



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**  
POSGRADO EN CIENCIA E INGENIERÍA DE MATERIALES  
INSTITUTO DE INVESTIGACIONES EN MATERIALES

“Efecto del ultrasonido en la reología de fluidos complejos”

**TESIS**

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:  
MAESTRO EN CIENCIA E INGENIERÍA DE MATERIALES

**PRESENTA:**

I.Q. MOISES TREJO DURÁN

**TUTOR PRINCIPAL**

DR. OCTAVIO MANERO BRITO  
INSTITUTO DE INVESTIGACIONES EN MATERIALES

**MIEMBROS DEL COMITÉ TUTOR**

DR. ANTONIO SÁNCHEZ SOLÍS  
INSTITUTO DE INVESTIGACIONES EN MATERIALES

DR. ÁNGEL ENRIQUE CHÁVEZ CASTELLANOS  
FACULTAD DE QUÍMICA, UNAM

MÉXICO, D.F. DICIEMBRE 2015



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

# Agradecimientos

A la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM), al Instituto de Investigaciones en Materiales (IIM) y al Posgrado en Ciencia e Ingeniería en Materiales (PCeIM), por el apoyo de las instalaciones, equipos, conocimiento y oportunidades brindadas para la realización de esta investigación y por la formación académica impartida.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por el financiamiento otorgado para la realización de los estudios de maestría. No. de Becario 295383.

Al Dr. Octavio Manero Brito por el conocimiento, motivación y apoyo brindado a lo largo de esta investigación. Por su tiempo que me ha brindado para aclarar dudas, revisar avances y discutir ideas para la realización de mi tema de tesis de maestría.

Al Dr. Antonio Sánchez Solís por los equipos brindados para la realización de esta investigación.

A los miembros del jurado Dr. Pablo Luis Rendón Garrido, Dr. José Roberto Zenit Camacho, Dr. René Osvaldo Vargas Aguilar y Dr. Marco Antonio Reyes Huesca por su accesibilidad y por el tiempo invertido para la revisión de mi tesis, así como por sus observaciones realizadas que mejoraron este trabajo.

Al cDr. Leonardo Moreno por el apoyo, asesoría y conocimientos para la realización de los experimentos de esta investigación.

A Caín González por el apoyo, accesibilidad y asesoría brindado para el buen uso del salón de cómputo en el IIM, UNAM.

Al personal administrativo de la coordinación del PCeIM, por su apoyo durante mi estancia.

A todos mis compañeros del PCeIM, por su tiempo, por su apoyo, por sus conocimientos, por su ayuda, por sus risas y buenos momentos, por su confianza y buenos deseos, por sus consejos y sobretodo porque hicieron más agradable mi estancia en la maestría y me brindaron su amistad.

# Índice

<b>Capítulo 1. Introducción</b>	1
1.1 Hipótesis	4
1.2 Objetivo	4
<b>Capítulo 2. Marco teórico</b>	5
2.1 Ecuación de onda	5
2.2 Fuerza de radiación acústica	8
2.2.1 Dispersión lineal	9
2.2.2 Potencial de dispersión	11
<b>Capítulo 3. Fuerza de radiación acústica. Medio invíscido y medio viscoso</b>	15
3.1 Medio invíscido	15
3.1.1 Solución de la ecuación de onda lineal	15
3.1.2 Potencial de energía acústica	18
3.1.3 Fuerza de radiación acústica	19
3.2 Medio viscoso	22
3.2.1 Ecuación de onda lineal	22

3.2.2	Fuerza de radiación acústica	23
3.2.3	Fuerza de arrastre	25
3.2.4	Velocidad de las partículas	25
<b>Capítulo 4. Fuerza de radiación acústica. Medio Viscoelástico</b>		<b>27</b>
4.1	Ecuación de onda para un medio no-newtoniano	27
4.2	Coeficientes de dispersión	27
4.2.1	Coeficiente de dispersión del monopolo, $f_1$	28
4.2.2	Coeficiente de dispersión del dipolo, $f_2$	30
4.3	Velocidad de las partículas en un medio viscoelástico	43
<b>Capítulo 5. Resultados</b>		<b>45</b>
5.1	Resultados experimentales	45
5.1.1	Equipo	45
5.1.2	Medición de los radios experimentales	46
5.1.3	Calculo de los radios teóricos	47
5.2	Resultados teóricos	50
5.2.1	Gráficas de la velocidad de la partícula	58

**Capítulo 6. Conclusiones**

61

**Bibliografía**

63

# Resumen

La teoría de la fuerza de radiación acústica predice que al exponer partículas suspendidas a un campo acústico se induce un movimiento en éstas. En el presente trabajo se deriva una expresión analítica de la fuerza de radiación acústica para partículas compresibles, esféricas, que están suspendidas en un medio viscoelástico. Así mismo, se analiza teóricamente el efecto que tiene el carácter viscoelástico del medio sobre la fuerza de radiación acústica y sobre la velocidad de las partículas.

En el capítulo 1, se introduce el concepto de la fuerza de radiación acústica y se mencionan algunas aplicaciones que recientemente han surgido, como la inducción de movimiento de partículas o células por medio de campos acústicos. Así mismo, se realiza una breve reseña histórica sobre la fuerza de radiación acústica. Esta revisión bibliográfica incluye lo observado por Kundt y Lehmann. También el primer trabajo teórico desarrollado por King para explicar este fenómeno observado por Kundt *et al.* El trabajo por King considera a las partículas incompresibles suspendidas en un medio invíscido. Después Yasioka y Kawasima extendieron el análisis para incluir la compresibilidad de las partículas. Fue hasta Gor'kov [3] quien resumió todos estos trabajos en una muy simple y útil expresión analítica considerando una partícula compresible, esférica, suspendida en un medio invíscido, con su radio mucho menor a la longitud de onda, expuesta a un campo acústico arbitrario. Por último, se discute brevemente el último avance dado por Settnes y Bruus [4] que obtuvieron la expresión para la fuerza de radiación considerando la viscosidad del medio.

En el segundo capítulo se presenta el marco teórico para obtener la expresión analítica de la fuerza de radiación acústica. Se parte de combinar las ecuaciones de momentum, la ecuación de continuidad, la ecuación de estado y la ecuación constitutiva, para obtener la ecuación de onda. Se utiliza un método de perturbaciones para los campos de velocidad, de tensor de esfuerzos, de presión y de densidad del medio, para reescribir el sistema de ecuaciones antes citado en variables de primer y segundo orden. Se continúa con la obtención de la expresión de la fuerza de radiación acústica partiendo de la definición de ésta. Con ayuda de la teoría de dispersión lineal se obtiene la expresión para la fuerza de radiación acústica en términos de la presión y la velocidad de la onda incidente, y en términos de los coeficientes de dispersión del monopolo y del dipolo.

En el capítulo siguiente, el tercer capítulo, se resuelve la ecuación de onda lineal sin disipación en coordenadas cilíndricas para obtener la expresión para la presión y la velocidad del medio. A partir de esto se obtiene el potencial de energía acústico y la fuerza de radiación acústica para una onda cilíndrica en un medio invíscido. En este apartado se sigue el método de Gor'kov [3]. Igualmente se obtiene el potencial de energía y la fuerza de radiación acústica para el caso de un medio viscoso, en este apartado se sigue el método descrito en el trabajo de Settnes y Bruus [4]. La información sobre la viscosidad del medio se encuentra únicamente en el coeficiente de dispersión del dipolo. Debido a la viscosidad del medio, el coeficiente del dipolo es un número

complejo, donde la parte real corresponde a ondas estacionarias y la parte imaginaria al coeficiente del dipolo para ondas viajeras. Por último, se obtiene la expresión que permite conocer la velocidad de las partículas debido a la exposición de éstas a un campo acústico, considerando la fuerza de arrastre que ejerce el medio sobre las partículas.

El capítulo 4, está encaminado a obtener la expresión de la fuerza de radiación acústica y la velocidad de las partículas cuando el medio en el que las partículas se encuentran suspendidas es un medio viscoelástico. El procedimiento para hallar estas expresiones sigue muy de cerca el método que utilizaron Settnes y Bruus [4] para obtener la expresión de la fuerza de radiación acústica considerando los efectos de la viscosidad del medio. Debido a la dispersión que sufre la onda acústica al interactuar con las partículas, se utiliza la teoría de dispersión lineal para explicar esta interacción, y se obtienen las expresiones para el coeficiente de dispersión del monopolo y el coeficiente de dispersión del dipolo. De acuerdo a las consideraciones que se realizan para el coeficiente del monopolo, la expresión que se obtiene para el caso del medio viscoelástico es idéntica a la expresión que obtuvo Gor'kov para el medio invíscido o que obtuvo Bruus *et al.* para el medio viscoso. En el caso del coeficiente del dipolo, la expresión del dipolo contempla los parámetros que caracterizan al medio viscoelástico: la densidad, el tiempo de relajación y el módulo elástico. Finalmente, se obtiene la velocidad de las partículas para el medio viscoelástico.

En el capítulo 5 se muestran los resultados obtenidos en la investigación. Los resultados están divididos en resultados experimentales y en resultados teóricos. Los resultados experimentales únicamente consideran al medio invíscido. Los experimentos consisten en someter a las partículas a un campo acústico, y observar los patrones que se forman. En el caso de los resultados teóricos se exponen gráficas en las cuales se aprecia el efecto que tiene el carácter viscoelástico del medio sobre el coeficiente de dispersión del dipolo, tanto para su parte real como para su parte imaginaria, y el efecto que tiene el medio sobre la velocidad de las partículas suspendidas, para diferentes valores de la frecuencia, el espesor de la capa viscosa y el módulo elástico.

En el último capítulo, se escriben las conclusiones obtenidas de esta investigación.

# Capítulo 1. Introducción

La inducción de movimiento de partículas por fuerzas externas se ha usado ampliamente para separar partículas de líquidos. Recientemente ha adquirido gran importancia en áreas como la biología y medicina para la manipulación, separación o purificación de células o partículas. En las industrias de plásticos, metalúrgicas, farmacéuticas se utilizan técnicas para separar partículas sólidas de líquidos.

Existen tres métodos para la separación de partículas: el método físico, químico y mecánico. En el método físico se utilizan la decantación, ebullición, filtración para efectuar la separación. En el método químico se usa un agente químico externo para llevar a cabo una separación entre partícula y líquido. Entre el método mecánico se encuentra la técnica con ondas acústicas, la cual consiste en irradiar con ondas acústicas a las partículas dispersas en el medio para efectuar la separación. La técnica de separación de partículas vía ondas acústicas tiene ventaja respecto a las demás ya que no necesita de contacto físico o de un agente químico externo. Es esta característica de contacto libre, además de la precisión y exacto control que se tiene de la separación de las partículas, que hace a la técnica de manipulación vía ondas acústicas más atractiva para los investigadores.

Durante la última década, el flujo de fluidos debido a un campo de sonido ha tenido numerosas aplicaciones, tales como el intercambio del medio de células de levadura, la separación de lípidos de las células de sangre, retención selectiva de biopartículas, ataque preciso a células malignas, al control de la leche cruda, la sincronización de ciclos celulares de célula de mamífero, el enriquecimiento de las células cancerígenas de próstata a partir de la sangre, el estudio de la naturaleza de las células asesinas, la manipulación de una sola célula, captura de bacterias, entre otras.

Por estas razones, la tecnología a microescala proporciona un gran potencial para aplicaciones de precisa y exacta manipulación. Esta fuerza que origina el movimiento de las partículas puede ser hidrodinámica, eléctrica, dieléctrica, magnética, acústica. Una teoría más apegada a resolver problemas reales de la industria o el laboratorio, llevará a desarrollar nuevas aplicaciones o modificar las ya existentes.

El movimiento de partículas mediante ondas acústicas fue observado por primera vez ya hace más de un siglo por Kundt y Lehmann. Fue hasta 1934 cuando King [1] realizó un estudio teórico sobre la fuerza de radiación acústica. King consideró partículas incompresibles suspendidas en un medio invíscido. En 1955 Yosioka y Kawasima [2] extendieron el análisis para incluir la compresibilidad de las partículas suspendidas. Estos resultados fueron resumidos y generalizados por una simple y físicamente intuitivo método para obtener una sencilla expresión para la fuerza de radiación acústica dada por Gor'kov en 1962 [3], en el caso de partículas esféricas compresibles con un radio mucho menor a la longitud de onda,  $a \ll \lambda$ , suspendidas en un medio invíscido. En los

años recientes, en 2012, Bruus *et al.* dieron una corrección a la fuerza de radiación acústica debido a la viscosidad del medio [4].

Gor'kov obtuvo una expresión analítica para la fuerza de radiación cuando la partícula es esférica, compresible, muy pequeña, sometida a un campo acústico arbitrario y suspendida en un medio invíscido [3]. Parte de la expresión integral para la fuerza de radiación, y realiza una aproximación lineal para escribir al potencial de velocidad como la suma del potencial incidente más el potencial dispersado. Esto permite dejar a la fuerza de radiación en términos del potencial de dispersión.

En 1936, ya se conocía el potencial que tienen las ondas acústicas para mejorar procesos conocidos o desarrollar nuevos. Söllner y Bondy [5], comentan que el uso de ultrasonido mejora la acción coagulante para formar emulsiones y suspensiones. Al igual, hacen observaciones sobre que las partículas migran a los nodos o antinodos cuando se exponen a una onda estacionaria. Este movimiento es debido a la presión de radiación causada por la difracción de la energía acústica debido a las partículas. Mencionan que hay una sustancial aceleración en la coagulación debido a que las partículas se acumulan en las zonas nodales o antinodales. La rapidez de acumulación en los nodos o antinodos depende fuertemente del tamaño de la partícula. La coagulación procede rápidamente con partículas con un diámetro de micras, mientras que no se observa acumulación ni coagulación para partículas con diámetro de nanómetros. Hacen una observación interesante, pues mencionan que partículas con menor densidad al medio se acumulan en los nodos, mientras que partículas más densas se acumulan en el antinodo. Así pueden contar con un sistema que separe partículas de diferente densidades suspendidas en un medio, al ser irradiadas, unas se acumularan en los nodos, mientras otras lo harán en los antinodos [9].

En su artículo, Barmatz y Collas [6] aplican el método de Gor'kov para derivar el potencial de energía acústica y la fuerza de radiación acústica para un campo acústico arbitrario. Obtienen las expresiones generales para la fuerza y el potencial acústico para una onda estacionaria arbitraria para la geometría rectangular, cilíndrica y esférica, en el caso donde el radio de la partícula es mucho menor a la longitud de la onda,  $a \ll \lambda$ . De igual forma, determinan un criterio para conocer la magnitud del pozo de potencial para diferentes modos en las diferentes geometrías.

Coakley y Whitworth [7] igualmente aplican el método de Gor'kov. Realizan un experimento, el cual consiste en irradiar con ultrasonido a una frecuencia de 3 MHz a un tubo que contiene partículas suspendidas en una solución acuosa de poliestireno. Las observaciones que reportan son que las partículas se acumulan en intervalos de media longitud de onda. En un campo de ondas planas estacionarias, las partículas se concentran en hojas planas uniformes. Éstas forman una columna estriada en dirección de la propagación de la onda acústica. Coakley y Whitworth explican sus observaciones mediante la teoría de la fuerza de radiación acústica.

La fuerza de radiación acústica es la principal fuerza que origina el movimiento de las partículas. Se sabe que cuando un haz de energía es reflejado o absorbido por la superficie de un objeto una fuerza unidireccional es ejercida sobre la superficie. Este fenómeno, explica Torr [8], es sólo un

ejemplo de un fenómeno universal. Todas las formas de ondas: ondas electromagnéticas, ondas transversales en una cuerda elástica, ondas superficiales en líquidos, ondas longitudinales de sonido, ejercen una fuerza unidireccional sobre la superficie de los obstáculos que se encuentran en su camino. A esta fuerza se le conoce como fuerza de radiación, y debido a que actúa sobre la superficie del objeto, entonces se le denomina presión de radiación. Esta fuerza de radiación acústica tiene dos fuentes: una promedio temporal de la presión del sonido diferente de cero, y la segunda es el momentum que transporta la onda. Cuando una onda acústica encuentra en su camino a una partícula, ésta provoca la dispersión de la onda, a su vez la última ejerce una fuerza de radiación acústica sobre la superficie de la partícula, ocasionando así, su desplazamiento. En términos de la cantidad de movimiento, el momentum que transporta la onda acústica es transferido a la partícula cuando ocurre una interacción entre ambas, por ende, la partícula se moverá. Torr explica el origen físico de la fuerza de radiación acústica ejercida por un haz de ultrasonido sobre un objetivo absorbente, parte de un experimento teórico y obtiene a la fuerza de radiación en función de las dos fuentes antes explicadas [3].

En el 2012, Henrik Bruus [10] obtiene las expresiones para el potencial de energía acústica, el coeficiente de dispersión del monopolo y del dipolo,  $f_1$  y  $f_2$ , respectivamente, para el caso de un medio invíscido, y una partícula pequeña y esférica,  $a \ll \lambda$ . Bruus *et al.* obtienen las mismas expresiones que obtuvo Gor'kov [3] salvo que el procedimiento es diferente. Bruus parte de la teoría de perturbaciones para los campos de velocidad, presión y densidad, y con esto describe la teoría de la fuerza de radiación acústica. A partir de la dispersión que experimenta la onda acústica debido a la presencia de partículas, obtiene las expresiones para el coeficiente de monopolo  $f_1$  y del dipolo  $f_2$ . Para entender las ecuaciones de cantidad de movimiento y la ecuación de continuidad, Bruus [11] deriva estas ecuaciones y da la física que ellas contemplan.

En años recientes, Settnes y Bruus [4] reportan un artículo teórico con un procedimiento claro y preciso para derivar una expresión analítica de la fuerza de radiación acústica debido a una onda ultrasónica sobre una partícula esférica y compresible suspendida en un fluido viscoso. Parten de una expansión asintótica hasta segundo orden de los campos de presión, densidad y velocidad del medio. Al sustituir estas expansiones en la ecuación de continuidad y de la ecuación de Navier-Stokes, obtienen dos sistemas de ecuaciones. Del sistema de primer orden obtienen la ecuación de onda para un medio viscoso, y comparando magnitudes entre sus términos concluyen que se puede hacer una aproximación al caso invíscido. Del sistema de segundo orden, obtiene el promedio temporal de la presión de segundo orden. Entonces, a partir de la definición de la fuerza de radiación acústica obtienen la expresión para esta fuerza en función de los coeficientes de dispersión del monopolo  $f_1$  y del dipolo  $f_2$ . La expresión que obtienen para el monopolo es idéntica a la expresión que obtuvo Gor'kov.

La información sobre la viscosidad del medio se encuentra sólo en el coeficiente de dispersión  $f_2$ . Este coeficiente está relacionado con el movimiento de la partícula. Para obtener la expresión de  $f_2$  en términos de la viscosidad, se apoya de la física de la capa límite viscosa, pues en esta región los efectos de la viscosidad son predominantes. Settnes y Bruus resuelven en la capa límite viscosa el campo de velocidad, y a partir de las relaciones entre la onda incidente, la capa límite viscosa y la

partícula obtienen la expresión para  $f_2$ . La corrección para  $f_2$  debido a la viscosidad, resulta en un número complejo, lo que lleva a que el coeficiente del dipolo sea un número complejo. La viscosidad ocasiona que haya dispersión de la onda acústica y que resulte una parte real y una imaginaria para  $f_2$ .

De acuerdo a la revisión bibliográfica sobre los avances en cuestión de la fuerza de radiación acústica deja en claro que ha habido un gran esfuerzo por obtener una expresión analítica para que esta fuerza de radiación contemple cada vez más propiedades encaminadas a describir la realidad de los experimentos en cuestión del campo acústico, de las partículas y del medio. Según esta revisión bibliográfica que se realizó para la tesis, las expresiones analíticas contemplan a partículas esféricas, compresibles, con radio mucho menor a la longitud de la onda, sometidas a un campo acústico arbitrario. En cuanto al medio en el que las partículas se encuentran suspendidas se ha considerado un medio inviscido y un medio viscoso. Así pues, el propósito de esta tesis es obtener una expresión analítica para la fuerza de radiación acústica considerando un medio viscoelástico. Entonces, el fin de esta tesis es la descripción de la verdadera naturaleza de los experimentos, al proporcionar una expresión analítica con una corrección a la fuerza de radiación acústica debido a las propiedades viscoelásticas del medio.

## 1.1 Hipótesis

Las propiedades viscoelásticas del medio afectarán en gran medida a la fuerza de radiación acústica y a la velocidad de las partículas suspendidas en el medio viscoelástico, en comparación al medio viscoso.

## 1.2 Objetivos

Obtener una expresión matemática para la fuerza de radiación acústica para un medio viscoelástico.

Obtener una expresión matemática que permita predecir la velocidad de las partículas suspendidas en un medio viscoelástico cuando son expuestas a un campo acústico, considerando la naturaleza viscoelástica del medio y las propiedades de la onda acústica.

# Capítulo 2. Marco teórico

En el presente capítulo se presenta el marco teórico de las ecuaciones que se utilizarán en los siguientes capítulos.

Se parte de las ecuaciones de cantidad de movimiento, ecuación de continuidad, ecuación de estado y una ecuación constitutiva, para resolver simultáneamente el sistema de cuatro ecuaciones y obtener la ecuación de onda. Así mismo, de la definición de fuerza de radiación se obtiene la expresión para esta fuerza para ondas acústicas.

## 2.1 Ecuación de onda

La ecuación de onda se obtiene al combinar cuatro ecuaciones. Una ecuación que describa a la dinámica del fluido, que es la ecuación de balance de momentum; que describa la deformación que sufre el fluido al ser sometido a un esfuerzo, ecuación constitutiva; que detalle el estado termodinámico del sistema, ecuación de estado; y que especifique la conservación de masa, ecuación de continuidad.

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \underline{v}) = 0 \quad (2.1)$$

$$\rho \partial_t \underline{v} + \rho (\underline{v} \cdot \nabla) \underline{v} = -\nabla p + \nabla \cdot \underline{\tau}_{\text{tot}} \quad (2.2)$$

$$\underline{\tau}_{\text{tot}} = \underline{\tau}_{\text{v}} + \underline{\tau}_{\text{ve}} \quad (2.3)$$

$$p = p(\rho) \quad (2.4)$$

Donde  $\underline{v} = \underline{v}(\underline{x}, t)$  es el campo de velocidad del fluido,  $p = p(\underline{x}, t)$  es el campo de presión del fluido y  $\rho = \rho(\underline{x}, t)$  es el campo de la densidad del fluido. Para (2.3),  $\underline{\tau}_{\text{v}}$  es el tensor de esfuerzos para un fluido viscoso, cuya ecuación constitutiva es la ecuación de Newton.  $\underline{\tau}_{\text{ve}}$  es el tensor de esfuerzos para un medio viscoelástico, relaciona al esfuerzo que se le aplica al fluido y la deformación que experimenta éste. En el sistema de estudio se utiliza la ecuación de Maxwell para describir al medio viscoelástico.

Medio viscoso, ecuación de Newton:  $\underline{\tau}_{\text{v}} = \mu_s \nabla \underline{v}$  (2.5)

Medio viscoelástico, ecuación de Maxwell:  $\underline{\tau}_{\text{ve}} + \lambda \partial_t \underline{\tau}_{\text{ve}} = \eta_0 \nabla \underline{v}$  (2.6)

donde  $\mu_s$  es la viscosidad del solvente,  $\lambda$  es el tiempo de relajación y  $\eta_0$  es la viscosidad.

Para reescribir el sistema de ecuaciones antes planteado se usa un método de perturbaciones. Debido a que se considera una onda acústica constituida de pequeñas perturbaciones en la

densidad  $\rho$ , la presión  $p$ , la velocidad  $\underline{v}$  y el esfuerzo  $\underline{\tau}_{tot}$ , es posible proponer una expansión hasta segundo orden de las variables:  $\underline{v}$ ,  $\underline{\tau}_{tot}$ ,  $\rho$  y  $p$ .

$$\underline{v} = \underline{v}_1 + \underline{v}_2 \quad (2.7)$$

$$\underline{\tau}_{=v} = \underline{\tau}_{=v1} + \underline{\tau}_{=v2} \quad (2.8)$$

$$\underline{\tau}_{=ve} = \underline{\tau}_{=ve1} + \underline{\tau}_{=ve2} \quad (2.9)$$

$$\rho = \rho_0 + \rho_1 + \rho_2 \quad (2.10)$$

$$p = p_0 + p_1 + p_2 \quad (2.11)$$

Al sustituir (2.7)-(2.11) en las ecuaciones (2.1)-(2.4) y sustituir (2.3) en (2.2) resultará que habrá dos sistemas de ecuaciones: un sistema solamente contendrá términos de primer orden y el otro sistema de ecuaciones únicamente contempla términos de segundo orden. El sistema de ecuaciones de primer orden es el siguiente:

$$\rho_0 \partial_t \underline{v}_1 = -\nabla p_1 + \nabla \cdot \underline{\tau}_{=v1} + \nabla \cdot \underline{\tau}_{=ve1} \quad (2.12)$$

$$\partial_t \rho_1 + \rho_0 \nabla \cdot \underline{v}_1 = 0 \quad (2.13)$$

$$\underline{\tau}_{=1ve} + \lambda \partial_t \underline{\tau}_{=1ve} = \eta_0 \nabla \underline{v}_1 \quad (2.14)$$

$$\underline{\tau}_{=1v} = \mu_s \nabla \underline{v}_1 \quad (2.15)$$

$$p_1 = c_0^2 \rho_1 \quad (2.16)$$

donde  $c_0$  es la velocidad del sonido. Para los campos de primer orden es posible considerar que su dependencia temporal es armónica, ésto es, que si  $F$  es un campo de primer orden, entonces  $F(\underline{x}, t) = F(\underline{x}) \exp(-i\omega t)$ . Se escribe el sistema de ecuaciones de segundo orden.

$$\rho_0 \partial_t \underline{v}_2 + \nabla p_2 - \nabla \cdot \underline{\tau}_{=v2} - \nabla \cdot \underline{\tau}_{=ve2} = -\rho_1 \partial_t \underline{v}_1 - \rho_0 (\underline{v}_1 \cdot \nabla) \underline{v}_1 \quad (2.17)$$

$$\partial_t \rho_2 + \rho_0 \nabla \cdot \underline{v}_2 = -\nabla \cdot (\rho_1 \underline{v}_1) \quad (2.18)$$

$$\underline{\tau}_{=ve2} + \lambda \partial_t \underline{\tau}_{=ve2} = \eta_0 \nabla \underline{v}_2 \quad (2.19)$$

$$\underline{\tau}_{=2v} = \mu_s \nabla \underline{v}_2 \quad (2.20)$$

Ahora bien, al considerar la dependencia armónica en el tiempo para los campos de primer orden, el sistema de ecuaciones (2.12)-(2.16) se reduce.

$$-i\rho_0\omega\underline{v}_1 = -\nabla p_1 + \nabla \cdot \underline{\tau}_{\underline{v}_1} + \nabla \cdot \underline{\tau}_{\underline{v}_{e1}} \quad (2.21)$$

$$-i\omega p_1 + c_0^2 \rho_0 \nabla \cdot \underline{v}_1 = 0 \quad (2.22)$$

$$\underline{\tau}_{\underline{v}_{e1}} = \frac{\eta_0}{1-i\omega\lambda} \nabla \underline{v}_1 \quad (2.23)$$

$$\underline{\tau}_{\underline{v}_1} = \mu_s \nabla \underline{v}_1 \quad (2.24)$$

Se tienen cuatro ecuaciones acopladas. Se sustituye (2.23) y (2.24) en (2.21).

$$-i\rho_0\omega\underline{v}_1 = -\nabla p_1 + \left( \mu_s + \frac{\eta_0}{1-i\omega\lambda} \right) \nabla^2 \underline{v}_1 \quad (2.25)$$

$$-i\omega p_1 + c_0^2 \rho_0 \nabla \cdot \underline{v}_1 = 0 \quad (2.26)$$

Ahora se sustituye (2.26) en (2.25) para obtener la ecuación de onda lineal considerando un medio no-Newtoniano.

$$-\omega^2 \underline{v}_1 = \left[ c_0^2 - \frac{i\omega}{\rho_0} \left( \mu_s + \frac{\eta_0}{1-i\omega\lambda} \right) \right] \nabla^2 \underline{v}_1 \quad (2.27)$$

Es posible reescribir la ec. (2.27), si  $\partial_t \underline{v}_1(\underline{x}, t) = -i\omega \underline{v}_1(\underline{x}) \exp(-i\omega t)$  y que  $\partial_t^2 \underline{v}_1(\underline{x}, t) = -\omega^2 \underline{v}_1(\underline{x}) \exp(-i\omega t)$ , entonces (2.27) resulta en la siguiente ecuación.

$$\partial_t^2 \underline{v}_1 = c_0^2 \left[ 1 + \frac{1}{\rho_0 c_0^2} \left( \mu_s + \frac{\eta_0}{1-i\omega\lambda} \right) \partial_t \right] \nabla^2 \underline{v}_1 \quad (2.28)$$

La ec. (2.28) describe como se propaga una onda acústica a través de un medio viscoelástico. Ahora bien, si el tiempo de relajación es cero  $\eta_0 = 0$ , esto es, si el carácter viscoelástico del medio se anula, entonces se recupera la ecuación (7) del artículo de Bruus [4].

En el caso del sistema de estudio,  $c_0 = 343$  m/s,  $\rho_0 = 1000$  kg/m<sup>3</sup>,  $\mu_s = 1.1 \times 10^{-3}$  Pa·s,  $\omega = 1 \times 10^4$  s<sup>-1</sup>. El término de que contiene la información de la disipación viscosa es  $\omega \mu_s / c_0^2 \rho_0$  cuya magnitud es del orden de  $1 \times 10^{-7}$ , que desde luego, es considerablemente menor a 1. En cuanto al término que contempla el carácter viscoelástico del medio que es  $(\mu_s + \eta_0 / (1 - i\omega\lambda)) \omega / c_0^2 \rho_0$ , su magnitud es del orden de  $1 \times 10^{-8}$ , con los siguientes valores del tiempo de relajación  $\lambda = 1 \times 10^{-2}$  s, y  $\eta_0 = 1$  Pa·s.

$$\frac{\omega}{\rho_0 c_0^2} \left( \mu_s + \frac{\eta_0}{1-i\omega\lambda} \right) \ll 1 \quad (2.29)$$

Entonces en el seno del fluido, la atenuación de la energía acústica debido a la viscosidad es despreciable debido a que el coeficiente de atenuación es muy pequeño. De acuerdo a las magnitudes de los términos es válido hacer una aproximación al caso invíscido en (2.28).

$$\partial_t^2 \underline{v}_1 = c_0^2 \nabla^2 \underline{v}_1 \quad (2.30)$$

La ec. (2.30) es la ecuación de onda lineal para un medio invíscido.

## 2.2 Fuerza de radiación acústica

Es conocido que al momento de incidir una onda sobre un objeto se ejerce una fuerza sobre éste. A esta fuerza que surge por la interacción entra la onda y el objeto se le denomina fuerza de radiación. Estas ondas pueden ser de cualquier tipo: ondas electromagnéticas, ondas transversales sobre una cuerda, ondas superficiales, ondas luminosas y ondas acústicas [5]. Cuando una onda acústica incide sobre las partículas, éstas experimentan una fuerza sobre su superficie que origina su desplazamiento. A esta fuerza se le conoce como la fuerza de radiación acústica.

La fuerza de radiación acústica tiene dos fuentes: la contribución del promedio temporal de la presión en el haz del ultrasonido y la transferencia de momentum por la onda acústica. La expresión para la fuerza de radiación en forma integral es,

$$\underline{F}^{rad} = - \int_{\partial\Omega} [\langle p_2 \rangle \underline{n} + \rho_0 \langle (\underline{n} \cdot \underline{v}_1) \underline{v}_1 \rangle] da \quad (2.31)$$

donde  $\Omega$  es el volumen a cuya superficie  $\partial\Omega$ , es normal el vector  $\underline{n}$ . La integración se realiza sobre la superficie  $\partial\Omega$ . En el caso de la teoría lineal acústica, donde  $\langle p_2 \rangle = 0$ , la fuerza de radiación es debido exclusivamente a la transferencia de cantidad de movimiento de la onda hacia la partícula.

Ahora bien, la fuerza de radiación acústica es un efecto del promedio temporal. Se define el promedio temporal  $\langle F \rangle$ , de la cantidad  $F(t)$  sobre un período de oscilación completo  $\tau$ , como:

$$\langle F \rangle \equiv \frac{1}{\tau} \int_0^\tau F(t) dt \quad (2.32)$$

se obtiene el promedio temporal de (2.17)-(2.20) para las perturbaciones de segundo orden.

$$-\nabla \langle p_2 \rangle + \left( \mu_s + \frac{\eta_0}{1 - i\omega\lambda} \right) \nabla^2 \langle \underline{v}_2 \rangle = \langle \rho_1 \partial_t \underline{v}_1 \rangle + \rho_0 \langle (\underline{v}_1 \cdot \nabla) \underline{v}_1 \rangle \quad (2.33)$$

$$\rho_0 \nabla \cdot \langle \underline{v}_2 \rangle = -\nabla \cdot (\rho_1 \underline{v}_1) \quad (2.34)$$

De (2.33) y (2.34) se observa que los productos de los campos de primer orden actúan como términos fuente para los campos de segundo orden,  $\underline{v}_2$  y  $p_2$ . La presión de segundo orden  $p_2$

contribuye a la fuerza de radiación acústica mientras que la velocidad de segundo orden  $\underline{v}_2$  origina la corriente acústica.

De acuerdo a las magnitudes de los términos de la ec. (2.28), es razonable despreciar el término de amortiguamiento viscoso y suponer una aproximación al caso invíscido.

Para el caso invíscido, el término de  $\langle \underline{v}_2 \rangle$  (el cual contiene información sobre la viscosidad del medio) se elimina. La ec. (2.33) se reduce a,

$$\nabla \langle p_2 \rangle = -\langle \rho_1 \partial_t \underline{v}_1 \rangle - \rho_0 \langle (\underline{v}_1 \cdot \nabla) \underline{v}_1 \rangle \quad (2.35)$$

se sustituye la ecuación de continuidad para el medio invíscido (2.12) y la ecuación de estado (2.16) en (2.35), modificando el primer término del lado derecho de la igualdad en (2.35),

$$\nabla \langle p_2 \rangle = \frac{1}{2} \kappa_0 \nabla \langle p_1^2 \rangle - \rho_0 \langle (\underline{v}_1 \cdot \nabla) \underline{v}_1 \rangle \quad (2.36)$$

donde  $\kappa_0$  es la compresibilidad del medio,  $\kappa_0 = 1/c_0^2 \rho_0$ . Para tratar el segundo término de (2.36) se sabe que para un coeficiente de atenuación despreciable, el vector de velocidad lineal es un flujo potencial, esto es  $\underline{v}_1(\underline{x}) = \nabla \phi_1(\underline{x})$ . Así pues, el segundo término de lado derecho de (2.36) en notación de índices es  $\underline{v}_1 \cdot \nabla \underline{v}_1 = v_{1j} \partial_j v_{1i} = v_{1j} \partial_j \partial_i \phi_1 = v_{1j} \partial_i \partial_j \phi_1 = v_{1j} \partial_i v_{1j} = \frac{1}{2} \nabla v_1^2$ .

$$\langle p_2 \rangle = \frac{1}{2} \kappa_0 \langle p_1^2 \rangle - \frac{1}{2} \rho_0 \langle v_1^2 \rangle \quad (2.37)$$

Al sustituir (2.37) en (2.31) resulta,

$$\underline{F}^{rad} = -\int_{\partial\Omega} \left[ \left( \frac{1}{2} \kappa_0 \langle p_1^2 \rangle - \frac{1}{2} \rho_0 \langle v_1^2 \rangle \right) \underline{n} + \rho_0 \langle (\underline{n} \cdot \underline{v}_1) \underline{v}_1 \rangle \right] da \quad (2.38)$$

el vector de fuerza de radiación acústica está en términos de los campos de primer orden. Debido a la aproximación al caso invíscido, la presión y la velocidad del fluido pueden expresarse en términos del potencial de velocidad  $\phi_1$ .

## 2.2.1 Dispersión lineal

La fuerza de radiación acústica es una expresión que estudia la interacción entre la onda y la partícula. Cuando una onda acústica encuentra en su camino algún cuerpo, experimenta una dispersión, es decir, además de la onda incidente se origina otra onda (onda dispersada) que se propaga en todas direcciones desde el cuerpo dispersivo.

En la teoría lineal de dispersión, las partículas actúan como puntos débiles de dispersión. Se puede pensar al potencial de velocidad lineal  $\phi_1$ , como la suma del potencial de velocidad incidente  $\phi_{in}$ , más el potencial de velocidad dispersado  $\phi_{sc}$  [4].

$$\phi_1(\underline{x}, t) = \phi_{in} + \phi_{sc} \quad (2.39)$$

Los campos de presión y velocidad del fluido se obtienen a partir del potencial mediante las siguientes ecuaciones:  $\underline{v}_1 = \nabla \phi_1$  y  $p_1 = i\rho_0 \omega \phi_1$ . Estos campos pueden ser expresados como la suma de la presión y la velocidad debido a la onda incidente,  $p_{in}$  y  $\underline{v}_{in}$ , respectivamente, más la presión y velocidad dispersados en respuesta a la dispersión de la onda acústica por la partícula,  $p_{sc}$  y  $\underline{v}_{sc}$  [4].

$$\underline{v}_1 = \underline{v}_{in} + \underline{v}_{sc} = \nabla \phi_{in} + \nabla \phi_{sc} \quad (2.40)$$

$$p_1 = p_{in} + p_{sc} = i\rho_0 \omega \phi_{in} + i\rho_0 \omega \phi_{sc} \quad (2.41)$$

Cabe mencionar que el potencial incidente  $\phi_{in}$  es proporcional a la posición, y que el potencial de dispersión es proporcional al volumen de la esfera,  $\phi_{sc} \sim a^3$ , donde  $a$  es el radio de la esfera. El potencial de dispersión es el único que contiene información sobre las partículas suspendidas en el medio.

Al sustituir (2.40) y (2.41) en (2.38) se tendrá una suma de términos proporcionales al cuadrado de  $\phi_1 = \phi_{in} + \phi_{sc}$ . Estos términos tienen una diferente contribución: *i*) el cuadrado de  $\phi_{in}$ , el cual no contiene información sobre la dispersión de la onda y por lo tanto se considera cero, *ii*) el cuadrado de  $\phi_{sc}$ , el cual es proporcional al cuadrado del volumen de la partícula esférica y frente al *iii*) producto mixto  $\phi_{in}\phi_{sc}$  que es proporcional al volumen de la partícula y que contiene información de la dispersión, es despreciable. Así, sólo se mantendrán los términos mixtos que representan la interferencia entre la onda incidente y la onda dispersada. La expresión en notación de índices para la fuerza de radiación únicamente con las contribuciones dominantes debidas al producto mixto, en términos de la presión y la velocidad, es,

$$F_i^{rad} = - \int_{\partial\Omega} n_i \left\{ \left[ \frac{1}{\rho_0 c_0^2} \langle p_{in} p_{sc} \rangle - \rho_0 \langle v_k^{in} v_k^{sc} \rangle \right] \delta_{ij} + \rho_0 \langle v_i^{in} v_j^{sc} \rangle + \rho_0 \langle v_i^{sc} v_j^{in} \rangle \right\} da \quad (2.42)$$

Se sustituye la ecuación de estado para escribir (2.42) en términos de la densidad del fluido, y se aplica el teorema de Gauss  $\int_{\Omega} \nabla \cdot F dV = \int_{\partial\Omega} n \cdot F dS$ , la expresión resultante es la siguiente.

$$F_j^{rad} = - \int_{\Omega} \partial_i \left\{ \left[ \frac{c_0^2}{\rho_0} \langle \rho_{in} \rho_{sc} \rangle - \rho_0 \langle v_k^{in} v_k^{sc} \rangle \right] \delta_{ij} + \rho_0 \langle v_i^{in} v_j^{sc} \rangle + \rho_0 \langle v_i^{sc} v_j^{in} \rangle \right\} dV \quad (2.43)$$

Se desarrollan las derivadas y se hace un cambio de índice  $\partial_j v_k = \partial_j \partial_k \phi = \partial_k \partial_j \phi = \partial_k v_j$  para eliminar términos en (2.43).

$$F_j^{rad} = -\int_{\Omega} \left\{ \frac{c_0^2}{\rho_0} \left[ \langle \rho_{in} \partial_j \rho_{sc} \rangle + \langle \rho_{sc} \partial_j \rho_{in} \rangle \right] + \rho_0 \left[ \langle v_j^{in} \partial_i v_i^{sc} \rangle + \langle v_j^{sc} \partial_i v_i^{in} \rangle \right] \right\} dV \quad (2.44)$$

Se sustituyen la ecuación de continuidad y de cantidad de movimiento para los campos de primer orden, (2.21) y (2.22) para un fluido invíscido en la ec. (2.44).

$$F_j^{rad} = -\int_{\Omega} \left[ -\langle \rho_{in} \partial_t v_j^{sc} \rangle - \langle \rho_{sc} \partial_t v_j^{in} \rangle + \rho_0 \langle v_j^{in} \partial_i v_i^{sc} \rangle - \langle v_j^{sc} \partial_t \rho_{in} \rangle \right] dV \quad (2.45)$$

Ya que el promedio temporal de la derivada total respecto al tiempo es nula [4],  $\langle \partial_t (\rho_{in} v_j^{sc}) \rangle = 0$  o  $\langle \rho_{in} \partial_t v_j^{sc} \rangle = -\langle v_j^{sc} \partial_t \rho_{in} \rangle$ . Se aplica el mismo tratamiento para el término  $\langle \rho_{sc} \partial_t v_j^{in} \rangle = -\langle v_j^{in} \partial_t \rho_{sc} \rangle$ . Al cancelar términos y reescribir la ec. (2.45), ésta queda expresada como,

$$F_j^{rad} = -\int_{\Omega} \left[ \rho_0 \langle v_j^{in} \partial_i v_i^{sc} \rangle + \langle v_j^{in} \partial_t \rho_{sc} \rangle \right] dV \quad (2.46)$$

ahora se continúa al introducir el potencial de dispersión  $\phi_{sc}$  en (2.46). La ecuación resultante se expresa a continuación.

$$F_j^{rad} = -\int_{\Omega} \rho_0 \langle v_j^{in} \left[ \partial_i^2 - \frac{1}{c_0^2} \partial_t^2 \right] \phi_{sc} \rangle dV \quad (2.47)$$

El operador entre corchetes se conoce como el operador de onda de d'Alambert. Los dos términos entre corchetes son para el caso invíscido. En el caso viscoso o viscoelástico, tendrían que aparecer más términos en el operador que estén ligados a la parte viscosa ó viscoelástica del medio. El operador de d'Alambert se aplica al potencial dispersado  $\phi_{sc}$ .

## 2.2.2 Potencial de dispersión

El potencial de dispersión  $\phi_{sc}$  puede expresarse, de acuerdo a la teoría de dispersión, como una expansión multipolar de tiempo retardado. Ya que se puede usar cualquier superficie fija para calcular la fuerza de radiación, por simplicidad se elige una superficie en el campo lejano. En esta región, las componentes dominantes en la expansión multipolar son el monopolo y el dipolo,  $\phi_{sc} = \phi_{mp} + \phi_{dp}$ . En general, estos dos componentes tienen la siguiente forma,

$$\phi_{sc}(\underline{r}, t) \approx \phi_{mp} + \phi_{bp} = \frac{b(t-r/c_0)}{r} + \nabla \cdot \left[ \frac{\underline{B}(t-r/c_0)}{r} \right] \quad (2.48)$$

donde  $b$  es una función escalar y  $\underline{B}$  es una función vectorial con argumento retardado,  $t-r/c_0$ .

Para la función escalar  $b$ , el volumen del fluido que atraviesa una superficie que encierra a la partícula es  $4\pi b$ , y debe ser igual al cambio de volumen de la partícula como resultado del fluido desplazado.

$$4\pi b = \dot{V}(t) \rightarrow b = \frac{\dot{V}(t)}{4\pi} \quad (2.49)$$

Si la partícula esférica estuviera ausente,  $\dot{V} = 0$ , y de ser así, el volumen  $V$  es ocupado por el flujo externo. El campo acústico ocasionará una variación en la densidad en el volumen  $V$ . Por lo tanto, es equivalente a  $\dot{V} = V \dot{\rho}/\rho_0$ , donde  $V$  es el volumen del cuerpo dispersivo, que para el caso de una partícula esférica el volumen es  $4/3\pi a^3$ . La función escalar  $b$  resulta en,

$$b = \frac{a^3}{3} \frac{\dot{\rho}_{in}(t-r/c_0)}{\rho_0} \quad (2.50)$$

para el campo vectorial  $\underline{B}$ , el único campo físico relevante es la velocidad  $\underline{v}_{in}$ . La forma del potencial de dispersión contemplando únicamente al monopolo y el dipolo para campos físicos es,

$$\phi_{sc}(\underline{r}, t) = -f_1 \frac{a^3}{3\rho_0} \frac{\partial_t \rho_{in}(t-r/c_0)}{r} - f_2 \frac{a^3}{2} \nabla \cdot \left[ \frac{\underline{v}_{in}(t-r/c_0)}{r} \right] \quad (2.51)$$

donde  $f_1$  y  $f_2$  son los coeficientes de dispersión.

Una vez definido al potencial de dispersión se le aplica el operador de onda de d'Alembert ( $\partial_i^2 - 1/c_0^2 \partial_t^2$ ). Debido a que el tratamiento es en el campo lejano,  $\lambda \gg a$ , se usa un argumento de órdenes de magnitud para eliminar el término de la derivada temporal frente a la derivada espacial.

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} = \frac{1}{a^2} - \frac{4\pi^2}{\lambda^2 \omega^4} \approx \frac{1}{a^2} \quad (2.52)$$

Así entonces,

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) (\phi_{mp} + \phi_{dp}) \approx \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} (\phi_{mp} + \phi_{dp}) \quad (2.53)$$

cuya solución es,

$$f_1 \frac{4\pi a^3}{3\rho_0} \partial_t \rho_{in} \delta(\underline{r}) + f_2 2\pi a^3 \nabla \cdot [\underline{v}_{in}(t-r/c_0) \delta(\underline{r})] \quad (2.54)$$

donde  $\delta(\underline{r})$  es la distribución delta. La expresión para la fuerza de radiación acústica (2.47) es:

$$\underline{F}^{rad} = - \int_{\Omega} \left[ \frac{4\pi a^3}{3} \langle f_1 v_j^{in} \partial_t \rho_{in} \delta(\underline{r}) \rangle + 2\pi a^3 \rho_0 \langle f_2 v_j^{in} \nabla \cdot [\underline{v}_{in} \delta(\underline{r})] \rangle \right] d\underline{r} \quad (2.55)$$

Ahora bien, el primer término es fácil de integrar, pero para facilitar la integración del segundo término se necesita eliminar la divergencia de  $\delta(\underline{r})$ . Para esto se utiliza el teorema de Gauss.

$$\int_{\partial\Omega} \underline{n} \cdot (\underline{v}\underline{u}) da = \int_{\Omega} \nabla \cdot (\underline{v}\underline{u}) d\underline{r} = \int_{\Omega} \underline{v} \nabla \cdot \underline{u} d\underline{r} + \int_{\partial\Omega} \underline{u} \cdot \nabla \underline{v} d\underline{r} \quad (2.56)$$

Se reescribe,  $\int_{\Omega} \underline{v} \nabla \cdot \underline{u} d\underline{r} = \int_{\partial\Omega} \underline{n} \cdot (\underline{v}\underline{u}) da - \int_{\partial\Omega} \underline{u} \cdot \nabla \underline{v} d\underline{r}$ , entonces se hace  $\underline{u} \sim v_{in} \delta(\underline{r})$  y  $v \sim v_i^{in}$ , (2.55) se convierte en,

$$\underline{F}_i^{rad} = - \frac{4\pi a^3}{3} \int_{\Omega} \langle f_1 v_j^{in} \partial_t \rho_{in} \delta(\underline{r}) \rangle d\underline{r} - 2\pi a^3 \rho_0 \left[ \int_{\Omega} - \langle f_2 v_{in} \delta(\underline{r}) \cdot \nabla v_i^{in} \rangle d\underline{r} + \int_{\partial\Omega} \underline{n} \cdot f_2 v_i^{in} v_{in} \delta(\underline{r}) da \right]$$

donde el tercer término del lado derecho de la ecuación previa es cero. Se integra la ecuación.

$$\underline{F}^{rad} = - \frac{4\pi}{3} a^3 \langle f_1 v_{in} \partial_t \rho_{in} \rangle + 2\pi a^3 \rho_0 \langle f_2 (v_{in} \cdot \nabla) v_{in} \rangle \quad (2.57)$$

Se aplica la regla  $\langle v_{in} \partial_t v_{in} \rangle = - \langle v_{in} \partial_t p_{in} \rangle$ ,  $\partial_t v_{in} = - \partial_t p_{in} / \rho_0$  y  $p_{in} = c_0^2 \rho_{in}$ , (2.57) se transforma en,

$$\underline{F}^{rad} = - \frac{4\pi}{3\rho_0 c_0^2} a^3 \langle f_1 p_{in} \nabla p_{in} \rangle + 2\pi a^3 \rho_0 \langle f_2 v_{in} \cdot \nabla v_{in} \rangle \quad (2.58)$$

con  $p_{in}$  y  $v_{in}$  evaluado en  $\underline{r} = 0$ . De (2.58) se observa que la fuerza de radiación contiene información de la dispersión sufrida a causa de las partículas en los coeficientes de dispersión  $f_1$  y  $f_2$ , que a su vez contienen información de la partícula. Al igual contempla a la onda incidente en  $p_{in}$  y  $v_{in}$ . Se consideró un fluido invíscido en el campo lejano.

Se realiza el mismo tratamiento que se hizo para el campo de velocidades de la ec. (2.36) al segundo término de lado derecho de la igualdad de (2.58) para obtener la siguiente ecuación,

$$\underline{F}^{rad} = -\pi a^3 \left[ \frac{4}{3\rho_0 c_0^2} \text{Re}[f_1] \langle \nabla p_{in}^2 \rangle - \rho_0 \text{Re}[f_2] \langle \nabla v_{in}^2 \rangle \right] \quad (2.59)$$

donde se ha tomado la parte real de los coeficientes de dispersión. Se factoriza el gradiente, resultando así, una expresión más sencilla para la fuerza de radiación acústica.

$$\underline{F}^{rad} = -\nabla U^{rad} \quad (2.60)$$

$$U^{rad} = \frac{4\pi}{3} a^3 \left[ \text{Re}[f_1] \frac{\kappa_0}{2} \langle p_{in}^2 \rangle - \text{Re}[f_2] \frac{3\rho_0}{4} \langle v_{in}^2 \rangle \right] \quad (2.61)$$

Donde  $U^{rad}$  es el potencial de energía acústica de radiación. El potencial de energía de radiación es proporcional al volumen de la partícula, y contiene una contribución positiva por las fluctuaciones de la presión acústica y una contribución negativa originada por la energía cinética de la onda.

Para tener una expresión analítica de la fuerza de radiación acústica se necesita encontrar de forma explícita las expresiones de  $f_1$  y  $f_2$ .

# Capítulo 3. Fuerza de radiación acústica. Medio invíscido y medio viscoso.

En el presente capítulo se estudian dos tipos de medio: el medio invíscido y el medio viscoso. Para el caso del medio invíscido se obtiene la expresión analítica para la ecuación de onda, para el potencial de energía acústica y para la fuerza de radiación acústica. En el caso del medio viscoso se obtiene la ecuación de onda con disipación de energía por atenuación viscosa, la fuerza de radiación acústica y la velocidad de las partículas. Todas estas expresiones se calculan para una geometría cilíndrica.

Concerniente al medio invíscido, primero se obtiene la solución de la ecuación de onda lineal en coordenadas cilíndricas. Se prosigue a obtener la expresión del potencial de energía acústica utilizando la expresión dada por Gor'kov [3], la cual se obtiene a partir de la ec. (2.61), considerando los coeficientes de dispersión,  $f_1$  y  $f_2$ , para el caso del medio invíscido. Se continúa con la obtención de la expresión de la fuerza de radiación acústica, la cual se obtiene al aplicar el gradiente al potencial acústico de radiación.

En cuanto al medio viscoso, se empieza con la obtención de la ecuación de onda lineal considerando disipación por la viscosidad. Se prosigue con el cálculo de la fuerza de radiación, considerando las expresiones para los coeficientes de dispersión  $f_1$  y  $f_2$  dadas por Bruus, para el caso del medio viscoso. Se sigue con la obtención de la fuerza de arrastre. Por último, se da la expresión que permite calcular la velocidad de las partículas.

## 3.1 Medio invíscido

### 3.1.1 Solución de la ecuación de onda lineal

La ecuación de onda lineal se obtiene a partir del balance de cantidad de materia, del balance de momentum y de la ecuación de estado. Se utiliza a la ecuación de onda en coordenadas cilíndricas, bajo condiciones a la frontera que se impongan al experimento.

El sistema está descrito en coordenadas cilíndricas, Fig. 3.

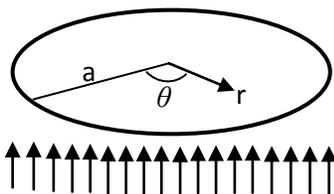


Fig. 3.1. Esquema del sistema. Coordenadas cilíndricas.

De acuerdo al análisis del término dispersivo (2.39), los efectos de dispersión sobre la onda acústica son despreciables, por lo que es válido realizar una aproximación al caso invíscido. La ecuación gobernante para el sistema es (2.30) para el caso de la presión del medio. Ya que se trabaja con una placa circular se utilizan coordenadas cilíndricas para resolver la propagación de la onda en la placa. La ec.(2.28) tiene la siguiente forma,

$$\frac{\partial^2 p_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p_1}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 p_1}{\partial \theta^2} = \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} \quad (3.1)$$

donde  $p_1 = p_1(r, \theta, t)$  es la presión del medio de orden lineal, y no tiene dependencia respecto a la coordenada  $z$ . La ec. (3.1) es la ecuación de onda lineal para un fluido invíscido. Para resolver la ecuación (3.1) se emplea el método de separación de variables, el cual permite un tratamiento aislado de cada variable independiente del sistema.

Se propone una solución de la forma  $p_1(r, \theta, t) = R(r)\Theta(\theta)T(t)$ . Al sustituir esta solución en la ec. (3.1) arroja tres ecuaciones diferenciales ordinarias. A continuación se plantean las tres soluciones.

La solución para la parte temporal es,

$$T(t) = \exp(-i\omega t) \quad (3.2)$$

donde  $\omega$  es la frecuencia angular de la onda acústica que viaja por el medio ideal. Este resultado concuerda con la suposición de que para los campos de primer orden había una dependencia armónica con respecto al tiempo.

Para la dependencia angular la solución es de la forma,

$$\Theta(\theta) = \exp(im\theta) \quad (3.3)$$

donde  $m$  es una constante, y debido a la condición de frontera,  $\Theta(m) = \Theta(m + 2\pi)$ ,  $m \in \mathbb{Z}$ .

La ecuación diferencial para la dependencia radial es la ecuación de Bessel de orden  $m$ , cuya solución se escribe a continuación.

$$R(r) = AJ_m(k_r r) + BY_m(k_r r) \quad (3.4)$$

La solución  $Y_m$  tiene una singularidad en  $r = 0$ , y de acuerdo al experimento la presión del fluido en el origen es finita, por lo que  $B = 0$ . La segunda condición de frontera para el radio es en la frontera  $r = a$ , donde la presión radial del fluido es cero.

$$J_m(k_r a) = 0 \quad (3.5)$$

Se nombra  $q_{mn}$  a las raíces de  $J_m$ , esto es,  $J_m(q_{mn}) = 0$ , entonces,

$$q_{mn} = k_r a = \frac{\omega_n a}{c_0} \quad (3.6)$$

de acuerdo a (3.6) habrá  $n$  anillos nodales y  $m$  diámetros nodales.

La solución para la presión lineal del fluido se obtiene a partir de (3.2), (3.3) y (3.4), la expresión resultante es.

$$p_1 = P_0 J_m(k_r r) \cos m\theta \cos \omega t \quad (3.7)$$

A partir de la solución de la presión del líquido es posible obtener la velocidad del mismo cuando una onda acústica se propaga. Para obtener la expresión de la velocidad se utiliza la ecuación de cantidad de movimiento (2.12) en su forma linealizada, que para un fluido inviscido relaciona la presión y la velocidad, con el gradiente y la tasa de cambio, respectivamente.

La componente radial del vector velocidad del fluido es,

$$v_{1r}(r, \theta, t) = v_0 \left[ J_{m+1}(k_r r) - \frac{m}{k_r r} J_m(k_r r) \right] \cos m\theta \sin \omega t \quad (3.8)$$

se aprecia que a medida que el radio crece la velocidad del fluido aumenta, así pues las mayores velocidades estarán cerca del radio  $a$ .

Para la componente angular del vector velocidad se tiene la siguiente expresión.

$$v_{1\theta}(r, \theta, t) = v_0 \frac{m}{k_r r} J_m(k_r r) \sin m\theta \sin \omega t \quad (3.9)$$

Para la componente angular de la velocidad a medida que aumenta el radio ésta disminuye, que es lo opuesto a  $v_{1r}$ , esto es, mientras más lejos este del centro menor será la velocidad angular y mayor la velocidad radial, y por el contrario, la velocidad radial cercana al origen es menor que la velocidad angular. Aunque a un radio fijo, a mayor  $m$  la velocidad angular aumenta, mientras que la velocidad radial disminuye.

### 3.1.2 Potencial de energía acústica

Para obtener la fuerza de radiación acústica, se necesita el potencial de energía acústica,  $U$ . Gor'kov [3] derivó la expresión para calcular  $U$  de una fuerza acústica,  $F$ , que actúa sobre una pequeña partícula esférica en un campo acústico arbitrario en un fluido ideal. Bajo la condición de que el radio de la partícula,  $a$ , fuese mucho menor a la longitud de onda,  $\lambda$ , es decir,  $a \ll \lambda$ , la expresión para el potencial acústico es,

$$U = 2\pi\omega^3 \left[ \left( \frac{\langle p_{in}^2 \rangle}{3\rho_0 c_0^2} \right) f_1 - \left( \frac{\rho_0}{2} \langle v_{in}^2 \rangle \right) f_2 \right] \quad (3.10)$$

donde  $\langle p_{in}^2 \rangle$  y  $\langle v_{in}^2 \rangle$  son el promedio temporal de las fluctuaciones del cuadrado de la presión y la velocidad de la onda incidente en el punto donde la partícula se encuentre. Los campos de la onda incidente son los campos lineales, es decir,  $p_{in} = p_1$  y  $v_{in} = v_1$ . La ec. (3.10) es posible obtenerla a partir de (2.61).

Los coeficientes de dispersión del monopolo y del dipolo para el caso invíscido fueron obtenidos primeramente por Gor'kov [3] y posteriormente por Bruus [10]. Están expresados como,

$$f_1 = 1 - \frac{\rho_0 c_0^2}{\rho_s c_s^2} \text{ y } f_2 = \frac{2(\rho_s - \rho_0)}{2\rho_s + \rho_0} \quad (3.11)$$

donde el subíndice  $s$  denota a la partícula sólida. El intervalo disponible para  $f_1$  y  $f_2$ , son  $-\infty < f_1 \leq 1$  y  $-2 \leq f_2 \leq 1$ . En el caso de una partícula rígida  $f_1 = f_2 = 1$ , [4].

La expresión del potencial de energía acústica  $U$ , es igual a la contribución de la energía potencial menos la energía cinética de la onda acústica. El término que multiplica al factor  $f_1$ , es la energía potencial de la onda debido a los ciclos alternos de compresión y rarefacción, mientras que el término que acompaña a  $f_2$  es la energía cinética debido al movimiento de las partículas que componen al medio.

Si la energía potencial de la onda es mayor que su energía cinética, entonces el potencial de radiación será mayor a cero, y la fuerza de radiación menor a cero, esto es que las partículas migrarán en dirección contraria a la de la propagación de la onda. En el caso contrario, si la energía cinética fuese mayor a la potencial, entonces  $U < 0$  y  $F^{rad} > 0$ , esto es que las partículas migrarán a los planos nodales en la misma dirección de la propagación de la onda acústica.

Ahora bien, si  $\rho_s$  y  $c_s$ , las propiedades características de las partículas, fuesen igual a las del fluido,  $\rho_s = \rho_0$  y  $c_s = c_0$ , esto es, que no existiera diferencia entre las partículas del fluido y las partículas dispersas, entonces  $U = 0$ , lo que origina que la fuerza de radiación acústica sea cero, por consecuencia las partículas no se desplazarían. De aquí que la fuerza de naturaleza acústica que origina el desplazamiento de las partículas es debido a la diferencia de propiedades entre las partículas y el fluido.

Para obtener la expresión de  $U$  para una onda incidente cilíndrica, se deben de calcular los promedios temporales del cuadrado de la presión (3.7) y de la velocidad (3.8)-(3.9).

$$\overline{p_{in}^2} = \frac{1}{2} P_0^2 J_m^2(k_r r) \cos^2 m\theta \quad (3.12)$$

$$\overline{v_{in}^2} = \frac{1}{2} v_0^2 \left[ J_{m+1}(k_r r) - \frac{m}{k_r r} J_m(k_r r) \right]^2 \cos^2 m\theta + \frac{1}{2} v_0^2 \frac{m^2}{(k_r r)^2} J_m^2(k_r r) \sin^2 m\theta \quad (3.13)$$

Se sustituyen las dos expresiones previas en (3.10). Después de un breve tratamiento algebraico, la ecuación del potencial de energía acústica es,

$$U = \frac{\pi R^3 P_0^2}{\rho c_0^2} \left\{ \frac{f_1}{3} J_m^2(k_r r) \cos^2 m\theta - \frac{f_1}{3} \left[ \left( \frac{m}{k_r r} J_m(k_r r) \right)^2 - J_{m+1}(k_r r) \left( -J_{m+1}(k_r r) + \frac{2m}{k_r r} J_m(k_r r) \right) \cos^2 m\theta \right] \right\} \quad (3.14)$$

El potencial acústico es una medida de la capacidad que tiene el campo acústico para aplicar un trabajo sobre las partículas.

Es sabido que las partículas en presencia de un campo acústico migran hacia los planos nodales de menor potencial acústico, donde  $U$  es mínima, o bien donde la fuerza de radiación acústica es cero,  $F = 0$ , por lo que es necesario calcular la fuerza  $F$ .

### 3.1.3 Fuerza de radiación acústica

Cuando un fluido con partículas suspendidas es sometido a un campo acústico, las partículas experimentan una fuerza neta que origina su desplazamiento hacia los planos nodales. Como ya se mencionó, existen varias fuerzas que se aplican sobre la superficie de la partícula. La más relevante para esta investigación es la fuerza de radiación acústica.

Las componentes de la fuerza acústica se obtienen a partir del potencial acústico usando la siguiente expresión,

$$\underline{F} = -\nabla U \quad (3.15)$$

cabe aclarar que la expresión (3.15) es para una onda acústica estacionaria. Para el caso de una onda viajera entonces la expresión (3.15) no aplica para obtener la expresión de la fuerza de radiación acústica.

El vector gradiente en coordenadas cilíndricas es:  $\nabla = \partial/\partial r, \frac{1}{r}\partial/\partial\theta$ .

Se definen el potencial acústico, las componentes de la fuerza de radiación acústica, la presión y la velocidad en forma adimensional, de la siguiente forma.

$$\bar{U} = U/\pi a^3 \rho_0 v_0^2, \bar{F}_i = F_i/\pi a^3 \rho_0 v_0^2 k_r, \bar{p} = p/\rho c_0 v_0, \bar{v} = v/v_0, \chi = k_r r \quad (3.16)$$

Se calcula la componente radial de  $F$  a partir de  $F_r = -\partial U/\partial r$  y (3.14).

$$\begin{aligned}
\overline{F}_r = & 2J_m(\chi) \left( J_{m+1}(\chi) - \frac{m}{\chi} J_m(\chi) \right) \left( \frac{f_1}{3} \cos^2 m\theta - \frac{f_2}{2} \frac{m^2}{\chi^2} \right) - \frac{f_2 m^2}{\chi^3} J_m^2(\chi) \\
& + \frac{f_2}{2} \frac{m}{\chi} J_m(\chi) (J_{m+2}(\chi) - J_m(\chi)) \cos^2 m\theta \\
& - \frac{f_2}{2} J_{m+1}(\chi) \left[ \left( \frac{2m(m-1)}{\chi^2} - 1 \right) J_m(\chi) - \frac{2m}{\chi} J_{m+1}(\chi) + J_{m+2}(\chi) \right] \cos^2 m\theta
\end{aligned} \tag{3.17}$$

Esta es la fuerza que origina el movimiento en las partículas. Éstas tienden a migrar a los planos de menor energía acústica. En coordenadas cilíndricas las zonas nodales son círculos concéntricos.

Para la componente angular  $F_\theta = -\frac{1}{r} \partial U / \partial \theta$ .

$$\overline{F}_\theta = \frac{m}{\chi} \sin(2m\theta) \left[ \frac{f_1}{3} J_m^2(\chi) + \frac{f_2}{2} J_{m+1}(\chi) \left( -J_{m+1}(\chi) + \frac{2m}{\chi} J_m(\chi) \right) \right] \tag{3.18}$$

Las zonas nodales para el numero  $m$ , son diámetros nodales. En base a lo observado en los experimentos, los modos que prevalecen para  $m$  son:  $m = 0$  y  $m = 1$ .

A continuación se presentan las ecuaciones para la presión, potencial acústico y las componentes de la fuerza acústica para los modos antes citados.

Para  $m = 0$  
$$\overline{p} = J_0(\chi) \cos \omega t \tag{3.19}$$

$$\overline{U} = \frac{f_1}{3} J_0^2(\chi) - \frac{f_2}{2} J_1^2(\chi) \tag{3.20}$$

$$\overline{F}_r = \left[ \left( \frac{2f_1}{3} + \frac{f_2}{2} \right) J_0(\chi) - \frac{f_2}{2} J_2(\chi) \right] J_1(\chi) \tag{3.21}$$

$$\overline{F}_\theta = 0 \tag{3.22}$$

Para  $m = 1$  
$$\overline{p} = J_1(\chi) \cos \theta \cos \omega t \tag{3.23}$$

$$\overline{U} = \left( \frac{f_1}{3} \cos^2 \theta - \frac{f_2}{2} \frac{1}{\chi^2} \right) J_1^2(\chi) + \frac{f_2}{2} J_2(\chi) \left( \frac{2}{\chi} J_1(\chi) - J_2(\chi) \right) \cos^2 \theta \tag{3.24}$$

$$\begin{aligned}
\overline{F}_r = & 2J_1(\chi) \left( J_2(\chi) - \frac{1}{\chi} J_1(\chi) \right) \left( \frac{f_1}{3} \cos^2 \theta - \frac{f_2}{2} \frac{1}{\chi^2} \right) - \frac{f_2}{\chi^3} J_1^2(\chi) \\
& + \frac{f_2}{2} \frac{1}{\chi} J_1(\chi) (J_3(\chi) - J_1(\chi)) \cos^2 \theta - \frac{f_2}{2} J_2(\chi) \left[ -J_1(\chi) - \frac{2}{\chi} J_2(\chi) + J_3(\chi) \right] \cos^2 \theta
\end{aligned} \tag{3.25}$$

$$\overline{F}_\theta = \frac{1}{\chi} \sin 2\theta \left[ \frac{f_1}{3} J_1^2(\chi) + \frac{f_2}{2} J_2(\chi) \left( \frac{2}{\chi} J_1(\chi) - J_2(\chi) \right) \right] \quad (3.26)$$

A continuación se presentan unas gráficas obtenidas con (3.19)-(3.21) con el objetivo de observar su comportamiento.

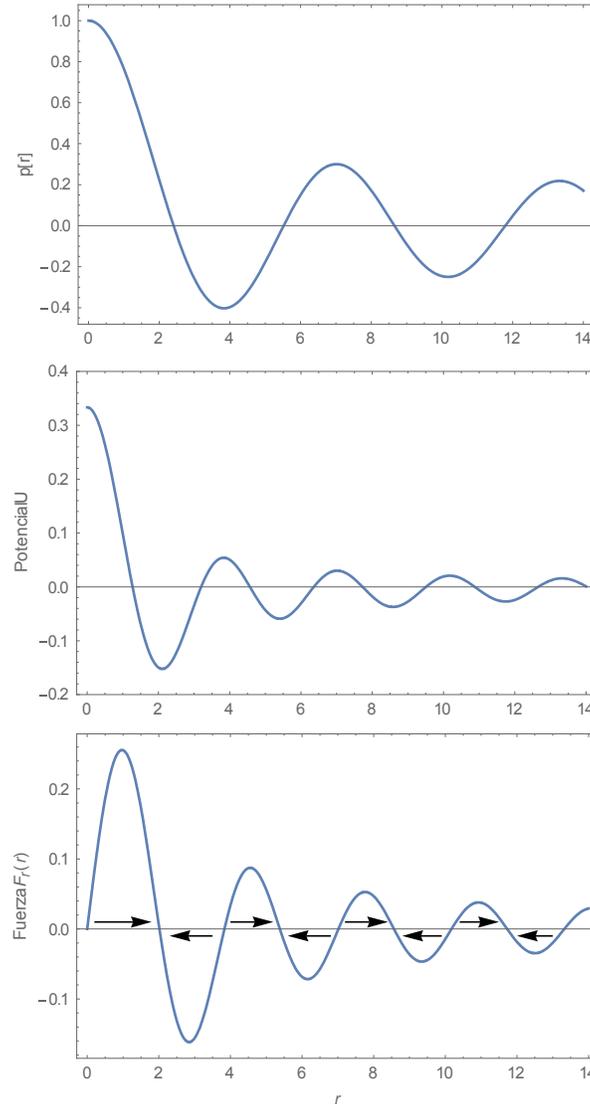


Fig. 3.2. Muestra el comportamiento de la presión, potencial acústico y fuerza de radiación adimensionales frente al cambio del radio. Las flechas en la grafica de la fuerza de radiación indican la dirección de migración de la partículas.

De la Fig. 3.2 se aprecia que la magnitud de la presión, la profundidad del pozo de potencial y la magnitud de la fuerza de radiación decrecen cuando aumenta el radio. La pérdida de amplitud de dicha onda se debe a la geometría cilíndrica del sistema.

En una geometría rectangular, los puntos donde la presión es cero corresponden a los puntos donde el potencial de radiación es mínimo. Pero en la geometría cilíndrica no es el caso, los puntos

minimos del potencial no coinciden con los ceros de la presión debido a los factores  $f_1$  y  $f_2$  que están presentes en la expresión del potencial.

Las partículas se posicionaran en los puntos donde la fuerza de radiación es cero. Estos anillos nodales coinciden con los anillos mínimos para el potencial acústico. En la Fig. 1 se observa que el primer anillo nodal está proximo a  $r = 2$ , mientras que el segundo se encuentra alrededor de  $r = 5.5$ . La fuerza de restitución, es la fuerza que experimenta la partícula en dirección hacia el pozo de potencial. Si se desea transferir a una partícula de un anillo nodal a otro, es decir de un pozo de potencial a otro, la fuerza necesaria para lograrlo debe ser de magnitud ligeramente mayor a la magnitud de la fuerza de restitución. La magnitud de la fuerza de radiación del primer anillo es mucho mayor que la del segundo anillo (poco más del doble); esto es, se necesita mayor magnitud de fuerza para que la partícula salga del primer anillo nodal que del segundo. Conforme el radio aumenta, la magnitud de la fuerza de restauración decrece.

## 3.2 Medio viscoso

### 3.2.1 Ecuación de onda lineal

La ecuación de onda lineal para  $p_1$  en un medio viscoso se obtiene a partir de (2.28) al eliminar el carácter viscoelástico del medio, esto es al hacer  $\eta_0 = 0$ . La viscosidad del solvente se convierte en la viscosidad del medio, es decir  $\mu = \mu_s$  cuando  $\eta_0 = 0$ .

$$\partial_t^2 p_1 = c_0^2 \left[ 1 + \frac{\mu}{\rho_0 c_0^2} \partial_t \right] \nabla^2 p_1 \quad (3.19)$$

Al eliminar el carácter viscoelástico se recupera la ecuación de onda para un medio viscoso, que es la ec. (7) de Bruus [4]. En (3.19) el segundo término entre los corchetes surge debido a la viscosidad del medio. Si éste fuese cero (fluido invíscido) la ec. (3.19) se reduce a la ecuación de onda lineal para un medio invíscido (2.30).

Ya que la dependencia respecto al tiempo es armónica, (3.19) se reduce a la ecuación de onda con disipación de Helmholtz,

$$\nabla^2 p_1 + k_{vis}^2 p_1 = 0 \quad (3.20)$$

$$k_{vis} = k_{inv} (1 + i\gamma_{att}) \quad (3.21)$$

$$\gamma_{att} = \frac{\mu\omega}{2\rho_0 c_0^2} \quad (3.22)$$

donde  $k_{inv}$  es el numero de onda para el medio invíscido,  $k_{inv} = \omega/c_0$ , y  $c_0$  es la velocidad del sonido en el aire.  $\gamma_{att}$  es el término de amortiguamiento viscoso. En este término se encuentra la

información sobre la viscosidad. De acuerdo a (3.22) la disipación de la onda es proporcional a la viscosidad y a la frecuencia de la onda. A altas viscosidades la amplitud de la onda decaerá rápidamente, e igualmente, a frecuencias altas, la onda se amortigua con rapidez.

En el caso de un medio invíscido  $\mu = 0$ , no existe amortiguamiento viscoso y  $k_{vis}$  es igual al número de onda para un medio sin atenuación viscosa. Esto significa que debido a la viscosidad del medio aparece un término extra en la definición del número de onda. Este término que surge es imaginario, por lo que la onda experimenta atenuación por amortiguamiento viscoso.

Debido al término imaginario aparece un exponente con argumento real y negativo, lo que explica la atenuación de la onda. Si la parte real del número de onda fuese cero, entonces la onda se vuelve una onda evanescente. Así pues, la atenuación de la onda es el efecto que tiene la viscosidad del medio sobre la onda acústica.

### 3.2.2 Fuerza de radiación acústica

La fuerza de radiación acústica para una onda estacionaria viene dada por las ecuaciones (2.60) y (2.61), a saber,

$$\underline{F}^{rad} = -\nabla U^{rad} \quad (3.23)$$

$$U^{rad} = \frac{4\pi}{3} a^3 \left[ \text{Re}[f_1] \frac{\kappa_0}{2} \langle p_{in}^2 \rangle - \text{Re}[f_2] \frac{3\rho_0}{4} \langle v_{in}^2 \rangle \right] \quad (3.24)$$

de acuerdo a Bruus *et al.* [4] los coeficientes de dispersión para un medio viscoso tienen la siguiente funcionalidad,

$$f_1 = 1 - \frac{\kappa_p}{\kappa_0} \quad (3.25)$$

donde  $\kappa_p$  es la compresibilidad de la partícula y  $\kappa_0$  es la compresibilidad del medio,

$$f_2 = \frac{2[1 - \gamma(\bar{\delta})](\rho_p - \rho_0)}{2\rho_p + \rho_0 - 3\rho_0\gamma(\bar{\delta})} \quad (3.26)$$

donde  $\gamma$  es una variable adimensional dependiente de la viscosidad.

$$\gamma(\bar{\delta}) = -\frac{2}{3} [1 + i(1 + \bar{\delta})] \bar{\delta} \quad (3.27)$$

Toda la información sobre la viscosidad se encuentra en el término de  $\gamma$ , ya que  $\bar{\delta}$  es el espesor de la capa límite viscosa (ó profundidad de penetración viscosa) que es la longitud de difusión del momentum.

$$\bar{\delta} = \frac{\delta}{a} \quad \text{y} \quad \delta = \left( \frac{2\nu}{\omega} \right)^{1/2} \quad (3.28)$$

$\nu$  es la viscosidad cinemática,  $\nu = \mu/\rho_0$ .

Debido a la viscosidad del medio el término del coeficiente de dispersión del dipolo es complejo, así que tiene una parte real y una parte imaginaria. La parte real corresponde a las ondas estacionarias, mientras que la parte imaginaria se relaciona con las ondas viajeras.

$$f_2^r = \text{Re}[f_2] = \frac{2(\bar{\rho}-1)\left[\left(1+\frac{3}{2}\bar{\delta}\right)(2\bar{\rho}+1+\frac{9}{2}\bar{\delta})+\frac{27}{4}\bar{\delta}^2(\bar{\delta}+1)^2\right]}{(2\bar{\rho}+1)^2+9(1+2\bar{\rho})\bar{\delta}+\frac{81}{2}(\bar{\delta}^2+\bar{\delta}^3+\frac{1}{2}\bar{\delta}^4)} \quad (3.29)$$

$$f_2^i = \text{Im}[f_2] = \frac{6(\bar{\rho}-1)^2(1+\bar{\delta})\bar{\delta}}{(2\bar{\rho}+1)^2+9(1+2\bar{\rho})\bar{\delta}+\frac{81}{2}(\bar{\delta}^2+\bar{\delta}^3+\frac{1}{2}\bar{\delta}^4)} \quad (3.30)$$

Donde  $\bar{\rho} = \rho_p/\rho_0$ . El potencial de radiación y la fuerza de radiación para la componente radial cuando  $m = 0$ , son:

$$U = \pi a^3 p_0 \left[ \frac{f_1}{3} J_0^2(k_r r) - \frac{f_2^r}{2} J_1^2(k_r r) \right] \quad (3.31)$$

$$F_r = \pi a^3 p_0 k_r \left[ \left( \frac{2f_1}{3} + \frac{f_2^r}{2} \right) J_0(k_r r) - \frac{f_2^r}{2} J_2(k_r r) \right] J_1(k_r r) \quad (3.32)$$

tanto la expresión del potencial de radiación  $U$ , como de la fuerza  $F_r$  para el medio viscoso, son idénticas a las expresiones para el potencial y fuerza de radiación para el caso invíscido, (3.20) y (3.21), respectivamente. Lo único diferente es la expresión para  $f_2$ , esto es cierto, pues es en este término donde se encuentra la información de la viscosidad del medio.

### 3.2.3 Fuerza de arrastre

Cuando un objeto se mueve a través de un medio viscoso surge una fuerza que se opone al movimiento del objeto, denominada fuerza de arrastre. Si la partícula se mueve con una velocidad  $\underline{v}$ , la fuerza de arrastre  $\underline{F}^{drag}$  se expresa de la siguiente forma,

$$\underline{F}^{drag} = 6\pi\mu a(\langle \underline{v}_2 \rangle - \underline{v}) \quad (3.33)$$

donde  $\langle \underline{v}_2 \rangle$  es la velocidad de corriente acústica, y es una contribución al movimiento de las partículas debido a la presencia de un campo acústico. Este vector velocidad de segundo orden contribuye a través de la fuerza de arrastre. Mientras que la parte de la fuerza de arrastre debido al medio se opone al movimiento de las partículas, y está dada por la Ley de Stokes.

$$\underline{F}^{drag} = -6\pi\mu a \underline{v} \quad (3.34)$$

### 3.2.4 Velocidad de las partículas

Como se explicó en las secciones previas, la partícula adquiere movimiento debido a la suma de las fuerzas que actúan sobre ella. De acuerdo a la segunda ley de Newton.

$$\frac{4}{3}\pi a^3 \rho_p \partial_t \underline{v} = \underline{F}^{rad} + 6\pi\mu a (\langle \underline{v}_2 \rangle - \underline{v}) \quad (3.35)$$

De acuerdo al sistema de estudio, las dos únicas fuerzas de interés son la fuerza de radiación acústica y la fuerza de arrastre. El tiempo característico de aceleración  $\tau \sim \rho_p a^2 / \mu < 1\mu s$  es pequeño frente a la escala de tiempo del movimiento de las partículas ( $> 1ms$ ), por lo que los efectos inerciales pueden despreciarse.

$$\underline{v} = \frac{\underline{F}^{rad}}{6\pi\mu a} + \langle \underline{v}_2 \rangle \quad (3.36)$$

Debido a la escala a la cual se realizaron los experimentos, la velocidad de la corriente acústica no tiene una contribución importante sobre el movimiento de las partículas, por ello es posible anular a  $\langle \underline{v}_2 \rangle$ .

$$\underline{v} = \frac{\underline{F}^{rad}}{6\pi\mu a} \quad (3.37)$$

Para el caso de una onda acústica estacionaria, en coordenadas rectangulares, la componente del vector de velocidad de la partícula en dirección  $x$ , queda expresada como sigue,

$$v_x(x) = \frac{2}{3}a^2 \frac{k_{vis}}{\mu} \Phi(\bar{\kappa}, \bar{\rho}, \bar{\delta}) E_{ac} \sin(2k_{vis}x) \quad (3.38)$$

$$\Phi(\bar{\kappa}, \bar{\rho}, \bar{\delta}) = \frac{1}{3}f_1(\bar{\kappa}) + \frac{1}{2}f_2^r(\bar{\rho}, \bar{\delta}) \quad (3.39)$$

donde  $E_{ac} = p_o^2 / 4\rho_0 c_0^2$ , es la densidad de energía acústica. En el caso de geometría cilíndrica, la componente radial para  $m = 0$  del vector velocidad es,

$$v_r(r) = \frac{2}{3}a^2 E_{ac} \frac{k_{vis}}{\mu} \left[ \Phi(\bar{\kappa}, \bar{\rho}, \bar{\delta}) J_0(k_{vis}r) - \frac{f_2^r}{2} J_2(k_{vis}r) \right] J_1(k_{vis}r) \quad (3.40)$$

ahora bien, para el caso de una onda acústica viajera, en coordenadas esféricas, la fuerza de radiación acústica queda expresada de la siguiente manera,

$$\underline{F}^{rad} = f_2^i \pi a^3 \rho_0 \langle v_{in}^2 \rangle \underline{k} \quad (3.41)$$

donde  $f_2^i$  está dado por (4.30). En el caso de una onda plana viajera con  $\underline{k} = k\hat{e}_z$  y  $\underline{v}_{in} = v_0 \exp i(kz - \omega t)$ . Para este caso la densidad de energía acústica  $E_{ac}$  de la onda es  $E_{ac} = (\kappa_0 v_0^2)/2$ . La velocidad de la partícula en dirección  $z$  es,

$$v_z^p = \frac{a^2 k f_2^i E_{ac}}{6\mu_s} \quad (3.42)$$

# Capítulo 4. Fuerza de radiación acústica.

## Medio viscoelástico.

En el presente capítulo se estudia la fuerza de radiación acústica considerando un medio que consta de dos partes: una parte Newtoniana y otra parte no-Newtoniana. La ecuación constitutiva de la parte Newtoniana se estudia a través de la ecuación de Newton, mientras que la parte viscoelástica o no-Newtoniana se utiliza la ecuación constitutiva de Maxwell. El modelo viscoelástico que se utiliza en esta investigación para describir al medio, es el modelo de Oldroyd-B, que es igual a la suma del modelo de Maxwell más el modelo Newtoniano.

Así mismo, se estudian los coeficientes de dispersión del monopolo y del dipolo. Se obtienen las expresiones analíticas para estos coeficientes. Al igual se obtiene la expresión para la fuerza de arrastre considerando un medio viscoelástico.

Por último, se obtiene la expresión que permita calcular la velocidad de las partículas en el medio no-newtoniano.

### 4.1 Ecuación de onda para un medio no-Newtoniano

Un medio viscoelástico o no-Newtoniano es un fluido cuyo comportamiento se encuentra entre el comportamiento de un fluido Newtoniano y un sólido elástico. En el ámbito industrial la gran mayoría de fluidos que se utilizan son de carácter viscoelástico. Por lo que una expresión para la fuerza de radiación acústica considerando el carácter viscoelástico del medio es de importancia para que la teoría este más encaminada a resolver problemas reales.

Para tener una expresión analítica de la fuerza de radiación acústica se necesita encontrar de forma explícita las expresiones de  $f_1$  y  $f_2$ . Para obtener las expresiones de  $f_1$  y  $f_2$  se sigue el desarrollo que hace Bruus *et al.* en su artículo [4].

### 4.2 Coeficientes de dispersión

Los coeficientes de dispersión para el monopolo y el dipolo son  $f_1$  y  $f_2$ , respectivamente. Para  $f_1$  se considera a la partícula estacionaria y compresible.  $f_1$  está relacionado con el desplazamiento de masa en la densidad de la onda incidente  $\rho_{in}$ , cuando el fluido golpea a la partícula estacionaria. Mientras que  $f_2$  está relacionado con el desplazamiento de la partícula en el medio, moviéndose con velocidad  $v_p$ .

Para la respuesta del fluido se emplean tres regiones en el espacio. La región de la capa límite acústica, que es la región inmediata a la partícula,  $a < r \leq a + 5\delta$ , es donde la viscosidad del medio tiene un papel importante debido a que los gradientes se incrementan en el campo de velocidades. En la capa límite acústica o viscosa, el fluido es incompresible, pues el tiempo que toma a la onda acústica propagarse a través de la capa límite acústica es mucho menor al periodo de oscilación,  $(a + 5\delta)/c_0 \ll 1/\omega$  ó  $a + 5\delta \ll \lambda$ . La siguiente región es el campo cercano con  $a + 5\delta \leq r \ll \lambda$ , donde el fluido es invíscido y compresible, pero el potencial de dispersión  $\phi_{sc}$ , depende únicamente del tiempo instantáneo  $t$  y no del tiempo retardado. A continuación se presentan las expresiones en la región del campo cercano para los términos del monopolo y del dipolo.

$$\phi_{sc}(r, \theta) = \phi_{mp}(r) + \phi_{dp}(r, \theta) \quad (4.1)$$

$$\phi_{mp}(r) = -f_1 \frac{a^3}{3\rho_0} \frac{\partial_t \rho_{in}}{r} \quad (4.2)$$

$$\phi_{dp}(r, \theta) = f_2 \frac{a^3}{2} v_{in} \frac{\cos \theta}{r^2} \quad (4.3)$$

La última región es el campo lejano  $r \gg \lambda$ , donde el fluido es invíscido, compresible y  $\phi_{sc}$  depende del tiempo retardado  $t - r/c_0$ .

Las expresiones analíticas para los coeficientes de dispersión  $f_1$  y  $f_2$  se obtienen a partir de las condiciones de frontera en la superficie de la partícula cuando está en movimiento, con velocidad  $\underline{v}_p$ . Para esto es necesario hacer coincidir la presión  $p_1$  y la velocidad  $\underline{v}_1$  del fluido con las condiciones de frontera en la partícula.

Se utiliza un sistema coordenado esférico con los vectores unitarios ( $\underline{e}_r, \underline{e}_\theta, \underline{e}_\varphi$ ) localizados en todo momento en el centro de la partícula. Se considera simetría azimutal, es decir todos los campos dependen de  $r$  y  $\theta$ , y la componente azimutal del vector velocidad es nula,  $\underline{v} = v_r \underline{e}_r + v_\theta \underline{e}_\theta$ .

Para el caso de las componentes de los vectores de velocidad, se considera que el eje polar  $\underline{e}_z$  apunta en la dirección de la velocidad incidente  $\underline{v}_{in}$ , tal que  $\underline{v}_{in} = v_{in} \underline{e}_z$ , y por la simetría azimutal del problema, la velocidad de la partícula  $\underline{v}_p$ , tiene dirección  $\underline{e}_z$ ,  $\underline{v}_p = v_p \underline{e}_z$ .

$$\underline{v}_{in} = v_{in} \underline{e}_z = v_{in} \cos \theta \underline{e}_r - v_{in} \sin \theta \underline{e}_\theta \quad (4.4)$$

$$\underline{v}_p = v_p \underline{e}_z = v_p \cos \theta \underline{e}_r - v_p \sin \theta \underline{e}_\theta \quad (4.5)$$

### 4.2.1 Coeficiente de dispersión del monopolo, $f_1$

La presencia de una partícula estacionaria y compresible genera que haya masa desplazada del fluido cuando ésta interactúa con la onda, de lo contrario esta masa entraría al volumen de la

partícula. La rapidez de masa desplazada del fluido es  $\partial_t m$ . Para primer orden, el desplazamiento de masa por la partícula es igual al flujo de masa por unidad de área  $\rho_0 \underline{v}_{sc}$  llevado por la onda dispersada a través de una superficie cerrada  $\partial\Omega$  que abarca a la partícula en la región del campo cercano.

$$\partial_t m = \int_{\partial\Omega} (\rho_0 \underline{v}_{sc}) \cdot \underline{e}_r da \quad (4.6)$$

Con el teorema de Gauss,  $\int_{\partial\Omega} (\rho_0 \underline{v}_{sc}) \cdot \underline{e}_r da = \int_{\Omega} \nabla \cdot (\rho_0 \underline{v}_{sc}) dV$ , y ya que la región que encierra a la partícula está en el campo cercano, la viscosidad del medio no es importante, por lo que la aproximación al caso invíscido sigue siendo válida. Así pues, con la ecuación de continuidad y el teorema de Gauss, la ec. (4.6) se transforma en  $\partial_t m = -\int_{\Omega} \partial_t \rho_{in} dV$ . La integral de volumen es,

$$\partial_t m = f_1 \frac{4\pi}{3} a^3 \partial_t \rho_{in} \quad (4.7)$$

considerando que es para el monopolo y la onda es saliente, el signo menos (-) desaparece y aparece  $f_1$ .

Por otro lado, la rapidez de desplazamiento de masa se puede escribir en términos de la rapidez de cambio de la densidad, esto es la variación por unidad de tiempo de la masa del fluido en un volumen igual al volumen dispersado.

$$\partial_t m = V_{sc} \partial_t \rho_{in} \quad (4.8)$$

Si el cuerpo que dispersa es un fluido con densidad  $\rho_i$  con un equilibrio en el volumen  $V_0$ .

$$V_{sc} = V_0 \left( 1 - \frac{\rho_0 \partial_t \rho_i}{\rho_{i0} \partial_t \rho_{in}} \right) \quad (4.9)$$

$$\partial_t \rho_i = \left( \frac{\partial \rho_i}{\partial p_i} \right)_0 \partial_t p_{in} = \left( \frac{\partial \rho_i}{\partial p_i} \right)_0 \left( \frac{\partial p_{in}}{\partial \rho_{in}} \right)_0 \partial_t \rho_{in} = \frac{c_0^2}{c_s^2} \partial_t \rho_{in} \quad (4.10)$$

$$V_{sc} = V_0 \left( 1 - \frac{c_0^2 \rho_0}{c_s^2 \rho_{i0}} \right) \quad (4.11)$$

En términos de la compresibilidad,  $\kappa_0 = 1/\rho_0 c_0^2$ ,  $\kappa_p = 1/\rho_{i0} c_s^2$ .

$$V_{sc} = V_0 \left( 1 - \frac{\kappa_p}{\kappa_0} \right) \quad (4.12)$$

Se sustituye (4.12) en (4.8).

$$\partial_t m = \left(1 - \frac{\kappa_p}{\kappa_0}\right) V_0 \partial_t \rho_{in} \quad (4.13)$$

Al comparar las ecuaciones (4.13) y (4.7) resulta la expresión de  $f_1$ .

$$f_1(\kappa_0, \kappa_p) = 1 - \frac{\kappa_p}{\kappa_0} \quad (4.14)$$

Este resultado es idéntico al de Gor'kov [3] y al resultado para  $f_1$  considerando un medio viscoso [4], ya que  $f_1$  no depende de la naturaleza del medio, es decir si es Newtoniano, no Newtoniano o invíscido. Nótese que  $f_1$  depende exclusivamente de la compresibilidad y densidad del fluido y de la partícula. Para compresibilidades idénticas  $\kappa_p = \kappa_0$ , el coeficiente del monopolo es cero,  $f_1 = 0$ . Para partículas rígidas,  $f_1 = 1$ .

## 4.2.2 Coeficiente de dispersión del dipolo, $f_2$

Se desea obtener una expresión para el coeficiente  $f_2$  que considere al tiempo de relajación y la viscosidad del medio. El coeficiente de dispersión del dipolo está relacionado con el movimiento de la partícula en el medio. Cuando la partícula se mueve se genera una capa límite en la superficie de la partícula del orden de micrómetros. En esta capa límite los efectos viscoelásticos son predominantes, por lo que se considera en la ecuación de continuidad al término de difusión acoplada con la ecuación constitutiva de Maxwell y la ecuación constitutiva de Newton. Los campos de velocidad y de presión para la capa viscoelástica se denominan  $\underline{v}_{vb}$  y  $p_{vb}$ .

La estrategia de solución para obtener a  $f_2$  en función del tiempo de relajación y la viscosidad es la siguiente: el coeficiente de dispersión se encuentra en los campos de la onda incidente  $\underline{v}_{in}$  y  $p_{in}$ , mientras que debido a que la partícula se mueve con una velocidad  $\underline{v}_p$  se genera una capa límite viscoelástica cuyos campos de velocidad y de presión,  $\underline{v}_{vb}$  y  $p_{vb}$ , dependen de las propiedades del medio. Para relacionar al coeficiente  $f_2$  con las propiedades del material, viscosidad y tiempo de relajación, se debe de relacionar a la velocidad de la partícula con los campos de velocidad y presión de la onda incidente. Para una mayor claridad, se divide en tres relaciones principales al sistema.

Las tres relaciones principales son: 1) la relación entre los campos incidentes y los campos de la capa viscoelástica, esta relación viene dada por hacer una coincidencia asintótica entre las dos regiones; 2) la relación entre los campos viscoelásticos y la velocidad de la partícula, que vienen dados por las condiciones de frontera en la superficie de la partícula y por la segunda Ley de Newton; y 3) la relación entre la velocidad de la partícula y los campos incidentes de presión y velocidad del fluido. Como ya se mencionó, la tercera relación es la más importante, pues es a partir de ésta que se obtendrá la expresión matemática para  $f_2$ .

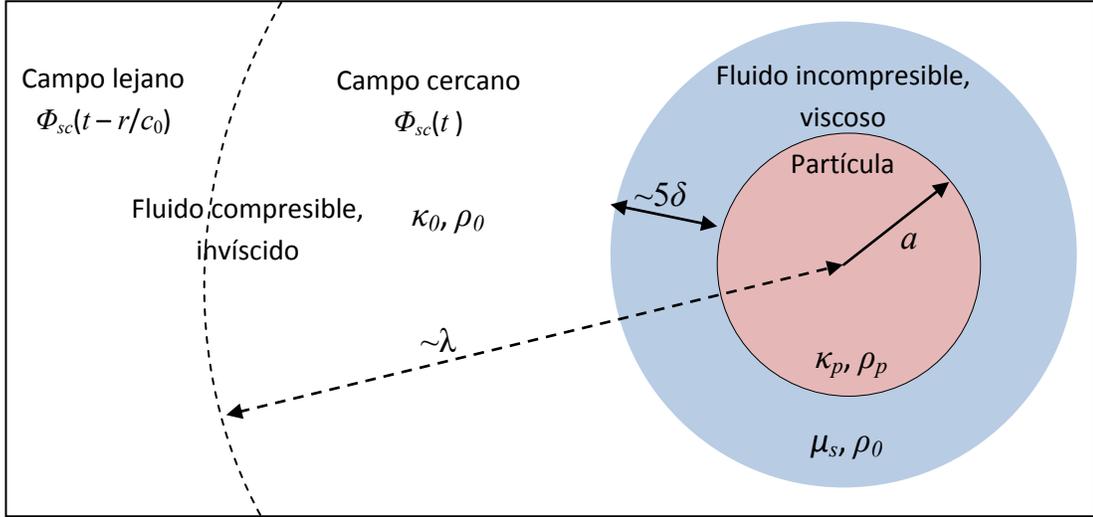


Fig 4.1. Se muestran las ecuaciones que describen a los campos de velocidad  $\underline{v}_{in}$ , y de presión  $p_{in}$ , para la onda incidente en el medio inviscido, a los campos de velocidad del fluido  $\underline{v}_{vb}$ , y de presión  $p_{vb}$ , en el medio viscoelástico y para la velocidad de la partícula  $\underline{v}_p$ .

Para obtener la relación entre los campos incidentes y viscoelásticos es necesario empalmar asintóticamente [12] al campo de velocidades en la capa viscoelástica  $\underline{v}_{vb}$ , con el campo de velocidades incidente y la parte del dipolo en la región de campo cercano. Así mismo, empalmar asintóticamente la presión en la capa viscoelástica  $p_{vb}$ , con la presión de la onda incidente más la parte del dipolo. Los campos de velocidad y de presión de la capa viscoelástica son igual a la suma de los campos de velocidad y de presión de la onda incidente, respectivamente, más una contribución por la parte del dipolo.

$$\underline{v}_{vb}(r, \theta) = \underline{v}_{in} + \nabla \phi_{dp} \quad (4.15)$$

$$p_{vb}(r, \theta) = p_{in} + i\rho_0 \omega \phi_{dp} \quad (4.16)$$

La escala de longitud se hace coincidir a los campos de velocidad y de presión a la distancia  $r = r^*$ , llenando  $a + 5\delta \leq r^* \ll \lambda$ . Las ecuaciones que relacionan a estos dos campos son,

$$v_r^{vb} = \underline{v}_{vb} \cdot \hat{e}_r(r = r^*, \theta) = \underline{v}_{in} \cdot \hat{e}_r + \partial_r \phi_{dp} \quad (4.17)$$

$$v_\theta^{vb} = \underline{v}_{vb} \cdot \hat{e}_\theta(r = r^*, \theta) = \underline{v}_{in} \cdot \hat{e}_\theta + \frac{1}{r} \partial_r \phi_{dp} \quad (4.18)$$

$$p_{vb}(r = r^*, \theta) = i\rho_0 \omega (\phi_{in} + \phi_{dp}) \quad (4.19)$$

La velocidad de la onda incidente y el potencial del dipolo en el campo cercano están definidos de la siguiente forma.

$$\underline{v}_{in} = v_{in} \underline{\hat{e}}_z = v_{in} \cos \theta \underline{\hat{e}}_r - v_{in} \sin \theta \underline{\hat{e}}_\theta \quad (4.20)$$

$$\phi_{dp}(r, \theta) = f_2 \frac{a^3}{2} v_{in} \frac{\cos \theta}{r^2} \quad (4.21)$$

Se sustituye (4.20) y (4.21) en las ecuaciones (4.17)-(4.19) resultando las siguientes expresiones.

$$v_r^{vb} = \left( 1 - f_2 \frac{a^3}{r^3} \right) v_{in} \cos \theta \quad (4.22)$$

$$v_\theta^{vb} = \left( 1 + \frac{f_2 a^3}{2 r^3} \right) v_{in} (-\sin \theta) \quad (4.23)$$

$$p_{vb} = i \rho_0 \omega \left( r + \frac{f_2 a^3}{2 r^2} \right) v_{in} \cos \theta \quad (4.24)$$

Estas tres ecuaciones relacionan a la velocidad y la presión del fluido para la onda incidente con los campos de velocidad y de presión para el medio viscoelástico.

Ahora bien, se continúa con obtener las ecuaciones que relacionan la velocidad de la partícula con  $\underline{v}_{vb}$  y  $p_{vb}$ . Esto se logra con la condición de frontera de no deslizamiento del fluido en la superficie de la partícula,  $r = a$ , y con la segunda Ley de Newton que explica la velocidad de la partícula debido a la suma de fuerzas que experimenta en su superficie.

$$\underline{v}_{ab} = \underline{v}_p \quad (4.25)$$

$$v_r^{vb} = \underline{v}_{ab} \cdot \underline{\hat{e}}_r(a, \theta) = v_p \cos \theta \quad (4.26)$$

$$v_\theta^{vb} = \underline{v}_{ab} \cdot \underline{\hat{e}}_\theta(a, \theta) = v_p (-\sin \theta) \quad (4.27)$$

La siguiente relación describe la fuerza neta que origina el movimiento de la partícula,  $F = \rho_p V_p a_p$ .

$$F = -i \frac{4}{3} \pi a^3 \rho_p \omega v_p \quad (4.28)$$

Las fuerzas que se aplican sobre la superficie de la partícula son debido a los esfuerzos viscoelásticos ejercidos por el fluido.

$$F = \int_{\partial V_p} \underline{n} \cdot \underline{\underline{\sigma}}_{ab} \cdot \underline{\hat{e}}_z da \quad (4.29)$$

El tensor de esfuerzos es,  $\underline{\underline{\sigma}} = -p\underline{I} + \underline{\underline{\tau}}$ , donde  $\underline{\underline{\tau}}$  es el tensor de esfuerzos total. El tensor de esfuerzos total es igual a la suma de los esfuerzos viscosos y la contribución de los esfuerzos viscoelásticos. La ec. (4.29) resulta en,

$$F = 2\pi a^2 \int_{-1}^1 [(-p_{vb} + \tau_{rr}^{vb})\cos\theta - \tau_{r\theta}^{vb} \sin\theta] d(\cos\theta) \quad (4.30)$$

Se igualan a (4.28) con (4.30), dejando una expresión matemática que relaciona a la velocidad de la partícula con los campos de velocidad y de presión en la región viscoelástica.

$$-i\frac{2}{3}a\rho_p\omega v_p = \int_{-1}^1 [(-p_{vb} + \tau_{rr}^{vb})\cos\theta - \tau_{r\theta}^{vb} \sin\theta] d(\cos\theta) \quad (4.31)$$

Donde  $p_{vb}$  está dada por la ec. (4.24). En la expresión (4.31) es notorio que existe una relación entre la velocidad de la partícula y la presión incidente. Las componentes del tensor de esfuerzos viscosos son:

$$\tau_{rr}^{vb} = 2\mu_{ve}\partial_r v_r^{vb} \quad (4.32)$$

$$\tau_{r\theta}^{vb} = \mu_{ve} \left[ \partial_r v_\theta^{vb} - \frac{1}{r} v_\theta^{vb} + \frac{1}{r} \partial_\theta v_r^{vb} \right] \quad (4.33)$$

donde

$$\mu_{ve} = \mu_s + \frac{\eta_0}{1 - i\omega\lambda} \quad (4.34)$$

Con la expresión de los esfuerzos se introduce la dependencia a la naturaleza del medio. Cabe recordar que en el presente trabajo el medio viscoelástico puede ser una solución de un polímero disuelto en un solvente de bajo peso molecular. La viscosidad del solvente está representada por  $\mu_s$  y el segundo término del lado derecho de (4.34) representa el comportamiento del polímero.

Las ecuaciones (4.26), (4.27) y (4.31) relacionan a la partícula con los campos de la región viscoelástica.

La relación que se busca es aquella entre la partícula y los campos de velocidad y de presión del líquido inviscido debido a la onda incidente, ya que a partir de esta relación se obtiene la expresión para  $f_2$ . Ya se encuentran indirectamente relacionadas la partícula y la onda incidente a través de los campos de velocidad y de presión de la región viscoelástica. Así entonces, es necesario conocer la expresión para  $v_{vb}$ .

Para saber la expresión analítica del campo de velocidades de la región viscoelástica  $\underline{v}_{vb}$ , se resuelve la ecuación de onda para un medio viscoelástico.

$$\partial_t^2 \underline{v}_{vb} = c_0^2 \left[ 1 + \frac{1}{\rho_0 c_0^2} \left( \mu_s + \frac{\eta_0}{1 - i\omega\lambda} \right) \partial_t \right] \nabla^2 \underline{v}_{vb} \quad (4.35)$$

Se considera una dependencia armónica respecto al tiempo para el campo vectorial  $\underline{v}_{vb}$ , lo que reduce a (4.35) en la siguiente expresión.

$$-\omega^2 \underline{v}_{vb} = \left[ c_0^2 - \frac{i\omega}{\rho_0} \left( \mu_s + \frac{\eta_0}{1 - i\omega\lambda} \right) \right] \nabla^2 \underline{v}_{vb} \quad (4.36)$$

La región viscoelástica se caracteriza por ser la región en donde se observan los efectos no-Newtonianos del medio viscoelástico, pero además porque es incompresible,  $\nabla \cdot \underline{v}_{vb} = 0$ . El fluido viscoelástico se toma como incompresible porque el tiempo que le toma a la onda acústica propagarse a través de la región viscoelástica es mucho menor que el periodo de oscilación,  $(a+\delta) \ll 1/\omega$  o  $(a+\delta) \ll \lambda$ . Se toma la divergencia de (2.25), esto lleva a que el Laplaciano de la presión sea cero,  $\nabla^2 p_{vb} = 0$ . Con esto en mente existen dos razones por las que se puede reducir (4.36) a la siguiente ecuación,

$$\underline{v}_{vb} = \frac{i}{\omega \rho_0} \left( \mu_s + \frac{\eta_0}{1 - i\omega\lambda} \right) \nabla^2 \underline{v}_{vb} \quad (4.37)$$

en (4.37) se eliminó  $c_0^2$  que está relacionado con el término del gradiente de presión. Las razones por las que el gradiente de la presión de la región viscoelástica se cancela son: en un sentido físico, porque la región viscoelástica es incompresible, y de acuerdo a la ecuación (2.26), el término que involucra a la presión es cero. La otra razón es en un sentido matemático, pues al calcular el rotacional de (2.25) se elimina el término del gradiente de presión, pues el rotacional de un potencial es cero. Reescribiendo a (4.37).

$$\left( \nabla^2 + q_{ve}^2 \right) \underline{v}_{vb} = 0 \quad (4.38)$$

donde

$$q_{ve}^2 = \frac{2i}{\delta_{ve}^2} \quad (4.39)$$

$$\delta_{ve}^2 = \delta^2 \left( 1 + \frac{\eta_0/\mu_s}{1 - i\omega\lambda} \right) \quad (4.40)$$

$$\delta = \left( \frac{2\nu_s}{\omega} \right)^{1/2} \quad (4.41)$$

La ec. (4.38) es la ecuación para la región viscoelástica.  $\nu_s$  es la viscosidad cinemática del solvente,  $\nu_s = \mu_s/\rho_0$ .  $\delta$  es el espesor de la capa límite viscosa (ó profundidad de penetración viscosa) que es la longitud de difusión del momentum [4].  $\delta_{ve}$  es el espesor de la capa límite viscoelástica, que es igual al espesor de la capa límite viscosa más un factor de corrección debido a la viscoelasticidad del medio.

De (4.38) se observa que  $q_{ve}$  es el número de onda para un medio viscoelástico. Es posible reescribir a  $q_{ve}$  en términos del modulo complejo  $G^*$ ,

$$q_{ve} = q_1 + iq_2 = \frac{\omega}{|G^*|} \sqrt{\rho_0 G^*} \quad (4.42)$$

donde  $G^* = G' + G''$  y  $|G^*| = (G'^2 + G''^2)^{1/2}$ .  $G'$  es el modulo de almacenamiento o modulo elástico, y  $G''$  es el modulo de pérdida o modulo viscoso, y están definidos de la siguiente manera,

$$G' = \frac{G_0 \omega^2 \lambda^2}{1 + \omega^2 \lambda^2} \quad (4.43)$$

$$G'' = \mu_s \omega + \frac{G_0 \omega \lambda}{1 + \omega^2 \lambda^2} \quad (4.44)$$

donde  $\eta_0 = G_0 \lambda$ . El número de onda viscoelástico  $q_{ve}$  está formado por una parte real  $q_1$ , y una imaginaria  $q_2$ . Esta parte real e imaginaria se expresan como sigue,

$$q_1 = \frac{\omega \sqrt{\rho_0}}{\sqrt{2} |G^*|} \left( \sqrt{G'^2 + G''^2} + G' \right)^{1/2} \quad (4.45)$$

$$q_2 = \frac{\omega \sqrt{\rho_0}}{\sqrt{2} |G^*|} \left( \sqrt{G'^2 + G''^2} - G' \right)^{1/2} \quad (4.46)$$

El número de onda  $q_{ve}$ , está definido como  $q_{ve} = \omega/V_{pw} + i\phi$ , donde  $V_{pw}$  es la velocidad de propagación de la onda en el medio y  $\phi$  es la atenuación de la onda. Se realiza un pequeño análisis del comportamiento de  $q_{ve}$ .

Si  $G' \rightarrow G_0$  y  $G'' \rightarrow 0$ , las expresiones para  $q_1$  y  $q_2$  son,

$$q_{ve} = q_1 + iq_2 = \omega \sqrt{\frac{\rho_0}{G_0}} \quad (4.47)$$

la velocidad de propagación de la onda y la atenuación para este límite es,

$$V_{pw} = \sqrt{\frac{G_0}{\rho_0}} \text{ y } \phi = 0 \quad (4.48)$$

La velocidad de propagación es igual a la velocidad longitudinal de propagación para una onda que viaja por un sólido elástico. Mientras que la disipación por el medio es nula. Efectivamente, al considerar que el medio viscoelástico tiende al límite elástico, los resultados de la velocidad de propagación de la onda y la atenuación tienden a los valores para un sólido elástico (4.48).

Ahora se estudia el límite cuando el medio viscoelástico tiende a un líquido Newtoniano. En este límite,  $G' \rightarrow 0$  y  $G'' \rightarrow \eta_0\omega$ . Las expresiones para  $q_1$  y  $q_2$  se reducen a,

$$q_{ve} = q_1 + iq_2 = \frac{1+i}{\delta} \quad (4.49)$$

donde  $\delta$  es el espesor de la capa límite viscosa, definido en (4.41). La ec. (4.49) es idéntica a la ec. (33) obtenida por Bruus [4]. La velocidad de propagación y atenuación de la onda son,

$$V_{pw} = \sqrt{2\nu_0\omega} \quad \text{y} \quad \phi = \sqrt{\frac{\rho_0\omega}{2\eta_0}} \quad (4.50)$$

La atenuación de la onda es igual al inverso del espesor de la capa límite viscosa (4.41).

A continuación se obtiene la expresión analítica para el campo de velocidades en la capa límite viscoelástica. Debido a la simetría azimutal del problema, es posible reescribir a  $\underline{v}_{vb}$  en términos de la función corriente  $\Psi(r, \theta)$ .

$$\underline{v}_{vb}(r, \theta) = \nabla \times [\Psi(r, \theta)\underline{\hat{e}}_\phi] = \frac{\partial_\theta(\Psi \sin \theta)}{r \sin \theta} \underline{\hat{e}}_r - \frac{\partial_r(r\Psi)}{r} \underline{\hat{e}}_\theta \quad (4.51)$$

Se sustituye (4.43) en (4.39) y se le aplica el rotacional. Para la función corriente,  $\nabla \times [\nabla \times (\Psi \underline{\hat{e}}_\phi)] = -\nabla^2(\Psi \underline{\hat{e}}_\phi)$ .

$$\nabla^2(\nabla^2 + q_{ve}^2)[\Psi(r, \theta)\underline{\hat{e}}_\phi] = 0 \quad (4.52)$$

Otra forma de obtener la ec. (4.52) es aplicando el rotacional a  $i\rho_0\omega\underline{v}_{vb} = \mu_{ve}\nabla^2\underline{v}_{vb}$ , que es la ec. (2.25) cuando se ha eliminado el gradiente de presión.  $\mu_{ve}$  está dada por (4.34).

La solución de (4.52) puede encontrarse proponiendo una solución de la forma  $\Psi = \Psi_1 + \Psi_2$ .

$$\nabla^2(\nabla^2 + q_{ve}^2)[(\Psi_1 + \Psi_2)\underline{\hat{e}}_\phi] = 0 \quad (4.53)$$

Si  $\Psi_1$  y  $\Psi_2$  cumple con las siguientes condiciones,

$$\nabla^2(\Psi_1 \underline{\hat{e}}_\phi) = 0 \quad (4.54)$$

$$(\nabla^2 + q^2)(\Psi_2 \underline{e}_\phi) = 0 \quad (4.55)$$

Entonces para cualquier función  $\Psi(r, \theta)$  se obtiene  $\nabla^2[\Psi(r, \theta)\underline{e}_\phi] = [\nabla^2\Psi - \Psi/(r\sin\theta)^2]\underline{e}_\phi$ . Las ecs. (4.54) y (4.55) se expresan de la siguiente manera.

$$\nabla^2\Psi_1 - \frac{\Psi_1}{r^2 \sin^2 \theta} = 0 \quad (4.56)$$

$$\nabla^2\Psi_2 - \frac{\Psi_2}{r^2 \sin^2 \theta} = -q^2\Psi_2 \quad (4.57)$$

Se resuelve (4.56) y (4.57) por el método de variables separables. Se propone la solución de la forma  $R(r)\Theta(\theta)$  tanto para  $\Psi_1$  como para  $\Psi_2$ . Al sustituir la solución propuesta en (4.56), resultan dos ecuaciones diferenciales independientes: una ecuación contempla la parte radial mientras que la otra ecuación es exclusiva para la parte angular. Las dos ecuaciones son las siguientes.

$$r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} + 2r \frac{dR}{dr} - \alpha R = 0 \quad (4.58)$$

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) - \frac{\Theta}{\sin^2 \theta} + \alpha \Theta = 0 \quad (4.59)$$

En la parte angular (4.59), se propone la siguiente solución:  $\Theta(\theta) = \sin^n \theta$ , donde  $n$  es un parámetro por determinar. Se sustituye la solución propuesta en (4.59) y resulta,

$$(n^2 - 1)\sin^{n-2} \theta + (\alpha - n^2 - n)\sin^n \theta = 0 \quad (4.60)$$

para que se cumpla la igualdad, entonces debe cumplirse que,

$$n^2 - 1 = 0 \quad (4.61)$$

$$\alpha - n^2 - n = 0 \quad (4.62)$$

De la primera igualdad, la raíz que tiene significado físico es  $n = 1$ . A partir de (4.62) se obtiene  $\alpha = n(n+1)$ , que es el valor del parámetro que resulta de la solución de la ecuación diferencial de Legendre. Ahora bien, en los polinomios de Legendre, el valor de  $n$  para el dipolo es 1, que es la solución obtenida en (4.61). Si el segundo término de (4.59) es igual a cero, después de modificar

con cambios de variables a la ecuación resultante se obtiene la ecuación diferencial de Legendre y como solución los polinomios de Legendre.

En el caso de la parte radial, la ec. (4.58) es la ecuación de Euler-Cauchy. Al sustituir el valor de  $\alpha$  que se obtuvo de la solución de la parte angular,  $\alpha = n(n+1)$ , la solución general de (4.58) es,

$$R(r) = A_1 r^n + A_2 r^{-(n+1)} \quad (4.63)$$

de la información que se obtuvo de (4.61), se sabe que para el dipolo  $n = 1$ . La solución de  $\Psi_1$  es entonces,

$$\Psi_1(r, \theta) = \left( A_1 r + A_2 \frac{1}{r^2} \right) \sin \theta \quad (4.64)$$

En tanto que al sustituir  $\Psi_2 = R(r)\Theta(\theta)$  en (4.57), surgen dos ecuaciones diferenciales, una para la parte radial y otra para la parte angular. La ecuación diferencial para el ángulo es idéntica a (4.59), por lo que sólo se detalla la solución para la parte radial. Al manipular la ecuación dependiente del radio, la ecuación resultante es,

$$\bar{r}^2 Z'' + \bar{r} Z' + \left[ \bar{r}^{-2} - \left( n + \frac{1}{2} \right)^2 \right] Z = 0 \quad (4.65)$$

donde  $R(r) = r^{-1/2} Z(\bar{r})$ , y  $\bar{r} = q_{ve} r$ . La solución de (4.65) para  $R$  es,

$$R = B_1 \frac{1}{\sqrt{q_{ve} r}} J_{n+\frac{1}{2}}(q_{ve} r) \quad (4.66)$$

Nótese que únicamente se utiliza la función  $J$  para la solución de  $R$ , pues es ésta la que es finita en el origen. Se puede escribir a  $R$  en términos de la función de Bessel esférica, y ésta a su vez en términos de la función esférica de Hankel.

$$R = B_1 h_n^{(1)}(q_{ve} r) \quad (4.67)$$

Para el dipolo,  $n = 1$ . Se considera la condición de frontera para la función de Hankel, lo que lleva a la solución para  $\Psi_2$ .

$$\Psi_2(r, \theta) = B h_1^1(q_{ve} r) a v_{in} \sin \theta \quad (4.68)$$

Donde  $h_1^1(s) = -e^{is}(s + i)/s^2$  es la función esférica de Hankel de primera especie de orden 1 para una onda dispersada. Toda la información sobre la viscoelásticidad se encuentra en el parámetro  $q_{ve}$ , y por lo tanto  $h_1^1(q_{ve}r) \propto e^{iqr} \propto e^{-r/\delta}$ , decae exponencialmente como el inverso de  $\delta_{ve}$ , es decir la onda dispersada se va atenuando debido a la viscoelásticidad del medio.

Antes de obtener la forma explícita de la función corriente  $\Psi$ , es necesario obtener las constantes  $A_1$  y  $A_2$  de (4.64). Estas constantes se obtienen al empalmar asintóticamente  $\Psi_1$  con las condiciones de (4.22) y (4.23), esto es  $\underline{v}_{vb}(r \approx r^*, \theta) = \nabla \times [\Psi_1 \underline{e}_\theta]$ . Se contrae la ec. (4.51) para  $\Psi_1$ , y se iguala a las condiciones para  $\underline{v}_{vb}$ .

$$\left(1 - f_2 \frac{a^3}{r^3}\right) v_{in} \cos \theta = 2 \left(A_1 + \frac{A_2}{r^3}\right) \cos \theta \quad (4.69)$$

$$\left(1 + \frac{f_2 a^3}{2 r^3}\right) v_{in} (-\sin \theta) = \left(2A_1 - \frac{A_2}{r^3}\right) (-\sin \theta) \quad (4.70)$$

Del sistema de ecuaciones algebraico previo se obtienen las expresiones para  $A_1$  y  $A_2$ .

$$A_1 = \frac{1}{2} v_{in} \quad (4.71)$$

$$A_2 = -\frac{a^3}{2} f_2 v_{in} \quad (4.72)$$

Es en la constante  $A_2$  donde se encuentra la información de la dispersión de la onda, en el coeficiente de dispersión  $f_2$ . Se sustituyen los valores de las constantes en  $\Psi_1$ , (4.64).

$$\Psi_1(r, \theta) = \left[ \frac{1}{2} r - \frac{f_2 a^3}{2 r^2} \right] v_{in} \sin \theta \quad (4.73)$$

Se combina este resultado con la expresión para  $\Psi_2$  (4.68),  $\underline{v}_{ab} = \nabla \times [(\Psi_1 + \Psi_2) \underline{e}_\theta]$ ,

$$v_r^{vb} = \left[ 1 - f_2 \frac{a^3}{r^3} + 2q_{ve} a B \left( \frac{h_1^1(s)}{s} \right) \right]_{q_{ve}r} v_{in} \cos \theta \quad (4.74)$$

$$v_\theta^{vb} = \left[ 1 + \frac{f_2 a^3}{2 r^3} + q_{ve} a B \left( \frac{sh_0^1(s) - h_1^1(s)}{s} \right) \right]_{q_{ve}r} v_{in} (-\sin \theta) \quad (4.75)$$

donde con  $h_0^1(s) = -(i/s)e^{is}$ . Con la expresión para el vector velocidad de la región viscoelástica,  $\underline{v}_{ab}$ , es posible obtener las componentes del tensor viscoelástico, (4.32) y (4.33).

$$\tau_{rr}^{vb} = 2\mu_{ve} \left[ 3f_2 \frac{a^3}{r^4} + 2q_{ve}^2 aB \left( \frac{sh_0^1(s) - 3h_1^1(s)}{s^2} \right) \right]_{q_{ve}r} \Big| v_{in} \cos \theta \quad (4.76)$$

$$\tau_{r\theta}^{vb} = \mu_{ve} \left\{ -3f_2 \frac{a^3}{r^4} + q_{ve}^2 aB \left[ \frac{6h_1^1(s) - s^2 h_1^1(s) - 2sh_0^1(s)}{s^2} \right] \right\}_{q_{ve}r} \Big| v_{in} (-\sin \theta) \quad (4.77)$$

Las expresiones para las componentes del tensor de esfuerzos se sustituyen junto con la expresión para la presión viscoelástica (4.24) en (4.31). Debido a que la fuerza se aplica en la superficie de la partícula, no existe dependencia respecto al radio y todas las expresiones que se van a sustituir en (4.31) se evalúan en  $r = a$ .

$$\begin{aligned} -i \frac{2}{3} \rho_p \omega v_p &= \int_{-1}^1 \left\{ \left( -i \rho_0 \omega \left( 1 + \frac{f_2}{2} \right) + 2 \frac{\mu_{ve}}{a^2} \left[ 3f_2 + 2B \left( sh_0^1(s) - 3h_1^1(s) \right) \right]_{q_{ve}a} \right) v_{in} \cos^2 \theta \right. \\ &\quad \left. + \frac{\mu_{ve}}{a^2} \left( -3f_2 + B \left[ 6h_1^1(s) - s^2 h_1^1(s) - 2sh_0^1(s) \right]_{q_{ve}a} \right) v_{in} \sin^2 \theta \right\} d(\cos \theta) \end{aligned} \quad (4.78)$$

Se integra la ecuación anterior y se cancelan términos.

$$\bar{\rho} v_p = \left[ 1 + \frac{f_2}{2} - i \frac{2\mu_{ve}}{\rho_0 \omega} q_{ve}^2 B \left[ h_1^1(s) \right]_{q_{ve}a} \right] v_{in} \quad (4.79)$$

El tercer término en los corchetes es igual a 1, reduciendo (4.79) a,

$$\bar{\rho} v_p = \left[ 1 + \frac{1}{2} f_2 + B h_1^1(s) \right]_{q_{ve}a} \Big| v_{in} \quad (4.80)$$

La ec. (4.80) relaciona la velocidad de la partícula con la velocidad del campo incidente. Se tienen 3 incógnitas:  $f_2$ ,  $v_p$  y  $B$ , y una sola ecuación (4.80). Las otras dos ecuaciones que relacionan a la partícula con la onda incidente se obtienen con la condición de frontera de no deslizamiento en la superficie de la partícula. Se iguala (4.26) y (4.27) con (4.74) y (4.75), respectivamente.

$$v_p = \left[ 1 - f_2 + 2B h_1^1(s) \right]_{q_{ve}a} \Big| v_{in} \quad (4.81)$$

$$v_p = \left[ 1 + \frac{1}{2} f_2 + B \left( sh_0^1(s) - h_1^1(s) \right) \right]_{q_{ve}a} \Big| v_{in} \quad (4.82)$$

Las ecs. (4.80), (4.81) y (4.82) son las ecuaciones que relacionan a la partícula con la onda incidente. En este sistema de ecuaciones están involucradas la velocidad de la partícula, las propiedades viscoelásticas del medio, la dispersión de la onda incidente debido a la partícula y la velocidad del fluido debido a las perturbaciones de la onda acústica. Así pues, es posible encontrar

una expresión para el coeficiente del dipolo  $f_2$  que considere la naturaleza del medio. El sistema de ecuaciones es el siguiente,

$$v_p = \left[ 1 - f_2 + 2Bh_1^1(s) \right]_{q_{ve}a} v_{in} \quad (4.83)$$

$$v_p = \left[ 1 + \frac{1}{2}f_2 + B(s h_0^1(s) - h_1^1(s)) \right]_{q_{ve}a} v_{in} \quad (4.84)$$

$$\bar{\rho}v_p = \left[ 1 + \frac{1}{2}f_2 + Bh_1^1(s) \right]_{q_{ve}a} v_{in} \quad (4.85)$$

Se iguala (4.83) con (4.84) para obtener la definición de  $B$ .

$$B = \frac{\frac{3}{2}f_2}{3h_1^1(s) - s h_0^1(s)} \quad (4.86)$$

$h_0^1(s)$  es la función esférica de Hankel de primer tipo de orden cero. Se iguala (4.83) con (4.85) y se sustituye la definición de  $B$ . Después de un tratamiento a la ecuación, se obtiene la expresión para el coeficiente de dispersión del dipolo  $f_2$ , en función de la viscoelasticidad del medio,

$$f_2(\bar{\rho}, \delta_{ve}) = \frac{2(\bar{\rho} - 1)[1 - \gamma(\delta_{ve})]}{(1 + 2\bar{\rho}) - 3\gamma(\delta_{ve})} \quad (4.87)$$

donde  $\gamma$  es una variable adimensional dependiente de la viscoelasticidad, definida como,

$$\gamma(\delta_{ve}) = \frac{3h_1^1(q_{ve}a)}{q_{ve}a h_0^1(q_{ve}a)} = -\frac{3}{2} \left[ \frac{\delta_{ve}}{a} (1 + i) + i \frac{\delta_{ve}^2}{a^2} \right] \quad (4.88)$$

$\delta_{ve}$  está dada por (4.40). Ya que  $\gamma$  es un número complejo,  $f_2$  tiene una parte real y una imaginaria. Se desea tener explícitamente la parte real e imaginaria del coeficiente de dispersión del dipolo, para esto es necesario obtener a  $\delta_{ve}$  lineal.

Para obtener la raíz cuadrada de un número complejo se utiliza la siguiente expresión,

$$(a \pm ib)^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \sqrt{r+a} \pm i\sqrt{r-a} \right] \quad (4.89)$$

donde  $r$  es el modulo y se define como  $r^2 = a^2 + b^2$ .  $\delta_{ve}$  es igual a,

$$\delta_{ve} = \delta(b + ic) \quad (4.90)$$

donde

$$b = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \sqrt{\left(1 + \frac{\eta_0/\mu_s}{1 + \omega^2 \lambda^2}\right)^2 + \frac{\eta_0^2/\mu_s^2 \omega^2 \lambda^2}{(1 + \omega^2 \lambda^2)^2}} + 1 + \frac{\eta_0/\mu_s}{1 + \omega^2 \lambda^2} \right)^{1/2} \quad (4.91)$$

$$c = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \sqrt{\left(1 + \frac{\eta_0/\mu_s}{1 + \omega^2 \lambda^2}\right)^2 + \frac{\eta_0^2/\mu_s^2 \omega^2 \lambda^2}{(1 + \omega^2 \lambda^2)^2}} - 1 - \frac{\eta_0/\mu_s}{1 + \omega^2 \lambda^2} \right)^{1/2} \quad (4.92)$$

Se sustituye (4.40) y (4.90) en la expresión para  $\gamma$  (4.88), resultando la siguiente expresión,

$$\gamma = d - ie \quad (4.93)$$

donde

$$d = \frac{3}{2} \left[ \frac{\delta}{a} (c - b) + \frac{\delta^2}{a^2} \frac{\eta_0/\mu_s \omega \lambda}{1 + \omega^2 \lambda^2} \right] \quad (4.94)$$

$$e = \frac{3}{2} \left[ \frac{\delta}{a} (b + c) + \frac{\delta^2}{a^2} \left( 1 + \frac{\eta_0/\mu_s}{1 + \omega^2 \lambda^2} \right) \right] \quad (4.95)$$

Se sustituye (4.93) en la expresión para el coeficiente del dipolo  $f_2$  (4.87).

$$f_2 = \frac{2(\bar{\rho} - 1) \left\{ [(1-d)(2\bar{\rho} + 1 - 3d) + 3e^2] + i2e(\bar{\rho} - 1) \right\}}{(2\bar{\rho} + 1 - 3d)^2 + 9e^2} \quad (4.96)$$

Al considerar al medio viscoelástico para obtener el coeficiente del dipolo,  $f_2$  se transforma en número complejo. La parte real e imaginaria para  $f_2$  son de la siguiente forma.

$$f_2^r = \frac{2(\bar{\rho} - 1) [(1-d)(2\bar{\rho} + 1 - 3d) + 3e^2]}{(2\bar{\rho} + 1 - 3d)^2 + 9e^2} \quad (4.97)$$

$$f_2^i = \frac{4e(\bar{\rho} - 1)^2}{(2\bar{\rho} + 1 - 3d)^2 + 9e^2} \quad (4.98)$$

Cuando  $\eta_0 = 0$ , esto es cuando se pierde el carácter viscoelástico del medio, la ec. (4.40) se reduce a  $\delta_{ve} = \delta$ . La ecuación para  $\gamma$  (4.88) se transforma en,

$$\gamma(\delta) = -\frac{3}{2} \left[ \frac{\delta}{a} (1+i) + i \frac{\delta^2}{a^2} \right] \quad (4.99)$$

se recupera la ec. (38) del artículo de Bruus [4] para el medio viscoso. El coeficiente  $f_2$  es,

$$f_2(\bar{\rho}, \delta) = \frac{2(\bar{\rho} - 1) [1 - \gamma(\delta)]}{(1 + 2\bar{\rho}) - 3\gamma(\delta)} \quad (4.100)$$

donde  $\delta$  es el espesor de la capa límite viscosa y está definido en (4.41). Las expresiones para la parte real e imaginaria de  $f_2$  son,

$$f_2^r = \frac{2(\bar{\rho}-1)\left[\left(1+\frac{3}{2}\bar{\delta}\right)(2\bar{\rho}+1+\frac{9}{2}\bar{\delta})+\frac{27}{4}\bar{\delta}^2(\bar{\delta}+1)^2\right]}{(2\bar{\rho}+1)^2+9(2\bar{\rho}+1)\bar{\delta}+\frac{81}{2}(\bar{\delta}^2+\bar{\delta}^3+\frac{1}{2}\bar{\delta}^4)} \quad (4.101)$$

$$f_2^r = \frac{6\bar{\delta}(\bar{\delta}+1)(\bar{\rho}-1)^2}{(2\bar{\rho}+1)^2+9(2\bar{\rho}+1)\bar{\delta}+\frac{81}{2}(\bar{\delta}^2+\bar{\delta}^3+\frac{1}{2}\bar{\delta}^4)} \quad (4.102)$$

donde  $\bar{\delta} = \delta/a$ . La ec. (4.102) es la misma que obtiene Bruus en su artículo, ec. (45) [4]. Esto verifica que al eliminar el carácter viscoelástico de las ecuaciones que se han obtenido se recuperan las ecuaciones para el medio viscoso.

Ahora bien, si  $\eta_0 = \mu_s = 0$ , es decir para un medio invíscido, la expresión para el coeficiente de dispersión del dipolo  $f_2$  se reduce.

$$f_2 = \frac{2(\bar{\rho}-1)}{(2\bar{\rho}+1)} \quad (4.103)$$

La ec. (4.103) es la expresión para el coeficiente del dipolo que obtiene Gor'kov [3] para un medio invíscido.

### 4.3 Velocidad de las partículas en un medio viscoelástico

Cuando una partícula se encuentra suspendida en un medio y es sometida a un campo acústico, experimenta un movimiento translacional debido a la interacción con la onda acústica. A este fenómeno se le conoce como "acoustic streaming", el cual es el movimiento de partículas, células o el flujo de fluidos debido a una fuente acústica.

La aceleración de la partícula resulta de la suma de todas las fuerzas que se aplican a la partícula. Se realiza un balance de fuerzas sobre la partícula para obtener el perfil de velocidades de ésta.

$$\underline{F}_{neta} = \rho_p V_p \partial_t \underline{v}_p = \underline{F}^{rad} + \underline{F}_D \quad (4.104)$$

Las fuerzas de interés son la fuerza de radiación acústica y la fuerza de arrastre. El tiempo característico de aceleración  $\tau \sim \rho_p a^2 / \mu < 1\mu s$  es pequeño frente a la escala de tiempo del movimiento de las partículas ( $> 1ms$ ), por lo que los efectos inerciales pueden despreciarse. La ec. (4.104) se reduce a la siguiente expresión.

$$\underline{F}^{rad} + 6\pi\eta_0 a \underline{v}_p = 0 \quad (4.105)$$

En (4.105) se sustituye en  $\underline{E}_D$  la Ley de Stokes, al considerarse que el fenómeno de acoustic streaming no contribuye en gran manera al movimiento de las partículas (véase la sección 3.2.4). Se despeja la velocidad de la partícula de (4.105).

$$\underline{v}_p = \frac{\underline{F}^{rad}}{6\pi a \eta_0} \quad (4.106)$$

La fuerza de radiación surge como consecuencia de la interacción entre la onda acústica y la partícula. En el caso de una onda viajera, la fuerza de radiación está definida como sigue,

$$\underline{F}^{rad} = \frac{4\pi}{3} a^3 \left[ \text{Im}[f_1] \frac{\kappa_0}{2} \langle p_{in}^2 \rangle + \text{Im}[f_2] \frac{3\rho_0}{4} \langle v_{in}^2 \rangle \right] \underline{k} \quad (4.107)$$

El coeficiente de dispersión del monopolo es un valor real (4.14), así que  $\text{Im}[f_1] = 0$ ,

$$\underline{F}^{rad} = f_2^i \pi a^3 \rho_0 \langle v_{in}^2 \rangle \underline{k} \quad (4.108)$$

donde  $f_2^i$  está dado por (4.98). En el caso de una onda plana viajera con  $\underline{k} = k\hat{e}_z$  y  $\underline{v}_{in} = v_0 \exp i(kz - \omega t)$ . Para este caso la densidad de energía acústica  $E_{ac}$  de la onda es  $E_{ac} = (\kappa_0 v_0^2)/2$ . La velocidad de la partícula (4.106) en dirección  $z$  es,

$$v_z^p = \frac{a^2 k f_2^i E_{ac}}{6\eta_0} \quad (4.109)$$

# Capítulo 5. Resultados

En el presente capítulo se detallan los experimentos realizados en la investigación. Este capítulo se compone de dos secciones, en la primera se habla sobre los resultados experimentales, y en la segunda sección se tratan a los resultados teóricos.

En el caso de los resultados experimentales, se obtiene el radio de los anillos nodales y se comparan con los radios que predice la teoría de Gor'kov [3]. Ahora bien, en el caso de los resultados teóricos se muestran las gráficas para la parte real e imaginaria del coeficiente de dispersión del dipolo en función del espesor de la capa límite viscosa  $\delta$ , de la frecuencia  $\omega$  y del modulo elástico  $G_0$ . En este mismo apartado, se presentan gráficas para la velocidad de las partículas cuando el medio en el que se encuentran suspendidas las partículas es un medio viscoelástico.

## 5.1 Resultados experimentales

Se realizaron los experimentos para el caso de que las partículas están disueltas en un medio invíscido, es decir, la viscosidad del medio se considera despreciable, y el efecto de ésta sobre las partículas se considera nulo.

Estos experimentos se realizaron con el objeto de comparar los resultados experimentales frente a los resultados obtenidos por la teoría. En el caso invíscido, el interés se encuentra en saber la distancia a la cual se forman los anillos concéntricos y saber que nodo es el que se está excitando.

### 5.1.1 Equipo

El equipo que se utilizó para realizar los experimentos, se instaló de la siguiente manera: se colocó una placa de aluminio en forma circular de 14 cm de diámetro y 2 mm de espesor, sobre un transductor piezoeléctrico. Este conjunto se colocó en un apoyo para minimizar las pérdidas por vibraciones del soporte. El transductor se conectó a un generador de ondas ultrasónicas marca El Águila, serie 044-G. Este equipo consta con la amplitud fija, y es posible variar la frecuencia. Por último, se conectó a un medidor de onda plana marca Tektronix, serie TDS1012 C-EDU. Todos los equipos fueron calibrados.



Fig. 5.1. Se muestra el montaje del equipo que se utilizó para realizar los experimentos.

### 5.1.2 Medición de los radios experimentales

Se realizaron 11 experimentos, en los cuales se mantuvo constante la amplitud, y se varió la frecuencia de la onda acústica. Los experimentos se llevaron a cabo de la siguiente forma: sobre la placa de aluminio se colocó aleatoriamente una concentración de partículas. Después se accionaba el ultrasonido. Por último se tomaron fotos a las partículas cuando se observa la formación de los anillos concéntricos. Las fotografías se tomaron con una cámara de alta resolución marca Nixon. La formación de los patrones era inmediata. El rango de la frecuencia que se utilizó en los experimentos se encuentra entre los 6 kHz y los 87 kHz,  $6 \text{ kHz} < f < 87 \text{ kHz}$ .

A continuación se muestra una fotografía de los experimentos realizados.



Fig 5.2. Se muestra una fotografía tomada a los anillos nodales que se forman a la frecuencia de 7.56 kHz.

En general, se tomaron de 5 a 6 fotografías por cada experimento. Cada fotografía de cada uno de los experimentos, se analizó con un programa de cómputo. Este programa permite dibujar círculos de diámetro conocido. Así que, teniendo la imagen de los anillos nodales, se dibujan círculos de diámetro conocido y se hacen coincidir con los anillos nodales de las imágenes. De esta forma se obtienen los valores experimentales de los radios nodales. Éstos se presentan en la Tabla 5.1

### 5.1.3 Cálculo de los radios teóricos

Los radios teóricos de los anillos nodales se obtienen a partir de la teoría de la fuerza de radiación. Esta teoría fue generalizada por Gor'kov [3], y Bruus [10] en su artículo detalla el procedimiento llevado a cabo para obtener la expresión de la fuerza de radiación acústica.

Para obtener el valor teórico del radio del anillo nodal se emplea la ec. (3.21). De acuerdo a los experimentos no se observa algún diámetro nodal formado, así que  $m = 0$ . El radio nodal teórico es el valor del radio que corresponde a la fuerza (3.21) igual a cero. Así que se calculó la fuerza de radiación acústica para diferentes valores de  $n$ , donde  $n$  es el número de anillos nodales. Una vez teniendo los valores de los radios teóricos para cada experimento, se conoce el número de anillos nodales que según la teoría se deben de formar.

A continuación se muestra una tabla con los valores de los radios nodales recolectados en los experimentos y obtenidos a partir de la teoría de la fuerza de radiación acústica cuando las partículas se encuentran en un medio invíscido.

Tabla 5.1. Muestra el radio del anillo nodal obtenido a través de los experimentos frente al radio del anillo nodal obtenido por la teoría.

<b>Experimento 1</b>	<b><math>r_{exp}</math> (cm)</b>	<b><math>r_{teo}</math> (cm)</b>	<b>Error</b>
<b>Frecuencia = 6.56 kHz</b>	5.06	4.989	1.42
<b>Nodo excitado = 5</b>	6.47	6.327	2.26
<b>Experimento 2</b>	<b><math>r_{exp}</math> (cm)</b>	<b><math>r_{teo}</math> (cm)</b>	<b>Error</b>
<b>Frecuencia = 7.26 kHz</b>	3.00	3.062	2.02
<b>Nodo excitado = 6</b>	3.92	4.189	6.42
	5.37	5.313	1.07
	6.46	6.436	0.37
<b>Experimento 3</b>	<b><math>r_{exp}</math> (cm)</b>	<b><math>r_{teo}</math> (cm)</b>	<b>Error</b>
<b>Frecuencia = 7.56 kHz</b>	4.07	4.189	2.84
<b>Nodo excitado = 6</b>	5.42	5.313	2.01
	6.53	6.436	1.46
<b>Experimento 4</b>	<b><math>r_{exp}</math> (cm)</b>	<b><math>r_{teo}</math> (cm)</b>	<b>Error</b>
<b>Frecuencia = 9.50 kHz</b>	3.06	3.610	15.23
<b>Nodo excitado = 7</b>	4.64	4.572	1.48
	5.75	5.546	3.67
	6.62	6.514	1.62
<b>Experimento 5</b>	<b><math>r_{exp}</math> (cm)</b>	<b><math>r_{teo}</math> (cm)</b>	<b>Error</b>
<b>Frecuencia = 16.26 kHz</b>	2.79	2.30	21.30
<b>Nodo excitado = 5</b>	4.93	4.989	1.18
	6.51	6.327	2.89
<b>Experimento 6</b>	<b><math>r_{exp}</math> (cm)</b>	<b><math>r_{teo}</math> (cm)</b>	<b>Error</b>
<b>Frecuencia = 22.3 kHz</b>	4.24	4.189	1.21
<b>Nodo excitado = 6</b>	5.37	5.313	1.07
	6.56	6.436	1.92
<b>Experimento 7</b>	<b><math>r_{exp}</math> (cm)</b>	<b><math>r_{teo}</math> (cm)</b>	<b>Error</b>

Frecuencia = 40 kHz	4.11	4.023	2.16
Nodo excitado = 8	4.69	4.873	3.75
	5.59	5.724	2.34
	6.51	6.573	0.95
<b>Experimento 8</b>	<b><math>r_{exp}</math> (cm)</b>	<b><math>r_{teo}</math> (cm)</b>	<b>Error</b>
Frecuencia = 49.59 kHz	5.90	5.973	1.22
Nodo excitado = 10	6.60	6.656	0.84
<b>Experimento 9</b>	<b><math>r_{exp}</math> (cm)</b>	<b><math>r_{teo}</math> (cm)</b>	<b>Error</b>
Frecuencia = 72 kHz	3.72	3.646	2.02
Nodo excitado = 5	5.20	4.989	4.22
	6.42	6.327	1.46
<b>Experimento 10</b>	<b><math>r_{exp}</math> (cm)</b>	<b><math>r_{teo}</math> (cm)</b>	<b>Error</b>
Frecuencia = 77.96 kHz	4.90	4.818	1.70
Nodo excitado = 11	5.50	5.442	1.06
	6.19	6.065	2.06
	6.70	6.688	0.18
<b>Experimento 11</b>	<b><math>r_{exp}</math> (cm)</b>	<b><math>r_{teo}</math> (cm)</b>	<b>Error</b>
Frecuencia = 87 kHz	3.77	3.588	5.07
Nodo excitado = 9	5.09	5.104	0.27
	6.05	5.863	3.18
	6.65	6.62	0.45

A continuación se presenta una gráfica con los anillos experimentales y teóricos.

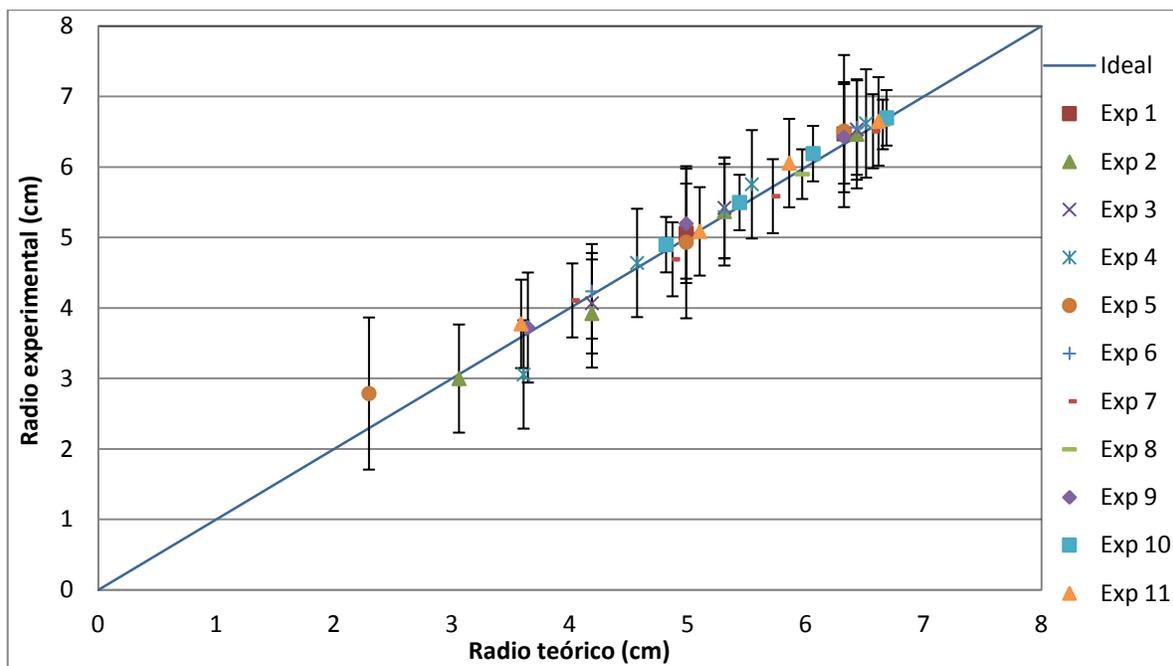


Fig. 5.3. Muestra la correlación entre el radio teórico y el radio experimental de la placa. La línea recta es una correlación de 1 a 1, es decir, donde los resultados teóricos coinciden perfectamente con los datos experimentales. El radio de la placa mide 7 cm, y el origen del sistema coordenado se hace coincidir con el centro de la placa.

De la Tabla 5.1 y la Fig. 5.3, es posible obtener la siguiente información. De la Tabla 5.1 se aprecia que en general los anillos nodales más alejados del eje axial, es decir los anillos más cercanos a  $r = a = 7 \text{ cm}$ , son los que muestran una menor diferencia entre ellos o son los que se encuentran más cercanos a la correlación ideal, mientras que los anillos nodales más cercanos al origen,  $r = 0$ , muestran la mayor diferencia en cuanto a la correlación de 1:1.

En general los experimentos con una correlación más cercana a la ideal para el anillo nodal interno son los experimentos 1, 6, 8, 9 y 10, y los experimentos con la mayor diferencia son: 4, 5 y 11. Para el anillo externo, los experimentos con una diferencia menor entre sus valores son 2, 10 y 11, y por el contrario, los de mayor diferencia son: 1 y 5.

Del análisis previo, se observa que el experimento 5, a 16.26 kHz, es el experimento que contiene la mayor discrepancia entre el valor experimental y el calculado, tanto para el anillo externo como para el interno. Los experimentos 1 y 6, a 6.56 kHz y 22.3 kHz, respectivamente, contienen una diferencia pequeña con respecto a la correlación ideal para el anillo interno, aunque la diferencia aumenta para el anillo externo. El experimento 10, a 77.96 kHz es el experimento que contiene la menor diferencia para ambos anillos nodales, el interno y el externo. Esto es, para el experimento 10, los valores obtenidos por la teoría predicen, con una aproximación aceptable, los valores de los radios que se esperarían en el experimento.

Se realiza un análisis por secciones con la finalidad de agrupar los experimentos y observar una tendencia. Se dividen en cuatro grupos a las frecuencias. Las frecuencias entre 5 kHz – 10 kHz (experimentos 1 a 4), las frecuencias de 10 kHz – 30 kHz (experimento 5 y 6), las frecuencias de 40 kHz – 50 kHz (experimento 7 y 8), y por último, el grupo de frecuencias entre 60 kHz y 80 kHz (experimentos 9 a 11). En el primer grupo, de 5-10 kHz, se observan de 3 a 4 anillos nodales, para el segundo grupo se aprecian con claridad 3 anillos nodales, para el tercer grupo se aprecian 2 y 4 anillos, mientras que para el último grupo, 60-80 kHz, se forman de 3 a 4 anillos nodales.

En el grupo 1, la diferencia entre el valor experimental y el teórico para el anillo interno son relativamente bajos, excepto para el experimento 4, que es el de mayor diferencia entre el anillo nodal medido y el calculado, en tanto que para el caso del anillo externo los valores son muy dispersos. En este grupo el experimento 1, a 5.56 kHz, es el experimento con mejores resultados, pues es el experimento cuyos valores experimentales están más próximos a una correlación de 1:1 tanto para el anillo interno como para el externo.

En el grupo 2, el experimento 5, a 16.26 kHz, es el experimento cuyos valores se encuentran más alejados de ser predichos por la teoría, pues es el segundo experimento con mayor diferencia en el anillo interno y externo. El experimento 6 es uno de los más acertados entre la teoría y la experimentación, al tener las menores diferencias entre los anillos teóricos y calculados.

En el grupo 3, frecuencias entre 40 y 50 kHz, son los mejores resultados, al tener todos sus valores experimentales y teóricos precisos, muy cercanos entre sí. En los anillos internos y externos la teoría predice de forma acercada los valores experimentales de los anillos nodales. El grupo 4, aunque el experimento 10 es el que mejor se aproxima a la teoría, en general es el

intervalo de frecuencia donde mayores diferencias existen, sobretodo en el anillo externo, en cuanto al interno se aproxima de manera aceptable.

El experimento 10, a 77.96 kHz, es de los experimentos con el mayor número de anillos formados con claridad y además es el que mejor predice la teoría la posición de éstos. Quizá esto es debido al tiempo de exposición al que se expusieron las partículas, a mayor tiempo de exposición de las partículas al ultrasonido mayor tiempo hay para que se formen con claridad los anillos nodales.

Lo anterior puede ser debido a que los anillos externos, los más alejados del origen, son los anillos que se observan con mayor claridad en las fotografías, y por lo tanto la medición de su radio es más sencilla y más exacta, mientras que los anillos cercanos al origen se observan con menor claridad. Además, los anillos externos están en su totalidad formados, mientras que los internos no es tan clara su formación, esto puede ser debido a la concentración que se utilizó de partículas. Al haber tantas partículas dispersas sobre la superficie de la placa, éstas impiden el movimiento de las partículas y la fácil observación de los patrones.

En todos los experimentos el número teórico de anillos no son igual al número total de anillos observados en el experimento. Una razón puede ser la alta concentración de partículas que impide la fácil y rápida formación de anillos cercanos al eje axial. Además el tiempo de exposición de las partículas al ultrasonido no fue el suficiente para que se formaran todos los anillos nodales que predice la teoría.

## **5.2 Resultados teóricos**

En el presente apartado se presentan los resultados obtenidos a partir de la teoría para la fuerza de radiación acústica cuando las partículas se encuentran suspendidas en un medio viscoelástico.

El medio que se está estudiando es igual al modelo de Maxwell que describe el comportamiento no-Newtoniano del medio más una contribución del modelo Newtoniano, el cual describe el comportamiento Newtoniano del medio. A este modelo se le conoce como modelo de Oldroyd-B, que es la suma del modelo de Maxwell más el modelo Newtoniano. A continuación se realiza un breve análisis del medio viscoelástico.

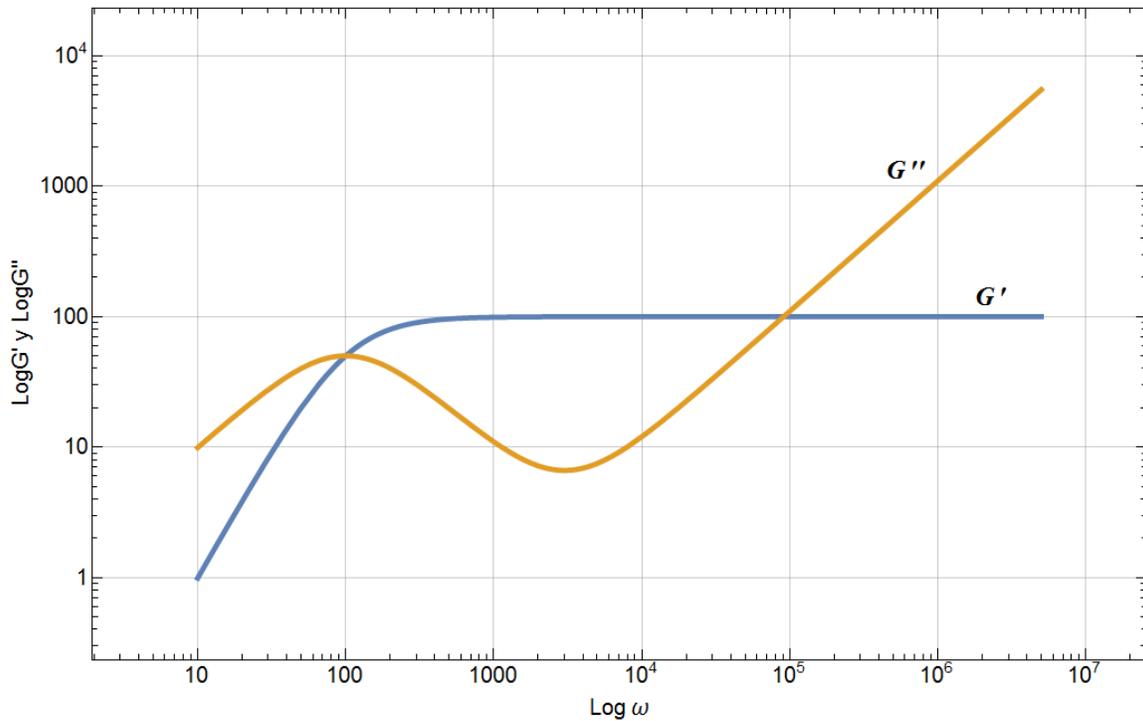


Fig. 5.4. Muestra las curvas de  $G'$  y  $G''$  definidas en (4.43) y (4.44), respectivamente, en función de la frecuencia.

La Fig. 5.4 muestra el comportamiento del módulo viscoso o de pérdida  $G''$  y del módulo elástico o de almacenamiento  $G'$  para el modelo de Oldroyd-B. Se observa que para frecuencias menores a  $\omega = 100\text{s}^{-1}$  el comportamiento del medio se asemeja al comportamiento de un líquido newtoniano, mientras que en el intervalo  $100\text{s}^{-1} < \omega < 1 \times 10^5\text{s}^{-1}$ , predomina  $G'$  frente a  $G''$  y el comportamiento es el de un sólido elástico. Por último, para frecuencias mayores a  $1 \times 10^5\text{s}^{-1}$  el comportamiento vuelve a ser un comportamiento semejante al de un líquido de Newton.

De la Fig. 5.4 se observan dos cruces entre  $G'$  y  $G''$ , el primer cruce determina al tiempo de relajación  $\lambda$  y es igual a  $\lambda = 1/\omega$ , pues en el primer cruce predomina la parte viscoelástica en el módulo viscoso  $G''$ . Para el segundo cruce, en la expresión de  $G''$  (4.44) predomina la parte viscosa, así que al igualar con el módulo elástico  $G'$  (4.43) se obtiene el tiempo de retardación  $\tau_e$  que es igual a  $\tau_e = \mu_s/G_0$ .

El modelo de Oldroyd-B tiene dos límites viscosos. El primero es debido a la contribución del modelo de Maxwell, mientras que el segundo límite es debido a la contribución del modelo de Newton (4.44). Ya que la dependencia de la parte viscosa de  $G''$  con respecto a la frecuencia  $\omega$  es lineal, a frecuencias elevadas éste término adquiere relevancia. En medio de estos dos límites viscosos, el medio tiene un comportamiento más parecido a un sólido elástico.

A continuación se presentan las gráficas que permiten observar el comportamiento de la parte real e imaginaria del coeficiente de dispersión del dipolo  $f_2$  en función del espesor de la capa límite viscosa adimensional  $\delta$ , para diferentes valores del modulo elástico  $G_0$  y diferentes valores de la

densidad de la partícula  $\rho_p$ . Al igual se presentan gráficas para estudiar el comportamiento de la parte real e imaginaria de  $f_2$  en función de la frecuencia, para diferentes valores de  $G_0$ .

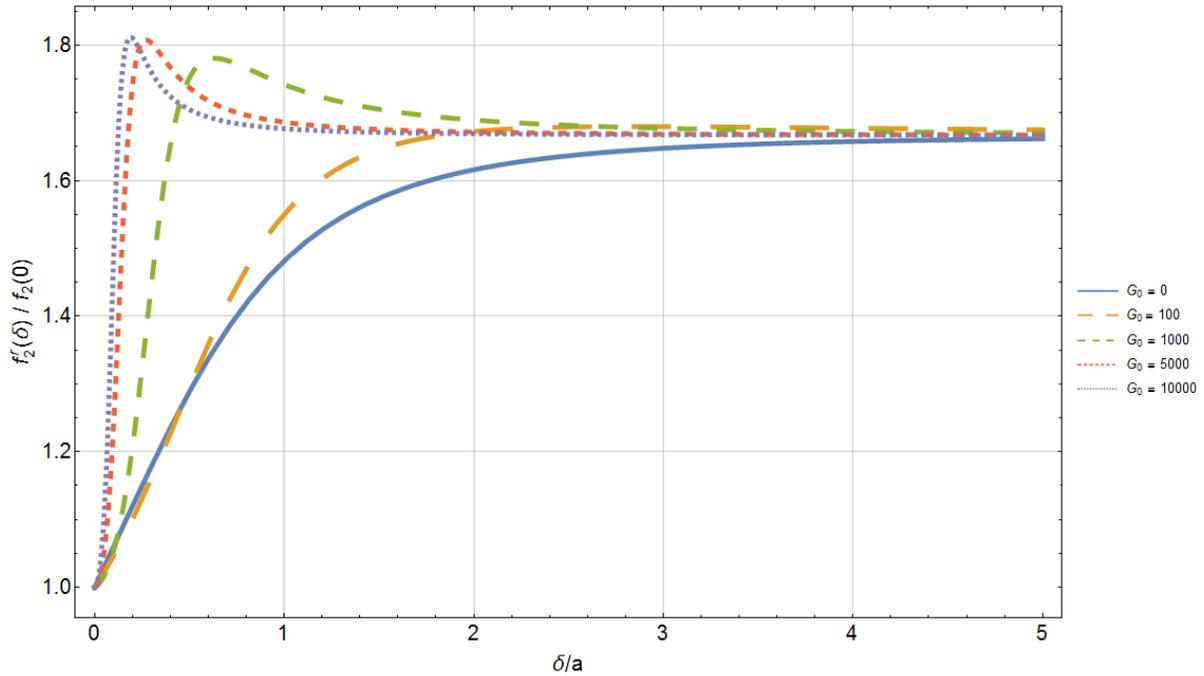


Fig. 5.5. Muestra el comportamiento para la parte real de  $f_2$ , (4.97), en función del espesor de la capa límite dividido por el radio de la partícula, para diferentes valores del módulo elástico  $G_0$ .

La Fig.5.5 se obtiene al graficar la ec. (4.97). Se grafica el comportamiento para la parte real del coeficiente de dispersión para los límites viscoso y elástico,  $G_0 = 0$  y  $G_0 = 10000$ , respectivamente. Aproximadamente, a partir de  $\delta/a = 3$  todas las curvas tienden asintóticamente al valor de 1.66. A medida que aumenta  $G_0$  surge un pico para  $f_2$  real. Para el caso del medio viscoso, curva para  $G_0 = 0$ , la curva va creciendo hasta permanecer constante. Toda desviación de la curva para  $G_0 = 0$  es debido al carácter viscoelástico del medio, el cual tiene un efecto de que la curva alcanza un valor máximo y después cae al valor de 1.66; además este valor lo alcanza a menor espesor de la capa límite viscosa. Si se sigue aumentando el valor del módulo elástico, el comportamiento de la curva es que en  $\delta/a = 0.1$  alcanza el valor de 1.66, es decir, en un espesor de la capa límite igual a una décima del radio de la partícula alcanza el valor de 1.66. En ese valor se mantiene constante para valores de  $\delta/a$  mayores.

Ahora, se grafica la parte imaginaria del coeficiente de dispersión en función de  $\delta/a$ , para diferentes valores del módulo elástico.

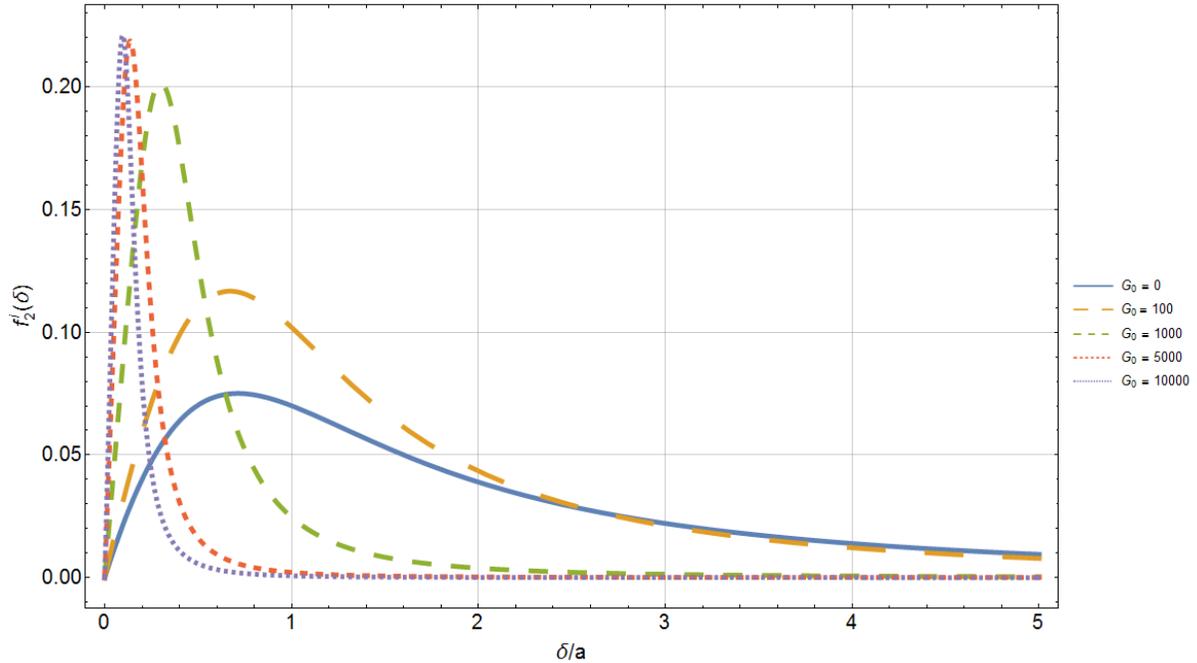


Fig. 5.6. Se muestra el comportamiento para la parte imaginaria de  $f_2$ , (4.98), en función del espesor de la capa límite dividido por el radio de la partícula para diferentes valores del módulo elástico  $G_0$ .

La Fig.5.6 se obtiene al graficar (4.98). Se grafica el comportamiento de la parte imaginaria de  $f_2$ . A medida que aumenta el módulo elástico  $G_0$ , la curva tiende al eje de las abscisas, y al crecer  $G_0$ ,  $f_2^i$  tiende a cero, y este valor se alcanza a un menor espesor de la capa límite viscosa. Si la parte imaginaria de  $f_2$  tiende a cero, la fuerza de radiación acústica igualmente tiende a cero (4.107). El pico que describe el comportamiento de las curvas tiende a aumentar hasta llegar a un máximo, después de ese valor de  $G_0$  que da el máximo, al seguir aumentando  $G_0$  el pico tiende a descender hasta aproximarse al cero. Además, la velocidad de la partícula es directamente proporcional a  $f_2^i$  (4.108). A  $f_2^i$  altos, mayor será la velocidad de la partícula en el campo acústico. De la Fig. 5.6 se observa que el carácter viscoelástico del medio aumenta el valor para  $f_2^i$ , así que la viscoelasticidad del medio aumenta la velocidad de la partícula.

Ahora bien, tanto en la parte real como en la imaginaria del coeficiente de dispersión del dipolo  $f_2$ , aparecen picos en las curvas. Se desea estudiar el comportamiento de estos máximos, para lo cual se grafica la parte real e imaginaria de  $f_2$  contra el módulo elástico  $G_0$ , para diferentes valores de  $\delta/a$ . De acuerdo con las gráficas previas, los máximos se localizan alrededor de los siguientes puntos  $\delta/a = 0.2, 0.4$  y  $0.6$ .

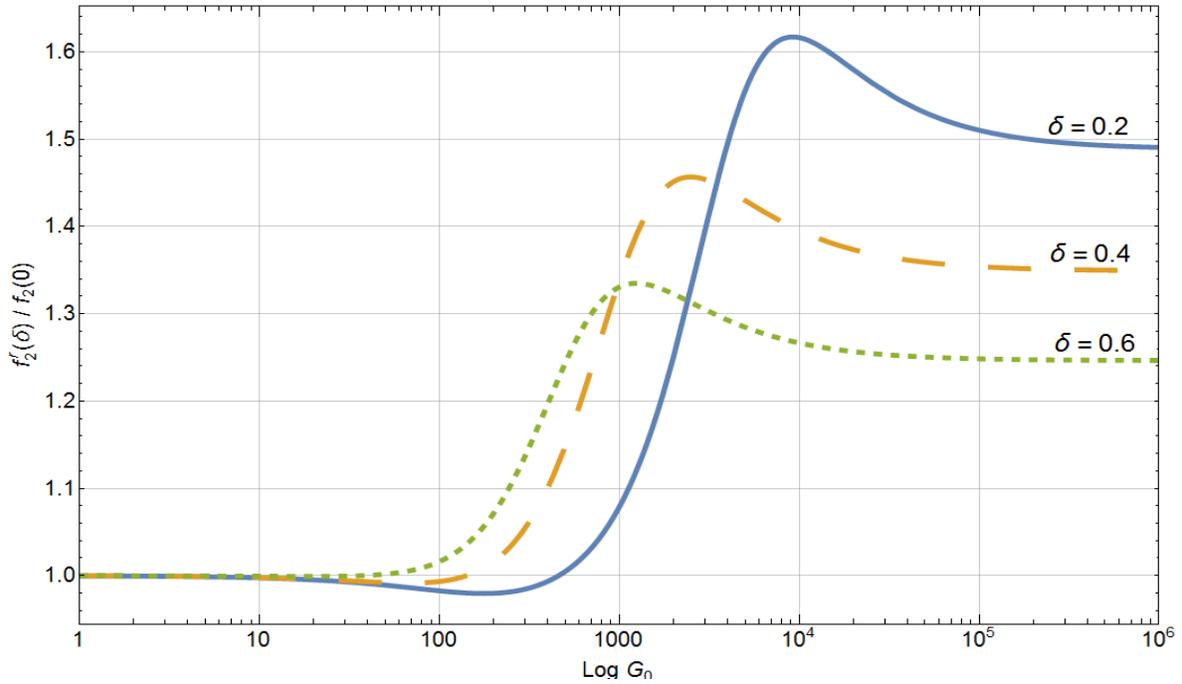


Fig. 5.7. Se muestra el comportamiento para la parte real de  $f_2$ , (4.97), en función del modulo elástico  $G_0$  para diferentes valores del espesor de la capa límite  $\delta/a$ , donde  $\eta_0 = G_0\lambda$

De la Fig. 5.7 se observa que para los valores menores a  $G_0 = 100$  ó  $\eta_0 = 1$  (recordar que  $\lambda = 0.01s$ ), la curva de  $f_2$  real es 1, para cualquier valor de  $\delta/a$ . A altos valores del modulo elástico la curva tiende a un valor constante.

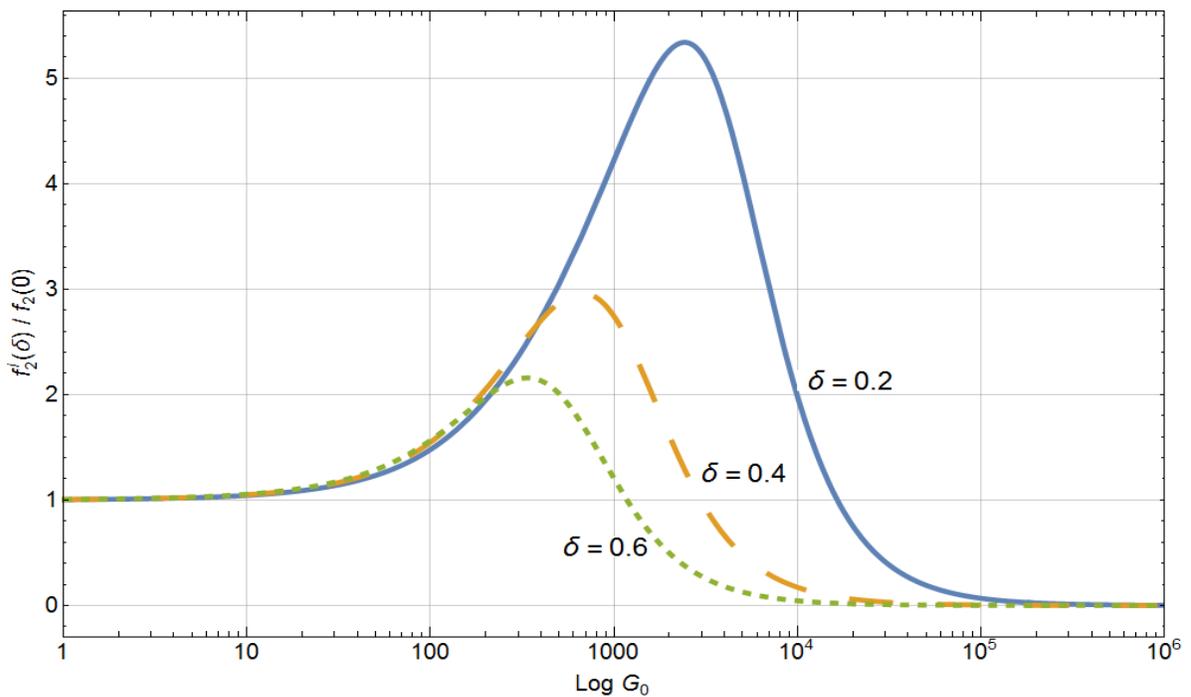


Fig. 5.8. Se muestra el comportamiento para la parte imaginaria de  $f_2$ , (4.98), en función del modulo elástico  $G_0$  para diferentes valores del espesor de la capa límite  $\delta/a$ , donde  $\eta_0 = G_0\lambda$

Al igual que se mencionó en la Fig. 5.6, la parte imaginaria del coeficiente de dispersión del dipolo tiende a cero cuando el modulo elástico tiene valores muy altos. Cuando el medio se comporta como un sólido elástico, esto es a  $G_0$  muy elevados,  $f_2^i$  tiende a cero. Este resultado conlleva a que la fuerza de radiación para una onda viajera tiende a cero, y a su vez la velocidad de las partículas igualmente tiende a cero.

A continuación se presentan dos gráficos para conocer el comportamiento de la parte real e imaginaria de  $f_2$  frente a  $\delta/a$ , para diferentes valores de la densidad  $\bar{\rho} = \rho_p/\rho_0$ .

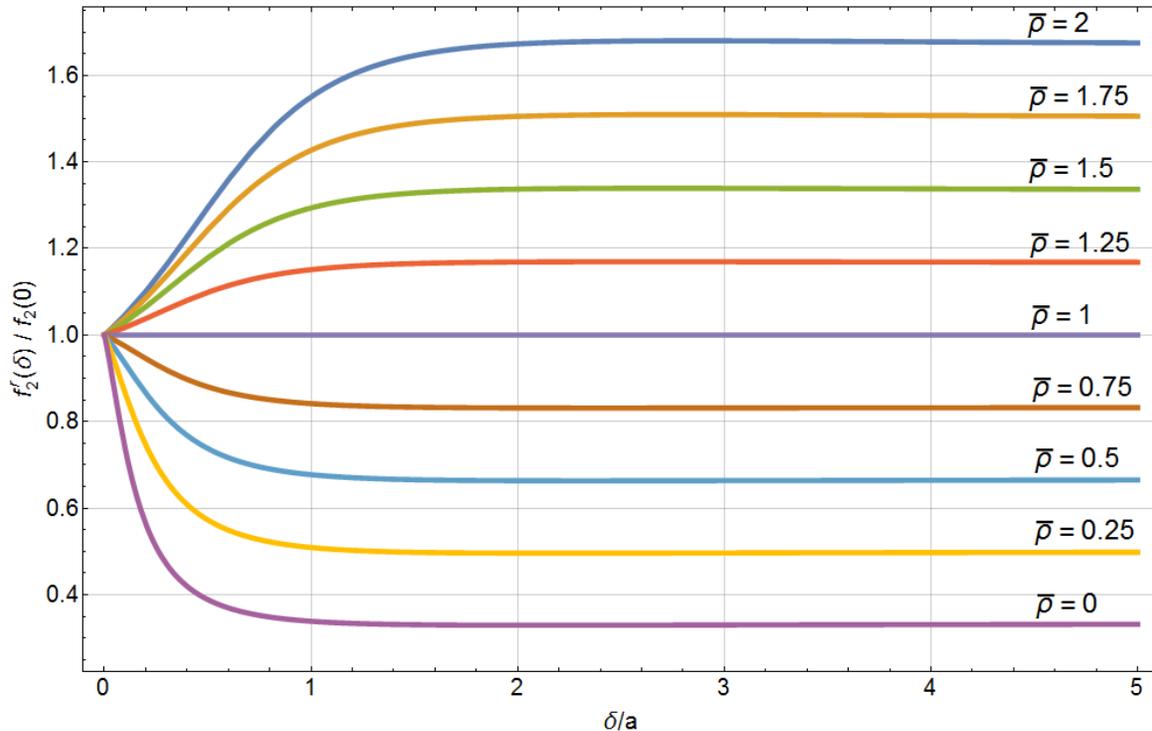


Fig. 5.9. Se muestra el comportamiento para la parte real de  $f_2$  dividida por  $f_2(0)$  para el medio inviscido, (4.97), en función del espesor de la capa límite dividido por el radio de la partícula, para diferentes valores de  $\bar{\rho} = \rho_p/\rho_0$ .

La Fig.5.9 se obtiene al graficar (4.97). Para todos los valores de la densidad  $\bar{\rho}$  las curvas crecen hasta aproximadamente  $\delta/a = 2$ , y a partir de este valor se mantienen constantes. En el gráfico se observa que al aumentar la densidad de la partícula, la pendiente de la curva para pequeños valores de  $\delta/a$  es más pronunciada, y el valor a la cual  $f_2$  se hace constante. Igualmente, se observa que el punto de inflexión de la curva cuando la densidad de la partícula es mayor a la densidad del solvente se alcanza a valores de  $\delta/a$  mayores, que en el caso de que la densidad de la partícula es menor a la del solvente. Este punto de inflexión se vuelve más pronunciado cuando la densidad de la partícula aumenta, el mismo efecto se observa si la densidad de la partícula disminuye. La Fig. 5.9 es parecida a la Fig. 2a del artículo de Bruus [4].

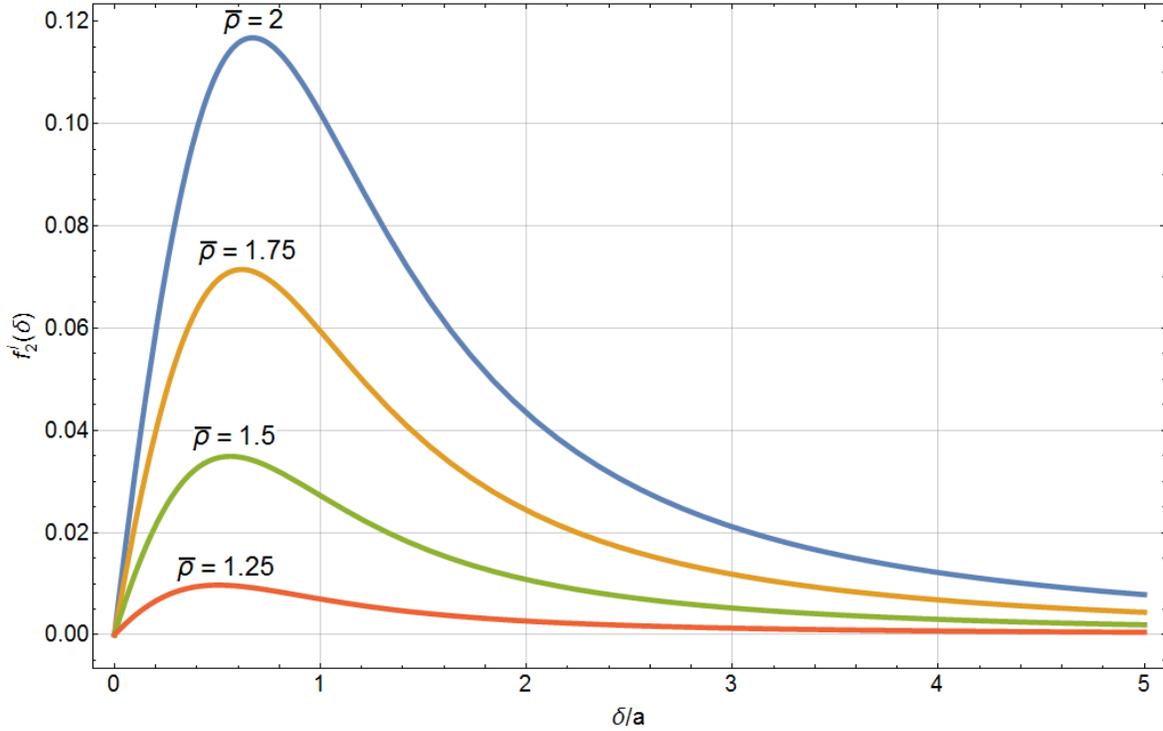


Fig. 5.10. Se muestra el comportamiento para la parte imaginaria de  $f_2$ , (4.98), en función del espesor de la capa límite, para diferentes valores de la densidad de la partícula dividida por la densidad del medio  $\bar{\rho} = \rho_p/\rho_0$ .

Del gráfico se observa que a medida que aumenta la densidad de la partícula el máximo que alcanza la curva crece. Si la densidad de la partícula es igual a la densidad del medio,  $\rho_p = \rho_0$ , entonces  $f_2$  imaginario es igual a cero para cualquier valor de  $\delta/a$ . Igualmente, para valores mayores a  $\delta/a = 5$ ,  $f_2^i$  tiende a cero, para cualquier valor de  $\rho_p$ . El comportamiento que muestra la Fig. 5.10 es parecido al comportamiento que muestra la Fig. 2b de Bruus [4]. Los valores de  $\delta/a$  donde aparecen los máximos de las curvas son cercanos entre un medio viscoso y viscoelástico. La diferencia radica en la magnitud de  $f_2^i$ ; si la densidad de la partícula es el doble a la densidad del medio,  $\bar{\rho} = 2$ , entonces para el caso del medio viscoelástico  $f_2^i = 0.12$ , mientras que para el medio viscoso  $f_2^i = 0.075$  (este valor se obtuvo de la Fig. 2b de Bruus [4]). El valor de  $f_2^i$  para el medio viscoelástico es casi el doble del que predice la teoría para el medio viscoso. Ahora bien, para una densidad de la partícula cercano a la del medio, esto es  $\bar{\rho} = 1.25$ , la magnitud de  $f_2^i$  para el medio viscoso y viscoelástico son muy parecidas. De aquí que, el aumento de la densidad de la partícula permita observar el efecto de las propiedades viscoelásticas del medio sobre la magnitud de  $f_2^i$ .

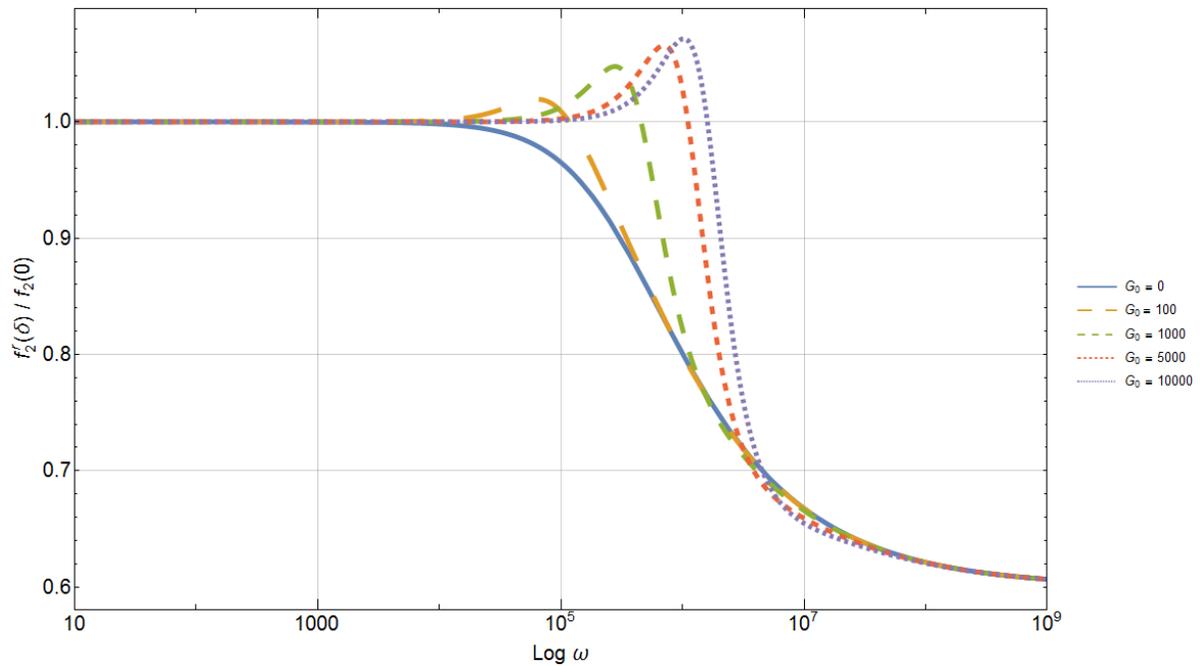


Fig. 5.11. Se muestra el comportamiento para la parte real de  $f_2$ , (4.97), en función de la frecuencia, para diferentes valores del modulo elástico  $G_0$ . Si  $G_0 = 0$  se considera que el medio es viscoso, pues se pierde el carácter viscoelástico del medio. Ahora bien, para valores elevados de  $G_0$ , se espera que el comportamiento del medio sea un comportamiento parecido a un sólido elástico.

La curva para  $G_0 = 0$  es el caso del medio viscoso, así que toda desviación de esta curva es debido a las propiedades viscoelásticas del medio. Para cualquier valor de  $G_0$ , en el intervalo  $1 \times 10^4 \text{s}^{-1} < \omega < 1 \times 10^7 \text{s}^{-1}$ , se observan los efectos del medio sobre la magnitud de  $f_2^r$ . Para cualquier valor de la frecuencia fuera del intervalo, se aprecia que todas las gráficas tienden a la curva para el medio viscoso. El comportamiento para la curva de  $f_2^r$  es el siguiente: cercano al valor para la frecuencia de  $1 \times 10^4 \text{s}^{-1}$ , la curva se aparta del comportamiento para el caso viscoso. Después hay un máximo, y cae hasta igualarse con la curva para  $G_0 = 0$ . Conforme se aumenta  $G_0$  aparece un máximo. Para valores de  $G_0$  elevados, la frecuencia debe de ser alta para poder observar un comportamiento relacionado con el carácter viscoelástico del medio. Es decir, si se tiende a un  $G_0$  muy alto, su perfil se despega de la curva para el caso viscoso  $f_2^r = 1$  para frecuencias muy altas. Por el contrario, para  $G_0$  pequeños, alrededor de 100, se observa la desviación de la curva debido al medio viscoelástico para frecuencias no tan altas.

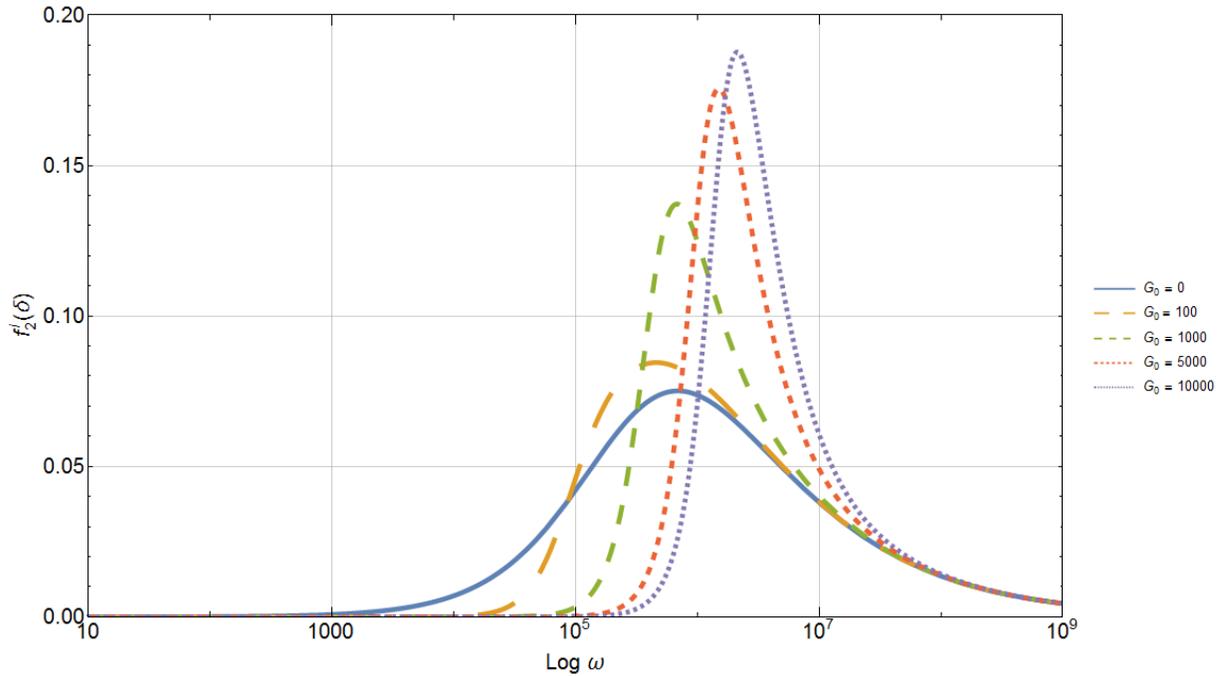


Fig. 5.12. Se muestra el comportamiento para la parte imaginaria de  $f_2$ , (4.98), en función de la frecuencia, para diferentes valores del módulo elástico  $G_0$ .

El comportamiento para el medio viscoso se da cuando  $G_0 = 0$ . Se analiza el comportamiento de las demás gráficas comparando con este caso, pues una desviación del perfil indica el efecto que tiene el medio viscoelástico sobre la parte imaginaria de coeficiente del dipolo. Para frecuencias menores a  $1 \times 10^3 \text{ s}^{-1}$ , el coeficiente de dispersión es cero,  $f_2^i = 0$ , y para frecuencias mayores a  $1 \times 10^9 \text{ s}^{-1}$ ,  $f_2^i$  tiende a cero, para todas las curvas. Esto es, la fuerza de radiación y la velocidad de la partícula en una onda viajera tienden a cero. En el caso de  $G_0 = 100$ , la curva se despegó del eje de las abscisas alrededor de  $1 \times 10^4 \text{ s}^{-1}$ , mientras que para  $G_0$  más altos se necesita una mayor frecuencia para que la curva sea diferente de cero. El máximo para  $f_2^i$  se hace más estrecho y crece en magnitud al aumentar el valor de  $G_0$ . A medida que  $G_0$  aumenta, la frecuencia tiene que ser mayor para que la curva de  $f_2^i$  tienda a la curva para el caso viscoso, es decir, para  $G_0 = 100$  la curva alcanza el máximo, y después tiende al comportamiento del caso viscoso, en poco tiempo, mientras que para  $G_0 = 10000$ , la frecuencia a la que  $G_0 = 0$ , es mucho mayor.

### 5.2.1 Gráficas de la velocidad de la partícula

A continuación se presentan tres gráficas para la velocidad de la partícula para una onda acústica viajera, variando la frecuencia  $\omega$ , el tamaño del radio de la partícula  $a$ , y el módulo elástico  $G_0$ .

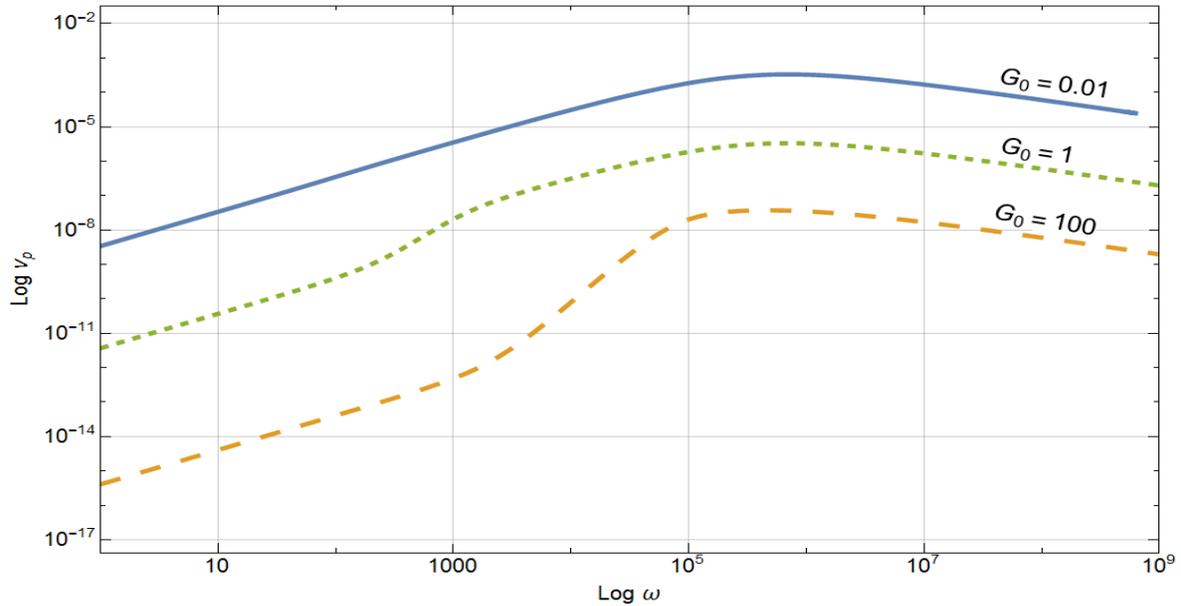


Fig. 5.13. Muestra los perfiles de la velocidad de la partícula para una onda acústica viajera al variar la frecuencia, para diferentes valores del modulo elástico  $G_0$ .

La Fig. 5.13 muestra que hay un máximo en la velocidad de la partícula alrededor de la frecuencia de  $1 \times 10^6 \text{ s}^{-1}$ . Se observa que a mayor  $G_0$ , la velocidad de la partícula en una onda viajera es menor. Por ejemplo, antes del máximo, la velocidad de la partícula para  $G_0 = 100$ , es aproximadamente seis décadas menor que para  $G_0 = 0.1$ , después del máximo la diferencia se estrecha a aproximadamente tres décadas. Entonces, el aumento del modulo elástico en el medio disminuye la velocidad de la partícula sometida a una onda viajera.

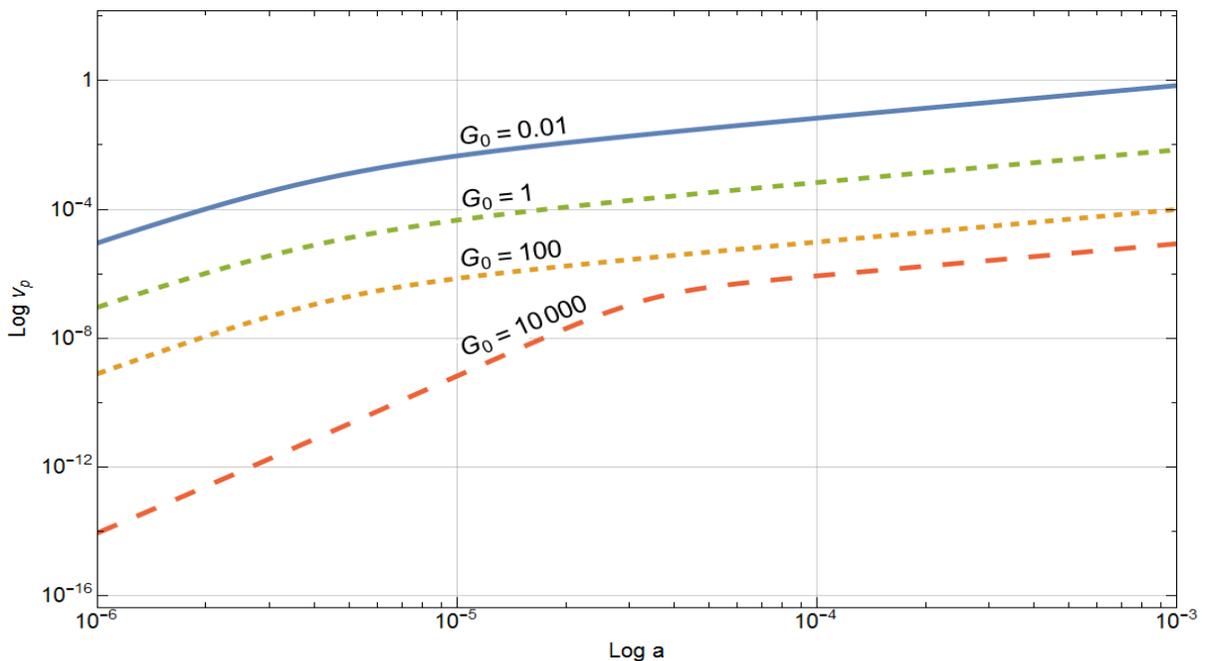


Fig. 5.14. Muestra los perfiles de la velocidad de la partícula para una onda acústica viajera al variar al radio de la partícula, para diferentes valores del modulo elástico  $G_0$ .

El intervalo del radio de la partícula se encuentra entre  $1\mu\text{m} < a < 1\text{mm}$ . En general, el gráfico muestra una relación casi lineal entre la velocidad de la partícula y el radio de ésta, mientras más grande es el radio de la partícula, mayor será la velocidad de ésta. Para radios cercanos a los micrómetros ( $\mu\text{m}$ ), se observa un punto de inflexión para  $G_0 = 1000$ . Para ordenes inferiores en el radio de la partícula, es decir para nanómetros, la velocidad de la partícula en la onda viajera es del orden de  $1 \times 10^{-18}$  m/s.

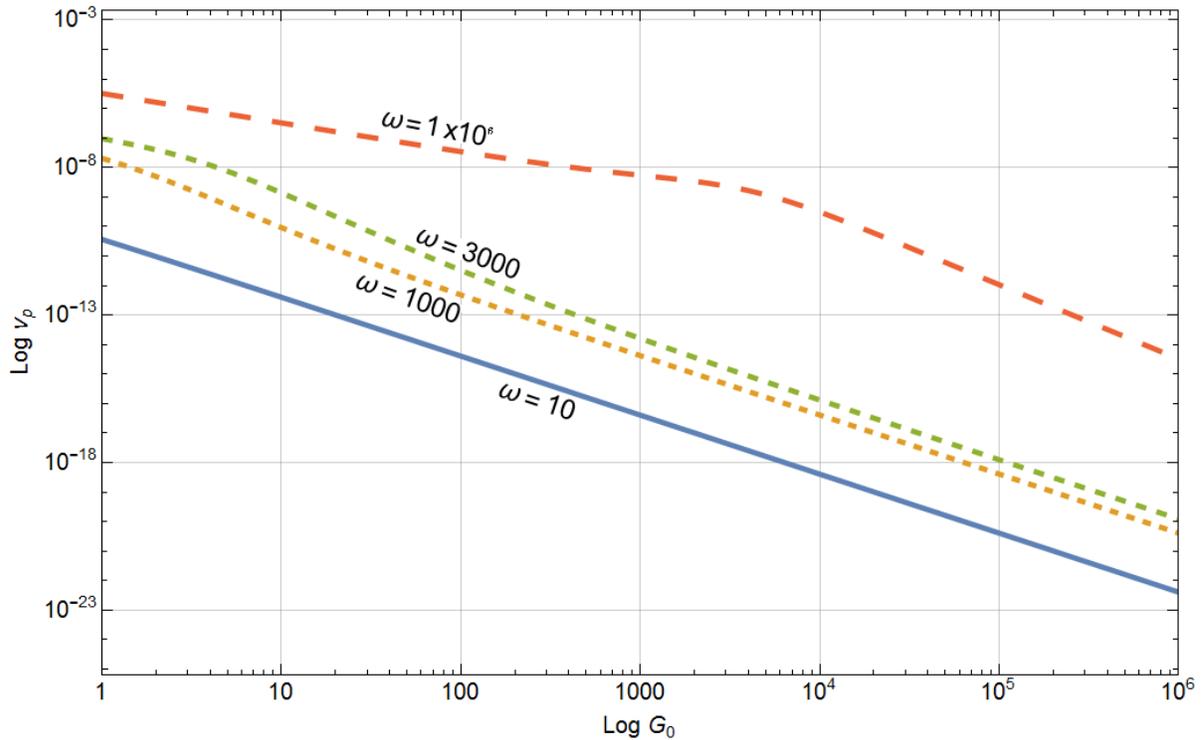


Fig. 5.15. Muestra los perfiles de la velocidad de la partícula para una onda acústica viajera al variar el modulo elástico  $G_0$ , para diferentes valores de la frecuencia  $\omega$ .

La tendencia que muestra la Fig. 5.15 es que al aumentar el módulo elástico la velocidad de la partícula tiende a valores considerablemente bajos. Se observa que al aumentar la frecuencia surge un máximo en el perfil de velocidad de la partícula. A un mismo valor de  $G_0$ , mientras mayor sea la frecuencia, la velocidad de la partícula es mayor.

# Capítulo 6. Conclusiones

Se estudió a detalle el mecanismo por el cual una partícula suspendida en un medio y sometida a un campo acústico experimenta un desplazamiento. La fuerza principal que origina dicho desplazamiento es la fuerza de radiación acústica.

Se obtuvo una expresión analítica para la fuerza de radiación que contempla las propiedades reológicas del medio. La información sobre las propiedades reológicas del medio aparece en el coeficiente de dispersión del dipolo  $f_2$ . A partir de la expresión matemática que se obtuvo para el coeficiente del dipolo  $f_2$  contemplando al medio viscoelástico (4.87), es posible obtener la expresión que obtiene Bruus [4] para el caso de un medio viscoso del coeficiente  $f_2$  al eliminar el carácter viscoelástico de la ecuación matemática (4.100). Así mismo, se obtiene la expresión de  $f_2$  para un medio invíscido que obtuvo Gor'kov [3] ec. (4.103).

De acuerdo con los experimentos realizados para el caso del medio invíscido, el experimento en el cual su correlación entre los radios experimentales y teóricos se aproxima de manera aceptable a la correlación ideal, es el experimento 6, de 22.3 kHz. Así pues, es la frecuencia con la que se podría trabajar, esperando resultados positivos y cercanos a los teóricos para tamaño de partículas del orden de milímetros.

En general, los anillos nodales externos son los que se forman con mayor claridad que los anillos internos. La clara y completa formación de los anillos nodales externos facilita la lectura de su radio experimental, mientras que la dispersa e incompleta formación de los anillos nodales internos obstaculiza la lectura de su radio experimental. Así entonces, la fácil lectura del radio nodal mejora la correlación entre los datos teóricos y experimentales, al estar más próximos estos valores a la correlación ideal.

De acuerdo a los resultados presentados para el medio invíscido se concluye que la teoría predice de forma aceptable el comportamiento de las partículas en presencia de un campo acústico, por lo que se puede proseguir considerando al medio viscoso, y seguido de éste al medio viscoelástico. La teoría para el medio invíscido contempla y explica la física que ocurre cuando una partícula es sometida a la radiación de un campo acústico.

Los resultados teóricos para el medio viscoelástico se encuentran de la Fig. 5.2 a la Fig. 5.10. Se graficó la parte real e imaginaria para el coeficiente de dispersión del dipolo  $f_2$ , variando el espesor de la capa límite viscosa y la frecuencia, para diferentes valores del modulo elástico  $G_0$  y de la densidad de la partícula  $\rho_p$ .

De la Fig. 5.2, 5.3, 5.6 y 5.7 se aprecia que los efectos de las propiedades reológicas sobre la parte real e imaginaria de  $f_2$  se encuentran para valores pequeños del espesor de la capa límite, es decir para  $0 < \delta/a < 1$ . El efecto que tiene el medio viscoelástico sobre  $f_2^r$  y  $f_2^i$  es que aumenta la magnitud de éstas.

Cuando se varía  $G_0$ , se observa que hay un máximo para la parte real e imaginaria del coeficiente del dipolo. Aunque a medida que aumenta  $\delta/a$ , la curva de la parte real e imaginaria considerando un medio viscoelástico tienden a la curva de la parte real e imaginaria de  $f_2$  cuando el medio es viscoso. Mientras que la parte real tiende a un valor diferente de cero, la parte imaginaria tiende a cero. Entonces, al aumentar el espesor de la capa límite viscosa  $\delta$  se pierde el carácter viscoelástico del medio, es decir, no importando el valor de  $G_0$ , la teoría para el medio viscoelástico y la teoría considerando medio viscoso predicen el mismo valor para  $f_2^r$  y  $f_2^i$ .

En cuanto a la densidad de la partícula, se observa que a mayor  $\bar{\rho}$  el valor para  $f_2^i$  de un medio viscoelástico es muy diferente del valor de  $f_2^i$  para el medio viscoso. Esto es, en cuanto más sea la diferencia entre la densidad de la partícula y la del medio se observan con mayor claridad los efectos que tienen las propiedades viscoelásticas del medio sobre la parte imaginaria de  $f_2^i$ , sobre la fuerza de radiación acústica y sobre la velocidad de la partícula. Se concluye, que al aumentar la densidad de la partícula, el efecto del medio viscoelástico sobre  $f_2^i$  es más notorio. En cuanto a la parte real  $f_2^r$ , los efectos del medio viscoelástico no son muy diferentes a los del medio viscoso, para cualquier valor de la densidad de la partícula.

El efecto de la frecuencia sobre la parte real e imaginaria de  $f_2$  es: *i*) la parte real aumenta, a frecuencias pequeñas la curva del medio viscoelástico y del medio viscoso son iguales, mientras que para frecuencias altas la magnitud  $f_2^r$  es mucho menor para el medio viscoelástico que la que predice el medio viscoso. *ii*) para la parte imaginaria, tanto a frecuencias pequeñas como altas,  $f_2^i$  tiende a cero. Sólo hay un intervalo, dependiendo del valor de  $G_0$ , donde la magnitud de  $f_2^r$  y  $f_2^i$  aumentan debido al carácter viscoelástico del medio. Para  $G_0$  altos, se necesita mayor frecuencia para poder observar la contribución de las propiedades viscoelásticas del medio sobre  $f_2^r$  y  $f_2^i$ .

En el caso del coeficiente de dispersión del dipolo para el medio viscoelástico, la capa límite viscoelástica es igual a la capa límite viscosa más un factor de corrección debido a la naturaleza viscoelástica del medio. Al igual que en el caso del medio viscoso  $f_2$  es un número complejo, siendo la parte imaginaria, la relacionada con la fuerza de radiación acústica para una onda viajera, mientras que la parte real está relacionada con la fuerza de radiación acústica para una onda estacionaria. Este coeficiente de dispersión consta de una parte real e imaginaria dependientes de las propiedades del medio.

En conclusión, hay ciertos intervalos en que las propiedades viscoelásticas del medio mejoran el valor de  $f_2^r$  y  $f_2^i$ , por ende mejoran la fuerza de radiación acústica, y a su vez la velocidad de la partícula, para una onda estacionaria y para una onda viajera, respectivamente.

Los efectos que tiene el considerar un medio viscoelástico son más notorios en la parte imaginaria del coeficiente de dispersión para el dipolo  $f_2$  que en su parte real. Por consiguiente, los efectos del medio viscoelástico son más claros en la fuerza de radiación acústica y la velocidad de la partícula para una onda viajera, que para una onda estacionaria.

# Bibliografía

- [1] King, V. Louis. "On the acoustic radiation pressure on spheres" Proc. Roy. Soc. Lond A Mat, 147 (1937), 212-240.
- [2] Yosioka, K; Kawasima, Y. "Acoustic radiation pressure on a compressible sphere" Acta Acustica wuth Acustica 5, 3 (1955), 167-173.
- [3] L.P. Gor'kov. "On the forces acting on a small particle in an acoustical field in an ideal fluid" Soviet Physics-Doklady. 6 (1962), 773-775.
- [4] Settnes, M.; Bruus, H. "Forces acting on a small particle in an acoustical field in a viscous fluid" Physical Review E 85,016327 (2012), 1-12.
- [5] Söllner, K.; Bondy, C. "The mechanism of coagulation by ultrasonic waves" Trans. Faraday Soc.,32, (1936) 616-623.
- [6] Barmatz, M.; Collas, P. "Acoustic radiation potential on a sphere in plane, cylindrical, and spherical standing wave fields" J. Acoust. Soc. Am. 77,3, (1985) 928-945.
- [7] W.T. Coakley, G. Whitworth. "Particle column formation in a stationary ultrasonic field" J. Acoustic. Soc. Am. 91 (1992), 79-85.
- [8] G.R. Torr. "The acoustic radiation force" Am. J. Phys. 52, 402-408 (1984).
- [9] Woodside, M.S.; Bowen, D.B.; Piret, M.J. "Measurement of ultrasonic forces for particle-liquid separations" AIChE Journal, 43,7, (1997) 1727-1736.
- [10] Bruus, H. "Acoustofluidics 7: The acoustic radiation force on small particles" Lab Chip,12,(2012), 1014-1021.
- [11] Bruus, H. "Acoustofluidics 1: Governing equations in microfluidics" Lab Chip,11,(2011), 3742-3751.
- [12] Gary Leal L. "Advanced Transport Phenomena. Fluid mechanics and convective transport processes" Ed. Cambridge University Press. Nueva York (2007).