



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA  
DE MÉXICO**

---

---

**FACULTAD DE CIENCIAS**

**ESTUDIO GEOMÉTRICO DE EXPLOSIÓN DE  
SINGULARIDADES Y LA ESTRUCTURA DE LOS  
NÚMEROS REALES**

**T E S I S**

**QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:**

**MATEMÁTICA**

**P R E S E N T A:**

**CECILIA NEVE JIMÉNEZ**



**DIRECTORA DE TESIS:  
DRA. LAURA ORTIZ BOBADILLA  
2015**



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## Hoja de datos del jurado

### 1. Datos del alumno

Neve

Jiménez

Cecilia

Universidad Nacional Autónoma

de México

Facultad de Ciencias

Matemáticas

303255497

### 2. Datos del tutor

Dra.

Laura

Ortiz

Bobadilla

### 3. Datos del sinodal 1

Act.

Javier

Fernández

García

### 4. Datos del sinodal 2

Dr.

Javier

Páez

Cárdenas

### 5. Datos del sinodal 3

Dr.

Héctor

Méndez

Lango

### 6. Datos del sinodal 4

M. en C.

Alejandro Darío

Rojas

Sánchez

### 7. Datos del trabajo escrito

Estudio Geométrico de Explosión

de Singularidades y la Estructura

de los Números Reales

238 p

2015

# Índice general

Agradecimientos	v
Introducción	vii
<b>1. Explosión de singularidades</b>	<b>1</b>
1.1. Explosión de singularidades	4
1.2. Algunos ejemplos	8
1.3. Planteamiento del problema	14
<b>2. El algoritmo de Euclides</b>	<b>15</b>
2.1. El máximo común divisor	16
2.2. El algoritmo de Euclides	16
2.3. Versión extendida del algoritmo de Euclides	21
2.4. Interpretación geométrica del algoritmo de Euclides	23
2.5. El algoritmo de Euclides en $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$	30
<b>3. Fracciones continuas</b>	<b>37</b>
3.1. Primeras definiciones	37
3.2. Convergentes y residuos	39
3.3. Representación de los números reales por fracciones continuas	42
3.4. Geometría de las fracciones continuas	51
3.5. Dos teoremas interesantes	60
3.6. Consideraciones respecto a la unicidad	61
<b>4. Árbol de Stern-Brocot (<math>\mathcal{SB}</math>)</b>	<b>65</b>
4.1. Construcción y propiedades del árbol de Stern-Brocot	66
4.2. Forma matricial del árbol de Stern-Brocot	67
4.2.1. Simetrías en $\mathcal{SBM}$	70
4.3. Forma vectorial del árbol de Stern-Brocot	74
4.4. Forma fraccionaria de árbol de Stern-Brocot	78
4.4.1. El orden en los niveles de $\mathcal{SBF}$	80
4.5. El árbol de Stern-Brocot en forma de palabras	86
4.6. Caminos en las distintas formas de $\mathcal{SB}$	88
4.6.1. Caminos simétricos	97
4.6.2. Caminos abreviados	98
4.7. El árbol de Stern-Brocot como transformaciones en el plano	102
4.8. Árbol dual de Stern-Brocot ( $\mathcal{SBD}$ )	106

<b>5. Algoritmo de Euclides, fracciones continuas y árbol de Stern-Brocot</b>	<b>117</b>
5.1. Convergentes en $\mathcal{SB}$	117
5.2. Residuos y algoritmo de Euclides en $\mathcal{SBD}$	130
5.3. Transformaciones en el plano, algoritmo de Euclides y fracciones continuas	136
5.4. $\mathcal{SB}$ para racionales negativos	139
<b>6. Explosión de singularidades y árbol de Stern-Brocot</b>	<b>143</b>
6.1. Ecuaciones como vectores en el plano	143
6.2. Explosión como transformaciones en el plano	145
6.3. Explosión y árbol de Stern-Brocot	149
6.4. Explosión con irracionales cuadráticos	154
<b>7. El caso irracional: árbol dual de Stern-Brocot modificado</b>	<b>155</b>
7.1. $\mathcal{SBD}_{(a,b)}$	155
7.2. Fracciones continuas y transformaciones modulares	166
7.3. Partición de los números reales	179
<b>8. Aproximaciones racionales</b>	<b>181</b>
8.1. Las primeras cotas: Dirichlet, Vahlen y Hurwitz	182
8.2. Clases de irracionales y el espectro de Lagrange	189
8.3. Un paso más allá: Liouville y Roth	192
8.4. Explosión de singularidades y aproximaciones racionales	196
<b>9. Explosión de singularidades en <math>\mathbb{C}</math></b>	<b>199</b>
<b>Apéndice 1</b>	<b>203</b>
<b>Apéndice 2</b>	<b>205</b>
<b>Apéndice 3</b>	<b>209</b>
<b>Apéndice 4</b>	<b>211</b>
<b>Árboles utilizados</b>	<b>222</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>226</b>

# Agradecimientos

Quiero agradecer a mi familia por todo el apoyo brindado a lo largo de mi vida: a mi mamá, inagotable fuente de inspiración, por inculcarme el amor por la ciencia, el amor por las artes y la disciplina que cualquiera de ellas requiere, mi más sincero agradecimiento por estar siempre *al pie del cañón*; a mi papá por su apoyo incondicional y por todas las invaluable experiencias en que me ha acompañado; a mi hermano por su escucha paciente, su comprensión benévola y por las innumerables carcajadas.

Quiero agradecer también a mis profesores Javier (Páez) y Javier (Fernández), de quienes aprendí mucho, tanto en sus maravillosas y didácticas clases como en pláticas posteriores. Les agradezco muy sinceramente la excelente disposición para resolver la más mínima duda y compartir su conocimiento.

Agradezco también a mis amigos Miguel y Alejandro. Aprendí muchísimo discutiendo con ellos y compartiendo puntos de vista. Fueron un gran apoyo a lo largo de todo este tiempo.

Hay muchas personas a las que quiero agradecer su apoyo, compañía y cariño. Me carga de entusiasmo tenerlos cerca y contar con su amistad: mi abuelita Geo, mi tía Elena, mi maestro Eduardo, Tania, Angie, Esteban, Montse, May, Sebas, Agus, Rolis, Mariana, Jessi, *liebste* Eva, y algunos más. Agradezco sobre todo a Alfonso, por inspirarme siempre a ser mejor persona. Mi vida sería otra historia de no haberlo conocido.

Y quiero agradecer muy especialmente a Laura, mi maestra y asesora, por sus inagotables enseñanzas tanto de matemáticas como de la vida. Le agradezco profundamente su paciencia, entusiasmo, generosidad y apoyo constantes. Ha sido una verdadera delicia convivir con ella y aprender de ella.

Quiero agradecer a todos mis sinodales por todos sus comentarios y por tomarse el trabajo de revisar cuidadosamente un texto tan extenso.

Esta tesis fue elaborada con el apoyo de CONACYT, como parte del proyecto CB 2013-219722; agradezco este apoyo brindado. Agradezco también al Instituto de Matemáticas por la beca de lugar y acceso a la biblioteca, que fueron determinantes para la realización de este trabajo. Y agradezco a la Facultad de Ciencias, por brindar un ambiente tan especial y tan propicio para el desarrollo de la ciencia. Todo mi agradecimiento y cariño a la UNAM, la Facultad de Ciencias y el Instituto de Matemáticas. He disfrutado muchísimo pasar estos años aquí.



# Introducción

Este trabajo es motivado por un problema de ecuaciones diferenciales que resolvemos a través del estudio de la estructura de los números reales. Dicho problema involucra el estudio del comportamiento local de soluciones de una ecuación diferencial cerca de un punto singular mediante un método conocido como explosión de singularidades. El problema consiste en encontrar las condiciones que debe satisfacer una ecuación diferencial de cierto tipo para que después de un número finito de explosiones estemos en el caso *dicrítico*. Para resolver esto estudiaremos en general lo que sucede con dicha ecuación al hacer explosiones sucesivas, llegando a que su comportamiento depende del tipo de número real que sea el cociente de los valores propios de la matriz que define al campo asociado a la ecuación. Veremos que si este cociente es real, podemos describir qué nuevas ecuaciones obtendremos al hacer explosiones según el tipo de número real que sea. Para analizar este comportamiento estudiaremos la estructura de los números reales. Con ello, por un lado daremos respuesta al problema que motiva este trabajo y por otro abriremos la puerta a un estudio más general de la relación que hay entre la distribución de los racionales e irracionales en la recta real y el comportamiento de ecuaciones diferenciales de cierto tipo bajo explosiones. Paralelamente, haremos un estudio geométrico de la estructura de los números reales.

Para estudiar la estructura de los números reales usaremos distintos materiales que nos permitirán analizarlos, tanto a ellos como su construcción, desde varias perspectivas: el algoritmo de Euclides, las fracciones continuas y el árbol de Stern-Brocot. Estos materiales nos ayudarán a comprender y resolver el problema de ecuaciones diferenciales que abordamos. Ya habiendo dado respuesta al problema original, incorporaremos a nuestro estudio de los números reales las transformaciones modulares y las aproximaciones racionales, con lo que podremos decir un poco más del comportamiento de ciertas ecuaciones diferenciales bajo sucesivas explosiones. El enfoque con que abordaremos todos estos materiales es primordialmente geométrico.

En el primer capítulo veremos en qué consiste la explosión de singularidades, daremos algunos ejemplos de los casos que nos interesan y plantearemos el problema a resolver en este trabajo.

En el capítulo 2 hablaremos del algoritmo de Euclides. Introduciremos el máximo común divisor y el algoritmo de la división para hablar después de las distintas versiones del algoritmo de Euclides. El concepto de *conmensurabilidad* detrás del algoritmo es crucial en el análisis que haremos, y estará presente en los otros materiales.

El lenguaje que usaremos a lo largo de todo el trabajo son las fracciones continuas. En el capítulo 3 nos dedicaremos a ellas. Daremos primero algunas definiciones básicas y después probaremos que podemos usarlas como una representación de los números reales. Veremos la interpretación geométrica de esta representación y algunas ventajas que tiene. Para hablar de



algunas de estas ventajas introduciremos el concepto de *mejores aproximaciones racionales*, que colinda ya con el terreno de las *aproximaciones racionales* de las que hablaremos en el capítulo 8.

En el capítulo 4 estudiaremos el árbol de Stern-Brocot. Estudiaremos un conjunto de árboles que nos servirán como bisagra principal entre las fracciones continuas, el algoritmo de Euclides, las transformaciones modulares y nuestro problema de explosión de singularidades. Si bien en el Algoritmo de Euclides está ya el concepto fundamental que usaremos para el estudio de la estructura de los números reales, y en las fracciones continuas encontramos un lenguaje para estudiarlo, los árboles que presentaremos en este capítulo nos dan un método para llevar a cabo este estudio.

En el capítulo 5 nos dedicaremos a establecer relaciones entre el algoritmo de Euclides, las fracciones continuas y el árbol de Stern-Brocot. Una vez vistas las relaciones entre estos materiales, podremos dar una interpretación geométrica de una construcción de los números reales a partir de sucesiones de vectores en el árbol de Stern-Brocot. Con esta interpretación podremos ver a cada número racional como la pendiente de un vector en el árbol de Stern-Brocot, y a cada número irracional como el límite de una sucesión de racionales, no de forma aislada, sino en el contexto de la construcción de todos los números reales. Con lo visto hasta este momento estaremos listos para dar respuesta al problema de ecuaciones diferenciales planteado inicialmente.

En el capítulo 6 haremos una asociación entre ecuaciones diferenciales y vectores en el plano que nos permitirá usar la herramienta desarrollada hasta ahora para dar respuesta al problema original. Expresaremos la acción de la explosión de una ecuación como una transformación lineal aplicada a su vector asociado, lo que nos dará un lenguaje sencillo para abordar el problema de explosiones sucesivas. Afirmaremos que llegamos al caso dicrítico si y sólo si el cociente de valores propios en cuestión es un racional positivo. Usaremos su fracción continua para decir además cuántas explosiones requerimos.

En el capítulo 7 llevaremos los resultados del capítulo 6 un poco más lejos, abordando el caso en que el cociente que estudiamos es irracional. Para explorar este caso, daremos una versión modificada del árbol de Stern-Brocot. A lo largo de este capítulo trabajaremos con tres materiales principalmente: transformaciones modulares, fracciones continuas y productos de potencias de las matrices  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  y  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ . Veremos cómo pasar de cada uno de estos lenguajes a los otros dos. Con las transformaciones modulares podremos dar una partición de los números reales estrechamente relacionada con las fracciones continuas; será significativa en el contexto de explosión de singularidades.

En el capítulo 8 hablaremos de las aproximaciones racionales, que es el lugar natural a caer si se ahonda un poco en la partición de  $\mathbb{R}$  definida en el capítulo 7. Veremos a las aproximaciones racionales usando la interpretación geométrica que habremos dado de las fracciones continuas y del árbol de Stern-Brocot. Hablaremos del espectro de Lagrange y de los teoremas de Hurwitz, Liouville y Roth, y diremos algunas interpretaciones de estos resultados en el contexto de explosión de singularidades.

En el capítulo 9 diremos brevemente cómo podemos extender nuestros resultados al caso complejo. Veremos que en este caso también está presente la estructura de los números reales.

No es el propósito de este texto hacer un estudio riguroso ni de la divisibilidad en los enteros, ni de las fracciones continuas, ni de las transformaciones modulares, ni de las aproximaciones

racionales. Más bien buscamos entender cómo se pueden integrar estos materiales para estudiar la estructura de los números reales, y qué nos dicen en el contexto de la explosión de singularidades.

Los requerimientos para que este texto sea accesible son cubiertos básicamente por un curso de Álgebra Superior II, un curso elemental de Álgebra Lineal, los primeros tres cursos de Cálculo y un primer curso de Ecuaciones Diferenciales.



# Capítulo 1

## Explosión de singularidades

La explosión de singularidades es un método usado para estudiar el comportamiento cualitativo de las soluciones de una ecuación diferencial cerca de un punto singular. Antes de entrar en materia, pongámonos de acuerdo en el lenguaje y notación que manejaremos a lo largo de este trabajo.

Dado un campo vectorial analítico  $F$  definido en  $U$ , abierto de  $\mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} F : U \subset \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ \mathbf{x} &\longrightarrow F(\mathbf{x}) \end{aligned} \tag{1.1}$$

definimos la ecuación diferencial asociada al campo (1.1) como

$$\dot{\mathbf{x}} = F(\mathbf{x}), \quad \text{con} \quad \dot{\mathbf{x}} = \frac{d\mathbf{x}}{dt}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2. \tag{1.2}$$

Una solución de (1.2) es una curva parametrizada  $\varphi : A \subset \mathbb{R} \longrightarrow U \subset \mathbb{R}^2$  que satisface que

$$\frac{d\varphi}{dt}(t) = F(\varphi(t)).$$

Esto significa que el vector tangente a las soluciones de la ecuación (1.2) en cada punto coincide con el campo (1.1) evaluado en ese punto.

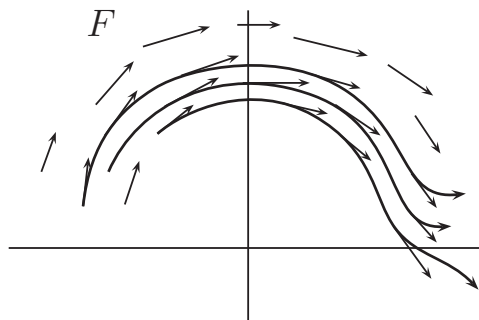


Figura 1.1: Soluciones de la ecuación diferencial asociada al campo  $F$ .

Denotamos por  $\varphi(t_0, \mathbf{x}_0)$  a la solución  $\varphi$  que satisface la condición inicial  $\varphi(t_0) = \mathbf{x}_0$ . Al retrato de las soluciones  $\varphi(t) = (x(t), y(t))$  en el plano  $(x, y)$  le llamamos el retrato de las fases de la ecuación (1.2).

Un punto singular de la ecuación diferencial (1.2) es aquel en que  $F(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ , es decir, donde se anula el campo asociado a la ecuación. Si  $\mathbf{x}_0$  es un punto singular de (1.2), entonces

$$\varphi(t_0, \mathbf{x}_0) = \varphi(t, \mathbf{x}_0) \quad \text{para todo } t \in A.$$

De manera análoga, definimos en el caso complejo la ecuación asociada a un campo vectorial analítico  $F$  definido en un abierto  $U$  de  $\mathbb{C}^2$

$$\begin{aligned} F : U \subset \mathbb{C}^2 &\longrightarrow \mathbb{C}^2 \\ \mathbf{x} &\longrightarrow F(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (1.3)$$

como la ecuación

$$\dot{\mathbf{x}} = F(\mathbf{x}), \quad \text{con} \quad \dot{\mathbf{x}} = \frac{d\mathbf{x}}{dt}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{C}^2, t \in \mathbb{C}, \quad (1.4)$$

considerando que las soluciones de la ecuación (1.4) (las curvas cuyo vector velocidad está dado por el campo (1.3)) son ahora curvas complejas. Trabajaremos en general en el caso real, y hasta que quede entendido éste diremos algo del caso complejo.

Si el campo  $F$  asociado a una ecuación diferencial es lineal, conocemos bastante bien el comportamiento de las soluciones, y podemos darlas explícitamente. No nos detendremos a mencionar todos los casos de ecuaciones lineales, pero ya que trabajaremos mucho con ecuaciones de tipo

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \sim \quad \begin{aligned} \dot{x} &= px \\ \dot{y} &= qy \end{aligned} \quad (1.5)$$

con  $p, q \in \mathbb{R}$  en el caso real, y  $p, q \in \mathbb{C}$  en el caso complejo, nos conviene recordar rápidamente cómo se comportan sus soluciones. Las soluciones de la ecuación (1.5) son de la forma

$$\varphi(t) = (c_1 e^{pt}, c_2 e^{qt}),$$

con  $c_1, c_2$  constantes. Recordemos cómo es el retrato de las fases de la ecuación (1.5) en el caso real, según los valores que tomen  $p$  y  $q$ .

- a) Si  $q, p \neq 0$ ,  $q/p > 0$  y  $|q| < |p|$  entonces el único punto singular es el origen, y es una singularidad de tipo nodo raíz<sup>1</sup> (repulsor si  $p, q > 0$  y atractor si  $p, q < 0$ ). Ver figura 1.2 a).
- b) Si  $q, p \neq 0$ ,  $q/p > 0$  y  $|p| < |q|$  entonces el único punto singular es el origen, y es una singularidad de tipo nodo parabólico (repulsor si  $p, q > 0$  y atractor si  $p, q < 0$ ). Ver figura 1.2 b).
- c) Si  $q, p \neq 0$  y  $q/p < 0$ , entonces el único punto singular es el origen, y es una singularidad de tipo silla. Ver figura 1.2 c).
- d) Si  $p = q$ , con  $p, q \neq 0$  el origen es el único punto singular, y es una singularidad de tipo nodo radial (repulsor si  $p, q > 0$  y atractor si  $p, q < 0$ ). Ver figura 1.2 d).

---

<sup>1</sup>En el caso de la singularidad de tipo nodo, para distinguir el tipo de tangencia con que las soluciones llegan al origen, haremos la distinción llamando *nodo tipo raíz* a aquellos en que las soluciones llegan con tangencia mayor que 1 y llamando *nodo tipo parabólico* a aquellos en que llegan con tangencia menor que 1.

- e) Si  $p = 0$  y  $q \neq 0$  entonces tenemos todo el eje  $x$  como puntos singulares y el resto de las soluciones recorren rectas transversales al eje  $x$ . Ver figura 1.2 e).
- f) Si  $p \neq 0$  y  $q = 0$  entonces tenemos todo el eje  $y$  como puntos singulares y el resto de las soluciones recorren rectas transversales al eje  $y$ . Ver figura 1.2 f).

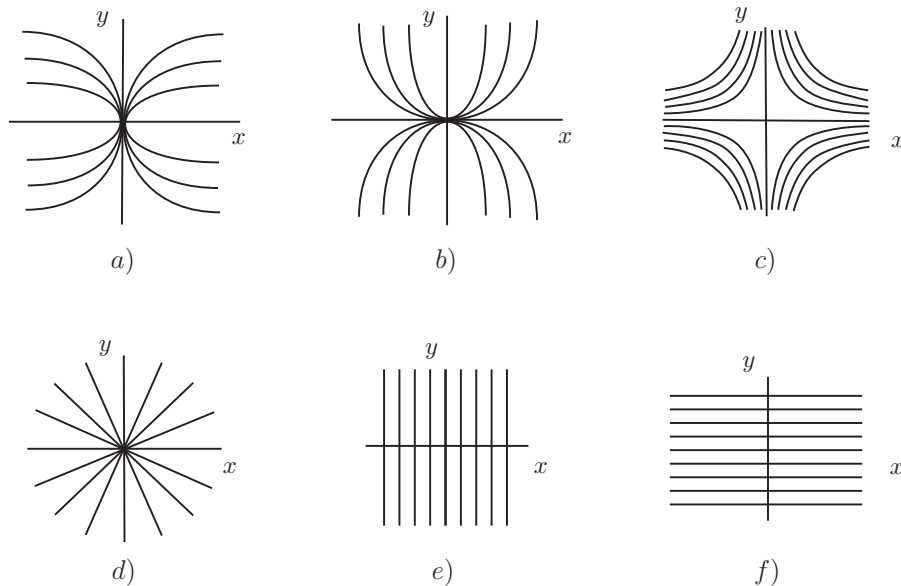


Figura 1.2: Posibles retratos de las fases de la ecuación (1.5) para distintos valores de  $p$  y  $q$ .

Cuando el campo vectorial  $F$  es más complicado, puede resultar muy difícil (si no imposible) encontrar las soluciones explícitas a la ecuación  $\dot{\mathbf{x}} = F(\mathbf{x})$ . Entonces recurrimos a un estudio cualitativo de ellas. Para ello, lo primero que hay que subrayar es que fuera de los puntos singulares siempre es posible, localmente, rectificar el campo de vectores; es decir, en cada punto no singular, es posible definir una vecindad de dicho punto y un difeomorfismo de un abierto del plano que nos permite (en las coordenadas de la imagen) ver al campo vectorial en su forma más sencilla posible: como vectores paralelos a uno de los ejes. Por consiguiente, por lo menos desde el punto de vista local, el comportamiento “no trivial” se concentra alrededor de los puntos singulares. Es por esta razón que para estudiar el comportamiento cualitativo de las soluciones de manera local, nos fijamos en los puntos singulares, y buscamos entender cómo se comportan las soluciones alrededor de ellos.

Hay varias maneras de estudiar cómo se comportan las soluciones cerca de un punto singular. Ya que conocemos el comportamiento de las soluciones de ecuaciones lineales, lo primero que hacemos es ver cuándo la ecuación es linealizable en una vecindad del punto singular; es decir, si podemos llevar el campo vectorial  $F$  a un campo lineal por medio de un homeomorfismo  $H$ . Dependiendo de las propiedades de las soluciones de la ecuación diferencial  $\dot{x} = F(x)$  que nos interese analizar consideramos el tipo de transformación  $H$ : biholomorfismo, difeomorfismo u homeomorfismo. La existencia del homeomorfismo  $H$  nos garantiza que hasta cierto punto las soluciones de  $\dot{x} = F(x)$  se comportan de manera similar a las soluciones de la ecuación lineal en una vecindad del punto singular (si  $H$  es biholomorfismo, obtenemos la equivalencia más fuerte: analítica, si es difeomorfismo se tiene una equivalencia menos estricta, y si es homeomorfismo, el

resultado es la equivalencia más débil: topológica). Algunos de los resultados más conocidos de linealización son los teoremas de Siegel y Poincaré ([2] §22, §23), en los que se dan condiciones únicamente sobre la parte lineal de una ecuación para que ésta sea analíticamente equivalente a su parte lineal en el punto singular. Estas condiciones recaen sobre el tipo de relación que guardan los valores propios de la matriz que define la parte lineal del campo vectorial en el punto singular.

Para estudiar el comportamiento de las soluciones de manera global, se estudian otras soluciones, como por ejemplo órbitas periódicas, u órbitas homoclínicas y heteroclínicas, que junto con los puntos singulares ayudan a determinar el comportamiento global de las soluciones. Cuando no podemos linealizar la ecuación  $\dot{x} = F(x)$ , ya sea porque no se dan las condiciones para aplicar los teoremas de linealización, o porque el campo no tiene parte lineal, podemos recurrir a un método conocido como explosión de singularidades. Dicho de manera informal, en el caso real consiste en transformar el punto singular en una circunferencia y transformar difeomorfamente una vecindad agujerada del punto singular en una vecindad de la circunferencia. Cada punto de la circunferencia representa a una pendiente distinta. Si una curva corta a la circunferencia en un punto  $p$ , significa que en la vecindad original hay una curva que se aproxima asintóticamente al punto singular con una pendiente igual a la representada por el punto  $p$ .

En el caso complejo el punto singular es sustituido por una esfera, y se da un biholomorfismo en una vecindad agujerada del punto singular que la lleva a una vecindad de la esfera. Este procedimiento nos permite estudiar con mucho detalle el comportamiento de las soluciones en vecindades de puntos singulares.

## 1.1. Explosión de singularidades

Se pueden hacer muchos tipos de explosiones, que en esencia hacen lo mismo: llevar el punto singular a una circunferencia o esfera para poder estudiarlo mejor. Para ver una construcción formal de la explosión véase [12]. Para un panorama de distintos tipos de explosiones con muchos ejemplos, ilustraciones, y un poco de historia, véase [3]. La explosión se puede hacer tanto en el caso real como en el caso complejo. Estudiaremos primero el caso real, que es en donde haremos la mayor parte de las construcciones. Supondremos que la singularidad a explotar es el origen: de no ser así, llevamos la singularidad al origen mediante una traslación adecuada.

Definimos la función  $\pi^{-1}$  de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \pi^{-1} : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} &\longrightarrow \mathbb{R}P^1 \\ (x, y) &\longrightarrow m(x, y) = (x : y) \end{aligned}$$

donde  $\mathbb{R}P^1$  es el espacio proyectivo real de dimensión 1.<sup>2</sup> Definimos a  $M$  como la gráfica de  $\pi^{-1}$ , es decir,  $\{(x, y, m(x, y))\}$ . Consideramos la cerradura de  $M$ , con lo que incluimos a  $\pi^{-1}(0) := E$ .  $\overline{M}$  es una variedad,<sup>3</sup> que como veremos, podemos visualizar como la banda de Möbius. Llamamos a  $E \approx S^1$  el *divisor excepcional* de  $\overline{M}$ .

<sup>2</sup>Se puede consultar la definición del espacio proyectivo real de dimensión  $n$  en [1] §33. A  $\mathbb{R}P^1$  también se le conoce como la recta proyectiva real; es homeomorfa a  $S^1$  (la circunferencia unitaria).

<sup>3</sup>En [1] §33 pueden consultarse las definiciones de *cartas* y *variedad*.

Damos las siguientes cartas<sup>3</sup> para la variedad  $\overline{M}$ :

Si  $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  y  $x \neq 0$ , entonces  $(x, y) \rightarrow (x, u)$ , con  $u = \frac{y}{x}$ .

Si  $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  y  $y \neq 0$ , entonces  $(x, y) \rightarrow (v, y)$ , con  $v = \frac{x}{y}$ .

Veamos que estas cartas en verdad cubren a la banda de Möbius. Para ello, veamos qué sucede con una vecindad del origen al aplicar estos cambios de coordenadas. Si tomamos una recta por el origen en  $(x, y)$ , significa que tanto  $u$  como  $v$  son constantes, de modo que rectas por el origen se transforman en rectas horizontales en las coordenadas  $(x, u)$ , y en rectas verticales en las coordenadas  $(v, y)$ . En particular la recta  $x = y$  con pendiente 1 va a las rectas  $u = 1$  y  $v = 1$ . La recta  $x = -y$  con pendiente  $-1$  va a las rectas  $u = -1$  y  $v = -1$ . Ver figura 1.3.

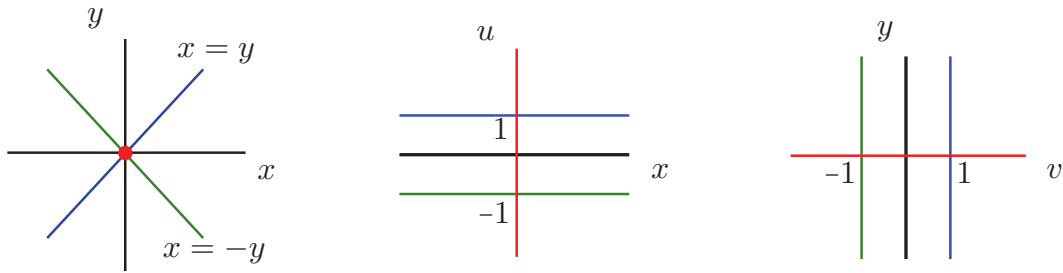


Figura 1.3: Rectas  $x = y$  y  $x = -y$  en las coordenadas  $(x, u)$  y  $(v, y)$ .

El origen se transforma en todo el eje  $u$  y todo el eje  $v$ . Aunque  $\pi^{-1}$  no está definida para  $(0, 0)$ , al tomar la cerradura de  $M$  sí queda incluido.

Analicemos semirrectas que pasen por el origen para ver a dónde va una vecindad del origen bajo  $\pi^{-1}$ . Vemos que  $u$  y  $v$  son inversas multiplicativas una de la otra, y tienen el mismo signo.

Si tomamos la semirrecta  $y = 0$  y  $x > 0$  en una vecindad del origen, tenemos que en las coordenadas  $(x, u)$  es también el lado positivo del eje  $x$ . Esto sólo lo vemos en las coordenadas  $(x, u)$ , pues  $y = 0$  no está contemplado en las coordenadas  $(v, y)$ . Si continuamos tomando semirrectas con  $x > 0$  aumentando la pendiente hasta llegar a la pendiente 1 en  $(x, u)$  obtenemos semirrectas con  $u$  constante y  $x$  positivas hasta llegar a  $u = 1$ . Una vez fuera de  $u = 0$ , también vemos estas semirrectas en las coordenadas  $(v, y)$ , en donde tenemos  $y > 0$  y  $v = 1/u$  constante. La altura de las semirrectas en  $(v, y)$  va disminuyendo hasta  $v = 1$ . Ver figura 1.4 (lo ilustramos de una vez en la banda de Möbius; al final del análisis quedará claro que las cartas sí están cubriendo esta variedad).

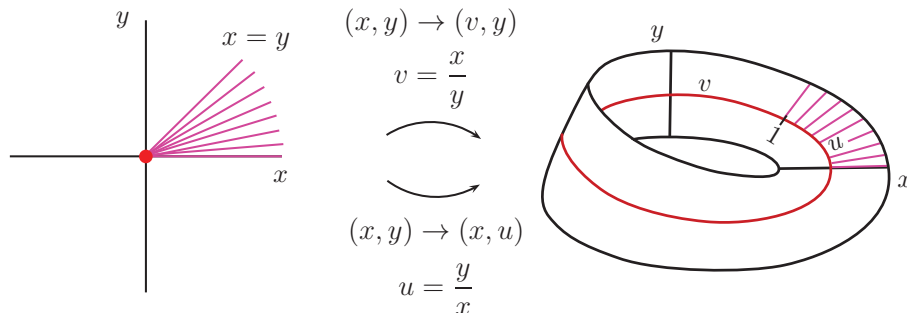


Figura 1.4: Imagen bajo  $\pi^{-1}$  de semirrectas con  $x > 0$  y  $\frac{y}{x} > 0$  hasta  $u = 1$ .



Seguimos tomando semirrectas con  $x > 0$  en una vecindad del origen, con pendiente cada vez mayor, hasta llegar a la pendiente infinito ( $x = 0$ ). Justo este caso ya no lo vemos en la carta  $(x, u)$ , pero sí en la carta  $(v, y)$ , en que  $v = 0$ . El eje  $y$  con  $y > 0$  se va al eje  $y$  positivo en la carta  $(v, y)$ . Ver figura 1.5.

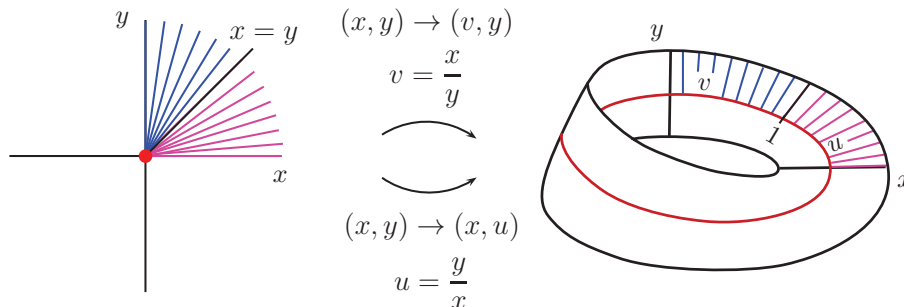


Figura 1.5: Imagen bajo  $\pi^{-1}$  de semirrectas con  $x > 0$  y  $\frac{y}{x} > 0$ .

Continuamos ahora con pendientes negativas, es decir,  $u, v < 0$ . Partimos de la pendiente infinito en  $(x, y)$ , y tomamos pendientes negativas cada vez menores (en valor absoluto) hasta llegar a la pendiente  $-1$ , ahora con  $x < 0, y > 0$ . Una vez fuera de  $x = 0$ , vemos las semirrectas en ambas cartas: son transversales al eje  $u$  y  $v$ , ahora con  $u, v < 0, y > 0$ . Así desde de  $v = 0$  hasta la constante  $u = v = -1$ . Ver figura 1.6.

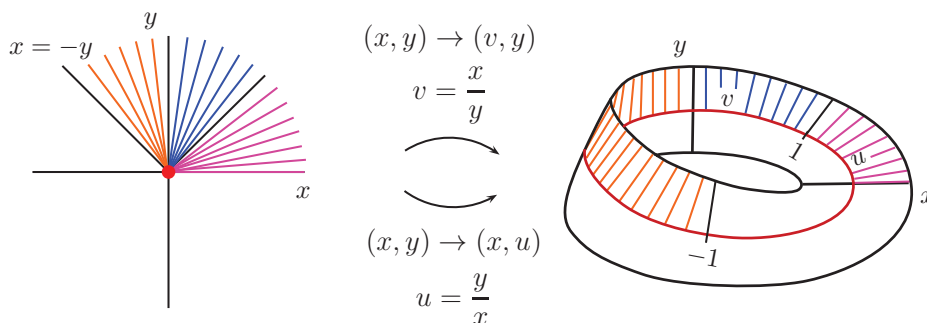


Figura 1.6: Imagen bajo  $\pi^{-1}$  de semirrectas con  $x < 0$  y  $\frac{y}{x} < 0$  hasta  $v = -1$ .

Seguimos tomando semirrectas cada vez con menor pendiente hasta llegar nuevamente a la pendiente cero. Notamos que llegamos a  $u = 0$  con  $x < 0$ , es decir, “por el otro lado” de donde partimos con la semirrecta  $x > 0, y = 0$ . Aquí se aprecia la torcedura de la banda de Möbius. Ver figura 1.7.

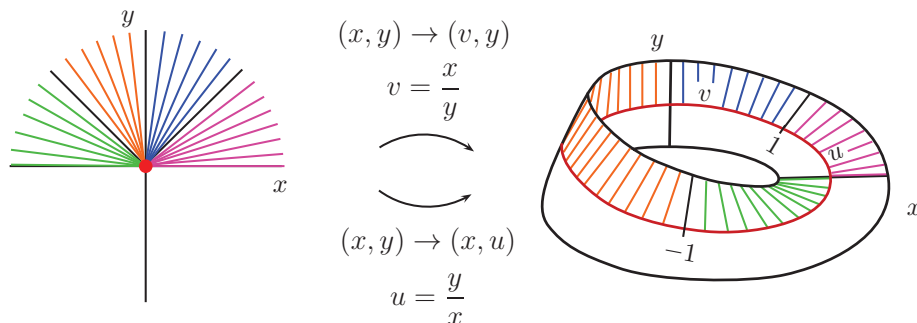


Figura 1.7: Imagen bajo  $\pi^{-1}$  de semirrectas con  $x < 0$  y  $\frac{y}{x} < 0$ .

Seguimos de la misma manera, ahora tomando semirrectas en el tercer cuadrante, cada vez con mayor pendiente, hasta llegar nuevamente a la pendiente infinito ( $v = 0$ ). Obtenemos semirrectas con  $u$  y  $v$  constantes, pero ahora con  $x < 0$ . Ver figura 1.8.

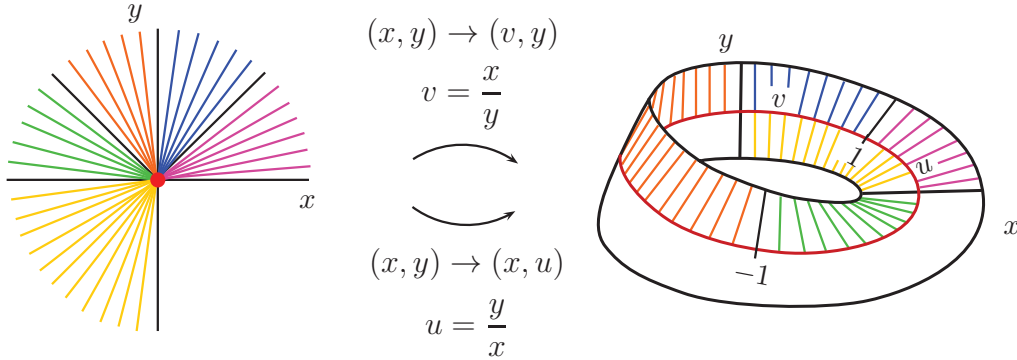


Figura 1.8: Imagen bajo  $\pi^{-1}$  de semirrectas con  $x < 0$  y  $\frac{y}{x} > 0$ .

Continuamos tomando semirrectas ahora con pendiente negativa y  $x > 0$  hasta regresar finalmente a la pendiente 0,  $x > 0$ , donde comenzamos. Ver figura 1.9.

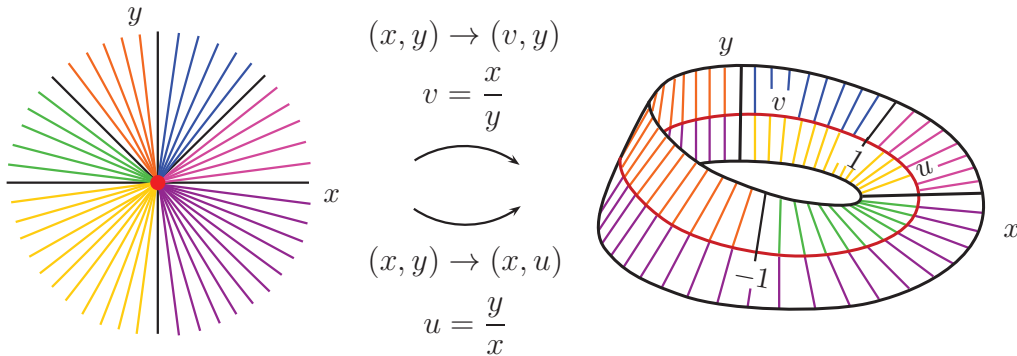


Figura 1.9: Imagen bajo  $\pi^{-1}$  de semirrectas con  $x > 0$  y  $\frac{y}{x} < 0$ .

Así, una vecindad del origen va a dar a la banda de Möbius. El eje  $u$  y el eje  $v$  (que son el mismo) son el divisor excepcional de la banda de Möbius, y son la preimagen del origen de  $(x, y)$ .

Habiendo hecho esta construcción, aplicaremos los cambios de coordenadas  $(x, y) \rightarrow (x, u)$  y  $(x, y) \rightarrow (v, y)$  al campo vectorial asociado a nuestra ecuación para llevarlo a un nuevo campo vectorial en la banda de Möbius, que vemos a través de cada una de las cartas coordenadas; tendremos una nueva ecuación asociada a este campo.

Es común que al aplicar los cambios de coordenadas, las coordenadas del campo vectorial que se obtiene tengan alguna función como factor común. Cuando esto ocurre se suele dividir el campo vectorial por esta función, resultando un *campo de direcciones* en lugar de un campo vectorial. La idea detrás de un campo de direcciones es quedarnos únicamente con la dirección de los vectores de un campo vectorial, perdiendo la magnitud y el sentido. Generalmente, al explotar obtenemos no campos vectoriales en la banda de Möbius, sino campos de direcciones, y se trabajan las ecuaciones asociadas a estos campos de direcciones. Sin embargo, como a lo largo de este trabajo no dividiremos por ninguna función, no perdemos el sentido ni dirección y seguiremos llamando campos vectoriales a los campos resultantes de la explosión.

Veamos cuáles son las ecuaciones resultantes en cada una de las cartas de la explosión de la singularidad de la ecuación

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, y) \\ \dot{y} &= g(x, y)\end{aligned}\tag{1.6}$$

con singularidad en el origen. En las coordenadas  $(x, u)$ , ya que que  $u = x/y$ , la primera coordenada del campo vectorial queda:

$$\dot{x} = f(x, ux).$$

Para la segunda coordenada tenemos

$$\dot{u} = \frac{\dot{y}x - \dot{x}y}{x^2} = \frac{g(x, y)x - f(x, y)y}{x^2} \Big|_{y=xu}.$$

Así, la nueva ecuación en las coordenadas  $(x, u)$  es

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, ux) \\ \dot{u} &= \frac{g(x, ux)x - f(x, ux)xu}{x^2}\end{aligned}\tag{1.7}$$

De manera análoga, partiendo de que  $v = x/y$ , obtenemos para las coordenadas  $(v, y)$

$$\dot{v} = \frac{\dot{x}y - \dot{y}x}{y^2} = \frac{f(x, y)x - g(x, y)y}{y^2} \Big|_{x=vy}$$

en la primera coordenada, y

$$\dot{y} = g(vy, y)$$

en la segunda. De modo que la nueva ecuación en  $(v, y)$  es

$$\begin{aligned}\dot{v} &= \frac{f(vy, y)vy - g(vy, y)y}{y^2} \\ \dot{y} &= g(vy, y)\end{aligned}\tag{1.8}$$

La idea es estudiar estas nuevas ecuaciones para obtener más información de lo que no veíamos en la original por estar de algún modo “comprimido”. Generalmente se obtienen nuevos puntos singulares en las nuevas ecuaciones, y éstos nos dan información de las soluciones de nuestra ecuación. Estos puntos singulares pueden a su vez ser explotados.

## 1.2. Algunos ejemplos

Hagamos algunos ejemplos de explosiones. Aunque lo que explotamos es una singularidad de una ecuación, si ésta sólo tiene un punto singular (como es el caso de las ecuaciones lineales), y no hay duda de cuál punto singular estamos explotando, diremos (dándonos cierta licencia de lenguaje) que explotamos la ecuación.

**Ejemplo 1.1.** Consideremos la ecuación

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{1.9}$$

Hacemos entonces los cambios de coordenadas para obtener las nuevas ecuaciones en las nuevas coordenadas. Para la carta  $(x, u)$  tenemos que

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x \\ \dot{u} &= \frac{\dot{y}x - \dot{x}y}{x^2} = \frac{yx - xy}{x^2} \Big|_{y=xu} = 0. \end{aligned}$$

Análogamente, en la carta  $(v, y)$  tenemos

$$\begin{aligned} \dot{v} &= \frac{\dot{x}y - \dot{y}x}{y^2} = \frac{xy - yx}{y^2} \Big|_{x=vy} = 0 \\ \dot{y} &= y. \end{aligned}$$

De modo que en las cartas  $(x, u)$  y  $(v, y)$  la ecuación (1.9) se transforma en las ecuaciones:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} \quad y \quad \begin{pmatrix} \dot{v} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ y \end{pmatrix}$$

respectivamente. Sus retratos de las fases aparecen en la figura 1.10.

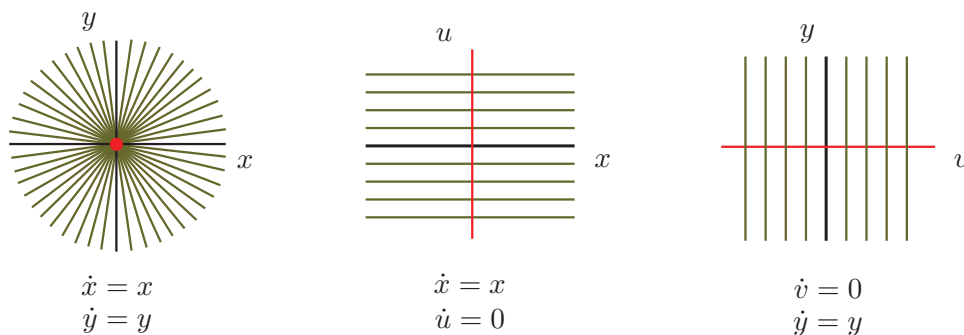


Figura 1.10: Retratos de las fases correspondientes a la explosión de (1.9).

En la figura 1.11 se muestra el retrato de las fases resultante en la banda de Möbius.

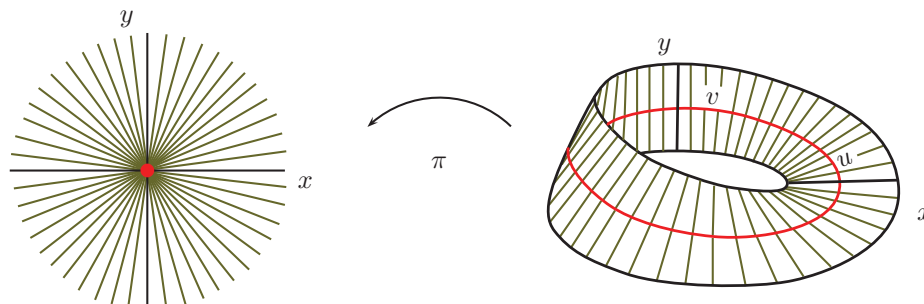


Figura 1.11: Explosión de la ecuación (1.9).

Notamos que todos los puntos en el divisor excepcional son puntos singulares. El resto de las soluciones son transversales al divisor excepcional. Cuando esto último suceda diremos que estamos en el caso dicrítico. Si el divisor excepcional es un subconjunto invariante bajo el campo de direcciones, diremos que estamos en el caso no dicrítico.

**Ejemplo 1.2.** Consideremos la ecuación

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (1.10)$$

Al hacer la explosión, obtenemos en las coordenadas  $(x, u)$  las ecuaciones

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 5x \\ \dot{u} &= \frac{2yx - 5xy}{x^2} = \frac{-3xy}{x^2} = \frac{-3ux^2}{x^2} = -3u \end{aligned}$$

y en las coordenadas  $(v, y)$  las ecuaciones

$$\begin{aligned} \dot{v} &= \frac{5xy - 2yx}{y^2} = \frac{3xy}{y^2} = \frac{3vx^2}{x^2} = 3v \\ \dot{y} &= 2y \end{aligned}$$

de modo que al explotar la ecuación (1.10) obtenemos las nuevas ecuaciones

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} \quad y \quad \begin{pmatrix} \dot{v} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ y \end{pmatrix}$$

cuya singularidades son silla y nodo respectivamente. Ver figura 1.12.

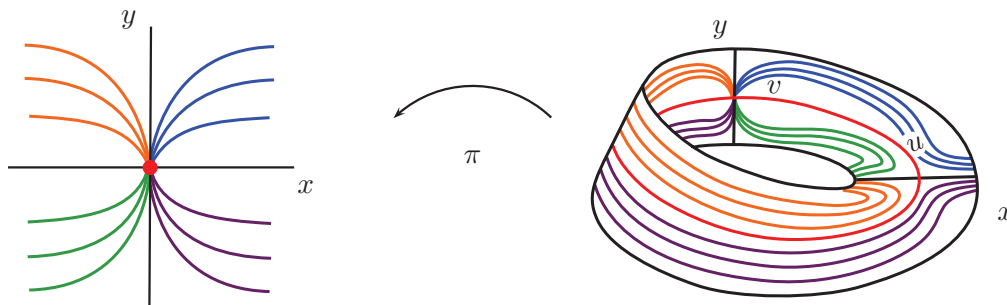


Figura 1.12: Explosión de la ecuación (1.10).

Los únicos puntos singulares del campo resultante en la banda son el  $(x, u) = (0, 0)$  y el  $(v, y) = (0, 0)$ . El resto del divisor excepcional es solución de la nueva ecuación.

Al tomar la pendiente de vectores en  $\mathbb{R}^2$  como una nueva coordenada podremos estudiar cómo se comportan las soluciones con relación a la pendiente. En el ejemplo 1.1, las soluciones se comportaban igual sin importar desde qué pendiente las veamos, lo que se refleja en la regularidad del campo vectorial obtenido en la banda, que es igual en cualquier valor de  $u$  y  $v$  y todo el divisor excepcional son puntos singulares. En cambio, en el ejemplo 1.2 hay dos pendientes “especiales”:  $u = 0$  y  $v = 0$ , que es donde aparecen nuevos puntos singulares. En el

ejemplo 1.1, en la ecuación (1.9), conforme  $t \rightarrow \infty$  las soluciones no cambian su pendiente. En cambio, en el ejemplo 1.2, en la ecuación (1.10), conforme  $t \rightarrow \infty$  la pendiente de las soluciones tiende a cero. Podríamos decir que la pendiente cero “atrae a las soluciones”, por lo que tiene sentido que al explotar la ecuación, en las coordenadas  $(x, u)$  tengamos un punto silla: el eje  $x$  expulsa (como antes) y el eje  $u$  atrae. Si lo vemos en términos de  $v$ , podemos decir que la pendiente infinito, “repele” a las soluciones de (1.10) conforme  $t \rightarrow \infty$ , por lo que también tiene sentido que al explotar, en las coordenadas  $(v, y)$  tengamos un nodo repulsor: el eje  $v$  expulsa (como antes) y el eje  $y$  también.<sup>4</sup>

Veamos ahora qué sucede al explotar un punto silla.

**Ejemplo 1.3.** Consideremos la ecuación

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{1.11}$$

Dado que

$$\dot{u} = \frac{-yx - xy}{x^2} = \frac{-2ux^2}{x^2} = -2u \quad y \quad \dot{v} = \frac{xy + xy}{x^2} = \frac{2ux^2}{x^2} = 2u$$

entonces la explosión de la ecuación (1.11) nos da las ecuaciones:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} \quad y \quad \begin{pmatrix} \dot{v} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ y \end{pmatrix}$$

En este caso, obtenemos en ambas cartas nuevamente ecuaciones con singularidad de tipo silla. Ver figura 1.13.

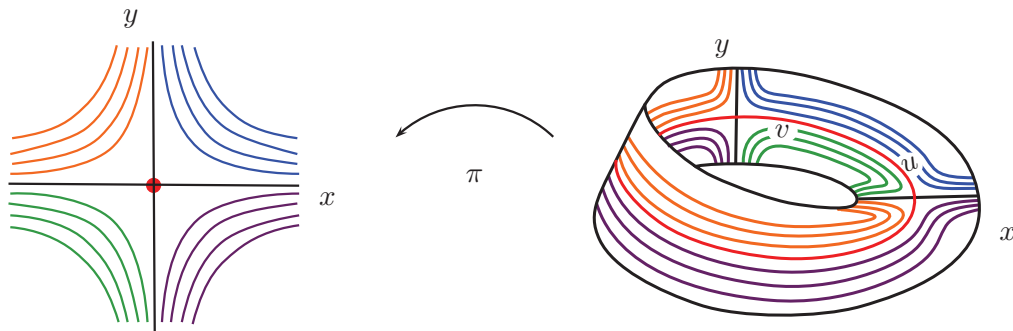


Figura 1.13: Explosión de (1.11) (una singularidad de tipo silla).

Haciendo una lectura geométrica de este último ejemplo, en la ecuación (1.11) tenemos que la pendiente infinito es la que “atrae” a las soluciones, pues sus pendientes tienden a infinito si  $t \rightarrow \infty$ . Por lo que tiene sentido que obtengamos sillas en ambas cartas: el eje  $x$  atrae y el eje  $u$  expulsa mientras que el eje  $v$  atrae y el eje  $y$  expulsa.

Como último ejemplo, veamos la explosión de un nodo parabólico.

<sup>4</sup>Este análisis funciona para un campo vectorial, pero no para un campo de direcciones.

**Ejemplo 1.4.** Consideremos la ecuación

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (1.12)$$

Al hacer la explosión, obtenemos en las coordenadas  $(x, u)$  y  $(v, y)$  las nuevas ecuaciones:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} \quad y \quad \begin{pmatrix} \dot{v} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ y \end{pmatrix}$$

cuyas singularidades son nodo y silla respectivamente. Ver figura 1.14.

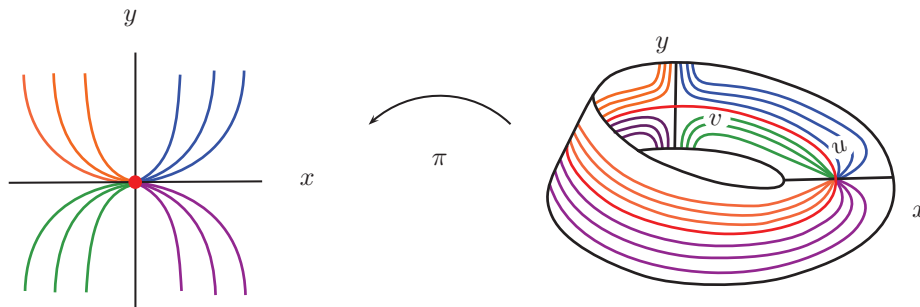


Figura 1.14: Explosión de la ecuación (1.12).

En este caso las pendientes de las soluciones de (1.12) tienden a infinito cuando  $t \rightarrow \infty$ , por lo que en  $(x, u)$  tanto el eje  $x$  como el eje  $u$  “expulsan”, y tenemos un nodo. En  $(v, y)$  el eje  $v$  “atrae” y el eje  $y$  “expulsa”, por lo que el origen de  $(v, y)$  es una singularidad de tipo silla.

Naturalmente, podemos explotar la singularidad de las ecuaciones (1.4). Explotemos la singularidad de la carta  $(x, u)$  (que ya vimos en el ejemplo 1.1) haciendo los cambios de coordenadas

$$\begin{aligned} (x, u) &\rightarrow (x, s) \quad \text{con} \quad s = \frac{u}{x} \quad \text{para} \quad (x, u) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \quad y \quad x \neq 0, \quad y \\ (x, u) &\rightarrow (w, u) \quad \text{con} \quad w = \frac{x}{u} \quad \text{para} \quad (x, u) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \quad y \quad u \neq 0. \end{aligned}$$

Obtenemos las ecuaciones

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ s \end{pmatrix} \quad y \quad \begin{pmatrix} \dot{w} \\ \dot{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w \\ u \end{pmatrix}.$$

Podemos visualizar esta nueva explosión como muestra la figura 1.15.

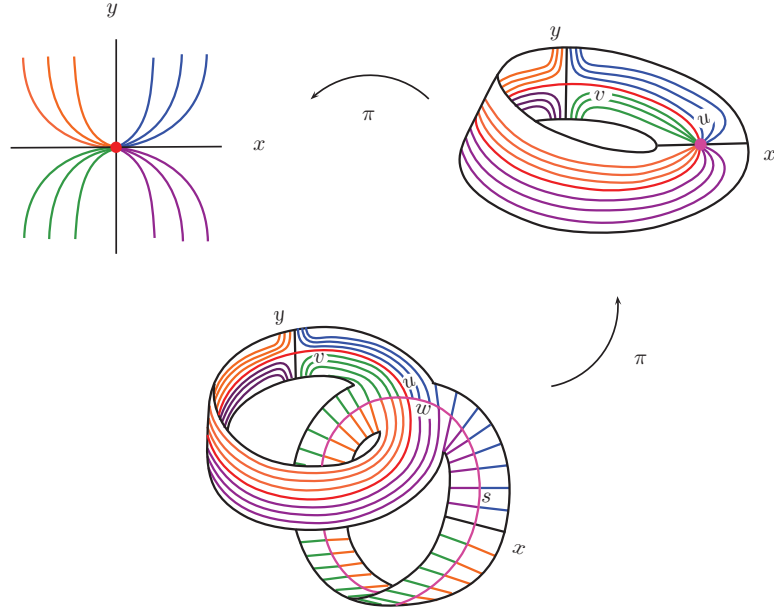


Figura 1.15: Explosión de la ecuación en coordenadas  $(x, u)$  como segunda explosión de la ecuación (1.12).

En general nos sirve estudiar los nuevos puntos singulares que aparecen en la banda. Al explotar la singularidad de ecuaciones del tipo (1.5), siempre que ninguno de los valores propios de la matriz que define al campo asociado a la ecuación sea cero, entonces tanto en las coordenadas  $(x, u)$  como en las coordenadas  $(v, y)$  el único punto singular es el origen.

Es importante mencionar que en la explosión, al tomar como nuevas coordenadas el cociente de  $x$  y  $y$ , lo que resulta determinante es la relación que guardan las coordenadas de las soluciones  $\varphi(t) = (x(t), y(t))$ . Si tomamos un múltiplo escalar de un campo vectorial, al explotar su ecuación asociada obtenemos las mismas ecuaciones que obtendríamos explotando el original, difiriendo únicamente por el múltiplo escalar. Aclaremos esto en la siguiente observación.

**Observación 1.5.** *Dada la ecuación*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, y) \\ \dot{y} &= g(x, y) \end{aligned} \tag{1.13}$$

con singularidad aislada en el origen, y un múltiplo escalar de ésta:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}} &= k f(x, y) \\ \dot{\tilde{y}} &= k g(x, y) \end{aligned} \tag{1.14}$$

donde  $k \in \mathbb{R}$  (o  $k \in \mathbb{C}$  en el caso complejo), si al explotar el origen en la ecuación (1.13) obtenemos las ecuaciones

$$\begin{aligned} \dot{x} &= h_1(x, y) & \dot{v} &= h_3(x, y) \\ \dot{u} &= h_2(x, y) & \dot{y} &= h_4(x, y) \end{aligned}$$

entonces al explotar el origen en (1.14) obtenemos

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}} &= k h_1(x, y) & \dot{\tilde{v}} &= k h_3(x, y) \\ \dot{\tilde{u}} &= k h_2(x, y) & \dot{\tilde{y}} &= k h_4(x, y) \end{aligned}$$

Para convencerse de la afirmación anterior basta sustituir la expresión (1.14) en (1.7) y (1.8) y ver que se satisface la afirmación.



### 1.3. Planteamiento del problema

Nos enfocaremos en estudiar ecuaciones de tipo

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (1.15)$$

con  $p, q \in \mathbb{R}$ , con lo que también estudiaremos el comportamiento local (en vecindades de puntos singulares) de ecuaciones no lineales que tengan, en el punto singular, expresión en serie de Taylor con esta parte lineal (es posible decir algo aún si la ecuación no es linealizable). Al explotar la ecuación (1.15) obtenemos en las respectivas cartas las ecuaciones

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & q-p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} \quad y \quad \begin{pmatrix} \dot{v} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p-q & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ y \end{pmatrix}$$

que son nuevamente ecuaciones del tipo (1.15). Podemos ahora explotar nuevamente cada una de estas ecuaciones, y continuar explotando cada nueva singularidad que obtenemos. En cada explosión aparecen dos puntos singulares (uno en cada carta). Ilustramos esto a manera de árbol en la figura 1.16.

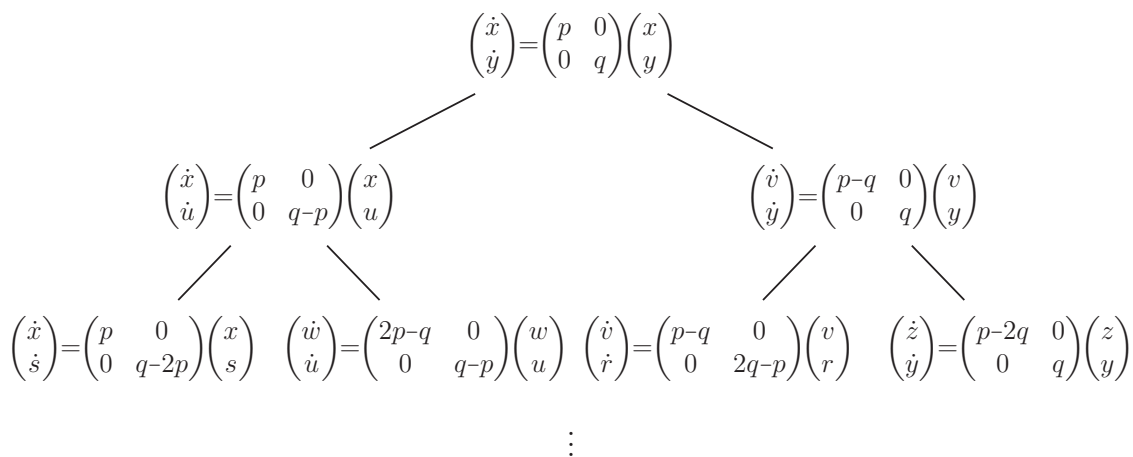


Figura 1.16: Explosiones sucesivas de la ecuación (1.15).

La pregunta es: ¿llegamos eventualmente al caso dicrítico? es decir, ¿llegamos a una ecuación asociada a un campo lineal cuya matriz que lo define tiene un valor propio cero? ¿qué condiciones deben satisfacer  $p$  y  $q$  para que así sea? En caso de que esto pase, ¿de cuántas explosiones requerimos? ¿Qué más podemos decir al respecto? De las primeras explosiones que hacemos (que vemos en la figura 1.16) queda claro que la respuesta depende de la relación que guardan  $p$  y  $q$ . Vemos, por ejemplo que si  $q = 2p$ , entonces en dos explosiones llegamos a un campo definido por una matriz con un valor propio cero (como ocurrió en el ejemplo 1.4). En general, vemos que si  $q = kp$  con  $k \in \mathbb{Z}^+$  también llegaremos a un campo definido por una matriz con un valor propio cero en  $k$  explosiones.

Para dar respuesta a las preguntas anteriores, haciendo un estudio completo de los posibles casos para los distintos valores de  $p$  y  $q$ , usaremos las herramientas de fracciones continuas, el árbol de Stern-Brocot y el algoritmo de Euclides. Esto nos llevará a estudiar la estructura de los números reales. Esperamos que este texto ayude a entender la relación que estos materiales guardan entre sí, y la relación que tienen con la explosión.

## Capítulo 2

# El algoritmo de Euclides

En el problema de ecuaciones diferenciales que estudiaremos resulta crucial la relación que guardan entre sí los valores propios de la matriz que define al campo vectorial asociado a la ecuación diferencial en cuestión, pues éstos determinan por completo el comportamiento de sus soluciones. Este comportamiento no depende tanto de los valores propios particulares de la matriz que define al campo vectorial, sino de la relación que estos valores guardan entre sí. Nos interesa entonces un método que nos permita estudiar dicha relación, y sus implicaciones en el comportamiento de las soluciones de la ecuación diferencial. Para estudiar esta relación resulta idóneo el algoritmo de Euclides, por la cantidad de información que nos brinda (si lo estudiamos a fondo) sobre el tipo de relación que pueden guardar dos números reales. Además, estudiar el algoritmo de Euclides nos llevará de manera natural a analizar la estructura de los números reales y la teoría de fracciones continuas, que nos ayudarán a comprender el problema planteado.

El algoritmo de Euclides es un procedimiento para encontrar el máximo común divisor de dos números enteros. Entonces comenzaremos por estudiar la relación que pueden guardar este tipo de números. La limitación a los números enteros no durará mucho tiempo, pero mientras dure pensaremos en ecuaciones cuyo campo vectorial asociado esté definido por una matriz con valores propios enteros.

Aunque es a primera vista simple, el algoritmo de Euclides tiene un contenido muy profundo que se manifiesta en muchas ramas de la matemática. Hay muchos enfoques y maneras de plantearlo; elegiremos presentar las que nos brindan una perspectiva conveniente para abordar nuestro problema original.

Lo que hará para nosotros especial al algoritmo de Euclides no es su eficiencia para encontrar el máximo común divisor (lo que sí tiene mucho valor en otros contextos), sino que en el procedimiento mismo que dicta se esconde mucha información acerca de la relación que guardan los números a los que lo apliquemos. En realidad, cuál sea el máximo común divisor no será relevante para nuestros propósitos. Como quedará claro más adelante, en la lectura que haremos del algoritmo de Euclides, el máximo común divisor de los valores propios de la matriz que define al campo vectorial asociado a una ecuación diferencial representará únicamente un factor por el que debemos multiplicar otro campo vectorial (definido por una matriz con valores propios primos relativos) para obtener nuestro campo vectorial original. En otras palabras, determinará la velocidad de las soluciones, pero no su comportamiento cualitativo.

No vemos el algoritmo de Euclides sólo como una forma eficaz de encontrar el máximo común

divisor de dos enteros, sino como un procedimiento afortunado que nos permitirá estudiar más a fondo nuestro problema.

## 2.1. El máximo común divisor

Dados  $a$  y  $b$  enteros,  $b \neq 0$ , consideramos el conjunto (finito) de divisores comunes de ambos números. De éstos nos interesa el máximo. Ahora, podemos pensar al *máximo* de este conjunto en tres sentidos: el que sea mayor de acuerdo al orden en  $\mathbb{Z}$  que cualquier otro divisor común de  $a$  y  $b$ ; el que tenga mayor *magnitud* que cualquier otro divisor común de  $a$  y  $b$ ; y en el sentido de divisibilidad: que sea un múltiplo de cualquier divisor común de  $a$  y  $b$ . Por la interpretación que haremos del máximo común divisor preferimos las dos últimas (que coinciden) como motivación de nuestra definición. En ellas el máximo resulta único salvo el signo, y escogeremos el positivo por convención.

**Definición 2.1.** Sean  $a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0$ . Definimos el *máximo común divisor* de  $a$  y  $b$ , que denotamos por  $\text{mcd}(a, b)$ , como el entero positivo  $d$  que satisface:

$$\begin{aligned} (a) \quad & d \mid a \text{ y } d \mid b; \\ (b) \quad & \text{si } m \in \mathbb{Z} \text{ es tal que } m \mid a \text{ y } m \mid b, \text{ entonces } m \mid d. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Si dos enteros  $d$  y  $d'$  satisfacen las condiciones (2.1), deben dividirse el uno al otro, por lo que difieren únicamente en el signo. Así, si  $d$  satisface las condiciones (a) y (b) de la definición 2.1, el único otro entero que también lo hace es  $-d$ , siendo entonces  $|d| = \text{mcd}(a, b)$ .

En  $\mathbb{Z}$  esta definición es equivalente a tomar el mayor (de acuerdo al orden usual en  $\mathbb{Z}$ ) de los divisores comunes de  $a$  y  $b$ . Sin embargo, la definición a través de las condiciones (2.1) tiene la ventaja de funcionar para cualquier dominio de ideales principales.<sup>1</sup>

**Observación 2.2.** Si  $a = 0, b \neq 0$ , entonces  $\text{mcd}(a, b) = |b|$ , pues todo entero divide a 0 y el conjunto de divisores comunes de  $a$  y  $b$  es el conjunto (finito) de divisores de  $b$ . Si  $a = 0, b = 0$ , el conjunto de divisores comunes es infinito, por lo que  $\text{mcd}(a, b)$  no está definido en este caso.

Como veremos, el máximo común divisor es un concepto profundo que va más allá de un mero divisor común mayor que los otros divisores comunes. Aunque no es evidente al definirlo en los enteros, en el máximo común divisor hay subyacente una noción de *medida común* de dos magnitudes, lo que inevitablemente involucra la noción de *commensurabilidad* (en el sentido que este término era usado por los griegos) y, como veremos, a la estructura de los números reales.

## 2.2. El algoritmo de Euclides

Hay varios caminos a tomar si queremos encontrar el máximo común divisor de dos números enteros. Sin duda el más eficiente es el algoritmo de Euclides, que nos da una manera práctica y sistemática de encontrarlo. Lo interesante es que este algoritmo no sólo nos ayuda a encontrar el máximo común divisor de dos enteros, sino que además en el camino nos da un mapa preciso

<sup>1</sup>Un ideal en un anillo es *principal* si es generado por uno de sus elementos. Un dominio de ideales principales es un anillo en que el cero no tiene divisores propios, y en el que todos sus ideales son principales.

con información de la relación que guardan ambos números. Como ya dijimos, lo que a nosotros nos interesa del algoritmo de Euclides es precisamente esta información.

Con esto en mente, no tomaremos la versión usual del algoritmo de Euclides, en la que al ser el mismo  $mcd(a, b)$  y  $mcd(|a|, |b|)$ , se consideran únicamente enteros no negativos y se aplica repetidamente el algoritmo de la división hasta obtener un residuo cero. Tomaremos una versión menos práctica que resultaría ociosa de no tener una buena razón para considerarla. Queremos conservar los signos de los números, y aplicarlo a enteros cualesquiera; para ello necesitaremos una versión ligeramente distinta del algoritmo de la división en la que podamos tener residuos negativos.

**Teorema 2.3.** (*Algoritmo de la división modificado*)

Sean  $a, b \in \mathbb{Z}$ ,  $b \neq 0$ . Existen únicos  $q, r \in \mathbb{Z}$  tales que  $a = qb + r$  con  $|qb| \leq |a|$  y  $|r| < |b|$ .

Antes de pasar a la demostración, hacemos notar que para satisfacer las condiciones del enunciado del teorema 2.3,  $a$ ,  $qb$  y  $r$  deben tener el mismo signo si ninguno es cero; si alguno de ellos es cero, los que no lo sean deben tener el mismo signo. Para ver que es así, notamos que si  $a$  y  $qb$  tuvieran signos opuestos, ya que  $a = qb + r$ , tendríamos que  $|r| \geq |qb|$  (ver figura 2.1 a) ), lo que pedimos que no suceda. Ahora, si  $a$  y  $qb$  tienen el mismo signo, ya que  $|qb| \leq |a|$  entonces  $r$  debe tener el mismo signo que  $qb$ , que es el mismo signo de  $a$  (ver figura 2.1 b) ).

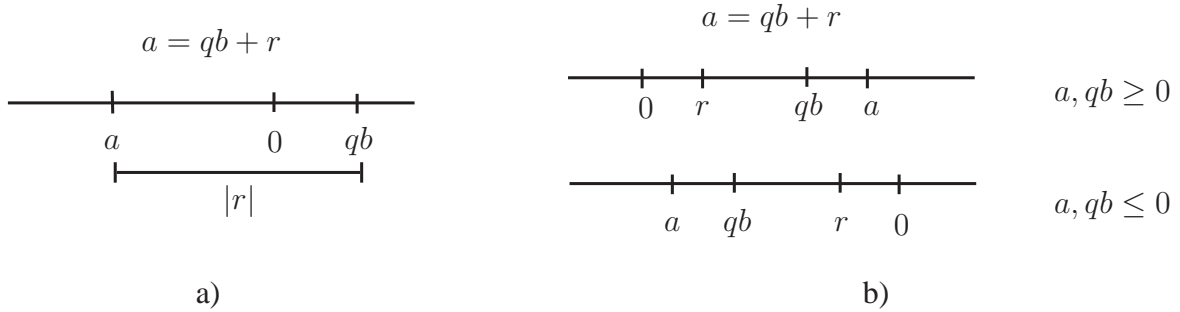


Figura 2.1

Ahora sí pasamos a la demostración del algoritmo de la división modificado.

*Demostración.* (del teorema 2.3)

Para  $a, b \in \mathbb{Z}$  fijos,  $b \neq 0$ , consideramos el conjunto  $A = \{|a - xb| \mid x \in \mathbb{Z}, |xb| \leq |a|\}$ .  $A \neq \emptyset$  pues para  $x = 0$  se tiene  $|xb| \leq |a|$  y  $|a - xb| = |a|$ , así que  $|a| \in A$ .  $A$  es entonces un subconjunto no vacío de  $\mathbb{N}$  y tiene por tanto primer elemento  $u = |a - qb|$ , con  $q \in \mathbb{Z}$ . Sea  $r = a - qb$ . Afirmamos que  $r$  y  $q$  tomados de esta manera satisfacen las condiciones del teorema. Por construcción tenemos que  $a = qb + r$ . La condición  $|qb| \leq |a|$  también se satisface, pues  $u \in A$ . Falta ver que  $|r| < |b|$ . Supongamos que  $|r| = |a - qb| \geq |b|$ . Definimos  $u' = |a - (q+1)b|$  si  $a$  y  $b$  tienen el mismo signo, y  $u' = |a - (q-1)b|$  en caso contrario. Recordemos que  $a$ ,  $qb$  y  $r$  deben tener el mismo signo (si no son cero). Entonces tenemos que  $u' < u$  y  $u' \in A$ , lo que contradice la minimalidad de  $u$ . Con esto queda demostrada la existencia de  $q$  y  $r$ . Para probar la unicidad, supongamos que  $\exists q', r' \in \mathbb{Z}$  tales que  $a = q'b + r'$  con  $|q'b| \leq |a|$  y  $|r'| < |b|$ . Al igual que,  $a$ ,  $qb$  y  $r$ , también  $a$ ,  $q'b$  y  $r'$  deben tener el mismo signo (si no son cero) y por tanto  $r$  y  $r'$  deben tener el mismo signo (si no son cero). Supusimos  $qb + r = a = q'b + r'$ , de

donde  $qb - q'b = r' - r$ . Tomando valor absoluto tenemos  $|q - q'|b = |r' - r|$ . Por otro lado, de  $|r| < |b|$  y  $|r'| < |b|$  se tiene que  $|r' - r| < 2|b|$ . Así,  $|q - q'| < 2$ . Como  $q, q' \in \mathbb{Z}$  se tiene que o bien  $|q - q'| = 0$  o  $|q - q'| = 1$ . Si  $|q - q'| = 1$ , entonces  $|r' - r| = |b|$ , lo que significa que  $r = r' \pm b$ . Como pedimos  $b \neq 0$ ,  $|r| < |b|$  y  $|r'| < |b|$ , ni  $r$  ni  $r'$  pueden ser 0, así que tienen el mismo signo. Pero entonces se tiene que o bien  $|r| = |r'| + |b|$ , o  $|r'| = |r| + |b|$ . De cualquier modo se contradice la hipótesis de que  $|r| < |b|$  y  $|r'| < |b|$ . Por lo tanto  $|q - q'| = 0$ , de donde  $q = q'$  y por tanto  $r = r'$ , quedando probada la unicidad de  $q$  y  $r$ .  $\square$

Esta es la forma del algoritmo de la división que usaremos para construir el algoritmo de Euclides. Antes de seguir, haremos algunas observaciones que convendrá tener en mente más adelante.

Si  $a = 0$ , entonces  $q = 0$  y  $r = 0$  son los enteros que satisfacen las hipótesis del Teorema 2.3. En general, si  $|a| < |b|$ ,  $q = 0$  y  $r = a$  son los enteros que funcionan. Más aún, sólo en este caso se tendrá  $q = 0$ , pues de no ser así contradiría las hipótesis del Teorema 2.3. Otra observación es que, como notamos en la prueba de arriba,  $a$ ,  $qb$  y  $r$  deben tener el mismo signo si ninguno es cero; si alguno de ellos es cero, los que no lo sean tienen el mismo signo. Notamos también que si  $a$  y  $b$  son positivos, el algoritmo de la división modificado coincide con el usual. Como última observación, vemos que las condiciones  $|qb| \leq |a|$  y  $|r| < |b|$  que pedimos arriba garantizan que al aplicar el algoritmo de la división modificado a  $a$  y  $b$ , y a  $|a|$  y  $|b|$ , los valores de  $q$  y  $r$  sean los mismos salvo el signo, lo que geométricamente significa tener los mismos valores, difiriendo sólo en la orientación. Veamos un ejemplo.

**Ejemplo 2.4.** Consideremos el algoritmo de la división (usual y modificado) para los posibles valores de  $a$  y  $b$  con  $|a| = 7$ ,  $b = 3$ .

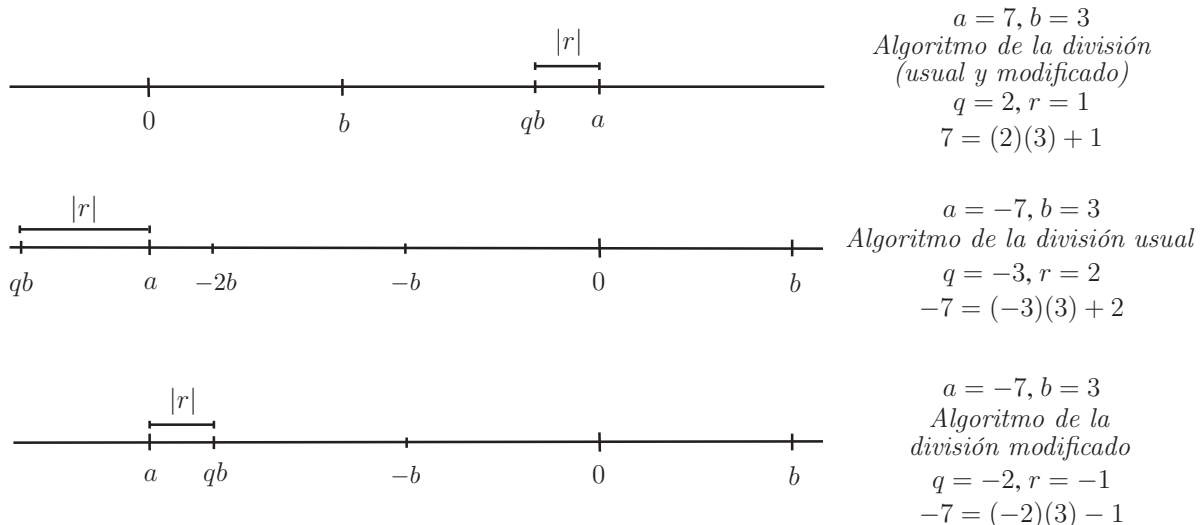


Figura 2.2: Algoritmo de la división (usual y modificado) para los posibles valores de  $a$  y  $b$  con  $|a| = 7$ ,  $b = 3$ .

Ahora sí podemos pasar a la construcción del algoritmo de Euclides. Que el algoritmo de la división modificado nos sirva para encontrar el máximo común divisor es consecuencia del siguiente lema.

**Lema 2.5.** Si  $a = qb + r$  entonces  $\text{mcd}(a, b) = \text{mcd}(b, r)$ .

*Demostración.* Sean  $d = \text{mcd}(a, b)$  y  $d' = \text{mcd}(b, r)$ . Por definición  $d'$  es un entero positivo que divide a  $b$  y a  $r$ , y por tanto divide a  $a = qb + r$ . Entonces  $d'$  es divisor común de  $a$  y  $b$ . Tomemos ahora  $m \in \mathbb{Z}$  tal que  $m \mid a$  y  $m \mid b$ . Entonces  $m$  divide a  $r = a - qb$ . De aquí tenemos que  $m$  es divisor común de  $b$  y  $r$ , y por definición  $m \mid d'$ . Así,  $d'$  es un divisor positivo de  $a$  y  $b$  al que divide cualquier otro divisor común de  $a$  y  $b$ . Entonces  $d' = \text{mcd}(a, b)$ , que es lo que queríamos probar.  $\square$

Notamos que la propiedad enunciada en el lema 2.5 se cumple independientemente de con cuál algoritmo de la división (usual o modificado) se obtuvo  $r$ .

Para encontrar  $\text{mcd}(a, b)$ ,  $a, b \in \mathbb{Z}$ ,  $b \neq 0$  usaremos el algoritmo de la división modificado y el lema 2.5 repetidamente. Aplicando el algoritmo de la división modificado a  $a$  y  $b$  tenemos que:

$$a = a_0b + r_0 \quad \text{con } |a_0b| \leq |a| \text{ y } |r_0| < |b|.$$

Por el lema 2.5 se tiene que  $\text{mcd}(a, b) = \text{mcd}(b, r_0)$ . Si  $r_0 = 0$ , entonces  $\text{mcd}(b, r_0) = b$  y  $\text{mcd}(a, b) = b$ . Si  $r_0 \neq 0$ , entonces aplicamos el algoritmo de la división modificado ahora a  $b$  y  $r_0$  y tenemos:

$$b = a_1r_0 + r_1 \quad \text{con } |a_1r_0| \leq |b| \text{ y } |r_1| < |r_0|.$$

Nuevamente por el lema 2.5  $\text{mcd}(b, r_0) = \text{mcd}(r_0, r_1)$ . Si  $r_1 = 0$ , entonces  $\text{mcd}(r_0, r_1) = r_0$  por lo que  $\text{mcd}(a, b) = \text{mcd}(b, r_0) = r_0$ . Si  $r_1 \neq 0$  volvemos a aplicar el algoritmo de la división modificado a  $r_0$  y  $r_1$ . Así sucesivamente hasta obtener un residuo cero:

$$\begin{aligned} a &= a_0b + r_0 & \text{con } |a_0b| \leq |a| \text{ y } |r_0| < |b| \\ b &= a_1r_0 + r_1 & \text{con } |a_1r_0| \leq |b| \text{ y } |r_1| < |r_0| \\ r_0 &= a_2r_1 + r_2 & \text{con } |a_2r_1| \leq |r_0| \text{ y } |r_2| < |r_1| \\ &\vdots & \vdots \\ r_{n-3} &= a_{n-1}r_{n-2} + r_{n-1} & \text{con } |a_{n-1}r_{n-2}| \leq |r_{n-3}| \text{ y } |r_{n-1}| < |r_{n-2}| \\ r_{n-2} &= a_n r_{n-1} + r_n & \text{con } a_n r_{n-1} = r_{n-2} \text{ y } r_n = 0. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Debemos eventualmente llegar a un residuo cero, pues por construcción tenemos que los enteros  $|r_i|$ ,  $i \in \{0, \dots, n\}$ , forman una sucesión de números naturales estrictamente decreciente acotada inferiormente por el cero:  $0 = r_n < |r_{n-1}| < |r_{n-2}| \dots < |r_1| < |r_0| < |b|$ .

De esta manera, el valor absoluto del último residuo no cero en este procedimiento será el máximo común divisor de  $a$  y  $b$ ; con la notación de arriba,  $\text{mcd}(a, b) = |r_{n-1}|$ . En efecto, si  $r_n = 0$ , tenemos por el lema 2.5 que  $\text{mcd}(a, b) = \text{mcd}(r_{n-1}, r_n) = |r_{n-1}|$ , y  $r_{n-1}$  divide entonces a  $r_{n-2}$  y al resto de los residuos. Llamamos a  $b$  el residuo  $r_{n-1}$  y a  $a$  el residuo  $r_{n-2}$ . Así, si  $a = 0$  tenemos  $\text{mcd}(a, b) = b$ , que es en (2.2) el último residuo distinto de 0.

Al procedimiento expuesto en (2.2) lo llamamos algoritmo de Euclides aplicado a la pareja  $(b, a)$ , y con él podemos encontrar el máximo común divisor de dos enteros cualesquiera. Notamos que este procedimiento garantiza la existencia del máximo común divisor, lo que convenientemente no argumentamos antes.

En el contexto del problema planteado de ecuaciones diferenciales, el entero  $\text{mcd}(a, b)$ , es el múltiplo que es el campo vectorial definido por una matriz con valores propios  $b$  y  $a$  de otro con

valores propios que sean primos relativos; los signos de  $a$  y  $b$  nos dirán si el origen es un atractor o repulsor en el caso de nodos y nos indicará cuáles son las direcciones estable e inestable en el caso de sillars.

Dijimos que íbamos a obtener información de la relación que guardan dos números  $a$  y  $b$  a través del algoritmo de Euclides. Esta información la vamos a encontrar concretamente en los enteros  $a_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  (con la notación de (2.2)) que obtenemos en cada paso que aplicamos el algoritmo de la división modificado. Veremos después que en ellos radica la información que nos servirá para estudiar nuestro problema. Quisimos usar el algoritmo de la división modificado para dar el algoritmo de Euclides, pues de esta manera los enteros  $a_i$  que obtenemos al encontrar  $mcd(a, b)$  son los mismos que obtenemos al encontrar  $mcd(|a|, |b|)$  (salvo el signo).

**Proposición 2.6.** Sean  $a, b \in \mathbb{Z}$ ,  $b \neq 0$ . Si  $|a| \geq |b|$ , entonces en las expresiones (2.2) del algoritmo de Euclides los signos de todos los enteros  $a_i$ ,  $i = 0, \dots, n$  son iguales, y coinciden con el signo de  $a/b$ . Si  $|a| < |b|$  se cumple lo mismo, salvo que  $a_0 = 0$ .

*Demostración.* Supongamos primero  $|a| \geq |b|$ . Consideremos cada una de las expresiones en (2.2), de la forma

$$r_{i-2} = a_i r_{i-1} + r_i, \quad i = 0, \dots, n \quad \text{donde } r_{-2} = a \text{ y } r_{-1} = b$$

y recordemos las observaciones que hicimos al terminar la prueba del Teorema 2.3. Por construcción tenemos que  $|r_i| < |r_{i-1}|$  para  $i \in \{0, \dots, n\}$ , lo que garantiza que  $a_{i+1} \neq 0$  para  $i \in \{0, \dots, n\}$ . Suponer que  $|a| \geq |b|$  garantiza  $a_0 \neq 0$ , de donde  $a_i \neq 0$  para  $i \in \{0, \dots, n\}$ . Como  $r_i \neq 0$  para  $i \in \{-2, \dots, n-1\}$ , entonces en cada una de las expresiones

$$r_{i-2} = a_i r_{i-1} + r_i \quad \text{para } i = 0, \dots, n-1$$

ninguno de los términos es cero, por lo que deben cumplir que  $r_{i-2}$ ,  $a_i r_{i-1}$  y  $r_i$  tienen el mismo signo; en el caso  $i = n$ , aunque  $r_n = 0$ ,  $r_{n-2}$  y  $a_n r_{n-1}$  deben tener el mismo signo. Para satisfacer esto, cada  $a_i$ ,  $i = 0, \dots, n$ , debe satisfacer que  $a_i > 0$  si  $r_{i-2}$  y  $r_{i-1}$  tienen el mismo signo, y  $a_i < 0$  si  $r_{i-2}$  y  $r_{i-1}$  tienen signo distinto (recordemos que  $a_i \neq 0$ ). De modo que si  $a/b > 0$ ,  $a$  y  $b$  tienen signos iguales, por lo que  $a_0 > 0$  y  $b$  y  $r_0$  tienen el mismo signo. Pero entonces  $a_1 > 0$ . Mediante un procedimiento inductivo llegamos a que  $a_i > 0$  para  $i = 0, \dots, n$ , es decir, el signo de todos los enteros  $a_i$  es el mismo y además coincide con el signo de  $a/b$ . Se procede análogamente si  $a/b < 0$ , en cuyo caso partimos de  $a_0 < 0$ . Con esto concluimos el caso  $|a| \geq |b|$ . Si  $|a| < |b|$ , entonces  $a_0 = 0$  y  $r_0 = a$ . Notamos que si  $a = 0$ , entonces  $n = 0$  y para  $i \geq 1$ , los enteros  $a_i$  satisfacen las conclusiones de la observación por vacuidad. Si  $a \neq 0$ , aplicamos ahora el procedimiento descrito en (2.2) a  $b$  y  $r_0$ , los que sí satisfacen que  $|b| \geq |r_0|$ . Estamos entonces en el caso anterior. Así, si  $|a| < |b|$ ,  $a_0 = 0$  y los signos de todos los enteros  $a_i$   $i = 1, \dots, n$  son iguales, y coinciden con el signo de  $a/b$ .  $\square$

Notamos que en esta versión del algoritmo de Euclides, basado en el Algoritmo de la División Modificado, los coeficientes  $a_i$  y los residuos que obtenemos al encontrar  $mcd(a, b)$  son los mismos que obtenemos al encontrar  $mcd(|a|, |b|)$ , salvo el signo (ver ejemplo 2.7). Esto no nos sorprende: sabíamos ya que  $mcd(a, b) = mcd(|a|, |b|)$ , y habíamos notado ya esta propiedad en el algoritmo de la división modificado. El que los signos de todos los enteros  $a_i$  en (2.2),  $i=1, \dots, n$  coincidan será importante más adelante.

**Ejemplo 2.7.** Aplicaremos el algoritmo de Euclides a las parejas  $(11, 8)$  y  $(-11, 8)$ .

$$\begin{array}{ll}
 a = 8, b = 11 & a = 8, b = -11 \\
 8 = (0)11 + 8 & 8 = (0)(-11) + 8 \\
 11 = (1)8 + 3 & -11 = (-1)8 - 3 \\
 8 = (2)3 + 2 & 8 = (-2)(-3) + 2 \\
 3 = (1)2 + 1 & -3 = (-1)2 - 1 \\
 2 = (2)1 + 0 & 2 = (-2)1 + 0
 \end{array}$$

### 2.3. Versión extendida del algoritmo de Euclides

El procedimiento descrito en (2.2) en realidad es una versión abreviada de una forma ligeramente distinta del algoritmo de Euclides. La abreviación consiste en expresar con el algoritmo de la división modificado una serie de restas iteradas que dejan un residuo. Exploraremos una versión extendida del algoritmo considerando cada una de estas restas.

Consideremos una pareja de enteros  $(b, a)$ ,  $b \neq 0$ . Que  $a = qb + r$  con  $|qb| \leq |a|$  y  $|r| < |b|$  significa que  $q$  es el número de veces que podemos sustraer  $b$  de  $a$  sin sobrepasarla en magnitud y dejando un residuo  $r$  menor que  $b$  en valor absoluto. Lo que haremos es tomar las expresiones dadas en (2.2) y efectuar paso a paso cada una de estas sustracciones abreviadas hasta llegar a un residuo cero, generando una sucesión de parejas de enteros que termina al llegar a una pareja en la que uno de los números es cero.

**¡Cuidado!** ¿Qué pasa si tenemos  $q < 0$ ? Decir que debemos sustraer  $q$  veces  $b$  de  $a$  querría decir que debemos sumar  $|q|$  veces  $b$  al entero  $a$ . Vimos que los signos de todos los enteros  $a_i$  que aparecen en (2.2) coinciden con el de  $a/b$  si  $|a| \geq |b|$ , y todos salvo  $a_0$  (que es cero) si  $|a| < |b|$ . Esto implica que si  $|a| \geq |b|$  los números de las parejas se sumarán en cada uno de los pasos si  $a$  y  $b$  tienen signos distintos, y se restarán en cada uno de los pasos si  $a$  y  $b$  tienen el mismo signo. Lo mismo ocurrirá si  $|a| < |b|$ , salvo en el primer paso, en el que al sustraer (o sumar)  $a_0 = 0$  veces  $b$  de  $a$  deja la pareja igual:  $(r_0, b) = (a_0, b)$ .

Comencemos con la pareja  $(b, a)$ . Retomando las expresiones dadas en (2.2), tenemos que  $a = a_0b + r_0$  con  $|a_0b| \leq |a|$  y  $|r_0| < |b|$ . Entonces en la pareja  $(b, a)$  dejamos el primer número igual y sustraemos el primer número del segundo y obtenemos la pareja  $(b, a - b)$ . Hacemos esto  $a_0$  veces, dejando el segundo igual, y llegamos después de  $|a_0|$  pasos a la pareja  $(b, a - a_0b) = (b, r_0)$ :

$$(b, a) \longrightarrow (b, a - b) \longrightarrow (b, a - 2b) \longrightarrow \cdots \longrightarrow (b, a - a_0b) = (b, r_0).$$

Notamos que lo que hicimos en un paso en el procedimiento de (2.2) lo hicimos aquí en  $a_0$  pasos. Sigamos: tenemos ahora  $b = a_1r_0 + r_1$  con  $|a_1r_0| \leq |b|$  y  $|r_1| < |r_0|$ . En la pareja  $(b, r_0)$  sustraemos ahora el segundo número del primero y obtenemos la pareja  $(b - r_0, r_0)$ . Hacemos esto  $a_1$  veces, hasta llegar a la pareja  $(b - a_1r_0, r_0) = (r_1, r_0)$ :

$$(b, r_0) \longrightarrow (b - r_0, r_0) \longrightarrow \cdots \longrightarrow (b - a_1r_0, r_0) = (r_1, r_0).$$



Ahora sustraemos en  $(r_1, r_0)$  el primer número del segundo:  $(r_1, r_0 - r_1)$ . Hacemos esto  $a_2$  veces. Así continuamos, hasta llegar a la pareja  $(r_n, r_{n-1})$  ó  $(r_{n-1}, r_n)$  donde  $r_n = 0$ . Podemos encontrar a  $\text{mcd}(a, b)$  en la última pareja de la sucesión:

$$\begin{aligned} (b, a) &\longrightarrow (b, a - b) \longrightarrow \cdots \longrightarrow (b, a - a_0b) = (b, r_0) \longrightarrow \\ &(b - r_0, r_0) \longrightarrow \cdots \longrightarrow (b - a_1r_0, r_0) = (r_1, r_0) \longrightarrow \\ &(r_1, r_0 - r_1) \longrightarrow \cdots \longrightarrow (r_1, r_0 - a_2r_1) = (r_1, r_2) \longrightarrow \\ &\cdots \longrightarrow (r_3, r_2) \longrightarrow \cdots (r_n, r_{n-1}) = (0, \text{mcd}(a, b)). \end{aligned} \quad (2.3)$$

(según sean  $a$  y  $b$ , también puede pasar que la última pareja aparezca  $-\text{mcd}(a, b)$ ).

Veamos un ejemplo.

**Ejemplo 2.8.** Aplicaremos el procedimiento arriba descrito a la pareja  $(11, 8)$  usando el ejemplo 2.7.

$$\begin{array}{cccccccc} (11, 8) & \longrightarrow & (11, 8) & \longrightarrow & (3, 8) & \longrightarrow & (3, 5) & \longrightarrow & (3, 2) & \longrightarrow & (1, 2) & \longrightarrow & (1, 1) & \longrightarrow & (1, 0) \\ \parallel & & \parallel & & \parallel & & \parallel & & \parallel & & \parallel & & \parallel & & \parallel \\ (b, a) & & (b, a - a_0b) & & (b - r_0, r_0) & & (r_1, r_0 - r_1) & & (r_1, r_0 - 2r_1) & & (r_1 - r_2, r_2) & & (r_3, r_2 - r_3) & & (r_3, r_2 - 2r_3) \\ & & \parallel & & \parallel & & \parallel & & \parallel & & \parallel & & \parallel & & \parallel \\ & & (b, r_0) & & (b - a_1r_0, r_0) & & (r_1, r_0 - a_2r_1) & & (r_1 - a_3r_2, r_2) & & (r_3, r_2 - a_4r_3) & & & & \\ & & & & \parallel & & \parallel & & \parallel & & \parallel & & & & \\ & & & & (r_1, r_0) & & (r_1, r_2) & & (r_3, r_2) & & & & & & (r_3, r_4) \end{array}$$

En la última pareja tenemos  $(1, 0)$  porque  $\text{mcd}(11, 8) = 1$ . Ahora aplicamos el procedimiento a la pareja  $(-11, 8)$  (también siguiendo al ejemplo 2.7). La sucesión que obtenemos es:

$$(-11, 8) \rightarrow (-11, 8) \rightarrow (-3, 8) \rightarrow (-3, 5) \rightarrow (-3, 2) \rightarrow (-1, 2) \rightarrow (-1, 1) \rightarrow (-1, 0).$$

Podríamos plantear el algoritmo de Euclides a partir de esta sucesión de parejas en lugar de a través de las expresiones de (2.2). Tomamos la pareja  $(b, a)$ , a partir de la cual formaremos una sucesión de parejas sustrayendo o sumando uno de otro número de la pareja dependiendo de cuál es mayor en valor absoluto y de si tienen signos distintos o no. Por convención, partimos de  $(b, a)$  y para la siguiente pareja sustraemos (si  $a/b > 0$ , y si  $a/b < 0$  sumamos)  $b$  de  $a$ :  $(b, a - b)$  si  $|a| > |b|$ , pero dejamos la pareja  $(b, a)$  igual si  $|a| < |b|$ . A partir de aquí procedemos de la siguiente manera: teniendo la pareja  $(m, n)$ , para formar la siguiente pareja sustraeremos el menor del mayor en valor absoluto si  $m/n > 0$ , y sumaremos el menor al mayor en valor absoluto si  $m/n < 0$ :

$$(m, n) \begin{cases} \nearrow (m - n, n) & \text{si } |m| > |n| \text{ y } m/n > 0 \\ \rightarrow (m, n - m) & \text{si } |n| > |m| \text{ y } m/n > 0 \\ \searrow (m + n, n) & \text{si } |m| > |n| \text{ y } m/n < 0 \\ \swarrow (m, n + m) & \text{si } |n| > |m| \text{ y } m/n < 0 \end{cases}$$

Es importante notar que en la pareja anterior a la pareja en que uno de los números es cero (y sólo entonces), tendremos dos números iguales en valor absoluto, caso que no contemplamos arriba. Al ser iguales, podemos restar cualquiera de ellos del otro y obtener cero. Convenimos en continuar con el orden de sustracción (o suma) del paso anterior.

Al procedimiento arriba descrito aplicado a la pareja  $(b, a)$  lo llamamos la *versión extendida del Algoritmo de Euclides* aplicado a la pareja  $(b, a)$ , y llamamos a la sucesión (2.3) la *sucesión extendida del algoritmo de Euclides*.

¿Dónde vemos en la sucesión extendida del algoritmo de Euclides a los enteros  $a_i$  de (2.2) que nos interesan? La sucesión que tenemos es resumidamente

$$(b, a) \rightarrow \cdots \rightarrow (b, r_0) \rightarrow \cdots \rightarrow (r_1, r_0) \rightarrow \cdots \rightarrow (r_1, r_2) \rightarrow \cdots (r_n, r_n-1).$$

Sabiendo que  $|r_i| < |r_{i-1}|$  para  $i \in \{0, \dots, n\}$  y usando la proposición 2.6 vemos que el procedimiento que acabamos de describir es equivalente a comenzar con  $(b, a)$  y, si  $a/b > 0$ , sustraer el segundo número del primero  $a_0$  veces, luego sustraer el primero del segundo  $a_1$  veces, nuevamente el segundo del primero  $a_2$  veces, así hasta sustraer el que corresponda  $a_n$  veces. Si  $a/b < 0$ , lo análogo pero sumándolos. Encontrar el  $mcd(a, b)$  de esta manera nos lleva  $\sum_{i=0}^n a_i$  pasos, mientras que mediante la forma dada en (2.2) nos lleva  $n - 1$  pasos. Será importante tener todo esto en mente cuando trabajemos las explosiones de singularidades que nos interesan.

**Ejemplo 2.9.** *Aplicamos a las parejas  $(10, 7)$  y  $(-10, 7)$  el algoritmo de Euclides, tanto el descrito en (2.2) como en su versión extendida.*

$$\begin{array}{ll} a = 7, b = 10 & a = 7, b = -10 \\ 7 = (0)10 + 7 & 7 = (0)(-10) + 7 \\ 10 = (1)7 + 3 & -10 = (-1)7 - 3 \\ 7 = (2)3 + 1 & 7 = (-2)(-3) + 1 \\ 3 = (3)1 + 0 & -3 = (-3)(1) + 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} (10, 7) \longrightarrow (10, 7) \longrightarrow (3, 7) \longrightarrow (3, 4) \longrightarrow (3, 1) \longrightarrow (2, 1) \longrightarrow (1, 1) \longrightarrow (0, 1) \\ (-10, 7) \rightarrow (-10, 7) \rightarrow (-3, 7) \rightarrow (-3, 4) \rightarrow (-3, 1) \rightarrow (-2, 1) \rightarrow (-1, 1) \rightarrow (0, 1). \end{array}$$

No es de extrañar que las parejas de la sucesión extendida del algoritmo de Euclides sean las mismas para  $(10, 7)$  y  $(-10, 7)$  salvo el signo, si recordamos la proposición 2.6.

La forma extendida del algoritmo de Euclides coincide mucho más con el espíritu con que fue planteado originalmente por Euclides en los libros VII y X de sus *Elementos*<sup>2</sup>, en donde toma dos segmentos de magnitudes *conmensurables* y sustrae repetidamente el más chico del más grande hasta llegar a una pareja en la que uno *mida* (divida) al otro.

Queremos tener esta forma del algoritmo de Euclides en mente por dos razones: está íntimamente relacionada con el problema que estamos abordando, y nos da más información que la manera abreviada del algoritmo planteada en (2.2). Tiene además la ventaja de que sólo se realizan sumas y restas, sin hacer alusión a la divisibilidad, por lo que podremos aplicar este mismo procedimiento a números no necesariamente enteros.

## 2.4. Interpretación geométrica del algoritmo de Euclides

Hemos visto cómo plantear el algoritmo de Euclides como un cómputo para encontrar el máximo común divisor. Ahora veremos una interpretación geométrica que podemos darle a este

<sup>2</sup>En las proposiciones 1-3 del libro VII y en las proposiciones 1-4 del libro X.

procedimiento para sacarle mejor provecho. Esta interpretación resultará muy afortunada para el problema que queremos estudiar, y sacará a relucir la noción de *commensurabilidad* que nos interesará más adelante. Comenzaremos interpretando la definición de máximo común divisor, para lo que necesitamos la siguiente definición.

**Definición 2.10.** Sean  $m, n$  enteros positivos. Decimos que  $m$  mide a  $n$  si podemos generar un segmento de magnitud  $n$  concatenando un número entero de veces segmentos de magnitud  $m$ .

Esta definición habla implícitamente de la noción de divisibilidad si  $m$  y  $n$  son enteros, pero tiene la ventaja de que no requiere que  $m$  y  $n$  sean enteros para tener sentido, y por lo mismo, podremos extenderla después a números no necesariamente enteros.

Tomemos dos enteros positivos (de momento)  $a$  y  $b$ , y consideremos el rectángulo de base  $b$  y altura  $a$ . Recordemos las condiciones (2.1) en nuestra definición de  $\text{mcd}(a, b)$ . Que un entero positivo  $d$  divida tanto a  $a$  como a  $b$  significa que mide a ambos, de modo que podríamos cubrir exactamente el rectángulo de lados  $a$  y  $b$  con cuadrados de lado  $d$ . Que cualquier entero  $m$  que divida tanto a  $a$  como a  $b$  divida también a  $d$  significa que cualquier  $m$  que mida a  $a$  y a  $b$  (y se pueda entonces cubrir exactamente al rectángulo de lados  $a$  y  $b$  con cuadrados de lado  $m$ ), debe medir también a  $d$ .

Según lo dicho en el párrafo anterior, encontrar el entero positivo que satisface las condiciones (2.1) es equivalente a encontrar el lado del mayor cuadrado que puede cubrir exactamente al rectángulo de lados  $a$  y  $b$ . Buscar el máximo común divisor de  $a$  y  $b$  es entonces buscar cuadricular al rectángulo de lados  $a$  y  $b$  con la cuadrícula de mayor tamaño posible. Veamos cómo se traduce en este contexto el algoritmo de Euclides planteado en (2.2).

Consideremos el rectángulo de base  $b$  y altura  $a$ . Apliquemos el algoritmo de Euclides a la pareja  $(b, a)$ . Tenemos que  $a = a_0b + r_0$ , lo que significa que en el rectángulo de base  $b$  y altura  $a$  caben  $a_0$  cuadrados de lado  $b$ , y queda un rectángulo de base  $b$  y altura  $r_0$ . Si  $r_0 = 0$ ,  $b$  mide a  $a$  y entonces  $b$  es el lado del mayor cuadrado con que podemos cuadricular el rectángulo de lados  $a$  y  $b$ :  $\text{mcd}(a, b) = b$  (ver la figura 2.3).

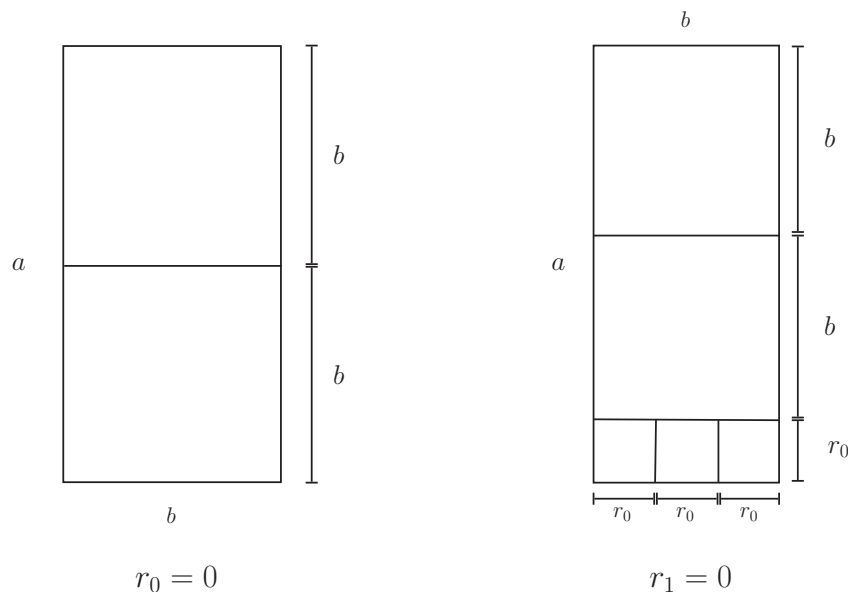


Figura 2.3: Interpretación geométrica del algoritmo de Euclides.

Si  $r_0 \neq 0$  consideramos ahora el rectángulo de lados  $r_0$  y  $b$ . Tenemos que  $b = a_1 r_0 + r_1$ . Así que en el rectángulo de lados  $r_0$  y  $b$  caben  $a_1$  cuadrados de lado  $r_0$ , quedando un rectángulo de lados  $r_0$  y  $r_1$ . Si  $r_1 = 0$ , entonces  $r_0$  mide a  $b$ , y entonces también a  $a$  pues  $a = a_0 b + r_0$ . Entonces  $r_0$  es el lado del mayor cuadrado con que podemos cuadrricular el rectángulo de lados  $r_0$  y  $b$ , y por el lema 2.5, entonces también el del mayor cuadrado con que podemos cuadrricular el rectángulo de lados  $a$  y  $b$ :  $mcd(a, b) = r_0$  (ver figura 2.3).

Si  $r_1 \neq 0$ , entonces pasamos a analizar el rectángulo de lados  $r_0$  y  $r_1$ . Si  $r_2 = 0$ , entonces  $r_1$  mide a  $r_0$  y  $mcd(a, b) = r_1$ .

Seguimos así sucesivamente hasta llegar a  $r_n = 0$ , siendo  $r_{n-1}$  el lado del mayor cuadrado con que podemos cubrir exactamente cada uno de los rectángulos de lados  $r_i$  y  $r_{i-1}$ ,  $i = 0, \dots, n - 1$ ,  $b = r_{-1}$ , y  $r_{n-1}$  el lado del mayor cuadrado con que podemos cubrir exactamente nuestro rectángulo original de lados  $a$  y  $b$ :  $mcd(a, b) = r_n$ . Ilustramos el caso  $n = 2$  en la figura 2.4.

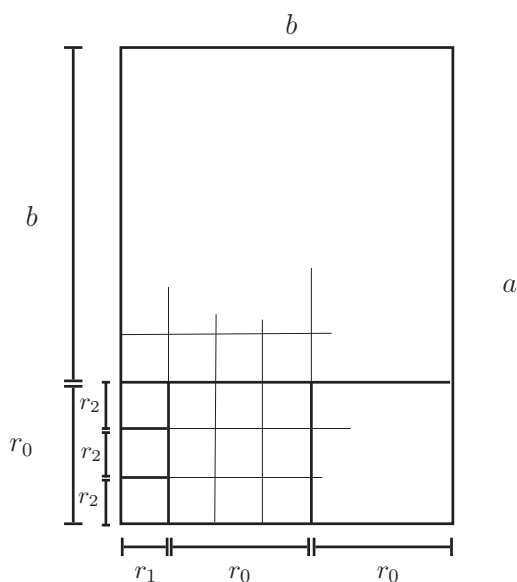


Figura 2.4: Expresiones (2.2) en forma geométrica para  $n = 2$ .

Por convención, para aplicar el algoritmo de Euclides a la pareja  $(b, a)$  tomamos el rectángulo de base  $b$  y altura  $a$ , y comenzamos quitando un cuadrado de lado  $b$ , de modo que si  $a < b$ , entonces comenzamos con un rectángulo horizontal y  $a_0 = 0$ . Si por el contrario  $b < a$ , entonces el rectángulo es vertical y  $a_0 \neq 0$ .

Así queda planteado el algoritmo de Euclides en términos geométricos. Hay muchas observaciones interesantes que podemos hacer al respecto. Notemos primero que el que  $a$  y  $b$  sean primos relativos se traduce en que el cuadrado unitario es el de mayor tamaño que puede cubrir el rectángulo de lados  $a$  y  $b$ . También notamos que el procedimiento para encontrar el máximo común divisor es el mismo para dos rectángulos cuyos lados guarden idénticas relaciones. Los pasos que seguimos en el procedimiento no dependen específicamente de las dimensiones del rectángulo, sino de la relación que guardan sus lados. Cambiar la dimensión del rectángulo sin cambiar la relación de los lados es equivalente a multiplicar cada una de las ecuaciones en (2.2) por un entero (o, por qué no, cualquier número real), quedando los enteros  $a_i$  exactamente iguales. Así, si  $mcd(a, b) \neq 1$ , considerar el rectángulo de lados  $a$  y  $b$  es considerar el rectángulo de lados  $a/mcd(a, b)$  y  $b/mcd(a, b)$  si tomamos como unidad al segmento de magnitud  $mcd(a, b)$ .

Esta interpretación hace evidente que se puede pensar el algoritmo de Euclides más allá de los números enteros, lo que nos llevará a un terreno interesante. Pero no nos adelantemos.

**Ejemplo 2.11.** *Apliquemos la forma geométrica del algoritmo de Euclides a la pareja  $(b, a) = (11, 8)$ , comparando con el ejemplo 2.7. Como  $8 < 11$ , tenemos un rectángulo horizontal, y en él caben 0 cuadrados de lado 11, dejando un residuo 8, como lo expresa el primer paso del algoritmo de Euclides:  $8 = (0)11 + 8$ .*

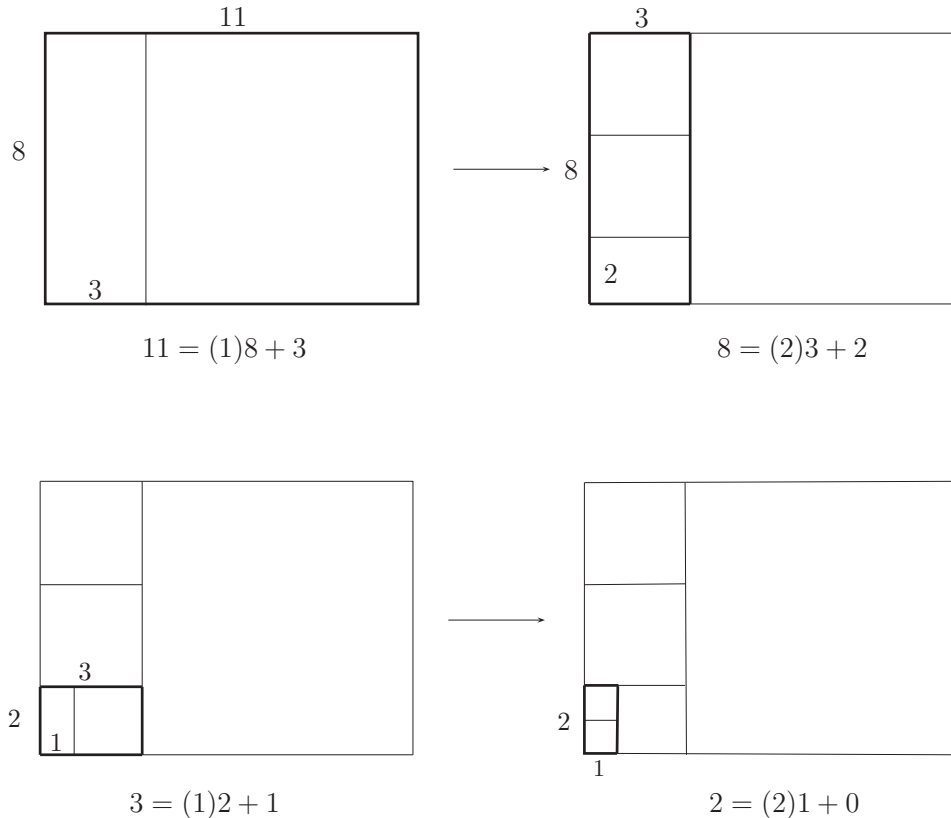


Figura 2.5: Versión geométrica del ejemplo 2.7.

Hemos estado pensando a  $a$  y  $b$  como enteros positivos. Es momento de considerar a los enteros negativos. Pensemos en segmentos con dirección, y pensemos que el signo de la magnitud del segmento indica la dirección del segmento. Si únicamente nos interesaran las magnitudes, podríamos desechar el signo y quedarnos con exactamente la misma interpretación. Sin embargo, nos conviene más mantener en la interpretación tanto magnitudes como direcciones, por lo que vamos a pensar nuestro rectángulo sobre el plano coordenado, donde también llevaremos a cabo el algoritmo de Euclides. Se verá cuán afortunada es esta manera de plantearlo al compararla con la versión extendida del algoritmo de Euclides.

Dada la pareja de enteros  $b$  y  $a$ , les asociamos el vector en el plano  $(b, a)$ , que es la diagonal del rectángulo de base  $b$  y altura  $a$ . Diremos que éste es el rectángulo determinado por el vector  $(b, a)$ .

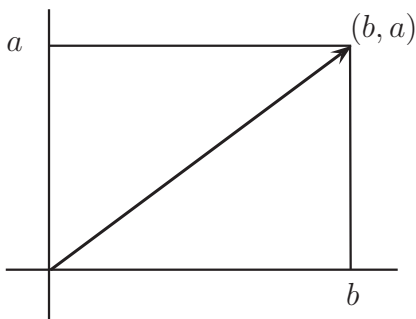


Figura 2.6: El rectángulo determinado por el vector  $(b, a)$ .

Ahora procederemos de la misma manera que describimos para los enteros positivos interpretando las expresiones (2.2), pero considerando que el signo indica la dirección del segmento, y tomando en cuenta que los enteros  $a_i$ , que son el número de veces que cabe cierto cuadrado en cierto rectángulo, pueden ser negativos (y no olvidemos, cero si comenzamos con un rectángulo horizontal). Lo mismo para los residuos  $r_i$ . La definición 2.10 no necesita modificación alguna, más allá de tomar  $m$  y  $n$  enteros,  $m \neq 0$ , y entender un segmento de magnitud negativa como un segmento orientado en la dirección opuesta a los de magnitud positiva.

**Ejemplo 2.12.** *En la figura 2.7 aplicamos el procedimiento geométrico del algoritmo de Euclides a las parejas de enteros  $(10, 7)$  y  $(-10, 7)$  sobre el plano coordenado:*

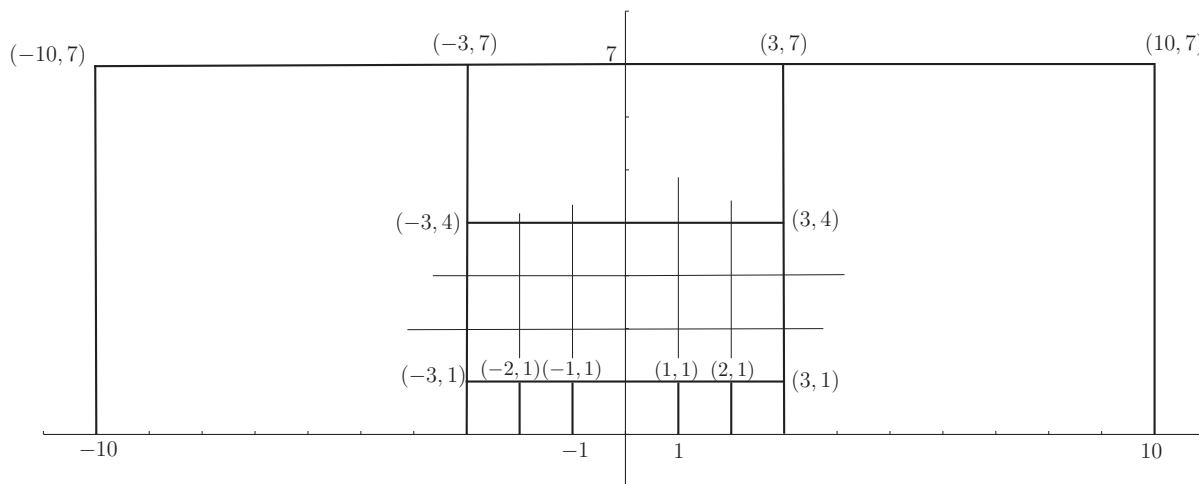


Figura 2.7: Algoritmo de Euclides en el plano.

*Si tomamos la sucesión de los vectores diagonales de los rectángulos que obtenemos en el algoritmo de Euclides geométrico obtenemos*

$$(10, 7) \longrightarrow (10, 7) \longrightarrow (3, 7) \longrightarrow (3, 4) \longrightarrow (3, 1) \longrightarrow (2, 1) \longrightarrow (1, 1) \quad (2.4)$$

*para el rectángulo determinado por  $(10, 7)$  (los ilustramos en la figura 2.8), y para el determinado por  $(-10, 7)$  obtenemos*

$$(-10, 7) \longrightarrow (-10, 7) \longrightarrow (-3, 7) \longrightarrow (-3, 4) \longrightarrow (-3, 1) \longrightarrow (-2, 1) \longrightarrow (-1, 1). \quad (2.5)$$

Vemos al comparar (2.4) y (2.5) con el ejemplo ejemplo 2.9 que coinciden con la sucesión extendida del algoritmo de Euclides aplicado a  $(10, 7)$  y  $(-10, 7)$  respectivamente, salvo por la última pareja. Para ver la interpretación de esta última pareja en la versión geométrica del algoritmo de Euclides, vemos que una vez que llegamos a un cuadrado en el procedimiento geométrico, podemos quitarlo también, quedándonos con un rectángulo degenerado (un segmento de recta) que yace sobre alguno de los ejes; su diagonal yace también sobre los ejes.

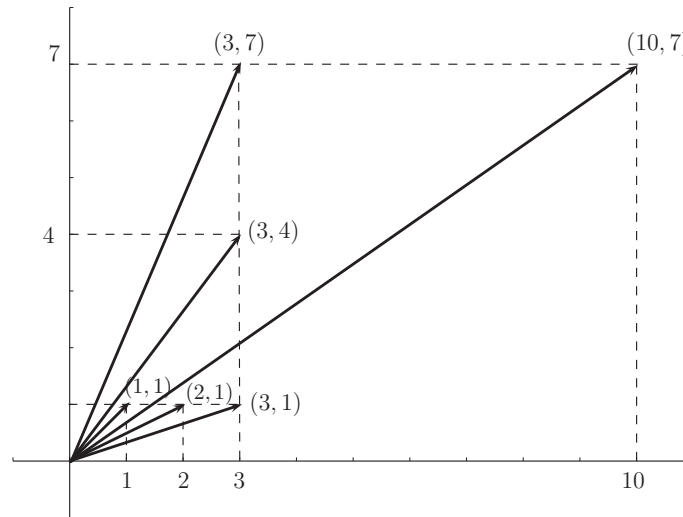


Figura 2.8: Vectores diagonales de los rectángulos resultantes al aplicar el algoritmo de Euclides geométrico.

Siguiendo lo que hicimos en el ejemplo 2.12, si registramos en una sucesión a los vectores que determinan los rectángulos que vamos obteniendo en el procedimiento geométrico del algoritmo de Euclides aplicado a  $(b, a)$ , obtenemos la sucesión:

$$\begin{aligned} (b, a) &\longrightarrow (b, a - b) \longrightarrow \cdots \longrightarrow (b, a - a_0b) = (b, r_0) \longrightarrow \\ &(b - r_0, r_0) \longrightarrow \cdots \longrightarrow (b - a_1r_0, r_0) = (r_1, r_0) \longrightarrow \\ &(r_1, r_0 - r_1) \longrightarrow \cdots \longrightarrow (r_1, r_0 - a_2r_1) = (r_1, r_2) \longrightarrow \\ &\cdots \longrightarrow (r_3, r_2) \longrightarrow \cdots (r_n, r_{n-1}), \end{aligned}$$

que es exactamente la misma que (2.3): la versión extendida del algoritmo de Euclides.

Teniendo la sucesión extendida del algoritmo de Euclides (dada en (2.3)), llamamos a la subsucesión

$$(b, a) \rightarrow (b, r_0) \rightarrow (r_1, r_0) \rightarrow (r_1, r_2) \rightarrow (r_3, r_2) \rightarrow \cdots (r_n, r_{n-1}) \quad (2.6)$$

la *sucesión abreviada del algoritmo de Euclides*. Por ejemplo, la sucesión abreviada del algoritmo de Euclides aplicada a  $(10, 7)$  es

$$(10, 7) \longrightarrow (10, 7) \longrightarrow (3, 7) \longrightarrow (3, 1) \longrightarrow (0, 1).$$

Nos será útil para nuestros propósitos trabajar con ambas sucesiones (la sucesión extendida y la sucesión abreviada del algoritmo de Euclides). En el procedimiento descrito en (2.2) podemos

ver la sucesión abreviada, pero no la sucesión extendida; en cambio la versión extendida del algoritmo de Euclides nos muestra ambas. En la interpretación geométrica también podemos ver ambas sucesiones, y la sucesión abreviada tendrá un significado geométrico concreto.

Recordemos cuál es el papel que juegan los enteros  $a_i$  de (2.2) en la versión extendida del Algoritmo de Euclides. Es el número de veces que se sustrae (o suma) el segundo número de la pareja del primero antes de pasar a sustraer (o sumar) el primero del segundo y viceversa, pues es el número de veces que *cabe* el segundo en el primero o viceversa. En nuestra interpretación geométrica, esto se traduce en el número de cuadrados que caben en nuestro rectángulo horizontal antes de pasar a uno vertical y viceversa. Pensando en la sucesión de los vectores diagonales de los rectángulos, los enteros  $a_i$  representan el número de vectores que hay entre cada cruce de la identidad (o la identidad negativa según sea el caso). Lo ilustramos en la figura 2.9.

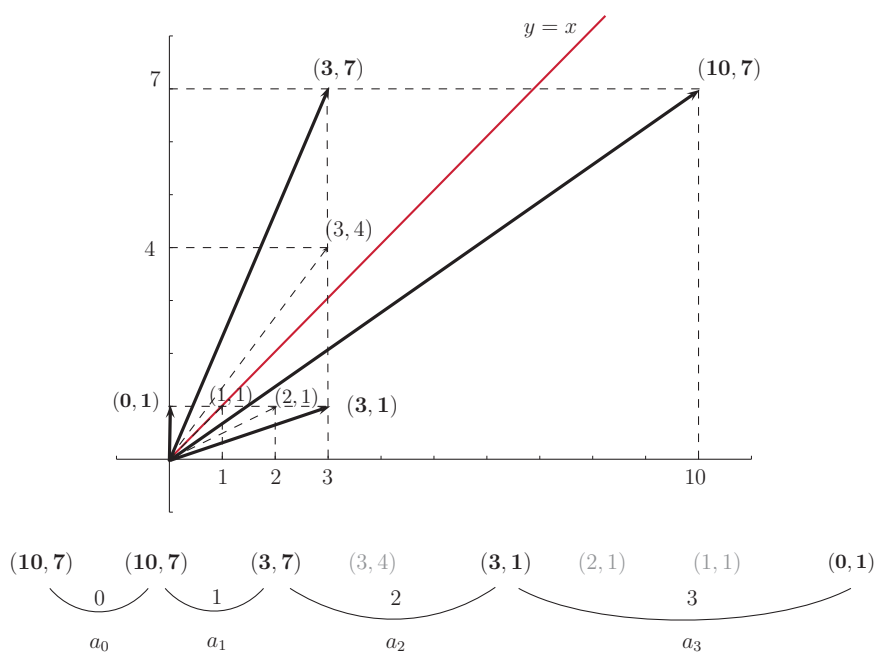


Figura 2.9: Vectores de la sucesión abreviada del algoritmo de Euclides.

Así, la sucesión extendida del algoritmo de Euclides es una sucesión de vectores en el plano, que comienza en  $(b, a)$ , le siguen  $a_0$  vectores con primera coordenada  $b$ , hasta que cruza la identidad (o la identidad negativa). Después les siguen  $a_1$  vectores que comparten la segunda con el anterior, hasta que volvemos a cruzar la identidad (o la identidad negativa). Así sucesivamente hasta llegar después de  $(\sum_{i=0}^n a_i) - 1$  vectores a un vector sobre la identidad (o la identidad negativa), y el siguiente y último vector está sobre alguno de los ejes. La sucesión abreviada del algoritmo de Euclides en el plano nos muestra sólo los pasos en que pasamos de un rectángulo vertical a uno horizontal o viceversa: cuando se cruza la identidad (o la identidad negativa si  $a/b < 0$ ). Ver figura 2.9.

Estudiar la relación entre la sucesión abreviada y la sucesión extendida del algoritmo de Euclides será sorprendentemente fructífero, como veremos en el capítulo 8. De momento sólo nos preguntamos: ¿nos dice algo el número de veces que se cruza la identidad en el camino marcado por el algoritmo de Euclides? O mejor aún, ¿nos dice algo qué tan seguido se cruza la identidad en la sucesión de vectores dada por la sucesión extendida del algoritmo de Euclides?



¿De qué depende, dicho en términos coloquiales, cuán “abreviada” es la sucesión abreviada en comparación a la extendida?

Antes de seguir adelante, hacemos una observación que nos será de ayuda en el próximo capítulo.

**Observación 2.13.** *Sea  $a_n$  el último de los enteros  $a_i$  que obtenemos en las expresiones (2.2). Entonces  $a_n \neq \pm 1$ . Vemos en (2.2) que si  $a_n = \pm 1$ , puesto que  $r_n = 0$ , tendríamos  $r_{n-2} = \pm r_{n-1}$ , contradiciendo que  $|r_{n-1}| < |r_{n-2}|$ . Geométricamente, ya que los enteros  $a_i$  son el número de cuadrados que podemos quitar de un rectángulo, si  $a_n = \pm 1$ , es decir, si en el último rectángulo cupiera exactamente un cuadrado, esto querría decir que en el rectángulo anterior cabía un cuadrado más del que dijimos que cabía.*

El algoritmo de Euclides planteado en el plano evidencia el papel de un factor de escala. Si aplicamos al plano una transformación de tipo  $f(\mathbf{x}) = r\mathbf{x}$ , con  $r \in \mathbb{R}$ , estamos tomando los mismos rectángulos, modificados únicamente por un escalamiento, así que se mantienen todas las proporciones y por tanto el procedimiento queda sin cambios. De hecho, si  $r \in \mathbb{C}$ , aplicar  $f$  significaría una rotación y homotecia de todo el plano, lo que sigue sin cambiar las proporciones de las figuras y vectores con las que llevamos a cabo el algoritmo de Euclides.

**Ojo:** Que el procedimiento sea el mismo no quiere decir que el máximo común divisor será el mismo. Éste se verá afectado por el factor de escala. Lo que permanecerá igual son los enteros  $a_i$  de (2.2), que son los que recogen la información de la relación que guardan los enteros a los que les apliquemos el algoritmo.

Estas observaciones evidencian la diferencia entre las dos formas de pensar el algoritmo de Euclides, y hacen evidente también cómo la manera original de Euclides se enfoca más en la proporción que guardan dos segmentos que en encontrar en particular el máximo común divisor de dos enteros. Tomando el algoritmo de Euclides sólo como se plantea en (2.2) la profunda noción de *commensurabilidad* pasa a segundo plano.

## 2.5. El algoritmo de Euclides en $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$

Después de la motivación que nos brindó la interpretación geométrica que hicimos, es natural que busquemos extender el algoritmo de Euclides a otros tipos de números. Lo primero que vemos es que no hay ninguna limitación para aplicar la versión extendida del algoritmo de Euclides a números racionales o reales. Si queremos aplicar la versión extendida del algoritmo de Euclides a la pareja  $(s, r)$ , lo podemos hacer como en la sección pasada al pie de la letra partiendo de  $(s, r)$ , ya sea con  $r, s \in \mathbb{Q}$  o  $r, s \in \mathbb{R}$ . Nos preguntamos cuándo termina el procedimiento.

Analicemos primero el caso racional. Tomemos la pareja  $(b/s, a/r)$ , con  $b/s, a/r \in \mathbb{Q}$ , a la que aplicaremos la versión extendida del algoritmo de Euclides. Teniendo en mente que el procedimiento sería igual para cualquier pareja  $(k\frac{b}{s}, k\frac{a}{r})$  con  $k \in \mathbb{C}$ , consideramos la pareja de enteros  $(rs\frac{b}{s}, rs\frac{a}{r}) = (rb, sa)$ . Siendo  $rb$  y  $sa$  enteros, sabemos que el procedimiento termina y por lo tanto termina también para  $(\frac{b}{s}, \frac{a}{r})$ :

$$(b/s, a/r) \longrightarrow (b/s, a/r - b/s) \longrightarrow \cdots \longrightarrow (m, m) \longrightarrow (0, m),$$

para algún racional  $m$ . De hecho, para el problema que queremos estudiar nos va a bastar analizar únicamente a la pareja  $(k\frac{b}{s}, k\frac{a}{r})$ , pues como ya dijimos, no nos interesa encontrar el máximo común divisor, sino estudiar la relación que guardan dos números. Notamos que, si

$k \in \mathbb{R}$ , podemos interpretar geoméricamente este procedimiento de la misma forma en que lo hicimos para la pareja de enteros  $(b, a)$ , interpretando también de la misma manera a los enteros  $a_i$  de (2.2).

Así, el algoritmo de Euclides se puede aplicar también a números racionales, también termina el procedimiento, y también nos sirve para estudiar la relación que guardan dos números. Cabe notar que este procedimiento no nos conduce al máximo común divisor de dos números racionales; éste no está siquiera definido.

¿Fue necesario que los números a los que aplicamos la versión extendida del algoritmo fueran racionales? Lo que necesitamos para poder asegurar que el procedimiento terminara fue que hubiera un número  $k$  (que podría ser entero, racional, real o complejo) tal que al multiplicar a ambos por  $k$ , ambos resultaran enteros. Es decir, necesitamos que su cociente fuera racional. Así que mientras el cociente de los números a los que queremos aplicar el algoritmo sea racional, no hay por qué limitarnos a los racionales. Podemos enunciar esto en la siguiente proposición.

**Proposición 2.14.** *Sean  $a, b \in \mathbb{C}, b \neq 0$ . Si  $a/b$  es un número racional, podemos aplicar la versión extendida del algoritmo de Euclides a la pareja  $(b, a)$ . El procedimiento termina en un número finito de pasos.*

*Demostración.* Como  $a/b \in \mathbb{Q}, \exists k \in \mathbb{C}$  tal que  $ka \in \mathbb{Z}$  y  $kb \in \mathbb{Z}$ . Consideramos la pareja  $(kb, ka)$ , a la que podemos aplicar el algoritmo de Euclides en cualquiera de sus formas. Como la estructura de la sucesión extendida del algoritmo de Euclides es igual para  $(b, a)$  y para  $(kb, ka)$ , y la sucesión que comienza con  $(b, a)$  termina, entonces también termina la que comienza con  $(kb, ka)$ , y terminan en el mismo número de pasos.  $\square$

Nos preguntamos ahora ¿qué pasa si el cociente de  $a$  y  $b$  es un número irracional? Podemos sin duda aplicar también la versión extendida del algoritmo de Euclides y el procedimiento geométrico, aunque no será un procedimiento para encontrar un máximo común divisor (pues no habría tal cosa). ¿Para qué nos interesaría esto? Para obtener los enteros  $a_i$  que aparecen en las expresiones (2.2). La interpretación que dimos de estos enteros en el procedimiento geométrico y en la versión extendida del algoritmo de Euclides es la misma independientemente de que el cociente de  $a$  y  $b$  sea racional o irracional. Si esto es así, aún si el cociente de  $a$  y  $b$  es irracional, deberíamos de poder traducir el papel que juegan los enteros  $a_i$  en la versión extendida del algoritmo de Euclides y en la interpretación geométrica a expresiones como las que aparecen en (2.2). Lo único que nos limita es que el Algoritmo de la División considera sólo números enteros. Si tuviéramos una versión para reales cualesquiera, podríamos aplicar la versión usual del algoritmo de Euclides expresada en (2.2). Planteemos entonces esta *extensión* del algoritmo de la división.

**Teorema 2.15.** *(Algoritmo de la división en  $\mathbb{R}$ )*

*Sean  $a, b \in \mathbb{R}, b \neq 0$ . Existen únicos  $q \in \mathbb{Z}, r \in \mathbb{R}$  tales que  $a = qb + r$  con  $|qb| \leq |a|$  y  $|r| < |b|$ .*

*Demostración.* Repetimos paso por paso la prueba del teorema 2.3. La única diferencia es que ahora el conjunto  $A = \{|a - xb| \mid x \in \mathbb{Z}, |xb| \leq |a|\}$  no es un subconjunto de  $\mathbb{N}$ . Sin embargo, puesto que los enteros  $x$  que satisfacen  $|xb| \leq |a|$  son un número finito, tenemos que  $A$  es un conjunto finito totalmente ordenado no vacío, por lo que tiene primer elemento. A partir de ahí continuamos como en la prueba del teorema 2.3, notando que para satisfacer el enunciado del teorema, también debe suceder que  $a, qb$  y  $r$  tengan el mismo signo.  $\square$

Habiendo planteado el algoritmo de la división en  $\mathbb{R}$ , podemos aplicar el algoritmo de Euclides como hicimos en (2.2), tomando en cuenta que si el cociente de los números a los que lo apliquemos es irracional, entonces cada  $r_i$  será un número irracional, y considerando que aunque obtenemos una sucesión estrictamente decreciente de residuos, no podemos afirmar que el procedimiento termina en algún momento.

$$\begin{aligned} a &= a_0b + r_0 && \text{con } |a_0b| \leq |a| \text{ y } |r_0| < |b| \\ b &= a_1r_0 + r_1 && \text{con } |a_1r_0| \leq |b| \text{ y } |r_1| < |r_0| \\ r_0 &= a_2r_1 + r_2 && \text{con } |a_2r_1| \leq |r_0| \text{ y } |r_2| < |r_1| \\ &\vdots && \vdots \end{aligned} \tag{2.7}$$

En general, para toda  $i \in \mathbb{N}$ , tomando  $a = r_{-2}$  y  $b = r_{-1}$  tenemos

$$r_{i-2} = a_i r_{i-1} + r_i \text{ con } |a_i r_{i-1}| \leq |r_{i-2}| \text{ y } |r_i| < |r_{i-1}|.$$

De hecho, como ya sospechamos, si  $a/b$  es irracional el procedimiento no termina nunca, como probaremos a continuación.

**Proposición 2.16.** Sean  $a, b \in \mathbb{C}$ ,  $b \neq 0$ . Si  $a/b \in \mathbb{R}$  podemos aplicar el algoritmo de Euclides a la pareja  $(b, a)$ . El procedimiento termina si y sólo si  $a/b \in \mathbb{Q}$ .

*Demostración.* Vimos ya que el procedimiento termina si  $a/b \in \mathbb{Q}$ . Veamos que termina sólo en este caso. En las expresiones (2.7), si  $r_{i-2}/r_{i-1}$  es irracional, entonces  $r_{i-1}/r_i$  también lo es, pues tenemos que  $r_{i-2}/r_{i-1} = a_i + (r_i/r_{i-1})$ , con  $a_0 \in \mathbb{Z}$ . Tomemos  $r_{-1} = b, r_{-2} = a$ . Si  $a/b$  es irracional, tendremos que  $r_{i-1}/r_i$  es irracional para  $i \geq -1$ . Si terminara el procedimiento, tendríamos que  $r_n = 0$  para alguna  $n \in \mathbb{N}$  y que  $r_{n-2}/r_{n-1} = a_n$ , con  $a_n \in \mathbb{Z}$ , por lo que si el procedimiento termina, el cociente  $a/b$  no puede ser irracional.  $\square$

Así, si comenzamos con un rectángulo con lados cuyo cociente es irracional, nunca llegaremos a una medida de un cuadrado que nos permita cuadrricular todo el rectángulo. Veamos un ejemplo.

**Ejemplo 2.17.** Sea  $a = 1, b = (1+\sqrt{5})/2$ .<sup>3</sup> En este caso el cociente  $a/b$  es irracional. Aplicando el algoritmo de Euclides en forma geométrica, tomamos el rectángulo de base  $(1+\sqrt{5})/2$  y altura 1. Quitamos primero 0 cuadrados de lado  $(1+\sqrt{5})/2$ , después quitamos un cuadrado de lado 1 y nos quedamos con un rectángulo de base  $(-1+\sqrt{5})/2$  y altura 1 (ver figura 2.10).

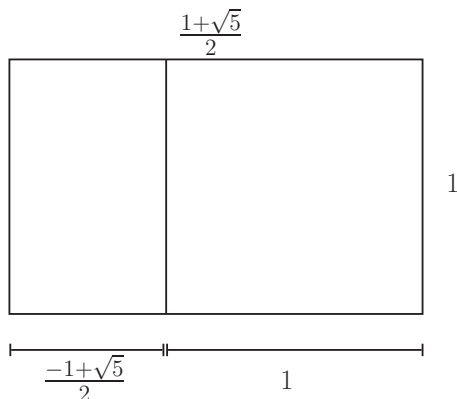


Figura 2.10: Algoritmo de Euclides geométrico aplicado a  $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, 1\right)$ .

<sup>3</sup>Al número  $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$  se le conoce como la *razón áurea*. Toma un papel protagónico en el capítulo 8.

Vemos que la proporción de los lados correspondientes del rectángulo resultante, es la misma que la de los lados del rectángulo original; el rectángulo original es un escalamiento del rectángulo resultante por  $(1 + \sqrt{5})/2$ .

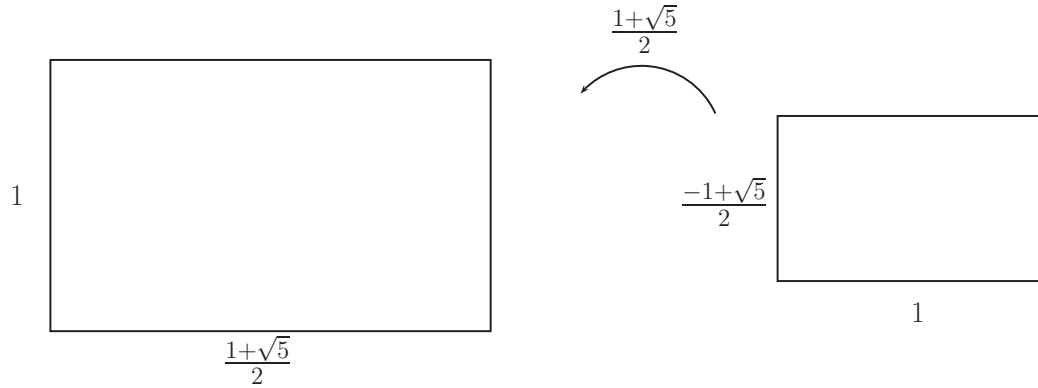


Figura 2.11: Escalamiento de rectángulos en el algoritmo de Euclides aplicado a  $(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, 1)$ .

Esto implica que al quitar un cuadrado a este nuevo rectángulo de base  $(-1 + \sqrt{5})/2$  y altura 1, volveremos a quedar con un cuadrado homotético al original, pues estamos haciendo lo mismo que hicimos en el paso anterior, salvo por un escalamiento. Ocurrirá lo mismo en cada paso del algoritmo, lo que significa que el proceso de quitar cuadrados nunca terminará. Ilustramos esto en las figuras 2.12 y 2.13. Si no supiéramos que  $(1 + \sqrt{5})/2$  es irracional, esto sería una manera de probarlo.<sup>4</sup>

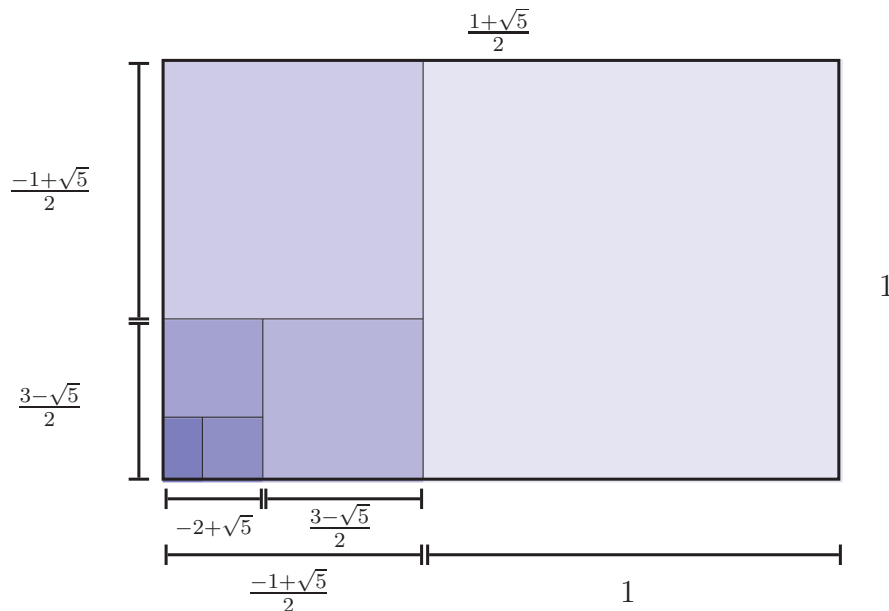


Figura 2.12: El algoritmo de Euclides aplicado a  $(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, 1)$  no termina nunca.

<sup>4</sup>¿Para qué números irracionales podemos dar este argumento para probar su irracionalidad? Dado un número real  $\alpha$ , si al aplicar el algoritmo de Euclides en forma geométrica a  $(\alpha, 1)$  en algún momento obtenemos un rectángulo homotético a alguno de los que obtuvimos anteriormente en el procedimiento, podríamos afirmar que  $\alpha$  es irracional, argumentando que el procedimiento dado por el algoritmo no termina nunca. En el capítulo 3 veremos qué números irracionales tienen esta propiedad.

En cada paso del algoritmo de Euclides estaremos aplicando el algoritmo de la división a números cuyo cociente es  $(1 + \sqrt{5})/2$ .

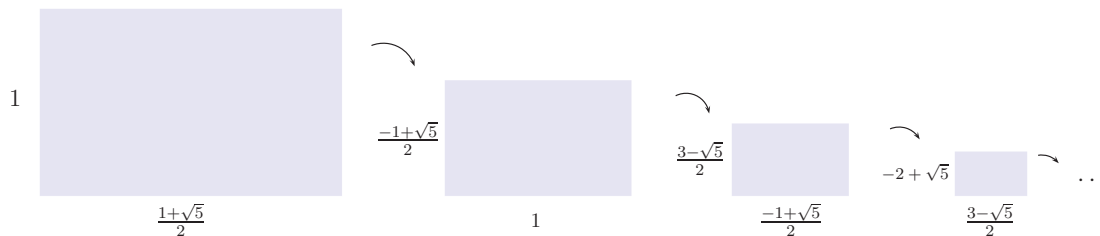


Figura 2.13: Los rectángulos que obtenemos en el algoritmo de Euclides geométrico son todos el mismo escalados por  $(1 + \sqrt{5})/2$ .

Y el número de cuadrados que cabrán en cada rectángulo será siempre 1, por lo que los enteros  $a_i$  del algoritmo de Euclides en  $\mathbb{R}$  como fue planteado en (2.5) serán todos 1:

$$\begin{aligned} \frac{1+\sqrt{5}}{2} &= (1)1 + \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ 1 &= (1)\frac{-1+\sqrt{5}}{2} + \frac{3-\sqrt{5}}{2} \\ \frac{-1+\sqrt{5}}{2} &= (1)\frac{3-\sqrt{5}}{2} + \frac{2\sqrt{5}-4}{2} \\ \frac{3-\sqrt{5}}{2} &= (1)\frac{2\sqrt{5}-4}{2} + \frac{7-3\sqrt{5}}{2} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Aprovechemos el ejemplo 2.17, para retomar la pregunta de cuán seguido “se cruza” la diagonal. Vemos que para este (especial) número coinciden la sucesión extendida y la sucesión abreviada del algoritmo de Euclides. Éste representa el caso más extremo en que la sucesión abreviada no es muy abreviada, pues en realidad no abrevia nada. En el capítulo 8 veremos de qué depende (dicho en términos coloquiales) cuán “abreviada” es la sucesión abreviada.

Vimos que en términos de encontrar los enteros  $a_i$  que aparecen en (2.7), tanto el procedimiento descrito en la versión extendida como el geométrico sólo dependen del cociente  $a/b$ . Lo mismo por supuesto ocurre con las expresiones 2.7, en donde podemos ver el factor de escala al multiplicar cada una de las ecuaciones del procedimiento por el mismo número:

$$\begin{aligned} ka &= a_0kb + kr_0 \\ kb &= a_1kr_0 + kr_1 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Podemos entonces analizar los casos en que el cociente  $a/b$  es real, sin importar si  $a$  y  $b$  son reales o complejos. En el caso del cociente irracional extendimos nuestro algoritmo de la división para no limitarnos a reales cuyo cociente fuera racional. Aunque se antoja hacer lo mismo con un cociente de complejos que no sea real, no tenemos una buena manera de extender a  $\mathbb{C}$  el algoritmo de la división como hicimos para  $\mathbb{R}$  (lo que podemos ver al repasar la prueba), y ni siquiera podemos aplicar la versión extendida o el procedimiento geométrico, por lo que sólo aplicaremos el algoritmo de Euclides a complejos cuyo cociente sea real (es decir, a los reales

disfrazados). En  $\mathbb{R}$  podremos estudiar con el algoritmo de Euclides la relación de cualesquiera dos números. Pero en  $\mathbb{C}$  nos limitaremos a estudiar la relación que guardan complejos colineales. Esto de hecho no nos molesta, puesto que en las ecuaciones diferenciales asociada a campos vectoriales con parte lineal del tipo (1.15), que es el que estamos trabajando, justo el caso de valores propios colineales da muchos problemas.

Notamos que la proposición 2.6, donde hablamos de los signos de los enteros  $a_i$  del algoritmo de Euclides, también es cierta en el caso  $a, b \in \mathbb{R}$ . Lo enunciamos a continuación.

**Proposición 2.18.** *Sean  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $b \neq 0$ . Si  $|a| \geq |b|$ , entonces en las expresiones (2.7) del algoritmo de Euclides los signos de todos los enteros  $a_i$ ,  $i = 0, \dots, n$  son iguales, y coinciden con el signo de  $a/b$ . Si  $|a| < |b|$ , ocurre lo mismo salvo que  $a_0 = 0$ .*

*Demostración.* El que para satisfacer las hipótesis del algoritmo de la división en  $\mathbb{R}$  deba suceder que  $a, qb$  y  $r$  tengan el mismo signo nos permite repetir tal cual la prueba de la proposición 2.6.  $\square$



# Capítulo 3

## Fracciones continuas

Las fracciones continuas son difíciles de definir formalmente. Las manejaremos como números, pero no son números. Podemos pensarlas como sucesiones, pero tampoco son sucesiones. Desde la perspectiva que nosotros las veremos, serán una forma específica de expresar números reales que nos permite estudiarlos. Aún sabiendo que tanto racionales como irracionales son densos en  $\mathbb{R}$ , al representarlos como fracciones continuas podremos estudiar su especial distribución en la recta real, así como qué tan bien podemos aproximar irracionales por racionales. Al mismo tiempo, podemos usarlas para dar una construcción de los números reales que refleje su distribución en la recta. En el contexto del problema de explosiones que planteamos al principio de este trabajo, son el código que guarda la información que da respuesta al problema.

Las fracciones continuas han sido de mucha importancia en el desarrollo de varias ramas de la matemática y han sido prominentes en el estudio de los números reales. Fue gracias a ellas que se pudo exhibir por primera vez un número trascendente, y sirvieron para dar la primera prueba de la trascendencia de  $\pi$ . Han sido útiles para problemas de toda índole desde elaboración de relojes y planetarios hasta el estudio de nudos topológicos. Hablar aquí de la historia de las fracciones continuas sale de contexto, pero incluimos algunas palabras al respecto en el Apéndice 1.

Este capítulo consta básicamente de tres secciones: en la primera veremos las partes elementales del funcionamiento de las fracciones continuas; en la segunda diremos cómo usarlas como representación de los números reales; y en la tercera daremos una interpretación geométrica de ellas, donde veremos las ventajas de la representación, y por qué es un lenguaje adecuado para estudiar aproximaciones racionales a irracionales. Agregamos al final unos comentarios respecto a la unicidad de la representación.

### 3.1. Primeras definiciones

**Definición 3.1.** *Una fracción continua es una expresión (finita o infinita) de la forma*

$$a_0 + \frac{b_0}{a_1 + \frac{b_1}{a_2 + \frac{b_2}{\ddots}}} \tag{3.1}$$



donde  $a_i, b_i, i \in \mathbb{N}$  toman valores en  $\mathbb{R}$ .<sup>1</sup>

Llamamos *fracciones continuas simples* a fracciones continuas de la forma

$$a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\ddots}}} \quad (3.2)$$

Como trabajaremos únicamente con fracciones continuas simples, en adelante nos referiremos con fracciones continuas a fracciones continuas simples. Denotaremos a la expresión (3.2) por  $[a_0, a_1, a_2, \dots]$ , y llamaremos a los elementos  $a_i$  *cocientes parciales* de la fracción continua. Diremos que la fracción continua finita  $[a_0, a_1, \dots, a_n]$  es de orden  $n$ .

Hasta este momento, la expresión (3.2) es únicamente formal. Aún en el caso finito, podemos tener problemas como el siguiente:

$$1 + \frac{1}{-1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{-1}}} \quad (3.3)$$

Para evitar esto, pediremos siempre que todos los cocientes parciales a partir de  $a_1$  tengan el mismo signo: o bien  $a_i > 0$  para  $i \geq 1$ , o  $a_i < 0$  para  $i \geq 0$  (sin restricción sobre  $a_0$ ). Entonces es claro que la fracción continua finita

$$[a_0, a_1, \dots, a_n] \sim a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_n}}} \quad (3.4)$$

representa un número real. En el caso infinito no queda claro que esto sea así. Para ver cuándo podemos decir que la fracción continua infinita  $[a_0, a_1, a_2, \dots]$  representa un número real,

---

<sup>1</sup>De manera general  $a_i$  y  $b_i$  en (3.1) pueden tomar valores en  $\mathbb{Z}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, K[x]$  o donde sea que tengan sentido las operaciones sumar e invertir.

analizamos la sucesión

$$\begin{aligned}
 c_0 &= a_0 \\
 c_1 &= a_0 + \frac{1}{a_1} \\
 c_2 &= a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2}} \\
 &\vdots \\
 c_n &= a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{a_n}}} \\
 &\vdots
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

y en caso de que ésta sea convergente, pensamos a la fracción continua  $[a_0, a_1, a_2, \dots]$  como una representación del número real al que la sucesión converge. En este caso diremos que la fracción continua  $[a_0, a_1, a_2, \dots]$  es convergente y converge a  $\alpha$  si la sucesión (3.5) converge a  $\alpha$ ; abusando de la notación, nos permitiremos escribir  $\alpha = [a_0, a_1, \dots]$ . Veremos a las fracciones continuas convergentes como números reales expresados como límites de sucesiones. A los términos  $c_i$  de (3.5) los llamaremos (algo abusivamente) *convergentes* de la fracción continua  $[a_0, a_1, \dots]$ ; nos servirán para estudiar la mayoría de las propiedades de las fracciones continuas.

## 3.2. Convergentes y residuos

Los elementos que usaremos frecuentemente en el estudio de las fracciones continuas y en el problema de ecuaciones que estamos abordando son los *convergentes*, y los *residuos* de una fracción continua. Definámoslos formalmente.

**Definición 3.2.** *Dada una fracción continua  $[a_0, a_1, a_2, \dots]$ , definimos su convergente de orden  $n$  como  $c_n = [a_0, a_1, \dots, a_n]$  y su residuo de orden  $n$  como  $s_n = [a_n, a_{n+1}, \dots]$ .*

**Observación 3.3.** *Las siguientes igualdades se satisfacen*

$$\begin{aligned}
 [a_0, a_1, a_2, \dots] &= [c_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \dots] \\
 [a_0, a_1, a_2, \dots] &= [a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, s_n].
 \end{aligned}$$

Notamos que los convergentes son siempre fracciones continuas finitas. Si una fracción continua es finita de orden  $n$ , entonces es igual su convergente  $c_n$ . Los residuos de una fracción continua  $[a_0, a_1, \dots]$  son fracciones continuas finitas si y sólo si la fracción continua  $[a_0, a_1, \dots]$  es finita, y son fracciones continuas convergentes si y sólo si  $[a_0, a_1, \dots]$  lo es. Es algo abusivo escribir  $s_n = [a_n, a_{n+1}, \dots]$ , pues según la convención que dimos arriba,  $s_n$  es el número al que converge  $[a_n, a_{n+1}, \dots]$ , cuando no sabemos si  $[a_n, a_{n+1}, \dots]$  es convergente. Ésta será la única excepción a la convención:  $s_n$  denota a la fracción continua  $[a_n, a_{n+1}, \dots]$ , independientemente

de si ésta es convergente o no. De cualquier manera, sólo trabajaremos con fracciones continuas convergentes, por lo que esto no supondrá ningún problema y  $s_n$  será siempre un número.

Para poder estudiar la convergencia de (3.5) veremos algunas propiedades que cumplen los convergentes, para lo que antes necesitamos expresarlos de manera conveniente.

**Definición 3.4.** *Dada una fracción continua  $[a_0, a_1, a_2, \dots]$ , definimos recursivamente para  $n \geq 0$  a los números  $p_n$  y  $q_n$  de la siguiente forma*

$$\begin{aligned} p_n &= a_n p_{n-1} + p_{n-2} \\ q_n &= a_n q_{n-1} + q_{n-2} \end{aligned} \quad (3.6)$$

tomando  $p_{-2} = 0, q_{-2} = 1, p_{-1} = 1$  y  $q_{-1} = 0$ .

**Observación 3.5.** *Con la definición 3.4, dada la fracción continua  $[a_0, a_1, a_2, \dots]$  tenemos que*

$$\begin{array}{lll} p_0 = a_0 & p_1 = a_0 a_1 + 1 & p_2 = a_0 a_1 a_2 + a_0 + a_2 \\ q_0 = 1 & q_1 = a_1 & q_2 = a_1 a_2 + 1. \end{array} \quad (3.7)$$

Las ecuaciones (3.6) serán muy significativas en todo el estudio de las fracciones continuas, y nos permitirán sacar mejor provecho de la interpretación geométrica de las fracciones continuas gracias a que  $p_n$  y  $q_n$  definidos de esta manera nos sirven para escribir a los convergentes de una fracción continua.

**Teorema 3.6.** *Dada una fracción continua  $[a_0, a_1, a_2, \dots]$ , sus convergentes satisfacen*

$$c_n = \frac{p_n}{q_n}$$

para  $n \geq 0$ , con  $p_n$  y  $q_n$  como en la definición 3.4.

*Demostración.* Haremos inducción. Verificamos la afirmación para los primeros convergentes comparando con las igualdades (3.7):

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{a_0}{1} = \frac{p_0}{q_0} \\ c_1 &= a_0 + \frac{1}{a_1} = \frac{a_0 a_1 + 1}{a_1} = \frac{p_1}{q_1} \\ c_2 &= a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2}} = a_0 + \frac{a_2}{a_1 a_2 + 1} = \frac{a_0 a_1 a_2 + a_0 + a_2}{a_1 a_2 + 1} = \frac{p_2}{q_2}. \end{aligned}$$

Ahora supongamos que el enunciado del teorema 3.6 se satisface para  $0 \leq m \leq n$ . De la observación 3.3 tenemos que

$$c_{n+1} = [a_0, a_1, \dots, a_n, a_{n+1}] = [a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, s_n], \quad \text{con } s_n = a_n + \frac{1}{a_{n+1}}.$$

Consideramos entonces la fracción continua  $[a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, (a_n + 1/(a_{n+1}))]$ , para la que se satisface por hipótesis de inducción que

$$\left[ a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, \left( a_n + \frac{1}{a_{n+1}} \right) \right] = \frac{\left( a_n + \frac{1}{a_{n+1}} \right) p_{n-1} + p_{n-2}}{\left( a_n + \frac{1}{a_{n+1}} \right) q_{n-1} + q_{n-2}}.$$

Multiplicando el numerador y denominador del lado derecho de la ecuación por  $a_{n+1}$  y desarrollando, tenemos

$$\frac{a_{n+1}(a_n p_{n-1} + p_{n-2}) + p_{n-1}}{a_{n+1}(a_n q_{n-1} + q_{n-2}) + q_{n-1}}.$$

Ahora,  $a_n p_{n-1} + p_{n-2}$  y  $a_n q_{n-1} + q_{n-2}$  son por definición  $p_n$  y  $q_n$  respectivamente, por lo que

$$\begin{aligned} c_{n+1} &= \left[ a_0, a_1, \dots, \left( a_n + \frac{1}{a_{n+1}} \right) \right] \\ &= \frac{a_{n+1} p_n + p_{n-1}}{a_{n+1} q_n + q_{n-1}} \\ &= \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}, \end{aligned}$$

con lo que concluimos la prueba. □

Este es un teorema importante porque nos da una manera de explorar el comportamiento de los convergentes de una fracción continua a través de las ecuaciones (3.6), que nos permiten escribir cada uno de sus convergentes en términos de los dos anteriores. Podemos aplicar esto a  $\alpha = [a_0, a_1, a_2, \dots]$  visto como el convergente  $c_n$  de la fracción continua  $[a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, s_n]$ .

**Proposición 3.7.** *Sea  $\alpha = [a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, s_n]$ . Entonces*

$$\alpha = \frac{s_n p_{n-1} + p_{n-2}}{s_n q_{n-1} + q_{n-2}}.$$

*Demostración.* Sea  $\alpha = [a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, s_n]$ . Ya que  $\alpha$  es el convergente  $c_n$  de  $[a_0, \dots, a_{n-1}, s_n]$ , pues

$$\alpha = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{s_n}}}$$

entonces del teorema 3.6 y la definición 3.4 se tiene que

$$\alpha = c_n = \frac{p_n}{q_n} = \frac{s_n p_{n-1} + p_{n-2}}{s_n q_{n-1} + q_{n-2}}$$

como queríamos. □

*Nota:* Al escribir  $\alpha = [a_0, a_1, \dots]$  estamos suponiendo que  $[a_0, a_1, \dots]$  es convergente y converge a  $\alpha$ , por lo que  $s_n$  es en efecto un número real.

Otra propiedad importante que usaremos frecuentemente queda asentada en el siguiente teorema.

**Teorema 3.8.** *Dada la fracción continua  $[a_0, a_1, a_2, \dots]$ ,  $p_n$  y  $q_n$  definidos como en (3.6) satisfacen*

$$p_{n-1}q_n - p_nq_{n-1} = (-1)^n \quad \text{para } n \geq 1. \quad (3.8)$$

*Demostración.* Haremos inducción. De (3.7) tenemos que

$$p_0q_1 - p_1q_0 = a_0a_1 - (a_0a_1 + 1) = -1.$$

Supongamos ahora que  $p_{n-2}q_{n-1} - p_{n-1}q_{n-2} = (-1)^{n-1}$ . De la definición 3.4, tenemos que

$$\begin{aligned} p_{n-1}q_n - p_nq_{n-1} &= p_{n-1}(a_nq_{n-1} + q_{n-2}) - (a_np_{n-1} + p_{n-2})q_{n-1} \\ &= p_{n-1}a_nq_{n-1} + p_{n-1}q_{n-2} - q_{n-1}a_np_{n-1} - q_{n-1}p_{n-2} \\ &= (-1)(p_{n-2}q_{n-1} - p_{n-1}q_{n-2}) \\ &= (-1)^n \end{aligned}$$

y concluimos la prueba. □

A partir de este teorema obtenemos un útil corolario que nos permitirá medir la “cercanía” de los convergentes.

**Corolario 3.9.** *Para la fracción continua  $[a_0, a_1, a_2, \dots]$ , se tiene que  $p_n$  y  $q_n$  definidos como en (3.6) satisfacen*

$$\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} - \frac{p_n}{q_n} = \frac{(-1)^n}{q_{n-1}q_n}, \quad \text{para } n \geq 1. \quad (3.9)$$

### 3.3. Representación de los números reales por fracciones continuas

Queremos usar a las fracciones continuas como una representación los números reales que nos dé información del número representado. Para esto necesitamos dar una correspondencia biunívoca entre números reales y cierto tipo de fracciones continuas, de modo que cada real se pueda expresar de manera única como una fracción continua de este tipo. Debemos escoger un subconjunto de fracciones continuas (convergentes) en el que sea biyectiva la función  $f$  que a cada fracción continua finita le asocia el número real que representa:

$$f([a_0, a_1, a_2, \dots]) = \begin{cases} a_0 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{a_n}} & \text{si } [a_0, a_1, a_2, \dots] \text{ es finita de orden } n \\ \alpha & \text{si } [a_0, a_1, a_2, \dots] \text{ converge a } \alpha. \end{cases} \quad (3.10)$$

Si no tomamos ninguna restricción sobre los cocientes parciales de las fracciones continuas, claramente no se dan las condiciones deseadas. Aún si tomamos únicamente fracciones continuas finitas, podemos tener problemas como el de (3.3) y no tenemos unicidad en la representación:

$$[1, \sqrt{2}, \sqrt{2}] = [1, 3/\sqrt{2}],$$

incluso si los cocientes parciales son enteros:

$$[1, 1, 2, 1] = [1, 1, 3].$$

Sin embargo, si nos restringimos a fracciones continuas  $[a_0, a_1, \dots]$  cuyos cocientes parciales satisfagan

- a)  $a_0 \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$
  - b)  $a_i \in \mathbb{Z}^+$  para  $i \in \mathbb{N}, i \geq 1$
  - c) si la fracción continua es finita de orden  $n \geq 1$ , entonces  $a_n \neq 1$ ,
- (3.11)

o bien

- a)  $a_0 \in \mathbb{Z}^- \cup \{0\}$
  - b)  $a_i \in \mathbb{Z}^-$  para  $i \in \mathbb{N}, i \geq 1$
  - c) si la fracción continua es finita de orden  $n \geq 1$ , entonces  $a_n \neq -1$ ,
- (3.12)

entonces podremos probar que la función  $f$  de (3.10) es biyectiva, y tendremos una buena representación de los números reales con este tipo de fracciones continuas. Por comodidad, llamaremos a las fracciones continuas que satisfagan (3.11) fracciones continuas positivas, y a las fracciones continuas que satisfagan (3.12) fracciones continuas negativas.

Para probar que para fracciones continuas positivas y fracciones continuas negativas  $f$  es una función biyectiva, necesitamos probar que

- 1) tanto las fracciones continuas positivas como las negativas en verdad representan números reales y entonces  $f$  está bien definida para ellas;
- 2) la representación de un real como fracción continua positiva o negativa es única, es decir, fracciones continuas distintas que satisfacen (3.11) ó (3.12) convergen a reales distintos (con esto garantizamos la inyectividad de  $f$ );
- 3) cada real se puede expresar como una fracción continua positiva o negativa (con lo que probamos la suprayectividad de  $f$ ).

En esta sección nos dedicaremos a probar estas tres cosas, para lo que antes estudiaremos algunos aspectos de los convergentes. Notamos que para una fracción continua positiva o negativa,  $p_n$  y  $q_n$  definidos como en (3.6) son enteros, por lo que sus convergentes representan números racionales. En particular, si la fracción continua es finita, entonces representa un número racional (positivo si la fracción continua es positiva, y negativo si es negativa). De los residuos sólo podemos decir lo mismo si la fracción continua es finita.

El que los convergentes sean números racionales es importante, pues al representar a los reales con fracciones continuas positivas o negativas vemos a los irracionales como límites de sucesiones de racionales, lo que nos permite dar aproximaciones racionales de ellos. Después veremos qué tan buenas aproximaciones.

Si  $[a_0, a_1, a_2, \dots]$  satisface (3.11) ó (3.12), tenemos como corolario del teorema 3.8 que  $p_n$  y  $q_n$  definidos como en (3.6) son primos relativos. Para ver esto retomamos la ecuación (3.8):

$$p_{n-1}q_n - p_nq_{n-1} = (-1)^n \quad \text{para } n \geq 1,$$

y notamos que si  $d \mid p_n$  y  $d \mid q_n$ , entonces  $d \mid (-1)^n$ , por lo que  $d = \pm 1$  y  $\text{mcd}(p_n, q_n) = 1$ . Dado que podemos escribir

$$c_n = \frac{p_n}{q_n}$$

con  $p_n$  y  $q_n$  primos relativos, pensaremos en  $p_n/q_n$  como la representación canónica del convergente  $c_n$ . Cuando hablemos de los convergentes de una fracción continua, a menos de que indiquemos lo contrario, los pensaremos expresados de esta manera.

Otro aspecto que nos será útil queda planteado en la siguiente proposición.

**Proposición 3.10.** *Sea  $a/b = [a_0, a_1, \dots, a_n]$  una fracción continua. Entonces  $-a/b = [-a_0, -a_1, \dots, -a_n]$ .*

*Demostración.* Haremos inducción sobre el orden de la fracción continua. El caso  $n = 0$  es claro. Supongamos ahora que para una fracción continua de orden  $n - 1$ , digamos  $[b_0, b_1, \dots, b_{n-1}]$ , se satisface que  $-[b_0, b_1, \dots, b_{n-1}] = [-b_0, -b_1, \dots, -b_{n-1}]$ . Tomamos ahora una fracción continua de orden  $n$ ,  $[a_0, a_1, \dots, a_n]$ . Por hipótesis de inducción tenemos que  $-[a_1, \dots, a_n] = [-a_1, -a_2, \dots, -a_n]$ . Y entonces

$$\begin{aligned} -[a_0, a_1, \dots, a_n] &= -a_0 - \frac{1}{[a_1, \dots, a_n]} \\ &= -a_0 + \frac{1}{[-a_1, \dots, -a_n]} \\ &= [-a_0, -a_1, \dots, -a_n]. \end{aligned}$$

como queríamos probar. □

Recordando la definición de los convergentes  $c_i$  se tiene el siguiente corolario.

**Corolario 3.11.** *Dada  $[a_0, a_1, \dots]$  con convergentes  $c_i$ , y  $[-a_0, -a_1, \dots]$  con convergentes  $c'_i$ , se satisface que*

$$c_i = -c'_i \quad \text{para todo } i \in \mathbb{N}.$$

Esto significa que si la fracción continua  $[a_0, a_1, \dots]$  es convergente, también lo será la fracción continua  $[-a_0, -a_1, \dots]$ , de modo que en muchas ocasiones bastará estudiar el caso positivo.

**Teorema 3.12.** *Sea  $\alpha = [a_0, a_1, \dots]$ . Entonces  $-\alpha = [-a_0, -a_1, \dots]$ .*

*Demostración.* Sea  $c_i$  el convergente de orden  $i$  de  $\alpha$ , y sea  $c'_i$  el de  $-\alpha$ ,  $i \in \mathbb{N}$ . Dado que  $\{c_n\} = \{-c'_n\}$  y que por hipótesis  $\{c_n\} \rightarrow \alpha$ , entonces  $\{-c'_n\} \rightarrow -\alpha$ . □

Ahora sí estamos listos para probar que las fracciones continuas positivas o negativas en verdad representan números reales. Ya sabemos que es así en el caso finito. Veamos que en el caso infinito son convergentes.

Tomemos una fracción continua positiva  $[a_0, a_1, \dots]$  (que satisfaga (3.11)). En este caso, dado que  $a_0 \geq 0$  y  $a_i > 0$  para toda  $i \geq 1$ , entonces  $p_0 \geq 0$ ,  $p_n > 0$  para  $n \geq 1$ , y  $q_n > 0$  para

toda  $n \in \mathbb{N}$ , y las sucesiones  $\{p_n\}$  y  $\{q_n\}$  son estrictamente crecientes (a partir de  $n = 0$ ). Del corolario 3.9 tenemos que (considerando que  $q_{n-1}$  y  $q_n$  son enteros positivos)

$$\begin{aligned} \frac{p_n}{q_n} &< \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} && \text{si } n \text{ es par, y} \\ \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} &< \frac{p_n}{q_n} && \text{si } n \text{ es impar.} \end{aligned} \quad (3.13)$$

Con esto podemos probar la siguiente proposición.

**Proposición 3.13.** *Para una fracción continua positiva se tiene que la sucesión de sus convergentes pares es estrictamente creciente y la de sus convergentes impares es estrictamente decreciente. Más aún, cualquier convergente par es menor que cualquier convergente impar.*

*Demostración.* Multiplicando la primera ecuación de (3.4) por  $q_{n-2}$ , la segunda por  $p_{n-2}$ , y restando la primera de la segunda, obtenemos que para  $n \geq 2$

$$p_{n-2}q_n - p_nq_{n-2} = a_n(q_{n-1}p_{n-2} - p_{n-1}q_{n-2}),$$

que por el teorema 3.8 se traduce en

$$p_{n-2}q_n - p_nq_{n-2} = a_n(-1)^{n-1}.$$

Entonces para  $n \geq 2$

$$\frac{p_{n-2}}{q_{n-2}} - \frac{p_n}{q_n} = \frac{(-1)^{n-1}a_n}{q_nq_{n-2}}$$

Puesto que  $a_n, q_n$  y  $q_{n-2}$  son enteros no negativos, tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{p_n}{q_n} &< \frac{p_{n-2}}{q_{n-2}} && \text{si } n \text{ es par, y} \\ \frac{p_{n-2}}{q_{n-2}} &< \frac{p_n}{q_n} && \text{si } n \text{ es impar.} \end{aligned}$$

De estas desigualdades podemos ver que los convergentes pares forman una subsucesión estrictamente creciente, mientras que los impares forman una estrictamente decreciente. Retomando las desigualdades (3.13), podemos decir cómo están ordenados los convergentes:

$$\frac{p_0}{q_0} < \frac{p_2}{q_2} < \frac{p_4}{q_4} < \dots < \frac{p_5}{q_5} < \frac{p_3}{q_3} < \frac{p_1}{q_1}, \quad (3.14)$$

y concluir que cualquier convergente par es menor que cualquiera de los impares.  $\square$

De la proposición 3.13 tenemos que tanto la sucesión de convergentes pares como la de los impares son convergentes. De ser convergente la sucesión  $\{\frac{p_n}{q_n}\} = \{c_n\}$ , ambas convergerán a un mismo número, que será el supremo de los convergentes pares y el ínfimo de los impares. Veamos que la sucesión  $\{c_n\}$  sí es convergente, con lo que habremos probado la convergencia de las fracciones continuas positivas, y por tanto también de las negativas.

**Teorema 3.14.** *Toda fracción continua positiva o negativa infinita es convergente.*



*Demostración.* Por el teorema 3.12, basta probar que toda fracción continua positiva (que satisfaga (3.11)) es convergente. Sea  $[a_0, a_1, \dots]$  una fracción continua positiva. Veremos que la sucesión de sus convergentes  $(\{c_n\})$ , es convergente. Del corolario 3.9 tenemos que

$$\left| \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} - \frac{p_n}{q_n} \right| = \frac{1}{q_{n-1}q_n}.$$

Dado que  $q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2}$  y  $q_i$  y  $a_i$  son enteros positivos para  $i \geq 0$  (salvo  $a_0$ , que puede ser cero), entonces  $q_{n-1} < q_n$  y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = \infty$$

y entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} - \frac{p_n}{q_n} \right| = 0. \quad (3.15)$$

Esto, aunado a (3.14) garantiza que la sucesión  $\{c_n\} = \{p_n/q_n\}$  converge,<sup>2</sup> es decir,  $[a_0, a_1, \dots]$  es convergente.  $\square$

**Observación 3.15.** Aunque hicimos las pruebas para el caso positivo y concluimos el caso negativo del corolario 3.11 y el teorema 3.12, muchas de las cosas que dijimos en ellas podemos decir las también para el caso negativo con pequeñas modificaciones, usando estos mismos resultados. Por ejemplo, para  $\alpha = [a_0, a_1, \dots]$  las sucesiones  $\{|p_n|\}$  y  $\{|q_n|\}$  son estrictamente crecientes (a partir de  $n = 0$ ), y si  $\alpha < 0$  sus convergentes están ordenados de la siguiente manera

$$\frac{p_0}{q_0} > \frac{p_2}{q_2} > \frac{p_4}{q_4} > \dots > \frac{p_5}{q_5} > \frac{p_3}{q_3} > \frac{p_1}{q_1},$$

con  $\alpha$  estrictamente entre cualesquiera dos convergentes consecutivos.

Un beneficio que tendrá la representación de los reales como fracciones continuas positivas o negativas es que un número será racional si y sólo si su expresión en fracción continua es finita.

**Proposición 3.16.** Toda fracción continua positiva o negativa infinita es un número irracional.

*Demostración.* Sea  $[a_0, a_1, \dots]$  una fracción continua positiva infinita. Supongamos que podemos escribir  $[a_0, a_1, \dots] = p/q$ ,  $p/q \in \mathbb{Q}$ , con  $p$  y  $q$  primos relativos. Como

$$\frac{p_n}{q_n} < \frac{p}{q} < \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}, \quad \text{o} \quad \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} < \frac{p}{q} < \frac{p_n}{q_n},$$

según sea  $n$  par o impar, de cualquier modo tenemos que

$$\left| \frac{p}{q} - \frac{p_n}{q_n} \right| \leq \left| \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} - \frac{p_n}{q_n} \right| = \frac{1}{q_n q_{n-1}}.$$

Multiplicando por  $q_n q$  obtenemos

$$0 < |pq_n - p_n q| \leq \frac{q}{q_{n-1}}$$

<sup>2</sup>Si el límite en (3.15) es cero, y los convergentes están ordenados como en (3.14), entonces la sucesión  $\{c_n\}$  es de Cauchy y es por tanto convergente.

(notamos que  $|pq_n - p_nq|$  es mayor que cero, pues  $p/q \neq p_n/q_n$ ). Como la sucesión  $\{q_n\}$  es creciente, podemos tomar  $n$  suficientemente grande tal que  $q/q_{n-1} < 1$ . Esto implica que  $|pq_n - p_nq|$  es un número entero estrictamente entre 0 y 1. Contradicción. Por lo tanto  $[a_0, a_1, \dots]$  es un número irracional. Ya que  $\alpha$  es racional si y sólo si  $-\alpha$  lo es, el caso negativo es inmediato del teorema 3.12.  $\square$

Hasta ahora tenemos el primer paso: las fracciones continuas positivas o negativas en verdad representan números reales (positivos en el caso de las positivas, negativos en el caso de las negativas). Más aún, representan números racionales si son finitas, e irracionales si son infinitas. El siguiente paso para lograr nuestro objetivo es ver que esta representación es única.

**Teorema 3.17.** *Sean  $[a_0, a_1, \dots]$  y  $[b_0, b_1, \dots]$  fracciones continuas positivas o negativas. Si  $[a_0, a_1, \dots] = \alpha = [b_0, b_1, \dots]$ , entonces  $a_i = b_i$  para toda  $i \in \mathbb{N}$ . En el caso finito, si  $[a_0, \dots, a_n] = \alpha = [b_0, \dots, b_m]$ , entonces  $n = m$  y  $a_i = b_i$  para  $i = 1, \dots, n$ . Es decir, la representación en fracción continua bajo las condiciones (3.11) o (3.12) es única.*

*Demostración.* Sean  $[a_0, a_1, \dots]$  y  $[b_0, b_1, \dots]$  fracciones continuas positivas o negativas. Si una de ellas es positiva y la otra negativa, deben representar números reales distintos, pues las fracciones continuas positivas representan reales positivos y las fracciones continuas negativas representan reales negativos. Supongamos entonces que ambas son fracciones continuas positivas. Veamos primero el caso infinito. Supongamos  $\alpha = [a_0, a_1, \dots]$ ,  $\beta = [b_0, b_1, \dots]$  y  $\alpha = \beta$ . Entonces la parte entera de  $\alpha$ , que es  $a_0$  y la parte entera de  $\beta$ , que es  $b_0$  son iguales:  $a_0 = b_0$ . Pero entonces  $[a_0, a_1, \dots] - a_0 = [b_0, b_1, \dots] - b_0$ . Tomamos inversos y tenemos que  $[a_1, a_2, \dots] = [b_1, b_2, \dots]$ . Continuamos de esta manera y obtenemos que  $a_i = b_i$  para toda  $i \in \mathbb{N}$ . Ahora veamos el caso finito. Supongamos  $[a_0, a_1, \dots, a_n] = [b_0, b_1, \dots, b_m]$ . Supongamos s.p.g. que  $n \leq m$ . Procediendo de igual manera que en el caso irracional, llegamos a que si  $n = m$ , entonces  $a_i = b_i$  para  $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ ; si  $n < m$ , entonces  $a_i = b_i$  para  $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$  y

$$a_n = b_n + \frac{1}{s_{n+1}},$$

donde  $s_{n+1}$  es residuo de  $[b_0, b_1, \dots, b_m]$ . Como  $a_n$  es un entero, entonces  $s_{n+1} = 1$ ,  $m = n + 1$  y  $a_n = b_n + 1$ . Así que  $[a_0, a_1, \dots, a_n] = [b_0, \dots, b_n, b_{n+1}] = [a_0, a_1, \dots, a_n - 1, 1]$ . Como pedimos que el último coeficiente fuera distinto de 1, entonces debe ser  $n = m$ , por lo que  $a_i = b_i$  para  $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ , como queríamos probar. Si ambas fracciones continuas son negativas, usamos el caso anterior y el teorema 3.12.  $\square$

Probamos ya los dos primeros puntos a tratar en esta sección: las fracciones continuas positivas o negativas representan números reales, y lo hacen de manera única. Sólo nos falta ver que podemos expresar a cada número real como fracción continua positiva o negativa (que satisfaga (3.11) ó (3.12)). Para esto necesitamos decir qué fracción continua positiva o negativa asignaremos a un real arbitrario  $\alpha$ , y probar que esta fracción continua en efecto representa a  $\alpha$ .

Para asignar una fracción continua a un número real usaremos el algoritmo de Euclides. Sea  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Si  $\alpha \in \mathbb{Q}$ , tomamos  $a = p$  y  $b = q$ , donde  $p/q$  es la expresión en fracción irreducible de  $\alpha$ . Si  $\alpha \notin \mathbb{Q}$  tomamos  $a = \alpha$  y  $b = 1$ . Y aplicamos el algoritmo de Euclides a la pareja  $(b, a)$ .

Recordemos rápidamente las ecuaciones (2.2) del capítulo anterior:

$$\begin{array}{ll}
 a = a_0b + r_0 & \text{con } |a_0b| \leq |a| \text{ y } |r_0| < |b| \\
 b = a_1r_0 + r_1 & \text{con } |a_1r_0| \leq |b| \text{ y } |r_1| < |r_0| \\
 r_0 = a_2r_1 + r_2 & \text{con } |a_2r_1| \leq |r_0| \text{ y } |r_2| < |r_1| \\
 \vdots & \vdots \\
 r_{n-3} = a_{n-1}r_{n-2} + r_{n-1} & \text{con } |a_{n-1}r_{n-2}| \leq |r_{n-3}| \text{ y } |r_{n-1}| < |r_{n-2}| \\
 r_{n-2} = a_n r_{n-1} + r_n & \text{con } a_n r_{n-1} = r_{n-2} \text{ y } r_n = 0.
 \end{array}$$

Dividiendo la primera ecuación ( $a = a_0b + r_0$ ) por  $b$  tenemos que

$$\frac{a}{b} = a_0 + \frac{r_0}{b} = a_0 + \frac{1}{\frac{b}{r_0}}. \quad (3.16)$$

Tomamos  $a_0$  como el primer cociente de la fracción continua de  $a/b$ . Ahora tomamos la segunda ecuación,  $b = a_1r_0 + r_1$ , y al dividir por  $r_0$  obtenemos

$$\frac{b}{r_0} = a_1 + \frac{r_1}{r_0} = a_1 + \frac{1}{\frac{r_0}{r_1}}. \quad (3.17)$$

Tomamos  $a_1$  como el segundo cociente de la fracción continua de  $a/b$ , puesto que de (3.16) y (3.17) se tiene

$$\frac{a}{b} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{\frac{r_0}{r_1}}}$$

Continuamos de esta manera, dividiendo  $r_{k-2} = a_k r_{k-1} + r_k$  por  $r_{k-1}$ :

$$\frac{r_{k-2}}{r_{k-1}} = a_k + \frac{r_k}{r_{k-1}}$$

y tomando como cociente parcial  $a_k$  al entero  $a_k$  obtenido en las ecuaciones (2.2) del algoritmo de Euclides:

$$\frac{a}{b} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_{k-1} + \frac{1}{\frac{r_{k-2}}{r_{k-1}}}}}} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_{k-1} + \frac{1}{a_k + \frac{r_k}{r_{k-1}}}}}} \quad (3.18)$$

Podemos continuar este procedimiento mientras tengamos  $r_k \neq 0$ , lo que pasa para toda  $k \in \mathbb{N}$  si  $a/b$  es irracional. Así, si  $a/b$  es irracional, obtenemos una sucesión infinita de enteros  $a_i$  (los que obtenemos del algoritmo de Euclides en (2.7)), que son los que tomamos como cocientes

de la fracción continua de  $a/b = \alpha$ :  $\alpha = [a_0, a_1, a_2, \dots]$ . Si  $a/b$  es racional, entonces tenemos que  $r_n = 0$  p.a.  $n \in \mathbb{N}$ , en cuyo caso nos detenemos cuando  $k = n$ :

$$\frac{a}{b} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{a_n + \frac{r_n}{r_{n-1}}}}}} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{a_n}}}$$

y obtenemos una fracción continua finita:  $\alpha = [a_0, a_1, \dots, a_n]$ .

Notamos en la expresión (3.18) que podemos expresar al residuo  $s_k$  de  $\alpha$  como el cociente  $r_{k-2}/r_{k-1}$ , donde  $r_i$  es el  $i$ -ésimo residuo obtenido en el algoritmo de Euclides aplicado a la pareja  $(b, a)$ .

Recordamos de la observación 2.6 que los enteros que obtenemos del algoritmo de Euclides aplicado a  $(b, a)$  tienen todos el mismo signo (salvo el primero, que puede ser cero), y coincide con el signo de  $a/b$ . Esto implica que la fracción continua que obtenemos aplicando el algoritmo de Euclides satisface las condiciones  $a)$  y  $b)$  de (3.11) ó (3.12). Para ver que se satisface la condición  $c)$ , recordamos que en la observación 2.13 vimos que para el último entero  $a_n$  del algoritmo de Euclides expuesto en (2.2) se tiene  $a_n \neq \pm 1$ .

Acabamos de dar la prueba del siguiente teorema.

**Teorema 3.18.** *Sea  $a/b \in \mathbb{Q}$ , y sean  $a_0, a_1, \dots, a_n$  los enteros resultantes de aplicar el algoritmo de Euclides expuesto en (2.2) a la pareja  $(b, a)$ . Entonces  $a/b = [a_0, a_1, a_2, \dots, a_n]$ , y esta última fracción continua satisface las condiciones (3.11) ó (3.12).*

Notamos que los enteros  $a_i$  que brinda el algoritmo de Euclides no dependen más que del cociente de los números a los que lo apliquemos, por lo que es igual aplicarlo a  $(b, a)$  que a  $(1, a/b)$ .

Si  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ , aún nos falta ver que la fracción continua que obtenemos al aplicar el algoritmo de Euclides a  $(1, \alpha)$  en verdad converge a  $\alpha$ .

**Proposición 3.19.** *Sea  $\alpha \in \mathbb{R}$ , y sean  $a_i$ , con  $i \in \mathbb{N}$  los enteros obtenidos al aplicar a la pareja  $(1, \alpha)$  el algoritmo de Euclides en  $\mathbb{R}$  expuesto en (2.5). Entonces  $\alpha = [a_0, a_1, a_2, \dots]$ , y esta última es una fracción continua positiva o negativa.*

*Demostración.* El caso racional lo vimos ya. Veremos el caso irracional positivo, y luego usaremos el teorema 3.12 para deducir el caso negativo. Sea  $\alpha \in \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{Q}$ , y sean  $a_i$ , con  $i \in \mathbb{N}$  los enteros obtenidos al aplicar a la pareja  $(b, a) = (1, \alpha)$  el algoritmo de Euclides expuesto en (2.5). Vimos ya que la fracción continua  $[a_0, a_1, \dots]$  es positiva, y por lo tanto, es convergente. Falta ver que converge a  $\alpha$ . Tenemos que

$$\alpha = \frac{\alpha}{1} = \frac{a}{b} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{\frac{r_{n-2}}{r_{n-1}}}}}}$$

Puesto que  $s_n = r_{n-2}/r_{n-1}$ , de la proposición 3.7 tenemos que

$$\alpha = \frac{s_n p_{n-1} + p_{n-2}}{s_n q_{n-1} + q_{n-2}}.$$

Entonces

$$\begin{aligned} \left| \alpha - \frac{p_n}{q_n} \right| &= \left| \frac{s_n p_{n-1} + p_{n-2}}{s_n q_{n-1} + q_{n-2}} - \frac{a_n p_{n-1} + p_{n-2}}{a_n q_{n-1} + q_{n-2}} \right| \\ &= \left| \frac{a_n s_n p_{n-1} q_{n-1} + a_n p_{n-2} q_{n-1} + s_n p_{n-1} q_{n-2} + p_{n-2} q_{n-2}}{(s_n q_{n-1} + q_{n-2})} \right. \\ &\quad \left. - \frac{-a_n s_n p_{n-1} q_{n-1} - s_n p_{n-2} q_{n-1} - a_n p_{n-1} q_{n-2} - p_{n-2} q_{n-2}}{(a_n q_{n-1} + q_{n-2})} \right| \\ &= \left| \frac{a_n (p_{n-2} q_{n-1} - p_{n-1} q_{n-2}) + s_n (p_{n-2} q_{n-1} - p_{n-1} q_{n-2})}{(s_n q_{n-1} + q_{n-2})(a_n q_{n-1} + q_{n-2})} \right| \\ &= \frac{(a_n + s_n)}{(s_n q_{n-1} + q_{n-2})(a_n q_{n-1} + q_{n-2})} \\ &= \frac{a_n}{(s_n q_{n-1} + q_{n-2})(a_n q_{n-1} + q_{n-2})} + \frac{s_n}{(s_n q_{n-1} + q_{n-2})(a_n q_{n-1} + q_{n-2})}. \end{aligned}$$

En la penúltima igualdad usamos que  $|p_{n-2} q_{n-1} - p_{n-1} q_{n-2}| = 1$ , y que todos los términos que aparecen son enteros no negativos. Ahora usamos que  $a_n < a_n q_{n-1} + q_{n-2}$  y  $s_n < s_n q_{n-1} + q_{n-2}$  para ver que

$$\left| \alpha - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{s_n q_{n-1} + q_{n-2}} + \frac{1}{a_n q_{n-1} + q_{n-2}}$$

y como  $\{q_n\}$  es una sucesión de enteros estrictamente creciente, tenemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \alpha - \frac{p_n}{q_n} \right| = 0.$$

Esto prueba que la fracción continua que dimos para  $\alpha$  en efecto converge a  $\alpha$ . Para el caso negativo recordamos el teorema 3.12 y que los enteros  $a_i$  obtenidos al aplicar el algoritmo de Euclides a  $(b, a)$  y a  $(-b, a)$  son los mismos salvo el signo.  $\square$

Finalmente logramos probar los tres puntos que nos propusimos en esta sección. Los resumimos en el siguiente teorema.

**Teorema 3.20.** *Todo número real se expresa de manera única en una fracción continua positiva o negativa.*

Así, cuando hablemos de la expresión en fracción continua de un número real, nos referiremos a una fracción continua positiva o negativa (que satisfaga (3.11) o (3.12)). Lo que sigue es ver qué ventajas nos da representar a un número real de esta manera. Esto lo diremos a lo largo de varios capítulos. Por ahora veamos una interpretación geométrica de las fracciones continuas.

### 3.4. Geometría de las fracciones continuas

Sea  $\alpha = [a_0, a_1, a_2, \dots] \in \mathbb{R}$ . Pensemos a  $\alpha$  como la pendiente de una recta que pasa por el origen, y a los convergentes  $c_n = p_n/q_n$  como pendientes de los vectores  $(q_n, p_n)$ . Desde esta perspectiva, podemos escribir la definición recursiva de  $p_n$  y  $q_n$  de la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} q_n \\ p_n \end{pmatrix} = a_n \begin{pmatrix} q_{n-1} \\ p_{n-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} q_{n-2} \\ p_{n-2} \end{pmatrix}. \quad (3.19)$$

Lo ilustramos en la figura 3.1 para  $a_n = 3$ .

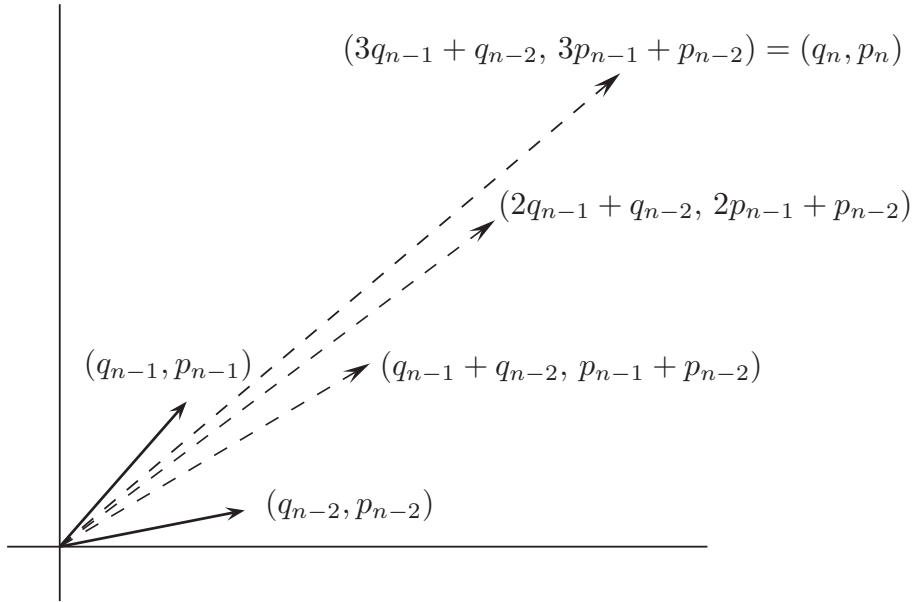


Figura 3.1: Interpretación geométrica de definición recursiva de  $p_n$  y  $q_n$ .

Los convergentes de  $\alpha$  son las pendientes de una sucesión (finita o infinita) de vectores  $\{(q_n, p_n)\}$ , en donde los dos primeros términos son  $(q_{-2}, p_{-2}) = (1, 0)$  y  $(q_{-1}, p_{-1}) = (0, 1)$ , y a partir de aquí cada nuevo vector se obtiene a partir de sumas de los dos anteriores; la manera en que sumamos la dan los cocientes parciales  $a_i$  de la fracción continua de  $\alpha$ . Notamos que si  $a/b$  es racional, los cocientes parciales  $a_i$  dicen cómo expresar al vector  $(b, a)$  como combinación lineal entera de  $(0, 1)$  y  $(1, 0)$ .

Aunque nosotros estaremos trabajando con fracciones continuas positivas o negativas, notamos que dada una fracción continua  $[a_0, a_1, \dots]$ , la definición recursiva de  $p_n$  y  $q_n$  y el hecho de que  $c_n = p_n/q_n$  no dependen de que los cocientes parciales  $a_i$  sean enteros, así que esta interpretación geométrica es válida incluso si no lo son.

Con esta interpretación geométrica, resulta natural que los convergentes de fracciones continuas positivas estén ordenados como en (3.14) (como afirma la proposición 3.13). Al ver a los convergentes como pendientes de sumas de vectores, de la expresión (3.19) queda claro que el convergente de orden  $n$  de una fracción continua está estrictamente entre los dos anteriores (los convergentes de orden  $n-1$  y  $n-2$ ). También podemos usar esta interpretación geométrica para el caso negativo, poniendo cuidado en la interpretación de los signos de los cocientes parciales  $a_i$ .

**Ejemplo 3.21.** Tomemos el número  $8/11$ , que es la pendiente del vector  $(11, 8)$ . Recordamos del ejemplo 2.7 que los enteros que obtenemos al aplicar el algoritmo de Euclides a la pareja  $(11, 8)$  son  $a_0 = 0, a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 1, a_4 = 2$ , por lo que la expresión en fracción continua de  $8/11$  es  $[0, 1, 2, 1, 2]$ :

$$\frac{8}{11} = 0 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}}}$$

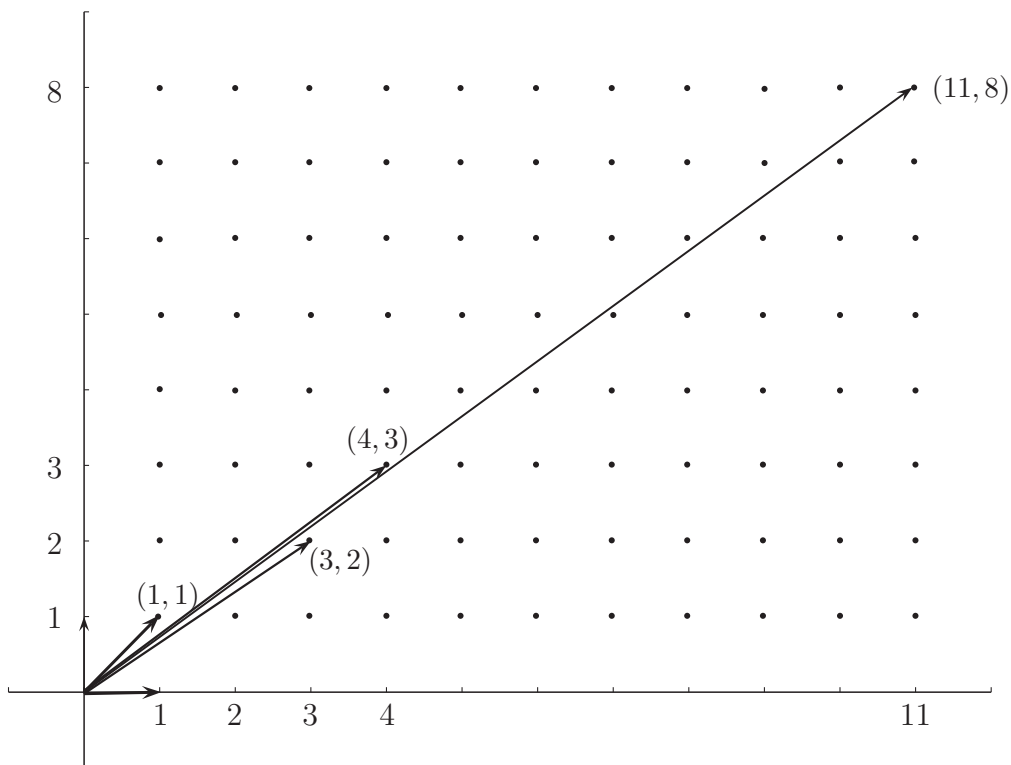


Figura 3.2: Convergentes de  $8/11$ .

Los cocientes parciales de la fracción continua de  $\alpha$  nos dicen cómo sumar los vectores  $(1, 0)$  y  $(0, 1)$  para obtener una sucesión de vectores cuyas pendientes sean los convergentes de  $\alpha$ : aplicamos las sumas de la definición recursiva (3.19) con  $a_0 = 0, a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 1, a_4 = 2$ :

$$\begin{aligned}(q_0, p_0) &= 0(0, 1) + (1, 0) = (1, 0) \\(q_1, p_1) &= 1(1, 0) + (0, 1) = (1, 1) \\(q_2, p_2) &= 2(1, 1) + (1, 0) = (3, 2) \\(q_3, p_3) &= 1(3, 2) + (1, 1) = (4, 3) \\(q_4, p_4) &= 2(4, 3) + (3, 2) = (11, 8),\end{aligned}$$

y obtenemos la sucesión  $((1, 0), (1, 1), (3, 2), (4, 3), (11, 8))$  (ver figura 3.2), cuyos términos

tienen como pendientes a los convergentes de  $8/11$ :

$$\begin{array}{lll}
 c_0 = 0 = \frac{0}{1} & \text{pendiente de} & (q_0, p_0) = (1, 0) \\
 c_1 = 0 + \frac{1}{1} = \frac{1}{1} & \text{pendiente de} & (q_1, p_1) = (1, 1) \\
 c_2 = 0 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{2}{3} & \text{pendiente de} & (q_2, p_2) = (3, 2) \\
 c_3 = 0 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1}}} = \frac{3}{4} & \text{pendiente de} & (q_3, p_3) = (4, 3) \\
 c_4 = 0 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}}} = \frac{8}{11} & \text{pendiente de} & (q_4, p_4) = (11, 8)
 \end{array}$$

Si  $\alpha$  es irracional, obtendremos una sucesión infinita de vectores cuyas pendientes tienden a  $\alpha$ ; sólo llegamos en un número finito de pasos a un vector con pendiente  $\alpha$  si  $\alpha$  es racional.

La definición recursiva de  $p_n$  y  $q_n$  no requiere que los cocientes parciales sean enteros; la interpretación geométrica es la misma sin importar los valores de los cocientes parciales  $a_i$ . Al restringirlos a  $\mathbb{Z}$  para dar la fracción continua de  $\alpha$  forzamos a los vectores  $(q_n, p_n)$  a tener entradas enteras, y a los convergentes a ser racionales.

La fracción continua de  $\alpha$  nos da información a través de sus convergentes pues, al ser racionales, nos permiten estudiar aproximaciones racionales de  $\alpha$ . Veamos cómo. Detengámonos en la expresión

$$\left| \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} - \frac{p_n}{q_n} \right| = \frac{1}{|q_{n-1}q_n|}$$

que obtenemos del corolario 3.9. Ésta nos da una medida de cercanía entre los convergentes. Ya que  $\alpha$  está entre cualesquiera dos convergentes consecutivos, se sigue que

$$\left| \alpha - \frac{p_n}{q_n} \right| \leq \frac{1}{|q_{n-1}q_n|}. \quad (3.20)$$

Dado que la sucesión  $\{|q_n|\}$  es estrictamente creciente, la expresión (3.20) dice que si  $\alpha$  es irracional podemos hacer que  $p_n/q_n$  sea tan cercano a  $\alpha$  como queramos tomando  $n$  suficientemente grande. Así, los convergentes de fracciones continuas son una aproximación racional (cada vez mejor) del número al que convergen. Lo especial es que serán *las mejores* aproximaciones racionales de  $\alpha$ . ¿En qué sentido?

Por simplicidad tomemos  $\alpha > 0$ ; el análisis se puede hacer de forma análoga si  $\alpha < 0$ . Pensemos los números racionales cercanos a  $\alpha$  como pendientes cercanas a  $\alpha$  de vectores  $(q, p)$ ,



con  $p, q \in \mathbb{Z}$ . Podemos dar una medida de aproximación comparando la distancia entre  $\alpha$  y la pendiente de  $(q, p)$  con el tamaño de  $q$ .

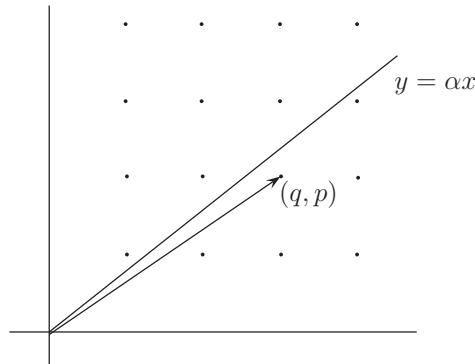


Figura 3.3: Aproximaciones Racionales.

Una manera de definir que  $p/q$  sea una mejor aproximación racional de  $\alpha$  podría ser pedir que cualquier vector  $(q', p')$  con  $q' < q$  tenga una pendiente más lejana a  $\alpha$  que  $p/q$ . Es decir, que para todo vector  $(q', p')$  con  $p', q' \in \mathbb{Z}^+$  y  $0 < q' < q$  se tenga

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \left| \alpha - \frac{p'}{q'} \right|.$$

Podemos reescribir esta última desigualdad como

$$\frac{1}{q} |q\alpha - p| < \frac{1}{q'} |q'\alpha - p'|.$$

Otra manera de definirlo sería sólo pidiendo

$$|q\alpha - p| < |q'\alpha - p'|,$$

lo que es una condición más restrictiva. Ésta es la que tomaremos como definición de una mejor aproximación racional, pues servirá como caracterización de los convergentes de una fracción continua.

**Definición 3.22.** Decimos que el número  $p/q$  es una mejor aproximación de  $\alpha$  si para toda pareja de enteros  $(q', p')$  tales que  $0 < |q'| < |q|$  se tiene que  $|q\alpha - p| < |q'\alpha - p'|$ .

Veamos qué dice geoméricamente esta definición. Definimos la distancia de un punto  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$  a una recta  $\mathcal{L}$  en  $\mathbb{R}^2$  en la dirección de un vector  $\mathbf{v}$  no paralelo a  $\mathcal{L}$  como la longitud del segmento que une a  $\mathbf{x}$  con el único punto  $\mathbf{x} + \mu\mathbf{v}$  en  $\mathcal{L}$ , con  $\mu \in \mathbb{R}$ . La denotamos por  $d_{\mathbf{v}}(\mathbf{x}, \mathcal{L})$ . Notemos que dado cualquier otro  $\mathbf{x}' \in \mathbb{R}^2$  el cociente

$$\frac{d_{\mathbf{v}}(\mathbf{x}, \mathcal{L})}{d_{\mathbf{v}}(\mathbf{x}', \mathcal{L})} \tag{3.21}$$

no depende de la dirección del vector  $\mathbf{v}$  pues, como podemos ver en la figura 3.4, siempre que  $\mathbf{v}$  no sea paralelo a  $\mathcal{L}$  se satisface

$$\frac{d_{\mathbf{v}}(\mathbf{x}, \mathcal{L})}{d_{\mathbf{v}}(\mathbf{x}', \mathcal{L})} = \frac{d(\mathbf{x}, \mathcal{L})}{d(\mathbf{x}', \mathcal{L})}, \tag{3.22}$$

donde  $d(\mathbf{x}, \mathcal{L})$  denota la distancia usual del punto  $\mathbf{x} \notin \mathcal{L}$  a la recta  $\mathcal{L}$ .

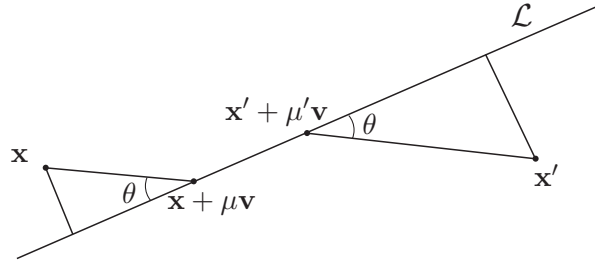


Figura 3.4: El cociente  $d_{\mathbf{v}}(\mathbf{x}, \mathcal{L})/d_{\mathbf{v}}(\mathbf{x}', \mathcal{L})$  no depende de la dirección de  $\mathbf{v}$ .

Ahora notamos que si  $\mathcal{L}$  es la recta  $y = \alpha x$ , y  $\mathbf{v} = (0, 1)$  entonces  $d_{\mathbf{v}}((q, p), \mathcal{L})$  es justamente  $|q\alpha - p|$ . Llamamos a la distancia en la dirección del  $(0, 1)$  *distancia vertical*, de modo que  $|q\alpha - p|$  es la distancia vertical de  $(q, p)$  a la recta  $y = \alpha x$  (ver figura 3.5).

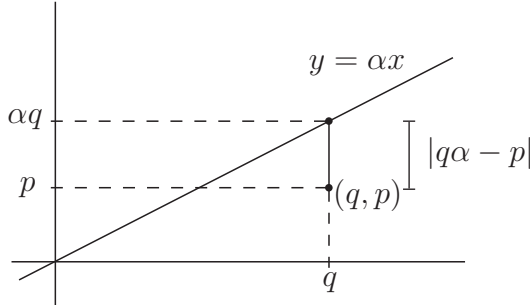


Figura 3.5:  $|q\alpha - p|$  es la distancia vertical de  $(q, p)$  a la recta  $y = \alpha x$ .

De modo que pedir que para todo  $(q', p')$  con  $p', q' \in \mathbb{Z}$  y  $0 < |q'| < |q|$  se satisfaga  $|q\alpha - p| < |q'\alpha - p'|$  es pedir que la distancia vertical de  $(q, p)$  a la recta  $y = \alpha x$  sea menor que la distancia vertical a la misma recta de cualquier punto de la retícula entera con primera coordenada menor a  $q$  (en valor absoluto). De (3.22) vemos que esto es equivalente a pedir que el punto  $(q, p)$  sea, de los puntos de la retícula entera con primera coordenada con magnitud menor que  $|q|$ , el más cercano a la recta  $y = \alpha x$ .

Ahora veamos que las mejores aproximaciones de  $\alpha$  caracterizan a sus convergentes.

**Lema 3.23.** *Sea  $\alpha = [a_0, a_1, a_2, \dots]$  con convergentes  $c_n = p_n/q_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Entonces*

$$\left| q_{n-1} \frac{p_n}{q_n} - p_{n-1} \right| = \frac{1}{|a_n q_{n-1} + q_{n-2}|}.$$

En particular, si  $s_n$  es el residuo de orden  $n$  de  $\alpha$ , entonces

$$|q_{n-1}\alpha - p_{n-1}| = \frac{1}{|s_n q_{n-1} + q_{n-2}|}.$$

*Demostración.* Sea  $\alpha = [a_0, a_1, a_2, \dots]$  con convergentes  $c_n = p_n/q_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Usando el teorema 3.8 y las definiciones recursivas de  $p_n$  y  $q_n$  tenemos que

$$\left| q_n \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - p_n \right| = \left| \frac{q_n p_{n+1} - p_n q_{n+1}}{q_{n+1}} \right| = \frac{1}{|q_{n+1}|} = \frac{1}{|a_{n+1} q_n + q_{n-1}|},$$

como queríamos probar. Si aplicamos esto a  $\alpha = [a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, s_n]$  se sigue la segunda parte del lema.  $\square$

**Teorema 3.24.** (*Ley de las mejores aproximaciones de Lagrange, 1770 [22]I§5, [6]*)

Sean  $\alpha = [a_0, a_1, a_2, \dots] \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ , y  $p_n/q_n$  el convergente  $c_n$  de  $\alpha$ . Entonces

$$i) |q_0\alpha - p_0| > |q_1\alpha - p_1| > |q_2\alpha - p_2| > \dots$$

$$ii) \text{ para } n \geq 1, \text{ si } p, q \in \mathbb{Z} \text{ son tales que } 0 < |q| \leq |q_n| \text{ y } (q_{n-1}, p_{n-1}) \neq (q, p) \neq (q_n, p_n) \text{ y } (-q_{n-1}, -p_{n-1}) \neq (q, p) \neq (-q_n, -p_n), \text{ entonces } |q\alpha - p| > |q_{n-1}\alpha - p_{n-1}|.$$

Antes de hacer la demostración hacemos un comentario sobre la hipótesis en *ii*) que pide  $(q_{n-1}, p_{n-1}) \neq (q, p) \neq (q_n, p_n)$  y  $(-q_{n-1}, -p_{n-1}) \neq (q, p) \neq (-q_n, -p_n)$ . Los vectores  $(-q_{n-1}, -p_{n-1})$  y  $(-q_n, -p_n)$  también cumplen las condiciones de cercanía que cumplen  $(q_{n-1}, p_{n-1})$  y  $(q_n, p_n)$ , pues son su reflejo por la identidad o la identidad negativa; tienen también como pendiente a convergentes de  $\alpha$ . Por eso nos interesa que  $(q, p)$  no sea ninguno de ellos.

*Demostración.* Sean  $\alpha = [a_0, a_1, a_2, \dots] > 0$ , y  $p_n/q_n$  el convergente  $c_n$  de  $\alpha$ . Del lema 3.23 tenemos que

$$|q_{n-1}\alpha - p_{n-1}| = \frac{1}{s_n q_{n-1} + q_{n-2}}.$$

Como  $s_n = [a_n, a_{n+1}, \dots] = a_n + 1/s_{n+1}$ , entonces  $s_n < a_n + 1$ . Usando esto y la definición recursiva de  $q_n$  tenemos que

$$\frac{1}{s_n q_{n-1} + q_{n-2}} > \frac{1}{(a_n + 1)q_{n-1} + q_{n-2}} = \frac{1}{a_n q_{n-1} + q_{n-2} + q_{n-1}} = \frac{1}{q_n + q_{n+1}},$$

por lo que

$$|q_{n-1}\alpha - p_{n-1}| > \frac{1}{q_n + q_{n+1}}. \quad (3.23)$$

Por otro lado, también del lema 3.23 tenemos que

$$|q_n\alpha - p_n| = \frac{1}{s_{n+1}q_n + q_{n-1}} < \frac{1}{q_n + q_{n-1}}, \quad (3.24)$$

pues  $s_{n+1} > 1$ . Así, de (3.23) y (3.24) tenemos que

$$|q_n\alpha - p_n| < \frac{1}{q_n + q_{n+1}} < |q_{n-1}\alpha - p_{n-1}|.$$

Si  $\alpha = [-a_0, -a_1, -a_2, \dots] < 0$  aplicamos lo anterior a  $-\alpha = [a_0, a_1, a_2, \dots]$ , y usamos el corolario 3.11. Con esto queda probado *i*). Para probar *ii*), consideramos nuevamente  $\alpha > 0$ . Dados  $p, q \in \mathbb{Z}$  como en el enunciado del teorema, consideramos el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} \lambda p_{n-1} + \mu p_n &= p \\ \lambda q_{n-1} + \mu q_n &= q. \end{aligned}$$

Como  $p_{n-1}q_n - p_nq_{n-1} = \pm 1$ , entonces el sistema tiene soluciones enteras únicas  $\lambda$  y  $\mu$ . Si  $\lambda = 0$ , entonces  $(q, p) = (\mu q_n, \mu p_n)$ . Como por hipótesis  $0 < |q| \leq |q_n|$ , entonces  $|\mu q_n| \leq |q_n|$ , de donde  $|\mu| = 1$ . Pero esto contradice la hipótesis  $(q_{n-1}, p_{n-1}) \neq (q, p) \neq (q_n, p_n)$  y  $(-q_{n-1}, -p_{n-1}) \neq$

$(q, p) \neq (-q_n, -p_n)$ . Por lo tanto  $\lambda \neq 0$ . Ahora, si  $\mu = 0$ , entonces  $(q, p) = (\lambda q_{n-1}, \lambda p_{n-1})$ . Debe suceder que  $|\lambda| \geq 2$ , pues si  $|\lambda| = 1$  se contradice la hipótesis que recién mencionamos. Así, como

$$q\alpha - p = \lambda q_{n-1}\alpha - \lambda p_{n-1} = \lambda(q_{n-1}\alpha - p_{n-1}),$$

tomando valor absoluto tenemos

$$|q\alpha - p| = |\lambda| |q_{n-1}\alpha - p_{n-1}| \geq 2 |q_{n-1}\alpha - p_{n-1}| > |q_{n-1}\alpha - p_{n-1}|.$$

Por último, si  $\lambda \neq 0$  y  $\mu \neq 0$ , tenemos

$$|q\alpha - p| = |\mu(\alpha p_n - q_n) + \lambda(\alpha p_{n-1} - q_{n-1})|. \quad (3.25)$$

Ya que  $\lambda q_{n-1} + \mu q_n = q$  y  $0 < |q| < |q_n|$ , entonces  $\lambda$  y  $\mu$  deben tener signos distintos (recordemos que  $q_{n-1}, q_n > 0$ ). Pero entonces  $\lambda(\alpha q_{n-1} - p_{n-1})$  y  $\mu(\alpha q_n - p_n)$  deben tener el mismo signo (pues  $\alpha$  está entre  $p_{n-1}/q_{n-1}$  y  $p_n/q_n$ ). Usando esto en 3.25 tenemos

$$|q\alpha - p| = |\lambda(\alpha q_{n-1} - p_{n-1})| + |\mu(\alpha q_n - p_n)| \geq |\alpha p_{n-1} - q_{n-1}|,$$

pues  $\lambda \neq 0$  y  $\mu \neq 0$ . Si  $\alpha < 0$  aplicamos lo anterior a  $-\alpha$ , y usamos el el corolario 3.11 y el hecho de que  $|q_{n-1}\alpha - p_{n-1}| = |(-q_{n-1})(-\alpha) - p_{n-1}| = |q_{n-1}(-\alpha) - (-p_{n-1})|$ . Con esto concluimos la prueba de *ii*).  $\square$

Este teorema es importante porque por un lado nos dice que las aproximaciones de los convergentes de  $\alpha = [a_0, a_1, \dots]$  se van incrementando con el orden de los convergentes, y por otro nos asegura que los convergentes  $c_n$  con  $n \geq 1$  (y sólo éstos) son mejores aproximaciones de  $\alpha$ . Probemos esta última afirmación.

**Corolario 3.25.** *Si un racional  $p/q$  es una mejor aproximación de  $\alpha = [a_0, a_1, \dots]$ , entonces debe ser uno de sus convergentes  $c_n = p_n/q_n$  con  $n \geq 1$ .*

*Demostración.* Sea  $p/q$  una mejor aproximación de  $\alpha = [a_0, a_1, \dots]$ . Si  $p/q \neq p_n/q_n = c_n$  para toda  $n \in \mathbb{N}$ , tendríamos que  $|q_{n-1}| < |q| < |q_n|$  p.a.  $n \geq 1$ . Como  $p/q$  es mejor aproximación de  $\alpha = [a_0, a_1, \dots]$ , entonces  $|q_{n-1}\alpha - p_{n-1}| > |q\alpha - p|$ . Además, por el teorema 3.24 como  $|q| < |q_n|$ , entonces  $|q\alpha - p| > |q_{n-1}\alpha - p_{n-1}|$  y llegamos a una contradicción.  $\square$

Con esto terminamos el análisis de los convergentes, y pasamos a los residuos, a los que también podemos dar un significado geométrico. Cuando dimos el algoritmo para encontrar la fracción continua de un número real a través del algoritmo de Euclides, vimos que podíamos escribir a los residuos de la fracción continua en términos de los residuos del algoritmo de Euclides. Lo enunciamos en la siguiente proposición.

**Proposición 3.26.** *Sea  $\alpha = [a_0, a_1, \dots]$  con  $s_k$  su residuo de orden  $k$ , sea  $a/b = \alpha$ , y sean  $r_k$  los residuos del algoritmo de Euclides planteado en (2.5) aplicado a  $(b, a)$ , con  $k \in \mathbb{N}$  si  $\alpha$  es irracional, y  $k \leq n$  si  $[a_0, a_1, \dots]$  es de orden  $n$ . Entonces*

$$s_k = \frac{r_{k-2}}{r_{k-1}}.$$

Recordemos rápidamente la sucesión abreviada del algoritmo de Euclides (2.6) aplicada a  $(b, a)$ :

$$(b, a) = (r_{-2}, r_{-1}) \rightarrow (b, a - b) = (r_{-1}, r_0) \rightarrow (r_1, r_0) \rightarrow (r_1, r_2) \rightarrow \cdots \rightarrow (r_n, r_{n-1}).$$

Vemos que el residuo  $s_k$  de  $\alpha = [a_0, a_1, \dots]$  es la pendiente del vector  $(r_{k-1}, r_{k-2})$  de la sucesión de arriba si  $k$  es par, y el inverso de dicha pendiente si  $k$  es impar (salvo el último vector de la sucesión, cuya pendiente no es ningún residuo). Ya que los vectores de esta sucesión son los vectores que determinan los rectángulos que obtenemos en el algoritmo de Euclides geométrico, entonces los residuos de la fracción continua de  $\alpha$  son los cocientes de los lados de dichos rectángulos. Veamos un ejemplo.

**Ejemplo 3.27.** Consideremos el número  $7/10$  y retomemos los ejemplos 2.9 y 2.12. Tenemos del ejemplo 2.9 que  $7/10 = [0, 1, 2, 3]$ . La sucesión abreviada del algoritmo de Euclides aplicado a  $(10, 7)$  es

$$(10, 7) \rightarrow (10, 7) \rightarrow (3, 7) \rightarrow (3, 1) \rightarrow (0, 1).$$

Comparamos sus pendientes con los residuos de  $7/10 = [0, 1, 2, 3]$ :

$$s_0 = \frac{7}{10}, \quad s_1 = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3}} = \frac{10}{7}, \quad s_2 = 2 + \frac{1}{3} = \frac{7}{3}, \quad s_3 = \frac{3}{1},$$

y comprobamos la afirmación del párrafo anterior. Comparamos con la figura 3.6, donde añadimos la interpretación de los residuos a las interpretaciones que ya teníamos del algoritmo de Euclides.

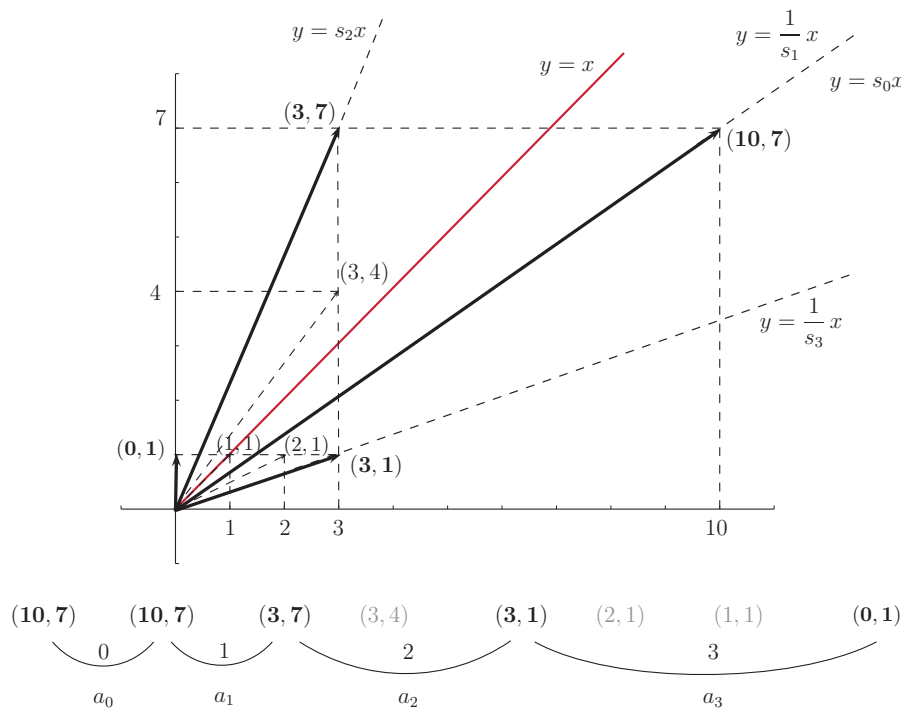
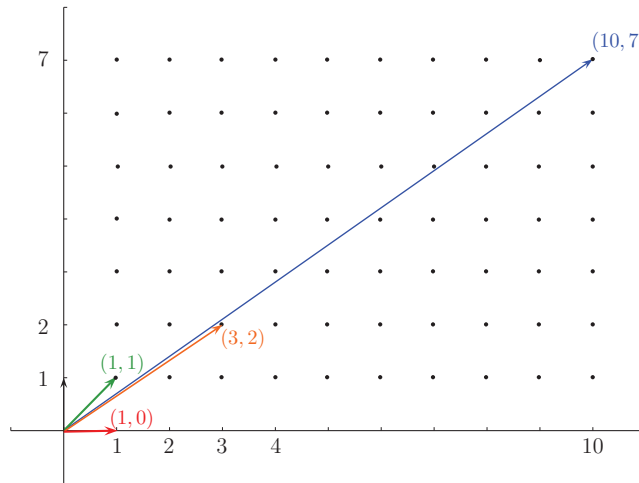


Figura 3.6: Residuos de  $7/10 = [0, 1, 2, 3]$  como pendientes en algoritmo de Euclides geométrico.

Los cocientes parciales de  $7/10 = [0, 1, 2, 3]$  por un lado nos dicen cuántos cuadrados podemos ir quitando en el algoritmo de Euclides; las pendientes de los rectángulos resultantes coinciden con los residuos de  $7/10 = [0, 1, 2, 3]$  (o sus inversos). Por otro lado, nos dicen cómo obtener el vector  $(10, 7)$  como sumas de  $(1, 0)$  y  $(0, 1)$  a través de sus convergentes. Los convergentes de  $7/10 = [0, 1, 2, 3]$  son

$$c_0 = \frac{0}{1}, \quad c_1 = 0 + \frac{1}{1} = \frac{1}{1}, \quad c_2 = 0 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{2}{3}, \quad c_3 = \frac{7}{10}.$$

Los ilustramos en la figura 3.7.



$$0(0, 1) + (1, 0) = (1, 0) \quad 1(1, 0) + (0, 1) = (1, 1) \quad 2(1, 1) + (1, 0) = (3, 2) \quad 3(3, 2) + (1, 1) = (10, 7)$$

$$a_0 = 0 \quad a_1 = 1 \quad a_2 = 2 \quad a_3 = 3$$

Figura 3.7: Convergentes de  $7/10$  como pendientes de vectores.

*Nota:* Si comenzamos con un rectángulo de base  $b$  y altura  $a$  con  $a/b = 7/10$ , pero  $\text{mcd}(a, b) = d$ , con  $d \neq 1$ , los rectángulos resultantes de aplicar el algoritmo de Euclides geométrico no son los mismos que obtendríamos aplicándolo a  $(10, 7)$ : estarían todos escalados por  $d$ . Sin embargo, los cocientes de los lados de los rectángulos sí se preservan. Lo mismo ocurre con cualquier escalamiento: aún si cambian los residuos del algoritmo de Euclides, los residuos de la fracción continua no cambian.

Veamos ahora un ejemplo en el caso irracional.

**Ejemplo 3.28.** Sea  $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ . Como podemos deducir del ejemplo 2.17, los enteros dados por el algoritmo de Euclides aplicado a  $(1, \alpha)$  son  $a_n = 1$  para toda  $n \geq 0$ , de modo que

$$\frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\ddots}}} \tag{3.26}$$

Recordamos que al aplicar el procedimiento geométrico del algoritmo de Euclides a  $\alpha$  y 1, obtenemos una sucesión de rectángulos todos homotéticos al original, lo que nos dice que todos los residuos de la fracción continua son los mismos, y coinciden con  $\alpha$ .

Los cocientes parciales de las fracciones continuas que usamos como representación de los reales nos hablan tanto del proceso de quitar cuadrados a un rectángulo como del proceso de suma de vectores cuyas pendientes son mejores aproximaciones racionales. En el capítulo 5 veremos cómo relacionar estas dos interpretaciones. De momento queda claro que los cocientes parciales son significativos. Son, naturalmente, los que usaremos para responder nuestro problema de ecuaciones diferenciales.

### 3.5. Dos teoremas interesantes

Como ya hemos dicho, esperamos encontrar en los cocientes parciales de la fracción continua de  $\alpha$  información del tipo de número que es  $\alpha$ . Enunciaremos un (muy bonito) teorema que refleja este hecho.

**Definición 3.29.** Decimos que  $[a_0, a_1, \dots]$  es una fracción continua periódica si existen  $n \in \mathbb{N}$  y  $k \geq 1 \in \mathbb{N}$  tales que

$$a_m = a_{m+k} \quad \text{para toda } m \geq n.$$

En este caso la denotamos por  $[a_0, \dots, a_{n-1}, \overline{a_n, a_{n+1}, \dots, a_{n+k-1}}]$ .

Recordamos que un irracional cuadrático es un irracional que es raíz de un polinomio de grado 2 con coeficientes enteros.

**Teorema 3.30.** (Euler y Lagrange)

Un número real  $\alpha \in \mathbb{R}$  tiene expresión en fracción continua periódica si y sólo si es irracional cuadrático.

En [15] se puede consultar una prueba de este teorema. La necesidad fue probada por Euler en 1737, y la suficiencia por Lagrange, en 1770. Se conoce como el teorema de Lagrange.

Llevemos nuestra atención a la interpretación geométrica de las fracciones continuas periódicas. Si  $\alpha = [a_0, \dots, a_{n-1}, \overline{a_n, a_{n+1}, \dots, a_{n+k-1}}]$ , entonces su residuo  $s_n$  satisface

$$s_n = s_{n+k},$$

lo que significa desde la interpretación geométrica que dimos, que al aplicar el algoritmo de Euclides al rectángulo determinado por  $(1, \alpha)$ , en algún momento llegamos a un rectángulo homotético a uno que ya había aparecido antes, por lo que se generará un ciclo en los enteros que obtenemos en el procedimiento, y en los cocientes de la fracción continua de  $\alpha$ . El ejemplo 2.17 ilustra esta situación. El teorema de Lagrange dice que los rectángulos que tengan esta propiedad son justamente aquellos en que el cociente de sus lados sea irracional cuadrático.

El número  $\alpha$  es racional si y sólo si su expresión en fracción continua es finita; es irracional cuadrático si y sólo si es periódica. ¿Qué podremos decir si  $\alpha$  es algebraico? ¿Y si es trascendente? ¿Pueden servir las fracciones continuas para una clasificación de números reales? El siguiente resultado está relacionado con esta pregunta, aunque no veremos por qué hasta el capítulo 7.

**Teorema 3.31.** Sea  $\alpha = [a_0, a_1, \dots]$  una fracción continua positiva o negativa, y sea  $\beta = [a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \dots]$ . Entonces existen  $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$  tales que

$$\alpha = \frac{a\beta + b}{c\beta + d} \quad \text{y} \quad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \pm 1.$$

*Demostración.* Sean  $\alpha$  y  $\beta$  como en el enunciado del teorema. Según la proposición 3.7 podemos escribir a  $\alpha$  de la siguiente manera:

$$\alpha = \frac{p_{n-1}\beta + p_{n-2}}{q_{n-1}\beta + q_{n-2}},$$

con  $c_n = p_n/q_n$  el convergente de orden  $n$  de  $\alpha$ . Como para éstos sabemos que  $|p_{n-1}q_{n-2} - p_{n-2}q_{n-1}| = 1$ , entonces los enteros

$$a = p_{n-1}, \quad b = p_{n-2}, \quad c = q_{n-1}, \quad d = q_{n-2}$$

satisfacen las hipótesis del teorema. □

Este teorema nos muestra que el que  $\beta$  sea residuo de  $\alpha$  hace que puedan ser llevados uno a otro por una transformación  $g$  de la forma

$$g(x) = \frac{ax + b}{cx + d}, \quad \text{con } a, b, c, d \in \mathbb{Z} \text{ y } ad - bc = \pm 1.$$

A estas transformaciones las llamamos transformaciones modulares.

### 3.6. Consideraciones respecto a la unicidad

Pusimos las condiciones (3.11) y (3.12) para garantizar la unicidad de nuestra representación por fracciones continuas. Sin embargo, hay representaciones que *casi* se ajustan a estas condiciones, y no cambian la información que obtenemos con (3.11) y (3.12). Este es el caso si aparece un número finito de ceros en los cocientes. Aunque ya vimos que no quedan bien definidos los convergentes en estos casos, es cierto que podemos eliminar los ceros de la siguiente manera:

**Proposición 3.32.** *Si  $\alpha = [a_0, a_1, \dots, a_i, 0, a_{i+1}, \dots]$ , entonces*

$$\alpha = [a_0, a_1, \dots, a_i + a_{i+1}, \dots].$$

*Demostración.* Basta ver que las expresiones de  $[a_0, a_1, \dots, a_i, 0, a_{i+1}, \dots]$  y  $[a_0, a_1, \dots, a_i + a_{i+1}, \dots]$  coinciden:

$$\begin{aligned} [a_0, a_1, \dots, a_i, 0, a_{i+1}, \dots] &= a_0 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_i + \frac{1}{0 + \frac{1}{a_{i+1} + \ddots}}}}} \\ &= a_0 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_i + a_{i+1} + \ddots}} \\ &= [a_0, a_1, \dots, a_i + a_{i+1}, a_{i+2}, \dots]; \end{aligned}$$

ya que al sumar un cero en un cociente sólo estamos invirtiendo dos veces. □



En ocasiones facilita las pruebas introducir algún cociente parcial cero, por lo que será bueno tener esta proposición presente.

Hay otra manera (que de hecho es más usual) de representar en fracción continua a los reales negativos. Las condiciones sobre los cocientes parciales son

- a)  $a_0 \in \mathbb{Z}^- \cup \{0\}$
- b)  $a_i \in \mathbb{Z}^+$  para  $i \in \mathbb{N}, i \geq 1$
- c) si la fracción continua es finita de orden  $n \geq 1$ , entonces  $a_n \neq 1$ ,

en lugar de las condiciones (3.12) (de una fracción continua negativa). Podemos dar una relación entre las dos formas de representación (dadas por las condiciones (3.27) y (3.12)) a partir de la siguiente proposición.

**Proposición 3.33.** *Sea  $\alpha = [a_0, a_1, \dots]$ . Entonces*

$$-\alpha = [-a_0, -a_1, -a_2, \dots] = [-a_0 - 1, 1, a_1 - 1, a_2, a_3, \dots].$$

*Demostración.* Sea  $\alpha = [a_0, a_1, \dots]$ , sea  $\alpha' = [-a_0 - 1, 1, a_1 - 1, a_2, a_3, \dots]$  y sea  $\beta = [a_2, a_3, \dots]$ . Tenemos que

$$\alpha = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{\beta}} = a_0 + \frac{\beta}{a_1\beta + 1} = \frac{a_0a_1\beta + a_0 + \beta}{a_1\beta + 1};$$

multiplicando por  $-1$  nos queda

$$-\alpha = \frac{-a_0a_1\beta - a_0 - \beta}{\beta a_1 + 1}. \quad (3.28)$$

Por otro lado, tenemos que

$$\begin{aligned} \alpha' &= -a_0 - 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{a_1 - 1 + \frac{1}{\beta}}} \\ &= -a_0 - 1 + \frac{1}{1 + \frac{\beta}{\beta(a_1 - 1) + 1}} \\ &= -a_0 - 1 + \frac{\beta(a_1 - 1) + 1}{\beta(a_1 - 1) + 1} \\ &= \frac{(\beta(a_1 - 1) + 1 + \beta)(-a_0 - 1) + \beta(a_1 - 1) + 1}{\beta(a_1 - 1) + 1 + \beta} \\ &= \frac{\beta a_0 a_1 - \beta - a_0}{\beta a_1 + 1}. \end{aligned} \quad (3.29)$$

De (3.28) y (3.29) tenemos que  $-\alpha$  y  $\alpha'$  son iguales, con lo que concluimos la prueba.  $\square$

*Nota:* Si en la proposición anterior queremos que  $-\alpha$  quede expresado en una fracción continua que satisfaga (3.27), tenemos que hacer la siguiente distinción:

$$-\alpha = \begin{cases} [-a_0 - 1, 1, a_1 - 1, a_2, a_3, \dots] & \text{si } a_1 > 1, \\ [-a_0 - 1, a_2 + 1, a_2, a_3, \dots] & \text{si } a_1 = 1. \end{cases}$$

**Observación 3.34.** Si  $\alpha = [a_0, a_1, \dots]$  es cualquier fracción continua convergente, entonces

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha} &= [0, a_0, a_1, \dots] \\ \alpha + \mu &= [\mu + a_0, a_1, \dots] \\ -\alpha &= [-a_0, -a_1, \dots] \end{aligned}$$

Si queremos enunciar esta observación para fracciones continuas que satisfagan las condiciones (3.11) o (3.12), requerimos la distinción:

$$\frac{1}{\alpha} = \begin{cases} [0, a_0, a_1, a_2, \dots] & \text{si } \alpha > 1, \\ [a_1, a_2, a_3, \dots] & \text{si } \alpha < 1. \end{cases}$$

y que  $\mu \geq 0$  ó  $\mu \leq 0$  según sea el caso.



## Capítulo 4

# Árbol de Stern-Brocot ( $SB$ )

El árbol de Stern-Brocot fue construido independientemente por el matemático alemán Moritz Stern y el relojero francés Achille Brocot, alrededor de 1860. Stern fue profesor en la universidad de Göttingen por 55 años, donde fue junto con Gauss profesor de Riemann. Él mismo estudió con Gauss, de quien recibió una gran influencia y una inclinación por la teoría de números, que fue su mayor área de estudio. A lo largo de sus años en Göttingen fue profesor de diversas áreas, gozando de fama de ser un excelente docente. En 1855 escribe *Über eine zahlentheoretische Funktion* [24], un artículo en que construye lo que será después conocido como el árbol de Stern-Brocot y lo relaciona con las fracciones continuas.

Brocot provenía de una renombrada familia de relojeros parisienses. Él mismo fue un excelente relojero. Realizó ingeniosos diseños para sus relojes, que incluían barómetros y calendarios. Tenía vocación de matemático y de divulgador. En su búsqueda de buenas aproximaciones racionales para el funcionamiento de los engranes de sus relojes, descubrió el árbol que después llevaría también su nombre. Publicó sus resultados en 1857, en una revista de relojeros [5], buscando tanto dar a conocer sus conclusiones prácticas como dar una argumentación de sus hallazgos.

El árbol de Stern-Brocot es un objeto matemático interesante y ha atraído la atención de muchos matemáticos. Presenta una forma de ordenar a los números racionales positivos de una manera en apariencia inocente, pero significativa en el contexto de los números reales: es el objeto ideal para estudiar fracciones continuas y aproximaciones racionales.<sup>1</sup> En este capítulo nos enfocaremos en estudiar las propiedades del árbol, y será hasta el próximo capítulo que veremos cómo se relaciona con las fracciones continuas.

En este trabajo, el árbol de Stern-Brocot nos servirá como elemento integrador de distintos materiales. Nos ayudará a comprender desde una perspectiva geométrica las fracciones continuas, el algoritmo de Euclides y la explosión de singularidades, y cómo se relacionan entre sí. Servirá para analizar la distribución de los números reales en la recta, y para decir cómo influye el lugar que ocupa en esta distribución el cociente de los valores propios de la matriz que define al campo asociado a una ecuación diferencial, en el comportamiento de ésta bajo sucesivas explosiones. Incluso nos ayudará a hacer una clasificación de campos vectoriales vía una clasificación de los números reales. Aunque en el árbol de Stern Brocot trabajaremos únicamente con racionales positivos, después lo usaremos para el estudio de los reales en general.

---

<sup>1</sup>Una interpretación geométrica interesante del árbol de Stern-Brocot es la dada por Ford en [10], en donde trabaja con los llamados *círculos de Ford*, con los que representa a los números racionales. En este mismo trabajo presenta una extensión a los complejos representando “racionales complejos” por esferas.

Este capítulo consta básicamente de cuatro partes. En la primera damos la construcción de varios árboles relacionados entre sí (que llamaremos las distintas formas del árbol de Stern-Brocot) y demostraremos algunas de las propiedades que tienen que nos serán útiles para el análisis de nuestro problema de explosiones sucesivas. Estos árboles nos permitirán estudiar a los números racionales, viéndolos como pendientes de vectores resultantes de aplicar composiciones de las transformaciones  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  y  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  al vector  $(1, 1)$ .

En la segunda parte hablaremos de *camino* y *camino abreviado* en los árboles que construimos, y daremos una correspondencia biunívoca entre caminos en los distintos árboles. Este lenguaje nos servirá para dar en el capítulo 5 una lectura de las fracciones continuas en estos árboles.

En la tercera parte volveremos al árbol de matrices que construimos, pensándolas como transformaciones actuando en el plano, y relacionaremos los *camino* en este árbol con composiciones de  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  y  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  para motivar la última parte del capítulo.

En la cuarta y última parte del capítulo construiremos nuevos árboles, íntimamente relacionados con los que construimos en la primera parte, que llamaremos las distintas formas del árbol dual de Stern-Brocot. Veremos también las relaciones entre ellos y algunas propiedades que tienen. Estos árboles nos permitirán complementar el estudio de las fracciones continuas y el algoritmo de Euclides y nos serán de utilidad para estudiar nuestro problema original de explosión de singularidades.

## 4.1. Construcción y propiedades del árbol de Stern-Brocot

Un árbol binario completo infinito es un árbol en el que cada vértice tiene exactamente dos vértices secundarios, que denominaremos *descendiente izquierdo* y *descendiente derecho*; cada vértice es descendiente de un único vértice. El árbol comienza con un vértice que denominamos *raíz*, y a partir de éste se generan todos los demás como descendientes de vértices anteriores. Al tener cada vértice exactamente dos descendientes, un árbol binario completo infinito tiene un número numerable de vértices. Decimos que la raíz está en el nivel 0 del árbol, y que si un vértice está en el nivel  $n$ , sus descendientes izquierdo y derecho están en el nivel  $n + 1$ . Denotaremos por  $v_{i,j}$  al vértice que está en el nivel  $i$  y en el lugar  $j$  de izquierda a derecha (de ese nivel). Ver figura 4.1.

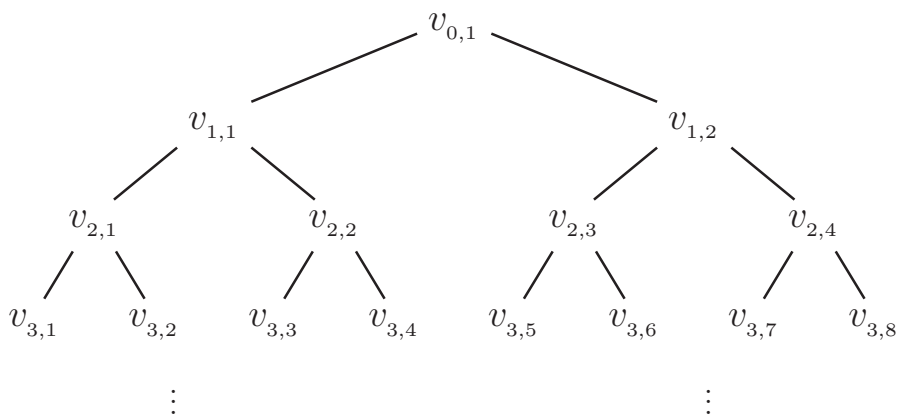


Figura 4.1: Notación para vértices de árbol binario completo infinito.

Notamos que en el nivel  $n$  del árbol habrá  $2^n$  vértices, por lo que para cada vértice  $v_{i,j}$  se satisface  $0 < j \leq 2^i$ .<sup>2</sup>

**Observación 4.1.** Con esta notación, dado  $v_{i,j}$  en un árbol binario completo infinito, sus descendientes izquierdo y derecho son los vértices  $v_{i+1,2j-1}$  y  $v_{i+1,2j}$  respectivamente.

Aunque la forma más usual de presentarlo es como un árbol de fracciones, aquí veremos además otras presentaciones del árbol de Stern-Brocot que nos darán una visión más amplia de la información que contiene. Con “el árbol de Stern-Brocot”, que denotaremos por  $\mathcal{SB}$ , nos referiremos en realidad a varios árboles: a las distintas formas que daremos del árbol de Stern-Brocot (todas ellas árboles binarios completos infinitos). En realidad es el mismo objeto matemático; de cada una de las presentaciones se pueden obtener las otras y difieren primordialmente en la interpretación que le damos. Buscaremos sacar el mejor provecho de cada una de ellas.

En las páginas 222-225 de este texto pueden consultarse los distintos árboles con los que estaremos trabajando.

## 4.2. Forma matricial del árbol de Stern-Brocot

Comenzaremos por construir  $\mathcal{SB}$  en su forma matricial, que es tal vez la que guarda más información y la que nos será de mayor utilidad. En esta forma los vértices del árbol serán elementos de  $M_{2 \times 2}(\mathbb{Z})$ .

Consideremos las matrices

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \tag{4.1}$$

Tomamos como raíz del árbol a la matriz identidad y para construir los descendientes multiplicamos por la derecha por las matrices  $I$  y  $D$  de la siguiente manera: dada la matriz  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  como uno de los vértices del árbol, su descendiente izquierdo será la matriz  $AI$ , y el descendiente derecho será la matriz  $AD$ :

$$\begin{array}{ccc}
 & A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \\
 \swarrow & & \searrow \\
 AI = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & & AD = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}
 \end{array}$$

Procediendo de esta manera obtenemos el árbol de la figura 4.2. Éste es el árbol de Stern-Brocot en su forma matricial, que denotaremos por  $\mathcal{SBM}$ .<sup>3</sup> Al vértice que está en el nivel  $i$  y el lugar  $j$  (de ese nivel) de  $\mathcal{SBM}$ , que es una matriz, lo denotaremos por  $v_{i,j}^M$ .

<sup>2</sup>En la página 225 ilustramos la notación para los vértices de un árbol binario completo infinito mostrando hasta el nivel cinco.

<sup>3</sup>En la página 222 ilustramos los primeros cinco niveles de este árbol.

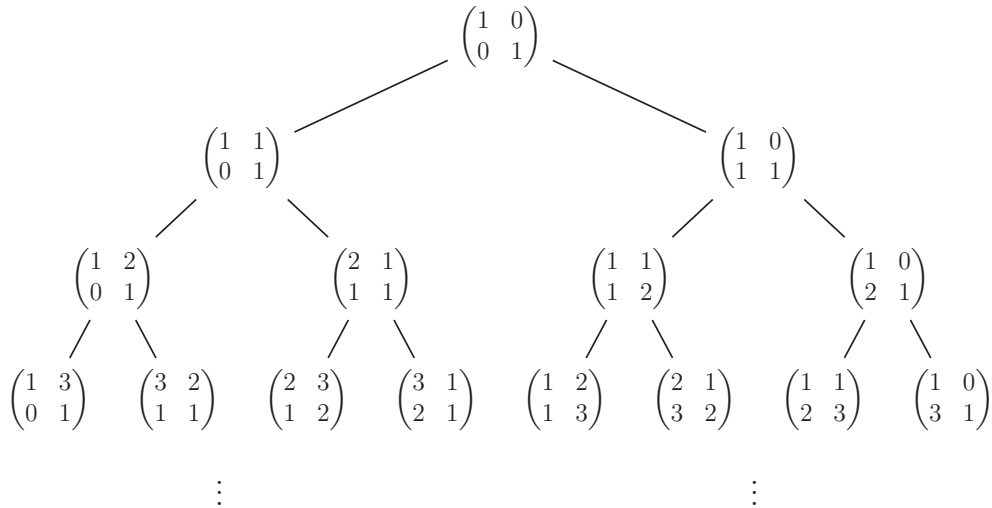


Figura 4.2: Árbol de Stern-Brocot en forma matricial.

**Observación 4.2.** *Por construcción, si  $A \in \mathcal{SBM}$ , entonces existen únicos  $a_0 \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$  y  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}^+$  tales que  $A$  se puede escribir como*

$$A = D^{a_0} I^{a_1} D^{a_2} \dots \{D\}^{a_n} = \begin{cases} D^{a_0} I^{a_1} D^{a_2} \dots D^{a_n} & \text{si } n \text{ es par, y} \\ D^{a_0} I^{a_1} D^{a_2} \dots I^{a_n} & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

Notemos que, por cómo actúan  $I$  y  $D$ , de cada vértice podemos obtener el descendiente izquierdo dejando la primera columna de la matriz igual y tomando para la segunda columna la suma vectorial de las columnas de la matriz anterior. De igual manera, el descendiente derecho lo obtenemos dejando la segunda columna igual y colocando en la primera la suma vectorial de las columnas de la matriz anterior:

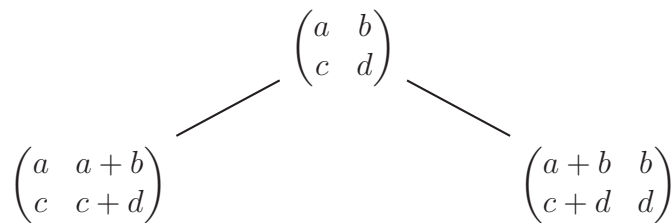


Figura 4.3: Descendientes de una matriz de  $\mathcal{SBM}$ .

Veamos qué significa esto en términos geométricos. Tenemos dos maneras de pensar a las matrices del árbol como pareja de vectores: tomando sus vectores columna o tomando sus vectores renglón. Pensemos a cada matriz como la pareja de sus vectores columna. Vemos en la figura 4.3 que el vector  $(a + b, c + d)$  es justamente la suma de los vectores  $(a, c)$  y  $(b, d)$ . En términos de parejas de vectores, al multiplicar por  $I$  se mantiene el primer vector de la pareja y el segundo vector se obtiene sumando los vectores de la pareja anterior. Análogamente al multiplicar por  $D$  obtenemos una pareja cuyo primer vector es la suma de los vectores anteriores, y el segundo vector se mantiene igual. Podemos describir en términos de sumas de vectores la acción de multiplicar a la matriz  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  por  $I$  y  $D$  por la derecha.

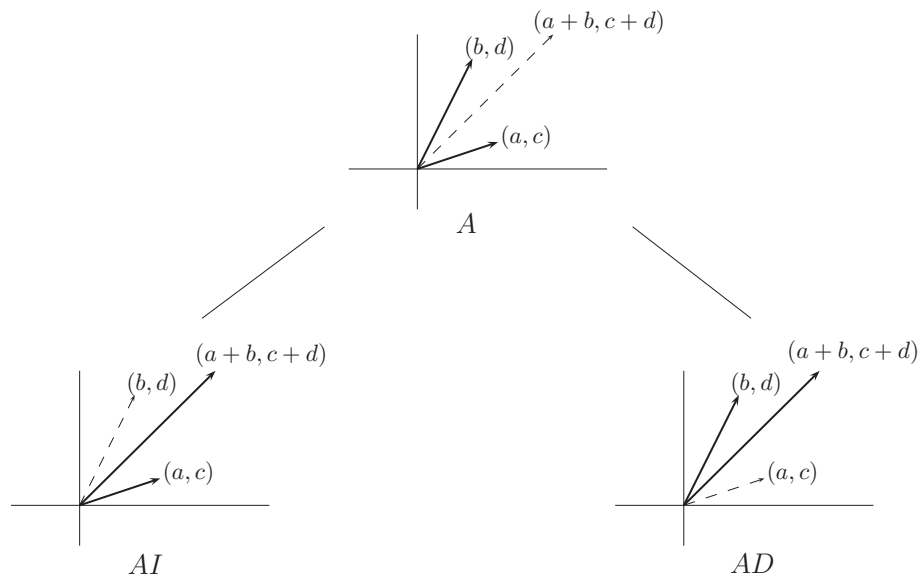


Figura 4.4: Acción de  $I$  y  $D$  en vectores columna de las matrices de  $\mathcal{SBM}$ .

De momento nos enfocaremos en los vectores columna de las matrices. Asociemos a cada matriz  $A$  de  $\mathcal{SBM}$  el paralelogramo generado por sus vectores columna. Una propiedad importante es que todos tienen área 1 (ver figura 4.5).

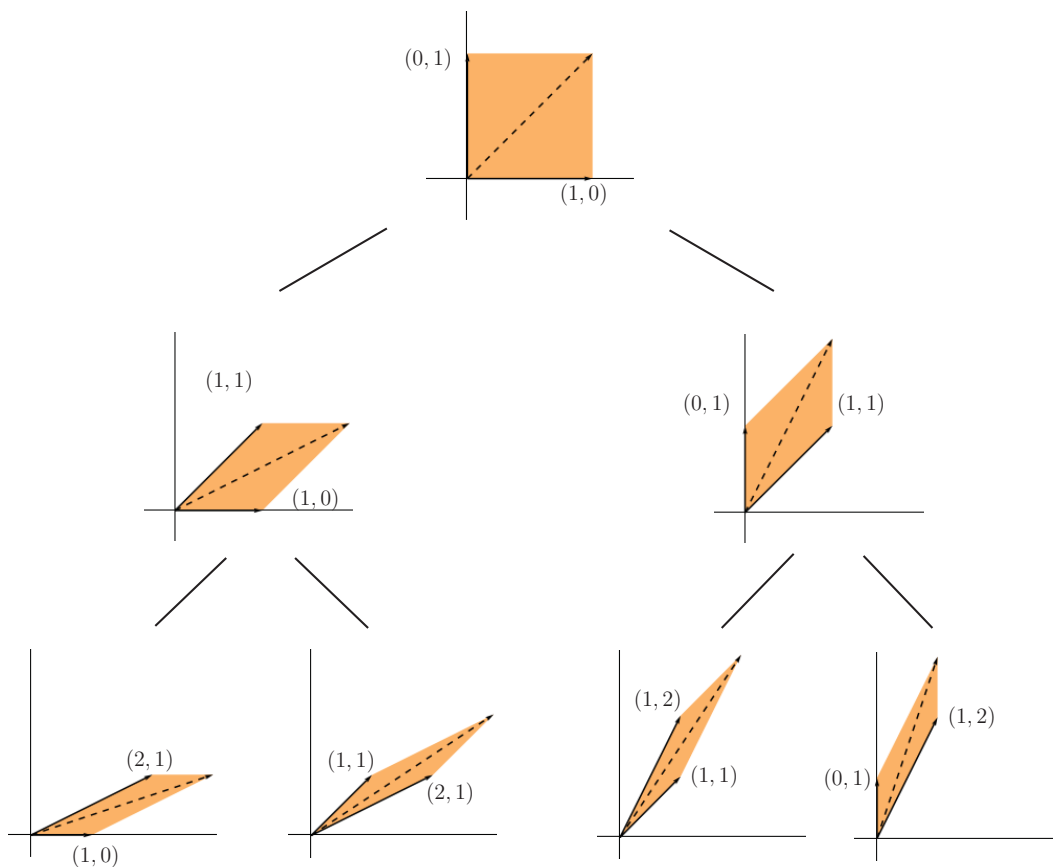


Figura 4.5: Paralelogramos generados por vectores columna de matrices de  $\mathcal{SBM}$ .



**Proposición 4.3.** *Toda matriz que aparece en  $\mathcal{SBM}$  tiene determinante 1.*

*Demostración.* Denotamos por  $|A|$  al determinante de la matriz  $A$ . Sea  $A$  en  $\mathcal{SBM}$ . Tomando en cuenta que  $|I| = |D| = 1$ , y recordando la observación 4.2 tenemos que

$$|A| = \left| D^{a_0} I^{a_1} D^{a_2} \dots \left\{ \begin{smallmatrix} D \\ I \end{smallmatrix} \right\}^{a_n} \right| = |D|^{a_0} |I|^{a_1} |D|^{a_2} \dots \left\{ \frac{|D|}{|I|} \right\}^{a_n} = 1.$$

□

### 4.2.1. Simetrías en $\mathcal{SBM}$

Otra propiedad interesante es la relación que existe en  $\mathcal{SBM}$  entre vértices con posiciones verticalmente simétricas. Definimos a los *vértices simétricos* en un árbol binario completo infinito como vértices cuyas posiciones son verticalmente simétricas.

**Definición 4.4.** *Dado el vértice  $v_{i,j}$  en un árbol binario completo infinito  $\mathcal{A}$ , definimos  ${}^{\mathcal{A}}\sigma(v_{i,j})$ , su vértice simétrico en  $\mathcal{A}$ , como*

$${}^{\mathcal{A}}\sigma(v_{i,j}) = v_{i,2^i-j+1}. \quad (4.2)$$

Cuando no haya lugar a confusión en cuanto a en qué árbol estamos tomando el vértice simétrico, escribiremos por comodidad únicamente  $\sigma(v_{i,j})$ .

El vértice simétrico está bien definido: si  $0 < j \leq 2^i$ , entonces también  $0 < 2^i - j + 1 \leq 2^i$ . Notamos que en efecto el vértice simétrico cumple lo que esperaríamos que cumpliera: si el vértice  $v_{i,j}$  se encuentra en el lugar  $j$  de izquierda a derecha del nivel  $i$  del árbol, entonces su vértice simétrico  $\sigma(v_{i,j}) = v_{i,2^i-j+1}$  se encuentra en el lugar  $j$  de derecha a izquierda en el mismo nivel del árbol; además satisface que el vértice simétrico del vértice simétrico de un vértice es él mismo:  $\sigma(\sigma(v_{i,j})) = v_{i,2^i-(2^i-j+1)+1} = v_{i,j}$ ; y por último, el descendiente izquierdo de un vértice es simétrico al descendiente derecho de su vértice simétrico y viceversa, lo que plasmamos en el siguiente lema.

**Lema 4.5.** *Sea  $v_{i,j}$  un vértice de un árbol binario completo infinito. El descendiente izquierdo de  $v_{i,j}$  es el vértice simétrico del descendiente derecho de  $\sigma(v_{i,j})$ , y el descendiente derecho de  $v_{i,j}$  es el vértice simétrico del descendiente izquierdo de  $\sigma(v_{i,j})$ .*

*Demostración.* Recordando la observación 4.1, tenemos que el descendiente izquierdo de  $v_{i,j}$  es  $v_{i+1,2j-1}$ , cuyo vértice simétrico es por definición  $v_{i+1,2^{i+1}-(2j-1)+1} = v_{i+1,2(2^i-j+1)}$ , que es justamente el descendiente derecho de  $v_{i,2^i-j+1}$ . De la misma manera se verifica que el descendiente derecho de  $v_{i,j}$  es el vértice simétrico del descendiente izquierdo de  $v_{i,2^i-j+1}$ . □

Apoyándonos en esta propiedad probaremos la siguiente proposición, que ayudará a estudiar las relaciones entre vértices simétricos de  $\mathcal{SB}$  en cualquiera de sus formas.

**Proposición 4.6.** *Sea  $A$  en  $\mathcal{SBM}$ , con  $A = D^{a_0} I^{a_1} D^{a_2} \dots \left\{ \begin{smallmatrix} D \\ I \end{smallmatrix} \right\}^{a_n}$ . Entonces*

$$\sigma(A) = I^{a_0} D^{a_1} I^{a_2} \dots \left\{ \begin{smallmatrix} I \\ D \end{smallmatrix} \right\}^{a_n}. \quad (4.3)$$

*Demostración.* Haremos inducción sobre los niveles del árbol. En el nivel 0 tenemos que  $E = D^0$  y  $\sigma(E) = E = I^0$ . En el nivel 1 tenemos que  $D = D^1$  y  $\sigma(D) = I = I^1$ . Supongamos ahora que para toda matriz  $M$  en el nivel  $k$  tenemos que si  $M = D^{a_0} I^{a_1} D^{a_2} \dots \left\{ \begin{smallmatrix} D \\ I \end{smallmatrix} \right\}^{a_n}$ , entonces

$\sigma(M) = I^{a_0} D^{a_1} I^{a_2} \dots \left\{ \frac{I}{D} \right\}^{a_n}$ . Tomemos ahora una matriz  $A$  en el nivel  $k + 1$ .  $A$  es descendiente izquierdo o derecho de alguna matriz en el nivel  $k$  del árbol. Supongamos que es el descendiente izquierdo de  $M = D^{a_0} I^{a_1} D^{a_2} \dots \left\{ \frac{D}{I} \right\}^{a_n}$ . Por el lema 4.5,  $\sigma(A)$  es el descendiente derecho de  $\sigma(M)$ . Por otro lado, tenemos por hipótesis de inducción que

$$\sigma(M) = I^{a_0} D^{a_1} I^{a_2} \dots \left\{ \frac{I}{D} \right\}^{a_n},$$

cuyo descendiente derecho es, por construcción de  $\mathcal{SBM}$ ,

$$\sigma(A) = D^{a_0} I^{a_1} D^{a_2} \dots \left\{ \frac{D}{I} \right\}^{a_n} D.$$

Igualmente por construcción de  $\mathcal{SBM}$  tenemos que  $A = D^{a_0} I^{a_1} D^{a_2} \dots \left\{ \frac{D}{I} \right\}^{a_n} I$ . Así, se satisface para  $A$  el enunciado de la proposición. Se procede de manera análoga en el caso en que  $A$  es descendiente derecho de  $M$ . Así probamos la afirmación del teorema para todas las matrices en el nivel  $k + 1$  del árbol, y terminamos la inducción.  $\square$

El que las expresiones como productos de potencias de  $I$  y  $D$  de matrices que son vértices simétricos sean la misma expresión intercambiando  $I$  por  $D$  sugiere que hay una relación entre vértices simétricos, derivada de la relación entre  $I$  y  $D$ . Veremos las manifestaciones de esta relación en cada una de las presentaciones de  $\mathcal{SB}$ , comenzando por una relación de simetría de matrices.

**Definición 4.7.** Sea  $A \in M_{2 \times 2}$ ,  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ . Definimos  $A^s$ , la matriz simétrica de  $A$ , como

$$A^s = \begin{pmatrix} d & c \\ b & a \end{pmatrix}. \tag{4.4}$$

Geoméricamente, la matriz  $A^s$  tiene como vectores columna a los vectores simétricos respecto a la identidad de los vectores columna de  $A$ ; el paralelogramo que generan los vectores columna de  $A$  y el paralelogramo que generan los vectores columna de  $A^s$  son reflejo uno del otro respecto a la identidad. Lo especial de esta simetría es que sucede exactamente lo mismo con los vectores renglón de  $A$  y  $A^s$ .

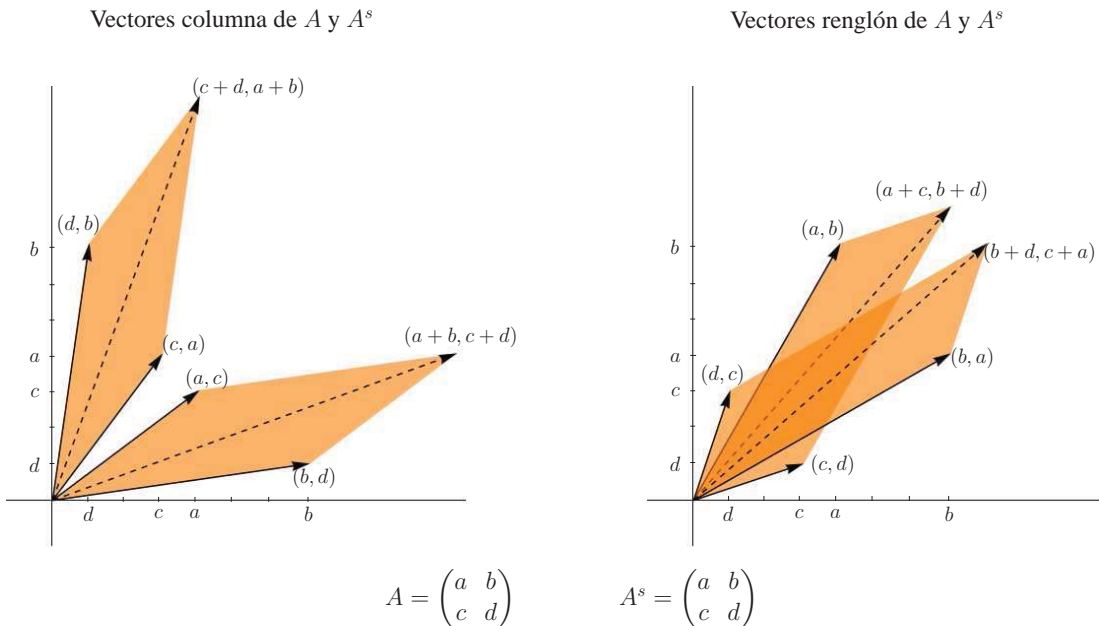


Figura 4.6: Simetría de paralelogramos generados por vectores de  $A$  y  $A^s$ .

Notamos que  $I$  y  $D$  son matrices simétricas una de la otra. Es de esta simetría y de la particular construcción que llevamos a cabo que se deriva toda la relación de simetría entre vértices simétricos de  $\mathcal{SB}$ .

Queremos ver que matrices en vértices simétricos son matrices simétricas. Para esto, veremos que la matriz simétrica de un producto de matrices es el producto de sus matrices simétricas.

**Lema 4.8.** Sean  $A, B \in M_{2 \times 2}$ . Entonces

$$(AB)^s = A^s B^s.$$

*Demostración.* Sean  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$ . Entonces tenemos que

$$(AB)^s = \begin{pmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{pmatrix}^s = \begin{pmatrix} cf + dh & ce + dg \\ af + bh & ae + bg \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & c \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h & g \\ f & e \end{pmatrix} = A^s B^s.$$

□

Ahora sí podemos ver que matrices en vértices simétricos de  $\mathcal{SBM}$  son simétricas una de otra, como planteamos en la siguiente proposición.

**Proposición 4.9.** Sean  $A, B$  en  $\mathcal{SBM}$  tales que  $\sigma(A) = B$ . Entonces  $B = A^s$ .

*Demostración.* Sean  $A, B$  vértices simétricos de  $\mathcal{SBM}$ , con  $A = D^{a_0} I^{a_1} D^{a_2} \dots \left\{ \begin{smallmatrix} D \\ I \end{smallmatrix} \right\}^{a_n}$ . Entonces

$$A^s = \left( D^{a_0} I^{a_1} D^{a_2} \dots \left\{ \begin{smallmatrix} D \\ I \end{smallmatrix} \right\}^{a_n} \right)^s,$$

que por el lema 4.8 es igual a

$$(D^s)^{a_0} (I^s)^{a_1} (D^s)^{a_2} \dots \left\{ \begin{smallmatrix} D^s \\ I^s \end{smallmatrix} \right\}^{a_n}.$$

Usando que  $I$  y  $D$  son simétricas, tenemos que

$$A^s = I^{a_0} D^{a_1} I^{a_2} \dots \left\{ \begin{smallmatrix} I \\ D \end{smallmatrix} \right\}^{a_n}.$$

La proposición 4.6 nos dice que esta última expresión es justamente  $B$ , por ser vértice simétrico de  $A$ . Así, tenemos que  $A^s = B$ , como queríamos probar. □

**Observación 4.10.** Geométricamente, la proposición 4.9 nos dice que los paralelogramos que generan los vectores columna (o los vectores renglón) de las matrices en vértices simétricos de  $\mathcal{SBM}$  son a su vez reflejo uno del otro respecto a la identidad. Como esto pasa para cualesquiera vértices del árbol, tenemos que toda la rama izquierda del árbol es simétrica a la rama derecha (ver figura 4.7), es decir, todos los paralelogramos formados por los vectores columna de las matrices en azul en la figura 4.7 son reflejo por la identidad de los formados por los vectores columna de las matrices en rosa en la misma figura.

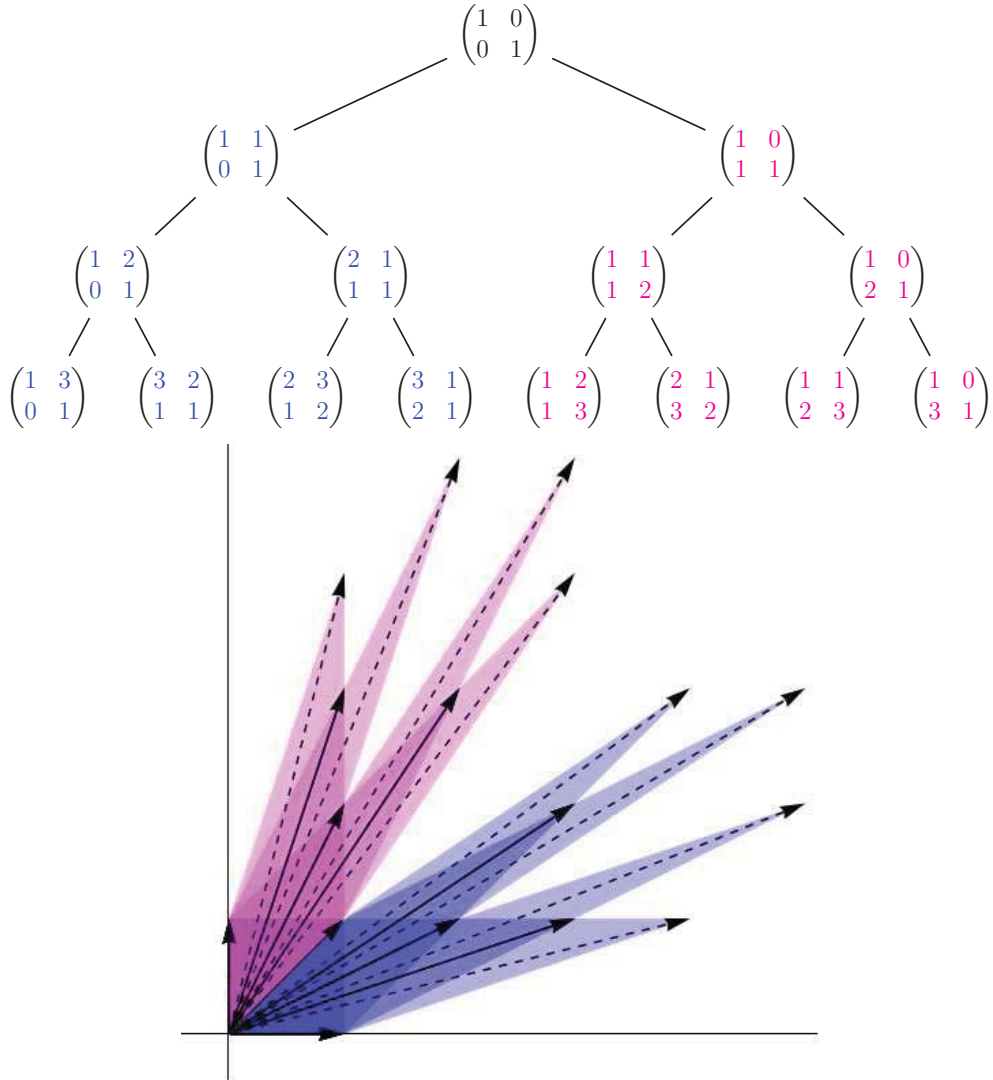


Figura 4.7: Simetría de  $\mathcal{SBM}$ .

Separamos a las matrices de  $\mathcal{SBM}$  en las que en la construcción de  $\mathcal{SBM}$  son descendiente izquierdo de alguna matriz en  $\mathcal{SBM}$ , y las que son descendiente derecho. Podemos decir a cuál de estos conjuntos pertenecen a través de sus entradas.

**Proposición 4.11.** *Sea  $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  en  $\mathcal{SBM}$ .  $M$  es descendiente izquierdo en  $\mathcal{SBM}$  de alguna matriz en  $\mathcal{SBM}$  si y sólo si  $a < b$  ó  $c < d$ .  $M$  es descendiente derecho en  $\mathcal{SBM}$  de alguna matriz si y sólo si  $a > b$  ó  $c > d$ .*

*Demostración.* Supongamos que  $M$  es descendiente en  $\mathcal{SBM}$  de la matriz  $A = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$ . Por construcción de  $\mathcal{SBM}$ , si  $M$  es descendiente izquierdo de  $A$ , entonces  $a = e, c = g, b = a + f$  y  $d = c + h$  (ver figura 4.8). Esto implica que  $a < b$  ó  $c < d$  (puesto que  $f$  y  $h$  no pueden ser ambos cero). Análogamente, si  $M$  es descendiente derecho de  $A$  (figura 4.8), entonces  $a = e + b, c = g + d, b = f$  y  $d = h$ , de donde  $a > b$  ó  $c > d$ . De aquí mismo concluimos que si  $a < b$  ó  $c < d$ , entonces  $M$  debe ser descendiente izquierdo de alguna matriz en  $\mathcal{SBM}$ , y si  $a > b$  o  $c > d$ , descendiente derecho.  $\square$

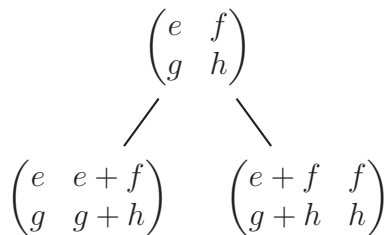


Figura 4.8:  $M$  como descendiente izquierdo o derecho de  $A$  en la demostración de la proposición 4.11.

Ahora pasemos a otra de las formas del árbol de Stern-Brocot, aunque aún hay que decir de la forma matricial y volveremos continuamente a ella.

### 4.3. Forma vectorial del árbol de Stern-Brocot

En la presentación que haremos a continuación de  $\mathcal{SB}$  los vértices del árbol serán vectores. Lo construiremos a partir de  $\mathcal{SBM}$  colocando en lugar de cada matriz el vector diagonal del paralelogramo generado por sus vectores columna. Es decir, en lugar de la matriz  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  tomaremos el vector  $(a + b, c + d)$ . Procediendo de esta manera obtenemos el árbol siguiente:

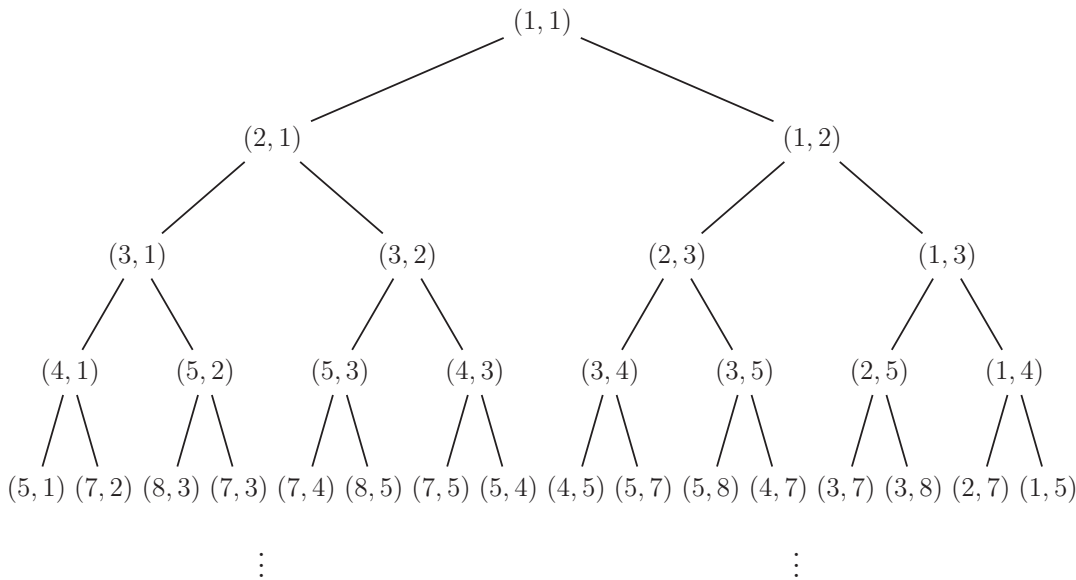


Figura 4.9: Árbol de Stern-Brocot en forma vectorial.

Ésta es la forma vectorial del árbol de Stern-Brocot, que llamaremos  $\mathcal{SBV}$ .<sup>4</sup> Al vértice en el nivel  $i$  y lugar  $j$  (de ese nivel) de  $\mathcal{SBV}$ , que es un vector, lo llamaremos  $v_{i,j}^v$ . Notamos que podemos encontrar al vector  $v_{i,j}^v$  en  $\mathcal{SBM}$  como un vector columna de las matrices que son descendientes de  $v_{i,j}^M$ ; es el vector columna que no comparten con  $v_{i,j}^M$ , y que es además la suma de los vectores columna de  $v_{i,j}^M$  (el vector diagonal del paralelogramo que generan). Así, podemos leer  $\mathcal{SBV}$  en  $\mathcal{SBM}$  como se ilustra en la figura 4.10.

<sup>4</sup>En la página 223 ilustramos los primeros seis niveles de este árbol.

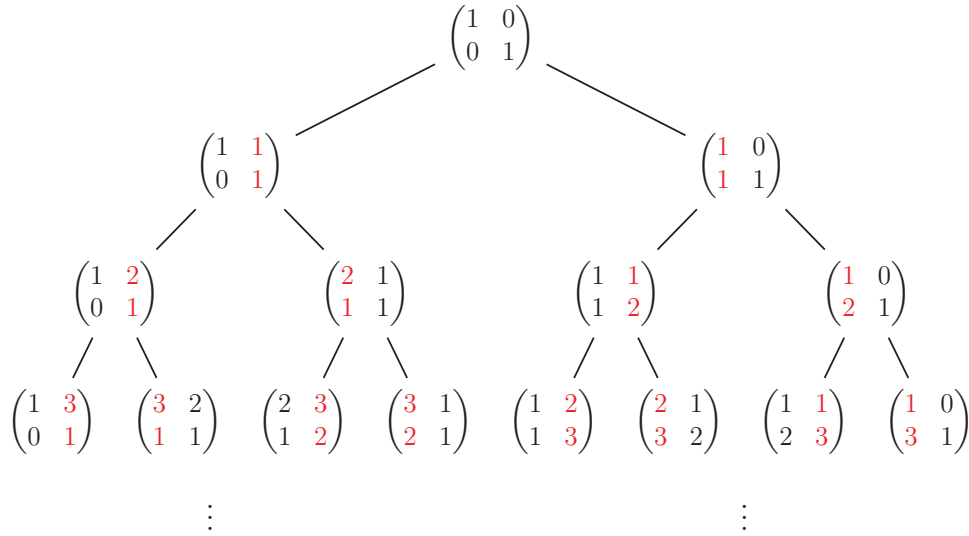


Figura 4.10: Lectura de  $SBV$  en  $SBM$ .

Dejamos enunciada esta propiedad en el siguiente lema, cuya demostración es la misma construcción de  $SBV$ . Con ella aseguramos que todo vector que aparece en  $SBV$  es un vector columna de una matriz en  $SBM$ .

**Lema 4.12.** *Sea  $v_{i,j}^V = (r, s)$  en  $SBV$ , y sea  $M = v_{i,j}^M$  en  $SBM$ . Entonces  $(r, s)$  es el segundo vector columna de la matriz  $MI$  (el descendiente izquierdo de  $M$ ) y el primer vector columna de la matriz  $MD$  (el descendiente derecho de  $M$ ).*

Podemos construir  $SBV$  de otra manera. Si quisiéramos obtener esta forma del árbol sin pasar por  $SBM$ , podríamos construirlo a partir de una pareja de vectores y sumas iteradas de ellos. Tomemos dos vectores generadores, digamos  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$ . De ellos generamos un nuevo vector adyacente a ambos, que será  $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ . Partiendo de esto, de cada dos vectores adyacentes generaremos un nuevo vector, que será la suma de ellos, y continuamos este proceso infinitamente (ver figura 4.11).

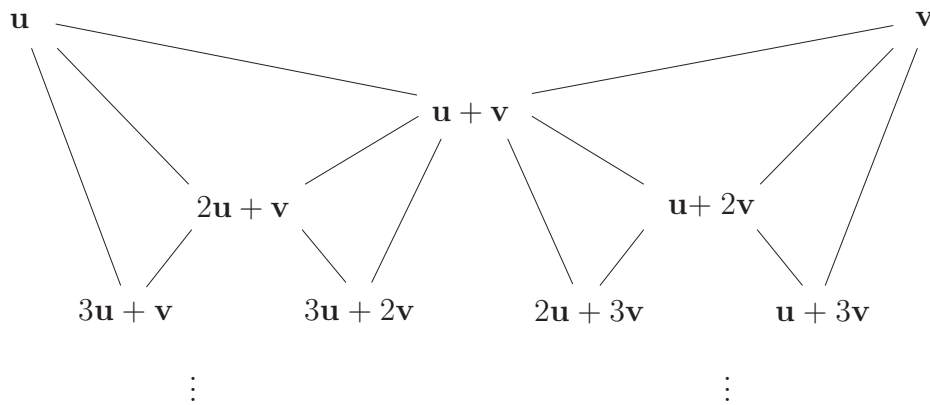


Figura 4.11: Construcción de  $SBV$  a partir de suma de vectores.

Notamos que con esta construcción generamos combinaciones lineales enteras positivas de  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$ . Pronto veremos que de hecho generamos *todas* las combinaciones lineales de este tipo.

Si tomamos como vectores  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$  a los vectores básicos  $(1, 0)$  y  $(0, 1)$ , lo que obtenemos es la gráfica de la figura 4.12, que quitando algunas aristas y los vértices de los vectores generadores es justamente  $\mathcal{SBV}$ .

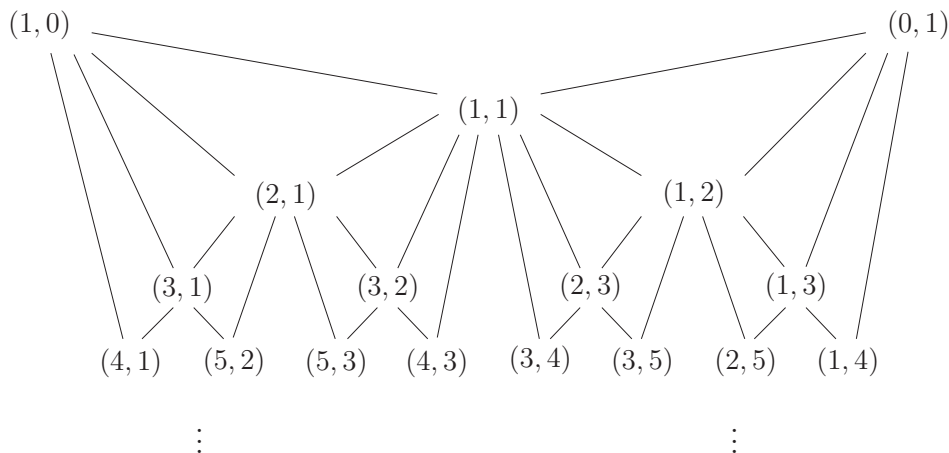


Figura 4.12

De hecho hicimos la misma construcción disfrazada, pues comenzamos con los vectores columna de la matriz identidad y fuimos sumando vectores, que es como se generan los nuevos vectores columna al multiplicar por  $I$  y por  $D$  en  $\mathcal{SBM}$ . Para tener en mente las dos construcciones, en ocasiones añadiremos los vectores generadores a  $\mathcal{SBV}$ , tomándolos como los vértices  $v_{-1,1}^M = (1, 0)$  y  $v_{-1,2}^M = (0, 1)$ . En algunas afirmaciones que haremos requeriremos hablar no sólo de las relaciones entre los vértices de  $\mathcal{SB}$  y sus descendientes, sino de los dos vértices que originaron otro en la construcción de la gráfica ilustrada en la figura 4.12 (a partir de sumas de los vectores  $\mathbf{u} = (1, 0)$  y  $\mathbf{v} = (0, 1)$ ). En estas ocasiones nos será más cómodo trabajar con la siguiente gráfica, que llamaremos  $\mathcal{GSBV}$ , en donde repetimos en cada nivel los vértices que ya aparecieron:

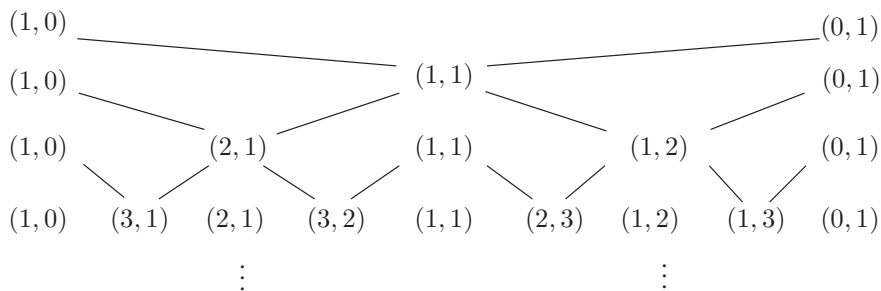
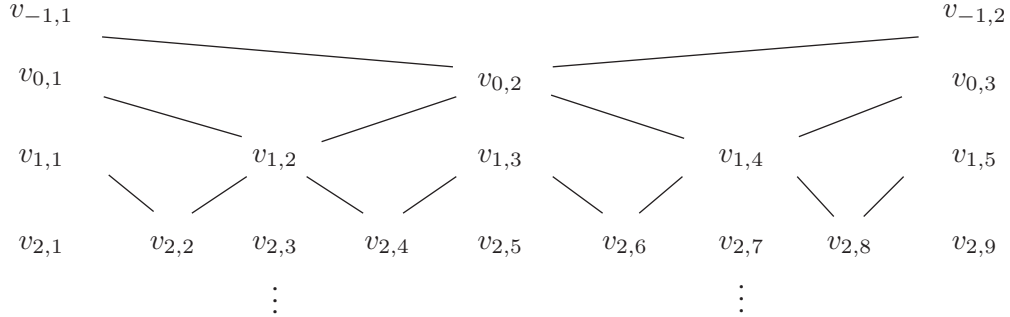


Figura 4.13:  $\mathcal{GSBV}$ : Gráfica a partir de  $\mathcal{SBV}$  repitiendo vértices que ya aparecieron.

En la gráfica de la figura 4.13, las aristas nos dicen cómo formar las matrices de  $\mathcal{SBM}$  para construir  $\mathcal{SBM}$  a partir de  $\mathcal{SBV}$ : vértices adyacentes (unidos por una arista) son los vectores columna de una matriz en  $\mathcal{SBM}$ . Comparar las figuras 4.13 y 4.10.

La notación que usaremos para los vértices de esta gráfica es análoga a la de un árbol completo binario infinito:



Enunciaremos ahora algunas propiedades que tiene  $\mathcal{SB}$  en su forma vectorial, que serán más bien una relectura de propiedades de  $\mathcal{SBM}$ .

**Proposición 4.13.** Sean  $v_{k,l} = (r_1, s_1)$  y  $v_{k,l+1} = (r_2, s_2)$  en  $\mathcal{GSBV}$ . Entonces  $(r_1, s_1)$  y  $(r_2, s_2)$  generan un paralelogramo de área 1. Es decir,

$$r_1 s_2 - s_1 r_2 = 1.$$

*Demostración.* Por construcción tenemos que la matriz  $\begin{pmatrix} r_1 & r_2 \\ s_1 & s_2 \end{pmatrix}$  aparece en  $\mathcal{SBM}$ , y por lo tanto (proposición 4.3), tiene determinante 1. Se sigue que  $r_1 s_2 - s_1 r_2 = 1$ .  $\square$

**Corolario 4.14.** Sea  $(r, s)$  en  $\mathcal{SBV}$ , y sean  $(r_1, s_1)$  y  $(r_2, s_2)$  sus descendientes izquierdo y derecho respectivamente. Entonces  $(r_1, s_1)$  y  $(r, s)$  generan un paralelogramo de área 1, al igual que  $(r, s)$  y  $(r_2, s_2)$ :

$$s r_1 - r s_1 = 1 \quad \text{y} \quad r s_2 - s r_2 = 1.$$

Las relaciones de simetría entre vértices simétricos de  $\mathcal{SBM}$  se traducen a  $\mathcal{SBV}$  de manera natural, como enunciamos en la siguiente proposición.

**Proposición 4.15.** Los vectores en vértices simétricos de  $\mathcal{SBV}$  son simétricos respecto a la identidad. Es decir, si  $(r, s)$  es un vértice de  $\mathcal{SBV}$ , entonces  $\sigma((r, s)) = (s, r)$ .

*Demostración.* Sea  $v_{i,j}^y = (r, s)$ . Supongamos que  $v_{i,j}^M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ . Por construcción de  $\mathcal{SBV}$  tenemos que  $r = a+b$  y  $s = c+d$ . Por la proposición 4.9 sabemos que  $\sigma(v_{i,j}^M) = \begin{pmatrix} d & c \\ b & a \end{pmatrix}$ . Otra vez por construcción de  $\mathcal{SBV}$  tenemos que  $\sigma((r, s)) = (d+c, b+a) = (s, r)$ , como queríamos probar.  $\square$

Geoméricamente, la proposición anterior nos dice que vértices simétricos en  $\mathcal{SBV}$  son vectores en el plano que son reflejo uno del otro respecto a la identidad. De hecho toda la “rama izquierda” de  $\mathcal{SBV}$  (si “partimos” verticalmente el árbol por la mitad, los vértices en la mitad izquierda), que son vectores con pendiente menor que uno, es reflejo de la “rama derecha” (si “partimos” verticalmente el árbol por la mitad, los vértices en la mitad derecha), que son vectores con pendiente mayor a uno. Ver figura 4.14.



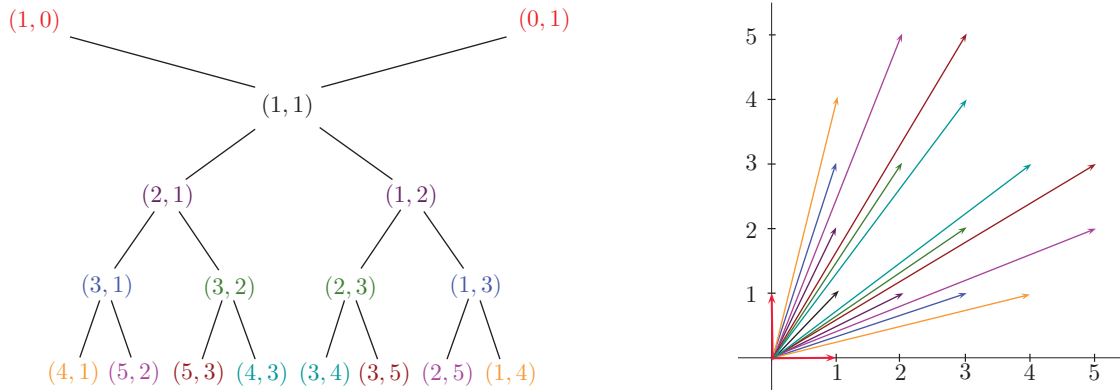


Figura 4.14: Simetría de  $\mathcal{SBV}$ .

Comparando las figuras 4.14 y 4.7 también podemos apreciar la lectura geométrica de  $\mathcal{SBV}$  en  $\mathcal{SBM}$  tomando las diagonales de los paralelogramos que generan los vectores columna de las matrices en  $\mathcal{SBM}$ . De hecho, de la representación geométrica de  $\mathcal{SBV}$  podemos recuperar las matrices que dieron origen a cada uno de los vectores que lo forman, pues para cada vector de  $\mathcal{SBV}$  que se elija, hay una única pareja de vectores de  $\mathcal{SBV}$  cuya suma da el vector elegido.

### 4.4. Forma fraccionaria de árbol de Stern-Brocot

Pasamos ahora a la forma fraccionaria del árbol de Stern-Brocot, que llamaremos  $\mathcal{SBF}$ . En ésta, los vértices del árbol serán elementos de  $\mathbb{Q}^+$ . Llamaremos  $v_{i,j}^{\mathcal{F}}$  al vértice en el nivel  $i$  y el lugar  $j$  de  $\mathcal{SBF}$ .<sup>5</sup> Haremos la construcción a partir de  $\mathcal{SBV}$  tomando como vértice  $v_{i,j}^{\mathcal{F}}$  la pendiente del vector  $v_{i,j}^{\mathcal{V}}$  expresada en una forma particular: si  $v_{i,j}^{\mathcal{V}} = (a, b)$ , entonces  $v_{i,j}^{\mathcal{F}} = \frac{b}{a}$  (ver figura 4.15).

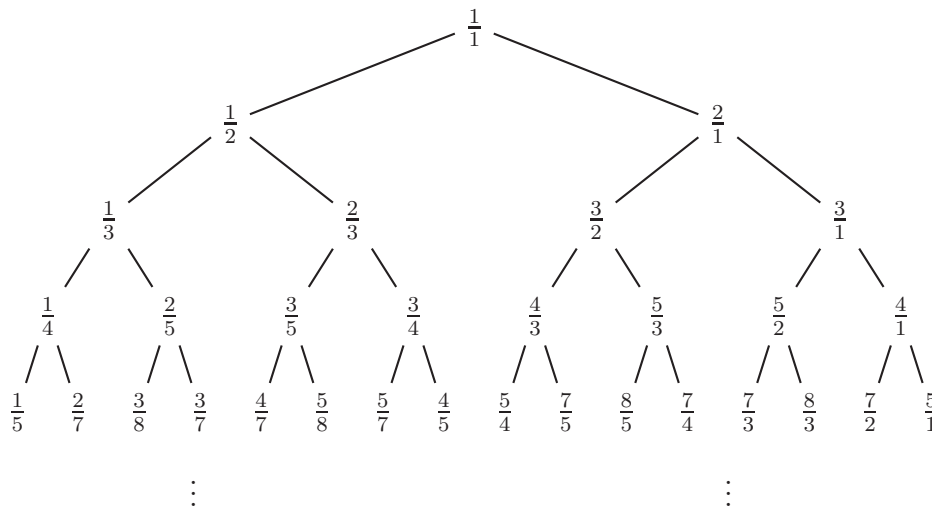


Figura 4.15: Forma fraccionaria del árbol de Stern-Brocot.

<sup>5</sup>En la página 224 ilustramos los primeros seis niveles de este árbol.

Es importante que en la construcción de  $\mathcal{SBF}$  tomemos como pendiente del vector  $(a, b)$  a la fracción  $b/a$  expresada justo de esta manera, y no como  $bd/ad$  para algún  $d \in \mathbb{R}$ . Esto será importante porque de esta manera las fracciones de  $\mathcal{SBF}$ , que son racionales, aparecerán expresadas en forma irreducible.

Demostremos ahora una manera más directa de construcción de esta presentación del árbol, que es básicamente la misma que hicimos para construir directamente  $\mathcal{SBV}$  sumando vectores que fueran vértices adyacentes. Partimos de dos fracciones generadoras con las cuales construiremos el resto de la siguiente manera: comenzamos con dos fracciones, digamos  $a/c$  y  $b/d$ , de las que generamos la fracción  $(a + b)/(c + d)$ , que será adyacente a ambas. A partir de esto, de cada dos fracciones adyacentes  $m_1/n_1$  y  $m_2/n_2$  generamos una nueva adyacente a ambas sumando numeradores y denominadores:  $(m_1 + m_2)/(n_1 + n_2)$ . Continuamos este proceso infinitamente (ver figura 4.16).

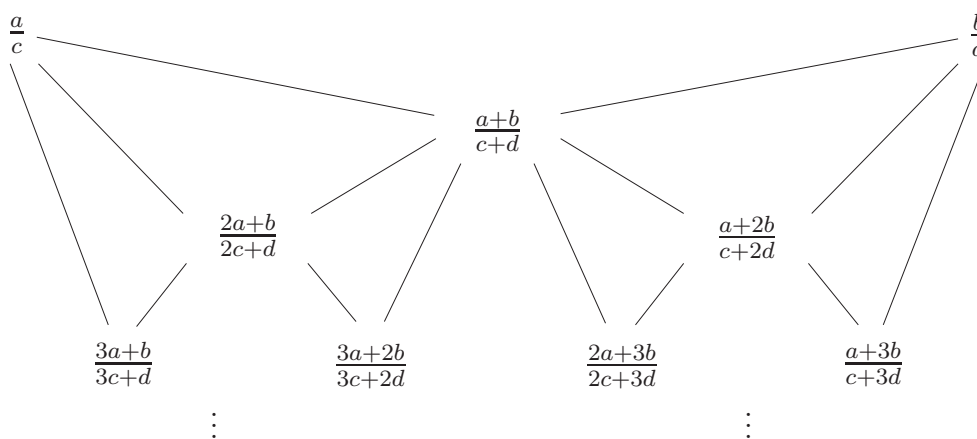


Figura 4.16: Modelo de construcción de  $\mathcal{SBF}$ .

Si nos permitimos escribir  $1/0$ , pensándolo como infinito y tomamos como fracciones generadoras a  $0/1$  y  $1/0$ , obtenemos (quitando algunas aristas y los vértices  $0/1$  y  $1/0$ ) el árbol  $\mathcal{SBF}$  (ver figura 4.17). La demanda de escribir  $1/0$  resulta natural en nuestra interpretación, pues es la pendiente del vector  $(0, 1)$ .

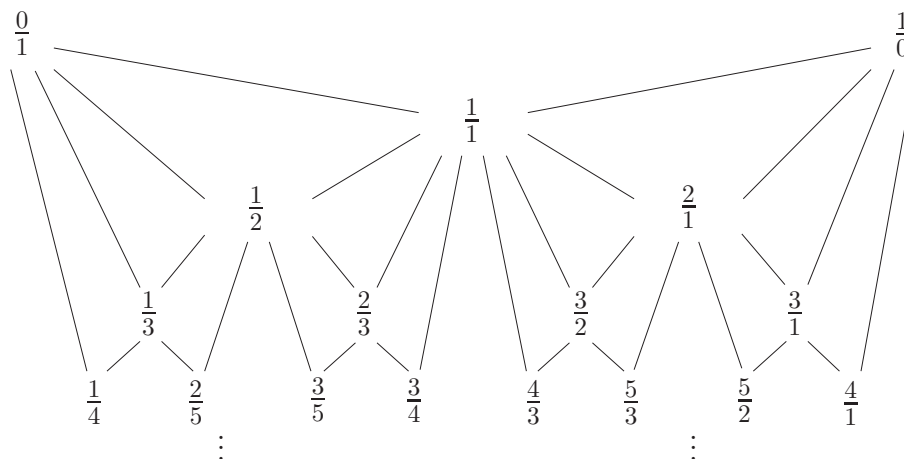


Figura 4.17: Construcción de  $\mathcal{SBF}$  a partir de  $0/1$  y  $1/0$ .

Al igual que en  $SBV$ , en ocasiones añadiremos las fracciones generadoras a  $SBF$  como los vértices  $v_{-1,1}^F = 0/1$  y  $v_{-1,2}^F = 1/0$ . Es conveniente mantener en mente esta construcción, manifiesta en la gráfica  $GSBF$ , que utilizaremos también (figura 4.18) y que construimos de manera análoga a  $GSBV$ .

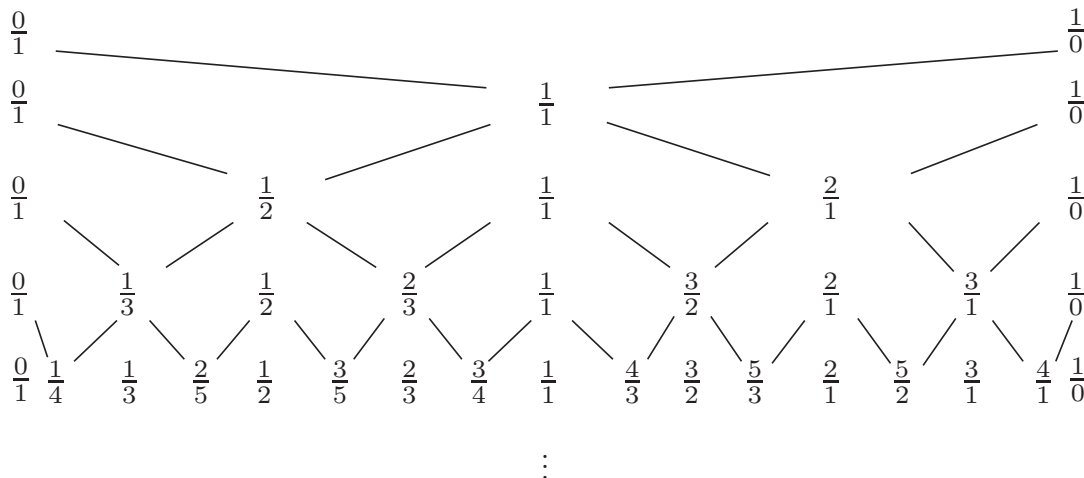


Figura 4.18:  $GSBF$  formada a partir de  $SBF$  repitiendo vértices que ya aparecieron.

La forma fracionaria de  $SB$  permite explorar propiedades interesantes. La operación que hicimos para obtener un nuevo vértice partiendo de otros dos (sumando numeradores y denominadores de fracciones) se conoce como la *mediante* de las correspondientes fracciones, y tiene la motivación geométrica de tomar la pendiente del vector suma de otros dos vectores. Es desde la perspectiva de las medianes que Stern hizo su estudio de las propiedades detrás de  $SB$ .

**Definición 4.16.** Sean  $(c, a), (d, b) \in \mathbb{R}^2$ . Definimos la *mediante* de  $(c, a)$  y  $(d, b)$  como la pendiente del vector resultante de la suma de  $(c, a)$  y  $(d, b)$ :  $(a + b)/(c + d)$  si  $c + d \neq 0$  e  $\infty$  si  $c + d = 0$ .

**Definición 4.17.** Sean  $a, b, c, d \in \mathbb{R}, c, d \neq 0$ . Definimos la *mediante* de  $a/c$  y  $b/d$  como la mediana de los vectores  $(c, a)$  y  $(d, b)$ : el número  $(a + b)/(c + d)$  si  $c + d \neq 0$  e  $\infty$  si  $c + d = 0$ .

Notamos que la mediana está definida para cocientes de reales; si  $k, l \in \mathbb{R}$ , con  $k \neq 1$ , la mediana de  $ak/c_k$  y  $bl/d_l$  sería distinta de la de  $a/c$  y  $b/d$ .

### 4.4.1. El orden en los niveles de $SBF$

Usaremos el árbol  $SBF$  para estudiar la estructura de los números reales a partir de la estructura de los números racionales. Esta estructura estará dada por la construcción que da  $SBF$  de los números racionales a través de medianes (o como pendientes de combinaciones lineales enteras de los vectores  $(1, 0)$  y  $(0, 1)$ ). Un punto crucial en esta construcción es que para cada nivel de  $SBF$  “leído” de izquierda a derecha, los racionales que en él aparecen están ordenados. Esto se debe a que la pendiente de un vector resultante de sumar otros dos está estrictamente entre las pendientes de éstos. Lo enunciamos en términos de medianas en la siguiente proposición.

**Proposición 4.18.** Sean  $a, b, c, d \in \mathbb{Z}^+$ , con  $a/c < b/d$ . Entonces se satisface que

$$\frac{a}{c} < \frac{a+b}{c+d} < \frac{b}{d}.$$

*Demostración.* Sean  $a, b, c, d \in \mathbb{Z}^+$ .

$$\frac{a}{c} < \frac{b}{d} \Leftrightarrow ad < bc \Leftrightarrow \frac{ad}{c} < b \Leftrightarrow \frac{a(c+d)}{c} < a+b \Leftrightarrow \frac{a}{c} < \frac{a+b}{c+d}.$$

Similarmente,

$$\frac{a}{c} < \frac{b}{d} \Leftrightarrow ad < bc \Leftrightarrow a < \frac{bc}{d} \Leftrightarrow a+b < \frac{b(c+d)}{d} \Leftrightarrow \frac{a+b}{c+d} < \frac{b}{d}.$$

□

La proposición anterior es inmediata desde el punto de vista geométrico: el vector suma de dos vectores distintos está estrictamente entre ellos, y la pendiente del vector suma de dos vectores distintos está estrictamente entre sus pendientes.

La proposición 4.18 tiene como consecuencia importante que las fracciones de  $\mathcal{SBF}$  aparecen ordenadas. Es decir que los vértices de cada nivel de  $\mathcal{GSBF}$  están ordenados (ver figura 4.19).<sup>6</sup>

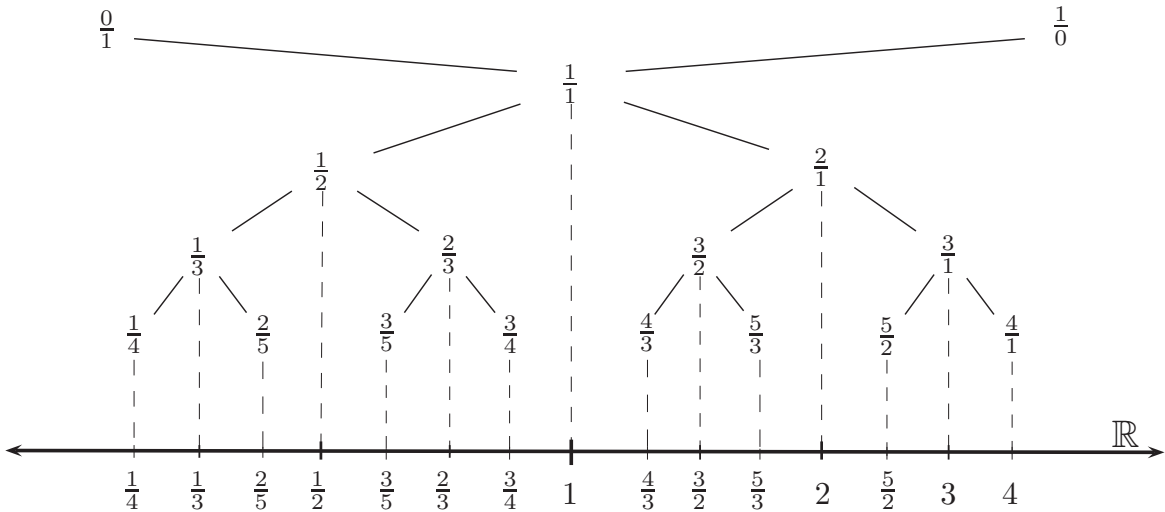


Figura 4.19: Los vértices de  $\mathcal{SBF}$  proyectados sobre la recta están ordenados.

Esta propiedad de  $\mathcal{SBF}$  es evidente desde la perspectiva geométrica, si a los vértices (fracciones) de  $\mathcal{SBF}$  los construimos como las pendientes de los vértices (vectores) de  $\mathcal{SBV}$ : la construcción de  $\mathcal{SBV}$  como sumas de vectores partiendo de los vectores  $(1, 0)$  y  $(0, 1)$  hace que las pendientes de los vectores en cada nivel de  $\mathcal{SBV}$  estén ordenadas (ver figura 4.20). Además, geoméricamente los casos que involucran a la pendiente  $1/0$  no requieren ninguna aclaración.

<sup>6</sup>Las distancias en la recta real de la figura 4.19 no son como aparentan en el dibujo. Los nuevos números que aparecen no son el punto medio de los dos anteriores.

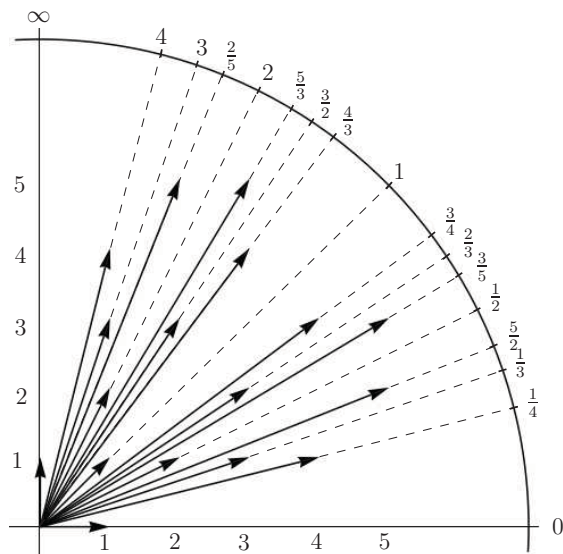


Figura 4.20: Pendientes ordenadas de  $\mathcal{SBF}$ .

Por comodidad, enunciaremos esta propiedad en  $\mathcal{GSBF}$  (figura 4.21) en la siguiente proposición.

**Proposición 4.19.** Sean  $v_{k,r} = a/c$ ,  $v_{k,s} = b/d$  en  $\mathcal{GSBF}$  tales que  $r < s$ . Entonces  $a/c < b/d$ .

*Demostración.* Basta ver que la proposición se satisface para  $s = r + 1$ , lo cual se puede verificar por una rápida inducción sobre los niveles de  $\mathcal{GSBF}$  usando la proposición 4.18 y que cada vértice del nivel  $k$  de  $\mathcal{GSBF}$  que no estaba en los niveles anteriores es la mediante de vértices en lugares contiguos en el nivel  $k - 1$ . Hay también que considerar que tomamos  $1/0 = \infty$ , que es mayor a cualquier racional.  $\square$

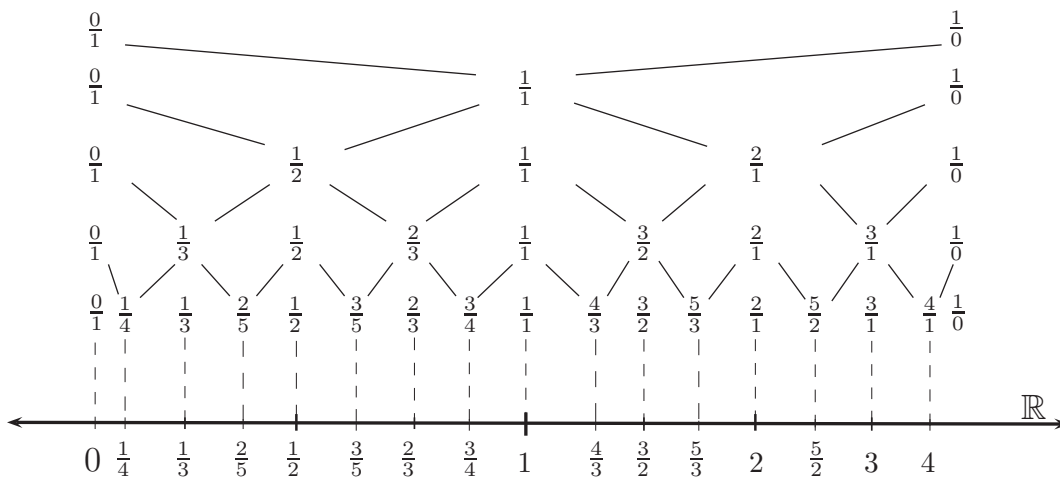


Figura 4.21: Orden de vértices en  $\mathcal{GSBF}$ .

**Corolario 4.20.** Si en  $\mathcal{SBF}$  tenemos  $v_{i,j}^{\mathcal{F}} = \frac{a}{c}$  y  $v_{i,k}^{\mathcal{F}} = \frac{b}{d}$  con  $j < k$ , entonces  $\frac{a}{c} < \frac{b}{d}$ .

En la construcción que hicimos de  $\mathcal{SBF}$  comenzamos con las fracciones  $0/1$  y  $1/0$ , y generamos el resto tomando medianas de vértices adyacentes. Las siguientes proposiciones se pueden probar directamente de la definición de mediana, pero también las podemos deducir de las propiedades de  $\mathcal{SBM}$  y  $\mathcal{SBV}$ .

**Proposición 4.21.** Sean  $v_{k,l} = \frac{s_1}{r_1}$ , y  $v_{k,l+1} = \frac{s_2}{r_2}$  en  $\mathcal{GSBF}$ . Entonces se satisface la siguiente relación:

$$r_1 s_2 - s_1 r_2 = 1. \quad (4.5)$$

*Demostración.* Si  $v_{k,l} = \frac{s_1}{r_1}$ , y  $v_{k,l+1} = \frac{s_2}{r_2}$ , por construcción los vértices en el nivel  $k$ , lugar  $l$  y  $l+1$  de  $\mathcal{GSBV}$  son  $(r_1, s_1)$  y  $(r_2, s_2)$  respectivamente, por lo que la expresión 4.5 se obtiene directamente de la proposición 4.13.  $\square$

**Corolario 4.22.** Sea  $v_{i,j}^{\mathcal{F}} = \frac{s}{r}$  en  $\mathcal{SBF}$  y sean  $\frac{s_1}{r_1}$  y  $\frac{s_2}{r_2}$  sus descendientes izquierdo y derecho respectivamente. Entonces se satisface la siguiente relación:

$$s_1 r - r_1 s = 1, \quad s r_2 - r s_2 = 1.$$

**Proposición 4.23.** Todas las fracciones que son vértices de  $\mathcal{SBF}$  aparecen en forma irreducible.

*Demostración.* Sea  $\frac{s}{r} \in \mathbb{Q}$  tal que  $\frac{s}{r}$  es un vértice de  $\mathcal{SBF}$ . Sea  $\frac{n}{m}$  el descendiente izquierdo de  $\frac{s}{r}$ . Por construcción de  $\mathcal{SBV}$  y por la proposición 4.14 sabemos que

$$\begin{vmatrix} m & r \\ n & s \end{vmatrix} = 1.$$

Supongamos que  $(r, s) = d$  y que  $r = r'd$  y  $s = s'd$ . Entonces tenemos que

$$1 = \begin{vmatrix} m & r \\ n & s \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} m & r'd \\ n & s'd \end{vmatrix} = d \begin{vmatrix} m & r' \\ n & s' \end{vmatrix}.$$

Por lo tanto

$$\begin{vmatrix} m & r' \\ n & s' \end{vmatrix} = \frac{1}{d}.$$

Como  $r', s', m$  y  $n$  son enteros, entonces  $1/d$  también debe serlo, por lo que  $d$  debe ser 1 o  $-1$ . Por lo tanto  $\text{mcd}(s, r) = 1$ , como queríamos probar.  $\square$

El que todas las fracciones aparezcan como fracciones irreducibles es una consecuencia de que los paralelogramos de  $\mathcal{SBM}$  tengan todos área 1. De alguna manera,  $\mathcal{SBV}$  nos da los vectores en una forma “simplificada”: las coordenadas de los vectores de  $\mathcal{SBV}$  son enteros primos relativos.

**Proposición 4.24.** En  $\mathcal{SBF}$  todos los racionales positivos aparecen exactamente una vez y expresados en forma irreducible.

*Demostración.* Veamos primero que en efecto aparecen todos los racionales positivos. Notamos que en  $\mathcal{SBF}$  aparecen racionales tan grandes y tan pequeños como se quiera. Sea  $r/s \in \mathbb{Q}^+$ , con  $\text{mcd}(r, s) = 1$ . Supongamos que  $r/s$  no aparece en  $\mathcal{SBF}$ . Tomemos  $m_1/n_1$  y  $m_2/n_2$  vértices adyacentes (unidos por una arista) en  $\mathcal{SBF}$  tales que  $m_1/n_1 < r/s < m_2/n_2$  (ya sea que  $m_1/n_1$  sea descendiente izquierdo de  $m_2/n_2$ , o que  $m_2/n_2$  sea descendiente derecho de  $m_1/n_1$ ). Geométricamente, el vector  $(s, r)$  está entre los vectores  $(n_1, m_1)$ , y  $(n_2, m_2)$  (ver figura 4.22).

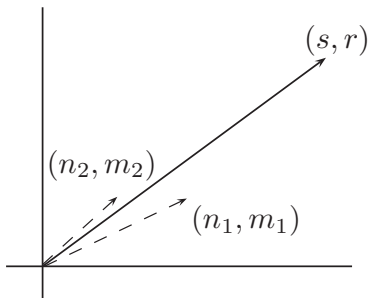


Figura 4.22

Podemos escribir  $(s, r)$  como combinación lineal de  $(n_1, m_1)$  y  $(n_2, m_2)$ , pues éstos son linealmente independientes. Digamos

$$(s, r) = \lambda(n_1, m_1) + \mu(n_2, m_2).$$

Como  $(n_1, m_1)$  y  $(n_2, m_2)$  son vértices adyacentes en  $\mathcal{SBV}$ , usando la proposición 4.14 tenemos que

$$\begin{vmatrix} n_1 & s \\ m_1 & r \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} n_1 & \lambda n_1 + \mu n_2 \\ m_1 & \lambda m_1 + \mu m_2 \end{vmatrix} = \lambda \cdot \begin{vmatrix} n_1 & n_1 \\ m_1 & m_1 \end{vmatrix} + \mu \cdot \begin{vmatrix} n_1 & n_2 \\ m_1 & m_2 \end{vmatrix} = \mu, \quad (4.6)$$

$$\begin{vmatrix} s & n_2 \\ r & m_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda n_1 + \mu n_2 & n_2 \\ \lambda m_1 + \mu m_2 & m_2 \end{vmatrix} = \lambda \cdot \begin{vmatrix} n_1 & n_2 \\ m_1 & m_2 \end{vmatrix} + \mu \cdot \begin{vmatrix} n_2 & n_2 \\ m_2 & m_2 \end{vmatrix} = \lambda. \quad (4.7)$$

Como  $r, s, m_1, n_1, m_2, n_2 \in \mathbb{Z}^+$  y  $m_1/n_1 < r/s < m_2/n_2$ , entonces  $\lambda$  y  $\mu$  deben ser enteros positivos. De aquí obtenemos que  $s = \lambda n_1 + \mu n_2 \geq n_1 + n_2$  y  $r = \lambda m_1 + \mu m_2 \geq m_1 + m_2$ , y por tanto

$$s + r \geq n_1 + n_2 + m_1 + m_2, \quad (4.8)$$

dándose la igualdad justamente en el caso  $\lambda = 1$  y  $\mu = 1$ . En este caso, tendríamos  $(s, r) = (n_1 + n_2, m_1 + m_2)$ , de modo que  $r/s$  sería descendente de  $m_1/n_1$  o de  $m_2/n_2$ . Esto no puede ser, pues supusimos que  $r/s$  no aparece en  $\mathcal{SBV}$ . Entonces tenemos que  $\lambda > 1$  o  $\mu > 1$ , y  $r/s \neq (m_1 + m_2)/(n_1 + n_2)$ .

Ahora, el vector  $(s, r)$  está entre  $(n_1, m_1)$  y  $(n_1 + n_2, m_1 + m_2)$ , o entre  $(n_1 + n_2, m_1 + m_2)$  y  $(n_2, m_2)$  (ver figura 4.23), de modo que

$$\frac{m_1}{n_1} < \frac{r}{s} < \frac{m_1 + m_2}{n_1 + n_2}, \quad \text{ó} \quad \frac{m_1 + m_2}{n_1 + n_2} < \frac{r}{s} < \frac{m_2}{n_2}.$$

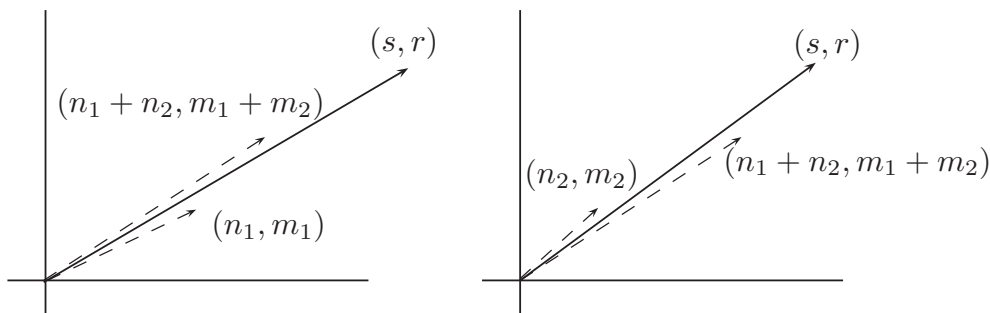


Figura 4.23

Tomamos los vectores correspondientes  $(n_1, m_1)$  y  $(n_1 + n_2, m_1 + m_2)$  o  $(n_1 + n_2, m_1 + m_2)$  y  $(n_2, m_2)$  y volvemos a aplicar el razonamiento de (4.6) y (4.7), obteniendo

$$s + r \geq n_1 + 2n_2 + m_1 + 2m_2 \quad \text{ó} \quad s + r \geq 2n_1 + n_2 + 2m_1 + m_2. \quad (4.9)$$

El lado derecho de las desigualdades en (4.9) es estrictamente mayor que el lado derecho de (4.8). Como supusimos que  $r/s$  no aparece en  $\mathcal{SBF}$  podemos seguir con este proceso indefinidamente, tomando los vectores entre los cuales se encuentra  $(s, r)$  y obteniendo expresiones como (4.9) donde el lado derecho de la desigualdad es cada vez mayor. Esto es absurdo, pues está acotado por el valor fijo  $s + r$ . Por lo tanto,  $r/s$  debe aparecer en  $\mathcal{SBF}$ .

Con esto tenemos que todos los racionales positivos aparecen en  $\mathcal{SBF}$ . Por la proposición 4.23 aparecen en forma irreducible, y por la proposición 4.18 aparecen una única vez, pues los descendientes aparecen estrictamente entre los vértices anteriores.  $\square$

**Corolario 4.25.** *Si  $r, s \in \mathbb{Z}^+$  y  $\text{mcd}(r, s) = 1$ , entonces  $(r, s) \in \mathbb{R}^2$  está en  $\mathcal{SBV}$ .*

La proposición 4.24 significa que para cada racional positivo habrá exactamente un vector en  $\mathcal{SBV}$  con esa pendiente. Su prueba nos permite entender la manera en que se generan todas las fracciones del árbol. Si tomamos un vector  $(s, r)$  con  $\text{mcd}(r, s) = 1$ , entonces siguiendo el procedimiento de suma de vectores con que se construye  $\mathcal{SBV}$ , eventualmente obtenemos el vector  $(r, s)$ .

El hecho de que todos los racionales positivos aparezcan en  $\mathcal{SBF}$  permite una prueba fácil de la numerabilidad de  $\mathbb{Q}$ . Más interesante que poder numerar a los racionales, será descubrir que el orden de aparición de éstos está relacionado con la estructura de los números reales y la distribución de los racionales en la recta real. En la figura 4.24 podemos apreciar visualmente que los vectores que aparecen en  $\mathcal{SBV}$  siguen cierto patrón. Una observación es que entre más pronto aparece un vector en el árbol, si consideramos los vectores que han aparecido hasta ese momento (hasta ese nivel de  $\mathcal{SBV}$ ), pareciera haber alrededor de él menor “densidad” de vectores (ver figura 4.24). Abordaremos este tema en el capítulo 8.

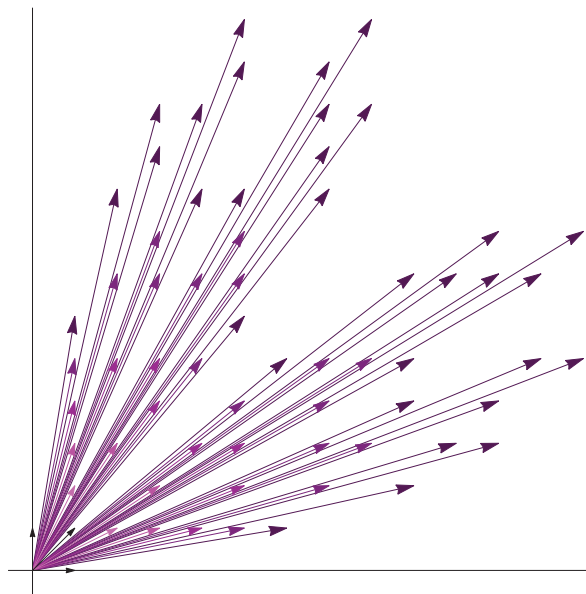


Figura 4.24: Las pendientes de los vectores en  $\mathcal{SBV}$  se corresponden con todos los racionales positivos.



### 4.5. El árbol de Stern-Brocot en forma de palabras

Hemos ya visto algunas propiedades de  $\mathcal{SB}$  en sus distintas formas. Otras propiedades dependen no de quiénes son los vértices del árbol, sino de cómo fue construido. El árbol de Stern-Brocot en su forma matricial requiere que  $I$  y  $D$  sean las matrices  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  y  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ . Si tomamos a  $I$  y  $D$  no como matrices, sino simplemente como letras, podemos construir un árbol cuyos vértices son palabras (sucesiones finitas de letras).

Construimos entonces  $\mathcal{SBP}$ , la forma de  $\mathcal{SB}$  en palabras, de igual modo que hicimos para construir  $\mathcal{SBM}$ , pero cambiando  $I$  y  $D$  por  $i$  y  $d$  para enfatizar que las pensamos como palabras en lugar de matrices. Esta aproximación nos permitirá estudiar las propiedades relativas únicamente a la construcción del árbol, y no al significado de  $I$  y  $D$ . Tomamos como raíz la palabra vacía, que denotaremos  $e$ , y dada una palabra en un nivel, colocamos una  $i$  al final de la palabra para obtener el descendiente izquierdo, y una  $d$  al final de la palabra para obtener el descendiente derecho. Procediendo de esta manera obtenemos el árbol de la figura 4.25.

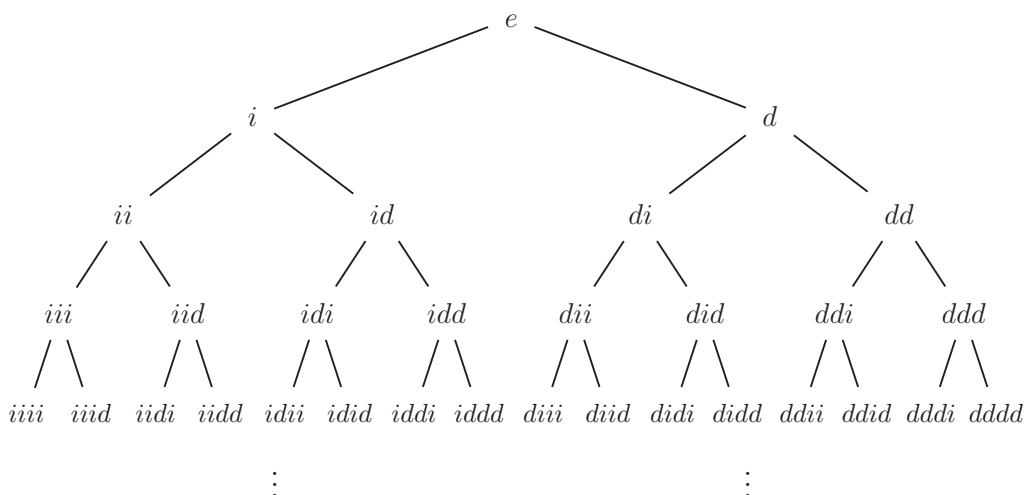


Figura 4.25: Árbol de Stern-Brocot en forma de palabras.

**Observación 4.26.** *Por construcción, las palabras que están en un mismo nivel aparecen en orden lexicográfico tomando el alfabeto  $\{i, d\}$ .*

También en esta forma tenemos cierta relación de simetría para palabras que están en vértices simétricos de  $\mathcal{SBP}$ , como enunciamos en la siguiente proposición.

**Proposición 4.27.** *Palabras que están en vértices simétricos se obtienen una de otra cambiando  $i$ 's por  $d$ 's y viceversa.*

Notamos que no es lo mismo cambiar  $i$ 's por  $d$ 's y viceversa que leer la palabra *al revés*. Una propiedad a destacar es la propiedad de autosimilaridad que genera en  $\mathcal{SBP}$  el proceso iterativo de construcción. Para enunciarla requerimos el concepto de *subárbol*.

**Definición 4.28.** *Para un vértice  $v_{m,n}$  fijo en  $\mathcal{SB}$ , definimos el subárbol de  $\mathcal{SB}$  con raíz  $v_{m,n}$  como el árbol cuya raíz es el vértice  $v_{m,n}$  y los descendientes de cada vértice son como en  $\mathcal{SB}$ .*

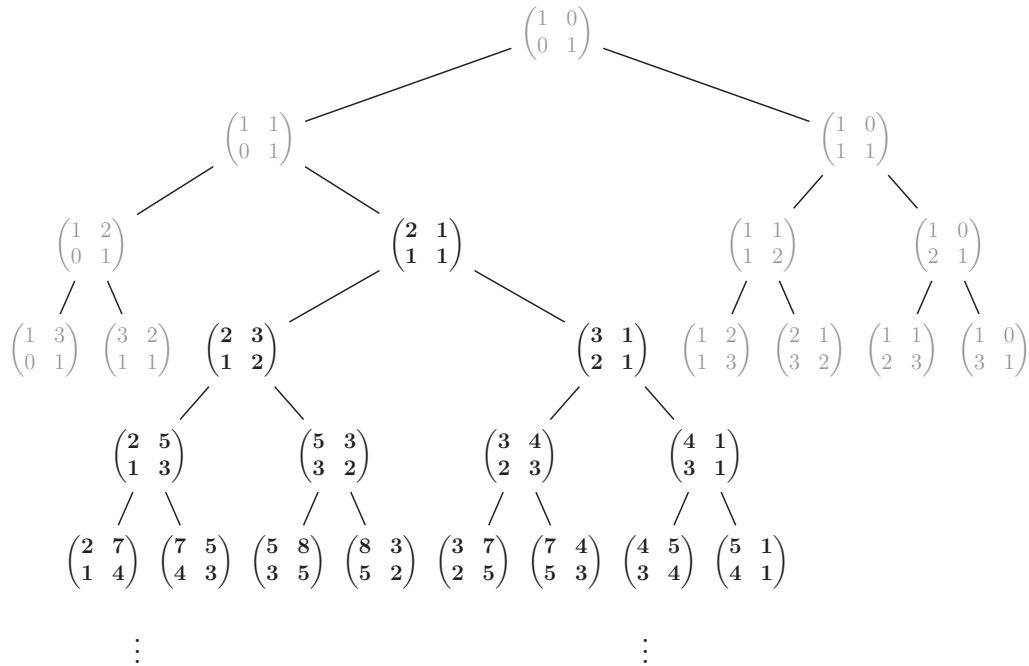


Figura 4.26: subárbol de  $SBM$  con raíz  $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ .

**Proposición 4.29.** *Consideremos los subárboles de  $SBP$  con raíz  $i$  y  $d$  respectivamente. Si anulamos la primera letra de cada palabra del subárbol con raíz  $i$ , obtenemos nuevamente  $SBP$ . Así mismo, si anulamos la primera letra de cada palabra del subárbol con raíz  $d$ , obtenemos nuevamente  $SBP$ .*

Esta proposición es una consecuencia directa de la construcción de  $SBP$ . Si se quisiera una prueba formal, bastaría un proceso inductivo: al quitar la primera letra a la raíz  $i$  o  $d$ , tenemos la palabra vacía, que es la raíz de  $SBP$ , y la construcción de los descendientes de cada palabra en el subárbol es la misma que en  $SBP$  (ver figura 4.27).

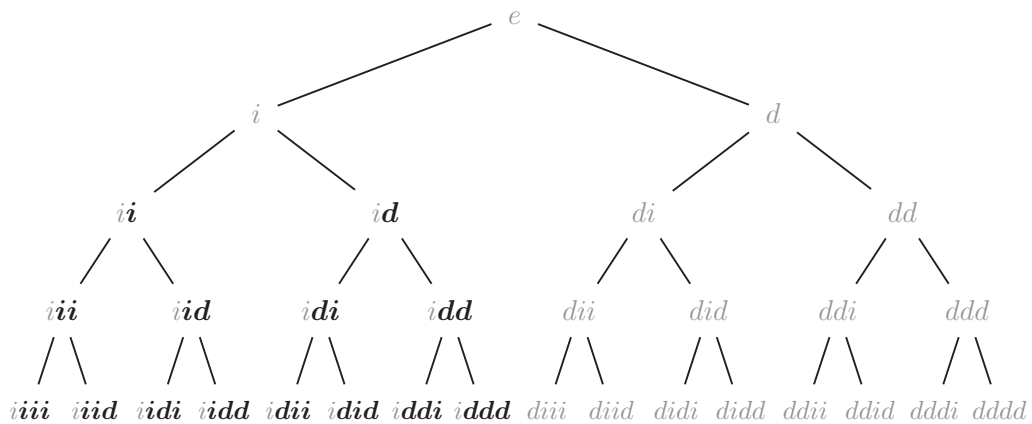


Figura 4.27: Autosimilaridad de  $SBP$ .

**Corolario 4.30.** *Si en el subárbol de  $SBP$  con raíz en  $v_{m,n}$  quitamos las primeras  $m$  letras de cada palabra, obtenemos nuevamente  $SBP$ .*

*Demostración.* Aplicamos la proposición anterior  $m$  veces a los subárboles adecuados hasta llegar al vértice  $v_{m,n}$ . □

Con esto terminamos la presentación de las distintas formas del árbol de Stern-Brocot. Estaremos pasando continuamente de una a otra. Resumiendo, tenemos las siguientes relaciones entre vértices correspondientes de las distintas formas de  $\mathcal{SB}$ : si  $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  en  $\mathcal{SBM}$ , entonces sus vértices correspondientes en  $\mathcal{SBV}$  y  $\mathcal{SBF}$  son el vector  $(a+b, c+d)$  y el racional  $(c+d)/(a+b)$  respectivamente. El vector  $(a+b, c+d)$  es la diagonal del paralelogramo formado por los vectores columna de  $M$ , y el racional  $(c+d)/(a+b)$  es la pendiente del vector  $(a+b, c+d)$ . El vértice correspondiente en  $\mathcal{SBP}$  es una palabra que indica la descomposición de  $M$  en productos de  $I$  y  $D$ .

### 4.6. Caminos en las distintas formas de $\mathcal{SB}$

Queremos relacionar las construcciones que dimos de las distintas formas de  $\mathcal{SB}$ , y sus propiedades, con las fracciones continuas, el algoritmo de Euclides y la explosión de singularidades. Para esto introduciremos en esta sección los *caminos* en un árbol, que son el lenguaje que usaremos para integrar estos materiales en el capítulo 5.

**Definición 4.31.** *Un camino  $\mathcal{C}$  en un árbol binario completo infinito es una sucesión (finita o infinita) de vértices del árbol,  $\mathcal{C} = (s_0, s_1, s_2, \dots)$  tal que el primer vértice de la sucesión es la raíz  $v_{0,1}$ , y para cada término en la sucesión se tiene que el término siguiente es su descendiente izquierdo o derecho: si  $s_n = v_{i,j}$ , entonces  $s_{n+1} = v_{i+1,2j-1}$  ó  $s_{n+1} = v_{i+1,2j}$ .*

Ilustramos esta definición en la figura 4.28.

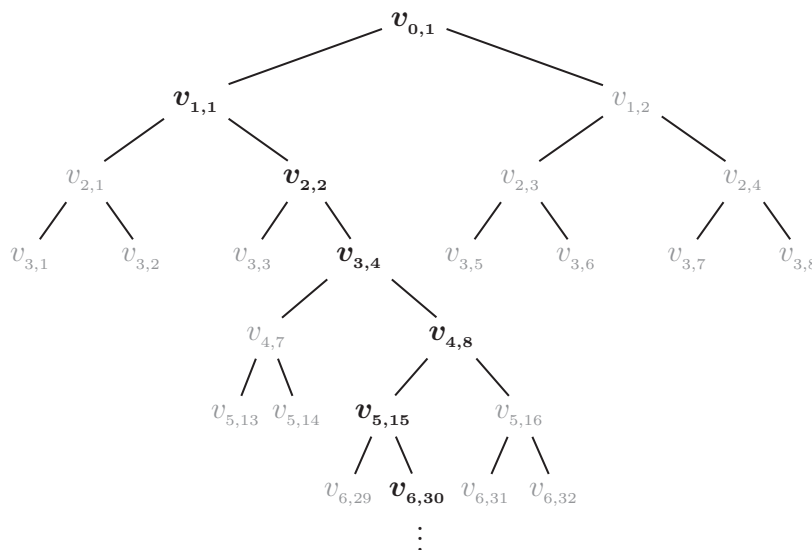


Figura 4.28: Camino  $\mathcal{C} = (v_{0,1}, v_{1,1}, v_{2,2}, v_{3,4}, v_{4,8}, v_{5,15}, v_{6,30}, \dots)$  en  $\mathcal{SB}$ .

Así, un camino en  $\mathcal{SBM}$  es una sucesión de matrices, un camino en  $\mathcal{SBV}$  es una sucesión de vectores, un camino en  $\mathcal{SBF}$  es una sucesión de fracciones y un camino en  $\mathcal{SBP}$  es una sucesión de palabras.

En los caminos en  $\mathcal{SBF}$ , que son sucesiones de racionales, encontraremos la relación más directa con las fracciones continuas y las aproximaciones racionales. Verlos en el contexto de  $\mathcal{SBF}$  tendrá la ventaja de establecer una relación con las otras formas de  $\mathcal{SB}$ , y la interpretación geométrica que dimos de ellas.

**Notación 4.32.** Para referirnos a un camino en alguna forma particular de  $\mathcal{SB}$  escribiremos:  $\mathcal{C}^M$  para un camino en  $\mathcal{SBM}$ ,  $\mathcal{C}^V$  para un camino en  $\mathcal{SBV}$ ,  $\mathcal{C}^F$  para un camino en  $\mathcal{SBF}$ , y  $\mathcal{C}^P$  para un camino en  $\mathcal{SBP}$ .

**Definición 4.33.** Diremos que los caminos  $\mathcal{C}^M$ ,  $\mathcal{C}^V$ ,  $\mathcal{C}^F$  y  $\mathcal{C}^P$  son caminos correspondientes si los vértices en el  $n$ -ésimo término de cada camino son vértices correspondientes.

**Ejemplo 4.34.** Los caminos

$$\begin{aligned} \mathcal{C}^M &= \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \right), \\ \mathcal{C}^V &= ((1, 1), (1, 2), (2, 3), (3, 5), (5, 8)), \\ \mathcal{C}^F &= \left( \frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5} \right), \quad y \\ \mathcal{C}^P &= (e, d, di, did, didi) \end{aligned}$$

son caminos correspondientes (ver figura 4.29).

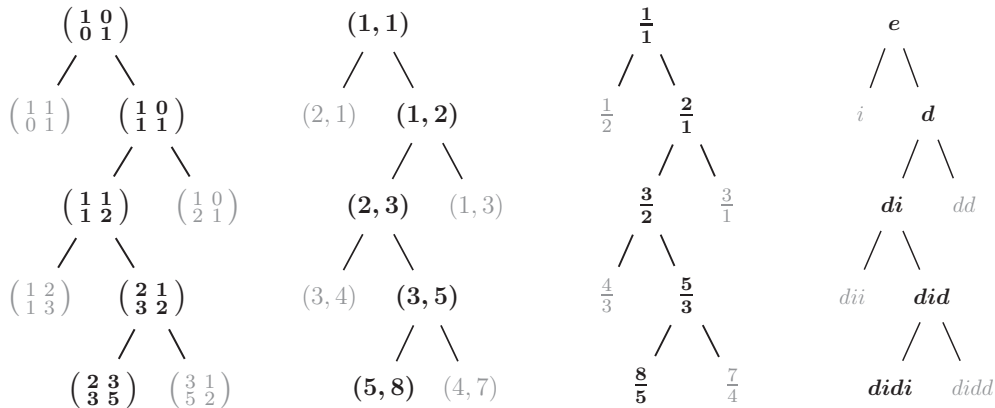


Figura 4.29: Caminos correspondientes en  $\mathcal{SBM}$ ,  $\mathcal{SBV}$ ,  $\mathcal{SBF}$  y  $\mathcal{SBP}$ .

Notamos que para cada camino en un árbol binario completo infinito  $\mathcal{A}$ , el  $n$ -ésimo término del camino es un vértice en el nivel  $n$  de  $\mathcal{A}$ . Además, ya que la definición de camino no admite que se repitan vértices, si todos los vértices de  $\mathcal{A}$  son distintos, entonces todos los términos de un camino en  $\mathcal{A}$  también lo son. Así, un camino en cualquiera de las formas de  $\mathcal{SB}$  tiene todos sus términos distintos, pues en ninguna de las formas de  $\mathcal{SB}$  hay vértices repetidos.

Ahora queremos, en cada una de las formas de  $\mathcal{SB}$ , asociar a cada vértice un camino finito: el único camino para llegar de la raíz del árbol al vértice en cuestión. Para probar que existe un único camino que satisface esto, veremos que si dos caminos en una de las formas de  $\mathcal{SB}$  difieren en algún término, tendrán que diferir en todos los siguientes. Esto implica que si dos caminos comparten un vértice, entonces comparten todos los anteriores.

**Afirmación 4.35.** *Sea  $\mathcal{A}$  un árbol binario completo infinito tal que todos sus vértices son distintos. Sean  $\mathcal{C}_1 = (s_0, s_1, s_2, \dots)$  y  $\mathcal{C}_2 = (c_0, c_1, c_2, \dots)$  caminos en  $\mathcal{A}$ . Si  $s_k \neq c_k$  entonces  $s_j \neq c_j$  para toda  $j \geq k \geq 1$ .*

*Demostración.* Sean  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{C}_1$  y  $\mathcal{C}_2$  como en el enunciado de la afirmación. Si  $s_k \neq c_k$ , entonces  $s_{k+1} \neq c_{k+1}$  pues en  $\mathcal{A}$  no se repiten vértices, y  $s_{k+1}$  es descendiente de  $s_k$  y  $c_{k+1}$  de  $c_k$ . Por la misma razón, si  $s_{k+n} \neq c_{k+n}$ , entonces  $s_{k+n+1} \neq c_{k+n+1}$ . De aquí concluimos que  $s_{k+n} \neq c_{k+n}$  para toda  $n \in \mathbb{N}$ , como afirmamos arriba.  $\square$

**Corolario 4.36.** *Sea  $\mathcal{A}$  un árbol binario completo infinito tal que todos sus vértices son distintos, y sean  $\mathcal{C}_1 = (s_0, s_1, s_2, \dots)$  y  $\mathcal{C}_2 = (c_0, c_1, c_2, \dots)$  caminos en  $\mathcal{A}$  tales que  $s_k = c_l$ , con  $k, l \geq 1$ . Entonces  $k = l$  y  $s_i = c_i$  para toda  $i \in \{0, \dots, k\}$ .*

*Demostración.* Sean  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{C}_1$  y  $\mathcal{C}_2$  como en el enunciado del corolario. Como los términos  $s_i$  y  $c_i$  son cada uno un vértice en el nivel  $i$  de  $\mathcal{A}$ , entonces si  $s_k = c_l = v_{m,n}$ , tenemos que  $k = m = l$ . Ahora,  $s_0 = c_0$  por definición. Hacemos notar que si  $s_j \neq c_j$  para algún  $j < k$ , entonces por la afirmación 4.35 tendríamos que  $s_k \neq c_l$ . Así, debe ser que  $s_i = c_i \forall i \in \{0, \dots, k\}$ .  $\square$

El corolario 4.36 implica que para cada vértice  $v_{m,n}$  en cada una de las formas de  $\mathcal{SB}$  habrá un único camino finito en ese árbol del cual  $v_{m,n}$  es el último término. Esto determina, para cada forma de  $\mathcal{SB}$ , una correspondencia biunívoca entre los vértices del árbol y los caminos finitos en él.

**Definición 4.37.** *Dado un vértice  $v_{m,n}$  en un árbol binario completo infinito  $\mathcal{A}$  en el que no se repiten vértices, definimos el camino del vértice  $v_{m,n}$  en  $\mathcal{A}$ , que denotaremos por  $\mathcal{C}_{v_{m,n}}$ , como el único camino finito en  $\mathcal{A}$  cuyo vértice final es  $v_{m,n}$ .*

**Ejemplo 4.38.** *Consideremos el vértice  $(4, 7)$  en  $\mathcal{SBV}$ . El camino de  $(4, 7)$  en  $\mathcal{SBV}$  es  $\mathcal{C}_{(4,7)} = ((1, 1), (1, 2), (2, 3), (3, 5), (4, 7))$  (ver figura 4.30).*

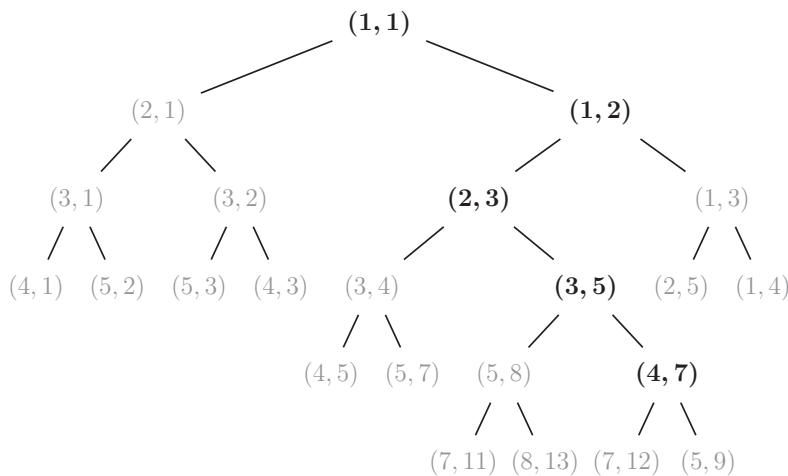


Figura 4.30: Camino del vértice  $(4, 7)$  en  $\mathcal{SBV}$ .

Consideremos ahora caminos infinitos. Tenemos tres posibles tipos de caminos infinitos: aquellos en los que a partir de cierto momento todos los vértices del camino son descendiente

izquierdo del anterior, aquellos en los que a partir de cierto momento todos los vértices son descendiente derecho del anterior, y aquellos en los que para cada término, siempre habrá un término posterior que sea descendiente izquierdo del anterior y alguno que sea descendiente derecho del anterior. A los caminos pertenecientes a los dos primeros tipos los llamaremos *caminos con dirección casi-fija*, y a los pertenecientes al tercer tipo los llamaremos *caminos con infinitos cambios de dirección*. Notamos que los caminos infinitos deben ser o bien con dirección casi-fija, o con infinitos cambios de dirección.

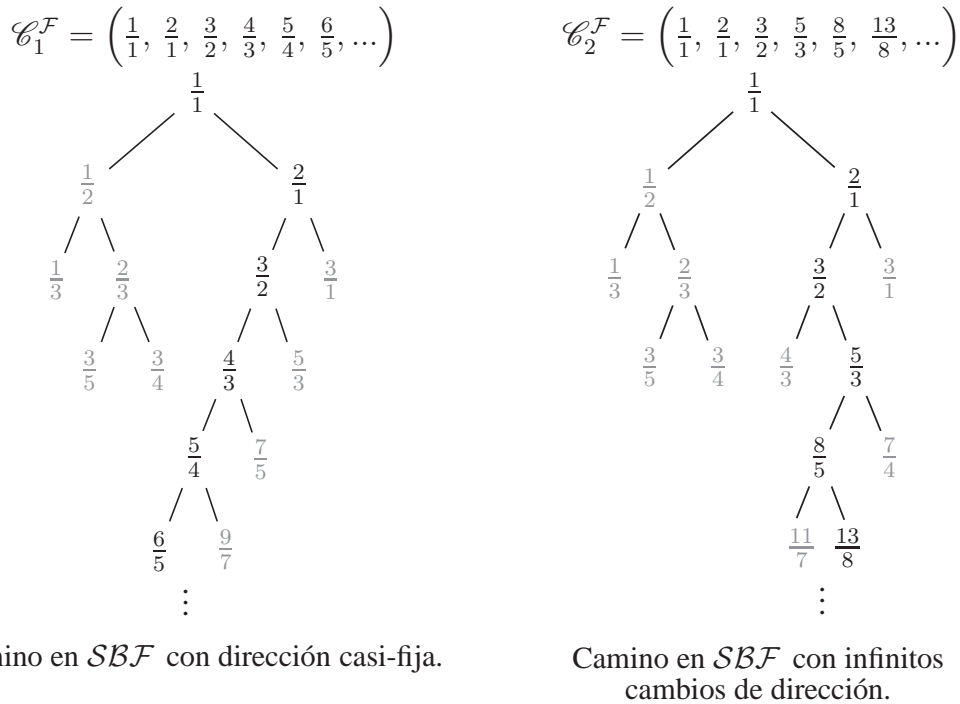


Figura 4.31: Tipos de caminos infinitos en  $\mathcal{SB}$ .

El hecho de que a cada término en un camino le deba seguir o su descendiente izquierdo o su descendiente derecho hace que podamos describir un camino únicamente en términos de cuándo se toma el descendiente izquierdo y cuándo el derecho. Para hacer esto, construiremos para cada camino una sucesión de naturales positivos (salvo tal vez el primero) que contenga justo esta información. Excluiremos de momento a los caminos con dirección casi fija.

Tomemos un camino  $\mathcal{C} = (s_0, s_1, s_2, \dots)$ , finito o con infinitos cambios de dirección, en un árbol binario completo infinito. El primer término,  $s_0$ , es la raíz del árbol. Contamos cuántos vértices consecutivos, partiendo de  $s_1$ , son descendiente derecho del anterior; digamos que  $a_0$  vértices. Ahora contamos cuántos vértices consecutivos a partir de ahí son descendiente izquierdo del anterior; digamos que  $a_1$ . Nuevamente contamos cuántos son descendiente derecho del anterior; digamos  $a_2$ , y así sucesivamente contamos descendientes izquierdos y derechos alternados, generando la sucesión  $\{a_n\} = (a_0, a_1, a_2, \dots)$ . De esta manera construimos *la sucesión del camino*  $\mathcal{C}$ , que escribimos resumidamente en la siguiente definición.

**Definición 4.39.** Sea  $\mathcal{C} = (s_0, s_1, s_2, \dots)$  un camino finito o con infinitos cambios de dirección en un árbol binario completo infinito. Definimos la *sucesión del camino*  $\mathcal{C}$ , como la única sucesión de enteros positivos (salvo el primer término, que puede ser 0) cuyos términos indican cuántos términos consecutivos son descendiente derecho del anterior, y cuántos descendiente

izquierdo, alternadamente y comenzando con descendientes derechos. Si  $\{a_n\}$  es sucesión de  $\mathcal{C}$ , diremos también que  $\mathcal{C}$  tiene sucesión  $\{a_n\}$ .

La sucesión de un camino finito es finita, y la de un camino infinito es infinita. Es importante que comencemos contando los descendientes derechos. En caso de que  $s_1$  sea descendiente izquierdo de  $s_0$ , entonces  $a_0$  será 0. Este es el único término de la sucesión que podrá ser cero. El resto será siempre algún entero positivo. Notamos que si tomamos un camino con dirección casi-fija, no podríamos construir esta sucesión.

**Ejemplo 4.40.** Consideremos el siguiente camino en  $\mathcal{SBF}$ :

$$\mathcal{C}^{\mathcal{F}} = \left( \frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \frac{13}{8} \right).$$

Entonces la sucesión de  $\mathcal{C}^{\mathcal{F}}$  es  $(1, 1, 1, 1, 1)$  (ver figura 4.32).

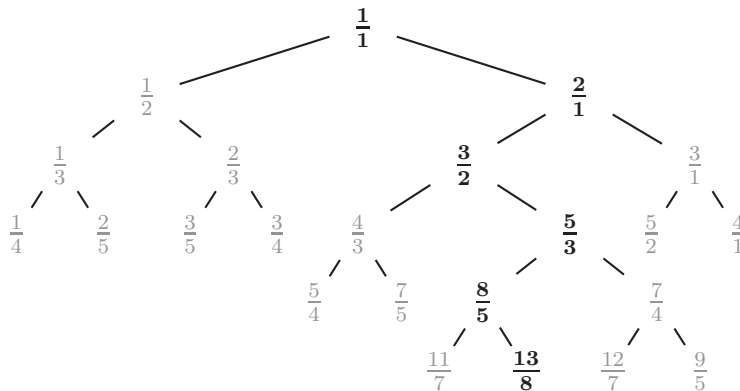


Figura 4.32: La sucesión de  $\mathcal{C}^{\mathcal{F}}$  es  $(1, 1, 1, 1, 1)$ .

Notamos que si tomamos un árbol binario completo infinito  $\mathcal{A}$  y una sucesión de enteros positivos (salvo tal vez el primero, que puede ser cero)  $\{a_n\} = (a_0, a_1, a_2, \dots)$  finita o infinita, podemos recuperar el camino  $\mathcal{C}$  en  $\mathcal{A}$  que tiene sucesión  $\{a_n\}$  de la siguiente manera: el primer término de  $\mathcal{C}$  es la raíz de  $\mathcal{A}$ ; los primeros  $a_0$  términos de  $\mathcal{C}$  después de la raíz serán descendiente derecho del anterior; los siguientes  $a_1$  términos serán descendiente izquierdo del anterior; los siguientes  $a_2$  serán descendiente derecho del anterior, etc.

Para cada sucesión  $\{a_n\}$  de enteros positivos, con el primero tal vez cero, habrá un camino (finito o con infinitos cambios de dirección) en cada una de las formas de  $\mathcal{SB}$  del que  $\{a_n\}$  es sucesión. La construcción de la sucesión de un camino establece en cada una de las formas de  $\mathcal{SB}$  una correspondencia biunívoca entre sucesiones de enteros positivos (el primer término tal vez cero) y caminos finitos o con infinitos cambios de dirección. Notamos que caminos en las distintas formas de  $\mathcal{SB}$  que tengan la misma sucesión son caminos correspondientes.

**Notación 4.41.** Dada una sucesión  $\{a_n\}$  de enteros positivos, salvo tal vez el primer término, que puede ser cero, escribiremos

$$\mathcal{C}_{\{a_n\}}^{\mathcal{M}} \quad \mathcal{C}_{\{a_n\}}^{\mathcal{V}} \quad \mathcal{C}_{\{a_n\}}^{\mathcal{F}} \quad \text{y} \quad \mathcal{C}_{\{a_n\}}^{\mathcal{P}}$$

para referirnos a los caminos en las distintas formas de  $\mathcal{SB}$  que tienen sucesión  $\{a_n\}$ .  $\mathcal{C}_{\{a_n\}}^{\mathcal{M}}$  corresponde a la forma matricial,  $\mathcal{C}_{\{a_n\}}^{\mathcal{V}}$  a la forma vectorial,  $\mathcal{C}_{\{a_n\}}^{\mathcal{F}}$  a la forma fraccionaria y  $\mathcal{C}_{\{a_n\}}^{\mathcal{P}}$  a la forma de palabras.

**Ejemplo 4.42.** Consideremos la sucesión  $\{a_n\} = (0, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, \dots)$ . Entonces los caminos en las distintas formas de  $\mathcal{SB}$  que tienen sucesión  $\{a_n\}$  son:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{C}_{\{a_n\}}^{\mathcal{M}} &= \left( \binom{1\ 0}{0\ 1}, \binom{1\ 1}{0\ 1}, \binom{2\ 1}{1\ 1}, \binom{3\ 1}{2\ 1}, \binom{3\ 4}{2\ 3}, \binom{7\ 4}{5\ 3}, \binom{11\ 4}{8\ 3}, \dots \right) \\
 \mathcal{C}_{\{a_n\}}^{\mathcal{V}} &= ((1, 1), (2, 1), (3, 2), (4, 3), (7, 5), (11, 8), (15, 11), \dots) \\
 \mathcal{C}_{\{a_n\}}^{\mathcal{F}} &= \left( \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{5}{7}, \frac{8}{11}, \frac{11}{15}, \dots \right) \\
 \mathcal{C}_{\{a_n\}}^{\mathcal{P}} &= (e, i, id, idd, iddi, iddid, iddidd, iddididi, \dots).
 \end{aligned}
 \tag{4.10}$$

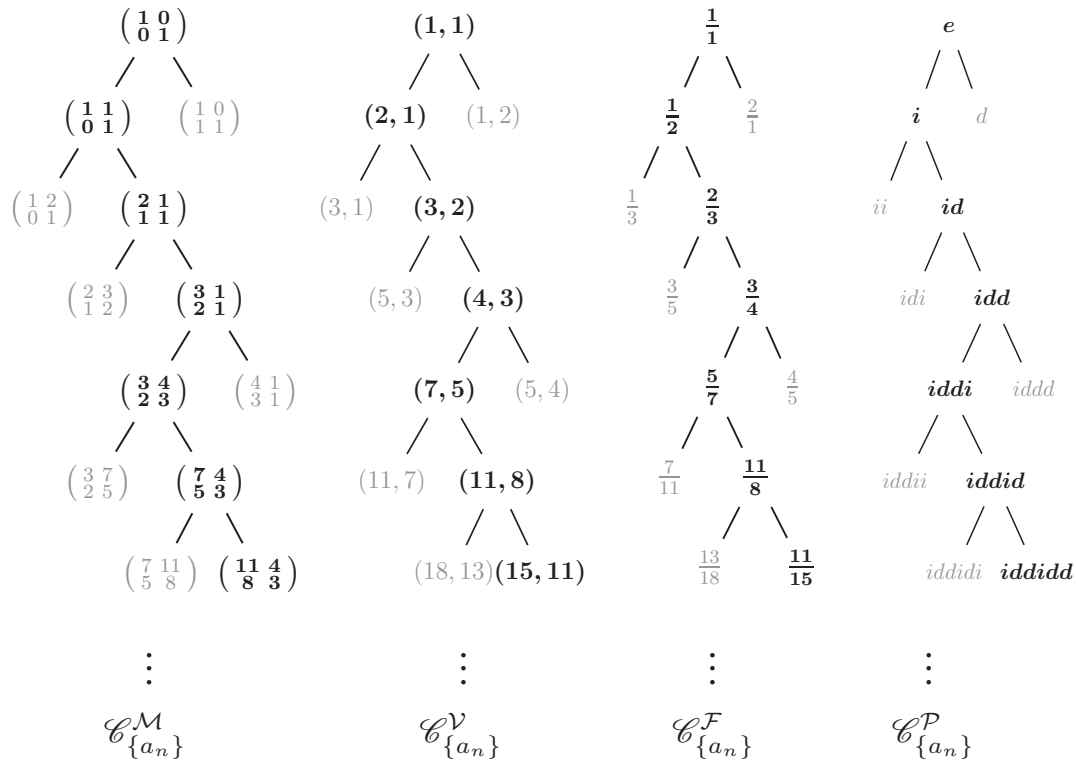


Figura 4.33: Caminos en  $\mathcal{SBM}$ ,  $\mathcal{SBV}$ ,  $\mathcal{SBF}$  y  $\mathcal{SBP}$  de los que  $\{a_n\} = (0, 1, 2, 1, 2, \dots)$  es sucesión.

Bien, tenemos ya una forma de asociar de manera única caminos finitos o con infinitos cambios de dirección a sucesiones de enteros positivos y viceversa. También tenemos una asociación entre vértices y caminos finitos. Ahora en cada una de las formas de  $\mathcal{SB}$  asociaremos a cada vértice una sucesión finita: la sucesión del camino del vértice en cuestión.

**Definición 4.43.** Sea  $v$  un vértice de un árbol binario completo infinito  $\mathcal{A}$  en el que no se repiten vértices. Definimos la sucesión del vértice  $v$  en  $\mathcal{A}$  como la sucesión del camino del vértice  $v$  en  $\mathcal{A}$ . Si  $\{a_n\}$  es sucesión de  $v$  en  $\mathcal{A}$  también diremos que  $v$  tiene sucesión  $\{a_n\}$  en  $\mathcal{A}$ .

**Ejemplo 4.44.** Consideremos el vértice  $M = \binom{5\ 7}{2\ 3}$  de  $\mathcal{SBM}$ . Entonces tenemos que la sucesión de  $M$  en  $\mathcal{SBM}$  es  $(0, 2, 2, 1)$ .



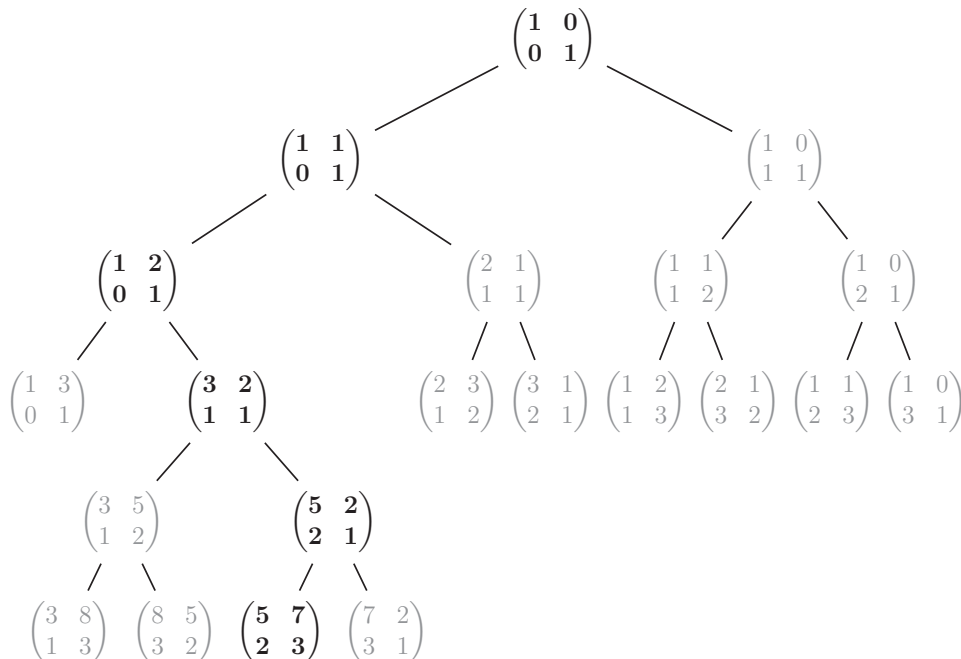


Figura 4.34: La sucesión de  $M$  en  $\mathcal{SBM}$  es  $(2, 2, 1)$ .

De igual manera que con los caminos, a cada sucesión finita  $\{a_n\}$  de enteros positivos (con el primero tal vez cero) le corresponde un vértice en cada forma de  $\mathcal{SB}$ . Vértices correspondientes tienen la misma sucesión.

**Notación 4.45.** Dada una sucesión finita  $\{a_n\}$  de enteros positivos, salvo tal vez el primer término, que puede ser cero, escribiremos

$$v_{\{a_n\}}^{\mathcal{M}} \quad v_{\{a_n\}}^{\mathcal{V}} \quad v_{\{a_n\}}^{\mathcal{F}} \quad \text{y} \quad v_{\{a_n\}}^{\mathcal{P}}$$

para referirnos a los vértices en las distintas formas de  $\mathcal{SB}$  que tienen sucesión  $\{a_n\}$ .  $v_{\{a_n\}}^{\mathcal{M}}$  corresponde a la forma matricial,  $v_{\{a_n\}}^{\mathcal{V}}$  a la forma vectorial,  $v_{\{a_n\}}^{\mathcal{F}}$  a la forma fraccionaria y  $v_{\{a_n\}}^{\mathcal{P}}$  a la forma de palabras.

**Ejemplo 4.46.** Consideremos la sucesión finita  $\{a_n\} = (1, 1, 2)$ . Los vértices que tienen sucesión  $\{a_n\}$  en las distintas formas de  $\mathcal{SB}$  son:

$$\begin{aligned} v_{\{a_n\}}^{\mathcal{M}} &= \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \\ v_{\{a_n\}}^{\mathcal{V}} &= (4, 7) \\ v_{\{a_n\}}^{\mathcal{F}} &= \frac{7}{4} \\ v_{\{a_n\}}^{\mathcal{P}} &= \text{didd.} \end{aligned}$$

En la figura 4.35 mostramos los caminos en cada una de las formas de  $\mathcal{SB}$  que tienen sucesión  $\{a_n\} = (1, 1, 2)$ . El último vértice en cada uno de ellos es el vértice que tiene sucesión  $\{a_n\}$  en el árbol que corresponda.

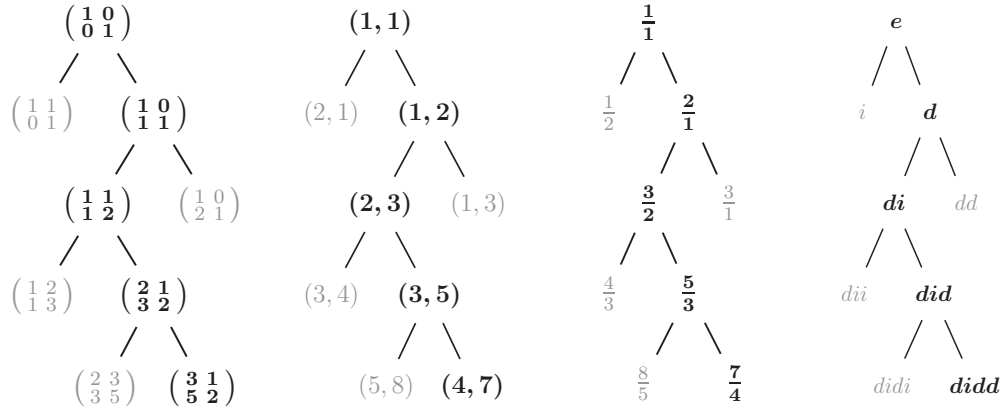


Figura 4.35: Vértices en  $\mathcal{SBM}$ ,  $\mathcal{SBV}$ ,  $\mathcal{SBF}$  y  $\mathcal{SBP}$  con sucesión  $\{a_n\} = \{1, 1, 2\}$ .

La sucesión de un camino en  $\mathcal{SBM}$  está naturalmente relacionada con los términos del camino, pues las matrices de  $\mathcal{SBM}$  que aparecen en el camino pueden expresarse como productos de  $I$  y  $D$ , y el orden de este producto indica qué descendientes derechos y qué descendientes izquierdos fueron tomados.

**Proposición 4.47.** *Sea  $M$  en  $\mathcal{SBM}$ , con  $M = I^{a_0} D^{a_1} I^{a_2} \dots \left\{ \frac{I}{D} \right\}^{a_n}$ . Entonces el camino de  $M$  en  $\mathcal{SBM}$  es:*

$$\mathcal{C}_M = (E, D, D^2, \dots, D^{a_0}, D^{a_0} I, \dots, D^{a_0} I^{a_1}, \dots, D^{a_0} I^{a_1} D^{a_2} \dots \left\{ \frac{D}{I} \right\}^{a_n} = M) \quad (4.11)$$

si  $a_0 \neq 0$ . Y

$$\mathcal{C}_M = (E, D^{a_0} I, D^{a_0} I^2, \dots, D^{a_0} I^{a_1}, \dots, D^{a_0} I^{a_1} D^{a_2} \dots \left\{ \frac{D}{I} \right\}^{a_n} = M) \quad (4.12)$$

si  $a_0 = 0$ .

*Demostración.* Como hay un único camino en  $\mathcal{SBM}$  con  $M$  como último término, basta probar que los caminos dados en (4.11) y (4.12) son en verdad caminos. El primer término es la raíz de  $\mathcal{SBM}$  y por construcción, los descendientes izquierdo y derecho de una matriz se obtienen multiplicando esa matriz por  $I$  o por  $D$ . Así, los términos del camino dado en (4.11) son cada uno descendiente del anterior, pues  $a_i > 0$  para  $i \in \{0, \dots, n\}$ . Si  $a_0 = 0$ , notamos que  $D^{a_0} = E$  y su descendiente izquierdo es  $D^{a_0} I = I$ . El resto de los términos son descendiente derecho o izquierdo del anterior, pues  $a_i > 0$  para  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Así, el camino dado en (4.11) es en efecto un camino, y es por definición  $\mathcal{C}_M$ .  $\square$

Resulta muy cómodo que podamos encontrar la sucesión de una matriz en  $\mathcal{SBM}$  únicamente fijándonos en los exponentes de  $I$  y  $D$  al expresarla como producto de potencias de éstas, lo que enunciamos en la siguiente proposición.

**Proposición 4.48.** *Sea  $M$  en  $\mathcal{SBM}$ , con  $M = D^{a_0} I^{a_1} D^{a_2} \dots \left\{ \frac{D}{I} \right\}^{a_n}$ , con  $a_0, \dots, a_n$  enteros positivos salvo tal vez  $a_0$ , que puede ser cero. Entonces la sucesión de  $M$  en  $\mathcal{SBM}$  es  $(a_0, a_1, a_2, \dots, a_n)$ .*

*Demostración.* Sea  $M = D^{a_0} I^{a_1} D^{a_2} \dots \left\{ \frac{D}{I} \right\}^{a_n}$  en  $\mathcal{SBM}$  como en el enunciado de la proposición. Por definición, la sucesión de  $M$  en  $\mathcal{SBM}$  es la sucesión del camino de  $M$  en  $\mathcal{SBM}$ . Para ver

que ésta es  $(a_0, a_1, a_2, \dots, a_n)$ , vemos que según la proposición 4.47, el camino de  $M$  en  $\mathcal{SBM}$  es el dado en (4.11) si  $a_0 = 0$  o en (4.12) si  $a_0 \neq 0$ . En ambos casos los primeros  $a_0$  términos de  $\mathcal{C}_M$  después de la raíz son descendiente derecho del anterior;  $a_1$  términos a partir de ahí son descendiente izquierdo del anterior, etc. Concluimos que la sucesión de  $\mathcal{C}_M$  es  $(a_0, a_1, a_2, \dots, a_n)$ , como queríamos.  $\square$

**Ejemplo 4.49.** Consideremos la matriz  $M = D^0 I^2 D^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ . El camino de  $M$  en  $\mathcal{SBM}$  es

$$\begin{aligned} \mathcal{C}^M &= \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \right) \\ &= (E, I, I^2, I^2 D, I^2 D^2, I^2 D^3). \end{aligned}$$

Y la sucesión de  $M$  en  $\mathcal{SBM}$  es  $(0, 2, 3)$  (ver figura 4.36).

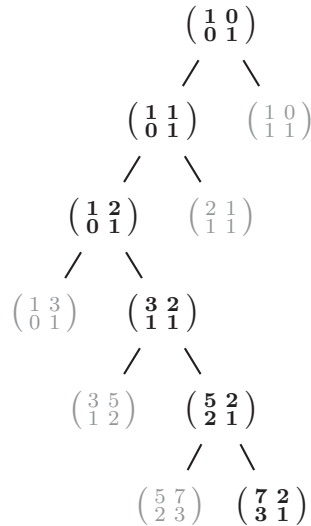


Figura 4.36: Camino de  $M$  en  $\mathcal{SBM}$ .

Podemos usar la proposición 4.48 para dar la sucesión de vectores en  $\mathcal{SBV}$ . Ya que obtenemos cada vector de  $\mathcal{SBV}$  como la suma de los vectores columna del vértice correspondiente en  $\mathcal{SBM}$ , si conocemos la sucesión de  $M$  en  $\mathcal{SBM}$ , entonces el vector  $(a + b, c + d)$ , que es el vértice correspondiente de  $M$  en  $\mathcal{SBV}$ , tiene la misma sucesión que  $M$ . Esto prueba la siguiente proposición.

**Proposición 4.50.** Sea  $M = D^{a_0} I^{a_1} D^{a_2} \dots \left\{ \begin{smallmatrix} D \\ I \end{smallmatrix} \right\}^{a_n}$  en  $\mathcal{SBM}$ . Entonces la sucesión del vector  $(a + b, c + d)$  en  $\mathcal{SBV}$  es  $(a_0, a_1, \dots, a_n)$ .

Dada  $M$  en  $\mathcal{SBM}$ , nos será útil posteriormente conocer la sucesión que tiene en  $\mathcal{SBV}$  uno de los vectores columna de  $M$ .

**Proposición 4.51.** Sea  $M$  en  $\mathcal{SBM}$ , descendiente derecho o izquierdo de  $M'$ , y sea  $(a_0, a_1, \dots, a_n)$  la sucesión de  $M$  en  $\mathcal{SBM}$ . Entonces la sucesión en  $\mathcal{SBV}$  del vector columna de  $M$  que ésta no comparte con  $M'$  es  $(a_0, a_1, \dots, a_n - 1)$  si  $a_n \neq 0$  y  $(a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$  si  $a_n = 0$ .

Veamos un ejemplo antes de hacer la demostración.

**Ejemplo 4.52.** Sea  $M = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$  en  $\mathcal{SBM}$ .  $M$  tiene sucesión  $(0, 1, 2)$  en  $\mathcal{SBM}$ , y es descendiente derecho de  $M' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ . El vector columna de  $M$  que no comparte con  $M'$  es  $(3, 2)$ . Y el vector  $(3, 2)$  tiene sucesión  $(0, 1, 1)$  en  $\mathcal{SBV}$ . Ver figura 4.37.

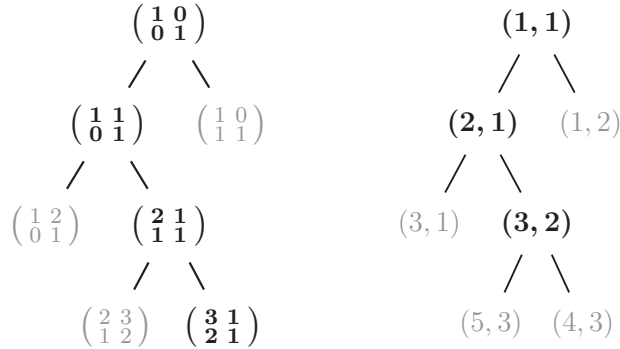


Figura 4.37

*Demostración.* (de la proposición 4.51)

Sea  $M$  en  $\mathcal{SBM}$  descendiente de  $M' = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ . Sea  $(a_0, a_1, \dots, a_n)$  la sucesión de  $M$  en  $\mathcal{SBM}$ . Entonces la sucesión de  $M'$  en  $\mathcal{SBM}$  es  $(a_0, a_1, \dots, a_n - 1)$ . Por otro lado, por construcción de  $\mathcal{SBM}$ , el vector columna de  $M$  que no comparte con  $M'$  es el vector  $(a + b, c + d)$  (la suma vectorial de las columnas de  $M'$ ). Este vector es vértice correspondiente de  $M$ , así que tiene la misma sucesión que  $M'$ , que ya vimos que es  $(a_0, a_1, \dots, a_n - 1)$ .  $\square$

### 4.6.1. Caminos simétricos

Aprovechamos las relaciones entre vértices simétricos que dimos anteriormente para enunciar algunas propiedades entre caminos cuyos términos sean vértices simétricos término a término. Nos serán de ayuda en el capítulo 5 cuando hablemos de fracciones continuas, y tendrán una interpretación concreta en nuestro problema de sucesivas explosiones.

**Definición 4.53.** Sea  $\mathcal{C} = (s_0, s_1, s_2, \dots)$  un camino en  $\mathcal{SB}$ . Definimos el camino simétrico de  $\mathcal{C}$  como la sucesión de vértices simétricos de los términos de  $\mathcal{C}$ :

$$\sigma(\mathcal{C}) = (\sigma(s_0), \sigma(s_1), \sigma(s_2), \dots).$$

**Proposición 4.54.** Sea  $(a_0, a_1, \dots)$  la sucesión de un camino  $\mathcal{C}$ . Entonces la sucesión de  $\sigma(\mathcal{C}_{\{a_n\}})$  es  $(0, a_0, a_1, \dots)$  si  $a_0 \neq 0$  y  $(a_1, a_2, \dots)$  si  $a_0 = 0$ .

*Demostración.* Sea  $\mathcal{C} = (s_0, s_1, \dots)$  un camino con sucesión  $(a_0, a_1, \dots)$  y sea  $\sigma(\mathcal{C}) = (c_0, c_1, \dots)$ , el camino simétrico de  $\mathcal{C}$ . Recordando el lema 4.5, tenemos que si  $s_{n+1}$  es descendiente izquierdo de  $s_n$ , entonces  $c_{n+1}$  es descendiente derecho de  $c_n$ , de modo que si los primeros  $a_0$  vértices (después de la raíz) de  $\mathcal{C}$  son descendiente derecho del anterior, entonces los primeros  $a_0$  vértices (después de la raíz) de  $\sigma(\mathcal{C})$  serán descendiente izquierdo del anterior. Así sucesivamente, de donde se sigue que  $\sigma(\mathcal{C})$  tiene sucesión  $(0, a_0, a_1, \dots)$  si  $a_0 \neq 0$  y  $(a_1, a_2, \dots)$  si  $a_0 = 0$ .  $\square$

**Corolario 4.55.** Si  $(a, b)$  en  $\mathcal{SBV}$  tiene sucesión  $(a_0, a_1, \dots, a_n)$  entonces  $(b, a)$  tiene en  $\mathcal{SBV}$  sucesión  $(0, a_0, a_1, \dots, a_n)$  si  $a_0 \neq 0$  y  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  si  $a_0 = 0$ . Así mismo, si  $b/a$  en  $\mathcal{SBF}$  tiene sucesión  $(a_0, a_1, \dots, a_n)$  entonces  $a/b$  tiene en  $\mathcal{SBF}$  sucesión  $(0, a_0, a_1, \dots, a_n)$  si  $a_0 \neq 0$  y  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  si  $a_0 = 0$ .

**Observación 4.56.** Sea  $v_{i,j}$  en alguna forma de  $\mathcal{SB}$ . Entonces el camino de  $\sigma(v_{i,j})$  coincide con el camino simétrico del camino de  $v_{i,j}$ .

Notamos que los caminos de vértices simétricos son caminos simétricos. Notamos también que en la forma matricial de  $\mathcal{SB}$ , tomar el camino simétrico de un camino  $\mathcal{C}$  es equivalente a cambiar cada matriz  $I$  por  $D$  y viceversa en la expresión en productos de  $I$  y  $D$  en los términos de  $\mathcal{C}$ ; en la forma vectorial, es intercambiar las coordenadas de cada vector; en la forma fraccionaria, es tomar el inverso de cada fracción. Geométricamente podemos leer todos los casos reflejando el plano respecto a la identidad.

#### 4.6.2. Caminos abreviados

Hay subsucesiones especiales de caminos en las distintas formas de  $\mathcal{SB}$  que nos interesa destacar para relacionarlas con las fracciones continuas, pues veremos que en ellas aparecen los convergentes de una fracción continua. Las llamaremos *caminos abreviados* en  $\mathcal{SB}$ . A diferencia de lo que hemos venido haciendo, tendremos que definir los caminos abreviados de manera diferente para distintas formas de  $\mathcal{SB}$ , pues nos interesan diferentes subsucesiones en cada árbol.

En  $\mathcal{SBM}$  los términos que nos interesa que formen parte de la subsucesión serán aquellos vértices de la sucesión donde ocurre un “cambio de dirección” en términos de descendientes izquierdo o derecho.

**Definición 4.57.** Sea  $\mathcal{C}^M = (s_0, s_1, s_2, \dots)$  un camino en  $\mathcal{SBM}$ . Definimos el camino abreviado de  $\mathcal{C}^M$ , que denotaremos por  ${}_a\mathcal{C}^M$  como la subsucesión de  $\mathcal{C}^M$  cuyo primer término es  $s_0$  y el resto de los términos son los términos  $s_i$  de  $\mathcal{C}$  que satisfagan que si  $s_i$  es descendiente izquierdo de  $s_{i-1}$ , entonces  $s_{i+1}$  es descendiente derecho de  $s_i$ ; si  $s_i$  es descendiente derecho de  $s_{i-1}$ , entonces  $s_{i+1}$  es descendiente izquierdo de  $s_i$ . Si el camino es finito, pedimos que el último término del camino esté en el camino abreviado.

**Ejemplo 4.58.** Dada la sucesión  $\{a_n\} = (1, 2, 1, 2, 1, 2, \dots)$ , tenemos que el camino que tiene sucesión  $\{a_n\}$  es

$$\mathcal{C}_{\{a_n\}}^M = \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 11 & 4 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}, \dots \right).$$

Entonces el camino abreviado de  $\mathcal{C}_{\{a_n\}}^M$  es (ver figura 4.38).

$${}_a\mathcal{C}_{\{a_n\}}^M = \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 11 & 4 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}, \dots \right).$$

Si la sucesión original fuera finita:  $\{a_n\} = (1, 2, 1, 2)$ , tendríamos que

$$\mathcal{C}_{\{a_n\}}^M = \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 11 & 4 \\ 8 & 3 \end{pmatrix} \right).$$

y su camino abreviado sería

$${}_a\mathcal{C}_{\{a_n\}}^M = \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 11 & 4 \\ 8 & 3 \end{pmatrix} \right).$$

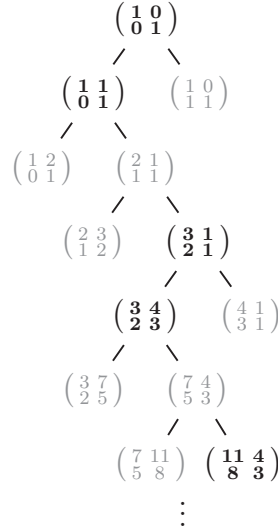


Figura 4.38: Camino abreviado del camino en  $\mathcal{SBM}$  que tiene sucesión  $\{a_n\} = (1, 2, 1, 2, \dots)$ .

Tenemos una forma fácil de leer caminos abreviados en  $\mathcal{SBM}$  como productos de matrices, usando la descomposición en productos de  $I$  y  $D$  de las matrices del árbol, quedándonos con “bloques” de  $I$ ’s y  $D$ ’s.

**Ejemplo 4.59.** *Tenemos que el camino de  $M = D^0 I^2 D^3 = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$  en  $\mathcal{SBM}$  es*

$$\begin{aligned}
 \mathcal{C}^M &= \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \right) \\
 &= (E = D^0, D^0 I, D^0 I^2, D^0 I^2 D, D^0 I^2 D^2, D^0 I^2 D^3).
 \end{aligned}$$

El camino abreviado de  $\mathcal{C}^M$  es

$${}_a \mathcal{C}^M = \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \right) = (E = D^0, D^0 I^2, D^0 I^2 D^3).$$

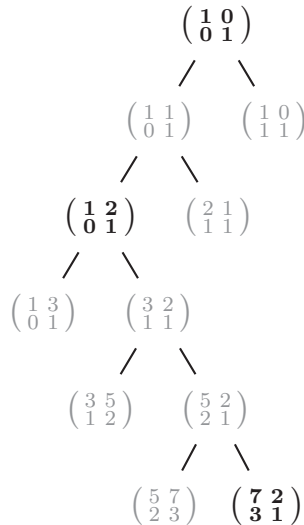


Figura 4.39

**Proposición 4.60.** *Sea  $\mathcal{C}^M$  un camino en  $\mathcal{SBM}$ , que tiene sucesión  $(a_0, a_1, a_2, \dots)$ . Entonces el camino abreviado del camino de  $\mathcal{C}^M$  es*

$${}_a\mathcal{C}_M = (E, D^{a_0}, D^{a_0}I^{a_1}, D^{a_0}I^{a_1}D^{a_2}, \dots, D^{a_0}I^{a_1}D^{a_2} \dots \left\{ \frac{D}{I} \right\}^{a_n}, \dots)$$

si  $a_0 \neq 0$ , y

$${}_a\mathcal{C}_M = (E = D^{a_0}, D^{a_0}I^{a_1}, D^{a_0}I^{a_1}D^{a_2}, \dots, D^{a_0}I^{a_1}D^{a_2} \dots \left\{ \frac{D}{I} \right\}^{a_n}, \dots)$$

si  $a_0 = 0$ .

La prueba de esta proposición es inmediata de la definición de camino abreviado.

**Corolario 4.61.** *Sea  $M$  en  $\mathcal{SBM}$ , con  $M = D^{a_0}I^{a_1}D^{a_2} \dots \left\{ \frac{D}{I} \right\}^{a_n}$ . Entonces el camino abreviado del camino de  $M$  en  $\mathcal{SBM}$  es*

$${}_a\mathcal{C}_M = (E, D^{a_0}, D^{a_0}I^{a_1}, D^{a_0}I^{a_1}D^{a_2}, \dots, D^{a_0}I^{a_1}D^{a_2} \dots \left\{ \frac{D}{I} \right\}^{a_n} = M)$$

si  $a_0 \neq 0$ , y

$${}_a\mathcal{C}_M = (E = D^{a_0}, D^{a_0}I^{a_1}, D^{a_0}I^{a_1}D^{a_2}, \dots, D^{a_0}I^{a_1}D^{a_2} \dots \left\{ \frac{D}{I} \right\}^{a_n} = M)$$

si  $a_0 = 0$ .

Ahora definamos los caminos abreviados en  $\mathcal{SBV}$  y  $\mathcal{SBF}$ . Los vectores que nos interesa que estén en el camino abreviado de un camino  $\mathcal{C}^V$  en  $\mathcal{SBV}$  son los vectores columna de las matrices en que hay cambio de dirección en el camino correspondiente en  $\mathcal{SBM}$ . Retomemos el ejemplo 4.58. El camino en  $\mathcal{SBV}$  que tiene sucesión  $\{a_n\} = (1, 2, 1, 2, \dots)$  es

$$\mathcal{C}_{\{a_n\}}^V = ((1, 1), (2, 1), (3, 2), (4, 3), (7, 5), (11, 8), (15, 11), \dots).$$

Queremos que el camino abreviado de  $\mathcal{C}_{\{a_n\}}^V$  sea

$${}_a\mathcal{C}_{\{a_n\}}^V = ((1, 1), (3, 2), (4, 3), (11, 8), \dots). \quad (4.13)$$

Recordando cómo leer  $\mathcal{SBV}$  en  $\mathcal{SBM}$  (ver lema 4.12), encontraremos estos vectores “un lugar arriba” en  $\mathcal{SBV}$  que las matrices de  $\mathcal{SBM}$  en donde aparecen como nuevo vector columna. En este caso no podremos tomar los vértices donde ocurre un cambio de dirección, sino aquellos que anteceden al cambio de dirección. En la figura 4.40 comparamos el camino abreviado del camino de matrices  $\mathcal{C}_{\{a_n\}}^M$  en  $\mathcal{SBM}$  con el que queremos que sea el camino abreviado del camino de vectores  $\mathcal{C}_{\{a_n\}}^V$  en  $\mathcal{SBV}$ .

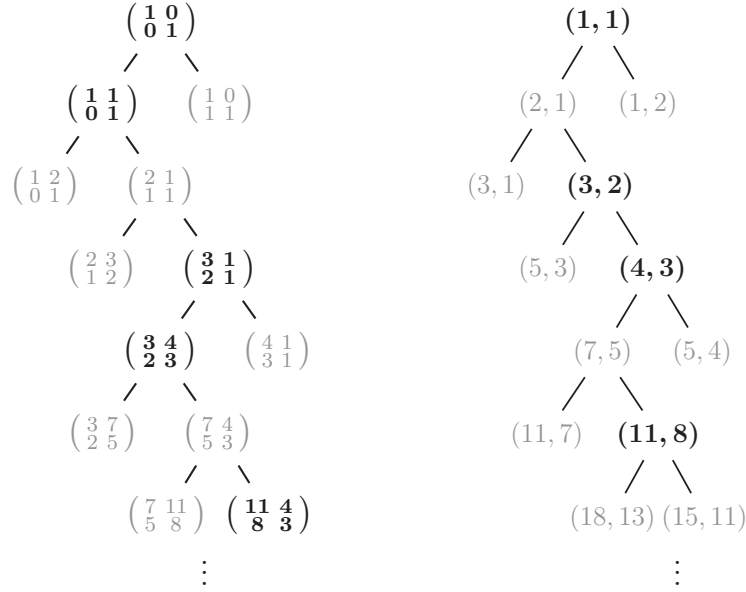


Figura 4.40: Caminos abreviados en  $\mathcal{SBM}$  y  $\mathcal{SBV}$ .

Damos entonces la siguiente definición de un camino abreviado en  $\mathcal{SBV}$  que será la misma que usaremos para el caso de  $\mathcal{SBF}$ .

**Definición 4.62.** Sea  $\mathcal{C} = (s_0, s_1, \dots)$  un camino en  $\mathcal{SBV}$  o  $\mathcal{SBF}$ . Consideramos la subsucesión de  $\mathcal{C}$  cuyos términos son aquellos vértices  $s_i$  que satisfagan que si  $s_{i+1}$  es descendiente izquierdo (derecho) de  $s_i$ , entonces  $s_{i+2}$  es descendiente derecho (izquierdo) de  $s_{i+1}$ . Si el camino es finito, pediremos que el último término del camino sea el último término del camino abreviado.

Notamos que esta vez no pedimos que estuviera la raíz del árbol en el camino abreviado, de modo que ésta sólo aparecerá si el siguiente término es un vértice en que hay “cambio de dirección”.

**Ejemplo 4.63.** El camino en  $\mathcal{SBV}$  del vector  $(15, 11)$  es

$$\mathcal{C}^{\mathcal{V}} = ((1, 1), (2, 1), (3, 2), (4, 3), (7, 5), (11, 8), (15, 11)).$$

Y su camino abreviado es

$${}_a\mathcal{C}^{\mathcal{V}}((1, 1), (3, 2), (4, 3), (15, 11)).$$

El camino en  $\mathcal{SBF}$  del racional  $\frac{11}{15}$  es

$$\mathcal{C}^{\mathcal{V}} = \left( \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{5}{7}, \frac{8}{11}, \frac{11}{15} \right).$$

Y su camino abreviado es

$${}_a\mathcal{C}^{\mathcal{V}} = \left( \frac{1}{1}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{11}{15} \right).$$



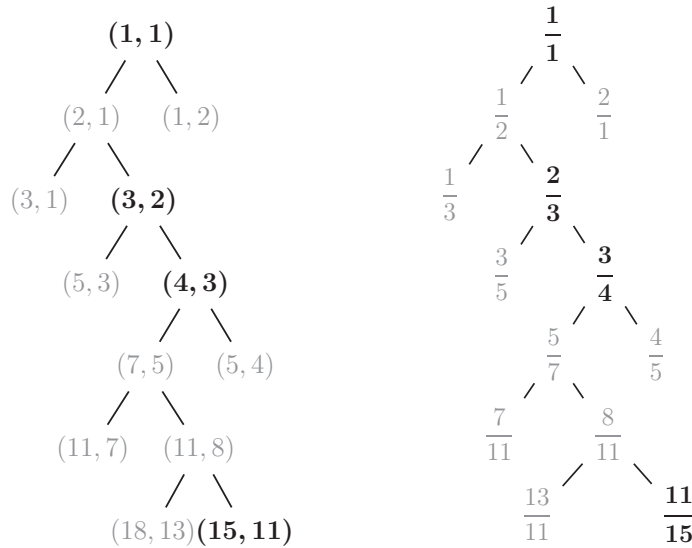


Figura 4.41: Caminos abreviados en  $\mathcal{SBV}$  y  $\mathcal{SBF}$  de los caminos de  $(15, 11)$  y  $11/15$  respectivamente.

## 4.7. El árbol de Stern-Brocot como transformaciones en el plano

Regresemos una vez más a la forma matricial del árbol, y veamos a nuestras matrices como transformaciones lineales que actúan sobre el plano. Pensemos, como es costumbre, a las matrices de  $\mathcal{SBM}$  como transformaciones aplicando por la izquierda. Los vectores columna de la matriz nos dicen lo que la transformación hace a la base canónica de  $\mathbb{R}^2$ , describiendo a dónde va el cuadrado unitario. Por otra parte, si la aplicamos al vector  $(1, 1)$ , obtenemos justamente la suma de sus vectores columna:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a+b \\ c+d \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Así que dada una matriz  $M$  en  $\mathcal{SBM}$ , su vértice correspondiente en  $\mathcal{SBV}$  es a donde manda la transformación  $M$  al vector  $(1, 1)$ .

**Ejemplo 4.64.** Consideremos los vértices correspondientes  $M = IDD$  en  $\mathcal{SBM}$  y  $(4, 3)$  en  $\mathcal{SBV}$ . Entonces tenemos que el vector  $(4, 3)$  es el resultado de aplicar  $M$  al vector  $(1, 1)$  (ver figura 4.42).

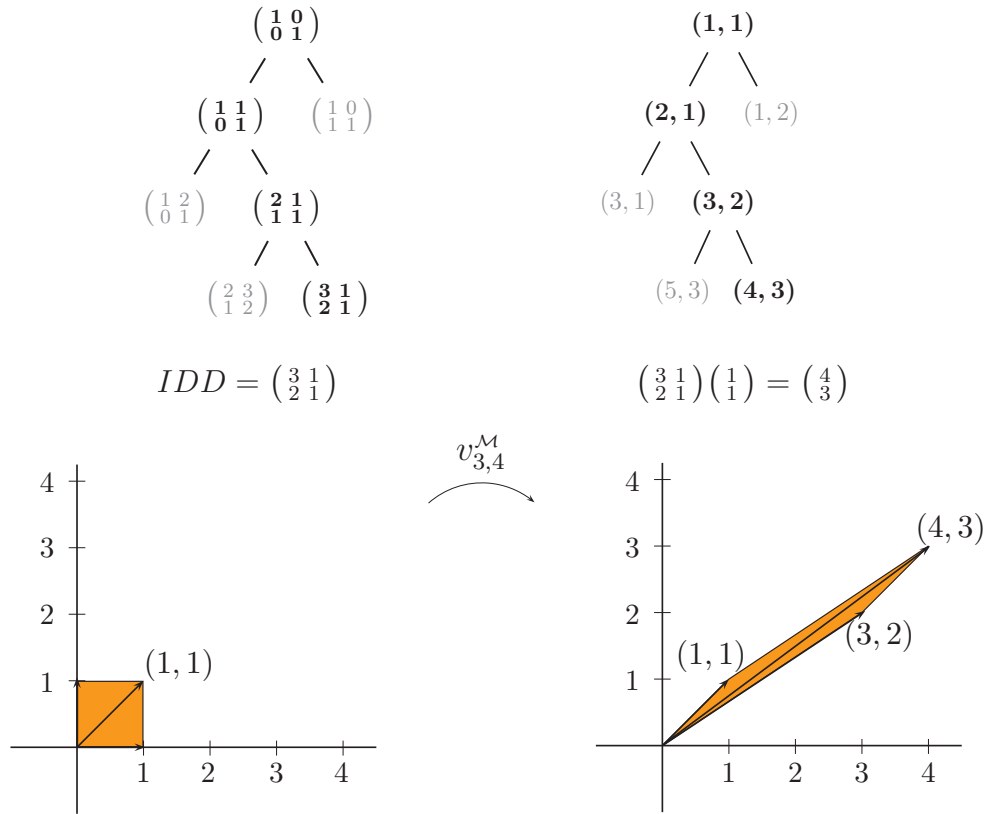


Figura 4.42:  $v_{3,4}^M$  actuando sobre el cuadrado unitario.

Dado que cada matriz de  $\mathcal{SBM}$  se puede expresar como productos de las matrices  $I$  y  $D$ , cada transformación de  $\mathcal{SBM}$  se puede expresar como composiciones de  $I$  y  $D$  (de una única manera si la escribimos como en la observación 4.2). Ahora, dada una transformación en  $\mathcal{SBM}$ , por ejemplo  $M = IDD$ , si tomamos la sucesión de vectores dada por la aplicación iterada  $I(D(D(\frac{1}{1})))$ :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \longrightarrow D\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \longrightarrow D\left(D\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \longrightarrow I\left(DD\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)\right) = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

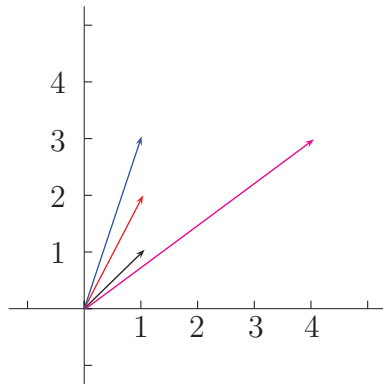
ésta no coincide con el camino en  $\mathcal{SBV}$  del vector  $IDD\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ , que es

$$\mathcal{C}_{(4,3)}^V = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}\right).$$

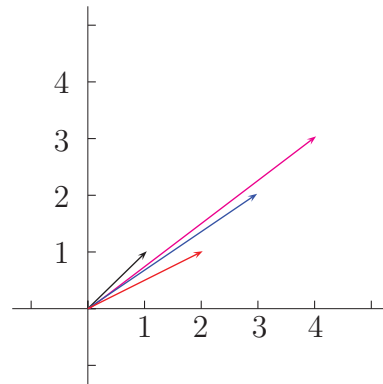
Ilustramos ambas sucesiones en la figura 4.43. Compárese con el ejemplo 4.64.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{C}_{(4,3)}^{\mathcal{V}} = \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$$



$I(D(D(\frac{1}{1})))$



$\mathcal{C}_{(4,3)}^{\mathcal{V}}$

Figura 4.43: Comparación entre sucesión de vectores dada por  $I(D(D(\frac{1}{1})))$  y el camino del vector  $(4, 3)$  en  $\mathcal{SBV}$ .

En general para una transformación  $M$  en  $\mathcal{SBM}$  y su vértice correspondiente en  $\mathcal{SBV}$ , que es  $M(\frac{1}{1})$ , no coinciden la sucesión dada por la aplicación iterada de las matrices  $I$  y  $D$  que conforman a  $M$  al vector  $(1, 1)$  y el camino en  $\mathcal{SBV}$  determinado por el vector  $M(\frac{1}{1})$ . Podemos construir un árbol de vectores para el que sí coincidan estas sucesiones. Pero antes de construirlo, veamos por qué nos interesan las sucesiones dadas por aplicaciones iteradas de las matrices  $I$  y  $D$  al vector  $(1, 1)$ .

Veamos cómo actúan  $I$  y  $D$  geoméricamente. Si las aplicamos a un vector  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  obtenemos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y \\ y \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x + y \end{pmatrix}.$$

Al aplicar  $I$  obtenemos un vector que mantiene la segunda coordenada del anterior y toma la suma de las coordenadas del vector anterior para la primera coordenada:

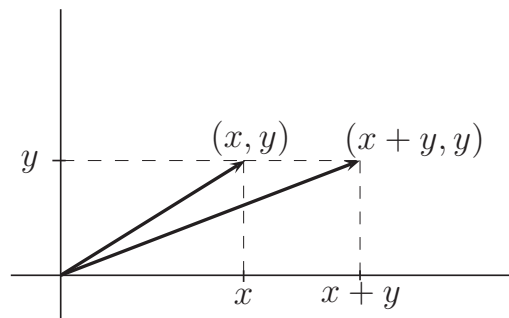


Figura 4.44: Acción de  $I$  en el vector  $(x, y)$ .

Así, si  $(x, y)$  está en el primer cuadrante, aplicar  $I$  a  $(x, y)$  es geoméricamente equivalente a colocar un cuadrado a la derecha del rectángulo determinado por el vector  $(x, y)$ , y tomar el vector que lo determina:

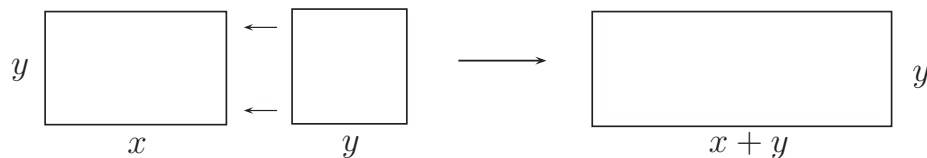


Figura 4.45: Rectángulo determinado por el vector  $I \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ .

De manera análoga, al aplicar  $D$  a  $(x, y)$  obtenemos un vector que mantiene la primera coordenada y toma para la segunda la suma de las coordenadas del anterior:

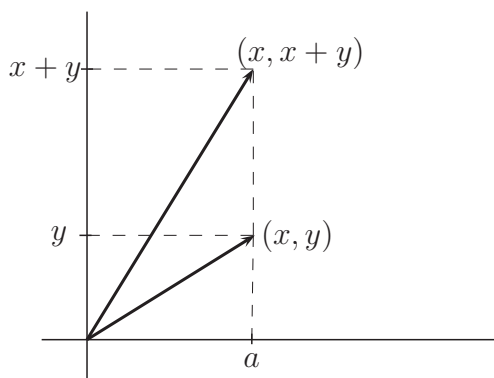


Figura 4.46: Acción de  $D$  en el vector  $(x, y)$ .

Si tomamos el rectángulo determinado por el vector  $(x, y)$ , el nuevo vector  $(x, x + y)$  determina el rectángulo obtenido al colocar un cuadrado *sobre* el vector determinado por  $(x, y)$ :

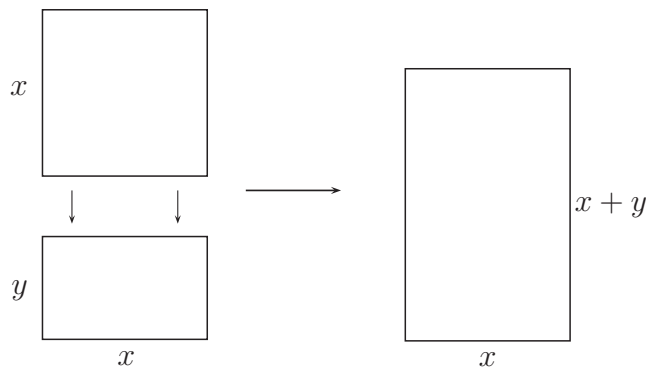
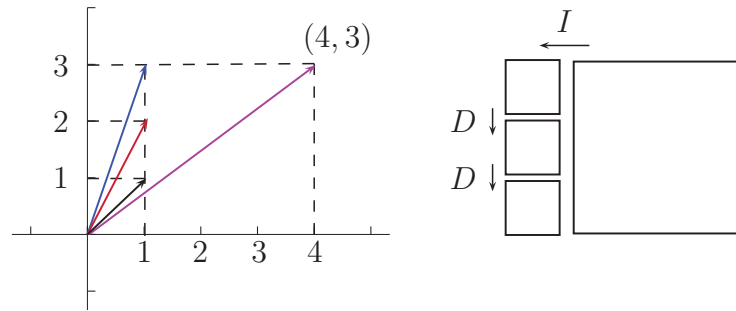


Figura 4.47: Rectángulo determinado por el vector  $D \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ .

**Ojo:** La interpretación geométrica es distinta si  $(x, y)$  está en otro cuadrante que no sea el primero.

Esta interpretación geométrica nos permite pensar a aplicaciones iteradas de  $I$  y  $D$  como un proceso de construcción de rectángulos colocando cuadrados “sobre” o “a la derecha” de otros rectángulos. En la figura 4.48 lo ilustramos para  $I(D(D(\frac{1}{1}))) = (\frac{4}{3})$  que vimos en el ejemplo 4.64.



$$I(D(D(\frac{1}{1})))$$

Figura 4.48: Interpretación geométrica de  $I(D(D(\frac{1}{1}))) = (\frac{4}{3})$  colocando cuadrados.

Como el lector intuye, esto está relacionado con el algoritmo de Euclides. Abordaremos esta relación hasta el próximo capítulo.

Ahora sí procedemos a la construcción de un árbol en el que los caminos finitos coinciden con sucesiones dadas por aplicaciones iteradas de  $I$  y  $D$  al  $(1,1)$ . Construiremos no sólo un árbol de vectores, sino un árbol para cada una de las formas de  $\mathcal{SB}$ . Nos darán un panorama más completo de  $\mathcal{SB}$  relacionado con el algoritmo de Euclides y el problema que planteamos de explosiones sucesivas.

### 4.8. Árbol dual de Stern-Brocot ( $\mathcal{SBD}$ )

Así como dimos cuatro árboles (de matrices, vectores, fracciones y palabras) que llamamos las distintas formas de  $\mathcal{SB}$ , ahora construiremos otros cuatro árboles (también de matrices, vectores, fracciones y palabras), todos binarios completos e infinitos, que llamaremos las distintas formas del árbol dual de Stern-Brocot. Denotaremos por  $\mathcal{SBD}$  al árbol dual de Stern-Brocot en cualquiera de sus formas.

Para construir  $\mathcal{SBD}$  en su forma de palabras (que denotaremos por  $\mathcal{SBPD}$ ), tomamos como raíz la palabra vacía, y colocamos la letra  $i$  al principio de una palabra para obtener su descendiente izquierdo, y la letra  $d$  para obtener el descendiente derecho (observamos que en la construcción de  $\mathcal{SBP}$  habíamos colocado la letra  $i$  (ó  $d$ ) al *final* de la palabra). Notamos que también podemos obtener  $\mathcal{SBPD}$  directamente de  $\mathcal{SBP}$  leyendo cada palabra *al revés*.

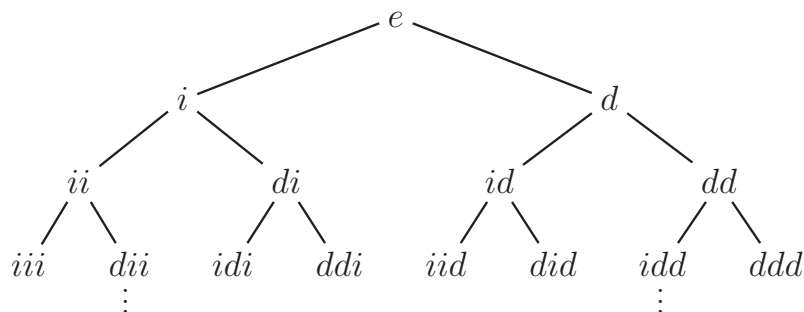


Figura 4.49: Árbol dual de Stern-Brocot en forma de palabras.

Para la forma matricial de *SBD*, construiremos un árbol de la misma manera que construimos *SBM*, pero ahora multiplicando las matrices por la izquierda: la raíz es la matriz identidad  $E$ , y para cada vértice  $M$ , su descendiente izquierdo es  $IM$  y su descendiente derecho es  $DM$ . Procediendo de esta manera obtenemos el árbol de la figura 4.50. Diremos que éste es el árbol dual de Stern-Brocot en forma matricial, y lo denotaremos por *SBMD*.<sup>7</sup>

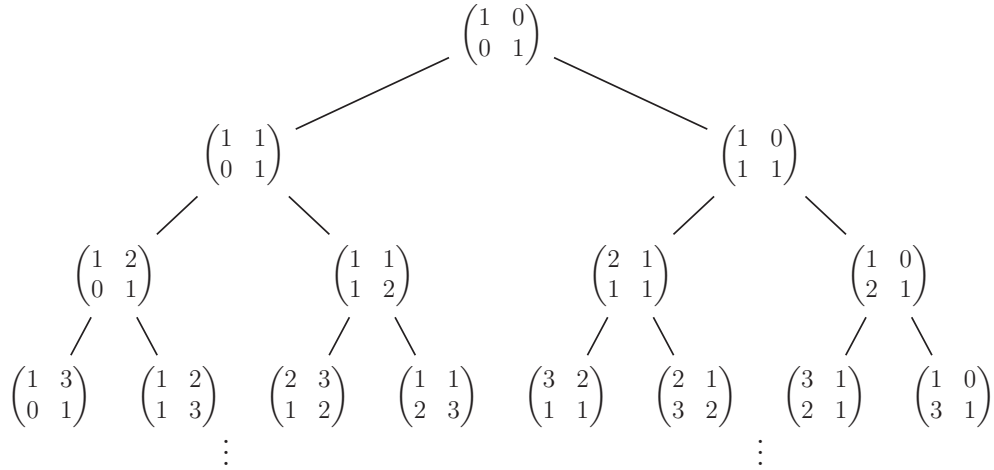


Figura 4.50: *SBMD*: Árbol dual de Stern-Brocot en forma matricial.

En la figura 4.51 recordamos quién es *SBM* para compararlo con *SBMD*.

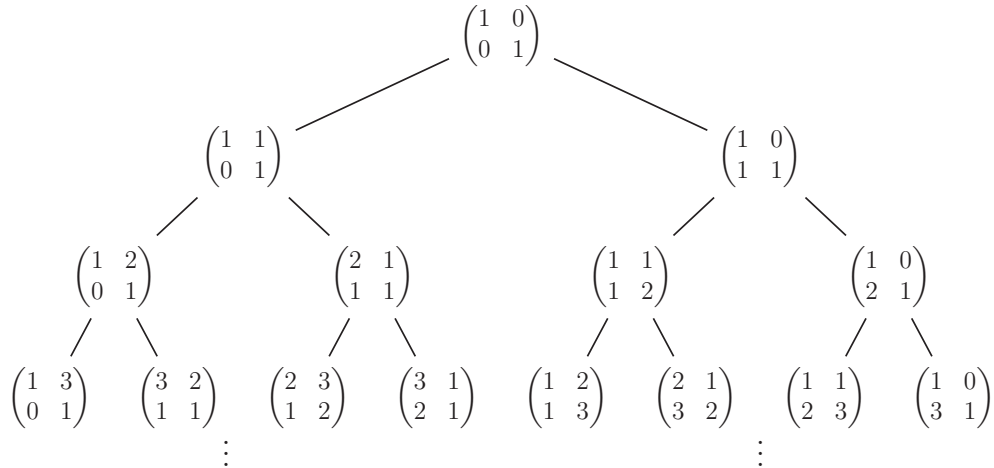


Figura 4.51: Árbol de Stern-Brocot en forma matricial.

Así como vimos en *SBM* que los descendientes izquierdo y derecho de una matriz  $M$  comparten un vector columna con  $M$  y el otro es la suma de los vectores columna de  $M$ , vemos que en *SBMD* pasa esto pero con sus vectores renglón (ver figura 4.52).

<sup>7</sup>En la página 222 ilustramos los primeros cinco niveles de este árbol.

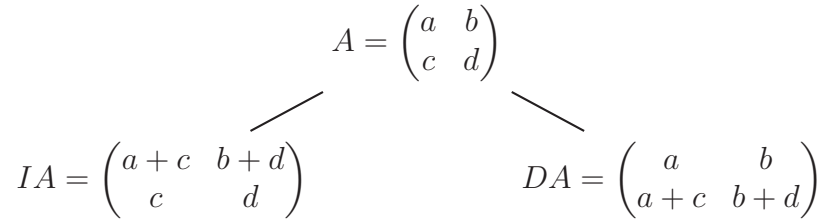


Figura 4.52: Descendientes de una matriz de  $SBMD$ .

Si nos fijamos en los vectores columna de  $A$ , vemos que multiplicar  $A$  por la izquierda por  $I$  es aplicar  $I$  (por la izquierda) a cada uno de sus vectores columna. Igualmente, multiplicarla por  $D$  por la izquierda es aplicar  $D$  (por la izquierda) a cada uno de los vectores columna. Cuando vimos el árbol  $SBM$  nos fijamos en lo que ocurría con los vectores *columna* de las matrices al multiplicarlas por la derecha por  $I$  y  $D$ . Es interesante lo que ocurre con sus vectores *renglón*: multiplicar a  $A$  por  $I$  por la derecha es equivalente a aplicar  $D$  (por la izquierda) a cada uno de sus vectores renglón. Igualmente multiplicar a  $A$  por  $D$  por la derecha es aplicar  $I$  (por la izquierda) a cada uno de sus vectores renglón. En realidad la información que obtendremos de  $SBMD$  está ya en  $SBM$ . Sin embargo consideramos más claro plantear  $SBD$  por separado.

A continuación damos la relación entre vértices correspondientes en  $SBM$  y  $SBMD$ .

**Proposición 4.65.** *Sea  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  una matriz en  $SBM$ , y sea la matriz  $A'$  su vértice correspondiente en  $SBMD$ . Entonces  $A' = \begin{pmatrix} d & b \\ c & a \end{pmatrix}$ .*

*Demostración.* Hacemos inducción sobre los niveles de  $SBM$  y  $SBMD$ . Es claro que el enunciado de la proposición es cierto para la matriz  $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  en el nivel 0. Supongamos ahora que si  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  está en el nivel  $n$  de  $SBM$ , entonces su vértice correspondiente en  $SBMD$  (también en el nivel  $n$ ) es  $A' = \begin{pmatrix} d & b \\ c & a \end{pmatrix}$ . Vemos que entonces se satisface para sus descendientes: los vértices correspondientes  $AI$  en  $SBM$  y  $IA'$  en  $SBMD$  satisfacen el enunciado de la proposición, así como los vértices correspondientes  $AD$  en  $SBM$  y  $DA'$  en  $SBMD$  (ver figura 4.53).

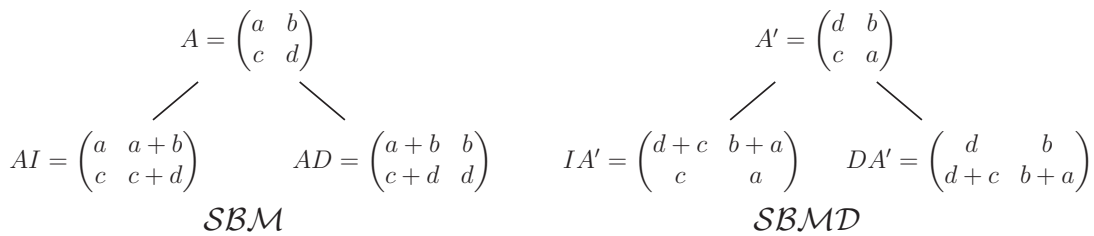


Figura 4.53

Así, si tomamos vértices correspondientes en  $SBM$  y  $SBMD$  en el nivel  $n + 1$  usamos que son descendientes de vértices correspondientes en el nivel  $n$  de  $SBM$  y  $SBMD$ , para los cuales se satisface la hipótesis de inducción. □

Para construir la forma vectorial de  $SBD$ , que denotaremos por  $SBVD$ , procedemos como hicimos para construir la forma vectorial de  $SB$  a partir de la forma matricial de  $SB$ . Para cada vértice en  $SBVD$  tomamos el vector resultante de la suma vectorial de las columnas del

vértice correspondiente en  $SB\mathcal{M}\mathcal{D}$ . Procediendo de esta manera obtenemos el árbol de la figura 4.54.<sup>8</sup>

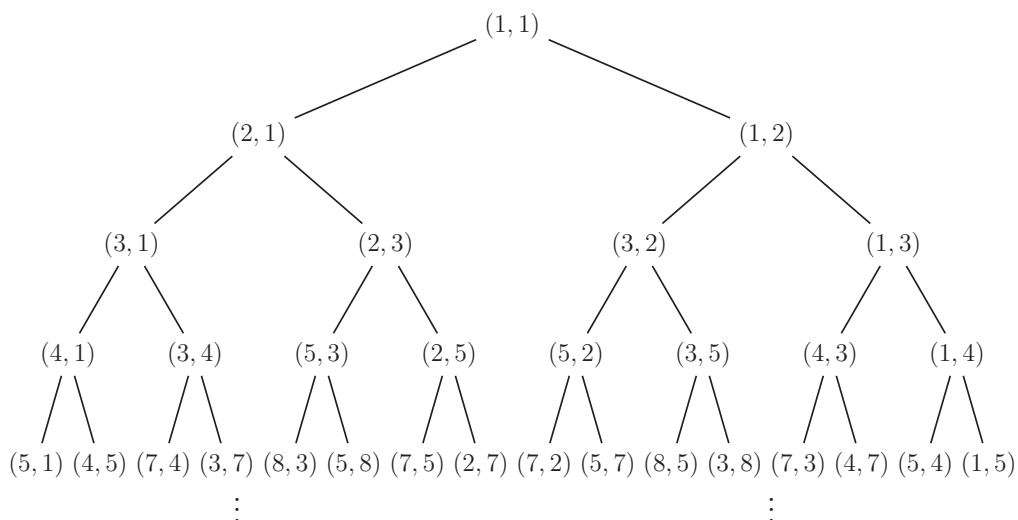


Figura 4.54:  $SB\mathcal{V}\mathcal{D}$ ; Árbol dual de Stern-Brocot en forma vectorial.

Como ya dijimos, éste último coincide con el árbol de la figura 4.55.

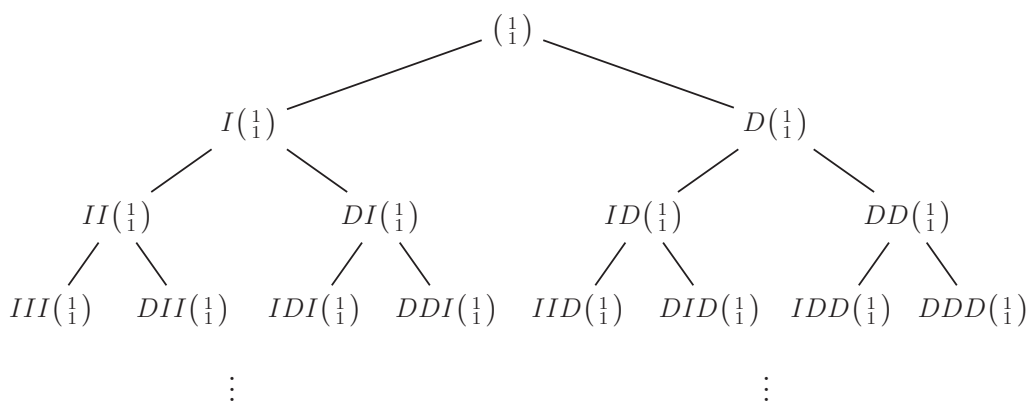


Figura 4.55: Construcción de  $SB\mathcal{V}\mathcal{D}$  aplicando repetidamente  $I$  y  $D$  al  $(1, 1)$ .

Este es el árbol que buscábamos en la sección pasada, en el que los caminos finitos coincidirán con las sucesiones dadas por aplicaciones iteradas de  $I$  y  $D$  al  $(1, 1)$ . De la interpretación geométrica que dimos de estas sucesiones como construcciones de rectángulos colocando cuadrados, vemos que podemos construir  $SB\mathcal{V}\mathcal{D}$  geoméricamente como mostramos en la figura 4.56.

<sup>8</sup>En la página 223 ilustramos los primeros seis niveles de este mismo árbol.



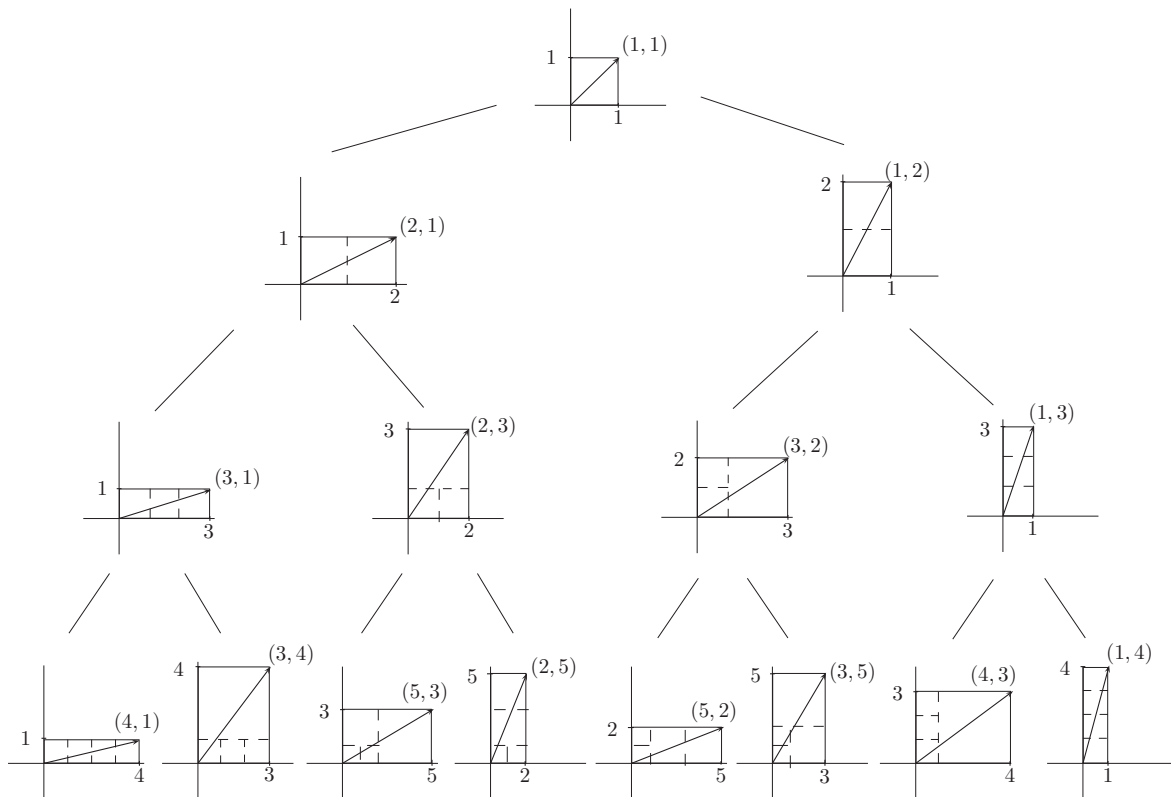


Figura 4.56: Construcción de  $SBVD$  en forma geométrica: colocando cuadrados.

Así, podemos construir  $SBVD$  a partir de un vector  $(x, y)$  tomando como descendiente izquierdo del vector  $(a, b)$  el resultado de aplicarle  $I: (a + b, b)$  y como descendiente derecho del vector  $(a, b)$  el resultado de aplicarle  $D: (a, a + b)$ .

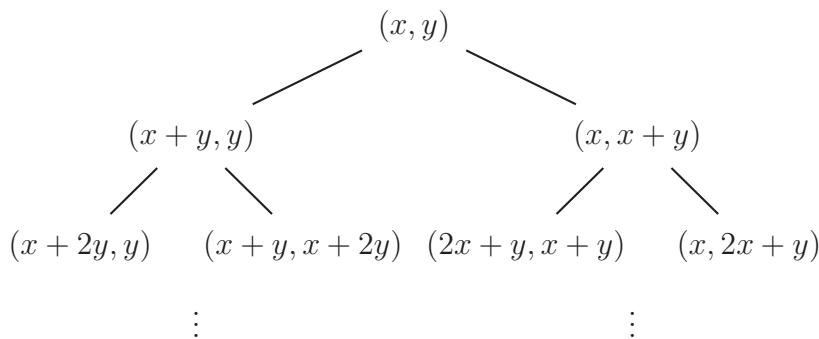


Figura 4.57: Construcción de  $SBVD$  aplicando  $I$  y  $D$ .

Notamos que es posible aplicar esta construcción a cualquier vector  $(x, y)$ , sin importar los valores de  $x$  y  $y$ . Si comenzamos con el vector  $(1, 1)$  obtenemos  $SBVD$ . Si comenzamos con  $(r, s)$ ,  $r, s \in \mathbb{Z}^+, mcd(r, s) = 1$ , obtenemos el subárbol de  $SBVD$  con raíz  $(r, s)$ . ¿Qué tipo de árbol obtendríamos si comenzáramos con  $x$  y  $y$  reales arbitrarios, o complejos arbitrarios? ¿Guardarían alguna relación los vectores que en él aparecieran? Abordaremos esta pregunta en capítulos posteriores.

Nos falta únicamente presentar a *SBD* en su forma fraccionaria, que denotaremos por *SBFD*. Su construcción es análoga a la forma fraccionaria de *SB*: tomando para cada vértice la pendiente del vértice correspondiente en *SBVD*. El árbol que obtenemos es el de la figura 4.58.<sup>9</sup>

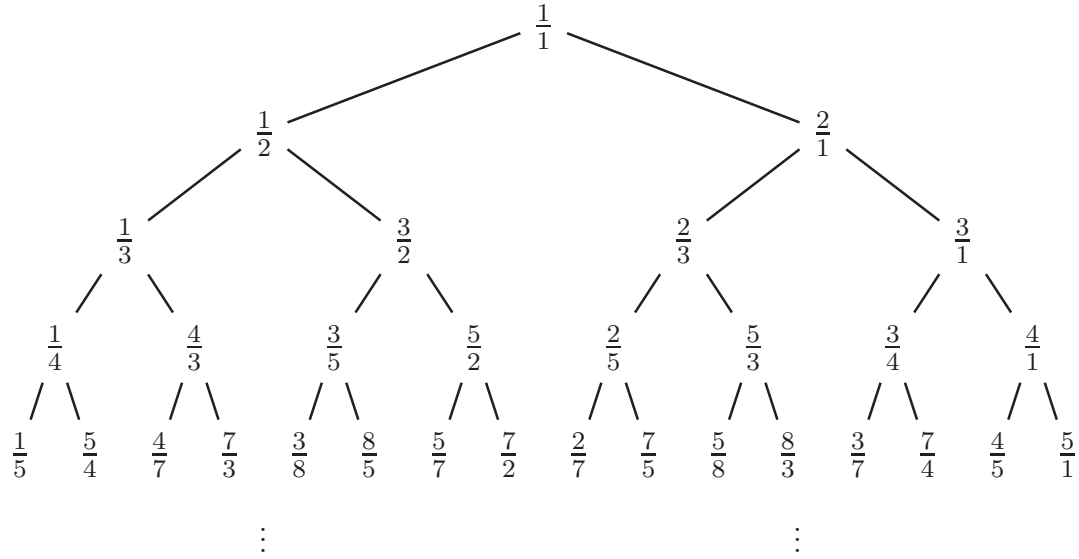


Figura 4.58: Árbol dual de Stern-Brocot en forma fraccionaria.

Podemos compararlo también con la figura 4.56, viendo a los descendientes izquierdo y derecho de la fracción  $a/b$  como las pendientes de los vectores que determinan el rectángulo resultante de colocar un cuadrado “arriba” o “a la derecha” del rectángulo que determina el vector  $(b, a)$ .

Habiendo visto ya las distintas formas de *SBD*, nos preguntamos qué propiedades de *SB* son también válidas en *SBD*. Para obtener los elementos de *SBMD* sólo estamos cambiando el orden de los productos de *I* y *D* que aparecen en *SBM*, y en el nivel  $k$  tanto de *SBM* como de *SBMD* tenemos los posibles productos de *I* y *D* de longitud  $k$ . Entonces todos los vértices que aparecen en el nivel  $k$  de *SBM* son vértices en el nivel  $k$  de *SBMD*. Lo mismo pasa con la forma de palabras de *SB* y *SBD*. Como la construcción para obtener la forma vectorial y la forma fraccionaria de *SBD* es la misma que en la construcción de las formas vectorial y fraccionaria de *SB*, entonces también coinciden el conjunto de vértices en el nivel  $k$  de *SBV* y el de *SBVD*, así como el de *SBF* y de *SBFD*. De hecho, para todas las formas del árbol, cada nivel de *SBD* se puede ver como permutaciones del mismo nivel en *SB*. ¿De qué manera influyen estas permutaciones en las propiedades de *SB*? Veremos qué pasa en cada una de las formas de *SBD*, comenzando por la forma matricial.

Todas las matrices en *SBMD* son matrices de *SBM*, por lo que satisfacen la observación 4.2, y tienen también determinante 1. Menos inmediato es que los análogos de las proposiciones 4.6 y 4.9 (relativas a matrices simétricas en vértices simétricos), que enunciaremos a continuación, también se satisfacen.

<sup>9</sup>En la página 224 ilustramos los primeros seis niveles de este mismo árbol.

**Proposición 4.66.** Sea  $A$  en  $\mathcal{SBMD}$ , con  $A = D^{a_0} I^{a_1} D^{a_2} \dots \left\{ \begin{smallmatrix} D \\ I \end{smallmatrix} \right\}^{a_n}$ . Entonces, si  ${}^{\mathcal{SBMD}}\sigma(A)$  denota al vértice simétrico de  $A$  en el árbol  $\mathcal{SBMD}$ , se tiene que

$${}^{\mathcal{SBMD}}\sigma(A) = I^{a_0} D^{a_1} I^{a_2} \dots \left\{ \begin{smallmatrix} I \\ D \end{smallmatrix} \right\}^{a_n}.$$

**Proposición 4.67.** Sean  $A, B$  en  $\mathcal{SBMD}$  tales que  ${}^{\mathcal{SBMD}}\sigma(A) = B$ . Entonces  $B = A^s$ .

Las demostraciones de estas dos últimas proposiciones son análogas a las de su versión en  $\mathcal{SBM}$ .

Con estas proposiciones vemos que se mantienen las simetrías vértice a vértice: vértices simétricos siguen siendo matrices simétricas, y geoméricamente la rama izquierda del árbol sigue siendo reflejo respecto a la identidad de la rama derecha. Sin embargo, al alterarse el orden de las matrices, no corresponde ya la rama izquierda de  $\mathcal{SBMD}$  a paralelogramos por debajo de la identidad y la derecha a paralelogramos arriba de la identidad, como podemos ver en el análogo a la figura 4.7 para  $\mathcal{SBMD}$  que mostramos en la figura 4.59.

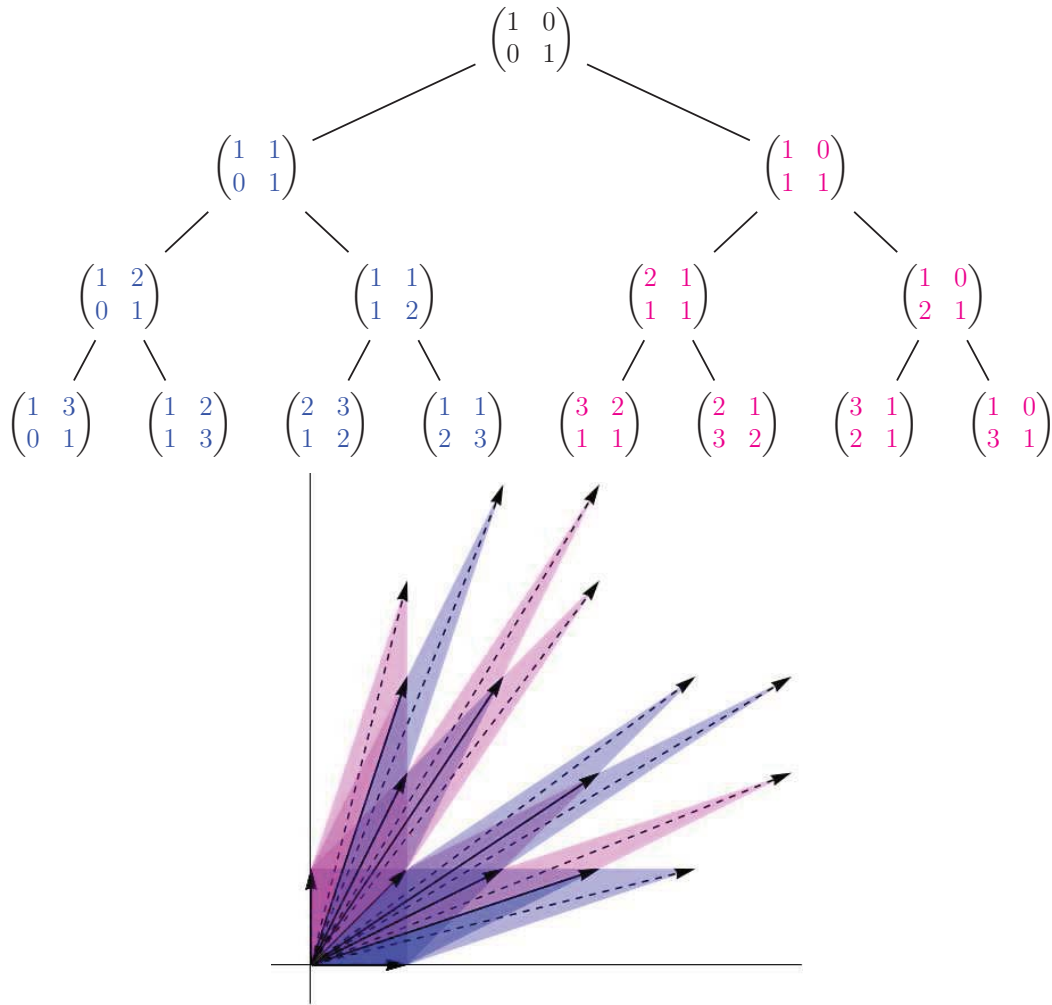


Figura 4.59: Simetría de  $\mathcal{SBMD}$ .

Podemos plantear en la forma matricial de  $\mathcal{SBD}$  un análogo de la proposición 4.11, que nos indica cómo saber a partir de las entradas de una matriz en  $\mathcal{SBM}$  si es descendiente derecho o

izquierdo en  $\mathcal{SBM}$ . La prueba es análoga a la de la proposición 4.11 tomando en cuenta cómo son los descendientes de una matriz en  $\mathcal{SBM}$  (ver figura 4.52).

**Proposición 4.68.** *Sea  $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  en  $\mathcal{SBM}$ .  $M$  es descendiente izquierdo en  $\mathcal{SBMD}$  de alguna matriz en  $\mathcal{SBM}$  si y sólo si  $a > c$  ó  $b > d$ .  $M$  es descendiente derecho en  $\mathcal{SBMD}$  de alguna matriz si y sólo si  $a < c$  ó  $b < d$ .*

Si  $M$  está expresada como productos de  $I$  y  $D$ , la primera y última matriz del producto determinan si  $M$  está en la rama izquierda o derecha de la forma matricial de  $\mathcal{SB}$  y  $\mathcal{SBD}$ , así como si es descendiente derecho o descendiente izquierdo. Usando esto y la proposición 4.68 puede probarse el siguiente corolario, donde damos equivalencias de que la última matriz de  $M = D^{a_0} I^{a_1} D^{a_2} \dots \left\{ \begin{smallmatrix} D \\ I \end{smallmatrix} \right\}^{a_n}$  sea  $I$  o  $D$ .

**Corolario 4.69.** *Sea  $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  en  $\mathcal{SBMD}$ ,  $M = D^{a_0} I^{a_1} D^{a_2} \dots \left\{ \begin{smallmatrix} D \\ I \end{smallmatrix} \right\}^{a_n}$ . Son equivalentes*

- a)  $M = D^{a_0} I^{a_1} D^{a_2} \dots D^{a_n}$
- b)  $n$  es par
- c)  $M$  está en la rama derecha de  $\mathcal{SBMD}$
- d)  $a > b$  ó  $c > d$ .

*Asímismo, son equivalentes las siguientes afirmaciones*

- e)  $M = D^{a_0} I^{a_1} D^{a_2} \dots I^{a_n}$
- f)  $n$  es impar
- g)  $M$  está en la rama izquierda de  $\mathcal{SBMD}$
- h)  $a < b$  ó  $c < d$ .

Tenemos una afirmación análoga para equivalencias de que la primera matriz de  $M = D^{a_0} I^{a_1} D^{a_2} \dots \left\{ \begin{smallmatrix} D \\ I \end{smallmatrix} \right\}^{a_n}$  sea  $I$  o  $D$ .

**Corolario 4.70.** *Sea  $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  en  $\mathcal{SBM}$ ,  $M = D^{a_0} I^{a_1} D^{a_2} \dots \left\{ \begin{smallmatrix} D \\ I \end{smallmatrix} \right\}^{a_n}$ . Son equivalentes*

- a)  $a_0 \neq 0$
- b)  $M$  está en la rama derecha de  $\mathcal{SBM}$
- c)  $a < c$  ó  $b < d$ .

*Asímismo, son equivalentes las siguientes afirmaciones*

- d)  $a_0 = 0$
- e)  $M$  está en la rama izquierda de  $\mathcal{SBM}$
- f)  $a > c$  ó  $b > d$ .

Las interpretaciones geométricas de estos corolarios nos muestran las relaciones simétricas que guardan  $\mathcal{SB}$  y  $\mathcal{SBD}$ . Así como en la forma vectorial de  $\mathcal{SB}$  todos los vectores que tienen pendiente menor que 1 están en la “rama izquierda” del árbol, en la forma vectorial de  $\mathcal{SBD}$  los vectores con pendiente menor que 1 son los que son descendiente derecho de algún vector en  $\mathcal{SBVD}$ . Análogamente, los que tienen pendiente mayor que 1 están en a “rama derecha” de  $\mathcal{SBV}$ , y son descendiente izquierdo de algún vector en  $\mathcal{SBVD}$ .

Veamos las propiedades de la forma vectorial de  $\mathcal{SBD}$ . A diferencia de lo que ocurre en  $\mathcal{SBV}$ , un vértice de  $\mathcal{SBVD}$  y su descendiente izquierdo o derecho no son (en general) los vectores columna de matrices de  $\mathcal{SBMD}$ , y al ver la interpretación dada en la figura 4.56 queda claro que no generan un paralelogramo de área 1. Sin embargo, los vectores en vértices simétricos siguen siendo reflejo uno del otro respecto a la identidad (la prueba es idéntica a la de la proposición 4.15), y la rama izquierda de vectores de  $\mathcal{SBVD}$  es reflejo de la derecha. De igual manera, en  $\mathcal{SBFD}$  no se satisface el análogo de las proposición 4.21, ni se satisface la propiedad del orden (corolario 4.20), pues los vértices de  $\mathcal{SBFD}$  ya no se obtienen como mediante de los anteriores. Sin embargo, ya que cada nivel de  $\mathcal{SBFD}$  es una permutación de vértices en el mismo nivel en  $\mathcal{SBF}$ , podemos enunciar la siguiente proposición.

**Proposición 4.71.** *En  $\mathcal{SBFD}$  todos los racionales positivos aparecen exactamente una vez y expresados en forma irreducible.*

Los caminos en  $\mathcal{SBD}$  nos interesan mucho por la estrecha relación que guardan con el problema que abordamos de explosión de singularidades. Definimos todo lo correspondiente a caminos en  $\mathcal{SB}$  (el camino de un vértice, la sucesión de un camino y la sucesión de un vértice) ahora para  $\mathcal{SBD}$  de manera análoga a como hicimos en  $\mathcal{SB}$ . Colocaremos el supraíndice  $d$  para hablar de caminos en  $\mathcal{SBD}$ . Notamos que no hay problema con nuestras definiciones, pues en ninguna de las formas de  $\mathcal{SBD}$  se repiten vértices.

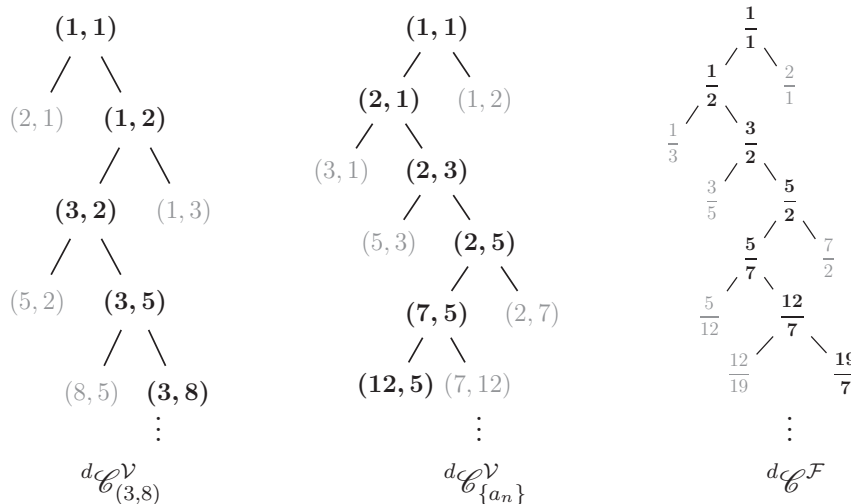
**Ejemplo 4.72.** • El camino en  $\mathcal{SBVD}$  del vértice  $(3, 8)$  es

$${}^d\mathcal{C}_{(3,8)}^{\mathcal{V}} = ((1, 1), (1, 2), (3, 2), (3, 5), (3, 8)).$$

- Si  $\{a_n\} = (0, 1, 2, 2, \dots)$ , entonces el camino en  $\mathcal{SBVD}$  que tiene sucesión  $\{a_n\}$  es

$${}^d\mathcal{C}_{\{a_n\}}^{\mathcal{V}} = ((1, 1), (2, 1), (2, 3), (2, 5), (7, 5), (12, 5), \dots).$$

- El camino  ${}^d\mathcal{C}^{\mathcal{F}} = (\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{5}{7}, \frac{12}{7}, \frac{19}{7}, \dots)$  en  $\mathcal{SBFD}$ , tiene sucesión  $(0, 1, 2, 1, 2, \dots)$ .



Definimos ahora los caminos abreviados en las distintas formas de  $SBD$ . Para la forma matricial ( $SBMD$ ), los definimos de manera análoga a los caminos abreviados en  $SBM$ . Para los caminos abreviados en las formas vectorial y fraccionaria de  $SBD$  daremos una definición distinta.

**Definición 4.73.** Sea  ${}^d\mathcal{C} = (s_0, s_1, s_2, \dots)$  un camino en  $SBVD$  o  $SBFD$ . Definimos el camino abreviado de  ${}^d\mathcal{C}$ , que denotaremos por  ${}^d_a\mathcal{C}$  como la subsucesión de  ${}^d\mathcal{C}$  formada por los términos  $s_i$  de  ${}^d\mathcal{C}$  que satisfagan que si  $s_i$  es descendiente izquierdo de  $s_{i-1}$ , entonces  $s_{i+1}$  es descendiente derecho de  $s_i$ ; si  $s_i$  es descendiente derecho de  $s_{i-1}$ , entonces  $s_{i+1}$  es descendiente izquierdo de  $s_i$ . Si el camino  ${}^d\mathcal{C}$  es finito, pedimos que el último término de  ${}^d\mathcal{C}$  esté en el camino abreviado.

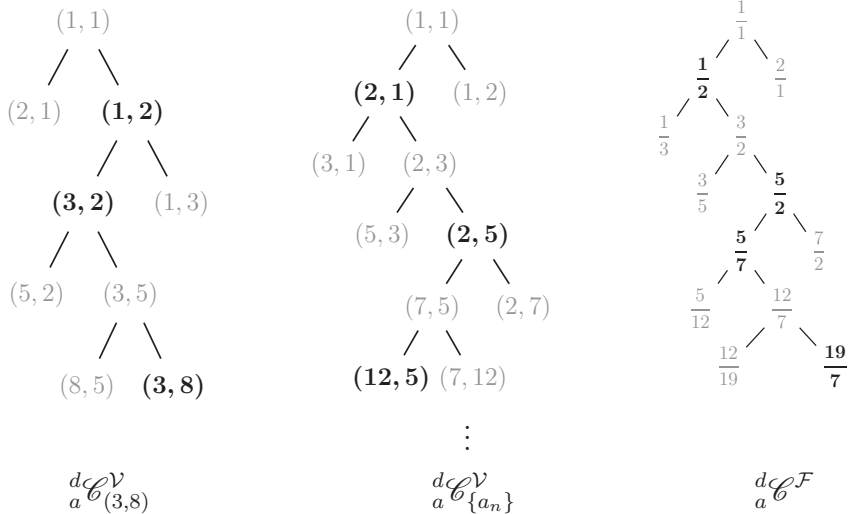
**Ejemplo 4.74.**

- El camino abreviado del camino de  $(3, 8)$  en  $SBVD$  es  ${}^d_a\mathcal{C}_{(3,8)}^{\mathcal{V}} = ((1, 2), (3, 2), (3, 8))$ .
- El camino abreviado del camino en  $SBVD$  que tiene sucesión  $\{a_n\} = (0, 1, 2, 2, \dots)$  es

$${}^d_a\mathcal{C}_{\{a_n\}}^{\mathcal{V}} = ((2, 1), (2, 5), (12, 5), \dots)$$

- El camino  ${}^d\mathcal{C}^{\mathcal{F}} = (\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{5}{7}, \frac{12}{7}, \frac{19}{7})$  en  $SBFD$ , tiene camino abreviado

$${}^d_a\mathcal{C}^{\mathcal{F}} = \left( \frac{1}{2}, \frac{5}{2}, \frac{5}{7}, \frac{19}{7} \right)$$



Para finalizar el capítulo veamos cómo ubicar a una matriz, vector o fracción en su correspondiente forma de  $SBD$  conociendo la sucesión que tiene en su correspondiente forma en  $SB$ , y viceversa.

**Proposición 4.75.** Sean  $a_0 \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$  y  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}^+$ . Sea  $M = D^{a_0} I^{a_1} \dots \left\{ \begin{smallmatrix} D \\ I \end{smallmatrix} \right\}^{a_n}$ , o lo que es lo mismo, sea  $(a_0, \dots, a_n)$  la sucesión de  $M$  en  $SBM$ . Entonces si  $n$  es par,  $M$  tiene en  $SBMD$  sucesión  $(a_n, \dots, a_1, a_0)$  si  $a_0 \neq 0$  y  $(a_n, \dots, a_1)$  si  $a_0 = 0$ . Si  $n$  es impar  $M$  tiene en  $SBMD$  sucesión  $(0, a_n, \dots, a_1, a_0)$  si  $a_0 \neq 0$  y  $(0, a_n, \dots, a_1)$  si  $a_0 = 0$ .

*Demostración.* Sea  $M$  como en el enunciado de la proposición. Ya que

$$M = \begin{cases} D^{a_0} I^{a_1} D^{a_2} \dots D^{a_n} & \text{si } n \text{ es par, y} \\ D^{a_0} I^{a_1} D^{a_2} \dots I^{a_n} D^0 & \text{si } n \text{ es impar,} \end{cases}$$

basta analizar las opciones posibles para  $M$ :  $n$  par o impar y  $a_0 = 0$  o  $a_0 \neq 0$ . La manera en que  $M$  se escribe como producto de potencias de  $I$  y  $D$  nos da su sucesión en  $\mathcal{SBMD}$ .  $\square$

**Corolario 4.76.** Sean  $(s, r)$  en  $\mathcal{SBV}$  y  $r/s$  en  $\mathcal{SBF}$  vértices correspondientes, con sucesión  $(a_0, a_1, \dots, a_n)$  en  $\mathcal{SBV}$  y  $\mathcal{SBF}$  respectivamente. Entonces si  $n$  es par,  $(s, r)$  y  $r/s$  tienen en sus respectivos árboles,  $\mathcal{SBVD}$  y  $\mathcal{SBFD}$ , sucesión  $(a_n, \dots, a_1, a_0)$  si  $a_0 \neq 0$  y  $(a_n, \dots, a_1)$  si  $a_0 = 0$ . Si  $n$  es impar tienen sucesión  $(0, a_n, \dots, a_1, a_0)$  si  $a_0 \neq 0$  y  $(0, a_n, \dots, a_1)$  si  $a_0 = 0$ .

Se puede ver que se satisfacen para  $\mathcal{SBD}$  los análogos de los resultados referentes a caminos simétricos en  $\mathcal{SB}$  (proposición 4.54, corolario 4.55 y observación 4.56). En cuanto a la expresión de una matriz  $M$  en  $\mathcal{SBMD}$  como productos de  $I$  y  $D$ , también la podemos usar para dar el camino de  $M$  en  $\mathcal{SBMD}$ .

Teniendo el árbol de Stern-Brocot original pudimos dar una construcción de todas las pendientes racionales positivas, de una forma metódica a partir de sumas de los vectores  $(1, 0)$  y  $(0, 1)$ . El propósito de construir  $\mathcal{SBD}$  es que en él podremos leer otro tipo de información (como la relativa al algoritmo de Euclides) que resultará igualmente útil. Veremos que  $\mathcal{SB}$  y  $\mathcal{SBD}$  se complementan el uno al otro mostrándonos dos caras de la misma moneda.

# Capítulo 5

## Algoritmo de Euclides, fracciones continuas y árbol de Stern-Brocot

Con los materiales de los pasados tres capítulos podremos dar solución a nuestro problema de explosiones. En este capítulo exploraremos cómo se relacionan entre sí.

En la primera sección veremos cómo leer a los convergentes de una fracción continua en caminos en distintas formas de  $\mathcal{SB}$ . En la segunda sección veremos cómo leer a los residuos de una fracción continua en caminos en distintas formas de  $\mathcal{SBD}$ . En la tercera sección retomaremos el enfoque de matrices como transformaciones en el plano para dar una lectura del Algoritmo de Euclides en  $\mathcal{SBD}$  en términos de estas transformaciones. Finalmente, en la última sección damos una manera de extender el árbol de Stern-Brocot para cubrir también a racionales negativos.

### 5.1. Convergentes en $\mathcal{SB}$

La relación más importante entre las fracciones continuas y  $\mathcal{SB}$  es la que existe entre las entradas de matrices de  $\mathcal{SBM}$ , y los convergentes de fracciones continuas. Se deriva de la relación entre lo que ocurre con los vectores de una matriz  $M$  al multiplicarla por la derecha por  $I$  y  $D$ , y las definiciones recursivas de  $p_n$  y  $q_n$  para una fracción continua. Tomemos  $M$  en  $\mathcal{SBM}$ . Sabemos que

$$M = D^{a_0} I^{a_1} D^{a_2} \dots \left\{ \begin{array}{l} D \\ I \end{array} \right\}^{a_n} = \begin{cases} D^{a_0} I^{a_1} D^{a_2} \dots D^{a_n} & \text{si } n \text{ es par, y} \\ D^{a_0} I^{a_1} D^{a_2} \dots I^{a_n} & \text{si } n \text{ es impar,} \end{cases}$$

donde  $a_0 \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$  y  $a_i \in \mathbb{Z}^+$  para  $1 \leq i \leq n$  (a lo largo del capítulo asumiremos estas condiciones sobre los exponentes al escribir el producto de potencias  $D^{a_0} I^{a_1} D^{a_2} \dots \left\{ \begin{array}{l} D \\ I \end{array} \right\}^{a_n}$ ). Veamos cómo se relacionan las entradas de  $M$  con los convergentes de la fracción continua  $[a_0, a_1, a_2, \dots, a_n]$ . Al expresar las entradas de los productos parciales

$$M_k = D^{a_0} I^{a_1} D^{a_2} \dots \left\{ \begin{array}{l} D \\ I \end{array} \right\}^{a_k} \quad 0 \leq k \leq n$$



en términos de los exponentes  $a_0, a_1, \dots, a_k$ , obtenemos en los primeros casos

$$\begin{aligned} M_0 &= D^{a_0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a_0 & 1 \end{pmatrix} \\ M_1 &= D^{a_0} I^{a_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a_0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a_1 \\ a_0 & a_0 a_1 + 1 \end{pmatrix} \\ M_2 &= D^{a_0} I^{a_1} D^{a_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a_0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a_2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + a_1 a_2 & a_1 \\ a_0 a_1 a_2 + a_2 + a_0 & a_0 a_1 + 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Recordamos rápidamente las definiciones recursivas de  $p_n$  y  $q_n$  para una fracción continua, que dimos en (3.6):

$$\begin{aligned} p_n &= a_n p_{n-1} + p_{n-2} \\ q_n &= a_n q_{n-1} + q_{n-2} \end{aligned}$$

y recordemos (ver (3.7)) cómo son los primeros términos  $p_n$  y  $q_n$  definidos para la fracción continua  $[a_0, a_1, a_2, \dots]$ , partiendo de  $p_{-2} = 0, q_{-2} = 1$ , y  $p_{-1} = 1, q_{-1} = 0$ :

$$\begin{array}{lll} p_0 = a_0 & p_1 = a_0 a_1 + 1 & p_2 = a_0 a_1 a_2 + a_0 + a_2 \\ q_0 = 1 & q_1 = a_1 & q_2 = a_1 a_2 + 1. \end{array}$$

Notamos que estos números se parecen mucho a las entradas de  $M_0, M_1$  y  $M_2$ . De hecho, podemos escribir las entradas de estas matrices de la siguiente manera:

$$M_0 = \begin{pmatrix} q_0 & q_{-1} \\ p_0 & p_{-1} \end{pmatrix}, \quad M_1 = \begin{pmatrix} q_0 & q_1 \\ p_0 & p_1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad M_2 = \begin{pmatrix} q_2 & q_1 \\ p_2 & p_1 \end{pmatrix}.$$

Escribirlas de esta manera resulta muy sugerente; parece natural plantear el siguiente teorema.

**Teorema 5.1.** *Sea  $M$  una matriz en  $\mathcal{SBM}$ , con*

$$M = D^{a_0} I^{a_1} D^{a_2} \dots \left\{ \begin{array}{l} D \\ I \end{array} \right\}^{a_n} = \begin{cases} D^{a_0} I^{a_1} D^{a_2} \dots D^{a_n} & \text{si } n \text{ es par, y} \\ D^{a_0} I^{a_1} D^{a_2} \dots I^{a_n} & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

Entonces

$$M = \begin{cases} \begin{pmatrix} q_n & q_{n-1} \\ p_n & p_{n-1} \end{pmatrix} & \text{si } n \text{ es par, y} \\ \begin{pmatrix} q_{n-1} & q_n \\ p_{n-1} & p_n \end{pmatrix} & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

donde  $p_n$  y  $q_n$  son definidos como es usual para la fracción continua  $[a_0, a_1, a_2, \dots, a_n]$ .

*Demostración.* Haremos inducción sobre  $n$ . Arriba verificamos que para los casos  $n = 0, 1, 2$  se satisface el enunciado del teorema. Supongamos ahora que si  $M = D^{a_0} I^{a_1} D^{a_2} \dots \left\{ \begin{array}{l} D \\ I \end{array} \right\}^{a_n}$ , entonces

$$M = \begin{pmatrix} q_n & q_{n-1} \\ p_n & p_{n-1} \end{pmatrix} \quad \text{si } n \text{ es par} \quad \text{y} \quad M = \begin{pmatrix} q_{n-1} & q_n \\ p_{n-1} & p_n \end{pmatrix} \quad \text{si } n \text{ es impar,}$$

con  $p_n$  y  $q_n$  definidos como es usual para la fracción continua  $[a_0, a_1, a_2, \dots, a_n]$ , y consideremos la matriz

$$N = D^{a_0} I^{a_1} D^{a_2} \dots \{I\}^{a_{n+1}} = \begin{cases} D^{a_0} I^{a_1} D^{a_2} \dots D^{a_n} I^{a_{n+1}} & \text{si } n+1 \text{ es impar, y} \\ D^{a_0} I^{a_1} D^{a_2} \dots I^{a_n} D^{a_{n+1}} & \text{si } n+1 \text{ es par.} \end{cases}$$

Por la hipótesis de inducción, tenemos

$$N = \begin{pmatrix} q_n & q_{n-1} \\ p_n & p_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a_{n+1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_n & a_{n+1}q_n + q_{n-1} \\ p_n & a_{n+1}p_n + p_{n-1} \end{pmatrix}$$

si  $n+1$  es impar (en cuyo caso  $n$  es par), y

$$N = \begin{pmatrix} q_{n-1} & q_n \\ p_{n-1} & p_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a_{n+1} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+1}q_n + q_{n-1} & q_n \\ a_{n+1}p_n + p_{n-1} & p_n \end{pmatrix}$$

si  $n+1$  es par (en cuyo caso  $n$  es impar), con  $p_n$  y  $q_n$  definidos como es usual para  $[a_0, a_1, \dots, a_n]$ . Ya que por definición  $p_{n+1} = a_{n+1}p_n + p_{n-1}$  y  $q_{n+1} = a_{n+1}q_n + q_{n-1}$  concluimos que

$$N = \begin{pmatrix} q_n & q_{n+1} \\ p_n & p_{n+1} \end{pmatrix} \text{ si } n+1 \text{ es impar, y } N = \begin{pmatrix} q_{n+1} & q_n \\ p_{n+1} & p_n \end{pmatrix} \text{ si } n+1 \text{ es par,}$$

donde  $p_n$  y  $q_n$  definidos como es usual para la fracción continua  $[a_0, a_1, \dots, a_{n+1}]$  (notamos que los números  $p_i$  y  $q_i$  definidos para  $[a_0, a_1, \dots, a_n]$  y los definidos para  $[a_0, a_1, \dots, a_{n+1}]$  coinciden si  $0 \leq i \leq n$ ). Terminamos la prueba.  $\square$

**Corolario 5.2.** *Sea  $M$  una matriz en  $\mathcal{SBM}$ , con*

$$M = I^{a_0} D^{a_1} I^{a_2} \dots \{I\}^{a_n} = \begin{cases} I^{a_0} D^{a_1} I^{a_2} \dots I^{a_n} & \text{si } n \text{ es par, y} \\ I^{a_0} D^{a_1} I^{a_2} \dots D^{a_n} & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

Entonces

$$M = \begin{cases} \begin{pmatrix} p_{n-1} & p_n \\ q_{n-1} & q_n \end{pmatrix} & \text{si } n \text{ es par, y} \\ \begin{pmatrix} p_n & p_{n-1} \\ q_n & q_{n-1} \end{pmatrix} & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

con  $p_n$  y  $q_n$  definidos como es usual para la fracción continua  $[a_0, a_1, a_2, \dots, a_n]$ .

*Demostración.* Sea  $M = I^{a_0} D^{a_1} I^{a_2} \dots \{I\}^{a_n}$  en  $\mathcal{SBM}$ . Entonces su matriz simétrica es  $M^s = D^{a_0} I^{a_1} D^{a_2} \dots \{I\}^{a_n}$ . El enunciado del corolario se sigue del teorema 5.1, de la definición de matriz simétrica, y de que  $(M^s)^s = M$ .  $\square$

**Observación 5.3.** *Estos resultados (teorema 5.1 y corolario 5.2) son muy significativos, pues nos muestran cómo aparecen naturalmente los convergentes de las fracciones continuas en  $\mathcal{SBM}$  como las pendientes de vectores columna de matrices en  $\mathcal{SBM}$ . Dada la fracción irreducible  $r/s = [a_0, a_1, \dots, a_n]$  con  $r, s \in \mathbb{Z}^+$ , tenemos que el vector  $(s, r)$  aparece como uno de los vectores columna del producto de potencias  $D^{a_0} I^{a_1} D^{a_2} \dots \{I\}^{a_n}$ , que es la matriz en  $\mathcal{SBM}$  que tiene sucesión  $(a_0, a_1, \dots, a_n)$ .*

**Ejemplo 5.4.** Sea  $M = D^0 I^2 D^3 I^1 D^2$ . Entonces tenemos:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 & 9 \\ 11 & 4 \end{pmatrix}.$$

Según el teorema 5.2, los vectores  $(9, 4)$  y  $(25, 11)$  son los vectores  $(q_3, p_3)$  y  $(q_4, p_4)$ , cuyas pendientes  $c_3 = p_3/q_3$  y  $c_4 = p_4/q_4$  son los dos últimos convergentes de la fracción continua  $[0, 2, 3, 1, 2] = 11/25$ . Vemos que en efecto es así:

$$\begin{aligned} \frac{p_0}{q_0} &= \frac{0}{1} & \frac{p_1}{q_1} &= 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \\ \frac{p_2}{q_2} &= 0 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3}} = \frac{3}{7} & \frac{p_3}{q_3} &= 0 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{1}}} = \frac{4}{9} \\ \frac{p_4}{q_4} &= 0 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}}} = \frac{11}{25}. \end{aligned}$$

Podemos sacar mejor provecho del teorema 5.2 en el contexto de caminos en  $\mathcal{SBM}$ . Dado un camino  $\mathcal{C}^M$  en  $\mathcal{SBM}$  finito o con infinitos cambios de dirección, que tiene sucesión  $(a_0, a_1, a_2, \dots)$ , definimos su camino abreviado  ${}_a\mathcal{C}^M$  de modo que sus términos fueran las matrices en que hay “cambio de dirección”, o dicho de otra manera, que sus términos fueran los productos parciales

$$M_n = D^{a_0} I^{a_1} D^{a_2} \dots \left\{ \begin{matrix} D \\ I \end{matrix} \right\}^{a_n}, \quad \text{con } n \in \mathbb{N}.$$

Esto significa, por el teorema 5.2, que los términos del camino abreviado  ${}_a\mathcal{C}^M$  son de la forma

$$\begin{pmatrix} q_n & q_{n-1} \\ p_n & p_{n-1} \end{pmatrix} \quad \text{ó} \quad \begin{pmatrix} q_{n-1} & q_n \\ p_{n-1} & p_n \end{pmatrix}$$

con  $p_n/q_n$  el convergente de orden  $n$  de la fracción continua  $[a_0, a_1, \dots]$  (recordemos que los convergentes de orden  $k$  de  $[a_0, a_1, \dots, a_n]$  coinciden con los de  $[a_0, a_1, \dots, a_n, \dots]$  para  $0 \leq k \leq n$ ). Veamos un ejemplo.

**Ejemplo 5.5.** Consideremos el camino  $\mathcal{C}^M$  en  $\mathcal{SBM}$  que tiene sucesión  $(0, 1, 2, 1, 2, 1, 2, \dots)$ . Veamos quiénes son los primeros términos de  $\mathcal{C}^M$  (ver figura 5.1):

$$\mathcal{C}^M = \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 11 & 4 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}, \dots \right).$$

Los primeros términos de su camino abreviado son

$${}_a\mathcal{C}^M = \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 11 & 4 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}, \dots \right).$$

Vemos que los vectores columna de las matrices de  ${}_a\mathcal{C}^M$  son los vectores  $(q_n, p_n)$ , donde  $c_n = p_n/q_n$  es el convergente de orden  $n$  de  $[0, \overline{1, 2}]$ :

$$\begin{aligned} \frac{p_0}{q_0} &= \frac{0}{1} & \frac{p_1}{q_1} &= 0 + \frac{1}{1} = \frac{1}{1} \\ \frac{p_2}{q_2} &= 0 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{2}{3} & \frac{p_3}{q_3} &= 0 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1}}} = \frac{3}{4} \\ \frac{p_4}{q_4} &= 0 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}}} = \frac{8}{11}. \end{aligned}$$

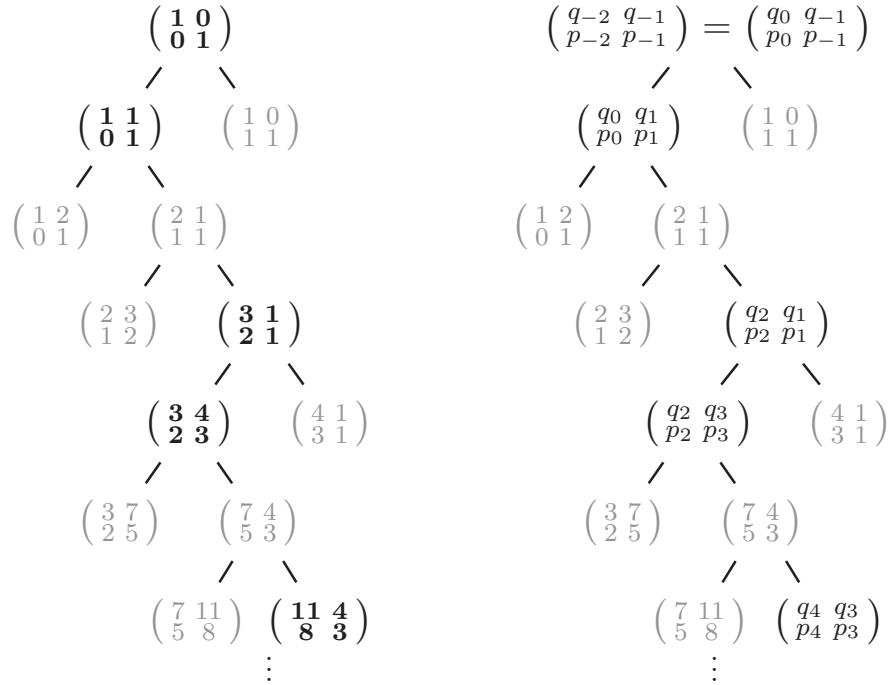


Figura 5.1: Convergentes de  $[0, \overline{1, 2}]$  y camino  ${}_a\mathcal{C}^M$ .

En el siguiente corolario decimos precisamente quién es el  $n$ -ésimo término de un camino abreviado en  $\mathcal{SBM}$ .

**Corolario 5.6.** Sea  $\mathcal{C}_{\{a_n\}}^M$  un camino en  $\mathcal{SBM}$  finito o con infinitos cambios de dirección, con sucesión  $\{a_n\} = (a_0, a_1, a_2, \dots)$ . Sea  $\alpha = [a_0, a_1, \dots]$  con  $c_n = p_n/q_n$  su convergente de orden  $n$ . Y sea

$${}_a\mathcal{C}_{\{a_n\}}^M = (s_0, s_1, s_2, \dots)$$

el camino abreviado de  $\mathcal{C}_{\{a_n\}}^M$ . Entonces para  $n \geq 0$  se tiene que

$$s_n = \begin{cases} M_{n-1} & \text{si } a_0 \neq 0 \\ M_n & \text{si } a_0 = 0 \end{cases} \quad \text{con} \quad M_n = \begin{cases} \begin{pmatrix} q_n & q_{n-1} \\ p_n & p_{n-1} \end{pmatrix} & \text{si } n \text{ es par, y} \\ \begin{pmatrix} q_{n-1} & q_n \\ p_{n-1} & p_n \end{pmatrix} & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

con  $M_n$  definida para  $n \geq -1$ .

*Demostración.* Sean  $\mathcal{C}_{\{a_n\}}^M$  un camino en  $\mathcal{SBM}$  finito o con infinitos cambios de dirección,  $\{a_n\} = (a_0, a_1, a_2, \dots)$  su sucesión y  ${}_a\mathcal{C}_{\{a_n\}}^M = (s_0, s_1, s_2, \dots)$  su camino abreviado. Y sea  $\alpha = [a_0, a_1, \dots]$  con  $c_n = p_n/q_n$  su convergente de orden  $n$ .

Tenemos de la proposición 4.60 que los términos de  ${}_a\mathcal{C}_{\{a_n\}}^M$  son

$${}_a\mathcal{C}_{\{a_n\}}^M = (E, D^{a_0}, D^{a_0}I^{a_1}, D^{a_0}I^{a_1}D^{a_2}, \dots, D^{a_0}I^{a_1}D^{a_2} \dots \{D/I\}^{a_n}, \dots)$$

si  $a_0 \neq 0$ , y

$${}_a\mathcal{C}_{\{a_n\}}^M = (E = D^{a_0}, D^{a_0}I^{a_1}, D^{a_0}I^{a_1}D^{a_2}, \dots, D^{a_0}I^{a_1}D^{a_2} \dots \{D/I\}^{a_n}, \dots)$$

si  $a_0 = 0$ . Ahora aplicamos el teorema 5.2 a cada uno de los términos de  ${}_a\mathcal{C}_{\{a_n\}}^M$ , recordando que los convergentes  $c_k$  de  $[a_0, a_1, \dots, a_n]$  y los de  $[a_0, a_1, \dots, a_n, \dots]$  coinciden si  $0 \leq k \leq n$ . Y usamos que definimos  $p_{-2} = 0, q_{-2} = 1, p_{-1} = 1, q_{-1} = 0$  para escribir  $E = \begin{pmatrix} q_{-2} & q_{-1} \\ p_{-2} & p_{-1} \end{pmatrix}$ . Entonces tenemos que

$${}_a\mathcal{C}_{\{a_n\}}^M = \left( \begin{pmatrix} q_{-2} & q_{-1} \\ p_{-2} & p_{-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} q_0 & q_{-1} \\ p_0 & p_{-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} q_0 & q_1 \\ p_0 & p_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} q_2 & q_1 \\ p_2 & p_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} q_2 & q_3 \\ p_2 & p_3 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} q_n & q_{n-1} \\ p_n & p_{n-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} q_n & q_{n+1} \\ p_n & p_{n+1} \end{pmatrix}, \dots \right)$$

si  $a_0 \neq 0$ . Si  $a_0 = 0$ , entonces

$${}_a\mathcal{C}_{\{a_n\}}^M = \left( \begin{pmatrix} q_{-2} & q_{-1} \\ p_{-2} & p_{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_0 & q_{-1} \\ p_0 & p_{-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} q_0 & q_1 \\ p_0 & p_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} q_2 & q_1 \\ p_2 & p_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} q_2 & q_3 \\ p_2 & p_3 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} q_n & q_{n-1} \\ p_n & p_{n-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} q_n & q_{n+1} \\ p_n & p_{n+1} \end{pmatrix}, \dots \right).$$

Es decir que, si  $a_0 \neq 0$ , entonces

$${}_a\mathcal{C}_{\{a_n\}}^M = (E = M_{-1}, M_0, M_1, M_2, \dots, M_n, \dots)$$

y si  $a_0 = 0$ , entonces

$${}_a\mathcal{C}_{\{a_n\}}^M = (E = M_0, M_1, M_2, \dots, M_n, \dots)$$

donde

$$M_n = \begin{cases} \begin{pmatrix} q_n & q_{n-1} \\ p_n & p_{n-1} \end{pmatrix} & \text{si } n \text{ es par, y} \\ \begin{pmatrix} q_{n-1} & q_n \\ p_{n-1} & p_n \end{pmatrix} & \text{si } n \text{ es impar,} \end{cases}$$

como queríamos probar. □

El corolario 5.6 nos permite interpretar las propiedades que mencionamos de  $\mathcal{SBM}$  en el contexto de las fracciones continuas. Por ejemplo, la identidad (3.8):

$$p_{n-1}q_n - p_nq_{n-1} = (-1)^n \quad \text{para toda } n \geq 1,$$

que usamos mucho en las pruebas de fracciones continuas, es inmediata de que toda matriz en  $\mathcal{SBM}$  tiene determinante 1. También queda claro, con la interpretación geométrica que dimos de los vectores columna de matrices en  $\mathcal{SBM}$ , que los convergentes de una fracción continua están ordenados de la siguiente manera (como habíamos visto en (3.14)):

$$\frac{p_0}{q_0} < \frac{p_2}{q_2} < \frac{p_4}{q_4} < \dots < \frac{p_5}{q_5} < \frac{p_3}{q_3} < \frac{p_1}{q_1}.$$

Además, podemos ver a los convergentes de las fracciones continuas de  $\alpha = [a_0, a_1, \dots]$  y  $1/\alpha = [0, a_0, a_1, \dots]$  como pendientes de vectores columna de matrices simétricas en caminos simétricos en  $\mathcal{SBM}$  (recordando que si  $\mathcal{C}^M$  tiene sucesión  $(a_0, a_1, \dots)$ , entonces su camino simétrico tiene sucesión  $(0, a_0, a_1, \dots)$ ).

En el siguiente ejemplo integramos la interpretación geométrica que dimos de los convergentes de la fracción continua  $[a_0, a_1, \dots]$  y la construcción del camino en  $\mathcal{SBM}$  que tiene sucesión  $(a_0, a_1, \dots)$ .

**Ejemplo 5.7.** Consideremos el camino  $\mathcal{C}^M$  que tiene sucesión asociada  $(0, 1, 2, 3)$ . Tenemos que

$$\mathcal{C}^M = \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 10 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \right).$$

Y su camino abreviado es (ver figura 5.2)

$${}_a\mathcal{C}^M = \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 10 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \right).$$

Ahora comparamos con los convergentes de  $7/10 = [0, 1, 2, 3]$ , que son

$$c_0 = [0] = \frac{0}{1} \quad c_1 = [0, 1] = \frac{1}{1} \quad c_2 = [0, 1, 2] = \frac{2}{3} \quad c_3 = [0, 1, 2, 3] = \frac{7}{10},$$

como esperábamos. Podemos comparar en las figuras 5.3 y 5.4 la construcción geométrica que hicimos de  $\mathcal{SBM}$  con la interpretación geométrica que dimos de los convergentes de  $7/10$ .

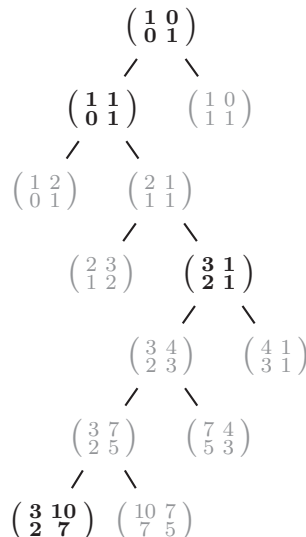


Figura 5.2: Camino en  $\mathcal{SBM}$  con sucesión asociada  $(0, 1, 2, 3)$  y su camino abreviado.

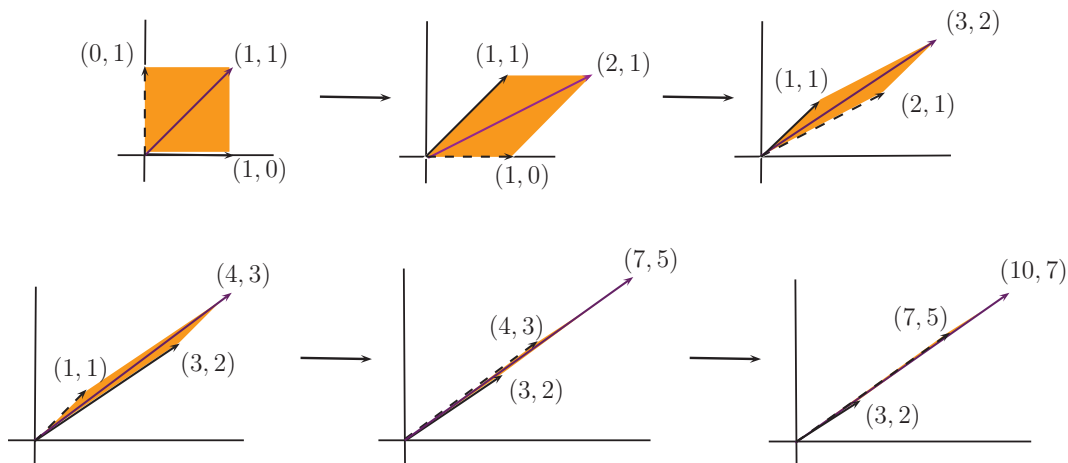


Figura 5.3: Camino en  $\mathcal{SBM}$  asociado a  $(0, 1, 2, 3)$ .

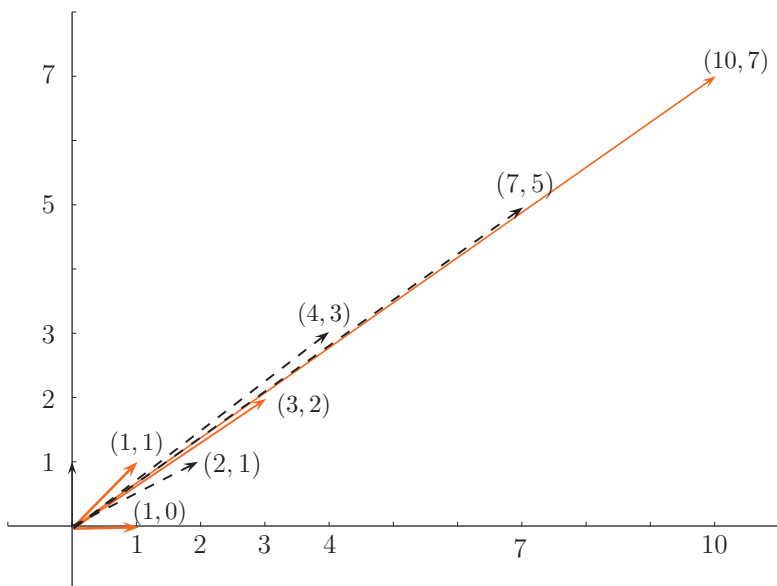


Figura 5.4: Vectores columna de matrices en camino  $\mathcal{E}^{\mathcal{M}}$  con sucesión  $(0, 1, 2, 3)$ , y vectores columna de su camino abreviado  ${}_a\mathcal{E}^{\mathcal{M}}$ .

Aprovechamos la figura 5.4 para notar que en verdad los convergentes de las fracciones continuas son muy buenas aproximaciones. Convergentes de orden bajo bastan para tener buenas aproximaciones.

Ya tenemos un significado más para los cocientes parciales  $a_i$  de una fracción continua (finita o infinita)  $\alpha = [a_0, a_1, a_2, \dots]$ . Hasta ahora tenemos que los cocientes parciales  $a_i$  son:

- en el contexto del algoritmo de Euclides, el número de cuadrados que vamos quitando de cada rectángulo en el procedimiento geométrico, y el número de vectores antes de cada cruce de la identidad en la sucesión extendida del algoritmo;
- en el contexto de las fracciones continuas, son el número de veces que tenemos que sumar un vector a otro partiendo de los vectores  $(1, 0)$  y  $(0, 1)$  para obtener los vectores  $(q_n, p_n)$ ,

cuyas pendientes son los convergentes de  $\alpha$ ; estos últimos son las mejores aproximaciones racionales de  $\alpha$ ;<sup>1</sup> y

- en el contexto de  $\mathcal{SBM}$ , forman la sucesión del camino  $\mathcal{C}^M$  en  $\mathcal{SBM}$  cuyos vectores columna son los vectores  $(q_n, p_n)$  que tienen por pendientes a los convergentes de  $\alpha$ ; son el número de vértices en  $\mathcal{C}^M$  entre cada “cambio de dirección”.

Ahora llevemos las fracciones continuas a las otras formas de  $\mathcal{SB}$ . Comenzaremos por usar la fracción continua de un racional positivo dado  $r/s = [a_0, a_1, \dots]$ ,  $r, s \in \mathbb{Z}^+$ ,  $\text{mcd}(r, s) = 1$ , para localizar al vector  $(s, r)$  en  $\mathcal{SBV}$ .

**Proposición 5.8.** *Sean  $r, s \in \mathbb{Z}^+$ ,  $\text{mcd}(r, s) = 1$ . Y sea  $r/s = [a_0, \dots, a_n]$ . Entonces el vector  $(s, r)$  tiene sucesión  $(a_0, a_1, \dots, a_n - 1)$  en  $\mathcal{SBV}$ .*

*Demostración.* Sean  $r, s \in \mathbb{Z}^+$ ,  $\text{mcd}(r, s) = 1$ . Sea  $r/s = [a_0, \dots, a_n]$  con convergentes  $c_k = p_k/q_k$ ,  $0 \leq k \leq n$ . Sabemos del teorema 5.1 que la matriz  $M = D^{a_0} I^{a_1} D^{a_2} \dots \left\{ \begin{smallmatrix} D \\ I \end{smallmatrix} \right\}^{a_n}$ , que tiene sucesión  $(a_0, \dots, a_n)$ , se escribe como

$$M = \begin{cases} \begin{pmatrix} q_n & q_{n-1} \\ p_n & p_{n-1} \end{pmatrix} & \text{si } n \text{ es par, y} \\ \begin{pmatrix} q_{n-1} & q_n \\ p_{n-1} & p_n \end{pmatrix} & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

Por otro lado, por construcción de  $\mathcal{SBM}$  sabemos que si  $M$  es descendiente de  $M'$  en  $\mathcal{SBM}$ , entonces el vector que  $M$  no comparte con  $M'$  es el que tiene entradas mayores (pues es la suma de los vectores columna de  $M'$ ). Ya que las sucesiones  $p_n$  y  $q_n$  son crecientes, entonces el vector columna de  $M$  que no comparte con  $M'$  es  $(q_n, p_n) = (s, r)$ . Pero entonces, por la proposición 4.51, el vector  $(s, r)$  tiene sucesión  $(a_0, a_1, \dots, a_n - 1)$  en  $\mathcal{SBV}$ , como queríamos probar.  $\square$

Sabíamos ya que cada racional estaba en  $\mathcal{SBF}$ . Ahora podemos usar su expresión en fracción continua para decir en qué vértice está, y cómo se construye a partir de mediantes. De la proposición 5.8 se sigue el siguiente corolario.

**Corolario 5.9.** *Sean  $r, s \in \mathbb{Z}^+$ ,  $\text{mcd}(r, s) = 1$ . Y sea  $r/s = [a_0, \dots, a_n]$ . Entonces  $r/s$  tiene sucesión  $(a_0, a_1, \dots, a_n - 1)$  en  $\mathcal{SBF}$ .*

**Ejemplo 5.10.** *Consideremos el racional  $13/8 = [1, 1, 1, 1, 2]$  en  $\mathcal{SBF}$ . Vemos que en efecto tiene sucesión  $(1, 1, 1, 1, 1)$  en  $\mathcal{SBF}$ .*

---

<sup>1</sup>en el sentido que vimos en la sección 3.4 del capítulo 3 (relativo a las fracciones continuas).



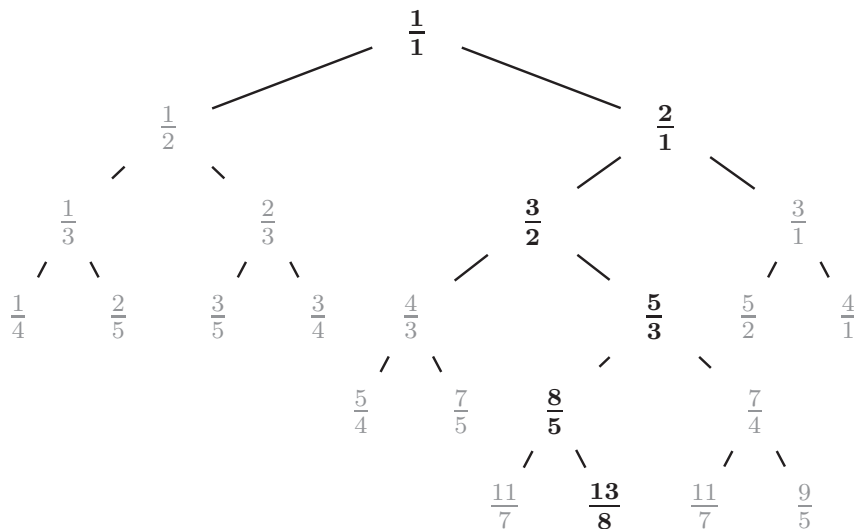


Figura 5.5: El racional  $13/8 = [1, 1, 1, 1, 2]$  en  $SBF$  tiene sucesión  $(1, 1, 1, 1, 1)$ .

La ventaja de ver a un vector y su pendiente en las formas vectorial y fraccionaria de  $SB$  es que además de obtener información particular de ese vector y de su pendiente, lo podemos ver en el contexto de la estructura que da  $SB$  de todas las pendientes racionales: podemos ubicar a cada pendiente en el “mapa” que da  $SBF$  de los racionales. Además, podremos ver en los caminos abreviados a la sucesión de convergentes de un número real.

En el capítulo 4 definimos los caminos abreviados en  $SBV$  y  $SBF$  como lo hicimos para que el camino abreviado del camino de  $(s, r)$  en  $SBV$ , y el camino abreviado del camino de  $r/s$  en  $SBV$  tuvieran términos de la forma  $(q_n, p_n)$  y  $p_n/q_n$  respectivamente, donde  $c_n = p_n/q_n$  es el convergente de orden  $n$  de  $r/s$ . Veamos un ejemplo.

**Ejemplo 5.11.** Consideremos el vector  $(11, 8)$  con pendiente  $8/11 = [0, 1, 2, 1, 2]$ . Como vimos en el ejemplo 3.21, los convergentes de  $8/11$  son

$$\frac{p_0}{q_0} = \frac{0}{1}; \quad \frac{p_1}{q_1} = [0, 1] = \frac{1}{1}; \quad \frac{p_2}{q_2} = \frac{2}{3}; \quad \frac{p_3}{q_3} = \frac{3}{4} \quad y \quad \frac{p_4}{q_4} = \frac{8}{11}.$$

El camino abreviado del camino  $\mathcal{C}^V$  de  $(11, 8)$  en  $SBV$  está formado por aquellos términos de  $\mathcal{C}^V$  que antecedan a un vértice en donde haya “cambio de dirección”, y el último vértice de  $\mathcal{C}^V$ , que es  $(11, 8)$ :

$${}_a\mathcal{C}^V = ((1, 1), (3, 2), (4, 3), (11, 8)) = ((q_1, p_1), (q_2, p_2), (q_3, p_3), (q_4, p_4)).$$

Asimismo, el camino abreviado del camino  $\mathcal{C}^F$  de  $8/11$  en  $SBF$  es (ver figura 5.6)

$${}_a\mathcal{C}^V = \left(\frac{1}{1}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{8}{11}\right) = \left(\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}, \frac{p_3}{q_3}, \frac{p_4}{q_4}\right).$$

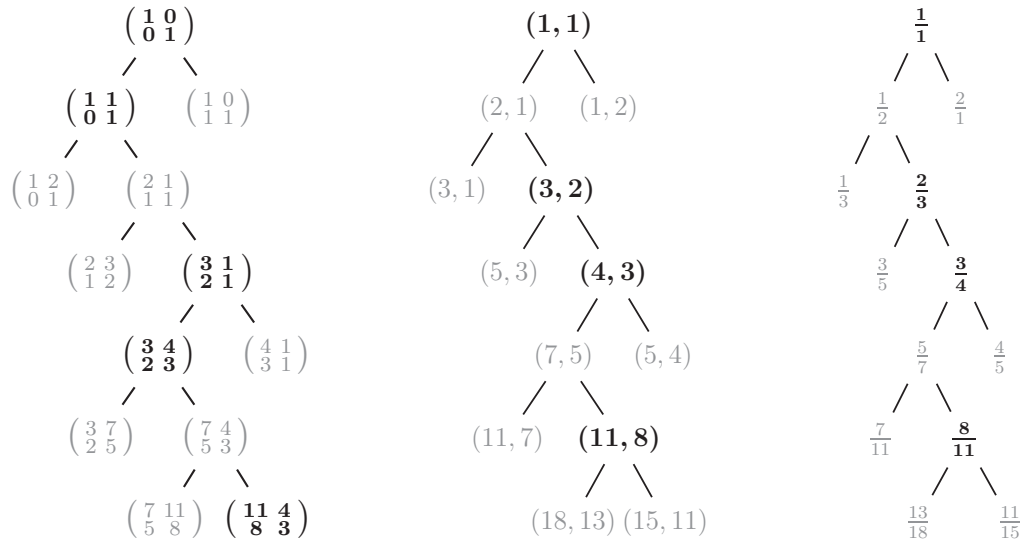


Figura 5.6: Caminos abreviados en  $\mathcal{SBM}$ ,  $\mathcal{SBV}$  y  $\mathcal{SBF}$ .

**Proposición 5.12.** Sea  $(r, s) \neq (1, 1)$  en  $\mathcal{SBV}$ , y  $\mathcal{C}^{\mathcal{V}}$  su camino en  $\mathcal{SBV}$ . Sea  $r/s = [a_0, a_1, \dots, a_n]$ , con convergentes  $c_k = p_k/q_k$ ,  $0 \leq k \leq n$ . Entonces el camino abreviado de  $\mathcal{C}^{\mathcal{V}}$  es

$${}_a\mathcal{C}^{\mathcal{V}} = \begin{cases} ((q_0, p_0), (q_1, p_1), (q_2, p_2), \dots, (q_n, p_n)) & \text{si } r/s > 1 \\ ((q_1, p_1), (q_2, p_2), \dots, (q_n, p_n)) & \text{si } r/s < 1. \end{cases}$$

*Demostración.* Sea  $(r, s) \neq (1, 1)$  en  $\mathcal{SBV}$ , y  $\mathcal{C}^{\mathcal{V}}$  su camino en  $\mathcal{SBV}$ . Sea  $r/s = [a_0, a_1, \dots, a_n]$ , con convergentes  $c_k = p_k/q_k$ ,  $0 \leq k \leq n$ . Consideremos el camino  $\mathcal{C}^{\mathcal{M}}$  de matrices en  $\mathcal{SBM}$  con sucesión  $(a_0, a_1, \dots, a_n)$ . Supongamos  $r/s > 1$ . Entonces  $a_0 \neq 0$ . Según el corolario 5.6), el camino abreviado de  $\mathcal{C}^{\mathcal{M}}$  es

$${}_a\mathcal{C}^{\mathcal{M}} = \left( \begin{pmatrix} q_{-2} & q_{-1} \\ p_{-2} & p_{-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} q_0 & q_{-1} \\ p_0 & p_{-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} q_0 & q_1 \\ p_0 & p_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} q_2 & q_1 \\ p_2 & p_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} q_2 & q_3 \\ p_2 & p_3 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} q_n & q_{n-1} \\ p_n & p_{n-1} \end{pmatrix} \right)$$

si  $n$  es par; si  $n$  es impar, el último término es  $\begin{pmatrix} q_{n-1} & q_n \\ p_{n-1} & p_n \end{pmatrix}$ . Estas matrices son, por definición de camino abreviado en  $\mathcal{SBM}$ : la raíz de  $\mathcal{SBM}$ , las matrices donde hay cambio de dirección, y la última matriz del camino  $\mathcal{C}^{\mathcal{M}}$ . Si nos quedamos únicamente con las matrices en que hay cambio de dirección, y el último término tenemos:

$$\left( \begin{pmatrix} q_0 & q_{-1} \\ p_0 & p_{-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} q_0 & q_1 \\ p_0 & p_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} q_2 & q_1 \\ p_2 & p_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} q_2 & q_3 \\ p_2 & p_3 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} q_n & q_{n-1} \\ p_n & p_{n-1} \end{pmatrix} \right).$$

(si  $n$  es impar, el último término es  $\begin{pmatrix} q_{n-1} & q_n \\ p_{n-1} & p_n \end{pmatrix}$ ). Ahora, para cada matriz  $M$  de esta sucesión consideramos  $M'$  la matriz de la que es descendiente  $M$  en  $\mathcal{SBM}$ . Sabemos (por construcción de  $\mathcal{SBM}$ ) que el vector columna que  $M$  no comparte con  $M'$  es el vector columna de  $M$  con mayores entradas. Ahora, por la proposición 4.51 podemos afirmar que el vector columna que  $M$  no comparte con  $M'$  está en el vértice correspondiente a  $M'$  en  $\mathcal{SBV}$  (“un lugar arriba” de  $M$ ). Pero en las matrices  $\begin{pmatrix} q_{k-1} & q_k \\ p_{k-1} & p_k \end{pmatrix}$  y  $\begin{pmatrix} q_k & q_{k-1} \\ p_k & p_{k-1} \end{pmatrix}$ ,  $0 \leq k \leq n$  el vector columna que no comparten con la matriz de la que son descendientes es  $(q_k, p_k)$ , pues  $\{p_n\}$  y  $\{q_n\}$  son crecientes. Así, la sucesión

$$\left( (q_0, p_0), (q_1, p_1), \dots, (q_n, p_n) = (s, r) \right) \tag{5.1}$$

es la sucesión de vértices en cuyo descendiente hay un cambio de dirección (los cambios de dirección son los mismos en caminos correspondientes), y su último vértice es  $(q_n, p_n) = (s, r)$  (que es el vector que está “un lugar arriba” del último término de  $\mathcal{C}^M$ ). Pero esto es la definición de camino abreviado del camino de  $(s, r)$  en  $\mathcal{SBV}$ . Así, la sucesión 5.1 es el camino abreviado de  $\mathcal{C}^V$ . Si  $r/s < 1$  entonces  $a_0 = 0$ . Procedemos de manera análoga, ahora usando que

$${}_a\mathcal{C}^M = \left( \binom{q_{-2} \ q_{-1}}{p_{-2} \ p_{-1}} = \binom{q_0 \ q_{-1}}{p_0 \ p_{-1}}, \binom{q_0 \ q_1}{p_0 \ p_1}, \binom{q_2 \ q_1}{p_2 \ p_1}, \binom{q_2 \ q_3}{p_2 \ p_3}, \dots, \binom{q_n \ q_{n-1}}{p_n \ p_{n-1}}, \binom{q_n \ q_{n+1}}{p_n \ p_{n+1}} \right).$$

(si  $n$  es impar, el último término es  $\binom{q_{n-1} \ q_n}{p_{n-1} \ p_n}$ ). Si nos quedamos con los términos de  ${}_a\mathcal{C}^M$  en que hay cambio de dirección, y el último término, obtenemos

$${}_a\mathcal{C}^M = \left( \binom{q_0 \ q_1}{p_0 \ p_1}, \binom{q_2 \ q_1}{p_2 \ p_1}, \binom{q_2 \ q_3}{p_2 \ p_3}, \dots, \binom{q_n \ q_{n-1}}{p_n \ p_{n-1}}, \binom{q_n \ q_{n+1}}{p_n \ p_{n+1}} \right).$$

(si  $n$  es impar, el último término es  $\binom{q_{n-1} \ q_n}{p_{n-1} \ p_n}$ ). El camino abreviado de  $\mathcal{C}^V$  en este caso resulta

$${}_a\mathcal{C}^V = \left( (q_1, p_1), \dots, (q_n, p_n) = (s, r) \right)$$

como queríamos probar. □

**Corolario 5.13.** Sean  $r, s \in \mathbb{Z}^+$ ,  $r/s \neq 1$  en  $\mathcal{SBF}$ , y  $\mathcal{C}^F$  su camino en  $\mathcal{SBF}$ . Sea  $r/s = [a_0, a_1, \dots, a_n]$ . con convergentes  $c_k = p_k/q_k$ ,  $0 \leq k \leq n$ . Entonces el camino abreviado de  $\mathcal{C}^F$  es

$${}_a\mathcal{C}^V = \begin{cases} \left( \frac{p_0}{q_0}, \frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}, \dots, \frac{p_n}{q_n} \right) & \text{si } r/s > 1 \\ \left( \frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}, \dots, \frac{p_n}{q_n} \right) & \text{si } r/s < 1. \end{cases}$$

**Ejemplo 5.14.** Tenemos que  $7/4 = [1, 1, 3]$ . Los convergentes de  $7/4 = [1, 1, 3]$  son:

$$c_0 = [1] = \frac{1}{1}, \quad c_1 = [1, 1] = \frac{2}{1}, \quad c_2 = [1, 1, 3] = \frac{7}{4}.$$

Ahora, los caminos en  $\mathcal{SBV}$  y  $\mathcal{SBF}$  de  $(4, 7)$  y  $7/4$  son respectivamente (ver figura 5.7):

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{\{a_n\}}^V &= ((1, 1), (1, 2), (2, 3), (3, 5), (4, 7)) \quad y \\ \mathcal{C}_{\{a_n\}}^V &= \left( \frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{7}{4} \right). \end{aligned}$$

y sus caminos abreviados son:

$$\begin{aligned} {}_a\mathcal{C}_{\{a_n\}}^V &= ((1, 1), (1, 2), (4, 7)) = ((q_0, p_0), (q_1, p_1), (q_2, p_2)) \quad y \\ {}_a\mathcal{C}_{\{a_n\}}^V &= \left( \frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{7}{4} \right) = \left( \frac{p_0}{q_0}, \frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2} \right). \end{aligned}$$

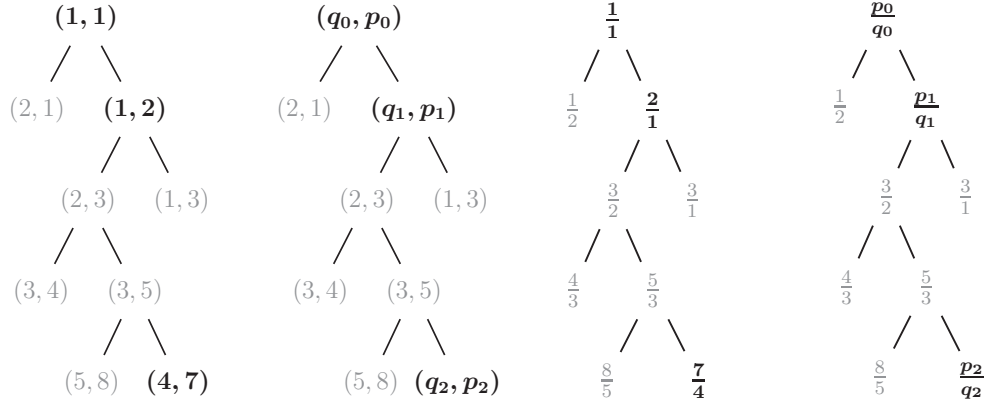


Figura 5.7: Caminos abreviados de caminos en  $\mathcal{SBV}$  y  $\mathcal{SBF}$  con sucesión  $(1, 1, 3)$ .

Podemos hacer una afirmación similiar, ahora para caminos infinitos.

**Proposición 5.15.** *Sea  $\alpha = [a_0, a_1, a_2, \dots] \in \mathbb{R}^+$ ,  $\alpha \neq 1$  con  $c_n = p_n/q_n$  su convergente de orden  $n$ . Sea  $\mathcal{C}^{\mathcal{V}}$  el camino en  $\mathcal{SBV}$  con sucesión  $(a_0, a_1, a_2, \dots)$ , y sea  $\mathcal{C}^{\mathcal{F}}$  el camino en  $\mathcal{SBF}$  con sucesión  $(a_0, a_1, a_2, \dots)$ . Entonces los caminos abreviados de  $\mathcal{C}^{\mathcal{V}}$  y  $\mathcal{C}^{\mathcal{F}}$  son*

$${}_a\mathcal{C}^{\mathcal{V}} = \begin{cases} ((q_0, p_0), (q_1, p_1), (q_2, p_2), \dots, (q_n, p_n), \dots) & \text{si } \alpha > 1 \\ ((q_1, p_1), (q_2, p_2), \dots, (q_n, p_n), \dots) & \text{si } \alpha < 1. \end{cases}$$

$${}_a\mathcal{C}^{\mathcal{F}} = \begin{cases} (\frac{p_0}{q_0}, \frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}, \dots, \frac{p_n}{q_n}, \dots) & \text{si } \alpha > 1 \\ (\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}, \dots, \frac{p_n}{q_n}, \dots) & \text{si } \alpha < 1. \end{cases}$$

La prueba es idéntica a la de la proposición 5.12 (el caso finito), ahora usando el camino abreviado del camino (infinito) en  $\mathcal{SBM}$  con sucesión  $(a_0, a_1, a_2, \dots)$  y tomando en cuenta que no hay un último término en ninguno de los caminos involucrados.

Estos resultados nos permiten hacer una asociación entre números reales positivos y caminos en  $\mathcal{SBF}$  finitos o con infinitos cambios de dirección. Al camino  $\mathcal{C}^{\mathcal{F}}$  con sucesión  $(a_0, a_1, a_2, \dots)$  le asociamos el real  $\alpha$  cuya expresión en fracción continua es  $\alpha = [a_0, a_1, a_2, \dots]$ . Si  $\mathcal{C}^{\mathcal{F}} = \{r_n/s_n\}_{n=0}^{\infty}$  es infinito, entonces converge a  $\alpha$ : usando que  $|r_{n+1}s_n - r_ns_{n+1}| = 1$  (como vimos en el corolario 4.22) y que  $\{s_n\}$  es una sucesión estrictamente creciente de enteros positivos, tenemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{r_{n+1}}{s_{n+1}} - \frac{r_n}{s_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{s_{n+1}s_n} = 0. \quad (5.2)$$

Como además para cualesquiera dos términos consecutivos de  $\mathcal{C}^{\mathcal{F}}$  se tiene que todos los términos siguientes están estrictamente entre estos dos, (5.2) garantiza la convergencia de  $\mathcal{C}^{\mathcal{F}}$ . Para ver que converge a  $\alpha$  notamos que su camino abreviado  ${}_a\mathcal{C}^{\mathcal{F}}$  es la sucesión de convergentes de  $\alpha$ , que converge a  $\alpha$ . Si  $\mathcal{C}^{\mathcal{F}}$  es finito, el real  $\alpha = [a_0, a_1, \dots, a_n]$  es el último término del camino abreviado  ${}_a\mathcal{C}^{\mathcal{F}}$ . Para ver que la asociación que dimos entre números reales y caminos en  $\mathcal{SBF}$  es en realidad una biyección sirve la misma prueba que dimos para ver que era una biyección la asociación entre números reales y fracciones continuas positivas o negativas.

Lo interesante de ver una fracción continua como la sucesión de un camino en  $\mathcal{SBF}$  o en  $\mathcal{SBFD}$  no es sólo ver cómo se construye ese número real a partir de mediante partiendo de  $0 = 0/1$  e  $\infty = 1/0$ , sino poderlo ver en un contexto más amplio: ver el lugar que ocupa en la

construcción de todos los números reales. Recordemos que los árboles  $\mathcal{SBV}$  y  $\mathcal{SBF}$  nos dan una manera de construir a todos los números reales que se refleja en la fracción continua de cada número real. Esto nos conviene, pues permite dar una lectura de las propiedades que vimos de  $\mathcal{SBV}$  y  $\mathcal{SBF}$  en el contexto de las fracciones continuas, y nos facilitan su interpretación geométrica. Por ejemplo, dado que si  $\alpha = [a_0, a_1, \dots]$ , entonces

$$\frac{1}{\alpha} = \begin{cases} [0, a_0, a_1, \dots] & \text{si } a_0 \neq 0 \\ [a_1, a_2, \dots] & \text{si } a_0 = 0. \end{cases}$$

tendremos que el camino asociado a  $\alpha$  y el camino asociado a  $1/\alpha$  son caminos simétricos, y sus términos son geoméricamente reflejo en el plano uno del otro respecto a la identidad. Sus convergentes de orden  $n$  son también inversos uno del otro. En la figura 5.8 lo ilustramos para  $5/3 = [1, 1, 2]$  y  $3/5 = [0, 1, 1, 2]$ .

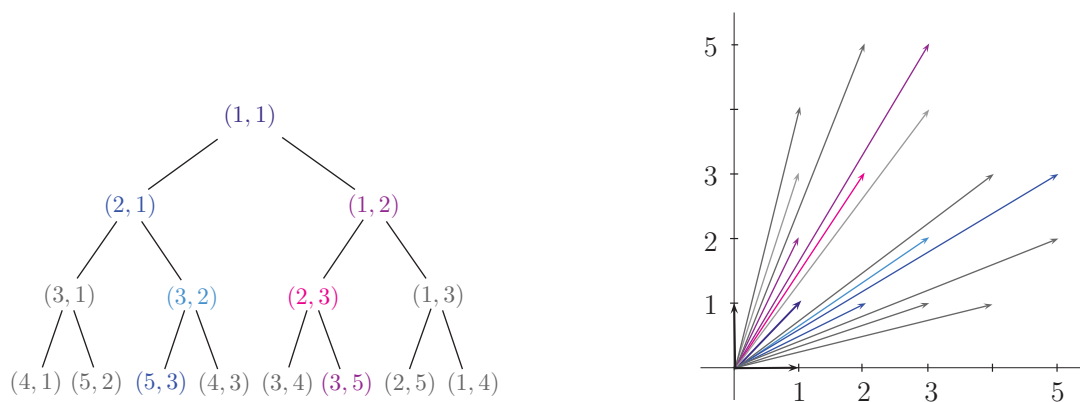


Figura 5.8: Simetría de  $\mathcal{SBV}$  y  $\mathcal{SBF}$  en los convergentes de una fracción continua.

Ver a los convergentes de un real  $\alpha$  en un camino abreviado en  $\mathcal{SBF}$  vuelve inmediata la afirmación de la proposición 3.13 sobre el orden de los convergentes de una fracción continua positiva (dado en (3.14)):

$$\frac{p_0}{q_0} < \frac{p_2}{q_2} < \frac{p_4}{q_4} < \dots < \frac{p_5}{q_5} < \frac{p_3}{q_3} < \frac{p_1}{q_1}.$$

También ayuda a comprender por qué éstos son mejores aproximaciones de  $\alpha$  (en el sentido de la definición 3.22).

## 5.2. Residuos y algoritmo de Euclides en $\mathcal{SBD}$

Ya que vimos que en los caminos en las formas vectorial y fraccionaria de  $\mathcal{SB}$  encontramos **convergentes** de fracciones continuas, nos preguntamos qué pasa con los caminos en las formas vectorial y fraccionaria de  $\mathcal{SBD}$ . Resulta que en éstos encontraremos **residuos** de fracciones continuas.

Comencemos por dar la sucesión que tiene un vector  $(r, s)$  con  $r, s \in \mathbb{Z}^+$  en la forma vectorial de  $\mathcal{SBD}$ .

**Proposición 5.16.** *Sea  $(s, r)$  en  $\mathcal{SBVD}$ , con  $r/s = [a_0, a_1, a_2, \dots, a_n]$ . Entonces si  $a_0 \neq 0$  el vector  $(s, r)$  tiene en  $\mathcal{SBVD}$  sucesión  $(a_n - 1, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0)$  si  $n$  es par; si  $n$  es impar tiene sucesión  $(0, a_n - 1, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0)$ . Si  $a_0 = 0$  lo mismo, quitando el último término de la sucesión.*

*Demostración.* Sea  $(s, r)$  en  $\mathcal{SBVD}$ , con  $r/s = [a_0, a_1, a_2, \dots, a_n]$ . De la proposición 5.8 tenemos que el vector  $(s, r)$  tiene sucesión  $(a_0, \dots, a_{n-1})$  en  $\mathcal{SBV}$ . Usamos la proposición 4.76, que relaciona las sucesiones que un mismo vector tiene en  $\mathcal{SBV}$  y  $\mathcal{SBVD}$ , para concluir que entonces  $(s, r)$  tiene en  $\mathcal{SBVD}$  sucesión  $(a_n - 1, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0)$  si  $n$  es par y sucesión  $(0, a_n - 1, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0)$  si  $n$  es impar, quitando el último término si  $a_0 = 0$ . Terminamos la prueba.  $\square$

**Corolario 5.17.** *Sea  $r/s$  en  $\mathcal{SBFD}$ , con  $r/s = [a_0, a_1, a_2, \dots, a_n]$ . Entonces si  $a_0 \neq 0$ ,  $r/s$  tiene en  $\mathcal{SBFD}$  sucesión  $(a_n - 1, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0)$  si  $n$  es par y sucesión  $(0, a_n - 1, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0)$  si  $n$  es impar. Si  $a_0 = 0$  lo mismo, quitando el último término de la sucesión.*

**Ejemplo 5.18.** *Consideremos el vector  $(10, 7)$ , con pendiente  $7/10 = [0, 1, 2, 3] = [a_0, a_1, a_2, a_3]$ . Ya que  $a_0 = 0$  y 3 es impar, entonces  $(10, 7)$  y  $7/1$  tienen en  $\mathcal{SBVD}$  y  $\mathcal{SBFD}$  respectivamente sucesión  $(0, a_3 - 1, a_2, a_1) = (0, 2, 2, 1)$ . Ver figura 5.9.*

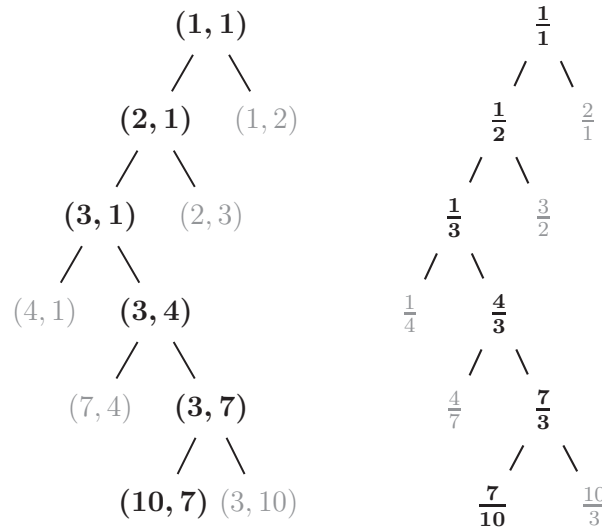


Figura 5.9: La sucesión de  $(10, 7)$  y  $7/10$  en  $\mathcal{SBVD}$  y  $\mathcal{SBFD}$  es  $(0, 2, 2, 1)$ .

Así que también podemos usar la fracción continua de un racional para ubicarlo en  $\mathcal{SBFD}$ . Los caminos en las formas vectorial y fraccionaria de  $\mathcal{SBD}$  nos dicen todavía más. Recordemos del capítulo 2 cuál es la sucesión extendida del algoritmo de Euclides aplicado a la pareja  $(10, 7)$ :

$$(10, 7) \longrightarrow (10, 7) \longrightarrow (3, 7) \longrightarrow (3, 4) \longrightarrow (3, 1) \longrightarrow (2, 1) \longrightarrow (1, 1) \longrightarrow (0, 1) \quad (5.3)$$

Y su sucesión abreviada

$$(10, 7) \longrightarrow (10, 7) \longrightarrow (3, 7) \longrightarrow (3, 1) \longrightarrow (0, 1). \quad (5.4)$$

Si comparamos la sucesión (5.3) con el camino de  $(10, 7)$  en  $\mathcal{SBVD}$  (ver figura 5.9), vemos que tienen esencialmente los mismos términos, pero en orden inverso (difieren en que en el camino

de (10, 7) falta el último término de (5.3) y la repetición del primero). Además, al comparar la sucesión abreviada (5.4) con el camino abreviado del camino de (10, 7) en  $\mathcal{SBVD}$ :

$${}_a\mathcal{C}^{\mathcal{V}} = ((3, 1), (3, 7), (10, 7)) \tag{5.5}$$

vemos que también tienen esencialmente los mismos términos, en orden inverso. Ahora, en  ${}_a\mathcal{C}^{\mathcal{F}}$ , que es el camino abreviado del camino de 7/10 en  $\mathcal{SBFD}$ , tenemos a las pendientes de los términos de  ${}_a\mathcal{C}^{\mathcal{V}}$ :

$${}_a\mathcal{C}^{\mathcal{F}} = \left( \frac{1}{3}, \frac{7}{3}, \frac{7}{10} \right).$$

Veamos cómo se relacionan con los residuos de 7/10. En el capítulo 3 vimos (proposición 3.26) que las pendientes de los términos de la sucesión abreviada del algoritmo de Euclides aplicado a (b, a) (vistos como vectores en el plano) son o bien los residuos  $s_k$  de la fracción continua de a/b, o sus inversos (dependiendo de la paridad de k en el residuo  $s_k$ ). Así, las pendientes de los términos del camino abreviado de (b, a) en  $\mathcal{SBVD}$  son también residuos de la fracción continua de a/b o sus inversos. En el caso de (10, 7), comparando los residuos de  $7/10 = [0, 1, 2, 3]$  con los términos de  ${}_a\mathcal{C}^{\mathcal{F}}$  tenemos:

$$s_0 = [0, 1, 2, 3] = \frac{7}{10}; \quad s_1 = [1, 2, 3] = \frac{10}{7}; \quad s_2 = [2, 3] = \frac{7}{3}; \quad s_3 = [3] = \frac{3}{1}$$

$${}_a\mathcal{C}^{\mathcal{F}} = \left( \frac{1}{3}, \frac{7}{3}, \frac{10}{7} \right) = \left( \frac{1}{s_3}, s_2, \frac{1}{s_1} = s_0, \right)$$

Como si no fueran suficientes las relaciones entre los convergentes y los caminos en  $\mathcal{SB}$ , ¡los caminos en  $\mathcal{SBD}$  se dan el lujo de coincidir con los residuos y las sucesiones del algoritmo de Euclides!

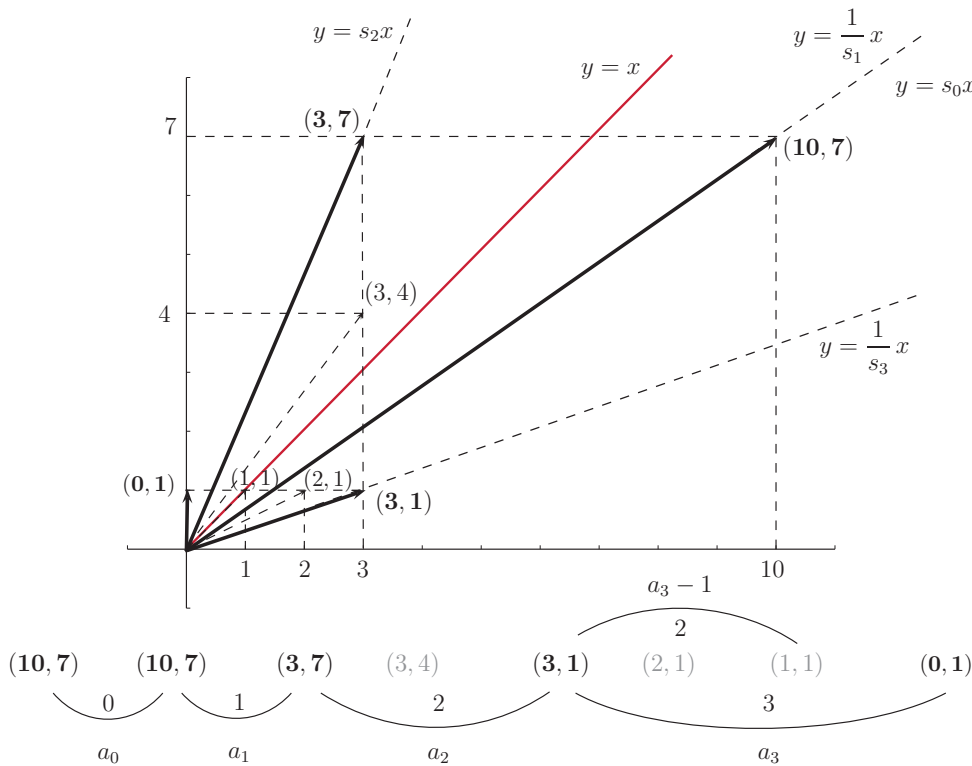


Figura 5.10: Residuos de  $7/10 = [0, 1, 2, 3]$  como pendientes en el algoritmo de Euclides geométrico, y pendientes del camino de 7/10 en  $\mathcal{SBFD}$ .

Recordamos en la figura 5.10 a la figura 3.6 del capítulo 3, para comparar los caminos en las formas vectorial y fraccionaria de  $SB\mathcal{D}$  con la interpretación geométrica que dimos del algoritmo de Euclides y las fracciones continuas. Notamos que los vectores en los que en la sucesión extendida del algoritmo de Euclides “se cruza la identidad” son los vectores del camino abreviado en  $SB\mathcal{F}\mathcal{D}$ , es decir, los vértices donde hay un “cambio de dirección”.

Esta relación era de esperarse, pues vimos que podemos ver los caminos en  $SB\mathcal{V}\mathcal{D}$  geométricamente como construcciones de rectángulos colocando cuadrados (recordar figura 4.56), que es el proceso inverso al procedimiento geométrico del algoritmo de Euclides. En la figura 5.11 podemos ver el camino del vector  $(10, 7)$  en  $SB\mathcal{V}\mathcal{D}$ , visto geométricamente como el proceso inverso al algoritmo de Euclides.

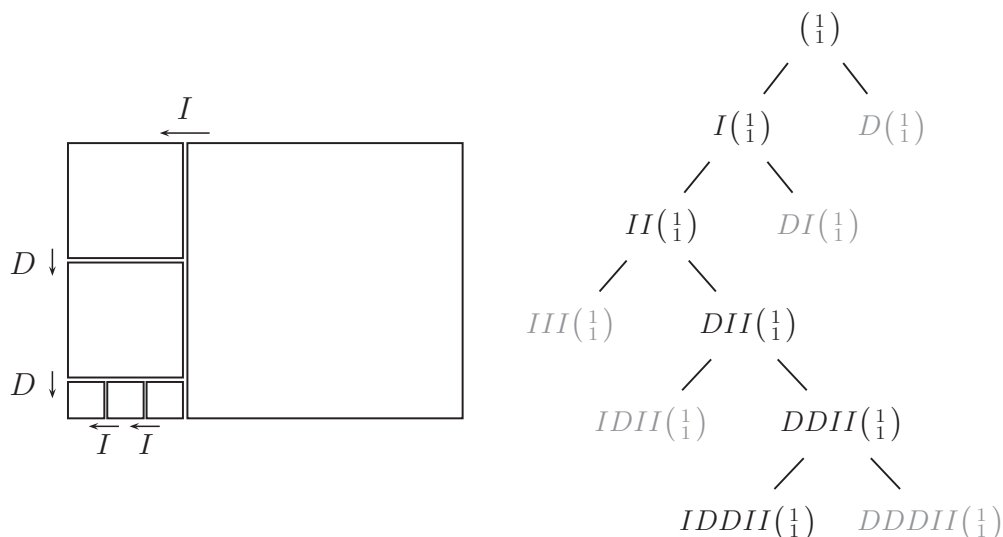


Figura 5.11: Camino del vector  $(10, 7)$  en  $SB\mathcal{V}\mathcal{D}$  visto geométricamente como el proceso inverso del Algoritmo de Euclides: “colocando cuadrados” en lugar de quitándolos.

Un detalle importante a notar es la dificultad que surge al querer hacer una asociación entre caminos en  $SB\mathcal{F}\mathcal{D}$  y números reales. Es fácil asignar un racional a un camino finito en  $SB\mathcal{F}\mathcal{D}$  y viceversa: dado que  $r/s = [a_0, a_1, \dots, a_n]$  tiene sucesión  $(a_0, \dots, a_n - 1)$  en  $SB\mathcal{F}$ , y consecuentemente tiene sucesión  $(a_n - 1, \dots, a_0)$  en  $SB\mathcal{F}\mathcal{D}$ , asignamos al racional  $r/s$  el camino en  $SB\mathcal{F}\mathcal{D}$  que tiene sucesión  $(a_n - 1, \dots, a_0)$ . Si tomamos un camino finito en  $SB\mathcal{F}\mathcal{D}$  que tiene sucesión  $(a_0, \dots, a_n)$ , sabemos qué racional asignarle: aquel con fracción continua  $[a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0 + 1]$ , que es el último término del camino. Pero ¿qué número asociaríamos a un camino en  $SB\mathcal{F}\mathcal{D}$  infinito con infinitos cambios de dirección? Sabemos cómo asignar números irracionales a caminos infinitos con infinitos cambios de dirección en  $SB\mathcal{F}$ : al camino con sucesión  $(a_0, a_1, \dots)$  le corresponde el real con fracción continua  $[a_0, a_1, \dots]$ , pero esto no nos ayuda en el caso de la forma fraccionaria del Árbol Dual de Stern-Brocot. Si damos un número irracional  $\alpha = [a_0, a_1, \dots]$ , el camino que le corresponde en  $SB\mathcal{F}$  tiene sucesión  $(a_0, a_1, \dots)$ ; para dar el camino que le corresponde en  $SB\mathcal{F}\mathcal{D}$  tendríamos que tomar la sucesión  $(a_0, a_1, \dots)$  “en sentido inverso”, restando 1 al “último término”. Pero no tenemos un “último término” para hacer esto. Igualmente, si damos un camino infinito en  $SB\mathcal{F}\mathcal{D}$  con sucesión  $(a_0, a_1, \dots)$ , ésta no tiene un “último término” con el que comenzaría la sucesión del camino en  $SB\mathcal{F}$  al que sabríamos qué real asignar. Resolveremos este problema en el capítulo 7.



Es más cómodo abordar los caminos en  $SBD$  desde la perspectiva de transformaciones en el plano. Antes de pasar a ellas, veamos un ejemplo que sintetice las relaciones que vimos entre  $SB$  y los convergentes de fracciones continuas y entre  $SBD$ , los residuos de fracciones continuas y las sucesiones extendida y abreviada del algoritmo de Euclides.

**Ejemplo 5.19.** Tomemos los racionales  $12/7 = [1, 1, 2, 2]$  y  $8/11 = [0, 1, 2, 1, 2]$ . Los caminos abreviados de los caminos de  $12/7$  y  $8/11$  en  $SBF$  y en  $SBFD$  son (ver figuras 5.12 y 5.13):

$$\begin{aligned}
 {}_a\mathcal{C}_{\frac{12}{7}}^{\mathcal{F}} &= \left( \frac{1}{1}, \frac{2}{2}, \frac{5}{3}, \frac{12}{7} \right) \text{ en } SBF \text{ y } {}_d\mathcal{C}_{\frac{12}{7}}^{\mathcal{F}} = \left( \frac{1}{2}, \frac{5}{2}, \frac{5}{7}, \frac{12}{7} \right) \text{ en } SBFD. \\
 {}_a\mathcal{C}_{\frac{8}{11}}^{\mathcal{F}} &= \left( \frac{1}{1}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{8}{11} \right) \text{ en } SBF \text{ y } {}_d\mathcal{C}_{\frac{8}{11}}^{\mathcal{F}} = \left( \frac{2}{1}, \frac{2}{3}, \frac{8}{3}, \frac{8}{11} \right) \text{ en } SBFD.
 \end{aligned}$$

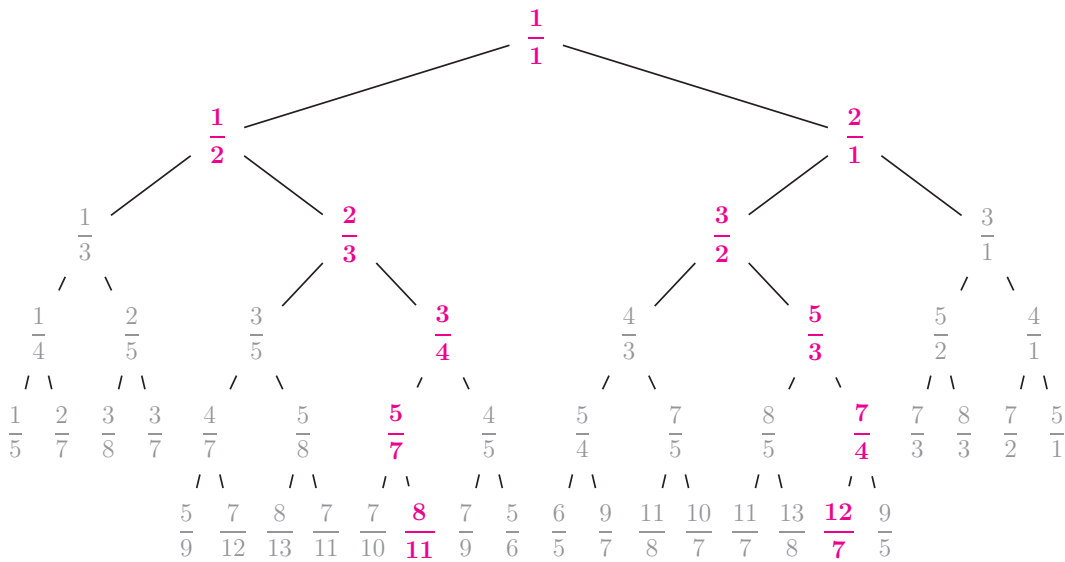


Figura 5.12: Convergentes en  $SBF$ .

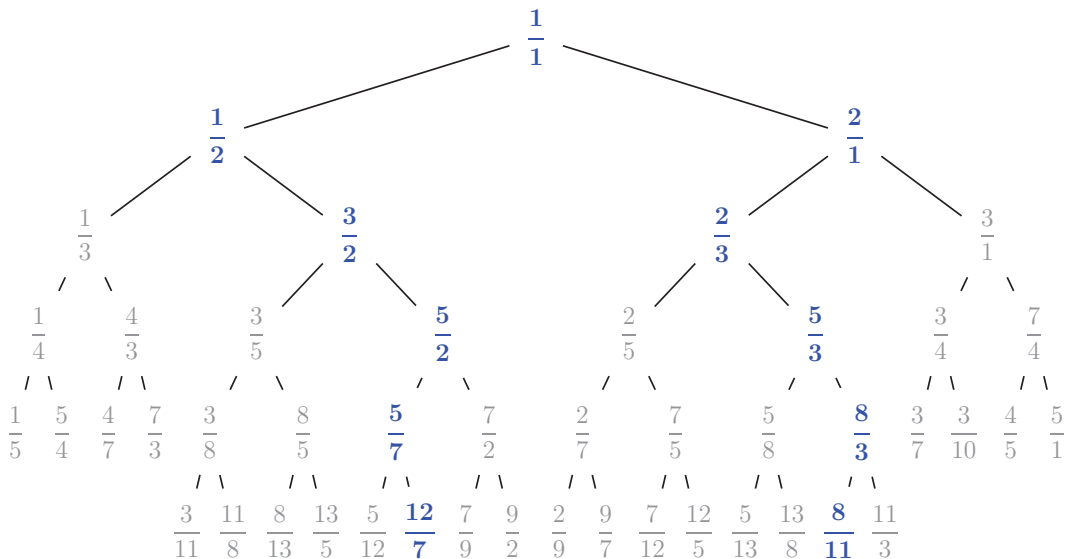


Figura 5.13: Residuos en  $SBFD$ .

Los convergentes y residuos de  $12/7$  y  $8/11$  son:

Convergentes de  $\frac{12}{7}$

$$c_0 = [1] = \frac{1}{1}$$

$$c_1 = [1, 1] = \frac{2}{1}$$

$$c_2 = [1, 1, 2] = \frac{5}{3}$$

$$c_3 = [1, 1, 2, 2] = \frac{12}{7}$$

Residuos de  $\frac{12}{7}$

$$s_0 = [1, 1, 2, 2] = \frac{12}{7}$$

$$s_1 = [1, 2, 2] = \frac{7}{5}$$

$$s_2 = [2, 2] = \frac{5}{2}$$

$$s_3 = [2] = \frac{2}{1}$$

Convergentes de  $\frac{8}{11}$

$$c_0 = [0] = \frac{0}{1}$$

$$c_1 = [0, 1] = \frac{1}{1}$$

$$c_2 = [0, 1, 2] = \frac{2}{3}$$

$$c_3 = [0, 1, 2, 1] = \frac{3}{4}$$

$$c_4 = [0, 1, 2, 1, 2] = \frac{8}{11}$$

Residuos de  $\frac{8}{11}$

$$s_0 = [0, 1, 2, 1, 2] = \frac{8}{11}$$

$$s_1 = [1, 2, 1, 2] = \frac{11}{8}$$

$$s_2 = [2, 1, 2] = \frac{8}{3}$$

$$s_3 = [1, 2] = \frac{3}{2}$$

$$s_4 = [2] = \frac{2}{1}$$

Comparamos con el algoritmo de Euclides: la sucesión extendida del algoritmo de Euclides aplicado a  $(11, 8)$  es

$$(11, 8) \rightarrow (11, 8) \rightarrow (3, 8) \rightarrow (3, 5) \rightarrow (3, 2) \rightarrow (1, 2) \rightarrow (1, 1) \rightarrow (1, 0),$$

y la sucesión abreviada es

$$(11, 8) \rightarrow (11, 8) \rightarrow (3, 8) \rightarrow (3, 2) \rightarrow (1, 2) \rightarrow (1, 0).$$

Las pendientes de los vectores de la sucesión extendida coincide con el camino de  $8/11$  en  $\mathcal{SBFD}$ , y las pendientes de la sucesión abreviada, que son los residuos de  $8/11$  o sus inversos, coinciden con el camino abreviado del camino de  $8/11$  en  $\mathcal{SBFD}$ . En el caso del vector  $(7, 12)$ , tenemos que la sucesión extendida del algoritmo de Euclides aplicada a la pareja  $(7, 12)$  es

$$(7, 12) \rightarrow (7, 5) \rightarrow (2, 5) \rightarrow (2, 3) \rightarrow (2, 1) \rightarrow (1, 1) \rightarrow (1, 0).$$

Y la sucesión abreviada es

$$(7, 12) \rightarrow (7, 5) \rightarrow (5, 2) \rightarrow (2, 1) \rightarrow (1, 0).$$

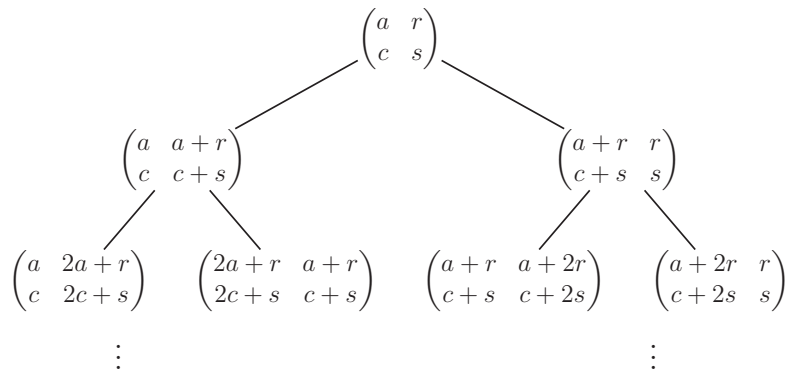
Nuevamente, las pendientes de los vectores de la sucesión extendida coinciden con el camino de  $12/7$  en  $\mathcal{SBFD}$ , y las de la sucesión abreviada con las del camino abreviado del camino de  $12/7$  en  $\mathcal{SBFD}$ .

### 5.3. Transformaciones en el plano, algoritmo de Euclides y fracciones continuas

Sabemos que todos los racionales aparecen en  $\mathcal{SBFD}$ . Pensando a las matrices de  $\mathcal{SBMD}$  como transformaciones en el plano, podemos ver a cada número racional  $r/s$  como la pendiente del vector resultante de aplicar una matriz de  $\mathcal{SBMD}$  (la matriz correspondiente en  $\mathcal{SBMD}$  al vértice  $(s, r)$  en  $\mathcal{SBVD}$ ) al vector  $(1, 1)$ . Así, existe una correspondencia biunívoca entre las matrices de  $\mathcal{SBMD}$  y los números racionales, dada por la fracción continua de la pendiente (racional) del vector resultante de aplicarlas al  $(1, 1)$ . Ahora, las matrices de  $\mathcal{SBMD}$  son matrices con entradas enteras no negativas y determinante 1. Veremos que *todas* las matrices con entradas enteras no negativas y determinante 1 están en  $\mathcal{SBMD}$  (y en  $\mathcal{SBM}$ ), de modo que podemos dar por medio de las fracciones continuas una correspondencia biunívoca entre los números racionales y las matrices con entradas enteras no negativas y determinante 1. Notamos que probar que *todas* las matrices con entradas enteras no negativas y determinante 1 están en  $\mathcal{SBMD}$  es equivalente a probar que se pueden escribir como producto de potencias de  $I$  y  $D$ .

**Teorema 5.20.** *Sea  $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  con  $a, b, c, d \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$  tal que  $ad - bc = 1$ . Entonces  $M$  está en  $\mathcal{SBM}$ .*

*Demostración.* Sea  $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  con  $a, b, c, d \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$  tal que  $ad - bc = 1$ . Notamos que ni  $a$  ni  $d$  pueden ser 0, puesto que  $ad - bc = 1$ . Analicemos los casos en que  $b = 0$  o  $c = 0$ . Si  $b = 0$ , entonces  $M = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix} = D^c$ , y  $M$  aparece en  $\mathcal{SBM}$ . Si  $c = 0$ , entonces  $M = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I^b$ , y  $M$  también aparece en  $\mathcal{SBM}$ . Supongamos ahora  $a, b, c, d \neq 0$ . Consideramos  $A = \begin{pmatrix} a & r \\ c & s \end{pmatrix}$  la matriz que aparece en el menor nivel de  $\mathcal{SBM}$  de la que el vector  $(a, c)$  es la primera columna. Sabemos que ésta existe, pues como  $ad - bc = 1$ , si  $d \mid a$  y  $d \mid c$ , entonces  $d \mid 1$  y por tanto  $\text{mcd}(a, c) = 1$ , y vimos ya que todo vector  $(m, n)$  con  $m, n \in \mathbb{Z}^+$  tal que  $\text{mcd}(m, n) = 1$  aparece en  $\mathcal{SBV}$ , y por tanto es vector columna de alguna matriz en  $\mathcal{SBM}$ . Los descendientes de  $A$  que aparecen en  $\mathcal{SBM}$  son de la forma:



de modo que todas las matrices de la forma  $\begin{pmatrix} a & ka+r \\ c & kc+s \end{pmatrix}$ , con  $k \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$  aparecen en  $\mathcal{SBM}$ . Veremos que  $b = ka + r$  y  $d = kc + s$  para alguna  $k \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ , con lo que habremos probado que  $M$  aparece en  $\mathcal{SBM}$ . Puesto que  $A$  está en  $\mathcal{SBM}$ , tenemos que  $as - cr = 1$ . Pero entonces, como por hipótesis  $ad - bc = 1$ , igualando y desarrollando tenemos que

$$\begin{aligned} ad - bc &= as - cr \\ a(d - s) &= c(b - r) \\ \frac{d - s}{c} &= \frac{b - r}{a} \end{aligned} \tag{5.6}$$

despejando  $b$  y  $d$  por separado obtenemos

$$b = a \frac{d-s}{c} + r$$

$$d = c \frac{b-r}{a} + s.$$

Puesto que  $b, d \in \mathbb{Z}^+$  y  $\text{mcd}(a, c) = 1$ , tenemos que  $\frac{d-s}{c}$  y  $\frac{b-r}{a}$  son enteros. De hecho, de (5.6) tenemos que  $(d-s)/c = (b-r)/a$ .

Proponemos  $k = (d-s)/c$ . Falta ver que  $k \geq 0$  y habremos terminado. Notamos que si  $k < 0$ , como  $b = ak + r > 0$  y  $d = ck + s > 0$ , entonces debe suceder que  $r > a$  y  $s > c$ . Veamos que esto no puede ser. Por aparecer  $(a, c)$  como primer vector columna en  $\mathcal{SBM}$  en  $A$ ,  $A$  es descendiente derecho de una matriz en  $\mathcal{SBM}$ . Entonces  $a \geq r$  y  $c \geq s$ . Lo que significa que  $k$  debe ser positivo, y  $b$  y  $d$  son en efecto de la forma  $b = ka + r$  y  $d = kc + s$  p.a.  $k \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$  y  $M$  aparece en  $\mathcal{SBM}$ .  $\square$

Sabiendo que todas las matrices con entradas enteras no negativas y determinante 1 están en  $\mathcal{SBM}$  (y en  $\mathcal{SBMD}$ ), dado un racional positivo  $r/s$  diremos explícitamente qué transformación de  $\mathcal{SBM}$  lleva al  $(1, 1)$  a un vector con pendiente  $r/s$ .

**Teorema 5.21.** Sean  $r, s \in \mathbb{Z}^+$  con  $\text{mcd}(r, s) = 1$ , y  $r/s = [a_0, a_1, \dots, a_n + 1]$ . Entonces

$$D^{a_0} I^{a_1} D^{a_2} \dots \{I\}^{a_n} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \\ r \end{pmatrix}$$

*Demostración.* Sean  $r, s \in \mathbb{Z}^+$  con  $\text{mcd}(r, s) = 1$ , y  $r/s = [a_0, a_1, \dots, a_n + 1]$ . Por la proposición 5.8, sabemos que  $(s, r)$  tiene sucesión  $(a_0, a_1, \dots, a_n)$  en  $\mathcal{SBV}$ . También sabemos que si  $M$  es la matriz correspondiente en  $\mathcal{SBM}$  al vértice  $(s, r)$  en  $\mathcal{SBV}$ , entonces  $M$  aplicada al  $(1, 1)$  es  $(s, r)$ . Pero si  $M$  en  $\mathcal{SBM}$  y  $(s, r)$  en  $\mathcal{SBV}$  son vértices correspondientes, entonces tienen la misma sucesión, que es  $(a_0, a_1, \dots, a_n)$ . Y entonces  $M = D^{a_0} I^{a_1} D^{a_2} \dots \{D\}^{a_n}$ . Se sigue que

$$D^{a_0} I^{a_1} D^{a_2} \dots \{D\}^{a_n} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \\ r \end{pmatrix}$$

como queríamos ver.  $\square$

**Ejemplo 5.22.** Tomamos el racional  $15/4 = [3, 1, 3] = [3, 1, 2 + 1]$ . Según el teorema anterior la transformación que lleva al  $(1, 1)$  en un vector con pendiente  $15/4$  es  $D^3 I^1 D^2$ . En efecto, vemos que

$$D^3 I^1 D^2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 11 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 15 \end{pmatrix}$$

tiene pendiente  $15/4$ .

Podemos usar esta asociación para decir cómo conociendo las entradas de una matriz con entradas enteras no negativas y determinante 1 podemos expresarla como producto de potencias de  $I$  y  $D$ . Lo planteamos en la siguiente proposición.

**Proposición 5.23.** Sea  $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  en  $\mathcal{SBM}$ , y sea  $(c+d)/(a+b) = [a_0, a_1, \dots, a_n + 1]$ . Entonces  $M$  se escribe como producto de potencias de  $I$  y  $D$  de la siguiente manera:

$$M = D^{a_0} I^{a_1} D^{a_2} \dots \{D\}^{a_n}.$$

*Demostración.* Sea  $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  en  $\mathcal{SBM}$ , y sea  $(c+d)/(a+b) = [a_0, a_1, \dots, a_n + 1]$ . Sabemos que el vector  $(a+b, c+d)$  en  $\mathcal{SBV}$  y  $M$  en  $\mathcal{SBM}$  son vértices correspondientes y tienen la misma sucesión. Por la proposición 5.8,  $(a+b, c+d)$  tiene sucesión  $(a_0, a_1, \dots, a_n)$  en  $\mathcal{SBV}$ , pues  $(c+d)/(a+b) = [a_0, a_1, \dots, a_n + 1]$ . Y entonces  $M$  tiene sucesión  $(a_0, a_1, \dots, a_n)$  en  $\mathcal{SBM}$ . Por lo tanto,

$$M = D^{a_0} I^{a_1} D^{a_2} \dots \left\{ \begin{matrix} D \\ I \end{matrix} \right\}^{a_n},$$

como queríamos probar.  $\square$

**Ejemplo 5.24.** Sea  $M = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ . Para escribirla como producto de potencias de  $I$  y  $D$ , tomamos la fracción continua de  $(5+3)/(7+4)$ , que es  $8/11 = [0, 1, 2, 1, 2] = [0, 1, 2, 1, 1+1]$ . Entonces  $M = ID^2ID$ :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Añadimos entonces un punto más a nuestra lista de interpretaciones de los cocientes parciales de una fracción continua  $r/s = [a_0, a_1, \dots, a_n]$ : éstos también dicen qué composiciones de  $I$  y  $D$  hay que aplicar al  $(1,1)$  para obtener un vector con pendiente  $r/s$ .

Ahora veamos cómo leer el algoritmo de Euclides en la forma vectorial y fraccionaria de  $\mathcal{SBD}$ . Planteamos la versión extendida del algoritmo de Euclides como una sucesión de vectores en la que en cada paso restábamos o sumábamos una entrada de la otra, dependiendo de los signos y valores de las entradas. Teniendo el vector  $(a, b)$ , con  $b/a > 0$ , el siguiente en la sucesión extendida del algoritmo de Euclides sería o bien  $(a-b, b)$ , ó  $(a, b-a)$ . Pero esto es justamente lo que hacen las matrices inversas de  $I$  y  $D$  (ver figura 5.14):

$$I^{-1} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-b \\ b \end{pmatrix}$$

$$D^{-1} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b-a \end{pmatrix}$$

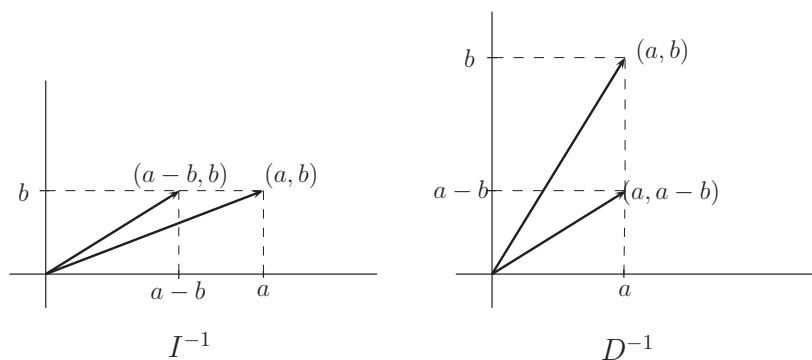


Figura 5.14: Acción geométrica de  $I^{-1}$  y  $D^{-1}$ .

De modo que podemos describir la versión extendida del Algoritmo de Euclides como aplicaciones sucesivas de  $I^{-1}$  y  $D^{-1}$ , siempre y cuando partamos de un vector con pendiente positiva.<sup>2</sup>

<sup>2</sup>Si aplicamos el algoritmo de Euclides a la pareja  $(a, b)$ , con  $b/a < 0$ , tendríamos que recurrir a aplicaciones sucesivas de  $I$  y  $D$  para obtener la sucesión extendida del algoritmo de Euclides. Si hay dudas de lo que ocurre en este caso, hágase la prueba con el vector  $(-10, 7)$ , retomando el ejemplo 2.12 y la figura 2.7.

Encontramos a la sucesión dada por estas aplicaciones sucesivas de  $I^{-1}$  y  $D^{-1}$  en los caminos en  $\mathcal{SBVD}$  (y a sus pendientes en  $\mathcal{SBFD}$ ). Como el lector intuye, aquí está la clave para dar solución al problema de explosiones sucesivas que planteamos al principio de este trabajo.

Para finalizar la sección hacemos una serie de observaciones. La primera es que hay una relación entre cuán grandes son los cocientes parciales, y cuán abreviada es la sucesión abreviada del algoritmo de Euclides, o un camino abreviado en alguno de los árboles. Esto será importante para hablar de aproximaciones racionales en el capítulo 8, donde daremos un significado al tamaño de los cocientes parciales de una fracción continua.

Otra observación es que usamos el algoritmo de Euclides como algoritmo para dar la fracción continua de un número real, por lo que resulta natural que si al aplicar el algoritmo de Euclides a la pareja  $(1, \alpha)$  obtenemos los enteros  $(a_0, a_1, \dots)$ , entonces el camino en  $\mathcal{SBF}$  que tiene sucesión  $(a_0, a_1, \dots)$  es una sucesión de racionales que converge a  $\alpha$  si el camino es infinito, o que tiene a  $\alpha$  como último término si el camino es finito. Teniendo esto en mente, tomemos  $\alpha = [a_0, a_1, \dots] \in \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{Q}$ . Aunque ya vimos que no sabemos qué camino en  $\mathcal{SBFD}$  asociar a  $\alpha$ , si nos permitimos pensar a  $\alpha$  como la pendiente del vector resultante de aplicar la composición (infinita)  $D^{a_0} I^{a_1} D^{a_2} \dots$  al vector  $(1, 1)$ , podemos pensar al vector  $(1, 1)$  como el resultado de aplicar la composición infinita  $(D^{a_0} I^{a_1} D^{a_2} \dots)^{-1} = \dots D^{-a_2} I^{-a_1} D^{-a_0}$  a un vector con pendiente  $\alpha$ . Pero como acabamos de ver, esto describe justamente el procedimiento geométrico del algoritmo de Euclides aplicado a un rectángulo determinado por un vector con pendiente  $\alpha$ .

Por último, recordamos que el teorema de Lagrange afirma que un irracional es cuadrático si y sólo si su fracción continua es eventualmente periódica. Así, los caminos en  $\mathcal{SBF}$  que tienen sucesión eventualmente periódica (y sólo éstos) son los que convergen a una pendiente que es un irracional cuadrático.

## 5.4. $\mathcal{SB}$ para racionales negativos

Al trabajar con  $\mathcal{SB}$  nos enfocamos en el caso positivo: tomamos productos de potencias positivas para  $\mathcal{SBM}$ , construimos vectores en el primer cuadrante como vértices de  $\mathcal{SBV}$  y en  $\mathcal{SBF}$  aparecen racionales positivos. Podemos hacer una construcción similar para cada uno de estos árboles que nos permita abordar a los racionales negativos como hicimos con los positivos. No daremos con detalle ni esta construcción, ni su relación con las fracciones continuas. Sin embargo, dejaremos dicho cómo puede hacerse.

Construimos la forma matricial de  $\mathcal{SB}$  para los negativos de manera análoga a  $\mathcal{SBM}$ , pero con  $I^{-1}$  en lugar de  $I$  y con  $D^{-1}$  en lugar de  $D$ , como se muestra en la figura 5.15.

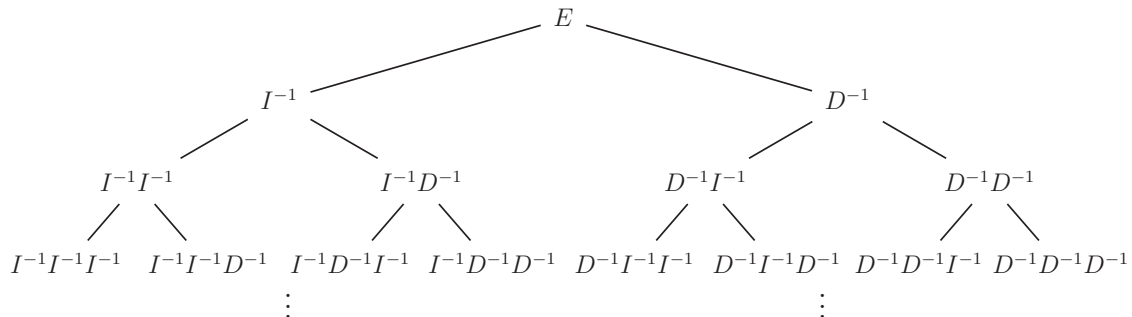


Figura 5.15

El árbol resultante es el de la figura 5.16.

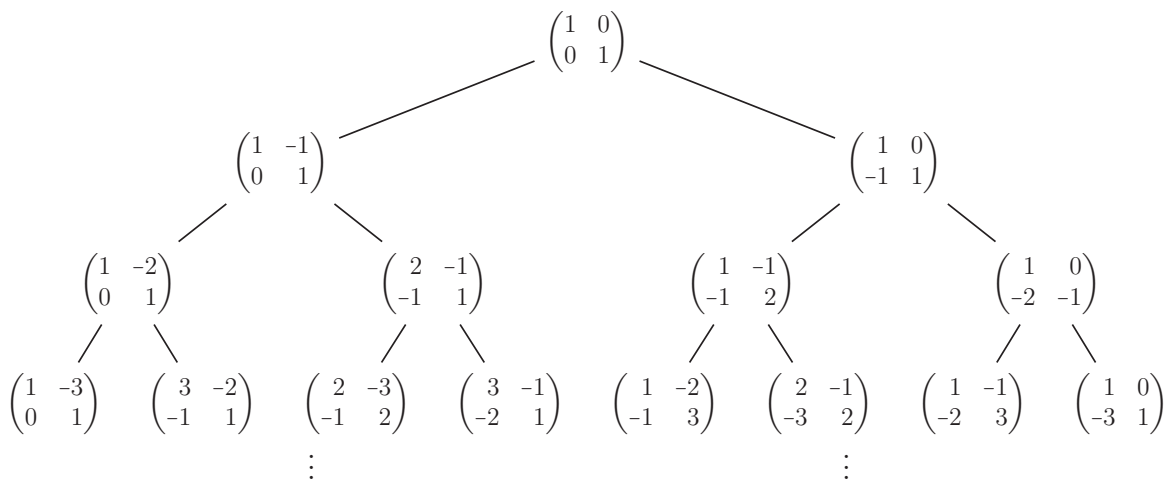


Figura 5.16: Árbol de matrices análogo a la forma matricial del árbol de Stern-Brocot que permite estudiar productos de potencias negativas de  $I$  y  $D$ .

Para obtener un árbol vectorial similar a  $SBV$  en donde obtengamos vectores con pendientes negativas, restamos las columnas de las matrices del árbol en la figura 5.16. Si restamos la segunda de la primera (o si aplicamos las matrices al vector  $(-1, 1)$ ), obtenemos vectores en el segundo cuadrante. Mostramos el árbol resultante en la figura 5.17. Si restamos la primera de la segunda (o si aplicamos las matrices al vector  $(1, -1)$ ), obtenemos vectores en el cuarto cuadrante. Podemos tomar cualquiera de las dos opciones.

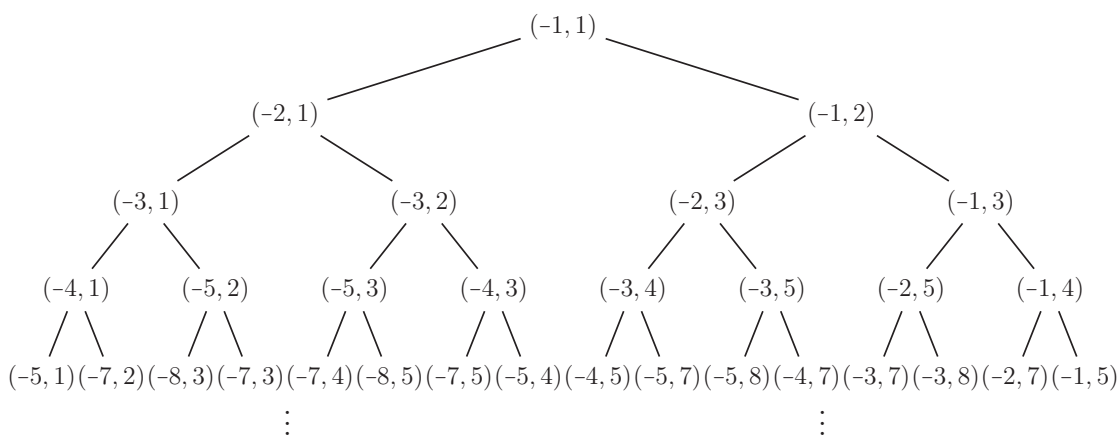


Figura 5.17: Árbol de vectores análogo a la forma vectorial del árbol de Stern-Brocot que permite estudiar vectores con pendiente negativa.

Para un árbol de fracciones similar a la forma fraccionaria de  $SB$ , tomamos las pendientes del árbol en la figura 5.17. Obtenemos el árbol de la figura 5.18.

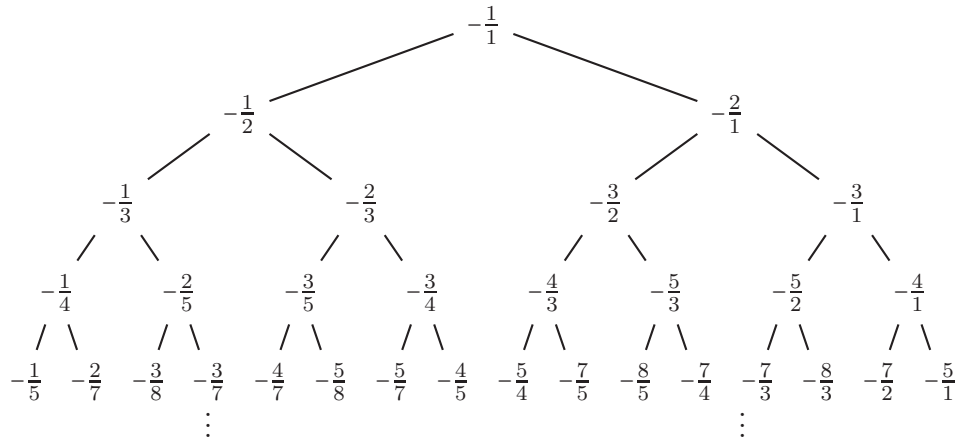


Figura 5.18: Árbol de fracciones análogo a la forma fraccionaria del árbol de Stern-Brocot que permite estudiar a todos los racionales negativos.

En éste último árbol están todos los racionales negativos. También podemos usar su fracción continua para localizarlos en el árbol, y encontramos en su camino abreviado a sus convergentes. Aunque algunos detalles son distintos en la forma vectorial (hay que hacer con cuidado la interpretación geométrica), el análisis geométrico es totalmente análogo al que hicimos en el caso positivo. Podemos visualizar ambos árboles en uno solo: el *árbol de Stern-Brocot extendido* en forma fraccionaria, que mostramos en la figura 5.19. En este árbol están todos los racionales.

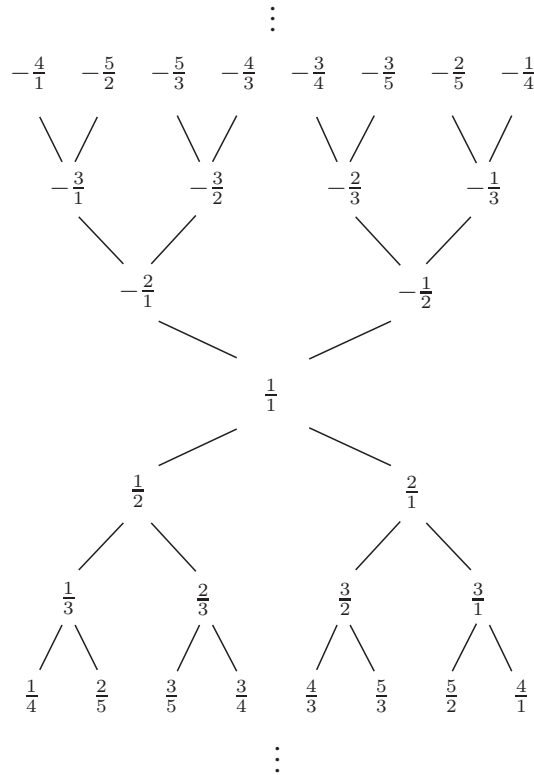


Figura 5.19: Árbol de Stern-Brocot extendido en forma fraccionaria.





# Capítulo 6

## Explosión de singularidades y árbol de Stern-Brocot

Estamos listos para regresar al problema planteado en el capítulo 1. Recordemos que queremos estudiar el comportamiento de la ecuación

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad p, q \in \mathbb{R} \quad (6.1)$$

bajo sucesivas explosiones: ¿cuándo llegamos mediante un número finito de explosiones al caso dicrítico? Vimos que  $\mathcal{SB}$  y  $\mathcal{SBD}$  nos permiten describir lo que ocurre con vectores en el plano (y con sus pendientes) bajo las transformaciones  $I$  y  $D$ , y que las fracciones continuas nos sirven para expresar las pendientes de vectores bajo estas transformaciones. Para usar estas herramientas y su interpretación geométrica en nuestro problema de explosiones, haremos una asociación entre ecuaciones del tipo (6.1) y vectores en el plano. Veremos a la explosión como una transformación en el plano, y para estudiar una ecuación bajo sucesivas explosiones estudiaremos cómo se comporta su vector asociado bajo la transformación asociada a la explosión.

### 6.1. Ecuaciones como vectores en el plano

Procederemos de la siguiente manera: asociamos a la ecuación (6.1) el vector cuyas entradas son los valores propios de la matriz que define al campo vectorial asociado a la ecuación:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \sim \quad (p, q) \in \mathbb{R}^2.$$

Dado que definimos vectores asociados a ecuaciones del tipo (6.1), cuando hablemos del vector asociado a una ecuación asumimos que es una ecuación de este tipo.

Podemos describir el tipo de soluciones de una ecuación a partir de su vector asociado. Si  $p = q$  y  $(p, q) \neq (0, 0)$ , entonces la ecuación (6.1) tiene retrato de las fases como en la figura 6.1, y el origen es una singularidad de tipo nodo (repulsor si  $(p, q)$  está en el primer cuadrante y atractor si está en el tercer cuadrante).

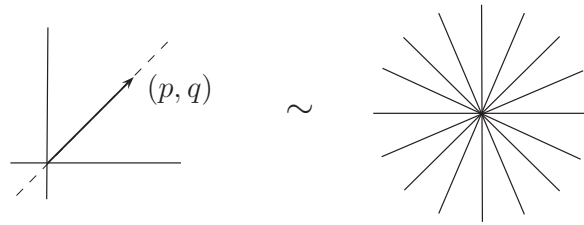


Figura 6.1: Soluciones de ecuación cuyo vector asociado está sobre la identidad.

Si  $p, q \neq 0$ ,  $q/p > 0$  y  $|p| > |q|$ , entonces el retrato de las fases de la ecuación es como en la figura 6.2, y el origen es una singularidad de tipo nodo (repulsor si  $(p, q)$  está en el primer cuadrante y atractor si está en el tercer cuadrante).

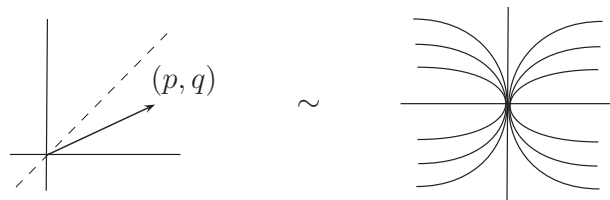


Figura 6.2: Soluciones de ecuación con vector asociado  $(p, q)$ ,  $q/p > 0$ ,  $|p| > |q|$ .

Si  $p, q \neq 0$ ,  $q/p > 0$  y  $|p| < |q|$ , entonces el retrato de las fases es como en la figura 6.3 y la singularidad es de tipo nodo (repulsor si  $(p, q)$  está en el primer cuadrante y atractor si está en el tercer cuadrante).



Figura 6.3: Soluciones de ecuación con vector asociado  $(p, q)$ ,  $q/p > 0$ ,  $|p| < |q|$ .

Si  $p, q \neq 0$ ,  $q/p < 0$ , entonces el retrato de las fases es como en la figura 6.4 y la singularidad es de tipo silla.



Figura 6.4: Soluciones de ecuación con vector asociado  $(p, q)$ ,  $q/p < 0$ .

Si  $(p, q) \neq (0, 0)$ , y  $p = 0$  ó  $q = 0$ , entonces el retrato de las fases es como en la figura 6.5, con todo el eje  $x$  o el todo el eje  $y$  (según sea el caso) como puntos singulares.

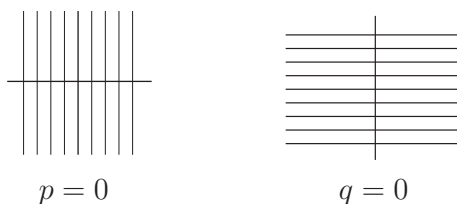


Figura 6.5: Soluciones de ecuación con vector asociado  $(p, q) \neq (0, 0)$ ,  $p = 0$  ó  $q = 0$ .

En la figura 6.6 sintetizamos los tipos de singularidades de una ecuación según sea su vector asociado.

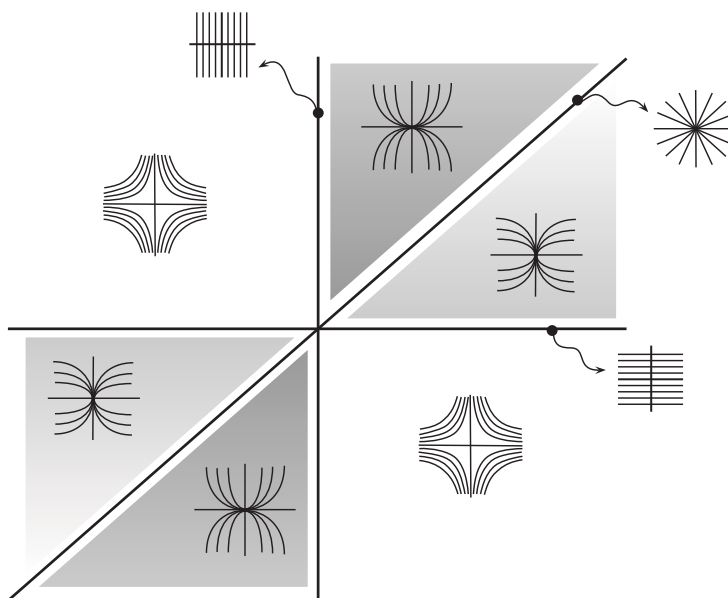


Figura 6.6: Asociación de vectores en el plano a ecuaciones de tipo (6.1).

**Observación 6.1.** *Las curvas solución como conjunto dependen de la pendiente del vector asociado; la parametrización de las curvas solución depende de los valores concretos de las entradas: si dos ecuaciones tienen asociados los vectores  $(p, q)$  y  $(p', q')$ , y  $q/p = q'/p'$ , entonces tienen las mismas curvas solución; cambia sólo la velocidad de la parametrización. En el primer cuadrante los nodos son repulsores, en el tercero atractores; si dos ecuaciones tienen vector asociado con pendiente negativa, uno en el segundo y el otro en el cuarto cuadrante, la dirección del flujo de las soluciones de una y de otra ecuación es opuesta, aunque en ambas el origen sea singularidad de tipo silla.*

## 6.2. Explosión como transformaciones en el plano

Ahora veamos cómo expresar la acción de la explosión como una transformación en el plano que actúa sobre los vectores asociados a la ecuación cuya singularidad explotamos. Recordamos que al explotar la ecuación (6.1), en el cambio de coordenadas  $(x, y) \rightarrow (x, u)$ , con  $u = y/x$  obtenemos la nueva ecuación

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & q - p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix}$$

y en el cambio de coordenadas  $(x, y) \rightarrow (v, y) = (x/y, y)$  obtenemos la nueva ecuación

$$\begin{pmatrix} \dot{v} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p-q & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ y \end{pmatrix}$$

Por comodidad, para no definir nuevas variables en cada explosión, nos referiremos siempre al cambio de coordenadas  $(x, y) \rightarrow (x, y/x)$  como el primer cambio de coordenadas, y al cambio de coordenadas  $(x, y) \rightarrow (x/y, y)$  como el segundo cambio de coordenadas.

Puesto en términos de los vectores asociados a las ecuaciones, la explosión de la ecuación con vector asociado  $(p, q)$  se comporta como mostramos en la figura 6.7:

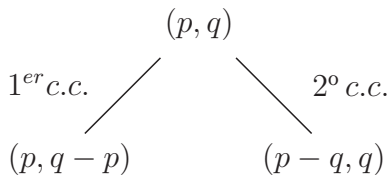


Figura 6.7: Acción de la explosión sobre el vector asociado a una ecuación.

Pero ya vimos que así es como actúan  $I^{-1}$  y  $D^{-1}$  sobre un vector en el plano:

$$I^{-1} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p-q \\ q \end{pmatrix} \quad D^{-1} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q-p \end{pmatrix}.$$

Así, podemos describir explosiones sucesivas de una ecuación como composiciones de  $I^{-1}$  y  $D^{-1}$  actuando sobre el vector asociado a la ecuación.

**Proposición 6.2.** *El primer cambio de coordenadas de la explosión actúa sobre el vector asociado a una ecuación como  $D^{-1}$ ; el segundo cambio de coordenadas de la explosión actúa como  $I^{-1}$ .*

Geoméricamente, con este enfoque la explosión hace lo mismo que el algoritmo de Euclides (habíamos visto ya que éste se puede expresar como acciones de  $I^{-1}$  y  $D^{-1}$ ).<sup>1</sup> Lo que hace es “quitar” un cuadrado por la derecha en el caso de  $I^{-1}$  al rectángulo determinado por  $(p, q)$ , y “quitar” un cuadrado de arriba en el caso de  $D^{-1}$  (el proceso inverso a lo que geoméricamente hacen  $I$  y  $D$ ).<sup>2</sup> Ver figura 6.8.

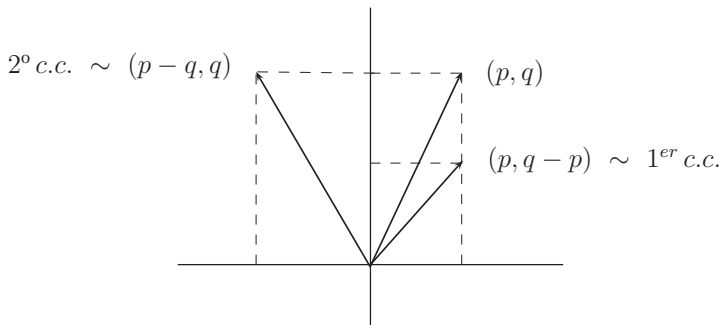


Figura 6.8: Acción de la explosión en vector asociado a la ecuación (6.1).

<sup>1</sup>Esto sólo es cierto si  $p/q > 0$ . En los cuadrantes dos y cuatro no coinciden la explosión y el algoritmo de Euclides en forma geométrica; la explosión siempre actúa sobre los vectores asociados como  $I^{-1}$  y  $D^{-1}$ , pero éstas no describen el procedimiento geométrico del algoritmo de Euclides si  $p/q < 0$ .

<sup>2</sup>Esta interpretación es para  $(p, q)$  en el primer cuadrante. En otros cuadrantes debe darse una interpretación que tome en cuenta los signos de  $p$  y  $q$ .

Si el rectángulo determinado por  $(p, q)$  no es un cuadrado, en alguno de los dos cambios de coordenadas obtenemos un vector con pendiente negativa.

Veamos el comportamiento de la ecuación (6.1) bajo la explosión para los distintos valores de  $p$  y  $q$ . Si  $(p, q)$  está sobre la recta  $x = y$ ,  $(p, q) \neq (0, 0)$  (el origen es singularidad de tipo nodo radial), entonces al explotar la ecuación (6.1) obtenemos en ambos cambios de coordenadas una ecuación cuyo campo vectorial asociado está definido por una matriz con un valor propio cero. En términos de vectores asociados, si aplicamos  $I^{-1}$  y  $D^{-1}$  a un vector con pendiente 1, vamos a parar a los ejes. Ver figura 6.9.

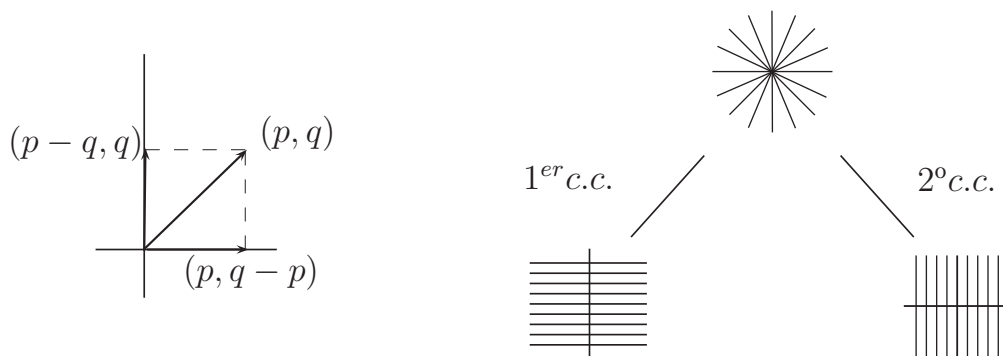


Figura 6.9: Explosión de un nodo radial.

Si  $p, q \neq 0$ ,  $q/p > 0$  y  $|q| < |p|$  (singularidad de tipo nodo tipo raíz), al hacer la explosión de (6.1) obtenemos en primer y segundo cambio de coordenadas ecuaciones con singularidad de tipo silla y nodo respectivamente (podemos obtener cualquier tipo de nodo, dependiendo de los valores concretos de  $p$  y  $q$ ). Ver figura 6.10.

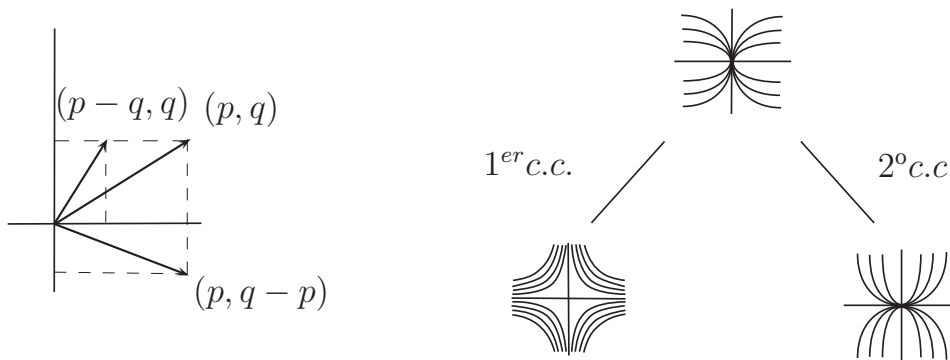


Figura 6.10: Explosión de un nodo tipo raíz.

Si  $p, q \neq 0$ ,  $q/p > 0$  y  $|p| < |q|$  (singularidad de tipo nodo parabólico), al explotar la ecuación (6.1) obtenemos respectivamente en primer y segundo cambio de coordenadas ecuaciones con singularidad de tipo nodo (que puede ser de cualquier tipo) y silla. Ver figura 6.11.

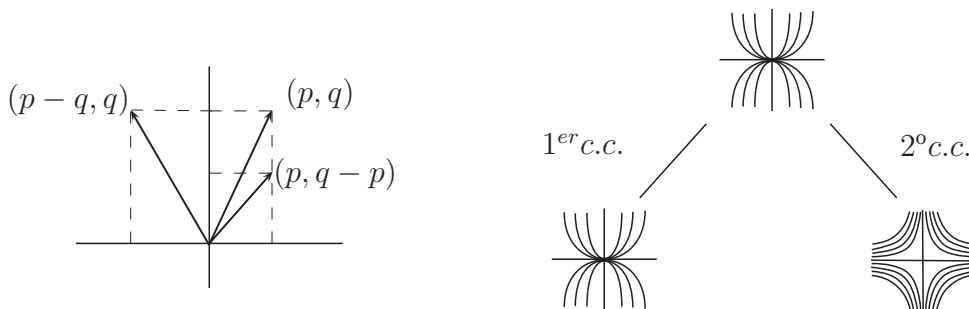


Figura 6.11: Explosión de un nodo parabólico.

Si  $p, q \neq 0, q/p < 0$  (singularidad de tipo silla), al explotar la ecuación (6.1) obtenemos nuevamente ecuaciones con singularidad de tipo silla en ambos cambios de coordenadas. En este caso hay que tener cuidado con la descripción geométrica de “quitar cuadrados”, que requiere de una interpretación que considere los signos de  $p$  y  $q$ . En este caso no coinciden la acción de la explosión como transformación en el plano y el procedimiento geométrico del algoritmo de Euclides. Ver figura 6.12.

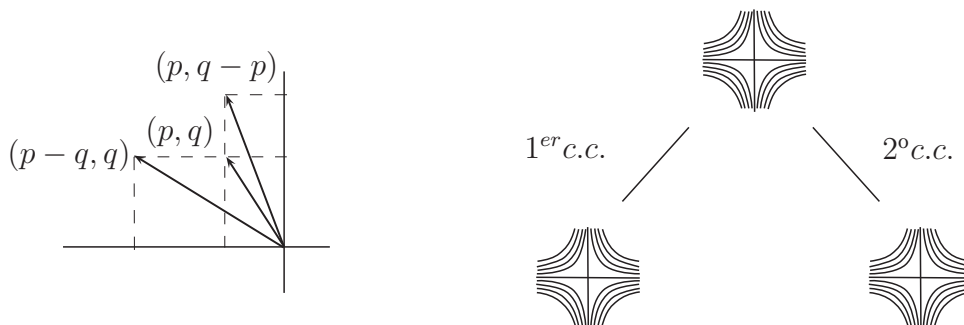


Figura 6.12: Explosión de una silla.

Si  $(p, q) \neq (0, 0)$ , y  $p = 0$  ó  $q = 0$ , entonces al explotar el origen de la ecuación (6.1) obtenemos en un cambio de coordenadas la misma ecuación, y en el otro una con singularidad de tipo silla. En la figura 6.13 ejemplificamos el caso  $q = 0, p \neq 0$ .

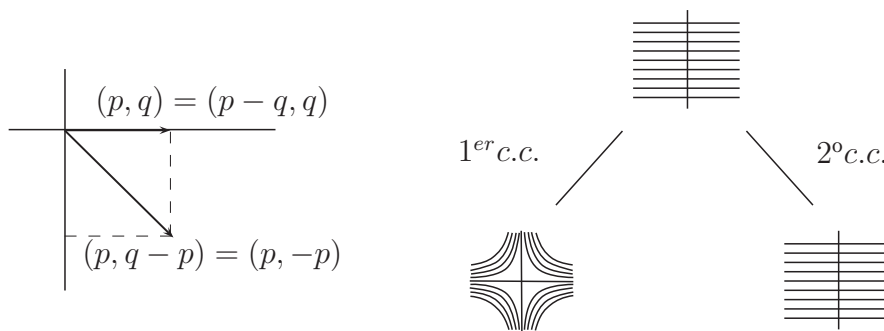


Figura 6.13: Explosión de ecuación con vector asociado  $(p, 0)$ .

**Observación 6.3.** La acción de la explosión sobre la pendiente del vector asociado a una ecuación no cambia si tomamos un múltiplo escalar de éste.

La información crucial del comportamiento de las soluciones está en la pendiente del vector asociado; ecuaciones con vectores asociados linealmente dependientes tienen las mismas curvas solución, y difieren sólo en la parametrización de sus soluciones.

### 6.3. Explosión y árbol de Stern-Brocot

Como vimos en capítulos anteriores, para cada racional  $r/s$  con  $r, s$  enteros positivos primos relativos, existe una matriz  $M$  en  $\mathcal{SBM}$  que lleva al vector  $(1, 1)$  en el vector  $(s, r)$ . De hecho, el teorema 5.21 nos dice cómo expresar a  $M$  como producto de potencias de  $I$  y  $D$ , donde las potencias requeridas están dadas por los cocientes parciales de la fracción continua de  $r/s$ . Concretamente, si  $r/s = [a_0, a_1, \dots, a_n]$ , entonces

$$D^{a_0} I^{a_1} D^{a_2} \dots \left\{ \begin{smallmatrix} D \\ I \end{smallmatrix} \right\}^{a_n-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \\ r \end{pmatrix}$$

Esto significa que podemos llevar al vector  $(s, r)$  al vector  $(1, 1)$  por un producto de potencias de la matrices inversas de  $I$  y  $D$ . Concretamente, si  $r/s = [a_0, a_1, \dots, a_n]$ , entonces

$$\left\{ \begin{smallmatrix} D \\ I \end{smallmatrix} \right\}^{-(a_n-1)} \dots D^{-a_2} I^{-a_1} D^{-a_0} \cdot \begin{pmatrix} s \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Pero vimos que los cambios de coordenadas de la explosión actúan sobre el vector asociado a una ecuación justamente como  $I^{-1}$  y  $D^{-1}$ . Así, sabemos exactamente cuántas explosiones hacer tomando qué cambios de coordenadas a la ecuación con vector asociado  $(s, r)$  para obtener una ecuación con vector asociado  $(1, 1)$ , para la que sabemos que en una explosión más obtenemos (en ambos cambios de coordenadas) una ecuación cuyo campo vectorial asociado está definido por una matriz con un valor propio cero. Esto resuelve una de las preguntas que planteamos al inicio de este trabajo.

**Teorema 6.4.** *Dada la ecuación*

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (6.2)$$

con  $q/p \in \mathbb{Q}^+$ ,  $q/p = [a_0, a_1, \dots, a_n]$ , requerimos de  $\sum_{i=0}^n a_i$  explosiones para obtener una ecuación cuyo vector asociado está sobre uno de los ejes.

*Demostración.* Sea  $q/p \in \mathbb{Q}^+$ ,  $q/p = [a_0, a_1, \dots, a_n]$ , y sean  $r, s \in \mathbb{Z}^+$ , con  $\text{mcd}(r, s) = 1$  tales que  $r/s = q/p$ . Consideremos la ecuación

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (6.3)$$

Dado que

$$D^{a_0} I^{a_1} D^{a_2} \dots \left\{ \begin{smallmatrix} D \\ I \end{smallmatrix} \right\}^{a_n-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \\ r \end{pmatrix},$$

en  $(\sum_{i=0}^n a_i) - 1$  explosiones sucesivas de la ecuación (6.3) obtenemos la ecuación con vector asociado  $(1, 1)$ . Al explotar ésta, obtenemos (en ambos cambios de coordenadas) ecuaciones cuyo vector asociado está sobre uno de los ejes. Así, en  $\sum_{i=0}^n a_i$  explosiones obtenemos una ecuación cuyo campo vectorial asociado es definido por una matriz con un valor propio cero. Lo mismo es cierto para ecuación (6.2), pues es un múltiplo escalar de (6.3).  $\square$



El teorema 6.4 no sólo nos dice que si una ecuación tiene vector asociado con pendiente racional, al aplicarle explosiones sucesivas se llega en un número finito de pasos a una ecuación asociada a un campo vectorial definido por una matriz con un valor propio cero. Nos dice además cómo usar la fracción continua de la pendiente del vector asociado a la ecuación para saber exactamente qué cambios de coordenadas tomar en la explosión para llegar a una ecuación cuyo vector asociado está sobre alguno de los ejes.

Ahora ¿Qué pasa si el cociente de valores propios de la matriz que define al campo vectorial asociado a la ecuación es irracional? Con la información que tenemos podemos argumentar que nunca llegaremos a una ecuación asociada a un campo vectorial definido por una matriz con un valor propio cero.

**Proposición 6.5.** *Dada la ecuación (6.2), si  $q/p \in \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{Q}$ , entonces al explotar sucesivamente la ecuación (6.2) no se llega nunca a otra cuyo vector asociado esté sobre alguno de los ejes.*

*Demostración.* Supongamos lo contrario. Supongamos que en un número finito de explosiones de (6.2) obtenemos la ecuación

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p' & 0 \\ 0 & q' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

con  $p' = 0$  ó  $q' = 0$ . Digamos que las explosiones necesarias fueron  $a_0$  veces tomando el primer cambio de coordenadas,  $a_1$  veces el segundo, etc, y finalmente  $a_n + 1$  veces el primero (o segundo). Entonces tendríamos que

$$\left\{ \begin{matrix} D \\ I \end{matrix} \right\}^{-a_n} \dots D^{-a_2} I^{-a_1} D^{-a_0} \cdot \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

y por lo tanto

$$D^{a_0} I^{a_1} D^{a_2} \dots \left\{ \begin{matrix} D \\ I \end{matrix} \right\}^{a_n} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

lo que significaría que  $q/p = [a_0, a_1, \dots, a_n + 1]$ , contradiciendo la irracionalidad de  $q/p$ . □

Sin embargo, podemos decir también algunas cosas en el caso irracional. Independientemente de la racionalidad o irracionalidad de  $q/p > 0$ , podemos usar la sucesión extendida del algoritmo de Euclides para ver qué campos vectoriales obtenemos en cada una de las explosiones sucesivas.

Registremos en un árbol los vectores asociados a las ecuaciones que vamos obteniendo al explotar la ecuación (6.2). Llamamos al árbol de la figura 6.14 el árbol de explosión de la ecuación (6.2).

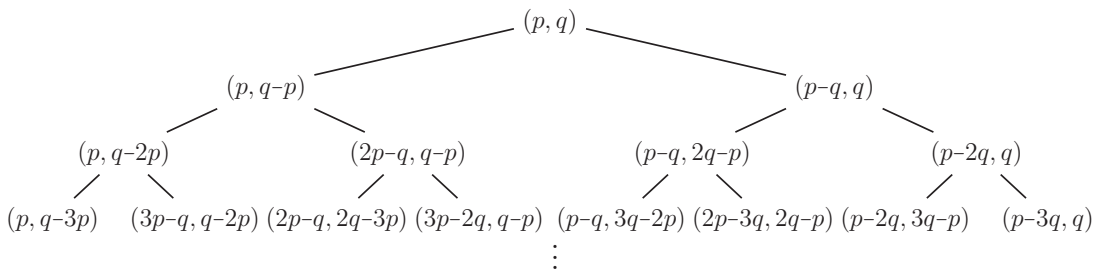


Figura 6.14: Árbol de explosión de la ecuación con vector asociado  $(p, q)$ .

Sabemos que al explotar un punto singular de tipo nodo (no radial) obtenemos en un cambio de coordenadas una ecuación con singularidad de tipo silla y en el otro una con singularidad

de tipo nodo. Si en la ecuación (6.2) se tiene que  $q/p > 0$ , entonces hay un único camino en el árbol de explosión de la ecuación (6.2) para el que todos sus términos son vectores asociados a ecuaciones con singularidad de tipo nodo (ver figura 6.15). A este camino de nodos lo llamaremos el *camino de explosión de la ecuación (6.2)*.

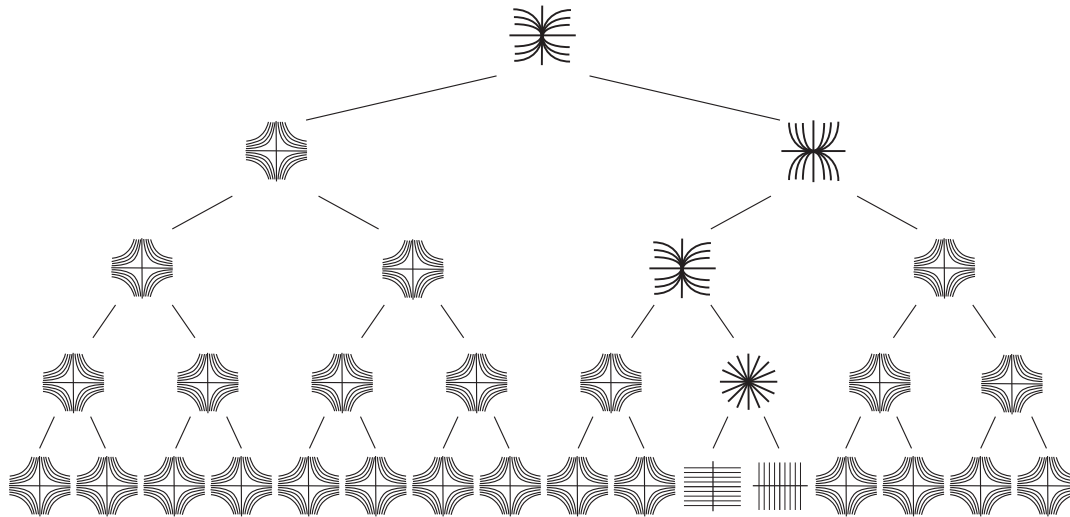


Figura 6.15: Si  $q/p \in \mathbb{R}^+$ , hay un único camino en el árbol de explosión de la ecuación (6.2) para el que todos sus términos son vectores asociados a ecuaciones con singularidad de tipo nodo. Lo llamamos el *camino de explosión de la ecuación (6.2)*.

Notamos que el camino de explosión de (6.2) sólo está definido para ecuaciones con vector asociado  $(p, q)$  con pendiente positiva. También observamos que el camino de explosión de (6.2) es finito si y sólo si  $q/p$  es racional.

**Observación 6.6.** *Cada vez que en el camino de explosión de una ecuación cruzamos la identidad, cambiamos de tipo de nodo.*

Si  $q/p \in \mathbb{R}^+$ , por cómo construimos la sucesión extendida del algoritmo de Euclides, todos los vectores que en ella aparecen al aplicarlo a  $(p, q)$  tienen pendiente positiva (salvo el último en el caso racional, que puede tener pendiente 0 ó  $\infty$ ). Si  $q/p = [a_0, a_1, a_2, \dots]$ , esta sucesión está dada por las aplicaciones sucesivas

$$\dots I^{-a_3} (D^{-a_2} (I^{-a_1} (D^{-a_0} (\frac{p}{q})))) .$$

Así que podemos plantear la siguiente proposición.

**Proposición 6.7.** *El camino de explosión de la ecuación*

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{6.4}$$

con  $q/p \in \mathbb{R}^+$  coincide con la sucesión extendida del algoritmo de Euclides aplicado a  $(p, q)$ .

Si definimos la sucesión del camino de explosión de una ecuación como hicimos para los caminos en  $\mathcal{SB}$  (contando cuántos términos consecutivos después de la raíz son descendiente derecho del anterior, luego cuántos términos consecutivos son descendiente izquierdo del anterior, etc.) tenemos el siguiente corolario.

**Corolario 6.8.** Dada la ecuación (6.4) con  $q/p \in \mathbb{R}^+$ ,  $q/p = [a_0, a_1, \dots]$ , el camino de explosión de (6.4) tiene sucesión  $(0, a_0, a_1, a_2, \dots)$  si  $a_0 \neq 0$  y  $(a_1, a_2, \dots)$  si  $a_0 = 0$ .

Esta es otra manera de decir que para obtener el camino de explosión de la ecuación (6.4), debemos explotarla tomando  $a_0$  veces el primer cambio de coordenadas,  $a_1$  veces el segundo,  $a_2$  veces el tercero, etc.

Si  $q/p \in \mathbb{Q}^+$ , el camino de explosión coincide (esencialmente) con el camino (finito) en  $SBVD$  de  $(p, q)$  tomado “en orden inverso”. Si además definimos el camino abreviado del camino de explosión como la subsucesión dada por la raíz, aquellos vértices en que hay “cambio de dirección” y el último vértice (si lo hay), éste coincide con la sucesión abreviada del algoritmo de Euclides aplicado a  $(p, q)$ . Si  $q/p$  es racional, el camino abreviado del camino de explosión de (6.4) coincide (esencialmente) con el camino abreviado en  $SBVD$  de  $(p, q)$  tomado “en orden inverso”. Como vimos al estudiar la geometría de las fracciones continuas, los residuos de  $q/p$  (o sus inversos) son las pendientes de los vectores de la sucesión abreviada del algoritmo de Euclides aplicado a  $(p, q)$ . Entonces son también pendientes de los vectores del camino abreviado del camino de explosión de la ecuación con vector asociado  $(p, q)$ .

**Ejemplo 6.9.** Consideremos la ecuación

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{6.5}$$

Tenemos que  $7/10 = [0, 1, 2, 3]$ . Recordemos cuáles son los residuos de  $7/10$ :

$$s_0 = [0, 1, 2, 3] = \frac{7}{10}; \quad s_1 = [1, 2, 3] = \frac{10}{7}; \quad s_2 = [2, 3] = \frac{7}{3}; \quad s_3 = [3] = \frac{3}{1}$$

Según el teorema 6.4, en  $0 + 1 + 2 + 3 = 6$  explosiones llegamos a una ecuación con vector asociado sobre alguno de los ejes. Aún más, dice que explotando 0 veces tomando el primer cambio de coordenadas, 1 vez el segundo, 2 veces el primero y 2 veces el segundo llegamos al campo radial con vector asociado  $(1, 1)$ . Al explotar este último obtenemos en ambos cambios de coordenadas ecuaciones con vector asociado sobre alguno de los ejes. Lo corroboramos en el camino de explosión de (6.5) (ver figura 6.16), que tiene sucesión  $(1, 2, 3)$ .

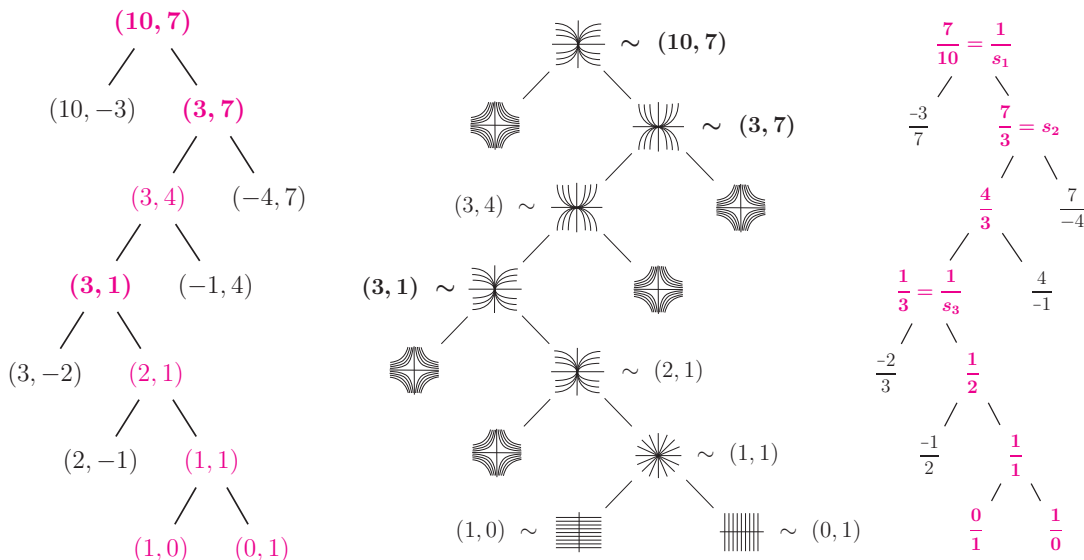


Figura 6.16: Camino de explosión de la ecuación (6.5).

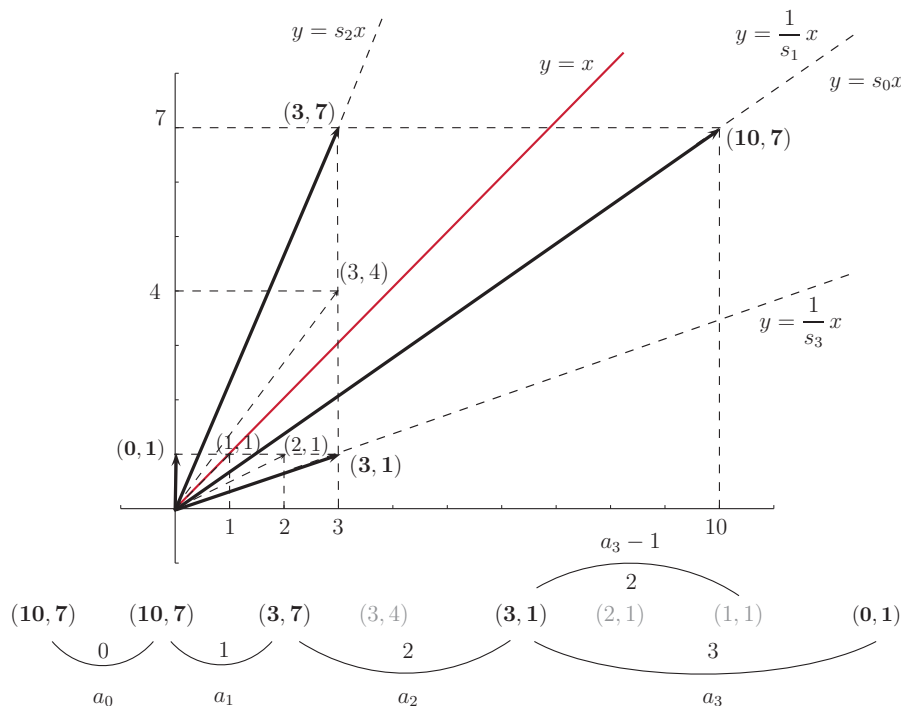


Figura 6.17: Residuos de  $7/10 = [0, 1, 2, 3]$  como pendientes de vectores en el algoritmo de Euclides geométrico, y como pendientes de los vectores en el camino de explosión de la ecuación (6.5), con vector asociado  $(10, 7)$ .

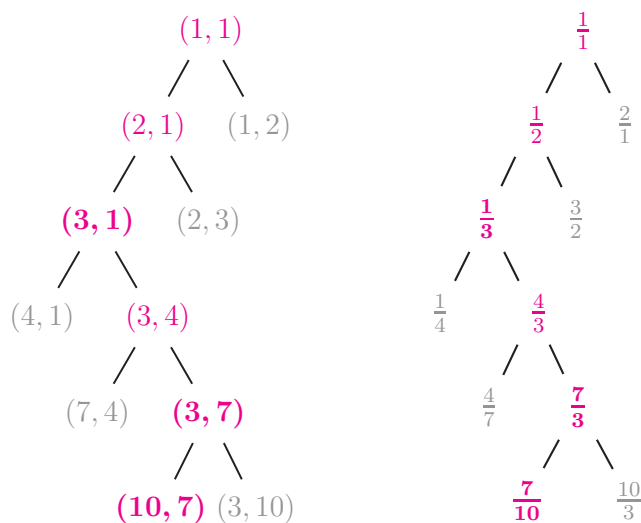


Figura 6.18: Camino de  $(10, 7)$  en  $SBVD$  y camino de  $7/10$  en  $SBVD$ .

Comparamos la figura 6.16 con las figuras 6.17 y 6.18, en donde habíamos visto al algoritmo de Euclides geométrico, a los residuos de  $7/10$  como pendientes de vectores de la sucesión abreviada del algoritmo de Euclides, y a los caminos en  $SBVD$  y  $SBFD$  de  $(10, 7)$  y  $7/10$  respectivamente. Los cambios de dirección de los caminos, que son los cruces de la identidad en el algoritmo de Euclides geométrico, corresponden en el contexto de ecuaciones a cambios de tipo de nodo (de tipo raíz a parabólico o viceversa). Ahora integramos a la interpretación de

la figura 6.17 el camino de explosión de la ecuación (6.5).

**Observación 6.10.** *Cada vez que en el camino de explosión de una ecuación cruzamos la identidad, cambiamos de tipo de nodo.*

Para poder hacer un estudio más detallado de las explosiones en el caso irracional que nos dé una mejor comprensión de la estructura de los números reales, nos conviene trabajar con una forma modificada de  $\mathcal{SB}$ , que abordaremos en el próximo capítulo. Sin embargo con los resultados que tenemos hasta ahora, podemos decir algo para ecuaciones cuyo vector asociado tiene como pendiente a un irracional cuadrático.

## 6.4. Explosión con irracionales cuadráticos

Recordemos que el teorema de Lagrange nos dice que un irracional es cuadrático si y sólo si tiene fracción continua eventualmente periódica. Con los resultados que hemos visto, podemos llevar el teorema de Lagrange al contexto del problema de explosiones que estamos abordando.

**Definición 6.11.** *Sea  $\mathcal{C} = (\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots)$  el camino de explosión de la ecuación*

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

*Decimos que  $\mathcal{C}$  es periódico si existen  $n, k \in \mathbb{N}$ , con  $k \geq 1$  y  $\lambda \in \mathbb{R}^+$  tales que  $\mathbf{v}_m = \lambda \mathbf{v}_{m+k}$  para toda  $m \geq n$ .*

Notamos que esta definición es equivalente a pedir que existan  $n, m \in \mathbb{N}$  y  $\lambda \in \mathbb{R}^+$  tales que  $\mathbf{v}_n = \lambda \mathbf{v}_m$ .

Teniendo esta definición, podemos traducir el teorema de Lagrange en el siguiente teorema.

**Teorema 6.12.** *Dada la ecuación*

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{6.6}$$

*con  $q/p \in \mathbb{R}^+$ , se tiene que  $q/p$  es un irracional cuadrático si y sólo si el camino de explosión de la ecuación (6.6) es periódico.*

Podríamos parafrasear esto de la siguiente manera:  $q/p$  es un irracional cuadrático si y sólo si en el camino de explosión de la ecuación (6.6) aparece un vector  $\mathbf{v}_n$  que es un múltiplo real positivo de un vector  $\mathbf{v}_m$  anterior ( $m < n$ ) en el camino de explosión (si esto ocurre, las ecuaciones que tienen a estos vectores como vector asociado tienen exactamente el mismo conjunto de curvas solución).

# Capítulo 7

## El caso irracional: árbol dual de Stern-Brocot modificado

Queremos ahondar en el caso en que el vector asociado a una ecuación tiene pendiente irracional positiva  $\alpha$ . Vimos en el corolario 6.8 que los cambios de coordenadas que hay que tomar en la explosión de la ecuación

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (7.1)$$

con  $q/p = \alpha \in \mathbb{R}^+$  para seguir obteniendo singularidades de tipo nodo están dados por la fracción continua de  $\alpha$ , y que los vectores que están en el camino de explosión de la ecuación (7.1) son los resultantes de aplicar el algoritmo de Euclides a  $(p, q)$ . Pero ¿cuáles son estos vectores? Dado otro real positivo  $\beta$ , ¿tenemos manera de saber si algún vector del camino de explosión de (7.1) tiene pendiente  $\beta$ ? Dadas dos ecuaciones ¿cómo saber si el vector asociado de una está en el camino de explosión de la otra? ¿podemos decir cuándo pueden llevarse por un número finito de explosiones a la misma ecuación (módulo un múltiplo escalar)? De ser así, ¿serviría esto para clasificar a las ecuaciones de tipo (7.1) con  $q/p > 0$  (y con ellas a los reales positivos)? Podremos responder estas preguntas si logramos caracterizar a los campos que vamos obteniendo al explotar una ecuación. Para hacer esto, construiremos un árbol similar al árbol dual de Stern-Brocot que nos permita imitar lo que hicimos en el caso racional en cuanto a la aplicación de  $I$  y  $D$  como transformaciones en el plano.

Dividimos el capítulo en tres secciones: en la primera daremos respuesta a las primeras preguntas planteadas arriba, en términos de números de la forma  $(a\beta + b)/(c\beta + d)$  con  $a, b, c, d$  enteros no negativos y  $ad - bc = \pm 1$ , para lo que estudiamos una forma modificada de  $SBD$ . Después veremos cómo caracterizar a los números  $(a\beta + b)/(c\beta + d)$ , para lo que regresaremos una vez más a las fracciones continuas, y exploraremos su relación con las transformaciones modulares. Finalmente veremos de qué modo las fracciones continuas y las transformaciones modulares particionan a los números reales.

### 7.1. $SBD_{(a,b)}$

Vimos en el capítulo anterior (sección 6.3), para el caso racional, que los vectores a los que se puede llevar el  $(1, 1)$  por medio de composiciones de  $I$  y  $D$  son todos aquellos con entradas

enteras positivas  $(r, s)$  y  $\text{mcd}(r, s) = 1$ , de modo que las ecuaciones con estos vectores asociados son las que se pueden llevar por medio de explosiones a una ecuación con vector asociado  $(1, 1)$ . Ahora tomaremos un vector  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  y veremos a qué vectores puede llevarse  $(a, b)$  aplicando composiciones de  $I$  y  $D$ . Si  $b/a \in \mathbb{R}^+$ , las ecuaciones que tengan estos vectores asociados son los que podremos llevar mediante explosiones a una ecuación con vector asociado  $(a, b)$ . Estudiaremos cómo lograr lo anterior usando una versión modificada de  $\mathcal{SBD}$ , que llamaremos  $\mathcal{SBD}_{(a,b)}$ . Construiremos únicamente la forma vectorial y fraccionaria pues son las únicas que necesitamos. Puede construirse también la forma matricial, que mantiene las interpretaciones que hicimos de la forma matricial de  $\mathcal{SBD}$ .

Construimos la forma vectorial de  $\mathcal{SBD}_{(a,b)}$  de la siguiente manera: la raíz es el vector  $(a, b)$ ; para cada vértice  $\mathbf{v}$  su descendiente izquierdo es  $I \cdot \mathbf{v}$  y su descendiente derecho es  $D \cdot \mathbf{v}$ . Procediendo de esta manera obtenemos el árbol de la figura 7.1.

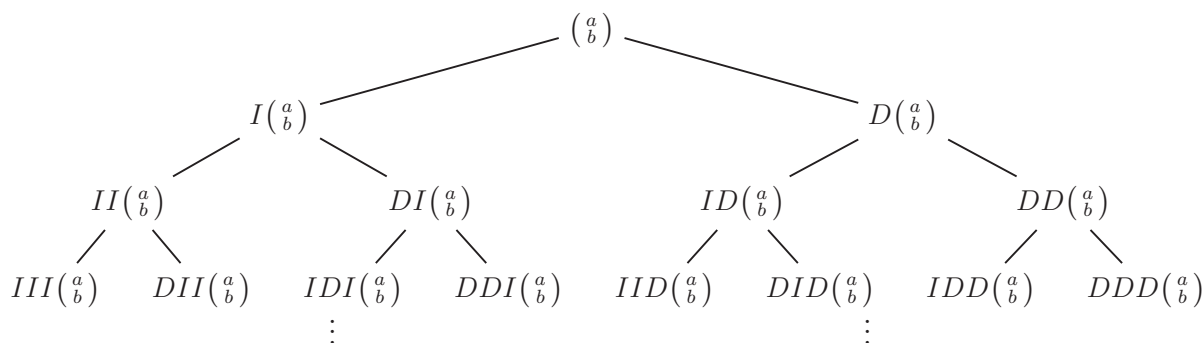


Figura 7.1: Construcción de árbol  $\mathcal{SBVD}_{(a,b)}$  aplicando  $I$  y  $D$ .

Llamaremos a este árbol la forma vectorial de  $\mathcal{SBD}_{(a,b)}$ , y la denotaremos por  $\mathcal{SBVD}_{(a,b)}$ <sup>1</sup>. Notamos que si  $a = b = 1$ , obtenemos la forma vectorial del árbol dual de Stern-Brocot. También notamos que cada vértice en  $\mathcal{SBVD}_{(a,b)}$  es el resultado de aplicar al vector  $(a, b)$  la matriz correspondiente en  $\mathcal{SBMD}$ . Al árbol cuyos vértices son las pendientes de los vectores correspondientes en  $\mathcal{SBVD}_{(a,b)}$ , lo llamaremos la forma fraccionaria de  $\mathcal{SBD}_{(a,b)}$  y lo denotaremos por  $\mathcal{SBFD}_{(a,b)}$ . Nuevamente, notamos que si  $(a, b) = (1, 1)$ , este último no es otro que la forma fraccionaria de  $\mathcal{SBD}$ .

Tomemos entonces un real positivo  $\beta$ . Para estudiar qué ecuaciones tienen en su camino de explosión a otras con vector asociado con pendiente  $\beta \in \mathbb{R}^+$  nos conviene estudiar simultáneamente  $\mathcal{SBD}_{(1,\beta)}$  y  $\mathcal{SBD}_{(\beta,1)}$ .<sup>2</sup> Ya que haremos el estudio simultáneo de las pendientes  $\beta$  y  $1/\beta$ , tomaremos siempre  $\beta \geq 1$ . Comencemos con la forma vectorial de  $\mathcal{SBD}_{(1,\beta)}$ . La ilustramos en la figura 7.2.

<sup>1</sup>Por supuesto, se puede hacer el estudio de los vectores resultantes de aplicar las inversas de  $I$  y  $D$  en un árbol extendido similar al que dimos en la última sección del capítulo 4.

<sup>2</sup>Escogemos partir del vector  $(\beta, 1)$  y no del vector  $(1, 1/\beta)$  (para el que obtendríamos el mismo árbol de fracciones), para tener en la forma vectorial a los vectores simétricos de la forma vectorial de  $\mathcal{SBD}_{(\beta,1)}$ : resulta más adecuado para nuestra interpretación geométrica.

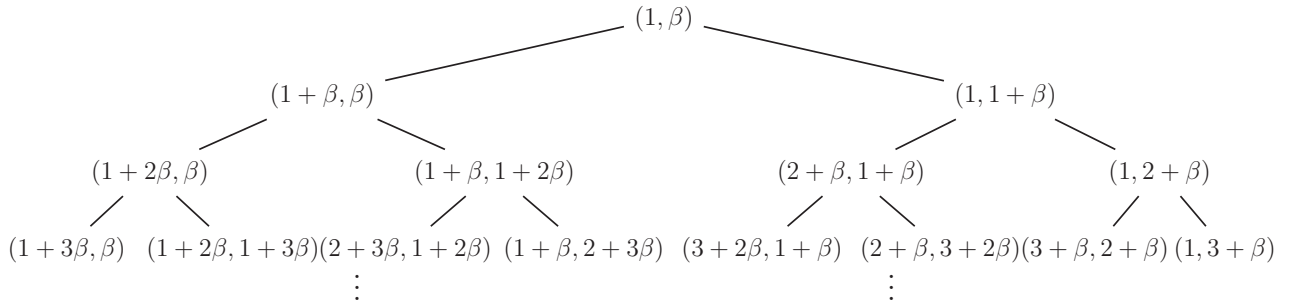


Figura 7.2: Forma vectorial de  $SBD_{(1,\beta)}$

Recordemos la interpretación geométrica que vimos de la aplicación de  $I$  y  $D$  al vector  $(x, y)$  (si  $(x, y)$  está en el primer cuadrante): colocar un cuadrado “arriba” o “a la derecha” del rectángulo determinado por  $(x, y)$ . Y recordemos la interpretación geométrica de la construcción de la forma vectorial de  $SBD$  como un proceso de colocar cuadrados arriba y a la derecha partiendo del cuadrado unitario (recordar figura 4.56). Podemos ver de manera análoga la construcción de  $SBVD_{(1,\beta)}$  como un proceso de “colocar cuadrados”, ahora partiendo del rectángulo determinado por el vector  $(1, \beta)$ . En la figura 7.3 mostramos la construcción geométrica de los vectores en los primeros tres niveles del árbol.

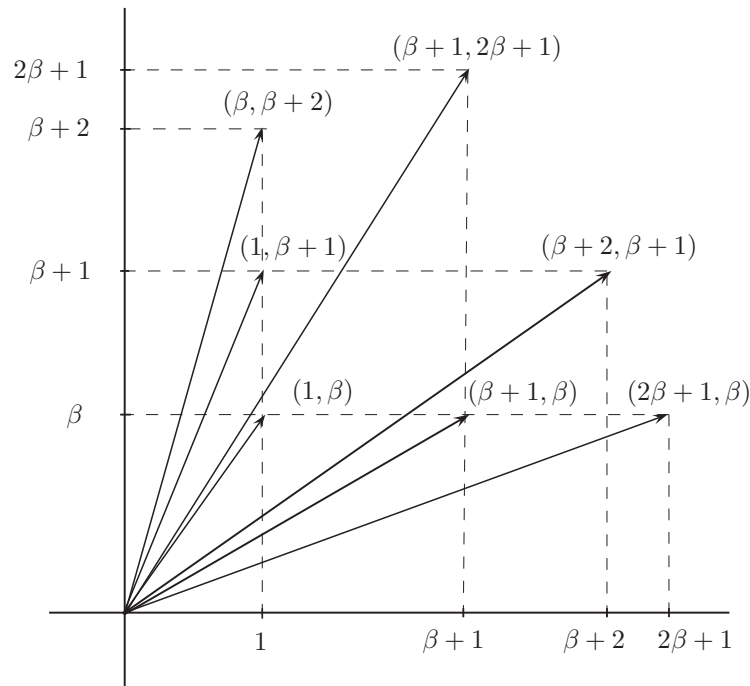


Figura 7.3: Vectores en los primeros tres niveles de la forma vectorial de  $SBD_{(1,\beta)}$ .

En la figura 7.4 comparamos el conjunto de vectores obtenidos en los primeros seis niveles de la forma vectorial de  $SBD_{(1,\beta)}$  para  $\beta = 1$  (en cuyo caso son los vectores de  $SBVD$ ) y para  $\beta = \pi$ .



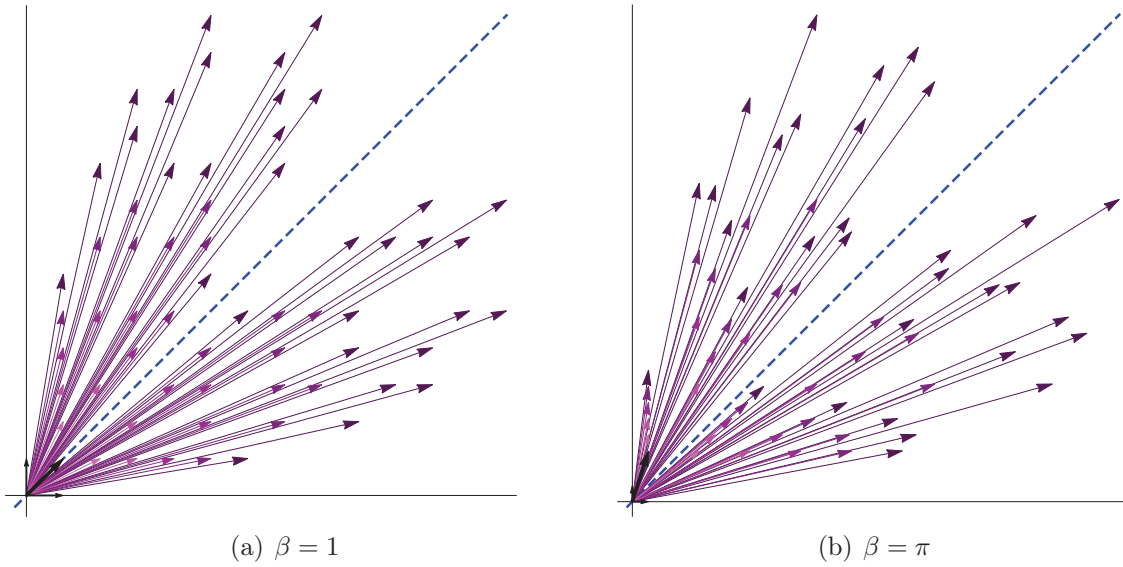


Figura 7.4: Vectores de  $SBD_{(1,\beta)}$ .

**Ojo:** Si  $\beta \neq 1$  perdemos la simetría respecto a la identidad: vectores en vértices simétricos no son necesariamente reflejo uno del otro.

En la forma vectorial de  $SBD_{(1,\beta)}$  están todos los vectores que determinan rectángulos que pueden construirse colocando cuadrados a partir del rectángulo determinado por  $(1, \beta)$  y entonces pueden llevarse al  $(1, \beta)$  con composiciones de  $I^{-1}$  y  $D^{-1}$ : los rectángulos determinados por vectores en  $SBVD_{(1,\beta)}$  son los que al aplicar el algoritmo de Euclides geométrico se llega al rectángulo determinado por  $(1, \beta)$ .

Ahora veamos cómo es la forma fraccionaria de  $SBD_{(1,\beta)}$ , que ilustramos en la figura 7.5. En este árbol tenemos como vértices a las pendientes de los vectores en  $SBD_{(1,\beta)}$ . Si una ecuación tiene un campo vectorial asociado definido por una matriz cuyo cociente de valores propios aparece en este árbol, entonces puede llevarse mediante explosiones a una ecuación cuyo campo asociado esté definido por una matriz cuyo cociente de valores propios es  $\beta$ . Nuevamente, notamos que si  $\beta \neq 1$  se pierde la propiedad de simetría que se tenía en  $SBFD$  (en el sentido de que se tenía  $\sigma(r/s) = s/r$ ).

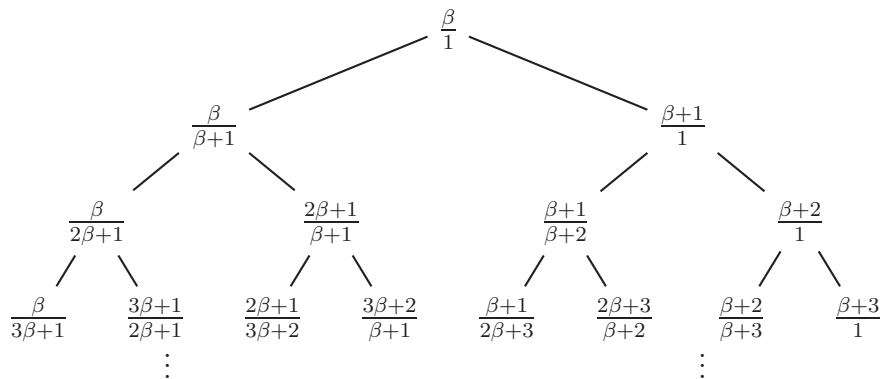


Figura 7.5:  $SBFD_{(1,\beta)}$

Ahora construimos las formas vectorial y fraccionaria de  $SBD_{(\beta,1)}$ .<sup>3</sup> Mostramos la forma vectorial en la figura 7.6 e ilustramos la construcción geométrica de los primeros niveles en la figura 7.7.

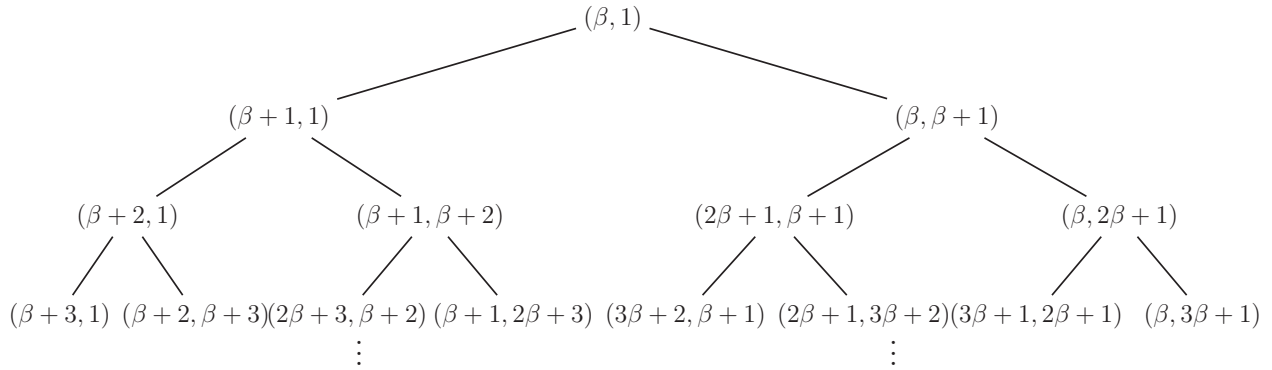


Figura 7.6:  $SBD_{(\beta,1)}$

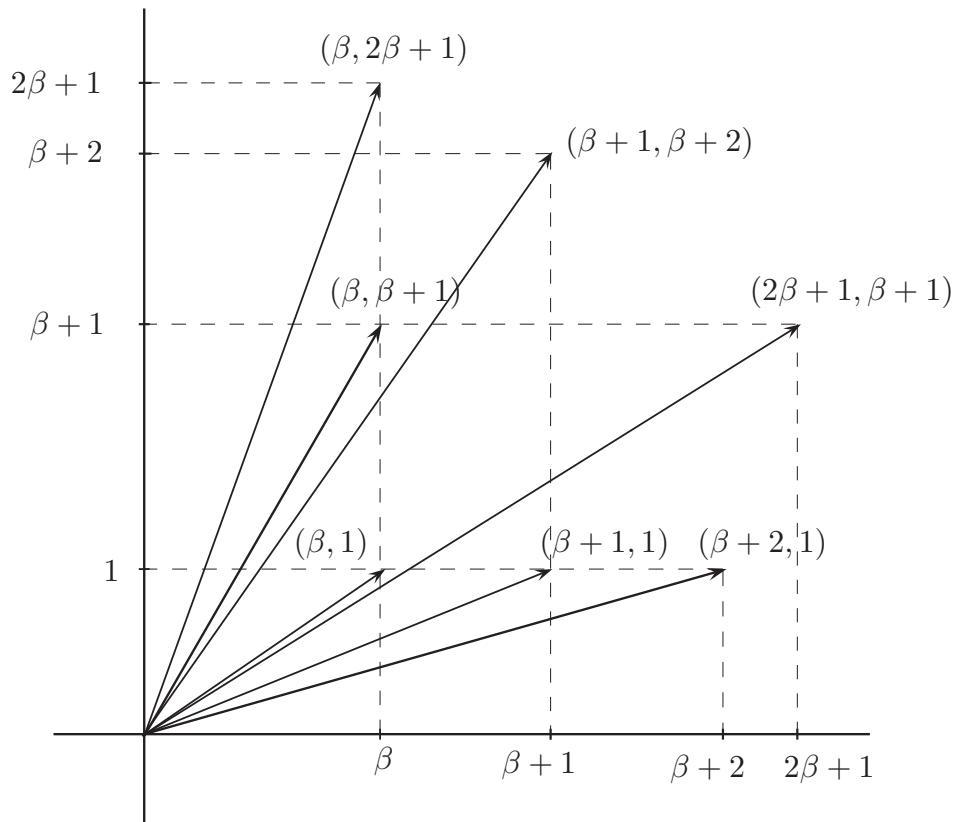
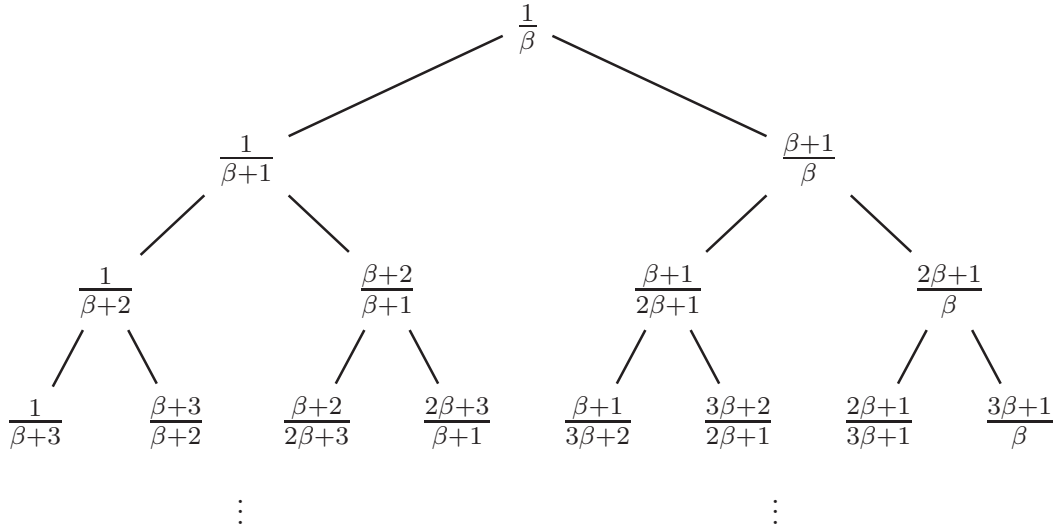


Figura 7.7: Vectores en los primeros tres niveles de  $SBD_{(\beta,1)}$ .

En la figura 7.8 mostramos la forma fraccionaria de  $SBD_{(\beta,1)}$ , donde aparecen las pendientes de vectores resultantes de aplicar composiciones de  $I$  y  $D$  a  $(\beta, 1)$ .

<sup>3</sup>En el apéndice 3 incluimos las formas matriciales de  $SBD_{(1,\beta)}$  y  $SBD_{(\beta,1)}$ .

Figura 7.8:  $SBFD_{(\beta,1)}$ 

Las números reales que aparecen en los árboles  $SBFD_{(1,\beta)}$  y  $SBFD_{(\beta,1)}$  son las pendientes que nos interesa estudiar, pues las ecuaciones cuyos vectores asociados tengan estas pendientes son las que tendrán en su camino de explosión a un vector con pendiente  $\beta$  ó  $1/\beta$  (según sea el caso).

Notamos que las fracciones que encontramos en  $SBFD_{(1,\beta)}$ , que son las pendientes de vectores resultantes de aplicar matrices de  $SBMD$  a  $(1, \beta)$ , son de la forma

$$\frac{a\beta + b}{c\beta + d}; \quad a, b, c, d \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}, \quad ad - bc = 1, \quad (7.2)$$

mientras que las fracciones en  $SBFD_{(\beta,1)}$ , que son pendientes de vectores resultantes de aplicar matrices de  $SBMD$  a  $(\beta, 1)$ , son de la forma

$$\frac{a\beta + b}{c\beta + d}; \quad a, b, c, d \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}, \quad ad - bc = -1 \quad (7.3)$$

(obsérvese que hay un cambio de signo con respecto a lo dicho en (7.2)). Pero ¿todo número de la forma (7.2) ó (7.3) es la pendiente de un vector resultante de aplicar composiciones de  $I$  y  $D$  a  $(1, \beta)$  ó  $(\beta, 1)$ ? Es decir, ¿todo número de la forma (7.2) está en  $SBFD_{(1,\beta)}$  y todo número de la forma (7.3) está en  $SBFD_{(\beta,1)}$ ? Esta pregunta equivale a preguntarnos si todas las matrices de la forma  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  con entradas enteras no negativas y determinante 1 aparecen en  $SBM$ . Como vimos en el teorema 5.20, esto sí sucede. Veamos por qué es que son equivalentes las preguntas: si

$$\alpha = \frac{a\beta + b}{c\beta + d}$$

está en  $SBFD_{(1,\beta)}$ , entonces  $\alpha$  es pendiente de  $M\left(\frac{1}{\beta}\right)$ , donde  $M = \begin{pmatrix} d & c \\ b & a \end{pmatrix}$  está en  $SBMD$ ; y si

$$\alpha = \frac{a\beta + b}{c\beta + d}$$

está en  $SBFD_{(\beta,1)}$ , entonces  $\alpha$  es pendiente de  $M\left(\frac{\beta}{1}\right)$ , donde  $M = \begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix}$  está en  $SBMD$ .

Sabemos entonces que todo número de la forma (7.2) ó (7.3) es pendiente de un vector resultante de aplicar composiciones de  $I$  y  $D$  a  $(1, \beta)$  ó  $(\beta, 1)$ , de modo que las ecuaciones cuyo campo asociado esté definido por una matriz cuyo cociente de valores propios sea de la forma (7.2) ó (7.3) podrá llevarse por explosiones a una cuyo campo asociado esté definido por una matriz cuyo cociente de valores propios sea  $\beta$  ó  $1/\beta$ . La pregunta es entonces ¿qué números reales pueden expresarse como (7.2) ó (7.3)? Antes de abordar esta pregunta, veamos que podemos ser más precisos y usar nuestra manera de localizar una matriz en  $SBD$  a través de los cocientes parciales de fracciones continuas para decir para cada número de la forma (7.2) ó (7.3), exactamente qué composiciones de  $I$  y  $D$  llevan al vector  $(1, \beta)$  ó  $(\beta, 1)$  a otro con esta pendiente.

**Teorema 7.1.** *Sea  $\alpha = \frac{a\beta + b}{c\beta + d}$  con  $a, b, c, d \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$  y  $ad - bc = \pm 1$ . Y sea  $(a+b)/(c+d) = [a_0, a_1, \dots, a_n + 1]$ . Entonces  $\alpha$  es la pendiente de*

$$D^{a_0} I^{a_1} D^{a_2} \dots \{I\}^{a_n} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c\beta + d \\ a\beta + b \end{pmatrix}, \quad \text{si } ad - bc = 1, \text{ y de}$$

$$D^{a_0} I^{a_1} D^{a_2} \dots \{I\}^{a_n} \cdot \begin{pmatrix} \beta \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c\beta + d \\ a\beta + b \end{pmatrix}, \quad \text{si } ad - bc = -1.$$

*Demostración.* Sea  $\alpha = \frac{a\beta + b}{c\beta + d}$  como en las hipótesis del teorema, y sea  $\frac{a+b}{c+d} = [a_0, a_1, \dots, a_n + 1]$ . Tenemos que  $\alpha$  es pendiente de los vectores

$$\begin{pmatrix} d & c \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d + c\beta \\ b + a\beta \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d + c\beta \\ b + a\beta \end{pmatrix}.$$

Buscamos descomponer las matrices  $\begin{pmatrix} d & c \\ b & a \end{pmatrix}$  y  $\begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix}$  en productos de potencias de  $I$  y  $D$ , para lo que requerimos que tengan determinante 1. Escogemos el caso que lo satisfaga. Así, si  $ad - bc = 1$ , aplicamos la proposición 5.23 a  $\begin{pmatrix} d & c \\ b & a \end{pmatrix}$ , y obtenemos que

$$\begin{pmatrix} d & c \\ b & a \end{pmatrix} = D^{a_0} I^{a_1} D^{a_2} \dots \{I\}^{a_n},$$

por lo que el vector dado por

$$D^{a_0} I^{a_1} D^{a_2} \dots \{I\}^{a_n} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \beta \end{pmatrix}$$

tiene pendiente  $\alpha$ , y queda probada la primera parte de la proposición. Ahora, si  $ad - bc = -1$ , entonces aplicamos la proposición 5.23 a  $\begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix}$ , y obtenemos que

$$\begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix} = D^{a_0} I^{a_1} D^{a_2} \dots \{I\}^{a_n},$$

por lo que el vector dado por

$$D^{a_0} I^{a_1} D^{a_2} \dots \{I\}^{a_n} \cdot \begin{pmatrix} \beta \\ 1 \end{pmatrix}$$

tiene pendiente  $\alpha$ , y concluimos la prueba. □

Veamos un par de ejemplos para este teorema.

**Ejemplo 7.2.** Sea  $\beta \in \mathbb{R}, \beta > 0$ , y sea

$$\alpha = \frac{4\beta + 9}{\beta + 2}$$

Puesto que  $4 \cdot 2 - 9 \cdot 1 = -1$  y  $(9 + 4)/(3 + 1) = 13/3 = [4, 3]$ , entonces

$$D^4 I^2 \cdot \begin{pmatrix} \beta \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta + 2 \\ 4\beta + 9 \end{pmatrix}$$

tiene pendiente  $\alpha$ . Observamos que en este caso  $a_n + 1 = 3$  y por lo tanto consideramos  $I^{a_n} = I^2$ .

**Ejemplo 7.3.** Sea  $\beta \in \mathbb{R}, \beta > 0$ , y sea

$$\alpha = \frac{2\beta + 11}{5\beta + 28}$$

Puesto que  $2 \cdot 28 - 5 \cdot 11 = 1$  y  $(2 + 11)/(28 + 5) = 13/33 = [0, 2, 1, 1, 6]$ , entonces

$$D^0 I^2 D I D^5 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28 & 5 \\ 11 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \beta \end{pmatrix}$$

tiene pendiente  $\alpha$ .

Con el teorema 7.1, al dar la manera explícita de llevar a  $(1, \beta)$  ó  $(\beta, 1)$  a otro vector por composiciones de  $I$  y  $D$ , estamos también diciendo explícitamente la manera de regresar a  $(1, \beta)$  o  $(\beta, 1)$  con composiciones  $I^{-1}$  y  $D^{-1}$ , lo que tiene una lectura inmediata en términos de la explosión. Traduciendo el teorema anterior al lenguaje de ecuaciones, obtenemos el siguiente teorema.

**Teorema 7.4.** Dada la ecuación

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad \frac{q}{p} \in \mathbb{R}^+, \quad (7.4)$$

si existe  $\beta \in \mathbb{R}$  y  $a, b, c, d \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$  con  $ad - bc = \pm 1$  tales que

$$\frac{q}{p} = \frac{a\beta + b}{c\beta + d},$$

entonces si  $(a + b)/(c + d) = [a_0, a_1, \dots, a_n + 1]$ , al explotar (7.4) tomando  $a_0$  veces el primer cambio de coordenadas,  $a_1$  veces el segundo,  $a_2$  veces el primero, etc, y  $a_n$  veces el primero (si  $n$  es par) o el segundo (si  $n$  es impar), obtenemos la ecuación

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p' & 0 \\ 0 & q' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

con

$$\frac{q'}{p'} = \begin{cases} \beta & \text{si } ad - bc = 1 \\ \frac{1}{\beta} & \text{si } ad - bc = -1. \end{cases}$$

*Demostración.* Tomemos la ecuación (7.4) con

$$\frac{q}{p} = \frac{a\beta + b}{c\beta + d}$$

como en el enunciado del teorema. Sea  $(a+b)/(c+d) = [a_0, \dots, a_n + 1]$ . Del teorema 7.1 tenemos que si  $ad - bc = 1$ , entonces

$$D^{a_0} I^{a_1} D^{a_2} \dots \left\{ \begin{smallmatrix} D \\ I \end{smallmatrix} \right\}^{a_n} \cdot \begin{pmatrix} \beta \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c\beta + d \\ a\beta + b \end{pmatrix}$$

por lo que aplicando la composición adecuada de  $I^{-1}$  y  $D^{-1}$  al vector  $(c\beta + d, a\beta + b)$ , obtenemos el vector  $(\beta, 1)$ :

$$\left\{ \begin{smallmatrix} D \\ I \end{smallmatrix} \right\}^{-a_n} \dots D^{-a_2} I^{-a_1} D^{-a_0} \cdot \begin{pmatrix} c\beta + d \\ a\beta + b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ahora recordamos que el primer cambio de coordenadas de la explosión actúa sobre el vector asociado a la ecuación como  $D^{-1}$  y el segundo cambio de coordenadas como  $I^{-1}$ , por lo que se sigue el enunciado del teorema para el caso  $ad - bc = 1$ . Si  $ad - bc = -1$ , entonces

$$D^{a_0} I^{a_1} D^{a_2} \dots \left\{ \begin{smallmatrix} D \\ I \end{smallmatrix} \right\}^{a_n} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c\beta + d \\ a\beta + b \end{pmatrix}$$

y nuevamente aplicando las inversas correspondientes tenemos que

$$\left\{ \begin{smallmatrix} D \\ I \end{smallmatrix} \right\}^{-a_n} \dots D^{-a_2} I^{-a_1} D^{-a_0} \cdot \begin{pmatrix} c\beta + d \\ a\beta + b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \beta \end{pmatrix}.$$

Por cómo actúan los cambios de coordenadas de la explosión se sigue el enunciado del teorema en el caso  $ad - bc = -1$ . □

**Ejemplo 7.5.** *Consideremos la ecuación*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (5\beta + 28)x \\ \dot{y} &= (2\beta + 11)y \end{aligned} \tag{7.5}$$

con  $\beta > 0 \in \mathbb{R}$ . Esta ecuación tiene vector asociado con pendiente  $(2\beta + 11)/(5\beta + 28)$ , que satisface las hipótesis del teorema 7.4. Dado que  $13/33 = [0, 2, 1, 1, 6]$ , el teorema 7.4 nos dice que al explotar la ecuación (7.5) tomando 0 veces el primer cambio de coordenadas, 2 veces el segundo, 1 vez el primero, 1 vez el segundo y 5 veces el primero, obtenemos una ecuación cuyo vector asociado tiene pendiente  $\beta$  (pues  $2 \cdot 28 - 11 \cdot 5 = 1$ ) (compárese con el ejemplo 7.3). Mostramos en la figura 7.9 el camino de explosión de la ecuación 7.5:

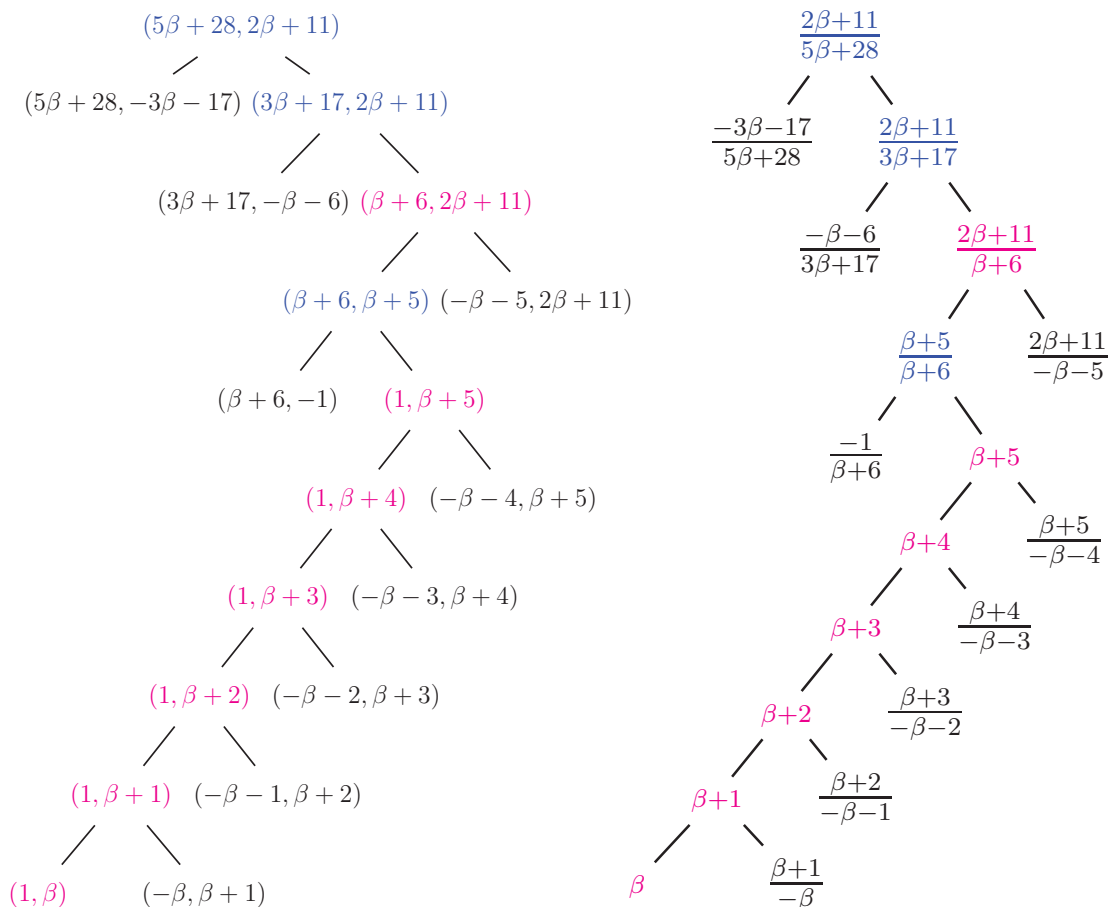
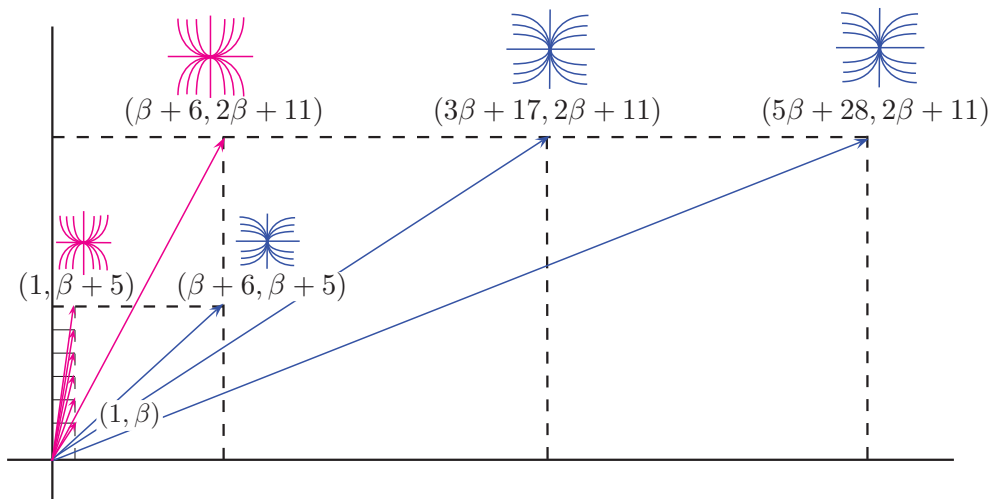


Figura 7.9: Camino de explosión de ecuación (7.5).



**Ejemplo 7.6.** Consideremos la ecuación

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (3\beta + 7)x \\ \dot{y} &= (2\beta + 5)y \end{aligned} \tag{7.6}$$

con  $\beta \in \mathbb{R}^+$ . El cociente de valores propios de la matriz que define al campo asociado a la

ecuación es

$$\frac{2\beta + 5}{3\beta + 7}$$

y satisface las hipótesis del teorema 7.4. Dado que  $(2 + 5)/(3 + 7) = 7/10 = [0, 1, 2, 3]$  y que  $2 \cdot 7 - 3 \cdot 5 = -1$ , el teorema 7.4 nos dice que al explotar la ecuación (7.6) tomando 0 veces el primer cambio de coordenadas, 1 vez el segundo, 2 veces el primero y 2 veces el segundo, obtenemos una ecuación cuyo vector asociado tiene pendiente  $1/\beta$ . Lo corroboramos con el camino de explosión de la ecuación (7.6), que mostramos en la figura 7.10.

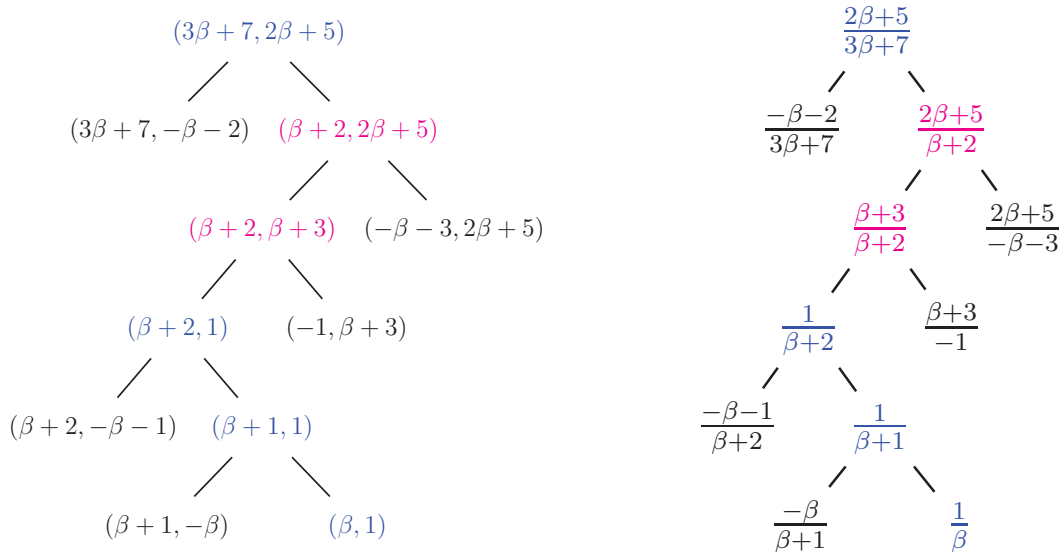
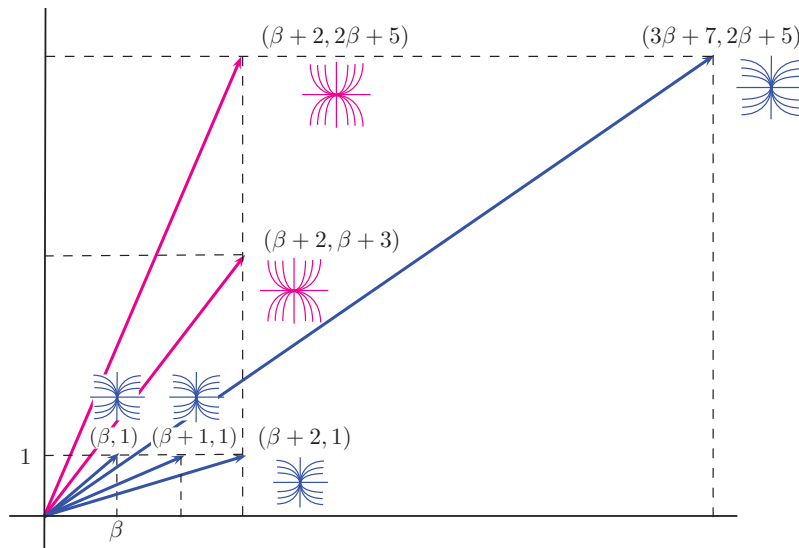


Figura 7.10: Camino de explosión de la ecuación (7.6).



Notamos que si tomamos  $\beta = 1$  recuperamos el caso racional. Por ejemplo, podemos ver la ecuación

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{7.7}$$



como la ecuación (7.6) con  $\beta = 1$ . En este caso tendríamos que

$$\frac{7}{10} = \frac{2 \cdot 1 + 5}{3 \cdot 1 + 7}$$

y el teorema 7.4 diría que al explotar la ecuación (7.7) tomando 0 veces el primer cambio de coordenadas, 1 vez el segundo, 2 veces el primero y 2 veces el segundo, llegamos a una ecuación con vector asociado  $(1, 1)$ , como ya habíamos visto en el ejemplo 6.9.

Bien. Resumamos lo que hemos dicho hasta ahora: las ecuaciones con vector asociado  $(p, q)$  tal que  $q/p = (a\beta + b)/(c\beta + d)$  con  $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$  y  $ad - bc = \pm 1$  son aquellas para las que se obtiene mediante sucesivas explosiones otra ecuación cuyo campo asociado es definido por una matriz con cociente de valores propios  $\beta$  ó  $1/\beta$ . Conociendo  $a, b, c, d$  podemos usar las fracciones continuas para decir exactamente cuántas explosiones son requeridas y qué cambios de coordenadas debemos tomar. La pregunta que ahora nos ocupa es: ¿qué números reales  $\alpha$  pueden expresarse como

$$\alpha = \frac{a\beta + b}{c\beta + d}$$

con  $a, b, c, d \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$  y  $ad - bc = \pm 1$ ? La proposición 3.7 dice que podemos hacer esto, por ejemplo, si  $\beta$  es residuo de la fracción continua de  $\alpha$ . Pero ¿sólo en este caso es posible? Para responder a esta pregunta con más detalle, regresemos nuevamente a las fracciones continuas para ver cómo se expresa la acción de  $I$  y  $D$  sobre la pendiente de un vector en términos de fracciones continuas. Así podremos decir cómo escribir la fracción continua de cualquier expresión de la forma

$$\frac{a\beta + b}{c\beta + d}; \quad a, b, c, d \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}, \quad ad - bc = \pm 1,$$

en términos de la fracción continua de  $\beta$ , y comprenderemos mejor la (estrecha) relación entre transformaciones modulares y fracciones continuas. Recordamos que llamamos transformaciones modulares a las transformaciones de la forma

$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d} \quad \text{con } a, b, c, d \in \mathbb{Z} \quad \text{y} \quad ad - bc = \pm 1.$$

## 7.2. Fracciones continuas y transformaciones modulares

Es sabido que es difícil (o al menos impráctico) operar con los números reales en su representación en fracción continua, por lo menos con las operaciones usuales (suma, producto, etc). Sin embargo, como ya hemos visto, las fracciones continuas resultan adecuadas para expresar ciertas operaciones geométricas. Todo lo que se pueda expresar en términos de estas operaciones geométricas (como el algoritmo de Euclides o la acción de la explosión sobre el vector asociado a una ecuación) se expresará cómodamente en el lenguaje de fracciones continuas. Esto es lo que ocurre con las transformaciones modulares. Dado el vector fijo  $(a, b)$ , consideramos el vector  $(a, b + \mu a)$  con  $\mu \in \mathbb{R}$ , que si  $(a, b)$  está en el primer cuadrante y  $\mu > 0$ , determina al rectángulo resultante de colocar “sobre” el rectángulo determinado por  $(a, b)$  un rectángulo de base  $a$  y altura  $\mu a$  (ver figura 7.11).

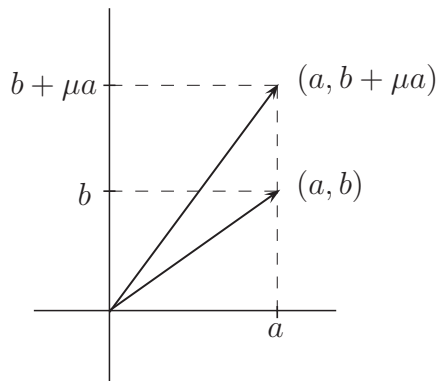


Figura 7.11: El vector  $(a, b + \mu a)$  determina al rectángulo resultante de colocar “sobre” el rectángulo determinado por  $(a, b)$  un rectángulo de base  $a$  y altura  $\mu a$ .

La pendiente del vector  $(a, b + \mu a)$  se representa cómodamente en fracción continua en términos de la fracción continua de la pendiente de  $(a, b)$ : si éste tiene pendiente  $b/a = [a_0, a_1, \dots]$ , entonces el vector  $(a, b + \mu a)$  tiene pendiente

$$\frac{\mu a + b}{a} = \mu + \frac{b}{a} = [\mu + a_0, a_1, \dots],$$

o más mnemotécnicamente,  $[\mu, 0, b/a]$ .

Ahora consideramos el vector  $(a + \mu b, b)$ , que si  $(a, b)$  está en el primer cuadrante y  $\mu > 0$ , determina al rectángulo resultante de colocar “a la derecha” del rectángulo determinado por  $(a, b)$  un rectángulo de base  $\mu b$  y altura  $a$  (ver figura 7.12).

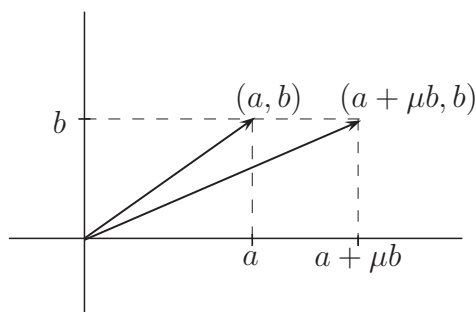


Figura 7.12: El vector  $(a + \mu b, b)$  determina al rectángulo resultante de colocar “a la derecha” del rectángulo determinado por el vector  $(a, b)$  un rectángulo de base  $\mu b$  y altura  $a$ .

También la pendiente del vector  $(a + \mu b, b)$  se expresa cómodamente en fracción continua en términos de la fracción continua de  $b/a = [a_0, a_1, \dots]$ :

$$\frac{b}{a + \mu b} = \frac{1}{\frac{a + \mu b}{b}} = 0 + \frac{1}{\mu + \frac{1}{\frac{b}{a}}} = [0, \mu, a_0, a_1, \dots],$$

o más mnemotécnicamente,  $[0, \mu, b/a]$ .<sup>4</sup>

<sup>4</sup>Esto describe una interpretación geométrica de fracciones continuas simples con cocientes parciales arbitrarios. A partir de lo anterior surge la pregunta de qué interpretación geométrica análoga puede darse a las fracciones continuas no simples, que aunque es interesante, se escapa de los objetivos de este texto.

Ahora restringimos estas operaciones geométricas permitiendo únicamente múltiplos enteros positivos  $\mu \in \mathbb{Z}^+$ , o equivalentemente, tomando siempre  $\mu = 1$  (podemos aplicarlo repetidamente). Nos quedamos con la interpretación geométrica de la acción de  $I$  y  $D$  sobre el vector  $(a, b)$ . Así, si  $\beta = [b_0, b_1, b_2, \dots]$ , entonces el vector  $I\left(\frac{1}{\beta}\right) = \left(\frac{\beta+1}{\beta}\right)$  tiene pendiente

$$\frac{\beta}{\beta+1} = \frac{1}{\frac{\beta+1}{\beta}} = 0 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\beta}} = [0, 1, \beta]$$

y el vector  $D\left(\frac{1}{\beta}\right) = \left(\frac{1}{\beta+1}\right)$  tiene pendiente  $\beta+1 = [1, 0, \beta]$ . Lo resumimos en la figura 7.13.

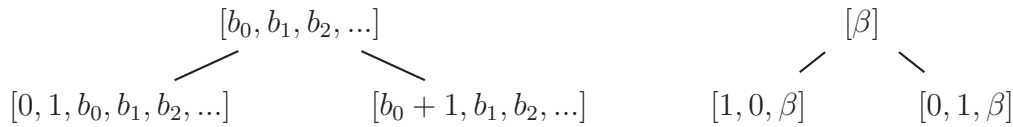


Figura 7.13: Fracciones continuas de las pendientes de los vectores resultantes de aplicar  $I$  y  $D$  a un vector con pendiente  $\beta = [b_0, b_1, b_2, \dots]$ .

Registramos en un árbol las fracciones continuas de pendientes de vectores resultantes de aplicar  $I$  y  $D$  a  $(1, \beta)$  (figura 7.14). Tomamos como raíz la fracción continua de  $\beta = [b_0, b_1, \dots]$ , y tomamos como descendiente izquierdo la fracción continua de la pendiente de  $I\left(\frac{1}{\beta}\right)$  y como descendiente derecho la fracción continua de la pendiente de  $D\left(\frac{1}{\beta}\right)$ . Los vértices de este árbol son la expresión en fracción continua de sus vértices correspondientes en el árbol  $\mathcal{SBFD}_{(1,\beta)}$ .

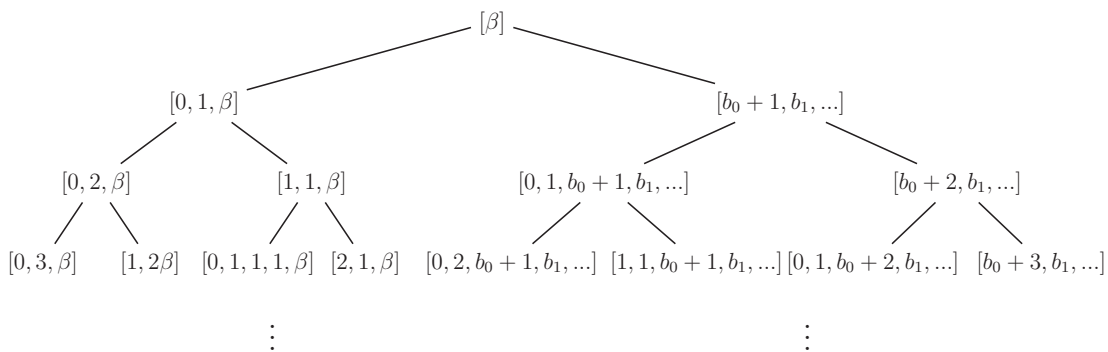


Figura 7.14:  $\mathcal{SBFD}_{(1,\beta)}$ , ahora cada vértice expresado como fracción continua, donde  $\beta = [b_0, b_1, \dots]$ .

Si ahora tomamos como raíz la fracción continua de la pendiente de  $(\beta, 1)$ ,  $1/\beta = [0, b_0, b_1, \dots]$  obtenemos el árbol de la figura 7.15, que es  $\mathcal{SBFD}_{(\beta,1)}$ , pero cada vértice escrito en fracción continua.

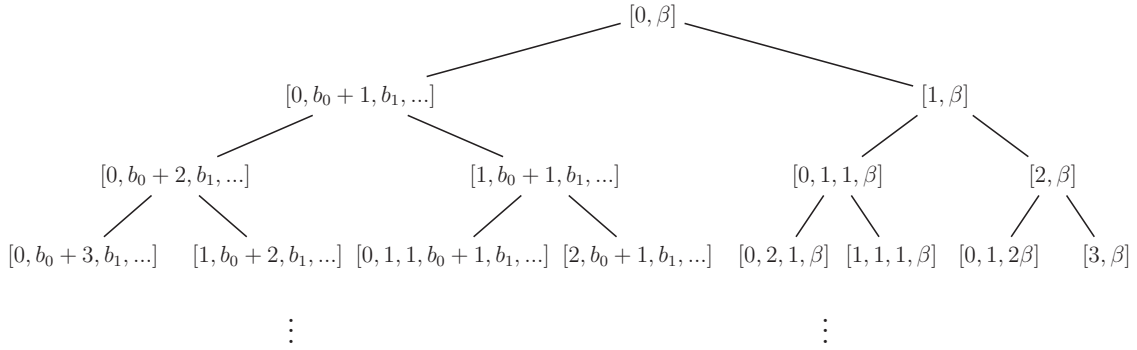


Figura 7.15:  $SBFD_{(\beta,1)}$ , ahora cada vértice expresado como fracción continua, donde  $\beta = [b_0, b_1, \dots]$ .

En estos dos últimos árboles tenemos a las fracciones continuas de las pendientes de todos los posibles vectores resultantes de aplicar composiciones de  $I$  y  $D$  a  $(1, \beta)$  o  $(\beta, 1)$ . Notamos que estas pendientes son de la forma  $[a_0, \dots, a_n, \beta]$  ó  $[a_0, a_1, \dots, a_n, b_0 + a_{n+1}, b_1, \dots] = [a_0, a_1, \dots, a_n, 0, \beta]$  (lo que podemos probar con una rápida inducción). Más aún, podemos hacer la siguiente afirmación.

**Afirmación 7.7.** *Sea  $\beta = [b_0, b_1, b_2, \dots]$ . Entonces el número  $\frac{a\beta+b}{c\beta+d}$  con  $a, b, c, d \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ ,  $ad - bc = \pm 1$  tiene fracción continua de la forma  $[a_0, \dots, a_n, \beta]$  ó  $[a_0, a_1, \dots, a_n + b_0, b_1, \dots]$ . En particular*

$$\begin{aligned}
 \text{si } ad - bc = 1, \text{ entonces } \frac{a\beta + b}{c\beta + d} &= \begin{cases} [a_0, \dots, a_n, \beta] & \text{ó} \\ [a_0, \dots, a_n, a_{n+1} + b_0, b_1, \dots] \end{cases} & \text{con } n \text{ impar} \\
 \text{si } ad - bc = -1, \text{ entonces } \frac{a\beta + b}{c\beta + d} &= \begin{cases} [a_0, \dots, a_n, \beta] & \text{ó} \\ [a_0, \dots, a_n, a_{n+1} + b_0, b_1, \dots] \end{cases} & \text{con } n \text{ par.}
 \end{aligned}$$

Esta afirmación se puede probar también por una rápida inducción.

Tenemos entonces que dado  $\beta = [b_0, b_1, \dots] \in \mathbb{R}^+$ , cualquier fracción continua de la forma  $[a_0, \dots, a_n, \beta]$  ó  $[a_0, \dots, a_n, a_{n+1} + b_0, b_1, \dots]$  es la pendiente de un vector resultante de aplicar composiciones de  $I$  y  $D$  a  $(1, \beta)$  ó  $(\beta, 1)$ . El recíproco lo sabíamos ya. Ahora usaremos los resultados de capítulos anteriores para decir, dado el número real  $\alpha = [a_0, \dots, a_n, \beta] \in \mathbb{R}^+$ , con  $\beta = [b_0, b_1, \dots]$ , qué composición de  $I$  y  $D$  aplicada a  $(1, \beta)$  ó  $(\beta, 1)$  es la que nos da un vector con pendiente  $\alpha$ ; y dado  $\alpha' = [a_0, \dots, a_n, a_{n+1} + b_0, b_1, \dots]$ , qué composición aplicada a  $(1, \beta)$  ó  $(\beta, 1)$  nos da un vector con pendiente  $\alpha'$ . Con esto podremos describir más detalladamente el comportamiento de las ecuaciones bajo sucesivas explosiones. Pero antes de pasar a ello, notemos que acabamos de responder qué ecuaciones pueden llevarse por explosiones a ecuaciones con vectores asociados con pendiente  $\beta$  o  $1/\beta$ : aquellas que tengan vector asociado cuya pendiente se escriba en fracción continua como  $[a_0, \dots, a_n, \beta]$  ó  $[a_0, \dots, a_n, a_{n+1} + b_0, b_1, \dots]$ . ¿Qué tienen en común estos números? En la siguiente sección, y en el próximo capítulo ahondaremos en esta pregunta. Mientras tanto, veremos cómo usar las fracciones continuas para saber qué explosiones hacer en qué coordenadas para seguir obteniendo nodos, y qué vectores tenemos en el camino de explosión.

**Proposición 7.8.** Sea  $\alpha = [a_0, a_1, \dots, a_n, \beta]$ , con  $a_0 \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$  y  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}^+$ , y  $\beta = [b_0, b_1, \dots] > 0 \in \mathbb{R}^+$ . Entonces  $\alpha$  es la pendiente del vector

$$\begin{aligned} D^{a_0} I^{a_1} \dots D^{a_n} \cdot \begin{pmatrix} \beta \\ 1 \end{pmatrix} & \quad \text{si } n \text{ es par, y} \\ D^{a_0} I^{a_1} \dots I^{a_n} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \beta \end{pmatrix} & \quad \text{si } n \text{ es impar.} \end{aligned}$$

*Demostración.* Sean  $\beta = [b_0, b_1, \dots] \in \mathbb{R}^+$ ,  $a_0 \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$  y  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}^+$ . De la proposición 3.7 tenemos que

$$\frac{p_n \beta + p_{n-1}}{q_n \beta + q_{n-1}} = [a_0, \dots, a_n, \beta]$$

donde  $p_i/q_i$  es el convergente  $c_i$  de  $[a_0, \dots, a_n]$ . Por otro lado sabemos que  $\frac{p_n \beta + p_{n-1}}{q_n \beta + q_{n-1}}$  es la pendiente de

$$\begin{pmatrix} q_{n-1} & q_n \\ p_{n-1} & p_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_{n-1} + q_n \beta \\ p_{n-1} + p_n \beta \end{pmatrix} \quad \text{y de} \quad \begin{pmatrix} q_n & q_{n-1} \\ p_n & p_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_n \beta + q_{n-1} \\ p_n \beta + p_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Una de estas dos matrices tiene determinante 1 (cuál de ellas, depende de la paridad de  $n$ ). Basta entonces dar la descomposición en producto de potencias de  $I$  y  $D$  de

$$\begin{pmatrix} q_{n-1} & q_n \\ p_{n-1} & p_n \end{pmatrix} \quad \text{ó} \quad \begin{pmatrix} q_n & q_{n-1} \\ p_n & p_{n-1} \end{pmatrix}$$

según corresponda. Lo podemos hacer utilizando el teorema 5.1. Según éste, si  $n$  es par, entonces

$$\begin{pmatrix} q_n & q_{n-1} \\ p_n & p_{n-1} \end{pmatrix} = D^{a_0} I^{a_1} \dots D^{a_n},$$

y ésta es la matriz que tiene determinante 1. Así mismo, si  $n$  es impar, entonces

$$\begin{pmatrix} q_{n-1} & q_n \\ p_{n-1} & p_n \end{pmatrix} = D^{a_0} I^{a_1} \dots I^{a_n}$$

y ésta es la matriz que tiene determinante 1. De aquí concluimos que el número real  $[a_0, a_1, \dots, a_n, \beta]$  es pendiente de

$$\begin{aligned} D^{a_0} I^{a_1} \dots D^{a_n} \cdot \begin{pmatrix} \beta \\ 1 \end{pmatrix} & \quad \text{si } n \text{ es par, y de} \\ D^{a_0} I^{a_1} \dots I^{a_n} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \beta \end{pmatrix} & \quad \text{si } n \text{ es impar.} \end{aligned}$$

□

Antes de seguir, veamos algunos ejemplos referentes a la proposición anterior. Para estos ejemplos es recomendable usar una computadora para calcular las fracciones continuas.

**Ejemplo 7.9.** Sean  $\beta = \pi = [3, 7, 15, 1, 292, \dots]$ , y  $\alpha = [3, 2, 4, 1, 3, 7, 15, 1, 292, \dots] = [3, 2, 4, 1, \pi]$ . Entonces, aplicando la proposición 7.8, tenemos que el vector

$$D^3 I^2 D^4 I \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 11 \\ 31 & 38 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11\pi + 9 \\ 38\pi + 31 \end{pmatrix}$$

tiene pendiente

$$\frac{38\pi + 31}{11\pi + 9} = [3, 2, 4, 1, 3, 7, 15, 1, 292, \dots] = [3, 2, 4, 1, \pi] = \alpha.$$

**Ejemplo 7.10.** Sea  $\beta = \sqrt{2} = [1, 2, \bar{2}, \dots]$ , y sea  $\alpha = [0, 5, 4, \sqrt{2}]$ . Así que la proposición 7.8 afirma que el vector

$$D^0 I^5 D^4 \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 & 5 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21\sqrt{2} + 5 \\ 4\sqrt{2} + 1 \end{pmatrix}$$

tiene pendiente

$$\frac{4\sqrt{2} + 1}{21\sqrt{2} + 5} = [0, 5, 4, 1, 2, \bar{2}, \dots] = \alpha.$$

Traduciendo la proposición 7.8 al lenguaje de explosión de singularidades obtenemos el siguiente teorema.

**Teorema 7.11.** Sea  $\beta > 0 \in \mathbb{R}$ , y sea

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (7.8)$$

con  $q/p = [a_0, a_1, \dots, a_n, \beta] > 0$ ,  $a_0 \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$  y  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}^+$ . Al explotar la ecuación (7.8) tomando  $a_0$  veces el primer cambio de coordenadas,  $a_1$  veces el segundo,  $a_2$  veces el primero, y así sucesivamente hasta  $a_n$  veces el cambio de coordenadas que corresponda, obtenemos la ecuación

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p' & 0 \\ 0 & q' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

con

$$\frac{q'}{p'} = \begin{cases} \beta & \text{si } n \text{ es impar} \\ 1 & \text{si } n \text{ es par.} \end{cases}$$

**Ejemplo 7.12.** Tomemos  $\beta = \pi = [3, 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, \dots]$ . Consideremos la ecuación

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad \frac{q}{p} = [0, 1, 2, 2, \pi]. \quad (7.9)$$

Según el teorema 7.11, al explotar la ecuación (7.9) tomando 0 veces el primer cambio de coordenadas, 1 vez el segundo, 2 veces el primero, y 2 veces el segundo, obtenemos la ecuación

$$\begin{aligned} \dot{x} &= p'x \\ \dot{y} &= q'y \end{aligned} \quad (7.10)$$

con  $q'/p' = \pi$ . Podemos escribir  $q/p = [0, 1, 2, 2, \pi]$  como

$$[0, 1, 2, 2, \pi] = \frac{5\pi + 2}{7\pi + 3}.$$

Vemos que al explotar tomando 1 vez el primer cambio de coordenadas, 2 veces el segundo y 2 veces el primero, resulta una ecuación como (7.10), con  $q'/p' = \pi$ . En la figura 7.16 mostramos el camino de explosión de la ecuación (7.9), e ilustramos los vectores asociados en la figura 7.17. Compárese con el ejemplo 7.6.

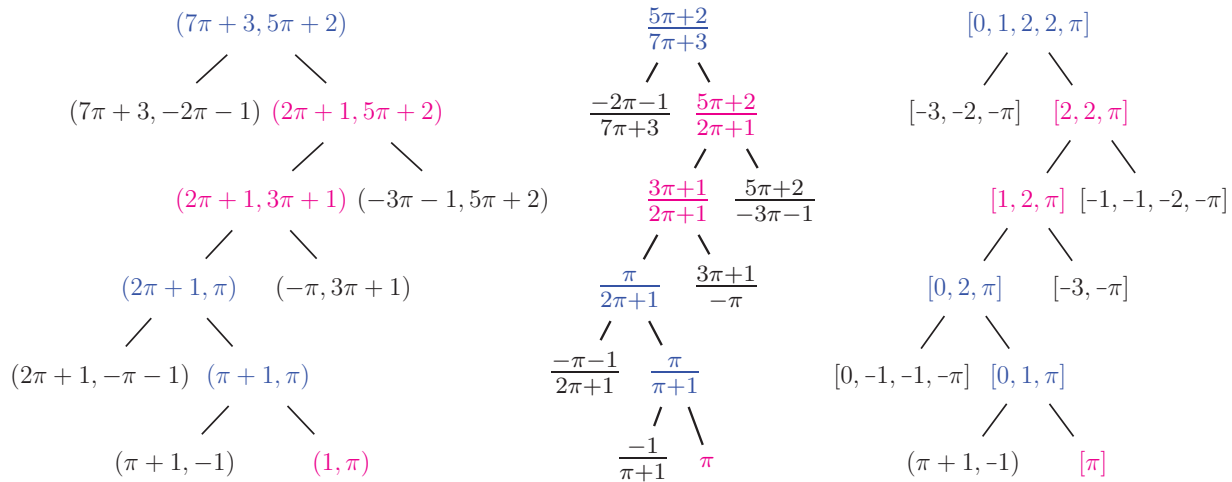


Figura 7.16: Árbol de explosión de la ecuación (7.9) siguiendo el teorema 7.11.

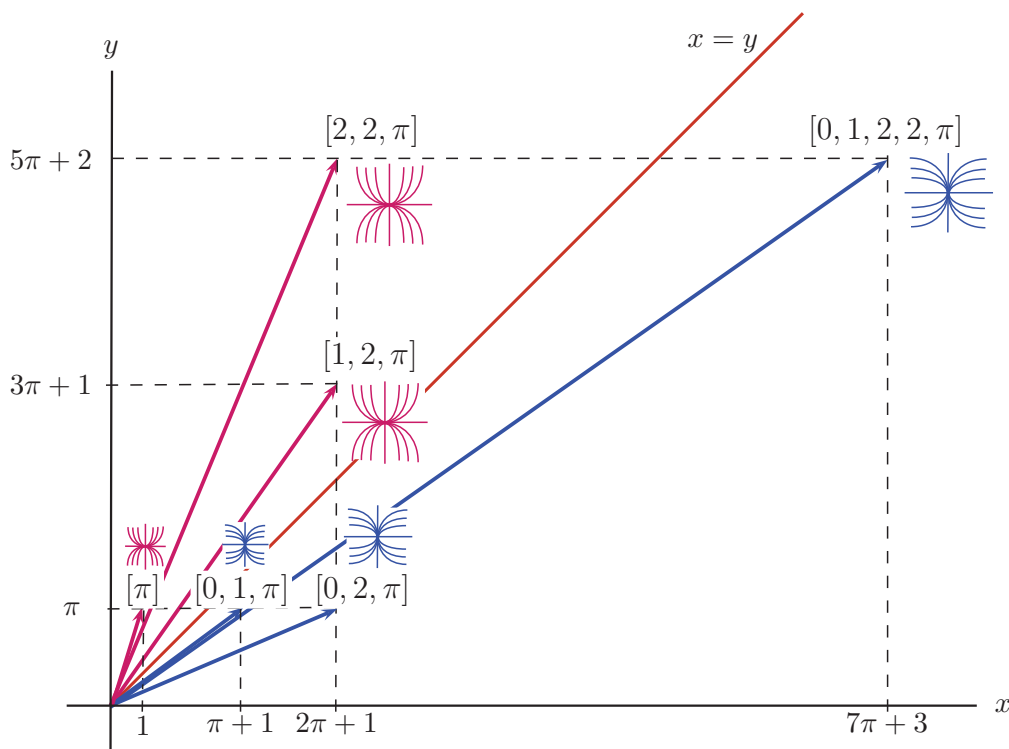


Figura 7.17: Pendientes de vectores en camino de explosión de la ecuación (7.9) expresadas en fracciones continuas, siguiendo el teorema 7.11.

Una vez más, notamos que si  $\beta = 1$  nos quedamos con los resultados que vimos para el caso racional. Podemos escribir a todos los racionales como fracciones continuas con residuo 1. Si en el ejemplo anterior tuviéramos  $p = 10, q = 7$ , podemos escribir  $7/10 = [0, 1, 2, 3] = [0, 1, 2, 2, 1]$ , con lo que este ejemplo coincidiría con el ejemplo 6.9, que vimos para las explosiones en el caso racional.

Ahora consideremos el caso de  $\alpha = [a_0, \dots, a_{n-1}, a_n + b_0, b_1, \dots]$ , con  $\beta = [b_0, b_1, b_2, \dots]$ ,  $\alpha$  y  $\beta$  reales positivos. ¿Qué composición de potencias de  $I$  y  $D$  lleva a  $(1, \beta)$  o  $(\beta, 1)$  a un vector con esta pendiente? Respondemos esto en la siguiente proposición.

**Proposición 7.13.** Sean  $\alpha = [a_0, \dots, a_{n-1}, a_n + b_0, b_1, \dots]$  y  $\beta = [b_0, b_1, \dots]$  en  $\mathbb{R}^+$ . Entonces  $\alpha$  es la pendiente del vector

$$\begin{aligned} D^{a_0} I^{a_1} \dots D^{a_n} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \beta \end{pmatrix} & \quad \text{si } n \text{ es par,} \\ D^{a_0} I^{a_1} \dots I^{a_n} \cdot \begin{pmatrix} \beta \\ 1 \end{pmatrix} & \quad \text{si } n \text{ es impar.} \end{aligned}$$

*Demostración.* Consideremos el número  $1/\beta = [0, b_0, b_1, \dots]$ . Tenemos que

$$[a_0, \dots, a_{n-1}, a_n + b_0, b_1, \dots] = [a_0, \dots, a_n, 1/\beta] = \frac{p_n \frac{1}{\beta} + p_{n-1}}{q_n \frac{1}{\beta} + q_{n-1}},$$

con  $p_i/q_i$  el convergente  $c_i$  de  $[a_0, \dots, a_n]$ . Pero

$$\frac{p_n \frac{1}{\beta} + p_{n-1}}{q_n \frac{1}{\beta} + q_{n-1}} = \frac{p_n + \beta p_{n-1}}{q_n + \beta q_{n-1}},$$

por lo que  $[a_0, \dots, a_{n-1}, a_n + b_0, b_1, \dots]$  es pendiente de

$$\begin{pmatrix} q_n & q_{n-1} \\ p_n & p_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_n + q_{n-1}\beta \\ p_n + p_{n-1}\beta \end{pmatrix} \quad \text{y de} \quad \begin{pmatrix} q_{n-1} & q_n \\ p_{n-1} & p_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_{n-1}\beta + q_n \\ p_{n-1}\beta + p_n \end{pmatrix}.$$

Procedemos ahora como en la prueba de la proposición 7.8 y obtenemos que:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} q_n & q_{n-1} \\ p_n & p_{n-1} \end{pmatrix} &= D^{a_0} I^{a_1} \dots D^{a_n} \quad \text{si } n \text{ es par, y} \\ \begin{pmatrix} q_{n-1} & q_n \\ p_{n-1} & p_n \end{pmatrix} &= D^{a_0} I^{a_1} \dots I^{a_n} \quad \text{si } n \text{ es impar.} \end{aligned}$$

Así, tenemos que  $[a_0, \dots, a_{n-1}, a_n + b_0, b_1, \dots]$  es pendiente del vector

$$\begin{aligned} D^{a_0} I^{a_1} \dots D^{a_n} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \beta \end{pmatrix} & \quad \text{si } n \text{ es par, y} \\ D^{a_0} I^{a_1} \dots I^{a_n} \cdot \begin{pmatrix} \beta \\ 1 \end{pmatrix} & \quad \text{si } n \text{ es impar.} \end{aligned}$$

□



Veamos algunos ejemplos.

**Ejemplo 7.14.** Sea  $\beta = \pi = [3, 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2, \dots]$ , y sea

$$\alpha = [6, 3, 4, 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2, \dots] = [6, 3, 1 + 3, 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2, \dots].$$

Aplicando la proposición 7.13, tenemos que  $\alpha$  es pendiente de

$$D^6 I^3 D \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 25 & 19 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\pi + 4 \\ 19\pi + 25 \end{pmatrix}$$

Calculando la fracción continua de  $(19\pi + 25)/(3\pi + 4)$  obtenemos

$$\frac{19\pi + 25}{3\pi + 4} = [6, 3, 4, 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2, \dots]$$

como esperaríamos.

**Ejemplo 7.15.** Sea  $\beta = (1 + \sqrt{5})/2 = [1, 1, \bar{1}, \dots]$ , y sea

$$\alpha = [3, 4, \bar{1}, \dots] = [3, 3 + 1, \bar{1}, \dots].$$

Aplicando la proposición 7.13, tenemos que  $\alpha$  es pendiente de

$$D^3 I^3 \cdot \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7+\sqrt{5}}{2} \\ \frac{23+3\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}$$

Calculando la fracción continua de  $(23 + 3\sqrt{5})/(7 + \sqrt{5})$  obtenemos

$$\frac{23 + 3\sqrt{5}}{7 + \sqrt{5}} = [3, 4, 1, 1, \bar{1}, \dots],$$

como esperaríamos. Notamos que pudimos haber escrito  $\alpha = [3, 4, \frac{1+\sqrt{5}}{2}]$  y aplicado la proposición 7.13.

Como siempre, si  $\beta = 1$  recuperamos el caso racional. Reescribimos al racional  $r/s = [a_0, \dots, a_n]$  como  $r/s = [a_0, \dots, a_{n-1}, a_n - 1, 1]$  de modo que tengamos residuo  $\beta = 1$  y sepamos así cuándo llegamos a una ecuación con vector asociado con pendiente 1.

Ahora sí, los caminos abreviados y extendidos en la versión modificada de  $\mathcal{SBD}$  coinciden con el camino de explosión, y podemos repetir las interpretaciones que dimos en el caso racional.

Ya vimos entonces cuándo una ecuación tiene vector asociado que aparece en el camino de explosión de otra (ya sea que aparezca él mismo, o que aparezca un múltiplo escalar de él). También sabemos que si una ecuación tiene vector asociado con pendiente  $\alpha = [a_0, a_1, \dots]$ , ésta puede llevarse por explosiones a ecuaciones con vector asociado cuya pendiente sea cualquiera de sus residuos “pares”, es decir:  $s_n = [a_n, a_{n+1}, \dots]$  con  $n$  par, o el inverso de cualquiera de sus residuos “impares”, es decir,  $s_n = [a_n, a_{n+1}, \dots]$  con  $n$  impar. Para seguir dando respuesta a las preguntas que hicimos al inicio del capítulo, respondemos también cuándo dos ecuaciones pueden llevarse por explosiones a una misma ecuación (módulo un múltiplo escalar). Obtenemos este resultado como corolario del teorema 7.11.

**Corolario 7.16.** *Dadas las ecuaciones*

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (7.11)$$

$$y \quad \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p' & 0 \\ 0 & q' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (7.12)$$

con  $p/q = [a_0, a_1, \dots] \in \mathbb{R}^+$  y  $p'/q' = [b_0, b_1, \dots] \in \mathbb{R}^+$ , si existen  $n, m \in \mathbb{N}$  tales que  $a_{n+k} = b_{m+k}$  para toda  $k \in \mathbb{N}, k \geq 1$ , entonces podemos explotar (7.11) y (7.12) un número finito (generalmente distinto) de veces y llegar a ecuaciones con vectores asociados con la misma pendiente si  $n$  y  $m$  tienen la misma paridad, y a ecuaciones cuyos vectores asociados son reflejo uno del otro respecto a la identidad si  $n$  y  $m$  no tienen la misma paridad. Concretamente, requerimos explotar la ecuación (7.11)  $\sum_{i=0}^n a_i$  veces, y explotar la ecuación (7.12)  $\sum_{i=0}^m b_i$  veces.

El corolario anterior nos hace notar que lo que tienen en común ecuaciones para las que a partir de algún momento sus caminos de explosión coinciden es que la fracción continua de las pendientes de sus vectores asociados tienen algún residuo en común (de la misma paridad si los caminos coinciden exactamente, y de paridad distinta si son término a término simétricos por la identidad). Esto nos da una manera de clasificar a las ecuaciones con que estamos trabajando. En la siguiente sección veremos que también se puede hacer una clasificación de números reales con este criterio, que está muy relacionada con las transformaciones modulares, y en el próximo capítulo veremos cómo se relaciona con lo que se conoce como *aproximaciones racionales*.

Para finalizar esta sección, completaremos el mapa de relaciones entre los materiales con que hemos trabajado a lo largo de este capítulo: fracciones continuas con residuo  $\beta$ , transformaciones modulares (con enteros positivos) aplicadas a  $\beta$  y composiciones de  $I$  y  $D$  aplicadas a  $(1, \beta)$  ó  $(\beta, 1)$ . Hasta el momento hemos visto las relaciones que mostramos en la figura 7.18. Para completar el mapa, nos falta poder decir qué fracción continua corresponde a un número de la forma  $\frac{a\beta+b}{c\beta+d}$ , y cuál corresponde al resultado de aplicar a  $(1, \beta)$  o  $(\beta, 1)$  una transformación lineal dada, expresada como producto de potencias de  $I$  y  $D$ . Lo hacemos en las siguientes dos proposiciones.

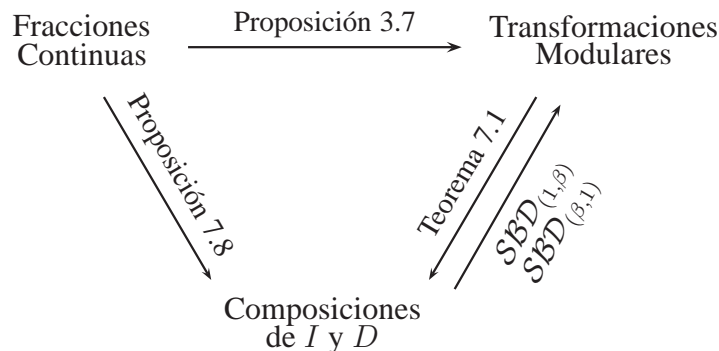


Figura 7.18: Cuadro de relaciones entre los tres materiales con que trabajamos a lo largo del capítulo: fracciones continuas con residuo  $\beta$ , transformaciones modulares (con enteros positivos) aplicadas a  $\beta$ , y composiciones de las transformaciones  $I$  y  $D$  aplicadas a los vectores  $(1, \beta)$  y  $(\beta, 1)$ .

**Proposición 7.17.** Sean  $a_0 \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ ,  $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}^+$ , y sea  $\beta = [b_0, b_1, \dots]$ . Entonces si  $n$  es par

$$\begin{aligned} D^{a_0} I^{a_1} D^{a_2} \dots D^{a_n} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \beta \end{pmatrix} & \text{tiene pendiente} & [a_0, a_1, \dots, a_n, \beta] & \text{y} \\ D^{a_0} I^{a_1} D^{a_2} \dots D^{a_n} \cdot \begin{pmatrix} \beta \\ 1 \end{pmatrix} & \text{tiene pendiente} & [a_0, a_1, \dots, a_n + b_0, b_1, b_2, \dots]; \end{aligned}$$

si  $n$  es impar

$$\begin{aligned} D^{a_0} I^{a_1} D^{a_2} \dots I^{a_n} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \beta \end{pmatrix} & \text{tiene pendiente} & [a_0, a_1, \dots, a_n + b_0, b_1, b_2, \dots] & \text{y} \\ D^{a_0} I^{a_1} D^{a_2} \dots I^{a_n} \cdot \begin{pmatrix} \beta \\ 1 \end{pmatrix} & \text{tiene pendiente} & [a_0, a_1, \dots, a_n, \beta]. \end{aligned}$$

*Demostración.* Se sigue de las proposiciones 7.8 y 7.13 □

**Proposición 7.18.** Sea  $\beta = [b_0, b_1, \dots]$ , sea  $\frac{a\beta + b}{c\beta + d}$  tal que  $a, b, c, d \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$  y  $ad - bc = \pm 1$ , y sea  $(a + b)/(c + d) = [a_0, a_1, \dots, a_n + 1]$ . Entonces

a) Si  $ad - bc = 1$  y  $a > b$  o  $c > d$ , se tiene que

$$\frac{a\beta + b}{c\beta + d} = [a_0, a_1, \dots, a_n, \beta], \quad \text{y } n \text{ es impar.}$$

b) Si  $ad - bc = 1$  y  $a < b$  o  $c < d$ , se tiene que

$$\frac{a\beta + b}{c\beta + d} = [a_0, a_1, \dots, a_n + b_0, b_1, \dots] \quad \text{y } n \text{ es impar.}$$

c) Si  $ad - bc = -1$  y  $a > b$  o  $c > d$ , se tiene que

$$\frac{a\beta + b}{c\beta + d} = [a_0, a_1, \dots, a_n, \beta] \quad \text{y } n \text{ es par.}$$

d) Si  $ad - bc = -1$  y  $a < b$  o  $c < d$ , se tiene que

$$\frac{a\beta + b}{c\beta + d} = [a_0, a_1, \dots, a_n + b_0, b_1, \dots] \quad \text{y } n \text{ es impar.}$$

*Demostración.* Sea  $\alpha = \frac{a\beta + b}{c\beta + d}$  como en el enunciado de la proposición, y sea  $(a + b)/(c + d) = [a_0, a_1, \dots, a_n + 1]$ . Ahora, si  $ad - bc = 1$ , sabemos del teorema 7.1 que  $\alpha$  es pendiente de

$$D^{a_0} I^{a_1} \dots \{I\}^{a_n} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & c \\ b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \beta \end{pmatrix}$$

de modo que si  $a > b$  o  $c > d$ , entonces (recordar corolario 4.69)  $\alpha$  es pendiente de

$$D^{a_0} I^{a_1} \dots I^{a_n} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \beta \end{pmatrix}$$

y  $n$  es par. Por otro lado, tenemos de la proposición 7.17 que

$$D^{a_0} I^{a_1} \dots I^{a_n} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \beta \end{pmatrix}$$

tiene pendiente  $[a_0, a_1, \dots, a_n, \beta]$ , de modo que

$$\frac{a\beta + b}{c\beta + d} = [a_0, a_1, \dots, a_n, \beta],$$

con lo que queda probado a). Análogamente, si  $a < b$  o  $c < d$ , entonces  $\frac{a\beta + b}{c\beta + d}$  es pendiente de

$$D^{a_0} I^{a_1} \dots D^{a_n} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \beta \end{pmatrix} \quad (7.13)$$

y  $n$  es impar. De la proposición 7.17 tenemos que el vector 7.13 tiene pendiente

$$[a_0, a_1, \dots, a_n + b_0, b_1, \dots],$$

de donde

$$\frac{a\beta + b}{c\beta + d} = [a_0, a_1, \dots, a_n + b_0, b_1, \dots].$$

Con esto queda probado b).

Supongamos ahora  $ad - bc = -1$ . Entonces  $\alpha$  es pendiente de

$$D^{a_0} I^{a_1} \dots \{I\}^{a_n} \cdot \begin{pmatrix} \beta \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \beta \\ 1 \end{pmatrix}$$

de modo que si  $a > b$  o  $c > d$ , entonces (nuevamente por corolario 4.69)  $\alpha$  es pendiente de

$$D^{a_0} I^{a_1} \dots D^{a_n} \cdot \begin{pmatrix} \beta \\ 1 \end{pmatrix} \quad (7.14)$$

y  $n$  es impar. Entonces el vector 7.14 tiene pendiente

$$[a_0, a_1, \dots, a_n, \beta],$$

de modo que

$$\frac{a\beta + b}{c\beta + d} = [a_0, a_1, \dots, a_n, \beta],$$

con lo que queda probado c). Si  $a < b$  o  $c < d$ , entonces  $\frac{a\beta + b}{c\beta + d}$  es pendiente de

$$D^{a_0} I^{a_1} \dots I^{a_n} \cdot \begin{pmatrix} \beta \\ 1 \end{pmatrix} \quad (7.15)$$

con  $n$  par. El vector 7.15 tiene pendiente

$$[a_0, a_1, \dots, a_n + b_0, b_1, \dots],$$

de donde

$$\frac{a\beta + b}{c\beta + d} = [a_0, a_1, \dots, a_n + b_0, b_1, \dots]$$

y terminamos la prueba. □

**Ejemplo 7.19.** Sea  $\beta = 2 + \sqrt{5} = [4, \bar{4}, \dots]$ .

• Sea

$$\alpha = \frac{2(2 + \sqrt{5}) + 1}{3(2 + \sqrt{5}) + 2}$$

Como  $2 \cdot 2 - 1 \cdot 3 = 1$ , y  $3/5 = [0, 1, 1, 1 + 1]$ , entonces  $\alpha = [0, 1, 1, 1, \bar{4}, \dots]$ .

• Sea

$$\alpha = \frac{3(2 + \sqrt{5}) + 11}{(2 + \sqrt{5}) + 4}$$

Como  $3 \cdot 4 - 11 \cdot 1 = 1$ , y  $14/5 = [2, 1, 3 + 1]$ , entonces  $\alpha = [2, 1, 7, \bar{4}, \dots]$ .

• Sea

$$\alpha = \frac{11(2 + \sqrt{5}) + 3}{4(2 + \sqrt{5}) + 1}$$

Como  $11 \cdot 1 - 3 \cdot 4 = -1$ , y  $14/5 = [2, 1, 3 + 1]$ , entonces  $\alpha = [2, 1, 3, \bar{4}, \dots]$ .

• Sea

$$\alpha = \frac{1(2 + \sqrt{5}) + 2}{2(2 + \sqrt{5}) + 3}$$

Como  $1 \cdot 3 - 2 \cdot 2 = -1$ , y  $3/5 = [0, 1, 1, 1 + 1]$ , entonces  $\alpha = [0, 1, 1, 5, \bar{4}, \dots]$ .

Con estas dos últimas proposiciones completamos el cuadro de relaciones que buscábamos, que sintetizamos en la figura 7.19.

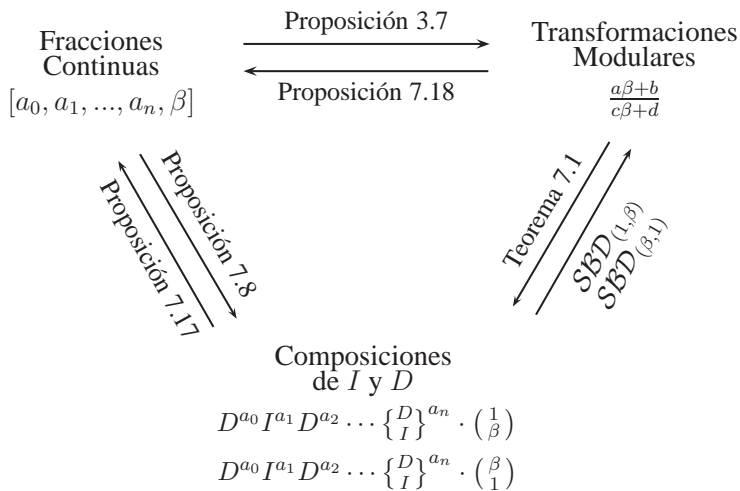


Figura 7.19: Cuadro de relaciones entre los tres materiales con que estamos trabajando: fracciones continuas, transformaciones modulares (con enteros positivos) y composiciones de las transformaciones  $I$  y  $D$ .

### 7.3. Partición de los números reales

A lo largo del capítulo se pone de manifiesto la relación que hay entre fracciones continuas que comparten algún residuo, y las transformaciones modulares

$$\frac{ax + b}{cx + d}$$

con  $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ ,  $ad - bc = \pm 1$ .<sup>5</sup> Esta relación es importante en el contexto de los números reales, pues las transformaciones modulares permiten dar una partición de los números reales relacionada con su distribución en la recta real.

**Definición 7.20.** Decimos que  $\alpha$  y  $\beta \in \mathbb{R}$  son racionalmente equivalentes si existen  $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$  tales que

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \pm 1 \quad \text{y} \quad \frac{a\beta + b}{c\beta + d} = \alpha.$$

Es decir, si  $\beta$  puede ser llevado a  $\alpha$  por una transformación modular.

La *equivalencia racional* en los reales es una relación de equivalencia:<sup>6</sup> es reflexiva, pues

$$\alpha = \frac{1 \cdot \alpha + 0}{0 \cdot \alpha + 1};$$

es simétrica, pues

$$\text{si } \alpha = \frac{a\beta + b}{c\beta + d}, \quad \text{entonces } \beta = \frac{d\alpha - b}{-c\alpha + a};$$

y es transitiva, pues

$$\text{si } \alpha = \frac{a\beta + b}{c\beta + d} \quad \text{y} \quad \beta = \frac{e\gamma + f}{g\gamma + h} \quad \text{entonces} \quad \alpha = \frac{(ae + bg)\gamma + (af + hb)}{(ce + gd)\gamma + (cf + hd)}.$$

Así, la *equivalencia racional* nos induce una partición de  $\mathbb{R}$ . Con lo que hemos visto sabemos que todos los racionales positivos pueden llevarse por una transformación modular al 1. Como además  $-\alpha = \frac{-1 \cdot \alpha + 0}{0 \cdot \alpha + 1}$ , concluimos que todos los racionales están en la misma clase. También es claro que un irracional no puede estar en la misma clase que un racional. Ahora ¿cómo saber si dos irracionales están o no en la misma clase? Como podemos intuir de los resultados en este capítulo, las fracciones continuas pueden ayudar a caracterizar a irracionales que están en la misma clase.

Vimos que si  $\alpha = [a_0, \dots, a_n, c_0, c_1, \dots] \in \mathbb{R}^+$  y  $\beta = [b_0, \dots, b_m, c_0, c_1, \dots] \in \mathbb{R}^+$ , entonces  $\alpha$  y  $\beta$  pueden llevarse por una transformación modular a  $\gamma = [c_0, c_1, \dots]$ , por lo que  $\alpha$  y  $\beta$  son equivalentes.

**Definición 7.21.** Sean  $\alpha$  y  $\beta$  reales. Decimos que las fracciones continuas de  $\alpha = [a_0, a_1, a_2, \dots]$  y  $\beta = [b_0, b_1, b_2, \dots]$  son eventualmente iguales si existen  $n, m \in \mathbb{N}$  tales que  $|a_{n+i}| = |b_{m+i}|$  para toda  $i \in \mathbb{N}$ .

<sup>5</sup>Las transformaciones modulares permiten estudiar a las fracciones continuas desde la perspectiva de la geometría hiperbólica.

<sup>6</sup>Para ver esto, también podemos asociar a la transformación  $\frac{ax+b}{cx+d}$  la matriz  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  y usar que  $PSL(2, \mathbb{Z})$  es un grupo bajo el producto para probar que las transformaciones modulares forman un grupo bajo la composición.

**Teorema 7.22.** (Serret [22] I§6,[14]§5.3)

Sean  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .  $\alpha$  y  $\beta$  son racionalmente equivalentes si y sólo si sus fracciones continuas son eventualmente iguales.

Este teorema nos resulta natural después de los resultados que vimos en este capítulo. Aunque el teorema de Serret no distingue entre irracionales  $\alpha$  y  $\beta$  cuya equivalencia esté dada por una transformación modular

$$\frac{a\beta + b}{c\beta + d} = \alpha$$

con  $a, b, c, d \in \mathbb{Z}^+$  y aquellos cuya equivalencia está dada por una con  $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ , en el contexto de ecuaciones diferenciales sí los distinguimos, pues aunque como tipo de números  $\alpha$  y  $-\alpha$  están en la misma clase, el comportamiento bajo explosiones sucesivas de ecuaciones con vector asociado con pendiente  $\alpha$  y  $-\alpha$  es completamente distinto. Algo parecido ocurre con la distinción  $ad - bc = 1$  y  $ad - bc = -1$ , que no se aprecia en el teorema de Serret y sí en el contexto de ecuaciones diferenciales.

Hay otras áreas en las que resulta relevante que  $\alpha$  pueda ser llevado a  $\beta$  por una transformación de la forma  $\frac{a\beta+b}{c\beta+d}$ , con  $ad - bc = 1$ . Estas transformaciones son usadas, por ejemplo, para dar una clasificación de toros (este resultado puede consultarse en [20] IV§2).

Ahora, con las interpretaciones que tenemos de los cocientes parciales de una fracción continua, podemos decir más sobre fracciones continuas que son eventualmente iguales:

- En el contexto del algoritmo de Euclides, si  $\alpha$  y  $\beta$  son reales positivos racionalmente equivalentes, al aplicar el Algoritmo a las parejas  $(1, \alpha)$  y  $(1, \beta)$ , en un número finito de pasos (distinto para cada pareja, generalmente) se obtiene el mismo rectángulo (salvo homotecias).
- En el contexto de las formas vectorial y fraccionaria de  $\mathcal{SB}$ , donde los cocientes parciales de  $\alpha = [a_0, a_1, \dots]$  nos dan una manera de construir una sucesión de vectores cuyas pendientes convergen a  $\alpha$ , que dos reales positivos tengan fracciones continuas eventualmente iguales significa que los números tienen esencialmente “la misma construcción”. Para explicar a qué nos referimos con “la misma construcción”, recordemos que al dar la forma de palabras de  $\mathcal{SB}$  resaltamos dentro de las propiedades debidas al mecanismo de construcción del árbol, que de cada subárbol de  $\mathcal{SBP}$  podíamos obtener el árbol original  $\mathcal{SBP}$  quitando de cada palabra las primeras letras: las que coinciden con la raíz del subárbol (corolario 4.30). Si tomamos dos palabras infinitas que son iguales a partir de un punto, tenemos la misma palabra, que se construye de la misma manera partiendo de subárboles de  $\mathcal{SBP}$  distintos. Así que si  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$  tienen fracciones continuas eventualmente iguales, digamos  $\alpha = [a_0, a_1, \dots, a_n, \gamma]$  y  $\beta = [b_0, b_1, \dots, b_m, \gamma]$ , entonces  $\alpha$  y  $\beta$  se construyen de la misma manera, partiendo para construir  $\alpha$  del racional en  $\mathcal{SBF}$  con sucesión  $(a_0, \dots, a_n)$ , y partiendo para construir  $\beta$  del racional en  $\mathcal{SBF}$  con sucesión  $(b_0, b_1, \dots, b_m)$ . A esto nos referimos con que  $\alpha$  y  $\beta$  tienen esencialmente “la misma construcción”.
- En el contexto del árbol  $\mathcal{SBD}$  modificado, vimos a lo largo de este capítulo que si dos reales positivos  $\alpha$  y  $\beta$  son racionalmente equivalentes, ambos son producto de aplicar composiciones de  $I$  y  $D$  a un mismo vector (o su reflejo por la identidad).

Seguramente el lector tendrá en la cabeza algunas interpretaciones más. En el próximo capítulo veremos que si dos números reales son racionalmente equivalentes, entonces admiten el mismo grado de aproximaciones racionales.

# Capítulo 8

## Aproximaciones racionales

En este capítulo abordaremos la estructura de los números reales desde la perspectiva de las *aproximaciones racionales*. Digamos que queremos aproximar un real  $\alpha$  por un número racional lo más “simple” posible. Sabemos por la densidad de  $\mathbb{Q}$  en  $\mathbb{R}$ , que si tomamos un real arbitrario  $\alpha$ , encontraremos infinitos racionales tan cerca como queramos de  $\alpha$ : dado  $\varepsilon > 0$  existen infinitos  $p/q \in \mathbb{Q}$  que satisfacen

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \varepsilon.$$

Esto significa que podemos aproximar cualquier real  $\alpha$  por un racional, con un error tan pequeño como queramos. Sin embargo, nos gustaría aproximarlos por un racional con denominador chico, pues de alguna manera éstos son más “simples”.<sup>1</sup> Queremos saber qué tan chico podemos tomar el denominador de modo que el error siga siendo pequeño. La pregunta es entonces, dado  $\alpha \in \mathbb{R}$ , ¿qué tan cerca tiene  $\alpha$  a racionales con denominador pequeño? Esta es la pregunta que aborda el tema de *aproximaciones racionales*. En este capítulo buscamos responderla (y comprenderla) ayudándonos de las fracciones continuas, el árbol de Stern-Brocot y la partición de reales dada por las transformaciones modulares. Llevaremos todos los resultados que podamos a términos de los cocientes parciales de las fracciones continuas, pues con ellos veremos qué nos dicen las aproximaciones racionales en nuestro problema de explosión de singularidades.

Cuán bien aproximable es un número  $\alpha$  por racionales con denominador pequeño depende de la distribución en la recta real de los racionales dada por su construcción en  $\mathcal{SB}$  y de la construcción de  $\alpha$  como límite de sus convergentes. Veremos que hay algunas relaciones entre cuán bien aproximable es un número  $\alpha$  por racionales con denominador pequeño, y el tipo de número que  $\alpha$  es: racional, irracional, algebraico o trascendente.

Por comodidad, al escribir  $p/q \in \mathbb{Q}$  supondremos implícitamente  $q > 0$ . Queda a cargo del lector hacer con cuidado las interpretaciones geométricas que requieran considerar  $q < 0$ . Para estudiar las aproximaciones racionales a números reales, buscaremos acotar la distancia que

---

<sup>1</sup>Se puede usar la *altura* de un racional para medir qué tan “simple” es. Se define la *altura* de un racional como  $h(p/q) = \max\{|p|, |q|\}$ . Con esta definición, para toda  $N \in \mathbb{N}$  hay sólo un número finito de racionales con altura menor que  $N$ . Como nosotros consideramos racionales cercanos a un número real, podemos tomar como medida de qué tan “simple” es un racional  $p/q$  el tamaño de su denominador:  $|q|$ . También se cumple que para toda  $N \in \mathbb{N}$  hay sólo un número finito de racionales cercanos a un real  $\alpha$  cuyo denominador tiene tamaño menor que  $N$ .



hay entre un real  $\alpha$  y racionales  $p/q$  por una función de  $q$ :

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{f(q)} \quad f: \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{R}.$$

Entre más rápido crezca  $f$ , menor será el error al aproximar a  $\alpha$  por un racional con un denominador pequeño.

En este capítulo nos basamos fuertemente en [22], [6] y [15]. Todas estas son excelentes referencias de consulta. Para dar más fluidez al texto, dejaremos en este capítulo sólo algunas demostraciones que consideramos ilustrativas. El resto las hacemos en el apéndice 4. No damos las pruebas de los resultados con asterisco (\*). Pueden consultarse en [15], [6], y [21].

## 8.1. Las primeras cotas: Dirichlet, Vahlen y Hurwitz

Veamos para empezar que nuestras esperanzas para aproximar racionales por otros racionales con denominador pequeño no pueden ser muy altas.

**Lema 8.1.** Sean  $p/q, r/s \in \mathbb{Q}$  tales que

$$\left| \frac{r}{s} - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{qs}.$$

Entonces  $\frac{p}{q} = \frac{r}{s}$ .

*Demostración.* Por hipótesis

$$\left| \frac{r}{s} - \frac{p}{q} \right| = \frac{|ps - qr|}{qs} < \frac{1}{qs}.$$

Entonces  $|ps - qr| < 1$ . Como  $p, q, r, s$  son enteros, entonces  $ps - qr = 0$  y  $p/q = r/s$  como queríamos probar.  $\square$

Esto significa que si queremos aproximar al racional  $r/s$  por un racional distinto  $p/q$  con un error muy pequeño, entonces el racional  $p/q$  deberá tener un denominador grande. Ya que  $s$  es fijo, entre mejor queramos la aproximación, mayor deberá ser  $q$ :

$$\frac{1}{qs} \leq \left| \frac{p}{q} - \frac{r}{s} \right| < \varepsilon.$$

Es decir, los racionales en general no son bien aproximables por otros racionales con denominador pequeño. Con los irracionales tendremos más suerte. Vayamos paso a paso. Digamos que queremos aproximar reales por racionales con denominador 2. ¿Cuán cerca podemos asegurar que un racional de la forma  $p/2$ , con  $p \in \mathbb{Z}$ , está de un real arbitrario  $\alpha$ ? Si subdividimos en intervalos de longitud  $1/2$  vemos que debe existir  $p \in \mathbb{Z}$  para el que se satisface

$$\left| \alpha - \frac{p}{2} \right| \leq \frac{1}{4},$$

dándose la igualdad sólo si  $\alpha = r/4$ , con  $r \in \mathbb{Z}$  (ver figura 8.1).

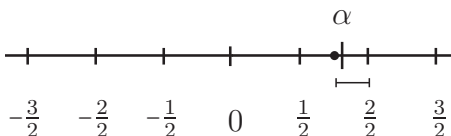


Figura 8.1

Es decir, podemos aproximar reales con racionales de la forma  $p/2$  con un margen de error de  $1/4$ . Repetimos el razonamiento para aproximar reales con racionales con denominador a lo más  $N$ , con  $N \in \mathbb{Z}^+$ : para ver cuán cerca están de un real arbitrario  $\alpha$  racionales de la forma  $p/N$ , subdividimos en intervalos de longitud  $1/N$  y vemos que debe existir  $p \in \mathbb{Z}$  tal que

$$\left| \alpha - \frac{p}{N} \right| \leq \frac{1}{2N},$$

dándose la igualdad sólo si  $\alpha = r/2N$ ,  $r \in \mathbb{Z}$  (ver figura 8.2).

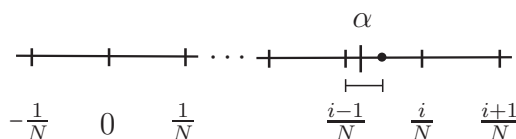


Figura 8.2

Iremos dando mejores cotas para la distancia  $|\alpha - p/q|$ . Comenzamos con el teorema de Dirichlet, el primero en la serie de resultados orientados en esta dirección.

**Teorema 8.2.** (*Dirichlet, 1842 [6]*)

Sea  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $N \in \mathbb{Z}^+$ . Existen enteros  $p, q$  tales que  $1 \leq q < N$  y

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{1}{qN}. \tag{8.1}$$

O, lo que es lo mismo,

$$|q\alpha - p| \leq \frac{1}{N}. \tag{8.2}$$

*Demostración.* Subdividimos el intervalo  $[0, 1]$  en los siguientes  $N$  intervalos de longitud  $1/N$ :

$$\left[ \frac{i-1}{N}, \frac{i}{N} \right) \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, N-1 \quad \text{y} \quad \left[ \frac{N-1}{N}, \frac{N}{N} \right].$$

Y consideramos el conjunto

$$A = \{0, 1, \alpha - [\alpha], 2\alpha - [2\alpha], \dots, (N-1)\alpha - [(N-1)\alpha]\}$$

con  $N+1$  elementos, donde  $[x]$  denota a la parte entera de  $x$ . Notamos que todos los elementos de  $A$  están en  $[0, 1]$ . Dado que tenemos  $N$  intervalos y  $N+1$  puntos en la unión de estos intervalos, al menos uno de estos intervalos contiene a dos elementos de  $A$ .<sup>2</sup> Entonces existen enteros  $m, n$ , tales que  $1 < n < m \leq N-1$  y

$$|(m\alpha - [m\alpha]) - (n\alpha - [n\alpha])| = |(m-n)\alpha - ([m\alpha] - [n\alpha])| \leq \frac{1}{N}.$$

Los enteros  $q = m - n$  y  $p = [m\alpha] - [n\alpha]$  son los enteros buscados. □

---

<sup>2</sup>Aquí estamos usando el principio del palomar, que dice que si hay  $k$  palomas en un palomar con  $l$  lugares, y  $k > l$ , entonces al menos un lugar contiene a dos palomas.

En la figura 8.3 ilustramos la prueba del teorema de Dirichlet. Notamos que la igualdad en la desigualdad del teorema se da sólo si  $\alpha$  es racional.

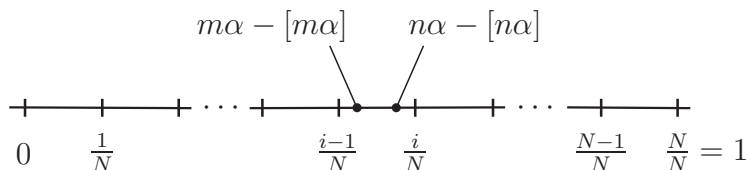


Figura 8.3: Prueba del Teorema de Dirichlet.

En la prueba del teorema de Dirichlet trabajamos con el número  $|q\alpha - p|$  en lugar de con  $|\alpha - p/q|$ . Podemos pensarlo como la distancia de  $q\alpha$  al entero más cercano. Otra forma de pensarlo es la que usamos en el capítulo 3 para hablar de los convergentes de una fracción continua como mejores aproximaciones racionales: vimos que  $|q\alpha - p|$  significaba la “distancia vertical” del punto  $(q, p)$  con coordenadas enteras a la recta  $y = \alpha x$ . Bajo esta interpretación, el teorema de Dirichlet dice que para cualquier recta por el origen con pendiente  $\alpha$  y cualquier  $N \in \mathbb{Z}^+$  existe un punto  $(q, p)$  con  $q, p \in \mathbb{Z}$  y  $1 \leq q < N$  cuya “distancia vertical” a la recta es a lo más  $1/N$  (ver figura 8.4). La distancia es estrictamente menor si  $\alpha$  es irracional.

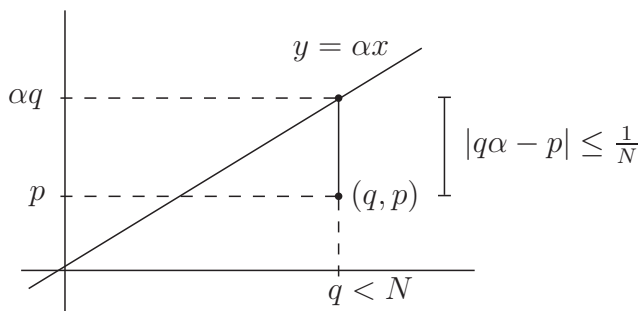


Figura 8.4: Interpretación geométrica del teorema de Dirichlet.

Usaremos mucho la equivalencia entre las desigualdades

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{c}{q} \quad \text{y} \quad |q\alpha - p| < c \tag{8.3}$$

teniendo en mente tanto a la distancia entre  $\alpha$  y  $p/q$ , como a la distancia entre rectas con pendiente  $\alpha$  y puntos con coordenadas enteras. Téngase siempre presente su interpretación geométrica.

Dirichlet nos asegura para cualquier real  $\alpha$  la existencia de *un* racional  $p/q$  que satisface (8.1). Si  $\alpha$  es irracional, podemos probar que hay una *infinitud* de racionales que satisfacen la desigualdad del teorema de Dirichlet.

**Corolario 8.3.** *Sea  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ , y sea  $N \in \mathbb{Z}^+$ . Existen infinitos enteros  $p, q$  tales que  $1 \leq q < N$  y*

$$|q\alpha - p| < \frac{1}{N}.$$

Si  $\alpha$  es racional, no podemos decir lo mismo. Existen racionales para los que sólo ellos mismos satisfacen la desigualdad, como podemos deducir del lema 8.1. Si  $\alpha = r/s$  con  $s > N$ , y si  $p/q$  satisface

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| = \left| \frac{r}{s} - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{1}{qN} < \frac{1}{qs},$$

entonces  $p/q = \alpha$ .

Dado que en el teorema de Dirichlet tenemos  $1 \leq q < N$ , entonces  $1/N < 1/q$ , de donde obtenemos el siguiente corolario.

**Corolario 8.4.** *Sea  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Entonces existe un racional  $p/q \in \mathbb{Q}$  tal que*

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^2}. \quad (8.4)$$

*Si  $\alpha$  es irracional, entonces existen infinitos racionales  $p/q \in \mathbb{Q}$  que satisfacen (8.4).*

También podríamos concluir el resultado del corolario 8.4 usando a los convergentes de la fracción continua de  $\alpha$ . Recordamos (del corolario 3.9) que si  $p_n/q_n$  y  $p_{n+1}/q_{n+1}$  son convergentes de  $\alpha \in \mathbb{R}$ , entonces

$$\left| \alpha - \frac{p_n}{q_n} \right| \leq \left| \frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} \right| = \frac{1}{|q_n q_{n+1}|} < \frac{1}{q_n^2}. \quad (8.5)$$

Así, si  $\alpha$  es irracional, tiene infinitos convergentes y hay por tanto infinitos racionales que satisfacen (8.4).<sup>3</sup> Es natural que los convergentes de la fracción continua de un número real aparezcan al hablar de aproximaciones racionales. Recordemos que en el capítulo 3 probamos que los convergentes son *mejores aproximaciones racionales*, de modo que son los candidatos ideales para aproximar reales por racionales con denominador pequeño.

Los últimos resultados marcan una diferencia entre racionales e irracionales. De hecho, el corolario 8.4 nos servirá para caracterizar a los irracionales.

**Corolario 8.5.** *Sea  $\alpha \in \mathbb{R}$ .  $\alpha$  es irracional si y sólo si existen infinitos  $p/q \in \mathbb{Q}$  que satisfacen*

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^2}. \quad (8.6)$$

Con este corolario vemos que podemos obtener información de un número  $\alpha$  conociendo cuán cerca tiene racionales con denominador pequeño. En este caso, saber cuántos racionales (finitos o infinitos) satisfacen la desigualdad (8.6) nos dice si  $\alpha$  es racional o no.

Buscamos encontrar la función  $f : \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  que más rápido crezca tal que para todo irracional  $\alpha$  existan infinitos racionales  $p/q$  que satisfagan

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{f(q)}.$$

---

<sup>3</sup>Para obtener la desigualdad (8.5) lo único que se usa es que  $|p_n q_{n+1} - p_{n+1} q_n| = 1$  y que  $\alpha$  está entre  $p_n/q_n$  y  $p_{n+1}/q_{n+1}$ . Estas dos condiciones las satisfacen cualesquiera dos términos consecutivos del camino en  $\mathcal{SBF}$  con sucesión  $(a_0, a_1, \dots)$  para  $\alpha = [a_0, a_1, \dots]$ , de modo que la desigualdad (8.5) la satisfacen no sólo los convergentes de  $\alpha$ , sino todos los términos del camino en  $\mathcal{SBF}$  con sucesión  $(a_0, a_1, a_2, \dots)$ .

Encontramos ya que  $f(q) = q^2$  funciona. Intentaremos mejorar esta cota primero multiplicando  $q^2$  por una constante positiva:  $f(q) = cq^2$ , y si tenemos éxito, buscaremos incrementar el exponente:  $f(q) = q^{2+\mu}$ .

El primer incremento que haremos será con  $f(q) = 1/2q^2$ . Nos preguntamos si se satisface que para todo  $\alpha$  irracional existen infinitos racionales  $p/q$  que satisfacen

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{2q^2}. \quad (8.7)$$

La respuesta es sí. Lo probaremos con el teorema de Vahlen, que usa los convergentes de la fracción continua de  $\alpha$ .

**Teorema 8.6.** (Vahlen, 1895 [22] I§5)

Sea  $\alpha \in \mathbb{R}$ , y sean  $p_{n-1}/q_{n-1}$  y  $p_n/q_n$  convergentes consecutivos de  $\alpha$ . Entonces se satisface alguna de las siguientes desigualdades:

$$\left| \alpha - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{2q_n^2} \quad \text{ó} \quad \left| \alpha - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} \right| < \frac{1}{2q_{n-1}^2}.$$

Si  $\alpha$  es irracional, basta entonces notar que tiene infinitos convergentes, por lo que hay infinitos racionales que satisfacen (8.7). De hecho, todos los racionales que satisfagan (8.7) deben ser convergentes de  $\alpha$ , como vemos en el siguiente teorema.

**Teorema 8.7.** (Legendre [22] I§5)

Sea  $\alpha \in \mathbb{R}$ , y sean  $p, q$  enteros primos relativos tales que

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{2q^2}.$$

Entonces  $p/q$  es un convergente de  $\alpha$ .

Este resultado dice que los racionales que aproximan a  $\alpha$  relativamente bien deben ser sus convergentes. Si buscamos buenas aproximaciones racionales para  $\alpha$ , debemos buscar entre sus convergentes.

Para dar la siguiente mejora para la función  $f(q)$  usaremos el teorema de Hurwitz, tomando  $f(q) = \sqrt{5}q^2$ . Sin embargo, ya no podemos ir más lejos. Hurwitz también prueba que esta cota es la mejor posible.

**Teorema 8.8.** (Hurwitz, 1891 [22] I§2) <sup>4</sup>

i) Para todo  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  existen infinitos racionales  $p/q$  que satisfacen

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{\sqrt{5}q^2}. \quad (8.8)$$

ii) Si  $\sqrt{5}$  es reemplazado en (8.8) por  $c > \sqrt{5}$ , entonces i) deja de ser cierto.

<sup>4</sup>En [9], Ford da una ingeniosa prueba geométrica del teorema de Hurwitz, en donde pone de manifiesto su relación con las transformaciones modulares y la división modular del semiplano complejo.

Para demostrar la primera parte del teorema de Hurwitz usaremos el árbol de Stern-Brocot. Recordemos que si  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  está en  $\mathcal{SBM}$ , las pendientes de los vectores columna de  $A$  y de sus descendientes izquierdo y derecho  $((a, c), (a + b, c + d)$  y  $(b, d)$ ) están ordenados de la siguiente manera:

$$\frac{c}{a} < \frac{c + d}{a + b} < \frac{d}{b}.$$

El resultado que usaremos es que si un real  $\alpha$  está entre  $c/a$  y  $d/b$ , entonces alguno de los racionales  $c/a$ ,  $d/b$  ó  $(c + d)/(a + b)$  satisface la desigualdad (8.8) del teorema de Hurwitz. Lo planteamos en el siguiente teorema adaptando a  $\mathcal{SBM}$  un resultado análogo para *sucesiones de Farey* ([22] I§2).

**Teorema 8.9.** *Sea  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  en  $\mathcal{SBM}$ , y sea  $\alpha \in \mathbb{R}$  tal que  $c/a < \alpha < d/b$ . Entonces se cumple una de las siguientes desigualdades:*

$$\left| \alpha - \frac{c}{a} \right| < \frac{1}{\sqrt{5}a^2}, \quad \left| \alpha - \frac{c + d}{a + b} \right| < \frac{1}{\sqrt{5}(a + b)^2} \quad \text{ó} \quad \left| \alpha - \frac{d}{b} \right| < \frac{1}{\sqrt{5}b^2}.$$

Es decir, si la recta  $y = \alpha x$  tiene una pendiente irracional estrictamente entre las pendientes de los vectores columna de  $A$  en  $\mathcal{SBM}$ ,  $(a, c)$  y  $(b, d)$ , entonces o bien la pendiente de uno de estos vectores o la de su suma es un racional que satisface la desigualdad buscada. Si queremos verlo como distancia entre puntos con coordenadas enteras y la recta  $y = \alpha x$  (ver figura 8.5), escribimos

$$|a\alpha - c| < \frac{1}{\sqrt{5}a}, \quad |b\alpha - d| < \frac{1}{\sqrt{5}b} \quad \text{ó} \quad |(a + b)\alpha - (c + d)| < \frac{1}{\sqrt{5}(a + b)}.$$

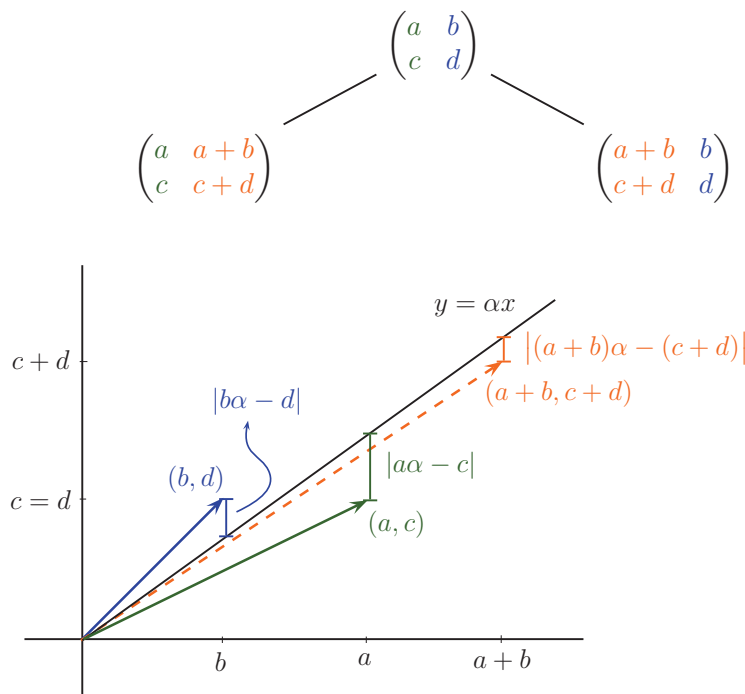


Figura 8.5: Interpretación geométrica del teorema 8.9.

Si  $\alpha$  es irracional, podemos aplicar el teorema 8.9 repetidamente para generar un número infinito de racionales que satisfagan la desigualdad (8.8), y así probar la primera parte del teorema de Hurwitz. De hecho, sabiendo que los convergentes de  $\alpha$  aparecen como vectores columna de matrices en  $\mathcal{SBM}$ , también podríamos usar el teorema 8.9 para probar el teorema de Borel, que establece un resultado similar al de Vahlen usando los convergentes de las fracciones continuas.

**Teorema 8.10.** *\*(Borel, 1903 [22] I§5)*

Sea  $\alpha \in \mathbb{R}$ . De cada tres convergentes consecutivos de  $\alpha$  al menos uno de ellos satisface que

$$\left| \alpha - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{\sqrt{5} q_n^2}.$$

Aquí topamos con pared en nuestra búsqueda de cotas de la forma  $1/f(q)$  con  $f(q) = cq^2$ . No podemos mejorar esta cota, como establece la segunda parte del Teorema de Hurwitz. Para probarlo, exhibiremos un irracional  $\alpha$  para el que la mejor cota posible es  $f(q) = \sqrt{5}q^2$ .

**Teorema 8.11.** *Sea  $c > \sqrt{5}$ , y sea  $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ . Entonces la desigualdad*

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{cq^2} \tag{8.9}$$

*se satisface sólo para un número finito de racionales  $p/q$ .*

El núcleo de la prueba está en ver que los convergentes de  $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ , que son las mejores aproximaciones racionales de  $\alpha$ , están lo suficientemente lejos de  $\alpha$ . De entrada sabemos que sólo los convergentes de  $\alpha$  pueden satisfacer la desigualdad (8.9), de modo que si para alguna  $N \in \mathbb{N}$  los convergentes de  $\alpha$  de orden  $n \geq N$  no la satisfacen, entonces sólo un número finito de racionales (entre los convergentes de  $\alpha$  de orden  $n < N$ ) la puede satisfacer.

Notamos que, dado  $\alpha \in \mathbb{R}$ , es equivalente decir que existe una constante  $c > 0 \in \mathbb{R}$  para el que la desigualdad

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{cq^2} \tag{8.10}$$

tiene sólo un número finito de soluciones racionales  $p/q$ , y decir que existe una constante  $c' > 0 \in \mathbb{R}$  para la que

$$\frac{1}{c'q^2} < \left| \alpha - \frac{p}{q} \right| \quad \text{para todo } \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}. \tag{8.11}$$

Para probar esta equivalencia, si suponemos que la desigualdad (8.10) se satisface sólo para un número finito de racionales, para concluir (8.11) basta tomar  $c' > c$  y  $c'$  mayor que el máximo de los inversos de las distancias  $|\alpha - p/q|$  para los racionales  $p/q$  que satisfacen (8.10). Si ahora suponemos (8.11), tomando  $c = c'$ , la desigualdad (8.10) se satisface para un número finito de racionales (ninguno).

Con estos resultados queda demostrado el teorema de Hurwitz completo; con él dimos la mayor constante  $c$  para la que la desigualdad (8.10) tiene infinitas soluciones enteras para un irracional arbitrario  $\alpha$ .

El hecho de que no podamos mejorar la cota  $f(q) = \sqrt{5}q^2$  implica que no podemos aspirar a mejorar la cota en el exponente de  $q$ , como vemos en la siguiente proposición.

**Proposición 8.12.** *Sea  $\alpha \in \mathbb{R}$  tal que para alguna constante  $c > 0 \in \mathbb{R}$  se tiene*

$$\frac{1}{cq^2} < \left| \alpha - \frac{p}{q} \right| \quad \text{para todo } \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}.$$

*Entonces para todo  $\epsilon > 0$  la desigualdad*

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^{2+\epsilon}}$$

*tiene sólo un número finito de soluciones.*

Que no podamos dar mejores cotas para algunos irracionales no significa que no podamos hacerlo para ninguno. Si renunciamos a que las cotas funcionen para todos los irracionales, podemos seguir mejorando las cotas para todos los que sea posible. Esto da una manera natural de separar a los números reales en ciertas clases, relacionadas con la partición de reales que dimos en el capítulo 7. Irracionales que están en la misma clase aceptan el mismo grado de aproximaciones racionales.

Lo que haremos ahora es explorar el terreno de los distintos tipos de irracionales que admiten distintas aproximaciones racionales.

## 8.2. Clases de irracionales y el espectro de Lagrange

Vimos que para la razón áurea  $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$  la cota del teorema de Hurwitz es inmejorable. ¿Para qué otros números es inmejorable esta cota? La respuesta es que para todos aquellos reales  $\alpha$  equivalentes a  $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ , es decir, aquellos cuya fracción continua es eventualmente igual a la de  $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ , o que pueden ser llevados a  $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$  por una transformación modular.

**Teorema 8.13.** *Sea  $\alpha = [a_0, \dots, a_N, 1, 1, \bar{1}, \dots]$ . Entonces, si  $c > \sqrt{5}$ , la desigualdad*

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{cq^2}$$

*se satisface sólo para un número finito de racionales  $p/q$ .*

Al quitar toda la clase de equivalencia de  $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ , nos quedamos con irracionales para los que podemos dar mejores aproximaciones racionales. Para éstos, la siguiente mejora en la constante de la cota  $f(q) = cq^2$  es con  $c = \sqrt{8}$ , también dada por Hurwitz.

**Teorema 8.14.** \* (Hurwitz [22] I§5)

*Sea  $\alpha = [a_0, a_1, \dots]$  tal que  $\alpha$  no sea equivalente a  $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ .<sup>5</sup> Entonces existen infinitos racionales  $p/q$  tales que*

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{\sqrt{8}q^2}$$

<sup>5</sup>Podemos expresar esto pidiendo que  $|a_n| \geq 2$  para infinitos  $n \in \mathbb{N}$ .



¿Quiénes son ahora los números para los que la constante  $\sqrt{8}$  es inmejorable? Son aquellos equivalentes a  $1 + \sqrt{2} = [2, 2, 2, \dots]$ . Y si quitamos éstos, y los equivalentes a la razón áurea, podemos encontrar una mejor constante? Sí. Podemos seguir con este procedimiento encontrando constantes  $c$  cada vez mayores para los que la desigualdad

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{cq^2}$$

se satisface sólo para un número finito de racionales  $p/q$  para ciertos irracionales  $\alpha$ . A estas constantes se les conoce como constantes de Lagrange, y al conjunto de ellas, que es un conjunto infinito cuyos primeros elementos son:

$$\{\sqrt{5}, \sqrt{8}, \sqrt{221}/5, \sqrt{1517}/13, \sqrt{7565}/29, \dots\},$$

se le conoce como el espectro de Lagrange. Se conoce mucho sobre el espectro de Lagrange, que está muy relacionado con el espectro de Markov. Estos temas pueden consultarse en [6] y [7].<sup>6</sup>

La pregunta que surge es ¿para todo número irracional  $\alpha$  existe una constante  $c = c(\alpha) > 0$  tal que la desigualdad

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{cq^2}$$

tenga sólo un número finito de soluciones racionales?

Notamos que todos los irracionales que fuimos eliminando con una constante de Lagrange satisfacen esto. Sin embargo, esto está lejos de ser cierto para todos los irracionales, pues podemos encontrar números con aproximaciones racionales tan buenas como queramos, como muestra el siguiente teorema.

**Teorema 8.15.** [15] §8

Sea  $f : \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ . Entonces existe  $\alpha \in \mathbb{R}$  tal que la desigualdad

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < f(q)$$

tiene infinitas soluciones para  $p/q \in \mathbb{Q}$ .

*Demostración.* Sea  $f : \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ . Construyamos  $\alpha$  a través de su fracción continua. Veamos cómo tienen que ser los cocientes parciales de su fracción continua  $[a_0, a_1, \dots]$ . Tomamos  $a_0$  un entero positivo arbitrario. Pedimos que

$$a_{n+1} > \frac{1}{q_n^2 f(q_n)}.$$

Ahora, según el lema 9.7 (ver apéndice 4),

$$\left| \alpha - \frac{p_n}{q_n} \right| = \frac{1}{q_n^2 \left( s_{n+1} + \frac{q_{n-1}}{q_n} \right)} \leq \frac{1}{q_n^2 s_{n+1}}.$$

<sup>6</sup>En [7] se dedica un capítulo a la relación entre el espectro de Lagrange y el grupo modular, donde se retoma el trabajo de Ford para probar el teorema de Hurwitz.

donde  $s_n = [a_n, a_{n+1}, \dots]$  es el residuo de orden  $n$  de la fracción continua de  $\alpha$ . Entonces

$$\left| \alpha - \frac{p_n}{q_n} \right| \leq \frac{1}{q_n^2 a_{n+1}} < \frac{1}{q_n^2 \left( \frac{1}{q_n^2 f(q_n)} \right)} = f(q_n).$$

□

El teorema 8.15 dice que podemos construir números irracionales  $\alpha$  para los que no encontremos una constante positiva  $c = c(\alpha)$  tal que la desigualdad

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{cq^2} \quad (8.12)$$

tenga sólo un número finito de soluciones racionales  $p/q$ . Lo interesante es que construimos este irracional a través de su fracción continua: pidiendo que los cocientes parciales de la fracción continua de  $\alpha$  sean lo suficientemente grandes. Pronto ahondaremos en la relación entre el tamaño de los cocientes parciales de la fracción continua de un irracional, y cuán aproximable es éste por racionales con denominador pequeño.

Los números para los que existe una constante positiva  $c$  para la que la desigualdad (8.12) no tiene soluciones racionales los llamaremos *mal aproximables*.

**Definición 8.16.** Decimos que  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  es *mal aproximable* si existe  $c = c(\alpha) > 0$  tal que para todo racional  $p/q$  se satisface

$$\frac{1}{cq^2} < \left| \alpha - \frac{p}{q} \right| \quad \text{para todo } \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}.$$

Así, la razón áurea,  $1 + \sqrt{2}$ , todos los irracionales que están en sus clases de equivalencia, y todos para los que encontremos una constante de Lagrange, son todos mal aproximables.

¿Cómo saber si un irracional es mal aproximable? Podemos caracterizarlos a través de su fracción continua. La clave está en que tenemos una forma de medir la cercanía de  $\alpha$  a sus convergentes en términos de los cocientes parciales de su fracción continua. Concretamente, en el apéndice 4 probamos (desigualdad (9.22)) que

$$\frac{1}{q_n^2 (|a_{n+1}| + 2)} \leq \left| \alpha - \frac{p_n}{q_n} \right| \leq \frac{1}{q_n^2 |a_{n+1}|}.$$

**Teorema 8.17.** [22] I§5

Sea  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ,  $\alpha = [a_0, a_1, a_2, \dots]$ .  $\alpha$  es *mal aproximable* si y sólo si existe  $M \in \mathbb{R}$  tal que

$$|a_i| < M \quad \text{para todo } i \in \mathbb{N}.$$

Recordamos que Euler y Lagrange probaron que un irracional  $\alpha$  es irracional cuadrático si y sólo si su fracción continua es periódica. Esto los hace mal aproximables, como establecemos en el siguiente

**Corolario 8.18.** Sea  $\alpha$  un irracional cuadrático. Entonces  $\alpha$  es *mal aproximable*.

Podemos ver la equivalencia del teorema 8.17 en varios ámbitos, pues tenemos varias interpretaciones para los cocientes parciales  $a_i$  de una fracción continua  $[a_0, a_1, a_2, \dots]$ : en el algoritmo de Euclides, los caminos en  $\mathcal{SB}$ , y la explosión de singularidades. En el algoritmo de Euclides, que los cocientes parciales  $a_i$  sean acotados significa que hay un número máximo de cuadrados que caben en los rectángulos que obtenemos en el procedimiento geométrico, que funciona para todos los rectángulos obtenidos, de modo que el conjunto de parejas para las que esto sucede al aplicarles el algoritmo de Euclides son aquellas cuyo cociente es mal aproximable, y sólo éstas. En el contexto de  $\mathcal{SB}$  significa que los caminos en  $\mathcal{SBF}$  en los que el número de descendientes derechos consecutivos y de descendientes izquierdos consecutivos es acotado son aquellos que convergen a irracionales mal aproximables (y sólo éstos). Y en el contexto de explosión de las singularidades, significa que para las ecuaciones con vector asociado cuya pendiente es mal aproximable (y sólo para éstas), es acotado el número de veces consecutivas que tomamos un mismo cambio de coordenadas al seguir el camino de nodos.

Los números mal aproximables contienen al conjunto de los números algebraicos de grado dos. Pero ¿a quién más contienen? ¿los algebraicos de mayor grado pertenecen o no a este conjunto? No sabemos. Sin embargo, ya que hay un número no numerable de sucesiones acotadas de enteros positivos, y un número no numerable de sucesiones no acotadas de enteros positivos, podemos decir que hay un número no numerable de números mal aproximables, y un número no numerable de números que no son mal aproximables. Esto implica que hay números algebraicos y números trascendentes que son mal aproximables, y hay números algebraicos y números trascendentes que no son mal aproximables.

Movamos ahora nuestra atención a mejorar la cota  $1/f(q)$  incrementando el exponente en  $f(q) = q^2$ . Entonces podremos decir un poco más sobre los números algebraicos y trascendentes.

### 8.3. Un paso más allá: Liouville y Roth

Ahora queremos mejorar la cota dada por  $f(q) = q^2$  cambiando el exponente de  $q$ . Ya vimos que hay irracionales  $\alpha$  para los que la desigualdad

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^2}. \quad (8.13)$$

deja de tener un número infinito de soluciones al incrementar el exponente de  $q$ . ¿Para qué irracionales sucede esto? El siguiente teorema, debido a Liouville, responde esto en cierta medida. Es un teorema de gran importancia, pues permitió mostrar la existencia de los números trascendentes, además de dar una manera explícita de construir ejemplos de ellos.

**Teorema 8.19.** (Liouville, 1884 [22] V§1)

Sea  $\alpha$  un algebraico de grado  $d \geq 2$ . Entonces existe  $c = c(\alpha) > 0$  tal que

$$\frac{c}{q^d} < \left| \alpha - \frac{p}{q} \right| \quad \text{para todo } \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}.$$

Este teorema dice que un irracional  $\alpha$  algebraico de grado  $d \geq 2$  no puede ser aproximado por racionales  $p/q$  con un margen de error del orden de  $1/q^d$ . Si algún irracional  $\alpha$  sí pudiera ser aproximado de esa manera para toda  $d \in \mathbb{N}, d \geq 2$ , entonces  $\alpha$  debería ser trascendente, según la contrapositiva del teorema de Liouville. La enunciamos a continuación.

**Teorema 8.20.** *Sea  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Si para toda  $c > 0$  y para toda  $d \in \mathbb{N}, d \geq 2$ , existe un racional  $p/q$  tal que*

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{c}{q^d} \quad (8.14)$$

*entonces  $\alpha$  es trascendente.*

La siguiente pregunta es ¿existe un irracional para el que pasa esto? La cota  $c/q^d$  es bastante rigurosa, pues  $f(q) = q^d$  crece bastante rápido, y si para  $d$  tan grande como queramos debe haber un racional para el que se satisfaga (8.14), el número  $\alpha$  debe ser *muy* bien aproximable por racionales con denominador pequeño. El teorema 8.15 sugiere que sí hay irracionales que lo satisfagan. Hay sólo que construir un número que sea tan bien aproximable por racionales con denominador pequeño, que el teorema de Liouville garantice que no pueda ser algebraico. Esta fue la manera en que por primera vez se exhibió un número trascendente, y con esto se probó su existencia.

**Proposición 8.21.** *Sea*

$$\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} 10^{-n!}. \quad (8.15)$$

*Entonces  $\alpha$  es trascendente.*

*Demostración.* Sea  $\alpha$  como en el enunciado de la proposición. Los enteros  $q(k) = 10^{k!}$  y  $p(k) = 10^{k!} \sum_{n=1}^k 10^{-n!}$  sirven para probar que

$$\left| \alpha - \frac{p(k)}{q(k)} \right| < \frac{c}{q(k)^d} \quad \text{para toda } c \in \mathbb{R}, c > 0, \quad \text{y} \quad \text{para toda } d \in \mathbb{N}.$$

Entonces  $\alpha$  es trascendente. □

El número (8.15) fue el primer trascendente en exhibirse. Podemos construir muchos números trascendentes de la misma manera que construimos éste. Se conocen como *números de Liouville*, y son trascendentes como consecuencia del teorema de Liouville.

**Definición 8.22.** *Decimos que  $\alpha$  es un número de Liouville si existen infinitos racionales  $\{r_1/s_1, r_2/s_2, r_3/s_3, \dots\}$  con  $s_n > 0$  tales que*

$$\left| \alpha - \frac{r_n}{s_n} \right| < \frac{1}{s_n^n}.$$

Usando el teorema de Liouville podemos poner condiciones sobre los cocientes parciales de la fracción continua de  $\alpha$  para asegurar que  $\alpha$  es trascendente, lo que nos permite interpretar el resultado con las diversas lecturas que dimos de los cocientes parciales de la fracción continua de  $\alpha$ .

**Proposición 8.23.** *Sea  $\alpha = [a_0, a_1, \dots] \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ , con  $c_n = p_n/q_n$  su convergente de orden  $n$ . Si los cocientes de  $[a_0, a_1, \dots]$  satisfacen*

$$|a_{n+1}| \geq q_n^{n-1} \quad \text{para toda } n \geq 0,$$

*entonces  $\alpha$  es trascendente.*

De hecho bastaría con que una subsucesión de  $\{a_n\}$  creciera de esta manera para garantizar el resultado. Notamos que las últimas dos proposiciones dan condiciones suficientes para que un irracional sea trascendente. Sin embargo, estas condiciones no son necesarias.

Ahora nos preguntamos si al reemplazar en el teorema de Liouville  $f(q) = q^d$  por un exponente menor, la desigualdad

$$\frac{c}{q^d} < \left| \alpha - \frac{p}{q} \right|$$

se sigue satisfaciendo para todo racional  $p/q$ .

Enunciamos una serie de mejoras que se fueron haciendo al teorema de Liouville, hasta culminar en el importante teorema de Roth.

Sea  $\alpha$  algebraico de grado  $d \geq 2$ . Buscamos encontrar  $\mu(\alpha) < d$  para el que exista una constante  $c = c(\alpha)$  tales que la desigualdad

$$\frac{c}{q^\mu} < \left| \alpha - \frac{p}{q} \right|$$

se satisfaga para todo racional  $p/q$  con  $q > 0$ . En 1909 Thue probó que basta tomar  $\mu > \frac{1}{2}d + 1$ . Después Siegel probó, en 1921, que basta tomar  $\mu > 2\sqrt{d}$ . Dyson dio otra mejora en 1947, probando que  $\mu > \sqrt{2d}$  es suficiente. Pero la más grande mejora la dio Roth en 1955 al probar que basta tomar  $\mu > 2$ , quitando la dependencia del grado de algebraicidad de  $\alpha$ . Por su trabajo le otorgaron la medalla Fields.

**Teorema 8.24.** \* (Roth, [22] V§1)

Sea  $\alpha \in \mathbb{R}$  algebraico de grado  $d \geq 2$ . Sea  $\varepsilon > 0$ . Entonces la desigualdad

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^{2+\varepsilon}}$$

tiene sólo un número finito de soluciones racionales  $p/q$ .

O, enunciado de manera diferente

**Teorema 8.25.** \* Sea  $\alpha \in \mathbb{R}$  algebraico de grado  $d \geq 2$  y  $\varepsilon > 0$ . Entonces existe  $c = c(\alpha, \varepsilon)$  tal que

$$\frac{c}{q^{2+\varepsilon}} < \left| \alpha - \frac{p}{q} \right| \quad \text{para todo } \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}.$$

En el resultado de Roth, el exponente que da para  $q$  en la cota inferior de  $|\alpha - p/q|$  ya no depende del grado de algebraicidad de  $\alpha$ . La mejora al teorema de Liouville se puede apreciar sobre todo para algebraicos de grado muy alto (de hecho si  $\alpha$  es algebraico de grado 2, el teorema de Roth es más débil que el de Liouville). Roth prueba que la aproximación por racionales de denominador pequeño no tiene que ser tan buena como pedía Liouville para garantizar que un irracional sea trascendente.

Usemos ahora el teorema de Roth para dar condiciones sobre los cocientes parciales de la fracción continua de un número real que aseguran su trascendencia. Debilitamos las condiciones que dimos en la proposición 8.23.

**Proposición 8.26.** Sea  $\varepsilon > 0$  y  $\alpha = [a_0, a_1, \dots] \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  con  $c_n = p_n/q_n$  su convergente de orden  $n$ . Si  $|a_{n+1}| \geq q_n^\varepsilon$ , entonces  $\alpha$  es trascendente.

Resumamos rápidamente lo que hemos dicho hasta ahora. Hemos analizado desigualdades del estilo

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{f(q)}$$

para ver cuán cerca tiene un real  $\alpha$  racionales con denominador pequeño. Lo primero que vimos es que si  $\alpha$  es racional, es pésimamente aproximable por otros racionales de denominador pequeño: todos los racionales distintos de  $\alpha = r/s$  satisfacen

$$\frac{1}{|sq|} \leq \left| \frac{r}{s} - \frac{p}{q} \right|.$$

En este sentido los convergentes  $c_n = p_n/q_n$  de  $\alpha = r/s$  están “tan cerca como es posible” a  $\alpha$ , pues tenemos que

$$\frac{1}{|sq_n|} = \left| \frac{r}{s} - \frac{p_n}{q_n} \right|.$$

Vimos después que si  $\alpha$  es irracional, entonces existen infinitos racionales  $p/q$  que satisfacen

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^2} \quad (\text{Dirichlet})$$

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{2q^2} \quad (\text{Vahlen})$$

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{\sqrt{5}q^2} \quad (\text{Hurwitz})$$

Hurwitz prueba que la constante  $\sqrt{5}$  es inmejorable, pues si  $\alpha = (1 + \sqrt{5})/2$ , la desigualdad

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{cq^2}, \quad \text{con } c > \sqrt{5},$$

sólo se satisface para un número finito de racionales. Sin embargo, si  $\alpha$  no es equivalente a  $(1 + \sqrt{5})/2$ , entonces hay infinitos racionales que satisfacen

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{\sqrt{8}q^2}.$$

Si  $\alpha$  no es equivalente a  $(1 + \sqrt{5})/2$  ni a  $1 + \sqrt{2}$ , entonces hay infinitos racionales que satisfacen

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{5}{\sqrt{221}q^2}.$$

Le siguen una serie de resultados asociados al espectro de Lagrange (para más sobre este tema, véase [6] y [7]).

Dijimos después que los irracionales  $\alpha$  para los que existe  $c = c(\alpha)$  tal que

$$\frac{1}{cq^2} < \left| \alpha - \frac{p}{q} \right| \quad \text{para todo } \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}.$$

son los números mal aproximables, y que éstos son exactamente los que tienen en su fracción continua cocientes parciales acotados.

Vimos después con el teorema de Liouville que si  $\alpha$  es algebraico de grado  $d \geq 2$  entonces existe  $c = c(\alpha)$  tal que

$$\frac{c}{q^d} < \left| \alpha - \frac{p}{q} \right| \quad \text{para todo } \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}.$$

Con esto pudimos dar condiciones suficientes para que un número  $\alpha$  sea trascendente, y pudimos traducirlas a condiciones sobre los cocientes parciales de la fracción continua de  $\alpha$ , pidiendo que crecieran lo suficiente. Finalmente, vimos que Roth debilita la cota del teorema de Liouville (en el caso  $d > 2$ ) diciendo que si  $\alpha$  es algebraico, entonces para toda  $\varepsilon > 0$  existe  $c = c(\alpha, \varepsilon)$  tal que

$$\frac{c}{q^{2+\varepsilon}} < \left| \alpha - \frac{p}{q} \right| \quad \text{para todo } \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}.$$

También pudimos usar este resultado para dar condiciones suficientes sobre los cocientes parciales de la fracción continua de  $\alpha$  para garantizar su trascendencia.

Resumamos qué implicaciones tenemos entre distintos tipos de irracionales. Si  $\alpha$  es irracional cuadrático, entonces  $\alpha$  es mal aproximable. No sabemos si los algebraicos de grado  $d > 2$  son o no mal aproximables, o ninguna de las dos. En cuanto a los trascendentes, sabemos que debe haber números trascendentes que son mal aproximables. Y también que hay trascendentes que no son mal aproximables (los números de Liouville, por ejemplo). Por otro lado, aunque si  $\alpha$  es de Liouville implica que es trascendente, la implicación recíproca no es cierta ( $\pi$  y  $e$ , por ejemplo, son números trascendentes, pero no son números de Liouville). Un hecho interesante con muchas implicaciones es que aunque hay un número no numerable de números de Liouville, éstos tienen medida de Lebesgue cero.

## 8.4. Explosión de singularidades y aproximaciones racionales

Traduzcamos los resultados de las secciones anteriores al contexto de nuestro problema de explosiones sucesivas. Las afirmaciones que haremos en esta sección son de carácter ilustrativo; aunque no dan una manera de verificar si un número es irracional, irracional cuadrático, mal aproximable, algebraico o trascendente, sí nos hablan de cierta relación entre el comportamiento de ecuaciones cuyo campo vectorial asociado está definido por una matriz con cociente de valores propios  $\alpha$ , y cuán aproximable es  $\alpha$  por racionales. El propósito de esta sección es enunciar de manera explícita esta relación.

Enunciemos esto en las siguientes afirmaciones, usando los resultados de la sección pasada.

**Afirmación 8.27.** *Consideremos la ecuación*

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

con  $p, q \in \mathbb{R}$ . *El cociente  $p/q$  es mal aproximable si y sólo si el número de veces consecutivas que nos quedamos con un mismo cambio de coordenadas en el camino de explosión es acotado.*

Esta afirmación es consecuencia del corolario 6.8 y del teorema 8.17.

Ya vimos que los irracionales cuadráticos son mal aproximables, de modo que cada irracional cuadrático tiene una constante de Lagrange.

De los resultados que vimos, podemos enunciar las siguientes dos proposiciones.

**Proposición 8.28.** *Dada la ecuación*

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad (8.16)$$

el número real  $q/p$  tiene constante de Lagrange  $\sqrt{5}$  si y sólo si el camino de explosión de la ecuación 8.16 tiene sucesión de la forma  $(a_0, \dots, a_n, 1, 1, 1, 1, \dots)$ .

**Proposición 8.29.** *Dada la ecuación 8.16,  $q/p$  tiene constante de Lagrange  $\sqrt{8}$  si y sólo si el camino de explosión de la ecuación 8.16 tiene sucesión de la forma  $(a_0, \dots, a_n, 2, 2, 2, 2, \dots)$ .*

Podemos enunciar proposiciones similares para los primeros valores del espectro de Lagrange.

También podemos afirmar que ya que la explosión de la singularidad de una ecuación con vector asociado con pendiente  $\alpha$  no cambia sino el principio de la fracción continua de  $\alpha$ , entonces la explosión preserva lo mal aproximable.

Por la misma razón, si  $q/p$  es un número *muy* bien aproximable por racionales, tanto así que los cocientes parciales de su fracción continua satisfacen las condiciones de la proposición 8.26 (y  $p/q$  es por tanto trascendente), entonces al explotar la ecuación (8.16) obtenemos ecuaciones cuyo campo asociado es definido por una matriz cuyo cociente de valores propios tiene fracción continua que también es *muy* bien aproximable por racionales, también satisface las condiciones de la proposición 8.26 y también es trascendente.

**Proposición 8.30.** *Dada la ecuación (8.16), sean*

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p' & 0 \\ 0 & q' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad y \quad \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p'' & 0 \\ 0 & q'' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

las ecuaciones obtenidas al explotar (8.16) con ambos cambios de coordenadas. Si  $q/p$  es mal aproximable, entonces  $q'/p'$  y  $q''/p''$  también lo son.

*Demostración.* Dado que  $q/p$ ,  $q'/p'$  y  $q''/p''$  son racionalmente equivalentes, sus fracciones continuas son eventualmente iguales. Ya que los cocientes de la fracción continua de  $q/p$  son acotados, los de las fracciones continuas de  $q'/p'$  y  $q''/p''$  lo son también, y son por tanto mal aproximables.  $\square$

Ahora usaremos las proposiciones 8.23 y 8.26 para dar condiciones sobre el comportamiento bajo la explosión de una ecuación para garantizar que el cociente de los valores propios de la matriz que define al campo vectorial asociado a la ecuación es un número trascendente.

**Afirmación 8.31.** *Consideremos la ecuación*

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (8.17)$$

con  $p, q \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ . Sea  $(a_0, a_1, \dots)$  la sucesión del camino de explosión de (8.17). Si  $|a_{n+1}| \geq q_n^{n-1}$ , donde  $p_n/q_n$  es el convergente  $c_n$  de  $\alpha$ , entonces  $\alpha$  es trascendente.

Esta afirmación es consecuencia del corolario 6.8 y de la proposición 8.23. También como consecuencia del corolario 6.8 pero usando la proposición 8.26, podemos pedir un poco menos para asegurar la trascendencia de  $\alpha$ .



**Afirmación 8.32.** *Consideremos la ecuación*

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (8.18)$$

con  $p, q \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ . Sea  $(a_0, a_1, \dots)$  la sucesión del camino de explosión de (8.18), y sea  $\varepsilon > 0$ . Si  $|a_{n+1}| \geq q_n^\varepsilon$ , donde  $p_n/q_n$  es el convergente  $c_n$  de  $\alpha$ , entonces  $\alpha$  es trascendente.

En muchos ámbitos dentro del terreno de las ecuaciones diferenciales se piden condiciones relacionadas con las aproximaciones racionales: las llamadas *condiciones diofantinas* y la *condición de Brjuno* son condiciones que de algún modo piden que un número no sea “demasiado” bien aproximable por racionales. Particularmente, las aproximaciones racionales están relacionadas con los teoremas de linealización de Poincaré y Siegel, que son ampliamente discutidos en [2] §22, §23. Las aproximaciones racionales están relacionadas también con la teoría KAM y el problema de los *pequeños denominadores*.

# Capítulo 9

## Explosión de singularidades en $\mathbb{C}$

Veamos ahora al caso complejo y veamos qué tanto podemos extender los resultados que ya tenemos. Consideremos para  $x, y \in \mathbb{C}$  la ecuación

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad p, q \in \mathbb{C} \quad (9.1)$$

con singularidad en el origen. La explosión de singularidades se lleva a cabo de manera análoga al caso real. En el caso complejo al explotar el origen, éste se transformará no en una circunferencia sino en una esfera (el divisor excepcional es homeomorfo a  $S^2$ ).

Usamos los mismos cambios de coordenadas para cubrir la variedad  $M$  en que se transforma una vecindad del origen:

$$\text{Si } (x, y) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0\} \text{ y } x \neq 0, \text{ entonces } (x, y) \longrightarrow (x, u), \text{ con } u = \frac{y}{x}.$$

$$\text{Si } (x, y) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0\} \text{ y } y \neq 0, \text{ entonces } (x, y) \longrightarrow (v, y), \text{ con } v = \frac{x}{y}.$$

De manera análoga al caso real, si explotamos el origen de la ecuación (9.1) obtenemos las nuevas ecuaciones

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & q-p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} \dot{v} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p-q & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ y \end{pmatrix}$$

en las coordenadas  $(x, u)$  y  $(v, y)$  respectivamente, considerando que  $x, u, v, y \in \mathbb{C}$ , al igual que  $p, q, p-q$  y  $q-p$ . Nos preguntamos nuevamente qué pasa al realizar explosiones sucesivas. ¿Bajo qué condiciones llegamos después de un número finito de explosiones al caso dicrítico?

Asociamos nuevamente vectores a ecuaciones, ahora asociando a la ecuación (9.1) el vector  $(p, q)$  en  $\mathbb{C}^2$  y repetimos la misma estrategia que en el caso real. Construimos su árbol de explosión (que mostramos en la figura 9.1), que es ahora un árbol de vectores en  $\mathbb{C}^2$ , y notamos que si el cociente  $q/p$  es real, podemos repetir el análisis que tenemos para el caso real, pues todos los vectores del árbol están alineados (nuevamente, son los reales disfrazados de complejos). Concluimos que si  $q/p \in \mathbb{Q}^+$  sí llegamos al caso dicrítico, y requerimos para llegar a él de  $\sum_{i=0}^n a_i$  explosiones si  $q/p = [a_0, a_1, \dots, a_n]$ .

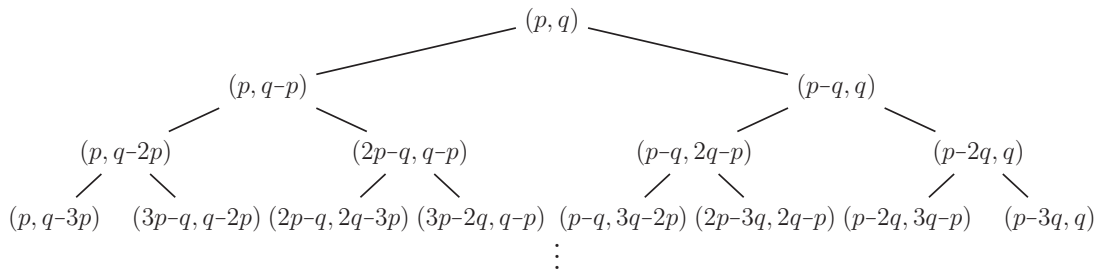


Figura 9.1: Árbol de explosión de la ecuación (9.1) con vector asociado  $(p, q)$  en  $\mathbb{C}^2$ .

Ahora ¿podríamos llegar al caso dicrítico si el cociente  $q/p \notin \mathbb{R}$ ? Para abordar este caso escribimos  $p = p_1 + ip_2$  y  $q = q_1 + iq_2$  y notamos que podemos descomponer el árbol de explosión de (9.1) que mostramos en la figura 9.2) en los dos árboles de la figura 9.3. Esto es porque para obtener los nuevos valores propios en cada explosión, únicamente estamos efectuando restas de números complejos, que llevamos a cabo restando parte real de parte real y parte imaginaria de parte imaginaria. Así, podemos abordar por separado las partes real e imaginaria.

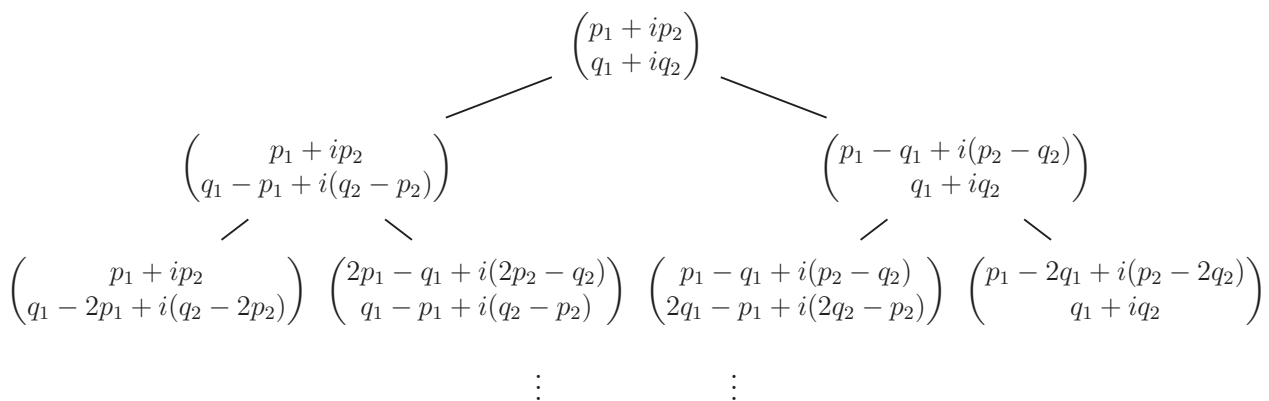


Figura 9.2: Árbol de explosión de la ecuación (9.1) con vector asociado  $(p_1 + ip_2, q_1 + iq_2)$ .

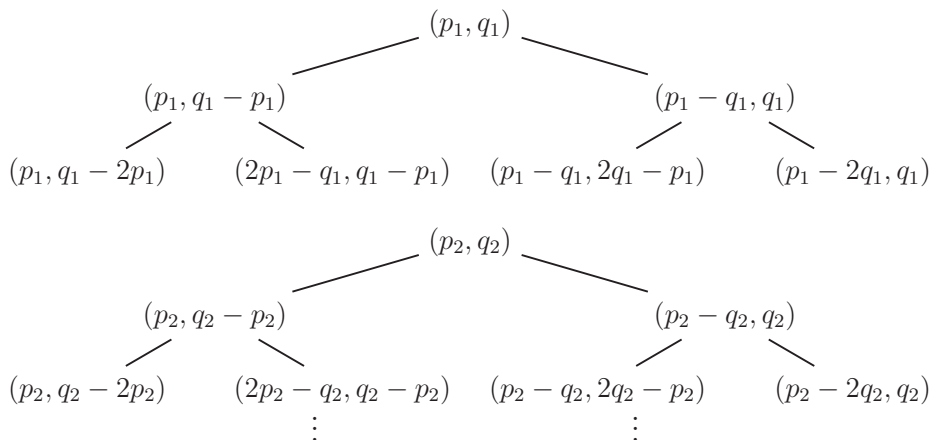


Figura 9.3: Podemos separar el árbol de explosión de la ecuación (9.1) en los dos árboles que se muestran en esta figura.

Podemos usar la herramienta que dimos en el caso real para tratar de anular simultáneamente o bien  $p_1$  y  $p_2$  o bien  $q_1$  y  $q_2$  tomando los cambios de coordenadas adecuados (pues para llegar al caso dicrítico requerimos anular un valor propio: tanto su parte real como su parte imaginaria).

Supongamos que explotamos la ecuación (9.1) y llegamos en un número finito de explosiones al caso dicrítico. En este caso requerimos seguir (en ambos árboles de la figura 9.3) un camino de vectores en el árbol todos con pendiente positiva. En el árbol con raíz  $(p_1, q_1)$  llamemos al  $n$ -ésimo término de este camino  $(p_1^n, q_1^n)$ ; en el árbol con raíz  $(p_2, q_2)$  llamemos al  $n$ -ésimo término de este camino  $(p_2^n, q_2^n)$ . Notamos que al construir estos caminos debemos tomar el mismo descendiente (izquierdo o derecho) en ambos árboles, pues debemos hacer lo mismo a la parte real y a la parte imaginaria de  $p$  y  $q$ . Si anulamos la parte real e imaginaria de un valor propio en el mismo número de explosiones, significa que para algún  $n \in \mathbb{N}$  tenemos que  $(p_1^n, q_1^n) = k(1, 1)$  p.a.  $k \in \mathbb{R}$  y  $(p_2^n, q_2^n) = k'(1, 1)$  p.a.  $k' \in \mathbb{R}$  y en una explosión más se anulan  $p_1$  y  $p_2$  (tomando el primer cambio de coordenadas) ó  $q_1$  y  $q_2$  (tomando el segundo cambio de coordenadas). En este caso, ya que los caminos tienen exactamente la misma sucesión, tenemos que  $q_1/p_1 = q_2/p_2 \in \mathbb{Q}^+$ , es decir,  $q/p \in \mathbb{Q}^+$ . Supongamos entonces que anulamos la parte real e imaginaria de  $p$  ó  $q$  en momentos distintos, es decir, que logramos anular  $q_1^n$  cuando  $q_2^n$  aún no se anula, o  $p_1^n$  cuando  $p_2^n$  aún no se anula (el caso restante es simétrico). En el primer caso tenemos que  $(p_1^n, q_1^n) = (p_1^n, 0)$  y  $(p_2^n, q_2^n) \neq (p_2^n, 0)$ , para mantener nula la segunda coordenada de  $k(p_1^n, 0)$  debemos tomar siempre el segundo cambio de coordenadas. Pero entonces nunca lograremos anular la segunda coordenada de  $(p_2^n, q_2^n)$ , pues para obtener un vector con segunda coordenada cero a partir de otro cuya segunda coordenada es distinta de cero debemos tomar el primer cambio de coordenadas, lo que contradice que llegamos al caso dicrítico. Análogamente si  $(p_1^n, q_1^n) = (0, q_1^n)$  y  $(p_2^n, q_2^n) \neq (0, q_2^n)$ . Para mantener nula la primera coordenada en  $(0, q_1^n)$  debemos tomar sólo el primer cambio de coordenadas, pero entonces nunca lograremos anular la primera coordenada de  $(p_2^n, q_2^n)$ , lo que también contradice que llegamos al caso dicrítico.

Concluimos que si llegamos después de un número finito de explosiones al caso dicrítico, debemos anular las partes real e imaginaria del valor propio  $p$  ó  $q$  en el mismo número de explosiones, lo que nos deja como única posibilidad el caso  $q/p \in \mathbb{Q}^+$ . Hemos probado así la siguiente proposición.

**Proposición 9.1.** *Podemos llegar al caso dicrítico después de explotar la ecuación (9.1) un número finito de veces si y sólo si el cociente de los complejos  $q$  y  $p$  es un racional positivo.*

En [19], Niven hace una extensión a los complejos de las aproximaciones racionales. Define un entero complejo (o entero *Gaussiano*) como un complejo  $u + iv$  en que  $u, v \in \mathbb{Z}$ . Define un complejo racional como un complejo que se puede escribir como cociente de enteros complejos y define un complejo irracional como un complejo no racional. Con estas definiciones prueba teoremas análogos a teoremas de aproximación de irracionales por racionales en  $\mathbb{R}$ . También Ford hace una extensión a los complejos generalizando los *círculos de Ford*. Desconocemos las relaciones que este tipo de aproximaciones tengan con la explosión de singularidades en el caso complejo.



# Apéndice 1

## Unas palabras sobre la historia de las fracciones continuas

Se puede consultar un estudio muy bien documentado de la historia de las fracciones continuas en [4]. Aquí sólo mencionamos de manera panorámica algunos momentos históricos importantes en el desarrollo de las fracciones continuas, y algunos matemáticos importantes que trabajaron con ellas.

Las fracciones continuas fueron utilizadas de manera intuitiva desde antes de que fueran formalizadas. Tanto como método para dar aproximaciones (eran utilizadas por matemáticos hindúes con estos fines) como concepto (el concepto que está detrás de ellas se encuentra tan temprano como el algoritmo de Euclides, que ya se conocía antes de que Euclides lo formalizara en sus *Elementos*) estuvieron presentes en la matemática durante muchos años antes de que tomaran la forma que se les da actualmente en la teoría de números.

Podríamos decir que el primer intento de formalización de las fracciones continuas comenzó con Fibonacci (1170-1250 a.c.) (quien planteó también las *fracciones continuas ascendentes*, un tipo distinto de fracciones continuas). Otro avance en la formalización de las fracciones continuas vino con el matemático italiano Cataldi (en 1613), que sintetizó el trabajo de Bombelli (de 1572) para obtener raíces cuadradas que resulta equivalente a calcular su fracción continua.

El estudio de las fracciones se volvió mucho más sólido con el trabajo de Wallis a mediados del siglo XVII, que fue el primero en darles el nombre de *fracciones continuas*. Wallis, buscando calcular cierta integral y resolver la cuadratura del círculo, acude a Brouncker para encontrar una expresión del valor de  $4/\pi$ . Brouncker lo introduce a las fracciones continuas y es quien lo induce a su estudio. En 1655 Wallis publica su libro *Arithmetica Infinitorum*, donde prueba por primera vez las fórmulas recursivas de los convergentes (tan protagónicas en el estudio actual de las fracciones continuas, y en este trabajo).

Otra gran aportación vino con Huygens (1629-1695), quien usó las fracciones continuas para construir un planetario automático. Buscaba usar el menor número de dientes en un engrane para aproximar cierto radio, logrando obtener un error muy pequeño usando la cualidad de *mejores aproximaciones* de las fracciones continuas.

Después vinieron los grandes matemáticos Euler (1707-1783), Lambert (1728-1777), Lagrange (1736-1783) y Legendre (1752-1833) a dar sus aportaciones a la teoría cada vez más sólida de las fracciones continuas. Euler es considerado como uno de los que más aportaron a la teoría. Publicó en 1737 *De fractionibus continuis*, donde prueba que todo número racional puede escribirse como una fracción continua finita, que un irracional tiene fracción continua infinita y que una fracción continua periódica es un irracional cuadrático. Lambert usó las fracciones continuas

para mostrar que  $\pi$  y  $e$  son irracionales. Conjetura su trascendencia, pero esta tardaría todavía muchos años en ser demostrada. Lagrange hace también importantes aportaciones a la teoría de fracciones continuas (incluyendo la prueba del recíproco de la afirmación de Euler de que los irracionales cuadráticos tienen fracción continua periódica). Las fracciones continuas tuvieron un papel importante en la historia de las matemáticas cuando en 1882 Lindemann prueba la trascendencia de  $\pi$ , un problema abierto por más de dos siglos, usando esta herramienta.

Con el paso del tiempo, cada vez más matemáticos se dedicaron a estudiarlas y el tema cobró importancia en diversas ramas de la matemática que van mucho más allá de la teoría de números: sistemas dinámicos, topología y criptografía son algunos ejemplos.

# Apéndice 2

## Más resultados sobre el árbol de Stern-Brocot

Enunciaremos algunos resultados más sobre el árbol de Stern-Brocot que no consideramos necesarios para los resultados del texto, pero que puede resultar útil establecer.

La siguiente proposición es un resultado para la forma de palabras de  $\mathcal{SBD}$ , análogo a la proposición 4.29 para  $\mathcal{SBPD}$  que habla de la propiedad de autosimilaridad de  $\mathcal{SBPD}$ .

**Proposición 9.2.** *Consideremos los subárboles de  $\mathcal{SBPD}$  con raíz  $i$  y  $d$ . Si anulamos la última letra de cada palabra del subárbol con raíz  $i$ , obtenemos nuevamente  $\mathcal{SBPD}$ . Así mismo, si anulamos la última letra de cada palabra del subárbol con raíz  $d$ , obtenemos nuevamente  $\mathcal{SBPD}$ .*

Los mismos comentarios sobre la prueba de la proposición 4.29 aplican aquí; el resultado es claro por la construcción de  $\mathcal{SBPD}$ , pero se puede hacer una prueba formal con una rápida inducción sobre los niveles del árbol.

Ahora veamos una manera de traducir caminos en  $\mathcal{SB}$  a caminos en  $\mathcal{SBD}$  y viceversa a través de los *padres* en los árboles  $\mathcal{SB}$  y  $\mathcal{SBD}$  de un mismo elemento (matriz, vector o fracción) que ocupa distintas posiciones en  $\mathcal{SB}$  y  $\mathcal{SBD}$ . Para esto necesitaremos antes probar el siguiente lema.

**Lema 9.3.** *Sean  $\mathcal{A}$  un árbol binario completo,  $\mathcal{A}'$  el subárbol de  $\mathcal{A}$  con raíz en  $v_{1,1}$ , y  $\mathcal{A}''$  el subárbol de  $\mathcal{A}$  con raíz en  $v_{1,2}$ . Entonces el vértice  $v_{m,n}$  de  $\mathcal{A}$  está en el nivel  $m - 1$ , lugar  $n$  de  $\mathcal{A}'$  si  $n \leq 2^m/2$  y en el nivel  $m - 1$ , lugar  $n - 2^{m-1}$  de  $\mathcal{A}''$  si  $2^m/2 < n \leq 2^m$ .*

*Demostración.*  $\mathcal{A}$  tiene exactamente un nivel más que  $\mathcal{A}'$  y  $\mathcal{A}''$ , que es el primer nivel de  $\mathcal{A}$ , así que todo vértice en el nivel  $k$  de  $\mathcal{A}$  estará en el nivel  $k - 1$  de  $\mathcal{A}'$  o  $\mathcal{A}''$ . Así, el vértice  $v_{m,n}$  de  $\mathcal{A}$  está en el nivel  $m - 1$  de  $\mathcal{A}'$  o  $\mathcal{A}''$ . Es claro que  $v_{m,n}$  estará en  $\mathcal{A}'$  si  $n \leq 2^m/2$  y en  $\mathcal{A}''$  si  $2^m/2 < n \leq 2^m$ . Ahora, los vértices de  $\mathcal{A}'$  y de  $\mathcal{A}$  están en el mismo lugar de izquierda a derecha, así que si  $n \leq 2^m/2$ , el vértice  $v_{m,n}$  de  $\mathcal{A}$  estará en el nivel  $m - 1$ , lugar  $n$  de  $\mathcal{A}'$ . Por otro lado, los vértices del nivel  $k$  de  $\mathcal{A}$  que forman parte de  $\mathcal{A}''$  están  $2^{k-1}$  lugares recorridos a la derecha de los lugares que tienen en  $\mathcal{A}''$  (los  $2^{k-1}$  lugares del nivel  $k - 1$  de  $\mathcal{A}'$ ), así que si  $2^m/2 < n \leq 2^m$ , el vértice  $v''_{m,n}$  de  $\mathcal{A}''$  está en el nivel  $m - 1$ , lugar  $n - 2^{m-1}$  de  $\mathcal{A}$ .  $\square$

**Proposición 9.4.** *Sean  $v_{m,n}$  en  $\mathcal{SB}$  y  ${}^d v_{r,s}$  en  $\mathcal{SBD}$ , con  $m, r \geq 1$  tales  $v_{m,n} = {}^d v_{r,s}$ . Entonces el vértice en  $\mathcal{SB}$  del que es descendiente  $v_{m,n}$  es el vértice  ${}^d v_{r-1, s(\text{mod } 2^{r-1})}$  en  $\mathcal{SBD}$ . Así mismo, el vértice en  $\mathcal{SBD}$  del que es descendiente  ${}^d v_{r,s}$  es el vértice  $v_{m-1, n(\text{mod } 2^{m-1})}$  en  $\mathcal{SB}$ .*

Antes de hacer la demostración, hagamos algunos comentarios. Por enredosa que suene, la proposición 9.4 no es tan complicada (es un ejemplo de las posibles desventajas de formalizar una idea sencilla). El procedimiento que da se reduce a tomar un vértice en el lugar  $j$  del nivel  $i$ ,



subir un nivel y contar  $j$  lugares volviendo a empezar si se acaban. Procediendo de esta manera encontramos a los *padres* de vértices de  $\mathcal{SB}$  en  $\mathcal{SBD}$  y viceversa.

*Demostración.* (de proposición 9.4) Lo probaremos para la forma de palabras de los árboles (que sirve también para la forma matricial). Si la proposición se satisface en esta forma de los árboles, se satisfará también en las otras por la construcción que hicimos de ellas.

Sea  $p$  una palabra de  $\mathcal{SBP}$ ,  $p = v_{m,n}^{\mathcal{P}} = {}^d v_{r,s}^{\mathcal{P}}$ . Queremos ver cómo encontrar en  $\mathcal{SBP}$  la palabra de la que es descendiente  $p$  en  $\mathcal{SBPD}$ , y cómo encontrar en  $\mathcal{SBP}$  la palabra de la que  $p$  es descendiente en  $\mathcal{SBPD}$ . Abordemos primero el primer caso. Por construcción de  $\mathcal{SBPD}$ , tenemos que la palabra de la que es descendiente  $p$  en  $\mathcal{SBPD}$  es  $p$  sin la primera letra, digamos  $p'$ . Queremos encontrar a  $p'$  en  $\mathcal{SBP}$ . Hay dos casos posibles:  $p$  empieza con la letra  $i$  o con la letra  $d$ . Si comienza con  $i$ , consideramos el subárbol de  $\mathcal{SBP}$  con raíz en  $i$ . Por la proposición 4.29, si quitamos a todas las palabras de este subárbol la primera letra (la  $i$ ), obtenemos nuevamente  $\mathcal{SBP}$ . Pero si hacemos esto, obtenemos a  $p'$  en el lugar de  $p$ . Esto significa que el lugar que ocupa  $p$  en el subárbol de  $\mathcal{SBP}$  con raíz  $i$  es el lugar que ocupa  $p'$  en  $\mathcal{SBP}$ . Y este lugar nos lo da el lema 9.3: como  $p = v_{m,n}^{\mathcal{P}}$ , y  $p$  comienza con  $i$ , entonces  $n \leq 2^m/2$ , por lo que (lema 9.3)  $p$  está en el nivel  $m$ , lugar  $n$  del subárbol de  $\mathcal{SBP}$  con raíz  $i$ . Y por lo tanto  $p' = v_{m-1,n}$ . De manera análoga, si  $p$  comienza con  $d$ , consideramos el subárbol de  $\mathcal{SBP}$  con raíz en  $d$ . Por la proposición 4.29, si quitamos a todas las palabras de este subárbol la primera letra (la  $d$ ), este árbol resulta  $\mathcal{SBP}$ , y obtenemos a  $p'$  en el lugar de  $p$ . Entonces el lugar que ocupa  $p$  en el subárbol de  $\mathcal{SBP}$  con raíz  $d$  es el lugar que ocupa  $p'$  en  $\mathcal{SBP}$ . Usando que  $p = v_{m,n}^{\mathcal{P}}$  y que comienza con  $d$  (y por tanto  $2^m/2 < n \leq 2^m$ ), del lema 9.3 tenemos que  $p' = v_{m-1,n-2^{m-1}}^{\mathcal{P}}$ .

Resumiendo, escribimos que ya sea que  $p$  empiece con  $i$  o  $d$ , si  $p = v_{m,n}^{\mathcal{P}}$ , entonces  $p' = v_{m-1,n(\bmod 2^{m-1})}^{\mathcal{P}}$ . Con esto queda probado cómo encontrar en  $\mathcal{SBP}$  la palabra de la que es descendiente  $p$  en  $\mathcal{SBPD}$ . Para encontrar en  $\mathcal{SBP}$  la palabra de la que  $p$  es descendiente en  $\mathcal{SBPD}$  se procede de manera análoga, ahora tomando  $p'$  como  $p$  sin la última letra, y usando la proposición 9.2.  $\square$

Viendo la demostración podemos ver que la forma descrita en la proposición 9.4 de pasar de  $\mathcal{SB}$  a  $\mathcal{SBD}$  y viceversa se debe únicamente a la forma en que fueron construidos, sin importar qué interpretación le demos a  $i$  y  $d$ . Apreciamos también que lo determinante en que así sea la forma de pasar de uno a otro es la cualidad de autosimilaridad de los árboles.

**Ejemplo 9.5.** Consideremos los vértices  $v_{3,5}^{\mathcal{V}} = (3,4) = {}^d v_{3,2}^{\mathcal{V}}$ . Entonces para  $(2,3)$ , del que es descendiente  $(3,4)$  en  $\mathcal{SBV}$ , tenemos

$$(2,3) = {}^d v_{2,2(\bmod 2^2)}^{\mathcal{V}} = {}^d v_{2,2}.$$

Y para  $(3,1)$ , del que es descendiente  $(3,4)$  en  $\mathcal{SBD}$ , tenemos

$$(3,1) = v_{2,5(\bmod 2^2)}^{\mathcal{V}} = v_{2,1}^{\mathcal{V}}.$$

Estas reflexiones son interesantes, pues al usar la herramienta de  $\mathcal{SB}$  para estudiar la estructura de los números reales, es importante diferenciar entre las propiedades que ésta estructura tiene por la naturaleza de los reales en sí, y cuáles por la forma de construcción que llevamos a cabo.

Teniendo esta relación, podemos traducir un camino en  $SB$  o  $SBD$  en una sucesión de vértices en el otro. Los términos contiguos de esta sucesión van a satisfacer la relación correspondiente a la de “ser descendiente”, dada por la proposición 9.4. Así, tenemos una forma concreta de leer los términos de un camino en  $SB$  o  $SBD$  en el otro.

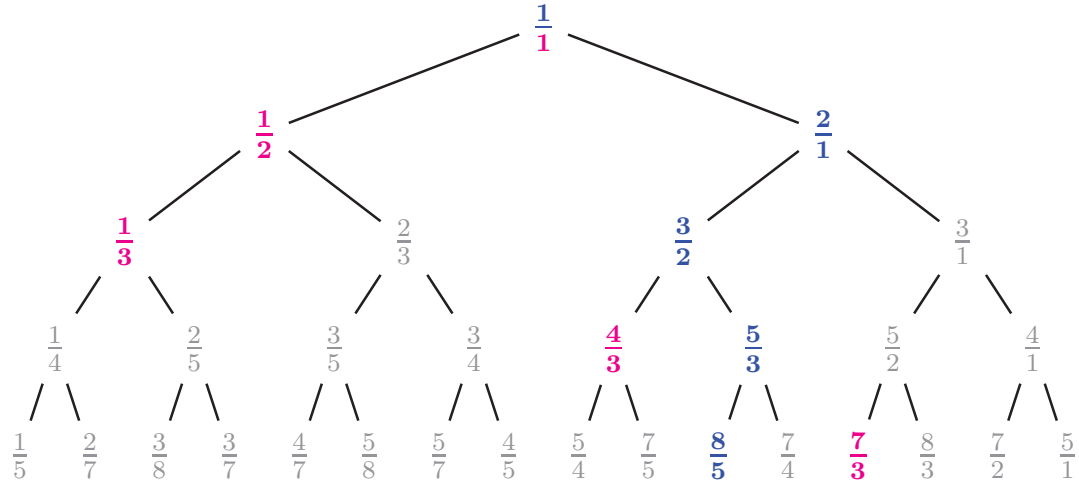


Figura 9.4:  $SBF$  en ejemplo 9.6:  $\mathcal{C}_{\frac{8}{5}}$  y  ${}^d\mathcal{C}_{\frac{7}{3}}$  en  $SBF$  y  $SBFD$ .

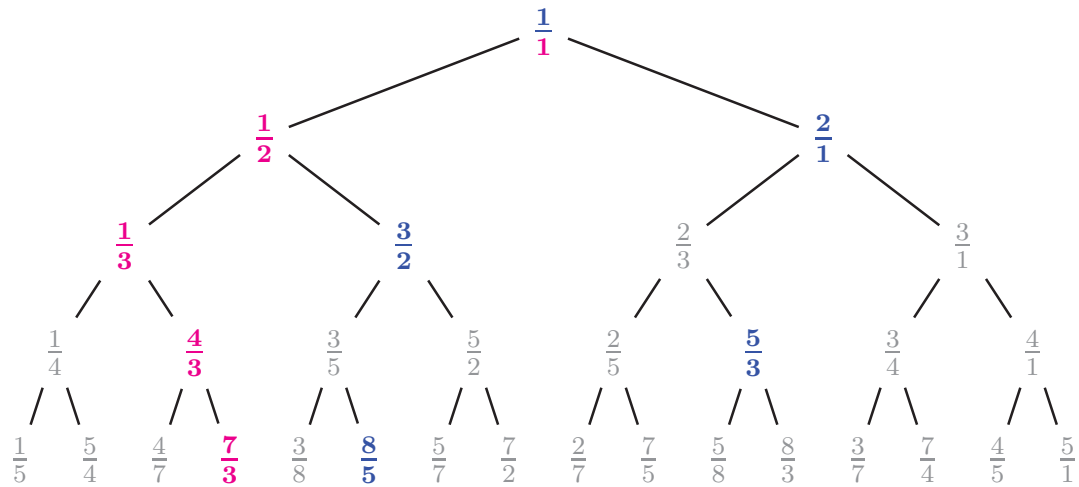


Figura 9.5:  $SBFD$  en ejemplo 9.6:  $\mathcal{C}_{\frac{8}{5}}$  y  ${}^d\mathcal{C}_{\frac{7}{3}}$  en  $SBF$  y  $SBFD$ .

**Ejemplo 9.6.** Consideremos los vértices  $v_{4,11}^{\mathcal{F}}$  y  $v_{4,6}^{\mathcal{F}}$ , que son ambos la fracción  $\frac{8}{5}$ , y tomemos el camino en  $SBV$   $\mathcal{C}_{\frac{8}{5}} = (\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5})$ . Según la proposición 9.4, como  $\frac{8}{5} = v_{4,6}^{\mathcal{F}}$ , entonces tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{5}{3} &= {}^d v_{3,6(\text{mod } 2^3)}^{\mathcal{F}} = {}^d v_{3,6}^{\mathcal{F}} & \frac{3}{2} &= {}^d v_{2,6(\text{mod } 2^2)}^{\mathcal{F}} = {}^d v_{2,2}^{\mathcal{F}} \\ \frac{2}{1} &= {}^d v_{1,6(\text{mod } 2^1)}^{\mathcal{F}} = {}^d v_{1,2}^{\mathcal{F}} & \frac{1}{1} &= {}^d v_{0,6(\text{mod } 2^0)}^{\mathcal{F}} = {}^d v_{0,1}^{\mathcal{F}}. \end{aligned}$$

Así mismo, si consideramos los vértices  ${}^d v_{4,4}^{\mathcal{F}}$  y  $v_{4,13}^{\mathcal{F}}$ , que son ambos la fracción  $\frac{7}{3}$ , y tomamos el camino en  $SBVD$   ${}^d\mathcal{C}_{\frac{7}{3}} = (\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{4}{3}, \frac{7}{3})$ , como  $\frac{7}{3} = v_{4,13}^{\mathcal{F}}$ , entonces tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{4}{3} &= d_{3,13(\text{mod } 2^3)}^{\mathcal{F}} = d_{3,5}^{\mathcal{F}} \\ \frac{1}{2} &= d_{1,13(\text{mod } 2^1)}^{\mathcal{F}} = d_{1,1}^{\mathcal{F}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} &= d_{2,13(\text{mod } 2^2)}^{\mathcal{F}} = d_{2,1}^{\mathcal{F}} \\ \frac{1}{1} &= d_{0,13(\text{mod } 2^0)}^{\mathcal{F}} = d_{0,1}^{\mathcal{F}}. \end{aligned}$$

Hechas estas afirmaciones, comentaremos algo acerca de distintas construcciones de árboles relacionadas con el árbol de Stern-Brocot. Podemos tomar la idea básica de la construcción de alguna de las formas de  $\mathcal{SB}$  y jugar un poco con otras maneras de plantearlo. Podemos, por ejemplo, construir todas las pendientes racionales a partir de la suma de ecuaciones de rectas (ver figura 9.6). Mientras logremos dar sentido a la construcción del árbol, podemos usar los resultados de este trabajo para estructurar a los objetos que pongamos en los vértices (ya sean funciones, matrices, curvas, etc).

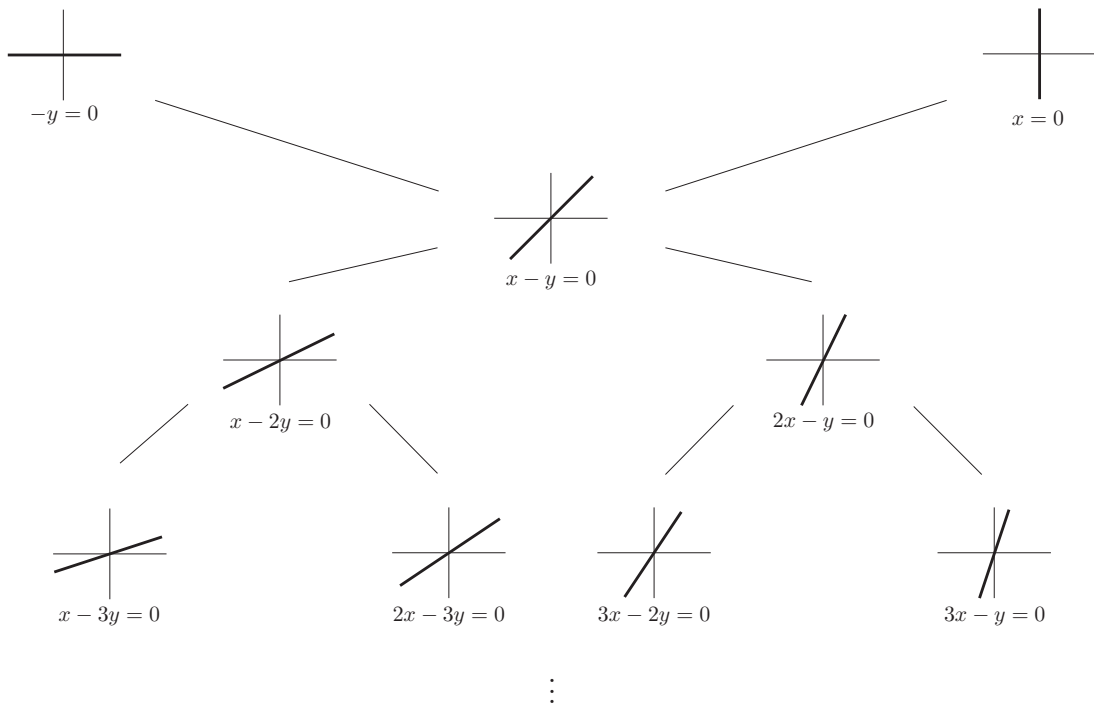


Figura 9.6: Stern-Brocot en forma de suma de rectas.

# Apéndice 3

## Forma matricial de $\mathcal{SBMD}_{(1,\beta)}$ y $\mathcal{SBMD}_{(\beta,1)}$

Podemos construir un árbol de matrices análogo a  $\mathcal{SBMD}$  del que podamos obtener  $\mathcal{SBVD}_{(1,\beta)}$  sumando los vectores columna de cada matriz. Dado que se da la igualdad

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + b\beta \\ c + d\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b\beta \\ c & d\beta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{9.2}$$

podemos construirlo multiplicando la segunda columna de cada matriz en  $\mathcal{SBMD}$  por  $\beta$ . A este árbol, que mostramos en la figura 9.7, lo denotamos por  $\mathcal{SBMD}_{(1,\beta)}$ . Los vértices del árbol de vectores  $\mathcal{SBVD}_{(1,\beta)}$  son los vectores diagonales de los paralelogramos generados por los vectores columna del árbol de matrices  $\mathcal{SBMD}_{(1,\beta)}$ . También podemos construir el árbol de matrices  $\mathcal{SBMD}_{(\beta,1)}$  de igual modo que construimos  $\mathcal{SBMD}$  (multiplicando por la izquierda por  $I$  y  $D$ ), pero partiendo de la raíz  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ , en lugar de la matriz identidad.

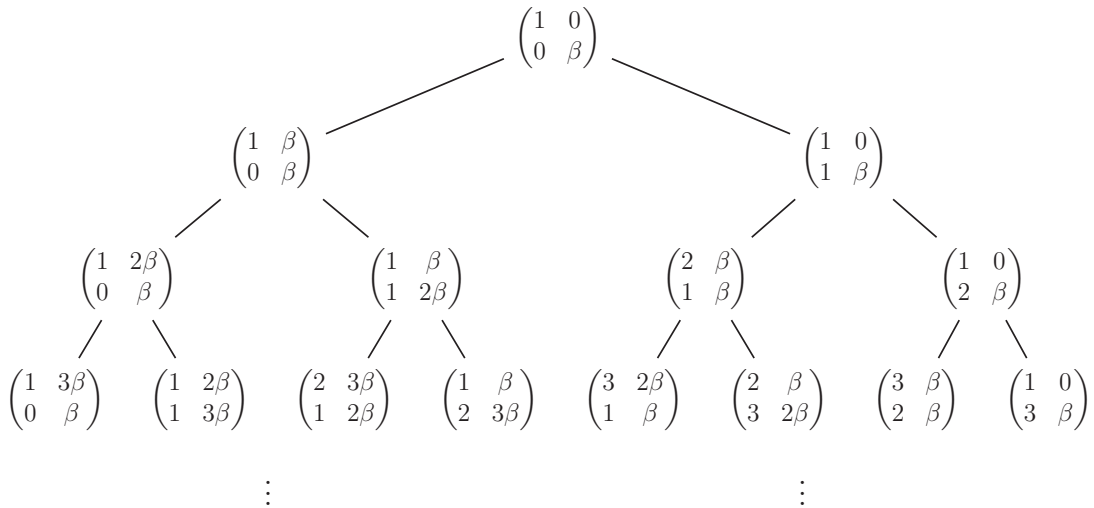
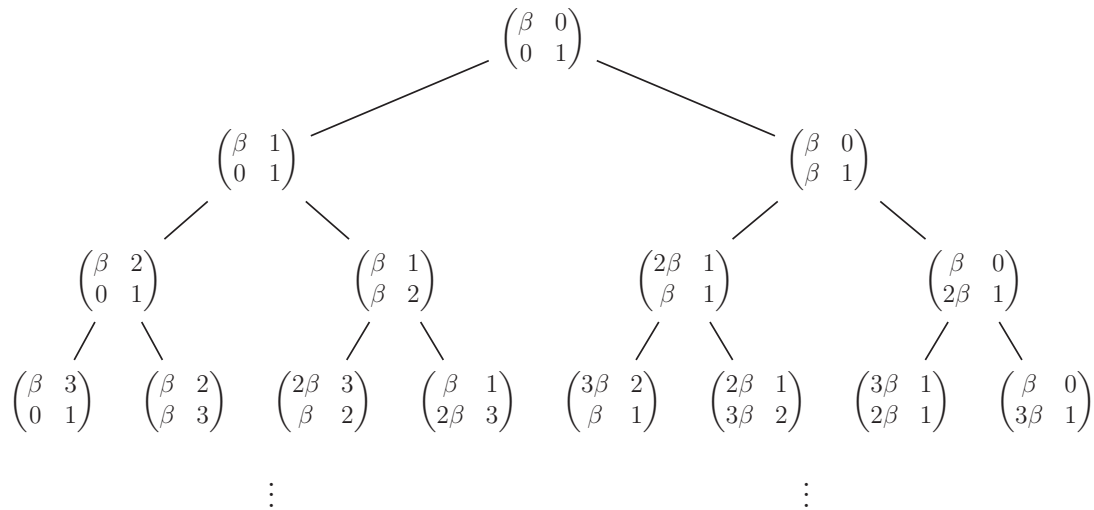


Figura 9.7:  $\mathcal{SBMD}_{(1,\beta)}$

Vemos que es equivalente aplicar las matrices de  $\mathcal{SBMD}$  al vector  $(1, \beta)$  que aplicar las matrices de  $\mathcal{SBMD}_{(1,\beta)}$  al vector  $(1, 1)$ . De cualquiera de estas dos maneras obtenemos el árbol de vectores  $\mathcal{SBVD}_{(1,\beta)}$ .

Costruimos  $\mathcal{SBMD}_{(\beta,1)}$  de manera análoga, multiplicando el primer vector columna de cada matriz en  $\mathcal{SBMD}$  por  $\beta$ . Ver figura 9.8.

Figura 9.8:  $\mathcal{SBMD}_{(\beta,1)}$ 

Ahora vemos que se tiene la igualdad

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \beta \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\beta + b \\ c\beta + d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\beta & b \\ c\beta & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

de donde vemos que es equivalente aplicar las matrices de  $\mathcal{SBMD}$  al vector  $(\beta, 1)$  que aplicar las matrices de  $\mathcal{SBMD}_{(\beta,1)}$  al vector  $(1, 1)$  para obtener el árbol de vectores  $\mathcal{SBVD}_{(\beta,1)}$ .

# Apéndice 4

## Demostraciones del capítulo 8

Como dijimos al comienzo del capítulo 8, por comodidad en las pruebas asumiremos  $q > 0$  al escribir  $p/q \in \mathbb{Q}$ , notando que deben hacerse con cuidado las interpretaciones geométricas que requieran considerar  $q > 0$ . Cuando así sea conveniente, en enunciados que afirmen algo para todo  $\alpha \in \mathbb{R}$ , haremos la demostración para el caso positivo teniendo en mente que si  $\alpha = [a_0, a_1, \dots]$ , entonces  $-\alpha = [-a_0, -a_1, \dots]$ . Pueden deducirse los resultados para el caso negativo del caso positivo (geoméricamente es claro, pero debe hacerse con cuidado la interpretación geométrica).

**Corolario 8.3** *Sea  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ , y sea  $N \in \mathbb{Z}^+$ . Entonces existen infinitos enteros  $p, q$  tales que  $1 \leq q < N$  y*

$$|q\alpha - p| < \frac{1}{N}.$$

*Demostración.* Sea  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ . Supongamos que el conjunto

$$A = \{(p, q) \mid p, q \in \mathbb{Z} \text{ y } |q\alpha - p| < 1/N\}$$

es finito. Consideramos entonces  $M = \min\{|q\alpha - p| \mid (p, q) \in A\}$ . Entonces  $M < 1/N$ . Sea  $T$  un entero mayor que  $1/M$ . Aplicamos el teorema de Dirichlet a  $\alpha$  y  $T$  para dar  $p', q' \in \mathbb{Z}$  tales que

$$|q'\alpha - p'| < \frac{1}{T} < M < 1/N. \quad (9.3)$$

Por definición de  $A$ ,  $(p', q') \in A$ , así que (9.3) contradice el hecho de que  $M$  es mínimo. Por lo tanto  $A$  debe ser infinito.  $\square$

**Corolario 8.5** *Sea  $\alpha \in \mathbb{R}$ .  $\alpha$  es irracional si y sólo si existen infinitos  $p/q \in \mathbb{Q}$  que satisfacen*

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^2}. \quad (9.4)$$

*Demostración.* Sea  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Sólo falta ver que si  $\alpha \in \mathbb{Q}$ , la desigualdad (9.4) se satisface sólo para un número finito de enteros  $p, q$ . Sea entonces  $\alpha = r/s \in \mathbb{Q}$ . Si

$$\left| \frac{r}{s} - \frac{p}{q} \right| = \left| \frac{rq - ps}{qs} \right| < \frac{1}{q^2}$$

y si  $(p, q) \neq (r, s)$ , entonces por el lema 8.1 tenemos que

$$\frac{1}{qs} \leq \left| \frac{rq - ps}{qs} \right| < \frac{1}{q^2},$$

y por lo tanto

$$1 \leq |rq - ps| < \frac{s}{q} \leq |s|,$$

lo que sólo pueden satisfacer un número finito de parejas de enteros primos relativos  $p$  y  $q$ .  $\square$

**Teorema 8.6** (*Vahlen*)

Sean  $\alpha \in \mathbb{R}$ , y sean  $p_{n-1}/q_{n-1}$  y  $p_n/q_n$  convergentes consecutivos de  $\alpha$ . Entonces se satisface alguna de las siguientes desigualdades:

$$\left| \alpha - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{2q_n^2} \quad \text{ó} \quad \left| \alpha - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} \right| < \frac{1}{2q_{n-1}^2}.$$

*Demostración.* Sea  $\alpha \in \mathbb{R}^+$  y sean  $p_{n-1}/q_{n-1}$  y  $p_n/q_n$  convergentes de  $\alpha$ . Dado que  $ab < 1/2(a^2 + b^2)$  para todos  $a, b \in \mathbb{R}$ , entonces

$$\frac{1}{q_n} \frac{1}{q_{n-1}} < \frac{1}{2} \left( \frac{1}{q_n^2} + \frac{1}{q_{n-1}^2} \right).$$

Usando esto y que  $\alpha$  está entre  $p_{n-1}/q_{n-1}$  y  $p_n/q_n$  tenemos que

$$\left| \alpha - \frac{p_n}{q_n} \right| + \left| \alpha - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} \right| = \left| \frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} \right| = \left| \frac{1}{q_n q_{n-1}} \right| < \frac{1}{2q_n^2} + \frac{1}{2q_{n-1}^2},$$

por lo que se satisface

$$\left| \alpha - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{2q_n^2} \quad \text{ó} \quad \left| \alpha - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} \right| < \frac{1}{2q_{n-1}^2}.$$

$\square$

**Teorema 8.7** (*Legendre*)

Sea  $\alpha \in \mathbb{R}$ , y sean  $p, q$  enteros primos relativos tales que

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{2q^2}. \quad (9.5)$$

Entonces  $p/q$  es un convergente de  $\alpha$ .

*Demostración.* Sea  $\alpha \in \mathbb{R}^+$ , y sean  $p, q$  enteros primos relativos que satisfacen (9.5). Como ya vimos que las mejores aproximaciones racionales de  $\alpha$  son sus convergentes, probaremos que  $p/q$  es una mejor aproximación racional de  $\alpha$ , es decir, que si  $|s\alpha - r| \leq |q\alpha - p|$ , y  $(r, s) \neq (p, q)$ , entonces  $s > q$ .

Por hipótesis  $|q\alpha - p| < 1/2q$ . Supongamos entonces que  $(r, s) \neq (p, q)$ , y que  $|s\alpha - r| \leq |q\alpha - p| < 1/2q$ . Entonces

$$\left| \alpha - \frac{r}{s} \right| < \frac{1}{2qs}.$$

De modo que

$$\left| \frac{r}{s} - \frac{p}{q} \right| \leq \left| \alpha - \frac{r}{s} \right| + \left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{2qs} + \frac{1}{2q^2} = \frac{q+s}{2q^2s}. \quad (9.6)$$

Además tenemos que

$$\frac{1}{qs} \leq \left| \frac{r}{s} - \frac{p}{q} \right|. \quad (9.7)$$

De (9.6) y (9.7) tenemos que

$$\frac{1}{qs} < \frac{q+s}{2q^2s},$$

lo que pasa si y sólo si  $q < s$ . Entonces  $p/q$  es una mejor aproximación de  $\alpha$  y es por tanto uno de sus convergentes.  $\square$

**Teorema 8.9** Sea  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  en  $\mathcal{SBM}$ , y sea  $\alpha \in \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{Q}$  tal que  $c/a < \alpha < d/b$ . Entonces se cumple una de las siguientes desigualdades:

$$\left| \alpha - \frac{c}{a} \right| < \frac{1}{\sqrt{5}a^2}, \quad \left| \alpha - \frac{c+d}{a+b} \right| < \frac{1}{\sqrt{5}(a+b)^2} \quad \text{ó} \quad \left| \alpha - \frac{d}{b} \right| < \frac{1}{\sqrt{5}b^2}. \quad (9.8)$$

*Demostración.* Sea  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  en  $\mathcal{SBM}$ , y sea  $\alpha \in \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{Q}$  con  $c/a < \alpha < d/b$ . Supongamos que no se cumple ninguna de las desigualdades (9.8). Como  $\alpha$  es irracional, es distinto de  $(c+d)/(a+b)$ . Entonces

$$\frac{c}{a} < \alpha < \frac{(c+d)}{(a+b)} < \frac{d}{b} \quad \text{ó} \quad \frac{c}{a} < \frac{(c+d)}{(a+b)} < \alpha < \frac{d}{b}.$$

Supongamos que se da el primer caso ( $\alpha < (c+d)/(a+b)$ ). Ya que no se satisfacen ninguna de las desigualdades (9.8), entonces se satisfacen las siguientes tres desigualdades

$$\alpha - \frac{c}{a} \geq \frac{1}{\sqrt{5}a^2}, \quad \frac{c+d}{a+b} - \alpha \geq \frac{1}{\sqrt{5}(a+b)^2} \quad \text{y} \quad \frac{d}{b} - \alpha \geq \frac{1}{\sqrt{5}b^2}. \quad (9.9)$$

Sumando la primera y tercera desigualdades de (9.9) obtenemos

$$\frac{d}{b} - \frac{c}{a} \geq \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) = \frac{a^2 + b^2}{\sqrt{5}a^2b^2}.$$

Desarrollando y usando que el determinante de  $A$  es 1 por estar en  $\mathcal{SBM}$  tenemos

$$\sqrt{5}a^2b^2 \left( \frac{da - bc}{ab} \right) = \sqrt{5}ab \geq a^2 + b^2. \quad (9.10)$$

Ahora sumamos la primera y segunda desigualdades de (9.9) y obtenemos

$$\frac{c+d}{a+b} - \frac{c}{a} \geq \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1}{a^2} + \frac{1}{(a+b)^2} \right) = \frac{a^2 + (a+b)^2}{\sqrt{5}a^2(a+b)^2}.$$

También desarrollamos y usamos que  $(c+d)a - c(a+b) = 1$  (pues  $AI = \begin{pmatrix} a & a+b \\ c & c+d \end{pmatrix}$  está también en  $\mathcal{SBM}$ ) para obtener

$$\sqrt{5}a^2(a+b)^2 \left( \frac{(c+d)a - (a+b)c}{a(a+b)} \right) = \sqrt{5}a(a+b) \geq a^2 + (a+b)^2. \quad (9.11)$$



Si ahora sumamos (9.10) y (9.11), nos queda

$$\sqrt{5}ab + \sqrt{5}a(a+b) \geq 2a^2 + b^2 + (a+b)^2$$

y por lo tanto

$$0 \geq (3 - \sqrt{5})a^2 + (2 - 2\sqrt{5})ab + 2b^2.$$

Manipulamos el lado derecho de la igualdad y lo reescribimos de manera conveniente:

$$0 \geq \frac{1}{2} \left( (6 - 2\sqrt{5})a^2 - 4(\sqrt{5} - 1)ab + 4b^2 \right) = \frac{1}{2} ((\sqrt{5} - 1)a + 2b)^2.$$

Esto implica que  $0 = ((\sqrt{5} - 1)a - 2b)$ , y por tanto  $(\sqrt{5} - 1)a = 2b$ , lo que no puede ser, puesto que  $a$  y  $b$  son enteros. Concluimos que nuestra suposición fue falsa, y debe satisfacerse alguna de las desigualdades (9.8), como dice el toerema.

Si  $(c+d)/(a+b) < \alpha$ , al suponer que no se satisfacen las desigualdades (9.8) tenemos que se debe cumplir que

$$\alpha - \frac{c}{a} \geq \frac{1}{\sqrt{5}a^2}, \quad \alpha - \frac{c+d}{a+b} \geq \frac{1}{\sqrt{5}(a+b)^2} \quad \text{y} \quad \frac{d}{b} - \alpha \geq \frac{1}{\sqrt{5}b^2}. \quad (9.12)$$

Procedemos de igual manera que en caso anterior, ahora sumando las desigualdades primera y tercera de (9.12), y luego sumando la segunda y tercera. El resto es totalmente análogo.  $\square$

**Teorema 8.11** *Sea  $c > \sqrt{5}$ , y sea  $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ . Entonces la desigualdad*

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{cq^2} \quad (9.13)$$

*se satisface sólo para un número finito de racionales  $p/q$ .*

Antes de demostrar este teorema, probaremos dos lemas que usaremos en la demostración.

**Lema 9.7.** *Sea  $\alpha = [a_0, a_1, \dots] \in \mathbb{R}$ , con  $p_n/q_n$  y  $p_{n+1}/q_{n+1}$  convergentes de  $\alpha$ . Entonces*

$$\left| \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n} \right| = \frac{1}{q_n^2 \left| a_{n+1} + \frac{q_{n-1}}{q_n} \right|}. \quad (9.14)$$

*En particular, si escribimos  $\alpha = [a_0, a_1, \dots, a_n, s_{n+1}]$  se tiene que*

$$\left| \alpha - \frac{p_n}{q_n} \right| = \frac{1}{q_n^2 \left| s_{n+1} + \frac{q_{n-1}}{q_n} \right|}. \quad (9.15)$$

*Demostración.* Sea  $\alpha = [a_0, a_1, \dots] \in \mathbb{R}$ , con  $p_n/q_n$  y  $p_{n+1}/q_{n+1}$  convergentes de  $\alpha$ . Usando que  $p_{n+1}q_n - p_nq_{n+1} = (-1)^n$  y que  $q_{n+1} = a_{n+1}q_n + q_{n-1}$  tenemos que

$$q_n \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - p_n = \frac{q_n p_{n+1} - p_n q_{n+1}}{q_{n+1}} = \frac{(-1)^n}{q_{n+1}} = \frac{(-1)^n}{a_{n+1}q_n + q_{n-1}}.$$

Entonces dividiendo entre  $q_n$  y tomando valor absoluto tenemos

$$\left| \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n} \right| = \frac{1}{|a_{n+1}q_n^2 + q_nq_{n-1}|} = \frac{1}{\left| a_{n+1}q_n^2 + q_n^2 \left( \frac{q_{n-1}}{q_n} \right) \right|} = \frac{1}{q_n^2 \left| a_{n+1} + \frac{q_{n-1}}{q_n} \right|}.$$

La identidad (9.15) es un caso particular de (9.14), si recordamos que  $\alpha$  es el convergente de orden  $n + 1$  de  $[a_0, a_1, \dots, a_n, s_{n+1}]$ .  $\square$

**Lema 9.8.** Sea  $\alpha = [a_0, a_1, a_2, \dots] \in \mathbb{R}$  con convergente  $c_i = p_i/q_i$ . Entonces para  $n \geq 1$

$$\frac{q_n}{q_{n-1}} = [a_n, a_{n-1}, \dots, a_1].$$

*Demostración.* Haremos inducción. Para la  $n = 1$  vemos que

$$\frac{q_1}{q_0} = \frac{a_1}{1} = [a_1].$$

Supongamos ahora que

$$\frac{q_{n-1}}{q_{n-2}} = [a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_1].$$

Entonces usamos que  $q_n = a_nq_{n-1} + q_{n-2}$  para obtener

$$\begin{aligned} \frac{q_n}{q_{n-1}} &= \frac{a_nq_{n-1} + q_{n-2}}{q_{n-1}} = a_n + \frac{q_{n-2}}{q_{n-1}} \\ &= a_n + \frac{1}{[a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_1]} \\ &= [a_n, a_{n-1}, \dots, a_1], \end{aligned}$$

y concluir la prueba.  $\square$

Ahora sí pasamos a la demostración del teorema 8.11.

*Demostración.* (del teorema 8.11)

Sean  $c > \sqrt{5}$ ,  $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ , y sea  $p_n/q_n$  el convergente  $c_n$  de  $\alpha$ . Del lema 9.7 tenemos que

$$\left| \alpha - \frac{p_n}{q_n} \right| = \frac{1}{q_n^2 \left| s_{n+1} + \frac{q_{n-1}}{q_n} \right|}. \quad (9.16)$$

Ahora, sabemos que  $\alpha = [1, 1, 1, 1, \dots]$ . Del lema 9.8 tenemos que

$$\frac{q_{n-1}}{q_n} = \frac{1}{[1, 1, 1, \dots, 1]},$$

de modo que

$$\frac{q_{n-1}}{q_n} \rightarrow \frac{1}{\alpha} \quad \text{si} \quad n \rightarrow \infty.$$

Podemos entonces escribir

$$\frac{q_{n-1}}{q_n} = \frac{1}{\alpha} + \varepsilon_n,$$

donde  $\varepsilon_n \rightarrow 0$  si  $n \rightarrow \infty$ . Usando esto y que  $s_i = \alpha$  para toda  $i \in \mathbb{N}$  en (9.16) tenemos que

$$\left| \alpha - \frac{p_n}{q_n} \right| = \frac{1}{q_n^2 \left( \alpha + \frac{1}{\alpha} + \varepsilon_n \right)} = \frac{1}{q_n^2 \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} + \frac{2}{1+\sqrt{5}} + \varepsilon_n \right)} = \frac{1}{q_n^2 (\sqrt{5} + \varepsilon_n)}.$$

Ahora, si  $c = \sqrt{5} + \varepsilon$ , con  $\varepsilon > 0$ , no importa cuán pequeña sea  $\varepsilon$ , existe  $N \in \mathbb{N}$  lo suficientemente grande tal que para toda  $n \geq N$  se tiene que  $\varepsilon_n < \varepsilon$ , y por tanto

$$\left| \alpha - \frac{p_n}{q_n} \right| = \frac{1}{q_n^2 (\sqrt{5} + \varepsilon_n)} > \frac{1}{q_n^2 (\sqrt{5} + \varepsilon)} = \frac{1}{c q_n^2} \quad \text{para toda } n \geq N.$$

Así que a lo más un número finito de convergentes de  $\alpha$  satisfacen

$$\left| \alpha - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{c q_n^2}.$$

Si un racional  $p/q > 0$  con  $q > 0$  satisface que

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{c q^2} < \frac{1}{2 q^2},$$

entonces, como vimos en el teorema de Legendre (teorema 8.7),  $p/q$  es un convergente de  $\alpha$ . Esto significa que sólo un número finito de racionales satisfacen (9.13), como queríamos probar.  $\square$

**Proposición 8.12** *Sea  $\alpha \in \mathbb{R}$  tal que para alguna constante positiva  $c \in \mathbb{R}$  se tiene*

$$\frac{1}{c q^2} < \left| \alpha - \frac{p}{q} \right| \quad \text{para todo } \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}. \quad (9.17)$$

*Entonces para toda  $\varepsilon > 0$  la desigualdad*

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^{2+\varepsilon}} \quad (9.18)$$

*tiene sólo un número finito de soluciones.*

*Demostración.* Sea  $\alpha \in \mathbb{R}$  como en la hipótesis de la proposición, y sea  $\varepsilon > 0$ . Sea  $A$  el conjunto de racionales  $p/q$  que satisfacen (9.18). Si  $p/q \in A$ , entonces  $|q\alpha - p| < 1/q^{\varepsilon+1}$ . Entonces, usando que  $||x| - |y|| \leq |x - y|$ , tenemos que  $|p| < |\alpha q| + 1/q^{\varepsilon+1}$ . De modo que para cada  $q$  el conjunto de numeradores posibles  $p$  tal que  $p/q \in A$  es finito. Si suponemos que  $A$  es infinito, entonces debemos tener infinitos denominadores  $q$  en  $A$ , por lo que debe existir  $r/s \in A$ , tal que  $s > c^{1/\varepsilon}$ , es decir,  $s^\varepsilon > c$ . Pero entonces, como  $r/s \in A$ , se tiene

$$\left| \alpha - \frac{r}{s} \right| \leq \frac{1}{s^{2+\varepsilon}} < \frac{1}{c s^2},$$

lo que contradice (9.17). Por lo tanto,  $A$  debe ser finito.  $\square$

**Teorema 8.13** Sea  $\alpha = [a_0, \dots, a_N, 1, 1, \bar{1}, \dots]$ . Entonces, si  $c > \sqrt{5}$ , la desigualdad

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{cq^2} \quad (9.19)$$

se satisface sólo para un número finito de racionales  $p/q$ .

*Demostración.* Sea  $\alpha = [a_0, \dots, a_N, 1, 1, 1, 1, \dots]$ , y sea  $c > \sqrt{5}$ . Repetimos la demostración que hicimos del teorema 8.11. Tenemos que  $s_n = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$  para toda  $n > N$ . Sólo faltaría ver que

$$\frac{q_n}{q_{n-1}} \rightarrow \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{si} \quad n \rightarrow \infty.$$

Del lema 9.8 tenemos que para  $n > N + 1$

$$\frac{q_n}{q_{n-1}} = [a_n, a_{n-1}, \dots, a_N, a_{N-1}, \dots, a_1] = [1, 1, \dots, 1, a_N, a_{N-1}, \dots, a_1]$$

(recordemos que  $a_n = 1$  para  $n > N$ ). Como  $q_n/q_{n-1}$  está entre sus convergentes  $[a_n, a_{n-1}, \dots, a_{N+2}] = [1, 1, \dots, 1]$  y  $[a_n, a_{n-1}, \dots, a_{N+1}] = [1, 1, \dots, 1, 1]$ , y ambos tienden a  $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$  si  $n$  tiende a infinito, entonces

$$\frac{q_n}{q_{n-1}} \rightarrow \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{si} \quad n \rightarrow \infty.$$

Ahora procedemos como hicimos en la demostración del teorema 8.11. □

**Teorema 8.17** Sea  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ,  $\alpha = [a_0, a_1, a_2, \dots]$ .  $\alpha$  es mal aproximable si y sólo si existe  $M \in \mathbb{R}$  tal que

$$|a_i| < M \quad \text{para toda } i \in \mathbb{N}.$$

*Demostración.* Sea  $\alpha \in \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{Q}$ ,  $\alpha = [a_0, a_1, a_2, \dots]$  con convergentes  $c_n = p_n/q_n$ . Encontraremos cotas tanto superior como inferior para

$$\left| \alpha - \frac{p_n}{q_n} \right| = \frac{1}{q_n^2 \left( s_{n+1} + \frac{q_{n-1}}{q_n} \right)}$$

en términos de los cocientes  $\{a_i\}$  de  $\alpha = [a_0, a_1, a_2, \dots]$ . Como

$$a_{n+1} < s_{n+1} = [a_{n+1}, a_{n+2}, \dots] < a_{n+1} + 1, \quad (9.20)$$

y

$$0 < \frac{q_{n-1}}{q_n} < 1 \quad (9.21)$$

(pues  $q_{n-1} < q_n$ ), entonces sumando (9.20) y (9.21) y multiplicando por  $q_n^2$  obtenemos

$$q_n^2 a_{n+1} \leq q_n^2 \left( s_{n+1} + \frac{q_{n-1}}{q_n} \right) \leq q_n^2 (a_{n+1} + 2),$$

de donde

$$\frac{1}{q_n^2(a_{n+1} + 2)} \leq \frac{1}{q_n^2 \left( s_{n+1} + \frac{q_{n-1}}{q_n} \right)} \leq \frac{1}{q_n^2 a_{n+1}},$$

y por tanto

$$\frac{1}{q_n^2(a_{n+1} + 2)} \leq \left| \alpha - \frac{p_n}{q_n} \right| \leq \frac{1}{q_n^2 a_{n+1}}. \quad (9.22)$$

Supongamos que  $\alpha$  es mal aproximable. Veremos que los cocientes de su fracción continua son acotados. Como  $\alpha$  es mal aproximable existe  $c = c(\alpha)$  tal que

$$\frac{1}{cq^2} < \left| \alpha - \frac{p}{q} \right| \quad \text{para todo } \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}.$$

En particular, para los convergentes  $p_n/q_n$  de  $\alpha$  se tiene que (usando 9.22)

$$\frac{1}{cq_n^2} < \left| \alpha - \frac{p_n}{q_n} \right| \leq \frac{1}{q_n^2 a_{n+1}}.$$

Por lo tanto

$$a_{n+1} < c \quad \text{para toda } n \in \mathbb{N}.$$

Ahora supongamos que existe  $M$  tal que

$$a_{n+1} < M \quad \text{para toda } n \in \mathbb{N}.$$

Veremos que  $\alpha$  es mal aproximable. De nuestra suposición tenemos que

$$\frac{1}{(M+2)} < \frac{1}{a_{n+1} + 2} \quad \text{para toda } n \in \mathbb{N},$$

así que tomando  $c = M + 2$ , de (9.22) resulta

$$\frac{1}{cq^2} < \frac{1}{q_n^2(a_{n+1} + 2)} \leq \left| \alpha - \frac{p_n}{q_n} \right| \quad \text{para toda } n \in \mathbb{N}.$$

Esto cubre a todos los convergentes de  $\alpha$ . Para afirmarlo para todo  $p/q \in \mathbb{Q}$  vemos que si  $p/q \in \mathbb{Q}$  no es convergente de  $\alpha$ , entonces del teorema 8.7 (de Legendre) y usando que  $2q^2 < (M+2)q^2 = cq^2$ , se tiene que

$$\frac{1}{cq^2} < \frac{1}{2q^2} \leq \left| \alpha - \frac{p}{q} \right|.$$

Esto prueba que  $\alpha$  es mal aproximable. □

**Teorema 8.19** (Liouville, 1884 [22] V§1)

Sea  $\alpha$  un algebraico de grado  $d \geq 2$ . Entonces existe  $c = c(\alpha) > 0$  tal que para todo racional  $p/q$  se tiene que

$$\frac{c}{q^d} < \left| \alpha - \frac{p}{q} \right|$$

*Demostración.* Sea  $\alpha$  un algebraico de grado  $d \geq 2$ . Sea

$$P(x) = a_d x^d + a_{d-1} x^{d-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

el polinomio que define a  $\alpha$  (un polinomio irreducible de grado  $d$  con coeficientes primos relativos y con  $a_d > 0$ ). Desarrollando su serie de Taylor alrededor de  $\alpha$  tenemos que

$$P(x) = P(\alpha) + \sum_{n=1}^d \frac{(x - \alpha)^n}{n!} P^{(n)}(\alpha) = \sum_{n=1}^d \frac{(x - \alpha)^n}{n!} P^{(n)}(\alpha).$$

Sea  $A = \{|x - \alpha| \mid P(x) = 0, x \neq \alpha\}$ . Si  $A \neq \emptyset$ , sea  $m$  el mínimo de los elementos de  $A$ , y sea  $r = \min\{m, 1\}$ . Si  $A = \emptyset$ , sea  $r = 1$ . Veremos primero qué sucede con los racionales  $p/q$  tales que  $|\alpha - p/q| < r$ , y luego veremos qué sucede para los que no es así. Sea  $p/q \in \mathbb{Q}$ . Si  $|\alpha - p/q| < r$ , evaluamos  $P$  en  $p/q$ :

$$\left| P\left(\frac{p}{q}\right) \right| = \left| \sum_{n=1}^d \frac{\left(\frac{p}{q} - \alpha\right)^n}{n!} P^{(n)}(\alpha) \right| \leq \sum_{n=1}^d \frac{\left|\frac{p}{q} - \alpha\right|^n}{n!} |P^{(n)}(\alpha)|. \quad (9.23)$$

Dado que  $|\alpha - p/q| < r \leq 1$ , entonces

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right|^n < \left| \alpha - \frac{p}{q} \right| \quad 1 \leq n \leq d,$$

por lo que

$$\left| P\left(\frac{p}{q}\right) \right| < \left| \alpha - \frac{p}{q} \right| \sum_{n=1}^d \frac{|P^{(n)}(\alpha)|}{n!}.$$

Llamamos

$$\frac{1}{M} := \sum_{n=1}^d \frac{|P^{(n)}(\alpha)|}{n!}.$$

Así, tenemos que

$$\left| P\left(\frac{p}{q}\right) \right| < \frac{1}{M} \left| \alpha - \frac{p}{q} \right|. \quad (9.24)$$

Notamos que  $M > 0$ , pues ya que el grado de  $P^{(n)}$  es menor que el de  $P$ , si  $P^{(n)}(\alpha) = 0$  tendríamos un polinomio de grado menor que  $d$  del que  $\alpha$  es raíz, contradiciendo que es algebraico de grado  $d$ . Ahora, por cómo tomamos  $r$ , tenemos que si  $|\alpha - p/q| < r$  se tiene que  $P(p/q) \neq 0$ . Veremos que entonces  $|P(p/q)| > 1/q^d$ .

$$P\left(\frac{p}{q}\right) = a_d \frac{p^d}{q^d} + a_{d-1} \frac{p^{d-1}}{q^{d-1}} + \cdots + a_1 \frac{p}{q} + a_0.$$

Factorizando  $1/q^d$  tenemos

$$\left| P\left(\frac{p}{q}\right) \right| = \frac{1}{q^d} |a_d p^d + a_{d-1} p^{d-1} q + \cdots + a_1 p q^{d-1} + a_0 q^d|.$$

Dado que  $p, q$  y  $a_i, i = 1, \dots, d$  son enteros y  $P(p/q) \neq 0$ , entonces

$$1 \leq |a_d p^d + a_{d-1} p^{d-1} q + \dots + a_1 p q^{d-1} + a_0 q^d|$$

y

$$\frac{1}{q^d} \leq \left| P\left(\frac{p}{q}\right) \right|. \quad (9.25)$$

De (9.24) y (9.25) tenemos que

$$\frac{1}{q^d} \leq \left| P\left(\frac{p}{q}\right) \right| < \frac{1}{M} \left| \alpha - \frac{p}{q} \right|.$$

y

$$\frac{M}{q^d} < \left| \alpha - \frac{p}{q} \right|.$$

Ahora, si  $|\alpha - p/q| \geq r$ , entonces  $|\alpha - p/q| \geq r/q^d$ . Tomamos entonces  $0 < c < \min\{M, r\}$ , de modo que

$$\frac{c}{q^d} \leq \left| \alpha - \frac{p}{q} \right|$$

y concluimos la prueba.  $\square$

**Proposición 8.23** Sea  $\alpha = [a_0, a_1, \dots] \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ , con  $c_n = p_n/q_n$  su convergente de orden  $n$ . Si los cocientes parciales de  $[a_0, a_1, \dots]$  satisfacen

$$|a_{n+1}| \geq q_n^{n-1} \quad \text{para toda } n \geq 0,$$

entonces  $\alpha$  es trascendente.

*Demostración.* Sea  $\alpha = [a_0, a_1, \dots] \in \mathbb{R}^+$ , con  $a_{n+1} \geq q_n^{n-1}$ . Como vimos en la prueba del teorema 8.17, de (9.22) tenemos que

$$\left| \alpha - \frac{p_n}{q_n} \right| \leq \frac{1}{q_n^2 a_{n+1}}.$$

De modo que, como  $1/|a_{n+1}| \leq 1/q_n^{n-1}$ , entonces

$$\left| \alpha - \frac{p_n}{q_n} \right| \leq \frac{1}{q_n^2 a_{n+1}} \leq \frac{1}{q_n^2 q_n^{n-1}} = \frac{1}{q_n^{n+1}}.$$

Así, dada  $c > 0$  y  $d \in \mathbb{N}$ , siempre podemos tomar  $n$  suficientemente grande para que

$$\left| \alpha - \frac{p_n}{q_n} \right| \leq \frac{1}{q_n^{n+1}} \leq \frac{c}{q_n^d}.$$

Por el teorema de Liouville, entonces  $\alpha$  es trascendente.  $\square$

**Proposición 8.26** Sea  $\alpha = [a_0, a_1, \dots] \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ,  $y \varepsilon > 0$ . Si  $|a_{n+1}| \geq q_n^\varepsilon$  para toda  $n \in \mathbb{N}$ , entonces  $\alpha$  es trascendente.

*Demostración.* Sea  $\varepsilon > 0$  y sea  $\alpha = [a_0, a_1, \dots] \in \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{Q}$  con  $a_{n+1} \geq q_n^\varepsilon$  para toda  $n \in \mathbb{N}$ , donde  $p_n/q_n$  es el convergente  $c_n$  de  $\alpha$ . De (9.22) tenemos que

$$\left| \alpha - \frac{p_n}{q_n} \right| \leq \frac{1}{q_n^2 a_{n+1}}.$$

Como  $1/a_{n+1} \leq 1/q_n^\varepsilon$ , se tiene que

$$\left| \alpha - \frac{p_n}{q_n} \right| \leq \frac{1}{q_n^2 a_{n+1}} \leq \frac{1}{q_n^2 q_n^\varepsilon} = \frac{1}{q_n^{2+\varepsilon}} \quad \text{para toda } n \in \mathbb{N}.$$

Entonces por el teorema de Roth  $\alpha$  es trascendente. □



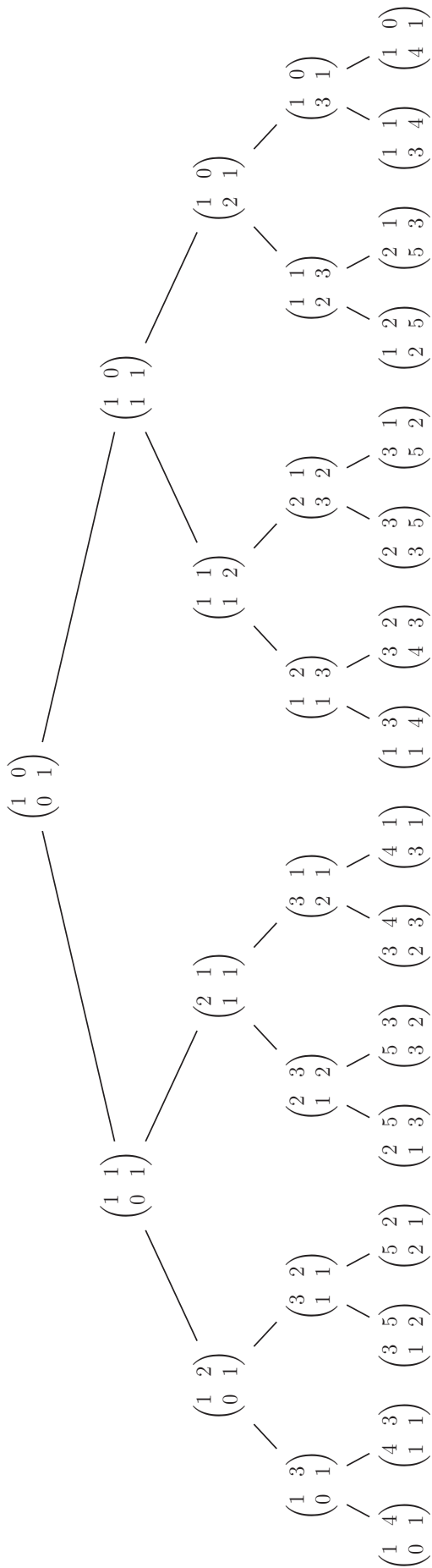


Figura 9.10:  $S\mathcal{B}M$ : Primeros cinco niveles del árbol de Stern-Brocot en forma matricial.

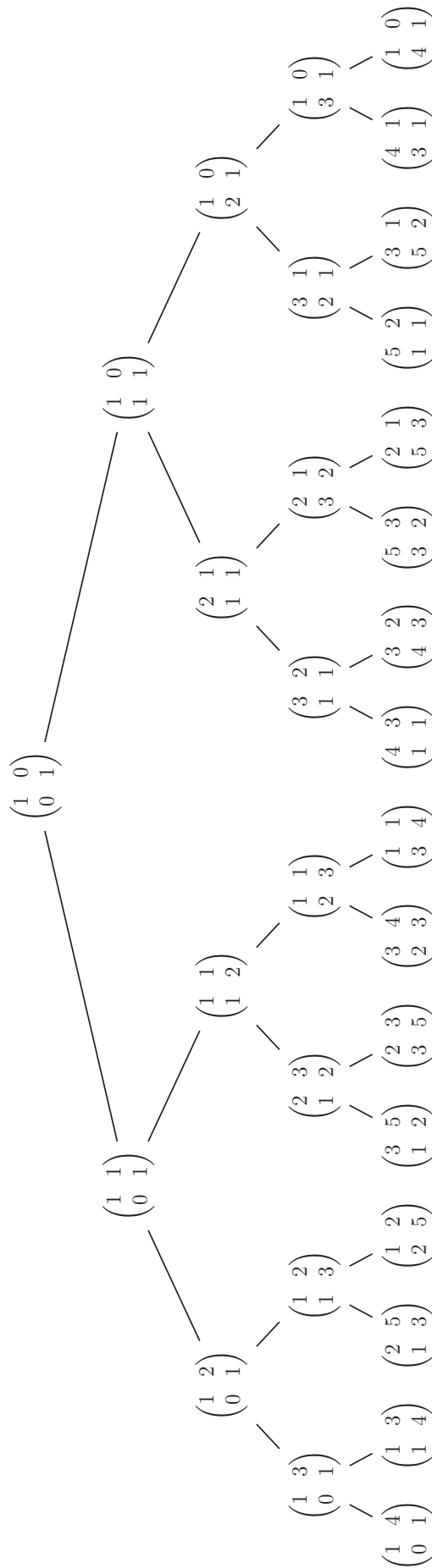


Figura 9.11:  $S\mathcal{B}MD$ : Primeros cinco niveles del árbol dual de Stern-Brocot en forma matricial.

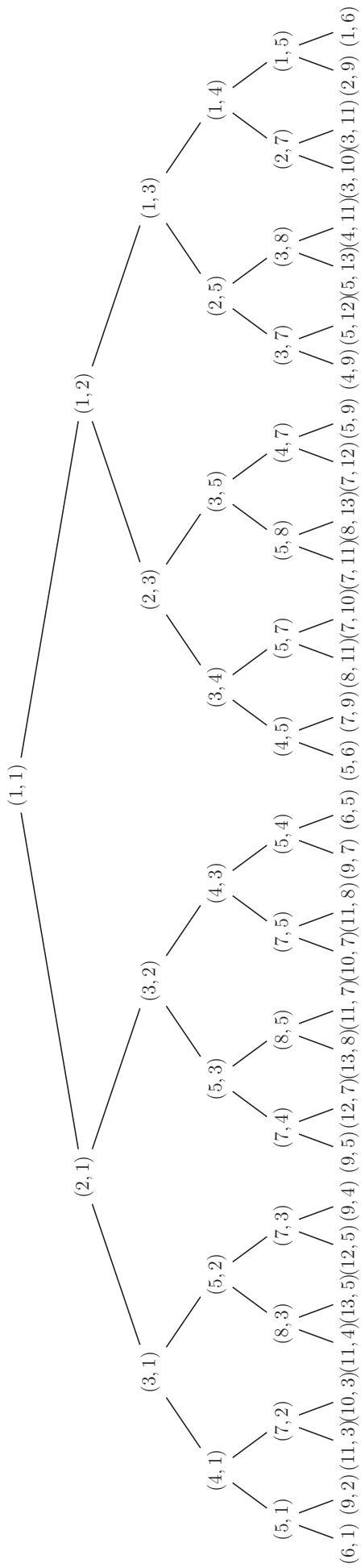


Figura 9.12:  $\mathcal{SBV}$ : Primeros seis niveles del árbol de Stern-Brocot en forma vectorial.

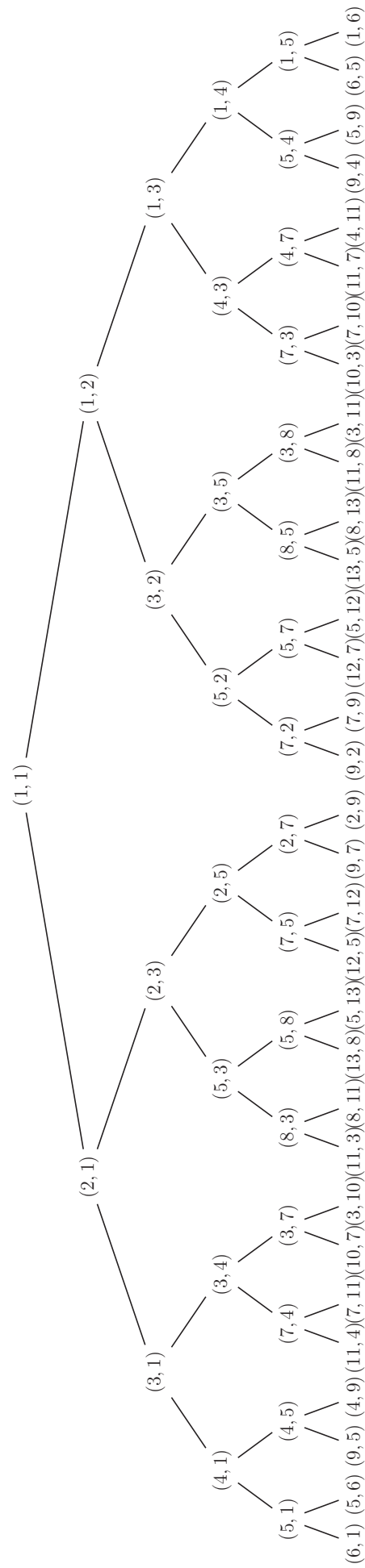


Figura 9.13:  $\mathcal{SBVD}$ : Primeros seis niveles del árbol dual de Stern-Brocot en forma vectorial.

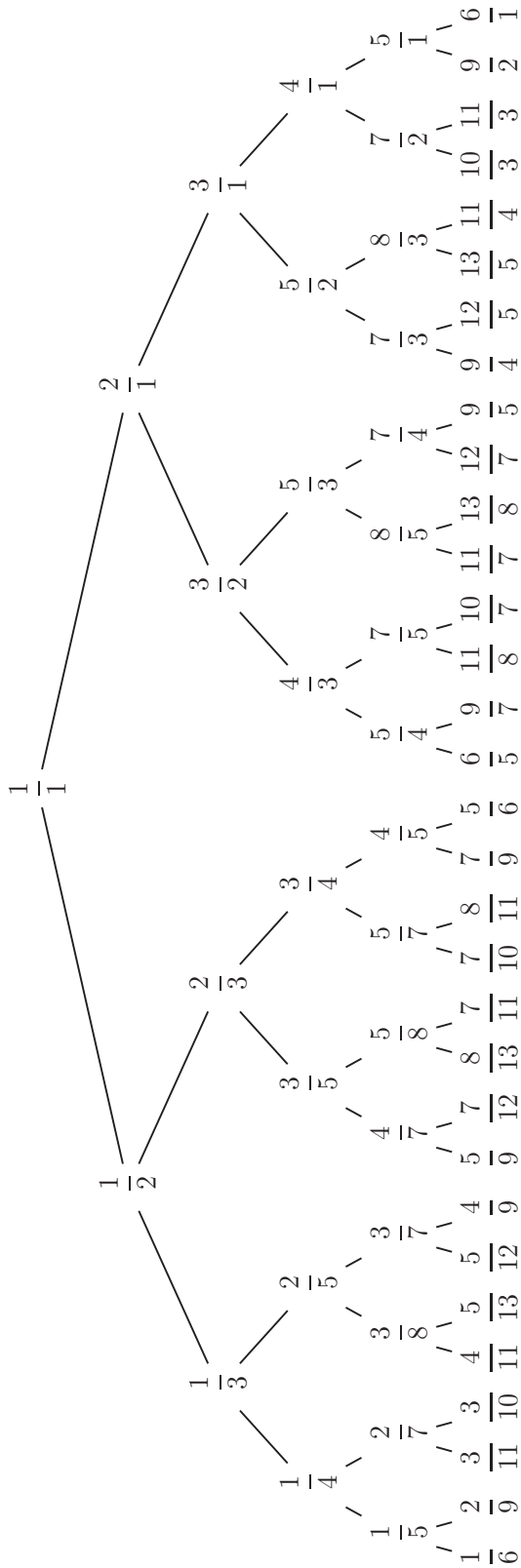


Figura 9.14: *SBF*: Primeros seis niveles del árbol de Stern-Brocot en forma fraccionaria.

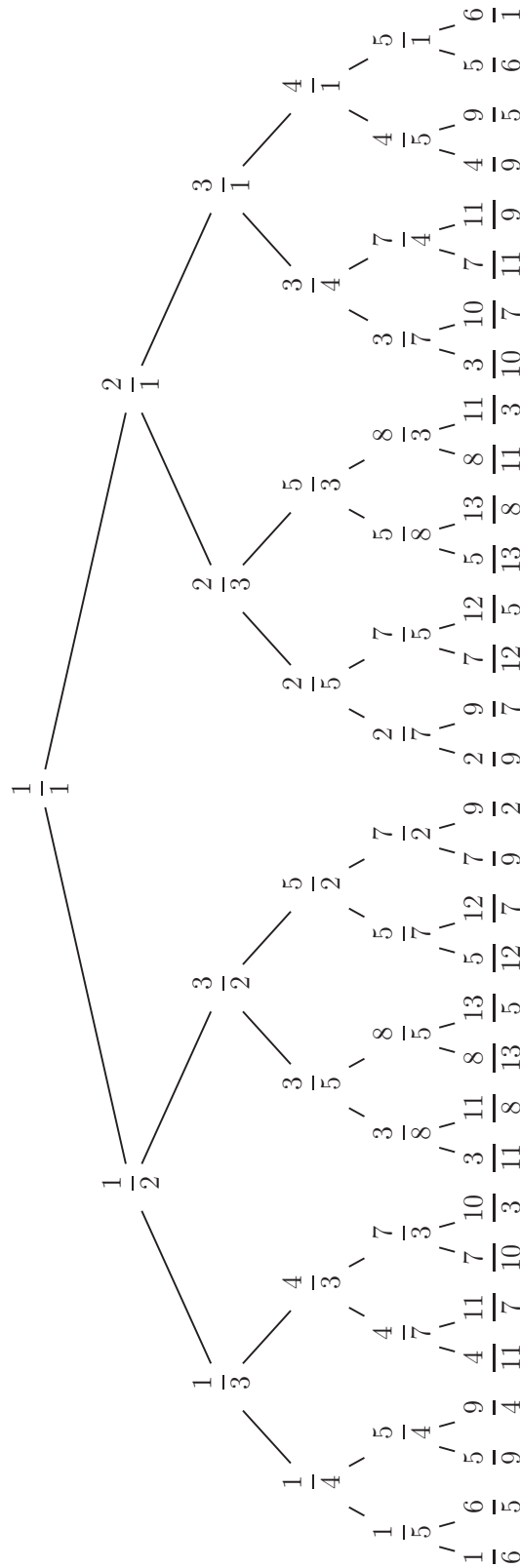


Figura 9.15: *SBFD*: Primeros seis niveles del árbol dual de Stern-Brocot en forma fraccionaria.

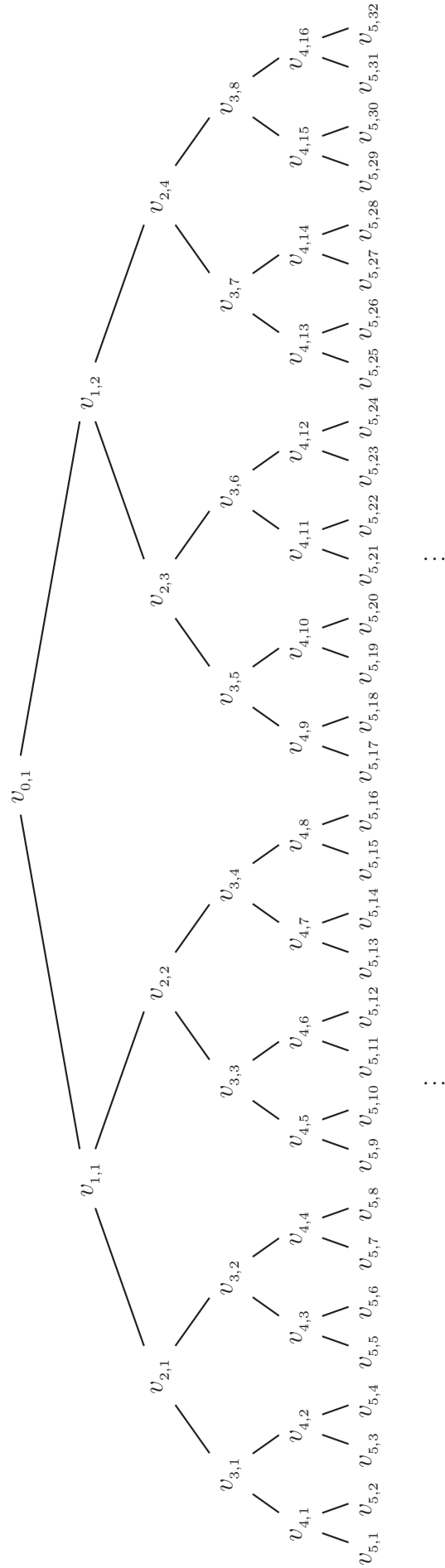


Figura 9.9: Notación para vértices de un árbol binario completo infinito.



# Bibliografía

- [1] V.I. Arnold, *Ordinary Differential Equations*, Springer-Verlag, New York, 1992.
- [2] V.I. Arnold, *Geometrical Methods in the Theory of Ordinary Differential Equations*, Springer-Verlag, U.S.A., 1983.
- [3] M.J. Álvarez, A. Ferragut, X. Jarque, *A survey on the Blow Up Technique*, International Journal of Bifurcation and Chaos, 21:11, (2011), 3103-3118.
- [4] C. Brezinski, *History of Continued Fractions and Padé Approximants*, Springer-Verlag, New York, 1991.
- [5] A. Brocot, *Calcul des rouages par approximation, nouvelle méthode*, Revue chronométrique, 3:186-194, 1860. (No consultado)
- [6] E.B. Burger, *Exploring the Number Jungle: A Journey into Diophantine Analysis*, American Mathematical Society, U.S.A., 2000.
- [7] T.W. Cusick, M.E. Flahive. *The Markoff and Lagrange spectra*, Math. Surveys and monographs, no. 30, Amer. Math. Soc., Providence, U.S.A., 1989.
- [8] Euclides, *Elementos*, Tomos VII, X.
- [9] L. R. Ford, *A geometrical proof of a theorem of Hurwitz*, Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society, 35 (1917), 59-65.
- [10] L. R. Ford, *Fractions*, The Amer. Math. Monthly, Vol. 45, No. 9 (1938), 586-601.
- [11] G.H. Hardy, E.M. Wright, *An Introduction to the Theory of Numbers*, Oxford University Press, Oxford, 2008.
- [12] Y. Ilyashenko, S. Yakovenko, *Lectures on Analytic Differential Equations*, American Mathematical Society, Rhode Island, 2008.
- [13] M.C. Irwin, *Geometry of Continued Fractions*, The Amer. Math. Monthly, Vol. 96, No. 8 (1989), 696-703.
- [14] C. Ivorra, *Teoría de Números*, <http://www.uv.es/ivorra/Libros/Numeros.pdf>.
- [15] A.Y. Khinchin, *Continued Fractions*, University of Chicago Press, Chicago, 1964.
- [16] M. Kindt, *Fracciones intermedias*, Números: Revista de Didáctica de las Matemáticas, Vol. 60 (2005), 51-60.

- [17] S. Lang, *Introduction to Diophantine Approximations*, Addison-Wesley Publishing Company, U.S.A., 1966.
- [18] R. Mansuy, *Achille Brocot, mathématicien à ses heures*, artículo de *CultureMATH*.
- [19] I. Niven, *Diophantine Approximations*, Dover, New York, 2008.
- [20] E. Reyssat, *Quelques Aspects des Surfaces de Riemann*, Birkhäuser, Boston, 1989.
- [21] K.F. Roth, *Rational approximations to algebraic numbers*, *Mathematika* 2 (1955), 1-20.
- [22] W. M. Schmidt, *Diophantine Approximations*, Lecture Notes in Math., 785, Springer Verlag, Berlín, 1980.
- [23] H.M. Stark, *An Introduction to Number Theory*, The MIT Press, Cambridge, 1964.
- [24] M. Stern, *Über eine zahlentheoretische Funktion*, *Journal für die reine und angewandte Mathematik* - 55, 193 - 220.
- [25] [http://www.cut-the-knot.org/ctk/SB\\_tree.shtml](http://www.cut-the-knot.org/ctk/SB_tree.shtml)