



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA
Ingeniería Mecánica – Diseño mecánico

Corrección activa de un espejo secundario deformable

(MODALIDAD DE GRADUACIÓN: TESIS)
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN INGENIERÍA

PRESENTA:

D.I. María Herlinda Pedrayes López

TUTOR PRINCIPAL

Dr. Jorge Carrera Bolaños, Facultad de Ingeniería

COTUTOR

Dr. Esteban Luna , Instituto de Astronomía sede Ensenada

MÉXICO, D. F. febrero 2016



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

JURADO ASIGNADO:

Presidente: Dr. Elfego Guillermo Ruiz Schneider

Secretario: Dr. Esteban Antolín Luna Aguilar

Vocal: Dr. Jorge Carrera Bolaños

1^{er.} Suplente: Dr. J. Jesús Gonzalez Gonzales

2^{do.} Suplente: Dr. Mario Acosta Flores

Lugar o lugares donde se realizó la tesis:
Observatorio Astronómico Nacional en San Pedro Mártir; Instituto de Astronomía en
Ensenada, Baja California y Ciudad Universitaria; Facultad de Ingeniería en CU,
UNAM.

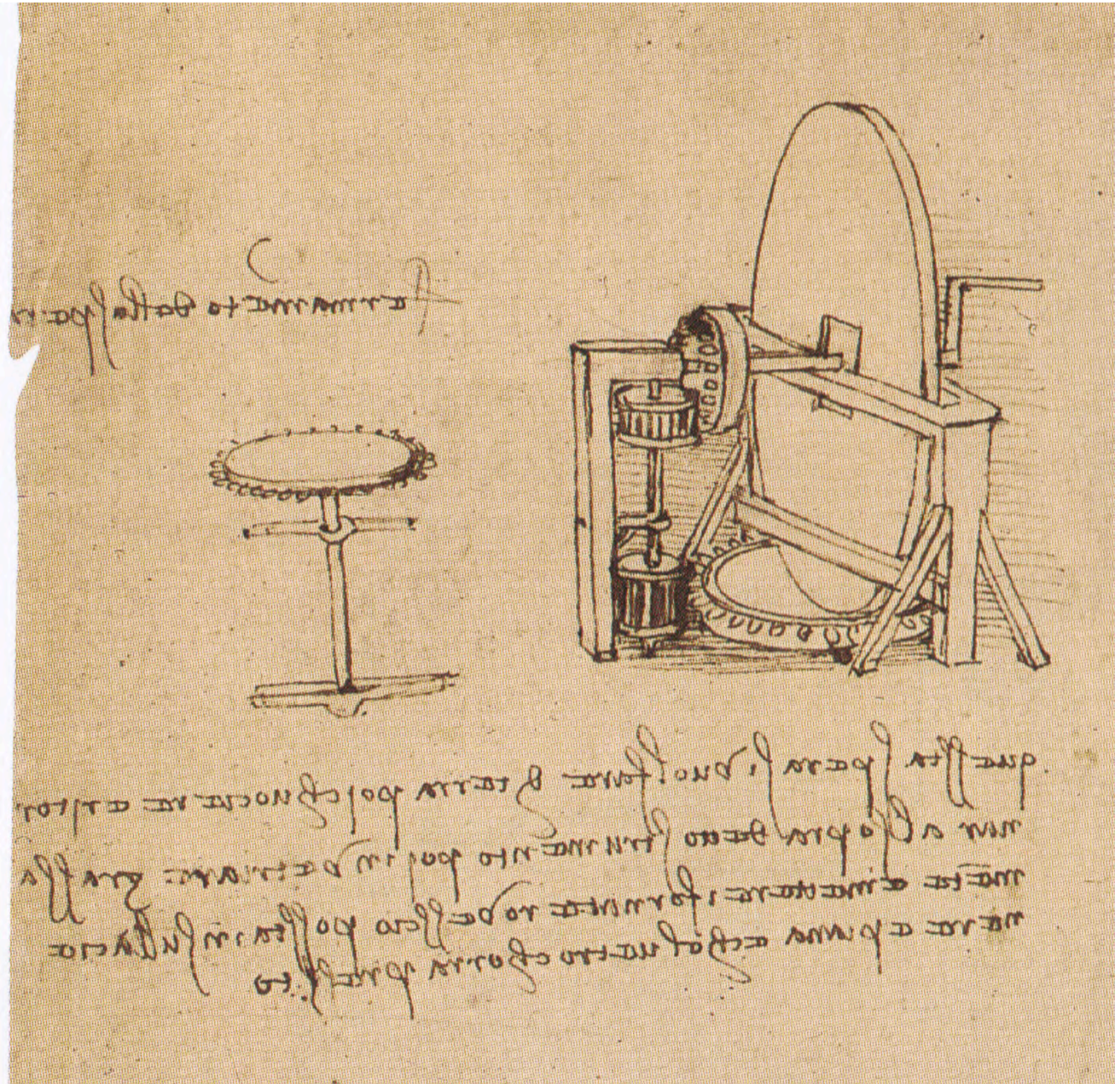
TUTORES DE TESIS:

Dr. Jorge Carrera Bolaños

FIRMA

Dr. Esteban Antolín Luna Aguilar

FIRMA



Maquina pulidora de espejos cóncavos,
inventada por Leonardo Da Vinci en 1472.
Folio 1055r , Codex Atlanticus {31}

Contenido

1	INTRODUCCIÓN	4
2	CONTEXTO	6
2.1	DISEÑOS ÓPTICOS	6
2.2	MONTURAS DE TELESCOPIOS	6
2.3	TELESCOPIOS DE ÓPTICA PASIVA Y ACTIVA	9
2.4	LOS TELESCOPIOS DEL OAN/SPM	10
3	CASO DE ESTUDIO	13
3.1	ORIGEN	13
3.2	SUJECIÓN Y ALINEACIÓN DE LAS COMPONENTES ÓPTICAS EN EL TELESCOPIO.	14
3.3	DEFORMACIÓN DE LAS COMPONENTES REFLECTORAS DEBIDAS A SU PESO PROPIO.	15
3.4	ERRORES DE SUPERFICIE INTRODUCIDOS EN LA FABRICACIÓN.	15
4	DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA Y PLANTEAMIENTO DE RESOLUCIÓN	17
4.1	PROBLEMA	17
4.2	PLANTEAMIENTO DE RESOLUCIÓN	18
4.2.1	CONTEXTO TEÓRICO	18
4.2.2	CONTEXTO NUMÉRICO	19
4.2.3	CONTEXTO EXPERIMENTAL Y DE DESARROLLO.	19
5	MARCO TEÓRICO. PREMISAS ÓPTICAS Y DE MMC	21
5.1	FUNDAMENTOS DE MMC	21
5.2	REPRESENTACIÓN ANALÍTICA DE UNA SUPERFICIE ÓPTICA.	22
5.3	POLINOMIOS DE ZERNIKE	23
5.3.1	CÁLCULO EN LA AMPLITUD DE LAS DEFORMACIONES	26
5.4	LA PARÁBOLA COMO SUPERFICIE BASE	26
5.5	TEORÍA DE ELASTICIDAD LINEAL PARA NUESTRO CASO	29
5.5.1	VECTOR DE DESPLAZAMIENTO Y DEFORMACIÓN PARA PLACAS CIRCULARES	29
5.5.2	TEORÍA DE PLACAS DELGADAS	29
5.5.3	FLEXIÓN DE PLACAS CIRCULARES CON CURVATURA PERMANENTE	30
5.6	ONDA ELÁSTICA	32
5.6.1	ONDAS ELÁSTICAS EN PLACAS	35
5.7	MÉTODO DE ANÁLISIS POR MEF	37
5.7.1	CONSIDERACIONES PARA EL MODELADO POR MEF	37
6	CONDICIONES A LA FRONTERA. REQUERIMIENTOS Y RESTRICCIONES.	39
6.1	CONDICIONES GENERALES	39
6.2	CONDICIONES DIRICHLET	40
6.3	REQUERIMIENTOS Y RESTRICCIONES ÓPTICAS Y GEOMÉTRICAS	40
6.4	MECÁNICAS (MATERIALES):	41
6.5	EXACTITUD Y PRECISIÓN	43

7	DESARROLLO DE LA INVESTIGACIÓN	45
7.1	APLICACIÓN DE FUERZAS AXIALES Y MOMENTOS EN EL CONTORNO DE LA SUPERFICIE ÓPTICA	46
7.2	ACTUADORES SOBRE LA FRONTERA POSTERIOR DEL ESPEJO	48
8	CORRECCIÓN DE LA SUPERFICIE PARA ABERRACIONES DE 3ER ORDEN	55
8.1	CONDICIONES INICIALES:	55
8.2	DEFINICIÓN DE LA SUPERFICIE DEFORMADA:	55
8.3	PRIMERA APROXIMACIÓN. FUERZAS Y MOMENTOS EN EL CONTORNO.	56
8.3.1	ASTIGMATISMO	56
8.4	SEGUNDA APROXIMACIÓN. ACTUADORES	60
8.4.1	ABERRACIÓN ESFÉRICA	60
9	CAMBIO DE CURVATURA LOCAL MEDIANTE EL CAMBIO DE LA CÓNICA	65
9.1	PRIMERA APROXIMACIÓN. FUERZAS Y MOMENTOS EN EL CONTORNO.	65
9.1.1	ANÁLISIS SUPERFICIE ESFÉRICA	66
9.1.2	ANÁLISIS ESFERA-HIPERBOLOIDE	66
9.1.3	ANÁLISIS ESFERA-ELIPSOIDAL	66
9.1.4	COMPARACIÓN DE LOS TRES ANÁLISIS	68
9.2	SEGUNDA APROXIMACIÓN. ACTUADORES	70
9.2.1	MODELO CON 36 ACTUADORES	71
9.2.2	DUALIDAD DE LAS CONDICIONES. EXACTITUD DEL PROCESO	74
9.2.3	MODELO CON 61 ACTUADORES	76
9.2.4	MODELO CON 127 ACTUADORES PUNTUALES	77
9.2.5	MODELACIÓN DE 127 COJINETES EN LA FRONTERA DEL CUERPO	82
10	CONCLUSIONES, APORTACIONES Y TRABAJO A FUTURO	89
	APÉNDICE 1. CÁLCULO DE ÁREAS	92
	APÉNDICE 2. FLEXIÓN POR PESO PROPIO DE ESPEJOS SOPORTADOS POR SU CARA POSTERIOR.	94
	APÉNDICE 3. FÓRMULAS PARA CORREGIR ABERRACIONES DE 3ER ORDEN	96
	BIBLIOGRAFÍA	99

Dedico el fruto de este esfuerzo
con mi mas profunda admiración y cariño
a mi papá José Luis Pedrayes Porras,
a Luis Alberto, Isaura y Rodrigo
los amores de mi vida

Agradecimientos

Agradezco a la UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO la oportunidad de crecer tanto en el aspecto académico como personal, esto incluye a la Dirección General de Asuntos del Personal Académico que me proporcionó el apoyo económico y al Instituto de Astronomía por el permiso otorgado para ausentarme de mis actividades de trabajo y poder llevar a cabo los estudios de maestría. A la Facultad de ingeniería por abrirme sus puertas a un posgrado de excelencia.

Al Dr. Jorge Carrera Bolaños por sus extensas enseñanzas en el campo de la mecánica del medio continuo, por sus acertados comentarios y por su gran ayuda para saber aplicar el lenguaje de las matemáticas.

Al Dr. Esteban Luna por su generosidad al introducirme a otro nivel en el campo de la óptica y transmitirme sus experiencias. Por interesarme en este apasionante y complejo proyecto sobre el control de las superficies ópticas y sus efectos. Por su entusiasmo para lo que en el camino iba logrando.

También al Dr. Luis Salas Casales quien es un ejemplo a seguir en la instrumentación astronómica.

A mis profesores del posgrado: Dr. Mario Acosta Flores, Dr. Francisco Cuenca Jiménez , Dr. José Sánchez Vizcaíno, Dr. Oscar Jesús Rendón Gómez. Todos excelentes profesores y cada uno con su manera personal de enseñanza me aportaron mucho.

A mis compañeros del posgrado por su sincera camaradería y apoyo incondicional.

Resumen

El objetivo de este trabajo fue el resolver analíticamente y por medio de un programa computacional comercial, que emplea el método de elementos finitos, el problema de deformar un espejo secundario de un telescopio, para lograr con esto el corregir defectos de pulido de bajo orden, flexiones por carga gravitacional tanto del un espejo primario como de la estructura que lo soporta, ó el cambio de configuración óptica del telescopio.

El estudio se basó en un espejo primario de 1.5m de diámetro, actualmente en desuso en el Observatorio Astronómico Nacional debido a errores de pulido y sujeción, que puede ser rescatado usando un espejo secundario deformable.

En este trabajo se analizó este espejo en particular, y se determinó el tipo de fuerzas y/o momentos requeridos para compensar las deformaciones del primario y la manera de aplicarlas. Con ello, se determinó el número, distribución y magnitud de fuerzas de un conjunto de actuadores para que pueda deformar un espejo secundario y así corregir los problemas en la óptica del espejo primario de 1.5m. Esto abre las puertas a la utilización de la óptica de telescopios de vieja tecnología que, de otra forma, serían desaprovechados. También permitirá el cambio activo a una configuración óptica diferente en el telescopio si se requiere.

También los resultados de este trabajo pueden aplicarse en un ámbito más extenso, como en el de pruebas ópticas en laboratorio, donde se requieran superficies nulas o superficies que disminuyan la aberración esférica, para caracterizar la calidad de superficies ópticas durante el proceso de pulido.

1 Introducción

Un sistema óptico de alto rendimiento, tal como un telescopio astronómico moderno, es siempre un compromiso entre diferentes requerimientos mecánicos, control electrónico y ópticos que, por lo general, no pueden satisfacerse de forma simultánea; ya sea por una incompatibilidad física de los requerimientos, o porque los elementos ópticos necesarios resultan prohibitivos de fabricar.

El diseñador óptico busca encontrar el mejor balance posible en el diseño de un telescopio para que éste pueda desempeñar su función de la mejor manera posible, dadas las necesidades de uso. Por ejemplo, si se usará principalmente para realizar imagen directa, o para realizar espectroscopía, de un campo visual limitado, o uno muy amplio, etc. Además, claro esta, dentro del presupuesto asignado.

La necesidades y tecnología actual deja fuera de competencia a un telescopio cuya óptica no cambia, salvo los ajustes triviales como foco, será necesariamente un instrumento limitado. Sin embargo, un telescopio en el que las propiedades de sus elementos ópticos pueden ser modificados durante su uso, es un instrumento mucho más versátil, que puede ser entonada para usos diversos.

Avances tecnológicos, tanto en los materiales empleados, los mecanismos de sujeción y de control, así como de modelaje tanto óptico como mecánico, hacen que esta opción de un telescopio “ajustable” se este convirtiendo en una realidad. Los telescopios de última generación y los que están aún en su etapa de diseño, incorporan esta noción {1}. Sin embargo, esto deja fuera a telescopios viejos que cumplen todavía una función de gran utilidad y que representan una inversión que sería terrible desperdiciar.

Ante esta situación, resulta potencialmente muy deseable el poder modificar las propiedades ópticas del espejo primario pasivo de un telescopio de vieja generación, por medio de un espejo secundario activo y deformable, con lo cual se le pueda hacer mucho más versátil.

En el trabajo por minimizar aberraciones ópticas, una técnica empleada es el uso de dos superficies diferentes que, en combinación, minimizan el efecto de, por ejemplo, la aberración esférica. Una de las propiedades de esta aberración es que es constante en todo el campo. Analíticamente esta propiedad se usa para trazar rayos marginales y paraxiales (cerca del vértice del espejo) reflejados en más de una superficie y, de acuerdo a las ecuaciones que describen los rayos trazados, el camino óptico de ambos rayos se requiere que sea cero, esta condición define la constante de conicidad del segundo espejo. Existen diferentes configuraciones que incluye una combinación de cónicas tales como paraboloides, hiperboloides, elipsoidales y esféricas; algunas combinaciones de esta cónicas tienen nombre propio, asignado por la comunidad científica. Desde el punto de

vista clásico de un telescopio como sistema pasivo, estará limitado a las configuraciones de diseño, pero con la tecnología actual, esta configuración puede cambiarse activamente para aprovechar las propiedades de las diferentes combinaciones de cónicas, la idea no es nueva y ya se usa en telescopios de construcción recientes, sin embargo, los telescopios de vieja tecnología podrían modernizarse mediante la integración de esta idea. El principal motivo de este trabajo es investigar la factibilidad de combinar activamente más de una cónica con un primario que es pasivo. El cambio de la constante de conicidad implicará un cambio en el radio de curvatura local, manteniendo el radio de curvatura del vértice (origen), pues este parámetro define la potencia del sistema.

Sin embargo existen aplicaciones de sistemas ópticos que requieren variaciones controladas de aberración esférica, como es el caso en el área de pruebas ópticas en donde cada superficie a fabricar requiere un sistema óptico auxiliar determinado, llamado técnicamente " sistema nulo ", que permitan anular esta aberración cuando se prueba interferométricamente alguna superficie que no sea esférica. Estos sistemas nulos son diseñados para cada superficie bajo construcción, y una propuesta sería construir un sistema activo nulo que permita cambiar la aberración esférica, similarmente a lo que hace un sistema zoom, pero esta vez lo que varía es la magnitud de la aberración esférica no la distancia focal, para que esta misma superficie pueda ser usada para diferentes superficies.

La idea de minimizar la aberración esférica en las pruebas ópticas es para que las franjas interferométricas, visualmente sean rectas o anillos igualmente espaciadas, la forma esperada de las franjas, radica en que la referencia que se usa es normalmente una superficie o frente de onda esférico. Si la aberración es grande las franjas interferométricas tendrán alta frecuencia y esto limita la resolución de la medida de la superficie, dado que el número de franjas es tan alto que ya no se resuelven en ciertas regiones de la superficie bajo prueba. En el caso que estudiaremos la diferencia entre la superficie real y la referencia es de algunas 100 micras, lo que implica desviaciones en el frente de onda de 200 longitudes de onda, pues la interferometría óptica trabaja con longitudes de onda de alrededor de 500 nanómetros ($0.5\mu\text{m}$).

2 Contexto

El Observatorio Astronómico Nacional en San Pedro Mártir (OAN/SPM), administrado por el Instituto de Astronomía de la UNAM, es el principal laboratorio de investigación astronómica en el país. Como tal, requiere de herramientas e instrumentos de frontera para que los astrónomos de instituciones nacionales puedan realizar investigaciones sobre objetos celestes. La herramienta principal de un observatorio es el telescopio.

2.1 Diseños ópticos

El objetivo de un telescopio terrestre es coleccionar la mayor cantidad de energía luminosa de objetos celestes, enfocar dicha luz en un plano y formar imagen con un mínimo de aberraciones, en un plano, para formar una imagen que pueda ser entonces analizada para obtener la información deseada. Una de las maneras más efectivas de recabar esa energía luminosa de los astros es a través de óptica reflectiva.

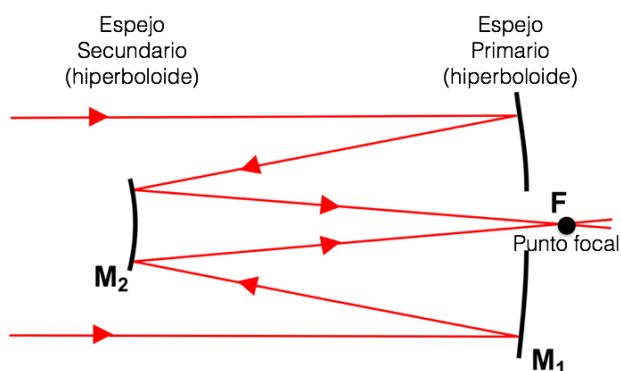


Figura 2-1. Diseño óptico de un telescopio reflector Ritchey-Chrétien.

De los tipos de óptica empleados para telescopios reflectores, con aplicaciones a la astronomía son del tipo Cassegrain, y una de sus variantes, el sistema Ritchey-Chrétien corrige las aberraciones esféricas y coma en todo el campo de visión, los telescopios del OAN/SPM son de este último. La [Fig. 2-1] presenta esquemáticamente un telescopio reflector tipo Cassegrain; esta configuración generalmente se emplea para telescopios científicos y se caracteriza por la distancia corta que existe entre los dos elementos ópticos y la posición del plano focal en la parte trasera del espejo primario. Esta óptica tiene la cualidad de ofrecer un campo visual amplio libre de aberraciones esféricas y coma.

2.2 Monturas de telescopios

Un telescopio es solo parte de un sistema moderno de observación astronómica, pues es necesario soportar el telescopio y mantenerlo apuntado a una dirección específica por tiempos que pueden ser considerablemente largos. Todo manteniendo una gran precisión y exactitud. Esto es tarea de la montura del telescopio. Existe un gran número de

monturas que han sido desarrolladas desde la introducción de los primeros telescopios y pueden ser clasificadas en dos grandes categorías: monturas Alt-Azimut y monturas ecuatoriales [Fig.2-2]

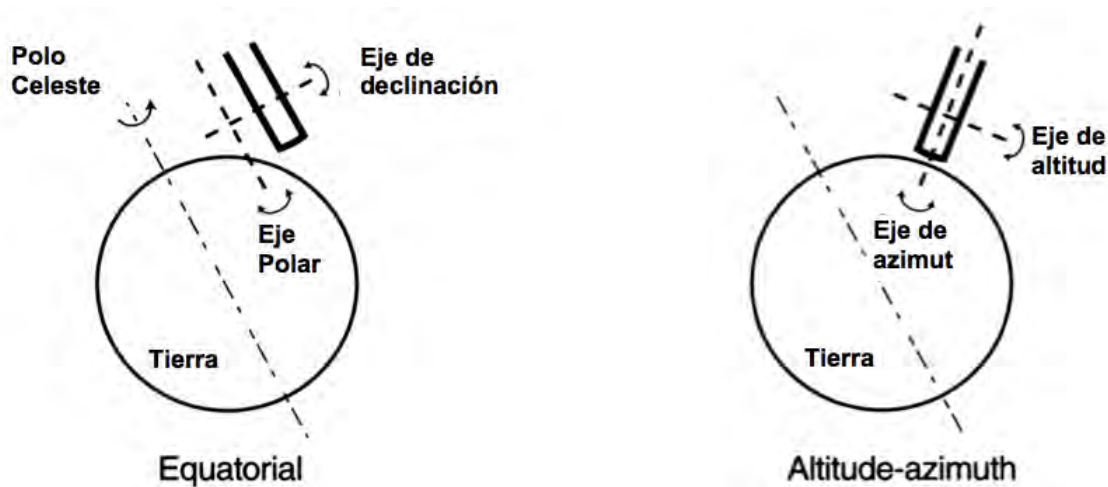


Figura 2-2. Principio de monturas de telescopios astronómicos: Alt-azimut (derecha) y ecuatorial (izquierda). Ambas tienen dos ejes de rotación ortogonales entre sí. En la montura Alt-azimut, el eje principal (eje de azimut) coincide con la vertical local. En la montura ecuatorial, el eje principal (eje polar) es paralelo al eje polar de la Tierra. {2}

Una montura Alt-azimut tiene dos grados de libertad: una rotación con respecto a un eje vertical (azimut) y una rotación con respecto a un eje transversal (altitud). Una combinación de estas rotaciones permite apuntar el telescopio en cualquier dirección.



Figura 2-3. Fotografía del telescopio de 2.1m del OAN/SPM, donde se puede apreciar la estructura de telescopio y su montura de tipo ecuatorial.

Una montura ecuatorial es básicamente una montura tipo Alt-azimut, pero en la que el eje vertical ha sido inclinado hacia el norte y haciendo un ángulo con el plano horizontal local

igual a la latitud geográfica del lugar. Esto hace que lo que era el eje de azimut quede paralelo al eje polar de la Tierra (eje polar). El eje ortogonal es el eje de declinación. Todos los telescopios actualmente en operación en el OAN/SPM son de tipo reflector y cuentan con monturas ecuatoriales [Fig. 2-3].

Desde el punto de vista mecánico, la montura Alt-azimut es la más sencilla, pero tiene la desventaja de que para mantener el telescopio apuntado en una dirección fija en el cielo, es necesario ir rotando la montura en ambos ejes para compensar el movimiento de rotación de la Tierra, además de tener que rotar el detector alrededor del eje óptico del telescopio. Por el contrario, en una montura ecuatorial, basta una rotación uniforme alrededor del eje polar y en sentido inverso a la rotación de la Tierra, para compensar por completo el movimiento de ésta. Sin embargo, el desafío mecánico es mucho mayor, pues es necesario soportar al telescopio estando la gravedad desalineada con respecto a los ejes de movimiento de la montura.

Por mucho tiempo, la montura usada para los telescopios astronómicos fue la ecuatorial. Sin embargo, con los avances en las tecnologías de control electrónico, ha sido posible resolver el problema de rotar una montura Alt-azimut en ambos ejes para poder seguir un objeto en el cielo. Esto ha dado lugar a que desde las últimas dos décadas del siglo XX, la montura preferida para telescopios astronómicos ha sido la montura Alt-azimut, que por su mayor sencillez mecánica, permite soportar cargas mayores, lo que ha abierto la puerta a telescopios de tamaño nunca antes pensado [Fig. 2-4]

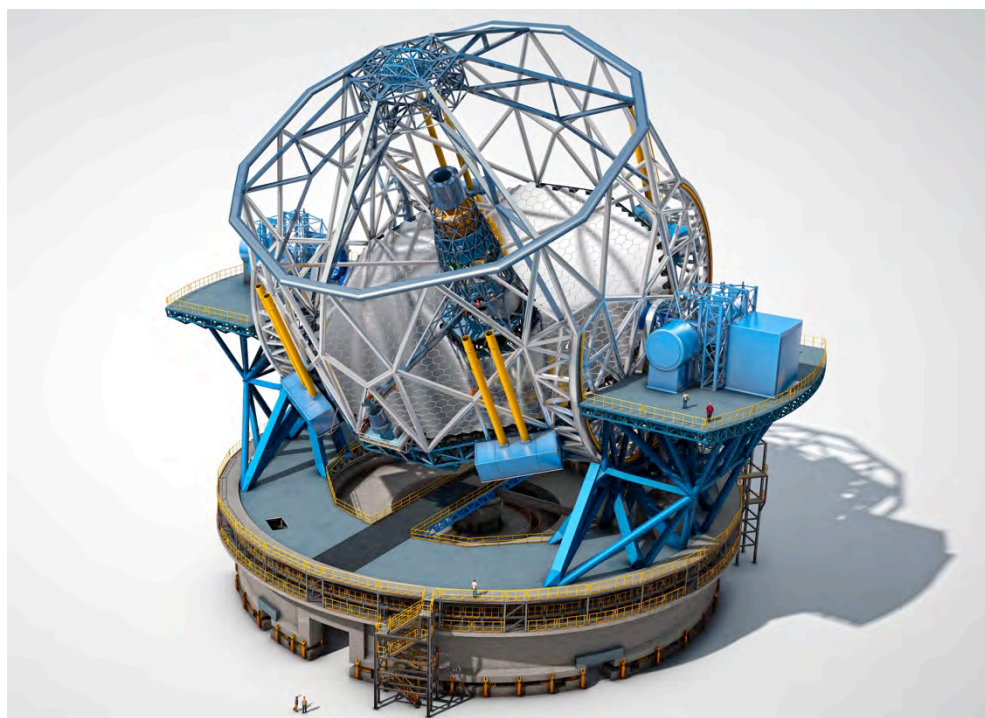


Figure 2-4. Imagen simulada por computadora del “European Extremely Large Telescope”. Este es un telescopio de 39.3 m de diámetro en su espejo primario que está siendo construido por el “European Southern Observatory” y que se planea empiece a funcionar en 2024 en el cerro Armazones en Chile.

2.3 Telescopios de óptica pasiva y activa

Tradicionalmente, los telescopios han tenido una óptica fija dada por el diseño óptico al momento de su construcción. Esta óptica es el resultado de un compromiso entre los diversos requerimientos de operación. Una vez construido, las características ópticas del telescopio podían modificarse solo dentro de un margen restringido de variación, como por ejemplo, cambiando la razón focal efectiva por medio de espejos secundarios, los avances tecnológicos permiten el contemplar telescopios cuya óptica puede ser modificada durante su operación. Estos son los llamados telescopios de óptica activa y adaptiva. Ver [Fig. 2-5]

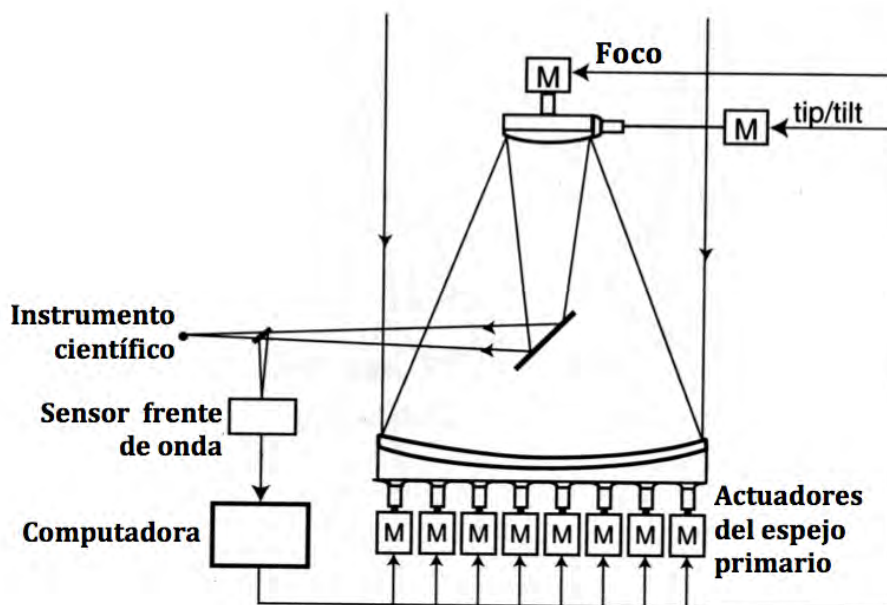


Figura 2-5. Componentes de un sistema moderno de óptica activa y adaptiva (2).

En ambos casos, se introducen deformaciones en uno o varios de sus elementos ópticos, para compensar así distorsiones introducidas durante el proceso de observación astronómica, siendo la diferencia fundamental las escalas características de tiempo en que se introducen estas variaciones.

En el caso de la óptica activa, las escalas de tiempo son de minutos o mayores, y las correcciones se introducen para compensar por flexiones en la estructura del telescopio debido a las cargas y esfuerzos por el peso del telescopio y su montura al variar la dirección en que se apunta el telescopio, además de la acción del viento sobre el telescopio y las variaciones térmicas.

La óptica adaptiva actúa en escalas de tiempo de las centésimas de segundo y se usa para corregir distorsiones en el frente de onda de la luz incidente, y que son debidos a variaciones en el índice de refracción de la atmósfera a lo largo de la línea visual las escalas de tiempo son de alrededor 2 milisegundos para la banda visible.

Los requerimientos técnicos y desafíos presentados por estos dos tipos de correcciones activas son muy diferentes, no solo en su escala temporal, sino en la amplitud de las correcciones necesarias, siendo mayores en el caso de la óptica activa. Esto hace que los dos tipos de óptica correctiva sean estudiados por separado y sus correcciones sean introducidas con elementos ópticos distintos.

2.4 Los telescopios del OAN/SPM

La estación principal del OAN/SPM esta situada en la Sierra de San Pedro Mártir en la península de Baja California, a una altura de casi 3,000 metros sobre el nivel medio del mar. Cuenta con tres telescopios de óptica reflectora cuyos diámetros de espejo primario son de 0.84, 1.5 y 2.1 metros. Su diseño óptico es del tipo llamado Ritchey-Chrétien, que como vimos, es una variante del tipo Cassegrain [Fig. 2-1]. Las monturas de todos son de tipo ecuatorial.

La figura [2-6] muestra el telescopio de 2.1 m del OAN/SPM, que es el más grande, indicando sus componentes estructurales principales.

El telescopio consta de:

1. El espejo primario en la parte inferior y la celda que lo sostiene. Por la cara inferior de esta celda es donde se instalan los instrumentos de observación y el guiador herramienta periférica que se usa para seguir un objeto y evitar que los objetos principales, a observar, tengan movimientos azarosos.
2. El espejo secundario en su parte superior y un anillo que lo sostiene.
3. Un marco intermedio por el que pasa el eje de declinación y en el que el telescopio se conecta con la montura.
4. La estructura de soporte que forma el llamado “tubo” que conecta la celda del primario y el anillo del secundario al marco intermedio.

La montura consta de: un yugo que es un rectángulo rígido con estructura de tubos en el que se monta el telescopio por medio de los baleros del eje de declinación. Un pilar norte donde se apoya uno de los extremos del yugo por medio de uno de los baleros del eje polar. Un pilar sur donde esta situado el motor que imparte el giro que cancela el movimiento aparente de la bóveda celeste a través del engrane de ascensión recta.

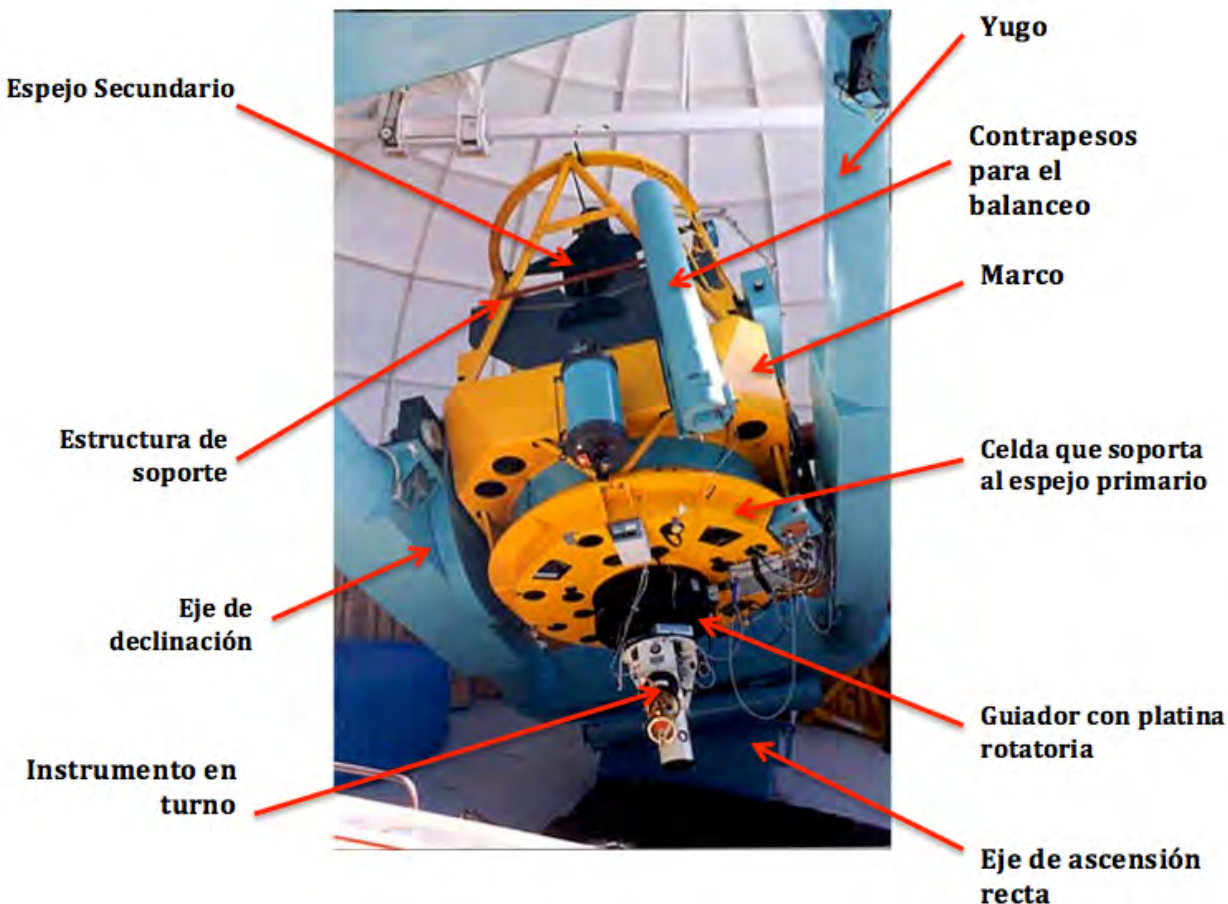


Figura 2-6. Partes principales de un telescopio con estructura ecuatorial y óptica Cassegrain

Los factores a considerar en el desempeño de la montura son: su peso propio, los elementos que soporta y su distribución [Fig. 2-6], los movimientos requeridos de la estructura y movimientos propios de las componentes que soporta, la forma de producir el movimiento y sistemas empleados las cargas dinámicas producidas por el viento y los gradientes de temperatura producidos por la electrónica empleada y por el medio ambiente.

Como se puede apreciar en la [Fig. 2-7], el llamado tubo sufre de flexiones por los componentes que soporta en sus extremos y que son los componentes ópticos (espejos primario y secundario) además de los instrumentos empleados para el control, guiado, y el específico para la observación. La relación de posición de los componentes, como es de esperarse, varía de acuerdo al giro sobre ambos ejes por las flexiones propias de la estructura. Esto es crítico en las componentes ópticas. Las estructuras que se han desarrollado han sido para compensar esas flexiones {2}. En El OAN/SPM se tienen estructuras con celda tipo serrurier [Fig. 2-7], en donde se busca que los ejes ópticos de las componentes principales queden alineadas igualando las deflexiones en sus extremos que es donde se encuentran dichas componentes. El espejo secundario actual del telescopio de

1.5m propiedad del OAN/SPM cuenta con una celda para el espejo secundario con capacidad de alineación de ± 5 micras en posición y 5 segundos de arco en inclinaciones {3}. [Fig. 3-3]

La estructura se puede considerar cuasi-estática por la poca velocidad con la que se mueven sus dos ejes.

Un telescopio para su mejor funcionamiento, requiere de estar a la intemperie para alcanzar el equilibrio térmico con el ambiente lo más uniforme y rápido posible, para que los desplazamientos en su óptica durante el tiempo de observación del objeto celeste sean mínimos y puedan ser corregidos. Además, su empleo es en zonas donde el flujo de corrientes de aire sea lo más laminar para evitar la turbulencia, la cual provoca deformaciones e inestabilidad de imagen por el efecto de cambios en los gradientes de temperatura en el aire.

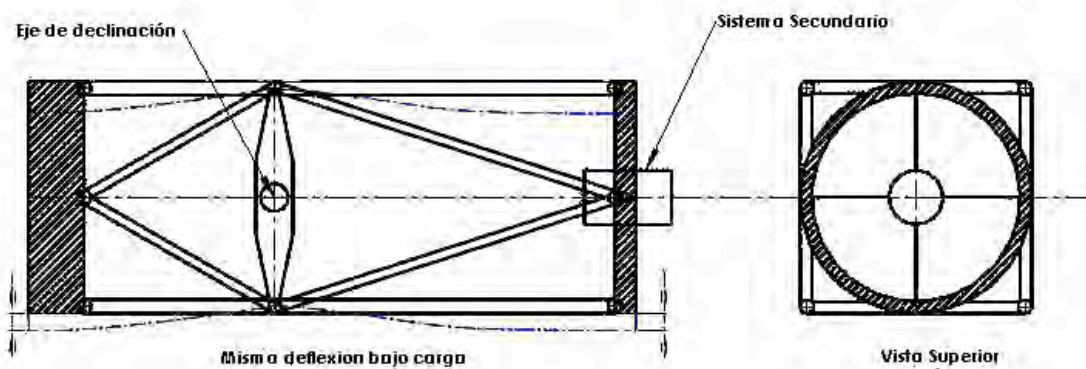


Figura 2-7. Imagen de las deflexiones que presenta una estructura del tipo serrurier. Misma deflexión en sus extremos y el eje de las componentes ópticas queda paralelo al eje principal de la estructura.

3 Caso de estudio

3.1 Origen

En la astronomía actual, se requiere de telescopios reflectores de medianas dimensiones (de 1 a 5 metros de diámetro en su superficie óptica primaria) cada vez con mayor poder de resolución angular, eficientes y autónomos o automáticos, para poder colectar la energía luminosa de los objetos celeste y realizar investigación astronómica especializada de frontera.

La resolución angular $\Delta\theta$ (III.1) es la habilidad del sistema óptico de distinguir detalles en la imagen que produce y esta dado en radianes por la siguiente relación:

$$\Delta\theta = 1.22\lambda/D \quad \text{(III.1)}$$

donde D es el diámetro del espejo, λ la longitud de onda.

La sensibilidad y eficiencia implica maximizar la calidad de imagen, esto es, la capacidad colectora y reflectora de energía luminosa de los objetos astronómicos. Además debe permitir su enfoque de manera lo más coherente y estable, en una zona llamada plano focal, y así poder recabar y analizar esa energía luminosa con el instrumento que se requiera.

Como ya lo describimos brevemente en el capítulo anterior, un telescopio astronómico es un instrumento a cielo abierto, que apunta hacia el objeto de interés y por lo tanto la luz que incide debe atravesar la atmósfera; la cual esta cambiando constantemente. En la imagen de una estrella este efecto se verá manifestado como un cambio azaroso de posición en el centroide, para la luz visible en escalas de 2 milisegundos; dando como resultado que la imagen, en tiempos de exposición mayores a 2 segundos, de una estrella sea una mancha en lugar de un punto. La turbulencia atmosférica influye de tal manera que esta condición determina el tamaño real de las imágenes que emergen del telescopio. Este tipo de efectos cambiantes rápidamente no se contemplan en este trabajo, pues queda fuera del tema de tesis ya que son corregidos por medio de lo que se llama “óptica adaptiva”.

El principal problema que queda y que degrada la calidad de la imagen son las alteraciones geométricas (deformaciones) que presentan las superficies reflectoras. Estas deformaciones son provocadas por su sujeción, soporte y alineación de una con respecto a la otra. Estos efectos son corregidos por medio de lo que se llama “óptica activa”. Una de las principales maneras de mejorar la calidad de imagen es compensando las deformaciones y o alineación de una superficie deformando a la otra.

A continuación se describen los problemas de soporte y alineación de las principales componentes ópticas en un telescopio reflector.

Se enumeran y explican brevemente:

- Sujeción y alineación de las componentes ópticas en la estructura con respecto al eje óptico del telescopio.
- Deformación de las componentes reflectoras debidas a su peso propio.
- Errores residuales en la superficie durante su fabricación.

3.2 Sujeción y alineación de las componentes ópticas en el telescopio.

Existen tres técnicas principales de sujetar y alinear a los espejos monolíticos dentro de la estructura llamada tubo. Su capacidad para lograr la calidad de imagen deseada se va incrementando de acuerdo a las técnicas empleadas y que a continuación se describe.

La primera es fijar el espejo primario en la celda de la estructura y compensar su desplazamiento y desalineación con respecto al eje óptico con la alineación y desplazamiento del espejo secundario, manual o activamente. [Figs. 3-1,3-3]

La segunda consiste en alinear y centrar pasivamente al espejo primario neumáticamente con bolsas de aire {4}, ó con balancines interconectados en arreglos tipo árbol “whifle trees”, para incrementar los puntos de soporte, complementado con celdas de carga para monitorear su funcionamiento. También se alinea y desplaza al espejo secundario manual o activamente. Esta manera de alinear los espejos en la actualidad es de mediano alcance y es la parte de resolución baja, pues la alineación fina ó de resolución alta requiere una estrella o una fuente puntual muy lejana.

Sujeción espejo
primario

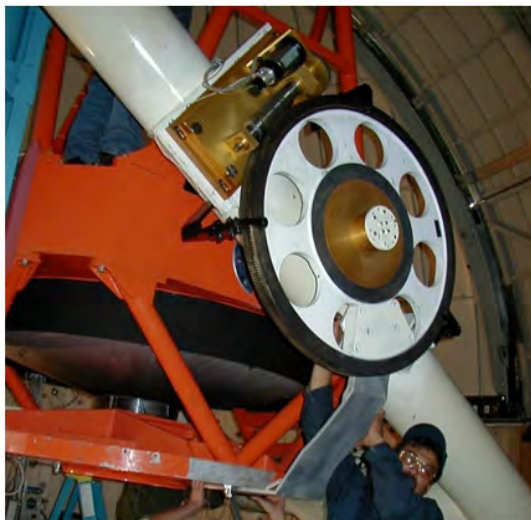


Figura 3-1. Detalle de sujeción del espejo primario en el telescopio de 1.5m en el OAN/SPM

La tercera es corregir activamente los desplazamientos de cuerpo rígido tanto del espejo primario monolítico como del secundario. Esto se ha logrado neumáticamente con bolsas colocadas entre el espejo(caras lateral e inferior) y la celda, y cuya presión es controlada

individualmente en el espejo primario [Figs. 3-2, 3-3] {5,6}, ó con levas precargadas, contrapesos y actuadores.

3.3 Deformación de las componentes reflectoras debidas a su peso propio.

Las deformaciones o alteraciones geométricas por el peso propio del espejo secundario si está adecuadamente sujeto, pueden llegar a ser despreciables con respecto a las deformaciones que presente el espejo primario y del grado de control que se tenga sobre de ellas, ya que son al menos un par de órdenes de magnitud menor a las deformaciones del espejo primario.

Con respecto al espejo primario, cuando el telescopio apunta a diferentes ángulos cenitales la dirección de la gravedad relativa al primario cambia y afecta significativamente el comportamiento del cuerpo.

En el espejo primario, las deformaciones debidas a su peso propio, en la actualidad se corrigen activamente con actuadores empuje-jalado (push-pull), situados en la cara opuesta a la superficie reflectora del espejo primario monolítico aunado a tres celdas de carga que sensan el 2 % del peso del espejo estos tres puntos se empleados para alinear el primario [Fig. 3-3]. Esto se ha logrado, por ejemplo en el espejo primario del 2.1 metros en OAN/SPM, neumáticamente con bolsas cuya presión es controlada individualmente [Fig. 3-2] {6} ó con actuadores hidrostáticos, neumáticos o electromecánicos. En el primario se logran corregir deformaciones por peso propio o aberraciones de primer orden en la superficie reflejante, con una precisión de 50 ηm rms en telescopios de 8 metros {7}, o de 27 ηm rms en espejos medianos de 2 metros {5}, pero en la actualidad se requiere de mayor rango de acción y precisión (decenas de nanómetros) en la corrección o compensación de las deformaciones en todo el sistema óptico no solo del primario, para alcanzar la calidad de imagen en el plano focal y que solo quede limitada esta por la turbulencia atmosférica (seeing).

3.4 Errores de superficie introducidos en la fabricación.

Con respecto a corregir los errores de curvatura local (sobre todo en los bordes o errores de bajo orden de pulido del primario debidas a su fabricación) deformando el secundario, en la actualidad existen pocos avances.



Figura 3-2. Soporte activo del espejo 2.1m en el OAN/SPM donde se pueden apreciar las bolsas neumáticas empleadas para alinear y corregir las deformaciones por peso propio {6}.

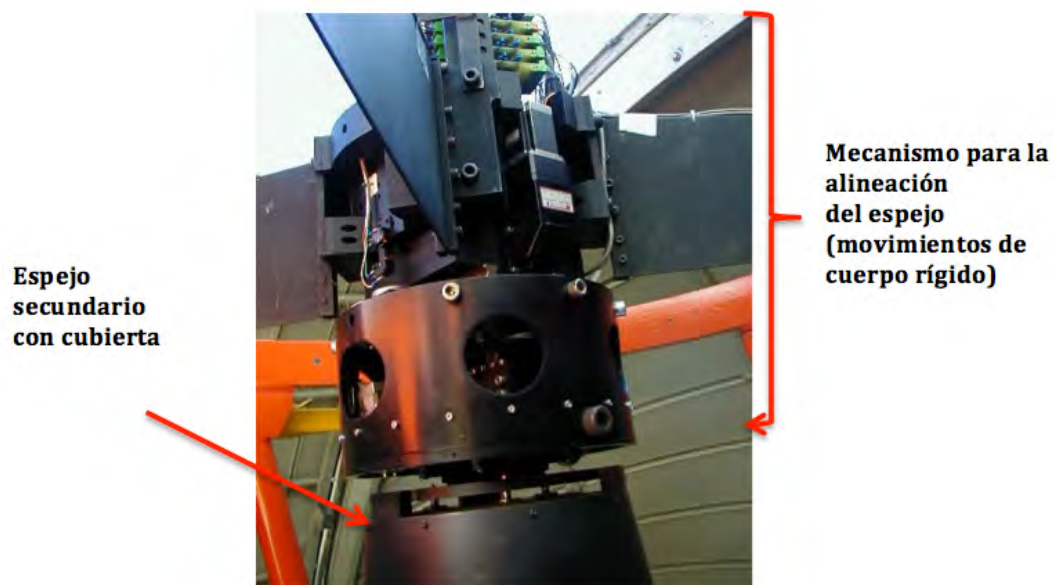


Figura 3-3. Mecanismo con 5 grados de libertad para la alineación del espejo secundario {3}.

4 Descripción del Problema y Planteamiento de Resolución

4.1 Problema

En la actualidad el OAN/SPM cuenta con un espejo circular monolítico, es decir de una sola pieza, cuyo diámetro es de 1.5m, de aluminio [Fig. 4-1], que fue retirado debido a que presentaba muy pobre calidad de imagen, resultado de las deficiencias de pulido y de sujeción que introducían esfuerzos, y como consecuencia, deformaciones a la superficie reflectora. Se desea corregir la óptica con un espejo secundario tipo menisco, esto es de espesor constante, de 0.275 m de diámetro con tecnología de frontera, que permita corregir o compensar esas alteraciones que presenta este espejo primario y que además permita cambiar su sistema óptico, cambiando la curvatura local mediante el cambio de constante de conicidad del espejo secundario. Esto con el fin de adaptarlo (reconfigurarlo) a un telescopio con óptica astronómica científica de frontera.



Figura 4-1. Espejo primario monolítico de aluminio de 1.5m que se desea reutilizar



Figura 4-2. Manera actual de sujeción empleado en los espejos secundarios del OAN/SPM.

4.2 Planteamiento de Resolución

El enfoque de este trabajo consta de tres elementos: una base teórica, un entorno numérico y finalmente un contexto experimental y de desarrollo. A continuación se describen estos tres elementos.

4.2.1 Contexto teórico

El modelaje que se hará del espejo secundario, así como las deformaciones introducidas por la acción de fuerzas externas, se harán por medio de la Mecánica del Medio Continuo (MMC). Los aspectos mas relevantes están dados en la sección. [5.1]. La referencia principal que se ha empleado en este trabajo es el libro de Gurtin {8}, tal como ha sido a su vez presentado en los cursos de Mecánica del Medio Continuo {9}

Se trabajará dentro del llamado “régimen de elasticidad lineal”, que describe las deformaciones de un cuerpo elástico solo a primer orden, lo que implica que las deformaciones son directamente proporcionales a la magnitud de las fuerzas aplicadas. Mas adelante, ver ecuación [V.I.10], presentamos la llamada ecuación fundamental de la elasticidad lineal que describe este régimen.

La ecuación debe a su vez ser planteada dentro del contexto óptico lo cual es desarrollado en las secciones [5.2,5.3,5.4]. En particular, se verá que la ecuación que describe el problema es una ecuación bilaplaciana que, por la simetría del caso, debe ser expresada en coordenadas cilíndricas. Los detalles se dan en la ecuación [V.V.6] sección [5.5.3] .

Para que esa ecuación incorpore toda la información y cuya solución dé la solución buscada, debe plantearse como un sistema que incluye:

- La descripción precisa en términos de la Mecánica del Medio Continuo del cuerpo (espejo), en sus configuraciones inicial y final, incluyendo toda la información sobre el cuerpo concreto bajo análisis, descritas en la sección [7-1]. La calidad de los espejos actuales permite afirmar que dos de las principales premisas para la elasticidad lineal se cumplen con la precisión requerida: la homogeneidad y la isotropía del material, sección [7-2]. También puede afirmarse que su comportamiento lineal está, en general y dentro de ciertos rangos, asegurado. Pero se debe de tener especial cuidado de trabajar en el régimen tal que sus propiedades elásticas permanezcan dentro de ese rango.
- Las alteraciones geométricas en la superficie permitidas o requeridas, que nos dan las condiciones Dirichlet del problema de ecuaciones diferenciales parciales.
- Las fuerzas que se ejercen y las fuerzas que se desea conocer expresadas como condiciones Neumann del problema.

Se tiene información suficiente como para afirmar que el tipo de alteraciones que se detectan es manifestación de un fenómeno elástico debido a que los movimientos del espejo, en nuestro caso el secundario, conllevan a una redistribución de las fuerzas de cuerpo debido a diversas causas. La forma de las alteraciones permite asumir que surgen y se distribuyen en el medio en forma de ondas elásticas. Secciones [5.3, 5.6]

4.2.2 Contexto numérico

Dado el planteamiento matemático del problema que resulta ser complejo, queda claro que su resolución en términos de los métodos actuales de trabajo y conocimiento debe ser aproximada.

Entre los diferentes métodos, el Método de Elementos Finitos (MEF) ha sido empleado con buenos resultados. Esto se debe, entre otros aspectos, a que el MEF permite reproducir de manera satisfactoria tanto la geometría como la solución interpolada buscada. También permite simular de manera adecuada la reacción como medio continuo del cuerpo al aplicársele fuerzas y momentos, puntuales o distribuidos.

Los aspectos más generales del MEF se discuten brevemente en la sección [5.5], sólo en lo pertinente al problema planteado.

4.2.3 Contexto experimental y de desarrollo.

Tanto por experiencia como por capacidad técnica, se asume que las posibilidades de realización de la posible solución al problema vienen dadas por fuerzas más o menos puntuales en la superficie o frontera inferior del espejo, aplicadas con buena precisión en zonas del mallado cuya posición ha sido optimizada.

Aquí se reintroduce la definición de actuador que se manejará en este trabajo como el aparato que induce una de esas cargas que, primero se suponen puntuales, y después se distribuye su fuerza en anillos representados por nodos que delimitarán el área de

contacto real, llamado cojinete. En este trabajo sólo dos características de un actuador son relevantes:

- La magnitud de la fuerza que aplica es controlada con la debida precisión, y
- se asume que esa fuerza se da en dirección del campo de vectores normales a la superficie. Para ello cada actuador se asume como instalado en una estructura independiente del espejo pero perpendicular a la superficie base posterior del espejo y su rango de acción le permite moverse junto con el espejo. Esta superficie base será el paraboloides por razones que mas adelante se explicarán, sección [5.4] y las fuerzas están dirigidas al radio paraxial de la curvatura.

Una vez optimizada su posición en el diseño, ya dentro del sistema físico de actuadores o soportes, no se puede variar dicha posición; aunque se puede variar la magnitud de la fuerza y el acoplamiento del actuador con la frontera posterior del espejo para que dicha fuerza permanezca perpendicular a la superficie de contacto al deformar al cuerpo. Otros aspectos no son considerados.

5 Marco Teórico. Premisas Ópticas y de MMC

5.1 Fundamentos de MMC

La información del problema es:

- La geometría del cuerpo no deformado Ω_0 ó configuración de referencia.
- La geometría deformada Ω_1 .
- Los parámetros elásticos y ópticos del material, así como restricciones en la configuración del espejo.

Bajo las correspondientes restricciones ópticas y asumiendo la validez de la elasticidad lineal para este caso, el problema es: dada la configuración geométrica Ω_0 y Ω_1 , encontrar un movimiento del cuerpo Ω de la configuración Ω_1 a la configuración Ω_0 .

Formalmente consiste en encontrar una función de movimiento x que mapea los puntos del cuerpo Ω (espejo) de la configuración Ω_1 a la Ω_0 .

$$x: \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow E^3 \quad (\text{V.I.1})$$

El cuerpo Ω_1 es deformado, vía un mapeo que transfiere los puntos materiales \mathbf{p} de la configuración inicial pertenecientes al Ω_1 , al punto del cuerpo original o de referencia Ω_0 en el tiempo t . \mathbf{x} es el vector de posición espacial

$$x(\mathbf{p}, t) = \mathbf{x} \quad (\text{V.I.2})$$

$$x(\mathbf{p}, t) = f(\mathbf{p}, t) \quad (\text{V.I.3})$$

tal que

$$x(\Omega_1, t_0) = \Omega_0 \quad (\text{V.I.4})$$

Desde el punto de vista matemático, el problema así planteado es ambiguo porque aunque hemos especificado las condiciones de deformación que nos llevan de Ω_1 a la Ω_0 (condiciones a la frontera tipo Dirichlet), no hemos especificado las fuerzas que es necesario aplicar para lograr tales deformaciones (condiciones a la frontera tipo Neumann) que deben aplicarse sobre la frontera del cuerpo $\partial\Omega$.

El movimiento entre dos configuraciones esta restringido por las leyes de la mecánica, si la función x definida anteriormente es un movimiento real entre Ω_1 y Ω_0 , entonces x tiene que ser una solución de las ecuaciones diferenciales parciales básica de la elasticidad lineal presentadas en {8,10}

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}[\boldsymbol{\varepsilon}], \quad (\text{V.I.5})$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T), \quad (\text{V.I.6})$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho_0 \mathbf{b} = \rho_0 \ddot{\mathbf{u}}, \quad (\text{V.I.7})$$

donde [V.I.5] se refiere a las ecuaciones constitutivas de esfuerzo-deformación, [V.I.6] a la relación deformación desplazamiento y [V.I.7] a la ecuación de equilibrio y donde $\boldsymbol{\sigma}$ es el tensor de esfuerzos, $\boldsymbol{\varepsilon}$ representa al tensor de deformación infinitesimal, \mathbf{b} es el campo vectorial de las fuerzas másicas que en nuestro caso será el de las fuerzas gravitatorias y ρ_0 es la densidad del material. Cuando el Ω es homogéneo, la C de la ecuación [V.I.5], es el tensor de constantes elásticas de Lamme que contiene a μ y λ , sirven para describir las propiedades del material.

Las ecuaciones son expresadas en términos del vector de desplazamiento donde

$$\mathbf{u}(\mathbf{p}, t) = x(\mathbf{p}, t) - \mathbf{p}, \quad (\text{V.I.8})$$

En un medio isotrópico el tensor de tensiones o tensor de esfuerzos $\boldsymbol{\sigma}$ se expresa:

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\mu\boldsymbol{\varepsilon} + \lambda(\text{Tr}\boldsymbol{\varepsilon})\mathbf{I} \quad (\text{V.I.9})$$

Las ecuaciones anteriores se combinan para obtener la ecuación de movimiento de Navier

$$\mu\Delta\mathbf{u} + (\lambda + \mu)\nabla\text{Div}\mathbf{u} + \mathbf{b}\rho_0 = \rho_0\ddot{\mathbf{u}} \quad (\text{V.I.10})$$

en el caso estático puede ser expresada por la ecuación de equilibrio ó ecuación de Navier-Cauchy:

$$\mu\Delta\mathbf{u} + (\lambda + \mu)\nabla\text{Div}\mathbf{u} + \mathbf{b}\rho_0 = 0 \quad (\text{V.I.11})$$

Esta ecuación laplaciana tiene que estar restringida por condiciones a la frontera para obtener la forma específica a resolver.

5.2 Representación analítica de una superficie óptica.

Es frecuente en los sistemas ópticos, sobre todo en los telescopios, que la superficie sea una cónica de revolución, como en nuestro caso en el que la frontera principal de Ω_0 es hiperbólica. [Fig. 5.1]

En óptica conviene expresar estas curvas por una sola ecuación general, llamada comúnmente ecuación de la sagita, que caracteriza a la superficie mediante un radio de curvatura al vértice y la constante de conicidad {11}. Este último parámetro está relacionado con la llamada excentricidad e , que se estudia en la geometría analítica por medio de la relación: $K = -e^2$. Con tal ecuación se permite cambiar de cónica simplemente variando el valor de K . Ecuación[V.II.1].

La ecuación de la sagita se usa en diferentes sistemas de coordenadas, para este caso usaremos coordenadas cilíndricas z, r, θ . La representación de la superficie esférica

axisimétrica que se seguirá será con respecto a la tangente del plano cartesiano x-y, en el cual el vértice de dicha curva será $z(r = 0, \theta) = 0$.

entonces se tiene

$$z = \frac{cr^2}{1 + \sqrt{1 - (1+K)c^2r^2}} \quad (\text{V.II.1})$$

donde:

$c = 1/R$

$R =$ radio de curvatura paraxial o del vértice (de diseño).

$K =$ constante de conicidad. (de Schwarzschild).

$r =$ distancia del eje óptico a un punto sobre la superficie.

$z(r, \theta) =$ sagita

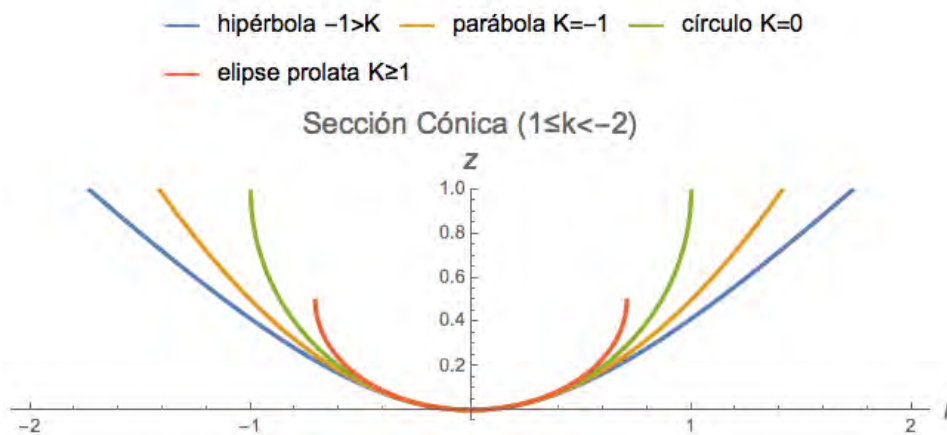


Figura 5-1. Perfiles de las superficies esféricas con el mismo radio de curvatura, pero diferente constante de conicidad

5.3 Polinomios de Zernike

El frente de onda que emerge del telescopio, frecuentemente presenta deformaciones provocadas por desalineación entre los elementos ópticos [Fig. 5-2] y por deformaciones propias de cada cuerpo reflejante, como ya fue mencionado en el capítulo [3].

Existe la manera de representar matemáticamente este frente de onda y estimar la cantidad de aberraciones o deformaciones de la superficie óptica que están presentes. Esta representación matemática es conocida como función de aberración (WFE) y existen diferentes formas de representarla usando una base ortonormal como, son los polinomios de Seidel, Zernike, etc. En este caso, por su compatibilidad y aplicación, serán usados los polinomios de Zernike para un control cualitativo y cuantitativo de la imagen a través de las correcciones a la superficie reflectora.

Aunque el ajuste de una superficie mediante estos polinomios, por lo general se usa cuando se requiere estimar las aberraciones individualmente, como todo ajuste tiene sus limitaciones. Una de estas limitaciones consiste de que al elegir el número de aberraciones o el grado del polinomio, si es bajo se podría aplanar la superficie y si se elige un número grande la superficie podría tener rizo adicional introducido por una mala selección del grado del polinomio. Sin embargo, a pesar de estos inconvenientes, la representación de la superficie mediante los polinomios de Zernike es una opción dada la necesidad de representación matemática de una superficie óptica.

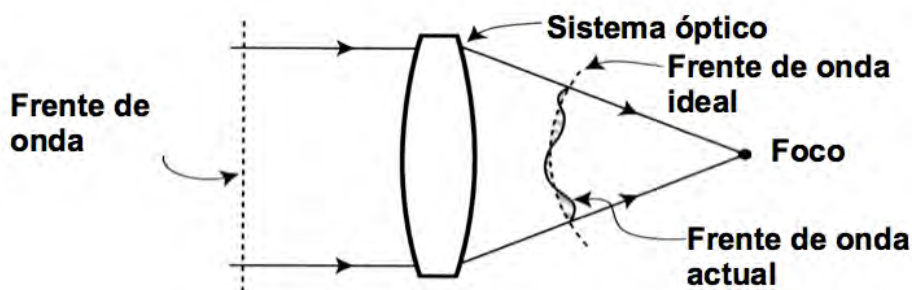


Figura 5-2. Efecto de la deformación de un sistema óptico al frente de onda {2}.

De acuerdo a la representación polinómica introducida por Zernike {12}, la superficie reflectora (frontera del cuerpo) $\Delta Z(r, \theta)$ es generada por sucesivos modos Z_{nm} expresados en coordenadas cilíndricas.

r = es el radio, que por lo general es expresado en valor normalizado(0,1).

n = número de onda radial, en entero positivo

m = número de onda circunferencial, en entero positivo

θ = ángulo azimutal

Cada función trigonométrica es periódica completa en el radio.

Los términos de esta función son llamados los polinomios circulares de Zernike donde: A_{nm} y B_{nm} son los coeficientes de Zernike y cada polinomio presenta ciertas propiedades de invariancia.

$$\Delta z(r, \theta) = A_{00} + \sum_{n=2}^{\infty} A_{n0} R_n^0(r) + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{m=1}^n R_n^m [A_{nm} \cos(m\theta) + B_{nm} \sin(m\theta)] \quad (\text{V.III.1})$$

La normalización y la determinación de los componentes radiales, aquí se presenta, donde $R_{n,m}^2(r) \leq 1 \forall r \in [0,1]$, $n-m$ deben ser par y además $n \geq m$. Si introducimos el término $s = 0,1,\dots, (n-m)/2$, {13} tenemos:

$$R_n^m(r) = \sum_{s=0}^{\frac{n-m}{2}} (-1)^s \frac{(n-m)!}{s! \left(\frac{n+m}{2}-s\right)! \left(\frac{n-m}{2}-s\right)!} r^{(n-2s)} \quad (\text{V.III.2})$$

Para producir aberraciones hasta de tercer grado tabla [5-3], marcadas con una línea diagonal roja, en una apertura circular se emplearán los polinomios que describen las aberraciones llamadas desenfoque, astigmatismo, coma y esférica donde los números de onda son positivos, ya que los negativos solo implican un cambio de signo en el polinomio; así como se dejan fuera el pistón y el tilt ó inclinación, pues estos representan movimientos de cuerpo rígido los cuales no conciernen a este estudio.

n=	0	1	2	3	4	5	6
m= 0	Piston	0	Defoco $2r^2-1$	0	Esferica $6r^4-6r^2+1$	0	2° esférica $(20r^6-30r^4+12r^2-1)$
1	0	Tilt $r\text{sen}(\theta)$	0	Coma $(3r^2-2)r\text{sen}(\theta)$	0	2° Coma $(10r^5-12r^3+3r)\text{sen}(\theta)$	
2	0	0	Astigmatismo $r^2\text{sen}(2\theta)$		2° Astigmatismo $(4r^4-3r^2)\text{sen}(2\theta)$	0	
3	0	0	0	1° Coma triang. $r^3\text{sen}(3\theta)$	0		
4	0	0	0	0			

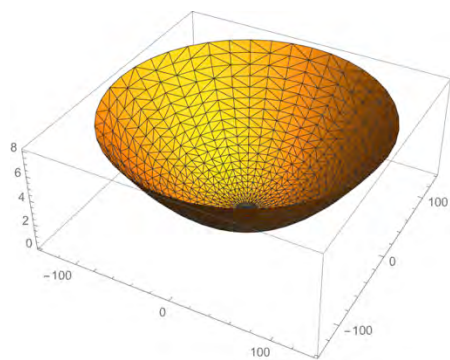
Tabla 5-3. Polinomios de Zernike hasta 5° orden (amplitudes no incluidas)

Según Doyle {14}, el polinomio de Zernike tiene varias características que lo hacen particularmente útil para su empleo en los sistemas ópticos.

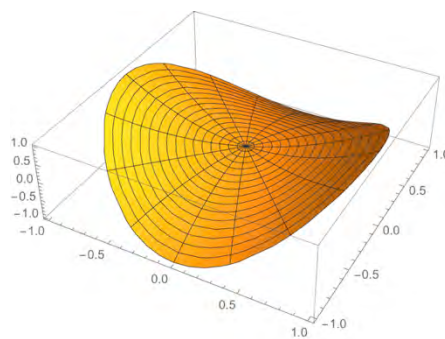
- 1) el conjunto es ortogonal sobre una apertura circular. Eliminando términos o sumándolos al conjunto, no afecta el valor de los coeficientes originales del resto.
- 2) el error rms con el cual se parte de los polinomios, es minimizado con respecto de la superficie de referencia usando un ajuste por mínimos cuadrados.

La ecuación que representa a la superficie formada por una cónica con aberraciones esta dada por {14}:

$$\Delta z(r, \theta) = \frac{cr^2}{1 + \sqrt{1 - (1+K)c^2r^2}} + \sum_{nm} A_{nm} R_{nm}(r, \theta) \quad (\text{V.III.3})$$



Desenfoque Z_{20}



Astigmatismo Z_{22}

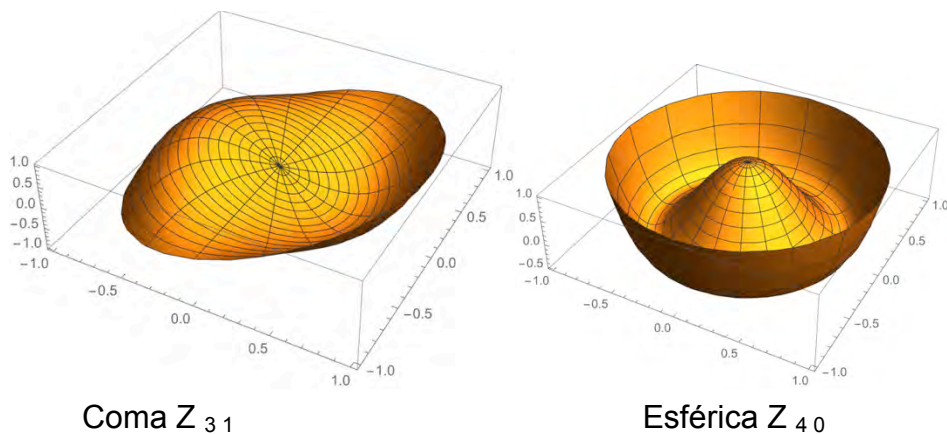


Figura 5-4. Aberraciones características en superficies de revolución. Ejemplos con radio normalizado.

5.3.1 Cálculo en la amplitud de las deformaciones

Las amplitudes pico a valle de las deformaciones fueron obtenidas de la fórmula rms que usualmente es empleada en los análisis de frente de onda para obtener la desviación que presentan las aberraciones Z_{nm} de la superficie teórica de acuerdo a trabajo de Noll {15} donde el radio se maneja normalizado

$$Z_{n,m}(r, \theta)_{rms} = A_{nm} \times \beta_{nm}^{-1} \quad (\text{V.III.4})$$

$$\beta_{nm} = \sqrt{(n+1)} \times \quad \{1 \text{ si } m=0, \sqrt{2} \text{ si } m \neq 0\}$$

donde A_{nm} es la amplitud del polinomio de número radial "n" y número acimutal "m". El Z_{rms} es la desviación estándar de toda la superficie.

5.4 La parábola como superficie base

Si se hace una expansión polinómica en series de Taylor alrededor del origen de la ecuación de la sagita [V.IV.1] {13} se obtiene:

$$z = \frac{1}{2R} r^2 + \frac{1+\kappa}{8R^3} r^4 + \frac{(1+\kappa)^2}{16R^5} r^6 + \frac{5(1+\kappa)^3}{128R^7} r^8 + \dots \quad (\text{V.IV.1})$$

de aquí se puede ver que la parábola $\kappa=-1$ corresponde exactamente al primer término. Esto quiere decir que se puede usar un paraboloide como superficie de referencia, y obtener otras cónicas, como la hiperboloide o la elipsoidal, con aberraciones añadidas a la paraboloide (V.III.1).

Para el caso de solo tomar en cuenta las aberraciones primarias (astigmatismo, coma y esférica) en cualquier otra cónica que no sea paraboloides, se necesitan de todas las aberraciones con exponentes menores o hasta la esférica de 5^o orden (polinomio de 6^o orden en radio) para su descripción, o su equivalente que es el resto de los términos de la expansión polinómica. Comparar los términos de la tabla [5-3] con los de la ecuación [V.IV.1].

Ritchey-Chrétien demostraron analíticamente que con la combinación propuesta de superficies hiperboloidales de diseño, que ya se mencionó brevemente en la sección [2], se podría corregir la aberración esférica y la de coma en todo el campo de visión.

La aberración esférica aparece en cada espejo, ya que el objeto observado se encuentra en infinito, y no en el centro de curvatura del espejo. Si embargo, aunque inevitable, se puede diseñar el sistema óptico de forma tal que la aberración esférica del segundo espejo cancele a la del primero, con lo que se obtiene un sistema óptico libre de éstas aberraciones. Si subsecuentemente, debido a causas como la deformación de superficies ópticas o desalineamiento del sistema óptico por flexiones u alguna otra causa uno de los espejos es modificado, será posible compensar la nueva aberración ajustando la superficie del otro espejo; el espejo secundario es más apto para estos ajustes.

Para demostrar la posibilidad de deformar un espejo hacia una superficie elipsoidal y con ello estaríamos corrigiendo la aberración esférica de 5^o orden que es la superficie que más se le parece (comparar las figuras [5-1, 5-5]), se efectuó el siguiente ejercicio con el programa Mathematica®. Solo se generaron curvas pues la superficie presenta simetría de revolución y las unidades empleadas en este ejercicio fueron mm.

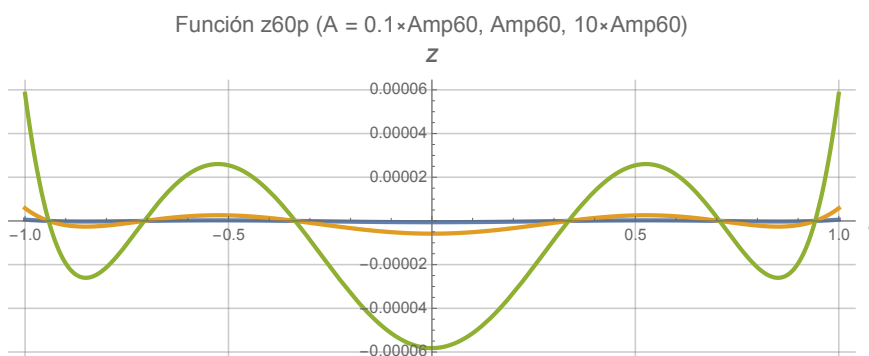


Figura 5-5. Gráficas ilustrativa de curvas generadas solo por el polinomio de Zernike 5^o orden. Para A = (0.1, 1, 10) x Amplitud. El radio ha sido normalizado.

Se sumo a la ecuación de la curva esférica (constante de conicidad K=0) , la deformación lograda con los polinomios de Zernike de 5^o orden [V.III.3] variando su amplitud [V.III.4] y con ella se generó la superficie deformada de muestreo Δz , [Fig. 5-6]. Para ello se mantuvieron fijas las variables del radio de curvatura paraxial y el radio de la superficie cónica. Se obtuvieron valores discretos que determinaban a esa nueva curva y con estos

valores se ajusto la ecuación de la sagita donde ahora el valor a encontrar es la llamada constante de conicidad K. La función es no lineal y se empleo el programa Mathematica para aproximarnos al valor requerido.

El resultado fue que en efecto, los valores de K, se aproximaban al valor de la constante de conicidad de una elipse $K=1$.

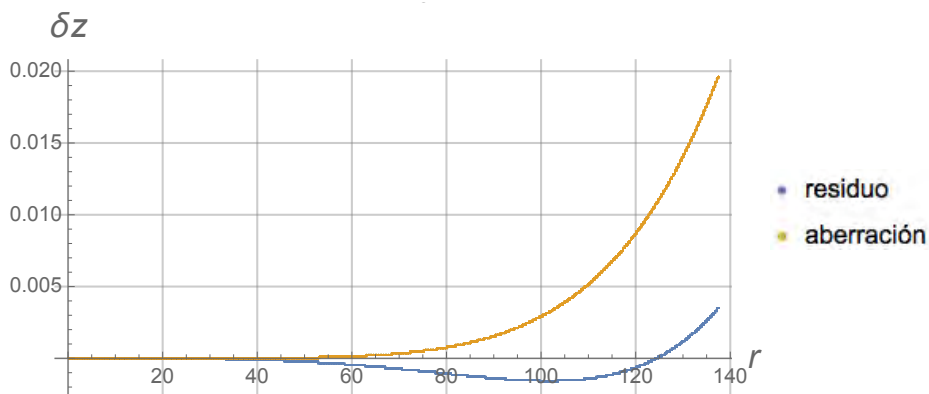


Figura 5-6. Residuos del ajuste y la función de aberración. En este caso a la variable radio se le asigno el valor especificado para el espejo secundario del telescopio 1.5 m. Unidades en mm.

En la [Fig. 5-6] se observa que los residuos del ajuste son al menos una orden de magnitud menor que las amplitudes de la función de aberración. Esto significa que el ajuste esta más próximo a la curva local con aberración, que la curva a la curva local sin aberración.

Posteriormente con los parámetros anteriores, pero escalando y cambiando de signo la amplitud, se encontró que los valores convergen hacia la constante de conicidad de una "elipse", ver [Fig. 5-7]. Con ello confirmamos que es necesario que nuestro sistema pueda generar una superficie elipsoidal para poder corregir la esférica de 5 ° orden, pues es la que más se acerca en su curvatura local.

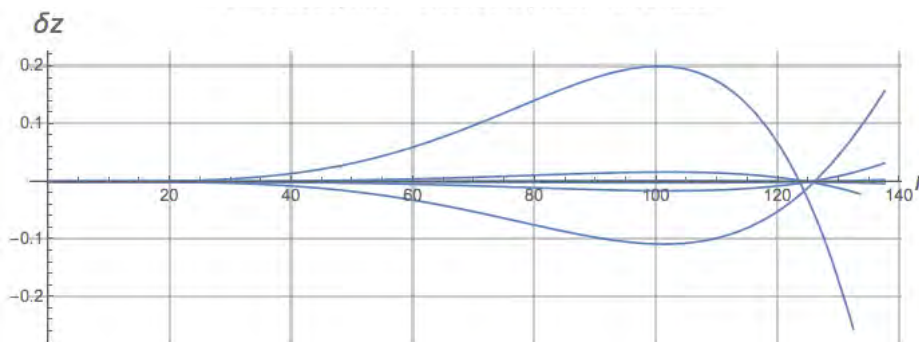


Figura 5-7. Gráfica del ajuste de la función para obtener la constante de conicidad que se aproxima a una curva local elíptica, donde se han variado las amplitudes de la aberración de 5 ° orden en una curva esférica. El radio de curvatura paraxial y la distancia r del eje óptico a la cónica son fijos. Unidades en mm

5.5 Teoría de elasticidad lineal para nuestro caso

5.5.1 Vector de desplazamiento y deformación para placas circulares

Como ya se ha dicho el sistema de coordenadas empleado es el cilíndrico. La coordenada con el subíndice θ corresponde a una dirección tangencial que es perpendicular a los dos ejes: z y a la dirección radial, Entonces los componentes del vector desplazamiento expresión [V.I.8] son:

$$\mathbf{u} = [u_r, u_\theta, u_z]^T \quad (\text{V.V.1})$$

El tensor diferencial de deformación y sus componentes son {10}:

$$\varepsilon = \frac{1}{2} [u \otimes \nabla] + [u \otimes \nabla]^T \quad (\text{V.V.2})$$

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r}, \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

$$\varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right], \quad \varepsilon_{rz} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right], \quad \varepsilon_{\theta z} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \right]$$

La figura [5-8] muestra un elemento diferencial en coordenadas cilíndricas con sus componentes tensoriales de deformación.

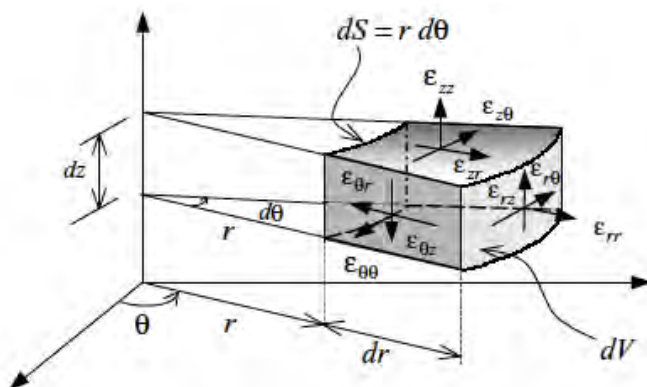


Figura 5-8. Componentes del tensor diferencial de deformación {10}.

Si el cuerpo y las cargas de deformación tienen una simetría axial alrededor del eje z , el componente de desplazamiento tangencial $u_\theta = 0$ y también $\partial u / \partial \theta = \partial w / \partial \theta = 0$, (esto quiere decir que los puntos no giran sino se alejan y también $\varepsilon_{\theta z} = \varepsilon_{r\theta} = 0$).

5.5.2 Teoría de placas delgadas

En este trabajo se emplea como base la teoría de la elasticidad lineal aplicado a placas delgadas de espesor constante, basada en la hipótesis de Love-Kirchhoff que es aplicada

para los casos en que el cuerpo Ω tiene una relación $h/l \ll 1/10$, donde h es el espesor y l es su dimensión mas larga, y que permite reducir el problema a dos dimensiones en un espacio de 3 dimensiones bajo ciertas condiciones. Love {16} desarrollo las ecuaciones que se construyen en base a la hipótesis de Kirchhoff.

La hipótesis asume que existe un plano que se encuentra a la mitad del espesor de la placa y el eje Z es normal a este plano considerado neutro, las condiciones para aplicar esta hipótesis son:

- a) para puntos que originalmente se encuentran sobre el plano neutro, las componentes del vector de desplazamiento se reducen a $u|_{r=0} = u|_{\theta=0} = 0$, $u|_{z=0} = w$.
- b) cualquier punto localizado en líneas normales al plano neutro permanecen sobre líneas normales a la superficie deformada y no existen esfuerzos a lo largo de estas líneas normales.
- c) la superficie media de la placa no presenta esfuerzos en ese plano $\sigma_{rr}|_{z=0} = \sigma_{\theta\theta}|_{z=0} = \sigma_{r\theta}|_{z=0}$

Estas condiciones no implican que la flexión es pequeña comparada con el espesor.

5.5.3 Flexión de placas circulares con curvatura permanente

Basándonos en la hipótesis anterior, donde R es el radio de flexión al plano neutro y asumiendo que el valor absoluto de la curvatura máxima $|1/R|$ que ocurre en la flexión es $l/|R| \ll 1$, esta condición es equivalente a que el estado de máxima flexión w_{max} permanente, tomado sobre toda la superficie es pequeño comparado con el espesor de la placa.

Bajo estas condiciones los tensores de deformación a lo largo de la superficie media, también neutra son despreciables y la distribución de esfuerzos perpendiculares a ella son nulos. Esto es las secciones perpendiculares al plano neutro de una placa plana después de que ha sido flexionada permanentemente permanecen planos y normales a la superficie media. {13}.

Por lo tanto la teoría de Love-Kirchhoff puede ser aplicada a placas con curvatura permanente e involucra las ecuaciones constitutivas que relacionan el valor de las componentes del tensor de tensiones σ con el valore del tensor deformación ϵ . y es llamada Ley de Hooke (Lamé-Hooke) o relación de Navier {17}. De ellas se puede derivar la relación esfuerzo-deformación

$$\begin{bmatrix} \sigma_{rr} \\ \sigma_{\theta\theta} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{zr} \end{bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-2\nu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{rr} \\ \epsilon_{\theta\theta} \\ \epsilon_{zz} \\ \epsilon_{zr} \end{bmatrix} \quad (V.V.3)$$

El problema de determinar el vector de desplazamiento. esto es sus componentes en flexión u_r , u_θ , u_z consiste en encontrar la forma de las funciones integrantes que satisfacen la simetría de los esfuerzos o deformaciones unitarias, si alguna y proponer sus valores límite en las fronteras.

Debido a la naturaleza del sistema que estaremos manejando, requerimos de introducir 4 condiciones a la frontera por lo que necesitamos de 4 derivadas para poder determinar el sistema de manera precisa.

En el caso que nos interesa el movimiento a considerar serán las de deformación de cuerpo, no las de desplazamiento de cuerpo rígido Ω y serán mucho menores al espesor de la placa, pero las deformaciones de la superficie óptica tienen que ser muy bien identificadas y controladas.

La ecuación de elasticidad en el régimen lineal es un bilaplaciano que establece una relación entre el vector de desplazamiento y la carga aplicada. En el caso de una placa circular donde las cargas tienen simetría axial se tiene la ecuación

$$\nabla^2 \nabla^2 w \equiv \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left\{ r \frac{d}{dr} \left[r \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\omega}{dr} \right) \right] \right\} = \frac{q(r)}{D} \quad (\text{V.V.4})$$

Esta relación que fue primero derivada por S. Denis Poisson [18] y donde D es la constante de rigidez a la flexión ver apéndice [3] y q es la carga distribuida perpendicular a la superficie de la placa, y como demostró Poisson en sus memorias la solución al bilaplaciano para placas circulares es

$$z = w = \frac{q}{64D} r^4 + C_1 r^2 + C_2 r^2 \ln r + C_3 \ln r + C_4 \quad (\text{V.V.5})$$

La EDP que se emplea y es de 4° orden que describe soluciones estáticas. Las líneas características de información se cierran sobre si mismas por lo que se emplea condiciones a la frontera no condiciones iniciales. No se quiere corrientes, sino describir la mecánica del medio continuo de manera difusiva

Con las integraciones sucesivas se determinan las constantes de integración aplicables a situaciones que involucran deflexiones axisimétricas, para cada condición a la frontera. Los términos con el parámetro del radio r , permiten determinar los casos en la manera de cómo aplicar las fuerzas. Ejemplos: anillo de fuerzas distribuidas, carga central, torques.

La ecuación bilaplaciana no homogénea que gobierna la flexión de una placa circular es {19}:

$$\nabla^2 \nabla^2 w(r, \theta) = \frac{q(r, \theta)}{D} \quad (\text{V.V.6})$$

La solución consiste en una integral particular $w^P(r, \theta)$ y una solución homogénea $w^H(r, \theta)$:

$$w(r, \theta) = w^P(r, \theta) + w^H(r, \theta) \quad (\text{V.V.7})$$

La primera parte de la solución homogénea contiene a las constantes que son aplicables a las situaciones que involucran deflexiones axisimétricas en placas circulares y la solución particular que presenta funciones complejas debido a la presencia de esfuerzos en el plano neutro.

En general un problema de tres dimensiones para una placa circular delgada donde la deflexión requerida introduce esfuerzos en el plano neutro debidas al fuerte cambio de curvatura y/o las cargas que pueden ser no axisimétricas, implica mucho desarrollo analítico y tiempo, por lo que generalmente es resuelto, como en el caso que trata este trabajo, empleando el análisis por elementos finitos.

5.6 Onda Elástica

Del libro de Teoría de elasticidad de Landau y Lifshitz {20} y de las notas del curso de Mecánica Clásica {21}, se toman los conocimientos requeridos para describir una onda elástica y su comportamiento en placas circulares.

Una onda elástica es una perturbación tensional que se propaga a lo largo de un medio elástico. Implica la transmisión de energía a través de un medio sin ningún efecto residual en el mismo, ya que la elasticidad del material provee la fuerza restauradora.

Si el medio es isotrópico, y la transferencia de energía de una parte del cuerpo a otro es muy lenta, comparada con el periodo del movimiento oscilatorio, podemos considerar el movimiento adiabático.

Para obtener la ecuación de movimiento bajo las consideraciones anteriores para un medio elástico, se debe igualar los esfuerzos internos con el producto de la aceleración con la masa por unidad de volumen ρ (2a ley de Newton).

$$\Delta \mathbf{u} = \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \quad (\text{V.VI.1})$$

La ecuación de movimiento para un medio elástico isotrópico y homogéneo, se obtiene por analogía con la ecuación de equilibrio de Navier (V.I.11), se expresa en forma vectorial y se substituyen las constantes de Lamé por las propiedades \mathbf{E} (Módulo de Young) y ν (razón o coeficiente de Poisson) del material, según Landau {20}:

$$\rho \ddot{\mathbf{u}} = \frac{E}{2(1+\nu)} \Delta \mathbf{u} + \frac{E}{2(1+\nu)(1-2\nu)} \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) \quad (\text{V.VI.2})$$

Como las deformaciones son pequeñas, los movimientos considerados en la teoría de elasticidad son oscilaciones elásticas pequeñas. La ecuación (V.VI.2) es para una onda considerada plana en un medio isotrópico e infinito, donde la deformación es solo en función de una coordenada y del tiempo.

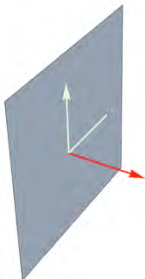


Figura 5-9 Ejemplo de ondas transversales (flechas verdes) y onda longitudinal (flecha roja) en un medio en 3 dimensiones. El plano de fase constante donde el argumento tiene un valor fijo en la función de onda, está dado por el plano gris.

Una onda elástica es una combinación de una onda longitudinal y de ondas transversales que se propagan independientemente, donde la velocidad de la onda longitudinal es mayor a la de las dos ondas transversales que presentan la misma velocidad. En general una onda elástica puede ser una combinación de ondas longitudinales y de sus correspondientes ondas transversales. Ver [Fig. 5.10]

El cambio de volumen en una deformación está dado por la suma de sus componentes diagonales en el tensor de deformación esto es, por $u_{ii} \equiv \text{div } \mathbf{u}$. Entonces la onda transversal no implica ningún cambio en volumen en el cuerpo. Para las ondas longitudinales, sin embargo $\nabla \cdot \mathbf{u} \neq 0$ y las ondas involucradas implican compresión y expansión del cuerpo. En una onda plana la deformación \mathbf{u} es solo función de una coordenada. Ver [Fig. 5.10] imagen inferior.

Podemos escribir la ecuación en términos de las velocidades C_l y C_t determinadas por las propiedades del material. Sabemos que la velocidad es el cociente del periodo espacial al periodo temporal y es independiente de la frecuencia (en el régimen lineal).

La separación de una onda plana en dos partes que se propagan independientemente con diferentes velocidades puede también presentarse en el caso general de una onda elástica arbitraria, no plana en un medio infinito. Reescribiendo la ecuación (V.VI.2) en término de las velocidades C_l y C_t , {20}

$$\ddot{\mathbf{u}} = C_t^2 \Delta \mathbf{u} + (C_l^2 - C_t^2) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) \quad (\text{V.VI.3})$$

el vector de desplazamiento presenta dos componentes $\mathbf{u} = \mathbf{u}_l + \mathbf{u}_t$, una de las cuales satisface $\nabla \cdot \mathbf{u}_t = 0$ y la otro satisface $\nabla \times \mathbf{u}_l = 0$. Substituyendo el vector de desplazamiento en la ecuación (V.VI.3), tomando la divergencia en ambos lados de la ecuación y considerando las definiciones del gradiente y rotacional anteriores se obtienen las ecuaciones de onda ordinarias en tres dimensiones

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}_l}{\partial t^2} - C_l^2 \Delta \mathbf{u}_l = 0 \quad (\text{V.VI.4})$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}_t}{\partial t^2} - C_t^2 \Delta \mathbf{u}_t = 0 \quad (\text{V.VI.5})$$

La onda transversal no implica un cambio de volumen porque su divergencia es cero mientras que la onda longitudinal es acompañada por compresión y expansión de volumen. ver [Fig. 5.10] imagen inferior

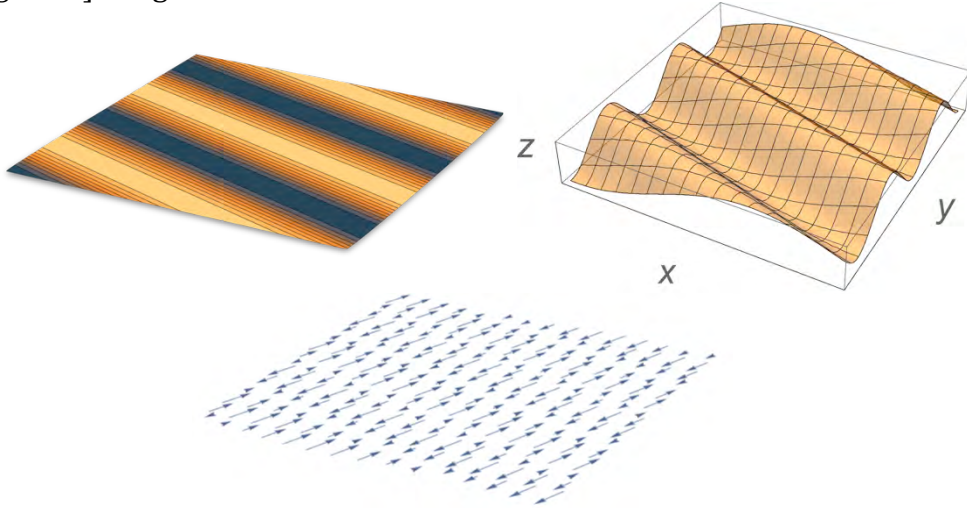


Figura 5-10. Ondas en 2D. Izquierda: de concentración (ejem. calor). Derecha: de doblamiento u ortogonal al plano x-y (ejem pandeo). Inferior: longitudinal o de rarefacción-compresión (ejem. onda sonora).

Si tenemos una onda elástica de una sola frecuencia (monocromática) que sabemos puede ser descrita por una función trigonométrica (onda armónica) y por el teorema de Moiré que dice que una función exponencial puede describir a funciones trigonométricas expresadas en series de Taylor con un componente real y otro imaginario, el vector de desplazamiento es:

$$\mathbf{u} = \Re\{\mathbf{u}_0(\mathbf{d})e^{-i\omega t}\} \quad (\text{V.VI.6})$$

donde \mathbf{d} es el módulo, \mathbf{u}_0 es una función de las coordenadas que satisfacen a la ecuación {20}

$$C_t^2 \Delta \mathbf{u}_0 + (C_l^2 - C_t^2) \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}_0) + \omega^2 \mathbf{u}_0 = 0 \quad (\text{V.VI.7})$$

que se obtiene de substituir la ecuación (V.VI.6) en (V.VI.3). La parte longitudinal y temporal de la onda monocromática satisfacen las ecuaciones

$$\Delta \mathbf{u}_l + k_l^2 \mathbf{u}_l = 0 \quad (\text{V.VI.7})$$

$$\Delta \mathbf{u}_t + k_t^2 \mathbf{u}_t = 0 \quad (\text{V.VI.8})$$

donde $k_l = \omega/C_l$ y $k_t = \omega/C_t$ son los números de onda o frecuencias espaciales de las ondas longitudinales y transversales, respectivamente y ω es la frecuencia temporal.

5.6.1 Ondas elásticas en placas

Aquí se hace referencia a las ondas elásticas cuya longitud de onda es mayor comparada con el espesor de la placa, de lo contrario se tiene que hacer referencia a la propagación de las ondas en un medio infinito descrito en la sección anterior. Ver [Fig. 5-10] imagen superior derecha

La ecuación para las oscilaciones puede ser escrita a partir de la ecuación de equilibrio de energía para placas [V.V.4]. Para ello se debe de substituir las fuerzas externas que actúan en la placa por unidad de área, por la aceleración \ddot{w} multiplicada por la masa ρh por unidad de área, esto da:

$$\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \left(\frac{D}{h}\right) \Delta^2 w = 0 \quad (\text{V.VI.9})$$

De nuevo se considera una ecuación elástica monocromática. Se puede obtener una solución de la ecuación anterior de la forma exponencial {20}

$$f(\mathbf{d}, t) = A e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{d} - \omega t)} \quad (\text{V.VI.10})$$

donde \mathbf{d} es el vector de posición, \mathbf{k} es vector de onda (número de onda) que solo tiene dos componentes, y como ya se había expresado $\mathbf{k} = \omega/C$ y A es una constante. Substituyendo e integrando se obtiene la siguiente relación entre la frecuencia temporal y el número de onda:

$$\omega = k^2 \sqrt{\left(\frac{D}{\rho h}\right)} = k^2 \sqrt{\frac{E h^2}{12 \rho (1 - \nu^2)}} \quad (\text{V.VI.11})$$

Hasta ahora se ha descrito ondas multidimensionales cuyos contornos de fase constante $(\mathbf{k} \cdot \mathbf{d} - \omega t)$ son planos y cuya orientación está determinado por los componentes del vector de onda.

Ondas de forma arbitraria

Para describir ondas cuyos entornos de fase constante tienen otra forma, por ejemplo, para el caso de ondas circulares que se propagan radialmente, es conveniente usar coordenadas cilíndricas (r, θ, z) como se requiere en este trabajo. Además se introduce el término ϕ_0 para indicar una fase inicial pues el valor de la onda no es necesariamente nulo en el origen.

El Teorema de Fourier dice que una onda de forma arbitraria de número de onda k y frecuencia angular ω , puede escribirse como una superposición, posiblemente infinita pero discreta, de funciones armónicas cuyos períodos son submúltiplos de los períodos de la onda {21}:

$$f(r, t) = \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} A_{mn} e^{i[(mkr - n\omega t) + \phi_0]} \quad (\text{V.VI.12})$$

donde los índices m, n son enteros y cada término tiene su propia amplitud.

Si las amplitudes, número de onda y frecuencia angular son idénticas para los términos m y $-m$, entonces la onda es estacionaria como es en nuestro caso donde las ondas oscilan sin desplazarse.

En la [Fig. 5.4] la imagen superior izquierda, y la inferior derecha son ejemplos de una onda que se propaga radialmente con simetría circular. En este caso las líneas de fase constante son círculos.

Frecuencias naturales en los tejos:

Uno de los aspectos importantes que está relacionado con la teoría de deformación y soporte, es la propiedad relacionada con las frecuencias naturales de los tejos. Para placas circulares delgadas, estas eigen-frecuencias según Wilson [1] están dadas por la ecuación

$$f_n = (k_f)_n \frac{1}{2\pi} \left(\frac{h}{a^2} \right) \left[\frac{E}{12(1-\nu^2)\rho} \right]^{1/2} \quad (\text{V.V.13})$$

donde $(k_f)_n$ es (el número de onda) dependiendo del modo, h es el espesor, ρ la densidad del material y a es el radio del espejo. Los modos normales presentan una relación de fase fija y el movimiento libre descrito por los modos ocurren a frecuencias fijas. El modo más bajo de vibración siempre es el astigmatismo, seguido del primer modo triangular y después el primer modo axisimétrico que es la esférica de tercer orden.

Empleando las coordenadas polares r, θ por la forma circular del espejo, Schwesinger definió los modos flexionantes empleando la ecuación general de Fourier

$$w_n = k_n f_n(r) \cos n\theta$$

donde n define el modo de flexión, w nos da el desplazamiento en Z . Se puede distinguir la importancia pues esta formulación es la misma empleada en los polinomios de Zernike.

Schwesinger también demostró el principio de Saint-Venant gobierna el comportamiento modal de flexión, esto es, si se tiene dentro de una región limitada de un cuerpo elástico un sistema de fuerzas en equilibrio, la deformación producida por estas fuerzas decrecerá rápidamente con el incremento de la distancia de la región con carga.

La consecuencia de este principio es ilustrado en el caso de una fuerza continua de forma sinusoidal. En cada onda existe equilibrio y si la longitud de onda es corta la deformación no se propaga muy adentro del cuerpo.

Las frecuencias naturales de un menisco dependen de su material y de las condiciones a la

frontera. El numero asignado al modo de vibración depende de el numero de 1/2 ondas que se presenten en la vibración que pueden ser tanto radial como azimutal.

En la definición modal de Fourier, cada modo superior a $n=0$, forma ondas en la dirección azimutal y para cada modo existe un número integral de ondas. Del principio de Saint-Venant, los modos mas bajos forman las longitudes de onda mas largas y producirán las flexiones mas grandes: cuanto mas grande es el valor modal de n , la flexión será menor. Sin embargo esto solo es cierto para $n \geq 2$. El modo axisimétrico $n=0$, no produce onda azimutal: sus ondas radiales son mas cortas que sus ondas azimutales para $n=2$. {1}

El modo $n=1$ también es un caso especial correspondiente al tilt o coma de algún orden. Su simetría de un solo eje es una deformación menos natural que comparándolo con la simetría biaxial de $n=2$ (en 180° se presenta 1 onda). Para producir coma ($n=1$), el pandeo anti-simétrico a lo largo de un eje es requerido(en 180° se presenta 1/2 de onda). Entonces el astigmatismo ($n=2$) es el modo de flexión que requiere menos energía.

5.7 Método de análisis por MEF

Carrera {22} define: El método de análisis por elementos finitos (MEF), es una técnica numérica que permite aproximar soluciones a sistemas de ecuaciones diferenciales parciales con condiciones a la frontera, por medio de una discretización del entorno del problema en base a una malla en la que el comportamiento de cada nodo (elemento finito) puede ser expresado por una relación sencilla con sus vecinos. La solución del problema continuo se obtiene por medio de una interpolación sobre la malla usada, la que representa un muestreo de la solución.

En el contexto de nuestro problema: cálculo de las flexiones de una placa circular sometida a esfuerzos, las ecuaciones de elasticidad lineal pueden discretizarse sobre una malla en coordenadas cilíndricas y el resultado expresarse como:

$$C \cdot D=R \quad (V.VII.1)$$

donde la matriz C es una matriz de constantes conocidas que en el problema que en este trabajo se trata contienen la información sobre las características de la placa, el vector D es el vector de desplazamientos que se conoce, R es el vector que representa las cargas que se aplican a la placa y que son las condiciones a la frontera del problema.

5.7.1 Consideraciones para el modelado por MEF

Por las características propias de la discretización de los polinomios de Zernike, la ortogonalidad solo es lograda para información continua y puede ser aproximada para información uniformemente espaciada, pero se degrada significativamente conforme se

vuelve irregular, como lo describe Doyle {14} en las características del mallado para componentes ópticos. Por ejemplo, el acoplamiento o no ortogonalidad de los términos se incrementa con el mallado no uniforme.

En el mallado isométrico (isomesh), los términos axisimétricos se acoplan solo con otros términos axisimétricos. En la malla irregular, los términos axisimétricos recogen acoplamientos adicionales con términos no axisimétricos como astigmatismo, coma y coma triangular. La distorsión de los elementos regulares va en detrimento de la precisión en los resultados.

En este trabajo se toma en cuenta y se emplea el mallado axisimétrico (simetría de revolución), pero solo se comparan los resultados con la superficie a conseguir sin analizar si se presentan otros términos de menor orden en los resultados de la corrección de las aberraciones. Los elementos empleados para las simulaciones son los elementos placa en dos dimensiones en los cuales presenta como variable a definir el espesor. Una de las razones por las que estamos empleando estos elementos es porque estamos simulando espejos homogéneos e isotrópicos de espesor constante y por el momento no se está detallando la interacción de la superficie de contacto entre el actuador y la frontera del espejo.

6 Condiciones a la frontera. Requerimientos y restricciones.

6.1 Condiciones generales

La solución en el problema que se está analizando en este trabajo, es única si los requerimientos geométricos, las especificaciones ópticas y las condiciones de frontera son dadas. La configuración inicial da dicha información. Las condiciones a la frontera en este caso son de dos tipos: Dirichlet en la frontera misma del cuerpo, como valores fijos en los puntos o áreas. Las condiciones Neumann por la primera derivada de la solución para determinar la deformación y su relación con los esfuerzos y de ahí obtener las fuerzas o momentos que los producen.

Estas condiciones pueden ser dadas por campos vectoriales definidos en la frontera del cuerpo o en partes de ella. Estos campos vectoriales pueden ser interpretados como fuerzas de contacto con algún otro cuerpo en el exterior del espejo como es en este caso.

La única condición teórica con el tiempo es que está ligado. Se sabe que como se está empleando un material muy rígido la parte de oscilación temporal es amortiguada muy rápidamente y no interesa, por lo que la deformación final puede ser descrita por una onda estacionaria

En el caso aquí considerado, dado el hecho de que la configuración final es conocida y por tanto los desplazamientos de los puntos del cuerpo, solo las condiciones Dirichlet son necesarias para que el programa MEF determine la aproximación al movimiento \mathbf{x} , las correspondientes condiciones Neumann pueden ser calculadas. Las fórmulas específicas donde las consideraciones ópticas son incluidas han sido presentadas en las secciones [5.1-5.4]

Como se explicó brevemente en la sección , la manera de resolver el problema de manera menos compleja es introducir las condiciones Dirichlet de desplazamientos en el modelo geométrico mallado que será empleado para el análisis por MEF y así obtener el campo de vectores de fuerza sobre la superficie con el que se lograrán esas deformaciones, las condiciones Neumann. Es decir, vamos a aprovechar la dualidad de las condiciones a la frontera como se verá más adelante en una de las simulaciones, secciones [9.2.1.2].

La discrepancia en los resultados obtenidos será de naturaleza cuantitativa, pero el comportamiento del sistema general como lo calcula el software de MEF y los cálculos más especializados usando las fórmulas son compatibles uno con el otro desde el punto de vista de las leyes generales de la elasticidad lineal. Los resultados calculados con el MEF son una muy buena aproximación a la solución exacta.

Con ello podremos determinar de manera más sencilla y detallada:

- el número y posición de los actuadores, introducidos en la sección [4.2.3] a través de los cuales se transmitirán las fuerzas.
- aproximación a las áreas óptimas de acción de las fuerzas deformadoras.

- El efecto en los bordes o frontera del cuerpo para respetar el área con condiciones ópticas óptimas.
- Cargas de presión de ser requeridas como restricciones de movimiento para disminuir la magnitud de las fuerzas de corte.

6.2 Condiciones Dirichlet

- Rangos de desplazamiento de hasta ± 5.5 micras ($\pm 10 \lambda$ amplitudes) para corregir las aberraciones de tercer orden de simetría radial y periódicas en la frontera principal, conocidas como desenfoque, astigmatismo, coma y esférica.
- En el caso de cambio de curvatura local de la frontera de la cónica, el rango de desplazamiento será de ± 50 micras si se logra deformar el espejo hasta una elipsoidal oblata.

6.3 Requerimientos y restricciones ópticas y geométricas

Todos los parámetros ópticos aquí considerados están basados en los del diseño de un telescopio Ritchey-Chrétien y esto determina:

- El diámetro físico del espejo secundario de 275 mm, el diámetro óptico efectivo se determina de acuerdo a las condiciones del espejo primario y del comportamiento del borde, diámetro de entrada 269mm. Para campo cero 256.9mm de diámetro (objeto puntual en el eje).
- Radio de curvatura paraxial del espejo 1208mm
- El espejo será un cuerpo de espesor constante generalmente referido como menisco
- Las constantes de conicidad que se manejaran son: para el paraboloide de revolución -1.0, para el hiperboloide -1.879 y para el elipsoidal $1 < K < -1$, esos datos son suponiendo el diseño óptico del telescopio de 1.5m y solo son deformaciones en el secundario.
- Respecto al campo óptico, se quiere optimizar el telescopio para zonas pequeñas 10 minutos de arco; para que valga la pena para campos grandes 40 minutos de arco. Para campos pequeños se puede recurrir a un tipo Cassegrain, Dall-Kirkham (secundario esférico), ó a un diseño propio.
- Material que permita ser pulido o que desde su elaboración presente calidad óptica. Rugosidad < 2 nanómetros ya que la superficie óptica debe permitir reflejar a una longitud de onda de $\lambda = 0.55 \mu\text{m}$, $\lambda/20$ rms un 96% como mínimo de la luz que incide en ella.
- Respetar el campo de sombra permitido sobre el espejo primario debido al espejo secundario este tendrá un área máxima del 10% mas del valor del área del secundario .

6.4 Mecánicas (materiales):

Se propone una geometría de cuerpo de espesor uniforme (menisco) con un material vitrocerámico con una excelente homogeneidad, isotrópico con un rango de linealidad esfuerzo-deformación lo más extenso que sea posible dentro de los materiales frágiles, donde tenemos que prestar atención a parámetros tales como el tensor de tensiones máximo para cuando el material es sometido a esfuerzos cíclicos, pues el valor máximo que soportan los materiales frágiles antes de la ruptura es dependiente del tiempo y en estas condiciones es bajo. Histéresis y relaciones tales como la rigidez específica (E/ρ) que nos muestra que la máxima eficiencia estructural de un material tendrá la menor masa o deflexión por peso propio para una misma geometría, donde ρ es la densidad. También tenemos el parámetro llamado razón de deformabilidad elástica donde se muestra que el tensor de esfuerzo máximo dará la limitante en la flexión cuando la intensidad de carga es incrementada. {13}

$$D_{F,V} = \frac{\sigma_{Tmax}}{E} \quad (\text{VII.II.1})$$

donde se define que el pandeo es generado por cargas externas al espejo y la flexión por peso propio esta determinada a un volumen dado por el diámetro y el espesor. Estas dos últimas dimensiones geométricas deben ser las mismas para comparar la deformabilidad elástica de los materiales. El coeficiente de expansión térmica no se tomará en cuenta para estos análisis.

De los materiales que cumplen con los requerimientos ópticos de capacidad de pulido para la reflexión en las longitudes de onda en el visible, tenemos el AF 32® eco (Schott), Pyrex® (Corning), ULE fuse silica® (Corning), Zerodur® (Schott) y aceros como el Fe 87 Cr1.

En las tablas comparativas [6-1 a 6-4] {13}, se enlistan los materiales empleados en elementos ópticos y sus propiedades a considerar

Material	E [GPa]	ν	σ_{Tmax} (*) [MPa]
Borofloat glass, Pyrex, Duran	64.0	0.200	7
Fused silica ULE SiO ₂ + TiO ₂	68.8	0.170	20
Fused silica SiO ₂ Suprasil	77.5	0.165	19
BK7 optical glass	82.0	0.206	10
U-BK7 optical glass	90.0	0.206	12
Zerodur vitroceram SCHOTT	90.2	0.243	22
VO2 vitroceram XINHU	91.0	0.247	22
Titanium alloy Ti90 Al6 V4	122	0.333	900
ZPF CERATECH	150	0.280	60
Stainless steel Fe87 Cr13	201	0.315	1,000
Stainless steel Fe87 Cr13 quenched	201	0.315	1,400
Beryllium pure VHP	287	0.110	400
Silicon carbide polycrystal CVD	430	0.210	150
Sapphire polycrystal Al ₂ O ₃	440	0.300	100

Tabla 6-1. Incluye el módulo de elasticidad E , la razón de Poisson ν y el esfuerzo máximo a tensión σ_{Tmax} de algunos materiales empleados para componentes ópticas a 20 ° C.

En la tabla [6-1], el símbolo (*) indica que es el rango del tensor de esfuerzo máximo lineal para los metales. Para materiales frágiles el esfuerzo máximo es $\frac{1}{4}$ del esfuerzo generado por una carga que actúa en un lapso de tiempo de 10^3 segundos .

Material	ρ [10^3 Kg/m ³]	α [10^{-6} /K]	d_t [10^{-6} m ² /s]
Beryllium pure VHP	1.85	11.3	57.2
Fused silica – Suprasil	2.20	0.41	1.0
Fused silica ULE	2.20	± 0.03	0.8
Borofloat, Pyrex, Duran 50	2.23	3.25	0.7
Soda-lime glass	2.44	8.60	1.8
BK7 glass, UBK7 glass	2.51	7.10	0.5
Zerodur vitrocera	2.53	± 0.05	0.7
ZPF Cera-tec vitrocera	2.54	± 0.03	2.6
Silicon carbide polycr. CVD	3.21	3.30	88.4
Sapphire polycrystal. Al ₂ O ₃	3.98	10.0	12.6
Titanium alloy Ti 90 Al6 V4	4.45	8.80	2.9
Stainless steel Fe87 Cr13	7.72	10.2	6.8

Figura 6-2. Densidad ρ , coeficiente de expansión térmica α , y difusividad térmica d_t de materiales presentados en tabla 6-1

Loading delay	[*]	[†]	Stress polish.		Permanent	
	1 s	10^3 s	10 h	1 month	5 years	10 years
SCHOTT BK7	82.0	50.0	38.7	28.6	21.3	20.3
KODAK Photo-plates	96.6	59.0	45.7	33.6	25.1	23.8
HERAEUS Fused SiO ₂	122.8	75.0	58.0	42.8	31.9	30.4
SCHOTT Zerodur	147.4	90.0	69.6	51.3	38.3	36.4
UGINE Sapphire Al ₂ O ₃	655.1	400.0	309.5	228.1	170.3	162.1
MORTON SiC CVD	974.5	595.0	460.6	339.4	253.3	241.0

Figura 6-3. Esfuerzo de Tensión última σ_{Tmax} de materiales frágiles contra el tiempo de carga [MPa].

En la tabla [6-3] los “tiempos de cargas se toman en cuenta para dos casos. a) esfuerzos de forma removiendo o no la carga cada día. b) esfuerzos casi permanentes en componentes ópticos; ejem: óptica activa en la zona de trabajo. Todos los esfuerzos han sido calculados a partir de

σ_{10^3seg} .

[†] Esfuerzo último a tensión correspondiente a σ_{10^3seg}

[*] valores de esfuerzos en un segundo.

Nota: Por razones de seguridad en los métodos de óptica activa, en procesos de larga duración es costumbre no sobrepasar el valor de tensión máximo $\sigma_{Tmax} = \frac{1}{3}\sigma_{10^3s}$ ó $\frac{1}{5}\sigma_{10^3s}$

Material	$E/\rho^{3/2}$ [10^5 SI]	$\sigma_{T \max}/E$ [10^{-4}]	Mohs
Borofloat glass, Pyrex, Duran	6.1	1.1	5
Fused silica ULE $\text{SiO}_2 + \text{TiO}_2$	6.6	2.9	(6)
Fused silica SiO_2 Suprasil	7.5	2.5	6
BK7 optical glass	6.5	1.2	6
U-BK7 optical glass	7.2	1.3	6
Zerodur vitrocera	7.1	2.4	6.2
Titanium alloy Ti90 Al6 V4	4.1	73.8	4.5
ZPF Ceratech vitrocera	11.7	4.0	(6.2)
Stainless steel Fe87 Cr13	2.9	49.8	6
Stainless steel Fe87 Cr13 quenched	3.0	69.7	7
Beryllium pure VHP	36.1	13.9	5.5
Silicon carbide polycrystal. CVD	23.6	34.9	9
Sapphire polycrystalline Al_2O_3	17.5	22.7	9

Figura 6-4. Rigidez media $E/\rho^{3/2}$, razón de deformabilidad elástica $\sigma_{T \max}/E$ y la dureza Mohs' (máximo a 10) de algunos materiales empleados para componentes ópticos a 20 °C

En general, los criterios de falla más apropiados para los materiales elásticos son aquellos que consideran la posible contribución de cada una de las direcciones principales del tensor de esfuerzos, pero la falla en los materiales frágiles es más difícil de determinar. El tensor de esfuerzo último a compresión en materiales frágiles, por lo general es varias veces mayor que el tensor de esfuerzo último a tensión. En el análisis de resultados por MEF de esfuerzos en materiales frágiles se debe de considerar los valores de esfuerzos principales σ_1 y σ_2 ya que la falla puede ser por una carga positiva o negativa. Para un estado de esfuerzos multiaxial, el valor más grande a la tensión es el esfuerzo máximo principal σ_1 encontrado en los cálculos del círculo de Mohr y como los materiales frágiles no exhiben cedencia, la falla ocurre con la fractura cuando $\sigma_1 = \sigma_{T \max}$. {13}

En las tablas anteriores podemos observar que el Zerodur es aproximadamente 20 veces menos deformable que el acero inoxidable, y su rigidez es 2.3 veces mayor; ρ representa la densidad del material y en el acero inoxidable es 3 veces mayor. Se decide optar por el más empleado para espejos astronómicos que es el Zerodur por su factibilidad de obtener una superficie con calidad óptica controlada, y como la aplicación en este trabajo es para deformaciones cíclicas de periodos de horas, se considera el valor de $\sigma_{T \max} = \frac{1}{5} \sigma_{10^3s} = 18$ Mpas como valor máximo de seguridad.

6.5 Exactitud y Precisión

La configuración final exacta es conocida. La solución aproximada encontrada resulta de las diferencias entre la configuración final e inicial dada; las mismas condiciones Dirichlet y Neumann calculadas pueden ser una medida de la exactitud del proceso.

Típicamente en los problemas relacionados con las desviaciones de la deflexión media de la superficie, se emplea el rms como parámetro de diagnóstico para optimizar. El error pico a

valle solo da información de dos puntos extremos, mientras que la desviación estándar o rms esta promediado sobre toda la superficie, por lo que normalmente es más útil el rms para la caracterización de toda la superficie. Además, según el trabajo de Nelson {23} el error pico a valle de la deformación es aproximadamente 5 veces mayor que al rms de la superficie.

Para espejos que serán empleados en luz infra-roja y en el visible, la exactitud y precisión rms requerida en las correcciones de las deformaciones y/o aberraciones es en el orden de decenas de nanómetros ($\lambda/20$), donde λ la longitud de onda, se le asigna el valor generalmente empleado de 550 nm.

7 Desarrollo de la investigación

Se ha presentado los elementos básicos de la teoría de elasticidad en el régimen lineal y su aplicación al caso particular de placas circulares delgadas. Se han introducido también los elementos de descripción de propagación de ondas elásticas en placas. Con estos fundamentos se procede a la modelación de las alteraciones.

La experiencia reportada en la literatura ha mostrado que los llamados polinomios de Zernike tienen características que los hacen especialmente adecuados a las necesidades de esta área. Estos polinomios describen las alteraciones geométricas en la superficie del espejo que se originan por fenómenos elásticos. Esas alteraciones son traducidas de manera continua en las superficies hiperbólicas, elipsoidales o parabólicas consideradas.

En la sección [5.3] se dió una breve introducción a esos polinomios y las características que los hacen adecuados para la simulación requerida.

También en la sección [5.7] se describió la utilidad del MEF como herramienta para solucionar el problema cuando se requiere de trabajar con espejos cuyas deformaciones, espesor y condiciones a la frontera discontinuas en su borde, convierte el problema en uno complejo y cuya solución presenta una parte homogénea y otra no homogénea en su solución analítica, lo que implica un desarrollo largo y complicado. Esta herramienta contenida en un paquete de software tiene que ser confiable y lo más adecuada posible al planteamiento matemático y, por consiguiente, físico del problema. En este caso se dispone de el paquete "Autodesk Simulation Mechanical"®.

El primer problema de trabajo es determinar la manera adecuada de cómo aplicar las fuerzas o momentos para cumplir con los requerimientos, ya sea en el borde del espejo, ó en la parte posterior a la superficie reflejante, el espesor requerido para cumplir con los límites de esfuerzos permitidos y, de ser necesario, determinar cuantos actuadores y dónde colocarlos. Se dispone información sobre las experiencias de otros investigadores. Pero no se dispone de criterios confiables generales ni de problemas adecuados de optimización para colocarlos y en qué cantidad. Un objetivo adicional de este trabajo es disponer de una herramienta confiable que permita trabajo eficiente de prueba y error.

También se ha descrito las características, propiedades y consideraciones pertinentes para el empleo del material seleccionado que es el Zerodur, sección [6.4].

Habiéndose adoptado y justificado un esquema, se procede a introducir los datos al programa y empezar a obtener las soluciones buscadas. Esas soluciones se cotejan con datos reales, o parámetros de referencia adecuados. La precisión requerida es de decenas de nanómetros, sección [6.5]. Estos datos a su vez deben ayudar a mejorar la información que se tiene para evaluar propuestas como magnitud de fuerza y manera y posición de aplicarlas.

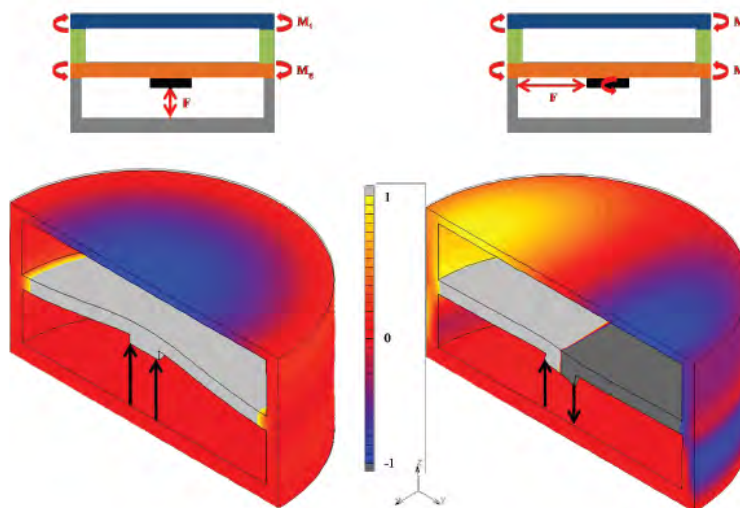
El objetivo principal es obtener resultados factibles de ser empleados en el trabajo técnico requerido para crear un espejo secundario activo, como ya se mencionó en la definición del problema, sección [3.1].

Además, se espera crear un método de análisis para la deformación de espejos que, al menos en ciertos rangos y desde ciertos puntos de vista, sean competitivos con otros métodos actuales.

7.1 Aplicación de Fuerzas axiales y momentos en el contorno de la superficie óptica

Como ejemplo de una manera indirecta de aplicar fuerzas y momentos para producir deformaciones en la superficie óptica, se muestra en la propuesta de diseño conceptual llamado VOALA {25}, figura [7-1] donde a través de una estructura a tres niveles que presenta en el nivel intermedio un cojinete central y dos vigas ortogonales a 45°, donde las fuerzas son aplicadas. La superficie óptica a deformar es plana, tiene un diámetro de 100 mm y las deformaciones que se pueden lograr son defoco, astigmatismo y coma con una orientación fija. Los desplazamientos máximos alcanzados son de 2.3 μm y la fuerza máxima requerida es de 555 Nw.

Esta manera de deformar un espejo empleado en telescopio es conveniente pues obstruiría lo menos posible el paso de luz hacia el primario, pero debido al requerimiento de cambio a superficie esférica sección [6.3], se requieren desplazamientos de 7.8mm pues estamos partiendo de una superficie plana, lo cual sería muy difícil de obtener y controlar. Mas adelante, en los modelos analizados, se demuestra que no nos permite lograr las formas requeridas.



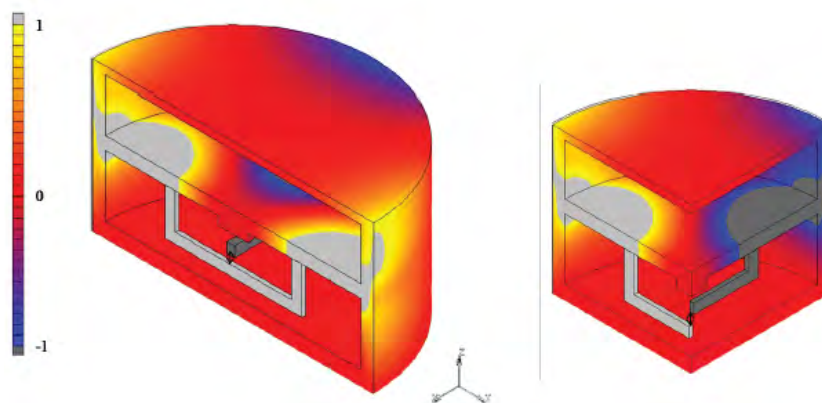


Figura 7-1. Ejemplo de como se puede aplicar fuerzas de manera indirecta para producir deformaciones en la superficie óptica. {25}

Otro ejemplo en la manera de como aplicar fuerzas y momentos de manera indirecta para producir deformaciones en la superficie óptica se muestra en la figura [7-2]. El sistema llamado MADRAS {28} de deformación cuenta con 24 actuadores push-pull que deforman un espejo plano de 90mm de diámetro de pupila y 110 mm de diámetro total; de material SiC desde su periferia por la parte inferior a través de los 12 brazos que presenta el tejo.

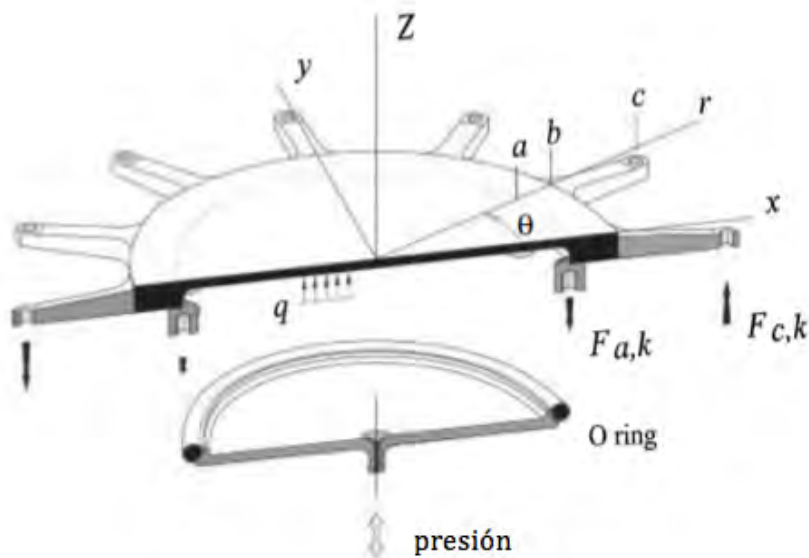


Figura 7-2. Modelo MADRAS con aplicación indirecta de fuerzas puntuales para producir deformación en la superficie óptica. {28}

La aplicación de 24 fuerzas discretas en los dos extremos de cada brazo permiten la generación de los modos de Zernike. En este diseño la aplicación de las fuerzas esta alejada de la superficie óptica, aunque para la generación de la aberración esférica, se necesita de un actuador central que aplica presión por su cara inferior. En este diseño queda deslindado el número de actuadores con respecto al diámetro del tejo y solo su número quedará determinado por la máxima frecuencia espacial deseada que en este caso va mas allá de las aberraciones de tercer orden. El desplazamiento máximo requerido es de $10\ \mu\text{m}$ y la precisión lograda en la superficie es de $5.9\ \text{nm rms}$. Su eficiencia global está dentro de los $10\ \text{nm rms}$.

El problema se presenta en nuestro caso, es la restricción que se tiene de bloquear la luz que le llega al espejo primario en un 10% mas del valor del área del secundario, sección [6.3], esto significa que se dispondría de un área de $5939.57\ \text{mm}^2$ lo cual no nos permitiría que el modelo presentara no mas allá de 4 brazos de $12\ \text{mm}$ de ancho y $100\ \text{mm}$ de largo, lo cual sería insuficiente para corregir la aberración esférica o producir los cambios de a las diferentes superficies esféricas requeridas (elipsoidal o hiperboloide).

Como conclusión ninguno de estos dos ejemplos se pueden implementar a nuestro caso pues se parte de una superficie plana y en nuestro caso, además de la restricción de sombra sobre el espejo primario, se requiere lograr curvaturas que implicarían un desplazamiento de $7.8\ \text{mm}$ con precisiones de nanómetros o sea una parte en un millón.

7.2 Actuadores sobre la frontera posterior del espejo

La aplicación de fuerzas sobre la frontera posterior del espejo en diversos casos no es aplicada de manera continua. Depende mucho de cual es el objetivo final del movimiento. En lugar de una localización precisa de las fuerzas en el modelo analítico, por ejemplo como deltas de Dirac, la naturaleza discreta de la aproximación por elementos finitos es usada.

Una vez que el problema de las fuerzas involucradas es adecuadamente resuelto vía condiciones Neumann, la solución práctica depende del conjunto de puntos y/o áreas donde esas fuerzas serán aplicadas. Aquí es donde los aspectos teóricos y experimentales se encuentran.

Conviene recordar los aspectos importantes de un actuador mencionados en la sección [4.2 , 5.7.1] donde las fuerzas aplicadas por el actuador se dan en dirección normal a $\delta\Omega_0$, y su rango de acción le permite ajustarse a la deformación del espejo. Esto es, una vez optimizada su posición en el diseño no se puede variar dicha posición en el sistema físico [Fig.7-3], se puede variar la magnitud de la fuerza y el acoplamiento del actuador con respecto a la frontera del espejo para que la fuerza principal permanezca perpendicular a la superficie de contacto al deformar al cuerpo.

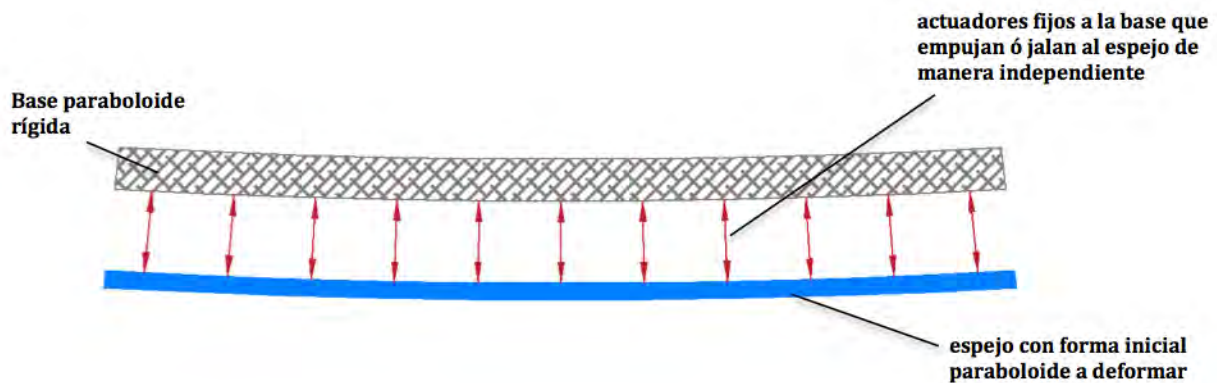


Figura 7-3. Corte esquemático del sistema a modelar donde la base se considera fija y los actuadores serán representados como resortes que aplican desplazamiento o en su caso inverso serán fuerzas que deforman al espejo.

Existen estudios sobre el efecto del soporte de espejos primarios astronómicos debido al peso propio y al movimiento del telescopio, como por ejemplo los trabajos de Arnold {24} y Nelson{23}. Presentan diferentes soluciones para corregir la flexión por medio de soporte y/o actuadores en la frontera posterior del cuerpo. Las soluciones dadas permiten el soporte uniforme del espejo primario, pero por lo general no corrigen aberraciones como la coma y el astigmatismo.

Desde la perspectiva geométrica Lamaitre y Nelson {13, 23}, ver apéndice [2] llegan a la conclusión de que la configuración de soportes/actuadores en una malla cuyo elemento básico es el triángulo, es la que da mayor densidad de nodos por unidad de área con una misma distancia entre ellos. Pero en los estudios se encontró que a mayor número de nodos la eficiencia de otras configuraciones presenta muy poca diferencia con respecto a la triangular. Para reducir la complejidad de la solución en el cálculo de la deflexión entre soportes o puntos de apoyo para placas circulares, se introduce una restricción que agrupa los soportes en anillos. y entre los resultados obtenidos a considerar muestran que es mucho más eficiente introducir más anillos con soportes de ser necesario, a incrementar el número de soportes por anillo.

Estos estudios se toman como base para partir de una configuración que soporta uniformemente al espejo, para posteriormente optimizar su posición para deformar al cuerpo Ω_1 a la configuración deseada Ω_0 minimizando los efectos de borde, introduciendo mayor numero de anillos y a su vez tratando de mantener la geometría triangular sin olvidar que se está aprovechando la dualidad de las condiciones a la frontera y en lugar de condiciones Neumann se introducirán las condiciones Dirichlet.

Se comienza con una distribución normalizada optimizada de 36 soportes/actuadores puntuales obtenida por Nelson {23}, donde intervienen factores tales como distancia entre actuadores, la rigidez a la flexión D descrita en el Apéndice [2], las características geométricas del cuerpo, el radio de los anillos donde se sitúan los actuadores puntuales y su orientación azimutal. Con esta distribución se crea un mallado y por medio del análisis

por elementos finitos se introducen los desplazamientos al cuerpo previamente calculados con el programa Mathematica, que corrijan las aberraciones, o se provoque el cambio de constante de conicidad de toda la superficie. La orientación de los vectores de desplazamiento que son aplicados al mallado es en dirección al centro del radio de curvatura R de la esférica y que es una constante en todas las superficies determinada por el diseño óptico del telescopio. Una de las diferencias en este estudio, con respecto a los artículos que hemos mencionado anteriormente, es que como se pretende no solo soportar, sino deformar a la superficie para cambiar su curvatura local, se introduce un actuador en el vértice del espejo para contrarrestar la flexión producida por los actuadores próximos a este.

Esto nos da como resultado las reacciones o fuerzas necesarias a aplicar y se optimizarán las posiciones para cubrir los diferentes casos tomando en consideración el comportamiento del borde del espejo.

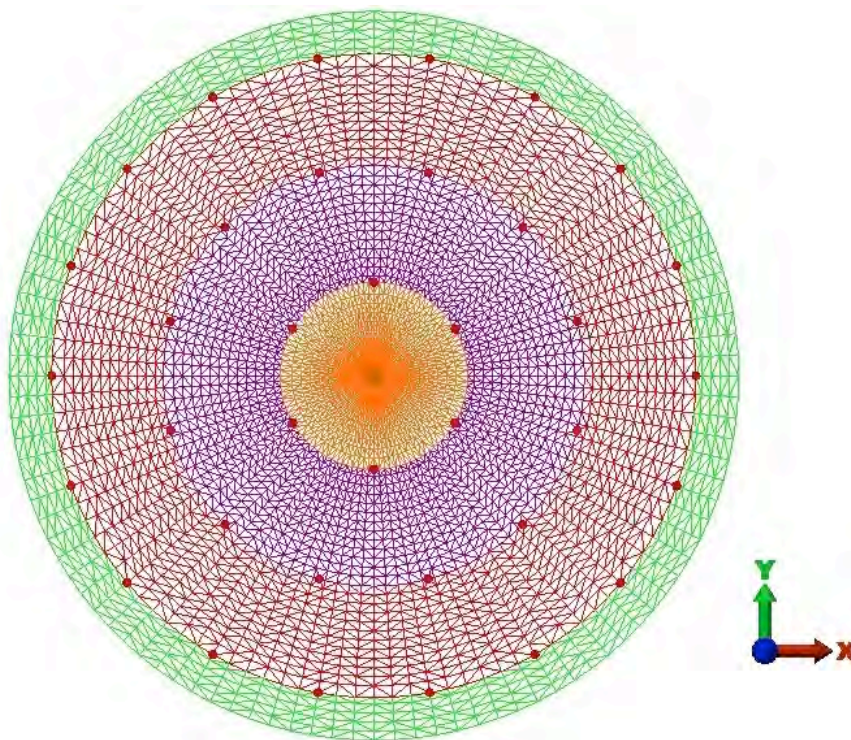


Figura 7-4. Distribución de la primera configuración según Nelson, con 36 nodos en 3 anillos donde se aplican las condiciones Dirichlet de desplazamiento.

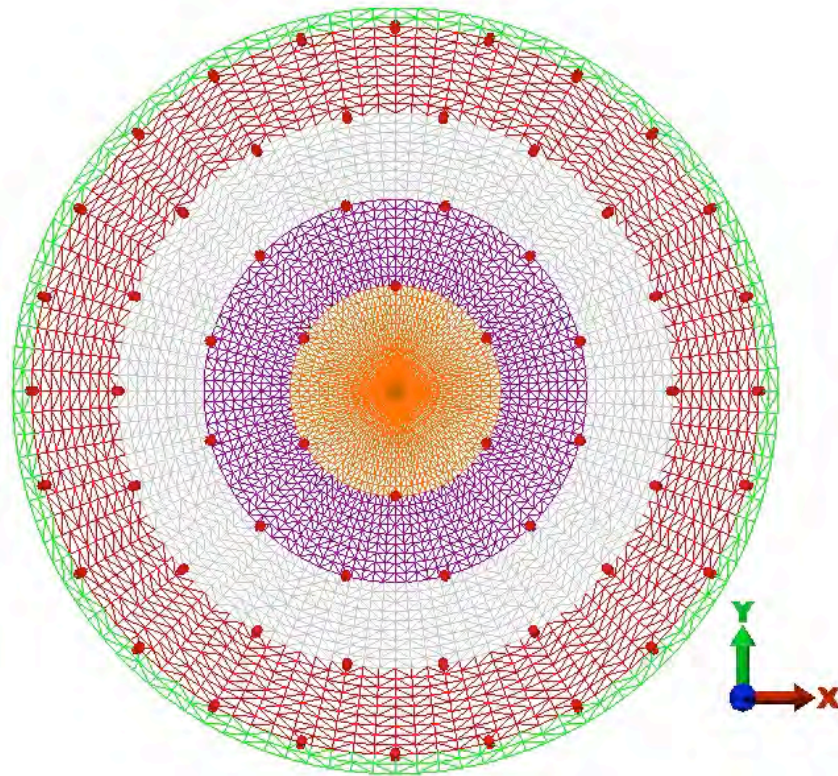


Figura 7-5. Segunda configuración con 61 actuadores distribuidos en 4 anillos

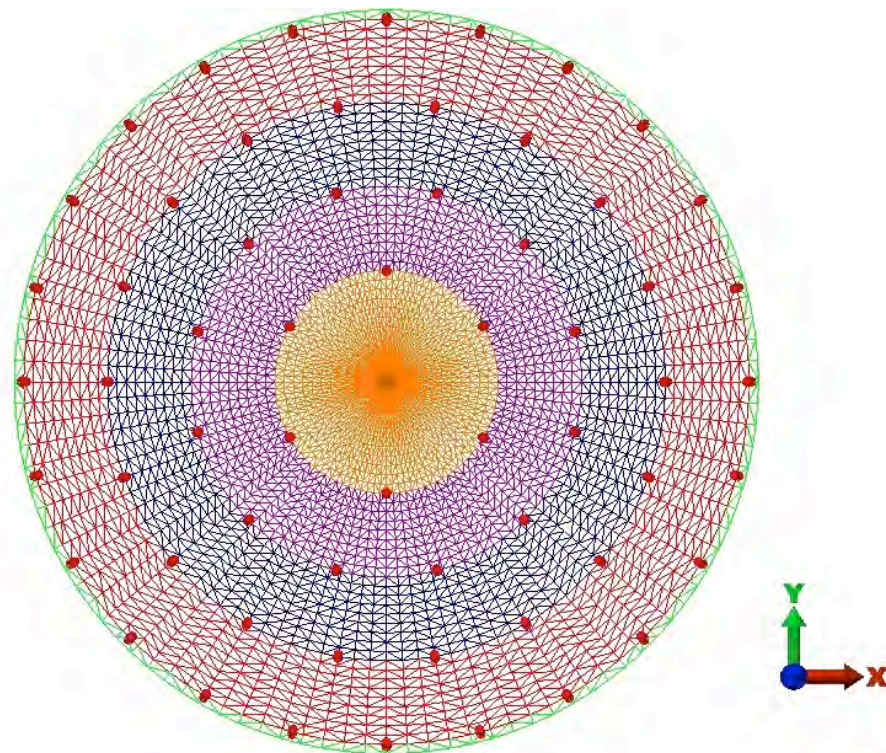


Figura 7-6. Los 61 actuadores más próximos al borde de la frontera del cuerpo

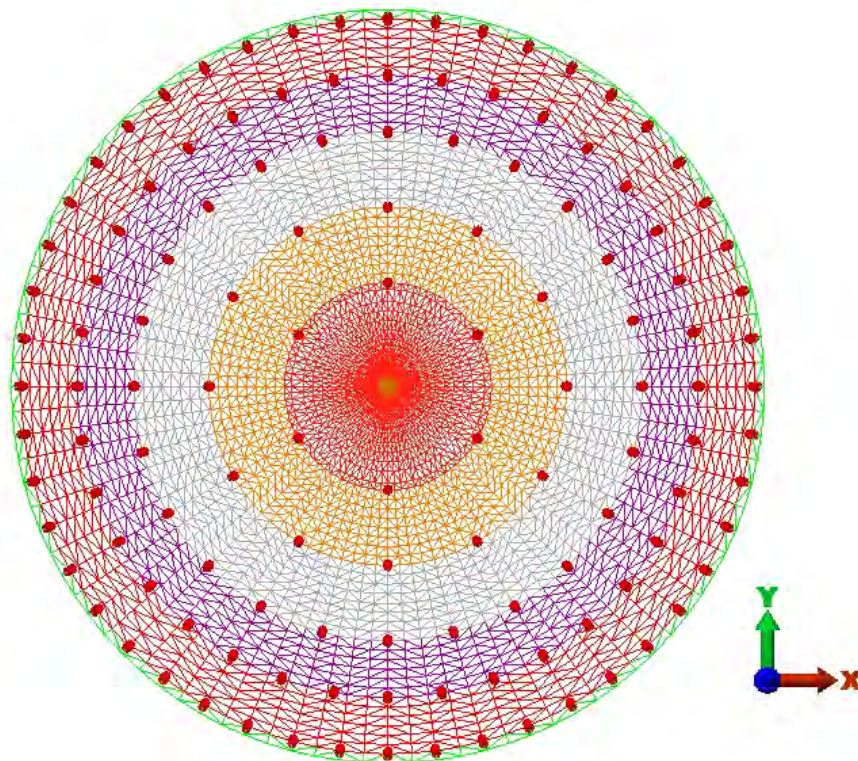


Figura 7-7. Distribución de 127 nodos en 5 anillos y uno central como actuadores puntuales

Posteriormente se substituyen esos "actuadores puntuales" por cojinetes. Estos cojinetes presentarán la forma de anillos en su contacto con la frontera posterior del espejo y estarán representados por 4 nodos en el mallado, que permitirán distribuir la fuerza aplicada en zonas de mayor área para así reducir la concentración de esfuerzos.

Se tomó como diámetro para distribuir simétricamente 4 nodos que representan al anillo del cojinete que servirá de interfaz entre el actuador propiamente dicho y el espejo el diámetro que presentan generalmente los actuadores de gran resolución y repetitividad como son una combinación de actuadores electromecánicos con piezoeléctricos o simplemente una combinación en serie de piezoeléctricos.

La resolución de los actuadores electromecánicos son de micras con los cuales se aproximaría en ese orden, mientras que los actuadores piezoeléctricos son de nanómetros que darían una resolución fina que va desde 25 hasta 5 ηm de resolución con precisiones que puede llegar hasta décimas de nanómetros en lazo cerrado. Su carrera o desplazamiento puede llegar hasta los 500 μm . De acuerdo a los requerimientos y restricciones dados en la sección [6.3], existen los actuadores piezoeléctricos precargados que pueden cumplir con estos, es decir presentar un desplazamiento hasta de 40 micras y una precisión de 25 ηm s ó menos de requerirse.

Los actuadores piezoeléctricos por lo general trabajan en empuje, pero si se precargan pueden trabajar también en jalado de un 5% a casi un 50% de la fuerza del empuje.

Para pasar de un paraboloide a una superficie elipsoidal con 127 actuadores se requiere un empuje mayor por actuador. Para lograr una superficie hiperboloide a partir de un paraboloide se requiere de una fuerza negativa menor de aproximadamente la mitad del empuje; ver figura [5-1]. Un ejemplo sería la serie de actuadores piezoeléctricos precargados P-840, P-842 de la compañía Physik Instrumente (PI), que tiene un rango de desplazamiento dinámico de $60\ \mu\text{m}$ y una fuerza empuje/jalado de 800/300. {29}; lo único es que no aceptan momentos o fuerzas perpendiculares a su dirección de acción por lo que se debe tener especial atención a este aspecto, por ejemplo figura [7-8], se pueden pedir con punta esférica, magnética y/o su acoplamiento con el cojinete puede presentar un flexor.

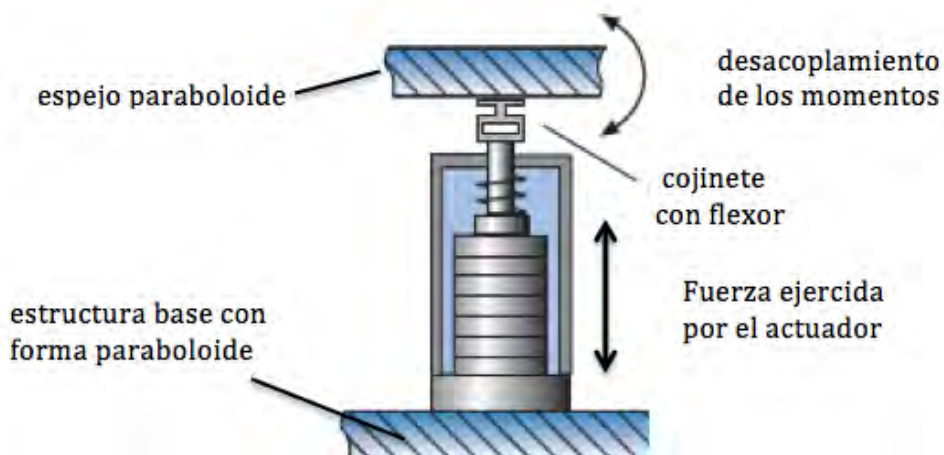


Figura 7-8. Ejemplo de la compañía PI de una posible interfaz de un actuador piezoeléctrico {30}

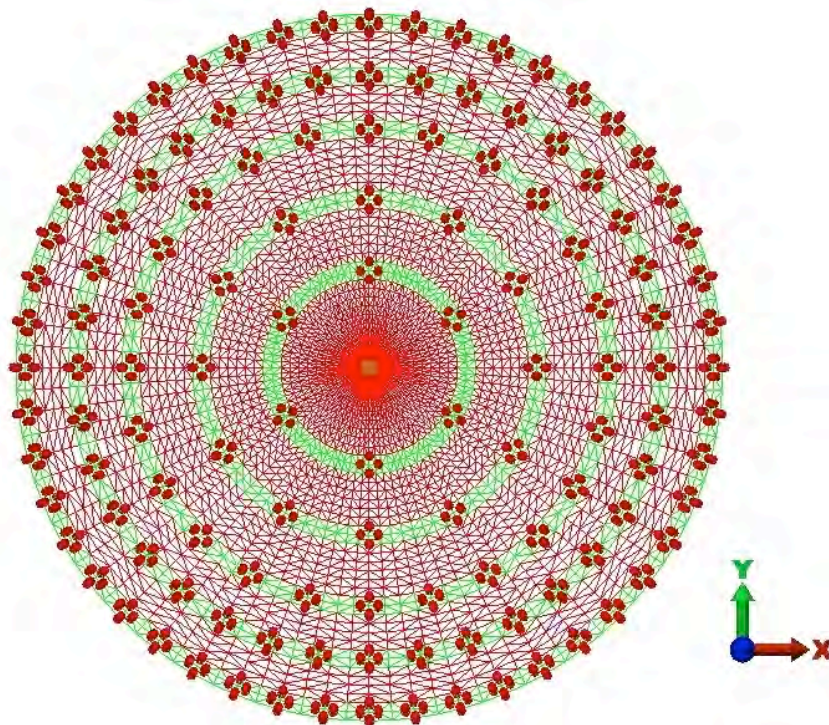


Figura 7-9. Configuración final de 5 anillos con 126 cojinetes más uno en el vértice , cada uno representados por cuatro nodos.

En las figuras mostradas en esta sección, el diámetro nominal es el de diseño de 275mm, pero como se explicará mas adelante con las deformaciones este varía. Ver apéndice [1]. Los colores empleados en el mallado son solamente ayuda visual para de meter las condiciones a la frontera en el programa de MEF, pero no representan ningún parámetro o restricción.

8 Corrección de la superficie para aberraciones de 3er orden

8.1 Condiciones iniciales:

Se emplean como condiciones Dirichlet las amplitudes de las deformaciones y su localización en la frontera del cuerpo.

Se puede considerar este problema elástico como estático y no dinámico, pues el tiempo de respuesta es muy grande (≥ 3 minutos) y las deformaciones a lograr son muy pequeñas (de no más de decenas de micras como máximo), por lo que no requerimos condiciones iniciales. Además será isotérmico y adiabático. {10}

8.2 Definición de la superficie deformada:

Para representar analíticamente la superficie deformada $\Delta z(r, \theta)$, se suma a la cónica base de diseño los términos del polinomio que se requieren multiplicado por los coeficientes (amplitudes de onda), sección [5.3], ecuaciones [V.III.3, V.III.4]

Se propone corregir problemas de figura, más no de pulido, es decir, se analizará la posibilidad de absorber crestas y valles que tengan tamaño suficiente como para que los actuadores lo hagan, pero defectos de alta frecuencia, se descartan.

Como primer paso se calcula con el programa Mathematica las integrales numéricas necesarias para obtener el área del paraboloides con cada uno de los 4 polinomios de Zernike que comprenden las aberraciones de tercer orden, desenfoque, astigmatismo, coma y esférica, como ya se ha mencionado en las secciones [5.3 a 5.4]. Esto es con el fin de que al provocar una deformación de cuerpo de la configuración deformada al paraboloides elegida como superficie base, se regrese al volumen original, esto se logra ajustando el radio de la sagita. Ver Apéndice [1].

Los radios de sagita obtenidos de las tres superficies del paraboloides con aberraciones se emplean para generar las mallas de superficies a analizar ver Apéndice [1]. Se alcanzó una precisión de 10^{-9} m³ para el volumen en cada caso.

De las aberraciones de tercer orden, solo dos son analizadas, astigmatismo y esférica, esto es con el objetivo de estudiar tres casos que llamaremos aproximaciones, en la aplicación de condiciones Neumann y Dirichlet:

- las dos primeras consisten en encontrar el comportamiento de los modelos con astigmatismo, ante las restricciones en movimiento (condiciones Dirichlet), y las fuerzas y momentos con simetría radial (condiciones a la frontera Neumann) calculados e introducidos y los resultados que arrojan.

- el segundo es simulando actuadores en los nodos asignados, introducir los desplazamientos requeridos a la superficie deformada con aberración esférica, para pasar de la configuración deformada a la original o de base que es el paraboloides, y así obtener por el MEF las fuerzas y su posición para lograr esos desplazamientos.

8.3 Primera aproximación. Fuerzas y momentos en el contorno.

Para esta aproximación se decide emplear la cónica no deformada, que como se describió en la sección [5.4.1] es el paraboloides. Empleando como desplazamiento la amplitud de las aberraciones ya mencionadas en la tabla [5-3] y de su cálculo ecuación [V.III.3, V.III.4] con el programa Mathematica, se obtuvieron, las fuerzas y los momentos a aplicar en el contorno del cuerpo. Las fórmulas ya desarrolladas por Lamaitre [13] y que se encuentran resumidas en el Apéndice [3] fueron las que se emplearon para obtener dichas fuerzas y momentos.

El objetivo de aplicar momentos y fuerzas distribuidas fuera de la superficie óptica es evitar la concentración de esfuerzos y las pendientes muy marcadas o huellas de acción de las fuerzas ó actuadores. Ver sección [7.1] para referirse a ejemplos de como pueden ser generados.

8.3.1 Astigmatismo

Para analizar el comportamiento y respuesta del paso del cuerpo $x(\Omega_0, t_0) = \Omega_1$ se generaron tres modelos donde se variaron las condiciones a la frontera circunferencial y se introdujeron los momentos y fuerzas calculados con las fórmulas del Apéndice [3]. Ver [Fig. 8-1 y 8-2].

a) Primer Modelo

Se fija al vértice de la cónica en traslación x,y,z , se aplican restricciones en traslación x a dos nodos que se encuentran en el perímetro del espejo normales al eje Y , y restricciones en traslación Y a dos nodos en el perímetro normales al eje X , para estabilizar al modelo e impedir su rotación. El espesor es de 19.6 mm esto es $1/14$ de su diámetro. Lo que cumple con la teoría de Kirchoff para placas delgadas, sección [5.5.2].

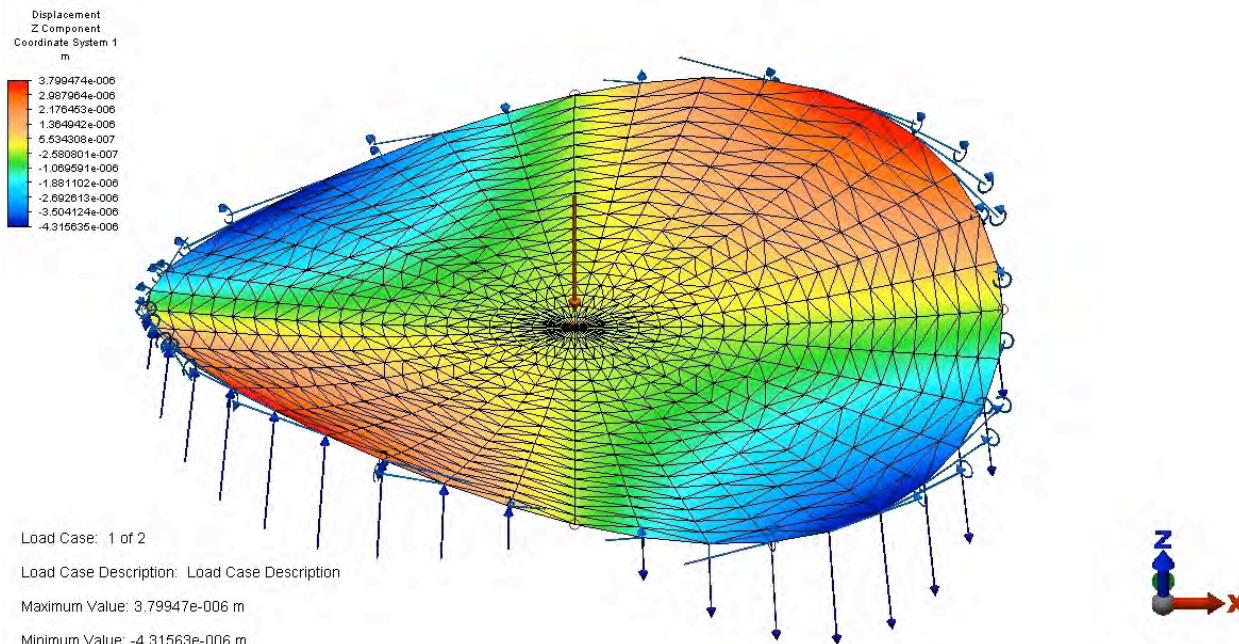


Figura 8-1. Desplazamientos en Z del paraboloido con astigmatismo

En la aproximación donde se permite el desplazamiento radial y angular de la superficie para corregir la aberración cosenoidal, se puede observar en los valores que muestran las figuras, que aunque las amplitudes de las fuerzas y momentos fueron introducidos con la misma magnitud, los desplazamientos no son simétricos. Si se observa la figura [8-1] los valores de los desplazamientos positivos son menores a los negativos y ello se debe al efecto de la forma “cóncava” del paraboloido. Las diferencias son del orden de 0.5 micras. Los esfuerzos máximos principales que se alcanzaron del orden de 1 MPa están muy por debajo del límite establecido de esfuerzo a tensión máxima. [Fig. 8-2]

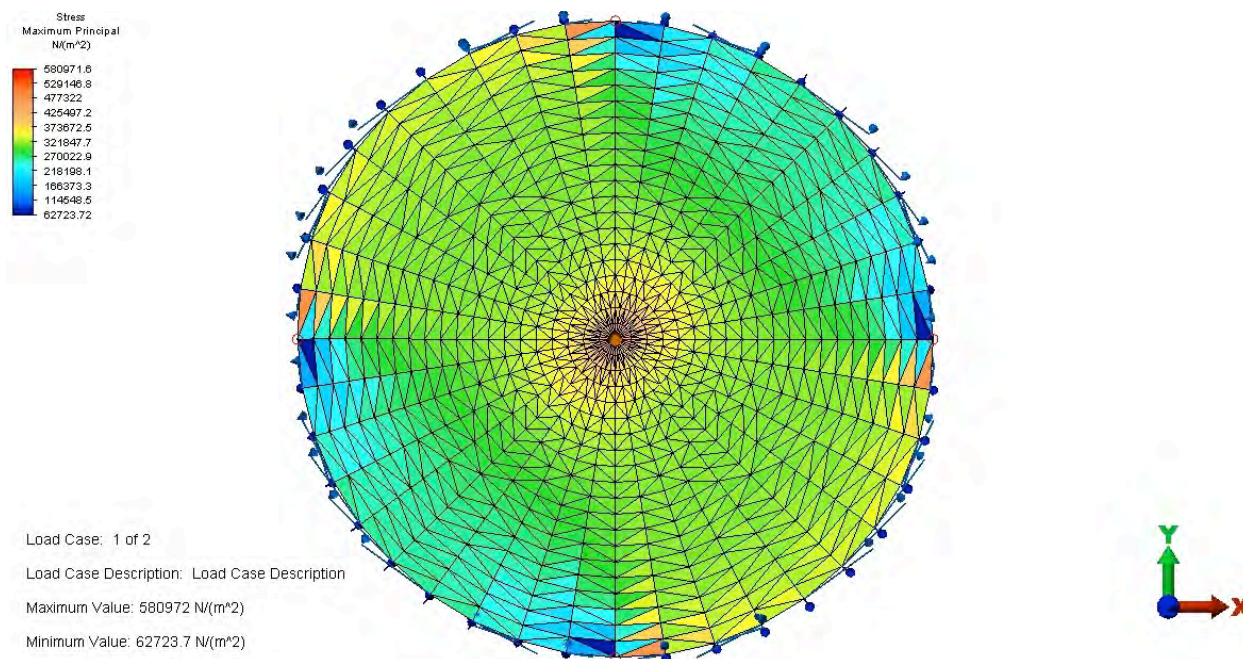


Figura 8-2. Esfuerzos principales máximos de la superficie paraboloid con astigmatismo

b) Segundo modelo

En este modelo las condiciones a la frontera son las mismas que en el anterior con excepción del vértice que queda libre, pero en su lugar se agrega un anillo de nodos concéntrico a este vértice en el cual se restringe su traslación en Z. Este anillo se encuentra a una distancia de 6.92 mm de la periferia y simularía la introducción de baleros que permitirían el desplazamiento radial pero no el giro tangencial como es discutido en la sección [9.1]

El vértice de la cónica se decide controlar no con una restricción en movimiento en un solo nodo, sino con la aplicación de presión uniforme en la superficie para suavizar la distribución de esfuerzos.

Los momentos y las fuerzas cosenoidalmente distribuidas en el contorno de la superficie fueron los mismos que en el primer modelo y se aplicó una presión de 1103 Pa en un área con un diámetro de 55 mm.

Las condiciones a la frontera impuestas en este segundo modelo dentro del área física del espejo, fueron pensadas para que cuando se introdujeran los actuadores reales que produjeran las fuerzas y momentos, se respetara el campo de sombra permitido sobre el espejo primario (área del secundario más 10%).

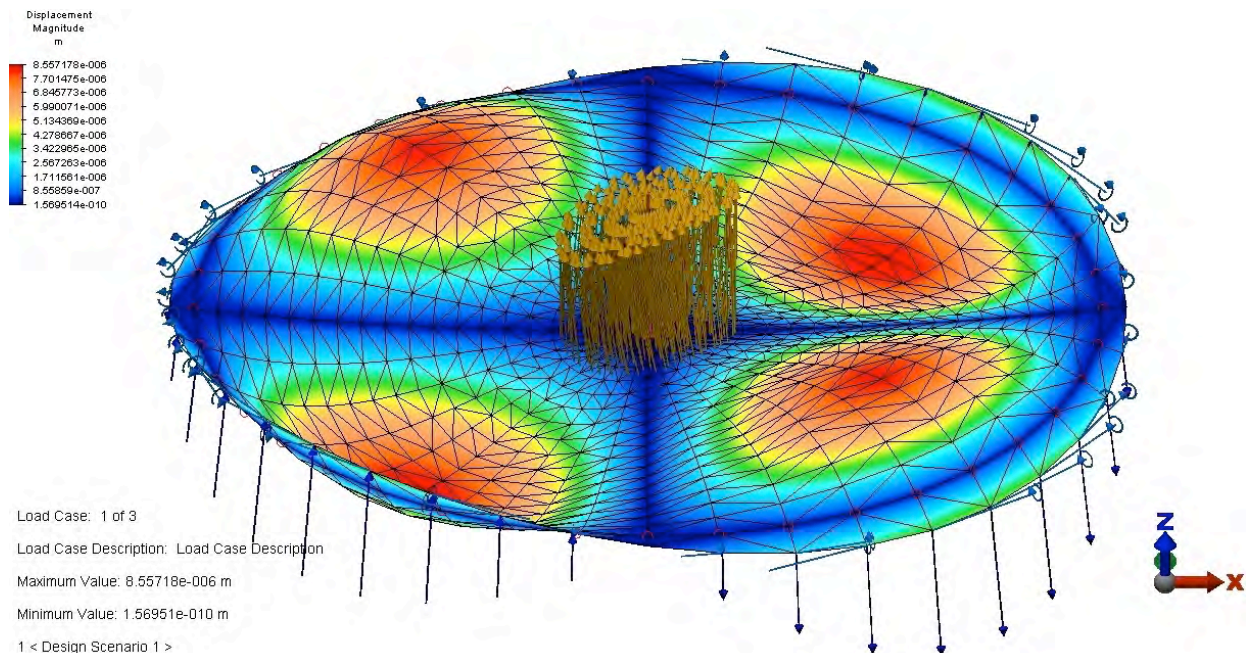


Figura 8-3. Magnitud de desplazamientos del paraboloide con astigmatismo. Presenta un anillo de restricción en dirección Z. Las flechas en ocre son los vectores promedio de presión ejercida en el área de cada elemento placa

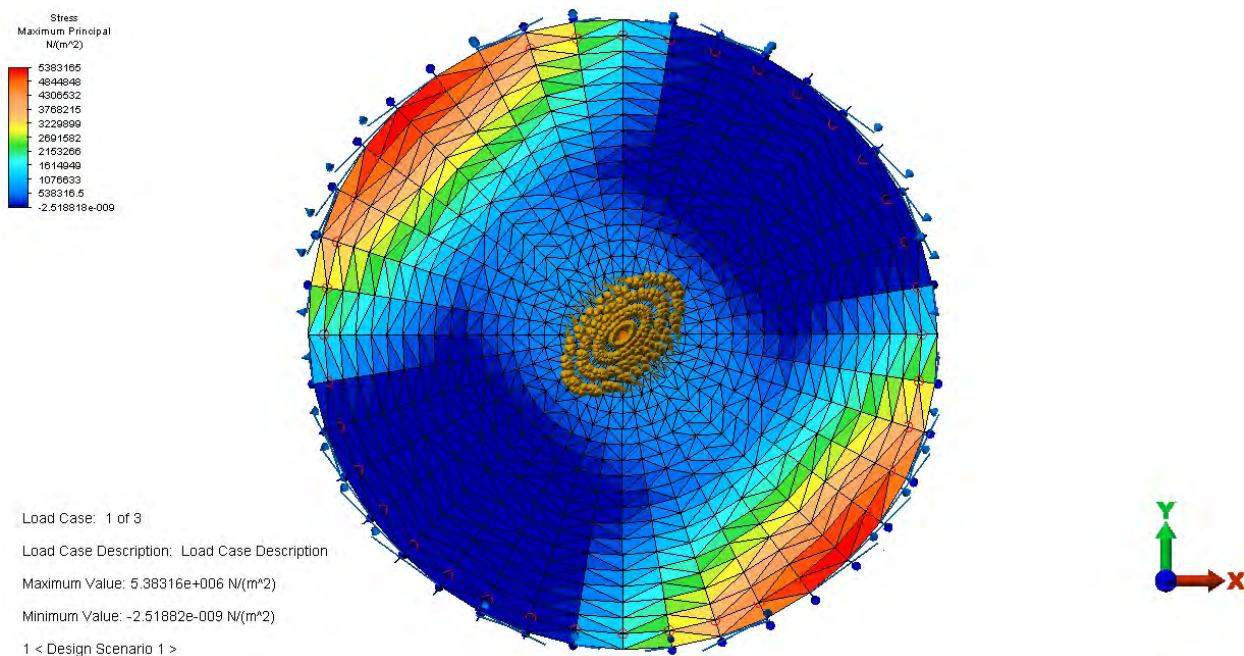


Figura 8-4. Resultante de esfuerzos principales con valores menores al esfuerzo de tensión máxima.

Este segundo modelo solo permitió observar el comportamiento del cuerpo ante las condiciones introducidas, además de darnos certeza en el manejo de presión y rango de valores para el control del vértice. Los esfuerzos resultados del análisis, mostrados en la figura [8-4] nos muestran que estamos aproximadamente a la mitad del valor límite de seguridad marcado para espejos activos. Los resultado de desplazamientos y esfuerzos no

se toman en cuenta ya que se observó que las condiciones a la frontera en el borde perimetral del espejo reduce el campo óptico útil para cuando se corrigen las aberraciones de superficie de tercer orden. Esto debido a que las amplitudes máximas y mínimas se presentan en un diámetro de 192.7 mm siendo el diámetro óptico requerido de 269mm. Ver sección [6.3], Fig. [8-3]. Además, hay que tomar en cuenta la manera de aplicar las fuerzas y momentos, esto implicaría que, ó la corrección de las aberraciones solo tendría dos posibles orientaciones a 90° una con respecto a la otra, ó se requeriría de un sistema de rotación para orientar los actuadores que trabajarían de manera indirecta a la superficie óptica para producir los momentos. {25}

8.4 Segunda aproximación. Actuadores

8.4.1 Aberración esférica

En la segunda aproximación se introdujeron desplazamientos para corregir a la superficie deformada, esto es $x(\Omega_1, t_0) = \Omega_0$. Para ello se comenzó con una configuración de 36 actuadores puntuales optimizado por Nelson {23}, ver sección[7.2] [Fig.7.5] y con los valores geométricos definidos para esa configuración, ver tabla [9-6], se generó el mallado de la superficie en el programa Mathematica. Posteriormente se introdujo la superficie mallada al programa de MEF y ya dentro del programa se le asignaron a los nodos correspondientes los desplazamientos requeridos. En la configuración los actuadores simulados son puntuales. Se decide comenzar con la aberración esférica que como ya se expresó en la sección [5.4.1] nos acerca al comportamiento que se presentara al modificar la constante de conicidad del paraboloide a otra cónica, pero con un comportamiento menos severo por la amplitud de los desplazamientos, además de que el problema tiene simetría rotacional, por lo que la información en el ángulo azimutal es irrelevante y reduce la complejidad de su estudio.

La orientación de los vectores de desplazamientos es en dirección del centro del radio de curvatura de la cónica.

En esta aproximación se analiza la misma configuración pero con cuatro espesores y los resultados más significativos se presentan en la siguiente tabla.

Espesor mm	Desplazamiento		Esfuerzo Nw/m ²		Esfuerzo Nw/m ²		Reacc. Mag.		Desp solo grav	
	Magnitud(μm)		Máximo Principal		Mínimo Principal		Newtons		Magnitud(μm)	
	Max	Min	Max	Min	Max	Min	max	min	max	min
19.6	4.013	<0.001	2.003E+06	0	0	-2.090E+06	232.18	91.17	2.E-04	<0.001
12.0	4.011	<0.001	1.149E+06	0	0	-1.263E+06	54.62	21.81	5.E-04	<0.001
10.0	4.009	<0.001	9.538E+05	0	0	-1.067E+06	32.14	12.86	7.E-04	<0.001
8.0	4.007	<0.001	8.014E+05	0	0	-9.091E+05	16.96	6.87	1.E-03	1.E-03

Tabla 8-5. Tabla con los principales resultados de los análisis por MEF del modelo con 36 actuadores, analizado con cuatro espesores diferentes.

En los resultados de la tabla [8-5], se muestra que la flexión por peso propio de los cuatro espesores no se incluye, pues afecta muy poco en la precisión requerida ya que el valor obtenido es 10 veces más bajo, ejemplo: el valor máximo de desplazamiento en el espejo con 8mm es de 1 nanómetro. El esfuerzo máximo es también 10 veces menor al estipulado como esfuerzo máximo a tensión con carga activa. Lo que hay que hacer notar es que el valor máximo de la fuerza requerida para deformar al espejo con un espesor de 19.6 mm es de 232 Newton, lo cual es cuatro veces mayor que el del resto de los modelos en la tabla.

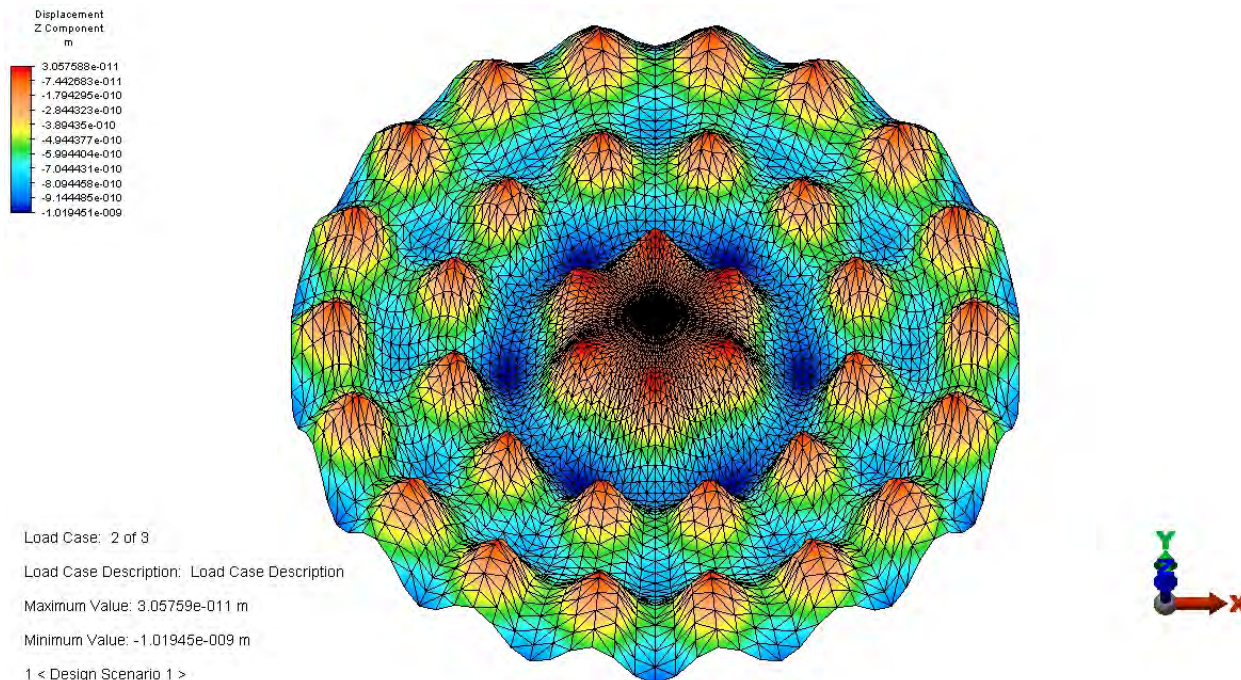


Figura 8-6. Figura ilustrativa de los desplazamientos que se presentan por peso propio.

La figura [8-6] nos muestra las deflexiones del espejo debidas a la acción de la fuerza de gravedad y de los actuadores que en este caso no están ejerciendo ningún desplazamiento sino solamente están soportando el peso del espejo. Su contribución a la deformación del espejo es del orden de 1 nanómetro como desplazamiento máximo.

A continuación se muestran las diferencias que existen de forma entre el paraboloide de 8 mm de espesor con aberración esférica y el paraboloide sin deformar.

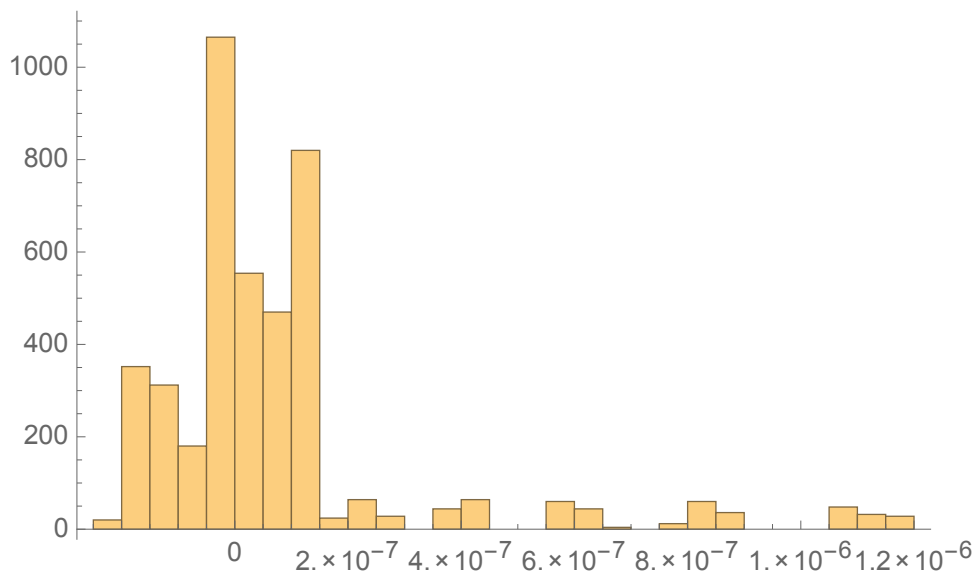


Figura 8-7. Histograma de la distribución de las magnitudes de los residuos. La abscisa es la magnitud del residuo en metros, mientras que la ordenada es el número de nodos cuyos residuos caen en ese intervalo de valores.

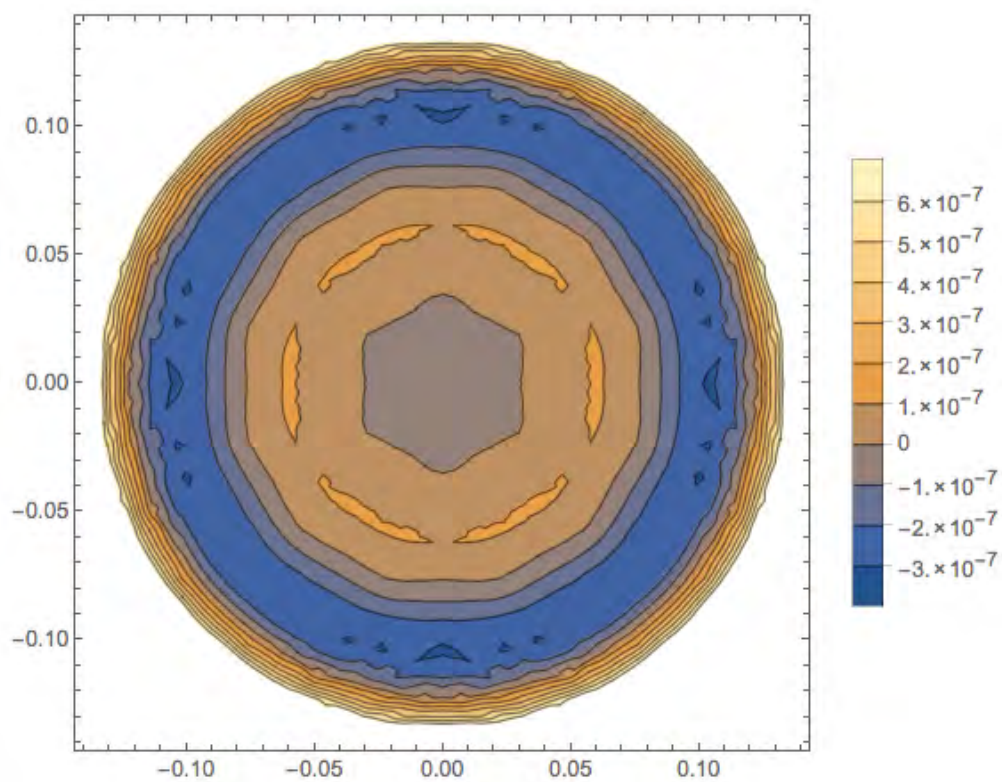


Figura 8-8. Curvas de nivel de la diferencia entre la aberración esférica de tercer orden presente en un paraboloide de espesor 8mm y el paraboloide sin deformar con 36 actuadores puntuales. Unidades m.

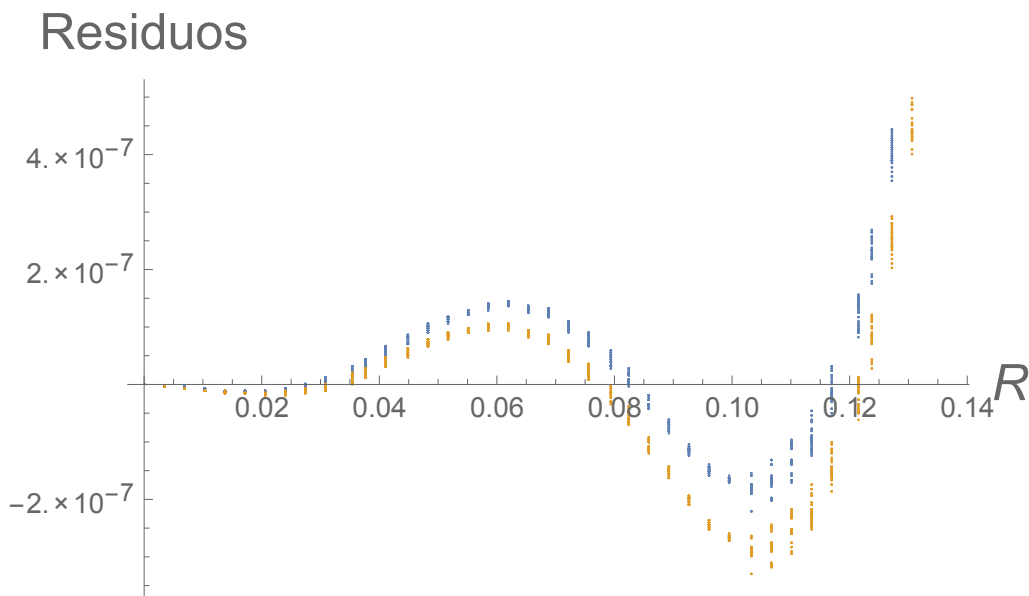


Figura 8-9. Gráfica de las magnitudes de los residuos como función de la coordenada radial. En azul es el espejo con $t=19.6\text{mm}$ y en anaranjada con $t=8\text{mm}$ ambos modelos con aberración esférica. Unidades en m.

El mapa de contornos de la [Fig. 8-8] permite distinguir las zonas de máxima y mínima diferencia entre los dos modelos, este y la gráfica [8-9] nos da las magnitudes de los residuos como función de la posición en el plano $R-\theta$, y como la deformación a corregir tiene simetría radial, no requerimos más que mostrar esas diferencias en función del radio, con lo cual se puede observar que existe definitivamente una tendencia radial. Las diferencias máximas se dan cuando se aproxima al borde que es donde la pendiente se dispara, y por tanto se debe de prestar especial atención pues este es el problema que presentan no solo los espejos activamente deformados sino también los pasivamente soportados. El histograma de residuos [Fig. 8-7], nos muestra que más del 70% de los nodos presentan residuos de centenas de nanómetros pero sin embargo, el restante porcentaje de nodos se disparan en su diferencia con la exactitud requerida.

Las medias cuadráticas obtenidas son las mostradas en la tabla [8-10] y se observa que se requieren reducir un factor de 10 los valores obtenidos. La amplitud de las diferencias entre la superficie lograda con la acción de los actuadores y la superficie de referencia muestra incremento en la amplitud senoidal conforme nos alejamos del borde. La solución no está en reducir el espesor del espejo sino en agregar mayor número de nodos de control como lo expresa la ecuación [A.2.3] del Apéndice [2]

Espesor	Dif. máxima	Dif. mínima	rms
mm	μm	μm	μm
19.6	1.175	-0.222	0.268
12	1.177	-0.223	0.267
10	1.179	-0.223	0.268
8	1.008	-0.330	0.235

Tabla 8-10. Desviación de toda la superficie hiperboloide alcanzada con al aberración esférica de 3er orden

9 Cambio de curvatura local mediante el cambio de la cónica

En este capítulo estudiamos el problema de cambiar la curvatura local de la superficie óptica, por medio de un cambio en la constante de conicidad del espejo.

Se tomaron en cuenta para este problema, las consideraciones tales como la restricción de que el volumen del cuerpo tiene que permanecer constante para las tres cónicas (paraboloide, hiperboloide, elipsoidal). Para realizar el cálculo del volumen se evaluaron numéricamente las integrales de volumen por medio del programa Mathematica. Ver apéndice [1]. El cálculo el volumen se realizó con el programa Mathematica y se logro una precisión de 10^{-9} m^3 .

Posteriormente, con el mismo programa Mathematica se generaron las superficies malladas y se calculan las diferencias (desplazamientos requeridos) entre la superficie deseada y la superficie base. Estas diferencias servirán para calcular analíticamente las fuerzas y momentos (condiciones Neumann) a aplicar en el contorno y encontrar si de esta manera se logra el objetivo; ó las diferencias sirven como desplazamientos (condiciones Dirichlet) a aplicar al cuerpo discretizado, bajo las consideraciones descritas en el capítulo [7] para pasar de una configuración a otra.

Se emplea MEF para encontrar cual configuración cumple con los requerimientos y su optimización, sección [5.7.1]. Para ello se introduce el modelo mallado en el programa, el espesor de la placa y las condiciones a la frontera Neumann o Dirichlet. En todas las simulaciones se emplean los elementos placa 2D para el análisis.

9.1 Primera Aproximación. Fuerzas y momentos en el contorno.

En la primera aproximación se decide deformar a la superficie esférica que es la cónica con constante de conicidad cero, para lograr las superficies cónicas extremas del rango que se esta trabajando que son la hiperboloide y la elipsoidal oblata. Se calcula de manera discreta cada curva con el programa Mathematica y se comparan las diferencias en alturas con el objeto de saber cual será el rango de desplazamientos máximos esperados para el cambio de superficie cónica. Se obtuvo una diferencia en los bordes de $26 \text{ } \mu\text{m}$ entre la esférica y la hiperboloide, de $49 \text{ } \mu\text{m}$ entre la esférica y la elipsoidal. Estos son las diferencias máximas esperadas para el cambio de constante de conicidad.

En el contorno de la superficie mallada del modelo que es analizado, se aplican restricciones en movimiento. Estas son restricciones de traslación en el eje Z que se encuentra alineado al eje óptico de simetría de la superficie. Un ejemplo para producir las condiciones seria un contorno sin articulación pero con baleros que permitiera desplazarse

en el plano $R-\theta$ pero no en Z . Esto da como resultados que $\frac{dw}{dr}=0$ esto es el giro en el contorno no es permitido y por tanto se pueden introducir momentos. {13}

En el vértice de la superficie cónica se asignó restricción de traslación en el plano $R-\theta$ y de rotación en Z para darle estabilidad al modelo. Se introdujo la fuerza de gravedad como primer caso alineada al eje $-Z$.

A la geometría Ω_0 se introducen momentos de flexión distribuidos en su contorno para obtener deformaciones infinitesimales con propagación de esfuerzos difusos y por tanto pendientes suaves en la superficie óptica {13, 25}. Estos dos factores son críticos para un sistema óptico tanto por los materiales empleados, como por su aplicación en la propagación coherente del frente de onda.

Se realizaron 3 análisis por MEF, primero el comportamiento de la superficie esférica ante las condiciones de frontera ya comentadas. El segundo fue para deformar la esférica a una hiperbólica y la última es para pasar de una esférica a una elipsoidal. En todos los análisis de esta aproximación se introdujo como valor inicial un espesor de 19.6 mm que es un $1/14$ del diámetro de la placa. Con el valor introducido ya estamos cumpliendo con la condición de espesor para placas delgadas. Ver sección. [5.5.2].

9.1.1 Análisis superficie esférica

Se han efectuado cálculos para las cuatro situaciones que a continuación se enlistan.

1º Se introduce la gravedad para el cálculo de la fuerza másica en dirección $-Z$ y momentos flexionantes de 1Nwm a cada uno de los cuarenta nodos de la frontera en la circunferencia.

2º Solo la gravedad en la misma dirección $-Z$.

3º Gravedad y momento a -45 grados en el plano X_Z .

4º Solo gravedad a -45 grados.

Para obtener el momento constante requerido para lograr una deflexión de $5.052 \mu\text{m}$ se empleo la ecuación de flexión apéndice [3] ecuación [A.3.7], para placas circulares bajo las condiciones a la frontera descritas y se obtuvo un valor de 40Nwm/m . Ver tabla [9.1] para comparar el resultado del análisis por MEF

9.1.2 Análisis esfera-hiperboloide

Las mismas condiciones Dirichlet, con gravedad $-Z$. Las condiciones Neumann usadas son el momento flexionante por unidad de longitud obtenido empleando las ecuaciones del apéndice [3] de 190.8Nwm/m total para producir una deflexión de $24.123 \mu\text{m}$ como valor máximo en el vértice.

9.1.3 Análisis esfera-elipsoidal

Las mismas condiciones Dirichlet con gravedad $-Z$. Condiciones Neumann usadas son el momento flexionante de -367.2Nwm/m aplicado a la frontera en la circunferencia. Ver tabla [9-1] para resultados.

Conicas $\Omega_1 \rightarrow \Omega_0$ condiciones a la frontera en el borde	Desplazamiento		Desplazamient		Esfuerzo Nw/m ²		Esfuerzo Nw/m ²		Reacc. Nw	
	Magnitud(μm)		dZ(μm)		Máximo Principal		Mínimo Principal		Magnitud	
	Max	Min	Max	Min	Max	Min	Max	Min	max	min
esfera_esfera										
1er análisis	5.210	0.302	5.210	0	8.78E+05	0	0	-7.44E+05	0.893	0
2° análisis	0.174	0.009	0	-0.174	2.9E+04	0	0	-2.3E+04	0.750	0
3er análisis	0.526	0.292	5.260	0	8.86E+05	5.24E+05	7.82E+05	7.08E+05	20.422	0
4° análisis	0.123	0.007	0.123	0	8.9E+04	4.E+03	8.4E+04	1.2E+04	20.422	0
esfera_elipsoidal	49.702	2.867	0.000	-49.702	7.005E+06	0	0	-8.269E+06	3.048	0
esfera_hipérboloide	25.505	1.473	25.505	0	4.259E+06	0	0	-3.600E+06	1.446	0

Tabla 9-1. Resultados de la 1ª aproximación con momentos en el contorno

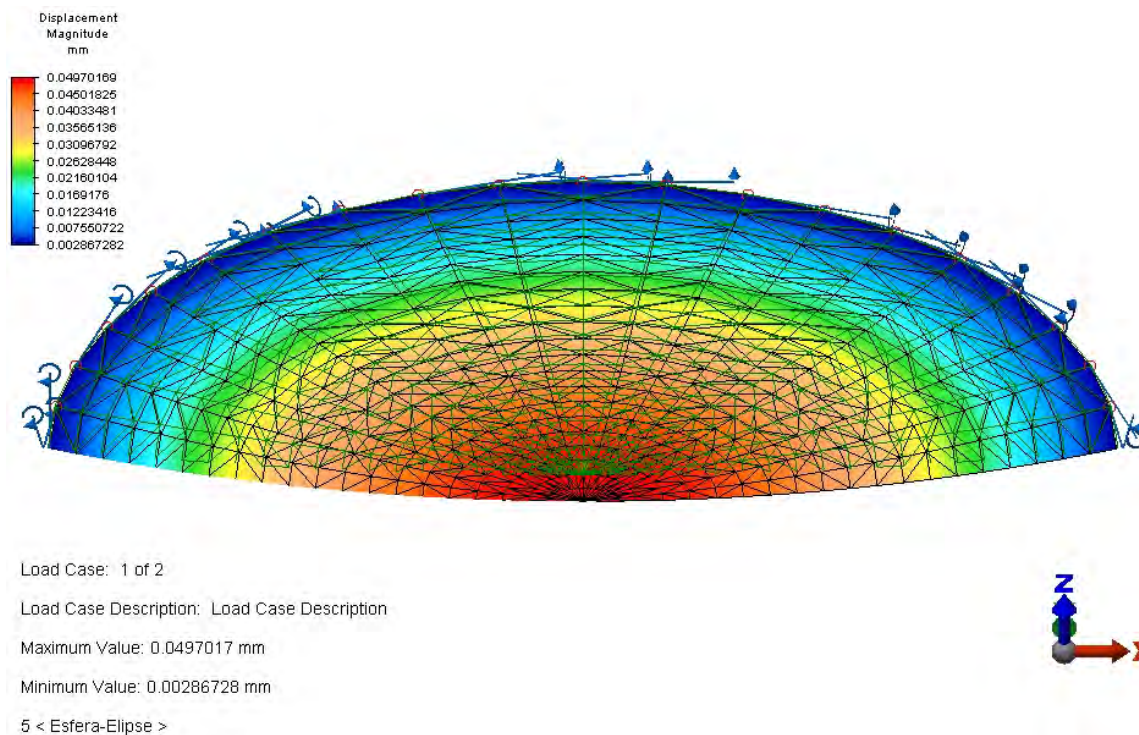


Figura 9-2. Figura ilustrativa que muestra un corte en el plano XZ de los desplazamientos logrados con los momentos flectores para aproximarse a una elipsoidal.

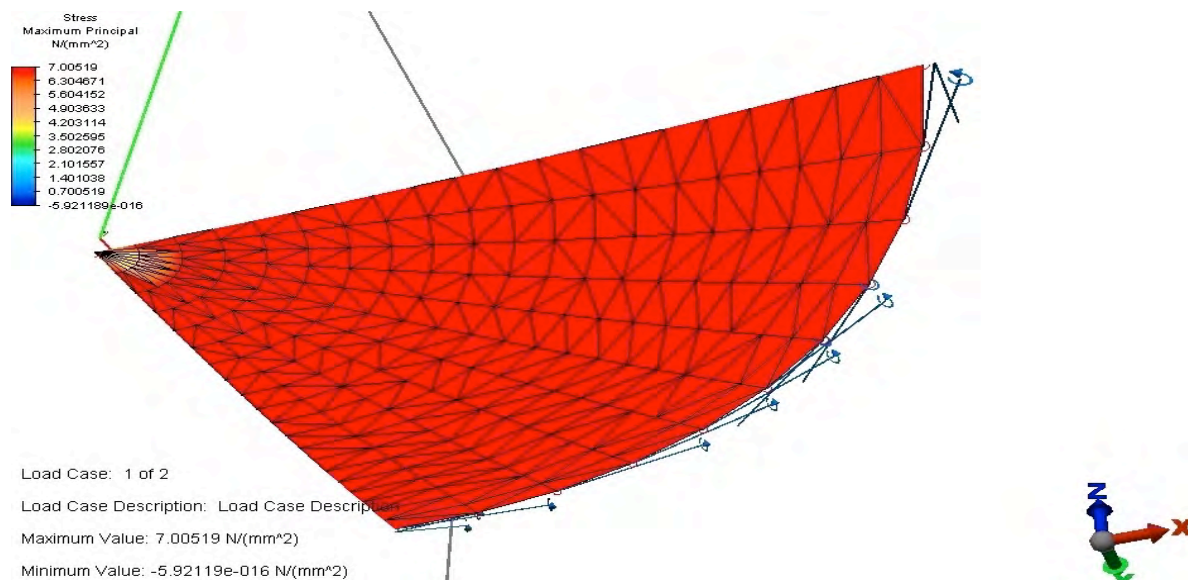


Figura 9-3. Esfuerzos máximos al deformar una esfera para aproximarnos a una elipsoidal. La figura solo muestra un cuarto del modelo ya que los esfuerzos tienen simetría rotacional.

9.1.4 Comparación de los tres análisis

Se grafican los valores obtenidos de las deflexiones inducidos al introducir momentos flectores en la frontera del cuerpo para observar el comportamiento de la esfera por peso propio, además para deformar a la esfera a las superficies hiperbólica y elipsoidal oblata. Los valores de los nodos tomados del mallado del análisis son los que forman una curva en el plano RZ y se comparan con las cónicas analíticas.



Figura 9-4. Detalle de los desplazamientos en el vértice de cada superficie. Unidades mm.

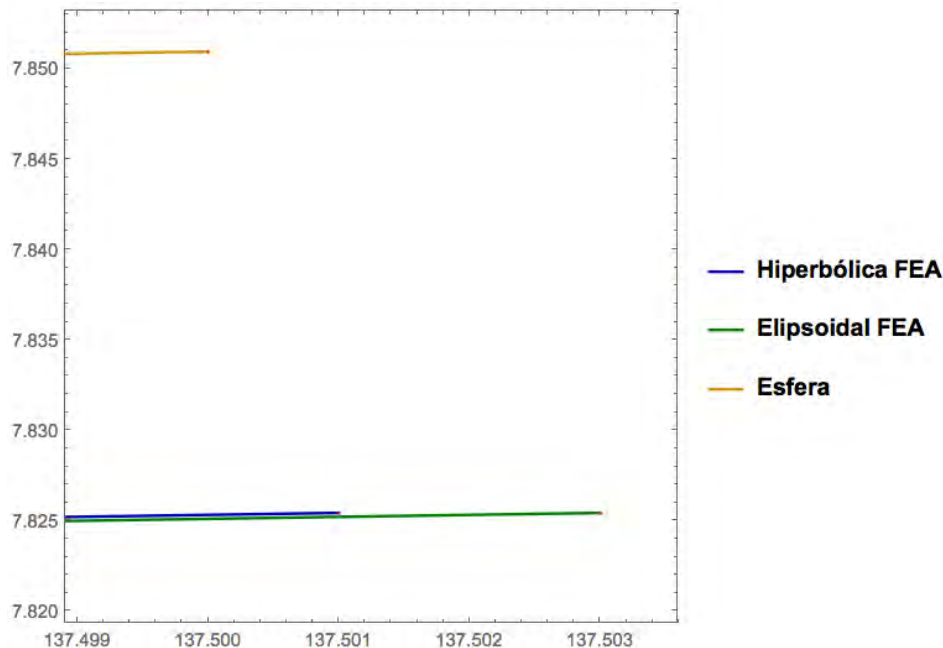


Figura 9-5. Detalle de los desplazamientos en los bordes del hiperboloide y la superficie elipsoidal en MEF contra la esfera analítica. Unidades mm.

En las figuras [9-4] se observa el resultado de haber restringido el desplazamiento Z en los bordes; la deflexión máxima se presenta en el vértice de cada cónica donde r es cero.

Aunque se empleó la fórmula en el apéndice [3] para obtener los momentos necesarios para obtener la deflexión requerida, los resultados difieren en el desplazamiento máximo para cada caso, en la esfera es de $0.16 \mu\text{m}$ y esta diferencia corresponde a la deformación por peso propio. La diferencia es de 1.38 micras en el desplazamiento máximo en los bordes para pasar de una esfera a un hiperboloide y de -3.33 micras para pasar de una esfera a una elipsoidal.

Las discrepancias rms entre curvas es de 18.82 micras hiperboloide-esfera; 286.26 micras elipsoidal-esfera.

En la primera aproximación se planteó la solución del problema para pasar de la superficie base que solo en este primer caso es la esfera a la de diseño óptico del sistema que es una hipérbola, o elipse, empleando la teoría de placas delgadas y como condiciones Neumann los momentos flexionantes calculados para posteriormente analizarlos por MEF. Ello dio una buena aproximación a la comprensión del comportamiento del modelo, pero se requiere de una solución más elaborada en la aplicación de las condiciones Neumann.

Las superficies obtenidas no forman las cónicas deseadas a lo más que se alcanza es a acercarnos a una parábola con desenfoque, [Fig. 9-2], esto es que su curvatura es más pronunciada conforme nos acercamos al vértice. La fuerza de gravedad sí tiene un fuerte efecto en este caso, puesto que todo el peso del espejo es soportado por solo una

restricción de desplazamiento en la dirección de la gravedad y es en el borde, mas sin embargo a esta frontera se le ha permitido deformarse “deslizarse” en el plano X-Y. Figuras [9-5]

Los esfuerzos máximos a tensión en las superficies para un tejo de 19.6mm de espesor, fueron del orden del 60% del valor señalado por los fabricantes como máximo para una superficie que será deformada por periodos largos de aproximadamente 6 horas. Esto nos da un factor de seguridad ligeramente menor a 2, ver tabla [9-1] y como se puede observar en la [Fig.9-3] los esfuerzos son suaves y no presentan concentraciones fuertes en la superficie óptica que es lo que se busca a la hora de aplicar momentos en componentes ópticas.

9.2 Segunda aproximación. Actuadores

En este caso se propone lograr la configuración requerida determinando la disposición y número de nodos en la frontera del cuerpo $\partial\Omega$ de Ω_1 donde se introducirán vectores de desplazamiento como condiciones Dirichlet para lograr la forma deseada Ω_0 .

Como primer paso en la segunda aproximación, se determinó que el paraboloides fuera la superficie de referencia pues por su naturaleza, es la curva que no presenta aberraciones implícitas extras como ya se demostró en la sección [5.4.1] , además de que el rango de desplazamientos requeridos para pasar de una cónica con constante de conicidad de -1.879 (hiperbólica) a una con constante de conicidad de 1 (elipsoidal) es muy grande sobre todo en el contorno donde las pendientes se incrementan considerablemente. En todos los análisis efectuados en los modelos se incluye la gravedad para encontrar la contribución por peso propio del cuerpo a las deflexiones, su influencia se describirá en las conclusiones de este capítulo.

Como se explicó en la sección[5.1] y en el capítulo[7] se aprovecha la dualidad del problema y se introducen los desplazamientos en el modelo geométrico mallado que será empleado para el análisis por MEF y así obtener el campo de vectores normales a la superficie por medio de las condiciones Neumann con el que se logran esas deformaciones. Las razones:

- la influencia del cambio de la constante de conicidad en la superficie de la cónica provoca pendientes muy grande sobre todo en los bordes.
- la frontera perimetral no puede restringirse en movimiento porque reduce el área de respuesta para el ajuste de curvatura y/o corrección de aberración y por ende el área óptica efectiva.

A su vez esto nos ayudará a :

- optimizar el número y posición de los actuadores a través de los cuales se transmitirán las fuerzas.

- El efecto en el contorno del cuerpo para respetar el área con condiciones ópticas óptimas.
- Se espera poder introducir cargas de presión al menos en el centro como restricciones de movimiento para disminuir la magnitud de las fuerzas de corte, además de aproximarnos a las áreas de acción de las fuerzas deformadoras.

9.2.1 Modelo con 36 actuadores

Partiendo de los resultados obtenidos al analizar el paraboloides con aberración esférica de 3er orden corregida por 36 actuadores y la desviación obtenida capítulo [8], se introduce el mismo arreglo de actuadores en la frontera del espejo haciendo uso de los criterios de la sección [7.1] y apéndice [2]. Ver tabla [9-6]. Se propone como valor inicial del espesor 19.6 mm, pero en los primeros resultados se encontró que los esfuerzos producidos estaban muy próximos al esfuerzo último a tensión, por lo que aquí solo se presentan los valores de los análisis efectuados con los espesores de menisco donde no se sobrepasa ese límite.

En esta primera aproximación para cambio de cónica, no se asigna un actuador en el vértice para observar el comportamiento de la parte central, que en un principio es la parte de la curva local que menos se requiere deformar. Ver [Fig. 7-5] . No se introduce restricciones en movimiento puesto que los desplazamientos son aplicados con resortes de muy alta rigidez.

Cuerpo					separación
$\Omega_1 \rightarrow \Omega_0$	orden	radio	No	ángulo	angular ÷
36 actuadores	anillos	mm	actuadores	desde +Y	actuadores
hiperbólica-paraboloide	0	0	0		
	10	35.324	6	0°	60°
	23	79.351	12	15°	30°
	35	121.413	18	10°	20°
elipsoidal-paraboloide	0	0	0		
	10	35.322	6	0°	60°
	23	79.347	12	15°	30°
	35	121.407	18	10°	20°

Tabla 9-6. Distribución de 36 actuadores puntuales en la frontera posterior del cuerpo. Se emplearon los parámetros normalizados del artículo de Nelson y se ajustaron a la geometría del espejo

Cuerpo	espesor mm	Desplazamiento		Esfuerzo Nw/m ²		Esfuerzo Nw/m ²		Reacciones	
		Magnitud(μm)		Máximo Principal		Mínimo Principal		Magnitud Nw	
36 actuadores		Max	Min	Max	Min	Max	Min	max	min
hiperbólica-paraboloide	8	18.194	0.085	3.824E+06	0	0	-3.315E+06	71.961	32.195
	10	18.208	0.084	4.687E+06	0	0	-4.176E+06	137.636	59.164
	12	18.216	0.084	5.554E+06	0	0	-5.042E+06	235.084	99.224
elipsoidal-paraboloide	8	41.063	0.000	7.605E+06	0	0	-8.761E+06	167.728	72.573
	12	41.112	0.000	1.1550E+07	0	0	-1.2704E+07	545.360	223.900

Tabla 9-7. Resultados del análisis por MEF

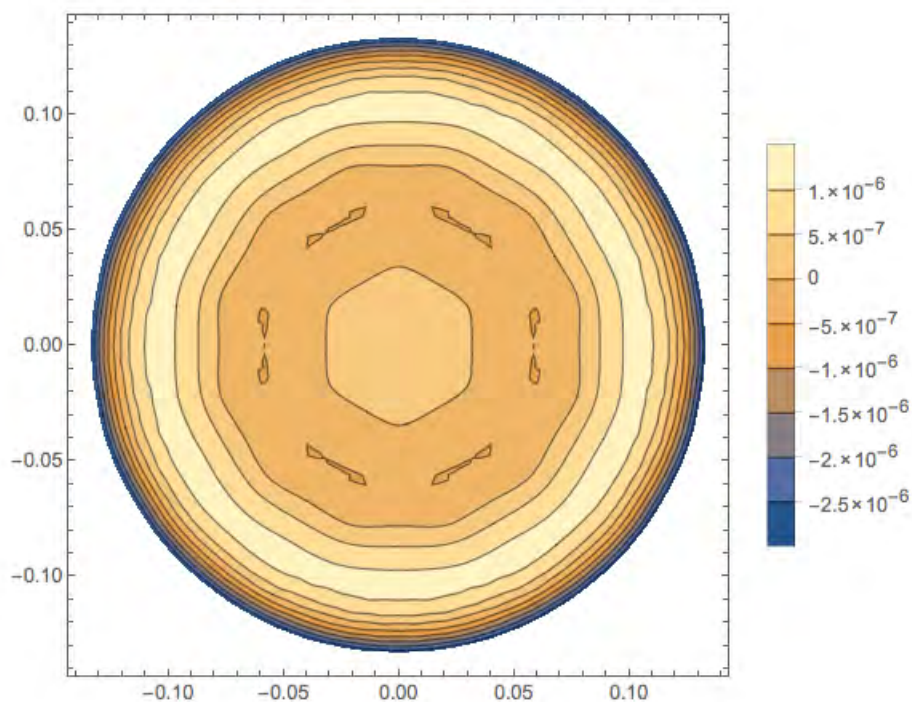


Figura 9-8. Curvas de nivel de las diferencias entre la hiperbólica deformada con 36 actuadores en 5 anillos y la paraboloide, unidades en metros. El espesor de la placa empleado fue de 8mm.

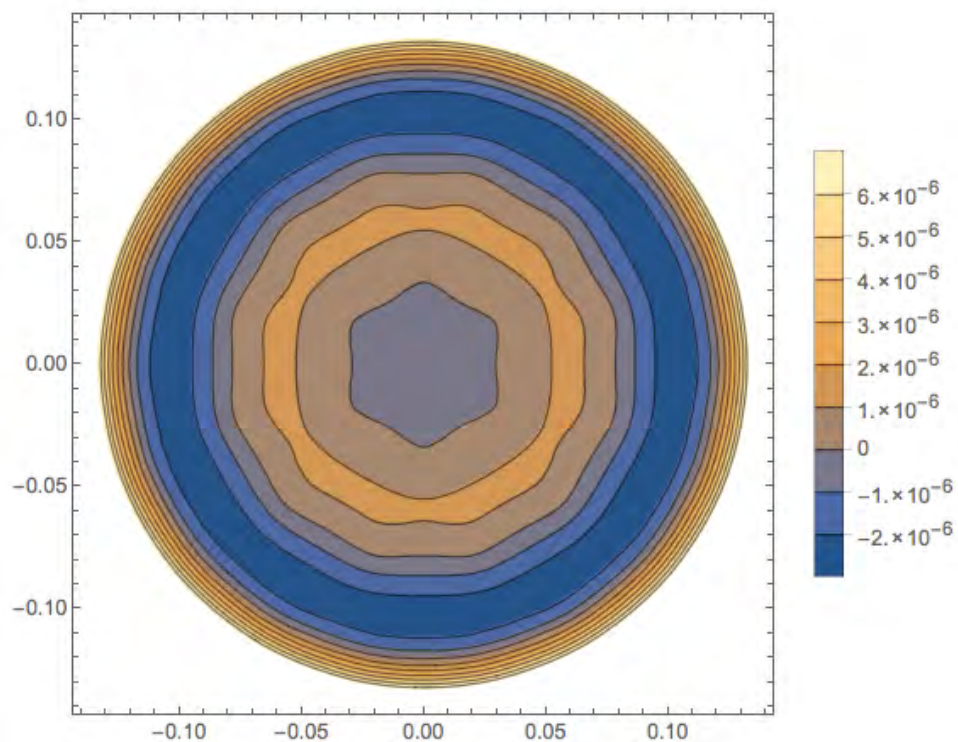


Figura 9-9. Curvas de nivel de las diferencias de la aproximación de la elipsoidal a la paraboloid con 36 actuadores, unidades en metros. El espesor de la placa empleado fue de 8mm.

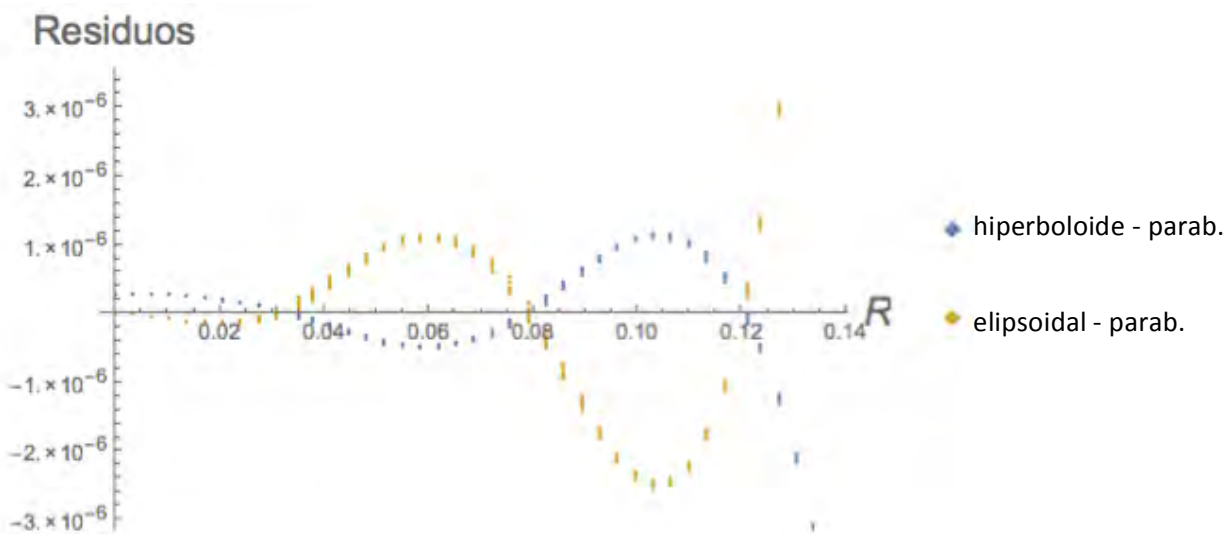


Figura 9-10. Diferencias con respecto al radio en la comparación de la elipsoidal y la hiperboloide con el paraboloid, unidades en metros.

Cuerpo				
$\Omega_1 \rightarrow \Omega_0$.	espesor	Dif. máxima	Dif. mínima	rms
36 actuadores	mm	μm	μm	μm
hiperbólica-paraboloide	8	1.058	-4.395	1.058
	10	1.151	-4.379	1.054
	12	1.149	-4.371	1.053
elipsoidal-parabólica	8	10.220	-2.580	2.436
	12	10.163	-2.569	2.425

Tabla 9-11. Diferencias entre cuerpos y el rms de las diferencias

De los resultados de la tabla [9-11] se observa que la precisión está muy alejada de la requerida que es de decenas de nanómetros. De la [Fig. 9-10] se observa que el borde tiene un desplazamiento muy fuerte y en sentido contrario para cada caso. También este efecto se puede observar en las curvas de nivel de las [Fig. 9-8, 9-9]. Las reacciones de los actuadores que están proporcionando las condiciones Neumann del problema arrojan que las fuerzas requeridas, y obviamente los esfuerzos, se incrementan con el espesor y el radio tabla [9-7], pues es donde se requiere un mayor desplazamiento. Se puede concluir que se requiere mayor control en el contorno. El análisis de la deformación por peso propio mostraron que su contribución en los resultados de las deformaciones es de menor importancia, pues los desplazamientos máximos fueron del orden de 1 nanómetro como valor máximo por lo que su resultado no se muestra en las tablas.

9.2.2 Dualidad de las condiciones. Exactitud del proceso

Para comprobar la factibilidad del método y su exactitud, se realizaron pruebas de la reversibilidad del análisis, esto es en lugar de las condiciones Dirichlet (desplazamientos puntuales), se introducen las condiciones Neumann (reacciones) obtenidas al modelo de la hiperbólica para ver si lograba los "mismo desplazamientos", es decir, se quiere pasar de Ω_1 a la configuración Ω_0 con fuerzas. Esto se realizó con el modelo de menor número de actuadores.

Lo que se observó es que hay que prestar especial cuidado a las condiciones a la frontera introducidas al modelo para la aplicación de fuerzas, que no son las mismas para la aplicación de desplazamientos por el tipo de elementos que el programa nos permite usar para ello. Estos elementos consisten en resortes con rigidez especificada que introduce un nuevo nodo al modelo. A este nuevo nodo se le aplica el vector de desplazamiento con dirección. El desplazamiento o rotación del nodo en el modelo dependerá de la rigidez del resorte. Estos elementos introducidos fijan al modelo en el espacio, por ello ya no se requiere de especificar más condiciones a la frontera.

Para obtener resultados acordes al análisis con desplazamientos, el nuevo modelo requiere de mayores restricciones en su frontera para fijarlo en el espacio y poder reproducir la deformación original, ahora aplicando las fuerzas de reacción obtenidas del análisis

anterior. Esto se debe a que no se modelaron la base y los actuadores que fijan a la base sostienen al espejo. Las condiciones que se introdujeron fueron las de simetría, donde se restringe la traslación en Y, y la rotación en los ejes X, Z a dos nodos del borde que coinciden con el eje X. A su vez se restringe la traslación en X y la rotación en los ejes Y, Z, a los dos nodos del borde que coinciden con el eje Y, y al vértice se le restringe la traslación en Z y la rotación en X y Y.

Cuerpo $\Omega_1 \rightarrow \Omega_0$.	espesor mm	Desplazamiento Magnitud(μm)		Esfuerzo Nw/m^2 Máximo Principal		Esfuerzo Nw/m^2 Mínimo Principal		Fuerzas Magnitud Nw	
		Max	Min	Max	Min	Max	Min	max	min
		valor de fuerzas (reacciones)							
hiperbólica-paraboloide	8	17.913	0	3.824E+06	0	0	-3.314E+06	71.9605	32.3667
valor + 1% del mismo hiperbólica-paraboloide	8	18.083	0	3.981E+06	0	0	-3.490E+06	71.8885	32.2437

Tabla 9-12. Resultados de los análisis para deformar a una hiperbólica con la aplicación de condiciones Neumann

Cuerpo $\Omega_1 \rightarrow \Omega_0$.	espesor	Dif. máxima	Dif. mínima	rms
36 fuerzas	mm	μm	μm	μm
valore reacciones				
hiperboloide-paraboloide	8	0.843	-4.819	1.160
valores mas 1% valor original				
hiperbólica-paraboloide	8	0.988	-4.783	1.118

Tabla 9-13. Desviación estándar en la aplicación de fuerzas resultantes del análisis anterior y su variante más próxima

Las conclusiones que se obtuvieron de los resultados tablas [9-12, 9-13] son que si se aplica directamente al modelo los valores de las reacciones obtenidas del modelo anterior como fuerzas en el nuevo modelo, es decir los valores que se obtuvieron como resultados del análisis para pasar de la configuración Ω_1 a la configuración Ω_0 , el incremento en la desviación estándar de la superficie deformada es de casi el 10%, mientras que si se aplica al modelo las reacciones del modelo anterior más la suma en Z del 1% de las mismas, se obtiene un incremento del 3.5 % en la desviación rms de la superficie contra el obtenido con desplazamientos tablas [9-11, 9-13]. Los esfuerzos en el modelo con desplazamientos introducidos son los mismos para con las reacciones o fuerzas resultantes, mientras que con el incremento en valor del 1% en las fuerzas, los esfuerzos también tienen un incremento del 4% que en este caso no es de considerarse.

Con la variación obtenida se puede considerar válido el método al 10% y si se quiere reducir la diferencia en la desviación solo habrá que sumarle a las fuerzas un 1% más al valor original.

9.2.3 Modelo con 61 actuadores

Se introduce un anillo más de actuadores pero ya se toma en cuenta el comportamiento del modelo anterior para que su distribución radial corresponda al control de las diferencias mayores en los desplazamientos y por ende el último anillo se acerca más al borde. La cantidad de nodos por anillo más un actuador en el vértice de la cónica se encuentra descrito en la tabla [9-14], [Fig. 7-6, 7-7]. Las condiciones a la frontera introducidas en el modelo son solamente de restricción en traslación a los cuatro nodos del borde alineados a los ejes X y Y. La aplicación de los desplazamientos es la misma que la descrita en el modelo anterior a través de resortes.

Se analizan tres distribuciones radiales, con un solo espesor de 8 mm, tanto para deformar la superficie hiperbólica ó la elipsoidal hacia un paraboloides. Se ajustan los valores introducidos en los actuadores del 3er y 4º anillo como condiciones Dirichlet de desplazamiento, para reducir las diferencias en las superficies. Se obtienen los siguientes resultados:

Cuerpo		1°		2°		3°			separación
$\Omega_1 \rightarrow \Omega_0$.	No	Orden	radio	Orden	radio	Orden	radio	ángulo	angular ÷
61 actuadores	actuadores	anillos	mm	anillos	mm	anillos	mm	desde +Y	actuadores
hiperbólica-paraboloide	1	0	0	0	0	0	0		
	6	10	34.375	11	37.813	12	41.250	0°	60°
	12	19	65.313	20	68.750	21	72.188	15°	30°
	18	28	96.250	29	99.688	30	103.125	10°	20°
	24	37	127.188	38	130.625	39	134.063	0°	15°
elipsoidal-paraboloide	1	0	0	0	0	0	0		
	6	10	34.373	11	37.811	12	41.248	0°	60°
	12	19	65.309	20	68.747	21	72.184	15°	30°
	18	28	96.245	29	99.683	30	103.120	10°	20°
	24	37	127.181	38	130.619	39	134.056	0°	15°

Tabla 9-14. Arreglo de 61 actuadores en 3 distribuciones diferentes

Cuerpo $\Omega_1 \rightarrow \Omega_0$.	espesor mm	Desplazamiento		Esfuerzo Nw/m ² Máximo Principal		Esfuerzo Nw/m ² Mínimo Principal		Reacciones	
		Magnitud(μm)		Max	Min	Max	Min	Magnitud Nw	
		Max	Min					max	min
61 actuadores									
hiperbólica-paraboloide	8								
Anillos: 10, 19, 28,37		20.627	0	4.839E+06	0	0	-4.515E+06	94.1302	93.4583
11,20,29,38		21.260	0	4.904E+06	0	0	-5.633E+06	215.8615	33.9490
12,21,30,39		21.909	0	5.125E+06	0	0	-5.950E+06	224.5677	35.3864
elipsoidal-paraboloide	8								
Anillos: 11, 20, 29,38		46.111	0	7.989E+06	0	0	-6.406E+06	523.4981	137.8030
12,21,30,39		49.542	0	1.2363E+07	0	0	-1.0483E+07	489.8875	68.8598

Tabla 9-15. Resultados del análisis por MEF de las cónicas deformadas

Cuerpo $\Omega_1 \rightarrow \Omega_0$.	Arreglo	espesor mm	Dif. máxima μm	Dif. mínima μm	rms μm
61 actuadores					
hiperbólica-paraboloide	1°	8	0.801	-1.954	0.442
	2°		4.202	-3.291	0.845
	3°		0.783	-1.002	0.262
elipsoidal-paraboloide	1°	8			
	2°		2.874	-1.485	0.603

Tabla 9-16 . Desviación estándar de las diferencias de la superficies alcanzadas con los actuadores

De la tabla [9-16] se observa que los valores rms obtenidos con una configuración de 61 actuadores, están todavía un factor al menos de 10 por arriba de lo deseado, los esfuerzos de la tabla [9-15] muestran que en el cuerpo elipsoidal su valor está próximo al valor marcado como límite a la tensión, así como se puede ver que las fuerzas que se requerirán para lograr los desplazamientos muestran una marcada diferencia entre los valores máximos y mínimos.

9.2.4 Modelo con 127 actuadores puntuales

La distribución de los vectores de movimiento (actuadores), en anillos cuya densidad y frecuencia se incrementa con el radio, estuvo determinada por la necesidad de deformar a la parábola en una superficie elipsoidal oblata, cuya pendiente o razón de cambio, se incrementa cerca de los bordes y por lo tanto, el control del desplazamiento se vuelve crítico. La configuración inicial y su evolución se presenta en la sección [7.2]. Aquí presentamos los resultados de los análisis de esa evolución y el objetivo alcanzado con los dos mejores modelos y un espesor de 8mm. Primero se analizaron 3 configuraciones, tabla [9-17] con 127 actuadores (uno central)[Fig. 7-8], que representan a las condiciones Dirichlet y cuyo vector de desplazamiento, está orientado al centro de curvatura del espejo.

Posteriormente cada elemento de frontera, es substituido por un anillo de cuatro vectores de desplazamiento [Sección 9.2.5].

Cuerpo		1°		2°		3°			separación
$\Omega_1 \rightarrow \Omega_0$.	No	Orden	radio	Orden	radio	Orden	radio	ángulo	angular ÷
127 cojinetes	actuadores	anillos	mm	anillos	mm	anillos	mm	desde +Y	actuadores
hiperbólica-paraboloide	1	0	0	0	0	0	0	0°	0°
	6	10	34.375	11	37.813	11		0°	60°
	12	18	61.875	19	65.313	19		0°	30°
	24	25	85.938	26	89.375	27	92.813	0°	15°
	36	32	110.000	33	113.438	33		0°	10°
	48	39	134.063	39	134.063	39		0°	7.5°
elipsoidal-paraboloide	1	-	-	0	0	0	0	0°	0°
	6	-	-	11	37.811	11		0°	60°
	12	-	-	19	65.309	19		0°	30°
	24	-	-	26	89.371	27	92.808	0°	15°
	36	-	-	33	113.432	33		0°	10°
	48	-	-	39	134.056	39		0°	7.5°

Tabla 9-17. Los mejores arreglos de 127 actuadores y su disposición.

Cuerpo	Desplazamiento		Desplazamiento		Desplazamiento		Desplazamiento	
$\Omega_1 \rightarrow \Omega_0$.	Magnitud(μm)		dr(μm)		d θ (μm)		dZ(μm)	
127 actuadores	Max	Min	Max	Min	Max	Min	Max	Min
hiperbólica-paraboloide	22.019	0	0.000	-2.425	0.008	-0.008	21.891	0
elipsoidal-paraboloide	49.868	0	5.498	0	0.017	-0.052	0.003	-49.575

Tabla 9-18. Resultados de los modelos que dieron mejores resultados en los desplazamientos con 127 actuadores, espesor 8mm

Cuerpo	Esfuerzo Nw/m^2		Esfuerzo Nw/m^2		Reacciones	
$\Omega_1 \rightarrow \Omega_0$.	Máximo Principal		Mínimo Principal		Magnitud	
127 actuadores	Max	Min	Max	Min	Max	Min
hiperbólica-paraboloide	5.427E+06	0	0	-6.915E+06	178.0761	33.5826
elipsoidal-paraboloide	1.5782E+07	0	0	-1.2489E+07	387.4828	71.2266

Tabla 9-19. Esfuerzos producidos y las reacciones máximas y mínimas en el cuerpo por la acción de los actuadores, espesor 8mm

Cuerpo			Orden			
$\Omega_1 \rightarrow \Omega_0$.	espesor	Arreglo	anillos	Dif. máxima	Dif. mínima	rms
127 actuadores	mm			μm	μm	μm
hiperbólica-paraboloide	8	1°	10,18,25,32,39	0.443	-0.516	0.153
			diafragmado			0.135
		2°	11,19,26,33,39	0.321	-0.467	0.122
			diafragmado			0.103
		3°	11,19,27,33,39	0.284	-0.495	0.113
			diafragmado			0.088
elipsoidal-paraboloide	8	2°	11,19,26,33,39	1.097	-0.598	0.283
			diafragmado			0.235
		3°	11,19,27,33,39	1.093	-0.590	0.261
			diafragmado			0.208

Tabla 9-20. Tabla con las desviaciones estándar alcanzadas con los actuadores puntuales

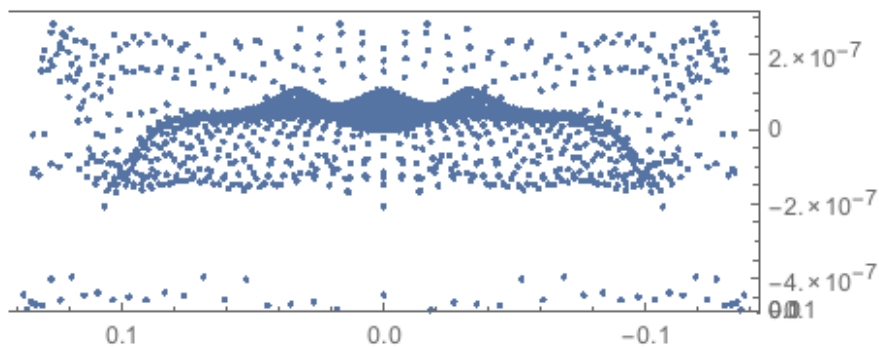


Figura 9-21. Vista lateral de las diferencias en los nodos de la malla de la superficie hiperbólica resultante de MEF 3er caso. Unidades en metros.

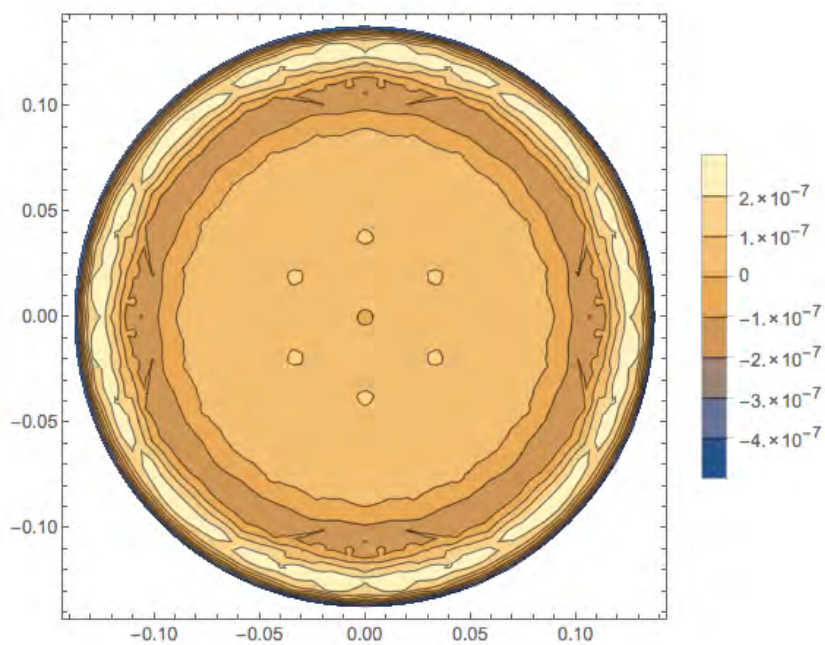


Figura 9-22. Curvas de nivel 3a configuración hiperbólica con 127 actuadores, resolución de 100 nanómetros. Unidades en metros.

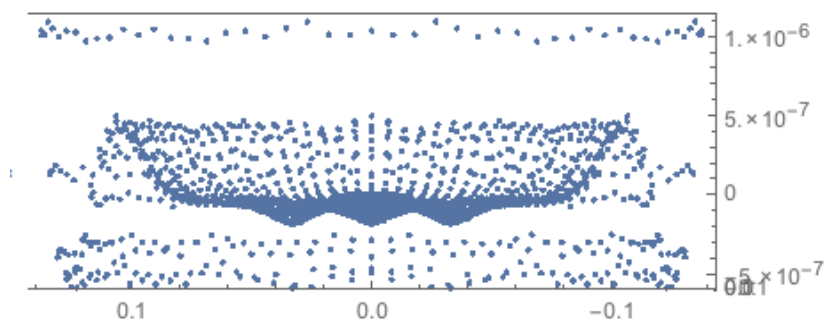


Figura 9-23. Distribución de diferencias en los nodos de la malla MEF elipsoidal deformada, 3a configuración 127 actuadores . Unidades en metros.

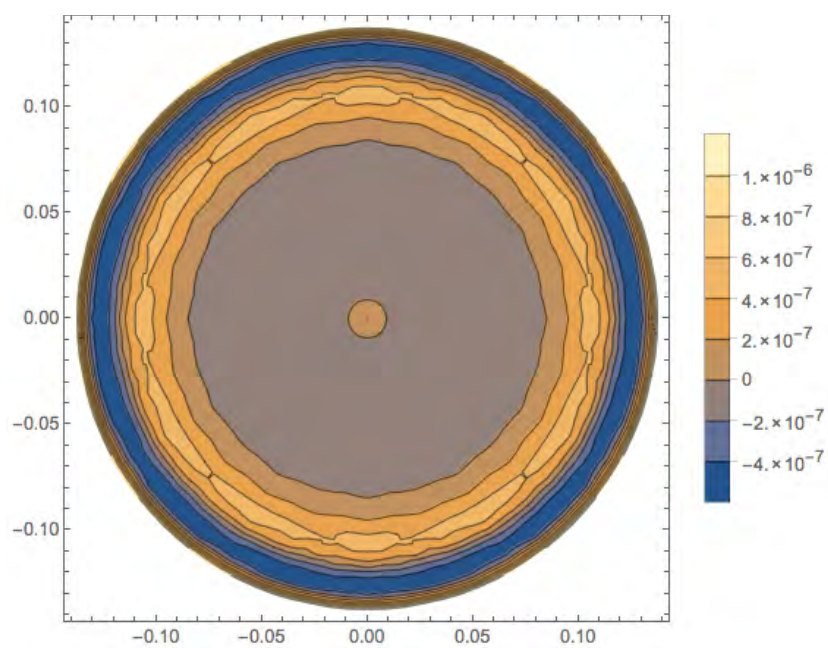


Figura 9-24. Curvas de nivel diferencias del elipsoidal. Resolución 100 nanómetros. Unidades en metros.

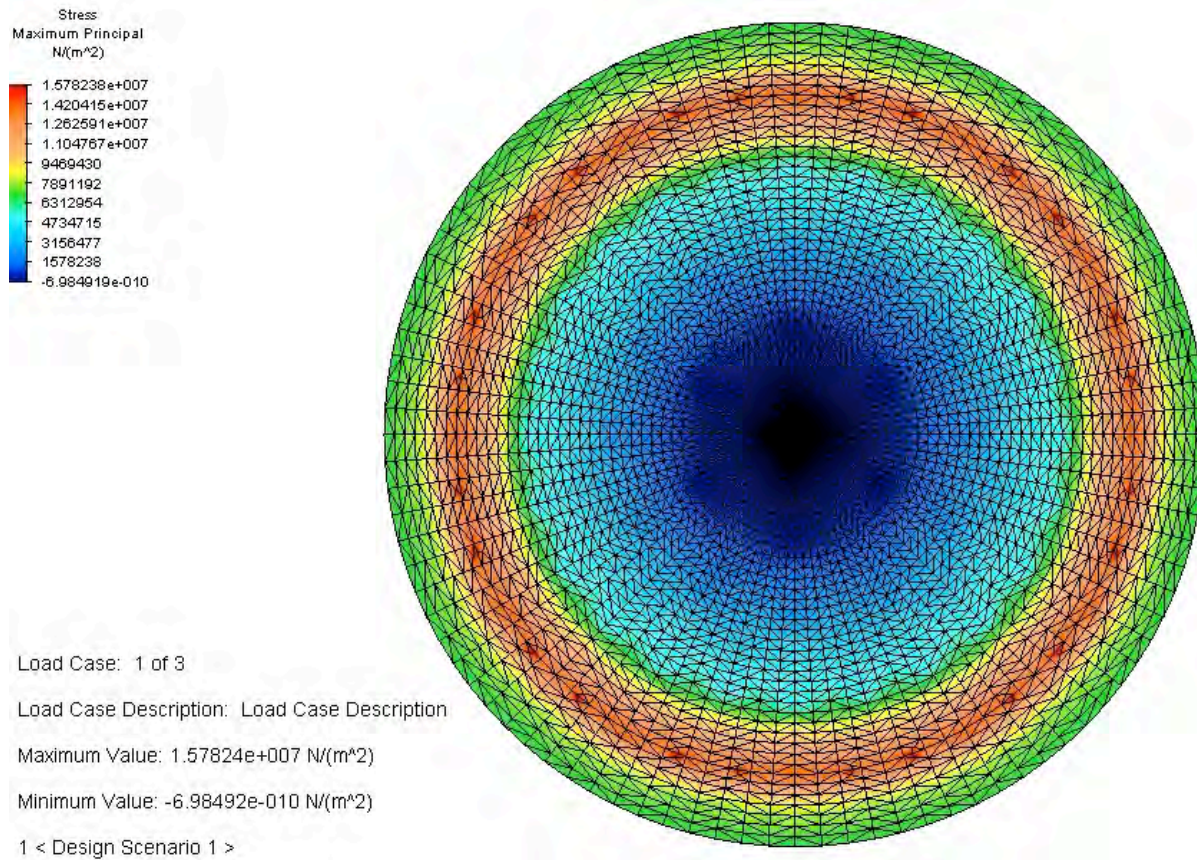


Figura 9-25. Esfuerzos máximos principales al cambiar la curvatura local de la cónica elipsoidal con 127 actuadores puntuales

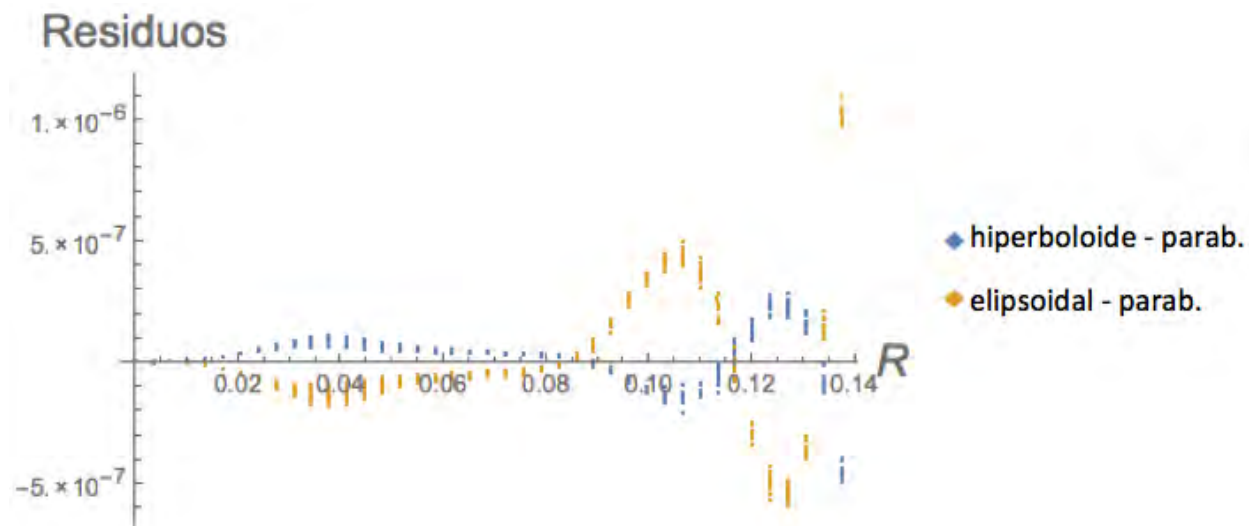


Figura 9-26. Diferencias del hiperboloide y la elipsoidal con respecto al paraboloide. Unidades en metros.

En la tabla [9-20] se presentan los resultados de las tres mejores configuraciones de anillos, desplazamientos introducidos que fueron analizados y su desviación estándar. Como se observa todavía, aunque cerca, no se alcanza la desviación estándar establecida como límite mínimo. También aparecen las desviaciones si se diafragmara la superficie óptica al diámetro de entrada a 0.269 m. Ver sección [6.3]

Con los resultados logrados al duplicar los actuadores sobre todo en su periferia y mantener hasta cierto punto una distancia uniforme entre ellos, se puede observar que las diferencias que se presentan son apreciables. Si comparamos los modelos elipsoidales con 61 y 127 actuadores puntuales y un espesor de 8mm obtenemos que, el cuerpo elipsoidal con 61 actuadores al cual le introdujimos desplazamientos para regresarlo al paraboloide, presenta una diferencia en los desplazamientos logrados de 0.603 μm rms, tabla [9-16]; mientras que si empleamos el mismo cuerpo elipsoidal pero con 127 actuadores las diferencias para lograr regresarlo al paraboloide son de 0.261 μm rms, tabla [9-20]; esto representa una mejora del 57 %.

La deflexión máxima debida solamente a la acción de la gravedad es del orden de décimas de nanómetro, por lo que aunque fue incluida, no se muestra en las tablas de resultados. Los análisis realizados fueron tomando en cuenta un espesor de 8mm, y producen un esfuerzo máximo en la superficie elipsoidal de 15 MPa, ver tabla [9-19]. Este valor es prácticamente el valor límite establecido para los espejos de material Zerodur, que serán sometidos a esfuerzos cíclicos, por lo que no se tiene ningún margen de seguridad. Esto trae como consecuencia, que junto con el poco efecto que tiene la gravedad en la flexión del cuerpo, se considere reducir el espesor para disminuir los esfuerzos provocados. También se puede notar en la figura [9-25], la huella de los actuadores puntuales donde la razón de cambio de curva local es mas pronunciada y los esfuerzos son mayores.

9.2.5 Modelación de 127 cojinetes en la frontera del cuerpo

En esta sección se muestran los resultados al suplir los actuadores puntuales por cojinetes, simulados por cuatro vectores de desplazamiento en un diámetro de 6.9 mm.[Fig. 7-9]

Cuerpo $\Omega_1 \rightarrow \Omega_0$.	Grav. -Z	Desplazamiento		Desplazamiento		Desplazamient		Desplazamiento	
		Magnitud(μm)		$d\mu(\text{m})$		$d\theta(\mu\text{m})$		$dZ(\mu\text{m})$	
127 cojinetes	grad.	Max	Min	Max	Min	Max	Min	Max	Min
hiperbólica-paraboloide	0	22.457	0.004	0	-2.556	0.004	-0.004	22.311	-0.016
	45	22.457	0.004						
	90	22.457	0.004						
elipsoidal-paraboloide	0	50.991	0.003	5.804	0.000	0.008	-0.008	7.746	-7.746
	45	50.991	0.003						
	90	50.991	0.003						

Tabla 9-27. Desplazamientos de las dos mejores aproximaciones en MEF a diferentes orientaciones.
Espesor 5mm

Cuerpo $\Omega_1 \rightarrow \Omega_0$	Esfuerzo Nw/m^2		Esfuerzo Nw/m^2		Reacciones	
	Máximo Principal		Mínimo Principal		Magnitud	
	Max	Min	Max	Min	Max	Min
127 cojinetes						
hiperbólica-paraboloide	2.341E+06	-1.E-09	6.E-09	-5.144E+06	70.4714	3.2543
					70.5061	1.1761
					70.5062	0.1778
elipsoidal-paraboloide	1.1603E+07	-3.E-08	3.E-09	-5.632E+06	153.5957	6.1303
					153.5957	2.9055
					153.5958	2.9326

Tabla 9-28. Resultados de los esfuerzos al pasar de las cónicas extremas al paraboloide variando la orientación de la gravedad. Espesor 5mm.

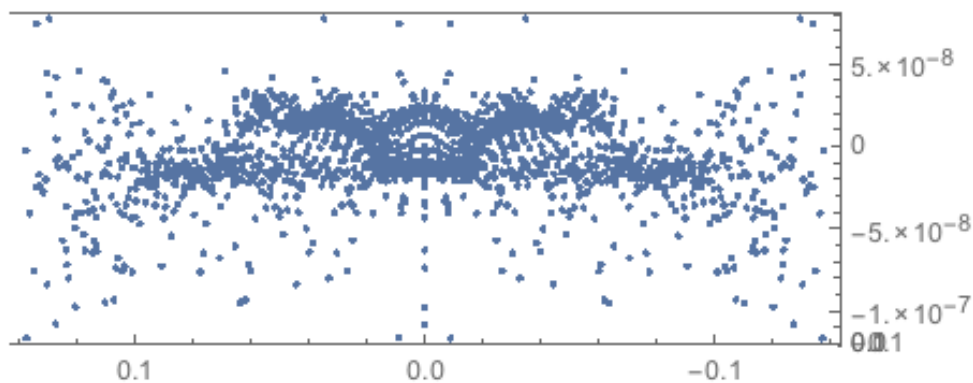


Figura 9-29. Gráfica de diferencias del hiperboloide resultante de MEF con 127 actuadores de cojinete. Unidades en metros.

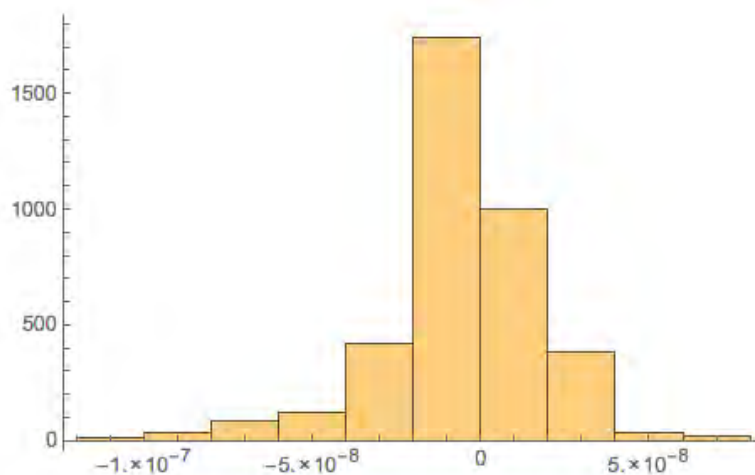


Figura 9-30. Histograma de las diferencias en metros del hiperboloide con respecto al número de nodos que caen en los intervalos.

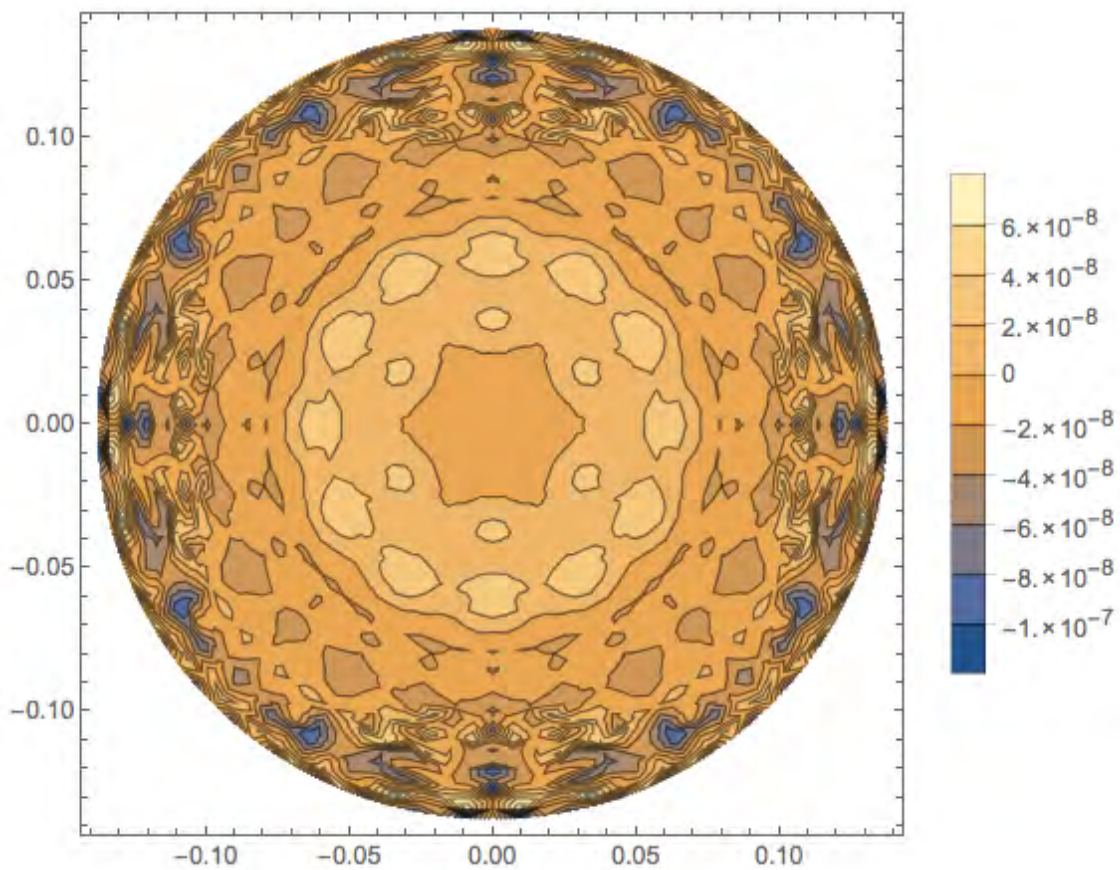


Figura 9-31. Curvas de contorno de la diferencia del hiperboloide deformado con respecto al paraboloido analítico, con 127 actuadores de cojinete. Resolución de 20 nanómetros. Unidades en metros.

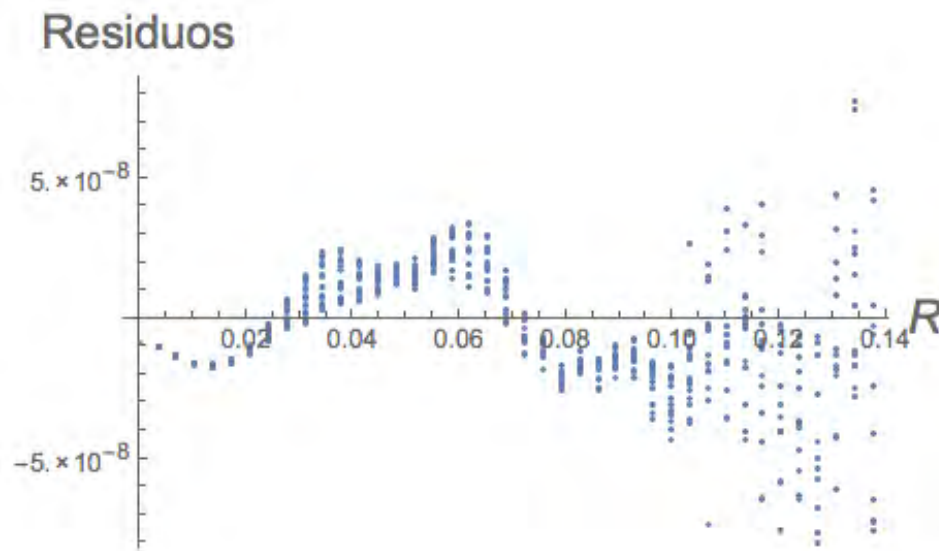


Figura 9-32. Diferencias residuales en la deformación del hiperboloide con respecto al radio del espejo. Unidades en metros.

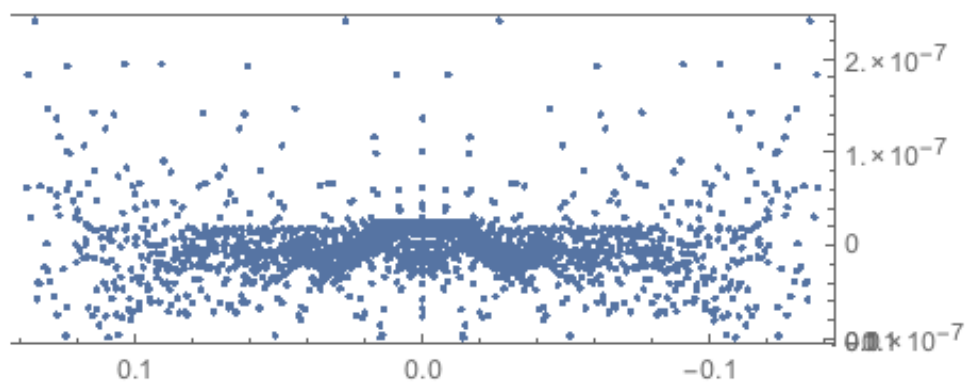


Figura 9-33. Vista lateral de las diferencias en el mallado del elipsoide deformado. Unidades en metros.

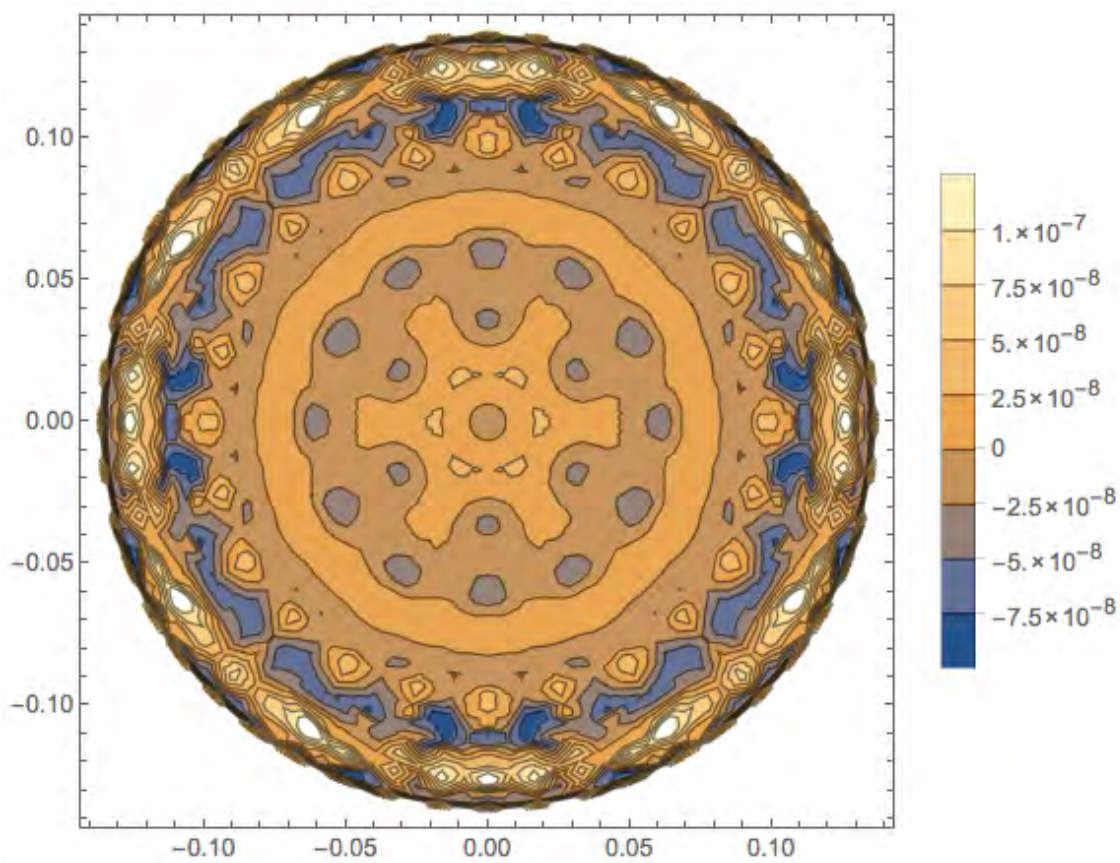


Figura 9-34. Curvas de nivel del elipsoide. Se distingue claramente la huella de los cojinetes.
Resolución 25 nanómetros. Unidades en metros.

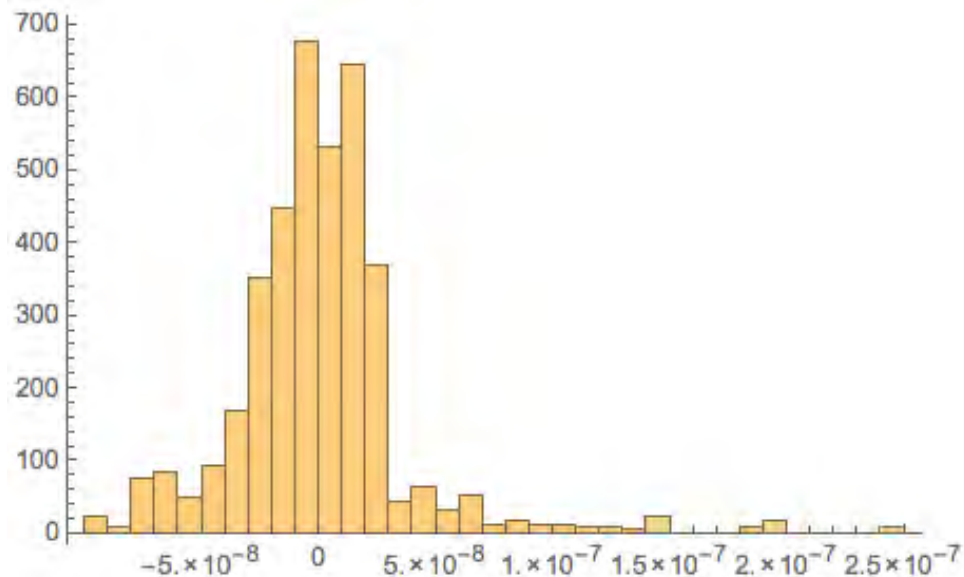


Figura 9-35. Histograma de los nodos del mallado del elipsoide deformado en MEF contra los intervalos de las diferencias en metros.

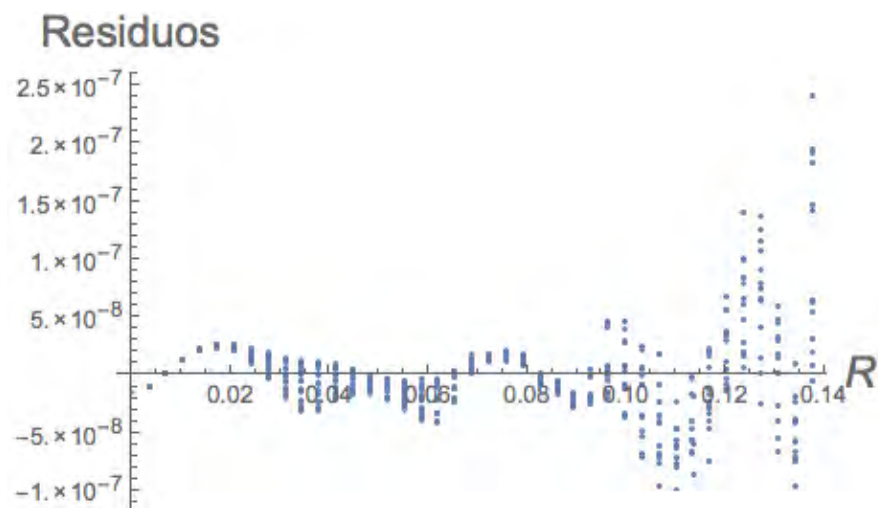


Figura 9-36. Residuos del elipsoide con la mejor configuración y desplazamiento introducido en los 127 cojinetes (actuadores) representados c/u por 4 nodos y un espesor de menisco de 5 mm. Unidades en m.

Cuerpo			Orden			
$\Omega_1 \rightarrow \Omega_0$.	espesor	Arreglo	anillos	Dif. máxima	Dif. mínima	rms
127 cojinetes	mm		centro cojinetes	μm	μm	μm
hiperbólica-paraboloide	5	1°	11,19,27,33,39	7.7E-02	-1.17E-01	2.5E-02
			diafragmado			2.3E-02
elipsoidal-paraboloide	5	2°	11,19,27,33,39	2.41E-01	-9.8E-02	3.7E-02
			diafragmado			3.1E-02

Tabla 9-37. Resultados de las mejores configuraciones para deformar a las cónicas

En la tabla [9-27] donde se muestran solo los valores más significativos de los desplazamientos de los nodos de la malla que simula nuestro espejo, donde la gravedad se a orientado a 0, 45 y 90 grados con respecto al eje -Z. Como estamos aplicando los desplazamientos con elementos de gran rigidez y ejerciendo un gran control sobre la superficie reflejante del cuerpo, los valores, que solo muestran los cambios en el espejo, son décimas de nanómetro lo que no representa ninguna repercusión en nuestros resultados, por lo que podemos concluir que la gravedad no afecta significativamente en el espejo.

De los resultados de los esfuerzos máximos producidos, ver tabla [9-28], se hace notar que ahora son 2/3 del valor límite de seguridad es decir el factor de seguridad se ha incrementado un 30%. Los resultados de los esfuerzos máximos principales cuando se varía la orientación de la gravedad presentan cambios de decenas de pascales, así como los mínimos principales son del orden de centenas por lo que su repercusión es de poca importancia y no son presentados.

Las gráficas [9-32, 9-36, 9-38] nos muestran de manera individual y conjunta, las magnitudes de los residuos en los desplazamientos como función de la coordenada radial en el plano R- θ . Se puede observar que aunque los residuos máximos se siguen dando en el borde, la diferencia entre todos los que se presentan en la superficie ya no es tan marcada.

Los histogramas de las figuras [9-30, 9-35] muestran claramente que la distribución de las magnitudes de los residuos caen ya en un intervalo mas cerrado siendo esto mas marcado en el hiperboloide, mientras que todavía en el elipsoide existen nodos que presentan residuos con una diferencia de un orden de magnitud.

Las desviaciones de cada superficie cumplen con el límite establecido como máximo, que es de 27.5 $\eta\text{m rms}$, ver tabla [9-37]. El valor de la precisión en la deformación del hiperboloide está por debajo de la requerida con tan solo 24.6 $\eta\text{m rms}$; mientras que con el elipsoide es de 37.3 $\eta\text{m rms}$, aproximadamente un 30% más de lo establecido, pero se tiene el recurso empleado frecuentemente en los sistemas ópticos de diafragmar el espejo. Si se empleara este recurso y se tuviera el diámetro definido como de entrada de 0.269m según las restricciones como límite en la sección [6.3], se obtiene un rms de 31 ηm que representa una precisión con un incremento de un 12%. Los valores rms de la superficie óptica con la gravedad a diferentes orientaciones no cambian en las cifras significativas, unidades de nanómetros.

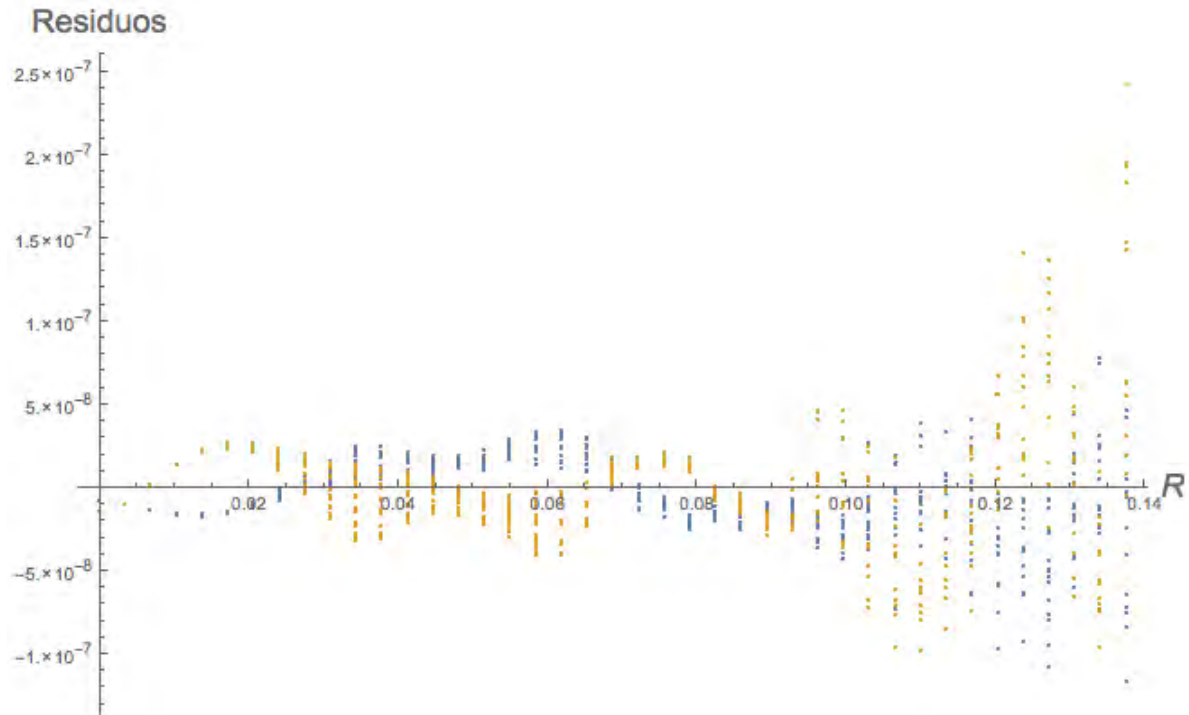


Figure 9-38. Los residuos de las dos superficies respecto al radio. En azul del hiperboloide, en ocre del elipsoide. Unidades en metros.

10 Conclusiones, aportaciones y trabajo a futuro

Se presentan resultados factibles de ser empleados en el diseño de un sistema para un espejo secundario activo que, con un primario pasivo complementa la óptica con tecnología de frontera para actualizar un telescopio de mediano tamaño en el OAN-SPM y que permita al astrónomo hacer investigación de punta.

La evolución en la solución del problema fue: primero tratar de resolver el problema de corregir las deformaciones que presentaba un espejo a uno con la curvatura deseada que será empleado en un telescopio, aplicando fuerzas y momentos continuos en los bordes para ver si se podía lograr los dos objetivos que eran corregir las aberraciones de tercer orden y poder cambiar la curvatura local del espejo para obtener otra superficie cónica. Como conclusión de ello es que se podía corregir algunas de las aberraciones con amplitudes de $\pm 5 \mu\text{m rms}$ pero no era posible obtener las curvaturas locales deseadas en el espejo para el cambio de superficie cónica ya que ello implicaba un mayor control de la frontera del espejo.

A continuación se analizó el controlar dichas deformaciones por la frontera posterior del espejo por medio de actuadores, para ello hubo que determinar el número, la posición y distribución de fuerzas puntuales en el cuerpo deformado que resolviera el problema de llegar a la configuración original. La onda elástica generada en su dirección radial presenta una amplitud no constante determinada por los desplazamientos introducidos y el periodo espacial esta determinado por la posición de los anillos de actuadores en la dirección radial.

El siguiente paso fue substituir esas fuerzas por cojinetes que permitieran distribuir la fuerza aplicada en zonas de mayor área para reducir la concentración de esfuerzos. Estos cojinetes serán la interfaz entre la frontera del cuerpo y los actuadores propiamente dichos. Los cojinetes tendrán que permitir su ajuste a la frontera del espejo para así poder transmitir la fuerza de manera perpendicular a la superficie y no introducir otros efectos no deseados.

Se obtuvo como resultado una configuración en la posición de actuadores que permite lograr el cambio de curvatura local con la precisión requerida aun con la complejidad de que el cambio de la constante de conicidad en la superficie provoca pendientes muy pronunciadas sobre todo en los bordes.

Las desviaciones de cada superficie cumplen con el límite establecido como máximo, que es de 27.5 nm rms . El valor de la precisión en la deformación del hiperboloide está por debajo de la requerida con tan solo 24.6 nm rms ; mientras que con el elipsoide es de 37.3 nm rms , aproximadamente un 30% más de lo establecido si se considera toda la superficie del espejo, con la posibilidad de reducirla un 12%. Como se encontró en los análisis, la superficie no se ve afectada significativamente por la acción de la gravedad a diferentes orientaciones pues se estaría controlando con el diámetro de los cojinetes propuestos

distribuidos de manera aproximadamente uniforme el 8% del área y la rigidez del material sobrepasa los efectos de la gravedad .

También se resuelve el problema con esta configuración de actuadores de corregir ciertas aberraciones de tercer orden aunque faltó terminar el estudio de analizar la coma y el astigmatismo, pero como los actuadores se establecieron con una interfaz donde se piensa desacoplar los momentos producidos, esto se cree no representará problemas para lograr corregir deformaciones tales como coma y el astigmatismo con las amplitudes ya mencionadas de $\pm 5 \mu\text{m}$.

Por otro lado, de acuerdo a los requerimientos, restricciones dados y con los resultados en las fuerzas requeridas y en la precisión alcanzada en los casos extremos de deformar un paraboloide a un elipsoide, o un paraboloide para obtener un hiperboloide, se confrontan con los alcances de los piezoeléctricos comerciales y se concluye que existen los actuadores piezoeléctricos precargados que pueden cumplir con ellos.

Otro de los resultados obtenidos con este trabajo es que, se ha creado un método de análisis para la deformación de espejos que es confiable, que permite trabajo eficiente de prueba y error y que al menos en ciertos rangos y desde ciertos puntos de vista es competitivo con respecto a otros métodos actuales. Se piensa formalizar dicho método a futuro y terminar los análisis de coma y astigmatismo con cojinetes.

Como otro de los sub-objetivos logrados, la investigación proporcionó una herramienta para la ampliación de nuestro conocimiento de esta situación concreta por medio de las herramientas teóricas correspondientes conjuntadas con los datos medidos y obtenidos.

Al poder cambiar constante de conicidad, manteniendo el radio de curvatura paraxial me permite corregir no solo las aberraciones que con mayor frecuencia se presentan, sino ir mas allá y poder corregir aberraciones de mayor orden pues la resolución y precisión alcanzadas lo permiten.

Trabajo a futuro, es estudiar la factibilidad de substituir el actuador central por presión controlada, ya que se vio la factibilidad de ser aplicado cuando se realizaron los análisis de corrección de aberraciones pues se observó que son los casos de deformaciones donde el centro presenta mayor diversidad de cambios de pendiente pero la amplitud de los desplazamientos son menores a la precisión requerida. En el caso de cambio de cónica, en la zona central la curvatura local tiene pendiente muy suave y por tanto puede ser controlada con un actuador con mayor área de acción , así se pueden disminuir la magnitud y cantidad de fuerzas a aplicar.

Este método puede ser empleado en sistemas ópticos auxiliares de prueba o sistemas nulos que requieren variaciones controladas de aberración esférica, permitiendo anular la aberración cuando se pruebe interferométricamente alguna superficie que no sea esférica. Originalmente son diseñados para cada superficie bajo construcción, con esta propuesta se puede construir un sistema activo que se ajuste a las necesidades de prueba de la superficie

Apéndice 1. Cálculo de áreas

Para que la superficie de las cónicas y el paraboloido deformado por las aberraciones con las cuales se modelaría el cuerpo a corregir tuvieran el volumen de la configuración Ω_0 se cálculo su área y se asumió que el espesor permanecería constante puesto que las deformaciones serán infinitesimales, no así los desplazamientos.

En el cálculo del área de las cónicas con el programa Mathematica se empleó la siguiente integral

$$\int_0^{2\pi} \int_0^r \left(\sqrt{1 + \left(\frac{cr}{\sqrt{1-c^2r^2(1+K)}} \right)^2} \right) r dr d\theta \quad (\text{A.I.1})$$

como el radio de la cónica de diseño del telescopio Richter- Chrétien 1.5m es de 137.5 mm y es para una hiperbólica este se mantuvo y se calculó el del paraboloido $r = 137.498$ mm y el de la superficie elipsoidal siendo $r = 137.493$ mm. Se puede observar que la variación esta en el rango de las micras.

Para que las superficies con aberraciones coincidieran también con la superficie de referencia se emplearon tanto la ecuación de la sagita como el término de Zernike correspondiente [V.III.3, tabla 5-3] siendo la constante de conicidad K la del paraboloido y el coeficiente del polinomio cuyo valor se obtuvo de acuerdo a lo descrito en las premisas ópticas y en los valores de las condiciones Dirichlet sección [6.2]. La variable a ajustar fue el radio y la integración se efectuó con el programa Mathematica. Las diferencias en el radio estuvieron en el orden de las décimas de nanómetros por lo que en estos casos se concluyó que no es necesario ajustar el radio.

Astigmatismo Z_{22} (A.I.2)

$$\int_0^{2\pi} \left(\int_0^r \left(\sqrt{1 + \left(\frac{c^2 r^2}{1-c^2(1+K1)r^2} + \frac{4Ac r^2 \cos[2\theta]}{\sqrt{1-c^2(1+K1)r^2}} + 4A^2 r^2 \cos[2\theta]^2 \right)} \times \sqrt{1 + 4A^2 r^2 \sin[2\theta]^2} \right) r dr \right) d\theta$$

$r = 137.498$ mm;

Coma Z_{31} (A.I.3)

$$\int_0^{2\pi} \left(\int_0^r \left(\sqrt{1 + \left(\frac{c^2 r^2}{1-c^2(1+K1)r^2} - \frac{4Ac r \sin[2\theta]}{\sqrt{1-c^2(1+K1)r^2}} + \frac{18Ac r^3 \sin[2\theta]}{\sqrt{1-c^2(1+K1)r^2}} + 4A^2 \sin[2\theta]^2 - 36A^2 r^2 \sin[2\theta]^2 + 81A^2 r^4 \sin[2\theta]^2 \right)} \times \sqrt{1 + 16A^2 \cos[2\theta]^2 - 48A^2 r^2 \cos[2\theta]^2 + 36A^2 r^4 \cos[2\theta]^2} \right) r dr \right) d\theta$$

$r = 137.498$ mm;

Esférica Z_{40} (A.I.4)

$$\int_0^{2\pi} \left(\int_0^r \left(\sqrt{1 + 144 A^2 r^2 - 576 A^2 r^4 + 576 A^2 r^6 + \frac{c^2 r^2}{1 - c^2 (1 + K1) r^2} - \frac{24 A c r^2}{\sqrt{1 - c^2 (1 + K1) r^2}} + \frac{48 A c r^4}{\sqrt{1 - c^2 (1 + K1) r^2}}} \right) * r dr \right) d\theta$$

r = 137.497 mm.

Superficie Hiperboloide

Se empleó la ecuación [A.I.1] para encontrar los radios de la sagita para una misma área. Como el hiperboloide es la superficie de diseño se tomó el valor dado que es Dmax/2 = 137.5mm y se empleó como límite para encontrar el área de las dos restantes y se obtiene:

Paraboloide de revolución

r = 137.498 mm.

Superficie Elipsoidal

r = 137.493 mm.

Apéndice 2. Flexión por peso propio de espejos soportados por su cara posterior.

Las funciones/relaciones aquí presentadas fueron empleadas para generar los primeros modelos a analizar en MEF, introducir las condiciones Dirichlet y obtener las condiciones Neumann.

Para aproximarnos de manera geométrica al número de soportes o anillos requeridos para soportar uniformemente a una placa circular con las dimensiones que presenta, tomamos la fórmula ya calculada en trabajos anteriores por Arnold {24} y Lemaitre {13}, donde la densidad de actuadores por unidad de área n_p es:

$a=1/2$ distancia entre soportes,
 d = diámetro de la placa,

$$n_p = \frac{1}{2} \sqrt{3} a^2 \quad (\text{A.2.1})$$

y el número de soportes o actuadores es:

$$N_p = \frac{\pi}{8\sqrt{3}} \frac{d^2}{a^2} \quad (\text{A.2.2})$$

Si por ejemplo, se calcula una distancia promedio de 0.034 m entre actuadores para un diámetro de 0.275 m obtenemos una cantidad de 59.4 soportes/actuadores, que de primer instancia los definimos como puntuales y es así como se obtiene el valor aproximado de una de las variables que intervienen en la definición y solución del problema.

En las relaciones geométricas anteriores un espejo puede ser visto como un ensamble de hexágonos sucesivos, donde cada elemento es soportado por un cojinete/actuador. Para determinar la deflexión presente entre estos elementos hexagonales con suficiente aproximación, se considera el círculo que queda inscrito en el elemento hexagonal y que es tangente a él como parámetro a considerar. Entonces el problema del cálculo de la flexión de un espejo bajo la carga de gravedad se reduce al de elementos de geometría circular tangentes, donde a es el radio de este círculo, b es el radio del soporte o cojinete en contacto con la frontera del espejo, h es el espesor y q es la carga gravitacional del volumen soportado. Si el espesor del espejo es constante y la curvatura de este es relativamente grande, la flexión $z(r)$ del subelemento del espejo es derivado de la ecuación bilaplaciana de Poisson [V.V.4] y la solución general esta dada en la ecuación [V.V.5]

De la solución de la ecuación de flexión para cada uno de los soportes y del establecimiento de las relaciones entre las fronteras de un soporte con otro se obtiene la relación de máxima flexión adimensional en función de la razón b/a donde b es el radio del soporte y a es la distancia media entre soportes.

Ahora para introducir las demás variables del problema tomamos la ecuación de Lemaitre {13}, para la flexión máxima de un espejo soportado por actuadores de radio b . La ecuación [A.2.3] esta basada en la ecuación de Couder para actuadores puntuales y es conocida como la ley de escala para flexión de Couder (d^4/h^2) {26}.

La selección del material (E, ν, μ), el espesor h del espejo que nos da la rigidez a la flexión, ver sección [6.2] y apéndice [3], la densidad de los soportes por unidad de área y la razón b/a (radio del soporte /distancia a flexión máxima) son parámetros fundamentales. Una vez que la razón b/a es fijada, dado si el soporte es puntual o tiene un radio, se substituye la ecuación [anterior] en la ecuación que provee un criterio de tolerancia de frente de onda w_{ptv} (cresta a valle) para la densidad de actuadores o soportes relativos al espesor del espejo.

El w_{ptv} es el máximo error en el frente de onda introducido por la flexión del espejo después de que la imagen se reflejó en el mismo. Si para el problema aquí planteado se establece que la tolerancia sea de $w_{ptv} \leq \lambda/5$, los parámetros están dados por la desigualdad (acordarse de que según Nelson {23}, el w_{rms} es 5 veces menor) y se puede establecer que la flexión máxima entre actuadores es:

$$\Delta z = w_{ptv} = \frac{\pi^2(1-\nu^2)}{256\sqrt{3}N_p^2} \left[3 - 4 \frac{b^2}{a^2} \left(1 - \ln \frac{b^2}{a^2} \right) \right] \frac{\mu g d^2}{E h^2} \leq \frac{\lambda}{5} \quad (\text{A.2.3})$$

con la condición de que el radio del soporte se encuentra dentro del intervalo $0 \leq b/a \leq 0.549$ (valor dado por el punto de inflexión de la función de flexión).

La ecuación [A.2.3] fue desarrollada para una distribución uniforme de soportes/actuadores, pero nos sirve de punto de partida para aproximarnos a la solución requerida.

Apéndice 3. Fórmulas para corregir aberraciones de 3er orden

A continuación, se muestran las ecuaciones de elasticidad empleadas para deformar a una placa circular de acuerdo a las aberraciones de 3° orden, con fuerzas y momentos en el borde del cuerpo, según el trabajo Lemaitre {13}.

Las condiciones a la frontera empleadas en todos los casos, excepto en la primera aproximación sección [8.3], son las de una placa de espesor constante y curvatura permanente suave, donde al vértice no se le permite desplazarse en el eje Z y a los bordes del cuerpo solo se les permite desplazarse en el plano Rθ, desplazamiento radial, pero no girar en el eje tangente al plano, entonces podemos aplicar las fórmulas para obtener cargas y momentos en el borde.

Nomenclatura:

Q_r = fuerzas de corte

M_r = momento flector

V_r = reacción axial a la carga distribuida

$r = 0$ en el vértice

r_{\max} = en el borde

R = es el radio de curvatura de la placa flexionada

h = espesor

$$D = \text{constante de rigidez a la flexión} = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \text{ Nwm} \quad (\text{A.3.1})$$

w = flexión. Parte del vector de desplazamiento alineado con Z, por tanto se denotará $z(r)$ en lugar de $w(r)$

A_{nm} = Amplitud de la deformación (descrito por las variables ópticas de la imagen).

I. Aberración desenfoque Z_{20}

La deformación de la superficie por flexión, reconocida como desenfoque se expresa en teoría de placas como:

$$z\{r\} = w = A_{20}r^2 \equiv \frac{1}{2R}r^2 \quad (\text{A.3.2})$$

Si al espejo, se le aplica un par de fuerzas concéntricas, uniformemente distribuidas o un momento flexionante en el perímetro de la región (frontera del cuerpo) sin agregar carga distribuida o carga central, la solución general homogénea de la ecuación de elasticidad es:

$$z = B_{20} + C_{20} \ln r + D_{20}r^2 + E_{20}r^2 \ln r \quad (\text{A.3.3})$$

Si se escoge el origen de la deformación el vértice de la placa, esto lleva a $B_{20}=0$. Además, se buscan fuerzas externas o momentos flexionantes que nos lleven a la condición de $Q_r=0$ en toda la placa, esto es $E_{20}=0$. El laplaciano esta representado por

$$\nabla^2 z = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dz}{dr} \right) = 4(D_{20} + E_{20} + E_{20} \ln r) \quad (\text{A.3.4})$$

De las condiciones establecidas el momento de flexión por unidad de longitud es:

$$M_r = D \left(\frac{d^2 z}{dr^2} + \frac{\nu}{r} \frac{dz}{dr} \right) = D \left[2(1+\nu)D_{20} - (1-\nu)C_{20} \frac{1}{r^2} \right]. \quad (\text{A.3.5})$$

Los coeficientes C_{20} y D_{20} , serán determinados por las condiciones a la frontera impuestas. El momento de flexión M_r , va a tener como límites $[r_{max}, 0]$, $M_r\{r_{max}\}$ en el borde y $M_r\{0\}$ en el centro, esto da como resultado que $M_r\{b\} = 0$. Además, para que se de solo el modo de curvatura, el logaritmo tiene que ser suprimido, entonces $C_{20}=0$. El coeficiente D_{20} será expresado como;

$$D_{20} = \frac{M_r\{r_{max}\}}{2(1+\nu)D} \quad (\text{A.3.6})$$

igualando el coeficiente A_{20} con D_{20} y substituyendo la constante D_{20} en la solución del bilaplaciano para placas circulares con borde libre y un momento en el borde que puede ser substituido por un par de fuerzas concéntricas contrarias y a diferente distancia del centro, tenemos que el desplazamiento máximo solamente con momentos, se dará en el borde del cuerpo con r_{max} :

$$z\{r_{max}\} = \frac{M_r\{r_{max}\}}{2(1+\nu)D} r_{max}^2 \quad (\text{A.3.7})$$

De la relación de esfuerzo-deformación podemos encontrar que los esfuerzos radial y tangencial σ_{rr} σ_{tt} son los mismos, y son máximos en la superficie

$$\sigma_{rr} = \sigma_{tt} = \pm \frac{Eh}{2(1+\nu)R} = \pm \frac{6M_r\{r_{max}\}}{t^2} \quad (\text{A.3.8})$$

II. Aberración esférica. Z_{40}

Introduciendo una carga distribuida en toda su superficie y además un momento flector, una fuerza de corte en toda su periferia tenemos la deformación esférica

$$M_r\{r_{max}\} = \frac{3+\nu}{16} q r_{max}^2 \quad V_r\{r_{max}\} = -\frac{1}{2} q r_{max} \quad h^3 = \frac{3(1-\nu^2) q}{16A_{40} E} \quad (\text{A.3.9})$$

donde A_{40} es el coeficiente de la amplitud y el producto $q A_{40}$ es positivo .

iii. Aberración de astigmatismo Z_{31}

En este caso la placa solo será deformada por un momento flector y una carga de corte aplicada a su contorno

$$M_r\{r_{max}, \theta\} = -\frac{3+\nu}{5-\nu} r_{max} V_r \quad V_r\{r_{max}, \theta\} = -8A_{31} D \cos\theta \quad h = -\left[-12(1-\nu^2) \frac{D}{E}\right]^{1/3} \quad (\text{A.3.10})$$

donde el producto $(-8A_{31} D) A_{31}$ es negativo

iv. Aberración de coma Z_{22}

$$M_r\{r_{max}, \theta\} = -\frac{r_{max} V_r}{2} \quad V_r\{r_{max}, \theta\} = -4(1-\nu) \frac{A_{22} D}{r_{max}} \cos\theta \quad (\text{A.3.11})$$

$$h = -\left[-12(1+\nu)(1-\nu) \frac{D}{E}\right]^{1/3} \quad \text{donde el producto } \left(-4(1-\nu) \frac{A_{22} D}{r_{max}}\right) A_{22} \text{ es negativo.}$$

Bibliografía

1. Wilson, R. (1996). *Reflecting Telescope Optics* (Vols. I,II). (E. Appenzeller, G. Börner, M. Harwit, Kippenhahn, P. Strittmatter, & V. Trimble, Eds.) Heidelberg, Germany: Springer-Verlag.
2. Bely, P. Y. (Ed.). (2003). *The Design and Construction of Large Optical Telescopes*. New York, New York, United States of America: Springer.
3. Luna, E., Sierra, G., García, V., Valdez, J., Gutiérrez, L., Lazo, F., et al. (1998). Novelty mount for m2 with five freedom degrees'. *Advanced Technology Optical/IR Telescopes V. 3352*, pp. 348-353. Ensenada: SPIE.
4. Luna, E. S. (1998). Nueva celda activa para el espejo primario del telescopio de 2.1m. *Revista Ciencia y Desarrollo* , XXIV (140), 49-55.
5. Ruiz, E. S.-D. (2014). Common-pull, multiple-push, vacuum-activated telescope mirror cell. *Applied Optics* , 53 (33), 7979-7984.
6. Salas, L. G. (1997). Active primary mirror support for the 2.1m telescope at the San Pedro Mártir Observatory. *Applied Optics* , 36 (16), 3708-3716.
7. Guisard, S., Noethe, L., & Spyromilio, J. (2000). Performance of Active Optics at the VLT. *SPIE Proceedings. 4003*. SPIE.
8. Gurtin, M. E. (1981). *An Introduction of Continuum Mechanics* (Vol. 158). New York, N.Y., United States of America: Academic Press,Inc.
9. Carrera, B. J. (2014). *Mecánica del Medio Continuo*. Facultad de Ingeniería, Ingeniería Mecánica. México: Universidad Nacional Autónoma de México.(comunicación oral)
10. Olivella, X. O. (2000). *Mecánica del medio continuo para ingenieros*. Barcelona, Cataluña, España: Edicions UPC,2000.
11. Korsch, D. (1991). *Reflective Optics*. San Diego, CA, United State of America: Academic Press, Inc.
12. Zernike, F. (1934). *Physica I*.
13. Lemaitre, G. R. (2009). *Astronomical Optics and Elasticity Theory. Active Optics Methods* (1st ed., Vol. 1). Marseilles, France: Springer-Verlag.
14. Doyle, K. B. (2002). *Integrated Opthomechanical Analisis* (Vol. TT58). (J. Arthur R. Weeks, Ed.) Bellingham, Washington, United States of America: SPIE - The international Society for Optical Engineering.

15. Noll, R. (1976). Zernike polynomials and atmospheric Turbulence. 66, 207-211.
16. Love, A. E. (1944). *A Treatise of the Mathematical Theory of Elasticity* (4rd Edition ed.). New York, N.Y., United States of America: Dover.
17. Navier, C. (1827). Sur les Lois de l'Équilibre et du Mouvement des Corps Solides Elastiques. 7, 375–393.
18. Poisson, S. D. (1829). Mémoire sur l'Équilibre et le Mouvement des Corps Solides. *Mém. Acad. Sc.*, 8.
19. Selvadurai, A. (2000). *Partial Differential Equations in Mechanics 2* (Vol. 2). Montreal, QC, Canada: Springer Verlag.
20. Landau, L. L. (1986). *Theory of Elasticity (Course of Theoretical Physics)* (3er edition ed., Vol. 7). (R. E. Ltd.1986, Ed.) Oxford, United Kingdom: Butterwoth Heinemann.
21. Aguilar, Luis. (2015) *Mecánica Clásica*. Facultad de Ciencias. Universidad Autónoma de Baja California. México. (comunicación oral)
22. Carrera, B. J. (2014). *Introduction al Método de Elemento Finito*. Facultad de Ingeniería, Ingeniería Mecánica. México: Universidad Nacional Autónoma de México. (comunicación oral)
23. Nelson, J. E. (1982). Telescope mirrors supports; plate deflections on point supports. *Advanced Technology Optical Telescopes*. 332, pp. 212-218. SPIE.
24. Arnold, L. (1995). Optimized axial support topologies for thin telescope mirrors. *Optical Engineering*, 34 (2), 567-574.
25. Lasalandes, M., Hugot, E., & Ferrari, M. (2012). Active Optics: deformation systems compensating for optical aberrations with minimum number of actuators. In R. Navarro (Ed.), *Modern Technologies in Space -and ground -based Telescopes and Instrumentation II*. 8450, p. 84500J. SPIE Optomechanical Engineering Press.
26. Couder, A. (1931). Research on the deformations of large mirrors used for astronomical observations. *Bulletin Astronomique* (VII), pp. 201-281.
27. Schwesingier, G. (1968) *Support and Testing of Large Astronomical Mirrors*. Proceedings Symposium. KPNO and UA. Tucson, pp. 11.
28. Lasalandes, M.; Hugot, E.; Ferrari, M.; Hourtoule, C.; Singer, Ch.; Devilliers, Ch.; Lopez, C.; Chazallet, F. (2013). Mirror actively deformed and regulated for applications in space: design and performance. *Optical Engineering*. (Vol.59). 091803-1-12.

29. Physik Instrumente (PI) GmbH & Co. KG. (2015). *http://www.pi-usa.us/products/PiezoActuators/index.php*. (Physik Instrumente (PI) GmbH & Co. KG) Retrieved 23 de September de 2014 from <http://www.pi-usa.us>: http://www.pi-usa.us/products/PDF_Data/P810_Piezo_Stack_Actuator.pdf
30. Physik Instrumente (PI) GmbH & Co. KG. (n.d.). *piezo_motion_tutorial*. Retrieved 23 de September de 2014 from www.pi-usa.us: http://www.pi-usa.us/pdf/2009_PI_Piezo_University_Designing_with_Piezo_Actuators_Tutorial.pdf
31. Taddei, M., Zanon, E., & Laurenza, D. (Eds.). (2006). *Leonardo's Machines*. Cincinnati, OH, United States of America: David and Charles.