



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE
MEXICO**

FACULTAD DE CIENCIAS

**Estimación de la difusividad hidráulica en la Ruta
de los Cenotes, Puerto Morelos, Quintana Roo.**

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Licenciada en Ciencias de la Tierra

P R E S E N T A:

María Fernanda Gastelú Bárcena

DIRECTOR DE TESIS:

Dr. Mario Rebolledo Vieyra

**México D.F.
2015**





Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

1. Datos del alumno.

Gastelú
Bárcena
María Fernanda
56845008
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Ciencias de la Tierra
305616142

2. Datos del tutor

Dr.
Rebolledo
Vieyra
Mario

3. Datos de sinodal 1

Dr.
Jaime^o
Urrutia
Fucugauchi

4. Datos del sinodal 2

Dr.
Rafael
López
Martínez

5. Datos del sinodal 3

Dra.
Vilma
Ardiles
Gloria

6. Datos del sinodal 4

Dr.
Ángel
Ruíz
Ángulo

7. Datos de la tesis

Determinación de la difusividad hidráulica, con base en el análisis de las fluctuaciones del nivel del agua subterránea inducidos por el efecto de la marea en la Ruta de los Cenotes, Puerto Morelos, Quintana Roo.

82p.

2015

Índice general

| | |
|---|-----------|
| 1. Introducción | 1 |
| 1.1. Introducción | 1 |
| 1.2. Objetivos | 3 |
| 1.2.1. Objetivo general | 3 |
| 1.2.2. Objetivos específicos | 3 |
| 1.3. Justificación | 4 |
| 1.4. Hipótesis | 4 |
| 2. Marco Regional | 5 |
| 2.1. Zona de estudio | 5 |
| 2.2. Geología | 6 |
| 2.3. Karst | 9 |
| 2.4. Hidrogeología e hidrodinámica del acuífero | 12 |
| 3. Teoría | 16 |
| 3.1. Marea | 16 |
| 3.1.1. Descomposición de armónicos | 19 |
| 3.1.2. Difusividad hidráulica | 22 |
| 4. Método | 24 |
| 4.1. Obtención de datos | 24 |
| 4.2. Análisis armónico | 27 |
| 5. Resultados | 45 |
| 6. Conclusiones | 50 |
| 7. Bibliografía | 51 |

| | |
|-----------------------|-----------|
| <i>ÍNDICE GENERAL</i> | 2 |
| 8. Anexo I | 56 |
| 9. Anexo II | 61 |

Índice de figuras

| | |
|--|----|
| 2.1. Ruta de los Cenotes, Puerto Morelos | 6 |
| 2.2. Geología de la Península de Yucatán | 7 |
| 2.3. Conductos kársticos de disolución | 13 |
| 2.4. Perfil hidrogeológico esquemático | 14 |
| 2.5. Espeleotemas | 15 |
| 3.1. Sistema Sol-Tierra Luna | 17 |
| 3.2. Fuerzas generadoras de marea | 18 |
| 3.3. Marea Península de Yucatán | 21 |
| 4.1. Boya del Servicio Mareográfico Nacional | 24 |
| 4.3. mini divers Schlumber | 25 |
| 4.2. Marea | 26 |
| 4.4. Puntos de estudio | 27 |
| 4.5. Series de tiempo con datos crudos cenote Chaactunche | 28 |
| 4.6. Series de tiempo con datos crudos cenote Mojarras | 29 |
| 4.7. Serie de tiempo con datos crudos cenote Las Gatas | 30 |
| 4.8. Series de tiempo con datos filtrados cenote Chaactunche | 31 |
| 4.9. Serie de tiempo con datos filtrados cenote Mojarras | 32 |
| 4.10. Serie de tiempo con datos filtrados cenote Las Gatas | 33 |
| 4.11. Análisis armónico de la marea, marzo | 36 |
| 4.12. Análisis armónico de la marea, septiembre | 37 |
| 4.13. Análisis armónico del cenote Chaactunche, marzo | 38 |
| 4.14. Análisis armónico del cenote Chaactunche, septiembre | 39 |
| 4.15. Análisis armónico del cenote Mojarras, marzo | 40 |
| 4.16. Análisis armónico del cenote Mojarras, septiembre | 41 |
| 4.17. Análisis armónico del cenote Las Gatas, marzo | 42 |
| 4.18. Análisis armónico del cenote Las Gatas, septiembre | 43 |

| | |
|--|----|
| 5.1. Chaactunche | 47 |
| 5.2. Mojarras | 48 |
| 5.3. Las Gatas | 49 |
| 9.1. Componente M2 cenote Chaactunche para mes de marzo . . . | 61 |
| 9.2. Componente N2 cenote Chaactunche para mes de marzo . . . | 62 |
| 9.3. Componente S2 cenote Chaactunche para mes de marzo . . . | 62 |
| 9.4. Componente K2 cenote Chaactunche para mes de marzo . . . | 63 |
| 9.5. Componente M2 cenote Chaactunche para mes de septiembre | 63 |
| 9.6. Componente N2 cenote Chaactunche para mes de septiembre . | 64 |
| 9.7. Componente S2 cenote Chaactunche para mes de septiembre . | 64 |
| 9.8. Componente K2 cenote Chaactunche para mes de septiembre . | 65 |
| 9.9. Componente M2 cenote Mojarras para mes de marzo | 65 |
| 9.10. Componente N2 cenote Mojarras para mes de marzo | 66 |
| 9.11. Componente S2 cenote Mojarras para mes de marzo | 66 |
| 9.12. Componente K2 cenote Mojarras para mes de marzo | 67 |
| 9.13. Componente M2 cenote Mojarras para mes de septiembre . . . | 67 |
| 9.14. Componente N2 cenote Mojarras para mes de septiembre . . . | 68 |
| 9.15. Componente S2 cenote Mojarras para mes de septiembre . . . | 68 |
| 9.16. Componente K2 cenote Mojarras para mes de septiembre . . . | 69 |
| 9.17. Componente M2 cenote Las Gatas para mes de marzo | 69 |
| 9.18. Componente N2 cenote Las Gatas para mes de marzo | 70 |
| 9.19. Componente S2 cenote Las Gatas para mes de marzo | 70 |
| 9.20. Componente K2 cenote Las Gatas para mes de marzo | 71 |
| 9.21. Componente M2 cenote Las Gatas para mes de septiembre . . | 71 |
| 9.22. Componente N2 cenote Las Gatas para mes de septiembre . . | 72 |
| 9.23. Componente S2 cenote Las Gatas para mes de septiembre . . | 72 |
| 9.24. Componente K2 cenote Las Gatas para mes de septiembre . . | 73 |

Índice de cuadros

| | |
|--|----|
| 3.1. Componentes armónicos principales de la marea semi-diurna | 20 |
| 4.1. Zona de estudio | 25 |
| 4.2. Distancia a la costa | 44 |
| 4.3. Amplitudes | 44 |
| 5.1. Tiempo de retraso | 45 |
| 5.2. Difusividad hidráulica | 46 |

Dedicatoria

Dedicada mi familia por tanto amor y apoyo incondicional. Eduardo, Meris, Emy y Tin. Y a los amigos de siempre, somos la familia que elegimos.

Agradecimientos

Agradezco mucho a mi familia, sin ustedes esto no sería posible.

Agradezco sinceramente al Dr. Oscar Escolero por la inspiración de llegar lejos, su apoyo y guía han sido fundamentales en este camino. Al Dr. Mario Rebolledo por la gran oportunidad de trabajar con él, sus conocimientos y visión fueron claves para realizar este trabajo. No tengo duda de que lo mejor está por venir.

Adrezco a mi jurado, Dra. Vilma Ardiles, Dr. Jaime Urrutia, Dr. Rafael López y al Dr. Ángel Ruíz, quienes con sus consejos y aportaciones enriquecen este trabajo.

Gracias a la Dra. Sandra Gúzman por ser a parte de mi tutora ser una gran amiga. ¡Gracias má!

Gracias a mis amigos, por no dejarme fallar. ¡Lo logramos equipo!

Resumen

En el siguiente trabajo, se determinó la difusividad hidráulica en tres puntos del acuífero costero de Quintana Roo, ubicados en la Ruta de los Cenotes, Puerto Morelos. A partir de la influencia de la marea en el acuífero costero de Puerto Morelos se realizó el análisis del cambio del nivel del agua subterránea inducido por el efecto de marea. Para lograrlo, se obtuvieron las series de tiempo a partir de datos tanto del Sistema Mareográfico Nacional de la estación de la Laguna Arrecifal de Puerto Morelos ubicada en latitud $20^{\circ} 52.1$ N y longitud $86^{\circ} 52.0$ W como de sensores de presión instalados en tres cenotes. Las series de tiempo se descompusieron en los componentes armónicos de mayor importancia para la marea semi-diurna. Para el análisis armónico de las series de tiempo, se utilizó el método de mínimos cuadrados, con el cual se obtuvieron tanto las amplitudes como las fases de cada componente. A raíz de dichos datos, se construyeron una nuevas series de tiempo para cada cenote y marea, las cuales se estudiaron de manera conjunta para obtener el desfase entre ambas y de esta manera determinar el tiempo de retraso que tarda la onda de marea en hacer cambiar la presión de la columna de agua dentro de cada cenote estudiado.

Los resultados de este trabajo determinaron una difusividad hidráulica de $455,975.677$ y $475,073.22$ m^2/dia para el mes de marzo y septiembre respectivamente. También se determinó que el tiempo de retraso entre las señales estudiadas es de 11.19 a 14.30 hrs para el mes de marzo y para el mes de septiembre de 7.26 a 8.31 hrs. Se concluyó que la diferencia tanto de la difusividad hidráulica como del tiempo de retraso se debe a que para el mes de septiembre los datos corresponden a marea viva, la cual confirma la fuerte influencia que tienen éstas sobre el acuífero. También estos resultados nos indican que el método muy eficiente y económico comparado con las pruebas de bombeo e instrumentación que requieren los métodos convencionales y mas efectivo debido a la complejidad del ambiente kárstico.

Capítulo 1

Introducción

1.1. Introducción

El presente trabajo se realiza en la Península de Yucatán la cual es una plataforma de roca caliza con una superficie de aproximadamente 165.000 km². Las plataformas carbonatadas asociadas a la línea de costa tienen una hidrología única que involucra la interacción de agua dulce y salada,.

El acuífero de Quintana Roo es un acuífero costero libre y estratificado, en el cual Neuman y Rahbek (2007) notaron que el acuífero responde en poco tiempo a condiciones como fuertes lluvias, mareas, densidad del océano o cambios de la presión barométrica. Sumado a esto, el acuífero tiene heterogeneidades estructurales tales como una matriz altamente porosa que cuenta con porosidad del 14-23 % (Harris 1984), y que tiene un almacenamiento del 97 % y contribuye muy poco al flujo. Otras de estas heterogeneidades son las fisuras y fracturas, de las cuales algunas son ampliadas a conductos de disolución en la zona de mezcla. Estos conductos, que le dan al acuífero una porosidad triple, tienen capacidad solo del 3 % de almacenamiento y unen la descarga en el Mar Caribe aportando al menos el 99 % del agua dulce que recibe (Beddows 2004), también varían de tamaño desde décimas de milímetros hasta 80m de ancho y aumentan la transmisividad del acuífero. Beddows ha estimado que la descarga debe ser de 2.3×10^7 m³/año por kilómetro en la línea de costa.

El acuífero es poco profundo en la zona no saturada, la cual tiene un grosor de 2m en la zona costera y un máximo de 20 m en la zona tierra adentro (QRSS 2013) . El acuífero es un enorme sistema abierto de baja

altura media (30 ms.n.m.), se compone de calizas muy permeables y rápida infiltración de precipitación que desemboca en el mar, el cual no tiene drenaje superficial.

Para el estudio del acuífero en la Ruta de los Cenotes de Puerto Morelos, se utilizaron datos de cambio del nivel piezométrico en 3 cenotes : Chaactunche, Mojarras y Las Gatas, los cuales se encuentran a 12.6 km, 15 km, 22. 8 km de distancia de la costa respectivamente.

La marea, de forma sencilla, se define como la oscilación periódica y rítmica de ascenso y descenso vertical del nivel del mar como resultado de la atracción gravitacional de la Luna y el Sol que actúa sobre la Tierra en rotación (Instituto Panamericana de Geografía e Historia, 1962). Se llaman mareas oceánicas a aquellas que debido a las influencias gravitacionales del Sol y la Luna, en función de la relación geométrica de cada lugar con los cuerpos astronómicos y la masa de la Tierra, hacen cambiar el nivel del mar periódicamente con los cambios de posición del Sol y la Luna. Por lo tanto, existen mareas causadas tanto por el Sol como por la Luna.

En la superficie de la Tierra, la atracción gravitacional de la Tierra actúa en dirección interna hacia su centro de masa y esto mantiene las aguas del océano confinadas a esta superficie. Las fuerzas gravitacionales de la Luna y del Sol, y la fuerza centrífuga del sistema Sol-Tierra-Luna, actúan externamente sobre las aguas del océano. Estas fuerzas externas son ejercidas como fuerzas de producción de marea.

Las fuerzas centrífugas y atractivas son iguales y opuestas, y actúan en el centro de la Tierra y la Luna. A pesar de que el sistema Tierra-Luna en su totalidad está en equilibrio, las partículas individuales en la superficie de la Tierra no lo están, es decir, la fuerza de atracción de una partícula específica depende de su distancia a la Luna mientras que las fuerzas centrífugas son iguales en cualquier punto de la superficie de la Tierra porque que cada punto en ella tiene el mismo movimiento sobre el centro de gravedad del sistema. Las fuerzas residuales que resultan de estas dos fuerzas son las fuerzas que generan las mareas.

La marea es una combinación de componentes periódicos de diferentes frecuencias y amplitudes, los cuales se conocen como componentes armónicos. Donde en el caso de la marea de Puerto Morelos, al ser una marea semi-diurna, se estudiaran solo los principales componentes armónicos semi-diurnos.

Las características de la marea que se analizaron en este trabajo se enfocan al estudio del nivel del agua subterránea, es decir, se analizó la influencia

que tienen las mareas en la variación del nivel del agua subterránea en el acuífero de la Ruta de los Cenotes. Para lo cual, se utilizó en el presente trabajo la descomposición en componentes armónicos de ambos, por el método de mínimos cuadrados. Por medio del cual, se obtuvieron amplitudes y fases en series de tiempo extraídas de datos obtenidos a partir de sensores de presión para los cenotes y del Sistema Mareográfico Nacional para la marea de la Laguna Arrecifal de Puerto Morelos.

Con los datos obtenidos se determinó la difusividad hidráulica, que es un parámetro hidrogeológico proporcional a la velocidad a la cual los cambios de presión de la columna de agua se propaga a través de un medio poroso. La difusividad hidráulica es inversamente proporcional al almacenamiento específico y directamente proporcional a la transmisividad en el acuífero. En acuíferos libres, donde el coeficiente de almacenamiento es bajo, los valores de difusividad hidráulica se esperan altos, lo cual se corrobora con la respuesta rápida en los niveles de carga hidráulica debido al efecto de la marea.

1.2. Objetivos

1.2.1. Objetivo general

Determinar la difusividad hidráulica en tres cenotes de la Ruta de los cenotes, Puerto Morelos, con base en el análisis de las fluctuaciones del nivel de agua subterránea inducidos por el efecto de la marea en tres cenotes de la Ruta de los Cenotes, Puerto Morelos.

1.2.2. Objetivos específicos

- Determinar la amplitud y fases de los componentes armónicos de mayor importancia de la marea en la laguna arrecifal de Puerto Morelos y en la carga hidráulica de 3 cenotes por el método de ajuste de mínimos cuadrados.
- Calcular el tiempo de retraso (en horas) a partir de la diferencia de fases obtenidas previamente.
- Determinar la difusividad hidráulica en el acuífero de la Ruta de los Cenotes, Puerto Morelos.

- Analizar la variabilidad temporal de la difusividad hidráulica en los puntos estudiados de la Ruta de los Cenotes, Puerto Morelos

1.3. Justificación

Éste es el primer trabajo que se realiza en la zona para determinar la difusividad hidráulica, lo cual, es una contribución sumamente importante debido a la alta conectividad que existe entre el acuífero y el océano, la cual, fue demostrada en este trabajo, así se podrán implementar mejores medidas para proteger tanto al acuífero, como a los ecosistemas asociados a éstos: cenotes, manglares, playas y la Barrera Arrecifal. Otro punto importante es que, si bien este estudio se ha validado para Puerto Morelos, la metodología es susceptible de implementarse en otras partes del Caribe, no sólo en México, para poder determinar estos parámetros hidrogeológicos en acuíferos costeros en la región, incluida América Central.

1.4. Hipótesis

Existe una relación espacial y temporal entre el mes de marzo y septiembre del 2014, donde a mayor distancia de la costa se encontrarán valores más altos de difusividad hidráulica en el acuífero ya que este es un acuífero kárstico costero libre altamente fracturado con alta conductividad hidráulica y conexión al mar.

Capítulo 2

Marco Regional

2.1. Zona de estudio

La Península de Yucatán es una plataforma de roca caliza, con una superficie de aproximadamente 165,000 km², cuyos límites al sur y suroeste son: al suroeste el río Usumacinta y su tributario el río San Pedro, al sureste el río Belize junto con la zona de falla La Libertad (Vinson 1962; López-Ramos 1975).

Puerto Morelos está ubicado en el municipio de Benito Juárez, el cual colinda al norte con los municipios de Lázaro Cárdenas, Isla Mujeres y el Mar Caribe, al este con el Mar Caribe, al sur con el Mar Caribe y los municipios de Solidaridad y Lázaro Cárdenas y al oeste con el municipio de Lázaro Cárdenas. Tiene un intervalo de temperatura de 24-28°C, precipitación máxima acumulada 1131mm y un clima cálido subhúmedo con lluvias en verano, de menor humedad (61.35 %) y cálido subhúmedo con lluvias en verano, de humedad media (38.65 %). Pertenece a la Región Hidrogeológica de Yucatán Norte (RH 32), a la Cuenca de Quintana Roo, y a la provincia de la Península de Yucatán, subprovincia del Carso Yucateco.

Los cenotes estudiados se encuentran distribuidos espacialmente la Ruta de los Cenotes como lo muestra la figura 2.1:

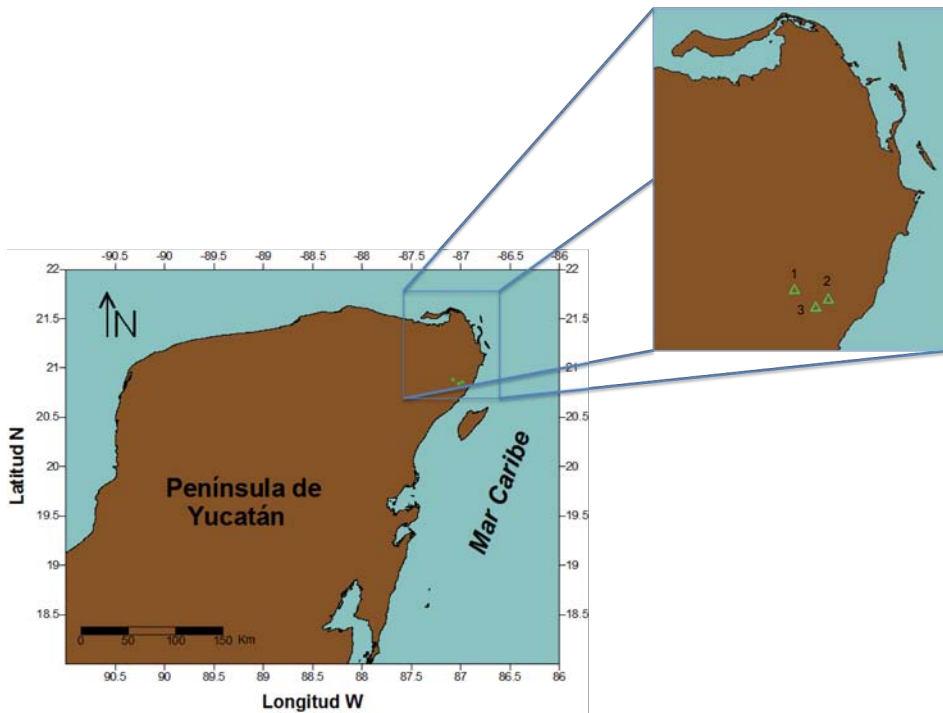


Figura 2.1: Ruta de los Cenotes, Puerto Morelos

Donde:

- 1: Cenote las Gatas
- 2: Cenote Mojarras
- 3: Cenote Chaactunche

2.2. Geología

La plataforma calcárea de Yucatán está localizada en la cercanías de la placa de Cocos y los límites de la placa Norteamericana y del Caribe. Ésta ha sido dividida en dos áreas principales: una plataforma sumergida limitada por escarpes y una plataforma emergida limitada por las costas de aproximadamente igual tamaño. La primera, somera y amplia que forma el banco de Yucatán-Campeche, corresponde a la porción de la plataforma masiva carbonatada de la Península cuya característica principal es la presencia de arrecifes de coral y terrazas sumergidas relacionadas con antiguas líneas de

costa. La segunda, es descrita como una plataforma masiva de rocas calizas horizontalmente estratificadas en la cual no existe drenaje superficial (CONAGUA 2009) o red fluvial, por lo cual la infiltración es casi totalmente subterránea, lo que ha dado origen a un gran sistema kárstico, formado por cenotes, polijes y un sistema de cuevas conocido como uno de los sistemas de cuevas subterráneas más grande el mundo el cual cuenta con decenas de kilómetros de longitud.

En la mayor parte de la Península de Yucatán aflora una secuencia cenozoica, principalmente calcárea sin deformaciones significativas. Ésta está formada por capas que conservan una actitud horizontal; cuenta con una secuencia cretácica en el subsuelo constituida principalmente por anhídirtas, calizas, dolomías, intercalaciones de bentonitas y algunos materiales piroclásticos. Ambas, la secuencia cretácica y la secuencia cenozoica, no presentan perturbaciones estructurales, debido a que sobreyacen en una masa cristalina que ha permanecido estable desde el Paleozoico (Morán 1994).

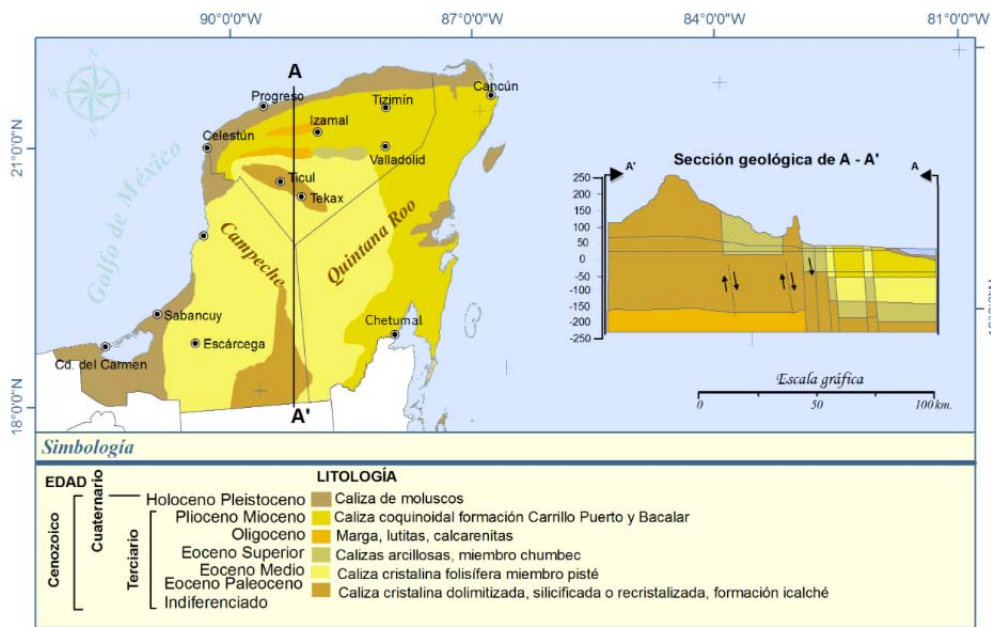


Figura 2.2: Geología de la Península de Yucatán tomada de: <http://www.cicy.mx/Documentos/CICY/sitios/Biodiversidad/pdfs/Cap1/01%20Geologia.pdf>

La plataforma de rocas sedimentarias mesozoicas y cenozoicas descan-

sa sobre un basamento depositado en el Paleozoico (250-500 m.a.). sobre el cual se inicia una columna de rocas jurásicas. El Cretácico forma parte de toda la plataforma, especialmente en la formación de Evaporitas Yucatán. La secuencia de rocas paleogénicas se encuentra en todo el subsuelo formado principalmente por caliza, arenisca y evaporita del Paleoceno y Eoceno. El Oligoceno solo está presente en la parte nororiental formado de caliza y lutita, donde se reconocen depósitos marinos del Neógeno y las calizas de la formación Carillo Puerto. Finalmente, durante el Mioceno fueron depositados los sedimentos calcáreos de la Formación Río Dulce, en el oriente, en el estado de Quintana Roo (Lugo Hubp 1992).

La Península de Yucatán muestra dos unidades morfológicas: la primera ubicada al norte donde predominan las planicies y las rocas sedimentarias, y la segunda al sur, donde las planicies alternan con lomeríos de hasta 400m sobre el nivel del mar en rocas oligocénicas. Esta configuración expresa un levantamiento a partir del Mioceno en la porción meridional, mismo que continúa en el Plioceno y Cuaternario en dirección NE (Lugo Hubp 1992).

Quintana Roo es parte de una estructura formada durante el Mesozoico, sobre la cual se depositaron arenas y estructuras de origen marino a lo largo del Terciario (Ordoñez-Crespo y García- Rodríguez 2010), durante el Cenozoico empezó a ascender la plataforma continental pausada y con retrocesos lo que permitió el afloramiento de sedimentos del Paleoceno. Durante el Eoceno se plegaron los recién formados estratos de calizas dando origen a un relieve ondulado, definiendo la geomorfología actual de la porción sur de la Península, la cual se levantó gradualmente a partir del Plioceno y continuó durante el Cuaternario al norte y hacia la periferia (Bonet y Butterlin 1962; López-Ramos, 1975; Lugo-Hubp et. al. 1992). Durante este periodo se originaron sistemas de fracturas con orientación noreste-sureste a lo largo del cauce del Río Hondo, desde el norte hacia el centro-este del estado y en la zona limítrofe con Campeche.

Quintana Roo se caracteriza por ser una planicie con piso rocoso o cementado con una altura media de 50 ms.n.m.. El relieve plano se encuentra interrumpido por pequeñas colinas y numerosas hondonadas someras (Cervantes-Zamora *et al.* 1990).

2.3. Karst

La palabra “karst” es una palabra alemana derivada del nombre de la región de “Kras” en Eslovenia, en la antigua Yugoslavia (Cvijic 1918). Su rasgo distintivo es la presencia de rocas sedimentarias del tipo calizas, dolomitas y evaporitas, metamórficas como cuarcita y mezclas de ellas (Gams 1993, Ford 2007 De Waele *et al.* 2009).

El paisaje kárstico no se podría crear sin agua ya que el agua es el principal agente para la erosión y disolución de rocas. Prácticamente el único medio en que los procesos kársticos tienen lugar es en las rocas sedimentarias. Entonces las formaciones kársticas son producidas a partir de agua. Bajo la influencia del agua, son modificados en la superficie. En la actualidad reciben agua de lluvia o escorrentía que almacenan en el suelo.

Las rocas kársticas sedimentarias pueden ser clasificadas en dos grandes grupos: rocas carbonatadas y rocas evaporíticas. Las primeras están formadas de minerales de calcio y magnesio y pertenecen a los grupos de calizas ($CaCO_3$) y dolomias ($CaCO_3 MgCO_3$). En las segundas la principal fuente de formación es el agua de mar.

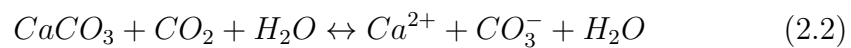
Existen dos fuerzas de karstificación principales: mecánicas y químicas que no pueden ser separadas ya que funcionan mutua e integralmente.

La erosión mecánica generalmente empieza con el flujo de agua superficial, donde la porosidad primaria de las rocas sedimentarias carbonatadas no permiten una descomposición rápida por la presión del flujo del agua. Si no hay deformación tectónica, la karstificación permanece en la superficie de la roca, de esta manera se necesita de pequeñas fisuras para iniciar el proceso en el interior de la roca.

La erosión química es el proceso de la disolución de la roca y se efectúa en un sistema CO_2 - H_2O - XCO_2 con X:Ca o Mg. En el cual ocurre primero la disolución del CO_2 atmosférico en agua y el CO_2 físicamente disuelto reacciona con el agua para formar ácido carbónico que es un ácido fuerte y está completamente dissociado:



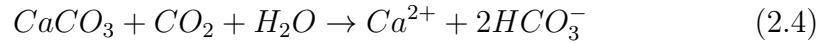
Cuando el agua entra en contacto con la roca carbonatada, los iones son liberados de su estructura cristalina :



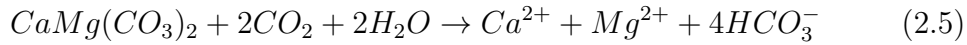
El ion recién creado se asocia con el H^+ :



De esta forma queda la reacción de la disolución de las calizas de la siguiente manera:



y la disolución de las dolomias así:



Todas estas reacciones son reversibles dependiendo de la presión parcial de CO_2 en el aire, por lo que la calcita puede tanto disolverse como precipitarse. También se sabe que cuando es un proceso endotérmico (que absorbe energía) la solubilidad aumenta cuando aumenta la temperatura y cuando es exotérmico la temperatura aumenta y la solubilidad disminuye (Ford y Williams 1989).

Esta disolución puede ocurrir a partir de la permeabilidad primaria de la roca cuando el agua penetra exclusivamente por las superficies de estratificación y produce una excavación de la superficie de la roca. O bien, de la permeabilidad secundaria de la misma, en la cual el agua puede migrar a lo largo y ancho de la masa caliza y actuar casi en cualquier punto de ella. No obstante, los planos de estratificación y/o fracturas y fallas no son las óptimas para la circulación del agua y la disolución de la roca, mas bien será máxima en la intersección de dos de estos planos lo que genera un conducto incipiente por el que el agua penetrará con mayor facilidad. Con esto se puede observar que como concluye Llopis : “ las zonas de máxima disolución de la masa caliza esta en razón directa de la máxima densidad de fisuración”.

Para que exista circulación de agua en la roca caliza, se necesita tanto una recarga, que en el caso de la Península proviene en su mayor parte de la precipitación atmosférica, como una descarga y entre ambas un gradiente hidráulico. (Back *et al.* 1970).

La principal característica del karst, en cuanto a su origen, es que se desarrolla en rocas solubles, que al disolverse no dejan prácticamente ningún residuo sólido. (Ford y Williams 1989).

Debido a que las calizas son las rocas solubles más comunes, la hidrogeología kárstica “estudia la circulación del agua en las rocas calizas y rocas solubles como yeso, dolomia y sal”. (Llopis 1970).

Una característica de los acuíferos kársticos es que con el paso del tiempo incrementan su heterogeneidad y anisotropía (Ford y Williams 1989)

El proceso de karstificación es un proceso muy rápido con respecto al tiempo geológico. Bakalowicz (2005) Afirma que pocos cientos de años, generalmente menos de 50,000, se forma una red kárstica integrada.

Las aguas subterráneas contenidas en acuíferos kársticos abastecen de agua alrededor del 25 % a población mundial (Perrin 2003, Bakalowicz 2005). Vistos como un sistema se pueden dividir en cuatro subsistemas:

- Zona de absorción o recarga: donde el agua pasa al interior del acuífero de manera difusa o concentrada. Incluye al suelo y al relieve. Una parte del agua puede ser temporalmente almacenada y presenta puntos de recarga directa por sumideros, dolinas, uvalas y polijes donde se concentra la recarga (Pavlopoulos *et al.* 2009, Stokes *et al.* 2010).
- Zona no saturada o de circulación vadosa o de transferencia vertical: esta se conecta con la zona freática por medio de drenaje en una red vertical de fisuras y conductos, donde el agua por efecto de la gravedad desciende en forma de cascadas erosionando las paredes hasta dejarlas pulidas.
- Zona de fluctuación o epifreática: Presenta un funcionamiento mixto. En ocasiones está saturada de agua y en otras actúa como zona vadosa y se encuentra entre estas.
- Zona saturada o freática: es una red de conductos de alta permeabilidad y con una capacidad alta de almacenamiento.

La plataforma de karst carbonatada se caracteriza generalmente por complejos sedimentarios gruesos que forman grandes plataformas. El karst de Yucatán-Florida fue creado en depósitos de carbonato terciarios jóvenes bajo la fuerte influencia de la fluctuación del agua del Mar Caribe durante el Pleistoceno. Además, la subsidencia tectónica también causó una inmersión temporal de rocas carbonatadas, estas rocas altamente kárstificadas son expuestas a la superficie con grandes redes de canales subterráneos y características kársticas específicas como cenotes distribuidos por toda la Península (Stevanovic 2015).

Los cenotes resultan de la disolución de la roca o del colapso de techos de conductos. Figura 2.3 Existen miles de cenotes en la Península, los que resultan de interés para este trabajo son los cenotes del estado de Quintana Roo, los cuales en su mayoría pertenecen a sistemas de cuevas (QRSS 2013).

2.4. Hidrogeología e hidrodinámica del acuífero

Las plataformas carbonatadas asociadas a la línea de costa tienen una hidrología única porque involucran la interacción de agua dulce y salada.

Vacher y Mylroie (2002) definen el karst eogenético como sistemas con porosidad dual en los cuales la permeabilidad aumenta con el desarrollo de porosidad secundaria a pequeñas escalas.

Neuman y Rahbek (2007) notaron que el acuífero responde en poco tiempo a condiciones como fuertes lluvias, mareas, densidad del océano o cambios de la presión barométrica, pero no a cambios a largo plazo en cuanto a recarga, lo cual justifica la idea de que el flujo base proviene del interior de la Península. Debido a que el suelo es irregular y delgado, hay infiltración rápida proveniente de la recarga meteorológica (precipitación) por las fracturas la cual finalmente es drenada al acuífero.

El acuífero costero de Quintana Roo tiene heterogeneidades estructurales tales como una matriz altamente porosa del 14-23% (Harris 1984), y un almacenamiento del 97%, lo que contribuye muy poco al flujo. Otras de estas heterogeneidades son las fisuras y fracturas, de las cuales, algunas son ampliadas a conductos por disolución en la zona de mezcla. Estos conductos, le dan al acuífero una porosidad triple, tienen capacidad solo del 3% de almacenamiento y unen la descarga en el Mar Caribe aportando al menos el 99% del agua dulce que recibe (Beddows 2003). En el caso del Mar Caribe, Beddows (2004) ha documentado un gran número de manantiales y salidas al mar a lo largo de la costa y ha estimado que la descarga debe ser de 2.3×10^7 m³/año por kilómetro en la línea de costa.

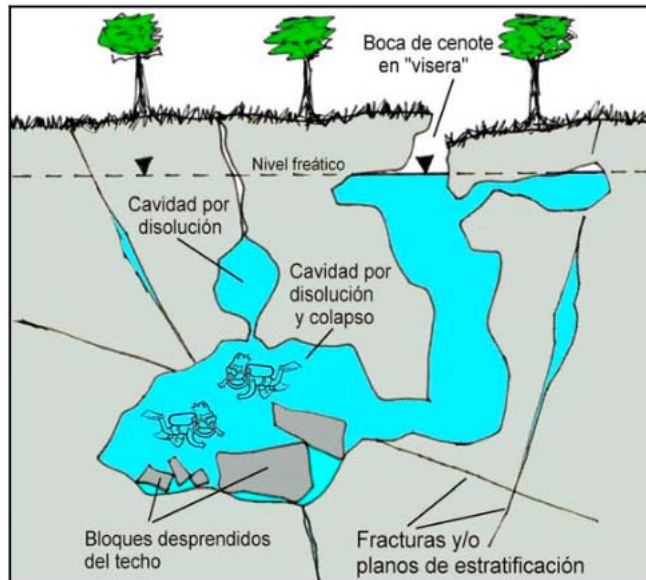


Figura 2.3: Conductos kársticos de disolución

Tomada de Ordoñez-Crespo 2010

Dichos conductos varían de tamaño desde décimas de milímetros hasta 80m de ancho y aumentan la transmisividad del acuífero por la respuesta hidrodinámica al cambio de condiciones esto varía el 84 % de los 30 cm de amplitud de la marea semidiurna que es transmitida en cenotes a 1 km de distancia de la costa y 39 % en cenotes a 6 km tierra adentro (Beddows 2004).

El acuífero es poco profundo y no tiene drenaje superficial en la zona no saturada, la cual tiene un espesor de 2m en la zona costera y un máximo de 20 m en la zonas tierra adentro (QRSS 2013).

A pesar de que el gradiente hidráulico es escaso, se ha medido un intervalo de 7 mm/km en el noreste de la Península (Marin 1990) a 58-130 mm/km tierra adentro en la costa este y cerca de Playa del Carmen, respectivamente (Moore *et al.* 1992; Beddows 2004). Según Ford y Williams 2007, este gradiente hidráulico es pequeño si se le compara con otras zonas kársticas y es atribuido a las depresiones locales y regionales en los niveles del agua causados por los conductos que localmente atraen el flujo del agua.

La costa este del estado de Quintana Roo recibe aproximadamente 2.5×10^6 m³/ año de influjo marino del Mar Caribe, lo cual resulta en un acuífero estratificado que se caracteriza por un cuerpo de agua salada que subyace a

un cuerpo de agua dulce (Paloc y Back 1992). La zona de transición entre estas dos masas de agua es llamada haloclina o zona de mezcla (Figura 2.4). La profundidad de la haloclina cambia en función a la distancia de la costa y mantiene una elevación casi constante, la cual incrementa cuando aumenta la distancia de la línea de costa. La zona de mezcla entre agua dulce y agua de mar está marcada por el agua salobre cuya salinidad aumenta con la profundidad y está asociada a una termoclina con temperaturas más frías en el agua dulce y más calientes en el agua salada. Esta zona de mezcla es delgada cerca de la línea de costa y disminuye hasta ser claramente definida tierra adentro (Beddows 2004) y responde a varios factores como la sección transversal en los conductos, la turbulencia en la zona de descarga y al efecto de la marea que disminuye tierra adentro.

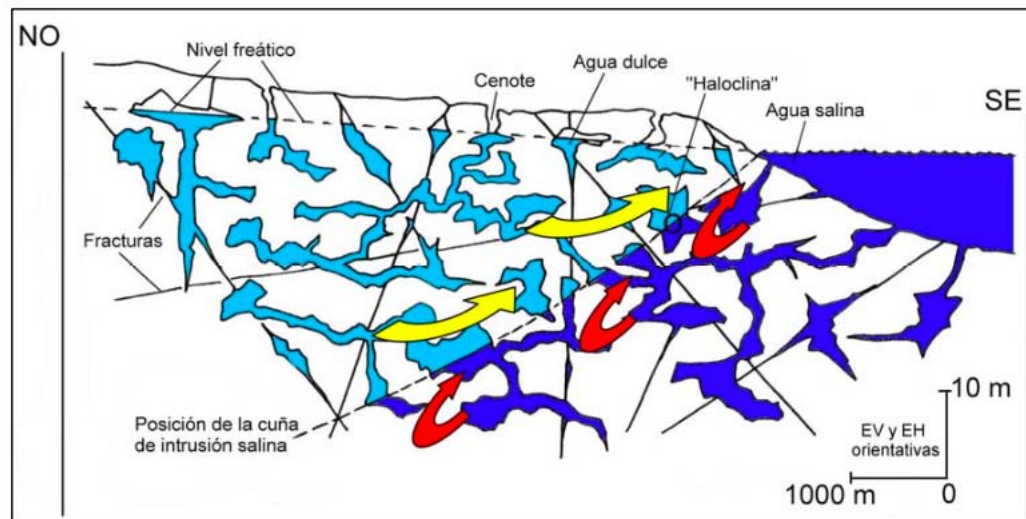


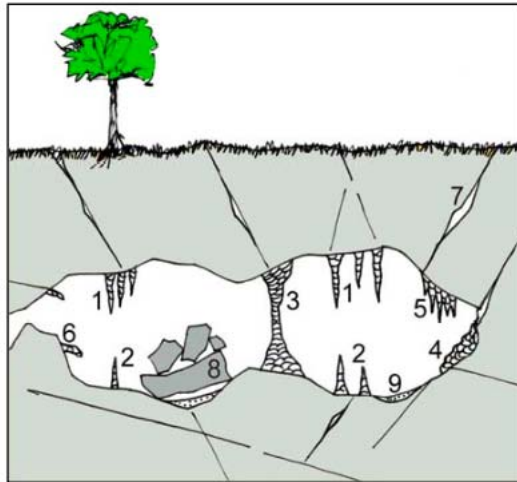
Figura 2.4: Perfil hidrogeológico esquemático

(Tomada de Ordoñez-Crespo, 2010)

Donde las flechas amarillas representan el flujo de agua dulce y las rojas el flujo de agua salada.

Beddows (2004) ha documentado dos tipos de flujo salino en la costa del Caribe, uno superficial en dos direcciones, influenciado por la frecuencia de la marea y uno de continua intrusión salina a un intervalo de 5-45 m de profundidad, el cual es independiente del nivel medio del mar y el cambio de marea. Y también propone que los influjos continuos de agua salada cruzan la plataforma de Yucatán y descargan en las costas del Golfo de México.

Los lentes de agua dulce son típicamente sobre saturados con respecto a los carbonatos y como consecuencia no son activamente disolventes, mientras que en la zona de mezcla hay efectos de erosión y disolución parcial de espeleotemas.(Figura 2.5)



1. Estalactitas.
2. Estalagmitas.
3. Columnas.
4. Terrazas travertínicas y gours.
5. Cortinas.
6. Discos.
7. Conducto de disolución.
8. Bloques desprendidos.
9. Depósitos de decantación.

Figura 2.5: Espeleotemas
(Tomada de Crespo-Ordoñez, 2010)

Capítulo 3

Teoría

Las características de la marea que se analizarán en este trabajo se enfocan al estudio del nivel piezométrico, es decir, se analiza la influencia que tienen las mareas en la variación del nivel de las aguas subterráneas y se asume que si el afloramiento submarino de la formación se produce cerca de la costa, las oscilaciones de presión en el acuífero de la costa serán sólo las oscilaciones de la marea.

3.1. Marea

La marea, se define como la oscilación periódica y rítmica de ascenso y descenso vertical del nivel del mar como resultado de la atracción gravitacional de la Luna y el Sol que actúa sobre la Tierra en rotación (Instituto Panamericana de Geografía e Historia, 1962). Se llama mareas oceánicas a aquellas que debido a las influencias gravitacionales del Sol y la Luna, en función de la relación geométrica de cada lugar con los cuerpos astronómicos y la masa de la Tierra, hacen cambiar el nivel del mar periódicamente con los cambios de posición del Sol y la Luna. Por lo tanto, existen mareas causadas tanto por el Sol como por la Luna.

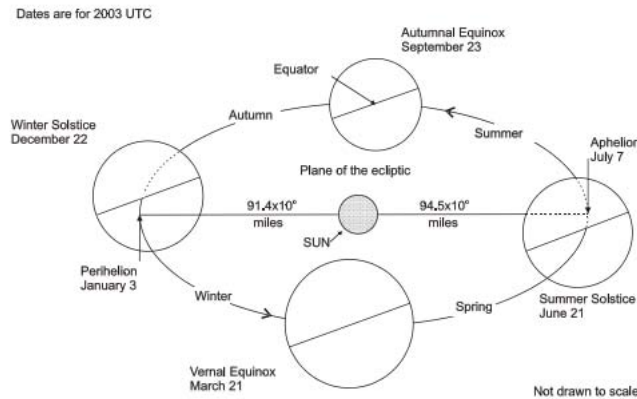


Figura 3.1: Sistema Sol-Tierra Luna
(Tomada de Hicks 2006)

En la superficie de la Tierra, la atracción gravitacional de la Tierra actúa en dirección interna hacia su centro de masa y esto mantiene las aguas del océano confinadas a esta superficie. Las fuerzas gravitacionales de la Luna y el Sol, y la fuerza centrífuga del sistema Sol-Tierra-Luna, actúan externamente sobre las aguas del océano de la Tierra. (Figura 3.1) Estas fuerzas externas son ejercidas como fuerzas de producción de marea (Butterworth-Heinemann 1999).

Una marea alta es producida en aguas de océano por la acción del flujo horizontal del agua hacia la región de máxima atracción de las fuerzas gravitacionales. A su vez es producida en una posición en el lado opuesto de la Tierra, donde la fuerza centrífuga predomina sobre la atracción gravitacional del Sol y la Luna. Las mareas bajas se forman por un alejamiento compensado de las aguas de las regiones alrededor del centro de la Tierra entre estas dos protuberancias de mareas. La alteración de las mareas altas y bajas es causada por la rotación diaria de la Tierra en relación a estas dos protuberancias y a la depresión de la marea. Las fuerzas de producción de marea básicas tienen dos componentes: uno causado por Sol (componente sol) y otro causado por la Luna (componente lunar) (Hicks 2006).

Se sabe que la Luna y la Tierra rotan alrededor de su centro común de masa. Los dos cuerpos astronómicos tienden a atraerse por la atracción gravitacional y simultáneamente a separarse por la fuerza centrífuga producida a medida que rotan alrededor del centro de masa. La atracción gravitacional y centrífuga son iguales en magnitud y opuestas en dirección. Estas fuerzas

gravitacionales y centrífugas son balanceadas solamente en los centros de masa de los cuerpos individuales. En puntos en la superficie de estos cuerpos, las dos fuerzas no están en equilibrio, dando resultado las mareas del océano. En la cara de la Tierra que mira a la Luna o al Sol, una fuerza de producción de marea actúa en la dirección de la atracción gravitacional de la Luna o del Sol. En la cara de la Tierra directamente opuesta a la Luna o al Sol, la fuerza de producción de marea actúa en dirección a la mayor fuerza centrífuga o lejos de la Luna o del Sol (Cruz 2007).

Las fuerzas centrífugas y atractivas son iguales y opuestas, y actúan en el centro de la Tierra y la Luna. A pesar de que el sistema Tierra-Luna en su totalidad está en equilibrio, las partículas individuales en la superficie de la Tierra no lo están, es decir, la fuerza de atracción de una partícula específica depende de su distancia a la Luna, mientras que las fuerzas centrífugas son iguales en cualquier punto de la superficie de la Tierra ya que cada punto en ella tiene el mismo movimiento sobre el centro de gravedad del sistema. Las fuerzas residuales que resultan entre estas son tales que la suma sobre todos los puntos en la superficie de la Tierra es cero, estas fuerzas residuales son las fuerzas que generan las mareas (Figura 3.2) (Marchuk 1989).

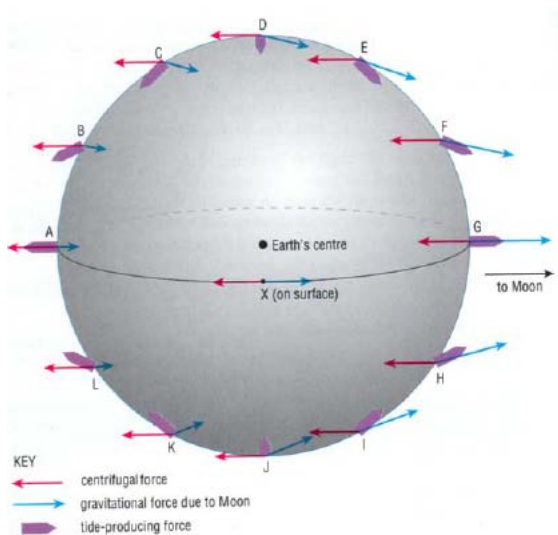


Figura 3.2: Fuerzas generadoras de marea
Tomada de (Butterworth-Heinemann 1999)

Cuando la Luna está en el cenit, la fuerza de atracción es mayor que la centrífuga y la diferencia es una fuerza residual pequeña dirigida hacia

la Luna y cuando está en el nadir, la fuerza de atracción es más pequeña que la centrífuga y la fuerza residual es dirigida hacia el centro de la Tierra. Esto pasa en cada punto de la superficie de la Tierra y da como resultado el sistema de fuerzas que generan la marea, es decir, primero la Luna hace crecer la marea y cuando llega al cenit declina, haciendo que la marea descienda, al presentarse el Sol la marea crece de nuevo, después de lo cual cede y vuelve a subir cuando aparece nuevamente la Luna (Cruz 2007).

El periodo de las mareas solares es de 24 horas, aunque debido a que su masa es alrededor de 27 millones de veces la de la Luna y que está aproximadamente 400,000 veces más lejos, el efecto que ejerce la Luna sobre las aguas en la Tierra es dos veces mayor que el provocado por el Sol. Las fuerzas de marea del Sol solo representan el 46 % en relación con las producidas por la Luna (Cruz 2007).

3.1.1. Descomposición de armónicos

Las mareas son una combinación de componentes periódicos de diferentes frecuencias y amplitudes. Cada uno de los movimientos generadores de marea, que es representado por una simple curva de coseno, es conocido como un componente de marea o componente armónico. Se conoce como componente de marea a la parte de una fuerza de marea que actúa en determinada dirección y representa un cambio periódico o variación en las posiciones relativas de la Luna y el Sol, la cual se describe de la forma $y = A\cos(\omega_i t + \theta)$ (Prospero 2013).

Donde: y es una función de tiempo la cual se calcula de un origen específico. El coeficiente A corresponde a la amplitud y representa la medida de su importancia relativa. Finalmente el ángulo $(\omega_i t + \theta)$ cambia uniformemente su valor en cualquier momento y se llama “fase de componente”.

Estos componentes se expresan como armónicos, que tienen distintas funciones periódicas de frecuencia conocida y fase en relación a alguna referencia de tiempo común. Muchos de los armónicos que son parte de las oscilaciones de las mareas diarias se enumeran en el Cuadro 3.1, junto con los símbolos utilizados habitualmente para referirse a ellos y sus frecuencias asociadas. Estas frecuencias se conocen con base en observaciones astronómicas realizadas durante décadas (Hanson y Owen 1982). Las frecuencias son comunes a todos los datos oceánicos pero las amplitudes y la fase para cada componente son una característica de cada conjunto individual de datos de mareas.

Para determinar que tipo de marea presenta la zona de estudio, se ocupa el

factor de forma que esta determinado por las amplitudes de las componentes M_2 , S_2 , K_1 y O_1 y se calcula de la siguiente manera:

$$F = \frac{A_{K1} + A_{O1}}{A_{M2} + A_{S2}} \quad (3.1)$$

Donde:

A_{K1} : Amplitud de la componente K_1

A_{O1} : Amplitud de la componente O_1

A_{M2} : Amplitud de la componente M_2

A_{S2} : Amplitud de la componente S_2

En función del valor del factor de forma F, la marea astronómica suele clasificarse en: marea de tipo semidiurno ($F \leq 0.25$), marea de tipo mixto con predominio semidiurno ($0.25 < F < 1.5$), marea de tipo mixto con predominio diurno ($1.5 < F < 3$) y marea de tipo diurna ($F > 3$).

Para Puerto Morelos los valores son :

$$F = \frac{0.25 + 2.42}{10.35 + 5.5} = 0.16 \quad (3.2)$$

Esto nos indica que es una marea de tipo semi diurno. Sabiendo esto, se estudiarían únicamente los principales componentes armónicos de la marea semi-diruna.

Los componentes principales de la marea semi diurna son:

Cuadro 3.1: Componentes armónicos principales de la marea semi-diurna

| Abreviatura | Nombre | Periodo en horas |
|-------------|---|------------------|
| M_2 | Componente semi-diurno Lunar principal | 12.42 |
| S_2 | Componente semi-siurna Solar principal | 12 |
| N_2 | Componente semi-dirurna Lunar elíptico mayor | 12.66 |
| K_2 | Componente Luni-Solar de declinación semidiurna | 11.96 |

A continuación se describe brevemente cada uno de ellos :

- El componente semi-diurno principal Solar, S_2 , representa la Tierra girando relativamente al Sol. Se utiliza la letra S referida al Sol por su nombre en ingles "Sun".

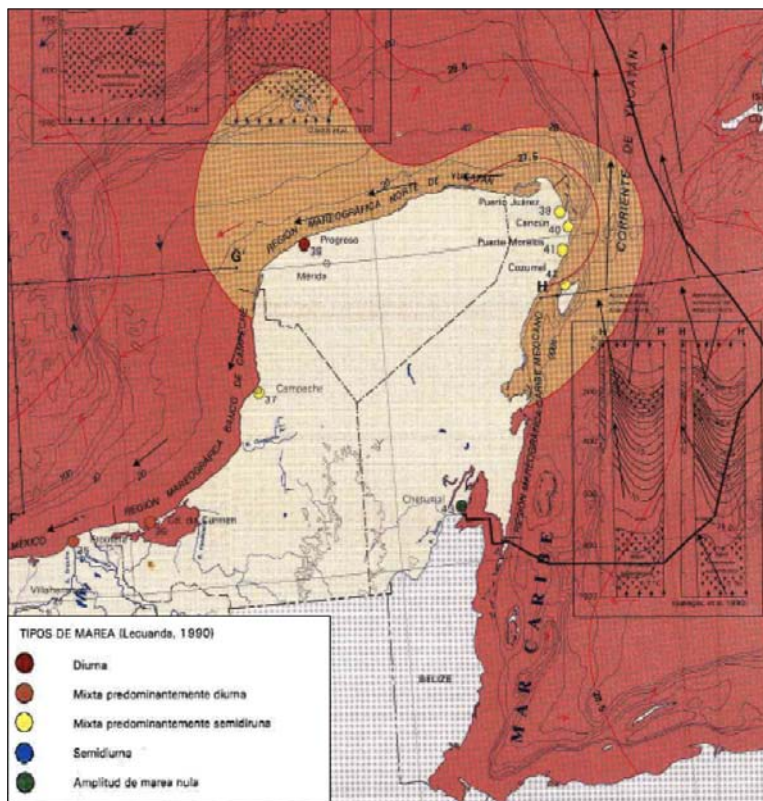


Figura 3.3: Marea Península de Yucatán editada de : Gallegos, A., A. Fernández y J. Zavala: Oceanografía Física I. Masas de agua y mareas. Temperatura y circulación superficial en verano. En: Atlas Nacional de México, Hoja IV.9.1, Instituto de Geografía, UNAM, (1992).

- El componente semi-diurno principal Lunar, M_2 , representa la Tierra girando relativamente a la Luna. Se utiliza la letra M referida a la Luna por su nombre en ingles “ Moon”
- El componente semi-diurno elíptico Lunar mayor, N_2 , es el componente diseñado para simular el ciclo de perigeo a perigeo.
- El componente diurno Luni-Solar declinacional, K_2 , es un componente artificial designado para estimular el ciclo de máxima declinación a máxima declinación de la Luna.

El subíndice 2 indica que la componente es semi diurna y el subíndice 1 indica que la componente es diurna.

El proceso matemático para obtener la amplitud y la fase de una componente a la vez a partir de una serie de tiempo observada, se llama análisis armónico. Al conocer los períodos de los componentes, es posible retirarlos. De un análisis armónico de las series de nivel de agua observada, se obtienen dos valores para cada componente de marea. La amplitud, distancia vertical entre el nivel promedio de marea y el nivel de la cresta (cuando se gráfica como una curva de coseno) es uno de los valores. El otro es el desfase, que es la cantidad de tiempo que pasa desde el evento astronómico máximo al primer máximo de su componente de marea correspondiente. Usualmente se expresa en grados. (Hicks 2006)

El intervalo de oscilación de las mareas varía en función a varios factores como la configuración de la costa y la batimetría local. En en Puerto Morelos, el intervalo de oscilación es de 45 cm en marzo y 38.1 cm en septiembre. (Figura 3.3)

3.1.2. Difusividad hidráulica

La difusividad hidráulica también conocida como difusividad del acuífero, se define como la transmisividad dividida por el coeficiente de almacenamiento. Este parámetro es proporcional a la velocidad a la que los cambios de presión de la columna de agua se propagan a través de medios porosos, los cuales se propagan mas rápido a través de un acuífero con una transmisividad alta y un coeficiente de almacenamiento bajo. La difusividad hidráulica es inversamente proporcional al almacenamiento específico y directamente proporcional a la transmisividad.

En este caso de estudio, donde los coeficientes de almacenamiento en acuíferos libres es bajo, los valores de difusividad se esperan altos.

Para una marea armónica simple, la solución analítica de Jacob (1950) para el flujo subterráneo unidimensional debido a la propagación de ondas de marea en un acuífero libre es:

$$h = h_0 e^{-x\sqrt{\pi S/t_0 T}} \sin\left(\frac{2\pi t}{t_0} - x\sqrt{\pi S/t_0 T}\right) \quad (3.3)$$

Donde:

h = amplitud de la oscilación del nivel del agua subterránea

S = almacenamiento específico

T = transmisividad

t = tiempo de retraso

t_0 = periodo

h_0 = amplitud de la marea

Si la amplitud h_0 de la marea y la amplitud del agua subterránea son conocidas por mediciones de campo, es posible calcular la difusividad del acuífero como:

$$D = \frac{T}{S} = \frac{KZ}{S} = \frac{\pi x^2}{t_0 \left[\ln\left(\frac{h_0}{h_x}\right) \right]^2} \quad (3.4)$$

Donde

K = conductividad hidráulica

Z = espesor del acuífero

(Carol 2009)

Capítulo 4

Método

4.1. Obtención de datos



Figura 4.1: Boya del Servicio Mareográfico Nacional
Tomada de : <http://www.mareografico.unam.mx/portal/>

Se obtuvieron datos del cambio del nivel del agua en el mar de la boya del Servicio Mareográfico Nacional, de Puerto Morelos, ubicada en latitud $20^{\circ} 52.1$ N y longitud $86^{\circ} 52.0$ W , estos datos registran el cambio en el nivel

del agua cada minuto durante todo el año. A partir de los datos registrados por la boya, se realizaron dos series de tiempo (f_1, t_1) para marzo y septiembre. Estas series de tiempo representan una función periódica ya que esta formada por componentes periódicas.



Figura 4.3: mini divers Schlumber

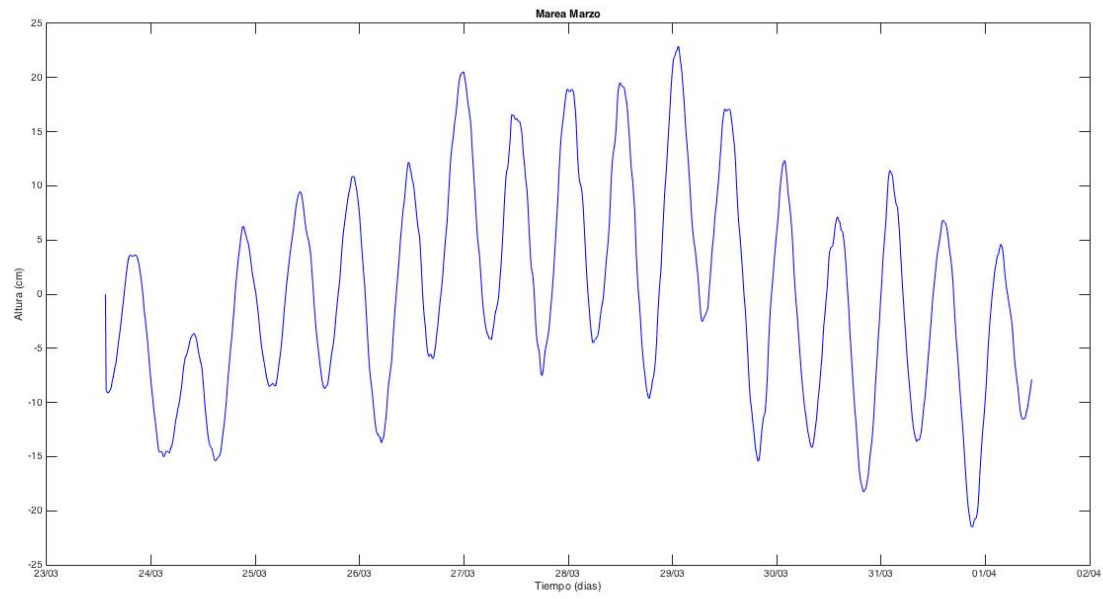
Para los datos de la zona de estudio en los cenotes, se realizaron dos salidas a campo, en las cuales se colocaron sensores de presión mini divers Schlumberger (Figura 4.3) en 3 cenotes ubicados de menor a mayor distancia de la línea de costa de la siguiente manera:

Cuadro 4.1: Zona de estudio

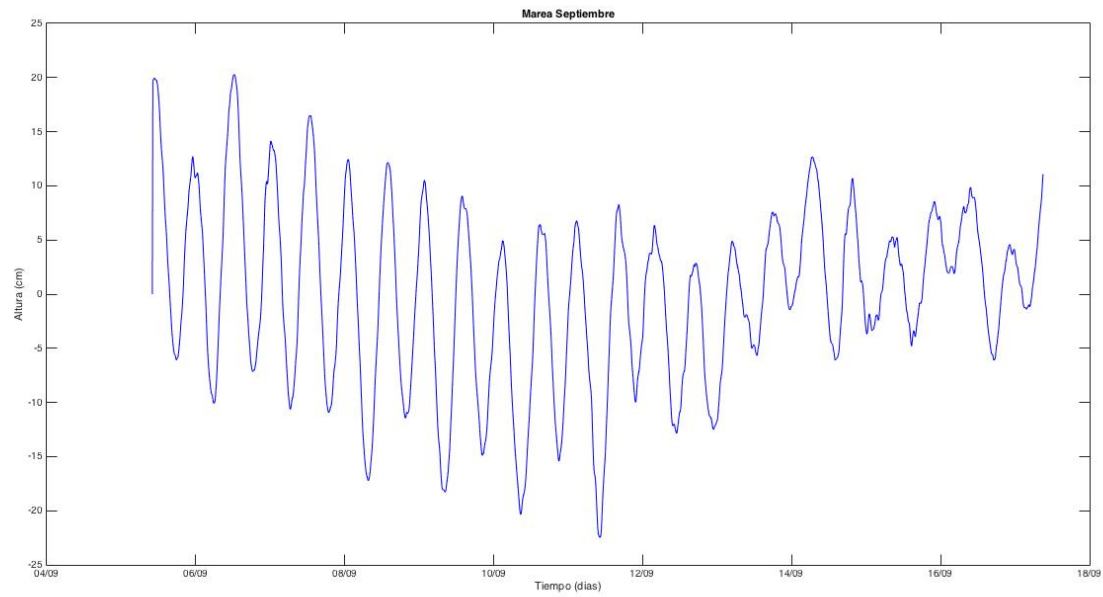
| Nombre | Latitud | Longitud | Distancia a la costa (km) |
|-------------|----------------|---------------|---------------------------|
| Chaactunche | 20°51'30.79" N | 86°59'20.71"O | 12.6 |
| Mojarras | 20°50'16'16" N | 87°1'25.23" O | 15 |
| Las Gatas | 20°52'55.92" N | 87°4'44.15 O | 22.8 |

Figura 4.2: Marea

(a) Marzo



(b) Septiembre



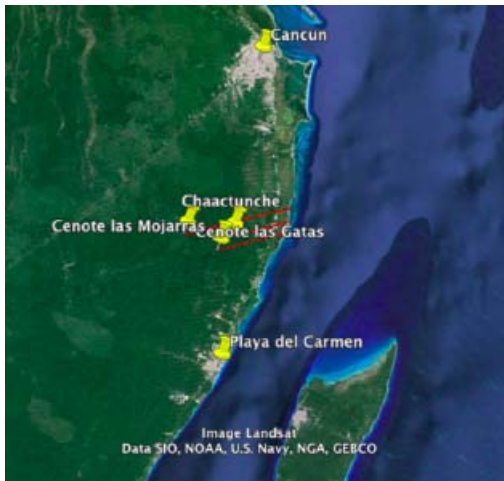


Figura 4.4: Puntos de estudio

(Tomada de Google Earth)

De manera análoga se realizaron series de tiempo para cada cenote y fecha estudiada:

Estas señales se les eliminó la tendencia (pendiente de los datos que puede estar ocasionada por fenómenos no periódicos). Para esto se ocupó la función de “detrend” en Matlab. Se les aplicó un filtro de “pasa altas” para eliminar los efectos meteorológicos y suavizar estas señales. Éstos es útil como este caso debido a que la señal y el ruido meteorológico tienen una frecuencia diferente y pueden ser separados.

$$y = x(k - 1) * 0.25 + x * 0.5 + x(k + 1) * 0.25 \quad (4.1)$$

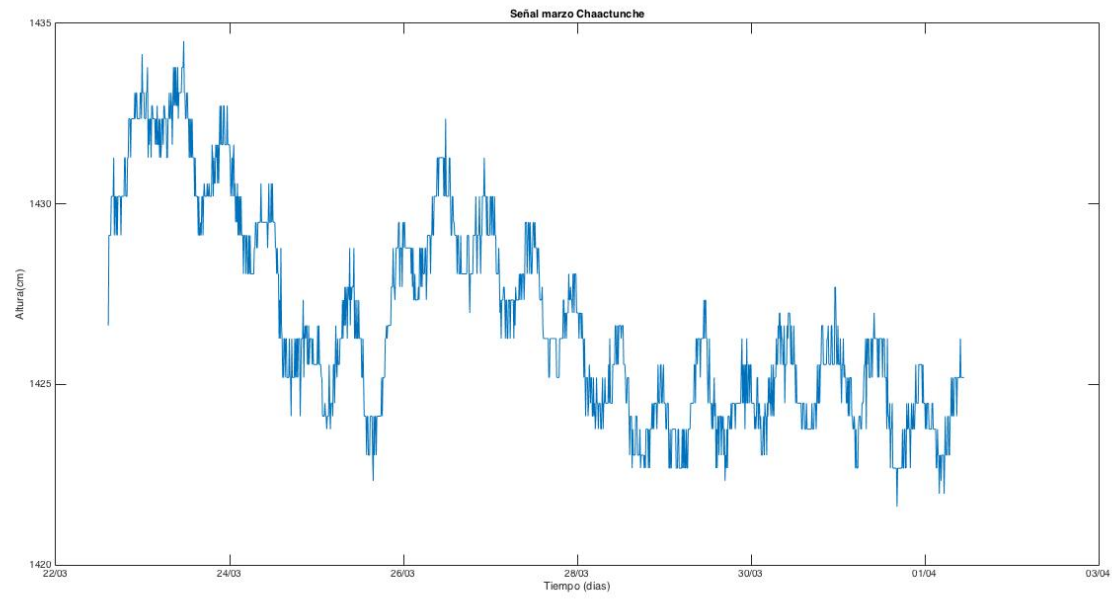
El objetivo del análisis de series de tiempo es para extraer sus características, en el caso del análisis de funciones periódicas, sus componentes armónicos.

4.2. Análisis armónico

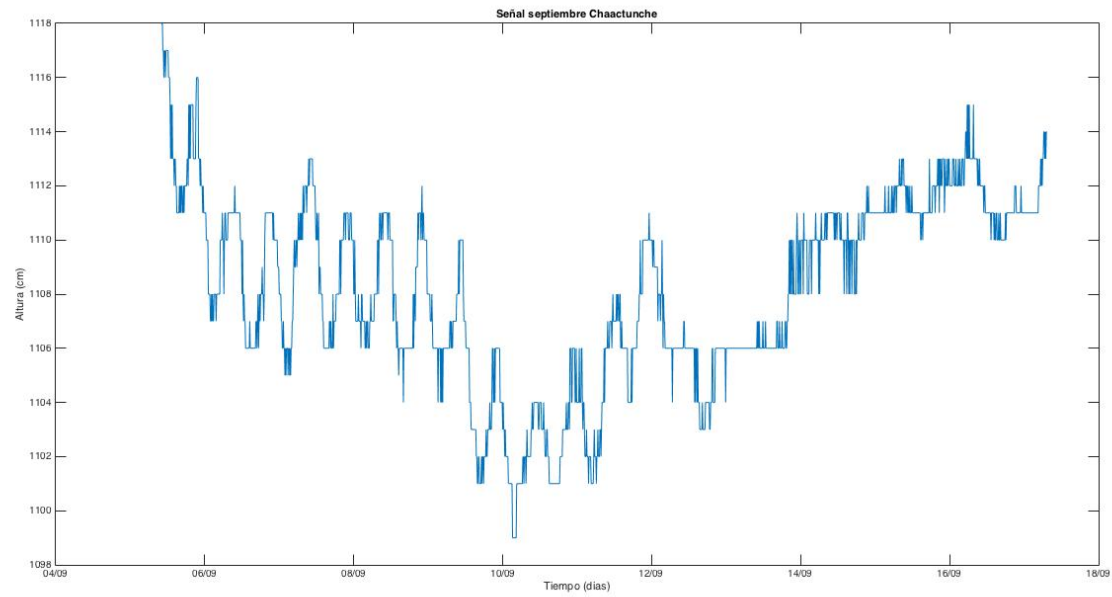
Se hizo un análisis a las series de tiempo en la se cual utilizó la Transformada de Fourier. Este método transforma una serie del dominio del tiempo al dominio de la frecuencia, la cual describe que una señal periódica complicada compuesta por la suma de sus componentes armónicos.

Figura 4.5: Series de tiempo con datos crudos cenote Chaactunche

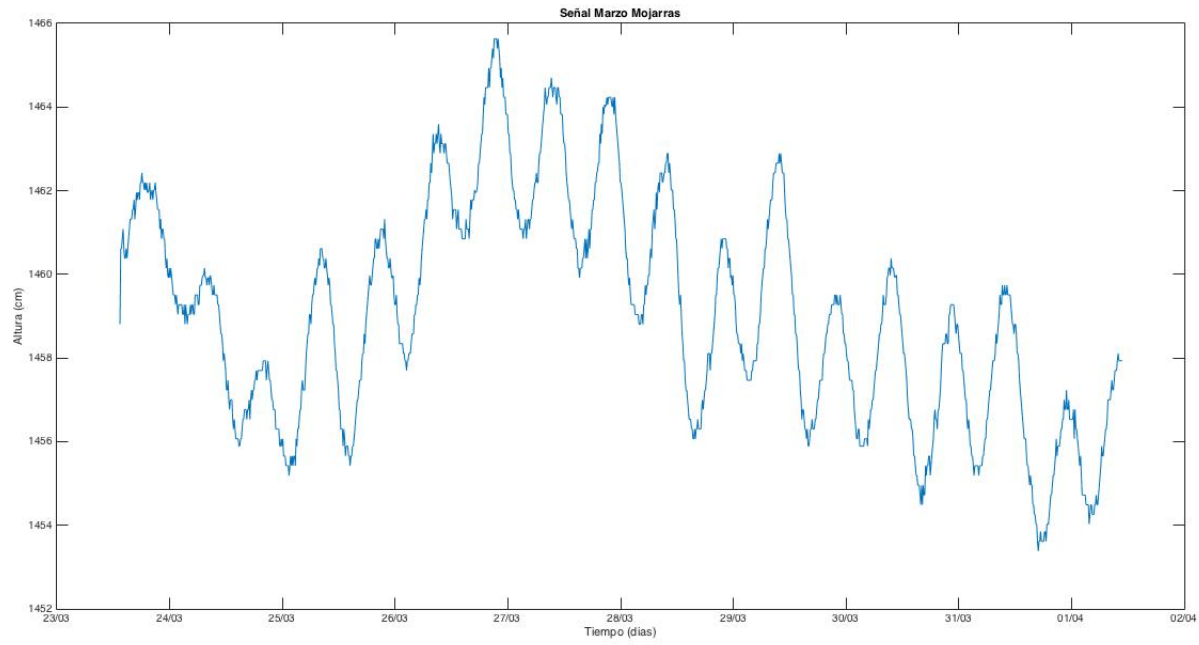
(a) Marzo



(b) Septiembre



(a) Marzo



(b) Septiembre

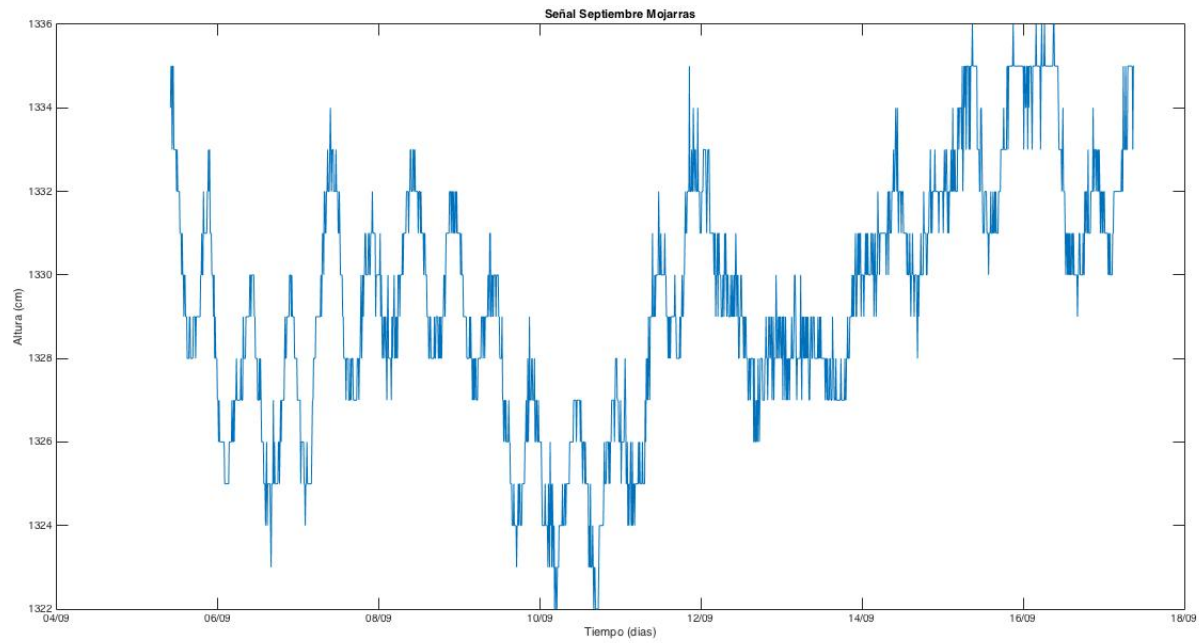
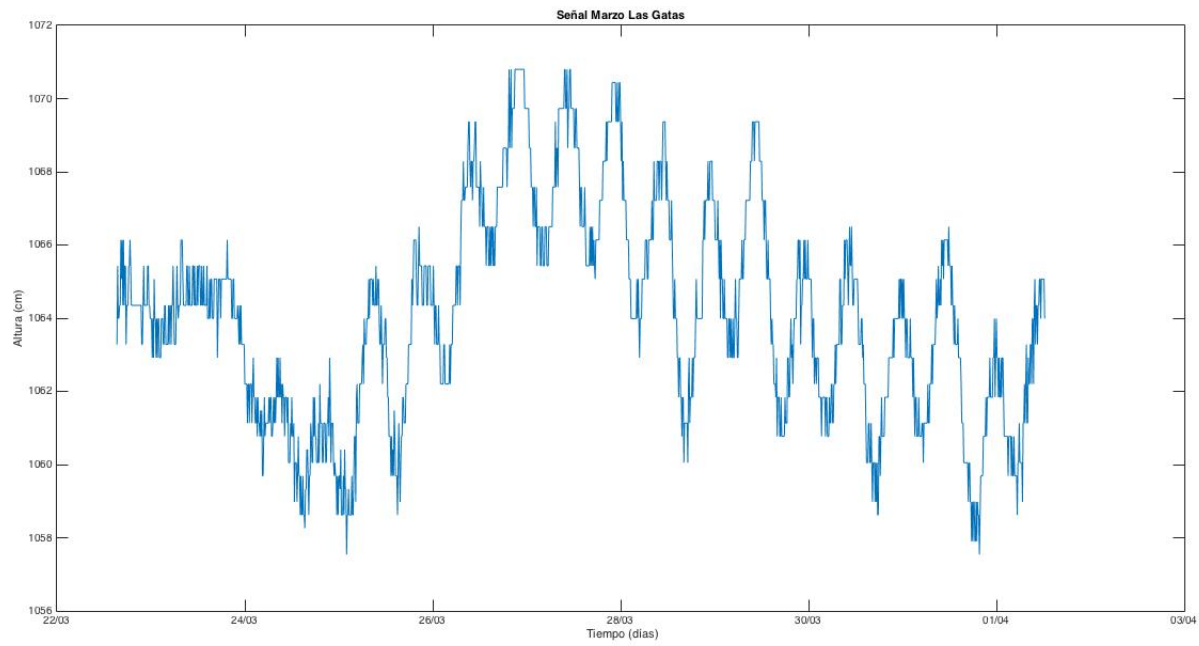


Figura 4.7: Serie de tiempo con datos cenote Las Gatas

(a) Marzo



(b) Septiembre

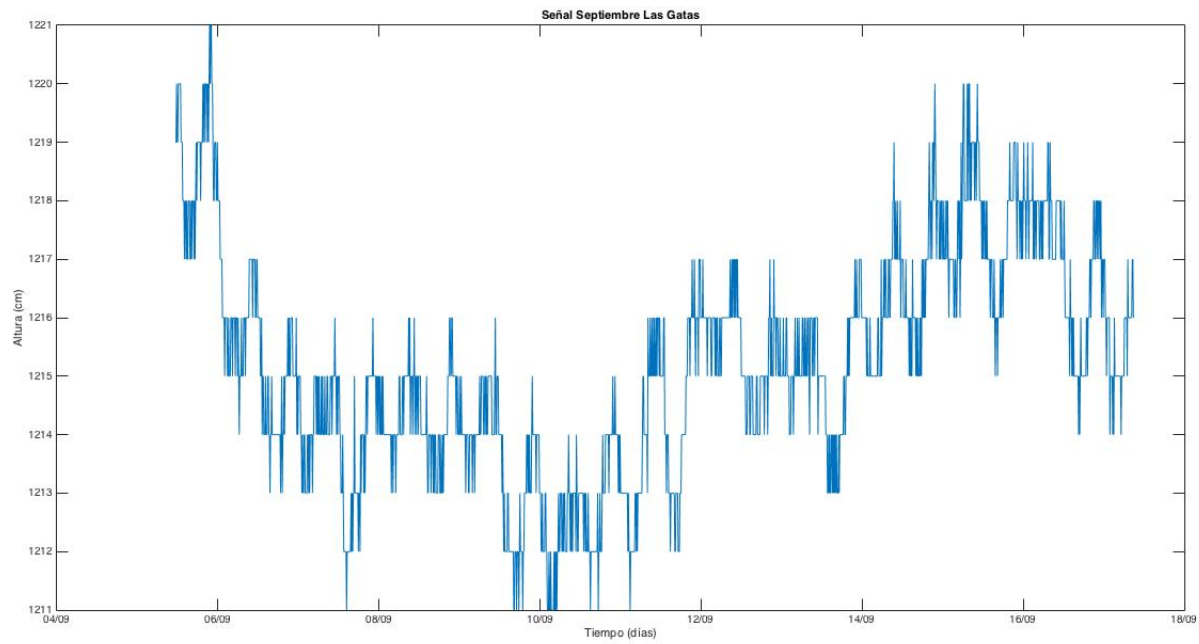
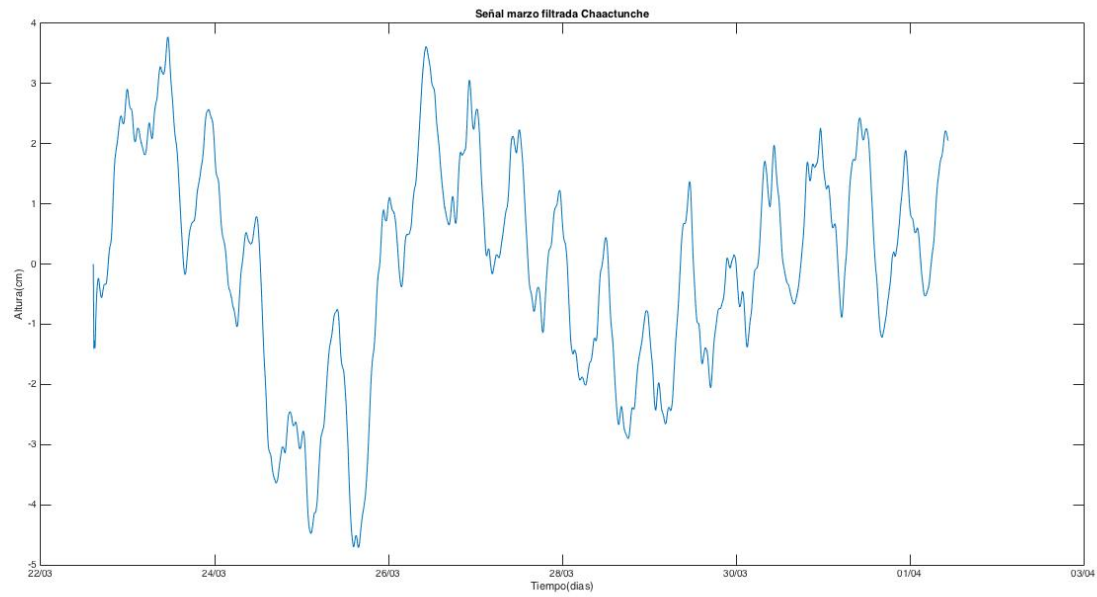


Figura 4.8: Series de tiempo con datos filtrados cenote Chaactunche

(a) Marzo



(b) Septiembre

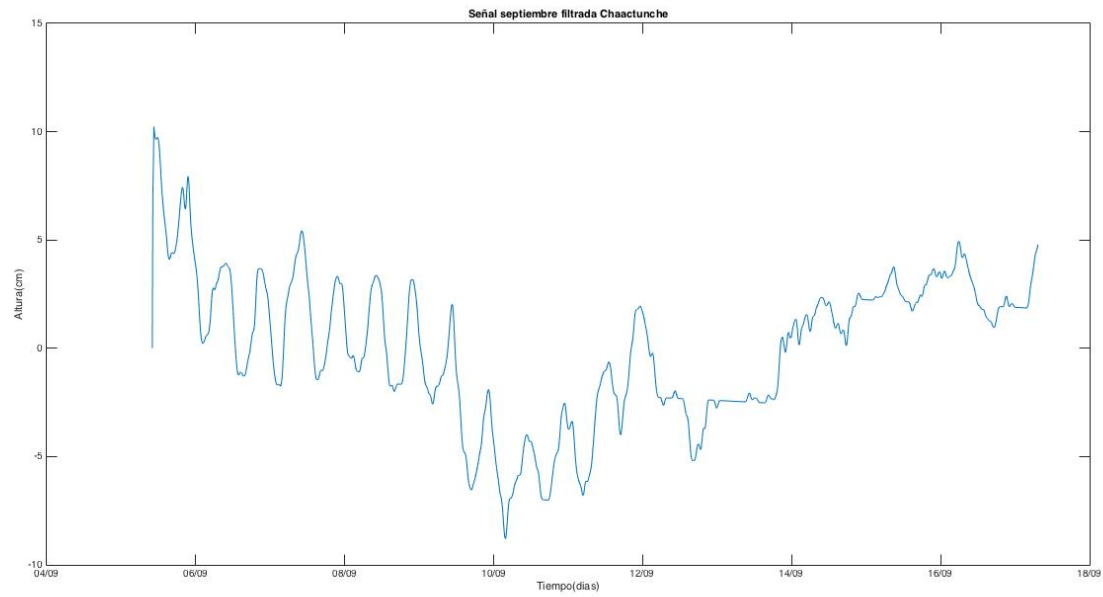
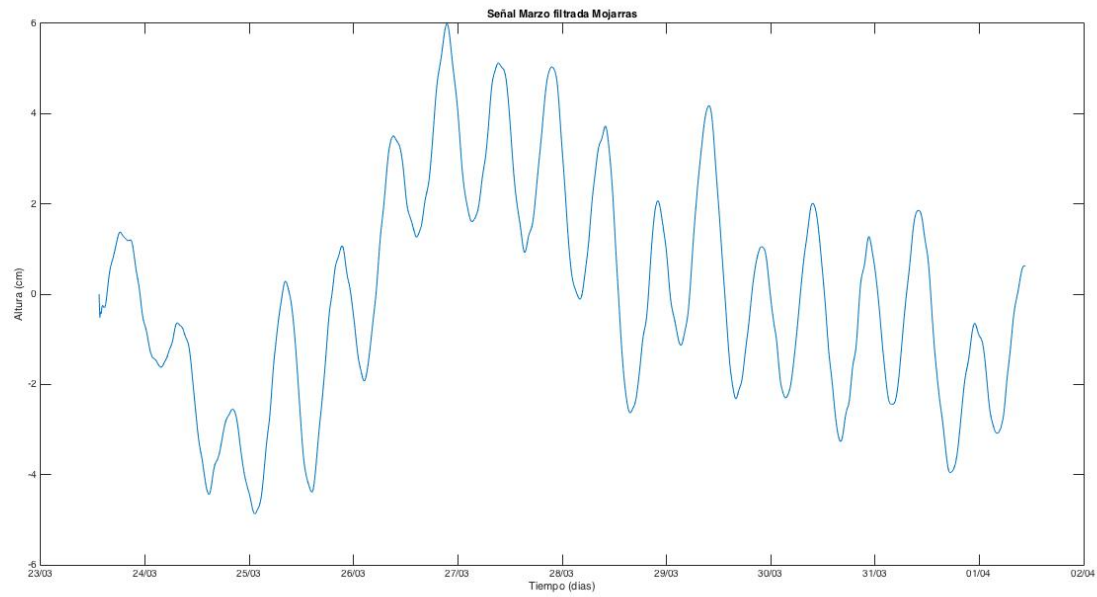


Figura 4.9: Serie de tiempo con datos filtrados cenote Mojarras

(a) Marzo



(b) Septiembre

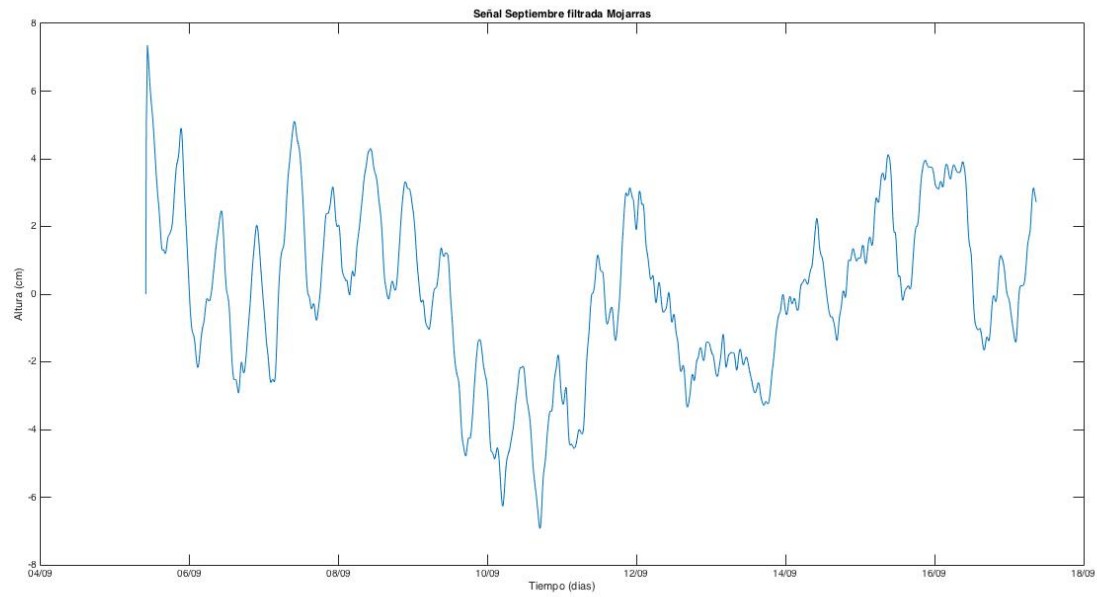
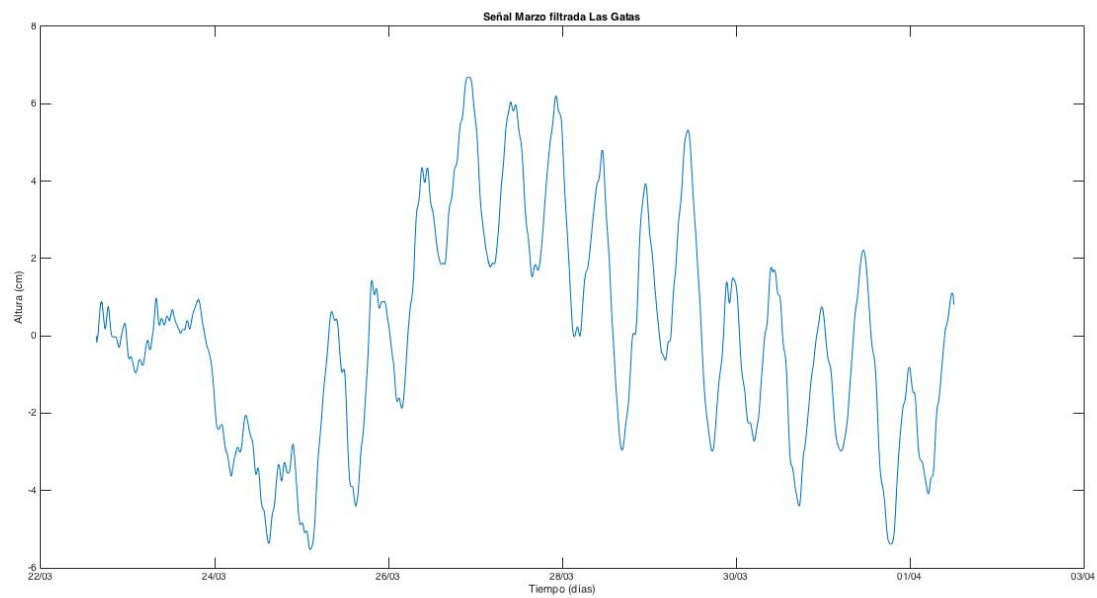
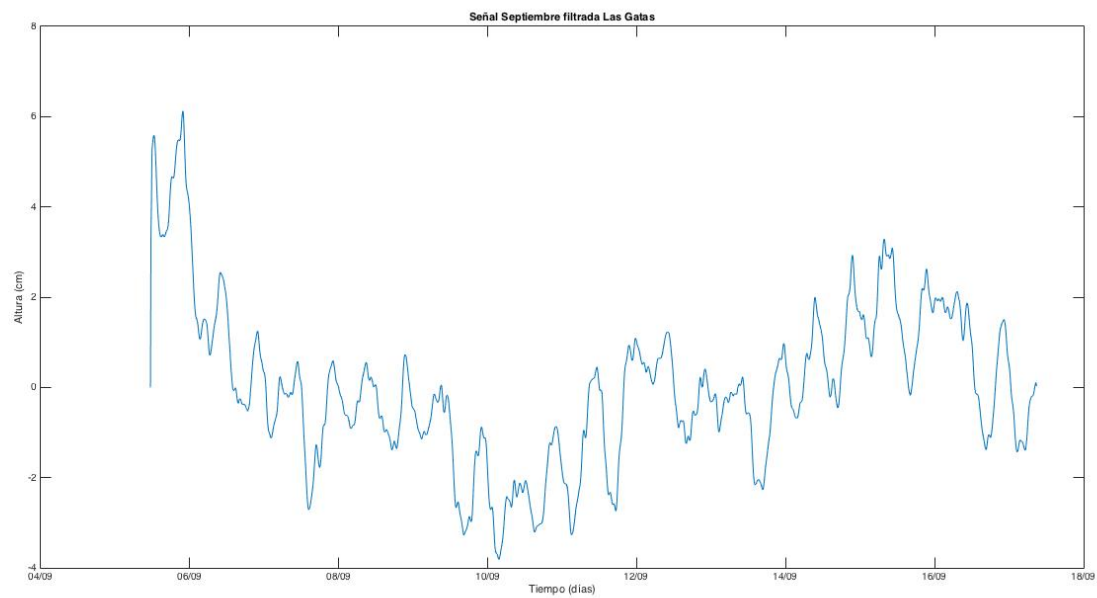


Figura 4.10: Serie de tiempo con datos filtrados cenote Las Gatas

(a) Marzo



(b) Septiembre



$$h(t) = \sum A_i \text{sen}(\omega_i t + \theta_i) \quad (4.2)$$

1

donde:

A_i = amplitud de la señal “i”

ω_i = velocidad angular de la señal “i”

θ_i = fase de la señal “i”

Que es equivalente a :

$$h(t) = h_0 + a \text{sen}(\omega_i t_i) + b \text{cos}(\omega_i t_i) \quad (4.3)$$

2

De la ecuación 4.2 anterior es posible calcular la velocidad angular cuando se conoce el periodo con la siguiente ecuación

$$\omega_i = \frac{2\pi}{T_i} \quad (4.4)$$

donde:

T_i = período

La cual representa la rapidez del fenómeno, representado como 360° (un ciclo) entre el periodo del fenómeno.

También de la ecuación 4.2 se obtienen los coeficientes:

$$a_i = A_i \text{sen} \theta_i \quad (4.5)$$

$$b_i = A_i \text{cos} \theta_i \quad (4.6)$$

por la identidad trigonométrica del seno de la suma de dos ángulos:

$$A_i \text{sen} \omega_i t + \theta_i = A_i (\text{sen} \omega_i t \text{cos} \theta_i + \text{cos} \omega_i t \text{sen} \theta_i) \quad (4.7)$$

$$= A_i \text{sen} \theta_i \text{cos} \omega_i t + A_i \text{cos} \theta_i \text{sen} \omega_i t \quad (4.8)$$

Cuando son sustituidos (4.5 y 4.6) en (4.8) :

$$A_i \text{sen} \omega_i t + \theta_i = a_i \text{cos} \omega_i t + b_i \text{sen} \omega_i t \quad (4.9)$$

¹Solución por mínimos cuadrados, ver anexo I

²ver anexo I para ver como se resuelve esta equivalencia

Queda la ecuación 4.2 como :

$$h(t) = \sum_{i=0}^n a_i \cos \omega_i t + b_i \sin \omega_i t \quad (4.10)$$

de la cual, para llegar de nuevo a 4.2 se ocupará primero sustituir el valor de la velocidad angular (4.4) y las relaciones siguientes:

$$h(t) = \sum_{i=0}^n a_i \cos \frac{2\pi}{T_i} t + b_i \sin \frac{2\pi}{T_i} t \quad (4.11)$$

$$A_i = \sqrt{a_i^2 + b_i^2} \quad (4.12)$$

$$\tan \theta_i = \frac{a_i}{b_i} \quad (4.13)$$

Donde

$\theta_i =$ es el cociente de los coeficientes y se utiliza para obtener las fases de cada componente armónico de las series de tiempo.

$A_i =$ es la norma de los coeficientes obtenidos y se utiliza para obtener la amplitud de cada componente armónico de las series de tiempo.

A continuación se muestra el análisis armónico de las series de tiempo estudiadas en las cuales vemos en el primer cuadro en color azul los datos completos obtenidos del sensor y previamente filtrados. En color rojo la componente M2, en color amarillo la componente N2, en color morado la componente S2 y la componente K2 en color verde. En el segundo cuadro vemos únicamente las componentes y finalmente en el tercer cuadro vemos la señal construida a partir de los componentes armónicos y la señal con los datos reales.

Este procedimiento se realizó a las series de tiempo de los tres cenotes y del mar de forma automatizada en el software de Matlab para poder obtener la amplitud y la fase por componente armónico para cada una y poder hacer los análisis siguiente:

- Cálculo del tiempo de retraso por medio de la diferencia de fase entre la marea y los cenotes por componente armónico. Se obtuvo en radianes, se transformó a grados por medio de la función “radtodeg” de MATLAB y finalmente a tiempo en horas.
- Difusividad hidráulica

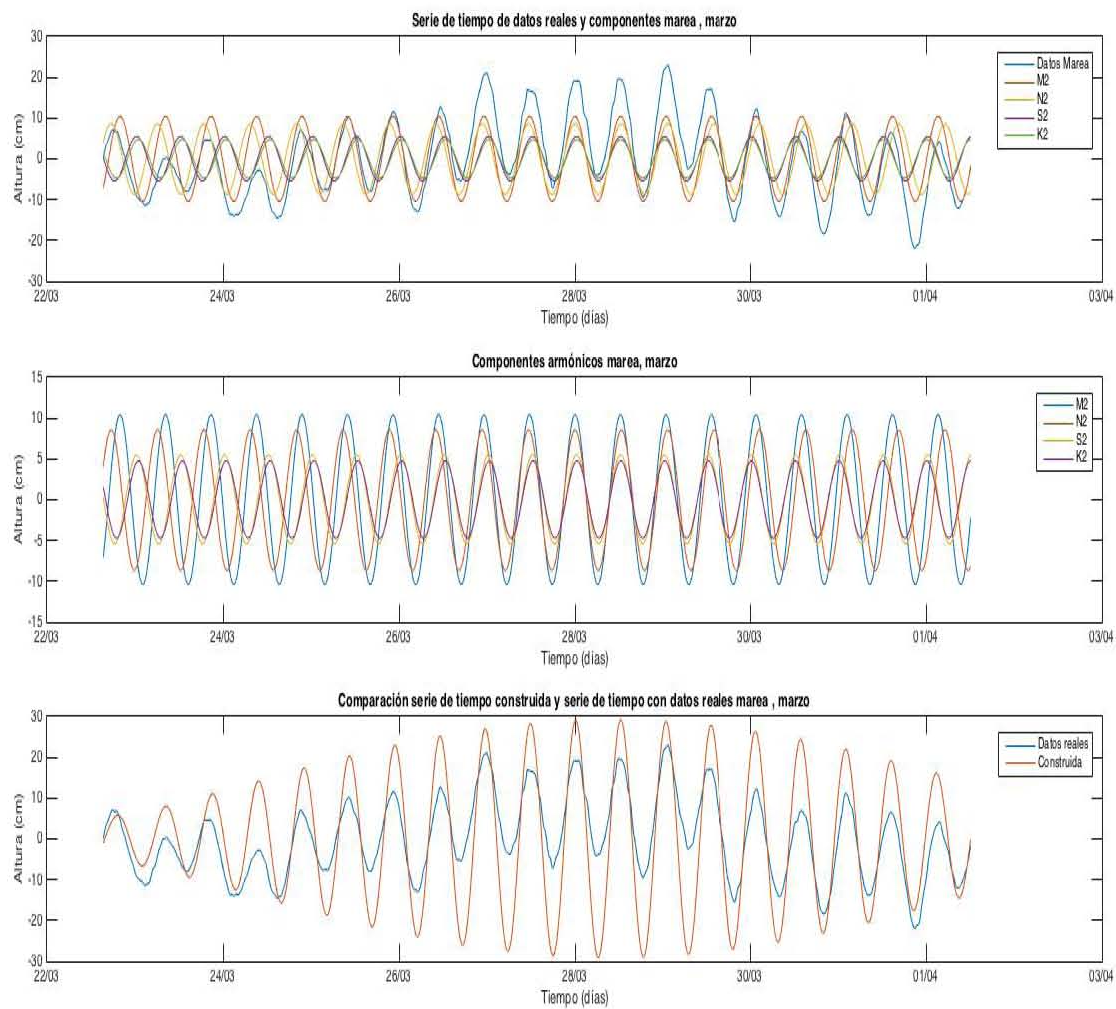


Figura 4.11: Análisis armónico de la marea, marzo

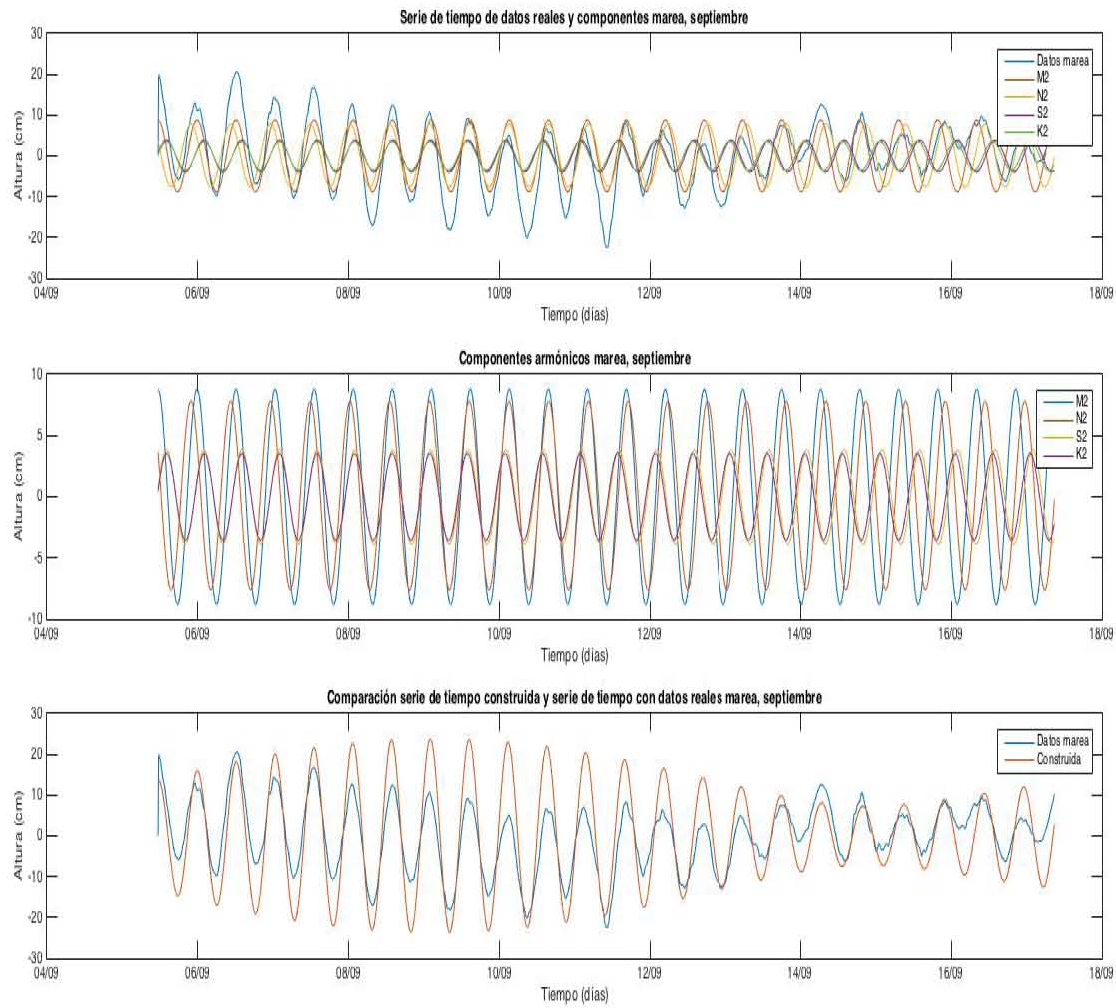


Figura 4.12: Análisis armónico de la marea, septiembre

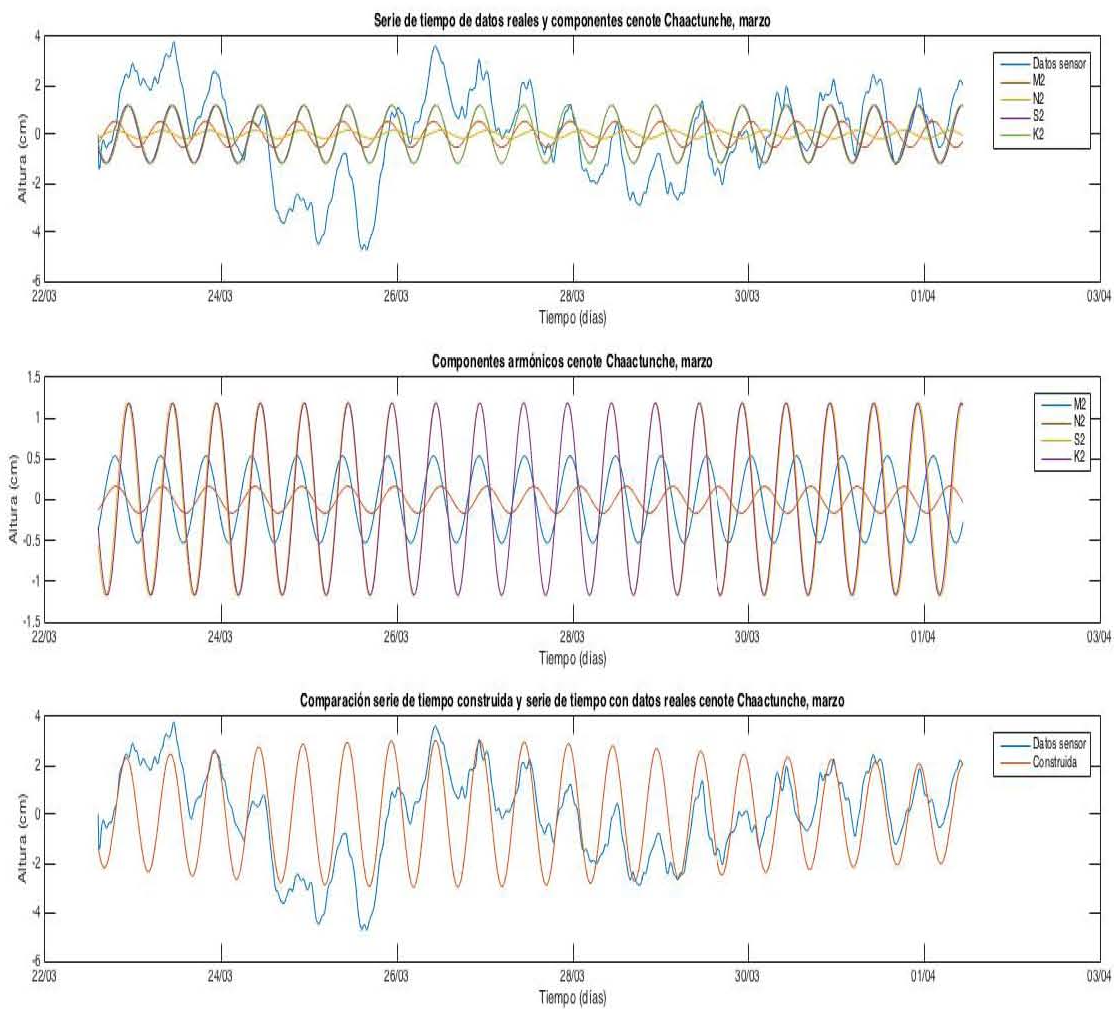


Figura 4.13: Análisis armónico del cenote Chaactunche, marzo

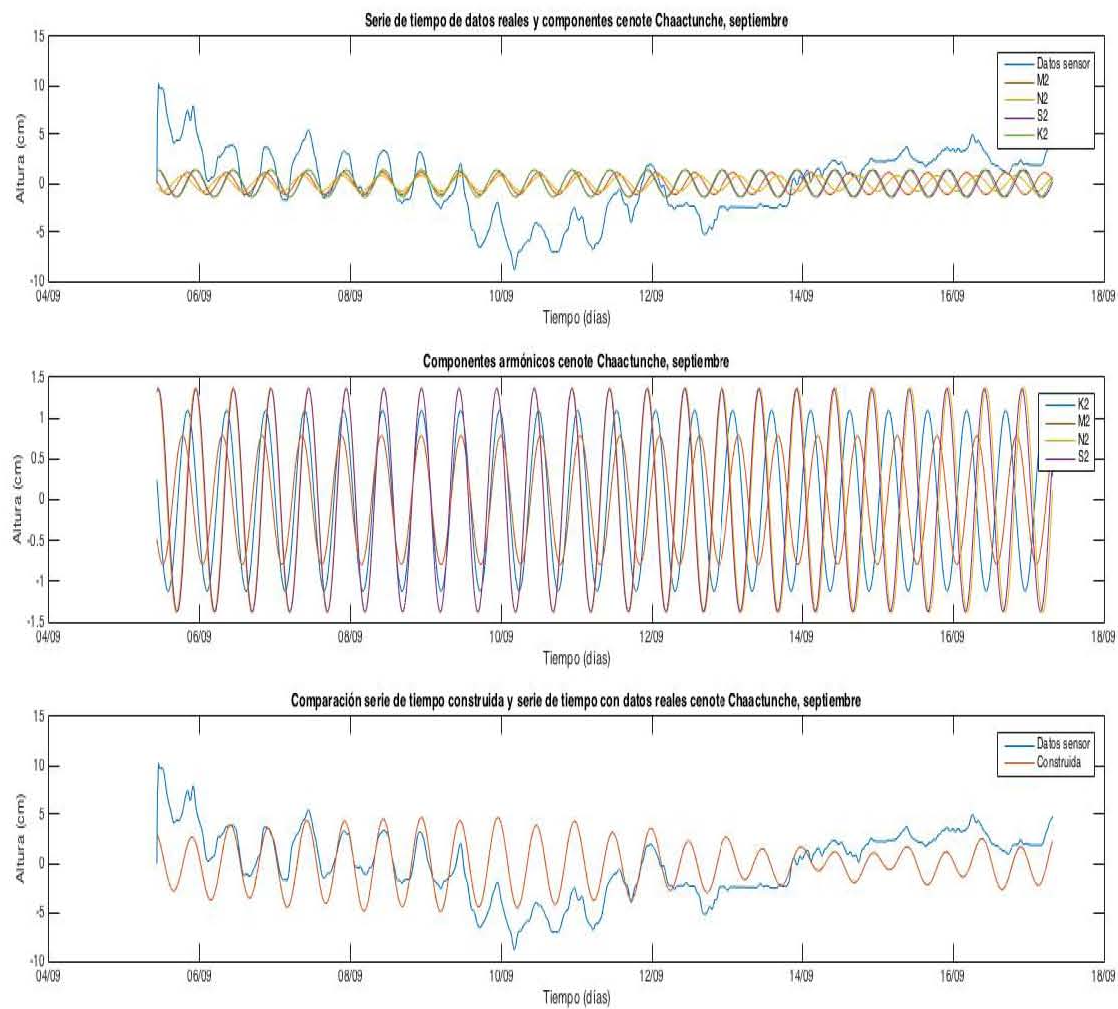


Figura 4.14: Análisis armónico del cenote Chaactunche, septiembre

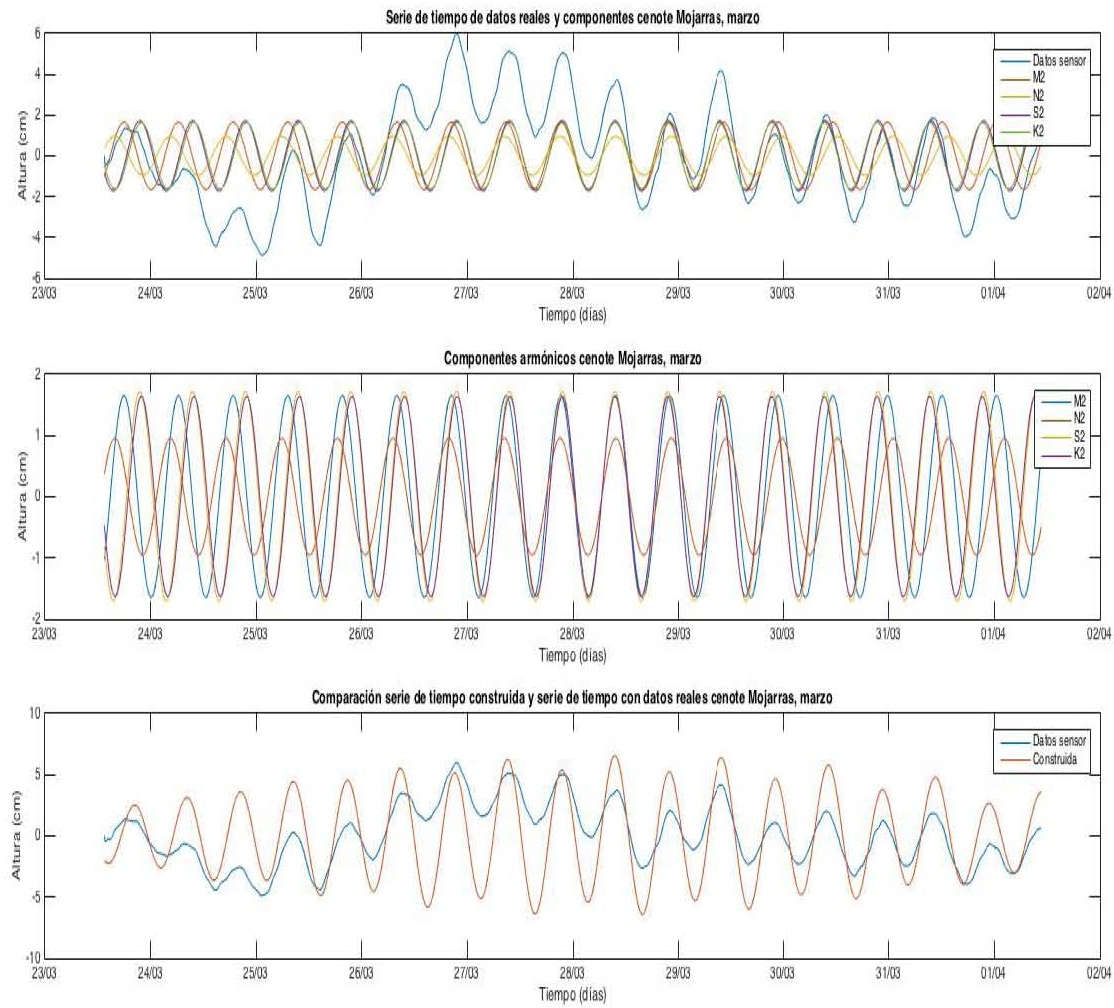


Figura 4.15: Análisis armónico del cenote Mojarras, marzo

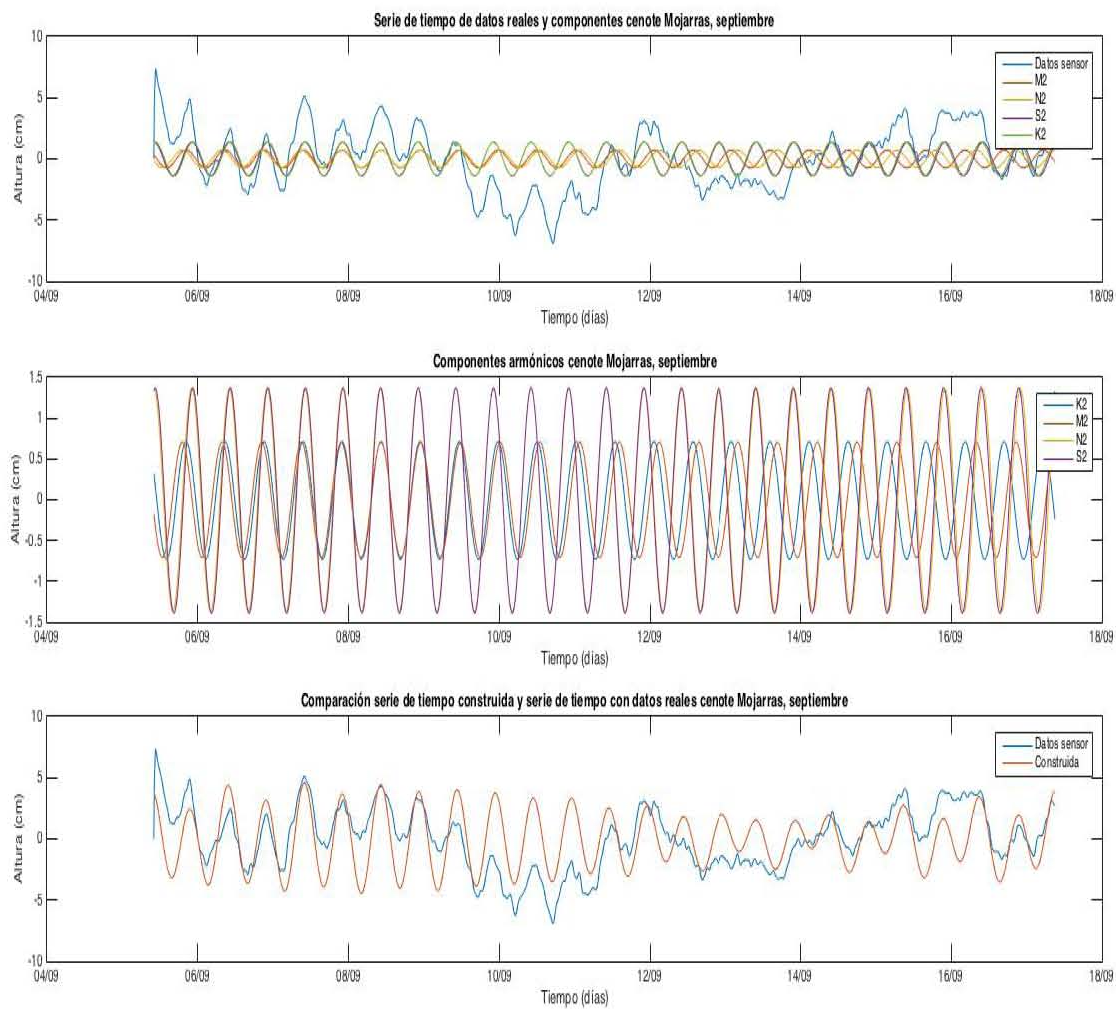


Figura 4.16: Análisis armónico del cenote Mojarras, septiembre

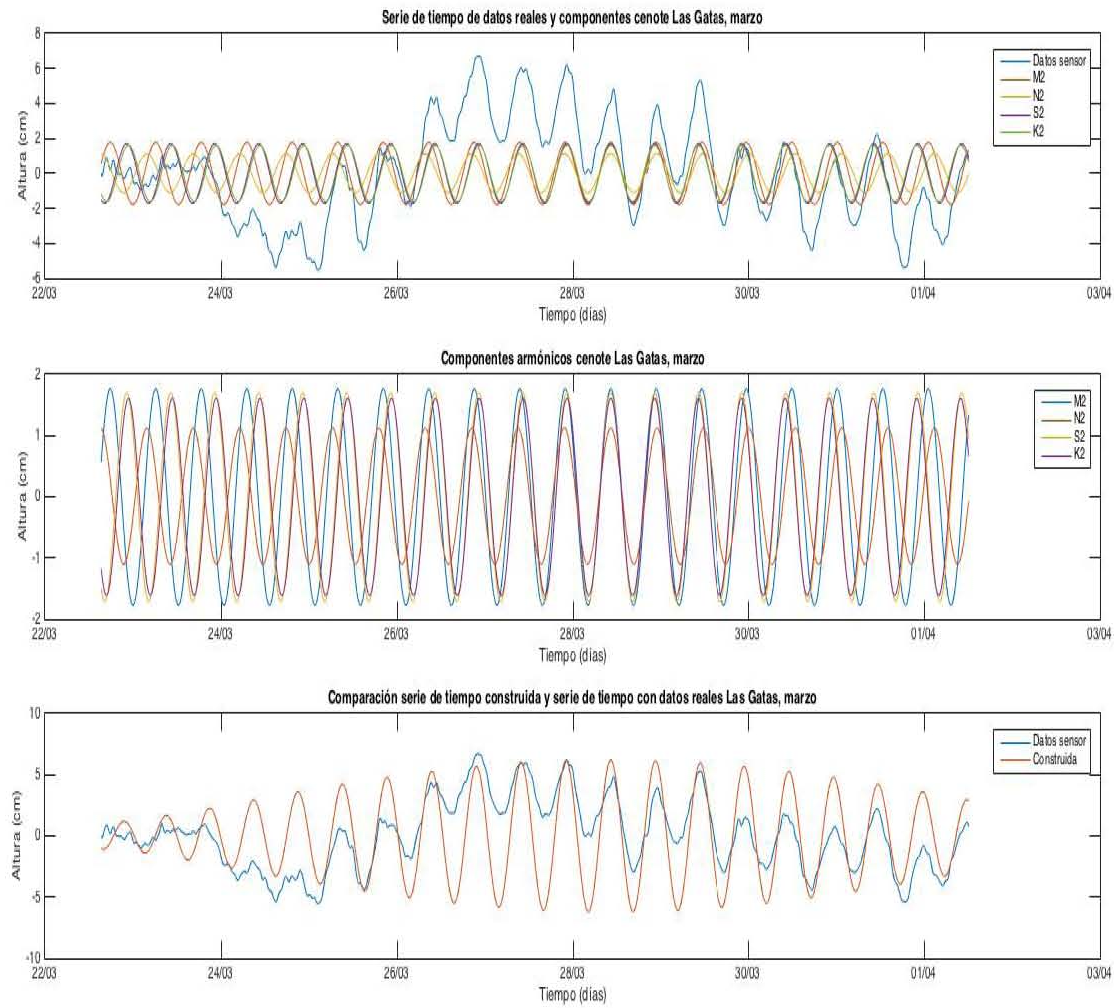


Figura 4.17: Análisis armónico del cenote Las Gatas, marzo

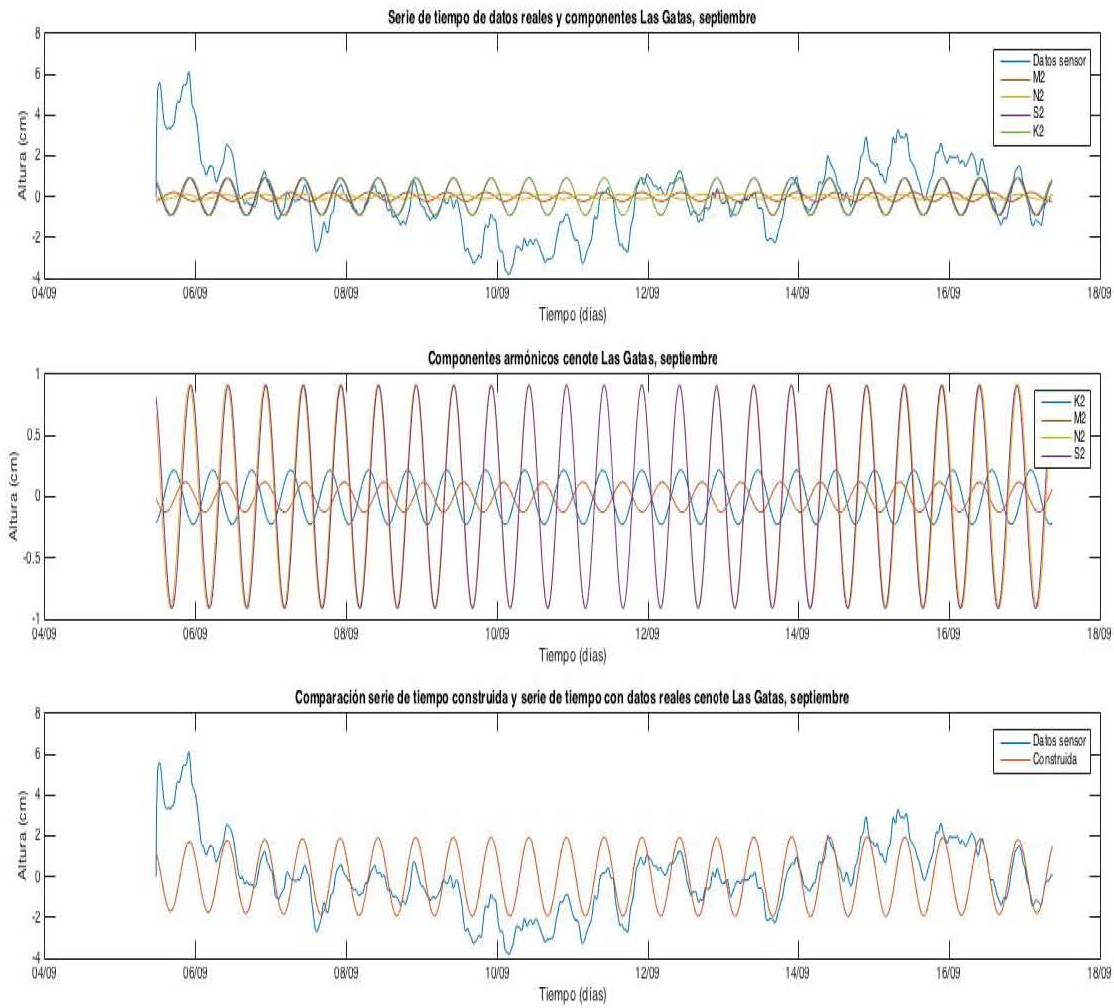


Figura 4.18: Análisis armónico del cenote Las Gatas, septiembre

Para determinar la difusividad hidráulica se utilizó la ecuación 3.4. Donde x es la distancia a la costa elevada al cuadrado:

Cuadro 4.2: Distancia a la costa

| | Distancia (km) | $x^2(km^2)$ |
|-------------|----------------|-------------|
| Chaactunche | 12.6 | 158.76 |
| Mojarras | 15.00 | 225.00 |
| Gatas | 22.8 | 519.84 |

Las amplitudes como:

Cuadro 4.3: Amplitudes

| (mm) | Componente | Marea | C | M | G |
|------------|------------|-------|------|------|------|
| marzo | M2 | 10.87 | 0.53 | 1.65 | 1.77 |
| | S2 | 6.67 | 1.18 | 1.71 | 1.71 |
| | N2 | 10.79 | 0.16 | 0.96 | 1.11 |
| | K2 | 4,82 | 1.18 | 1.63 | 1.61 |
| | Promedio | 14.30 | 0.76 | 1.49 | 1.55 |
| septiembre | M2 | 8.85 | 1.11 | 0.72 | 1.22 |
| | S2 | 3.82 | 1.38 | 0.53 | 0.91 |
| | N2 | 8.97 | 0.78 | 0.72 | 1.14 |
| | K2 | 3.6 | 1.36 | 1.37 | 0.91 |
| | Promedio | 6.06 | 1.16 | 1.17 | 1.04 |

y el tiempo de retraso que se muestra en el cuadro 5.2, finalmente los resultados se muestran en el cuadro 5.2.

Capítulo 5

Resultados

Para fines prácticos se utilizarán las siguientes letras para referirnos a los cenotes:

C=Chaactunche

M=Mojarras

G=Las Gatas

Como se menciona anteriormente, podemos observar la influencia de la marea, cuando la descomponemos en sus constituyentes armónicos y comparamos cada uno de ellos respectivamente con el correspondiente de carga hidráulica, así podemos ver el desfase que tienen y a partir de este calcular el desfase en horas.

Cuadro 5.1: Tiempo de retraso

| (hr) | | C | M | G |
|------------|----------|-------|-------|-------|
| marzo | M2 | 13.24 | 9.58 | 10.29 |
| | S2 | 10.14 | 9.08 | 10.26 |
| | N2 | 23.45 | 15.51 | 15.02 |
| | K2 | 10.36 | 9 | 10.16 |
| | Promedio | 14.30 | 11.19 | 12.37 |
| septiembre | M2 | 6.05 | 6.36 | 3.06 |
| | S2 | 8.41 | 9.34 | 8.23 |
| | N2 | 10.21 | 8.59 | 9.43 |
| | K2 | 8.57 | 8.42 | 8.31 |
| | Promedio | 8.31 | 8.18 | 7.26 |

El cuadro 5.1 presenta el tiempo de retraso para el mes de marzo es de un intervalo de 11.19 a 14.30 hrs y para el mes de septiembre de 7.26 hrs a 8.31 hrs. Esta diferencia podría deberse a que el muestreo realizado en el mes de septiembre se hizo durante mareas vivas.

Cuadro 5.2: Difusividad hidráulica

| $(m^2/\text{día})$ | C | M | G | Promedio |
|--------------------|------------|------------|------------|------------|
| Marzo | 456,769.70 | 632,940.22 | 377,821.45 | 455,975.67 |
| Septiembre | 187,715.98 | 335,509.85 | 844,701.31 | 475,073.22 |

Los resultados en promedio de la difusividad hidráulica muestran una diferencia de 19,097.54 $(m^2/\text{día})$ más en el mes de septiembre, lo cual corrobora la idea de la diferencia debido a la marea viva en septiembre.

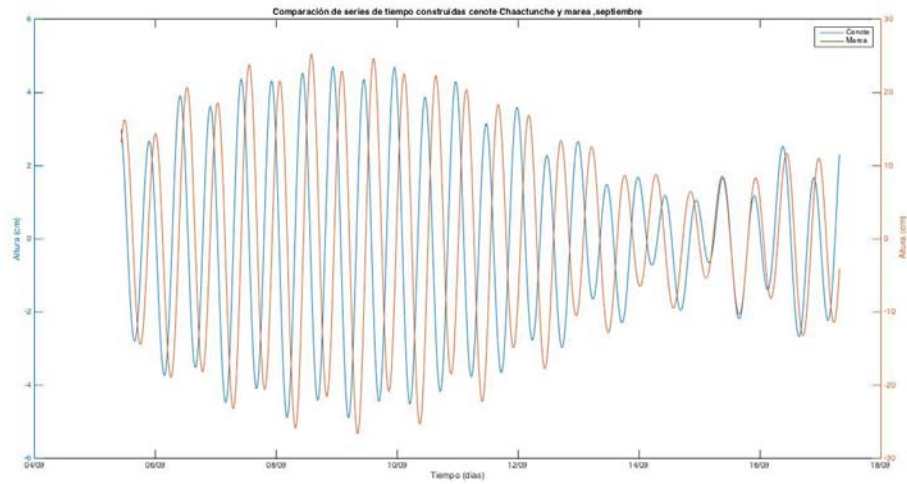
Existe una relación temporal inversa, es decir, a menor tiempo tenemos mayor difusividad hidráulica en el acuífero costero de Puerto Morelos.

A continuación se muestran los resultados gráficos para cada cenote y marea, en el cual la serie de tiempo previamente filtrada se descompone en los armónicos principales de la marea semilunar¹ con los cuales se construye una nueva serie de tiempo. Se comparó con el correspondiente de la marea:

¹Descomposición por armónicos en anexo II

Figura 5.1: Chaactunche

(a) Septiembre



(b) marzo

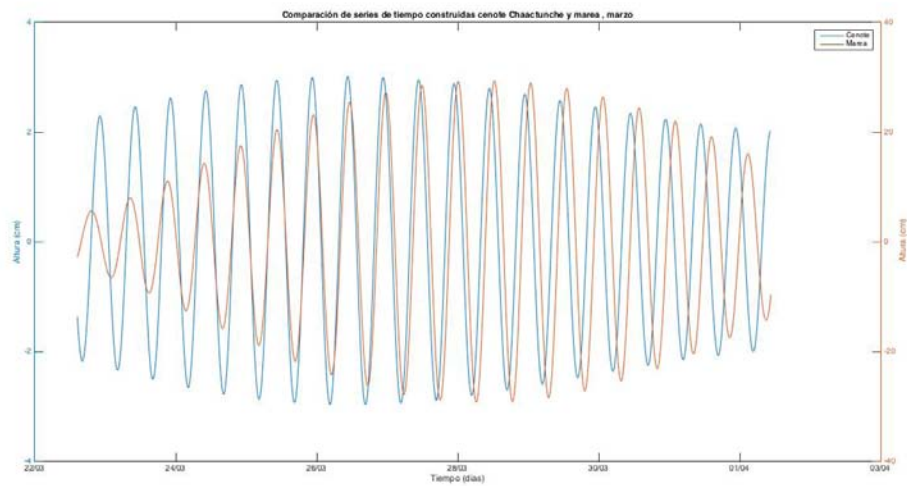
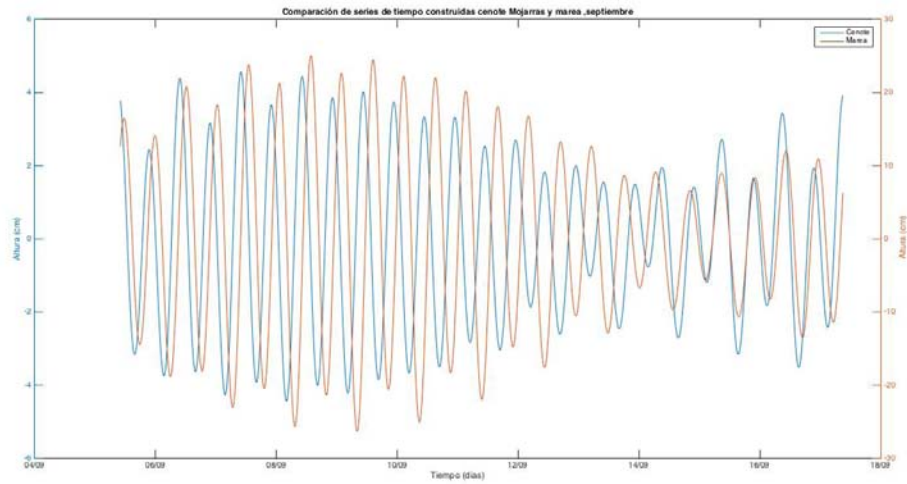


Figura 5.2: Mojarras

(a) Septiembre



(b) Marzo

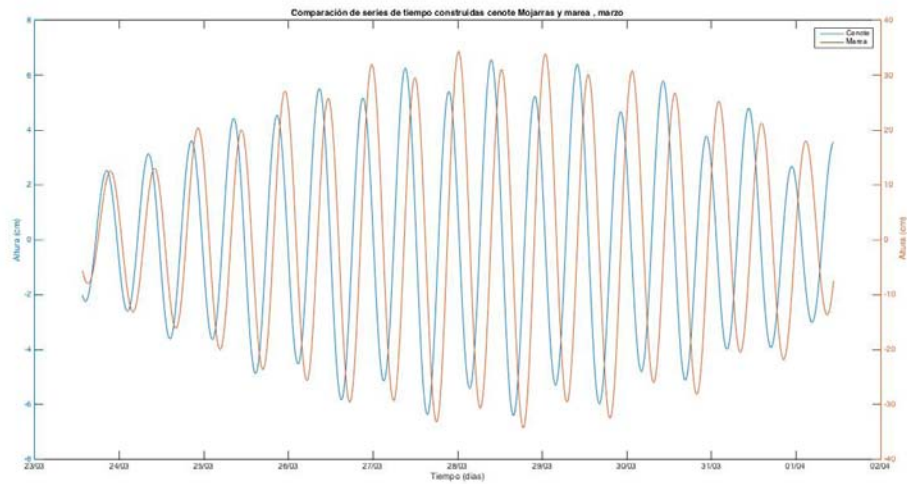
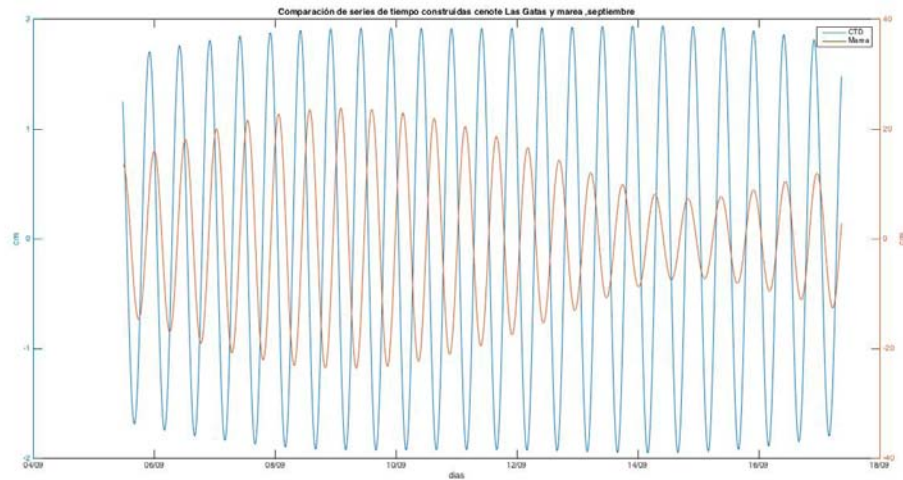
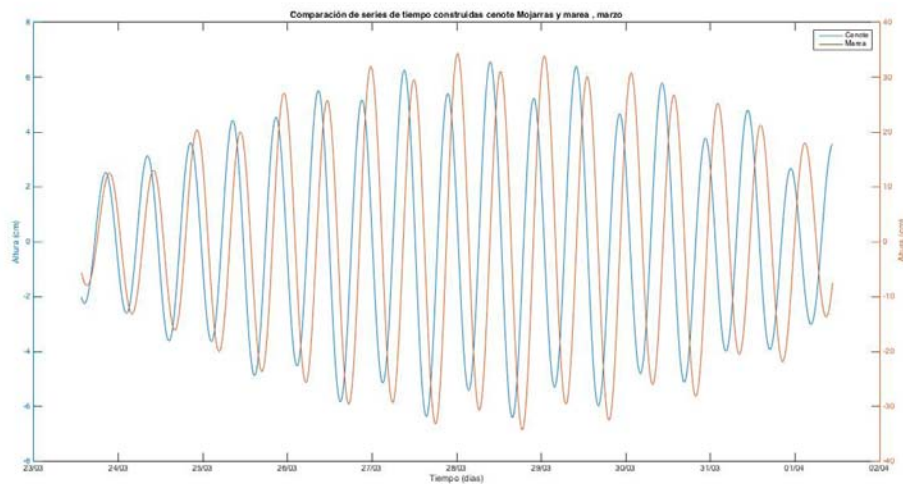


Figura 5.3: Las Gatas

(a) Septiembre



(b) Marzo



De las gráficas anteriores podemos concluir que visualmente existe una relación estrecha entre ambas series de tiempo construidas. Lo cual nos reitera la influencia de la marea en el acuífero.

Capítulo 6

Conclusiones

Podemos observar una relación inversa entre el tiempo de retraso entre el mar y los cenotes, y la difusividad hidráulica para cada periodo de tiempo estudiado.

Los valores encontrados en este trabajo, están dentro de intervalos razonables lo cual nos indica que el método utilizado resulto ser muy útil para determinar la difusividad hidráulica y que este método es más eficiente y económico que las pruebas de bombeo e instrumentación que requieren los métodos convencionales para acuíferos costeros y mas efectivo debido a la complejidad del ambiente kárstico.

Capítulo 7

Bibliografía

- Aguilar Duarte, Yameli Guadalupe (2014) sustentante Modelo conceptual y cartográfico de la vulnerabilidad a la contaminación de aguas subterráneas en Karst tropical, con un enfoque geopedológico y uso de árboles de decisión.
- Batu Vedat (1998) Aquifer Hydraulics: A Comprehensive Guide to Hydrogeologic Data Analysis. New York: Wiley
- Bakalowics M. (2005). Kars groundwater: a challenge for new resources. Hydrogeology Journal. 13:148-160
- Beddows P.A. (2004). Groundwater Hydrology of a Coastal Conduit Carbonate Aquifer: Caribbean Coast of the Yucatan Peninsula, Mexico. Ph D. dissertation. Department of Geographical Sciences, University of Bristol.
- Bonet y Butterlin (1962) "Stratigraphy of the northern part of the Yucatan Peninsula". New Orleans Geological Society, New Orleans, USA.
- Bowen Robert. (1986) Groundwater. London: Elsevier Applied Science, 1986. Print.
- Butterworth-Heinemann (1999) The Open University, 1999. Waves, Tides and Shallow Water Processes, second edition., Oxford, 227 pp.
- Cervantes-Zamora, Y., Cornejo-Olguín, S., Lucero-Márquez, R., Espinoza-Rodríguez, J.M., Miranda-Viquez, E., Pineda-Velázquez, A., (1990),

- Clasificación de Regiones Naturales de México 2, en Atlas Nacional de México, Tomo II, IV. Naturaleza, Regionalización física, IV.10.2: México, Instituto de Geografía, Universidad Nacional Autónoma de México.
- Chow Ven Te. "10." (1975) "Advances in Hydrosience". New York, NY: Academic, 1975. 150-65. Print.
- CONAGUA (2009) ACTUALIZACIÓN DE LA DISPONIBILIDAD MEDIA ANUAL DE AGUA SUBTERRÁNEA ACUÍFERO (3105) PENINSULA DE YUCATAN. Rep. no. 3105. Mexico: Comisión Nacional Del Agua, 2009. Conagua. Web.
- Cruz Garduño, Cesar (2007) sustentante Efecto de marea : la influencia del fenómeno de la marea en la variación de las mediciones piezométricas en las condiciones hidráulicas dentro de la masa de suelo.
- Cvijic (1918) "Hydrographie souterraine et evolution morphologique du karst. Recueil des travaux de l'institut de géographie apline" 375-426 . Disponible en:
www.persee.fr/web/revues/home/prescript/article/rga_0249-6178_1919_num_6_4_4727
- De Waele (2009) De Waele, J., Plan, L., Audra, P. 2009 Recent developments in surface and subsurface karst geomorphology : an introduction. Journal of Geomorphology, 106.
- Eleonora S. Carol, Eduardo E. Kruse, Jorge L. Pousa, Alejandro R. Roig (2009) Determination of heterogeneities in the hydraulic properties of a phreatic aquifer from tidal level fluctuations: a case in Argentina, Hydrogeology Journal, 17, 7, 1727.
- Espinasa Pereña, Ramón(1990) sustentante Propuesta de clasificación de Karst de la República Mexicana.
- Ford D. C., Williams, P. (1989) Karst Geomorphology and Hydrology. Unwin Hyman, USA

- Fragoso-Servón Patricia, Bautista, Francisco, Frausto, Oscar, & Pereira, Alberto. (2014). Caracterización de las depresiones kársticas (forma, tamaño y densidad) a escala 1:50,000 y sus tipos de inundación en el Estado de Quintana Roo, México. *Revista mexicana de ciencias geológicas*, 31(1), 127-137. Recuperado en 21 de noviembre de 2015, de http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1026-87742014000100010&lng=es&tlng=es.
- Gallegos A., A. Fernández y J. Zavala: Oceanografía Física I. Masas de agua y mareas. Temperatura y circulación superficial en verano. En: Atlas Nacional de México, Hoja IV.9.1, Instituto de Geografía, UNAM, (1992).
- Gems (1993) Origin of the term “karst” and transformation of the Classical Karst (kras). *Environmental Geology*, 110-114
- Harris N.J., (1984). Diagenesis of upper pleistocene strand-plain limestones, northeastern Yucatan Peninsula, Mexico. MSc Thesis, University of New Orleans, 130pp.
- Hicks Steacy D., and Michael W. Szabados. *Understanding Tides*. Rockville, (2006) MD: U.S. Dept. of Commerce, National Oceanic and Atmospheric Administration, National Ocean Service.
- Lugo Hubp, José, Aceves Quesado, José Fernando & Espinosa Pereño, Ramón. (1993). Rasgos geomorfológicos mayores de la península de Yucatán, Dialnet.
- Lugo-Hubp J., Aceves-Quesada J.F. Y Espinasa-Pereña. (1992). Rasgos Geomorfológicos Mayores de la Península de Yucatán. UNAM. Instituto de Geología. *Revista*, volume 10, Número 2, pp 143-150.
- Lopez-Ramos E (1975) Geological summary of the Yucatán Peninsula. In: Nairn AEM, Stehli FG (eds) *The ocean basins and margins*, vol 3: *The Gulf of Mexico and the Caribbean*. Plenum, New York
- Marchuk G. I., and B. A. Kagan. (1989) *Dynamics of Ocean Tides*. Dordrecht: Kluwer Academic.

- Merritt M. L. (2004). Estimating hydraulic properties of the Floridan aquifer system by analysis of earth-tide, ocean-tide, and barometric effects, Collier and Hendry Counties, Florida. US Department of the Interior, US Geological Survey.
- J., Morán Zenteno Dante, James Lee Wilson, and Luis Sanchez-Barreda. (1994) *The Geology of the Mexican Republic*. Tulsa, OK: American Association of Petroleum Geologists.
- Myroie J.E. and Vacher, H.L. (1999) A conceptual view of carbonate island karst, in *Karst Modelling* (eds A.N. Palmer, M.V. Palmer and I.D. Sasowsky), Special Publication 5, Karst Waters Institute, Charles Town, WV, pp. 48–57.
- Neuman BR, Rahbek ML (2007) Modeling the groundwater catchment of the Sian Ka'an reserve, Quintana Roo, AMCS bulletin no. 18. Association for Mexican Cave Studies, Austin
- Ordoñez-Crespo I., García-Rodríguez, M., (2010) Formas Kársticas comunes de los cenotes del Estado de Quintana Roo (México): M+A Revista electrónica de Medio Ambiente, 9, 15-35.
- Paloc H, Back W (eds) (1992) *Hydrogeology of Selected Karst Regions*, IAH contributions to Hydrogeology, Vol. 13, Verlag-Heinz, Hannover, p. 514.
- Papadopoulos K., Evelpidou, N. Vassilopoulos, A. (2009). Mapping Geomorphological Environments.
- Perrin, J. (2003) A conceptual model of flow transport in a karst aquifer based on spatial and temporal variations of natural tracers. Thesis PhD Degree of Doctor of Philosophy in Science. University of Neuchâtel. Switzerland. Disponible en http://doc.rero.ch/record/2604/files/these_Perrin
- Prospero Díz, Mariela, sustentante Análisis armónico de datos mareográficos / 2013
- Stokes T., Griffiths, P., Ramsey, C. (2010) Karst geomorphology, hydrology and management. Disponible en www.for.gov.bc.ca/hdf/pubs/Docs/Lmh/Lmn66/

- Walton William Clarence (2007). *Aquifer Test Modeling*. Boca Raton, FL: CRC.
- Quintana Roo Speleological Survey (2013). Website: www.caves.org/project/qrss.htm. Accessed
- Vinson GL (1962) Upper Cretaceous and Tertiary stratigraphy of Guatemala. *AAPG Bull* 46(4):425–456
- Lace, Michael J., and John Mylroie. (2013) *Coastal Karst Landforms*. N.p.: Springer.
- Ford, Derek, and P. W. Williams. (1989) *Karst Geomorphology and Hydrology*. London: Unwin Hyman.
- Stevanovic, Zoran. (2015) *Karst Aquifers - Characterization and Engineering*. N.p.: Springer Verlag, 2015.
- Glosario De Mareas Y Corrientes. Valparaiso: SERVICIO HIDROGRÁFICO Y OCEANOGRÁFICO DE LA ARMADA CHILE, 1992.

Capítulo 8

Anexo I

Para resolver la serie de Fourier (ec 4.2) y obtener los valores de amplitud de cada componente armónico de la series de tiempo asi como la fase de los mismo se resolverá la siguiente ecuación que relaciona los parámetros desconocidos y los datos observados, utilizaremos el método de ajuste por mínimos cuadrados que ajusta las incógnitas del modelo a las observadas. Para esto supongo que tenemos un polinomio

$$Y_i = a + bt \tag{8.1}$$

visto como matrices sería:

$$\begin{pmatrix} 1 & t_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & t_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix} \tag{8.2}$$

De manera simplificada sería :

$$AT = Y \tag{8.3}$$

Donde :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & t_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & t_n \end{pmatrix}$$
$$T = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix}$$

Ahora buscamos un vector T que minimice el error, para esto supongo que el vector del error es:

$$(A^T A)^{-1} A^T Y \quad (8.4)$$

es decir, vamos a demostrar que¹:

$$AT - Y = 0 \Leftrightarrow A^T AT = A^T Y \quad (8.5)$$

$$T = (A^T A^{-1}) A^T Y \quad (8.6)$$

Para comprobar que esta es la solución correcta se deducirá este vector para ver si efectivamente es ortogonal a las matrices dadas, siendo así solución de nuestro problema de mínimos cuadrados.

Para un problema como este, con una gran cantidad de ecuaciones y solo dos incógnitas, el sistema no tiene solución

$$\begin{cases} a + bt_1 = Y_1 \\ a + bt_2 = Y_2 \\ \vdots \\ a + bt_n = Y_n \end{cases} \quad (8.7)$$

Entonces se buscará una T que minimice el error promedio de todas las ecuaciones dadas y la forma ocupada para este promedio fue definir la suma de sus cuadrados mediante un polinomio: $P^2 = \sum_{i=1}^n (a + bt - Y_i)^2$ que cuando se desarrolla es: $P^2 = (a + bt - Y_1)^2 + (a + bt - Y_2)^2 + \dots + (a + bt - Y_n)^2$. Quitando el caso donde haya una solución exacta, tenemos que encontrar el vértice de esta figura sacando las derivadas parciales de cada una de las variables: $\frac{\partial P^2}{\partial a} = 2 \sum_{i=1}^n (a + bt - Y_i)$ y $\frac{\partial P^2}{\partial b} = 2 \sum_{i=1}^n (a + bt - Y_i)t_i$ las cuales igualadas a cero nos da el mínimo error:

¹Demostración al final de la solución

$$o = 2 \sum_{i=1}^n (a+bt-Y_i) \Rightarrow 0 = \sum_{i=1}^n (a+bt-Y_i) \Rightarrow 0 = na + \sum_{i=1}^n bt - \sum_{i=1}^n Y_i \Rightarrow \sum_{i=1}^n Y_i - \sum_{i=1}^n bt_i = na \Rightarrow a \quad (8.8)$$

$$o = 2 \sum_{i=1}^n (a+bt-Y_i)t_i \Rightarrow 0 = \sum_{i=1}^n at_i - \sum_{i=1}^n Y_it_i + - \sum_{i=1}^n bt_i^2 \Rightarrow - \sum_{i=1}^n Y_it_i - a - \sum_{i=1}^n t_i = b - \sum_{i=1}^n t_i^2 \Rightarrow \quad (8.9)$$

Estas soluciones son para ajustar datos a rectas como las funciones no son lineales se tiene que ajustar a una función de la forma de la ec. 4.3 para lo cual se ocupará lo siguiente:

$$\begin{cases} h_0 + a\text{sen}(\omega_1 t_1) + b\text{cos}(\omega_1 t_1) = Y_1 \\ h_0 + a\text{sen}(\omega_2 t_2) + b\text{cos}(\omega_2 t_2) = Y_2 \\ \vdots \\ h_0 + a\text{sen}(\omega_n t_n) + b\text{cos}(\omega_n t_n) = Y_n \end{cases} \quad (8.10)$$

El cual también se resolverá utilizando matrices, sea:

$$\begin{pmatrix} 1 & \text{sen}(\omega_1 t_1) & \text{cos}(\omega_1 t_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \text{sen}(\omega_n t_n) & \text{cos}(\omega_n t_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_0 \\ a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix} \quad (8.11)$$

qué de manera análoga se puede abreviar $AT = Y$ de la cuál ya se obtuvo la solución $T = (A^T A)^{-1} A^T Y$.

Demostración $AT - Y = 0 \Leftrightarrow A^T AT = A^T Y$

$\Rightarrow AT - Y = 0 \Rightarrow A^T AT = A^T Y$

Sea $AT - Y = 0$ primero sumo ambas partes de la matriz Y, se llega a $AT = Y$, multiplico ambas partes por A^T y tengo que $A^T AT = A^T Y$

que es a lo que quería llegar.

$\Rightarrow A^T AT = A^T Y \Rightarrow AT - Y = 0$

$A^T AT = A^T Y$ pasando todo al lado derecho se tiene que: $A^T AT - A^T Y = 0 \Rightarrow$ factorizando con la propiedad distributiva inversa de las ma-

trices $A^T(AT - Y) = 0$ y multiplicando por la inversa izquierda de la matriz transpuesta se tiene que : $(A^T)^{-1}(A^T(AT - Y) = (A^T)^{-1}(0)$ obtenemos $AT - Y = 0$

Cuando se desarrolla la serie de Fourier descrita en la ec. 4.2 podemos ver que es equivalente a la ec 4.3 :

$$h(t) = \sum A_i \text{sen}(\omega_i t + \theta_i) \Rightarrow$$

$$h(t) = \sum_{i=0}^n A_i (\text{sen}(\omega_i t) \cos(\theta_i) + \text{sen}(\theta_i) \cos(\omega_i t)) \Rightarrow \quad (8.12)$$

$$h(t) = \sum_{i=0}^n (A_i \text{sen}(\omega_i t) \cos(\theta_i) + A_i \text{sen}(\theta_i) \cos(\omega_i t)) \Rightarrow \quad (8.13)$$

$$h(t) = \sum_{i=0}^n A_i \text{sen}(\omega_i t) \cos(\theta_i) + \sum_{i=0}^n A_i \text{sen}(\theta_i) \cos(\omega_i t) \Rightarrow \quad (8.14)$$

sean

$$a_i = A_i \text{sen}(\theta_i) \quad (8.15)$$

y

$$b_i = A_i \cos(\theta_i) \quad (8.16)$$

cuando se sustituyen 4.7 y 4.8 en ec 4.5 tenemos que:

$$h(t) = \sum_{i=0}^n b_i \text{sen}(\omega_i t) + a_i \cos(\omega_i t) \Rightarrow \quad (8.17)$$

Para empezar en $i=1$ usamos el caso particular de $i=0$ y tenemos:

$$h(t) = b_0 \text{sen}(0) + a_0 \cos(0) + \sum_{i=0}^n a_i \cos(\omega_i t) + b_i \text{sen}(\omega_i t) \Rightarrow \quad (8.18)$$

$$h(t) = a_0 + \sum_{i=0}^n (a_i \cos(\omega_i t) + b_i \text{sen}(\omega_i t)) \Rightarrow \quad (8.19)$$

Sea $h_0 = a_0$ se tiene que :

$$h(t) = h_o + \sum_{i=0}^n (a_i \cos(\omega_i t) + b_i \text{sen}(\omega_i t)) \Rightarrow \quad (8.20)$$

por lo tanto:

$$h(t) = h_o + \sum_{i=0}^n a_i \cos(\omega_i t) + \sum_{i=0}^n b_i \text{sen}(\omega_i t) \Rightarrow \quad (8.21)$$

sean :

$$a = \sum_{i=0}^n a_i \quad (8.22)$$

y

$$b = \sum_{i=0}^n b_i \quad (8.23)$$

por lo tanto :

$$h(t) = h_o + \sum_{i=0}^n a_i \cos(\omega_i t) + \sum_{i=0}^n b_i \text{sen}(\omega_i t) = h_o + a \cos(\omega_i t) + b \text{sen}(\omega_i t) \quad (8.24)$$

Capítulo 9

Anexo II

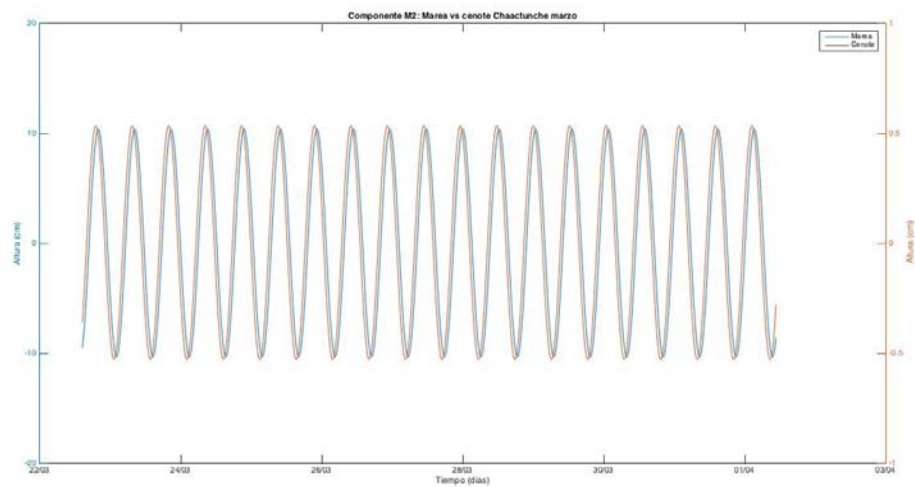


Figura 9.1: Componente M2 cenote Chaactunche para mes de marzo

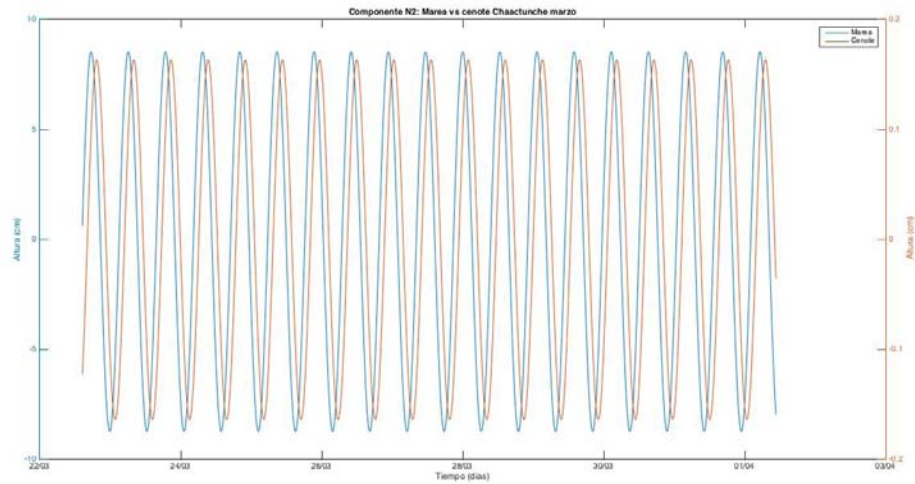


Figura 9.2: Componente N2 cenote Chaactunche para mes de marzo

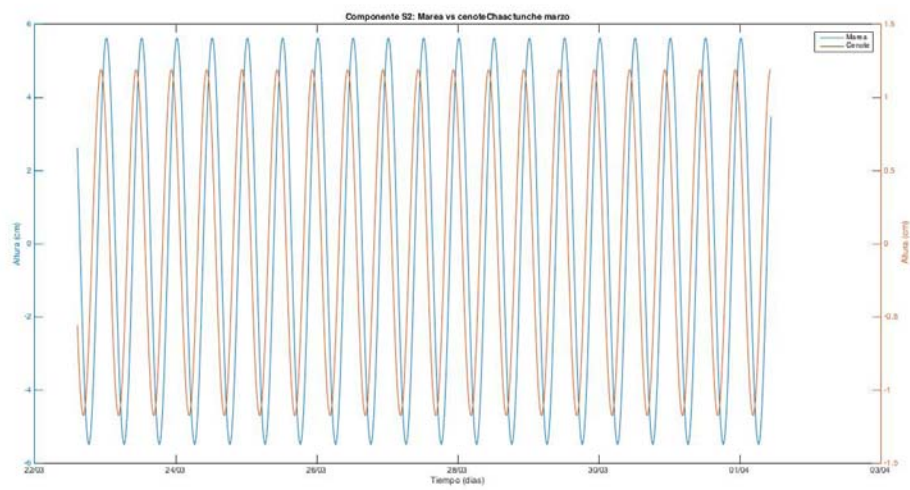


Figura 9.3: Componente S2 cenote Chaactunche para mes de marzo

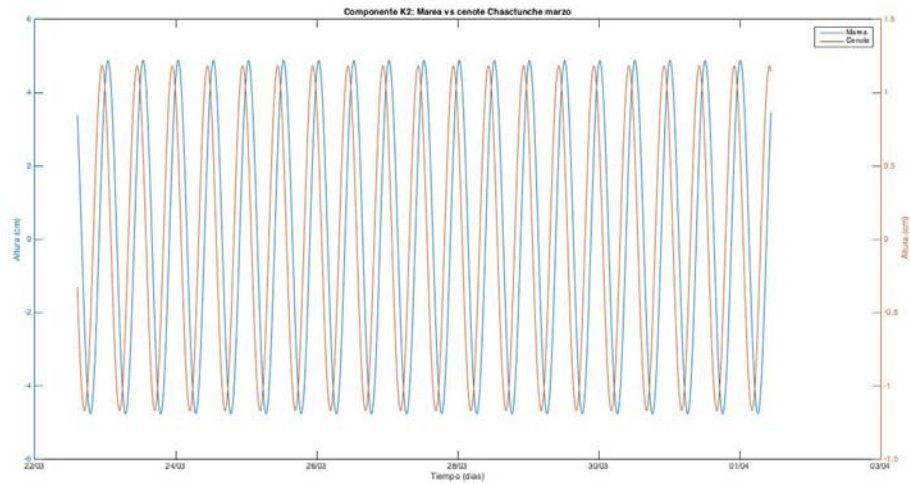


Figura 9.4: Componente K2 cenote Chaactunche para mes de marzo

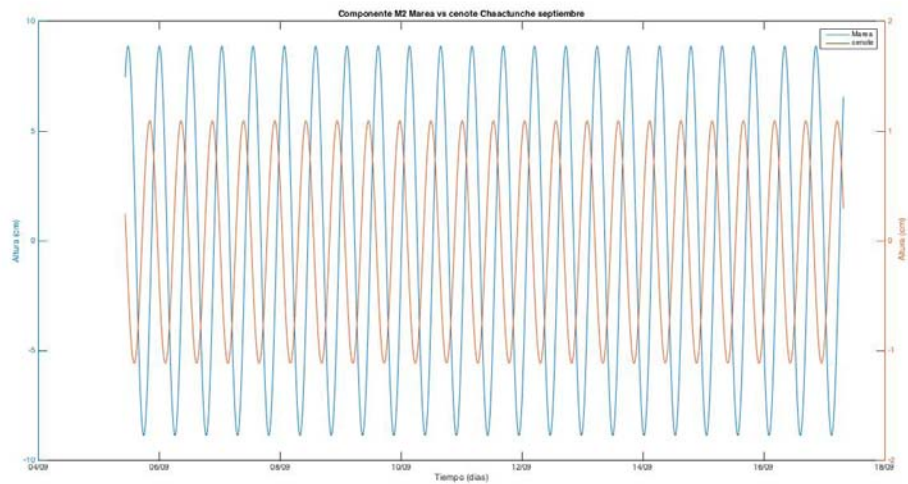


Figura 9.5: Componente M2 cenote Chaactunche para mes de septiembre

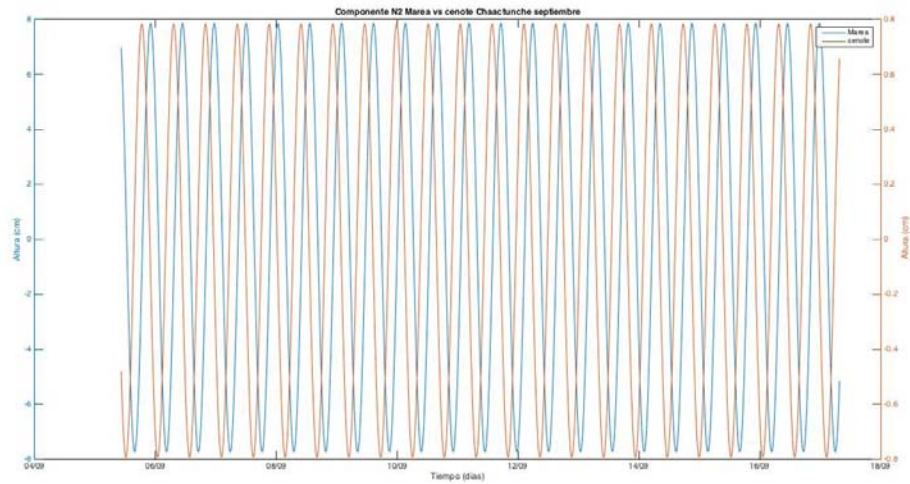


Figura 9.6: Componente N2 cenote Chaactunche para mes de septiembre

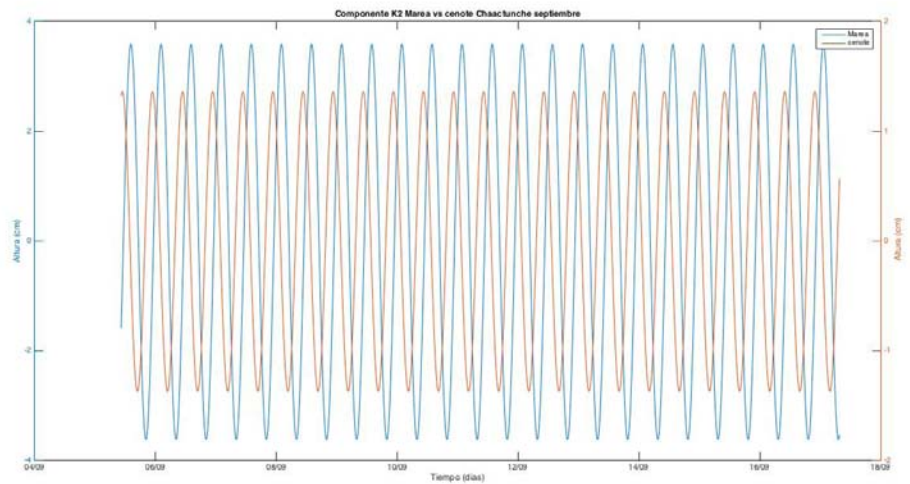


Figura 9.7: Componente S2 cenote Chaactunche para mes de septiembre

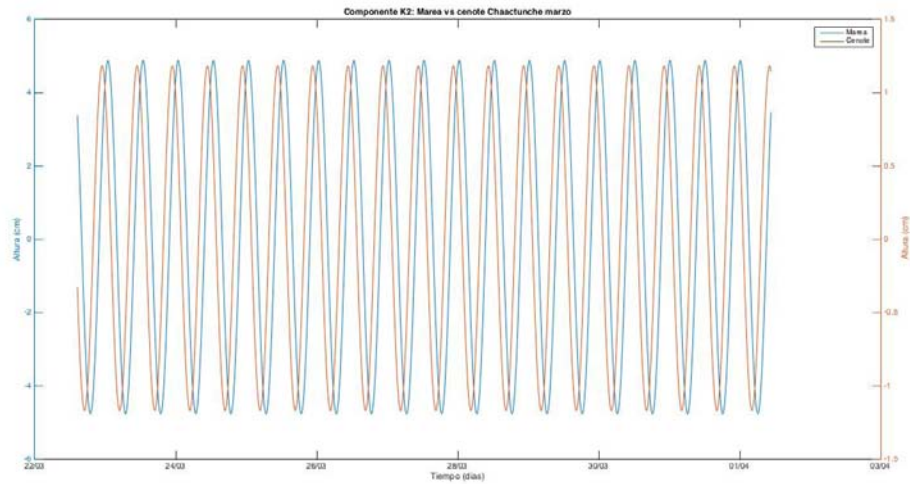


Figura 9.8: Componente K2 cenote Chaactunche para mes de septiembre

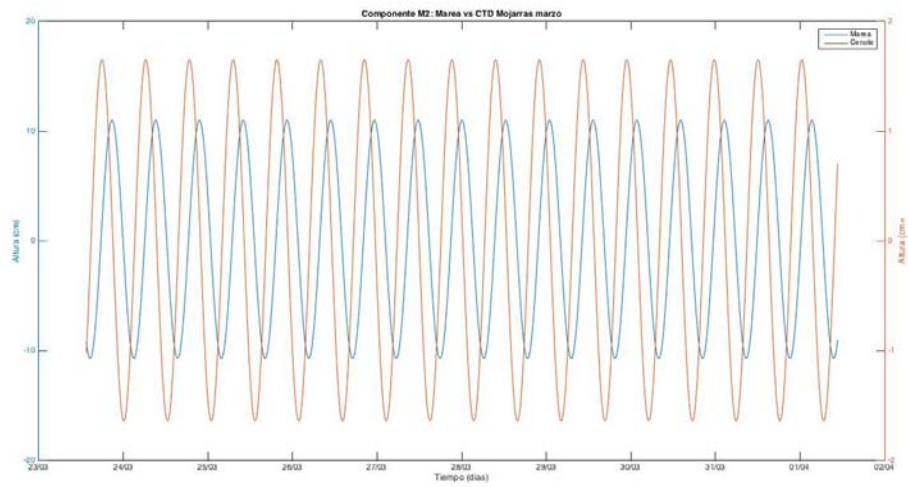


Figura 9.9: Componente M2 cenote Mojarras para mes de marzo

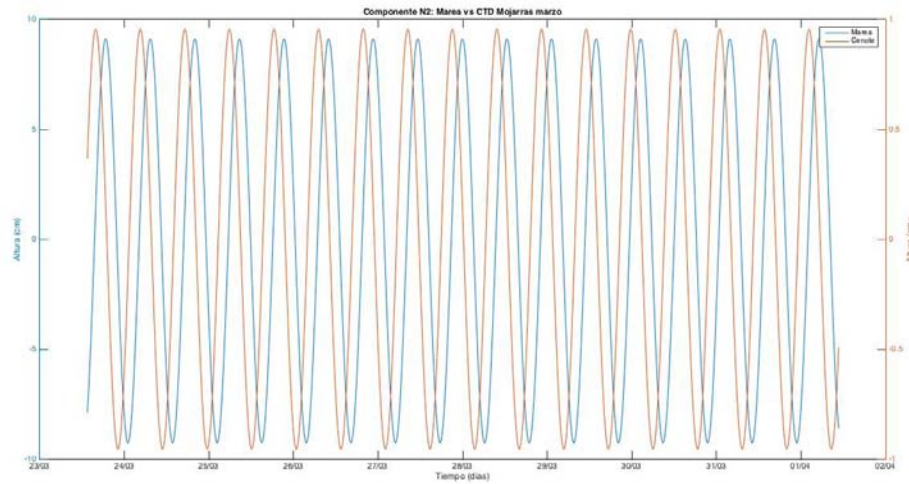


Figura 9.10: Componente N2 cenote Mojarras para mes de marzo

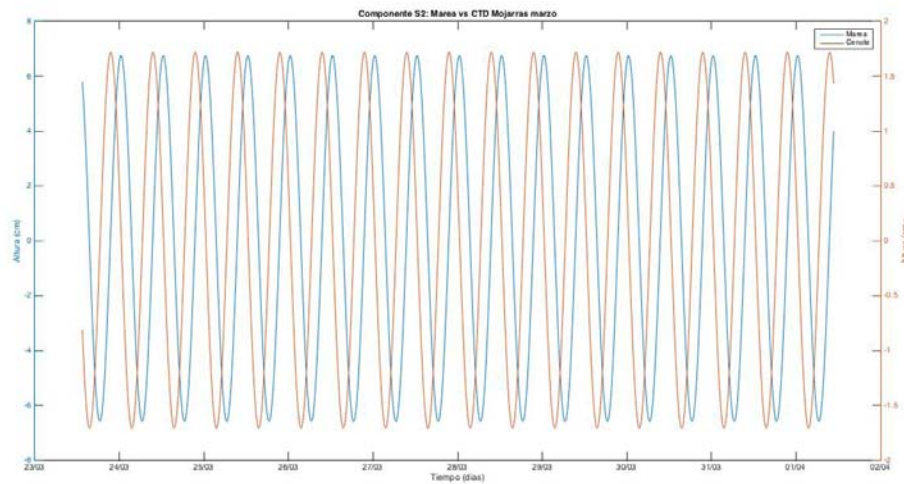


Figura 9.11: Componente S2 cenote Mojarras para mes de marzo

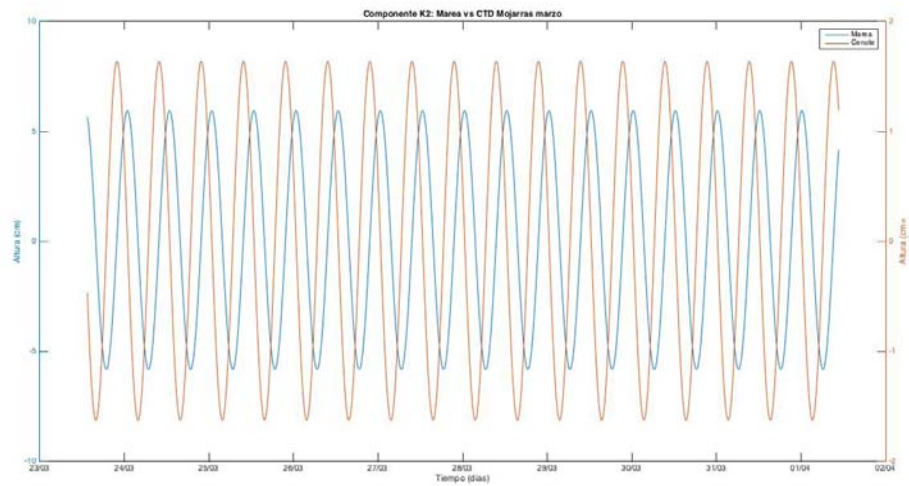


Figura 9.12: Componente K2 cenote Mojarras para mes de marzo

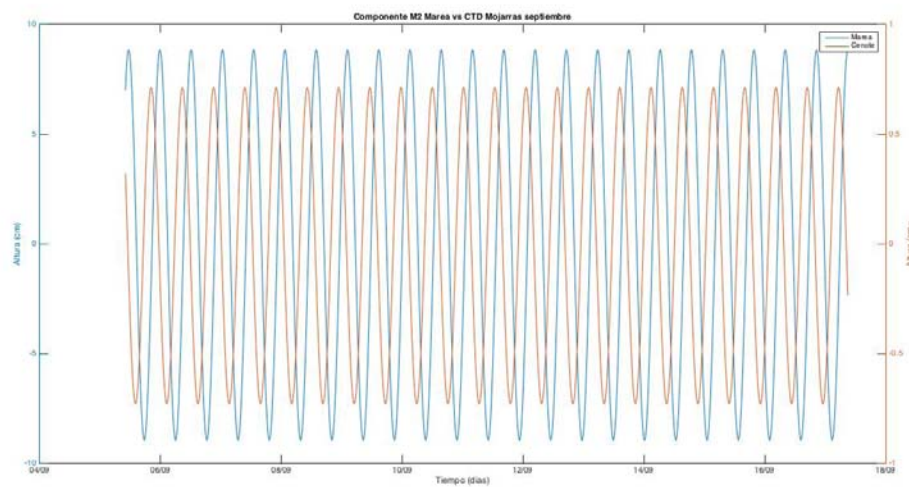


Figura 9.13: Componente M2 cenote Mojarras para mes de septiembre

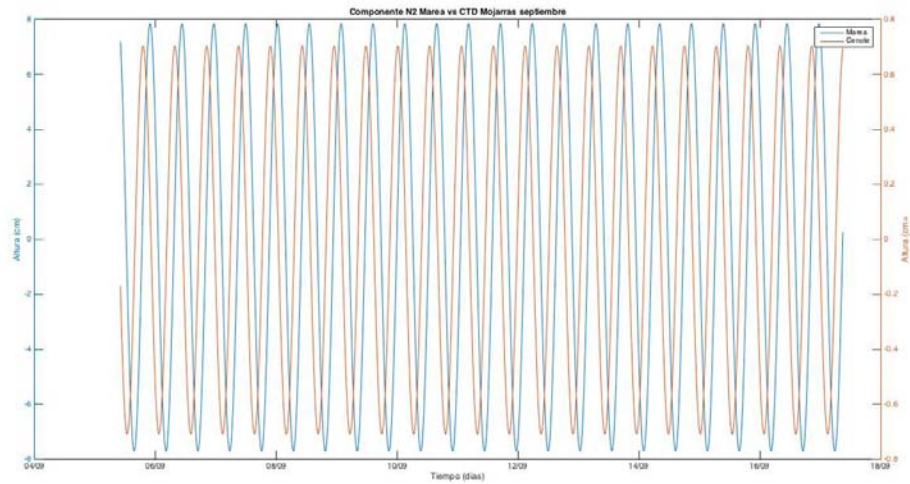


Figura 9.14: Componente N2 cenote Mojarras para mes de septiembre

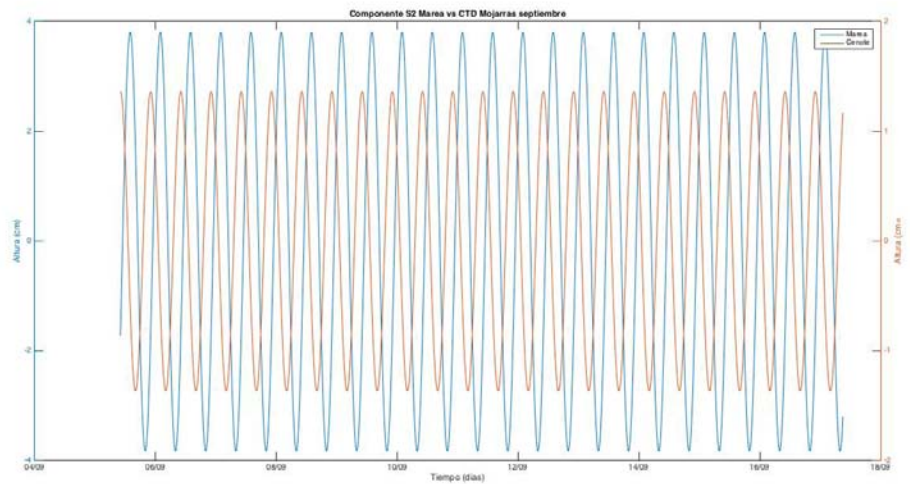


Figura 9.15: Componente S2 cenote Mojarras para mes de septiembre

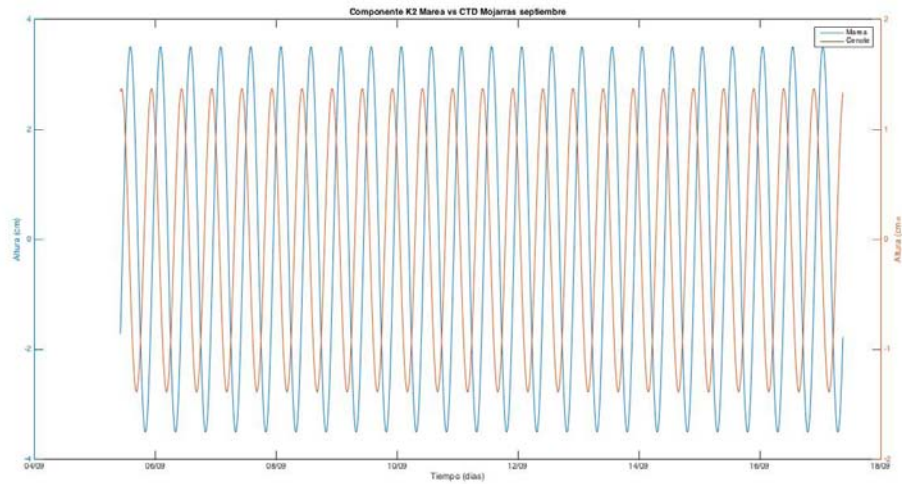


Figura 9.16: Componente K2 cenote Mojarras para mes de septiembre

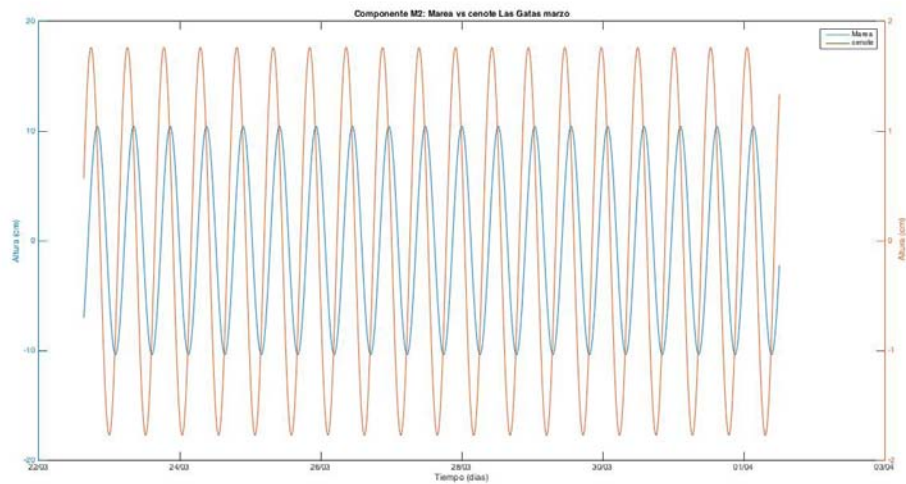


Figura 9.17: Componente M2 cenote Las Gatas para mes de marzo

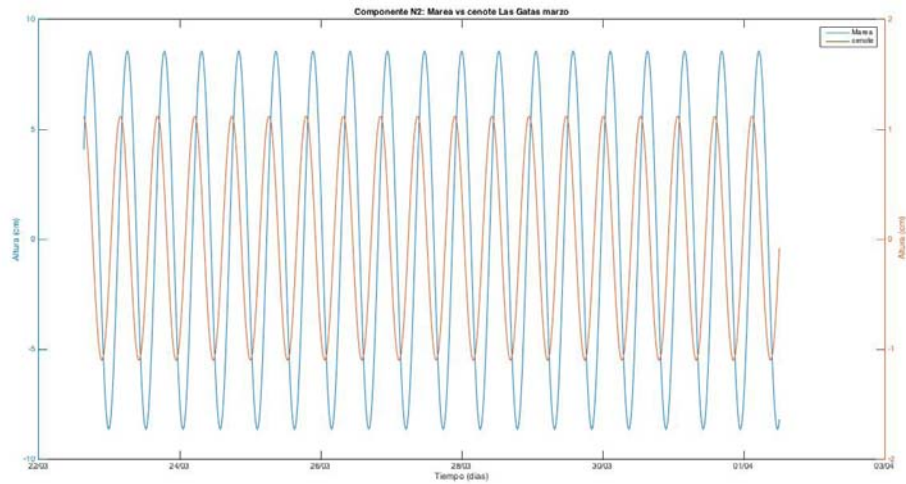


Figura 9.18: Componente N2 cenote Las Gatas para mes de marzo

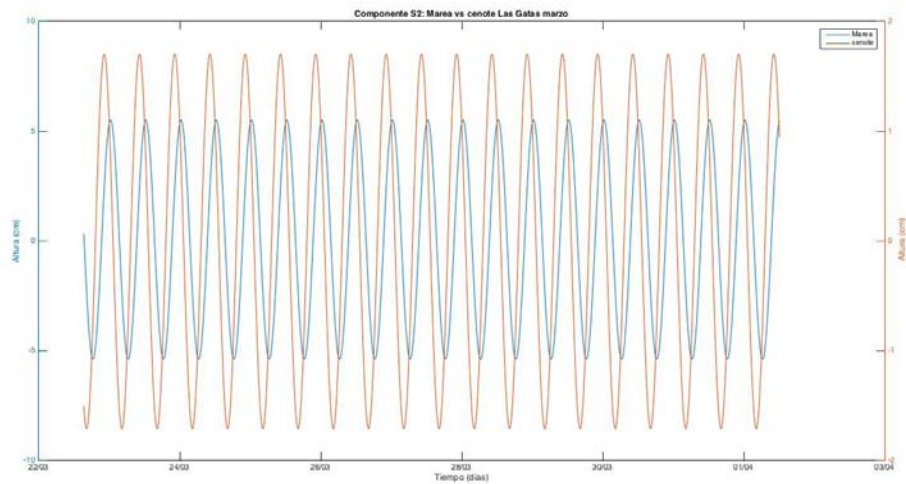


Figura 9.19: Componente S2 cenote Las Gatas para mes de marzo

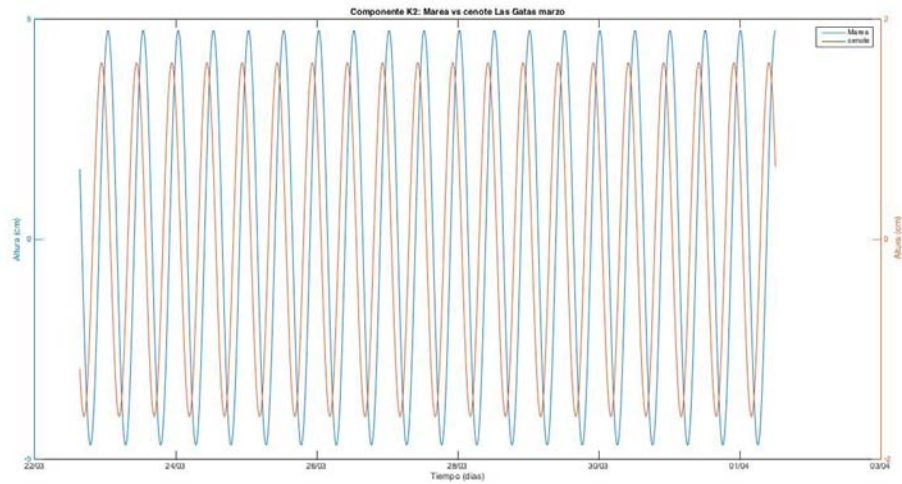


Figura 9.20: Componente K2 cenote Las Gatas para mes de marzo

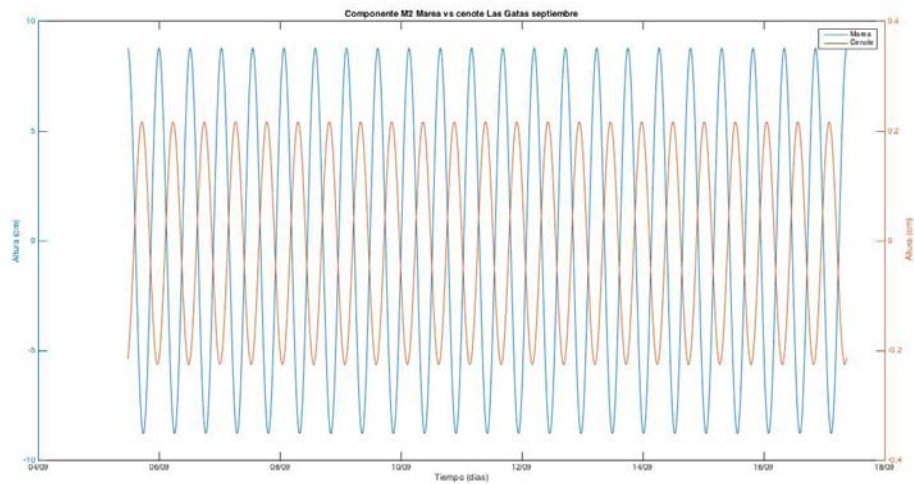


Figura 9.21: Componente M2 cenote Las Gatas para mes de septiembre

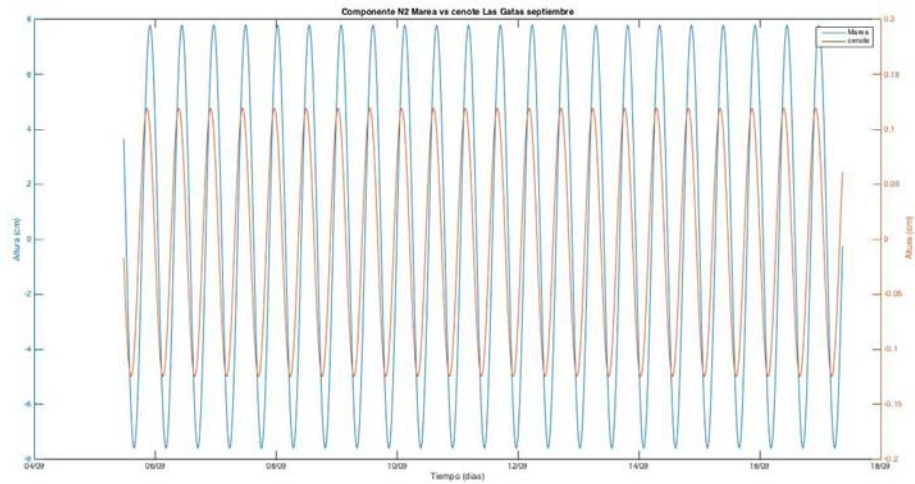


Figura 9.22: Componente N2 cenote Las Gatas para mes de septiembre

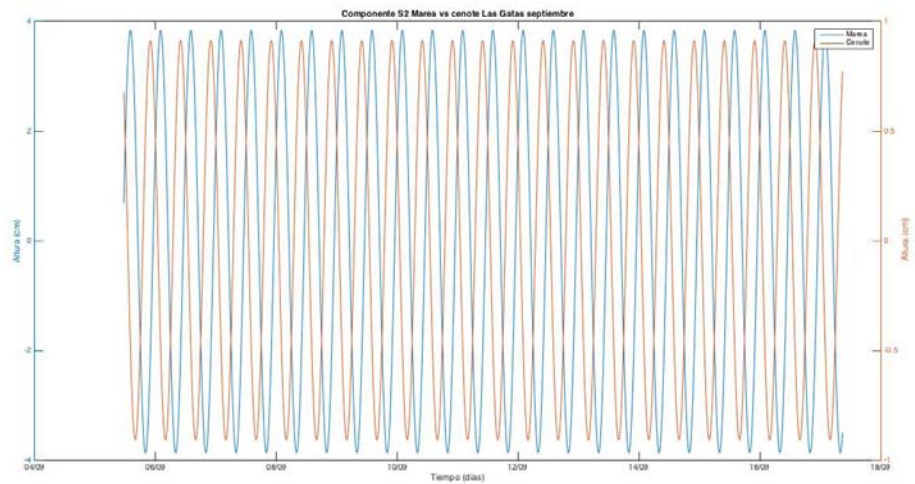


Figura 9.23: Componente S2 cenote Las Gatas para mes de septiembre

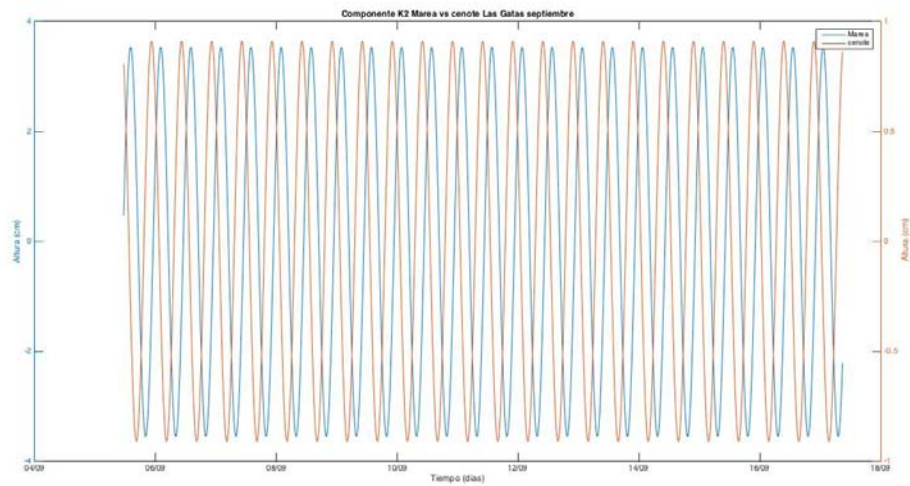


Figura 9.24: Componente K2 cenote Las Gatas para mes de septiembre