Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

El Flujo Geodésico en Variedades Riemannianas Cerradas con Curvatura Seccional Negativa

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICO

PRESENTA:

SERGIO IKER MARTÍNEZ JUÁREZ

DIRECTOR DE TESIS:

DR. XAVIER GÓMEZ MONT ÁVALOS

Noviembre 2015

México, D.F.

Hoja de Datos del Jurado

1. Datos del alumno
Martínez
Juárez
Sergio Iker
15170668
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Matemáticas
305585266

2. Datos del Tutor
Dr.
Xavier
Gómez Mont
Ávalos

3. Datos del sinodal 1
Dra.
Laura
Ortiz
Bobadilla

4. Datos del sinodal 2
Dr.
Ernesto
Rosales
González

5. Datos del sinodal 3
Dr.
Pablo
Suárez
Serrato

6. Datos del sinodal 4
M. en C.
Jessica Angélica
Jaurez
Rosas

7. Datos del trabajo escrito
El Flujo Geodésico en Variedades Riemannianas Cerradas con Curvatura Seccional Negativa
110p
2015

Contenido

Agradecimientos

Agradezco a dios y al universo, por darme vida y salud. A Martha, mi madre de quien estoy muy orgulloso y ha sido un ejemplo a seguir, le agradezco por su inmenso amor, por el apoyo y comprensión, por escucharme y por tomar en cuenta mi voz desde que era un niño, dándome libertad e impulso en todo lo que he querido hacer. Su luz me ha guiado hasta aquí. A mis queridos abuelos con quienes me crié y que ahora me cuidan desde el cielo, sus enseñanzas y amor han sido fundamentales en mi vida. A mi familia por su cariño, en especial Fer quien siempre ha estado cerca ayudándome en incontables ocasiones, en particular apoyándome en este proceso académico facilitando mis estudios, y a Josy por su ayuda y consejos en cuestiones de la vida.

A Xavier Gómez Mont, por el privilegio y placer de ser orientado y ampliamente apoyado por un gran matemático, por su disponibilidad siempre que lo he requerido, por todo el tiempo que me dedicó para realizar este trabajo, por la hospitalidad que me brindo en su casa durante mi estancia en CIMAT haciéndola más confortable, en este sentido extiendo el agradecimiento a Lola Lince. También le agradezco por compartirme su conocimiento, visión y pasión por las matemáticas, enriqueciendo mi estudio y haciéndolo mucho más interesante y divertido. El estar cercano a él hace inevitable el aprendizaje, sus enseñanzas son inmensurables.

A mis sinodales por sus valiosos comentarios y apoyo. Empezando por Laura Ortiz ya que su compromiso total para con los alumnos junto con su gusto por las EDO's y la geometría, motivo mi gusto por los sistemas dinámicos haciéndolo un camino placentero. A Ernesto Rosales por las discusiones del trabajo, sus comentarios siempre constructivos y su interés. A Pablo Suárez por el gran apoyo que me ha brindado. Y a Jessica Jaurez por escucharme atentamente y ayudarme ya sea en cuestiones matemáticas como personales.

A todos mis maestros y maestras, la pasión por sus respectivas ramas de las matemáticas y por la investigación, han hecho que disfrute el estudio de cada una de ellas. En espacial a Mónica Clapp y Christof Geiss, sus excelentes cátedras me han dado herramientas que utilizo recurrentemente.

A Ana Lucía B. C. por haberme ayudado en la redacción, formato y con la ortografía, quien además estuvo junto a mi apoyándome durante las primeras etapas de realización del este trabajo.

A mis compañeros y amigos de la UNAM, Valente R., Andrew S., Marinie R. C., Marco A., Paco Z., Mafer B., Marthita S., José Luis R. y Citlali S.. También a mis amigos y equipo de batalla en CIMAT, Dulce V., Paulina S., Javier S., Carlos Y., Héctor J. y Gerardo A.. Gracias por tantos momentos divertidos, locuras, platicas, etc...

A Juan Pablo G. O. y Alex A. O. por tantos años de amistad e infinitos momentos e historias compartidas.

A la UNAM por la maravillosa oportunidad de formar parte de su comunidad universitaria y por darme una formación académica de primer mundo, guiado por los mejores profesores e investigadores del país.

A mi querido CIMAT, mi segundo hogar, por abrirme sus puertas de par en par, calida y eficientemente, desde mi primera visita, brindándome los recursos y medios para realizar este trabajo. Además de impulsarme a expandir y fortalecer mis estudios de manera significativa con ayuda sus excelentes investigadores. A la mágica ciudad de Guanajuato por bien recibirme, con su académico y versátil estilo de vida.

Quizá olvide mencionar a alguien pero en general quiero agradecer a todas las personas con las que compartí algún momento y que me acompañaron formando parte de mi trayectoria universitaria, me refiero tanto a profesores, como amigos y compañeros con todos ustedes estoy muy agradecido pues de alguna forma han aportado en mi crecer.

A LA MEMORIA DE MIS ABUELOS
MACARIO Y CONCEPCIÓN

”Las matemáticas son la belleza
en su expresión más pura”

Mónica Clapp

1

Introducción

El objetivo principal de este trabajo es demostrar que el flujo geodésico de variedades Riemannianas cerradas con curvatura seccional negativa y de dimensión d , es un flujo de Anosov y exhibir las implicaciones más relevantes de este hecho. Para alcanzar esta meta, el trabajo toma la siguiente línea:

En el capítulo 2 empezaremos comentando un poco la historia del problema a manera de motivación. También, recordaremos la teoría preliminar que se utilizará a lo largo del trabajo. Algunas de las proposiciones de este capítulo no se demuestran, sin embargo, se hace referencia a la literatura donde se puede encontrar.

En el capítulo 3 se trata la teoría general de conjuntos hiperbólicos y sistemas de Anosov . Aquí se ven algunas de las propiedades que tienen estos sistemas dinámicos. Las secciones más relevantes son la 3.2, en particular es el teorema 6 donde se da una caracterización de los conjuntos hiperbólicos a partir de conos invariantes, la cual se utilizará para demostrar la hiperbolicidad del flujo geodésico. La sección 3.5, la cual trata de la estabilidad estructural de los sistemas hiperbólicos, para este fin se usa el teorema de sombreamiento de Anosov 7, el cual es muy tecnico, pero muy util pues de él también se derivan otros resultados como el Closing Lema 8. Por último, en la sección 3.6 se estudia los resultados de las secciones anteriores en sus versiones para flujos.

El capítulo 4 es de los más importantes del trabajo pues trata de la ergodicidad de los flujos hiperbólicos. En la sección 4.1.1 se estudia el concepto de Foliaciones Absolutamente Continuas, ingrediente sustancial para demostrar la ergodicidad de los sistemas dinámicos hiperbólicos. La sección 4.2 desarrolla explícitamente el afamado Argumento de Hopf. Los resultados importantes de esta sección son el teorema 17, donde se exhibe que las distribuciones estables e inestables de un difeomorfismo de Anosov son Hölder continuas, un punto técnico, pero a la vez clave en la teoría de dinámica hiperbólica y el teorema 19 que prueba que un difeomorfismo de Anosov conservativo de clase C^2 es ergódico.

El capítulo 5, además de ser muy interesante, es importante pues estudia las propiedades generales del flujo geodésico de variedades Riemannianas, así como la geometría requerida para demostrar la hiperbolicidad de este flujo en el caso de variedades cerradas con curvatura seccional negativa. Además, dará las herramientas para comprender los flujos geodésicos en variedades y un punto de vista geométrico y dinámico para atacar problemas que los involucren. La proposición 39 muestra que con los campos de Jacobi se puede entender el crecimiento asintótico del flujo geodésico. La proposición 49 es importante para la ergodicidad, ya que muestra que el flujo geodésico deja invariante a la medida de Liouville. Además, la proposicón 50 garantiza que toda la dinámica del flujo geodésico está contenida en el tangente unitario, por lo que, basta restringirnos a él.

Por último, en el lema 16 demostraremos que el flujo geodésico de variedades Riemannianas cerradas con curvatura seccional negativa es Anosov y, por ende, ergódico y estructuralmente estable.

2

Preliminares

2.1. Un Poco de Historia

El flujo geodésico en variedades Riemannianas cerradas (compactas, conexas y sin frontera) con curvatura seccional negativa, es ya bastante conocido y estudiado por muchos matemáticos a lo largo del tiempo y a la fecha constituye una parte importante de la teoría en dinámica hiperbólica. Uno de los primeros en estudiar las propiedades dinámicas de este flujo fue E. Hopf en los 30's, en particular, él estaba interesado en demostrar su ergodicidad.

Una característica importante del flujo geodésico en este tipo de variedades es que es un flujo hiperbólico, lo cual quiere decir que, para cada punto (x, v) del haz tangente unitario SM de M, el espacio tangente en el punto (x, v) tiene una descomposición como suma directa de: un subespacio estable que contrae exponencialmente; un subespacio inestable que expande exponencialmente y un subespacio central de dimensión 1, el cual es tangente al flujo. Es decir:

$$T_{(x,v)}SM = E^s(x, v) \oplus E^u(x, v) \oplus \mathbb{R}\left(\frac{d}{dt}g^t \mid_{t=0}\right) \tag{2.1}$$

Este resultado se le atribuye a D. Anosov, pues en los 60's lo demostró en la versión más general que se conoce. Para lograrlo, Anosov, caracterizó una clase de sistemas dinámicos para variedades Riemannianas tanto en su caso discreto como continuo, los cuales ahora llevan su nombre: Sistemas Anosov. Ser un sistema Anosov (ya sea el caso de difeomorfismos o de flujos) tiene una gran riqueza dinámica, ya que poseen propiedades como, por ejemplo, ergodicidad, estabilidad estructural, entre otras. Anosov se dio cuenta que la geometría en este tipo de variedades bastaba para garantizar la hiperbolicidad del flujo geodésico en SM y que este hecho implica la ergodicidad del flujo. Este último hecho, E. Hopf lo había intuido años antes pero sólo lo pudo demostrar para el caso de superficies cerradas con curvatura Gaussiana (seccional) negativa y para el caso de variedades con curvatura seccional constante negativa, pues resulta que para demostrar la ergodicidad del flujo geodésico se requiere que las distribuciones estables e inestables a lo largo de la variedad sean tangentes a una foliación estable e inestable, respectivamente y que éstas cumplieran con ser absolutamente continuas, obteniendo así la ergodicidad. A este método se le conoce hoy en día como el "argumento de Hopf".

El problema con que se enfrentó Hopf para demostrar el caso general fue que sólo en los casos anteriores, las distribuciones de planos dependen de manera diferenciable de SM, en general estos campos de planos dependen sólo continuamente de SM lo cual imposibilita utilizar técnicas estándar de geometría diferencial para integrarlos y así obtener las foliaciones deseadas.

La virtud de Anosov fue el darse cuenta de que estos campos de planos eran un poco más que simplemente continuos, estos siempre resultan depender de manera Hölder continua de SM y esto basta para garantizar su integrabilidad en foliaciones absolutamente continuas y de ahí utilizar el argumento de Hopf.

A partir de Anosov se creó alrededor del mundo una gran industria de matemáticos dedicados a estudiar los sistemas Anosov y el flujo geodésico en variedades Riemannianas, surgiendo así, teorías que generalizan a estos sistemas dinámicos. Esto ha permitido una mejor comprensión de ellos.

2.2. Dinámica Topológica

Definición 1. *Consideremos a los semigrupos* $\mathbb{N} = \{0, 1, ...\}$ *y* $\mathbb{R}_0^+ = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$.

Un ***Sistema Dinámico Discreto*** *consiste en un espacio topológico* (X, τ) *no vacío junto con un mapeo continuo* $f : \mathrm{X} \to \mathrm{X}$ *y un semigrupo formado por las iteraciones de* f. *Para* $n \in \mathbb{N}$ *la n-ésima iteración de* f *es* $f^n := \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{n-veces}$, $f^0 := Id_X$. *Si* f *es invertible entonces* $f^{-n} := \underbrace{f^{-1} \circ \cdots \circ f^{-1}}_{n-veces}$. *En este caso las iteraciones forman un grupo.*

Un ***Sistema Dinámico Continuo*** *consiste en un espacio topológico* (X, τ) *no vacío junto con una familia continua de mapas de un parámetro* $\left\{\varphi^t : X \to X / t \in \mathbb{R}_0^+\right\}$ *tales que forman un semigrupo, es decir,*
$\varphi : \mathbb{R}_0^+ \times X \to X$ *es continua, con* $\varphi(t, x) = \varphi^t(x)$ *tal que:*

- $\varphi^0(x) = x \ \forall x \in X$
- $\varphi^t \circ \varphi^s(x) = \varphi^{t+s}(x) \ \forall s, t \in \mathbb{R}_0^+, \forall x \in X,$

a este sistema dinámico se le llama ***Semiflujo.***

Análogamente, si se trata de una familia continua de mapas de un parámetro real, $\{\varphi^t : X \to X / t \in \mathbb{R}\}$, *entonces formará un grupo y el sistema dinámico se le llamará* ***Flujo***.

Ejemplo 1. ***Ecuaciones Diferenciales.***

Los flujos surgen de manera natural como soluciones a Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO). Para empezar con los ejemplos, supongamos que $\dot{x} = V(x)$ *es una ecuación diferencial autónoma en* $\mathbb{R}^d$*, donde el campo vectorial* $V : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ *es continuamente diferenciable. Por el teorema de existencia y unicidad de EDO [Arn],* $\forall x \in \mathbb{R}^d$ $\exists!$ *solución* $\varphi^t(x)$ *con condiciones iniciales* x *en tiempo* $t = 0$ *y definida* $\forall t \in (-\epsilon, \epsilon)$ *para algún* $\epsilon > 0$*. Asumamos que* $\varphi^t(x)$ *está definida* $\forall t \in \mathbb{R}$*. Entonces tenemos que para t fija, el mapeo en tiempo* t*,* $\varphi^t : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$*, dada por* $x \mapsto \varphi^t(x)$ *es un difeomorfismo y por ser autónoma,* $\varphi^t(\varphi^s(x)) = \varphi^{t+s}(x)$*, por lo tanto* φ^t *forma un flujo.*

Ahora supongamos que tenemos un flujo $\psi^t : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$*, y que además el mapa* $(x, t) \mapsto \psi^t(x)$ *es diferenciable, entonces tenemos definida la siguiente ecuación diferencial*

$$\dot{x} = \frac{d}{dt}\psi^t(x) \tag{2.2}$$

Por ejemplo, consideremos la EDO $\dot{x} = Ax$*, donde* A *es una matriz de tamaño* $d \times d$*, entonces el flujo de esta EDO está dado por* $\varphi^t(x) = e^{At}x$*. Si* A *tiene espectro hiperbólico, entonces las órbitas de los puntos en el subespacio generado por los vectores propios asociados a valores propios con parte real negativa, se aproximan exponencialmente al origen, mientras que los puntos en el subespacio generado por los vectores propios asociados a valores propios con parte real positiva, divergen exponencialmente del origen. Éste es uno de los primeros ejemplos de una dinámica hiperbólica.*

Otro ejemplo de un flujo de una ecuación diferencial no lineal, sería las soluciones a la ecuación del péndulo sin fricción:

$$\ddot{\theta} + sen\theta = 0, \tag{2.3}$$

que es equivalente al sistema:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -senx. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Este ejemplo es interesante porque resulta ser un campo Hamiltoniano, concepto que discutiremos más adelante.

Definición 2. *Sea* $\{f^t : X \to X\}$ *un sistema dinámico, dejemos correr a* t *en* $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{R}_0^+$ *ó* $\mathbb{R}$*.*

Para $x \in X$*, la* ***Semi-órbita Positiva*** *de* x *es* $O_f^+(x) = \bigcup_{t \geqslant 0} f^t(x)$*. En el caso que la dinámica forme un grupo, la* ***Semi-órbita Negativa*** *de* x *es* $O_f^-(x) = \bigcup_{t \leqslant 0} f^t(x)$*. La* ***Órbita*** *de* x *es* $O_f(x) = O_f^+(x) \cup O_f^-(x) = \bigcup_t f^t(x)$*.*

*Un $x \in X$ es un **Punto Periódico** de periodo $\tau > 0$ si $f^{\tau}(x) = x$. Si x es un punto periódico, el $\tau > 0$ más pequeño que cumpla que $f^{\tau}(x) = x$ se llama **Periodo Mínimo** de x. La órbita de un punto periódico se llama **Órbita Periódica**. Si $f^t(x) = x$ $\forall t$, entonces x se le llama **Punto Fijo**.*

Un subconjunto $A \subseteq X$ es f **- invariante**, si $f^t(A) \subseteq A$ $\forall t$; f **- invariante hacia adelante,** si $f^t(A) \subseteq A$ $\forall t \geqslant 0$ y f **- invariante hacia atrás,** si $f^{-t}(A) \subseteq A$ $\forall t \geqslant 0$.

2.2.1. Suspensiones y Secciones Transversales

A continuación veremos una forma de pasar de un sistema dinámico discreto a uno continuo y viceversa.

Dado un mapa $f : X \to X$ y una función $c : X \to \mathbb{R}^+$, tomemos el siguiente espacio cociente:

$$X_c = \left\{(x,t) \in X \times \mathbb{R}^+ \mid 0 \leqslant t \leqslant c(x)\right\} /_{(x,c(x)) \equiv (f(x),0)} \tag{2.5}$$

donde $(f^n(x), t) \equiv \left(x, \left(\sum_{i=0}^{n-1} c(f^i(x))\right) + t\right)$.

La **Suspensión** de f con **función de tiempo de retorno** c, es el semiflujo $\phi^s : X_c \to X_c$ dado por $\phi^s(x,t) = (x, t+s)$.

Una **Sección Transversal** a un flujo o semiflujo ϕ^t es un subconjunto cerrado $\Sigma \subseteq X$ tal que:

- Toda órbita de ϕ^t intersecta a Σ.
- $T_x = \{t \in \mathbb{R}^+ \mid \phi^t(x) \in \Sigma\}$ es un subconjunto discreto no vacío de $\mathbb{R}^+$ $\forall x$.

Definimos el **Tiempo de Retorno** a Σ por $\tau : \Sigma \to \mathbb{R}^+$, tal que $\tau(x) = inf\,\{t > 0 \mid \phi^t(x) \in \Sigma\}$. Definamos el mapa de **Primer Retorno** ó **Aplicación de Poincaré** por, $f : \Sigma \to \Sigma$, tal que $f(x) = \phi^{\tau(x)}(x)$.

A veces es útil usar **Secciones Transversales Locales** como, por ejemplo, cerca de órbitas periódicas. En este caso se llaman **Secciones de Poincaré**.

Otra manera de definir un sistema dinámico discreto a partir de uno continuo es tomar la órbita del mapa al tiempo t_0 (t_0-map).

2.2.2. Conjuntos Límite y Recurrencia

Definición 3. *Sea $f : X \to X$ un sistema dinámico topológico y sea $x \in X$. Un punto $y \in X$ es un **punto ω-límite** de x, si existe una sucesión de $\{n_k\} \subseteq \mathbb{N}$ tal que $f^{n_k}(x) \to y$. Al conjunto de todos los puntos ω-límite de x se denotará por $\omega_f(x)$ ó simplemente por $\omega(x)$ en el caso que sea* *clara la dependencia de f.*

Equivalentemente tenemos que,

$$\omega(x) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left(\overline{\bigcup_{i\geqslant n} f^i(x)} \right). \tag{2.6}$$

*Si f es invertible definimos el **Conjunto α-límite** de x como*

$$\alpha_f(x) = \alpha(x) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left(\overline{\bigcup_{i\geqslant n} f^{-i}(x)} \right) \tag{2.7}$$

*un **punto α-límite** de x será aquel que esté en $\alpha(x)$.*

Definición 4. *Sea $\varphi^t : X \to X$ un flujo, $y \in X$ es un **punto ω-limite de** x si existe $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = \infty$ se tiene que $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi^{t_n}(x) = y$. Análogamente $y \in X$ es un punto α-limite de x si existe $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = -\infty$ se tiene que $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi^{t_n}(x) = y$.*

El conjunto ω-limite de x esta dado por:

$$\omega(x) := \bigcap_{s\in\mathbb{R}} \left(\overline{\{\varphi^t(x) : t > s\}} \right) \tag{2.8}$$

*mientras que el **Conjunto α-limite** de x esta dado por*

$$\alpha(x) := \bigcap_{s\in\mathbb{R}} \left(\overline{\{\varphi^t(x) : t < s\}} \right) \tag{2.9}$$

Definición 5. *Un punto x se dice que es **Recurrente** si $x \in \omega(x)$. Sea $\mathcal{R}(f) =: \{puntos\ recurrentes\ de\ f\}$. Notemos que todos los puntos periódicos de f son recurrentes.*

Proposición 1. *1. Los conjuntos α-límite y ω-límite son cerrados y f-invariantes*

2. $\mathcal{R}(f)$ es f-invariante.

Demostración.

1. Claramente $\omega(x)$ y $\alpha(x)$ son cerrados pues son intersección de cerrados. Sea $y \in f(\omega(x))$, entonces la fibra de y, $f^{-1}(y) \subseteq \omega(x)$, tomemos $z \in f^{-1}(y) \Rightarrow \exists n_k \subseteq \mathbb{N}$ tal que $f^{n_k}(x) \to z$, por continuidad de f tenemos que $f^{n_k+1}(x) \to f(z) = y$. Por lo tanto $y \in \omega(x)$. Esto muestra que $\omega(x)$ es f-invariante. Retrocediendo el tiempo se prueba que $\alpha(x)$ es f-invariante.

2. Sea $x \in \mathcal{R}(f)$, $\forall U \subseteq X$ abierto tal que $f(x) \in U$, tenemos que $x \in f^{-1}(U)$. Como x es recurrente $\exists n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(x) \in f^{-1}(U)$, luego $f^{n+1}(x) \in U$. Por lo tanto $f(\mathcal{R}(f)) \subseteq \mathcal{R}(f)$.

□

Definición 6. *Un punto x es **No-Errante**, si $\forall U$ vecindad abierta de x $\exists n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(U) \cap U \neq \varnothing$. El **conjunto de puntos No-Errantes** se denotará por $NW(f)$ (Non-Wandering).*

*Para el caso de flujos x será **No-Errante**, si $\forall U$ vecindad abierta de x $\exists T \in \mathbb{R}$ tal que $\varphi^t(U) \cap U \neq \varnothing$ para $t > T$. El **conjunto de puntos No-Errantes** se denotará por $NW(\varphi^t)$.*

Proposición 2.
a) *$NW(f)$ es cerrado f-invariante y contiene a $\alpha(x)$,$\omega(x)$ $\forall x \in X$*

b) *Todo punto recurrente es no-errante. Más aún $\overline{\mathcal{R}(f)} \subseteq NW(f)$.*

Demostración.
a) Sea $\{x_k\} \subseteq NW(f)$ tal que $\{x_k\} \to x$. Tomemos $U \ni x$ vecindad abierta de x, entonces existe $K_0 \in \mathbb{N}$, tal que $x_{k_0} \in U$, como x_{k_0} es no-errante $\exists n_{k_0}$, tal que $f^{n_{k_0}}(U) \cap U \neq \varnothing \Rightarrow x \in NW(f) \therefore NW(f)$ es cerrado.

Sea $x \in NW(f)$, $\forall U \subseteq X$ abierto tal que $f(x) \in U$, tenemos que $x \in f^{-1}(U)$. Luego$\exists n \in \mathbb{N}$ tal que $\left(f^n(f^{-1}(U)) \cap f^{-1}(U)\right) \neq \varnothing, \Rightarrow (f^n(U) \cap U) \neq \varnothing$. Por lo tanto $NW(f)$ es f -invariante.

Sea $y \in \omega(x)$, entonces $\exists$ $f^{n_k}(x) \to y$. Sea $U \ni y$ vecindad abierta de y. Luego $\exists$ $k_0 \in \mathbb{N}$, tal que, $f^{n_k}(x) \in U$, $\forall k \geqslant k_0$. Por otro lado $f^{-n_k}(U)$ es abierto y $x \in f^{-n_k}(U) := V$, $\forall k \geqslant k_0$. Sea $j_k = n_{k+1} - n_k \Rightarrow f^{j_k}(U) = f^{n_{k+1}}(V) \ni f^{n_{k+1}}(x)$, $\forall k \geqslant k_0$. Entonces $f^{n_{k+1}}(x) \in \left(f^{j_k}(U) \cap U\right) \Rightarrow y \in NW(f)$, $\therefore \omega(x) \subseteq NW(f)$.

Tomando tiempos negativos, el mismo argumento muestra que $\alpha(x) \subseteq NW(f)$.

b) Sea $x \in \mathcal{R}(f)$ y $x \in U \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(x) \in U \Rightarrow (f^n(U) \cap U) \neq \varnothing$. Así $\mathcal{R}(f) \subseteq NW(f)$ por a) $\overline{\mathcal{R}(f)} \subseteq \overline{NW(f)} = NW(f)$.

□

Proposición 3. ***a)*** *Sea f un homeomorfismo, $y \in \overline{O(x)}$ y $z \in \overline{O(y)}$, entonces $z \in \overline{O(x)}$.*

b) *Sea f continua, $y \in \overline{O^+(x)}$ y $z \in \overline{O^+(y)}$. Entonces $z \in \overline{O^+(x)}$.*

Demostración. **a)** Como $y \in \overline{O(x)}$, entonces $\exists$ $\{f^{n_k}(x)\}_{k \in \mathbb{N}}$ tal que $lim_{k\to\infty}\{f^{n_k}(x)\} = y$ con $\{n_k\} \subseteq \mathbb{Z}$. Además, como $z \in \overline{O(y)}$ $\exists$ $\{f^{n_s}(y)\}$ tal que $lim_{s\to\infty}\{f^{n_s}(y)\} = z$ con $\{n_s\} \subseteq \mathbb{Z}$. Por lo tanto, $z = lim_{s\to\infty}\{f^{n_s}(lim_{k\to\infty}f^{n_k}(x))\} = lim_{s\to\infty}lim_{k\to\infty}f^{n_s}(f^{n_k}(x))$
$= lim_{k,s\to\infty}f^{n_k+n_s}(x) \therefore z \in \overline{O(x)}$.

b) es el caso anterior pero con $\{n_k\}, \{n_s\} \subseteq \mathbb{N}$.

□

Definición 7. *Sea X compacto. Un subconjunto $Y \subseteq X$ cerrado, no vacío y f-invariante es un* ***Conjunto Mínimo*** *de f, si $\nexists Z \subsetneq Y$ cerrado, no vacío y f-invariante. Un conjunto Y compacto, f-invariante es mínimo si y sólo si, la órbita positiva de todo punto en Y es denso en Y. Notemos que una órbita periódica es un conjunto mínimo. Si todo X es un conjunto mínimo, entonces diremos que f es mínimo.*

Proposición 4. *Sea $f : X \to X$ un sistema dinámico topológico. Si X es compacto, entonces X contiene conjunto mínimo de f.*

Demostración. Sea $\mathcal{C} =: \{Y \subseteq X \mid Y$ es cerrado, no vacío y $f - invariante\}$, entonces $(\mathcal{C}, \subseteq)$ es un conjunto parcialmente ordenado no vacío pues $X \subseteq \mathcal{C}$. Tomemos $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{C}$ un conjunto totalmente ordenado, entonces cualquier intersección finita de $\mathcal{K}$ es no vacía. Como X es compacto por la propiedad de intersección finita tenemos que, $\bigcap_{k \in \mathcal{K}} K \neq \varnothing$. Entonces por el Lema de Zorn, $\mathcal{C}$ contiene un elemento mínimo, el cual, es un conjunto mínimo de f. □

En espacios topológicos compactos, todo punto en un conjunto mínimo es recurrente, por lo que, la existencia de conjuntos mínimos implica la existencia de puntos recurrentes.

Definición 8. *Un subconjunto A de $\mathbb{N}$ ó $\mathbb{Z}$ es* ***relativamente denso****, si $\exists (k > 0) \in \mathbb{N}$ tal que $(\{n, n+1, ..., n+k\} \cap A) \neq \varnothing \; \forall n$. Un punto $x \in X$ es* ***Casi Periódico****, si $\forall U$ vecindad de x, el conjunto $\left\{ i \in \mathbb{N} \mid f^i(x) \right\}$ es relativamente denso en $\mathbb{N}$.*

Proposición 5. *Si X es un compacto Hausdorff y $f : X \to X$ es continua, entonces $\overline{\mathcal{O}^+(x)}$ es mínimo de $f \iff x$ es casi periódico.*

Demostración. [Br,St] □

2.2.3. Transitividad Topológica y Mixing Topológico

Definición 9. *Un sistema dinámico $f : X \to X$ es* ***Topológicamente Transitivo,*** *si existe un punto $x \in X$ tal que su órbita positiva, $O^+(x)$, es densa en X.*

Definición 10. *Sea $\varphi^t : X \to X$ un flujo. φ^t es* ***Topológicamente Transitivo*** *si existe $x \in X$ tal que $O^+_\varphi(x)$ es densa en X.*

Proposición 6. *Si X no tiene puntos aislados, entonces f es topológicamente transitivo si y sólo si existe $x \in X$ tal que $\omega(x)$ es denso en X.*

Demostración. $\lfloor \Rightarrow \rfloor$ Si $\overline{O^+_f(x)} = X$ para algún $x \in X$, entonces $\forall y \in X \; \exists n_k \in \mathbb{N}$ tal que $f^{n_k}(x) \to y$ $\Rightarrow y \in \omega(x)$ luego $X = \omega(x)$.

$\lfloor \Leftarrow \rfloor$Si $\overline{\omega(x)} = X$ para algún $x \in X$, $\forall U$ abierto $\exists y \in \omega(x)$ tal que $y \in U \Rightarrow \exists k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $f^{n_k}(x) \in U \; \forall k \geqslant k_0$, entonces $\left(O^+_f(x) \cap U \right) \neq \varnothing$. □

De misma manera se prueba que:

Proposición 7. *Si X no tiene puntos aislados, entonces φ^t es topológicamente transitivo si y sólo si existe $x \in X$ tal que $\omega(x)$ es denso en X.*

Teorema 1. *Sea (X, τ) un espacio topológico Hausdorff, localmente compacto y segundo numerable. Sea $f : X \to X$ continua. f es topológicamente transitivo si y sólo si, para cualesquiera dos abiertos $U, V \subseteq X$, existe $N = N(U, V) \in \mathbb{N}$ tal que $(f^N(U) \cap V) \neq \varnothing$.*

Demostración. $\lfloor\Rightarrow\rfloor$ Sea f topológicamente transitiva y sea $x \in X$ tal que $\overline{O_f^+(x)} = X$, entonces $\forall U, V \in \tau$, $O_f^+(x)$ intersecta U y V por lo tanto $\exists n, m \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(x) \in U$ y $f^m(x) \in V \Rightarrow (f^{m-n}(U) \cap V) \neq \varnothing$.

$\lfloor\Leftarrow\rfloor$ Para cualquier $V \in \tau$ tenemos que $\forall U \in \tau$, existe N tal que $(f^N(U) \cap V) \neq \varnothing$, entonces $\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} f^{-n}(V)\right) \cap U \neq \varnothing$, $\forall U \subseteq X$ abierto, por lo tanto $\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} f^{-n}(V)\right)$ es denso y abierto en X. Sea $\{V_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una base numerable de τ. Por el teorema de categoría de Baire $Z = \bigcap_{i\in\mathbb{N}} \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} f^{-n}(V_i)\right)$ es denso, en particular es no vacío. Así $\forall z \in Z$, z eventualmente entra en cada V_i, esto implica que $\overline{O_f^+(z)} = X$. □

Definición 11. *Un sistema dinámico $f : X \to X$ es un **Mixing Topológico**, si para cualesquiera dos abiertos no vacíos $U_1, U_2 \subseteq X$ $\exists N(U_1, U_2) > 0$ tal que $(f^n(U_1) \cap U_2) \neq \varnothing$, $\forall\ n \geqslant N$.*

Definición 12. *Sea $\varphi^t : X \to X$ un flujo. φ^t es topológicamente mixing si $\forall U, V \subseteq X$ abiertos existe $T = T(U, V) > 0$ tal que $\varphi^t(U) \cap V \neq \varnothing$, $\forall t \geqslant T$.*

Corolario 1. *Sea (X, τ) un espacio topológico Hausdorff, localmente compacto y segundo numerable. Sea $f : X \to X$ topológicamente mixing. Entonces f es topológicamente transitivo.*

El converso no es cierto [Br,St].

Proposición 8. *Sea (X, τ) Hausdorff, segundo numerable y localmente compacto. Sea $\varphi^t : X \to X$ un flujo topológicamente mixing. Entonces φ^t es topológicamente transitivo.*

Demostración. Consideremos el mapa al tiempo 1, $\varphi^1 = \varphi : X \to X$. Sean $U, V \subseteq X$ abiertos, como φ^t es topológicamente mixing $\exists T > 0$ tal que $\varphi^t(U) \cap V \neq \varnothing$, $\forall t \geqslant T$, tomemos $N(U, V) \in \mathbb{N}$ tal que $N > t > T$, entonces $\varphi^N(U) \cap V \neq \varnothing$. Por el teoema 1, $\exists x \in X$ tal que $\{\varphi^n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es denso en X, como $\{\varphi^n(x)\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq O_\varphi^+(x)$, tenemos que $O_\varphi^+(x)$ es denso en X. □

2.3. Teoría Ergódica

Definición 13. *Sea (X, τ) un espacio topológico. Sea $\mathcal{Q}$ una colección no vacía de subconjuntos de X. Ésta es una **σ-álgebra,** si $\mathcal{Q}$ es cerrada bajo complementos y uniones numerables. La σ-álgebra más pequeña que contenga a todos los subconjuntos abiertos de X se llama **σ-álgebra de Borel**.*

*Una **Medida** μ en $\mathcal{Q}$ es una función σ-aditiva no negativa $\mu : \mathcal{Q} \to \mathbb{R}$, tal que $\mu(\varnothing) = 0$. X tiene medida finita si $\mu(X) < \infty$. μ es **Sigma Finita** si X es la unión numerable de subconjuntos* *de medida finita. El complemento de un conjunto de medida cero, se dice que tiene* ***Medida Total****.*

Un ***Espacio de Medida*** *es la terna* $(X, \mathcal{Q}, \mu)$*. Sean* $(X, \mathcal{Q}, \mu)$ *y* $(Y, \mathcal{Q}', \nu)$ *dos espacios de medida, un producto de espacios de medida es* $(X \times Y, \mathcal{Q}'', \mu \times \nu)$*, donde* $\mathcal{Q}''$ *es la* σ*-álgebra generada por* $\mathcal{Q} \times \mathcal{Q}'$ *relativa a la medida* $\mu \times \nu$*. Sean* $(X, \mathcal{Q}, \mu)$ *y* $(Y, \mathcal{Q}', \nu)$ *espacios de medida, el mapa* $f : X \to Y$ *se dice que es* ***Medible****, si la preimagen de todo conjunto* ν*-medible es* μ*-medible y se dice que* ***Preserva Medida*** *si* $\mu(T^{-1}(A)) = \nu(A)\ \forall A \in \mathcal{Q}'$*.*

Teorema 2 (Recurrencia de Poincaré)**.** *Sea* $(X, \mathcal{Q}, \mu)$ *un espacio de medida finita y* $f : X \to X$ *una transformación medible que preserva la medida* μ*. Sea* $E \subseteq X$ *cualquier subconjunto medible con* $\mu(E) > 0$*. Entonces para* μ*-c.t* $x \in E$ *existen infinitos* $n \in \mathbb{N}$ *para los cuales* $f^n(x) \in E$*.*

Demostración. Sea $E_0 = \{x \in E \mid f^n(x) \notin E \forall n \in \mathbb{N}\}$ el conjunto de puntos en E que nunca regresan a E. Notemos que si $m > n \geqslant 1$ entonces $f^{-m}(E_0) \cap f^{-n}(E_0) = \varnothing$, pues si $x \in f^{-m}(E_0) \cap f^{-n}(E_0)$ $\Rightarrow y = f^n(x) \in E_0$ y $f^{m-n}(y) = f^m(x) \in E_0 \therefore y$ regresa al menos una vez a E contradiciendo la definición de E_0.

Luego como f preserva a μ tenemos que $\mu(f^{-n}(E_0)) = \mu(E_0)\ \forall n \in \mathbb{N}$ por tanto:

$$\mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} f^{-n}(E_0)) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(f^{-n}(E_0)) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(E_0). \tag{2.10}$$

Como μ es finita tenemos que $\mu(E_0) = 0$.

Ahora sea F el conjunto de puntos $x \in E$ tal que regresan a E una cantidad finita de veces, entonces $\forall x \in F\ \exists k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(x) \in E_0$. Luego, $F \subseteq \bigcup_{k\in\mathbb{N}} f^{-k}(E_0)$ por lo tanto:

$$\mu(F) \leqslant \mu(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} f^{-k}(E_0)) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(E_0) = 0. \tag{2.11}$$

□

Corolario 2. *Sea* $(X, \mathcal{Q}, \mu)$ *un espacio de medida finita y* $\varphi^t : X \to X$ *un flujo medible que preserva la medida* μ*. Sea* $E \subseteq X$ *cualquier subconjunto medible con* $\mu(E) > 0$ *y sea* $t_n \to \infty$*. Entonces para* μ*-c.t* $x \in E$ *existen infinitos* $n \in \mathbb{N}$ *para los cuales* $\varphi^{t_n}(x) \in E$*.*

2.3.1. Distribuciones Asintóticas y Medidas Invariantes

Definición 14. *Sea* $f : X \circlearrowleft$ *un mapeo continuo,* $x \in X$ *y un conjunto* $U \subset X$ *. Denotemos por* $F_U(f, x, n)$ *el número de enteros* $k \in \{1, ..., n-1\}$ *tales que* $f^k(x) \in U$*, es decir, el número de visitas al conjunto* U *bajo las primeras* n *iteraciones de* x*. Si existe el límite* $F_U(f, x) = \lim_{n\to\infty} \frac{F_U(f,x,n)}{n}$ *se le llama* ***Frecuencia Asintótica*** *y da la densidad asintótica de la distribución de las iteraciones entre* U *y* $X \backslash U$*.*

Uno puede redefinir la frecuencia asintótica notando que $f^k(x) \in U$, si y sólo si, $\chi_U(f^k(x)) = 1$, donde χ_U es la función característica del conjunto U. Por lo tanto, tenemos que:

$$\begin{aligned} F_U(f,x,n) &= \sum_{k=0}^{n-1} \chi_U(f^k(x)) \\ F_U(f,x) &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \chi_U(f^k(x)) \end{aligned} \tag{2.12}$$

*En general, para $f : X \circlearrowleft$, $x \in X$ y $\varphi : X \to \mathbb{R}$, si existe el límite $I_x(\varphi) := \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \varphi(f^k(x))$, se le conoce como **Promedio de Birkhoff** de la función φ.*

Lema 1. *Si consideramos $B^0(X)$ con la topología uniforme, entonces tenemos que, $I_x : B^0(X) \to \mathbb{R}$ cumple con las siguientes propiedades :*

1. $|I_x(\varphi)| \leqslant \sup_{y\in X} |\varphi(y)| = \|\varphi\|_{B^0(X)}$
2. *Linealidad:* $I_x(a\varphi + b\psi) = aI_x(\varphi) + bI_x(\psi)$; $\forall a, b \in \mathbb{R}$
3. *Positividad:* $I_x(\varphi) \geqslant 0$ *si* $\varphi \geqslant 0$ *y* $I_x(\mathbf{1}) = 1$
4. *Invarianza bajo f:* $I_x(\varphi \circ f) = I_x(\varphi)$ *o equivalentemente* $I_{f(x)}(\varphi) = I_x(\varphi)$.

Demostración. Supongamos que $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \varphi(f^k(x))$ existe, entonces:

1. $|I_x(\varphi)| = \left| \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \varphi(f^k(x)) \right| \leqslant \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left|\varphi(f^k(x))\right| \leqslant \sup_{y\in X} |\varphi(y)|$

2. $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $I_x(a\varphi + b\psi) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (a\varphi + b\psi)(f^k(x)) = a \left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \varphi(f^k(x)) \right) +$
   $b \left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \psi(f^k(x)) \right) = aI_x(\varphi) + bI_x(\psi)$

3. Sea $\varphi \in C^0(X, \mathbb{R})$ tal que $\varphi \geqslant 0$, entonces:

   $0 \leqslant \varphi(f^k(x)), \forall k \Rightarrow 0 \leqslant \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \varphi(f^k(x))\ \forall n \ \Rightarrow 0 \leqslant I_x(\varphi)$.

   Sea $\mathbf{1} : X \to \mathbb{R}$, $\mathbf{1}(x) = 1, \forall x \in X$, entonces:

   $I_x(\mathbf{1}) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{1}(f^k(x)) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} 1 = 1$

4. $I_x(\varphi \circ f) - I_x(\varphi) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \varphi(f^{k+1}(x)) - \sum_{k=0}^{n-1} \varphi(f^k(x)) \right)$

   $= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} (\varphi(f^n(x)) - \varphi(x)) = 0$

□

Corolario 3. *Si X es localmente compacto, existe una única medida de Borel μ_x tal que, $I_x(\varphi) = \int\limits_X \varphi d\mu_x$ y con μ_x f-invariante.*

Demostración. Por las propiedades 1-3 junto con el teorema de representación de Riesz-Markov, tenemos que, existe una única medida de probabilidad μ tal que, $I_x(\varphi) = \int\limits_X \varphi d\mu$. Además, de la propiedad 4, $\mu(f^{-1}(A)) = \mu(A)$; $\forall A$ μ-medible.

Lo anterior se puede ver considerando abiertos U y aproximando a la función característica χ_U por arriba con funciones continuas f_n tal que $\int f_n d\mu \to \mu(U)$, y después aproximando conjuntos más generales por conjuntos abiertos.

Entonces tenemos que,

$$I_x(\varphi) = \int_X \varphi d\mu_x, \tag{2.13}$$

donde μ_x es una medida de Borel en X, f-invariante. □

2.3.2. Existencia de Medidas Invariantes

Teorema 3 (Krylov-Bogolubov)**.** *Cualquier mapa continuo de un espacio de medida X compacto, tiene una medida de Borel invariante.*

Demostración. Sea $f : X \to X$ y $x \in X$. Tomemos un conjunto denso numerable $\{\varphi_1, \varphi_2, ...\} \subseteq C^0(X)$. Para toda m, la sucesión $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \varphi_m(f^k(x))$ es acotada, por lo tanto, contiene una subsucesión convergente. Después de un proceso diagonal, es posible encontrar una subsucesión $n_k; k \in \mathbb{N}$ tal que existe

$$J(\varphi_m) =: \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n_k} \sum_{j=0}^{n_k-1} \varphi_m(f^j(x)) \tag{2.14}$$

$\forall m \in \mathbb{N}$. Sea φ una función continua arbitraria. Fijemos $\epsilon > 0$ y tomemos φ_m tal que $\sup\limits_{x\in X}|\varphi(x) - \varphi_m(x)| < \epsilon$, entonces,

$$\frac{1}{n_k}\sum_{j=0}^{n_k-1} \varphi(f^j(x)) = \frac{1}{n_k}\sum_{j=0}^{n_k-1} \varphi_m(f^j(x)) + \frac{1}{n_k}\sum_{j=0}^{n_k-1} \left(\varphi(f^j(x)) - \varphi_m(f^j(x))\right). \tag{2.15}$$

El primer término converge a $J(\varphi_m)$, el segundo está acotado en valor absoluto por ϵ. Entonces, todos los puntos límite de la ecuación de la izquerda difieren a lo más por ϵ. Como ϵ es arbitrario, el siguiente límite existe:

$$J(\varphi) =: \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n_k} \sum_{j=0}^{n_k-1} \varphi(f^j(x)). \tag{2.16}$$

$J : C^0(X) \to \mathbb{R}$ es lineal, acotado, positivo e invariante. Por el teorema de representación de Riesz-Markov tenemos que, $J(\varphi) = \int \varphi d\mu_x$, donde μ_x es una medida de probablilidad $f-$ *invariante.* □

El teorema anterior implica que cualquier transformación continua, no necesariamente invertible, $f : X \to X$ de un espacio metrizable compacto, puede verse como una transformación que preserva la medida del espacio de Lebesgue generado por la medida de Borel en X.

Definición 15. *Sea $(X, \mathcal{Q}, \mu)$ un espacio de medida finita y $f : X \to X$ una transformación medible que preserva la medida μ. Entonces diremos que f es* ***Ergódico*** *con respecto a la medida μ, si para todo $E \in \mathcal{Q}$ tal que $f^{-1}(E) = E$, entonces $\mu(E) = 0$ ó $\mu(E) = \mu(X)$.*

Normalizando la medida μ podemos suponer que tenemos una medida de probabilidad por lo que siempre podemos suponer que $\mu(X) = 1$.

Proposición 9. *Sea $(X, \mathcal{Q}, \mu)$ un espacio de probabilidad y $f : X \to X$ una transformación medible que preserva la medida μ. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

a) f es Ergódico

b) $\forall E \in \mathcal{Q}$ tal que $\mu(f^{-1}(E) \triangle E) = 0$, entonces $\mu(E) = 0$ ó $\mu(E) = 1$.

c) $\forall \phi : X \to \mathbb{R}$ medible con $\phi \circ f = \phi$, entonces ϕ es constante μ-c.t.p.

2.3.3. El Teorema Ergódico de Birkhoff

Sea $(X, \mathcal{Q}, \mu)$ un espacio de medida y $f : X \to X$ una transformación que preserva la medida. Para una función medible φ, definamos el operador $U_f(\varphi) = \varphi(f(x))$. El operador U_f es un endomorfismo del álgebra $L^p(X, \mathcal{Q}, \mu)$, y dado que f preserva la medida, resulta ser una isometría para $p \geqslant 1$, esto es: $\|U_f(\varphi)\|_p = \|\varphi\|_p \ \forall \varphi \in L^p(X, \mathcal{Q}, \mu)$. Si f es invertible, entonces $U_f^{-1} = U_{f^{-1}}$ también resulta ser una isometría y por tanto, U_f es un operador unitario en $L^2(X, \mathcal{Q}, \mu)$. Sea $\langle \varphi, \psi \rangle = \int_X \varphi(x)\bar{\psi}(x) d\mu(x)$ el producto interno en $L^2(X\mathcal{Q}, \mu)$, y U^* el adjunto de U.

Lema 2. *Sea U una isometría de un espacio de Hilbert H, entonces $U(\varphi) = \varphi \Leftrightarrow U^*(\varphi) = \varphi$.*

Demostración. $\forall \varphi, \psi \in H \ \langle U^*U(\varphi), \psi \rangle = \langle U(\varphi), U(\psi) \rangle = \langle \varphi, \psi \rangle \therefore U^*U(\varphi) = \varphi$, pues $\langle U^*U(\varphi) - \varphi, \psi \rangle = 0$.

[$\Rightarrow$] Si $U(\varphi) = \varphi$, multiplicando por U^* tenemos que $U^*U(\varphi) = U^*(\varphi) \Longrightarrow \varphi = U^*(\varphi)$.

[$\Leftarrow$] Por propiedades el operador adjunto tenemos que, como U es una isometría, U^* también lo es. Supongamos que $U^*(\varphi) = \varphi$, entonces $\forall \psi \in H \ \langle \psi, U(\varphi) \rangle = \langle U^*(\psi), \varphi \rangle = \langle U^*(\psi), U^*(\varphi) \rangle = \langle \psi, \varphi \rangle \Longrightarrow \langle \psi, U(\varphi) - \varphi \rangle = 0 \ \forall \psi \in H \therefore U(\varphi) = \varphi$. □

Teorema 4 (Ergódico de Birkhoff). *Sea $f : (X, \mathcal{Q}, \mu) \to (X, \mathcal{Q}, \mu)$ una transformación de un espacio de medida finita que preserva medida, $\varphi \in L^1(X, \mathcal{Q}, \mu)$. Entonces el límite*

$$\bar{\varphi}(x) =: \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \varphi(f^k(x)), \tag{2.17}$$

existe para casi todo $x \in X$, es μ-integrable y f-invariante y satisface,

$$\int_X \bar{\varphi} d\mu = \int_X \varphi d\mu. \tag{2.18}$$

Si además suponemos que $\varphi \in L^2(X, \mathcal{Q}, \mu)$, entonces $\bar{\varphi}$ es la proyección ortogonal de φ al subespacio de funciones f-invariantes.

Si f es invertible, entonces $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \varphi(f^{-k}(x))$ también converge a $\bar{\varphi}$ para casi todo punto.

De manera similar, si f^t es un flujo de $(X, \mathcal{Q}, \mu)$ que preserva medida, $\varphi \in L^1(X, \mathcal{Q}, \mu)$. Entonces,

$$\varphi_\tau^+(x) = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \varphi(f^t(x))dt \tag{2.19}$$

y

$$\varphi_\tau^-(x) = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \varphi(f^{-t}(x))dt, \tag{2.20}$$

convergen a una función $\bar{\varphi}$ para casi todo punto y $\int_X \bar{\varphi} d\mu = \int_X \varphi d\mu$.

Demostración. [Br,St]. □

Corolario 4. *Una transformación, $f : (X, \mathcal{Q}, \mu) \to (X, \mathcal{Q}, \mu)$, de un espacio de medida finita que preserva medida, es ergódico $\iff \forall \varphi \in L^1(X, \mathcal{Q}, \mu)$,*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \varphi(f^k(x)) = \frac{1}{\mu(X)} \int_X \varphi(x) d\mu, \tag{2.21}$$

para casi todo $x \in X$.

El corolario 4 nos dice que una transformación f, de un espacio de medida finita que preserva medida, es ergódico si y sólo si, el promedio de tiempo y el promedio del espacio de una función medible son iguales para casi todo punto.

Además, nos garantiza que para demostrar la ergodicidad de un sistema dinámico, basta checar la ecuación (2.21) para un subconjunto denso en $L^1(X, \mathcal{Q}, \mu)$, como por ejemplo, las funciones continuas, $C^0(X)$.

2.4. Variedades Diferenciables

Dada una función $h : \Omega \subseteq \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^q$, diremos que es de clase C^r, $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty, \omega, \beta\}$, $\beta \in (0,1)$ según los siguientes casos:

- Si $r \in \mathbb{N}$ entonces h es r veces diferenciable y su derivada de orden r es continua en Ω.
- Si $r = \infty$ entonces h tiene derivadas de todos los órdenes.
- Si $r = \omega$ entonces h es analítica real.
- Si $r = \beta$, $\beta \in (0,1)$ entonces h es Hölder continua con exponente de Hölder β.

Definición 16. *Sea (M, τ) un espacio topológico Hausdorff, segundo numerable. M es una **Variedad Diferenciable** de dimensión d, si es localmente homeomorfa a $\mathbb{R}^d$ y tiene un atlas diferenciable. Esto es:*

*Existe una cubierta abierta $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ de M, tal que $\forall i \in I$ hay un mapa $\varphi_i : U_i \to \varphi_i(U_i) \subseteq \mathbb{R}^d$, tal que φ_i es un homeomorfismo. La pareja (φ_i, U_i) se llama **Carta Coordenada** y el conjunto de cartas $\Phi = \{\varphi_i, U_i\}_{i \in I}$ se llama **Atlas**. Dos cartas coordenadas (φ_i, U_i), $(\varphi_j, U_j) \in \Phi$ tales que $(U_i \cap U_j) \neq \varnothing$, tienen **Funciones de Transición** de clase C^r, con $1 \leqslant r \in \mathbb{N} \cup \{\infty, \omega\}$, si se tiene que los mapas $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i \cap U_j) \to \varphi_j(U_i \cap U_j)$ y $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$ son de clase C^r. Decimos que el atlas Φ es de clase C^r, si para todo par de cartas coordenadas con intersección no vacía, sus funciones de transición son de clase C^r. En ese caso, existe un único altas máximo Ψ de clase C^r que contiene a Φ.*

*Un atlas α máximo de clase C^r sobre M, se llama **estructura diferenciable** de clase C^r. A la pareja (M, α) se llama **Variedad Diferenciable** de clase C^r.*

Ejemplo 2. *$(\mathbb{R}^d, \alpha)$ con $\alpha = \{(Id, \mathbb{R}^d)\}$; La Grassmanniana de k-subespacios en V. Este último ejemplo lo estudiaremos a continuación.*

2.4.1. Grassmannianas

Definición 17. *Sea V un espacio vectorial de dimensión d. Si $d > k$, al conjunto de subespacios vectoriales de dimensión k en V, lo denotaremos por $Gr_V(d;k)$, el cual se conoce como la **Grassmanniana** de k-subespacios en V. Si $V = \mathbb{R}^d$, denotaremos a la Grassmanniana de k-planos en $\mathbb{R}^d$, $Gr_{\mathbb{R}^d}(d;k)$, simplemente por $Gr(d;k)$.*

Proposición 10. *$Gr(d;k)$ tiene estructura de variedad diferenciable de dimensión $(d-k)k$.*

Demostración. La estructura de variedad diferenciable de $Gr(d;k)$, la obtendremos exhibiendo un atlas coordenado cuyas funciones de transición sean difeomorfismos. Para esto, empecemos definiendo una topología τ para $Gr(d;k)$. Sea $W \subset \mathbb{R}^d$ un k-subespacio vectorial, $W^{\perp} \subset \mathbb{R}^d$ su complemento ortogonal, $\prod_W : \mathbb{R}^d \to W$ la proyección ortogonal sobre W, y $\prod_{W^\perp} : \mathbb{R}^d \to W^\perp$ la proyección ortogonal sobre $W^\perp$.

Definamos una base β de abiertos como sigue: $\beta := \{\mathcal{O}_{W,\epsilon}\}_{W<\mathbb{R}^d}$ donde:

$$\mathcal{O}_{W,\epsilon} := \left\{W' < \mathbb{R}^d \mid dim(W') = k \text{ y para } \epsilon > 0, \left\|\Pi_W(x) - x\right\| < \epsilon\left\|\Pi_{W^\perp}(x) - x\right\|, \forall x \neq 0 \text{ en } W'\right\}, \tag{2.22}$$

y tomemos a τ como la topología generada por β.

Ahora, para cada $W < \mathbb{R}^d$ tomemos

$$\mathcal{O}_W := \left\{W' < \mathbb{R}^d \mid \Pi_W : W' \to W \text{ es isomorfismo}\right\}, \tag{2.23}$$

ésta es una vecindad abierta que contiene a W. Veamos que funciona como carta coordenada, para ello, tomemos a $Hom(W,W^\perp)$ y recordemos, que este espacio vectorial tiene una clasica identificación con $\mathbb{R}^{(d-k)k}$. Así, $\mathbb{R}^d = W \oplus W^\perp$.

Supongamos que $W' \in \mathcal{O}_W$. Como $\prod_W : W' \to W$ es un isomorfismo, entonces tiene una inversa lineal $L_{W,W'} : W \to W'$, por lo tanto, $\prod_{W^\perp} \circ L_{W,W'}$ es un mapeo lineal de W a $W^\perp$, y en consecuencia, es un elemento de $Hom(W, W^\perp) = \mathbb{R}^{(d-k)k}$. A este punto lo definiremos como $\varphi_W(W')$. De esta manera tenemos definido el mapa:

$$\begin{aligned} \varphi_W : \mathcal{O}_W &\longrightarrow \mathbb{R}^{(d-k)k} \\ W' &\mapsto \varphi_W(W') = \Pi_{W^\perp} \circ L_{W,W'} \end{aligned} \tag{2.24}$$

φ_W es continua y su inversa φ_W^{-1} manda a cada elemento, $A \in Hom(W, W^\perp)$ al k-subespacio vectorial $\varphi_W^{-1}(A) = \{x + Ax \mid x \in W\}$, que no es más que la gráfica de A.

Ahora probemos que las funciones de transición entre cualesquiera dos cartas coordenadas son diferenciables. Sean W y $W' \in Gr(d;k)$ y sean $\mathcal{O}_W$ y $\mathcal{O}_{W'}$ sus respectivas cartas coordenadas, veamos que $\varphi_{W'} \circ \varphi_W^{-1}$ es diferenciable en $\varphi_W(\mathcal{O}_W \cap \mathcal{O}_{W'}) \subseteq \mathbb{R}^{(d-k)k}$.

Tenemos que $W \oplus W^\perp = \mathbb{R}^d = W' \oplus W'^\perp$. Para $A \in \varphi_W(\mathcal{O}_W \cap \mathcal{O}_{W'})$, sea $S = \varphi_W^{-1}(A)$ y $A' : W' \to W'^\perp$ el único mapa lineal tal que $S = \{y + A'y \mid y \in W'\}$. Entonces $\forall y \in W' \Rightarrow y + A'y = x + Ax$, para algún $x \in W$. Por lo tanto $x + Ax - y = A'y \in W'^\perp$
Luego sea,

$$\begin{aligned} graf_A : W &\longrightarrow \mathbb{R}^d \\ x &\mapsto x + Ax \end{aligned} \tag{2.25}$$

Notemos que $Ker(\Pi_{W'}) = W'^{\perp}$, además como $y \in W'$ tenemos que,

$$\begin{aligned}0 = \Pi_{W'}(x + Ax - y) = \Pi_{W'}(x + Ax) - \Pi_{W'}(y) = (\Pi_{W'} \circ graf_A)(x) - y \\ \Rightarrow y = (\Pi_{W'} \circ graf_A)(x)\end{aligned} \tag{2.26}$$

Como $S \in (\mathcal{O}_W \cap \mathcal{O}_{W'})$, entonces $\Pi_{W'} \circ graf_A$ es invertible, por lo tanto tenemos que $x = (\Pi_{W'} \circ graf_A)^{-1}(y)$ y así obtenemos una expresión de A' en terminos de A

$$A'y = graf_A(x) - y = graf_A\left((\Pi_{W'} \circ graf_A)^{-1}\right)(y) - y \tag{2.27}$$

Y como $graf_A$ depende diferenciablemente de A tenemos que el mapa,

$$\begin{aligned}\varphi_{W'} \circ \varphi_W^{-1} : \varphi_W(\mathcal{O}_W \cap \mathcal{O}_{W'}) \to Hom(W', W'^{\perp}) \\ A \mapsto A'\end{aligned} \tag{2.28}$$

Es diferenciable. De manera análoga, concluimos que $\varphi_W \circ \varphi_{W'}^{-1}$ también es diferenciable, con lo que se sigue la afirmación del enunciado. □

2.4.2. Morfismos entre Variedades Diferenciables

Sean M^d, N^q variedades diferenciables de clase C^r y clase C^s, respectivamente. Un mapa $f : M \to N$ se dice **Morfismo** o **Función Diferenciable** entre M y N de Clase C^k, $k \leqslant min\{r, s\}$, si para todo $x \in M$, $\exists$ (φ, U) carta coordenada de x y (ψ, V) carta coordenada de $f(x)$ tal que $\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^d \to \psi(V) \subseteq \mathbb{R}^q$ es de clase C^k.

$$\begin{array}{ccc} {\scriptstyle x\in}U & \xrightarrow{f} & V{\scriptstyle \ni f(x)} \\ {\scriptstyle \varphi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \psi} \\ \varphi(U) & \xrightarrow[\psi\circ f\circ\varphi^{-1}]{} & \psi(V) \end{array}$$

Decimos que un mapa $f : M \to N$ es suave, si es de clase C^∞.

2.4.3. Haces Fibrados

Sean M, F variedades diferenciables. Un **Haz Fibrado** (diferenciable) sobre M con fibra típica F, es (E, π, M, F) donde E es una variedad diferenciable y $\pi : E \to M$ es una función diferenciable y suprayectiva que cumple con la siguiente propiedad, $\forall x \in M$ $\exists U \ni x$ abierto tal que, $\pi^{-1}(U) \subseteq E$ es difeomorfo a $U \times F$ y hace conmutar el siguiente diagrama,

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U) & \xrightarrow{\cong} & U \times F \\ & \underset{\pi}{\searrow} & \downarrow \Pi_U \\ & & M \end{array}$$

En particular tenemos que $\forall x \in M$, $\pi^{-1}(x) \cong \{x\} \times F \cong F$.

Definición 18. *Un mapa $\sigma : M \to E$ tal que $\pi \circ \sigma = Id_M$ se llama **Sección.***

Ejemplo 3. *Sea M una variedad diferenciable de dimensión d.*

1. *Sea $TM = \bigsqcup_{x \in M} T_xM$, entonces TM es una variedad diferenciable de dimensión $2d$ ver [Taub]. La terna (TM, π, M) con $\pi : TM \to M$, $v_x \mapsto x$. Es un haz fibrado (Vectorial) sobre M cuyas fibras son $T_xM \cong \mathbb{R}^d$ y, se le conoce, como el **Haz Tangente** de M.*

2. *Denotemos por $Gr(TM; k) = \bigsqcup_{x \in M} Gr_{T_xM}(d; k)$ el **Haz Grassmanniano** de distribuciones de dimensión k en TM. $(Gr(TM; k), \pi, M)$ con $\pi : Gr(TM; k) \to M$, $\Pi_x^k \mapsto x$, es un haz fibrado sobre M cuyas fibras son $Gr_{T_xM}(d; k)$.*

2.4.4. Tensores

Definición 19. *Sea V un espacio vectorial de dimensión d y V^* el espacio dual de V. Un $\begin{pmatrix} k \\ l \end{pmatrix}$-**Tensor** sobre V, también llamado **Tensor k-covariante l-contravariante**, es un mapa multilineal:*

$$F : \underbrace{V^* \times \cdots \times V^*}_{l-veces} \times \underbrace{V \times \cdots \times V}_{k-veces} \to \mathbb{R}. \tag{2.29}$$

*El espacio de $\begin{pmatrix} k \\ l \end{pmatrix}$- **Tensores** sobre V será denotado por $T_l^k(V)$. Notemos que*

$$T_l^k(V) = \underbrace{V \otimes \cdots \otimes V}_{l-veces} \otimes \underbrace{V^* \otimes \cdots \otimes V^*}_{k-veces}. \tag{2.30}$$

Si $F \in T_l^k(V)$ y $G \in T_q^p(V)$, denotemos por $F \otimes G$ al tensor dado por :

$$F \otimes G(\omega^1, ..., \omega^{l+q}, x_1, ..., x_{k+p}) := F(\omega^1, ..., \omega^l, x_1, ..., x_k)G(\omega^{l+1}, ..., \omega^{l+q}, x_{k+1}, ..., x_{k+p}). \tag{2.31}$$

Notemos que $F \otimes G \in T_{l+q}^{k+p}(V)$.

Si $\{e_1, ..., e_d\}$ es una base de V y $\{\varphi^1, ..., \varphi^d\}$ es su correspondiente base dual, entonces una base para $T_l^k(V)$ está dada por, $\{e_{j_1} \otimes, ..., \otimes e_{j_l} \otimes \varphi^{i_1} \oplus, ..., \otimes \varphi^{i_k}\}$, con $1 \leqslant j_q, i_p \leqslant d$. Por tanto, para cualquier $F \in T_l^k(V)$ puede ser escrito en términos de esta base como,

$$F_{i_1 \ldots i_k}^{j_1 \ldots j_l} e_{j_1} \otimes, ..., \otimes e_{j_l} \otimes \varphi^{i_1} \oplus, ..., \otimes \varphi^{i_k}. \tag{2.32}$$

*Al espacio de k-**Tensores Covariantes Alternantes** sobre V lo denotamos por $\Lambda^k(V)$ y a sus elementos los llamaremos k-**formas** en V.*

Sean V_i, W espacios vectoriales de dimensión d_i,d, respectivamente; con $1 \leqslant i \leqslant k$. Denotemos por $Hom(\overset{k}{\underset{i=1}{\times}} V_i, W)$ al espacio de los mapas k-lineales de $V_1 \times ... \times V_k$ en W.

Lema 3. *Sea V un espacio vectorial de dimensión d. Hay un isomorfismo natural entre $T^k_{l+1}(V)$ y $Hom(V^{\times k} \times (V^*)^{\times l}, V)$.*

Demostración. Consideremos el siguiente mapa,

$$\begin{aligned} \Phi : Hom(V^{\times k} \times (V^*)^{\times l}, V) &\to T^k_{l+1}(V) \\ F(\omega^1, ..., \omega^l, x_1, ..., x_k) &\mapsto \Phi(F)(\omega^1, ..., \omega^l, \omega^{l+1}, x_1, ..., x_k), \end{aligned} \tag{2.33}$$

donde $\Phi(F)(\omega^1, ..., \omega^l, \omega^{l+1}, x_1, ..., x_k) := \omega^{l+1}(F)$.

De la linealidad de ω^{l+1} se sigue la linealidad de Φ. Ahora veamos que Φ es inyectivo. Si $\Phi(F) = 0 \Rightarrow \omega^{l+1}(F) = 0 \ \forall \omega^{l+1} \in V^* \Leftrightarrow F = 0 \therefore \Phi$ es inyectivo.

Luego como $Hom(V^{\times k} \times (V^*)^{\times l}, V) \cong \mathcal{L}(V^{\otimes k} \otimes (V^*)^{\otimes l}, V)$, tenemos que $dim(Hom(V^{\times k} \times (V^*)^{\times l}, V)) = dim(V^{\otimes k} \otimes (V^*)^{\otimes l}) \cdot dim(V) = d^{k+l} \cdot d = d^{k+l+1}$. Por otro lado, $dim(T^k_{l+1}(V)) = d^{k+l+1}$, lo que termina la prueba. □

Sea M una variedad diferenciable, un $\begin{pmatrix} k \\ l \end{pmatrix}$- **Tensor** en $x \in M$ es un elemento de $T^k_l(T_xM)$.

Definición 20. *Definimos el **Haz de** $\begin{pmatrix} k \\ l \end{pmatrix}$- **Tensores** en M como el haz vectorial dado por,*

$$T^k_l(M) = \bigsqcup_{x \in M} T^k_l(T_xM), \tag{2.34}$$

con proyección

$$\begin{aligned} \pi : T^k_l(M) &\to M \\ F \in T^k_l(T_xM) &\mapsto x. \end{aligned} \tag{2.35}$$

*Y el **Haz de** k-**Formas** en M como,*

$$\Lambda^k(M) = \bigsqcup_{x \in M} \Lambda^k(T_xM), \tag{2.36}$$

con proyección

$$\begin{aligned} \pi : \Lambda^k(M) &\to M \\ \omega \in \Lambda^k(T_xM) &\mapsto x. \end{aligned} \tag{2.37}$$

Si (x^i) *es un sistema de coordenadas locales en* $U \subseteq M$ *y* $x \in U$*, los vectores* $\left\{\dfrac{\partial}{\partial x^i}\right\}$ *forman una base para* T_xM *cuya base dual es* $\{dx^i\}$*, entonces, cualquier tensor* $F \in T^k_l(T_xM)$ *puede expresarse en términos de esta base como,*

$$F^{j_1\ldots j_l}_{i_1\ldots i_k}\frac{\partial}{\partial x^{j_1}}\otimes, ..., \otimes\frac{\partial}{\partial x^{j_l}} \otimes dx^{i_1}\otimes, ..., \otimes dx^{i_k}. \tag{2.38}$$

Un ***Campo Tensorial*** *en* M *es una sección suave de algún haz tensorial* $T^k_l(M)$ *y una* k*-* ***Forma Diferenciable*** *es una sección suave al haz* $\Lambda^k(M)$*.*

Denotaremos por $\mathcal{T}^k_l(M)$ *al espacio de todos los campos tensoriales de rango* $\begin{pmatrix} k \\ l \end{pmatrix}$ *en* M*, así como,* $\Omega^k(M)$ *al espacio de todas las* k***-formas diferenciables*** *en* M*.*

El caso $\mathcal{T}_1(M)$ *corresponde a los* ***Campos Vectoriales Diferenciables*** *y lo denotaremos por* $\mathcal{X}(M)$*.*

Además, tenemos las siguientes identificaciones $\mathcal{T}^1(M) = \Omega^1(M)$ *y que* $\mathcal{T}^0(M) = C^\infty(M)$*.*

2.4.5. Variedades Riemannianas

Definición 21. *Sea* M *una variedad diferenciable de dimensión* d *y sea* $T^2(M)$ *el haz de* $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$*-tensores en* M*.*

Para $1 \leqslant r$*, una* ***Métrica Riemanniana*** *de clase* C^r *de* M*, es una sección* $g : M \to T^2(M)$ *de clase* C^r*, tal que* g *es simétrica* $g_x(X,Y) = g_x(Y,X)$*, positiva definida* $g_x(X,X) > 0$ *si* $X \neq 0$ $\forall x \in M$*. Una métrica Riemanniana* g *en* M *induce un* ***Producto Interno*** *en cada espacio tangente* T_xM*, definido como*$\langle X,Y\rangle_x := g_x(X,Y)$*,* $\forall X,Y \in T_xM$ *que depende* C^r *de* x*. Así mismo, de manera canónica* $\langle\cdot,\cdot\rangle_x$ *genera la norma en* T_xM *dada por:* $\|X\|_x := \sqrt{\langle X,X\rangle_x}$*.*

En coordenadas locales (x^i) *la métrica Riemanniana se ve,* $g = g_{ij}dx^i \otimes dx^j$*, con* $g_{ij}(x) = \left\langle \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right\rangle_x$*. Si consideramos el producto simétrico de 1-formas dado por* $\eta \odot \omega := \frac{1}{2}(\eta \otimes \omega + \omega \otimes \eta)$*, junto con la simetría de* g_{ij} *nos da la siguiente expresión para la métrica Riemanniana en coordenadas locales* (x^i)*,*

$$g = g_{ij} dx^i \odot dx^j. \tag{2.39}$$

M equipada con una métrica Riemanniana de clase C^r, se llama ***Variedad Riemanniana de clase*** *C^r y se denota por (M, g).*

Ejemplo 4. *$(\mathbb{R}^d, g)$, $g = \langle \cdot, \cdot \rangle$; La esfera $S^d = \left\{x \in \mathbb{R}^{d+1} \mid \|x\| = 1\right\}$, $(S^d, \mathring{g})$ con $\mathring{g} = \langle \cdot, \cdot \rangle \mid_{S^d}$ ([dC]).*

Definición 22. *Sea (M, g) una variedad Riemanniana suave y sea $\mathcal{X}(M)$ el conjunto de Campos Vectoriales en M de clase C^∞. Una* ***Conexión Afín*** *es un mapeo,*

$$\begin{aligned} \nabla : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) &\to \mathcal{X}(M) \\ (X, Y) &\mapsto \nabla_X Y \end{aligned} \tag{2.40}$$

tal que cumple las siguientes propiedades:

1. $\nabla_{fX+hY} Z = f\nabla_X Z + h\nabla_Y Z$
2. $\nabla_X (Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$
3. $\nabla_X (fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y$,

$\forall X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$ y $f, h \in C^\infty(M)$.

Una conexión es ***Compatible con la Métrica*** *g si satisface:*

$$\nabla_X g(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z) \tag{2.41}$$

$\forall X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$.

Definición 23. *Una conexión es* ***simétrica*** *si*

$$[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X. \tag{2.42}$$

Teorema 5 (Levi-Civita)**.** *Sea (M, g) una variedad Riemanniana. Existe una única conexión ∇ en M tal que, es simétrica y compatible con la métrica g. [Lee]*

A esta conexión se le llama **Conexión Riemanniana** ó **Conexión de Levi-Civita**.

2.4.6. Foliaciones

Definición 24. *Sea M una variedad diferenciable de dimensión d y de clase C^r. Una* ***Foliación*** *$\mathcal{F}$ en M de clase C^s con hojas C^q, es una famila $\mathcal{F} = \{L_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ de subvariedades conexas de clase C^q y de dimensión k, con $s \leqslant r$, $q \leqslant r$ y $k < d$, que satisface:*

1. $\bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} \{L_\alpha\} = M$, $\alpha \neq \beta \Rightarrow L_\alpha \bigcap L_\beta = \varnothing$

2. *Existe un atlas máximo* $\{(\varphi_x, U_x)\}$ *de clase* C^s, *tal que* $\forall x \in M$ *la carta coordenada,* (φ_x, U_x) *tiene las siguientes propiedades:*

   a) $\varphi_x(U_x) = B^k \times B^{d-k} \subseteq \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{d-k}$, *donde* B^i *son bolas abiertas en* $\mathbb{R}^i$.

   b) *Si* (φ_x, U_x) *es tal que* $(U_x \cap L_\alpha) \neq \varnothing$,*entonces*

$$\varphi_x(U_x \cap L_\alpha) = \{(x_1, ..., x_d) \in \varphi_x(U_x) \mid x_{k+1} = c_{k+1}, ..., x_d = c_d)\} \tag{2.43}$$

   con $c_i \in \mathbb{R}$.

A cada L_α *se le llama* ***Hoja*** *de* $\mathcal{F}$ *y* $\forall x \in M$, *denotaremos por* $\mathcal{F}(x)$ *la hoja de* $\mathcal{F}$ *que contiene a* x. *Una* ***Caja Foliada*** *es* $\varphi_x^{-1}(B^k \times B^{d-k})$ *y* $\varphi_x^{-1}(B^k \times \{\eta\})$ *son sus correspondientes* ***Hojas Locales***.

Observación 1. *Notemos que:*

1. *Si* (φ_x, U_x) *y* (φ_y, U_y) *son tales que* $(U_x \cap U_y) \neq \varnothing$, *entonces las funciones de transición* $\varphi_y \circ \varphi_x^{-1} : \varphi_x(U_x \cap U_y) \to \varphi_y(U_x \cap U_y)$ *son de la forma* $\varphi_y \circ \varphi_x^{-1}(U_x \cap U_y) = (h_1(\xi, \eta), h_2(\eta))$, $(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{d-k}$.

2. *El grado de regularidad de las hojas* L_α *como subvariedades de* M *es independiente del grado de regularidad de la foliación* $\mathcal{F}$, *sólo dependen de la regularidad de* M.

   Por ejemplo, $\mathcal{F}$ *puede ser una foliación de clase* C^s, *con hojas de clase* C^q *con* $s \leqslant q$. *En particular, estaremos interesados en estudiar foliaciones* C^β, $\beta \in (0,1)$ *con hojas suaves (*C^∞*).*

Ejemplo 5. *Sea* M *una variedad diferenciable completa y con característica de Euler* $\chi(M) = 0$, *entonces* M *admite un campo vectorial no nulo de clase* C^1, V. *Por el teorema de existencia y unicidad de ecuaciones diferencales ordinarias, el flujo generado por las soluciones de* V, φ^t, *es completo; por lo tanto, es una foliación* M *de dimensión 1 de clase* C^1 *con hojas* $\{\varphi^t\}_{t \in \mathbb{R}}$ *de clase* C^1.

Definición 25. *Una* ***Distribución de Dimensión*** k *en* M^d *de clase* C^r, *es un campo de subespacios tangentes de dimensión* k *de clase* C^r, $\{T(x)\}_{x \in M}$ *con* $T(x) \leqslant T_xM$ *y* $dim(T(x)) = k$ $\forall x$. *También, lo podemos pensar como una sección de clase* C^r *al haz Grassmanniano* $Gr(TM; k)$.

Una distribución es ***Integrable***, *si para todo* $x \in M$ *existe una subvariedad de dimensión* k, *tal que sea tangente a la distribución en todo punto.*

3

Dinámica Hiperbólica y Sistemas Anosov

3.1. Conjuntos Hiperbólicos

Sea M una variedad Riemanniana de clase C^1, $\varnothing \neq U \subseteq M$ un subconjunto abierto, y $f : U \to f(U) \subseteq M$ un difeomorfismo local de clase C^1. Un subconjunto $\Lambda \subseteq U$ compacto y $f-$invariante se llamará **Hiperbólico**, si $\exists \lambda \in (0,1)$, $c > 0$ y unas familias de subespacios $\{E^s(x) \leqslant T_xM\}_{x\in\Lambda}$ y $\{E^u(x) \leqslant T_xM\}_{x\in\Lambda}$ tal que $\forall x \in \Lambda$

1. $T_xM = E^s(x) \oplus E^u(x)$
2. $\|df_x^n(v^s)\| \leqslant c\lambda^n \|v^s\| \, \forall v^s \in E^s(x)$ y $n \geqslant 0$
3. $\|df_x^{-n}(v^u)\| \leqslant c\lambda^n \|v^u\| \, \forall v^u \in E^u(x)$ y $n \geqslant 0$
4. $df_x[E^s(x)] = E^s(f(x))$ y $df_x[E^u(x)] = E^u(f(x))$

Mas aún para $\lambda < \mu$ diremos que un difeomorfismo f admite una (λ, μ)**-Descomposición** si cumple las propiedades 1,2 y 4 y reemplazando 3 por:
3*. $\|df_x^{-n}(v^u)\| \leqslant c\mu^{-n} \|v^u\|$, $\forall v^u \in E^u(x)$ y $n \geqslant 0$.

A $E^s(x)$ se le llama **Subespacio Estable** y a $E^u(x)$ **Subespacio Inestable**. Las familias $\{E^s(x)\}_{x\in\Lambda}$ y $\{E^u(x)\}_{x\in\Lambda}$ inducen 2 distribuciones llamadas **Distribución Estable e Inestable**, respectivamente.

Si M es una variedad Riemanniana compacta y se tiene que el conjunto hiperbólico coincide con M ($\Lambda = M$), entonces llamaremos al difeomorfismo f, **Difeomorfismo de Anosov o Difeomorfismo Uniformemente Hiperbólico**.

Proposición 11. *Sea Λ un conjunto hiperbólico de f, entonces los subespacios $E^s(x)$ y $E^u(x)$ dependen continuamente de $x \in \Lambda$. Además, $dim(E^s(x))$ y $dim(E^u(x))$ son constantes en cada componente conexa de Λ.*

Demostración. Para toda $x \in \Lambda$, sea $\{x_m\}_{m\in\mathbb{N}} \subseteq \Lambda$ tal que, $\{x_m\} \to x$. Como $dim(T_pM) = d < \infty$, pasando a una subsucesión $\{x_{m_j}\}$ de ser necesario, podemos asumir que $dim(E^s(x_m)) = k = cte$. Tomemos $\{\xi(x_m)_i\}_{i=1}^k$ una base ortonormal de $E^s(x_m)$. Sea $S_\Lambda M$ la restricción del haz tangente unitario a Λ.

Notemos que $\forall m$ y $\forall i$, $\{\xi(x_m)_i\}_{i=1}^k \subseteq S_\Lambda M$. Por compacidad de $S_\Lambda M$, $\{\xi(x_m)_i\} \to \xi_i$ en $S_\Lambda M$, $\forall i = 1, ..., k$ y por continuidad de $\Pi : S_\Lambda M \to \Lambda$, $\Pi(\xi(x_n)_i) \to x$, por lo tanto, $\xi_i \in S_x M$ $\forall i$. Además, la continuidad de df_x nos garantiza que,

$$\|df_x^n(\xi_i)\| = \lim_{m\to\infty} \|df_x^n(\xi(x_m)_i)\| \leqslant c\lambda^n \left(\lim_{m\to\infty} \|\xi(x_m)_i\|\right) = c\lambda^n \|\xi_i\| \tag{3.1}$$

$\therefore$ $\xi_i \in E^s(x)$ $\forall i$, esto implica que $dim(E^s(x)) \geqslant k$.

Análogamente, tenemos que $dim(E^u(x)) \geqslant d - k$ y como $dim(E^s(x)) + dim(E^u(x)) = d$, concluimos que $dim(E^s(x)) = k$ y $dim(E^u(x)) = d - k$. Con esto, se obtiene la continuidad de los mapas, $x \mapsto E^s(x)$ y $x \mapsto E^u(x)$ y, al mismo tiempo, la continuidad de $\Lambda \ni x \mapsto dim(E^u(x)) \in \mathbb{N}$ y de $\Lambda \ni x \mapsto dim(E^u(x)) \in \mathbb{N}$, de donde se sigue que las dimensiones de los subespacios estables e inestables son constantes en las componentes conexas de Λ.

Más aún, como df_x es un isomorfismo y como $df_x[E^s(x)] = E^s(f(x))$ y $df_x[E^u(x)] = E^u(f(x))$, tenemos que, si para algún $x \in \Lambda$, $\exists n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(x)$ está en una componente conexa diferente que la de x entonces $dim(E^s(x)) = dim(E^s(f^n(x))$ y $dim(E^u(x)) = dim(E^s(f^n(x))$. Esto es, las dimensiones de los espacios invariantes son constantes a lo largo de la órbita de cada componente conexa de Λ. $\square$

Denotemos por $s = dim(E^s(x))$ y por $u = dim(E^u(x))$ entonces, la proposición 11 es equivalente a decir que $\Psi_i : \Lambda \to Gr(T\Lambda, i)$, $i = s, u$ es continua.

Corolario 5. *Los subespacios $E^s(x)$ y $E^u(x)$ son uniformemente transversales. Esto es, existe $\alpha_0 > 0$ tal que para todo $x \in \Lambda$ $v^s \in E^s(x)$ y $v^u \in E^u(x)$, el ángulo entre v^s y v^u es al menos de α_0.*

Demostración. Sea $\alpha(x)$ el ángulo mínimo entre $v^s \in E^s(x)$ y $v^u \in E^u(x)$. Como $E^s(x) \cap E^u(x) = \{0\}$, $\alpha(x) > 0$. Como $x \mapsto E^i(x)$, $i = s, u$ es continua en Λ (proposición 11), entonces $\alpha(x)$ es continua en Λ, por compacidad $\alpha(x)$ alcanza un mínimo positivo α_0. $\square$

Proposición 12. *Si Λ es un conjunto hiperbólico de f con constantes λ y c, entonces $\forall \epsilon > 0$ existe una métrica Riemanniana $\langle \cdot, \cdot \rangle'$, C^1, en una vecindad de Λ, llamada la métrica de Lyapunov con respecto a f, tal que cumple las condiciones de hiperbolicidad con constantes $\lambda' = \lambda + \epsilon$ y $c' = 1$ y los subespacios $E^s(x)$ y $E^u(x)$ son $\epsilon -$ ortogonales, i.e. $\langle v^s, v^u \rangle' < \epsilon$ $\forall v^s, v^u$ unitarios y $p \in \Lambda$.*

Demostración. Para $x \in \Lambda$, $v^s \in E^s(x)$ y $v^u \in E^u(x)$, definamos las siguientes normas:

$$\begin{aligned}
\left\|v^s\right\|' &= \sum_{n=0}^{\infty}(\lambda+\epsilon)^{-n}\left\|df_x^n(v^s)\right\| \\
\left\|v^u\right\|' &= \sum_{n=0}^{\infty}(\lambda+\epsilon)^{-n}\left\|df_x^{-n}(v^u)\right\|
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Estas series convergen uniformemente en cada bola de radio $r > 0$, es decir, para $\|v^u\|, \|v^s\| \leqslant r$ y $x \in \Lambda$. Esto se puede ver ya que tenemos que la serie geométrica $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{\lambda}{\lambda+\epsilon}\right)^n$ converge, por tanto, dado $\eta > 0$ tenemos que $\exists k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\sum\limits_{n=k+1}^{j}\left(\dfrac{\lambda}{\lambda+\epsilon}\right)^n \leqslant \dfrac{\eta}{cr}$, $\forall j > k \geqslant k_0$.

Por lo que, para la primera serie se tiene,

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{n=0}^{j}(\lambda+\epsilon)^{-n}\left\|df_x^n(v^s)\right\| - \sum_{n=0}^{k}(\lambda+\epsilon)^{-n}\left\|df_x^n(v^s)\right\|\right| &= \sum_{n=k+1}^{j}(\lambda+\epsilon)^{-n}\left\|df_x^n(v^s)\right\| \\
\leqslant \sum_{n=k+1}^{j} c\left(\frac{\lambda}{\lambda+\epsilon}\right)^n \|v^s\| \leqslant cr\cdot\left(\sum_{n=k+1}^{j}\left(\frac{\lambda}{\lambda+\epsilon}\right)^n\right) &< \eta
\end{aligned} \tag{3.3}$$

$\forall j > k \geqslant k_0$ $\forall v^s \in B_r^s(0) \subseteq E^s(x)$. Esto muestra que la serie es uniformemente de Cauchy en $B_r^s(0) \subseteq E^s(x)$, de donde se sigue la convergencia uniforme en $B_r^s(0)$.

Análogamente, tenemos que la serie $\left\|v^u\right\|' = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(\lambda+\epsilon)^{-n}\left\|df_x^{-n}(v^u)\right\|$ converge uniformemente en $B_r^u(0) \subseteq E^u(x)$.

Por lo tanto, para $v^s \in E^s(x)$,

$$\left\|df_x(v^s)\right\|' = \sum_{n=0}^{\infty}(\lambda+\epsilon)^{-n}\left\|df_x^{n+1}(v^s)\right\| = (\lambda+\epsilon)(\left\|v^s\right\|' - \|v^s\|) < (\lambda+\epsilon)\left\|v^s\right\|' \tag{3.4}$$

Y análogo, para $v^u \in E^u(x)$ se da que $\left\|df_x^{-1}(v^u)\right\|' < (\lambda+\epsilon)\left\|v^u\right\|'$.

Para $v = v^u + v^s \in T_pM$, $x \in \Lambda$, definamos $\|v\|' = \sqrt{\left(\left\|v^u\right\|'\right)^2 + \left(\left\|v^s\right\|'\right)^2}$. La métrica Riemanniana se recupera de esta norma, de la siguiente manera:

$$\langle v, w\rangle' = \frac{1}{2}\left(\left(\|v+w\|'\right)^2 - \left(\|v\|'\right)^2 - \left(\|w\|'\right)^2\right). \tag{3.5}$$

Esta métrica es continua, los subespacios invariantes son ortogonales entre sí y f satisface las condiciones de hiperbolicidad con constantes $c = 1$ y $\lambda + \epsilon$. Ahora, técnicas estándar de topología diferencial (ver por ejemplo el ejercicio 3 (b) de la sección 2 del capítulo 2 en [Hirsch], pag 56.), nos permiten aproximar a $\langle \cdot, \cdot \rangle^{'}$ en Λ uniformemente por una métrica Riemanniana suave, definida en una vecindad de Λ. $\square$

3.2. Conos Invariantes

Como se ha visto, los conjuntos hiperbólicos están definidos en términos de familias invariantes de subespacios lineales de T_pM. En esta sección, se dará una caracterización de hiperbolicidad en términos de familias invariantes de conos lineales.

Definición 26. *Sea Λ un conjunto hiperbólico de $f : U \to f(U) \subseteq M$. Dado que las distribuciones $\{E^s(x)\}_{x\in\Lambda}$ y $\{E^u(x)\}_{x\in\Lambda}$ son continuas en Λ, éstas se pueden extender a distribuciones continuas $\{\tilde{E}^s(x)\}_{x\in\Lambda}$ y $\{\tilde{E}^u(x)\}_{x\in\Lambda}$, definidas en una vecindad $U(\Lambda) \supseteq \Lambda$. Si $x \in U(\Lambda)$ y $v \in T_xM$, sea $v = v^s + v^u$ con $v^s \in \tilde{E}^s(x)$ y $v^u \in \tilde{E}^u(x)$. Asumamos que esta métrica es la métrica de Lyapunov con constante λ. Para $\alpha > 0$, definamos los* ***Conos Estable*** *e* ***Inestable*** *de tamaño α como:*

$$\begin{aligned} K^s_\alpha(x) &=: \{v \in T_xM / \|v^u\| \leqslant \alpha \|v^s\|\} \\ K^u_\alpha(x) &=: \{v \in T_xM / \|v^s\| \leqslant \alpha \|v^u\|\} \end{aligned} \tag{3.6}$$

Generalizando esta idea, un cono $C^j_\beta(x)$ en T_xM, se define como la imagen de $K^j_\alpha(x)$ bajo una transformación lineal invertible para $j = s, u$.

Para un cono C, denotemos por $\overset{\circ}{C} =: int(C) \bigcup \{0\}$.

Observación 2. *Notemos que un cono $K^j_\alpha(x)$ lo podemos pensar como un conjunto de subespacios vectoriales de T_xM de dimensión j, para $j = s, u$.*

Para ser más precisos, notemos que $K^j_\alpha(x) = \overline{\mathcal{O}_{E^j,\alpha}}$, donde:

$$\overline{\mathcal{O}_{E^j,\alpha}} := \{W < T_xM \mid dim(W) = j, \ \big\|\Pi_{E^j}(v) - v\big\| \leqslant \alpha \big\|\Pi_{E^{m-j}}(v) - v\big\|, \forall v \in W\}. \tag{3.7}$$

Esto es la cerradura del abierto $\mathcal{O}_{E^j,\alpha}$ en la Grassmaniana $Gr_{T_xM}(d; j)$. Con el fin de dar claridad a la idea anterior, veamos el ejemplo del cono $K^u_\alpha(x)$.

Ejemplo 6. $K^u_\alpha(x) = \overline{\mathcal{O}_{E^u,\alpha}}$.

$\lfloor \supseteq \rfloor$ *Tomemos $W \in \overline{\mathcal{O}_{E^u,\alpha}}$, entonces $\forall v \in W$, se tiene que:*

$$\begin{aligned} & \big\|\Pi_{E^u}(v) - v\big\| \leqslant \alpha \big\|\Pi_{E^s}(v) - v\big\| \\ \Longrightarrow \quad & \big\|v^u - v\big\| \leqslant \alpha \big\|v^s - v\big\| \\ \Longrightarrow \quad & \big\|v^s\big\| \leqslant \alpha \big\|v^u\big\| \end{aligned} \tag{3.8}$$

$\therefore W \subseteq K^u_\alpha(x)$ *y en consecuencia* $K^u_\alpha(x) \supseteq \overline{\mathcal{O}_{E^u,\alpha}}$.

$\lfloor \subseteq \rfloor$ *Sea* $W < T_x M$, *dim*$(W) = u$ *y* $W \subseteq K^u_\alpha(x)$. *Entonces* $\forall v \in W$, *se tiene que*

$$\left\|\Pi_{E^u}(v) - v\right\| = \left\|v^s\right\| \leqslant \alpha\left\|v^u\right\| = \alpha\left\|\Pi_{E^s}(v) - v\right\| \tag{3.9}$$

$\therefore W \in \overline{\mathcal{O}_{E^u,\alpha}}$. *Ahora sólo falta ver que,* $\forall v \in K^u_\alpha(x)$, $\exists W$ *tal que,* $v \in W \subseteq K^u_\alpha(x)$ *y dim*$(W) = u$. *Esto se cumple, pues tomando* $v \in K^u_\alpha(x)$ *y una base* $\{e_i\}_{i=1}^u$ *para* $E^u(x)$. *Como* $E^u(x) \subseteq K^u_\alpha(x)$, *entonces* $e_i \in K^u_\alpha(x), \forall i$. *Consideremos el conjunto* $\left\{e_{i_1}, e_{i_2}, ..., e_{i_{u-1}}\right\}$ *de* $u-1$ *vectores, tal que hagan de* $\left\{v, e_{i_1}, e_{i_2}, ..., e_{i_{u-1}}\right\}$ *un conjunto linealmente independiente. Este último conjunto claramente está en* $K^u_\alpha(x)$.

Ahora, tomemos $w = av + \sum a_j e_{i_j}$ *una combinación lineal de* $\left\{v, e_{i_j}\right\}_{j=1}^{u-1}$. *Como* $\sum a_j e_{i_j} \in E^u(x)$, *concluimos que:*

$$\|w^s\| = \|av^s\| \leqslant \alpha\,|a|\,\|v^u\| = \alpha\,\|av^u\| \leqslant \alpha\,\|w^u\| \tag{3.10}$$

Esto nos dice que, $W = Span\left(\left\{v, e_{i_j}\right\}_{j=1}^{u-1}\right) \subseteq K^u_\alpha(x)$ *y se sigue la afirmación deseada, con lo cual concluimos el ejemplo.*

Proposición 13. *Sea* $\Lambda_\epsilon = \{x \in U / dist(x, \Lambda) < \epsilon\}$. *Para toda* $\alpha > 0$ $\exists \epsilon(\alpha) > 0$ *tal que,* $f^i(\Lambda_\epsilon) \subseteq U(\Lambda)$, $i = -1, 0, 1$ *y* $\forall x \in \Lambda_\epsilon$

$$\begin{aligned} df_x[K^u_\alpha(x)] &\subseteq \overset{\circ}{K}{}^u_\alpha(f(x)) \\ df^{-1}_{f(x)}[K^s_\alpha(f(x))] &\subseteq \overset{\circ}{K}{}^s_\alpha(x) \end{aligned} \tag{3.11}$$

Demostración. Tomemos $\epsilon > 0$ tal que las distribuciones $E^u(x)$ y $E^s(x)$ se puedan extender continuamente a lo largo de Λ_ϵ, de tal manera que, $\forall x \in \Lambda_\epsilon$, $T_x M = E^u(x) \oplus E^s(x)$ y las condiciones de hiperbolicidad se sigan cumpliendo. De ser necesario, tomemos una ϵ más chica a modo que, $f^i(\Lambda_\epsilon) \subseteq U(\Lambda)$. Notemos que $\forall v^u \in E^u(x)$, $\|v^u\| = \left\|df^{-1}_{f^{-1}(x)} \circ df_x v^u\right\| \leqslant \lambda\,\|df_x v^u\|$.

Entonces para $v \in K^u_\alpha(x)$, $v = v^u + v^s$ tenemos que:

$$\|df_x v^s\| \leqslant \lambda\,\|v^s\| \leqslant \lambda\alpha\,\|v^u\| < \alpha\,\|v^u\| \leqslant \alpha\lambda\,\|df_x v^u\| < \alpha\,\|df_x v^u\|\,, \tag{3.12}$$

$$\therefore df_x[K^u_\alpha(x)] \subseteq \overset{\circ}{K}{}^u_\alpha(f(x)). \tag{3.13}$$

Análogamente, se tiene que para $v \in K^s_\alpha(x)$, sucede que, $df^{-1}_{f(x)}(v) \in \overset{\circ}{K}{}^s_\alpha(x)$ y por tanto,

$$df^{-1}_{f(x)}[K^s_\alpha(f(x))] \subseteq \overset{\circ}{K}{}^s_\alpha(x). \tag{3.14}$$

□

Proposición 14. *Para toda $\delta > 0$, $\exists\ \alpha > 0$ y $\epsilon > 0$ tal que, $f^i(\Lambda_\epsilon) \subseteq U(\Lambda)$, i=-1,0,1 y $\forall x \in \Lambda_\epsilon$:*

$$\begin{aligned} \left\| df_x^{-1}(v) \right\| &\leqslant (\delta + \lambda) \left\| v \right\| && si \quad v \in K_\alpha^u(x) \\ \left\| df_x(v) \right\| &\leqslant (\delta + \lambda) \left\| v \right\| && si \quad v \in K_\alpha^s(x). \end{aligned} \tag{3.15}$$

Demostración. Sea $\delta > 0$. Como $f^i(\Lambda) \subseteq U(\Lambda), i = -1, 0, 1$ entonces, por continuidad tenemos que, $f^i(\Lambda_\epsilon) \subseteq U(\Lambda), i = -1, 0, 1$ para alguna $\epsilon > 0$. Tomemos $0 < \alpha \leqslant \dfrac{\delta}{\lambda}$ y $\epsilon(\alpha)$, como en la proposición anterior. Entonces, para $v \in K_\alpha^s(x)$, se tiene que:

$$\begin{aligned} \left\| df_x(v) \right\| &= \left\| df_x(v^u) + df_x(v^s) \right\| \leqslant \left\| df_x(v^u) \right\| + \left\| df_x(v^s) \right\| \leqslant \alpha \left\| df_x(v^s) \right\| + \left\| df_x(v^s) \right\| \\ &= (\alpha + 1) \left\| df_x(v^s) \right\| \leqslant (\alpha + 1)\lambda \left\| (v^s) \right\| = (\delta + \lambda) \left\| (v^s) \right\| \leqslant (\delta + \lambda) \left\| v \right\|. \end{aligned} \tag{3.16}$$

donde la última desigualdad se obtiene porque los subespacios $E^s(x)$ y $E^u(x)$ son $\epsilon-$ortogonales.

Con un argumento similar, se puede concluir que para $v \in K_\alpha^u(x)$,

$$\left\| df_x^{-1}(v) \right\| \leqslant (\delta + \lambda) \left\| v \right\|. \tag{3.17}$$

□

Teorema 6 (Conos Invariantes)**.** *Sea Λ un subconjunto compacto e invarante de $f : U \to f(U) \subseteq M$. Supongamos que $\exists \alpha > 0$ y que existen distribuciones continuas $\{\tilde{E}^s(x)\}_{x\in\Lambda}$ y $\{\tilde{E}^u(x)\}_{x\in\Lambda}$ tal que, $T_xM = \tilde{E}^s(x) \oplus \tilde{E}^u(x)$, $\forall x \in \Lambda$ y que los $\alpha -$ conos $K_\alpha^s(x)$ y $K_\alpha^u(x)$, determinados por los subespacios $\tilde{E}^s(x)$ y $\tilde{E}^u(x)$, satisfacen:*

- $df_x[K_\alpha^u(x)] \subseteq K_\alpha^u(f(x))$, $df_{f(x)}^{-1}[K_\alpha^s(f(x))] \subseteq K_\alpha^s(x)$
- $\left\| df_x^{-1}(v) \right\| < \lambda \left\| v \right\|$ *para* $0 \neq v \in K_\alpha^u(x)$ *y* $\left\| df_x(v) \right\| < \lambda \left\| v \right\|$ *para* $0 \neq v \in K_\alpha^s(x)$

Entonces Λ es hiperbólico.

Demostración. La primera viñeta, junto con un argumento inductivo, implica que:

$$df_x^n[K_\alpha^u(x)] \subseteq K_\alpha^u(f^n(x)) \text{ y que } df_{f^n(x)}^{-n}[K_\alpha^s(f^n(x))] \subseteq K_\alpha^s(x) \tag{3.18}$$

Más general,

$$df_{f^k(x)}^n[K_\alpha^u(f^k(x))] \subseteq K_\alpha^u(f^{n+k}(x)) \text{ y que } df_{f^{n+k}(x)}^{-n}[K_\alpha^s(f^{n+k}(x))] \subseteq K_\alpha^s(f^k(x)), \tag{3.19}$$

$\forall n, k \in \mathbb{N}$.

Y la segunda viñeta implica:

$$\begin{aligned} \left\|df_x^{-n}(v)\right\| &< \lambda^n \|v\| \text{ para } 0 \neq v \in K_\alpha^u(x) \\ \|df_x^{n}(v)\| &< \lambda^n \|v\| \text{ para } 0 \neq v \in K_\alpha^s(x) \end{aligned} \tag{3.20}$$

Del ejemplo 6, podemos pensar a $K_\alpha^u(x)$ como el conjunto de planos $\overline{\mathcal{O}_{\tilde{E}^u(x),\alpha}}$, que a su vez lo podemos pensar contenido en $Hom(\tilde{E}^u(x), \tilde{E}^s(x))$, ya que $\forall W \in \overline{\mathcal{O}_{\tilde{E}^u(x),\alpha}}$ se puede ver como, $Graf(T_W) \subseteq \tilde{E}^u(x) \oplus \tilde{E}^s(x)$, con $T_W : \tilde{E}^u(x) \to \tilde{E}^s(x)$ lineal; i.e. $W = (v^u, T_W(v^u))$.

Recordemos que para $T \in Hom(\tilde{E}^u(x), \tilde{E}^s(x))$, la norma $\|T\|_\infty = \underset{v \in S^{u-1}}{máx} \|T(v)\|$, hace de $Hom(\tilde{E}^u(x), \tilde{E}^s(x))$ un espacio de Banach (ver [Clapp]), y por tanto $\overline{\mathcal{O}_{\tilde{E}^u(x),\alpha}}$, con la métrica $\|W\| = \|T_W\|_\infty$ resulta ser un espacio métrico completo, pues es $\overline{\mathcal{O}_{\tilde{E}^u(x),\alpha}}$ cerrado en $Hom(\tilde{E}^u(x), \tilde{E}^s(x))$.

Esto nos permite interpretar la primera viñeta de la siguiente manera,

$$df_x\left(\overline{\mathcal{O}_{\tilde{E}^u(x),\alpha}}\right) \subseteq \overline{\mathcal{O}_{\tilde{E}^u(f(x)),\alpha}}. \tag{3.21}$$

Por la regla de la cadena tenemos $df^n_{f^{-n}(x)} = df_{f^{-1}(x)} \circ \cdots \circ df_{f^{-n}(x)}$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Luego, si identificamos $T_{f^{-i+1}(x)}M \approx T_{f^{-i}(x)}M$ podemos pensar que $df^n_{f^{-n}(x)} = df_{f^{-1}(x)} \circ \cdots \circ df_{f^{-1}(x)}$ $\forall n \in \mathbb{N}$, así $df^n_{f^{-n}(x)} : \overline{\mathcal{O}_{\tilde{E}^u(x),\alpha}} \circlearrowleft$

Con este argumento se obtiene que:

$$\begin{aligned} \|df_x(W)\| = \|df_x(T_W)\|_\infty &= \underset{v \in S^{u-1}}{máx} \|df_x\left(T_W(v)\right)\| \\ \leqslant \underset{v \in S^{u-1}}{máx} \lambda \|T_W(v)\| = \lambda\left[\underset{v \in S^{u-1}}{máx} \|T_W(v)\|\right] &= \lambda \|T_W\|_\infty = \lambda \|W\|. \end{aligned} \tag{3.22}$$

Esto muestra que $df_{f^{-1}(x)}$ es una contracción, luego por el teorema de punto fijo de Banach, tenemos que, $\exists!$ punto $E^u(x)$ fijo el cual puede ser encontrado de la siguiente forma:

$$E^u(x) = \lim_{n\to\infty} \left\{df^n_{f^{-n}(x)}(W)\right\}. \tag{3.23}$$

para cualquier $W \in K_\alpha^u(x)$, en particular para $\tilde{E}^u(x)$. Cabe mencionar que, la sucesión $\left\{df^n_{f^{-n}(x)}(W)\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ está bien definida gracias a la linealidad de df_x y a la identificacion de $T_{f^{-n}(x)}M$ con T_xM discutida previamente.

De igual manera, es fácil concluir que $df_x^{-1} : \overline{\mathcal{O}_{\tilde{E}^s(x),\alpha}} \circlearrowleft$ es una contracción cuyo punto fijo denotaremos por $E^s(x)$.

Por último, veamos que las distribuciones $E^u(x)$ y $E^s(x)$ hacen de Λ un conjunto hiperbólico.

Para este fin, basta con checar la invarianza de $E^u(x)$ y $E^s(x)$, pues por construcción, $E^u(x)$, $E^s(x)$ cumplen con las demás propiedades.

La invarianza de $E^u(x)$ se da, si ahora pensamos a $df_x : \overline{\mathcal{O}_{\tilde{E}^u(x),\alpha}} \to \overline{\mathcal{O}_{\tilde{E}^u(f(x)),\alpha}}$, entonces:

$$df_x\left[E^u(x)\right] = df_x\left[\lim_{n\to\infty}\left\{df^n_{f^{-n}(x)}(W)\right\}\right] = \lim_{n\to\infty} df_x\left[\left\{df^n_{f^{-n}(x)}(W)\right\}\right] = E^u(f(x)). \tag{3.24}$$

Análogamente, se tiene que $df_x\left[E^s(x)\right] = E^s(f(x))$. □

Proposición 15. *Sea Λ un conjunto hiperbólico de f con la métrica de Lyapunov. Entonces $\forall\delta > 0$ hay $\epsilon > 0$ tal que, las distribuciones $E^u(x)$ y $E^s(x)$ se pueden extender a Λ_ϵ y:*

1. *$E^u(x)$ sea continuo en Λ^u_ϵ y $E^s(x)$ sea continuo en Λ^s_ϵ, donde*

$$\begin{aligned}\Lambda^u_\epsilon &= \{x \in U : dist(f^n(x),\Lambda) < \epsilon, \forall n \in \mathbb{N}\}\\ \Lambda^s_\epsilon &= \left\{x \in U : dist(f^{-n}(x),\Lambda) < \epsilon, \forall n \in \mathbb{N}\right\}.\end{aligned} \tag{3.25}$$

2. *Si $x \in (\Lambda_\epsilon \cap f(\Lambda_\epsilon))$, entonces $df_x\left[E^u(x)\right] = E^u(f(x))$ y $df_x\left[E^s(x)\right] = E^s f(x))$.*
3. *$\|df_x(v)\| < (\delta+\lambda)\|v\|$; $\forall x \in \Lambda_\epsilon$ y $\forall v \in E^s(x)$.*
4. *$\left\|df_x^{-1}(v)\right\| < (\delta+\lambda)\|v\|$; $\forall x \in \Lambda_\epsilon$ y $\forall v \in E^u(x)$*

Demostración. Sea $\delta > 0$, toma α, ϵ como en las proposiciones 13 y 14 y tal que $\Lambda_\epsilon \subseteq U(\Lambda)$. Extiende continuamente las distribuciones $E^s(x)$ y $E^u(x)$ en Λ se extienden continuamente a distribuciones $\widetilde{E}^s(x)$ y $\widetilde{E}^u(x)$ a lo largo de Λ_ϵ.

Para $x \in \Lambda_\epsilon \backslash \Lambda^s_\epsilon$, sea $n(x) \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(x) \in \Lambda_\epsilon$ $\forall n \in \{0,...,n(x)\}$ y $f^{n(x)+1}(x) \notin \Lambda_\epsilon$. Entonces definamos $E^s(x) = df^{-n(x)}_{f^{n(x)}(x)}\left(\widetilde{E}^s(f^{n(x)}(x))\right)$. Luego para $x \in \Lambda^s_\epsilon$, definamos $E^s(x) = \underset{n\to\infty}{lim}\, df^{-n}_{f^n(x)}\left(\widetilde{E}^s(f^n(x))\right)$. Este subespacio está bien definido, pues, haciendo el mismo tipo de consideraciones que en el teorema 6, tenemos que $E^s(x)$ es un punto fijo de la contraccion $df^{-1}_{f(x)}$ en el cono $K^s_\alpha(x)$. Dadas estas definiciones es fácil ver que se cumple 2.

Para ver que $E^s(x)$ depende continuamente de $x \in \Lambda^s_\epsilon$, tomemos una sucesión $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $x_k \to x_0$, $k \to \infty$ denotemos por $Y_n(x_k) = df^{-n}_{f^n(x)}\left(\widetilde{E}^s(f^n(x_k))\right)$ $\forall k \in \mathbb{N}$, luego tenemos que, $E^s(x_k) = \underset{n\to\infty}{lim}\, Y_n(x_k)$ y, por otro lado, por continuidad de $\widetilde{E}^s(x)$ tenemos que $Y_n(x_0) = \underset{k\to\infty}{lim}\, Y_n(x_k)$ y queremos ver que $\underset{k\to\infty}{lim}\, E^s(x_k) = E^s(x_0)$,

$$
\begin{array}{ccccc}
\{Y_1(x_1) & \cdots & Y_n(x_1)\} & {\scriptstyle n\to\infty} & E^s(x_1) \\
\vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\{Y_1(x_k) & \cdots & Y_n(x_k)\} & {\scriptstyle n\to\infty} & E^s(x_k) \\
\downarrow {\scriptstyle k\to\infty} & \cdots & \downarrow {\scriptstyle k\to\infty} & \vdots & \downarrow ? \\
\{Y_1(x_0) & \cdots & Y_n(x_0)\} & {\scriptstyle n\to\infty} & E^s(x_0)
\end{array} \tag{3.26}
$$

Entonces para todo abierto U en el haz Grassmanniano $Gr(TM;s)$ que contenga a $E^s(x_0)$, tenemos que $\exists N \in \mathbb{N}$ tal que $Y_n(x_0) \in U\ \forall n \geqslant N$, luego $\exists K_n \in \mathbb{N}$ tal que $Y_n(x_k) \in U\ \forall k \geqslant K_n$ $\Rightarrow E^s(x_k) \in U\ \forall k \geqslant K_n$ y $\forall n \geqslant N$. Esto muestra que, $E^s(x_k) \to E^s(x_0)$, $k \to \infty$, con lo que concluimos la continuidad de $E^s(x)$ y por tanto 1.

El resto de las propiedades nos las da la proposición 14. □

3.3. ϵ-Pseudo Órbitas

Sea (M,g) una variedad Riemanniana y $d_M(\cdot,\cdot)$ la distancia en M dada por la métrica Riemanniana.

Definición 27. *Una ϵ-**pseudo órbita** de $f: U \to M$ es una sucesión $(x_n) \subseteq U$ finita o infinita tal que, $d_M(x_{n+1}, f(x_n)) \leqslant \epsilon$, $\forall n \in \mathbb{Z}$. Se dice que una ϵ-pseudo órbita es $\delta-$**sombreada** por la órbita $O_f(x)$ de $x \in U$, si $d_M(x_n, f^n(x)) < \delta$, $\forall n \in \mathbb{Z}$.*

El siguiente teorema (aunque técnico) es sumamente importante, pues, será utilizado en varias ocasiones para desmostrar propiedades importantes de los conjuntos hiperbólicos. La motivación de este teorema surge a partir del Lema de sombreamiento 4.

Teorema 7 (Sombreamiento de Anosov)**.** *Sea $U \subseteq M$ abierto, $f: U \to f(U) \subseteq M$ un difeomorfismo y Λ un conjunto hiperbólico de f.*

Entonces, hay un abierto $\Omega(\Lambda) \subseteq U$ tal que, $\Lambda \subseteq \Omega$ y existen $\epsilon_0, \delta_0 > 0$ tal que $\forall \delta > 0\ \exists \epsilon > 0$ con las siguientes propiedades:

$\forall g: \Omega \to g(\Omega) \subseteq M$ difeomorfismo de clase C^2 con $d_{C^1}(g,f) < \epsilon_0$ y para cualquier homeomorfismo $h: Y \to Y$ de un espacio topológico junto con un mapa continuo $\phi \in C^0(Y,\Omega)$ tal que satisfaga $d_{C^0}(\phi \circ h, g \circ \phi) = \sup_{y \in Y} \{d_M(\phi \circ h(y), g \circ \phi(y))\} < \epsilon$. Entonces $\exists \psi \in C^0(Y,\Omega)$ tal que $\psi \circ h = g \circ \psi$ y $d_{C^0}(\phi,\psi) < \epsilon$.

Más aún, es localmente único en el siguiente sentido: si $\psi' \circ h = g \circ \psi'$ para algún $\psi': Y \to \Omega$ con $d_{C^0}(\phi,\psi') < \delta_0$, entonces $\psi' = \psi$.

$$\begin{array}{ccc} \Omega & \xrightarrow{g} & g(\Omega) \\ \phi\uparrow & \circlearrowleft_{\epsilon} & \uparrow\phi \\ Y & \xrightarrow{h} & Y \end{array} \quad \underset{\exists!\psi}{\Longrightarrow} \quad \begin{array}{ccc} \Omega & \xrightarrow{g} & g(\Omega) \\ \psi\uparrow & \circlearrowleft & \uparrow\psi \\ Y & \xrightarrow{h} & Y \end{array}$$

$$\epsilon - conmutativo \quad \Longrightarrow \quad conmutativo$$

Demostración. Notemos que, buscamos un mapa $\psi \in C^0(Y,\Omega)$, el cual es un punto fijo de la aplicación $F : C^0(Y,\Omega) \to C^0(Y,\Omega)$, $\beta \mapsto g \circ \beta \circ h^{-1}$. Por tanto, la idea central de la demostración es llevar el problema al teorema de punto fijo de Banach. La mayor dificultad será justificar que se satisfacen las hipótesis del teroema de punto fijo. De ahí, sólo resta observar que se cumplen las propiedades requeridas.

Daremos la prueba en 3 pasos:

Paso 1: Preámbulo.
Notemos primero que, por compacidad de Λ podemos tomar $\Omega \subseteq M$ acotado con respecto a la métrica inducida por M; esto es, tomemos (Ω, d_M) como subespacio métrico acotado de (M, d_M). Esto se da, por ejemplo, si $\Omega = \Lambda_\varsigma$ con $\varsigma > 0$ suficientemente pequeña. Así, todo mapa continuo $\beta : Y \to \Omega$ es acotado, por lo que, $C^0(Y,\Omega)$ es un espacio métrico completo con la métrica uniforme $d_{C^0}(\alpha,\beta) = \underset{y\in Y}{sup}\{d_M(\alpha(y),\beta(y))\}$ (ver [Clapp]).

Queremos también modelar a $C^0(Y,\Omega)$ con un espacio de Banach adecuado, esto a fin de tener el concepto de diferenciabilidad. De hecho, se tiene que $C^0(Y,\Omega)$ es una variedad de Banach; aunque para nuestro fin, bastará con darle este tipo de estructura a una bola abierta con centro en ϕ, $B_\theta(\phi) \subseteq C^0(Y,\Omega)$, como lo haremos a continuación:

Dado $\phi \in C^0(Y,\Omega)$, consideremos el espacio de campos vectoriales continuos y acotados a lo largo de ϕ.

$$\mathcal{B}^0_\phi(Y,TM) : \left\{ v \in C^0(Y,TM) : v(y) \in T_{\phi(y)}M, \underset{y\in Y}{sup}\{\|v(y)\|\} < \infty \right\}. \tag{3.27}$$

$\mathcal{B}^0_\phi(Y,TM)$ equipado con la norma uniforme $\|v\|_\infty = \underset{y\in Y}{sup}\{\|v(y)\|\}$ es un espacio vectorial normado completo (Banach).

Luego, para $\theta > 0$ suficientemente pequeña, sabemos que el mapa

$$\begin{aligned} \mathcal{A} : B_\theta(\phi) &\to \mathcal{B}^0_\phi(Y, TM) \\ \beta(y) &\mapsto exp^{-1}_{\phi(y)}(\beta(y)), \end{aligned} \tag{3.28}$$

es un homeomorfismo entre $B_\theta(\phi)$ y $B^\phi_\theta(0) \subseteq \mathcal{B}^0_\phi(Y, TM)$.

Ahora, consideremos el mapa:

$$\begin{aligned} F^\phi = \mathcal{A}F\mathcal{A}^{-1} &: B^\phi_\theta(0) \to \mathcal{B}^0_\phi(Y, TM) \\ F^\phi(v)(y) &= exp^{-1}_{\phi(y)}\left(g(exp_{\phi(h^{-1}(y))}(v(h^{-1}(y)))\right). \end{aligned} \tag{3.29}$$

Notemos que, si v es un punto fijo de F^ϕ, entonces $\mathcal{A}^{-1}(v)$ es un punto fijo de F. Además, F^ϕ es diferenciable en v en el sentido de Fréchet. De hecho, dado que g es de clase $C^2 \Rightarrow F^\phi$ es de clase C^2.

La regla de la cadena implica que,

$$\begin{aligned} \left((DF^\phi)_v\xi\right)(y) = d\left(exp^{-1}_{\phi(y)}\right)_{g(exp_{\phi(h^{-1}(y))}(v(h^{-1}(y)))} &\circ \\ dg_{exp_{\phi(h^{-1}(y))}(v(h^{-1}(y))} \circ d(exp_{\phi(h^{-1}(y))})_{v(h^{-1}(y))}\xi(h^{-1}(y)). \end{aligned} \tag{3.30}$$

Paso 2: Hiperbolicidad de $(DF^\phi)_0\xi$

Veamos que $(DF^\phi)_0\xi$ es un operador lineal hiperbólico, esto es, que tiene espectro fuera del círculo unitario.

Denotemos por, $T_\Lambda M = E^u_f(x) \oplus E^s_f(x)$, a la descomposición hiperbólica de f. Sabemos que existe una vecindad $\Omega(\Lambda) \supseteq \Lambda$, tal que la descomposición $T_\Lambda M = E^u_f(x) \oplus E^s_f(x)$ se extiende continuamente a lo largo de Ω y la proposición 15 nos permite además, tomar las distribuciones df_x invariantes (no necesariamente invariante por más iteraciones de df_x). A esta descomposición también la denotaremos $T_\Omega M = E^u_f(x) \oplus E^s_f(x)$.

Para todo $x \in \Omega$, sea $df^i_x : T_xM \mapsto E^i_f(f(x))$ $i = u, s$; así, $df_x(v) = df^u_x(v) + df^s_x(v)$. Sea $\left(df^i_x\right)_s = df^i_x \mid_{E^s_f(x)}$ y $\left(df^i_x\right)_u = df^i_x \mid_{E^u_f(x)}$. Entonces, por la hiperbolicidad de f, tenemos que $\|(df^u_x)_u\|^{-1} < \lambda$ y $\|(df^s_x)_s\| < \lambda$; mientras que, por la invarianza de las distribuciones estable e inestable, tenemos que $(df^s_x)_u = 0 = (df^u_x)_s$. Por tanto,

$$df_x = \begin{pmatrix} (df^u_x)_u & 0 \\ 0 & (df^s_x)_s \end{pmatrix} \tag{3.31}$$

De manera análoga, $\forall g \in C^1(\Omega, M)$ tenemos que con respecto a la misma descomposición $T_\Omega M = E^u_f(x) \oplus E^s_f(x)$,

$$dg_x = \begin{pmatrix} (dg_x^u)_u & (dg_x^u)_s \\ (dg_x^s)_u & (dg_x^s)_s \end{pmatrix} \tag{3.32}$$

Luego para $\delta > 0$, existe $\epsilon_0 \geqslant 0$, tal que si $d_{C^1}(f,g) < \epsilon_0$, tenemos que

$$\begin{aligned} \|(dg_x^u)_u\|^{-1} &< \lambda, \\ \|(dg_x^u)_s\| &< \delta\lambda, \\ \|(dg_x^s)_u\| &< \delta\lambda, \\ \|(dg_x^s)_s\| &< \lambda. \end{aligned} \tag{3.33}$$

Por otro lado, la descomposición $T_\Omega M = E_f^u(x) \oplus E_f^s(x)$, induce la siguiente descomposición en $\mathcal{B}_\phi^0(Y,TM) = \mathcal{F}^u \oplus \mathcal{F}^s$ con,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^u &= \left\{ v \in \mathcal{B}_\phi^0(Y,TM) : v(y) \in E_f^u(\phi(y)) \right\} \\ \mathcal{F}^s &= \left\{ v \in \mathcal{B}_\phi^0(Y,TM) : v(y) \in E_f^s(\phi(y)) \right\}. \end{aligned} \tag{3.34}$$

De manera análoga al caso de dimensión finita discutido anteriormente, definamos los mapas, $(DF_v^\phi)^i : \mathcal{B}_\phi^0(Y,TM) \mapsto \mathcal{F}^i$ con $i = u, s$; y ahora, con respecto a la descomposición $\mathcal{B}_\phi^0(Y,TM) = \mathcal{F}^u \oplus \mathcal{F}^s$, definamos $(DF_v^\phi)_u^i := (DF_v^\phi)^i \mid_{\mathcal{F}^u}$ y $(DF_v^\phi)_s^i := (DF_v^\phi)^i \mid_{\mathcal{F}^s}$ que no son más que las derivadas parciales en el sentido de Fréchet de los mapas $(DF_v^\phi)^i$ con respecto a $\mathcal{F}^u$ y $\mathcal{F}^s$, respectivamente (ver [Clapp]). De ahí que,

$$DF_0^\phi = \begin{pmatrix} (DF_0^\phi)_u^u & (DF_0^\phi)_s^u \\ (DF_0^\phi)_u^s & (DF_0^\phi)_s^s \end{pmatrix} \tag{3.35}$$

Recordemos que $d(exp_p^{-1})_p = Id$, esto implica que, para cualquier $\rho > 0$, $\exists \epsilon > 0$ tal que $\left\| d(exp_{p_1}^{-1})_{p_2} - Id \right\| < \rho$, si $d_M(p_1,p_2) < \epsilon$. Como $\lambda \in (0,1) \Rightarrow 0 < \lambda^{-1} - 1$ entonces, si tomamos $\rho < \lambda^{-1} - 1$ tenemos que, $\left\| d(exp_{p_1}^{-1})_{p_2} \right\| \leqslant \left\| d(exp_{p_1}^{-1})_{p_2} - Id \right\| + \|Id\| < \rho + 1$. Además, para $v = 0$ concluimos que:

$$\left((DF^\phi)_0 \xi \right)(y) = d\left(exp_{\phi(y)}^{-1} \right)_{g(\phi(h^{-1}(y)))} \circ dg_{\phi(h^{-1}(y))} \circ \xi(h^{-1}(y)). \tag{3.36}$$

Por lo que, si $d_{C^0}(\phi, g\phi h^{-1}) < \epsilon$ y $d_{C^1}(f,g) < \epsilon_0$ se tiene lo siguiente:

Definamos $\mu := (\rho+1)\lambda$, entonces $\mu < 1$. Ahora acotemos la norma de $(DF_v^\phi)_s^s$. Sea $\xi^s(y) \in \mathcal{F}^s$, entonces:

$$\begin{aligned}
\left\|(DF_v^{\phi})_s^s \xi^s(y)\right\| &= \left\| d\left(exp_{\phi(y)}^{-1}\right)_{g(\phi(h^{-1}(y))} \circ dg^s_{\phi(h^{-1}(y))} \circ \xi^s(h^{-1}(y))\right\| \\
&\leqslant \left\| d\left(exp_{\phi(y)}^{-1}\right)_{g(\phi(h^{-1}(y))}\right\| \left\| dg^s_{\phi(h^{-1}(y))} \circ \xi^s(h^{-1}(y))\right\| \\
&< (\rho+1) \left\| dg^s_{\phi(h^{-1}(y))} \circ \xi^s(h^{-1}(y))\right\| \\
&< (\rho+1)\lambda \left\|\xi^s\right\| = \mu \left\|\xi^s\right\|. \qquad (3.37)
\end{aligned}$$

Esto implica que, $\left\|(DF_0^{\phi})_s^s\right\| < \mu$. Cálculos análogos muestran que:

$$\left\|(DF_0^{\phi})_u^s\right\| < \delta\mu, \ \left\|(DF_0^{\phi})_s^u\right\| < \delta\mu \text{ y } \left\|(DF_0^{\phi})_u^u\right\|^{-1} < \mu.$$

Esto implica que, para δ suficientemente pequeña, el espectro de DF_0^{ϕ} está fuera del círculo unitario, y por tanto, es un operador lineal hiperbólico.

Paso 3: Definición del mapa contractivo

Por el paso 2 tenemos que, DF_0^{ϕ} tiene espectro hiperbólico. Esto implica que, $DF_0^{\phi} - Id$ es invertible y, por tanto, $\exists R > 0$ tal que $\left\|(DF_0^{\phi} - Id)^{-1}\right\| < R$.

Por otro lado, F^{ϕ} es de clase C^2. Luego, su expansión de Taylor alrededor de 0 nos da, $F^{\phi}(v) = F^{\phi}(0) + DF_0^{\phi}(v) + H(v)$, con $H(v) = o(\|v\|)$ (ver teorema de Taylor en espacios de Banach, [Cole] ó [Wouk]). Por tanto, si v es un punto fijo de $F^{\phi}(v)$, cumple que:

$$(DF_0^{\phi} - Id)(v) = -\left(F^{\phi}(0) + H(v)\right) \qquad (3.38)$$

entonces definamos el operador,

$$T(v) := \left(-(DF_0^{\phi} - Id)^{-1}(F^{\phi}(0) + H)\right)(v). \qquad (3.39)$$

Notemos que, $F^{\phi} \in C^2$ si $g \in C^2$. Entonces para toda $v_1,\ v_2 \in B_{\theta}^{\phi}(0)$, sea $v_t = (1-t)v_1 + tv_2$, $t \in [0,1]$. Luego

$$\left\|F^{\phi}(v_1) - F^{\phi}(v_2)\right\| \leqslant \sup_{t\in I} \left\|DF_{v_t}^{\phi}\right\| \|v_1 - v_2\| \qquad (3.40)$$

Además tenemos que para toda ξ y para toda $v \in B_{\theta}^{\phi}(0)$,

$$\left\|(DF^{\phi})_v \xi(y)\right\| \leqslant \left\| d\left(exp_{\phi(y)}^{-1}\right)\right\| \left\| dg_{exp_{\phi(h^{-1}(y))}}\right\| \left\| d(exp_{\phi(h^{-1}(y))})\right\| \left\|\xi(h^{-1}(y))\right\|. \qquad (3.41)$$

Como g es C^1 cercano a F, entonces $\left\|d\left(exp_{\phi(y)}^{-1}\right)\right\| \left\|dg_{exp_{\phi(h^{-1}(y))}}\right\| \|d(exp_{\phi(h^{-1}(y))})\| < \infty$.

Así la ecuación 3.41 implica $\left\|(DF^{\phi})_v \xi\right\| \leqslant C \|\xi\|$ con C constante. Luego, por Banach-Steinhaus tenemos que $\left\|DF_v^{\phi}\right\|$ es acotado para toda $v \in B_\theta^\phi(0)$. Esto prueba que F^ϕ es Lipschitz en $B_\theta^\phi(0)$ con constante K_1.

Un arguneto similar al anterior implica que DF^ϕ es Lipschitz y por lo tanto DH también es Lipschitz con constante K.

Observamos que

$$\begin{aligned}
\|T(v_1) - T(v_2)\| &= \left\|-(DF_0^\phi - Id)^{-1}(H(v_1) - H(v_2))\right\| \\
&\leqslant \left\|-(DF_0^\phi - Id)^{-1}\right\| \|(H(v_1) - H(v_2))\| \\
&< R\sup_{t \in I} \{\|DH(v_t)\|\} \|v_1 - v_2\| \\
&< RK\,(máx\,\{\|v_1\|, \|v_2\|\}) \|v_1 - v_2\| \qquad (3.42)
\end{aligned}$$

Además,

$$\begin{aligned}
\|T(0)\| &= \left\|-(DF_0^\phi - Id)^{-1}(F^\phi(0))\right\| < R\left\|F^\phi(0)\right\| = R\left\|exp_{\phi(y)}^{-1}\left(g(\phi(h^{-1}(y)))\right)\right\| \\
&= Rd_{C^0}(\phi, g \circ \phi \circ h^{-1}) = Rd_{C^0}(\phi h, g \circ \phi) < R\epsilon. \qquad (3.43)
\end{aligned}$$

Ahora, tomemos $\delta_0 < \frac{1}{2RK}$, $\theta < min\,\{\delta, \delta_0\}$, $\epsilon < \dfrac{\theta}{2R}$, así para $v_1, v_2 \in B_{\delta_0}^\phi(0) \subseteq \mathcal{B}_\phi^0(Y, TM)$

$$\|T(v_1) - T(v_2)\| < \frac{1}{2}\|v_1 - v_2\| \qquad (3.44)$$

y

$$\|T(0)\| < \frac{\theta}{2}. \qquad (3.45)$$

Entonces, T es una contraccíon y por el teorema de punto fijo de Banach T tiene un único punto fijo $v \in B_{\delta_0}^\phi(0)$ y, por tanto, F tiene un único punto fijo $\psi = \mathcal{A}^{-1}v \in B_{\delta_0}(\phi)$; que de hecho, se encuentra en $B_\theta^\phi(0) \subseteq B_{\delta_0}^\phi(0)$, ya que $T\left(B_\theta^\phi(0)\right) \subseteq B_\theta^\phi(0)$. □

Lema 4 (Sombreamiento de Anosov)**.** *Sea* Λ *un conjunto hiperbólico de* $f : U \to f(U) \subseteq M$*. Entonces existe* $\Omega(\Lambda) \supseteq \Lambda$*, tal que para* $\delta > 0$*,* $\exists \epsilon > 0$ *tal que* $\forall$ (x_k) $\epsilon-$*órbita finita o infinita en* Ω*, es* δ*-sombreada por una órbita de* f*.*

Demostración. Sea $Y = \mathbb{Z}$ con la topología discreta, (x_k) $\epsilon-$órbita, $g = f$ $(\epsilon_0 = 0)$, $h : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$; $h(k) = k + 1$, $\phi : \mathbb{Z} \to \Omega$; $\phi(k) = x_k$. Luego, como (x_k) es una $\epsilon-$órbita, $d_M(\phi \circ h(k), f \circ \phi(k)) =$

$d_M(x_{k+1}, f(x_k)) < \epsilon \Rightarrow d_{C^0}(\phi \circ h, f \circ \phi) < \epsilon$.

Entonces, por el teorema de sombreamiento, $\exists \psi \in C^0(\mathbb{Z}, \Omega)$ y $\delta > 0$ tal que $\psi \circ h = f \circ \psi$ y $d_{C^0}(\phi, \psi) < \delta$. Esto es, si $\psi(k) = y_k \Rightarrow y_{k+1} = \psi \circ h(k) = f \circ \psi(k) = f(y_k)$. Por tanto, si $x = y_0$ tenemos que, $\psi(k) = f^k(x)\ \forall k \in \mathbb{Z}$. Luego, como $d_{C^0}(\phi, \psi) < \delta \Rightarrow d_M(x_k, f^k(x)) < \delta$, $\forall k \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{array}{ccc} \Omega & \xrightarrow{f} & f(\Omega) \\ x_k \uparrow & \circlearrowleft_\epsilon & \uparrow x_k \\ \mathbb{Z} & \xrightarrow{k+1} & \mathbb{Z} \end{array} \quad \underset{\exists!\psi}{\Longrightarrow} \quad \begin{array}{ccc} \Omega & \xrightarrow{f} & f(\Omega) \\ \psi \uparrow & \circlearrowleft & \uparrow \psi \\ \mathbb{Z} & \xrightarrow{k+1} & \mathbb{Z} \end{array}$$

□

Teorema 8 (Anosov Closing Lemma)**.** *Sea M una variedad Riemanniana. Sea Λ un conjunto hiperbólico de $f : U \to f(U) \subseteq M$. Entonces, existe una vecindad abierta $\Omega(\Lambda) \supseteq \Lambda$ y existe $\epsilon > 0$ tal que para toda $\delta > 0$ y cualquier ϵ-órbita periódica $(x_0, ..., x_{m-1})$ en Ω, $\exists y \in \Omega$ tal que $f^m(y) = y$, y se tiene que $d_M(x_k, f^k(y)) < \delta\ \forall k = 0, 1, ..., m-1$.*

Demostración. Sea $Y = \mathbb{Z}_m$ con la topología discreta, $g = f$ $(\epsilon_0 = 0)$, $h : \mathbb{Z}_m \to \mathbb{Z}_m$; $h(k) = k + 1$ (mod m), $\phi : \mathbb{Z}_m \to \Omega$; $\phi(k) = x_k$. Como (x_k) es una $\epsilon-$órbita $\Rightarrow d_{C^0}(\phi \circ h, f \circ \phi) < \epsilon$. Luego, el teorema de sombreamiento de Anosov implica el Clossing Lemma. □

Proposición 16. *Sea Λ un conjunto hiperbólico de $f : U \to f(U) \subseteq M$. Entonces $\overline{Per(f\mid_\Lambda)} = NW(f\mid_\Lambda)$.*

Demostración. Sea $\epsilon > 0$ y $x \in NW(f\mid_\Lambda)$. Tomemos δ tal que $d(\phi \circ h, f \circ \phi) < \delta$. Sea $U = B_{\frac{\delta}{2}}(x) \cap \Lambda$. Como $x \in NW(f\mid_\Lambda)$, $\exists n$ tal que $f^n(U) \cap U \neq \varnothing$. Sea $z \in f^{-n}(f^n(U) \cap U) = U \cap f^{-n}(U)$. Entonces, si denotamos por $z_k := f^k(z)$, $k = 0...., n-1$, tenemos que, $d(z_0, f(a_{n-1})) = d(z, f^n(z)) < \delta$ y $d(z_{k+1}, f(z_k) = 0\ \forall k = 0, ..., n-2$ por la tanto $\{z, f(z), ..., f^{n-1}(z)\}$ es una δ-órbita, por el Anosov closing lema, existe un punto periódico de periodo n a distancia menor que ϵ de z. □

Corolario 6. *Sea $f : M \to M$ difeomorfismo de Anosov, entonces $\overline{Per(f)} = NW(f)$.*

3.4. Variedades Estables e Inestables

Teorema 9 (Hadamard-Perron)**.** *Sea $\lambda < \mu$, $r \geqslant 1$, y $\forall n \in \mathbb{Z}$ sea $f_n : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ un difeomorfismo de clase C^r, tal que $(x, y) \in \mathbb{R}^u \oplus \mathbb{R}^{d-u}$, sea $s = d - u$.*

$$f_n(x, y) = (A_n(x) + \alpha_n(x, y), B_n(y) + \beta_n(x, y)) \tag{3.46}$$

donde $A_n : \mathbb{R}^u \to \mathbb{R}^u$ y $B_n : \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^s$ son mapas lineales con $\|A_n^{-1}\| \leqslant \mu^{-1}$, $\|B_n\| \leqslant \lambda$ y $\alpha_n(0) = 0$, $\beta_n(0) = 0$.

Entonces existe $\gamma_0 = \gamma_0(\lambda, \mu)$ tal que para todo $\gamma \in (0, \gamma_0)$ existe un $\delta = \delta(\lambda, \mu, \gamma)$ con la siguiente propiedad:

Si $\|\alpha_n\|_{C^0} < \delta$ y $\|\beta_n\|_{C^0} < \delta$ para toda $n \in \mathbb{Z}$ entonces

1. *Existe una familia única* $\{W_n^+\}_{n\in\mathbb{Z}}$ *de variedades* C^1 *de dimensión* u,

$$W_n^+ = \{(x, \varphi_n^+(x)) \mid x \in \mathbb{R}^u\} = Graf(\varphi_n^+). \tag{3.47}$$

2. *Existe una familia única* $\{W_n^-\}_{n\in\mathbb{Z}}$ *de variedades* C^1 *de dimensión* u,

$$W_n^- = \{(x, \varphi_n^-(x)) \mid x \in \mathbb{R}^s\} = Graf(\varphi_n^-), \tag{3.48}$$

donde $\varphi_n^+ : \mathbb{R}^u \to \mathbb{R}^s$ *y* $\varphi_n^- : \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^u$, $\sup\limits_{n\in\mathbb{Z}} \|d\varphi_n^\pm\| < \gamma$
y se satisfacen las siguientes propiedades:

a) $f_n(W_n^-) = W_{n+1}^-$, $f_n(W_n^+) = W_{n+1}^+$.
b) $\|f_m(z)\| < \lambda' \|z\|$ *para* $z \in W_m^-$, $\left\|f_{m-1}^{-1}(z)\right\| < (\mu')^{-1}\|z\|$*para* $z \in W_m^+$,

donde $\lambda' := (1+\gamma)(\lambda + \delta(1+\gamma)) < \dfrac{\mu}{1+\gamma} - \delta =: \mu'$.

c) *Sea* $\lambda' < \nu < \mu'$.
Si $\|f_{n+L-1} \circ \cdots \circ f_n(z)\| < C\nu^L \|z\|$ $\forall L \geqslant 0$ *y alguna* $C > 0$ *entonces* $z \in W_n^-$.
Si $\|f_{n-L} \circ \cdots \circ f_{n-1}(z)\| < C\nu^{-L} \|z\|$ $\forall L \geqslant 0$ *y alguna* $C > 0$ *entonces* $z \in W_n^+$.

Finalmente, en el caso hiperbólico $\lambda < 1 < \mu$, *las familias* $\{W_n^+\}_{n\in\mathbb{Z}}$ *y* $\{W_n^-\}_{n\in\mathbb{Z}}$ *son variedades de clase* C^r.

La demostración de este teorema puede ser encontrada en [KaH].

Una de las aplicaciones más importantes del teorema Hadamard-Perron es al siguiente teorema.

Teorema 10 (Variedades Estables e Inestables)**.** *Sea* Λ *un conjunto hiperbólico para un difeomorfismo* $f : U \to M$ *de clase* C^1, *tal que* df *en* Λ *admite una* (λ, μ)*-descomposición con* $\lambda < 1 < \mu$. *Entonces, para cada* $x \in \Lambda$, *existe un par de discos,* C^1 *encajados, a saber,* $\mathcal{W}_{loc}^s(x)$ *y* $\mathcal{W}_{loc}^u(x)$. *Estos discos son llamados Variedad Estable Local y Variedad Inestable Local, respectivamente. Además, cumplen que:*

1. $T_x\mathcal{W}_{loc}^s(x) = E_x^-$, $T_x\mathcal{W}_{loc}^u(x) = E_x^+$;

2. $f(\mathcal{W}_{loc}^s(x)) \subseteq \mathcal{W}_{loc}^s(f(x))$, $f^{-1}(\mathcal{W}_{loc}^u(x)) \subseteq \mathcal{W}_{loc}^u(f^{-1}(x))$;

3. *Para toda* $\delta > 0$, *existe* $C(\delta)$ *tal que para* $n \in \mathbb{N}$, *entonces:*
si $y \in \mathcal{W}_{loc}^s(x) \Rightarrow$

$$d_M(f^n(x), f^n(y)) < C(\delta)(\lambda+\delta)^n d_M(x,y) \tag{3.49}$$

si $y \in \mathcal{W}_{loc}^u(x) \Rightarrow$

$$d_M(f^{-n}(x), f^{-n}(y)) < C(\delta)(\mu-\delta)^{-n} d_M(x,y) \tag{3.50}$$

4. *Existe $\beta > 0$ y una familia de vecindades U_x, las cuales contienen la bola $B_\beta(x)$, con $x \in \Lambda$, tal que:*

$$\begin{aligned} \mathcal{W}^s_{loc}(x) &= \{y \mid f^n(y) \in U_{f^n(x)}, n = 0, 1, 2, \cdots\}, \\ \mathcal{W}^u_{loc}(x) &= \{y \mid f^{-n}(y) \in U_{f^{-n}(x)}, n = 0, 1, 2, \cdots\}. \end{aligned} \tag{3.51}$$

Demostración. Para cada $x \in \Lambda$ tomemos un sistema coordenado tal que la descomposición $T_xM = E^u(x) \oplus E^s(x)$ sea identificada con $\mathbb{R}^d = \mathbb{R}^u \oplus \mathbb{R}^s$. Sea $D_\epsilon = B^u_\epsilon(0) \times B^s_\epsilon(0) \subseteq T_xM$, con $B^u_\epsilon(0) \subseteq E^u(x)$ y $B^s_\epsilon(0) \subseteq E^s(x)$. Por compacidad de Λ, $\exists \epsilon > 0$ tal que $exp_x : D_\epsilon \to M$ es inyectivo $\forall x \in \Lambda$ y por lo tanto es un difeomorfismo entre D_ϵ y una vecindad de x en M digamos, $V_\epsilon(x)$. Ahora definamos la familia de mapas:

$$f_{x,\epsilon} = exp^{-1}_{f(x)} \circ f \circ exp_x : D_\epsilon \to \mathbb{R}^d \tag{3.52}$$

Utilizando una **bump function** podemos extender $f_{x,\epsilon}$ a todo $T_xM = \mathbb{R}^d$. Denotemos por f_x a esta extensión. Entonces $f_x(0) = 0$, además sabemos que $dexp_0 = Id$. Luego $(df_x)_0 = (dexp^{-1}_{f(x)})_{f \circ exp_x(0)} \circ (df)_{exp_x(0)} \circ (dexp_x)_0 = (dexp^{-1}_{f(x)})_{f(x)} \circ (df)_x \circ Id = (df)_x$ por el teorema de expansión de Taylor tenemos que $f_x(z) = (df_x)_0 + R(z)$ con $R(0) = 0$ y $R(z) = o(\|z\|) \Rightarrow \|R(z)\|_{C^0}$ es pequeño.

Así con respecto a las descomposiciones $T_xM = E^u(x) \oplus E^s(x)$ y $\mathbb{R}^d = \mathbb{R}^u \oplus \mathbb{R}^s$ tenemos que $z = (x, y)$:

$$\begin{aligned} (df_x)_0 = df_x &= \begin{pmatrix} (df_x)\mid_{E^u(x)} & 0 \\ 0 & (df_x)\mid_{E^s(x)} \end{pmatrix} \\ R(z) &= (R^u(x, y), R^s(x, y)) \end{aligned} \tag{3.53}$$

Ahora denotemos por $A_1 := (df_x)\mid_{E^u(x)}$, $B_1 := (df_x)\mid_{E^u(x)}$, $\alpha_1(x, y) := R^u(x, y)$, $\beta_1(x, y) := R^s(x, y)$, de esta forma tenemos que, $f_x = (A_1(x) + \alpha_1(x, y), B_1(y) + \beta_1(x, y))$. Con $\|A_1^{-1}\| \leqslant \mu^{-1}$, $\|B_1\| \leqslant \lambda$ y $\alpha_1(0) = 0$, $\beta_1(0) = 0$.

Con una construcción análoga tenemos que para todo $x \in \Lambda$ y para cada elemento de la órbita $O_f(x)$, obtenemos una sucesión de difeomorfismos $f_n = f_{f^n(x)} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ que cumplen con las condiciones del teorema de Hadamard-Perron 9, de donde se sigue el resultado. ☐

Definición 28. *Los conjuntos:*

$$\mathcal{W}^s(x) := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f^{-n}(\mathcal{W}^s_{loc}(f^n(x)))$$
$$\mathcal{W}^u(x) := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f^{n}(\mathcal{W}^u_{loc}(f^{-n}(x))) \tag{3.54}$$

*están definidos independientemente de una elección particular de $\mathcal{W}^s_{loc}$ y $\mathcal{W}^u_{loc}$. Son variedades diferenciables inyectivamente inmersas en M y son llamadas **Variedad Estable Global** y **Variedad Inestable Global** respectivamente. Se pueden caracterizar topológicamente por*

$$\mathcal{W}^s(x) = \left\{ y \in M \mid d_M(f^n(x), f^n(y)) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \right\}$$
$$\mathcal{W}^u(x) = \left\{ y \in M \mid d_M(f^{-n}(x), f^{-n}(y)) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \right\} \tag{3.55}$$

Proposición 17. *Si $x, y \in \Lambda, z \in \mathcal{W}^s_{loc}(x) \cap \mathcal{W}^s_{loc}(y)$, entonces la intersección $\mathcal{W}^s_{loc}(x) \cap \mathcal{W}^s_{loc}(y)$ contiene una vecindad abierta de z en ambas variedades. Un resultado similar se vale para variedades inestables locales.*

Demostración. Por la desigualdad del triángulo y la parte 3) del teorema de variedades estables e inestables $d_M(f^n(x), f^n(y)) \leqslant d_M(f^n(x), f^n(z)) + d_M(f^n(z), f^n(y)) \underset{n\to\infty}{\to} 0$

Luego por la parte 4) $f^n(y) \in \mathcal{W}^s_{loc}(f^n(x))$ para n suficientemente grande. Por lo tanto $f^n(\mathcal{W}^s_{loc}(y)) \subseteq \mathcal{W}^s_{loc}(f^n(x))$. Como $f^n(\mathcal{W}^s_{loc}(y)), f^n(\mathcal{W}^s_{loc}(x)) \subseteq \mathcal{W}^s_{loc}(f^n(x))$ son discos abiertos su intersección es abierta en $\mathcal{W}^s_{loc}(f^n(x))$ y por tanto en $f^n(\mathcal{W}^s_{loc}(x))$ y en $f^n(\mathcal{W}^s_{loc}(y))$. Por último notemos que $z \in f^{-1}\left(f^n(\mathcal{W}^s_{loc}(y)) \cap f^n(\mathcal{W}^s_{loc}(x))\right)$. □

Corolario 7. *Si para $x, y \in \Lambda$ las variedades estables globales $\mathcal{W}^s(x)$ y $\mathcal{W}^s(y)$ tienen intersección no vacia, entonces $\mathcal{W}^s(x) = \mathcal{W}^s(y)$. Lo mismo sucede con las variedades inestables globales.*

Proposición 18. *Sean $\mathcal{W}^s_\epsilon(x)$ y $\mathcal{W}^u_\epsilon(y)$ las bolas de radio ϵ en $\mathcal{W}^s(x)$ y $\mathcal{W}^u(y)$, respectivamente. Entonces existe $\epsilon > 0$ tal que $\forall x, y \in \Lambda$ la intersección $\mathcal{W}^s_\epsilon(x) \cap \mathcal{W}^u_\epsilon(y)$ consiste de a lo más un punto $[x, y]$, y existe $\delta > 0$ tal que si $d_M(x, y) < \delta$ para algunos $x, y \in \Lambda$, entonces $\mathcal{W}^s_\epsilon(x) \cap \mathcal{W}^u_\epsilon(y) \neq \varnothing$.*

Demostración. Es una implicación directa del corolario 5 y del teorema de variedades estables e inestables 10. □

Corolario 8. *Sea $V = \Lambda_\epsilon$ la nube de radio ϵ entorno a Λ. Entonces las familias de variedades $\{\mathcal{W}^s(x)\}$ y $\{\mathcal{W}^u(x)\}$ definen un par de foliaciones transversales $\mathcal{W}^s$ y $\mathcal{W}^u$ en $V \subseteq M$. El grado de regularidad de estas es el mismo que el de sus distribuciones tangentes E^s y E^u.*

3.5. Estabilidad de conjuntos hiperbólicos

Proposición 19. *Sea Λ un conjunto hiperbólico de f. Existe un abierto $U(\Lambda) \supseteq \Lambda$ y $\epsilon > 0$ tal que, si $K \subseteq U(\Lambda)$ es un compacto invariante bajo un difeomorfismo $g : U \to M$ con $d_{C^1}(g, f) < \epsilon$,* *entonces $\mathcal{K}$ es un conjunto hiperbólico de g.*

Demostración. Extendamos las distribuciones E^s_f y E^u_f a distribuciones continuas $\widetilde{E}^s_f$, $\widetilde{E}^u_f$ a lo largo de $U(\Lambda)$. Sea $\lambda \in (0,1)$ la constante de hiperbolicidad para f en Λ, entonces $\forall v \neq 0$ $\|v\| - \lambda \|v\| > 0$, por lo tanto, tomemos $0 < \epsilon < \|v\| - \lambda \|v\|$. Como $d_{C^1}(g, f) < \epsilon$, para un $\alpha > 0$ suficientemente pequeño, los $\alpha -$ *conos* definidos por las distribuciones $\widetilde{E}^s_f$, $\widetilde{E}^u_f$ cumplen que para $x \in \mathcal{K}$ y $0 \neq v \in K^u_\alpha(x)$, entonces

$$\left\|dg_x^{-1}(v)\right\| < \left\|df_x^{-1}(v)\right\| + \epsilon < \lambda \|v\| + \epsilon < \|v\|. \tag{3.56}$$

Por continuidad de $\|\cdot\|$, $\exists \lambda' \in (0,1)$ tal que $\lambda \|v\| + \epsilon < \lambda' \|v\|$, $\therefore$ $\left\|dg_x^{-1}(v)\right\| < \lambda' \|v\|$. Con un argumento similar tenemos que si $x \in \mathcal{K}$ y $0 \neq v \in K^s_\alpha(x)$, entonces $\|dg_x(v)\| < \lambda'' \|v\|$. Tomemos $\lambda^* = máx(\lambda', \lambda'')$ para tener una única constante que funcione en ambos casos. Por compacidad de $\mathcal{K}$, podemos asumir que además, λ^* es la misma $\forall x \in \mathcal{K}$.

El siguiente cálculo:

$$\|dg_x v^s\| \leqslant \lambda^* \|v^s\| \leqslant \lambda^* \alpha \|v^u\| < \alpha \|v^u\| \leqslant \alpha\lambda^* \|dg_x v^u\| < \alpha \|dg_x v^u\| \tag{3.57}$$

demuestra que $dg_x[K^u_\alpha(x)] \subseteq K^u_\alpha(g(x))$, y de manera similar se tiene $df^{-1}_{f(x)}[K^s_\alpha(f(x))] \subseteq K^s_\alpha(x)$. Por el teorema de conos invariantes 6 tenemos que, $\mathcal{K}$ es un conjunto hiperbólico de g. □

Definición 29. *Sea $Diff^1(M)$ el conjunto de difeomorfismos C^1 de una variedad Riemanniana M con la topología C^1.*

Corolario 9. *El conjunto de difeomorfismos de Anosov de una variedad Riemanniana M compacta, es un abierto en $Diff^1(M)$.*

Demostración. De la proposición 19, tomando $\Lambda = M$ se sigue que si f es un difeomorfismo de Anosov , entonces $\forall g \in Diff^1(M)$ tal que $g \in B_\epsilon(f)$ para ϵ suficientemente pequeño, entonces g también es Anosov. □

Proposición 20. *Sea $\Lambda \subseteq U$ conjunto hiperbólico de $f : U \to M$. Para toda $\Omega \subseteq U$ tal que $\Omega \supseteq \Lambda$ y $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que $\forall g : \Omega \to M$ con $d_{C^1}(g, f,) < \delta$ $\exists \mathcal{K} \subseteq \Omega$ conjunto hiperbólico de g y un homeomorfismo $\psi' : \mathcal{K} \to \Lambda$ tal que $\psi' \circ g |_{\mathcal{K}} = f |_\Lambda \circ \psi'$ y $d_{C^0}(h, Id) < \epsilon$.*

Demostración. Sea $Y = \Lambda$, $h = f |_\Lambda$, $\phi : \Lambda \hookrightarrow U$ la inclusión y $\epsilon_0 = \epsilon$. Así, tenemos que $d_{C^0}(\phi \circ h, g \circ \phi) = d_{C^0}(f |_\Lambda, g |_\Lambda) < \epsilon$. Por el teorema de sombreamiento de Anosov, tenemos que, $\exists$ un mapeo continuo $\psi : \Lambda \to \Omega$ tal que $\psi \circ f |_\Lambda = g \circ \psi$, con $d_{C^0}(\phi, \psi) < \epsilon$. Ahora definamos $\mathcal{K} = \psi(\Lambda)$. De nuevo aplicando el teorema de sombreamiento de Anosov a $Y = \mathcal{K}$, $h = g |_{\mathcal{K}}$, $g' = f |_\Lambda$ y la inclusión $\phi : \mathcal{K} \hookrightarrow M$ (ya que $d_{C^0}(\phi \circ h, g' \circ \phi) = d_{C^0}(\phi \circ g |_{\mathcal{K}}, f |_\Lambda \circ \phi) < d_{C^0}(g |_{\mathcal{K}}, f |_\Lambda \circ \psi) < \epsilon$) para obtener $\psi' : \mathcal{K} \to U$ con $\psi' \circ g |_{\mathcal{K}} = f |_\Lambda \circ \psi'$. Por la unicidad $\psi^{-1} = \psi'$. Para δ suficientemente pequeño el mapeo ψ' está cercano a la identidad y por la proposición 19 $\mathcal{K}$ es hiperbólico. □

Definición 30. *Un difeomorfismo f de clase C^1 de una variedad diferenciable M es* ***Estructuralmente Estable*** *si $\forall \epsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ tal que $g \in Dif^1(M)$ y $dist_1(g, f) < \delta$, entonces existe un homeomorfismo $h : M \to M$ para el cual $f \circ h = h \circ g$ y $dist_0(h, Id) < \epsilon$.*

Corolario 10. *Los difeomorfismos de Anosov son estructuralmente estables.*

Demostración. Este es el caso de la proposición anterior en el que $\Lambda = M$. □

3.6. Flujos Hiperbólicos y Flujos de Anosov

Los resultados vistos a lo largo del capítulo 3 tienen su respectiva contraparte para el caso de flujos, la mayoría se deducen de manera directa del caso discreto simplemente tomando el t_0- map. Para algunos otros hay que hacer pequeñas consideraciones y hacer pequeñas adaptaciones en las demostraciones del caso discreto.

A continuación presentaremos brevemente algunos de los resultados para el caso continuo con el objetivo de dar una luz de como deducirlos del caso discreto.

Definición 31. *Sea M una variedad Riemanniana de clase C^1, $\varnothing \neq U \subseteq M$ un subconjunto abierto, y $\varphi^t : \mathbb{R} \times U \to \varphi^t(U) \subseteq M$ un flujo local de clase C^1. Denotemos por $E^0(x)$ al subespacio de T_xM generado por el flujo, es decir, $E^c(x) := \mathbb{R}\left(\frac{d}{dt}\varphi^t \mid_{t=0}\right)$. Un subconjunto $\Lambda \subseteq U$ compacto y φ^t-invariante se llamará* ***Hiperbólico****, si $\exists \lambda \in (0, 1)$, $c > 0$ y unas familias de subespacios $\{E^s(x) \leqslant T_xM\}_{x\in\Lambda}$ y $\{E^u(x) \leqslant T_xM\}_{x\in\Lambda}$ tal que $\forall x \in \Lambda$*

1. $T_xM = E^s(x) \oplus E^u(x) \oplus E^c(x)$
2. $\|d\varphi_x^t(v^s)\| \leqslant c\lambda^t \|v^s\| \, \forall v^s \in E^s(x) y t \geqslant 0$
3. $\|d\varphi_x^{-t}(v^u)\| \leqslant c\lambda^t \|v^u\| \, \forall v^u \in E^u(x) y t \geqslant 0$
4. $d\varphi_x^t [E^s(x)] = E^s(\varphi^t(x)) d\varphi_x^t [E^u(x)] = E^u(\varphi^t(x))$.

A $E^s(x)$ se le llama ***Subespacio Estable****, a $E^u(x)$* ***Subespacio Inestable*** *y a $E^c(x)$* ***Subespacio Central****. Las familias $\{E^s(x)\}_{x\in\Lambda}$ y $\{E^u(x)\}_{x\in\Lambda}$ inducen 2 distribuciones llamadas* ***Distribución Estable e Inestable****, respectivamente; y a la familia $\{E^c(x)\}_{x\in\Lambda}$ la llamaremos* ***Distribución Central****.*

Notemos que, de hecho, esta descomposición genera otras 2 distribuciones, $E^{ws}(x) = E^s(x) \oplus E^c(x)$ y $E^{wu}(x) = E^u(x) \oplus E^c(x)$, llamadas **Distribución Estable Débil e Inestable Débil**, respectivamente.

Para el caso en que M sea compacta y $\Lambda = M$ llamaremos a φ^t **Flujo de Anosov**.

Definición 32. *Sea $\varphi^t : \mathbb{R} \times U \to \varphi^t(U) \subseteq M$ un flujo local. Para todo $t_0 \in \mathbb{R}$ llamamos* ***Mapa al Tiempo*** *t_0 ó t_0-**Map** al difeomorfismo local obtenido al fijar $t = t_0$*

$$\varphi^{t_0} : \times U \to \varphi^{t_0}(U) \subseteq M. \tag{3.58}$$

*Si $\Lambda \subseteq U$ es hiperbólico para el flujo φ^t entonces el t_0-**Map** cumple que $\forall x \in \Lambda$*

1. $T_xM = E^s(x) \oplus E^u(x) \oplus E^c(x)$
2. $\|d\varphi_x^{nt_0}(v^s)\| \leqslant c\lambda^{nt_0} \|v^s\| \, \forall v^s \in E^s(x)$ *y* $n \geqslant 0$
3. $\|d\varphi_x^{-nt_0}(v^u)\| \leqslant c\lambda^{nt_0} \|v^u\| \, \forall v^u \in E^u(x)$ *y* $n \geqslant 0$
4. $d\varphi_x^{nt_0}[E^s(x)] = E^s(\varphi^{nt_0}(x))$ *y* $d\varphi_x^{nt_0}[E^u(x)] = E^u(\varphi^{nt_0}(x))$.

*En general, a un conjunto Λ que cumple con las propiedades anteriores donde no necesariamente la distribución central es de dimensión uno, lo llamaremos **Conjunto Parcialmente Hiperbólico**.*

Notemos que, el subespacio central $E^c(x)$ de un flujo hiperbólico es de dimensión uno y depende diferenciablemente de $x \in \Lambda$. En cuanto a los otros 2 subespacios invariantes tenemos la siguiente proposición.

Proposición 21. *Sea Λ un conjunto hiperbólico de φ^t, entonces los subespacios $E^s(x)$ y $E^u(x)$ dependen continuamente de $x \in \Lambda$. Además, $dim(E^s(x))$ y $dim(E^u(x))$ son constantes en cada componente conexa de Λ.*

Demostración. Λ es parcialmente hiperbólico para el t_0-map φ^{t_0}. Entonces, con el mismo argumento que la proposicón 11 se sigue la afirmación. □

Como en el caso discreto denotemos por $s = dim(E^s(x))$ y por $u = dim(E^u(x))$.

Corolario 11. *Sea Λ un conjunto hiperbólico de φ^t, entonces los subespacios $E^{ws}(x)$ y $E^{wu}(x)$ dependen continuamente de $x \in \Lambda$. Además, $dim(E^{ws}(x)) = s + 1$ y $dim(E^{wu}(x)) = u + 1$ en cada componente conexa de Λ.*

Teorema 11 (Conos Invariantes para Flujos)**.** *Sea $\Lambda \subseteq U$ un subconjunto compacto e invarante de $\varphi^t : U \to M$. Supongamos que $\exists \alpha > 0$ y que existen distribuciones continuas $\{\tilde{E}^s(x)\}_{x\in\Lambda}$ y $\{\tilde{E}^u(x)\}_{x\in\Lambda}$ tal que, $T_xM = \tilde{E}^s(x) \oplus \tilde{E}^u(x) \oplus E^0(x)$, $\forall x \in \Lambda$ y que los α-conos $K_\alpha^{ws}(x)$ y $K_\alpha^{wu}(x)$, determinados por los subespacios $\tilde{E}^{ws}(x) \oplus \tilde{E}^u(x)$ y $\tilde{E}^s(x) \oplus \tilde{E}^{wu}(x)$, satisfacen:*

- $d\varphi_x^t[K_\alpha^{wu}(x)] \subseteq K_\alpha^{wu}(\varphi^t(x))$, $d\varphi_{\varphi^t(x)}^{-t}[K_\alpha^{ws}(\varphi^t(x))] \subseteq K_\alpha^{ws}(x)$
- $\dfrac{d}{dt}\|d\varphi_x^{-t}(v)\| < \lambda \|v\|$ *para* $0 \neq v \in K_\alpha^{wu}(x)$ *y* $\dfrac{d}{dt}\|d\varphi_x^{t}(v)\| < \lambda \|v\|$ *para* $0 \neq v \in K_\alpha^{ws}(x)$.

Entonces Λ es hiperbólico para φ^t.

Demostración. Toma $d\varphi^1$ y a las descomposiciones inducidas $\tilde{E}^{ws}(x) \oplus E^u(x)$ y $\tilde{E}^{wu}(x) \oplus E^s(x)$, aplícales el teorema de conos invariantes para difeomorfismos. □

Definición 33. *Sea M una variedad Riemanniana y $\varphi^t : \mathbb{R} \times M \to M$ un flujo diferenciable. Una curva diferenciable $c : \mathbb{R} \to M$, diremos que es una ϵ-**pseudo órbita** para el flujo φ^t, si $\|\dot{c}(t) - \dot{\varphi}(c(t))\| < \epsilon$, $\forall t \in \mathbb{R}$. Si c es periódica, diremos que es una ϵ-**pseudo órbita cerrada**.*

*Una curva diferenciable $c : \mathbb{R} \to M$ es δ-**sombreada** por la órbita de $x \in M$, si $\exists$ una función diferenciable $s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, con $\left|\frac{d}{dt}s - 1\right| < \delta$ tal que $d_M(c(s(t), \varphi^t(x)) < \delta$, $\forall t \in \mathbb{R}$.*

Notemos que, a diferencia del caso discreto (donde la órbita sombreada es única para δ pequeña), aquí la elección de s no es única, pues la órbita puede admitir varias reparametrizaciones en el tiempo. Sin embargo, la órbita sigue siendo única.

Teorema 12 (Sombreamiento de Anosov para Flujos)**.** *Sea φ^t un flujo diferenciable y Λ un conjunto hiperbólico para φ^t. Entonces, existe una vecindad $\Omega(\Lambda) \supseteq \Lambda$ y existen $\epsilon_0, \delta_0 > 0$ tal que $\forall \delta > 0$, $\exists \epsilon > 0$ con las siguientes propiedades:*

$\forall \psi^t : \Omega \to \psi^t(\Omega) \subseteq M$ flujo de clase C^2 con $d_{C^1}(\psi^t, \varphi^t) < \epsilon_0$ y para cualquier flujo continuo $\gamma^t : Y \to Y$ de un espacio topológico Y, junto con un mapa continuo $\rho \in C^0(Y, \Omega)$ tal que $\rho(\gamma^t(y))$ es una curva C^1 $\forall y \in Y$ y cuyo vector tangente $\frac{d}{dt}\rho(\gamma^t) \mid_0 (y)$ en $\rho(y)$ depende continuamente de y. Además, que satisfaga

$$\sup_{y \in Y} \left\{ d_M\left(\left(\frac{d}{dt}(\rho \circ \gamma^t) \mid_0 (y), \frac{d}{dt}(\psi^t \circ \rho) \mid_0 (y) \right) \right\} < \epsilon. \tag{3.59}$$

Entonces, existe un mapa $s : Y \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, con $\left|\frac{d}{dt}s_y - 1\right| < \delta$ y $\beta \in C^0(Y, \Omega)$ tal que,

$$\beta \circ \gamma^{s(t)} = \psi^t \circ \beta \tag{3.60}$$

y $\sup_{y \in Y} \{d_M(\rho, \beta)\} < \delta$.

Más aún, β es único módulo una reparametrización del tiempo, si $\beta' \circ \gamma^{\sigma_y(t)} = \psi^t \circ \beta'$ para algún $\sigma_y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\left|\frac{d}{dt}\sigma_y - 1\right| < \delta$ y $\sup_{y \in Y} \{d_M(\rho, \beta')\} < \delta_0$ entonces, $\beta'(y) = \beta(\gamma^{s_y(t+\tau_y) - \sigma_y(t)})(y)$ para $\tau_y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ suficientemente pequeña.

Demostración. Reduciremos el problema al Teorema de sombreamiento para difeomorfismos vía un método de transversalidad y restrinjamos las consideraciones del teorema a un subconjunto de perturbaciones del mapa $\rho : Y \to \Omega$, en donde la solución β sea única.

Sea $E \subseteq TM$ el subfibrado vectorial de codimensión uno que es ortogonal al campo vectorial generado por el flujo φ^t, $v = \frac{d}{dt}\varphi^t \mid_{t=0}$.

Luego, $\forall x \in M$ tomemos una bola pequeña $D_x \subseteq E_x$, tal que $exp_x : D_x \to M$ esté bien definido y sea $S_x = exp_x(D_x)$. En una vecindad U_x suficientemente pequeña de $x \in M$, hay una proyección canónica $\pi_x : U_x \to S_x$ a lo largo de las órbitas de φ^t. Luego, denotemos por $\mathcal{S}$ al espacio de mapas $\beta : Y \to \Omega$ tal que $\beta(y) \in S_{\rho(y)}$. Para cualquier flujo ψ^t suficientemente cercano a φ^t, definimos el operador F en $\mathcal{S}$ por,

$$(F\beta)(y) := (\pi_{\rho(y)} \circ \psi^1 \circ \beta \circ \gamma^{-1})(y). \tag{3.61}$$

Como en el caso discreto, podemos identificar localmente $\mathcal{S}$ con Γ, el espacio de campos vectoriales $u : Y \to TM$ a lo largo de $\rho(y)$, $u(y) \in E_{\rho(y)}$. El operador F se representa localmente por un operador, F^ρ en Γ. Un punto fijo u de F^ρ produce un punto fijo β de F vía el mapa $exp_{\rho(y)}$. El mapa β envía las órbitas de γ en órbitas de ψ. Las mismas estimaciones que en el caso discreto, nos permiten utlilizar el teorema de punto fijo de Banach para garantizar la existencia de β. Finalmente, como el punto fijo β es un mapa en $\mathcal{S}$, tenemos que $\beta(y) \in D_{\rho(y)}$ y, como D_x depende diferenciablemente de x, tenemos que β es diferenciable a lo largo de las órbitas de γ y la tasa de cambio de tiempo $\frac{d}{dt}s_y$ es cercana a 1. $\square$

Corolario 12 (Lema sombreamiento Flujos)**.** *Sea M una variedad Riemanniana φ^t un flujo diferenciable y Λ un conjunto hiperbólico de φ^t. Entonces existe una vecindad $\Omega(\Lambda)$ de Λ tal que para $\delta > 0$ existe $\epsilon > 0$ tal que toda ϵ-órbita en $\Omega(\Lambda)$ es δ-sombreada por una órbita de φ^t .*

También tenemos un closing lemma para flujos.

Corolario 13 (Anosov Closing Lemma para Flujos)**.** *Sea M una variedad Riemanniana φ^t un flujo diferenciable y Λ un conjunto hiperbólico de φ^t. Entonces existe una vecindad $\Omega(\Lambda)$ de Λ y $\epsilon_0, \delta_0 > 0$ tal que para $\delta > 0$, existe $\epsilon > 0$ tal que toda ϵ-órbita cerrada en $\Omega(\Lambda)$ es δ-sombreada por una órbita periódica de φ^t.*

Proposición 22. *Sea Λ un conjunto hiperbólico de $\varphi^t : U \to \varphi^t(U) \subseteq M$. Entonces $\overline{Per(\varphi^t \mid_\Lambda)} = NW(\varphi^t \mid_\Lambda)$.*

Corolario 14. *Sea $\varphi^t : M \to M$ de Anosov, entonces $\overline{Per(f)} = NW(f)$.*

Proposición 23 (Variedaes Estables e Inestables)**.** *Sea Λ un conjunto hiperbólico para un difeomorfismo $\varphi^t : M \to M$ de clase C^r, $t_0 > 0$. Entonces, para cada $x \in \Lambda$, existe un par de discos encajados de clase C^r , a saber, $W^s_{loc}(x)$ y $W^u_{loc}(x)$. Estos discos son llamados* ***Variedad Estable (Fuerte) Local*** *y* ***Variedad Inestable (Fuerte) Local****, respectivamente. Además, cumplen que:*

1. *$T_xW^s_{loc}(x) = E^s_x$, $T_xW^u_{loc}(x) = E^u_x$;*
2. *$\varphi^t(W^s_{loc}(x)) \subset W^s_{loc}(\varphi^t(x))$, $\quad \varphi^{-t}(W^u_{loc}(x)) \subset W^u_{loc}(\varphi^{-t}(x)) \quad \forall t \geqslant t_0$;*
3. *Para toda $\delta > 0$, existe $C(\delta)$ tal que para $n \in \mathbb{N}$*
   $dist(\varphi^t(x), \varphi^t(y)) < C(\delta)(\lambda + \delta)^t dist(x, y)$ para $y \in W^s_{loc}(x)$, $t > 0$.
   $dist(\varphi^{-t}(x), \varphi^{-t}(y)) < C(\delta)(\lambda + \delta)^{-t} dist(x, y)$ para $y \in W^u_{loc}(x)$, $t > 0$.

4. Existe una familia continua de vecindades U_x de $x \in \Lambda$, tal que:

$$
\begin{aligned}
W^s_{loc}(x) &= \left\{ y \mid \varphi^t(y) \in U_{\varphi^t(x)}, t > 0;\ d_M(\varphi^t(x), \varphi^t(y)) \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0 \right\} \\
W^u_{loc}(x) &= \left\{ y \mid \varphi^{-t}(y) \in U_{\varphi^{-t}(x)}, t > 0;\ d_M(\varphi^{-t}(x), \varphi^{-t}(y)) \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0 \right\}.
\end{aligned} \tag{3.62}
$$

Demostración. Consideremos el t_0-map, φ^{t_0}. Aplicando el teorema de Hadamard-Perron a la descomposición $T_xM = E^{wu}(x) \oplus E^s(x)$ nos garantiza la existencia de $W^s_{loc}(x)$ que satisfacen las propiedades 1) - 4), para $t \in \mathbb{N}t_0$. De nuevo aplicando Hadamard-Perron a la descomposición $T_xM = E^u(x) \oplus E^{ws}(x)$ obtenemos la existencia de $W^u_{loc}(x)$ cumpliendo con 1) - 4) para $-t \in \mathbb{N}t_0$.

Notemos que 4) se cumple para todo $t \in \mathbb{N}t_0$ y como t_0 fue elejido arbitrariamente entonces 4) se cumple para todo $t > 0$. También veamos que 3) se cumple para todo $t > 0$ ajustando la constante $C(\delta)$, ya que $\{\varphi^t\}_{t\in[t_0,t_0+1]}$ es equicontinuo y además podemos pensar al flujo definido en una vecindad precompacta de Λ. $\square$

Definición 34. *Los conjuntos:*

$$
\begin{aligned}
W^s(x) &:= \bigcup_{t>0} \varphi^{-t}(W^s_{loc}(\varphi^t(x))) \\
W^u(x) &:= \bigcup_{t>0} \varphi^{t}(W^u_{loc}(\varphi^{-t}(x))),
\end{aligned} \tag{3.63}
$$

*están definidos independientemente de una elección de particular de W^s_{loc} o W^u_{loc}. Son variedades diferenciables inyectivamentente inmersas en M y son llamadas **Variedad Estable (Fuerte) Global** y **Variedad Inestable (Fuerte) Global** respectivamente. Se pueden caracterizar por*

$$
\begin{aligned}
W^s(x) &= \left\{ y \in M \mid d_M(\varphi^t(x), \varphi^t(y)) \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0 \right\} \\
W^u(x) &= \left\{ y \in M \mid d_M(\varphi^{-t}(x), \varphi^{-t}(y)) \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0 \right\}
\end{aligned} \tag{3.64}
$$

Las siguientes variedades

$$
\begin{aligned}
W^{ws}(x) &:= \bigcup_{t\in\mathbb{R}} \varphi^t(W^s(x)) \\
W^{wu}(x) &:= \bigcup_{t\in\mathbb{R}} \varphi^t(W^u(x)),
\end{aligned} \tag{3.65}
$$

*son llamadas **Variedad Estable Débil Global** y **Variedad Inestable Débil Global**, respectivamente. Se tiene que $T_xW^{ws} = E^s(x) \oplus E^c(x)$ y $T_xW^{wu} = E^u(x) \oplus E^c(x)$.*

Proposición 24. *Sea Λ un conjunto hiperbólico de φ^t. Existe un abierto $U(\Lambda) \supseteq \Lambda$ y $\epsilon > 0$ tal que, si $K \subseteq U(\Lambda)$ es un compacto invariante bajo un difeomorfismo ψ^t con $d_{C^1}(\psi^t, \varphi^t) < \epsilon$, entonces $\mathcal{K}$ es un conjunto hiperbólico de ψ^t.*

Demostración. Extendamos continuamente las distribuciones $E^s_{\varphi^t}$, $E^u_{\varphi^t}$ y $E^c_{\varphi^t}$ a lo largo de $U(\Lambda)$. Sea $\lambda \in (0,1)$ la constante de hiperbolicidad para φ^t en Λ, entonces $\forall v \neq 0$ $\|v\| - \lambda\|v\| > 0$, por lo tanto, tomemos $0 < \epsilon < \|v\| - \lambda\|v\|$. Como $d_{C^1}(\psi^t, \varphi^t) < \epsilon$, para un $\alpha > 0$ suficientemente pequeño, el α-cono, $K^{wu}_\alpha(x)$, definido por la descomposición $E^{ws}_{\varphi^t} \oplus E^u_{\varphi^t}$ cumple que para $x \in \mathcal{K}$ y $0 \neq v \in K^{wu}_\alpha(x)$, entonces

$$\frac{d}{dt}\left\|d\varphi_x^{-t}(v)\right\| < \frac{d}{dt}\left\|d\varphi_x^{t}(v)\right\| + \epsilon < \lambda\|v\| + \epsilon < \|v\|. \tag{3.66}$$

Por continuidad de $\|\cdot\|$, $\exists\lambda' \in (0,1)$ tal que $\lambda\|v\| + \epsilon < \lambda'\|v\|$, $\therefore \dfrac{d}{dt}\|d\varphi_x^{-t}(v)\| < \lambda'\|v\|$. Con un argumento similar tenemos que si $x \in \mathcal{K}$ y $0 \neq v \in K^{ws}_\alpha(x)$, entonces $\dfrac{d}{dt}\|d\varphi_x^{t}(v)\| < \lambda''\|v\|$. Tomemos $\lambda^* = máx(\lambda', \lambda'')$ para tener una única constante que funcione en ambos casos. Por compacidad de $\mathcal{K}$ podemos asumir que además, λ^* es la misma $\forall x \in \mathcal{K}$.

El siguiente cálculo:

$$\left\|d\varphi_x^t(v^s)\right\| \leqslant \lambda^*\|v^s\| \leqslant \lambda^*\alpha\|v^u\| < \alpha\|v^u\| \leqslant \alpha\lambda^*\left\|d\varphi_x^t(v^u)\right\| < \alpha\left\|d\varphi_x^t(v^u)\right\|, \tag{3.67}$$

demuestra que $d\varphi_x^t[K^u_\alpha(x)] \subseteq K^u_\alpha(\varphi^t(x))$, y de manera similar se tiene $d\varphi^{-t}_{\varphi^t(x)}[K^s_\alpha(\varphi^t(x))] \subseteq K^s_\alpha(x)$. Por el teorema de conos invariantes para flujos tenemos que, $\mathcal{K}$ es un conjunto hiperbólico de φ^t. □

Definición 35. *Sea $Flow^1(M)$ el conjunto de flujos C^1 de una variedad Riemanniana M con la topología C^1.*

Corolario 15. *El conjunto de flujos de Anosov de una variedad Riemanniana M compacta, es un abierto en $Flow^1(M)$.*

Demostración. De la proposición 24, tomando $\Lambda = M$ se sigue que si φ^t es un flujo de Anosov, entonces $\forall\psi^t \in Flow^1(M)$ tal que $g \in B_\epsilon(f)$ para ϵ suficientemente pequeño, entonces ψ^t también es Anosov. □

Proposición 25 (Estabilidad de Conjuntos Hiperbólicos)**.** *Sea $\Lambda \subseteq U$ conjunto hiperbólico de $\varphi^t : U \to M$. Para toda $\Omega \subseteq U$ tal que $\Omega \supseteq \Lambda$ y $\forall\epsilon > 0$, $\exists\delta > 0$ tal que $\forall\psi^t : \Omega \to M$ con $d_{C^1}(\psi^t, \varphi^t) < \delta$ $\exists\mathcal{K} \subseteq \Omega$ conjunto hiperbólico de ψ^t y un homeomorfismo $h : \mathcal{K} \to \Lambda$ tal que $h \circ \psi^t|_{\mathcal{K}} = \varphi^t|_\Lambda \circ h$ y $d_{C^0}(h, Id) < \epsilon$.*

Demostración. Sea $Y = \Lambda$, $\gamma^t = \varphi^t|_\Lambda$ $\forall t$, $\rho : \Lambda \hookrightarrow U$ la inclusión y $\epsilon_0 = \epsilon$. Así tenemos que, $\rho(\gamma^t(x)) = \varphi^t|_\Lambda$ es C^1 y $d_{C^0}(\frac{d}{dt}(\rho\circ\gamma^t)|_0, \frac{d}{dt}(\psi^t\circ\rho)|_0) = d_{C^0}(\frac{d}{dt}(\varphi^t|_\Lambda)_0, \frac{d}{dt}(\psi^t|_\Lambda)_0) < \epsilon$. Por el teorema de sombreamiento de Anosov para flujos tenemos que, $\exists$ un mapa $s : \Lambda \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, con $\left|\dfrac{d}{dt}s_x - 1\right| < \delta$ y un mapa continuo $\beta : \Lambda \to \Omega$ tal que $\beta \circ \varphi^{s(t)}|_\Lambda = \psi^t \circ \beta$, con $d_{C^0}(\rho, \beta) < \epsilon$.

Ahora definamos $\mathcal{K} = \beta(\Lambda)$. De nuevo aplicando el teorema de sombreamiento de Anosov para flujos a $Y = \mathcal{K}$, $\gamma^t = \psi^t \mid_{\mathcal{K}}$, $\tilde{\psi}^t = \varphi^t \mid_\Lambda$ y la inclusión $\rho : \mathcal{K} \hookrightarrow M$ (ya que $d_{C^0}(\frac{d}{dt}(\rho \circ \gamma^t) \mid_0$, $\frac{d}{dt}(\tilde{\psi}^t \circ \rho) \mid_0) = d_{C^0}(\frac{d}{dt}(\psi^t \mid_K)_0 , \frac{d}{dt}(\varphi^t \mid_\Lambda \circ\beta)_0) < \epsilon$) para obtener un mapa $\sigma : \Lambda \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, con $\left| \frac{d}{dt}\sigma_x - 1 \right| < \delta$ y un mapa $h : \mathcal{K} \to U$ con $h \circ \psi^{\sigma(t)} \mid_{\mathcal{K}} = \varphi^t \mid_\Lambda \circ h$. Para δ suficientemente pequeño el mapeo h está cercano a la identidad y por la proposición 24 $\mathcal{K}$ es hiperbólico. $\square$

Definición 36. *Un flujo φ^t de clase C^1 es **Estructuralmente Estable** si $\forall \epsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ tal que para todo flujo ψ^t con $d_{C^1}(\psi^t, \varphi^t) < \delta$, entoces existe un homeomorfismo $h : M \to M$, y σ, una reparametrización suave del tiempo, para el cual $\varphi^t \circ h = h \circ \psi^{\sigma(t)}$ y $dist_0(h, Id) < \epsilon$.*

Corolario 16 (Estabilidad Estructural de Flujos de Anosov)**.** *Los flujos de Anosov son estructuralmente estables.*

Demostración. Toma $\Lambda = M$ y aplica la proposición anterior. $\square$

4

Ergodicidad de los Difeomorfismos de Anosov

En 1939 E. Hopf, demostró en [Ho] y [Ho2] (véase también [Ho3]), que el flujo geodésico en una variedad Riemanniana cerrada M con curvatura constante negativa y en una superficie cerrada S con curvatura Gaussiana negativa, no necesariamente constante, es ergódico con respecto a la medida Riemanniana, utilizando lo que hoy en día se conoce como el **Argumento de Hopf.** Sin éxito durante años, algunos matemáticos (incluido Hopf), intentaron demostrar la ergodicidad del flujo geodésico para los casos restantes. Es decir, cuando $dim(M) = d \geqslant 3$ y la curvatura seccional de M es negativa y variable. La dificultad con la que se enfrentaron fue que, en general, la estructura de producto local definidas por las foliaciones estable e inestable del flujo geodésico tiene un sistema coordenado que ni siquiera es C^1, y por esto, no se puede aplicar el teorema de Fubini para garantizar una desintegración de la medida Riemanniana a lo largo de las hojas de dichas foliaciones y así obtener la ergodicidad del flujo geodésico.

No fue hasta 1967 que D. Anosov en [An] logra demostrar el caso general. Para esto, Anosov demuestra que en general, las distribuciones tangentes a las foliaciones estable e inestable no son distribuciones C^1, pero sí tienen cierto grado de regularidad, dándose cuenta que dependen de manera Hölder de M. Con esto, tiene la virtud de reemplazar la diferenciabilidad por la **continuidad absoluta** de las foliaciones estable e inestable en el argumento de Hopf, para así probar la ergodicidad del flujo geodésico.

Con el argumento de Hopf y la continuidad absoluta, Anosov, no sólo demostró la ergodicidad del flujo geodésico en variedades Riemannianas cerradas con curvatura seccional negativa, sino también logra demostrar la ergodicidad para cualquier sistema dinámico de clase C^2, Uniformemente Hiperbólico, también conocidos como sistemas Anosov. Esto fue realmente importante, pues de la estabilidad estructural de los sistemas Anosov, se obtuvo el primer ejemplo de sistemas dinámicos ergódicamente estables.

Desde entonces, el argumento de Hopf se ha utilizado en una gran cantidad de ocasiones para demostrar la ergodicidad de muchos sistemas dinámicos, y forma una herramienta estándar en esta parte de la teoría.

4.1. Foliaciones Absolutamente Continuas

En esta sección estudiaremos el concepto de Foliaciones Absolutamente Continuas y algunas nociones derivadas de él, este concepto es una herramienta escencial de la dinámica hiperbólica. Lo que veremos es de gran interés para el trabajo y en general para el estudio de esta parte de la teoría; pues recopila y unifica conceptos, definiciones, proposiciones y teoremas que surgen en los diferentes libros, artículos recientes y no tan recientes, en particular en : [Br,St], [PVW], [Pu,Sh], [Bu,Wi], [AVW] y [An].

Para este fin, la mayoría de las proposiciones están demostradas a detalle, algunas siguiendo las pruebas dadas por la literatura y otras demostradas de manera diferente. Se incluyen algunos resultados que aparecen dentro de la literatura antes mencionada donde muestran equivalencias de estos conceptos, así como se crean y demuestran algunos resultados a manera de ver equivalencias entre nociones que, en principio, son diferentes.

4.1.1. Foliaciones Absolutamente Continuas

Sea M^d una variedad Riemanniana. Denotemos por m el volumen Riemanniano y m_N el volumen Riemanniano inducido a una subvariedad N de clase C^1. Denotemos por $\mathcal{A}_N$ a la σ-álgebra de Borel sobre N.

Sea $\mathcal{F}$ una foliación continua de M. Entonces toda hoja $\mathcal{F}(x)$ y toda transversal local Σ pueden ser equipadas con la medida Riemanniana inducida $m_{\mathcal{F}(x)}$ y m_Σ, respectivamente. Así tenemos que $(\mathcal{F}(x), \mathcal{A}_{\mathcal{F}(x)}, m_{\mathcal{F}(x)})$ y $(\Sigma, \mathcal{A}_\Sigma, m_\Sigma)$ son espacios de medida.

Definición 37. *Sean μ, ν dos medidas sobre el mismo espacio de medida $(X, \mathcal{Q})$. μ es* ***Absolutamente Continua*** *con respecto a ν, y lo denotaremos por $\mu \ll \nu$, si $\forall A$ medible, tal que $\nu(A) = 0$, implica que $\mu(A) = 0$.*

En forma breve:

$$\begin{gathered} \mu \ll \nu \\ \Longleftrightarrow \\ (\nu(A) = 0) \Rightarrow (\mu(A) = 0) \end{gathered} \tag{4.1}$$

En particular, supongamos que hay medidas μ, ν que cumplen, $\mu(A) = \int_A f d\nu \ \forall A \in \mathcal{Q}$ y f

medible y positiva. Entonces si $\nu(A) = 0$ tenemos que $\mu(A) = 0$ por tanto $\mu \ll \nu$. El siguiente teorema es el converso a esta situación.

Teorema 13 (Radon-Nikodym)**.** *Sean μ, ν medidas positivas tal que $\mu \ll \nu$. Entonces $\exists\ f \geqslant 0$ medible, tal que $\mu(A) = \int_A f d\nu\ \forall A \in \mathcal{Q}$. Además, es única en el siguiente sentido, si h es otra función con esta propiedad, entonces $h = f\ \ \mu - c.t.p.$.*

A f se le conoce como la derivada de **Radon-Nikodym** y se denota por $\dfrac{d\mu}{d\nu}$.

Este es un resultado clásico en probabilidad y teoría de la medida, se puede encontrar en [Dur] ó [Tay].

Definición 38. *([Br,St];p144) Sea $\mathcal{F}$ una foliación de M^d de dimensión k. (U, φ) una carta coordenada para la foliación en M y $\Sigma = \varphi^{-1}(\{y\} \times B^{d-k})$ una transversal local de clase C^1. La foliación $\mathcal{F}$ es **absolutamente continua**, si $\forall\ \Sigma$ y $\forall\ U$ existe una familia medible de funciones medibles positivas $\delta_x : \mathcal{F}_U(x) \to \mathbb{R}$, llamadas **densidades condicionadas** (ó desintegraciones [AVW];p7) tales que para cualquier subconjunto medible $A \subseteq U$.*

$$m(A) = \int_\Sigma \int_{\mathcal{F}(x)} \mathbf{1}_A(x,y)\delta_x(y) dm_{\mathcal{F}(x)}(y) dm_\Sigma(x). \tag{4.2}$$

Como U tiene una estructura local de producto i.e. $U = U_\Sigma \times U_{\mathcal{F}(x)}$, donde $U_{\mathcal{F}(x)} = (U \cap \mathcal{F}(x))$. Luego para todo $A \subseteq U$, tal que A este en el semianillo de los rectángulos $\mathcal{S}_{\Sigma \times \mathcal{F}(x)}$. Entonces, si denotamos por $f(x,y) = \mathbf{1}_A(x,y)\delta_x(y) \in L^1(\Sigma \times \mathcal{F}(x), \mathcal{A}_{\Sigma \times \mathcal{F}(x)})$ por Fubini ([Tay]) tenemos que:

1.
$$f_x(y) = \mathbf{1}_{A_{\mathcal{F}(x)}}(y)\delta_x(y) \in L^1(\mathcal{F}(x), \mathcal{A}_{\mathcal{F}(x)}) \tag{4.3}$$
$m_\Sigma - c.t.p.\ x \in \Sigma$.

2.
$$g(x) = \int\limits_{\mathcal{F}(x)} f_x(y) dm_{\mathcal{F}(x)}(y) = \mathbf{1}_{A_\Sigma}(x) \int\limits_{\mathcal{F}(x)} \delta_x(y) dm_{\mathcal{F}(x)}(y) \in L^1(\Sigma, \mathcal{A}_\Sigma) \tag{4.4}$$
$m_{\mathcal{F}(x)} - c.t.p\ y \in \mathcal{F}(x)$.

3.
$$\int_\Sigma \int_{\mathcal{F}(x)} f(x,y) dm = \int_\Sigma g(x) dm_\Sigma(x) \tag{4.5}$$

Así tenemos,

$$\begin{aligned}\int_{\Sigma}\left(\int_{\mathcal{F}(x)}\mathbf{1}_A(x,y)\delta_x(y)dm_{\mathcal{F}(x)}(y)\right)dm_{\Sigma}(x) &= \int_{A_\Sigma}\left(\int_{A_{\mathcal{F}(x)}}\delta_x(y)dm_{\mathcal{F}(x)}(y)\right)dm_{\Sigma}(x)\\ &= \int_A \delta_x(y)dm_{\mathcal{F}(x)}(y)dm_{\Sigma}(x)\end{aligned} \tag{4.6}$$

Como $\mathcal{S}_{\Sigma\times\mathcal{F}(x)}$ genera a $\mathcal{A}_{\Sigma\times\mathcal{F}(x)}$, implica que $m \ll m_\Sigma m_{\mathcal{F}(x)}$ localmente. En otras palabras, m es absolutamente continua con respecto a la medida producto $m_{\mathcal{F}(x)}m_\Sigma$ en U. El teorema de Radon-Nikodym implica que $\delta_x(y) = \dfrac{dm}{d(m_\Sigma m_{\mathcal{F}(x)})}$, por lo que $\delta_x(y)$ es positiva $m - c.t.p.$

De hecho, también se tiene que $m_{\mathcal{F}(x)}m_\Sigma \ll m$.

Lema 5. *Sea $\mathcal{F}$ absolutamente continua y sea $Z \subseteq U$ tal que $m(Z) = 0$. Entonces $m_{\mathcal{F}(x)}(Z \cap \mathcal{F}(x)) = 0$ $m_\Sigma - c.t.p.$ $x \in \Sigma$.*

Demostración. Sea $Z_x = \{y \in \mathcal{F}(x) : (x,y) \in Z\}$, entonces $(\mathbf{1}_Z)_x(y) = (\mathbf{1}_{Z_x})(y)$. Además $Z \cap \mathcal{F}(x) = Z_x$. Luego la continuidad absoluta de $\mathcal{F}$ implica:

$$0 = m(Z) = \int_\Sigma\int_{\mathcal{F}(x)}\mathbf{1}_Z(x,y)\delta_x(y)dm_{\mathcal{F}(x)}(y)dm_\Sigma(x)$$

$$= \int\limits_\Sigma\left(\int\limits_{\mathcal{F}(x)}(\mathbf{1}_{Z_x})(y)\delta_x(y)dm_{\mathcal{F}(x)}(y)\right)dm_\Sigma(x) = \int\limits_\Sigma\left(\int\limits_{\mathcal{Z}\cap\mathcal{F}(x)}\delta_x(y)dm_{\mathcal{F}(x)}(y)\right)dm_\Sigma(x) \tag{4.7}$$

$\iff \int\limits_{\mathcal{Z}\cap\mathcal{F}(x)}\delta_x(y)dm_{\mathcal{F}(x)}(y) = 0$, $m_\Sigma - c.t.p.$ $x \in \Sigma$. Como $\delta_x(y)$ es positiva $m - c.t.p.$ concluimos que $m_{\mathcal{F}(x)}(Z \cap \mathcal{F}(x)) = 0$ $m_\Sigma - c.t.p.$ $x \in \Sigma$. □

Corolario 17. *Si $\mathcal{F}$ es absolutamente continua. Entonces $m_{\mathcal{F}(x)}m_\Sigma \ll m$ localmente.*

Demostración. Sea $Z \subseteq U$ un conjunto tal que $m(Z) = 0$. Por el lema anterior, tenemos que $m_{\mathcal{F}(x)}m_\Sigma(Z) = 0$. □

Definición 39. *([AVW];p10),([PVW];p1) Sea $\mathcal{F}$ una foliación de M^d de dimensión k. (U,φ) una carta coordenada para la foliación en M, y $\Sigma_i = \varphi^{-1}(\{y_i\} \times B^{d-k})$, para $y_i \in B^k$ con $i = 1,2$; dos transversales locales de clase C^1. Consideremos $h_{\Sigma_1,\Sigma_2} : \Sigma_1 \to \Sigma_2$ la holonomía entre Σ_1 y Σ_2.*

Diremos que $\mathcal{F}$ tiene ***holonomía aboslutamente continua*** *ó que $\mathcal{F}$ es* ***absolutamente continua transversalmente*** *([Br,St];p145), si para toda carta coordenada para la foliación (U,φ) y para toda holonomía h_{Σ_1,Σ_2} entre cualesquiera 2 transversales, el push-forward $(h_{\Sigma_1,\Sigma_2})_* m_{\Sigma_1}$ es absolutamente continuo con respecto a m_{Σ_2}.*

Observación 3. *Intercambiando los roles de Σ_1 y Σ_2, tenemos que de hecho, $(h_{\Sigma_1,\Sigma_2})_* m_{\Sigma_1}$ es equivalente a m_{Σ_2}: Denotemos por $h := h_{\Sigma_1,\Sigma_2}$ y tomemos A tal que $0 = (h)_* m_{\Sigma_1}(A) = m_{\Sigma_1}(h^{-1}(A))$. Como $(h_{\Sigma_1,\Sigma_2})^{-1} = h_{\Sigma_2,\Sigma_1}$ tenemos que $(h^{-1})_* m_{\Sigma_2} \ll m_{\Sigma_1}$, luego si $m_{\Sigma_1}(B) = 0 \Rightarrow m_{\Sigma_2}(h(B)) = 0$. En particular para $B = h^{-1}(A)$ tenemos que $m_{\Sigma_2}(h(B)) = m_{\Sigma_2}(A) = 0$. Así $m_{\Sigma_2} \ll (h_{\Sigma_1,\Sigma_2})_* m_{\Sigma_1}$.*

Proposición 26. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *$\mathcal{F}$ es absolutamente continua transversalmente.*

2. *$m_{\Sigma_1}((h_{\Sigma_1,\Sigma_2})^{-1}(A)) = \int_{\Sigma_2} 1_A J_h dm_{\Sigma_2}$ $\forall A \subseteq \Sigma_2$ medible y con $J_h : \Sigma_2 \to \mathbb{R}$ medible y positiva. Para cualesquiera 2 transversales.*

3. *$m_{\Sigma_2}(h_{\Sigma_1,\Sigma_2}(A)) = \int_{\Sigma_1} 1_A J_{h^{-1}} dm_{\Sigma_1}$ $\forall A \subseteq \Sigma_1$ medible y con $J_{h^{-1}} : \Sigma_1 \to \mathbb{R}$ medible y positiva. Para cualesquiera 2 transversales.*

A J_h y a $J_{h^{-1}}$ se les conoce como Jacobianos, pues generalizan el caso diferenciable.

Demostración. 1)$\Rightarrow$ 2) Sean Σ_1, Σ_2 transversales como $\mathcal{F}$ tiene holonomía absolutamente continua, el push-forward de m_{Σ_1}, $(h_{\Sigma_1,\Sigma_2})_* m_{\Sigma_1}$ es equivalente a m_{Σ_2}. En particular, tenemos que $(h_{\Sigma_1,\Sigma_2})_* m_{\Sigma_1} \ll m_{\Sigma_2}$, por el teorema de Radon-Nikodym 13 tenemos que existe una función J_h, positiva y medible tal que:

$$(h_{\Sigma_1,\Sigma_2})_* m_{\Sigma_1}(A) = \int_A J_h dm_{\Sigma_2} \tag{4.8}$$

para todo A medible. Entonces tenemos que:

$$m_{\Sigma_1}((h_{\Sigma_1,\Sigma_2})^{-1}(A)) = (h_{\Sigma_1,\Sigma_2})_* m_{\Sigma_2}(A) = \int_A J_h dm_{\Sigma_2} = \int_{\Sigma_2} 1_A J_h dm_{\Sigma_2} \tag{4.9}$$

2)$\Rightarrow$ 1) Si tenemos que $m_{\Sigma_1}((h_{\Sigma_1,\Sigma_2})^{-1}(A)) = \int_{\Sigma_2} 1_A J_h dm_{\Sigma_2} = \int_A J_h dm_{\Sigma_2}$ $\forall A \subseteq \Sigma_2$ medible, por el comentario al final de la definición 37, se tiene que $(h_{\Sigma_1,\Sigma_2})_* m_{\Sigma_1} \ll m_{\Sigma_2}$.

1)$\Longleftrightarrow$3) Como $(h_{\Sigma_1,\Sigma_2})^{-1} = h_{\Sigma_2,\Sigma_1}$ así estamos en el caso 1)$\Longleftrightarrow$2). Más aún la observación 3 junto con Radon-Nikodym 13 implican que $J_{h^{-1}} = J_h^{-1}$. $\square$

Proposición 27. *Sea $\mathcal{F}$ una foliación absolutamente continua de una variedad Riemanniana M, y sea $f : M \to \mathbb{R}$ una función medible. Supongamos que hay un conjunto $Z \subseteq M$ de medida cero tal que f es constante en $\mathcal{F}(x) \backslash Z$ para toda hoja $\mathcal{F}(x)$. Entonces f es esencialmente constante en casi toda hoja, es decir, para cualquier transversal Σ, la función f es $m_{\mathcal{F}(x)}$-esencialmente constante para casi todo $x \in \Sigma$ con respecto a la medida m_Σ.*

Demostración. La continuidad absoluta implica que $m_{\mathcal{F}(x)}(Z \cap \mathcal{F}(x)) = 0$ para casi todo $x \in \Sigma$ con respecto a la medida m_Σ. $\square$

Lema 6 (Teorema de Cambio de Variable). *Sean* $(X, \mathcal{A}_X, \mu)$ *y* $(Y, \mathcal{A}_Y, \nu)$ *espacios de medida y* $h : X \to Y$ *un mapa bimedible tal que* $h_*^{-1}\nu \ll \mu$. *Entonces* $\forall \varphi \in L^1(Y, \nu)$, $\int_Y \varphi d\nu = \int_X (\varphi \circ h) J_{h^{-1}} d\mu$.

Donde $J_{h^{-1}}$ *es la derivada de Radon-Nikodyim* $\dfrac{d(h_*^{-1}\nu)}{d\mu}$.

Demostración. Por Radon-Nikodym 13 para toda $f \in L^1(X, h_*^{-1}\nu) \implies f J_{h^{-1}} \in L^1(X, \mu)$ y

$$\int_X f d(h_*^{-1}\nu) = \int_X f J_{h^{-1}} d\mu. \tag{4.10}$$

Por otro lado siempre se tiene que $\varphi \in L^1(Y, h_*\tilde{\mu}) \Leftrightarrow \varphi \circ h \in L^1(Y, \tilde{\mu})$ y $\int_Y \varphi d(h_*\tilde{\mu}) = \int_X (\varphi \circ h) d\tilde{\mu}$ para cualquier $\tilde{\mu}$. Luego tomando $\tilde{\mu} = h_*^{-1}\nu$ y $h : (X, h_*^{-1}\nu) \to (Y, \nu)$ tenemos:

$$\int_Y \varphi d\nu = \int_Y \varphi d(h_*(h_*^{-1}\nu)) = \int_X (\varphi \circ h) d(h_*^{-1}\nu) = \int_X (\varphi \circ h) J_{h^{-1}} d\mu \tag{4.11}$$

□

Proposición 28. *Si* $\mathcal{F}$ *es absolutamente continua transversalmente entonces es absolutamente continua.*

Demostración. Sea Σ y U como en la definición 38, $x \in \Sigma$ y sea $\mathcal{Z}$ una foliación de clase C^1 transversal a $\mathcal{F}$ tal que, $\Sigma \subseteq \mathcal{Z}(x)$, $\mathcal{Z}_U(x) = \Sigma$, y $U = \bigcup_{y \in \mathcal{F}_U(x)} \mathcal{Z}_U(y)$. Claramente, $\mathcal{Z}$ es absolutamente continua y transversalmente absolutamente continua. Sea $\overline{\delta}_y(\cdot)$ las densidades condicionales para $\mathcal{Z}$. Como $\mathcal{Z}$ es una foliación C^1, $\overline{\delta}$ es continua, y por lo tanto, medible. Tomemos un subconjunto $A \subseteq U$ medible, por el teorema de Fubini se tiene,

$$m(A) = \int_{\mathcal{F}_U(x)} \int_{\mathcal{Z}_U(y)} \mathbf{1}_A(y, z) \overline{\delta}_y(z) dm_{\mathcal{Z}(y)}(z) dm_{\mathcal{F}(x)}(y). \tag{4.12}$$

Denotemos por $h_y := h_{\Sigma, \mathcal{Z}_U(y)}$ a el mapa de holonomía a lo largo de las hojas de $\mathcal{F}$ desde $\mathcal{Z}_U(x) = \Sigma$ a $\mathcal{Z}_U(y)$, y sea $J_y(\cdot)$ el Jacobiano de h_y. Entonces por el teorema de cambio de variable 6 tenemos que:

$$\int_{\mathcal{Z}_U(y)} \mathbf{1}_A(y, z) \overline{\delta}_y(z) dm_{\mathcal{Z}(y)}(z) = \int_\Sigma \mathbf{1}_A(y, h_y(s)) \left(J_y(s)\right) \cdot \overline{\delta}_y(h_y(s)) dm_\Sigma(s) \tag{4.13}$$

De nuevo Fubini nos permite cambiar el orden de las integrales de la primera ecuación, que es una integral con respecto al producto de medidas, tenemos que:

$$m(A) = \int_\Sigma \int_{\mathcal{F}_U(x)} \mathbf{1}_A(y, h_y(s)) \left(J_y^{-1}(s)\right) \cdot \overline{\delta}_y(h_y(s)) dm_{\mathcal{F}(x)}(y) dm_\Sigma(s) \tag{4.14}$$

De manera similar, sea $\overline{h}_s := h_{\mathcal{F}_U(x), F_U(s)}$ la holonomía a lo largo de las hojas de $\mathcal{Z}$ desde $\mathcal{F}_U(x)$ a $\mathcal{F}_U(s)$, $s \in \Sigma$ y $\overline{J}_s$ el Jacobiano de $\overline{h}_s$. Transformemos la integral sobre $\mathcal{F}_U(x)$ en una integral sobre $\mathcal{F}_U(s)$ con el siguiente cambio de variable:

$r = h_y(s)$, $y = \overline{h}_s^{-1}(r)$:

$$\begin{aligned}&\int_{\mathcal{F}_U(x)} \mathbf{1}_A(y, h_y(s)) \left(J_y^{-1}(s)\right) \overline{\delta}_y(h_y(s)) dm_{\mathcal{F}(x)}(y)\\ =&\int_{\mathcal{F}_U(s)} \mathbf{1}_A(\overline{h}_s(r), h_y(s)) J_y^{-1}(s) \overline{\delta}_{\overline{h}_s(r)}(h_y(s)) \overline{J_s}(r) dm_{\mathcal{F}(s)}(r). \quad (4.15)\end{aligned}$$

Esta última igualdad junto con la ecuación (4.14), da la continuidad absoluta de $\mathcal{F}$. □

En general tenemos que si $\mathcal{F}_U$ es absolutamente continua NO implica que $\mathcal{F}_U$ es absolutamente continua transversalmente [Br,St]. En la siguiente subsección veremos que en caso de que tenga Jacobianos acotados estas 2 nociones son equivalentes (proposición 31).

4.1.2. Continuidad Absoluta con Jacobianos Acotados

Definición 40. *([Bu,Wi];p460) Una foliación local $\mathcal{F}_U$ es **Absolutamente Continua con Jacobiano Acotado** si $\forall\ \alpha \in (0, \frac{\pi}{2}]$, existe $c \geqslant 1$ tal que para cualquier transversal suave Σ, que forme un ángulo entre las $\mathcal{F}$-hojas de al menos α, y $\forall A \subseteq U$ m-medible se cumpla que:*

$$c^{-1} m(A) \leqslant \int_{\Sigma} m_{\mathcal{F}}(A \cap \mathcal{F}_U(x)) dm_{\Sigma}(x) \leqslant cm(A). \quad (4.16)$$

*Una foliación local $\mathcal{F}_U$ es **Absolutamente Continua Transversalmente con Jacobianos Acotados**, si para todo $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2}]$, existe $c \geqslant 1$ tal que para cualesquiera 2 transversales suaves Σ_1 y Σ_2 que formen un ángulo entre las $\mathcal{F}$-hojas de al menos α, y $\forall A \subseteq \Sigma_1$ m_{Σ_1}-medible se cumpla que:*

$$c^{-1} m_{\Sigma_1}(A) \leqslant m_{\Sigma_2}(h_{\Sigma_1, \Sigma_2}(A)) \leqslant cm_{\Sigma_1}(A). \quad (4.17)$$

Proposición 29.

$$c^{-1} m(A) \leqslant \int_{\Sigma} m_{\mathcal{F}_U(x)}(A \cap \mathcal{F}_U(x)) dm_{\Sigma}(x) \leqslant cm(A) \quad (4.18)$$

si y sólo si $m(A) = \int_{\Sigma} \int_{\mathcal{F}_U(x)} \mathbf{1}_A(x, y) \delta_x(y) dm_{\mathcal{F}(x)}(y) dm_{\Sigma}(x)$ con $\delta_x(y)$ acotado.

Demostración. Primero recordemos que si μ y ν son dos medidas finitas equivalentes y $\frac{d\mu}{d\nu}, \frac{d\nu}{d\mu}$ son las respectivas derivadas de Radon-Nikodym entonces tenemos que $\frac{d\nu}{d\mu} = \left(\frac{d\mu}{d\nu}\right)^{-1}$.

$\lfloor \Rightarrow \rfloor$ Observemos que

$$\begin{aligned}\int_{\Sigma} m_{\mathcal{F}_U(x)}(A \cap \mathcal{F}_U(x)) dm_{\Sigma}(x) &= \int_{\Sigma} \int_{A \cap \mathcal{F}_U(x)} dm_{\mathcal{F}_U(x)}(y) dm_{\Sigma}(x) \quad (4.19)\\ &= \int_{\Sigma} \int_{\mathcal{F}_U(x)} 1_A(x, y) dm_{\mathcal{F}_U(x)}(y) dm_{\Sigma}(x)\\ &= m_{\mathcal{F}_U(x)} m_{\Sigma}(A).\end{aligned}$$

Entonces (4.18) implica que $m \ll m_{\mathcal{F}_U(x)} m_\Sigma$ y $m_{\mathcal{F}_U(x)} m_\Sigma \ll m$. Por el teorema de Radon-Nikodym $\exists\ \delta(x, y) = \delta_x(y)$ función medible positiva definida en U tal que para todo $A \subseteq U$ medible $m(A) = \int_\Sigma \int_{\mathcal{F}_U(x)} \mathbf{1}_A(x, y)\delta_x(y) dm_{\mathcal{F}_U(x)}(y) dm_\Sigma(x)$.

Ahora, sea $A_x = \{y \in \mathcal{F}_U(x) : (x, y) \in A\}$, entonces $(\mathbf{1}_A)_x(y) = (\mathbf{1}_{A_x})(y)$. Además $A \cap \mathcal{F}_U(x) = A_x$. Así para todo $A \subseteq U$ medible,

$$\begin{aligned} m(A) &= \int_\Sigma \int_{\mathcal{F}_U(x)} \mathbf{1}_A(x, y)\delta_x(y) dm_{\mathcal{F}_U(x)}(y) dm_\Sigma(x) \\ &\leqslant c \int_\Sigma m_{\mathcal{F}_U}(A \cap \mathcal{F}_U(x)) dm_\Sigma(x) \\ &= c \left(m_{\mathcal{F}_U(x)} m_\Sigma(A)\right) \end{aligned} \tag{4.20}$$

Luego $\dfrac{1}{m_{\mathcal{F}_U(x)} m_\Sigma(A)} \int_\Sigma \int_{\mathcal{F}_U(x)} \mathbf{1}_A(x, y)\delta_x(y) dm_{\mathcal{F}_U(x)}(y) dm_\Sigma(x) \leqslant c$, $\forall A \subseteq U$ medible, $\Rightarrow \delta_x(y) \leqslant c$.

Por otro lado

$$m_{\mathcal{F}_U(x)} m_\Sigma(A) = \int_A (\delta_x(y))^{-1} dm \leqslant cm(A) \tag{4.21}$$

Luego $\dfrac{1}{m(A)} \int_A (\delta_x(y))^{-1} dm \leqslant c$, $\forall A \subseteq U$ medible $\Rightarrow (\delta_x(y))^{-1} \leqslant c$, por lo tanto $c^{-1} \leqslant \delta_x(y)$.

Así concluimos que $c^{-1} \leqslant \delta_x(y) \leqslant c$.

$\lfloor\Leftarrow\rfloor$ Si $m(A) = \int_\Sigma \int_{\mathcal{F}_U(x)} \mathbf{1}_A(x, y)\delta_x(y) dm_{\mathcal{F}_U(x)}(y) dm_\Sigma(x)$ entonces $\mathcal{F}_U$ es absolutamente continua en el sentido de la definición 38 luego por el corolario 17 tenemos que m y $m_{\mathcal{F}_U(x)} m_\Sigma$ son equivalentes. Entonces si $c_1 \leqslant \delta_x(y) \leqslant c_2$. tenemos que $c_2^{-1} \leqslant (\delta_x(y))^{-1} \leqslant c_1^{-1}$. Así tenemos que:

a.

$$\begin{aligned} m(A) &= \int_\Sigma \int_{\mathcal{F}_U(x)} \mathbf{1}_A(x, y)\delta_x(y) dm_{\mathcal{F}_U(x)}(y) dm_\Sigma(x) \\ &\leqslant c_2 \int_\Sigma \int_{\mathcal{F}_U(x)} \mathbf{1}_A(x, y) dm_{\mathcal{F}_U(x)}(y) dm_\Sigma(x) \\ &= c_2 \int_\Sigma m_{\mathcal{F}_U(x)}((A \cap \mathcal{F}_U(x)) dm_\Sigma(x). \end{aligned}$$

$\Rightarrow c_2^{-1} m(A) \leqslant \int_\Sigma m_{\mathcal{F}_U(x)}((A \cap \mathcal{F}_U(x)) dm_\Sigma(x)$.

b.

$$\begin{aligned}\int_{\Sigma} m_{\mathcal{F}_U(x)}((A\cap\mathcal{F}_U(x))dm_{\Sigma}(x) &= m_{\mathcal{F}_U(x)}m_{\Sigma}(A)\\ &= \int_A (\delta_x(y))^{-1}\,dm\\ &\leqslant c_1^{-1}\int_A dm\\ &= c_1^{-1}m(A).\end{aligned}$$

Tomando $c = \textit{máx}\left\{c_1^{-1}, c_2\right\}$, entonces a) y b) implican que:

$$\begin{aligned}c^{-1}m(A) &\leqslant \int_{\Sigma} m_{\mathcal{F}}(A\cap\mathcal{F}_U(x))dm_{\Sigma}(x)\\ &\leqslant cm(A).\end{aligned} \tag{4.22}$$

Este resultado justifica el nombre de la definición 40 pues muestra que $\mathcal{F}_U$ es absolutamente continua con Jacobianos acotados si y solo si $\mathcal{F}_U$ es absolutamente continua (17) con densidades condicionales (derivadas de Radon-Nikodym) acotadas. □

Proposición 30. *Una foliación local $\mathcal{F}_U$ es absolutamente continua transversalmente con Jacobianos acotados $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{F}_U$ tiene holonomía absolutamente continua y sus Jacobianos J_h, $J_{h^{-1}}$ son acotados en Σ_1 y Σ_2 respectivamnete.*

Demostración. [⇒] Supongamos que tenemos:

$$c^{-1}m_{\Sigma_1}(A) \leqslant m_{\Sigma_2}(h_{\Sigma_1,\Sigma_2}(A)) \leqslant cm_{\Sigma_1}(A). \tag{4.23}$$

Claramente, si $m_{\Sigma_1}(A) = 0 \Longrightarrow m_{\Sigma_2}(h_{\Sigma_1,\Sigma_2}(A)) = 0$. Luego $\mathcal{F}_U$ tiene holonomía absolutamente continua.

Sea A con m_{Σ_1}-medida positiva. Como $c^{-1}m_{\Sigma_1}(A) \leqslant m_{\Sigma_2}(h_{\mathcal{F}}(A)) \leqslant cm_{\Sigma_1}(A)$ entonces tenemos que:

$$c^{-1}\int_{\Sigma_1} 1_A dm_{\Sigma_1} \leqslant \int_{\Sigma_2} \mathbf{1}_{(h_{\Sigma_1,\Sigma_2}(A))}dm_{\Sigma_2} = \int_{\Sigma_1} \mathbf{1}_A J_{h^{-1}}dm_{\Sigma_1} \leqslant c\int_{\Sigma_1} 1_A dm_{\Sigma_1} \tag{4.24}$$

dividiendo todas las desigualdades por $m_{\Sigma_1}(A)$ tenemos que $J_{h^{-1}}$ es acotado.

Invirtiendo los papeles de Σ_1 y Σ_2 tenemos que J_h es acotado en Σ_2.

[⇐] Tomemos A m_{Σ_1}-medible y supongamos que $\mathcal{F}_U$ tiene holonomía absolutamente continua y $J_h \leqslant c_1$, $J_{h^{-1}} \leqslant c_2$. Sea $c = \textit{máx}\{c_1, c_2\}$. Entonces,

$$m_{\Sigma_2}(A) = \int_{\Sigma_1} \mathbf{1}_A J_{h^{-1}}dm_{\Sigma_1} \leqslant c_1\int_{\Sigma_1} 1_A dm_{\Sigma_1} = c_1 m_{\Sigma_1}(A) \leqslant cm_{\Sigma_1}(A). \tag{4.25}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}m_{\Sigma_1}(A) = m_{\Sigma_1}((h_{\Sigma_1,\Sigma_2})^{-1} \circ h_{\Sigma_1,\Sigma_2}(A)) &= \int_{\Sigma_2} \mathbf{1}_{h_{\Sigma_1,\Sigma_2}(A)} J_h dm_{\Sigma_2} \\ \leqslant c_2 \int_{\Sigma_2} \mathbf{1}_{h_{\Sigma_1,\Sigma_2}(A)} dm_{\Sigma_2} = c_2 m_{\Sigma_2}(h_{\Sigma_1,\Sigma_2}(A)) &\leqslant c m_{\Sigma_2}(h_{\Sigma_1,\Sigma_2}(A)).\end{aligned} \tag{4.26}$$

Con estos dos cálculos tenemos que: $c^{-1} m_{\Sigma_1}(A) \leqslant m_{\Sigma_2}((h_{\Sigma_1,\Sigma_2}(A)) \leqslant c m_{\Sigma_1}(A)$. □

El siguiente resultado nos dice que las nociones de absolutamente continua y absolutamente continua transversalmente son la misma en caso de que se tenga Jacobianos acotados.

Proposición 31. *([PVW],p4) Una foliación local $\mathcal{F}_U$ es absolutamente continua transversalmente con Jacobianos acotados, si y sólo si $\mathcal{F}_U$ es absolutamente continua con Jacobianos acotados.*

Demostración. [⇒] Por las proposiciones 29 y 30 es una implicación directa de la proposición 28.

[⇐] ([PVW];p4-5). □

4.1.3. Desintegración de Medidas

Definición 41. *([AVW];p7) Sea $(X, \mathcal{Q}, \mu)$ un espacio métrico con medida de Borel finita y sea $\mathcal{P}$ una partición de X en subconjuntos medibles. Denotemos por $\hat{\mu}$ a la medida inducida por la σ-álgebra generada por $\mathcal{P}$. Esto es, $\hat{\mu}$ es el pushforward de μ bajo la proyección canónica, en el espacio de las particiones.*

*Un **Sistema de Medidas Condicionales o Desintegración de** μ con respecto a $\mathcal{P}$ es una familia $\{\mu_P\}_{P \in \mathcal{P}}$ de medidas de probabilidad en X tal que:*

1. *$\mu_P(P) = 1$ para casi todo $P \in \mathcal{P}$ con respecto a la medida μ.*
2. *Dada una función continua $\varphi : X \to \mathbb{R}$, la función $P \mapsto \int \varphi d\mu_P$ es medible y se tiene:*

$$\int_X \varphi d\mu = \int_{\mathcal{P}} \left(\int \varphi d\mu_P \right) d\hat{\mu}(P). \tag{4.27}$$

Dada una partición arbitraria $\mathcal{P}$ de X, no siempre es posible obtener una desintegración de μ. El siguiente resultado nos dice que la desintegración existe si la partición $\mathcal{P}$ es medible.

Teorema 14 (Rokhlin)**.** *Si $\mathcal{P}$ una partición medible de X, entonces existe un sistema de medidas condicionales relativas a $\mathcal{P}$. Más aún, es esencialmente única en el sentido de que si existe otra desintegración relativa a $\mathcal{P}$, entonces coinciden en un conjunto de medida total con respecto a la medida $\hat{\mu}$.*

La demostración de este teorema no es muy difícil; sin embargo, está al margen de este trabajo, pero puede ser encontrada en [Rokh] o en una versión más depurada en [Vi].

Definición 42. *([PVW];p1) Una **Foliación Local Transversal** a $\mathcal{F}$, es una foliación local $\mathcal{T}$ de U, cuyas hojas son transversales a las hojas de $\mathcal{F}$ y son de dimensión complementaria.*

Sea $\mathcal{F}$ una foliación de M, tomemos una vecindad abierta U de M que trivialice a $\mathcal{F}$. En esta subsección sólo consideraremos la foliación local $\mathcal{F}_U$. Denotaremos por $\{\mu_x \mid x \in U\}$ la descomposición de Rokhlin de m a lo largo de las hojas $\mathcal{F}(x)$.

Definición 43. *$\mathcal{F}$ es **Absolutamente Continua por Hojas** si y sólo si, para toda $x \in U$, la desintegración μ_x es equivalente a $m_{\mathcal{F}(x)}$, $m-$c.t.p.. Es decir, $m_{\mathcal{F}(x)} \ll \mu_x$ y $\mu_x \ll m_{\mathcal{F}(x)}$, $m-$c.t.p..*

Corolario 18. *Si $\mathcal{F}$ es absolutamente continua por hojas $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{F}$ absolutamente continua.*

Demostración. Es una aplicación directa del teorema de Rokhlin 14. □

Teorema 15. *([PVW];p2) $\mathcal{F}_U$ es absolutamente continua por hojas si $\exists$ $\mathcal{T}$, foliación local transversal a $\mathcal{F}_U$, tal que $\mathcal{T}$ es absolutamente continua transversalmente y la $\mathcal{F}$-holonomía, $h^{\mathcal{F}}_{\mathcal{T}(z_0),\mathcal{T}(z)}$ es absolutamente continua para casi todo par de $\mathcal{T}$-hojas $\mathcal{T}(z_0)$, $\mathcal{T}(z)$.*

Demostración. Sea $\mathcal{T}$ una foliación local transversal a $\mathcal{F}$ y absolutamente continua transversalmente, esto es, para cualesquiera dos transversales Σ_1 y Σ_2 el pushforward de m_{Σ_1} bajo la $\mathcal{T}$-holonomía ${h^{\mathcal{T}}}_{\Sigma_1,\Sigma_2}$, $\left({h^{\mathcal{T}}}_{\Sigma_1,\Sigma_2}\right)_* m_{\Sigma_1}$, es absolutamente continuo con respecto a m_{Σ_2}. Además supongamos que $\mathcal{T}$ tiene la propiedad que $\left(h^{\mathcal{F}}_{\mathcal{T}(z_0),\mathcal{T}(z)}\right)_* m_{\mathcal{T}(z_0)} \ll m_{\mathcal{T}(z)}$ para casi todo par de $\mathcal{T}$-hojas $\mathcal{T}(z_0)$, $\mathcal{T}(z)$. Entonces tenemos lo siguiente:

a. La proposición 28 implica que $\mathcal{T}$ es absolutamente continua por tanto para todo $\Omega \subseteq U$ medible

$$m(\Omega) = \int_{\mathcal{F}(x_0)} \int_{\mathcal{T}(z)} \mathbf{1}_{\Omega}(z,x)\delta_z(x)dm_{\mathcal{T}(z)}(x)dm_{\mathcal{F}(x_0)}(z) \tag{4.28}$$

b. Como $\left(h^{\mathcal{F}}_{\mathcal{T}(z_0),\mathcal{T}(z)}\right)_* m_{\mathcal{T}(z_0)} \ll m_{\mathcal{T}(z)}$ y si definimos $\mathcal{T}(z_0) := \Sigma$ y $h^{\mathcal{F}}_{\mathcal{T}(z_0),\mathcal{T}(z)} = h^{\mathcal{F}}_z$, imitando la prueba de la proposición 26 muestra que para todo B medible

$$m_{\mathcal{T}(z)}\left(\left(h^{\mathcal{F}}_z\right)(B)\right) = \int_{\Sigma} \mathbf{1}_B J^{-1}_{h^{\mathcal{F}}_z} dm_{\Sigma} \tag{4.29}$$

entonces el teorema de cambio de variable 6 nos dice que:

$$\int_{\mathcal{T}(z)} \mathbf{1}_{\Omega}(z,x)\delta_z(x)dm_{\mathcal{T}(z)}(x) = \int_{\Sigma} \mathbf{1}_{\Omega}(z,h^{\mathcal{F}}_z(y)) \cdot (J^{-1}_{h^{\mathcal{F}}_z}(y)) \cdot \delta_z(h^{\mathcal{F}}_z(y))dm_{\Sigma}(y) \tag{4.30}$$

Luego

$$\begin{aligned} m(\Omega) &= \int_{\mathcal{F}(x_0)} \int_{\mathcal{T}(z)} \mathbf{1}_{\Omega}(z,x)\delta_z(x) dm_{\mathcal{T}(z)}(x) dm_{\mathcal{F}(x_0)}(z) \\ &= \int_{\mathcal{F}(x_0)} \int_{\Sigma} \mathbf{1}_{\Omega}(z, h_z^{\mathcal{F}}(y)) \cdot (J^{-1}_{h_z^{\mathcal{F}}}(y)) \cdot \delta_z(h_z^{\mathcal{F}}(y)) dm_{\Sigma}(y) dm_{\mathcal{F}(x_0)}(z). \end{aligned} \tag{4.31}$$

Por Fubini:

$$\begin{aligned} m(\Omega) &= \int_{\mathcal{F}(x_0)} \int_{\Sigma} \mathbf{1}_{\Omega}(z, h_z^{\mathcal{F}}(y)) \cdot (J^{-1}_{h_z^{\mathcal{F}}}(y)) \cdot \delta_z(h_z^{\mathcal{F}}(y)) dm_{\Sigma}(y) dm_{\mathcal{F}(x_0)}(z) \\ &= \int_{\Sigma} \int_{\mathcal{F}(x_0)} \mathbf{1}_{\Omega}(z, h_z^{\mathcal{F}}(y)) \cdot (J^{-1}_{h_z^{\mathcal{F}}}(y)) \cdot \delta_z(h_z^{\mathcal{F}}(y)) dm_{\mathcal{F}(x_0)}(z) dm_{\Sigma}(y) \end{aligned} \tag{4.32}$$

Para cualesquiera par de hojas $\mathcal{F}(x_0)$, $\mathcal{F}(x)$ se tiene que $\left(h^{\mathcal{T}}_{\mathcal{F}(x_0),\mathcal{F}(x)}\right)^{-1}_{*} m_{\mathcal{F}(x)} \ll m_{\mathcal{F}(x_0)}$, por lo tanto, si $\left(h^{\mathcal{T}}_{\mathcal{F}(x_0),\mathcal{F}(x)}\right)^{-1} = h^{\mathcal{T}}_{\mathcal{F}(x),\mathcal{F}(x_0)} = h^{\mathcal{T}}_{x_0}$, la equivalencia en la proposición 26 implica que

$$m_{\mathcal{F}(x_0)}(h^{\mathcal{T}}_{x_0}(A) = \int\limits_{\mathcal{F}(x)} \mathbf{1}_A J_{h^{\mathcal{T}}_x} dm_{\mathcal{F}(x)} \tag{4.33}$$

entonces teorema de cambio de variable 6.

$$\begin{gathered} \int_{\mathcal{F}(x_0)} \mathbf{1}_{\Omega}(z, h_z^{\mathcal{F}}(y)) \cdot (J^{-1}_{h_z^{\mathcal{F}}}(y)) \cdot \delta_z(h_z^{\mathcal{F}}(y)) dm_{\mathcal{F}(x_0)}(z) = \\ \int_{\mathcal{F}(x)} \mathbf{1}_{\Omega}(h^{\mathcal{T}}_{x_0}(w), h_z^{\mathcal{F}}(y)) \cdot (J^{-1}_{h_z^{\mathcal{F}}}(y)) \cdot \delta_{h^{\mathcal{T}}_{x_0}(w)}(h_z^{\mathcal{F}}(y)) \cdot (J_{h^{\mathcal{T}}_x}(w)) dm_{\mathcal{F}(x)}(w) \end{gathered} \tag{4.34}$$

así tenemos que

$$m(\Omega) = \int_{\Sigma} \int_{\mathcal{F}(x)} \mathbf{1}_{\Omega}(h^{\mathcal{T}}_{x_0}(w), h_z^{\mathcal{F}}(y)) \cdot (J^{-1}_{h_z^{\mathcal{F}}}(y)) \cdot \delta_{h^{\mathcal{T}}_{x_0}(w)}(h_z^{\mathcal{F}}(y)) \cdot (J_{h^{\mathcal{T}}_x}(w)) dm_{\mathcal{F}(x)}(w) dm_{\Sigma}(y) \tag{4.35}$$

Notemos que esto no muestra que $\mathcal{F}_U$ es absolutamente continua pues Σ no es cualquier transversal si no que es una de las hojas de $\mathcal{T}$.

Por otro lado, consideremos en U la partición dada por las hojas de $\mathcal{F}_U$. Para $\Omega \subseteq U$ el teorema de Rokhlin implica que las medidas μ_x para cada hoja $\mathcal{F}(x)$ cumplen

$$m(\Omega) = \int_{\mathcal{P}} \int_{\mathcal{F}(x)} \mathbf{1}_{\Omega} d\mu_x(w) d\hat{\mu}(P) \tag{4.36}$$

Como cada elemento en el espacio de las particiones lo representa una hoja, ie, $\forall\, [z] \in \mathcal{P}$ tenemos que $[z] = \mathcal{F}(x)$. Entonces cualquier Σ transversal a $\mathcal{F}_U$ parametriza al espacio de particiones, ya que cada hoja $\mathcal{F}(x)$ intersecta a Σ en un único punto z, luego $[z]$ es representado por z. De esta forma el pushforward de m bajo la proyección de U a $\mathcal{P}$ es el pushforward de m bajo la proyección de U a Σ a lo largo de las hojas, esto implica que $\hat{\mu} = m_\Sigma$. Luego:

$$m(\Omega) = \int_\Sigma \int_{\mathcal{F}(x)} \mathbf{1}_\Omega d\mu_x(w) dm_\Sigma(y) \tag{4.37}$$

Tomando $\Sigma = \mathcal{T}(z_0)$, la unicidad esencial en el teorema de Rokhlin nos garantiza que μ_x es equivalente a $m_{\mathcal{F}(x)}$ para $m_\Sigma - c.t.p\ y \in \Sigma$.

□

Corolario 19. *Si $\mathcal{F}$ es absolutamente continua transversalmente, entonces $\mathcal{F}$ es absolutamente continua por hojas.*

Proposición 32. *Las siguientes afirmaciónes son equivalentes:*

1. *$\mathcal{F}_U$ es absolutamente continua por hojas.*
2. *Existe una foliación local transversal $\mathcal{T}$, absolutamente continua transversalmente tal que la $\mathcal{F}_U$-holonomía es absolutamente continua para m-casi todo par de $\mathcal{T}$-hojas.*
3. *Para toda foliación local transversal $\mathcal{T}$ absolutamente continua transversalmente, la $\mathcal{F}_U$-holonomía entre casi todo par de $\mathcal{T}$-hojas, es absolutamente continuo.*

Demostración.

3) ⇒ 2) obvio

2) ⇒ 1) corolario anterior

1) ⇒ 3) es un resultado de [PVW]. □

4.2. El Argumento de Hopf

En los 30's Eberhard Hopf demostró que los flujos geodésicos en superficies cerradas con curvatura Gaussiana negativa y en variedades Riemanianas cerradas con curvatura seccional constante negativa son ergódicos con respecto a la medida Riemanniana [Ho], [Ho2]. Para esto Hopf utilizó un bonito método geométrico motivado por la nauraleza hiperbólica del problema, el cual describiremos a continuación para el caso de difeomorfismos de Anosov.

Notemos que si $f : M \to M$ es un difeomorfismo de Anosov de clase C^2 conservativo. Entonces tenemos una relación de equivalenca estable dada por

$$x \underset{s}{\sim} y \Longleftrightarrow y \in \mathcal{W}^s(x) \Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty} d_M(f^n(x), f^n(y)) = 0 \tag{4.38}$$

y una relacion de equivalenca inestable dada por

$$x \underset{u}{\sim} y \Longleftrightarrow y \in \mathcal{W}^u(x) \Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty} d_M(f^{-n}(x), f^{-n}(y)) = 0. \tag{4.39}$$

Partiremos el método en 2 pasos para exhibir explícitamente la obstrucción con la que se enfrentó Hopf y algunos de sus contemporáneos para demostrar el caso general.

El **primer paso** en el método de Hopf es ver que los promedios de Birkhoff de funciones m-integrables son constantes $m-c.t.p.$ a lo largo de la variedad estable e inestable. Sea $\phi : M \to \mathbb{R}$ una función en $L^1(M, m)$ y sea:

$$\phi^+ = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \phi \circ f^i \tag{4.40}$$

$$\phi^- = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \phi \circ f^{-i} \tag{4.41}$$

Como f preserva la medida en Riemanniana en M (pues es conservativo). El teorema ergódico de Brikhoff implica que $\forall \phi \in L^2(M, m)$, los límites (4.40) y (4.41) existen $m - c.t.p$, además la función ϕ^+ es igual (mod 0) a la proyección de ϕ sobre las funciones f-invariantes en $L^2(M, m)$ y por tanto $\phi^+ = \phi^-$ $m - c.t.p.$ Por densidad de $C^0(M)$ en $L^1(M, m)$ basta checar para $\phi \in C^0(M)$:

Lema 7. *Sea $f : M \to M$ Anosov conservativo y sea $\phi : M \to \mathbb{R}$ continua. Entonces:*

a. ϕ^+ es constante en $\mathcal{W}^s(x)$ y ϕ^- es constante en $\mathcal{W}^u(x)$ $m - c.t.p.$ $x \in M$.

b. ϕ^+ es constante a lo largo de $\mathcal{W}^s(x)$ y de $\mathcal{W}^u(x)$ $m - c.t.p.$ $x \in M$.

Demostración.

a) Por Birkhoff tenemos que $\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \phi \circ f^i = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \phi \circ f^i$, $m - c.t.p.$. Como ϕ es continua entonces para todo $x \in M$ y $y \in \mathcal{W}^s(x)$, $\lim_{n\to\infty} |\phi(f^n(x)) - \phi(f^n(y))| = 0$. Luego el límite de Cesàro $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |\phi(f^n(x)) - \phi(f^n(y))| = 0$. Entonces

$$\left|\phi^+(x) - \phi^+(y)\right| \leqslant \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} |\phi(f^n(x)) - \phi(f^n(y))| = 0. \quad m - c.t.p \tag{4.42}$$

Esto implica que $\phi^+(x) = \phi^+(y)$ $m - c.t.p.$. Analogamente tenemos que ϕ^- es constante en $\mathcal{W}^u(x)$ $m - c.t.p.$

b) Como ya mencionamos, $\phi^+ = \phi^-$ $m - c.t.p.$ ya que las funciones f-invariantes coinciden con las funciones f^{-1}- invariantes (pues $\phi \circ f = \phi \Leftrightarrow \phi \circ f^{-1} = \phi$), entonces el inciso a) implica que de hecho ϕ^+ es constate en $\mathcal{W}^s(x)$ y $\mathcal{W}^u(x)$ $m - c.t.p.$ $x \in M$. $\square$

El **segundo paso** en el método de Hopf es para probar que f es ergódico a partir del paso uno. Esto se reduce a demostrar que para toda función continua ϕ la función ϕ^+ es constante $m-c.t.p.$ sabiendo que que de hecho ϕ^+ es constate en $\mathcal{W}^s(x)$ y $\mathcal{W}^u(x)$ $m-c.t.p.$ $x \in M$.

Por conexidad de M basta mostrarlo en una carta de las foliaciones $\mathcal{W}^s$ y $\mathcal{W}^u$. Después de empujar de manera suave a ϕ^+ y las foliaciones locales $\mathcal{W}^s_U$ y $\mathcal{W}^u_U$ con una carta obtenemos un par de foliaciones trnsversales $\mathcal{F}^s$ y $\mathcal{F}^u$ en el cubo $(-1,1)^n$ y una función medible $\psi^+ : (-1,1)^n \to \mathbb{R}$ que es $dx_1 \cdots dx_n$-constante a lo largo de las hojas de $\mathcal{F}^s$ y $\mathcal{F}^u$.

Cuando las foliaciones $\mathcal{W}^s$ y $\mathcal{W}^u$ son al menos C^1, implica que $\mathcal{F}^s$ y $\mathcal{F}^u$ también son C^1, luego bajo un cambio de coordenadas diferenciable podemos hacer que $\mathcal{F}^s$ y $\mathcal{F}^u$ coincidan con las foliaciones paralelas a los subespacios coordenados transversales. En este caso el teorema de Fubini implica que existe una desintegración de la medida $dx_1 \cdots dx_n$ en las medidas $dx_{i_1} \cdots dx_{i_s}$ y $dx_{i_1} \cdots dx_{i_u}$ de $\mathcal{F}^s$ y $\mathcal{F}^u$ respectivamente. Por lo tanto, cualquier función medible que sea constante a lo largo de $\mathcal{F}^s$ y $\mathcal{F}^u$ es constante $dx_1 \cdots dx_n - c.t.p.$ $x \in M$. Esto termina la prueba en el caso que $\mathcal{W}^s$ y $\mathcal{W}^u$ sean diferenciables.

El método original de Hopf, asume que las foliaciones estables e inestables son foliaciones C^1. Hasta ahora se sabe que esto sucede sólo en algunos casos por ejemplo:

- cuando $dim(M) = 2$
- cuando la curvatura seccional K de M es constante.
- cuando la curvatura seccional varia en $K \in (-4,-1]$ [Hi,Pu]

Hopf en sus artículos [Ho] y [Ho2], intuye y propone que su método funcionará para demostrar la ergodicidad del flujo geodésico para cualquier variedad Riemannana cerrada con curvatura seccional negativa. Durante años se intentó demostrar la ergodicidad del caso general, siguiendo el metodo propuesto por Hopf, en particular intentando exausivamente demostrar la dependencia diferenciable de las foliaciones $\mathcal{W}^s$ y $\mathcal{W}^u$.

No fue hasta los 60's donde Dimitri Anosov prueba en [An], que en general las foliaciones estable e inestable de un difeomorfismo o un flujo unifomemente hiperbólico no son C^1 ni siquiera en el caso de suponer a f analítica. Sin embargo, la intuición de Hopf no estaba tan errada, pues en el mismo artículo, Anosov, demuestra la ergodicidad de estos flujos y difeomorfismos en el caso general, utlilizando el mismo método de Hopf, pero con una adaptación técnica hecha por él y por Sinai[An,Si]. Ellos notaron que si bien las distribuciones tangentes a $\mathcal{W}^s$ y $\mathcal{W}^u$ no son C^1, sí tienen cierta regularidad, a saber, son Hölder continuas, con esto lograron demostrar que $\mathcal{W}^s$ y $\mathcal{W}^u$ son absolutamente continuas, propiedad suficiente para exhibir la ergodicidad de los sistemas dinámicos uniformemete hiperbólicos y conservativos.

Posteriormente esta idea geométrica, que escencialmente depende sólo de la hiperbolicidad y más aun del comportamiento asintótico de f, se ha utlilizado en diversas ocasiones y contextos para demostrar la ergodicidad de sistemas dinámicos, por ejemplo, Charles Pugh y Michel Shub en [Pu,Sh] y posteriormente Keith Burns y Amie Wilkinson en [Bu,Wi], utlizaron este método reemplazando la transversalidad de las foliaciones por el concepto de *su*-accesibilidad, para demostrar la ergodicidad de algunos difeomorfismos parcialmente hiperbólicos.

A la fecha este método propuesto por Hopf forma parte de las herramientas escenciales en la dinámica hiperbólica y actualmente se le conoce como el **ARGUMENTO DE HOPF**. Una de las versiones más generales, mejor detallada y refinada del Argumento de Hopf fue hecha por Yves Coudène en [Coud] donde se ve que puede ser utlilizada en contextos bastante generales.

Recapitulemos esta subsección con el siguiente teorema:

Teorema 16 (Argumento de Hopf)**.** *Sea $f : M \to M$ un difeomorfismo de Anosov m-conservativo de clase C^2. Para toda función $\phi : M \to \mathbb{R}$ m-integrable y f-invariante cumple que:*

a. ϕ sea m-esencialmente constante a lo largo de las foliaciones $\mathcal{W}^s$.

b. ϕ sea m-esencialmente constante a lo largo de las foliaciones $\mathcal{W}^u$.

Entonces ϕ es m-esencialmente constante, y por lo tanto f es ergódico con respecto a m.

4.3. Continuidad Hölder de las Distribuciones Estables e Inestables

Definición 44. *Sea $W < V$ un subespacio vectorial de un espacio vectorial de dimensión finita. Para $v \in V$, definamos,*

$$dist(v, W) = \min_{w \in W} \|v - w\| \tag{4.43}$$

Para $W', W < V$ subespacios de V de dimensión k, definamos,

$$dist(W', W) = \max\left\{\max_{v \in S^k_{W'}} dist(v, W), \max_{w \in S^k_{W}} dist(w, W')\right\} \tag{4.44}$$

donde $S^k_{W'} = \{v \in W' \mid \|v\| = 1\}$ y $S^k_W = \{w \in W \mid \|w\| = 1\}$.

Lema 8. *Sea $L^i_n : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N, i = 1, 2,$ dos sucesiones de transformaciones lineales. Asumamos que para algún $b > 0$ y $\delta \in (0, 1)$ tal que:*

$$\left\|L^1_n - L^2_n\right\|_\infty \leqslant \delta b^n, \tag{4.45}$$

para todo $n > 0$.

Supongamos que hay 2 subespacios $E^1, E^2 \leqslant \mathbb{R}^N$ *y unas constantes* $c, \lambda, \mu > 0$, *con* $c > 1$; $\lambda < \mu$ *y* $\lambda < b$, *tal que*

$$\left\|L_n^i v\right\| \leqslant c\lambda^n \|v\| \qquad si\ v \in E^i$$

$$\left\|L_n^i w\right\| \geqslant c^{-1}\mu^n \|w\| \qquad si\ w \perp E^i \tag{4.46}$$

Entonces $dist(E^1, E^2) \leqslant 3c^2 \frac{\mu}{\lambda} \delta^{(\log\mu - \log\lambda)/(\log b - \log\lambda)}$.

Demostración. Sea $K_n^1 := \left\{v \in \mathbb{R}^N \mid \left\|L_n^1 v\right\| \leqslant 2c\lambda^n \|v\|\right\}$. Sea $v \in K_n^1$. Escribamos $v = v^1 + v_\perp^1$, donde $v^1 \in E^1$ y $v_\perp^1 \perp E^1$.

Notemos que

$$\begin{aligned}\left\|L_n^1 v_\perp^1\right\| &= \left\|L_n^1(v_\perp^1) + L_n^1(v^1) - L_n^1(v^1)\right\| \\ &\leqslant \left\|L_n^1(v_\perp^1) + L_n^1(v^1)\right\| + \left\|L_n^1(v^1)\right\|\end{aligned} \tag{4.47}$$

Por lo tanto, $\left\|L_n^1 v_\perp^1\right\| - \left\|L_n^1(v^1)\right\| \leqslant \left\|L_n^1(v_\perp^1) + L_n^1(v^1)\right\|$.

Entonces tenemos que:

$$\left\|L_n^1 v\right\| = \left\|L_n^1(v^1 + v_\perp^1)\right\| \geqslant \left\|L_n^1(v_\perp^1)\right\| - \left\|L_n^1(v^1)\right\| \geqslant c^{-1}\mu^n \left\|v_\perp^1\right\| - c\lambda^n \left\|v^1\right\| \tag{4.48}$$

y por lo tanto,

$$\left\|(v_\perp^1)\right\| \leqslant c\mu^{-n}\left(\left\|L_n^1(v)\right\| + c\lambda^n \left\|v^1\right\|\right) \leqslant 3c^2 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \|v\| \tag{4.49}$$

de donde se sigue que,

$$dist(v, E^1) = \underset{\tilde{v}^1 \in E^1}{mín} \left\|v - \tilde{v}^1\right\| = \left\|v - v^1\right\| = \left\|(v_\perp^1)\right\| \leqslant 3c^2 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \|v\|. \tag{4.50}$$

Sea $\gamma = \dfrac{\lambda}{b} < 1$. Existe un único número natural k tal que $\gamma^{k+1} = \left(\dfrac{\lambda}{b}\right)^{k+1} < \delta \leqslant \left(\dfrac{\lambda}{b}\right)^k = \gamma^k$. Por tanto $\gamma^k < \gamma^{-1}\delta$, $\Rightarrow \left(\dfrac{\mu}{\lambda}\right)^k = \gamma^{k log_\gamma\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)} < (\gamma^{-1}\delta)^{log_\gamma\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)} = \left(\dfrac{\mu}{\lambda}\right)^{-1} \delta^{log_\gamma\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)}$.

Sea $v^2 \in E^2$. Entonces,

$$
\begin{aligned}
\left\|L_k^1 v^2\right\| &\leqslant \left\|L_k^2 v^2\right\| + \left\|\left(L_k^1 - L_k^2\right) v^2\right\| \\
&\leqslant \left\|L_k^2 v^2\right\| + \left\|L_k^1 - L_k^2\right\|_\infty \left\|v^2\right\| \leqslant c\lambda^k \left\|v^2\right\| + b^k\delta \left\|v^2\right\| \\
&\leqslant (c\lambda^k + (b\frac{\lambda}{b})^k \left\|v^2\right\| \leqslant 2c\lambda^k) \left\|v^2\right\|.
\end{aligned} \tag{4.51}
$$

De aquí que $v^2 \in K_k^1$, por lo tanto, $E^2 \subseteq K_k^1$. Con un argumento simétrico tenemos que, $E^1 \subseteq K_k^2$. Por lo tanto,

$$
dist(E^1, E^2) \leqslant 3c^2 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \leqslant 3c^2 \frac{\mu}{\lambda} \delta^{(\log \mu - \log \lambda)/(\log b - \log \lambda)}. \tag{4.52}
$$

□

Los siguientes dos lemas son técnicos, pero son muy interesantes. Surgen motivados en resultados de [Clapp] que se generalizan a variedades diferenciables.

Lema 9 (Desigualdad del valor medio para variedades Riemannianas). *Sean (M, g) y (N, g') variedades Riemannianas conexas. $\Omega \subseteq M$ un abierto geodésicamente convexo. $f : \Omega \to N$ de clase C^1. Entonces:*

a. $\forall x, y \in \Omega$, $\sup_{t\in[0,1]} \left\|df_{\gamma_x^y(t)}\right\|_\infty < \infty$, donde $\gamma_x^y : [0,1] \to \Omega$ es la geodésica tal que $\gamma_x^y(0) = x$ y $\gamma_x^y(1) = y$.

b. $d_N(f(x), f(y)) \leqslant \sup_{t\in[0,1]} \left\|df_{\gamma_x^y(t)}\right\|_\infty \cdot d_M(x, y)$

En particular si $\sup_{z\in\Omega} \|df_z\|_\infty < \infty$, se tiene que $d_N(f(x), f(y)) \leqslant \sup_{z\in\Omega} \|df_z\|_\infty \cdot d_M(x, y)$, $\forall x, y \in \Omega$.

Demostración. a. Como $t \mapsto \left\|df_{\gamma_x^y(t)}\right\|_\infty$es continua, la afirmación se da por compacidad de $[0, 1]$.

b. Sea $\mathcal{A} := \left\{\alpha : [0,1] \to N : \alpha \in C^1, \alpha(0) = f(x) \text{ y } \alpha(1) = f(y)\right\}$. Tenemos que

$$
\left\|f(\dot{\gamma_x^y})(t)\right\| = \left\|df_{\gamma_x^y(t)}\left(\dot{\gamma}_x^y(t)\right)\right\| \leqslant \left\|df_{\gamma_x^y(t)}\right\|_\infty \left\|\dot{\gamma}_x^y(t)\right\|, \tag{4.53}
$$

luego

$$
\begin{aligned}
d_N(f(x),f(y)) &= \inf_{\alpha\in\mathcal{A}} \int_0^1 \|\dot{\alpha}(t)\|\,dt \\
&\leqslant \int_0^1 \left\| f(\dot{\gamma_x^y})(t) \right\| dt \\
&\leqslant \sup_{t\in[0,1]} \left\| df_{\gamma_x^y(t)} \right\|_\infty \int_0^1 \|\dot{\gamma}_x^y(t)\|\,dt \\
&= \sup_{t\in[0,1]} \left\| df_{\gamma_x^y(t)} \right\|_\infty d_M(x,y).
\end{aligned} \tag{4.54}
$$

Por último si $\sup_{z\in\Omega}\|df_z\|_\infty < \infty$. Entonces $\forall x,y \in \Omega$ por b) se tiene que $d_N(f(x),f(y)) \leqslant \sup_{t\in[0,1]} \left\|df_{\gamma_x^y(t)}\right\|_\infty d_M(x,y) \leqslant \sup_{z\in\Omega}\|df_z\|_\infty \cdot d_M(x,y)$.

□

Lema 10 (Una interpretación de la derivada)**.** *Sean M y N, variedades diferenciables de al menos clase C^k, y $f: M \to N$ de clase C^k. Entonces df define una sección C^{k-1} al haz vectorial*

$$(TM \otimes f^*(T^*N), \pi, M).$$

Demostración. Tenemos que $\forall x \in M$ $df_x : T_xM \to T_{f(x)}N$, luego $df_x \in Hom(T_xM, T_{f(x)}N)$. Por otro lado, sabemos que $Hom(T_xM, T_{f(x)}N)$ es naturalmente isomorfo a $T_xM \otimes T^*_{f(x)}N$, vía el mapa $F :\mapsto \Psi(F)(v,\omega)$ donde a cada $F : T_xM \to T_{f(x)}N$ le asigna $\Psi(F) : T_xM \times T^*_{f(x)}N \to \mathbb{R}$, dada por $\Psi(F)(v,\omega) := \omega(Fv)$, claramente $\Psi(F)$ es bilineal por tanto pertenece a $T_xM \otimes T^*_{f(x)}N$. Esto implica que $df_x \in T_xM \otimes T^*_{f(x)}N$.

Notemos que $TM \otimes T^*N$ no es un fibrado sobre M. Esto se arregla tomando el pullback $f^*(T^*N)$. Así $TM \otimes f^*(T^*N)$ fibra a M, y por el párrafo anterior tenemos que $df : M \to TM \otimes f^*(T^*N)$ y el lema se sigue. □

Proposición 33. *Sea f un difeomorfismo C^2 de una variedad compacta de clase C^2, M. Entonces para cada $n \in \mathbb{N}$ y $\forall x \in M$, $\exists \epsilon > 0$ tal que*

$$d_{TM\otimes f^*(T^*N)}(df_x^n, df_y^n) \leqslant b^n d_M(x,y) \tag{4.55}$$

para toda $y \in exp_x(B_\epsilon(0)) = B_\epsilon(x)$ y $b > 0$.

Demostración. Consideremos $exp_x : T_xM \to M$ entonces $\exists\epsilon > 0$ tal que $exp_x : B_\epsilon(0) \to B_\epsilon(x)$ es difeomorfismo, así $B_\epsilon(x)$ es geodesicamente convexo. Denotemos por E al haz $TM \otimes f^*(T^*N)$, como f es C^2, entonces $df : M \to E$ es C^1 y por compacidad de M, $\sup_{z\in M}\left\|d^2 f_z\right\|_\infty < \infty$. Luego por la desigualdad del valor medio para variedades Riemannianas (lema 9) tenemos,

$$d_E(df_x, df_y) \leqslant \sup_{z\in M}\left\|d^2 f_z\right\|_\infty \cdot d_M(x,y) \tag{4.56}$$

Sea $b := \sup_{z\in M} \left\|d^2 f_z\right\|_\infty$, luego,

$$\begin{aligned} d_E(df_x^n, df_y^n) &\leqslant \sup_{z\in M} \left\|d^2 f^n{}_z\right\|_\infty \cdot d_M(x,y) \\ &\leqslant \sup_{z\in M} \left\{\left\|d^2 f_{f^n(z)}\right\|_\infty \left\|d^2 f_{f^{n-1}(z)}\right\|_\infty \dots \left\|d^2 f_z\right\|_\infty\right\} \cdot d_M(x,y) \\ &\leqslant b^n \cdot d_M(x,y) \end{aligned} \tag{4.57}$$

□

Teorema 17. *Sea M una variedad compacta C^2 y $f : M \circlearrowleft$ un difeomorfismo de Anosov de clase C^2. Sean $0 < \lambda < 1 < \mu$ y $c > 0$ tales que $\|df_x^n v^s\| \leqslant c\lambda^n \|v^s\|$ y $\|df_x^n v^u\| \leqslant c\mu^n \|v^u\|$ $\forall x \in M$, $v^s \in E^s(x)$, $v^u \in E^u(x)$ y $\forall n \in \mathbb{N}$. Sea $b := \sup_{z\in M} \left\|d^2 f_z\right\|_\infty$. Entonces la distribución estable $E^s(x)$ es Hölder continuo con exponente $\alpha = (\log\mu - \log\lambda)/(\log b - \log\lambda)$.*

Demostración. Por el lema 33 tenemos que

$$d_{TM\otimes f^*(T^*N)}(df_x^n, df_y^n) \leqslant b^n d_M(x,y). \tag{4.58}$$

Utilizando el transporte paralelo de x a y el cual es una isometria, o bien el teorema de encaje de Whitney y pensando a M como una subvariedad regular de $\mathbb{R}^N$ para N suficientemente grande, podemos aplicar el lema 8, tomando $E^s(x) = E^1$, $E^s(y) = E^2$, $df_x^n = L_n^1$, $df_y^n = L_n^2$ y $\delta = d_M(x,y) < 1$. y concluir que:

$$dist(E^s(x), E(y)^s) \leqslant K\left(d_M(x,y)^\alpha\right) \tag{4.59}$$

con $K = 3c^2\frac{\mu}{\lambda}$. □

Corolario 20. *Con las hipótesis del teorema 17 tenemos que la distribución inestable $E^u(x)$ es Hölder continua.*

Demostración. Sustituyendo df_x por $df_x{}^{-1}$ e intercambiando los roles de $E^u(x)$ y $E^s(x)$ en los resultados anteriores se obtiene el resultado deseado. □

Teorema 18. *Las foliaciones estable e inestable de un difeomorfismo de Anosov son transversalmente absolutamente continuas.*

Demostración. Esta prueba se puede encontrar en [Br,St], [Pu,Sh] o la prueba original en [An] □

4.4. Ergodicidad de los difeomorfismos de Anosov

Para demostrar la ergodicidad de los difeomorfismos de Anosov utlilizaremos el Argumento de Hopf, el cual, hemos desarrollado a lo largo de las secciones anteriores. Ahora sólo resta la última parte de este programa propuesto por Hopf.

Para $x \in M$ consideremos la variedad estable e inestable:

$$\mathcal{W}^s(x) := \{y \in M \mid d(f^n(x), f^n(y)) \to 0,\ si\ n \to \infty\} \tag{4.60}$$

$$\mathcal{W}^u(x) := \left\{y \in M \mid d(f^{-n}(x), f^{-n}(y)) \to 0,\ si\ n \to \infty\right\}. \tag{4.61}$$

Como mencionamos en la sección 4.2 vimos que si tomamos una función continua, su proyección a las funciones f-invariantes es constante en $\mathcal{W}^s(x)$ y en $\mathcal{W}^u(x)$ m-c.t.p. veamos el caso general.

Lema 11. *Sea $f : M \to M$ Ansosov conservativo. Sea $\phi : M \to \mathbb{R}$ una función medible y f-invariante. Entonces ϕ es constante mód 0 en los conjuntos inestables y estables.*

Demostración. Probaremos sólo el caso de la variedad estable, el caso inestable es análogo. Sin pérdida de generalidad, asumamos que ϕ es no negativa. Para un real a, sea $\phi_a(x) = mín(\phi(x), a)$. La función ϕ_a es f-invariante y basta demostrar el lema para ϕ_a con $a \in \mathbb{R}$ arbitraria. Sea $\psi_k : M \to \mathbb{R}$ una sucesión de funciones continuas tal que $\int_M |\phi_a - \psi_k|\, dm(x) < \dfrac{1}{k}$. El teorema ergódico de Birkhoff implica que el siguiente límite existe para casi toda x.

$$\psi_k^+(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \psi_k(f^i(x)) \tag{4.62}$$

Por la invarianza de m y ϕ_a, para toda $j \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} \frac{1}{k} > \int_M |\phi_a(x) - \psi_k(x)|\, dm(x) &= \int_M \left|\phi_a(f^j(y)) - \psi_k(f^j(y))\right| dm(y) \\ &= \int_M \left|\phi_a(y) - \psi_k(f^j(y))\right| dm(y) \end{aligned} \tag{4.63}$$

y por lo tanto,

$$\int_M \left|\phi_a(y) - \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \psi_k(f^i(y))\right| dm(y) \leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \int_M \left|\phi_a(y) - \psi_k(f^i(y))\right| dm(y) < \frac{1}{k}. \tag{4.64}$$

Como probamos en lema 7 ψ_k en $\psi_k^+(y) = \psi_k^+(x)$ siempre que $y \in \mathcal{W}^s(x)$ y $\psi_k^+(x)$ esté definido. Por lo tanto, $\exists$ un conjunto de medida cero N_k tal que $\psi_k^+(x)$ existe y es constante en $\mathcal{W}^s(x) \backslash N_k$. Esto implica que $\phi_a^+(x) = lim_{k\to\infty} \psi_k^+(x)$ es constante en la foliación estable en $M \backslash \bigcup N_k$. Claramente $\phi_a(x) = \phi_a^+(x)\ mod\ 0$. □

Teorema 19. *Un C^2 difeomorfismo de Anosov que preserva la medida Riemanniana es ergódico.*

Demostración. Sea ϕ una función m-medible y f-invariante. Por el lema anterior, $\exists$ un conjunto de medida cero N_s tal que ϕ es constante en las hojas de $\mathcal{W}^s$ en $M \backslash N_s$ y otro conjunto de medida cero N_u tal que ϕ es constante en las hojas de $\mathcal{W}^u$ en $M \backslash N_u$.

Sea $x \in M$ y $U \ni x$ una vecindad abierta como en la definición de continuidad absoluta para $\mathcal{W}^u$ y $\mathcal{W}^s$. Sea $G_s \subseteq U$ el conjunto de puntos $z \in U$ para los cuales $m_{\mathcal{W}^s(z)}(N_s \bigcap \mathcal{W}^s(z)) = 0$ y $z \notin N_s$. Sea $G_u \subseteq U$ el conjunto de puntos $z \in U$ para los cuales $m_{\mathcal{W}^u(z)}(N_u \bigcap \mathcal{W}^u(z)) = 0$ y $z \notin N_u$. Por el lema 27, los conjuntos G_s y G_u tienen medida total en U, y por tanto, $G_s \bigcap G_u$ también. De nuevo, por la continuidad absoluta de $\mathcal{W}^u$, existe un subconjunto de medida total de puntos $z \in U$ tal que $z \in (G_s \bigcap G_u)$ y para $m_{\mathcal{W}^u(z)}$-c.t.p. $z' \in \mathcal{W}^u_U(z)$, z' también está en $G_s \bigcap G_u$. La transversalidad de $\mathcal{W}^u$ y $\mathcal{W}^s$ implican que $\phi(x) = \phi(z)$ para casi todo punto $x \in U$. Como M es conexa, ϕ es constante *mód* 0 en M. □

Definición 45. *Diremos que una medida μ sobre una variedad Riemanniana M es suave, si tiene densidad continua q con respecto al volumen Riemanniano m i.e. $\mu(A) = \int_A q(x)dm(x)$ para cada conjunto de Borel $A \subseteq M$.*

Corolario 21. *Un C^2 difeomorfismo de Anosov que preserva una medida suave es ergódico.*

5

El Flujo Geodésico en Variedades Riemannianas

5.1. Tensor de Curvatura

Definición 46. *Sea (M, g) una variedad Riemanniana. El* ***Endomorfismo de Curvatura de Riemann*** *se define como el mapeo:*

$$\begin{aligned} R : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) &\to \mathcal{X}(M); \\ R(X,Y)Z &= \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z. \end{aligned} \tag{5.1}$$

Por el lema 3 podemos pensar que $R \in \mathcal{T}_1^3(M)$. Dicho tensor, en coordenadas locales (x^i), se escribe $R = R_{ijk}{}^l dx^i \otimes dx^j \otimes dx^k \otimes \frac{\partial}{\partial x^l}$ donde $R_{ijk}{}^l$ están definidos por $R\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right)\frac{\partial}{\partial x^k} = R_{ijk}{}^l \frac{\partial}{\partial x^l}$.

Ahora definamos el Tensor de ***Curvatura de Riemann*** *como, $R_m := R^\flat$*

$$\begin{aligned} R_m : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) &\to C^\infty(M) \\ R_m(X,Y,Z,W) &= \langle R(X,Y)Z, W \rangle. \end{aligned} \tag{5.2}$$

En coordenadas locales (x^i) se escribe $R_m = R_{ijkl} dx^i \otimes dx^j \otimes dx^k \otimes dx^l$ donde $R_{ijkl} = g_{lm} R_{ijk}{}^m$.

Sea $\Pi_x \subseteq T_x M$ un subespacio de dimensión 2 y $\{X(x), Y(x)\}$ una base de Π_x. La ***Curvatura Seccional*** *de Π_x en x está dada por:*

$$K(\Pi_x) = K(X,Y)_{|x} = \left(\frac{R_m(X,Y,X,Y)}{\langle X,X\rangle\langle Y,Y\rangle - \langle X,Y\rangle^2} \right)_{|x}. \tag{5.3}$$

Proposición 34. *M tiene curvatura seccional constante $\kappa \in \mathbb{R}$, si y sólo si*

$$R_m(X,Y,Z,W) = \kappa\left(\langle X,W\rangle\langle Y,Z\rangle - \langle Y,W\rangle\langle X,Z\rangle\right). \tag{5.4}$$

Demostración. [$\Rightarrow$]Supongamos que $K(\Pi_x) = \kappa\ \forall\ \Pi_x \subseteq T_xM$ y denotemos por $\widetilde{R}(X,Y,Z,W) = \langle X,W\rangle\langle Y,Z\rangle - \langle Y,W\rangle\langle X,Z\rangle$. Entonces,

$$R_m(X,Y,X,Y) = \kappa\langle X,X\rangle\langle Y,Y\rangle - \langle X,Y\rangle^2 = \kappa\left(\widetilde{R}(X,Y,X,Y)\right).$$

Como $K(\Pi_x)$ determina a R_m ([dC]), tenemos que:

$$R_m(X,Y,Z,W) = \kappa\left(\widetilde{R}(X,Y,Z,W)\right) = \kappa\left(\langle X,W\rangle\langle Y,Z\rangle - \langle Y,W\rangle\langle X,Z\rangle\right). \tag{5.5}$$

[$\Leftarrow$]Supongamos ahora que $R_m(X,Y,Z,W) = \kappa\widetilde{R}(X,Y,Z,W)$. Entonces, $\forall X,Y \in \Pi_x$

$$R_m(X,Y,X,Y) = \kappa\widetilde{R}(X,Y,X,Y) = \kappa\langle X,X\rangle\langle Y,Y\rangle - \langle X,Y\rangle^2$$

$\Rightarrow$

$$\kappa = \frac{R_m(X,Y,X,Y)}{\langle X,X\rangle\langle Y,Y\rangle - \langle X,Y\rangle^2} = K(X,Y) = K(\Pi_x), \tag{5.6}$$

$\forall K(\Pi_x)$, con $\kappa = cte.$ □

Definición 47. *También podemos pensar al endomorfismo de curvatura R como una matriz simétrica con entradas en las 2-formas alternantes.*

5.2. Geometría del Flujo Geodésico

5.2.1. Geodésicas

Definición 48. *Sean N, M variedades diferenciables y $f : M \to N$ un mapa suave. Un* ***Campo Vectorial a lo Largo de*** *f, es un mapa $X : M \to TN$, tal que $X(x) \in T_{f(x)}N\ \forall x \in M$. Denotemos $\mathcal{X}(f)$ el conjunto de campos vectoriales a lo largo de f.*

En particular, si $\gamma : (a,b) \to M$ es una curva suave, un ***Campo Vectorial a lo largo de*** *γ es un mapa $X : (a,b) \to TM$, tal que $X(t) \in T_{\gamma(t)}M\ \forall t \in (a,b)$, y $\mathcal{X}(\gamma)$ denota el conjunto de campos vectoriales a lo largo de γ.*

Ejemplo 7. *Sea $\gamma : I \to M$ una curva suave.*

1. *$\dot{\gamma} \in T_{\gamma(t)}M$ para toda t, donde $\dot{\gamma} = \gamma_*(\frac{\partial}{\partial t})$. En coordenadas locales $\dot{\gamma}(t) = \gamma^i(t)\frac{\partial}{\partial x^i}$.*
2. *Sea $\widetilde{V} \in \mathcal{X}(M)$, $\forall t \in I$ sea $V(t) = \widetilde{V}_{\gamma(t)}$*

El segundo inciso del ejemplo anterior motiva la siguiente definición.

Definición 49. *Un campo vectorial* $V \in \mathcal{X}(\gamma)$ *es* ***Extendible****, si existe un campo vectorial* $\widetilde{V} \in \mathcal{X}(M)$ *tal que,* $V(t) = \widetilde{V}_{\gamma(t)}$, $\forall t \in I$.

Proposición 35. *Sea* ∇ *una conexión lineal en* M $\forall \gamma : I \to M$, ∇ *determina un único operador*

$$D_t : \mathcal{X}(\gamma) \to \mathcal{X}(\gamma), \tag{5.7}$$

que satisface las siguientes propiedades:

a. $D_t(\alpha V + \beta W) = \alpha D_t(V) + \beta D_t(W)$ $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *(*$\mathbb{R}$*- linealidad)*

b. $D_t(fV) = \dfrac{\partial f}{\partial t} V + f D_t(V)$ $\forall f \in C^{\infty}(I)$ *(Regla de Leibniz)*

c. Si V *es extendible, entonces para toda extensión* $\widetilde{V}$ *de* V *se tiene*

$$D_t V(t) = \nabla_{\dot{\gamma}(t)} \widetilde{V}, \tag{5.8}$$

$\forall V \in \mathcal{X}(\gamma)$, $D_t(V)$ *es llamada Derivada Covariante de* V *a lo largo de* γ.

Demostración. Toma coordenadas alrededor de $\gamma(t_0)$, entonces tenemos que

$$\begin{aligned} V(t) &= V^j(t) \frac{\partial}{\partial x^j} = V^j(t) \partial_j \\ D_t V(t_0) &= \dot{V}^j(t_0) \partial_j + V^j(t_0) \nabla_{\dot{\gamma}(t_0)} \partial_j \\ &= \left(\dot{V}^k(t_0) + V^j(t_0) \dot{\gamma}^i(t_0) \Gamma^k_{ij}(\gamma(t_0)) \right) \partial_k. \end{aligned} \tag{5.9}$$

Esto es único, si D_t existe.

Para ver la existencia, se define $D_t V(t_0)$ como en (5.9) en cada carta coordenada a lo largo de $\gamma(t)$. Por compacidad y unicidad se define en toda $\gamma(t)$. $\square$

Definición 50. *Sea* (M, g). *La* ***Aceleración*** *de una curva* $\gamma : (a, b) \to M$ *es el campo vectorial a lo largo de* γ *dado por* $D_t(\dot{\gamma})$. *Una curva es una* ***Geodésica****, si tiene aceleración cero. Es decir,*

$$D_t \left(\frac{d\gamma}{dt} \right) = 0, \forall t. \tag{5.10}$$

Sea γ *una geodésica, en coordenadas locales* (x^i) *de una vecindad abierta de* γ, $U \subseteq M$. γ *se expresa* $\gamma(t) = (x^1(t), ..., x^d(t))$, *por lo tanto, la ecuación* (5.10) *se expresa:*

$$\begin{aligned} D_t \left(\frac{d\gamma}{dt} \right) &= \left(\frac{dx^k}{dt^2} + \Gamma^k_{ij}(t) \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt} \right) \frac{\partial}{\partial x^k} \\ &= \left(\ddot{x}^k(t) + \Gamma^k_{ij}(x(t)) \dot{x}^i(t) \dot{x}^j(t) \right) = 0. \end{aligned} \tag{5.11}$$

Este es un sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden en M y con el cambio de variable $y^i = \dot{x}^i$ obtenemos,

$$\begin{aligned} \dot{x}^k &= y^k \\ \dot{y}^k &= -\Gamma^k_{ij}(x(t))y^i(t)y^j(t), \end{aligned} \tag{5.12}$$

el cual es un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden en TM. Al campo vectorial en TM definido por el sistema de ecuaciones diferenciales anterior, se le llama **Spray Geodésico**.

Teorema 20. *Sea (M, g) una variedad Riemanniana. Dado $x \in M$ y $v \in T_xM$, existe una única geodésica $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to M$ tal que $\gamma(0) = x$ y $\dot{\gamma}(0) = v$.*

Demostración. Tomemos coordenadas locales (x^i) en un abierto trivializante $U \subseteq M$, entonces $\forall(x, v) \in U \times \mathbb{R}^d$. Por el teorema de existencia unicidad de EDO, sabemos que existe $\epsilon > 0$ y una única solución, $\tilde{\gamma} : (-\epsilon, \epsilon) \to TU \subseteq TM$ que satisface la ecuación del spray geodésico con condiciones iniciales x, v. Sea $\gamma(t) = \pi \circ \tilde{\gamma}(t)$, donde $\pi : TM \to M$, $v_x \mapsto x$. Por construcción, γ cumple con las propiedades deseadas. $\square$

Definición 51. *Por el teorema 20 tenemos que $\tilde{\gamma} : (-\epsilon, \epsilon) \to TM$ está dado en un abierto trivializante por*

$$\tilde{\gamma}(t) = (\gamma(t), \dot{\gamma}(t)), \tag{5.13}$$

*donde γ es una géodesica. $\tilde{\gamma}$ induce una pseudoacción sobre TM, $g^t : (-\epsilon, \epsilon) \times TM \to TM$; $(t, v_x) \mapsto \tilde{\gamma}(t)$. Esto es el flujo generado por el spray geodésico y se llama **Flujo Geodésico** de M.*

Observación 4. *Como veremos más adelante las orbitas del flujo geodésico resultan estar definidas en todo $\mathbb{R}$. Por lo tanto, el flujo geodésico resulta ser un flujo completo, i.e. g^t define una acción de $\mathbb{R}$ en TM*

$$g^t : \mathbb{R} \times TM \to TM \tag{5.14}$$

5.2.2. Campos de Jacobi

Definición 52. *Una **Curva Regular por Pedazos o Curva Aadmisible** C^k es un mapa continuo $\gamma : [a, b] \to M$ y una inmersión de clase C^k en cada $[a_i, a_{i+1}]$ (como variedad con frontera) con $a = a_1 < a_2 < ... < a_{r-1} < a_r = b$. También consideraremos la curva $\gamma : \{a\} \to M$, $\gamma(a) = x$ como curva admisible.*

*Una **Familia de Curvas Admisibles** es un mapa continuo $\Gamma : (-\epsilon, \epsilon) \times [a, b] \to M$ tal que, $\Gamma_{s_0}(t) := \Gamma(s_0, t)$ es una curva admisible $\forall s_0 \in (-\epsilon, \epsilon)$.*

Toda familia de curvas admisibles define dos colecciones de curvas: Las **Curvas Principales** $\Gamma_{s_0}(t) := \Gamma(s_0, t)$ definidas en $[a, b]$ fijando s_0 constante y las **Curvas Transversales** $\Gamma^{t_0}(s) :=$

$\Gamma(s, t_0)$ definidas en $(-\epsilon, \epsilon)$ fijando t_0. Las curvas principales son de clase C^k por pedazos, mientras que, las transversales son de clase C^k en $(-\epsilon, \epsilon)$. Cuando Γ es diferenciable en todo $(-\epsilon, \epsilon) \times [a, b]$ (visto como variedad con frontera), entonces los campos vectoriales tangentes a lo largo de las dos familias de curvas $\partial_t \Gamma(s,t) = \dfrac{d}{dt}\Gamma_s(t)$ y $\partial_s \Gamma(s,t) = \dfrac{d}{ds}\Gamma^t(s)$ forman campos vectoriales a lo largo de Γ.

Si V es un campo vectorial a lo largo de Γ, podemos calcular las derivadas covariantes $D_t V$ y $D_s V$ a lo largo de las curvas principales y transversales, respectivamente.

Lema 12. *Sea $\Gamma : (-\epsilon, \epsilon) \times [a, b] \to M$ una familia de curvas admisibles en una variedad Riemanniana, entonces para cada $(-\epsilon, \epsilon) \times (a_i, a_{i+1})$ se tiene:*

$$D_t \partial_s \Gamma = D_s \partial_t \Gamma \tag{5.15}$$

Demostración. Tomemos coordenadas alrededor de $\Gamma(s_0, t_0)$, entonces en una vecindad de este punto, Γ se ve: $\Gamma(s,t) = (x^1(s,t), ..., x^n(s,t))$, por lo tanto,

$$\begin{aligned} \partial_t \Gamma &= \frac{\partial x^k}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x^k} = \frac{\partial x^k}{\partial t}\partial_k \\ \partial_s \Gamma &= \frac{\partial x^k}{\partial s}\partial_k. \end{aligned} \tag{5.16}$$

Tomando derivada covariante de los campos $\partial_t \Gamma$ y $\partial_s \Gamma$ a lo largo de las curvas $\Gamma^t(s)$ y$\Gamma_s(t)$, respectivamente:

$$\begin{aligned} D_t \partial_s \Gamma &= \left(\frac{\partial^2 x^k}{\partial s \partial t} + \frac{\partial x^i}{\partial t}\frac{\partial x^j}{\partial s}\Gamma^k_{ji} \right) \partial_k \\ D_s \partial_t \Gamma &= \left(\frac{\partial^2 x^k}{\partial t \partial s} + \frac{\partial x^i}{\partial s}\frac{\partial x^j}{\partial t}\Gamma^k_{ji} \right) \partial_k \\ &= \left(\frac{\partial^2 x^k}{\partial s \partial t} + \frac{\partial x^i}{\partial t}\frac{\partial x^j}{\partial s}\Gamma^k_{ij} \right) \partial_k, \end{aligned} \tag{5.17}$$

y por la simetría de $\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji}$, ambas expresiones son iguales. □

Definición 53. *Sea $\gamma : [a, b] \to M$ una curva admisible. Una **Variación** de γ es una familia de curvas admisibles Γ tal que $\Gamma_0(t) = \gamma(t)$ $\forall t \in [a, b]$. Se llama **Propia** si $\Gamma_s(a) = \gamma(a)$ y $\Gamma_s(b) = \gamma(b)$ $\forall s$. Si Γ es una variación de γ, el **Campo de Variación** de Γ es el campo vectorial $V(t) = \dfrac{\partial}{\partial s}\Gamma(0, t)$ a lo largo de γ. Esto es, el campo definido por el vector velocidad de las curvas transversales en $s = 0$.*

Sea $\gamma : [a, b] \to M$ un segmento de geodésica y sea $\Gamma : (-\epsilon, \epsilon) \times [a, b] \to M$ una variación de γ. Γ es **Variación por Geodésicas** si $\forall s \in (-\epsilon, \epsilon)$, $\Gamma_s(t)$ es una geodésica. Denotemos por $T(s, t) :=$

$\dfrac{\partial}{\partial t}\Gamma(s,t)$ y $S(s,t) := \dfrac{\partial}{\partial s}\Gamma(s,t)$, entonces la ecuación del spray geodésico nos dice: $D_t T = 0$. Por lo tanto, tomando derivada covariante con respecto a s tenemos $D_s D_t T = 0$.

Lema 13. *Si Γ es cualquier familia de curvas admisibles y V es un campo vectorial a lo largo de Γ entonces:*

$$D_s D_t V - D_t D_s V = R(S,T)V, \tag{5.18}$$

donde R es el endomorfismo de curvatura.

Demostración. Como este hecho es local, tomemos un abierto $U \subseteq M$ y coordenadas locales (x^i) en U. Entonces en U, $V(s,t) = V^i(s,t)\dfrac{\partial}{\partial x^i}$

$\Rightarrow$

$$D_t V = D_t V^i \frac{\partial}{\partial x^i} = \frac{\partial V^i}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x^i} + V^i D_t \frac{\partial}{\partial x^i}$$

$\Rightarrow$

$$D_s D_t V = \frac{\partial^2 V^i}{\partial s \partial t}\frac{\partial}{\partial x^i} + \frac{\partial V^i}{\partial t} D_s \frac{\partial}{\partial x^i} + \frac{\partial V^i}{\partial s} D_t \frac{\partial}{\partial x^i} + V^i D_s D_t \frac{\partial}{\partial x^i}$$

Análogamente,

$$D_t D_s V = \frac{\partial^2 V^i}{\partial t \partial s}\frac{\partial}{\partial x^i} + \frac{\partial V^i}{\partial s} D_t \frac{\partial}{\partial x^i} + \frac{\partial V^i}{\partial t} D_s \frac{\partial}{\partial x^i} + V^i D_t D_s \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Restando

$$D_s D_t V - D_t D_s V = V^i \left(D_s D_t \frac{\partial}{\partial x^i} - D_t D_s \frac{\partial}{\partial x^i} \right) \tag{5.19}$$

Sean $x^j(s,t)$ las funciones coordenadas de $\Gamma(s,t)$ en U, entonces

$$\begin{aligned} T &= \frac{\partial}{\partial t}\Gamma(s,t) = \frac{\partial x^j}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x^j} \\ S &= \frac{\partial}{\partial s}\Gamma(s,t) = \frac{\partial x^k}{\partial s}\frac{\partial}{\partial x^k}. \end{aligned} \tag{5.20}$$

Como $\dfrac{\partial}{\partial x^i}$ son campos extendibles a todo $U \subseteq M$

$\Rightarrow$

$$D_t \frac{\partial}{\partial x^i} = \nabla_T \frac{\partial}{\partial x^i} = \nabla_{\frac{\partial x^j}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial x^i} = \frac{\partial x^j}{\partial t} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial x^i}$$

y como $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \dfrac{\partial}{\partial x^i}$ también son extendibles,

$$\begin{aligned}
\Rightarrow D_s D_t \frac{\partial}{\partial x^i} &= \nabla_S \left(\frac{\partial x^j}{\partial t} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial x^i} \right) = S\left(\frac{\partial x^j}{\partial t} \right) \cdot \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial x^i} + \frac{\partial x^j}{\partial t} \left(\nabla_S \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial x^i} \right) \\
&= \frac{\partial x^k}{\partial s} \frac{\partial}{\partial x^k} \left(\frac{\partial x^j}{\partial t} \right) \cdot \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial x^i} \right) + \frac{\partial x^j}{\partial t} \left(\nabla_{\frac{\partial x^k}{\partial s} \frac{\partial}{\partial x^k}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial x^i} \right) \\
&= \frac{\partial^2 x^j}{\partial s \partial t} \cdot \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial x^i} \right) + \frac{\partial x^j}{\partial t} \frac{\partial x^k}{\partial s} \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^k}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial x^i} \right). \qquad (5.21)
\end{aligned}$$

Análogamente, tenemos que:

$$D_t D_s \frac{\partial}{\partial x^i} = \frac{\partial^2 x^k}{\partial t \partial s} \cdot \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^k}} \frac{\partial}{\partial x^i} \right) + \frac{\partial x^k}{\partial s} \frac{\partial x^j}{\partial t} \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^k}} \frac{\partial}{\partial x^i} \right). \qquad (5.22)$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
D_s D_t \frac{\partial}{\partial x^i} - D_t D_s \frac{\partial}{\partial x^i} &= \frac{\partial x^j}{\partial t} \frac{\partial x^k}{\partial s} \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^k}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial x^i} - \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^k}} \frac{\partial}{\partial x^i} \right) \\
= \frac{\partial x^j}{\partial t} \frac{\partial x^k}{\partial s} R\left(\frac{\partial}{\partial x^k}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right) \frac{\partial}{\partial x^i} &= R\left(\frac{\partial x^k}{\partial s} \frac{\partial}{\partial x^k}, \frac{\partial x^j}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x^j} \right) \frac{\partial}{\partial x^i} = R(S,T) \frac{\partial}{\partial x^i}. \qquad (5.23)
\end{aligned}$$

Finalmente, sustituyendo esta última igualdad en (5.11), tenemos que

$$D_s D_t V - D_t D_s V = V^i \left(D_s D_t \frac{\partial}{\partial x^i} - D_t D_s \frac{\partial}{\partial x^i} \right) = V^i \left(R(S,T) \frac{\partial}{\partial x^i} \right) = R(S,T)V. \qquad (5.24)$$

□

Teorema 21. *Sea γ una geodésica y V un campo vectorial a lo largo de γ. Si V es un campo de variación de una variación por geodésicas de γ, entonces V satisface :*

$$D_t^2 V + R(V, \dot{\gamma})\dot{\gamma} = 0. \qquad (5.25)$$

Demostración. Como V es campo de variación de una variación por geodésicas de γ, tenemos que: $\Gamma_0(t) = \gamma(t)$, $S(0,t) = (\partial_s \Gamma)(0,t) = V(t)$ y $T(s,0) = \partial_t \Gamma(s,0) = \dot{\gamma}(t)$. Como γ es geodésica entonces,

$$0 = D_s D_t T = D_t D_s T + R(S,T)T = D_t D_t S + R(S,T)T = D_t^2 V + R(V, \dot{\gamma})\dot{\gamma}. \qquad (5.26)$$

□

Definición 54. *Cualquier campo vectorial a lo largo de una geodésica γ que satisfaga la ecuación anterior se llama **Campo de Jacobi**.*

Proposición 36. *Todo Campo de Jacobi a lo largo de una geodésica γ es el campo de variación de alguna variación por geodésicas de γ.*

Teorema 22 (Existencia y Unicidad de campos de Jacobi)**.** *Sea $\gamma : I \to M$ una geodésica $a \in I$ y $x = \gamma(a)$. Para todo par de vectores $X, Y \in T_xM$, $\exists!$ campo de Jacobi J a lo largo de γ tal que, satisface las siguientes condiciones iniciales: $J(a) = X$ y $D_tJ(a) = Y$.*

Demostración. Tomemos una base ortonormal para T_xM y la extendemos paralelamente a lo largo de γ. Entonces $J(t) = J^i(t)E_i(t)$ $\therefore$ La ecuación de Jacobi es:

$$\ddot{J} + R^i_{jkl}J\dot{\gamma}^k\dot{\gamma}^l = 0, \tag{5.27}$$

el cual, es un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de segundo orden en M. Transformando a un sistema de EDO lineal de primer orden en TM con el clásico cambio de variables $\dot{J}^i = V^i$, tenemos que $\exists \left\{J^i(t), V^i(t)\right\}_{i=1}^n$ soluciones linealmente independientes para el sistema de ecuaciones y una única solución, que además, cumple con las condiciones iniciales dadas. □

Observación 5. *Como $D_t\dot{\gamma} = 0$ y como $R(\dot{\gamma}, \dot{\gamma})\dot{\gamma} = 0$ (pues R es antisimétrico) tenemos que, $J_0(t) = \dot{\gamma}(t)$ es un campo de Jacobi con condiciones iniciales $J_0(0) = \dot{\gamma}(0)$ y $D_tJ_0(t) = 0$.*

También, $J_1(t) = t\dot{\gamma}(t)$ es un campo de Jacobi con condiciones iniciales $J_1(0) = 0$ y $D_tJ_1(t) = \dot{\gamma}(0)$.

Corolario 22. *Sea $\mathcal{J}ac(\gamma) \subseteq \mathcal{T}(\gamma)$ el subespacio vectorial de campos de Jacobi a lo largo de una geodésica γ con $\gamma(0) = x$. Entonces, $\mathcal{J}ac(\gamma)$ tiene dimensión $2d$.*

Definición 55. *Un **Campo Tangencial** a lo largo de la curva γ es un campo verctorial V tal que $V(t)$ es un múltiplo de $\dot{\gamma}(t)$ $\forall t$.*

*Un **Campo Normal** es aquel que $V(t) \perp \dot{\gamma}(t) \forall t$.*

Proposición 37. *Sea (M, g) una variedad Riemanniana completa con curvatura seccional K constante, y consideremos que las geodésicas en M tienen velocidad uno. Entonces, los Campos de Jacobi Normales a lo largo de una geodésica γ con condición inicial $t = 0$ están dados por:*

$$J(t) = \begin{cases} sen(t\sqrt{K})E(t) & si\ K > 0 \\ tE(t) & si\ K = 0 \\ senh(t\sqrt{-K})E(t) & si\ K < 0, \end{cases}$$

donde $E(t)$ es un campo paralelo y ortogonal a $\dot{\gamma}$ a lo largo de γ.

Demostración. Basta probarlo por cartas coordenadas, por lo tanto, supongamos que γ está contenida en una carta coordenada. Por la propoción 34, el teorema 21 y usando que $\left\langle \dot{\gamma}, \dot{\gamma} \right\rangle = 1$ y $\left\langle J, \dot{\gamma} \right\rangle = 0$, tenemos que

$$0 = D_t^2J + R(J, \dot{\gamma})\dot{\gamma} = D_t^2J + K\left(\left\langle \dot{\gamma}, \dot{\gamma} \right\rangle J - \left\langle J, \dot{\gamma} \right\rangle \dot{\gamma}\right) = D_t^2J + KJ. \tag{5.28}$$

Tomemos un campo normal paralelo, $E(t)$, a lo largo de $\gamma \Rightarrow D_tE(t) = 0$. Entonces, $J(t) = w(t)E(t)$

$$\Leftrightarrow D_t^2 w(t)E(t) = -K\,(w(t)E(t))$$
$$\Leftrightarrow \frac{\partial^2 w(t)}{\partial t^2}E(t) = -K\,(w(t)E(t))$$
$$\Leftrightarrow \frac{\partial^2 w(t)}{\partial t^2} = -K \cdot w(t)$$

Esta última igualdad es una EDO cuya solución con condición inicial $w(0) = 0$, está determinada de manera única, dependiendo de K de la siguiente manera,

$$w(t) = \begin{cases} sen(t\sqrt{K}) & si\ K > 0 \\ t & si\ K = 0 \\ senh(t\sqrt{-K}) & si\ K < 0 \end{cases} \tag{5.29}$$

con lo que tenemos el resultado deseado. □

5.2.3. Puntos Conjugados

Definición 56. *Sea $\gamma : I \to M$ una geodésica y sea $t_0 \in I$. El punto $\gamma(t_0)$ es **Conjugado** con $\gamma(0)$ a lo largo de γ, si existe un campo de Jacobi $J \neq 0$, a lo largo de γ tal que $J(0) = 0 = J(t_0)$.*

5.2.4. Métrica de Sasaki e Identificación de $\mathbf{T_{(x,v)}TM}$ con $\mathbf{Jac}(\gamma_{\mathbf{v}})$

Definición 57. *Sea TTM el haz tangente del haz tangente TM de M. Definamos el mapa $\mathcal{K} : TTM \to TM$ de la siguiente manera. Para $\xi \in T_{v_x}TM$ tomemos una curva suave γ en TM tal que $\dot{\gamma}(0) = \xi$. Sea $\alpha(t) = \pi \circ \gamma(t)$ la proyección de la curva γ a M donde $\pi : TM \to M$. Pensemos a $\gamma \in \mathcal{X}(\alpha)$, es decir, como $\gamma \subseteq TM$ puede ser pensado como un campo vectorial a lo largo de α. Entonces, definamos $\mathcal{K}(\xi) = \nabla_{\dot{\alpha}}\gamma\mid_{t=0} = D_t\gamma\mid_{t=0}$. A $\mathcal{K}$ lo llamaremos **Mapeo de Conexión**.*

*El **Subhaz Horizontal** $H \to TM$ está definido como: $H = Ker(\mathcal{K}) = \{\xi \in TTM \mid \mathcal{K}(\xi) = 0\}$, donde cada fibra H_{v_x} es el subespacio vectorial de $T_{v_x}TM$ dado por:*

$$H_{v_x} = \left\{(\sigma \circ \alpha)_*(0) \in T_{v_x}TM \mid (\sigma \circ \alpha)(0) = v_x; (\nabla_{\dot{\alpha}}\sigma)_{|_{t=0}} = 0\right\}. \tag{5.30}$$

*En la ecuación anterior, α es una curva suave en M y σ es una sección de TM. El **Subhaz Vertical** $V \to TM$ está definido como: $V = Ker(\pi_*) = \{\xi \in TTM \mid \pi_*(\xi) = \mathbf{0}\}$, donde $\pi : TM \to M$.*

Proposición 38. *El haz TTM es la suma de Whitney de V y H.*

Demostración. Sea $\mathbf{0} : TM \to TTM$ la sección cero. Primero veamos que $\{\mathbf{0}\} = V \cap H$. Para esto, tomemos $\xi \in V \cap H$. En particular, $\xi \in T_{v_x}TM$ para algún $v_x \in TM$.

Sea $\epsilon > 0$ y $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to TM$ tal que $\gamma(0) = v_x$ y $\dot{\gamma}(0) = \xi$. Pensemos a $\gamma \in \mathcal{X}(\pi \circ \gamma)$. Tomemos un abierto trivializante U de x en M. Tomando ϵ suficientemente pequeño, podemos suponer que $\gamma(t) \in \pi^{-1}(U) \cong U \times \mathbb{R}^d$ $\forall t \in (-\epsilon, \epsilon)$. Ahí γ tiene la siguiente forma:

$$\gamma(t) = (x(t), v(t)). \tag{5.31}$$

Ahora, como $\xi \in H \Rightarrow \mathcal{K}(\xi) = 0$, esto es $0 = (\nabla_{\pi \dot{\circ} \gamma} \gamma)(0) \Rightarrow \gamma$ es un campo paralelo a lo largo de $\pi \circ \gamma$. Entonces, tenemos que γ es constante a lo largo de la curva $x(t)$ $\therefore$ en $\pi^{-1}(U)$, $\gamma(t) = (x(t), v(0))$ $\forall t \in (-\epsilon, \epsilon)$.

Por otro lado, como $\xi \in V$ tenemos que,

$$0 = \pi_{*v_x}(\xi) = \pi_{*v_x}(\dot{\gamma}(0)) = \pi_{*\gamma(0)}(\gamma_{*0}(\frac{\partial}{\partial t})) = (\pi \circ \gamma)_{*0}(\frac{\partial}{\partial t}) = x_{*0}(\frac{\partial}{\partial t})$$
$$\Rightarrow x(t) = x(0). \tag{5.32}$$

Con esto concluimos que γ es constante v_x, ie: $\gamma(t) = (x(0), v(0))$ $\forall t \in (-\epsilon, \epsilon)$, $\therefore \xi = \dot{\gamma}(0) = 0 \in T_{v_x}TM$.

Por último, notemos que $dim(H_{v_x}) = d$ pues es el espacio de campos paralelos a lo largo de $\pi \circ \gamma$, y claramente, $dim(V_{v_x}) = d$. Por otro lado, sabemos que $dim(T_{v_x}TM) = 2d$, $\therefore T_{v_x}TM = H_{v_x} \oplus V_{v_x}$. □

Definición 58. *Sea (M, g) una variedad Riemanniana y TM el haz tangente. Definamos la* ***Métrica de Sasaki*** *en TM dados $\xi, \zeta \in T_{(x,v)}TM$, $g_{TM}(\xi, \zeta) = g(\pi_*(\xi), \pi_*(\zeta)) + g(\mathcal{K}(\xi), \mathcal{K}(\zeta))$. Si pensamos a la métrica como un producto punto en cada tangente, podemos pensar a la métrica de Sasaki de la siguiente forma:*

$$\langle \xi, \zeta \rangle_{T_{(x,v)}TM} = \langle \pi_*(\xi), \pi_*(\zeta) \rangle_{T_xM} + \langle \mathcal{K}(\xi), \mathcal{K}(\zeta) \rangle_{T_xM}. \tag{5.33}$$

Proposición 39. *Sea γ_v la geodésica tal que $\gamma(0) = x$ y $\dot{\gamma}(0) = v$. Entonces $T_{(x,v)}TM$ es isomorfo a $Jac(\gamma_v)$, donde $Jac(\gamma_v)$ es el espacio de campos de Jacobi a lo largo de γ_v.*

Demostración. Consideremos la siguiente transformación lineal $\Theta : T_{(x,v)}TM \to Jac(\gamma_v)$, $\xi \mapsto J_v$, donde $J_\xi(t)$ es el único campo de Jacobi a lo largo de γ_v con condiciones iniciales $J_\xi(0) = \pi_*(\xi)$ y $\dot{J}_\xi(0) = \mathcal{K}(\xi)$. La proposición 38 y el teorema 22 demuestran que Θ es inyectiva y el corolario 22, que es suprayectiva. □

La proposición anterior es muy importante pues nos permite calcular el crecimiento del flujo geodésico $g^t : TM \hookleftarrow$ vía campos de Jacobi, ya que, si tomamos la métrica de Sasaki en TM tenemos la siguiente relación:

$$\left\| dg^t(\xi) \right\|^2 = \left\| J_\xi(t) \right\|^2 + \left\| \dot{J}_\xi(t) \right\|^2. \tag{5.34}$$

5.3. Dinámica del Flujo Geodésico

En esta sección estudiaremos las propiedades dinámicas del Flujo Geodésico sobre una variedad Riemanniana M.

5.3.1. Dinámica Lagrangiana

La dinámica Lagrangiana es de gran interés en áreas de Matemáticas Puras y Aplicadas, así como en la Física. Por ejemplo, en el Cálculo de Variaciones, Sistemas dinámicos, Ecuaciones Diferenciales, Geometría , Mecánica Clásica, entre otras. Ésta es una teoría muy amplia, que para fines de este trabajo, sólo se presentarán los conceptos más fundamentales y básicos. Por esto, sólo se considerará el caso de Lagrangianos Autónomos.

Definición 59. *Sea (M, g) una variedad Riemanniana completa con métrica $g_x(\cdot, \cdot)$. Un **Lagrangiano** definido en M, es una función suave*

$$\begin{aligned} L : TM &\to \mathbb{R} \\ (x, v) &\mapsto L(x, v), \end{aligned} \tag{5.35}$$

que cumple las siguientes propiedades:

1. **Superlinealidad:**
$$\lim_{\|v\|\to\infty} \frac{L(x, v)}{\|v\|} = \infty \tag{5.36}$$
uniformemente en $x \in M$, equivalentemente $\forall a \in \mathbb{R}$, $\exists b \in \mathbb{R}$ tal que:
$$L(x, v) \geqslant a \|v\| - b \forall (x, v) \in TM. \tag{5.37}$$

2. **Convexidad:** El Hessiano $\dfrac{\partial^2 L}{\partial v^i \partial v^j}(x, v)$ en coordenadas lineales sobre la fibra T_xM es uniformemente definido positivo $\forall (x, v) \in TM$. i.e. $\exists a > 0$ tal que:
$$\langle w, L_{vv}(x, v) \cdot w\rangle \geqslant a \|w\|^2 \tag{5.38}$$
$\forall\ (x, v) \in TM$ y $w \in T_xM$.

3. **Limitado** : $\forall r \geqslant 0$

$$
\begin{aligned}
\ell(r) &:= \sup_{\substack{(x,v)\in TM \\ \|v\|\leqslant r}} L(x,v) < \infty \\
h(r) &:= \sup_{\substack{\|(x,v)\|\leqslant r \\ \|w\|=1}} w \cdot L_{vv}(x,v) \cdot w < \infty.
\end{aligned}
\tag{5.39}
$$

Definición 60. *Para cualquier par de puntos $x_1, x_2 \in M$, denotemos por $C^k\left[x_1, x_2; T\right]$ al conjunto de curvas C^k, $\alpha : [0,T] \to M$, tal que $\alpha(0) = x_1$ y $\alpha(T) = x_2$.*

La ***Acción*** *de L sobre los caminos de x_1 a x_2 es el mapa:*

$$
\begin{aligned}
A : C^k\left[x_1, x_2; T\right] &\to \mathbb{R} \\
\alpha(t) &\mapsto \int_0^T L(\alpha(t), \dot{\alpha}(t))dt.
\end{aligned}
\tag{5.40}
$$

Nuestro siguiente objetivo es encontrar los **Puntos Críticos** de A, de donde deduciremos la ecuación de **Euler-Lagrange**.

Proposición 40. *Una curva $\alpha \in C^k\left[x_1, x_2; T\right]$ es un punto crítico de la acción A de L, entonces $\alpha(t)$ satisface la siguiente ecuación, llamada ecuación de Euler-Lagrange:*

$$
\frac{\partial L}{\partial x}(\alpha(t), \dot{\alpha}(t)) = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial v}(\alpha(t), \dot{\alpha}(t)),
\tag{5.41}
$$

en coordenadas locales. Consecuentemente, ésta ecuación no depende del sistema de coordenadas.

Demostración. Tomemos coordenadas locales (x^i) alrededor de $\alpha(t)$ y consideremos cualquier variación propia de $\alpha(t)$ de clase C^k $\tilde{\alpha} : (-\epsilon, \epsilon) \times [0,T] \to M$, para algún $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño tal que $\forall s \in (-\epsilon, \epsilon)$, $\tilde{\alpha}_s(t)$ esté dentro del sistema de coordenadas locales (x^i). (Notemos que $\tilde{\alpha}_s(t) \in C^k\left[x_1, x_2, T\right]$ $\forall s \in (-\epsilon, \epsilon)$).

Entonces $\alpha(t)$ es un punto crítico de $A \Leftrightarrow$

$$
\begin{aligned}
0 &= \frac{d}{ds}A(\tilde{\alpha}_s(t))_{|_{s=0}} = \int_0^T \frac{d}{ds}L(\tilde{\alpha}_s(t), \dot{\tilde{\alpha}}_s(t))_{|_{s=0}}dt \\
&= \int_0^T \left(\frac{d}{dx}L(\tilde{\alpha}_s(t), \dot{\tilde{\alpha}}_s(t)) \cdot \frac{d}{ds}\tilde{\alpha}_s(t) + \frac{d}{dv}L(\tilde{\alpha}_s(t), \dot{\tilde{\alpha}}_s(t)) \cdot \frac{d}{ds}\dot{\tilde{\alpha}}_s(t)\right)_{|_{s=0}}dt \\
&= \int_0^T \left(\frac{d}{dx}L(\tilde{\alpha}_s, \dot{\tilde{\alpha}}_s) \cdot \frac{d}{ds}\tilde{\alpha}_s + \frac{d}{dv}L(\tilde{\alpha}_s, \dot{\tilde{\alpha}}_s) \cdot \frac{d}{dt}\frac{d}{ds}\tilde{\alpha}_s\right)(t)_{|_{s=0}}dt.
\end{aligned}
\tag{5.42}
$$

Integrando por partes el segundo sumando, tenemos que :

$$\int_0^T \left(\frac{d}{dv} L(\widetilde{\alpha}_s, \dot{\widetilde{\alpha}}_s) \cdot \frac{d}{dt}\frac{d}{ds}\widetilde{\alpha}_s \right) dt =$$

$$= -\int_0^T \left(\frac{d}{dt}\frac{dL}{dv}(\widetilde{\alpha}_s, \dot{\widetilde{\alpha}}_s) \cdot \frac{d}{ds}\widetilde{\alpha}_s \right) dt + \left(\frac{dL}{dv}(\widetilde{\alpha}_s, \dot{\widetilde{\alpha}}_s) \cdot \frac{d}{ds}\widetilde{\alpha}_s \right) |_0^T,$$

pero como las curvas transversales en 0 y en T son constantes i.e. $\widetilde{\alpha}_s(0) = x_1$ y $\widetilde{\alpha}_s(T) = x_1 \quad \forall s$, tenemos que $\frac{d}{ds}\widetilde{\alpha}_s(0) = 0$ y $\frac{d}{ds}\widetilde{\alpha}_s(T) = 0$, y por tanto, $\left(\frac{dL}{dv}(\widetilde{\alpha}_s, \dot{\widetilde{\alpha}}_s) \cdot \frac{d}{ds}\widetilde{\alpha}_s \right) |_0^T = 0$.

Con esto concluimos que,

$$\int_0^T \left(\frac{dL}{dv}(\widetilde{\alpha}_s, \dot{\widetilde{\alpha}}_s) \cdot \frac{d}{dt}\frac{d}{ds}\widetilde{\alpha}_s \right) dt = -\int_0^T \left(\frac{d}{dt}\frac{dL}{dv}(\widetilde{\alpha}_s, \dot{\widetilde{\alpha}}_s) \cdot \frac{d}{ds}\widetilde{\alpha}_s \right) dt \tag{5.43}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} 0 = (5.42) &= \int_0^T \left(\frac{dL}{dx}(\widetilde{\alpha}_s, \dot{\widetilde{\alpha}}_s) \cdot \frac{d}{ds}\widetilde{\alpha}_s - \frac{d}{dt}\frac{dL}{dv}(\widetilde{\alpha}_s, \dot{\widetilde{\alpha}}_s) \cdot \frac{d}{ds}\widetilde{\alpha}_s \right)(t)_{|_{s=0}} dt \\ &= \int_0^T \left(\frac{\partial L}{\partial x}(\alpha(t), \dot{\alpha}(t)) - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial v}(\alpha(t), \dot{\alpha}(t)) \right) \left(\frac{d}{ds}\widetilde{\alpha}_s(t)_{|_{s=0}} \right) dt \end{aligned} \tag{5.44}$$

Como la elección de la variación $\widetilde{\alpha}_s(t)$ fue arbitraria, la conclusión anterior se cumple para todo campo variacional $\frac{d}{ds}\widetilde{\alpha}_s(t)_{|_{s=0}}$ a lo largo de α, y por lo tanto, tenemos que la igualdad anterior se da si y sólo si

$$\frac{\partial L}{\partial x}(\alpha(t), \dot{\alpha}(t)) - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial v}(\alpha(t), \dot{\alpha}(t)) = 0. \tag{5.45}$$

□

La ecuación de **Euler-Lagrange** asociada a un Lagrangiano L en coordenadas locales induce una EDO de segundo orden en M dada por:

$$\frac{\partial L}{\partial x}(x, \dot{x}) = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial v}(x, \dot{x}) = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial L}{\partial v}(x, \dot{x}) \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial^2 L}{(\partial v)^2}(x, \dot{x})\frac{\partial \dot{x}}{\partial t}. \tag{5.46}$$

Esto es,

$$L_x(x, \dot{x}) = L_{xv}(x, \dot{x}) \cdot \dot{x} + L_{vv}(x, \dot{x}) \cdot \ddot{x} \tag{5.47}$$

Recordemos que $\ddot{x} = D_t\dot{x}$.

Definición 61. *De la convexidad de L tenemos que L_{vv} es invertible. Esto implica que, la EDO de segundo orden anterior, la podemos transformar en la siguiente EDO de primer orden en TM:*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v \\ \dot{v} &= (L_{vv})^{-1}(L_x - L_{xv} \cdot v) \end{aligned} \tag{5.48}$$

Por tanto, la ecuación de Euler-Lagrange define un flujo φ^t *en* TM *dado por* $\varphi^t(x_0, v_0) = (x_v(t), \dot{x}_v(t))$*, llamado el* ***Flujo de Euler-Lagrange*** *donde* $x_v : (a,b) \to M$ *es la solución a la ecuación* (5.48) *con condiciones iniciales* $x_v(0) = x_0$ *y* $\dot{x}_v(0) = v_0$.

Ejemplo 8. *Sea* $M = \mathbb{R}^d$ *y* $V : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ *una función suave acotada y* $m > 0$*. Definamos el mapa:* $L(x,v) = \frac{1}{2}m\langle v, v\rangle - V(x)$*, que es un Lagrangiano.*

1. $$\lim_{\|v\|\to\infty} \frac{L(x,v)}{\|v\|} = \lim_{\|v\|\to\infty} \frac{\frac{1}{2}m\langle v,v\rangle - V(x)}{\|v\|} = \frac{1}{2}m\left(\lim_{\|v\|\to\infty}\|v\|\right) - \lim_{\|v\|\to\infty}\frac{V(x)}{\|v\|} = \infty$$

   $\therefore$ *L es superlineal.*

2. $$\frac{\partial L}{\partial v^j}(x,v) = \frac{\partial}{\partial v^j}(\frac{1}{2}m\langle v,v\rangle - V(x)) = m\sum_{j=1}^{d} v^j$$

   $\Rightarrow$

   $$\frac{\partial^2 L}{\partial v^i \partial v^j}(x,v) = m \cdot \frac{\partial}{\partial v^i}\sum_{j=1}^{d} v^j = m\delta_{ij}$$

   i.e. la matriz Hessiana $L_{vv}(x,v) = m \cdot Id$ *y como* $m > 0$*, tenemos que* $\dfrac{\partial^2 L}{\partial v^i \partial v^j}$ *es positivo definido.* $\therefore$ *L es convexo.*

3. $\forall r \geqslant 0$

   $$\ell(r) = \sup_{\substack{(x,v)\in\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d \\ \|v\|\leqslant r}} L(x,v) = \sup_{\substack{(x,v)\in\mathbb{R}^{2d} \\ \|v\|\leqslant r}} \frac{1}{2}m\langle v,v\rangle - V(x) < \frac{1}{2}mr^2 - \sup_{x\in\mathbb{R}^d} V(x) < \infty$$

   $$h(r) = \sup_{\substack{\|(x,v)\|\leqslant r \\ \|w\|=1}} \langle w, L_{vv}(x,v)w\rangle = \sup_{\substack{\|(x,v)\|\leqslant r \\ \|w\|=1}} \langle w, (m\cdot Id)w\rangle = m\langle w,w\rangle = m < \infty$$

   $\therefore$ *L es limitado.*

Por (5.48) tenemos que, la ecuación de Euler-Lagrange en TM de este Lagrangiano es

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v \\ \dot{v} &= \tfrac{1}{m}\left(\frac{\partial V}{\partial x}(x)\right) \end{aligned} \tag{5.49}$$

y se le conoce como ecuación de Newton, pues si denotamos por $f(x) := \dfrac{\partial V}{\partial x}(x)$ recuperamos la segunda ley de Newton en mecánica clásica.

$$f(x) = m\ddot{x}. \tag{5.50}$$

Ejemplo 9. *Sea M variedad Riemanniana completa y $V : M \to \mathbb{R}$ una función suave acotada. Definimos $L(x,v) = \frac{1}{2}k_x(v,v) - V(x)$ donde $\frac{1}{2}k_x(v,v)$ es una forma cuadrática positiva definida en TM.*

*A la forma cuadrática k se le conoce como **Energía Cinética** y a la función V como **Energía Potencial**.*

1. *Recordemos que la métrica Riemanniana induce en T_xM un producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_x$ $\forall x$. Además, $k_x(\cdot,\cdot)$ es continuo, por lo tanto, tenemos que k_x alcanza su mínimo al restingirnos al compacto S^{d-1}, es decir:*
$$\underset{\|v\|=1}{inf}\, k_x(v,v) = c. \tag{5.51}$$
Notemos que $c > 0$ pues k_x es positivo definido.
$\Rightarrow k_x(\frac{v}{\|v\|}, \frac{v}{\|v\|}) \geqslant c$, $\forall v \neq 0$, $\Rightarrow k_x(v,v) \geqslant c\,\|v\|^2$, $\forall v \in T_xM$, *entonces,*
$$\underset{\|v\|\to\infty}{lim} \frac{L(x,v)}{\|v\|} = \underset{\|v\|\to\infty}{lim} \frac{\frac{1}{2}k_x(v,v) - V(x)}{\|v\|} \geqslant \frac{1}{2}c\left(\underset{\|v\|\to\infty}{lim} \|v\|\right) - \underset{\|v\|\to\infty}{lim} \frac{V(x)}{\|v\|} = \infty \tag{5.52}$$
$\therefore$ *L es superlineal.*

2. *Una vez fija la base $\{v^i\}$ en T_xM, k_x tiene la siguiente expresión matricial $k_x = (k_x)_{ji}$, donde $(k_x)_{ji} := k_x(v^j, v^i)$.*
$$\frac{\partial L}{\partial v^j}(x,v) = \frac{\partial}{\partial v^j}(\frac{1}{2}k_x(v,v) - V(x)) = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial v^j}\sum_{k,l}(k_x)_{kl}v^k v^l = \frac{1}{2}2\cdot\sum_{l=1}^{d}(k_x)_{jl}v^l = k_x(v,\cdot)$$
$\Rightarrow$
$$\frac{\partial^2 L}{\partial v^i \partial v^j}(x,v) = \frac{\partial}{\partial v^i}\sum_{l=1}^{d}(k_x)_{jl}v^l = (k_x)_{ji} = k_x(v,v)$$
que es positivo definido ya que k_x lo es.

$\therefore$ *L es convexo.*

3. $\forall r \geqslant 0$
$$\ell(r) = \underset{\substack{(x,v)\in TM \\ \|v\|\leqslant r}}{sup} L(x,v) = \underset{\substack{(x,v)\in \mathbb{R}^{2d} \\ \|v\|\leqslant r}}{sup} \left(\frac{1}{2}k_x(v,v) - V(x)\right) < \frac{1}{2}\|k_x\|_\infty r^2 - \underset{x\in\mathbb{R}^d}{sup} V(x) < \infty$$

donde, $\|k_x\|_\infty =: \sup_{\|u\|,\|v\|=1} |k_x(u,v)|$.

$$h(r) = \sup_{\substack{\|(x,v)\|\leqslant r\\ \|w\|=1}} \langle w, L_{vv}(x,v)w\rangle = \sup_{\substack{\|(x,v)\|\leqslant r\\ \|w\|=1}} \langle w, (k_x)_{ji} w\rangle \leqslant \|k_x\|_\infty \langle w,w\rangle = \|k_x\|_\infty < \infty$$

$\therefore$ *L es limitado.*

Definición 62. *La **Función de Energía** del Lagrangiano L, $E : TM \to \mathbb{R}$, está definida por*

$$E(x,v) = \frac{\partial L}{\partial v}(x,v)\cdot v - L(x,v). \tag{5.53}$$

Proposición 41. *Sea $x(t)$ solución a la ecuación de Euler-Lagrange, entonces $\dfrac{d}{dt}E(x,\dot{x}) = 0$ y, por lo tanto, $E : TM \to \mathbb{R}$ es invariante bajo el flujo lagrangiano φ^t. En consecuencia los conjuntos de nivel $E^{-1}(c)$, llamados Niveles de Energía, son invariantes bajo φ^t.*

Demostración. Como $x(t)$ satisface $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial v}(x,\dot{x}) = \frac{\partial L}{\partial x}(x,\dot{x})$ tenemos,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}E(x,\dot{x}) &= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial v}(x,\dot{x})\cdot\dot{x} - L(x,\dot{x})\right)\\
&= \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial v}(x,\dot{x})\cdot\dot{x} + \frac{\partial L}{\partial v}(x,\dot{x})\cdot\ddot{x} - \frac{\partial L}{\partial x}(x,\dot{x})\cdot\dot{x} - \frac{\partial L}{\partial v}(x,\dot{x})\cdot\ddot{x}\\
&= \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial v}(x,\dot{x}) - \frac{\partial L}{\partial x}(x,\dot{x})\right)\cdot\dot{x} = 0.
\end{aligned} \tag{5.54}$$

Esto implica que E es constante en las órbitas del flujo φ^t i.e. $E(x,v) = c\ \forall (x,v) \in \mathcal{O}_{\varphi^t}(x(t),\dot{x}(t))$, y por tanto, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc}
TM & \xrightarrow{\varphi^t} & TM\\
 & \searrow_{E} & \downarrow E\\
 & & \mathbb{R}
\end{array}$$

De aquí, fácilmente podemos concluir que, para toda fibra $E^{-1}(c)$, $\varphi^t\left(E^{-1}(c)\right) = E^{-1}(c)$. □

El siguiente Lagrangiano es un caso particular del ejemplo 9, pero es de gran importancia, pues su flujo de Euler-Lagrange coincide con el flujo geodésico. Se trata del caso en que la forma cuadrática $k_x(v,v)$ está dada por la métrica Riemanniana de M y cuando la energía potencial es cero.

Ejemplo 10. *Sea M variedad Riemanniana completa. Consideremos el Lagrangiano $L(x,v) = \frac{1}{2}g_x(v,v) = \frac{1}{2}\|v\|_x^2$, donde $g_x(v,v)$ es la métrica Riemanniana.*

La ecuación (5.48) implica que, el campo vectorial de Euler-Lagrange está dado por:

$$D_t\dot{x} = 0, \tag{5.55}$$

el cual genera al fujo geodésico g^t en TM (definición 50).

Por otro lado, $\frac{\partial L}{\partial v}(x,v)\cdot v = \dfrac{\partial}{\partial v}\frac{1}{2}\|v\|_x^2 \cdot v = \frac{1}{2}2\|v\|_x \dfrac{v}{\|v\|_x}\cdot v = \|v\|_x^2$; luego, la energía asociada a L es:

$$E(x,v) = \|v\|_x^2 - \frac{1}{2}\|v\|_x^2 = \frac{1}{2}\|v\|_x^2, \tag{5.56}$$

de donde concluimos que, los niveles de energía $E^{-1}(c)$ son los haces tangentes de esferas

$$\left\{v_x \in TM : \|v_x\|^2 = 2c\right\} \tag{5.57}$$

La proposición anterior nos garantiza que toda la dinámica del flujo geodésico ocurre en los niveles de energía $E^{-1}(c)$. Es decir, para estudiar la dinámica del flujo geodésico basta restringirnos a cualquier $E^{-1}(c)$, pues las órbitas permanecen en estos y la dinámica en la dirección transversal a los niveles de energía es trivial. En particular, es útil y estándar restringir el estudio de la dinámica del flujo geodésico al haz tangente unitario $SM = E^{-1}(\frac{1}{2})$.

El último resultado de esta sección será ver que el flujo de Euler-Lagrange de una variedad Riemanniana completa está definido para todo $t \in \mathbb{R}$, para esto ocuparemos el siguiente lema.

Lema 14.

$$E(x,v) \geqslant= -\ell(0) + A\frac{\|v\|^2}{2}, \tag{5.58}$$

donde $A := \underset{\substack{(x,v)\in TM \\ \|w\|=1}}{inf} \langle L_{vv}(x,v)\cdot w, w\rangle$.

Demostración. De la convexidad de L tenemos que:

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{ds}E(x,sv)\mid_{s=1}= \frac{d}{ds}(L_v(x,sv)\cdot sv - L(x,sv))\mid_{s=1} \\
&= \left(\left(\frac{d}{ds}L_v(x,sv)\right)\cdot sv + L_v(x,sv)\frac{\partial}{\partial s}(sv) - \frac{\partial}{\partial s}L(x,sv)\right)\mid_{s=1} \\
&= \left(\left(\frac{\partial}{\partial x}L_v(x,sv)\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial v}L_v(x,sv)\frac{\partial}{\partial s}(sv)\right)\cdot sv + L_v(x,sv)v - \left(\frac{\partial}{\partial x}L(x,sv)\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial v}L(x,sv)\frac{\partial}{\partial s}(sv)\right)\right)\mid_{s=1} \\
&= (\langle L_{vv}(x,sv)\cdot v, sv\rangle + L_v(x,sv)v - (L_v(x,sv)v)))\mid_{s=1}= \langle L_{vv}(x,sv)\cdot v, sv\rangle\mid_{s=1} \\
&= \langle L_{vv}(x,v)\cdot v, v\rangle > 0.
\end{aligned}
\tag{5.59}
$$

Entonces, la función $s \mapsto E(x,sv)$ es creciente $\forall v$, por lo tanto:

$$
\underset{v\in T_xM}{min} E(x,v) = E(x,0) = -L(x,0). \tag{5.60}
$$

Luego, como L es convexo $\exists a > 0$ tal que:

$$
A := \underset{\substack{(x,v)\in TM \\ \|w\|=1}}{inf} \langle L_{vv}(x,v)\cdot w, w\rangle \geqslant \underset{\substack{(x,v)\in TM \\ \|w\|=1}}{inf} a\|w\|^2 = a > 0. \tag{5.61}
$$

Por otro lado, como L es lmitado:

$$
\begin{aligned}
\ell(0) = \underset{x\in M}{sup} L(x,0) = -\underset{x\in M}{inf} -L(x,0) = -\underset{x\in M}{inf} E(x,0) \\
\Rightarrow -\ell(0) \leqslant E(x,0).
\end{aligned}
\tag{5.62}
$$

Finalmente, con el teorema fundamental del Cálculo, concluimos que:

$$
\begin{aligned}
E(x,v) = E(x,0) + \int_0^{\|v\|}\frac{d}{ds}E(x,s\frac{v}{\|v\|})ds \geqslant -\ell(0) + \int_0^{\|v\|}\left\langle L_{vv}(x,sv)\cdot\frac{v}{\|v\|}, s\frac{v}{\|v\|}\right\rangle ds \\
= -\ell(0) + \int_0^{\|v\|} s\left\langle L_{vv}(x,s\frac{v}{\|v\|})\cdot\frac{v}{\|v\|},\frac{v}{\|v\|}\right\rangle ds \geqslant -\ell(0) + A\int_0^{\|v\|} sds = -\ell(0) + A\frac{\|v\|^2}{2}.
\end{aligned}
\tag{5.63}
$$

□

Proposición 42. *El Flujo de Euler-Lagrange φ^t es completo.*

Demostración. Sea $v_x \in TM$. Supongamos que (a,b) es el máximo intervalo de definición de la curva $t \mapsto \varphi^t(v_x)$. Como L es autónomo, sin perdida de generalidad, podemos suponer que $a < 0$, $b > 0$ y que $\varphi^0 = v_x$.

Sea $c = E(v_x)$, por la proposición 41, tenemos que la órbita dev_x se queda en este nivel de energía, esto es $E(\varphi^t(v_x)) = c$, $\forall t \in (a, b)$.

Por el lema 14, $c = E(\varphi^t(v_x)) \geqslant -\ell(0) + A\frac{\|\varphi^t(v_x)\|^2}{2}$, por lo tanto

$$0 \leqslant \|\varphi^t(v_x)\| \leqslant \sqrt{\frac{2(c + \ell(0))}{A}} := \alpha, \tag{5.64}$$

$\forall t \in (a, b)$.

Ahora supongamos que $b < \infty$.

Como $\varphi^t(v_x) = (x_v(t), \dot{x}_v(t))$, entonces $\forall t_1 \in (0, b)$, $\|\dot{x}_v(t)\| \leqslant \alpha$ y

$$dist(x_v(0), x_v(t_1)) = \underset{\gamma \in C^k[x_v(0), x_v(t_1); t_1]}{inf} \left(\int_0^{t_1} \|\dot{\gamma}(t)\| \, dt \right) \leqslant \int_0^{t_1} \|\dot{x}_v(t)\| \, dt \leqslant \alpha t_1 \leqslant \alpha b. \tag{5.65}$$

Entonces, a partir de $t = 0$, $\varphi^t(v_x)$ queda presa en el interior del compacto:

$$\mathcal{C} := \{(y, w) \in TM \mid dist(x, y) \leqslant \alpha b; \|w\| \leqslant \alpha\}, \tag{5.66}$$

donde $x = \Pi(v_x)$.

Ahí, el campo de Euler-Lagrange es uniformemente Lipschitz y acotado, entonces por el lema de escape de soluciones EDO, podemos extender el intervalo de definición de φ^t hacia el futuro contradiciendo que (a, b) es el máximo intervalo de definición.

Por último, notemos que el caso en que $-\infty < a$ se obtiene del caso anterior recorriendo el flujo hacia el pasado ya que $\varphi^{-t}(v_x) = (\varphi^{-1})^t(v_x)$ $\forall t > 0$. □

Corolario 23. *El Flujo geodésico g^t es completo.*

5.3.2. Dinámica Hamiltoniana

Definición 63. *Sea M una variedad diferenciable. Recordemos que una 2-forma diferenciable es una sección suave al haz de 2-campos tensoriales antisimétricos, $\omega : M \to \Lambda^2(M)$. La forma ω es no degenerada, si lo es para cada punto x, esto es, $\omega^\flat : T_xM \to T_x^*M$; $v_x \mapsto \omega(v_x, \cdot)$ es un isomorfismo $\forall x \in M$.*

*Una 2-forma diferenciable no degenerada cerrada ($d\omega = 0$), se llama **Forma Simpléctica**. Una variedad diferenciable M equipada con una 2-forma simpléctica ω se llama **Variedad Simpléctica** y se denota por (M, ω).*

*Si (M, ω) y (N, η) son variedades simplécticas y $f : M \to N$ es un difeomorfismo tal que $f^*\eta = \omega$, entonces f se dice que es un **Difeomorfismo simpléctico o un Simplectomorfismo**,* *si* $(M, \omega) = (N, \eta)$*. Entonces* f *se conoce como* ***Transformación Canónica****.*

Proposición 43. *Sea* (M, ω) *una variedad simpléctica, entonces* M *es de dimensión par y* ω^n *es una forma de volumen.*

Demostración. Sea $x_0 \in M$, tomemos una carta local $(x^i) = (x^1, ..., x^d)$ para un abierto $U \ni x_0$ tal que $TU \simeq T_{x_0}M \times U$. Tomemos 2 campos vectoriales linealmente independientes $e_1(x)$ y $e_{n+1}(x)$, definidos $\forall x \in U$ y tal que $\omega\left(e_1(x), e_{n+1}(x)\right) \neq 0$. Estos campos locales existen pues ω es no degenerada. Reescalando los campos $e_1(x)$ y $e_{n+1}(x)$ si es necesario, podemos suponer que $\omega\left(e_1(x), e_{n+1}(x)\right) = 1$. Entonces, por la antisimetría de ω tenemos que $\omega\left(e_{n+1}(x), e_1(x)\right) = -1$ y $\omega\left(e_1(x), e_1(x)\right) = \omega\left(e_{n+1}(x), e_{n+1}(x)\right) = 0$.

Ahora, tomemos el subhaz $E_1(x)$ de TU definido por la distribución de dimensión 2 generada por los campos vectoriales $e_1(x)$ y $e_{n+1}(x)$ i.e. $\forall x \in U$, $E_1(x) = span\left\{e_1(x), e_{n+1}(x)\right\}$. Consideremos el complemento simplecto-ortogonal a E_1, $E_2(x) := \{v \in TU \mid \omega(v, w) = 0\ \forall w \in E_1(x)\}$. Entonces, para todo campo vectorial local $v(x)$ y para todo $w(x) = \lambda^1 e_1(x) + \lambda^{n+1} e_{n+1}(x) \in E_1$, tenemos que:

$$\begin{aligned}\omega(v - \omega\left(v, e_{n+1}\right) e_1 + \omega\left(v, e_1\right) e_{n+1}, w) &= \omega(v, w) - \omega\left(v, e_{n+1}\right) \omega(e_1, w) + \omega\left(v, e_1\right) \omega(e_{n+1}, w) \\ &= \lambda^1 \omega(v, e_1) + \lambda^{n+1} \omega(v, e_{n+1}) - \omega\left(v, e_{n+1}\right) \left(\lambda^1 \omega(e_1, e_1) + \lambda^{n+1} \omega(e_1, e_{n+1})\right) \\ &\quad + \omega\left(v, e_1\right) \left(\lambda^1 \omega(e_{n+1}, e_1) + \lambda^{n+1} \omega(e_{n+1}, e_{n+1})\right) \\ &= \lambda^1 \omega(v, e_1) + \lambda^{n+1} \omega(v, e_{n+1}) - \omega\left(v, e_{n+1}\right) \left(\lambda^{n+1}\right) - \omega\left(v, e_1\right) \left(\lambda^1\right) = 0.\end{aligned} \tag{5.67}$$

Por lo tanto, para todo campo vectorial local $v(x)$, tenemos que, $v - \omega\left(v, e_{n+1}\right) e_1 - \omega\left(v, e_1\right) e_{n+1} \in E_2$. Además, claramente $E_1 \bigcap E_2 = 0$, entonces tenemos que $TU = E_1 \oplus E_2$.

Ahora podemos aplicar el mismo argumento al subhaz $E_2(x)$ y garantizar la existencia de dos vectores $e_2(x)$ y $e_{n+2}(x)$ en cada fibra $E_2(x)$ para todo $x \in U$ con la propiedad anterior. Esto gracias a que ω es no degenerado, y así inductivamente. Esto demuestra que si ω es no degenerado, entonces la dimensión de todas las fibras T_xU de TU es par, digamos $d = 2n$.

El argumento anterior implica que existen coordenadas locales $(x^i) = (x^1, ..., x^{2n})$ en U tal que si $\{\theta_i\}$ es la base de secciones dual de $\{e_i\}$, entonces la forma simpléctica en U, se ve: $\omega = \sum_{i=1}^{n} \theta^i \wedge \theta^{i+n}$. Esto implica que $\omega^n = \omega \wedge ... \wedge \omega \neq 0$. Pues

$$\begin{aligned}\omega^n = \omega \wedge ... \wedge \omega &= \sum_{i_1, ..., i_n = 1}^{n} \theta^{i_1} \wedge \theta^{i_1+n} \wedge ... \wedge \theta^{i_n} \wedge \theta^{i_n+n} \\ &= (-1)^n n! \theta^1 \wedge ... \wedge \theta^{2n} \neq 0.\end{aligned} \tag{5.68}$$

Entonces ω^n es una forma de volumen.

□

Definición 64. *Sea T^*M el haz cotangente de M^d. $\pi : T^*M \to M$ la proyección canónica, se tiene entonces que,*

$$\begin{aligned} d\pi_p : T_pT^*M &\to T_{\pi(p)}M \\ \xi &\longmapsto d\pi_p(\xi), \end{aligned} \tag{5.69}$$

con $p_x = (x, p)$.

*La **1-forma de Liouville** θ en T^*M está dada por:*

$$\theta_p(\xi) = p(d\pi(\xi)) \qquad \xi \in T_p(T^*M). \tag{5.70}$$

*La forma **Simpléctica Canónica** en T^*M se define como: $\omega = d\theta$.*

Una carta local (x^i) de M induce una carta local en T^*M dada por $(x^1, ..., x^d, p^1, ..., p^d)$. Por lo tanto, para $p \in T^*M$ podemos escribirlo como $p = \sum_{i=1}^{d} p_i dx^i$. En estas coordenadas, la forma de Liouville θ y su derivada exterior ω se ven:

$$\begin{aligned} \theta = pdx &= \sum_{i=1}^{d} p_i dx_i \\ \omega = dp \wedge dx &= \sum_{i=1}^{d} dp_i \wedge dx_i. \end{aligned} \tag{5.71}$$

Proposición 44. $(T^*M, d\theta)$ *es una variedad simpléctica*

Demostración. Basta ver que $\omega = d\theta$ es una forma simpléctica. Para esto veamos que, por definición, es un 2-tensor antisimétrico. Además,

$$\begin{aligned} \omega^\flat : TM &\to T^*M \\ (x, v) &\mapsto (x, \omega(v, \cdot)), \end{aligned} \tag{5.72}$$

es un isomorfismo de haces vectoriales, por lo que ω es no degenerada.

También $d\omega = \sum_{i=1}^{d} d(dp_i \wedge dx_i) = 0$. $\therefore$ ω es una forma simpléctica. □

Teorema 23 (Truco de Moser). *Sea M una variedad diferenciable y ω_0, ω_1 dos formas simplécticas en M tal que $[\omega_0] = [\omega_1]$ en $H^2_{dR}(M)$. Si para toda $t \in [0,1]$ la 2-forma:*

$$\omega_t = t\omega_1 + (1-t)\omega_0 \tag{5.73}$$

es simpléctica en M. Entonces existe una familia suave de difeomorfismos $\sigma_t : M \to M$ con $\sigma_0 = Id_M$ tal que $\sigma_t^*\omega_t = \omega_0$, $\forall t \in [0,1]$.

Demostración. Tenemos que $\left[\frac{d}{dt}\omega_t\right] = [\omega_1 - \omega_0] = [0] \in H^2_{dR}(M)$. Luego $\exists \theta \in \Omega^1(M)$ tal que $\frac{d}{dt}\omega_t = \omega_1 - \omega_0 = d\theta$. Como ω_t es no degenerado para cada t existe un único campo vectorial suave X_t tal que $\omega_t \lrcorner X_t = -\theta$.

Integrando localmente a la familia suave de campos vectoriales X_t generamos una isotopía (homotopía por encajes) suave $\sigma : M \times [0,1] \to M$ (por ejemplo, $\sigma_t(x) = \phi_t^s(x)$ donde $\phi_t^s(x)$ es el flujo local de X_t) tal que:

$$\frac{d\sigma_t}{dt}(x) = X_t \circ \sigma_t(x) \tag{5.74}$$

o bien

$$X_t(x) = \frac{d\sigma_s}{ds} \,|_{s=t}\, \sigma_t^{-1}(x). \tag{5.75}$$

Entonces por la regla de la cadena y la identidad de Cartan:

$$\frac{d}{dt}\sigma_t^*\omega_t = \sigma_t^*\mathcal{L}_{X_t}\omega_t + \sigma_t^*\frac{d}{dt}\omega_t = \sigma_t^*(d(\omega_t \lrcorner X_t) + d\omega_t \lrcorner X_t) + \sigma_t^* d\theta = -\sigma_t^* d\theta + \sigma_t^* d\theta = 0 \tag{5.76}$$

Por lo tanto $\sigma_t^*\omega_t = \sigma_0^*\omega_0 = \omega_0$. ☐

Teorema 24 (Darboux: Coordenadas Simplécticas). *Sea (M, ω) una variedad simpléctica. Entonces para todo $x \in M$, existe una carta (U, p^i, x^i) alrededor de x tal que $\omega_{|U} = \sum_{i=1}^{d} dp^i \wedge dx^i$.*

Demostración. Para todo $x \in M$ $\exists$ un abierto W de x y coordenadas (p^i, x^i) tal que $\omega_x = \left(\sum_{i=1}^{d} dp^i \wedge dx^i\right)_x$. Entonces en W hay 2 formas simplécticas $\omega_0 = \omega$ y $\omega_1 = \left(\sum_{i=1}^{d} dp^i \wedge dx^i\right)$. Como ω_0 y ω_1 son cerradas y no degeneradas tenemos que $\omega_0 - \omega_1$ es una 2-forma cerrada con $(\omega_0 - \omega_1)_x = 0$. Reduciendo W de ser necesario hasta obtener un abierto contraíble, el lema de Poincaré implica que es localmente exacta, por lo tanto $\omega_0 - \omega_1 = d\eta$ para alguna $\eta \in \Omega^1(W)$ con $\eta_x = 0$, por lo tanto $[\omega_0] = [\omega_1]$ en $H^2_{dR}(W)$.

Por otro lado, como ω_0 y ω_1 son no degeneradas por continuidad en t, $\omega_t = t\omega_1 + (1-t)\omega_0$ es no degenerada $\forall t \in [0,1]$ en un abierto V de x suficientemente pequeño, esto implica que ω_t es simpléctica en V, $\forall t$.

Tomando $U = W \cap V$, el truco de Moser implica que $\exists$ una familia suave de difeomorfismos $\sigma_t : U \to U$ con $\sigma_0(x) = x$ y tal que $\sigma_t^* \omega_t = \omega_0$, $\forall t \in [0,1]$. Así tomando $t = 1$ tenemos que $\omega_0 = \sigma_1^* \omega_1 = \sigma_1^* \left(\sum_{i=1}^{d} dp^i \wedge dx^i \right) = \sum_{i=1}^{d} d(p^i \circ \sigma_1) \wedge d(x^i \circ \sigma_1)$. Las coordenadas buscadas son: $\overline{p}^i = \sigma_1^*(p^i) = (p^i \circ \sigma_1)$ y $\overline{x}^i = \sigma_1^*(x^i) = (x^i \circ \sigma_1)$. $\square$

Definición 65. *Sea (M, ω) una variedad simpléctica. Un **Hamiltoniano** es una función suave $H : M \to \mathbb{R}$. El campo vectorial χ_H asociado a H definido por:*

$$\omega \lrcorner \chi_H = \omega(\chi_H, \cdot) = dH, \tag{5.77}$$

*se le conoce como **Campo Hamiltoniano ó Gradiente simpléctico**. Veamos que en coordenadas simplécticas define la ecuación diferencial:*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= H_p = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p} &= -H_x = -\frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{\partial H}{\partial x_i}. \end{aligned} \tag{5.78}$$

Para esto, basta ver que $\chi_H := (\frac{\partial H}{\partial p_i}, -\frac{\partial H}{\partial x_i})$ satisface la definición de campo Hamiltoniano:

$$\begin{aligned} \omega \lrcorner \chi_H = \sum_{i=1}^{n} (dp_i \wedge dx_i) \lrcorner \chi_H &= \sum_{i=1}^{n} (dp_i \lrcorner \chi_H) \wedge dx_i - dp_i \wedge \sum_{i=1}^{n} (dx_i \lrcorner \chi_H) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial H}{\partial x_i} dx_i = dH. \end{aligned} \tag{5.79}$$

*Como toda ecuación diferencial ordinaria, la ecuación diferencial anterior define un flujo $\mathcal{H}^t$ llamado el **Flujo Hamiltoniano**.*

Proposición 45. *H es invariante bajo la acción del flujo Hamiltoniano $\mathcal{H}^t$.*

Demostración. Recordemos que $\omega \lrcorner \chi_H = dH$ y $\dot{\mathcal{H}}^t = \chi_H$. Utilizando la regla de la cadena, podemos ver fácilmente que H es invariante, pues:

$$\frac{d}{dt} H(\mathcal{H}^t) = dH(\mathcal{H}^t)\dot{\mathcal{H}}^t = H_x \dot{x} + H_p \dot{p} = 0. \tag{5.80}$$

$\square$

Teorema 25 (de Liouville)**.** *El flujo hamiltoniano $\mathcal{H}^t$ es simpléctico, esto es, preserva la forma simpléctica ω y en consecuencia preserva el volumen.*

Demostración. $\mathcal{H}^t$ preserva la forma simpléctica ω pues,

$$\frac{d}{dt} \left[\left(\mathcal{H}^t \right)^* (\omega) \right] = \mathscr{L}_{\chi_H} \omega = d(\omega \lrcorner \chi_H) + (d\omega \lrcorner \chi_H) = d(dH) + (0 \lrcorner \chi_H) = 0, \tag{5.81}$$

donde $\mathscr{L}_\chi$ es la derivada de Lie para formas difrenciales definida por $\mathscr{L}_\chi \eta = d(\eta \lrcorner \chi) + (d\eta \lrcorner \chi)$. Esto prueba que $(\mathcal{H}^t)^* (\omega)$ es constante $\forall t \in \mathbb{R}$ y por la proposición 43, tenemos que preserva el volumen. $\square$

En particular, estamos interesados en estudiar los Hamiltonianos asociados al haz contangente T^*M de una variedad Riemanniana (M, g), esto es, las funciones suaves $H : T^*M \to \mathbb{R}$. Más aún, nos restringiremos sólo al estudio de Hamiltonianos de la forma:

$$H(x,p) = \max_{v \in T_xM} \{p(v) - L(x,v)\}, \tag{5.82}$$

donde $L(x, v)$ es un Lagrangiano. A primera vista, esta clase de Hamiltonianos puede parecer un poco extraña, pero recordando que L es convexo, podemos reconocer que H no es más que el **Dual Convexo** de L ($H = L^*$). Éste es un objeto clásico dentro del análisis real, por lo que, es bastante natural tener interés por estos Hamiltonianos.

Notemos que no es obvio que $\exists u \in T_xM$ tal que u realice el máximo de la función $p(v) - L(x, v)$, por lo que *a priori* H puede tomar valores en $(-\infty, \infty]$, así que en principio deberíamos definir $H(x,p) = \sup_{v \in T_xM} \{p(v) - L(x,v)\}$. Sin embargo, la siguiente proposición nos dice que esto no ocurre, que $H(x,p) \in \mathbb{R}$ $\forall (x,p) \in T^*M$ y que $\exists u \in T_xM$ tal que $p(u) - L(x,u) = \max_{v \in T_xM} \{p(v) - L(x,v)\}$, probando que H está bien definido.

Observación 6. *Antes de pasar a la proposición mencionada vale la pena observar una propiedad inmediata de H que viene de una conocida propiedad de las funciones convexas: si $(F)_{i\in I}$ es una familia de funciones convexas, entonces su envolvente superior $\sup_{i\in I} F_i$ también es una función convexa.*
Fijemos $v \in T_xM$ y notemos que el mapa $p \mapsto p(v) - L(x,v)$ es convexo en p, de donde concluimos que $H(x,p) = \sup_{v \in T_xM} \{p(v) - L(x,v)\}$ también es convexo en p.

Proposición 46. *Dado $(x,p) \in T^*M$ y $v \in T_xM$ sea $F_x(p,v) := p(v) - L(x,v)$ entonces tenemos que $H(x,p) = \max_{v \in T_xM} \{F_x(p,v)\}$. Entonces, $H(x,p) < \infty$ $\forall (x,p) \in T^*M$. Más aún, para cada $(x,p) \in T^*M$, $\exists u \in T_xM$ tal que $F_x(p,u) = \max_{v \in T_xM} \{F_x(p,v)\}$.*

Demostración. Sea $(x,p) \in T^*M$ recordemos que $\max_{v \in T_xM} F_x = -(\min_{v \in T_xM} (-F_x))$, por lo que, basta ver que $-F_x$ alcanza su mínimo en T_xM. Para esto veamos que $-F_x(p,v) = L(x,v) - p(v)$ es super lineal:

Como $p : T_xM \to \mathbb{R}$ lineal y continua, entonces p alcanza su mínimo μ y su máximo ν si nos restringimos a S^1_xM $\therefore$ $\mu \leqslant p(w) \leqslant \nu$ $\forall w \in S^1_xM$. Luego, como L es super lineal

$$\lim_{\|v\| \to \infty} \frac{-F_x(p,v)}{\|v\|} = \lim_{\|v\| \to \infty} \left(\frac{L(x,v)}{\|v\|} - p(\frac{v}{\|v\|}) \right) \geqslant \lim_{\|v\| \to \infty} \frac{L(x,v)}{\|v\|} - \mu = \infty, \tag{5.83}$$

por tanto, $-F_x$ es super lineal.

$\Longrightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{-F_x(p,v)}{\|v\|} \geqslant 1$ si $\|v\| \geqslant n_0$. Observemos que, de hecho, $\frac{-F_x(p,v)}{\|v\|} \geqslant 1$ si $\|v\| \geqslant n$, $\forall n \geqslant n_0$.

$\Longrightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $-F_x(p,v) \geqslant \|v\|$ si $\|v\| \geqslant n$, $\forall n \geqslant n_0$. Entonces, $-F_x(p,v) \geqslant \|v\| \geqslant n$, $\forall v \in \overline{B_n^c}$, donde $B_n = \{v \in T_xM : \|v\| \leqslant n\}$, por tanto, $-F_x(p,v) \geqslant n$ $\forall v \in \overline{B_n^c}$. Entonces,

$$n \leqslant \underset{v \in \overline{B_n^c}}{inf} (-F_x(p,v)) \tag{5.84}$$

Por otro lado, $\forall n \geqslant n_0$ como $-F_x$ es continua y B_n es compacto $-F_x$ alcanza su mínimo en cada B_n. Luego, si $n \leqslant m \Rightarrow B_n \subseteq B_m$, entonces

$$\underset{v \in B_m}{mín} (-F_x(p,v)) \leqslant \underset{v \in B_n}{mín} (-F_x(p,v)) \tag{5.85}$$

Ahora, tomemos $n \geqslant n_0$, tal que $\underset{v \in B_{n_0}}{mín} (-F_x(p,v)) \leqslant n$, como ya mencionamos anteriormente, sabemos que $\exists u \in B_n$ tal que $-F_x(p,u) = \underset{v \in B_n}{mín}(-F_x(p,v))$. Así, se tiene que,

a. $-F_x(p,u) \leqslant -F_x(p,v)$ $\forall v \in B_n$

b. $-F_x(p,u) \underset{(4,3,4)}{\leqslant} \underset{v \in B_{n_0}}{mín} (-F_x(p,v)) \leqslant n \underset{(4,3,3)}{\leqslant} \underset{v \in \overline{B_n^c}}{inf} (-F_x(p,v)) \leqslant -F_x(p,v)$ $\forall v \in \overline{B_n^c}$.

b. Implica que $-F_x(p,u) < \infty$

a. y b. implican que $-F_x(p,u) \leqslant -F_x(p,v)$ $\forall v \in T_xM$, i.e, $-F_x(p,u) = \underset{v \in T_xM}{mín}(-F_x(p,v))$.

Por último, concluimos que $H(x,p) = -\left(\underset{v \in T_xM}{mín}(-F_x(p,v))\right) = F_x(p,u)$. $\square$

Observemos que la proposición anterior nos inspira a encontrar un método para calcular $H(x,p)$, pues como garantiza la existencia de $\underset{v \in T_xM}{máx} (F_x(p,v))$, es una buena aproximación comenzar por encontrar los puntos críticos de $F_x(p,v)$, los cuales cumplen la relación $\frac{\partial}{\partial v} F_x(p,v) = 0$. De hecho, de esta forma sólo obtendremos los máximos de F_x como muestra el siguiente corolario.

Corolario 24. *Sea $H = L^*$ donde L es un Lagrangiano. Entonces $H(x,p) = pv - L(x,v)$, donde p cumple la relación $p = L_v(x,v)$.*

Demostración. Es bien sabido que una función cóncava sólo tiene como puntos críticos a máximos globales.

Veamos que F_x es cóncava en v: Dado $(x,p) \in T^*M$ sea $\lambda \in [0,1]$ y $v, w \in T_xM$, tenemos de la linealidad de p y la convexidad de L que,

$$\begin{aligned} &F_x(p, \lambda v + (1-\lambda)w) = p(\lambda v + (1-\lambda)w) - L(x, \lambda v + (1-\lambda)w) \\ &\leqslant \lambda p(v) + (1-\lambda)p(w) - \lambda L(x,v) - (1-\lambda)L(x,w) = \lambda F_x(p,v) + (1-\lambda)F_x(p,w) \end{aligned} \tag{5.86}$$

Como los puntos críticos cumplen,

$$0 = \frac{\partial}{\partial v}F_x(p,v) = \frac{\partial}{\partial v}(p(v) - L(x,v)) = p - L_v(x,v), \tag{5.87}$$

$\Rightarrow p = L_v(x,v)$.

$\therefore H(x,v) = máx_v \{F_x(p,v)\} = pv - L(x,v)$ con $p = L_v(x,v)$. □

Notemos que un cálculo análogo al hecho en la demostración del corolario anterior, muestra que, si L es estricamente convexo F_x será estrictamente cóncavo, por lo que, tendrá un único máximo.

Ejemplo 11. *Calculemos unos ejemplos simples para irnos familiarizando con el dual convexo $H = L^*$ de una función convexa L.*

Sea $M = \mathbb{R}$ y notemos que una 1-forma $p \in T^*\mathbb{R}$ no es más que la función lineal descrita por la recta $y = pt$. En este caso, es fácil dar una interpretación geométrica (gráfica) de la constucción del dual convexo:

Sea $L : T\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tenemos que $L(x,t)$ es una función convexa en t, para cada x definamos $L_x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ como: $L_x(t) = L(x,t)$. Ahora tomemos la gráfica de $L_x(t)$ y la gráfica de la recta $y(t) = pt$ en $\mathbb{R}^2$. Sea $t(p)$ el punto en que la curva está más lejos de la recta en la dirección vertical tomando en cuenta "distancias negativas". Entonces, $\forall p$ la función $F_x(p,t) = pt - L_x(t)$ tiene un máximo con respecto a t en $t(p)$. El dual convexo está definido como $H_x(p) = p \cdot t(p) - L(t(p)) = F_x(p, t(p))$.

Ahora consideremos los Lagrangianos $L : T\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dados por:

a. *$L(x,t) = t^2$: este es un caso particular del Lagrangiano en el ejemplo 8 cuando $d = 1$, $m = 2$ y $V(x) \equiv 0$. Entonces queremos definir el Hamiltoniano $H = L^* : T^*\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dado por $H(x,p) = \underset{t \in T_x\mathbb{R}}{máx}(F_x(p,t))$ donde $F_x(p,t) = pt - t^2$.*
Queremos entonces maximizar $F_x(p,t)$, como L es estrictamente convexa F_x tiene un único punto crítico que satisface, $0 = \frac{\partial}{\partial t}F_x(p,t) = p - 2t \Rightarrow$ el máximo de F_x lo alcanza en $t = \frac{1}{2}p$ $\therefore$ $H(x,p) = F_x(p, \frac{1}{2}p) = \frac{1}{2}p^2 - \frac{1}{4}p^2 = \frac{1}{4}p^2$.

b. *$L(x,t) = \frac{1}{2}mt^2$: este también es un caso particular del ejemplo 8 cuando $d = 1$ y $V(x) \equiv 0$. Entonces tenemos que, $F_x(p,t) = pt - \frac{1}{2}mt^2$. Luego, $\frac{\partial}{\partial t}F_x(p,t) = p - mt$ y como L es estrictamente convexa entonces F_p tiene un único punto crítico máximo en $t = \frac{1}{m}p$ $\therefore$ $H(x,p) = \frac{1}{m}p^2 - \frac{1}{2m}p^2 = \frac{1}{2m}p^2$.*

c. *Sean* $\alpha, \beta > 1$ *tal que* $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$, $L(x,t) = \frac{1}{\alpha}t^{\alpha}$, $\frac{\partial}{\partial t}F_x(p,t) = p - t^{\alpha-1}$, *entonces tiene un único máximo en* $t = p^{\frac{1}{\alpha-1}}$,

$H(x,p) = p^{1+\frac{1}{\alpha-1}} - \frac{1}{\alpha}p^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} = p^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} - \frac{1}{\alpha}p^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} = \left(1 - \dfrac{1}{\alpha}\right)p^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} = \dfrac{1}{\beta}p^{\beta}$.

Teorema 26 (Fenchel-Moreau)**.** *Sea E un espacio vectorial normado $L : E \to (-\infty, \infty]$ convexa y semicontinua inferiormente tal que L no sea la constante ∞. Entonces $L^{**} = L$.*

Omitiremos la demostración por estar al margen de los fines de este trabajo. Sin embargo, ésta se puede encontrar en [Brez].

Corolario 25. *Sea L un Lagrangiano y H el Hamiltoniano asociado dado por $H = L^*$. Entonces $H^* = L^{**} = L$.*

En la observación 6 vimos que H es convexo en p, ahora veamos que también es súper lineal.

Proposición 47. *Sea L un Lagrangiano y $H = L^*$ el Hamiltoniano asociado. Entonces H es súper lineal.*

Demostración. Para todo $p \in T_x^*M$ $\exists v \in T_xM$ tal que, $\|p\| = \|v\|$ y $p(v) = \|p\|^2$. Ahora fijemos cualquier $\lambda > 0$ y $p \neq 0$ y sea $\overline{v} = \lambda\dfrac{v}{\|p\|}$. Así

$$\begin{aligned} H(x,p) &= \underset{v \in T_xM}{máx}\{p(v) - L(x,v)\} \geqslant p(\overline{v}) - L(x,\overline{v}) \\ &= p(\lambda\frac{v}{\|p\|}) - L(x,\lambda\frac{v}{\|p\|}) = \lambda\frac{p(v)}{\|p\|} - L(x,\lambda\frac{v}{\|p\|}) \\ &\geqslant \lambda\|p\| - \underset{B_\lambda(0)}{máx}\{L(x,v)\} \end{aligned} \tag{5.88}$$

por lo tanto:

$$\underset{\|p\|\to\infty}{liminf}\frac{H(x,p)}{\|p\|} \geqslant \underset{\|p\|\to\infty}{liminf}\frac{\lambda\|p\| - \underset{B_\lambda(0)}{máx}\{L(x,v)\}}{\|p\|} = \lambda \tag{5.89}$$

como λ es arbitraria, tenemos que $H(x,p)$ es súperlineal. □

A estas alturas ya debe ser más que evidente que Lagrangianos y Hamiltonianos están fuertemente relacionados, y de hecho, tienen propiedades similares. A continuación veremos que podemos concluir propiedades dinámicas de uno a través de estudiar las propiedades dinámicas del otro.

Definición 66. *Definimos la* ***Transformación de Legendre*** *como:* $\mathcal{L} : TM \to T^*M$; $\mathcal{L}(x,v) = (x, L_v(x,v))$.

Proposición 48. *La transformación de Legendre $\mathcal{L}$ es una conjugación entre el flujo Lagrangiano y el flujo Hamiltoniano.*

Demostración. Tenemos que $L = L^{**} = H^*$, por lo tanto si $p = L_v(x,v)$ tenemos que $v = H_p(x,p)$. Notemos que $(H \circ \mathcal{L})(x,v) = H(x, L_v(x,v)) = L_v(x,v)v - L(x,v) = E(x,v)$.

Así $H(x,p) = E \circ \mathcal{L}^{-1} = p \cdot H_p(x,p) - L(x, H_p(x,p)) = p{\cdot}v - L(x,v)$. Luego $H_x = -L_x$ entonces las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{d}{dt}x = v = H_p \\ \dot{p} &= \frac{d}{dt}L_v = L_x = -H_x \end{aligned} \tag{5.90}$$

son las mismas que las ecuaciones Hamiltonianas (Gradiente simpléctico). □

Ejemplo 12. *Consideremos ahora el Lagrangiano en el ejemplo 10.* $L(x,v) = \frac{1}{2}g_x(v,v) = \frac{1}{2}\|v\|_x^2$ *vimos que el flujo de Euler-Lagrange asociado es justamente el flujo geodésico,* g^t*. Además la ec* (5.56) *en 10 tenemos que:* $L_v(x,v) = \|v\|_x^2$*. Luego el Hamiltoniano asociado es* $H(x,p) = E \circ \mathcal{L}^{-1}(x,p) = \|p\|_x^2 - \frac{1}{2}\|p\|_x^2 = \frac{1}{2}\|p\|_x^2$.

Ejemplo 13. *Sea* $L(x,v) = \frac{1}{2}k_x(v,v) - V(x)$ *en el ejemplo 9.*

La energía está dada por:

$$E(x,v) = L_v(x,v) \cdot v - L(x,v) = k_x(v,v) - \left(\frac{1}{2}k_x(v,v) - V(x)\right) = \frac{1}{2}k_x(v,v) + V(x). \tag{5.91}$$

Por tanto el Hamiltoniano es:

$$H(x,p) = \left(E \circ \mathcal{L}^{-1}\right)(x,p) = \frac{1}{2}k_x(p,p) + V(x) \tag{5.92}$$

Dado un Hamiltoniano H, hay veces que es interesante considerar la dinámica de éste, restringida a las hipersuperficies $H = c$, que en muchas ocasiones resultan ser compactas. En particular, para el flujo geodésico de una variedad Riemanniana compacta sucede esto y cuyas fibras son haces de esferas sobre M.

Si c es un valor regular de H y la hipersuperficie $H_c := H^{-1}(c) = \{x \in M \mid H(x) = c\}$ es compacta, entonces el sistema Hamiltoniano preserva una 1-forma no degenerada ω_c. Localmente se puede descomponer la medida 2n-dimensional generada por ω en medidas (2n-1)-dimensionales en $H_{c+\delta}$ para $|\delta|$ suficientemente pequeño y considerar las medidas condicionales definidas módulo una constante multiplicativa. Así podemos estudiar la dinámica hamiltoniana restringida a las fibras H_c.

En el caso de T^*M, la forma simpléctica ω no sólo es cerrada sino también exacta. La 1-forma $\theta = \sum_{i=1}^{n} p_i dx_i$ satisface que $d\theta = \omega$. Esta 1-forma θ definida en T^*M no depende de la carta coordenada. Por supuesto, en general, un sistema Hamiltoniano en T^*M no preserva θ ó cualquier otra 1-forma que su derivada exterior sea ω. Por esto, la siguiente proposición nos dice qué condiciones necesita el Hamiltoniano H para tener la invarianza de θ.

Proposición 49. *El campo vectorial Hamiltoniano χ_H en T^*M preserva la 1-forma de Liouville θ a lo largo de la hipersuperficie $H^{-1}(c)$, si y sólo si el Hamiltoniano puede ser tomado positivamente homogéneo en p modulo funciones, i.e. $H(x, \alpha p) = \Phi(\alpha)H(x,p)$ para $\alpha > 0$.*

Demostración. Si θ es invariante tenemos que:

$$0 = \mathscr{L}_{\chi_H}\theta = d(\theta \lrcorner \chi_H) + (\theta\omega \lrcorner \chi_H) = (dH) + d(\theta \lrcorner \chi_H). \tag{5.93}$$

Entonces $d(\theta \lrcorner \chi_H)(v) = 0$ si $dH(v) = 0$. Como $dH(v) = 0$ $\forall v$ tangente a la hipersuperficie tenemos que $\theta \lrcorner \chi_H$ es constante en cada componente conexa de la hipersuperficie $H^{-1}(c)$, esto se da si

$$\theta \lrcorner \chi_H = \varphi(H) \tag{5.94}$$

para alguna función $\varphi \in C^1$. En coordenadas de Darboux tenemos que

$$H(x, \alpha p) = \Phi(\alpha)H(x,p) \tag{5.95}$$

Donde $\Phi' = \varphi$ □

Ejemplo 14. *Un caso particular de esto es el **Flujo Geodésico**, pues el Hamiltoniano asociado a él es una función cuadrática en p, y por tanto, preserva la restricción de θ a cualquier hipersuperfice de energía H_c.*

La restricción de θ a la hipersuperfice H_c para un valor regular de H, es un ejemplo de una 1-forma tal que $\theta \wedge (d\theta)^{n-1}$ es no degenerada y es una motivación para el estudio de la siguiente clase de variedades diferenciables.

Definición 67. *Sea M una variedad orientable de dimensión $2n - 1$ y θ una 1-forma sobre M. Entonces θ es una **Forma de Contacto** si la $(2n-1)$-forma $\theta \wedge (d\theta)^{n-1}$ es no degenerada. M equipada con una forma de contacto θ, se llama **Variedad de Contacto** y se denota por (M, θ). Un **Difeomorfismo de Contacto** es un difeomorfismo de (M, θ) que preserva su forma de contacto. A un flujo en (M, θ) que preserva la forma de contacto se le llama **Flujo de Contacto.***

A diferencia de las variedades simplécticas que admiten varios campos hamiltonianos, las variedades de contacto vienen equipadas con un campo vectorial canónico V definido por $\theta \lrcorner V = 1$ y $d\theta \lrcorner V = 0$. Este campo vectorial es único pues, $dim(ker(d\theta^n)) = 1$ y además, es distinto de θ, por la hipótesis de no degeneración. Como $\theta \lrcorner V = cte$, la derivada de Lie $\mathscr{L}_V\theta = 0$, por lo que, el flujo de V preserva la forma de contacto y por tanto, todo lo definido en términos de θ, como es el caso del volumen, al flujo generado por V se le conoce como **Flujo Característico** de la forma de Contacto. Supongamos que χ es un campo vectorial cuyo flujo preserva la forma de Contacto θ, entonces también tiene que preservar $ker(d\theta^n)$, y por tanto, debe conmutar con el flujo característico de θ. Esto quiere decir que, todo flujo de Contacto viene de conmutar el flujo característico.

Con un argumento análogo, todo difeomorfismo de contacto se obtiene al conmutar el difeomorfismo de contacto característico.

Ahora, si la variedad de contacto es un nivel de energía de un hamiltoniano homogéneo, V resulta ser el campo vectorial Hamiltoniano.

Como nuestro interés es el estudio de flujos geodésicos, la siguiente proposición es un resultado sustancial en esta sección.

Proposición 50. *El flujo geodésico de una variedad Riemanniana es un flujo característico para SM y por lo tanto un flujo de contacto.*

Demostración. El flujo geodésico es un flujo Hamiltoniano de un Hamiltoniano homogéneo. Luego, la restricción a las hipersuperficies H_c de los flujos Hamiltonianos de un Hamiltoniano homogéneo son flujos característicos para los niveles de energía, y por lo tanto, de contacto. □

5.4. El Flujo Geodésico en Variedades Cerradas con Curvatura Seccional Negativa

Un ejemplo de flujos de Anosov muy importante y verdaderamente impresionante, tanto por sus implicaciones dinámicas como por su exquisita geometría, es el caso de los fujos geodésicos en variedades Riemannianas compactas con curvatura seccional negativa.

Recapitulemos algunas cosas vistas en los capítulos anteriores.

Sea (M, g) una variedad Riemanniana con métrica Riemanniana $g_x(v, v)$. Denotemos por TM el haz tangente de M y por $SM := \{u \in TM / \|u\| = 1\}$ el haz tangente unitario.

Definamos el Lagrangiano: $L : TM \to \mathbb{R}$, $L(x, v) := \dfrac{1}{2}g_x(v, v)$. Dado el sistema dinámico en TM definido por la ecuación de Euler-Lagrange asociado a este Lagrangiano igual que su restricción a SM coincide con el Flujo Geodésico de la variedad Riemanniana (M, g) como lo muestra el ejemplo 10.

Para $X, Y, Z, W \in T_xM$, sea $R(X, Y, Z, W) = \langle R(X, Y)Z, W\rangle$ el tensor de curvatura en x. Entonces para $u, v \in T_xM$ linealmente independientes, definamos $k(u, v) = \frac{R(u,v,u,v)}{\langle u,u\rangle\langle v,v\rangle - \langle u,v\rangle^2}$, la **Curvatura Seccional** del plano $\Pi \subseteq T_xM$ generado por u, v. Recordemos que k no depende de la elección de $u, v \in \Pi$, sólo depende de su envolvente lineal Π.

Ahora notemos que si (M, g) es una variedad Riemanniana compacta tal que su curvatura seccional $-k_x < 0$, $\forall x \in M$, por compacidad, tenemos que existe $k > 0$ tal que, $-k_x < -k < 0$ $\forall x \in M$

ie: la curvatura seccional de M está siempre acotada por una constante negativa $-k$.

Los campos de Jacobi $Y : t \to Y(t) \in T_{\gamma(t)}M$ a lo largo de una geodésica $\gamma : \mathbb{R} \to M$, se obtienen como soluciones de la ecuación de Jacobi: $\ddot{Y}(t) + K(t)Y(t) = 0$, con $K(t) := R(\gamma'(t), \cdot)\gamma'(t)$.

Un campo de Jacobi tangencial es de la forma $Y(t) = f(t)\dot{\gamma}(t)$, con $\ddot{f}(t) = 0$, y por lo tanto, lineales en el tiempo. Por otro lado, la proyección Y^T sobre $\dot{\gamma}(t)$ de cualquier campo de Jacobi Y, es de la misma forma con $f(t) = \left\langle Y(t), \dot{\gamma}(t) \right\rangle$, pero $\ddot{f}(t) = \left\langle \ddot{Y}(t), \dot{\gamma}(t) \right\rangle = -\left\langle k\dot{\gamma}(t), Y(t) \right\rangle = 0$, por lo que la proyección tangencial Y^T sobre Y es un campo de Jacobi. Por linealidad de la ecuación de Jacobi, lo mismo se cumple para $Y^\perp := Y - Y^T$ que es ortogonal a $\dot{\gamma}(t)$.

Algo interesante de los campos de Jacobi es que, el hecho que surjan como variaciones de geodésicas refleja la dinámica del flujo geodésico g^t en el siguiente sentido.

Para $x \in M$ y $v \in T_xM$ denotemos por γ_v la geodésica con $\gamma_v(0) = x$ y $\dot{\gamma_v}(0) = v$, entonces existe el siguiente isomorfismo 39

$$\Theta_v : T_vTM \quad \to \quad T_xM \oplus T_xM \tag{5.96}$$

$$\zeta \quad \mapsto \quad (x, x') \tag{5.97}$$

tal que

$$\Theta_{g^t v}(Dg^t\zeta) \quad = \quad ((Y(t), \dot{Y}(t)) \tag{5.98}$$

donde Y es el campo de Jacobi a lo largo de γ_v con $Y(0) = x, \dot{Y}(0) = x'$.

Esto nos permite describir la dinámica del flujo geodésico en términos de la evolución de los campos de Jacobi y hablar sobre la acción de g^t ó dg^t sobre los campos de Jacobi.

Los dos campos de Jacobi linealmente independientes con crecimiento lineal, corresponden a reparametrizaciones afines de la geodésica; es decir, shifts del punto inicial y cambios de velocidad uniformes. La primera variación corresponde a la dirección del flujo geodésico en el haz tangente unitario SM, el segundo es transversal a SM. Por tanto, para ver que el flujo geodésico en SM es de Anosov, basta ver que el espacio de campos de Jacobi ortogonales admiten una descomposición en subespacios contractivos y expansivos.

Para estudiar los campos de Jacobi ortogonales, es suficiente saber que son soluciones de la ecuación de Jacobi:

$$\ddot{Y}(t) + K(t)Y(t) = 0, \tag{5.99}$$

donde K es un operador simétrico, negativo definido que, bajo las hipótesis de curvatura y compacidad, implican la existencia de $k > 0$ tal que

$$\langle KY, Y\rangle \quad \leqslant \quad -k\,\langle Y, Y\rangle \tag{5.100}$$

siempre que $Y \perp \dot{\gamma}$ y tal que

$$\langle KY, KY\rangle \quad < \quad k^2\,\langle Y, Y\rangle \tag{5.101}$$

$\forall Y \in SM$.

Como cualquier cota superior de la curvatura seccional puede ser tomada como $-k$, tomemos $0 < k \leqslant 1$.

Para mostrar la hiperbolicidad del flujo geodésico tomaremos la norma en $T_xM \oplus T_xM$ dada por la metrica de Sasaki.

$$\|u, v\| \quad := \quad \sqrt{\langle u, u\rangle + \langle v, v\rangle} \tag{5.102}$$

para $u, v \in T_xM$.

Lema 15. $\dfrac{\left\langle Y, \dot{Y}\right\rangle}{\left\|Y, \dot{Y}\right\|^2} \geqslant \delta$ *define un* $\delta-$*cono* C_δ *en* $T_xM \oplus T_xM$.

Demostración. Sea

$$C_\delta := \left\{ v = Y + \dot{Y} \in T_xM \oplus T_xM / \frac{\left\langle Y, \dot{Y}\right\rangle}{\left\|Y, \dot{Y}\right\|^2} \geqslant \delta \right\}, \tag{5.103}$$

$Y = (Y_1, ..., Y_n)$ y $\dot{Y} = (\dot{Y}_1, ..., \dot{Y}_n)$, entonces $\dfrac{\left\langle Y, \dot{Y}\right\rangle}{\left\|Y, \dot{Y}\right\|^2} \geqslant \delta$ implica

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n} Y_i \dot{Y_i} \geqslant \delta \left(\|Y\|^2 + \left\|\dot{Y}\right\|^2 \right) \\
\Longleftrightarrow &\sum_{i=1}^{n} Y_i \dot{Y_i} \geqslant \delta \left(\sum_{i=1}^{n} Y_i^2 + \sum_{i=1}^{n} \dot{Y_i^2} \right) \\
\Longleftrightarrow &\sum_{i=1}^{n} Y_i^2 + \sum_{i=1}^{n} \dot{Y_i^2} - \frac{1}{\delta} \left(\sum_{i=1}^{n} Y_i \dot{Y_i} \right) \leqslant 0
\end{aligned}$$

$$(Y_1, ..., Y_n, \dot{Y}_1, ..., \dot{Y}_n) \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -\frac{1}{2\delta} & & O \\ & \ddots & \\ O & & -\frac{1}{2\delta} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} -\frac{1}{2\delta} & & O \\ & \ddots & \\ O & & -\frac{1}{2\delta} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & 1 \end{bmatrix} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_n \\ \dot{Y}_1 \\ \vdots \\ \dot{Y}_n \end{pmatrix} \leqslant 0 \tag{5.104}$$

$$\text{ie: } (Y, \dot{Y}) Q \begin{pmatrix} Y \\ \dot{Y} \end{pmatrix} \leqslant 0 \tag{5.105}$$

$$\text{ó bien: } \left\langle (Y, \dot{Y}), Q(Y, \dot{Y}) \right\rangle \leqslant 0 \tag{5.106}$$

Donde Q es la siguente forma cuadrática de $2n \times 2n$:

$$Q := \begin{pmatrix} I_n & -\frac{1}{2\delta}(I_n) \\ -\frac{1}{2\delta}(I_n) & I_n \end{pmatrix} \tag{5.107}$$

Con I_n la matriz identidad de $n \times n$.

Notemos que $det(Q) = det((I_n)(I_n) - (-\frac{1}{2\delta}(I_n))(-\frac{1}{2\delta}(I_n))) = (1 - (\frac{1}{2\delta})^2)^n$, luego si tomamos $\delta < \frac{1}{2}$ tendremos que $det(Q) < 0$. Entonces como Q es simétrica, sabemos que $\exists\, P \in O_{2n}(\mathbb{R})$ tal que $Q = P^{-1} D P$ donde

$$D \;\; := \;\; \begin{pmatrix} \alpha I_n & O \\ O & -\beta(I_n) \end{pmatrix}, \alpha, \beta > 0 \tag{5.108}$$

Esto significa que existe un cambio lineal de coordenadas P en $T_pM \oplus T_pM$ tal que, C_δ es la imagen del cono estándar $K_\gamma := \left\langle P(Y, \dot{Y}),\, D\left[P(Y, \dot{Y})\right]\right\rangle \leqslant 0$ bajo la transformación lineal P^{-1}, con $\gamma = \dfrac{\beta}{\alpha}$ i.e.:

$$\begin{aligned} P^{-1}(K_\gamma) &= P^{-1}\left(\left\langle P(Y, \dot{Y}),\, D\left[P(Y, \dot{Y})\right]\right\rangle\right) \\ &= \left\langle P^{-1}P(Y, \dot{Y}),\, P^{-1}D\left[P(Y, \dot{Y})\right]\right\rangle \\ &= \left\langle P^{-1}P(Y, \dot{Y}),\, P^{-1}(PQP^{-1})\left[P(Y, \dot{Y})\right]\right\rangle \\ &= \left\langle (Y, \dot{Y}),\, Q(Y, \dot{Y})\right\rangle = C_\delta. \end{aligned} \tag{5.109}$$

□

Recordemos que $k \in (0, 1]$ y notemos que para $k > 0$ y $a, b > 0$ numeros reales entonces:

1. $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \geqslant 0 \Rightarrow a^2 + 2ab + b^2 \geqslant 4ab$, i.e. $(a+b)^2 \geqslant 4ab$, luego $a + b \geqslant 2\sqrt{ab}$ $\Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{ab}}{a+b} \leqslant \dfrac{1}{2}$
2. $k \leqslant 1 \Leftrightarrow b + ka \geqslant ka + kb \Leftrightarrow \dfrac{b+ka}{a+b} \geqslant k$
3. $k > 0 \Leftrightarrow k^2 < k^2 + 8k \Leftrightarrow k - \sqrt{k^2 + 8k} < 0 \Leftrightarrow \dfrac{k - \sqrt{k^{2+8k}}}{-4} > 0$

Lema 16. *Para* $0 < \delta < min\{\frac{1}{2}, \dfrac{k - \sqrt{k^{2+8k}}}{-4}\}$ *la familia de* $\delta-$*conos* C_δ *dada por* $\dfrac{\left\langle Y, \dot{Y}\right\rangle}{\left\|Y, \dot{Y}\right\|^2} \geqslant \delta$ *es estrictamente invariante.*

Demostración. Es suficiente demostrar que $\dfrac{d}{dt}\dfrac{\left\langle Y, \dot{Y}\right\rangle}{\left\|Y, \dot{Y}\right\|^2} > 0$ cuando $\dfrac{\left\langle Y, \dot{Y}\right\rangle}{\left\|Y, \dot{Y}\right\|^2} = \delta$.

Por la observación anterior tenemos que $\dfrac{\sqrt{\langle Y, Y\rangle \left\langle \dot{Y}, \dot{Y}\right\rangle}}{\left\|Y, \dot{Y}\right\|^2} \leqslant \dfrac{1}{2}$ y que $\dfrac{\left\langle \dot{Y}, \dot{Y}\right\rangle + k\langle Y, Y\rangle}{\left\|Y, \dot{Y}\right\|^2} \geqslant k$

Luego, utilizando la desigualdad de Cauchy-Schwartz y tomando $\dfrac{\left\langle Y, \dot{Y}\right\rangle}{\left\|Y, \dot{Y}\right\|^2} = \delta$, se tiene que:

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\frac{\left\langle Y,\dot{Y}\right\rangle}{\left\|Y,\dot{Y}\right\|^{2}} &= \frac{\left(\left\langle \dot{Y},\dot{Y}\right\rangle+\left\langle \ddot{Y},Y\right\rangle\right)\left\|Y,\dot{Y}\right\|^{2}-2\left\langle Y,\dot{Y}\right\rangle\left(\left\langle Y,\dot{Y}\right\rangle+\left\langle \ddot{Y},\dot{Y}\right\rangle\right)}{\left\|Y,\dot{Y}\right\|^{4}}\\
&= \frac{\left\langle \dot{Y},\dot{Y}\right\rangle-\langle KY,Y\rangle}{\left\|Y,\dot{Y}\right\|^{2}}-2\frac{\left\langle Y,\dot{Y}\right\rangle}{\left\|Y,\dot{Y}\right\|^{2}}\frac{\left\langle Y-KY,\dot{Y}\right\rangle}{\left\|Y,\dot{Y}\right\|^{2}}\\
&\geqslant \frac{\left\langle \dot{Y},\dot{Y}\right\rangle+k\langle Y,Y\rangle}{\left\|Y,\dot{Y}\right\|^{2}}-2\delta\left(\frac{\left\langle Y,\dot{Y}\right\rangle}{\left\|Y,\dot{Y}\right\|^{2}}-\frac{\left\langle KY,\dot{Y}\right\rangle}{\left\|Y,\dot{Y}\right\|^{2}}\right)\\
&\geqslant k-2\delta\left(\delta+\frac{\sqrt{\langle KY,KY\rangle\left\langle \dot{Y},\dot{Y}\right\rangle}}{\left\|Y,\dot{Y}\right\|^{2}}\right)\\
&\geqslant k-2\delta\left(\delta+k\frac{\sqrt{\langle Y,Y\rangle\left\langle \dot{Y},\dot{Y}\right\rangle}}{\left\|Y,\dot{Y}\right\|^{2}}\right)\\
&\geqslant k-2\delta\left(\delta+\frac{k}{2}\right)\geqslant -2\delta^{2}-k\delta+k>0 \qquad (5.110)
\end{aligned}
$$

□

Tomando $\delta < \dfrac{k}{1+c^{\frac{-3}{2}}}$ independientemente de $\epsilon < \dfrac{1}{c}$, tenemos entonces $\epsilon < 4c^2\delta^2$ y $\left(Y,\dot{Y}\right) \in C_\delta$.

Como $\dfrac{\frac{d}{dt}\left\|Y,\dot{Y}\right\|}{\left\|Y,\dot{Y}\right\|} = \dfrac{\left\langle Y,\dot{Y}\right\rangle+\epsilon\left\langle \ddot{Y},\dot{Y}\right\rangle}{\left\|Y,\dot{Y}\right\|^{2}}$

$$
= \frac{\left\langle Y,\dot{Y}\right\rangle}{\left\|Y,\dot{Y}\right\|^{2}}-\epsilon\frac{\left\langle KY,\dot{Y}\right\rangle}{\left\|Y,\dot{Y}\right\|^{2}}\geqslant \delta-\epsilon\frac{\sqrt{\langle KY,KY\rangle\left\langle \dot{Y},\dot{Y}\right\rangle}}{\left\|Y,\dot{Y}\right\|^{2}}\geqslant \delta-\frac{\epsilon}{c}\frac{\sqrt{\langle Y,Y\rangle\left\langle \dot{Y},\dot{Y}\right\rangle}}{\left\|Y,\dot{Y}\right\|^{2}}\geqslant \delta-\frac{\sqrt{\epsilon}}{2c}>0
$$

Esto prueba que los campos de Jacobi en C_δ expanden exponencialmente.

Definición 68. *Sea (X,d) un espacio métrico y $\epsilon > 0$. Decimos que $A \subseteq X$ es **ϵ-Denso** en X si $d(x,A) < \epsilon$, $\forall x \in X$.*

Lema 17. *Si $\forall x \in M$, $\mathcal{W}^u(x)$ es densa en M $\exists R = R(\epsilon) > 0$ tal que la bola de radio R en cada variedad inestable $(\mathcal{W}^u_R(x))$ es ϵ-densa en M.*

Demostración. Sea $x \in M$ y $\epsilon > 0$. Por compacidad de M existen $z_1,\dots,z_j \in M$ tal que $M = \bigcup\limits_{i=1}^{j} B_{\epsilon/2}(z_i)$. Como $\mathcal{W}^u(x) = \bigcup\limits_{R>0} \mathcal{W}^u_R(x)$ es denso en M, $\forall i \in \{1,...,j\}$, $\left(B_{\epsilon/2}(z_i) \cap \mathcal{W}^u(x)\right) \neq \varnothing$, por lo tanto existe $R(z_i) > 0$ tal que $\left(B_{\epsilon/2}(z_i) \cap \mathcal{W}^u_{R(z_i)}(x)\right) \neq \varnothing$. Tomando $R(x) = \underset{1 \leqslant i \leqslant j}{máx} \{R(z_i)\}$ muestra que $\mathcal{W}^u_{R(x)}(x)$ es ϵ-densa en M.

Como $\mathcal{W}^u$ es una foliación continua existe $\delta(x) > 0$ tal que $\mathcal{W}^u_{R(x)}(y)$ es ϵ-densa $\forall y \in B_{\delta(x)}(x)$. Por compacidad de M existen $x_1, \ldots, x_k \in M$ tal que las $\delta(x_i)$-bolas cubren M. Así $R(\epsilon) = \underset{1 \leqslant i \leqslant k}{máx} \{R(x_i)\}$ satisface el lema. □

Proposición 51. *Sea $\varphi^t : M \to M$ un flujo de Anosov. Si toda variedad inestable $\mathcal{W}^u(x)$ es densa en M. Entonces φ^t es mixing topológico.*

Demostración. Sean $\forall U, V \subseteq M$ abiertos, queremos ver que $\exists T$ tal que $\varphi^t(U) \cap V \neq \varnothing$, $\forall t \geqslant T$.

Sean $x, y \in M$ y $\epsilon > 0$ tales que $\mathcal{W}^u_\epsilon(x) \subseteq U$ y $B_\epsilon(y) \subseteq V$. Tomemos $R = R(\epsilon)$ como en el lema como φ^t expande uniforme y exponencialmente a la variedad inestable $\mathcal{W}^u(x)$ tenemos que $\exists T(U, V) > 0$ tal que $\mathcal{W}^u_R(\varphi^t(x)) \subseteq \varphi^t(\mathcal{W}^u_\epsilon(x))$, $\forall t \geqslant T$. Luego por el lema $\varnothing \neq (\mathcal{W}^u_R(\varphi^t(x)) \cap B_\epsilon(y)) \subseteq (\varphi^t(\mathcal{W}^u_\epsilon(x)) \cap V)$, $\forall t \geqslant T$. □

Lema 18. *Sea (M, θ) una variedad de contacto compacta. Si $\varphi^t : M \to M$ es un flujo de contacto Anosov, entonces $ker(\theta) = E^u \oplus E^s$.*

Demostración. Tenemos que SM es compacto por lo tanto θ es acotada en $SM \Rightarrow C := \underset{v \neq 0}{sup} \dfrac{|\theta(v)|}{\|v\|} < \infty$. Si $v \in E^s(x)$ y como φ^t es un flujo de contacto y por tanto θ es φ^t-invariante, tenemos que $|\theta(v)| = |\varphi^t_*(\theta(v))| = |\theta(\varphi^t(v))| \leqslant C \|\varphi^t(v)\| \underset{t \to \infty}{\to} 0$, por lo tanto $\theta(v) = 0$ $\forall v \in E^s$. Análogamente tenemos que $\theta(v) = 0$ $\forall v \in E^u$. □

Corolario 26. *Sea $\varphi^t : M \to M$ un flujo de contacto Anosov. Entonces:*

1. *$\mathcal{W}^u(x)$ es densa en M*
2. *φ^t es topológicamente mixing*
3. *φ^t es topológicamente transitivo*
4. *$NW(\varphi^t) = M$*

Bibliografía

[An] Anosov, Dmitrii Victorovich; *Geodesic Flows on Closed Riemann Manifolds with Negative Curvature*, Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics, 1967. (American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1969.)

[An,Si] Anosov, Dmitrii Victorovich; Yakov Sinai *Some Smoothy Ergodic Systems*, Uspehi Mat. Nauk, Vol. 22, No. 5, págs 107-172 (Russian), 1967. (Russian Mathematical Surveys, Vol. 22, No. 5, págs 103-167, 1967.)

[Arn] Arnold, Vladimir I.; *Mathematical Methods of Classical Mechanics* (Second Edition), Springer GTM-60, 1989.

[AVW] Avila, Artur; Viana, Marcelo; Wilkinson, Amie; *Absolute Continuity, Lyapunov Exponents and Rigidity I: Geodesic Flows.*, Journal of the European Mathematical Society, 17, págs 1435-1462, 2015

[Blair] Blair, David E.; *Riemannian Geometry of Contact and Symplectic Manifolds* (Second Edition). Birkhäuser, 2010.

[Brez] Brezis, Haim; *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer UTX, 2011.

[Br,St] Brin, Michael; Stuck, Garrett; *Intoduction to Dynamical Systems*, Cambridge University Press, 2002.

[Bu,Wi] Burns, Keith; Wilkinson, Amie; *On the Ergodicity of Partially Hyperbolic Systems*, Annals of Mathematics, second series, Vol. 171, No. 1., 2010.

[CaL] Camacho, César; Lins Neto, Alcides; *Teoria Geométrica das Folheações*, Projeto Euclides IMPA, 1979.

[Can,Con] Candel, Alberto; Conlon, Lawrence *Foliations I*, Graduate Studies in Mathematics, AMS-23, 1999.

[Clapp] Clapp, Monica; *Análisis Matemático*, Papirhos Instituto de Matemáticas UNAM, 2015.

[Cole] Coleman, Rodney; *Calculus on Normed Vector Spaces*, Springer UTX, 2012.

[CI] Contreras, Gonzalo; Iturriaga, Renato; *Global Minimizers of Autonomous Lagrangians*, 22 Coloquio Brasileiro de Matematica. IMPA, Rio de Janeiro, 1999.

[Coud] Coudène, Yves; *The Hopf Argument*, Journal of Modern Dynamics, No. 1, págs 147-153, 2007.

[dC] do Carmo Perdigão, Manfredo; *Riemannian Geometry*, Birkhäuser, 1992.

[Dur] Durret, Rick; *Probability Theory and Examples* (Fourth Edition), Cambridge University Press, 2010.

[Hirsch] Hirsch, Morris W.; *Differential Topology*, Springer GTM-33, 1976.

[Hi,Pu] Morris, Hirsch W.; Pugh, Charles; *Smoothness of Horocycle Foliations*, Journal of Differential Geometry, 10, No.2, págs 225-238, 1975.

[Ho] Hopf, Eberhard; *Statistik der geodätischen Linien in Mannigfaltigkeiten negativer Krümmung*, Ber. Verh. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig, Vol. 91, pags. 261–304, 1939.

[Ho2] Hopf, Eberhard; *Statistik der Löesungen geodäetischer Probleme vom unstabilen Typus II*, Mathematische. Annalen, Vol 117, pags 590-608, 1940.

[Ho3] Hopf, Eberhard; *Closed Surfaces Without Conjugate Points*, Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, Vol. 34, No. 2, págs. 47-51, 1948.

[KaH] Katok, Anatole; Hasselblatt, Boris, *Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems*, Cambridge University Press, 1999.

[Lee] Lee, John M.; *Riemannian Manifolds An Introduction to Curvature*, Springer GTM-176, 1997.

[McDu,Sa] McDuff, Dusa; Salamon, Dietmar; *Introduction to Symplectic Topology* (Second Edition), Oxford University Press, USA, 1998.

[Pat] Paternain, Gabriel Pedro; *Geodesic Flows*, Birkhäuser, 1999.

[Pu,Sh] Pugh, Charles; Shub, Michael; *Ergodicity of Anosov Actions*, inventiones Math., 15, págs 1-23, 1972.

[PVW] Pugh Charles; Viana, Marcelo; Wilkinson, Amie; *Absolute Continuity of Foliations.*, preprint disponible en w3.impa.br/˜viana/out/pvw.pdf

[Rokh] Rokhlin, Vladimir A.; *On the fundamental ideas of measure theory*, Transl. Amer. Math. Soc., Series 1, 10, págs 1–52, 1952.

[Roman] Roman, Steven; *Advance Linear Algebra* (Third Edition), Springer GTM-135, 2008.

[Rov] Rovenskii, Vladimir Y; *Foliations on Riemannian Manifolds and Submanifolds*, Birkhäuser, 1998.

[Spiv] Spivak, Michael; *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry* Volume One (Third Edition), Publish or Perish Inc., 2005.

[Taub] Taubes, Clifford Henry; *Differential Geometry Bundles, Connections, Metrics, and Curvature*, Oxford University Press, 2011.

[Tay] Taylor, Michael Eugene; *Measure Theory and Integration*, Graduate Studies in Mathematics 76, American Mathematical Society, 2006.

[Tu] Tu, Loring W.; *An Introduction to Manifolds* (Second Edition), Springer UTX, 2011.

[Vi] Viana, Marcelo; *Desintegration Into Conditional Measures: Rokhlin's Theorem*, disponible en http://w3.impa.br/˜viana/out/rokhlin.pdf

[Wilk] Wilkinson, Amie; *Smooth Ergodic Theory*, disponible en http://www.math.uchicago.edu/˜wilkinso/papers/smoothergodictheory.pdf

[Wouk] Wouk, Arthur; *A Course of Applied Functional Analysis*, John Wiley & Sons, Pure & Applied Mathematics, 1979.