



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
POSGRADO EN CIENCIAS FÍSICAS
INSTITUTO DE CIENCIAS NUCLEARES

**EQUILIBRIO Y ESTABILIDAD DE MEMBRANAS BAJO FUERZAS
EXTERNAS**

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN CIENCIAS (FÍSICA)

PRESENTA:
GREGORIO MANRIQUE RODRÍGUEZ

TUTOR PRINCIPAL:
DR. JEMAL JANER GUVEN SEERY
INSTITUTO DE CIENCIAS NUCLEARES, UNAM

MIEMBROS DEL COMITÉ TUTOR:
DR. ANTONMARIA MINZONI ALESSIO
INSTITUTO DE INVESTIGACIONES EN MATEMÁTICAS APLICADAS Y EN
SISTEMAS, UNAM

DR. MARCELO SALGADO RODRÍGUEZ
INSTITUTO DE CIENCIAS NUCLEARES, UNAM

MÉXICO, DISTRITO FEDERAL - NOVIEMBRE 2015



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Agradecimientos

Para cumplir con los protocolos correspondientes, agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT) por el apoyo financiero que recibí, a través de una beca de maestría con número de becario 291024, además, de la beca otorgada por medio del proyecto Morfología de las membranas fluidas con clave 180901.

Ahora toca ponerme algo cursi, así que agradezco a todas las personas que estuvieron conmigo a lo largo de esta etapa, dentro de estas personas quiero mencionar, a mis compañeros de cubículo en el ICF, Adriana, Carlos “El Pseudoestudiante Mayor”, Ricardo y ya de paso Susana, los que hicieron más amena mi estancia en el posgrado. También, a mi compañera de generación, Mayra, que me apoyó durante el curso propedéutico, cuando yo apenas daba mis primeros pasos en esta área de la física. Otro que no puede faltar es mi compañero de carrera Braulio, ya que las charlas con él siempre fueron muy productivas para mí. Tampoco, podrían faltar todos mis compañeros del Pelonchas Team, ya que durante este periodo compartieron conmigo la alegría de algunos campeonatos. No puedo evitar mencionar a mis compañeros del grupo de Procesos Estocásticos y Dinámica Aplicada (PEDA), Manuel, Luis, Jorge Iván, Iván, Dan, Fernando, Pimentel, quienes hicieron de las reuniones de trabajo algo memorable.

Concluir esta etapa no hubiera sido posible, sin mi asesor Jemal Guven, a quien también quiero agradecer por la oportunidad que me brindó de trabajar con él, así como por su ayuda tanto en lo académico como en lo personal.

También, agradezco a los miembros del laboratorio de sistemas dinámicos del Centro de Investigación en Ciencias de la UAEM, por haberme prestado sus instalaciones para llevar a cabo el experimento reportado en esta tesis.

Resumen

En esta tesis, estudiamos las formas de equilibrio que se presentan en membranas inextensibles, cuando hacemos una deformación de éstas. Además, estas membranas se encuentran bajo una fuerza externa, como lo es la gravedad, también, analizamos su estabilidad. Este estudio lo hacemos desde un punto de vista geométrico, es decir, consideramos a la membrana como una superficie parametrizada. Por otra parte, para poder determinar los equilibrios de la membrana, implementamos una constricción isométrica en nuestra superficie, misma, que es equivalente al hecho que la membrana es inextensible. Una vez considerado todo lo anterior, procedemos a realizar la primera variación de la energía potencial gravitacional, para ello empleamos como herramienta el cálculo de variaciones, así el método de multiplicadores de Lagrange, nos permite conocer las ecuaciones de Euler-Lagrange, que determinan los equilibrios, además que estas ecuaciones nos relacionan los esfuerzos en la membrana con la geometría de ésta.

Esta teoría la asociamos a construcciones arquitectónicas con ciertas geometrías, como son: arcos catenarios, cúpulas esféricas y torres cilíndricas. En cada uno de estos casos, determinamos el tipo de esfuerzos que presentan estas estructuras, cuando están en equilibrio. El caso del arco catenario es un problema clásico, sin embargo, nosotros lo atacamos desde otro marco de trabajo, para cúpulas esféricas cerradas, verificamos de una forma más eficiente que el esfuerzo sobre los meridianos se encuentra bajo compresión en todo punto, mientras que, para el esfuerzo sobre los paralelos (“esfuerzo de aro”), determinamos el punto crítico, donde éste cambia de tensión a compresión. En lo que respecta a torres cilíndricas, estudiamos 3 tipos de torres, aunque, nos enfocamos con mayor detalle en una torre inclinada, similar en forma a la torre de Pisa, para este tipo de torres, encontramos en que regiones de ésta se pueden generar grietas verticales u horizontales que corresponden al esfuerzo de aro y meridional, respectivamente, conforme variamos tanto el ángulo de inclinación como la razón de aspecto de la estructura.

La estabilidad sólo la estudiamos para el arco catenario, para lo cual se requiere hacer una segunda variación de la energía, sin embargo, si sólo consideramos la energía potencial, tendremos que nuestro arco catenario siempre es inestable, por lo que es necesario añadir una energía que ayude a estabilizar el arco catenario. La energía que se usa se debe al doblamiento del arco, para la cual se considera que el arco sufre una curvatura espontánea. Una vez hecha la segunda variación de la energía, realizamos un análisis de Fourier, con el cual determinamos cuales son los estados de energía que estabilizan el arco más rápido, conforme variamos un parámetro asociado a la rigidez del arco catenario. Además, que determinamos cual es la rigidez crítica para arcos con distintas razones de aspecto.

Abstract

In this thesis, we study the shapes of equilibrium that occur in unstretchable membranes, when we make a deformation thereof. Moreover, these membranes are under external force, as it is gravity, also we analyze its stability. This study is done from a geometric point of view, i.e., we consider the membrane as a parametrized surface. On the other hand, to determine the equilibrium of the membrane, we implemented an isometric constraint, in our surface, which is equivalent to the fact that, the membrane is unstretchable. Once considered the above, we proceed to make the first variation of the gravitational potential energy, we use it as a tool for the calculus of variations, and the method of Lagrange multipliers, give us access to the Euler-Lagrange equations that determine the equilibriums, furthermore that these equations connect the stress in the membrane with the geometry of the membrane.

This theory is associated to architectural constructions, with certain geometries, such as: catenary arches, spherical domes and cylindrical towers. In each one of these cases, we determine the type of stress, that have these structures, when they are in equilibrium. The case of catenary arch is a classic problem, however, we will attack from another framework, for spherical domes closed, we verify more efficiently so that the stress on the meridians is under compression at every point, while for the stress on the parallel ('hoop stress'), we determine the critical point where it changes of tension to compression. With respect to cylindrical towers, we studied three types of towers, although we focus in more detail on an inclined one, similar in shape to the tower of Pisa, for these kind towers, we found the regions, where can generate vertical or horizontal cracks that correspond to the hoop stress and meridional stress, respectively, as we change both the angle and the aspect ratio of the structure.

The stability study is done only for the catenary arch, for which it is required to do a second variation of energy, but if we only consider the potential energy, we will have that our catenary arch is always unstable, so it is necessary to add energy to help stabilize the catenary arch. The energy used is due to the bending arch, for which it is considered that the arch experience a spontaneous curvature. Once made the second energy variation, we perform a Fourier analysis, with which we determine what are the energy states that stabilize the arch fastest, as we vary a parameter associated with the rigidity of the catenary arch. Moreover, we determine which is the critical rigidity for archs wit different aspect ratios.

Índice general

Introducción	1
1. Superficies delgadas con energía potencial gravitacional	5
1.1. Energía potencial	5
1.2. Equilibrios de una membrana con energía potencial	5
1.3. Condiciones de frontera	8
2. Arco catenario de Gaudí	10
2.1. Equilibrio del arco catenario	11
2.2. Estabilidad del arco catenario	12
2.2.1. Variación de la curvatura de Frenet bajo isometría	13
2.2.2. Segunda variación de la energía potencial	14
2.2.3. Segunda variación de la energía	15
2.2.4. Estados propios pares	16
2.2.5. Estados impares contra pares	20
2.3. Experimento de estabilidad del arco catenario	21
3. Superficies axialmente simétricas	23
3.1. Torres Cilíndricas	25
3.1.1. Torre cilíndrica vertical de altura constante	25
3.1.2. Torre cilíndrica vertical con un corte de ángulo β en la cima	26
3.1.3. Torre inclinada un ángulo α (“Torre de Pisa”)	27
3.2. Domo hemisférico	32
4. Conclusiones	37
A. Geometría diferencial de una membrana	39
A.1. Vectores tangentes y normal	39
A.2. Tensor métrico y tensor de curvatura extrínseca	40
A.3. Simbolos de Christoffel y derivada covariante	40
A.4. Membranas isométricas a una geometría cilíndrica	41

B. Variaciones de la geometría intrínseca ante deformaciones	43
B.1. Variación del tensor métrico	43
B.2. Variación del diferencial de área	43
C. Método de variables auxiliares	45
D. Operadores de la segunda variación del arco catenario	48
E. Ortonormalización de bases del arco catenario	50
F. Símbolos de Christoffel y derivadas covariantes en geometría axialmente simétrica	53
F.1. Símbolos de Christoffel	53
F.2. Derivada covariante y sus proyecciones	53

Introducción

“Quería tener una bomba de agua en mi jardín: Euler calculó la fuerza necesaria de las ruedas para elevar el agua a un depósito, desde el que caería después a través de canalizaciones para finalmente manar en el palacio de Sanssouci. Mi molino fue construido de forma geométrica y no podía elevar una bocanada de agua hasta más allá de cincuenta pasos hacia la reserva. ¡Vanidad de las vanidades! ¡Vanidad de la geometría!”

Federico II, el rey masón [Ald27].

El estudio de deformaciones (propiedades elásticas) de materiales es un problema clásico que se ha estudiado desde hace algunos siglos por gente como Leonardo da Vinci, quien a finales del siglo XV y principios del siglo XVI, motivado por la arquitectura, trató de comprender desde un punto de vista científico la flexión de vigas. Más adelante Galileo Galilei abordó el mismo problema sin conseguir nada. Posteriormente, en el siglo XVII (1660) Robert Hooke formuló la ley que establece que el alargamiento unitario que experimenta un material elástico es directamente proporcional a la fuerza aplicada sobre el mismo, ley que lleva su nombre “Ley de Hooke”, además, esta ley fue inicialmente publicada en forma de anagrama y más adelante se publicó la solución de éste en [Hoo78]. Este resultado permitió que casi un siglo después, alrededor de 1750, Leonhard Euler y Daniel Bernoulli solucionaran el problema sobre deformaciones de vigas al encontrar una ecuación que describe la relación entre la deflexión de la viga y la carga aplicada sobre esta [Tim53]. Una vez solucionado el problema desde una aproximación unidimensional, el reto era explicar deformaciones en superficies y tardó hasta la segunda década del siglo XIX encontrar una solución. La persona que atacó dicho problema fue Marie-Sophie Germain, quien además fue la primera en relacionar la geometría con la elasticidad al asociar el cuadrado de la curvatura de una superficie elástica con su energía. El contexto era estudiar vibraciones en una superficie [CL05]. A finales del siglo XIX y durante el siglo XX, apreciaron trabajos similares sobre deformaciones de materiales como los de John William Strutt, tercer barón de Rayleigh, quien en [Ray90] describe las vibraciones de campanas, los realizados por Max Born en su tesis doctoral de matemáticas en la cual estudia la estabilidad de una elástica. Stepan Timoshenko, más tarde, estudia a fondo las deformaciones como se aprecia en su libro [Tim30]. Sin embargo, fue Thomas Willmore quien retoma las ideas de Germain, lo que ha generado en los últimos años la teoría de que las propiedades elásticas del material en varios casos pueden sólo depender de la geometría de éste. En particular, la geometría diferencial ha tomado mucha relevancia para estudiar y describir varios sistemas físicos no sólo de forma teórica si no también de forma experimental como en [LFR12]. De igual manera ha sido utilizada para describir sistemas biológicos, tales como el retículo endoplasmático [GHV14]. Otros sistemas estudiados con geometría diferencial son membranas fluidas

[Des15, KM12], conos de papel [GM08] e incluso simple tela [Pip84] o pliegues de tela colgando [CMP04]. Otra área donde ha empezado a tomar gran importancia la geometría diferencial es la arquitectura [ABVW14, VHWP12]. Todos los estudios mencionados anteriormente se llevan a cabo tratando a cada sistema como una superficie delgada y asociando los invariantes geométricos de ésta con un funcional de energía.

Enfocando ahora hacia la arquitectura, posiblemente la primera interacción formal y exitosa de las matemáticas y la física con la arquitectura fue generada por Jakob Bernoulli quien propuso el reto de dar la ecuación de la curva que describe una cadena que cuelga de sus dos extremos, problema que fue resuelto por Johann Bernoulli, Christiaan Huygens y Gottfried Leibniz, siendo Huygens el que denominó a esta curva con el nombre de catenaria. Pero lo que permitió relacionar la catenaria con la arquitectura fue uno de los trabajos hechos por Robert Hooke quien demostró que esta familia de curvas catenarias minimizan la energía potencial ante tensión. Recíprocamente, al invertir la curva el problema de tensión pasa a ser de compresión, resultados que fueron aplicados por Hooke y Christopher Wren en la reconstrucción de la catedral de San Pablo (figura 1 a) en Londres, Inglaterra, métodos que dos siglos después fueron explotados por Antoni Gaudí, por ejemplo, en las bóvedas de Casa Milà (figura 1 b). Hoy en día la mayoría de los arquitectos e ingenieros realizan sus estudios de equilibrio y estabilidad de estructuras utilizando el balance de fuerzas a través de un método llamado funicular, por ejemplo [Hey77, BL14]. Tal método consiste en aproximar una curva catenaria por medio del trazado de una línea poligonal, cuyos vértices recaen sobre las líneas direccionales donde se ejerce una de las fuerzas sobre la estructura a analizar y los ángulos que se forman en cada vértice dependen de la magnitud de la fuerza en cuestión. La línea poligonal (polígono funicular) no es única, pero una vez que se ha trazado una, se procede a realizar un balance de fuerzas. Sin embargo, nos podemos dar cuenta que entre más compleja sea la estructura a estudiar el método funicular se vuelve más complicado y laborioso.



(a) Catedral de San Pablo.

(b) Bóvedas de Casa Milà

Figura 1: a) *St Paul's Cathedral* (Fotografía). ©English Heritage, DP073155. b) Ott, M. (Fotógrafo . Recuperada de

<http://www.reidsguides.com/destinations/europe/spain/barcelona/sights/la-pedrera.html>.

En este trabajo el objetivo es estudiar membranas sujetas a ciertas constricciones locales (inextensibilidad) y fuerzas externas (gravedad) y así determinar las formas de equilibrio adoptadas. Estas

formas son obtenidas minimizando el funcional de energía potencial de la membrana consistente con una restricción en la métrica la cual matemáticamente nos representa la inextensibilidad de la membrana, ya que al deformar una superficie inextensible las distancias entre puntos dentro de ésta se mantienen fijas. Hacemos un análisis detallado de algunas geometrías específicas (catenarias, cilindros y semi-esferas) las cuales podemos asociar con construcciones arquitectónicas hechas de ladrillos, aproximando a estas como superficies encajadas en el espacio euclídeo \mathbb{R}^3 . En nuestro análisis de equilibrio sobre las edificaciones nos enfocamos en los esfuerzos establecidos. Si son construcciones de tabique o piedra nuestras estructuras no soportan tensiones ya que estas generarían cuarteaduras e incluso podrían generar el colapso de la construcción. Esto en términos matemáticos es equivalente a que los esfuerzos sobre cualquier dirección no pueden ser negativos para que nuestra estructura se mantenga en equilibrio. Asociamos nuestro método a estructuras arquitectónicas debido a que es importante determinar qué formas son óptimas construir, no sólo por cuestiones estéticas, si no también porque estos estudios son de vital importancia principalmente en zonas altamente sísmicas como la Ciudad de México, donde definir la estabilidad de edificaciones toma una importancia crucial. A su vez examinamos la estabilidad de un arco catenario. Lo que estabiliza la estructura es la energía de doblamiento que está dada por el cuadrado de la curvatura extrínseca. Curiosamente tales energías han surgido en la física de biomembranas, como podemos constatar en [Can70, Hel73, Lip13], donde se enfrenta una curvatura espontánea.

En el capítulo 1 definimos el funcional de energía potencial apropiado para una membrana inextensible en presencia de gravedad, esto aproximando a la membrana por una superficie parametrizada. Posteriormente, usando multiplicadores de Lagrange, realizamos la primera variación de la energía potencial asociada a la superficie bajo la restricción de isometría y encontramos las ecuaciones que ésta debe satisfacer en equilibrio. Luego determinamos cuales son las condiciones que debe satisfacer la membrana en su frontera libre. Con todo lo anterior, construimos un marco de trabajo para abordar algunos casos particulares.

En el capítulo 2 nos enfocamos en determinar los equilibrios de un arco que se extiende sobre dos líneas paralelas, obteniendo que la forma que adopta dicho arco es la de una catenaria. Procedemos a realizar la segunda variación de la energía con lo cual podemos llevar a cabo un estudio de estabilidad del arco catenario. Para analizar dicha estabilidad introducimos un funcional de energía que esté asociado a la rigidez del arco, ya que si no lo hiciéramos el arco catenario, únicamente con energía potencial, sería inestable. El funcional que usamos es cuadrático sobre desviaciones de la curvatura de Frenet de la catenaria. Una vez realizada la segunda variación de la energía bajo isometría, nos damos cuenta que ésta queda en términos de un operador diferencial de sexto orden que depende de la deformación tangencial. Estamos interesados en identificar el valor propio más bajo que controla la estabilidad. Para continuar con nuestro análisis, hacemos una expansión de la deformación en términos de estados ortonormales que, además, cumplen las condiciones de frontera del arco. Hecho esto procedemos a realizar un análisis de Fourier. Determinamos el comportamiento de los valores propios de la segunda variación para arcos con diferentes medidas. Primero, observamos por separado, el comportamiento de los valores propios de la energía potencial y de doblamiento conforme variamos las medidas del arco. Posteriormente, vamos al problema completo considerando las dos energías. Esto lo realizamos para los tres casos más importantes: arcos catenarios casi planos, altos y el arco que tiene mínimo esfuerzo con respecto a los de otras medidas. Finalmente, comparamos la rigidez crítica para el caso de los estados pares con el caso de los estados impares. Además, para comprobar el comportamiento de la rigidez crítica realizamos un experimento en el cual dejamos colgar hilos de

sus extremos para que estos adopten la forma de una catenaria, posteriormente, son recubiertos con pegamento el cual, al secarse, le da una rigidez a los hilos hasta que en algún momento el pegamento es capaz de dejar estable los hilos si estos los invertimos, similar a como lo hace Norman Foster en [You].

En el capítulo 3 identificamos los equilibrios de superficies axialmente simétricas. Una vez realizado esto, atacamos dos ejemplos concretos como son cilindros y semi-esferas, mismos que podemos identificar con construcciones arquitectónicas como son torres cilíndricas y cúpulas esféricas, respectivamente. En el caso de las torres cilíndricas obtenemos los equilibrios de 3 tipos diferentes de torres y examinamos si los esfuerzos correspondientes a estos equilibrios se encuentran ante tensión o compresión. Primero abordamos el caso más sencillo que es una torre de altura constante, posteriormente determinamos los esfuerzos de una torre que tiene por techo una elipse determinada por la intersección de la torre con un plano que hace un ángulo β con respecto al plano donde se encuentra parada la torre. Finalmente, atacamos el problema de una torre inclinada y determinamos cómo son los diferentes tipos de esfuerzos conforme variamos varios parámetros asociados tanto a las medidas de la torre, así como a la posición en el ángulo polar asociado a la estructura en que nos encontramos. En el caso de la torre inclinada observamos cómo cambian dichos esfuerzos conforme variamos el ángulo de inclinación y de esta forma hacemos un análisis detallado de cómo son los esfuerzos en toda la torre, con lo cual proporcionamos un criterio para decidir qué torres son factibles de construir. Concluimos con el análisis de esfuerzos de la torre de Pisa ya que esta construcción es el caso canónico. Identificamos dos modos de inestabilidad: grietas circulares y verticales. Por último, tocamos el caso de las cúpulas esféricas donde también observamos cómo es el comportamiento de los esfuerzos tanto para cúpulas cerradas como para cúpulas abiertas. Mientras el esfuerzo meridional queda siempre bajo compresión, el esfuerzo paralelo siempre sufre un cambio a tensión abajo de cierto ángulo azimutal. Identificamos los puntos críticos donde el esfuerzo paralelo cambia de tensión a compresión y como es su comportamiento.

En el capítulo 4 damos las conclusiones generales sobre este trabajo, además, de algunas perspectivas del trabajo a futuro. También, incluimos unos apéndices. En el apéndice A se encuentra una descripción básica de los conceptos de geometría diferencial que se usan durante la tesis. Por otra parte, en el apéndice B calculamos las variaciones del tensor métrico y de la diferencial de área, las cuales son de nesarias, al realizar la primera variación de la energía. Luego en el apéndice C, reproducimos las ecuaciones de Euler-Lagrange, usando el método de variables auxiliares. Más adelante, en el apéndice D, calculamos los operadores diferenciales determinados por la segunda variación tanto de la energía de doblamiento como de la energía potencial, los cuales son utilizados para realizar nuestro análisis de estabilidad. En el apéndice E, realizamos el proceso de Gram-Schmidt, con el cual ortogonormalizamos dos bases las cuales son utilizadas para calcular los valores propios de la segunda variación de la energía. Finalmente, en el apéndice F mostramos cuales son las proyecciones de la derivada covariante de los esfuerzos, asociados a superficies axialmente simétricas.

Capítulo 1

Superficies delgadas con energía potencial gravitacional

Consideramos estructuras que pueden ser vistas como superficies bidimensionales debido a su espesor pequeño: con grosor mucho menor al radio de curvatura. En este capítulo estudiaremos cómo están descritos los equilibrios de membranas que tienen asociada la energía potencial gravitacional, para ello primero recurriremos como herramienta a la geometría diferencial de superficies, la cual nos permitirá definir su energía potencial y aplicar cálculo de variaciones para determinar los equilibrios de la superficie.

1.1. Energía potencial

Por simplicidad vamos a considerar una membrana con una densidad uniforme ρ_0 . Dada una membrana, ésta puede ser representada por una superficie parametrizada $(u^1, u^2) \mapsto \mathbf{X}(u^1, u^2)$, de esta forma podemos definir su altura como $h := \mathbf{X} \cdot \mathbf{k}$, el producto interior usual en \mathbb{R}^3 , con \mathbf{k} el vector unitario sobre el eje z , seleccionamos a z como la dirección donde actúa la gravedad, por consiguiente su energía potencial es dada por la integral de su altura sobre su área

$$V[\mathbf{X}] = \rho \int dA h, \quad (1.1)$$

donde ρ es la densidad uniforme por unidad de área ρ_0 multiplicada por la aceleración generada por la gravedad (esto es, $\rho = \rho_0 g$) y dA es la diferencial de área.

1.2. Equilibrios de una membrana con energía potencial

Ahora para determinar los equilibrios que posee una membrana inextensible en presencia de la gravedad, primero analizamos la propiedad de inextensibilidad, la cual nos indica que la medición de distancias entre puntos dentro de la membrana no cambiará, bajo cualquier deformación, lo cual puede ser representado en términos matemáticos por una transformación entre dos espacios métricos que conserva invariante la métrica, es decir, una isometría. Para ello consideramos la métrica $g_{ab} = \mathbf{e}_a \cdot \mathbf{e}_b$ inducida en la superficie, donde $\mathbf{e}_a = \partial_a \mathbf{X}$, $a = 1, 2$ son los vectores tangentes adaptados a la

6 CAPÍTULO 1. SUPERFICIES DELGADAS CON ENERGÍA POTENCIAL GRAVITACIONAL

parametrización hecha por u^1 y u^2 (ver [apéndice A]). Aplicaremos el método de multiplicadores de Lagrange para imponer la constricción isométrica. Por lo cual construimos el siguiente funcional:

$$V_C[\mathbf{X}] = \rho \int dA h - \frac{1}{2} \int dA \sigma^{ab}(g_{ab} - g_{ab}^{(0)}), \quad (1.2)$$

donde la congruencia de la métrica inducida g_{ab} con aquella geometría especificada, $g_{ab}^{(0)}$, se implementa en el principio variacional con la introducción de un tensor simétrico σ^{ab} que es valuado como multiplicador de Lagrange.

Continuamos haciendo la primera variación de la energía potencial con constricciones bajo la deformación de superficie descrita por el vector $\delta\mathbf{X}$, el cual lo podemos descomponer en sus componentes normal y tangenciales a la superficie, Φ y Ψ^a respectivamente, es decir, $\delta\mathbf{X} = \Phi\mathbf{n} + \Psi^a\mathbf{e}_a$ (ver figura 1.1), con \mathbf{n} el vector normal unitario a la superficie que apunta hacia “arriba” ($\mathbf{n} = \frac{\mathbf{e}_a \times \mathbf{e}_b}{\|\mathbf{e}_a \times \mathbf{e}_b\|}$). Así tenemos que

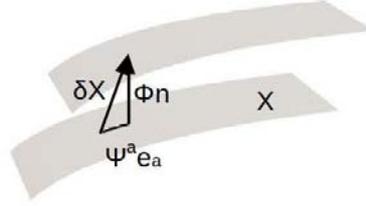


Figura 1.1: Deformación de superficie

$$\begin{aligned} \delta V_C[\mathbf{X}] &= \int \delta dA \left(\rho h - \frac{1}{2} \sigma^{ab}(g_{ab} - g_{ab}^{(0)}) \right) + \rho \int dA \delta\mathbf{X} \cdot \mathbf{k} \\ &\quad - \frac{1}{2} \int dA \left(\delta\sigma^{ab}(g_{ab} - g_{ab}^{(0)}) + \sigma^{ab} \delta g_{ab} \right). \end{aligned} \quad (1.3)$$

Las variaciones de la métrica y la diferencial de área bajo isometría son derivadas en [apéndice B]. Usando estos resultados podemos escribir a la variación de la energía como

$$\begin{aligned} \delta V_C[\mathbf{X}] &= \int dA (-\sigma^{ab} K_{ab} + \rho(hK + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{k}))) \Phi + \rho \int dA \Psi^a \mathbf{e}_a \cdot \mathbf{k} \\ &\quad - \frac{1}{2} \int dA (K\Phi + \nabla_c \Psi^c) \sigma^{ab}(g_{ab} - g_{ab}^{(0)}) - \frac{1}{2} \int dA \left(\delta\sigma^{ab}(g_{ab} - g_{ab}^{(0)}) \right) \\ &\quad + \rho \int dA (\nabla_a \Psi^a) h - \frac{1}{2} \int dA \sigma^{ab} (\nabla_a \Psi_b + \nabla_b \Psi_a), \end{aligned} \quad (1.4)$$

donde ∇_a es la derivada covariante compatible con la métrica g_{ab} y la curvatura extrínseca $K_{ab} = \mathbf{e}_a \cdot \partial_b \mathbf{n}$, K es la curvatura media que esta dada por la traza del tensor de curvatura extrínseca ($K = g^{ab} K_{ab}$), (ver [apéndice A]).

A su vez la tercera y cuarta integral de la ecuación (1.4) son cero debido a la constricción isométrica $g_{ab} = g_{ab}^{(0)}$. Por otra parte realizando integración por partes en las dos últimas integrales de la ecuación (1.4) obtenemos que

$$\rho \int dA (\nabla_a \Psi^a) h - \frac{1}{2} \int dA \sigma^{ab} (\nabla_a \Psi_b + \nabla_b \Psi_a) = -\rho \int dA \Psi^a \mathbf{e}_a \cdot \mathbf{k} + \int dA \nabla_a \sigma^{ab} \Psi_b + BT, \quad (1.5)$$

donde BT son las respectivas integrales de frontera, mismas que discutiremos en la siguiente sección. Ahora, sustituyendo la ecuación (1.5) en la primera variación de la energía potencial, dada por la ecuación (1.4) tenemos

$$\delta V_C[\mathbf{X}] = \int dA [(-\sigma^{ab} K_{ab} + \rho(hK + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{k})))\Phi + \nabla_a \sigma^{ab} \Psi_b] + BT. \quad (1.6)$$

En equilibrio, la superficie, y la distribución de esfuerzos dentro de ésta, deben ser compatibles con el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\sigma^{ab} K_{ab} = \rho(hK + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{k})); \quad (1.7)$$

$$\nabla_a \sigma^{ab} = 0. \quad (1.8)$$

La ecuación (1.8) nos dice que la inextensibilidad limita los esfuerzos tangenciales no gravitacionales dentro de la membrana y estos están covariantemente conservados cuando las fuerzas están en equilibrio, independientemente de cómo está distribuida la propia masa. La gravedad entra a través de las condiciones de frontera y del acoplamiento de la curvatura dado por la ecuación (1.7). Entonces el tensor de esfuerzos completo, tomando en cuenta la fuerza vertical de la gravedad está dado por

$$T^{ab} = \sigma^{ab} - \rho h g^{ab}; \quad (1.9)$$

este tensor no se conserva ya que nosotros tenemos que

$$\nabla_a T^{ab} = \nabla_a \sigma^{ab} - \nabla_a (\rho h g^{ab}) = -\rho (\mathbf{e}^b \cdot \mathbf{k}). \quad (1.10)$$

Si introducimos el esfuerzo $\mathbf{f}^a = T^{ab} \mathbf{e}_b$ y usamos la ecuación (1.9) en la ecuación (1.6), podemos reescribir la primera variación de la energía potencial de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \delta V_C[\mathbf{X}] &= \int dA \left((-T^{ab} K_{ab} + \rho \mathbf{n} \cdot \mathbf{k}) \Phi + \nabla_a (T^{ab} + \rho h g^{ab}) \Psi_b \right) + BT \\ &= \int dA \left((-T^{ab} \mathbf{e}_a \cdot \partial_b \mathbf{n}) \Phi + \nabla_a (T^{ab} \mathbf{e}_b \cdot \mathbf{e}^b) \Psi_b + \rho \mathbf{k} \cdot \delta \mathbf{X} \right) + BT \\ &= \int dA \left((-f^a \cdot \partial_b \mathbf{n}) \Phi + \nabla_a f^a \cdot \mathbf{e}^b \Psi_b + (T^{ab} \mathbf{e}_b) \cdot (\nabla_a \mathbf{e}^b) \Psi_b + \rho \mathbf{k} \cdot \delta \mathbf{X} \right) + BT \\ &= \int dA \left((\nabla_a f^a \cdot \mathbf{n}) \Phi + \nabla_a f^a \cdot \mathbf{e}^b \Psi_b + (T^{ab} \mathbf{e}_b) \cdot (-K_a^b \mathbf{n}) \Psi_b + \rho \mathbf{k} \cdot \delta \mathbf{X} \right) + BT \\ &= \int dA (\nabla_a \mathbf{f}^a + \rho \mathbf{k}) \cdot \delta \mathbf{X} + BT, \end{aligned} \quad (1.11)$$

así las ecuaciones de Euler-Lagrange (1.7) y (1.8) pueden ser escritas de la forma equivalente

$$\nabla_a \mathbf{f}^a = -\rho \mathbf{k}, \quad (1.12)$$

ya que al realizar la proyección tangencial de la ecuación (1.12) tenemos

$$-\rho \mathbf{k} \cdot \mathbf{e}^b = (\nabla_a \mathbf{f}^a) \cdot \mathbf{e}^b = \nabla_a T^{ab} = \nabla_a \sigma^{ab} - \rho \mathbf{k} \cdot \mathbf{e}^b, \quad (1.13)$$

lo que implica que $\nabla_a \sigma^{ab} = 0$, es decir, la proyección normal de la ecuación (1.12) genera la ecuación (1.8). Por otra parte, si realizamos la proyección normal de la ecuación (1.12) obtenemos que

$$-\rho \mathbf{k} \cdot \mathbf{n} = (\nabla_a \mathbf{f}^a) \cdot \mathbf{n} = T^{ab} (\nabla_a \mathbf{e}_b) \cdot \mathbf{n}, \quad (1.14)$$

ahora usando las ecuaciones de Gauss ($\nabla_a \mathbf{e}_b = -K_{ab} \mathbf{n}$) en la ecuación (1.14) se sigue que

$$-\rho \mathbf{k} \cdot \mathbf{n} = -(\sigma^{ab} - \rho h g^{ab}) K_{ab}, \quad (1.15)$$

lo cual reproduce la ecuación de forma (1.7).

Otra manera de obtener las ecuaciones de Euler-Lagrange es utilizando el método de variables auxiliares [Guv04], el cual está detallado en [apéndice C]. Es particularmente útil cuando tomamos en cuenta energía de doblamiento.

Para los próximos capítulos nuestro objetivo es idealizar ciertas construcciones arquitectónicas hechas de ladrillos en forma de una superficie con una métrica fija, consistente con las ecuaciones (1.7) y (1.8). Cabe mencionar que idealizamos el hecho que los tabiques o piedras no soporten tensiones, así las construcciones arquitectónicas tampoco soportarán tensiones debido a que estas generarían grietas en la edificación o un colapso de la estructura, traduciéndose en el hecho que el esfuerzo físico T^{ab} debe ser definido positivo: en otras palabras, los valores propios ν_1, ν_2 del tensor T^{ab} son positivos.

1.3. Condiciones de frontera

Para identificar las condiciones de frontera en los extremos libres de esta geometría, debemos notar que bajo una deformación de un equilibrio la superficie es consistente con isometrías, la constricción de energía potencial cambia para los terminos de frontera (BT)

$$\begin{aligned} \delta V_C &= - \int ds l_a (\rho h \Psi^a - \sigma^{ab} \Psi_b) = - \int ds l_a \mathbf{f}^a \cdot \delta \mathbf{X} \\ &= - \int ds (l_a T^{ab} l_b \mathbf{l} \cdot \delta \mathbf{X} + l_a \sigma^{ab} t_b \mathbf{t} \cdot \delta \mathbf{X}). \end{aligned} \quad (1.16)$$

Aquí $\mathbf{t} = t^a \mathbf{e}_a$ es el vector unitario tangente en la frontera, y $\mathbf{l} = \mathbf{t} \times \mathbf{n}$ el normal a la superficie en dirección hacia el exterior, asimismo $\mathbf{l} = l^a \mathbf{e}_a$. s es la longitud de arco. La integración es comprendida para un rango sobre todos los extremos libres. Por lo tanto, en equilibrio, uno requiere que se cumplan las siguientes condiciones en cada extremo libre:

$$T_{\perp} := l_a T^{ab} l_b = 0 \quad \text{y} \quad (1.17)$$

$$\sigma_{\perp\parallel} := l_a \sigma^{ab} t_b = 0. \quad (1.18)$$

Si éstas no fueran las constricciones, se estropea la identificación de las deformaciones tangenciales con reparametrizaciones, la frontera integrada proporcional a $\mathbf{t} \cdot \delta \mathbf{X}$ tendría que desaparecer de forma automática.

Ahora, por consistencia, la masa está dada por

$$M = \int dA \rho_0, \quad (1.19)$$

usando la ecuación (1.12) y tenemos que

$$M = -\frac{1}{g} \int dA \nabla_a \mathbf{f}^a \cdot \mathbf{k} = -\frac{1}{g} \int ds l_a \mathbf{f}^a \cdot \mathbf{k} = -\frac{1}{g} \int ds (l_a T^{ab} l_b \mathbf{l} \cdot \mathbf{k} + l_a \sigma^{ab} t_b \mathbf{t} \cdot \mathbf{k}). \quad (1.20)$$

Una vez que ya hemos establecido tanto el conjunto de ecuaciones que nos determinan las formas de equilibrio, así como las condiciones de frontera, que deben satisfacer las membranas inextensibles en presencia de la fuerza de gravedad. Estamos en condiciones para empezar a realizar cálculos sobre geometrías específicas como: catenarias, cilindros y semi-esferas, mismas que analizaremos en los próximos capítulos.

Capítulo 2

Arco catenario de Gaudí

El arco catenario es muy utilizado en la arquitectura ya que este tipo de curva tiene la propiedad de minimizar los esfuerzos, además carece de esfuerzos distintos a los atribuidos a la compresión. Esto lo podemos observar en construcciones hechas en la antigüedad al igual que en otras de la era moderna, uno de los arquitectos más famosos que se destacó por el uso de varias estructuras geométricas de las que forma parte el arco catenario fue el español Antoni Gaudí, como lo podemos apreciar en su obra del Templo Expiatorio de la Sagrada Familia en Barcelona (figura 2.1 a). Sin embargo, antes de Gaudí ya se había usado el arco catenario en construcciones más antiguas como en el arco del palacio de Ctesifonte (figura 2.1 b) en lo que hoy es Irak.



(a) Templo Expiatorio de la Sagrada Familia.

(b) Arco del palacio de Ctesifonte.

Figura 2.1: Arcos catenarios. a) Caldevilla, L. y Castaño A (Fotógrafos). 2012. Recuperada del trabajo La Sagrada Familia en movimiento con la técnica Time lapse. b) Imagen recuperada de Historia National Geographic n°123.

2.1. Equilibrio del arco catenario

Aunque el equilibrio del arco catenario ha sido estudiado, nosotros vamos a tratar de reformular el problema desde un marco de trabajo geométrico más actual.

Suponemos que el arco se extiende sobre dos líneas paralelas (a lo largo de la dirección de \mathbf{j} el vector unitario en el eje Y y separadas una distancia fija $2L$, en un plano horizontal). Así que, vamos a suponer que el arco es un cilindro, regido por líneas paralelas en el eje Y y representado por la función de altura sobre el plano XY , $Z = h(X)$. Como tal, es isométrica a una geometría plana. Sea H la altura máxima que tiene el arco sobre este plano. El esfuerzo no depende de Y ; la ley de conservación (1.8) implica que tampoco su parte no gravitacional puede depender de X , es decir, $\sigma_{\perp} = \sigma_0$ una constante.

El vector normal apuntando hacia “afuera” de la superficie es

$$\mathbf{n} = \frac{1}{(1 + h'^2)^{\frac{1}{2}}}(-h', 0, 1), \quad (2.1)$$

donde $'$ es ∂_X . A su vez la curvatura media K está dada por la curvatura de Frenet a lo largo de la curva genérica, esto es,

$$K = -\frac{h''}{(1 + h'^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (2.2)$$

Sustituyendo estos resultados en la ecuación de forma (1.7) tenemos

$$-\frac{(\sigma_0 - \rho h)}{(1 + h'^2)^{\frac{3}{2}}}h'' = \frac{\rho}{(1 + h'^2)^{\frac{1}{2}}}, \quad (2.3)$$

o bien

$$\frac{h'h''}{(1 + h'^2)} = -\frac{\rho h'}{(\sigma_0 - \rho h)}. \quad (2.4)$$

Esta ecuación se puede integrar y así proporcionar la siguiente cuadratura

$$\tilde{h}'^2 - C^2\tilde{h}^2 = -1, \quad (2.5)$$

donde $\tilde{h} = h - \sigma_0/\rho$ y C es una constante de integración negativa. Éste es un análogo a una partícula con energía fija en un oscilador armónico inverso con frecuencia angular C y con energía total -1 , o sea, negativa. La solución simétrica de la ecuación (2.5) está dada por la función de altura h que es

$$h(X) = \frac{1}{C} \cosh(CX) + \frac{\sigma_0}{\rho}. \quad (2.6)$$

Para determinar las dos constantes C y σ_0 necesitamos usar las condiciones de frontera. Sabemos que la solución h es simétrica con respecto a su máximo en $X = 0$. Ahora, al evaluar la ecuación (2.6) en $X = 0$, tenemos que la altura h máxima es $H = 1/C + \sigma_0/\rho$, de aquí, $h(X) = (H - \sigma_0/\rho) \cosh(X/(H - \sigma_0/\rho)) + \sigma_0/\rho$. Si $h(X) = 0$ en $X = \pm L$, entonces la constante σ_0 es completamente determinada como una función de H , L y ρ :

$$\frac{\sigma_0}{\rho} = \left(\frac{\sigma_0}{\rho} - H \right) \cosh \left(\frac{L}{H - \frac{\sigma_0}{\rho}} \right). \quad (2.7)$$

Si $H > 0$, $\sigma_0/\rho > H$, entonces tenemos que σ_0 es positivo.

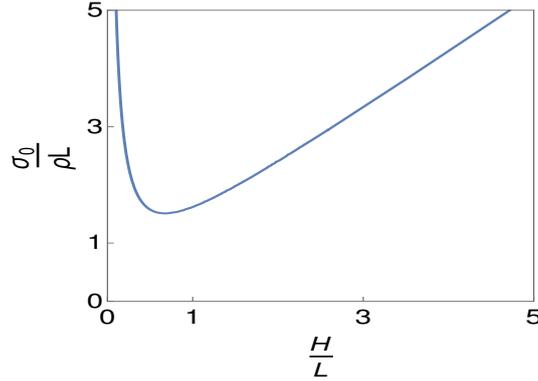


Figura 2.2: Esfuerzo adimensional $\sigma_0/\rho L$ contra H/L .

De la figura 2.2 podemos ver que para cada H/L existe una solución tal que $H/L < \sigma_0/\rho L$. A su vez $\sigma_0/\rho L$ alcanza un mínimo de aproximadamente $3/2$ cuando la longitud de separación entre los extremos de la catenaria es de aproximadamente 3 veces la altura, es decir $H \approx (2/3)L$. Además realizando un análisis perturbativo de la ecuación (2.7), tenemos que si $L \gg H$, entonces $\sigma_0/\rho L$ decae como potencia $(H/L)^{-1}$. Por otro lado si $H \gg L$, entonces encontramos que el comportamiento de $\sigma_0/\rho L$ es lineal. Luego determinamos el esfuerzo T , sabemos que

$$T(X) = \sigma_0 - \rho h(X) = -\rho \left(H - \frac{\sigma_0}{\rho} \right) \cosh \left(\frac{X}{H - \frac{\sigma_0}{\rho}} \right). \quad (2.8)$$

Debido a que $H - \sigma_0/\rho < 0$ encontramos que T es positivo en cada X , lo que nos demuestra que el arco catenario se encuentra bajo compresión. Además el coseno hiperbólico nos dice que el esfuerzo T es mínimo en el centro del arco catenario. También tenemos que para H/L pequeños el esfuerzo del arco es grande. En tal límite, la aproximación inextensible deja de ser confiable y tendría que tomar en cuenta la contracción del arco catenario debido a los esfuerzos grandes. Para H/L grandes el esfuerzo está localizada cerca de los soportes.

2.2. Estabilidad del arco catenario

Dado un arco de altura H y cuyos extremos se encuentran separados por una distancia de $2L$, hemos demostrado en la ecuación (2.6) que bajo isometría este arco está en equilibrio si adopta la forma de una catenaria, esto si no consideramos fluctuaciones sobre el eje Y . Obviamente este es siempre inestable si no tiene rigidez. La cuestión es identificar la energía de rigidez apropiada.

Para hacer el análisis de estabilidad es necesario realizar una segunda variación de la energía. Sin embargo, si sólo consideramos el funcional de energía potencial obtendríamos que el arco es inestable,

por ello es necesario penalizar el doblamiento del arco y añadir un funcional de energía asociado a tal doblamiento, el cual nos permita llegar a estabilizar nuestra estructura.

La energía ingenua $\int dA \kappa^2$, donde κ es la curvatura geodésica del arco, no es apropiada, debido al hecho que el arco se encuentra sin energía de doblamiento en su estado de equilibrio. Un momento de consideración indica que debemos de remplazar κ en la energía de Euler por la desviación de la curvatura del equilibrio, o sea $\kappa \rightarrow \kappa - \kappa_0(s)$, donde κ_0 es la curvatura geodésica del arco catenario en equilibrio. Así que el funcional de energía que vamos a considerar está dado por la siguiente expresión:

$$H_B[\mathbf{X}] := \frac{\mu}{2} \int dA (\kappa - \kappa_0)^2, \quad (2.9)$$

con μ una constante de rigidez. Esta energía es cero en equilibrio, es decir, cuando $\kappa = \kappa_0$.

Además, en equilibrio, esta energía de doblamiento no contribuye a la primera variación, ya que

$$\delta H_B[\mathbf{X}] = \mu \int dA (\kappa - \kappa_0) \delta \kappa. \quad (2.10)$$

2.2.1. Variación de la curvatura de Frenet bajo isometría

Debido a que la segunda variación de la energía quedará en términos de las variaciones de la curvatura de Frenet, necesitamos calcular dichas variaciones bajo la restricción de isometría para identificar la segunda variación de la energía. Cabe mencionar que no vamos a considerar deformaciones dependientes de Y y que además vamos a mantener los bordes fijos.

La deformación del arco catenario la describimos por el vector, $\delta \mathbf{X}$, el cual en este caso se descompone en su parte tangencial Ψ y su parte normal Φ al catenario, es decir, $\delta \mathbf{X} = \Psi \mathbf{t} + \Phi \mathbf{n}$.

Ahora el cambio en la diferencial de longitud de arco es dada por

$$\delta ds = \mathbf{t} \cdot (\delta \mathbf{X})' ds. \quad (2.11)$$

La isometría es equivalente a la condición que la longitud de arco s no cambia bajo una variación, lo que me implica que $\mathbf{t} \cdot (\delta \mathbf{X})' = 0$, que a su vez nos impone la siguiente condición de isometría

$$\Psi' + \kappa_0 \Phi = 0. \quad (2.12)$$

Además, como la frontera del arco debe mantenerse fija, las deformaciones normal y tangencial al arco son cero en la frontera. Por lo tanto, la restricción isométrica dada por la ecuación (2.12), implica que $\Psi' = 0$ en la frontera. Por otro lado, la ecuación (2.11), nos indica que la variación y diferenciación con respecto a la longitud de arco conmuta, por lo que $(\delta \mathbf{X})' = \delta(\mathbf{X}') = \delta \mathbf{t}$, es decir, $\mathbf{t} \cdot \delta \mathbf{t} = 0$.

Como $\delta \mathbf{t} = (\delta \mathbf{X})'$, tenemos que $\delta \mathbf{t} = (\Phi' - \kappa_0 \Psi) \mathbf{n}$, en consecuencia $\delta \mathbf{n} = -(\Phi' - \kappa_0 \Psi) \mathbf{t}$. Al hacer la primera variación de la curvatura geodésica, ya que $\mathbf{t}' = -\kappa_0 \mathbf{n}$, tenemos que

$$\delta \kappa_0 = -\delta \mathbf{n} \cdot \mathbf{t}' - \mathbf{n} \cdot \delta \mathbf{t}'. \quad (2.13)$$

El primer término es cero, así que, usando la restricción de isometría (2.12),

$$\delta \kappa_0 = -(\Phi' - \kappa_0 \Psi)' = -(\Phi'' + \kappa_0^2 \Phi - \kappa_0' \Psi). \quad (2.14)$$

Así tenemos que la variación de la curvatura la podemos escribir como la suma de un operador auto-adjunto diferencial en la deformación normal Φ , más otro operador determinado por la multiplicación entre la deformación tangencial Ψ y la derivada de la curvatura κ_0 .

2.2.2. Segunda variación de la energía potencial

La segunda variación de la energía potencial la realizaremos dejando fijos los bordes del arco, además, no vamos a considerar deformaciones en el eje Y . Por otra parte, la ecuación (1.8) para un arco catenario, implica que $\sigma_{\perp} = \sigma_0$ una constante, por lo tanto, para el arco catenario no hay términos tangenciales en la primera variación de la energía potencial, dada por la ecuación (1.6). Así que, para un arco catenario la variación de la energía potencial la podemos escribir de la siguiente forma:

$$\delta V_C = \int ds ((-\sigma + \rho h)\kappa_0 + \rho \mathbf{n} \cdot \mathbf{k}) \Phi, \quad (2.15)$$

entonces, usando $h = \mathbf{X} \cdot \mathbf{k}$, la segunda variación bajo isometría está dada por

$$\begin{aligned} \delta^2 V_C &= \int ds \Phi (-\sigma + \rho h) \delta \kappa_0 + \int ds \Phi \rho \kappa_0 \delta \mathbf{X} \cdot \mathbf{k} + \int ds \Phi \rho \delta \mathbf{n} \cdot \mathbf{k} \\ &+ \int ds ((-\sigma + \rho h)\kappa_0 + \rho \mathbf{n} \cdot \mathbf{k}) \delta \Phi. \end{aligned} \quad (2.16)$$

No realizamos variación sobre ds la diferencial de longitud de arco, por que como ya hicimos notar en la subsección 2.2.1, la isometría es equivalente a que $\delta ds = 0$. Por otra parte, la cuarta integral de la segunda variación (2.16) en equilibrio es cero, y sustituyendo los respectivos valores de las variaciones de la curvatura, del vector normal y la deformación de superficie, obtenemos que

$$\delta^2 V_C = \int ds \Phi (\sigma - \rho h) (\Phi' - \kappa_0 \Psi)' + \int ds \Phi \rho \kappa_0 (\Phi \mathbf{n} + \Psi \mathbf{t}) \cdot \mathbf{k} - \int ds \Phi \rho (\Phi' - \kappa_0 \Psi) \mathbf{t} \cdot \mathbf{k}. \quad (2.17)$$

Al realizar integración por partes en la primer integral de la ecuación (2.17) tenemos que

$$\delta^2 V_C = \int ds (\sigma - \rho h) (\kappa_0 \Psi \Phi' - \Phi'^2) + \rho \int ds (\kappa_0 \mathbf{t} \cdot \mathbf{k}) \Psi \Phi + \rho \int ds (\kappa_0 \mathbf{n} \cdot \mathbf{k}) \Phi^2. \quad (2.18)$$

Utilizando las igualdades $\kappa_0 (\sigma - \rho h) = \rho (\mathbf{n} \cdot \mathbf{k})$ y $\kappa_0' (\sigma - \rho h) = 2\rho \kappa_0 (\mathbf{t} \cdot \mathbf{k})$, determinadas por el equilibrio y realizando integración por partes en la tercera integral de la ecuación (2.18), llegamos a

$$\delta^2 V_C = - \int ds (\sigma - \rho h) (\Phi'^2 - 2\kappa_0 \Psi \Phi') + 2\rho \int ds (\kappa_0 \mathbf{t} \cdot \mathbf{k}) \Psi \Phi. \quad (2.19)$$

Finalmente haciendo integración por partes en la segunda integral de la ecuación (2.19), tenemos que la segunda variación de la energía potencial está dada por

$$\delta^2 V_C = - \int ds (\sigma - \rho h) (\Phi' - \kappa_0 \Psi)^2. \quad (2.20)$$

No hay términos de frontera en ninguna de las integrales por partes, ya que que éstos son cero, debido a la condición que los bordes del arco se mantienen fijos, es decir, que las deformaciones Φ y Ψ son cero en la frontera del arco.

2.2.3. Segunda variación de la energía

La introducción de la energía de doblamiento sesgada (2.9) no contribuye a la primera variación. Ahora, en [apéndice D], podemos ver que la segunda variación nos genera términos dependientes de la deformación tangencial Ψ , los cuales no pueden ser expresados en términos de Φ y sus derivadas por medio de integración por partes, es decir, de la forma $\delta^2(H_B + V_C) = \int ds \Phi \mathcal{L}_\Phi(\Phi) := \langle \Phi | \mathcal{L}_\Phi | \Phi \rangle$, con \mathcal{L}_Φ un operador diferencial de orden 4 autoadjunto. Por otra parte, podemos eliminar Φ en términos de Ψ a través de integración por partes. Así podemos escribir a la segunda variación en una forma dependiente de las deformaciones tangenciales y de sus derivadas, esto es $\delta^2(H_B + V_C) = \langle \Psi | \mathcal{L}_\Psi | \Psi \rangle$. El precio es que \mathcal{L}_Ψ es un operador diferencial de sexto orden (ver [apéndice D]). La invarianza translacional se rompe por las condiciones de frontera y la invarianza rotacional se rompe debido a la gravedad. Como consecuencia las translaciones y rotaciones no son modos cero. Por otro lado, en equilibrio tenemos que $\kappa = \kappa_0$ y usando la constricción isométrica $\Psi' = -\kappa_0 \Phi$ llegamos a que en equilibrio la segunda variación de la energía está dada por

$$\begin{aligned} \delta^2(H_B + V_C) &= \mu \int ds (\delta\kappa_0)^2 - \int ds (\sigma - \rho h) (\Phi' - \kappa_0 \Psi)^2 \\ &= \mu \int ds (\Phi' - \kappa_0 \Psi)^2 - \int ds (\sigma - \rho h) (\Phi' - \kappa_0 \Psi)^2 \\ &:= \langle \Psi | \mu \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_0 | \Psi \rangle, \end{aligned} \quad (2.21)$$

donde los operadores \mathcal{L}_0 y \mathcal{L}_1 están dados por las siguientes expresiones:

$$\mathcal{L}_0 := - \left(\partial_s \frac{1}{\kappa_0} \partial_s (\sigma - \rho h) \partial_s \frac{1}{\kappa_0} \partial_s + \partial_s \frac{1}{\kappa_0} \partial_s \kappa_0 (\sigma - \rho h) + \kappa_0 (\sigma - \rho h) \partial_s \frac{1}{\kappa_0} \partial_s + \kappa_0^2 (\sigma - \rho h) \right), \quad (2.22)$$

$$\mathcal{L}_1 := - \left(\partial_s \frac{1}{\kappa_0} \partial_s^4 \frac{1}{\kappa_0} \partial_s + \kappa_0 \partial_s^2 \kappa_0 + \partial_s \frac{1}{\kappa_0} \partial_s^3 \kappa_0 + \kappa_0 \partial_s^3 \frac{1}{\kappa_0} \partial_s \right), \quad (2.23)$$

los detalles de como son calculados estos operadores se encuentran en [apéndice D]. El operador $\mu \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_0$ es autoadjunto para $|\Psi\rangle$ tal que Ψ , Ψ' y Ψ'' son cero en $X = \pm L$. Además \mathcal{L}_1 es par y positivo definido, y \mathcal{L}_0 es par y negativo definido. Los operadores \mathcal{L}_0 y \mathcal{L}_1 son pares bajo paridad $s \rightarrow -s$, ya que cada término de los operadores diferenciales es de orden par. Como consecuencia el operador $\mu \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_0$ es par. Podemos seleccionar los estados propios con estas simetrías por el hecho que

$$\langle \Psi^{\text{impar}} | \mu \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_0 | \Psi^{\text{par}} \rangle = 0, \quad (2.24)$$

que nos permite tratar a los estados pares por separado de los estados impares.

Podemos expandir a cualquier Ψ en términos de un conjunto ortogonal completo de estados consistentes con las condiciones de frontera impuesto por bordes fijos y la isometría, esto es $\Psi = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \Psi_n$. Así la segunda variación de la energía la podemos reescribir como

$$\delta^2(H_B + V_C) = \sum_{n,m} C_n C_m B_{nm}, \quad (2.25)$$

con $B_{nm} = \langle \Psi_n | \mu \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_0 | \Psi_m \rangle$ y además $B_{nm} = 0$ si n es par y m es impar.

Nosotros proponemos como Ψ_n^{par} y Ψ_n^{impar} a las funciones que resultan de la ortonormalización de las siguientes bases [apéndice E]:

$$f_n(x) = \cos\left(\frac{(2n+1)\pi x}{2L}\right) + \frac{2n+1}{2n+3} \cos\left(\frac{(2n+3)\pi x}{2L}\right), \quad (2.26)$$

$$g_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + \frac{n}{n+1} \sin\left(\frac{(n+1)\pi x}{L}\right), \quad (2.27)$$

respectivamente. Hemos propuesto estas dos familias de funciones debido al hecho que son las más sencillas que satisfacen las condiciones de frontera para nuestro arco catenario. Por supuesto se podría tomar cualquier otra base ortonormal que cumpla las condiciones de frontera. Ahora, como podemos analizar por separado a los estados pares y a los impares iniciaremos con el estudio de las funciones pares.

Si consideramos a los elementos $\Psi_1(x)$ par e impar que provienen de ortonormalizar las bases dadas por las ecuaciones (2.26) y (2.27), respectivamente. Podemos ver en la figura 2.3, que la deformación tangencial par Ψ_1^{par} , nos genera deformaciones tangenciales impares y Ψ_1^{impar} nos da deformaciones normales pares, esto se debe a la constricción $\Psi' = \kappa_0 \Phi$.

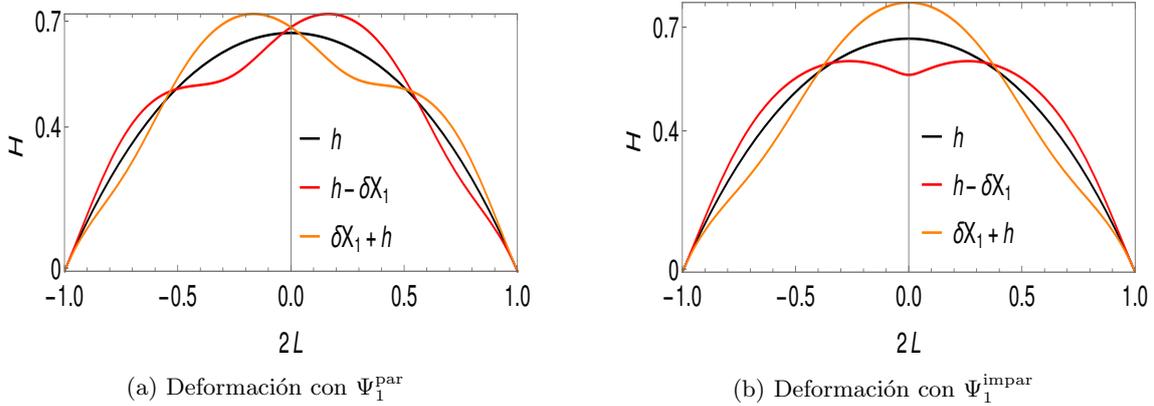


Figura 2.3: Deformaciones $\delta \mathbf{X}_1 = \Phi_1 \mathbf{n} + \Psi_1 \mathbf{t}$ para un arco catenario con $H/L = 2/3$

2.2.4. Estados propios pares

Aquí realizamos un análisis de los estados propios y los valores propios correspondientes al caso par, mismos que están involucrados en la diagonalización de la matriz B_{nm} . El cálculo de los valores propios se lleva a cabo de forma numérica. Una vez calculados los valores propios, veremos como es

que éstos cambian conforme variamos el cociente de altura sobre longitud H/L , esto lo realizamos para cada una de las energías por separado. Iniciamos con la energía potencial, continuando con la energía de doblamiento sesgada. Posteriormente estudiaremos a las dos energías sumadas. Estamos interesados en identificar el valor crítico de μ a partir del cual todos los estados se convierten en estables. Examinamos sólo las primeras 4 funciones propias: los estados mayores se convierten a estables muy rápido, debido a que en nuestro operador existe una derivada de orden 6, la cual nos genera un término dominante en la energía de doblamiento que se comporta como n^6 , mientras que la energía potencial se comporta como n^4 , con n el número de estado. Por otra parte, el comportamiento de los valores propios λ_n con $n \geq 4$ es monótono conforme aumentamos la rigidez μ .

Es importante darnos cuenta que si el estado Ψ es par, por isometría vamos a tener que la deformación normal Φ será impar.

Energía potencial del arco catenario

Podemos ver en la figura 2.4 que el comportamiento de los valores propios asociados a la energía potencial conforme variamos el tamaño del arco catenario, muestra comportamiento no trivial como aumenta H/L . Para H/L pequeños tenemos que la curvatura de Frenet de la catenaria es aproximadamente constante, así la catenaria queda bien aproximada por una parábola y por lo tanto los valores propios crecen como $-\sigma$ debido a que el esfuerzo σ domina a los demás términos de la segunda variación de la energía. Por otro lado, cuando H/L es grande los valores propios decrecen casi linealmente.

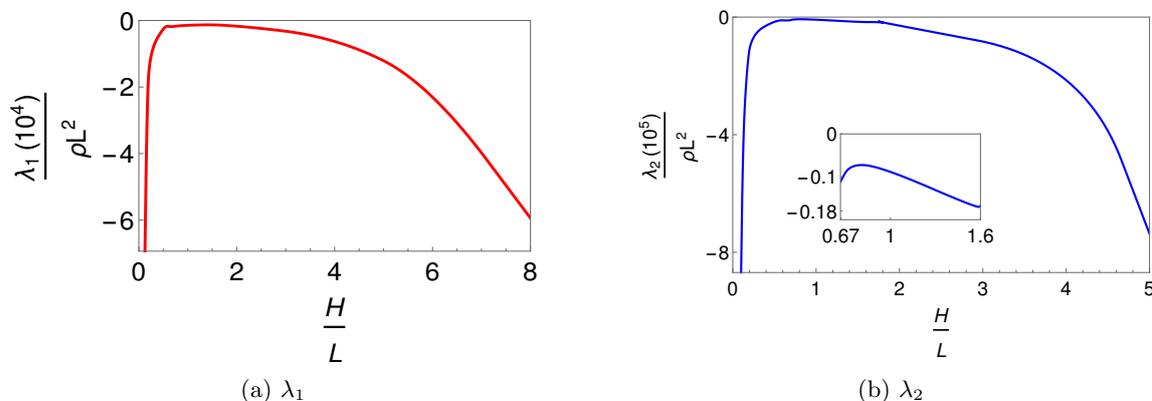


Figura 2.4: Valores propios pares λ_1, λ_2 de la energía potencial contra H/L .

Energía de doblamiento sesgada

Ahora analizamos los valores propios de la energía de doblamiento sesgada conforme variamos las medidas de nuestro arco. En este caso, como \mathcal{L}_1 es definido positivo tenemos que

$$0 < \langle \Psi_n | \mathcal{L}_1 | \Psi_n \rangle = \lambda_n \langle \Psi_n | \Psi_n \rangle = \lambda_n, \quad (2.28)$$

por lo cual los valores propios siempre son positivos. La positividad de la energía de doblamiento nos permite contrarrestar a la energía potencial. Llevar a cabo el análisis de estabilidad se convierte no

trivial por el hecho que los dos operadores $\mathcal{L}_0, \mathcal{L}_1$ no conmutan, así que no tienen una base de estados propios simultáneos. Como consecuencia λ no crece linealmente en μ . Por otra parte, si hacemos un análisis perturbativo para cada uno de los términos de $(\delta\kappa)^2$ en la expresión de la segunda variación de la energía de doblamiento, podemos darnos cuenta que para valores pequeños de H/L tendremos que el comportamiento de los estados de energía decrecen como $(H/L)^{-4}$, mientras que para H/L grandes los eigenvalores crecen de forma casi lineal (ver figura 2.5).

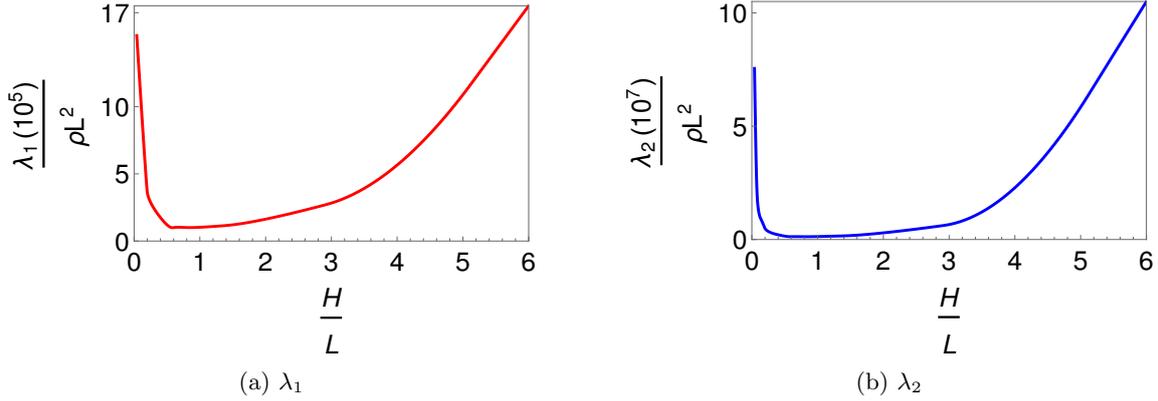


Figura 2.5: Valores propios pares λ_1, λ_2 de la energía de doblamiento sesgada contra H/L .

Espectro del operador $\mu\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_0$

Una vez concluido el análisis de nuestras energías por separado, es momento que analicemos como se comportan los valores propios de la segunda variación conforme vamos variando la rigidez de nuestro arco catenario, es decir, estudiaremos el comportamiento de los eigenvalores de las matrices B_{nm} , este estudio lo realizaremos para arcos de diferentes tamaños, mismo que nos permitirá determinar cuáles son los más estables u óptimos. En particular vamos a considerar tres casos que son $H/L \approx 2/3$ cociente que está asociado a un punto crítico (como se ve en la figura 2.2), $H/L = 10$ que es grande y representa arcos altos, $H/L = 1/10$ que es pequeño y corresponde a arcos casi planos.

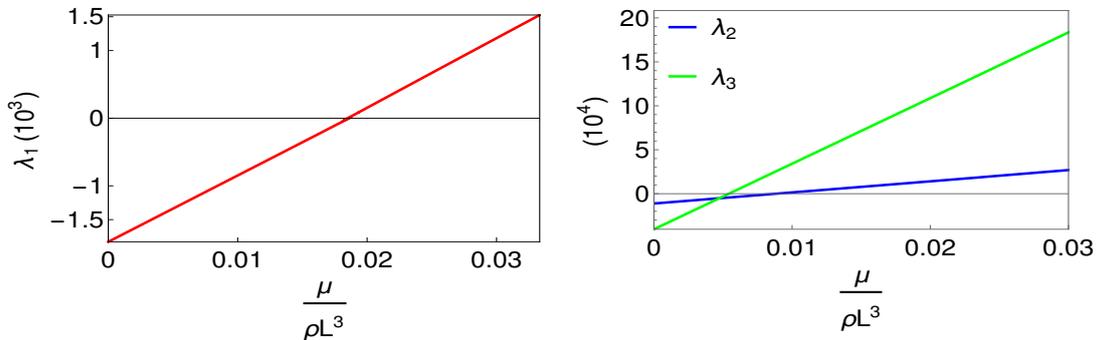


Figura 2.6: Valores propios para $H/L = 2/3$ contra rigidez.

Primero consideramos el arco catenario de medidas $H/L = 2/3$ el cual como ya dijimos representa un caso crítico, ya que para este cociente tenemos que existe el valor mínimo de esfuerzo respecto a otros arcos catenarios con medidas distintas. En las gráficas de la figura 2.6 encontramos que para éste arco el comportamiento de los estados de energía es monótono, También, observamos que los estados asociados a las funciones propias con mayor número de nodos son más estables que los que provienen de las que tienen menos nodos, este hecho se debe a que la parte de la energía de doblamiento está descrita como una potencia de n^6 donde n es el número de la función propia.

El siguiente caso a considerar es cuando $H/L = 10$ el cual representa un arco muy alto. En el caso de λ_1 y λ_2 presentan algo que parece inconsistente ya que en la figura 2.7 a) y b) se tienen cambios de positivo a negativo conforme aumentamos la rigidez para estos estados. Sin embargo, en la región donde se observa este comportamiento el estado λ_3 se convierte en el estado base. Podemos ver en la figura 2.7 c) que éste se mantiene negativo en la región donde λ_1 y λ_2 sufren comportamiento oscilatorio. Por lo tanto el arco se queda inestable en esta región y sólo se convierte a estable cuando el estado base se vuelve positivo por última ocasión. Los cambios abruptos que se presentan en el comportamiento de los valores propios λ_1 y λ_2 , se deben al hecho que $\mathcal{L}_0 < 0$ y que $\mathcal{L}_1 > 0$, además, que estos operadores no conmutan. Por otro lado, para λ_3 tenemos un comportamiento monótono: conforme incrementa la rigidez el arco se comporta de una forma más estable.

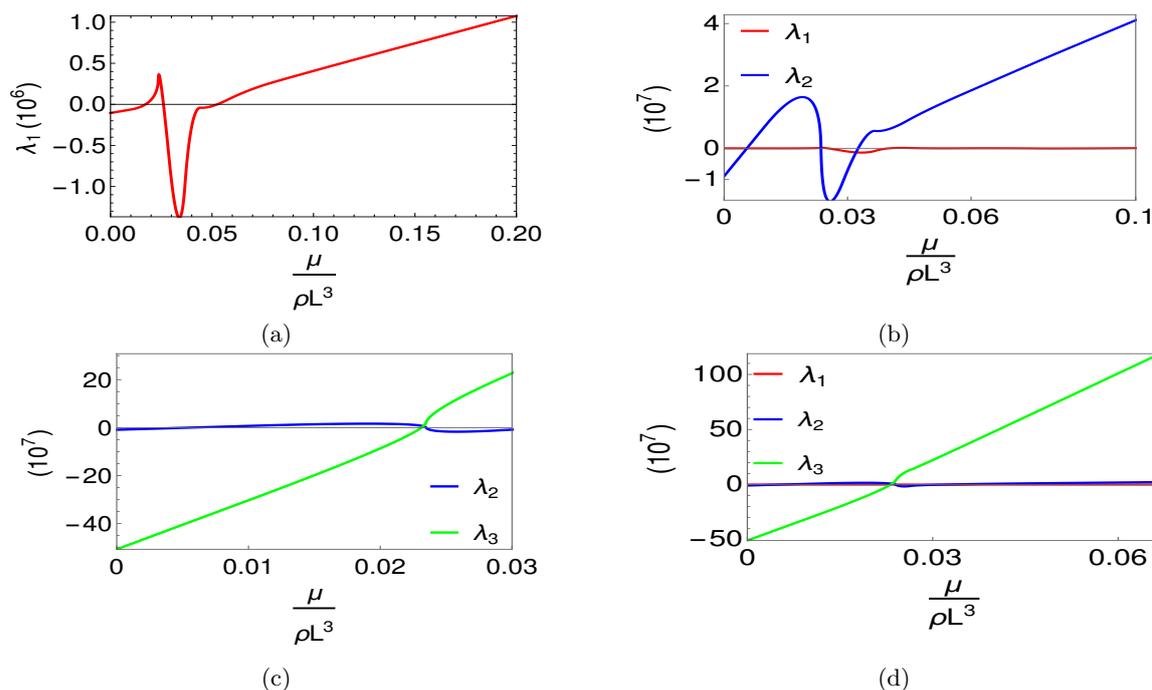


Figura 2.7: Valores propios para $H/L = 10$ contra rigidez.

En el caso $H/L = 1/10$ que corresponde a un arco casi plano, el comportamiento observado repite el comportamiento visto para $H/L \gg 1$ (ver figura 2.8), ya que si λ es grande, $\mathcal{L}_0 \sim -\partial^4$ y $\mathcal{L}_1 \sim \partial^6$. Así que $\lambda = \lambda_p + \mu\lambda_b$, donde λ_p y λ_b son los valores propios del operador de energía potencial y de energía de doblamiento respectivamente.

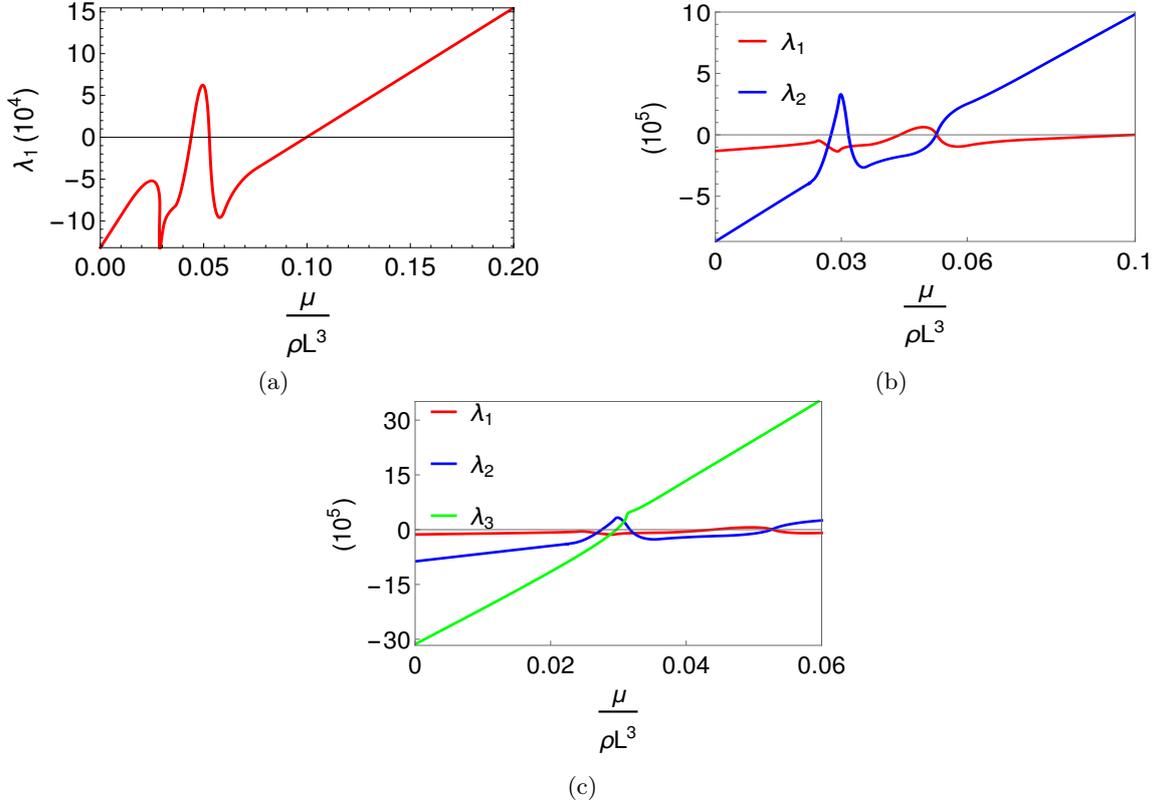


Figura 2.8: Valores propios para $H/L = 1/10$ contra rigidez.

2.2.5. Estados impares contra pares

No mostraremos la estabilidad de los estados impares para varios casos debido a que su comportamiento es similar al de los estados pares para los diferentes tamaños del arco catenario, lo que si realizaremos será comparar el coeficiente de rigidez crítico μ_0 a partir del cual todos los estados de un arco dado son estables, esto entre el caso de estados pares e impares para determinar cual de ellos es más estable.

En la figura 2.9 podemos apreciar que la rigidez crítica μ_0 no tiene comportamiento monótono conforme variamos las medidas del arco catenario esto tanto en el caso de estados pares como impares. También, observamos que para arcos casi planos la rigidez crítica está decreciendo rápidamente mientras aumentamos la medida H/L hasta llegar a un punto crítico $H/L = 3/2$, a partir de este punto crítico la rigidez crítica de los arcos empieza a comportarse de forma creciente al incrementar el cociente H/L . Por otra parte las gráficas nos muestran que los estados pares se vuelven estables más rápido que los estados impares. Sin embargo, como $\Psi' = -\kappa_0 \Phi$ y además las funciones Ψ_n^{impar} están dadas como combinaciones lineales de funciones seno (ver [apéndice E]) tenemos que, nuestro análisis en términos de las deformaciones normales, se traduce en que las deformaciones Φ_n pares son las menos estables, lo que nos sugiere que en caso de que un arco catenario colapsara su caída sería de forma simétrica. Además, como consideramos que un arco catenario es estable hasta que todos sus valores propios son positivos, entonces, podemos ver que para rigideces de $\mu_0/\rho L^3 < 2.5$ todos

los arcos son inestables.

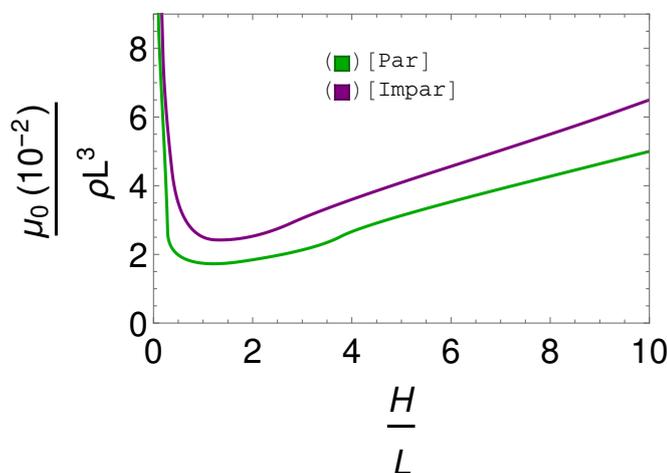


Figura 2.9: Rigidez crítica μ_0 contra H/L .

2.3. Experimento de estabilidad del arco catenario

En esta sección presentaremos un experimento que respalda nuestra teoría sobre la rigidez crítica que necesitan los arcos catenarios para llegar a ser estables.

El experimento consiste en dejar colgar un número de hilos (7 hilos) de sus extremos, los cuales tienen la misma longitud fija de 75 centímetros y cuyos extremos se encuentran a distintas distancias, estos hilos adoptan la forma de una catenaria (ver figura 2.10). Los hilos pesan en promedio 0.387 gramos y a estos les añadimos pegamento de la manera más uniforme posible, hasta que el hilo se mantenga rígido y pueda mantenerse estable si lo invertimos con respecto a su horizontal. Cada que se añadía pegamento, el hilo perdía un poco la forma de catenaria, sin embargo, en el proceso de secado se recuperaba esta forma. Una vez conseguida la estabilidad de cada arco medimos cuanto se incrementa la masa inicial del hilo ahora que este tiene pegamento.

Elegimos los hilos con una longitud de 75 centímetros ya que para hilos con longitudes menores a 60 centímetros tienen el problema que se vuelven rígidos con la primer capa de pegamento que se les aplica, lo cual generará que la masa del hilo con pegamento en estos casos sea prácticamente la misma, lo que nos impide realizar una medición sensata.

Para realizar el análisis del experimento y comparar con nuestra teoría consideramos que la rigidez es proporcional a la masa del pegamento añadido, por ello es que pesamos y observamos cual es la nueva masa de los hilos ahora que están cubiertos de pegamento.

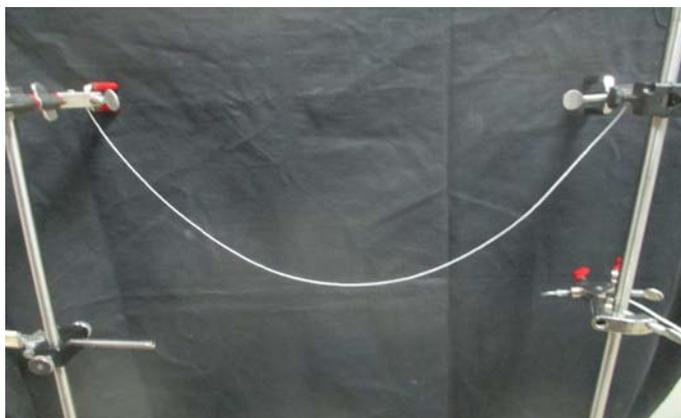


Figura 2.10: Experimento de estabilidad del arco catenario.

En la figura 2.11, podemos apreciar que los resultados de nuestro experimento, reproducen cualitativamente el comportamiento de la rigidez crítica μ_0 conforme variamos H/L , mostrando que el mínimo se encuentra donde se esperaba, aumentando rápidamente para H/L pequeños, mientras que para H/L grandes crece linealmente. Para el hilo cuyos extremos se encuentran a una distancia de 70 centímetros medimos la masa del pegamento sin que este lograra la estabilidad, la decisión de ya no seguir añadiendo pegamento se tomo por que se podía llegar a un caso donde la masa fuera tan grande que le sería inevitable sucumbir ante la gravedad.

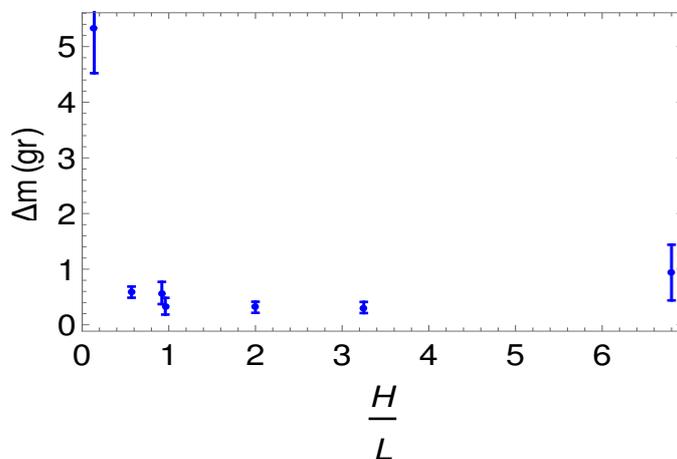


Figura 2.11: Masa del pegamento contra H/L .

Capítulo 3

Superficies axialmente simétricas

En este capítulo discutiremos los estados de equilibrio de dos geometrías axialmente simétricas distintas, empezando con un cilindro inclinado con respecto a la dirección donde actúa la gravedad y siguiendo con una semi-esfera. Sin embargo, antes de abordar los casos ya antes mencionados, analizaremos las ecuaciones de equilibrio para cualquier superficie axialmente simétrica en general, la cual está en presencia de un campo gravitacional uniforme.

La geometría intrínseca de toda superficie axialmente simétrica está descrita por su longitud de arco l a lo largo del meridiano, el radio azimutal $R(l)$ y el ángulo azimutal φ (figura 3.1), así tenemos que el elemento de línea ds^2 está dado por

$$ds^2 = dl^2 + R^2(l)d\varphi^2. \quad (3.1)$$

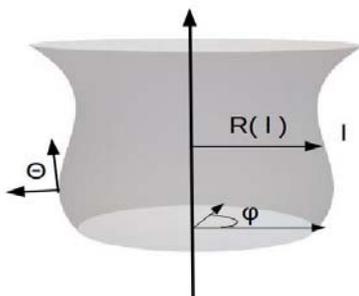


Figura 3.1: Superficie axialmente simétrica.

Del apéndice F.1 tenemos que los únicos símbolos de Christoffel que nos quedan son los siguientes:

$$\Gamma_{\varphi\varphi}^l = -RR', \quad \Gamma_{l\varphi}^\varphi = \frac{R'}{R},$$

donde R' es la derivada del radio azimutal con respecto a la longitud de arco l . La curvatura de Gauss $K_G = -R''/R$, es fácil de calcular a través de la curvatura extrínseca.

Ahora, vamos a utilizar el mismo método que en la sección anterior, para determinar los equilibrios de este tipo de superficies, para ello consideramos las proyecciones del tensor σ^{ab} a lo largo de la dirección tangencial y a lo largo de su radio azimutal [apéndice F.2], así tenemos que el equivalente de la conservación de esfuerzos generada por las ecuaciones (1.8) del capítulo 1, se ven de la siguiente manera

$$(R\sigma_{\perp})' - R'\sigma_{\parallel} + \partial_{\varphi}\sigma_{\parallel\perp} = 0, \quad (3.2)$$

$$\partial_{\varphi}\sigma_{\parallel} + R\sigma'_{\perp\perp} + 2R'\sigma_{\parallel\perp} = 0. \quad (3.3)$$

Si $\sigma_{\parallel\perp} = 0$, entonces la ley de conservación a lo largo de la acimutal, ecuación (3.3) deja indeterminado $\sigma_{\parallel}(l)$. Por ello necesitamos usar la ecuación de forma (1.7) de la que obtenemos

$$\sigma_{\perp}C_{\perp} + \sigma_{\parallel}C_{\parallel} = \rho(ZK - \cos \Theta), \quad (3.4)$$

donde Θ representa en ángulo que hace la tangente a lo largo del meridiano con la dirección del radio polar y con $C_{\perp} = \Theta'$ y $C_{\parallel} = \sin \Theta/R$ las curvaturas principales a lo largo de los meridianos y paralelos respectivamente. Por otro lado $\mathbf{n} \cdot \mathbf{k} = -\cos \Theta = -R'$, así de la ecuación (3.4) seguimos que σ_{\parallel} se puede escribir de la forma

$$\sigma_{\parallel} = \frac{\rho [Z(C_{\perp} + C_{\parallel}) - R'] - \sigma_{\perp}C_{\perp}}{C_{\parallel}}. \quad (3.5)$$

Sustituyendo σ_{\parallel} en la ecuación (3.2) tenemos que

$$R'\sigma_{\perp} + R\sigma'_{\perp} - \frac{R'\rho [Z(C_{\perp} + C_{\parallel}) - R'] - R'\sigma_{\perp}C_{\perp}}{C_{\parallel}} = 0, \quad (3.6)$$

o bien

$$\sigma'_{\perp} + \frac{R'(C_{\perp} + C_{\parallel})}{RC_{\parallel}}\sigma_{\perp} - \rho \frac{R'}{RC_{\parallel}}(Z(C_{\perp} + C_{\parallel}) - R') = 0. \quad (3.7)$$

Esta ecuación puede ser integrada

$$\left(e^{\left(\int dl \frac{R'(C_{\perp} + C_{\parallel})}{RC_{\parallel}} \right)} \sigma_{\perp} \right)' - \rho \frac{R'}{RC_{\parallel}} (Z(C_{\perp} + C_{\parallel}) - R') e^{\left(\int dl \frac{R'(C_{\perp} + C_{\parallel})}{RC_{\parallel}} \right)} = 0. \quad (3.8)$$

Con solución

$$\sigma_{\perp} = \frac{1}{e^{\left(\int dl \frac{R'(C_{\perp} + C_{\parallel})}{RC_{\parallel}} \right)}} \left(\int e^{\left(\int dl \frac{R'(C_{\perp} + C_{\parallel})}{RC_{\parallel}} \right)} \rho \frac{R'}{RC_{\parallel}} (Z(C_{\perp} + C_{\parallel}) - R') dl + C \right). \quad (3.9)$$

3.1. Torres Cilíndricas

Una de las torres más famosas que sin duda ha generado el estudio de su estabilidad es la torre de Pisa (figura 3.2 a), ubicada en el municipio del mismo nombre en la región italiana de la Toscana. Esto debido a su peculiar posición inclinada que a simple vista hace pensar en un posible colapso como los que han ocurrido en otras edificaciones similares como la torre cívica de Pavia. Sobre la torre de Pisa incluso se llegaron a plantear proyectos con la intención de enderezar la construcción sin embargo al final no se llevaron a cabo, pero si se han realizado estudios enfocados en el tipo de suelo donde esta se encuentra edificada con los cuales se han podido ordenar trabajos de ingeniería para mantener estable la torre y así prevenir un colapso de esta.



(a) Torre de Pisa.

(b) Tycho Brahe Planetarium.

Figura 3.2: Torres cilíndricas. a) Malin, A. (Fotógrafo). 2004. Recuperada de https://en.wikipedia.org/wiki/Leaning_Tower_of_Pisa. 2015. b) Jensen, S. (Fotógrafo). 1994. Recuperada de <http://www.denstoredanske.dk>. 2015. ©Polfoto/Søren Jensen.

El objetivo en esta sección es estudiar la distribución de esfuerzos y predecir el comportamiento de los distintos tipos de esfuerzos que existen en una torre inclinada “torre de Pisa”. Sin embargo, antes de atacar este problema resolveremos 2 casos sencillos, como lo es una torre cilíndrica de altura constante, al igual que una torre similar en forma al Tycho Brahe Planetarium, situado en la ciudad de Copenhague, Dinamarca (ver figura 3.2 b).

3.1.1. Torre cilíndrica vertical de altura constante

Para un cilindro vertical de radio R y altura constante H , los vectores principales de esfuerzos coinciden con las direcciones axiales y radiales, así que, $\sigma_{\parallel\perp} = 0$. Entonces, en este caso la ecuación (3.4) tiene solución

$$\sigma_{\parallel} = \rho Z, \quad (3.10)$$

esto implica que el esfuerzo paralelo (también conocido como esfuerzo de aro) $T_{\parallel} = 0$. Por la ley de conservación meridional, ecuación (3.2), σ_{\perp} es constante. La condición de frontera $\sigma_{\perp} = \rho H$ determina que el esfuerzo meridional es $T_{\perp} = \rho(H - Z)$, el cual es positivo en cualquier altura y además decrece linealmente de la base a la tapa del cilindro.

3.1.2. Torre cilíndrica vertical con un corte de ángulo β en la cima

Ahora consideremos un cilindro vertical de radio R_0 y cuyo borde en la cima es una elipse determinada por la intersección de éste con un plano Π que hace un ángulo β con el plano $Z = 0$ (figura 3.3).

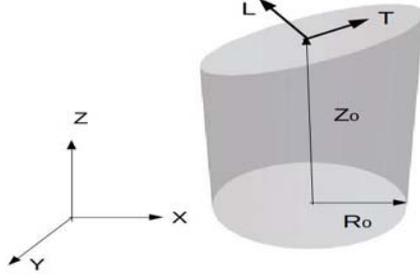


Figura 3.3: Cilindro truncado.

La solución de la ecuación de forma (3.4) sigue como $\sigma_{\parallel} = \rho Z$ con lo cual obtenemos que también en este caso el esfuerzo paralelo $T_{\parallel} = 0$. Además al remplazar σ_{\parallel} en la ley de conservación dada por la ecuación (3.3) obtenemos que $\sigma'_{\parallel\perp} = 0$, es decir el esfuerzo no diagonal $\sigma_{\parallel\perp} = f(\varphi)$, donde f es una función por determinar.

Si sustituimos $\sigma_{\parallel\perp}$ en la ley de conservación meridional, ecuación (3.2), resulta que

$$R_0 \sigma'_{\perp} + \partial_{\varphi} f(\varphi) = 0, \quad (3.11)$$

la cual tiene solución

$$\sigma_{\perp} = \frac{1}{R_0} (-Z \partial_{\varphi} f(\varphi) + C(\varphi)), \quad (3.12)$$

con C otra función de φ por determinar. Procederemos a determinar las funciones $f(\varphi)$ y $C(\varphi)$. Para ello utilizamos las condiciones en la frontera $\sigma_{\parallel\perp}^{\beta} = 0$ y $T_{\perp}^{\beta} = 0$. Esta última condición de frontera nos implica que σ_{\perp} evaluado en la cima de la torre está dada por

$$\sigma_{\perp}^{\beta} = \rho(Z_0 + R_0 \tan \beta \cos \varphi), \quad (3.13)$$

donde Z_0 es la distancia del centro de la base del cilindro al centro de la “tapa” del mismo.

Para continuar con este análisis es necesario considerar las proyecciones del tensor σ_{ab} a lo largo de los vectores normal y tangente a la frontera, que son:

$$L^a = l^a \cos \beta - t^a \sin \beta, \quad (3.14)$$

$$T^a = l^a \sin \beta + t^a \cos \beta, \quad (3.15)$$

donde $l^a = (1, 0)$ y $t^a = (0, R_0)$.

Al realizar las proyecciones del tensor σ^{ab} sobre los vectores T_a y L_a encontramos que

$$L_a \sigma^{ab} L_b = \sigma_{\perp}^{\beta} = \sigma_{\perp} \cos^2 \beta - \sigma_{\parallel\perp} \sin 2\beta + \sigma_{\parallel} \sin^2 \beta, \quad (3.16)$$

$$L_a \sigma^{ab} T_b = \sigma_{\parallel\perp}^{\beta} = \sigma_{\parallel\perp} (2 \cos^2 \beta - 1) + \frac{1}{2} (\sigma_{\perp} - \sigma_{\parallel}) \sin 2\beta. \quad (3.17)$$

La proyección $T_a \sigma^{ab} T_b$ no la consideramos ya que no contribuye en las condiciones de frontera.

Ahora multiplicamos la igualdad (3.16) por $(1/2) \sin 2\beta$ y la igualdad (3.17) por $-\cos^2 \beta$. Al sumar estas cantidades obtenemos que $f(\varphi) = 0$, por lo cual la proyección de la componente no diagonal del tensor σ^{ab} es nula, es decir $\sigma_{\parallel\perp} = 0$, la gravedad no genera esfuerzo no diagonal. A su vez $C(\varphi) = \rho R(Z_0 + R_0 \tan \beta \cos \varphi)$, así que

$$\sigma_{\perp} = \rho(Z_0 + R_0 \tan \beta \cos \varphi). \quad (3.18)$$

De esta manera tenemos que el esfuerzo meridional T_{\perp} está dado por la siguiente expresión

$$T_{\perp} = \rho(Z_0 + R_0 \tan \beta \cos \varphi - Z) \quad (3.19)$$

el cual es lineal en Z y positivo. Por lo tanto el cilindro truncado se encuentra ante compresión.

En el caso límite, cuando $\beta = 0$ tenemos que el esfuerzo meridional T_{\perp} , coincide con el esfuerzo del cilindro vertical de altura constante de la subsección 3.1.1.

3.1.3. Torre inclinada un ángulo α (“Torre de Pisa”)

Tenemos un cilindro de radio R_0 con su eje de simetría rotado un ángulo $\alpha \in (0, \pi/2)$ en sentido antihorario con respecto a la dirección \mathbf{k} y parametrizado por la longitud l a lo largo del eje l (ver figura 3.4).

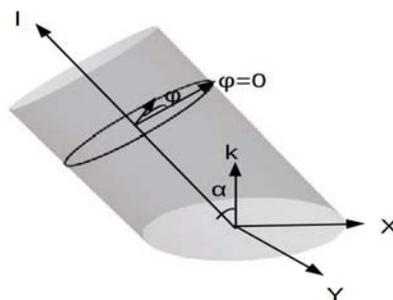


Figura 3.4: Cilindro inclinado un ángulo α .

En este caso la ecuación de forma (1.7) nos dice

$$\sigma_{\parallel} = \rho(l \cos \alpha + R_0 \sin \alpha \cos \varphi), \quad (3.20)$$

donde φ es el ángulo azimutal en el sistema de referencia asociado al eje de simetría del cilindro. De aquí observamos que el esfuerzo de aro es

$$T_{\parallel} = \rho R_0 \sin \alpha \cos \varphi, \quad (3.21)$$

el cual es independiente de la longitud l , además es negativo cuando φ está en el intervalo $(\pi/2, 3\pi/2)$ y positivo cuando φ pertenece al intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$ y es nulo cuando φ es $\pi/2$ ó $3\pi/2$. En otras palabras la parte del cilindro que queda por debajo del plano Π_α formado por el eje de simetría y el eje Y se encuentra ante tensión, mientras que la parte del cilindro que se encuentra arriba de dicho plano está bajo compresión y los puntos que se encuentran en la intersección del cilindro con el plano Π_α tienen esfuerzo de aro nulo. Así tenemos que para todo $\alpha \neq 0$, las regiones donde el esfuerzo paralelo se encuentra bajo tensión o compresión, son independientes del ángulo de inclinación de la torre cilíndrica.

Al introducir σ_{\parallel} en la ley de conservación (3.3) obtenemos

$$\sigma_{\parallel\perp} = \rho l \sin \alpha \sin \varphi + \frac{f(\varphi)}{R_0^2}. \quad (3.22)$$

Ahora sustituyendo $\sigma_{\parallel\perp}$ en la ley de conservación meridional (3.2) tenemos que

$$\sigma_{\perp} = -\frac{\rho l^2}{2R_0} \sin \alpha \cos \varphi - \frac{l \partial_\varphi f}{R_0^3} + \frac{g(\varphi)}{R_0}. \quad (3.23)$$

Para determinar $f(\varphi)$ y $g(\varphi)$ vamos a las condiciones de frontera del cilindro inclinado, las cuales son $\sigma_{\parallel\perp} = 0$ que nos implica

$$f(\varphi) = -\rho R_0^2 (l_0 + R_0 \tan \alpha \cos \varphi) \sin \alpha \sin \varphi, \quad (3.24)$$

donde l_0 es la distancia que hay entre el centro de la base y el centro de la tapa del cilindro. Esto implica que

$$\sigma_{\parallel\perp} = \rho(l - l_0 - R_0 \tan \alpha \cos \varphi) \sin \alpha \sin \varphi. \quad (3.25)$$

Por lo tanto el esfuerzo no diagonal es

$$\frac{T_{\parallel\perp}}{\rho R_0} = \left(\frac{l}{R_0} - \frac{l_0}{R_0} - \tan \alpha \cos \varphi \right) \sin \alpha \sin \varphi, \quad (3.26)$$

mismo que es nulo en la intersección del plano Π_α con el cilindro, al igual que cuando $\alpha = 0$ debido a que este es el caso de la torre cilíndrica de altura constante, lo que es compatible con la subsección 3.1.1. También tenemos que este esfuerzo de corte es lineal, además es negativo cuando φ pertenece al intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$, esto es la región que se encuentra por arriba del plano Π_α , por el contrario el esfuerzo de corte es positivo para la región que se encuentra por debajo de este plano.

La condición de frontera $T_{\perp} = 0$ nos indica que

$$\sigma_{\perp} = \rho(l_0 + R_0 \tan \alpha \cos \varphi) \cos \alpha \quad (3.27)$$

en la frontera libre. Usando este resultado la ecuación (3.23) nos dice que

$$\begin{aligned}
g(\varphi) &= \rho l_0 R_0 (\cos \alpha + \sin \alpha \tan \alpha) \\
&+ \rho \left(R_0^2 \sec^2 \alpha - \frac{l_0^2}{2} - 2l_0 R_0 \tan \alpha \cos \varphi - \frac{3R_0^2}{2} \tan^2 \alpha \cos^2 \varphi \right) \sin \alpha \cos \varphi.
\end{aligned} \quad (3.28)$$

Como consecuencia

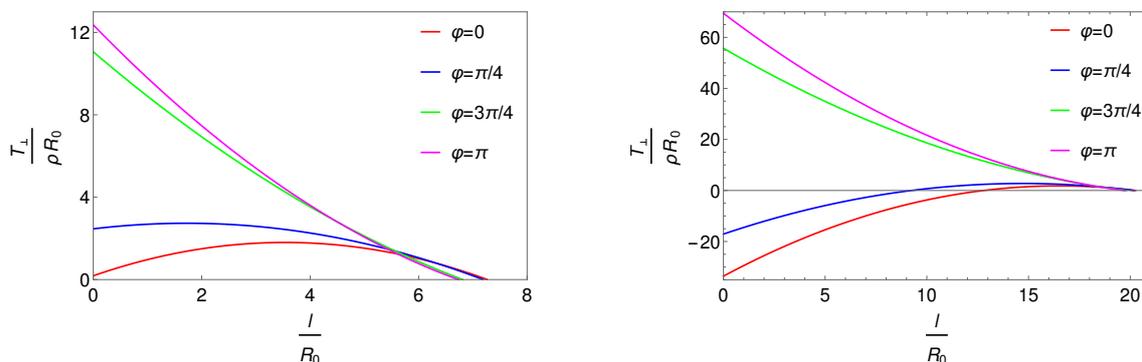
$$\begin{aligned}
\sigma_{\perp} &= \rho(l_0 - l) \sin \alpha \tan \alpha (1 - 2 \cos^2 \varphi) + \rho l_0 \cos \alpha \\
&+ \rho \left(R_0 \sec^2 \alpha - \frac{3R_0}{2} \tan^2 \alpha \cos^2 \varphi - \frac{1}{2R_0} (l_0 - l)^2 \right) \sin \alpha \cos \varphi,
\end{aligned} \quad (3.29)$$

y el esfuerzo meridional en el cilindro inclinado es

$$\begin{aligned}
\frac{T_{\perp}}{\rho R_0} &= (\sin \alpha \tan \alpha (1 - 2 \cos^2 \varphi) + \cos \alpha) \left(\frac{l_0}{R_0} - \frac{l}{R_0} \right) \\
&+ \left(\sec^2 \alpha - \frac{3}{2} \tan^2 \alpha \cos^2 \varphi - \frac{1}{2} \left(\frac{l_0}{R_0} - \frac{l}{R_0} \right)^2 \right) \sin \alpha \cos \varphi.
\end{aligned} \quad (3.30)$$

Ahora analizaremos el comportamiento del esfuerzo meridional de la torre inclinada en varias situaciones. Primero observamos que para los puntos que se encuentran en la intersección del cilindro con el plano Π_{α} , es decir, cuando φ es $\pi/2$ ó $3\pi/2$ el esfuerzo meridional es $T_{\perp} = \rho R_0 (\sin \alpha \tan \alpha + \cos \alpha) (l_0 - l)$ que es positivo para todo α . En consecuencia estos puntos se encuentran ante compresión independientemente de la inclinación de la torre.

Continuamos con el análisis fijando α el ángulo de inclinación de la torre y observamos en la figura 3.5 que el esfuerzo meridional T_{\perp} siempre es positivo en la parte del cilindro que se encuentra por debajo del plano Π_{α} , es decir, cuando φ pertenece al intervalo $(\pi/2, 3\pi/2)$, la torre está ante compresión. Mientras que el esfuerzo meridional en la parte que se encuentra por arriba de dicho plano en ocasiones tiene tensión para longitudes cercanas a la base y compresión para longitudes cercanas a la tapa del cilindro, esto con una dependencia asociada al tamaño del cociente entre la altura del cilindro l_0 y su radio R_0 .



(a) $l_0/R_0 = 7$ y $\alpha = 15^\circ$.

(b) $l_0/R_0 = 20$ y $\alpha = 15^\circ$.

Figura 3.5: Esfuerzo meridional fijando l_0/R_0 y α .

Una vez que sabemos que el esfuerzo meridional de la parte de la torre que se encuentra por debajo del plano Π_α siempre se encuentra bajo compresión, nos enfocaremos en analizar el esfuerzo T_\perp en la parte del cilindro que queda por arriba de tal plano, debido a que en esta región, el esfuerzo meridional sufre cambios de tensión a compresión, los cuales nos interesa analizar. Para ello vamos a fijar las medidas de la torre, en otras palabras dejaremos fijo el parámetro l_0/R_0 y entonces observamos en la figura 3.6 que entre más grande sea α el ángulo de inclinación de la torre es más factible encontrar tensiones cerca de la base del cilindro, además podemos ver que dado un l_0/R_0 existe un intervalo de ángulos de inclinación α para los cuales el esfuerzo meridional siempre es positivo. Más aún, para una torre con medidas dadas y un ángulo de inclinación fijo, para la que además el esfuerzo meridional tiene tensiones, observamos que las tensiones empiezan a desaparecer conforme $|\varphi|$ aumenta de 0 a $\pi/2$, es decir, conforme nos acercamos al plano Π_α recorriendo el ángulo polar φ , es más factible que en estas regiones la torre se encuentre ante compresión. En consecuencia la parte más alejada al plano Π_α que es cuando $\varphi = 0$ y cercana a la base de la torre está más propensa a sufrir tensiones provocadas por el esfuerzo meridional.

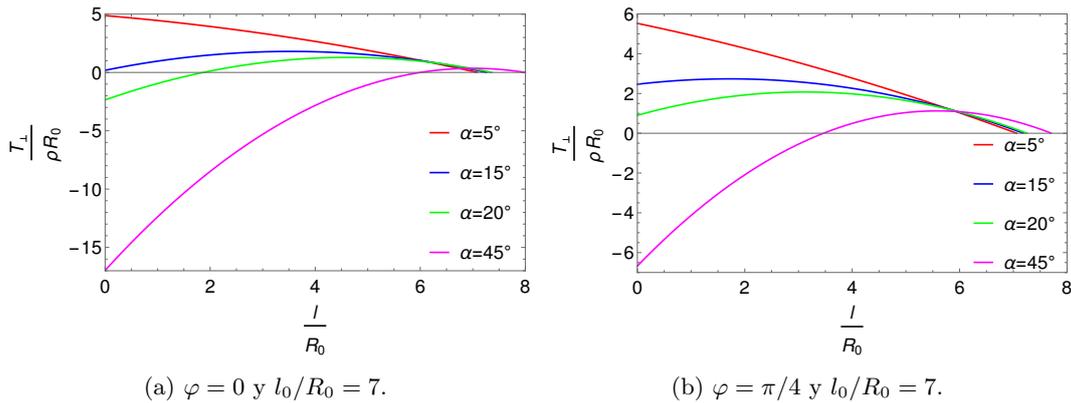


Figura 3.6: Esfuerzo meridional fijando φ y l_0/R_0 .

La parte de la torre propensa a mayor tensión es la que se localiza cuando el ángulo polar $\varphi = 0$, entonces en el siguiente caso de análisis del esfuerzo meridional dejaremos fijo el ángulo polar en tal valor. Así en la figura 3.7 observamos que dado un ángulo de inclinación α existen unas medidas particulares de la torre para las cuales el esfuerzo meridional del cilindro siempre se mantiene ante compresión. Además, en la ampliación de las gráficas del esfuerzo meridional positivo (figura 3.7), podemos apreciar que a partir de un l_0/R_0 mínimo el esfuerzo meridional alcanza un valor máximo el cual es independiente del tamaño de la torre. Estos comportamientos también se dan para otros valores de φ en el intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$.

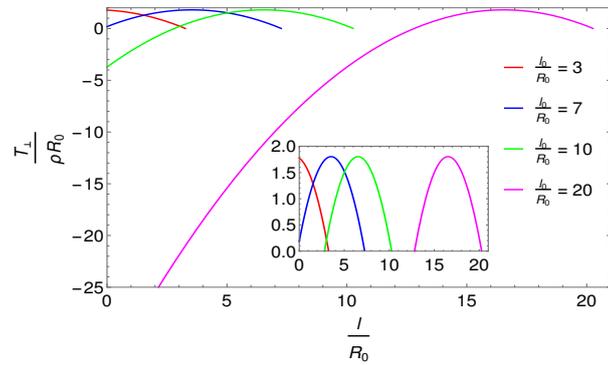


Figura 3.7: Esfuerzo meridional fijando $\alpha = 15^\circ$ y $\varphi = 0$.

Todo el análisis detallado anteriormente lo podemos apreciar resumido en las graficas de la figura 3.8, en las que representamos el esfuerzo meridional sobre la torre como una densidad de color y en las cuales nos queda claro que las grietas producto del esfuerzo meridional en las torres inclinadas pueden surgir en la parte cercana a la base del cilindro que se encuentra por arriba del plano Π_α . Además, observamos que la región de la torre menos propensa a tener fracturas provocadas por el esfuerzo meridional es la que se encuentra cercana a la base del cilindro y debajo del plano Π_α .

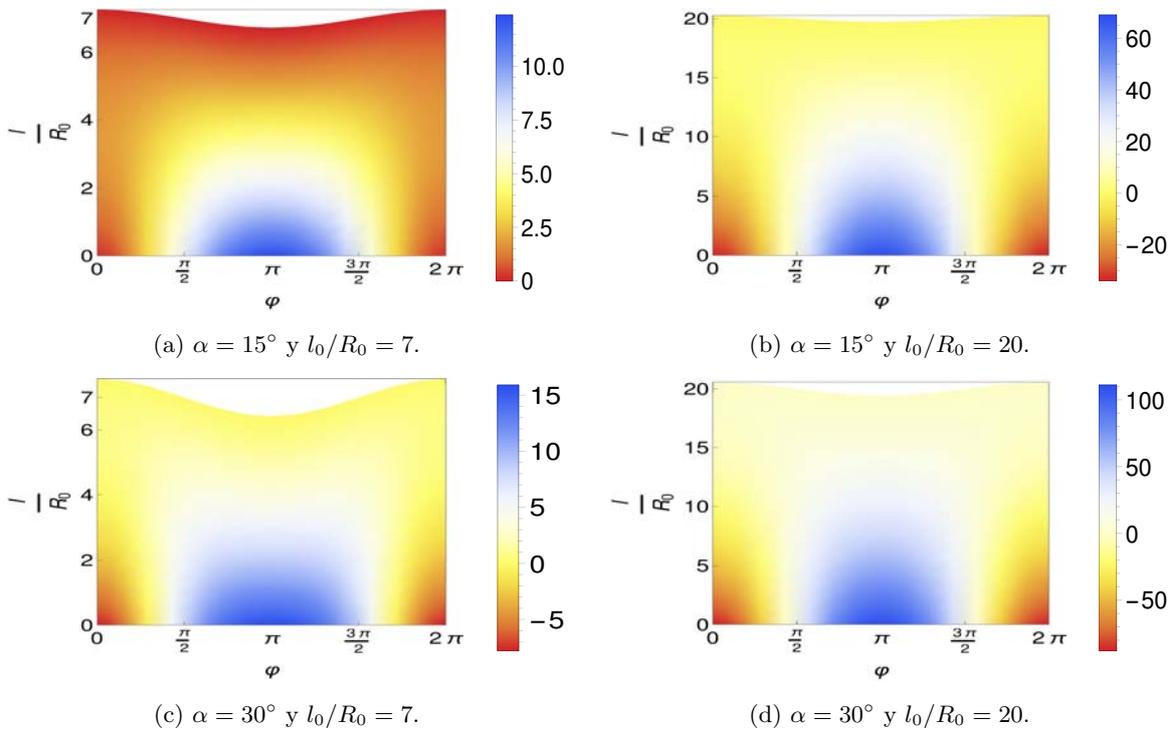


Figura 3.8: Esfuerzo meridional en torres cilíndricas inclinadas.

Torre de Pisa

A lo largo de esta sección hemos hecho mucho hincapié en la torre de Pisa, así que sería injusto no detallar cuales son las conclusiones que arroja nuestro estudio para este monumento en particular.

La torre de Pisa posee las siguientes medidas:

Altura = 55,683 metros.

Diámetro exterior de la base = 15,484 metros.

Ángulo de inclinación = 4° .

Por lo que su cociente $\frac{l_0}{R_0} \approx 7.2$. Ahora, en la figura 3.9, donde representamos el esfuerzo meridional en la torre de Pisa por una densidad de color, podemos ver que este esfuerzo meridional siempre es positivo, así que el esfuerzo sobre sus meridianos se encuentra ante compresión. Por otro lado su esfuerzo de aro en la región que se encuentra debajo del plano Π_α es negativo, sin embargo, este está multiplicado por un factor de $\sin(4^\circ)$, por lo cual casi es nulo, así que no ha sido capaz de generar tensiones que logren generar grietas que dañen la estructura de la torre de Pisa y por ello esta se ha mantenido todos estos años sin colapsar. Para que el esfuerzo meridional genere grietas en la torre de Pisa, ésta tendría que tener una inclinación de aproximadamente 16° , lo que podría generar su colapso.

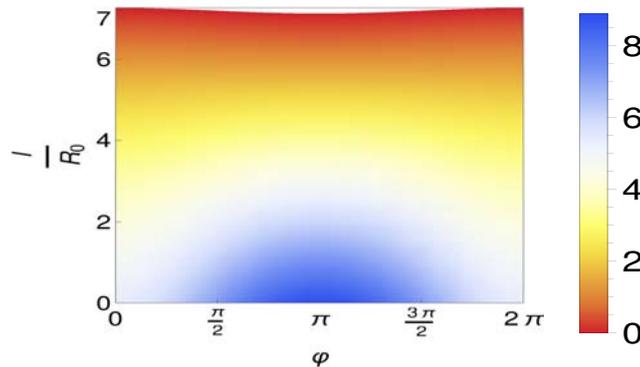


Figura 3.9: Esfuerzo en la torre de Pisa.

3.2. Domo hemisférico

La construcción de domos se hace desde la antigüedad como lo podemos ver en el Gol Gumbaz (mausoleo de Mohammed Adil Shah, sultan de Bijapur) en la India (figura 3.10 a). Sin embargo, uno de los primeros en realizar estudios formales sobre su estabilidad fue Giovanni Poleni quien fue llamado por el papa Benedicto XIV para evaluar las grietas de la cúpula de la basílica de San Pedro en el Vaticano (figura 3.10 b). El análisis realizado por Poleni ayudó a determinar en qué zonas de la cúpula se debían hacer reparaciones, sin embargo, sus estudios no fueron tan precisos, ya que se basó en estudios hechos por Robert Hooke sobre la catenaria, sin considerar los esfuerzos sobre los paralelos (“esfuerzos de aro”), los cuales son determinantes en la estabilidad de los domos.

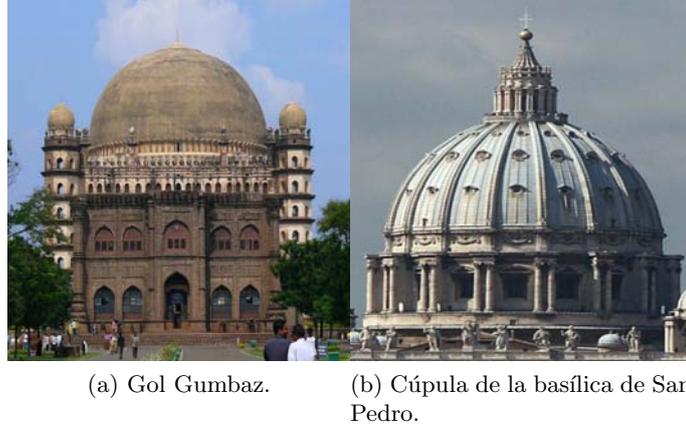


Figura 3.10: Domos esféricos. a) Boulter, K. (Fotógrafo). 2006. Recuperada de <http://www.trekearth.com/gallery/Asia/India/South/Karnataka/Bijapur/photo774579.htm>. 2015. b) Stuck, W. (Fotógrafo). 2004. Recuperada de https://it.wikipedia.org/wiki/Basilica_di_San_Pietro_in_Vaticano. 2015.

En esta sección vamos a estudiar la distribución de esfuerzos de un cascarón semi-esférico, llegando a demostrar que el esfuerzo meridional T_{\perp} es positivo, mientras que por debajo de un valor crítico el esfuerzo paralelo T_{\parallel} es negativo.

Consideremos un cascarón esférico de radio R_0 , descrito en términos de su radio polar $R(l) = R_0 \cos(l/R_0)$, donde l es la longitud a lo largo del meridiano. Suponemos que l corre de 0 a un valor l_0 , si el valor de $l_0 < (\pi/2)R_0$, indica que el domo tiene un óculo, es decir está abierto, cuando $l_0 = (\pi/2)R_0$ tenemos una cúpula cerrada. Para una esfera la ecuación (3.4) se escribe

$$\sigma_{\perp} + \sigma_{\parallel} = 3\rho R_0 \sin\left(\frac{l}{R_0}\right). \quad (3.31)$$

Sustituyendo σ_{\parallel} dado por la ecuación (3.31) en la primer ecuación de la ley de conservación (3.2) tenemos que

$$(R\sigma_{\perp})' + R' \left(\sigma_{\perp} - 3\rho R_0 \sin\left(\frac{l}{R_0}\right) \right) = 0, \quad (3.32)$$

lo que se simplifica fácilmente, dando

$$(R^2\sigma_{\perp})' = -3\rho R_0^2 \cos\left(\frac{l}{R_0}\right) \sin^2\left(\frac{l}{R_0}\right). \quad (3.33)$$

Después de integrar ambos lados la ecuación (3.33) encontramos

$$\sigma_{\perp} = -\rho R_0 \sec^2\left(\frac{l}{R_0}\right) \left(\sin^3\left(\frac{l}{R_0}\right) + C \right), \quad (3.34)$$

donde C es una constante de integración.

La condición de frontera $T_{\perp} = 0$ en el borde del óculo l_0 determina la constante C :

$$C = -\sin\left(\frac{l_0}{R_0}\right)\cos^2\left(\frac{l_0}{R_0}\right) - \sin^3\left(\frac{l_0}{R_0}\right). \quad (3.35)$$

Como consecuencia el esfuerzo meridional dentro del cascarón es

$$\frac{T_{\perp}}{\rho R_0} = \sec^2\left(\frac{l}{R_0}\right)\left(\sin\left(\frac{l_0}{R_0}\right) - \sin\left(\frac{l}{R_0}\right)\right), \quad (3.36)$$

para el cual se muestra la gráfica de la dependencia de T_{\perp} en l/R_0 para varios valores de l_0 en la figura 3.11, donde observamos que el esfuerzo meridional siempre es positivo para cualquier cociente l_0/R_0 y por lo tanto se encuentra bajo compresión. Sin embargo, para el caso del domo cerrado el esfuerzo meridional tiene una discontinuidad en $\pi/2$, ya que una de las condiciones de frontera garantiza que $T_{\perp}(\pi/2) = 0$, sin embargo, $\lim_{l/R_0 \rightarrow (\pi/2)^-} T_{\perp}(l/R_0) = \rho R_0/2$. Por otra parte, conforme nos acercamos al polo sur de la esfera, el esfuerzo meridional dado por la ecuación (3.36) diverge, ya que la secante diverge cuando $l \rightarrow -(\pi/2)R_0$.

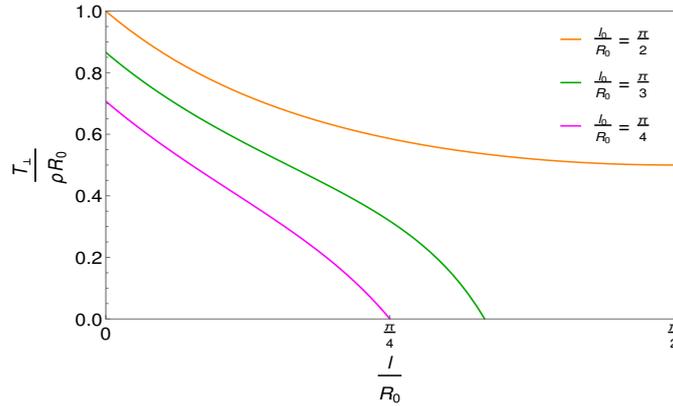


Figura 3.11: Esfuerzo meridional. Sólo hacemos las gráficas para l/R_0 entre 0 y l_0/R_0 , ya que, estos son los rangos mínimo y máximo de l/R_0 para los domos hemisféricos

A su vez, el esfuerzo paralelo dentro del cascarón es

$$\frac{T_{\parallel}}{\rho R_0} = \sec^2\left(\frac{l}{R_0}\right)\left(\sin\left(\frac{l}{R_0}\right) - \sin\left(\frac{l_0}{R_0}\right)\right) + \sin\left(\frac{l}{R_0}\right), \quad (3.37)$$

para este esfuerzo de aro observamos en la figura 3.12 que existe un cambio de negativo a positivo conforme se incrementa el cociente l/R_0 , lo que nos representa un cambio de tensión a compresión el cual observamos que pasa para todo cociente l_0/R_0 , este cambio ocurre para algún valor de l/R_0 entre 0 y aproximadamente $19\pi/90$. También podemos ver que para la cúpula cerrada, es decir, el domo con cociente $l_0/R_0 = \pi/2$ el punto crítico donde se da este cambio de tensión a compresión es en aproximadamente $19\pi/90$ que coincide con lo reportado en otros trabajos como [Hey95], donde usan el método funicular. Por lo tanto, podemos decir que las grietas meridionales en un domo con óculo son de menor tamaño a las de un domo cerrado, lo que nos indica que es mejor construir

cúpulas con óculos. En este caso, el esfuerzo paralelo en el hemisferio sur es negativo y diverge cuando $l \rightarrow -(\pi/2)R_0$, es decir, cuando nos acercamos al polo sur.

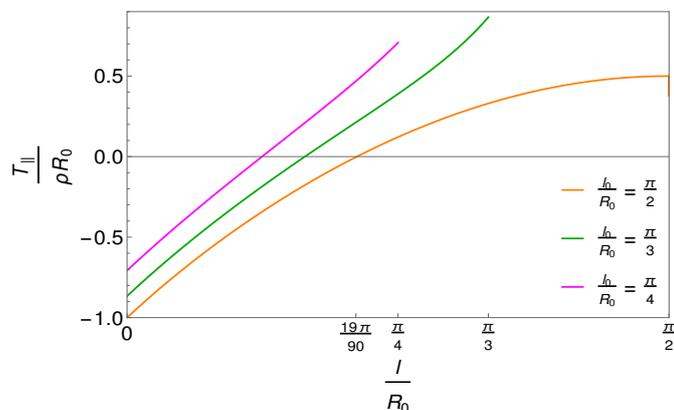


Figura 3.12: Esfuerzo paralelo. En este caso, también, consideramos las gráficas para l/R_0 entre 0 y l_0/R_0 , ya que, estos son los rangos mínimo y máximo de l/R_0 para los domos hemisféricos

Por otra parte, conforme variamos el parámetro l_0/R_0 , observamos que la longitud de arco crítica l_c , tal que el esfuerzo paralelo $T_{||}(l_c/R_0) = 0$, toma dos comportamientos distintos uno de mayor pendiente para l_0/R_0 entre 0 y $5\pi/18$ y otro de menor pendiente en un intervalo de $5\pi/18$ a $\pi/2$, como lo podemos ver en la figura 3.13. El regimen donde los puntos críticos tienen mayor pendiente, lo podemos interpretar como el intervalo de parámetros l_0/R_0 donde el esfuerzo paralelo casi tiene un comportamiento lineal, ya que la estructura tiene un óculo muy cerca de la base y se aproxima a un cilindro, mientras que el regimen donde los ceros del esfuerzo de aro tienen menor pendiente, aquí podemos observar que para este rango de parámetros l_0/R_0 , el comportamiento del esfuerzo paralelo deja de parecerse a algo lineal a su vez que aumentamos el parámetro l_0/R_0 .

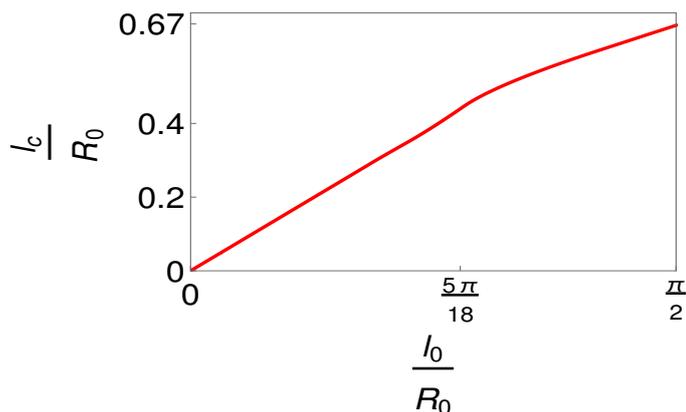


Figura 3.13: Comportamiento de los ceros del esfuerzo paralelo $T_{||}$.

Aún queda trabajo por hacer, como por ejemplo, estudiar la estabilidad de esta geometría, sin embargo, si el domo está cerrado y tiene fija su base, no existen deformaciones isométricas [Spi75].

Así que lo que se podría realizar sería introducir el efecto de una grieta en el domo la cual permita deformar la superficie y análogamente al caso del arco catenario tendríamos que introducir un funcional de energía de la forma

$$\frac{1}{2} \int (K - K_0)^2 dA, \quad (3.38)$$

para de esta manera poder llevar a cabo el análisis de estabilidad deseado.

Capítulo 4

Conclusiones

En este trabajo, obtuvimos las ecuaciones que determinan las formas de equilibrio de superficies inextensibles y que se encuentran sujetas a la fuerza de gravedad. A su vez, encontramos las condiciones que deben satisfacer las componentes del tensor de esfuerzos en la frontera libre de la superficie. Esto es realizado usando la geometría de la superficie y el cálculo de variaciones.

El primer caso que estudiamos es un arco cilíndrico, en el que consideramos las deformaciones independientes de la dirección transversal. En este caso logramos verificar que los equilibrios adoptan la forma de un arco catenario y que la distribución de esfuerzos está bajo compresión. Además, logramos establecer una relación entre el esfuerzo del arco y el cociente de su altura y la mitad de su longitud, con lo cual determinamos que el arco con menos esfuerzo tiene cociente $H/L \approx 2/3$, por otro lado, para arcos casi planos y arcos muy altos, tenemos que el esfuerzo diverge. Por otra parte, para estudiar la estabilidad del arco hicimos una búsqueda y la energía apropiada que se debe introducir es una energía de doblamiento sesgada. Para una superficie en general, la energía de doblamiento va como la suma del cuadrado de desviaciones de las curvaturas principales, la cual es anisotrópica. Aquí encontramos que tenemos que expresar a la segunda variación de la energía en términos de un operador diferencial de sexto orden que depende de la deformación tangencial y de sus derivadas, lo que es una novedad. Así conseguimos analizar la estabilidad de arcos con diferente cociente H/L . De esta forma, llegamos a que los arcos catenarios que están casi planos son menos estables. También, al comparar la rigidez crítica, entre los estados propios determinados por las deformaciones tangenciales pares contra las impares, encontramos que las deformaciones tangenciales pares estabilizan el arco catenario más rápido, y debido a la restricción de isometría. Esto implica que las deformaciones normales pares son las que tardan más en estabilizar el arco, lo que nos sugiere que en caso de un colapso, éste sería de forma simétrica. Más aún, encontramos que el arco con dimensiones $H/L \approx 3/2$ es el más estable ante deformaciones isométricas. Estos últimos resultados los verificamos cualitativamente a través de un experimento en el que observamos comportamientos muy similares a los que arroja nuestro modelo.

Aún falta estudiar el problema considerando deformaciones sobre la dirección transversal, ahora el problema es bidimensional y el campo Ψ ya no es escalar si no vectorial. Por lo tanto, se van a generar esfuerzos en la dirección transversal, además, que van a cambiar las formas de equilibrio de la estructura y cuyo estudio de estabilidad se volverá más complicado, ya que la restricción isométrica relacionará a la deformación normal Φ con la derivada de Lie de las deformaciones tangenciales, lo

que posiblemente convierta el estudio de estabilidad en el problema de analizar un operador tensorial diferencial de sexto orden. Por estas complicaciones no atacamos dicho problema en este trabajo.

Posteriormente, realizando un estudio de la distribución de esfuerzos de superficies axialmente simétricas, abordamos el problema de una torre cilíndrica inclinada, esto por el interés de estudiar esfuerzos no diagonales. En este problema, además, encontramos que existe un esfuerzo sobre sus paralelos, esfuerzo no observado en torres verticales, el cual genera grietas verticales en la parte que se encuentra por debajo del plano formado por el eje de simetría y el eje transversal, además que este tipo de esfuerzo conserva su signo en cada región de la torre determinada por el plano ya antes mencionado, esto independientemente de las dimensiones de la torre y del ángulo de inclinación de ésta. Por otra parte, obtuvimos que dada una torre con ciertas dimensiones, el esfuerzo meridional tiene un ángulo de inclinación crítico a partir del cual sufre tensiones, principalmente en la zona cercana a la base del cilindro que se encuentra por arriba del plano determinado por los ejes de simetría y transversal a la torre, tensiones que generan grietas horizontales. Este estudio lo finalizamos examinando los esfuerzos de la torre de Pisa en la que nos percatamos que el esfuerzo meridional siempre se encuentra ante compresión por lo que no hay grietas horizontales, por su parte el esfuerzo paralelo si tiene tensiones pero son prácticamente nulas, así que este esfuerzo es incapaz de generar grietas verticales en la estructura.

Otro caso axisimétrico que estudiamos fueron domos esféricos en los que de una forma más eficiente a la mostrada en trabajos como [Hey95]. Comprobamos que el esfuerzo meridional de un domo cerrado siempre se encuentra bajo compresión, mientras que el esfuerzo paralelo está bajo tensión, desde la base del domo hasta llegar a un ángulo aproximado de 38° sobre los meridianos donde sufre un cambio a compresión. Además, para domos con un óculo encontramos una relación entre el ángulo crítico donde el esfuerzo de aro cambia de tensión a compresión y la posición del óculo. En lo que respecta a superficies axialmente simétricas todavía queda trabajo por hacer, como, por ejemplo, estudiar la estabilidad de las torres cilíndricas y de los domos esféricos. Sin embargo, si la base de la cúpula cerrada está fija, no existen deformaciones isométricas, por lo que para estudiar la estabilidad de esta estructura se deben considerar grietas las cuales nos permitan deformar el domo y llevar a cabo el estudio de su estabilidad. Otro problema que se podría estudiar es ver cómo cambia el ángulo crítico si consideramos domos oblatos y prolatos. Estos problemas los dejaremos para resolver en un futuro.

Apéndice A

Geometría diferencial de una membrana

En nuestro marco de trabajo vamos a considerar a una membrana como una superficie parametrizada $(u^1, u^2) \mapsto \mathbf{X}(u^1, u^2)$, por ello en este apéndice definiremos algunos conceptos matemáticos relacionados a la superficie y a su geometría, mismos que serán necesarios y de relevante importancia dentro del contexto en que realizamos nuestro estudio (estos pueden ser encontrados con mayor detalle, por ejemplo en [dCdL90, Wil12]).

A.1. Vectores tangentes y normal

Los vectores tangentes asociados a una superficie parametrizada $\mathbf{X}(u^1, u^2)$ se definen como

$$\mathbf{e}_a = \partial_a \mathbf{X}, \quad a = 1, 2. \quad (\text{A.1})$$

Por otro lado el vector normal a la superficie $\mathbf{X}(u^1, u^2)$ está dado por la siguiente expresión:

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{e}_a \times \mathbf{e}_b}{\|\mathbf{e}_a \times \mathbf{e}_b\|} \quad (\text{A.2})$$

el cual cumple las propiedades que $\mathbf{n}^2 = 1$ y $\mathbf{e}_a \cdot \mathbf{n} = 0$.

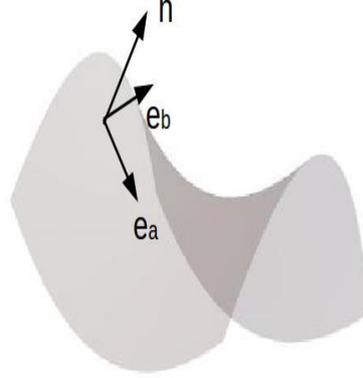


Figura A.1: Vectores tangentes y normal de una superficie.

A.2. Tensor métrico y tensor de curvatura extrínseca

El tensor métrico g_{ab} de una superficie parametrizada $\mathbf{X}(u^1, u^2)$, también conocido como la primera forma fundamental nos permite hacer mediciones sobre la superficie sin considerar el espacio euclídeo donde se encuentra encajada ésta y se define como el producto interno de los vectores tangentes,

$$g_{ab} = \mathbf{e}_a \cdot \mathbf{e}_b. \quad (\text{A.3})$$

A su vez el tensor de curvatura extrínseca K_{ab} o segunda forma fundamental de la superficie $\mathbf{X}(u^1, u^2)$ nos permite determinar cómo rota el vector normal a la superficie conforme se recorre ésta en cierta dirección, dicho tensor está dado por la expresión

$$K_{ab} = \mathbf{e}_a \cdot \partial_b \mathbf{n}. \quad (\text{A.4})$$

A la traza del tensor de curvatura extrínseca $K = \text{tr}(K_{ab}) = g^{ab} K_{ab}$ se le llama curvatura media y al determinante $K_G = \det(K_{ab})$ se le conoce como la curvatura de Gauss, estas estructuras son invariantes de la representación matricial del tensor de curvatura extrínseca, más aún la curvatura de Gauss es invariante bajo isometrías locales por el teorema Egregium de Gauss [dCdL90]. Por otra parte si proyectamos el tensor de curvatura extrínseca K_b^a sobre el vector tangencial \mathbf{e}_a obtenemos las que se conocen como ecuaciones de Weingarten

$$\partial_b \mathbf{n} = K_b^a \mathbf{e}_a. \quad (\text{A.5})$$

A.3. Símbolos de Christoffel y derivada covariante

Los símbolos de Christoffel están definidos de la siguiente forma:

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{g^{km}}{2} \left(\frac{\partial g_{mi}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{mj}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^m} \right). \quad (\text{A.6})$$

La derivada covariante es una generalización de la derivada parcial ordinaria a variedades diferenciables, la derivada covariante de un vector u^a se define como

$$\nabla_b u^a = \partial_b u^a + \Gamma_{cb}^a u^c. \quad (\text{A.7})$$

La definición de derivada covariante se puede extender a campos tensoriales definidos en una variedad de Riemann obteniendo la siguiente expresión para la derivada covariante de un tensor S^{ab}

$$\nabla_c S^{ab} = \partial_c S^{ab} + \Gamma_{dc}^a S^{db} + \Gamma_{dc}^b S^{ad}. \quad (\text{A.8})$$

Ahora vamos a calcular la derivada covariante de un vector tangente, para ello usaremos el hecho que $\mathbf{e}_b \cdot \mathbf{n} = 0$, así tenemos que la derivada covariante $\nabla_a(\mathbf{e}_b \cdot \mathbf{n}) = 0$ lo que nos implica que

$$(\nabla_a \mathbf{e}_b) \cdot \mathbf{n} = -\mathbf{e}_b \cdot (\nabla_a \mathbf{n}) = -K_{ab}, \quad (\text{A.9})$$

al proyectar la ecuación (A.9) sobre el vector normal \mathbf{n} obtenemos las que se conocen como ecuaciones de Gauss

$$\nabla_a \mathbf{e}_b = -K_{ab} \mathbf{n}. \quad (\text{A.10})$$

A.4. Membranas isométricas a una geometría cilíndrica

La parametrización de membranas que son isométricas a una geometría cilíndrica plana tiene la particularidad que una de sus coordenadas sólo depende de uno de sus dos parámetros y en consecuencia pueden ser tratadas como una curva parametrizada \mathbf{x} en el plano. Sin pérdida de generalidad usaremos que la tercera coordenada es una función del parámetro u^1 . De esta forma los vectores tangentes de la superficie son el vector unitario \mathbf{j} y el vector tangente a la curva $\mathbf{x}(u^1)$ que es

$$\mathbf{t} = \frac{\mathbf{x}'(u^1)}{\|\mathbf{x}'(u^1)\|}. \quad (\text{A.11})$$

El vector normal a la superficie apuntando hacia arriba es el vector normal a la curva que está dado por

$$\mathbf{n} = \frac{1}{(1 + \mathbf{x}'(u^1))^2} (x'(u^1), 0, 1). \quad (\text{A.12})$$

Así la curvatura media K de la membrana es la curvatura de Frenet κ de la curva $\mathbf{x}(u^1)$, es decir,

$$K = -\frac{x''(u^1)}{(1 + \mathbf{x}'(u^1))^2} \quad (\text{A.13})$$

y su curvatura de Gauss K_G es nula.

Más aún, si este tipo de membranas están parametrizadas por la longitud de arco s , éstas satisfacen el teorema fundamental de las curvas restringido al caso de curvas planas [dCdL90], el cual nos determina las siguientes ecuaciones para la curvatura de Frenet:

$$\dot{\mathbf{t}} = -\kappa \mathbf{n} \quad \text{y} \quad (\text{A.14})$$

$$\dot{\mathbf{n}} = \kappa \mathbf{t}, \quad (\text{A.15})$$

donde $\dot{}$ denota la derivada con respecto a la longitud de arco.

Apéndice B

Variaciones de la geometría intrínseca ante deformaciones

Una deformación de una superficie \mathbf{X} la podemos descomponer en su parte normal y en sus partes tangenciales, es decir, $\delta\mathbf{X} = \Phi\mathbf{n} + \Psi^a\mathbf{e}_a$ y en base a esta descomposición encontramos que la variación de los vectores tangentes a la superficie la podemos deducir de la siguiente manera:

$$\delta\mathbf{e}_a = \partial_a\delta\mathbf{X} = \Phi\partial_a\mathbf{n} + (\partial_a\Phi)\mathbf{n} + \Psi^b\partial_a\mathbf{e}_b + (\partial_a\Psi^b)\mathbf{e}_b, \quad (\text{B.1})$$

luego por las ecuaciones de Weingarten (A.5) y las ecuaciones de Gauss (A.10) tenemos que

$$\delta\mathbf{e}_a = (\Phi K_a^b + \nabla_a\Psi^b)\mathbf{e}_b + (\nabla_a\Phi - \Psi^b K_{ab})\mathbf{n}. \quad (\text{B.2})$$

B.1. Variación del tensor métrico

La variación del tensor métrico $g_{ab} = \mathbf{e}_a \cdot \mathbf{e}_b$ es la siguiente:

$$\begin{aligned} \delta g_{ab} &= \delta(\mathbf{e}_a \cdot \mathbf{e}_b) = \mathbf{e}_a \cdot \delta\mathbf{e}_b + \delta\mathbf{e}_a \cdot \mathbf{e}_b \\ &= \mathbf{e}_a \cdot ((\Phi K_b^a + \nabla_b\Psi^a)\mathbf{e}_a + (\nabla_b\Phi - \Psi^a K_{ba})\mathbf{n}) + (a \leftrightarrow b) \\ &= 2K_{ab}\Phi + \nabla_a\Psi_b + \nabla_b\Psi_a. \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

La expresión $\nabla_a\Psi_b + \nabla_b\Psi_a$ corresponden a la derivada de Lie de las deformaciones tangenciales Ψ^a . Si el tensor métrico es invariante ante reparametrizaciones, $\delta g_{ab} = 0$, es decir, $\nabla_a\Psi_b + \nabla_b\Psi_a + 2K_{ab}\Phi = 0$.

B.2. Variación del diferencial de área

Tenemos que la diferencial de área es $dA = d^2u\sqrt{g}$ con g el determinante del tensor métrico, así la variación de la diferencial de área la podemos calcular de la siguiente forma:

44 APÉNDICE B. VARIACIONES DE LA GEOMETRÍA INTRÍNSECA ANTE DEFORMACIONES

$$\begin{aligned}\delta dA &= d^2u \delta\sqrt{g} \\ &= \frac{1}{2}d^2u \sqrt{g} g^{ab} \delta g_{ab} \\ &= \frac{1}{2}d^2u \sqrt{g} g^{ab} (2K_{ab}\Phi + \nabla_a\Psi_b + \nabla_b\Psi_a) \\ &= (K\Phi + \nabla_a\Psi^a)dA.\end{aligned}\tag{B.4}$$

Apéndice C

Método de variables auxiliares

El método de variable auxiliares desarrollado en [Guv04] es útil para identificar el tensor de esfuerzos en un hamiltoniano H asociado a una superficie. Dicho hamiltoniano sólo depende de la métrica g_{ab} y de la curvatura extrínseca K_{ab} de la superficie. Es decir es un funcional de la siguiente forma:

$$H[\mathbf{X}] = \int dA \mathcal{H}(g_{ab}, K_{ab}). \quad (\text{C.1})$$

El proceso consiste en introducir multiplicadores de Lagrange y a su vez constricciones con las cuales nosotros podamos construir un nuevo hamiltoniano H_C que dependa de los multiplicadores de Lagrange y de las variables que describen a la superficie y que a su vez forman las constricciones. En nuestro caso nosotros añadiremos un funcional de energía potencial $V[\mathbf{X}] = \rho \int dA \mathbf{X} \cdot \mathbf{k}$, además de una constricción isométrica $g_{ab} = g_{ab}^{(0)}$, ya que con estas implementaciones tenemos el problema que nos interesa resolver.

Las constricciones que usamos y que describen a la superficie \mathbf{X} , vienen de las definiciones de: \mathbf{e}_a los vectores tangentes a la superficie \mathbf{X} , g^{ab} el tensor métrico y K_{ab} el tensor de curvatura extrínseca (ver [apéndice A]). Más otras dos constricciones dadas por las propiedades $\mathbf{n}^2 = 1$ y $\mathbf{e}_a \cdot \mathbf{n} = 0$. De está forma obtenemos el nuevo funcional

$$\begin{aligned} H_C &= H[g_{ab}, K_{ab}] + \int dA \mathbf{f}^a \cdot (\mathbf{e}_a - \partial_a \mathbf{X}) \\ &+ \int dA (\lambda_{\perp}^a (\mathbf{e}_a \cdot \mathbf{n}) + \lambda_n (\mathbf{n}^2 - 1)) \\ &+ \int dA (\Lambda^{ab} (K_{ab} - \mathbf{e}_a \cdot \partial_b \mathbf{n}) + \lambda^{ab} (g_{ab} - \mathbf{e}_a \cdot \mathbf{e}_b)) \\ &- \frac{1}{2} \int dA \sigma^{ab} (g_{ab} - g_{ab}^{(0)}) + \rho \int dA \mathbf{X} \cdot \mathbf{k}, \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

donde \mathbf{f}^a , λ_{\perp}^a , λ_n , Λ^{ab} , λ^{ab} y σ^{ab} son los respectivos multiplicadores de Lagrange. Ahora consideramos a g_{ab} , K_{ab} , \mathbf{e}_a , \mathbf{n} y \mathbf{X} como variables independientes.

Realizando Euler-Lagrange sobre el hamiltoniano H_C de la ecuación C.2 con respecto a la variable \mathbf{X} nosotros tenemos que

$$\begin{aligned}
\delta_{\mathbf{X}} H_C &= -\delta_{\mathbf{X}} \left(\int dA(\mathbf{f}^a \cdot \partial_a \mathbf{X}) - \rho \int dA(\mathbf{X} \cdot \mathbf{k}) \right) \\
&= \int dA((\nabla_a \mathbf{f}^a + \rho \mathbf{k})) \cdot \delta \mathbf{X} + BT \\
&= \int dA(\nabla_a \mathbf{f}^a + \rho \mathbf{k}) \cdot \delta \mathbf{X}.
\end{aligned} \tag{C.3}$$

Así en equilibrio tenemos que dentro de la superficie se cumple

$$\nabla_a \mathbf{f}^a = -\rho \mathbf{k}. \tag{C.4}$$

Por otra parte las ecuaciones de Euler-Lagrange para la variable \mathbf{e}_a están dadas por

$$\begin{aligned}
\delta_{\mathbf{e}_a} H_C &= \delta_{\mathbf{e}_a} \left(\int dA(\mathbf{f}^a \cdot \mathbf{e}_a) + \int dA \lambda_{\perp}^a(\mathbf{e}_a \cdot \mathbf{n}) \right) \\
&\quad - \delta_{\mathbf{e}_a} \left(\int dA(\Lambda^{ab}(\mathbf{e}_a \cdot \partial_b \mathbf{n}) + \lambda^{ab}(\mathbf{e}_a \cdot \mathbf{e}_b)) \right) \\
&= \int dA(\mathbf{f}^a + \lambda_{\perp}^a \mathbf{n} - \Lambda^{ab} \partial_b \mathbf{n} - 2\lambda^{ab} \mathbf{e}_b) \cdot \delta \mathbf{e}_a.
\end{aligned} \tag{C.5}$$

En equilibrio obtenemos que $\mathbf{f}^a = \Lambda^{ab} \partial_b \mathbf{n} + 2\lambda^{ab} \mathbf{e}_b - \lambda_{\perp}^a \mathbf{n}$ y utilizando las ecuaciones de Weingarten ($\partial_a \mathbf{n} = -K_a^b \mathbf{e}_b$) obtenemos que el esfuerzo \mathbf{f}^a lo podemos escribir como combinación lineal de los vectores base

$$\mathbf{f}^a = (\Lambda^{ac} K_c^b + 2\lambda^{ab}) \mathbf{e}_b - \lambda_{\perp}^a \mathbf{n}. \tag{C.6}$$

Continuamos con el mismo procedimiento, pero ahora usando la variable \mathbf{n} de aquí obtenemos que

$$\begin{aligned}
\delta_{\mathbf{n}} H_C &= \delta_{\mathbf{n}} \left(\int dA(\lambda_{\perp}^a(\mathbf{e}_a \cdot \mathbf{n}) + \lambda_n \mathbf{n}^2) - \int dA \Lambda^{ab}(\mathbf{e}_a \cdot \partial_b \mathbf{n}) \right) \\
&= \int dA(\lambda_{\perp}^a \mathbf{e}_a + 2\lambda_n \mathbf{n}) \cdot \delta \mathbf{n} + \int dA((\nabla_b \Lambda^{ab}) \mathbf{e}_a \cdot \delta \mathbf{n} + \Lambda^{ab} \mathbf{e}_a \cdot \partial_b \delta \mathbf{n}) \\
&= \int dA \left((\lambda_{\perp}^a + \nabla_b \Lambda^{ab}) \mathbf{e}_a + 2\lambda_n \mathbf{n} - \Lambda^{ab} \nabla_b \mathbf{e}_a \right) \cdot \delta \mathbf{n} + BT.
\end{aligned} \tag{C.7}$$

Resultando que en equilibrio $(\lambda_{\perp}^a + \nabla_b \Lambda^{ab}) \mathbf{e}_a + 2\lambda_n \mathbf{n} - \Lambda^{ab} \nabla_b \mathbf{e}_a = 0$ y utilizando las ecuaciones de Gauss ($\nabla_a \mathbf{e}_b = -K_{ab} \mathbf{n}$) llegamos a

$$(\nabla_b \Lambda^{ab} + \lambda_{\perp}^a) \mathbf{e}_a + (2\lambda_n - \Lambda^{ab} K_{ab}) \mathbf{n} = 0, \tag{C.8}$$

y como los vectores \mathbf{e}_a y \mathbf{n} son ortogonales entre si, entonces tenemos el siguiente par de igualdades:

$$\lambda_{\perp}^a = -\nabla_b \Lambda^{ab}, \tag{C.9}$$

$$2\lambda_n = \Lambda^{ab} K_{ab}. \quad (\text{C.10})$$

Finalmente nosotros definimos

$$S^{ab} := -2 \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial(\sqrt{g}\mathcal{H})}{\partial g_{ab}} \quad \text{y} \quad \mathcal{H}^{ab} := \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial K_{ab}}.$$

Y al hacer Euler-Lagrange con respecto a las variables g_{ab} y K_{ab} resultan las siguientes ecuaciones:

$$\delta_{g_{ab}} H_C = \frac{\partial \mathcal{H}[g_{ab}, K_{ab}]}{\partial g_{ab}} + \left(\int dA (\lambda^{ab} - \frac{\sigma^{ab}}{2}) \cdot \delta g_{ab} \right). \quad (\text{C.11})$$

$$\delta_{K_{ab}} H_C = \frac{\partial \mathcal{H}[g_{ab}, K_{ab}]}{\partial K_{ab}} + \left(\int dA (\Lambda^{ab} \cdot \delta K_{ab}) \right). \quad (\text{C.12})$$

Las ecuaciones de Euler-Lagrange para la métrica g_{ab} y la curvatura extrínseca K_{ab} dan

$$\lambda^{ab} - \frac{\sigma^{ab}}{2} = \frac{S^{ab}}{2} \quad \text{y} \quad (\text{C.13})$$

$$\Lambda^{ab} = -\mathcal{H}^{ab}. \quad (\text{C.14})$$

Al sustituir λ^{ab} , Λ^{ab} y λ_{\perp}^a en la ecuación C.6 llegamos a que el tensor de esfuerzos se puede escribir de la siguiente manera:

$$\mathbf{f}^a = (S^{ab} + \sigma^{ab} - \mathcal{H}^{ac} K_c^b) \mathbf{e}_b - \nabla_b \mathcal{H}^{ab} \mathbf{n}. \quad (\text{C.15})$$

Si consideramos el hamiltoniano $\mathcal{H}[g_{ab}, K_{ab}] = \rho \mathbf{X} \cdot \mathbf{k} g^{ab} g_{ab}$ que corresponde a la energía potencial, tenemos que

$$\mathcal{H}^{ac} = 0 \quad \text{y} \quad S^{ab} = -\rho h g^{ab}.$$

Entonces,

$$\mathbf{f}^a = (\sigma^{ab} - \rho h g^{ab}) \mathbf{e}_b \quad (\text{C.16})$$

y al hacer la proyección de la derivada covariante $\nabla_a \mathbf{f}^a$ sobre las direcciones normal y tangenciales reproducimos las ecuaciones (1.7) y (1.8) respectivamente.

Apéndice D

Operadores de la segunda variación del arco catenario

En este apéndice, calculamos de forma explícita los operadores diferenciales correspondientes a la segunda variación, tanto de la energía de doblamiento como de la energía potencial, asociadas a un arco catenario. Estos cálculos se harán a través de integración por partes y usando la constricción $\Psi' = -\kappa_0\Phi$, donde κ_0 es la curvatura de Frenet del arco en equilibrio y Φ y Ψ son las deformaciones normal y tangencial, respectivamente. Iniciamos con el operador asociado a la energía de doblamiento, el cual podemos ver en el primer término de la ecuación (2.21), que está dado por

$$\begin{aligned}
\int ds(\Phi' - \kappa_0\Psi)^2 &= -\int ds(\Phi' - \kappa_0\Psi)(\Phi' - \kappa_0\Psi)'' \\
&= \int ds(\Phi(\Phi' - \kappa_0\Psi)''' + \kappa_0(\Phi' - \kappa_0\Psi)'') \\
&= \int ds\Psi\left(\left(\frac{(\Phi' - \kappa_0\Psi)'''}{\kappa_0}\right)' + \kappa_0(\Phi' - \kappa_0\Psi)''\right) \\
&= -\int ds\Psi\left(\left(\frac{(\kappa_0\Psi)'''}{\kappa_0}\right)' + \kappa_0(\kappa_0\Psi)''\right) \\
&\quad - \int ds\Psi\left(\left(\frac{(\Psi')''''}{\kappa_0}\right)' + \kappa_0\left(\frac{\Psi'}{\kappa_0}\right)'''\right), \tag{D.1}
\end{aligned}$$

de esta manera, podemos escribir, $\int ds(\Phi' - \kappa_0\Psi)^2 = \int ds\Psi\mathcal{L}_1\Psi$, con \mathcal{L}_1 un operador diferencial de sexto orden, dado por la siguiente expresión:

$$\mathcal{L}_1 := -\left(\partial_s\frac{1}{\kappa_0}\partial_s^4\frac{1}{\kappa_0}\partial_s + \kappa_0\partial_s^2\kappa_0 + \partial_s\frac{1}{\kappa_0}\partial_s^3\kappa_0 + \kappa_0\partial_s^3\frac{1}{\kappa_0}\partial_s\right). \tag{D.2}$$

Hemos puesto a la segunda variación de la energía de doblamiento en términos de la deformación tangencial Ψ , debido a que el término $\int ds\kappa_0^2\Psi^2$, no puede ser expresado en términos de la deformación normal Φ , a través de integración por partes.

Por otra parte, de la ecuación (2.20) tenemos que, la segunda variación de la energía potencial esta dada de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
-\int ds(\sigma - \rho h)(\Phi' - \kappa_0 \Psi)^2 &= \int ds \left(\Phi \left((\sigma - \rho h)(\Phi' - \kappa_0 \Psi) \right)' + \kappa_0 \Psi (\sigma - \rho h)(\Phi' - \kappa_0 \Psi) \right) \\
&= \int ds \Psi \left(\left(\frac{((\sigma - \rho h)(\Phi' - \kappa_0 \Psi))'}{\kappa_0} \right)' + \kappa_0 (\sigma - \rho h)(\Phi' - \kappa_0 \Psi) \right) \\
&= - \int ds \Psi \left(\frac{\left((\sigma - \rho h) \left(\left(\frac{\Psi'}{\kappa_0} \right)' + \kappa_0 \Psi \right) \right)'}{\kappa_0} \right)' \\
&\quad - \int ds \Psi \left(\kappa_0 (\sigma - \rho h) \left(\left(\frac{\Psi'}{\kappa_0} \right)' + \kappa_0 \Psi \right) \right), \tag{D.3}
\end{aligned}$$

así podemos escribir, $-\int ds(\sigma - \rho h)(\Phi' - \kappa_0 \Psi)^2 = \int ds \Psi \mathcal{L}_0 \Psi$, donde \mathcal{L}_0 un operador diferencial de cuarto orden, dado por la expresión

$$\mathcal{L}_0 := - \left(\partial_s \frac{1}{\kappa_0} \partial_s (\sigma - \rho h) \partial_s \frac{1}{\kappa_0} \partial_s + \partial_s \frac{1}{\kappa_0} \partial_s \kappa_0 (\sigma - \rho h) + \kappa_0 (\sigma - \rho h) \partial_s \frac{1}{\kappa_0} \partial_s + \kappa_0^2 (\sigma - \rho h) \right) \tag{D.4}$$

Apéndice E

Ortonormalización de bases del arco catenario

Para ortonormalizar las bases

$$f_n(x) = \cos\left(\frac{(2n+1)\pi x}{2L}\right) + \frac{2n+1}{2n+3} \cos\left(\frac{(2n+3)\pi x}{2L}\right), \quad (\text{E.1})$$

$$g_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + \frac{n}{n+1} \sin\left(\frac{(n+1)\pi x}{L}\right), \quad (\text{E.2})$$

usaremos el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt y posteriormente normalizaremos las bases obtenidas.

En nuestro caso el proceso de Gram-Schmidt para la base par $\{f_n(x)\}$ es el siguiente:

$$\tilde{\Psi}_1^{\text{par}}(x) := f_1(x), \quad (\text{E.3})$$

$$\tilde{\Psi}_k^{\text{par}}(x) := f_k(x) - \sum_{j=1}^{k-1} \left(\frac{\int_{-L}^L dx \tilde{\Psi}_j^{\text{par}}(x) f_k(x)}{\int_{-L}^L dx (\tilde{\Psi}_j^{\text{par}}(x))^2} \right) \tilde{\Psi}_j^{\text{par}}. \quad (\text{E.4})$$

Ahora, las ecuaciones (E.1) y (E.3) implican que

$$\tilde{\Psi}_1^{\text{par}}(x) = \cos\left(\frac{3\pi x}{2L}\right) + \frac{3}{5} \cos\left(\frac{5\pi x}{2L}\right) \quad (\text{E.5})$$

y tomando $k = 2$, en la ecuación (E.4) tenemos

$$\begin{aligned}
\tilde{\Psi}_2^{\text{par}}(x) &= \cos\left(\frac{5\pi x}{2L}\right) + \frac{5}{7} \cos\left(\frac{7\pi x}{2L}\right) \\
&- \frac{\int_{-L}^L dx \left(\cos\left(\frac{3\pi x}{2L}\right) + \frac{3}{5} \cos\left(\frac{5\pi x}{2L}\right)\right) \left(\cos\left(\frac{5\pi x}{2L}\right) + \frac{5}{7} \cos\left(\frac{7\pi x}{2L}\right)\right)}{\int_{-L}^L dx \left(\cos\left(\frac{3\pi x}{2L}\right) + \frac{3}{5} \cos\left(\frac{5\pi x}{2L}\right)\right)^2} \tilde{\Psi}_1^{\text{par}} \\
&= \cos\left(\frac{5\pi x}{2L}\right) + \frac{5}{7} \cos\left(\frac{7\pi x}{2L}\right) - \left(\frac{\frac{3L}{5}}{\frac{34L}{25}}\right) \tilde{\Psi}_1^{\text{par}} \\
&= \cos\left(\frac{5\pi x}{2L}\right) + \frac{5}{7} \cos\left(\frac{7\pi x}{2L}\right) - \frac{15}{34} \tilde{\Psi}_1^{\text{par}}, \tag{E.6}
\end{aligned}$$

continuando de la misma manera con los cálculos y normalizando la base $\{\tilde{\Psi}_n^{\text{par}}(x)\}$, es decir, dividiendo cada $\tilde{\Psi}_n^{\text{par}}(x)$ entre $\sqrt{\int_{-L}^L dx \left(\tilde{\Psi}_n^{\text{par}}(x)\right)^2}$, obtenemos que la base $\{\Psi_n^{\text{par}}(x)\}$ está dada por las siguientes funciones:

$$\Psi_1^{\text{par}}(x) = \frac{5}{\sqrt{34L}} \left(\cos\left(\frac{3\pi x}{2L}\right) + \frac{3}{5} \cos\left(\frac{5\pi x}{2L}\right) \right), \tag{E.7}$$

$$\Psi_2^{\text{par}}(x) = \sqrt{\frac{1666}{2075L}} \left(\cos\left(\frac{5\pi x}{2L}\right) + \frac{5}{7} \cos\left(\frac{7\pi x}{2L}\right) - \frac{15}{34} \Psi_1^{\text{par}}(x) \right), \tag{E.8}$$

$$\Psi_3^{\text{par}}(x) = \sqrt{\frac{6723}{8036L}} \left(\cos\left(\frac{7\pi x}{2L}\right) + \frac{7}{9} \cos\left(\frac{9\pi x}{2L}\right) - \frac{238}{415} \Psi_2^{\text{par}}(x) \right), \tag{E.9}$$

$$\Psi_4^{\text{par}}(x) = \sqrt{\frac{19844}{23085L}} \left(\cos\left(\frac{9\pi x}{2L}\right) + \frac{9}{11} \cos\left(\frac{11\pi x}{2L}\right) - \frac{747}{1148} \Psi_3^{\text{par}}(x) \right) \dots \tag{E.10}$$

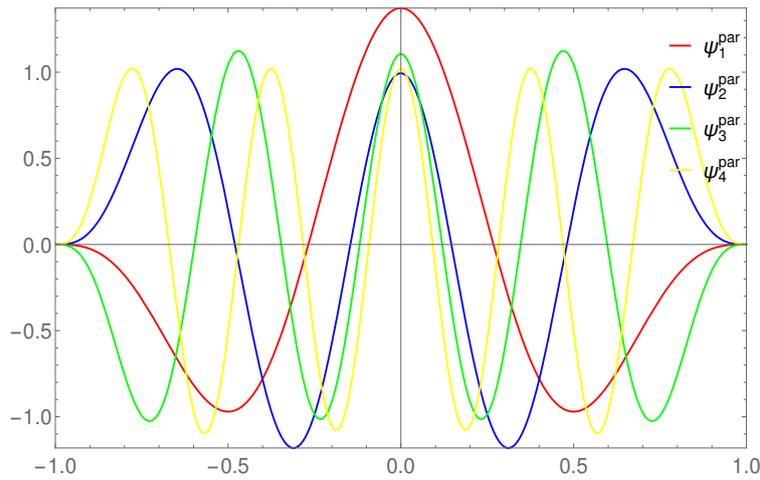


Figura E.1: Deformaciones tangenciales pares.

Analogamente encontramos que la base impar $\{\Psi_n^{\text{impar}}\}$ es:

$$\Psi_1^{\text{impar}}(x) = \frac{2}{\sqrt{5L}} \left(\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) + \frac{1}{2} \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right) \right), \quad (\text{E.11})$$

$$\Psi_2^{\text{impar}}(x) = \sqrt{\frac{45}{56L}} \left(\sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right) + \frac{2}{3} \sin\left(\frac{3\pi x}{L}\right) - \frac{2}{5} \Psi_1^{\text{impar}}(x) \right), \quad (\text{E.12})$$

$$\Psi_3^{\text{impar}}(x) = \sqrt{\frac{112}{135L}} \left(\sin\left(\frac{3\pi x}{L}\right) + \frac{3}{4} \sin\left(\frac{4\pi x}{L}\right) - \frac{15}{28} \Psi_2^{\text{impar}}(x) \right), \quad (\text{E.13})$$

$$\Psi_4^{\text{impar}}(x) = \sqrt{\frac{75}{88L}} \left(\sin\left(\frac{4\pi x}{L}\right) + \frac{4}{5} \sin\left(\frac{5\pi x}{L}\right) - \frac{28}{45} \Psi_3^{\text{impar}}(x) \right) \dots \quad (\text{E.14})$$

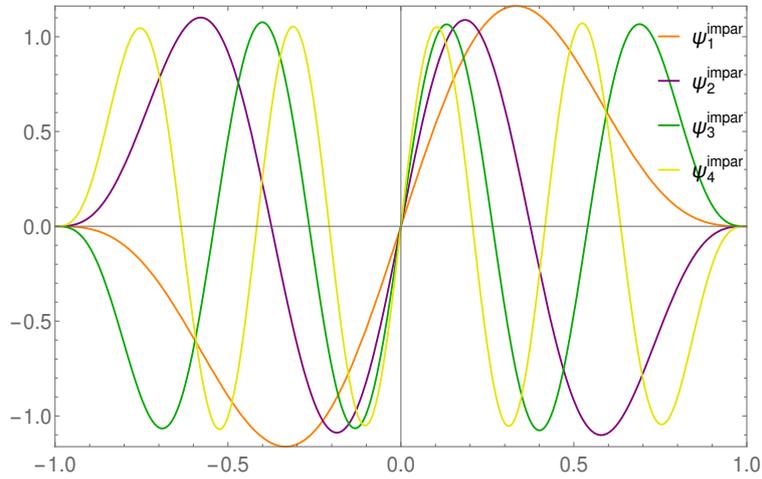


Figura E.2: Deformaciones tangenciales impares.

Apéndice F

Símbolos de Christoffel y derivadas covariantes en geometría axialmente simétrica

F.1. Símbolos de Christoffel

Una superficie axisimétrica \mathbf{X} está descrita por $\mathbf{X}(l, \varphi) = (R(l) \cos \varphi, R(l) \sin \varphi, Z(l))$, con l la longitud de arco, $R(l)$ el radio azimutal, $Z(l)$ una función de altura y φ el ángulo azimutal. Así tenemos que la métrica de esta geometría es

$$g_{ab} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R^2(l) \end{pmatrix}. \quad (\text{F.1})$$

Por lo tanto los símbolos de Christoffel no nulos son:

$$\Gamma_{\varphi\varphi}^l = \frac{g^{ll}}{2} \left(-\frac{\partial g_{\varphi\varphi}}{\partial l} \right) = -RR', \quad (\text{F.2})$$

$$\Gamma_{l\varphi}^\varphi = \frac{g^{\varphi\varphi}}{2} \left(\frac{\partial g_{\varphi\varphi}}{\partial l} \right) = \frac{R'}{R}, \quad (\text{F.3})$$

donde $R' := \partial_l R$. A su vez tenemos que

$$\Gamma_{ll}^l = \Gamma_{\varphi\varphi}^\varphi = \Gamma_{l\varphi}^l = \Gamma_{ll}^\varphi = 0. \quad (\text{F.4})$$

F.2. Derivada covariante y sus proyecciones

La derivada covariante en la geometría axial nos da las dos siguientes ecuaciones:

$$\nabla_1 \sigma^{11} + \nabla_2 \sigma^{21} = (\sigma^{11})' + \partial_\varphi \sigma^{21} + \frac{R'}{R} \sigma^{11} - RR' \sigma^{22}, \quad (\text{F.5})$$

$$\nabla_1 \sigma^{12} + \nabla_2 \sigma^{22} = (\sigma^{12})' + \frac{3R'}{R} \sigma^{12} + \partial_\varphi \sigma^{22}, \quad (\text{F.6})$$

donde ' denota la derivada con respecto a la longitud de arco l , es decir, $' := \partial_l$.

Por otra parte las proyecciones del tensor σ^{ab} están determinadas como sigue:

$$\sigma_\perp = l_a \sigma^{ab} l_b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma^{11} & \sigma^{12} \\ \sigma^{21} & \sigma^{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \sigma^{11}, \quad (\text{F.7})$$

$$\sigma_{\parallel\perp} = t_a \sigma^{ab} l_b = \begin{pmatrix} 0 \\ R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma^{11} & \sigma^{12} \\ \sigma^{21} & \sigma^{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = R \sigma^{12}, \quad (\text{F.8})$$

$$\sigma_{\parallel\parallel} = t_a \sigma^{ab} t_b = \begin{pmatrix} 0 \\ R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma^{11} & \sigma^{12} \\ \sigma^{21} & \sigma^{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ R \end{pmatrix} = R^2 \sigma^{22}. \quad (\text{F.9})$$

Así tenemos que la derivada covariante del tensor σ^{ab} en la geometría axial se puede expresar de manera equivalente en términos de las proyecciones de σ^{ab} resultando es siguiente par de ecuaciones:

$$R \nabla_1 \sigma_\perp + \nabla_2 \sigma_{\parallel\perp} = (R \sigma_\perp)' - R' \sigma_{\parallel\perp} + \partial_\varphi \sigma_{\parallel\perp}, \quad (\text{F.10})$$

$$R^2 \nabla_1 \left(\frac{\sigma_{\parallel\perp}}{R} \right) + \nabla_2 \sigma_{\parallel\parallel} = \partial_\varphi \sigma_{\parallel\parallel} + R \sigma'_{\parallel\perp} + 2R' \sigma_{\parallel\perp}. \quad (\text{F.11})$$

Bibliografía

- [ABVW14] S. Adriaenssens, P. Block, D. Veenendaal, and C. Williams, editors. *Shell Structures for Architecture: Form Finding and Optimization*. Taylor & Francis - Routledge, London, 2014.
- [Ald27] R. Aldington. *Letters of Voltaire and Frederick the Great*. The Broadway library of XVIII century French literature. Brentano's, 1927.
- [BL14] P. Block and L. Lachauer. Three-dimensional equilibrium analysis of gothic masonry vaults. *International Journal of Architectural Heritage*, 8(3):312–335, 2014.
- [Can70] P.B. Canham. The minimum energy of bending as a possible explanation of the biconcave shape of the human red blood cell. *J. Theor. Biol*, 26:61–81, 1970.
- [CL05] B.A. Case and A.M. Leggett. *Complexities: Women in Mathematics*. Princeton University Press, 2005.
- [CMP04] E. Cerda, L. Mahadevan, and J. M. Pasini. The elements of draping. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 101(7):1806–1810, 2004.
- [dCdL90] M.P. do Carmo and J.C.S. de Lis. *Geometría diferencial de curvas y superficies*. Alianza universidad textos. Alianza Editorial, 1990.
- [Des15] M. Deserno. Fluid lipid membranes: From differential geometry to curvature stresses. *Chemistry and Physics of Lipids*, 185:11 – 45, 2015. Membrane mechanochemistry: From the molecular to the cellular scale.
- [GHV14] J. Guven, G. Huber, and D.M. Valencia. Terasaki spiral ramps in the rough endoplasmic reticulum. *Phys. Rev. Lett.*, 113:188101, 2014.
- [GM08] J. Guven and M. M. Müller. How paper folds: bending with local constraints. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 41(5):055203, 2008.
- [Gol80] H. Goldstein. *Classical mechanics*. World student series. Addison-Wesley, Reading (Mass.), Menlo Park (Calif.), Amsterdam, 1980.
- [Guv04] J. Guven. Membrane geometry with auxiliary variables and quadratic constraints. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 37(28):L313, 2004.

- [Hel73] W. Helfrich. Elastic properties of lipid bilayers: theory and possible experiments. *Zeitschrift für Naturforschung. Teil C: Biochemie, Biophysik, Biologie, Virologie*, 28(11):693–703, 1973.
- [Hey77] J. Heyman. *Equilibrium of shell structures / by Jacques Heyman*. Clarendon Press Oxford [Eng.], 1977.
- [Hey95] J. Heyman. *The Stone Skeleton: Structural Engineering of Masonry Architecture*. Cambridge University Press, 1995.
- [Hoo78] R. Hooke. *Lectures de Potentia Restitutiva, Or of Spring Explaining the Power of Springing Bodies. - London, Martyn 1678*. Cutlerian lecture. John Martyn, 1678.
- [KM12] K. Kamrin and L. Mahadevan. Soft catenaries. *Journal of Fluid Mechanics*, 691:165–177, 1 2012.
- [LFR12] A. Lazarus, H. C. B. Florijn, and P. M. Reis. Geometry-induced rigidity in nonspherical pressurized elastic shells. *Phys. Rev. Lett.*, 109:144301, 2012.
- [Lip13] R. Lipowsky. Spontaneous tubulation of membranes and vesicles reveals membrane tension generated by spontaneous curvature. *Faraday Discuss.*, 161:305–331, 2013.
- [LL76] L.D. Landau and E.M. Lifshitz. *Mechanics*. Butterworth Heinemann. Butterworth-Heinemann, 1976.
- [LLKP86] L.D. Landau, E.M. Lifshits, A.M. Kosevich, and L.P. Pitaevskii. *Theory of Elasticity*. Course of theoretical physics. Butterworth-Heinemann, 1986.
- [Pip84] A.C. Pipkin. Equilibrium of tchebychev nets. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 85(1):81–97, 1984.
- [Ray90] Lord Rayleigh. On bells. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 29(176), 1890.
- [Spi75] M. Spivak. *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*. Number v. 3 in A Comprehensive Introduction to Differential Geometry. Publish or Perish, Incorporated, 1975.
- [Tim30] S. Timoshenko. *Strength of Materials: Elementary theory and problems*. Strength of Materials. D. Van Nostrand Company, Incorporated, 1930.
- [Tim53] S. Timoshenko. *History of Strength of Materials: With a Brief Account of the History of Theory of Elasticity and Theory of Structures*. Dover Civil and Mechanical Engineering Series. Dover Publications, 1953.
- [VHWP12] E. Vouga, M. Höbinger, J. Wallner, and H. Pottmann. Design of self-supporting surfaces. *ACM Trans. Graphics*, 2012. Proc. SIGGRAPH.
- [Wil12] T.J. Willmore. *An Introduction to Differential Geometry*. Dover Books on Mathematics Series. Dover Publications, 2012.

- [You] YouTube. Proyecto nuevo aeropuerto ciudad de México - #aeropuertomex II. <https://www.youtube.com/watch?v=Giybp-Ampk8>.

Índice alfabético

Arco catenario, 3, 10, 13, 16, 18, 20

Cilindro, 11, 25–27, 29–31

Cilindros, 4

Curvatura

de Frenet, 11, 13, 41

de Gauss, 23, 40

extrínseca, 6, 23, 40, 45

Frenet, 3

media, 6, 11, 40

Densidad, 5, 31

Derivada covariante, 6, 41, 47, 53

Domo o cúpula esférica, 32, 34

Energía

de doblamiento sesgada, 15, 17, 18

potencial, 5, 8, 12, 17, 18, 45, 47

Equilibrio

arco catenario, 11

de una membrana, 2

Esfuerzo

meridional, 25, 29, 30, 32, 34

paralelo o de aro, 25, 28, 34

Euler-Lagrange

ecuaciones, 8, 45, 47

Fourier, 3

Gauss

ecuaciones, 43, 46

teorema Egregium, 40

Gram-Schmidt, 50

Gravedad, 2, 5

Hamiltoniano, 45, 47

Isometría, 12

Lagrange

multiplicador, 3, 6, 45

Longitud de arco, 8, 13, 27, 42

Métrica, 5, 6, 40, 45, 53

Oscilador armónico, 11

Superficie parametrizada, 5, 39, 40

Tensor

de esfuerzos, 7, 45, 47

simétrico, 6

Variedad de Riemann, 41

Vector normal, 6, 11, 39, 41

Vectores tangentes, 5, 39, 40, 43

Weingarten

ecuaciones, 40, 43, 46

Willmore, 1