



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**

MAESTRÍA EN CIENCIA E INGENIERÍA DE LA COMPUTACIÓN

POLÍGONOS MONOCROMÁTICOS CASI VACÍOS  
EN CONJUNTOS DE PUNTOS COLOREADOS EN EL PLANO

**TESIS**

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:

**MAESTRO EN CIENCIAS (COMPUTACIÓN)**

PRESENTA:

**ALEJANDRO CORINTO GONZÁLEZ MARTÍNEZ**

TUTOR: JORGE URRUTIA GALICIA INSTITUTO DE MATEMÁTICAS

México, D. F. Noviembre 2015



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

*A mi familia.  
En especial a mi madre: Rosa María.*

# Agradecimientos

Quiero agradecer al Dr. Jorge Urrutia por su apoyo, sus consejos y su guía a lo largo de estos dos años.

A los doctores: Carlos Velarde, David Flores, Juan José Montellano y David Sanders, por sus valiosos comentarios y sugerencias.

Al grupo de geometría computacional: Cravioto, José Luis, Miguel, Alfonso, Carlos, Mazay, Catana e Israel, por siempre estar dispuestos a discutir ideas conmigo.

Al Pogrado en Ciencia e Ingeniería de la Computación y al CONACYT por darme la oportunidad y aportar el financiamiento necesario para realizar estos estudios.

A mi familia, por siempre estar ahí para apoyarme, a mi prima Kira Padilla, a mi madre Rosa María, no lo hubiera podido lograr sin ustedes.

A Martha, por estar conmigo este tiempo y por impulsarme siempre a seguir adelante.

# Abstract

Sea  $S$  un conjunto de puntos en el plano sin tres puntos colineales. Un  $k$ -ágono es un polígono simple generado por  $k$  puntos de  $S$ . Un  $k$ -hoyo es un  $k$ -ágono convexo vacío, es decir, un  $k$ -ágono convexo que no contiene puntos de  $S$  en su interior. En esta tesis se considera una variación del problema propuesto por Erdős acerca de la existencia de  $k$ -hoyos en conjuntos de puntos en el plano [10].

Sea  $P$  un conjunto de puntos en el plano, suficientemente grande pero finito, sin tres puntos colineales y coloreado con  $c$  colores. En este trabajo se demuestra que  $P$  tiene un triángulo monocromático con a lo más  $c - 3$  puntos en su interior ( $c \geq 4$ ). El caso particular  $c = 4$  resuelve la conjetura presentada por Basu, Bhattacharya y Das en [5, 6].

Se demuestra también que cualquier conjunto bicromático suficientemente grande de puntos en el plano, tiene un cuadrilátero monocromático convexo con a lo más un punto en su interior. Se da también una generalización a  $c \geq 2$  colores de este resultado.

Let  $S$  be a planar point set with no three colinear points. A  $k$ -gon is a simple polygon spanned by  $k$  points of  $S$ . A  $k$ -hole is an empty convex  $k$ -gon; that is, a convex  $k$ -gon that contains no point of  $S$  in its interior. In this work a variation of the Erdős problem on  $k$ -holes of point sets [10] is considered.

Let  $P$  be a sufficiently large but finite planar point set with no three colinear points, and colored with  $c$  colors. In this work it is shown that  $P$  contains a monochromatic triangle with at most  $c - 3$  points in its interior ( $c \geq 4$ ). The particular case  $c = 4$  solves the conjecture of Basu, Bhattacharya, and Das in [5, 6].

It is also shown that any sufficiently large bi-chromatic planar point set contains a convex monochromatic quadrilateral with at most one point in its interior. A generalization of this result to  $c \geq 2$  colors is also proven.

# Índice general

<b>1. Introducción</b>	1
1.1. Definiciones y notación	1
1.2. Estructura de la tesis	4
1.3. Resumen de resultados	5
<b>2. El origen del problema</b>	6
2.1. El resultado clásico de Erdős y Szekeres	6
2.2. $r$ -ágonos convexos vacíos	7
2.2.1. Conjuntos de Horton	8
<b>3. Cuadriláteros Convexos</b>	10
3.1. Antecedentes	10
3.1.1. 4-hoyos monocromáticos. Un problema abierto	12
3.1.2. Cuadriláteros convexos con interiores disjuntos	13
3.2. Teoremas	17
3.2.1. Cuadrilátero monocromático con a lo más un punto	17
3.2.2. Generalización a $c$ colores	18
<b>4. Triángulos monocromáticos</b>	21
4.1. Antecedentes	21
4.1.1. Conjuntos coloreados de Horton	21
4.1.2. Triángulos monocromáticos casi vacíos	22
4.2. Teoremas	30
4.2.1. Prueba de la conjetura: 4 colores—a lo más un punto	30
4.2.2. Generalización a $c$ colores	38
<b>5. Conclusiones</b>	46
5.1. Trabajo futuro	47
<b>Bibliografía</b>	49

# Capítulo 1

## Introducción

La *geometría computacional* es un área del conocimiento que se encuentra en la interfaz entre las ciencias computacionales y las matemáticas. En ella se abordan todo tipo de problemas originados por el uso de objetos geométricos dentro de un contexto computacional. El objeto de estudio en esta tesis es un objeto que comúnmente se utiliza en geometría computacional, un conjunto de puntos finito en el plano. Como se verá más adelante, este objeto aparentemente simple puede dar origen a muchos problemas de investigación que resultan difíciles e interesantes.

### 1.1. Definiciones y notación

Sea  $S$  un conjunto de  $N$  puntos en el plano euclideo, donde  $N$  es un entero positivo. Se dice que  $S$  está en *posición general* si no tiene tres puntos que estén sobre una misma línea. Todos los conjuntos de puntos considerados en esta tesis están en posición general.

Para  $N \geq 3$  se define el *cierre convexo* de  $S$ , denotado por  $CC(S)$ , como un subconjunto de  $S$  donde sus elementos cumplen lo siguiente: si la línea que pasa por dos de sus puntos deja al resto de los elementos de  $S$  de un mismo lado, entonces ambos puntos están en  $CC(S)$ . Si  $S = CC(S)$  se dice que  $S$  está en *posición convexa*, o equivalentemente que los puntos de  $S$  se encuentran en *posición convexa*.

Un *polígono simple* es un polígono cuya frontera no se intersecta consigo misma. Un  $k$ -ágono de  $S$  es un polígono simple de  $k$  vértices los cuales se encuentran sobre puntos de  $S$ . Un  $k$ -hoyo es un  $k$ -ágono convexo vacío, es decir, un  $k$ -ágono que no contiene puntos de  $S$  en su interior y cuyos vértices se encuentran en posición convexa.

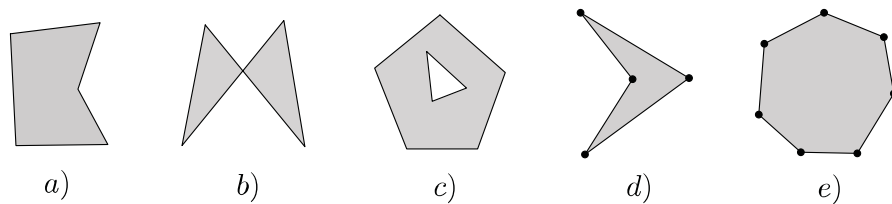


Figura 1.1: a) Un polígono b) Un polígono no simple c) No un polígono d) Un 4-ágono e) Un 7-ágono convexo

Una *gráfica geométrica* sobre los puntos de  $S$  es una gráfica no dirigida cuyo conjunto de vértices son los elementos de  $S$ , y cuyas aristas son segmentos de recta que unen pares de puntos de  $S$ . Una gráfica geométrica es *plana* si ningún par de sus aristas se intersectan. Se considera una intersección de aristas a un punto en común en el *interior* de las aristas, pues éstas pueden compartir un punto de  $S$  sin considerarse como una intersección.

Una *triangulación* de  $S$  es una gráfica geométrica plana maximal sobre los puntos de  $S$ . Es decir, si se agrega cualquier otra arista a la triangulación se genera un cruce. Esto es equivalente a que todas las caras de la gráfica sean triángulos. La Figura 1.2 muestra un ejemplo de una triangulación.

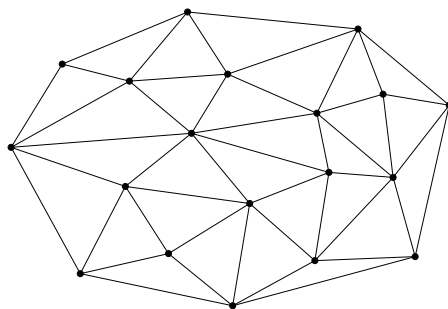


Figura 1.2: Una triangulación

Sea  $c$  un entero positivo. Una *coloración* de  $S$  con  $c$  colores ( $c$ -coloración) es una partición de  $S$  en  $c$  subconjuntos disjuntos no vacíos  $S_1, S_2, \dots, S_c$ .



### 1.1. Definiciones y notación

---

Cada subconjunto tiene una etiqueta (color) diferente,  $1 \leq i \leq c$ , y cumplen que  $S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_c = S$ . A  $S_i$  le llamaremos *clase cromática* o genéricamente nos referiremos a este subconjunto como los puntos de  $S$  de color  $i$ .

Dada una coloración de  $S$ , se dice que un subconjunto  $M$  de  $S$  es *monocromático* (*bicromático*) si los elementos de  $M$  pertenecen a una (dos) clase(s) cromática(s) de  $S$ .

Sean  $f$  y  $g$  dos funciones reales definidas sobre un subconjunto de los reales. Se dice que  $f$  es *O grande* de  $g$ , o bien,  $f(x) = O(g(x))$ , si y sólo si existe una constante positiva  $\gamma$  y un número real  $x_0$ , tal que para todo  $x \geq x_0$  se cumple que  $|f(x)| \leq \gamma |g(x)|$ .

## 1.2. Estructura de la tesis

- En el Capítulo 2 se mencionan los primeros trabajos que dieron origen a los problemas considerados en esta tesis: el *teorema de Erdős-Szekeres sobre conjuntos de puntos en posición convexa* [11] y su variación a  $k$ -ángulos convexos vacíos [10].
- En el Capítulo 3 se presenta la variación cromática del teorema de Erdős-Szekeres propuesta por Devillers, Hurtado, Károlyi y Seara en [9]. En esta variación a cada punto se le asocia un color. Se hace énfasis en el caso de la existencia de  $k$ -hoyos monocromáticos y se demuestran dos teoremas fuertemente relacionados con la conjetura ahí presentada. (Teorema 1 y Teorema 2.)
- En el Capítulo 4 se presentan los resultados obtenidos por Basu, Bhattacharya y Das [5], donde se introduce la noción de polígonos monocromáticos *casi vacíos*. Esto es,  $k$ -ángulos monocromáticos con pocos puntos en su interior. Se da una demostración de que la conjetura ahí enunciada es verdadera (Teorema 3). Además, se muestra una generalización de este resultado cuando se consideran conjuntos de puntos coloreados con  $c$  colores arbitrariamente (Teorema 4).
- Finalmente, en el Capítulo 5 se mencionan algunos problemas abiertos relacionados con este trabajo.

### 1.3. Resumen de resultados

**Definición.** Sea  $M_r(c, s)$  el mínimo número tal que cualquier conjunto de  $M_r(c, s)$  puntos en el plano, en posición general, y coloreado arbitrariamente con  $c$  colores tiene un  $r$ -ágono monocromático convexo con a lo más  $s$  puntos en su interior.

**Teorema 1** Cualquier conjunto suficientemente grande de puntos en el plano, en posición general y coloreado arbitrariamente con 2 colores, tiene un cuadrilátero monocromático convexo con a lo más un punto en su interior. Más precisamente,

$$M_4(2, 1) \leq 2 \cdot \text{ES}(9).$$

**Teorema 2** Cualquier conjunto suficientemente grande de puntos en el plano, en posición general y coloreado arbitrariamente con  $c \geq 2$  colores, tiene un cuadrilátero monocromático convexo con a lo más  $2c - 3$  puntos en su interior. Más precisamente,

$$M_4(c, 2c - 3) \leq c \cdot \text{ES}(4c + 1).$$

**Teorema 3** Todo conjunto en el plano de 145 puntos o más, coloreado arbitrariamente con 4 colores, tiene un triángulo monocromático con a lo más un punto en su interior. Es decir,

$$M_3(4, 1) \leq 145.$$

**Teorema 4** Todo conjunto suficientemente grande de puntos en el plano, en posición general y coloreado arbitrariamente con  $c \geq 4$  colores, tiene un triángulo monocromático con a lo más  $c - 3$  puntos en su interior. Más precisamente,

$$M_3(c, c - 3) = O(c^2).$$

---

Estos resultados fueron publicados en las actas de congreso de los *XVI Encuentros en Geometría Computacional* [14] llevados acabo en la *Facultat de Matemàtiques i Estadística* de la *Universitat Politècnica de Catalunya*, Barcelona, España.

## Capítulo 2

# El origen del problema

### 2.1. El resultado clásico de Erdős y Szekeres

El teorema de Erdős–Szekeres (1935) [11] establece que para todo entero  $m \geq 3$  existe un mínimo número,  $ES(m)$ , tal que cualquier conjunto de  $ES(m)$  puntos en el plano en posición general tiene un  $m$ -ágono convexo.

Durante las últimas décadas, este teorema ha atraído la atención de muchos investigadores, tanto por su belleza como por el hecho de que encontrar el valor exacto de la función  $ES(m)$  resulta ser un problema difícil de resolver. La historia del problema llega hasta 1933, cuando Esther Klein [11] observó que al colocar cinco puntos en el plano siempre se forma un cuadrilátero convexo. A este problema se le conoce en la literatura como *el problema del final feliz*, pues según Erdős condujo a la relación y posteriormente al matrimonio de Esther Klein y George Szekeres. En los artículos originales de Erdős y Szekeres se menciona que E. Makai y P. Turán demostraron que  $ES(5) = 9$ , pero la publicación oficial se atribuye a Kalbfleisch [18]. El avance en la solución del problema ha sido lento; no fue sino hasta muchos años después (2006) que Szekeres y Peters [26], después de realizar una larga búsqueda computacional, demostraron finalmente que  $ES(6) = 17$ . El valor exacto de  $ES(m)$  para  $m \geq 7$  sigue siendo un problema abierto hasta el día de hoy. Las mejores cotas que se tienen actualmente son:

$$2^{m-2} + 1 \leq ES(m) \leq \binom{2m-5}{m-2} + 1$$

La cota inferior es de Erdős y Szekeres [12] y está conjeturada a ser justa. La cota superior es de Tóth y Valtr [27]. Nótese que  $\binom{2m-5}{m-2} + 1 \approx \frac{4^m}{\sqrt{m}}$ . Esto significa que las cotas están todavía muy alejadas entre sí.

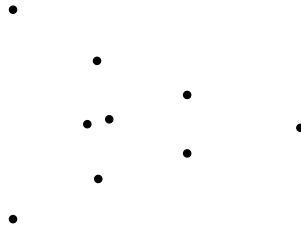


Figura 2.1: ([20]) Conjunto de 9 puntos sin 5-hoyos. Por lo tanto,  $H(5) > 9$ .

## 2.2. $r$ -ágonos convexos vacíos

En 1973 Erdős [10] formuló la siguiente pregunta: ¿Será cierto que para cualquier entero  $r \geq 3$  existe un mínimo número  $H(r)$  tal que cualquier conjunto de puntos en el plano, en posición general, con al menos  $H(r)$  puntos tiene un  $r$ -ágono convexo vacío, es decir, un  $r$ -hoyo?

Claramente en el caso  $r = 3$  la respuesta es afirmativa y  $H(3) = 3$ , pues cualquier conjunto con tres o más puntos tiene al menos un triángulo vacío. E. Klein también observó que cinco puntos son suficientes para formar siempre un cuadrilátero convexo vacío, es decir,  $H(4)=5$ . Harborth [16] demostró que  $H(5) = 10$ . La Figura 2.1 muestra un ejemplo de 9 puntos sin 5-hoyos y por lo tanto  $H(5) > 9$ . Cinco años después, Horton [17], sorprendentemente, demostró que existen conjuntos de puntos arbitrariamente grandes que *no contienen* ningún 7-ágono vacío. Después de una larga espera, en 2007/2008 Nicolás [21] e independientemente Gerken [13] demostraron que  $H(6) < \infty$ .

Los conjuntos de Horton resultan importantes para entender las preguntas que dan pie a los resultados obtenidos en esta tesis; por eso, algunas de sus características se explican brevemente en la siguiente subsección.

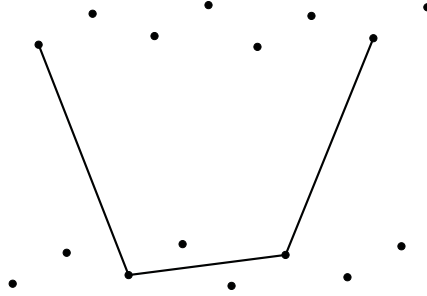


Figura 2.2: ([20]) Conjunto de Horton de 16 puntos y una 4-taza.

### 2.2.1. Conjuntos de Horton

Un conjunto de Horton [17, 20],  $H$ , es un conjunto de  $n$  puntos ordenados en la coordenada  $x$ :  $p_{1_x} < p_{2_x} < p_{3_x} < \dots < p_{n_x}$ , tal que tanto los puntos impares  $p_1, p_3, \dots$  como los puntos pares  $p_2, p_4, \dots$  son a su vez conjuntos de Horton y tales que cualquier línea que pase por dos de los puntos pares (el conjunto de *arriba*) deja todos los puntos impares por debajo y cualquier línea que pase por dos de los puntos impares (conjunto de *abajo*) deja todos los puntos pares arriba (Figura 2.2). Un conjunto de Horton de  $n$  elementos se obtiene recursivamente separando con una distancia vertical grande, después de intercalar sobre la coordenada  $x$ , los elementos del conjunto de Horton superior  $H^+$  de tamaño  $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$  y el conjunto de Horton inferior  $H^-$  de tamaño  $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ .

Dado un conjunto de Horton,  $S$ , se define una  $r$ -taza ( $r$ -gorra resp.) como un subconjunto de  $r$  puntos de  $S$   $q_1, q_2, q_3, \dots, q_r$  en posición convexa tal que bajo la suposición  $q_{1_x} < q_{2_x} < q_{3_x} < \dots < q_{r_x}$ , la envolvente superior (inferior resp.) del cierre convexo es el segmento  $q_1q_r$ . Se dice que una taza está vacía si ningún punto de  $S$  se encuentra arriba de la envolvente inferior de su cierre convexo. Una gorra vacía se define de manera análoga.

Es fácil ver que los conjuntos de Horton no tienen 4-tazas ni 4-gorras vacías. Con esto se puede demostrar fácilmente que los conjuntos de Horton no tienen 7-hoyos.

*Demostración.* ([20]) Un heptágono que tuviera sólo puntos con etiquetas pares o impares no tendría 7-hoyos porque la construcción es recursiva. Cualquier heptágono con algunos puntos pares y otros impares debe tener cuatro puntos del mismo tipo. Asumamos, sin pérdida de generalidad, que los cuatro puntos son impares. Estos puntos definen una 4-taza en el conjunto impar, que es a su vez un conjunto de Horton  $H^-$ . Entonces, debe haber al menos un punto impar que haga que esta taza no sea vacía. Este punto debe estar en el interior del heptágono, pues de otra manera la propiedad de que toda línea que pase por dos puntos impares deja a los pares arriba no se cumpliría.  $\square$

## Capítulo 3

# Cuadriláteros convexos

### 3.1. Antecedentes

En el 2003 Devillers, Hurtado, Károlyi y Seara publicaron un artículo titulado *Chromatic variants of the Erdős–Szekeres theorem on points in convex position* [9]. En ese artículo se estudia un variante del problema de Erdős–Szekeres cuando se consideran restricciones cromáticas en el conjunto de puntos.

En esta variante se considera el problema de encontrar el mínimo número de puntos tal que *para cualquier* coloración del conjunto se garantice la existencia de  $k$ -hoyos con una coloración específica. Se estudian tres tipos de coloración: monocromática (todos los vértices del mismo color), heterocromática (todos los vértices de diferente color) y policromática (no importa la coloración).

El primer resultado presentado en esta tesis resuelve un problema relacionado con el caso de cuadriláteros convexos monocromáticos. Para entender la relevancia de este resultado es necesario mencionar algunos de los resultados previamente obtenidos por los autores de dicho artículo.

El escenario con el que se puede empezar de manera natural es el caso con menos colores y el polígono más pequeño, es decir, dos colores y el triángulo. La pregunta a resolver es: ¿Existe un mínimo número de puntos en el plano (se asume posición general), coloreados arbitrariamente con dos colores, tal que cualquier conjunto con esta cantidad de puntos tenga siempre un triángulo monocromático vacío? En la Figura 3.1 se muestra una construcción de ocho puntos sin triángulos monocromáticos vacíos; esto implica que el mínimo número de puntos necesarios es estrictamente mayor que ocho. Ahora, es fácil demostrar que diez puntos son suficientes, ya que como



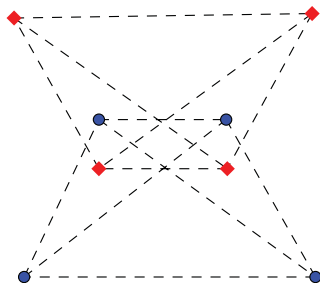


Figura 3.1: Conjunto bicoloreado de 8 puntos sin triángulos monocromáticos vacíos.

vimos en la sección 2.2, en diez puntos existe un 5-hoyo [16] ( $H(5) = 10$ ) y en el 5-hoyo debe haber al menos tres puntos que tengan el mismo color. Por lo tanto, en diez puntos coloreados con dos colores existe un triángulo monocromático vacío. Ahora, es posible demostrar que nueve puntos son suficientes [15]. La demostración es por casos, pero la dejaremos para después (Sección 4.1.2), pues es un buen ejemplo de la técnica que se utilizará para probar el teorema principal del capítulo 4.

El siguiente paso natural es preguntarse qué pasa con más colores. Uno de los resultados más interesantes obtenidos por Devillers et al. [9] es que para el caso de 3 colores existen conjuntos arbitrariamente grandes que no contienen ningún triángulo monocromático vacío. Se tiene un comportamiento parecido al que encontró Horton en la búsqueda del heptágono vacío (ver Sección 2.2.1). La construcción, que de hecho utiliza conjuntos de Horton coloreados, se muestra en detalle en la Sección 4.1.1. Este resultado es interesante pues marca una diferencia importante con el problema original no cromático: al existir una construcción como ésta para 3 colores, se puede hacer una construcción para  $c$  colores en general, es decir, se pueden construir conjuntos  $k$  coloreados arbitrariamente grandes que no contengan ningún triángulo monocromático vacío. Simplemente se va agregando a la construcción de 3 colores un punto de color diferente en cualquier lugar del plano.

El siguiente paso natural es preguntarse qué pasa con polígonos más grandes. En [9] se muestra cómo la misma construcción para triángulos utilizando 3 colores se puede utilizar para pentágonos utilizando 2 colores, simplemente considerando dos colores de los tres como uno solo. Es decir, se muestra que existen conjuntos arbitrariamente grandes coloreados con dos (y por lo tanto con  $c \geq 2$  colores) que no tienen ningún 5-hoyo monocromático, y por extensión hay conjuntos que no tienen ningún  $k$ -hoyo monocromático para  $k \geq 5$ , pues de existir un  $k$ -hoyo monocromático con  $k > 5$ , existiría un 5-hoyo monocromático, dado que los puntos en los  $k$ -hoyos están por definición en posición convexa.

Para formalizar los resultados mencionados anteriormente se define la función  $M_r(c)$  como sigue:

**Definición 1.** *Sea  $M_r(c)$  el mínimo número tal que cualquier conjunto de  $M_r(c)$  puntos en el plano, en posición general, y coloreado con  $c$  colores, contiene un  $r$ -hoyo monocromático.*

En [15, 9] se muestra que  $M_3(2) = 9$ ,  $M_{r \geq 3}(c \geq 3) = \infty$  y  $M_{r \geq 5}(2) = \infty$ .

### 3.1.1. 4-hoyos monocromáticos. Un problema abierto

Ahora, nótese que el único caso que falta es  $M_4(2)$ , es decir, encontrar el mínimo número de puntos para garantizar que exista un cuadrilátero monocromático convexo vacío en cualquier conjunto de puntos coloreado arbitrariamente con dos colores. Este caso resulta ser un caso muy difícil de atacar. Los autores de [9] no logran resolver este caso, pero muestran que cualquier conjunto de Horton con más de 64 puntos, coloreado con dos colores, tiene un 4-hoyo monocromático. Esta evidencia los lleva a conjeturar lo siguiente:

**Conjetura 1.** *[9] Todo conjunto de puntos en el plano suficientemente grande, en posición general, y coloreado con 2 colores, tiene un cuadrilátero monocromático convexo vacío.*

Al día de hoy, no existe una demostración de este enunciado. En la última década se han publicado trabajos relacionados con esta pregunta. Aichhol-

zer, Hackl, Huemer, Hurtado y Vogtenhuber [1] mostraron que todo conjunto de puntos bicromático suficientemente grande tiene un cuadrilátero monocromático *no necesariamente convexo*. En un trabajo posterior Aichholzer, Hackl, Hoffman, Pilz, Rote, Speckmann y Vogtenhuber [2] lograron mejorar el número de puntos necesarios a 2760. Sakai y Urrutia [24] demostraron que si la distribución de color no es uniforme, esto es, suponiendo que hay  $R$  puntos rojos y  $B$  azules y que la distribución de color es tal que  $R \geq 2B + 5$ , entonces existe un 4-hoyo rojo. También demostraron en ese mismo artículo que existen conjuntos de puntos rojo-azules tales que para *bloquear* (colocar al menos un punto en el interior) todos los cuadriláteros rojos se necesitan aproximadamente  $2R$  puntos azules.

Dos de los resultados principales de este trabajo de tesis están relacionados fuertemente con la Conjetura 1. (Teorema 1 y Teorema 2). Para demostrar estos teoremas se utilizó un resultado general encontrado por Sakai y Urrutia [25]. Antes de demostrar los teoremas se dedica la siguiente subsección a reproducir la prueba de ese resultado.

### 3.1.2. Cuadriláteros convexos con interiores disjuntos

**Teorema.** ([25]) *Cualquier conjunto  $P$  de  $n$  puntos en posición general tiene al menos  $\lfloor \frac{n-3}{2} \rfloor$  cuadriláteros convexos vacíos con interiores disjuntos.*

*Demostración.* Sea  $P$  un conjunto de  $n$  puntos en el plano en posición general, y sea  $K_1 = \{p_0, p_1, \dots, p_{c_1-1}\}$  el conjunto de vértices en el cierre convexo de  $P$ ,  $CC(P)$ , etiquetados de forma contraria a las manecillas del reloj. De forma similar, sea  $K_2 = \{q_0, q_1, \dots, q_{c_2-1}\}$  el conjunto de vértices en el cierre convexo de  $P - K_1$ . Donde  $c_1$  y  $c_2$  denotan el tamaño de  $|K_1|$  y  $|K_2|$  respectivamente.

Podemos asumir que  $n$  es impar, ya que si  $n$  es par entonces  $\lfloor \frac{(n-1)-3}{2} \rfloor = \lfloor \frac{n-3}{2} \rfloor$ , y en ese caso el resultado se sigue por inducción. Como  $n$  es impar,  $n = 2m + 3$  para alguna  $m$ . Queremos probar que existe un familia  $\Gamma$  de 4-hoyos con interiores disjuntos para  $|\Gamma| \geq m$ .

Si hay 3 vértices consecutivos en  $K_1$ ,  $p_i, p_{i+1}$  y  $p_{i+2}$ , tales que el triángulo  $\triangle p_i p_{i+1} p_{i+2}$  está vacío, siempre es posible rotar la línea  $p_i p_{i+2}$  alrededor de

### 3.1. Antecedentes

---

$p_i$  hasta que toque un punto  $s$ , como la muestra la Figura 3.2(a). Entonces estos 4 puntos forman un 4-hoyo y el resultado se sigue por inducción en  $P - \{p_{i+1}, p_{i+2}\}$ .

Un caso similar se tiene cuando hay dos puntos  $p_{i+1}$  y  $p_{i+2}$  en  $K_1$  y otros dos puntos  $q_1$  y  $q_{i+1}$  en  $K_2$  que formen un 4-hoyo con interior disjunto a  $CC(P - \{p_{i+1}, p_{i+2}, q_j, q_{j+1}\})$  como se muestra en la Figura 3.2(b). El resultado se sigue por inducción en  $P - \{p_{i+1}, p_{i+2}\}$ .

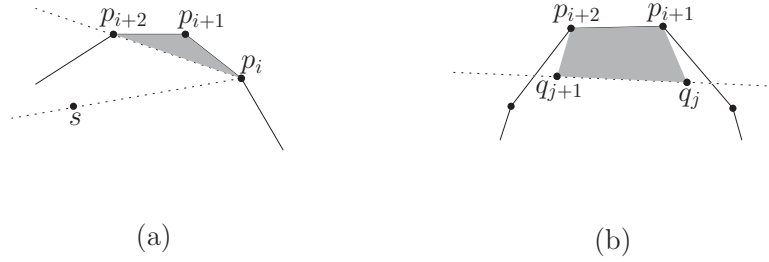


Figura 3.2: ([25]) Inducción en  $P - \{p_{i+1}, p_{i+2}\}$ .

Supongamos entonces que cada triángulo  $\Delta p_i p_{i+1} p_{i+2}$  tiene al menos un punto de  $P$  en su interior. Si hay dos triángulos consecutivos  $t_1$  y  $t_2$  con vértices  $p_i, p_{i+1}, p_{i+2}$  y  $p_{i+1}, p_{i+2}, p_{i+3}$  tales que ningún elemento de  $P$  está en su intersección, entonces es fácil ver que existe un punto  $q$  en  $t_1$  y un punto  $q'$  en  $t_2$  tales que  $q, p_{i+1}, p_{i+2}, q'$  forman un 4-hoyo como en la Figura 3.2(b). Nuevamente, el resultado se sigue por inducción en  $P - \{p_{i+1}, p_{i+2}\}$ .

Supongamos entonces que por cada  $i$ , hay un punto  $q_i \in K_2$  en la intersección de los triángulos con vértices  $p_{i-1}, p_i, p_{i+1}$  y  $p_i, p_{i+1}, p_{i+2}$ . Nótese que en este caso  $K_2$  tiene al menos  $c_1$  vértices. Tenemos dos subcasos:

- $K_2$  tiene exactamente  $c_1$  vértices. Sea  $P' = P - (K_1 \cup K_2)$ . Como  $n$  es impar  $P'$  no es vacío y tiene  $2(m - c_1) + 3$  puntos.

Sea  $K_3$  el conjunto de vértices de  $CC(P')$ . Podemos ver que por cada  $i = 0, 1, 2, \dots, c_1 - 1$  hay un  $r_j \in K_3$  tal que el cuadrilátero  $Q_i$  con vértices  $r_j, q_{i-1}, p_i, q_i$  es convexo y no tiene ningún punto de  $P$  en su interior. Es más, podemos elegir un conjunto de 4-hoyos  $\{Q_0, \dots, Q_{c_1-1}\}$  de tal manera que tengan interiores disjuntos, ver Figura 3.3(b).

### 3.1. Antecedentes

Por inducción, si  $2(m - c_1) + 3 \geq 5$ ,  $P'$  tiene  $(m - c_1)$  cuadriláteros (Figura 3.3(c)), que junto con  $\{Q_0, \dots, Q_{c_1-1}\}$  forman un conjunto de  $\lfloor \frac{n-3}{2} \rfloor$  4-hoyos con interiores disjuntos, como se estaba buscando (Figura 3.3(d)).

Si  $P'$  tiene 3 o menos elementos,  $c_1 \geq m$  se sigue que el resultado es cierto.

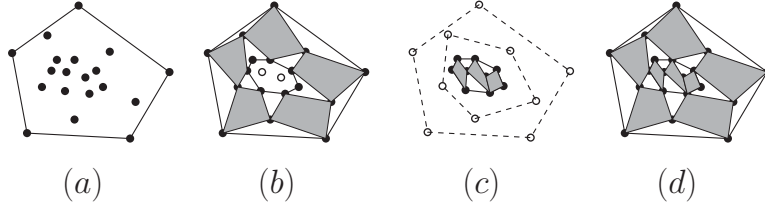


Figura 3.3: ([25])  $|K_1| = |K_2|$ .

- $K_2$  tiene más de  $c_1$  vértices. Nótese que para cada  $i$ , el triángulo con vértices  $p_{i-1}, p_i, p_{i+1}$  tiene al menos un vértice  $q_i$  en  $K_2$ . Como  $K_2$  tiene más de  $c_1$  vértices, entonces hay algún  $i$  tal que  $q_i$  y  $q_{i-1}$  no son consecutivos en  $K_2$  (Figura 3.4). Sea  $q \in K_2$  un vértice entre  $q_i$  y  $q_{i-1}$ . Sea  $L$  el conjunto de puntos contenidos en el interior del semiplano delimitado por la línea que pasa por  $p_i$  y  $q$  y que contiene a  $q_i$ . Sea  $R = P - (L \cup \{p_i, q\})$  (Figura 3.4). Supongamos sin pérdida de generalidad que  $L$  y  $R$  tienen un número par e impar de puntos respectivamente. Sea  $|L| = 2n_1$ , y por lo tanto  $|R| = 2(m - n_1) + 1$ .

Rotamos la línea  $p_i q$  alrededor de  $q$  hasta que toque un punto  $r$  de  $R$ . Nos fijamos en el conjunto  $L' = L \cup \{p_i, q, r\}$ . Si hay elementos de  $P$  en el interior del triángulo  $\triangle p_i q r$  no los consideramos. Aplicamos la hipótesis de inducción a  $L'$  para obtener un conjunto de cuadriláteros con interiores disjuntos con al menos  $n_1$  elementos. Nótese que por la forma en que elegimos a  $p_i, q$  y  $r$ , el triángulo con vértices  $p_i, q, r$  no es parte de un cuadrilátero convexo en  $L'$ , y no hay punto en el interior del triángulo con vértices  $p_i, q, r$  que sea vértice de algún cuadrilátero convexo con vértices en  $L'$ .

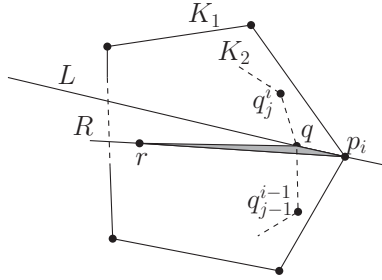


Figura 3.4: ([25])  $|K_1| < |K_2|$ .

Después, aplicamos inducción en  $R' = R \cup \{p_i, q\}$ , que contiene  $2(m - n_1) + 3$  puntos, para obtener un conjunto de cuadriláteros con interiores disjuntos con al menos  $(m - n_1)$  elementos. Estos cuadriláteros junto con los  $n_1$  cuadriláteros de  $L'$  forman un conjunto con al menos  $m$  elementos. Por lo tanto el resultado es cierto.

Ahora mostraremos que la cota es justa. Para  $n$  impar, sea  $P$  un conjunto de  $n$  vértices en posición convexa, y sea  $n = 2m + 3$ . Claramente  $P$  tiene al menos  $m$  cuadriláteros convexos con interiores disjuntos.

Para  $n = 2m$ , sea  $P_{2m}$  un conjunto de vértices con  $m$  puntos en posición convexa junto con otros  $m$  puntos, tales que estos últimos estén a una distancia de a lo más  $\epsilon$  del punto medio de las aristas de  $Q$ . Tal configuración de puntos se conoce como el *Doble Círculo*, ver Figura 3.5. Es fácil ver que  $P_{2m}$  tiene a lo más  $\lfloor \frac{2m-3}{2} \rfloor$  4-hoyos con interiores disjuntos.

□

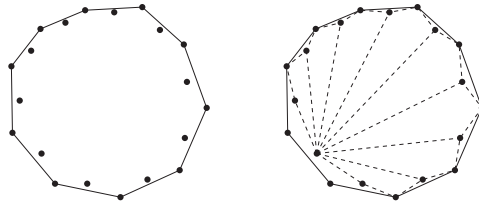


Figura 3.5: ([25]) Doble círculo de 20 elementos con  $\lfloor \frac{20-3}{2} \rfloor$  4-hoyos con interiores disjuntos.

## 3.2. Teoremas

### 3.2.1. Cuadrilátero monocromático con a lo más un punto

**Teorema 1.** *Cualquier conjunto suficientemente grande de puntos en el plano, en posición general y coloreado arbitrariamente con 2 colores, tiene un cuadrilátero monocromático convexo con a lo más un punto en su interior. Más precisamente,*

$$M_4(2, 1) \leq 2 \cdot \text{ES}(9).$$

*Demostración.* Sea  $S$  un conjunto de  $N$  puntos en el plano en posición general y coloreado con dos colores. Sean  $S_R$  y  $S_A$  los subconjuntos coloreados con color rojo y azul respectivamente y sean  $R$  y  $A$  sus cardinalidades. Sin pérdida de generalidad sea  $R \geq A$ . Entonces se cumple que  $R \geq \lceil \frac{N}{2} \rceil$ .

Sakai y Urrutia [25] demostraron que cualquier conjunto de  $n$  puntos en el plano en posición general tiene al menos

$$\left\lfloor \frac{n-3}{2} \right\rfloor \quad (3.1)$$

cuadriláteros convexos con interiores disjuntos.

Sea  $K_R$  un subconjunto con  $k_R$  elementos de  $S_R$  tal que cualquier elemento de  $S_R$  que se encuentre en el interior del cierre convexo de  $K_R$  pertenezca a  $K_R$ . Si  $S$  no tiene ningún cuadrilátero monocromático convexo con a lo más un punto en su interior, entonces todos los cuadriláteros monocromáticos convexos deben estar bloqueados, es decir, deben tener al menos dos puntos del otro color en su interior. Por la ecuación (3.1), hay al menos  $\left\lfloor \frac{k_R-3}{2} \right\rfloor$  cuadriláteros rojos con interiores disjuntos dentro del cierre convexo de  $K_R$ ,  $CC(K_R)$ . Esto implica que hay al menos  $k_R - 4$  puntos de color azul en el interior de  $CC(K_R)$ .

Ahora, sea  $L_A$  el subconjunto de  $S_A$  que se encuentran en el interior de  $CC(K_R)$ . Estos puntos generan cuadriláteros y éstos deben estar bloqueados también. Por lo tanto, debe haber al menos  $k_R - 8$  elementos de  $K_R$  bloqueando los cuadriláteros azules en el interior de  $CC(L_A)$ . Pues  $k_R - 8 = 2 \cdot \left\lfloor \frac{(k_R-4)-3}{2} \right\rfloor$ , en el caso de que  $k_R$  sea par. Pero eso implica

que el cierre convexo de  $K_R$  no puede tener más de 8 puntos:

$$|CC(K_R)| \leq 8. \quad (3.2)$$

Pero el teorema de Erdős–Szekeres garantiza que si  $N$  es suficientemente grande, entonces debe existir un conjunto de puntos que formen un 9-ágono convexo. Por lo tanto, si  $N \geq 2 \cdot ES(9)$  y tomamos a  $K_R$  precisamente como el 9-ágono convexo junto con todos los puntos rojos en su interior, entonces (3.2) nos lleva a una contradicción. Por lo tanto,  $S$  debe tener un cuadrilátero monocromático convexo con a lo más un punto en su interior.  $\square$

### 3.2.2. Generalización a $c$ colores

El resultado anterior puede ser generalizado utilizando la misma técnica a  $c$  colores arbitrarios, dando origen al siguiente teorema:

**Teorema 2.** *Cualquier conjunto suficientemente grande de puntos en el plano, en posición general y coloreado arbitrariamente con  $c \geq 2$  colores, tiene un cuadrilátero monocromático convexo con a lo más  $2c - 3$  puntos en su interior. Más precisamente,*

$$M_4(c, 2c - 3) \leq c \cdot ES(4c + 1).$$

*Demostración.* Sea  $P$  un conjunto de  $N$  puntos en el plano, en posición general y coloreado con  $c \geq 2$  colores. Sean  $P_i$  los subconjuntos de elementos de  $P$  de color  $i$ ,  $1 \leq i \leq c$ . Sin pérdida de generalidad, sea  $P_1$  la clase cromática más grande de  $P$ , entonces  $P_1$  satisface que  $|P_1| \geq \lceil \frac{N}{c} \rceil$ .

Sea  $K_1$  un subconjunto de  $k_1$  elementos de  $P_1$  tal que cualquier elemento de  $P_1$  que se encuentre en el interior del cierre convexo de  $K_1$  pertenezca a  $K_1$ . Si  $P$  no tiene ningún cuadrilátero monocromático convexo con a lo más  $2c - 3$  puntos en su interior, entonces todos los cuadriláteros monocromáticos convexos deben estar bloqueados, es decir, deben tener al menos  $2c - 2$  puntos de otro color en su interior. Por el resultado en [25] (ecuación 3.1), hay al menos  $\lfloor \frac{k_1 - 3}{2} \rfloor$  cuadriláteros de color 1 con interiores disjuntos dentro del cierre convexo de  $K_1$ ,  $CC(K_1)$ . Esto implica que hay al menos  $(c - 1)(k_1 - 4)$



### 3.2. Teoremas

---

puntos de color diferente a 1 en el interior de  $CC(K_1)$ , pues  $(c-1)(k_1-4) \leq 2(c-1) \left\lfloor \frac{k_1-3}{2} \right\rfloor$ . La desigualdad es estricta cuando  $k_1$  es impar y la igualdad se cumple si  $k_1$  es par.

Ahora, en el interior del  $CC(K_1)$ , fuera de los puntos de color 1, hay puntos pertenecientes a (a lo más)  $c-1$  clases cromáticas diferentes. Llamemos  $L_2$  a la clase cromática más grande dentro de  $CC(K_1)$  y denotemos su cardinalidad por  $l_2$ , donde estamos suponiendo s.p.g. que esos puntos son de color 2. Como hay al menos  $(c-1)(k_1-4)$  puntos de color diferente a 1 dentro del  $CC(K_1)$ , entonces

$$l_2 \geq \left\lceil \frac{(c-1)(k_1-4)}{(c-1)} \right\rceil = k_1 - 4. \quad (3.3)$$

Ahora, los elementos de  $L_2$  también generan cuadriláteros, y también deben estar bloqueados. Nuevamente utilizando la ecuación (3.1), sabemos que debe haber  $2(c-1) \left\lfloor \frac{l_2-3}{2} \right\rfloor$  puntos en el interior del  $CC(L_2)$  de color diferente a 2. En este caso, debe haber  $(c-1)(l_2-4) \leq 2(c-1) \left\lfloor \frac{l_2-3}{2} \right\rfloor$  puntos de color diferente a 2 dentro del  $CC(L_2)$ . Pues nuevamente la desigualdad es estricta cuando  $l_2$  es impar y la igualdad se cumple si  $l_2$  es par. Por lo tanto, hay al menos  $(c-1)(l_2-4)$  puntos de colores diferentes a 2 en el interior del  $CC(L_2)$ .

Pero entre las clases cromáticas dentro del  $CC(K_1)$ , sin contar al color 1,  $L_2$  es la más grande. Por lo tanto, adentro del  $CC(K_1)$  solamente puede haber a lo más  $(c-2)l_2$  puntos de colores  $3, 4, 5, \dots, c$ . Entonces, del total de puntos dentro del  $CC(L_2)$ ,  $(c-1)(l_2-4)$ , a lo más  $(c-2)l_2$  son de colores  $3, 4, 5, \dots, c$ . Por lo tanto, debe haber al menos  $(c-1)(l_2-4) - (c-2)l_2 = l_2 - 4(c-1)$ , puntos de color 1 dentro del  $CC(L_2)$ . Utilizando esto junto con la ecuación (3.3), sabemos que debe haber al menos  $k_1 - 4c$  de los  $k_1$  puntos en el interior del  $CC(L_2)$ . Pero eso implica que el cierre convexo de  $K_1$  no puede constar de más de  $4c$  puntos:

$$|CC(K_1)| \leq 4c. \quad (3.4)$$

Pero el teorema de Erdős–Szekeres garantiza que si  $N$  es suficientemente grande, entonces debe existir un conjunto de puntos que formen un  $(4c +$

### 3.2. Teoremas

---

1)-ágono convexo. Por lo tanto, si  $N \geq c \cdot ES(4c + 1)$  y tomamos a  $K_1$  precisamente como el  $(4c + 1)$ -ágono junto con todos los puntos de color 1 en su interior, entonces (3.4) nos lleva a una contradicción. Por lo tanto,  $P$  debe tener un cuadrilátero monocromático convexo con a lo más  $2c - 3$  puntos en su interior.  $\square$

## Capítulo 4

# Triángulos monocromáticos

### 4.1. Antecedentes

#### 4.1.1. Conjuntos coloreados de Horton

En la Sección 3.1 se mencionó que existen conjuntos arbitrariamente grandes coloreados con 3 colores tales que no contienen ningún triángulo monocromático vacío. Esta construcción dio origen a considerar otra variación del problema de Erdős–Szekeres, la cual inspiró el presente trabajo. Como introducción y motivación del tercer teorema presentado en esta tesis se muestra a continuación dicha construcción (Figura 4.1) y la demostración de que no contiene ningún triángulo monocromático vacío.

*Demostración.* ([9]) Nótese (Sección 2.2.1) que en general la diferencia de los índices de una 2-taza vacía en cualquier conjunto de Horton debe ser una potencia de dos. Es más, ambos índices no pueden ser impares, pues de ser así existiría un punto con índice par que haría que la 2-taza no fuera vacía. Ahora, si un punto tiene índice par y el otro impar entonces necesariamente la diferencia de sus índices debe ser uno, es decir, deben ser puntos consecutivos en el conjunto. Si ambos puntos son pares, entonces, dado que la construcción es recursiva, la diferencia de sus índices en  $H^+$  debe ser potencia de dos, y la diferencia de sus índices en  $H$  es esa diferencia multiplicada por dos. Reflejando el conjunto verticalmente el argumento es análogo para las 2-gorras vacías.

Ahora, la 3-coloración de los puntos se hace de forma alternante respecto a sus índices. Por ejemplo, si los colores se representan por las etiquetas  $R$ ,  $G$  y  $B$ , la coloración sería  $RGBRGBRGB\dots$ . Nótese que los conjuntos  $H^-$  y  $H^+$  quedan con una coloración alternante también,  $RBGRBG\dots$  y

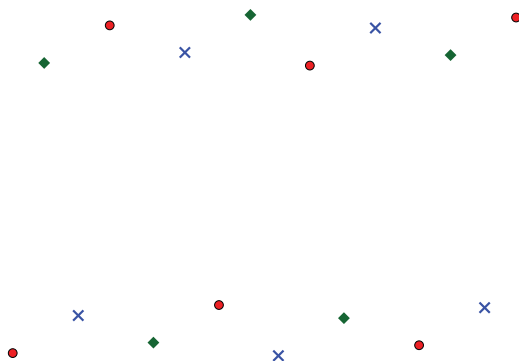


Figura 4.1: ([9]) 3-coloración de un conjunto de Horton de 16 puntos sin triángulos monocromáticos vacíos.

$GRBGRB \dots$  respectivamente. (Ver la Figura 4.1.)

Ahora, un triángulo monocromático tiene una de sus aristas en  $H^-$  o en  $H^+$ . En ambos casos la diferencia de los índices de los puntos que conforman esa arista es un múltiplo de 3; por lo tanto, el triángulo no puede estar vacío. En el caso en que los tres puntos del triángulo estuvieran en  $H^-$  o en  $H^+$ , el triángulo tampoco puede estar vacío, debido a la construcción recursiva del conjunto.  $\square$

#### 4.1.2. Triángulos monocromáticos casi vacíos

En el 2013, tomando como punto de partida estos resultados, Basu, Bhattacharya y Das consideraron una variación a este problema [5]. Dado que la existencia de  $k$ -hoyos monocromáticos resulta no ser siempre posible, debido en gran medida a que la restricción de ser vacíos es muy fuerte, ellos propusieron la búsqueda de lo que llamaron polígonos monocromáticos *casi* vacíos. La variación en este caso consiste en permitir que el  $k$ -ágono monocromático pueda tener a lo más cierta cantidad de puntos en su interior. La noción de polígonos casi vacíos en conjuntos de puntos no coloreados ya había sido considerada en trabajos anteriores [22, 19]. Los resultados presentados en estos artículos, publicados en el tiempo en que el problema del

6-ágono vacío todavía no había sido resuelto (Sección 2.2), resultaban una manera ingeniosa de acercarse al problema abierto desde una perspectiva diferente. Sin embargo, la variante cromática (cuya extensión se presenta en esta tesis) fue presentada por primera vez por Basu et al. [5].

Sabemos (Sección 4.1.1) que existen conjuntos arbitrariamente grandes, y una 3-coloración de estos, tal que no contienen ningún triángulo monocromático vacío. En [5] se demuestra que para conjuntos de puntos 3-coloreados, 13 puntos son suficientes para garantizar la existencia de un triángulo monocromático con *a lo más un punto* en su interior. La Figura 4.2 muestra la cota inferior que hace este resultado exacto. Los autores de [5] presentan como teorema principal de su artículo una generalización a  $c$  colores de este resultado; demostrando que todo conjunto suficientemente grande de puntos en el plano, coloreado con  $c$  colores, tiene un triángulo monocromático con *a lo más  $c - 2$  puntos* en su interior.

Para formalizar este resultado se define la función  $M_r(c, s)$  como sigue:

**Definición 2.** *Sea  $M_r(c, s)$  el mínimo número tal que cualquier conjunto de  $M_r(c, s)$  puntos en el plano, en posición general, y coloreado arbitrariamente con  $c$  colores tiene un  $r$ -ágono monocromático convexo con *a lo más  $s$  puntos en su interior*.*

El caso de  $k$ -hoyos monocromáticos corresponde a  $M_r(c, 0)$ , cuyos valores ya se han mencionado en el capítulo anterior y que corresponden a los resultados presentados en [9]. El caso de triángulos corresponde a  $M_3(c, s)$ . Así, el resultado principal en [5] se puede resumir como:  $M_3(c, c - 2) \leq (c + 1)^2$ ,  $c \geq 2$ , donde se muestra explícitamente el valor de la cota superior obtenida por los autores.

A continuación, como preámbulo al teorema principal de este capítulo, se muestran algunos de los resultados obtenidos por Basu, Bhattacharya y Das [5].

#### $M_r(c, s)$ para $c$ y $s$ pequeñas

Las demostraciones para los valores de la función  $M_r(c, s)$  para  $c$  arbitraria parten de ideas que pueden ser expuestas en las demostraciones para

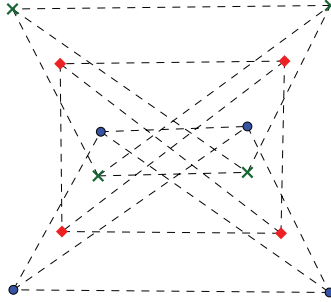


Figura 4.2: ([5]) Conjunto 3-coloreado de 12 puntos sin triángulos monocromáticos con a lo más un punto en su interior.

$c$  y  $s$  pequeñas.

En las demostraciones siguientes se utilizará muchas veces el siguiente hecho:

**Hecho.** Sea  $S$  un conjunto de puntos en el plano en posición general. Entonces, cualquier triangulación de  $S$  tiene exactamente

$$|CC(S)| + 2I - 2 \tag{4.1}$$

triángulos con interiores disjuntos, donde  $CC(S)$  denota al cierre convexo de  $S$  e  $I$  denota el número de puntos de  $S$  en el interior del  $CC(S)$ .

Anteriormente se había comentado (Secc. 3.1 Fig. 3.1) que para  $c = 2$  y  $s = 0$ ,  $M_3(2, 0) = 9$ . La demostración es por casos.

*Demostración.* ([15]) Supongamos que tenemos  $R + B = 9$  puntos en total.  $R$  rojos y  $B$  azules. Sin pérdida de generalidad supongamos que hay más puntos rojos que azules.

- Si  $R \geq 6$ , cualquier triangulación de los puntos rojos tiene al menos 4 triángulos, sin importar la posición de los puntos rojos. Pero sólo hay 3 puntos azules para bloquearlos, por lo tanto hay al menos un triángulo rojo vacío.

- Si  $R = 5$ , hay tres casos. Si el cierre convexo de los puntos rojos tiene 3 puntos, entonces hay 5 triángulos rojos. Pero solamente 4 puntos azules para bloquearlos. Por lo tanto hay un triángulo rojo vacío.
- Si el cierre convexo rojo tiene 4 puntos, entonces hay 4 triángulos rojos y 4 puntos azules para bloquearlos. Pero al bloquear, los cuatro puntos azules generan 2 triángulos azules (adentro del cierre convexo rojo) y solamente hay un punto rojo para bloquearlo. Por lo tanto hay un triángulo azul vacío.
- Si el cierre convexo rojo tiene 5 puntos, entonces hay 3 triángulos rojos y los azules pueden bloquearlos. Pero los puntos rojos están en posición convexa y no hay más puntos rojos para bloquear al triángulo azul.

En todos los casos existe un triángulo monocromático vacío. Por tanto,  $M_3(2, 0) \leq 9$ , y con la cota inferior de la Figura 3.1 tenemos que  $M_3(2, 0) = 9$ .  $\square$

En esta demostración simple se puede notar cómo el juego entre el número de puntos que hay en el cierre convexo, los triángulos que genera la triangulación y los puntos disponibles para bloquear, al final siempre llevan a la existencia de algún triángulo vacío. Esta idea se aplica directamente a la demostración para  $c$  colores en general,  $M_3(c, c - 2)$ . Y de hecho constituye la idea clave del teorema principal de este capítulo.

Otro caso sencillo para valores pequeños es el de  $M_3(2, 1) = 6$ .

*Demostración.* ([6]) El peor caso se da cuando los dos colores tienen el mismo número de puntos:  $R = B = 3$ . Pero en este caso solamente hay un triángulo rojo, y para que no exista un triángulo monocromático con a lo más un punto, este triángulo debe tener el menos dos puntos azules en su interior. En el caso de que haya tres puntos azules adentro del triángulo rojo, se forma un triángulo azul vacío. En el caso de que haya dos puntos azules dentro del triángulo rojo la arista azul dentro del triángulo rojo junto con el otro punto azul forman un triángulo vacío o con solamente un punto rojo adentro, pues solamente un punto del triángulo rojo puede estar en el interior del triángulo

azul. En ambos casos hay un triángulo monocromático con a lo más un punto en su interior. Por lo tanto  $M_3(2, 1) \leq 6$ . Un triángulo rojo con dos puntos azules en su interior dan la cota inferior, por lo tanto  $M_3(2, 1) = 6$ .  $\square$

La demostración de  $M_3(3, 1) = 13$  es poco más complicada, pero no demasiado.

*Demostración.* ([6]) Tenemos tres colores,  $R$ ,  $A$ , y  $V$ , rojo, azul y verde respectivamente. Sin pérdida de generalidad supongamos que el color rojo es mayoría. Nuevamente la demostración es por casos.

- Si  $R \geq 6$ , entonces hay al menos 4 triángulos rojos. Y deben estar bloqueados (en este caso *bloquear* significa colocar al menos dos puntos en el interior del triángulo). Por lo tanto deben haber al menos 8 puntos dentro del  $CC(R)$ , pero solamente hay a lo más 7 puntos de los otros dos colores. Por lo tanto hay un triángulo rojo que no está bloqueado.
- Si  $R = 5$  hay tres casos. Si  $|CC(R)| = 3$ , entonces hay 5 triángulos rojos y para que estén bloqueados debe haber 10 puntos de color diferente al rojo dentro del  $CC(R)$ . Pero solamente hay 8 puntos de los otros colores. Por lo tanto no todos los triángulos rojos están bloqueados.
- Si  $|CC(R)| = 4$ , entonces hay 4 triángulos rojos y por lo tanto los 8 puntos verdes o azules están en el interior del  $CC(R)$ . Ahora, s.p.g, supongamos que  $A \geq V$ . Si  $A = 5$  hay al menos 3 triángulos azules y con los 3 verdes y el rojo no es posible bloquearlos. Si  $A = 4$  hay dos subcasos: Si el  $|CC(A)| = 3$ , entonces hay 3 triángulos azules y con los 4 verdes y el rojo no es posible bloquearlos. Si el  $|CC(A) = 4|$ , entonces hay 2 triángulos azules. Entonces hay al menos 4 puntos dentro del  $CC(A)$ . Pero esto implica que hay al menos 3 puntos verdes adentro del  $CC(A)$  y el punto rojo no puede bloquear este triángulo.
- Si  $|CC(R) = 5|$ , los puntos rojos están en posición convexa y entonces hay 3 triángulos rojos y al menos 6 puntos dentro del  $CC(R)$ . Pero como  $M_3(2, 1) = 6$  entonces en estos seis puntos debe haber un triángulo monocromático con a lo más un punto.



#### 4.1. Antecedentes

---

En todos los casos existe un triángulo monocromático con a lo más un punto en su interior. Por lo tanto,  $M_3(3, 1) \leq 13$ , y la cota inferior en la Figura 4.2 implica que  $M_3(3, 1) = 13$ .  $\square$

El siguiente caso pequeño corresponde a 4 colores y triángulos vacíos,  $M_3(4, 0)$ . Pero como se mencionó en la Sección 3.1, agregando un punto del cuarto color en cualquier lugar del plano al conjunto 3-coloreado de Horton (Sección 4.1.1), se obtiene un conjunto 4-coloreado arbitrariamente grande sin triángulos monocromáticos vacíos. Por lo tanto,  $M_3(4, 0) = \infty$ .

**Los casos generales:**  $M_3(c, c - 1) \leq c(c + 1) + 1$  y  $M_3(c, c - 2) \leq (c + 1)^2$

El resultado:  $M_3(c, c - 1) \leq c(c + 1) + 1$  se menciona en [5] pero se presenta sin demostración. A continuación se muestra una prueba ya que este resultado se utiliza en la demostración del caso más justo:  $M_3(c, c - 2) \leq (c + 1)^2$ .

*Demostración.* Sea  $S$  un conjunto de  $c(c + 1) + 1$  puntos coloreados con  $c$  colores. Como

$$\left\lceil \frac{c(c + 1) + 1}{c} \right\rceil = \left\lceil c + 1 + \frac{1}{c} \right\rceil = c + 2$$

existe al menos un color con al menos  $c + 2$  puntos. Denotemos a este conjunto  $R$  y llamemos a ese color, *rojo*. Por el Hecho 4.1, cualquier triangulación de  $R$  tiene al menos  $c$  triángulos rojos con interiores disjuntos. Para que no exista un triángulo rojo con a lo más  $c - 1$  puntos en su interior, todos estos triángulos deben tener al menos  $c$  puntos de los otros colores en su interior. Pero el número de puntos de color diferente al rojo es a lo más  $c(c + 1) + 1 - (c + 2) = c^2 - 1$ . Por lo tanto, repartiendo estos puntos en los triángulos rojos:  $\left\lfloor \frac{c^2 - 1}{c} \right\rfloor = c - 1$ , vemos que siempre existe un triángulo rojo con a lo más  $c - 1$  puntos en su interior.  $\square$

La demostración de  $M_3(c, c - 2) \leq (c + 1)^2$  es por inducción en  $c$ .

*Demostración.* ([5]) En los párrafos anteriores dedicados a los casos pequeños se demostraron los casos base  $c = 2$  y  $c = 3$ . Supongamos se cumple que  $M_3(r, r - 2) \leq (r + 1)^2$  para  $2 \leq r < c$  y queremos demostrar que  $M_3(c, c - 2) \leq (c + 1)^2$ .

Sea  $S$  un conjunto de  $(c + 1)^2$  puntos coloreados con  $c$  colores. Entonces, como

$$\left\lceil \frac{(c + 1)^2}{c} \right\rceil = \left\lceil c + 2 + \frac{1}{c} \right\rceil = c + 3$$

existe al menos un color con al menos  $c + 3$  puntos. Denotemos a este conjunto  $R$  y llamemos a ese color, *rojo*. Tenemos los siguientes casos:

Si  $|R| \geq c + 4$ : Cualquier triangulación de  $R$  tiene al menos  $c + 2$  triángulos rojos con interiores disjuntos (Hecho 4.1). Pero el número de puntos de color diferente al rojo es a lo más  $(c + 1)^2 - (c + 4) = (c - 1)(c + 2) - 1$ . Y  $\left\lfloor \frac{(c-1)(c+2)-1}{(c+2)} \right\rfloor = c - 2$ . Por lo tanto debe de existir un triángulo rojo con a lo más  $c - 2$  puntos en su interior.

Si  $|R| = c + 3$ , dependiendo del número de puntos en el  $CC(R)$  se tienen los siguientes casos:

Si  $|CC(R)| \leq c + 1$ : Cualquier triangulación de  $R$  tiene al menos  $c + 3$  triángulos rojos. Pero el número de puntos de color diferente a rojo es a lo más  $(c + 1)^2 - (c + 3) = (c - 1)(c + 2)$ . Y  $\left\lfloor \frac{(c-1)(c+2)}{(c+3)} \right\rfloor \leq c - 2$ . Por lo tanto existe un triángulo rojo con a lo más  $c - 2$  puntos en su interior.

Si  $|CC(R)| = c + 2$ : Cualquier triangulación de  $R$  tiene exactamente  $c + 2$  triángulos rojos. Ahora, o bien existe un triángulo rojo con a lo más  $c - 2$  puntos en su interior y ya acabamos, o en el interior del  $CC(R)$  hay al menos  $(c - 1)(c + 2)$  puntos de color diferente al rojo. Supongamos que tenemos el segundo caso. Pero entonces en el interior del  $CC(R)$  hay al menos  $(c - 1)(c + 2)$  puntos de  $c - 1$  colores y un punto rojo. Y  $(c - 1)(c + 2) \geq c^2$ , si  $c \geq 2$ . Y por hipótesis de inducción basta con tener  $c^2$  puntos de  $c - 1$  colores para tener un triángulo monocromático con a lo más  $c - 3$  puntos en su interior. El punto rojo puede estar en el interior de este triángulo, pero aún así se cumple que existe un triángulo monocromático con a lo más  $c - 2$  puntos en su interior.

Si  $|CC(R)| = c + 3$ :  $R$  se encuentra en posición convexa. Ahora, o bien

existe un triángulo rojo con a lo más  $c - 2$  puntos en su interior y ya acabamos, o en el interior del  $CC(R)$  hay al menos  $(c - 1)(c + 1)$  puntos de color diferente al rojo. Pero entonces en el interior del  $CC(R)$  hay al menos  $(c - 1)(c + 1)$  puntos de  $c - 1$  colores. Pero ya se demostró que  $M_3(c, c - 1) \leq c(c + 1) + 1$ , y por lo tanto  $M_3(c - 1, c - 2) \leq (c - 1)(c) + 1$ . Y como  $(c - 1)(c + 1) \geq (c - 1)(c) + 1$  si  $c \geq 2$ . Entonces debe existir un triángulo monocromático con a lo más  $c - 2$  puntos en su interior. Con lo cual se cubren todos los casos y termina la prueba.  $\square$

### Un problema abierto (resuelto)

El siguiente paso natural es tratar de buscar triángulos monocromáticos con menos puntos en su interior, es decir,  $M_3(4, 1)$ . Es aquí donde el conocimiento actual alcanza su límite. Este caso resulta complicado. Como vimos anteriormente, los autores en [5] demostraron que  $M_3(4, 2) \leq 25$ , es decir, 4 colores con a lo más 2 puntos, pero no demuestran el caso de 4 colores con a lo más 1 punto. Sin embargo, logran demostrar que todo conjunto 4-coloreado de Horton con más de 25 puntos tiene un triángulo monocromático con a lo más un punto en su interior. Esta evidencia los lleva a enunciar la siguiente conjetura:

**Conjetura 2.** ([5, 6]) *Todo conjunto suficientemente grande de puntos en el plano, en posición general y coloreado con 4 colores, tiene un triángulo monocromático con a lo más un punto en su interior.*

A continuación, como resultado principal de este capítulo se demuestra que esta conjetura es cierta, y utilizando las mismas técnicas se hace una generalización a  $c$  colores arbitrarios.

## 4.2. Teoremas

### 4.2.1. Prueba de la conjetura: 4 colores—a lo más un punto

Este teorema constituye una prueba de la Conjetura 2 de Basu, Bhattacharya y Das [5, 6] (Sección 4.1.2 Pág. 29). Posteriormente se muestra una generalización de este resultado.

A continuación se introduce la notación que se utilizará en las demostraciones de los teoremas y los lemas.

Sea  $S$  un conjunto de puntos en el plano, coloreado con  $c$  colores. Y sea  $S_j$  el subconjunto de elementos de  $S$  coloreados de color  $j$ ,  $1 \leq j \leq c$ . A  $S_j$  se le llamará clase cromática, y su cardinalidad será denotada por  $k_j$ . Si  $k_j \geq k_m$  para toda  $m$ ,  $1 \leq m \leq c$ , se dirá que  $j$  es *color mayoría* de  $S$ . El cierre convexo de un subconjunto  $S_j$  se denotará por  $CC(S_j)$ , el número de elementos en el  $CC(S_j)$  será denotado por  $h_j$ , y el número de puntos de  $S_j$  en el interior del  $CC(S_j)$  será denotado por  $i_j$ , de forma que  $k_j = h_j + i_j$ . El argumento utilizado para probar el siguiente resultado es recursivo, y en la iteración  $r$ ,  ${}^rS$  denotará el subconjunto de elementos de  $S$  que serán considerados en esa iteración.  ${}^rS_j$  denotará el subconjunto de elementos de  ${}^rS$  de color  $j$ ,  ${}^rk_j$  será la cardinalidad de  ${}^rS$ .  ${}^rh_j$  e  ${}^ri_j$  denotarán el número de elementos sobre el  $CC({}^rS_j)$  y en su interior respectivamente.

**Teorema 3.** *Todo conjunto en el plano de 145 puntos o más, coloreado arbitrariamente con 4 colores, tiene un triángulo monocromático con a lo más un punto en su interior.*

*Demostración.* Sea  $S = {}^0S$  un conjunto de  $N$  puntos en el plano, en posición general y coloreado con 4 colores. Sin pérdida de generalidad supongamos que el color 1 es el color mayoría de  $S$ . Entonces  ${}^0k_1$  satisface la siguiente desigualdad,

$${}^0k_1 \geq \left\lceil \frac{N}{4} \right\rceil. \quad (4.2)$$

Para mostrar que en efecto existe un mínimo entero  $N$  tal que  $S$  tiene un triángulo monocromático con a lo más 1 punto en su interior, supondremos que un contraejemplo de  $N$  puntos,  $W$ , existe, y mostraremos algunas de

las condiciones que debe cumplir. Después, demostraremos que si  $N$  es suficientemente grande entonces es imposible construir  $W$ . Los siguiente hechos serán de ayuda:

- Sea  ${}^r S_j$  un conjunto de puntos en posición general, entonces, cualquier triangulación de  ${}^r S_j$  tiene exactamente  ${}^r k_j + {}^r i_j - 2$  triángulos.
- Si no existe ningún triángulo monocromático con a lo más 1 punto en su interior, entonces *todo* triángulo monocromático debe tener al menos 2 puntos de otro color en su interior.

En este contexto se dice que un triángulo monocromático está bloqueado si tiene al menos 2 puntos en su interior. Para construir  $W$ , en particular, todo triángulo monocromático de color 1 debe estar bloqueado. Esto implica que debe haber al menos  $2({}^0 k_1 + {}^0 i_1 - 2)$  puntos de otro color en el interior del  $CC({}^0 S_1)$ . Sea  ${}^1 S$  el subconjunto de elementos de  ${}^0 S$  que se encuentran adentro del  $CC({}^0 S_1)$ . La siguiente desigualdad es fácil de ver,

$$N - {}^0 k_1 \geq {}^1 k_2 + {}^1 k_3 + {}^1 k_4 \geq 2({}^0 k_1 + {}^0 i_1 - 2).$$

El término de la izquierda y el de la derecha de esta desigualdad junto con la Eq. (4.2), nos dan una cota superior para el número de puntos internos que  ${}^0 S_1$  puede tener sin que se forme un triángulo monocromático con a lo más 1 punto en su interior, esto es:

$$N - {}^0 k_1 \geq 2({}^0 k_1 + {}^0 i_1 - 2)$$

$${}^0 i_1 \leq \frac{N - 3({}^0 k_1)}{2} + 2 \leq \frac{N - 3(\lceil \frac{N}{4} \rceil)}{2} + 2 \leq \frac{N - 3(\frac{N}{4})}{2} + 2$$

$${}^0 i_1 \leq \frac{N}{8} + 2. \tag{4.3}$$

Intuitivamente, el cierre convexo de  ${}^0 S_1$  tiene que ser grande, pues de ser pequeño, los puntos internos generarían más triángulos que los que pueden ser bloqueados por los puntos de color 2, 3 y 4.

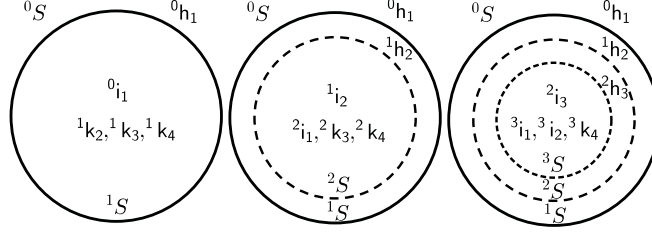


Figura 4.3: Diagrama de las iteraciones

Ahora nos enfocamos en lo que pasa adentro del  $CC(^0S_1)$  y aplicamos el mismo argumento recursivamente. Ésta constituye la primera iteración. Buscamos el color mayoría entre los elementos de  $^1S$ . Los candidatos son:  $^0i_1 = ^1i_1, ^1k_2, ^1k_3$  y  $^1k_4$ .

*¿Puede ser  $^0i_1 = ^1i_1$  color mayoría de  $^1S$ ?*

Supongamos que sí. Entonces debe satisfacer que

$$^0i_1 \geq \left\lceil \frac{^0i_1 + 2(^0k_1 + ^0i_1 - 2)}{4} \right\rceil. \quad (4.4)$$

Sea  $^0h_1$  el número de puntos en el  $CC(^0S_1)$ . Como  $^0k_1 = ^0h_1 + ^0i_1$ , sustituyendo en 4.4 y despejando para  $^0h_1$  tenemos:

$$^0i_1 \geq \frac{^0i_1 + 2(^0k_1 + ^0i_1 - 2)}{4}$$

$$^0i_1 \geq \frac{2(^0h_1) + 5(^0i_1) - 4}{4}$$

$$^0h_1 \leq -\frac{1}{2}^0i_1 + 2.$$

En particular:

$$^0h_1 \leq 2.$$

Pero esto implica que  $^0k_1 \leq 2$ . Es decir, la clase cromática más grande del conjunto de puntos tiene a lo más 2 elementos. Por lo tanto el conjunto total,  $S$ , no puede tener más de 8 elementos. Por lo tanto si  $N \geq 9$ , el color 1 no

puede ser el color mayoría de  ${}^1S$ .

En vista de este resultado podemos suponer sin pérdida de generalidad que el color 2 es el color mayoría de  ${}^1S$ . Entonces, por el principio de las jaulas y los pichones,  ${}^1k_2$  satisface la siguiente desigualdad,

$${}^1k_2 \geq \left\lceil \frac{2({}^0k_1 + {}^0i_1 - 2)}{3} \right\rceil. \quad (4.5)$$

De la misma forma que anteriormente, todo triángulo generado por  ${}^1S_2$  debe estar bloqueado por puntos de color 3, 4 ó 1. Sea  ${}^2S$  el subconjunto de elementos de  ${}^1S$  que se encuentran en el interior del  $CC({}^1S_2)$ , entonces debe suceder que

$${}^2i_1 + {}^2k_3 + {}^2k_4 \geq 2({}^1k_2 + {}^1i_2 - 2). \quad (4.6)$$

Dado que el color 2 es el color mayoría de  ${}^1S$ , el número de puntos en las otras clases cromáticas es menor o igual a  ${}^1k_2$ , por lo tanto pueden ser cancelados en la Eq. (4.6) para obtener la desigualdad

$${}^2i_1 + \cancel{{}^2k_3} + \cancel{{}^2k_4} \geq 2(\cancel{{}^1k_2} + {}^1i_2 - 2),$$

$${}^1i_2 \leq \frac{{}^2i_1}{2} + 2.$$

Como  ${}^2i_1 \leq {}^1i_1 = {}^0i_1$ , y utilizando la Eq. (4.3), obtenemos que

$${}^1i_2 \leq \frac{N}{16} + 3. \quad (4.7)$$

Para probar nuestro resultado necesitamos de una iteración más. Buscamos nuevamente el color mayoría de  ${}^2S$ . Los candidatos son:  ${}^1i_2 = {}^2i_2$ ,  ${}^2i_1$ ,  ${}^2k_3$  y  ${}^2k_4$ .

¿ Puede  ${}^1i_2 = {}^2i_2$  ser color mayoría de  ${}^2S$ ?

Un argumento parecido al dado anteriormente nos dice que no.

Supongamos que sí, entonces  ${}^1i_2$  debe satisfacer

$${}^1i_2 \geq \left\lceil \frac{{}^1i_2 + 2({}^1k_2 + {}^1i_2 - 2)}{4} \right\rceil. \quad (4.8)$$

## 4.2. Teoremas

---

Sea  ${}^1h_2$  el número de puntos en el  $CC({}^1S_2)$ . Como  ${}^1k_2 = {}^1h_2 + {}^1i_2$ , sustituyendo en 4.8 y despejando para  ${}^1h_2$  tenemos:

$${}^1h_2 \leq -\frac{1}{2}{}^1i_2 + 2$$

$${}^1h_2 \leq 2.$$

Esto implica que  ${}^1k_2 \leq 2$ . Pero el color 2 fue color mayoría de  ${}^1S$  y por esa razón satisface (Eq. 4.5)

$${}^1k_2 \geq \left\lceil \frac{2({}^0k_1 + {}^0i_1 - 2)}{3} \right\rceil.$$

Pero  ${}^0k_1 \geq \frac{N}{4}$  por lo que:

$$2 \geq {}^1k_2 \geq \frac{2(\frac{N}{4} - 2)}{3}$$

$$20 \geq N$$

Por lo tanto si  $N \geq 21$ ,  ${}^2i_2$  no puede ser color mayoría de  ${}^2S$ .

El otro candidato es  ${}^2i_1$ .

*¿ Puede  ${}^2i_1$  ser color mayoría de  ${}^2S$  ?*

Supogamos que sí, entonces

$${}^2i_1 \geq \left\lceil \frac{2({}^1k_2 + {}^1i_2 - 2)}{3} \right\rceil. \quad (4.9)$$

Pero el color 2 fue el color mayoría en la iteración anterior y por lo tanto se satisface que  ${}^1k_2 \geq \left\lceil \frac{2({}^0k_1 + {}^0i_1 - 2)}{3} \right\rceil$ . Sustituyendo en (4.9) tenemos que  ${}^2i_1$  satisface que

$${}^2i_1 \geq \left\lceil \frac{2\left(\left\lceil \frac{2({}^0k_1 + {}^0i_1 - 2)}{3} \right\rceil + {}^1i_2 - 2\right)}{3} \right\rceil.$$

Ahora, reemplazamos el lado izquierdo de la desigualdad por algo más grande (lo más grande que puede ser bajo las condiciones del problema), y el lado derecho con algo más pequeño (lo más pequeño que puede ser). Al



## 4.2. Teoremas

---

final veremos que si  $N$  es suficientemente grande entonces la desigualdad no puede cumplirse incluso tomando estas consideraciones.

Agrupando términos comunes, colocando  ${}^1i_2$  en cero y usando el hecho de que  ${}^2i_1$  es a lo más  ${}^0i_1$ :

$$\begin{aligned} {}^0i_1 &\geq \left(\frac{2}{3}\right)^2 ({}^0k_1 + {}^0i_1) - 2\left(\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)\right) \\ {}^0i_1 \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2\right) &\geq \left(\frac{2}{3}\right)^2 ({}^0k_1) - 2\left(\frac{2}{3}\right)^2 \left(1 + \left(\frac{3}{2}\right)\right) \\ 5({}^0i_1) &\geq 4({}^0k_1) - 20 \end{aligned}$$

Utilizando la cota inferior para  ${}^0k_1 \geq \lceil \frac{N}{4} \rceil$ , y la superior para  ${}^0i_1 \leq \frac{N}{8} + 2$ :

$$5\left(\frac{N}{8} + 2\right) \geq N - 20$$

Factorizando  $N$ :

$$\begin{aligned} 30 &\geq N\left(1 - \frac{5}{8}\right) \\ 80 &\geq N \end{aligned}$$

Finalmente, si exigimos que  $N > 80$ , todas las desigualdades anteriores no se cumplen. Por lo tanto  ${}^2i_1$  no puede ser el color mayoría de  $S_2$ .

En vista de estos resultados podemos suponer sin pérdida de generalidad que el color 3 es el color mayoría de  ${}^2S$ . Se sigue la siguiente desigualdad

$${}^2k_3 \geq \left\lceil \frac{2({}^1k_2 + {}^1i_2 - 2) - {}^2i_1}{2} \right\rceil. \quad (4.10)$$

Nótese el término negativo,  ${}^2i_1$ , en la ecuación anterior, éste se debe a que el color mayoría se obtuvo de entre solamente 2 colores (3 ó 4). Los triángulos generados por  ${}^2S_3$  también deben estar bloqueados. Entonces, nuevamente,

$${}^3i_1 + {}^3i_2 + \cancel{{}^3k_4} \geq \cancel{{}^2k_3} + {}^2k_3 + 2({}^2i_3 - 2),$$

## 4.2. Teoremas

---

$${}^2i_3 \leq \frac{{}^3i_1 + {}^3i_2 - {}^2k_3}{2} + 2. \quad (4.11)$$

Ahora estamos en condiciones de probar que si  $N$  es suficientemente grande entonces

$${}^2k_3 > {}^3i_1 + {}^3i_2 + 4, \quad (4.12)$$

lo que implica por la Eq. (4.11) que  ${}^2i_3$  es estrictamente negativa. Lo que constituye un contradicción. Pues  ${}^2i_3$  es un número entero, que representa una cierta cantidad de puntos internos de color 3.

Entonces, centramos nuestra atención en demostrar la Eq. (4.12) bajo la suposición que  $N$  es suficientemente grande.

De las condiciones de jaulas y pichones (4.10) y (4.5), y sustituyendo en la Eq. (4.10) obtenemos la siguiente cota inferior para  ${}^2k_3$ ,

$${}^2k_3 \geq \frac{2}{3}{}^0k_1 + \frac{2}{3}{}^0i_1 + {}^1i_2 - \frac{{}^2i_1}{2} - 2\left\{\frac{2}{3} + 1\right\}. \quad (4.13)$$

Como  ${}^3i_1 \leq {}^0i_1$  y  ${}^3i_2 \leq {}^1i_2$ , sabemos que

$${}^0i_1 + {}^1i_2 + 4 \geq {}^3i_1 + {}^3i_2 + 4. \quad (4.14)$$

Utilizando la cota inferior (4.13) para  ${}^2k_3$  y la cota superior de (4.14) tenemos la siguiente expresión, la cual de cumplirse implicaría Eq.(4.12) por transitividad,

$$\frac{2}{3}{}^0k_1 + \frac{2}{3}{}^0i_1 + {}^1i_2 - \frac{{}^2i_1}{2} - 2\left\{\frac{2}{3} + 1\right\} > {}^0i_1 + {}^1i_2 + 4. \quad (4.15)$$

Nótese que la Eq. (4.15) es una condición más fuerte que la Eq. (4.12) y por lo tanto de ser cierta implicaría que Eq. (4.12) también es cierta. De aquí en adelante cada desigualdad es más fuerte que la anterior.

Podemos reemplazar  ${}^2i_1$  por  ${}^0i_1$ , pues  ${}^2i_1 \leq {}^0i_1$  e  ${}^2i_1$  tiene signo negativo. Los  ${}^1i_2$  se cancelan. Y factorizando términos y sustituyendo  ${}^0k_1$  por  $\frac{N}{4}$ , pues  ${}^0k_1 \geq \lceil \frac{N}{4} \rceil$  (Eq. 4.2), tenemos:

$$\frac{N}{6} > {}^0i_1 \left( 1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \right) + 2 \left\{ 2 + \frac{2}{3} + 1 \right\}$$

Utilizando la Eq. (4.3) para  ${}^0i_1$  tenemos:

$$\frac{N}{6} > \left( \frac{N}{8} + 2 \right) \left( \frac{5}{6} \right) + \left( \frac{22}{3} \right).$$

Agrupando, tenemos finalmente para  $N$ :

$$N > 144 \tag{4.16}$$

Así que si  $N$  es suficientemente grande se cumple la Eq. (4.16), lo cual implica que la Eq. (4.12) es cierta. Entonces, por la Eq. (4.11),  ${}^2i_3$  es estrictamente negativa, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, si  $N \geq 145$ , entonces  $S$  debe tener un triángulo monocromático con a lo más 1 punto en su interior. Por lo tanto,

$$M_3(4, 1) \leq 145$$

Con lo cual concluye la prueba.

□

### 4.2.2. Generalización a $c$ colores

El resultado anterior puede ser generalizado a  $c \geq 4$  colores utilizando la misma técnica. Por claridad, las demostraciones de los lemas se presentan después. La notación es la misma que en la prueba anterior.

**Teorema 4.** *Todo conjunto suficientemente grande de puntos en el plano, en posición general y coloreado arbitrariamente con  $c \geq 4$  colores, tiene un triángulo monocromático con a lo más  $c - 3$  puntos en su interior. Más precisamente,*

$$M_3(c, c - 3) = O(c^2).$$

*Demostración.* Sea  $S = {}^0S$  un conjunto de  $N$  puntos en el plano, en posición general y coloreado con  $c$  colores ( $c \geq 4$ ). Sin pérdida de generalidad supongamos que el color 1 es el color mayoría de  $S$ . Entonces  ${}^0k_1$  satisface la siguiente desigualdad,

$${}^0k_1 \geq \left\lceil \frac{N}{c} \right\rceil. \quad (4.17)$$

Para mostrar que en efecto existe un mínimo entero  $N$  tal que  $S$  tiene un triángulo monocromático con a lo más  $c - 3$  puntos en su interior, supondremos que un contraejemplo de  $N$  puntos,  $W$ , existe, y mostraremos algunas de las condiciones que debe cumplir. Después, demostraremos que si  $N$  es suficientemente grande entonces es imposible construir  $W$ . Los siguientes hechos serán de ayuda:

- Sea  ${}^rS_j$  un conjunto de puntos en posición general, entonces, cualquier triangulación de  ${}^rS_j$  tiene exactamente  ${}^rk_j + {}^ri_j - 2$  triángulos.
- Si no existe ningún triángulo monocromático con a lo más  $c - 3$  puntos en su interior, entonces *todo* triángulo monocromático debe tener al menos  $c - 2$  puntos de otro color en su interior.

En este contexto se dice que un triángulo monocromático está bloqueado si tiene al menos  $c - 2$  puntos en su interior. Para construir  $W$ , en particular, todo triángulo monocromático de color 1 debe estar bloqueado. Esto implica que debe haber al menos  $(c - 2)({}^0k_1 + {}^0i_1 - 2)$  puntos de otro color en el

interior del  $CC(^0S_1)$ . Sea  $^1S$  el subconjunto de elementos de  $^0S$  que se encuentran adentro del  $CC(^0S_1)$ . La siguiente desigualdad es fácil de ver,

$$N - {}^0k_1 \geq {}^1k_2 + {}^1k_3 + \dots + {}^1k_c \geq (c-2)({}^0k_1 + {}^0i_1 - 2).$$

El término de la izquierda y el de la derecha de esta desigualdad junto con la Eq. (4.17), nos dan una cota superior para el número de puntos internos que  $^0S_1$  puede tener sin que se forme un triángulo monocromático con a lo más  $c-3$  puntos en su interior, esto es:

$${}^0i_1 \leq \frac{N}{c(c-2)} + 2. \quad (4.18)$$

Intuitivamente, el cierre convexo de  $^0S_1$  tiene que ser grande, pues de ser pequeño, los puntos internos generarían más triángulos que los que pueden ser bloqueados por los puntos de color diferente a 1.

Ahora nos enfocamos en lo que pasa adentro del  $CC(^0S_1)$  y aplicamos el mismo argumento recursivamente. Ésta constituye la primera iteración. Buscamos el color mayoría entre los elementos de  $^1S$ . Por el Lema 1 (presentado después) sabemos que el color mayoría no puede ser el color 1. Sin pérdida de generalidad supongamos que el color 2 es el color mayoría de  $^1S$ . Entonces, por el principio de las jaulas y los pichones,  ${}^1k_2$  satisface la siguiente desigualdad,

$${}^1k_2 \geq \left\lceil \frac{(c-2)({}^0k_1 + {}^0i_1 - 2)}{(c-1)} \right\rceil. \quad (4.19)$$

De la misma forma que anteriormente, todo triángulo generado por  $^1S_2$  debe estar bloqueado por puntos de color  $3, 4, \dots, c$  ó 1. Sea  $^2S$  el subconjunto de elementos de  $^1S$  que se encuentran en el interior del  $CC(^1S_2)$ , entonces debe suceder que:

$${}^2i_1 + {}^2k_3 + {}^2k_4 + \dots + {}^2k_c \geq (c-2)({}^1k_2 + {}^1i_2 - 2). \quad (4.20)$$

Dado que el color 2 es el color mayoría de  $^1S$ , el número de puntos en

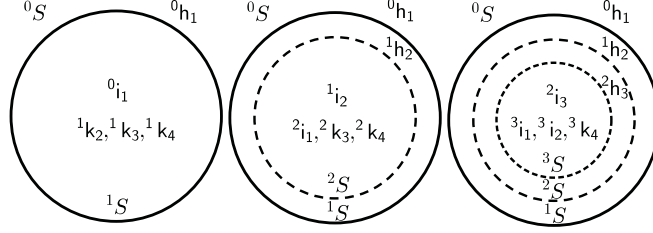


Figura 4.4: Iteraciones recursivas en el caso  $c=4$

las otras clases cromáticas es menor o igual a  ${}^1k_2$ , por lo tanto pueden ser cancelados en la Eq. (4.20) para obtener la desigualdad,

$${}^2i_1 + \cancel{{}^2k_3} + \cancel{{}^2k_4} + \dots + \cancel{{}^2k_c} \geq (c-2)(\cancel{{}^1k_2} + {}^1i_2 - 2),$$

$${}^1i_2 \leq \frac{{}^2i_1}{(c-2)} + 2.$$

Como  ${}^2i_1 \leq {}^1i_1 = {}^0i_1$ , y utilizando la Eq. (4.18), obtenemos que

$${}^1i_2 \leq \frac{N}{c(c-2)^2} + \frac{2}{(c-2)} + 2. \quad (4.21)$$

Para probar nuestro resultado necesitamos de una iteración más.

Por el Lemas 1 y el Lema 2 (presentados después), los colores 1 y 2 no pueden ser color mayoría de  ${}^2S$ . Sin pérdida de generalidad supongamos que el color 3 es el color mayoría de  ${}^2S$ . Se sigue la siguiente desigualdad

$${}^2k_3 \geq \left\lceil \frac{(c-2)(\cancel{{}^1k_2} + {}^1i_2 - 2) - {}^2i_1}{(c-2)} \right\rceil. \quad (4.22)$$

Nótese el término negativo,  ${}^2i_1$ , en la ecuación anterior, éste se debe a que el color mayoría se obtuvo de entre solamente  $c-2$  colores (jaulas). Los triángulos generados por  ${}^2S_3$  también deben estar bloqueados. Entonces, nuevamente,

$${}^3i_1 + {}^3i_2 + \cancel{{}^3k_4} + \dots + \cancel{{}^3k_c} \geq (c-3)(\cancel{{}^2k_3} + {}^2k_3) + (c-2)({}^2i_3 - 2),$$

## 4.2. Teoremas

---

$${}^2i_3 \leq \frac{{}^3i_1 + {}^3i_2 - {}^2k_3}{(c-2)} + 2. \quad (4.23)$$

Ahora estamos en condiciones de probar que si  $N$  es suficientemente grande entonces

$${}^2k_3 > {}^3i_1 + {}^3i_2 + 2(c-2), \quad (4.24)$$

lo que implica por la Eq. (4.23) que  ${}^2i_3$  es estrictamente negativa. Lo que constituye un contradicción. Pues  ${}^2i_3$  es un número entero, que representa una cierta cantidad de puntos internos de color 3.

Entonces, centramos nuestra atención en demostrar la Eq. (4.24) bajo la suposición que  $N$  es suficientemente grande.

De las condiciones de jaulas y pichones (4.22) y (4.19), y sustituyendo en la Eq. (4.22) obtenemos la siguiente cota inferior para  ${}^2k_3$ ,

$${}^2k_3 \geq \frac{(c-2)}{(c-1)} {}^0k_1 + \frac{(c-2)}{(c-1)} {}^0i_1 + {}^1i_2 - \frac{{}^2i_1}{(c-2)} - 2 \left\{ \frac{(c-2)}{(c-1)} + 1 \right\}. \quad (4.25)$$

Como  ${}^3i_1 \leq {}^0i_1$  y  ${}^3i_2 \leq {}^1i_2$ , sabemos que

$${}^0i_1 + {}^1i_2 + 2(c-2) \geq {}^3i_1 + {}^3i_2 + 2(c-2). \quad (4.26)$$

Utilizando la cota inferior (4.25) para  ${}^2k_3$  y la cota superior de (4.26) tenemos la siguiente expresión, la cual de cumplirse implicaría Eq. (4.24) por transitividad,

$$\frac{(c-2)}{(c-1)} {}^0k_1 + \frac{(c-2)}{(c-1)} {}^0i_1 + {}^1i_2 - \frac{{}^2i_1}{(c-2)} - 2 \left\{ \frac{(c-2)}{(c-1)} + 1 \right\} > {}^0i_1 + {}^1i_2 + 2(c-2). \quad (4.27)$$

Nótese que la Eq. (4.27) es una condición más fuerte que la Eq. (4.24) y por lo tanto de ser cierta implicaría que Eq. (4.24) también es cierta. De aquí en adelante cada desigualdad es más fuerte que la anterior.

Podemos reemplazar  ${}^2i_1$  por  ${}^0i_1$ , pues  ${}^2i_1 \leq {}^0i_1$  e  ${}^2i_1$  tiene signo negativo. Los  ${}^1i_2$  se cancelan. Y factorizando términos y sustituyendo  ${}^0k_1$  por  $\frac{N}{c}$ , pues  ${}^0k_1 \geq \lceil \frac{N}{c} \rceil$  (Eq. 4.17), tenemos:

$$\frac{(c-2)N}{(c-1)c} > {}^0i_1 \left( 1 - \frac{(c-2)}{(c-1)} + \frac{1}{(c-2)} \right) + 2 \left\{ (c-2) + \frac{(c-2)}{(c-1)} + 1 \right\}.$$

Utilizando la Eq. (4.18) para  ${}^0i_1$  tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{(c-2)N}{(c-1)c} &> \frac{N}{c(c-2)} \left( 1 - \frac{(c-2)}{(c-1)} + \frac{1}{(c-2)} \right) + \\ &+ 2 \left\{ c - 1 + \frac{(c-2)}{(c-1)} \right\} + 2 \left\{ 1 - \frac{(c-2)}{(c-1)} + \frac{1}{(c-2)} \right\} \end{aligned}$$

$$\frac{N}{c} \left\{ \frac{(c-2)}{(c-1)} - \left( \frac{1}{(c-2)} + \frac{1}{(c-2)^2} - \frac{1}{(c-1)} \right) \right\} > 2 \left\{ c + \frac{1}{(c-2)} \right\}$$

$$\begin{aligned} N &> \frac{2c \left\{ c + \frac{1}{(c-2)} \right\}}{\frac{1}{(c-1)} \left\{ (c-2) - \left( \frac{(c-1)(c-2) + (c-1) - (c-2)^2}{(c-2)^2} \right) \right\}} \\ N &> \frac{2c \left\{ c + \frac{1}{(c-2)} \right\}}{\frac{1}{(c-1)} \left\{ (c-2) - \frac{c^2 - 3c + 2 + c - 1 - (c^2 - 4c + 4)}{(c-2)^2} \right\}} \end{aligned}$$

Agrupando, tenemos una expresión final para  $N$ :

$$N > \frac{2c \left\{ c + \frac{1}{c-2} \right\}}{\left\{ \frac{(c-2)}{(c-1)} - \frac{(2c-3)}{(c-1)(c-2)^2} \right\}}. \quad (4.28)$$

Esta expresión final para  $N$  claramente se cumple si  $N$  es suficientemente grande, pues el lado derecho solamente depende de  $c$ . Así que si  $N$  es suficientemente grande se cumple la Eq. (4.28), lo cual implica que la Eq. (4.24) es cierta. Entonces, por la Eq. (4.23),  ${}^2i_3$  es estrictamente negativa, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, si  $N$  es suficientemente grande, entonces  $S$  debe tener un triángulo monocromático con a lo más  $c-3$  puntos



en su interior. Por lo tanto,

$$M_3(c, c - 3) < \infty.$$

Utilizando la notación O grande, se puede ver directamente en la Eq. (4.28) que

$$M_3(c, c - 3) = O(c^2).$$

Con lo cual concluye la prueba. □

**Lema 1.** *Para  $c \geq 4$ , si  $N$  es suficientemente grande, entonces el mismo color no puede ser color mayoría en dos iteraciones consecutivas.*

*Demostración.* Sea  $j$  el color mayoría en la iteración  ${}^r S$ , y supongamos que también es color mayoría en la siguiente iteración. Entonces  ${}^r i_j$  debe satisfacer la siguiente condición:

$${}^r i_j \geq \left\lceil \frac{{}^r i_j + (c - 2)({}^r k_j + {}^r i_j - 2)}{c} \right\rceil. \quad (4.29)$$

Sea  ${}^r h_j$  el número de puntos en el  $CC({}^r S_j)$ . Como  ${}^r k_j = {}^r h_j + {}^r i_j$ , sustituyendo en (4.29) y despejando para  ${}^r h_j$  tenemos:

$${}^r h_j \leq -\frac{(c - 3)}{(c - 2)} {}^r i_j + 2.$$

$c \geq 4$ , entonces se sigue que:

$${}^r h_j \leq 2. \quad (4.30)$$

Esto implica que  ${}^r k_j \leq 2$ . Lo que significa que en particular que  ${}^r k_j$  está acotado a tener a lo más dos elementos, y como  $j$  es color mayoría entonces todas las clases cromáticas tampoco pueden tener más de dos elementos. Pero también, por ser  $j$  mayoría,  ${}^r k_j$  debe satisfacer una condición análoga a (4.29), a saber,

$${}^r k_j \geq \left\lceil \frac{(c - 2)({}^{r-1} k_l + {}^{r-1} i_l - 2)}{(c - 1)} \right\rceil. \quad (4.31)$$

## 4.2. Teoremas

---

Y esta cota inferior tiende a infinito cuando  $N$  tiende a infinito. Por lo tanto, si  $N$  es suficientemente grande, la Eq. (4.30) no puede cumplirse, por lo tanto  $j$  no puede ser el color mayorá de  ${}^{r+1}S$ .

Específicamente, dado que ninguna clase cromática puede tener más de dos elementos,  ${}^0i_1$  no puede ser color mayoría de  ${}^1S$  si  $N > 2c$ , pues el color mayoría de  ${}^1S$  debe ser mayor o igual a  $\lceil \frac{N}{c} \rceil$ . De forma análoga,  ${}^1i_2$  no puede ser color mayoría de  ${}^2S$  si  $N > 2c \frac{(2c-3)}{(c-2)}$ , pues el color mayoría de  ${}^2S$  debe ser mayor o igual que  $\lceil \frac{(c-2)({}^0k_1 + {}^0i_1 - 2)}{(c-1)} \rceil$  y a su vez  ${}^0k_1 \geq \lceil \frac{N}{c} \rceil$ . □

**Lema 2.** *Para  $c \geq 4$ , si  $N$  es suficientemente grande, entonces el color 1 no puede ser el color mayoría en la tercera iteración.*

*Demostración.* Supongamos que  ${}^2i_1$  es color mayoría de  ${}^2S$ . Entonces, debe satisfacer la siguiente condición:

$${}^2i_1 \geq \left\lceil \frac{(c-2)({}^1k_2 + {}^1i_2 - 2)}{(c-1)} \right\rceil. \quad (4.32)$$

Pero por el lema anterior, sabemos que  ${}^1k_2$  fue el color mayoría en la iteración anterior y por lo tanto satisface  ${}^1k_2 \geq \left\lceil \frac{(c-2)({}^0k_1 + {}^0i_1 - 2)}{(c-1)} \right\rceil$ . Sustituyendo en (4.32) tenemos que  ${}^2i_1$  satisface que

$${}^2i_1 \geq \left\lceil \frac{(c-2)\left(\left\lceil \frac{(c-2)({}^0k_1 + {}^0i_1 - 2)}{(c-1)} \right\rceil + {}^1i_2 - 2\right)}{(c-1)} \right\rceil. \quad (4.33)$$

Ahora, reemplazamos el lado izquierdo de la desigualdad por algo más grande (lo más grande que puede ser bajo las condiciones del problema), y el lado derecho con algo más pequeño (lo más pequeño que puede ser). Al final veremos que si  $N$  es suficientemente grande entonces la desigualdad no puede cumplirse incluso tomando estas consideraciones.

Agrupando términos comunes, colocando  ${}^1i_2$  en cero y usando el hecho de que  ${}^2i_1$  es a lo más  ${}^0i_1$ :

$${}^0i_1 \geq \left(\frac{c-2}{c-1}\right)^2 ({}^0k_1 + {}^0i_1) - 2\left(\left(\frac{c-2}{c-1}\right)^2 + \left(\frac{c-2}{c-1}\right)\right)$$

$${}^0i_1 \left( 1 - \left( \frac{c-2}{c-1} \right)^2 \right) \geq {}^0k_1 \left( \frac{c-2}{c-1} \right)^2 - 2 \left( \frac{c-2}{c-1} \right)^2 \left( 1 + \left( \frac{c-1}{c-2} \right) \right)$$

$${}^0i_1(2c-3) \geq {}^0k_1(c-2)^2 - 2(c-2)(2c-3)$$

Utilizando la cota inferior para  ${}^0k_1 \geq \lceil \frac{N}{c} \rceil$ , y la superior para  ${}^0i_1 \leq \frac{N}{c(c-2)} + 2$ :

$$\left( \frac{N}{c(c-2)} + 2 \right) (2c-3) \geq \frac{N}{c} (c-2)^2 - 2(c-2)(2c-3)$$

Factorizando  $N$ :

$$(2c-3)(2c-2) \geq N \left( \frac{(c-2)^2}{c} - \frac{(2c-3)}{c(c-2)} \right)$$

$$\frac{(2c-3)(2c-2)c(c-2)}{(c-2)^3 - (2c-3)} \geq N$$

Donde el denominador es positivo si  $c \geq 4$ .

Finalmente, si exigimos que  $N$  sea suficientemente grande

$$\frac{(2c-3)(2c-2)c(c-2)}{(c-2)^3 - (2c-3)} < N$$

$$O(c) < N$$

todas las desigualdades anteriores no se cumplen. Por lo tanto  ${}^2i_1$  no puede ser el color mayoría de  $S_2$ .  $\square$

## Capítulo 5

# Conclusiones

En esta tesis se abordó el problema de la existencia de polígonos monocromáticos casi vacíos en conjuntos de puntos coloreados en el plano. El teorema 2 (Pág. 18) y el teorema 4 (Pág. 38) constituyen los resultados más generales encontrados en este trabajo de tesis. El teorema 1 (Pág. 17) y el teorema 3 (Pág. 30) constituyen casos especiales de estos teoremas cuando se tienen pocos colores.

**Teorema 2.** Cualquier conjunto suficientemente grande de puntos en el plano, en posición general y coloreado arbitrariamente con  $c \geq 2$  colores, tiene un cuadrilátero monocromático convexo con a lo más  $2c - 3$  puntos en su interior. Más precisamente,

$$M_4(c, 2c - 3) \leq c \cdot \text{ES}(4c + 1).$$

**Teorema 4.** Todo conjunto suficientemente grande de puntos en el plano, en posición general y coloreado arbitrariamente con  $c \geq 4$  colores, tiene un triángulo monocromático con a lo más  $c - 3$  puntos en su interior. Más precisamente,

$$M_3(c, c - 3) \leq \frac{2c \left\{ c + \frac{1}{c-2} \right\}}{\left\{ \frac{(c-2)}{(c-1)} - \frac{(2c-3)}{(c-1)(c-2)^2} \right\}} + 1.$$

El caso  $c = 4$  del Teorema 4 da origen al Teorema 3, el cual resuelve la siguiente conjetura de Basu, Bhattacharya y Das:

**Conjetura 2** ([5, 6]) Todo conjunto suficientemente grande de puntos en el plano, en posición general y coloreado con 4 colores, tiene un triángulo monocromático con a lo más un punto en su interior.

## 5.1. Trabajo futuro

En primer lugar, dado que el teorema 1 constituye una cota superior, un problema inmediato sería tratar de encontrar una cota inferior que hiciera de este resultado un valor exacto, es decir, tratar de encontrar el conjunto de puntos bicromático más grande posible y una coloración de éste, tal que no tenga ningún cuadrilátero monocromático con a lo más un punto. No se conocen cotas no-triviales en este caso.

Tratar de reducir el número de puntos en el interior del cuadrilátero monocromático en el teorema 2 es también un problema interesante. De hecho, encontrar el mínimo valor de  $\gamma$  tal que  $M_4(c, \gamma) < \infty$ , es el seguimiento natural del problema. Precisamente el teorema 2 establece que  $\gamma \leq 2c - 3$ . Sin embargo, este problema en particular puede resultar difícil, especialmente para valores pequeños de  $c$ . Como se mencionó antes (Sección 3.1.1), para el caso  $c = 2$  y  $\gamma = 0$ , el problema está abierto (conjetura 1). Sin embargo, el teorema 2 constituye aún más evidencia para pensar que esta conjetura es cierta. Es más, para probar que la conjetura 1 fuera falsa, se necesitaría construir un contraejemplo, una construcción arbitrariamente grande de puntos de dos colores tales que todos los cuadriláteros monocromáticos tuvieran al menos un punto del otro color en su interior, pero esta construcción no podría tener ningún heptágono convexo vacío, pues un heptágono tendría 4 puntos del mismo color. ¡Pero tampoco podría ser un conjunto de Horton!

Recientemente se publicó un trabajo por Cano, García, Hurtado, Sakai, Tejel and Urrutia [7], donde se aborda precisamente el problema de bloquear todos los cuadriláteros convexos de un conjunto de puntos en el plano. En ese trabajo se busca encontrar el mínimo número de puntos necesarios para bloquear todos los  $k$ -hoyos de un conjunto de puntos en posición general. Se dan resultados para el caso de puntos en posición convexa, y se hace énfasis en bloquear pentágonos, pero se muestra un resultado un tanto contraintuitivo acerca de cuadriláteros. Se muestra que el número necesario de puntos para bloquear los cuadriláteros convexos de un conjunto de  $n$  puntos en posición convexa es  $n - O(\sqrt{n})$ . Una intuición errónea en este problema podría sugerir que el número de puntos necesarios debería ir como  $\frac{n}{2}$ , ya que en

posición convexa hay  $\lceil \frac{n-3}{2} \rceil$  cuadriláteros convexos con interiores disjuntos. El problema de bloquear cuadriláteros convexos en conjuntos de puntos en posición general sigue estando abierto y probablemente permanezca así por algún tiempo. La única solución que se conoce es aquella en la que se bloquean todos los triángulos del conjunto de puntos [8]. Muy probablemente la solución a este problema pueda mostrar el camino a seguir para demostrar la conjetura 1 (Sección 3.1.1).

El teorema 4 establece también una cota superior, por lo que encontrar una cota inferior justa es un problema que surge naturalmente. Otro problema sería tratar de demostrar la existencia de triángulos monocromáticos con menos que  $c-3$  puntos interiores. En [6] se muestra que para  $c$  colores en general, el mínimo número de puntos interiores,  $\lambda$ , que puede tener el triángulo monocromático para que  $M_3(c, \lambda) < \infty$  debe ser tal que  $\lfloor \frac{c-1}{2} \rfloor \leq \lambda$ . El teorema 4 muestra que  $\lambda \leq c-3$ . Para  $c=4$  y  $c=5$  las dos cotas coinciden, pero para  $c \geq 6$  el problema sigue abierto. La extensión a polígonos monocromáticos más grandes es por supuesto otro problema interesante. En esta dirección se encuentra el teorema 2, que es un resultado para cuadriláteros, pero  $r$ -ágonos monocromáticos con  $r \geq 5$  no han sido explorados aún.

Otra dirección que puede ser considerada en trabajos posteriores es considerar no sólo el problema de existencia, sino también tratar de encontrar el número de veces que la estructura aparece en cualquier conjunto de puntos. Por ejemplo, para el caso de triángulos monocromáticos en conjuntos de puntos bicoloreados, en los trabajos [3, 23] se estima el número de triángulos monocromáticos vacíos, pero este enfoque nunca ha sido considerado para polígonos casi vacíos. Otra variación es considerar el caso de polígonos no necesariamente convexos; un ejemplo para el caso de conjuntos de puntos no coloreados puede ser encontrado en el trabajo reciente [4].

# Bibliografía

- [1] O. Aichholzer, T. Hackl, C. Huemer, F. Hurtado, and B. Vogtenhuber, Large bichromatic point sets admit empty monochromatic 4-gons, *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, **23(4)**, (2010), pp. 2147–2155.
- [2] O. Aichholzer, T. Hackl, M. Hoffman, A. Pilz, G. Rote, B. Speckmann, and B. Vogtenhuber, Plane graphs with parity constraints, *Proc. Algorithms And Data Structures Symposium (WADS)*, LNCS **5564**, (2009), pp. 13–24.
- [3] O. Aichholzer, R. Fabila-Monroy, D. Flores-Peñaloza, T. Hackl, C. Huemer, and J. Urrutia, Empty monochromatic triangles, *Computational Geometry: Theory and Applications*, **42**, (2009), pp. 934–938.
- [4] O. Aichholzer, R. Fabila-Monroy, H. Gonzalez-Aguilar, T. Hackl, M. A. Heredia, C. Huemer, J. Urrutia, P. Valtr, and B. Vogtenhuber, On  $k$ -Gons and  $k$ -Holes in Point Sets, *Computational Geometry: Theory and Applications*, **48(7)**, (2015), pp. 528–537.
- [5] D. Basu, B. B. Bhattacharya, and S. Das, Almost empty monochromatic triangles in planar point sets, *Electronic notes in Discrete Mathematics*, **44**, (2013), pp. 53–59.
- [6] D. Basu, K. Basu, B. B. Bhattacharya, and S. Das, Almost empty monochromatic triangles in planar point sets, *To appear in Discrete Applied Mathematics*, *arXiv:1410.0424*.
- [7] J. Cano, A. García, F. Hurtado, T. Sakai, J. Tejel, and J. Urrutia, Blocking the  $k$ -holes of point sets in the plane, *Graphs and Combinatorics*, **31(5)**, (2015), pp. 1271–1287.

- [8] J. Czyzowics, E. Kranakis, and J. Urrutia, Guarding the convex subsets of a point set, *12th Canadian Conference on Computational Geometry*, New Brunswick, Canada, (2000), pp. 47–50.
- [9] O. Devillers, F. Hurtado, G. Károlyi, and C. Seara, Chromatic variants of the Erdős-Szekeres theorem on points in convex position, *Computational Geometry: Theory and Applications*, **26**, (2003), pp. 193–208.
- [10] P. Erdős, Some more problems on elementary geometry, *Australian Mathematical Society Gazette*, **5**, (1978), pp. 52–54.
- [11] P. Erdős, and G. Szekeres, A combinatorial problem in geometry, *Compositio Mathematica*, **2**, (1935), pp. 46–470.
- [12] P. Erdős, and G. Szekeres, On some extremum problems in elementary geometry, *Ann. Univ. Sci. Budapest*, Eötvös, Sect. Math. **3/4**, (1960-61), pp. 53–62.
- [13] T. Gerken, Empty convex hexagons in planar point sets, *Discrete and Computational Geometry*, **39**, (2008), pp. 239–272.
- [14] A. C. González-Martínez, J. Cravioto-Lagos, and J. Urrutia, Almost empty monochromatic polygons in planar points sets, *Proc. XVI Spanish Meeting on Computational Geometry*, Barcelona, Spain, (2015), pp. 81–84.
- [15] C. Grima, C. Hernando, C. Huemer, and F. Hurtado, On some partitioning problems for two-colored point sets, *Proc. XIII Spanish Meeting on Computational Geometry*, Zaragoza, Spain, (2009), pp. 221–228.
- [16] H. Harborth, Konvexe Funfecke in ebenen Punktmengen, *Elemente der Mathematik*, **33(5)**, (1978), pp. 116–118.
- [17] J. D. Horton, Sets with no empty convex 7-gons, *Canadian Mathematical Bulletin*, **26**, (1983), pp. 482–484.



- [18] J. Kalbfleisch, and R. Stanton, A combinatorial problem on convex  $n$ -gons, *In Proc. Louisiana Conference on Combinatorics, Graph Theory and Computing*, Louisiana State University, (1970), pp. 180–188.
- [19] V. A. Koshelev, On the Erdős-Szekeres problem, *Doklady Mathematics*, **76**, (2007), pp. 603–605.
- [20] W. Morris and V. Soltan, The Erdős-Szekeres problem on points in convex position – a survey. *Bull. Amer. Math. Soc.*, **37**, (2000), pp. 437–458.
- [21] C. M. Nicolás, The empty hexagon theorem, *Discrete and Computational Geometry*, **38**, (2007), pp. 389–397.
- [22] H. Nyklová, Almost empty polygons, *Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica*, **38**, (2003), pp. 269–286.
- [23] J. Pach, and G. Tóth, Monochromatic empty triangles in two-colored point sets, *Discrete Applied Mathematics*, **161(9)**, (2013), pp. 1259–1261.
- [24] T. Sakai, and J. Urrutia, Covering the convex quadrilaterals of point sets, *Graphs and Combinatorics*, **38**, (2007), pp. 343–358.
- [25] T. Sakai, and J. Urrutia, Interior disjoint convex quadrilaterals of point sets, *Preprint*.
- [26] G. Szekeres and L. Peters, Computer solution to the 17-point Erdős-Szekeres problem, *The ANZIAM Journal*, **48(2)**, (2006), pp.151–164.
- [27] G. Tóth, and P. Valtr, The Erdős-Szekeres theorem: upper bounds and related results, *J. E. Goodman, J. Pach, and E. Welzl, Combinatorial and Computational Geometry*, **52**, (2005), pp. 557–568.