



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
POSGRADO EN CIENCIAS FÍSICAS

GAS DE BOSE EN CABLES MULTIFILAMENTOS

TESIS

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRA EN CIENCIAS (FÍSICA)

PRESENTA:

GRECIA GUIJARRO GÁMEZ

TUTOR

DR. MIGUEL ÁNGEL SOLÍS ATALA (IF)

MIEMBROS DEL COMITÉ TUTOR

DR. MANUEL DE LLANO DE LA GARZA (IIM)

DR. FRANCISCO JAVIER SEVILLA PÉREZ (IF)

MÉXICO, D. F. DICIEMBRE 2015.



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Resumen

En esta tesis estudiamos los efectos que ocasionan las estructuras periódicas sobre las propiedades termodinámicas de un gas de Bose sin interacciones. Consideramos estructuras tubulares semi-infinitas y finitas del tipo tubos o cintas multifilamentos. El confinamiento al que está sujeto el gas bosónico se modela usando un número finito de potenciales delta de Dirac en dos direcciones mutuamente perpendiculares, mientras que en la tercera dirección se permite que las partículas se muevan libremente. La estructura que se genera es la de un haz de filamentos de sección transversal rectangular y de paredes permeables excepto las más externas que forman las paredes del cable. El espectro de energías se obtiene de la solución de la ecuación de Schrödinger en 3D con el potencial externo mencionado más la condición de Dirichlet en la frontera del cable. Con la relación de dispersión, es decir, la energía de las partículas como función de su momento, y a través del gran potencial termodinámico se obtienen algunas propiedades termodinámicas usando la estadística de Bose-Einstein. Estudiamos el comportamiento del potencial químico, su primera y segunda derivada, el número de partículas en el estado de mínima energía así como su variación, el calor específico isocórico, la energía interna, entre otras propiedades, todas como función de la temperatura, y para diferentes valores de los parámetros del potencial externo (intensidad de las deltas y separación entre ellas) que definen las características de la estructura.

Algunos de los resultados más importantes que obtenemos son: a) la segunda derivada del potencial químico con respecto a la temperatura no es discontinua como sucede en el gas ideal libre de bosones en su temperatura crítica T_0 , en su lugar presenta un mínimo alrededor de T_0 ; b) cuando la temperatura tiende a cero el número de partículas en el estado base es proporcional a T^{-1} para sistemas semi-infinitos

mientras que para sistemas finitos tiende con pendiente cero al número total de partículas del sistema, y para temperaturas mucho mayores que T_0 es proporcional a $T^{-3/2}$ tanto para sistemas semi-infinitos como finitos; c) el calor específico muestra al menos dos máximos y un mínimo que manifiestan un *crossover* dimensional en el sistema, pasando de un comportamiento en una o dos dimensiones a un comportamiento tridimensional al aumentar la temperatura; d) el efecto de la estructura interna de filamentos sobre los bosones se hace notoriamente importante al disminuir la densidad de partículas.

Abstract

We study the periodic structure effect on the thermodynamics properties of an interactionless Bose gas. We consider semi-infinite and finite structures of the type multifilament tubes and ribbons. The particles are confined by applying to the boson gas a finite number of delta potentials in two, mutually perpendicular, directions, while particles are free to move along the third direction. The generated structure is a filament bundle with rectangular cross section and permeable walls except the outer walls forming the cable. The energy spectrum is obtained by solving the 3D Schrödinger equation with the aforementioned external potential plus Dirichlet condition on the border of the cable. Introducing the dispersion relation, i. e., the particle energy as a function of its momentum, in the thermodynamic grand potential we find some thermodynamics properties using Bose-Einstein statistics. We study the behavior of the chemical potential, its first and second derivative, the number and variation of particles in the lowest energy state, the isochoric specific heat, the internal energy, among other properties, all of them as a function of temperature and for different values of the potential parameters.

Some of the most important results that we obtain are: a) the chemical potential second derivative with respect to temperature is continuous and has a minimum around the critical temperature T_0 instead of a jump at T_0 observed in a free ideal Bose gas; b) as the temperature goes to zero the particle number in the ground state is proportional to T^{-1} for semi-infinite systems while for finite systems tends with zero slope to the total particle number of the system, and for temperatures much greater than T_0 it is proportional to $T^{-3/2}$ for semi-infinite and finite systems; c) the isochoric specific heat shows at least two maximum and one minimum that exhibit a dimensional crossover in the system, going from one or two dimensional behavior

to a three dimensional behavior as temperature increases; d) the internal filament structure effect on the bosons particles becomes notoriously important as the density particle decreases.

Publicaciones

Publicaciones como resultado del trabajo de tesis.

G. Guijarro, M.A. Solís, "Finite size effect on the specific heat of a Bose gas in multifilament cables". Disponible el texto completo en arXiv:

<http://arxiv.org/pdf/1510.00652.pdf> [cond-mat.quant-gas]. Enviado para su publicación a Journal of Low Temperature Physics.

Congresos donde se presentaron resultados parciales:

- "Efecto de la dimensión en el calor específico de un gas de Bose en cables multifilamentos". LVIII Congreso Nacional de Física (2015).
- "Finite size effect on the specific heat of a Bose gas in multifilament cables". International Symposium on Quantum Fluids and Solids (2015).
- "Specific heat for boson matter in multifilament cables". March Meeting (2015). item "Gas de Bose en cables multifilamentos". XII Congreso de estudiantes del Posgrado en Ciencias Físicas (2014).
- "Gas de Bose en cables multifilamentos". LVII Congreso Nacional de Física (2014).

Índice general

| | |
|--|------------|
| Resumen | III |
| Abstract | v |
| Publicaciones | vii |
| 1. Introducción | 1 |
| 2. Bosones en estructuras periódicas multifilamentos: tubos y cintas | 7 |
| 2.1. Espectro de energías | 9 |
| 3. Gas de Bose en estructuras tubulares semi-infinitas | 17 |
| 3.1. Propiedades termodinámicas | 17 |
| 3.1.1. Gran Potencial | 17 |
| 3.1.2. Número de partículas | 18 |
| 3.1.3. Energía interna | 23 |
| 3.1.4. Calor específico | 24 |
| 3.2. Resultados | 25 |
| 3.2.1. Tubo semi-infinito de sección transversal cuadrada y longitud infinita | 26 |
| 3.2.2. Tubos multifilamentos. Casos isotrópicos. | 33 |
| 3.2.3. Tubos multifilamentos. Casos anisotrópicos. | 41 |
| 4. Efectos de la variación de la densidad de partículas en las propiedades termodinámicas | 47 |
| 4.1. Algunos resultados: efectos de la variación de la densidad | 50 |
| | IX |

| | |
|--|-----------|
| 5. Gas de Bose en estructuras tubulares finitas | 55 |
| 5.1. Propiedades termodinámicas | 56 |
| 5.1.1. Gran Potencial | 56 |
| 5.1.2. Energía interna | 58 |
| 5.1.3. Calor específico | 58 |
| 5.2. Resultados | 59 |
| 5.2.1. Caso isotrópico: $P_0 = 10, M = 10$ | 59 |
| 6. Criterios para una temperatura de condensación | 65 |
| 6.1. Efecto de la dimensión en el calor específico de un gas de Bose en cables multifilamentos | 65 |
| 6.2. Criterios para identificar condensación en sistemas semi-infinitos y finitos | 67 |
| 7. Conclusiones | 77 |
| A. Gas ideal de bosones | 81 |
| A.1. Temperatura crítica | 82 |
| A.2. Fracción condensada | 84 |
| A.3. Energía interna | 86 |
| A.4. Calor específico | 87 |
| Bibliografía | 89 |

Índice de figuras

| | |
|--|----|
| 2.1. Tubo de filamentos con sección transversal rectangular. | 8 |
| 2.2. Espectro de energías como función de $k_i a_i$ para $M = 10$, $a/\lambda_0 = 0.2$ y algunos valores de P_0 , con $i = x$ o y | 12 |
| 2.3. Espectro de energías en unidades de $\hbar^2/2ma^2$ como función de P_0 y $1/P_0$ para $M = 10$ y $a/\lambda_0 = 0.5$. Las líneas negras indican el primer y último nivel de energía de cada banda. | 13 |
| 2.4. Espectro de energías en unidades de $\hbar^2/2ma^2$ como función de a_0 y $1/a_0$ para $P_0 = 10$ y $M = 10$. Las líneas negras indican el primer y último nivel de energía de cada banda. | 14 |
| 2.5. Espectro de energías en unidades de $k_B T_0$ como función de a_0 y $1/a_0$ para $P_0 = 10$ y $M = 10$. Las líneas negras indican el primer y último nivel de energía de cada banda. | 15 |
| 3.1. Tubo semi-infinito de sección transversal cuadrada. | 26 |
| 3.2. Tubo semi-infinito con sección transversal cuadrada. Derivada negativa del potencial químico como función de T/T_0 para $M = 0$ y $a/\lambda_0 = 0.1, 0.2, 0.5, 1.1, 2.2, 5.5$, en escala log-log. | 27 |
| 3.3. Tubo semi-infinito con sección transversal cuadrada. Valor negativo de la segunda derivada del potencial químico como función de T/T_0 para $M = 0$ y $a/\lambda_0 = 0.1, 0.2, 0.5, 1.1, 2.2, 5.5$, en escala log-log. | 28 |
| 3.4. Tubo semi-infinito con sección transversal cuadrada. Número de partículas en el estado base como función de T/T_0 para $M = 0$ y $a/\lambda_0 = 0.1, 0.2, 0.5, 1.1, 2.2, 5.5$ | 29 |

| | |
|--|----|
| 3.5. Tubo semi-infinito con sección transversal cuadrada. Valor negativo de la derivada del número de partículas en el estado base N_0 , por partícula en el estado base y multiplicada por la temperatura, como función de T/T_0 para $M = 0$ y $a/\lambda_0 = 0.1, 0.2, 0.5, 1.1, 2.2, 5.5$ | 31 |
| 3.6. Tubo semi-infinito con sección transversal cuadrada. Energía interna como función de T/T_0 para $M = 0$ y $a/\lambda_0 = 0.1, 0.2, 0.5, 1.1, 2.2, 5.5$ | 32 |
| 3.7. Tubo semi-infinito con sección transversal cuadrada. Calor específico como función de T/T_0 para $M = 0$ y $a/\lambda_0 = 0.1, 0.2, 0.5, 1.1, 2.2, 5.5$ | 33 |
| 3.8. Tubo multifilamentos de sección transversal cuadrada. | 34 |
| 3.9. Tubo multifilamentos semi-infinito con sección transversal cuadrada. Número de partículas en el estado base N_0 como función de T/T_0 para $P_0 = 10, M = 10$ y $a/\lambda_0 = 0.1, 0.2, 0.5$ | 34 |
| 3.10. Tubo multifilamentos semi-infinito con sección transversal cuadrada. Valor negativo de la derivada del número de partículas en el estado base N_0 , por partícula en el estado base y multiplicada por la temperatura, como función de T/T_0 para $P_0 = 10, M = 10$ y $a/\lambda_0 = 0.1, 0.2, 0.5$ | 35 |
| 3.11. Tubo multifilamentos semi-infinito con sección transversal cuadrada. Energía interna como función de T/T_0 para $P_0 = 10, M = 10$ y $a/\lambda_0 = 0.1, 0.2, 0.5$ | 36 |
| 3.12. Tubo multifilamentos semi-infinito con sección transversal cuadrada. Calor específico como función de T/T_0 para $P_0 = 10, M = 10$ y $a/\lambda_0 = 0.1, 0.2, 0.5$ | 37 |
| 3.13. Tubo multifilamentos semi-infinito con sección transversal cuadrada. Número de partículas en el estado base N_0 como función de T/T_0 para $M = 10, a/\lambda_0 = 0.2$ y $P_0 = 0.1, 10, 100, 1000$ | 39 |
| 3.14. Tubo multifilamentos semi-infinito con sección transversal cuadrada. Calor específico como función de T/T_0 para $M = 10, a/\lambda_0 = 0.2$ y $P_0 = 0.1, 10, 100, 1000$ | 40 |

| | |
|--|----|
| 3.15. Tubo multifilamentos semi-infinitos con sección transversal rectangular. Energía interna como función de T/T_0 para $P_0 = 100$, $M = 10$ con $a_x/\lambda_0 = 0.1$ y $a_y/\lambda_0 = 0.3$ en comparación con sus respectivos casos isotrópicos: $a/\lambda_0 = 0.1$ y $a/\lambda_0 = 0.3$ | 42 |
| 3.16. Tubo multifilamentos semi-infinitos con sección transversal rectangular. Calor específico como función de T/T_0 para $P_0 = 100$, $M = 10$ con $a_x/\lambda_0 = 0.1$ y $a_y/\lambda_0 = 0.3$ en comparación con sus respectivos casos isotrópicos: $a_x/\lambda_0 = a_y/\lambda_0 = 0.1$ y $a_x/\lambda_0 = a_y/\lambda_0 = 0.3$ | 43 |
| 3.17. Cintas semi-infinitas con $M + 1 = 11$ filamentos de sección transversal cuadrada. | 44 |
| 3.18. Cintas semi-infinitas con sección transversal cuadrada. Calor específico como función de T/T_0 para $M_x = 10$, $M_y = 0$, $a_x/\lambda_0 = 0.1, 0.2, 0.5$, (a) $P_0 = 10$ y (b) $P_0 = 1000$ | 44 |
| 4.1. Tubo multifilamentos semi-infinito con sección transversal cuadrada. Número de partículas en el estado base N_0 como función de T/T_{00} para $M = 10$, $a/\lambda_{00} = 0.1$, $r = 1, 10, 100$, (a) $P_0 = 10$ y (b) $P_0 = 1000$ | 51 |
| 4.2. Tubo multifilamentos semi-infinito con sección transversal cuadrada. Calor específico como función de T/T_{00} para $M = 10$, $a/\lambda_{00} = 0.1$, $r = 1, 10, 100$, (a) $P_0 = 10$ y (b) $P_0 = 1000$ | 52 |
| 4.3. Tubo multifilamentos semi-infinito con sección transversal cuadrada. Energía interna como función de T/T_{00} para $M = 10$, $a/\lambda_{00} = 0.1$, $r = 1, 10, 100$, (a) $P_0 = 10$ y (b) $P_0 = 1000$ | 52 |
| 5.1. Tubo multifilamentos finito con sección transversal cuadrada. Número de partículas en el estado base como función de T/T_0 para $P_0 = 10$, $M = 10$ y $a/\lambda_0 = 0.1, 0.2$ y 0.5 en comparación con sus respectivos casos semi-infinitos. | 59 |
| 5.2. Tubo multifilamentos finito con sección transversal cuadrada. Valor negativo de la derivada del número de partículas en el estado base N_0 , por partícula en el estado base y multiplicada por la temperatura, como función de T/T_0 para $P_0 = 10$, $M = 10$ y $a/\lambda_0 = 0.1$ y 0.2 , en comparación con sus respectivos casos semi-infinitos. | 61 |

| | |
|---|----|
| 5.3. Tubo multifilamentos finito con sección transversal cuadrada. Energía interna como función de T/T_0 para $P_0 = 10$, $M = 10$ y $a/\lambda_0 = 0.1$ y 0.2 , en comparación con sus respectivos casos semi-infinitos. | 61 |
| 5.4. Tubo multifilamentos finito con sección transversal cuadrada. Calor específico como función de T/T_0 para $P_0 = 10$, $M = 10$ y $a/\lambda_0 = 0.1$ y 0.2 , en comparación con sus respectivos casos semi-infinitos. | 62 |
| 6.1. Calor específico como función de T/T_0 para diferentes números de filamentos de sección transversal $(a/\lambda_0)^2 = (0.1)^2$ y $P_0 = 100$ | 66 |
| 6.2. Calor específico como función de T/T_0 para diferentes números de filamentos de sección transversal $(a/\lambda_0)^2 = (0.5)^2$ y $P_0 = 100$ | 67 |
| 6.3. T_{max}/T_0 , T_{min}/T_0 y λ_{max}/λ_0 como función de a/λ_0 para un tubo semi-infinito de paredes impenetrables con sección transversal cuadrada $(a/\lambda_0)^2$ | 69 |
| 6.4. T_{max}/T_0 como función de L/λ_0 para un tubo semi-infinito (1 filamento, $L/\lambda_0 \equiv a/\lambda_0$) y un arreglo de 11×11 filamentos ($L/\lambda_0 \equiv (M + 1)a/\lambda_0$). 71 | 71 |
| 6.5. Fracción de partículas condensadas como función de T/T_0 para un gas de Bose ideal en un arreglo de 11×11 filamentos de sección transversal $(a/\lambda_0)^2$ y longitud finita con $M = 10$, $M_z = 0$, $P_0 = 10$, $L_z = 10L$, $L_x = L_y = L \equiv (M + 1)a$ y $a/\lambda_0 = 0.1, 0.2, 0.5$ | 72 |
| 6.6. Temperatura T_α a la cual la fracción de partículas condensadas es $N/N_0 = 0.1, 0.5$, para un gas de Bose ideal en un arreglo de 11×11 filamentos de sección transversal $(a/\lambda_0)^2$ y longitud finita con $M = 10$, $M_z = 0$, $P_0 = 10$, $L = (M + 1)a$ y $L_z = 10L$ | 73 |
| A.1. Derivada negativa del potencial químico como función de T/T_0 para un gas ideal libre tridimensional de bosones, en escala log-log. | 83 |
| A.2. Valor negativo de la segunda derivada del potencial químico como función de T/T_0 para un gas ideal libre tridimensional de bosones, en escala log-log. | 84 |
| A.3. Fracción de partículas condensadas como función de T/T_0 para un gas ideal libre tridimensional de bosones. | 85 |

| | |
|--|----|
| A.4. Valor negativo de la derivada del número de partículas en el estado base N_0 , por partícula en el estado base y multiplicada por la temperatura, como función de la temperatura para un gas ideal libre tridimensional de bosones. | 86 |
| A.5. Energía interna como función de T/T_0 de un gas ideal libre tridimensional de bosones. | 87 |
| A.6. Calor específico como función de T/T_0 de un gas ideal libre tridimensional de bosones. | 88 |

Capítulo 1

Introducción

Los retos actuales de la Física de Materia Condensada consisten en entender desde el punto de vista microscópico las manifestaciones macroscópicas de los fenómenos cuánticos, tales como: la superconductividad de alta temperatura crítica, la superfluidez del helio cuatro (^4He) libre [1] o confinado [2, 3], la condensación Bose-Einstein y su conexión con la superfluidez, la superfluidez de sistemas fermiónicos en redes ópticas [4, 5], etc.

Microscópicamente la materia sólida, líquida o gaseosa, está constituida por un gran número de partículas cuánticas, fermiones y/o bosones, distribuidas espacialmente de forma ordenada o desordenada, moviéndose en todo el espacio disponible u oscilando alrededor de puntos de equilibrio; el comportamiento colectivo está determinado tanto por las interacciones entre las partículas como por la distribución espacial entre ellas.

La importancia de la distribución espacial en el comportamiento de los sistemas cuánticos se ha venido haciendo evidente conforme se conoce mejor a los sistemas. El primer líquido cuántico conocido es el ^4He líquido, licuado en 1908 por Kamerlingh Onnes a una temperatura de 4.2 K a presión atmosférica. Aunque el mismo Kamerlingh fue capaz de detectar propiedades extraordinarias del helio cuatro por debajo de los 2 K, como por ejemplo la extraordinaria capacidad de conducir calor, fue hasta 1938 que la pérdida de la viscosidad fue identificada por Kapitza y Allen [1] como el fenómeno de la superfluidez. Aunque la superfluidez del ^4He en bulto se presenta a 2.18 K, esto no es así cuando el helio es confinado espacialmente. Desde

el descubrimiento de la superfluidez en el ^4He en 3D, muchas preguntas aparecieron sobre la posibilidad de la existencia de la superfluidez en sistemas de baja dimensionalidad. A partir de entonces y hasta la fecha muchos estudios experimentales [6, 7] y teóricos [8, 9] se han realizado para entender el efecto de la dimensión y tamaño finito en la superfluidez y la condensación Bose-Einstein (BEC). Por ejemplo, entre los estudios experimentales están los realizados por F. Gasparini, *et. al.* [2, 3] en los cuales se estudian los efectos de tamaño finito en la superfluidez del ^4He , cuando el helio es confinado en 2D, 1D y 0D. Estos estudios muestran que la temperatura de la transición superfluida y la magnitud del calor específico, disminuyen cuando la dimensionalidad del sistema se reduce. También se ha estudiado el ^4He en sistemas unidimensionales (1D) o cuasi-unidimensionales como aquellos en que se reporta la condensación de helio a una fase sólida anisotrópica en los canales intersticiales de nanotubos de carbono [10], provocada por la alta densidad de partículas en los intersticios.

En el fenómeno de la superconductividad la estructura microscópica de los materiales superconductores ha sido crucial para lograr temperaturas más altas. Los primeros superconductores descubiertos son sólidos de elementos como el mercurio usado por Kamerlingh Onnes en 1911 para descubrir la superconductividad. Estos superconductores tienen estructuras cristalinas tridimensionales relativamente simples caracterizados por tener muy poca anisotropía y temperaturas críticas (T_c) que no rebasan los 10 K. Para aumentar la T_c fue necesario hacer aleaciones superconductoras tales como el Nb_3Ge cuya T_c de 23.2 K fue la más alta hasta antes de 1986 en que se descubrieron los cupratos superconductores de alta temperatura crítica [11]. Los cupratos son compuestos con estructura multicapas alternando capas de óxido de cobre CuO_2 entre las cuales se da la superconducción. Esta característica se representa como una alta anisotropía entre la dirección paralela y perpendicular a los planos de óxido de cobre, que se reflejan en las propiedades del material, en particular la superconducción. Hasta la fecha el cuprato $\text{HgBa}_2\text{Ca}_2\text{Cu}_3\text{O}_{1+x}$, a presión atmosférica, tiene el record de mayor temperatura crítica, 132.5 K [12]. Sujeto a presión de 0.3 millones de atmósferas el $\text{Hg Ba}_2\text{Ca}_2\text{Cu}_3\text{O}_{1+x}$ tenía el record de 164 K [13] hasta junio de este año en que se reportó el sulfuro de hidrógeno H_2S con una temperatura crítica de 203.5 K pero a presiones de más de 1.6 millones de atmósfe-

ras [14]. Como se puede notar, la estructura generada por los iones del material ha sido determinante en alcanzar temperaturas más altas. Más aún, la ilusión de tener superconductores con temperaturas críticas tan altas como las del medio ambiente, ha llevado a experimentales y teóricos a suponer que de existir tal superconductor éste deberá ser unidimensional [15, 16].

La estructura también es crucial en las aplicaciones tecnológicas. Actualmente los superconductores se utilizan a gran escala en las bobinas superconductoras del Gran Colisionador de Hadrones (LHC) [17] y en el Reactor Experimental Termonuclear Internacional (ITER) [18], para generar campos magnéticos intensos. Los cables superconductores son diseñados como tubos o cintas que contienen multifilamentos superconductores ahogados en una matriz de material no superconductor. Esta arquitectura de los cables les da maleabilidad y durabilidad que los filamentos superconductores no tienen.

Actualmente es posible colocar gases cuánticos (bosónicos y/o fermiónicos) en cristales artificiales de luz [5], generados por la interferencia de haces de láseres. Los arreglos así formados son llamados redes ópticas. El número de pares de láseres determina la dimensión del potencial periódico, por ejemplo, dos pares de haces contrapuestos ortogonales generan tubos unidimensionales en los cuales los átomos pueden moverse a lo largo de una dimensión. Las redes ópticas proporcionan una poderosa herramienta para el análisis de gases cuánticos, bosónicos y/o fermiónicos, dentro de estructuras periódicas, ya que se tiene el completo control sobre la geometría y profundidad del potencial, así como de la interacción entre ellos.

El grupo de investigación de Física de Muchos Cuerpos Cuánticos de la UNAM ha venido desarrollando una teoría estadística Bosón-Fermión de la superconductividad [19], donde se modela al superconductor como un gas de electrones interactuando atractivamente vía las vibraciones de la red, permitiendo que se formen parejas (pares de Cooper) que suponen se comportan como bosones y que conviven con los electrones no apareados. Esta teoría ha venido evolucionando en varios aspectos. En particular, dado que los superconductores cupratos [20] presentan una estructura multicapas, fue necesario estudiar los efectos de las multicapas en los gases de fermiones y bosones [21, 22]. Por otro lado, la posibilidad de que superconductores unidimensionales existan y sean de mayor temperatura crítica, al grado de llegar a temperatura ambiente [23],

llevó a estudiar los fluidos cuánticos en multitubos [24]. Los resultados mostraron que la presencia de las estructuras multicapas o multitubos disminuyen notoriamente la T_c . Aunque los primeros trabajos se realizaron con sistemas 3D infinitos, para ser más realistas y considerar el tamaño finito de los sistemas se empezó por estudiar el efecto de la finitud del sistema en una dimensión e infinito en las otras dos dimensiones [25].

En esta tesis estamos interesados en estudiar el efecto del confinamiento sobre las propiedades termodinámicas de un gas de Bose en estructuras periódicas. Las estructuras periódicas consideradas son estructuras semi-infinitas y finitas del tipo tubo y cintas multifilamentos. En particular, estamos interesados en conocer el efecto del tamaño sobre la manera en que se puebla el estado base como función de los parámetros que definen la estructura tubular. La BEC es un fenómeno cuántico en el que una proporción del orden del número total de partículas pueblan abruptamente el estado base que es el de menor energía, por debajo de la temperatura crítica. En sistemas infinitos la BEC toma lugar a una temperatura crítica bien definida T_0 para bosones libres y $T_c < T_0$ para bosones confinados, temperatura crítica de BEC, mientras que para sistemas finitos la correspondiente transición se extiende sobre un intervalo finito de temperaturas, alrededor de T_0 . Por ello, entre otras propiedades termodinámicas, se analiza la forma en que el estado base es ocupado por los bosones como función de la temperatura.

La tesis se estructura de la siguiente forma: en el Capítulo 2 se plantea el modelo del sistema que consiste de N bosones ideales confinados en estructuras periódicas multifilamentos del tipo tubos y cintas, se da una expresión para el espectro de energías de partículas bosónicas dentro de una caja unidimensional con un número finito de potenciales delta de Dirac y se analiza dicho espectro energético. En el Capítulo 3 derivamos expresiones para el gran potencial, el número de partículas en el estado base, el calor específico, la energía interna, entre otras propiedades, para un gas ideal de bosones confinado en estructuras periódicas tubulares semi-infinitas empleando la estadística de Bose-Einstein. En el mismo Capítulo 3 se reportan y analizan los resultados obtenidos para algunos sistemas bosónicos semi-infinitos para diferentes tamaños de secciones transversales de los filamentos e impenetrabilidades de las paredes. Por ejemplo, primero se analiza un tubo semi-infinito y luego arre-

glos periódicos de filamentos isotrópicos y anisotrópicos. En el Capítulo 4 se estudia los efectos de la variación de la densidad de partículas en las propiedades termodinámicas de nuestro sistema. En el Capítulo 5 estudiamos un gas de Bose inmerso en estructuras tubulares finitas y analizamos el calor específico, la energía interna, entre otras propiedades. El efecto de la dimensión en el calor específico de un gas de Bose en cables multifilamentos se analiza en el Capítulo 6, en donde se discuten algunos criterios para identificar la condensación BE en sistemas semi-infinitos y finitos. En el Capítulo 7 damos nuestras conclusiones. Finalmente en el Apéndice [A](#) se resumen las propiedades termodinámicas para un gas ideal de bosones libre tridimensional, que es nuestro sistema de referencia y de comparación.

Capítulo 2

Bosones en estructuras periódicas multifilamentos: tubos y cintas

El modelo del sistema consiste de un gas de N bosones que no interaccionan entre sí confinados en filamentos de sección transversal rectangular finita y de longitud infinita, unidos ordenadamente para formar un cable de paredes impenetrables. La estructura periódica de filamentos se modela aplicando al gas de Bose un número finito de potenciales delta de Dirac en dos direcciones mutuamente perpendiculares, mientras que en la tercera dirección se permite que las partículas se muevan libremente. Las fronteras del cable son impenetrables lo cual se indica haciendo que la función de onda sea cero en sus paredes.

Las partículas sienten un potencial tridimensional compuesto de un número finito de deltas de Dirac idénticas separadas unas de otras una distancia fija. Las deltas se distribuyen, por convención, a lo largo de las direcciones x y y , teniéndose M_x deltas en la dirección x y M_y deltas en la dirección y , mientras que en la dirección z los bosones se mueven libremente. La Fig. 2.1 ilustra la disposición de las deltas, cada una de las cuales tiene una intensidad v_i y están separadas una de otra una distancia a_i ($i = x$ o y). Así, las partículas se encuentran confinadas en una caja de potencial impenetrable con dimensiones: $L_x = a_x(M_x + 1)$, $L_y = a_y(M_y + 1)$ y $L_z = \infty$. Este potencial se puede expresar matemáticamente como un potencial de deltas de Dirac,

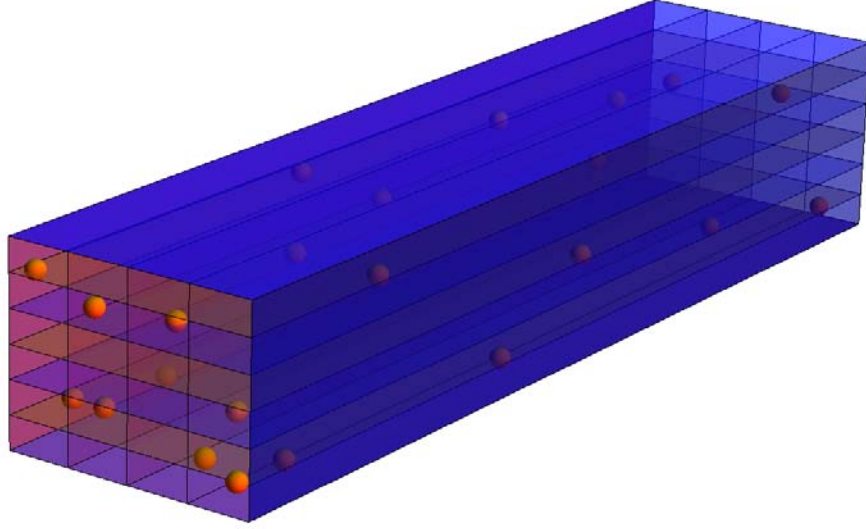


Figura 2.1: Tubo de filamentos con sección transversal rectangular.

que depende de la coordenada x y y , su expresión es

$$V(x, y) = V_x(x) + V_y(y) = \sum_{m_x=1}^{M_x} v_x \delta(x - m_x a_x) + \sum_{m_y=1}^{M_y} v_y \delta(y - m_y a_y) \quad (2.1)$$

donde v_x y v_y son las intensidades de los potenciales delta en las direcciones x y y , respectivamente.

Si se ignora la interacción entre los bosones, la solución a la ecuación de Schrödinger tridimensional se puede obtener por separación de variables dado que el potencial también es separable. Así la ecuación que satisface la función de onda de cada bosón de masa m

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(x, y) \right] \Psi(x, y, z) = \varepsilon_k \Psi(x, y, z) \quad (2.2)$$

se puede separar en tres ecuaciones diferentes:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \mathcal{X}(x)}{\partial x^2} + V_x(x) \mathcal{X}(x) = \varepsilon_x \mathcal{X}(x) \quad -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \mathcal{Y}(y)}{\partial y^2} + V_y(y) \mathcal{Y}(y) = \varepsilon_y \mathcal{Y}(y) \quad (2.3)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \mathcal{Z}(z)}{\partial z^2} = \varepsilon_z \mathcal{Z}(z) \quad (2.4)$$

donde se supuso una función de onda $\Psi(x, y, z) = \mathcal{X}(x)\mathcal{Y}(y)\mathcal{Z}(z)$, tal que $\varepsilon_k = \varepsilon_{k_x} + \varepsilon_{k_y} + \varepsilon_{k_z}$ es la energía por partícula. La Ec. (2.4) corresponde a una partícula libre con energía

$$\varepsilon_{k_z} = \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m} \quad (2.5)$$

con $k_z = 2\pi n_z/L_z$ el número de onda en la dirección z , $n_z = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ debido a las condiciones periódicas en una caja de longitud L_z . Las condiciones de frontera usadas en la direcciones x y y son $\mathcal{X}(0) = \mathcal{X}(L_x) = 0$ y $\mathcal{Y}(0) = \mathcal{Y}(L_y) = 0$, es decir, la función de onda es cero en las paredes de la caja. Las energías ε_{k_x} y ε_{k_y} se obtienen implícitamente de las ecuaciones [26, 27]

$$\frac{P_i}{\alpha_i a_i} \text{sen}(\alpha_i a_i) + \text{cos}(\alpha_i a_i) = \text{cos}\left(\frac{n\pi}{M_i + 1}\right) \quad \text{con} \quad n = 1, 2, 3, \dots, M_i + 1 \quad (2.6)$$

donde $\alpha_i^2 \equiv 2m\varepsilon_{k_i}/\hbar^2$ ($i = x$ o y), M_i es el número de potenciales delta. Reescribiendo la constante adimensional $P_i = mv_i a_i/\hbar^2$ como $P_i = (mv_i \lambda_0/\hbar^2)(a_i/\lambda_0) \equiv P_{0i}(a_i/\lambda_0)$, donde $\lambda_0 \equiv h/\sqrt{2\pi m k_B T_0}$ es la longitud de onda térmica de de Broglie de un gas de bosones en una caja infinita a la temperatura crítica $T_0 \simeq 3.31\hbar^2 \rho^{2/3}/mk_B$, con $\rho \equiv N/L^3$ densidad de número de bosones y a_i la distancia entre dos barreras delta a lo largo de las direcciones $i = x$ y y . $P_{0i} \equiv mv_i \lambda_0/\hbar^2$ es una medida de la impenetrabilidad de la barrera directamente relacionada con la intensidad de la delta.

2.1. Espectro de energías

Como se mencionó en la sección anterior, el espectro de energía se puede separar en tres componentes, una para cada dirección espacial, tal que $\varepsilon = \varepsilon_{k_x} + \varepsilon_{k_y} + \varepsilon_{k_z}$. Para la dirección z el espectro corresponde al de una partícula libre, i.e. $\varepsilon_{k_z} = \hbar^2 k_z^2/2m$, mientras que para las direcciones x y y los espectros corresponden al de un potencial Peine de Dirac finito, por lo que ε_{k_x} y ε_{k_y} están determinadas por la ecuación Ec. (2.6). Las características principales del espectro están definidas esencialmente por ε_{k_x} y ε_{k_y} , pues en la dirección z el espectro es proporcional al cuadrado del momento.

La relación de donde se obtiene la energía ε_{k_i} (con $i = x$ o y) es (Ec. (2.6))

$$P_{0i} a_{0i} \frac{\text{sen}(\alpha_i a_i)}{\alpha_i a_i} + \cos(\alpha_i a_i) = \cos \left[\frac{n\pi}{M_i + 1} + (N_b - 1)\pi \right] \quad \text{con } n = 1, 2, 3, \dots, M_i + 1 \quad (2.7)$$

donde $N_b = 1, 2, 3, \dots$ es el número de banda. La expresión anterior se ha puesto en términos de variables adimensionales para simplificar el análisis general del espectro de energía. La relación de dispersión Ec. (2.7) determina los niveles de energía a partir de los valores de $\alpha_i a_i$ que satisfacen dicha igualdad. Su cuadrado, $(\alpha_i a_i)^2$, que está dado por

$$(\alpha_i a_i)^2 = \frac{2ma_i^2}{\hbar^2} \varepsilon_{k_i} \quad (2.8)$$

es un cociente de energías, pues el factor $\hbar^2/2ma_i^2$ es una energía, la cual se emplea como unidad para adimensionalizar ε_{k_i} parte de la energía de un bosón por su movimiento en la dirección i . Así, se define

$$\bar{\varepsilon}_{k_i} \equiv \frac{\varepsilon_{k_i}}{\hbar^2/2ma_i^2} = (\alpha_i a_i)^2 \quad (2.9)$$

la cual está dada en unidades $\hbar^2/2ma_i^2$.

Recordando que las energías permitidas para una partícula en una caja unidimensional de ancho a son $\varepsilon_n^{caja} = \frac{\hbar^2}{2ma^2} (n\pi)^2$, con $n = 0, 1, 2, \dots$, que en unidades de $\hbar^2/2ma^2$ se transforma en $\bar{\varepsilon}_n^{caja} = (n\pi)^2$.

Haciendo un análisis del espectro de energías, considere $P_{0i} = 0$ y $N_b = 1$ en la Ec. (2.7)

$$\cos(\alpha_i a_i) = \cos \left(\frac{n\pi}{M_i + 1} \right) \Rightarrow (\alpha_i a_i)^2 = \left(\frac{n\pi}{M_i + 1} \right)^2 \quad (2.10)$$

$$\Rightarrow \varepsilon = \frac{\hbar^2}{2ma_i^2 (M_i + 1)^2} (n\pi)^2 \quad \text{con } n = 1, 2, 3, \dots, M_i + 1$$

que son las energías permitidas para una partícula en una caja de longitud $L = (M_i + 1)a_i$.

Por otro lado, si $P_{0i} \rightarrow \infty$ de la Ec. (2.7) se tiene

$$\begin{aligned} P_{0i} a_{0i} \frac{\text{sen}(\alpha_i a_i)}{\alpha_i a_i} \approx 0 &\Rightarrow (\alpha_i a_i)^2 = (n\pi)^2 \\ \Rightarrow \varepsilon = \frac{\hbar^2}{2ma_i^2} (n\pi)^2 &\quad \text{con } n = 1, 2, 3, \dots, M_i + 1 \end{aligned} \quad (2.11)$$

que corresponden a las energías permitidas para una partícula en una caja de longitud $L = a_i$.

Cuando $M_i \rightarrow \infty$ se recupera la relación de dispersión para el potencial Peine de Dirac infinito con una delta por celda unitaria, definiendo $k \equiv n\pi/(M_i + 1)a_i$.

$$P_{0i} a_{0i} \frac{\text{sen}(\alpha_i a_i)}{\alpha_i a_i} + \cos(\alpha_i a_i) = \cos(k_i a_i) \quad (2.12)$$

El número de niveles en una banda (que en nuestro caso es un paquete de niveles de energía) es $M_i + 1$. Cuando $n = M_i + 1$ que corresponde al último nivel de energía de una banda, se tiene

$$\begin{aligned} P_{0i} a_{0i} \frac{\text{sen}(\alpha_i a_i)}{\alpha_i a_i} + \cos(\alpha_i a_i) &= \cos(N_b \pi) = (-1)^{N_b} \\ \Rightarrow \cos(\alpha_i a_i) = (-1)^{N_b} &\quad \text{y} \quad P_{0i} a_{0i} \frac{\text{sen}(\alpha_i a_i)}{\alpha_i a_i} = 0 \\ \Rightarrow (\alpha_i a_i)^2 = (N_b \pi)^2 &\quad N_b = 1, 2, 3, \dots \\ \Rightarrow \bar{\varepsilon}_{k_i} = \pi^2, 4\pi^2, 9\pi^2, \dots \end{aligned} \quad (2.13)$$

el último nivel de energía de cada banda es independiente del valor de P_{0i} y a_{0i} en unidades de $\hbar^2/2ma_i^2$ y corresponden a los niveles de energía para una partícula en una caja de longitud $L = a_i$.

Para visualizar el espectro de energía del potencial Peine de Dirac finito, que depende de tres parámetros diferentes, P_{0i} , a_{0i} y M_i , hay que elegir el parámetro en función de cuál se va a mostrar y dejar los otros dos constantes. Para una imagen bidimensional se fijan dos parámetros y se grafica $\bar{\varepsilon}_i$ como función del tercer parámetro.

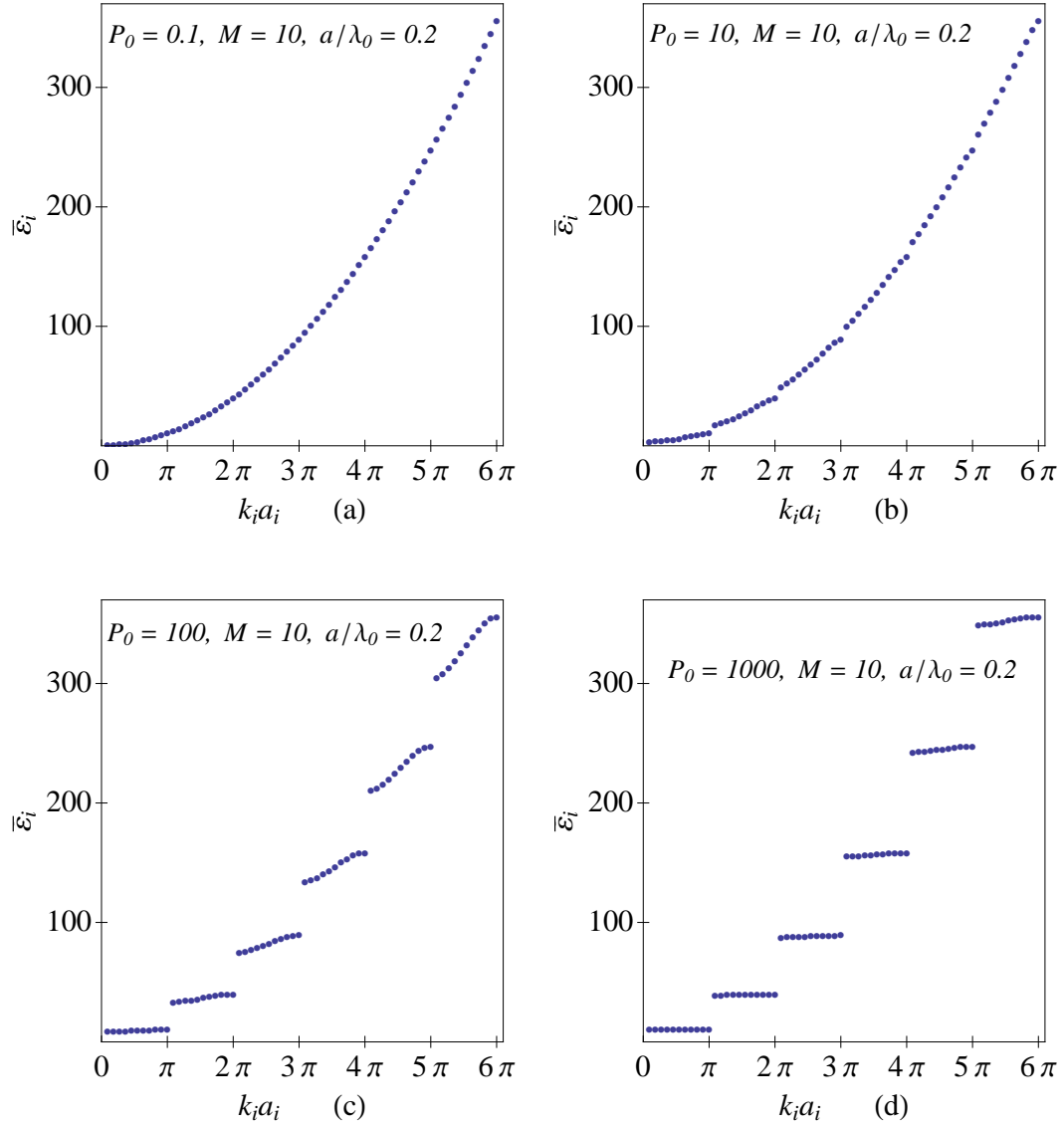


Figura 2.2: Espectro de energías como función de $k_i a_i$ para $M = 10$, $a/\lambda_0 = 0.2$ y algunos valores de P_0 , con $i = x$ o y .

Fijando P_0 y a_0 en la Ec. (2.7) se obtienen espectros como los de la Fig. 2.2, donde se ha definido $k_{n_i} \equiv n\pi/(M_i + 1)a_i$. Los cuatro espectros mostrados corresponden a $M = 10$, $a/\lambda_0 = 0.2$ y se han graficado para diferentes valores de la impenetrabilidad de las paredes $P_0 = 0.1, 10, 100, 1000$. Así se tiene $\bar{\epsilon}_i$ como función de $k_{n_i} a_i$. Cabe

notar que en cada banda de energía se tienen 11 niveles ya que $M = 10$, el último nivel de energía de cada banda está fijo tal y como se describió anteriormente y corresponde a los niveles de energía de una partícula en una caja de longitud $L = a_i$ $\bar{\varepsilon}_{N_b} = (N_b\pi)^2$ donde N_b es el número de banda. Por otro lado, al ir incrementando la impenetrabilidad de las paredes de los filamentos P_0 los niveles de cada banda se empiezan a aproximar a la energía del último nivel $\bar{\varepsilon}_{N_b} = (N_b\pi)^2$.

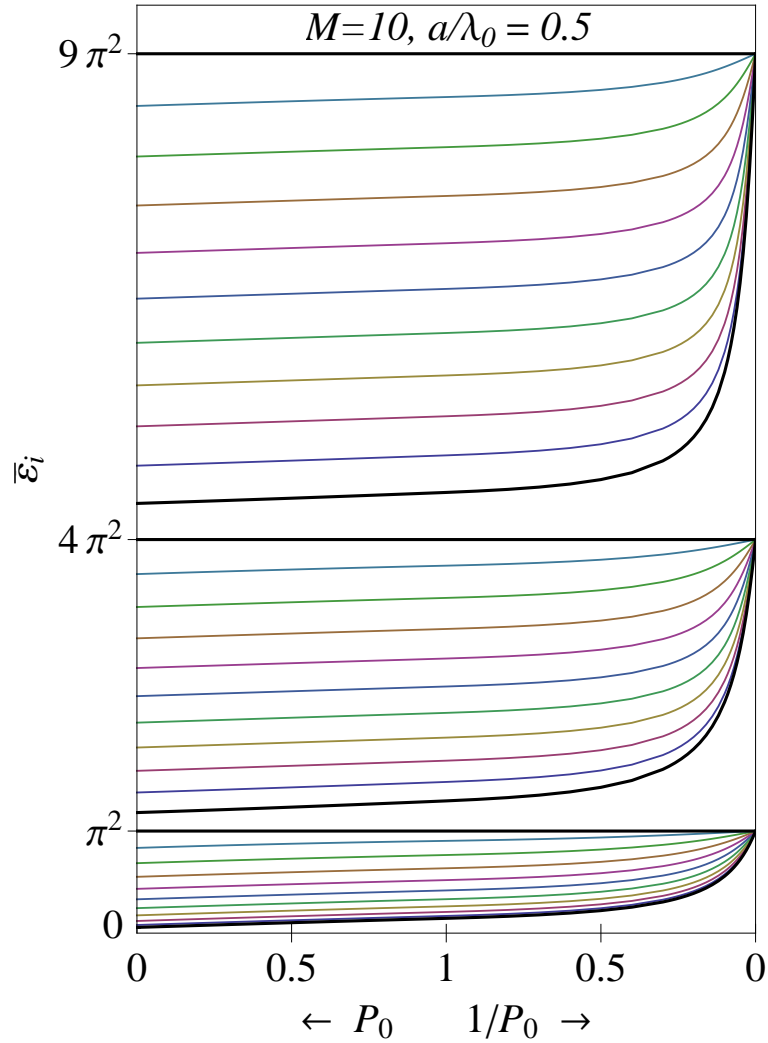


Figura 2.3: Espectro de energías en unidades de $\hbar^2/2ma^2$ como función de P_0 y $1/P_0$ para $M = 10$ y $a/\lambda_0 = 0.5$. Las líneas negras indican el primer y último nivel de energía de cada banda.

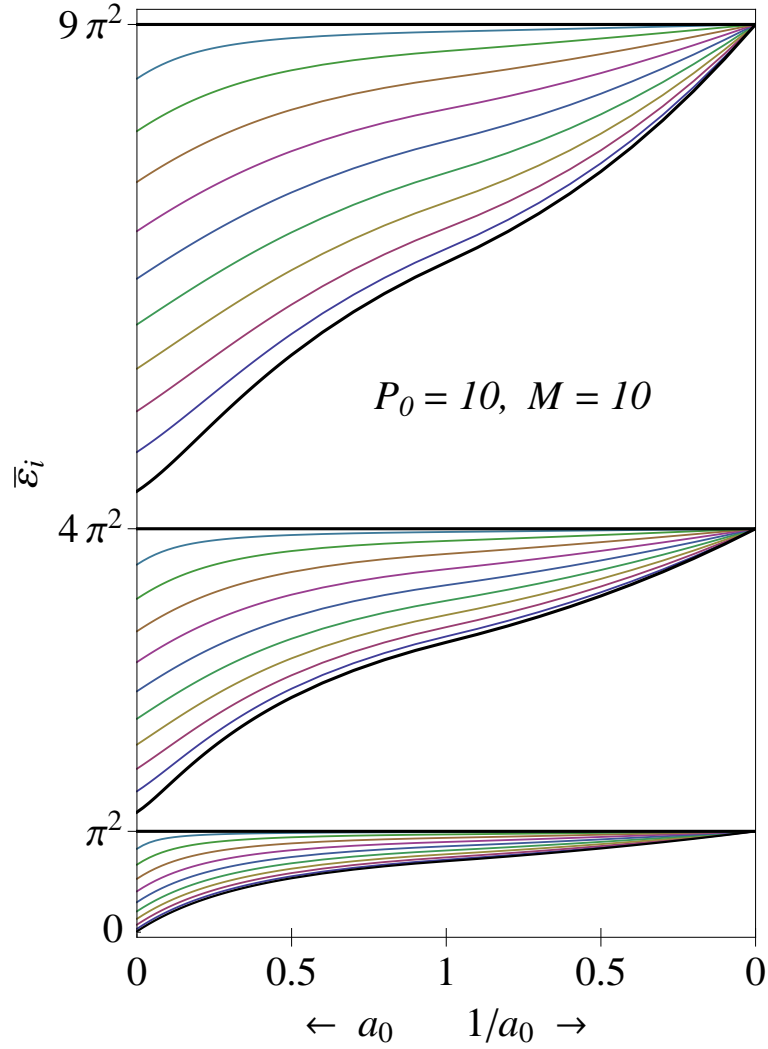


Figura 2.4: Espectro de energías en unidades de $\hbar^2/2ma^2$ como función de a_0 y $1/a_0$ para $P_0 = 10$ y $M = 10$. Las líneas negras indican el primer y último nivel de energía de cada banda.

La Fig. 2.3 muestra el espectro de energías como función de la intensidad del potencial P_0 . El intervalo de P_0 se divide en dos regiones: para $P_0 \leq 1$ se grafica la energía en función de P_0 , y para $P_0 > 1$ se grafica en función de $1/P_0$, cubriéndose un intervalo de cero a infinito. Se han fijado los parámetros $M = 10$ y $a/\lambda_0 = 0.5$. Se tienen 11 niveles de energía por banda, las líneas negras indican el primer y último nivel de energía de cada banda. Además, puede observarse que como función de

P_0 los paquetes de energías son más anchos para $P_0 = 0$ y que su anchura crece conforme aumenta la energía. Para toda P_0 los paquetes están separados por bandas prohibidas cuya anchura crece conforme aumenta P_0 . Cuando $P_0 \rightarrow \infty$ los paquetes de energías permitidas colapsan en un solo nivel que es el correspondiente al de una partícula en una caja de ancho a .

La Fig. 2.4 muestra las primeras tres bandas del espectro de energías como función de $a_0 \equiv a/\lambda_0$ la separación entre dos deltas. El intervalo de a/λ_0 se divide en dos regiones: para $a/\lambda_0 \leq 1$ se grafica la energía en función de a/λ_0 , y para $a/\lambda_0 > 1$ se grafica en función de $1/(a/\lambda_0)$, cubriéndose un intervalo de cero a infinito. Se han fijado los parámetros $P_0 = 10$ y $M = 10$. Se tienen 11 niveles de energía por banda, las líneas negras indican el primer y último nivel de energía de cada banda.

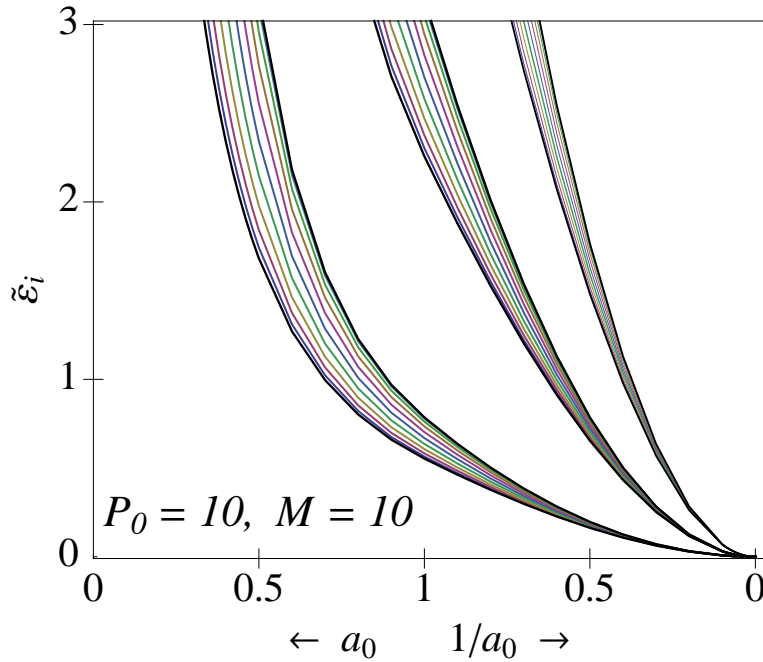


Figura 2.5: Espectro de energías en unidades de $k_B T_0$ como función de a_0 y $1/a_0$ para $P_0 = 10$ y $M = 10$. Las líneas negras indican el primer y último nivel de energía de cada banda.

De la Fig. 2.4 vemos que cuando $a/\lambda_0 \rightarrow \infty$ los 11 niveles de cada banda se convierten en un solo nivel, estos niveles corresponden a $\bar{\varepsilon} = (N_b \pi)^2$, $N_b = 1, 2, \dots$, con N_b el número de banda. Cabe notar que estas energías están dadas en unidades de

$\hbar^2/2ma^2$, una unidad que depende de la a misma. Este detalle cobra gran importancia porque si $a/\lambda_0 \rightarrow \infty$ la unidad de energía $\hbar^2/2ma^2 \rightarrow 0$, y las bandas se colapsan en niveles, pero físicamente se espera que si la distancia entre las barreras del potencial (deltas) es muy grande entonces la interacción de los bosones con éstas es muy débil, por lo que el sistema se parece cada vez más a un gas ideal libre. En este caso el espectro de energías debería ser un continuo, no niveles discretos. Esta aparente contradicción se aclara considerando las energías del sistema en unidades $k_B T_0$, es decir, tomando

$$\tilde{\varepsilon} \equiv \frac{\varepsilon}{k_B T_0} \quad (2.14)$$

donde T_0 es la temperatura crítica de una gas ideal libre de bosones.

La ventaja de tener la energía en unidades de $k_B T_0$ es que se trata de una unidad independiente de a . Así, cuando variamos a de cero a infinito, la unidad de energía permanece constante. La Fig. 2.5 muestra las primeras tres bandas del espectro de energías en unidades de $k_B T_0$ como función de a/λ_0 la separación entre dos deltas. Se han fijado los parámetros $P_0 = 10$ y $M = 10$. En el límite cuando $a/\lambda_0 \rightarrow \infty$ los niveles se unen, formando un espectro continuo como físicamente se espera.

En este capítulo se modeló la estructura periódica de cintas y tubos multifilamentos usando un número M finito de potenciales delta de Dirac, igualmente espaciadas una distancia a , en las direcciones x y y , para restringir el movimiento de las partículas en dos direcciones, mientras que en la tercera dirección se permitió que las partículas se desplazaran libremente. Al ignorar la interacción entre las partículas, la ecuación de Schrödinger que satisfacen los bosones entre los filamentos fue separable en cada una de las direcciones espaciales por lo que la energía por partícula es una suma de las energías en cada una de las direcciones de movimiento. Para la dirección z , el espectro de energía corresponde al de una partícula libre, mientras que para las direcciones perpendiculares a las deltas de Dirac los espectros energéticos corresponden al de un potencial Peine de Dirac finito. Se mostraron algunas bandas del espectro de energía como función de la impenetrabilidad de las paredes P_0 y de la separación entre las deltas a_0 .

Capítulo 3

Gas de Bose en estructuras tubulares semi-infinitas

3.1. Propiedades termodinámicas

3.1.1. Gran Potencial

Las propiedades termodinámicas del sistema se obtienen a partir del Gran Potencial Termodinámico $\Omega(T, V, \mu)$, para un gas de bosones contenido en un volumen V está dado por

$$\Omega(T, V, \mu) = k_B T \sum_{\mathbf{k}} \ln[1 - e^{-\beta(\epsilon_{\mathbf{k}} - \mu)}] \quad (3.1)$$

donde T es la temperatura, V es el volumen, μ el potencial químico y $\beta = 1/k_B T$. De la definición de Ω quedan determinadas las propiedades termodinámicas del sistema

$$\Omega(T, V, \mu) = U - TS - \mu N \quad (3.2)$$

donde U es la energía interna, S la entropía y N el número de bosones. A partir de su forma diferencial,

$$d\Omega(T, V, \mu) = -SdT - pdV - Nd\mu \quad (3.3)$$

se obtienen las relaciones

$$S = - \left(\frac{\partial \Omega}{\partial T} \right)_{V, \mu} \quad p = - \left(\frac{\partial \Omega}{\partial V} \right)_{T, \mu} \quad N = - \left(\frac{\partial \Omega}{\partial \mu} \right)_{T, V} \quad (3.4)$$

donde p es la presión. La ecuación de estado del sistema queda determinada por la relación $\Omega = -pV$.

3.1.2. Número de partículas

La ecuación de número se obtiene al derivar parcialmente el Gran Potencial con respecto al potencial químico μ como se muestra en la Ec. (3.4). Así, de la Ec. (3.1) se obtiene que el número de partículas está dado por

$$N = \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_{\mathbf{k}} - \mu)} - 1} \quad (3.5)$$

En el límite termodinámico (LT), es decir, el límite en el que el número de partículas N y el volumen $V = L_x L_y L_z$ del sistema tienden a infinito de tal forma que el cociente entre ellas, la densidad de partículas, es una constante, la suma sobre los momentos k_z se puede aproximar por una integral de la forma $\sum_{k_z} \rightarrow \int (L_z/2\pi) dk_z$,

$$N = \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_{\mathbf{k}} - \mu)} - 1} \xrightarrow{LT} \frac{1}{(2\pi/L_z)} \sum_{k_x=0}^{\infty} \sum_{k_y=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_z}{e^{\beta(\varepsilon_{k_x} + \varepsilon_{k_y} + \varepsilon_{k_z} - \mu)} - 1} \quad (3.6)$$

Así,

$$N = 2 \left(\frac{L_z}{2\pi} \right) \sum_{k_x=0}^{\infty} \sum_{k_y=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{dk_z}{z_0^{-1} e^{\beta \varepsilon_{k_z}} - 1} \quad (3.7)$$

con $z_0 \equiv e^{\beta(\mu - \varepsilon_{k_x} - \varepsilon_{k_y})}$. Sólo la suma de los momentos en la dirección z se aproxima a una integral ya que el sistema es infinito en esta dirección, mientras que en la dirección x y y el sistema tiene longitud finita. La energía en la dirección z es $\varepsilon_{k_z} = \hbar^2 k_z^2 / 2m$ por ser partícula libre, las energías ε_{k_x} y ε_{k_y} se obtienen implícitamente de la Ec. (2.6). Haciendo el siguiente cambio de variable

$$\xi = \beta \varepsilon_{k_z} = \beta \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m} \quad (3.8)$$

entonces

$$\begin{aligned} d\xi &= 2\beta \frac{\hbar^2 k_z}{2m} dk_z = 2 \left(\frac{\beta \hbar^2}{2m} \right)^{1/2} \xi^{1/2} dk_z \\ \Rightarrow dk_z &= \frac{1}{2} \left(\frac{2m}{\beta \hbar^2} \right)^{1/2} \xi^{-1/2} d\xi \end{aligned} \quad (3.9)$$

la Ec. (3.7) puede escribirse como

$$N = \sum_{k_x, k_y} 2 \left(\frac{L_z}{2\pi} \right) \frac{1}{2} \left(\frac{2m}{\beta \hbar^2} \right)^{1/2} \int_0^\infty d\xi \frac{\xi^{-1/2}}{z_0^{-1} e^\xi - 1} \quad (3.10)$$

para abreviar usamos $\sum_{k_x, k_y} \equiv \sum_{k_x=0}^\infty \sum_{k_y=0}^\infty$. Recordando la función de Bose $g_{\nu+1}(z)$ [28]

$$g_{\nu+1}(z) = \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} \int_0^\infty dt \frac{t^\nu}{z^{-1} e^t - 1} \quad (3.11)$$

encontramos que el número de partículas está dado por

$$N = \sum_{k_x, k_y} L_z \left(\frac{m}{2\pi \hbar^2 \beta} \right)^{1/2} g_{1/2}(z_0) \quad (3.12)$$

La densidad del sistema $\rho(T) = N/V$ es

$$\rho(T) = \sum_{k_x, k_y} \frac{1}{a_x(M_x+1)a_y(M_y+1)} \left(\frac{m}{2\pi \hbar^2 \beta} \right)^{1/2} g_{1/2}(z_0) \quad (3.13)$$

donde hemos introducido que $L_x = a_x(M_x+1)$ y $L_y = a_y(M_y+1)$. La densidad de un gas ideal de bosones en una caja infinita a la temperatura crítica de condensación de Bose-Einstein T_0 está dada por

$$\rho(T_0) = \left(\frac{mk_B T_0}{2\pi \hbar^2} \right)^{3/2} \zeta(3/2) = \frac{\zeta(3/2)}{\lambda_0^3} \quad (3.14)$$

con $\lambda_0^2 = 2\pi \hbar^2 / mk_B T_0$. Tomamos $N/V = \rho(T_0)$, es decir, hacemos la densidad de nuestro sistema igual a la densidad del gas ideal libre de bosones. Dividiendo la Ec.

(3.13) por $\rho(T_0)$, se obtiene

$$1 = \sum_{k_x, k_y} \frac{\lambda_0^3}{a_x a_y \zeta(3/2) (M_x + 1) (M_y + 1)} \left(\frac{m}{2\pi \hbar^2 \beta} \right)^{1/2} g_{1/2}(z_0) \quad (3.15)$$

La expresión anterior permite calcular el potencial químico μ como función de la temperatura T para a_i, P_{0i} y M_i fijas ($i = x$ o y), esto se hace mediante métodos numéricos usando el software *Mathematica* al igual que el cálculo de otras propiedades termodinámicas. Para hacer el cálculo numérico es necesario dar las expresiones adimensionalizadas, para ello se toma como referencia el gas ideal libre de bosones, siendo λ_0 la longitud de onda térmica de de Broglie de dicho gas en una caja infinita a la temperatura crítica T_0 . Las longitudes se dan en unidades de λ_0 , las temperaturas en unidades de T_0 y las energías en unidades de $k_B T_0$. Para adimensionalizar la Ec. (3.15) veamos el término

$$\frac{\lambda_0^3}{a_x a_y} \left(\frac{m}{2\pi \hbar^2 \beta} \right)^{1/2} = \frac{\lambda_0^3}{a_x a_y} \left(\frac{k_B T}{k_B T_0} \right)^{1/2} \left(\frac{m k_B T_0}{2\pi \hbar^2} \right)^{1/2} = \frac{\tilde{T}^{1/2}}{a_{0x} a_{0y}} \quad (3.16)$$

donde $a_{0i} \equiv a_i / \lambda_0$ y $\tilde{T} \equiv T / T_0$. Así, finalmente se tiene la expresión adimensionalizada

$$1 = \sum_{k_x, k_y} \frac{\tilde{T}^{1/2} g_{1/2}(z_0)}{a_{0x} a_{0y} \zeta(3/2) (M_x + 1) (M_y + 1)} \quad (3.17)$$

Es de esta expresión, Ec. (3.17), de la que se obtiene el potencial químico como función de la temperatura para el cálculo de otras propiedades termodinámicas. Para obtener algunas propiedades termodinámicas, por ejemplo el calor específico, es necesario obtener la derivada del potencial químico con respecto a la temperatura. Para obtener $\partial\mu/\partial T$ se deriva la Ec. (3.15) con respecto a la temperatura

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{k_x, k_y} \frac{\partial}{\partial T} [T^{1/2} g_{1/2}(z_0)] \\ 0 &= \sum_{k_x, k_y} \left[\frac{1}{2T^{1/2}} g_{1/2}(z_0) + T^{1/2} \frac{\partial g_{1/2}(z_0)}{\partial z_0} \frac{\partial z_0}{\partial T} \right] \end{aligned} \quad (3.18)$$

De la definición de $z_0 \equiv e^{\beta(\mu - \varepsilon_{k_x} - \varepsilon_{k_y})}$ se obtiene

$$\frac{\partial z_0}{\partial T} = z_0 \frac{1}{k_B T^2} \left(\varepsilon_{k_x} + \varepsilon_{k_y} + T \frac{\partial \mu}{\partial T} - \mu \right) \quad (3.19)$$

entonces

$$0 = \sum_{k_x, k_y} \left[\frac{1}{2} g_{1/2}(z_0) + \frac{1}{k_B T} \left(\varepsilon_{k_x} + \varepsilon_{k_y} + T \frac{\partial \mu}{\partial T} - \mu \right) g_{-1/2}(z_0) \right] \quad (3.20)$$

donde se usó la propiedad de las funciones de Bose $z \partial g_\nu(z) / \partial z = g_{\nu-1}(z)$. Despejando la derivada del potencial químico

$$\frac{1}{k_B} \frac{\partial \mu}{\partial T} = - \frac{\sum_{k_x, k_y} \left[\frac{1}{2} g_{1/2}(z_0) + \frac{1}{k_B T} (\varepsilon_{k_x} + \varepsilon_{k_y} - \mu) g_{-1/2}(z_0) \right]}{\sum_{k_x, k_y} g_{-1/2}(z_0)} \quad (3.21)$$

La expresión adimensionalizada es

$$\frac{1}{k_B} \frac{\partial \mu}{\partial T} = - \frac{\sum_{k_x, k_y} \left[g_{1/2}(z_0) + \frac{1}{T} (\tilde{\varepsilon}_{k_x} + \tilde{\varepsilon}_{k_y} - \tilde{\mu}) g_{-1/2}(z_0) \right]}{\sum_{k_x, k_y} g_{-1/2}(z_0)} \quad (3.22)$$

donde $\tilde{\varepsilon}_{k_i} \equiv \varepsilon_{k_i} / k_B T_0$ y $\tilde{\mu} \equiv \mu / k_B T_0$. La segunda derivada del potencial químico con respecto a la temperatura de un gas ideal de bosones libre tridimensional es discontinua en $T/T_0 = 1$ (Ver apéndice A) por ello es interesante calcular $\partial^2 \mu / \partial T^2$ para nuestro sistema y ver como se modifica esta propiedad. De derivar la Ec. (3.21) con respecto a la temperatura se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{1}{k_B} \frac{\partial^2 \mu}{\partial T^2} &= \frac{\sum_{k_x, k_y} \left[\frac{1}{2k_B T^2} (\varepsilon_{k_x} + \varepsilon_{k_y} + T \frac{\partial \mu}{\partial T} - \mu) g_{-1/2}(z_0) \right]}{\sum_{k_x, k_y} g_{-1/2}(z_0)} \\ &\quad - \frac{\sum_{k_x, k_y} \left[\frac{1}{k_B^2 T^3} (\varepsilon_{k_x} + \varepsilon_{k_y} + T \frac{\partial \mu}{\partial T} - \mu)^2 g_{-3/2}(z_0) \right]}{\sum_{k_x, k_y} g_{-1/2}(z_0)} \end{aligned} \quad (3.23)$$

La expresión adimensionalizada es

$$\begin{aligned} \frac{T_0}{k_B} \frac{\partial^2 \mu}{\partial T^2} = & \frac{\sum_{k_x, k_y} \left[\frac{1}{2T^2} (\tilde{\varepsilon}_{k_x} + \tilde{\varepsilon}_{k_y} + T \frac{\partial \tilde{\mu}}{\partial T} - \tilde{\mu}) g_{-1/2}(z_0) \right]}{\sum_{k_x, k_y} g_{-1/2}(z_0)} \\ & - \frac{\sum_{k_x, k_y} \left[\frac{1}{T^3} (\tilde{\varepsilon}_{k_x} + \tilde{\varepsilon}_{k_y} + T \frac{\partial \tilde{\mu}}{\partial T} - \tilde{\mu})^2 g_{-3/2}(z_0) \right]}{\sum_{k_x, k_y} g_{-1/2}(z_0)} \end{aligned} \quad (3.24)$$

La condensación de Bose-Einstein (BEC) es un fenómeno cuántico en el que una proporción del orden del número total de partículas pueblan abruptamente el estado base que es el de menor energía, por debajo de la temperatura crítica. Para sistemas tridimensionales infinitos la BEC queda perfectamente definida en cuanto el potencial químico del sistema se hace igual a la energía del estado base, y el calor específico muestra un pico o un salto en su derivada, en T_c . Nuestro sistema es semi-infinito cuyo comportamiento dimensional puede cambiar de 3D a 2D y a 1D, dependiendo del intervalo de temperaturas en el que se encuentre. El inicio del llenado del estado base de partículas no se realiza abruptamente a una temperatura crítica sino que se requiere un intervalo de temperaturas para observar en el estado base una población “del orden del total de partículas”. No obstante es posible dar un criterio para definir una temperatura a la cual una fracción del número de partículas se encuentran en el estado base [9]. El número de partículas en el estado base N_0 está dado por

$$N_0 = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_0 - \mu)} - 1} \quad (3.25)$$

con $\varepsilon_0 \equiv \varepsilon_{0x} + \varepsilon_{0y}$, ya que $\varepsilon_{0z} = 0$. De derivar la ecuación anterior con respecto a la temperatura se obtiene

$$\frac{T}{N_0} \frac{\partial N_0}{\partial T} = \frac{\beta(\varepsilon_0 + T \frac{\partial \mu}{\partial T} - \mu) e^{\beta(\varepsilon_0 - \mu)}}{e^{\beta(\varepsilon_0 - \mu)} - 1} \quad (3.26)$$

Estas dos últimas expresiones, Ec. (3.25) y Ec. (3.26), nos permitirán conocer la forma en que el estado base de nuestro sistema se está poblando conforme bajamos la temperatura y se podrá entonces comparar con el gas libre tridimensional de bosones (Ver Apéndice A).

3.1.3. Energía interna

La energía interna del sistema $U(T, V)$ se puede encontrar a partir del Gran Potencial Ω a través de la relación

$$U(T, V) = -k_B T^2 \left[\frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{\Omega}{k_B T} \right) \right]_{V, z} \quad (3.27)$$

donde $z \equiv e^{\beta\mu}$ es la fugacidad, la cual permanece constante durante la derivación parcial aunque depende de T . Así, de la Ec. (3.1) se obtiene que la energía interna está dada por

$$U(V, T) = \sum_{\mathbf{k}} \frac{\varepsilon_{\mathbf{k}}}{e^{\beta(\varepsilon_{\mathbf{k}} - \mu)} - 1} \quad (3.28)$$

donde $\varepsilon_{\mathbf{k}}$ es la energía de las partículas en el estado definido por \mathbf{k} . Equivalentemente se tiene

$$U = \sum_{k_x=0}^{\infty} \sum_{k_y=0}^{\infty} \sum_{k_z=-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon_{k_x} + \varepsilon_{k_y} + \varepsilon_{k_z}}{e^{\beta(\varepsilon_{k_x} + \varepsilon_{k_y} + \varepsilon_{k_z} - \mu)} - 1} \quad (3.29)$$

Nuevamente en el límite termodinámico la suma sobre los momentos k_z se aproxima por una integral de la forma $\sum_{k_z} \rightarrow \int (L_z/2\pi) dk_z$, con lo que se obtiene

$$U = \sum_{k_x, k_y} 2 \left(\frac{L_z}{2\pi} \right) \int_0^{\infty} dk_z \frac{\varepsilon_{k_x} + \varepsilon_{k_y} + \varepsilon_{k_z}}{e^{\beta(\varepsilon_{k_x} + \varepsilon_{k_y} + \varepsilon_{k_z} - \mu)} - 1} \quad (3.30)$$

Haciendo el cambio de variable $\xi = \beta\varepsilon_{k_z} = \beta\hbar^2 k_z^2 / 2m$, $dk_z = \frac{1}{2} (2m/\beta\hbar^2)^{1/2} \xi^{-1/2} d\xi$, entonces

$$U = \sum_{k_x, k_y} \left(\frac{L_z}{2\pi} \right) \left(\frac{2m}{\beta\hbar^2} \right)^{1/2} \int_0^{\infty} d\xi \frac{\xi^{-1/2} (\varepsilon_{k_x} + \varepsilon_{k_y} + \varepsilon_{k_z})}{z_0^{-1} e^{\xi} - 1} \quad (3.31)$$

donde $z_0^{-1} = e^{\beta(\varepsilon_{k_x} + \varepsilon_{k_y} - \mu)}$. Reordenando,

$$U = \sum_{k_x, k_y} \left(\frac{L_z}{2\pi} \right) \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{1/2} \left[\frac{1}{\beta^{3/2}} \int_0^{\infty} d\xi \frac{\xi^{1/2}}{z_0^{-1} e^{\xi} - 1} + \frac{1}{\beta^{1/2}} \int_0^{\infty} d\xi \frac{\xi^{-1/2} (\varepsilon_{k_x} + \varepsilon_{k_y})}{z_0^{-1} e^{\xi} - 1} \right] \quad (3.32)$$

Así, podemos reescribir la expresión para la energía interna en términos de la función de Bose Ec. (3.11)

$$U = \sum_{k_x, k_y} L_z \left(\frac{m}{2\pi\hbar^2} \right)^{1/2} \left[\frac{1}{2\beta^{3/2}} g_{3/2}(z_0) + \frac{1}{\beta^{1/2}} (\varepsilon_{k_x} + \varepsilon_{k_y}) g_{1/2}(z_0) \right] \quad (3.33)$$

donde se usó que $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ y $\Gamma(3/2) = \sqrt{\pi}/2$. Para obtener una expresión adimensionalizada de la energía interna del sistema se multiplican ambos lados de la ecuación anterior por $1/Nk_B T$ y se resta el término $N\varepsilon_0$ que cuantifica la contribución total a la energía de los bosones en el estado base, donde $\varepsilon_0 \equiv \varepsilon_{k_{x0}} + \varepsilon_{k_{y0}}$, de esta forma se tiene la energía interna con referencia al estado base del sistema

$$\begin{aligned} \frac{U - N\varepsilon_0}{Nk_B T} = & \frac{1}{a_{0x} a_{0y} \zeta(3/2) (M_x + 1) (M_y + 1)} \sum_{k_x, k_y} \left[\frac{\tilde{T}^{1/2}}{2} g_{3/2}(z_0) \right. \\ & \left. + \frac{1}{\tilde{T}^{1/2}} (\tilde{\varepsilon}_{k_x} + \tilde{\varepsilon}_{k_y} - \tilde{\varepsilon}_0) g_{1/2}(z_0) \right] \end{aligned} \quad (3.34)$$

Ésta es la ecuación adimensionalizada para la energía interna del sistema en función de la temperatura, volumen y potencial químico.

3.1.4. Calor específico

El calor específico isocórico, es decir, el que corresponde a un proceso termodinámico a volumen constante, está dado en términos de la energía interna,

$$C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_{N, V} \quad (3.35)$$

De la expresión para la energía interna Ec. (3.33), se deriva con respecto a la temperatura a N y V constantes para determinar el calor específico

$$\begin{aligned} C_V = & \sum_{k_x, k_y} L_z \left(\frac{m}{2\pi\hbar^2} \right)^{1/2} \left[\frac{3}{4} k_B^{3/2} T^{1/2} g_{3/2}(z_0) + \frac{1}{2} \left(\frac{k_B}{T} \right)^{1/2} (\varepsilon_{k_x} + \varepsilon_{k_y}) g_{1/2}(z_0) \right. \\ & \left. + \frac{(k_B T)^{3/2}}{2} \frac{\partial g_{3/2}(z_0)}{\partial z_0} \frac{\partial z_0}{\partial T} + (k_B T)^{1/2} (\varepsilon_{k_x} + \varepsilon_{k_y}) \frac{\partial g_{1/2}(z_0)}{\partial z_0} \frac{\partial z_0}{\partial T} \right] \end{aligned} \quad (3.36)$$

de usar la Ec. (3.19) para $\partial z_0/\partial T$ y la propiedad de la derivada de la función de Bose, $z \frac{\partial}{\partial z} g_\nu(z) = g_{\nu-1}(z)$, la expresión para el calor específico se transforma en

$$\begin{aligned}
 C_V = & \sum_{k_x, k_y} L_z \left(\frac{m}{2\pi\hbar^2} \right)^{1/2} \left[\frac{3}{4} k_B^{3/2} T^{1/2} g_{3/2}(z_0) \right. \\
 & + \frac{1}{2} \left(\frac{k_B}{T} \right)^{1/2} \left(2\varepsilon_{k_x} + 2\varepsilon_{k_y} + T \frac{\partial \mu}{\partial T} - \mu \right) g_{1/2}(z_0) \\
 & \left. + \frac{1}{k_B^{1/2} T^{3/2}} (\varepsilon_{k_x} + \varepsilon_{k_y}) \left(\varepsilon_{k_x} + \varepsilon_{k_y} + T \frac{\partial \mu}{\partial T} - \mu \right) g_{-1/2}(z_0) \right]
 \end{aligned} \tag{3.37}$$

De manera natural aparece una dependencia en la derivada del potencial químico respecto a la temperatura, para la cual ya se tiene la expresión Ec. (3.21). Para obtener una expresión adimensionalizada del calor específico la ecuación anterior se divide por Nk_B , la temperatura se da en unidades de T_0 y la energía en unidades de $k_B T_0$

$$\begin{aligned}
 \frac{C_V}{Nk_B} = & \frac{1}{a_{0x} a_{0y} \zeta(3/2) (M_x + 1) (M_y + 1)} \sum_{k_x, k_y} \left[\frac{3}{4} \tilde{T}^{1/2} g_{3/2}(z_0) \right. \\
 & + \frac{1}{2\tilde{T}^{1/2}} \left(2\tilde{\varepsilon}_{k_x} + 2\tilde{\varepsilon}_{k_y} + T \frac{\partial \tilde{\mu}}{\partial T} - \tilde{\mu} \right) g_{1/2}(z_0) \\
 & \left. + \frac{1}{\tilde{T}^{3/2}} (\tilde{\varepsilon}_{k_x} + \tilde{\varepsilon}_{k_y}) \left(\tilde{\varepsilon}_{k_x} + \tilde{\varepsilon}_{k_y} + T \frac{\partial \tilde{\mu}}{\partial T} - \tilde{\mu} \right) g_{-1/2}(z_0) \right]
 \end{aligned} \tag{3.38}$$

Ésta es la expresión final adimensionalizada del calor específico por bosón en función de la temperatura, volumen y potencial químico.

3.2. Resultados

En esta sección se presentan y discuten los resultados obtenidos para las propiedades termodinámicas de algunos sistemas bosónicos, cada uno de ellos consiste de un gas de bosones que no interactúan entre sí confinados en filamentos de sección transversal finita y longitud infinita. Primero se analiza un sistema de bosones en un solo filamento de paredes impenetrables de sección transversal cuadrada y longitud infinita; después se estudian las propiedades termodinámicas de un sistema de $(M + 1) \times (M + 1)$ filamentos de sección transversal cuadrada unidos para formar

un cable de frontera impenetrable. Se toman M deltas tanto en la dirección de x como en la dirección de y , separadas una distancia a . Posteriormente se estudia cómo cambian las propiedades del sistema isotrópico ($a_x = a_y$) como función de la impenetrabilidad P_0 de las paredes de los filamentos. Finalmente se discuten los resultados para sistemas anisotrópicos, $a_x \neq a_y$ o $M_x \neq M_y$.

3.2.1. Tubo semi-infinito de sección transversal cuadrada y longitud infinita

Considérese el caso en el que el número de deltas de Dirac en las direcciones x y y es cero, $M_x = M_y \equiv M = 0$, y las longitudes en estas direcciones son iguales $L_x = L_y \equiv a$, así, el sistema se reduce a partículas bosónicas en un tubo semi-infinito de sección transversal cuadrada a^2 , longitud infinita y paredes impenetrables como se muestra en la Fig. 3.1. En esta sección se presentan los principales resultados para este sistema como lo son la primera y segunda derivada con respecto a la temperatura del potencial químico, el número de partículas en el estado de mínima energía, el calor específico, entre otras. Graficamos las propiedades termodinámicas para diferentes valores del área de la sección transversal del tubo semi-infinito como función de la temperatura, de esta forma podemos observar los cambios que experimentan al variar el área de la sección transversal del tubo.

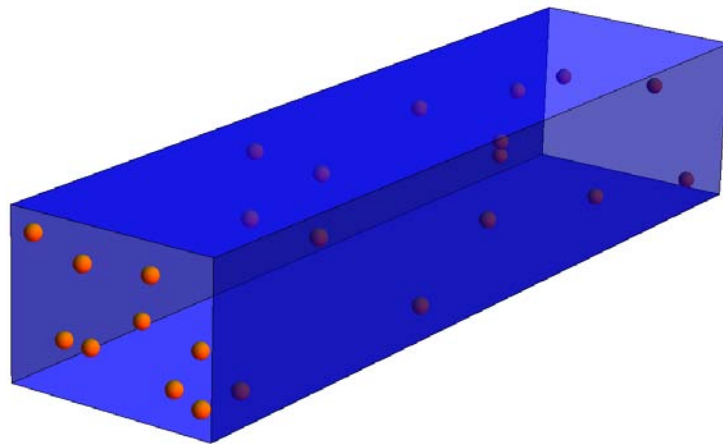


Figura 3.1: Tubo semi-infinito de sección transversal cuadrada.

Para sistemas tridimensionales infinitos la BEC queda perfectamente definida en cuanto el potencial químico del sistema se hace igual a la energía del estado base, y el calor específico muestra un pico o un salto en su segunda derivada, en T_c . Para nuestro sistema semi-infinito no hay una temperatura diferente de cero a la cual el potencial químico se hace exactamente igual a la energía del estado base, en lugar de eso se tiene que para temperaturas menores que T_0 el potencial químico tiende asintóticamente y monótonamente a la energía del estado base, por lo que no existe una discontinuidad en la segunda derivada. Para explorar mejor esta situación en la Fig. 3.2 se muestran las curvas de la derivada del potencial químico $\partial\mu/\partial T$ como función de la temperatura para algunos valores del área de la sección transversal $(a/\lambda_0)^2$ del tubo semi-infinito, en escala log-log.

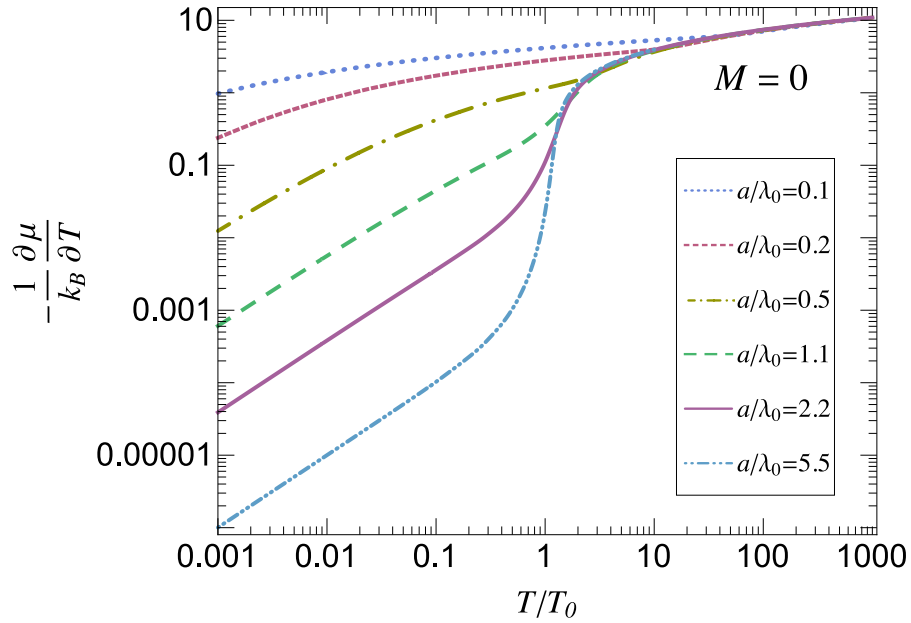


Figura 3.2: Tubo semi-infinito con sección transversal cuadrada. Derivada negativa del potencial químico como función de T/T_0 para $M = 0$ y $a/\lambda_0 = 0.1, 0.2, 0.5, 1.1, 2.2, 5.5$, en escala log-log.

De la Fig. 3.2 se observa que $\partial\mu/\partial T < 0$ se va a cero conforme $T/T_0 \rightarrow 0$.

Cuando $T \gg T_0$ todas las curvas de la derivada del potencial químico decrecen con la misma pendiente que la del gas ideal libre tridimensional. A medida que el sistema se hace más grande, incrementando el valor de la sección transversal del tubo $(a/\lambda_0)^2$, su comportamiento se asemeja más al gas ideal libre de bosones (ver Fig. A.1 del Apéndice A).

La segunda derivada del potencial químico con respecto a la temperatura se muestra en la Fig. 3.3 como función de T/T_0 para $a/\lambda_0 = 0.1, 0.2, 0.5, 1.1, 2.2, 5.5$, en escala log-log.

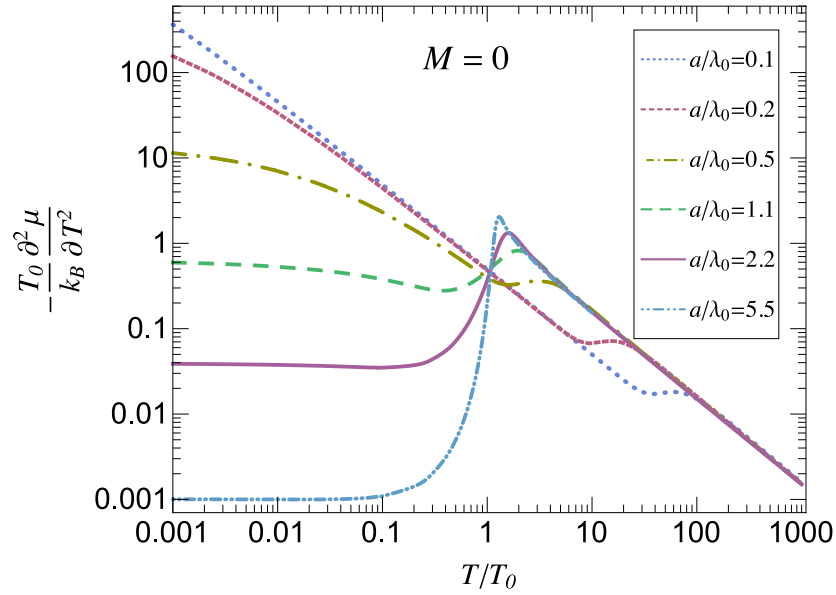


Figura 3.3: Tubo semi-infinito con sección transversal cuadrada. Valor negativo de la segunda derivada del potencial químico como función de T/T_0 para $M = 0$ y $a/\lambda_0 = 0.1, 0.2, 0.5, 1.1, 2.2, 5.5$, en escala log-log.

La curva de $\partial\mu^2/\partial T^2 < 0$ para un gas ideal de bosones libre tridimensional (infinito en las tres direcciones) se muestra en la Fig. A.2 del Apéndice A, la cual es discontinua en $T = T_0$. Cabe resaltar que nuestro sistema es finito en dos direcciones y es la finitud de nuestro sistema la que ocasiona que $\partial\mu^2/\partial T^2$ sea continua alrededor de $T/T_0 = 1$, uno de los llamados efectos de tamaño finito. En particular, de la Fig.

3.3 vemos que para $a/\lambda_0 \geq 0.5$ aparece un máximo alrededor de $T/T_0 = 1$ en lugar de una discontinuidad, el cual se hace más agudo al incrementar el área de la sección transversal del tubo. Cuando $T/T_0 \rightarrow 0$ las curvas de la segunda derivada del potencial químico con respecto a la temperatura para los diferentes valores de $(a/\lambda_0)^2$ no van a cero, si no más bien parecen tender a un valor constante, cuya magnitud disminuye acercándose a cero conforme aumentamos la sección transversal del tubo. Nuevamente vemos que al incrementar la sección transversal del tubo semi-infinito el comportamiento de $\partial\mu^2/\partial T^2$ se parece más al del gas libre tridimensional.

La Fig. 3.4 muestra el número de partículas en el estado base N_0 como función de la temperatura para algunos valores de a/λ_0 .

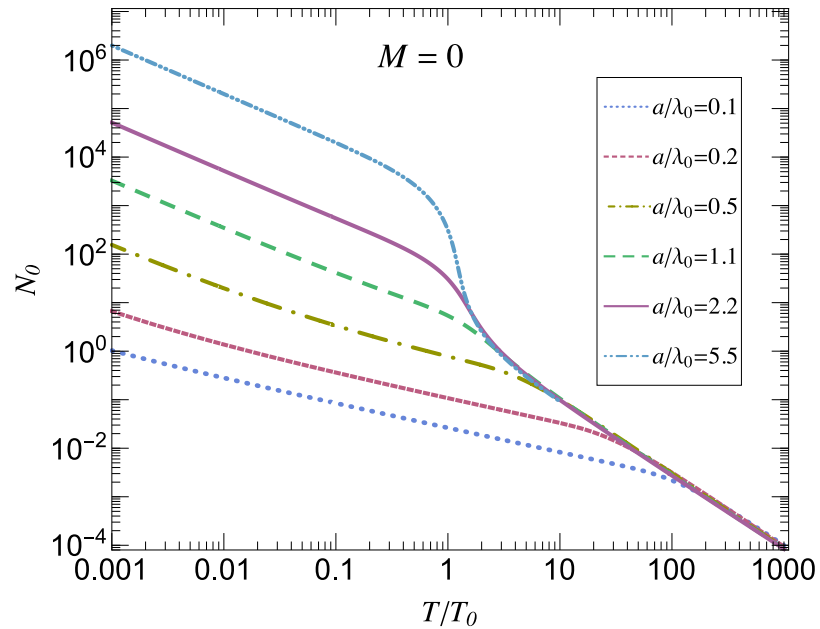


Figura 3.4: Tubo semi-infinito con sección transversal cuadrada. Número de partículas en el estado base como función de T/T_0 para $M = 0$ y $a/\lambda_0 = 0.1, 0.2, 0.5, 1.1, 2.2, 5.5$.

Algunas características de N_0 son: Cuando $T/T_0 \rightarrow 0$, el número de partículas en el estado base N_0 crece como $(T/T_0)^{-1}$, donde la constante de proporcionalidad depende de la separación a entre dos deltas. Mientras que para $T/T_0 \gg 1$, N_0 decrece

como $(T/T_0)^{-3/2}$, y la constante de proporcionalidad es independiente del área de la sección transversal del tubo. Este comportamiento para temperaturas altas es fácil de obtener, recordando la definición de N_0 :

$$N_0 = \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon_0}{k_B T}(\varepsilon_0 - \mu)} - 1} \quad (3.39)$$

Por otro lado, para $T/T_0 \gg 1$ nuestro sistema se comporta clásicamente, la longitud de onda de de Broglie de los bosones es muy pequeña comparada con las dimensiones de la caja, por ello podemos tomar la expresión para el potencial químico de un sistema clásico, que está dada por [28]

$$\mu = k_B T \ln \left[\zeta(3/2) \left(\frac{T}{T_0} \right)^{-3/2} \right] \quad (3.40)$$

De sustituir la expresión anterior en la Ec. (3.39) se obtiene

$$N_0 = \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon_0}{k_B T} \left[\zeta(3/2) \left(\frac{T}{T_0} \right)^{-3/2} \right]^{-1}} - 1} \approx \frac{1}{[\zeta(3/2)]^{-1} \left(\frac{T}{T_0} \right)^{3/2} - 1} \approx \zeta(3/2) \left(\frac{T}{T_0} \right)^{-3/2} \quad (3.41)$$

así, N_0 decrece como $(T/T_0)^{-3/2}$ para $T/T_0 \gg 1$.

A manera de amplificar la forma en que se está poblando el estado base conforme se baja la temperatura, en la Fig. 3.5 graficamos el negativo de la derivada del número de partículas en el estado base con respecto a la temperatura, multiplicada por T y dividida por N_0 , como función de T/T_0 para $a/\lambda_0 = 0.1, 0.2, 0.5, 1.1, 2.2, 5.5$. Se observa que la fracción $(T/N_0)\partial N_0/\partial T$ tiende al valor -1 conforme $T/T_0 \rightarrow 0$ y para $T/T_0 \gg 1$ tiende al valor -3/2, independientemente del valor de a/λ_0 .

En un análisis caso por caso de la Fig. 3.5, se observa que cuando $a/\lambda_0 = 0.1$ y 0.2 la fracción $(T/N_0)\partial N_0/\partial T$ se va a 1 conforme $T/T_0 \rightarrow 0$. Decrece de manera monótona con T/T_0 hasta que se presenta una meseta en una región relativamente grande de temperaturas, ésta se extiende conforme la sección transversal del tubo se reduce. En dicha meseta, el valor de $\frac{T}{N_0} \frac{\partial N_0}{\partial T}$ se acerca a 1/2. Para temperaturas mayores que T_0 la fracción crece uniformemente al valor 3/2.

Para $a/\lambda_0 = 0.5$ y 1.1 la fracción $(T/N_0)\partial N_0/\partial T$ se va a 1 conforme $T/T_0 \rightarrow 0$.

Decrece de manera monótona con T/T_0 hasta que alcanza un mínimo; al seguir incrementando la temperatura alcanza un máximo para después disminuir uniformemente al valor $3/2$.

Cuando $a/\lambda_0 = 2.2$ y 5.5 la fracción $(T/N_0)\partial N_0/\partial T$ se va a 1 conforme $T/T_0 \rightarrow 0$. Crece de manera monótona con T/T_0 hasta que alcanza un máximo alrededor de $T = T_0$, la altura del máximo crece al incrementar la sección transversal de la caja. Después disminuye uniformemente al valor $3/2$.

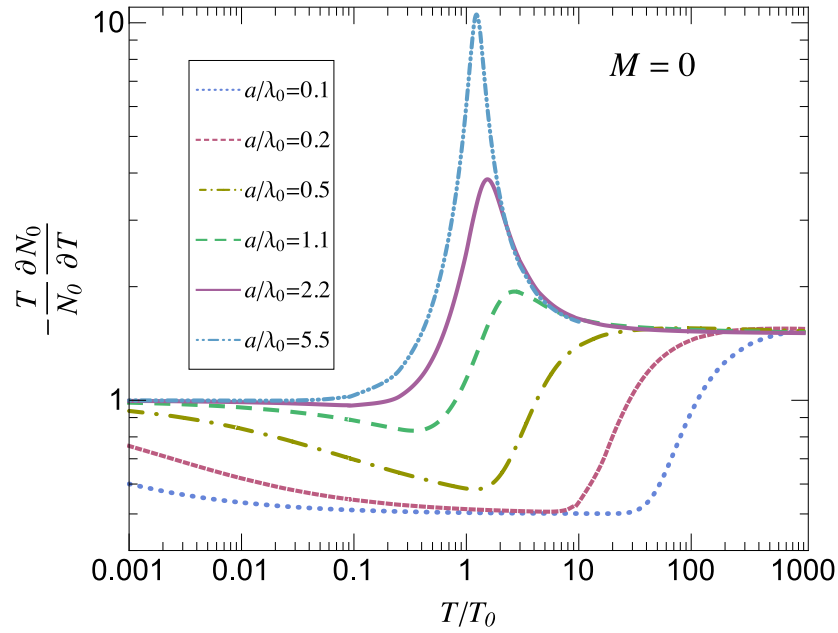


Figura 3.5: Tubo semi-infinito con sección transversal cuadrada. Valor negativo de la derivada del número de partículas en el estado base N_0 , por partícula en el estado base y multiplicada por la temperatura, como función de T/T_0 para $M = 0$ y $a/\lambda_0 = 0.1, 0.2, 0.5, 1.1, 2.2, 5.5$.

La Fig. A.4, del Apéndice A, muestra el valor negativo de la derivada del número de partículas en el estado base, por partícula en el estado base y multiplicada por la temperatura, para un gas ideal de bosones libre. Conforme $T/T_0 \rightarrow 0$ la fracción $\frac{T}{N_0} \frac{\partial N_0}{\partial T}$ se va a cero. Por otra parte, $\frac{T}{N_0} \frac{\partial N_0}{\partial T}$ se va a infinito en $T = T_0$. Al incrementar la temperatura a partir de $T/T_0 = 1$ la derivada del número de partículas en el estado base disminuye monótonamente al valor $3/2$.

Ahora bien, si comparamos las diferentes curvas de la Fig. 3.5 y la Fig. A.4 que corresponde al gas ideal libre vemos 2 diferencias notables: primero, conforme $T/T_0 \rightarrow 0$ el valor de $\frac{T}{N_0} \frac{\partial N_0}{\partial T}$, para nuestro sistema, no se va a cero como en el gas libre sino que tiende a 1. Segundo, para el gas ideal libre $\frac{T}{N_0} \frac{\partial N_0}{\partial T}$ es infinito en $T = T_0$, mientras que para nuestro sistema la curva de $\frac{T}{N_0} \frac{\partial N_0}{\partial T}$ siempre es finita. Ambos sistemas, gas libre y gas confinado, tienden monótonamente al valor $3/2$ para $T/T_0 \gg 1$. El comportamiento para $T/T_0 \gg 1$ se deduce fácilmente de la Ec. (3.41)

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_0}{\partial T} &= -\frac{3}{2} \frac{1}{\zeta(3/2)} \left(\frac{T}{T_0} \right)^{-3/2} \frac{1}{T} \\ \Rightarrow \frac{T}{N_0} \frac{\partial N_0}{\partial T} &= -\frac{3}{2} \end{aligned} \quad (3.42)$$

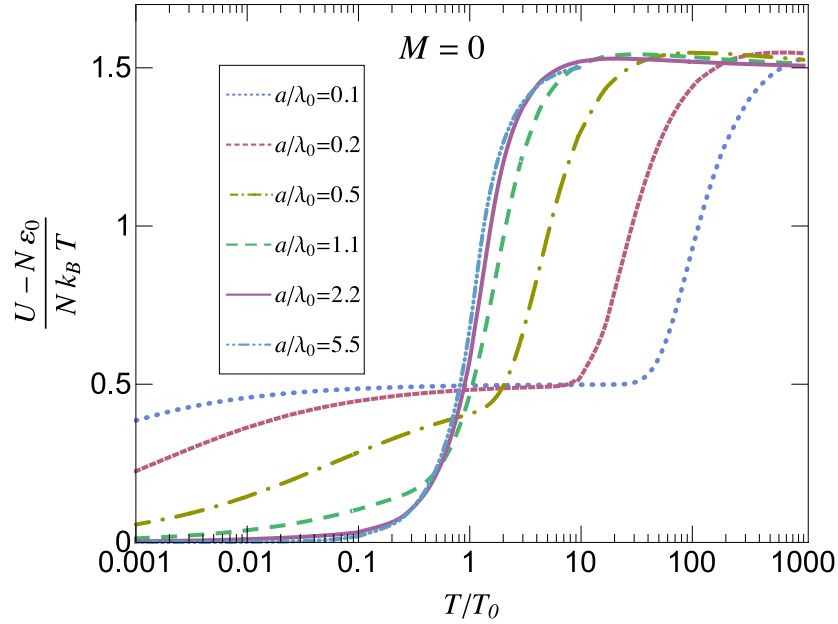


Figura 3.6: Tubo semi-infinito con sección transversal cuadrada. Energía interna como función de T/T_0 para $M = 0$ y $a/\lambda_0 = 0.1, 0.2, 0.5, 1.1, 2.2, 5.5$.

Para este sistema las gráficas de la energía interna como función de la temperatura para diferentes valores de la sección transversal del tubo se muestran en la Fig. 3.6. $(U - \varepsilon_0 N)/Nk_B T$ crece de manera monótona con T/T_0 hasta que alcanza un máximo

cuya altura excede ligeramente el valor clásico $3/2$, después disminuye uniformemente a este valor. El comportamiento de la energía interna se analizará con más detalle en la siguiente sección.

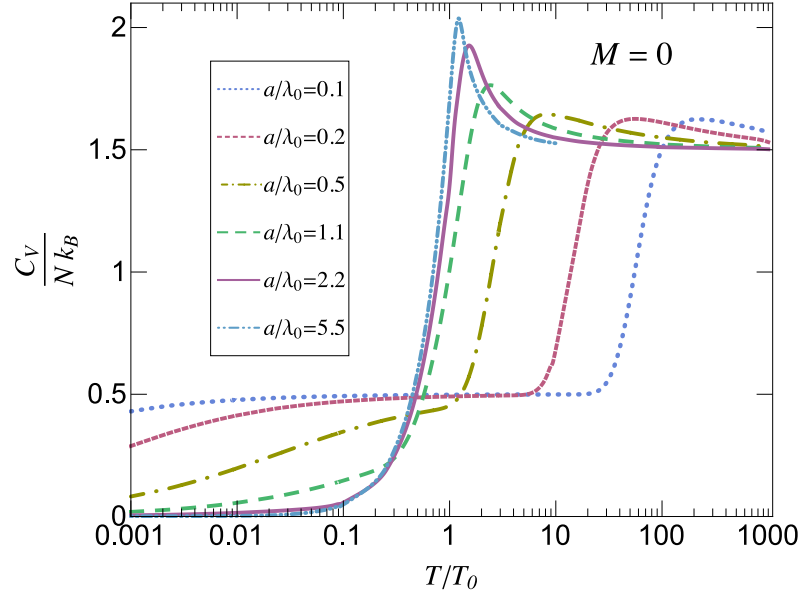


Figura 3.7: Tubo semi-infinito con sección transversal cuadrada. Calor específico como función de T/T_0 para $M = 0$ y $a/\lambda_0 = 0.1, 0.2, 0.5, 1.1, 2.2, 5.5$.

En la Fig. 3.7 se muestra el calor específico isocórico como función de la temperatura, para un tubo semi-infinito de paredes impenetrables, para diferentes valores de la sección transversal $(a/\lambda_0)^2$. A medida que la temperatura tiende a cero $C_V \rightarrow 0$. El calor específico presenta un máximo, después disminuye lentamente hacia el valor 1.5 al incrementar la temperatura, como se esperaba. Para $a/\lambda_0 = 0.1$ y 0.2 se observa un comportamiento unidimensional sobre un intervalo relativamente grande de temperaturas, esto es, C_V/Nk_B se aproxima al valor clásico $1/2$.

3.2.2. Tubos multifilamentos. Casos isotrópicos.

En esta sección se presentan los resultados principales para el caso isotrópico, es decir, $P_{0x} = P_{0y}$, $M_x = M_y$ y para diferentes valores de la separación de las deltas $a_{0x} = a_{0y}$. En este caso usamos el término isotrópico para referirnos a que el sistema bosónico es equivalente en las direcciones x y y , es claro que el sistema no es igual

en la dirección z . La Fig. 3.8 muestra un esquema del sistema de bosones.

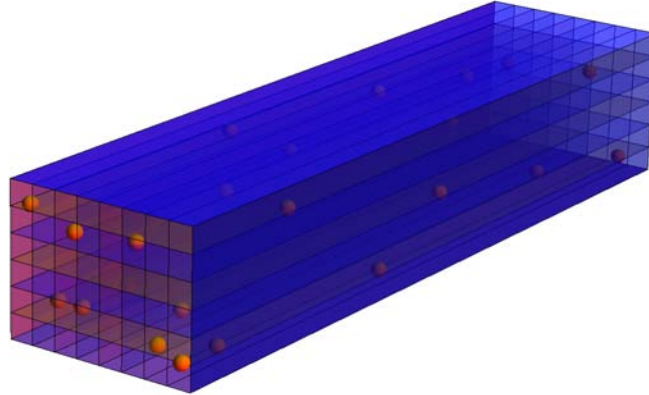


Figura 3.8: Tubo multifilamentos de sección transversal cuadrada.

Caso isotrópico: $P_0 = 10; M = 10$.

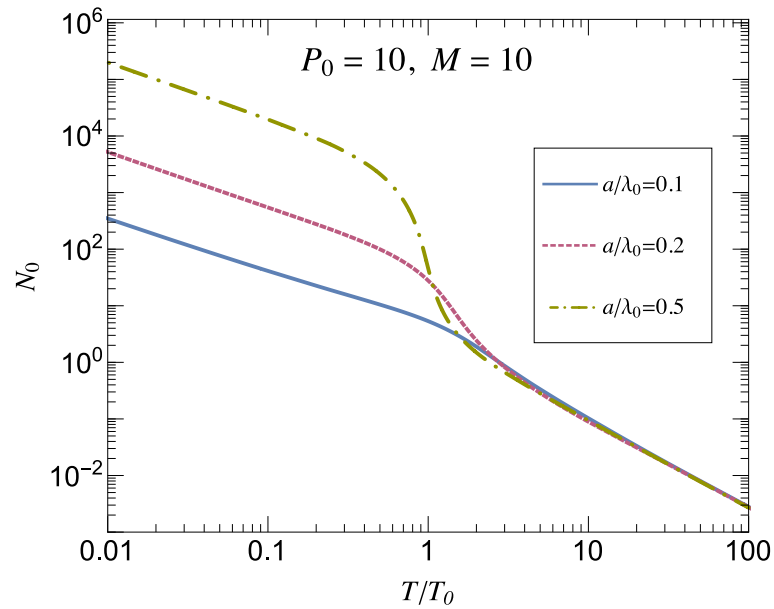


Figura 3.9: Tubo multifilamentos semi-infinito con sección transversal cuadrada. Número de partículas en el estado base N_0 como función de T/T_0 para $P_0 = 10$, $M = 10$ y $a/\lambda_0 = 0.1, 0.2, 0.5$.

Considérese un potencial Peine de Dirac finito tal que $P_0 = 10$ y $M = 10$, lo cual significa que se tiene un potencial de una magnitud relativamente moderada. El gas de Bose se encuentra confinado en un arreglo de 11×11 filamentos con sección transversal cuadrada $(a/\lambda_0)^2$ y longitud infinita. Para este potencial, las gráficas del número de partículas en el estado base N_0 en función de la temperatura para diferentes valores de a/λ_0 se muestran en la Fig. 3.9. Observamos que N_0 tiene un comportamiento parecido a aquél observado para el tubo de un filamento, para $T/T_0 \ll 1$, $= 1$ y $\gg 1$, descrito en la sección anterior.

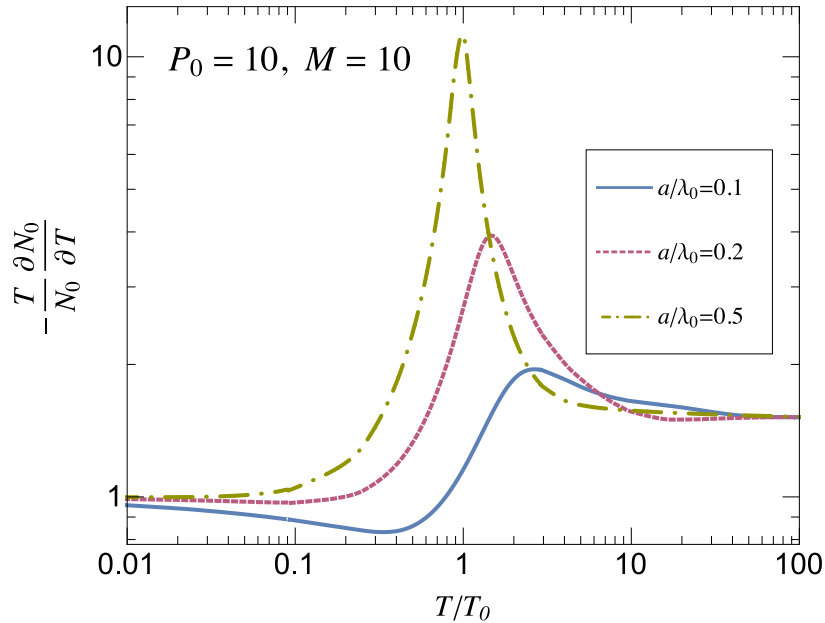


Figura 3.10: Tubo multifilamentos semi-infinito con sección transversal cuadrada. Valor negativo de la derivada del número de partículas en el estado base N_0 , por partícula en el estado base y multiplicada por la temperatura, como función de T/T_0 para $P_0 = 10$, $M = 10$ y $a/\lambda_0 = 0.1, 0.2, 0.5$.

La Fig. 3.10 muestra el valor negativo de la derivada del número de partículas en el estado base, por partícula en el estado base y multiplicada por la temperatura, como función de T/T_0 para $P_0 = 10$, $M = 10$ y $a/\lambda_0 = 0.1, 0.2, 0.5$ valores de la separación entre la deltas. Observando con mayor detalle la fracción $(T/N_0)\partial N_0/\partial T$ para el tubo de un filamento, Fig. 3.5, y aquella para un tubo de 11×11 filamentos

Fig. 3.10, concluimos que el aumento del número de filamentos desplaza el máximo a una temperatura menor y aumenta su altura, para las correspondientes a/λ_0 .

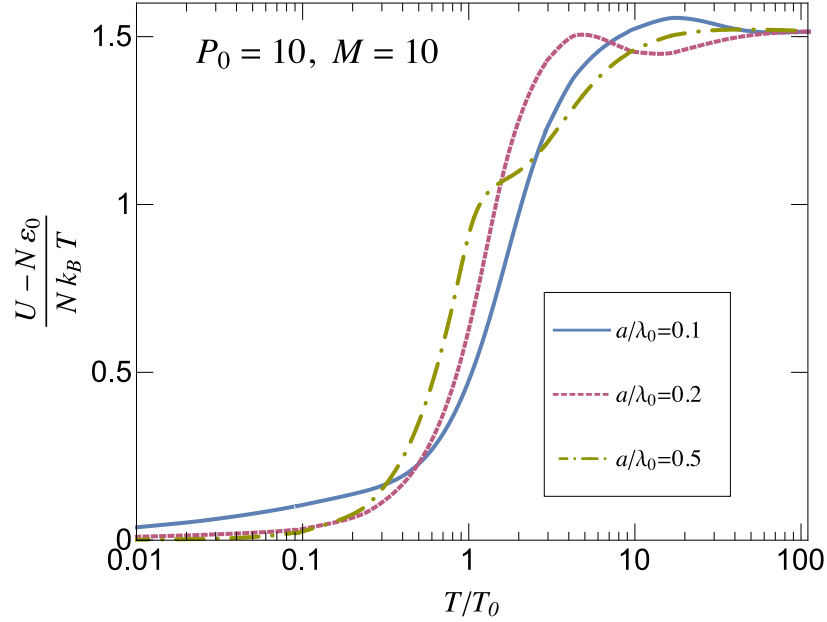


Figura 3.11: Tubo multifilamentos semi-infinito con sección transversal cuadrada. Energía interna como función de T/T_0 para $P_0 = 10$, $M = 10$ y $a/\lambda_0 = 0.1, 0.2, 0.5$.

La energía interna por bosón en función de la temperatura se muestra en la Fig. 3.11, para valores de la separación entre las barreras $a/\lambda_0 = 0.1, 0.2, 0.5$.

Algunas características de $(U - \varepsilon_0 N)/Nk_B T$ son que para bajas temperaturas $T/T_0 \rightarrow 0$ la energía tiende a cero, y para temperaturas altas $T \gg T_0$, la energía por partícula tiende a su valor clásico, como se esperaba. En particular para $a/\lambda_0 = 0.1$ crece de manera monótona con T/T_0 hasta que alcanza un máximo cuya altura excede ligeramente el valor clásico $3/2$, después disminuye uniformemente a este valor. Para $a/\lambda_0 = 0.2$, la energía interna crece de manera monótona con T/T_0 hasta que alcanza un primer máximo con una altura muy próxima al valor clásico 3D, después se presenta un mínimo; al seguir incrementando la temperatura alcanza un segundo máximo cuya altura excede ligeramente $3/2$ para después disminuir lentamente a este valor. Para $a/\lambda_0 = 0.5$, $(U - \varepsilon_0 N)/Nk_B T$ crece de manera monótona con T/T_0

hasta que se presenta un punto de inflexión, después continua incrementándose hasta que alcanza un máximo cuya altura excede ligeramente el valor clásico $3/2$, después disminuye uniformemente a este valor.

Para este sistema las gráficas del calor específico en función de la temperatura para diferentes valores de la sección transversal de cada filamento $(a/\lambda_0)^2$ se muestran en la Fig. 3.12. Es claro que el calor específico presenta una estructura más compleja que el caso de un gas ideal de bosones libres y que el caso de un tubo con un filamento, tratado en la sección anterior. Para $T > T_0$, El calor específico no disminuye monótonamente como en el gas ideal, a medida que se incrementa la temperatura, sino que presente máximos y mínimos locales que están directamente relacionados con los parámetros de los M potenciales delta de Dirac, P_0 y a_0 .

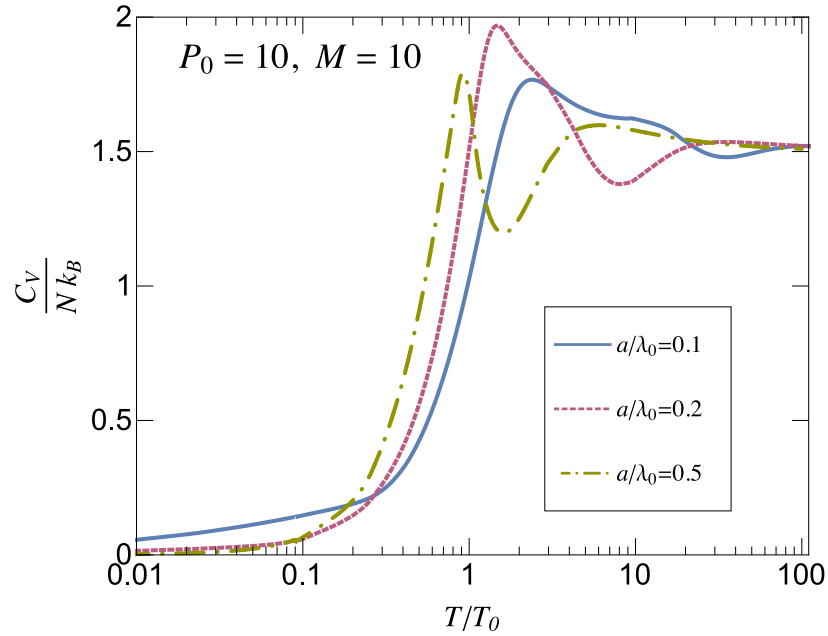


Figura 3.12: Tubo multifilamentos semi-infinito con sección transversal cuadrada. Calor específico como función de T/T_0 para $P_0 = 10$, $M = 10$ y $a/\lambda_0 = 0.1, 0.2, 0.5$.

De la Fig. 3.12 se observa que el calor específico se va a cero conforme $T \rightarrow 0$. Por otra parte C_V crece de manera monótona a medida que $T \rightarrow T_0$, al seguir incrementando la temperatura las curvas de C_V muestran al menos dos máximos

y un mínimo. Cuando $T/T_0 \gg 1$ C_V/Nk_B toma el valor $3/2$, así el sistema es consistente con el límite clásico. Una diferencia importante respecto a los sistemas infinitos de bosones [24] es que el primer máximo de C_V/Nk_B , de menor a mayor temperatura, no se da a una temperatura bien definida, sino que se extiende sobre un intervalo finito de temperaturas.

Haciendo un análisis caso por caso de la Fig. 3.12, se observa que cuando $a/\lambda_0 = 0.1$ el primer máximo, de menor a mayor temperatura, aparece a $T/T_0 \approx 2.4$. El mínimo aparece a temperaturas tales que $\lambda \simeq 2a$, este mínimo refleja la tendencia del sistema a comportarse en 1D. Después el C_V/Nk_B empieza a aumentar hasta superar ligeramente el valor clásico de $3/2$, para luego regresar a este valor.

Cuando $a/\lambda_0 = 0.2$ el calor específico presenta un máximo a $T \approx 1.5 T_0$, cuyo valor es muy próximo al del gas ideal de bosones 3D libre a T_0 , es decir, 1.925; después se presenta un mínimo nuevamente a temperaturas tales que la longitud de onda térmica de de Broglie $\lambda \simeq 2a$. A temperaturas mayores C_V/Nk_B se incrementa hasta alcanzar un máximo, para después disminuir monótonamente a $3/2$.

Finalmente cuando $a/\lambda_0 = 0.5$ el primer máximo, de derecha a izquierda, se presenta a una temperatura ligeramente menor que T_0 y su altura es menor que en los dos casos anteriores. Al igual que para $a/\lambda_0 = 0.1$ y $a/\lambda_0 = 0.2$ el mínimo aparece a temperaturas tales que $\lambda \simeq 2a$. A temperaturas mayores C_V/Nk_B se incrementa hasta alcanzar un máximo, para después disminuir monótonamente a $3/2$.

Así, es de notar que el primer máximo, de menor a mayor temperatura, refleja el preámbulo de la aparición de una condensación Bose-Einstein. Por otro lado el mínimo indica la tendencia del sistema a comportarse en 1D, se asocia a la captura de partículas entre dos planos y aparece a temperaturas tales que $\lambda \simeq 2a$. Este mínimo llega a ser una meseta al incrementar la intensidad del potencial, esto se analiza más adelante. El segundo máximo marca el umbral del comportamiento 3D del sistema. Regularmente aparece a temperaturas tales que la longitud de onda térmica de de Broglie $\lambda \simeq 0.8a$.

Caso isotrópico: $M = 10$; $a/\lambda_0 = 0.2$.

En esta sección se analiza como varían las propiedades termodinámicas del sistema como función de la impenetrabilidad P_0 de las paredes de los filamentos. Proce-

diendo de manera análoga a los casos anteriores, considérese una caja impenetrable con $M_x = M_y \equiv M = 10$ y $a_x/\lambda_0 = a_y/\lambda_0 \equiv a_0 = 0.2$ la separación entre las deltas.

En secciones anteriores se analizó el número de partículas en el estado base N_0 como función de la temperatura y se encontró que para temperaturas tales que $T/T_0 \gg 1$, N_0 es independiente de la separación de las deltas a , es decir, el sistema recobra el comportamiento clásico, reflejado en una pendiente de $-3/2$, pero cuando $T/T_0 \rightarrow 0$ el número de partículas en el estado base N_0 es proporcional a T^{-1} y depende de la separación de las deltas (ver Fig. 3.4 y Fig. 3.9), es decir, entre más grande es la sección transversal de los filamentos hay más partículas en el estado base a una temperatura determinada.

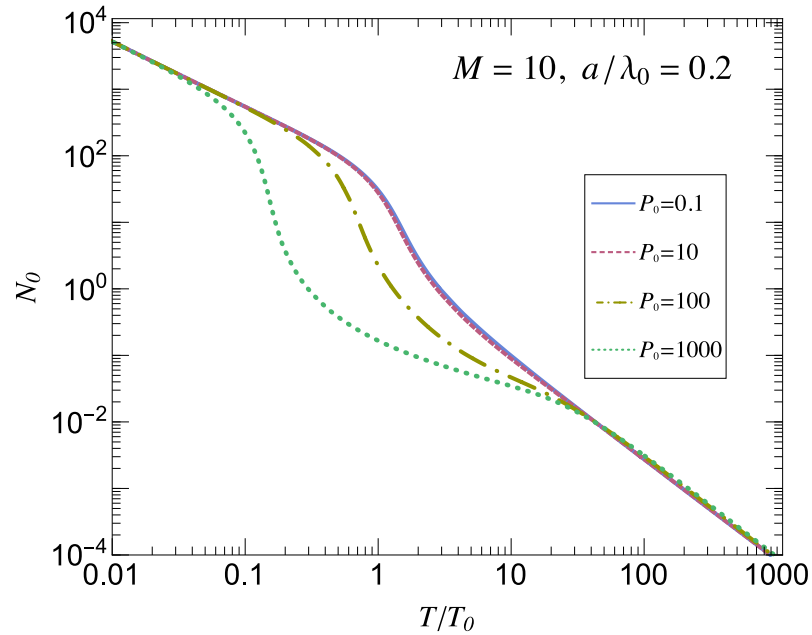


Figura 3.13: Tubo multifilamentos semi-infinito con sección transversal cuadrada. Número de partículas en el estado base N_0 como función de T/T_0 para $M = 10$, $a/\lambda_0 = 0.2$ y $P_0 = 0.1, 10, 100, 1000$.

La Fig. 3.13 muestra N_0 para un sistema con $M = 10$ y $a/\lambda_0 = 0.2$ y diferentes valores de la impenetrabilidad de las paredes de los filamentos P_0 . Nuevamente para $T/T_0 \rightarrow 0$, $N_0 \propto (T/T_0)^{-1}$ y cuando $T/T_0 \gg 1$, $N_0 \propto (T/T_0)^{-3/2}$. De observar

dicha figura es inmediato concluir que el número de partículas en el estado base es independiente de la intensidad del potencial P_0 para bajas y altas temperaturas, y sólo depende de la separación entre las deltas para temperaturas bajas. Notoriamente, el efecto de aumentar P_0 es aumentar el intervalo de temperaturas alrededor de T_0 , donde el comportamiento de N_0 como función de la temperatura, se separa de los dos comportamientos mencionados a bajas y altas temperaturas.

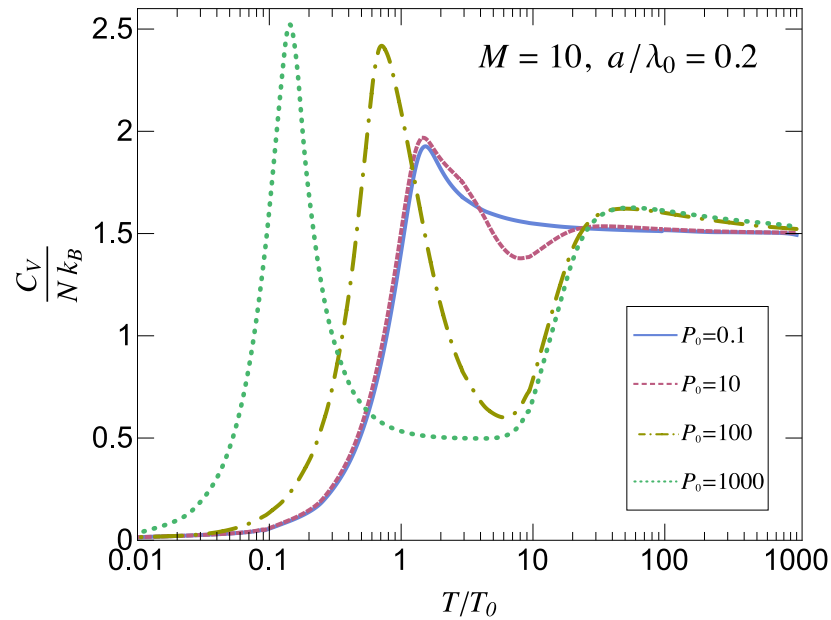


Figura 3.14: Tubo multifilamentos semi-infinito con sección transversal cuadrada. Calor específico como función de T/T_0 para $M = 10$, $a/\lambda_0 = 0.2$ y $P_0 = 0.1, 10, 100, 1000$.

En la Fig. 3.14 se muestran las curvas del calor específico a volumen constante como función de la temperatura para este sistema. Vemos que el primer máximo en el calor específico, de menor a mayor temperatura, el asociado al preámbulo de la aparición de una BEC, se desplaza a temperaturas más bajas a medida que la impenetrabilidad P_0 de las paredes de los filamentos crece. Se han graficado los calores específicos para un intervalo de impenetrabilidades de 0.1 a 1000, si continuáramos incrementando el valor de P_0 el primer máximo continuaría trasladándose a tempe-

raturas menores y empezaría a disminuir su altura hasta desaparecer, tal que cuando P_0 fuera infinito se tendría el calor específico de un tubo semi-infinito con $a/\lambda_0 = 0.2$ como el mostrado en la Fig. 3.7.

Por otro lado, las curvas de C_V/Nk_B presentan un mínimo, tal y como se observó en el sistema tratado en la sección anterior (ver Fig. 3.12), pero ahora al ir incrementando la intensidad del potencial P_0 , desde 0.1 hasta 1000, el mínimo se transforma en una meseta lo que revela un comportamiento unidimensional. En dicho mínimo el calor específico C_V/Nk_B se acerca al valor clásico unidimensional $1/2$ en una región relativamente grande de temperaturas. También cabe notar que todos los mínimos en la Fig. 3.14 inician en el mismo punto, de derecha a izquierda, cuando la longitud de onda térmica de de Broglie es $\lambda \simeq 2a$.

La Fig. 3.14 muestra diferentes curvas del calor específico, como hemos mencionado, para un sistema formado por 11×11 filamentos semi-infinitos con sección transversal cuadrada $(a/\lambda_0)^2 = (0.2)^2$, tal que el tubo dentro del cual están los filamentos tiene una sección transversal con $(2.2)^2$, si hiciéramos $P_0 = 0$ la estructura interna del sistema se anula y obtendríamos un tubo semi-infinito de sección transversal $(a/\lambda_0)^2 = (2.2)^2$. Por otro lado, si hiciéramos $P_0 = \infty$ el sistema de 11×11 filamentos se reduce a 121 filamentos independientes, con sección transversal $(a/\lambda_0)^2 = (0.2)^2$. De la Fig. 3.7 vemos que para ambos sistemas, tubo semi-infinito sin estructura interna con $(a/\lambda_0)^2 = (2.2)^2$ y $(0.2)^2$, las curvas de C_V/Nk_B como función de la temperatura sólo muestra un máximo, el que marca el umbral del comportamiento 3D del sistema, mientras que para el sistema de 11×11 filamentos, además de éste máximo se presenta otro máximo, el asociado al preámbulo de la a parición de un BEC. Así, concluimos que el primer máximo en el calor calor específico, de menor a mayor temperatura, es originado por el efecto colectivo de los filamentos y podría estar asociado a una BEC.

3.2.3. Tubos multifilamentos. Casos anisotrópicos.

Anisotropía es la propiedad de algunos materiales de ser direccionalmente dependientes, en oposición a la isotropía, que implica propiedades idénticas en todas las direcciones.

Tubos multifilamentos de sección transversal rectangular: $P_0 = 100$, $M = 10$.

Hasta ahora sólo se han estudiado sistemas isotrópicos obteniéndose interesantes resultados, a fin de ver el efecto de tener dos longitudes características en el sistema considérese el caso anisotrópico $a_x \neq a_y$, con $P_0 = 100$ la intensidad de los potenciales delta de Dirac y $M = 10$ el número de deltas. Ahora se tienen bosones confinados en filamentos de sección transversal rectangular finita $a_x a_y$ y longitud infinita.

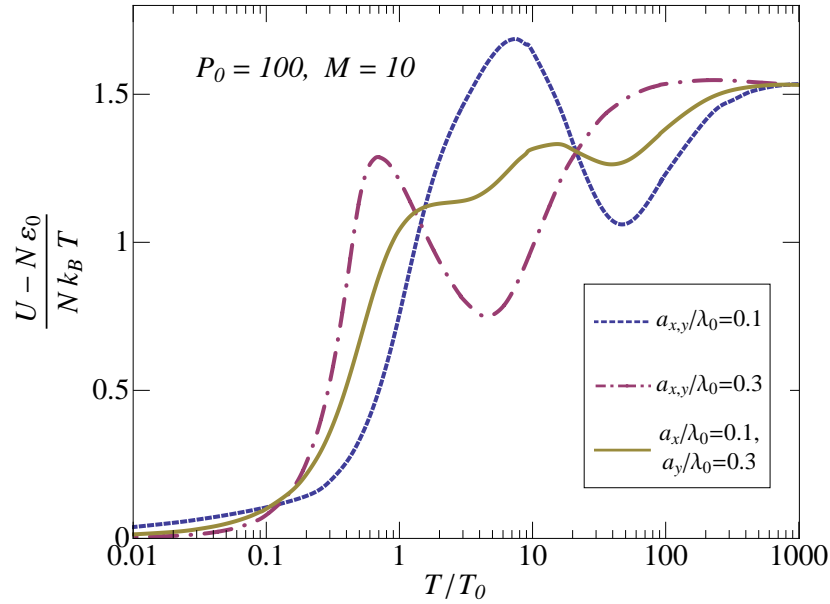


Figura 3.15: Tubo multifilamentos semi-infinitos con sección transversal rectangular. Energía interna como función de T/T_0 para $P_0 = 100$, $M = 10$ con $a_x/\lambda_0 = 0.1$ y $a_y/\lambda_0 = 0.3$ en comparación con sus respectivos casos isotrópicos: $a/\lambda_0 = 0.1$ y $a/\lambda_0 = 0.3$.

La Fig. 3.15 muestra la energía interna por bosón como función de la temperatura para el caso anisotrópico con $a_x/\lambda_0 = 0.1$ y $a_y/\lambda_0 = 0.3$ en comparación con sus respectivos casos isotrópicos: $a_x/\lambda_0 = a_y/\lambda_0 = 0.1$ y $a_x/\lambda_0 = a_y/\lambda_0 = 0.3$. El comportamiento de la energía interna sobre $k_B T$ es similar al caso isotrópico descrito en secciones anteriores, aunque más complejo, debido a la existencia ahora de dos

escalas de longitud en lugar de una.

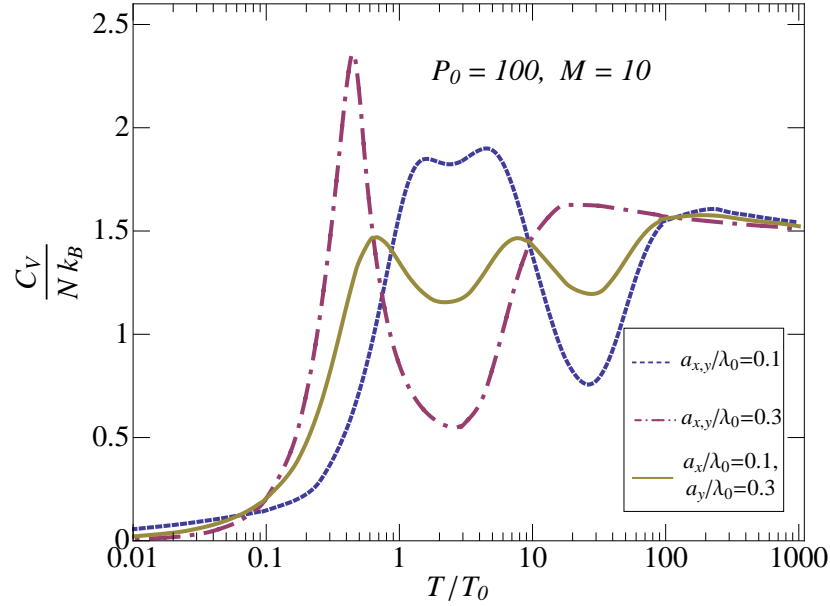


Figura 3.16: Tubo multifilamentos semi-infinitos con sección transversal rectangular. Calor específico como función de T/T_0 para $P_0 = 100$, $M = 10$ con $a_x/\lambda_0 = 0.1$ y $a_y/\lambda_0 = 0.3$ en comparación con sus respectivos casos isotrópicos: $a_x/\lambda_0 = a_y/\lambda_0 = 0.1$ y $a_x/\lambda_0 = a_y/\lambda_0 = 0.3$.

El calor específico como función de T/T_0 para el caso anisotrópico con $a_x/\lambda_0 = 0.1$ y $a_y/\lambda_0 = 0.3$ en comparación con sus respectivos casos isotrópicos: $a/\lambda_0 = 0.1$ y $a/\lambda_0 = 0.3$ se muestra en la Fig. 3.16. El primer máximo de C_V/Nk_B , de menor a mayor temperatura, aparece a una temperatura intermedia entre las temperaturas a las que aparecen los correspondientes máximos de los casos isotrópicos. La curva de C_V/Nk_B como función de la temperatura muestra dos mínimos, que corresponden a cada caso isotrópico, esto viene a corroborar, analizado en secciones anteriores, el hecho de que el mínimo en el calor específico se asocia a la captura de partículas entre dos planos cuando la longitud de onda térmica es igual a $2a$.

Cintas: $M_x = 10$, $M_y = 0$, con $P_0 = 10$ y **1000**.

Hasta ahora hemos visto transiciones espaciales de 1D a 3D de nuestro gas de Bose, el calor específico va del valor de 0.5 a 1.5. En esta sección se analiza al calor específico a volumen constante para un gas de Bose dentro de una estructura periódica multifilamento del tipo cintas (ver Fig. 3.17). Para formar esta estructura hemos hecho $M_x = 10$ y $M_y = 0$, se tiene un arreglo de 11×1 filamentos de sección transversal $(a/\lambda_0)^2$ y longitud infinita. El interés en este sistema es ver transiciones espaciales de 2D a 3D.

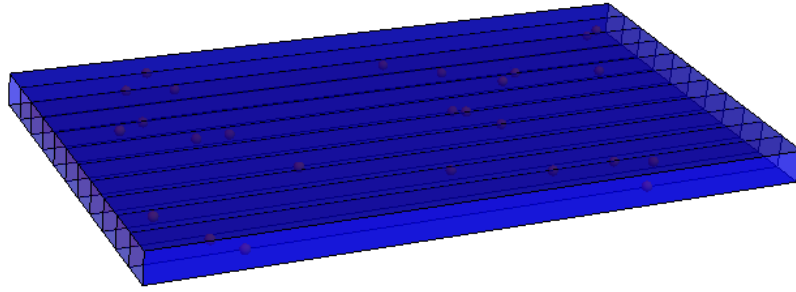


Figura 3.17: Cintas semi-infinitas con $M + 1 = 11$ filamentos de sección transversal cuadrada.

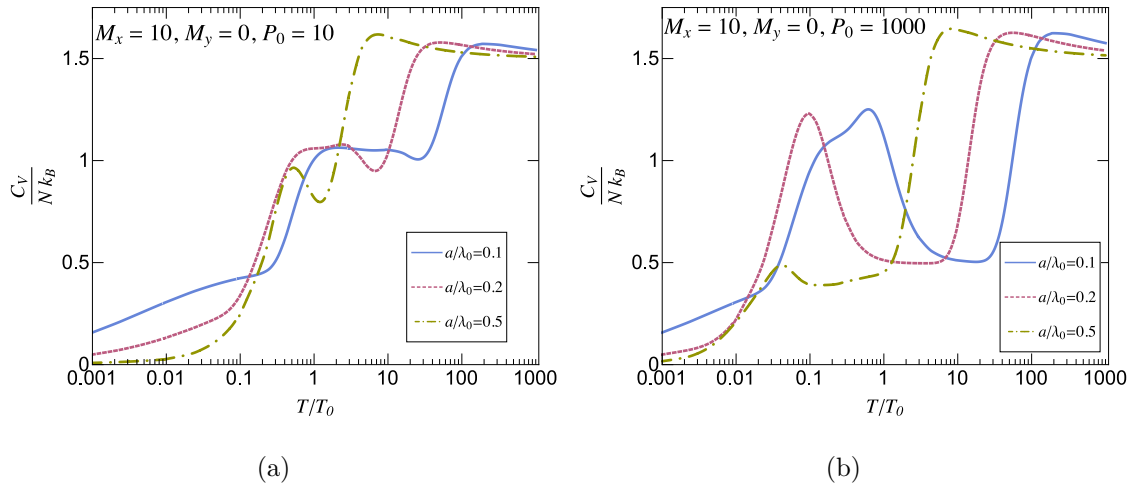


Figura 3.18: Cintas semi-infinitas con sección transversal cuadrada. Calor específico como función de T/T_0 para $M_x = 10$, $M_y = 0$, $a_x/\lambda_0 = 0.1, 0.2, 0.5$, (a) $P_0 = 10$ y (b) $P_0 = 1000$.

El calor específico isócorico como función de T/T_0 para diferentes valores del área de la sección transversal de cada filamento $(a/\lambda_0)^2$ se muestran en la Fig. 3.18, (a) corresponde a una impenetrabilidad de $P_0 = 10$ y (b) a $P_0 = 1000$.

En general se observa un comportamiento similar a los sistemas analizados en secciones anteriores, C_V/Nk_B como función de T/T_0 muestra al menos dos máximos y un mínimo. Para el sistema con $P_0 = 10$, (a), se observa una meseta en 1, es decir, el sistema presenta un comportamiento bidimensional. Al incrementar la temperatura las curvas C_V muestra un mínimo que se transforma en una meseta al incrementar el valor de P_0 . Para $T \gg T_0$ el sistema bosónico se comporta en 3D. En la Fig. 3.18 se observan transiciones espaciales, de 2D a 3D en (a) y de 1D a 3D en (b).

En este capítulo se obtuvieron expresiones algebraicas para algunas propiedades termodinámicas como función de la temperatura, volumen y potencial químico para un gas de Bose en estructuras tubulares semi-infinitas, conformadas por filamentos de sección transversal cuadrada $(a/\lambda_0)^2$ y rectangular $(a_x/\lambda_0)(a_y/\lambda_0)$. Se analizaron diferentes sistemas bosónicos con distintos parámetros de los potenciales delta de Dirac que usamos para generar las paredes de los filamentos dentro de los tubos.

De analizar un tubo semi-infinito (sin filamentos en su interior) de paredes impenetrables y arreglos periódicos de filamentos se concluyó que cuando $T/T_0 \rightarrow 0$ el número de partículas en el estado base N_0 crece como $(T/T_0)^{-1}$, mientras que para temperaturas tales que $T/T_0 \gg 1$ vemos que N_0 decrece como $(T/T_0)^{-3/2}$. La fracción $(T/N_0)\partial N_0/\partial T$ tiende a 1 a medida que $T/T_0 \rightarrow 0$. Cuando $T/T_0 \gg 1$ la fracción $(T/N_0)\partial N_0/\partial T \rightarrow 3/2$.

Para un tubo semi-infinito de paredes impenetrables el calor específico como función de T/T_0 tiende a cero a medida que la temperatura se va a cero. C_V presenta un máximo, después disminuye lentamente hacia el valor 1.5 al incrementar la temperatura. Para sistemas formados por arreglos periódicos de filamentos el calor específico presenta una estructura más compleja. C_V muestra al menos dos máximos y un mínimo. El primer máximo, de menor a mayor temperatura, refleja el preámbulo de la aparición de una condensación Bose-Einstein. La temperatura de este máxi-

mo es más pequeña conforme el área de la sección transversal de los filamentos o la impenetrabilidad de las paredes crece. El segundo máximo marca el umbral del comportamiento 3D del sistema. Regularmente aparece a temperaturas tales que la longitud de onda de de Broglie $\lambda \simeq 0.7a$. El mínimo y/o la meseta reflejan la tendencia del sistema a comportarse en 1D. El mínimo aparece a temperaturas tales que $\lambda \simeq 2a$ extendiéndose a temperaturas menores en el caso de la meseta que se presenta para impenetrabilidades tales que $P_0 > 100$. Este mínimo se asocia a la captura de partículas entre planos, esto se corroboró en el caso anisotrópico donde el calor específico muestra no uno sino dos mínimos.

El calor específico muestra un *crossover* dimensional, las transiciones dimensionales en los casos isotrópicos se dan de 3D a 1D, se podrán ver transiciones de 3D a 2D y luego a 1D sólo si hacemos las secciones transversales del tubo (no necesariamente de los filamentos) rectangulares en lugar de cuadradas.

Para un arreglo de 11×11 filamentos se tiene que el primer máximo en el calor específico, de menor a mayor temperatura (Fig. 3.14), podría estar representando una “BEC” por el efecto colectivo de los filamentos. Ya que éste máximo no se presenta para un filamento $P_0 = \infty$ ni para el tubo sin filamentos $P_0 = 0$.

Capítulo 4

Efectos de la variación de la densidad de partículas en las propiedades termodinámicas

Hasta ahora para el análisis de las propiedades termodinámicas del gas de bosones se ha supuesto la condición de límite termodinámico, es decir, N y V son cantidades infinitas, pero la densidad de partículas $\rho = N/V$ permanece constante. Además, tomamos la densidad de nuestro sistema ρ igual a la densidad de un gas ideal de bosones en una caja infinita a la temperatura crítica de condensación de Bose-Einstein T_0 , $\rho_0 = \zeta(3/2)/\lambda_0^3$, de tal forma que las propiedades calculadas son para cualquier densidad ρ_0 . Ahora nos preguntamos sobre la dependencia de las propiedades termodinámicas del sistema con respecto a la densidad de partículas. Para responder esta pregunta, considérese una densidad de referencia igual a la de un gas ideal de Bose libre tal que su densidad de partículas es

$$\rho_{00} = \frac{\zeta(3/2)}{1000a^3} \quad (4.1)$$

$\rho_{00} \approx 2.612 \times 10^{-3} \text{ part./a}^3$, también se puede escribir como

$$\rho_{00} = \frac{\zeta(3/2)}{\lambda_{00}^3} \quad (4.2)$$

con λ_{00} la longitud de onda térmica de un gas de Bose libre con densidad ρ_{00} , su temperatura de condensación Bose-Einstein queda definida por

$$T_{00} \equiv \frac{2\pi\hbar^2}{mk_B\lambda_{00}^2} \quad (4.3)$$

Nótese que ρ_{00} depende de a por lo que para mostrar la variación de las propiedades con respecto a la densidad ρ del sistema, habremos de dejar fija la a . De la Ec. (4.1) y Ec. (4.2) se tiene la condición

$$\begin{aligned} \frac{\zeta(3/2)}{1000a^3} &= \frac{\zeta(3/2)}{\lambda_{00}^3} \Rightarrow \left(\frac{a}{\lambda_{00}}\right)^3 = \left(\frac{1}{10}\right)^3 \\ \Rightarrow a_{00} &\equiv \frac{a}{\lambda_{00}} = 0.1 \end{aligned} \quad (4.4)$$

En el Capítulo 3 se encontró una expresión para densidad de partículas de nuestro sistema Ec. (3.13)

$$\rho(T) = \sum_{k_x, k_y} \frac{1}{a_x(M_x + 1)a_y(M_y + 1)} \left(\frac{m}{2\pi\hbar^2\beta}\right)^{1/2} g_{1/2}(z_0) \quad (4.5)$$

con $z_0 \equiv e^{\beta(\mu - \varepsilon_{k_x} - \varepsilon_{k_y})}$. Para cumplir el objetivo de esta sección, obtener las propiedades termodinámicas como función de la densidad, hagamos la densidad de nuestro sistema igual a

$$\rho = r\rho_{00} \quad (4.6)$$

r es el cociente de la densidad de nuestro sistema ρ y la densidad de referencia $\rho_{00} = \zeta(3/2)/\lambda_{00}^3$, cuando $r = 1$ se regresa al sistema tratado en el Capítulo 3. Así, sustituyendo Ec. (4.6) en Ec. (4.5) se obtiene

$$1 = \sum_{k_x} \sum_{k_y} \frac{1000a_{00}\hat{T}^{1/2}}{r\zeta(3/2)(M+1)^2} g_{1/2}(z_0) \quad (4.7)$$

donde $\hat{T} \equiv T/T_{00}$ y $a_{00} = 0.1$. La expresión anterior permite calcular el potencial químico μ en función de la temperatura para diferentes valores de r . Procediendo de manera similar, podemos obtener todas las propiedades termodinámicas encontradas

en el Capítulo 3 en términos de T_{00} y r .

El número de partículas en el estado base está dado por

$$N_0 = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_0 - \mu)} - 1} \quad (4.8)$$

La expresión anterior se adimensionaliza en unidades de $k_B T_{00}$

$$N_0 = \frac{1}{e^{\hat{\beta}(\hat{\varepsilon}_0 - \hat{\mu})} - 1} \quad (4.9)$$

donde $\hat{\beta} \equiv T_{00}/T$, $\hat{\varepsilon} \equiv \varepsilon/k_B T_{00}$, $\hat{\mu} \equiv \mu/k_B T_{00}$. De derivar la ecuación anterior con respecto a la temperatura se obtiene

$$\frac{T}{N_0} \frac{\partial N_0}{\partial T} = \frac{\beta(\varepsilon_0 + T \frac{\partial \mu}{\partial T} - \mu) e^{\beta(\varepsilon_0 - \mu)}}{e^{\beta(\varepsilon_0 - \mu)} - 1} \quad (4.10)$$

la expresión adimensionalizada es

$$\frac{T}{N_0} \frac{\partial N_0}{\partial T} = \frac{\hat{\beta}(\hat{\varepsilon}_0 + T \frac{\partial \hat{\mu}}{\partial T} - \hat{\mu}) e^{\hat{\beta}(\hat{\varepsilon}_0 - \hat{\mu})}}{e^{\hat{\beta}(\hat{\varepsilon}_0 - \hat{\mu})} - 1} \quad (4.11)$$

De la Ec. (3.20) determinada en el Capítulo 3 se despeja la derivada del potencial químico, para obtener

$$\left[T \frac{\partial \hat{\mu}}{\partial T} - \hat{\mu} \right] = - \frac{\sum_{k_x} \sum_{k_y} \left[\frac{1}{2} g_{1/2}(z_0) + \hat{\beta}(\hat{\varepsilon}_{k_x} + \hat{\varepsilon}_{k_y}) g_{-1/2}(z_0) \right]}{\hat{\beta} \sum_{k_x} \sum_{k_y} g_{-1/2}(z_0)} \quad (4.12)$$

En el Capítulo 3 se encontró una expresión para la energía interna Ec. (3.33)

$$U = \sum_{k_x, k_y} L_z \left(\frac{m}{2\pi \hbar^2} \right)^{1/2} \left[\frac{1}{2\beta^{3/2}} g_{3/2}(z_0) + \frac{1}{\beta^{1/2}} (\varepsilon_{k_x} + \varepsilon_{k_y}) g_{1/2}(z_0) \right] \quad (4.13)$$

escribiendo en términos de T_{00} se obtiene

$$\frac{U - N\varepsilon_0}{Nk_B T} = \frac{1000a_{00}}{r\zeta(3/2)(M+1)^2} \sum_{k_x, k_y} \left[\frac{\hat{T}^{1/2}}{2} g_{3/2}(z_0) + \frac{1}{\hat{T}^{1/2}} (\hat{\varepsilon}_{k_x} + \hat{\varepsilon}_{k_y} - \hat{\varepsilon}_0) g_{1/2}(z_0) \right] \quad (4.14)$$

Para el calor específico se obtuvo la siguiente ecuación

$$\begin{aligned}
 C_V = \sum_{k_x, k_y} L_z \left(\frac{m}{2\pi\hbar^2} \right)^{1/2} & \left[\frac{3}{4} k_B^{3/2} T^{1/2} g_{3/2}(z_0) \right. \\
 & + \frac{1}{2} \left(\frac{k_B}{T} \right)^{1/2} \left(2\varepsilon_{k_x} + 2\varepsilon_{k_y} + T \frac{\partial \mu}{\partial T} - \mu \right) g_{1/2}(z_0) \\
 & \left. + \frac{1}{k_B^{1/2} T^{3/2}} (\varepsilon_{k_x} + \varepsilon_{k_y}) \left(\varepsilon_{k_x} + \varepsilon_{k_y} + T \frac{\partial \mu}{\partial T} - \mu \right) g_{-1/2}(z_0) \right]
 \end{aligned} \tag{4.15}$$

la cual expresada en términos de T_{00} se obtiene

$$\begin{aligned}
 \frac{C_V}{Nk_B} = \frac{1000a_{00}}{r\zeta(3/2)(M+1)^2} \sum_{k_x, k_y} & \left[\frac{3}{4} \hat{T}^{1/2} g_{3/2}(z_0) \right. \\
 & + \frac{1}{2\hat{T}^{1/2}} \left(2\hat{\varepsilon}_{k_x} + 2\hat{\varepsilon}_{k_y} + T \frac{\partial \hat{\mu}}{\partial T} - \hat{\mu} \right) g_{1/2}(z_0) \\
 & \left. + \frac{1}{\hat{T}^{3/2}} (\hat{\varepsilon}_{k_x} + \hat{\varepsilon}_{k_y}) \left(\hat{\varepsilon}_{k_x} + \hat{\varepsilon}_{k_y} + T \frac{\partial \hat{\mu}}{\partial T} - \hat{\mu} \right) g_{-1/2}(z_0) \right]
 \end{aligned} \tag{4.16}$$

4.1. Algunos resultados: efectos de la variación de la densidad

En esta sección se analiza como varían las propiedades termodinámicas del sistema como función de la densidad de partículas ρ a través del parámetro r , siendo $\rho = r\rho_{00}$. Procediendo de manera similar a los casos anteriores, considérese un arreglo periódico de filamentos de longitud infinita dentro de un tubo de paredes impenetrables con $M_x = M_y \equiv M$ y $P_{0x} = P_{0y} \equiv P_0$, se tiene el caso isotrópico. En este caso la separación entre las deltas está determinada por la Ec. (4.4), $a/\lambda_{00} = 0.1$. Se analizan dos sistemas, uno con $M = 10$ y $P_0 = 10$ y otro con $M = 10$ y $P_0 = 1000$.

Las gráficas del número de partículas en el estado base N_0 como función de la temperatura para diferentes valores del parámetro $r = 1, 10, 100$ se muestran en la Fig. 4.1, (a) corresponde a una impenetrabilidad de $P_0 = 10$ y (b) a $P_0 = 1000$. El comportamiento es el mismo que en los casos tratados en apartados anteriores. Cabe resaltar que entre más grande es la densidad de partículas hay más partículas en el estado base a una temperatura determinada tanto para $T/T_0 \rightarrow 0$ como para $T/T_0 \gg$

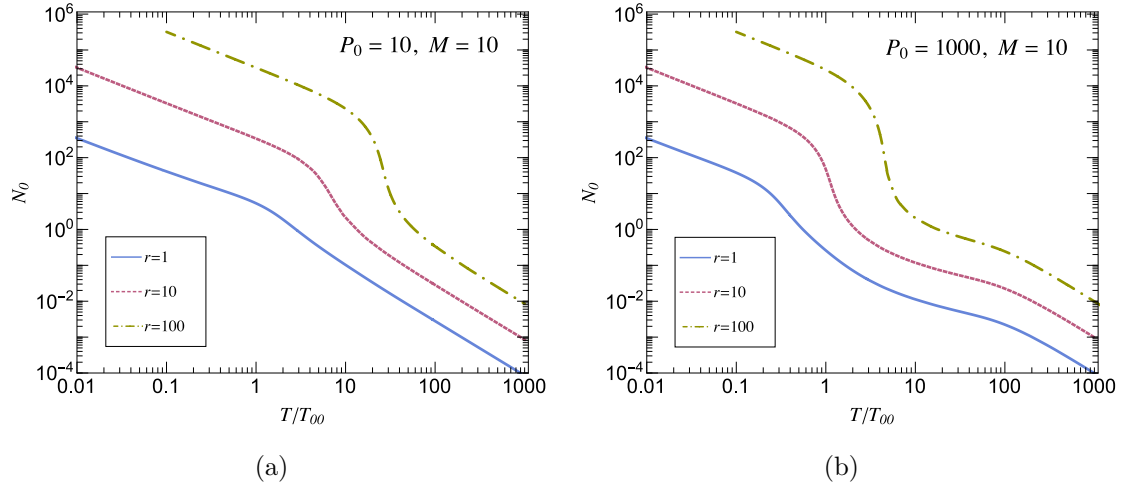


Figura 4.1: Tubo multifilamentos semi-infinito con sección transversal cuadrada. Número de partículas en el estado base N_0 como función de T/T_{00} para $M = 10$, $a/\lambda_{00} = 0.1$, $r = 1, 10, 100$, (a) $P_0 = 10$ y (b) $P_0 = 1000$.

1 pero el cambio de comportamiento entre estos dos límites es más pronunciado cuando las densidades son mayores.

En la Fig. 4.2 se muestran las curvas del calor específico isocórico como función de la temperatura para estos potenciales, (a) corresponde a $P_0 = 10$ y (b) a $P_0 = 1000$. El comportamiento de C_V/Nk_B es semejante a los sistemas analizados en secciones previas. Vemos que el primer máximo en el calor específico, de menor a mayor temperatura, se desplaza a temperaturas más altas a medida que la densidad de partículas se incrementa, a través del parámetro r . En (a) podemos observar que al incrementar la densidad de partículas, el mínimo que está presente en las curvas de C_V se va reduciendo hasta desvanecerse, el sistema se parece cada vez más a un gas de Bose libre tridimensional. Por otro lado, en (b) el mínimo se hace más pronunciado que en (a) debido a un potencial 100 veces más intenso.

La Fig. 4.3 muestra la energía interna por bosón como función de T/T_{00} . El comportamiento de la energía interna sobre $k_B T$ es similar a los casos isotrópicos descritos en secciones precedentes. El mínimo en la energía interna se hace más pronunciado en (b) que en (a) debido a un potencial 100 veces más intenso.

En capítulos anteriores hemos visto, y en este capítulo también, que el efecto de

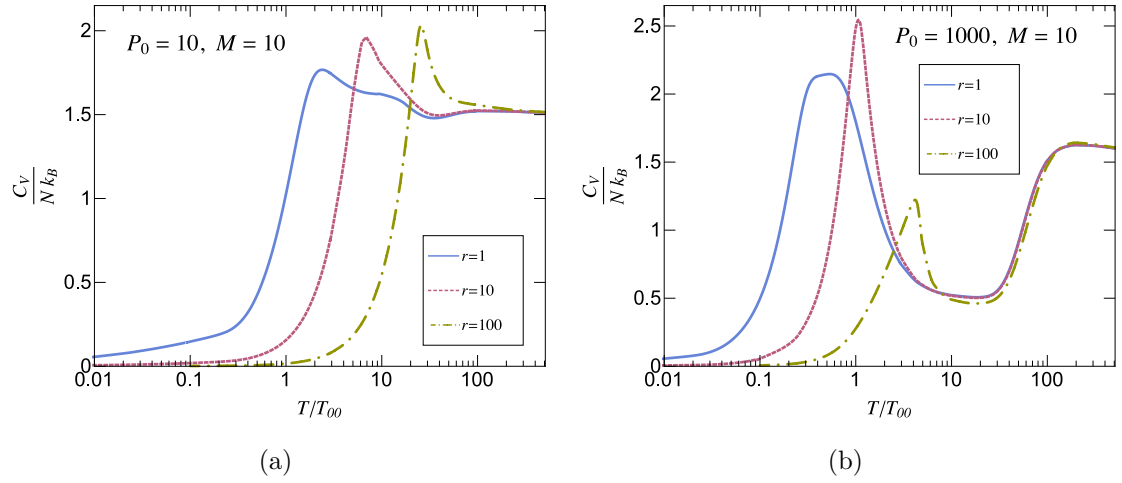


Figura 4.2: Tubo multifilamentos semi-infinito con sección transversal cuadrada. Calor específico como función de T/T_{00} para $M = 10$, $a/\lambda_{00} = 0.1$, $r = 1, 10, 100$, (a) $P_0 = 10$ y (b) $P_0 = 1000$.

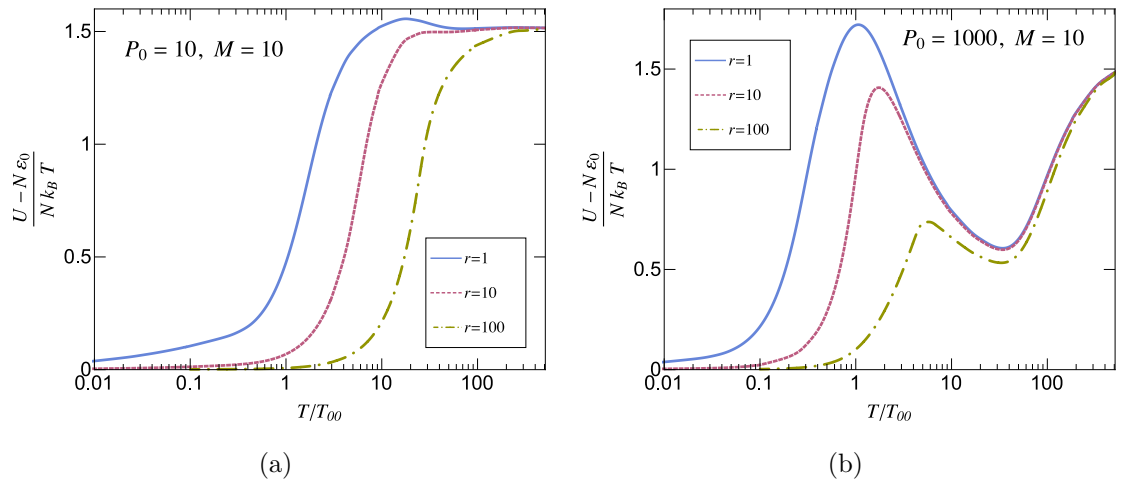


Figura 4.3: Tubo multifilamentos semi-infinito con sección transversal cuadrada. Energía interna como función de T/T_{00} para $M = 10$, $a/\lambda_{00} = 0.1$, $r = 1, 10, 100$, (a) $P_0 = 10$ y (b) $P_0 = 1000$.

la estructura interna de filamentos sobre los bosones es la presencia de mínimos y máximos en el calor específico y en la energía interna. De las gráficas mostradas en esta sección se puede observar claramente que al aumentar la densidad de partículas los mínimos y máximos presentes en C_V/Nk_B y $U/Nk_B T$ tienden a disminuir (ver Fig. 4.2 y Fig. 4.3) es decir, conforme se aumenta la densidad del sistema el efecto de la estructura sobre las propiedades termodinámicas disminuye, al grado que a muy altas densidades el sistema no “ve” la estructura y se comporta como un gas libre.

En este capítulo se obtuvieron expresiones algebraicas para algunas propiedades termodinámicas como función de la densidad de partículas para sistemas bosónicos en estructuras multifilamentos. Se analizaron dos sistemas, equivalentes a arreglos periódicos de 11×11 filamentos con sección transversal cuadrada finita y longitud infinita pero con impenetrabilidades de las paredes de los filamentos iguales a $P_0 = 10$ y 1000. Se observó que hay más partículas en el estado base entre más alta es la densidad de partículas. Se concluyó que para densidades de partículas altas el efecto de la estructura interna de multifilamentos sobre los bosones se aminora hasta llegar a ser despreciable.

Capítulo 5

Gas de Bose en estructuras tubulares finitas

Hasta ahora se han estudiado sistemas semi-infinitos, en los cuales dos longitudes del sistema son finitas y la tercera longitud es infinita, $L_x \times L_y \times \infty$. En este capítulo se analiza un sistema que es finito en las tres direcciones espaciales, es decir, $L_x \times L_y \times L_z$. Nuevamente se consideran N bosones que no interaccionan entre sí confinados en filamentos de sección transversal rectangular finita, pero ahora los filamentos son de longitud finita a diferencia de los sistemas estudiados en secciones anteriores en los cuales una longitud del sistema era infinita. La estructura periódica de filamentos es modelada usando un número finito M_i , con $i = x, y$ o z , de deltas de Dirac, para restringir el movimiento de las partículas en las direcciones x y y mientras que en la tercera dirección se permite que las partículas se muevan libremente. En las tres direcciones espaciales se emplean condiciones de frontera de Dirichlet.

El espectro de energías se puede separar en tres componentes $\varepsilon = \varepsilon_{k_x} + \varepsilon_{k_y} + \varepsilon_{k_z}$ determinadas por la Ec. (2.6), que corresponde al espectro de un potencial Peine de Dirac finito, ya analizado en la sección 2.1.

5.1. Propiedades termodinámicas

5.1.1. Gran Potencial

Usando el ensemble Gran Canónico se obtienen las propiedades termodinámicas del sistema. El Gran Potencial Termodinámico $\Omega(T, V, \mu)$ para un gas de Bose contenido en un volumen V está dado por

$$\Omega(T, V, \mu) = k_B T \sum_{\mathbf{k}} \ln[1 - e^{-\beta(\varepsilon_{\mathbf{k}} - \mu)}] \quad (5.1)$$

donde T es la temperatura, V es el volumen, μ el potencial químico y $\beta = 1/k_B T$.

Las propiedades termodinámicas se obtienen del gran potencial tal como se muestra en la Ec. (3.4). La ecuación de número se obtiene de derivar el gran potencial con respecto al potencial químico a temperatura y volumen constante. De la Ec. (5.1) se obtiene que el número de partículas está dado por

$$N = \sum_{\mathbf{k}} n_{\mathbf{k}} = \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_{\mathbf{k}} - \mu)} - 1} \quad (5.2)$$

La densidad del sistema $\rho(T) = N/V$ es

$$\rho(T) = \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{a_x(M_x + 1)a_y(M_y + 1)a_z(M_z + 1)} \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_{\mathbf{k}} - \mu)} - 1} \quad (5.3)$$

donde $V = L_x L_y L_z$, considerando $L_i = a_i(M_i + 1)$, con $i = x, y, o z$. A efecto de adimensionalizar las longitudes, temperaturas y energías de nuestro sistema, de nuevo, usamos la longitud de onda térmica λ_0 , la temperatura crítica T_0 y la energía $k_B T_0$, de un gas ideal de Bose con la misma densidad de nuestro sistema. La densidad de un gas ideal de bosones en una caja infinita a la temperatura crítica de condensación de Bose-Einstein T_0 está dada por

$$\rho(T_0) = \left(\frac{mk_B T_0}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} \zeta(3/2) = \frac{\zeta(3/2)}{\lambda_0^3} \quad (5.4)$$

con $\lambda_0^2 = 2\pi\hbar^2/mk_B T_0$.

Dividiendo la Ec. (5.3) por $\rho(T_0)$, se obtiene

$$1 = \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{a_{0x}a_{0y}a_{0z}(M_x + 1)(M_y + 1)(M_z + 1)\zeta(3/2)} \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_{\mathbf{k}} - \mu)} - 1} \quad (5.5)$$

con $a_{0i} = a_i/\lambda_0$, $i = x, y, z$. Así, la expresión adimensionalizada es

$$1 = \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{a_{0x}a_{0y}a_{0z}(M_x + 1)(M_y + 1)(M_z + 1)\zeta(3/2)} \frac{1}{e^{\tilde{\beta}(\tilde{\varepsilon}_{\mathbf{k}} - \tilde{\mu})} - 1} \quad (5.6)$$

De esta expresión, Ec. (5.6), se obtiene el potencial químico μ como función de la temperatura T que usamos para el cálculo de otras propiedades termodinámicas tales como la energía interna y calor específico. Para obtener el calor específico, es necesario obtener la derivada del potencial químico con respecto a la temperatura. Para obtener $\partial\mu/\partial T$ se deriva la Ec. (5.5) con respecto a la temperatura lo cual nos da

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{\mathbf{k}} \frac{\partial}{\partial T} \left[\frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_{\mathbf{k}} - \mu)} - 1} \right] \\ 0 &= \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{k_B T^2} \frac{e^{\beta(\varepsilon_{\mathbf{k}} - \mu)}}{[e^{\beta(\varepsilon_{\mathbf{k}} - \mu)} - 1]^2} \left[\varepsilon_{\mathbf{k}} + T \frac{\partial \mu}{\partial T} - \mu \right] \end{aligned} \quad (5.7)$$

Despejando el término $[T \frac{\partial \mu}{\partial T} - \mu]$

$$\left[T \frac{\partial \mu}{\partial T} - \mu \right] = - \sum_{\mathbf{k}} \frac{e^{\beta(\varepsilon_{\mathbf{k}} - \mu)} \varepsilon_{\mathbf{k}}}{[e^{\beta(\varepsilon_{\mathbf{k}} - \mu)} - 1]^2} \bigg/ \sum_{\mathbf{k}} \frac{e^{\beta(\varepsilon_{\mathbf{k}} - \mu)}}{[e^{\beta(\varepsilon_{\mathbf{k}} - \mu)} - 1]^2} \quad (5.8)$$

La expresión adimensionalizada es

$$\left[T \frac{\partial \tilde{\mu}}{\partial T} - \tilde{\mu} \right] = - \sum_{\mathbf{k}} \frac{e^{\tilde{\beta}(\tilde{\varepsilon}_{\mathbf{k}} - \tilde{\mu})} \tilde{\varepsilon}_{\mathbf{k}}}{[e^{\tilde{\beta}(\tilde{\varepsilon}_{\mathbf{k}} - \tilde{\mu})} - 1]^2} \bigg/ \sum_{\mathbf{k}} \frac{e^{\tilde{\beta}(\tilde{\varepsilon}_{\mathbf{k}} - \tilde{\mu})}}{[e^{\tilde{\beta}(\tilde{\varepsilon}_{\mathbf{k}} - \tilde{\mu})} - 1]^2} \quad (5.9)$$

El número de partículas en el estado base N_0 está dado por

$$N_0 = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_0 - \mu)} - 1} \quad (5.10)$$

con $\varepsilon_0 \equiv \varepsilon_{0x} + \varepsilon_{0y} + \varepsilon_{0z}$. De derivar la ecuación anterior con respecto a la temperatura

se obtiene

$$\frac{T}{N_0} \frac{\partial N_0}{\partial T} = \frac{\beta(\varepsilon_0 + T \frac{\partial \mu}{\partial T} - \mu) e^{\beta(\varepsilon_0 - \mu)}}{e^{\beta(\varepsilon_0 - \mu)} - 1} \quad (5.11)$$

Estas dos últimas expresiones, Ec. (5.10) y Ec. (5.11), nos permitirán conocer el comportamiento del número de partículas en el estado de mínima energía de nuestro sistema conforme bajamos la temperatura y se podrá entonces comparar con el gas libre tridimensional de bosones (Ver Apéndice A) y los sistemas semi-infinitos analizados en capítulos anteriores.

5.1.2. Energía interna

La energía interna del sistema $U(T, V)$ se determina introduciendo el Gran Potencial Ec. (5.1) en la Ec. (3.27) de donde se obtiene que la energía interna está dada por

$$U(V, T) = \sum_{\mathbf{k}} \frac{\varepsilon_{\mathbf{k}}}{e^{\beta(\varepsilon_{\mathbf{k}} - \mu)} - 1} \quad (5.12)$$

donde $\varepsilon_{\mathbf{k}}$ es la energía del estado excitado definido por \mathbf{k} . Para obtener una expresión adimensionalizada de la energía interna del sistema se multiplican ambos lados de la ecuación anterior por $1/Nk_B T$ y se resta el término $N\varepsilon_0$ que cuantifica la contribución total a la energía de los bosones en el estado base, donde $\varepsilon \equiv \varepsilon_{k_x0} + \varepsilon_{k_y0} + \varepsilon_{k_z0}$. De esta forma se tiene la energía interna por bosón respecto a la energía del estado base del sistema

$$\frac{U - N\varepsilon_0}{Nk_B T} = \sum_{\mathbf{k}} \frac{\tilde{\beta}}{a_{0x}(M_x + 1)a_{0y}(M_y + 1)a_{0z}(M_z + 1)\zeta(3/2)} \frac{\tilde{\varepsilon}_{\mathbf{k}} - \tilde{\varepsilon}_0}{e^{\tilde{\beta}(\tilde{\varepsilon}_{\mathbf{k}} - \tilde{\mu})} - 1} \quad (5.13)$$

Ésta es la expresión adimensionalizada para la energía interna por partícula, referida a la energía del estado base y dividida por $k_B T$, en función de la temperatura, volumen y potencial químico.

5.1.3. Calor específico

Para calcular el calor específico $C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_{N,V}$ derivamos la Ec. (5.12) para la energía interna con respecto a la temperatura, obteniéndose

$$C_V = \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{k_B T^2} \frac{e^{\beta(\varepsilon_{\mathbf{k}} - \mu)} \varepsilon_{\mathbf{k}}}{[e^{\beta(\varepsilon_{\mathbf{k}} - \mu)} - 1]^2} \left[\varepsilon_{\mathbf{k}} + T \frac{\partial \mu}{\partial T} - \mu \right] \quad (5.14)$$

Para obtener una expresión adimensionalizada del calor específico la ecuación anterior se divide por Nk_B

$$\frac{C_V}{Nk_B} = \sum_{\mathbf{k}} \frac{\tilde{\varepsilon}_{\mathbf{k}} (\tilde{\varepsilon}_{\mathbf{k}} + T \frac{\partial \tilde{\mu}}{\partial T} - \tilde{\mu}) \tilde{\beta}^2}{a_{0x}(M_x + 1)a_{0y}(M_y + 1)a_{0z}(M_z + 1)\zeta(3/2)} \frac{e^{\tilde{\beta}(\tilde{\varepsilon}_{\mathbf{k}} - \tilde{\mu})}}{[e^{\tilde{\beta}(\tilde{\varepsilon}_{\mathbf{k}} - \tilde{\mu})} - 1]^2} \quad (5.15)$$

Ésta es la expresión final del calor específico por bosón como función de la temperatura, volumen y potencial químico.

5.2. Resultados

5.2.1. Caso isotrópico: $P_0 = 10$, $M = 10$

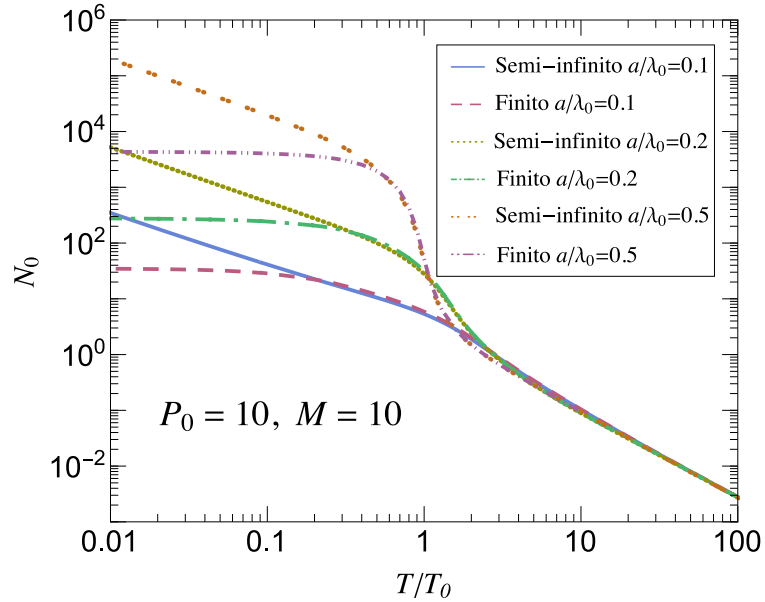


Figura 5.1: Tubo multifilamentos finito con sección transversal cuadrada. Número de partículas en el estado base como función de T/T_0 para $P_0 = 10$, $M = 10$ y $a/\lambda_0 = 0.1, 0.2$ y 0.5 en comparación con sus respectivos casos semi-infinitos.

En esta sección se muestran algunas propiedades termodinámicas para un arreglo periódico finito de 11×11 filamentos de sección transversal cuadrada $(a/\lambda_0)^2$ y longitud finita, este arreglo se obtiene tomando $M_x = M_y \equiv M = 10$, $M_z = 0$ y $a_x = a_y \equiv a$. La longitud de los filamentos es 10 veces la longitud de uno de los lados de la sección transversal, $L_x = L_y = (M + 1)a$, $L_z = a_z = 10L_x = 10(M + 1)a$.

La Fig. 5.1 muestra las curvas del número de partículas en el estado base N_0 para dos sistemas finitos con $a/\lambda_0 = 0.1, 0.2$ y 0.5 , en comparación con sus respectivos casos semi-infinitos.

Como se analizó en Capítulo 3 para sistemas semi-infinitos N_0 crece como $(T/T_0)^{-1}$ cuando $T/T_0 \rightarrow 0$ y para $T/T_0 \gg 1$, N_0 decrece como $(T/T_0)^{-3/2}$. De las curvas mostradas para N_0 vemos que el comportamiento del sistema cambia al pasar del sistema semi-infinito al sistema finito. Ahora, cuando $T/T_0 \rightarrow 0$ vemos que N_0 tiende a un valor constante, el número de partículas del sistema, como era de esperar. Para obtener el número total de partículas del sistema finito veamos la densidad de partículas

$$\frac{N}{V} = \rho(T) = \frac{\zeta(3/2)}{\lambda_0^3} \Rightarrow N = V \frac{\zeta(3/2)}{\lambda_0^3} \quad (5.16)$$

$$\Rightarrow N = (M_x + 1)a_x(M_y + 1)a_y(M_z + 1)a_z \frac{\zeta(3/2)}{\lambda_0^3}$$

Para el sistema analizado en esta sección se tiene $M_x = M_y \equiv M = 10$, $a_x = a_y \equiv a$ y $L_z = 10(M + 1)a$, sustituyendo se tiene

$$\begin{aligned} N &= 10(M + 1)^3 a_0^3 \zeta(3/2) \\ a_0 = 0.1 &\Rightarrow N_{0.1} = 34.7 \\ a_0 = 0.2 &\Rightarrow N_{0.2} = 277.9 \\ a_0 = 0.5 &\Rightarrow N_{0.5} = 4342.4 \end{aligned} \quad (5.17)$$

Así, se tienen 34.7 partículas para el arreglo periódico de filamentos con sección transversal $(a/\lambda_0)^2 = (0.1)^2$, 277.9 para $(a/\lambda_0)^2 = (0.2)^2$ y 4342.4 para $(a/\lambda_0)^2 = (0.5)^2$, tal y como se observa en la Fig. 5.1.

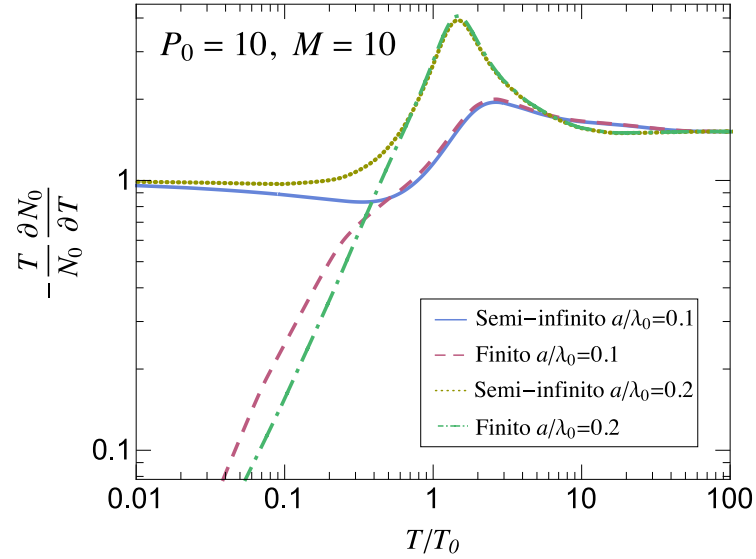


Figura 5.2: Tubo multifilamentos finito con sección transversal cuadrada. Valor negativo de la derivada del número de partículas en el estado base N_0 , por partícula en el estado base y multiplicada por la temperatura, como función de T/T_0 para $P_0 = 10$, $M = 10$ y $a/\lambda_0 = 0.1$ y 0.2 , en comparación con sus respectivos casos semi-infinitos.

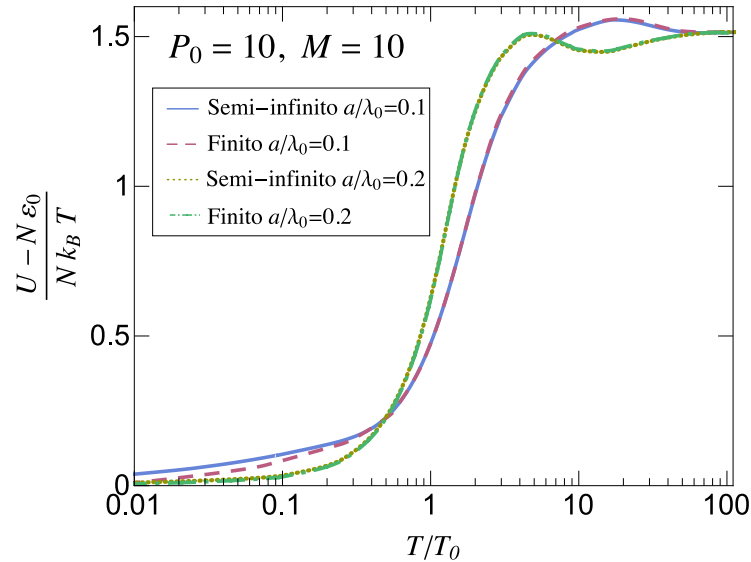


Figura 5.3: Tubo multifilamentos finito con sección transversal cuadrada. Energía interna como función de T/T_0 para $P_0 = 10$, $M = 10$ y $a/\lambda_0 = 0.1$ y 0.2 , en comparación con sus respectivos casos semi-infinitos.

La fracción $(T/N_0)\partial N_0/\partial T$ se muestra en la Fig. 5.2 como función de la temperatura. Nuevamente se observa un cambio en el comportamiento del sistema finito con respecto al sistema semi-infinito. Cuando $T/T_0 \rightarrow 0$ la fracción $(T/N_0)\partial N_0/\partial T$ se va a cero al descender la temperatura mientras que para sistemas semi-infinitos se va a 1. El comportamiento de la fracción $(T/N_0)\partial N_0/\partial T$ cuando $T/T_0 \rightarrow 0$ para el sistema finito concuerda con el resultado previo de N_0 , ya que cuando $T/T_0 \rightarrow 0$ el número de partículas en el estado base $N_0 \rightarrow N$, cuya derivada es cero.

La Fig. 5.3 y la Fig. 5.4 muestran la energía interna por bosón y el calor específico, respectivamente, como función de T/T_0 para el sistema finito en comparación con sus respectivos casos semi-infinitos. Se observa que las diferentes curvas de $U/Nk_B T$ y C_V/Nk_B para el sistema coinciden en un intervalo amplio de temperaturas con sus respectivos casos semi-infinitos. La única diferencia que se aprecia es cuando $T/T_0 \rightarrow 0$ para el sistema con $a/\lambda_0 = 0.1$. El origen de esta discrepancia se debe a que conforme la a_0 disminuye se requiere llegar a temperaturas más bajas para observar coincidencia.

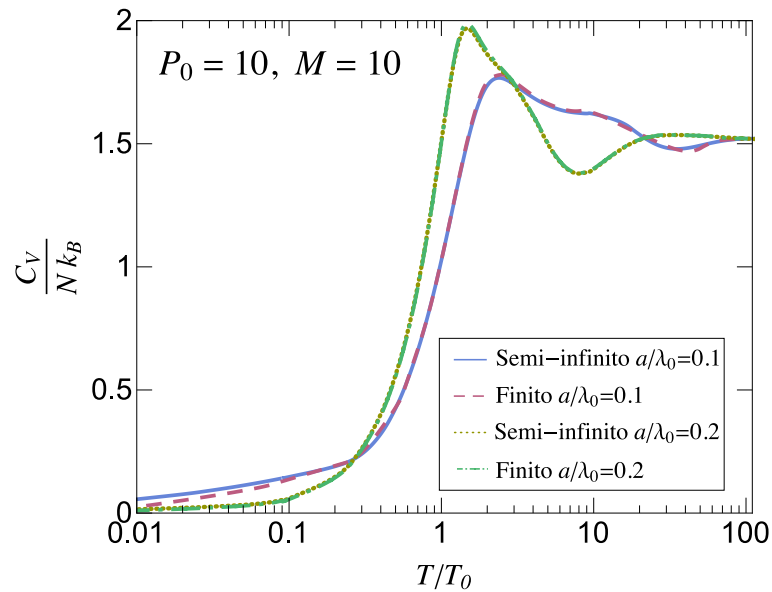


Figura 5.4: Tubo multifilamento finito con sección transversal cuadrada. Calor específico como función de T/T_0 para $P_0 = 10$, $M = 10$ y $a/\lambda_0 = 0.1$ y 0.2 , en comparación con sus respectivos casos semi-infinitos.

En este capítulo se obtuvieron expresiones para el número de partículas en el estado base y su variación, la energía interna y el calor específico como función de la temperatura, volumen y potencial químico para un gas bosónico en estructuras tubulares finitas, conformadas por filamentos con sección transversal cuadrada $(a/\lambda_0)^2$ y longitud finita. Se analizó un sistema compuesto por 11×11 filamentos con sección transversal $(a/\lambda_0)^2 = (0.1)^2$ y $(0.2)^2$ con $P_0 = 10$. La longitud de los filamentos se tomó como 10 veces la longitud de uno de los lados de la sección transversal. Se observó que cuando $T/T_0 \rightarrow 0$ el número de partículas en el estado base tiende con pendiente cero al número total de partículas del sistema mientras que su variación, $(T/N_0)\partial N_0/\partial T$, se va a cero. Cuando $T \gg T_0$ se tiene que N_0 es proporcional a $(T/T_0)^{-3/2}$ y su variación tiende a $3/2$. Las graficas del calor específico y la energía interna como función de la temperatura discrepan de sus respectivos casos semi-infinitos en un intervalo pequeño de temperaturas $T/T_0 < 0.1$ para algunos valores de la sección transversal de los filamentos, cuando $a/\lambda_0 \geq 0.2$ no se observan diferencias.

Capítulo 6

Criterios para una temperatura de condensación

6.1. Efecto de la dimensión en el calor específico de un gas de Bose en cables multifilamentos

El calor específico, para sistemas infinitos tridimensionales, se sabe que posee una singularidad a la temperatura crítica T_0 . Con el fin de explorar los efectos de tamaño finito en arreglos periódicos de filamentos se analizan tres sistemas diferentes. En primer lugar, consideramos un tubo impenetrable con sección transversal finita $(a/\lambda_0)^2$ y longitud infinita (que llamamos 1 filamento). En segundo lugar, se estudia un arreglo cuadrado de 121 filamentos penetrables de longitud infinita dentro de un tubo duro, este arreglo es creado haciendo $M = 10$ (11×11 filamentos). El tercer sistema analizado es un arreglo periódico infinito de filamentos de longitud infinita [24] (número infinito de filamentos). Destacamos que los filamentos que componen los tres sistemas tienen la misma sección transversal finita $(a/\lambda_0)^2$ y longitud infinita.

La Fig. 6.1 muestra el calor específico isocórico como función de T/T_0 para los tres arreglos periódicos de filamentos descritos anteriormente, con $a/\lambda_0 = 0.1$ y $P_0 = 100$. El efecto de la estructura interna (potenciales delta de Dirac) se evidencia por algunos máximos y mínimos presentes en el calor específico. El mínimo, a temperatura más grande, está asociada a la captura de partículas entre dos planos y aparece a

temperaturas de tal manera que la longitud de onda térmica satisface $\lambda \simeq 2 a$. El primer máximo, de menor a mayor temperatura, refleja el preámbulo de la aparición de una condensación de Bose-Einstein. El máximo a la temperatura más grande marca la vuelta del sistema a su comportamiento 3D de gas ideal de Bose. Este máximo aparece regularmente cuando la longitud de onda del Broglie es $\lambda \simeq 0.8 a$. No tenemos una explicación detallada del origen del máximo y mínimo intermedios en C_V/Nk_B para $a/\lambda_0 = 0.1$.

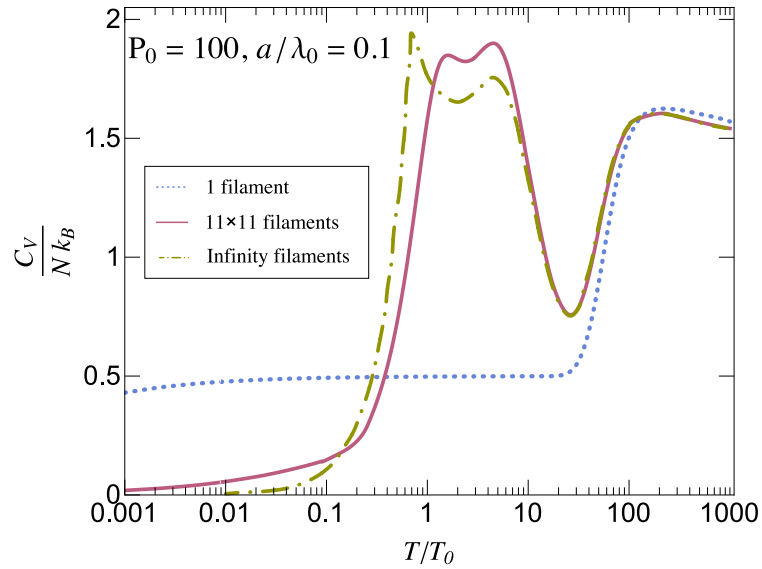


Figura 6.1: Calor específico como función de T/T_0 para diferentes números de filamentos de sección transversal $(a/\lambda_0)^2 = (0.1)^2$ y $P_0 = 100$.

Los máximos presentes en el calor específico para el sistema con un número infinito de filamentos también aparecen en el sistema de 11×11 filamentos, pero los dos primeros máximos se han desplazado hacia temperaturas más altas en el sistema de 121 filamentos. Por otro lado, el mínimo asociado con la captura de partículas por las paredes de los tubos coincide en los tres sistemas como era de esperarse ya que la separación de las paredes de los tubos son iguales. El máximo a la temperatura más grande ocurre aproximadamente a la misma temperatura para los tres sistemas. La existencia de una BEC es claro en el sistema infinito (número infinito de filamentos) que se manifiesta por un pico en $T = T_c = 0.7 T_0$ (temperatura crítica del sistema con número infinito de filamentos), pero para el sistema con 121 filamentos se tiene

un máximo suavizado o en otras palabras, no hay un salto en la derivada del calor específico, cuya temperatura ya no representa más un punto crítico.

La Fig. 6.2 muestra el calor específico por partícula en unidades de k_B , como función de T/T_0 , para los tres arreglos de filamentos descritos anteriormente, pero ahora se ha incrementado el área de la sección transversal de cada filamento al valor $(a/\lambda_0)^2 = (0.5)^2$. En este caso, los valores extremos presentes en el calor específico para un número infinito de filamentos y 11×11 filamentos coinciden y la única diferencia es en la temperatura crítica. El máximo asociado con el retorno al comportamiento tridimensional ocurre a la misma temperatura para los tres sistemas.

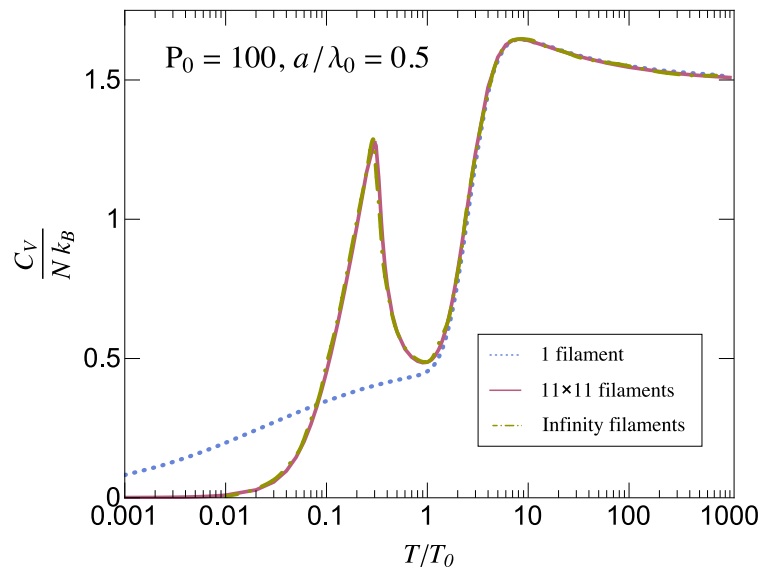


Figura 6.2: Calor específico como función de T/T_0 para diferentes números de filamentos de sección transversal $(a/\lambda_0)^2 = (0.5)^2$ y $P_0 = 100$.

6.2. Criterios para identificar condensación en sistemas semi-infinitos y finitos

La condensación de Bose-Einstein (BEC) (Bose, 1924 [29]; Einstein, 1924-1925 [30]) se observó en 1995 en una serie de experimentos con vapores de rubidio [31] y

sodio [32] en los cuales los átomos fueron confinados en trampas magneto-ópticas y enfriados a temperaturas extremadamente bajas, del orden de fracciones de microkelvins. En sistemas infinitos la BEC toma lugar a una temperatura crítica bien definida T_0 , mientras que para sistemas finitos la correspondiente transición se extiende sobre un intervalo finito de temperaturas, alrededor de T_0 . Varios autores han propuesto criterios para identificar el inicio de la condensación en sistemas finitos. Por ejemplo, Pajkowski y Pathria (1977) [9] sugieren que el criterio más útil para identificar el inicio de la condensación en sistemas de bosones dentro de volúmenes cuboidales finitos y semi-infinitos es utilizar el máximo del calor específico. Sin embargo, para sistemas finitos o semi-infinitos de bosones confinados por potenciales periódicos como los estudiados aquí, el calor específico como función de la temperatura muestra al menos dos máximos y un mínimo, como se mostró en los resultados obtenidos en capítulos anteriores, lo cual introduce indefinición al escoger el máximo que represente el inicio de la condensación. Entre otros criterios, también se ha definido la temperatura del inicio de la fase condensada como aquella T_α para la cual la fracción del condensado $N/N_0 = \alpha$ con $\alpha < 1$ [33]. Estos criterios conducen a definir una temperatura de inicio de la condensación en sistemas bosónicos que presenta una paradoja. Cuando se grafica la temperatura a la cual el calor específico tiene el máximo, T_{max} , como función del ancho de la sección transversal de los tubos (un filamento) semi-infinitos, se encuentra que T_{max} aumenta conforme disminuimos el grosor del tubo. El mismo comportamiento se observa para T_α para sistemas finitos tubulares. Lo anterior contrasta con lo que esperaríamos si consideramos que conforme disminuye el grosor del tubo, el sistema se comporta cada vez más como un sistema unidimensional por lo que esperaríamos que la temperatura crítica debe tender a cero.

Esta sección está dedicada al análisis de diferentes propiedades termodinámicas de sistemas semi-infinitos y finitos, tales como el potencial químico, su primera y segunda derivadas, el calor específico y el número de partículas en el estado base, con el fin de proporcionar un criterio para identificar la temperatura T^* de inicio de la fase condensada en sistemas con dimensiones menores que 3.

Sea T_{max} la temperatura a la cual el calor específico de un tubo semi-infinito de paredes impenetrables con sección transversal cuadrada $(a/\lambda_0)^2$ es máximo (ver Fig. 3.7) y T_{min} la temperatura a la cual la segunda derivada del potencial químico

$\partial^2\mu/\partial T^2$ presenta un mínimo (ver Fig. 3.3).

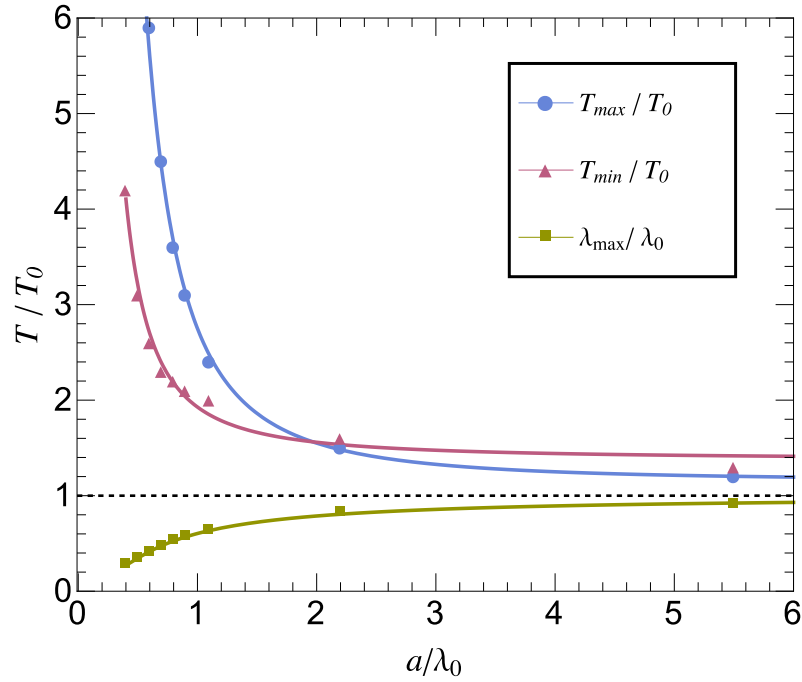


Figura 6.3: T_{max}/T_0 , T_{min}/T_0 y λ_{max}/λ_0 como función de a/λ_0 para un tubo semi-infinito de paredes impenetrables con sección transversal cuadrada $(a/\lambda_0)^2$.

En la Fig. 6.3 graficamos T_{max}/T_0 y T_{min}/T_0 como función de a/λ_0 . Al incrementar el área de la sección transversal del tubo semi-infinito T_{max} y T_{min} decrecen monótonamente acercándose a T_0 como se esperaba. El comportamiento de T_{max} como función de la separación entre paredes, concuerda con el obtenido por R. K. Pathria [34], ellos analizaron un gas ideal de Bose confinado en una capa delgada semi-infinita de ancho D ($\infty \times \infty \times D$) bajo una variedad de condiciones de frontera.

T_{max} decrece de la siguiente forma

$$\frac{T_{max}}{T_0} = 1.15 + \frac{1.6}{(a/\lambda_0)^2} \quad (6.1)$$

mientras que el comportamiento de T_{min} está dado por

$$\frac{T_{min}}{T_0} = 1.37 + \frac{0.36}{(a/\lambda_0)^2} + \frac{0.2}{a/\lambda_0} \quad (6.2)$$

Si tomáramos cualquiera de estas dos temperaturas, T_{max} o T_{min} , como la temperatura de BEC implicaría que al disminuir la sección transversal del tubo la temperatura de BEC se incrementaría lo cual va en contra de lo que uno esperaría pues al disminuir la sección transversal de los filamentos el sistema se comporta cada vez más como un sistema unidimensional para el cual sabemos que no existe la temperatura crítica BEC diferente de cero. Además, T_{max} y T_{min} siempre son mayores que T_0 , lo cual no concuerda con los resultados de sistemas tubulares infinitos en los que existe una temperatura crítica pero es menor que T_0 [24]. En el sistema infinito de multifilamentos cada uno con sección trasversal $(a/\lambda_0)^2$ [24], la temperatura de BEC está bien definida, allí se analizó T_c/T_0 como función de a/λ_0 para diferentes valores de la impenetrabilidad de las paredes de los filamentos y siempre se tiene $T_c < T_0$.

Como curiosidad, en la Fig. 6.3 también graficamos λ_{max} la longitud de onda térmica de de Broglie asociada a T_{max} :

$$\lambda_{max}^2 \equiv \frac{2\pi\hbar^2}{mk_B T_{max}} \quad (6.3)$$

Cuando $a/\lambda_0 \rightarrow 0$ vemos que $\lambda_{max}/\lambda_0 \rightarrow 0$ y cuando $a/\lambda_0 \rightarrow \infty$ se tiene $\lambda_{max}/\lambda_0 \rightarrow 1$. Si asociáramos este valor, λ_{max} , con la temperatura T^* , parecería cumplir con los requisitos indispensables para una temperatura de BEC, y lo que estaríamos haciendo es definir la T^*/T_0 como $(T_0/T_{max})^{1/2}$, es decir, el inverso de la raíz cuadrada de T_{max} . Es una propuesta que merecería mayor estudio y visualizar correlaciones con las fracciones del condensado. Esta definición tiene la ventaja de reproducir los límites de T^* para grandes y pequeñas a_0 , además de aumentar la T^* al aumentar la dimensión como lo que se obtiene para partículas con una relación de dispersión generalizada en d dimensiones [35].

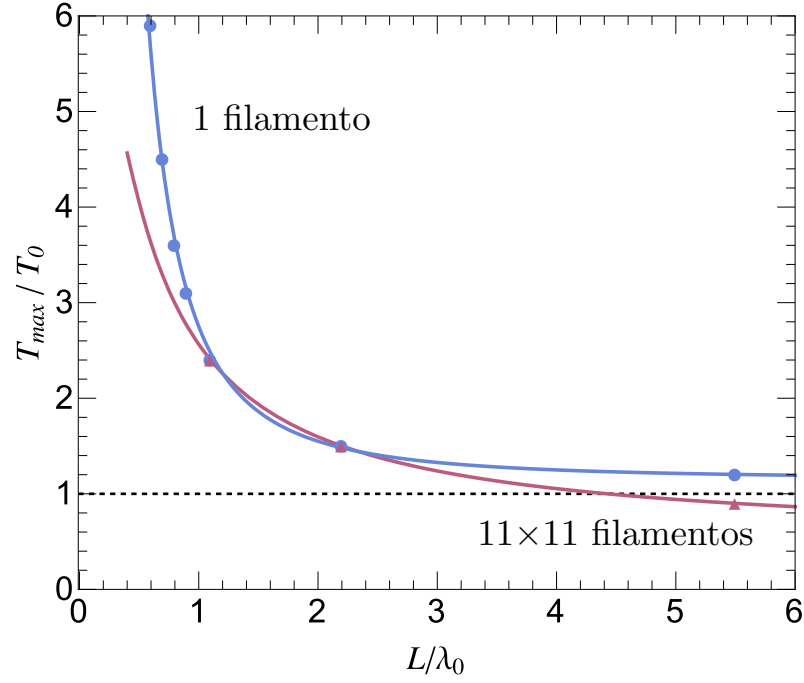


Figura 6.4: T_{max}/T_0 como función de L/λ_0 para un tubo semi-infinito (1 filamento, $L/\lambda_0 \equiv a/\lambda_0$) y un arreglo de 11×11 filamentos ($L/\lambda_0 \equiv (M + 1)a/\lambda_0$).

La Fig. 6.4 muestra T_{max} para un tubo semi-infinito (que también aparece en la Fig. 6.3) y la temperatura a la cual ocurre el primer máximo, de menor a mayor temperatura, en el calor específico de un arreglo de 11×11 filamentos con $P_0 = 10$ (ver Fig. 3.12), que también llamamos T_{max} , como función de la longitud en la dirección x o y .

Al tener sólo un filamento vemos que T_{max} siempre es mayor que T_0 , sin importar cuán grande sea el sistema, mientras que cuando el sistema está conformado por un arreglo de 11×11 filamentos T_{max} es menor que T_0 en un intervalo. Así, concluimos que el efecto colectivo de los filamentos es reducir el valor de T_{max} .

Así, es necesario explorar otros criterios para sistemas semi-infinitos que nos lleven a definir una temperatura T^* de BEC, menor que T_0 pero que cuando las dimensiones del sistema tiendan a infinito $T^* \rightarrow T_0$. Por ejemplo, se podría analizar el número de partículas en el estado base para sistemas semi-infinitos (ver Fig. 3.4

y Fig. 3.9), este estudio se deja para un trabajo posterior para complementarlo con la propuesta de definir T^* como la raíz cuadrada del inverso de T_{max} .

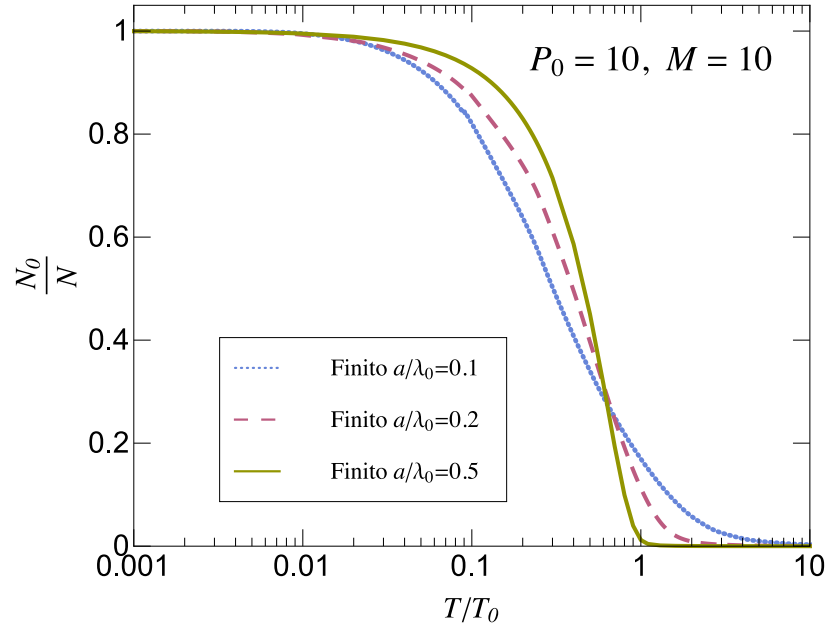


Figura 6.5: Fracción de partículas condensadas como función de T/T_0 para un gas de Bose ideal en un arreglo de 11×11 filamentos de sección transversal $(a/\lambda_0)^2$ y longitud finita con $M = 10$, $M_z = 0$, $P_0 = 10$, $L_z = 10L$, $L_x = L_y = L \equiv (M + 1)a$ y $a/\lambda_0 = 0.1, 0.2, 0.5$.

Para sistemas finitos es posible dar un criterio para definir una temperatura de BEC a la cual una fracción del número de partículas se encuentran en el estado base. La Fig. 6.5 muestra la fracción de partículas condensadas como función de la temperatura para un gas de Bose ideal dentro de una estructura de 11×11 filamentos de sección trasversal cuadrada $(a/\lambda_0)^2$, longitud finita y $P_0 = 10$. La longitud de los filamentos L_z es igual a 10 veces la longitud del lado en la dirección x o y , $L_x = L_y = L \equiv (M + 1)a$.

De la Fig. 6.5 se observa que cuando $T/T_0 \rightarrow 0$ el número de partículas en el estado base tiende con pendiente cero al número total de partículas del sistema mientras que cuando $T \gg T_0$ vemos que $N_0 \rightarrow 0$ como se esperaba. Parecería que las tres curvas de N/N_0 coinciden en un punto, pero al hacer un acercamiento en esta

región nos damos cuenta de que no ocurre así.

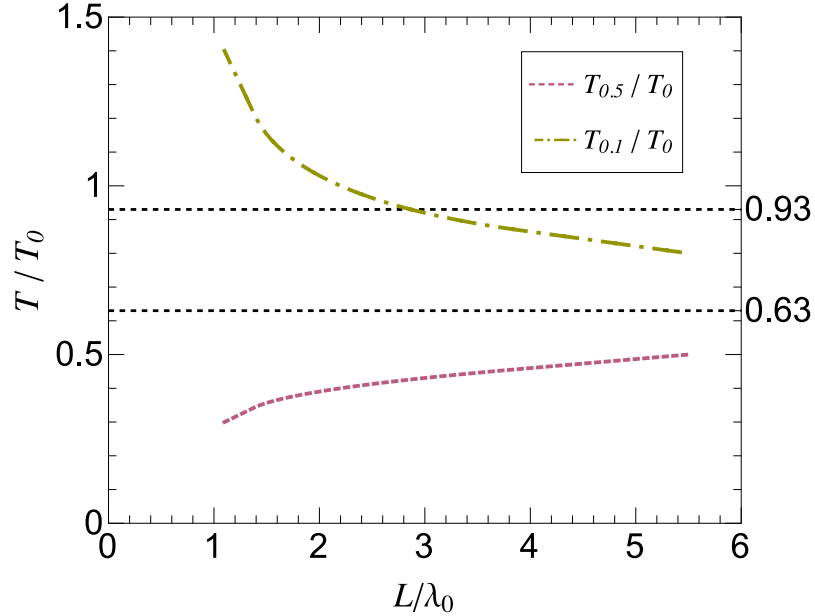


Figura 6.6: Temperatura T_α a la cual la fracción de partículas condensadas es $N/N_0 = 0.1, 0.5$, para un gas de Bose ideal en un arreglo de 11×11 filamentos de sección transversal $(a/\lambda_0)^2$ y longitud finita con $M = 10$, $M_z = 0$, $P_0 = 10$, $L = (M + 1)a$ y $L_z = 10L$.

Sea T_α la temperatura a la cual la fracción de partículas condensadas es $N/N_0 = \alpha$ para un gas de Bose ideal en estructuras tubulares finitas. La Fig. 6.6 muestra T_α/T_0 como función de L/λ_0 , con $L \equiv (M + 1)a$ para $\alpha = 0.1$ y 0.5 . Las líneas en $T/T_0 = 0.63$ y 0.93 indican la temperatura a la cual la fracción condensada de un gas ideal de Bose libre es $N_0/N = 0.5$ y 0.1 , respectivamente.

Al disminuir la sección transversal del sistema L^2 la curva correspondiente a $T_{0.1}$ se incrementa, como ocurre con T_{max} y T_{min} , mientras que $T_{0.5}$ se va a cero que es lo uno esperaríamos para sistemas que se comportan cada vez más unidimensionalmente. Se observe que $T_{0.1}$ decrece y $T_{0.5}$ crece monótonamente al incrementar L^2 , aunque no se aproximan a T_0 . En el caso de $T_{0.5}$ esperamos que al incrementar L^2 tienda a $T/T_0 = 0.63$, que es la temperatura a la cual $N_0/N = 0.5$ para el gas de bosones libre. Esto nos llevaría a concluir que $T_{0.5}$ es un buen criterio para definir una temperatura

de condensación BE para sistemas finitos aunque la asignación de $T^* = T_{0.5}$ sea arbitraria.

En este capítulo se compararon tres sistemas formados por diferentes números de filamentos (1 filamento, 11×11 filamentos, número infinito de filamentos). Los máximos presentes en el calor específico del sistema infinito también aparecen en el sistema semi-infinito de 121 filamentos, pero los máximos se han desplazado hacia temperaturas más altas debido al efecto de tamaño finito. Sin embargo cuando se tiene un arreglo periódico más grande que 11×11 filamentos con $a/\lambda_0 = 0.5$ la diferencia es sólo en la temperatura crítica. La principal diferencia con respecto al caso infinito [24] es que el pico asociado con la condensación BE se convierte en un máximo suavizado o en otras palabras, no hay un salto en la derivada de calor específico, cuya temperatura ya no representa más un punto crítico.

Se analizaron diferentes criterios para definir una temperatura de inicio de condensación BE para sistemas semi-infinitos y finitos. Para un gas de Bose en un cable de un solo filamento de sección transversal cuadrada $(a/\lambda_0)^2$, longitud infinita y de paredes impenetrables se estudiaron las temperaturas a las cuales el calor específico es máximo T_{max} y la segunda derivada del potencial químico presenta un mínimo T_{min} , como función de a/λ_0 . T_{max} decrece de la siguiente forma $T_{max}/T_0 = 1.15 + 1.6(a/\lambda_0)^{-2}$ mientras que el comportamiento de T_{min} está dado por $T_{min}/T_0 = 1.37 + 0.36(a/\lambda_0)^{-2} + 0.2(a/\lambda_0)^{-1}$. Aunque T_{max} , como función de a/λ_0 , reproduce el comportamiento ya observado para bosones en losas semi-infinitas y reportado en Ref. [9], consideramos que T_{max} y T_{min} no son buenos criterios para definir una temperatura de BEC ya que al disminuir a/λ_0 , T_{max} y T_{min} se incrementan lo que va en contra de lo que uno esperaría pues al disminuir la sección transversal del tubo el sistema se comporta cada vez más como un sistema unidimensional para el cual sabemos que no existe la temperatura crítica BEC diferente de cero. Por otro lado, para sistemas de bosones en multitubos infinitos las temperaturas críticas reportadas [24] son siempre menores que la temperatura crítica T_0 del gas ideal libre de bosones. Es decir, el confinamiento del gas de bosones produce una disminución de la temperatura crítica de condensación Bose-Einstein.

Para el gas de bosones en cables finitos formados por arreglos de 11×11 filamentos

se analizó la fracción de partículas condensadas como función de la temperatura. Cuando $T/T_0 \rightarrow 0$ vemos que $N_0 \rightarrow N$, es decir, el total de las partículas del sistema adquieren la energía del estado base. Cuando $T \gg T_0$ la fracción de partículas condensadas se va a cero, como se esperaba. Definimos una temperatura T_α para la cual la fracción de partículas condensadas es $N/N_0 = \alpha$ con $0 \leq \alpha \leq 1$. Calculamos y graficamos $T_{0.5}$ como función de a/λ_0 , de donde observamos que podría ser un buen criterio para definir una temperatura de condensación BE para sistemas finitos, no obstante la arbitrariedad de la magnitud de la fracción. Cumple que al disminuir la sección transversal de los filamentos $T_{0.5}$ se va a cero como esperaríamos para un sistema que se está comportando cada vez más como un sistema unidimensional. Por otro lado $T_{0.5}$ es siempre menor que T_0 .

Capítulo 7

Conclusiones

En esta tesis se estudió el comportamiento de un gas de bosones sin interacciones confinado en filamentos de sección transversal rectangular finita y de longitud infinita primero y luego de longitud finita, unidos ordenadamente para formar un cable. La estructura periódica de filamentos fue modelada usando un número M finito de potenciales delta de Dirac, igualmente espaciadas una distancia a , para restringir el movimiento de las partículas en dos direcciones mientras que en tercera dirección las partículas son libres. Las paredes impenetrables del cable se logran haciendo cero la función de onda en las paredes.

Se calculó el potencial químico así como su primera y segunda derivada para el gas de Bose en un tubo semi-infinito de paredes impenetrables. Para temperaturas menores que T_0 el potencial químico tiende asintótica y monótonamente a la energía del estado base, como se esperaba. No existe una temperatura a la cual su segunda derivada, con respecto a la temperatura, sea discontinua como sucede en el gas ideal de bosones libre, en su lugar presenta un mínimo alrededor de T_0 , el cual se hace más agudo al incrementar la sección transversal del tubo.

Se analizó el número de partículas en el estado base N_0 como función de la temperatura para diferentes sistemas bosónicos semi-infinitos y finitos. Se encontró, para sistemas semi-infinitos, que cuando $T/T_0 \rightarrow 0$, N_0 crece como $(T/T_0)^{-1}$, donde la constante de proporcionalidad depende de la separación entre las deltas pero no de la impenetrabilidad de las paredes. Para temperaturas tales que $T/T_0 \gg 1$ vemos que N_0 decrece como $(T/T_0)^{-3/2}$, el sistema se comporta clásicamente y la constante

de proporcionalidad es independiente de a y de P_0 . Por otro lado, para sistemas finitos $N_0 \rightarrow N$ cuando $T/T_0 \rightarrow 0$. Para $T \gg T_0$ el número de partículas en el estado base presenta el mismo comportamiento para sistemas finitos y semi-infinitos.

Para sistemas conformados por filamentos semi-infinitos de sección transversal cuadrada y rectangular se encontró que las curvas del calor específico como función de la temperatura muestran al menos dos máximos y un mínimo que puede llegar a ser una meseta. El primer máximo, de menor a mayor temperatura, refleja el preámbulo de la aparición de una condensación Bose-Einstein. La temperatura de este máximo es más pequeña conforme el área de la sección transversal de los filamentos o la impenetrabilidad de las paredes crece pero es más grande conforme la densidad de partículas se incrementa. El segundo máximo marca el umbral del comportamiento 3D del sistema. Regularmente aparece a temperaturas tales que la longitud onda de de Broglie $\lambda \simeq 0.8a$. El mínimo y/o la meseta reflejan la tendencia del sistema a comportarse en 1D. El mínimo aparece a temperaturas tales que $\lambda \simeq 2a$ extendiéndose a temperaturas menores en el caso de la meseta que se presenta para impenetrabilidades tales que $P_0 > 100$. Este mínimo se asocia a la captura de partículas entre planos, esto se corroboró con el caso anisotrópico en el que la sección transversal de los filamentos se hicieron rectangular en lugar de cuadrada, el calor específico muestra no uno sino dos mínimos, precisamente para valores de temperatura para las cuales $\lambda = 2a_x$ y $\lambda = 2a_y$, con a_x y a_y las longitudes de los lados de la sección rectangular de los filamentos. El calor específico muestra un *crossover* dimensional, las transiciones dimensionales en los casos isotrópicos se dan de 3D a 1D, se podrán ver transiciones de 3D a 2D y luego a 1D sólo si hacemos las secciones transversales del tubo (no necesariamente de los filamentos) rectangulares en lugar de cuadradas.

Para un arreglo de 11×11 filamentos se tiene que el primer máximo en el calor específico, de menor a mayor temperatura podría estar representando una “BEC” por el efecto colectivo de los filamentos. Ya que éste máximo no se presenta para un filamento $P_0 = \infty$ ni para el tubo sin filamentos $P_0 = 0$.

Se estudiaron cómo cambian algunas propiedades termodinámicas, de sistemas de 11×11 filamentos, al variar la densidad de partículas. Se concluyó que para densidades grandes el efecto de la estructura interna de filamentos sobre los bosones

se atenúa y que es notoriamente importante la estructura conforme se disminuye la densidad.

Se compararon tres sistemas formados por diferentes números de filamentos (1 filamento, 11×11 filamentos, número infinito de filamentos). Los máximos presentes en el calor específico del sistema infinito también aparecen en el sistema semi-infinito de 121 filamentos, pero los máximos se desplazan hacia temperaturas más altas debido al efecto de tamaño finito. Sin embargo cuando se tiene un arreglo periódico más grande que 11×11 filamentos con $a/\lambda_0 = 0.5$ la diferencia es observable sólo en la forma del máximo en la temperatura crítica del sistema infinito. La principal diferencia con respecto al caso infinito [24] es que el pico asociado con la condensación BE se convierte en un máximo suavizado o en otras palabras, no hay un salto en la derivada de calor específico, cuya temperatura ya no representa más un punto crítico.

Se analizaron diferentes criterios para definir una temperatura de inicio de condensación BE para sistemas semi-infinitos y finitos. Para un gas de Bose en un cable de un solo filamento de sección transversal cuadrada $(a/\lambda_0)^2$, longitud infinita y de paredes impenetrables se estudiaron las temperaturas a las cuales el calor específico es máximo T_{max} y la segunda derivada del potencial químico presenta un mínimo T_{min} , como función de a/λ_0 . T_{max} decrece de la siguiente forma $T_{max}/T_0 = 1.15 + 1.6(a/\lambda_0)^{-2}$ mientras que el comportamiento de T_{min} está dado por $T_{min}/T_0 = 1.37 + 0.36(a/\lambda_0)^{-2} + 0.2(a/\lambda_0)^{-1}$. Aunque T_{max} , como función de a/λ_0 , reproduce el comportamiento ya observado para bosones en losas semi-infinitas y reportado en Ref. [9], consideramos que T_{max} y T_{min} no son buenos criterios para definir una temperatura de BEC ya que al disminuir a/λ_0 , T_{max} y T_{min} se incrementan lo que va en contra de lo que uno esperaría pues al disminuir la sección transversal del tubo el sistema se comporta cada vez más como un sistema unidimensional para el cual sabemos que no existe la temperatura crítica BEC diferente de cero. Por otro lado, para sistemas de bosones en multitubos infinitos las temperaturas críticas reportadas [24] son siempre menores que la temperatura crítica T_0 del gas ideal libre de bosones. Es decir, el confinamiento del gas de bosones produce una disminución de la temperatura crítica de condensación Bose-Einstein.

Para el gas de bosones en cables finitos formados por arreglos de 11×11 filamentos

se analizó la fracción de partículas condensadas como función de la temperatura. Cuando $T/T_0 \rightarrow 0$ vemos que $N_0 \rightarrow N$, es decir, el total de las partículas del sistema adquieren la energía del estado base. Cuando $T \gg T_0$ la fracción de partículas condensadas se va a cero, como se esperaba. Definimos una temperatura T_α para la cual la fracción de partículas condensadas es $N/N_0 = \alpha$ con $0 \leq \alpha \leq 1$. Calculamos y graficamos $T_{0.5}$ como función de a/λ_0 , de donde observamos que podría ser un buen criterio para definir una temperatura de condensación BE para sistemas finitos, no obstante la arbitrariedad de la magnitud de la fracción. Cumple que al disminuir la sección transversal de los filamentos $T_{0.5}$ se va a cero como esperaríamos para un sistema que se está comportando cada vez más como un sistema unidimensional. Por otro lado $T_{0.5}$ es siempre menor que T_0 .

Apéndice A

Gas ideal de bosones

Considérese un gas ideal de bosones dentro de una caja de volumen V , tal que en el límite termodinámico $N \rightarrow \infty$ y $V \rightarrow \infty$ la densidad de partículas $\rho \equiv N/V$ permanece constante. Como no existe interacción entre las partículas la energía de cada partícula corresponde a la energía de una partícula libre de masa m ,

$$\varepsilon_{\mathbf{k}} = \frac{\hbar^2 \mathbf{k}^2}{2m}, \quad \mathbf{k}^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 \quad (\text{A.1})$$

con $k_i = 2\pi n_i/L$, $n_i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ($i = x, y, z$). El número total de partículas en un sistema de bosones está dado por la suma de las partículas en cada nivel de energía asociado al momento $\hbar \mathbf{k}$,

$$N = \sum_{\mathbf{k}} n_{\mathbf{k}} = \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_{\mathbf{k}} - \mu)} - 1} \quad (\text{A.2})$$

con $\beta = 1/k_B T$, μ el potencial químico. Por conveniencia escribimos N como la suma de partículas en el estado base N_0 más las partículas que están en los estados excitados N_e , es decir,

$$N = N_0 + N_e \quad (\text{A.3})$$

donde

$$N_0 = \frac{1}{e^{-\beta\mu} - 1}, \quad N_e = \sum_{\mathbf{k} \neq 0} \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_{\mathbf{k}} - \mu)} - 1} \quad (\text{A.4})$$

En el límite termodinámico la suma sobre los momentos \mathbf{k} se puede aproximar por una integral de la forma $\sum_{\mathbf{k}} \rightarrow (L/2\pi)^3 \int d^3k = (L/2\pi)^3 \int_0^\infty 4\pi k^2 dk$, así se tiene para el número de partículas en los estados excitados

$$N_e = \left(\frac{L}{2\pi}\right)^3 \int_0^\infty \frac{4\pi k^2}{e^{\beta(\varepsilon_{\mathbf{k}} - \mu)} - 1} dk = \frac{V}{4\pi^2} \left(\frac{2m}{\beta\hbar^2}\right)^{3/2} \int_0^\infty \frac{x^{1/2}}{z^{-1}e^x - 1} dx \quad (\text{A.5})$$

donde se hizo el cambio de variable $x = \beta\varepsilon_{\mathbf{k}}$, con $z \equiv e^{\beta\mu}$ la fugacidad y $V = L^3$ el volumen. La integral de la ecuación anterior es la función de Bose multiplicada por la función gamma $\Gamma(3/2) = \sqrt{\pi}/2$, el número de partículas en los estados excitados es

$$N_e = V \left(\frac{mk_B T}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2} g_{3/2}(z) \quad \forall T \quad (\text{A.6})$$

A.1. Temperatura crítica

La Ec. (A.6) relacionada las variables termodinámicas N, T, V y μ . En el límite termodinámico μ se comporta clásicamente, es decir, $\mu < 0$ por lo que $0 \leq z \leq 1$ y $N_e = N$, es decir, todas las partículas del sistema se encuentran en los estados excitados de energía. Sin embargo, cuando la temperatura del sistema disminuye hasta cierto valor, $\mu \rightarrow 0$ y $N = N_0 + N_e$, el estado base de energía comienza a poblarse y los estados excitados disminuyen su número de partículas de tal manera que N permanece constante. La temperatura a la que ocurre $\mu = 0$ se le llama temperatura crítica T_0 la cual limita dos regiones: si $T \geq T_0$ entonces $N_e = N$ y si $T < T_0$ entonces $N = N_0 + N_e$. Notemos que para $T = T_0$ se tiene que $N_e = N$ y $\mu = 0$ por lo que $z = 1$ y

$$N = V \left(\frac{mk_B T_0}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2} \zeta(3/2) \quad (\text{A.7})$$

Despejando T_0 de la ecuación Ec. (A.7)

$$T_0 = \frac{2\pi\hbar^2}{mk_B} \left(\frac{N}{V\zeta(3/2)}\right)^{2/3} \simeq 3.31 \frac{\hbar^2}{mk_B} \left(\frac{N}{V}\right)^{2/3} \quad (\text{A.8})$$

ya que $\zeta(3/2) \approx 2.61238$. La Ec. (A.7) nos da una expresión para la densidad del gas ideal de bosones a la temperatura crítica de condensación de Bose-Einstein T_0

$$\rho_0 = \frac{N}{V} = \frac{\zeta(3/2)}{\lambda_0^3} \quad (\text{A.9})$$

con $\lambda_0 \equiv h/\sqrt{2\pi mk_B T_0}$ la longitud de onda térmica de De Broglie de dicho gas. Combinando las expresiones Ec. (A.6) y Ec. (A.9) se obtiene

$$1 = \frac{1}{\zeta(3/2)} \left(\frac{T}{T_0} \right)^{3/2} g_{3/2}(z) \quad T > T_0 \quad (\text{A.10})$$

Ésta expresión permite obtener el potencial químico como función de la temperatura para $T > T_0$, para $T \leq T_0$ se tiene $\mu = 0$.

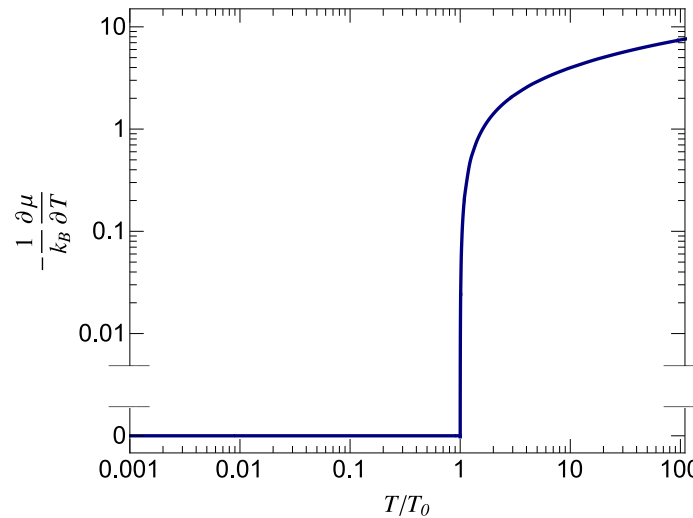


Figura A.1: Derivada negativa del potencial químico como función de T/T_0 para un gas ideal libre tridimensional de bosones, en escala log-log.

De derivar la expresión anterior se obtienen la derivada y segunda derivada del potencial químico con respecto de la temperatura, las cuales se muestran en la Fig.

A.1 y Fig. A.2.

$$\frac{1}{k_B} \frac{\partial \mu}{\partial T} = \begin{cases} 0, & T \leq T_0 \\ \left[-\frac{3}{2} g_{3/2}(z) + \frac{\mu}{k_B T} g_{1/2}(z) \right] / g_{1/2}(z), & T > T_0 \end{cases}$$

$$\frac{T_0}{k_B} \frac{\partial^2 \mu}{\partial T^2} = \begin{cases} 0, & T \leq T_0 \\ \left[\frac{1}{2T^2} (T \frac{\partial \tilde{\mu}}{\partial T} - \tilde{\mu}) g_{1/2}(z) + \frac{1}{T^3} (T \frac{\partial \tilde{\mu}}{\partial T} - \tilde{\mu})^2 g_{-1/2}(z) \right] / g_{1/2}(z), & T > T_0 \end{cases} \quad (\text{A.11})$$

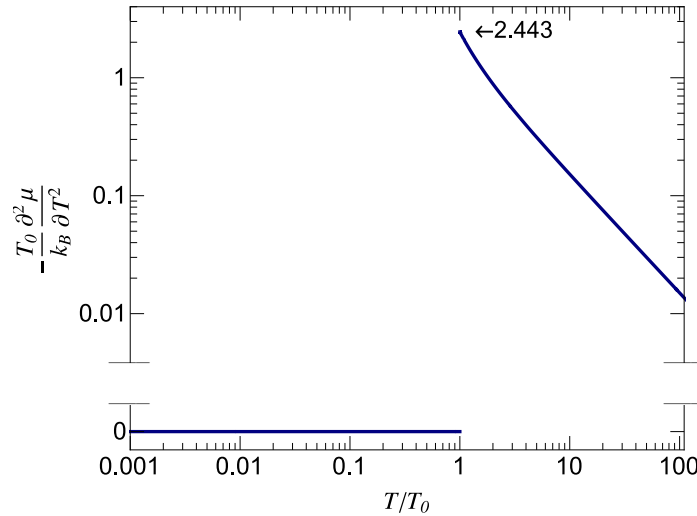


Figura A.2: Valor negativo de la segunda derivada del potencial químico como función de T/T_0 para un gas ideal libre tridimensional de bosones, en escala log-log.

A.2. Fracción condensada

La fracción de partículas que se encuentran en el estado base se denomina fracción del condensado. De la Ec. (A.3) se tiene

$$\frac{N_0}{N} = 1 - \frac{N_e}{N} \quad (\text{A.12})$$

Ahora bien, dividiendo la Ec. (A.6) entre la Ec. (A.7) y sustituyendo en la Ec. (A.12) se obtiene

$$\frac{N_0}{N} = 1 - \left(\frac{T}{T_0}\right)^{3/2} \frac{g_{3/2}(z)}{\zeta(3/2)} \quad (\text{A.13})$$

Las ecuaciones anteriores se cumplen para toda T . Para $T < T_0$, $z = 1$ y la ecuación anterior se reduce a

$$\frac{N_0}{N} = 1 - \left(\frac{T}{T_0}\right)^{3/2} \quad (\text{A.14})$$

A $T = 0$ todas las partículas están condensadas y a $T = T_0$ todas están en los estados excitados como se muestra en la figura siguiente:

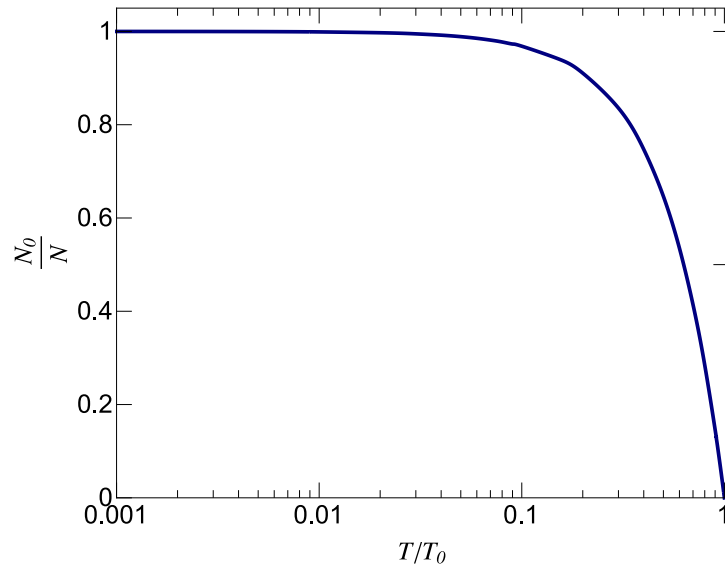


Figura A.3: Fracción de partículas condensadas como función de T/T_0 para un gas ideal libre tridimensional de bosones.

Hemos dicho que para $T \geq T_0$ todas las partículas están en los estados excitados $N = N_e$, esto es una aproximación, en realidad una pequeña fracción de partículas permanece en el estado base, aunque es insignificante comparada con N_e , esta pequeña cantidad de partículas está dada por:

$$N_0 = \frac{1}{e^{-\beta\mu} - 1}, \quad T > T_0 \quad (\text{A.15})$$

Así, de derivar las ecuaciones Ec. (A.14) y Ec. (A.15) con respecto a la temperatura se obtiene la derivada del número de partículas en el estado base:

$$\frac{T}{N_0} \frac{\partial N_0}{\partial T} = \begin{cases} \frac{3}{2} \left[1 - \left(\frac{T_0}{T} \right)^{3/2} \right]^{-1}, & T < T_0 \\ \beta \left[T \frac{\partial \mu}{\partial T} - \mu \right] \left[1 - e^{-\beta \mu} \right]^{-1}, & T > T_0 \end{cases} \quad (\text{A.16})$$

En la Fig. A.3 se muestra la derivada del número de partículas en el estado base como función de T/T_0 .

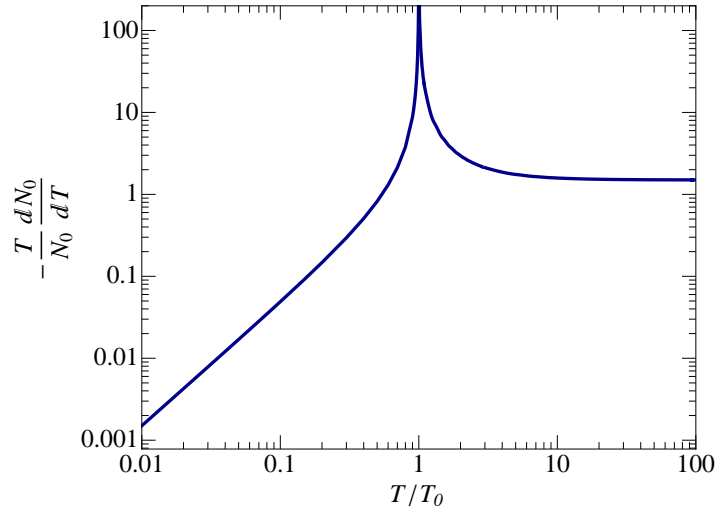


Figura A.4: Valor negativo de la derivada del número de partículas en el estado base N_0 , por partícula en el estado base y multiplicada por la temperatura, como función de la temperatura para un gas ideal libre tridimensional de bosones.

A.3. Energía interna

La energía interna $U(V, T)$ de un gas ideal de bosones, está dada por

$$U(T, V) = \sum_{\mathbf{k}} \varepsilon_{\mathbf{k}} n_{\mathbf{k}} = \sum_{\mathbf{k}} \frac{\varepsilon_{\mathbf{k}}}{e^{\beta(\varepsilon_{\mathbf{k}} - \mu)} - 1} \quad (\text{A.17})$$

En el límite termodinámico la suma anterior la podemos convertir en una integral

$$U(T, V) = \frac{V}{4\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \int_0^\infty \frac{\varepsilon^{3/2}}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)} - 1} d\varepsilon \quad (\text{A.18})$$

Haciendo el cambio de variable $x = \beta\varepsilon$ y reescribiendo en términos de T_0 se obtiene

$$U(T, V) = \frac{3}{2} N k_B T \frac{g_{5/2}(z)}{g_{3/2}(1)} \left(\frac{T}{T_0} \right)^{3/2}, \quad \forall T \quad (\text{A.19})$$

En la Fig. (A.5) se muestra $U/Nk_B T$ como función de T/T_0 .

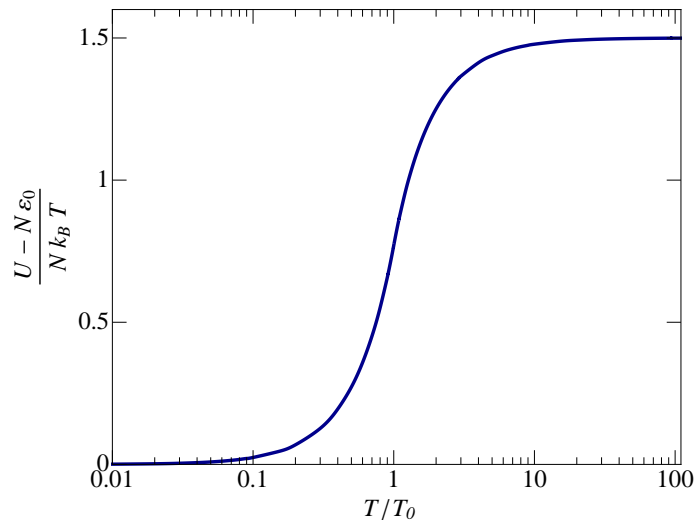


Figura A.5: Energía interna como función de T/T_0 de un gas ideal libre tridimensional de bosones.

A.4. Calor específico

Para obtener el calor específico $C_V \equiv (\partial U / \partial T)_{N,V}$ se deriva la Ec. (A.19) con respecto a la temperatura

$$C_V = \frac{3}{2} \frac{N k_B}{g_{3/2}(1)} \left(\frac{T}{T_0} \right)^{3/2} \left[\frac{5}{2} g_{5/2}(z) + T g'_{5/2}(z) \frac{\partial z}{\partial T} \right] \quad (\text{A.20})$$

$$g'_{5/2}(z) \equiv \partial g_{5/2}(z)/\partial z$$

$$C_V = \frac{3}{2} N k_B \left[\frac{5}{2} \frac{g_{5/2}(z)}{g_{3/2}(z)} - \frac{3}{2} \frac{g'_{5/2}(z)}{g'_{3/2}(z)} \right] \quad T > T_0 \quad (\text{A.21})$$

Para $T < T_0$ tenemos que

$$U = \frac{3}{2} N k_B T \frac{g_{5/2}(1)}{g_{3/2}(1)} \left(\frac{T}{T_0} \right)^{3/2} \quad (\text{A.22})$$

pues $z = 1$. De aquí que C_V está dado por

$$C_V = \frac{15}{4} N k_B \frac{g_{5/2}(1)}{g_{3/2}(1)} \left(\frac{T}{T_0} \right)^{3/2} \quad T < T_0 \quad (\text{A.23})$$

Como se aprecia en la Fig. (A.6) C_V alcanza su máximo valor $1.925 N k_B$ en $T = T_0$.

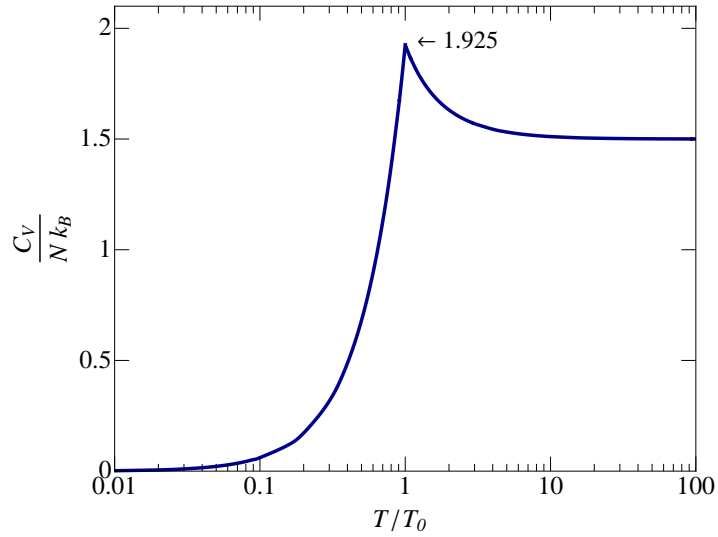


Figura A.6: Calor específico como función de T/T_0 de un gas ideal libre tridimensional de bosones.

Bibliografía

- [1] P. L. Kapitza, “Viscosity of Liquid Helium below the λ -Point”, *Nature* **141**, 74 (1938); J. F. Allen and H. Jones, “New Phenomena Connected with Heat Flow in Helium II”, *Nature* **141**, 243 (1938); J. F. Allen and D. Misener, “Flow of Liquid Helium II”, *Nature* **141**, 75 (1938).
- [2] F. M. Gasparini, M. O. Kimball, K. P. Mooney and M. Diaz-Avila, “Finite-size scaling of ^4He at the superfluid transition”, *Reviews of Modern Physics* **80**, 1009 (2008).
- [3] J. K. Perron, M. O. Kimball, K. P. Mooney and F. M. Gasparini, “Coupling and proximity effects in the superfluid transition in ^4He dots”, *Nature Physics* **6**, 499 (2010).
- [4] R. Mendoza, M. Fortes, M. A. Solís and Z. Koinov, “Superfluidity of a spin-imbalanced Fermi gas in a three-dimensional optical lattice”, *Phys. Rev. A* **88**, 033606 (2013).
- [5] I. Bloch, “Ultracold quantum gases in optical lattices”, *Nature Physics* **1**, 23 (2005).
- [6] L. M. Steele, C. J. Yeager and D. Finotello, “Precision specific-heat studies of thin superfluid films”, *Phys. Rev. Lett.* **71**, 3673 (1993).
- [7] J. C. Lasjaunias, K. Biljaković, J. L. Sauvajol and P. Monceau, “Evidence of 1D Behavior of ^4He Confined within Carbon-Nanotube Bundles”, *Phys. Rev. Lett.* **91**, 025901 (2003).

-
- [8] D. F. Goble and L. E. H. Trainor, “New Correlation Length in Bose-Gas Models of Liquid Helium”, *Phys. Rev.* **157**, 167 (1967); M. F. M. Osborne, “The Bose-Einstein Condensation for Thin Films”, *Phys. Rev.* **76**, 396 (1949).
- [9] H. R. Pajkowski and R. K. Pathria, “Criteria for the onset of Bose-Einstein condensation in ideal systems confined to restricted geometries”, *J. Phys. A* **10**, 561 (1977).
- [10] M. W. Cole, V. H. Crespi, G. Stan, C. Ebner, J. M. Hartman, S. Moroni and M. Boninsegni, “Condensation of Helium in Nanotube Bundles”, *Phys. Rev. Lett.* **84**, 3883 (2000).
- [11] J. G. Bednorz and K. A. Müller, “Possible High T_c Superconductivity in the Ba-La-Cu-O System”, *Z. Phys. B* **64**, 189 (1986).
- [12] A. Schilling, et al., “Superconductivity above 130 K in Hg-Ba-Ca-Cu-O system”, *Nature* **363**, 56 (1993).
- [13] J. H. Eggert, J. Z. Hu, H. K. Mao, L. Beauvais, R. L. Meng, and C. W. Chu, “Compressibility of the $\text{HgBa}_2\text{Ca}_{n-1}\text{Cu}_n\text{O}_{2n+2+\delta}$ ($n=1,2,3$) high-temperature superconductors”, *Phys. Rev. B* **49**, 15299 (1994).
- [14] A. P. Drozdov, M. I. Erements, I. A. Troyan, V. Ksenofontov and S. I. Shylin, “Conventional superconductivity at 203 kelvin at high pressures in the sulfur hydride system”, *Nature* **525**, 73 (2015).
- [15] D. M. Eagles, “Bose-Einstein condensation in finite-length channels composed of weakly interacting filaments”, *Physics C* **301**, 165 (1998).
- [16] N. S. Enikolopyan, L. N. Smirnova, “Possible superconductivity near 300 K in oxidized polypropylene”, *JETP Lett* **49**, 371 (1989).
- [17] <http://home.web.cern.ch/topics/large-hadron-collider>.
- [18] <https://www.iter.org>.
- [19] M. Casas, A. Puente, A. Rigo, N.J. Davidson, R. M. Quick, M. Fortes, M. A. Solís, M. de Llano, O. Navarro, A. A. Valladares and O. Rojo, “BEC-Driven

- superconductivity in the cuprates”, *Int. J. Mod. Phys. B* **13**, 3489 (1999); S. K. Adhikari, M. Casas, A. Puente, A. Rigo, M. Fortes, M. A. Solís, M. de Llano, A. A. Valladares and O. Rojo, “Cooper pair dispersion relation for weak to strong coupling”, *Phys. Rev. B* **62**, 8671 (2000); S. K. Adhikari, M. Casas, A. Puente, A. Rigo, M. Fortes, M. A. Solís, M. de Llano, A. A. Valladares and O. Rojo, “Cooper pair dispersion relation in two dimensions”, *Physica C* **151**, 341 (2000); S. K. Adhikari, M. Casas, A. Puente, A. Rigo, M. Fortes, M. A. Solís, M. de Llano, A. A. Valladares and O. Rojo, “Superconductivity as a Bose-Einstein condensation”, *Physica C* **233**, 341 (2000); F. J. Sevilla, M. Grether, M. Fortes, M. A. Solís, M. de Llano, A. A. Valladares and O. Rojo, “Low-dimensional BEC”, *J. Low Temp. Phys.* **121**, 281 (2000); S. K. Adhikari, M. Casas, A. Puente, A. Rigo, M. Fortes, M. A. Solís, M. de Llano, A. A. Valladares and O. Rojo, “Linear to quadratic crossover of Cooper pair dispersion relation”, *Physica C* **351**, 341 (2001); M. Casas, N. J. Davidson, M. de Llano, T. A. Mamedov, A. Puente, R. M. Quick, A. Rigo and M. A. Solís, “Statistical Model of Superconductivity in a 2D Binary Boson-Fermion Mixture”, *Physica A* **295**, 425 (2001); M. Fortes, M. A. Solís, M. de Llano, V. V. Tolmachev, “Cooper pairs as resonances”, *Physica C* **95**, 364 (2001); J. Batle, M. Casas, M. Fortes, M. A. Solís, M. de Llano, A. A. Valladares and O. Rojo, “Bose-Einstein condensation of nonzero-center-of-mass-momentum Cooper pairs”, *Physica C* **161**, 364 (2001); M. Casas, M. de Llano, A. Puente, A. Rigo, M. A. Solís, “Two-dimensional Bose-Einstein condensation in cuprate superconductors”, *Solid State Communications* **123**, 101 (2002);
- [20] R. Wesche, *Physical Properties of High-Temperature Superconductors* (John Wiley and Sons, NY, 2015).
- [21] P. Salas, F. J. Sevilla, M. Fortes, M. de Llano and M. A. Solís, “Bose-Einstein condensation in multilayers”, *J. Low Temp. Phys.* **159**, 540 (2010); P. Salas, F. J. Sevilla, M. Fortes, M. de Llano, A. Camacho and M. A. Solís, “Dimensional crossover of a boson gas in multilayers”, *Phys. Rev A* **82**, 033632 (2010).
- [22] O. A. Rodríguez and M. A. Solís, “BEC and Dimensional Crossover in a Boson Gas Within Multi-slabs”, *J. Low Temp. Phys.* **175**, 435 (2014).

- [23] D. Eagles, “Modification of a charged-Bose-Gas model for observed room-temperature superconductivity in narrow channels through films of oxidized atactic polypropylene”, *International Journal of Modern Physics B* **25**, 1845 (2011).
- [24] P. Salas, F. J. Sevilla and M. A. Solís, “Boson Gas in a Periodic Array of Tubes”, *J. Low Temp. Phys.* **168**, 258 (2012).
- [25] V. E. Barragán, Tesis de Maestría (Posgrado en Ciencia e Ingeniería de Materiales, UNAM, 2015).
- [26] R. de L. Kronig, W. G. Penney, *Proc. Roy. Soc. (London), Ser. A, Math. Phys. Sci.* **130**, 499 (1930); D.A. McQuarrie, “The Kronig-Penney Model: A Single Lecture Illustrating the Band Structure of Solids”, *The Chemical Educator* **1**, Springer-Verlag New York, (1996).
- [27] D. J. Griffiths and C. A. Steinke, “Waves in locally periodic media”, *Am. J. Phys.* **69**, 137 (2001).
- [28] R. K. Pathria, *Statistical Mechanics*, 2nd ed. (Pergamon, Oxford, 1996).
- [29] S. N. Bose, “Plancks Gesetz und Lichtquantenhypothese” (Planck’s Law and Light Quantum Hypothesis), *Zeits. f Physik*, **26** 178 (1924).
- [30] A. Einstein, “Quantentheorie des einatomigen idealen Gases” (Quantum Theory of a Monoatomic Ideal Gas), *Physikalisch-mathematische Klasse*, 261 (1924); A. Einstein, “Quantentheorie des einatomigen idealen Gases. 2. Abhandlung” (Quantum Theory of the Monatomic Ideal Gas, Part II), *Physikalisch-mathematische Klasse*, 3 (1925).
- [31] M. H. Anderson, J. R. Ensher, M. R. Matthews, C. E. Wieman and E. A. Cornell, “Observation of Bose-Einstein Condensation in a Dilute Atomic Vapor”, *Science* **269**, 198 (1995).
- [32] K. B. Davis, M. O. Mewes, M. R. Andrews, N. J. van Druten, D. S. Durfee, D. M. Kurn and W. Ketterle, “Bose-Einstein Condensation in a Gas of Sodium Atoms”, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 3969 (1995).

-
- [33] J. M. B. Noronha, “Finite size effect on the Bose-Einstein condensation critical temperature”, 2014 (http://www.ulusiada.pt/workingpapers/wp-content/uploads/2014/06/WP_Others_01_2014.pdf).
- [34] R. K. Pathria, “Bose-Einstein Condensation in Thin Films”, *Phys. Rev. A* **5**, 1451 (1972).
- [35] V. C. Aguilera-Navarro, M. de Llano and M. A. Solís, “Bose-Einstein condensation for general dispersion relations”, *Eur. J. Phys.* **20**, 177 (1999).