UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO
EN CIENCIAS MATEMÁTICAS Y DE LA
ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA

CLASIFICACIÓN DE LAS ÁLGEBRAS DE BERGER IRREDUCIBLES

TESIS QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE

MAESTRO EN CIENCIAS

PRESENTA:

EFRAÍN BASURTO ARZATE

DIRECTOR DE LA TESIS: DR. GREGOR WEINGART
INSTITUTO DE MATEMÁTICAS, UNIDAD CUERNAVACA

MÉXICO, D. F. OCTUBRE 2015

A Fernanda

Índice general

Agradecimientos v

Introducción vii

Capítulo 1. Preliminares 1
§1. Conexiones en haces vectoriales 1
§2. Geodésicas y transporte paralelo 5
§3. Grupos de holonomía y álgebras de holonomía 9
§4. El teorema de Ambrose-Singer 14

Capítulo 2. Teoría de representaciones de álgebras de Lie 21
§1. Representaciones de álgebras de Lie 21
§2. Subálgebras de Cartan 24
§3. Descomposición de Cartan 26
§4. Sistemas de raíces y el grupo de Weyl 36
§5. Matriz de Cartan y diagramas de Dynkin 42
§6. Álgebras de Lie simples 50
§7. Pesos de representaciones de álgebras de Lie semisimples 54

Capítulo 3. Álgebras de Berger irreducibles 57
§1. Álgebras de Berger reales 57
§2. Ejemplos de álgebras de Berger 61
§3. Álgebras de Berger complejas irreducibles 66
§4. Álgebras de Berger complejas simples 70
§5. Representaciones complejas tensoriales 77

Conclusiones 91

Bibliografía 93

Agradecimientos

En primer lugar quiero expresar mi más profunda gratitud y admiración a mi asesor de tesis, el Dr. Gregor Weingart, que sin su valiosa ayuda e inagotable paciencia este trabajo no hubiese sido posible. Asimismo agradezco por proponerme este tema tan interesante en el cual disfruté enormemente trabajar a lo largo de este año.

Algo que he notado a lo largo de mi incursión en el mundo de la investigación es que encontrar a un asesor tanto capaz como dedicado a sus estudiantes no es muy común y son precisamente estas caratacterísticas que describen a la perfección al Dr. Weingart lo cual además de ser reconfortante es para mí una fuente de inspiración. Vielen Dank Gregor!

Agradezco profundamente a mis sinodales, el Dr. Alberto Verjovsky, el Dr. Rafael Herrera y el Dr. Oscar Palmas por dedicar parte de su tiempo a leer el trabajo de tesis y proporcionarme útiles comentarios y correcciones. Un agradecimiento especial va dedicado al Dr. Andrés Pedroza por sus valiosos comentarios como sinodal y su genuino interés en mi bienestar tanto acádemico como personal, el hecho de poder contar con su participación representa personalmente algo especial ya que aún recuerdo con mucho entusiasmo que fue él quien me dio el primer vistazo acerca de la vida de un matemático en la entrevista requerida para la admisión a la licenciatura.

Expreso mi sincero agradecimiento al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología ya que sin el apoyo económico proporcionado a lo largo de estos dos años el mero hecho de estudiar un programa de posgrado hubiera sido simplemente impensable.

Agradezco también al Dr. Ricardo Sáenz por ser con el primero quien tuve la oportunidad de realizar investigación cuando estuve como su estudiante de tesis de licenciatura. Al Dr. Carlos Castaño por haberme orientado en la importante decisión de la elección de tutor en el posgrado y del que sería también mi asesor de tesis de maestría. Al resto de mis profesores en el posgrado: Jawad, Emilio, Carlos y Fico así como a mis profesores de la licenciatura: Luis, Carlos, Roberto, Arturo, Johnny, Norma y Anthony. De todos ellos he obtenido conocimientos que de un modo u otro me han ayudado a lo largo de este camino aún inconcluso.

Gracias a mis amigos que siempre han estado ahí para mí. A Wences, por esas pláticas tan amenas en las que siempre termino aprendiendo algo de química. A Alejandra, que a pesar de la distancia sigue siendo una parte muy importante de mi vida y una de mis amigas más queridas. Gracias también a mi MVP Héctor que aunque tengo la fortuna de conocerlo hace apenas un año no exagero al decir que es uno de mis mejores amigos y una de las aún más escasas personas con las que puedo hablar totalmente sin inhibiciones cuya amistad deseo poder conservar toda la vida.

A mis hermanas, Jennifer y Lizbeth que a pesar de no vernos tan seguido como quisiera los momentos juntos resultan siempre en gratas memorias que guardo con mucho cariño.

Finalmente, a mis más grandes fuentes de inspiración, mis padres, María y Efraín que sin su cariño y apoyo incondicional ninguna de las muy pocas cosas que he sido capaz de lograr hubiera sido posible. Su sacrificio y tenacidad para sacarnos adelante a mis hermanas y a mí han sido verdaderamente admirables y dado de que no me alcanzará la vida para retribuirles al menos la mitad de lo que han hecho por mí no me queda más que expresarles mi inmensa gratitud y recordarles mi cariño. Muchas gracias por todo, mamá y papá.

Introducción

Una de las herramientas que provee mayor información acerca de una conexión afín en una variedad suave conexa M es su grupo de holonomía Hol. Dado un punto $p \in M$ definimos Hol como el conjunto de automorfismos lineales de T_pM inducidos por el transporte paralelo a lo largo de lazos basados en p. Si M es simplemente conexa se tiene que tal grupo es de hecho un subgrupo de Lie de $\mathrm{Aut}(T_pM)$ (prop. 1.18). La noción de grupo de holonomía fue introducida en 1923 por É. Cartan quien la utilizó en su trabajo de clasificación de los espacios localmente simétricos Riemannianos.

En la década de 1950 el concepto de holonomía fue objeto de profundas investigaciones. De particular importancia es el resultado conocido actualmente como el teorema de Ambrose-Singer, el cual caracteriza el álgebra de holonomía en términos de la curvatura de la conexión.

Utilizando el resultado previo, M. Berger estableció una condición puramente algebraica que es satisfecha por el álgebra de holonomía. Dicha condición es llamada el *primer criterio de Berger*. A las álgebras de Lie que satisfacen dicho criterio se les conoce como *álgebras de Berger*.

Posteriormente Berger dio una clasificación de las álgebras de Berger (pseudo-) Riemannianas, es decir, las álgebras de holonomía de conexiones de Levi-Civita de variedades (pseudo-) Riemannianas. Berger también dio una clasificación de otras álgebras de Berger, sin embargo, esta clasificación adicional resultó estar incompleta.

Más tarde, en las décadas de 1980 y 1990, S. Merkulov inició las investigaciones de las conexiones con álgebra de holonomía irreducibles hasta que en [**MeSc1**, **MeSc2**] se dio una clasificación completa de las álgebras de Berger irreducibles.

El objetivo del presente trabajo es dar un tratamiento extensivo a la clasificación de las álgebras de Berger irreducibles dada en [**Sc**]. A continuación detallamos la organización del mismo.

El primer capítulo comienza con un breve estudio de conexiones en haces fibrados con un énfasis particular en conexiones lineales. Posteriormente se hace un estudio concerniente a las ideas expuestas anteriormente, específicamente, estudiamos las nociones de campos vectoriales paralelos y el transporte paralelo.

Se continúa con la introducción del grupo de holonomía y el estudio de algunas de sus propiedades elementales. La parte principal de esta parte del trabajo es la introducción del concepto de álgebra de Berger y la demostración del teorema de Ambrose-Singer.

En el segundo capítulo tratamos con los fundamentos de teoría de representaciones de álgebras de Lie que serán de suma importancia en nuestro trabajo de clasificación. Comenzamos estudiando las representaciones irreducibles, además hacemos un estudio extensivo de la descomposición de Cartan y de los sistemas de raíces de un álgebra de Lie, lo cual nos lleva a definir el grupo de Weyl. Una vez que hemos introducido dichas herramientas procedemos a hacer un estudio de los sistemas fundamentales de raíces y de los diagramas de Dynkin asociados a las álgebras de Lie semisimples.

Este capítulo culmina con la clasificación de las álgebras de Lie simples en términos de los diagramas de Dynkin asociados y con la construcción explícita de los conjuntos de raíces para cada una de las álgebras pertenecientes a la clasificación.

En el capítulo tres se trata con la clasificación de las álgebras de Berger irreducibles. Este trabajo se encuentra enfocado en el estudio de las álgebras de Berger irreducibles complejas, sin embargo se provee de un criterio de clasificación de álgebras de Berger irreducibles reales.

Nuestro estudio de las álgebras de Berger complejas está dividido en dos partes, la clasificación de las álgebras de Berger cuya parte semisimple es de hecho simple y el caso complementario. En ambos casos el objeto principal que nos ayudará a obtener nuestra clasificación es el llamado *triple generador*, el cual está construido a partir de las raíces de la parte semisimple del álgebra.

Preliminares

1. Conexiones en haces vectoriales

Parte fundamental de nuestro trabajo se basa en el estudio de conexiones afines en variedades suaves. A continuación introducimos los conceptos básicos concernientes a este tema.

Definición 1.1. Sean E, M, EM variedades suaves y sea $\pi : EM \longrightarrow M$ una aplicación suave y sobreyectiva. El 4-tuplo (EM, π, M, E) es llamado un *haz fibrado (localmente trivial)* suave si para cada punto $p \in M$ existe un abierto U que contiene a p y un difeomorfismo suave $\phi : \pi^{-1}(U) \longrightarrow U \times E$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(U) \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\pi"'] & U \times E \arrow[dl, "\mathrm{pr}_1"] \\ U & \end{tikzcd}$$

conmuta, es decir,

$$\mathrm{pr}_1 \circ \phi = \pi,$$

donde $\mathrm{pr}_1 : U \times E \longrightarrow U$ es la proyección en U.

Las aplicaciones $\phi : \pi^{-1}(U) \longrightarrow U \times E$ son llamadas *trivializaciones locales* del haz. No es difícil ver que las trivializaciones tienen la forma $\phi = (\pi|_{\pi^{-1}(U)}, \Phi)$ donde $\Phi : \pi^{-1}(U) \longrightarrow E$ es una aplicación suave con la propiedad de que el mapeo $\Phi|_{E_pM} : E_pM \longrightarrow E$ es un difeomorfismo, donde $E_pM := \pi^{-1}(\{p\})$.

La aplicación Φ es llamada la *parte principal* de la trivialización. Un par (ϕ, U), donde ϕ es una trivialización sobre $U \subset M$ es llamada una *carta del haz*. Una familia $\{(\phi_\alpha, U_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ de cartas del haz tales que $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ es una cubierta para M es llamada un *atlas del haz*. Dadas dos cartas del haz $(\phi_\alpha, U_\alpha), (\phi_\beta, U_\beta)$, tenemos que

$$\phi_\alpha = (\pi, \Phi_\alpha) : \pi^{-1}(U_\alpha) \longrightarrow U_\alpha \times E$$

y análogamente para $\phi_\beta = (\pi, \Phi_\beta)$. Si $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, entonces $\emptyset \neq \pi^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta)$ y obtenemos los mapeos

$$\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1} : (U_\alpha \cap U_\beta) \times E \longrightarrow (U_\alpha \cap U_\beta) \times E.$$

Dado que $\Phi_\alpha|_{E_pM}$ es un difeomorfismo para cada $p \in U_\alpha$, la aplicación $\Phi_\alpha|_{E_pM} \circ \Phi_\beta|_{E_pM}^{-1} : E \longrightarrow E$ es un difeomorfismo para todo $p \in U_\alpha \cap U_\beta$. De este modo obtenemos una aplicación $\Phi_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow \mathrm{Diff}(E)$ dado por

$$p \longmapsto \Phi_{\alpha\beta}(p) = \Phi_\alpha|_{E_pM} \circ \Phi_\beta|_{E_pM}^{-1}.$$

De lo anterior se sigue que

$$\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1}(p, y) = (p, \Phi_{\alpha\beta}(p)(y)).$$

Las aplicaciones $\Phi_{\alpha\beta}$ son llamadas los *mapeos de transición.*

Definición 1.2. Sean $\xi_1 = (EM, \pi_1, M, E)$ y $\xi_2 = (FN, \pi_2, N, F)$ haces fibrados suaves. Un *morfismo de haces* es un par de mapeos suaves $\hat{f} : EM \longrightarrow FN$ y $f : M \longrightarrow N$ tales que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} EM & \xrightarrow{\hat{f}} & FN \\ {\scriptstyle \pi_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi_2} \\ M & \xrightarrow{f} & N \end{array}$$

conmuta.

Definición 1.3. Una *sección (global) suave* de un haz fibrado $\xi = (EM, \pi, M, E)$ es una aplicación suave $\sigma : M \longrightarrow EM$ tal que $\pi \circ \sigma = \mathrm{Id}_M$ (es decir, $\sigma(p) \in E_pM$ para todo $p \in M$). Una *sección local suave* sobre un abierto U es una aplicación suave $\sigma : U \longrightarrow EM$ tal que $\pi \circ \sigma = \mathrm{Id}_U$. El conjunto se secciones suaves del haz ξ se denota por $\Gamma(EM)$.

Lema 1.4. *Sea $\xi = (EM, \pi, M, E)$ un haz fibrado suave y $f : N \longrightarrow M$ una aplicación suave. Definimos*

$$f^*(EM) = \{(q, x) \in N \times EM | f(q) = \pi(x)\}.$$

Sea π_1 la restricción a $f^*(EM)$ de $\mathrm{pr}_1 : N \times EM \longrightarrow N$. Entonces se tiene que $f^*\xi = (f^*(EM), \pi_1, N, E)$ es un haz fibrado.

Demostración. Se verifica que $f^*(EM) \subset N \times EM$ es una subvariedad. Sea $\{(\phi_\alpha, U_\alpha)\}_\alpha$ un atlas para el haz ξ. Se tiene que $\{(\psi_\alpha, f^{-1}(U_\alpha))\}_\alpha$ es un atlas para $f^*\xi$, donde

$$\psi_\alpha : \pi_1^{-1}(f^{-1}(U_\alpha)) \longrightarrow f^{-1}(U_\alpha) \times E, \qquad (x, y) \longmapsto (x, \Phi_\alpha(y)).$$

Del hecho de que ϕ_α es una aplicación suave se tiene que ψ_α es suave. Para concluir mostramos que ψ_α es biyectiva. Sean $(x, y), (z, w) \in (f \circ \pi_1)^{-1}(U_\alpha)$ tales que $\psi_\alpha(x, y) = \psi_\alpha(z, w)$, es decir, $(x, \Phi_\alpha(y)) = (z, \Phi_\alpha(w))$ lo cual implica que $x = z, \Phi_\alpha(y) = \Phi_\alpha(w)$. Del hecho de que ϕ_α es una trivialización local sabemos que $\mathrm{pr}_{U_\alpha} \circ \phi_\alpha = \pi$. De este modo obtenemos que $\pi(y) = \pi(w)$, luego $\phi_\alpha(y) = \phi_\alpha(w)$ y la biyectividad de ϕ_α implica que $y = w$. El hecho de que $\Phi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \longrightarrow E$ es sobreyectiva implica que ψ_α es sobreyectiva. $\square$

Definición 1.5. El haz fibrado dado en el lema anterior es llamado el *haz inducido por f.*

Notamos que la restricción de $\mathrm{pr}_2 : N \times EM \longrightarrow EM$ a $f^*(EM)$, $\tilde{f}$, es un morfismo de haces fibrados sobre f, es decir,

$$\pi \circ \tilde{f} = f \circ \pi_1.$$

Definición 1.6. Sea $\xi = (EM, \pi, M, E)$ un haz fibrado suave y $f : N \longrightarrow M$ una aplicación suave. Una *sección de ξ a lo largo de f* es una aplicación $\sigma : N \longrightarrow EM$ tal que $\pi \circ \sigma = f$. El conjunto de secciones a lo largo de f lo denotaremos por $\Gamma_f(EM)$.

Proposición 1.7. *Sea $\xi = (EM, \pi, M, E)$ un haz fibrado suave y $f : N \longrightarrow M$ una aplicación suave. Entonces existe una biyección natural entre $\Gamma_f(EM)$ y $\Gamma(f^*(EM))$.*

Demostración. Sea $s \in \Gamma(f^*EM)$. Para $p \in N$ tenemos que $s(p) \in (f^*EM)_p$, el cual debe tener la forma (p, y) para algún $y \in E_{f(p)}M$. Luego la aplicación suave $\sigma := \mathrm{pr}_2 \circ s : N \longrightarrow EM$ tiene la propiedad que $\pi \circ \sigma = f$. Así obtenemos una aplicación $\Gamma(f^*EM) \longrightarrow \Gamma_f(EM)$ dada por $s \longmapsto \sigma$. Es claro que la inversa de esta aplicación está dada por $\sigma \longmapsto (\mathrm{Id}_N, \sigma)$. $\square$

Definición 1.8. Sea E un $\mathbb{F}$-espacio vectorial de dimensión finita. Un *haz vectorial suave sobre* $\mathbb{F}$ es un haz fibrado (EM, π, M, E) tal que

i) para cada $p \in M$ el conjunto E_pM tiene estructura de espacio vectorial sobre $\mathbb{F}$, isomorfo al espacio vectorial E;
ii) todo $p \in M$ está en el dominio de alguna carta del haz (ϕ, U) tal que para cada $x \in U$ la aplicación $\Phi|_{E_xM} : E_xM \longrightarrow E$ es un isomorfismo de espacios vectoriales, donde $\phi = (\pi, \Phi)$.

A la dimensión del espacio vectorial E se le conoce como el *rango* del haz vectorial.

A lo largo de este trabajo M denotará una variedad suave de dimensión m, $\pi : EM \longrightarrow M$ denotará un $\mathbb{F}$-haz vectorial de rango r sobre una variedad M con fibra el $\mathbb{F}$-espacio vectorial E.

Una observación importante es que el espacio de secciones de un haz vectorial es un módulo sobre el anillo de funciones suaves del espacio base. En efecto, sea (EM, π, M, E) un haz vectorial, $\sigma \in \Gamma(EM)$, $f \in C^\infty(M)$ y $p \in M$. Por definición tenemos que $(f\sigma)(p) = f(p)\sigma(p) \in E_pM$. De este modo obtenemos que $\pi \circ f\sigma = \mathrm{Id}_M$.

Definición 1.9. Una *conexión* en un $\mathbb{F}$-haz vectorial suave $\pi : EM \longrightarrow M$ es una aplicación $\nabla : \Gamma(TM) \times \Gamma(EM) \longrightarrow \Gamma(EM)$, $(X, Y) \longmapsto \nabla_X Y$ tal que:

1) $\nabla_{f_1X_1+f_2X_2}Y = f_1\nabla_{X_1}Y + f_2\nabla_{X_2}Y$ para toda $f_1, f_2 \in C^\infty(M)$, X_1, $X_2 \in \Gamma(TM)$ y todo $Y \in \Gamma(EM)$;
2) $\nabla_X(Y_1 + Y_2) = \nabla_X Y_1 + \nabla_X Y_2$ para todo $X \in \Gamma(TM)$, $Y_1, Y_2 \in \Gamma(EM)$;
3) $\nabla_X fY = (Xf)Y + f\nabla_X Y$, para toda $f \in C^\infty(M), X \in \Gamma(TM)$, y $Y \in \Gamma(EM)$.

Definición 1.10. Una conexión en el haz tangente TM de una variedad M es llamada una *conexión afín.*

Las definiciones anteriores tienen sentido ya que es un resultado conocido que todo haz vectorial admite una conexión.

Veamos ahora cómo se comportan las conexiones en haces vectoriales con respecto a las restricciones a conjuntos abiertos de una variedad. Definamos el *mapeo de restricción* $r_V^U : \Gamma(U, EM) \longrightarrow \Gamma(V, EM)$ dado por $\sigma \longmapsto \sigma|_V$ donde $V \subset U \subset M$ abiertos.

Definición 1.11. Una *conexión natural* ∇ en un $\mathbb{F}$-haz vectorial $EM \longrightarrow M$ suave es una asignación de cada abierto $U \subset M$ a una aplicación

$$\nabla^U : \Gamma(U, TM) \times \Gamma(U, EM) \longrightarrow \Gamma(U, EM), \qquad (X, \sigma) \longmapsto \nabla_X^U \sigma$$

tal que:

1) Para cada abierto $U \subset M$, la aplicación ∇^U es una conexión en el haz restringido $EM|_U \longrightarrow U$;
2) Para abiertos encajados $V \subset U \subset M$ se tiene que $r_V^U(\nabla_X^U \sigma) = \nabla_{r_V^U X}^V r_V^U \sigma$ (naturalidad respecto a restricciones);
3) Para $X \in \Gamma(U, TM)$ y $\sigma \in \Gamma(U, EM)$ el valor $(\nabla_X^U \sigma)(p)$ sólo depende del valor de X en el punto $p \in U$.

A continuación veremos que para variedades de dimensión finita las conexiones en haces vectoriales son de hecho naturales.

Lema 1.12. *Supongamos $\nabla : \Gamma(TM) \times \Gamma(EM) \longrightarrow \Gamma(EM)$ es una conexión en el haz vectorial $EM \longrightarrow M$. Entonces si para algún abierto U se tiene que $X|_U = 0$ o $\sigma|_U = 0$, entonces*

$$(\nabla_X \sigma)(p) = 0 \qquad \forall p \in U.$$

Demostración. Sea $p \in U$. Entonces existe un abierto V con cerradura compacta y $p \in V \subset \bar{V} \subset U$ y una función suave f tal que $f|_V \equiv 1$ y $f|_{M \setminus U} \equiv 0$. Si $\sigma|_U \equiv 0$ obtenemos entonces que $f\sigma \equiv 0$ en M y dado que ∇ es $\mathbb{F}$-bilineal obtenemos que $\nabla(f\sigma) \equiv 0$ en M. Ahora, dado que ∇ es una conexión tenemos que

$$\nabla_X(f\sigma)(p) = (Xf)(p)\sigma(p) + f(p)(\nabla_X \sigma)(p) = (\nabla_X \sigma)(p) = 0,$$

la segunda igualdad se sigue del hecho que $\sigma|_U \equiv 0, f|_V \equiv 1$. Dado que $p \in U$ arbitrario se sigue el resultado del lema.

El caso $X|_U \equiv 0$ se sigue de manera similar. $\square$

Una consecuencia del lema anterior es que podemos definir $\nabla_{v_p} \sigma$ para $v_p \in T_pM$ por

$$\nabla_{v_p} \sigma := (\nabla_X \sigma)(p),$$

donde $X \in \Gamma(TM)$ es un campo vectorial (cualquiera) tal que $X_p = v_p$.

Corolario 1.13. *Sea $X \in \Gamma(TM), Y \in \Gamma(EM)$. Si $X_p = 0$ para algún $p \in M$, entonces $(\nabla_X Y)(p) = 0$.*

Demostración. Sea $(x = (x^1, \ldots, x^m), U)$ un sistema de coordenadas alrededor de $p \in M$. Luego, en U tenemos que $X = \sum_\mu \xi^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}$ donde $\xi^\mu \in C^\infty(U)$ con

$\xi^\mu(p) = 0$ para $1 \leq \mu \leq m$. Por lo tanto obtenemos que

$$(\nabla_X Y)(p) = (\nabla^U_X Y)(p) = \sum_\mu \xi^\mu(p)(\nabla^U_{\frac{\partial}{\partial x^\mu}} Y)(p) = 0.$$

□

2. Geodésicas y transporte paralelo

Comenzamos esta sección definiendo una *curva en una variedad suave M* como una aplicación suave $\gamma : I \longrightarrow M$ donde $I \subset \mathbb{R}$ es un intervalo cualquiera. Definimos un *segmento de curva* como una curva cuyo dominio es un intervalo compacto.

Si $\gamma : I \longrightarrow M$ es una curva y el intervalo I tiene un punto final decimos que γ es suave si se extiende a una curva suave sobre un intervalo abierto que contiene a I. De esto se tiene que cuando tratamos con una curva suave γ definida en un intervalo que tiene uno o dos puntos extremos podemos extenderla siempre a una curva suave definida sobre un intervalo abierto más grande y una vez que hemos finalizado nuestro trabajo con dicha extensión basta con restringir al intervalo original para obtener la información deseada en la curva original. Lo anterior es posible debido a que se tiene que tal estudio no depende de la extensión de I. De este modo podemos asumir, cuando resulte conveniente, que γ está definida sobre un intervalo abierto.

Dada una curva suave $\gamma : I \longrightarrow M$, definimos, para $t_0 \in I$, $\dot{\gamma}(t_0) \in T_{\gamma(t_0)}M$ definido como

$$\dot{\gamma}(t_0) = T_{t_0}\gamma \cdot \left.\frac{\partial}{\partial u}\right|_{t_0} = \left.\frac{d}{dt}\right|_0 \gamma(t + t_0),$$

donde $\frac{\partial}{\partial u}|_t$ es el vector base coordenado en t de $T_t I$ asociado a la función coordenada usual en $\mathbb{R}$. De este modo se tiene que si f es una función suave definida en una vecindad de $\gamma(t_0)$, entonces $\dot{\gamma}(t_0)$ actúa como una derivación definiendo

$$\dot{\gamma}(t_0) \cdot f = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t_0} f \circ \gamma.$$

Escribiendo la representación en coordenadas de γ como $\gamma(t) = (\gamma^1(t), \ldots, \gamma^m(t))$ obtenemos entonces que

$$\dot{\gamma}(t) = \sum_{\mu=1}^m \frac{d\gamma^\mu}{dt}(t) \left.\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right|_{\gamma(t)}.$$

Un *campo vectorial a lo largo de γ* está definido como un $X \in \Gamma_\gamma(TM)$. De lo anterior vemos que $\dot{\gamma} \in \Gamma_\gamma(TM)$.

Una forma de construir más campos vectoriales a lo largo de la curva γ es la siguiente. Consideremos $\tilde{X} \in \Gamma(TM)$. Para $t \in I$ definamos $X(t) = \tilde{X}_{\gamma(t)}$. Se tiene entonces que $X \in \Gamma_\gamma(TM)$. Un campo vectorial X a lo largo de γ se dice que es *extensible* si existe $\tilde{X} \in \Gamma(TM)$ tal que en una vecindad de la imagen de γ, X y $\tilde{X}$ están relacionados como antes.

De lo anterior se tiene el siguiente resultado

Lema 1.14. [**L**, Lemma 4.9] *Sea ∇ una conexión afín en M. Para cada curva $\gamma : I \longrightarrow M$, ∇ determina un único operador*

$$\frac{\nabla}{dt} : \Gamma_\gamma(TM) \longrightarrow \Gamma_\gamma(TM)$$

que satisface las siguientes propiedades:

1) *Linealidad sobre $\mathbb{R}$:*
$$\frac{\nabla}{dt}(aX + bY) = a\frac{\nabla}{dt}X + b\frac{\nabla}{dt}Y \qquad \text{para todo } a, b \in \mathbb{R}.$$
2) *Regla de Leibniz:*
$$\frac{\nabla}{dt}(fX) = \dot{f}X + f\frac{\nabla}{dt}X \qquad \text{para todo } f \in C^\infty(I).$$
3) *Si $X \in \Gamma_\gamma(TM)$ es extensible, entonces para cualquier extensión $\tilde{X}$ de X,*
$$\frac{\nabla}{dt}X(t) = \nabla_{\dot{\gamma}(t)}\tilde{X}.$$

En la demostración del resultado previo se da la construcción explícita del operador $\frac{\nabla}{dt}$, a saber,

$$\frac{\nabla}{dt}X(t_0) = \sum_k \left(\frac{dX^k}{dt}(t_0) + \sum_{\mu,\nu} \Gamma^k_{\mu\nu}(\gamma(t_0))X^\nu(t_0)\frac{d\gamma^\mu}{dt}(t_0) \right) \left.\frac{\partial}{\partial x^k}\right|_{\gamma(t_0)} \tag{1.1}$$

En la ecuación anterior las funciones $\Gamma^k_{\mu\nu}$ están dadas por $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^\mu}} \frac{\partial}{\partial x^\nu} = \sum_k \Gamma^k_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x^k}$.

Consideremos ahora $f : J \times I \longrightarrow M$ una aplicación suave con $I, J \subset \mathbb{R}$ intervalos y sea $X \in \Gamma_f(TM)$, de manera análoga podemos construir operadores

$$\frac{\nabla}{\partial t}, \frac{\nabla}{\partial s} : \Gamma_f(TM) \longrightarrow \Gamma_f(TM)$$

dados por

$$\frac{\nabla}{\partial t}X(s,t) = \sum_{k=1}^m \left(\frac{\partial \xi^k}{\partial t}(s,t) + \sum_{\mu,\nu=1}^m \Gamma^k_{\mu\nu}(f(s,t))\xi^\nu(s,t)\frac{\partial f^\mu}{\partial t}(s,t) \right) \left.\frac{\partial}{\partial x^k}\right|_{f(s,t)}$$

y

$$\frac{\nabla}{\partial s}X(s,t) = \sum_{k=1}^m \left(\frac{\partial \xi^k}{\partial s}(s,t) + \sum_{\mu,\nu=1}^m \Gamma^k_{\mu\nu}(f(s,t))\xi^\nu(s,t)\frac{\partial f^\mu}{\partial s}(s,t) \right) \left.\frac{\partial}{\partial x^k}\right|_{f(s,t)},$$

donde

$$X(s,t) = \sum_{\mu=1}^m \xi^\mu(s,t) \left.\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right|_{f(s,t)}.$$

Con estos operadores y utilizando la identificación que existe entre $\Gamma_f(TM)$ y $\Gamma(f^*TM)$ podemos definir una conexión

$$f^*\nabla : \Gamma(T(J \times I)) \times \Gamma(f^*TM) \longrightarrow \Gamma(f^*TM)$$

dada por

$$(Z, X) \longmapsto (f^*\nabla)_Z X,$$

donde, localmente, $Z = \zeta^1(s,t)\frac{\partial}{\partial s} + \zeta^2(s,t)\frac{\partial}{\partial t}$ y

$$(f^*\nabla)_Z X = \zeta^1(s,t)\frac{\nabla}{\partial s}X + \zeta^2(s,t)\frac{\nabla}{\partial t}X \in \Gamma(f^*TM).$$

Ahora, para (M,∇) una variedad con conexión afín ∇, consideramos una curva γ en M. La *aceleración de* γ es el campo vectorial $\frac{\nabla}{dt}\dot{\gamma} \in \Gamma_\gamma(TM)$. Una curva γ es llamada una *geodésica con respecto a* ∇ si su aceleración es 0, es decir,

$$\frac{\nabla}{dt}\dot{\gamma} = 0.$$

Teorema 1.15. *Sea* (M,∇) *dada como en el párrafo anterior. Para cualquier* $p \in M$*, cualquier* $X \in T_pM$ *y para cualquier* $t_0 \in \mathbb{R}$*, existe un intervalo abierto* $I \subset \mathbb{R}$ *que contiene a* t_0 *y una geodésica* $\gamma : I \longrightarrow M$ *tal que* $\gamma(t_0) = p$*,* $\dot{\gamma}(t_0) = X$*. Se tiene además que cualesquiera dos tales geodésicas coinciden en su dominio común.*

Demostración. Elegimos un sistema de coordenadas (x,U) alrededor de $p \in M$. De (1.1) se tiene que una curva $\gamma : I \longrightarrow U$ es una geodésica si y solo si sus funciones componentes $\gamma(t) = (x^1(t),\ldots,x^m(t))$ satisfacen la *ecuación geodésica*

$$\frac{d^2x^k}{dt^2}(t) + \sum_{\mu,\nu}\Gamma^k_{\mu\nu}(\gamma(t))\frac{dx^\mu}{dt}(t)\frac{dx^\nu}{dt}(t) = 0. \tag{1.2}$$

Este es un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden en las funciones $x^\mu(t)$. La manera usual de probar existencia y unicidad para un sistema de segundo orden es introducir variables auxiliares $v^\mu = \dot{x}^\mu$ para convertir el sistema original en el sistema equivalente siguiente con el doble de variables

$$\begin{aligned}\dot{x}^k(t) &= v^k(t),\\ \dot{v}^k(t) &= -\sum_{\mu,\nu}\Gamma^k_{\mu\nu}(\gamma(t))v^\mu(t)v^\nu(t).\end{aligned}$$

Por el teorema de existencia y unicidad para ecuaciones diferenciales de primer orden se tiene que, para cualquier $(p,X) \in U \times \mathbb{R}^m$, existe $\epsilon > 0$ y una única solución $\eta : (t_0-\epsilon, t_0+\epsilon) \longrightarrow U \times \mathbb{R}^m$ para este sistema que satisface la condición inicial $\eta(t_0) = (p,X)$. Escribimos las funciones componentes de η de la forma $\eta(t) = (x^\mu(t), v^\mu(t))$. Se tiene entonces que la curva $\gamma(t) = (x^1(t),\ldots,x^m(t))$ en U satisface las características que pide el teorema.

Para probar la unicidad, supongamos que $\gamma, \sigma : I \longrightarrow M$ son geodésicas definidas en un intervalo abierto con $\gamma(t_0) = \sigma(t_0)$ y $\dot{\gamma}(t_0) = \dot{\sigma}(t_0)$. Por el teorema de existencia y unicidad para ecuaciones diferenciales tenemos que las curvas coinciden en alguna vecindad de t_0. Sea β el supremo de los números b tales que las curvas coinciden en el intervalo $[t_0, b]$. Si $\beta \in I$, por continuidad se tiene que $\gamma(\beta) = \sigma(\beta)$ y $\dot{\gamma}(\beta) = \dot{\sigma}(\beta)$ y utilizando el hecho de la unicidad local en una vecindad de β concluimos que las curvas coinciden en un intervalo más grande, lo cual es una contradicción con la forma en que β fue elegida. Procediendo de manera análoga a la izquierda de t_0, concluimos que las curvas coinciden en todo I. □

De la parte de unicidad del teorema anterior se sigue que, para cualquier $p \in M$ y $X \in T_pM$, existe una única *geodésica maximal* (una geodésica que no puede ser extendida a un intervalo más grande) $\gamma : I \longrightarrow M$ con $\gamma(0) = p$ y $\dot{\gamma}(0) = X$, definida en algún intervalo abierto I; a saber, sea I la unión de todos los intervalos abiertos en los cuales tal geodésica está definida, observando que las geodésicas coinciden donde se traslapan. Nos referimos a esta geodésica maximal como *la geodésica maximal con punto inicial p y velocidad inicial X*. Denotamos a tal geodésica por γ_X.

Ahora introducimos otra construcción importante que involucra al operador $\frac{\nabla}{dt}$.

Sea (M, ∇) y γ como antes. Un campo vectorial a lo largo de γ se dice que es *paralelo a lo largo de γ con respecto a ∇* si anula al operador $\frac{\nabla}{dt}$. De este modo una geodésica puede ser caracterizada como una curva tal que su vector velocidad, $\dot{\gamma}$, es paralelo a lo largo de la curva. Un campo vectorial $X \in \Gamma_\gamma(TM)$ se dice que es *paralelo* si es paralelo a lo largo de cualquier curva.

El hecho fundamental acerca de campos vectoriales paralelos es que cualquier vector tangente en cualquier punto sobre una curva puede ser extendido de manera única a un campo vectorial paralelo a lo largo de la curva completa.

Teorema 1.16. [**L**, Thm 4.11] *Dada una curva $\gamma : I \longrightarrow M$, $t_0 \in I$ y un vector $X_0 \in T_{\gamma(t_0)}M$, existe un único campo vectorial paralelo a lo largo de γ, X, tal que $X(t_0) = X_0$.*

Sea $\gamma : I \longrightarrow M$ una curva y $t_0, t_1 \in I$, el teorema anterior nos permite definir un operador

$$P_{t_0 t_1} : T_{\gamma(t_0)}M \longrightarrow T_{\gamma(t_1)}M$$

dado por

$$P_{t_0 t_1} X_0 = X(t_1),$$

donde $X_0 \in T_{\gamma(t_0)}M$ y X es el campo vectorial paralelo a lo largo de γ dado en el teorema anterior. Afirmamos que para $t_0, t_1 \in I$ dados el mapeo $P_{t_0 t_1}$ es inyectivo. En efecto, sea $X_0 \in T_{\gamma(t_0)}M$ tal que $P_{t_0 t_1} X_0 = 0$ y X como en el teorema anterior. Del hecho de que $P_{t_0 t_1} X_0 = 0 = X(t_1)$ y que $t_1 \in I$ es arbitrario sabemos, de la unicidad del teorema que $X \equiv 0$ y de este modo obtenemos que $X_0 = X(t_0) = 0$. Del hecho de que $P_{t_0 t_1}$ es una aplicación lineal inyectiva se obtiene que es un isomorfismo de espacios vectoriales entre $T_{\gamma(t_0)}M$ y $T_{\gamma(t_1)}M$. Se tiene que el operador $\frac{\nabla}{dt}$ puede ser obtenido nuevamente del *transporte paralelo* $P_{t_0 t_1}$ mediante la fórmula

$$\frac{\nabla}{dt} X(t_0) = \lim_{t \longrightarrow t_0} \frac{P_{t_0 t}^{-1} X(t) - X(t_0)}{t - t_0}.$$

Cuando I es un intervalo cerrado, digamos $[a, b]$, $\gamma : I \longrightarrow M$ una curva y $\gamma(a) = p, \gamma(b) = q$ denotamos al transporte paralelo P_{ab} como P_γ.

A continuación veremos algunas propiedades del transporte paralelo. Por simplicidad supongamos $I = [0, 1]$, sean M y ∇ como antes, $x, y, z \in M$ y α, β caminos suaves a trozos en M con $\alpha(0) = x$, $\alpha(1) = y = \beta(0)$ y $\beta(1) = z$. Definimos los caminos α^{-1} y $\beta\alpha$ como

$$\alpha^{-1}(t) = \alpha(1 - t) \quad \text{y} \quad \beta\alpha(t) = \begin{cases} \alpha(2t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \beta(2t - 1) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

De este modo obtenemos que α^{-1} es un camino suave a trozos de y a x y $\beta\alpha$ un camino suave a trozos de z a y.

Sea $A_x \in T_xM$ y $P_\alpha(A_x) = A_y \in T_yM$. De la definición de P_α obtenemos que si $P_\alpha(A_x) = A_y$ entonces $P_{\alpha^{-1}}(A_y) = A_x$. Es decir, hemos mostrado que para cada camino γ suave a trozos en M, $P_\gamma^{-1} = P_{\gamma^{-1}}$. Utilizando un argumento similar obtenemos que $P_{\beta\alpha} = P_\beta \circ P_\alpha$.

3. Grupos de holonomía y álgebras de holonomía

Sea M una variedad de dimensión m conexa y ∇ una conexión afín en M. Sea $p \in M$ dado y definimos

$$\mathcal{L}_p = \{\gamma : [0,1] \longrightarrow M |\ \gamma(0) = \gamma(1) = p\},$$

el conjunto de lazos en p suaves a trozos y sea $\mathcal{L}_p^0 \subset \mathcal{L}_p$ el conjunto de lazos en p que son homotópicos al lazo trivial.

Para $\gamma \in \mathcal{L}_p$ consideramos el transporte paralelo $P_\gamma : T_pM \longrightarrow T_pM$. La *holonomía de* ∇ *en* $p \in M$ está definida como

$$\mathrm{Hol}_p(\nabla) := \{P_\gamma |\ \gamma \in \mathcal{L}_p\} \subset \mathrm{Aut}(T_pM),$$

y la *holonomía restringida* la definimos como

$$\mathrm{Hol}_p^0(\nabla) := \{P_\gamma |\ \gamma \in \mathcal{L}_p^0\} \subset \mathrm{Hol}_p(\nabla).$$

Anteriormente mostramos que, para cualesquiera caminos α, β entre dos puntos de M obtenemos que $P_{\alpha^{-1}} = P_\alpha^{-1}$ y $P_{\beta\alpha} = P_\beta \circ P_\alpha$, luego si $P_\alpha, P_\beta \in \mathrm{Hol}_p(\nabla)$ tenemos también que $P_\beta \circ P_\alpha^{-1} \in \mathrm{Hol}_p(\nabla)$. Es decir,

$$\mathrm{Hol}_p(\nabla) < \mathrm{Aut}(T_pM).$$

Recordemos que M es una variedad conexa, no es difícil demostrar que las variedades conexas son de hecho conexas por caminos. Sean $x, y \in M$ y sea $\gamma : [0,1] \longrightarrow M$ un camino suave a trozos con $\gamma(0) = x, \gamma(1) = y$ y como antes $P_\gamma : T_xM \longrightarrow T_yM$ el transporte paralelo. Si α es un lazo en x, entonces $\gamma\alpha\gamma^{-1}$ es un lazo en y y, por lo anterior tenemos que $P_{\gamma\alpha\gamma^{-1}} = P_\gamma \circ P_\alpha \circ P_\gamma^{-1}$. Por lo tanto, si $P_\alpha \in \mathrm{Hol}_x(\nabla)$ entonces $P_\gamma \mathrm{Hol}_x(\nabla) P_\gamma^{-1} \subset \mathrm{Hol}_y(\nabla)$. Para mostrar la contención $\mathrm{Hol}_y(\nabla) \subset P_\gamma \mathrm{Hol}_x(\nabla) P_\gamma^{-1}$ notamos que para un elemento arbitrario $P_\beta \in \mathrm{Hol}_y(\nabla)$, $P_\beta = P_\gamma \circ (P_\gamma^{-1} \circ P_\beta \circ P_\gamma) \circ P_\gamma^{-1}$ y así $P_\gamma^{-1} \circ P_\beta \circ P_\gamma \in \mathrm{Hol}_x(\nabla)$. Por lo tanto obtenemos que

$$P_\gamma \mathrm{Hol}_x(\nabla) P_\gamma^{-1} = \mathrm{Hol}_y(\nabla).$$

De este modo obtenemos que, para todo $p, q \in M$, $\mathrm{Hol}_p(\nabla) \cong \mathrm{Hol}_q(\nabla)$. Debido a esto escribiremos simplemente $\mathrm{Hol}(\nabla)$ para referirnos al grupo de holonomía sin hacer referencia explícita al punto de M elegido. Análogamente obtenemos que $\mathrm{Hol}_p^0(\nabla)$ no depende del punto $p \in M$ elegido.

Del hecho que TM es un haz vectorial sobre M con fibra $\mathbb{R}^m$, sea $p \in M$. Cualquier identificación $T_pM \cong \mathbb{R}^m$ induce un isomorfismo $\mathrm{Aut}(T_pM) \cong \mathrm{Aut}(\mathbb{R}^m)$. Por esta razón podremos considerar a $\mathrm{Hol}_p(\nabla)$ como un subgrupo de $\mathrm{Aut}(\mathbb{R}^m)$, de hecho se tiene el siguiente resultado.

Proposición 1.17. *Sea M una variedad y ∇ una conexión afín en M. Para $p \in M$, $\mathrm{Hol}_p(\nabla)$ puede ser considerado como un subgrupo de $\mathrm{Aut}(\mathbb{R}^m)$ definido salvo conjugación en $\mathrm{Aut}(\mathbb{R}^m)$.*

Hacemos notar que el resultado previo es válido también para variedades complejas.

Proposición 1.18. *Sea M una variedad simplemente conexa y ∇ una conexión afín en M. Entonces $\mathrm{Hol}(\nabla)$ es un subgrupo de Lie conexo de $\mathrm{Aut}(\mathbb{R}^m)$.*

Demostración. Elegimos un punto $p \in M$ y $\gamma \in \mathcal{L}_p$. Dado que M es simplemente conexa sabemos que γ es contraíble al lazo constante p, es decir, existe una familia $\{\gamma_s | s \in [0,1]\}$, con $\gamma_s \in \mathcal{L}_p$, $\gamma_0(t) = p$ para $t \in [0,1]$, $\gamma_1 = \gamma$ y $\gamma_s(t)$ que depende continuamente de s y de t. De hecho podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que γ_s es suave a trozos y que γ_s depende suavemente (a trozos) de s.

De lo anterior obtenemos que $s \longmapsto P_{\gamma_s}$ es una aplicación de $[0,1]$ a $\mathrm{Hol}_p(\nabla)$ suave a trozos (considerando el mapeo en $\mathrm{Aut}(\mathbb{R}^m)$). Dado que γ_0 es el lazo constante p se tiene que $P_{\gamma_0} = 1_{\mathrm{Hol}_p(\nabla)}$ y $P_{\gamma_1} = P_\gamma$, pues $\gamma_1 = \gamma$, es decir, $s \longmapsto P_{\gamma_s}$ es un camino de $1_{\mathrm{Hol}_p(\nabla)}$ a P_γ suave a trozos. De este modo concluimos que para cada $P_\gamma \in \mathrm{Hol}_p(\nabla)$ existe un camino suave a trozos del elemento identidad de $\mathrm{Hol}_p(\nabla)$ a P_γ. Por lo tanto $\mathrm{Hol}_p(\nabla)$ es un subgrupo arco-conexo de $\mathrm{Aut}(\mathbb{R}^m)$. El resultado se sigue por un teorema de Yamabe, que enuncia que los subgrupos arco-conexos de un grupo de Lie son subgrupos *analíticos* (es decir, isomorfos a subgrupos de Lie conexos)[1]. □

Consideramos ahora el caso en que M no necesariamente es simplemente conexa. A continuación mostramos que los grupos de holonomía restringidos siguen siendo conexos a pesar de esto.

Proposición 1.19. *Sean M y ∇ dadas como antes. Entonces $\mathrm{Hol}^0(\nabla)$ es un subgrupo de Lie conexo de $\mathrm{Aut}(\mathbb{R}^m)$. Se tiene también que es la componente conexa de $\mathrm{Hol}(\nabla)$ que contiene al elemento identidad y que es un subgrupo normal de $\mathrm{Hol}(\nabla)$. Más aún, existe un homomorfismo de grupos natural y sobreyectivo $\phi : \pi_1(M) \longrightarrow \mathrm{Hol}(\nabla)/\mathrm{Hol}^0(\nabla)$. De este modo, si M es simplemente conexa obtenemos que $\mathrm{Hol}(\nabla) = \mathrm{Hol}^0(\nabla)$.*

Demostración. Con un argumento similar al utilizado en la demostración de la proposición 1.18 obtenemos que $\mathrm{Hol}^0(\nabla)$ es un subgrupo de Lie conexo de $\mathrm{Aut}(\mathbb{R}^m)$. Sea $p \in M$. Si $\alpha \in \mathcal{L}_p$, $\beta \in \mathcal{L}_p^0$ entonces $\alpha\beta\alpha^{-1} \in \mathcal{L}_p^0$. De este modo obtenemos que para $P_\alpha \in \mathrm{Hol}_p(\nabla)$ y $P_\beta \in \mathrm{Hol}_p^0(\nabla)$, $P_\alpha P_\beta P_\alpha^{-1} \in \mathrm{Hol}_p^0(\nabla)$, es decir, hemos mostrado que $P_\alpha \mathrm{Hol}_p^0(\nabla) P_\alpha^{-1} \subset \mathrm{Hol}_p^0(\nabla)$ para todo $\alpha \in \mathcal{L}_p$ y de esto se sigue que $\mathrm{Hol}_p^0(\nabla)$ es un subgrupo normal de $\mathrm{Hol}_p(\nabla)$.

Ahora, dado que M es conexa y por lo tanto conexa por caminos, se tiene que el grupo fundamental de M, $\pi_1(M)$, no depende del punto base elegido. Definimos $\phi : \pi_1(M,p) \longrightarrow \mathrm{Hol}_p(\nabla)/\mathrm{Hol}_p^0(\nabla)$ dado por $\phi([\gamma]) = P_\gamma \mathrm{Hol}_p^0(\nabla)$. Para ver que ϕ está bien definido tomamos $\tilde{\gamma} \in \mathcal{L}_p$ tal que $\tilde{\gamma} \sim \gamma$, donde $\sim$ es la relación de homotopía que define el grupo fundamental. Ahora, dado que $[\tilde{\gamma}] = [\gamma]$, tenemos

[1] Ver por ejemplo [**Ya**]

que $[\gamma]\cdot[\tilde{\gamma}]^{-1} = [\gamma\tilde{\gamma}^{-1}] = [e_p]$, donde e_p es el lazo constante en el punto p, luego, $\gamma\tilde{\gamma}^{-1} \sim e_p$, es decir $\gamma\tilde{\gamma} \in \mathcal{L}_p^0$, lo que implica que $P_{\gamma\tilde{\gamma}^{-1}} = P_\gamma P_{\tilde{\gamma}}^{-1} \in \mathrm{Hol}_p^0(\nabla)$. Por lo tanto ϕ está bien definida. El hecho de que ϕ es un epimorfismo se verifica fácilmente. Un resultado conocido de topología es que el grupo fundamental de una variedad es contable. Este hecho junto con el primer teorema de isomorfismo implican que $\mathrm{Hol}_p(\nabla)/\,\mathrm{Hol}_p^0(\nabla)$ es también un grupo contable. De esto se obtiene que $\mathrm{Hol}_p^0(\nabla)$ es la componente conexa de $\mathrm{Hol}_p(\nabla)$ que contiene a la identidad. $\square$

Definición 1.20. Sea M una variedad conexa y ∇ una conexión afín en M. Entonces $\mathrm{Hol}^0(\nabla)$ es un subgrupo de Lie de $\mathrm{Aut}(\mathbb{R}^m)$ definido salvo conjugación. Definimos el *álgebra de holonomía* $\mathfrak{hol}(\nabla)$ como el álgebra de Lie de $\mathrm{Hol}^0(\nabla)$. Es una subálgebra de $\mathrm{End}(\mathbb{R}^m)$, definida salvo la acción adjunta de $\mathrm{Aut}(\mathbb{R}^m)$. Similarmente $\mathrm{Hol}_p^0(\nabla)$ es un subgrupo de Lie de $\mathrm{Aut}(T_pM)$ para todo $p \in M$. Definimos $\mathfrak{hol}_p(\nabla)$ como el álgebra de Lie de $\mathrm{Hol}_p^0(\nabla)$ la cual es una subálgebra de $\mathrm{End}(T_pM)$.

Sea ∇ una conexión afín en la variedad M, a esta conexión podemos asociarle dos tensores, a saber, el llamado *tensor de torsión* y el *tensor de curvatura*, los cuales están dados por las fórmulas

$$\mathrm{Tor}_p^{\nabla}(x,y) = (\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y])(p), \tag{1.3}$$

$$R_p(x,y)z = (\nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z)(p). \tag{1.4}$$

Donde $x,y,z \in T_pM$ y $X,Y,Z \in \Gamma(TM)$ tales que $X_p = x, Y_p = y, Z_p = z$. Del lema 1.12 tenemos que Tor^{∇} y R están bien definidos, es decir, no dependen de la extensión de x,y,z.

En este trabajo consideramos únicamente conexiones afines libres de torsion. Es fácil verificar que el tensor de curvatura de tales conexiones satisface *la primera y la segunda identidad de Bianchi*, es decir,

$$R(x,y)z + R(y,z)x + R(z,x)y = 0, \tag{1.5}$$

$$(\nabla_x R)(y,z) + (\nabla_y R)(z,x) + (\nabla_z R)(x,y) = 0 \tag{1.6}$$

para todo $x,y,z \in T_pM$.

Sea V un espacio vectorial y $\mathfrak{h} \subset \mathrm{End}(V)$ una subálgebra. Definimos el *espacio de mapeos de curvatura formales de* $\mathfrak{h}$

$$K(\mathfrak{h}) := \{R \in \Lambda^2V^* \otimes \mathfrak{h} |\ R(x,y)z + R(y,z)x + R(z,x)y = 0\ \forall x,y,z \in V\},$$

y el *espacio de derivadas de curvaturas formales de* $\mathfrak{h}$

$$K^1(\mathfrak{h}) := \{\phi \in V^* \otimes K(\mathfrak{h}) |\ \phi(x)(y,z) + \phi(y)(z,x) + \phi(z)(x,y) = 0\ \forall x,y,z \in V\}.$$

Definimos ahora

$$\underline{\mathfrak{h}} := \mathrm{gen}_{\mathbb{F}}\{R(x,y) |\ R \in K(\mathfrak{h}),\ x,y \in V\} \subset \mathfrak{h}.$$

Notamos que $\underline{\mathfrak{h}} \lhd \mathfrak{h}$, de hecho, sea $Z \in \mathfrak{h}, R(x,y) \in \underline{\mathfrak{h}}$. Se tiene que

$$[Z, R(x,y)] = (Z\cdot R)(x,y) + R(Zx,y) + R(x,Zy),$$

donde $(Z\cdot R) \in \Lambda^2V^*\otimes\mathfrak{h}$ está dado por

$$(Z\cdot R)(x,y) = [Z,R(x,y)] - R(Zx,y) - R(x,Zy).$$

Afirmamos que $Z\cdot R\in K(\mathfrak{h})$ Sea $w\in V$, de este modo,

$$(Z\cdot R)(x,y)w=[Z,R(x,y)]w-R(Zx,y)w-R(x,Zy)w,$$
$$(Z\cdot R)(y,w)x=[Z,R(y,w)]x-R(Zy,w)x-R(y,Zw)x,$$
$$(Z\cdot R)(w,x)y=[Z,R(w,x)]y-R(Zw,x)y-R(w,Zx)y.$$

Ahora, dado que $R\in K(\mathfrak{h})$ tenemos que

$$-R(x,y)Zw=R(y,Zw)x+R(Zw,x)y$$

con fórmulas análogas para $R(y,w)Zx$ y $R(w,x)Zy$. Con esto es fácil verificar que $Z\cdot R$ satisface la primera identidad de Bianchi para todo $Z\in\mathfrak{h}$ y para todo $R\in K(\mathfrak{h})$. Así mostramos que $[\mathfrak{h},\underline{\mathfrak{h}}]\subset\underline{\mathfrak{h}}$, es decir, $\underline{\mathfrak{h}}\lhd\mathfrak{h}$.

Una observación útil es el hecho de que podemos definir a $K(\mathfrak{h})$ y a $K^1(\mathfrak{h})$ en términos de las sucesiones exactas de espacios vectoriales

$$0\longrightarrow K(\mathfrak{h})\longrightarrow\Lambda^2V^*\otimes\mathfrak{h}\longrightarrow\Lambda^3V^*\otimes V \tag{1.7}$$

y

$$0\longrightarrow K^1(\mathfrak{h})\longrightarrow V^*\otimes K(\mathfrak{h})\longrightarrow\Lambda^3V^*\otimes\mathfrak{h}, \tag{1.8}$$

donde en cada caso, la última aplicación está dada por la composición de la inclusión natural y el mapeo de anti-simetrización, es decir,

$$\Lambda^2V^*\otimes\mathfrak{h}\hookrightarrow\Lambda^2V^*\otimes V^*\otimes V\longrightarrow\Lambda^3V^*\otimes V$$

en el primer caso y

$$V^*\otimes K(\mathfrak{h})\hookrightarrow V^*\otimes\Lambda^2V^*\otimes\mathfrak{h}\longrightarrow\Lambda^3V^*\otimes\mathfrak{h}$$

en el segundo.

Verificamos que las sucesiones dadas son de hecho exactas. Recordemos que dado que V es un espacio vectorial de dimensión finita se tiene que $\mathrm{End}(V)\cong V^*\otimes V$. De aquí tenemos la inclusión natural mencionada. De aquí obtenemos que el mapeo mencionado es $\varphi:\Lambda^2V^*\otimes\mathfrak{h}\longrightarrow\Lambda^3V^*\otimes V$ dado por

$$\varphi(\omega)(x,y,z)=\omega(x,y)z+\omega(y,z)x+\omega(z,x)y-\omega(y,x)z-\omega(z,y)x-\omega(x,z)y$$

para todo $x,y,z\in V$.

De la definición se tiene que $K(\mathfrak{h})\subset\ker(\varphi)$. Ahora, sea $\omega\in\ker(\varphi)$, es decir, $\varphi(\omega)(x,y,z)=\omega(x,y)z+\omega(y,z)x+\omega(z,x)y-\omega(y,x)z-\omega(z,y)x-\omega(x,z)y=0$ para todo $x,y,z\in V$, o sea, $2\omega(x,y)z+2\omega(y,z)x+2\omega(z,x)y=0$, esto se sigue del hecho de que $\omega\in\Lambda^2V^*\otimes\mathfrak{h}$.

De este modo obtenemos que $\omega\in K(\mathfrak{h})$, por lo tanto $K(\mathfrak{h})=\ker(\varphi)$, lo que demuestra que (1.7) es de hecho una sucesión exacta. Un argumento análogo muestra que (1.8) es también exacta.

Definición 1.21. Una subálgebra de Lie $\mathfrak{h}\subset\mathrm{End}(V)$ es llamada un *álgebra de Berger* si $\underline{\mathfrak{h}}=\mathfrak{h}$. Un álgebra de Berger $\mathfrak{h}\subset\mathrm{End}(V)$ es llamada *simétrica* si $K^1(\mathfrak{h})=0$ y *no simétrica* en caso contrario.

Un subgrupo de Lie $H\subset\mathrm{Aut}(V)$ es llamado un *subgrupo de Berger* (*simétrico*, *no simétrico*, respectivamente) si su álgebra de Lie $\mathfrak{h}\subset\mathrm{End}(V)$ es un álgebra de Berger (simétrica, no simétrica, respectivamente).

Definición 1.22. Una subálgebra de Lie $\mathfrak{h} \subset \mathrm{End}(V)$ es llamada un *álgebra de Berger fuerte* si $\mathfrak{h}$ es de Berger y se tiene además que $K^1(\mathfrak{h}) \neq \{0\}$ o bien, existe $R \in K(\mathfrak{h})$ tal que $\underline{\mathfrak{h}}_R = \mathfrak{h}$, donde

$$\underline{\mathfrak{h}}_R = \mathrm{gen}_{\mathbb{F}}\{R(x,y) | \ x, y \in V\}.$$

Una observación importante es el hecho de que dada una subálgebra $\mathfrak{h} \subset \mathrm{End}(V)$, $\underline{\mathfrak{h}}$ es una subálgebra de Berger. Esto se sigue del hecho de que, por definición, $K(\underline{\mathfrak{h}}) = K(\mathfrak{h})$.

Lema 1.23. *Sea $\mathfrak{h} \subset \mathrm{End}(V)$ un álgebra de Berger irreducible tal que $K(\mathfrak{h})$ es un $\mathfrak{h}$-módulo trivial,*[2] *entonces $\mathfrak{h}$ es simétrica.*

Demostración. De la definición de $K(\mathfrak{h})$ podemos suponer sin pérdida de generalidad que $\dim V > 2$. Supongamos $K(\mathfrak{h})$ es un $\mathfrak{h}$-módulo trivial. Entonces se tiene que $K^1(\mathfrak{h}) \subset V^* \otimes K(\mathfrak{h})$ es un submódulo y, dado que V es una representación irreducible, se sigue que V^* con la representación inducida (i.e. $\mathfrak{h} \times V^* \longrightarrow V^*, (X, \alpha) \longmapsto (v \longmapsto -\alpha(X \cdot v))$) es irreducible, luego $K^1(\mathfrak{h}) = V^* \otimes W$ para algún $W \subset K(\mathfrak{h})$. Supongamos que existe $0 \neq R \in W$. Elegimos tres elementos linealmente independientes $x, y, z \in V$ tales que $R(x,y) \neq 0$ y definimos $\phi : V \longrightarrow W$ tal que $\phi(x) = \phi(y) = 0$ y $\phi(z) = R$. De esto se sigue que $\phi \notin K^1(\mathfrak{h})$ lo cual contradice el hecho de que $K^1(\mathfrak{h}) = V^* \otimes W$.

Por lo tanto $W = \{0\}$, lo que implica que $K^1(\mathfrak{h}) = \{0\}$, es decir, $\mathfrak{h}$ es simétrica. □

Concluimos esta sección con la introducción de un concepto adicional que nos será de utilidad posteriormente.

Sea $\mathfrak{h} \subset \mathrm{End}(V) \cong V^* \otimes V$ una subálgebra. Definimos $\mathfrak{h}^{(-1)} = V$, $\mathfrak{h}^{(0)} = \mathfrak{h}$, y

$$\mathfrak{h}^{(k)} = \{S : V \longrightarrow \mathfrak{h}^{(k-1)} | \ S \text{ lineal}, \ (Sv)w = (Sw)v \in \mathfrak{h}^{(k-2)} \ \forall v, w \in V\}.$$

Sea $S \in \mathfrak{h}^{(k)}$, y sean $v_1, \ldots, v_{k+1} \in V$ dados. De la definición de $\mathfrak{h}^{(k)}$ se tiene que $Sv_1v_2 \cdots v_{k-1}v_k = (\cdots((Sv_1)v_2)\cdots)v_k \in \mathfrak{h}$ y que $Sv_1 \cdots v_kv_{k+1} = (\cdots((Sv_1)v_2)\cdots)v_{k+1} \in V$.

Se tiene también de la definición de $\mathfrak{h}^{(k)}$ que $Sv_{\sigma(1)} \cdots \ v_{\sigma(k)} = Sv_1 \cdots v_k$ para todo $\sigma \in S_k$ y que $Sv_{\tau(1)} \cdots v_{\tau(k+1)} = Sv_1 \cdots v_{k+1}$ para todo $\tau \in S_{k+1}$. Lo anterior nos permite obtener una fórmula para $\mathfrak{h}^{(k)}$ que no está dada en términos de una relación de recurrencia. A saber, se tiene que,

$$\mathfrak{h}^{(k)} = \left(\mathrm{Sym}^k V^* \otimes \mathfrak{h}\right) \cap \left(\mathrm{Sym}^{k+1} V^* \otimes V\right), \qquad k \in \mathbb{N}, \tag{1.9}$$

donde $\mathrm{Sym}\, V^*$ es el álgebra simétrica definida por

$$\mathrm{Sym}\, V = \left(\bigoplus_{k \geq 0} V^{\otimes k}\right) \Big/ \langle v \otimes w - w \otimes v | \ v, w \in V\rangle = \bigoplus_{k \geq 0} \mathrm{Sym}^k V.$$

En (1.9) hemos utilizado el hecho de que tenemos una inclusión natural

$$\mathrm{Sym}^{k+1} V^* \subset \mathrm{Sym}^k V^* \otimes V^*$$

[2] Con esto queremos decir que, para todo $R \in K(\mathfrak{h})$, para todo $H \in \mathfrak{h}$ y para todo $x, y \in V$, $[H, R(x,y)] = R(Hx, y) + R(x, Hy)$

y de este modo podemos considerar tanto a $\mathrm{Sym}^k V^* \otimes \mathfrak{h}$ como a $\mathrm{Sym}^{k+1} V^* \otimes V$ como subespacios de $\mathrm{Sym}^k V^* \otimes V^* \otimes V$.
A $\mathfrak{h}^{(k)}$ se le llama la *k-ésima prolongación de* $\mathfrak{h}$.

4. El teorema de Ambrose-Singer

En esta sección mostraremos un resultado que relaciona el álgebra de holonomía de una conexión afín libre de torsion con la curvatura de dicha conexión.

Comenzamos considerando una familia de curvas $\varphi :]-\epsilon, \epsilon[\times[0,1] \longrightarrow M$ dada por

$$(s,t) \longmapsto \gamma_s(t) := \varphi(s,t)$$

y ∇ una conexión afín y libre de torsión. Sea $X_0 \in T_{\gamma_s(0)}M$, del teorema 1.16 se tiene que existe un único $X \in \Gamma(\varphi^* TM)$ tal que

$$\frac{\nabla}{\partial t} X(s,t) = 0, \quad X(s,0) = X_0 \quad \text{para todo } (s,t) \in]-\epsilon,\epsilon[\times[0,1].$$

De este modo obtenemos una única aplicación lineal

$$P_{\gamma_s}(t) : T_{\gamma_s(0)}M \longrightarrow T_{\gamma_s(t)}M, \quad X_0 \longmapsto X(s,t), \quad \text{para todo } t \in [0,1].$$

En particular, si $\gamma_s(0) = p, \gamma_s(1) = q$ para todo s se tiene entonces una aplicación

$$]-\epsilon,\epsilon[\longrightarrow \mathrm{Hom}(T_pM, T_qM), \quad s \longmapsto P_{\gamma_s}(1).$$

De lo anterior se tiene que

$$\frac{\nabla}{\partial t}\frac{\nabla}{\partial s} X(s,t) = \left[\frac{\nabla}{\partial t}, \frac{\nabla}{\partial s}\right] X(s,t).$$

Por otro lado, un cálculo explícito muestra que

$$\left[\frac{\nabla}{\partial t}, \frac{\nabla}{\partial s}\right] X(s,t) = (R_{\gamma_s(t)})(\dot\gamma_s(t), \delta\gamma_s(t)) X(s,t),$$

donde R es la curvatura asociada a ∇ y $\delta\gamma_s(t) := T_{(s,t)}\varphi \cdot \frac{\partial}{\partial s}\big|_{(s,t)}$. De este modo en $s = 0$ se tiene que

$$\frac{\nabla}{\partial t}\frac{\nabla}{\partial s}\bigg|_{s=0} X = (R_{\gamma(t)})(\dot\gamma(t), \delta\gamma(t)) X(0,t) = R(\dot\gamma(t), \delta\gamma(t)) P_\gamma(t) X_0,$$

donde $\gamma := \gamma_0$, $\delta X := \frac{\nabla}{\partial s}\big|_{s=0} X$, y $\delta\gamma(t) = \frac{\partial}{\partial s}\big|_{s=0}\gamma_s(t)$.
De esto obtenemos que δX es un campo vectorial a lo largo de γ que satisface la ecuación

$$\frac{\nabla}{\partial t}(\delta X) = R(\dot\gamma, \delta\gamma) P_\gamma X_0.$$

Definimos la aplicación lineal

$$\psi : T_{\gamma(0)}M \longrightarrow T_{\gamma(1)}M, \quad X_0 \longmapsto (\delta X_0)(1).$$

Afirmamos que $\psi = \frac{d}{ds}\big|_{s=0} P_{\gamma_s}(1)$. Comenzamos notando que

$$P_{\gamma_s}(1) X(s,0) = X(s,1) = P_{\gamma_s}(1) X(0,0) = P_{\gamma_s}(1) X_0, \quad \text{para todo } s.$$

De la definición de δX se tiene que

$$\delta X(0,t) = \sum_{\mu}\left(\frac{\partial \xi^{\mu}}{\partial s}(0,t) + \sum_{k,\rho}\Gamma^{\mu}_{k\rho}(\gamma(t))\frac{\partial x^k}{\partial s}(0,t)\xi^{\rho}(0,t)\right)\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\bigg|_{\gamma(t)}.$$

Del hecho de que $\gamma_s(0) = p, \gamma_s(1) = q$ para todo s se obtiene que

$$\frac{\partial x^k}{\partial s}(0,0) = \frac{d}{ds}\bigg|_{s=0}\gamma_s(0) = \frac{d}{ds}\bigg|_{s=0} p = 0,$$

$$\frac{\partial x^k}{\partial s}(0,1) = \frac{d}{ds}\bigg|_{s=0}\gamma_s(1) = \frac{d}{ds}\bigg|_{s=0} q = 0,$$

de este modo,

$$\delta X(0,0) = \sum_{\mu}\frac{\partial \xi^{\mu}}{\partial s}(0,0),$$

$$\delta X(0,1) = \sum_{\mu}\frac{\partial \xi^{\mu}}{\partial s}(0,1).$$

Con esto obtenemos que

$$\frac{d}{ds}\bigg|_{s=0} P_{\gamma_s}(1)X_0 = \frac{d}{ds}\bigg|_{s=0} X(s,1) = \delta X(1).$$

Ahora, de la forma en que tomamos a X se tiene también que $\frac{\nabla}{\partial t}(P_{\gamma_s}(t)X_0) = 0$. En general se tiene que para $Z : [0,1] \longrightarrow T_pM$,

$$\frac{\nabla}{\partial t}(P_{\gamma_s}(t)Z(t)) = P_{\gamma_s}\frac{dZ}{dt}(t).$$

En particular se tiene

$$\frac{\nabla}{\partial t}\circ P_{\gamma}(t) = P_{\gamma}(t)\circ\frac{d}{dt},$$

es decir,

$$P_{\gamma}(t)^{-1}\circ\frac{\nabla}{\partial t} = \frac{d}{dt}\circ P_{\gamma}(t)^{-1} \tag{1.10}$$

Utilizando la ecuación anterior junto con la ecuación diferencial satisfecha por δX obtenemos que

$$\frac{d}{dt}(P_{\gamma}^{-1}\delta X) = P_{\gamma}^{-1}\frac{\nabla}{\partial t}\delta X = P_{\gamma}^{-1}R(\dot{\gamma},\delta\gamma)P_{\gamma}X_0.$$

Ahora, definimos

$$\widetilde{\delta X}(t) = P_{\gamma}(t)^{-1}\delta X(t),$$

luego, de (1.10) y de la ecuación diferencial satisfecha por δX obtenemos

$$P_{\gamma}(t)\frac{d\widetilde{\delta X}}{dt} = \frac{\nabla}{\partial t}(P_{\gamma}(t)\widetilde{\delta X}) = R(\dot{\gamma},\delta\gamma)P_{\gamma}(t)X_0.$$

De este modo obtenemos que $\widetilde{\delta X} : [0,1] \longrightarrow T_pM$ satisface la ecuación diferencial

$$\frac{d}{dt}\widetilde{\delta X}(t) = P_{\gamma}(t)^{-1}R(\dot{\gamma}(t),\delta\gamma(t))P_{\gamma}(t)X_0.$$

En lo que resta de esta sección supondremos que $\gamma \in \mathcal{L}_p^0$ con

$$\varphi : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow M, (s,t) \longmapsto \gamma_s(t)$$

una contracción, es decir, $\gamma_0(t) = p$ para todo t y $\gamma_1 = \gamma$.
De lo expuesto anteriormente obtenemos que

$$\widetilde{\delta X}(t) = \left[\int_0^t P_\gamma(u)^{-1} \circ R(\dot\gamma(u), \delta\gamma(u)) \circ P_\gamma(u)\right] X_0, \qquad t \in [0,1].$$

De hecho se tiene que

$$(1.11) \qquad P_{\gamma_s}(1)^{-1} \circ \frac{d}{ds} P_{\gamma_s}(1) = \int_0^1 P_{\gamma_s}(u)^{-1} \circ R(\dot\gamma_s(u), \frac{d}{ds}\gamma_s(u)) \circ P_{\gamma_s}(u) du.$$

Ahora, con X, γ y φ dados como antes, definimos

$$X'(s,t) = \frac{\nabla}{\partial s} X(s,t),$$
$$\dot\gamma_s(t) = \frac{\partial \varphi}{\partial t}(s,t) \in T_{\gamma_s(t)}M,$$
$$\gamma_s'(t) = \frac{\partial \varphi}{\partial s}(s,t) \in T_{\gamma_s(t)}M.$$

De la definición de X' se sigue que

$$X'(s,1) = \frac{d}{ds} X(s,1) = \left(\frac{d}{ds} P_{\gamma_s}(1)\right) X_0.$$

Para $Y \in \Gamma(\varphi^* TM)$ se tiene una fórmula análoga a (1.10), a saber,

$$P_{\gamma_s}(t)^{-1} \frac{\nabla}{\partial t} Y(s,t) = \frac{\partial}{\partial t}(P_{\gamma_s}(t)^{-1} Y(s,t)).$$

De este modo se tiene que

$$P_{\gamma_s}(t)^{-1} \frac{\nabla}{\partial t} X'(s,t) = \frac{\partial}{\partial t}(P_{\gamma_s}(t)^{-1} X'(s,t)) =: \frac{\partial}{\partial t} \widetilde{X}'(s,t).$$

Ahora, del hecho de que $\frac{\nabla}{\partial t} X = 0$ obtenemos que

$$\begin{aligned} \frac{\nabla}{\partial t} X'(s,t) = \frac{\nabla}{\partial t}\frac{\nabla}{\partial s} X(s,t) &= \frac{\nabla}{\partial s}\frac{\nabla}{\partial t} X(s,t) + (R_{\gamma_s(t)})(\dot\gamma_s(t), \gamma_s'(t)) X(s,t) \\ &= (R_{\gamma_s(t)})(\dot\gamma_s(t), \gamma_s'(t)) P_{\gamma_s}(t) X_0. \end{aligned}$$

Con esto concluimos que $\widetilde{X}'(s_0, t)$ con $s_0 \in [0,1]$ satisface la ecuación diferencial

$$\frac{d}{dt} \widetilde{X}'(s_0, t) = [P_{\gamma_{s_0}}(t)^{-1} (R_{\gamma_{s_0}(t)})(\dot\gamma_{s_0}(t), \gamma_{s_0}'(t)) P_{\gamma_{s_0}}(t)] X_0.$$

De la ecuación anterior concluimos que

$$\widetilde{X}'(s,t) = \left[\int_0^t P_{\gamma_s}(u)^{-1} \circ (R_{\gamma_s(u)})(\dot\gamma_s(u), \gamma_s'(u)) \circ P_{\gamma_s}(u) du\right] X_0.$$

Del hecho de que $X'(s,1) = \frac{d}{ds} P_{\gamma_s}(1) X_0$ se concluye que

$$\widetilde{X}'(s,1) = P_{\gamma_s}(1)^{-1} X'(s,1) = \left(P_{\gamma_s}(1)^{-1} \circ \frac{d}{ds} P_{\gamma_s}(1)\right) X_0,$$

y por (1.11) se obtiene que

$$\left(P_{\gamma_s}(1)^{-1} \circ \frac{d}{ds} P_{\gamma_s}(1)\right) X_0 = \left(\int_0^1 P_{\gamma_s}(u)^{-1} \circ R(\dot{\gamma}_s(u), \gamma_s'(u)) \circ P_{\gamma_s}(u) du\right) X_0.$$

Dado que el resultado anterior es válido para todo $X_0 \in T_pM$ concluimos que

$$\frac{d}{ds} P_{\gamma_s}(1) = P_{\gamma_s}(1) \circ \int_0^1 P_{\gamma_s}(u)^{-1} \circ R(\dot{\gamma}_s(u), \gamma_s'(u)) \circ P_{\gamma_s}(u) du. \tag{1.12}$$

Utilizando herramientas de integración multiplicativa se obtiene que

$$P_{\gamma_s}(1) = \overrightarrow{\prod}_0^s \exp\left(\left[\int_0^1 P_{\gamma_s}(u)^{-1} \circ R(\dot{\gamma}_s(u), \gamma_s'(u)) \circ P_{\gamma_s}(u) du\right] ds\right) [3]$$

Ahora, definimos

$$\mathfrak{h}_p(\nabla) = \mathrm{gen}_{\mathbb{R}}\{P_\gamma(u)^{-1} \circ (R_{\gamma(u)})(X,Y) \circ P_\gamma(u) |\ X, Y \in T_{\gamma(u)}M\} \subset \mathrm{End}(T_pM).$$

Definimos también,

$$H_p(\nabla) = \overline{\langle \exp \mathfrak{h}_p(\nabla) \rangle} \subset \mathrm{Aut}(T_pM).$$

Ahora tenemos las herramientas necesarias para mostrar el teorema principal de esta sección.

Teorema 1.24 (Ambrose-Singer)**.** *Sea ∇ una conexión afín en la variedad M. Con la notación anterior se tiene que*

$$\mathfrak{hol}_p(\nabla) = \mathfrak{h}_p(\nabla).$$

Demostración. Mostraremos que $H_p(\nabla) = \overline{\mathrm{Hol}_p(\nabla)}$. Las cerraduras utilizadas tanto en la definición de $H_p(\nabla)$ como en la última igualdad es la cerradura en la topología de $\mathrm{Aut}(T_pM)$. Comenzamos notando que de la fórmula de Campbell-Baker-Hausdorff [4] se tiene que $\exp([X,Y]) \in \overline{\langle \exp(X), \exp(Y) \rangle}$.

---

[3]Dada una curva $A : [0,1] \longrightarrow \mathrm{End}(V)$ definimos

$$\overrightarrow{\prod}_0^s \exp(A(u)du) = \lim_{\substack{\mu(\mathcal{P}) \longrightarrow 0 \\ t_0 = 0 < t_1 < \cdots < t_r = s \\ t_0 < \tau_1 < t_1 < \tau_2 < t_2 < \cdots < t_r}} \exp(A(\tau_1)(t_1 - t_0)) \cdot \ldots \cdot \exp(A(\tau_r)(t_r - t_{r-1})),$$

donde el límite es tomado sobre el grosor de las particiones $\{t_0, \ldots, t_r\}$ de $[0, s]$.

[4]Consideramos la función $f(z) = \frac{\log(z)}{z-1} = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n+1}(z-1)^n$, esta serie converge en una bola pequeña alrededor de $z = 1$. La fórmula de Campbell-Baker-Hausdorff nos dice que en un grupo de Lie G con álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ y con $X, Y \in \mathfrak{g}$ en una vecindad suficientemente pequeña se tiene que

$$\exp(X)\exp(Y) = \exp(C(X,Y)),$$

donde

$$\begin{aligned} C(X,Y) &= Y + \int_0^1 f(e^{t\,\mathrm{ad}\,X} e^{t\,\mathrm{ad}\,Y}) \cdot X dt \\ &= X + Y + \sum_{m \geq 1} \frac{(-1)^m}{m+1} \int_0^1 \left(\sum_{\substack{k,l > 0 \\ k+l \geq 1}} \frac{t^k}{k!l!} (\mathrm{ad}\,X)^k (\mathrm{ad}\,Y)^l\right)^m X dt. \end{aligned}$$

Ahora, se tiene que $P_{\gamma_s}(u)^{-1} \circ (R_{\gamma_s(u)})(\dot{\gamma}_s(u), \gamma_s'(u)) \circ P_{\gamma_s}(u) \in \mathfrak{h}_p(\nabla)$ y de esto obtenemos que

$$\int_0^1 P_{\gamma_s}(u)^{-1} \circ (R_{\gamma_s(u)})(\dot{\gamma}_s(u), \gamma_s'(u)) \circ P_{\gamma_s}(u) du \in \mathfrak{h}_p(\nabla).$$

De este modo, de la definición de la integral multiplicativa dada anteriormente, se tiene que

$$P_{\gamma_s}(1) = \overrightarrow{\prod}_0^s \exp\left(\left[\int_0^1 P_{\gamma_s}(u)^{-1} \circ R(\dot{\gamma}_s(u), \gamma_s'(u)) \circ P_{\gamma_s}(u) du\right] ds\right) \in H_p(\nabla).$$

Así pues, de la definición de $\mathrm{Hol}_p(\nabla)$ concluimos que $\overline{\mathrm{Hol}_p(\nabla)} \subset H_p(\nabla)$.

Ahora mostraremos la inclusión inversa. Antes de eso hacemos un par de observaciones. Anteriormente encontramos una fórmula para $\frac{d}{ds}P_{\gamma_s}(1)$ con φ una contracción de la curva γ. Lo que hacemos notar ahora es que la misma fórmula sigue siendo válida si φ es suave a trozos, es decir, si φ es continua y existe una partición $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_r = 1$ de $[0, 1]$ tal que $\varphi|_{[0,1]\times[t_{i-1},t_i]}$ es suave para todo i. La segunda observación que hacemos es el hecho de que para $q \in M$ y $X, Y \in T_qM$ linealmente independientes entonces existe una carta coordenada $(x = (x^1, \ldots, x^m), U)$ con U una vecindad de q tal que $x(q) = 0$, $\frac{\partial}{\partial x^1}|_q = X$ y $\frac{\partial}{\partial x^2}|_q = Y$.

Consideremos la familia $\tilde{\gamma} : [0, 1] \times [0, 4] \longrightarrow M$, $(s, t) \longmapsto \gamma_s(t)$ dada por

$$\gamma_s(t) = \begin{cases} x^{-1}(st, 0, \ldots, 0) & \text{para } t \in [0, 1] \\ x^{-1}(s, s(t-1), 0, \ldots, 0) & \text{para } t \in [1, 2] \\ x^{-1}(s(3-t), s, 0, \ldots, 0) & \text{para } t \in [2, 3] \\ x^{-1}(0, s(4-t), 0, \ldots, 0) & \text{para } t \in [3, 4], \end{cases}$$

donde $x = (x^1, \ldots, x^m)$ son coordenadas dadas como en la observación previa, en este caso $\gamma_s(0) = q = \gamma_s(4)$ y los vectores dados como antes son $X, Y \in T_qM$.

Ahora, para $u \in]0, 1[$ se tiene que

$$\dot{\gamma}_s(u) = \frac{d}{d\tau}\Big|_{\tau=0}\gamma_s(u + \tau) = (\frac{d}{d\tau}\Big|_{\tau=0}x^{-1}(su + s\tau, 0, \ldots, 0)).$$

Por otro lado, del hecho que $\frac{\partial}{\partial x^1}\Big|_{\gamma_s(u)} = \frac{d}{d\tau}|_{\tau=0}x^{-1}(su + \tau, 0, \ldots, 0)$ obtenemos

$$\dot{\gamma}_s(u) = s\frac{\partial}{\partial x^1}\Big|_{\gamma_s(u)}.$$

Por otro lado, $\gamma_s'(u) = \frac{d}{d\tau}\Big|_{\tau=0}\gamma_{s+\tau}(u) = \frac{d}{d\tau}\Big|_{\tau=0}x^{-1}(su + \tau u, 0, \ldots, 0)$. De este modo

$$\gamma_s'(u) = u\frac{\partial}{\partial x^1}\Big|_{\gamma_s(u)}.$$

Así pues, para $u \in]0, 1[$,

$$(R_{\gamma_s(u)})(\dot{\gamma}_s(u), \gamma_s'(u)) = 0.$$

Similarmente, para $u \in]1,2[$, $\frac{\partial}{\partial x^1}\big|_{\gamma_s(u)} = \frac{d}{d\tau}\big|_{\tau=0} x^{-1}(s+\tau, s(u-1), 0, \ldots, 0)$, $\frac{\partial}{\partial x^2}\big|_{\gamma_s(u)} = \frac{d}{d\tau}\big|_{\tau=0} x^{-1}(s, s(u-1)+\tau, 0, \ldots, 0)$. De aquí se obtiene que

$$\begin{aligned}\dot{\gamma}_s(u) &= s\frac{\partial}{\partial x^2}\bigg|_{\gamma_s(u)},\\ \gamma_s'(u) &= \frac{\partial}{\partial x^1}\bigg|_{\gamma_s(u)} + (u-1)\frac{\partial}{\partial x^2}\bigg|_{\gamma_s(u)}.\end{aligned}$$

Luego,

$$(R_{\gamma_s(u)})(\dot{\gamma}_s(u), \gamma_s'(u)) = -s(R_{\gamma_s(u)})\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\bigg|_{\gamma_s(u)}, \frac{\partial}{\partial x^2}\bigg|_{\gamma_s(u)}\right).$$

De manera similar obtenemos que para $u \in]2,3[$,

$$(R_{\gamma_s(u)})(\dot{\gamma}_s(u), \gamma_s'(u)) = -s(R_{\gamma_s(u)})\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\bigg|_{\gamma_s(u)}, \frac{\partial}{\partial x^2}\bigg|_{\gamma_s(u)}\right),$$

y para $u \in]3,4[$,

$$(R_{\gamma_s(u)})(\dot{\gamma}_s(u), \gamma_s'(u)) = 0.$$

Lo anterior nos permite concluir que

$$\frac{d}{ds}P_{\gamma_s}(4) = -sP_{\gamma_s}(4)\int_1^3 P_{\gamma_s}(u)^{-1} \circ (R_{\gamma_s(u)})\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\bigg|_{\gamma_s(u)}, \frac{\partial}{\partial x^2}\bigg|_{\gamma_s(u)}\right) \circ P_{\gamma_s}(u)du.$$

Se tiene entonces que

$$\frac{d}{ds}\bigg|_{s=0} P_{\gamma_s}(4) = 0$$

y entonces

$$\frac{d^2}{ds^2}\bigg|_{s=0} P_{\gamma_s}(4) = -P_{\gamma_0}(4)\int_1^3 P_{\gamma_0}(u)^{-1} \circ (R_q)(X,Y) \circ P_{\gamma_0}(u)du = -2(R_q)(X,Y),$$

La última igualdad es debido a que $P_{\gamma_0}(u) = \mathrm{Id}_{T_qM}$ ya que $\gamma_0(u) = q$ para todo u.

Ahora, fijamos una curva $\bar{\gamma} : [0,1] \longrightarrow M$ tal que $\bar{\gamma}(0) = p$ y $\bar{\gamma}(1) = q$. Definimos la familia $\hat{\gamma} : [0,1] \times [-1,5] \longrightarrow M$, $(s,t) \longmapsto \hat{\gamma}_s(t)$ dada por

$$\hat{\gamma}_s(t) = \begin{cases} \bar{\gamma}(t+1) & \text{para } t \in [-1,0] \\ \gamma_s(t) & \text{para } t \in [0,4] \\ \bar{\gamma}(5-t) & \text{para } t \in [4,5]. \end{cases}$$

Es claro que $\hat{\gamma}_s(-1) = p, \hat{\gamma}_s(5) = p$.

Cálculos similares a los realizados con anterioridad muestran que $\hat{\gamma}_s'(u) = 0$ salvo para $u \in [0,4]$, luego,

$$\frac{d}{ds}P_{\hat{\gamma}_s}(5) = -sP_{\hat{\gamma}_s}(5)\int_1^3 P_{\gamma_s}(u)^{-1} \circ (R_{\gamma_s(u)})\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\bigg|_{\gamma_s(u)}, \frac{\partial}{\partial x^2}\bigg|_{\gamma_s(u)}\right) \circ P_{\gamma_s}(u)du.$$

Se tiene entonces que

$$\left.\frac{d^2}{ds^2}\right|_{s=0} P_{\hat{\gamma}_s}(5) = -2P_{\hat{\gamma}_0}(u)^{-1} \circ (R_q)(X,Y) \circ P_{\hat{\gamma}_0}(u),$$

para $u \in [0,4]$ arbitrario. En particular se tiene que

$$\left.\frac{d^2}{ds^2}\right|_{s=0} P_{\hat{\gamma}_s}(5) = -2P_{\bar{\gamma}}(1)^{-1} \circ (R_q)(X,Y) \circ P_{\bar{\gamma}}(1).$$

Ahora mostraremos que, para $F \in \mathfrak{h}_p(\nabla)$, $\exp(F) \in \overline{\mathrm{Hol}_p(\nabla)}$.

Dado que $\overline{\mathrm{Hol}_p(\nabla)}$ es un subgrupo cerrado de $\mathrm{Aut}(T_pM)$ se tiene entonces que es un subgrupo de Lie, en particular, se tiene que $\overline{\mathrm{Hol}_p(\nabla)}$ es una subvariedad. Ahora, de lo anterior se tiene que $\psi : [0,1] \longrightarrow \overline{\mathrm{Hol}_p(\nabla)}$, $s \longmapsto P_{\hat{\gamma}_s}(5)$ es una curva tal que $\psi(0) = \mathrm{Id}$, donde Id es el elemento identidad en $\overline{\mathrm{Hol}_p(\nabla)}$. Del hecho de que $\psi'(0) = \frac{d}{ds}\big|_{s=0} P_{\hat{\gamma}_s}(5) = 0$ se tiene entonces que $\psi'(0) \in T_{\mathrm{Id}}\overline{\mathrm{Hol}_p(\nabla)}$. Por lo anterior sabemos que

$$\psi''(0) = -2P_{\bar{\gamma}}(1)^{-1} \circ (R_q)(X,Y) \circ P_{\bar{\gamma}}(1).$$

Para concluir utilizamos el hecho de que, en general, para $N \subset M$ una subvariedad y una curva $\Psi : [0,1] \longrightarrow N$ tal que $\frac{d}{ds}\big|_0 \Psi(s) = 0 \in T_{\Psi(0)}N$ entonces se tiene que $\frac{d^2}{ds^2}\big|_0 \Psi(s) \in T_{\Psi(0)}N$ es un vector tangente bien definido, es decir, no depende del sistema de coordenadas elegido.

Dado que $\psi : [0,1] \longrightarrow \overline{\mathrm{Hol}_p(\nabla)}$ satisfacen las condiciones dadas en el párrafo anterior obtenemos que

$$-2P_{\bar{\gamma}}(1)^{-1} \circ (R_q)(X,Y) \circ P_{\bar{\gamma}}(1) \in \mathrm{Lie}(\overline{\mathrm{Hol}_p(\nabla)}),$$

luego

$$\exp[P_{\bar{\gamma}}(1)^{-1} \circ (R_q)(X,Y) \circ P_{\bar{\gamma}}(1)] \in \overline{\mathrm{Hol}_p(\nabla)}.$$

Por lo tanto obtenemos que

$$H_p(\nabla) = \overline{\mathrm{Hol}_p(\nabla)}.$$

□

Notamos que una consecuencia del teorema de Ambrose-Singer es la siguiente

Proposición 1.25. *Sea $H \subset \mathrm{Aut}(V)$ un subgrupo de Lie irreducible que es el grupo de holonomía de una conexión afín libre de torsión en alguna variedad M. Entonces H es un grupo de Berger. Si la conexión no es localmente simétrica (i.e. $\nabla R \neq 0$), entonces H es un grupo de Berger no simétrico.*

Teoría de representaciones de álgebras de Lie

1. Representaciones de álgebras de Lie

En esta sección introducimos los conceptos fundamentales de teoría de representaciones de álgebras de Lie.

Definición 2.1. Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie, una *representación* de $\mathfrak{g}$ sobre el $\mathbb{F}$-espacio vectorial V ($\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$) es un homomorfismo de álgebras de Lie

$$\rho : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathrm{End}(V).$$

Decimos que dos representaciones sobre V, ρ, ρ' son *equivalentes* si existe $T \in \mathrm{Aut}(V)$ tales que

$$\rho'(X) = T^{-1}\rho(X)T \qquad \text{para todo } X \in \mathfrak{g}.$$

Definición 2.2. Un $\mathfrak{g}$-*módulo* es un $\mathbb{F}$-espacio vectorial V junto con una aplicación $\mathbb{F}$-bilineal

$$\cdot : \mathfrak{g} \times V \longrightarrow V, \qquad (X, v) \longmapsto X \cdot v$$

tal que $[X, Y] \cdot v = X \cdot (Y \cdot v) - Y \cdot (X \cdot v)$ para todo $X, Y \in \mathfrak{g}$ y $v \in V$.

De las definiciones anteriores, vemos que una representación hace de V un $\mathfrak{g}$-módulo, de hecho, definimos $X \cdot v = \rho(X)v$.

Ejemplo 2.3. Dada un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, vemos que $\mathfrak{g}$ es un $\mathfrak{g}$-módulo. Para verificar lo anterior, definimos $X \cdot Y = [X, Y]$, la identidad de Jacobi implica que

$$[[X, Y], Z] = [X, [Y, Z]] - [Y, [X, Z]],$$

luego $\mathfrak{g}$ es un $\mathfrak{g}$-módulo. Definimos $\mathrm{ad}\, X : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ por $\mathrm{ad}\, X(Y) = [X, Y]$, así obtenemos que

$$\mathrm{ad}[X, Y] = \mathrm{ad}\, X\, \mathrm{ad}\, Y - \mathrm{ad}\, Y\, \mathrm{ad}\, X \qquad \forall X, Y \in \mathfrak{g}.$$

Definición 2.4. Un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ se llama *abeliana* si $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \{0\}$.

Dada un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ definimos las potencias de $\mathfrak{g}$ como

$$\mathfrak{g}^1 = \mathfrak{g}, \quad \mathfrak{g}^{n+1} = [\mathfrak{g}^n, \mathfrak{g}] \quad n \geq 1.$$

Proposición 2.5. *Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie, entonces $\mathfrak{g}^n$ es un ideal de $\mathfrak{g}$. Se tiene también que*

$$\mathfrak{g}^n \supset \mathfrak{g}^{n+1} \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Demostración. Comenzamos por observar que si I, J son ideales de $\mathfrak{g}$ entonces $[I, J]$ es también un ideal de $\mathfrak{g}$. Para esto, sean $X \in I, Y \in J, Z \in \mathfrak{g}$. Luego

$$[[X, Y], Z] = [X, [Y, Z]] + [[X, Z], Y] \in [I, J].$$

De lo anterior concluimos que $\mathfrak{g}^n$ es un ideal de $\mathfrak{g}$ para $n > 0$. De este modo obtenemos que

$$\mathfrak{g}^{n+1} = [\mathfrak{g}^n, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{g}^n.$$

□

Un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ es llamada *nilpotente* si $\mathfrak{g}^n = 0$ para algún $n \in \mathbb{N}$. Vemos que un álgebra de Lie abeliana es nilpotente. Es claro que toda subálgebra de un álgebra nilpotente es nilpotente.

Consideremos ahora un tipo diferente de potencias de $\mathfrak{g}$. Definimos

$$\mathfrak{g}^{(0)} = \mathfrak{g}, \quad \mathfrak{g}^{(n+1)} = [\mathfrak{g}^{(n)}, \mathfrak{g}^{(n)}], \quad n \geq 0.$$

Proposición 2.6. *Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie, entonces $\mathfrak{g}^{(n)}$ es un ideal de $\mathfrak{g}$. Se tiene también que $\mathfrak{g}^{(n)} \supset \mathfrak{g}^{(n+1)}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Demostración. $\mathfrak{g}^{(n)}$ es un ideal de $\mathfrak{g}$ dado que es el producto de dos ideales. Por definición, $\mathfrak{g}^{(n+1)} = [\mathfrak{g}^{(n)}, \mathfrak{g}^{(n)}] \subset \mathfrak{g}^{(n)}$. □

Un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ se llama *soluble* si $\mathfrak{g}^{(n)} = 0$ para algún $n \geq 0$.

Proposición 2.7. *Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie,*

a) $[\mathfrak{g}^m, \mathfrak{g}^n] \subset \mathfrak{g}^{m+n}$ *para todo $m, n \geq 1$.*

b) $\mathfrak{g}^{(n)} \subset \mathfrak{g}^{2^n}$ *para $n \geq 0$.*

c) *Toda álgebra de Lie nilpotente es soluble.*

Demostración. a) Usamos inducción en n. El resultado es evidente para $n = 1$. Supongamos que es cierto para $n = r$. Entonces

$$\begin{aligned}
[\mathfrak{g}^m, \mathfrak{g}^{r+1}] &= [\mathfrak{g}^m, [\mathfrak{g}^r, \mathfrak{g}]] = [[\mathfrak{g}^r, \mathfrak{g}], \mathfrak{g}^m] \\
&\subset [[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^m], \mathfrak{g}^r] + [[\mathfrak{g}^m, \mathfrak{g}^r], \mathfrak{g}] \quad \text{identidad de Jacobi} \\
&\subset [\mathfrak{g}^{m+1}, \mathfrak{g}^{\mathfrak{r}}] + [[\mathfrak{g}^m, \mathfrak{g}^r], \mathfrak{g}] \\
&\subset \mathfrak{g}^{m+r+1} \quad \text{hipótesis de inducción.}
\end{aligned}$$

Luego el resultado se sigue para todo n.

b) Nuevamente usamos inducción en n. El resultado es claro si $n = 1$. Supongamos que es cierto para $n = r$. Entonces

$$\mathfrak{g}^{(r+1)} = [\mathfrak{g}^{(r)}, \mathfrak{g}^{(r)}] \subset [\mathfrak{g}^{2^r}, \mathfrak{g}^{2^r}] \subset \mathfrak{g}^{2^{r+1}}$$

por a). Luego el resultado se sigue para $n = r + 1$ lo que implica que el resultado es cierto para todo n.

c) Supongamos $\mathfrak{g}$ es nilpotente. Luego existe un n suficientemente grande para el cual $\mathfrak{g}^{2^n} = 0$, por lo tanto $\mathfrak{g}^{(n)} = 0$ por b) lo que implica que $\mathfrak{g}$ es soluble.

□

Nuestro objetivo ahora es estudiar un tipo particular de subálgebras, a saber, las llamadas *subálgebras de Cartan*, pero antes enunciamos el siguiente hecho que necesitaremos para el estudio adecuado de tales subálgebras.

Proposición 2.8. *Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie y V un $\mathfrak{g}$-módulo. Definimos*

$$\rho : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathrm{End}(V), \qquad X \longmapsto (\rho(X) : v \longmapsto Xv).$$

Sean $v \in V$, $X, Y \in \mathfrak{g}$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Entonces se tiene que

$$\big(\rho(Y) - (\alpha+\beta)\,\mathrm{Id}_V\,\big)^n Xv = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \rho\big((\mathrm{ad}\,Y - \beta\,\mathrm{Id}_V)^i X\big)\big((\rho(Y) - \alpha\,\mathrm{Id}_V)^{n-i} v\big).$$

Demostración. Utilizamos inducción en n. El resultado es evidente en el caso $n = 0$. Asumimos que el resultado es válido para $n = r$. Sea $X_i \in \mathfrak{g}$ dado por $X_i = (\mathrm{ad}\,Y - \beta\,\mathrm{Id}_V)^i X$. Luego obtenemos que

$$(\rho(Y)-(\alpha+\beta)\,\mathrm{Id}_V)^{r+1} Xv = (\rho(Y)-(\alpha+\beta)\,\mathrm{Id}_V) \sum_{i=0}^{r} \binom{r}{i} \rho(X_i)(\rho(Y)-\alpha\,\mathrm{Id}_V)^{r-i} v.$$

Ahora, de la definición de ρ es fácil ver que define una representación de $\mathfrak{g}$, luego

$$\begin{aligned}
(\rho(Y) - (\alpha+\beta)\,\mathrm{Id}_V)\rho(X_i) &= \rho([Y, X_i]) + \rho(X_i)\rho(Y) - (\alpha+\beta)\rho(X_i) \\
&= \rho((\mathrm{ad}\,Y - \beta\,\mathrm{Id}_V)X_i) + \rho(X_i)(\rho(Y) - \alpha\,\mathrm{Id}_V) \\
&= \rho(X_{i+1}) + \rho(X_i)(\rho(Y) - \alpha\,\mathrm{Id}_V).
\end{aligned}$$

Por lo tanto obtenemos que

$$\begin{aligned}
&(\rho(Y) - (\alpha+\beta)\,\mathrm{Id}_V)^{r+1} Xv = \\
&\qquad \sum_{i=0}^{r} \binom{r}{i} \rho(X_{i+1})(\rho(Y) - \alpha\,\mathrm{Id}_V)^{r-i} v + \sum_{i=0}^{r} \binom{r}{i} \rho(X_i)(\rho(Y) - \alpha\,\mathrm{Id}_V)^{r+1-i} v \\
&= \sum_{i=0}^{r+1} \binom{r}{i-1} \rho(X_i)(\rho(Y) - \alpha\,\mathrm{Id}_V)^{r+1-i} v \\
&\qquad + \sum_{i=0}^{r+1} \binom{r}{i} \rho(X_i)(\rho(Y) - \alpha\,\mathrm{Id}_V)^{r+1-i} v \\
&= \sum_{i=0}^{r+1} \left(\binom{r}{i-1} + \binom{r}{i} \right) \rho(X_i)(\rho(Y) - \alpha\,\mathrm{Id}_V)^{r+1-i} v \\
&= \sum_{i=0}^{r+1} \binom{r+1}{i} \rho\big((\mathrm{ad}\,Y - \beta\,\mathrm{Id}_V)^i X\big)\big((\rho(Y) - \alpha\,\mathrm{Id}_V)^{r+1-i} v\big).
\end{aligned}$$

Luego, el resultado es válido para todo $n \in \mathbb{N}$. □

2. Subálgebras de Cartan

Consideremos ahora una subálgebra $\mathfrak{h}$ del álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Definimos

$$N(\mathfrak{h}) = \{X \in \mathfrak{g} |\ [H, X] \in \mathfrak{h} \text{ para todo } H \in \mathfrak{h}\}.$$

$N(\mathfrak{h})$ es llamado el *normalizador* de $\mathfrak{h}$.

Lema 2.9. *Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie y $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ una subálgebra, entonces*

i) *$N(\mathfrak{h})$ es una subálgebra de $\mathfrak{g}$.*
ii) *$\mathfrak{h}$ es un ideal de $N(\mathfrak{h})$.*
iii) *$N(\mathfrak{h})$ es la subálgebra de $\mathfrak{g}$ más grande que contiene a $\mathfrak{h}$ como ideal.*

Demostración. i) Sean $X, Y \in N(\mathfrak{h})$ y $H \in \mathfrak{h}$. Luego

$$[H, [X, Y]] = [[Y, H], X] + [[H, X], Y] \in \mathfrak{h}.$$

Lo anterior implica que $[X, Y] \in N(\mathfrak{h})$ para todo $X, Y \in N(\mathfrak{h})$, es decir, $N(\mathfrak{h})$ es una subálgebra de $\mathfrak{g}$.

ii) El hecho de que $\mathfrak{h}$ es un ideal de $N(\mathfrak{h})$ se sigue directamente de la definición de $N(\mathfrak{h})$.

iii) Sea $\mathfrak{a}$ una subálgebra de $\mathfrak{g}$ tal que $\mathfrak{h}$ un ideal de $\mathfrak{a}$, es decir, $[\mathfrak{h}, \mathfrak{a}] \subset \mathfrak{h}$. De la definición de $N(\mathfrak{h})$ se sigue que $\mathfrak{a} \subset N(\mathfrak{h})$.

□

Definición 2.10. Una subálgebra $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ es llamada una *subálgebra de Cartan* si $\mathfrak{h}$ es nilpotente y $\mathfrak{h} = N(\mathfrak{h})$.

Sea $X \in \mathfrak{g}$ y consideremos la aplicación lineal $\operatorname{ad} X : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$. Definimos $\mathfrak{g}_{0,X} = \{Y \in \mathfrak{g} |\ \exists n \in \mathbb{N} \text{ tal que } (\operatorname{ad} X)^n Y = 0\}$, es decir, $\mathfrak{g}_{0,X}$ es el eigenespacio generalizado de $\operatorname{ad} X$ con respecto al eigenvalor 0 (es evidente que 0 es un eigenvalor de $\operatorname{ad} X$, pues $\operatorname{ad} X(X) = 0$). A $\mathfrak{g}_{0,X}$ se le llama la *componente nula de $\mathfrak{g}$ con respecto a X*.

Un elemento $X \in \mathfrak{g}$ se llama *regular* si $\dim \mathfrak{g}_{0,X}$ es lo más pequeño posible (comparado con los otros elementos de $\mathfrak{g}$).

Teorema 2.11. *Sea X un elemento regular de $\mathfrak{g}$. Entonces $\mathfrak{g}_{0,X}$ es una subálgebra de Cartan de $\mathfrak{g}$.*

Demostración. Sea $\mathfrak{t} = \mathfrak{g}_{0,X}$. Mostraremos que $\mathfrak{t}$ es una subálgebra de $\mathfrak{g}$ nilpotente con $\mathfrak{t} = N(\mathfrak{t})$.

Mostraremos primero que $\mathfrak{t}$ es una subálgebra. Sean $Y, Z \in \mathfrak{t}$. Por proposición 2.8, tomando $V = \mathfrak{g}, \alpha = \beta = 0, \rho = \operatorname{ad}$, obtenemos que

$$(\operatorname{ad} X)^n [Y, Z] = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} [(\operatorname{ad} X)^i Y, (\operatorname{ad} X)^{n-i} Z].$$

Dado que $Y \in \mathfrak{t}$ tenemos que

$$(\operatorname{ad} X)^i Y = 0 \qquad \text{para } i \text{ suficientemente grande.}$$

Por otro lado, $Z \in \mathfrak{t}$, luego

$$(\operatorname{ad} X)^{n-i} Z = 0 \qquad \text{para } n - i \text{ suficientemente grande.}$$

Por tanto obtenemos que $(\operatorname{ad} X)^n[Y,Z]=0$ para n suficientemente grande, es decir, $[Y,Z]\in\mathfrak{t}$ lo que muestra que $\mathfrak{t}$ es una subálgebra de $\mathfrak{g}$.

Ahora mostraremos que $\mathfrak{t}$ es nilpotente. Para esto probaremos que todas las matrices en la representación adjunta de $\mathfrak{t}$ son nilpotentes y utilizaremos el teorema de Engel para concluir que $\mathfrak{t}$ es nilpotente.[1] Sea $\dim\mathfrak{t}=l$ y $\{B_1,\dots,B_l\}$ una base para $\mathfrak{t}$. Sea

$$Y=\lambda_1B_1+\cdots+\lambda_lB_l\in\mathfrak{t}\qquad \lambda_1,\dots,\lambda_l\in\mathbb{C}.$$

Consideremos la aplicación lineal $\operatorname{ad} Y:\mathfrak{g}\longrightarrow\mathfrak{g}$. Por ser $\mathfrak{t}$ una subálgebra obtenemos la aplicación $\operatorname{ad} Y:\mathfrak{t}\longrightarrow\mathfrak{t}$ y esto nos induce un mapeo bien definido $\operatorname{ad} Y:\mathfrak{g}/\mathfrak{t}\longrightarrow\mathfrak{g}/\mathfrak{t}$, $Z+\mathfrak{t}\longmapsto[Y,Z]+\mathfrak{t}$.

Sea $\chi(t)$ el polinomio característico de $\operatorname{ad} Y$ en $\mathfrak{g}$, $\chi_1(t)$ su polinomio característico en $\mathfrak{t}$ y $\chi_2(t)$ su polinomio característico en $\mathfrak{g}/\mathfrak{t}$. De este modo obtenemos que

$$\chi(t)=\chi_1(t)\chi_2(t).$$

Dado que $\chi(t)=\det(t1-\operatorname{ad} Y)$ y Y depende linealmente de $\lambda_1,\dots,\lambda_l$, obtenemos que los coeficientes de $\chi(t)$ son funciones polinomiales en $\lambda_1,\dots,\lambda_l$. Un argumento análogo muestra que lo mismo se cumple para $\chi_1(t)$ y para $\chi_2(t)$. Sea

$$\chi_2(t)=d_0+d_1t+d_2t^2+\cdots$$

donde $d_0,d_1,d_2,\dots$ son funciones polinomiales en $\lambda_1,\dots,\lambda_l$.

Afirmamos que d_0 no es el polinomio 0. En el caso en el que $Y=X$ se tiene que los eigenvalores de $\operatorname{ad} Y:\mathfrak{g}/\mathfrak{t}\longrightarrow\mathfrak{g}/\mathfrak{t}$ son no cero (sea $Z\in\mathfrak{g}\setminus\{0\}$, luego, $\operatorname{ad} Y(Z+\mathfrak{t})=[Y,Z]+\mathfrak{t}=[X,Z]+\mathfrak{t}=\mathfrak{t}\Leftrightarrow[X,Z]\in\mathfrak{t}\Leftrightarrow(\operatorname{ad} X)^n[X,Z]=0$ para algún $n\Leftrightarrow(\operatorname{ad} X)^{n+1}(Z)=0\Leftrightarrow Z\in\mathfrak{t}$), luego $\chi_2(t)$ tiene término constante no cero, esto muestra la afirmación hecha anteriormente. Sea

$$\chi_2(t)=t^m(c_0+c_1t+c_2t^2+\cdots)$$

donde m es la multiplicidad del eigenvalor 0 (dado que $Y\in\mathfrak{t}$ se tiene que 0 es un eigenvalor de $\operatorname{ad} Y:\mathfrak{t}\longrightarrow\mathfrak{t}$), $c_0,c_1,c_2,\dots$ son polinomios en $\lambda_1,\dots,\lambda_l$ y c_0 no es el polinomio cero. De este modo obtenemos que

$$m\le l=\deg\chi_1(t).$$

Luego

$$\chi(t)=t^m(c_0d_0+\text{monomios en } t \text{ de grados positivos}).$$

Dado que c_0d_0 no es el polinomio cero podemos elegir $\lambda_1,\dots,\lambda_l\in\mathbb{C}$ tales que c_0d_0 es no cero. Para tal $Y\in\mathfrak{t}$ obtenemos que

$$\dim\mathfrak{g}_{0,Y}=m.$$

Dado que X es regular y $\dim\mathfrak{t}=l$ obtenemos que $m\ge l$. Por lo anterior se tiene también que $m\le l$, luego, $m=l$. Ahora, $\chi_1(t)$ tiene grado l y es divisible por t^l, por lo tanto

$$\chi_1(t)=t^l.$$

Del teorema de Cayley-Hamilton se sigue que $(\operatorname{ad} Y)^l:\mathfrak{t}\longrightarrow\mathfrak{t}$ es idénticamente cero. Luego, por el teorema de Engel se sigue que $\mathfrak{t}$ es nilpotente.

[1] El teorema de Engel enuncia que un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ es nilpotente si y solo si $\operatorname{ad} X$ es nilpotente para todo $X\in\mathfrak{g}$.

Finalmente mostramos que $\mathfrak{t} = N(\mathfrak{t})$. Sea $Z \in N(\mathfrak{t})$, luego $[X, Z] \in \mathfrak{t}$, es decir,

$$(\operatorname{ad} X)^n [X, Z] = 0 \quad \text{para algún } n.$$

Es decir, $(\operatorname{ad} X)^{n+1} Z = 0$ lo que implica que $Z \in \mathfrak{t}$. Por lo tanto $\mathfrak{t} = N(\mathfrak{t})$ lo que muestra que $\mathfrak{t} = \mathfrak{g}_{0,X}$ es una subálgebra de Cartan de $\mathfrak{g}$. □

Un hecho interesante es que, en cierto sentido, las subálgebras de Cartan construidas en la proposición anterior son todas las que existen, concretamente, se tienen los siguientes resultados.

Proposición 2.12. *Sea $\mathfrak{t}$ una subálgebra de Cartan de $\mathfrak{g}$. Entonces existe un elemento regular $X \in \mathfrak{g}$ tal que $\mathfrak{t} = \mathfrak{g}_{0,X}$.*

Proposición 2.13. *Sean $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2$ dos subálgebras de Cartan de $\mathfrak{g}$, entonces existe $X \in \mathfrak{g}$ tal que $\theta(\mathfrak{g}_1) = \mathfrak{g}_2$, donde $\theta = \exp(\operatorname{ad} X)$.*

Gracias a la proposición anterior sabemos que todas las subálgebras de Cartan de un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ tienen la misma dimensión. A tal dimensión se le llama el *rango* de $\mathfrak{g}$.

3. Descomposición de Cartan

A continuación estudiamos algunas propiedades adicionales de las álgebras de Lie nilpotentes que nos permitirán establecer un tipo importante de descomposición de álgebras de Lie, a saber, la descomposición de Cartan. Previo a dicho estudio introducimos la noción de submódulos.

Sean $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie, V un $\mathfrak{g}$-módulo, U un subespacio de V y H un subespacio de $\mathfrak{g}$. Definimos

$$HU = \operatorname{gen}_{\mathbb{F}}\{Xu \in V | X \in H, u \in U\}.$$

Un *submódulo* de V es un subespacio U de V tal que $\mathfrak{g}U \subset U$. En particular V y $\{0\}$ son submódulos de V. Un *submódulo propio* de V es un submódulo distinto de $V, \{0\}$.

Un $\mathfrak{g}$-módulo $V \neq \{0\}$ es llamado *irreducible* si no tiene submódulos propios. V es llamado *completamente reducible* si es la suma directa de submódulos irreducibles. V se llama *indescomponible* si no se puede escribir como la suma directa de dos submódulos propios. De las definiciones se sigue que un $\mathfrak{g}$-módulo irreducible es indescomponible, sin embargo, la inversa no es necesariamente cierta.

Teorema 2.14. *Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie nilpotente y V un $\mathfrak{g}$-módulo. Sea $Y \in \mathfrak{g}$ y $\rho(Y) : V \longrightarrow V$ la aplicación dada por $\rho(Y)v = Yv$. Entonces los eigenespacios generalizados V_i de V asociados a $\rho(Y)$ son submódulos de V.*

Demostración. Sean $v \in V_i$, $X, Y \in \mathfrak{g}$. Entonces

$$(\rho(Y) - \lambda_i \operatorname{Id}_V)^n X v = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} ((\operatorname{ad} Y)^j X)((\rho(Y) - \lambda_i \operatorname{Id}_V)^{n-j} v)$$

por proposición 2.8 con $\alpha = \lambda_i, \beta = 0$. Dado que $v \in V_i$, se tiene que

$$(\rho(Y) - \lambda_i \operatorname{Id}_V)^{n-j} v = 0 \quad \text{para } n-j \text{ suficientemente grande.}$$

Dado que $\mathfrak{g}$ es nilpotente tenemos que $(\operatorname{ad} Y)^j X = 0$ para algún j. De este modo $(\rho(Y) - \lambda_i \operatorname{Id}_V)^n X v = 0$ para n suficientemente grande. Por lo tanto $Xv \in V_i$, es decir, V_i es un submódulo de V. □

Corolario 2.15. *Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie nilpotente, ρ como en el teorema 2.14 y V un $\mathfrak{g}$-módulo indescomponible finito. Entonces se puede elegir una base para V con respecto a la cual se obtiene una representación matricial de ρ de la forma*

$$\rho(X) = \begin{pmatrix} \lambda(X) & & & & \\ & \cdot & & * & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ & O & & \cdot & \\ & & & & \lambda(X) \end{pmatrix} \quad \textit{para todo } X \in \mathfrak{g}.$$

Demostración. Por ser $\mathfrak{g}$ nilpotente tenemos que $\mathfrak{g}$ es soluble y esto nos garantiza que podemos elegir una base con respecto a la cual $\rho(X)$ es triangular superior. El teorema 2.14 nos dice que todos los eigenespacios generalizados de V con respecto a $\rho(X)$ son submódulos de V, más aún, se tiene que V es la suma directa de tales submódulos. Ahora, dado que V es indescomponible se tiene que solo uno de los eigenespacios generalizados es distinto de cero. De este modo todos los eigenvalores de $\rho(X)$ son iguales. Sea $\lambda(X)$ dicho eigenvalor. Entonces las entradas diagonales de la matriz triangular de $\rho(X)$ son precisamente $\lambda(X)$. □

A continuación enunciamos un resultado concerniente a la descomposición de $\mathfrak{g}$-módulos como suma directa de submódulos.

Teorema 2.16. *Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie nilpotente y V un $\mathfrak{g}$-módulo finito. Dada una representación 1-dimensional λ de $\mathfrak{g}$ definimos*

$$V_\lambda = \{v \in V |\ \textit{para cada } X \in \mathfrak{g} \textit{ existe } N(X) \textit{ tal que } (\rho(X) - \lambda(X)1)^{N(X)} v = 0\}.$$

Entonces se tiene que los V_λ son submódulos de $\mathfrak{g}$, más aún, se satisface que

$$V = \bigoplus_\lambda V_\lambda.$$

Una representación 1-dimensional λ de $\mathfrak{g}$ se llama un *peso* de V si $V_\lambda \neq 0$, en ese caso, V_λ es llamado el *espacio de peso de* λ. La descomposición $V = \bigoplus_\lambda V_\lambda$ es llamada la *descomposición en espacios de peso de* V.

Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie y $\mathfrak{t}$ una subálgebra de Cartan de $\mathfrak{g}$. Con la representación adjunta podemos considerar $\mathfrak{g}$ como un $\mathfrak{t}$-módulo. Dado que $\mathfrak{t}$ es nilpotente tenemos la descomposición en espacios de peso

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_\lambda \mathfrak{g}_\lambda$$

donde $\mathfrak{g}_\lambda = \{X \in \mathfrak{g} |$ para cada $H \in \mathfrak{t}$ existe n tal que $(\operatorname{ad} H - \lambda(H)1)^n X = 0\}$.

Proposición 2.17. *Con la notación anterior, $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{t}$.*

Demostración. Por ser $\mathfrak{t}$ nilpotente, el teorema de Engel implica que $\mathfrak{t} \subset \mathfrak{g}_0$. Supongamos que que $\mathfrak{t} \neq \mathfrak{g}_0$. En este caso se tiene que $\mathfrak{g}_0/\mathfrak{t}$ es un $\mathfrak{t}$-módulo y utilizando la descomposición en espacios de peso de $\mathfrak{g}_0/\mathfrak{t}$ obtenemos un submódulo 1-dimensional $M/\mathfrak{t}$ en el cual $\mathfrak{t}$ actúa con peso 0, o sea, $M/\mathfrak{t} \subset (\mathfrak{g}_0/\mathfrak{t})_0$. De esto obtenemos que $[\mathfrak{t}, M] \subset \mathfrak{t}$, es decir, $M \subset N(\mathfrak{t})$ lo que implica que $\mathfrak{t} \neq N(\mathfrak{t})$, lo cual es una contradicción con el hecho de que $\mathfrak{t}$ es una subálgebra de Cartan. □

Las representaciones 1-dimensionales λ de $\mathfrak{t}$ tales que $\lambda \neq 0$ y $\mathfrak{g}_\lambda \neq 0$ son llamadas las *raíces* de $\mathfrak{g}$ con respecto a $\mathfrak{t}$. El conjunto de raíces de $\mathfrak{g}$ con respecto a $\mathfrak{t}$ será denotado por Δ. De este modo obtenemos que

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{t} \oplus \left(\bigoplus_{\alpha \in \Delta} \mathfrak{g}_\alpha \right).$$

Esta descomposición es llamada la *descomposición de Cartan* de $\mathfrak{g}$ con respecto a $\mathfrak{t}$. $\mathfrak{g}_\alpha$ es llamado el *espacio de raíz de* α.

Proposición 2.18. *Sean λ, μ representaciones 1-dimensionales de $\mathfrak{t}$. Entonces*

$$[\mathfrak{g}_\lambda, \mathfrak{g}_\mu] \subset \mathfrak{g}_{\lambda+\mu}.$$

Demostración. Sean $Y \in \mathfrak{g}_\lambda$, $Z \in \mathfrak{g}_\mu$ y $X \in \mathfrak{t}$. Por proposición 2.8 se tiene que

$$(\operatorname{ad} X - \lambda(X)1 - \mu(X)1)^n [Y, Z] = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} [(\operatorname{ad} X - \lambda(X)1)^i Y, (\operatorname{ad} X - \mu(X)1)^{n-i} Z].$$

Dado que $Y \in \mathfrak{g}_\lambda$, $(\operatorname{ad} X - \lambda(X)1)^i Y = 0$ para i suficientemente grande. Por otro lado, dado que $Z \in \mathfrak{g}_\mu$, $(\operatorname{ad} X - \mu(X)1)^{n-i} Z = 0$ para $n - i$ suficientemente grande. Por lo tanto

$$(\operatorname{ad} X - (\lambda(X) + \mu(X))1)^n [Y, Z] = 0$$

para n suficientemente grande, es decir, $[Y, Z] \in \mathfrak{g}_{\lambda+\mu}$. □

La proposición anterior junto con el hecho de que $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{t}$ muestran el siguiente resultado

Corolario 2.19. *Sean $\alpha, \beta \in \Delta$ raíces de $\mathfrak{g}$ con respecto a $\mathfrak{t}$. Entonces*

$$\begin{array}{lcll} [\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] & \subset & \mathfrak{g}_{\alpha+\beta} & \textit{si } \alpha + \beta \in \Delta \\ [\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] & \subset & \mathfrak{t} & \textit{si } \beta = -\alpha \\ [\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] & = & 0 & \textit{si } \alpha + \beta \neq 0 \textit{ y } \alpha + \beta \notin \Delta. \end{array}$$

Enunciamos a continuación un resultado que será necesario posteriormente.

Proposición 2.20. *Sea $\alpha \in \Delta$ y consideremos el subespacio $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}]$ de $\mathfrak{t}$. Dado $\beta \in \Delta$ existe $r \in \mathbb{Q}$ que depende de α y de β tal que $\beta = r\alpha$ en $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}]$.*

En lo que resta de este capítulo $\mathfrak{g}$ es considerada un álgebra de Lie compleja. Con el objetivo de tener un mejor entendimiento de la descomposición de Cartan del álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ introducimos una aplicación bilineal en $\mathfrak{g}$ llamada la *forma de Killing.* Definimos

$$\mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad (X, Y) \longmapsto \langle X, Y \rangle$$

dada por

$$\langle X, Y\rangle = \operatorname{tr}(\operatorname{ad} X \circ \operatorname{ad} Y).$$

Proposición 2.21. i) *$\langle\cdot,\cdot\rangle$ es $\mathbb{C}$-bilineal.*

ii) *$\langle\cdot,\cdot\rangle$ es simétrica.*

iii) *$\langle\cdot,\cdot\rangle$ es invariante en el sentido de que*

$$\langle [X, Y], Z\rangle = \langle X, [Y, Z]\rangle \quad \textit{para todo } X, Y, Z \in \mathfrak{g}.$$

Demostración. i) Esta afirmación se sigue directamente de la definición de $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

ii) Se sigue del hecho de que dados dos operadores lineales A, B, se tiene que $\operatorname{tr} AB = \operatorname{tr} BA$.

iii)

$$\begin{aligned}
\langle [X, Y], Z\rangle &= \operatorname{tr}(\operatorname{ad}[X, Y] \operatorname{ad} Z) = \operatorname{tr}((\operatorname{ad} X \operatorname{ad} Y - \operatorname{ad} Y \operatorname{ad} X) \operatorname{ad} Z) \\
&= \operatorname{tr}(\operatorname{ad} X \operatorname{ad} Y \operatorname{ad} Z) - \operatorname{tr}(\operatorname{ad} Y \operatorname{ad} X \operatorname{ad} Z) \\
&= \operatorname{tr}(\operatorname{ad} X \operatorname{ad} Y \operatorname{ad} Z) - \operatorname{tr}(\operatorname{ad} X \operatorname{ad} Z \operatorname{ad} Y) \\
&= \operatorname{tr}(\operatorname{ad} X(\operatorname{ad} Y \operatorname{ad} Z - \operatorname{ad} Z \operatorname{ad} Y)) = \operatorname{tr}(\operatorname{ad} X \operatorname{ad}[Y, Z]) \\
&= \langle X, [Y, Z]\rangle.
\end{aligned}$$

□

Proposición 2.22. *Sea I un ideal del álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ y sean $X, Y \in I$. Entonces la forma de Killing de $\mathfrak{g}$ restringida a I es la forma de Killing de I, es decir,*

$$\langle X, Y\rangle_I = \langle X, Y\rangle_{\mathfrak{g}}.$$

Demostración. Elegimos una base de I y la extendemos a una base de $\mathfrak{g}$. Con respecto a esta base la representación matricial de $\operatorname{ad} X : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ es de la forma

$$\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ O & O \end{pmatrix}$$

lo anterior debido a que $\operatorname{ad} X(\mathfrak{g}) \subset I$ pues $[I, \mathfrak{g}] \subset I$. De manera similar la representación matricial de $\operatorname{ad} Y : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ tiene la forma

$$\begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ O & O \end{pmatrix}.$$

De este modo la representación matricial de $\operatorname{ad} X \operatorname{ad} Y : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ es

$$\begin{pmatrix} A_1 B_1 & A_1 B_2 \\ O & O \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto $\operatorname{tr}_{\mathfrak{g}}(\operatorname{ad} X \operatorname{ad} Y) = \operatorname{tr} A_1 B_1 = \operatorname{tr}_I(\operatorname{ad} X \operatorname{ad} Y)$. □

Dado un subespacio M de $\mathfrak{g}$ definimos $M^\perp$ por

$$M^\perp = \{X \in \mathfrak{g} | \langle X, Y\rangle = 0 \quad \forall Y \in M\}.$$

Es fácil ver que $M^\perp$ es también un subespacio de $\mathfrak{g}$.

Lema 2.23. *Si I es un ideal de $\mathfrak{g}$ entonces $I^\perp$ es también un ideal de $\mathfrak{g}$.*

Demostración. Sean $X \in I^{\perp}, Y \in \mathfrak{g}$, mostraremos que $[X,Y] \in I^{\perp}$. Sea $Z \in I$, entonces
$$\langle [X,Y], Z\rangle = \langle X, [Y,Z]\rangle = 0$$
pues $[Y,Z] \in I$ y $X \in I^{\perp}$. De este modo obtenemos que $[X,Y] \in I^{\perp}$. □

En particular tenemos que $\mathfrak{g}^{\perp}$ es un ideal de $\mathfrak{g}$. Se dice que la forma de Killing de $\mathfrak{g}$ es *no degenerada* si $\mathfrak{g}^{\perp} = \{0\}$.

Una vez que hemos definido la forma de Killing de un álgebra de Lie introducimos un tipo especial de álgebras en los cuales es posible decir más cosas acerca de la descomposición de Cartan.

Definición 2.24. Un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ se dice que es *semisimple* si su forma de Killing es no degenerada.

Dadas dos álgebras de Lie $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2$ definimos la *suma directa* $\mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$ como el espacio vectorial
$$\mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2 = \{(X_1, X_2)|\ X_i \in \mathfrak{g}_i,\ i = 1,2\}.$$
Es fácil ver que $\mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$ es un álgebra de Lie con el corchete definido como
$$[(X_1,X_2),(Y_1,Y_2)] = ([X_1,Y_1]_1, [X_2,Y_2]_2),$$
donde $[\cdot,\cdot]_i$ es el corchete de Lie en $\mathfrak{g}_i$.
En la suma directa anterior definimos
$$I_1 = \{(X_1, 0)|\ X_1 \in \mathfrak{g}_1\},$$
$$I_2 = \{(0, X_2)|\ X_2 \in \mathfrak{g}_2\}.$$
Se tiene entonces que I_1, I_2 son ideales de $\mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$ tales que $I_1 \cap I_2 = \{(0,0)\}$ e $I_1 + I_2 = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$. Más aún, se tiene que $I_i \cong \mathfrak{g}_i$ como álgebras de Lie.
De manera recíproca, dada un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ que contiene dos ideales I_1, I_2 tales que $I_1 \cap I_2 = \{0\}$ e $I_1 + I_2 = \mathfrak{g}$. Entonces se tiene que el álgebra de Lie $I_1 \oplus I_2$ es isomorfa a $\mathfrak{g}$ con isomorfismo dado por
$$\theta : I_1 \oplus I_2 \longrightarrow \mathfrak{g}, \qquad (X_1, X_2) \longmapsto X_1 + X_2.$$
No es difícil ver que θ es un isomorfismo de espacios vectoriales. De hecho, θ es isomorfismo de álgebras de Lie. Observamos en primer lugar que
$$[I_1, I_2] \subset I_1 \cap I_2 = \{0\}.$$
De este modo obtenemos que
$$\begin{aligned}[\theta(X_1,X_2), \theta(Y_1,Y_2)] &= [X_1 + X_2, Y_1 + Y_2] = [X_1,Y_1] + [X_2,Y_2] \\ &= \theta([X_1,Y_1],[X_2,Y_2]) = \theta[(X_1,X_2),(Y_1,Y_2)].\end{aligned}$$
De manera similar podemos considerar las sumas directas de un número finito de álgebras de Lie.

A continuación enunciamos un resultado clásico sobre álgebras de Lie semisimples.

Teorema 2.25. *Un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ es semisimple si y solo si $\mathfrak{g}$ es isomorfa a la suma directa de álgebras de Lie simples no triviales.*

Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie semisimple, $\mathfrak{t}$ una subálgebra de Cartan de $\mathfrak{g}$ y $\bigoplus \mathfrak{g}_\alpha$ la descomposición de Cartan de $\mathfrak{g}$ con respecto a $\mathfrak{t}$ donde recordemos que $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{t}$.

Proposición 2.26. *Si $\lambda \neq \mu$ entonces $\mathfrak{g}_\lambda$ y $\mathfrak{g}_\mu$ son ortogonales con respecto a la forma de Killing.*

Demostración. Sean $X \in \mathfrak{g}_\lambda, Y \in \mathfrak{g}_\mu$. Asumimos $\lambda + \mu \neq 0$ y con esto debemos mostrar que $\langle X, Y \rangle = 0$. Ahora, para cada espacio de peso $\mathfrak{g}_\nu$ tenemos, por proposición 2.18, que

$$\operatorname{ad} X \operatorname{ad} Y \mathfrak{g}_\nu \subset \mathfrak{g}_{\lambda+\mu+\nu}$$

Elegimos una base de $\mathfrak{g}$ que esté adaptada a la descomposición de Cartan (i.e. ordenada por bloques, donde cada bloque es una base para exactamente un espacio de raíz). El hecho de que $\lambda + \mu + \nu \neq \nu$ implica que en esta base $\operatorname{ad} X \operatorname{ad} Y$ tiene representación matricial (por bloques) de la forma

$$\begin{pmatrix} 0 & & & & & \\ & 0 & & & * & \\ & & \cdot & & & \\ & & & \cdot & & \\ & & & & \cdot & \\ & * & & & 0 & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

De este modo obtenemos que

$$\langle X, Y \rangle = \operatorname{tr}(\operatorname{ad} X \operatorname{ad} Y) = 0.$$

□

Proposición 2.27. *Si α es una raíz de $\mathfrak{g}$ con respecto a $\mathfrak{t}$ entonces $-\alpha$ es también una raíz.*

Demostración. Dado que α es una raíz se tiene, por definición, que $\alpha \neq 0$ y que $\mathfrak{g}_\alpha \neq 0$. Supongamos que $-\alpha$ no es una raíz. Por ser $\alpha \neq 0$ tenemos que $-\alpha \neq 0$, luego, si $-\alpha$ no es una raíz entonces $\mathfrak{g}_{-\alpha} = 0$, esto implica que $\langle \mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha} \rangle = 0$. Más aún, la proposición anterior nos garantiza que $\langle \mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\lambda \rangle = 0$ para $\lambda \neq -\alpha$, por tanto concluimos que $\langle \mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g} \rangle = 0$, es decir, $\mathfrak{g}_\alpha \subset \mathfrak{g}^\perp$, pero por ser $\mathfrak{g}$ semisimple tenemos que $\mathfrak{g}^\perp = 0$ lo que implica que $\mathfrak{g}_\alpha = 0$, lo cual es una contradicción con el hecho de que α es una raíz. □

Proposición 2.28. *Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie semisimple y $\mathfrak{t}$ una subálgebra de Cartan. Entonces se tiene que la restricción de la forma de Killing de $\mathfrak{g}$ a $\mathfrak{t}$ sigue siendo no degenerada, es decir, para $X \in \mathfrak{t}$ tal que $\langle X, Y \rangle = 0$ para todo $Y \in \mathfrak{t}$ entonces $X = 0$.*

Demostración. Sea $X \in \mathfrak{t}$ tal que $\langle X, Y \rangle = 0$ para todo $Y \in \mathfrak{t}$. Ahora, por la proposición 2.26 tenemos que $\langle X, Z \rangle = 0$ para todo $Z \in \mathfrak{g}_\alpha$ con $\alpha \neq 0$. De este modo obtenemos que $\langle X, Y \rangle = 0$ para todo $Y \in \mathfrak{g}$ y dado que $\mathfrak{g}$ es semisimple concluimos que $X = 0$. □

Una observación importante es el hecho de que la restricción de la forma de Killing de $\mathfrak{g}$ a $\mathfrak{t}$ no coincide con la forma de Killing de $\mathfrak{t}$ esto porque en general $\mathfrak{t}$ no es un álgebra semisimple.

Teorema 2.29. *Las subálgebras de Cartan de un álgebra de Lie semisimple son abelianas.*

Demostración. Sea $X \in [\mathfrak{t}, \mathfrak{t}]$ y $Y \in \mathfrak{t}$. Se tiene entonces que

$$\langle X, Y\rangle = \mathrm{tr}(\mathrm{ad}\, X\, \mathrm{ad}\, Y) = \sum_{\lambda} \dim \mathfrak{g}_\lambda \lambda(X)\lambda(Y)$$

pues los espacios de raíces son de hecho submódulos indescomponibles, luego por el corolario 2.15 sabemos que $\mathrm{ad}\, X\, \mathrm{ad}\, Y$ puede ser representado de forma matricial en $\mathfrak{g}_\lambda$ con una matriz de la forma

$$\begin{pmatrix} \lambda(X)\lambda(Y) & & & * \\ & \cdot & & \\ & & \cdot & \\ O & & & \cdot \\ & & & \lambda(X)\lambda(Y) \end{pmatrix}.$$

Ahora, dado que λ es una representación 1-dimensional de $\mathfrak{t}$ no es difícil mostrar que $\lambda([X_1, X_2]) \equiv 0$ para todo $X_1, X_2 \in \mathfrak{t}$, de este modo, dado que $X \in [\mathfrak{t}, \mathfrak{t}]$ obtenemos que $\lambda(X) = 0$. Por tanto se tiene que $\langle X, Y\rangle = 0$ para todo $Y \in \mathfrak{t}$ y así, por la proposición 2.28, concluimos que $X = 0$. □

Consideremos el espacio dual de la subálgebra de Cartan $\mathfrak{t}$ del álgebra de Lie semisimple $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{t}^* = \mathrm{Hom}(\mathfrak{t}, \mathbb{C})$. Definimos una aplicación $\mathfrak{t} \longrightarrow \mathfrak{t}^*$ utilizando la forma de Killing de $\mathfrak{g}$ dada por

$$H \longmapsto (H^* : \mathfrak{t} \longrightarrow \mathbb{C}, X \longmapsto \langle H, X\rangle).$$

Lema 2.30. *La aplicación $\mathfrak{t} \longrightarrow \mathfrak{t}^* : H \longmapsto H^*$ es un isomorfismo de espacios vectoriales.*

Demostración. Es claro de la definición que la aplicación dada es lineal. Sea H un elemento del kernel de dicho mapeo, es decir $H^* \equiv 0$, lo que es equivalente al hecho de que $\langle H, X\rangle = 0$ para todo $X \in \mathfrak{t}$. Ahora, sabemos que la restricción de la forma de Killing a la subálgebra $\mathfrak{t}$ sigue siendo no degenerada, de este modo el hecho de que $\langle H, X\rangle = 0$ para todo $X \in \mathfrak{t}$ implica que $H = 0$, luego el kernel de la aplicación dada es trivial, lo que implica que el mapeo es inyectivo, esto junto con el hecho de que $\dim \mathfrak{t} = \dim \mathfrak{t}^*$ muestra que la aplicación es de hecho biyectiva. □

De los resultados anteriores observamos que el conjunto de raíces Δ de $\mathfrak{g}$ con respecto a $\mathfrak{t}$ es un subconjunto finito de $\mathfrak{t}^*$. Del lema anterior concluimos que para cada $\alpha \in \Delta$ existe un único $H'_\alpha \in \mathfrak{t}$ tal que

$$\alpha(X) = \langle H'_\alpha, X\rangle \quad \text{para todo } X \in \mathfrak{t}.$$

Proposición 2.31. *Los vectores H'_α con $\alpha \in \Delta$ generan la subálgebra $\mathfrak{t}$.*

Demostración. Supongamos que los H'_α generan un subespacio propio de $\mathfrak{t}$. En tal caso existe un $X \in \mathfrak{t}$ con $X \neq 0$ y $\langle H'_\alpha, X\rangle = 0$ para todo $\alpha \in \Delta$ (esto es posible porque $\mathfrak{t}$ es de dimensión finita, luego $\mathfrak{t} = \mathrm{gen}\{H'_\alpha\} \oplus \mathrm{gen}\{H'_\alpha\}^\perp$). Luego, $\alpha(X) = 0$ para todo $\alpha \in \Delta$. Sea $Y \in \mathfrak{t}$, de la afirmación anterior se tiene que

$$\langle X, Y\rangle = \mathrm{tr}(\mathrm{ad}\, X\, \mathrm{ad}\, Y) = \sum_{\lambda} \dim \mathfrak{g}_\lambda \lambda(X)\lambda(Y) = 0.$$

Luego, $\langle X, Y \rangle = 0$ para todo $Y \in \mathfrak{t}$ lo cual, por la proposición 2.28, implica que $X = 0$, que es una contradicción con la suposición de que $X \neq 0$. $\square$

Proposición 2.32. *Con la notación anterior,* $H'_\alpha \in [\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}]$ *para todo* $\alpha \in \Delta$.

Demostración. Sea $\alpha \in \Delta$, consideremos el $\mathfrak{t}$-módulo $\mathfrak{g}_\alpha$ y un submódulo 1-dimensional $\mathbb{C}E_\alpha$. Se tiene que $[X, E_\alpha] = \alpha(X)E_\alpha$ para todo $X \in \mathfrak{t}$, esto porque $\mathbb{C}E_\alpha$ es un $\mathfrak{t}$-submódulo, luego, $[X, E_\alpha] \in \mathbb{C}E_\alpha$, es decir, existe un único $z_X \in \mathbb{C}$ tal que $[X, E_\alpha] = z_X E_\alpha$, entonces, z define una representación 1-dimensional de $\mathfrak{t}$, de este modo obtenemos que $E_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha \cap \mathfrak{g}_z$ lo que implica que $z_X = \alpha(X)$.

Sea $Y \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$, entonces se tiene que $[E_\alpha, Y] \in [\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}] \subset \mathfrak{t}$. Afirmamos que $[E_\alpha, Y] = \langle E_\alpha, Y \rangle H'_\alpha$. Para verificar la afirmación definimos

$$Z = [E_\alpha, Y] - \langle E_\alpha, Y \rangle H'_\alpha \in \mathfrak{t}.$$

Sea $X \in \mathfrak{t}$, entonces

$$\begin{aligned} \langle X, Z \rangle &= \langle X, [E_\alpha, Y] \rangle - \langle E_\alpha, Y \rangle \langle X, H'_\alpha \rangle \\ &= \langle [X, E_\alpha], Y \rangle - \langle E_\alpha, Y \rangle \alpha(X) \\ &= \alpha(X) \langle E_\alpha, Y \rangle - \langle E_\alpha, Y \rangle \alpha(X) = 0. \end{aligned}$$

Así obtenemos que $\langle X, Z \rangle = 0$ para todo $X \in \mathfrak{t}$, lo que implica que $Z = 0$, lo cual prueba la afirmación hecha.

Elegimos ahora $Y \in \mathfrak{g}_{-\alpha} \setminus \{0\}$ tal que $\langle E_\alpha, Y \rangle \neq 0$, nótese que tal Y debe existir, pues de otro modo obtendríamos que $E_\alpha \in \mathfrak{g}^\perp = \{0\}$ porque $\mathfrak{g}$ es semisimple. Utilizando esto junto con lo afirmado anteriormente obtenemos que

$$H'_\alpha = \frac{1}{\langle E_\alpha, Y \rangle}[E_\alpha, Y] \in [\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}].$$

$\square$

Proposición 2.33. $\langle H'_\alpha, H'_\alpha \rangle \neq 0$ *para todo* $\alpha \in \Delta$.

Demostración. Supongamos que $\langle H'_\alpha, H'_\alpha \rangle = 0$ para algún $\alpha \in \Delta$. Sea $\beta \in \Delta$ dado. Por la proposición 2.20 sabemos que existe $r_{\beta,\alpha} \in \mathbb{Q}$ tal que $\beta = r_{\beta,\alpha}\alpha$ en $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}]$. Dado que $H'_\alpha \in [\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}]$, obtenemos que

$$\beta(H'_\alpha) = r_{\beta,\alpha}\alpha(H'_\alpha)$$

es decir, $\langle H'_\alpha, H'_\beta \rangle = r_{\beta,\alpha} \langle H'_\alpha, H'_\alpha \rangle = 0$.

Lo anterior se satisface para todo $\beta \in \Delta$. Ahora, sabemos por la proposición 2.31 que los H'_β con $\beta \in \Delta$ generan $\mathfrak{t}$. De este modo obtenemos que $\langle X, H'_\alpha \rangle = 0$ para todo $X \in \mathfrak{t}$ lo cual es equivalente al hecho de que $\alpha(X) = 0$ para todo $X \in \mathfrak{t}$, es decir, $\alpha \equiv 0$ lo cual es una contradicción con el hecho de que $\alpha \in \Delta$. $\square$

Una vez obtenidos los resultados previos sobre la descomposición de Cartan de un álgebra de Lie semisimple estamos listos para probar una de las propiedades más importantes sobre dicha descomposición.

Teorema 2.34. $\dim \mathfrak{g}_\alpha = 1$ *para todo* $\alpha \in \Delta$.

Demostración. Elegimos un $\mathfrak{t}$-submódulo 1-dimensional $\mathbb{C}E_\alpha$ de $\mathfrak{g}_\alpha$ como en la proposición 2.32 y $E_{-\alpha} \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ tal que $[E_\alpha, E_{-\alpha}] = H'_\alpha$.

Sea M el subespacio de $\mathfrak{g}$ definido por

$$M = \mathbb{C}E_\alpha \oplus \mathbb{C}H'_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha} \oplus \mathfrak{g}_{-2\alpha} \oplus \cdots$$

Hacemos notar el hecho de que solo hay un número finito de sumandos no cero ya que Δ es finito, lo que implica que hay solo un número finito de enteros positivos r tal que $\mathfrak{g}_{-r\alpha} \neq 0$.
Observamos que $\operatorname{ad} E_\alpha(M) \subset M$. Esto se sigue de observar que

$$\begin{aligned}
[E_\alpha, E_\alpha] &= 0 \\
[E_\alpha, H'_\alpha] &= -\alpha(H'_\alpha)E_\alpha \quad \text{por la forma en la que elegimos } E_\alpha \\
[E_\alpha, Y] &= \langle E_\alpha, Y\rangle H'_\alpha \quad \text{para todo } Y \in \mathfrak{g}_{-\alpha},
\end{aligned}$$

además por la proposición 2.18 se tiene que

$$\operatorname{ad} E_\alpha(\mathfrak{g}_{-r\alpha}) \subset \mathfrak{g}_{-(r-1)\alpha} \quad \text{para } r \geq 2.$$

De manera similar podemos mostrar que $\operatorname{ad} E_{-\alpha}(M) \subset M$, pues se cumple que

$$\begin{aligned}
[E_{-\alpha}, E_\alpha] &= -H'_\alpha \\
[E_{-\alpha}, H'_\alpha] &= \alpha(H'_\alpha)E_{-\alpha}
\end{aligned}$$

y $\operatorname{ad} E_{-\alpha}(\mathfrak{g}_{-r\alpha}) \subset \mathfrak{g}_{-(r+1)\alpha}$ para $r \geq 1$.
Ahora, tenemos que $H'_\alpha = [E_\alpha, E_{-\alpha}]$ de esto obtenemos que

$$\operatorname{ad} H'_\alpha = \operatorname{ad} E_\alpha \operatorname{ad} E_{-\alpha} - \operatorname{ad} E_{-\alpha} \operatorname{ad} E_\alpha.$$

De esto concluimos que $\operatorname{ad} H'_\alpha(M) \subset M$. Del corolario 2.15 y del hecho de que $\dim \mathbb{C}E_\alpha = 1$ obtenemos que

$$\begin{aligned}
\operatorname{tr}_M(\operatorname{ad} H'_\alpha) &= \alpha(H'_\alpha) + \dim \mathfrak{g}_{-\alpha}(-\alpha(H'_\alpha)) + \dim \mathfrak{g}_{-2\alpha}(-2\alpha(H'_\alpha)) + \cdots \\
&= \alpha(H'_\alpha)(1 - \dim \mathfrak{g}_{-\alpha} - 2\dim \mathfrak{g}_{-2\alpha} - \cdots).
\end{aligned}$$

Por otro lado tenemos que

$$\operatorname{tr}_M(\operatorname{ad} H'_\alpha) = \operatorname{tr}_M(\operatorname{ad} E_\alpha \operatorname{ad} E_{-\alpha} - \operatorname{ad} E_{-\alpha} \operatorname{ad} E_\alpha) = 0.$$

Luego

$$\alpha(H'_\alpha)(1 - \dim \mathfrak{g}_{-\alpha} - 2\dim \mathfrak{g}_{-2\alpha} - \cdots) = 0.$$

Recordemos que $\alpha(H'_\alpha) = \langle H'_\alpha, H'_\alpha\rangle \neq 0$, lo cual implica que

$$1 - \dim \mathfrak{g}_{-\alpha} - 2\dim \mathfrak{g}_{-2\alpha} - \cdots = 0$$

Lo anterior implica que $\dim \mathfrak{g}_{-\alpha} = 1$ y $\dim \mathfrak{g}_{-r\alpha} = 0$ para $r \geq 2$. De la proposición 2.27 sabemos que $\alpha \in \Delta$ si y solo si $-\alpha \in \Delta$, por lo tanto obtenemos que $\dim \mathfrak{g}_\alpha = 1$ para todo $\alpha \in \Delta$. □

Una observación importante es el hecho de que a pesar de que los espacios de raíces $\mathfrak{g}_\alpha$ son 1-dimensionales, $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{t}$ no necesariamente es de dimensión 1.

Proposición 2.35. *Si $\alpha \in \Delta$ y $r\alpha \in \Delta$ con $r \in \mathbb{Z}$ entonces $r = 1$ ó $r = -1$.*

Demostración. Esto se sigue de la demostración del teorema 2.34 donde demostramos que para todo $\alpha \in \Delta$, $-r\alpha \notin \Delta$ para $r \geq 2$. Esto junto con el hecho de que $r\alpha \in \Delta$ si y solo si $-r\alpha \in \Delta$ implica el resultado. □

Sean $\alpha, \beta \in \Delta$ tales que $\beta \neq \alpha$ y $\beta \neq -\alpha$. Entonces de la proposición 2.35 vemos que β no es un múltiplo entero de α lo cual implica que existen enteros $p, q \geq 0$ tales que

$$-p\alpha + \beta, \ldots, -\alpha + \beta, \beta, \alpha + \beta, \ldots, q\alpha + \beta$$

son raíces pero $-(p+1)\alpha + \beta$ y $(q+1)\alpha + \beta$ no son raíces. Al conjunto

$$\{-p\alpha + \beta, \ldots q\alpha + \beta\}$$

se le llama la *α-cadena de raíces que pasa por β*. Sea M el subespacio de $\mathfrak{g}$ definido por

$$M = \mathfrak{g}_{-p\alpha+\beta} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_{q\alpha+\beta}.$$

Entonces, para E_α dado como antes, obtenemos que $\operatorname{ad} E_\alpha(M) \subset M$. Esto se sigue del hecho de que $\operatorname{ad} E_\alpha(\mathfrak{g}_{r\alpha+\beta}) \subset \mathfrak{g}_{(r+1)\alpha+\beta}$ y $\mathfrak{g}_{(q+1)\alpha+\beta} = 0$ dado que $(q+1)\alpha + \beta \notin \Delta$ y $(q+1)\alpha + \beta \neq 0$. De manera análoga se obtiene que $\operatorname{ad} E_{-\alpha}(M) \subset M$.

Asumimos como antes que $[E_\alpha, E_{-\alpha}] = H'_\alpha$. Entonces obtenemos que

$$\operatorname{ad} H'_\alpha = \operatorname{ad} E_\alpha \operatorname{ad} E_{-\alpha} - \operatorname{ad} E_{-\alpha} \operatorname{ad} E_\alpha$$

y de este modo se tiene que $\operatorname{ad} H'_\alpha(M) \subset M$. Una observación similar a la hecha en la demostración del teorema 2.34 junto con el hecho de que $\dim \mathfrak{g}_{r\alpha+\beta} = 1$ muestra que

$$\operatorname{tr}_M(\operatorname{ad} H'_\alpha) = \sum_{r=-p}^{q} (r\alpha + \beta)(H'_\alpha).$$

Por otro lado,

$$\operatorname{tr}_M(\operatorname{ad} H'_\alpha) = \operatorname{tr}_M(\operatorname{ad}[E_\alpha, E_{-\alpha}]) = 0.$$

Luego

$$\sum_{r=-p}^{q} (r\alpha + \beta)(H'_\alpha) = 0,$$

es decir

$$\left(\frac{q(q+1)}{2} - \frac{p(p+1)}{2}\right) \alpha(H'_\alpha) + (p+q+1)\beta(H'_\alpha) = 0.$$

Dado que $p + q + 1 \neq 0$ obtenemos que

$$\frac{q-p}{2} \langle H'_\alpha, H'_\alpha \rangle + \langle H'_\alpha, H'_\beta \rangle = 0,$$

es decir,

$$2\frac{\langle H'_\alpha, H'_\beta \rangle}{\langle H'_\alpha, H'_\alpha \rangle} = p - q$$

ya que de la proposición 2.33, $\langle H'_\alpha, H'_\alpha \rangle \neq 0$. De este modo hemos demostrado el siguiente resultado

Proposición 2.36. *Sean $\alpha, \beta \in \Delta$ con $\beta \neq \alpha$ y $\beta \neq -\alpha$. Sea*

$$-p\alpha + \beta, \ldots, q\alpha + \beta$$

la α-cadena de raíces que pasa por β. Entonces

$$2\frac{\langle H'_\alpha, H'_\beta \rangle}{\langle H'_\alpha, H'_\alpha \rangle} = p - q.$$

Proposición 2.37. *Si $\alpha \in \Delta$ y $\zeta\alpha \in \Delta$ con $\zeta \in \mathbb{C}$ entonces $\zeta = 1$ ó $\zeta = -1$.*

Demostración. Supongamos que $\zeta \neq \pm 1$. Definamos $\beta = \zeta\alpha$ y aplicando el resultado obtenido en la proposición 2.36 obtenemos que

$$2\zeta = 2\frac{\langle H'_\alpha, H'_\beta\rangle}{\langle H'_\alpha, H'_\alpha\rangle} = p - q.$$

Luego, $2\zeta \in \mathbb{Z}$. Si $\zeta \in \mathbb{Z}$ entonces sabemos de la proposición 2.35 que $\zeta = \pm 1$. Por lo tanto $\zeta \notin \mathbb{Z}$. Entonces la α-cadena de raíces que pasa por β es

$$-\left(\frac{p+q}{2}\right)\alpha, \ldots, \beta = \left(\frac{p-q}{2}\right)\alpha, \ldots, \left(\frac{p+q}{2}\right)\alpha.$$

Ahora, p, q no son ambos cero debido a que $\beta \neq 0$. Luego todas las raíces de la α-cadena son múltiplos impares de $\frac{1}{2}\alpha$. Dado que el primero y el último elemento de la cadena son los negativos de cada uno y las raíces consecutivas difieren por α se tiene que $\frac{1}{2}\alpha \in \Delta$ lo cual es una contradicción con la proposición 2.35 pues $\alpha \in \Delta$. Por lo tanto obtenemos que $\zeta = 1$ ó $\zeta = -1$. □

De este modo se obtiene que las únicas raíces que son múltiplos escalares de una raíz α son $\pm\alpha$.

Proposición 2.38. *$\langle H'_\alpha, H'_\beta\rangle \in \mathbb{Q}$ para todo $\alpha, \beta \in \Delta$.*

Demostración. De la proposición 2.36 se tiene que

$$2\frac{\langle H'_\alpha, H'_\beta\rangle}{\langle H'_\alpha, H'_\alpha\rangle} \in \mathbb{Z}.$$

Luego $\frac{\langle H'_\alpha, H'_\beta\rangle}{\langle H'_\alpha, H'_\alpha\rangle} \in \mathbb{Q}$. Así notamos que es suficiente mostrar que $\langle H'_\alpha, H'_\alpha\rangle \in \mathbb{Q}$. Por definición de la forma de Killing tenemos que

$$\langle H'_\alpha, H'_\alpha\rangle = \operatorname{tr}(\operatorname{ad} H'_\alpha \operatorname{ad} H'_\alpha) = \sum_{\beta\in\Delta}(\beta(H'_\alpha))^2 = \sum_{\beta\in\Delta}\langle H'_\alpha, H'_\beta\rangle^2.$$

De esto se sigue que

$$\frac{1}{\langle H'_\alpha, H'_\alpha\rangle} = \sum_{\beta\in\Delta}\left(\frac{\langle H'_\alpha, H'_\beta\rangle}{\langle H'_\alpha, H'_\alpha\rangle}\right)^2 \in \mathbb{Q}.$$

Por lo tanto $\langle H'_\alpha, H'_\beta\rangle \in \mathbb{Q}$. □

4. Sistemas de raíces y el grupo de Weyl

De la proposición 2.31 sabemos que $\{H'_\alpha \mid \alpha \in \Delta\}$ es un conjunto de generadores para $\mathfrak{t}$. Sea $\{H'_{\alpha_1}, \ldots, H'_{\alpha_l}\}$ una base para $\mathfrak{t}$ con $\alpha_j \in \Delta$, $1 \leq j \leq l$.

Proposición 2.39. *Sea $\alpha \in \Delta$. Entonces $H'_\alpha = \sum_{i=1}^{l} \mu_i H'_{\alpha_i}$, con $\mu_i \in \mathbb{Q}$.*

Demostración. Por ser $\{H'_{\alpha_i}\}$ una base para $\mathfrak{t}$ sabemos que existen $\mu_i \in \mathbb{C}$ únicos tales que $H'_\alpha = \sum_{i=1}^{l} \mu_i H'_{\alpha_i}$. Sea $\xi_{ij} = \langle H'_{\alpha_i}, H'_{\alpha_j}\rangle$. De la proposición 2.38 se tiene que $\xi_{ij} \in \mathbb{Q}$. Consideramos el sistema de ecuaciones

$$\begin{pmatrix} \xi_{11} & \xi_{12} & \cdots & \xi_{1l} \\ \xi_{21} & \xi_{22} & \cdots & \xi_{2l} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \xi_{l1} & \xi_{l2} & \cdots & \xi_{ll} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle H'_\alpha, H'_{\alpha_1}\rangle \\ \langle H'_\alpha, H'_{\alpha_2}\rangle \\ \vdots \\ \langle H'_\alpha, H'_{\alpha_l}\rangle \end{pmatrix}$$

Este es un sistema de l ecuaciones en l incógnitas $\mu_1, \ldots, \mu_l$. Del hecho de que la restricción de la forma de Killing a $\mathfrak{t}$ es no degenerada se sigue que $\det(\xi_{ij}) \neq 0$. De este modo concluimos que el sistema dado tiene solución única y del hecho de que $\langle H'_\alpha, H'_{\alpha_i}\rangle \in \mathbb{Q}$ y $\xi_{ij} \in \mathbb{Q}$ deducimos que $\mu_1, \ldots, \mu_l \in \mathbb{Q}$, esto porque la solución al sistema está dada por la regla de Cramer. $\square$

Denotamos por $\mathfrak{t}_\mathbb{Q}$ al conjunto de elementos de la forma $\sum_{i=1}^{l} \mu_i H'_{\alpha_i}$ con $\mu_i \in \mathbb{Q}$ y de manera análoga definimos $\mathfrak{t}_\mathbb{R}$. La proposición anterior demuestra que tanto $\mathfrak{t}_\mathbb{Q}$ como $\mathfrak{t}_\mathbb{R}$ son independientes de la elección de la base H'_{α_i}. Más aún, la restricción de la forma de Killing de $\mathfrak{g}$ a $\mathfrak{t}_\mathbb{R}$ es una aplicación $\mathfrak{t}_\mathbb{R} \times \mathfrak{t}_\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ que es simétrica bilineal y definida positiva. El espacio vectorial $\mathfrak{t}_\mathbb{R}$ dotado con esta forma definida positiva es un espacio euclidiano. Dicho espacio contiene a los vectores H'_α con $\alpha \in \Delta$.

Recordemos que del lema 2.30 obtenemos un isomorfismo entre $\mathfrak{t}$ y $\mathfrak{t}^*$ dado por $H^*(X) = \langle H, X\rangle$. Definimos $\mathfrak{t}^*_\mathbb{R}$ como la imagen de $\mathfrak{t}_\mathbb{R}$ bajo este isomorfismo. $\mathfrak{t}^*_\mathbb{R}$ es el subespacio real de $\mathfrak{t}^*$ generado por Δ. Observamos que podemos definir una forma bilineal simétrica y definida positiva en $\mathfrak{t}^*_\mathbb{R}$ por

$$\langle H_1^*, H_2^*\rangle = \langle H_1, H_2\rangle \in \mathbb{R}.$$

De este modo $\mathfrak{t}^*_\mathbb{R}$ es un espacio euclidiano que contiene al conjunto de raíces. Ahora investigaremos la configuración formada por las raíces en este espacio, que para simplificar la notación denotaremos por V.

Un *orden total* en V es una relación $<$ en V que satisface los siguientes axiomas

i) $\lambda < \mu$ y $\mu < \nu$ implican que $\lambda < \nu$.
ii) Para cada par de elementos $\lambda, \mu \in V$ solo una de las siguientes condiciones se cumple: $\lambda < \mu$, $\lambda = \mu$ ó $\mu < \lambda$.
iii) Si $\lambda < \mu$ entonces $\lambda + \nu < \mu + \nu$ para todo $\nu \in V$.
iv) Si $\lambda < \mu$ y $\xi \in \mathbb{R}$ con $\xi > 0$ entonces $\xi\lambda < \xi\mu$ y si $\xi < 0$, $\xi\mu < \xi\lambda$.

Notamos que a todo espacio vectorial real finito podemos asignarle un orden total. En efecto, si $v_1, \ldots, v_l$ es una base de V y $\lambda = \sum \lambda_i v_i$, $\mu = \sum \mu_i v_i$ con $\lambda \neq \mu$ entonces podemos definir $\lambda < \mu$ si el primer coeficiente $\mu_i - \lambda_i$ que no es cero es de hecho positivo. Es fácil ver que esto define un orden total en V.

Un *sistema positivo* $\Delta^+ \subset \Delta$ es el conjunto de las raíces $\alpha \in \Delta$ que satisfacen $0 < \alpha$ para algún orden total en V. Dado tal sistema positivo Δ^+ definimos el *sistema fundamental* $\Pi \subset \Delta^+$ como sigue: $\alpha \in \Pi$ si y solo si $\alpha \in \Delta^+$ y α no puede ser expresado como la suma de dos elementos de Δ^+. Denotamos por Δ^- al conjunto de raíces negativas.

Proposición 2.40. *Toda raíz positiva es la suma de raíces en* Π.

Demostración. Sea $\alpha \in \Delta^+$. Entonces se tiene que $\alpha \in \Pi$ o bien, $\alpha = \beta+\gamma$, con $\beta, \gamma \in \Delta^+$ y $\beta, \gamma < \alpha$. Continuando este proceso obtenemos el resultado. Nótese que dicho proceso debe terminar debido a que Δ^+ es un conjunto finito. □

Proposición 2.41. *Sean $\alpha, \beta \in \Pi$ con $\alpha \neq \beta$. Entonces $\langle \alpha, \beta \rangle \leq 0$.*

Demostración. Observamos que el hecho de que α, β sean raíces fundamentales implica que $\beta - \alpha \notin \Delta$ pues en otro caso tendríamos que $\beta - \alpha \in \Delta^+$ o bien $\alpha - \beta \in \Delta^+$. Si $\beta - \alpha \in \Delta^+$ entonces $\beta = (\beta - \alpha) + \alpha$ lo cual es una contradicción con el hecho de que $\beta \in \Pi$. De manera análoga vemos que no es posible que $\alpha - \beta$ sea una raíz positiva, por tanto $-\alpha + \beta \notin \Delta$. Consideremos ahora la α-cadena de raíces que pasan por β. Del hecho de que $-\alpha + \beta \notin \Delta$ se sigue que dicha cadena tiene la forma

$$\beta, \alpha + \beta, \dots, q\alpha + \beta.$$

De la proposición 2.36 deducimos que

$$2\frac{\langle H'_\alpha, H'_\beta \rangle}{\langle H'_\alpha, H'_\alpha \rangle} = -q.$$

Sin embargo sabemos que $\langle H'_\alpha, H'_\alpha \rangle > 0$, lo que implica que $\langle H'_\alpha, H'_\beta \rangle \leq 0$, es decir, $\langle \alpha, \beta \rangle \leq 0$. □

A continuación mostramos un resultado que muestra la importancia de los sistemas fundamentales de raíces.

Teorema 2.42. *Un sistema fundamental Π es una base para $V = \mathfrak{t}^*_{\mathbb{R}}$.*

Demostración. Mostramos primero que Π genera V. Para esto, sabemos de la proposición 2.31 que Δ genera V. Dado que $\alpha \in \Delta$ si y solo si $-\alpha \in \Delta$ vemos que Δ^+ genera V y de la proposición 2.40 deducimos que Π genera V.

Ahora mostraremos que Π es un conjunto linealmente independiente. Supongamos lo contrario, en este caso existe una combinación lineal no trivial de los $\alpha_i \in \Pi$ que es cero. En dicha combinación separamos los coeficientes positivos de los negativos de lo cual obtenemos

$$\mu_{i_1}\alpha_{i_1} + \cdots + \mu_{i_r}\alpha_{i_r} = \mu_{j_1}\alpha_{j_1} + \cdots + \mu_{j_s}\alpha_{j_s}$$

donde $\mu_{i_1}, \dots, \mu_{i_r}, \mu_{j_1}, \dots, \mu_{j_s} > 0$ y $\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_r}, \alpha_{j_1}, \dots, \alpha_{j_s}$ son elementos distintos de Π. Sea

$$v = \mu_{i_1}\alpha_{i_1} + \cdots + \mu_{i_r}\alpha_{i_r} = \mu_{j_1}\alpha_{j_1} + \cdots + \mu_{j_s}\alpha_{j_s}.$$

Entonces tenemos que $\langle v, v \rangle = \langle \mu_{i_1}\alpha_{i_1} + \cdots + \mu_{i_r}\alpha_{i_r}, \mu_{j_1}\alpha_{j_1} + \cdots + \mu_{j_s}\alpha_{j_s} \rangle$. De la proposición 2.41 se tiene que $\langle v, v \rangle \leq 0$. Dado que sabemos que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es definida positiva obtenemos que $v = 0$. Sin embargo $0 < v$ dado que $0 < \alpha_i$ para todo $\alpha_i \in \Pi$ y $\mu_i > 0$. Luego $v = 0$ es una contradicción con el hecho de que $0 < v$ por lo tanto se obtiene que Π es un conjunto linealmente independiente. □

En particular observamos que $\#(\Pi) = l = \dim \mathfrak{t}$. Es decir, el número de raíces en un sistema fundamental es el rango del álgebra de Lie $\mathfrak{g}$.

Corolario 2.43. *Sea Π un sistema fundamental de raíces. Entonces toda $\alpha \in \Delta$ tiene una expresión de la forma $\alpha = \sum n_i\alpha_i$ con $\alpha_i \in \Pi$, $n_i \in \mathbb{Z}$ y tales que o $n_i \geq 0$ para todo i o bien $n_i \leq 0$ para todo i.*

Anteriormente hemos notado que dentro del conjunto de raíces un conjunto de raíces positivas puede ser elegido de diversas maneras. Sin embargo, mostraremos que cualesquiera dos conjuntos de raíces positivas puden ser transformados el uno en el otro por un elemento de un cierto grupo $\mathcal{W}$ que actúa en Δ.

Dado $\alpha \in \Delta$ definimos una aplicación lineal $s_\alpha : V \longrightarrow V$ por

$$s_\alpha(x) = x - 2\frac{\langle \alpha, x\rangle}{\langle \alpha, \alpha\rangle}\alpha.$$

Donde $V = \mathfrak{t}_{\mathbb{R}}^*$. Es claro que esta aplicación satisface

$$\begin{aligned} s_\alpha(\alpha) &= -\alpha \\ s_\alpha(x) &= x \qquad \text{si } \langle \alpha, x\rangle = 0. \end{aligned}$$

Ahora, existe una única aplicación lineal que satisface las propiedades antes mencionadas, a saber, la reflexión sobre el hiperplano de V ortogonal a α. De este modo, s_α es tal reflexión.

Definimos el grupo $\mathcal{W} = \langle s_\alpha | \ \alpha \in \Delta\rangle$, $\mathcal{W}$ es llamado el *grupo de Weyl*. Notamos que el grupo de Weyl es un grupo de isometrías de V, es decir,

$$\langle wx, wy\rangle = \langle x, y\rangle \quad \text{para } x, y \in V,\ w \in \mathcal{W}$$

Proposición 2.44. *$\mathcal{W}$ permuta las raíces, es decir, para $\alpha \in \Delta$ y $w \in \mathcal{W}$, $w(\alpha) \in \Delta$.*

Demostración. De la definición de $\mathcal{W}$ vemos que es suficiente con mostrar que $s_\alpha(\beta) \in \Delta$ para todo $\alpha, \beta \in \Delta$. Si $\beta = \alpha$ ó $\beta = -\alpha$ el resultado es evidente. Supongamos que $\beta \neq \pm\alpha$. Consideremos la α-cadena de raíces que pasan por β

$$-p\alpha + \beta, \ldots, \beta, \ldots, q\alpha + \beta.$$

Entonces, de la proposición 2.36 obtenemos que

$$s_\alpha(\beta) = \beta - 2\frac{\langle \alpha, \beta\rangle}{\langle \alpha, \alpha\rangle}\alpha = \beta - (p - q)\alpha.$$

Ahora, $\beta - (p - q)\alpha$ es una de las raíces de la α-cadena que pasa por β, luego $s_\alpha(\beta) \in \Delta$.
De hecho, observamos que s_α invierte la α-cadena de raíces. En particular se tiene

$$s_\alpha(q\alpha + \beta) = -p\alpha + \beta, \quad s_\alpha(-p\alpha + \beta) = q\alpha + \beta.$$

□

Proposición 2.45. *El grupo de Weyl $\mathcal{W}$ es finito.*

Demostración. De la proposición anterior sabemos que $\mathcal{W}$ permuta las raíces y se sabe también que Δ es un conjunto finito. Ahora, si dos elementos de $\mathcal{W}$ inducen la misma permutación de Δ tales elementos deben ser iguales ya que Δ genera V. Dado que hay solo un número finito de permutaciones de Δ se sigue que $\mathcal{W}$ debe ser finito. □

Sea como antes Δ^+ un sistema de raíces positivas en Δ y Π su correspondiente sistema fundamental.

Lema 2.46. *Sea $\alpha \in \Pi$. Si $\beta \in \Delta^+$ y $\beta \neq \alpha$ entonces se tiene $s_\alpha(\beta) \in \Delta^+$.*

Demostración. Por el corolario 2.43 podemos expresar a β en términos de las raíces fundamentales de la forma

$$\beta = \sum_i n_i \alpha_i \quad n_i \in \mathbb{Z} \quad n_i \geq 0.$$

Dado que $\beta \neq \alpha$, existe $n_i \neq 0$ con $\alpha_i \neq \alpha$. Consideremos

$$s_\alpha(\beta) = \beta - 2\frac{\langle \alpha, \beta\rangle}{\langle \alpha, \alpha\rangle}\alpha.$$

Se tiene entonces que

$$\begin{aligned} s_\alpha(\beta) &= \sum_j n_j \left(\alpha_j - 2\frac{\langle \alpha, \alpha_j\rangle}{\langle \alpha, \alpha\rangle}\alpha\right) \\ &= \left(n_0 - 2\sum_j n_j \frac{\langle \alpha, \alpha_j\rangle}{\langle \alpha, \alpha\rangle}\right)\alpha + \sum_{j\neq 0} n_j \alpha_j. \end{aligned}$$

De aquí obtenemos que el coeficiente de α_i sigue siendo n_i y dado que $n_i > 0$ concluimos, por el corolario 2.43, que $s_\alpha(\beta) \in \Delta^+$. $\square$

Teorema 2.47. *Sean Δ_1^+, Δ_2^+ dos sistemas de raíces positivas en Δ. Entonces existe $w \in \mathcal{W}$ tal que $w(\Delta_1^+) = \Delta_2^+$.*

Demostración. Sea $m = \#(\Delta_1^+ \cap \Delta_2^-)$. Utilizaremos inducción en m. Si $m = 0$ no es difícil mostrar que $\Delta_1^+ = \Delta_2^+$ (pues $\Delta_i^+ \cup \Delta_i^- = \Delta$) y entonces $w = e$ satisface el enunciado del teorema. De este modo podemos asumir que $m > 0$.

Sea Π_1 el sistema fundamental en Δ_1^+. Observamos que $\Pi_1 \nsubseteq \Delta_2^+$ pues de lo contrario obtendríamos que $\Delta_1^+ \subset \Delta_2^+$, lo cual es una contradicción con el hecho de que $m > 0$, luego, existe $\alpha \in \Pi_1 \cap \Delta_2^-$.

Consideramos $s_\alpha(\Delta_1^+)$. De la definición de s_α es fácil verificar que s_α es inyectiva y que $s_\alpha(\Delta_1^+) = (\Delta_1^+ \setminus \{\alpha\}) \cup \{-\alpha\}$, lo anterior se debe al lema 2.46. De este modo obtenemos que

$$\#(s_\alpha(\Delta_1^+) \cap \Delta_2^-) = m - 1.$$

Por hipótesis de inducción existe $w' \in \mathcal{W}$ tal que $w' s_\alpha(\Delta_1^+) = \Delta_2^+$. Definimos $w = w' s_\alpha$, luego, $w(\Delta_1^+) = \Delta_2^+$. $\square$

Corolario 2.48. *Sean Π_1, Π_2 dos sistemas fundamentales en Δ. Entonces existe $w \in \mathcal{W}$ tal que $w(\Pi_1) = \Pi_2$.*

Demostración. Sean Δ_1^+, Δ_2^+ dos sistemas de raíces positivas que contienen a Π_1 y a Π_2, respectivamente. Sea $w \in \mathcal{W}$ tal que $w(\Delta_1^+) = \Delta_2^+$. Entonces $w(\Pi_1)$ es un sistema fundamental contenido en Δ_2^+, por lo tanto $w(\Pi_1) = \Pi_2$. $\square$

Proposición 2.49. *Sea Π un sistema fundamental en Δ. Entonces para cada $\alpha \in \Delta$ existe $\alpha_i \in \Pi$ y $w \in \mathcal{W}$ tales que $\alpha = w(\alpha_i)$.*

Demostración. Sea Δ^+ el sistema de raíces positivas con sistema fundamental Π. Supongamos primero que $\alpha \in \Delta^+$. Entonces se tiene que

$$\alpha = \sum_j n_j \alpha_j \quad \alpha_j \in \Pi, \quad n_j \in \mathbb{N}_0$$

por corolario 2.43. Definimos la *altura* de α por

$$\operatorname{ht}\alpha = \sum_j n_j.$$

Utilizaremos inducción en $\operatorname{ht}\alpha$. Si $\operatorname{ht}\alpha = 1$ entonces $\alpha = \alpha_i$ para algún i y luego $\alpha \in \Pi$. En este caso el resultado se sigue inmediatamente. Supongamos que $\operatorname{ht}\alpha > 1$. Entonces se tiene que $n_i > 0$ para al menos dos valores distintos de i, esto por la proposición 2.35. Ahora,

$$\langle \alpha, \alpha \rangle = \sum_j n_j \langle \alpha, \alpha_j \rangle.$$

Dado que $\langle \alpha, \alpha \rangle > 0$ y $n_j \geq 0$ para todo j, existe $\alpha_i \in \Pi$ con $\langle \alpha, \alpha_i \rangle > 0$. Sea $s_{\alpha_i}(\alpha) = \beta$. Entonces $\beta \in \Delta$ y

$$\begin{aligned} \beta &= \alpha - 2\frac{\langle \alpha_i, \alpha \rangle}{\langle \alpha_i, \alpha_i \rangle}\alpha_i \\ &= \left(n_i - 2\frac{\langle \alpha_i, \alpha \rangle}{\langle \alpha_i, \alpha_i \rangle} \right)\alpha_i + \sum_{j \neq i} n_j \alpha_j. \end{aligned}$$

Dado que $\langle \alpha_i, \alpha \rangle > 0$ se sigue que $\operatorname{ht}\beta < \operatorname{ht}\alpha$. Por otro lado $\beta \in \Delta^+$ dado que solo el coeficiente n_i es modificado cuando cambiamos de α a β, de este modo al menos uno de los coeficientes de β sigue siendo positivo lo cual, por el corolario 2.43, es suficiente para mostrar que $\beta \in \Delta^+$. Por hipótesis de inducción, existe $\alpha_j \in \Pi$ y $w' \in \mathcal{W}$ tal que $\beta = w'(\alpha_j)$. Entonces

$$\alpha = s_{\alpha_i}(\beta) = s_{\alpha_i} w'(\alpha_j).$$

Ahora, supongamos que $\alpha \in \Delta^-$. Entonces $\alpha = s_\alpha(-\alpha)$ y $-\alpha \in \Delta^+$. Por lo anterior, existen $w' \in \mathcal{W}$ y $\alpha_i \in \Pi$ tales que $-\alpha = w'(\alpha_i)$. Por lo tanto $\alpha = s_\alpha w'(\alpha_i)$. $\square$

De la proposición anterior obtenemos que toda raíz es la imagen de alguna raíz fundamental bajo algún elemento del grupo de Weyl.

A continuación mostramos que $\mathcal{W}$ es de hecho generado por las reflexiones correspondientes a raíces fundamentales.

Teorema 2.50. *Sea $\Pi = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\}$ un sistema fundamental en Δ, entonces $\mathcal{W} = \langle s_{\alpha_j} | \ j = 1, \ldots, l \rangle$.*

Demostración. Sea $\mathcal{W}_0$ el subgrupo de $\mathcal{W}$ generado por $s_{\alpha_1}, \ldots, s_{\alpha_l}$. Dado que las reflexiones s_α con $\alpha \in \Delta$ generan $\mathcal{W}$ es suficiente con mostrar que $s_\alpha \in \mathcal{W}_0$ para todo $\alpha \in \Delta$. Notamos que podemos asumir que $\alpha \in \Delta^+$ dado que $s_\alpha = s_{-\alpha}$. Ahora, de la demostración de la proposición 2.49 tenemos que $\alpha = w(\alpha_i)$ para algún $\alpha_i \in \Pi$ y algún $w \in \mathcal{W}_0$. Consideremos $w s_{\alpha_i} w^{-1} \in \mathcal{W}_0$. Se tiene que

$$w s_{\alpha_i} w^{-1}(\alpha) = w s_{\alpha_i}(\alpha_i) = w(-\alpha_i) = -\alpha.$$

Ahora, sea $x \in V$ tal que $\langle \alpha, x \rangle = 0$, esto implica que $\langle w^{-1}(\alpha), w^{-1}(x) \rangle = 0$, es decir, $\langle \alpha_i, w^{-1}(x) \rangle = 0$, por lo tanto, $w s_{\alpha_i} w^{-1}(x) = x$. De esto concluimos que $w s_{\alpha_i} w^{-1}$ es la reflexión en el hiperplano ortogonal a α, es decir, $w s_{\alpha_i} w^{-1} = s_\alpha$. Esto muestra que $s_\alpha \in \mathcal{W}_0$. Luego, $\mathcal{W}_0 = \mathcal{W}$. $\square$

5. Matriz de Cartan y diagramas de Dynkin

A continuación investigaremos la geometría del sistema de raíces Δ en $V = \mathfrak{t}^*_{\mathbb{R}}$.

Consideramos en primer lugar los posibles ángulos entre pares de raíces α, β y las longitudes relativas de α y β. Los ángulos que consideraremos serán aquellos que estén en el intervalo $[0, \pi]$.

Proposición 2.51. *Sean $\alpha, \beta \in \Delta$ tales que $\beta \neq \pm\alpha$. Entonces se satisface que:*

i) *el ángulo entre α y β pertenece al conjunto $\{\pi/6, \pi/4, \pi/3, \pi/2, 2\pi/3, 3\pi/4, 5\pi/6\}$,*

ii) *si el ángulo entre α y β es o $\pi/3$ ó $2\pi/3$ entonces α y β tienen la misma longitud,*

iii) *si el ángulo entre α y β es o $\pi/4$ ó $3\pi/4$ entonces el radio de sus longitudes es $\sqrt{2}$;*

iv) *si el ángulo entre α y β es o $\pi/6$ ó $5\pi/6$ entonces el radio de sus longitudes es $\sqrt{3}$.*

Demostración. Sea θ el ángulo entre α y β. Entonces se tiene que

$$\langle \alpha, \beta \rangle = |\alpha||\beta| \cos\theta$$

donde $|\alpha| = \sqrt{\langle \alpha, \alpha \rangle}$. Por lo tanto

$$\cos^2\theta = \frac{\langle \alpha, \beta \rangle^2}{\langle \alpha, \alpha \rangle \langle \beta, \beta \rangle} = \frac{\langle \alpha, \beta \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle} \cdot \frac{\langle \alpha, \beta \rangle}{\langle \beta, \beta \rangle}$$

luego

$$4\cos^2\theta = 2\frac{\langle \alpha, \beta \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle} \cdot 2\frac{\langle \alpha, \beta \rangle}{\langle \beta, \beta \rangle}.$$

Ahora, de la proposición 2.36 sabemos que $2\frac{\langle \alpha,\beta \rangle}{\langle \alpha,\alpha \rangle}$ y $2\frac{\langle \alpha,\beta \rangle}{\langle \beta,\beta \rangle}$ son enteros. Por tanto $4\cos^2\theta \in \mathbb{Z}$. Dado que $0 \leq 4\cos^2\theta \leq 4$ y $\beta \neq \pm\alpha$, obtenemos que $4\cos^4\theta \in \{0, 1, 2, 3\}$. Consideramos ahora las posibles factorizaciones de $4\cos^2\theta$ como el producto de dos enteros.

Supongamos que $4\cos^2\theta = 0$. Entonces $\theta = \pi/2$.

Ahora, si $4\cos^2\theta = 1$. Entonces $\cos\theta = 1/2$ o bien $\cos\theta = -1/2$, luego $\theta = \pi/3$ ó $2\pi/3$. Las posibles factorizaciones de $4\cos^2\theta$ son

$$1 = 1 \cdot 1 \quad \text{ó} \quad 1 = -1 \cdot -1.$$

En cualquieras de los dos casos obtenemos que

$$2\frac{\langle \alpha, \beta \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle} = 2\frac{\langle \alpha, \beta \rangle}{\langle \beta, \beta \rangle}$$

lo que implica que $\langle \alpha, \alpha \rangle = \langle \beta, \beta \rangle$, es decir, α y β tienen la misma longitud.

Ahora supongamos que $4\cos^2\theta = 2$. Entonces $\cos\theta = 1/\sqrt{2}$ ó $\cos\theta = -1/\sqrt{2}$, es decir, $\theta = \pi/4$ ó $\theta = 3\pi/4$. Las posibles factorizaciones de $4\cos^2\theta$ son

$$2 = 1 \cdot 2 \quad \text{ó} \quad 2 = -1 \cdot -2.$$

En cualquier caso, eligiendo a α, β en un orden adecuado, obtenemos que

$$2\frac{\langle \alpha, \beta \rangle}{\langle \beta, \beta \rangle} = 2 \cdot 2\frac{\langle \alpha, \beta \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle},$$

es decir, $\langle\alpha,\alpha\rangle = 2\langle\beta,\beta\rangle$ y $|\alpha| = \sqrt{2}|\beta|$.
Por último supongamos $4\cos^2\theta = 3$. Entonces $\cos\theta = \sqrt{3}/2$ ó $-\sqrt{3}/2$, luego, $\theta = \pi/6$ ó $\theta = 5\pi/6$. Las posibles factorizaciones de $4\cos^2\theta$ son

$$3 = 1 \cdot 3 \quad \text{ó} \quad 3 = -1 \cdot -3.$$

En cualquier caso, eligiendo a α, β en el orden adecuado, obtenemos que

$$2\frac{\langle\alpha,\beta\rangle}{\langle\beta,\beta\rangle} = 3 \cdot 2\frac{\langle\alpha,\beta\rangle}{\langle\alpha,\alpha\rangle},$$

es decir, $\langle\alpha,\alpha\rangle = 3\langle\beta,\beta\rangle$ y $|\alpha| = \sqrt{3}|\beta|$. □

Corolario 2.52. *Sea Π un sistema de raíces fundamental y sean $\alpha, \beta \in \Pi$ con $\beta \neq \alpha$. Entonces el ángulo entre α y β pertenece al conjunto $\{\pi/2, 2\pi/3, 3\pi/4, 5\pi/6\}$.*

Demostración. Esto se sigue de la proposición anterior junto con la proposición 2.41 en donde mostramos el hecho de que el ángulo entre raíces fundamentales satisface que $\pi/2 \leq \theta \leq \pi$. □

Sea $\Pi = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\}$ un sistema fundamental. Concentramos la información de las ángulos entre los α_i y sus longitudes relativas en una matriz. Definimos A_{ij} por

$$A_{ij} = 2\frac{\langle\alpha_i,\alpha_j\rangle}{\langle\alpha_i,\alpha_i\rangle} \qquad i,j = 1,\ldots,l.$$

De la proposición 2.36 se tiene que $A_{ij} \in \mathbb{Z}$. La matriz de $l \times l$ $A = (A_{ij})$ es llamada la *matriz de Cartan de* $\mathfrak{g}$.

Proposición 2.53. *La matriz de Cartan A satisface las siguientes propiedades.*

i) $A_{ii} = 2$ *para todo* i.
ii) $A_{ij} \in \{0, -1, -2, -3\}$ *para* $i \neq j$.
iii) *Si* $A_{ij} = -2$ *ó* $A_{ij} = -3$ *entonces* $A_{ji} = -1$.
iv) $A_{ij} = 0$ *si y solo si* $A_{ji} = 0$.

Demostración. Las propiedades i), iv) se siguen inmediatamente y las propiedades ii), iii) se siguen del corolario anterior y de la demostración de la proposición 2.51. □

Nótese que si enumaramos las raíces fundamentales en Π de manera distinta es posible que obtengamos otra matriz de Cartan, sin embargo veremos que, salvo esta ambigüedad, la matriz de Cartan de A está únicamente determinada por el álgebra de Lie semisimple $\mathfrak{g}$.

Proposición 2.54. *La matriz de Cartan de $\mathfrak{g}$ depende solo del orden en el que enumaramos las raíces fundamentales. Es independiente de la elección de la subálgebra de Cartan $\mathfrak{t}$ y del sistema fundamental Π.*

Demostración. La independencia de la elección de la subálgebra de Cartan se sigue del hecho de que estas son todas conjugadas.

Sea Π' otro sistema fundamental. Por el corolario 2.48 existe $w \in \mathcal{W}$ tal que $w(\Pi) = \Pi'$. Sea $w(\alpha_i) = \alpha_i'$. Dado que w es una isometría de V se tiene que

$$2\frac{\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle}{\langle \alpha_i, \alpha_i \rangle} = 2\frac{\langle \alpha_i', \alpha_j' \rangle}{\langle \alpha_i', \alpha_i' \rangle}.$$

De este modo las matrices de Cartan definidas por Π y Π' con respecto a estas enumeraciones son iguales. $\square$

Con base en los resultados obtenidos observamos que la única matriz de Cartan de 1×1 es (2). Notamos también que las únicas matrices de Cartan de 2×2 son las siguientes:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Con el objetivo de determinar las posibles matrices de Cartan de $l \times l$ para valores más grandes de l resulta útil la introducción de un grafo llamado el *diagrama de Dynkin.* Este diagrama está determinado por la matriz de Cartan. Es un grafo de l vértices y si $i \neq j$ los vértices i, j están unidos por n_{ij} aristas, donde

$$n_{ij} = A_{ij}A_{ji}.$$

De la proposición 2.54 obtenemos que el diagrama de Dynkin está únicamente determinado por el álgebra de Lie semisimple $\mathfrak{g}$.

Los diagramas de Dynkin de las matrices de Cartan de grados 1 y 2 están dados como sigue.

(2)

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

De la definición de n_{ij} y de la proposición 2.53 se sigue que $n_{ij} \in \{0, 1, 2, 3\}$ para $i \neq j$. Luego, el número de aristas que une a dos puntos distintos del diagrama de Dynkin es 0, 1, 2 ó 3.

Hacemos notar que a pesar de que los diagramas de Dynkin pueden ser muy generales, resulta ser que para el caso de álgebras de Lie semisimples están considerablemente restringidos. Con el objetivo de determinar los posibles diagramas de Dynkin resulta útil introducir una forma cuadrática $Q(x_1, \ldots, x_l)$ definida en términos del diagrama de Dynkin. Definimos

$$Q(x_1, \ldots, x_l) = 2\sum_{i=1}^{l} x_i^2 - \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{l} \sqrt{n_{ij}} x_i x_j.$$

Proposición 2.55. *La forma cuadrática $Q(x_1, \ldots, x_l)$ es definida positiva.*

Demostración. Para $i \neq j$ tenemos, por definición,

$$n_{ij} = A_{ij} A_{ji} = 2\frac{\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle}{\langle \alpha_i, \alpha_i \rangle} \cdot 2\frac{\langle \alpha_j, \alpha_i \rangle}{\langle \alpha_j, \alpha_j \rangle},$$

por lo tanto $-\sqrt{n_{ij}} = 2\frac{\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle}{|\alpha_i||\alpha_j|}$ dado que $\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle \leq 0$. De este modo la forma cuadrática Q se puede escribir como

$$\begin{aligned} Q(x_1, \ldots, x_l) &= \sum_{i,j=1}^{l} \frac{2\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle}{|\alpha_i||\alpha_j|} x_i x_j = 2\left\langle \sum_{i=1}^{l} \frac{x_i \alpha_i}{|\alpha_i|}, \sum_{j=1}^{l} \frac{x_j \alpha_j}{|\alpha_j|} \right\rangle \\ &= 2\langle y, y \rangle \quad \text{donde } y = \sum_{i=1}^{l} \frac{x_i \alpha_i}{|\alpha_i|}. \end{aligned}$$

Así obtenemos que $Q(x_1, \ldots, x_l) \geq 0$. Más aún, si $Q(x_1, \ldots, x_l) = 0$ entonces $y = 0$. El hecho de que $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\}$ es un conjunto linealmente independiente implica que $x_i = 0$ para todo i. De esta forma obtenemos que Q es definida positiva. □

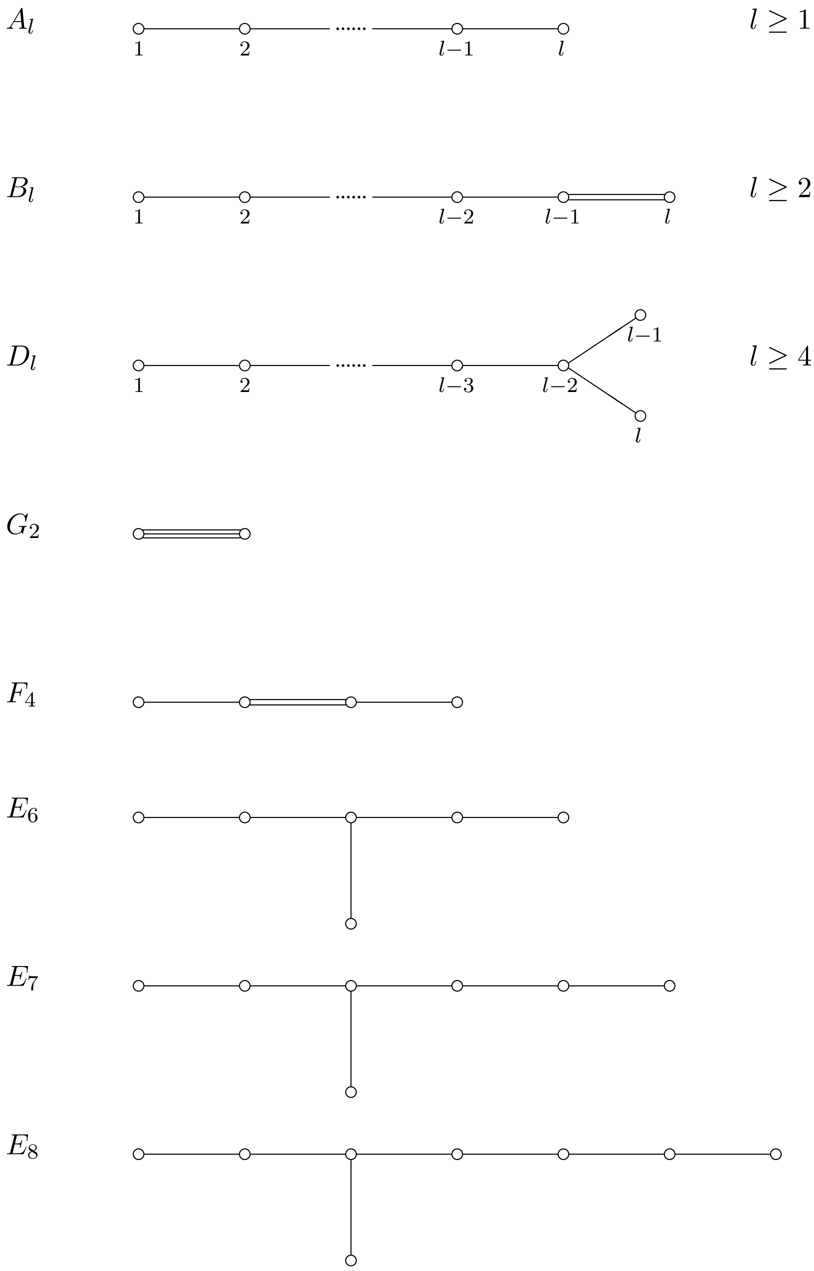
En resumen, las componentes conexas del diagrama de Dynkin de un álgebra de Lie semisimple satisfacen las siguientes condiciones:

A) Cualquier par de vértices distintos está unido por 0,1,2 ó 3 aristas.

B) La forma cuadrática $Q(x_1, \ldots, x_l)$ es definida positiva.

El resultado principal de este estudio de diagramas de Dynkin es el siguiente teorema de clasificación.

Teorema 2.56. *Los grafos que satisfacen las condiciones* A) *y* B) *son solo los pertenecientes a la siguiente lista.*



Corolario 2.57. *Las componentes conexas del diagrama de Dynkin de un álgebra de Lie semisimple solo pueden ser algunos de los siguientes grafos*

$$A_l, \quad l \geq 1;\ B_l, \quad l \geq 2;\ D_l, \quad l \geq 4;\ E_6;\ E_7;\ E_8;\ F_4;\ G_2.$$

La razón por la cual se tienen las restricciones en el rango en los diagramas A_l, B_l, D_l es solo para evitar repeticiones.

Ahora, aunque el diagrama de Dynkin está determinado por la matriz de Cartan no siempre es el caso que la matriz de Cartan esté determinada por el diagrama de Dynkin. Se sabe que $n_{ij} \in \{0, 1, 2, 3\}$ para todo $i \neq j$, de este modo podemos saber hasta que punto están determinados los A_{ij}. Si $n_{ij} = 0$ entonces se tiene que $A_{ij} = 0 = A_{ji}$. Si $n_{ij} = 1$ se tiene que $A_{ij} = -1 = A_{ji}$ pues $A_{ij}, A_{ji} \in \mathbb{Z}$ con $A_{ij}, A_{ji} \leq 0$. Sin embargo, si $n_{ij} = 2$ se tienen dos posibilidades para la factorización $n_{ij} = A_{ij}A_{ji}$, ya sea $A_{ij} = -1, A_{ji} = -2$ ó $A_{ij} = -2, A_{ji} = -1$. Similarmente para el caso $n_{ij} = 3$.

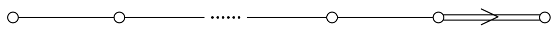
En los grafos conexos del corolario 2.57 los únicos que dan lugar a tal ambigüedad son B_l para $l \geq 2$; F_4 y G_2. En estos grafos colocaremos una flecha sobre las aristas dobles o triples. La dirección de la flecha será determinada como sigue. La flecha apunta del vértice i al vértice j si y solo si $|\alpha_i| > |\alpha_j|$, es decir, $|A_{ji}| > |A_{ij}|$.

De este modo el conjunto de diagramas de Dynkin conexos posibles se muestra a continuación.

A_l

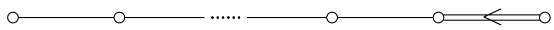
$l \geq 1$

B_l



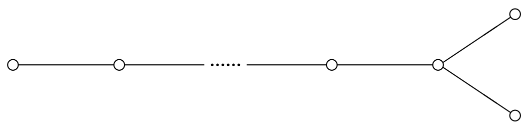
$l \geq 2$

C_l



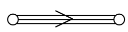
$l \geq 3$

D_l

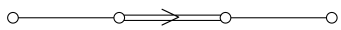


$l \geq 4$

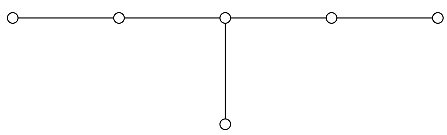
G_2



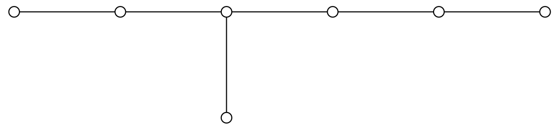
F_4



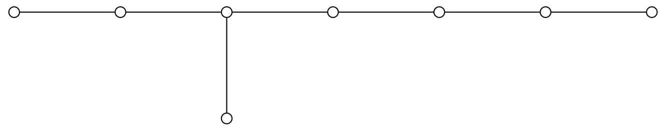
E_6



E_7



E_8



Ahora introducimos algunas ideas y conceptos adicionales que serán necesarios para el desarrollo posterior de este trabajo.

Como es usual, sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie semisimple, $\mathfrak{t}$ una subálgebra de Cartan y

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{t} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Delta} \mathfrak{g}_\alpha$$

la descomposición de Cartan de $\mathfrak{g}$ con respecto a $\mathfrak{t}$. Recordemos que $\dim \mathfrak{g}_\alpha = 1$ para $\alpha \in \Delta$. Sea E_α un elemento no cero de $\mathfrak{g}_\alpha$ y sea Π un sistema fundamental de raíces en Δ. Entonces los elementos H'_{α_i} para $\alpha_i \in \Pi$ forman una base para $\mathfrak{t}$. Definimos $H_i \in \mathfrak{t}$ como

$$H_i = \frac{2H'_{\alpha_i}}{\langle H'_{\alpha_i}, H'_{\alpha_i} \rangle}.$$

Se nota que $\alpha_i(H_i) = 2$. Entonces $\{H_i,\ i = 1, \dots, l; E_\alpha,\ \alpha \in \Delta\}$ es una base de $\mathfrak{t}$. De la proposición 2.32 se tiene que $H'_\alpha \in [\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}]$ para $\alpha \in \Delta$. De este modo, una vez elegidos los E_α para $\alpha \in \Delta^+$ podemos elegir a $E_{-\alpha}$ de forma única para $\alpha \in \Delta^+$ tal que

$$[E_\alpha, E_{-\alpha}] = \frac{2H'_\alpha}{\langle H'_\alpha, H'_\alpha \rangle}.$$

Definimos $H_\alpha \in \mathfrak{t}$ para cada $\alpha \in \Delta$ como

$$H_\alpha = \frac{2H'_\alpha}{\langle H'_\alpha, H'_\alpha \rangle}.$$

El elemento H_α es llamado la *coraíz* correspondiente a la raíz α.

Definición 2.58. Sea $\omega_i \in \mathfrak{t}^*$ el elemento que satisface que $\omega_i(H_j) = \delta_{ij}$. Los elementos $\omega_1, \dots, \omega_l \in \mathfrak{t}^*$ son llamados los *pesos fundamentales*.

Se sigue del hecho de que $\{H_1, \dots, H_l\} \subset \mathfrak{t}$ es un conjunto linealmente independiente que $\{\omega_1, \dots, \omega_l\} \subset \mathfrak{t}^*$ es también un conjunto linealmente independiente. Luego $\{\omega_1, \dots, \omega_l\}$ es una base para $\mathfrak{t}^*$. Definimos

$$\Lambda = \{n_1\omega_1 + \cdots + n_l\omega_l |\ n_1, \dots, n_l \in \mathbb{Z}\}.$$

Se tiene que Λ es un subgrupo abeliano libre de rango l de $\mathfrak{t}^*$ con base el conjunto de pesos fundamentales. A Λ se le conoce como el *látiz de pesos enteros*, o solo como el *látiz de pesos*. De la definición de Λ se tiene que $\lambda \in \mathfrak{t}^*$ está en Λ si y solo si $\lambda(H_i) \in \mathbb{Z}$ para $i = 1, \dots, l$. Sea $\Lambda^+ = \{n_1\omega_1 + \cdots + n_l\omega_l |\ n_1, \dots, n_l \in \mathbb{N}_0\}$. Λ^+ es llamado el conjunto de *pesos enteros dominantes*. De manera análoga se tiene que $\lambda \in \mathfrak{t}^*$ está en Λ^+ si y solo si $\lambda(H_i) \in \mathbb{N}_0$ para $i = 1, \dots, l$.

Estudiamos ahora la conexión existente entre los pesos fundamentales $\omega_1, \ldots, \omega_l$ y las raíces fundamentales $\alpha_1, \ldots, \alpha_l$.

Proposición 2.59. *Se tiene que* $\alpha_i = \sum_j A_{ji}\omega_j$ *para* $i = 1, \ldots, l$. *Luego la matriz que expresa a las raíces fundamentales como combinación lineal de los pesos fundamentales es la transpuesta de la matriz de Cartan.*

Demostración. Dado que $\omega_1, \ldots, \omega_l$ es una base para $\mathfrak{t}^*$ existen constantes únicas $c_{ij} \in \mathbb{C}$ tales que

$$\alpha_i = \sum_k c_{ik}\omega_k.$$

Entonces se tiene que

$$\alpha_i(H_j) = c_{ij}.$$

Por lo tanto

$$c_{ij} = \alpha_i(H_j) = \alpha_i\left(\frac{2H'_{\alpha_j}}{\langle H'_{\alpha_j}, H'_{\alpha_j}\rangle}\right) = \left\langle H'_{\alpha_i}, \frac{2H'_{\alpha_j}}{\langle H'_{\alpha_j}, H'_{\alpha_j}\rangle}\right\rangle = 2\frac{\langle H'_{\alpha_i}, H'_{\alpha_j}\rangle}{\langle H'_{\alpha_j}, H'_{\alpha_j}\rangle} = A_{ji}$$

De este modo obtenemos que $\alpha_i = \sum_j A_{ji}\omega_j$. □

De la proposición anterior obtenemos que las raíces fundamentales son combinaciones lineales enteras de los pesos fundamentales, es decir, están en el Látiz de pesos Λ. Sin embargo, notamos que en general no es verdad que los pesos fundamentales sean combinaciones lineales enteras de las raíces fundamentales. Se tiene que

$$\omega_i = \sum_j (A^{-1})_{ji}\alpha_j.$$

Por ejemplo, cuando $\mathfrak{g}$ es de tipo A_1 se tiene que

$$\alpha_1 = 2\omega_1, \quad \omega_1 = \frac{1}{2}\alpha_1.$$

Cuando $\mathfrak{g}$ es de tipo A_2 se tiene que

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= 2\omega_1 - \omega_2\\ \alpha_2 &= -\omega_1 + 2\omega_2\end{aligned}$$

luego,

$$\begin{aligned}\omega_1 &= \frac{2}{3}\alpha_1 + \frac{1}{3}\alpha_2\\ \omega_2 &= \frac{1}{3}\alpha_1 + \frac{2}{3}\alpha_2.\end{aligned}$$

Se tiene de hecho que el comportamiento anterior se cumple en general.

Proposición 2.60. i) $\langle \omega_i, \omega_j\rangle \geq 0$ *para todo* i, j.

ii) ω_i *es una combinación lineal con coeficientes racionales no negativos de* $\alpha_1, \ldots, \alpha_l$.

iii) *Los coeficientes de la matriz inversa de la matriz de Cartan son números racionales no negativos.*

6. Álgebras de Lie simples

Una vez que hemos obtenido la clasificación de las álgebras de Lie simples complejas de dimensión finita daremos una descripción precisa de tales álgebras, en particular, daremos sus dimensiones y una descripción de sus sistemas de raíces.

Una forma de obtener dicha información es como sigue. Dada una matriz de Cartan A de la forma estándar dada por uno de los diagramas que aparecen en la clasificación de diagramas de Dynkin describiremos un producto escalar simétrico $\{\cdot,\cdot\}$ en un espacio vectorial real V de dimensión l con base $\{\alpha_1,\dots,\alpha_l\}$ tal que

$$2\frac{\{\alpha_i,\alpha_j\}}{\{\alpha_i,\alpha_i\}} = A_{ij} \qquad i,j=1,\dots,l.$$

Comparamos este producto escalar con la forma de Killing obtenida cuando consideramos a $\{\alpha_1,\dots,\alpha_l\}$ como un sistema fundamental de raíces en el álgebra de Lie simple con matriz de Cartan A. Afirmamos que existe una constante $\kappa\in\mathbb{R}$ tal que

$$\langle\alpha_i,\alpha_j\rangle = \kappa\{\alpha_i,\alpha_j\} \qquad \text{para todo } i,j.$$

De hecho podemos definir κ mediante la ecuación

$$\langle\alpha_1,\alpha_1\rangle = \kappa\{\alpha_1,\alpha_1\}.$$

De la propiedad que cumple la base $\{\alpha_1,\dots,\alpha_l\}$ se obtiene que

$$2\frac{\langle\alpha_i,\alpha_j\rangle}{\langle\alpha_i,\alpha_i\rangle} = 2\frac{\{\alpha_i,\alpha_j\}}{\{\alpha_i,\alpha_i\}} \qquad \text{para todo } i,j$$

y del hecho que ambos productos escalares son simétricos es fácil ver que

$$\frac{\langle\alpha_j,\alpha_j\rangle}{\langle\alpha_i,\alpha_i\rangle} = \frac{\{\alpha_j,\alpha_j\}}{\{\alpha_i,\alpha_i\}} \qquad \text{para todo } i,j.$$

En particular para $j=1$ se obtiene que

$$\langle\alpha_i,\alpha_i\rangle = \kappa\{\alpha_i,\alpha_i\} \qquad \text{para todo } i$$

y por lo tanto obtenemos que

$$\langle\alpha_i,\alpha_j\rangle = \kappa\{\alpha_i,\alpha_j\} \qquad \text{para todo } i,j.$$

De este modo se obtiene que $\{\cdot,\cdot\}$ es la forma de Killing salvo la multiplicación por la constante κ.

Consideramos después las reflexiones fundamentales $s_i : V \longrightarrow V$ definidas por

$$s_i(\alpha_j) = \alpha_j - A_{ij}\alpha_i.$$

Las aplicaciones $s_1,\dots,s_l$ generan el grupo de Weyl $\mathcal{W}$ de transformaciones de V. De este modo se obtiene que

$$\Delta = \{w(\alpha_i)|\ w\in\mathcal{W}, i=1,\dots,l\}.$$

Finalmente la dimensión del álgebra de Lie simple $\mathfrak{g}$ la calculamos mediante la fórmula

$$\dim\mathfrak{g} = l + \#(\Delta).$$

En este trabajo nos limitamos a la exposición final de los sistemas de raíces y las correspondientes dimensiones. Una aplicación detallada del método descrito anteriormente puede ser encontrada en [**C**].

1) **Álgebras del tipo** A_l. Sea $\tilde{V}$ un espacio vectorial real con base $\{\beta_1, \dots, \beta_{l+1}\}$ y sea $\{\cdot, \cdot\}$ el producto escalar simétrico en $\tilde{V}$ definido por
$$\{\beta_i, \beta_j\} = \delta_{ij} \quad i, j = 1, \dots, l+1.$$
Definimos $\alpha_1, \dots, \alpha_l$ por
$$\alpha_1 = \beta_1 - \beta_2,\ \alpha_2 = \beta_2 - \beta_3,\ \dots,\ \alpha_l = \beta_l - \beta_{l+1}.$$
Se tiene que $\{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}$ es un conjunto linealmente independiente y definimos a V como $V = \mathrm{gen}_{\mathbb{R}}\{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}$. Aplicando el método descrito anteriormente obtenemos que
$$\Delta = \{\beta_i - \beta_j |\ i \neq j, i, j = 1, \dots, l+1\}.$$
De este modo se obtiene que $\#(\Delta) = l(l+1)$ y por tanto se tiene que $\dim \mathfrak{g} = l(l+2)$.
2) **Álgebras del tipo** D_l. Sea V un espacio vectorial real con base $\{\beta_1, \dots, \beta_l\}$. Sea $\{\cdot, \cdot\}$ el producto escalar simétrico dado por $\{\beta_i, \beta_j\} = \delta_{ij}$. Definimos $\alpha_1, \dots, \alpha_l \in V$ por
$$\alpha_1 = \beta_1 - \beta_2,\ \alpha_2 = \beta_2 - \beta_3,\ \dots,\ \alpha_{l-1} = \beta_{l-1} - \beta_l,\ \alpha_l = \beta_{l-1} + \beta_l.$$
Se obtiene entonces que
$$\Delta = \{\pm\beta_i \pm \beta_j |\ i \neq j, i, j = 1, \dots, l\}.$$
Luego se tiene que $\#(\Delta) = 2l(l-1)$ y así concluimos que $\dim \mathfrak{g} = l(2l-1)$.
3) **Álgebras del tipo** B_l. Sea V un espacio vectorial real dado de la misma forma que en el inciso anterior. Definimos $\alpha_1, \dots, \alpha_l \in V$ por
$$\alpha_1 = \beta_1 - \beta_2,\ \alpha_2 = \beta_2 - \beta_3,\ \dots,\ \alpha_{l-1} = \beta_{l-1} - \beta_l,\ \alpha_l = \beta_l.$$
Nuevamente, aplicando el método descrito anteriormente, se obtiene que
$$\Delta = \{\pm\beta_i \pm \beta_j, \pm\beta_i |\ i \neq j, i, j = 1, \dots, l\}.$$
Luego, $\#(\Delta) = 2l^2$ y así se obtiene que $\dim \mathfrak{g} = l(2l+1)$.
4) **Álgebras del tipo** C_l. Sea V dado un espacio vectorial real dado como en el inciso anterior. Definimos en este caso $\alpha_1, \dots, \alpha_l \in V$ por
$$\alpha_1 = \beta_1 - \beta_2,\ \alpha_2 = \beta_2 - \beta_3,\ \dots,\ \alpha_{l-1} = \beta_{l-1} - \beta_l,\ \alpha_l = 2\beta_l.$$
Se obtiene entonces que
$$\Delta = \{\pm\beta_i \pm \beta_j, \pm 2\beta_i |\ i \neq j, i, j = 1, \dots, l\}.$$
Luego, $\dim \mathfrak{g} = l + 2l^2 = l(2l+1)$.
5) **Álgebras del tipo** G_2. De la forma del diagrama de Dynkin sabemos que la correspondiente matriz de Cartan es
$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}.$$
Sea $\{\alpha_1, \alpha_2\}$ el sistema fundamental de raíces de tipo G_2. Entonces se tiene que
$$s_1(\alpha_1) = -\alpha_1, \qquad s_2(\alpha_1) = \alpha_1 + 3\alpha_2$$
$$s_1(\alpha_2) = \alpha_1 + \alpha_2, \qquad s_2(\alpha_2) = -\alpha_2.$$

Se tiene entonces que $\mathcal{W} = \langle s_1, s_2 \rangle$. De este modo se obtiene que

$$\begin{aligned}\Delta &= \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_1+\alpha_2, \alpha_1+2\alpha_2, \alpha_1+3\alpha_2, 2\alpha_1+3\alpha_2, -\alpha_1\\ &\quad -\alpha_2, -\alpha_1-\alpha_2, -\alpha_1-2\alpha_2, -\alpha_1-3\alpha_2, -2\alpha_1-3\alpha_2\}.\end{aligned}$$

Así obtenemos que $\#(\Delta) = 12$ y por lo tanto, $\dim \mathfrak{g} = 14$.

6) **Álgebras del tipo** F_4. Del diagrama de Dynkin de tipo F_4 se obtiene que la matriz de Cartan está dada por

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Sea V un espacio vectorial de dimensión 4 y $\{\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4\}$ una base de V. Sea $\{\cdot, \cdot\}$ el producto escalar en V dado por $\{\beta_i, \beta_j\} = \delta_{ij}$. Definimos $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in V$ por

$$\alpha_1 = \beta_1 - \beta_2,\ \alpha_2 = \beta_2 - \beta_3,\ \alpha_3 = \beta_3,\ \alpha_4 = \frac{1}{2}(-\beta_1 - \beta_2 - \beta_3 + \beta_4).$$

De este modo se obtiene que

$$\Delta = \left\{ \pm\beta_i, 1 \le i \le 4; \pm\beta_i \pm \beta_j, i \ne j, 1 \le i, j \le 4; \frac{1}{2}(\pm\beta_1 \pm \beta_2 \pm \beta_3 \pm \beta_4) \right\}.$$

Así obtenemos que $\#(\Delta) = 48$ y por lo tanto, $\dim \mathfrak{g} = 52$.

7) **Álgebras del tipo** E_8. Sea V un espacio vectorial real de dimensión 8 con base $\{\beta_1, \ldots, \beta_8\}$. Sea $\{\cdot, \cdot\}$ el producto escalar en V dado como antes. Definimos $\alpha_1, \ldots, \alpha_8 \in V$ por

$$\begin{aligned}\alpha_i &= \beta_i - \beta_{i+1} \quad 1 \le i \le 6\\ \alpha_7 &= \beta_6 + \beta_7\\ \alpha_8 &= -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{8} \beta_i.\end{aligned}$$

Se obtiene entonces que

$$\Delta = \left\{ \pm\beta_i \pm \beta_j,\ 1 \le i, j \le 8,\ i \ne j;\ \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{8} \varepsilon_i \beta_i,\ \varepsilon_i = \pm 1,\ \prod_{i=1}^{8} \varepsilon_i = 1 \right\}.$$

De este modo se tiene que $\#(\Delta) = 240$ y por lo tanto, $\dim \mathfrak{g} = 248$.

8) **Álgebras del tipo** E_7. De la forma del diagrama de Dynkin se observa que $\alpha_2, \ldots, \alpha_8$ forman un sistema fundamental de raíces del tipo E_7. Se obtiene finalmente que

$$\Delta = \left\{ \pm\beta_i \pm \beta_j,\ 2 \le i, j \le 7,\ i \ne j;\ \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{8} \varepsilon_i \beta_i,\ \varepsilon_i = \pm 1,\ \prod_{i=1}^{8} \varepsilon_i = 1,\ \varepsilon_1 = \varepsilon_8 \right\}.$$

De este modo se tiene que $\#(\Delta) = 126$ y por lo tanto $\dim \mathfrak{g} = 133$.

9) **Álgebras del tipo** E_6. Se observa que, de la forma del diagrama de Dynkin, $\alpha_3, \dots, \alpha_8$ dados como antes forman un sistema fundamental de raíces del tipo E_6. Se obtiene finalmente que

$$\Delta = \left\{ \pm\beta_i \pm \beta_j, 3 \le i, j \le 7, i \ne j;\ \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{8} \varepsilon_i\beta_i, \varepsilon_i = \pm 1,\ \prod_{i=1}^{8} \varepsilon_i = 1,\ \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_8 \right\}.$$

De este modo se obtiene que $\#(\Delta) = 72$ y así, $\dim \mathfrak{g} = 78$.

Una consecuencia inmediata de lo anterior es la siguiente

Proposición 2.61. *En las álgebras de Lie simples del tipo* A_l, D_l, E_6, E_7, E_8 *todas las raíces tienen la misma longitud. En las álgebras de Lie del tipo* B_l, C_l, F_4, G_2 *existen dos posibles longitudes para las raíces. Estas son llamadas las* raíces largas *y las* raíces cortas.

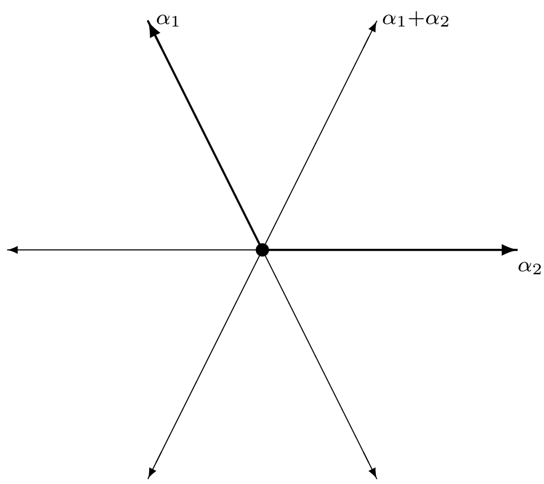
De los resultados obtenidos anteriormente notamos que, para cualesquiera dos raíces de un álgebra de Lie simple $\mathfrak{g}$, α, β, $|2\frac{\langle\alpha,\beta\rangle}{\langle\beta,\beta\rangle}| \le 3$ y $|2\frac{\langle\alpha,\beta\rangle}{\langle\beta,\beta\rangle}| = 3$ si y solo si $\mathfrak{g}$ contiene a $\mathfrak{g}_2$ como sumando directo. En cualquier otro caso se tiene que

(2.1) $$\alpha + 3\beta \notin \Delta.$$

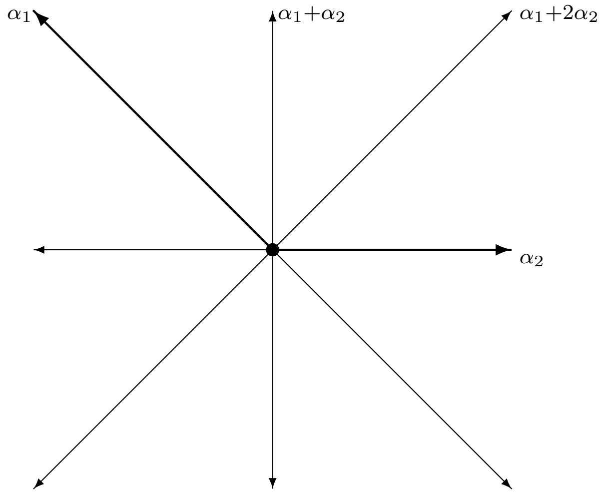
(2.2) $\left|2\frac{\langle\beta,\alpha\rangle}{\langle\alpha,\alpha\rangle}\right| \le 2$; si α es una raiz larga entonces la igualdad se cumple si y solo si $\beta = \pm\alpha$.

(2.3) Si α es una raiz larga entonces $2\alpha + \beta \in \Delta$ si y solo si $\beta = -\alpha$.

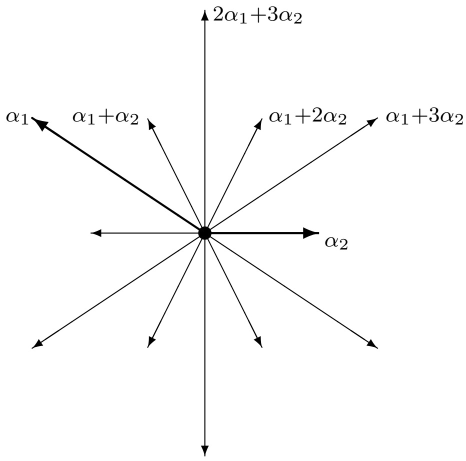
Finalizamos visualizando los sistemas de tipo A_2, B_2 y G_2.



Sistema de raíces de tipo A_2



Sistema de raíces de tipo B_2



Sistema de raíces de tipo G_2

7. Pesos de representaciones de álgebras de Lie semisimples

En el teorema 2.16 se da la descomposición en espacios de peso de un $\mathfrak{g}$-módulo con $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie nilpotente, sin embargo en esta sección sustituiremos la condición de nilpotencia por la condición de que $\mathfrak{g}$ es semisimple compleja y obtendremos una teoría de espacios de pesos que es consistente con la teoría discutida previamente.

Definición 2.62. Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie semisimple compleja, $\mathfrak{t} \subset \mathfrak{g}$ una subálgebra de Cartan y sea V un $\mathfrak{g}$-módulo (donde la operación la denotamos por $\cdot$), entonces para $\lambda \in \mathfrak{t}^*$ definimos el *espacio de peso* V_λ por

$$V_\lambda = \{v \in V \mid H \cdot v = \lambda(H)v \text{ para todo } H \in \mathfrak{t}\}.$$

A la dimensión m_λ de V_λ se le llama la *multiplicidad* de λ (como peso del $\mathfrak{g}$-módulo V).

A los $\lambda \in \mathfrak{t}^*$ tales que $V_\lambda \neq \{0\}$ se les llaman los *pesos de* V. Denotamos al conjunto de pesos por Φ. Se nota que en analogía al teorema 2.16 se tiene la descomposición

$$V = \bigoplus_{\lambda\in\Phi} V_\lambda.$$

Hacemos notar que esta definición es compatible con la descomposición de Cartan de un álgebra de Lie semisimple dada anteriormente ya que no es difícil demostrar que, para $\mathfrak{g}$ semisimple,

$$\mathfrak{g}_\alpha = \{X \in \mathfrak{g} |\ [H, X] = \alpha(H)X \text{ para todo } H \in \mathfrak{t}\}.$$

Lema 2.63. *Sea $\alpha \in \Delta$, $E_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha \backslash \{0\}$,$\lambda \in \Phi$ y $v \in V_\lambda \backslash \{0\}$. Si $E_\alpha v \neq 0$ entonces se tiene que $E_\alpha v \in V_{\lambda+\alpha}$.*

Demostración. Dado que V es un $\mathfrak{g}$-módulo se tiene que, para todo $H \in \mathfrak{t}$, $[H, E_\alpha]\cdot = H \cdot (E_\alpha\cdot) - E_\alpha \cdot (H\cdot)$ y dado que $E_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$ se tiene que, para todo $H \in \mathfrak{t}$, $[H, E_\alpha] = \alpha(H)E_\alpha$, $HE_\alpha v = E_\alpha Hv + [H, E_\alpha]v = (\lambda + \alpha)(H)E_\alpha v$. □

A continuación enunciamos algunas propiedades básicas de los pesos del $\mathfrak{g}$-módulo V dado como antes, cuyas demostraciones pueden ser encontradas, por ejemplo, en [**Sa**].

Teorema 2.64. a) *El conjunto Φ es finito;*

b) *para $\lambda \in \Phi$ y $\alpha \in \Delta$ se tiene que $\lambda(H_\alpha) \in \mathbb{Z}$;*

c) *para $\lambda \in \Phi$, $s_\alpha(\lambda) = \lambda - \lambda(H_\alpha)\alpha \in \Phi$. De hecho, para $\varepsilon = \operatorname{sgn}(\lambda(H_\alpha))$, $\lambda, \lambda - \varepsilon\alpha, \lambda - 2\varepsilon\alpha, \dots, \lambda - \lambda(H_\alpha)\alpha \in \Phi$, para todo $\alpha \in \Delta$;*

d) *las multiplicidades son invariantes bajo el grupo de Weyl, es decir, se tiene que $m_\lambda = m_{w(\lambda)}$ para todo $\lambda \in \Phi$ y para todo $w \in \mathcal{W}$.*

Definición 2.65. Un peso λ del $\mathfrak{g}$-módulo V es *extremo* si $\lambda + \alpha \notin \Phi$ para $\alpha \in \Delta^+$.

Nótese que la definición anterior depende del orden dado a $\mathfrak{t}^*_\mathbb{R}$. Notamos también que los pesos extremos existen: lo que hacemos es tomar un peso de norma máxima (con respecto a la forma de Killing) y lo llevamos, mediante un elemento del grupo de Weyl a la *cámara de Weyl fundamental (cerrada)*[2] (lo cual implica que $\langle\lambda, \alpha\rangle \geq 0$ para $\alpha \in \Delta^+$ y de este modo se obtiene que $|\lambda + \alpha| > |\lambda|$, lo cual implica que $\lambda + \alpha \notin \Phi$). De manera análoga un vector de peso v es llamado *extremo* si, para toda $\alpha \in \Delta^+$ y $E_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$, $E_\alpha \cdot v = 0$. Una consecuencia importante del lema 2.63 es el hecho de que para $\lambda \in \Phi$ extremo y $v \in V_\lambda$, v es un vector de peso extremo.

Finalizaremos este breve estudio sobre espacios de pesos enunciando algunas propiedades importantes sobre los pesos extremos de representaciones cuya demostración puede ser encontrada en [**Z**].

[2]Para $\Pi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}$ un sistema fundamental de raíces y $\langle\cdot,\cdot\rangle$ la forma de Killing, la *cámara de Weyl fundamental* está dada por

$$C_\Pi = \{\lambda \in \mathfrak{t}^*_\mathbb{R} |\ \langle\lambda, \alpha_i\rangle > 0,\ \text{para } 1 \leq i \leq l\}.$$

Teorema 2.66. *Sea V un $\mathfrak{g}$-módulo irreducible, entonces existe exactamente un peso extremo λ; es dominante (es decir, $\lambda \in \Lambda^+$), maximal en el orden dado a $\mathfrak{t}_{\mathbb{R}}^*$, de norma máxima y de multiplicidad 1. Más aún, todos los pesos son de la forma $\lambda - \sum_i n_i\alpha_i$ con $n_i \in \mathbb{N}_0$ para todo i.*

En el caso de un $\mathfrak{g}$-módulo irreducible al peso extremo se le conoce también como *el peso dominante de V*.

Teorema 2.67. *Sea V un $\mathfrak{g}$-módulo irreducible con peso extremo λ. Se tiene que $\mu \in \mathfrak{t}^*$ es un peso si y solo si:*

1) *μ está en la envoltura convexa del conjunto $\mathcal{W}\lambda := \{w(\lambda) | \; w \in \mathcal{W}\}$ y;*
2) *$\lambda - \mu \in \Lambda_\Pi := \{n_1\alpha_1 + \cdots + n_l\alpha_l | \; n_1, \ldots, n_l \in \mathbb{Z}\}$, donde $\Pi = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\}$ es un sistema fundamental de raíces.*

Se sabe que para V un $\mathfrak{g}$-módulo irreducible el conjunto de pesos es $\mathcal{W}$-invariante. Al conjunto $\mathcal{W}\lambda \subset \Phi$ se le conoce como el conjunto de *pesos extremales*. Dos pesos $\mu, \nu \in \Phi$ se dice que son de *signo opuesto* si, para todo $\alpha \in \Delta$, $\langle \mu, \alpha \rangle \langle \nu, \alpha \rangle \leq 0$. Se sabe que para cualquier peso extremal μ siempre existe un peso extremal ν de signo opuesto.

Capítulo 3

Álgebras de Berger irreducibles

1. Álgebras de Berger reales

En esta sección W denotará un espacio vectorial complejo de dimensión finita. Denotaremos a las álgebras de Lie de endomorfismos reales y complejos de W como $\mathrm{End}_{\mathbb{R}}(W)$ y $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(W)$, respectivamente.

Sea V un espacio vectorial real de dimensión finita y sea $\mathfrak{h} \subset \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V)$ una subálgebra de Lie real. Denotamos a sus complexificaciones por $V_{\mathbb{C}} := V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ y $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}} := \mathfrak{h} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$. De las definiciones es claro que $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}} \subset \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V_{\mathbb{C}})$. Ahora, no es difícil demostrar que $\Lambda^2 V_{\mathbb{C}}^* \otimes \mathfrak{h}_{\mathbb{C}} \cong \Lambda^2 V^* \otimes \mathfrak{h} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ y que $\Lambda^3 V_{\mathbb{C}}^* \otimes V_{\mathbb{C}} \cong \Lambda^3 V^* \otimes V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$. Luego se tiene que

$$0 \longrightarrow K(\mathfrak{h}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \longrightarrow \Lambda^2 V_{\mathbb{C}}^* \otimes \mathfrak{h}_{\mathbb{C}} \longrightarrow \Lambda^3 V_{\mathbb{C}}^* \otimes V_{\mathbb{C}}$$

es una sucesión exacta, más aún, esta es la sucesión exacta que define a $K(\mathfrak{h}_{\mathbb{C}})$, por lo tanto obtenemos que

$$K(\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}) = K(\mathfrak{h}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}.$$

De manera similar se obtiene que

$$K^1(\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}) = K^1(\mathfrak{h}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}.$$

Notamos que se tiene también que $\underline{\mathfrak{h}}_{\mathbb{C}} = \underline{\mathfrak{h}} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$. De este modo se tiene que $\mathfrak{h} \subset \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V)$ es un álgebra de Berger (simétrica o no simétrica) si y solo si $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}} \subset \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V_{\mathbb{C}})$ es un álgebra de Berger (simétrica o no simétrica).

Asumimos ahora que $\mathfrak{h} \subset \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V)$ es *irreducible*, es decir, que la inclusión ι es una representación irreducible. De aquí notamos dos casos posibles.

El primero es que $\mathfrak{h}$ es *absolutamente irreducible*, es decir, $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}} \subset \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V_{\mathbb{C}})$ es también irreducible, en este caso se tiene, por lo anterior, que $\mathfrak{h}$ es un álgebra de Berger si y solo si $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$ es un álgebra de Berger irreducible.

Ahora, supongamos que $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}} \subset \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V_{\mathbb{C}})$ no es irreducible. Consideramos el conjunto $\mathrm{Latt}_{\mathfrak{h}}(V) := \{U \subset V \mid U \text{ es subespacio de } V \text{ y } \mathfrak{h}(U) \subset U\}$. De la definición de $\mathrm{Latt}_{\mathfrak{h}}(V)$ se tiene que $\mathfrak{h} \subset \mathrm{End}(V)$ es irreducible si y solo si

$$\#\mathrm{Latt}_{\mathfrak{h}}(V) = 2.$$

Una pregunta natural es si existe alguna relación entre $\mathrm{Latt}_{\mathfrak{h}}(V)$ y $\mathrm{Latt}_{\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}}(V_{\mathbb{C}})$. La respuesta es afirmativa y para establecer tal relación mostraremos antes un par de resultados adicionales.

Previo al enunciado de dichos resultados definimos la aplicación $^{-}: V_{\mathbb{C}} \longrightarrow V_{\mathbb{C}}$ dada por

$$\lambda v := v \otimes \lambda \longmapsto \bar{\lambda} v.$$

Lema 3.1. *Sea $H \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V_{\mathbb{C}})$ tal que $H\bar{v} = \overline{Hv}$. Entonces existe un único $H' \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V)$ tal que la extensión de H' a $V_{\mathbb{C}}$, $(H')^{ext} : V_{\mathbb{C}} \longrightarrow V_{\mathbb{C}}$ dada por $(H')^{ext}(\lambda v) = \lambda H'v$ satisface que $(H')^{ext} = H$.*

Demostración. De la definición de $V_{\mathbb{C}}$ se nota que todo elemento v de $V_{\mathbb{C}}$ se puede escribir de forma única como $v_1 + iv_2$ con $v_1, v_2 \in V$. De esto obtenemos la identificación $V = \{v \in V_{\mathbb{C}} | \bar{v} = v\}$. Ahora, definimos $H' = H|_V$. Se tiene que $H'(V) \subset V$. En efecto, sea $v \in V$, entonces $H\bar{v} = \overline{Hv} = Hv$, luego, $Hv \in V$. Del hecho de que H es un endomorfismo se sigue que $H' \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V)$. Ahora, por definición, $(H')^{ext}(v_1 + iv_2) = H'v_1 + iH'v_2 = Hv_1 + iHv_2 = H(v_1 + iv_2)$, luego, $(H')^{ext} = H$ y por construcción se tiene que H' es único. $\square$

Lema 3.2. *Sea $A_{\mathbb{C}} \subset V_{\mathbb{C}}$ un subespacio complejo. Entonces existe un único subespacio $A \subset V$ tal que $A_{\mathbb{C}} = A \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$.*

Demostración. Sea $a \in A_{\mathbb{C}}$, luego, $\bar{a} \in A_{\mathbb{C}}$, de este modo, $a + \bar{a}, a - \bar{a} \in A_{\mathbb{C}}$. Ahora, definimos $A = \{v \in A_{\mathbb{C}} | \bar{v} = v\}$. Se tiene que $\overline{a + \bar{a}} = a + \bar{a}$, es decir, $a + \bar{a} \in A$ y de la misma forma se obtiene que $ia - i\bar{a} \in A$. No es difícil mostrar que $A \subset V$ es un subespacio. Sea $\psi : A \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \longrightarrow A_{\mathbb{C}}$ dada por $a \otimes \lambda \longmapsto \lambda a$. Se tiene que ψ es inyectiva y de la observación de que $a = \psi((\frac{1}{2}(a+\bar{a}) + \frac{1}{2}(a - \bar{a})) \otimes 1)$ se obtiene que ψ es sobreyectiva. Luego, $A \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = A_{\mathbb{C}}$. De las propiedades de la complexificación se obtiene que A es único. $\square$

Enunciamos ahora la relación que existe entre $\mathrm{Latt}_{\mathfrak{h}}(V)$ y $\mathrm{Latt}_{\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}}(V_{\mathbb{C}})$.

Lema 3.3. *Se tiene que, con la notación dada previamente,*

$$\mathrm{Latt}_{\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}}(V_{\mathbb{C}}) = \{(A, B, J) |\ A \subset B,\ A, B \in \mathrm{Latt}_{\mathfrak{h}}(V);\ J \in \mathrm{End}_{\mathfrak{h}}(B/A) \text{ tal que } J^2 = -\mathrm{Id}\},$$

donde $\mathrm{End}_{\mathfrak{h}}(B/A) = \{H \in \mathrm{End}(B/A) |\ \mathfrak{h}(H) = H(\mathfrak{h})\}$.

Demostración. Sea $U \in \mathrm{Latt}_{\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}}(V_{\mathbb{C}}) =: L$. Se tiene que $\overline{U}$ es también un subespacio de $V_{\mathbb{C}}$, de hecho, $\overline{U} \in \mathrm{Latt}_{\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}}(V_{\mathbb{C}})$ pues para $Z \in \mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$ se tiene que $Z(\overline{U}) = \overline{Z(U)}$ y de este modo se obtiene que $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}(\overline{U}) = \overline{\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}(U)} \subset \overline{U}$. Consideramos ahora los subespacios $U + \overline{U}, U \cap \overline{U} \subset V_{\mathbb{C}}$, se verifica fácilmente que

$$\overline{U + \overline{U}} \subset U + \overline{U}$$

y que

$$\overline{U \cap \overline{U}} \subset U \cap \overline{U}.$$

Entonces, por el lema 3.2 existen únicos subespacios $A_U \subset B_U \subset V$ tales que

$$U + \overline{U} = B_U \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C},$$

$$U \cap \overline{U} = A_U \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}.$$

Consideremos $B_U/A_U \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = (B_U \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C})/(A_U \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}) = (U + \overline{U})/(U \cap \overline{U})$ y definimos

$$J : B_U/A_U \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \longrightarrow B_U/A_U \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}, \quad x + y + U \cap \overline{U} \longmapsto ix - iy + U \cap \overline{U}$$

donde $x \in U, y \in \overline{U}$. Se tiene entonces que

$$\begin{aligned} J(\overline{x + y + U \cap \overline{U}}) &= J(\bar{x} + \bar{y} + U \cap \overline{U}) \\ &= (-i\bar{x} + i\bar{y} + U \cap \overline{U}) \\ &= \overline{ix - iy + U \cap \overline{U}} \\ &= \overline{J(x + y + U \cap \overline{U})}. \end{aligned}$$

De este modo obtenemos que

$$J\bar{v} = \overline{Jv} \quad \text{para todo } v \in B_U/A_U \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}.$$

Ahora, se tiene también que $U + \overline{U}, U \cap \overline{U} \in \mathrm{Latt}_{\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}}(V_{\mathbb{C}})$. De este modo obtenemos que

$$\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}(B_U \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}) = (\mathfrak{h} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C})(B_U \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}) = \mathfrak{h}(B_U) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \subset B_U \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C},$$

lo que implica que $\mathfrak{h}(B_U) \subset B_U$, es decir, $B_U \in \mathrm{Latt}_{\mathfrak{h}}(V)$. Análogamente se obtiene que $A_U \in \mathrm{Latt}_{\mathfrak{h}}(V)$.

Por otro lado, sea $H \in \mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$, luego se tiene que $JH = HJ$, entonces, $J\mathfrak{h}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{h}_{\mathbb{C}}J$ y ahora, el lema 3.1 implica que $J = (J|_{B_U/A_U})^{ext} = (J')^{ext}$, de este modo,

$$J(\mathfrak{h} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}) = J'\mathfrak{h} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = (\mathfrak{h} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C})J = \mathfrak{h}J' \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$$

y nuevamente, de las propiedades de las complexificaciones, se obtiene que

$$J'\mathfrak{h} = \mathfrak{h}J'.$$

Por lo tanto $J' \in \mathrm{End}_{\mathfrak{h}}(B_U/A_U)$. De la definición de J se tiene que $(J')^2 = -\mathrm{Id}$. De este modo definimos

$$\Psi : \mathrm{Latt}_{\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}}(V_{\mathbb{C}}) \longrightarrow L, \quad U \longmapsto (A_U, B_U, J_U),$$

donde $J_U = J$ que está definido como antes. El hecho de que Ψ es inyectiva se sigue de la observación de que $U = \{v \in B_U \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} | J_U(v + A_U \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}) = iv + A_U \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}\}$.

Ahora, sean $A \subset B \subset V$ con $A, B \in \mathrm{Latt}_{\mathfrak{h}}(V)$, $J \in \mathrm{End}_{\mathfrak{h}}(B/A)$ tal que $J^2 = -\mathrm{Id}$. Definimos

$$\Psi^{-1}(A, B, J) = \{v \in B \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} | J(v + A \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}) = iv + A \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}\}.$$

De la definición se sigue que $\Psi^{-1}(A, B, J)$ es un subespacio complejo de $V_{\mathbb{C}}$, de hecho se tiene que $\Psi^{-1}(A, B, J) \in \mathrm{Latt}_{\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}}(V_{\mathbb{C}})$. En efecto, consideremos $X \in \mathfrak{h}$ y $v \in \Psi^{-1}(A, B, J)$. Dado que $B \in \mathrm{Latt}_{\mathfrak{h}}(V)$ se sigue que $Xv \in B \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$, donde hemos denotado por X a la extensión de X a $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$. Recordemos que $(A, B, J) \in L$, luego

$$J(Xv + A \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}) = XJ(v + A \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}) = X(iv + A \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}) = i(Xv) + A \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C},$$

y así $Xv \in \Psi^{-1}(A,B,J)$. De este modo se tiene que

$$\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}(\Psi^{-1}(A,B,J)) \subset \Psi^{-1}(A,B,J).$$

Por lo tanto Ψ es una biyección. $\square$

Del hecho de que $\mathfrak{h}$ es irreducible junto con el lema anterior se obtiene que

$$\begin{aligned}&\mathrm{Latt}_{\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}}(V_{\mathbb{C}}) = \\ &\qquad \{(\{0\},\{0\},O),(V,V,O)\} \cup \{(\{0\},V,J) | J \in \mathrm{End}_{\mathfrak{h}}(V) \text{ tal que } J^2 = -\mathrm{Id}\},\end{aligned}$$

donde O es la aplicación lineal cero.
Dado que $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$ no es irreducible se tiene que

$$\{(\{0\},V,J) |\ J \in \mathrm{End}_{\mathfrak{h}}(V) \text{ tal que } J^2 = -\mathrm{Id}\} \neq \emptyset.$$

Por medio de J podemos considerar a V como un espacio vectorial complejo (con multiplicación escalar dada por $(x+iy)v := xv + yJ(v)$), esta observación junto con la propiedad de que J conmuta con los elementos de $\mathfrak{h}$ muestran que $\mathfrak{h} \subset \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$. Es claro que J se puede extender linealmente a $V_{\mathbb{C}}$ definiendo $J(v \otimes z) = J(v) \otimes z$. De aquí obtenemos que los eigenvalores de J son $\pm i$ con respectivos eigenespacios

$$W := (V_{\mathbb{C}})_i = \{v \otimes 1 - J(v) \otimes i |\ v \in V\},$$

$$\overline{W} := (V_{\mathbb{C}})_{-i} = \{v \otimes 1 + J(v) \otimes i |\ v \in V\}.$$

Por lo tanto se tiene que

$$V_{\mathbb{C}} = W \oplus \overline{W}.$$

Sea $\mathfrak{h}_1 := \{A \in \mathfrak{h} |\ JA \in \mathfrak{h}\}$. Es fácil probar que $[\mathfrak{h},\mathfrak{h}_1] \subset \mathfrak{h}_1$. Se tiene que J induce una estructura compleja en $\mathfrak{h}_1$ y como antes, $(\mathfrak{h}_1)_{\mathbb{C}}$ se puede escribir como como $(\mathfrak{h}_1)_{\mathbb{C}} = \mathfrak{h}_1^+ \oplus \mathfrak{h}_1^-$ donde

$$\mathfrak{h}_1^+ = \{A \otimes 1 - JA \otimes i |\ A \in \mathfrak{h}_1\}$$

y

$$\mathfrak{h}_1^- = \{A \otimes 1 + JA \otimes i |\ A \in \mathfrak{h}_1\}.$$

Sea $R \in K(\mathfrak{h}_{\mathbb{C}})$ y sean $w \in W$, $u, v \in \overline{W}$. De la primera identidad de Bianchi se tiene que $R(u,v)w + R(v,w)u + R(w,u)v = 0$, luego,

$$JR(u,v)w + JR(v,w)u + JR(w,u)v = 0.$$

De la propiedad de que J conmuta con los elementos de $\mathfrak{h}$ se obtiene que la extensión de J a $V_{\mathbb{C}}$ también conmuta con los elementos de $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$, así pues,

$$\begin{aligned}&JR(u,v)w + JR(v,w)u + JR(w,u)v = \\ &\qquad R(u,v)Jw + R(v,w)Ju + R(w,u)Jv = iR(u,v)w - iR(v,w)u - iR(w,u)v,\end{aligned}$$

donde la última igualdad se sigue del hecho de que $w \in W$, $u, v \in \overline{W}$.
Por lo tanto se tiene que $R(u,v)w - R(v,w)u - R(w,u)v = 0$, luego, sumando esto con la primera identidad de Bianchi se obtiene que $2R(u,v)w = 0$ para todo $u, v \in \overline{W}$, $w \in W$. Lo anterior implica que $R(u,v) \in \mathfrak{h}_1^-$. De manera análoga se obtiene que $R(u,v) \in \mathfrak{h}_1^+$ para todo $u, v \in W$.

De lo anterior y la identidad de Bianchi se obtiene que $R(u,\bar{v})\bar{w} = R(u,\bar{w})\bar{v}$ para todo $u \in W$, $\bar{v}, \bar{w} \in \overline{W}$. De este modo se tiene una aplicación

$$W \longrightarrow (\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}|_{\overline{W}})^{(1)}, u \longmapsto R(u,\cdot).$$

Si $(\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}|_{\overline{W}})^{(1)} = 0$ se tiene que $R(W,\overline{W}) = 0$, luego, $R(V_{\mathbb{C}}, V_{\mathbb{C}}) \subset \mathfrak{h}_1^+ \oplus \mathfrak{h}_1^-$ (pues hemos mostrado que $R(W,W) \subset \mathfrak{h}_1^+$ y $R(\overline{W},\overline{W}) \subset \mathfrak{h}_1^-$), es decir,

$$R(V_{\mathbb{C}}, V_{\mathbb{C}}) \subset (\mathfrak{h}_1)_{\mathbb{C}},$$

luego, $\underline{\mathfrak{h}}_{\mathbb{C}} \subset (\mathfrak{h}_1)_{\mathbb{C}}$. Por lo tanto vemos que si $\mathfrak{h}_1 \neq \mathfrak{h}$ entonces $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$ no es un álgebra de Berger. Es fácil demostrar que $\mathfrak{h}_1 = \mathfrak{h}$ es equivalente al hecho de que $J\mathfrak{h} = \mathfrak{h}$.

Definimos la aplicación $\imath : \mathfrak{h}_{\mathbb{C}} \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ por

$$\imath(A + iB) = A + JB. \tag{3.1}$$

Se tiene que $(\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}|_{\overline{W}})^{(1)} = 0$ si y solo si $(\imath(\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}))^{(1)} = 0$. De este modo obtenemos el siguiente resultado.

Proposición 3.4. *Sean V un espacio $\mathbb{R}$-vectorial finito y $\mathfrak{h} \subset \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V)$ una subálgebra irreducible real con complexificación $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}} \subset \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V_{\mathbb{C}})$.*

1) *Si $\mathfrak{h}$ es absolutamente irreducible, entonces $\mathfrak{h}$ es un álgebra de Berger si y solo si $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$ es un álgebra de Berger irreducible.*
2) *Si $\mathfrak{h}$ no es absolutamente irreducible y si la subálgebra $\imath(\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}) \subset \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ dada por (3.1) satisface que $(\imath(\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}))^{(1)} = 0$, entonces $\mathfrak{h}$ es un álgebra de Berger si y solo si $J\mathfrak{h} = \mathfrak{h}$ y $\mathfrak{h} \subset \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ es un álgebra de Berger irreducible compleja.*

En el presente trabajo nos concentraremos en el estudio de las álgebras de Berger complejas.

2. Ejemplos de álgebras de Berger

Sea (V, b) un espacio vectorial real o complejo con b una forma simétrica, bilineal y no degenerada en V. Sea $\mathfrak{so}(V)$ el álgebra de Lie de los automorfismos de V que preservan b, es decir,

$$\mathfrak{so}(V) = \{T \in \mathrm{End}(V) |\ b(Tx, y) + b(x, Ty) = 0 \text{ para todo } x, y \in V\}.$$

Definimos $\mathfrak{co}(V) = \mathrm{gen}(\mathrm{Id}_V, \mathfrak{so}(V))$.

Consideremos $\Lambda^2 V$ como el subespacio de ΛV generado por los elementos $x \wedge y$ con $x, y \in V$, donde

$$\Lambda V = \left(\bigoplus_{k \geq 0} V^{\otimes k} \right) \Big/ \langle x \otimes x |\ x \in V \rangle = \bigoplus_{k \geq 0} \Lambda^k V$$

es el álgebra exterior de V.

Notamos que de la propiedad universal que define al álgebra exterior, podemos extender a $b : V \times V \longrightarrow \mathbb{F}$ de manera única a una función bilineal, simétrica y no degenerada $b_{\Lambda^2} : \Lambda^2 V \times \Lambda^2 V \longrightarrow \mathbb{F}$ tal que

$$b_{\Lambda^2}(x \wedge y, z \wedge w) = b(x, z) b(y, w) - b(x, w) b(y, z).$$

De esto obtenemos la identificación de $\Lambda^2 V$ con $(\Lambda^2 V)^* \cong \Lambda^2 V^*$ dada por

$$\flat : \Lambda^2 V \longrightarrow (\Lambda^2 V)^*, \quad X \longmapsto (X^\flat : Y \longmapsto b_{\Lambda^2}(X, Y))$$

con aplicación inversa

$$\sharp : \Lambda^2 V^* \longrightarrow \Lambda^2 V$$

definida por la ecuación

$$b_{\Lambda^2}(\omega^\sharp, Y) = \omega(Y).$$

Lo anterior nos permite establecer el isomorfismo de álgebras de Lie

$$\mathfrak{so}(V) \cong \Lambda^2 V,$$

donde el corchete de Lie en $\Lambda^2 V$ está dado por

$$[x \wedge y, z \wedge w]_{\Lambda^2} = b(y, z)x \wedge w - b(y, w)x \wedge z - b(x, w)z \wedge y + b(x, z)w \wedge y.$$

Para esto, definimos

$$\jmath : \mathfrak{so}(V) \longrightarrow \Lambda^2 V^*, \quad F \longmapsto (\omega_F : (x, y) \longmapsto b(Fx, y))$$

Del hecho de que b es no degenerada se obtiene que $\jmath$ es inyectiva. Definimos

$$\psi : \mathfrak{so}(V) \longrightarrow \Lambda^2 V$$

dada por la ecuación $b_{\Lambda^2}(\psi(F), x \wedge y) = b(Fx, y)$ de la propiedad que define a $\sharp$ y del hecho de que b es no degenerada es fácil ver que

$$\psi = \sharp \circ \jmath,$$

de este modo obtenemos que ψ es inyectiva (pues $\jmath$ lo es y $\sharp$ es isomorfismo). Ahora, para ver que ψ es sobreyectiva, definimos

$$\varphi : \Lambda^2 V \longrightarrow \mathfrak{so}(V), \quad x \wedge y \longmapsto (x \wedge y := \varphi(x \wedge y) : z \longmapsto b(x, z)y - b(y, z)x).$$

Se obtiene entonces que $b_{\Lambda^2}(\psi(\varphi(x \wedge y)), z \wedge w) = b(\varphi(x \wedge y)z, w) = b_{\Lambda^2}(x \wedge y, z \wedge w)$, luego, $\psi(\varphi(x \wedge y)) = x \wedge y$. De este modo obtenemos que ψ es sobreyectiva y por lo tanto se sigue que es un isomorfismo. El hecho de que $[\psi(S), \psi(T)]_{\Lambda^2} = \psi\big([S, T]\big)$ se sigue inmediatamente de la definición de $[\cdot, \cdot]_{\Lambda^2}$.

Observamos de lo anterior que para $T \in \mathfrak{so}(V)$, $\operatorname{tr}(T) = 0$.

Definimos la aplicación $\tau : K(\mathfrak{co}(V)) \longrightarrow \mathfrak{so}(V)$ definida por la ecuación

$$\operatorname{tr}(R(x, y)) = b(\tau(R)x, y), \quad \forall x, y \in V.$$

Es claro que $\tau\big(K(\mathfrak{co}(V))\big) \subset \mathfrak{so}(V)$, pues, para $R \in K(\mathfrak{co}(V))$, $x, y \in V$ se tiene que

$$b(\tau(R)x, y) = \operatorname{tr}(R(x, y)) = -\operatorname{tr}(R(y, x)) = -b(x, \tau(R)y).$$

Se nota que $\ker \tau = K(\mathfrak{so}(V))$, de hecho, sea $R \in K(\mathfrak{so}(V))$, entonces se tiene que $0 = \operatorname{tr}(R(x, y)) = b(\tau(R)x, y)$ para todo $x, y \in V$ lo que implica que $\tau(R) = 0$. Ahora, sea $R \in \ker(\tau)$, por ser $R \in K(\mathfrak{co}(V))$ se tiene que, para todo $x, y \in V$, $R(x, y) = \alpha_{x,y} \operatorname{Id}_V + \tilde{R}(x, y)$, con $\alpha_{x,y} \in \mathbb{F}$ y $\tilde{R} \in K(\mathfrak{so}(V))$. Dado que $\tau(R) = 0$ se tiene que $\operatorname{tr}(R(x, y)) = 0$, es decir, $\alpha_{x,y} \dim V + \operatorname{tr}(\tilde{R}(x, y)) = \alpha_{x,y} \dim V = 0$, lo cual implica que $\alpha_{x,y} = 0$ y dado que esto se cumple para cualesquiera $x, y \in V$, se obtiene que $R \in K(\mathfrak{so}(V))$.

Sea $A \in \mathfrak{so}(V)$, definimos la aplicación R_A por

$$R_A(x, y) = b(Ax, y) \operatorname{Id}_V + \frac{1}{2}(Ax \wedge y - Ay \wedge x).$$

Un cálculo sencillo muestra que $R_A \in K(\mathfrak{co}(V))$, además se tiene que

$$\tau(R_A) = (\dim V)A.$$

Para verificar esta última afirmación, tomamos $x, y \in V$, luego,

$$b(Ax, y)\dim V = \mathrm{tr}(R_A(x, y)) = b(\tau(R_A)x, y).$$

La afirmación se sigue del hecho de que b es no degenerada. Así se tiene que τ es sobreyectiva, y definiendo $K^c(V) = \{R_A|\ A \in \mathfrak{so}(V)\}$ obtenemos que

$$K(\mathfrak{co}(V)) \cong K(\mathfrak{so}(V)) \oplus K^c(V).$$

A continuación daremos un criterio más para determinar cuando ciertas subálgebras de $\mathfrak{so}(V)$ no son de Berger, pero antes mostramos un par de resultados necesarios.

Lema 3.5. *Sean $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie simple, $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ una subálgebra semisimple propia y $W \subset \mathfrak{g}$ un subespacio lineal tal que $[\mathfrak{h}, W] \subset W$ y $[\mathfrak{h}^\perp, W] \subset \mathfrak{h}$. Entonces se tiene que $W = 0$ o bien, $W = \mathfrak{h}^\perp$.*

Demostración. Sea $H + U \in W$ con $H \in \mathfrak{h}$, $U \in \mathfrak{h}^\perp$ y $H' \in \mathfrak{h}$. Consideremos la aplicación $\tau := \mathrm{ad}(U) \circ \mathrm{ad}(H') : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$, de la definición de la forma de Killing se tiene que $\mathrm{tr}(\tau) = \langle U, H'\rangle = 0$. Notamos que $\tau(\mathfrak{h}) \subset \mathfrak{h}^\perp$, esto se sigue de la invarianza de la forma de Killing con respecto al corchete de Lie, de este modo se tiene que $\mathrm{tr}(\tau) = \mathrm{tr}(\sigma)$, donde $\sigma = \mathrm{pr}_{\mathfrak{h}^\perp} \circ \mathrm{ad}(U)|_{\mathfrak{h}^\perp} \circ \mathrm{ad}(H')|_{\mathfrak{h}^\perp}$ y $\mathrm{pr}_{\mathfrak{h}^\perp} : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{h}^\perp$ es la proyección ortogonal. Ahora, para $U' \in \mathfrak{h}^\perp$, se tiene que

$$\sigma(U') = \mathrm{pr}_{\mathfrak{h}^\perp}([H + U - H, [H', U']]) = -[H, [H', U']],$$

esto porque $[H + U, [H', U']] \in [W, \mathfrak{h}^\perp] \subset \mathfrak{h}$ y $[H, [H', U']] \in [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}^\perp] \subset \mathfrak{h}^\perp$. Luego, se obtiene que $\sigma = -\mathrm{ad}(H)|_{\mathfrak{h}^\perp} \circ \mathrm{ad}(H')|_{\mathfrak{h}^\perp}$, así obtenemos que $\mathrm{tr}(\sigma) = -c\langle H, H'\rangle_{\mathfrak{h}}$ para algún $c > 0$ y donde $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathfrak{h}}$ es la forma de Killing en $\mathfrak{h}$, se tiene entonces que $\langle H, H'\rangle_{\mathfrak{h}} = 0$ para todo $H' \in \mathfrak{h}$ y dado que $\mathfrak{h}$ es semisimple se tiene que $H = 0$, es decir, $W \subset \mathfrak{h}^\perp$.

Supongamos ahora que $W \neq 0$. Del hecho de que $[\mathfrak{h}, W] \subset W$ se sigue que W es un $\mathfrak{h}$-módulo bajo la representación adjunta. De igual manera se tiene que $\mathfrak{h}^\perp$ es un $\mathfrak{h}$-módulo. De este modo se tienen descomposiciones en $\mathfrak{h}$-módulos irreducibles de W y de $\mathfrak{h}^\perp$ de la forma

$$W = V_1 \oplus \cdots \oplus V_r$$
$$\mathfrak{h}^\perp = U_1 \oplus \cdots \oplus U_s$$

Definimos ahora, para cada $\mu \in \{1, \ldots, s\}$, las aplicaciones lineales

$$F_\mu := \mathrm{pr} \circ \iota : V_1 \longrightarrow U_\mu,$$

donde ι es la inclusión natural $V_1 \subset \mathfrak{h}^\perp$ y $\mathrm{pr} : \mathfrak{h}^\perp \longrightarrow U_\mu$ es la proyección. No es difícil verificar que F_μ es un homomorfismo de $\mathfrak{h}$-módulos y luego, por el lema de Schur [1], se tiene que $F_\mu \equiv 0$ o bien, F_μ es un isomorfismo. Dado que $W \neq 0$ se tiene que para algún $\mu \in \{1, \ldots, s\}$ F_μ no es idénticamente cero. Sin pérdida de generalidad supongamos que F_1 es un isomorfismo. Afirmamos

[1] El lema de Schur enuncia que dada un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, V, W dos $\mathfrak{g}$-módulos irreducibles y $\varphi : V \longrightarrow W$ un homomorfismo de $\mathfrak{g}$-módulos se tiene que $\varphi \equiv 0$ ó φ es un isomorfismo. Más aún, si $W = V$ y V es un espacio vectorial complejo, se tiene que $\varphi = \lambda\,\mathrm{Id}$, para algún $\lambda \in \mathbb{C}$.

que $\mathfrak{h}^\perp = V_1 \oplus (U_2 \oplus \cdots \oplus U_s)$. Para esto, sea $X \in \mathfrak{h}^\perp$, se tiene entonces que existen únicos $u \in U_1$, $w \in U_2 \oplus \cdots \oplus U_s$ tales que $X = u + w$. Sea $v = F_1^{-1}u$, luego $\mathrm{pr}(v) = F_1(F_1^{-1}u) = u = \mathrm{pr}(u)$ y de este modo se tiene que existe algún $w' \in (U_2 \oplus \cdots \oplus U_s) = \ker(\mathrm{pr})$ tal que $v - u = w'$ y así se obtiene que

$$X = u + w = v - w' + w \in V_1 + (U_2 \oplus \cdots \oplus U_s).$$

Por último, del hecho de que $V_1 \cap (U_2 \oplus \cdots \oplus U_s) = \{0\}$ y del hecho de que $\dim V_1 = \dim U_1$ y que $\mathfrak{h}$ es de dimensión finita, se sigue que

$$\mathfrak{h}^\perp = V_1 \oplus U_2 \oplus \cdots \oplus U_s := W_1 \oplus W_2.$$

De este modo hemos obtenido una descomposición de $\mathfrak{h}^\perp$ $\mathfrak{h}$-invariante de la forma $\mathfrak{h}^\perp = W_1 \oplus W_2$ con $W_1 \subset W$ e irreducible. Notamos que $[W_1, W_2] \subset [W, \mathfrak{h}^\perp] \subset \mathfrak{h}$. Por otro lado, para $w_i \in W_i$ y $H \in \mathfrak{h}$ se tiene que

$$\langle [w_1, w_2], H \rangle = \langle w_1, [w_2, H] \rangle = 0.$$

La última igualdad se tiene debido a que $[W_2, \mathfrak{h}] \subset W_2$ y del hecho de que $\mathfrak{g}$ es simple se sigue entonces que $[W_1, W_2] = 0$.
Se tiene también que $[W_1, W_1] \subset [W, \mathfrak{h}^\perp] \subset \mathfrak{h}$ y de esto junto con la identidad de Jacobi se sigue que $[W_1, W_1] \oplus W_1 \lhd \mathfrak{g}$ y dado que $\mathfrak{g}$ es simple y $W_1 \neq 0$ se sigue que $W = W_1 = \mathfrak{h}^\perp$. $\square$

Previo a enunciar el siguiente resultado necesario para mostrar el criterio del que se hizo mención anteriormente introducimos otra álgebra de Lie importante, a saber, el *álgebra de Lie simpléctica*. Para esto, sea V un $\mathbb{F}$-espacio vectorial, con $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$, $\Omega \in \Lambda^2 V^*$ no degenerada. Definimos $\mathrm{Sp}(V, \Omega)$ como el grupo de Lie definido por

$$\mathrm{Sp}(V, \Omega) = \{T \in \mathrm{Aut}(V) |\ \Omega(Tx, Ty) = \Omega(x, y) \text{ para todo } x, y \in V\}.$$

Se tiene que el álgebra de Lie de $\mathrm{Sp}(V, \Omega)$ es

$$\mathfrak{sp}(V, \Omega) = \{T \in \mathrm{End}(V) |\ \Omega(Tx, y) + \Omega(x, Ty) = 0 \text{ para todo } x, y \in V\}.$$

Notamos que las 2-formas que satisfacen las mismas condiciones que Ω solo pueden existir en espacios vectoriales de dimensión par.
De manera análoga al caso del álgebra de Lie ortogonal, se tiene el isomorfismo de álgebras de Lie

$$\mathfrak{sp}(V, \Omega) \cong \mathrm{Sym}^2 V,$$

con el isomorfismo dado por la aplicación

$$(xy) \cdot z \longmapsto \Omega(x, z)y + \Omega(y, z)x.$$

Lo anterior considerando a $(\mathrm{Sym}^2 V, [\cdot,\cdot]_{\mathrm{Sym}^2})$ como álgebra de Lie con $[\cdot,\cdot]_{\mathrm{Sym}^2}$ dado por

$$[xy, zw]_{\mathrm{Sym}^2} = \Omega(y, z)xw + \Omega(y, w)xz + \Omega(x, w)zy + \Omega(x, z)wy.$$

Definimos también $\mathfrak{csp}(V, \Omega)$ como $\mathfrak{csp}(V, \Omega) = \mathfrak{sp}(V, \Omega) \oplus \mathbb{F}\,\mathrm{Id}_V$.

Lema 3.6. *Sea* $R \in K(\mathfrak{csp}(V,\Omega))$ *dado por* $R(x,y) = \rho(x,y)\,\mathrm{Id}_V + \underline{R}(x,y)$ *para algún* $\rho \in \Lambda^2 V^*$ *y algún* $\underline{R} \in \Lambda^2 V^* \otimes \mathfrak{sp}(V,\Omega)$*. Entonces* $\rho \wedge \Omega = 0$*.*

Si $\dim V \geq 6$ *se tiene que* $K(\mathfrak{csp}(V,\Omega)) = K(\mathfrak{sp}(V,\Omega))$ *y por lo tanto se tiene que* $\mathfrak{csp}(V,\Omega)$ *no es un álgebra de Berger. Si* $\dim V = 4$ *se tiene que* $K(\mathfrak{csp}(V,\Omega)) = K(\mathfrak{sp}(V,\Omega)) \oplus (\Lambda^2 V)/\mathbb{C}\Omega$*.*

Demostración. Sea $R \in K(\mathfrak{csp}(V,\Omega))$ dada como antes y definamos

$$\tau(x,y,z,w) = \Omega(R(x,y)z,w) - \Omega(R(x,y)w,z).$$

Se tiene que $\tau(x,y,z,w) = 2\rho(x,y)\Omega(z,w)$. En efecto,

$$\begin{aligned}
\tau(x,y,z,w) &= \Omega(\rho(x,y)z,w) + \Omega(\underline{R}(x,y)z,w) - \Omega(\rho(x,y)w,z) \\
&\quad -\Omega(\underline{R}(x,y)w,z) \\
&= 2\rho(x,y)\Omega(z,w) + \Omega(\underline{R}(x,y)z,w) + \Omega(z,\underline{R}(x,y)w) \\
&= 2\rho(x,y)\Omega(z,w) \qquad \text{pues } \underline{R} \in K(\mathfrak{sp}(V,\Omega)).
\end{aligned}$$

Ahora,

$$\begin{aligned}
(\rho\wedge\Omega)(x,y,z,w) &= \rho(x,y)\Omega(z,w) - \rho(x,z)\Omega(y,w) + \rho(x,w)\Omega(y,z) \\
&\quad +\rho(y,z)\Omega(x,w) - \rho(y,w)\Omega(x,z) + \rho(z,w)\Omega(x,y) \\
&= \frac{1}{2}(\tau(x,y,z,w) - \tau(x,z,y,w) + \tau(x,w,y,z) \\
&\quad +\tau(y,z,x,w) - \tau(y,w,x,z) + \tau(z,w,x,y)) \\
&= \frac{1}{2}(\Omega(R(x,y)z + R(y,z)x + R(z,x)w,w) \\
&\quad +\Omega(R(z,y)w + R(y,w)z + R(w,z)y,x) \\
&\quad +\Omega(R(x,z)w + R(z,w)x + R(w,x)z,y) \\
&\quad +\Omega(R(y,x)w + R(x,w)y + R(w,y)x,z)) \\
&= 0 \qquad \text{debido a que } R \in K(\mathfrak{csp}(V,\Omega)).
\end{aligned}$$

Para la segunda afirmación primero hacemos notar que podemos identificar V con V^* por medio de los isomorfismos

$$\flat_\Omega : V \longrightarrow V^*, \quad x \longmapsto \Omega(x,\cdot),$$

$$\sharp_\Omega : V^* \longrightarrow V, \quad \alpha \longmapsto \alpha^{\sharp_\Omega},$$

donde $\Omega(\alpha^{\sharp_\Omega},x) = \alpha(x)$.

Ahora, de un resultado de teoría de representaciones se obtiene que la aplicación

$$\Lambda^r V^* \xrightarrow{(\wedge\Omega)^s} \Lambda^{2s+r} V^*, \quad \rho \longmapsto \rho \wedge \overbrace{\Omega \wedge \cdots \wedge \Omega}^{s\text{-veces}},$$

con $r,s \in \mathbb{N}_0$ es inyectiva si, y solo si $2r+2s \leq \dim V$ y sobreyectiva si, y solo si $2r+2s \geq \dim V$. En particular $\wedge\Omega : \Lambda^2 V^* \longrightarrow \Lambda^4 V^*$ es inyectiva si, y solo si $\dim V \geq 6$.

La primera afirmación del lema implica que, para todo $R \in K(\mathfrak{csp}(V,\Omega))$ con $R(x,y) = \rho(x,y)\,\mathrm{Id}_V + \underline{R}(x,y)$, $\rho \in \ker(\wedge\Omega)$, de este modo, si $\dim V \geq 6$ se tiene que $\rho \equiv 0$, y por lo tanto se obtiene que $K(\mathfrak{csp}(V,\Omega)) = K(\mathfrak{sp}(V,\Omega))$.

Por último, no es difícil verificar que para cada $\rho \in \Lambda^2 V^*$ con $\rho \wedge \Omega = 0$, R_ρ dado por

$$R_\rho(x,y) = 4\rho(x,y)\operatorname{Id}_V + \underline{R}(x,y),$$

donde $\underline{R}$ satisface la ecuación

$$\begin{aligned}\Omega(\underline{R}(x,y)z,w) &= \rho(x,z)\Omega(y,w) + \rho(x,w)\Omega(y,z) - \rho(y,z)\Omega(x,w) \\ &= -\rho(y,w)\Omega(x,z),\end{aligned}$$

es un elemento de $K(\mathfrak{csp}(V,\Omega))$ y con esto mostramos la afirmación final del lema. □

Con estos resultados se obtiene la siguiente

Proposición 3.7. [**Sc**, Prop 3.2] *Sea $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(V,b)$ una subálgebra irreducible y propia donde V es un $\mathbb{F}$-espacio vectorial de dimensión n con $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$ y $n \geq 3$, $n \neq 4$. Entonces $K(\mathfrak{h} \oplus \mathbb{F}\operatorname{Id}_V) = K(\mathfrak{h})$. En particular $\mathfrak{h} \oplus \mathbb{F}\operatorname{Id}_V$ no es un álgebra de Berger.*

3. Álgebras de Berger complejas irreducibles

A lo largo de esta sección todas las álgebras de Lie y los espacios vectoriales son complejos. Primeramente estudiaremos unos resultados adicionales de teoría de representaciones.

Comenzamos enunciando una variante del teorema de Engel y el conocido teorema de Lie, resultados estándar cuyas demostraciones pueden ser encontradas en, por ejemplo, [**FH**].

Teorema 3.8 (Teorema de Engel)**.** *Sea $\mathfrak{g} \subset \operatorname{End}(V)$ una subálgebra de Lie tal que todo elemento de $\mathfrak{g}$ es un endomorfismo nilpotente de V. Entonces existe un vector $v \in V \setminus \{0\}$ tal que $Xv = 0$ para todo $X \in \mathfrak{g}$.*

Teorema 3.9 (Teorema de Lie)**.** *Sea $\mathfrak{g} \subset \operatorname{End}(V)$ una subálgebra de Lie soluble. Entonces existe $v \in V \setminus \{0\}$ y $\lambda \in \mathfrak{g}^*$ tal que $Xv = \lambda(X)v$ para todo $X \in \mathfrak{g}$.*

A continuación mostramos un resultado que nos será útil para justificar una descomposición de cierto tipo de álgebras de Lie.

Lema 3.10. *Sean $\mathfrak{g} \subset \operatorname{End}(V)$ un álgebra de Lie, $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ un ideal, V una representación de dimensión finita y $\lambda \in \mathfrak{h}^*$. Definimos*

$$E_\lambda := \{v \in V |\ Xv = \lambda(X)v\ \forall X \in \mathfrak{h}\}.$$

Entonces se tiene que, para todo $Y \in \mathfrak{g}$, $Y(E_\lambda) \subset E_\lambda$.

Demostración. Si $E_\lambda = \{0\}$ el resultado se sigue de manera inmediata. Supongamos entonces que $E_\lambda \neq \{0\}$ y sea $v \in E_\lambda \setminus \{0\}$, luego, para $Y \in \mathfrak{g}$ y $X \in \mathfrak{h}$, $X(Yv) = [X,Y]v + Y(Xv)$ y dado que $[\mathfrak{h},\mathfrak{g}] \subset \mathfrak{h}$, se tiene que

$$X(Yv) = \lambda([X,Y])v + \lambda(X)Yv.$$

Por lo tanto $Yv \in E_\lambda$ si y solo si $\lambda([X,Y]) = 0$ para todo $X \in \mathfrak{h}$.

Sea $Y \in \mathfrak{g}$ dado y $v \in E_\lambda \setminus \{0\}$. Consideramos

$$\mathbb{C}v := A^0 \subsetneq A^1 \subsetneq \cdots \subsetneq A^N \subseteq V,$$

donde $A^\mu := \mathrm{gen}_{\mathbb{C}}\{v, Yv, \ldots, Y^\mu v\}$. Del hecho de que V es de dimensión finita obtenemos que la cadena dada anteriormente es estacionaria. Sea

$$N = \min\{m \in \mathbb{N}_0 |\ A^n = A^m \text{ para } n \geq m\}.$$

Afirmamos que, para $X \in \mathfrak{h}$, $X(A^N) \subset A^N$. Para esto, observamos que, del hecho de que $v \in E_\lambda$, $Xv = \lambda(X)v \in A^0$. Supongamos que para todo $X \in \mathfrak{h}$, para $r = 0, \ldots, k$, $X(Y^k v) \in A^N$. Ahora, nuevamente por inducción, se tiene que

$$X(Y^{k+1}v) = \sum_{\mu=0}^{k} Y^\mu\big([X,Y](Y^{k-\mu}v)\big) + Y^{k+1}(Xv).$$

Dado que $[X,Y] \in \mathfrak{h}$ y junto con la hipótesis de inducción obtenemos que

$$\sum_{\mu=0}^{k} Y^\mu\big([X,Y](Y^{k-\mu}v)\big) \in A^k$$

y

$$Y^{k+1}(Xv) = \lambda(X)Y^{k+1}v \in A^N,$$

luego, se tiene que $X(Y^{k+1}v) \in A^N$.

De lo anterior obtenemos que, con respecto a la base $\{v, Yv, \ldots, Y^N v\}$ de A^N y del hecho que $X(Y^{k+1}v) \equiv \lambda(X)(Y^{k+1}v) \bmod A^k$, la representación matricial de $X|_{A^N}$ es de la forma

$$\begin{pmatrix} \lambda(X) & & & \\ & \lambda(X) & & * \\ O & & \ddots & \\ & & & \lambda(X) \end{pmatrix}$$

lo cual implica que $\lambda(X) = \frac{1}{N+1}\,\mathrm{tr}_{A^N}(X|_{A^N})$ para todo $X \in \mathfrak{h}$. De este modo obtenemos que, para $X \in \mathfrak{h}$, se tiene que

$$\lambda([X,Y]) = \frac{1}{N+1}\,\mathrm{tr}_{A^N}([X|_{A^N}, Y_{A^N}]) = 0.$$

Es decir,

$$Y(E_\lambda) \subset E_\lambda.$$

□

No es difícil demostrar que dados dos ideales solubles $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ de un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, el ideal $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ es también soluble, y de manera inductiva se tiene que la suma de un número finito de ideales solubles es también soluble. Esto justifica el hecho de hablar de un ideal soluble máximo.

Definición 3.11. Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie, definimos el *radical* de $\mathfrak{g}$ como

$$\mathrm{Rad}(\mathfrak{g}) = \sum_{\substack{\mathfrak{h} \lhd \mathfrak{g}, \\ \mathfrak{h} \text{ soluble}}} \mathfrak{h}.$$

De lo anterior se obtiene que $\mathrm{Rad}(\mathfrak{g})$ es un ideal soluble de $\mathfrak{g}$.

Lema 3.12. *Sea* $\mathfrak{g} \subset \operatorname{End}(V)$ *con* V *representación irreducible de dimensión finita. Entonces* $\operatorname{Rad}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g} \cap \mathbb{C}\operatorname{Id}$.

Demostración. Por el teorema de Lie se tiene que existe $\lambda \in \operatorname{Rad}(\mathfrak{g})^*$ tal que

$$E_\lambda = \{v \in V | \ Xv = \lambda(X)v \text{ para todo } X \in \operatorname{Rad}(\mathfrak{g})\} \neq \{0\}.$$

Dado que $\operatorname{Rad}(\mathfrak{g}) \lhd \mathfrak{g}$, el lema anterior implica que $\mathfrak{g}(E_\lambda) \subset E_\lambda$, es decir, E_λ es una subrepresentación de $\mathfrak{g}$ no cero, y del hecho de que V es irreducible concluimos que $E_\lambda = V$ y de esto se obtiene el resultado. $\square$

Una consecuencia inmediata del lema 3.12 es que $\dim_{\mathbb{C}} \operatorname{Rad}(\mathfrak{g}) \leq 1$.
A continuación introducimos un ideal particular de un álgebra de Lie.

Definición 3.13. Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie, el *centro de* $\mathfrak{g}$ está dado por

$$\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = \{Z \in \mathfrak{g} | \ [Z, X] = 0 \text{ para todo } X \in \mathfrak{g}\}.$$

Es claro que $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ es un ideal soluble de $\mathfrak{g}$, luego se tiene que $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \subset \operatorname{Rad}(\mathfrak{g})$.
En el caso de que $\mathfrak{g} \subset \operatorname{End}(V)$ irreducible, el lema 3.12 implica que $\operatorname{Rad}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$.

Enunciamos a continuación un teorema importante sobre la descomposición de álgebras de Lie finitas.

Teorema 3.14. *Sea* $\mathfrak{g}$ *un álgebra de Lie de dimensión finita. Entonces existe una subálgebra de Lie semisimple* $\mathfrak{l}$ *tal que*

$$\mathfrak{g} = \operatorname{Rad}(\mathfrak{g}) \oplus \mathfrak{l}.$$

A $\mathfrak{l}$ se le conoce como una *subálgebra de Levi* de $\mathfrak{g}$. Más aún cualesquiera dos subálgebras de Levi son conjugadas. Como consecuencia de este hecho es común referirse a $\mathfrak{l}$ como *la parte semisimple de* $\mathfrak{g}$, en lo sucesivo denotaremos a esta subálgebra como $\mathfrak{g}_s$.

Ahora, sea $\mathfrak{g} \subset \operatorname{End}(V)$ irreducible, de lo anterior tenemos que $\mathfrak{g} = \mathfrak{z} \oplus \mathfrak{g}_s$, con $\dim \mathfrak{z} \leq 1$. Sea $\mathfrak{t} \subset \mathfrak{g}_s$ una subálgebra de Cartan y $\mathfrak{t}_0 = \mathfrak{z} \oplus \mathfrak{t}$. Sea Δ el conjunto de raíces de $\mathfrak{g}_s$ y $\Phi = \{\lambda \in \mathfrak{t}_0^* | \ V_\lambda \neq \{0\}\}$, donde V_λ está dado por

$$V_\lambda = \{v \in V | \ Xv = \lambda(X)v \text{ para todo } X \in \mathfrak{t}_0\}.$$

Sea $\alpha \in \Delta$ y $0 \neq A_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$. Consideramos $A_\alpha V$. Se nota que $\mathfrak{t}_0(A_\alpha V) \subset A_\alpha V$, de esto se obtiene que

$$A_\alpha V = \bigoplus_{\lambda \in \mathfrak{t}_0^*} (A_\alpha V)_\lambda,$$

donde $(A_\alpha V)_\lambda = \{w \in A_\alpha V | \ Xw = \lambda(X)w \text{ para todo } X \in \mathfrak{t}_0\}$. Definimos

$$\Phi_\alpha = \{\lambda \in \mathfrak{t}_0^* | \ (A_\alpha V)_\lambda \neq \{0\}\} \subset \Phi.$$

Más aún, se tiene que

$$\Phi_\alpha = \{\lambda \in \Phi | \ \lambda - \alpha \in \Phi\}.$$

Definición 3.15. Sea $\mathfrak{g} \subset \operatorname{End}(V)$ irreducible, el triple $(\lambda_0, \lambda_1, \alpha) \in \Phi \times \Phi \times \Delta$ es llamado un *triple generador* si

$$\Phi_\alpha \subset \{\lambda_0 + \beta, \lambda_1 + \beta | \ \beta \in \Delta_0\}, \tag{3.2}$$

donde $\Delta_0 := \Delta \cup \{0\}$.

Un triple generador es *extremal* si λ_0, λ_1 son pesos extremales; es *de signo opuesto* si λ_0, λ_1 son pesos extremales de signos opuestos.

Antes de mostrar la siguiente proposición observamos que $K(\mathfrak{g})$ es un $\mathfrak{h}$-módulo, con $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ una subálgebra, con la operación dada por

$$\begin{aligned} \cdot : \mathfrak{h} \times K(\mathfrak{g}) &\longrightarrow K(\mathfrak{g}), \\ (X, R) &\longmapsto \big((X \cdot R) : (x, y) \longmapsto [X, R(x, y)] - R(Xx, y) - R(x, Xy)\big). \end{aligned}$$

Se puede verificar que, del hecho de que $\mathfrak{t}_0$ actúa diagonalmente sobre V, $\mathfrak{t}_0$ actúa diagonalmente sobre $K(\mathfrak{g})$ y de este modo podemos escribir a $K(\mathfrak{g})$ como

$$K(\mathfrak{g}) = \bigoplus_{\lambda \in \Phi_K} K(\mathfrak{g})_\lambda,$$

donde $\lambda \in \mathfrak{t}_0^*$,

$$K(\mathfrak{g})_\lambda = \{R \in K(\mathfrak{g}) |\ X \cdot R = \lambda(X) R \text{ para todo } X \in \mathfrak{t}_0\}$$

y

$$\Phi_K = \{\lambda \in \mathfrak{t}_0^* |\ K(\mathfrak{g})_\lambda \neq \{0\}\}.$$

Proposición 3.16. *Sea* $\mathfrak{g} \subset \mathrm{End}(V)$ *un álgebra de Berger irreducible. Entonces para cada raíz* $\alpha \in \Delta$ *existe un triple generador* $(\lambda_0, \lambda_1, \alpha)$.

De hecho, si $R \in K(\mathfrak{g})$ *es un elemento de peso y si existen vectores de peso* $x_i \in V$ *correspondientes a los pesos* λ_i*, para* $i = 0, 1$ *tales que* $R(x_0, x_1) = A_\alpha$*, entonces* $(\lambda_0, \lambda_1, \alpha)$ *es un triple generador.*

Demostración. Mostraremos primero la segunda afirmación. Sean $R \in K(\mathfrak{g})$ y $x_i \in V$ dados como en la proposición. Para cualquier $y \in V$ la primera identidad de Bianchi toma la forma

$$A_\alpha y = R(y, x_1)x_0 - R(y, x_0)x_1 \in \mathrm{gen}\{\mathfrak{g}x_0, \mathfrak{g}x_1\},$$

de este modo obtenemos que $A_\alpha V \subset \mathrm{gen}\{\mathfrak{g}x_0, \mathfrak{g}x_1\}$. Por otro lado, del hecho de que $\mathfrak{g} = \mathfrak{t}_0 \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Delta} \mathfrak{g}_\alpha$ se tiene que para $X \in \mathfrak{g}$, $X = X_0 + \sum_{\alpha \in \Delta} X_\alpha$, luego $Xx_i = X_0 x_i + \sum_\alpha X_\alpha x_i$, para $i = 0, 1$. Sea $H \in \mathfrak{t}_0$, entonces se tiene que

$$\begin{aligned} HXx_i &= HX_0 x_i + \sum_\alpha HX_\alpha x_i \\ &= X_0 Hx_i + \sum_\alpha (X_\alpha H x_i + [H, X_\alpha] x_i) \quad \text{pues } [H, X_0] = 0 \\ &= \sum_{\alpha \in \Delta_0} (\lambda_i + \alpha)(H) X_\alpha x_i. \end{aligned}$$

De este modo concluimos que

$$\mathfrak{g}x_i \subset \bigoplus_{\alpha \in \Delta_0} \mathfrak{g}_{\lambda_i + \alpha},$$

Por lo tanto se tiene que se cumple (3.2).

A continuación mostramos la primera afirmación, para esto, sea

$$\begin{aligned} D = \{\alpha \in \Delta |\ &\text{Existen elementos de peso } R \in K(\mathfrak{g}), \\ &x_0, x_1 \in V \text{ tales que } R(x_0, x_1) = A_\alpha\}. \end{aligned}$$

El hecho que $K(\mathfrak{g}) = \bigoplus_\lambda K(\mathfrak{g})_\lambda$ y $V = \bigoplus_\mu V_\mu$, para $x = \sum_\mu x_\mu$, $y = \sum_\nu y_\nu \in V$, $R = \sum_\lambda R_\lambda \in K(\mathfrak{g})$ implica que

$$R(x,y) = \sum_{\lambda,\mu,\nu} R_\lambda(x_\mu, y_\nu) \in \mathfrak{t}_0 \oplus \bigoplus_{\alpha\in\Delta} \mathfrak{g}_\alpha.$$

Por otro lado, dado que $R_\lambda \in K(\mathfrak{g})_\lambda$, $x_\mu \in V_\mu, y_\nu \in V_\nu$, $R_\lambda(x_\mu, y_\nu) \in \mathfrak{g}_{\lambda+\mu+\nu}$, por lo tanto concluimos que, para todo $R \in K(\mathfrak{g})$ y para todo $x, y \in V$,

$$R(x,y) \in \mathfrak{t}_0 \oplus \bigoplus_{\alpha\in D} \mathfrak{g}_\alpha.$$

Lo anterior debido a que si $\lambda + \mu + \nu \notin \Delta_0$, $R_\lambda(x_\mu, y_\nu) = 0$.
Así pues se obtiene que

$$\underline{\mathfrak{g}} \subset \mathfrak{t}_0 \oplus \bigoplus_{\alpha\in D} \mathfrak{g}_\alpha.$$

Finalmente, del hecho de que $\mathfrak{g}$ es de Berger concluimos que $D = \Delta$. □

A continuación enunciamos un hecho concerniente a la existencia de triples generadores extremales.

Lema 3.17. *Sea $\mathfrak{g} \subset \mathrm{End}(V)$ un álgebra de Lie irreducible con $K(\mathfrak{g}) \neq 0$. Entonces existen vectores x_0, x_1 de pesos extremales λ_0, λ_1 de signos opuestos tales que $R(x_0, x_1) \neq 0$ para algún $R \in K(\mathfrak{g})$.*

Enunciamos también un resultado que nos da un criterio restrictivo acerca de las álgebras de Berger irreducibles.

Teorema 3.18. [**Sc**, Thm 3.12] *Sea $\mathfrak{g} \subset \mathrm{End}(V)$ un álgebra de Berger irreducible. Entonces se tiene que existe un triple generador extremal, o bien, $\mathfrak{g}$ es congruente a la representación de $\mathfrak{so}(n,\mathbb{C})$ en $\mathrm{Sym}^2_0\,\mathbb{C}^n$ para algún $n \geq 3$. Si la segunda alternativa es el caso se tiene entonces que $\dim K(\mathfrak{g}) = 1$, y de este modo se tiene que $\mathfrak{g}$ es simétrica.*[2]

En el teorema anterior $\mathrm{Sym}^2_0\,\mathbb{C}^2$ está dado por

$$\mathrm{Sym}^2_0\,\mathbb{C}^2 = \{g \in \mathrm{Sym}^2\,\mathbb{C}^2 |\ \sum g(e_\mu, e_\nu) = 0, \text{ con } e_1, e_2 \text{ la base estándar de } \mathbb{C}^2\}.$$

4. Álgebras de Berger complejas simples

En esta sección asumimos que $\mathfrak{g} \subset \mathrm{End}(V)$ con $\mathfrak{g}$ irreducible y además asumimos $\mathfrak{g}_s$ simple. Nuevamente asumimos que tanto $\mathfrak{g}$ como V son complejos. Por el teorema 3.18 sabemos que necesitamos clasificar aquellas representaciones que admiten triples generadores extremales.

Proposición 3.19. *Sea $\mathfrak{g} \subset \mathrm{End}(V)$ un álgebra irreducible con $\mathfrak{g}_s$ simple, sean Δ y Φ dadas como antes, y supongamos que $0 \in \Phi$. Si Δ no es del tipo C_l entonces se tiene que si existe un triple generador extremal $(\lambda_0, \lambda_1, \alpha)$ el peso dominante*

[2] Si un álgebra de Berger irreducible $\mathfrak{g}$ es tal que $\dim K(\mathfrak{g}) = 1$ entonces se tiene que $K^1(\mathfrak{g}) = \{0\}$.

de la representación es una raíz. En particular, esto se cumple si Δ es del tipo G_2, F_4, ó E_8.

Demostración. Si $0 \in \Phi$ y Δ no es del tipo C_l entonces se tiene que el peso dominante es una raíz corta o bien $\Delta_0 \subset \Phi$. Si la segunda alternativa es el caso se tiene entonces que $0 \in \Phi_\alpha$ para todo $\alpha \in \Delta$ (pues $0, -\alpha \in \Phi$ para todo α). De este modo se obtiene que si existe un triple generador extremal $(\lambda_0, \lambda_1, \alpha)$, entonces $0 = \lambda_0 + \gamma$ para $\gamma \in \Delta$ ($\gamma \neq 0$ dado que λ_0 es extremal). De este modo concluimos que $\lambda_0 \in \Delta$, por lo tanto, del hecho de que λ_0 es extremal concluimos que el peso dominante es también una raíz.

El resultado se sigue utilizando el hecho de que si Δ es del tipo G_2, F_4 ó E_8 cualquier representación tiene al 0 como peso. $\square$

Proposición 3.20. *Sean $\mathfrak{g} \subset \mathrm{End}(V)$, $\mathfrak{g}_s$, Δ y Φ dados como antes. Si hay un triple generador extremal, entonces $|2\frac{\langle\lambda,\alpha\rangle}{\langle\alpha,\alpha\rangle}| \leq 3$ para cualquier $\lambda \in \Phi$ y $\alpha \in \Delta$.*

Demostración. Supongamos primero que Δ es del tipo G_2. De este modo se tiene que 0 es un peso de la representación y la proposición anterior implica que el peso dominante es una raíz, así el teorema 2.67 implica que $\Phi \subset \Delta_0$. El resultado se sigue entonces de (2.2).

Supongamos ahora que Δ no es de tipo G_2. Sean $(\lambda_0, \lambda_1, \beta)$ un triple generador extremal y $0 \neq \lambda \in \Phi$ tal que $|\lambda(H_\alpha) = \frac{\langle\lambda,\alpha\rangle}{\langle\alpha,\alpha\rangle}| \leq 1$ para todo $\alpha \in \Delta$. Después de aplicar un elemento del grupo de Weyl a λ, si es necesario, podemos asumir que $\lambda(H_\beta) > 0$ y de aquí concluimos que $\lambda \in \Phi_\beta$, por lo tanto $\lambda = \lambda_0 + \gamma$ para algún $\gamma \in \Delta_0$. Por otro lado, nótese que, por (2.2), $|2\frac{\langle\lambda_0,\alpha\rangle}{\langle\alpha,\alpha\rangle}| \leq |2\frac{\langle\lambda,\alpha\rangle}{\langle\alpha,\alpha\rangle}| + |2\frac{\langle\gamma,\alpha\rangle}{\langle\alpha,\alpha\rangle}| \leq 3$. Por tanto el resultado se cumple dado que λ_0 es extremal. $\square$

Proposición 3.21. *Sea $\mathfrak{g} \subset \mathrm{End}(V)$ dada como antes tal que $\mathrm{rk}\,\mathfrak{g}_\mathfrak{s} \geq 2$ y supongamos que existe un triple generador extremal. Entonces para cualquier peso λ y cualquier raíz larga α, $|\lambda(H_\alpha)| \leq 2$.*

Demostración. Supongamos que existe un peso λ y una raíz larga α tales que $\lambda(H_\alpha) = -3$.

Supongamos primero que todas las raíces tienen la misma longitud. Sea β una raíz tal que $\alpha(H_\beta) = 1$. De este modo se tiene que $\alpha - \beta \in \Delta$. Ahora, del hecho de que $\lambda(H_\alpha) = -3$ y de que α y β tienen la misma longitud, obtenemos que $\lambda(H_{\alpha-\beta}) = -3 - \lambda(H_\beta)$. Del teorema 2.64 sabemos que $\lambda(H_{\alpha-\beta}), \lambda(H_\alpha) \in \mathbb{Z}$, de este modo, el hecho de que $\lambda(H_{\alpha-\beta}) - \lambda(H_\beta) = -3$ implica que $\lambda(H_\beta) \leq -2$ o bien $\lambda(H_{\alpha-\beta}) \leq -2$. Supongamos que $\lambda(H_\beta) \leq -2$. Con lo anterior no es difícil ver que

$$\{\lambda + k\alpha + l\beta |\ k = 1, 2, 3 \text{ y } 0 \leq l \leq 3 - k\} \subset \Phi_\alpha.$$

Por hipótesis se tiene que existe un triple generador extremal $(\lambda_0, \lambda_1, \alpha)$. Se tiene entonces que $\lambda + \alpha = \lambda_0 + \gamma$, para algún $\gamma \in \Delta_0$. Del hecho de que λ_0 es extremal se sigue que $\gamma \neq -\alpha$ (esto debido a que $\lambda, \lambda + 3\alpha \in \Phi$ y $\lambda + 2\alpha = \frac{1}{3}\lambda + \frac{2}{3}(\lambda + 3\alpha)$, de este modo se obtiene que $\lambda + 2\alpha$ no es extremal), por (2.3) se tiene que $\gamma + 2\alpha$ no es una raíz. Por lo tanto se obtiene

$$\begin{cases} \lambda + \alpha = \lambda_0 + \gamma \\ \lambda + 3\alpha = \lambda_1 + \delta, \text{ donde } \gamma, \delta \in \Delta_0. \end{cases} \tag{3.3}$$

Ahora, $\Phi_\alpha \ni \lambda + \alpha + 2\beta = \lambda_0 + \gamma + 2\beta = \lambda_1 + \delta + 2(\beta - \alpha)$. Por (2.3) y un argumento similar al dado anteriormente se tiene que $\gamma + 2\beta$ ni $\delta + 2(\beta - \alpha)$ son raíces.

Supongamos a continuación que existen raíces de longitud distinta. De la proposición 3.19 podemos asumir que Δ no es del tipo G_2, de la forma de las raíces de las álgebras de Lie simples dadas anteriormente se tiene entonces que $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$ con α_1, α_2 raíces cortas tales que $\langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle = 0$. Dado que $-3 = \lambda(H_\alpha) = \frac{1}{2}(\lambda(H_{\alpha_1}) + \lambda(H_{\alpha_2}))$, la proposición anterior implica que $\lambda(H_{\alpha_i}) = -3$ para $i = 1, 2$.

Por hipótesis existe un triple generador extremal de la forma $(\lambda_0, \lambda_1, \alpha)$ o bien, $(\lambda_0, \lambda_1, \alpha_1)$. No es difícil verificar que

$$\{\lambda + k\alpha_1 + l\alpha_2 |\ 1 \leq k, l \leq 3\} \subset \Phi_\alpha \cap \Phi_{\alpha_1}.$$

De este modo obtenemos como en el caso anterior que (3.3) se satisface y nuevamente del hecho de que λ_i es extremal se sigue que $\gamma \neq -\alpha, \delta \neq \alpha$. Afirmamos que $\lambda_0(H_\alpha) \leq 0$ y $\lambda_1(H_\alpha) \geq 2$. Para esto, de lo anterior se tiene que $(\lambda+\alpha)(H_\alpha) = -1 = (\lambda_0+\gamma)(H_\alpha)$. Ahora, si $\lambda_0(H_\alpha) > 1$ se tiene que $\gamma(H_\alpha) < -2$ lo cual es no es posible por (2.2). Si $\lambda_0(H_\alpha) = 1$ se tendría que $\gamma(H_\alpha) = -2$ y nuevamente por (2.2) se tendría que $\gamma = -\alpha$ lo cual vimos anteriormente contradice el hecho de que λ_0 es extremal. De manera análoga mostramos que $\lambda_1(H_\alpha) \geq 2$.

Ahora, es fácil verificar que $(\lambda + 2\alpha_1 + \alpha_2)(H_\alpha) = 0$, por lo tanto, si existiera $\varepsilon \in \Delta_0$ tal que $\lambda + 2\alpha_1 + \alpha_2 = \lambda_1 + \varepsilon$, se tendría que $\lambda_1(H_\alpha) + \varepsilon(H_\alpha) = 0$ y dado que $\lambda_1(H_\alpha) \geq 2$, (2.2) implicaría que $\varepsilon = -\alpha$, luego, $\lambda_1 = \lambda + 3\alpha_1 + 2\alpha_2$, lo cual es una contradicción con el hecho de que λ_1 es extremal, ya que de manera similar se tiene que $\lambda + 3\alpha_1 + 2\alpha_2$ no es extremal. Por lo tanto, del hecho de que $\lambda + 2\alpha_1 + \alpha_2 = \lambda + \alpha + \alpha_1 = \lambda_0 + \gamma + \alpha_1$, obtenemos que $\gamma + \alpha_1 \in \Delta_0$. De manera análoga se muestra que $\gamma + \alpha_2 \in \Delta_0$.

Ahora, si γ fuera una raíz larga implicaría que $\gamma(H_{\alpha_i}) = -2$ para $i = 1, 2$, ya que se tiene que $(\gamma+\alpha_i)(H_{\alpha_i}) = \gamma(H_{\alpha_i})+2$ y del hecho de que $-2 \leq (\gamma+\alpha_i)(H_{\alpha_i}) \leq 2$ obtenemos que $-2 \leq \gamma(H_{\alpha_i}) \leq 0$, es fácil descartar el hecho de que $\gamma(H_{\alpha_i}) = 0$ pues en otro caso $\gamma + \alpha_i$ sería una raíz de longitud mayor a γ lo cual es una contradicción con el hecho de que γ es larga. Igualmente descartamos el caso de que $\gamma(H_{\alpha_i}) = -1$ ya que en otro caso obtendríamos que $\gamma + \alpha_i$ sería también una raíz larga lo cual, de la forma en que están dados los α_i vemos que no es posible, por lo tanto, $\gamma(H_\alpha) = \frac{1}{2}(\gamma(H_{\alpha_1}) + \gamma(H_{\alpha_2})) = -2$, lo cual implica, por ser α una raíz larga, que $\gamma = -\alpha$, lo cual ya vimos que no es el caso. De este modo obtenemos que γ es una raíz corta.

Para $\{i, j\} = \{1, 2\}$, consideremos los pesos $\lambda + 3\alpha_i + \alpha_j = \lambda_0 + \gamma + 2\alpha_i = \lambda_1 + \delta - 2\alpha_j$. Dado que γ es una raíz corta, se tiene que $\gamma + 2\alpha_i$ es una raíz si y solo si $\gamma = -\alpha_i$ lo cual contradice el hecho de que λ_0 es extremal, ya que $\lambda + \alpha = \lambda_0 - \alpha_i$, lo que implica que $\lambda_0 = \lambda + 2\alpha_i + \alpha_j$, pero $\lambda + 2\alpha_i + \alpha_j$ no es extremal. De este modo se tiene que $\delta - 2\alpha_j \in \Delta$ para $j = 1, 2$. Pero $\delta - 2\alpha_2 = (\delta - 2\alpha_1) + 2(\alpha_1 - \alpha_2)$, y dado que $\alpha_1 - \alpha_2$ es larga, (2.2) implica que $\delta = \alpha$, lo cual contradice la extremalidad de λ_1. En cualquier caso vemos que $\lambda(H_\alpha) = -3$ nos lleva a una contradicción y el caso $\lambda(H_\alpha) = 3$ se trata de una manera similar, por tanto se tiene la afirmación de la proposición. □

Proposición 3.22. *Sea* $\mathfrak{g} \subset \mathrm{End}(V)$ *como en la proposición anterior y supongamos que* $|\lambda(H_\alpha)| = 2$ *para algún* $\lambda \in \Phi$ *y una raíz larga* α. *Entonces para toda raíz larga* $\beta \in \Delta$ *tal que* $\alpha(H_\beta) = 0$ *tenemos que* $|\lambda(H_\beta)| \leq 1$.

Demostración. Por contradicción, supongamos que existe una raíz larga β tal que $\alpha(H_\beta) = 0$ y $|\lambda(H_\beta)| \geq 2$. De la proposición anterior y cambiando a α y a β por sus negativos si es necesario podemos asumir que $\lambda(H_\alpha) = \lambda(H_\beta) = -2$. Notamos también que podemos asumir que Δ no es de tipo G_2 ya que en ese caso no hay raíces largas β tales que $\alpha(H_\beta) = 0$.

Si existen raíces de longitud distinta tenemos que $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$, con α_1, α_2 dadas como en la proposición anterior. De la identidad $2\lambda(H_\alpha) = \lambda(H_{\alpha_1}) + \lambda(H_{\alpha_2})$ podemos asumir que $\lambda(H_{\alpha_1}) \in \{-3, -2\}$ y $\lambda(H_{\alpha_2}) \in \{-2, -1\}$. Nótese que $\beta + 2\alpha_i$ no es una raíz. De otro modo, $\langle \beta + 2\alpha_i, \beta + 2\alpha_i \rangle = 3\langle \beta, \beta \rangle + 4\langle \beta, \alpha_i \rangle \leq \langle \beta, \beta \rangle$, pues recordemos que β es una raíz larga. Luego se tendría que $\alpha_i(H_\beta) \leq -1$ y esto implicaría que $\alpha(H_\beta) = (\alpha_1 + \alpha_2)(H_\beta) \leq -2$ lo cual contradice el hecho de que $\alpha(H_\beta) = 0$, de esto concluimos que $\beta(H_{\alpha_i}) \geq -1$, pero es fácil ver que el caso $\beta(H_{\alpha_i}) = -1$ tampoco es posible ya que si ese fuera el caso se tendría que $\beta + \alpha_i$ sería también una raíz y esto implicaría que $\alpha(H_\beta) \leq -1$, lo cual contradice el hecho de que $\alpha(H_\beta) = 0$. Por lo tanto $\beta(H_{\alpha_i}) \geq 0$ y del hecho de que $\beta(H_\alpha) = 0$ obtenemos que $\beta(H_{\alpha_i}) = 0$.

De lo anterior vemos que $\lambda + \alpha_1 + l\beta, \lambda + \alpha + l\beta \in \Phi$ para $l = 0, 1, 2$ y de este modo se obtiene que $\lambda + \alpha_1 + l\beta \in \Phi_{\alpha_2}$. Se tiene también $(\lambda + 2\alpha + l\beta)(H_{\alpha_2}) \geq 2$, de este modo obtenemos que

$$\{\lambda + k\alpha + l\beta |\ k = 1, 2,\ l = 0, 1, 2\} \subset \Phi_\alpha \cap \Phi_{\alpha_2}.$$

Por hipótesis existen pesos extremales λ_0, λ_1 tales que $(\lambda_0, \lambda_1, \alpha)$ o bien $(\lambda_0, \lambda_1, \alpha_2)$ son triples generadores. De este modo se tiene que $\lambda + \alpha = \lambda_0 + \gamma$ para algún $\gamma \in \Delta_0$. Dado que $\lambda + \alpha$ no es extremal se tiene que $\gamma \neq 0$ y dado que $\lambda_0 + \gamma$ no es extremal se tiene también que $\lambda_0 + 2\gamma \in \Phi$.

Por un lado, $-2 = (\lambda + \alpha)(H_\beta) = \lambda_0(H_\beta) + \gamma(H_\beta) \geq -2 + \gamma(H_\beta)$, la última desigualdad se sigue del hecho de que λ_0 es extremal, luego $\lambda_0(H_\beta) \geq \lambda(H_\beta)$. De esto se obtiene que $\gamma(H_\beta) \leq 0$. Por otro lado, se tiene que $-2 \leq (\lambda_0 + 2\gamma)(H_\beta) = (\lambda + \alpha + \gamma)(H_\beta) = -2 + \gamma(H_\beta)$, luego, $\gamma(H_\beta) \geq 0$.

De este modo se obtiene que $\gamma(H_\beta) = 0$ y por tanto $\lambda_0(H_\beta) = -2$. Notamos que $\gamma + 2\beta \notin \Delta_0$ ya que $\gamma + 2\beta = 0$ implicaría que $\lambda + \alpha + 2\beta = \lambda_0$ pero sabemos que esto no es posible debido a que $\lambda + \alpha + 2\beta$ no es extremal, ahora, si $\gamma + 2\beta \in \Delta$ tendríamos, por ser β una raíz larga, que $\gamma = -\beta$ y así obtendríamos que $\lambda + \alpha + \beta = \lambda_0$ lo cual vemos que tampoco es posible debido a que $\lambda + \alpha + \beta$ no es extremal. De este modo se tiene que $\lambda + \alpha + 2\beta = \lambda_1 + \delta$, para algún $\delta \in \Delta_0$, de manera análoga obtenemos que $\delta \neq 0$, $\lambda_1(H_\beta) = 2$ y que $\delta(H_\beta) = 0$.

De lo anterior vemos que $\Phi_\alpha \cap \Phi_{\alpha_2} \ni \lambda + \alpha + \beta = \lambda_0 + \gamma + \beta = \lambda_1 + \delta - \beta$, pero notamos que ni $\gamma + \beta$ ni $\delta - \beta$ están en Δ_0, lo cual es una contradicción con el hecho de que el triple es generador. □

Proposición 3.23. *Sea* $\mathfrak{g} \subset \mathrm{End}(V)$ *una subálgebra de Lie con* Δ *y* Φ *dados como en la proposición 3.21 y asumamos que todas las raíces tienen la misma longitud. Supongamos que existen raíces* α, β *tales* $\alpha(H_\beta) = 0$, $|\lambda(H_\alpha)| = 2$ *y* $|\lambda(H_\beta)| = 1$

para algún $\lambda \in \Phi$. Entonces para toda raíz γ tal que $\alpha(H_\gamma) = \beta(H_\gamma) = 0$ se tiene que $\lambda(H_\gamma) = 0$.

Demostración. Sea $(\lambda_0, \lambda_1, \alpha)$ un triple generador extremal y supongamos que existe $\lambda \in \Phi$ y raíces β, γ tales que $\lambda(H_\alpha) = -2, \lambda(H_\beta) = \lambda(H_\gamma) = -1$ y $\alpha(H_\beta) = \alpha(H_\gamma) = \beta(H_\gamma) = 0$. De estas suposiciones obtendremos una contradicción. Notamos en primer lugar que

$$\{\lambda + k\alpha + l\beta + m\gamma |\ k = 1, 2,\ l, m = 0, 1\} \subset \Phi_\alpha.$$

De esto se obtiene que $\lambda + \alpha = \lambda_0 + \delta$ para algún $\delta \in \Delta_0$. Dado que $\lambda + \alpha$ no es extremal, concluimos que $\delta \neq 0$ y como antes, $\lambda_0 + 2\delta \in \Phi$.

Supongamos que $\delta(H_\beta), \delta(H_\gamma) \geq 0$. Esto implica que $\delta + \beta + \gamma$ no es una raíz, pues si ese fuera el caso es fácil ver que $\delta + \beta + \gamma$ tendría una longitud mayor a β lo cual no es posible ya que todas las raíces tienen la misma longitud. Por lo tanto $\lambda + \alpha + \beta + \gamma = \lambda_1 + \varepsilon$, para algún $\varepsilon \in \Delta_0$ pero dado que $\lambda + \alpha + \beta + \gamma$ no es extremal mientras que λ_1 sí lo es, tenemos que $\varepsilon \neq 0$. Más aún, $\lambda + \alpha + \gamma = \lambda_0 + \delta + \gamma = \lambda_1 + \varepsilon - \beta$. Dado que $\delta + \gamma$ no es una raíz, ya que tiene una longitud mayor a β, se tiene que $\varepsilon - \beta \in \Delta_0$, pero, dado que $\lambda + \alpha + \gamma$ no es extremal, tenemos de hecho que $\varepsilon - \beta \in \Delta$, con esto obtenemos que $\varepsilon(H_\beta) = 1$. De este modo, reemplazando, si es necesario a λ por $\lambda + \beta + \gamma$, a β, γ por sus negativos e intercambiando a λ_0 y a λ_1, podemos asumir que

$$\delta(H_\beta) = -1, \text{ lo cual implica que } \lambda_0(H_\beta) = 0.$$

Lo anterior implica que $(\lambda_0 + 2\delta)(H_\beta) = -2$ y $(\lambda_0 + 2\delta)(H_\gamma) = (\lambda + \alpha + \delta)(H_\gamma) = -1 + \delta(H_\gamma)$. La proposición anterior implica entonces que $\delta(H_\gamma) \geq 0$.

Así se tiene que $\delta + \gamma, \delta + \beta + \gamma \notin \Delta_0$ y de este modo $\Phi_\alpha \ni \lambda + \alpha + \gamma = \lambda_1 + \eta$ para algún $\eta \in \Delta_0$ y $\Phi_\alpha \ni \lambda + \alpha + \beta + \gamma = \lambda_1 + \eta + \beta$, luego, $\eta + \beta \in \Delta_0$. Más aún, dado que ni $\lambda + \alpha + \gamma$ ni $\lambda + \alpha + \beta + \gamma$ son extremales, se tiene que $\eta, \eta + \beta \in \Delta$ y $\lambda_1 + 2\eta \in \Phi$, de este modo, $\eta(H_\beta) = -1$ y $\lambda_1(H_\beta) = 0$. Se tiene entonces que $(\lambda_1 + 2\eta)(H_\beta) = -2$, $(\lambda_1 + 2\eta)(H_\gamma) = 1 + \eta(H_\gamma)$ y de la proposición anterior se tiene que $\eta(H_\gamma) \leq 0$.

Ahora, $\Phi_\alpha \ni \lambda + 2\alpha = \lambda_1 + \alpha - \gamma + \eta$, y dado que $\eta \neq -\alpha$ pues $-\alpha(H_\beta) = 0$, y $(\alpha - \gamma + \eta)(H_\gamma) \leq -2$, obtenemos que $\alpha - \gamma + \eta \notin \Delta_0$, pues en otro caso (2.2) implicaría que $\alpha - \gamma + \eta = -\gamma$, es decir, $\eta = -\alpha$. De este modo se tiene que $\lambda + 2\alpha = \lambda_0 + \delta + \alpha$ y entonces $\delta + \alpha \in \Delta$ pues el hecho de que $\delta(H_\beta) = -1$ impide que $\delta = -\alpha$. De aquí se tiene que $\delta(H_\alpha) = -1$. Procediendo de manera análoga a lo anterior obtenemos que $\eta(H_\alpha) = -1$ y así, $\lambda_i(H_\alpha) = 1$ para $i = 0, 1$.

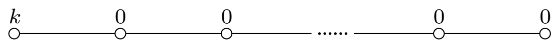
Dado que $(\lambda_0 + 2\delta)(H_\beta) = -2$ y $(\lambda_0 + 2\delta)(H_\alpha) = (\lambda_0 + 2(\delta + \beta))(H_\alpha) = -1$, se sigue que $\lambda_0 + \alpha + 2\delta, \lambda_0 + \alpha + 2(\delta + \beta) \in \Phi_\alpha$. Por otro lado, dado que $\delta \neq -\alpha$, $\delta + \beta \neq -\alpha$ y $\alpha + 2\delta, \alpha + 2(\delta + \beta) \neq 0$, se tiene que $\alpha + 2\delta, \alpha + 2(\delta + \beta) \notin \Delta_0$, esto implica que $\lambda_0 + 2\delta + \alpha - \lambda_1, (\lambda_0 + 2\delta + \alpha - \lambda_1) + 2\beta \in \Delta_0$ lo cual es posible si y solo si $\lambda_0 + 2\delta + \alpha - \lambda_1 = -\beta$ por (2.2), de esto obtenemos que

$$\eta = -(\alpha + \beta - \gamma + \delta).$$

Ahora, $(\lambda_1 + 2\eta)(H_\alpha) = -1$, lo cual implica que $\lambda_1 + 2\eta + \alpha = \lambda_0 + 2\delta - \beta \in \Phi_\alpha$ y el hecho de que $\alpha + 2\eta, -\beta + 2\gamma \notin \Delta_0$ nos dan una contradicción con el hecho de que $(\lambda_0, \lambda_1, \alpha)$ es un triple generador. Notamos que la demostración dada anteriormente está completa debido a que la proposición anterior nos garantiza que es suficiente con estudiar el caso $|\lambda(H_\gamma)| = 1$. □

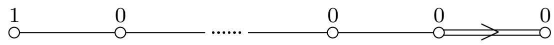
Finalizamos esta sección enunciando una clasificación de las álgebras de Berger irreducibles complejas con parte semisimple simple que tienen asociados triples generadores extremales.

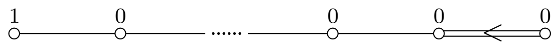
Teorema 3.24. [**Sc**, Prop. 3.18] *Sea $\mathfrak{g} \subset \mathrm{End}(V)$ un álgebra de Berger irreducible con $\mathfrak{g}_s$ simple, Δ y Φ dados como antes y supongamos que existe un triple generador extremal $(\lambda_0, \lambda_1, \alpha)$. Entonces se tiene que el peso dominante es una raíz, o bien, la representación de $\mathfrak{g}_s$ en V es congruente a una de las siguientes representaciones:*

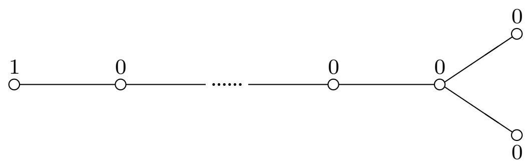
(i) 

con $k = 1, 2$

(ii) 

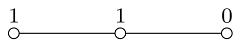
(iii) 

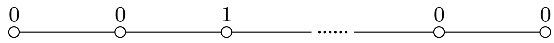
(iv) 

(v) 

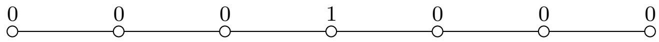
(vi) 

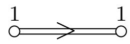
para $k \leq 3$

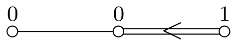
(vii) 

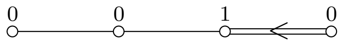
(viii) 

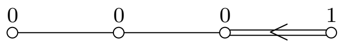
con $n = 5, 6$

(ix) 

(x) 

(xi) 

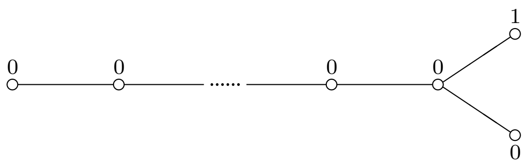
(xii) 

(xiii) 

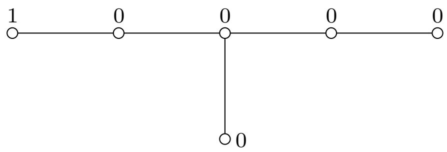
para $n \leq 7$

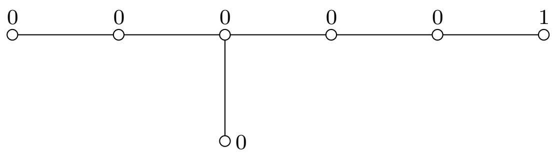
(xiv) 

para $n \leq 7$

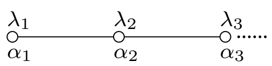
(xv) 

para $5 \leq n \leq 8$

(xvi) 

(xvii) 

Donde



es la representación del álgebra de Lie de tipo el correspondiente diagrama de Dynkin tal que su peso extremo está dado por $\lambda = \lambda_1\omega_1 + \lambda_2\omega_2 + \lambda_3\omega_3 + \cdots$*, con* $\lambda_i \in \mathbb{Z}$ *y* $\{\omega_1, \omega_2, \ldots\}$ *es el conjunto de pesos fundamentales asociado al sistema fundamental de raíces* $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots\}$*.*

A continuación damos ejemplos de representaciones correspondientes a los diagramas dados en el teorema anterior:

	$\mathfrak{g}_s$	V	$\dim V$
(i)	$\mathfrak{sl}(n+1,\mathbb{C})$	$\mathrm{Sym}^k\,\mathbb{C}^{n+1}$	$\binom{n+k}{k}$
(ii)	$\mathfrak{sl}(n+1,\mathbb{C})$	$\Lambda^2\mathbb{C}^{n+1}$	$\frac{n(n+1)}{2}$
(iii)	$\mathfrak{so}(2n+1,\mathbb{C})$	$\mathbb{C}^{2n+1}$	$2n+1$
(iv)	$\mathfrak{sp}(n,\mathbb{C})$	$\mathbb{C}^{2n}$	$2n$
(v)	$\mathfrak{so}(2n,\mathbb{C})$	$\mathbb{C}^{2n}$	$2n$
(vi)	$\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$	$\mathrm{Sym}^k\,\mathbb{C}^2$	$k+1$
(vii)	$\mathfrak{sl}(4,\mathbb{C})$	$\Lambda^{2,1}\mathbb{C}^4$	20
$(viii)$	$\mathfrak{sl}(n+1,\mathbb{C})$	$\Lambda^3\mathbb{C}^{n+1}$	$\frac{n(n+1)(n-1)}{6}$
(ix)	$\mathfrak{sl}(8,\mathbb{C})$	$\Lambda^4\mathbb{C}^8$	70
(x)	$\mathfrak{so}(5,\mathbb{C})$	$\ker(\mathbb{R}^5\otimes \$_5 \longrightarrow \$_5)$	16
(xi)	$\mathfrak{sp}(3,\mathbb{C})$	$\Lambda^3_0\mathbb{C}^6$	14
(xii)	$\mathfrak{sp}(4,\mathbb{C})$	$\Lambda^3_0\mathbb{C}^8$	48
$(xiii)$	$\mathfrak{sp}(4,\mathbb{C})$	$\Lambda^4_0\mathbb{C}^8$	42
(xiv)	$\mathfrak{so}(2n+1,\mathbb{C})$	$\$_{2n+1}$	2^n
(xv)	$\mathfrak{so}(2n,\mathbb{C})$	$\$^+_{2n}$	2^{n-1}
(xvi)	$\mathfrak{e}_6$	W_6	27
$(xvii)$	$\mathfrak{e}_7$	W_7	56

En la tabla anterior, $\Lambda^{2,1}\mathbb{C}^4 = \ker(\Lambda^2\mathbb{C}^4\otimes\mathbb{C}^4 \xrightarrow{\wedge} \Lambda^3\mathbb{C}^4)$, $\$_m$ es la representación espinorial de $\mathfrak{so}(m,\mathbb{C})$ y $\$_m = \$^+_m\oplus\$^-_m$ (para una descripción explícita ver por ejemplo [**FH**]). El espacio $\Lambda^k_0 V$ está dado por $\Lambda^k_0 V = \ker(\Lambda^k V \longrightarrow \Lambda^{k-2}V)$, donde $\Lambda^k V\longrightarrow\Lambda^{k-2}V$ está dado por

$$v_1\wedge\cdots\wedge v_k \longmapsto \sum_{i<j}(-1)^{i+j-1}\Omega(v_i,v_j)v_1\wedge\cdots\wedge\hat{v}_i\wedge\cdots\wedge\hat{v}_j\wedge\cdots\wedge v_k$$

donde Ω es una forma simpléctica en V.

Finalmente, $\mathfrak{e}_6,\mathfrak{e}_7$ son álgebras de Lie del tipo E_6, E_7, respectivamente y se tiene que $\mathfrak{e}_6$ tiene dos representaciones irreducibles de dimensión 27, mientras que $\mathfrak{e}_7$ tiene una representación irreducible de dimensión 56 (una construcción explícita de $\mathfrak{e}_6$ y $\mathfrak{e}_7$ puede ser encontrada en [**Yo**]).

5. Representaciones complejas tensoriales

En esta sección clasificaremos las álgebras de Berger irreducibles complejas cuya parte semisimple no es simple. El lema de Schur implica que la representación es tensorial, es decir, se tiene que $V = V_1\otimes V_2$, donde V_i es también una representación. Más aún, hay una aplicación natural de $\mathrm{End}(V_1)\oplus\mathrm{End}(V_2)$ a $\mathrm{End}(V)$ inducida por la representación tensorial, a saber,

$$\rho:\mathrm{End}(V_1)\oplus\mathrm{End}(V_2)\longrightarrow\mathrm{End}(V)$$

dada por

$$f_1\oplus f_2\longmapsto\big(\rho(f_1\oplus f_2): x\otimes y\longmapsto f_1x\otimes y + x\otimes f_2 y\big).$$

Del hecho de que

$$\{X \in \mathrm{End}(V) |\ [X, \mathrm{Id}_{V_1} \otimes g] = 0 \text{ para todo } g \in \mathrm{End}(V_2)\} = \mathrm{End}(V_1) \otimes \mathrm{Id}_{V_2}$$

se tiene que $\ker(\rho) = \mathrm{gen}_{\mathbb{C}}\{\mathrm{Id}_{V_1} \oplus -\mathrm{Id}_{V_2}\}$.

Definimos $\mathfrak{g} \subset \mathrm{End}(V)$ por

$$\mathfrak{g} = \mathrm{End}(V_1) \oplus_{\mathrm{Id}} \mathrm{End}(V_2) = (\mathrm{End}(V_1) \oplus \mathrm{End}(V_2)) \big/ \ker(\rho).$$

De lo anterior se tiene que cualquier álgebra de Lie irreducible $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ es de la forma $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_1 \oplus \mathfrak{h}_2$ con $\mathfrak{h}_i \subset \mathrm{End}(V_i)$ irreducible. Denotamos por Φ^i y Δ^i a los conjuntos de pesos y raíces de $\mathfrak{h}_i$, respectivamente. Se tiene entonces que $\Delta = \Delta^1 \cup \Delta^2$ y que $\Phi = \Phi^1 + \Phi^2$, donde Φ, Δ son los conjuntos de pesos y raíces de $\mathfrak{h}$, respectivamente. Se tiene también que, para $\alpha \in \Delta^1$, $\Phi_\alpha = \Phi^1_\alpha + \Phi^2$.

Consideramos en primer lugar el caso en el que $\dim V_i \geq 3$ para $i = 1, 2$.

Lema 3.25. *Sea $V = V_1 \otimes V_2$, $\mathfrak{g} \subset \mathrm{End}(V)$ dada como antes y supongamos que $\mathfrak{h} \cong \mathfrak{h}_1 \oplus \mathfrak{h}_2 \subset \mathfrak{g}$ es un álgebra de Berger irreducible. Entonces Φ^i_α tiene a lo más dos elementos para todo $\alpha \in \Delta^i$.*

Demostración. Supongamos que existe $\alpha \in \Delta^1$ tal que Φ^1_α tiene más de dos elementos. Por la proposición 3.16 existe un triple generador $(\lambda_0 + \mu_0, \lambda_1 + \mu_1, \alpha)$ con $\lambda_i \in \Phi^1, \mu_i \in \Phi^2$. Dado que $\dim V_2 \geq 3$ se tiene que Φ^2 contiene al menos 3 elementos. De este modo, existen elementos $\lambda \in \Phi^1_\alpha$, $\lambda \neq \lambda_0, \lambda_1$ y $\mu \in \Phi^2$, $\mu \neq \mu_0, \mu_1$. Esto implica que $\lambda + \mu \in \Phi_\alpha$ pero se nota que $(\lambda - \lambda_i) + (\mu - \mu_i) \notin \Delta$ para $i = 0, 1$ lo cual contradice el hecho de que $(\lambda_0 + \mu_0, \lambda_1 + \mu_1, \alpha)$ es un triple generador. □

Lema 3.26. *Sea $\mathfrak{h} \subset \mathrm{End}(V)$ una subálgebra irreducible y sea $\mathfrak{h}_s$ la parte semisimple de $\mathfrak{h}$. Supongamos que para algún $\alpha \in \Delta$ Φ_α contiene a lo más dos elementos. Entonces $\mathfrak{h}_s$ es conjugada a una de las siguientes representaciones.*

1) *$\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ actuando en $\mathbb{C}^n$. En este caso, Φ_α consta de un solo elemento para todo $\alpha \in \Delta$.*
2) *$\mathfrak{so}(n, \mathbb{C})$ actuando en $\mathbb{C}^n$. En este caso, Φ_α consta de dos elementos para todo $\alpha \in \Delta$ y su suma es α.*
3) *$\mathfrak{sp}(n, \mathbb{C})$ actuando en $\mathbb{C}^{2n}$. En este caso, Φ_α consta de dos elementos si $\alpha \in \Delta$ es una raíz corta, y su suma es α, y $\Phi_\alpha = \{\frac{1}{2}\alpha\}$ si $\alpha \in \Delta$ es una raíz larga.*
4) *$\mathfrak{g}_2$ actuando en $\mathbb{C}^7$. En este caso se tiene que Φ_α consta de dos elementos si α es una raíz larga y Φ_α consta de cuatro elementos si α es corta.*
5) *$\mathfrak{spin}(7, \mathbb{C})$ actuando en $\mathbb{C}^8$. En este caso se tiene que Φ_α consta de dos elementos si $\alpha \in \Delta$ es una raíz larga, y su suma es α, y Φ_α consta de cuatro elementos si α es corta.* [3]

[3]El álgebra $\mathfrak{spin}(n, \mathbb{C})$ está definida como el álgebra de Lie del grupo compacto y conexo $\mathrm{Spin}(n, \mathbb{C})$ donde este grupo está definido en términos del álgebra de Clifford de $\mathbb{C}^n$, $\mathcal{C}(n, \mathbb{C}) := T(\mathbb{C}^n)/(\mathcal{I} := \langle z \otimes z + b(z, z) |\ z \in \mathbb{C}^n \rangle)$, con $b(\cdot, \cdot)$ el producto escalar simétrico usual. Denotamos a las clases $z_1 \otimes \cdots \otimes z_k + \mathcal{I}$ con $z_i \in \mathbb{C}^n$ como $z_1 \cdots z_k$. De esto definimos $\mathcal{C}^+(n, \mathbb{C}) := \{z_1 \cdots z_{2k} |\ z_i \in \mathbb{C}^n,\ k \in \mathbb{N}\}$ y para $g = z_1 \cdots z_k$ definimos $g^* = (-1)^k z_k \cdots z_1$. Finalmente el grupo $\mathrm{Spin}(n, \mathbb{C})$ está definido como $\mathrm{Spin}(n, \mathbb{C}) = \{g \in \mathcal{C}^+(n, \mathbb{C}) |\ gg^* = 1 \text{ y } gzg^* \in \mathbb{C}^n\ \forall z \in \mathbb{C}^n\}$. Más aún, se tiene que como álgebras de Lie, $\mathfrak{spin}(n, \mathbb{C}) \cong \mathfrak{so}(n, \mathbb{C})$.

6) $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) \oplus \mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$ *actuando en* $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^n$. *En este caso* Φ_α *consta de dos elementos si* α *es una raíz del sumando* $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$ *y consta de* n *elementos si* α *es una raíz del sumando* $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$.

7) $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) \oplus \mathfrak{sp}(n,\mathbb{C})$ *actuando en* $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^{2n}$. *En este caso* Φ_α *consta de dos elementos si* α *es una raíz larga del sumando* $\mathfrak{sp}(n,\mathbb{C})$*;* Φ_α *consta de cuatro elementos si* α *es una raíz corta del sumando* $\mathfrak{sp}(n,\mathbb{C})$ *y consta de* $2n$ *elementos si* α *es una raíz del sumando* $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$.

Demostración. Supongamos que Φ_α tiene a lo más dos elementos para algún $\alpha \in \Delta$. Es claro que $|\lambda(H_\alpha)| \leq 2$ para todo $\lambda \in \Phi$ pues de otro modo $\lambda + k\alpha \in \Phi_\alpha$ para $k = 1, 2, 3$ (esto en el caso en el que $\lambda(H_\alpha) < -2$, en el caso $\lambda(H_\alpha) > 2$ se tiene que $\lambda - k\alpha \in \Phi_\alpha$ con $k = 1, 2, 3$).

Supongamos que $\lambda(H_\alpha) = -2$ para algún $\lambda \in \Phi$. Así $\Phi_\alpha = \{\lambda + \alpha, \lambda + 2\alpha\}$. Si existe $\beta \in \Delta$ tal que $\beta(H_\alpha) = 1$ entonces, después de reemplazar a β por $\alpha - \beta$ si fuera necesario, podemos asumir que $\lambda(H_\beta) < 0$, de aquí obtenemos que $\lambda + \alpha + \beta \in \Phi_\alpha$, lo cual es una contradicción con el hecho de que Φ_α contiene a lo más dos elementos, pues $\beta \neq 0, \alpha$. De este modo concluimos que no existe $\beta \in \Delta$ tal que $\beta(H_\alpha) = 1$. Esto implica que $\operatorname{rk} \mathfrak{h}_s = 1$ o bien, Δ es de tipo B_n con α una raíz corta. En el primer caso se tiene que $\mathfrak{h}_s \subset \operatorname{End}(V)$ es la representación estándar de $\mathfrak{so}(3,\mathbb{C})$ en $\mathbb{C}^3$, mientras que en el segundo caso se tiene que $\mathfrak{h}_s \subset \operatorname{End}(V)$ es la representación estándar de $\mathfrak{so}(2n+1,\mathbb{C})$ en $\mathbb{C}^{2n+1}$, con $n \geq 2$.

Ahora, supongamos que $|\lambda(H_\alpha)| \leq 1$ para todo $\lambda \in \Phi$ y que existe $\beta \in \Delta_\alpha^\perp := \{\gamma \in \Delta |\ \gamma(H_\alpha) = 0\}$ con $\lambda(H_\beta) = -1$. Entonces $\Phi_\alpha = \{\lambda + \alpha, \lambda + \alpha + \beta\}$. De este modo $\beta \in \Delta_\alpha^\perp$ con esta propiedad es único y de esto se obtiene que $\{\pm\beta\}$ es un sumando directo de $\Delta_\alpha^\perp$.

Lo anterior implica que Δ es de tipo A_3, B_n (con α una raíz larga), C_n (con α una raíz corta), D_n, G_2 ó Δ contiene a A_1 como sumando directo. De aquí se obtienen las representaciones listadas en la proposición.

Por último, supongamos que $\lambda(H_\alpha) = 1$ y $\lambda(H_\beta) = 0$ para todo $\beta \in \Delta_\alpha^\perp$. Si Δ no es de tipo A_n se tiene que $\lambda = \frac{1}{2}\alpha$ lo cual es posible solo si Δ es de tipo C_n y como es sabido esto nos da la representación estándar de $\mathfrak{sp}(n,\mathbb{C})$ en $\mathbb{C}^{2n}$. Si Δ es de tipo A_n obtenemos la representación estándar de $\mathfrak{sl}(n+1,\mathbb{C})$ en $\mathbb{C}^{n+1}$. $\square$

Con estos resultados nos es posible obtener la siguiente clasificación.

Teorema 3.27. *Sean* V_1, V_2 *espacios vectoriales complejos de dimensión finita, digamos* $\dim V_i = n_i \geq 3$, *y sea* $V = V_1 \otimes V_2$, $\mathfrak{g} \subset \operatorname{End}(V)$ *dada como al principio de esta sección.*

Si $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ *es irreducible se tiene que* $\mathfrak{h}$ *es de Berger fuerte si y solo si es congruente a una de las entradas de la siguiente tabla*

$\mathfrak{h}$	$K(\mathfrak{h})$	$K^1(\mathfrak{h})$
$\mathfrak{gl}(n_1,\mathbb{C}) \oplus_{\mathrm{Id}} \mathfrak{gl}(n_2,\mathbb{C})$	$V^* \otimes V^*$	$\mathrm{Sym}^2 V^* \otimes V^*$
$\mathfrak{sl}(n_1,\mathbb{C}) \oplus \mathfrak{sl}(n_2,\mathbb{C})$	$\mathrm{Sym}^2 V^*$	$\mathrm{Sym}^3 V^*$
$\mathfrak{so}(n_1,\mathbb{C}) \oplus \mathfrak{so}(n_2,\mathbb{C})$	$\mathbb{C}$	$\{0\}$
$\mathfrak{sp}(\frac{n_1}{2},\mathbb{C}) \oplus \mathfrak{sp}(\frac{n_2}{2},\mathbb{C})$	$\mathbb{C}$	$\{0\}$

Para la demostración del teorema anterior necesitamos un par de resultados adicionales.

Lema 3.28. *Sea $V = V_1 \otimes V_2$ con V_1, V_2 espacios vectoriales complejos tales que* $\dim V_i \geq 3$ *para $i = 1, 2$. Se tiene que*

$$K(\mathrm{End}(V_1) \oplus_{\mathrm{Id}} \mathrm{End}(V_2)) = V^* \otimes V^*.$$

Demostración. Definimos la aplicación

$$R : V^* \otimes V^* \longrightarrow K(\mathrm{End}(V_1) \oplus_{\mathrm{Id}} \mathrm{End}(V_2)), \qquad \omega \longmapsto R^\omega,$$

con R^ω dada por

$$R^\omega(e_1 \otimes x_1, e_2 \otimes x_2)(e_3 \otimes x_3) = \\ R^{\omega,V_1}(e_1 \otimes x_1, e_2 \otimes x_2)e_3 \otimes x_3 + e_3 \otimes R^{\omega,V_2}(e_1 \otimes x_1, e_2 \otimes x_2)x_3,$$

y con $R^{\omega,V_1}, R^{\omega,V_2}$ dadas por

$$R^{\omega,V_1}(e_1 \otimes x_1, e_2 \otimes x_2)e_3 = \omega(e_1 \otimes x_1, e_3 \otimes x_2)e_2 - \omega(e_2 \otimes x_2, e_3 \otimes x_1)e_1$$

y

$$R^{\omega,V_2}(e_1 \otimes x_1, e_2 \otimes x_2)x_3 = \omega(e_1 \otimes x_1, e_2 \otimes x_3)x_2 - \omega(e_2 \otimes x_2, e_1 \otimes x_3)x_1.$$

Un cálculo directo verifica que $R^\omega \in K(\mathrm{End}(V_1) \oplus_{\mathrm{Id}} \mathrm{End}(V_2))$.
Notamos que del hecho de que

$$V^* \otimes V^* \cong \mathrm{Sym}^2 V_1 \otimes \mathrm{Sym}^2 V_2^* \oplus \Lambda^2 V_1^* \otimes \Lambda^2 V_2^* \oplus \mathrm{Sym}^2 V_1^* \otimes \Lambda^2 V_2^* \oplus \Lambda^2 V_1^* \otimes \mathrm{Sym}^2 V_2^*,$$

todo $\omega \in V^* \otimes V^*$ admite una descomposición de la forma

$$\omega = \omega^{\mathrm{sym}} + \omega^{\mathrm{alt}},$$

con ω^{sym} simétrica y ω^{alt} alternante.
No es difícil demostrar que

$$\mathrm{tr}_{V_1}(R^{\omega,V_1}(e_1 \otimes x_1, e_2 \otimes x_2)) = 2\omega^{\mathrm{alt}}(e_1 \otimes x_1, e_2 \otimes x_2) = \mathrm{tr}_{V_2}(R^{\omega,V_2}(e_1 \otimes x_1, e_2 \otimes x_2)).$$

Definimos

$$\psi_{V_1} : V^* \otimes V^* \longrightarrow \mathbb{C},$$

definida como $\psi_{V_1}(e_1 \otimes x_1, e_2 \otimes x_2) = \mathrm{tr}_{V_1}(e_3 \longmapsto R^{\omega,V_1}(e_1 \otimes x_1, e_3 \otimes x_2)e_2)$.

Sea $\{f_1, \dots, f_{n_1}\}$ una base para V_1 con base dual $\{df_1, \dots, df_{n_1}\}$. De la primera identidad de Bianchi y del hecho de que $df_\mu(e \otimes x) := df_\mu(e)x$ obtenemos que

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_\mu df_\mu(R^\omega(e_1 \otimes x_1, e_2 \otimes x_2)(f_\mu \otimes x_3) + R^\omega(e_2 \otimes x_2, f_\mu \otimes x_3)(e_1 \otimes x_1) \\ &\quad + R^\omega(f_\mu \otimes x_3, e_1 \otimes x_1)(e_2 \otimes x_2)). \end{aligned}$$

De este modo obtenemos que

$$\begin{aligned} &-\mathrm{tr}_{V_1}(R^{\omega,V_1}(e_1 \otimes x_1, e_2 \otimes x_2))x_3 - \psi_{V_1}(e_2 \otimes x_2, e_1 \otimes x_3)x_1 \\ &\quad + \psi_{V_1}(e_1 \otimes x_1, e_2 \otimes x_3)x_2 \\ &= n_1 R^{\omega,V_2}(e_1 \otimes x_1, e_2 \otimes x_2)x_3 + R^{\omega,V_2}(e_2 \otimes x_2, e_1 \otimes x_3)x_1 \\ &\quad + R^{\omega,V_2}(e_2 \otimes x_3, e_1 \otimes x_1)x_2. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Se nota que dado $R \in K(\mathrm{End}(V_1) \oplus_{\mathrm{Id}} \mathrm{End}(V_2))$ existe una única descomposición de la forma $R = R^{V_1} \otimes \mathrm{Id}_{V_2} + \mathrm{Id}_{V_1} \otimes R^{V_2}$ tal que $\mathrm{tr}_{V_1}(R^{V_1}) = \mathrm{tr}_{V_2}(R^{V_2})$ y que para dicha descomposición (3.4) sigue siendo válida. Algunas observaciones adicionales, consecuencia de (3.4) son

1) Si $R \in K(\mathrm{End}(V_1) \oplus_{\mathrm{Id}} \mathrm{End}(V_2))$ con descomposición
$$R = R^{V_1} \otimes \mathrm{Id}_{V_2} + \mathrm{Id}_{V_1} \otimes R^{V_2}$$
tal que $R^{V_1} = 0$ se tiene entonces que $R^{V_2} = 0$ y viceversa.
2) Si $R \in K(\mathrm{End}(V_1) \oplus_{\mathrm{Id}} \mathrm{End}(V_2))$ con descomposición
$$R = R^{V_1} \otimes \mathrm{Id}_{V_2} + \mathrm{Id}_{V_1} \otimes R^{V_2}$$
tal que $\mathrm{tr}_{V_1}(R^{V_1}) = 0$ se tiene entonces que ψ_{V_1} determina a R^{V_2}.

Para mostrar 2) demostraremos que la aplicación

$$\theta_{V_1} : V^* \otimes V^* \otimes \mathrm{End}(V_2) \longrightarrow V^* \otimes V^* \otimes \mathrm{End}(V_2)$$

dada por

$$\begin{aligned} &(\theta_{V_1}\rho)(e_1 \otimes x_1, e_2 \otimes x_2)x_3 = \\ &\quad n_1\rho(e_1 \otimes x_1, e_2 \otimes x_2)x_3 + \rho(e_2 \otimes x_2, e_1 \otimes x_3)x_1 + \rho(e_2 \otimes x_3, e_1 \otimes x_1)x_2 \end{aligned}$$

es invertible.

Se tiene de hecho que $\theta_{V_1}^{-1}$ está dada por

$$\begin{aligned} (\theta_{V_1}^{-1}\rho)(e_1 \otimes x_1, e_2 \otimes x_2)x_3 &= q_0\rho(e_1 \otimes x_1, e_2 \otimes x_2)x_3 \\ &+ q_1\rho(e_2 \otimes x_3, e_1 \otimes x_1)x_2 + q_2\rho(e_1 \otimes x_2, e_2 \otimes x_3)x_1 \\ &+ q_3\rho(e_2 \otimes x_1, e_1 \otimes x_2)x_3 + q_4\rho(e_1 \otimes x_3, e_2 \otimes x_1)x_2 \\ &+ q_5\rho(e_2 \otimes x_2, e_1 \otimes x_3)x_1 \end{aligned}$$

donde

$$q_0 = \frac{n_1^3 - 3n_1}{n_1^4 - 5n_1^2 + 4}, \qquad q_2 = \frac{n_1}{n_1^4 - 5n_1^2 + 4},$$

$$q_4 = \frac{n_1}{n_1^4 - 5n_1^2 + 4}, \qquad q_3 = \frac{-2}{n_1^4 - 5n_1^2 + 4},$$

$$q_1 = \frac{-n_1^2 + 2}{n_1^4 - 5n_1^2 + 4}, \qquad q_5 = \frac{-n_1^2 + 2}{n_1^4 - 5n_1^2 + 4}.$$

Notamos que los q_i están bien definidos dado que $n_1^4 - 5n_1^2 + 4 = (n_1 - 2)(n_1 + 2)(n_1 - 1)(n_1 + 1)$ y $n_1 = \dim V_1 \geq 3$. De este modo concluimos 2).

Ahora, definimos

$$\begin{aligned} &R^{\omega,V_1,0}(e_1 \otimes x_1, e_2 \otimes x_2)e_3 = \\ &\qquad \omega(e_1 \otimes x_1, e_3 \otimes x_2)e_2 - \omega(e_2 \otimes x_2, e_3 \otimes x_1)e_1 - \frac{2}{n_1}\omega^{\mathrm{alt}}(e_1 \otimes x_1, e_2 \otimes x_2)e_3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &R^{\omega,V_2,1}(e_1 \otimes x_1, e_2 \otimes x_2)x_3 = \\ &\qquad \omega(e_1 \otimes x_1, e_2 \otimes x_3)x_2 - \omega(e_2 \otimes x_2, e_1 \otimes x_3)x_1 + \frac{2}{n_1}\omega^{\mathrm{alt}}(e_1 \otimes x_1, e_2 \otimes x_2)x_3. \end{aligned}$$

No es difícil ver que $\mathrm{tr}_{V_1}(R^{\omega,V_1,0}) = 0$.

Definimos también

$$\begin{aligned} &\psi_{V_1}^{\omega,0}(e_1 \otimes x_1, e_2 \otimes x_2) = \\ &\qquad n_1\omega(e_1 \otimes x_1, e_2 \otimes x_2) - \omega(e_1 \otimes x_2, e_2 \otimes x_1) - \frac{2}{n_1}\omega^{\mathrm{alt}}(e_1 \otimes x_1, e_2 \otimes x_2), \end{aligned}$$

$$\Psi : V^* \otimes V^* \longrightarrow V^* \otimes V^*, \quad \omega \longmapsto \psi_{V_1}^{\omega,0}.$$

Se tiene que Ψ es diagonalizable con eigenvalores $n_1 - 1$, $n_1 + 1$, $n_1 + 1 - \frac{2}{n_1}$ y $n_1 - (1 + \frac{2}{n_1})$. Del hecho de que $n_1 \geq 3$ obtenemos que Ψ es invertible.

Ahora, sea $R \in K(\mathrm{End}(V_1) \oplus_{\mathrm{Id}} \mathrm{End}(V_2))$ y sea $R = R^{V_1} \otimes \mathrm{Id}_{V_2} + \mathrm{Id}_{V_1} \otimes R^{V_2}$ con $\mathrm{tr}_{V_1} R^{V_1} = 0$ (se tiene que tal descomposición existe para todo R y además es única). De 2) sabemos que ψ_{V_1} determina R^{V_2}. Definimos

$$\omega = \Psi^{-1}(\psi_{V_1}).$$

Consideramos R^ω como antes con la descomposición

$$R^\omega = R^{\omega,V_1,0} \otimes \mathrm{Id}_{V_2} + \mathrm{Id}_{V_1} \otimes R^{\omega,V_2,1}.$$

Por definición se tiene que $\psi_{V_1}^{\omega,0} = \Psi(\omega) = \psi_{V_1}$. De este modo obtenemos que

$$R - R^\omega = (R^{V_1} - R^{\omega,V_1,0}) \otimes \mathrm{Id}_{V_2} + \mathrm{Id}_{V_1} \otimes (R^{V_2} - R^{\omega,V_2,1}).$$

Dado que $\mathrm{tr}_{V_1}(R^{V_1} - R^{\omega,V_1,0}) = 0$, 2) implica que $\psi_{V_1} - \psi_{V_1}^{\omega,0}$ determina $R^{V_2} - R^{\omega,V_2,1}$. Pero del hecho de que $\psi_{V_1} - \psi_{V_1}^{\omega,0} = 0$ obtenemos que $R^{V_2} - R^{\omega,V_2,1} = 0$ y de 1) obtenemos que $R^{V_1} - R^{\omega,V_1,0} = 0$, luego, $R = R^\omega$, es decir, R es una aplicación sobreyectiva.

Mostramos ahora que R es inyectiva. Comenzamos definiendo

$$\mathrm{Ric} : K(\mathrm{End}(V_1) \oplus_{\mathrm{Id}} \mathrm{End}(V_2)) \longrightarrow V^* \otimes V^*, \qquad R \longmapsto \mathrm{Ric}\, R,$$

donde $\mathrm{Ric}\, R$ está dada por

$$(\mathrm{Ric}\, R)(e_1 \otimes x_1, e_2 \otimes x_2) = \mathrm{tr}_V(e_3 \otimes x_3 \longmapsto R(e_3 \otimes x_3, e_1 \otimes x_1)(e_2 \otimes x_2)).$$

Para $\omega \in V^* \otimes V^*$ y $R^\omega \in K(\mathrm{End}(V_1) \oplus_{\mathrm{Id}} \mathrm{End}(V_2))$ con la descomposición

$$R^\omega = R^{\omega,V_1} \otimes \mathrm{Id}_{V_2} + \mathrm{Id}_{V_1} \otimes R^{\omega,V_2}$$

Definimos $\mathrm{Ric}^{\omega,V_1}, \mathrm{Ric}^{\omega,V_2} \in V^* \otimes V^*$ dados por

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ric}^{\omega,V_1}(e_1 \otimes x_1, e_2 \otimes x_2) &= \mathrm{tr}_V[e_3 \otimes x_3 \longmapsto (R^{\omega,V_1}(e_3 \otimes x_3, e_1 \otimes x_1)e_2) \otimes x_2],\\
\mathrm{Ric}^{\omega,V_2}(e_1 \otimes x_1, e_2 \otimes x_2) &= \mathrm{tr}_V[e_3 \otimes x_3 \longmapsto e_2 \otimes R^{\omega,V_1}(e_3 \otimes x_3, e_1 \otimes x_1)x_2].
\end{aligned}$$

Notamos que

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ric}^{\omega,V_1}(e_1 \otimes x_1, e_2 \otimes x_2) &= \omega(e_1 \otimes x_2, e_2 \otimes x_1) - n_1\omega(e_1 \otimes x_1, e_2 \otimes x_2)\\
\mathrm{Ric}^{\omega,V_2}(e_1 \otimes x_1, e_2 \otimes x_2) &= \omega(e_2 \otimes x_1, e_1 \otimes x_2) - n_2\omega(e_1 \otimes x_1, e_2 \otimes x_2)
\end{aligned}$$

Definimos también

$$\mathrm{flip}_{V_1}, \mathrm{flip}_{V_2} : V^* \otimes V^* \longrightarrow V^* \otimes V^*,$$

dadas por

$$\begin{aligned}
(\mathrm{flip}_{V_1} \eta)(e_1 \otimes x_1, e_2 \otimes x_2) &= \eta(e_2 \otimes x_1, e_1 \otimes x_2),\\
(\mathrm{flip}_{V_2} \eta)(e_1 \otimes x_1, e_2 \otimes x_2) &= \eta(e_1 \otimes x_2, e_2 \otimes x_1).
\end{aligned}$$

De este modo obtenemos que

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ric}^{\omega,V_1} &= (\mathrm{flip}_{V_2} - n_1 \mathrm{Id}_{V^* \otimes V^*})\omega,\\
\mathrm{Ric}^{\omega,V_2} &= (\mathrm{flip}_{V_1} - n_2 \mathrm{Id}_{V^* \otimes V^*})\omega.
\end{aligned}$$

De la definición de Ric obtenemos que

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ric}\, R^\omega &= \mathrm{Ric}^{\omega,V_1} + \mathrm{Ric}^{\omega,V_2}\\
&= (\mathrm{flip}_{V_1} + \mathrm{flip}_{V_2} - n_1 \mathrm{Id}_{V^* \otimes V^*} - n_2 \mathrm{Id}_{V^* \otimes V^*})\omega.
\end{aligned}$$

Utilizando la descomposición para $V^* \otimes V^*$ dada al principio de la demostración y el hecho de que flip_{V_i} es una involución para $i = 1, 2$, obtenemos que los eigenvalores de $\mathrm{flip}_{V_1} + \mathrm{flip}_{V_2} - n_1 \mathrm{Id}_{V^* \otimes V^*} - n_2 \mathrm{Id}_{V^* \otimes V^*}$ son $2 - n_1 - n_2$, $-(n_1 + n_2)$ y $-(2 + n_1 + n_2)$. Del hecho de que $n_1 + n_2 \geq 6$ obtenemos que todos los eigenvalores son negativos y por tanto la aplicación $\omega \longmapsto \mathrm{Ric}\, R^\omega$ es invertible. De esto obtenemos que la aplicación R es inyectiva. □

Corolario 3.29. *Sean V_1, V_2 espacios vectoriales complejos de dimensión al menos 3 y sea b una forma bilineal simétrica y no degenerada en V_1, se tiene entonces que*

$$K(\mathfrak{so}(V_1, b) \oplus \mathfrak{sl}(V_2)) = \mathbb{C}b \otimes \mathrm{Sym}^2 V_2^*.$$

Demostración. Comenzamos notando que

$$\mathfrak{so}(V_1, b) \oplus \operatorname{End}(V_2) = \mathfrak{co}(V_1, b) \oplus_{\mathrm{Id}} \operatorname{End}(V_2).$$

Afirmamos ahora que $X \in \mathfrak{co}(V_1, b)$ si y solo si $b_X \equiv 0$, donde

$$b_X : V_1 \times V_1 \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad (e_1, e_2) \longmapsto b(Xe_1, e_2) + b(e_1, Xe_2) - \frac{2}{n_1}(\operatorname{tr} X) b(e_1, e_2),$$

con $n_i = \dim V_i$.

Es claro que si $X \in \mathfrak{co}(V_1, b)$ entonces $b_X \equiv 0$. Para el recíproco usamos el hecho de que b es no degenerada y de este modo obtenemos que la parte simétrica de X, está dada por $\frac{1}{n_1}(\operatorname{tr} X) \operatorname{Id}$.

Ahora, para $\omega \in V^* \otimes V^*$ definimos $\omega^{\mathrm{obs}} \in \Lambda^2 V^* \otimes \operatorname{Sym}^2 V_1^*$ dada por

$$\omega^{\mathrm{obs}}(e_1 \otimes x_1, e_2 \otimes x_2, e_3 \cdot e_4) = b_{R^{\omega, V_1}(e_1 \otimes x_1, e_2 \otimes x_2)}(e_3, e_4).$$

A continuación mostramos que $R^\omega \in K(\mathfrak{co}(V_1, b) \oplus_{\mathrm{Id}} \operatorname{End}(V_2))$ si y solo si $\omega^{\mathrm{obs}} \equiv 0$.

En primer lugar no es difícil ver que

$$\begin{aligned}
\omega^{\mathrm{obs}}(e_1 \otimes x_1, e_2 \otimes x_2, e_3 \cdot e_4) \;=\;& \omega(e_1 \otimes x_1, e_3 \otimes x_2) b(e_2, e_4) \\
& + \omega(e_1 \otimes x_1, e_4 \otimes x_2) b(e_2, e_3) \\
& - \omega(e_2 \otimes x_2, e_3 \otimes x_1) b(e_1, e_4) \\
& - \omega(e_2 \otimes x_2, e_4 \otimes x_1) b(e_1, e_3) \\
& - \frac{4}{n_1} \omega^{\mathrm{alt}}(e_1 \otimes x_1, e_2 \otimes x_2) b(e_3, e_4).
\end{aligned}$$

Ahora, sea $\{f_1, \ldots, f_{n_1}\}$ una base ortonormal para V_1 con respecto a b. De este modo obtenemos que

$$\begin{aligned}
\tau(\omega^{\mathrm{obs}})(e_2 \otimes x_2, e_4 \otimes x_1) \;=\;& \theta(\omega)(e_2 \otimes x_2, e_4 \otimes x_1) \\
& + \frac{4}{n_1} \omega^{\mathrm{alt}}(e_2 \otimes x_2, e_4 \otimes x_1) \\
& - (n_1 + 1) \omega(e_2 \otimes x_2, e_4 \otimes x_1) \\
& + \omega(e_2 \otimes x_1, e_4 \otimes x_2),
\end{aligned}$$

donde

$$\tau(\omega^{\mathrm{obs}})(e_1 \otimes x_1, e_2 \otimes x_2) = \sum_\mu \omega^{\mathrm{obs}}(f_\mu \otimes x_2, e_1 \otimes x_1, f_\mu \cdot e_2)$$

y

$$\theta(\omega)(e_1 \otimes x_1, e_2 \otimes x_2) = \sum_\mu \omega(f_\mu \otimes x_2, f_\mu \otimes x_1) b(e_1, e_2).$$

De este modo obtenemos que

$$\begin{aligned}
&\tau(\omega^{\mathrm{obs}})(e_2 \otimes x_2, e_4 \otimes x_1) = \\
&\quad -[((n_1 + 1) \operatorname{Id} - \frac{4}{n_1} \operatorname{pr}^{\mathrm{alt}} - \operatorname{flip}_{V_2}) \omega](e_2 \otimes x_2, e_4 \otimes x_1) + \theta(\omega)(e_2 \otimes x_2, e_4 \otimes x_1).
\end{aligned}$$

Ahora, de la descomposición

$$V^*\otimes V^* = \Lambda^2 V_1^*\otimes\Lambda^2 V_2^*\oplus\Lambda^2 V_1^*\otimes\mathrm{Sym}^2 V_2^*\oplus\mathrm{Sym}^2 V_1^*\otimes\Lambda^2 V_2^*\oplus\mathrm{Sym}^2 V_1^*\otimes\mathrm{Sym}^2 V_2^*$$

obtenemos que el operador $-((n_1+1)\,\mathrm{Id}-\frac{4}{n_1}\,\mathrm{pr}^{\mathrm{alt}}-\mathrm{flip}_{V_2})$ tiene eigenvalores $-(n_1+2), -(n_1-\frac{4}{n_1}), -(n_1+2-\frac{4}{n_1}), -n_1$. Se tiene también que θ tiene eigenvalores $0, \pm n_1$ y para verificarlo utilizamos el hecho de que

$$\begin{aligned} V^*\otimes V^* &= \mathbb{C}b\otimes\mathrm{Sym}^2 V_2^*\oplus\mathbb{C}b\otimes\Lambda^2 V_2^* \\ &\quad\oplus\mathrm{Sym}_0^2 V_1^*\otimes\mathrm{Sym}^2 V_2^*\oplus\Lambda^2 V_1^*\otimes\mathrm{Sym}^2 V_2^* \\ &\quad\oplus\mathrm{Sym}_0^2 V_1^*\otimes\Lambda^2 V_2^*\oplus\Lambda^2 V_1^*\otimes\Lambda^2 V_2^* \end{aligned}$$

y un cálculo directo muestra que $\mathbb{C}b\otimes\mathrm{Sym}^2 V_2^*$ es el eigenespacio correspondiente al eigenvalor n_1, $\mathbb{C}b\otimes\Lambda^2 V_2^*$ es el eigenespacio correspondiente al eigenvalor $-n_1$ y el otro subespacio es el eigenespacio correspondiente a 0.

De este modo obtenemos que

$$\ker(\omega\longmapsto\tau(\omega^{\mathrm{obs}})) = \mathbb{C}b\otimes\mathrm{Sym}^2 V_2^*.$$

Finalmente se tiene que $R|_{\mathbb{C}b\otimes\mathrm{Sym}^2 V_2^*}$ nos da el isomorfismo

$$\mathbb{C}b\otimes\mathrm{Sym}^2 V_2^*\cong K(\mathfrak{co}(V_1,b)\oplus_{\mathrm{Id}}\mathrm{End}(V_2)).$$

Más aún, se tiene que

$$\underline{\mathfrak{co}(V_1,b)\oplus_{\mathrm{Id}}\mathrm{End}(V_2)} = \mathfrak{so}(V_1,b)\oplus\mathfrak{sl}(V_2)$$

y de este modo obtenemos que

$$K(\mathfrak{so}(V_1,b)\oplus\mathfrak{sl}(V_2)) = \mathbb{C}b\otimes\mathrm{Sym}^2 V_2^*.$$

□

Notamos que la demostración del corolario anterior muestra además que $\mathfrak{so}(V_1,b)\oplus\mathfrak{sl}(V_2)$ es un álgebra de Berger.

Demostración del teorema 3.27. Por el lema 3.25 sabemos que Φ_α^i debe contener a lo más dos elementos para todo $\alpha\in\Delta^i$, del lema 3.26 se sigue que solo los casos 1),2),3) y el caso 6) con $n=2$ pueden ocurrir. En la última posibilidad tenemos que $\mathfrak{h}_s\cong\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})\oplus\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ actuando en $\mathbb{C}^2\otimes\mathbb{C}^2$ la cual es equivalente a la representación estándar de $\mathfrak{so}(4,\mathbb{C})$ en $\mathbb{C}^4$.

De este modo, si $\mathfrak{h}=\mathfrak{h}_1\oplus\mathfrak{h}_2\subset\mathfrak{g}$ es de Berger, se tiene que la parte semisimple de $\mathfrak{h}_i$, $(\mathfrak{h}_i)_s$, es equivalente a $\mathfrak{sl}(n_i,\mathbb{C})$, $\mathfrak{so}(n_i,\mathbb{C})$ o bien a $\mathfrak{sp}(\frac{n_i}{2},\mathbb{C})$ con sus representaciones estándar.

Ahora, de la demostración del lema 3.28 obtenemos que $\mathfrak{h}_s$ está contenida en $\mathfrak{gl}(n_1,\mathbb{C})\oplus_{\mathrm{Id}}\mathfrak{gl}(n_2,\mathbb{C})$ o bien, está contenida en $\mathfrak{sl}(n_1,\mathbb{C})\oplus\mathfrak{sl}(n_2,\mathbb{C})$.

Hacemos notar que un argumento similar al utilizado en la demostración del corolario 3.29 nos muestra que

$$K(\mathfrak{sp}(\frac{n_1}{2},\mathbb{C})\oplus\mathfrak{sl}(n_2,\mathbb{C}))\cong\Lambda^2\mathbb{C}^{n_2},$$

y de este modo obtenemos que

$$K(\mathfrak{so}(n_1,\mathbb{C})\oplus\mathfrak{sp}(\frac{n_2}{2},\mathbb{C})) = \{0\},$$

lo cual implica que $\mathfrak{so}(n_1,\mathbb{C})\oplus\mathfrak{sp}(\frac{n_2}{2},\mathbb{C})$ no es un álgebra de Berger.

Ahora, el caso $\mathfrak{so}(n_1,\mathbb{C})\oplus\mathfrak{sl}(n_2,\mathbb{C})$ queda descartado ya que se tiene que no es un álgebra de Berger fuerte. De la misma forma $\mathfrak{sp}(\frac{n_1}{2},\mathbb{C})\oplus\mathfrak{sl}(n_2,\mathbb{C})$ tampoco es un álgebra de Berger fuerte.

Las posibilidades restantes son $\mathfrak{so}(n_1,\mathbb{C})\oplus\mathfrak{so}(n_2,\mathbb{C})$ y $\mathfrak{sp}(\frac{n_1}{2},\mathbb{C})\oplus\mathfrak{sp}(\frac{n_2}{2},\mathbb{C})$. De los resultados anteriores obtenemos que

$$K(\mathfrak{so}(n_1,\mathbb{C})\oplus\mathfrak{so}(n_2,\mathbb{C}))=\mathbb{C}R^{b_1\otimes b_2},$$

con b_i el producto escalar estándar en $\mathbb{C}^{n_i}$ y

$$b_1\otimes b_2(e_1\otimes x_1,e_2\otimes x_2)=b_1(e_1,e_2)b(x_1,x_2).$$

Así se obtiene que $\dim K(\mathfrak{so}(n_1,\mathbb{C})\oplus\mathfrak{so}(n_2,\mathbb{C}))=1$ y por tanto,

$$K^1(\mathfrak{so}(n_1,\mathbb{C})\oplus\mathfrak{so}(n_2,\mathbb{C}))=\{0\}.$$

Resultados análogos se tienen para $\mathfrak{sp}(\frac{n_1}{2},\mathbb{C})\oplus\mathfrak{sp}(\frac{n_2}{2},\mathbb{C})$. Sin embargo tanto $\mathfrak{so}(n_1,\mathbb{C})\oplus\mathfrak{so}(n_2,\mathbb{C})$, como $\mathfrak{sp}(\frac{n_1}{2},\mathbb{C})\oplus\mathfrak{sp}(\frac{n_2}{2},\mathbb{C})$ son de hecho álgebras de Berger fuertes. □

Ahora consideramos el caso $V=V_1\otimes V_2$ con $\dim V_1=2$. En este caso tenemos que $\mathfrak{h}\cong\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})\oplus\mathfrak{h}_2$ con $\mathfrak{h}_2\subset\mathrm{End}(V_2)$ una subálgebra irreducible.

Proposición 3.30. *Sea $V=V_1\otimes V_2$ y $\mathfrak{h},\mathfrak{h}_2$ dadas como en el párrafo anterior y supongamos que $\mathfrak{h}$ es un álgebra de Berger irreducible. Si $K(\mathfrak{h})$ es un $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$-módulo trivial se tiene entonces que $\mathfrak{h}$ es simétrica.*

Demostración. Del hecho de que $\dim V_1=2$ se sigue que $\dim\Lambda^2V_1^*=1$. Sea $\Lambda^2V_1^*=\mathrm{gen}_{\mathbb{C}}\{\Omega\}$. Denotaremos a los elementos de V_1 por $e,f,\dots$ mientras que los elementos de V_2 serán denotados por $x,y,\dots$

Por definición sabemos que $K^1(\mathfrak{h})\subset V^*\otimes K(\mathfrak{h})\cong V_1^*\otimes V_2^*\otimes K(\mathfrak{h})$. Por hipótesis sabemos que $K(\mathfrak{h})$ es un $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$-módulo trivial y del hecho de que V_2 es también un $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$-módulo trivial obtenemos que V_2^* y por tanto $V_2^*\otimes K(\mathfrak{h})$ son también $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$-módulos triviales. Ahora, dado que V_1^* es un $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$-módulo irreducible se sigue que $K^1(\mathfrak{h})=V_1^*\otimes W$, para algún subespacio $W\subset V_2^*\otimes K(\mathfrak{h})$. Sea $\phi_1\in W$, definimos $\phi\in K^1(\mathfrak{h})$ por

$$\phi(e_1\otimes x)=0,\ \phi(e_2\otimes x)=\phi_1(x),$$

donde e_1,e_2 son cualesquiera dos vectores linealmente independientes en V_1.

Ahora, de la segunda identidad de Bianchi satisfecha por $\phi\in K^1(\mathfrak{h})$ aplicada al triple $(e_1\otimes x,e_1\otimes y,e_2\otimes z)$ se obtiene que $\phi_1(z)(e_1\otimes x,e_1\otimes y)=0$.

Para continuar es necesario hacer algunas observaciones adicionales sobre Λ^2V.

Comenzamos con el hecho de que se tiene el isomorfismo

$$\Lambda^2V\cong\mathrm{Sym}^2V_1\otimes\Lambda^2V_2\oplus\Lambda^2V_1\otimes\mathrm{Sym}^2V_2.$$

Por otro lado, del hecho de que $4uv=(u+v)^2-(u-v)^2$, para $u,v\in V_i$, se obtiene que Sym^2V_i está generada por los monomios de la forma u^2 con $u\in V_i$. De este modo obtenemos que

$$\mathrm{Sym}^2V_1\otimes\Lambda^2V_2=\mathrm{gen}\{(e\otimes x)\wedge(e\otimes y)|\ e\in V_1,x,y\in V_2\},$$

$$\Lambda^2V_1\otimes\mathrm{Sym}^2V_2=\mathrm{gen}\{(e\otimes x)\wedge(f\otimes x)|\ e,f\in V_1,x\in V_2\}.$$

Lo anterior junto con el hecho de que $\phi_1(z)(e_1 \otimes x, e_1 \otimes y) = 0$ implica que

$$\phi_1(z) \in \Lambda^2 V_1^* \otimes \operatorname{Sym}^2 V_2^* \otimes \mathfrak{h}.$$

Más aún, dado que $\dim \Lambda^2 V_1^* = 1$ y que $\phi_1(z) \in K(\mathfrak{h})$ es $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$-invariante obtenemos que

$$\phi_1(z)(e \otimes x, f \otimes y) = \Omega(e, f)\psi(z)(x, y),$$

con $\psi(z) \in \operatorname{Sym}^2 V_2^* \otimes \mathfrak{h}_2$.

Ahora, de la primera identidad de Bianchi satisfecha por $\phi_1(z) \in K(\mathfrak{h})$ aplicada al triple $(e_1 \otimes x, e_1 \otimes y, e_2 \otimes w)$ obtenemos que

$$\phi_1(z)(e_1 \otimes y, e_2 \otimes w)(e_1 \otimes x) + \phi_1(z)(e_2 \otimes w, e_1 \otimes x)(e_1 \otimes y) = 0,$$

y de la forma que tiene $\phi_1(z)(e \otimes x, f \otimes y)$ obtenemos que

$$e_1 \otimes \Omega(e_1, e_2)\psi(z)(w, y)x = e_1 \otimes \Omega(e_1, e_2)\psi(z)(w, x)y,$$

luego,

$$\psi(z)(w, x)y = \psi(z)(w, y)x, \quad \text{para todo } x, y, z, w \in V_2,$$

es decir, se tiene que $\psi(z) \in \operatorname{Sym}^3 V_2^* \otimes V_2$. De este modo obtenemos que

$$\psi(z) \in (\operatorname{Sym}^2 V_2^* \otimes \mathfrak{h}_2) \cap (\operatorname{Sym}^3 V_2^* \otimes V_2) = \mathfrak{h}_2^{(2)}.$$

Ahora, es sabido que solo hay cuatro álgebras de Lie irreducibles $\mathfrak{h}_2$ tales que $\mathfrak{h}_2^{(2)} \neq \{0\}$, a saber, las representaciones estándar de $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ y $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ en $\mathbb{C}^n$ y las representaciones estándar de $\mathfrak{sp}(n, \mathbb{C})$ y $\mathfrak{csp}(n, \mathbb{C})$ en $\mathbb{C}^{2n}$. Más aún, para $\mathfrak{h} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \oplus \mathfrak{h}_2$ con $\mathfrak{h}_2$ cualquiera de las cuatro álgebras mencionadas previamente se tiene que $K(\mathfrak{h})$ no es un $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$-módulo trivial. De este modo obtenemos que $\psi = 0$ y por lo tanto, $W = \{0\}$ lo cual implica que $K^1(\mathfrak{h}) = \{0\}$. $\square$

Nuestro siguiente objetivo es dar una clasificación de las álgebras de Berger irreducibles de la forma $\mathfrak{h} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \oplus \mathfrak{h}_2$. Para esto necesitamos el siguiente resultado.

Lema 3.31. *Sean $V = V_1 \otimes V_2$ y $\mathfrak{h}, \mathfrak{h}_2$ dadas como antes. Si $\mathfrak{h}$ es un álgebra de Berger irreducible no simétrica entonces Φ_α^2 contiene a lo más dos elementos para algún $\alpha \in \Delta^2$. Más aún, si la parte semisimple de $\mathfrak{h}_2$ es simple, entonces se tiene que el resultado se cumple para todo $\alpha \in \Delta^2$.*

Demostración. Comenzamos notando que el resultado se sigue de manera inmediata si $\dim V_2 \leq 2$. De este modo podemos suponer que $\dim V_2 \geq 3$.

Del hecho de que $\mathfrak{h}$ es no simétrica obtenemos, de la proposición anterior, que $K(\mathfrak{h})$ no es un $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$-módulo trivial. Ahora, consideremos ψ_0 un generador del látiz de pesos de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$. Se tiene entonces que

$$K(\mathfrak{h}) \subset \Lambda^2 V^* \otimes \mathfrak{h} \subset \Lambda^2 V^* \otimes (\operatorname{End}(V_1) \oplus_{\mathrm{Id}} \operatorname{End}(V_2))$$

implica que el conjunto de pesos del $\mathfrak{h}$-módulo $K(\mathfrak{h})$ está contenido en el conjunto $\{-4, -2, 0, 2, 4\}\psi_0 + \Lambda_{\mathfrak{h}_2}$, donde $\Lambda_{\mathfrak{h}_2}$ es el látiz de pesos de $\mathfrak{h}_2$. Más aún, se tiene que $K(\mathfrak{h})$ no es $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$-trivial si y solo si existe $\mu \in \Lambda_{\mathfrak{h}_2}$ tal que $-2\psi_0 + \mu$ es un peso.

Definimos

$$W = \bigoplus_{\mu \in \Lambda_{\mathfrak{h}_2}} K(\mathfrak{h})_{-2\psi_0 + \mu},$$

donde $K(\mathfrak{h})_{-2\psi_0+\mu} = \{R \in K(\mathfrak{h})|\ X \cdot R = (-2\psi_0 + \mu)(X)R$ para todo $X \in \mathfrak{t}_0\}$. El lema anterior implica que $W \neq \{0\}$.

No es difícil mostrar que

$$W = \left\{ R \in K(\mathfrak{h})|\ H \cdot R = -2R, \text{ con } H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Es claro que W es un subespacio $\mathfrak{h}_2$-invariante, es decir, para todo $X \in \mathfrak{h}_2$, $X \cdot W \subset W$.

Definimos ahora $\mathfrak{s} = \langle R(u,v)|\ R \in W, u, v \in V\rangle$. De lo anterior se obtiene que $[\mathfrak{h}_2, \mathfrak{s}] \subset \mathfrak{s}$. Vemos que no es posible que $\mathfrak{s} \subset \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$. Esto se sigue del hecho de que, para $R \in K(\mathfrak{h})$ existe una descomposición de la forma $R = R^{\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})} + R^{\mathfrak{h}_2}$, con $R^{\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})} \in \Lambda^2 V^* \otimes \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ y $R^{\mathfrak{h}_2}$ dada de manera análoga. Si $\mathfrak{s} \subset \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ se tendría que $R^{\mathfrak{h}_2} \equiv 0$. De este modo la primera identidad de Bianchi aplicada al triple $(e \otimes x, e \otimes y, f \otimes z)$ con $e, f \in V_1$, $x, y, z \in V_2$ linealmente independientes toma la forma

$$[R^{\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})}(e\otimes x, e\otimes y)f]\otimes z + [R^{\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})}(e\otimes y, f\otimes z)e]\otimes x + [R^{\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})}(f\otimes z, e\otimes x)e]\otimes y = 0$$

y del hecho de que $e, f \in V_1$ $x, y, z \in V_2$ son linealmente independientes se obtiene que

$$R^{\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})}(e \otimes x, e \otimes y)f = R^{\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})}(e \otimes y, f \otimes z)e = R^{\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})}(f \otimes z, e \otimes x)e = 0.$$

De esto obtenemos que $R^{\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})} \equiv 0$ lo cual es una contradicción con el hecho de que $W \neq \{0\}$.

Se tiene entonces que $\{0\} \neq \mathfrak{s} \cap \mathfrak{h}_2 \lhd \mathfrak{h}_2$. Sea α una raíz de $\mathfrak{s} \cap \mathfrak{h}_2$. Sean $R \in W$ de peso $-2\psi_0 + \mu$ y $u, v \in V$ elementos de peso tales que

$$R(u,v) \in (\mathfrak{s} \cap \mathfrak{h}_2)_\alpha.$$

Del hecho de que los pesos de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ son $\pm\psi_0$ se tiene que los pesos de u, v están contenidos en el conjunto $\{\pm\psi_0 + \lambda|\ \lambda \in \Phi^2\}$. Dado que $\Delta = \Delta^1 \cup \Delta^2$ y $\Phi = \Phi^1 + \Phi^2$ obtenemos que $(-2\psi_0 + \mu) + (\pm\psi_0 + \lambda_1) + (\pm\psi_0 + \lambda_2) \in \Delta^2$ implica que los pesos de u y de v son de la forma $\psi_0 + \lambda_0$, $\psi_0 + \lambda_1$ para algunos $\lambda_0, \lambda_1 \in \Phi^2$. De la proposición 3.16 sabemos que $(\psi_0 + \lambda_0, \psi_0 + \lambda_1, \alpha)$ es un triple generador. Notamos que $\Phi_\alpha = \{\pm\psi_0 + \lambda|\ \lambda \in \Phi^2_\alpha\}$.

Ahora, si existiera $\lambda \in \Phi^2_\alpha$ con $\lambda \neq \lambda_0, \lambda_1$ obtendríamos que $-\psi_0 + \lambda \in \Phi_\alpha$, lo cual implica que $(-\psi_0 + \lambda) - (\psi_0 + \lambda_0) \in \Delta$, o bien, $(-\psi_0 + \lambda) - (\psi_0 + \lambda_1) \in \Delta$ lo cual vemos que no es posible ya que esto implicaría que $\lambda = \lambda_0$ ó $\lambda = \lambda_1$. Por lo tanto $\Phi^2_\alpha \subset \{\lambda_0, \lambda_1\}$.

Finalmente, si $\mathfrak{h}_2$ es simple se sigue que $\mathfrak{s} \cap \mathfrak{h}_2 = \mathfrak{h}_2$ y así el argumento dado en el párrafo anterior se cumple para todo $\alpha \in \Delta^2$. □

Finalmente obtenemos la siguiente clasificación.

Teorema 3.32. *Sea $V = V_1 \otimes V_2$ con $\dim V_1 = 2$ y $\mathfrak{h}_2$ dada como antes. Supongamos que $\mathfrak{h} = \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) \oplus \mathfrak{h}_2 \subset \mathrm{End}(V)$ es un álgebra de Berger fuerte no simétrica e irreducible. Entonces se tiene que $\mathfrak{h}_2$ es equivalente a la representación estándar de $\mathfrak{so}(n,\mathbb{C})$, $\mathfrak{sp}(n,\mathbb{C})$, $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$ ó $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$.*

Demostración. De los lemas 3.26 y 3.31 vemos que solo necesitamos descartar la representación $\mathfrak{h}_2 = \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) \oplus \mathfrak{h}_3$ con $\mathfrak{h}_3 = \mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$ o bien $\mathfrak{h}_3 = \mathfrak{sp}(\frac{n}{2},\mathbb{C})$ con sus respectivas representaciones estándar. En cualquiera de estos casos obtenemos que $\mathfrak{h} \cong \mathfrak{so}(4,\mathbb{C}) \oplus \mathfrak{h}_3$ con la representación en el espacio $V = \mathbb{C}^4 \otimes \mathbb{C}^n$. Sin embargo, en el teorema 3.27 fue demostrado que tales álgebras no son de Berger fuertes. $\square$

Conclusiones

De la proposición 3.4 obtenemos que para clasificar las álgebras de Berger reales necesitamos clasificar las álgebras de Berger irreducibles complejas $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}} \subset \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V_{\mathbb{C}})$ junto con sus formas reales absolutamente irreducibles. En [**Br**] se completa la clasificación estudiando las álgebras reales $\mathfrak{h} \subset \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ para las cuales se tiene que $\imath(\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}) \subset \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ es congruente a alguna de las entradas de la siguiente tabla

	grupo H	representación V	$\mathfrak{h}^{(1)}$
1	$\mathrm{SL}(n,\mathbb{C})$	$\mathbb{C}^n, \quad n \geq 2$	$(\mathrm{Sym}^2 V^* \otimes V)_0$
2	$\mathrm{Aut}(n,\mathbb{C})$	$\mathbb{C}^n, \quad n \geq 1$	$\mathrm{Sym}^2 V^* \otimes V$
3	$\mathrm{Aut}(n,\mathbb{C})$	$\mathrm{Sym}^2 \mathbb{C}^n, \quad n \geq 2$	V^*
4	$\mathrm{Aut}(n,\mathbb{C})$	$\Lambda^2\mathbb{C}^n, \quad n \geq 5$	V^*
5	$\mathrm{Aut}(m,\mathbb{C}) \cdot \mathrm{Aut}(n,\mathbb{C})$	$\mathbb{C}^m \otimes \mathbb{C}^n, \quad m,n \geq 2$	V^*
6	$\mathrm{Sp}(n,\mathbb{C})$	$\mathbb{C}^{2n}, \quad n \geq 2$	$\mathrm{Sym}^3 V^*$
7	$\mathbb{C}^* \cdot \mathrm{Sp}(n,\mathbb{C})$	$\mathbb{C}^{2n}, \quad n \geq 2$	$\mathrm{Sym}^3 V^*$
8	$\mathrm{CO}(n,\mathbb{C})$	$\mathbb{C}^n, \quad n \geq 3$	V^*
9	$\mathbb{C}^* \cdot \mathrm{Spin}(10,\mathbb{C})$	$\mathbb{C}^{16}$	V^*
10	$\mathbb{C}^* \cdot \mathrm{E}_6^{\mathbb{C}}$	$\mathbb{C}^{27}$	V^*

En la clasificación de álgebras de Berger complejas el primer avance fue provisto por el teorema 3.18 y una vez que se tuvo tal resultado el siguiente paso fue el estudio de las álgebras de Berger irreducibles que admiten triples generadores extremales. Dicho estudio fue dividido en dos partes basado en la naturaleza de la parte semisimple del álgebra. En primer lugar se consideró el caso de las álgebras de Berger cuya parte semisimple es simple y en el teorema 3.24 se dio una clasificación.

En la parte final del trabajo se estudiaron las álgebras de Berger irreducibles con parte semisimple no simple. Parte importante de esta clasificación residió en el hecho de que tales álgebras pueden ser entendidas como representaciones tensoriales y en los teoremas 3.27 y 3.32 se dio una clasificación de dichas álgebras en función de las dimensiones de los factores de dichas representaciones.

Finalmente, esta clasificación está siendo utilizada en un intento de dar respuesta al siguiente problema

Problema. Sea $\mathfrak{g} \subset \mathrm{End}(V)$ un álgebra de Berger entonces ¿existe una variedad M y una conexión afín ∇ en M tal que $\mathfrak{hol}_p(\nabla) \subset \mathrm{End}(T_pM)$ es conjugada a $\mathfrak{g}$ para todo $p \in M$?

Si bien es cierto que en trabajos como [**Br**] se han hecho avances significativos, la respuesta al caso general continúa estando abierta.

Bibliografía

[Br] R. Bryant, *Classical, exceptional, and exotic holonomies: a status report*, Actes de la Table Ronde de Géométrie Différentielle en l'Honneur de Marcel Berger, Collection SMF Séminaires and Congrès 1 (Soc. Math. de France) (1996), 93-166.

[C] R. Carter, *Lie Algebras of Finite and Affine Type*, Cambridge studies in advanced mathematics 96, Cambridge University Press, Cambridge, UK (2005)

[Co] W. Coppel, *Foundations of Convex Geometry*, Australian Mathematical Society Lecture Series 12, Cambridge University Press, Cambridge, UK (1998)

[FH] W. Fulton, J. Harris, *Representation Theory: A First Course*, Graduate Texts on Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, New York (1991)

[G] V. Guillemin, *The Integrability Problem for G-Structures*, Trans. Amer. Math. Soc. **116**, 544-560 (1965)

[He] S. Helgason, *Differential Geometry and Symmetric Spaces*, Acad. Press, New York, London, 2nd ed. (1978)

[Hu] J. E. Humphreys, *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory*, Springer-Verlag, Berlin, New York (1987)

[J] D. Joyce, *Riemannian Holonomy Groups and Calibrated Geometry*, Oxford graduate texts in mathematics 12, Oxford University Press, New York (2007)

[KoNo] S. Kobayashi, K. Nomizu, *Foundations of Differential Geometry, Vol. 1 & 2*, Wiley-Interscience, New York (1963)

[L] J. M. Lee, *Riemannian Manifolds: An Introduction to Curvature*, Graduate Texts in Mathematics 176, Springer-Verlag, New York (1997)

[Lee] J. Lee, *Manifolds and Differential Geometry*, Graduate studies in mathematics 107, Amer. Math. Soc. Providence, Rhode Island (2009)

[MeSc1] S. A. Merkulov, L. J. Schwachhöfer, *Classification of irreducible holonomies of torsion-free affine connections*, Ann. Math. **150**, 77-149 (1999); *Addendum: Classification of irreducible holonomies of torsion-free affine connections*, Ann. Math. **150**, 1177-1179 (1999)

[MeSc2] S. A. Merkulov, L. J. Schwachhöfer, *Twistor solution of the holonomy problem*, 395-402, The Geometric Universe, Science, Geometry and the work of Roger Penrose, S. A. Hugget, Oxford University Press (1998)

[Sa] H. Samelson, *Notes on Lie Algebras*, Universitext, Springer-Verlag, New York (1990)

[Sc] L. J. Schwachhöfer, *Connections with Irreducible Holonomy Representations*, Leipzig (2003)

[Se] M. Sepanski, *Compact Lie Groups*, Graduate Texts in Mathematics 235, Springer, New York (2007)

[W] F. Warner, *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*, Graduate texts in mathematics 94, Springer-Verlag, New York (1983)

[Ya] H. Yamabe, *On an arcwise connected subgroup of a Lie group*, Osaka Journal of Mathematics 2 (1950), 13-14.

[Yo] I. Yokota, *Exceptional Lie Groups*, arXiv:0902.0431v1, (2009)

[Z] W. Ziller, *Lie Groups. Representation Theory and Symmetric Spaces*, University of Pennsylvania (2010)