas por las ecuaciones (2.15), (2.16) y (2.17).

Si las condiciones precedentes sobre  $x(t_1)$  aplican solo para algunas de sus componentes, entonces  $\delta x_1(t_1)$  en la ecuación (2.14) son independientes y se sigue que las condiciones apropiadas se cumplen solo para esas componentes.

### 2.1.2. Principio de Pontryagin

En problemas de la vida real las variables de control usualmente están sujetas a restricciones en sus magnitudes de la forma  $u_i(t) \leq k_i$ . Esto implica que el conjunto final de estados que se pueden alcanzar están restringidos. El interés principal es derivar las condiciones necesarias para que la optimización correspondiente al teorema (2.2) se pueda tener para un caso no acotado. Un control admisible es aquel que cumple con las restricciones, y se consideran las variaciones tales que  $u^* + \delta u$  es admisible y  $\delta u$  es suficientemente pequeña de tal forma que el signo de

$$\Delta J = J(u^* + \delta u) - J(u^*)$$

donde  $J$  está definido en la ecuación (2.3), está determinado por  $\delta J$  en la ecuación (2.4). Debido a las restricciones sobre  $\delta u$ , el teorema (2.1) no aplica del todo y en vez de ello se tiene una condición necesaria para que  $u^*$  minimice a  $J$

$$\delta J(u^*, \delta u) \geq 0 \quad (2.18)$$

Se introducen los multiplicadores de Lagrange para definir a  $J_a$  en la ecuación (2.5) y se escogen para que satisfagan las ecuaciones (2.9) y (2.10). La única diferencia es que la expresión para  $\delta J_a$  en la ecuación (2.11) es remplazada por

$$\delta J_a(u, \delta u) = \int_{t_0}^{t_1} [H(x, u + \delta u, p, t) - H(x, u, p, t)] dt \quad (2.19)$$

y de la ecuación (2.18) se sigue que una condición necesaria para que  $u^* = U$  sea un control mínimo es que  $\delta J_a(u^*, \delta u)$  en la ecuación (2.19) sea no negativo para toda  $\delta u$  admisible. Esto implica que

$$H(x^*, u^* + \delta u, p^*, t) \geq H(x^*, u^*, p^*, t) \quad (2.20)$$

para toda  $\delta u$  admisible y para todo  $t$  en  $t_0 \leq t \leq t_1$ ; por si la ecuación (2.20) no se cumple en algún intervalo  $t_2 \leq t \leq t_3$ , con  $t_3 - t_2$  arbitrariamente pequeña, entonces escogiendo  $\delta u = 0$  para  $t$  fuera de este intervalo  $\delta J_a(u^*, \delta u)$  deberá ser negativa. La ecuación (2.20) establece que  $u^*$  minimiza a  $H$ , entonces se establece:

**Teorema 2.3** (*Principio mínimo de Pontryaguin*). *Las condición necesaria para que  $u^*$  minimice a la ecuación (2.3) es que se cumplan las ecuaciones (2.9), (2.10), y (2.20).*

Con una pequeña diferencia en la definición de  $H$  el principio se transforma en uno de maximizar a  $H$ , y en la literatura se le conoce como el principio máximo. En estos casos  $u^*$  puede ser continua a trozos. Para una prueba rigurosa, ver Leitmann (1981) y Macki y Strauss (1982).

Esta derivación supuso que  $t_1$  está fijo y que  $x(t_1)$  es libre; las condiciones a la frontera para otras situaciones son las dadas anteriormente. También se puede mostrar que cuando  $H$  no depende explícitamente de  $t$  entonces (2.13) y (2.17) se cumplen para cuando el tiempo final  $t_1$  es fijo o libre.

# Capítulo 3

## Producción máxima sostenible

### 3.1. Producción Máxima Sustentable en Sistemas sujetos a Cosecha en más de un Nivel Trófico

En este capítulo mostramos como se utilizan modelos matemáticos para estudiar aspectos cualitativos de problemas que se origina en el manejo de pesquerías multiespecíficas. Concretamente, se examina la producción máxima sustentable de una población de interés bajo restricciones sobre la producción de las otras especies capturadas. Para esto, nos basamos en el trabajo de Beddington y May (ver [26]). Se analizan varias situaciones, (metafóricamente, krill- ballenas, krill-calamares-cachalotes, y krill-.ballenas-pingüinos), todas compartiendo la característica que son especies capturadas en dos niveles diferentes de la cadena alimenticia. Se trata de explotar la población del krill que es el alimento de las ballenas, cachalotes y pingüinos sin poner en riesgo a esas poblaciones. Las implicaciones biológicas de este trabajo son discutidas en science 205:267-277 1979.

### 3.1.1. Introducción

Debido a que han sido sobre explotadas y colapsadas varias pesquerías mayores [1-3], y ha surgido un interés creciente en la cosecha de nuevos tipos de alimento del mar. Estas especies no convencionales típicamente ocupan niveles más bajos en la jerarquía trófica que aquellas que son cosechadas convencionalmente, y ellas a menudo son fuente sustancial (presas) para otras especies del stock.

Consecuentemente hay muchas corrientes inmiscuidas interesadas en encontrar principios para el manejo de pesquerías multiespecies, particularmente en las circunstancias donde tanto las presas como los depredadores son explotadas. Un ejemplo, el cual servirá como metáfora en mucho de nuestras siguientes discusiones surgen en el océano del Sur, (al océano del Sur también se le conoce como el océano de la Antártida), donde hay un interés creciente en la pesca del krill, *Euphasia superba*, que es el principal suministro de comida para las ballenas.

Algunos aspectos biológicos y económicos de estos problemas han sido discutidos de una manera general con la ayuda de modelos matemáticos simples. El ejemplo que aquí se muestra está dirigido a la elaboración de técnicas de una parte del trabajo desarrollado por May, Beddington, Clark, Holt y Laws [26], a saber, la noción de producción máxima sustentable (PMS) en un sistema multiespecies sujeto a la cosecha en más de un nivel trófico.

En la sección 2 se delinea un modelo simple que contiene los elementos esenciales de un sistema presa- depredador en el que tanto las presas como los depredadores son cosechados; nos referimos a estas poblaciones como krill y ballenas. En la sección 3 se discute la maximización de la producción sustentable de ballenas, para un nivel específico de esfuerzo de pesca sobre el krill, y, recíprocamente, la maximización de la producción sustentable del krill para un esfuerzo de pesca sobre las ballenas. En la sección 4 se trata el caso más general que consiste en maximizar la producción sustentable de una población, bajo la restricción de que la producción de la otra población está prescrita; la solución de este problema define los límites de producción sustentable que se pueden obtener conjuntamente de las dos poblaciones, y es por tanto la extensión de la idea de PMS para multiespecies. Para tener una mejor idea de los fundamentos de estos resultados para la producción conjunta, en la sección 4

también mostramos cómo la producción del krill ( o alternativamente las ballenas) varía como una función de la densidad de población del krill y de las ballenas para varios niveles específicos de producción de ballenas (o krill). En la sección 5 se indica cómo los análisis anteriores pueden ser extendidos a sistemas con tres niveles tróficos (krill-calamares- cachalotes), en los cuales lo mínimo y lo máximo de la población son cosechados de manera similar. En la sección 6 se extiende el análisis al caso donde la especie de presas y dos especies de depredadores que compiten son cosechadas (krill-pingüinos-ballenas).

Estudios previos de este tipo general han sido principalmente dirigidos a la cosecha simultánea de varias especies en competencia. Silvert y Smith [33] y otros han obtenido resultados para las estrategias de cosecha que maximizan la producción total (esto es, la suma del peso de la producción de las especies individuales) en un sistema multiespecies; en contraste, nosotros estamos interesados en la posible producción de una especie particular, bajo varias restricciones, sobre la cosecha de otras especies en el ecosistema.

La discusión en este ejemplo es para el caso particular donde la cosecha está dirigida a un esfuerzo de pesca constante o para producción constante. Cada vez más las reglas de manejo adoptadas por la Comisión Internacional para la conservación de los recursos vivos de la Marina Antártica, y las realidades ecológicas y medioambientales de pesca, son tales que las suposiciones convencionales de esfuerzo constante o cuotas constantes son límites idealizados. Algunas de estas complicaciones son revisadas en [26]. Sin embargo, el análisis es útil para analizar la cosecha de sistemas multiespecies bajo la suposición relativamente simple de esfuerzo constante o producción constante, no obstante las perspicacias cualitativas que surgen, y como un punto de partida para estudios más elaborados.

Se debe enfatizar que el análisis que aquí se muestra es estático. Esto es, se indica cómo el concepto estático de PMS para una especie simple puede extenderse, para determinar estados estables en los cuales la producción de una de las especies tiene valores extremos sujetos a algún régimen de cosecha específico sobre otras especies. En la práctica, la dinámica del sistema puede también ser considerada; necesitamos conocer a lo largo de qué trayectoria dinámica el sistema es llevado de mejor manera a un estado de equilibrio específico, y cómo deberá responder a perturbaciones

alrededor del equilibrio. Tales consideraciones dinámicas pueden ser manejadas por técnicas estándar de la dinámica de optimización y por permitir que los parámetros en las ecuaciones de la población exhiban fluctuaciones aleatorias. Algunas de las complicaciones que surgen cuando los sistemas son cosechados en más de un nivel trófico han sido exploradas por Brauer y Soudack y por Beddington y Cooke; este ejemplo está más enfocado sobre aspectos estáticos de cosecha sustentable en sistemas multiespecies.

Los principales resultados a los que se llega en este ejemplo son presentados sin prueba o discusión de su derivación, en [26]. Estos autores desarrollan las implicaciones biológicas de sus resultados, con referencia particular al manejo de los ecosistemas del mar del Sur y del mar del Norte y otras pesquerías. En este ejemplo, nos concentramos en los detalles técnicos, y no se hace recapitulación de la discusión biológica la cual puede ser encontrada en [26].

### 3.1.2. El Modelo Presa-Depredador

Consideramos una población de presas (krill),  $N_1$ , esto es el recurso para una población de depredadores (ballenas),  $N_2$ . Como se discute más ampliamente en [6], [18], [23], [24] un modelo simple para la dinámica de las presas es

$$\frac{dN_1}{dt} = r_1 N_1 \left[ 1 - \frac{N_1}{K} \right] - a N_1 N_2 \quad (3.1)$$

Aquí la tasa de crecimiento per cápita intrínseca  $r_1$ , y la capacidad de carga,  $K$ , para la población de presas tienen sus significados usuales. El modelo de Lotka-Volterra se usa para describir los efectos de la depredación con cualquier depredador que consuma las presas a una tasa proporcional a su densidad,  $aN_1$ . Para la dinámica del depredador escribimos

$$\frac{dN_2}{dt} = r_2 N_2 \left[ 1 - \frac{N_2}{\alpha N_1} \right] \quad (3.2)$$

Aquí  $r_2$  es la tasa de crecimiento per cápita intrínseco para la población de depredadores, y su capacidad de carga o nivel de equilibrio natural es linealmente proporcional a la abundancia de presas, vía la constante de proporcionalidad  $\alpha$ . Como

siempre, es conveniente reescalar las ecuaciones (3.1) y (3.2) para llevar las variables a la forma adimensional. Se define

$$X_1 = \frac{N_1}{K} \quad y \quad X_2 = \frac{N_2}{\alpha K}$$

y se introduce la combinación de los parámetros

$$\nu = a\alpha \frac{K}{r_1} \tag{3.3}$$

Como se discute en [26],  $\nu$  mide hasta que punto los depredadores aprovechan de manera óptima a las presas en el sistema natural:

1.  $\nu = 1$  las ballenas son cosechadas exactamente a la población de krill en su punto PMS;
2.  $\nu > 1$  representa la explotación del krill por las ballenas por encima de su punto PMS;
3.  $\nu < 1$  representa explotación por debajo del nivel PMS.

A continuación, suponemos que el sistema está cosechado para tener una producción de krill  $Y_1$  y de ballenas  $Y_2$ . Esto indica que se tienen que poner los términos de mortalidad adicional,  $-Y_1$  y  $-Y_2$ , en la parte derecha de las ecuaciones (3.1) y (3.2) respectivamente. Si  $-Y_1$  y  $-Y_2$  están expresados apropiadamente en la forma reescalada, la dinámica de las poblaciones de las presas y depredadores se pueden escribir de otra manera. Para ello partamos de las ecuaciones (3.1) y (3.2).

De la ecuación (3.1)

$$\frac{dN_1}{dt} = r_1 N_1 \left[ 1 - \frac{N_1}{K} \right] - a N_1 N_2$$

Si hacemos el cambio

$$X_1 = \frac{N_1}{K} \quad y \quad X_2 = \frac{N_2}{\alpha K}$$

y lo sustituimos en la ecuación (3.1)

$$\frac{dN_1}{dt} = K \frac{dX_1}{dt} = r_1 K X_1 (1 - X_1) - a K X_1 \alpha K X_2$$

de donde

$$\frac{dX_1}{dt} = r_1 X_1 (1 - X_1) - a \alpha K X_1 X_2$$

Si al último término de la ecuación anterior se multiplica y divide por  $r_1$ , se tiene

$$\frac{dX_1}{dt} = r_1 X_1 (1 - X_1) - a\alpha K X_1 X_2 \frac{r_1}{r_1}$$

y como

$$\nu = \frac{a\alpha K}{r_1}$$

La ecuación (3.1) se transforma en

$$\frac{dX_1}{dt} = r_1 X_1 (1 - X_1) - r_1 \nu X_1 X_2$$

al agrupar términos

$$\frac{dX_1}{dt} = r_1 X_1 (1 - X_1 - \nu X_2)$$

Al poner el término correspondiente a la mortalidad, la ecuación se puede escribir como

$$\frac{dX_1}{dt} = r_1 X_1 (1 - X_1 - \nu X_2) - Y_1 \quad (3.4)$$

Ahora, tomando la ecuación (3.2), como

$$X_2 = \frac{N_2}{\alpha K}$$

entonces  $N_2 = \alpha K X_2$ , que al derivar se obtiene

$$\frac{dN_2}{dt} = \alpha K \frac{dX_2}{dt} = r_2 \alpha K X_2 \left[ 1 - \frac{\alpha K X_2}{\alpha K X_1} \right]$$

que se transforma en

$$\frac{dX_2}{dt} = r_2 X_2 \left[ 1 - \frac{X_2}{X_1} \right]$$

Nuevamente tenemos que incluir el término correspondiente a la mortalidad, por lo que se tiene

$$\frac{dX_2}{dt} = r_2 X_2 \left[ 1 - \frac{X_2}{X_1} \right] - Y_2 \quad (3.5)$$

En el caso particular donde la producción se realiza por pescar a esfuerzo constante, reescribimos

$$Y_1 = r_1 F_1 X_1 \quad (3.6)$$

$$Y_2 = r_2 F_2 X_2 \quad (3.7)$$

Donde  $F_1$  y  $F_2$  son los esfuerzos de pesca. Reescalando  $F_i = 1$  corresponde a una proporción de pesca igual a la tasa de crecimiento intrínseca,  $r_i$ . La dinámica de las poblaciones de krill y ballenas en este caso obedecen las ecuaciones (3.1), (3.2), (3.3), y (3.4), (3.5). Sustituyendo a  $Y_1$  en (3.4)

$$\frac{dX_1}{dt} = r_1 X_1 [1 - X_1 - \nu X_2] - r_1 F_1 X_1$$

agrupando términos en esta última expresión

$$\frac{dX_1}{dt} = r_1 X_1 [1 - X_1 - \nu X_2 - F_1] \quad (3.8)$$

Por otro lado se tiene

$$\frac{dX_2}{dt} = r_2 X_2 \left[ 1 - \frac{X_2}{X_1} \right] - r_2 F_2 X_2$$

agrupando términos, queda

$$\frac{dX_2}{dt} = r_2 X_2 \left[ 1 - \frac{X_2}{X_1} - F_2 \right] \quad (3.9)$$

En el equilibrio, las poblaciones permanecen constantes y en este caso

$$\frac{dX_i}{dt} = 0$$

Por tanto las relaciones en el equilibrio entre la densidad de los stock ( $X_1$  y  $X_2$ ) y la producciones ( $Y_1$  y  $Y_2$ )- o esfuerzo de pesca ( $F_1$  y  $F_2$ )- pueden obtenerse igualando a cero las ecuaciones (3.4) y (3.5), o (3.8) y (3.9), respectivamente.

### 3.1.3. PMS de una Población, con Esfuerzo de Pesca Fijo sobre la otra Población

Primero consideramos el caso donde el esfuerzo de pesca del krill  $F_1$  está especificado, y nosotros deseamos maximizar la producción de ballenas  $Y_2$ . La versión de

equilibrio de las ecuaciones para la dinámica del krill, en principio, permite que  $X_1$  sea expresado en términos de  $X_2$  y un esfuerzo  $F_1$  dado. Por lo tanto en el equilibrio las ecuaciones para la dinámica de las ballenas pueden, en principio, llevar a una expresión para  $Y_2$  como una función de  $X_2$  y el parámetro  $F_1$  (con  $X_1$  eliminada); esta expresión puede ser maximizada para tener el valor de PMS de  $Y_2$  como una función de  $F_1$ . Alternativamente, el valor apropiado de  $X_1$  puede ser sustituido en (3.6) para tener la producción del krill  $Y_1$  correspondiente a estas condiciones. El procedimiento anterior está descrito en términos generales. Para las ecuaciones definidas en la sección 2, el problema puede ser estable: se busca maximizar la cantidad

$$Y_2 = r_2 X_2 \left[ 1 - \frac{X_2}{X_1} \right] \quad (3.10)$$

Sujeta a la restricción

$$F_1 = 1 - X_1 - \nu X_2 = \text{const} \quad (3.11)$$

Estas ecuaciones son suficientemente simples para que el problema se pueda resolver directamente, eliminando  $X_1$  de las ecuaciones (3.10) y (3.11). Una técnica más general, la cual se necesitará en la sección 4 involucra el uso de los multiplicadores de Lagrange. Para maximizar  $Y_2$ , sujeta a las restricciones  $F_1 = \text{const}$ , introducimos los multiplicadores de Lagrange  $\lambda$  y obtenemos las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned} \frac{\partial Y_2}{\partial X_1} + \lambda \frac{\partial F_1}{\partial X_1} &= 0 \\ \frac{\partial Y_2}{\partial X_2} + \lambda \frac{\partial F_1}{\partial X_2} &= 0 \end{aligned} \quad (3.12)$$

Se tienen tres ecuaciones (la ecuación (3.10) y las dos ecuaciones de (3.12)) para las cantidades  $X_1$ ,  $X_2$  y  $\lambda$ . El cálculo de  $\bar{Y}_2$  como una función de  $F_1$  (o, alternativamente, como una función de  $Y_1$ , vía la ecuación (3.6)) puede hacerse fácilmente como sigue. Primero eliminamos  $\lambda$  de las ecuaciones (3.12) para tener una relación entre  $X_2$  y  $X_1$ . Después escogemos  $X_2$  para que sea una variable implícita. Dados  $X_2$ ,  $X_1$  y de las relaciones establecidas resulta que  $\bar{Y}_2$  se obtiene de (3.10) y  $F_1$  de (3.11); por tanto  $\bar{Y}_2$  puede ser trazado como un función de  $F_1$ . Alternativamente, usando (3.6),  $\bar{Y}_2$  puede ser calculado como función de  $Y_1$ . Resolviendo las ecuaciones

(3.12), tenemos

$$\frac{\partial Y_2}{\partial X_1} + \lambda \frac{\partial F_1}{\partial X_1} = 0$$

que nos lleva a

$$r_2 \frac{X_2^2}{X_1^2} - \lambda = 0 \quad (3.13)$$

Ahora, la ecuación

$$\frac{\partial Y_2}{\partial X_2} + \lambda \frac{\partial F_1}{\partial X_2} = 0$$

implica que

$$r_2 - 2r_2 \frac{X_2}{X_1} + \lambda(-\nu) = 0 \quad (3.14)$$

De la ecuación (3.13),

$$\lambda = r_2 \frac{X_2^2}{X_1^2} = r_2 \left[ \frac{X_2}{X_1} \right]^2$$

Que sustituyendo en la ecuación (3.14)

$$r_2 - 2r_2 \frac{X_2}{X_1} + (-\nu)r_2 \left[ \frac{X_2}{X_1} \right]^2 = 0$$

la cual es equivalente a

$$1 - 2 \frac{X_2}{X_1} - (\nu) \left[ \frac{X_2}{X_1} \right]^2 = 0$$

al multiplicar por  $(-1)$  lo anterior nos da

$$-1 + 2 \frac{X_2}{X_1} + \nu \left[ \frac{X_2}{X_1} \right]^2 = 0 \quad (3.15)$$

resultando una ecuación de segundo grado para  $\frac{X_2}{X_1}$ .

Al resolver la ecuación de segundo grado se obtiene

$$\frac{X_2}{X_1} = \frac{-2 \pm [4 - 4(-1)\nu]^{\frac{1}{2}}}{2\nu}$$

que simplificando

$$\frac{X_2}{X_1} = \frac{-1 \pm [1 + \nu]^{\frac{1}{2}}}{\nu}$$

Sólo interesa la solución positiva del radical, con lo que

$$\frac{X_2}{X_1} = \frac{-1 + [1 + \nu]^{\frac{1}{2}}}{\nu}$$

Ahora, despejando a  $X_1$  en términos de  $X_2$ , se obtiene

$$X_1 = \frac{X_2\nu}{-1 + [1 + \nu]^{\frac{1}{2}}}$$

que es equivalente a

$$X_1 = \frac{X_2\nu}{-1 + [1 + \nu]^{\frac{1}{2}}} \left[ \frac{1 + [1 + \nu]^{\frac{1}{2}}}{1 + [1 + \nu]^{\frac{1}{2}}} \right]$$

De donde, después de hacer los productos, queda

$$X_1 = \frac{X_2\nu(1 + [1 + \nu]^{\frac{1}{2}})}{1 - 1 + \nu}$$

obteniéndose finalmente

$$X_1 = \frac{X_2\nu(1 + [1 + \nu]^{\frac{1}{2}})}{\nu}$$

Por lo que

$$X_1 = X_2(1 + [1 + \nu]^{\frac{1}{2}})$$

si se hace el cambio  $R = [1 + \nu]^{\frac{1}{2}}$ , entonces se llega a

$$X_1 = X_2(1 + R) \tag{3.16}$$

Las ecuaciones paramétricas que relacionan  $\bar{Y}_2$  a  $F_1$  o a  $Y_1$ , vía la variable implícita  $X_2$ , se obtienen sustituyendo (3.16) en (3.10), (3.11) y (3.6).

Sustituyendo (3.16) en (3.10) se obtiene

$$\bar{Y}_2 = r_2 X_2 \left[ 1 - \frac{X_2}{X_2(1 + (1 + \nu)^{\frac{1}{2}})} \right]$$

después de sumar fracciones

$$\bar{Y}_2 = r_2 X_2 \left[ \frac{[1 + \nu]^{\frac{1}{2}}}{1 + (1 + \nu)^{\frac{1}{2}}} \right]$$

multiplicando el numerador y el denominador de la anterior ecuación por

$$(1 - (1 + \nu)^{\frac{1}{2}})$$

se obtiene después de hacer algo de álgebra

$$\bar{Y}_2 = r_2 X_2 \left[ \frac{\nu + 1 - [1 + \nu]^{\frac{1}{2}}}{\nu} \right]$$

Pero como  $R = [1 + \nu]^{\frac{1}{2}}$ , entonces

$$\bar{Y}_2 = r_2 X_2 \left[ \frac{\nu + 1 - R}{\nu} \right] \quad (3.17)$$

Ahora sustituyendo (3.16) en (3.11)

$$F_1 = 1 - (1 + R)X_2 - \nu X_2$$

que es lo mismo que

$$F_1 = 1 - (1 + R + \nu)X_2 \quad (3.18)$$

Ahora, sustituyendo (3.16) y (3.18) en (3.6)

$$Y_1 = r_1(1 - (1 + R + \nu)X_2)(1 + R)X_2 \quad (3.19)$$

Las ecuaciones (3.17)-(3.19) se traducen en una relación lineal entre el PMS de las ballenas  $\bar{Y}_2$  y el esfuerzo específico de captura  $F_1$  del krill. Ellas dan una relación parabólica entre  $\bar{Y}_2$  y la producción del krill  $Y_1$  obtenido bajo la restricción de esfuerzo constante. Esta última relación está ilustrada en la Figura 1 para tres valores del parámetro  $\nu$ . En la Figura 1 las ramas superiores de la curva son obtenidas para esfuerzo de captura del krill  $F_1 < \frac{1}{2}$ ; las ramas inferiores dan baja producción de ballenas, correspondiente a producción de krill obtenida de sobreexplotación  $F_1 > \frac{1}{2}$ . Note que la máxima producción de ballenas necesariamente cae conforme la producción de krill aumenta; el máximo absoluto de la producción de ballenas es  $Y_2 = r_2 \left[ \frac{R-1}{\nu} \right]^2$ , obtenido cuando el krill no es cosechado del todo ( $F_1 = 0, Y_1 = 0$ ).

El problema inverso con esfuerzo fijo restringido es maximizar la producción del krill

$\bar{Y}_1$  para un valor constante específico de  $F_2$ . El procedimiento es exactamente el mismo que el anterior. El problema formal es maximizar

$$Y_1 = r_1 X_1 (1 - X_1 - \nu X_2) \quad (3.20)$$

Sujeto a las restricciones

$$F_2 = 1 - \frac{X_2}{X_1} = \text{const} \quad (3.21)$$

Nuevamente, empleamos los multiplicadores de Lagrange

$$\begin{aligned} \frac{\partial Y_1}{\partial X_1} + \lambda \frac{\partial F_2}{\partial X_1} &= 0 \\ \frac{\partial Y_1}{\partial X_2} + \lambda \frac{\partial F_2}{\partial X_2} &= 0 \end{aligned} \quad (3.22)$$

De las ecuaciones (3.20) y (3.21) se tiene

$$\frac{\partial Y_1}{\partial X_1} = r_1 - 2r_1 X_1 - r_1 \nu X_2$$

Por otro lado

$$\frac{\partial F_2}{\partial X_1} = \frac{X_2}{X_1^2}$$

Con lo que

$$\begin{aligned} \frac{\partial Y_1}{\partial X_1} + \lambda \frac{\partial F_2}{\partial X_1} &= r_1 - 2r_1 X_1 - r_1 \nu X_2 + \lambda \left[ \frac{X_2}{X_1^2} \right] = 0 \\ \frac{\partial Y_1}{\partial X_2} + \lambda \frac{\partial F_2}{\partial X_2} &= -r_1 \nu X_1 + \lambda \left[ \frac{-1}{X_1} \right] = 0 \end{aligned} \quad (3.23)$$

De las anteriores ecuaciones despejamos a  $\lambda$

$$\lambda \left[ \frac{X_2}{X_1^2} \right] = -r_1 + 2r_1 X_1 + r_1 \nu X_2$$

factorizando a  $r_1$  y despejando a  $\lambda$  se obtiene

$$\lambda = r_1 (-1 + 2X_1 + \nu X_2) \frac{X_1^2}{X_2}$$

De la ecuación (3.23)

$$\lambda \left[ \frac{1}{X_1} \right] = -r_1 \nu X_1$$

entonces

$$\lambda = -r_1 \nu X_1^2$$

igualando las  $\lambda$  se obtiene

$$\lambda = -r_1 \nu X_1^2 = r_1(-1 + 2X_1 + \nu X_2) \left[ \frac{X_1^2}{X_2} \right]$$

Simplificando

$$-\nu X_2 = -1 + 2X_1 + \nu X_2$$

Despejando a  $X_1$  de esta última ecuación queda finalmente

$$X_1 = \frac{1 - 2\nu X_2}{2} \quad (3.24)$$

La PMS del krill  $\bar{Y}_1$  puede ahora ser expresado como una función del nivel de esfuerzo de pesca de las ballenas  $F_2$ , (o, alternativamente, como una función de  $Y_2$ ), por las ecuaciones paramétricas obtenidas por usar la variable  $X_2$  junto con las ecuaciones (3.24), (3.20) y (3.7).

Sustituyendo (3.24) en (3.20) y haciendo las operaciones correspondientes se obtiene

$$\bar{Y}_1 = r_1 \left[ \frac{1 - 2\nu X_2}{2} \right] \left[ \frac{2 - 1 + 2\nu X_2 - 2\nu X_2}{2} \right]$$

Haciendo las operaciones necesarias, finalmente se llega a la expresión

$$\bar{Y}_1 = r_1 \left[ \frac{1 - 2\nu X_2}{4} \right] \quad (3.25)$$

Ahora sustituyendo (3.24) en (3.21)

$$F_2 = 1 - \frac{X_2}{\frac{1-2\nu X_2}{2}} = \frac{1 - 2\nu X_2 - 2X_2}{1 - 2\nu X_2}$$

agrupando términos se llega

$$F_2 = \frac{1 - 2X_2(\nu + 1)}{1 - 2\nu X_2} \quad (3.26)$$

lo anterior lo sustituimos en (3.7) y queda

$$Y_2 = r_2 X_2 \left[ \frac{1 - 2X_2(\nu + 1)}{1 - 2\nu X_2} \right] \quad (3.27)$$

La máxima producción de krill  $\bar{Y}_1$  es trazado en la Figura 4.2 como una función de la producción de ballenas  $Y_2$  obtenida bajo la restricción de esfuerzo de pesca constante (para tres valores de  $\nu$ ). Veamos que pasa si las ballenas no son explotadas ( $F_2 = 0$  y  $Y_2 = 0$ ). Para ello, en la ecuación (3.27) sustituimos  $Y_2 = 0$

$$1 - 2X_2(\nu + 1) = 0$$

Por lo que

$$X_2 = \frac{1}{2(\nu + 1)}$$

Sustituyendo este último resultado en (3.25)

$$\bar{Y}_1 = r_1 \left[ \frac{1 - 2\nu \left( \frac{1}{2(1+\nu)} \right)}{4} \right]$$

después de hacer las operaciones correspondientes y simplificando queda

$$\bar{Y}_1 = r_1 \left[ \frac{1}{4(1 + \nu)} \right]$$

Esto es lo que se muestra en el punto *A* de la Figura 4.2. Entonces la PMS de krill aumenta sistemáticamente cuando la captura de la ballenas se incrementa excesivamente y alcanzan su valor de especie- simple de  $\bar{Y}_1 = \frac{1}{4}$  cuando las ballenas son sobreexplotadas tendiendo a la extinción ( $F_2 = 1$  y consecuentemente  $X_2 = 0$ ,  $Y_2 = 0$ , como se describe en el punto *B* de la Figura 4.2). De acuerdo con el sentido común, la Figura 3.2 muestra que la PMS del krill está levemente afectado por el grado en el cual son explotadas las ballenas cuando  $\nu$  es pequeño; por otro lado, cuando  $\nu$  es grande la PMS del krill se incrementará significativamente por la cosecha de nuestros competidores, las ballenas.

### 3.1.4. PMS de una Población, para Producción Fija de la otra Población

En la sección 3 maximizamos la producción sustentable de una población, para un esfuerzo de pesca específico y constante. Esto tiene la ventaja de que los cálculos son relativamente simples, pero la suposición de esfuerzo de pesca fijo es un poco especial. Ahora consideramos un caso más general y biológicamente más interesante, el problema de maximizar la producción sustentable de una especie para un nivel específico de producción sustentable de la otra. En esencia, buscamos definir los límites de producción sustentable obtenida conjuntamente de las dos poblaciones. Formalmente el problema es maximizar

$$Y_1 = r_1 X_1 (1 - X_1 - \nu X_2) \quad (3.28)$$

Sujeto a la restricción

$$Y_2 = r_2 X_2 \left[ 1 - \frac{X_2}{X_1} \right] = \text{const} \quad (3.29)$$

Maximizar  $Y_2$  bajo la restricción  $Y_1 = \text{const}$ , es equivalente.

Con ayuda de los multiplicadores de Lagrange  $\lambda$ , vemos que las poblaciones  $X_1$  y  $X_2$  que resuelven el problema obedecen las siguientes ecuaciones

$$\frac{\partial Y_1}{\partial X_1} + \lambda \frac{\partial Y_2}{\partial X_1} = 0$$

y

$$\frac{\partial Y_1}{\partial X_2} + \lambda \frac{\partial Y_2}{\partial X_2} = 0 \quad (3.30)$$

Resolviendo lo anterior como en los casos anteriores, tenemos que

$$\frac{\partial Y_1}{\partial X_1} = r_1 - 2r_1 X_1 - r_1 \nu X_2$$

$$\frac{\partial Y_2}{\partial X_1} = r_2 \frac{X_2^2}{X_1^2} = 0$$

Por lo que

$$\frac{\partial Y_1}{\partial X_1} + \lambda \frac{\partial Y_2}{\partial X_1} = r_1 - 2r_1 X_1 - r_1 X_2 \nu + r_2 \lambda \left[ \frac{X_2^2}{X_1^2} \right] = 0 \quad (3.31)$$

Por otro lado

$$\frac{\partial Y_1}{\partial X_2} = -r_1\nu X_1$$

y

$$\frac{\partial Y_2}{\partial X_2} = r_2 - 2r_2\frac{X_2}{X_1}$$

obteniéndose

$$\frac{\partial Y_1}{\partial X_2} + \lambda \frac{\partial Y_2}{\partial X_2} = -r_1\nu X_1 + \lambda \left[ r_2 - 2r_2\frac{X_2}{X_1} \right] = 0 \quad (3.32)$$

De la ecuación (3.31)

$$\lambda = -\frac{r_1}{r_2}(1 - 2X_1 - \nu X_2) \left[ \frac{X_1}{X_2} \right]^2 \quad (3.33)$$

De la ecuación (3.32)

$$\lambda = \frac{r_1\nu X_1}{r_2 - 2r_2\frac{X_2}{X_1}} = \frac{r_1\nu X_1}{r_2 \left[ 1 - 2\frac{X_2}{X_1} \right]} \quad (3.34)$$

Igualando las ecuaciones, (3.33) y (3.34), se tiene

$$\frac{r_1\nu X_1}{r_2 \left[ 1 - 2\frac{X_2}{X_1} \right]} = -\frac{r_1}{r_2}(1 - 2X_1 - \nu X_2) \left[ \frac{X_1}{X_2} \right]^2$$

después de hacer los productos correspondientes y de agrupar términos se llega a

$$2X_1^2 + X_1(-1 + \nu X_2 - 4X_2) + (2X_2 - 3\nu X_2^2) = 0$$

Que es una ecuación cuadrática en  $X_1$  y cuya solución es

$$X_1 = \frac{1 + X_2(4 - \nu) \pm \left[ [1 + X_2(4 - \nu)]^2 - 8X_2(2 - 3\nu X_2) \right]^{\frac{1}{2}}}{4} \quad (3.35)$$

La curva resultante muestra los valores extremos alcanzados por la producción de una población como función de la producción especificada de la otra población, como se muestra en la Figura 3.3 ( $\nu = 1$ ).

Como antes, estas curvas se obtienen paramétricamente en términos de la variable implícita  $X_2$ ; para una  $X_2$  dada, calculamos  $X_1$  de la ecuación (3.35), donde  $Y_1$  y  $Y_2$  se siguen de las ecuaciones (3.28) y (3.29).

Algunas apreciaciones intuitivas se pueden obtener de la Figura 3.3 pensada como relacionada a una combinación de las curvas para  $\nu = 1$  en las Figuras 3.1 y 4.2. La curva del límite superior representa la PMS absoluto de cualquier población, para una producción específica de la otra. Todas las combinaciones de producción en la región sombreada bajo esta curva son por tanto sustentables. La estrella en la esquina superior derecha corresponde a una combinación de posibles PMS grandes de ballenas y posibles PMS grandes de krill; estos dos casos obviamente no pueden ser tomados en cualquier forma sustentable.

Las curvas inferiores en la región sombreada de la Figura 3.3 dan otras soluciones extremas (asociadas con el hecho de que la ecuación (3.35) tiene dos ramas). La curva  $AB$  está relacionada a la rama izquierda de las curvas en la Figura 4.2; esto da la máxima producción de krill  $Y_1$  cuando la producción especificada de ballenas  $Y_2$  es obtenida por baja explotación más que por sobreexplotación (con el punto  $A$  correspondiendo a no cosecha de ballenas  $Y_2 = 0$  debido a que  $F_2 = 0$ ); inversamente, la curva  $AB$  representa un valor mínimo local de  $Y_2$  para un valor fijo de  $Y_1$ . La curva  $BC$  está relacionada con las ramas inferiores de la curva en la Figura 3.1, correspondiente a sobreexplotación de krill: esto da un máximo local  $Y_2$  para un  $Y_1$  dado; inversamente, da un mínimo local  $Y_1$  para un  $Y_2$  fijo.

Como enfatizaron Goh (comunicación privada) y Brauer y Soudack, una vez más hay dos o más valores extremos (dos o más estados estacionarios) en los regímenes de cosecha, las trayectorias dinámicas del sistema pueden exhibir fenómenos de puntos de rompimiento, con pequeños cambios en las condiciones iniciales o en la magnitudes de las perturbaciones produciendo cambios discontinuos en el estado final hacia el cual tiende el sistema. Tales consideraciones dinámicas fueron brevemente discutidas en la introducción, y ellas pueden adicionar dificultades al aspecto estático de cosecha de multiespecies discutidas en este ejemplo.

Las características de la Figura 3.3 pueden aclararse considerando cómo la producción de equilibrio del krill  $Y_1$  varía con  $X_1$  y  $X_2$ , para un valor específico constante de  $Y_2$  (Figuras 7.1 y 3.5), y cómo la producción de equilibrio de las ballenas  $Y_2$  varía con  $X_1$  y  $X_2$  para un  $Y_1$  fijo (Figuras 3.6 y 3.7). En las Figuras 7.1-3.7, las cuales todas son para  $\nu = 1$ , son obtenidas en forma rutinaria de las ecuaciones (3.28) y (3.29). Por ejemplo, para tener las curvas en el plano  $Y_1 X_1$  en la Figura 7.1 para

cualquier valor específico de  $Y_2$ , primero encontramos a  $X_2$  (en términos de  $Y_2$  y  $X_1$ ) de la ecuación (3.29), y entonces lo sustituimos en la ecuación (3.28) para tener a  $Y_1$  como una función de  $X_1$ .

Para valores pequeños de  $Y_2$  las curvas en el plano  $Y_1X_1$  en la Figura 7.1 tienen un segmento correspondiente a una relativamente baja  $Y_1$  y  $X_1$  donde hay una pequeña explotación de ballenas (para que ellas todavía sean consumidores significativos de krill), y un segmento que tiene relativamente grandes valores de  $X_1$  y  $Y_1$  cuando valores bajos de  $Y_2$  se realizan por severa sobreexplotación de ballenas. Consecuentemente, para bajos valores de  $Y_2$ , las curvas en el plano  $Y_1X_1$  tiene dos máximos (los altos correspondiendo a los límites superiores en la Figura 3.3, los inferiores están sobre  $AB$ ), y un mínimo local (está sobre  $BC$  en la Figura 3.3). Pero para valores relativamente grandes de  $Y_2$  las curvas en el plano  $Y_1X_1$  son simples, y tienen máximos simples (correspondiente a  $Y_2$  que está por encima del nivel definido por el punto  $B$  de la Figura 3.3). La Figura 3.5, la cual muestra curvas en el plano  $Y_1X_2$  para varios valores específicos de  $Y_2$ , nuevamente exhiben este patrón de dos máximos separados por un mínimo local cuando  $Y_2$  es relativamente pequeña, y un máximo único cuando  $Y_2$  es relativamente grande. Las Figuras 7.1 y 3.5 ayudan a explicar la manera en la que se comporta la PMS del krill, para varios valores fijos de la producción de ballenas en la Figura 3.3.

Similarmente, las Figuras 3.6 y 3.7 dan luz sobre los patrones exhibidos por la PMS de las ballenas en la Figura 3.3, para varios valores fijos de  $Y_1$ . Para los niveles inferiores de  $Y_1$ , las curvas en el plano  $Y_2X_1$  en la Figura 3.6 tienen dos ramas distintas y dos máximos distintos, uno correspondiendo a cosecha ligera de krill y el otro a sobreexplotación severa de krill. Esto da dos soluciones extremas para  $Y_2$  en la Figura 3.3, cuando  $Y_1$  está por debajo del punto  $A$  para valores intermedios de  $Y_1$ , las curvas del plano  $Y_2X_1$  en la Figura 3.6 tienen dos picos locales separados por un valle. El máximo corresponde al límite superior y a la rama  $BC$ , y el mínimo a la rama  $AB$ , en la Figura 3.3 cuando  $Y_1$  está entre los valores dados por los puntos  $A$  y  $B$ . Finalmente, para grandes valores de  $Y_1$ , las curvas del plano  $Y_2X_1$  en la Figura 3.6 exhiben un simple máximo (correspondiente a un simple valor de  $Y_2$  en la Figura 3.3, para  $Y_1$  fijo estando arriba del valor dado por el punto  $B$ ). Los mismos patrones son mostrados por las curvas en el plano  $Y_2X_1$ , para varios valores fijos de  $Y_1$ , en la

Figura 3.7.

### 3.1.5. Tres Niveles Tróficos

Motivados por un interés en la cadena alimenticia krill-calamares-cachalotes en el océano del Sur, [26] también estudió sistemas con tres niveles tróficos. Los detalles biológicos de las cadenas alimenticias que pueden ligar al cachalote con el krill son complicados e inciertos, pero modelos muy simples los cuales encapsulan algunas de las características de tales sistemas de tres-niveles-tróficos, no obstante, merecen atención. Definiendo las poblaciones de krill, calamares, cachalotes por  $X_1$ ,  $X_2$  y  $X_3$  (en unidades apropiadas), [26] consideró la dinámica del sistema descrito por

$$\frac{dX_1}{dt} = r_1 X_1 (1 - X_1 - \nu X_2) - Y_1 \quad (3.36)$$

$$\frac{dX_2}{dt} = r_2 X_2 \left[ 1 - \frac{X_2}{X_1} - \eta X_3 \right] \quad (3.37)$$

$$\frac{dX_3}{dt} = r_3 X_3 \left[ 1 - \frac{X_3}{X_2} \right] - Y_3 \quad (3.38)$$

Las consideraciones biológicas que están detrás de estas ecuaciones, y sus varios desperfectos, son discutidos en [26]. Como antes  $r_1$ ,  $r_2$  y  $r_3$  son las tasas de crecimiento per cápita intrínsecas de las tres poblaciones, y  $\nu$  es un parámetro que describe la intensidad a la cual el calamar explota al krill, y  $\eta$  es un parámetro análogo perteneciente a la explotación del calamar por el cachalote. El krill es cosechado para dar una producción  $Y_1$  y los cachalotes para dar una producción  $Y_3$ .

Estamos interesados en obtener una figura análoga a la Figura 3.3, mostrando la producción máxima sustentable de krill (o alternativamente, cachalotes), para un valor específico de producción de ballenas o krill.

Para una situación de equilibrio, las partes derechas de las ecuaciones (3.36), (3.37) y (3.38) deben ser cero. Tomemos la ecuación (3.36) en equilibrio

$$1 - \frac{X_2}{X_1} - \eta X_3 = 0$$

y despejando a  $X_2$  obtenemos

$$X_2 = X_1(1 - \eta X_3)$$

sustituimos  $X_2 = X_1(1 - \eta X_3)$  en las ecuaciones (3.36) y (3.38) en situación de equilibrio obteniendo

$$Y_1 = r_1 X_1 [1 - X_1 - \nu X_2]$$

Sustituyendo y agrupando términos se llega a la ecuación para  $Y_1$

$$Y_1 = r_1 X_1 [1 - X_1(1 + \nu) + \nu \eta X_1 X_3] \quad (3.39)$$

y sustituyendo en (3.38)

$$Y_3 = r_3 X_3 \left[ 1 - \frac{X_3}{X_1(1 - \eta X_3)} \right] \quad (3.40)$$

Las siguiente ecuaciones son las que se quieren resolver

$$\frac{\partial Y_1}{\partial X_1} + \lambda \frac{\partial Y_3}{\partial X_1} = 0 \quad (3.41)$$

con

$$\frac{\partial Y_1}{\partial X_3} + \lambda \frac{\partial Y_3}{\partial X_3} = 0 \quad (3.42)$$

Para resolver la ecuación (3.41) sabemos que

$$\frac{\partial Y_1}{\partial X_1} = r_1 [1 - X_1(1 + \nu) + \nu \eta X_1 X_3] + r_1 X_1 [-(1 + \nu) + \nu \eta X_3]$$

y después de realizar las operaciones así como agrupar términos obtenemos

$$\frac{\partial Y_1}{\partial X_1} = r_1 [1 - 2X_1(1 + \nu) + 2\nu \eta X_1 X_3] \quad (3.43)$$

Por otro lado tenemos que

$$\frac{\partial Y_3}{\partial X_1} = \frac{r_3 X_3^2}{X_1^2(1 - \eta X_3)} \quad (3.44)$$

Sustituyamos las ecuaciones (3.43) y (3.44) en (3.41) y resolviendo para  $\lambda$  se obtiene

$$\lambda = \frac{-r_1(1 - 2X_1(1 + \nu) + 2\nu \eta X_1 X_3)X_1^2(1 - \eta X_3)}{r_3 X_3^2} \quad (3.45)$$

Para resolver (3.42), se tiene

$$\frac{\partial Y_1}{\partial X_3} = r_1 \nu \eta X_1^2 \quad (3.46)$$

Por otro lado,

$$\frac{\partial Y_3}{\partial X_3} = r_3 \left[ 1 - \frac{X_3}{X_1(1 - \eta X_3)} \right] - r_3 X_3 \left[ \frac{1 - \eta X_3 + \eta X_3}{X_1(1 - \eta X_3)^2} \right]$$

después de hacer algo de álgebra se llega a

$$\frac{\partial Y_3}{\partial X_3} = r_3 \left[ \frac{X_1(1 - \eta X_3)^2 - X_3(2 - \eta X_3)}{X_1(1 - \eta X_3)^2} \right] \quad (3.47)$$

Sustituyendo las ecuaciones (3.46) y (3.47) en la ecuación (3.42)

$$r_1 \nu \eta X_1^2 + \lambda r_3 \left[ \frac{X_1(1 - \eta X_3)^2 - X_3(2 - \eta X_3)}{X_1(1 - \eta X_3)^2} \right] = 0$$

Despejando nuevamente a  $\lambda$

$$\lambda = \frac{-r_1 \nu \eta X_1^2 X_1(1 - \eta X_3)^2}{r_3(X_1(1 - \eta X_3)^2 - X_3(2 - \eta X_3))} \quad (3.48)$$

Igualando la ecuación (3.45) con la ecuación (3.48) y realizando el álgebra correspondiente se obtiene

$$\begin{aligned} X_1^2(-2(1 + \nu)(1 - \eta X_3)^2 + 2\nu\eta X_3(1 - \eta X_3)^2) + X_1[(1 - \eta X_3)^2 + \\ 2X_3(1 + \nu)(2 - \eta X_3) - 2\nu\eta(2 - \eta X_3)X_3^2 - \nu\eta X_3^2(1 - \eta X_3)] \\ - X_3(2 - \eta X_3) = 0 \end{aligned}$$

De lo anterior, después de agrupar términos lo que tenemos es una ecuación de segundo grado en  $X_1$  que se puede reescribir como

$$\begin{aligned} X_1^2[2(1 - \eta X_3)^2(-1 - \nu + \nu\eta X_3)] \\ + X_1[2X_3(2 - \eta X_3)(1 + \nu - \nu\eta X_3) + (1 - \eta X_3)(1 - \eta X_3 - \nu\eta X_3^2)] \\ - X_3(2 - \eta X_3) = 0 \end{aligned}$$

Entonces la ecuación cuadrática sería de la forma

$$AX_1^2 + BX_1 + C = 0 \quad (3.49)$$

En este caso los coeficientes de la ecuación cuadrática son:

$$A = 2(1 - \eta X_3)^2(1 + \nu - \nu\eta X_3) \quad (3.50)$$

$$B = -2X_3(2 - \eta X_3)(1 + \nu - \nu\eta X_3) + (1 - \eta X_3)(-1 + \eta X_3 + \nu\eta X_3^2) \quad (3.51)$$

$$C = (2 - \eta X_3)X_3 \quad (3.52)$$

Y, como sabemos, la solución es

$$X_1 = \frac{-B \pm [B^2 - 4AC]^{\frac{1}{2}}}{2A}$$

Como antes, las curvas en el plano  $Y_3Y_1$  mostradas en la Figura 3.8 (para  $\nu = 1$  y  $\eta = 1$ ) son obtenidas paramétricamente, escogiendo la variable implícita  $X_3$ , entonces calculando  $X_1$  de la ecuación (3.49) y por tanto calculando  $Y_1$  y  $Y_3$  de las ecuaciones (3.39) y (3.40).

La Figura 3.8 tiene una semejanza con la Figura 3.3, con la región sombreada mostrando combinaciones de producción de krill y cachalotes que son sustentables. Las dos figuras comparten la característica importante de que cosechar el rendimiento sustentable más grande posible de krill es incompatible con tener también una cosecha de rendimiento sustentable más grande posible de cachalotes (i.e. la estrella en la esquina superior derecha está fuera del área sombreada). Un estudio cercano de la derivación de la Figura 3.8 muestra una diferencia significativa con la Figura 3.3 a saber, la gran producción sustentable de krill (la curva límite a la derecha) son alcanzados cuando los cachalotes no son explotados; en la Figura 3.3 estas grandes producciones de krill son alcanzados por sobreexplotación de las ballenas tendiendo a la extinción. Las razones básicas para esta diferencia es que el efecto principal de remover a los cachalotes es para reducir la depredación sobre los calamares, los cuales consumen más krill; la competencia con nosotros para la explotación del krill es minimizada manteniendo a los cachalotes y la población de los calamares relativamente bajos.

Como en la Figura 3.3 existen otras soluciones extremas, las cuales son mostradas por las curvas inferiores  $AB$  y  $BC$  en la región sombreada de la Figura 3.8. En sutil contraste a la Figura 3.3, la curva  $AB$  en la Figura 3.8 da un máximo local de producción de krill  $Y_1$ , pero ahora correspondiente a la producción específica de

ballenas  $Y_3$  que ha sido obtenida por sobreexplotación más que de explotación baja (con el punto  $A$  alcanzado, los cachalotes han sido extinguidos  $Y_3 = 0$  debido a que  $X_3 = 0$ ). Como en la Figura 3.3, la curva  $AB$  alternativamente representa un valor mínimo local de  $Y_3$  para un  $Y_1$  fijo. La curva  $BC$  corresponde a sobreexplotación del krill, como en la Figura 3.3: están dados un máximo local de  $Y_3$ , para un  $Y_1$  dado, realizada por una sobreexplotación del krill; contrariamente, da un mínimo local de  $Y_1$ , para un  $Y_3$  fijo.

Otro aspecto de la comparación entre las Figuras 3.3 y 3.8 es la amortiguación o atenuación de los emparejamientos de krill y cachalotes, proporcionados por la intervención del nivel trófico del calamar. Excepto para valores relativamente grandes de  $\eta$ , la región sombreada en la Figura 3.8 es cercana a un rectángulo existente en la Figura 3.3. Aunque indudablemente permanece acoplado a cualquier otro, la población del krill y los cachalotes están muy próximas a comportarse como “especies simples” que a estar directamente acopladas krill y los cachalotes de la secciones 2-4. Este fenómeno, y las razones biológicamente basadas para esto, son discutidas con más cuidado en [26].

### 3.1.6. Presas y Depredadores Compitiendo

El análisis precedente puede ser extendido (usando las técnicas de los multiplicadores de Lagrange para facilitar el cálculo) para estudiar cosecha multiespecies en otros tipos de redes tróficas. Una de tales extensiones involucra la cosecha de dos o más especies compitiendo. Estudios previos de problemas de cosecha multiespecies están enfocados principalmente sobre la interacción entre las poblaciones compitiendo [7-15], con el énfasis puesto, a menudo, sobre amplias cuestiones como la relación entre cosecha y la diversidad de las especies en la comunidad.

Manteniendo nuestro esquema de cosecha en dos niveles tróficos, en esta sección tratamos brevemente en la explotación simultánea de una especie de presas y una de dos especies depredadoras compitiendo por ellas. Como una metáfora para esta situación, denotamos la población recurso (krill) por  $X_1$  la población consumidora explotada (ballenas) por  $X_2$ , y la población consumidora (pingüinos) no explotada

por  $X_3$ . La dinámica de este sistema está descrito por

$$\frac{dX_1}{dt} = r_1 X_1 [1 - X_1 - \nu X_2 - \mu X_3] - Y_1 \quad (3.53)$$

$$\frac{dX_2}{dt} = r_2 X_2 \left[ 1 - \frac{X_2}{X_1} \right] - Y_2 \quad (3.54)$$

$$\frac{dX_3}{dt} = r_3 X_3 \left[ 1 - \frac{X_3}{X_1} \right] \quad (3.55)$$

Aquí las variables de población  $X_i$  y de la producción  $Y_i$ , como antes, están expresadas apropiadamente. Nuevamente, el apuntalamiento biológico de las ecuaciones, y algunas de sus más obvias deficiencias, son discutidas en [26]. Como al inicio,  $r_1$ ,  $r_2$  y  $r_3$  son las tasas intrínsecas de crecimiento per cápita de las tres poblaciones,  $\nu$  es un parámetro que mide la intensidad con la que las ballenas explotan al krill (ver ecuación (3.3)) y  $\mu$  es el parámetro correspondiente a la descripción de la intensidad de las interacciones pingüinos-krill.

La relación de equilibrio sustentable entre las magnitudes de las poblaciones y la producción se obtienen tomando las partes izquierdas de las ecuaciones (3.53), (3.54) y (3.55) iguales a cero: la ecuación (3.54) da la expresión (3.29) para  $Y_2$ ; la ecuación (3.53) da un resultado para  $Y_1$  que difiere del de (3.28) debido al término que involucra a  $X_3$ ; la ecuación (3.55) da el resultado de equilibrio en el que el competidor no cosechado tiene una magnitud de población  $X_3 = X_1$ . Sustituyamos lo anterior en (3.53) y (3.54) respectivamente.

Sustituyendo  $X_1 = X_3$  en (3.53)

$$Y_1 = r_1 X_1 (1 - X_1 - \nu X_2 - \mu X_1)$$

agrupando términos se llega a

$$Y_1 = r_1 X_1 (1 - X_1(1 + \mu) - \nu X_2) \quad (3.56)$$

Y sustituyendo en (3.55)

$$Y_2 = r_2 X_2 \left[ 1 - \frac{X_2}{X_1} \right] \quad (3.57)$$

Haciendo el siguiente cambio de variables

$$(X_1) = (1 + \mu)X_1$$

$$(X_2) = (1 + \mu)X_2$$

$$(Y_1) = (1 + \mu)Y_1$$

$$(Y_2) = (1 + \mu)Y_2$$

este problema se puede resolver de igual manera que el resuelto en la sección 4 (ecuaciones (3.28) y (3.29)). Introduzcamos estos cambios en la ecuación (3.56)

$$\frac{(Y_1)}{1 + \mu} = r_1 \frac{(X_1)}{1 + \mu} \left[ 1 - (X_1) - \nu \frac{(X_2)}{1 + \mu} \right]$$

que es equivalente a

$$(Y_1) = r_1(X_1) \left[ 1 - (X_1) - \nu \frac{(X_2)}{1 + \mu} \right]$$

Y si hacemos  $(\nu) = \frac{\nu}{1 + \mu}$ , la anterior ecuación se transforma en

$$(Y_1) = r_1(X_1) [1 - (X_1) - (\nu) (X_2)] \quad (3.58)$$

Ahora a la ecuación (3.57) multipliquémosla por  $(1 + \mu)$

$$Y_2(1 + \mu) = r_2 X_2(1 + \mu) \left[ 1 - \frac{X_2}{X_1} \right]$$

simplificando se llega a

$$(Y_2) = r_2(X_2) \left[ 1 - \frac{(X_2)}{(X_1)} \right] \quad (3.59)$$

Aquí la interacción entre la población de los ballenas y sus presas, el krill, está descrito por el parámetro

$$(\nu) = \frac{\nu}{1 + \mu} \quad (3.60)$$

Las anteriores ecuaciones son idénticas a las ecuaciones (3.28) y (3.29), por lo que el análisis es exactamente como en la sección 4, para obtener las relaciones entre la producción del krill y la de las ballenas es de la forma mostrada en la Figura 3.3. La

diferencia es que, para un valor específico de  $\nu$ , la producción de la ballenas y del krill son más pequeñas por el factor  $[\frac{1}{1+\mu}]$  que cuando están en ausencia de pingüinos,  $[Y_1 = \frac{(Y')_1}{1+\mu}$  y  $Y_2 = \frac{(Y')_2}{1+\mu}]$ , y las curvas están cuadradas debido a que el valor efectivo del parámetro de acoplamiento presa depredador  $\nu$  está reducido por el factor  $[\frac{1}{1+\mu}]$ .

Estas observaciones son ilustradas en la Figura 3.9, la cual muestra la máxima producción sustentable de ballenas  $Y_2$  para una producción específica de krill  $Y_1$  (o alternativamente, la máxima sustentabilidad  $Y_1$  para  $Y_2$  prescrita). En la Figura 3.9  $\nu$  toma el valor 1, y se varía para varios valores del parámetro  $\mu$  del krill - pingüinos; la curva más exterior es para  $\mu = 0$ , y obviamente es idéntica a la Figura 3.3; cuando  $\mu$  se incrementa desde 0.3 a 1.0 a 3.0, los valores máximos sustentables de  $Y_1$  y  $Y_2$  decrecen (cuando los pingüinos no son explotados toman su parte), y las curvas se tornan más convexas cuando las ballenas ejercen relativamente menos influencia sobre la población de krill ( mientras los pingüinos ejercen relativamente más).

### 3.1.7. Conclusiones

Aunque se ilustró para modelos específicos definidos por las ecuaciones (3.4), (3.5), (3.36), (3.37), (3.53), (3.54) y (3.55), los métodos usados aquí pueden ser aplicados para la discusión de la cosecha de dos o más especies en redes tróficas de mayor complejidad. De esta manera podemos definir límites para posibles cosechas sustentables en sistemas multiespecies en general. La conclusión esencial de este trabajo es que los sistemas multiespecies no pueden ser manejados por la aplicación gradual de conceptos PMS de especies simples. Una idea alternativa es formar alguna suma de pesos de producciones sustentables, y buscar maximizar la cantidad total; existen aquí, demasiadas dificultades, en que (como mostró Silvert y Smith [14], [26], y otros) el resultado común de tales procedimientos es para cosechar una población y descuidar o exterminar a la otra.

## 3.2. Figuras

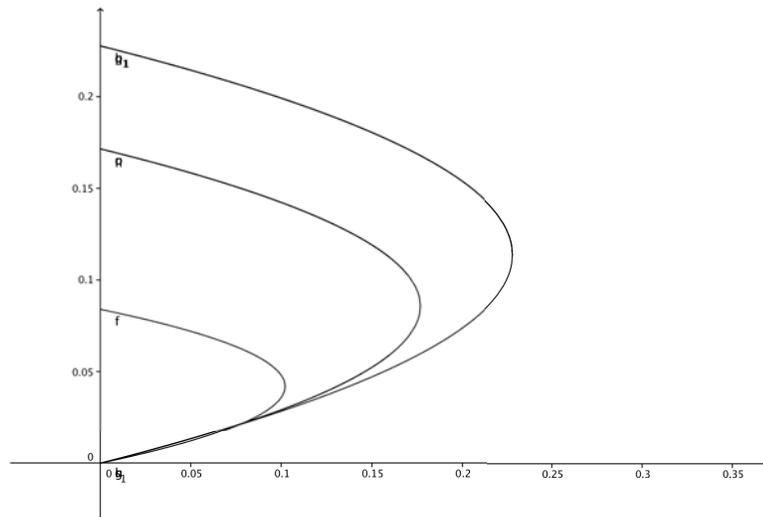


Figura 3.1: La producción máxima sustentable de ballenas  $Y_2$  es mostrada como una función de la producción de krill  $Y_1$  obtenida bajo la restricción de un esfuerzo de pesca constante especificado. Las tres curvas corresponden al parámetro  $\nu$  teniendo los valores  $\nu = 5, 1, 0,2$  como se muestra.

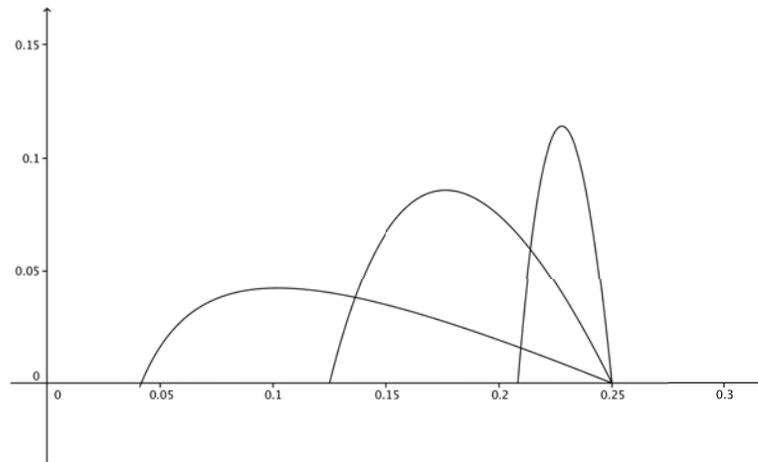


Figura 3.2: Estas figuras muestran la máxima producción sustentable de krill  $Y_1$  como una función de la producción de ballenas  $Y_2$  obtenida bajo la restricción de esfuerzo de pesca constante. Las tres curvas son para  $\nu = 5, 1, 0,2$  como se muestra. El punto  $B$  muestra la producción máxima sustentable absoluta de krill, obtenida por cosechar a las ballenas hasta la extinción; El punto  $A$  (para varios valores de  $\nu$ ) muestran la máxima producción de krill cuando las ballenas no son explotadas.

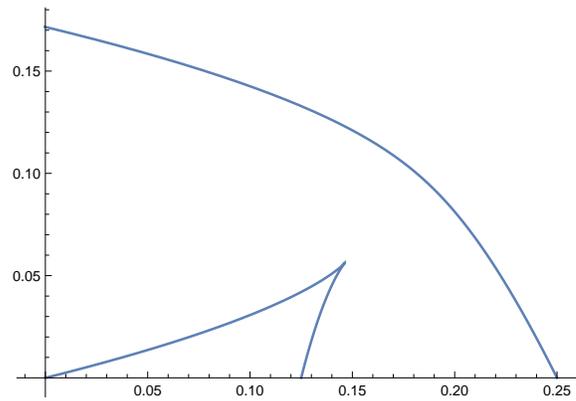


Figura 3.3: Estas figuras muestran la máxima producción sustentable de krill que es consistente con una producción de ballenas preescrita (o, recíprocamente, la máxima producción sustentable de ballenas consistente con una producción de krill especificada), para  $\nu = 1$ . La estrella en la esquina superior derecha corresponde a las producciones de krill y ballenas en sus valores de MSY individuales. Claramente estas producciones no pueden ambas ser sustentables. El significado de las curvas punteadas  $AB$  y  $BC$  y otros detalles, son discutidos en el texto.

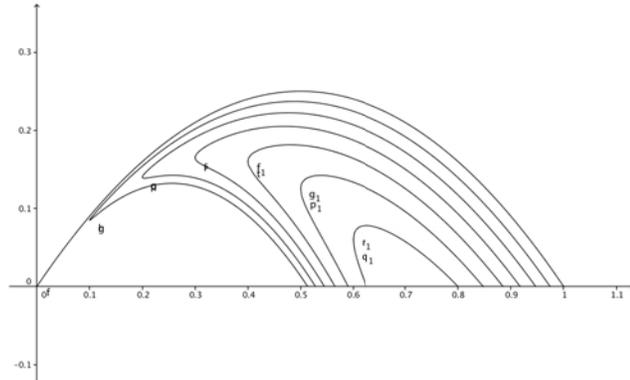


Figura 3.4: La producción de equilibrio del krill  $Y_1$  es trazado como una función de la densidad de población del krill  $X_1$  para varios valores fijos de la producción de ballenas ( $Y_2 = 0, 0,025, 0,05, 0,075, 0,10, 0,125, 0,15$ , como se indica). Como se discute en el texto, algunas de estas curvas  $Y_1 - X_1$  tienen dos máximos locales separados por un mínimo local; otras tienen un máximo único.

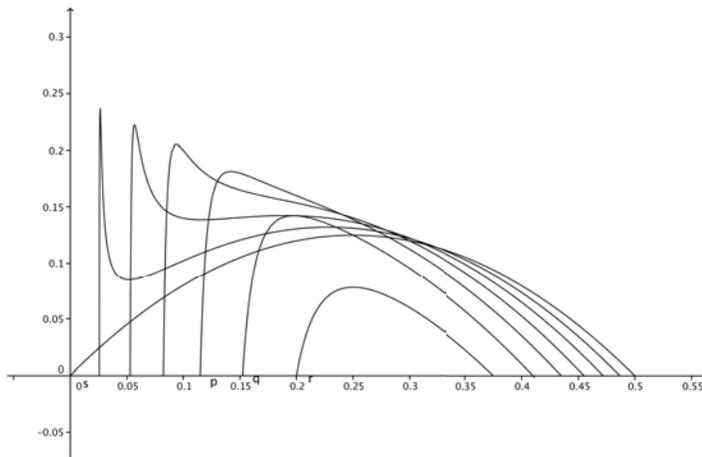


Figura 3.5: Como la figura 4, excepto que aquí la producción de equilibrio del krill  $Y_1$  es trazada como una función de la densidad de población de las ballenas  $X_2$  para varios valores específicos de  $Y_2$ .

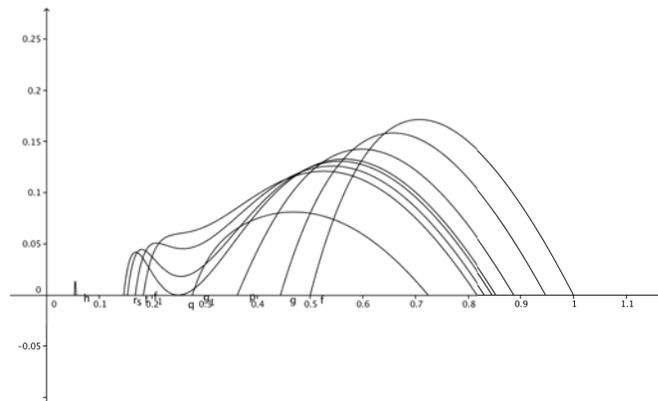


Figura 3.6: La producción de equilibrio de las ballenas  $Y_2$  está trazado como una función de la densidad de población del Krill  $X_1$  para varios valores de la producción del krill fijos ( $Y_1 = 0, 0,05, 0,10, 0,125, 0,13, 0,14, 0,15, 0,20, 0,24$  como se indica). Como se discute en el texto, algunas de estas relaciones  $Y_2 - X_1$  tienen dos ramas, cualquiera de ellas con un máximo local; otras tienen dos máximos locales separados por un mínimo local; otras tienen un máximo único.

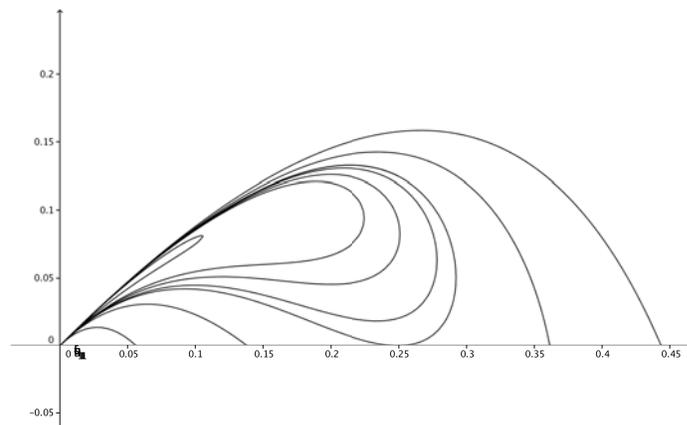


Figura 3.7: Como la figura 6, excepto que aquí la producción de equilibrio de las ballenas  $Y_2$  está trazado como una función de la densidad de población de las ballenas  $X_2$  para varios valores de  $Y_1$  específicos.

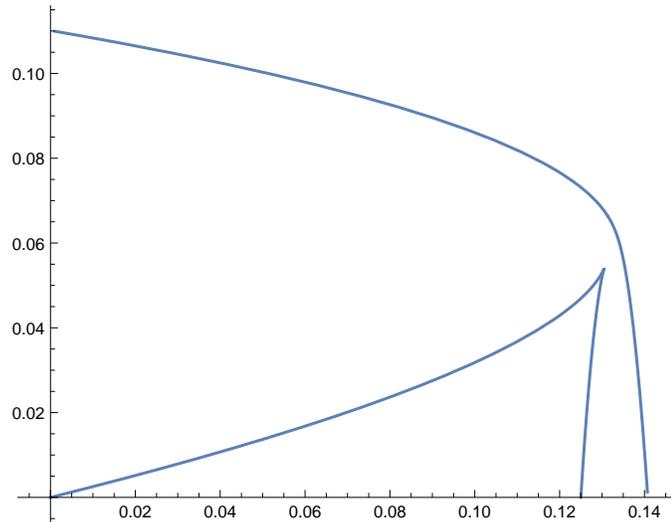


Figura 3.8: Esta figura es similar a la fig. 3 excepto que aquí estamos tratando con la especie “superior” (cachalotes) y la inferior (krill) en un sistema con tres niveles tróficos (krill-calamares-cachalotes), descritas por las ecs. (5.1)-(5.3) con  $\nu = 1$  y  $\eta = 1$ . Nuevamente, la frontera del área punteada da la producción máxima sustentable de krill consistente con una producción de cachalotes (o, recíprocamente, el valor de  $Y_3$  consistente con un valor fijo de  $Y_1$ ). Combinaciones de producción fuera de la región sombreada no son sustentables; en particular, la estrella correspondiente a la producción de krill y cachalotes teniendo ambas sus MSY individuales no pueden ser sustentables. Una discusión de las similitudes y diferencias entre las figuras 3 y 8 se da en el texto.

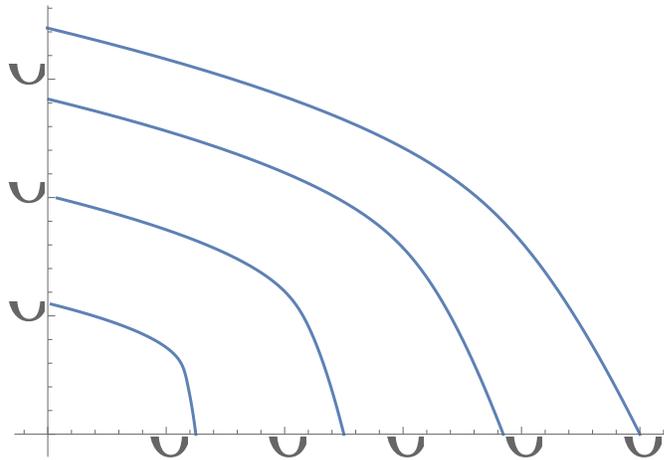


Figura 3.9: Esta figura es una extensión de la figura 3, para mostrar la producción máxima sustentable de krill que es consistente con una producción de ballenas fija (o, recíprocamente, la producción máxima sustentable de ballenas consistente con una producción de krill fija), cuando una segunda especie no cosechada (pingüinos) compite por el consumo de krill. Como en la figura 3, el parámetro de interacción krill-ballenas tiene el valor  $\nu = 1$ ; el parámetro krill- pingüinos  $\eta$  tiene los valores 0, 0.3, 1.0, 3.0 como se indica. La solución subsidiaria extremal, correspondiente a la curva punteada AB y BC en la figura 4, han sido omitidas aquí para no revolver la figura.



# Capítulo 4

## Manejo de Pesquerías

### 4.1. Manejo de Pesquerías Multi-Especies

Debido al colapso de algunas pesquerías mayores, el establecimiento de zonas de pesca nacionales e internacionales, y el incremento en la demanda por alimento, existe un interés creciente en aprovechar stocks no “convencionales” de organismos marinos. Estas especies típicamente ocupan niveles tróficos más bajos que las especies que se cosechan tradicionalmente, y en muchos casos ellas son el suministro de alimento (presas) de otros stocks cosechados.

Un ejemplo de tal situación ocurre en el océano del Sur, donde la sobreexplotación de las ballenas ha reducido su biomasa neta alrededor de un sexto de su valor estimado. Estimaciones simples sugieren que, consecuentemente con ello, existe un “exceso” de krill del Antártico, debido a la baja del consumo por parte de las ballenas que exceden a 150 millones de toneladas métricas anualmente. Recientemente, se han dado muchas discusiones en torno a la explotación de este krill “excedente”, y ya se cosechan algo así como 100 000 toneladas por año. Pero este krill es la fuente principal de alimento para un gran número de especies, -ballenas, focas, pingüinos, cefalópodos- en el Antártico, y hay un gran interés en torno a las implicaciones que

una pesquería del krill pueda tener para el agotamiento del stock de las ballenas y para otras criaturas. Este hecho es la razón principal de los esfuerzos corrientes en los países del Tratado del Antártico para decretar una Convención para la Conservación de los recursos que viven en la Marina del Antártico, dirigida a reconciliar la cosecha del krill y otras especies con la preservación a largo plazo de los ecosistemas del Antártico, con todas las especies que existen.

Las pesquerías en el Mar del Norte exhiben los efectos de la competencia entre presas-depredadores y las interacciones entre especies. En los últimos 10 años, el stock y captura de arenques y macarela han disminuido bajo una fuerte pesca, pero la captura total de peces se ha mantenido rigurosamente constante, debido probablemente a que las poblaciones de bacalao, merluza y otras pesquerías pequeñas se han incrementado. Una probable razón para este incremento es que la disminución del stock de arenques y macarela resulta en menor depredación y aumenta la supervivencia de larvas y de juveniles de otras especies de peces. Otro ejemplo de problemas de manejo que involucran la interacción entre especies de diferentes niveles tróficos es el que incluye al krill, cefalópodos (calamares) y cachalotes; la foca gris consume más de 100 000 toneladas de peces, incluyendo arenques y salmón cada año. Estudios adicionales, donde las interacciones multiespecies primariamente son de competencia, han sido dirigidas sobre los arenques y macarela del golfo de St. Lawrence, sardinas y anchovas en el Pacífico y arenques y pez rojo en el Atlántico Norte.

En tanto que un stock cosechado pueda ser considerado como una población simple, aislada, la noción de máxima producción sustentable (PMS) es una base útil para discutir principios sobre el manejo. Las resistencias para reconocer la utilidad que tiene el PMS es que la discusión se enfoca al manejo a largo plazo para producción sustentable (descontando el futuro), y de indicar el nivel de explotación que no puede ser excedido sin el agotamiento del stock a niveles inaceptablemente bajos para la alta productividad biológica. Sin embargo, es claro que la PMS aplicado a cualquier especie individualmente no puede servir como un principio guía cuando la especie en cosecha tiene fuertes interacciones; pudiera ser que las ballenas cosechen al krill por debajo de su nivel de PMS en el sistema original. Entonces ¿qué principios específicos, deberán ser expuestos para manejar una pesquería multiespecie de tal forma que mantengan la salud y estabilidad de un ecosistema marino?. En este

capítulo intentamos dar algunas respuestas preliminares.

Al final, consideramos algún modelo heurístico simple para la cosecha de poblaciones en interacción. Debido a que estamos particularmente interesados en la comprensión del manejo del océano del Sur, el modelo es lanzado con alta metáfora simplificada para más elementos del ecosistema del Antártico. Por tanto, primero consideramos la cosecha de presa y depredador en un sistema con dos especies (krill-ballenas); segundo, la cosecha de una sola presa con dos especies depredadoras (krill-ballenas-focas); tercero, las cosechas bajas y altas de un sistema con tres niveles tróficos (krill-cefalópodos-cachalotes). En todas las instancias discutimos la acción recíproca entre la producción de las diferentes especies que pueden ser obtenidas bajo diferentes tipos de cosecha, y la respuesta dinámica del sistema a cambios en estos tipos de cosecha. Posteriormente, se revisan las respuestas a cosechas en ecosistemas más complicados. Las actualidades de las cosechas del krill en el océano del Sur y del manejo de las pesquerías del Mar del Norte son revisadas a la luz de estos modelos. En el mundo real, el manejo para producción biológica sustentable es usualmente opacada por consideraciones económicas las cuales tienden a reducir las producciones futuras. Se discuten algunos aspectos explícitos de las complicaciones económicas en multiespecies. Finalmente, resumimos algunas recomendaciones tentativas para el manejo de sistemas multiespecies.

Nuestra caricatura cruda de sistemas multiespecies va dirigida a crear un armazón básico que pueda ser fácilmente entendido y brinde ideas en los problemas científicos esenciales.

#### 4.1.1. Un Modelo Presa-Depredador: Krill y Ballenas

Consideremos una población de presas (krill),  $N_1$ , que es la fuente de alimento de una población de depredadores (ballenas),  $N_2$ . El modelo de interacción es el dado por las ecuaciones 3.1 y 3.2, que aquí mostramos nuevamente para facilitar la lectura; la dinámica de las presas es

$$\frac{dN_1}{dt} = r_1 N_1 \left[ 1 - \frac{N_1}{K} \right] - a N_1 N_2. \quad (4.1)$$

En esta ecuación, las presas tienen una tasa intrínseca de crecimiento per cápita

$r_1$  en baja densidad de población, y las limitaciones del recurso disminuyen la velocidad de crecimiento de la población (en forma logística) a cero cuando  $N_1 = K$  en ausencia de depredadores. Suponemos un modelo simple de la forma Lotka- Volterra de depredación, con las presas siendo consumidas a una tasa proporcional a su densidad. La dinámica de la población de depredadores puede ser descrita por una ecuación de crecimiento logística en la cual la capacidad de carga es proporcional a la cantidad de presas disponibles.

$$\frac{dN_2}{dt} = r_2 N_2 \left[ 1 - \frac{N_2}{\alpha N_1} \right]. \quad (4.2)$$

Aquí  $r_2$  es el crecimiento per cápita de los depredadores, y la capacidad de carga o nivel de equilibrio natural está directamente relacionado con la abundancia de las presas por la constante de proporcionalidad  $\alpha$ ;  $N_1$ , y  $N_2$  pueden ser tomadas para expresar número o biomasa, aunque posteriormente  $\alpha$  depende de la eficiencia de la conversión de biomasa del krill en ballenas. Las poblaciones de presas y depredadores podrían ser descritas por otras ecuaciones, incorporando varios refinamientos. Pero las ecuaciones (4.1) y (4.2) involucran los elementos esenciales de un sistema donde interactúan presas y depredadores y son ampliamente representativos de una extensa clase de modelos.

Ahora para analizar el efecto de la captura suponemos que la población de krill es cosechada bajo una estrategia de “esfuerzo constante” en una tasa  $r_1 F_1$ ;  $F_1$  representa el esfuerzo de pesca constante,  $F_1 = 1$  corresponde a una tasa de pesca igual a la tasa de crecimiento intrínseco  $r_1$ . Consecuentemente la producción  $Y_1$  convencionalmente es asumida como linealmente proporcional al esfuerzo de pesca por la densidad  $N_1$ , es decir  $Y_1 = r_1 F_1 N_1$ . A la cosecha del krill se le añade, en la ecuación (4.1), un término que corresponde a la mortalidad y que es igual a  $-r_1 F_1 N_1$ . Similarmente, la cosecha de la población de las ballenas bajo “esfuerzo constante” a una tasa  $r_2 F_2$  da una producción  $Y_2 = r_2 F_2 N_2$  y a la ecuación (4.2) le aumentamos un término que corresponde a la mortalidad que es  $-r_2 F_2 N_2$ . Definiendo

$$X_1 = \frac{N_1}{K} \quad y \quad X_2 = \frac{N_2}{\alpha K}$$

se tiene que

$$N_1 = K X_1 \quad y \quad N_2 = \alpha K X_2$$

de donde

$$\frac{dN_1}{dt} = K \frac{dX_1}{dt}$$

Por lo que de la ecuación (4.1)

$$\frac{dN_1}{dt} = r_1 N_1 \left[ 1 - \frac{N_1}{K} \right] - a N_1 N_2 - r_1 F_1 N_1$$

la cual se transforma en

$$K \frac{dX_1}{dt} = r_1 K X_1 \left[ 1 - \frac{K X_1}{K} \right] - a k X_1 \alpha K X_2 - r_1 F_1 K X_1$$

que es equivalente a

$$\frac{dX_1}{dt} = r_1 X_1 \left[ 1 - \frac{K X_1}{K} \right] - a X_1 \alpha K X_2 - r_1 F_1 X_1$$

Lo anterior se puede escribir como

$$\frac{dX_1}{dt} = r_1 X_1 \left[ 1 - X_1 - F_1 - \frac{a \alpha k X_2}{r_1} \right]$$

Si hacemos el siguiente cambio

$$\nu = \frac{\alpha a K}{r_1} \tag{4.3}$$

Entonces lo anterior se puede reescribir como

$$\frac{dX_1}{dt} = r_1 X_1 [1 - X_1 - F_1 - \nu X_2] \tag{4.4}$$

Hagamos lo mismo con la ecuación (4.2)

$$\frac{dN_2}{dt} = r_2 N_2 \left[ 1 - \frac{N_2}{\alpha N_1} \right]$$

La cual se transforma en

$$\alpha K \frac{dX_2}{dt} = r_2 \alpha K X_2 \left[ 1 - \frac{\alpha K X_2}{\alpha K X_1} \right] - r_2 F_2 \alpha K X_2$$

de donde

$$\frac{dX_2}{dt} = r_2 X_2 \left[ 1 - \frac{X_2}{X_1} \right] - r_2 F_2 X_2$$

que a su vez se puede reescribir como

$$\frac{dX_2}{dt} = r_2 X_2 \left[ 1 - F_2 - \frac{X_2}{X_1} \right] \quad (4.5)$$

Nótese que las propiedades de equilibrio (estático) dependen de las cantidades  $F_1$ ,  $F_2$ ,  $\nu$  y adicionalmente la dinámica involucra a  $r_1$  y  $r_2$ .

### 4.1.2. Solución de equilibrio y Producción Sustentable

Los valores de equilibrio de las poblaciones de krill y de ballenas,  $X_1^*$  y  $X_2^*$  respectivamente, se obtienen a partir de resolver las siguientes ecuaciones

$$\frac{dX_1}{dt} = 0 \quad y \quad \frac{dX_2}{dt} = 0$$

Resolviendo  $\frac{dX_1}{dt} = 0$ , se tiene

$$r_1 X_1 [1 - X_1 - F_1 - \nu X_2] = 0$$

De donde

$$1 - X_1 - F_1 - \nu X_2 = 0 \quad (4.6)$$

Ahora si  $\frac{dX_2}{dt} = 0$  se tiene que

$$r_2 X_2 \left[ 1 - F_2 - \frac{X_2}{X_1} \right] = 0$$

con lo que resulta

$$1 - F_2 - \frac{X_2}{X_1} = 0 \quad (4.7)$$

Resolvamos las ecuaciones (4.6) y (4.7) simultáneamente. Para ello de la ecuación (4.6) se tiene

$$X_1 = 1 - F_1 - \nu X_2 \quad (4.8)$$

y de la ecuación (4.7)

$$X_1 = \frac{X_2}{1 - F_2}$$

Sustituyendo lo anterior en (4.8)

$$1 - F_1 - \nu X_2 = \frac{X_2}{1 - F_2}$$

Despejando a  $X_2$  se llega a

$$X_2 = \frac{(1 - F_2)(1 - F_1)}{1 + \nu(1 - F_2)}$$

Este último resultado es

$$X_2^* = \frac{(1 - F_1)(1 - F_2)}{1 + \nu(1 - F_2)} \quad (4.9)$$

Ahora sustituyendo este resultado en la ecuación (4.8) se tiene

$$X_1 = 1 - F_1 - \nu \frac{(1 - F_2)(1 - F_1)}{1 + \nu(1 - F_2)}$$

Que simplificando queda

$$X_1 = \frac{1 - F_1}{1 + \nu(1 - F_2)}$$

Con este resultado se encuentra que

$$X_1^* = \frac{(1 - F_1)}{1 + \nu(1 - F_2)} \quad (4.10)$$

Si la cosecha de ballenas se mantiene en un nivel que exceda a su tasa de crecimiento explícita,  $F_2 > 1$ , ellas serán llevadas a la extinción, y el sistema determina el estado  $X_1^* = 1 - F_1$ ,  $X_2^* = 0$ . Si la tasa de pesca del krill es mantenida en  $F_1 > 1$ , el sistema completo se colapsa para  $X_1^* = 0$  y se tiene  $X_2^* = 0$ . La producción biológica ( $Y_1 = r_1 F_1 N_1$ ) de krill y ballenas que corresponde a las poblaciones en equilibrio dadas por las ecuaciones (4.9) y (4.10) son:

$$Y_1^* = r_1 F_1 k X_1 = r_1 F_1 k \left[ \frac{1 - F_1}{1 + \nu(1 - F_2)} \right]$$

que se puede escribir como

$$Y_1^* = \frac{r_1 k F_1 (1 - F_1)}{1 + \nu(1 - F_2)} \quad (4.11)$$

Por otro lado

$$Y_2^* = r_2 F_2 N_2 = r_2 F_2 \alpha k X_2$$

que es equivalente a

$$Y_2^* = \frac{r_2 \alpha k F_2 (1 - F_1)(1 - F_2)}{1 + \nu(1 - F_2)} \quad (4.12)$$

Tomando  $\nu = 0$  en la ecuación (4.11) se obtienen para el krill los resultados convencionales de una especie simple que se cosecha y cuyo proceso natural de crecimiento es logístico. La presencia de krill consumido por las ballenas tiene el efecto de disminuir la producción de krill  $Y_1^*$ , y reduce la población de equilibrio del krill  $X_1^*$ , por una cantidad que se incrementa conforme  $\nu$  se incrementa. En ausencia de pesca ( $F_1 = F_2 = 0$ ) la ecuación (4.10) implica  $X_1^* = \frac{1}{1+\nu}$ , la cual proporciona una interpretación biológica simple para  $\nu$ :

1.  $\nu = 1$  las ballenas están consumiendo la población del krill exactamente en su PMS (esto es  $X_1^* = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$ ,  $N_1^* = \frac{1}{2}K$  para la logística);
2.  $\nu > 1$  las ballenas están consumiendo por arriba del PMS ( $N_1^* < \frac{1}{2}K$ ) y
3.  $\nu < 1$  las ballenas están explotando al krill por debajo de su PMS ( $N_1^* > \frac{1}{2}K$ ).

Existen muchas controversias ecológicas en torno al hecho de si  $\nu$  debe suponerse alrededor de la unidad en sistemas naturales de presa-depredador. Para las ballenas que explotan al krill no se tienen suficientes datos para dar una estimación real de  $\nu$ , aunque parece improbable que sea o muy grande o muy pequeña; para nuestra ilustración numérica, escogemos arbitrariamente  $\nu = 1$ .

Las ecuaciones (4.9) y (4.12) muestran que el stock de ballenas y su producción decrece linealmente cuando el esfuerzo de pesca del krill  $F_1$ , se incrementa. Más interesante es la relación entre la producción  $Y_2^*$ , y el esfuerzo de pesca para las ballenas,  $F_2$ . A diferencia de todos los modelos convencionales de cosecha de una especie simple, la curva de la ecuación (4.12) de producción-esfuerzo no se refiere simplemente a la relación de reclutamiento (aquí la ecuación (4.2)) salvo que está desplazada hacia atrás debido al factor  $\frac{1}{1+\nu(1-F_2)}$ . Esta característica la cual se ilustra en la Figura 4.1, proviene del carácter interactivo de la situación presa-depredador; a medida que los niveles de cosecha sobre las ballenas se incrementa, la abundancia absoluta de krill se incrementa, lo cual tiene el efecto de mejorar la tasa de crecimiento per cápita de las ballenas que quedan. Entonces, con  $\nu = 1$  en nuestro modelo simple el MSY de las ballenas es alcanzado con  $F_2 = 0,59$  y el stock se reduce al 59% de su nivel original; esto se comprueba con las Figuras de  $F_2 = 0,50$  y el stock se reduce al 50%

en el modelo de una especie simple con crecimiento logístico. Todas las curvas producción-esfuerzo con picos hacia atrás son características de los datos para muchas ballenas y algunos peces y otras poblaciones, y los mecanismos de arriba pueden ser en parte responsables.

Regresando a la población de krill, en la Figura 4.2 mostramos a la producción de krill como una función del esfuerzo de pesca del krill y las ballenas,  $F_1$  y  $F_2$ , respectivamente. Para  $F_2$  fijo, la máxima cosecha de krill se alcanza cuando  $F_1 = 0,50$ . Esta PMS del krill se incrementa cuando el esfuerzo de pesca de las ballenas se incrementa (agotando la población de las ballenas). Claramente la mayor cosecha de krill se alcanza cuando  $F_2 = 1$ , que corresponde a la extinción de las ballenas. Considerando la producción de krill y ballenas conjuntamente, podemos preguntarnos cuál es la máxima producción de krill consistente con una producción específica de ballenas (esto es, ¿una cuota específica de ballenas?). O contrario, ¿cuál es el valor máximo de  $Y_2$  sujeto a  $Y_1$  teniendo algún valor dado?. Estas preguntas son contestadas en la Figura 4.3. Combinaciones de producción de krill y de ballenas representados por puntos que caen en la región sombreada de la Figura 4.3 son consistentes con el manejo sustentable del stock, y los puntos que caen fuera de ella no lo son. En la Figura 4.3, grandes producciones de ballenas corresponden a nula pesca de krill ( $Y_1^* = 0$  debido a que  $F_1 = 0$ ), siendo que una gran producción de krill se alcanzan con el exterminio de las ballenas ( $Y_2^* = 0$  debido a que  $N_2^* = 0$ ). Los detalles que sustentan a la Figura 4.3 son discutidos en [42-43], pero el mensaje es claro: un sistema presa-depredador no puede ser manejado por la aplicación de las nociones de PMS para cualquier especie individualmente.

En principio, un posible criterio de manejo es maximizar la producción sustentable total de krill y ballenas. Suponemos que el valor relativo de ballenas y krill es medido por  $\gamma$  [44], donde este factor de peso puede reflejar, por ejemplo, el valor económico relativo, proceso de peso y contenido proteínico. La producción total de peso es entonces proporcional a

$$Y = Y_1^* + \gamma Y_2^*$$

donde  $Y$  se puede escribir a partir de las ecuaciones (4.11) y (4.12) como,

$$Y = \frac{r_1 k F_1 (1 - F_1)}{1 + \nu(1 - F_2)} + \gamma \frac{r_2 \alpha k F_2 (1 - F_1)(1 - F_2)}{1 + \nu(1 - F_2)}$$

Nuevamente, después de hacer algunos cálculos y de agrupar términos lo anterior se puede escribir como

$$Y = \frac{C(1 - F_1)(F_1 + \beta F_2(1 - F_2))}{1 + \nu(1 - F_2)} \quad (4.13)$$

Donde

$$\beta = \alpha\gamma \left[ \frac{r_2}{r_1} \right] \quad (4.14)$$

El símbolo  $\beta$  se interpreta como el valor efectivo por unidad de biomasa de ballenas relativa a la unidad de biomasa del krill; esto es el valor relativamente intrínseco,  $\gamma$ , reducido por la eficiencia de conversión biológica,  $\alpha$ , y la tasa relativa de crecimiento intrínseca,  $\frac{r_2}{r_1}$ . La producción total sustentable ahora puede ser maximizada con respecto a  $F_1$  y  $F_2$ , para encontrar el óptimo global. Tres situaciones son posibles:

1.  $\beta$  pequeña, la solución óptima se obtiene cuando la cosecha de ballenas es muy baja o nula y solo se cosecha krill.
2.  $\beta$  grande, sólo las ballenas deben ser buscadas, y su suministro de alimento no debe cosecharse .
3. Sólo para una banda angosta de valores intermedios de  $\beta$  la solución óptima involucra a la presa y al depredador.

Totalmente separado de las dificultades prácticas inherentes en tratar de optimizar una producción total cuyos elementos componentes son presas y depredadores que son capturados por diferentes industrias, el natural del “todo o nada” del óptimo global a menudo hará inconsistencias con la preservación de todas las especies del ecosistema.

### 4.1.3. La Dinámica

Cuando los esfuerzos de pesca cambian, el sistema se mueve a lo largo de una trayectoria descrita por las ecuaciones diferenciales (4.4) y (4.5). Para muchos sistemas presa-depredador que son de interés para el manejo de pesquerías y en particular para el sistema krill-ballenas, la tasa de crecimiento intrínseca de la población de las presas,  $r_1$ , es significativamente mayor que la de la población de depredadores,  $r_2$ . Como un resultado, la población de las presas tiende a responder a cambios relativamente rápidos, sobre una escala de tiempo  $T_1 \sim \frac{1}{r_1}$ ; durante este tiempo la población

de depredadores deberá cambiar poco. Subsecuentemente, a una escala  $T_2 \sim \frac{1}{r_2}$ , el sistema completo deberá colocarse en un nuevo equilibrio.

Para ejemplificar estas ideas, la Figura 4.4 muestra lo que sucede en nuestro metafórico modelo krill-ballenas (ecs. (4.4) y (4.5)) después que la cosecha del krill ha iniciado. Específicamente no hay pesca de krill antes de  $t = 0$ , y a un esfuerzo de pesca de krill de  $F_1 = 0,5$  que es mantenido para  $t > 0$ . La Figura 4.A describe la trayectoria seguida por el sistema en el “plano fase” de presa-depredador. La población del krill cambia relativamente rápido, sobre la escala de tiempo  $T_1$ , para alcanzar el valor de equilibrio apropiado a la densidad original de ballenas y al nuevo régimen de cosecha; entonces ambas poblaciones se mueven relativamente lentas, sobre la escala de tiempo  $T_2$ , aproximadamente a lo largo de “isoclinas” de krill (donde la población de krill tiene el valor de equilibrio apropiado al valor corriente del cambio de la población de ballenas), hacia el punto de equilibrio final. Estos cambios son relativamente suaves en la Figura 4.4; con otros parámetros, es posible para el sistema mostrar oscilaciones amortiguadas cuando se relaja a su nuevo equilibrio.

Aquí la característica esencial es que, como inicia la cosecha de krill, la población explotada debe ajustarse a un nuevo valor estable relativamente rápido. Pero hay cambios a largo plazo en la población controlados por componentes lentas del ecosistema. Una vez más se aprecia, que puede ser posible tener indicadores relativamente rápidos de los cambios lentos de la población (por ejemplo, por monitoreo de la tasa de embarazos). Básicamente, sin embargo, el manejo debe ser montado para escalas de tiempo lentas si el ecosistema es la unidad de interés.

Más general, la manera en que el sistema responde a fluctuaciones del medio ambiente deberá ser alterado por la cosecha. El “tiempo característico de regreso”,  $T_R$ , para recobrase hacia el equilibrio después de una pequeña perturbación provee una cruda medida de la robustez del sistema, y típicamente  $T_R$  se incrementa si  $F_1$  o  $F_2$  o ambos se incrementan. Esto es, al sistema cosechado le toma más tiempo en recuperarse del golpe ambiental que al sistema primitivo. Estos efectos se hacen más severos cuando  $F_1$  y  $F_2$  se incrementan hacia la unidad. Hay muchos requisitos y advertencias que necesitan ser añadidas a estas generalizaciones pero en general es cierto que los sistemas cosechados tienen poca capacidad de recuperación.

## 4.2. Figuras

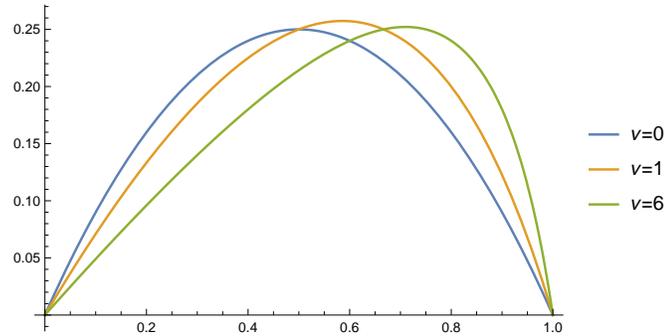


Figura 4.1: La producción de ballenas,  $Y_2$ , es mostrada como una función del esfuerzo de pesca,  $F_2$ , para tres valores del parámetro  $\nu$  que caracteriza la intensidad de depredación de nuestro modelo krill-ballenas: a)  $\nu = 0$ , b)  $\nu = 1$ , c)  $\nu = 5$ . Alternativamente, para este modelo particular presa-depredador, la misma curva describe la relación entre producción y la densidad del stock, referida a la densidad no cosechada. (Si  $Y_2$  involucra un factor de escala no especificado, todas las curvas tienen que ser trazadas para tener los mismos valores máximos. Para más detalles ver el texto).

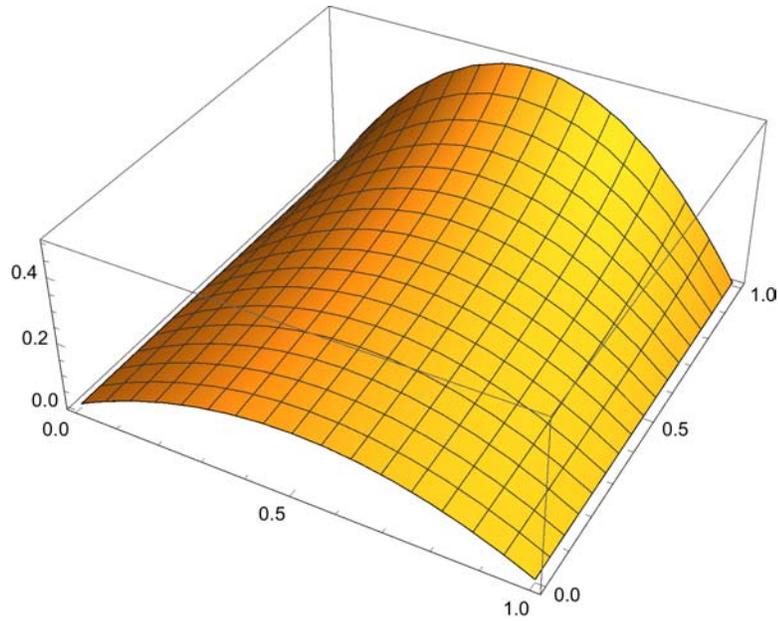


Figura 4.2: La producción de krill,  $Y_1$ , es mostrada como una función del esfuerzo de pesca sobre el krill,  $F_1$ , y sobre el de las ballenas,  $F_2$ . (Aquí  $\nu = 1$ , y en la ecuación 4.12 la constante de escala ha sido escogida arbitrariamente  $r_1 k = 1$ ). Los rasgos de esta figura son como los descritos en el texto.

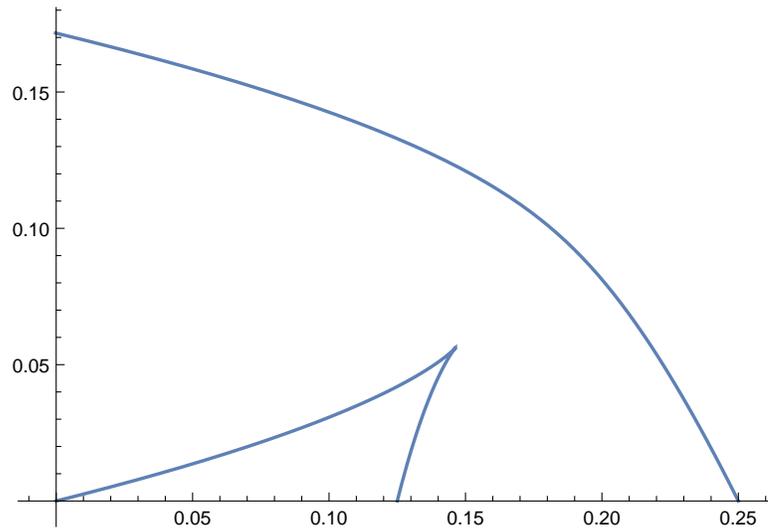


Figura 4.3: La frontera del área punteada da la producción máxima sustentable de krill consistente con un valor de la producción de ballenas prescrito (o, recíprocamente, la producción máxima sustentable de ballenas consistente con una producción específica de krill).

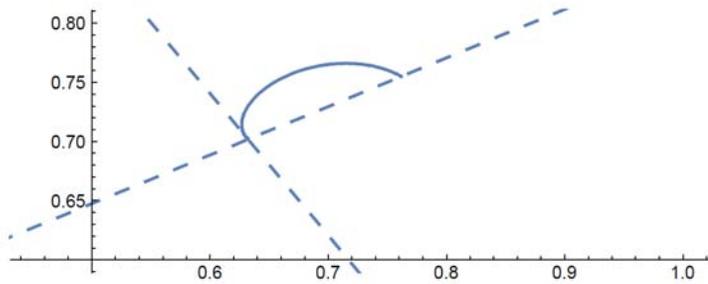


Figura 4.4: La frontera del área punteada da la producción máxima sustentable de krill consistente con un valor de la producción de ballenas prescrito (o, recíprocamente, la producción máxima sustentable de ballenas consistente con una producción específica de krill).

# Capítulo 5

## Control óptimo

### 5.1. Control Óptimo en un Sistema Presa- Depredador

En este capítulo se presenta un ejemplo del uso de la teoría de control óptimo para obtener estrategias óptimas para el control de un sistema presa-depredador. Se usan dos tipos de variables de control. Una variable de control es la tasa de liberación de presas o depredadores los cuales han sido producidos en laboratorios. El otro tipo de variable de control es la tasa de aplicación de un insecticida. Un resultado inesperado e interesante es que es fácil controlar una plaga por medio de un insecticida que destruya solamente a los depredadores dejando a las presas ilesas. Esto es debido a que el sistema presa-depredador es un sistema dinámico. El nivel de la variable de control y el tiempo de su aplicación pueden ser manipulados para producir respuestas deseadas desde el sistema dinámico. Otro resultado interesante es que el sistema puede ser controlado por la liberación de presas que han sido producidas en laboratorios. Estos resultados pueden ser útiles en la formulación de un esquema integral de control para el manejo de presas.

### 5.1.1. Introducción

La aplicación de las técnicas de optimización en ecología han sido ampliamente defendidas por Watt ([5], cap. 13). Una de estas técnicas para sistemas dinámicos es la que se conoce como el Principio Máximo de Pontryagin, que es una forma moderna del cálculo de variaciones clásico.

En ecología se tiene como principal obstáculo para el uso de la teoría de control óptimo, la falta de exactitud de los modelos matemáticos de la dinámica de los ecosistemas. Sin embargo, un ecosistema que ha sido muy estudiado es el de presa-depredador. En este ejemplo, se emplea el modelo de Lotka-Volterra. El uso de modelos simplificados de poblaciones de insectos facilitará la exposición del uso de la teoría de control óptimo en ecología. No existe dificultad conceptual en extender este análisis a otros modelos de presa-depredador o a un sistema presa-depredador con estructura de edades.

El análisis de este sistema presa-depredador sugiere dos propuestas interesantes: Primero, es fácil controlar a las presas por medio de un insecticida que mata solamente a los depredadores dejando a la plaga (presas) ilesas. En circunstancias normales, los depredadores regulan la población de las presas.

Segundo, es fácil controlar a las presas liberando presas en el tiempo y a la tasa adecuada. Las razones biológicas detrás de estas dos propuestas son que estas variables de control pueden ser usadas para prevenir un subsecuente colapso de las poblaciones de depredadores seguido por una epidemia de presas.

### 5.1.2. Un Sistema Presa-Depredador no Controlado

Denotemos como  $N_1(t)$  al número de presas y como  $N_2(t)$  al número de depredadores al tiempo  $t$ .

Ignorando la estructura de edades, es posible que el sistema pueda ser descrito por las siguientes ecuaciones

$$\frac{dN_1}{dt} = g_1(N_1, N_2, t) \quad (5.1)$$

$$\frac{dN_2}{dt} = g_2(N_1, N_2, t) \quad (5.2)$$

donde  $g_1(N_1, N_2, t)$  y  $g_2(N_1, N_2, t)$  son funciones de  $N_1, N_2$  y  $t$ . El modelo de Lotka-Volterra es

$$\frac{dN_1}{dt} = (\alpha_1 - \beta_1 N_2)N_1 \quad (5.3)$$

$$\frac{dN_2}{dt} = (\beta_2 N_1 - \alpha_2)N_2 \quad (5.4)$$

donde  $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$  son constantes positivas.

Como el sistema evoluciona en el tiempo se pueden tener trayectorias cuyos trazos van hacia afuera como se muestra en la Figura 5.1 y las flechas indican la dirección de éstas conforme se incrementa el tiempo.

Como primer paso en este estudio, busquemos los puntos de equilibrio del sistema. Para esto tenemos que resolver las siguientes ecuaciones diferenciales

$$\frac{dN_1}{dt} = 0$$

y

$$\frac{dN_2}{dt} = 0$$

Si  $\frac{dN_1}{dt} = 0$  se tiene que

$$\alpha_1 - \beta_1 N_2 = 0$$

Lo que se traduce en

$$N_2 = \frac{\alpha_1}{\beta_1}$$

Ahora, si  $\frac{dN_2}{dt} = 0$  implica que

$$\beta_2 N_1 - \alpha_2 = 0$$

y entonces

$$N_1 = \frac{\alpha_2}{\beta_2}$$

Con lo anterior, tenemos el punto  $P[\frac{\alpha_2}{\beta_2}, \frac{\alpha_1}{\beta_1}]$  que representa al punto de equilibrio del sistema. Si el sistema está en  $P$ , la población de presas permanece en un nivel constante (como también los depredadores). Conforme la trayectoria del estado se está alejando de  $P$ , se tienen grandes fluctuaciones de la población de las presas. Esto es claro si vemos la Figura 5.1. En la Figura 5.1, se despliegan trayectorias no controladas cuando

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \beta_1 = \beta_2 = 1 \quad (5.5)$$

Nótese que los números a lo largo de los ejes no son los números absolutos de presas ni de depredadores, sino están en unidades adimensionales. En las Figuras 5.2-5.8, estos parámetros tiene los mismos valores y los ejes tienen las mismas unidades.

### 5.1.3. Control con un Pesticida Ideal

En este caso la variable de control es la tasa de aplicación de un pesticida ideal. Un pesticida ideal es un agente químico o biológico que mata solamente a las presas, no deja residuos, y destruye a las presas de una manera que depende de su densidad. Al tiempo  $t$ , definimos la tasa de aplicación del pesticida como  $u(t)$ . La dinámica del sistema presa-depredador sujeto a esta variable de control está dado por

$$\frac{dN_1}{dt} = (\alpha_1 - \beta_1 N_2)N_1 - b_1 u N_1 \quad (b_1 > 0) \quad (5.6)$$

$$\frac{dN_2}{dt} = (\beta_2 N_1 - \alpha_2)N_2 \quad (5.7)$$

Las condiciones iniciales del sistema son

$$N_1(t_0) = N_{10}, \quad N_2(t_0) = N_{20} \quad (5.8)$$

Esto quiere decir que al tiempo  $t_0$  los niveles de la población pueden ser observados y  $N_{10}$ ,  $N_{20}$  son los resultados de las mediciones.

En la sección previa se hizo notar que si los estados del sistema están en el punto  $P[\frac{\alpha_2}{\beta_2}, \frac{\alpha_1}{\beta_1}]$  estos tienen la propiedad deseable de que la población de las presas permanece en un nivel constante. Asumimos que  $P$  es una meta deseable para nuestro programa de control. Si este no es un nivel aceptable de presas podemos usar otros métodos de control que puedan hacer cambios permanentes en los parámetros del sistema  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\beta_1$ ,  $\beta_2$ .

Entonces, si  $t_f$  denota el tiempo donde se ha completado el programa de control, se debería tener

$$N_1(t_f) = \frac{\alpha_2}{\beta_2}; \quad N_2(t_f) = \frac{\alpha_1}{\beta_1} \quad (5.9)$$

Podemos especificar a  $t_f$  o dejarlo sin especificar. Si especificamos a  $t_f$  estaríamos imponiendo una restricción sobre el programa de control. En nuestro caso dejamos

a  $t_f$  sin especificar.

La variable de control debe satisfacer la restricción

$$0 \leq u(t) \leq u_{max} \quad (5.10)$$

El término  $u(t)$  debe ser positivo. El límite superior para  $u(t)$  se debe a que las instalaciones y el personal disponible son limitados. La cota superior  $u_{max}$  debe ser alguna función del tiempo que refleje la capacidad de los cambios al rociar el pesticida, pero por simplicidad supondremos que  $u_{max}$  es una constante.

Necesitamos una función criterio para medir la ejecución del programa de control. Una función criterio razonable es una función costo la cual es una combinación del costo del pesticida usado y el costo total de los daños producidos por la plaga a la cosecha. Este es uno de los puntos donde los valores de juicio entran al análisis. La elección final del índice de ejecución puede estar determinado por otras consideraciones, como por ejemplo la salud. Para este ejemplo se toma como el índice de ejecución a

$$J = \int_{t_0}^{t_f} [c_1 N_1 + c_2 u] dt \quad c_1 > 0, \quad c_2 > 0 \quad (5.11)$$

Nuestro problema es escoger un programa de control admisible el cual llevará al sistema de un estado inicial  $(N_{10}, N_{20})$  al estado  $[\frac{\alpha_2}{\beta_2}, \frac{\alpha_1}{\beta_1}]$  y tal que el índice de ejecución sea mínimo.

El programa de control óptimo es una combinación de  $u = 0$  y  $u = u_{max}$  (ver apéndice 1). La combinación exacta de (la secuencia) los arcos de  $u = 0$  y  $u = u_{max}$  tiene que ser determinado numéricamente.

Una estrategia de control óptimo para  $b_1 u_{max}$  suficientemente grande está dado en la Figura 5.2; esto es,  $b_1 u_{max} = \alpha_1$ . En la Figura 5.2, las curvas  $AP$  y  $PB$  son curvas de cambio. Tomemos un estado inicial del sistema que esté en  $G_1$ . El sistema se puede mover bajo control nulo a  $S_1$ . En  $S_1$ , se aplica la variable de control en el nivel máximo hasta que el estado del sistema alcanza el punto  $P$ . Si el estado inicial está en  $G_2$  se aplica inmediatamente la variable de control al máximo nivel hasta que el estado del sistema alcanza a  $S_2$ . En  $S_2$ , se quita la variable de control y el sistema evoluciona como un sistema no controlado hasta  $S_1$ , cuando el control es cambiado nuevamente para llevar el estado del sistema a  $P$ .

De la Figura 5.2, notamos que el rociado del pesticida debe pararse tan pronto como el estado alcanza a  $P$ . Si no, el sistema puede ser llevado al estado  $Q$  vía la curva quebrada  $PQ$ . Si se detiene el rociado, el sistema deberá moverse a lo largo de la trayectoria no controlada.

Si  $b_1 u_{max} < \alpha_1$  el sistema no puede ser llevado desde cualquier estado admisible  $(N_1, N_2)$  al estado  $P[\frac{\alpha_2}{\beta_2}, \frac{\alpha_1}{\beta_1}]$  con un cambio en la variable de control. Esto se indica en la Figura 5.3, solo los estados dentro de la trayectoria  $ABCD$  pueden ser llevados a  $P$  con un cambio de la variable de control. Fuera de  $ABCD$  en la Figura 5.3, la estrategia de control es más complicada y no se discutirá aquí. Esta conclusión tiene una implicación útil por la cuestión de si la capacidad de rociar al pesticida es adecuado o no. Suponemos que una epidemia de las presas no sucederá nunca debido a que el estado está más allá de  $ABCD$ . Entonces la capacidad existente de controlar la plaga es suficiente. Por esto entendemos que siempre el sistema puede ser llevado a  $P$  con un cambio de la variable de control. De otra manera,  $u_{max}$  deberá incrementarse con el propósito de que ningún brote de presas vaya más allá de la nueva frontera  $ABCD$ .

#### 5.1.4. Control por un Insecticida que solo mata a los Depredadores

Una objeción común en la literatura popular al uso de insecticidas químicos, es que pueden matar a los depredadores, los cuales regulan a las presas.

Esta objeción no necesariamente es válida debido a que el sistema presa-depredador no es un sistema estático sino, más bien, es un sistema dinámico. Es concebible que la manera más barata de controlar al sistema presa-depredador sea por medio de un insecticida que mata sólo a los depredadores. La racionalidad detrás de esto, es que el insecticida debería ser usado para reducir a la población de depredadores en alguna etapa para prevenir un subsecuente colapso de la población de depredadores seguida por un aumento en la población de la plaga. La teoría de control óptimo se emplea para verificar esta hipótesis.

Sea  $u(t)$  la tasa de aplicación del pesticida y suponemos que no deja residuos. Sea

$$0 \leq u(t) \leq u_{max} \quad (5.12)$$

donde  $u_{max}$  es constante.

La dinámica del sistema presa-depredador bajo esta variable de control, está dado por las ecuaciones

$$\frac{dN_1}{dt} = (\alpha_1 - \beta_1 N_2)N_1 \quad (5.13)$$

$$\frac{dN_2}{dt} = (\beta_2 N_1 - \alpha_2)N_2 - b_2 u N_2 \quad (5.14)$$

donde  $b_2$  es un parámetro positivo. Al tiempo inicial  $t_0$  se tiene

$$N_1(t_0) = N_{10}, \quad N_2(t_0) = N_{20} \quad (5.15)$$

Esto simplemente quiere decir que tanto  $N_{10}$  como  $N_{20}$  son estimaciones confiables de las poblaciones al tiempo  $t = t_0$ .

Sea  $t_f$  el tiempo final no especificado y sea

$$N_1(t_f) = \frac{\alpha_2}{\beta_2}, \quad N_2(t_f) = \frac{\alpha_1}{\beta_1} \quad (5.16)$$

El problema de control óptimo es encontrar una función  $u(t)$  que lleve al sistema desde un estado inicial  $(N_{10}, N_{20})$  al estado  $(\frac{\alpha_2}{\beta_2}, \frac{\alpha_1}{\beta_1})$  y tal que el índice de ejecución

$$J = \int_{t_0}^{t_f} [c_1 N_1 + c_2 u] dt, \quad (c_1 > 0, \quad c_2 > 0) \quad (5.17)$$

sea mínimo.

El control óptimo es una combinación de  $u = 0$  y  $u_{max}$  (ver apéndice 1). La secuencia exacta tiene que ser determinada numéricamente. La estrategia de control está exhibida en la Figura 5.4. Las curvas  $AP$ ,  $PS$  y  $SB$  son curvas de cambio. Si el estado inicial del sistema está en  $G_1$ , el sistema se mueve de manera no controlada hasta  $S_1$ . En  $S_1$  se aplica la variable de control al nivel máximo hasta que el sistema alcanza al punto  $P$ . Si el estado inicial está en  $G_2$ , inmediatamente se aplica la variable de control al máximo nivel hasta que el sistema alcanza el punto  $S_2$ . En  $S_2$  se quita la variable de control y el sistema evoluciona como un sistema no controlado hasta  $S_1$  donde el control es cambiado al máximo nivel y lleva al sistema al punto  $P$ . En  $P$ , se quita la variable de control.

### 5.1.5. Control por un Insecticida que Mata Presas y Depredadores.

Sea  $u(t)$  la variable de control que es la tasa de aplicación de un insecticida que mata presas y depredadores. Si deja un residuo, es necesario introducir tres ecuaciones diferenciales para describir el nivel de los residuos en el medio ambiente, la población de las presas y la población de los depredadores. Se supone que se pueden ignorar los niveles residuales en las poblaciones de las presas y de los depredadores. Sea  $R(t)$  el nivel de los residuos del insecticida en el medio ambiente. Se sabe que un insecticida mata a los insectos de manera proporcional. Por tanto, la dinámica del sistema presas-depredadores sujeto a un insecticida persistente está dado por

$$\frac{dN_1}{dt} = (\alpha_1 - \beta_1 N_2)N_1 - b_1 u N_1 - e_1 R N_1 \quad (5.18)$$

$$\frac{dN_2}{dt} = (\beta_2 N_1 - \alpha_2)N_2 - b_2 u N_2 - e_2 R N_2 \quad (5.19)$$

$$\frac{dR}{dt} = -kR + u \quad (5.20)$$

donde  $b_1$ ,  $b_2$ ,  $e_1$ ,  $e_2$  y  $k$  son parámetros positivos.

Si se supone que el insecticida no deja residuos, entonces la dinámica del sistema está dado por

$$\frac{dN_1}{dt} = (\alpha_1 - \beta_1 N_2)N_1 - b_1 u N_1 \quad (5.21)$$

$$\frac{dN_2}{dt} = (\beta_2 N_1 - \alpha_2)N_2 - b_2 u N_2 \quad (5.22)$$

El tiempo final  $t_f$  se deja sin determinar. Sea

$$N_1(t_f) = \frac{\alpha_2}{\beta_2}; \quad N_2(t_f) = \frac{\alpha_1}{\beta_1} \quad (5.23)$$

$$N_1(t_0) = N_{10}; \quad N_2(t_0) = N_{20} \quad (5.24)$$

$$0 \leq u(t) \leq u_{max} = cte \quad (5.25)$$

El problema de control óptimo es llevar al sistema del estado inicial  $(N_{10}, N_{20})$  al estado  $(\frac{\alpha_2}{\beta_2}, \frac{\alpha_1}{\beta_1})$  y tal que la cantidad total de insecticida usado, que está dado por

$$J = \int_{t_0}^{t_f} u dt \quad (5.26)$$

sea mínimo.

Se muestra en el apéndice 1 que el control óptimo es una combinación de  $u = 0$ ,  $u = u_{max}$  y el control singular

$$u = \frac{b_1^2 \beta_2 N_1 + b_2^2 \beta_1 N_2}{b_1 b_2 (b_1 - b_2)} + \frac{(\alpha_1 - \beta_1 N_2) - (\beta_2 N_1 - \alpha_2)}{b_1 - b_2} \quad (5.27)$$

con  $b_1 > b_2 > 0$ . El extremal singular asociado está dado por

$$b_1 \beta_2 (\alpha_1 - \beta_1 N_2) N_1 + b_2 \beta_1 (\beta_2 N_1 - \alpha_2) N_2 = 0 \quad (5.28)$$

Estas trayectorias pasan por  $(\frac{\alpha_2}{\beta_2}, \frac{\alpha_1}{\beta_1})$ .

Si el control singular se usa, es necesario verificar que no se viola la restricción (5.25).

En un caso particular, puede ser que el control singular siempre sea muy grande y tiene que ser excluido.

Por lo argumentado, se relaja (ignora) la restricción (5.25) y se establece la pregunta de si una combinación de control nulo  $u = 0$  y el control singular (5.27) es adecuado para controlar al sistema. La respuesta es afirmativa. La estrategia de control está exhibida en la Figura 5.5. La curva  $AP$  es la curva de cambio como también un extremal singular (5.28). Supongamos que el estado inicial está en  $G_1$ . El sistema se mueve a lo largo del control nulo  $G_1 S_1$ . En  $S_1$ , la variable de control es cambiada como se predijo en (5.27). Bajo el control singular, el estado del sistema es llevado a  $P$  vía  $S_1 P$ . Si el estado inicial está en  $G_2$ , el sistema evoluciona bajo control nulo hasta  $S_2$ . En  $S_2$ , el control singular (5.27) es cambiado y el sistema es llevado a  $P$ . Nótese que como  $N_1$  la asíntota al extremal singular es

$$N_2 = \frac{b_1 \alpha_1}{(b_1 - b_2) \beta_1} \quad (5.29)$$

Entonces, de la Figura 5.5, todos los estados admisibles (esto es  $N_1 > 0$ ,  $N_2 > 0$ ) pueden ser llevados al estado estable con un cambio de la variable de control. Matemáticamente, esta estrategia de control es muy interesante porque se conocen explícitamente las trayectorias de control nulo y las trayectorias del control singular. Desde el punto de vista práctico, un programa de control que sea una combinación de  $u = 0$  y  $u = u_{max}$  es fácil de implementar. El control singular no es posible si

$b_1 = b_2$ . Para este caso, en la Figura 5.6, se exhiben resultados en los cuales sólo se emplean arcos  $u = 0$  y  $u = u_{max}$ . Su índice de ejecución está dado por

$$J = \int_{t_0}^{t_1} [N_1 + u] dt \quad (5.30)$$

En la Figura 5.6, los arcos  $AP$  y  $PB$  son arcos de cambio. Si el estado inicial del sistema está en  $G_1$ , el sistema evoluciona no controlado hasta  $S_1$ . En  $S_1$ , la variable de control es cambiada a su máximo nivel y el estado del sistema es llevado a  $P$  a lo largo de  $S_1P$ . Si el estado inicial del sistema está en  $G_2$ , la variable de control es cambiada inmediatamente a su máximo nivel hasta alcanzar a  $S_2$ . En  $S_2$ , se quita la variable de control hasta alcanzar  $S_1$ . Entonces el estado es llevado a  $P$  a lo largo de  $S_1P$  aplicando la variable de control a su máximo nivel.

### 5.1.6. Control por Liberación de Presas y Depredadores

La contaminación por los pesticidas es reconocida como una amenaza al bienestar del ser humano. Debido a la inquietud pública sobre el uso de los insecticidas químicos, es que se ha puesto más atención a los controles biológicos. Una forma de control biológico es la liberación de depredadores para controlar a las presas. Un ejemplo muy famoso de esto fue el del control del cottony-cushion por el escarabajo lady-bird en California. En el presente, se han reportado cerca de 300 casos exitosos del uso de los controles biológicos. Un tercio de estos casos son totalmente exitosos, otro tercio se dice que son sustancialmente exitosos y el tercio restante son marginalmente exitosos. Nuestro ejemplo de control biológico está motivado por la posibilidad de que el grado de éxito de los casos sustancial y marginalmente exitosos se incrementen si los depredadores son liberados de una manera óptima.

Otra forma de control biológico que no ha sido muy desarrollado es el de liberar presas para controlar a las presas. Es concebible que la liberación de presas en un cierto tiempo y a una cierta tasa pueda llevar a un promedio bajo a la población de las presas o a disminuir a la población de la plaga en una etapa posterior

Las presas y los depredadores son producidos en laboratorios y son liberados a una tasa  $u(t)$  y  $v(t)$  respectivamente. Éstas son las variables de control.

La dinámica del sistema está dado por

$$\frac{dN_1}{dt} = (\alpha_1 - \beta_1 N_2)N_1 + u \quad (5.31)$$

$$\frac{dN_2}{dt} = (\beta_2 N_1 \alpha_2)N_2 + v \quad (5.32)$$

Tomemos a  $t_f$  sin especificar y con las siguientes condiciones

$$N_1(t_0) = N_{10}; \quad N_2(t_0) = N_{20} \quad (5.33)$$

$$N_1(t_f) = \frac{\alpha_2}{\beta_2}; \quad N_2(t_f) = \frac{\alpha_1}{\beta_1} \quad (5.34)$$

$$0 \leq u(t) \leq u_{max} = const \quad (5.35)$$

$$0 \leq v(t) \leq v_{max} = const \quad (5.36)$$

El problema de control óptimo es encontrar las tasas de liberación de las presas y de los depredadores las cuales llevarán al sistema del estado observado  $(N_{10}, N_{20})$  al estado estable  $P[\frac{\alpha_2}{\beta_2}, \frac{\alpha_1}{\beta_1}]$  y tal que el índice de ejecución

$$J = c_0(t_f - t_0) + \int_{t_0}^{t_f} [c_1 u + c_2 v + c_3 N_1] dt \quad (5.37)$$

sea mínimo. Los parámetros  $c_1, c_2, c_3$ , son positivos y deben ser interpretados como los coeficientes de costo o factores prioritarios de ponderación. El término  $c_0(t_f - t_0)$ , ( $0 \leq c_0$ ) en el índice de ejecución quiere decir que queremos llevar el sistema al estado estable rápidamente.

El programa de control óptimo es alguna combinación de  $u = 0, v = 0, u = u_{max}, v = v_{max}$  (ver apéndice II). Se tiene calculada la estrategia de control para los casos donde:

- a) Solo se contempla la liberación de presas.
- b) Solo se contempla la liberación de depredadores.

La estrategia de control óptimo para un ejemplo del primer caso ( $c_0 = 0, c_1 = 2, c_3 = 1, u_{max} = \frac{1}{2}, v_{max} = 0$ ) está dado en la Figura 5.7. Los arcos  $AP, PS$  y  $SB$  son curvas de cambio. Si  $G_1$  es el estado inicial del sistema, éste puede evolucionar hasta

$S_1$  bajo control nulo. En  $S_1$ , la variable de control es cambiada a su máximo nivel hasta que alcanza el punto  $P$  vía  $PS$ . Si el estado inicial está en  $G_2$ , la variable de control es cambiada inmediatamente. En  $S_2$ , la variable de control no es cambiada, pero en  $S_1$  se cambia nuevamente, y el estado del sistema es finalmente llevado al punto  $P$ .

La estrategia de control óptimo para un ejemplo del segundo caso ( $c_0 = 1$ ,  $c_2 = 2$ ,  $c_3 = 0$ ,  $u_{max} = 0$ ,  $v_{max} = \frac{1}{2}$ ) está dado en la Figura 5.8. Nótese que  $u_{max}$  es grande comparado con los parámetros  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\beta_1$ ,  $\beta_2$ , y utilizando el arco  $BP$ , es posible llevar al sistema desde cualquier estado al estado estable  $P$  con un cambio de la variable de control. El correspondiente programa de control no es óptimo porque, como se muestra en la Figura 5.8, las condiciones necesarias requieren que algún estado sea llevado óptimamente a  $P$  solamente con dos cambios en la variable de control. Si  $v_{max}$  es “pequeña” comparada con los parámetros, no siempre es fácil llevar al sistema desde todos los estados admisibles a  $P$  con un cambio de la variable de control y la estrategia de control óptimo es más elaborada que la de la Figura 5.8. Las curvas  $AP$  y  $PB$  son curvas de cambio.

### 5.1.7. Conclusiones

La teoría de control óptimo es una herramienta muy flexible y cuantitativa para el estudio de programas de control sobre sistemas presa-depredador. Se tienen tres niveles en el uso de la teoría de control:

1. Algunas de las condiciones necesarias de la teoría de control óptimo son usadas para reducir la clase de candidatos a programas de control. Esto se combina con conocimientos biológicos y estudios de simulación de los efectos de programas de control sobre sistemas presa-depredador. Por ejemplo en casi todos los problemas estudiados la variable de control óptimo está en el nivel cero o niveles máximos. Esta información es muy útil en estudios de simulación donde otros factores, cuantitativos y cualitativos, pueden determinar el tiempo de cambio de la variable de control.

2. Todas las condiciones de la teoría de control óptimo son usadas para obtener un programa de control definitivo. Esto debería ser analizado desde el punto de vista biológico seguido de la experimentación en el campo para verificar los resultados.

Si el programa de control desde el punto de vista biológico no es esencial entonces debemos cambiar el modelo matemático del sistema.

El modelo de Lotka- Volterra es razonable en el sentido de que los efectos de todos los programas de control óptimo que se obtienen son muy plausibles desde el punto de vista biológico. El caso de controlar el sistema por liberación de presas suena ridículo al principio pero es muy plausible cuando vemos que la racionalidad que está detrás es la previsión de un colapso de la población de depredadores seguido por un brote de presas. Ejemplos prácticos de esta forma de control biológico son discutidos en [10] y [11]. Este tipo de control biológico no debe confundirse con aquellos que involucran la liberación de hembras esterilizadas para reducir la producción de huevos fértiles.

3. En el uso de la teoría de control óptimo, verificamos suficientes condiciones para la optimización de las estrategias de control. Desde el punto de vista matemático esto es muy deseable, pero, para estos problemas, no se hizo. Por tanto, todos los programas de control obtenidos aquí solamente pueden estar en términos extremales, esto es, que satisfacen las condiciones necesarias para la optimización.

El manejo de presas está reconocido como la mejor aproximación al control de presas. Por definición, el manejo de presas es la combinación racional de todos los posibles procedimientos de control de presas. De las Figuras 5.2-5.8, vemos que el cuadrante positivo de todo el espacio de estados puede ser dividido en varios sectores con un punto en común que es el estado estable  $P$ . Cualquier sector tiene una variable de control particularmente eficaz operando en el nivel máximo, o no hay necesidad para aplicar alguna variable de control a todo. Por tanto, si el sistema ha sido perturbado desde su estado estable y

- (i) los niveles de las poblaciones de presas-depredadores son bajos, la variable de control debería ser la tasa de liberación de presas a tasa máxima,
- (ii) si la población de depredadores es baja y la población de presas se está incrementando, la variable de control debería ser la tasa de liberación de depredadores a tasa máxima, y
- (iii) si ambos niveles de la población son grandes, la variable de control debería ser la tasa de aplicación de un insecticida no persistente.

Estas son conclusiones cualitativas muy plausibles y pueden ser contribuciones útiles para el manejo de presas. Es interesante notar que la política de control depende de

los niveles de la población de presas y depredadores. El solo conocimiento del nivel de la población de las presas es inadecuado.

### 5.1.8. Apéndice 1.

El sistema a resolver es

$$\frac{dN_1}{dt} = N_1(\alpha_1 - \beta_1 N_2) - b_1 u N_1 \quad (5.38)$$

$$\frac{dN_2}{dt} = N_2(\beta_2 N_1 - \alpha_2) - b_2 u N_2 \quad (5.39)$$

donde

$$\alpha_1 > 0, \alpha_2 > 0, \beta_1 > 0, \beta_2 > 0, 0 \leq b_1, 0 \leq b_2, b_1 + b_2 > 0 \quad (5.40)$$

Las condiciones iniciales son

$$N_1(t_0) = N_{10}; \quad N_2(t_0) = N_{20} \quad (5.41)$$

Las condiciones finales son  $t_f$  no especificado y

$$N_1(t_f) = \frac{\alpha_2}{\beta_2}; \quad N_2(t_f) = \frac{\alpha_1}{\beta_1} \quad (5.42)$$

Como se sabe,  $P[\frac{\alpha_2}{\beta_2}, \frac{\alpha_1}{\beta_1}]$  es el estado estable del sistema no controlado.

Las restricciones son

$$0 \leq u \leq u_{max}(\text{constante}) \quad (5.43)$$

En este caso el índice de ejecución está dado por

$$J = \int_{t_0}^{t_f} [c_1 N_1 + c_2 u] dt \quad (5.44)$$

donde

$$0 \leq c_1, 0 \leq c_2, \quad c_1 + c_2 > 0 \quad (5.45)$$

El problema de control óptimo es encontrar una función control admisible,  $u(t)$ , la cual llevaría al sistema desde el estado observable  $(N_{10}, N_{20})$  al punto  $P$  y tal que

el índice de ejecución sea mínimo.

El hamiltoniano para este problema está dado por

$$H[t, N_1, u, \lambda] = \lambda_0[c_1N_1 + c_2u] + \lambda_1[N_1(\alpha_1 - \beta_1N_2) - b_1uN_1] + \lambda_2[N_2(\beta_2N_1 - \alpha_2) - b_2uN_2] \quad (5.46)$$

Para el control óptimo  $u = u^*(t)$  y las trayectorias  $N = N^*(t)$  con

$$t_0 \leq t \leq t_f^*$$

las variables de coestado  $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ , no todas cero, deben satisfacer

$$\lambda_0 = \text{const}$$

con  $0 \leq \lambda_0$

Encontremos las  $\lambda$  para este caso. Sabemos que

$$\dot{\lambda}_1 = -\frac{\partial H}{\partial N_1} = -[\lambda_0c_1 + \lambda_1(\alpha_1 - \beta_1N_2 - b_1u) + \lambda_2\beta_2N_2] \quad (5.47)$$

$$\dot{\lambda}_2 = -\frac{\partial H}{\partial N_2} = -[-\lambda_1\beta_1N_1 + \lambda_2(\beta_2N_1 - \alpha_2 - b_2u)] \quad (5.48)$$

Además

$$H(N^*(t), u^*(t), \lambda(t)) = 0 \quad (5.49)$$

y a lo largo de una trayectoria óptima el control óptimo  $u^*(t)$  minimiza a

$$H(N^*(t), u(t), \lambda(t))$$

con respecto a todos los controles admisibles. Por tanto

$$H_u > 0 \quad u^*(t) = 0 \quad (5.50)$$

y

$$H_u < 0 \quad u^*(t) = u_{max} \quad (5.51)$$

donde el subíndice denota derivada parcial con respecto a  $u$ .

En el intervalo  $[t_1, t_2]$ , derivando parcialmente a  $H$  con respecto a  $u$ , se tiene

$$H_u = \lambda_0c_2 - \lambda_1b_1N_1 - \lambda_2b_2N_2 \quad (5.52)$$

SI hacemos  $H_u = 0$ , entonces

$$\lambda_0 c_2 = \lambda_1 b_1 N_1 + \lambda_2 b_2 N_2$$

esto indica que se tiene un control singular. Esto es posible debido a que  $u$  aparece en forma lineal en el hamiltoniano. En lo que sigue, denotaremos a la derivada total de  $H_u$  con respecto a  $t$  por  $D$  y sea  $N = N^*(t)$ .

Diferenciando (5.52) con respecto a  $t$  y utilizando la regla de la cadena, tenemos

$$DH_u = -\dot{\lambda}_1 b_1 N_1 - \lambda_1 b_1 \dot{N}_1 - \dot{\lambda}_2 b_2 N_2 - \lambda_2 b_2 \dot{N}_2$$

utilizando las ecuaciones (5.47), (5.48), (5.38) y (5.39) se tiene, después de hacer el álgebra correspondiente,

$$DH_u = N_1(b_1 \lambda_0 c_1 + b_1 \lambda_2 \beta_2 N_2 - b_2 N_2 \lambda_1 \beta_1) \quad (5.53)$$

Estamos interesados en los estados para los cuales,

$$N_1 > 0 \quad y \quad N_2 > 0 \quad (5.54)$$

Si  $DH_u = 0$  implica que

$$N_1(b_1 \lambda_0 c_1 + b_1 \lambda_2 \beta_2 N_2 - b_2 N_2 \lambda_1 \beta_1) = 0$$

Entonces se tiene

$$b_1 \lambda_0 c_1 + b_1 \lambda_2 \beta_2 N_2 - b_2 N_2 \lambda_1 \beta_1 = 0 \quad (5.55)$$

Calculando la segunda derivada del hamiltoniano con respecto a  $t$  y considerando la ecuación (5.55), se obtiene

$$D^2 H_u = N_1[\dot{\lambda}_2 \beta_2 b_1 N_2 + \dot{N}_2 b_1 \lambda_2 \beta_2 - b_2 N_2 \dot{\lambda}_1 \beta_1 - \dot{N}_2 b_2 \beta_1 \lambda_1]$$

Haciendo las sustituciones indicadas y agrupando términos se llega a

$$D^2 H_u = N_1 N_2 [\lambda_0 c_1 b_2 \beta_1 + b_1 \beta_1 \beta_2 \lambda_1 N_1 + b_2 \beta_1 \beta_2 \lambda_2 N_2 + b_2 \beta_1 \lambda_1 (\alpha_1 + \alpha_2 - \beta_1 N_2 - \beta_2 N_1 - u(b_1 - b_2))] \quad (5.56)$$

Pero de la sección 3, se tiene el caso cuando  $b_1 = 0$  y  $b_2 = 0$ , entonces lo anterior se reduce a

$$D^2 H_u = b_1 \beta_1 \beta_2 \lambda_1 N_1^2 N_2 \quad (5.57)$$

Como buscamos que  $D^2 H_u = 0$  y  $b_1, \beta_1, \beta_2, N_1, N_2$ , son positivos, se deduce que

$$\lambda_1(t) = 0 \quad (5.58)$$

Entonces de (5.52) se tiene

$$\lambda_0 c_2 - \lambda_2 b_2 N_2 = 0$$

pero como  $b_2 = 0$  nos lleva a que

$$\lambda_0 = 0$$

y de (5.55) se tiene

$$b_1 \lambda_2 \beta_2 N_2 = 0$$

lo cual nos lleva a que  $\lambda_2 = 0$ .

De lo anterior se deduce que  $\lambda_0 = 0$  y consecuentemente  $\lambda_2(t) = 0$ . Pero  $\lambda_0, \lambda_1(t)$  y  $\lambda_2(t)$  deben ser diferente de cero. Entonces no existe un control singular para este caso.

En la sección 4, se tiene que  $b_1 = 0, b_2 = 0$  tal que la ecuación (5.55) se transforma en

$$-b_2 \beta_1 N_2 \lambda_1 = 0$$

De donde

$$\lambda_1(t) = 0 \quad (5.59)$$

Las condiciones (5.49) y (5.52) implican, sabiendo que  $\lambda_1(t) = 0$ , y tomando la ecuación (5.46)

$$H = \lambda_0 [c_1 N_1 + c_2 u] + \lambda_2 [N_2 (\beta_2 N_1 - \alpha_2) - b_2 N_2 u] = 0$$

si en la anterior ecuación hacemos  $u = 0$  nos queda

$$H = \lambda_0 c_1 N_1 + \lambda_2 N_2 (\beta_2 N_1 - \alpha_2)$$

y como  $\lambda_1(t) = 0$  en (5.52) resulta que

$$H_u = c_2 \lambda_0 - b_2 N_2 \lambda_2$$

pero si  $H_u = 0$ , de lo anterior se obtiene

$$c_2\lambda_0 = b_2N_2\lambda_2$$

Por otro lado

$$H = c_1N_1\lambda_0 + N_2\lambda_2(N_1\beta_2 - \alpha_2) \quad (5.60)$$

De las ecuaciones (5.56), (5.59) y (5.60) se tiene

$$D^2H_u = N_1N_2b_2\beta_1[c_1\lambda_0 + \beta_2\lambda_2N_2] = 0 \quad (5.61)$$

Como  $c_1 > 0$  se sigue de (5.60) y de (5.61) que

$$\lambda_0 = \lambda_2(t) = 0 \quad (5.62)$$

Nuevamente se tiene que  $\lambda_0, \lambda_1(t)$  y  $\lambda_2(t)$  deberían ser diferente de cero, por lo que en este caso no existe control singular.

En la sección 5, se tuvo el caso cuando  $c_1 = 0, c_2 = 1$  y  $b_1 = 0, b_2 = 0$ . Ocurre control singular, pero antes discutiremos la posibilidad de considerar anormalidades.

Por definición un arco es anormal si se satisfacen las ecuaciones (5.38), (5.39) y de (5.47) a (5.52) con  $\lambda_0 = 0$ . Numéricamente se encuentra que existe un arco anormal si se integra hacia atrás desde  $P$  con  $\lambda_0 = 0$ . En las Figuras 5.2, 5.6, 5.8,  $PB$  es un arco anormal. Cuando un arco es anormal allí es posible que más de un conjunto de variables de coestado satisfagan las ecuaciones de (5.47) hasta (5.52). Es posible distinguir entre dos arcos anormales. En el primer tipo,  $\lambda_0 = 0$  para todo conjunto de variables de coestado admisibles. En el segundo tipo, existe un conjunto de variables de coestado admisibles con  $\lambda_0 = 1$ . En este trabajo, todos los arcos anormales son del segundo tipo. La discusión sobre anormalidades se hace debido a que la existencia de la teoría sobre condiciones óptimas para controles singulares requieren la suposición de que el extremal de referencia sea normal. La condición generalizada de Legendre [15,16] ha sido deducida de la segunda variación. Para arcos anormales la segunda variación debe ser no negativa.

Las ecuaciones (5.52) y (5.46) se siguen del principio mínimo.

Por tanto, hay condiciones necesarias de primer orden y son válidas aunque el extremal de referencia sea anormal. Se mostrará que no hay extremales singulares

anormales. De las ecuaciones (5.52) y (5.55) se resuelven para  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  en términos de  $\lambda_0$ .

Para encontrar a  $\lambda_1$  multipliquemos la ecuación (5.52) por  $b_1\beta_2$  y la ecuación (5.55) por  $b_2$ . Lo que nos queda es el siguiente sistema de ecuaciones simultáneas.

$$(b_1\beta_2)[c_2\lambda_0 - b_1\lambda_1N_1 - b_2\lambda_2N_2] = 0$$

$$b_2[c_1b_1\lambda_0 - b_2\beta_1\lambda_1N_2 + b_1\beta_2\lambda_2N_2] = 0$$

Después de hacer multiplicaciones, de sumar estas dos últimas ecuaciones y de agrupar términos se llega a

$$\lambda_1 = \frac{b_1\lambda_0[b_2c_1 + c_2\beta_2]}{b_1^2\beta_2N_1 + b_2^2\beta_1N_2} \quad (5.63)$$

Para encontrar a  $\lambda_2$  multipliquemos la ecuación (5.52) por  $b_2\beta_1N_2$  y a la ecuación (5.55) por  $-b_1N_1$ . Nuevamente, lo que nos queda es un sistema de ecuaciones simultáneas. El sistema de ecuaciones en este caso es el siguiente

$$(b_2\beta_1N_2)[\lambda_0c_2 - b_1\lambda_1N_1 - b_2\lambda_2N_2] = 0$$

$$(-b_1N_1)[b_1c_1\lambda_0 - b_2\beta_1\lambda_1N_2 + b_1\beta_2\lambda_2N_2] = 0$$

Después de hacer multiplicaciones, de sumar estas dos últimas ecuaciones y de agrupar términos se llega a

$$\lambda_2 = \frac{\lambda_0[c_2b_2\beta_1N_2 - b_1^2c_1N_1]}{N_2[b_2^2\beta_1N_2 + b_1^2\beta_2N_1]} \quad (5.64)$$

De estos resultados se deduce que  $b_2^2\beta_1N_2 + b_1^2\beta_2N_1 = 0$ . Para un arco anormal  $\lambda_0 = 0$  y de lo anterior se obtiene

$$\lambda_1(t) = \lambda_2(t) = 0 \quad (5.65)$$

este último resultado es imposible. Entonces no existe trayectoria singular anormal. Para este caso  $c_1 = 0$ . Para un arco normal se tiene  $\lambda_0 = 1$ , sin pérdida de generalidad, de la ecuación (5.63)

$$\lambda_1 = \frac{b_1c_2\beta_2}{b_1^2\beta_2N_1 + b_2^2\beta_1N_2} \quad (5.66)$$

y de la ecuación (5.64) se tiene

$$\lambda_2 = \frac{c_2 b_2 \beta_1}{b_2^2 \beta_1 N_2 + b_1^2 \beta_2 N_1} \quad (5.67)$$

Ahora si multiplicamos y dividimos a  $\lambda_2$  por  $b_1 \beta_2$  se obtiene que

$$\lambda_2 = \lambda_1 \frac{b_2 \beta_1}{b_1 \beta_2} \quad (5.68)$$

La condición generalizada de Legendre para un control singular requiere que se cumpla  $(D^2 H_u)_u \leq 0$ . Derivando con respecto a  $u$  la ecuación (5.56) se obtiene

$$(D^2 H_u)_u = -b_2 \beta_1 \lambda_1 N_1 N_2 (b_1 - b_2) \leq 0 \quad (5.69)$$

Como  $b_2, \lambda_1, \beta_1, N_1, N_2$  son todos positivos, entonces se tiene que

$$(b_1 - b_2) \geq 0 \quad (5.70)$$

Si  $b_1 = b_2$  y  $c_1 = 0$ . Sustituyendo (5.68) en (5.56) se llega a

$$D^2 H_u = N_1 N_2 [b_1 \beta_1 \beta_2 \lambda_1 N_1 + b_1 \beta_1^2 \lambda_1 N_2 + b_2 \beta_1 \lambda_1 (\alpha_1 + \alpha_2 - \beta_1 N_2 - \beta_2 N_1)]$$

Haciendo las operaciones necesarias y después de agrupar términos se obtiene

$$D^2 H_u = b_1 N_1 N_2 \lambda_1 \beta_1 [\alpha_1 + \alpha_2] \quad (5.71)$$

Pero si queremos que  $D^2 H_u = 0$  y  $N_1, N_2, b_1, \beta_1, \alpha_1 + \alpha_2$  son todos no cero, entonces

$$\lambda_1(t) = 0 \quad (5.72)$$

Además la parte derecho de la ecuación (5.66) no es cero y entonces se tiene una contradicción y, por tanto, el control singular no es posible si  $b_1 = b_2$ . Para que el control singular ocurra es necesario que

$$b_1 > b_2 > 0 \quad (5.73)$$

Con  $c_1 = 0$  y  $H_u = 0$  la función  $H$ , (5.46), se transforma en

$$H = \lambda_1 N_1 [\alpha_1 - \beta_1 N_2] + \lambda_2 N_2 [\beta_2 N_1 - \alpha_2]$$

Si buscamos que  $H = 0$  y usando (5.68) para eliminar a  $\lambda_2$  y sabiendo que  $\lambda_1 = 0$  se tiene

$$b_1\beta_2N_1[\alpha_1 - \beta_1N_2] + b_2\beta_1N_2[\beta_2N_1 - \alpha_2] = 0 \quad (5.74)$$

Este es el extremal singular. Empleando las ecuaciones (5.56) y (5.68) nos lleva al control singular asociado

$$u^*(t) = \frac{b_1^2\beta_2N_1 + b_2^2\beta_1N_2}{b_1b_2(b_1 - b_2)} + \frac{\alpha_1 - \beta_1N_2 - (\beta_2N_1 - \alpha_2)}{b_1 - b_2} \quad (5.75)$$

Este control satisface la condición generalizada de Legendre si la ecuación (5.73) se cumple. De la ecuación (5.74) resolviendo para  $N_2$  se obtiene

$$N_2 = \frac{b_1\beta_2\alpha_1N_1}{(b_1 - b_2)\beta_1\beta_2N_1 + b_2\beta_1\alpha_2}$$

Calculando el límite cuando  $N_1 \rightarrow \infty$ , se tiene

$$N_2 \rightarrow \frac{b_1\alpha_1}{(b_1 - b_2)\beta_1} \quad (5.76)$$

Esto es una asíntota al extremal singular conforme  $N_1$  tiende a infinito. Derivando a  $N_2$  con respecto a  $N_1$

$$\frac{dN_2}{dN_1} = \frac{b_1b_2\alpha_1\alpha_2\beta_1\beta_2}{[(b_1 - b_2)\beta_1\beta_2N_1 + b_2\beta_1\alpha_2]^2} \quad (5.77)$$

La parte derecha de la ecuación (5.77) es positiva y para  $N_1$  positiva es más grande cuando  $N_1 = 0$ . Si  $N_1$  tiende a infinito entonces la ecuación (5.77) tiende a cero.

Ahora, substituyendo la ecuación (5.75) en la ecuación (5.38) para obtener

$$\frac{dN_1}{dt} = -N_1 \frac{b_2[b_2\alpha_1 + b_1\alpha_2] + b_1(b_1 - b_2)\beta_2N_1}{b_2(b_1 - b_2)} \quad (5.78)$$

nótese que la parte derecha de la ecuación (5.78) es negativa, con lo que  $N_1$  decrece conforme el tiempo  $t$  crece. De una manera análoga

$$\frac{dN_2}{dt} = \frac{N_2}{(b_1 - b_2)} [-b_1^2\alpha_2 - b_1b_2\alpha_1 + b_2(b_1 - b_2)\beta_1N_2] \quad (5.79)$$

A lo largo del extremal singular para  $N_1$  finito se deduce, de las ecuaciones (5.76) y (5.77) que

$$N_2 < \frac{b_1 \alpha_1}{(b_1 - b_2) \beta_1} \quad (5.80)$$

De esta ecuación y con las ecuaciones (5.79) y (5.80), se puede decir que  $N_2$  decrece con  $t$  debido a que

$$\frac{dN_2}{dt} < -\frac{b_1^2 \alpha_2 N_2}{(b_1 - b_2)} < 0 \quad (5.81)$$

Un ejemplo de este extremal está exhibido en la Figura 5.

### 5.1.9. Apéndice 2.

El sistema en este caso es

$$\frac{dN_1}{dt} = N_1(\alpha_1 - \beta_1 N_2) + u \quad (5.82)$$

$$\frac{dN_2}{dt} = N_2(\beta_2 N_1 - \alpha_2) + v \quad (5.83)$$

Con las condiciones iniciales

$$N_1(t_0) = N_{10}; \quad N_2(t_0) = N_{20} \quad (5.84)$$

y las condiciones terminales  $t_f$  no especificado y

$$N_1(t_f) = \frac{\alpha_2}{\beta_2}; \quad N_2(t_f) = \frac{\alpha_1}{\beta_1} \quad (5.85)$$

Con las restricciones

$$0 \leq u \leq u_{max} \quad (5.86)$$

$$0 \leq v \leq v_{max} \quad (5.87)$$

donde  $u_{max}$  y  $v_{max}$  son constantes. En este caso el índice de ejecución es

$$J = c_0(t_f - t_0) + \int_{t_0}^{t_f} [c_1 u + c_2 v + c_3 N_1] dt \quad (5.88)$$

con  $c_0, c_1, c_2, c_3$  positivos y al menos uno de ellos es diferente de cero.

El problema de control óptimo es encontrar funciones de control admisibles  $u(t)$  y

$v(t)$ , con  $t_0 \leq t \leq t_f$ , las cuales llevan al sistema del estado observable  $(N_{10}, N_{20})$  al estado  $(\frac{\alpha_2}{\beta_2}, \frac{\alpha_1}{\beta_1})$  y tal que  $J$  sea mínimo. Analizaremos solo dos casos especiales:

- i) Solamente se liberan presas  $v(t) = 0$
- ii) Solo se liberan depredadores  $u(t) = 0$

**Solo se liberan presas  $v(t) = 0$**

Para resolver este caso, se define el Hamiltoniano como

$$H(N_1, u, \lambda) = \lambda_0(c_1u + c_3N_1) + \lambda_1[N_1(\alpha_1 - \beta_1N_2) + u] + \lambda_2[N_2(\beta_2N_1 - \alpha_2)] \quad (5.89)$$

En este caso  $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2)$ , son las variables de coestado. Para un control óptimo y la trayectoria  $N = N^*(t)$ , se debe cumplir con  $\lambda_0 \geq 0$  y

$$\dot{\lambda}_1 = -\frac{\partial H}{\partial N_1} = -\lambda_0c_3 - \lambda_1\alpha_1 + \lambda_1\beta_1N_2 - \lambda_2\beta_2N_2 \quad (5.90)$$

$$\dot{\lambda}_2 = -\frac{\partial H}{\partial N_2} = \lambda_1\beta_1N_1 - \lambda_2\beta_2N_1 + \lambda_2\alpha_2 \quad (5.91)$$

Además  $\frac{\partial H}{\partial u} = \lambda_0c_1 + \lambda_1$ , de donde se tienen los siguientes casos

$$\frac{\partial H}{\partial u} > 0 \quad u^*(t) = 0 \quad (5.92)$$

$$\frac{\partial H}{\partial u} < 0 \quad u^*(t) = u_{max} \quad (5.93)$$

Si en un subintervalo  $[t_1, t_2]$  se tiene  $\frac{\partial H}{\partial u} = 0$  entonces

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0 \quad \lambda_0c_1 + \lambda_1 = 0 \quad (5.94)$$

En lo siguiente denotaremos a  $\frac{\partial H}{\partial u}$  como  $H_u$ . Si en el subintervalo  $H_u = 0$  se tiene que

$$c_1\lambda_0 + \lambda_1 = 0$$

y esto indica que se puede tener control singular. Para examinar esta posibilidad tenemos de (5.94) que

$$DH_u = \dot{\lambda}_1$$

pero de (5.90)

$$\dot{\lambda}_1 = -\lambda_0 c_3 - \lambda_1 \alpha_1 + \lambda_1 \beta_1 N_2 - \lambda_2 \beta_2 N_2$$

si hacemos  $\dot{\lambda}_1 = 0$  se tiene que

$$-\lambda_0 c_3 - \lambda_1 \alpha_1 + \lambda_1 \beta_1 N_2 - \lambda_2 \beta_2 N_2 = 0 \quad (5.95)$$

Ahora, con lo anterior, calculemos  $D^2 H_u$

$$D^2 H_u = -\dot{\lambda}_1 \alpha_1 + \dot{\lambda}_1 \beta_1 N_2 + \lambda_1 \beta_1 \dot{N}_2 - \dot{\lambda}_2 \beta_2 N_2 - \lambda_2 \beta_2 \dot{N}_2$$

Pero como  $\dot{\lambda}_1 = 0$  y con la ecuación (5.91), lo anterior se reduce, después de hacer un poco de álgebra y de agrupar términos, a

$$D^2 H_u = -\lambda_1 \beta_1 \alpha_2 N_2$$

Si  $D^2 H_u = 0$  entonces

$$\lambda_1 \beta_1 \alpha_2 N_2 = 0 \quad (5.96)$$

como  $\beta_1, \alpha_2, N_2$  no son cero, entonces se tiene que  $\lambda_1(t) = 0$  y de (5.94)

$$\lambda_0 c_1 + \lambda_1 = 0$$

de lo anterior se tiene

$$\lambda_0 = 0$$

y finalmente de (5.90) se tiene

$$\lambda_2(t) = 0$$

Se supuso que  $\beta_1, \beta_2, \alpha_2$  al igual que  $N_2$  no son cero, entonces de (5.96), (5.95), y (5.94), se tiene que

$$\lambda_0 = \lambda_1(t) = \lambda_2(t) = 0 \quad (5.97)$$

Esto nuevamente indica que es imposible, por lo que se tiene que  $(u^*) = 0$  o  $(u^*)(t) = u_{max}$ .

**Solo se liberan depredadores**  $u(t) = 0$

Para resolver este caso se tiene que  $c_3 = 0$  y el Hamiltoniano es

$$H(N, v, \lambda) = \lambda_0 c_2 v + \lambda_1 N_1 (\alpha_1 - \beta_1 N_2) + \lambda_2 [N_2 (\beta_2 N_1 - \alpha_2) + v] \quad (5.98)$$

donde  $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$  son las variables de coestado. Para el control óptimo  $v = v^*(t)$  y la trayectoria  $N = N^*(t)$ ,  $t_0 \leq t \leq t_f^*$ , se tiene que  $\lambda_0 = const$ ,  $\lambda_0 > 0$  y

$$\dot{\lambda}_1 = -\frac{\partial H}{\partial N_1} = -\lambda_1(\alpha_1 - \beta_1 N_2) - \lambda_2 \beta_2 N_2 \quad (5.99)$$

$$\dot{\lambda}_2 = -\frac{\partial H}{\partial N_2} = \lambda_1 \beta_1 N_1 - \lambda_2 \beta_2 N_1 + \lambda_2 \alpha_2 \quad (5.100)$$

y

$$\frac{\partial H}{\partial v} = \lambda_0 c_2 + \lambda_2$$

Si  $\frac{\partial H}{\partial v} = \lambda_0 c_2 + \lambda_2 > 0$  entonces

$$v^*(t) = 0 \quad (5.101)$$

Si  $\frac{\partial H}{\partial v} = \lambda_0 c_2 + \lambda_2 < 0$ , entonces

$$v^*(t) = v_{max} \quad (5.102)$$

Si en un subintervalo se tiene que  $H_v = 0$ , entonces

$$H_v = \lambda_0 c_2 + \lambda_2 = 0 \quad (5.103)$$

donde  $H_v = \frac{\partial H}{\partial v}$ . En este caso se puede tener control singular. Para examinar esta posibilidad calculamos la diferencial total de  $H_v$  e igualemos a cero

$$DH_v = \dot{\lambda}_2 = 0$$

Lo que nos lleva, de la ecuación (5.100), a

$$\lambda_1 \beta_1 N_1 - \lambda_2 \beta_2 N_1 + \lambda_2 \alpha_2 = 0 \quad (5.104)$$

Ahora calculemos  $D^2 H_v$

$$D^2 H_v = \dot{\lambda}_1 \beta_1 N_1 + \lambda_1 \beta_1 \dot{N}_1 - \dot{\lambda}_2 \beta_2 N_1 - \lambda_2 \beta_2 \dot{N}_1 + \dot{\lambda}_2 \alpha_2$$

como  $\dot{\lambda}_2 = 0$  se tiene, después de agrupar términos y simplificar

$$D^2H_v = -\alpha_1\lambda_2\beta_2N_1 \quad (5.105)$$

Si hacemos que  $D^2H_v = 0$  y como tenemos que  $\alpha_1, \beta_2, N_1$  no son cero, se deduce de (5.105), (5.103), (5.104) que  $\lambda_2(t) = 0$ . Con este resultado y la ecuación (5.103) se tiene que  $\lambda_0 = 0$  y con la ecuación (5.104) se concluye que  $\lambda_1(t) = 0$ . Esto implica que

$$\lambda_2(t) = 0, \quad \lambda_0 = 0, \quad \lambda_1(t) = 0 \quad (5.106)$$

Nuevamente estos resultados no tienen sentido y, por tanto, no existe un control singular. El programa de control óptimo es una secuencia de  $v^*(t) = 0$  y  $v^*(t) = v_{max}$  y la secuencia exacta tiene que ser determinada numéricamente.

## 5.2. Figuras

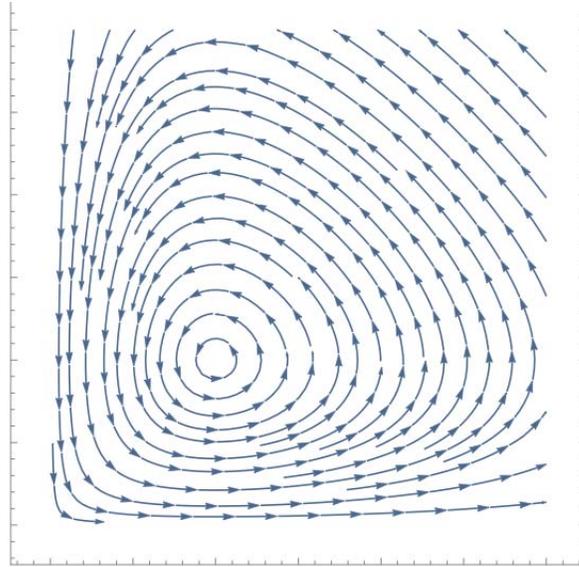


Figura 5.1: Modelo Lotka-Volterra no controlado

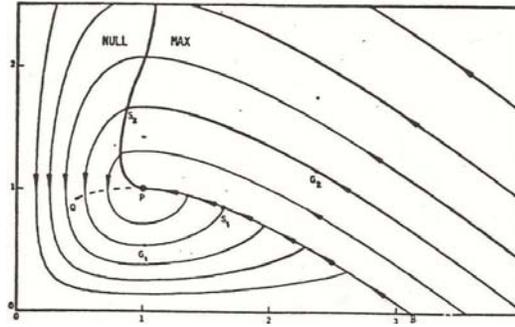


Figura 5.2: Control de un sistema presa-depredador usando un pesticida ideal ( $c_1 = 0$ ,  $c_2 = 1$ )

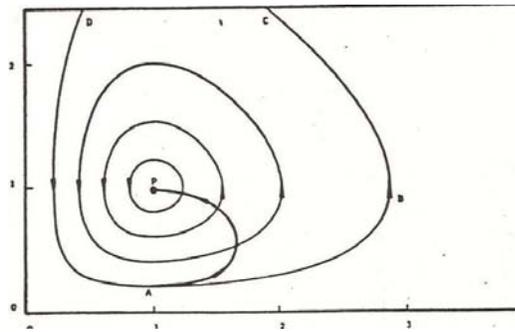


Figura 5.3: Límites de estados admisibles con un cambio ( $c_1 = 0$ ,  $c_2 = 1$ )

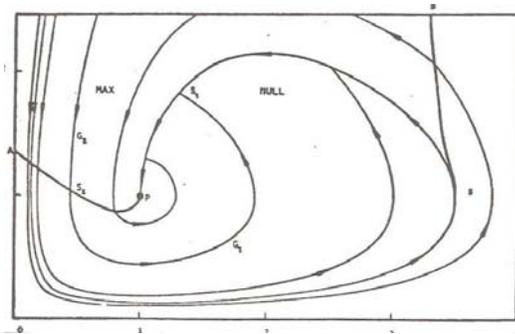


Figura 5.4: Control de presas por eliminación de depredadores ( $c_1 = 1$ ,  $c_3 = 1$ ,  $b_2 u_m a x = 1$ )

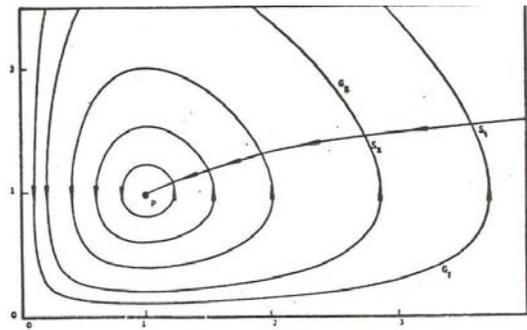


Figura 5.5: Controlando al sistema usando un control singular ( $b_1 = 2, b_2 = 1$ )

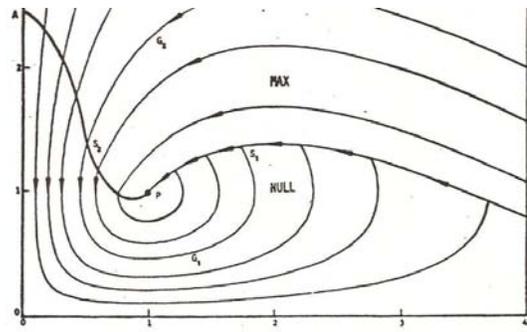


Figura 5.6: Control de un sistema presa-depredador usando un insecticida general ( $b_1 = b_2 = u_m a x = 1$ )

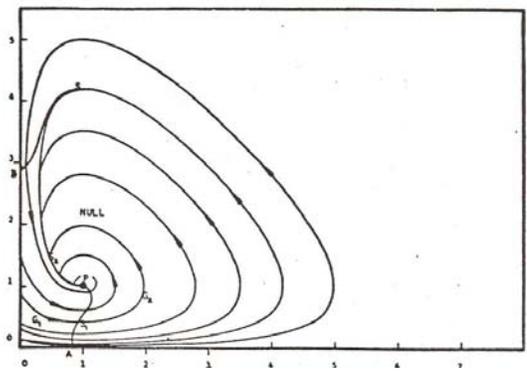


Figura 5.7: Control biológico usando la liberación de plagas

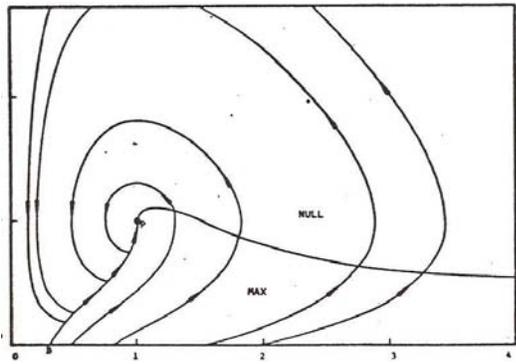


Figura 5.8: Control biológico usando la liberación de depredadores

# Capítulo 6

## Programas de control óptimo

### 6.1. Programas de control óptimo directo para un sistema presa -depredador

En este capítulo se presenta un ejemplo donde se supone que las presas se alimentan de recursos valiosos para los humanos y que los depredadores solo se alimentan de las presas. A menudo el uso de un programa de control para tales situaciones es uno directo, en el cual las presas son controladas destruyéndolas completamente. Tales programas algunas veces también involucran a los depredadores dándose internamente efectos que pueden ser inesperados y desagradables. En este ejemplo, la influencia directa de controles humanos se adicionan a un modelo conocido de sistema presa-depredador. Los programas de control óptimo son determinados por una función costo que depende tanto de los daños atribuibles a las presas, como del costo económico (incluyendo al medio ambiente). Las características básicas de un programa de manejo óptimo directo de plagas son ilustradas con varias figuras y con la discusión.

### 6.1.1. Introducción

Las poblaciones de ciertas especies consideradas por los humanos como plagas, usualmente están sujetas a controles por medio de la eliminación directa. El uso de productos químicos, cebos envenenados y trampas han sido métodos de control directo usados tradicionalmente. Su efectividad ha sido variada y su uso es muy cuestionado por muchos ambientalistas. De preocupación particular, es el hecho de que los programas de control directo usualmente no son selectivos, en tanto que las presas y los depredadores son exterminados y que el uso de los controles mismos dejan efectos dañinos en el medio ambiente.

Ciertamente el control de plagas puede ser visto desde una perspectiva más amplia que a menudo se usa en la práctica corriente al aplicar controles libres cada vez que aparece evidencia de interacción. No es necesario intentar matar a toda la plaga para maximizar la ganancia económica. Algunas pérdidas de recursos humanos pueden ser contrastados con el costo de emplear más control.

Un programa de manejo óptimo de plagas debe abordar la siguiente pregunta. Dado un nivel de interacción con las plagas, ¿cuál es la mejor manera de distribuir el control para que el costo asociado con el daño debido a las plagas, el control y el daño al medio ambiente debido al control, sea minimizado mientras se maximiza a las otras especies que viven a costa de la plaga?. Si el sistema presa-depredador sujeto a controles puede ser adecuadamente descrito por medio de ecuaciones diferenciales, la teoría de control óptimo puede ser usada para dar respuesta a tal pregunta.

### 6.1.2. El sistema Lotka-Volterra para presa-depredador

Un modelo dinámico continuo del sistema presa-depredador está descrito por

$$\frac{dN_1}{dt} = \epsilon_1 N_1 - \gamma_1 N_1 N_2 \quad (6.1)$$

$$\frac{dN_2}{dt} = -\epsilon_2 N_2 + \gamma_2 N_1 N_2 \quad (6.2)$$

donde  $t$  es el tiempo,  $N_1$  y  $N_2$  son las poblaciones instantáneas de presas y depredadores respectivamente y  $\epsilon_1$ ,  $\epsilon_2$ ,  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  son constantes positivas.

El modelo dado por las ecuaciones (6.1) y (6.2) no está completo. La actual dinámica

de poblaciones de un sistema deberá reflejar la respuesta tanto a las circunstancias internas como externas. Las circunstancias externas son aquellas que el medio ambiente impone aleatoriamente sobre el sistema. Las circunstancias internas son aquellas que están relacionadas con la acción biológica de las especies mismas, i.e. la dinámica del sistema permanece después de que se han quitado las causas externas.

El sistema de Lotka-Volterra intenta explicar solo los efectos internos simplemente iniciando con hipótesis razonables. La ventaja aquí es que aunque el modelo es riguroso y simple, da algún esquema para entender el problema.

Obviamente, la teoría de control óptimo puede ser aplicada a un modelo completo (efectos internos y externos) o a más modelos internos simples. Para nosotros, el sistema de Lotka-Volterra representa un inicio razonable para ilustrar el tipo de resultados que se pueden obtener. Para iniciar se deben añadir los efectos de control humano.

### 6.1.3. Sistema presa-depredador sujeto a control

Consideremos el sistema de Lotka-Volterra sin control, dado por las ecuaciones (6.1) y (6.2). El modelo puede ser simplificado haciendo los siguientes cambios de variables.

Sea

$$x_1 = \frac{N_1}{N_{1r}}$$

donde

$$N_{1r} = \frac{\epsilon_1}{\gamma_2}$$

Sea

$$x_2 = \frac{N_2}{N_{2r}}$$

con

$$N_{2r} = \frac{\epsilon_1}{\gamma_1}$$

donde  $\tau = \frac{t}{t_r}$ ,  $t_r = \frac{1}{\epsilon_1}$  y  $k = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}$

Con estos cambios, veamos en que se transforman las ecuaciones.

De la ecuación (6.1), si  $x_1 = \frac{N_1}{N_{1r}}$  tenemos que

$$N_1 = x_1 N_{1r}$$

y como

$$t = t_r \tau = \frac{1}{\epsilon_1} \tau$$

entonces

$$\frac{dN_1}{dt} = \epsilon_1 \frac{dN_1}{d\tau}$$

Como  $N_1 = x_1 N_{1r}$  tenemos

$$\frac{dN_1}{dt} = \epsilon_1 \frac{dN_1}{d\tau} = \frac{dx_1 N_{1r}}{d\tau} = \epsilon_1 N_{1r} \frac{dx_1}{d\tau}$$

por lo que de (6.1), después de hacer un poco de álgebra, se obtiene

$$\frac{dx_1}{d\tau} = x_1(1 - x_2)$$

Ahora, de la ecuación (6.2)

$$\frac{dN_2}{dt} = \frac{d(N_{2r} x_2)}{t_r d\tau} = \left[ \frac{N_{2r}}{t_r} \right] \frac{dx_2}{d\tau}$$

Pero se tiene que

$$\frac{N_{2r}}{t_r} \frac{dx_2}{d\tau} = -\epsilon N_{2r} x_2 + \gamma N_{1r} N_{2r} x_1 x_2$$

Nuevamente, después de hacer algo de álgebra y asumiendo que  $k = \frac{\epsilon^2}{\epsilon_1}$  se llega a

$$\frac{dx_2}{d\tau} = -k x_2 + x_1 x_2 = x_2(x_1 - k)$$

Por lo que el sistema cuyas ecuaciones son (6.1) y (6.2) se transforman en el sistema

$$\frac{dx_1}{d\tau} = x_1(1 - x_2) \tag{6.3}$$

$$\frac{dx_2}{d\tau} = x_2(x_1 - k) \tag{6.4}$$

El efecto del control humano sobre el sistema representado por (6.3) y (6.4) es para que decrezca la tasa de crecimiento de cualquiera de las especies. Específicamente, si  $\nu$  representa la magnitud del esfuerzo del control (proporcional a la cantidad de

spray químico usado, la cantidad de veneno en la carnada distribuida, el número de trampas, etc, por unidad de tiempo), este control se puede introducir directamente en las ecuaciones (6.3) y (6.4), para dar

$$\frac{dx_1}{d\tau} = x_1(1 - x_2) - \nu x_1 \quad (6.5)$$

$$\frac{dx_2}{d\tau} = x_2(x_1 - k) - \ell \nu x_2 \quad (6.6)$$

donde  $\ell$  es una constante proporcional a la efectividad relativa de los agentes de control sobre los depredadores comparados con las presas. La magnitud del esfuerzo del control está limitado por

$$0 < \nu < \nu_{max} \quad (6.7)$$

El efecto del control sobre las presas es para que decrezca su número en una tasa proporcional al esfuerzo del control y al número de presas, (i.e si están presentes un gran número de presas, entonces un pequeño esfuerzo puede resultar en una tasa de muertes grande, similarmente si hay un pequeño número de presas, se debe requerir un mayor esfuerzo para mantener la misma tasa de muertes). Si el agente de control usado es letal para los depredadores, entonces los depredadores deberán ser exterminados a una tasa proporcional a  $\ell \nu x_2$  (obviamente  $\ell = 0$  corresponde a un agente de control inofensivo para los depredadores)

#### 6.1.4. Determinación del control óptimo

##### Costo del control

Dos factores deberán entrar en la acumulación del costo de un programa de control:

- a) El costo asociado con la presencia de las presas
- b) El costo asociado con el uso del control (esto puede incluir costo social, -si se conoce-, como también el costo económico actual del uso de los agentes de control), Si suponemos que la relación es lineal, entonces durante el programa de control la siguiente integral de costo es acumulativa

$$Costo = x_0 = \int_{t_0}^{t_f} (ax_1 + \nu)d(\tau) \quad (6.8)$$

El programa de control es iniciado al tiempo  $\tau_0$  y terminado en el tiempo  $\tau_f$ . La constante  $a$  se escoge apropiadamente para el sistema particular bajo investigación.

### ¿Hacia dónde es posible llevar al sistema?

Por la aplicación de una secuencia de algún control al sistema de ecuaciones (6.5) y (6.6), lo que se desea es minimizar (6.8) sobre un periodo de tiempo indefinido. Es claro que si  $x_1$  debe ser llevado a cero, deberíamos tener  $\nu = 0$  sin nueva acumulación de costo. Sin embargo de acuerdo con (6.5) y (6.6) ni  $x_1$  ni  $x_2$  pueden ser llevados al cero si inicialmente no son cero. Esto es, los ejes  $x_1$  y  $x_2$  (Figura 6.1) no son alcanzables con el control dado, (no están en el conjunto de objetos que se pueden controlar a saber  $x_1 > 0$ ,  $x_2 > 0$ ). Esto se verifica rápidamente por la examinación de las direcciones de las velocidades

$$\frac{dx_1}{d\tau}, \quad \frac{dx_2}{d\tau}$$

para el sistema de ecuaciones retro iniciando en un punto a lo largo de  $x_1 = 0$  y  $x_2 = 0$  para todo valor permitido de  $\nu$ .

Una propiedad del sistema dado por las ecuaciones (6.5) y (6.6) es que para cualquier valor constante del control existen ciertos puntos límite los cuales son de interés para propósitos del control. Si el valor constante del control es menor que uno, entonces los puntos límite son puntos de equilibrio. Si un sistema puede llevarse a un punto de equilibrio, deberá permanecer en él, probando que el propio control se mantiene. Si el valor constante del control es igual a uno, entonces el sistema puede llevarse cerca del eje  $x_2 = 0$ , y si el valor del control es mayor a uno, entonces el sistema puede llevarse cerca del origen.

Para un programa de control a largo plazo, deberá suponerse que el punto límite representa los lugares deseables para llevar al sistema y deberá determinarse cuáles de los puntos límites son óptimos. Nótese que la pregunta de hacia dónde llevar al sistema está automáticamente contestada usando la teoría de control si el tiempo final adimensional está especificado tomando

$$\tau_f = T$$

y examinando la solución cuando

$$T$$

Sin embargo, esta aproximación deberá introducir una variable de estado adicional al sistema (tiempo) de tal modo que se incrementa significativamente la complejidad de la solución. Para obtener resultados en la forma más simple posible, se usará el punto de vista heurístico para dar respuesta a la pregunta planteada: ¿Hacia dónde llevar al sistema?

### Control máximo $\nu_{max} < 1$

Escribiendo las ecuaciones (6.5) y (6.6) en la forma

$$\frac{dx_1}{d\tau} = x_1 - x_1x_2 - \nu x_1 = x_1[(1 - \nu) - x_2] \quad (6.9)$$

$$\frac{dx_2}{d\tau} = x_1x_2 - x_2(k + \ell\nu) = x_2[x_1 - (k + \ell\nu)] \quad (6.10)$$

Para encontrar los puntos de equilibrio, tenemos que igualar a cero las ecuaciones (6.9) y (6.10). La ecuación (6.9) se hace cero cuando

$$x_2 = 1 - \nu$$

la ecuación (6.10) se hace cero cuando

$$x_1 = k + \ell\nu$$

Las anteriores soluciones representan los puntos de equilibrio.

Ahora veamos cuales son las curvas integrales para  $\nu$  constante. Para ello tomemos las ecuaciones (6.9) y (6.10)

$$\frac{dx_1}{d\tau} = x_1[(1 - \nu) - x_2]$$

De donde

$$d\tau = \frac{dx_1}{x_1[(1 - \nu) - x_2]}$$

Por otro lado

$$\frac{dx_2}{d\tau} = x_2[x_1 - (k + \ell\nu)]$$

que nos lleva a

$$d\tau = \frac{dx_2}{x_2[x_1 - (k + \ell\nu)]}$$

como  $d\tau$  debe ser el mismo entonces, de lo anterior tenemos

$$\frac{dx_1}{x_1[(1 - \nu) - x_2]} = \frac{dx_2}{x_2[x_1 - (k + \ell\nu)]}$$

separando variable se tiene

$$\left[1 - \frac{(k + \ell\nu)}{x_1}\right] dx_1 = \left[\frac{(1 - \nu)}{x_2} - 1\right] dx_2$$

Integrando ambos lados de la ecuación se tiene

$$x_1 - (k + \ell\nu)\ln(x_1) = (1 - \nu)\ln(x_2) - x_2$$

De donde

$$x_1 + x_2 = (1 - \nu)\ln(x_2) + (k + \ell\nu)\ln(x_1)$$

reescribiendo lo anterior a partir de las propiedades del logaritmo

$$x_1 + x_2 = \ln(x_2)^{1-\nu} + \ln(x_1)^{k+\ell\nu}$$

ahora, utilizando las propiedades de los logaritmos y de la exponencial se llega a

$$\frac{e^{x_1}}{x_1^{k+\ell\nu}} \frac{e^{x_2}}{x_2^{1-\nu}} = \text{const} \quad (6.11)$$

La ecuación (6.11) representa las curvas integrales para  $\nu$  constante, las cuales son trayectorias cercanas alrededor del punto de equilibrio. El caso no controlable ( $\nu = 0$ ) es mostrado en la Figura 6.1 para  $k = 1$  (los puntos de equilibrio están en  $x_1 = 1, x_2 = 1$ ) y el caso para el cual  $\nu = \frac{1}{2}$  se muestra en la Figura 6.2 para  $k = \ell = 1$  (los puntos de equilibrio son  $x_1 = \frac{3}{2}$  y  $x_2 = \frac{1}{2}$ ).

En un punto de equilibrio, la tasa de incremento del costo  $g_0$  es

$$g_0 = \frac{dx_0}{d\tau} = ax_1 + \nu \quad (6.12)$$

que es constante. Por lo tanto el mejor punto de equilibrio corresponde a uno en el cual  $g_0$  sea mínimo. Sustituyendo la solución de equilibrio  $x_1 = k + \ell\nu$  en (6.12)

$$g_0 = ak + \nu(a\ell + 1) \quad (6.13)$$

donde  $a, k, \ell$  son todas constantes positivas y es evidente que  $g_0$  es mínimo cuando  $\nu = 0$ , (i.e. el mayor punto de equilibrio es el natural) con el valor  $g_0 = ak$ .

Es interesante notar, sin embargo, que el costo (6.8) sobre periodos de tiempo grandes en los puntos de equilibrio natural o para otra curva integral (con  $\nu = 0$ ) son los mismos. Esto es, el número promedio de presas para un ciclo alrededor de puntos de equilibrio es solo el valor de equilibrio. Esto es fácil mostrarlo expresando a (6.4) como

$$\frac{dx_2}{x_2} = (x_1 - k)d\tau$$

Integrando entre una población inicial  $x_2(\tau_i)$  y alguna población final  $x_2(\tau_f)$  y dividiendo ambos lados por el intervalo de tiempo dado  $T$ , se tiene

$$\int_{\tau_i}^{\tau_f} \frac{dx_2}{x_2} = \int_{\tau_i}^{\tau_f} (x_1 - k)d\tau$$

Resolviendo

$$-k[\tau_f - \tau_i] + \int_{\tau_i}^{\tau_f} x_1 d\tau = \ln \left[ \frac{x_2(\tau_f)}{x_2(\tau_i)} \right]$$

si  $T = \tau_f - \tau_i$  se tiene

$$-kT + \int_{\tau_i}^{\tau_f} x_1 d\tau = \ln \left[ \frac{x_2(\tau_f)}{x_2(\tau_i)} \right]$$

Que para un ciclo sobre una curva integral  $x_2(\tau_i) = x_2(\tau_f)$ , se tiene

$$\frac{1}{T} \ln(1) = -k + \frac{1}{T} \int_{\tau_i}^{\tau_f} x_1 d\tau$$

Pero como  $\ln(1) = 0$  lo anterior se transforma en

$$K = \frac{1}{T} \int_{\tau_i}^{\tau_f} x_1 d\tau \quad (6.14)$$

Para un ciclo sobre una curva integral  $x_2(\tau_i) = x_2(\tau_f)$  y de la ecuación (6.14) se tiene que el número promedio de presas es justo el número de equilibrio.

Se sigue entonces, que si se escoge el punto de equilibrio natural como lugar para llevar al sistema, sobre intervalos de tiempo grandes, el costo promedio antes y después de la aplicación del control deberá ser el mismo. Estos resultados se dan a partir de la suposición de un costo lineal con  $x_1$ , que es una hipótesis que puede ser cuestionada.

### Control máximo $\nu_{max} = 1$

Con  $\nu = 1$  la naturaleza de las soluciones para (6.9) y (6.10) cambia con respecto a los casos previos. Las trayectorias no son grandes curvas cerradas. Iniciando desde cualquier punto  $x_1 > 0$ ,  $x_2 > 0$  el sistema es llevado arbitrariamente cerca del eje  $x_2 = 0$ . En la Figura 6.3 se muestran algunas de tales trayectorias. Nótese que con  $\nu = const < 1$  el número de presas disminuye y se incrementa en una forma similar al sistema natural. En este caso es evidente de la Figura 6.3 (o ecuación 6.9) que el número de presas disminuye continuamente con el tiempo conforme el sistema se aproxima al eje  $x_2 = 0$ .

Dependiendo del estado inicial, el sistema es llevado a un valor  $x_1 < k + \ell$ , por tanto la tasa de incremento del costo a tales puntos límite deberá ser

$$g_0 = \hat{a}(k + \ell) + 1 \quad (6.15)$$

donde  $\hat{a} < a$

### Control máximo $\nu_{max} > 1$

En este caso el sistema con control constante mayor a uno es llevado arbitrariamente cerca del origen (como el punto límite) como se muestra en la Figura 6.4. Nuevamente el número de presas decrece continuamente conforme se aproxima al punto límite.

Una vez que el sistema está cercano al origen puede ser mantenido allí con  $\nu$  un poco mayor que uno. Si suponemos que el control es cambiado a  $\nu = 1^+$  cerca del origen para garantizar que se mantiene allí, la tasa de incremento del costo cercano a los puntos límite es también ligeramente mayor a uno.

### 6.1.5. Resumiendo de a dónde Ir

Es evidente que si  $ak < 1$ , deberá ser mejor llevar al sistema a su punto de equilibrio natural no importando que nivel de esfuerzo del control sea posible. Si  $ak > 1$ , entonces será mejor llevar el sistema al origen, si el esfuerzo del control está suficientemente disponible ( $\nu > 1$ ) o posiblemente al eje  $x_2 = 0$  si  $\nu = 1$  dependiendo de los valores de  $a$ ,  $k$  y  $\ell$ . Estos resultados se resumen en la tabla 6.1.

Cuadro 6.1: A dónde llevar al sistema

CONDICIÓN	CONTROL	PUNTOS LÍMITE	$g_0$
$ak < 1$	$\nu_{max} < 1$	$(k, 1)$	$ak$
$ak < 1$	$\nu_{max} = 1$	$(k, 1)$	$ak$
$ak < 1$	$\nu_{max} > 1$	$(k, 1)$	$ak$
$ak = 1$	$\nu_{max} < 1$	$(k, 1)$	1
$ak = 1$	$\nu_{max} = 1$	$(k, 1)$	1
$ak = 1$	$\nu_{max} > 1$	$(k, 1)$	1
$ak > 1$	$\nu_{max} < 1$	$(k, 1)$	$ak$
$ak > 1$	$\nu_{max} = 1$	<i>abierto</i>	<i>abierto</i>
$ak > 1$	$\nu_{max} > 1$	$(1, 0)$	1

Es interesante observar las implicaciones de la tabla 6.1. Si es barato usar el control directo ( $ak > 1$ ) entonces el mejor lugar para tener al sistema es cerca del origen. Para mantenerlo ahí, debemos usar el control directo continuamente. Las presas no son eliminadas, pero son mantenidas en pequeños números. Si el control es caro ( $ak \leq 1$ ), entonces la naturaleza parece dar el mejor lugar para mantener al sistema sobre grandes intervalos de tiempo, entonces se deberán usar pequeños controles directos.

En este modelo se ha ignorado la acumulación de la resistencia al agente de control de la población. Se supone la acumulación de resistencia con el tiempo. Entonces si inicialmente  $\nu_{max} > 1$  y se mantiene la misma tasa de aplicación del agente de control  $\nu_{max}$  deberá declinar con el tiempo. Eventualmente  $\nu_{max}$  es menor a uno. Si

es el caso, el equilibrio  $(k, 1)$  es el mejor equilibrio.

### 6.1.6. Un programa de manejo óptimo de presas

Para este análisis, se toma uno en el cual el sistema presa-depredador sujeto al control directo (ecuaciones (6.5) y (6.6)) es llevado desde algún punto en el conjunto  $x_1 > 0, x_2 > 0$  a un punto límite como se especificó en la tabla 6.1, mientras se minimiza la función costo (6.8). La determinación de tales programas representa un problema en la teoría de control óptimo (referencia (19))

#### Determinación de la Ley de Control

De las ecuaciones (6.5), (6.6) y (6.8) tenemos

$$H = \lambda_0(ax_1 + \nu) + \lambda_1x_1(1 - x_2 - \nu) + \lambda_2x_2(x_1 - k - \ell\nu) \quad (6.16)$$

Con el sistema adjunto

$$-\dot{\lambda}_1 = \frac{\partial H}{\partial x_1} = \lambda_0a + \lambda_1(1 - x_2 - \nu) + \lambda_2x_2 \quad (6.17)$$

$$-\dot{\lambda}_2 = \frac{\partial H}{\partial x_2} = -\lambda_1x_1 + \lambda_2(x_1 - k - \ell\nu) \quad (6.18)$$

La función  $H$  es lineal en el control  $\nu$ . Si desarrollamos la ecuación (6.16)

$$H = \lambda_0ax_1 + \lambda_0\nu + \lambda_1x_1(1 - x_2) - \lambda_1x_1\nu + \lambda_2x_2(x_1 - k) - \lambda_2x_2\ell\nu$$

Lo anterior se puede reescribir como

$$H = \lambda_0ax_1 + \lambda_1x_1(1 - x_2) + \lambda_2x_2(x_1 - k) + \nu(\lambda_0 - \lambda_1x_1 - \lambda_2x_2\ell) \quad (6.19)$$

que si al último término de la anterior ecuación lo llamamos

$$\sigma_\tau = \lambda_0 - \lambda_1x_1 - \lambda_2x_2\ell \quad (6.20)$$

entonces la ecuación (6.19) se transforma en

$$H = \lambda_0 a x_1 + \lambda_1 x_1 (1 - x_2) + \lambda_2 x_2 (x_1 - k) + \sigma_\tau \nu$$

Para satisfacer la condición de que  $H$  deba tener un máximo con respecto al control  $\nu$ , veamos lo siguiente:

si  $\sigma_\tau > 0$  entonces la función  $H$  es “más grande”, se le está sumando algo positivo,

si  $\sigma_\tau < 0$  a la función  $H$  se le está “quitando algo”,

si  $\sigma_\tau = 0$  entonces no se puede tener control alguno, de donde se puede concluir lo siguiente

$$\nu = \begin{cases} \nu_{max} & \text{if } \sigma_\tau > 0 ; \\ 0 & \text{if } \sigma_\tau < 0 ; \\ \text{Controlsingular} & \text{if } \sigma_\tau = 0 . \end{cases}$$

Esto es, el signo de la función de cambio  $\sigma_\tau$  determina el control a ser usado a menos que la función de cambio sea cero sobre un intervalo de tiempo que no sea cero. Esta última posibilidad es examinada al tomar las derivadas primera y segunda de  $\sigma_\tau$  e igualarlas a cero.

Derivemos la ecuación (6.20) con respecto a  $\tau$

$$\frac{d\sigma_\tau}{d\tau} = \frac{d\lambda_0}{d\tau} - \lambda_1 \frac{dx_1}{d\tau} - x_1 \frac{d\lambda_1}{d\tau} - \lambda_2 \ell \frac{dx_2}{d\tau} - x_2 \ell \frac{d\lambda_2}{d\tau}$$

De las ecuaciones (6.5), (6.6), (6.17) y (6.18), se obtiene, después de hacer algo de álgebra y de agrupar términos

$$\frac{d\sigma_\tau}{d\tau} = x_1 (\lambda_0 a + \lambda_2 x_2 - \lambda_1 \ell x_2)$$

Si lo anterior lo igualamos a cero

$$a\lambda_0 + \lambda_2 x_2 - \lambda_1 \ell x_2 = 0$$

despejando

$$a\lambda_0 = -\lambda_2 x_2 + \lambda_1 \ell x_2 = x_2 (\lambda_1 \ell - \lambda_2) \quad (6.21)$$

Esta última ecuación la utilizaremos más adelante. Ahora calculemos la segunda derivada de  $\sigma_\tau$  con respecto a  $\tau$

$$\frac{d^2\sigma_\tau}{d\tau^2} = \dot{x}_1(a\lambda_0 + \lambda_2x_2 - \lambda_1\ell x_2) + x_1(\dot{\lambda}_2x_2 + \lambda_2\dot{x}_2 - \dot{\lambda}_1\ell x_2 - \lambda_1\ell\dot{x}_2)$$

como en el caso anterior, utilizando las ecuaciones (6.5), (6.6), (6.17) y (6.18), se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{d^2\sigma_\tau}{d\tau^2} = & ax_1\lambda_0(1 - x_2 - \nu) + x_1x_2\lambda_2(1 - x_2 - \nu) + x_1^2x_2\lambda_1 \\ & - x_1x_2\ell\lambda_1(x_1 - k - \ell\nu) + ax_1x_2\ell\lambda_0 + x_1x_2^2\ell\lambda_2. \end{aligned}$$

pero sabemos que

$$a\lambda_0 = x_2(\ell\lambda_1 - \lambda_2)$$

por lo que factorizando términos comunes y simplificando

$$\frac{d^2\sigma_\tau}{d\tau^2} = x_1x_2\lambda_1(\ell(1 - x_2 - \nu) + x_1 - \ell(x_1 - k - \ell\nu) + \ell^2x_2) \quad (6.22)$$

De la ecuación (6.22) hay que hacer notar que para satisfacer la condición

$$\frac{d^2\sigma_\tau}{d\tau^2} = 0$$

se tiene que  $x_1 = 0$  o  $x_2 = 0$  son solución, pero esto no es posible dinámicamente. La otra posibilidad es que  $\lambda_1 = 0$  o

$$x_1 + \ell^2x_2 + \ell(1 - \nu - x_2) - \ell(x_1 - k - \ell\nu) = 0$$

Si  $\lambda_1$  es cero se puede demostrar entonces que el vector  $\bar{\lambda}$  debe ser cero, lo cual no es posible. Por tanto lo que debe ser cero es

$$x_1 + \ell^2x_2 + \ell(1 - \nu - x_2) - \ell(x_1 - k - \ell\nu) = 0$$

Entonces

$$\ell\nu(\ell - 1) = -\ell x_2(\ell - 1) - \ell(k + 1) + x_1(\ell - 1) \quad (6.23)$$

De (6.23) si  $\ell = 1$  se tiene

$$K + 1 = 0$$

Si  $\ell = 0$  implica que  $x_1 = 0$ . Ninguna de estas conclusiones es posible ( $k > 0$  y  $x_1 = 0$  no son dinámicamente controlables), y podemos rechazar la posibilidad del control singular si  $\ell = 1$  o  $\ell = 0$ . Si  $0 < \ell < 1$  tenemos de la ecuación (6.23) la ley de control singular, para ello despejemos a  $\nu$  de esa ecuación

$$\nu = -x_2 + \frac{x_1}{\ell} - \frac{k+1}{\ell-1} \quad (6.24)$$

Ahora con las ecuaciones (6.20) y (6.21), igualándola a cero, podemos encontrar a  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$ . Para ello tenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} \sigma_\tau &= \lambda_0 - x_1\lambda_1 - x_2\ell\lambda_2 \\ a\lambda_0 + x_2\lambda_2 - x_2\ell\lambda_1 &= 0 \end{aligned} \quad (6.25)$$

Si multiplicamos la ecuación (6.25) por  $\ell$

$$0 = a\ell\lambda_0 + x_2\ell\lambda_2 - x_2\ell^2\lambda_1 \quad (6.26)$$

Sumando (6.20) con (6.26)

$$\sigma_\tau = \lambda_0 + a\ell\lambda_0 - x_1\lambda_1 - x_2\ell^2\lambda_1 = \lambda_0 + a\ell\lambda_0 + \lambda_1(-x_1 - x_2\ell^2) \quad (6.27)$$

De donde

$$\lambda_1 = \frac{\lambda_0 + a\ell\lambda_0 - \sigma_\tau}{x_1 + x_2\ell^2} \quad (6.28)$$

Sustituyendo (6.28) en (6.25) y después de hacer algunos cálculos, se obtiene

$$\lambda_2 = \frac{-ax_1\lambda_0 + x_2\ell\lambda_0 - x_2\ell\sigma_\tau}{x_2(x_1 + x_2\ell^2)} \quad (6.29)$$

Las ecuaciones (6.28) y (6.29) nos permiten conocer a  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$ . Ahora sustituyamos estos valores en la ecuación (6.19)

$$\begin{aligned} H &= ax_1\lambda_0 + \left[ \frac{a\ell\lambda_0 + \lambda_0 - \sigma_\tau}{x_1 + x_2\ell^2} \right] x_1(1 - x_2) \\ &\quad + \left[ \frac{-ax_1\lambda_0 + x_2\ell\lambda_0 - x_2\ell\sigma_\tau}{x_2(x_1 + x_2\ell^2)} \right] x_2(x_1 - k) + \nu\sigma_\tau \end{aligned}$$

Si buscamos la solución para  $H = 0$ , entonces

$$\begin{aligned} x_1 x_2 [\lambda_0 (a\ell^2 - a\ell + \ell - 1) + (1 - \ell)\sigma_\tau] + \\ x_1 [\lambda_0 (a\ell + 1 + ak) + \sigma_\tau(\nu - 1)] \\ + x_2 [-\lambda_0 \ell k + \ell\sigma_\tau(k + \nu\ell)] = 0 \end{aligned}$$

haciendo los productos y agrupando términos y del hecho de que  $\sigma_\tau = 0$  se llega a

$$x_1 x_2 (a\ell^2 - a\ell + \ell - 1) + x_1 (a\ell + 1 + ak) - x_2 k\ell = 0 \quad (6.30)$$

Pero tenemos la posibilidad de que los coeficientes que acompañan al término,  $\sigma_\tau$ , sean cero, por lo que

$$\begin{aligned} 1 - \ell = 0 \quad \ell = 1 \\ \nu - 1 = 0 \quad \nu = 1 \end{aligned}$$

Pero como también aparece el término  $\ell\sigma_\tau(k + \nu\ell)$  y, en este caso, se tiene que  $\nu = \ell = 1$ , entonces se deduce que  $k + 1 = 0$ .

La posibilidad del control singular complica mucho la síntesis de la secuencia del control óptimo. De acuerdo con los comentarios al inicio con respecto a la simplicidad, se deja la cuestión del control singular para investigaciones futuras. En lo que sigue se supone que  $\ell = 0$  (el agente de control no tiene ningún efecto sobre el depredador) o  $\ell = 1$  (el agente de control tiene el mismo efecto sobre las presas que sobre los depredadores).

### Control Bang-Bang

Por la eliminación del control singular, el sistema es llevado a los puntos límite por una combinación de controles nulos y máximos. Dos puntos límite son de interés, el punto de equilibrio natural y el origen.

Los resultados para el punto de equilibrio natural son obtenidos por la integración de las ecuaciones del sistema (6.5) y (6.6) dirigidos hacia atrás desde el punto de equilibrio mientras se monitorea la función cambio (6.20) para la secuencia del control apropiado. La integración es iniciada escogiendo  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  que satisfagan la

condición necesaria de que  $H = 0$ . Por tanto evaluando a  $H$  en (6.16) en el punto de equilibrio ( $x_1 = k, x_2 = 1$ ), se tiene

$$H = \lambda_0(ak + \nu) - \lambda_1 k \nu - \lambda_2 \ell \nu = 0 \quad (6.31)$$

Para iniciar, el valor del control (en sentido retro) se debe tener

$$\nu = \nu_{max}$$

de otra manera los movimientos desde el punto de equilibrio no serán posibles. Por tanto el valor inicial de  $\lambda_1$  puede determinarse de (6.31) escogiendo  $\lambda_0 = 0$  o  $\lambda_0 = -1$ . Si  $\lambda_0 = 0$  se tiene de (6.31)

$$-\lambda_1 k \nu - \lambda_2 \ell \nu = 0$$

Entonces se tiene

$$\lambda_1 = \frac{-\lambda_2 \ell}{k}$$

Si  $\lambda_0 = -1$  se tiene

$$\lambda_1 = \frac{-a}{\nu} - \frac{1 + \lambda_2 \ell}{k}$$

$\lambda_2$  se mantiene arbitraria y se le pueden asignar diferentes valores para generar una familia de curvas desde el punto de equilibrio.

El segundo caso presenta dificultades de cálculo ya que el origen sólo se puede controlar en un sentido límite. No es posible la integración hacia atrás desde el origen para sintetizar la solución close loop. En lugar de esto se busca una solución alterna aproximada al origen. En vez de llevar el sistema directamente al origen, primero se lleva a la línea

$$x_1 + x_2 = \alpha \quad (6.32)$$

donde  $\alpha$  es una constante pequeña. Una vez que la línea es alcanzada, entonces el control puede igualarse a un valor ligeramente mayor a uno, y el sistema deberá moverse hacia el origen sin acumulación en el incremento del costo (i.e.  $x_1$  es pequeño y  $x_0$  es cercano al valor mínimo del estado estable (fijo)).

La condición de transversalidad de la teoría de control óptimo produce el resultado de que para una condición terminal de la forma (6.32)

$$\lambda_1(\tau_f) = \lambda_2(\tau_f) = \lambda(\tau_f)$$

Con lo anterior y de la condición  $H = 0$  con  $x_{1f} = x_1(\tau_f)$  y  $\nu_f = \nu(\tau_f)$ , la ecuación (6.19) se escribe como, después de hacer los productos y de agrupar términos,

$$H = ax_1\lambda_0 + \lambda(\tau_f)[x_1 - x_2k] + \nu\sigma_\tau$$

Si  $x_2 = \alpha - x_1$  y además  $H = 0$  se tiene

$$ax_1\lambda_0 + \lambda(\tau_f)[x_1 - (\alpha - x_1)k] + \nu\sigma_\tau = 0 \quad (6.33)$$

Por lo que

$$\lambda(\tau_f) = \frac{-ax_1\lambda_0 - \nu\sigma_\tau}{x_1 - (\alpha - x_1)k} \quad (6.34)$$

Pero sabemos que

$$\sigma_\tau = \lambda_0 - \lambda(\tau_f)x_{1f} - \ell\lambda(\tau_f)x_{2f}$$

entonces

$$\sigma_\tau = \lambda_0 - \lambda(\tau_f)[x_{1f} + \alpha\ell - x_{1f}\ell]$$

Sustituyendo lo anterior en (6.34) se llega a

$$\lambda(\tau_f) = \frac{-\lambda_0(ax_{1f} + \nu_f)}{x_{1f}(1+k) - \alpha k - x_{1f}\nu_f + \ell(-\alpha\nu_f + x_{1f}\nu_f)} \quad (6.35)$$

De esta última ecuación despejamos a  $\nu_f$ , obteniéndose

$$\nu_f = \frac{-ax_{1f}\lambda_0 - \lambda(\tau_f)[x_{1f}(1+k) - \alpha k]}{\lambda_0 + \lambda(\tau_f)(-x_{1f} - \alpha\ell + x_{1f}\ell)}$$

Como  $\lambda(\tau_f) = \lambda_1(\tau_f) = \lambda_2(\tau_f)$  y además,  $x_2 = \alpha - x_1$  y con las ecuaciones (6.20) y (6.29) para puntos sobre la curva (6.32) con  $\lambda(\tau_f)$  dado por (6.35) se tiene, después de hacer los productos y de agrupar términos

$$\sigma_\tau = \lambda_0 - \lambda(\tau_f)x_{1f}(1 - \ell) - \lambda(\tau_f)\alpha\ell$$

En este punto, si hacemos que  $\sigma_\tau = 0$ , se obtiene

$$\lambda_0 = \lambda(\tau_f)x_{1f}(1 - \ell) + \alpha\ell\lambda(\tau_f)$$

que al sustituir en el valor de  $\nu_f$  y después de simplificar términos se encuentra que

$$\nu_f = \frac{-ax_{1f}^2(1-\ell) - x_{1f}(a\alpha\ell + 1 + k) + \alpha k}{x_{1f}(1-\ell) + \alpha\ell + (-x_{1f} - \alpha\ell + x_{1f}\ell)}$$

Si ahora hacemos que el numerador sea cero en esta última expresión, se tiene

$$ax_{1f}^2(1-\ell) + x_{1f}(a\alpha\ell + 1 + k) - \alpha k = 0$$

Que es una ecuación cuadrática en  $x_{1f}$  y cuya solución se denota por  $\beta$ . De todo el análisis anterior, se tiene por examinación de la función de cambio (6.20) para los puntos sobre la curva (6.32) con  $\lambda(\tau_f)$  dado por (6.35) que (para  $\nu_{max} \geq 1$ )

$$\nu(\tau_f) = \begin{cases} 0, & \text{if } 0 \leq x_{1f} < \beta ; \\ \nu_{max} & \text{if } \beta \leq x_{1f} \leq \frac{\alpha k}{1+k} ; \\ \nu_{max} & \text{if } \frac{\alpha k}{1+k} \leq x_{1f} \leq \alpha. \end{cases}$$

donde  $\beta$  es la solución de la ecuación cuadrática. La ambigüedad en el control para

$$\frac{\alpha k}{1+k} \leq x_{1f} \leq \alpha$$

se entiende si reconocemos que podemos dejar la variedad terminal a la izquierda o a la derecha.

## 6.2. Figuras

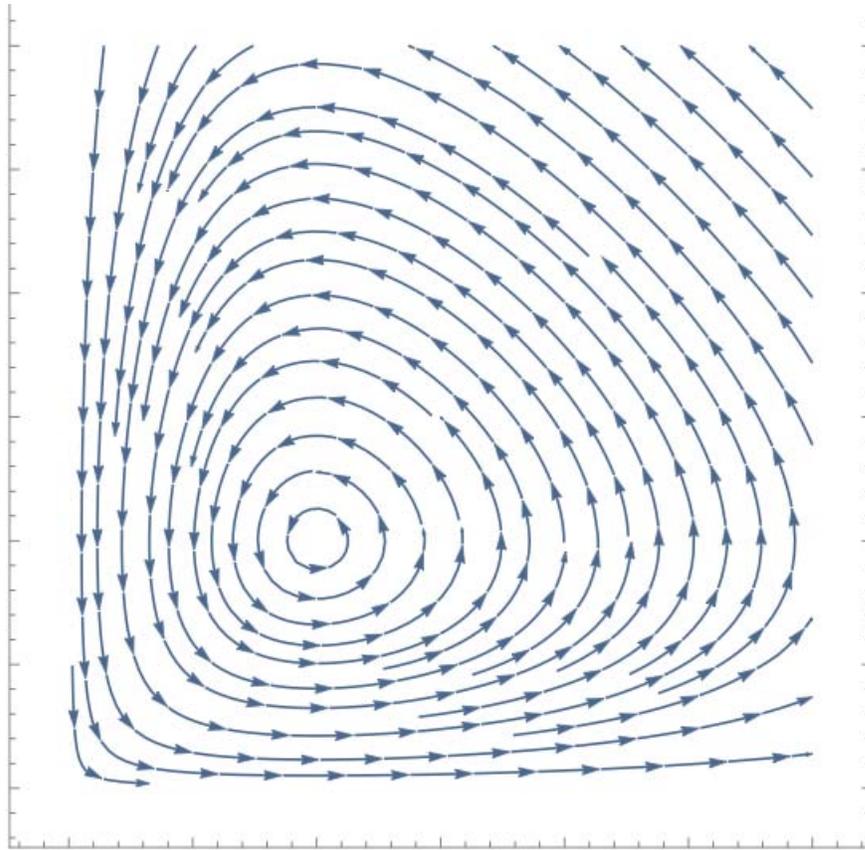


Figura 6.1: Modelo Lotka-Volterra:  $\nu = 0$ ,  $k = 1$

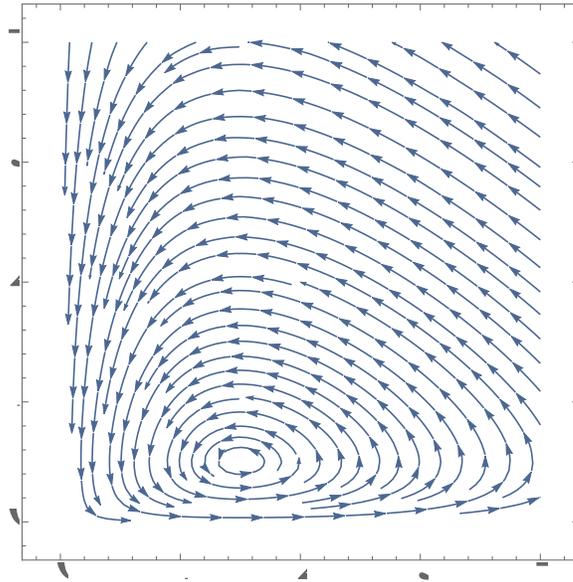


Figura 6.2: Modelo Lotka-Volterra con control constante:  $\nu = 1/2$ ,  $l = k = 1$

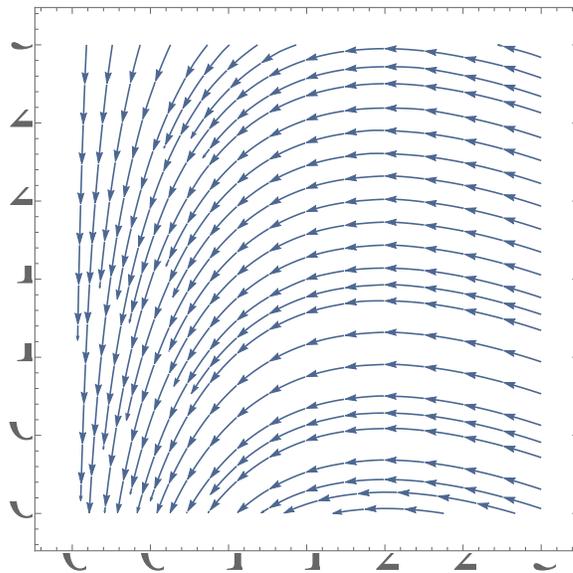


Figura 6.3: Modelo Lotka-Volterra con control constante:  $\nu = 1$ ,  $l = k = 1$

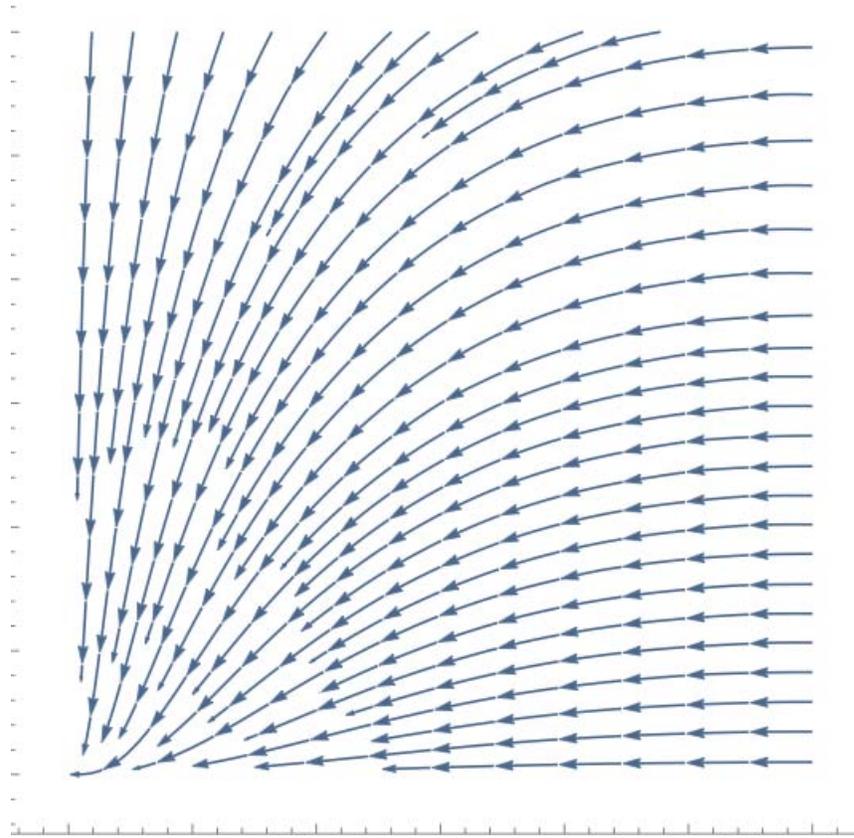


Figura 6.4: Modelo Lotka-Volterra con control constante:  $\nu = 2$ ,  $l = k = 1$

# Capítulo 7

## Una política óptima

### 7.1. Una Política Óptima para una Cosecha de Peces

En este ejemplo se propone un modelo dinámico para cosechar un sistema de poblaciones de peces introduciendo un control en el modelo de Verhulst-Pearl. Un problema de control óptimo en el cual se incluyen algunos parámetros establecidos (fijos), y donde se aplican las condiciones necesarias usuales. Para valores específicos de los parámetros, el candidato a la política de control es deducido y verificado óptimamente por la aplicación de una cantidad suficiente de teoremas. Las trayectorias óptimas pueden contener arcos de control máximos y mínimos como también un subarco singular. El significado de los arcos singulares está interpretado en términos del sistema dinámico.

#### 7.1.1. Introducción

La teoría de control óptimo ha sido aplicada a resolver muchos problemas de ingeniería. Debido a las dificultades de descripción de los problemas reales, la teoría ha

sido usada no solamente por los problemas prácticos que resuelve, sino también por el conocimiento que proporciona. Por ejemplo, la optimización de las trayectorias ha sido objeto de numerosas investigaciones, aunque aún existen dudas de que cualquier vehículo haya sido controlado de manera óptima. Es claro que cuando se examinan problemas en campos no ingenieriles, no se deben descartar los modelos simples por su sola simplicidad.

Las aplicaciones más comunes no ingenieriles de la teoría de control han sido en economía. Realmente, se podría ver a la teoría de control como una parte de la investigación de operaciones, la cual está comúnmente asociada con problemas en economía. Hay, sin embargo, un interés creciente en la aplicación de la teoría de control a sistemas de la vida.

Aquí aplicaremos la teoría de control a una versión modificada de un modelo de población bien conocido. Para concretar, el lector puede considerar un estanque conteniendo peces de una especie simple. Estamos interesados en cosechar los peces de una manera óptima. Para precisar el problema, debemos formular un modelo y una función costo; esto se hace en la siguiente sección. Subsecuentemente, se obtienen las condiciones necesarias para resolver el problema de control con parámetros arbitrarios. Finalmente, se consideran valores especiales de los parámetros y se completa el análisis con una prueba de la optimización derivada del esquema de control.

### 7.1.2. Problema de Control Óptimo

Uno de los primeros modelos usados para describir la dinámica de una población de una especie simple es el dado por la ecuación de Verhulst-Pearl

$$\frac{dy}{ds} = \alpha y(y^e - y)$$

donde  $\alpha$  y  $y^e$  son parámetros constantes del modelo y  $s$  es la variable tiempo. Mientras no sea posible derivar tal relación de alguna ley fundamental, el modelo exhibe una característica que no se encuentra en las leyes elementales maltusianas: existe otro valor de equilibrio que no es el cero (el valor es  $y^e$ ).

Para tener un problema de control óptimo de este sistema, debemos introducir dos elementos más: un control dinámico y una función costo. En [36], Goh ha estudiado

este modelo con una tasa de control simple. Parece más razonable, sin embargo, suponer que, si se ejerce una cierta cantidad de esfuerzo  $\nu$  en la cosecha, entonces la tasa de peces que se sacan deberá ser proporcional al producto del esfuerzo y a la población total. Si hay muchos peces, es fácil capturarlos. Por tanto, tenemos nuestro modelo dinámico

$$\frac{dy}{ds} = \alpha y(y^e - y) - \nu y$$

donde  $\nu(s) \in [0, V]$  y  $V = \text{const}$  es el esfuerzo máximo posible.

Para una función costo a ser minimizada, se considera

$$J = \int_0^{s_f} [\hat{a}y + \hat{b}\nu + \hat{c}y\nu] ds$$

la cual se puede interpretar como sigue: el término  $y\nu$  en la integral es la tasa de peces que se quitan. Si los peces se encuentran en un valor conveniente, entonces  $\hat{c}$  deberá ser negativo, puesto que esa parte de  $J$  deberá representar el valor de la cosecha. El término  $\hat{b}\nu$  representa el costo del programa de cosecha ( $\hat{b}$  positiva), mientras el término  $\hat{a}y$  tiene en cuenta un costo asociado con el número promedio de peces en el estanque. Los últimos términos pueden representar el costo de alimentación de los peces. Antes de proceder con el análisis del problema, es útil introducir variables adimensionales y poner el tiempo explícitamente, puesto que el intervalo está fijo.

Sea  $x_1 = \frac{y}{y^e}$  y la nueva variable  $t$  es  $\alpha y^e$  veces la vieja unidad  $s$ . Por tanto, en términos de las nuevas variables, hay que determinar la dinámica de la población de este modelo con control. Para ello hagamos lo siguiente.

Como

$$\frac{dy}{ds} = \alpha y y^e - \alpha y^2 - \nu y$$

si  $x_1 = \frac{y}{y^e}$  entonces

$$y = x_1 y^e$$

además,  $t = \alpha y^e s$ , entonces

$$dy = y^e dx_1$$

y

$$dt = \alpha y^e ds$$

con lo anterior, tenemos que

$$\frac{dy}{ds} = \frac{y^e dx_1}{\frac{dt}{\alpha y^e}} = \alpha x_1 (y^e)^2 - \alpha (y^e x_1)^2 - \nu (y^e x_1)$$

que es lo mismo que

$$\frac{\alpha (y^e)^2 dx_1}{dt} = \alpha x_1 (y^e)^2 - \alpha (y^e)^2 x_1^2 - \nu y^e x_1$$

y finalmente se tiene

$$\frac{dx_1}{dt} = x_1 - x_1^2 - \frac{\nu x_1}{\alpha y^e}$$

Como  $\frac{dx}{dt} = \dot{x}$ , lo anterior se puede escribir como

$$\dot{x}_1 = x_1 - x_1^2 - x_1 u$$

con

$$u = \frac{\nu}{\alpha y^e}$$

Entonces, la dinámica de la población está dada por el sistema

$$\dot{x}_1 = x_1 - x_1^2 - x_1 u; \quad \dot{x}_2 = 1 \tag{7.1}$$

En la ecuación (7.1) el punto denota diferenciación con respecto a  $t$ . El estado inicial es  $x_1(0) = x_1^0$ ,  $x_2(0) = 0$ , y la variedad terminal está dada por  $x_2(t_f) - T = 0$ . El objetivo es encontrar un programa de control  $u^*(\bullet)$  que deberá llevar a cabo el traslado del sistema y minimizar

$$J = \int_0^{t_f} (ax_1 + bu + cx_1 u) dt$$

mientras que se satisface que  $u(t) \in [0, U]$ .

### 7.1.3. Condiciones Necesarias

En este caso el hamiltoniano se define como

$$H(x_1, x_2, \lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, u) = \lambda_0 (ax_1 + bu + cx_1 u) + \lambda_1 x_1 (1 - x_1 - u) + \lambda_2 \tag{7.2}$$

Entonces, si  $u^*(\bullet)$  es un control óptimo continuo a trozos, existe una función vectorial no cero  $\lambda(\bullet) = (\lambda_0(\bullet), \lambda_1(\bullet), \lambda_2(\bullet))$  tal que

$$\begin{aligned}\dot{\lambda}_1(t) &= -\frac{\partial H}{\partial x_1} = -\lambda_1(t)(1 - 2x_1^* - u^*) - \lambda_0(t)(a + cu^*) \\ \dot{\lambda}_2 &= -\frac{\partial H}{\partial x_2} = 0 \quad \lambda_2 = \text{const}\end{aligned}\tag{7.3}$$

También calculemos  $\frac{\partial H}{\partial u}$

$$\frac{\partial H}{\partial u} = -\lambda_1 x_1^* + \lambda_0 c x_1^* + \lambda_0 b$$

con lo que si  $\frac{\partial H}{\partial u} = 0$  nos lleva a que

$$\lambda_0 b + \lambda_0 c x_1^* - \lambda_1 x_1^* = -\lambda_1 x_1^* + \lambda_0 (b + c x_1^*) = 0$$

lo anterior es la posibilidad de tener un control singular.

Ahora nos fijamos en el hecho de que  $H(x_1^*, u^*) \leq H(x_1^*, u)$  lo cual, de la ecuación (7.2), se traduce en

$$\begin{aligned}\lambda_1 u^* (1 - x_1^* - u^*) + \lambda_2 + \lambda_0 (a x_1^* + b u^* + c x_1^* u^*) \\ \leq \lambda_1 x_1^* (1 - x_1^* - u) + \lambda_2 + \lambda_0 (a x_1^* + b u + c x_1^* u)\end{aligned}$$

Desarrollando y agrupando términos

$$-\lambda_1 x_1^* u^* + \lambda_0 b u^* + \lambda_0 c x_1^* u^* \leq -\lambda_1 x_1^* u + \lambda_0 u (b + c x_1^*)$$

Si en la anterior ecuación pedimos que  $u^* = 0$ , entonces

$$0 \leq u (-\lambda_1 x_1^* + \lambda_0 (b + c x_1^*))$$

que si  $u = 0$  se tiene que,

$$0 \leq -\lambda_1 x_1^* + \lambda_0 (b + c x_1^*)$$

Entonces se tiene que  $u^*(t) = 0$  si

$$\lambda_0(t)[b + cx_1^*(t)] - \lambda_1(t)x_1^*(t) > 0$$

y  $u^*(t) = U$  si

$$\lambda_0(t)[b + cx_1^*(t)] - \lambda_1(t)x_1^*(t) < 0 \quad (7.4)$$

Por lo que el hamiltoniano se transforma en

$$H[x_1^*(t), x_2^*(t), \lambda_0(t), \lambda_1(t), \lambda_2(t), u^*(t)] = 0 \quad t \in [0, t_f] \quad (7.5)$$

Del hecho de que  $H = 0$ , el vector

$$[\lambda_1(t_f), \lambda_2(t_f)] \quad (7.6)$$

es ortogonal a la variedad terminal y

$$0 \leq \lambda_0(t) = \text{const} \quad (7.7)$$

De la ecuación (7.6) se sigue que

$$\lambda_1(t_f) = 0 \quad (7.8)$$

Por tanto, si  $\lambda_0(t_f)$  es cero, entonces evaluando en  $t_f$  la condición (7.5) da  $\lambda_2(t_f) = 0$ , de donde todas las componentes de  $\bar{\lambda}$  son cero. De las condiciones necesarias se requiere un vector  $\bar{\lambda}$  no cero, por lo que, de lo anteriormente expuesto se tiene una contradicción. Pero como  $\lambda_0(t_f) = \text{const}$ , entonces  $\lambda_0(t_f)$  debe ser diferente de cero, y podemos tomar ( $\lambda_0$  constante y todas las condiciones son homogéneas de grado uno)

$$\lambda_0(t) = 1 \quad (7.9)$$

Usando (7.9), la condición (7.4) se transforma en  $0 \leq -\lambda_1 x_1^* + b + cx_1^*$ .

Si hacemos

$$-\lambda_1 x_1^* + b + cx_1^* = 0$$

implica que

$$\lambda_1 = \frac{b + cx_1^*}{x_1^*}$$

que es equivalente a

$$\lambda_1 = c + \frac{b}{x_1^*}$$

De este último resultado se define

$$\lambda_1^s(t) = c + \frac{b}{x_1^*(t)} \quad (7.10)$$

Con lo anterior, veamos en que se transforman las condiciones dadas por (7.4)

$$\lambda_0(t)[b + cx_1^*(t)] - \lambda_1 x_1^*(t) > 0; \quad \lambda_0(t) = 1$$

de donde

$$b + cx_1^*(t) > \lambda_1(t)x_1^*(t)$$

que dividiendo lo anterior por  $x_1^*(t)$

$$\frac{b + cx_1^*(t)}{x_1^*(t)} = \frac{b}{x_1^*(t)} + c > \lambda_1$$

y de la ecuación (7.10) se tiene

$$\frac{b}{x_1^*(t)} + c = \lambda_1^s$$

por lo que

$$\lambda_1^s > \lambda_1$$

Entonces de la condición (7.4) se tiene que  $u^*(t) = 0$  si

$$\lambda_1^s > \lambda_1$$

y  $u^*(t) = U$  si

$$\lambda_1^s < \lambda_1 \quad (7.11)$$

mientras que el caso singular requiere que

$$\lambda_1^s(t) = \lambda_1(t) \quad (7.12)$$

Si la ecuación (7.12) se cumple en un punto aislado  $\tilde{t}$ , entonces el candidato a control es cambiado y puede ser deducido de la condición (7.11). Veamos que sucede si la ecuación (7.12) se cumple sobre algún intervalo. Para ello sabemos que

$$\lambda_1(t) = \lambda_1^s(t) = c + \frac{b}{x_1^*(t)}$$

Derivando lo anterior

$$\dot{\lambda}_1(t) = -\frac{b}{[x_1^*(t)]^2} \dot{x}_1^*(t)$$

Entonces sobre el intervalo

$$\dot{\lambda}_1(t) = -\frac{b}{[x_1^*(t)]^2} \dot{x}_1^*(t) \quad (7.13)$$

Pero tenemos que  $\dot{x}_1^*(t) = x_1^*(t) - [x_1^*(t)]^2 - x_1^*(t)u^*$  que sustituyendo en (7.13) y después de hacer algo de álgebra se obtiene

$$\dot{\lambda}_1(t) = b - \frac{b}{x_1^*(t)} + \frac{bu^*}{x_1^*(t)}$$

Sabemos que  $\lambda_1 = c + \frac{b}{x_1^*}$ , y con la ecuación (7.3), se debe cumplir

$$b - \frac{b}{x_1^*} + \frac{bu^*}{x_1^*} = -\left[\frac{b}{x_1^*} + c\right] (1 - 2x_1^* - u^*) - a - cu^*$$

Después de hacer algo de álgebra y de agrupar términos se llega a

$$b - c - a + 2cx_1^*(t) = 0 \quad (7.14)$$

Si  $c = 0$ , entonces el caso singular solo puede ocurrir para valores especiales de los parámetros ( $b = a$ ). Suponemos que  $c = 0$  entonces de (7.14)

$$x_1^*(t) = \frac{a + c - b}{2c} = \frac{a - b}{2c} + \frac{c}{2c} = \frac{a - b}{2c} + \frac{1}{2} \quad (7.15)$$

Entonces, el control singular (ecuaciones (7.12)-(7.14)) requiere que

$$x_1^*(t) = x^s = \text{const}$$

. Usando las ecuaciones de la dinámica, ecuación (7.1) y despejando a  $u^*(t)$ , se tiene

$$u^*(t) = u^s = \frac{1}{2} + \frac{b-a}{2c} \quad (7.16)$$

Por lo tanto, a lo largo de un arco singular,  $x_1$  es constante (igual a  $x^s$ ) y el control también es constante (igual a  $u^s$ ). Esto es posible y significativo solamente si  $x^s$  es positivo, lo cual implica que, de (7.15)

$$\frac{a-b}{c} + 1 > 0 \quad (7.17)$$

y si  $u^s$  está en el conjunto de valores de controles admisibles

$$0 < \frac{a-b}{c} + 1 \leq 2U \quad (7.18)$$

Si las condiciones (7.17) o (7.18) no se cumplen, entonces no puede ocurrir una singularidad. En este caso, el control es máximo o nulo y no se puede hacer ninguna declaración general acerca del número posible de cambios. Si las condiciones (7.17) y (7.18) se cumplen, entonces es posible el control singular. Nuevamente, no se hacen declaraciones generales en torno de las secuencias de cambio.

#### 7.1.4. Caso Especial

Aquí se considera el problema con valores de los parámetros  $a = 0$ ,  $b = 0$ ,  $c = -1$ ,  $U = 1$ . Con estos valores, la función costo es negativa y proporcional al número de peces capturados, i.e.

$$J = \int_0^{t_f} (-x_1 u) dt$$

Esta es la misma función costo considerada por Goh [ref.4].

Del análisis general se obtiene:

$$u^s = \frac{1}{2} \text{ de la ecuación (7.16) con } a = b = 0$$

$$x^s = \frac{1}{2} \text{ de la ecuación (7.15) con } a = b = 0$$

$$\lambda_1^s = -1 \text{ de la ecuación (7.10) con } b = 0 \text{ y } c = -1.$$

Un candidato a solución deberá ser construido trabajando desde la variedad terminal dirigida hacia atrás.

Si  $\lambda_1(t_f)$  es cero, entonces  $u^*(t)$  debe ser igual a  $U$ . La terminación ocurre con esfuerzo de cosecha a su máximo valor. Usando el control conocido sobre un arco terminal, ecuación (7.18), y escribiendo  $x_1^*(t_f) = x_f$ , vemos que la integración y las ecuaciones adjuntas son simples. El sistema es

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1 - x_1^2 - x_1 u^*; & \dot{x}_2 &= 1 \\ \dot{\lambda}_1 &= -\lambda_1[1 - 2x_1^* - u^*] + \lambda_0[a + cu^*] \\ \dot{\lambda}_2 &= 0\end{aligned}$$

Si  $u^* = U = 1$ ,  $a = 0$ ,  $c = -1$  y  $\lambda_0 = 1$ , el sistema se transforma en

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_1^2; & \dot{x}_2 &= 1 \\ \dot{\lambda}_1 &= \lambda_1[2x_1^*] + 1 \\ \dot{\lambda}_2 &= 0\end{aligned}$$

Por otro lado si hacemos el siguiente cambio  $\tau = T - t$  entonces  $d(\tau) = -dt$  y

$$\frac{dx_1}{dt} = -\frac{dx_1}{d\tau}$$

además,  $U = 1$  entonces lo que se tiene que resolver es

$$d\tau = \frac{dx_1}{x_1^2}$$

que es equivalente a

$$d\tau = x_1^{-2} dx_1$$

Integrando de un cierto tiempo final a un cierto tiempo  $\tau$

$$\int_{x_f}^x x_1^{-2} dx_1 = \int_{\tau_f}^{\tau} d\tau$$

resolviendo la integral y después de hacer algunos cálculos,

$$\tau - \tau_f = \frac{x_1 - x_f}{x_1 x_f}$$

Pero si  $\tau_f = 0$ , la anterior ecuación se transforma en

$$\tau = \frac{x_1 - x_f}{x_1 x_f}$$

Que despejando a  $x_1$  se tiene

$$\tau x_1 x_f = x_1 - x_f$$

$$x_1 = \frac{x_f}{1 - x_f \tau} \quad (7.19)$$

Ahora tenemos que encontrar el valor de  $\lambda_1$ . Para ello sabemos que

$$\dot{\lambda}_1 = 2x_1 \lambda_1 + 1$$

por lo que sabiendo que  $\tau = T - t$  se tiene

$$\frac{d\lambda_1}{dt} = -\frac{d\lambda_1}{d\tau} = 2x_1 \lambda_1 + 1$$

o lo que es equivalente a

$$\frac{d\lambda_1}{d\tau} = -2x_1 \lambda_1 - 1$$

Para resolver esta ecuación diferencial multipliquemos por  $\omega(\tau)$  ambos lados de la anterior ecuación, quedando

$$\omega \frac{d\lambda_1}{d\tau} + 2x_1 \lambda_1 \omega = -\omega \quad (7.20)$$

Para encontrar a  $\omega(t)$ , supondremos que ésta cumple con

$$\frac{d(\omega \lambda_1)}{d\tau} = \omega \frac{d\lambda_1}{d\tau} + \lambda_1 \frac{d\omega}{d\tau} \quad (7.21)$$

Entonces estas dos últimas ecuaciones, ((7.20) y (7.21)), deben ser iguales, de donde se tiene que cumplir

$$\omega \frac{d\lambda_1}{d\tau} + 2x_1 \lambda_1 \omega = \omega \frac{d\lambda_1}{d\tau} + \lambda_1 \frac{d\omega}{d\tau}$$

De lo cual se obtiene

$$2x_1 d\tau = \frac{d\omega}{\omega}$$

Pero además sabemos que

$$x_1 = \frac{x_f}{1 - x_f \tau_f}$$

entonces sustituyendo e integrando se llega a

$$-2\ln(1 - x_f \tau) = \ln(\omega)$$

De lo anterior tenemos

$$\omega = (1 - x_f \tau)^{-2}$$

Con lo que resulta

$$\frac{d(\lambda_1 \omega)}{d\tau} = -(1 - x_f \tau)^{-2}$$

entonces

$$\frac{d(\omega \lambda_1)}{d\tau} = \frac{d[\lambda_1(1 - x_f \tau)^{-2}]}{d\tau} = -(1 - x_f \tau)^{-2}$$

Integrando y sabiendo que  $\tau_f = 0$ , se tiene

$$\lambda_1(1 - x_f \tau)^{-2} = - \left[ \frac{1}{x_f} \right] \left[ \frac{1}{1 - x_f \tau} - 1 \right] = - \frac{\tau}{1 - x_f \tau}$$

Haciendo algunos cálculos se llega a

$$\lambda_1 = - \frac{\tau}{1 - x_f \tau} (1 - x_f \tau)^2 = -\tau(1 - x_f \tau)$$

por lo que el valor de  $\lambda_1$  de esta última ecuación es

$$\lambda_1 = -\tau(1 - x_f \tau) \tag{7.22}$$

De acuerdo con la condición de optimización (7.11), el control deberá permanecer en su valor hasta el valor  $\tau$  (digamos  $\tau^{s\omega}$ ) tal que  $\lambda_1(\tau^{s\omega}) = -1$ .

De la ecuación (7.22) y si  $\lambda_1(\tau^{s\omega}) = -1$ , se tiene

$$-1 = -\tau + x_f \tau^2$$

entonces se tiene

$$x_f \tau^2 - \tau + 1 = 0$$

que es una ecuación de segundo grado en  $\tau$ , y como sabemos, la solución es

$$\tau^{s\omega} = \frac{1 \pm [1 - 4x_f]^{\frac{1}{2}}}{2x_f}$$

por lo que si sólo nos fijamos en el signo negativo

$$\tau = \frac{1 - [1 - 4x_f]^{\frac{1}{2}}}{2x_f} \quad (7.23)$$

Para que  $\tau$  sea un número real, el término que está dentro del radical tiene que cumplir

$$1 - 4x_f \geq 0$$

entonces

$$x_f \leq \frac{1}{4}$$

Por tanto, el candidato a control solo cambia si  $x_f \leq \frac{1}{4}$ .

Si consideramos que  $x_f = \frac{1}{4}$  entonces, sustituyendo en la solución para  $\tau$  de la ecuación cuadrática, tenemos que

$$\tau = \frac{1 - [1 - 4(\frac{1}{4})]^{\frac{1}{2}}}{2(\frac{1}{4})}$$

de donde se obtiene

$$\tau = 2$$

y por la ecuación (7.19)

$$x_1^* = \frac{1}{2}$$

Con la población en un cuarto de su valor de equilibrio no explotada, el candidato a control puede ser singular después de dos veces la unidad de terminación, ( $\tau > 2$  o  $\tau < T - 2$ ). Si se considera la desigualdad estricta  $x_f < \frac{1}{4}$ , se sigue que

$$1 < \tau^{s\omega} < 2 \quad (7.24)$$

y se tiene que

$$x_1^*(\tau^{s\omega}) = 1 - \frac{1}{\tau^{s\omega}} < \frac{1}{2}$$

Y el candidato a control debe cambiar desde la unidad hasta el valor cero. Aún más, puede verificarse que, una vez que el control cambia al cero (i.e. una vez más  $\lambda_1$  se hace menor que  $-1$ ) no vuelve a cambiar (esto es  $\lambda_1$  se queda menor a  $-1$ ). Para ver esto, reescribimos la condición necesaria (7.3) con  $u = 0$

$$\dot{\lambda}_1 = -\lambda_1(1 - 2x_1^*)$$

Pero como  $dt = -d\tau$  tenemos

$$\frac{d\lambda_1(\tau)}{d\tau} = \lambda_1(\tau)(1 - 2x_1^*)$$

Por tanto, con  $\lambda_1(\tau)$  negativa y si  $x_1^*(\tau)$  menor que un medio,  $\lambda_1(\tau)$  decrece en el sentido retro. En particular, para  $x^*(t)$  sobre la curva de cambio  $\Gamma_1$ ,  $x_1^*(\tau) < \frac{1}{2}$  y  $\lambda_1(\tau) = -1$  tal que la derivada es negativa y  $\lambda_1(\tau^{s\omega+}) < -1$ , implica que  $u_1(\tau^{s\omega+}) = 0$ .

En cuanto el cambio ha ocurrido el sistema de ecuaciones (7.1) se transforma en

$$\frac{dx_1^*(\tau)}{d\tau} = x_1^*(\tau)[x_1^*(\tau) - 1]$$

Así que  $x_1^*(\tau)$  decrece, y en particular permanece por debajo de un medio.

El cambio está dado por

$$\Gamma_1 = (x_1, t)/x_1 = 1 - \frac{1}{\tau}; 1 < \tau < 2$$

Hasta ahora el candidato al programa de control se muestra en la Figura 7.1. La curva  $\Gamma_1$  es el cambio discutido arriba.  $\Gamma_2$  es la trayectoria con control cero que intersecta a  $\Gamma_1$  en el punto  $(\frac{1}{2}, 2)$ , esto es  $(x^s, \tau^s)$ ; entonces

$$\Gamma_2 = (x_1, \tau)/x_1[1 - \frac{1}{2}\exp(\tau - 2)] - 1 = 0; \tau \geq 2$$

$\Gamma_3$  es el arco singular dado por

$$\Gamma_3 = (x_1, \tau)/x_1 = \frac{1}{2}; \tau \geq 2$$

Finalmente,  $\Gamma_4$  es una parte de la trayectoria bajo control máximo con  $x_f = \frac{1}{4}$ . De (7.19) se tiene

$$\Gamma_4 = (x_1, \tau)/x_1(4 - \tau) - 1 = 0; 2 \leq \tau < 4$$

Se tienen que deducir los candidatos a control en la Región II (entre  $\Gamma_3$  y  $\Gamma_4$ ) y en la Región III (entre  $\Gamma_2$  y  $\Gamma_4$ ). El vacío es llenado si uno observa que, a lo largo del arco singular  $\Gamma_3$ , las condiciones necesarias se cumplen en cualquier punto si el control es cambiado a cero o a uno. Por tanto, en el sentido retro, las trayectorias a candidatos salen de  $\Gamma_3$ . El programa completo se muestra en la Figura 7.1. Líneas de costo constante se muestran como líneas punteadas. De la Figura 7.1, se ve que las trayectorias con punto inicial en las Regiones II y III deberán tener alguna parte sobre el arco singular. Si el intervalo de tiempo es suficientemente grande, y hay un número razonable de peces al inicio, entonces la mayor parte del tiempo los controles son singulares (y constantes). La optimización de tales esquemas son (casi) transparentes si uno examina el sistema de ecuaciones sin disturbios

$$\dot{x} = x(1 - x)$$

Visto como una optimización de parámetros,  $\dot{x}$  es maximizado (con respecto a  $x$ ) por  $x = \frac{1}{2}$ . Los peces son más eficientes en la reproducción cuando están en un medio de su número de equilibrio. Bajo control, se quitan los peces a una tasa  $ux$ . Claramente, para quitar peces a una tasa más rápida, se debe tener  $x = \frac{1}{2}$ . Del sistema (7.1), se encuentra que manteniendo a  $x$  constante en  $x = \frac{1}{2}$  se debe usar  $u = \frac{1}{2}$ .

### 7.1.5. Conclusiones

Se ha mostrado que la política de control delineada en la Figura 7.1 es óptima para los valores de los parámetros particulares escogidos. Se ha dado una discusión sobre una interpretación del arco singular  $x_1 = \frac{1}{2}$  como un estado eficiente para los peces. Si se escoge  $U < \frac{1}{2}$  manteniendo los parámetros del costo como los dados, el arco singular no se puede producir. Este caso es más simple que el que se mostró aquí, pero puede ser tratado de una manera similar. A la pregunta general sobre la utilidad de la teoría de control óptimo para tales sistemas, aquí no se le da respuesta. Sin embargo se reiteró la posición de que uno puede aprender mucho trabajando con modelos simples.

## 7.2. Figuras

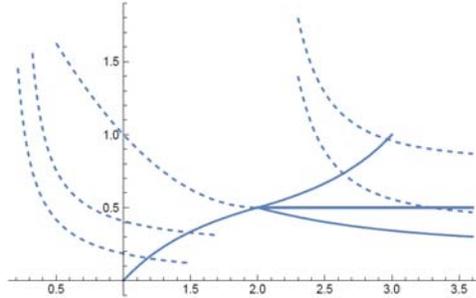


Figura 7.1: Candidato a programa de control óptimo parcialmente completo.

# Bibliografía

- [1] Elsgotz L. *Ecuaciones Diferenciales y Cálculo Variacional* Segunda Edición, Editorial MIR, Moscú 1977, pp. 285-333, 1977
- [2] Wendell H. Fleming, Raymond W. Rishel. *Deterministic and stochastic optimal control*, Springer-Verlag, Bertin Heidelberg New York 1975, cap'tulos 1,2,3.
- [3] S. Barnett and R. G. Cameron, *Introduction to Mathematical Control Theory*, Second Edition Clarendon Press- Oxford 1985, cap'tulos 1 y 6.
- [4] Morris W. Hirsch and Stephen Smale, *Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra*. ACADEMIC PRESS COLLEGE DIVISION, PP. 255-275, 1974.
- [5] K. E. F.Watt, *Ecology and Resource Management*, McGraw-Hill. New York (1968).
- [6] G. Leitmann, *Rocket trajectory optimization*, Appl. Mech. Rev. 18, 345-350 (1965).
- [7] T. Royama, *A comparative study of models for predation and parasitism*, Res. Pop. Eco., Suppl. No. 1, 1-90 (1971).
- [8] G. Gause, *The Struggle for Existence*, Williams and Wilkins, Baltimore (1934), (Repr. 1971, Dover Publishing).
- [9] L. G. Slobodkin, *Growth and Regulation of Animal Population*, Holt, Rinehart and Winston, New York (1962).

- [10] R. L. Metcalf and J. N. Pitts, *Outline of environmental sciences in Advances in Environmental Sciences* (J. N. Pitts and R. L. Metcalf Eds.) 1, John Wiley and Sons, New York (1969, pp 1-24).
- [11] B. S. Goh, *Optimal control of a fish resource*, Malayan Scientist 5, 65-70 (1969).
- [12] N. W. Moore, *A synopsis of the pesticide problema in Advance in Ecology Research* (J. B. Cragg, Ed.) 4 (1967), pp 75-126.
- [13] P. DeBach, *Biological Control of Insect Pest and Weeds*, Chapman and Hall, London (1964).
- [14] N. W. Hussey and L. Bravenboer, *Control of pests in glass-house culture by the introduction of natural enemies in Biological Control* (C. B. Huffaker, ed.) Plenum Press, New York (1971), pp 195-216.
- [15] F. D. Parker, *Management of pest population by manipulating densities of both host parasites throug periodic releases in Biological Control* (C. B. Huffaker, ed.) Plenum Press, New York, pp 365-376.
- [16] L. R. Clark, *The Ecology of Insect Population in Theory and Practice*, Methuen, London (1967).
- [17] G. Leitmann, *An Introduction to Optimal Control*, McGraw-Hill, New York (1966)
- [18] T. L. Vincent, and B. S. Goh, *Terminal normality and transversality condition*, J. Optimization Theory and Appl, 9, 1, 32-50 (1972).
- [19] H. J. Kelley et al., *Singular Extremals, in Topics in Optimization* (G. Leitmann, Ed.) Academic, New York (1967), pp 67-101.
- [20] B. S. Goh, *Necessary conditions for singular extremals involving multiple control variables*, J. Contr. Soc. of Ind. And Appl. Matjhs. 4, 716-31 (1966).
- [21] E. J. McShane, *On the second variation in certain abnormal problems in the calculus of variations*, Amer. J. Math. 63, 516-530 (1941).

- [22] S. J. Holt, *Marine fisheries and World food supplies, in The Man/ Food Equations* (F. Sleete and A. Bourne, Eds), Academic, London, 1975, pp. 77-96.
- [23] J. A. Gulland, *The Food Resources of the Ocean*, Fishing News (Books), London, 1971.
- [24] FAO, *Expanding the utilization of Marine fishery resources for human consumption*, FAO Fish. Rep. No. 175, 1975, 47 pp. *laws R. M. Laws, Seals and whales of the Southern Ocean*, Philos. Trans. Roy. Soc. London B279:81-96 (1977)
- [25] J. L. Bengtson, *Review of Information Regarding the Conservation of Living Resources of the Antarctic Marine Ecosystem*, U. S. Marine Mammal Commission, Washington, 1978, 148 pp.
- [26] R. M. May, J. R. Beddington, C. W. Clark, S. J. Holt, and R. M. Laws, *Management of multispecies fisheries*, Science 205:267-277 (1979)
- [27] C. W. Clark, *Mathematical Bioeconomics*, Wiley, New York, 1976. *larkin P. A. Larkin, Interspecific competition and exploitation*, J. Fish. Res. Board Can. 20:349-356 (1963)
- [28] P. A. Larkin, *Exploitation in a type of predator- prey relationship*. J. Fish. Res. Board Can. 23:349-356 (1966)
- [29] J. W. Horwood, *Interactive fisheries: a two species Schaefer model*. Int. Comm. Northw. Atlant. Fish. Sel. Pap. 1:151-155 (1976)
- [30] J. G. Pope, *The effect of biological interactions on the theory of mixed fisheries*, Int. Comm. Northw. Atlant. Fish. Sel. Pap. 1:157-162 (1976)
- [31] P. Yodzis, *The effects of harvesting on competitive Systems*, Bull. Math. Biology 38:97-109 (1976)
- [32] K. Shirakihara and S. Tanaka, *Two fish species competition model with nonlinear interactions and equilibrium catches*, Res. Pop. Ecol. 20:123-140 (1978)

- [33] W. Silvert and W. R. Smith, *Optimal exploitation of a multispecies community*, Math. Biosci. 33:121-134 (1977)
- [34] W. M. Getz, *On harvesting two competing populations*, CSIR Tech. Rep. TWISK 7, NRIMS Pretoria, 1979, 27 pp.
- [35] J. L. Aron, *Harvesting a protected population in an uncertain environment*, Math. Biosci. 46:197-205 (1979)
- [36] B. S. Goh, *The usefulness of optima, control theory to ecological problems*, in, *Theoretical Systems Ecology* (E. Halfon, Ed), Academic, New York, 1979 pp. 385-399.
- [37] R. M. May, *Stability and Complexity in Model Ecosystems* (2nd ed.), Princeton U.P., Princeton, 1974
- [38] R. M. May, J. R. Beddington, J. W. Horwood, and J.G. Shepherd, *Exploiting natural populations in an uncertain World*, Math. Biosci. 42:219-252 (1978)
- [39] F. Brauer and A. C. Soudak, *Stability regions and transition phenomena for harvested predator-prey Systems*, J. Math. Biol. 7:319-337 (1979)
- [40] F. Brauer and A. C. Soudak, *Stability regions in predator-prey Systems with constant-rate prey harvesting*, J. Math. Biol. 8:55-71 (1979)
- [41] J. R. Beddington and J. G. Cooke, *Harvesting from a predator-prey system, in preparation.*
- [42] F. B. Christiansen and T. M. Frenchel, *Theories of Population in Biological Communities*, Springer, New York 1977
- [43] J. W. Horwood, *Management and models of marine multispecies complexes*, in *Dynamics in Large Mammals* (C. Fowler and T. Smith, Eds), Wiley, New York 1979
- [44] R. M. May (Ed), *Theoretical Ecology: Principles and Applications*, Blackwell, Oxford and Saunders, Philadelphia, 1976.

- [45] P. M. Morse and H. Feshbach, *Methods of Theoretical Physics, Vol. 1*, McGraw-Hill, New York 1953.
- [46] R. M. May, *Thresholds and breakpoints: ecosystems with a multiplicity of stable states*, Nature 269:471-477 (1977)
- [47] M. R. Clarke, *A review of the systematics and ecology of oceanic squids*, Adv. Mar. Biol. 4:91-300 (1966)
- [48] M. R. Clarke, *Cephalopoda in the diet of sperm whales of the Southern Hemisphere and their bearing on sperm whale biology*, Discovery Rep., to appear.
- [49] Intriligator, M. D., *Mathematical Optimization and Economic Theory*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1971
- [50] Shell, K., *Applications of Pontriagin's Maximum Principle to Economics, Mathematical Systems Theory and Economics*, Edited by H. W. Kuhn and G. P. Szego, Springer-Verlag, Berlin, Germany, 1969
- [51] Ho, Y. C. *Control Theory, Applied Mathematics, and Engineering, Journal of Dynamics Systems, Measurement, and Control*, ASME Transactions Vol. 93, Series G, pp. 131-133, 1971
- [52] Goh, B. S. *Optimal Control of a Fish Resource*, Malayan Scientist, Vol. 5, pp. 65-70, 1969/70
- [53] Vincent, T. L. *Pest Management Programs via Optimal Control Theory*, Proceedings of the Joint Automatic Control Conference, Stanford, California, 1972.
- [54] Spear, R. C. And WET, E. *Dynamic Aspects of Environmental Toxicology, Journal of Dynamics Systems, Measurements, and Control*, ASME Transactions, Series G. Vol. 94, pp 114-118, 1972
- [55] Taylor, H. M., *Some Models in Epidemic Control*, Mathematical Biosciences, Vol. 3, pp. 383-378, 1968

- [56] Verhulst, P. F., *Recherches Mathématiques sur la Loi d'Accroissement de la Population*, Mémoires de l'Académie Royale de Bruxelles, Vol. 43, pp. 1-58, 1884
- [57] Pearl, R., *Studies in Human Biology*, Williams and Wilkins, New York, New York, 1924
- [58] Leitman, G., *Introduction to Optimal Control*, McGraw-Hill Book Company, New York, New York, 1966
- [59] Leitmann, G., *Sufficiency Theory for Optimal Control*, Journal of Optimization Theory and Applications, Vol. 2, pp. 285-292 1968.
- [60] Robert M. May, John R. Beddington, Colin W. Clark, Sidney J. Holt, Richard M. Laws., *Management of Multispecies Fisheries*, Science Volume 205, Number 4403, 20 July 1979.
- [61] J.R. Beddington and R. M. May., *Maximum Sustainable in Systems Subject to Harvesting at More than One Trophic Level*, Mathematical Biosciences 51:261 (1980).
- [62] Bean San Goh, George Leitmann, Thomas L. Vincent., *Optimal Control of a Prey-Predator System*, American Elsevier Publishing Company, Inc 1974.
- [63] T. L. Vincent, E. M. Cliff, B. S. Goh., *Optimal Direct Control Programs for a Prey-Predator System*, Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control March 1974.
- [64] E. M. Cliff and T. L. Vincent., *An Optimal Policy for a Fish Harvest*, Journal of Optimization Theory and Applications, Vol. 12, No. 5, 1973.