UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

Posgrado Conjunto en Ciencias Matemáticas

Centro de Ciencias Matemáticas

Instituto de Física y Matemáticas

Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo

Maestría en Ciencias.

Filtros de Fréchet-Urysohn.

T E S I N A

Que para optar por el grado de Maestro en Ciencias
Presenta:

Jonathán Emmanuel Rivera Gómez

Tutor Principal: Dr. Salvador García Ferreira

Centro de Ciencias Matemáticas UNAM.

Morelia, Michoacán - 18 de Febrero de 2011.

Índice general

Agradecimientos

Agradezco no sólo por este trabajo que es muy simbólico, si no a toda la gente que se vio involucrada directa o indirectamente para que yo terminara esta maestría. A todos mis maestros, al Dr. Fernando Hernández, al personal escolar y compañeros del posgrado. A mi asesor y director de tesina Dr. Salvador García, a mi amigo y colega Oscar Sánchez Reyes y especialmente a la persona que me acompaño en este bonito viaje, mi compañera y gran amiga Perla Cecilia Lucio Peña que siempre estuvo ahí para apoyarme. Y sobre todo y de manera muy espacial agradezco a mi familia, a mis padres Ernesto Rivera y Ma. del Carmen Gómez, que sin su apoyo no lo hubiera logrado. Muchas Gracias.

INTRODUCCIÓN

Es sumamente conocido que en un espacio métrico, un punto está en la cerradura de un conjunto si y sólo si existe una sucesión en el conjunto que converge al punto. En general esto no se cumple para cualquier espacio topológico. La propiedad sí se mantiene tanto en los espacios métricos como en los espacios primero numerables. El ejemplo más clásico en donde falla la propiedad anterior es $\beta\omega$ la compactación maximal del conjunto de los números naturales con la topología discreta. Este espacio no tiene sucesiones no triviales convergentes. De esta manera, es claro que en topología general no es suficiente trabajar con sucesiones. Por otro lado, buscamos espacios en los cuales sean suficientes las sucesiones para determinar las nociones de abierto, cerrado, compacto y continuidad. Esto nos motiva a considerar la siguiente clase de espacios.

Definición 1. *Un espacio X es Fréchet-Urysohn, si satisface que para todo subconjunto $A \subseteq X$ un punto x esta en la clausura de A si y sólo si existe una sucesión en A que converge a x.*

Nota: *Los espacios a considerar siempre serán Hausdorff y completamente regulares.*

Los ejemplos más conocidos son los espacios primero numerables que son más restrictivos. Otra propiedad que también se cumple en los espacios métricos es la siguiente: Un conjunto A es abierto si y sólo si para cada sucesión B que converge a $x \in A$ se tiene que $|B-A| < \omega$. En un espacio un abierto secuencial es aquel subconjunto en el cual se satisface la propiedad anterior. Con esta definición podemos considerar los siguientes espacios: Un espacio topológico es *secuencial* si cada abierto secuencial es abierto en la topología. Una caracterización de estos espacios es la siguiente: Un espacio topológico X es *secuencial* si y sólo si para todo conjunto no cerrado $C \neq \emptyset$ existe una sucesión en C tal que converge a algún punto en $\overline{C} - C$. Todo espacio primero numerable es espacio de Fréchet-Urysohn y todo espacio de Fréchet-Urysohn es secuencial. En general no se satisface que todo espacio secuencial es Fréchet-Urysohn y que todo espacio Fréchet-Urysohn es primero numerable, a continuación veremos algunos ejemplos de ésto.

Ejemplo 1. *Sea $Y = (x_n)_{n<\omega}$ una sucesión inyectiva y convergente de números reales con límite $x \in \mathbb{R}$. Para cada $n < \omega$ consideramos $A_n = (a_k)_{k<\omega}$ sucesión inyectiva de números reales tal que A_n converge a x_n. Sin perder generalidad suponemos que tanto $Y \cup \{x\}$ como los A_n son disjuntos* *entre sí. Ahora sea* $X = Y \cup \{x\} \cup (\cup_{n<\omega} A_n)$ *con la siguiente topología: Cada punto en* $\cup_{n<\omega} A_n$ *es aislado, para cada* $n < \omega$ *una base de vecindades para* x_n *es la siguiente familia:*

$$\mathcal{B}_n = \{\{x_n\} \cup B : B \subseteq A_n(|A_n - B| < \omega)\}.$$

Por último, una base de vecindades de x *es la siguiente familia:*

$$\mathcal{B} = \{\{x\} \cup A \cup (\cup_{x_n \in A} B_{x_n}) : |A - Y| < \omega, (B_{x_n} \in \mathcal{B}_n)\}.$$

Es claro que este espacio es Hausdorff y con esta topología probaremos que X *es secuencial. En efecto, consideramos* $A \subseteq X$ *abierto secuencial. Sea* $a \in A$*, si* $a \in \cup_{n<\omega} A_n$ *entonces* $\{a\} \subset A$ *testifica que* a *es punto interior de* A*, si* $a \in Y$ *entonces* $a = x_n$ *para algún* $n < \omega$*. Además, dado que* $A_n \longrightarrow a$*, entonces* $|A_n - A| < \omega$ *por lo tanto,* $\{a\} \cup (A_n \cap A)$ *es la vecindad que testifica lo deseado. Ahora si* $a = x$ *tenemos que* $Y \longrightarrow a$*, así que* $|Y - A| < \omega$ *y para cada* $x_n \in Y \cap A$ *se tiene que* $|A_n - A| < \omega$*. Entonces*

$$\{x\} \cup (Y \cap A) \cup (\cup_{x_n \in (Y \cap A)} (A_n \cap A))$$

es la vecindad que testifica que a *es punto interior de* A *por lo tanto* X *es secuencial. Para ver que* X *no es espacio de Fréchet-Urysohn, notemos no existe sucesión contenida en* $\cup_{n<\omega} A_n$ *que converja a* x*. Si tal sucesión intersecta a algún* A_n *en una infinidad de puntos, entonces la sucesión tendrá una subsucesión convergente a* x_n *y como* X *es Hausdorff el límite es único. Si la sucesión intersecta a cada* A_n *en un conjunto finito, entonces se construye una vecindad que evita a tales puntos. Entonces para* $B = X - (\{x\} \cup Y)$ *se tiene que* $x \in \overline{B}$ *pero no hay sucesión en* B *que converja a* x *y* X *no es espacio de Fréchet-Urysohn.*

En el siguiente ejemplo se expondrá que la secuencialidad no implica la propiedad de Fréchet-Urysohn.

Ejemplo 2. *Consideramos* $X = \cup_{n<\omega}[0,1]_n$ *la unión disjunta numerable de copias de* $[0,1]$*. Ahora sea* X' *la identificación de cada* $0_n \in [0,1]_n$ *con un único punto 0 y a los demás puntos los identificamos con ellos mismos. A este nuevo conjunto* X' *lo dotamos con la siguiente topología: para cada punto* $x \in X' - \{0\}$*, una base de vecindades es la misma que tenía en el espacio* $[0,1]_n$ *al que pertenece, y éste con la topología usual denotada* τ_n*. Una base de vecindades del punto 0 es la familia:*

$$\{\cup_{n<\omega} U_n : U_n \in \mathcal{T}_n\}$$

donde U_n *es vecindad del* 0 *en* $[0,1]_n$*. Afirmamos que este espacio es de Fréchet-Urysohn y Hausdorff pero no es primero numerable. Es evidente que* X' *es Hausdorff y Fréchet-Urysohn en* $X' - \{0\}$*. Sea* $A \subseteq X'$ *tal que* $0 \in \overline{A}$*. Si suponemos que para cada* $n < \omega$*,* $|A \cap [0,1]_n| < \omega$*, entonces la vecindad* $\cup_{n<\omega}([0,1]_n - ([0,1]_n \cap A))$ *no intersecta a* A*, lo cual es una contradicción. Entonces existe* $n < \omega$ *tal que* $|[0,1]_n \cap A| = \omega$*. Como* $[0,1]_n$ *con la topología del subespacio es homeomorfo* *a* $[0,1]$*, entonces* $A \cap [0,1]_n$ *tiene una subsucesión convergente a 0, la cual converge a 0 en* X'*. Así* X' *es Fréchet-Urysohn. Si suponemos que* X' *es primero numerable, entonces existe una base de vecindades para* 0 *de tamaño numerable, a saber* $\{B_n : n < \omega\}$*. Para cada* $n < \omega$ *elegimos* $x_n \in B_n \cap [0,1]_n$ *distinto de 0. Por construcción* $(x_n)_{n<\omega}$ *es una sucesión que converge a 0 en* X'*, pero,* $|(x_n)_{n<\omega} \cap [0,1]_n| = 1$*, una contradicción pues* $0 \notin \overline{(}x_n)_{n<\omega}$*. Por lo tanto* X' *no es primero numerable.*

La definición de espacio de Fréchet-Urysohn aplica también a espacios numerables con un sólo punto no aislado. Por esta razón consideramos estos espacios. En este tipo de espacios las vecindades del punto no aislado, están determinadas por un filtro libre. Entonces el estudio de dichos espacios se reduce a estudiar estos filtros, los cuales sin perder generalidad los consideraremos sobre ω. Este estudio lo abordaremos en este trabajo.

Capítulo 1

Preliminares

Definición 2. *Un filtro sobre un conjunto infinito X es una colección $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$ no vacía que satisface:*

1. $\emptyset \notin \mathcal{F}$.
2. *Si $A, B \in \mathcal{F}$, entonces $A \cap B \in \mathcal{F}$.*
3. *Si $A \in \mathcal{F}$ y $A \subset B$, entonces $B \in \mathcal{F}$.*

Un filtro maximal con respecto a $(\subseteq)$ se denomina ultrafiltro. Para un $\mathcal{F}$ filtro en X definimos

$$\mathcal{F}^+ := \{A \in \mathcal{P}(X) : \forall F \in \mathcal{F}(A \cap F \neq \emptyset)\}.$$

Para X conjunto es fácil ver que $\{X\} \subseteq \mathcal{P}(X)$ es filtro y se llama el filtro trivial. Diremos que un filtro $\mathcal{F}$ es libre si $\bigcap \mathcal{F} = \emptyset$, de lo contrario se dice que el filtro es fijo. Dado un conjunto X y $A \subseteq X$ no vacio, definimos $\mathcal{F}_A := \{F \in \mathcal{P}(X) : A \subseteq F\}$ el cual es un filtro fijo. Para X conjunto infinito se define $\mathcal{F}_r := \{A \in \mathcal{P}(X) : |X - A| < \omega\}$ llamado el filtro de Fréchet, el cual es un filtro libre notando que $\cap \mathcal{F}_r = \emptyset$. Observamos que si $\mathcal{G}$ es un filtro que contiene a $\mathcal{F}_r$, entonces $\mathcal{G}$ es libre. En lo sucesivo únicamente se trabajara con filtros libres sobre ω a menos que se especifique lo contrario.

Definición 3. *Un ideal sobre un conjunto X es una colección $\mathcal{I} \subset \mathcal{P}(X)$ que satisface:*

1. $X \notin \mathcal{I}$.
2. *Si $A, B \in I$ entonces $A \cup B \in \mathcal{I}$.*
3. *Si $A \in \mathcal{I}$ y $B \subseteq A$ entonces $B \in \mathcal{I}$.*

Sea X un conjunto. Trivialmente $\{\emptyset\}$ es un ideal y lo llamamos el ideal trivial. Para un conjunto infinito definimos $[X]^{<\omega} := \{I \in \mathcal{P}(X) : |I| < \omega\}$ el cual es un ideal en X y es conocido como el ideal de los conjuntos finitos. Dado un ideal $\mathcal{I}$ que contiene propiamente al ideal de los conjuntos finitos definimos: $\mathcal{I}^+ := \mathcal{P}(X) - \mathcal{I}$ (los conjuntos positivos modulo $\mathcal{I}$). $\mathcal{I}^\perp := \{M \in \mathcal{P}(X) : (\forall I \in \mathcal{I})(|M \cap I| < \omega)\}$ (la familia ortogonal a $\mathcal{I}$). Estos conjuntos cumplen las siguientes propiedades:

1. $\mathcal{I}^\perp$ es un ideal que contiene a $[X]^{<\omega}$.
2. $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{I}^{\perp\perp}$.

3. $\mathcal{I}^{\perp} \cap (\mathcal{P}(X) - [X]^{<\omega}) \subseteq \mathcal{I}^{+}$.

En lo sucesivo se trabajará siempre con ideales sobre ω que contienen al ideal FIN=$[\omega]^{<\omega}$, a menos que de especifique lo contrario. Es importante remarcar que la noción de filtro es dual a la noción de ideal y viceversa. Dado un ideal $\mathcal{I}$ la familia $\mathcal{I}^c = \{I^c : I \in \mathcal{I}\}$ es un filtro y dado un filtro $\mathcal{F}$ la familia $\mathcal{F}^c = \{F^c : F \in \mathcal{F}\}$ es un ideal. Notemos que $FIN^c = \mathcal{F}_r$ y ${\mathcal{F}_r}^c = FIN$.

Definición 4. *Sean $A, B \in [\omega]^{\omega}$. Si $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ son filtros sobre A y B, respectivamente, definimos la suma como:*

$$\mathcal{F} \oplus \mathcal{G} := \{H \subset \omega : \exists F \in \mathcal{F}, G \in \mathcal{G}(F \cup G \subseteq H)\}.$$

No es difícil ver que $\mathcal{F} \oplus \mathcal{G}$ es un filtro libre sobre ω para cualquier par de filtros libres $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$, ya que los conjuntos que son una unión de un elemento de $\mathcal{F}$ y un elemento de $\mathcal{G}$, conforman una base de filtro para la suma. Las sumas que más usaremos serán cuando $A \cap B = \emptyset$.

Si $A \in [\omega]^{\omega}$ y $\mathcal{F}$ es un filtro sobre A, convenimos en que

$$\mathcal{F}^{+} = \{E \in [A]^{\omega} : \forall F \in \mathcal{F}(F \cap E \neq \emptyset)\}.$$

Advertencia: El lector debe de tener cuidado en que conjunto está tomado el filtro, esto para no perder de vista la convención de la definición de $\mathcal{F}^{+}$. Por ejemplo, si $A, B \in [\omega]^{\omega}$ son disjuntos y $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ son filtros sobre A y B, respectivamente, entonces $\mathcal{F}^{+} \cap \mathcal{G}^{+} = \emptyset$, pero si $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ son ultrafiltros sobre ω, entonces $\omega \in \mathcal{F}^{+} \cap \mathcal{G}^{+}$.

Proposición 1. *Si $A, B \in [\omega]^{\omega}$ y $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ son filtros sobre A y B, respectivamente, entonces $(\mathcal{F} \oplus \mathcal{G})^{+} = \mathcal{F}^{+} \cup \mathcal{G}^{+}$.*

Demostración. Es claro que $\mathcal{F}^{+} \cup \mathcal{G}^{+} \subseteq (\mathcal{F} \oplus \mathcal{G})^{+}$. Si suponemos que existe $H \in (\mathcal{F} \oplus \mathcal{G})^{+} - (\mathcal{F}^{+} \cup \mathcal{G}^{+})$, entonces existen $F \in \mathcal{F}$ y $G \in \mathcal{G}$ tales que $H \cap F = \emptyset = H \cap G$, esto implica que $H \cap (F \cup G) = \emptyset$, lo cual es una contradicción desde que $H \in (\mathcal{F} \oplus \mathcal{G})^{+}$. Así obtenemos la igualdad deseada. $\square$

Definiremos mas conceptos topológicos que nos auxiliarán más adelante para construir filtros. Recordemos que $\beta\omega = \{p \subset \mathcal{P}(\omega) : p \text{ es ultrafiltro en } \omega\}$. Para cada $A \subset \omega$ definimos $\hat{A} = \{p \in \beta\omega : A \in p\}$ y dotamos a $\beta\omega$ con la topología generada por la familia $\{\hat{A} : A \subset \omega\}$, los conjuntos de esta familia cumplen con las siguientes propiedades:

1. $A \subseteq B$, entonces, $\hat{A} \subseteq \hat{B}$.
2. $(\widehat{A \cap B}) = \hat{A} \cap \hat{B}$.
3. $(\widehat{A \cup B}) = \hat{A} \cup \hat{B}$.

Con las propiedades anteriores tenemos que $\beta\omega$ con dicha topología es Hausdorff compacto. La familia $\{\hat{A} : A \subset \omega\}$ es una base de clopens y $\beta\omega$ con esta topología resulta ser la compactación de Stone-Čech del espacio discreto ω. En donde la colección de los ultrafiltros fijos en ω, son puntos aislados que se hacen corresponder con el espacio discreto ω, encajado en $\beta\omega$. Con esto podemos definir para A subconjunto de ω, $A^* = \hat{A} - \omega$. Con lo anterior podemos considerar lo siguiente: Sea $\mathcal{F}$ filtro libre sobre ω, definimos $M_{\mathcal{F}} = \cap_{F\in\mathcal{F}} F^*$, el cual es un cerrado de $\beta\omega$ y para cualquier cerrado en $C \subseteq \omega^*$, podemos definir un filtro libre sobre ω de la siguiente manera:

$$\mathcal{F}_C = \{F \subseteq \omega : C \subseteq F^*\}.$$

Observación 1. *Con las definiciones anteriores podemos notar que dado $\mathcal{F}$ filtro en ω y $A \subseteq \omega$, tenemos que $A^* \cap M_{\mathcal{F}} \neq \emptyset$ si y sólo si $A \in \mathcal{F}^+$. Si se da que $A^* \cap M_{\mathcal{F}} \neq \emptyset$, entonces para cada $F \in \mathcal{F}$ tenemos que $A^* \cap F^* \neq \emptyset$, esto implica que $A \cap F \neq \emptyset$. Por lo tanto $A \in \mathcal{F}^+$. Si $A \in F^+$ entonces la familia $\{A^* \cap F^* : F \in \mathcal{F}\}$ tiene la propiedad de la intersección finita. Desde que $\beta\omega$ es compacto tenemos que $A^* \cap M_{\mathcal{F}} \neq \emptyset$.*

Lema 1. *Si $\mathcal{F}$ filtro en ω, entonces $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{M_{\mathcal{F}}}$.*

Demostración. Es fácil notar que $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}_{M_{\mathcal{F}}}$ por la definición de $M_{\mathcal{F}}$. Ahora si suponemos que $G \in \mathcal{F}_{M_{\mathcal{F}}}$ no pertenece a $\mathcal{F}$, entonces $\omega - G \in \mathcal{F}^+$, por la observación anterior tenemos que $(\omega - G)^* \cap M_{\mathcal{F}} \neq \emptyset$, lo cual es un contradicción ya que $M_{\mathcal{F}} \subseteq G^*$. Por lo tanto $G \in \mathcal{F}$ y $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{M_{\mathcal{F}}}$. □

Juntando los resultados anteriores obtenemos el siguiente resultado.

Lema 2. *Sea $\mathcal{F}$ filtro en ω y $B \in \mathcal{F}$ no cofinito. Si $C \subset \omega^*$ cerrado tal que $B^* \cap C = \emptyset$, entonces $\mathcal{F}|_B = \mathcal{F}_{M_{\mathcal{F}} \cup C}|_B$.*

Demostración. Dado que $\mathcal{F}_{M_{\mathcal{F}} \cup C} \subseteq \mathcal{F}_{M_{\mathcal{F}}}$, entonces $\mathcal{F}_{M_{\mathcal{F}} \cup C}|_B \subseteq \mathcal{F}|_B$. Sea $F \in \mathcal{F}_{M_{\mathcal{F}}}|_B$, entonces $F = G \cap B$ con $G \in \mathcal{F}_{M_{\mathcal{F}}}$, al ser $M_{\mathcal{F}} \cap C = \emptyset$ existe $H \in \mathcal{F}_C$ tal que $B \cap H = \emptyset$. Ahora tenemos que $G \cup H \in \mathcal{F}_{M_{\mathcal{F}} \cup C}$ y $G \cup H \cap B = G \cap B$ y $F \in \mathcal{F}_{M_{\mathcal{F}} \cup C}|_B$ y se obtiene el resultado. □

Capítulo 2

Filtros de Fréchet-Urysohn

Para definir nuestros filtros necesitamos definir el siguiente espacio:

DEFINICIÓN 5. *Sea $\mathcal{F}$ filtro sobre ω. Denotamos $\xi(\mathcal{F}) := \omega \cup \{\mathcal{F}\}$ con la siguiente topología: cada punto en ω es aislado y para el punto $\mathcal{F}$ una base de vecindades es la siguiente familia $\{\{\mathcal{F}\} \cup F : F \in \mathcal{F}\}$.*

Esta definición incluye a todos los espacios Hausdorff infinitos numerables con un sólo punto no aislado, ya que estamos considerando filtros libres.

A continuación veremos que la propiedad de Fréchet-Urysohn y secuencial son equivalentes en este tipo de espacios.

TEOREMA 1. *Sea $\mathcal{F}$ un filtro sobre ω. Entonces $\xi(\mathcal{F})$ es un espacio Fréchet-Urysohn si y sólo si es un espacio Secuencial.*

DEMOSTRACIÓN. La primera implicación se sigue del hecho de que todo espacio Fréchet-Urysohn es secuencial. Inversamente sea $A \subseteq \xi(\mathcal{F})$ tal que $\mathcal{F} \in \overline{A} - A$, es decir un conjunto no cerrado, para el cual $\overline{A} - A = \{F\}$ y por definición existe una sucesión $B \subseteq A$ que converge a algún $x \in \overline{A} - A$. Entonces $B \longrightarrow \mathcal{F}$ y $\xi(\mathcal{F})$ es espacio de Fréchet-Urysohn. □

A partir de aquí nos centraremos más en analizar el filtro del punto no aislado y nos referiremos más al filtro que al espacio en sí.

DEFINICIÓN 6. *Decimos que un filtro $\mathcal{F}$ es Fréchet-Urysohn si el espacio $\xi(\mathcal{F})$ es Fréchet-Urysohn.*

De acuerdo con las definiciones preliminares podemos adaptar tales nociones con la estructura topológica de la siguiente manera: Sea $\mathcal{F}$ filtro en ω. Para $B \subset \omega$ se tiene que $\mathcal{F} \in \overline{B}$ en $\xi(\mathcal{F})$ si y solo si $B \in F^+$. Además $A \in [\omega]^\omega$ converge a $\mathcal{F}$ en $\xi(\mathcal{F})$ si y solo si para cada $F \in \mathcal{F}$, se satisface que $|A - F| < \omega$. Con esto obtenemos trivialmente el siguiente resultado, que es básicamente la definición de la propiedad de Fréchet-Urysohn con la notación de filtros.

PROPOSICIÓN 2. *Si $\mathcal{F}$ es un filtro en ω, Entonces $\mathcal{F}$ es filtro de Fréchet-Urysohn si y solo si para cada $M \in \mathcal{F}^+$ existe $A \in [M]^\omega$ tal que $A \longrightarrow \mathcal{F}$.*

En la clase de los filtros libres el filtro de Fréchet es minimal con respecto a la contención el cual nos otorga un espacio conocido y se revisa a continuación.

EJEMPLO 3. *Si consideramos al filtro de Fréchet $\mathcal{F}_r$, entonces las vecindades de $\mathcal{F}_r$ en $\xi(\mathcal{F}_r)$ hacen que toda sucesión converja ya que este espacio no es más que una sucesión convergente y su límite.*

La clase de los filtros libres en ω es demasiado amplia a continuación haremos notar que no cualquier filtro libre es de Fréchet-Urysohn

PROPOSICIÓN 3. *Si $\mathcal{F}$ ultrafiltro en ω, entonces $\mathcal{F}$ no es filtro de Fréchet-Urysohn.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\mathcal{F}$ ultrafiltro en ω. Afirmamos que $\mathcal{F} = \mathcal{F}^+$. Si suponemos lo contrario, entonces existe $M \in \mathcal{F}^+ - \mathcal{F}$, esto implica que $\omega - M \in \mathcal{F}^+$ lo cual es una contradicción. Ahora sea $F \in \mathcal{F}$ cofinito y como $\mathcal{F}_r$ está estrictamente contenido en $\mathcal{F}$, entonces existe $G \in \mathcal{F}$ no cofinito y $|F - G| = \omega$. Por lo tanto F no converge a $\mathcal{F}$ y el filtro no es de Fréchet-Urysohn. □

Es claro que los espacios $\xi(\mathcal{F})$ son espacios Hausdorff y cero-dimensionales. La siguiente noción nos ayudará a caracterizar, analizar y construir una amplia clase de filtros de Fréchet-Urysohn.

DEFINICIÓN 7. *Sea $\mathcal{A} \subset [\omega]^\omega$ decimos que $\mathcal{A}$ es casi disjunta si para cada $A, B \in \mathcal{A}$ distintos se tiene que $|A \cap B| < \omega$. Decimos que $\mathcal{A}$ familia casi disjunta en ω es maximal casi disjunta, si no esta contenida propiamente en alguna otra familia casi disjunta. Si $\mathcal{A}$ es casi disjunta maximal entonces para cada $B \in [\omega]^\omega$ existe $A \in \mathcal{A}$ tal que $|A \cap B| = \omega$.*

Las familias casi disjuntas en ω son objetos que trabajaremos en lo sucesivo. Uno puede construir con facilidad familias casi disjuntas finitas e incluso numerables. Más adelante se observará la importancia de que las familias a considerar sean de gran tamaño. Mostraremos a continuación la existencia de una familia casi disjunta de tamaño $\mathfrak{c}$ en ω.

EJEMPLO 4. *Consideramos $\mathbb{R}$ el conjunto de los números reales con la topología usual y bien ordenamos de los números racionales $\mathbb{Q} = \{q_r : r < \omega\}$. Para cada $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ existe una sucesión $\{x_{\alpha,n}\}_{n<\omega} \subseteq \mathbb{Q}$ que converge a α. Entonces cada sucesión define un subconjunto de ω infinito $A_\alpha \subset \omega$ donde $A_\alpha = \{r < \omega : q_r \in \{x_{\alpha,n}\}$. Gracias a la unicidad de los limites la familia $\{A_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{R}}$ es casi disjunta y de tamaño $\mathfrak{c}$.*

Aquí exhibimos otro ejemplo construido sobre un árbol infinito numerable.

Ejemplo 5. *Sea* $Seq = \bigcup_{n<\omega} \omega^n$ *dotado con el orden parcial definido de la siguiente manera: Para* $x, y \in Seq$ *tenemos que* $x \leq y$ *si y sólo si* y *extiende a* x*. Este conjunto parcialmente ordenado tiene un elemento mínimo* $\omega^0 = \omega^\emptyset$*.* Seq *es numerable al ser unión numerable de los conjuntos finitos* ω^n*, entonces lo podemos poner en correspondencia con* ω*. Para cada* $f \in [\omega]^\omega$ *definimos* $A_f = \{f|_n : n < \omega\} \subset Seq$*, el conjunto de restricciones de* f*. Si* $f, g \in [w]^w$ *distintas existe* $k < \omega$ *tal que* $f|_k \neq g|_k$*. Por lo tanto cada* $n \leq k$ *tenemos que* $f|_n \neq g|_n$ *entonces* $|A_f \cap A_g| < \omega$*. Así* $\mathcal{A} = \{A_f\}_{f\in[\omega]^w}$ *es una familia casi disjunta y de tamaño* $\mathfrak{c}$*.*

Ahora procederemos a la construcción de una amplia clase de filtros de Fréchet-Urysohn y para esto necesitamos la siguiente notación: para $A, B \subseteq \omega$, decimos que A está casi contenido en B si $|A - B| < \omega$ y lo denotamos por la simbología $A \subseteq^* B$. Dada $\mathcal{A}$ familia casi disjunta en ω, podemos construir un filtro, que resultará ser filtro libre, de la siguiente manera:

$$\mathcal{F}_{\mathcal{A}} = \{F \in [\omega]^\omega : \forall A \in \mathcal{A}(A \subseteq^* F)\}$$

Proposición 4. *Si* $\mathcal{A}$ *es una familia casi disjunta en* ω*, entonces* $\mathcal{F}_{\mathcal{A}}$ *es un filtro libre.*

Demostración. Es claro que $\emptyset \notin \mathcal{F}_{\mathcal{A}}$ y dados $F, G \in \mathcal{F}_{\mathcal{A}}$, y $A \in \mathcal{A}$ tenemos $A \subseteq^* F$ y $A \subseteq^* G$ es decir $|A - F| < \omega$ y $|A - G| < \omega$ y por lo cual $|A - (F \cap G)| < \omega$ y si $F \in \mathcal{F}$ y $F \subset G$ entonces para cada $A \in \mathcal{A}$ se tiene que $A - G \subseteq A - F$ así $|A - G| < \omega$ y $\mathcal{F}$ es filtro. Es un filtro libre desde que para $F \in [w]^w$ tal que $|\omega - F| < \omega$ es claro que para cada $A \in A$ se tiene que $A \subseteq^* F$ así $\mathcal{F}_r \subseteq F_{\mathcal{A}}$ por tanto $\mathcal{F}$ es libre. □

Con esta definición se amplía la clase de filtros a considerar, los cuales resultan ser filtros de Fréchet-Urysohn. El Lema siguiente nos ayudará a mostrar que un filtro de Fréchet-Urysohn siempre será de la forma $\mathcal{F}_{\mathcal{A}}$ para cierta familia casi disjunta en ω.

Lema 3. *Sea* $\mathcal{A}$ *una familia casi disjunta en* ω*. Para* $B \notin \mathcal{A}$*,* $\mathcal{A} \cup \{B\}$ *es casi disjunta si y sólo si* $\omega - B \in \mathcal{F}_{\mathcal{A}}$*.*

Demostración. Si $\mathcal{A} \cup \{B\}$ es casi disjunta entonces para cada $A \in \mathcal{A}$ sucede que $|A \cap B| < \omega$. Entonces $|A - (\omega - B)| < \omega$ y $\omega - B \in \mathcal{F}_{\mathcal{A}}$. Inversamente si $\omega - \mathcal{B} \in \mathcal{F}_{\mathcal{A}}$, entonces para cada $A \in \mathcal{A}$ tenemos $|A - (\omega - F)| < \omega$ así $|A \cap B| < \omega$ por lo tanto $\mathcal{A} \cup \{B\}$ es casi disjunta. □

La siguiente caracterización de los filtros de Fréchet-Urysohn es dada en [**5**].

Teorema 2. *(***P. Simon***) Sea* $\mathcal{F}$ *filtro sobre* ω*. Entonces* $\mathcal{F}$ *es Fréchet-Urysohn si y sólo si existe una familia* $\mathcal{A}$ *casi disjunta maximal respecto a las siguientes propiedades:*

1. $F \in \mathcal{F}$ *si y sólo si* $A \subseteq^* \mathcal{F}$ *para cada* $A \in \mathcal{A}$*, (es decir* $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{\mathcal{A}}$*).*

2. *$\mathcal{A}$ es casi disjunta.*

Demostración. Sea $\mathcal{F}$ filtro de Fréchet-Urysohn. Definimos:

$$\mathcal{F}^* := \{A \in [\omega]^w : \forall F \in \mathcal{F}(A \subseteq^* F)\}.$$

Elegimos arbitrariamente una familia casi disjunta $\mathcal{A}$ que sea maximal casi disjunta en F^*, es decir, si $B \in \mathcal{F}^*$, entonces existe $A \in \mathcal{A}$ tal que $|A \cap B| = \omega$. Por construcción es claro que $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}_{\mathcal{A}}$. Sea $G \in \mathcal{F}_{\mathcal{A}}$. Si suponemos que $G \notin \mathcal{F}$, entonces $\omega - G \in \mathcal{F}^+$ y como $\mathcal{F}$ es filtro de Fréchet-Urysohn, existe $B \subseteq \omega - G$ sucesión convergente a $\mathcal{F}$. Por lo tanto $|B - F| < \omega$ para cada $F \in F$. Así que $B \in F^*$, pero $|C - G| = \omega$ para cualquier $C \in [B]^\omega$, lo cual es una contradicción al hecho de que $G \in \mathcal{F}_{\mathcal{A}}$. Inversamente sea $\mathcal{A}$ familia casi disjunta en ω tal que $\mathcal{F}_A = \mathcal{F}$. Consideramos $B \subseteq \omega$ con $\mathcal{F}_{\mathcal{A}} \in \overline{B}$. Si $\mathcal{A} \cup \{B\}$ es casi disjunta, entonces $\omega - B \in \mathcal{F}_{\mathcal{A}}$ por el Lema 3, lo cual contradice que $\mathcal{F}_{\mathcal{A}} \in \overline{B}$. Por lo tanto, $\mathcal{A} \cup \{B\}$ no es casi disjunta, entonces existe $A \in \mathcal{A}$ tal que $|A \cap B| = \omega$, así $A \cap B$ converge a $\mathcal{F}_{\mathcal{A}}$. Esto muestra que $\mathcal{F}_{\mathcal{A}} = F$ es un filtro Fréchet-Urysohn. □

A continuación mostraremos que el hecho de que la familia casi disjunta sea maximal facilita las cosas, pero se vuelve menos interesante ya que nos otorga otra vez una sucesión convergente con su punto límite.

Teorema 3. *Sea $\mathcal{A}$ una familia casi disjunta. Entonces $\mathcal{A}$ es maximal si y sólo si $\mathcal{F}_{\mathcal{A}} = \mathcal{F}_r$.*

Demostración. Sea $\mathcal{A}$ familia casi disjunta maximal. Como $\mathcal{F}_{\mathcal{A}}$ es libre, entonces contiene al filtro de Fréchet. Sea $F \in \mathcal{F}_{\mathcal{A}}$ y suponemos que $|\omega - F| = \omega$. Desde que $\mathcal{A}$ es casi disjunta maximal, existe $A \in \mathcal{A}$ tal que $|A \cap (\omega - F)| = \omega$, llamamos $B = A \cap (\omega - F)$, B es tal que converge a $\mathcal{F}_{\mathcal{A}}$, pero $F \cap B = \emptyset$ lo cual contradice la supuesta convergencia. Por lo tanto, $\mathcal{F}_{\mathcal{A}}$ sólo contiene conjuntos cofinitos. Inversamente si $\mathcal{F}_{\mathcal{A}}$ es el filtro de Fréchet, entonces cada conjunto infinito converge a $\mathcal{F}_{\mathcal{A}}$. Para cada $M \in [\omega]^\omega$, tenemos que $M \longrightarrow \mathcal{F}_{\mathcal{A}}$. Si no existiera $A \in \mathcal{A}$ tal que $|A \cap M| = \omega$, sucedería que $\mathcal{A} \cup M$ es casi disjunta y por el Lema 3, $\omega - M \in \mathcal{F}_{\mathcal{A}}$ lo cual es una contradicción. □

Con la suma podemos definir más filtros de Fréchet-Urysohn de la siguiente manera.

Teorema 4. *Sean A y B subconjuntos infinitos de ω. Si $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ filtros en A y B respectivamente tales que $\mathcal{F}^+ \cap \mathcal{G}^+ = \emptyset$, entonces $\mathcal{F} \oplus \mathcal{G}$ es filtro de Fréchet-Urysohn si y sólo si $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ son filtros de Fréchet-Urysohn.*

Demostración. Supongamos que $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ son filtros de Fréchet-Urysohn. Consideramos $M \in (\mathcal{F} \oplus \mathcal{G})^+$. Entonces $M \in \mathcal{F}^+$ o $M \in \mathcal{G}^+$. Sin perder generalidad supongamos que $M \in \mathcal{F}^+$. Como $\mathcal{F}$ es filtro de Fréchet-Urysohn, existe $A \in [M]^\omega$ tal que para cada $F \in \mathcal{F}$, tenemos que $|A - F| < \omega$. Gracias a esto se tiene que cada $H \in \mathcal{F} \oplus \mathcal{G}$ satisface que $|A - H| < \omega$, entonces $A \longrightarrow \mathcal{F} \oplus \mathcal{G}$

y éste filtro es de Fréchet-Urysohn. Inversamente si suponemos que $\mathcal{F} \oplus \mathcal{G}$ es de Fréchet-Urysohn y $M \in \mathcal{F}^+$, entonces $M \in \mathcal{F} \oplus \mathcal{G}^+$, por tanto existe $A \in [M]^\omega$ tal que cada $H \in \mathcal{F} \oplus \mathcal{G}$ satisface $|A - H| < \omega$. Además H tiene como subconjunto a $F \cup G$ tal que $F \in \mathcal{F}$ y $G \in \mathcal{G}$. Si suponemos que A no converge a $\mathcal{F}$ en $\xi(\mathcal{F})$, entonces existe $F_0 \in F$ tal que $|A - F_0| = \omega$. Por tanto para todos los elementos en $\mathcal{F} \oplus \mathcal{G}$ de la forma $\{F_0 \cup G : G \in \mathcal{G}\}$, tenemos que $|A - G| < \omega$. De aquí, se concluye que $M \in \mathcal{G}^+$ lo cual es una contradicción y $A \longrightarrow \mathcal{F}$. Para $N \in \mathcal{G}$ el procedimiento es análogo. Por lo tanto $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ son filtros de Fréchet-Urysohn. $\square$

A continuación mostraremos un contraejemplo en donde falla la hipótesis de que $\mathcal{F}^+ \cap \mathcal{G}^+ \neq \emptyset$ y no se cumple por el Teorema 4.

Ejemplo 6. *Sean A y B subconjuntos infinitos disjuntos de ω tales que $A \cup B = \omega$. Consideramos $\mathcal{F} = \mathcal{F}_r(A) \oplus \mathcal{Q}$. En donde $\mathcal{F}_r(A)$ es el filtro de Fréchet en A y $\mathcal{Q}$ es un ultrafiltro libre en B. De la misma manera consideramos $\mathcal{G} = \mathcal{R} \oplus \mathcal{F}_r(B)$. Donde $\mathcal{R}$ es un ultrafiltro libre en A y $\mathcal{F}_r$ es el filtro de Fréchet en B. Si $\mathcal{F} \oplus \mathcal{G} = \mathcal{H}$, entonces cada $H \in \mathcal{H}$ contiene un conjunto de la forma $F \cup G$ con $F \in \mathcal{F}$ y $G \in \mathcal{G}$. Por construcción F contiene un cofinito en A y G contiene un cofinito en B. Así H es cofinito en ω y $\mathcal{H}$ es el filtro de Fréchet en ω. Gracias a la Proposición 3, hay positivos de $\mathcal{F}$ en B y positivos de $\mathcal{G}$ en A, que testifican que $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ no sean filtros de Fréchet-Urysohn. Aquí es notorio que $\mathcal{F}^+ \cap \mathcal{G}^+ \neq \emptyset$.*

Definición 8. *Sea $\mathcal{F}$ filtro sobre $A \in [\omega]^\omega$ y $\mathcal{G}$ filtro sobre $B \in [\omega]^\omega$. Decimos que $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ son equivalentes si existe una biyección $f : A \longrightarrow B$ tal que $f[\mathcal{F}] := \{f[F] : F \in \mathcal{F}\} = \mathcal{G}$.*

Diremos que dos filtros $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ sobre ω son equivalentes si y sólo si los espacios $\xi(\mathcal{F})$ y $\xi(\mathcal{G})$ son homeomorfos. A continuación veremos un Teorema dado en [**6**], que nos muestra que en realidad existen muchos filtros no equivalentes por pares, es decir, muchos espacios de este tipo no homeomorfos por pares.

Teorema 5. *Existen $2^\mathfrak{c}$ filtros Fréchet-Urysohn no equivalentes por pares.*

Demostración. Sea $\mathcal{A}$ familia casi disjunta en ω de tamaño $\mathfrak{c}$. Consideramos una ordenación de esta $\{A_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\}$. Para todo $X \in \mathcal{P}(\mathfrak{c})$ sea $\mathcal{A}_X = \{A_\alpha : \alpha \in X\}$, la cual es una familia casi disjunta, así para cada $X, Y \in \mathcal{P}(\mathfrak{c}) - \{\emptyset\}$ distintos, existe $\gamma \in X$ tal que $A_\gamma \notin A_Y$. Desde que $\mathcal{A}_Y \cup \{A_\gamma\}$ es casi disjunta por el Lema 3, $\omega - A_\gamma \in \mathcal{F}_{\mathcal{A}_Y}$ y $\omega - A_\gamma \notin \mathcal{F}_{\mathcal{A}_X}$, entonces $\mathcal{F}_{\mathcal{A}_X} \neq \mathcal{F}_{\mathcal{A}_Y}$. Sea $X_0 \in \mathcal{P}(\mathfrak{c}) - \{\emptyset\}$. Como $\xi(\mathcal{F}_{X_0})$ es numerable, este no puede ser homeomorfo a más de $\mathfrak{c}$ espacios del mismo tipo. Entonces existe $X_1 \in \mathcal{P}(\mathfrak{c}) - \{\emptyset\}$ tal que $\xi(\mathcal{F}_{X_0}) \ncong$. Inductivamente supongamos que para $\alpha < 2^\mathfrak{c}$ hemos elegido elementos de $2^\mathfrak{c} - \{\emptyset\}$ tal que la familia

$$\mathcal{X} = \{\xi(\mathcal{F}_{X_\mu}) : \mu < \alpha\}$$

consiste en espacios no homeomorfos por pares. Si $X \subset \mathfrak{c}$ es homeomorfo a algún elemento de $\mathcal{X}$ hay a lo más $\alpha \cdot \mathfrak{c} < 2^{\mathfrak{c}}$ subconjuntos de $2^{\mathfrak{c}}$ que lo satisfacen, esto otra vez por el hecho de que $\xi(\mathcal{F}_X)$ es numerable y sólo puede ser homeomorfo a $\mathfrak{c}$ espacios del mismo tipo. Entonces existe $X_\alpha \in \mathcal{P}(\mathfrak{c}) - \{\emptyset\}$ tal que no es homeomorfo a ningún elemento de $\mathcal{X}$. Así existe

$$\{\xi(\mathcal{F}_{X_\alpha}) : X_\alpha \in \mathcal{P}(\mathfrak{c}), \alpha < 2^{\mathfrak{c}}\}$$

que consiste de espacios no homeomorfos por pares.

$\square$

Capítulo 3

Más filtros de Fréchet-Urysohn

Ahora se procederá de manera diferente para construir filtros y espacios topológicos. Dada una familia $\mathcal{B}$ casi disjunta en ω se define el Ψ-espacio (respecto a $\mathcal{B}$) de la siguiente manera: $X = \omega \cup \mathcal{B}$ con la topología discreta en ω y para $B \in \mathcal{B}$ una base de vecindades es la siguiente familia:

$$\{\{B\} \cup B - F : |F| < \omega\}.$$

Este espacio es Hausdorff localmente compacto. Consideremos su compactación a un punto, tomamos subespacio de la compactación que tiene como conjunto $\omega \cup \infty$. A este espacio lo denotaremos por $X(\mathcal{B})$. En este espacio cada punto en ω es aislado y las vecindades de ∞ son complementos de conjuntos que son casi contenidos por una cantidad finita de elementos de $\mathcal{B}$. Dada una familia $\mathcal{B}$ casi disjunta en ω, podemos construir un ideal de la siguiente manera:

$$\mathcal{I}(\mathcal{B}) := \{M \in \omega : \exists\{B_i : i < n\} \subseteq \mathcal{B}(M \subseteq^* \cup_{i<n} B_i)\}.$$

Conforme a la definición del espacio $X(\mathcal{B})$ las vecindades de ∞ son los elementos de $\mathcal{I}(\mathcal{B})^c$. Esta definición no se aleja de la definición de los ξ-espacios definidos anteriormente, ya que el espacio $X(\mathcal{B})$ es el mismo que $\xi(\mathcal{I}(\mathcal{B})^c)$. Queremos analizar si dicho espacio es de Fréchet-Urysohn en el punto ∞. Para esto nos fijamos en los elementos de $\mathcal{I}(\mathcal{B})^+$ que coincide con $(\mathcal{I}(\mathcal{B})^c)^+$. A diferencia de los ξ-espacios, en donde trabajábamos con una familia de sucesiones convergentes al filtro, aquí se trabaja con una familia casi disjunta de sucesiones no convergentes. Introduciremos una terminología más para la siguiente definición. Si $\mathcal{A}$ es una familia casi disjunta en ω, definimos:

$$\mathcal{I}(\mathcal{A})^* := \{M \subseteq \omega : |\{A \in \mathcal{A} : |A \cap M| = \omega\}| \geq \omega\}.$$

Claramente $\mathcal{I}(\mathcal{A})^* \subseteq \mathcal{I}(\mathcal{A})^+$. En general sucede que $\mathcal{I}(\mathcal{A})^*$ está propiamente contenida en $\mathcal{I}(\mathcal{A})^+$ de acuerdo con lo siguiente.

Proposición 5. *Sea $\mathcal{A}$ familia casi disjunta en ω. Entonces $N \in \mathcal{I}(\mathcal{A})^+ - \mathcal{I}(\mathcal{A})^*$ se puede expresar como $N = M_1 \cup M_2$ con $M_1 \in \mathcal{I}(\mathcal{A})^\perp \cap [\omega]^\omega$ y $M_2 \in \mathcal{I}(\mathcal{A})$. Además $\mathcal{I}(\mathcal{A})^* = \mathcal{I}(\mathcal{A})$ si y sólo si $\mathcal{A}$ es maximal casi disjunta.*

Demostración. Sea $N \in \mathcal{I}(\mathcal{A})^+ - \mathcal{I}(\mathcal{A})^*$. Consideremos $\mathcal{A}' = \{A \in \mathcal{A} : |A \cap N| = \omega\}$, tenemos que $|N - \cup\mathcal{A}'| = \omega$, de lo contrario $N \in \mathcal{I}(\mathcal{A})$ lo cual es una contradicción. Además $N - \cup\mathcal{A}' \in \mathcal{I}(\mathcal{A})^\perp \cap [\omega]^\omega$ de lo contrario contradice a la definición de $\mathcal{A}'$. Tenemos que $N = M_1 \cup M_2$ con

$M_1 = \cup\mathcal{A}'$ y $M_2 = N - \cup\mathcal{A}'$. Para la segunda parte de la proposición, suponemos que $\mathcal{A}$ es maximal casi disjunta. Elegimos $M \in \mathcal{I}(\mathcal{A})^+$, entonces $M \in [\omega]^\omega$, así existe $A_0 \in \mathcal{A}$ tal que $|M \cap A_0| = \omega$ y tenemos que $|M - A_0| < \omega$, de lo contrario $M \in \mathcal{I}(\mathcal{A})$, una contradicción. Entonces existe $A_1 \in \mathcal{A}$ tal que $|A_1 \cap (M - A_0)| = \omega$, así definimos inductivamente para cada $n < \omega$ un conjunto $\{A_n : n < \omega\}$ infinito tal que para cada $n < \omega$, $|A_n \cap M| = \omega$ y $M \in \mathcal{I}(\mathcal{A})^*$. Ahora suponemos que $\mathcal{I}(\mathcal{A})^* = \mathcal{I}(\mathcal{A})^+$. Sea $M \in [\omega]^\omega$. Si suponemos que no existe $A \in \mathcal{A}$ tal que $|A \cap M| = \omega$, entonces $A \in \mathcal{I}(\mathcal{A})^\perp$. Esto implica que $A \in \mathcal{I}(\mathcal{A})^*$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto $\mathcal{A}$ es maximal casi disjunta. □

Para la construcción de estos filtros nos interesan familias casi disjuntas de gran tamaño, el caso numerable lo cubriremos en el siguiente Lema.

Lema 4. *Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ dos familias casi disjuntas numerables infinitas. Si $|\omega - \cup\mathcal{A}| = \omega = |\omega - \cup\mathcal{B}|$, entonces $X(\mathcal{A}) \cong X(\mathcal{B})$.*

Demostración. Enumeramos las familias $\mathcal{A} = \{A_n : n < \omega\}$ y $\mathcal{B} = \{B_n : n < \omega\}$. Queremos definir $\phi : \omega \longrightarrow \omega$ biyección tal que $\phi[\mathcal{I}(\mathcal{A})^c] = \mathcal{I}(\mathcal{B})^c$. Para esto consideramos la siguiente función: $\phi[A_1] = B_1$, conociendo $\phi[A_2], \phi[A_3], \ldots, \phi[A_k]$, hacemos $\phi[A_{k+1}] = B_{k+1} - (\cup_{i<k} B_k)$. Así se asocia la familia y para $\phi[\omega - \cup\mathcal{A}] = \omega - \cup\mathcal{B}$. Si $F \in \mathcal{I}(\mathcal{A})^c$, entonces $\omega - F \subseteq^* \cup_{i<n} A_i$ con $\{A_i : i < n\} \subset \mathcal{A}$. Tenemos que $\phi[\omega - F] \subseteq^* \cup_{i<n} \phi[A_i]$ y para cada $i < n$, se tiene que $\phi[A_i] = B_{k_i} - M$ con $\{B_{k_i} : i < n\} \subset \mathcal{B}$ y $|M| < \omega$. Entonces $\phi[\omega - F] \subseteq^* B_{k_i}$ y $\phi[\omega - F] = \omega - \phi[F] \in \mathcal{I}(\mathcal{B})$. Luego $\phi[F] \in \mathcal{I}(\mathcal{B})^c$. Si $G \in \mathcal{I}(\mathcal{B})^c$, entonces $\omega - G \subseteq^* \cup_{j<m} B_j$ con $\{B_j : j < m\} \subset \mathcal{B}$. Para cada $j < m$ el conjunto $B_j = \phi[A_{k_j}] \cup M$ con $\{A_{k_j} : j < m\} \subset \mathcal{A}$ y $|M| < \omega$. Por lo tanto $\omega - G \subseteq^* \cup_{j<m} \phi[A_{k_j}]$, entonces $\phi^{-1}[\omega - G] \subseteq^* \cup_{j<m} A_{k_j}$ y $\phi^{-1}[G] \in \mathcal{I}(\mathcal{A})^c$. Así se concluye que $\mathcal{I}(\mathcal{A})^c \cong \mathcal{I}(\mathcal{B})^c$ vía ϕ y $X(\mathcal{A}) \cong X(\mathcal{B})$. □

Ahora el espacio depende de la elección de la familia casi disjunta $\mathcal{B}$. Queremos ver que necesita $\mathcal{B}$ para que el espacio $X(\mathcal{B})$ sea de Fréchet-Urysohn. Para eso ocupamos la siguiente definición.

Definición 9. *Sea $\mathcal{B}$ familia casi disjunta en ω. Decimos que $\mathcal{B}$ es maximal casi disjunta en ninguna parte si para cada $M \in \mathcal{I}(\mathcal{B})^+$ existe $N \in \mathcal{I}(\mathcal{B})^\perp \cap [\omega]^\omega$ contenido en $\mathcal{I}(\mathcal{B})^c$.*

Lo anterior nos dice que la familia no se comportará como maximal casi disjunta en ninguna parte. En donde es posible restringirla siempre encontraremos un elemento infinito ortogonal al ideal generado. Esto esta estrechamente relacionado con la propiedad de Fréchet-Urysohn, ya que los elementos de $\mathcal{I}(\mathcal{B})^+$ son conjuntos que tienen al punto ∞ en su cerradura. Además la familia de elementos infinitos ortogonales de $\mathcal{I}(\mathcal{B})$ resultan ser las sucesiones convergentes en $X(\mathcal{B})$. Esto se muestra en el siguiente Lema.

LEMA 5. *Si $\mathcal{B}$ familia casi disjunta en ω, entonces $X(B)$ es espacio de Fréchet-Urysohn si y sólo si $\mathcal{B}$ es maximal casi disjunta en ninguna parte.*

DEMOSTRACIÓN. Suponemos que $X(\mathcal{B})$ es de Fréchet-Urysohn. Consideremos $M \in \mathcal{I}(\mathcal{B})^+$, entonces $\infty \in \overline{M}$ en $X(\mathcal{B})$. Por hipótesis existe $N \in [\omega]^\omega$ tal que $M \longrightarrow \mathcal{F}$, es decir, N esta casi contenido por cada elemento de $\mathcal{I}(\mathcal{B})^c$, entonces $N \in \mathcal{I}(\mathcal{B})^\perp$. Así $\mathcal{B}$ es maximal casi disjunta en ninguna parte. Inversamente sea $A \subset \omega$ tal que $\infty \in \overline{A}$. Tenemos que $A \in \mathcal{I}(\mathcal{B})^+$ y por hipótesis existe $N \in I(\mathcal{B})^\perp \cap [\omega]^\omega$ contenido en A, entonces N está casi contenido en cada elemento de $\mathcal{I}(\mathcal{B})^c$. Por lo tanto A es una sucesión tal que $N \longrightarrow \infty$. Con esto tenemos que $X(\mathcal{B})$ es espacio Fréchet-Urysohn. □

Por la caracterización en el Teorema 2, cada que $\mathcal{B}$ resulta ser una familia casi disjunta maximal en ninguna parte, existe una familia $\mathcal{A}$ casi disjunta tal que $\mathcal{F}_{\mathcal{A}} = \mathcal{I}(\mathcal{B})^c$. Lo que obtenemos es que $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ es una familia maximal casi disjunta en ω. A estas familias maximales casi disjuntas se les llama familias *2-particionables*.

A continuación estableceremos un pre-orden para filtros en ω. Este pre-orden ordena a los filtros de acuerdo a subespacios homeomorfos. Esta relación de pre-orden fue introducida por S. Todorc̃ević en [**7**].

DEFINICIÓN 10. *Sean $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ filtros sobre ω. Decimos que $\mathcal{F} \leq_T \mathcal{G}$ si existe $A \in \mathcal{F}$ y $B \in G^+$ tal que $\mathcal{F}|_A$ y $\mathcal{G}|_B$ son equivalentes.*

Para esta relación existe un elemento minimal dentro de la clase de los filtros de Fréchet-Urysohn de acuerdo con el siguiente Lema, que es más general.

PROPOSICIÓN 6. *Sean $\mathcal{F}$ en un filtro de Fréchet-Urysohn y $\mathcal{G}$ un filtro. Si existe $G \in \mathcal{G}$ tal que $G \to \mathcal{G}$, entonces $\mathcal{G} \leq_T \mathcal{F}$. En particular $\mathcal{F}_r \leq_T \mathcal{F}$.*

DEMOSTRACIÓN. Consideramos $G \in \mathcal{G}$ tal que $G \longrightarrow \mathcal{G}$. Sea $A \in [\omega]^\omega$ tal que $A \longrightarrow \mathcal{F}$. Tenemos que $A \in \mathcal{F}^+$, y es claro que $\mathcal{G}|_G = \mathcal{F}_r(G)$ y $\mathcal{F}|_A = \mathcal{F}_r(A)$. Por lo tanto cualquier biyección entre G y A, hacen que las restricciones de los filtros sean equivalentes y $\mathcal{G} \leq_T \mathcal{F}$.

□

PROPOSICIÓN 7. *Sea $\mathcal{F}$ un filtro en ω tal que contiene estrictamente a $\mathcal{F}_r$. Si $B \in \mathcal{F}$ no cofinito en ω y $C \subset \omega^* - B^*$ cerrado, entonces $\mathcal{F} \leq_T \mathcal{F}_{M_{\mathcal{F}} \cup C}$.*

Demostración. Elegimos a B y la función identidad en B como testigos de lo que pretendemos probar. Por hipótesis $B \in \mathcal{F}$ y es claro que $B \in \mathcal{F}^+_{M_f \cup C}$. Por el Lema 1, tenemos que $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{M_\mathcal{F}}$, entonces $\mathcal{F}|_B = \mathcal{F}_{M_\mathcal{F}}|_B$. Ahora el Lema 2, tenemos que $\mathcal{F}_{M_\mathcal{F}}|_B = \mathcal{F}_{M_\mathcal{F} \cup C}|_B$. Con esto se obtiene el resultado. □

Corolario 1. *Cada filtro en ω tiene $2^\mathfrak{c}$ filtros sucesores con respecto al pre-orden $\leq_T$.*

Ahora veremos que cada filtro de Fréchet-Urysohn tiene $2^\mathfrak{c}$ filtros de Fréchet-Urysohn sucesores con respecto al pre-orden $\leq_T$. Esto después de probar el siguiente Lema, en donde el resultado deseado será un corolario de tal Lema.

Lema 6. *Sea $\mathcal{F}$ filtro en ω que contiene estrictamente a $\mathcal{F}_r$. Si $A \in \mathcal{F}$ con $B = \omega - A$ infinito, entonces $\mathcal{F} \leq_T \mathcal{F}|_A \oplus \mathcal{G}$, para todo filtro $\mathcal{G}$ en $\omega - B$.*

Demostración. Consideramos al conjunto $A \in \mathcal{F}$ no cofinito. Sea $\mathcal{G}$ filtro en $B = \omega - A$. Tenemos que $A \in (\mathcal{F}|_A \oplus \mathcal{G})^+$ y la restricción $(\mathcal{F}|_A \oplus \mathcal{G})|_A$ es la misma que $\mathcal{F}|_A$, pues $\mathcal{G}$ es filtro en B y $A \cap B = \emptyset$. Entonces la función identidad en A hace que $\mathcal{F}|_A \cong (\mathcal{F}|_A \oplus \mathcal{G})|_A$. Por lo tanto $\mathcal{F} \leq_T \mathcal{F}|_A \oplus \mathcal{G}$. □

Corolario 2. *Cada filtro de Fréchet-Urysohn tiene $2^\mathfrak{c}$ filtros de Fréchet-Urysohn sucesores con respecto a $\leq_T$.*

Siguiendo con esta relación de pre-orden podemos asegurar que para $\mathcal{F}$ filtro de Fréchet-Urysohn, existen $\mathfrak{c}$ filtros predecesores con respecto a $\leq_T$. Estos también dentro de la clase de los filtros de Fréchet-Urysohn.

Proposición 8. *Cada filtro $\mathcal{F}$ de Fréchet-Urysohn en ω tiene $\mathfrak{c}$ predecesores con respecto a $\leq_T$.*

Demostración. Sea $n < \omega$ y $\mathcal{A} = \{A_i : i \leq n\}$ familia finita casi disjunta en ω. El filtro $\mathcal{F}_\mathcal{A}$ es tal que $\mathcal{F}_\mathcal{A}|_{\cup\mathcal{A}}$ es el filtro de Fréchet en $\cup\mathcal{A}$. Si elegimos $B \in [\omega]^\omega$ tal que $B \longrightarrow \mathcal{F}$ en $\xi(\mathcal{F})$, entonces $\mathcal{F}_\mathcal{A}|_{\cup\mathcal{A}} \cong \mathcal{F}$. Por lo tanto hay $\mathfrak{c}$ filtros de Fréchet-Urysohn predecesores a $\mathcal{F}$. □

Podemos definir la equivalencia según S. Todorčević con respecto al pre-orden $\leq_T$ y de la siguiente manera:

Definición 11. *Sean $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ filtros en ω. Decimos que $\mathcal{F}$ es estrictamente menor que $\mathcal{G}$, con respecto al pre-orden $<_T$, si $\mathcal{F} \leq_T \mathcal{G}$ y $\mathcal{G} \nleq_T \mathcal{F}$. Decimos que son $\leq_T$ equivalentes si $\mathcal{F} \leq_T \mathcal{G}$ y $\mathcal{G} \leq_T \mathcal{F}$ y lo denotamos $\mathcal{F} \approx_T \mathcal{G}$.*

A continuación veremos un ejemplo de dos filtros tales que son $\leq_T$-comparables pero no son equivalentes.

EJEMPLO 7. *Sean $A, B \in [\omega]^\omega$ tal que $A \cup B = \omega$. Consideramos $\mathcal{F}_r(A)$ el filtro de Fréchet en A. $\mathcal{F}_r(A)$ satisface que $\mathcal{F}_r(A) \leq_T \mathcal{F}_r(A) \oplus \mathcal{G}$ para cualquier filtro en B. Si tomamos el caso donde $\mathcal{G}$ es ultrafiltro, entonces nunca tendremos que $\mathcal{F}_r(A) \oplus \mathcal{G} \leq_T \mathcal{F}$. Esto es claro notando que para cualquier elemento de $F \in \mathcal{F}_r(A) \oplus \mathcal{G}$, este contiene un conjunto de la forma $H \cup G$ con $G \in \mathcal{G}$, como $\mathcal{G}$ es ultrafiltro la restricción de $\mathcal{G}$ en G nunca será el filtro de Fréchet en B. Lo anterior se sigue del hecho de que $\mathcal{G}$ contiene no cofinitos en B. Además cualquier restricción de $\mathcal{F}_r(A)$ es otra vez el filtro de Fréchet. Por lo tanto no sucede que $\mathcal{F}_r(A) \oplus \mathcal{G} \leq_T \mathcal{F}_r(A)$.*

A continuación veremos una amplia clase de filtros de Fréchet-Urysohn construyéndolos en el árbol binario $2^{<\omega}$.

Sea el árbol binario $2^{<\omega}$. Hacemos una correspondencia entre el conjunto de ramas de $2^{<\omega}$ y el conjunto de Cantor 2^ω de la siguiente manera: Para $f \in 2^\omega$ sea $A_g = \{g|_n : n < \omega\}$. Así podemos definir $\mathcal{A}_X = \{A_g : g \in X\}$. Para cada $X \subseteq 2^\omega$ denotamos a $\mathcal{F}_X$ como el filtro generado por los cofinitos y los complementos de elementos en A_X. Afirmamos que $\mathcal{F}_X = \mathcal{F}_{\mathcal{I}(\mathcal{A}_X)^c}$ y la familia casi disjunta $\mathcal{A}_X$ es maximal en ninguna parte, es decir, $\mathcal{F}_X$ es filtro de Fréchet-Urysohn. Sea $F \in \mathcal{F}_X$. Entonces F contiene a un cofinito o contiene a un conjunto de la forma $\cap_{i<n} U_i$, en donde cada U_i es cofinito o complemento de algún $\mathcal{A}_{g_i} \in X$. Por lo tanto $\mathcal{F}^c$ está casi contenido en

$$(\cap_{i<n} U_i)^c = \cup U_i^c = \cup_{i<n} A_{g_i} \in \mathcal{I}(\mathcal{A}_X).$$

Así $F \in \mathcal{I}(\mathcal{A}_X)$. De igual manera si $G \in \mathcal{I}(\mathcal{A}_X)^c$, entonces $G^c \subseteq^* \cup_{i<n} A_{g_i}$ con $\{A_{g_i}\}_{i<n} \in \mathcal{A}_X$, es decir:

$$\cap_{i<n} A_{g_i} \subseteq G.$$

Por lo tanto $G \in \mathcal{F}_X$. Para probar que es maximal en ninguna parte usaremos el siguiente resultado.

LEMA 7. *Si $X \subseteq 2^\omega$ infinito y $M \subset 2^{<\omega}$ tal que $M \in \mathcal{I}(\mathcal{A}_X)^*$, entonces M contiene una anticadena infinita.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\mathcal{A}_N = \{A_{g_n} : n < \omega\} \subseteq \mathcal{A}_X$ subfamilia infinita tal que para cada $n < \omega$ se tiene que $|A_{g_n} \cap M| = \omega$. Reordenamos cada $A_{g_n} \cap M$ por niveles. Sea $n'_0 < \omega$ el mínimo número natural tal que existe $A_g \in \mathcal{A}_N$ y su restricción en n'_0 difiera de la de A_{g_0}, ahora sea $n_0 < \omega$ el mínimo natural tal que $A_{g_{n_0}}$ cumple con lo anterior. Elegimos $a_0 = A_{g_0}|_{n'_0}$. De igual manera sea $n'_0 < n'_1 < \omega$ el mínimo natural tal que existe $A_g \in \mathcal{A}_N$ y su restricción en n'_1 sea distinta a la de A_{g_0}, ahora sea $n_1 < \omega$ el mínimo tal que $\mathcal{A}_{g_{n_1}}$ cumple con lo anterior. Inductivamente para cada $k < \omega$ elegimos $a_k \in A_{g_{n_k}} \cap M$. La existencia de dichos número naturales nos otorga una anticadena infinita contenida en M. A saber $\{a_k\}_{k<\omega}$. □

Consideramos ahora $M \in \mathcal{I}(A_X)^+ - \mathcal{I}(\mathcal{A}_X)^*$. No hay nada que hacer pues $M = M_1 \cup M_2$ con $M_1 \in \mathcal{I}(\mathcal{A}_X)^\perp \cap [2^{<\omega}]^\omega$. Si $M \in \mathcal{I}(\mathcal{A}_X)^*$ por el Lema 7, existe una anticadena infinita contenida en M. Tenemos que cada anticadena es ortogonal a cualquier familia de ramas en $2^{<\omega}$. Así concluimos que $\mathcal{A}_X$ es maximal casi disjunta en ninguna parte y $\mathcal{F}_X$ es filtro de Fréchet-Urysohn.

Siguiendo con filtros de la forma $\mathcal{F}_X$ en $2^{<\omega}$, veremos que existe una familia de tamaño más grande que $\mathfrak{c}$, que consiste de filtros de Fréchet-Urysohn no comparables por pares con respecto a $\leq_T$. En [**7**] se muestra la existencia de dicha familia. A continuación veremos un bosquejo de la prueba que justifica la existencia, para el cual no profundizaremos y omitiremos detalles técnicos.

Sea $X, Y \subseteq 2^\omega$ y supongamos que $\mathcal{F}_X \leq \mathcal{F}_Y$. Entonces existe $A \in \mathcal{F}_X$, $B \in \mathcal{F}_Y^+$ y una biyección $\theta : A \longrightarrow B$ que lo testifican que son comparables. Consideramos para $C \subset 2^{<\omega}$ el siguiente conjunto:

$$[C] := \{f \in 2^\omega : |A_f \cap C| = \omega\}$$

Con esto podemos definir $f_\theta : [A] \longrightarrow \mathcal{P}([B])$ y $g_\theta : [B] \longrightarrow \mathcal{P}([A])$ de manera que:

$$\begin{aligned} f_\theta(g) &= \{h \in Y : |\theta[A_g \cap A] \cap h| = \omega\} \\ g_\theta(y) &= \{x \in X : |\theta^{-1}(A_h \cap B) \cap x| = \omega\} \end{aligned}$$

Notemos que para cada $x \in X$ se tiene que $f_\theta(x)$ es un subconjunto finito de Y, y para cada $y \in Y$ tenemos que $g_\theta(y)$ es un subconjunto finito de X. Además $y \in f_\theta(x)$ si y sólo si $x \in g_\theta(y)$. Sea $<_\omega$ un buen orden de 2^ω de la mínima longitud posible. Con un argumento estándar de diagonalización sobre $<_w$, obtenemos un subconjunto $Z \subset 2^\omega$ de tamaño $\mathfrak{c}$, para el cual existe una familia $\mathcal{X} \subset \mathcal{P}(Z)$, de tamaño más grande que $\mathfrak{c}$ tal que $X - Y = \mathfrak{c}$, para cada $X, Y \in \mathcal{X}$. Obteniendo así que $\mathcal{F}_X \not\leq_T \mathcal{F}_Y$ para cada $X, Y \in \mathcal{X}$.

Capítulo 4

Propiedades α_i's

En este contexto hay una serie de cuestiones que están abiertas en la teoría, por ejemplo: Cuando el producto de espacios de Fréchet-Urysohn es otra vez de Fréchet-Urysohn, ya que es sumamente conocido que el producto de espacios de Fréchet-Urysohn no es siempre de Fréchet-Urysohn. Arhangel'skii en [**1**] definió las clasificaciones α_i. Estas se analizan en espacios topológicos y sirven para medir la productividad de los espacios de Fréchet-Urysohn.

Definición 12. *Sea X espacio topológico y $x \in X$. Consideramos $\{A_n : n < \omega\}$ una sucesión de sucesiones tales que para cada $n < \omega$, $A_n \longrightarrow x$. Decimos que X es espacio α_i $(1 \leq i \leq 4)$, si existe B sucesión convergente a x tal que:*

(α_1) *para cada $n < \omega$, $|A_n - B| < \omega$.*
(α_2) *para cada $n < \omega$, $|A_n \cap B| = w$.*
(α_3) *para una cantidad infinita de $n < \omega$, $|A_n \cap B| = w$.*
(α_3) *para una cantidad infinita de $n < \omega$, $|A_n \cap B| \neq \emptyset$.*

Estas propiedades guardan un orden ya que para cada $1 \leq i \leq 3$, si un espacio satisface ser α_i, entonces este es espacio α_{i+1}. Debido a la definición, un espacio de Fréchet-Urysohn que sea α_i se vuelve menos productivo mientras i crece. Todo espacio primero numerable y la compactación a un punto de cualquier espacio discreto son espacios α_1. Además es un hecho que el producto numerable de espacios α_i es otra vez α_i, para $1 \leq i \leq 3$. Uno se pregunta cuando el producto de espacios α_4 es otra vez espacio α_4. De aquí surgen otras cuestiones, por ejemplo, si existen en ZFC espacios de Fréchet-Urysohn α_4, tales que su producto es otra vez Fréchet-Urysohn y este no sea α_3. T. Nogura respondido la pregunta aceptando la hipótesis del continuo, pero como veremos a continuación la respuesta en ZFC también es afirmativa y fue dada en [**5**] por P. Simon. Aquí abordaremos tal ejemplo.

Para nuestro objetivo consideraremos otra vez una familia $\mathcal{B}$ casi disjunta en ω. Se procederá con la construcción del espacio $X(\mathcal{B})$, pero también necesitaremos la siguiente definición.

DEFINICIÓN 13. *Sea $\mathcal{A}$ una familia casi disjunta en ω. Decimos que $\mathcal{A}$ es completamente separable si ésta es refinamiento de $\mathcal{I}(\mathcal{A})^+$. Es decir, para cada $M \in \mathcal{I}(\mathcal{A})^+$, existe $A \in \mathcal{A}$ tal que $A \subset M$.*

Nos preguntamos por la existencia de una familia casi disjunta completamente separable en ω. Hay una respuesta positiva en [**5**], incluso se construye en un sentido mas fuerte. En [**5**] se enuncia y se prueba el siguiente Teorema. En este trabajo omitimos su demostración.

TEOREMA 6. *Existe una familia casi disjunta $\mathcal{A}$ completamente separable en ω de tamaño $\mathfrak{c}$ tal que para $M \in \mathcal{I}(\mathcal{A})^*$, se tiene que $|\{A \in \mathcal{A} : |A \cap M| = \omega\}| = \mathfrak{c}$.*

A continuación daremos un bosquejo de la construcción del espacio con las características deseadas, probando algunos resultados preliminares. Los detalles se encuentran en [**5**].

LEMA 8. *Sea $\mathcal{A}$ familia casi disjunta completamente separable en ω. Si para $A \in \mathcal{A}$ elegimos de manera arbitraria $B(A) \in [A]^\omega$, entonces la familia $\mathcal{B} := \{B(A) : A \in \mathcal{A}\}$ es completamente separable. Además $\mathcal{I}(A)^* = \mathcal{I}(B)^*$*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\mathcal{A}$ familia casi disjunta completamente separable en ω. Construimos la familia casi disjunta $\mathcal{B} = \{B(A : A \in \mathcal{A})\}$ de manera arbitraria. Sea $N \in \mathcal{I}(\mathcal{B})^*$. Es claro que $\mathcal{I}(\mathcal{B})^* \subseteq \mathcal{I}(\mathcal{A})^*$. Por lo tanto existe $A \in \mathcal{A}$ tal que $A \subseteq N$, entonces $B(A) \subseteq N$ y $\mathcal{B}$ es completamente separable. Basta probar que $\mathcal{I}(\mathcal{A})^* \subset \mathcal{I}(\mathcal{B})^*$. Sea $M \in \mathcal{I}(\mathcal{A})^*$. Por el Teorema 6, tenemos que $|\{A \in \mathcal{A} : |A \cap M| = \omega\}| = \mathfrak{c}$. Para cada $n < \omega$ elegimos $A_n \in \mathcal{A}$ distintos entre si, tal que para cada $n < \omega$ suceda que $A_n \subset M$. Para cada $n < \omega$ tenemos que $B(A_n) \subset A_n \subset M$. Así $\{B(A_n) : n < \omega\} \subseteq \{B(A) \in \mathcal{B} : |B(A) \cap M| = \omega\}$. Por lo tanto, $\mathcal{I}(\mathcal{A})^* = \mathcal{I}(\mathcal{B})^*$. □

Ahora queremos que la elección de la familia $\mathcal{B}$ sea tal que $X(\mathcal{B})$ sea espacio de Fréchet-Urysohn, es decir, que $\mathcal{B}$ sea maximal casi disjunta en ninguna parte. Para posteriormente mostrar que existe el espacio con las características deseadas.

LEMA 9. *Existe una familia maximal casi disjunta en ninguna parte que es completamente separable en ω.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\mathcal{A}$ familia casi disjunta completamente separable en ω. Para cada $A \in \mathcal{A}$ elegimos $B(A) \in [A]^\omega$ tal que $|A - B(A)| = \omega$. Probaremos que $\mathcal{B} = \{B(A) : A \in \mathcal{A}\}$ es maximal en ninguna parte. Por el Lema 8, $\mathcal{B}$ es completamente separable y $\mathcal{I}(\mathcal{A})^* = \mathcal{I}(\mathcal{B})^*$. Si $M \in \mathcal{I}(\mathcal{B})^+ - \mathcal{I}(\mathcal{B})^*$, por la Proposición 5, existe $M_0 \in \mathcal{I}(\mathcal{B})^\perp \cap [\omega]\omega$ contenido en M. Si $N \in \mathcal{I}(\mathcal{B})^*$, entonces $N \in \mathcal{I}(\mathcal{A})^*$. Como $\mathcal{A}$ es completamente separable, entonces existe $A \in \mathcal{A}$ tal que $A \subset N$. Sea

$N' = A - B(A)$ por la elección de $B(A)$ tenemos que $N_1 \in \mathcal{I}(\mathcal{B}^\perp) \cap [\omega]^\omega$ y $\mathbb{N}' \subset A \subset N$. Por lo tanto $\mathcal{B}$ es maximal en ninguna parte. □

Teorema 7. *Sean $\mathcal{A}$ familia casi disjunta completamente separable en ω de tamaño $\mathfrak{c}$ y $\mathcal{B}$ la familia de la prueba del Lema 9. Entonces $X(\mathcal{B})$ es espacio de Fréchet-Urysohn α_4 y no α_3.*

Demostración. De acuerdo con el Lema 5 el espacio $X(\mathcal{B})$ es de Fréchet-Urysohn. Para probar que el espacio es α_4 consideramos $\{T_n : n < \omega\}$, una colección numerable de sucesiones que convergen a ∞ en $X(\mathcal{B})$. Llamemos $T = \cup_{n<\omega} T_n$, es claro que $T \in \mathcal{I}(\mathcal{B})^+$. Si $T \notin \mathcal{I}(\mathcal{B})^*$, entonces existe $M_0 \in \mathcal{I}(\mathcal{B})$ tal que $M_1 = T - M_0$ es un infinito elemento de $\mathcal{I}(\mathcal{B})^\perp$ y para cada $n < \omega$ se tiene que $|T_n \cap M_1| = \omega$. De otra manera tenemos que $T \in \mathcal{I}(\mathcal{B})^*$ y por el Lema 8, tenemos que $T \in \mathcal{I}(\mathcal{A})^*$. Por el Teorema 6, existen $\mathfrak{c}$ elementos de $\mathcal{A}$ contenidos en T. Desde que T_n converge a ∞, entonces $T_n \notin \mathcal{I}(\mathcal{B})^*$ y esto implica que $T_n \notin \mathcal{I}(\mathcal{A})$. Entonces cada T_n solo intersecta a una cantidad finita de elementos de $\mathcal{A}$ en una cantidad infinita de puntos, por lo cual existen a lo más ω elementos de $\mathcal{A}$, que están contenidos en T e intersectan a algún T_n en una cantidad infinita de puntos. Por lo tanto debe de existir $A \in \mathcal{A}$, el cual está contenido en T y es tal que para cada $n < \omega$ se tiene $|T_n \cap A| < \omega$. Así $|T_n \cap (A - B(A))| < \omega$. Pero al mismo tiempo $|A - B(A)| = \omega$ y $A \subseteq T$. Por lo tanto el número de índices $n < \omega$ tales que $A - B(A) \cap T_n \neq \emptyset$ debe de ser infinito. Además $A - B(A) \in \mathcal{I}(\mathcal{B})^\perp$, es decir, converge a ∞ luego $X(\mathcal{B})$ es espacio α_4. Si elegimos arbitrariamente $\{A_n : n < \omega\} \subset \mathcal{A}$, entonces para cada $n < \omega$ tenemos que $T_n = A_n - B(A_n)$ converge a ∞. Ahora elegimos $N \subseteq \cup_{n<\omega} T_n$ tal que para $\{n < \omega : |T_n \cap N| = \omega\}$ es infinito. Entonces $N \in \mathcal{I}(\mathcal{A})^*$ y por hipótesis existe $A_0 \in \mathcal{A}$ contenido en N. Sea $U = \{\infty\} \cup (\omega - B(A_0))$. Entonces U es una vecindad de ∞ en $X(\mathcal{B})$ que testifica que N no converge a ∞. Es claro notando que $N - U$ es infinito. Por lo tanto $X(\mathcal{B})$ no es un espacio α_3. □

Hasta ahora se logro un espacio que es de Fréchet-Urysohn y α_4 no α_3. En [**5**] P. Simon logro construir un espacio con estas características que además es Fréchet-Urysohn en cada potencia finita. En este trabajo analizamos algunas cuestiones preliminares, las cuales se usan para la construcción de dicho espacio.

Definición 14. *Sean X espacio topológico, $x \in X$ y $k < \omega$. Decimos que X es FU_k(Fréchet-Urysohn para conjuntos de tamaño k), si para cada $\mathcal{K} \subset [X]^{i<k}$ que sea π-base local de x, existe $\mathcal{K}' \subset \mathcal{K}$ numerable tal que $\mathcal{K}' \longrightarrow x$, es decir, para cada vecindad U de x tenemos que $\mathcal{K}' \subseteq^* \mathcal{P}(U)$. Decimos que X es espacio FU_{bdd}(Fréchet-Urysohn para conjuntos acotados), si la propiedad anterior se mantiene para cada $k < \omega$.*

La definición anterior nos permite caracterizar la propiedad de Fréchet-Urysohn en la diagonal de las potencias finitas del espacio, de acuerdo con el siguiente Teorema.

TEOREMA 8. *Un espacio topológico X es FU_k, si y sólo si X^k es Fréchet-Urysohn en los puntos de la diagonal $\Delta_{X^k} = \{x \in X^k : \pi_i(x) = \pi_j(x), i, j < k\}$.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que X es FU_k. Sea $(x, \cdots, x) \in \Delta_{X^k}$ y $A \subseteq X^k$ tal que $x \in \overline{A}$. Para cada $U \in \mathcal{N}(x)$ denotamos $U^k = \Pi_{i=1}^k U$, este conjunto es tal que tiene intersección no vacía con A. Para cada U^k elegimos $y_U \in U^k \cap A$. Si consideramos $K_{y_U} = \{\pi_1(y_U), \ldots, \pi_k(y_U)\}$ es tal que $K \in [X]^{<k}$. Entonces la familia

$$\mathcal{K} = \{K_{y_U} : U \in \mathcal{N}(x)\}$$

es una π-base local de x. Esto después de notar que el conjunto $K_{y_U} \subseteq U$, si y sólo si $y_U \in U^k$. Por hipótesis existe una subfamilia numerable $\mathcal{K}' \subset \mathcal{K}$ tal que $\mathcal{K}' \longrightarrow x$. Para cada $U \in \mathcal{N}(x)$ sucede que $\mathcal{K}' \subseteq^* \mathcal{P}(U)$, por lo tanto $B = \{y_U : K_{y_U} \in \mathcal{K}'\}$ está casi contenido en U^k, entonces la sucesión B converge a x. Así X^k es Fréchet-Urysohn en Δ_{X^k}. Ahora suponemos que X^k es Fréchet-Urysohn en Δ_{X^k}. Sea $x \in X$ y $\mathcal{K} \subseteq [X]^{<k}$ una π-base local de de x. Para todo $K \in \mathcal{K}$ denotamos $x_K = (x_1, x_2, \ldots, x_k)$ con $x_i \in K$. Definimos $J = \{x_K : K \in \mathcal{K}\}$. Este conjunto es tal que para cada $U \in \mathcal{N}(x)$, tenemos que $U^k \cap J \neq \emptyset$, entonces existe $J' \subset J$ numerable tal que $J' \longrightarrow x$. Así que

$$\mathcal{K}' = \{K_i : x_{K_i} \in J'\}$$

es tal que $\mathcal{K}' \subset \mathcal{K}$ y $\mathcal{K}' \longrightarrow x$. Por lo tanto X es FU_k. □

Nosotros manejamos espacios numerables con un sólo punto no aislado. Eso nos permite usar la caracterización anterior para decidir cuando nuestros espacios resultarán de Fréchet-Urysohn en cada potencia y no solo en los puntos de la diagonal.

PROPOSICIÓN 9. *Sea $\mathcal{F}$ filtro en ω tal que $\mathcal{F}$ es de Fréchet-Urysohn. Si $\xi(\mathcal{F})^k$ es Fréchet-Urysohn en la diagonal, entonces $\xi(\mathcal{F})$ es Fréchet-Urysohn.*

DEMOSTRACIÓN. Se procederá por inducción sobre k. Llamemos $X = \xi(\mathcal{F})$. Si $k = 1$ entonces $\Delta_{X^k} = X$ y es Fréchet-Urysohn. Para $k = 2$, sea $x \in X^2$. Si $x = (n, m)$ con $n, m < \omega$, entonces x es aislado. Si $x = (n, \mathcal{F})$ y $A \subset X^2$ tal que $x \in \overline{A} - A$. Tenemos que $|A \cap \{n\} \times X| = \omega$, de lo contrario para cada $F \in \mathcal{F}$ la vecindad

$$U = \{n\} \times F - (A \cap \{n\} \times X)$$

no intersecta a A. Además $\{n\} \times X \cong X$ y $\{\{n\} \times F : F \in \mathcal{F}\} \cong \mathcal{F}$ y $A \cap \{n\} \times X \in (\{n\} \times \mathcal{F})^+$. Por lo tanto existe B subconjunto infinito de A tal que $B \longrightarrow x$. Para $x = (\mathcal{F}, n)$ el procedimiento es análogo. Si $x = (\mathcal{F}, \mathcal{F})$, entonces $x \in \Delta_{X^2}$ y X^2 es Fréchet-Urysohn. Usando la hipótesis de inducción tenemos que la afirmación es valida para cada número natural menor que k. Sea $x \in X^k$. Si $x = (x_1, \ldots, x_k)$ con $\{x_i : 1 \leq i \leq k\} \subset \omega$ no hay nada que hacer. Si para cada $1 \leq i \leq k$ se tiene que $x_i = \mathcal{F}$, entonces $x \in \Delta_{X^k}$ y también esta cubierto ese caso. Ahora consideremos que para x existe $1 \leq j \leq k$ tal que $x_j = n < \omega$. Sea $A \subset X^k$ tal que $x \in \overline{A} - A$. Si llamamos

$$Y = X \times \ldots \times \{n\} \times \ldots \times X$$

y $A' = A \cap Y$, entonces $|A'| = \omega$ de lo contrario para cada vecindad U de x, se tendría $(U - A') \cap A = \emptyset$. Además tenemos que $x \in \overline{A'}^Y - A'$ y como $Y \cong X^{k-1}$, si aplicamos la hipótesis de inducción, entonces existe B subconjunto infinito de A' tal que $B \longrightarrow x$, el cual también converge a x en X^k. Gracias a que cada vecindad V de x en Y es tal que $B \subseteq^* V$ y $V = U \cap Y$ con U vecindad de x en X^k, tenemos que $B \subseteq^* U$ y $B \longrightarrow x$ en X^k. Como conclusión X^k es de Fréchet-Urysohn. $\square$

En [**5**] esta tanto la construcción de una familia, la cual resulta ser más general que las familias completamente separables. Además el espacio es de Fréchet-Urysohn en cada potencia finita gracias a las caracterizaciones anteriores. Con esto damos por concluido este trabajo que en realidad es un compendio de ejemplos de Filtros con la propiedad de Fréchet-Urysohn. Estos se han estado usando para responder cuestiones de la índole de la productividad de los espacios de Fréchet-Urysohn muchas de las cuales están resumidas en la siguiente bibliografía: [**3**].

Bibliografía

[1] A.V.Arhangel'skii, The frequency spectrum of a topological space and the product operation. Tr. Mosk. Mat. Obs. 40 (1979), 171-206.

[2] G. Gruenhage, P.J. Szeptycki, Fréchet Urysohn for finite sets. Top. Appl. 151 (2005), 238-259.

[3] P.J. Nyikos, Workshop lecture on products of Fréchet spaces. Top. Appl. 157 (2010), 1485-1490.

[4] P. Simon, A countable Fréchet-Urysohn space of uncountable character. Top. Appl. 155 (10) (2008), 1129-1139.

[5] P. Simon, A hedghog in a product. Acta. Univ. carolin. Math. Phys. 39 (1998),147-153.

[6] S. García, C. Uzcategui, Subsequential Filters. Topology Appl. 156 (2009), 2949-2959.

[7] S. Todorčević and C.Uzcategui, Analytic k-spaces, Top. Appl. 146-147 (2005), 511-526. *documento5*.