



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE
MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Números de Goldbach y polígonos reticulares

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICA

PRESENTA:

Gabriela Cervantes Piza

DIRECTOR DE TESIS:

Mat. J. César Guevara Bravo



2015

Ciudad Universitaria, D. F.



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

1. Datos del alumno

Cervantes

Piza

Gabriela

56 30 41 42

Universidad Nacional Autónoma de

México

Facultad de Ciencias

Matemáticas

306201819

2. Datos del tutor

Mat

Julio César

Guevara

Bravo

3. Datos del sinodal 1

Dr

Alejandro

Alvarado

García

4. Datos del sinodal 2

M en C

Francisco de Jesús

Struck

Chávez

5. Datos del sinodal 3

M en C

José

Guerrero

Grajeda

6. Datos del sinodal 4

M en H A

Carlos Iván

Lingan

Pérez

7. Datos del trabajo escrito

Números de Goldbach y

polígonos reticulares

134 p

2015

Agradecimientos

a **Julio César Guevara Bravo** por ser tan amable y paciente conmigo, por su dedicación y enseñanzas, y por guiarme a lo largo de este trabajo. Gracias por llegar hasta el final.

a **José Antonio López Saucedo** porque sin su ayuda esta tesis sería la mitad de lo que es.

a **Rafael Reyes Sánchez** porque me enseñó varios trucos de latex que no sabía.

a **todos mis sinodales** por sus atenciones.

a **Pamela Alvarado, Óscar González, Jimmy Hernández, Ana Pau Pérez, Miguel Romualdo, Marco Salazar y Alejandra Silva** porque respondían a mis llamados de auxilio, aún cuando éstos se debían a una bobería como una cuenta mal hecha. Especialmente a **Mauricio Andrade, Yolanda Martínez, Jesús Rojas y Jorge Vega** porque, además de resolver mis dudas, me enseñaron a hacer lo que no sabía y a **Karla Cortés** que también leyó y comentó cuanto le envié.

a **la banda** por ser tan amables conmigo.

*a mis padres,
Gabriel y Francisca,
porque me han apoyado,
aún cuando no están de acuerdo conmigo.
Sin ustedes no existiría.*

*a mis mostros,
Nairi y Patitas,
porque se esfuerzan por entenderme,
aunque la mayoría de las veces no saben de lo que hablo
y porque cada una me ayudó a su manera
a terminar esta tesis.*

Índice general

| | |
|------------------------------------------------------------------|-----------|
| Introducción | xI |
| 1. Retículas y Conjetura de Goldbach | 1 |
| 1.1. Puntos Reticulares | 1 |
| 1.2. Conjetura de Goldbach | 8 |
| 1.3. Cometa de Goldbach | 9 |
| 1.3.1. Sectores | 10 |
| 1.3.2. Bandas | 20 |
| 2. Conjetura binaria y triángulos de Goldbach | 31 |
| 2.1. Conjetura binaria y triángulos reticulares | 31 |
| 2.2. Triángulos de Goldbach | 33 |
| 2.2.1. Área de los triángulos de Goldbach | 35 |
| 2.2.2. Una aproximación para la función $A(T_n)$ | 38 |
| 2.2.3. Área de los T_{2p} | 39 |
| 3. Problema terciario de Goldbach y polígonos reticulares | 55 |
| 3.1. Problema terciario y su gráfica | 55 |
| 3.1.1. Una aproximación de $GI(n)$ | 60 |

| | |
|----------------------------------------------------------|------------|
| 3.1.2. Los primos p y $GI(p)$ | 72 |
| 3.2. Polígonos de Goldbach | 82 |
| 3.2.1. Polígono reticular y envolvente convexa | 87 |
| 3.2.2. Puntos en la frontera | 98 |
| 3.2.3. Puntos en el interior | 99 |
| 3.2.4. Áreas | 100 |
| 3.3. Análisis de las áreas | 101 |
| 3.3.1. Una función para $A(P_n)$ | 104 |
| Conclusiones | 109 |
| Apéndice A | 111 |
| Apéndice B | 115 |
| Apéndice C | 119 |
| Bibliografía | 121 |

Introducción

Desde el momento en que se formuló la conjetura de Goldbach que dice:

- *Todo número par mayor que dos puede escribirse como suma de dos primos.*
- *Todo número impar mayor que cinco puede escribirse como suma de tres primos,*

atrajo la atención de los matemáticos y se han hecho importantes trabajos al respecto. Por ejemplo, en 1923 Hardy & Littlewood conjeturaron una fórmula asintótica para las particiones de la conjetura de Goldbach; en 1989 Robertson & Fliegel dieron a conocer el *Cometa de Goldbach* y en 2013 Helfgott¹ demostró la conjetura débil.

En este trabajo de tesis también abordaremos la Conjetura de Goldbach sólo que nos enfocaremos, esencialmente, en ciertos aspectos de las representaciones como sumas de primos de un entero.

Es importante mencionar que todo el trabajo vinculado con la representación de las parejas y triadas de Goldbach en las retículas, así como todo lo que corresponde a los triángulos y envolventes convexas es propio de este trabajo de tesis, para ser

¹Véase [11]

más precisos, a partir de la sección 1.3.1 prácticamente todo el trabajo es propio de la tesis, en los casos donde se consultó alguna fuente ésta es mencionada.

Para comenzar, en el **Capítulo 1** se definen los elementos básicos de la teoría de retículas. En la sección 2 del mismo, se hace un análisis de la Conjetura de Goldbach, pero a través del Cometa, en el cual se estudian los *Sectores* y las *bandas* que se forman en él.

El **Capítulo 2** está dedicado a la conjetura binaria y a la representación reticular de las parejas de primos que suman a un número par. Como todos los puntos reticulares asociados a un número determinado están en la misma recta, se construyen triángulos reticulares y se analiza su comportamiento de forma individual y en conjunto.

Finalmente, el **Capítulo 3** está enfocado en el problema terciario. En la primera sección –al igual que en el **Capítulo 1**–, se estudia el problema terciario por medio del comportamiento de la gráfica correspondiente. En la sección 2, nuevamente se llevan las triadas a una retícula y ésta vez se construyen polígonos reticulares de los que se extraen algunas características individuales y en conjunto.

Nota

Todas las figuras que aparecen en la tesis (con excepción de las 1.17 y 3.10 de los capítulos 1 y 3, en el pie de imagen se menciona su origen) fueron creadas para este trabajo.

Aproximadamente el 50% de las figuras las creamos con los siguientes programas comerciales: Geogebra, Wolfram CDF Player y Excel.

El otro 50% de las figuras fueron hechas por el programa que creó José Antonio López Saucedo para el trabajo de investigación que desarrolla con el profesor César

Guevara sobre teoría aditiva de los números. Para identificar las figuras hechas por el programa de José Antonio nos podemos guiar por la presentación de la interface que aparece por primera vez en la página 9. Cabe señalar que José Antonio agregó una interface especial para esta tesis que nos proporciona datos sobre la función $A(T_n)$, que es el área de los triángulos de Goldbach.

Capítulo 1

Retículas y Conjetura de Goldbach

1.1. Puntos Reticulares

En esta sección definiremos algunos conceptos que se requerirán de la teoría de retículas, como son puntos enteros o reticulares y polígonos reticulares. Éstos nos serán de gran utilidad en los capítulos 2 y 3. Posteriormente en esta sección exponaremos algunos resultados concernientes a las áreas de polígonos reticulares y para esto abordamos el teorema de Pick.

Con frecuencia nos sucede que tenemos en nuestra posesión ciertos datos que no son producto del azar, y que sabemos que fueron obtenidos a partir de algún proceso vinculado con otro conjunto de datos bien definido. Por ejemplo, conocemos perfectamente a los enteros positivos y por Lagrange sabemos que cada uno de ellos puede ser escrito como suma de cuatro cuadrados enteros. Así, por un lado

conocemos mucho sobre el conjunto de los enteros, pero, del otro obtenemos cuartetos de cuadrados que nos representan a cada entero, y ahora tendríamos el reto de extraer información sobre los conjuntos de cuartetos que representan a cada entero¹.

Para el caso de este capítulo lo que tenemos son conjuntos de parejas de enteros asociadas a los enteros pares, y especialmente nos referimos a las parejas de primos que representan a los pares, es decir, estamos pensando en la *Conjetura binaria de Goldbach*. La conjetura para los pares nos dice que *todo entero par mayor que dos se puede escribir como suma de dos primos*, y además intuimos que entre más grande es el número parece que la cantidad de parejas de primos que los representan crece². Lo que ahora queremos es extraer más información sobre esta cantidad de parejas para cada número par.

Cuando nos referimos a extraer más información de las parejas, estamos pensando en que pueden existir diversas maneras de hacerlo, por ejemplo alguien podría tomar las parejas de primos cuya suma representa al número 36, que son

$$5 + 31, 7 + 29, 13 + 23 \text{ y } 17 + 19$$

y después decide que si suma a los ocho primos y toma la parte entera de la raíz de esa suma obtendrá un entero asociado al 36. Si se hace lo mismo con todas las parejas de primos de los pares, entonces tendrá a un nuevo conjunto de constantes asociadas, y ese nuevo conjunto posiblemente cumpla con alguna relación que sea de su interés y que le ayude a entender más a los mismos enteros pares.

¹Una muestra de esto es que 45 tiene más representaciones como suma de cuatro cuadrados que el 46.

Es importante señalar que existe un área de las matemáticas que trata ese tipo de problemas, nos referimos a la Minería de Datos. Esta disciplina tiene la finalidad de extraer información de un conjunto de datos y transformarla en una estructura comprensible para un uso posterior.

²El Cometa de Goldbach nos da esta información, ver la siguiente sección, página 8.

Para nuestro análisis de las parejas de Goldbach hemos considerado que una vía para conocer más sobre este conjunto de parejas puede ser a través del uso de una retícula en el plano, es decir, una malla con cuadros unitarios en la que representaremos a los puntos de intersección con coordenadas enteras. Como en nuestro caso las parejas asociadas a la conjetura son enteros, entonces cada una la podemos visualizar como un punto en la retícula. Antes de dar paso al estudio de las parejas de Goldbach en el plano necesitamos primero enunciar una serie de conceptos y resultados concernientes a las retículas.

Definición 1.1.1.

Un punto $P = (x, y)$ es reticular o entero si x, y son números enteros.

Definición 1.1.2.

Una retícula es una colección de puntos enteros.

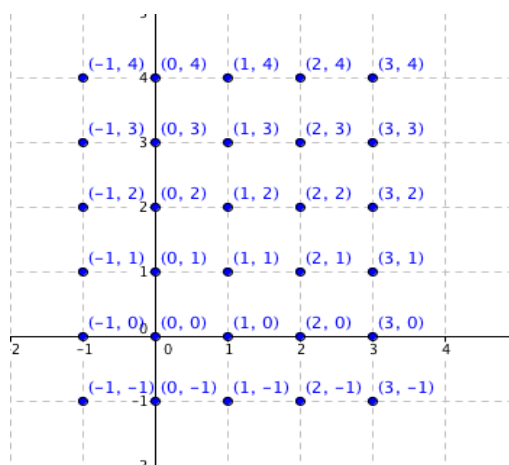


Figura 1.1: Retícula

Definición 1.1.3.

Un polígono reticular es un polígono simple³ cuyos vértices son puntos enteros.

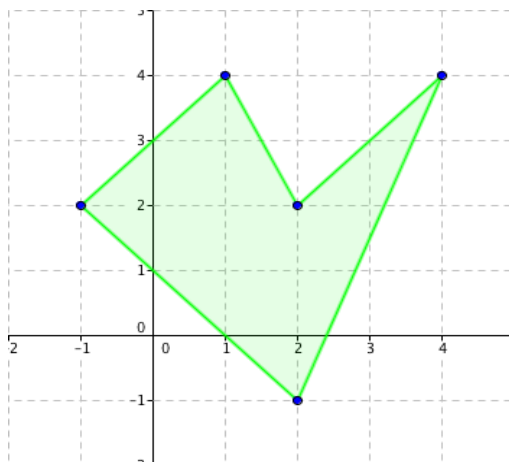


Figura 1.2: Polígono reticular.

Si queremos calcular el área de un polígono reticular, lo podemos hacer a través del *Teorema de Pick* que enuncia lo siguiente:

El área de un polígono reticular P está dada por:

$$A(P) = I + \frac{B}{2} - 1$$

donde I y B corresponden al número de puntos reticulares en el interior y en la frontera de P , respectivamente.

Ejemplo 1.1.4. (*Teorema de Pick*)

El área del polígono de la figura 1.2 es 10. Este polígono tiene 3 puntos reticulares al interior y 16 en la frontera, es decir, $I = 3$ y $B = 16$. Sustituyendo ambos datos en la fórmula del Teorema de Pick se tiene que:

³Un polígono simple es un polígono cuyos lados no adyacentes no se intersecan.

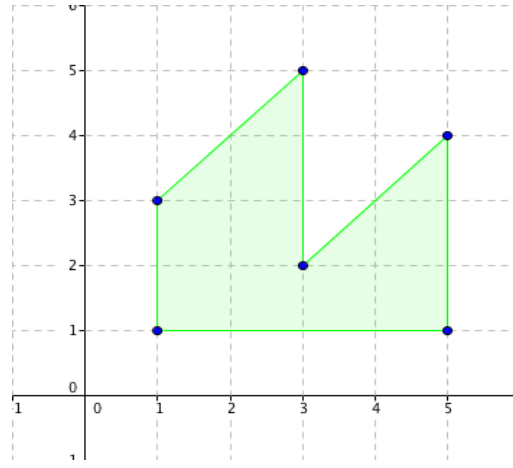


Figura 1.3: Polígono reticular y teorema de Pick.

$$A(P) = 3 + \frac{16}{2} - 1 = 3 + 8 - 1 = 10.$$

Pese a que trabajaremos con áreas de triángulos reticulares, el teorema tiene sus limitantes, éste no nos permite calcular el número de puntos interiores. Si se quisiera saber más sobre este teorema puede consultarse en [7].

Veamos ahora la siguiente propiedad sobre áreas.

Proposición 1.1.5.

Sea T un triángulo reticular cuyos vértices son $P = (p, q)$, $Q = (r, s)$ y $O = (0, 0)$, entonces el área de T está dada por:

$$A(T) = \frac{|ps - qr|}{2}$$

Demostración.

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $0 < q < s$. De esto se obtienen los siguientes casos:

Caso 1: $0 < p = r$

$$A(T) = \frac{p \cdot |s-q|}{2} = \frac{|ps-pq|}{2} = \frac{|ps-rq|}{2}$$

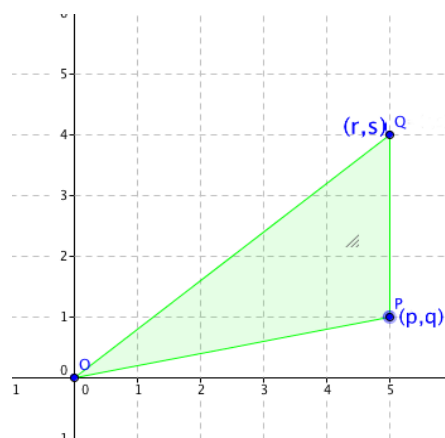


Figura 1.4: Caso 1.

Caso 2: $0 < p < r$

$$A(T) = rs - (A(\triangle(OQ(0,s))) + A(\triangle(OP(p,0))) + A(\square(P(0,p)(r,0)(r,q))) + A(\triangle(PQ(r,q))).$$

Después de calcular las áreas

$$A(\triangle(OPQ)) = rs - \left(\frac{rs}{2} + \frac{pq}{2} + (r-p)q + \frac{(r-p)(s-q)}{2} \right)$$

$$A(\triangle(OPQ)) = \frac{rs-pq}{2} + \frac{2qr-2pr}{2} - \frac{pr-rq-ps+pq}{2}$$

$$A(\triangle(OPQ)) = \frac{pr}{2} - \frac{pq}{2} - \frac{2qr}{2} + \frac{2pq}{2} - \frac{pr}{2} + \frac{rq}{2} + \frac{ps}{2} - \frac{pq}{2},$$

finalmente se llega al resultado

$$A(\triangle(OPQ)) = \frac{ps-qr}{2} = \frac{|ps-qr|}{2}.$$

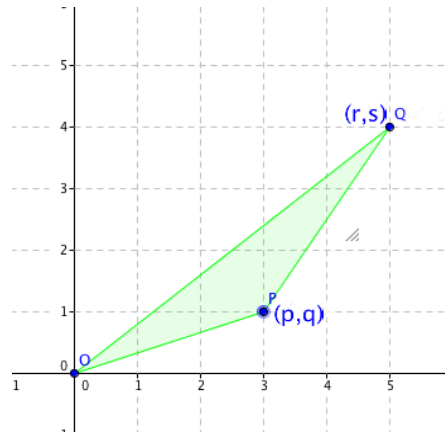


Figura 1.5: Caso 2.

Caso 3: $0 < r < p$

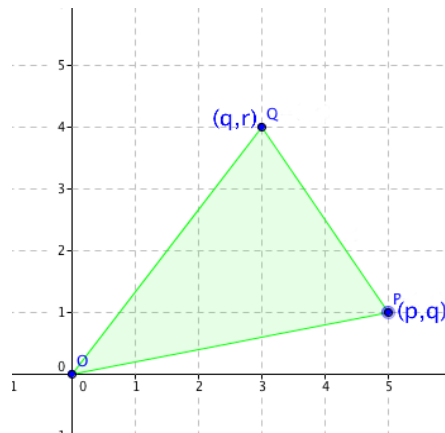


Figura 1.6: Caso 3.

La demostración de este caso se hace con una construcción análoga a la del caso anterior (figura 1.5). □

Ahora que ya tenemos la información requerida sobre puntos en una retícula, demos lugar a lo que es nuestro caso particular, que como ya mencionamos son los puntos enteros vinculados a cada pareja de Goldbach. Pero antes de adentrarnos en nuestro problema, pensamos que es importante explicar algunos elementos importantes sobre la *Conjetura de Goldbach*.

1.2. Conjetura de Goldbach

*En esta sección enunciaremos la conjetura de Goldbach y presentamos uno de los trabajos gráficos más sobresalientes al que se le conoce como **Cometa de Goldbach**.*

A partir de la carta que Goldbach escribió a Euler en 1742, se extrae lo que hoy conocemos como Conjetura de Goldbach. De ésta tenemos dos casos, para enteros positivos pares e impares:

- *Todo número par mayor que dos puede escribirse como suma de dos primos.*
- *Todo número impar mayor que cinco puede escribirse como suma de tres primos.*

De manera empírica vemos que cada entero par tiene más de una representación como suma de dos primos. A la cantidad de estas representaciones le llamaremos número de Goldbach y lo denotaremos por $G(n)$. Vemos que en la medida que los $G(n)$ crecen parece que la conjetura sería verdadera, es decir, no existiría un n tal que $G(n) = 0$. El comportamiento de la función $G(n)$ fue representada por primera vez en 1989 por Robertson y Fliegel[1], cuando publicaron un artículo en

el que se muestra la gráfica de la relación $n \sim G(n)$. El resultado obtenido fue tan sorprendente que a la gráfica se le conoce como *Cometa de Goldbach* (figura 1.7).

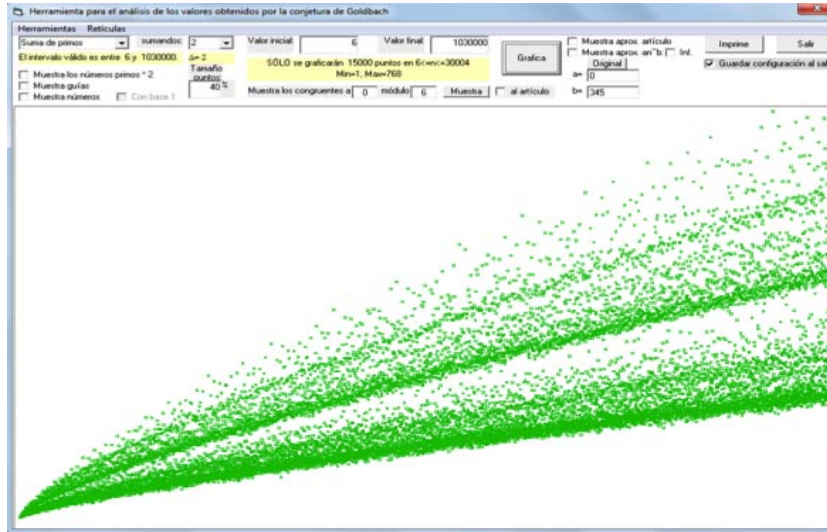


Figura 1.7: Cometa de Goldbach. Todas las figuras con esta interface fueron creadas a partir del programa que elaboró José Antonio López Saucedo.

Para entender más la conjetura ahora estudiaremos la anatomía del Cometa.

1.3. Cometa de Goldbach

En esta parte de la tesis nos dedicaremos a analizar la anatomía del Cometa de Goldbach. Comenzaremos por explicar, principalmente, la aparición de los que llamamos sectores y lo haremos mediante la fórmula de Hardy-Littlewood. Posteriormente generalizaremos este razonamiento y con esto tratamos de explicar las subdivisiones dentro de cada sector del Cometa a las que llamaremos bandas.

1.3.1. Sectores

En la figura 1.8 podemos ver dos grandes sectores separados por una línea roja.

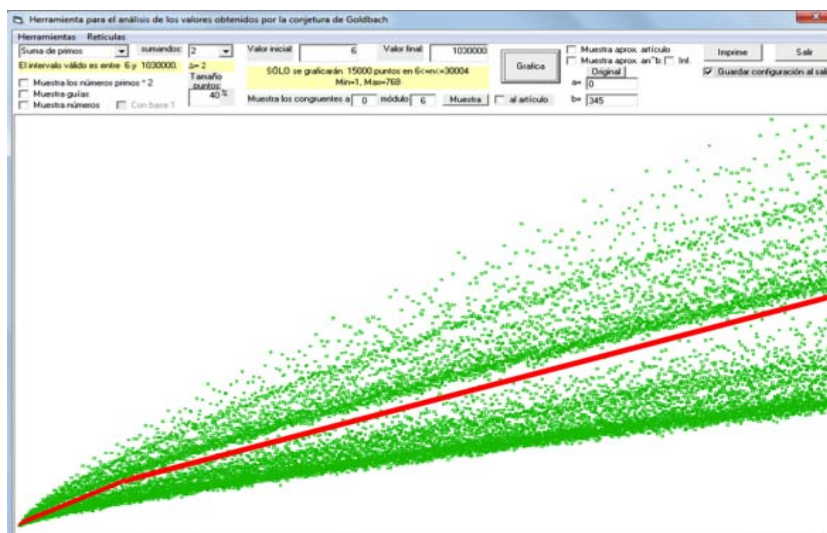


Figura 1.8: Sectores del Cometa de Goldbach divididos por la línea roja.

A simple vista, se nota que el cometa tiene un comportamiento “aparentemente”⁴ creciente, y se forman dos grandes sectores, así como densas franjas en cada uno de ellos. Y como suele suceder en matemáticas, lo anterior no es producto del azar.

Consideraremos como primer sector el que está sobre la línea roja, y en él estarán alojados todos los números de Goldbach que corresponden a números pares que son múltiplos de 6 (en la figura 1.9 están en color azul). Los del segundo sector corresponden a los que se ubican bajo la línea roja, y allí se encuentran aquéllos que al ser divididos por 6 dejan residuo 2 ó 4, o dicho en otras palabras, todos los pares que son congruentes a 2 ó 4 módulo 6, véase figuras 1.9 hasta 1.11.

⁴Recordemos que la Conjetura de Goldbach binaria sigue sin demostrarse.

1.3. COMETA DE GOLDBACH

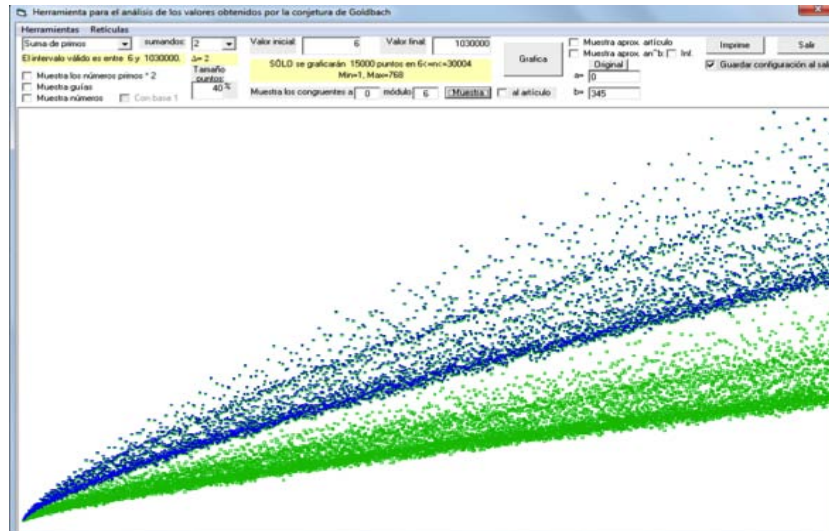


Figura 1.9: Marcados en azul los números congruentes con $0 \pmod 6$.

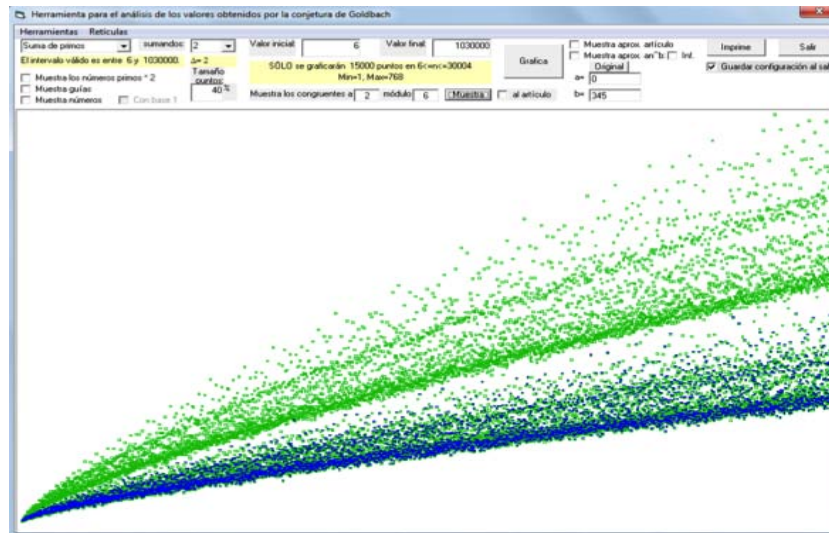


Figura 1.10: Marcados en azul los números congruentes con $2 \pmod 6$.

Ahora daremos una explicación de porque se forman estos dos sectores entre los números de Goldbach, que se ven explícitamente en el cometa. Para explicarlo

CAPÍTULO 1. RETÍCULAS Y CONJETURA DE GOLDBACH

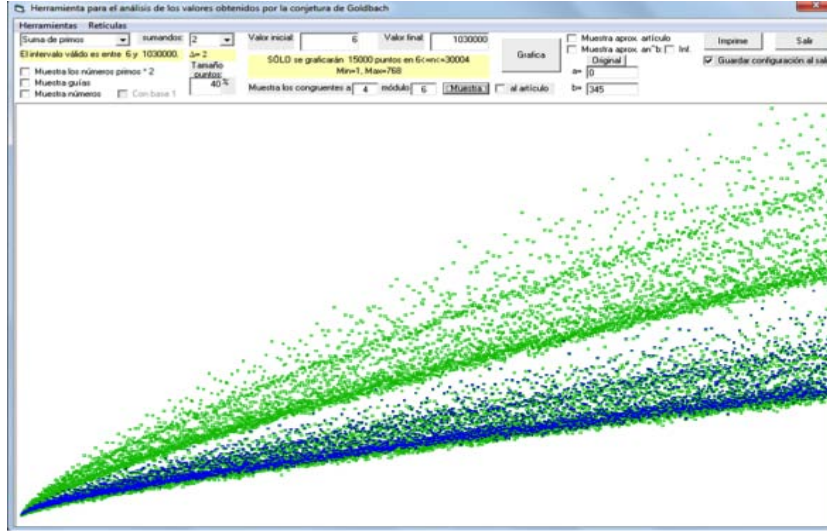


Figura 1.11: Marcados en azul los números congruentes con $4 \pmod 6$.

partimos de la fórmula de Hardy-Littlewood [2]

$$HL(n) \approx 2C_2 \frac{n}{(\log n)^2} \prod_p \left(\frac{p-1}{p-2} \right).$$

El producto $\prod_p \left(\frac{p-1}{p-2} \right)$ corre sobre los primos impares que dividen a n . La constante $C_2 = \prod_p \left(1 - \frac{1}{(p-1)^2} \right)$ toma a todos los primos impares y $2C_2 \approx 1.3203$.

La fórmula $HL(n)$ nos proporciona una aproximación del verdadero número de Goldbach $G(n)$. Nótese que el factor $\prod_p \left(\frac{p-1}{p-2} \right)$ es un producto que se desarrolla con los primos a partir del tres. En particular, el número de Goldbach de los números que tienen como factor al 3 es *grosso modo* ‘el doble’ de aquellos en los que no es factor. Más aún, mientras más grande sea un factor primo, menor es su aportación a la fórmula del número de Goldbach, esto es, si los p_i son primos grandes, entonces

los factores correspondientes $\left(\frac{p_i-1}{p_i-2}\right)$ tienden a uno. Veamos unos casos de números que son múltiplos de seis y otros que no lo son⁵.

Ejemplo 1.3.1.

$$204 = 2(2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 17)$$

$$HL(204) \approx 2C_2 \frac{204}{(\log(204))^2} \cdot \left(\frac{2}{1} \cdot \frac{16}{15}\right) \approx 20.31$$

$$G(204) = 14$$

Ejemplo 1.3.2.

$$208 = 2(2^3 \cdot 13)$$

$$HL(208) \approx 2C_2 \frac{208}{(\log(208))^2} \cdot \left(\frac{12}{13}\right) \approx 10.51$$

$$G(208) = 7$$

Ejemplo 1.3.3.

$$512 = 2^8$$

$$HL(512) \approx 2C_2 \frac{512}{(\log(512))^2} \approx 17.37$$

$$G(512) = 11.$$

De esta manera podemos notar que los números que son múltiplos de seis tienen la tendencia a ubicarse en el sector que está sobre la línea roja, en la figura 1.8 y los otros la tienen por debajo.

Otra manera de tratar de entender la composición de los sectores es a través de las formas modulares, esto es, como la conjetura binaria es para los pares, entonces podemos decir que todos los pares son de la forma $6k$, $6k+2$ ó $6k+4$, o en lenguaje de módulos, decimos que todo entero par n cumple con una de las formas

⁵Nótese que a pesar de que $HL(n)$ y $G(n)$ no son iguales, conservan las proporciones. Prueba de ello es el comportamiento del cometa.

$$n \equiv 0 \pmod{6}$$

$$n \equiv 2 \pmod{6}$$

$$n \equiv 4 \pmod{6}$$

De regreso a las parejas de la conjetura de Goldbach, para cada par n se tiene que si

$$n = p + q \text{ con } p, q \text{ primos}$$

entonces, para el primer caso, si $n \equiv 2 \pmod{6}$ se requiere que los primos p y q pertenezcan a la misma clase residual, es decir, ambos tienen que cumplir con que:

$$p \equiv 1 \pmod{6}$$

$$q \equiv 1 \pmod{6}.$$

Para el segundo caso, si $n \equiv 4 \pmod{6}$, entonces se requiere que

$$p \equiv 5 \pmod{6}$$

$$q \equiv 5 \pmod{6}.$$

Finalmente, para el tercer caso, $n \equiv 0 \pmod{6}$

$$p \equiv 1 \pmod{6}$$

$$q \equiv 5 \pmod{6}$$

ó

$$p \equiv 5 \pmod{6}$$

$$q \equiv 1 \pmod{6}.$$

Nótese que para formar las parejas en el tercer caso se utilizan las dos clases de primos bajo el mismo módulo 6, mientras que para los casos uno y dos, es decir, los que dejan residuo 2 ó 4 sólo se ocupa una clase de primos.

Regresemos al tercer caso, si tenemos que $n = p+q$, con p, q primos de diferentes clases, entonces resulta que tenemos a nuestra disposición dos conjuntos de primos para formar a n , estos son los que están contenidos en el conjunto de números de la forma $6k + 1$ y $6k + 5$ respectivamente. Pero en los casos uno y dos sólo podemos contar con los primos de la forma $6k + 1$ ó $6k + 5$ respectivamente.

Entonces, de manera natural podríamos sugerir que los pares múltiplos de seis tienen el doble de posibilidades para formar parejas de primos. Pero, para plantear esto entonces requerimos contestar la pregunta ¿qué nos asegura que las cardinalidades de ambos conjuntos de primos son infinitas, para que tengamos la posibilidad de elegir un elemento de cada conjunto siempre que queramos? Para resolver esta interrogante nos apoyamos en las progresiones aritméticas de Dirichlet⁶, que de manera particular nos asegura que hay una infinidad de primos de las formas $6k + 1$ y $6k + 5$. No obstante, esto sigue sin ser suficiente, hasta ahora ya sabemos que ambos conjuntos son infinitos, pero, ¿es posible que las cardinalidades de ambos conjuntos sean tan distintas como lo son las de \mathbf{R} y \mathbf{Z} ? Si esto ocurriera, podríamos tener inconvenientes a la hora de formar parejas.

Para solucionar este problema podemos sostenernos en un resultado que calcula cierta clase de primos p menores a un número x . El resultado dice que

$$\pi(x; a, b) \sim \frac{\pi(x)}{\phi(b)},$$

donde $\pi(x; a, b) = |\{p \leq x \mid p \equiv a \pmod{b}\}|$.

⁶Una progresión aritmética, $a + nb$, es de Dirichlet si $(a, b) = 1$.

Implícitamente esto nos sugiere que hay una *equidistribución* de primos en progresiones aritméticas con el mismo módulo, *i.e.*, hay casi la misma cantidad de primos de la forma $a + nb$ que de la forma $c + nb$, donde $(a, b) = 1 = (c, b)$. Si b es cercano a x esta estimación puede no ser cierta, pero se conoce que si b es pequeño respecto a x , entonces sí lo es (véase [3]).

Para el caso particular en el que $b = 6$, $\phi(6) = 2$, entonces para cada valor que puede tomar a , $\pi(x; a, 6) \sim \frac{\pi(x)}{2}$, es decir, para una x dada, cada conjunto tiene cerca de las mitad del total de primos que hay menores que ella.

Ya resolvimos los conflictos que podrían invalidar los cálculos del número de posibles parejas para los números pares mediante combinaciones. Ahora veremos si lo obtenido con este método coincide con lo que se había dicho antes.

Aunque sabemos que el número de primos congruentes con uno o cinco módulo seis que son menores que x es más o menos la mitad de la cantidad total de primos que hay menores que x , no necesariamente son iguales. Así, con esto sean $a = \pi(n; 1, 6)$ y $c = \pi(n; 5, 6)$. El número de posibles combinaciones tomando dos primos de la misma clase es

$$C_2^a = \frac{a!}{(a-2)!} = \frac{a(a-1)}{2} = \frac{a^2-a}{2}$$

$$C_2^c = \frac{c!}{(c-2)!} = \frac{c(c-1)}{2} = \frac{c^2-c}{2}.$$

En este cálculo no se contemplan las parejas del tipo $p+p$, por lo que, para tomarlas en cuenta, hay que sumar a y c respectivamente.

Así

$$C_2^a + a = \frac{a^2+a}{2}$$

$$C_2^c + c = \frac{c^2+c}{2},$$

son el número de combinaciones posibles para los números congruentes con dos y cuatro módulo seis, respectivamente. Para aquellos que son divisibles por seis, la cantidad de combinaciones es $C_1^a C_1^c = ac$, es decir, ac son las formas en las que se pueden tomar los primos para formar la suma del número par.

Ahora veamos para que condiciones se cumple que $C_1^a C_1^c > C_2^a, C_2^c$.

Como ya habíamos mencionado a y c no necesariamente son iguales, entonces alguno debe ser mayor que el otro. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que c es mayor que a .

Entonces

$$ac > a^2 = \frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{2} > \frac{a^2+a}{2} \dots\dots\dots (1)$$

Por otro lado,

$$ac > \frac{c^2+c}{2} \text{ si y sólo si } a > \frac{c+1}{2} \text{ si y sólo si } 2a > c + 1 \text{ si y sólo si } 2a \geq c.$$

Pero si recordamos que $\pi(x; 1, 6) \sim \frac{\pi(x)}{2} \sim \pi(x; 5, 6)$ se tiene que, si bien a y c no son iguales, sí son bastante cercanos, por lo que la condición $2a \geq c$ seguramente se cumple. El cuadro 1.1 nos puede dar más datos para apoyar la desigualdad.

Los datos empíricos nos dicen que generalmente el conjunto de los primos de la forma $4n + 3$ es mayor que el de los $4n + 1$, en ciertos rangos, pero a partir del teorema de Littlewood vemos que puede cambiar, y este nos indica que se da la igualdad en diferentes rangos. El teorema dice lo siguiente :

Hay arbitrariamente grandes valores de x para los cuales hay más primos de la forma $4n + 1$ hasta x , que números de la forma $4n - 1$. Dicho de otra manera, hay arbitrariamente grandes valores de x para los que

$$\pi(x; 1, 4) - \pi(x; 3, 4) \geq \frac{\sqrt{x}}{2 \ln x} \ln \ln \ln x.$$

| x | $\pi(x; 1, 6)$ | $\pi(x; 5, 6)$ | Diferencia |
|---------|----------------|----------------|------------|
| 100 | 11 | 12 | 1 |
| 500 | 45 | 48 | 3 |
| 1000 | 80 | 86 | 6 |
| 10000 | 611 | 616 | 5 |
| 50000 | 2556 | 2575 | 19 |
| 100000 | 4784 | 4806 | 22 |
| 200000 | 8988 | 8994 | 6 |
| 500000 | 20733 | 20803 | 70 |
| 1000000 | 39231 | 39265 | 34 |

Cuadro 1.1: Densidad de primos por clase módulo seis.

De manera implícita el teorema de Littlewood nos dice que en determinados momentos puede darse la igualdad entre ambos conjuntos de primos. Aunque este resultado es para módulo cuatro, es natural pensar que también funcionaría si en lugar de cuatro utilizáramos seis.

Entonces, si quisiéramos hacer el cálculo combinatorio y comparar, el resultado sería el mismo que obtuvimos en (1), pues al apoyarnos en este teorema estamos suponiendo que $a = c$.

Antes de dejar el análisis de los sectores veamos otro comportamiento interesante que se presenta en el sector inferior. Como ya sabemos, éste está formado por los enteros pares que son congruentes con 2 ó 4 $\text{mod } 6$.

Cuando hacemos un acercamiento al sector inferior del cometa y marcamos ambas clases de números, se tienen las siguientes imágenes (figura 1.12).

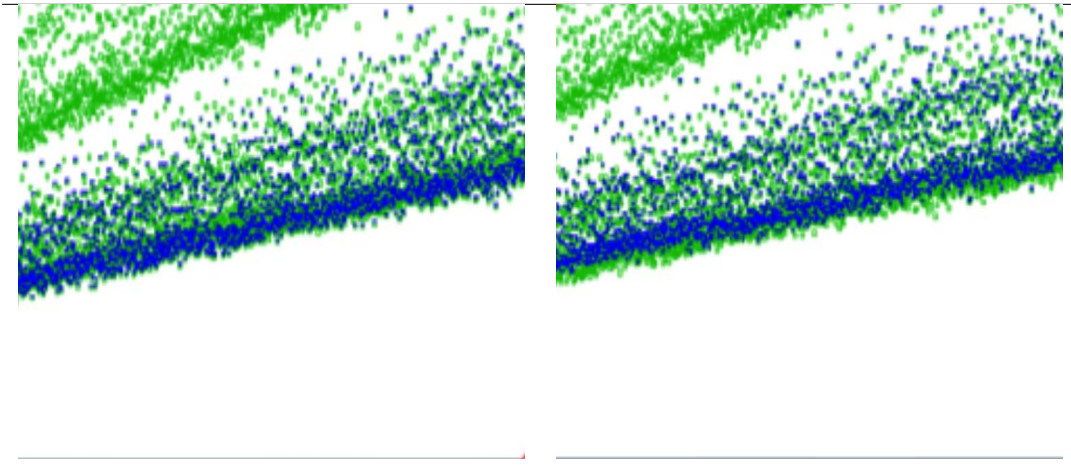


Figura 1.12: Ampliación del sector inferior del Cometa de Goldbach, $2 \bmod 6$ (izquierda) y $4 \bmod 6$ (derecha).

Nótese que el bloque de números de Goldbach de los pares congruentes con $4 \bmod 6$, tiene una cota inferior más grande que el de los congruentes con $2 \bmod 6$ —esto es, la separación entre la parte inferior del cometa y las marcas azules es mayor en la imagen de la derecha que en la de la izquierda—. Recordemos que para que dos primos impares sumen a un par que pertenezca a alguna de estas dos clase, se requiere que ambos sean de la misma forma, para el caso en que $n \equiv 4 \bmod 6$, los primos deben ser de la forma $6k + 5$, mientras que para cuando $n \equiv 2 \bmod 6$ tienen que ser de la forma $6k + 1$.

Una posible explicación del comportamiento que se observa en el sector inferior es que, al menos empíricamente (cuadro 1.1 y figura 1.13), para una x dada existen más primos de la forma $6k + 5$, que de la forma $6k + 1$ menores o iguales a x , y aunque la diferencia entre $\pi(x; 1, 6)$ y $\pi(x; 5, 6)$ no es muy grande, ésta permite que haya más parejas para los pares congruentes con 4 módulo 6.

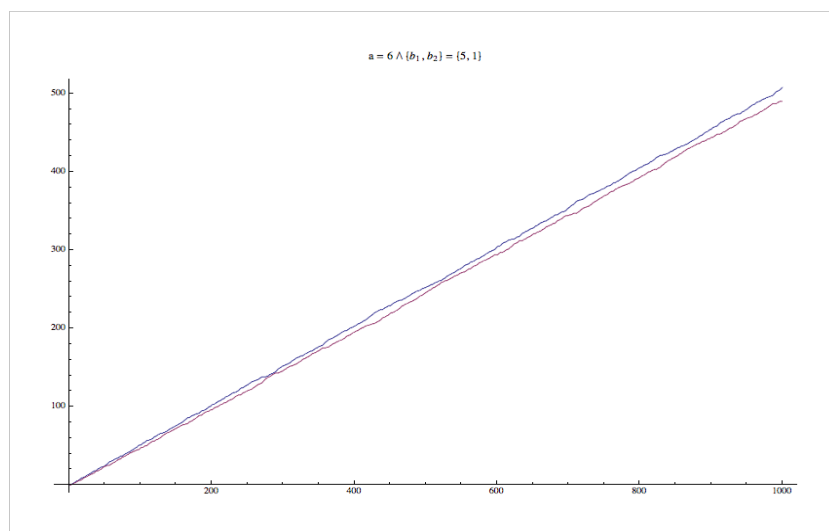


Figura 1.13: Densidad de primos de las forma $6k + 5$ (azul) y $6k + 1$ (rojo) hasta 1000.

Ya se trató lo que llamamos sectores, ahora es momento de que demos lugar a los cúmulos de puntos que se forman en cada uno de ellos, a estos cúmulos los llamaremos bandas.

1.3.2. Bandas

De la sección anterior sabemos que los números de Goldbach $G(n)$ están clasificados en dos grandes sectores, en el que n es múltiplo de 6 y en el que no lo es. Pero dentro de cada uno de ellos se pueden apreciar cúmulos que forman bandas aparentemente bien definidas, al menos gráficamente (véase figura 1.14).

A continuación trataremos de dar una justificación algebraica de la “aparente”⁷ existencia de estas bandas.

⁷Decimos “aparente” pues hay que recordar que el Cometa de Goldbach es parte de una conjetura.

1.3. COMETA DE GOLDBACH

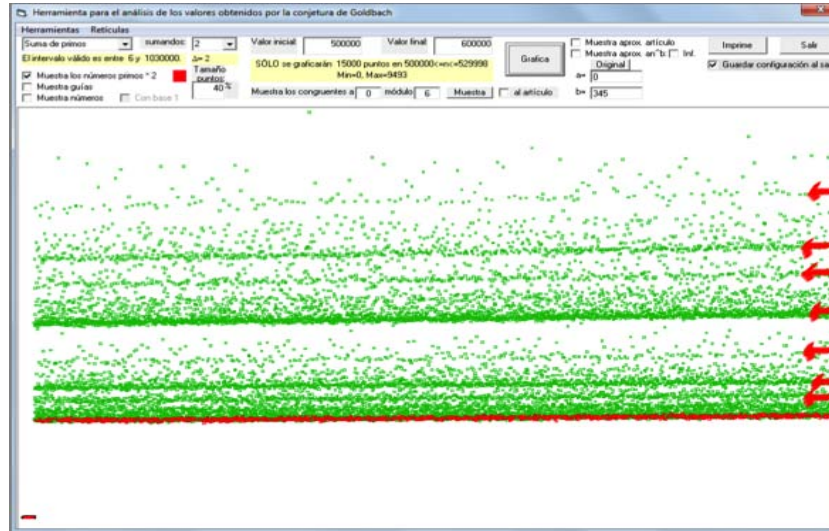


Figura 1.14: Cometa de Goldbach con n en el intervalo $(50000, 60000)$, este rango permite una mejor apreciación de las bandas. La banda de los $n = 2p$ en rojo.

Comencemos por observar la banda roja marcada en la figura 1.14. Es sorprendente ver que los números alojados en esa banda corresponden a los $G(n)$ cuya n sólo posee dos factores primos y al ser n un número par, esos números son de la forma $n = 2p$, con p primo. De manera inmediata surge la duda de por qué este tipo de números $G(n)$ parecieran responder a un comportamiento predecible, formando una banda, aún cuando el comportamiento en conjunto del cometa parece ser inestable dentro de cada sector.

Es importante mencionar que esta banda de números puede considerarse como el piso inferior⁸. Ahora damos lugar al análisis de porque estos números forman lo que llamamos la banda roja.

⁸Con esto no decimos que todos los números en la parte inferior del cometa se encuentran en la banda roja, sólo que al tratarse de un gran cúmulo de números con una forma específica que además está abajo en el cometa, lo proponemos como cota inferior.

En la sección anterior usamos la fórmula de Hardy-Littlewood para justificar la existencia de los sectores, ahora recurriremos nuevamente a ella para tratar de explicar la formación de las bandas. Recordemos que la fórmula nos enuncia que

$$HL(n) \approx 2C_2 \frac{n}{(\log n)^2} \prod_p \left(\frac{p-1}{p-2} \right)$$

donde p es un primo impar divisor de n y $C_2 = \prod_p \left(1 - \frac{1}{(p-1)^2} \right)$ toma a todos los primos impares, $2C_2 \approx 1.3203$.

Para el caso de los números pares de la banda roja, es decir, los que sólo tienen dos factores primos, 2 y p primo, la fórmula se reduce solamente a

$$HL(n) \approx 2C_2 \frac{n}{(\log n)^2} \cdot \left(\frac{p-1}{p-2} \right)$$

Nótese que para $p \geq 13$, se tiene que $1.1 > \left(\frac{p-1}{p-2} \right) > 1$, y en medida que p es más grande $\left(\frac{p-1}{p-2} \right)$ es más cercano a uno, de hecho, para $p \geq 101$, $1.01 > \left(\frac{p-1}{p-2} \right)$.

Veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 1.3.4.

$$n = 202 = 2(101)$$

$$HL(202) \approx 2C_2 \frac{202}{(\log(202))^2} \cdot \frac{100}{99} \approx 9.56$$

$$G(202) = 9$$

Ejemplo 1.3.5.

$$n = 206 = 2(103)$$

$$HL(206) \approx 2C_2 \frac{206}{(\log(206))^2} \cdot \frac{102}{101} \approx 9.67$$

$$G(206) = 7$$

Ejemplo 1.3.6.

$$n = 998 = 2(499)$$

$$HL(998) \approx 2C_2 \frac{998}{(\log(998))^2} \cdot \frac{498}{497} \approx 27.68$$

$$G(998) = 17$$

Basándonos únicamente en la fórmula para justificar el comportamiento de la banda roja, notemos que $HL(n)$ está determinado prácticamente por el factor $2C_2 \frac{n}{(\log n)^2}$, y esto es porque el factor $(\frac{p-1}{p-2})$ tiende a uno. Regresando a los ejemplos anteriores se percibe que

$$HL(202) \approx 2C_2 \frac{202}{(\log(202))^2} \cdot \frac{100}{99} \approx 9.56 \text{ mientras que } 2C_2 \frac{202}{(\log(202))^2} \approx 9.46$$

$$HL(206) \approx 2C_2 \frac{206}{(\log(206))^2} \cdot \frac{102}{101} \approx 9.67 \text{ mientras que } 2C_2 \frac{206}{(\log(206))^2} \approx 9.58$$

$$HL(998) \approx 2C_2 \frac{998}{(\log(998))^2} \cdot \frac{498}{497} \approx 27.68 \text{ mientras que } 2C_2 \frac{998}{(\log(998))^2} \approx 27.63$$

Nótese que en todos los casos y a pesar de que n es pequeño, el factor $2C_2 \frac{n}{(\log n)^2}$ ya es cercano a la fórmula completa de Hardy-Littlewood, es más, podríamos considerar a este factor como “cota inferior”. Esto no contradice lo que mencionábamos sobre la banda roja, ya que con los ejemplos de arriba sostenemos que los números de Goldbach de los $2p$, obtenidos mediante la fórmula completa, están poco más arriba que los arrojados solamente por $2C_2 \frac{n}{(\log n)^2}$.

Ahora definimos la función $F(n) = 2C_2 \frac{n}{(\log n)^2}$ y si la comparamos con la aproximación de Hardy-Littlewood, notaremos que para los pares de la forma $n = 2^\beta$, con $\beta \in \mathbf{Z}^+$, ambas funciones toman los mismo valores. Además, para los $n = 2p^\alpha$, con p primo y $\alpha \in \mathbf{Z}^+$ y, dado que poseen el mismo factor $(\frac{p-1}{p-2})$ en la fórmula, entonces $G(n)$ crece conforme a $F(n)$, pero amplificado en $(\frac{p-1}{p-2})$. Ocurriría de la misma manera para los $n = 2^\alpha p^\beta$. Por lo tanto el conjunto de los $n = 2^\beta$ junto con el de los $n = 2p^\alpha$ y el de los $n = 2^\alpha p^\beta$, forman una nube de puntos alrededor

de la banda roja, todos ellos complementándose para formar la banda inferior del cometa. Veamos unos ejemplos.

Ejemplo 1.3.7.

Sean $a = 226$, $b = 242$, $c = 248$, $d = 254$ y $e = 256$, donde $a = 2(213)$, $b = 2(11^2)$, $c = 2^3(31)$, $d = 2(217)$ y $e = 2^8$.

Entonces $F(a) \approx 10.15$, $F(b) \approx 10.60$, $F(c) \approx 10.77$, $F(d) \approx 10.93$ y $F(e) \approx 10.99$. Por otro lado $HL(a) \approx 10.24$, $HL(b) \approx 11.78$, $HL(c) \approx 11.14$, $HL(d) \approx 11.02$ y $HL(e) \approx 10.99$, mientras que los números de Goldbach son 7, 8, 6, 9 y 8 para a , b , c , d y e respectivamente.

Observemos que todos los valores obtenidos con la aproximación de Hardy-Littlewood son cercanos pese a que los números son de distintas formas, sucede lo mismo con el número de Goldbach. Notemos también que la diferencia entre $HL(n)$ y $F(n)$ restringidas a los números de las formas mencionadas antes no es tan grande.

Para tratar de sustentar que los números de las formas $2p$, 2^{β} , $2p^{\alpha}$ y $2^{\alpha}p^{\beta}$ conforman la banda inferior del cometa, o dicho de manera informal, los que están en la banda roja y sus alrededores, comparemos los datos de arriba con los arrojados por otros números que no corresponden con ninguna de las formas mencionadas y que se encuentran en el intervalo 226 a 256.

Ejemplo 1.3.8.

Sean $a' = 228$, $b' = 230$, $c' = 238$, $d' = 246$ y $e' = 252$, donde $a' = 2^3(3 \cdot 19)$, $b' = 2(5 \cdot 23)$, $c' = 2(7 \cdot 17)$, $d' = 2(3 \cdot 41)$ y $e' = 2(2 \cdot 3^2 \cdot 7)$.

Así $F(a') \approx 21.62$, $F(b') \approx 15.34$, $F(c') \approx 13.43$, $F(d') \approx 21.98$ y $F(e') \approx 26.11$. Los números de Goldbach son 12, 9, 9, 16 y 16 para a' , b' , c' , d' y e' respectivamente.

1.3. COMETA DE GOLDBACH

Nótese que los números de Goldbach obtenidos mediante la fórmula de Hardy-Littlewood del ejemplo 1.3.8 son mayores que los correspondientes a los del ejemplo 1.3.7 pese a que todos se encuentran en el intervalo definido por el primer conjunto. Por otro lado, los números de Goldbach son en su mayoría más grandes para los números del segundo ejemplo que para los correspondientes al primer ejemplo. Aunque estos conjuntos son pequeños, nos dejan ver que a los números que no son de las formas $2p$, 2^β , $2p^\alpha$ y $2^\alpha p^\beta$ les corresponde un $G(n)$ mayor y, en consecuencia, se salen de los márgenes de la banda roja, lo que significa que pertenecerán a otra banda.

Ya vimos cuales son los números que pueden estar en la banda inferior del cometa, así que ahora trataremos de hacer lo mismo para el resto de las bandas. Antes de dar una construcción algebraica, es conveniente que visualicemos algunas imágenes (figura 1.15).

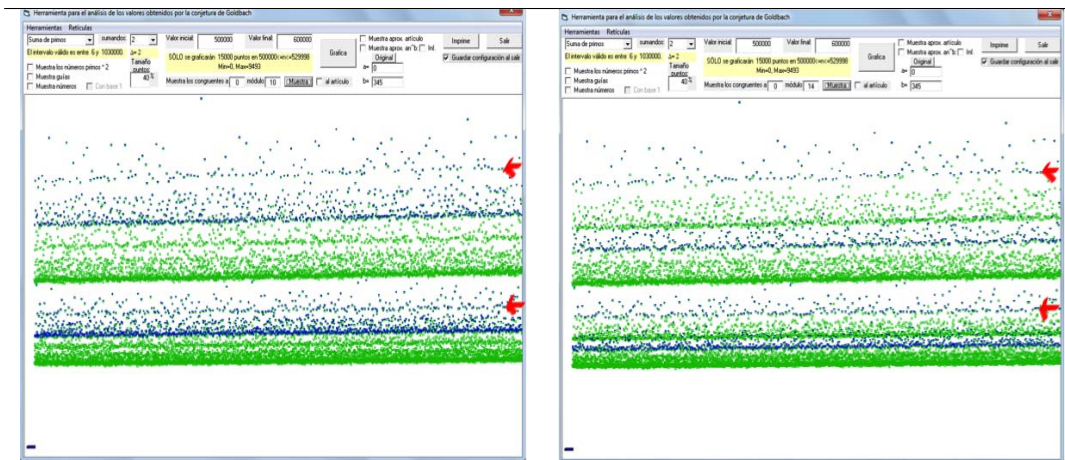


Figura 1.15: Cometa de Goldbach con n en el intervalo (50000, 60000). Las marcas azules indican: congruentes con 0 módulo 10 (izquierda) y congruentes con 0 módulo 14 (derecha).

Las marcas azules en la gráfica de la izquierda de la figura 1.14 corresponden a los números de la forma $n = 2 \cdot 5 \cdot k$ y las marcas azules en la gráfica de la derecha a los de las formas $n = 2 \cdot 7 \cdot k$ para $k \in \mathbf{Z}^+$. Notemos que en ambas gráficas, las marcas azules aparecen en los dos sectores del cometa, la aparición de estas marcas en el sector superior ocurre cuando k es múltiplo de tres. Además, podemos observar que las bandas señaladas con una flecha roja en ambas gráficas son las mismas.

Entonces, con base en el análisis que se hizo sobre la banda inferior del cometa, los números enteros de las formas $n_1 = 2^{\alpha_1} \cdot 5^{\beta_1}$, $n_2 = 2^{\alpha_2} \cdot 7^{\beta_2}$, $n_3 = 2^{\alpha_3} \cdot 5^{\beta_3} \cdot 7^{\gamma_3}$, $n_4 = 2^{\alpha_4} \cdot 3^{\beta_4} \cdot 5^{\gamma_4}$, $n_5 = 2^{\alpha_5} \cdot 3^{\beta_5} \cdot 7^{\gamma_5}$ y $n_6 = 2^{\alpha_6} \cdot 3^{\beta_6} \cdot 5^{\gamma_6} \cdot 7^{\delta_6}$, con $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \delta_i \in \mathbf{Z}^+$, son componentes de las bandas que se distinguen en ambas imágenes de la figura 1.14.

A pesar de que ya tenemos algunos elementos de esas bandas, no olvidemos que un factor importante de la banda inferior es el de números de la forma $n = 2p$, por lo que aún nos falta determinar cuales son los equivalentes a esos números en las “nuevas bandas”, o dicho de otra manera, falta definir a partir de qué primo los números de las formas $n_i p$, con $i = 1, \dots, 6$, pertenecen a las bandas definidas por cada i , y por ende, definir otras bandas para los primos menores a ese primo.

Si retomamos la fórmula de Hardy-Littlewood, veremos que cada número de la forma n_i tiene el mismo factor, para $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$, el resultado es $\frac{4}{3}, \frac{6}{5}, \frac{4}{3} \cdot \frac{6}{5}, \frac{2}{1} \cdot \frac{4}{3}, \frac{2}{1} \cdot \frac{6}{5}, \frac{2}{1} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{6}{5}$, respectivamente.

Ejemplo 1.3.9.

$$n_1 = 800 = 2^2 5^2, m_1 = 1000 = 2^3 5^3$$

$$HL(800) = 2C_2 \frac{800}{(\log(800))^2} \cdot \frac{5}{4} \approx 29.54, HL(1000) = 2C_2 \frac{1000}{(\log(1000))^2} \cdot \frac{5}{4} \approx 34.58$$

Ejemplo 1.3.10.

$$n_2 = 784 = 2^4 7^2, m_2 = 686 = 2^1 7^3$$

$$HL(784) = 2C_2 \frac{784}{(\log(784))^2} \cdot \frac{6}{5} \approx 27.96, \quad HL(686) = 2C_2 \frac{686}{(\log(686))^2} \cdot \frac{6}{5} \approx 25.48$$

Ejemplo 1.3.11.

$$n_4 = 900 = 2^2 3^2 5^2, \quad m_4 = 1080 = 2^3 3^3 5^1$$

$$HL(900) = 2C_2 \frac{900}{(\log(900))^2} \cdot \left(\frac{2}{1} \cdot \frac{4}{3}\right) \approx 68.4, \quad HL(1080) = 2C_2 \frac{1080}{(\log(1080))^2} \cdot \left(\frac{2}{1} \cdot \frac{4}{3}\right) \approx 77.94$$

Ejemplo 1.3.12.

$$n_5 = 882 = 2^1 3^2 7^2, \quad m_5 = 756 = 2^2 3^3 7^1$$

$$HL(882) = 2C_2 \frac{882}{(\log(882))^2} \cdot \left(\frac{2}{1} \cdot \frac{6}{5}\right) \approx 60.75, \quad HL(756) = 2C_2 \frac{756}{(\log(756))^2} \cdot \left(\frac{2}{1} \cdot \frac{6}{5}\right) \approx 54.52$$

Podríamos hacer lo mismo con las bandas correspondientes a los números de las formas $n_3 = 2^{\alpha_3} \cdot 5^{\beta_3} \cdot 7^{\gamma_3}$ y $n_6 = 2^{\alpha_6} \cdot 3^{\beta_6} \cdot 5^{\gamma_6} \cdot 7^{\delta_6}$, pues estas otras bandas no son más que la intersección, dos a dos, de los ejemplos anteriores.

Con toda la información anterior, es natural tratar de establecer una extensión sobre el tipo de números que pertenecen a determinada banda y preguntarse si llegarán a formarse más.

Para resolver esta interrogante volvamos a la fórmula de Hardy-Littlewood. Primero observemos que para los números que tienen los mismos divisores primos, el producto $\prod_p \left(\frac{p-1}{p-2}\right)$ se vuelve una constante y los $HL(n)$ asociados a ellos crecen conforme a $2C_2 \frac{n}{(\log n)^2}$. Entonces, si tomamos $A = \{p_i \mid p_i \text{ es un primo impar}\}_{i=1}^r$, un conjunto de primos impares con r elementos, los números de la forma $n = 2^\alpha \prod_{i=1}^r p^{\beta_i}$ están en la misma banda. Entonces, lo que queremos determinar es el primo q a partir del cual los números de la forma $m = 2^\alpha \prod_{i=1}^r p^{\beta_i} \cdot q$ pertenecerán a la banda de los $n = 2^\alpha \prod_{i=1}^r p^{\beta_i}$.

Notemos que para $p = 47$, $1.03 > \frac{47-1}{47-2}$ y, cuando marcamos con azul a los múltiplos pares de 47 en el cometa se observa que, a diferencia de las bandas que

se formaban cuando hacíamos lo mismo para 5 y 7, no hay bandas bien definidas y las marcas azules están muy cerca de la banda de los $2p$ (figura 1.16).

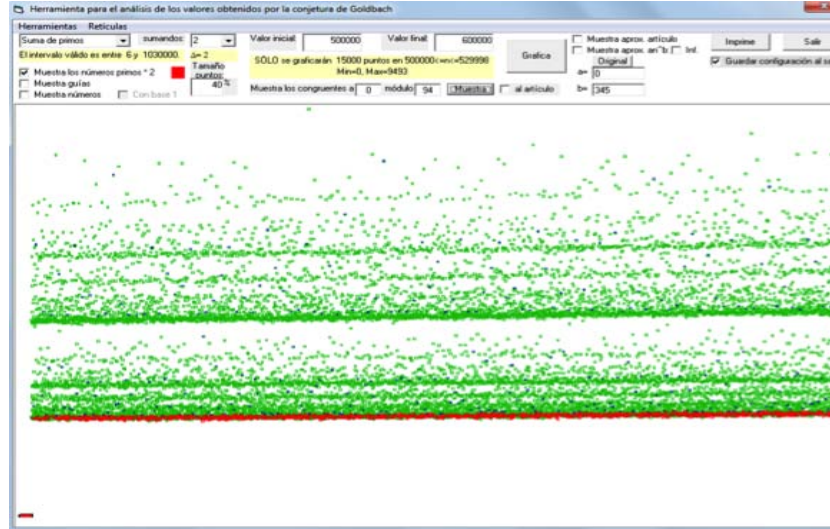


Figura 1.16: Cometa de Goldbach con n en el intervalo (50000, 60000). Las marcas azules indican a los congruentes con 0 módulo 94.

Entonces, de manera particular diremos que para todos los primos p mayores o iguales que 47, el factor $\frac{p-1}{p-2} = 1$. Con esto estamos diciendo que si n es factorizado por uno o más primos mayores que 43, éstos no serán tomados en cuenta cuando se calcule su número de Goldbach mediante la fórmula de Hardy-Littlewood.

Ya que definimos el primo a partir del cual todos los primos mayores que él no influirán en el cálculo del número de Goldbach, regresemos a las bandas que construimos mediante la figura 1.14 y definamos a la banda inferior del sector superior.

Recordemos que las seis nuevas bandas son: las de factores 2 y 5, la de 2 y 7, la de 2, 5 y 7, la de 3 y 5, la de 3 y 7 y la de 3, 5 y 7, de las cuales se había dicho que los números de las formas $2^{\alpha_1} \cdot 5^{\beta_1}$, $2^{\alpha_2} \cdot 7^{\beta_2}$, $2^{\alpha_3} \cdot 5^{\beta_3} \cdot 7^{\gamma_3}$, $2^{\alpha_4} \cdot 3^{\beta_4} \cdot 5^{\gamma_4}$, $2^{\alpha_5} \cdot 3^{\beta_5} \cdot 7^{\gamma_5}$ y $2^{\alpha_6} \cdot 3^{\beta_6} \cdot 5^{\gamma_6} \cdot 7^{\delta_6}$ con $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \delta_i \in \mathbf{Z}^+$, pertenecen a ellas respectivamente.

De manera general diremos que los números de las formas

$$\frac{2^{\alpha_1} \cdot 5^{\beta_1} \prod_{p_i \geq 47} p_i^{\zeta_i}}{2^{\alpha_2} \cdot 7^{\beta_2} \prod_{p_i \geq 47} p_i^{\zeta_i}}$$

$$\frac{2^{\alpha_3} \cdot 5^{\beta_3} \cdot 7^{\gamma_3} \prod_{p_i \geq 47} p_i^{\zeta_i}}{2^{\alpha_4} \cdot 3^{\beta_4} \cdot 5^{\gamma_4} \prod_{p_i \geq 47} p_i^{\zeta_i}}$$

$$\frac{2^{\alpha_5} \cdot 3^{\beta_5} \cdot 7^{\gamma_5} \prod_{p_i \geq 47} p_i^{\zeta_i}}{2^{\alpha_6} \cdot 3^{\beta_6} \cdot 5^{\gamma_6} \cdot 7^{\delta_6} \prod_{p_i \geq 47} p_i^{\zeta_i}}$$

con $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \delta_i \in \mathbf{Z}^+$ y $\zeta_i \in \mathbf{Z}$, pertenecen a las bandas cuyos factores primos menores que 47 son los mismos. Análogamente, la banda inferior del sector superior del cometa está compuesta por los números de la forma $2^\alpha \cdot 3^\beta \prod_{p_i \geq 47} p_i^{\zeta_i}$ con $\alpha, \beta \in \mathbf{Z}^+$ y $\zeta_i \in \mathbf{Z}$ (figura 1.17).

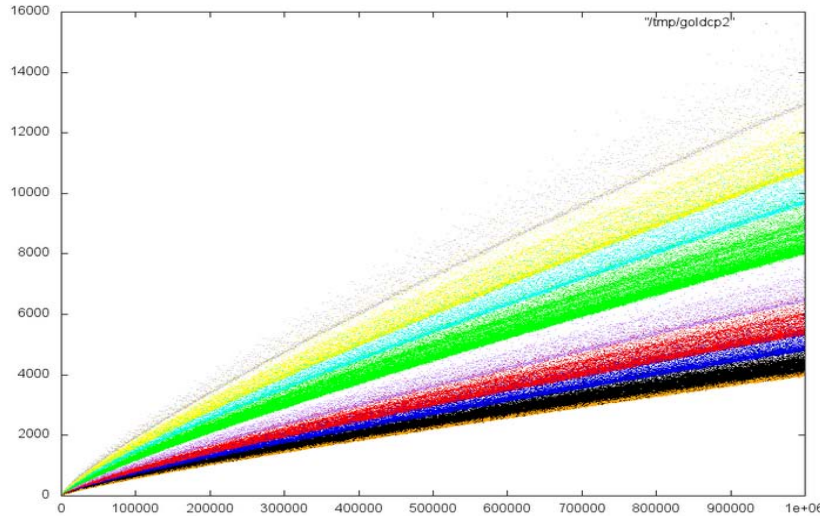


Figura 1.17: Verde: Múltiplos de 3. Rojo: Múltiplos de 5. Azul: Múltiplos de 7. Amarillo: Múltiplos de 3 y 5. Cyan: Múltiplos de 3 y 7. Magenta: Múltiplos de 5 y 7. Gris: Múltiplos de 3, 5 y 7. Naranja: Potencias de 2. Negro: 2p (Figura tomada de: <http://www.ltg.ed.ac.uk/richard/goldbach.html>).

Ya dimos una posible composición de cada banda, pero aún no hemos dicho nada de cómo determinar cuando una banda se encuentra arriba de otra. Para esto recordemos que la división de sectores se debió básicamente, a la presencia del tres

como factor en algunos números. Pero si a la vez recurrimos a las imágenes (figura 1.16), las bandas que están en la parte superior de cada sector corresponden a las que tienen como factores al cinco y al siete; las que siguen, un poco más abajo que éstas, sólo tienen al cinco; y las que están aún más abajo sólo tienen al siete. Notemos entonces, que mientras más grande sea un primo, su banda se acerca cada vez más al “piso” de cada sector del cometa. Entonces, pese a lo que podría hacernos pensar la fórmula de Hardy-Littlewood para el número de Goldbach, además de la cantidad de factores primos que tenga cada número, también importa el tamaño que ellos tengan, mientras más grande es un primo, su aportación a la magnitud de la fórmula de Hardy-Littlewood es menor. Esto también puede ser probado de forma matemática⁹.

Recapitulando lo estudiado. En este capítulo ahora sabemos que un punto reticular es un punto (x, y) , con x, y números enteros y, por otro lado un polígono reticular es un polígono simple cuyos vértices son puntos enteros y que su área se puede estudiar a través del teorema de Pick. Además también mostramos que la representación del número de Goldbach $G(n)$ en el Cometa dependerá del número de primos distintos que factoricen a ese número n y del tamaño que éstos tengas. Lo anterior es importante ya que son estas factorizaciones las que generan los sectores y bandas que se presentan en el Cometa.

⁹La prueba puede consultarse en el apéndice del Capítulo 1.

Capítulo 2

Conjetura binaria y triángulos de Goldbach

2.1. Conjetura binaria y triángulos reticulares

Esta sección la dedicaremos a representar en una retícula a las parejas de primos que sumadas generan un entero par n determinado, y la cantidad de parajegas es el número de Goldbach $G(n)$.

Ya mencionamos al inicio del capítulo uno que estudiaremos a las parejas de la conjetura de Goldbach pero colocados en una retícula, es decir, a cada pareja de primos le asignaremos un punto en el plano. Para hacer esto requerimos definir un orden y lo que será la coordenada de primos, y así se podrá asignar a cada pareja un lugar en el plano. Pero antes de dar una generalización veamos un ejemplo.

Ejemplo 2.1.1.

Sea $n = 34$. Las representaciones de este número como suma de primos son $3 + 31$, $5 + 29$, $11 + 23$ y $17 + 17$. Para cada pareja hay dos posibles representaciones en términos de una pareja ordenada, por ejemplo, la suma $3 + 31$ puede representarse como $(3, 31)$ ó $(31, 3)$. En el primer caso, el punto se encuentra sobre la recta identidad, mientras que en el segundo, el punto está por debajo de ella (figura 2.1).

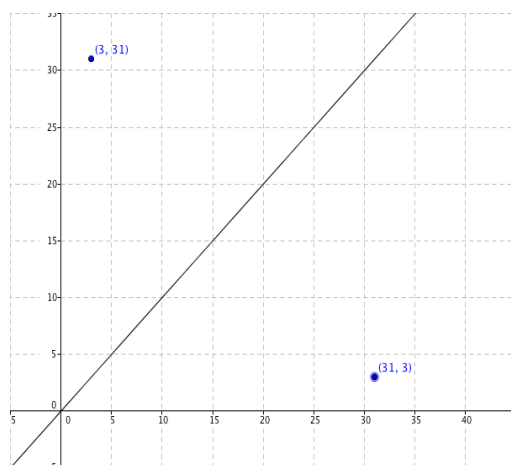


Figura 2.1: Puntos reticulares y parejas de primos.

Notemos (figura 2.1) que todas las sumas, representadas por parejas –se incluye repetición– están sobre (ó bajo) la recta $x + y = 34$. De manera general, para cualquier n par se tiene que todos los puntos reticulares asociados a las parejas de primos están sobre la recta $x + y = n$ –véase que todas las rectas tienen la misma pendiente–.

En la figura 2.2 (izquierda) se aprecia como se repiten las parejas de primos, entonces de manera particular usaremos sólo los puntos que están por debajo de la función identidad, es decir, trabajaremos sólo con $(31, 3)$, $(29, 5)$, $(23, 11)$ y $(17, 17)$, como en la figura 2.2 (derecha). Es importante notar que por la simetría respecto

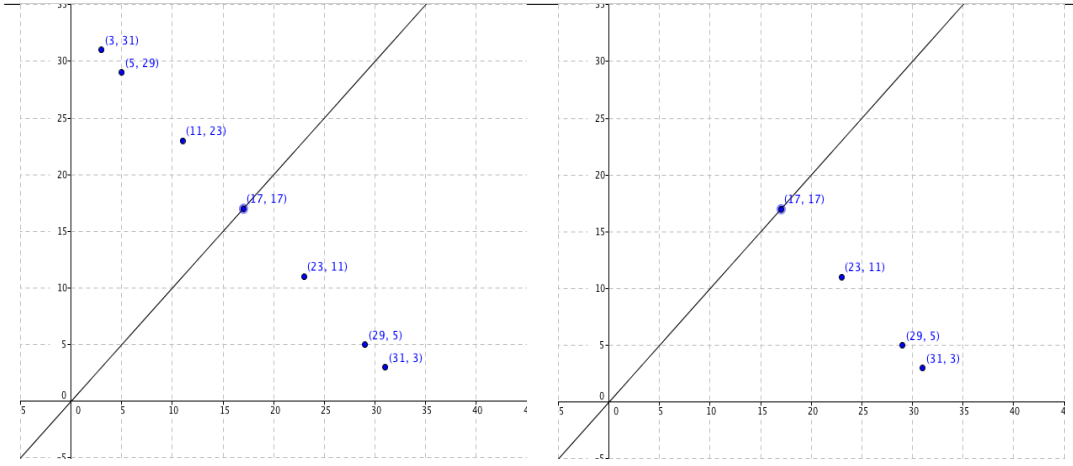


Figura 2.2: Representación de la retícula de las parejas de primos de 34 con repetición (izquierda) y sin repetición (derecha).

a la identidad (figura 2.2 (izquierda)), los puntos de un lado tienen los mismo sumandos que los del otro, por lo tanto, podemos utilizar cualquier conjunto y la elección que hagamos no influye.

De manera general definimos $A_n = \{(p_i, q_i) \mid p_i + q_i = n, p_i = n - q_i, p_i \geq q_i\}_{i=1}^{G(n)}$ como el conjunto de puntos reticulares asociados a las parejas de primos que suman n .

2.2. Triángulos de Goldbach

En esta sección definiremos lo que serán los triángulos de Goldbach, a partir de las parejas de primos en la retícula, construidos en la sección anterior. Una vez definidos los triángulos expondremos algunas de sus propiedades concernientes al área.

Como todos los elementos de A_n están sobre la misma recta, es imposible construir un polígono reticular con ellos, pero sí es posible construir triángulos que tengan uno de sus vértices en el origen y esto nos dará una serie de resultados interesantes. Para esto requerimos formalizar algunos conceptos.

Definición 2.2.1.

Definimos el **triángulo de Goldbach** asociado a un entero par y positivo n , denotado por T_n , como el triángulo cuyos vértices son $O = (0, 0)$, $P = (p_r, q_r)$, y $Q = (p_s, q_s)$,¹ donde p_r es el menor de los p_i , y p_s es el mayor, es decir,

$$p_r \leq p_i \text{ y } p_i \leq p_s, \text{ para } i = 1, \dots, G(n) \text{ donde } (p_i, q_i) \in A_n.$$

Retomemos el ejemplo del número 34.

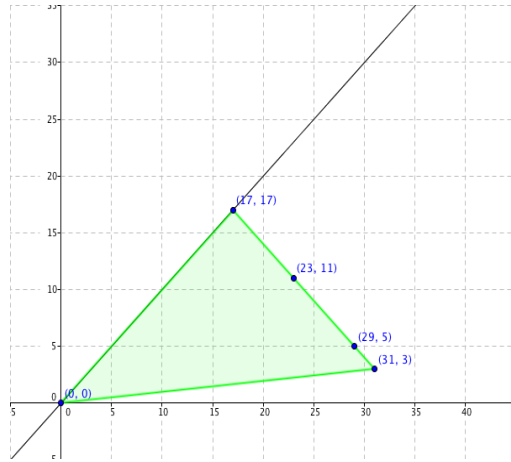


Figura 2.3: T_{34} .

A través del ejemplo podemos notar que al proyectar todos los puntos sobre el eje de las abscisas y al acomodarlos en orden ascendente 17, 23, 29 y 31, el menor corresponde al proveniente del punto (17, 17), y el mayor del (31, 3). Por lo tanto

¹Recordar que P y Q representan a las sumas de primos de n , es decir, $n = p_r + q_r$, $n = p_s + q_s$.

los otros dos vértices con los que construiremos el triángulo reticular T_{34} , además del origen son $P = (17, 17)$ y $Q = (31, 3)$.

2.2.1. Área de los triángulos de Goldbach

Aunque podemos obtener mucha información acerca de un triángulo, por ejemplo el perímetro o las medidas de sus ángulos internos, en este trabajo nos adentraremos en el área. Ahora damos lugar a unas proposiciones sobre ella.

Proposición 2.2.2.

Para n tal que² $G(n) \geq 2$ se tiene que el área de T_n está dada por

$$A(T_n) = \frac{n(p_s - p_r)}{2}.$$

Demostración.

Por la proposición 1.1.5, el área de un triángulo reticular cuyos vértices son $O = (0, 0)$, $P = (p, q)$, y $Q = (r, s)$ está dada por:

$$A(T_n) = \frac{ps - qr}{2}$$

Como $n = p_r + q_r = p_s + q_s$ se sigue que $q_r = n - p_r$ y $q_s = n - p_s$. Así:

$$A(T_n) = \frac{|p_r(n - p_s) - (n - p_r)p_s|}{2}$$

$$A(T_n) = \frac{|np_r - p_r p_s - np_s + p_r p_s|}{2}$$

$$A(T_n) = \frac{|n(p_s - p_r)|}{2}$$

Dado que $p_s \geq p_r$ tenemos que $A(T_n) = \frac{n(p_s - p_r)}{2}$ □

²La condición $G(n)$ mayor que dos hace que la diferencia entre p_s y p_r sea mayor que cero. Además, como $n = p_r + q_r = p_s + q_s$, no importa la coordenada que se tome, siempre y cuando sea la misma en ambos casos.

Observación 2.2.3.

Si p y q son dos números primos positivos tales que $n = p + q$, donde n es par, entonces para $n \geq 6$ se tiene que³ $p, q \geq 3$.

Corolario 2.2.4.

$A(T_n)$ es entero y par.⁴

Proposición 2.2.5.

Para todo n tal que $G(n) \geq 2$, el área de T_n nunca es congruente con $2 \pmod 6$, es decir, $A(T_n) \not\equiv 2 \pmod 6$.

Demostración.

Lo que se quiere demostrar es que $A(T_n) = \frac{n(p_s - p_r)}{2} \not\equiv 2 \pmod 6$. Como los primos p_s y p_r tienen que ser de la forma $6k + 1$ ó $6k + 5$ -ó 3-, entonces algunas de las características del factor⁵ $(p_s - p_r)$ son

$$(6u + 1) - (6v + 1) \equiv 0 \pmod 6 \dots\dots\dots (1)$$

$$(6u + 1) - (6v + 5) \equiv 2 \pmod 6 \dots\dots\dots (2)$$

$$(6u + 5) - (6v + 5) \equiv 0 \pmod 6 \dots\dots\dots (3)$$

$$(6u + 5) - (6v + 1) \equiv 4 \pmod 6 \dots\dots\dots (4)$$

$$(6u + 1) - 3 \equiv 4 \pmod 6 \dots\dots\dots (5)$$

$$(6u + 5) - 3 \equiv 2 \pmod 6 \dots\dots\dots (6)$$

Como n es par y $n = p_r + q_r$ entonces p_r y q_r cumplen con una de las siguientes congruencias:

³Si ocurriera que p o q es un primo menor que 3, entonces, ese primo debe ser 2. Supongamos que el primo que es igual a 2 es p . Ahora, como la suma debe ser mayor que 4, ambos no pueden ser iguales a 2 a la vez, por lo que q debe ser mayor o igual que 3, y como q es primo, siempre será impar. Pero la suma de un par y un impar, es impar, lo cual contradice la paridad de n .

⁴Si $n \geq 6$ y $n = p_j + q_j$ entonces $p_j, q_j \geq 3$, por lo que p_s y p_r siempre serán impares.

⁵Como estamos suponiendo que $p_s > p_r$, entonces sólo p_r puede ser igual a 3.

(7)... Si $n \equiv 2 \pmod{6}$ y $p_r, q_r \geq 5$, entonces $p_r, q_r \equiv 1 \pmod{6}$ y en el caso de que $p_r = 3$, entonces $q_r \equiv 5 \pmod{6}$.

(8)... Si $n \equiv 4 \pmod{6}$ y $p_r, q_r \geq 5$, entonces $p_r, q_r \equiv 5 \pmod{6}$ y en el caso de que $p_r = 3$, entonces $q_r \equiv 1 \pmod{6}$.

(9)... Si $n \equiv 0 \pmod{6}$ y $p_r, q_r \geq 5$, entonces $p_r \equiv 1 \pmod{6}$ y $q_r \equiv 5 \pmod{6}$ ó $p_r \equiv 5 \pmod{6}$ y $q_r \equiv 1 \pmod{6}$ y en el caso de que $p_r = 3$, entonces $q_r = 3$.

Ahora supongamos lo contrario a la hipótesis, es decir, que $A(T_n) \equiv 2 \pmod{6}$.

Caso 1: $n \equiv 2 \pmod{6}$

Por la proposición 2.2.2, $A(T_n) = \frac{n(p_s - p_r)}{2}$, entonces para que $A(T_n) \equiv 2 \pmod{6}$ dado que $n \equiv 2 \pmod{6}$ tiene que suceder que $\frac{(p_s - p_r)}{2} \equiv 1 \text{ ó } 4 \pmod{6}$.

Por lo tanto $(p_s - p_r) \equiv 2 \pmod{6}$.

De (7), (1) y (5) se tiene que $(p_s - p_r) \equiv 0 \pmod{6}$ si $p_r \geq 5$

ó $(p_s - p_r) \equiv 4 \pmod{6}$ si $p_r = 3$, lo cual es una contradicción.

Caso 2: $n \equiv 4 \pmod{6}$

Con un razonamiento análogo al del caso anterior se obtiene que $(p_s - p_r) \equiv 4 \pmod{6}$.

Entonces, de (8), (3) y (6) se tiene que $(p_s - p_r) \equiv 0 \pmod{6}$ si $p_r \geq 5$

ó $(p_s - p_r) \equiv 2 \pmod{6}$ si $p_r = 3$, lo cual es una contradicción.

Por lo tanto⁶ $A(T_n) \not\equiv 2 \pmod{6}$. □

⁶Si $n \equiv 0 \pmod{6}$ y como $A(T_n) = \frac{n(p_s - p_r)}{2}$, entonces $A(T_n) \equiv 0 \pmod{6}$, por lo que no es necesario hacer este caso.

2.2.2. Una aproximación para la función $A(T_n)$

Ya hemos dado algunas de las características del área de cada triángulo. Ahora veamos lo que sucede cuando graficamos la relación entre el número par y el área del triángulo asociado. El resultado es bastante interesante (figura 2.4).

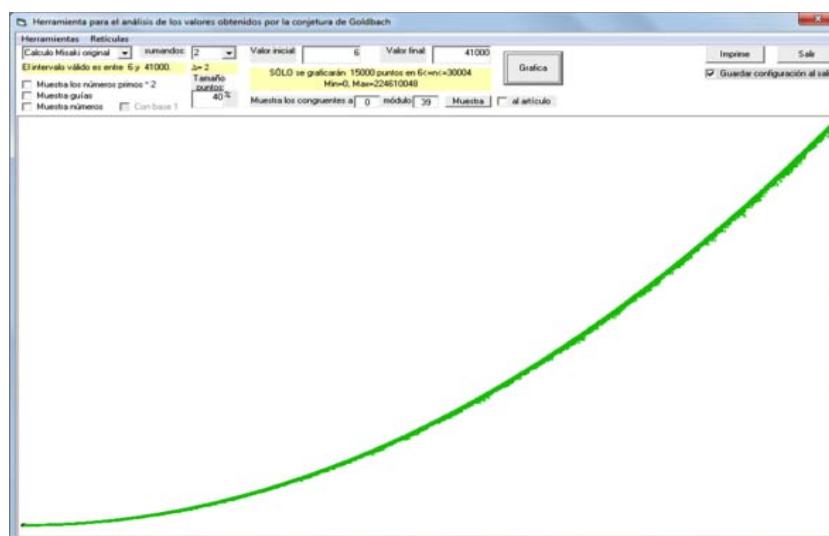


Figura 2.4: Gráfica de la función $A(T_n)$.

Esta gráfica podría recordarnos una función cuadrática, pero no sólo eso, también está acotada superiormente por una de ellas.

Proposición 2.2.6.

La función $A(T_n)$ está acotada superiormente por la función $\frac{n^2}{4} - \frac{3n}{2}$, es decir, $A(T_n) \leq \frac{n^2}{4} - \frac{3n}{2} = \frac{n}{4}(n - 6)$.

Demostración.

Por la proposición 2.2.2 sabemos que $A(T_n) = \frac{n(p_s - p_r)}{2}$. Además, sabemos que p_s, p_r son impares. Por otro lado $p_s = n - q_s, p_r = n - q_r$. Entonces

$$A(T_n) = \frac{n(p_s - p_r)}{2} = \frac{n(n - q_s - (n - q_r))}{2} = \frac{n(q_r - q_s)}{2} = \frac{n}{2}(q_r - q_s)$$

y como $q_r \leq \frac{n}{2}$ y $q_s < \frac{n}{2}$. Por lo tanto

$$A(T_n) = \frac{n(q_r - q_s)}{2} \leq \frac{n}{2} \left(\frac{n}{2} - q_s \right) = \frac{n^2}{4} - \frac{n}{2} \cdot q_s.$$

Pero q_s es primo impar, por lo tanto $q_s \geq 3$, por lo que $\frac{n^2}{4} - \frac{n}{2} \cdot q_s \leq \frac{n^2}{4} - \frac{3n}{2}$, entonces

$$A(T_n) \leq \frac{n^2}{4} - \frac{3n}{2} = \frac{n}{4}(n - 6)$$

□

También es posible una función de aproximación que también es cuadrática, cuyo margen de error está en cinco por ciento a partir de $n = 300$. Esta función es⁷

$$F(x) = 0.25x^2 - 18.58x + 9875.23$$

2.2.3. Área de los T_{2p}

Tras ver el increíble comportamiento de la función $A(T_n)$ (figura 2.4), es natural preguntarse si es posible encontrarnos con características parecidas a las del Cometa de Goldbach. ¿Será que los números de la forma $n = 2p$ con p primo también se encuentran en la parte inferior de la gráfica de las áreas? ¿También se formarán bandas?

⁷Esta función fue obtenida mediante el programa “R”.

Veamos en dónde se encuentra el área de los $n = 2p$, es decir, marquemos en la gráfica a los números de esa forma (figura 2.5).

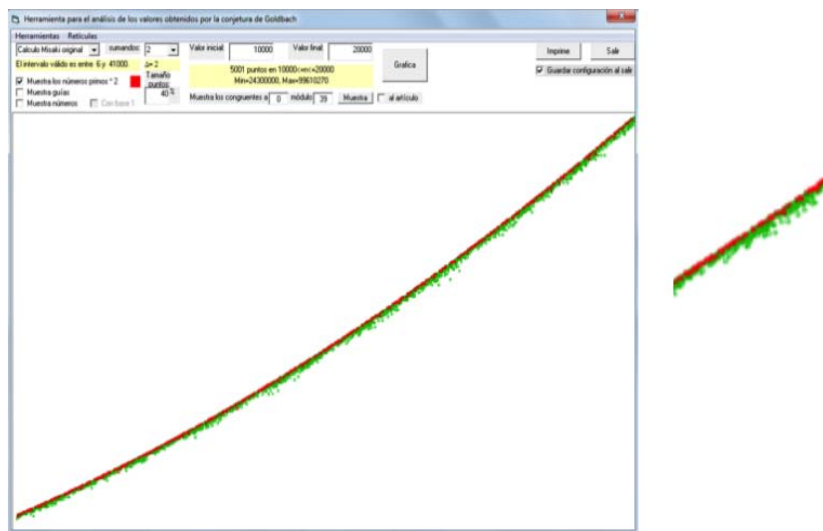


Figura 2.5: Gráfica de la función $A(T_n)$ con n en el intervalo $(10000, 20000)$, la cual permite apreciar en color rojo la ubicación en la gráfica de los $n = 2p$ con p primo.

El resultado una vez más es sorprendente, éste contrasta completamente con lo observado en el Cometa de Goldbach respecto a estos mismos números. Recordemos que en el Cometa de Goldbach los números de la forma $n = 2p$ se encuentran en la parte inferior (figura 2.6).

Para tratar de explicar el comportamiento de los números pares de la forma $n = 2p$ en la función $A(T_n)$ –observado en las figuras anteriores– proponemos la siguiente conjetura, ésta es producto de nuestro estudio.

2.2. TRIÁNGULOS DE GOLDBACH

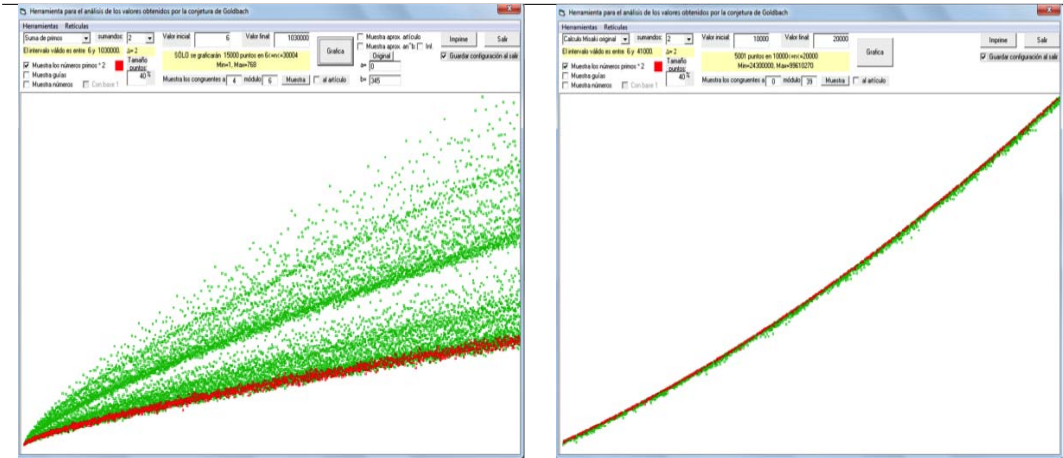


Figura 2.6: Los $n = 2p$ en el Cometa de Goldbach (izquierda) y en la función $A(T_n)$ (derecha) resaltados con color rojo.

Conjetura 2.2.7.

Los triángulos relacionados con números de la forma $n = 2p_i$ tienden a tener áreas mayores que aquellos relacionados con números que no son de esa forma y que están en el intervalo $(2p_{i-1}, 2p_i)$.

Primero notemos que el hecho de que un número sea mayor que otro no garantiza que en el área de sus triángulos asociados pase lo mismo.

Ejemplo 2.2.8.

$A(T_{52}) = 468$ mientras que $A(T_{54}) = 432$, es decir, $A(T_{54}) < A(T_{52})$ aún cuando $52 < 54$.

Ejemplo 2.2.9.

$A(T_{5648}) = 7878960$ mientras que $A(T_{5668}) = 7872852$, es decir, $A(T_{5648}) > A(T_{5668})$ aún cuando $5668 > 5648$.

Respecto a determinar qué tiene que ocurrir para que el área de un T_n sea mayor que la de otro T_m sólo hemos obtenido la siguiente proposición.

Proposición 2.2.10.

Si $m > n$ pero $A(T_n) > A(T_m)$, entonces a partir del triángulo T_n generado por los punto $(0, 0)$, (p_{s_n}, q_{s_n}) y (p_{r_n}, q_{r_n}) y otro T_m generado por los punto $(0, 0)$, (p_{s_m}, q_{s_m}) y (p_{r_m}, q_{r_m}) se tiene que $(p_{s_n} - p_{r_n}) > (p_{s_m} - p_{r_m})$.

Demostración.

Como $A(T_n) = \frac{n(p_{s_n} - p_{r_n})}{2}$ y de la hipótesis $A(T_n) > A(T_m)$, es decir,

$$\frac{n(p_{s_n} - p_{r_n})}{2} > \frac{m(p_{s_m} - p_{r_m})}{2},$$

y como $m > n$, entonces $m = n + i$, para alguna $i \in \mathbb{N}^+$, entonces

$$\frac{n(p_{s_n} - p_{r_n})}{2} > \frac{(n+i)(p_{s_m} - p_{r_m})}{2} = \frac{n(p_{s_m} - p_{r_m})}{2} + \frac{i(p_{s_m} - p_{r_m})}{2} > \frac{n(p_{s_m} - p_{r_m})}{2}$$

Por lo tanto $(p_{s_n} - p_{r_n}) > (p_{s_m} - p_{r_m})$. □

Entonces, la diferencia $(p_{s_n} - p_{r_n})$ juega un papel importante a la hora de obtener las áreas, y este es nuestro primer argumento para sustentar la Conjetura 2.2.7.

1er sustento para Conjetura 2.2.7

Comencemos por notar que si $n = 2p$ y $n > 6$, entonces n es congruente con 2 ó 4 módulo 6 y, además, en el Cometa de Goldbach estos números son los que están en el sector inferior. Entonces, retomando el hecho de que si la suma de dos primos módulo 6 deja residuo 2 ó 4 se tendrá que esos primos pertenecen a la misma clase residual –salvo por el caso en el que tres sea uno de los sumandos⁸–. Esto

⁸Si 3 es uno de los sumandos, el triángulo correspondiente a $n = 2p$ contiene a todos los triángulos anteriores, ya que en ese momento está alcanzando el área máxima (proposición 2.2.6).

nos dice que hay menos parejas de primos que podrían sumar a $n = 2p$, y por lo tanto la distancia entre cada una de las abscisas que corresponden a las coordenadas enteras de cada pareja de primos es de al menos seis, mientras que para los números congruentes con 0 módulo 6 la distancia mínima es dos, es decir, las distancias entre las abscisas de las parejas de primos cuya suma es congruente con 2 ó 4 módulo 6 crecen como múltiplos de seis, mientras que las de los primos relacionados a los congruentes con 0 módulo 6 crecen como múltiplos de dos. Veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 2.2.11.

Sea $n_1 = 94 = 2(47)$, $G(n_1) = 5$. $n_1 \equiv 4 \pmod{6}$.

$$94 = 89 + 5 = 71 + 23 = 53 + 41 = 47 + 47$$

Las distancias entre los primeros sumandos de operaciones consecutivas, dos a dos, son: 6, 12, 18, 6. Entonces la distancia total entre la primer y la última pareja es 42.

Sea $n_2 = 92 = 2(2 \cdot 23)$, $G(n_2) = 4$. $n_2 \equiv 2 \pmod{6}$.

$$92 = 89 + 3 = 79 + 13 = 73 + 19 = 61 + 31$$

Las distancias entre los primeros sumandos de operaciones consecutivas, dos a dos, son: 10, 6, 12. Entonces la distancia total entre la primer y la última pareja es 28.

Sea $n_3 = 90 = 2(3^2 \cdot 5)$, $G(n_3) = 9$. $n_3 \equiv 0 \pmod{6}$.

$$90 = 79+11 = 73+17 = 71+19 = 67+23 = 61+29 = 59+31 = 53+37 = 47+43$$

Las distancias entre los primeros sumandos de operaciones consecutivas, dos a dos, son: 4, 6, 2, 4, 6, 2, 6, 6. Así la distancia total entre la primer y la última pareja es 36.

Ejemplo 2.2.12.

Sea $m_1 = 502 = 2(251)$, $G(m_1) = 15$. $m_1 \equiv 4 \pmod{6}$.

$$502 = 499 + 3 = 491 + 11 = 479 + 23 = 461 + 41 = 449 + 53 = 443 + 59 = 431 + 71 = 419 + 83 = 401 + 101 = 389 + 113 = 353 + 149 = 311 + 191 = 269 + 233 = 263 + 239 = 251 + 251$$

Las distancias entre los primeros sumandos de operaciones consecutivas, dos a dos, son: 8, 12, 18, 12, 6, 12, 12, 18, 12, 36, 42, 42, 6, 12. Entonces la distancia total entre la primer y la última pareja es 248.

Sea $m_2 = 500 = 2(2 \cdot 5^3)$, $G(m_2) = 13$. $m_2 \equiv 2 \pmod{6}$.

$$500 = 487 + 13 = 463 + 37 = 457 + 43 = 439 + 61 = 433 + 67 = 421 + 79 = 397 + 103 = 373 + 127 = 349 + 151 = 337 + 163 = 307 + 193 = 277 + 233 = 271 + 299$$

Las distancias entre los primeros sumandos de operaciones consecutivas, dos a dos, son: 24, 6, 18, 6, 12, 24, 24, 24, 12, 30, 30, 6. Entonces la distancia total entre la primer y la última pareja es 216.

Sea $m_3 = 498 = 2(3 \cdot 83)$, $G(m_3) = 23$. $m_3 \equiv 0 \pmod{6}$.

$$498 = 491 + 7 = 487 + 11 = 479 + 19 = 467 + 31 = 461 + 37 = 457 + 41 = 439 + 59 = 431 + 67 = 419 + 79 = 409 + 89 = 401 + 97 = 397 + 101 = 389 + 109 = 367 + 131 = 359 + 139 = 349 + 149 = 347 + 151 = 331 + 167 = 317 + 181 = 307 + 191 = 271 + 227 = 269 + 229 = 257 + 241$$

Las distancias entre los primeros sumandos de operaciones consecutivas, dos a dos, son: 4, 8, 12, 6, 4, 18, 8, 12, 10, 8, 4, 8, 4, 8, 22, 18, . Así la distancia total entre la primer y la última pareja es 234.

A las distancias entre primos consecutivos se les conoce como *saltos*. Para nuestro proyecto, además de considerar el salto usual entre primos –en el que

todos los primos están involucrados— también utilizaremos el salto entre primos de la misma clase módulo seis.

Pero antes de hablar de los saltos, veamos un argumento de probabilidad que nos resulta útil para el problema de las distancias.

La probabilidad de que un número n sea primo está dada por

$$\prod_{p < n} \left(1 - \frac{1}{p}\right),$$

que, por el teorema de los números primos⁹ sabemos que, para n suficientemente grande, la probabilidad es cercana a $\frac{1}{\log(n)}$. Ahora bien, si además le pedimos a n que sea un primo de la forma $6k + 1$ ó $6k + 5$, a lo anterior tendríamos que multiplicarlo por $\frac{1}{2}$, es decir, la probabilidad de que un número sea primo de la forma $6k + 1$ o de la forma $6k + 5$ es cercana a $\frac{1}{2\log(n)}$. Esto nos dice que encontrar un primo que tenga una forma en particular es más difícil que sólo encontrar un primo del conjunto total, y por tanto, hay que recorrer más números, lo cual, intuitivamente, nos hace pensar que tenemos que hay que alejarnos más. Para apoyar esta idea intuitiva nos apoyaremos en los saltos.

Como ya habíamos mencionado, llamamos salto a la distancia que hay entre primos consecutivos. Respecto a este tema hay muchos trabajos importantes, entre los que destaca aquel sobre *campeones de salto*¹⁰, un campeón de salto es el salto más frecuente. Para darnos una idea de las frecuencias con las que aparecen los distintos saltos veamos el cuadro 2.1.

⁹Puede consultarse este resultado en [9].

¹⁰Esta frase la recuperamos de [5].

| | Todos los primos | Primos cong 1 mod 6 | Primos cong 5 mod 6 |
|-------|------------------|---------------------|---------------------|
| Salto | | | |
| 2 | 3423 | 0 | 0 |
| 4 | 3396 | 0 | 0 |
| 6 | 5536 | 3042 | 3445 |
| 8 | 2259 | 0 | 0 |
| 10 | 2810 | 0 | 0 |
| 12 | 3072 | 2749 | 2752 |
| 14 | 1604 | 0 | 0 |
| 16 | 1093 | 0 | 0 |
| 18 | 1760 | 2216 | 2237 |

Cuadro 2.1: Frecuencia de saltos entre primos consecutivos menores o iguales a 350351.

Observando los datos del cuadro 2.1 nos damos cuenta de que en los tres casos –salto usual, en el salto sobre los primos congruentes con 1 módulo 6 y en el salto sobre los primos congruentes con 5 módulo 6– el salto más frecuente resulta ser el 6, sin embargo, la frecuencia con la que aparece es fácilmente rebasada por la suma de las frecuencias del dos y el cuatro, en el primer caso, y por las de doce y dieciocho en los casos dos y tres¹¹.

De lo anterior se deduce que cuando n es congruente con 2 ó 4 módulo 6 la diferencia $(p_{s_n} - p_{r_n})$ –que tiene correspondencia con el lado perpendicular a la recta identidad de un triángulo asociado¹² a n – puede ser igual o más grande¹³ que en el caso en que n es congruente con 0 mod 6 –de los que ya habíamos notado que ninguno mayor que 6 es de la forma $n = 2p$ –. Por ejemplo, en el caso de los

¹¹Puede consultarse una tabla más completa en el apéndice correspondiente a este capítulo.

¹²Nótese que la diferencia $(p_{s_n} - p_{r_n})$ y la distancia entre los puntos (p_{s_n}, q_{s_n}) y (p_{r_n}, q_{r_n}) están a razón $\sqrt{2}$.

¹³Recordemos que aunque el salto de los n congruentes con 2 ó 4 es mayor que el de los n congruentes con 0 módulo 6, estos últimos tienen ‘el doble’ de parejas que los otros, por lo que es probable que la diferencia $(p_{s_n} - p_{r_n})$ de los números n congruentes con 0 mod 6 también sea grande. Ver ejemplos 2.2.11 y 2.2.12.

números 50, 52 y 54 se tienen las diferencias $(p_{s_{50}} - p_{r_{50}}) = 16$, $(p_{s_{52}} - p_{r_{52}}) = 18$ y $(p_{s_{54}} - p_{r_{54}}) = 16$ y se cumple lo mencionado –nótese que $54 \equiv 0 \pmod{6}$, $52 \equiv 4 \pmod{6}$ y $50 \equiv 2 \pmod{6}$ –. Pero en el caso de los números 76, 78 y 80 las diferencias son $(p_{s_{76}} - p_{r_{76}}) = 26$, $(p_{s_{78}} - p_{r_{78}}) = 32$ y $(p_{s_{80}} - p_{r_{80}}) = 30$, por lo que lo mencionado no se cumple –nótese que $76 \equiv 4 \pmod{6}$, $78 \equiv 0 \pmod{6}$ y $80 \equiv 2 \pmod{6}$ – (figura 2.7).

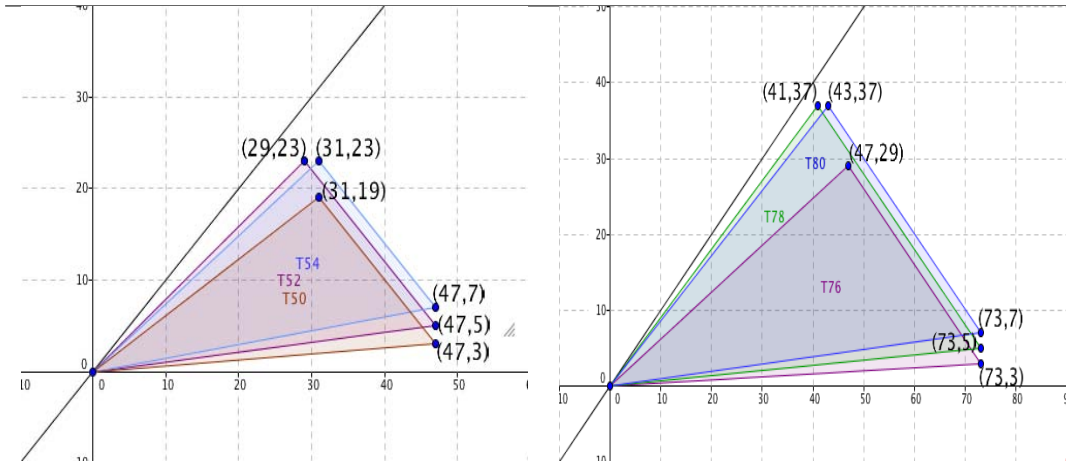


Figura 2.7: Triángulos T_{50} , T_{52} y T_{44} (izquierda) y Triángulos T_{76} , T_{78} y T_{80} (derecha).

Además de la forma que poseen los números pares $n = 2p$, con p primo, mayores que 6 módulo 6 y la relación que tiene con la diferencia $(p_{s_n} - p_{r_n})$, hay otras razones por las que creemos éstos números tienen ganancia de área en sus triángulos asociados respecto de otros.

Por construcción –págs. 32-34– todos lados perpendiculares a la identidad de los triángulos asociados a los números pares n' que no son de la forma $n = 2p_i$ –y están en el intervalo $(2p_{i-1}, 2p_i)$ – pasan por el interior del triángulo T_{2p_i} . Además, cuando $n = 2p_i$, un segmento de la recta identidad se convierte en uno de los lados del triángulo T_{2p_i} , por lo que los lados correspondientes –de los triángulos $T_{n'}$ – a éste están contenidos en T_{2p_i} . De este modo tenemos dos maneras de relacionar a

los triángulos correspondientes a los enteros $n = 2p_i$ con los de los n' que no son de esta forma y están en el intervalo $(2p_{i-1}, 2p_i)$.

En el primer caso, que el triángulo $T_{n'}$ quede completamente contenido en T_{2p_i} (figura 2.8 (izquierda)).

En el segundo caso, que el triángulo $T_{n'}$ quede parcialmente contenido en T_{2p_i} (figura 2.8 (derecha)).

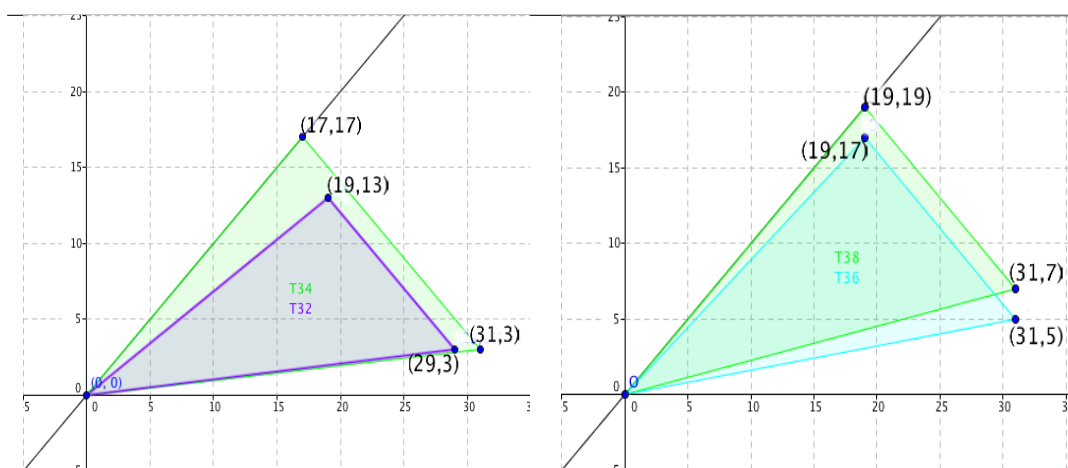


Figura 2.8: Triángulos T_{32} y T_{34} (izquierda) y Triángulos T_{36} y T_{38} (derecha).

En el primer caso no hay nada que hacer, puesto que al estar $T_{n'}$ contenido en T_{2p_i} , se tendrá que el área de T_{2p_i} será mayor que el área de $T_{n'}$, *i.e.*, $A(T_{2p_i}) > A(T_{n'})$.

En el segundo caso es posible¹⁴ que la suma de las áreas de T_{2p_i} comprendidas entre los lados paralelos \overline{AB} y \overline{CD} y las rectas \overline{OB} y \overline{OD} sea mayor al área entre las rectas \overline{OA} y \overline{OC} (figura 2.9), y por tanto se tenga que $A(T_{2p_i}) > A(T_{n'})$.

¹⁴Decimos ‘posible’ porque esto no podemos comprobarlo, pero el comportamiento de los $GI(p)$ nos hace pensar así es.

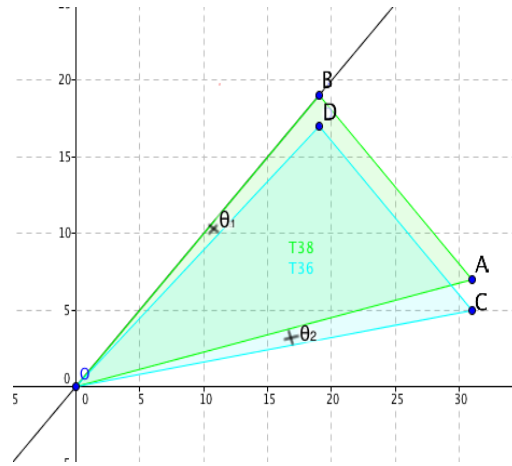


Figura 2.9: Triángulos T_{36} y T_{38} .

2do sustento para Conjetura 2.2.7

Además de los argumentos matemáticos que se presentaron en la sección anterior para sustentar la conjetura 2.2.7 también tenemos una serie de funciones que, por el comportamiento que presentan, pueden servir de sostén para nuestra conjetura. Éstas se presentan ahora.

La función de aproximación de las áreas correspondientes a los triángulos de los números de la forma $n = 2p$ es la siguiente

$$H(x) = 0.25x^2 - 7.60x + 4748.3,$$

y al compararla con la función $F(x) = 0.25x^2 - 18.58x + 9875.23$ –la función de aproximación para todas las áreas¹⁵– se tiene que $F(x) \ll H(x)$ para $x \geq 467.14$ y $c = 1$.

Sucede lo mismo cuando se comparan las funciones de aproximación de las áreas obtenidas para los números correspondientes que son divididos en las tres clases residuales pares módulo seis.

¹⁵Ver página 39.

Entonces las funciones de aproximación por clases son

$$\begin{aligned} f(x) &= 0.25x^2 - 14.87x + 8765 \text{ para los } n \equiv 0 \pmod{6} \\ g(x) &= 0.25x^2 - 29.72x + 28450 \text{ para los } n \equiv 2 \pmod{6} \\ h(x) &= 0.25x^2 - 11.18x + 7532 \text{ para los } n \equiv 4 \pmod{6}, \end{aligned}$$

y de esto se propone que

$$g(x) \ll f(x) \ll h(x)$$

para¹⁶ $x \geq 4416.53$ y $c = 1$.

Si construimos una vez más las funciones de aproximación por clases, sólo que esta vez sin¹⁷ los $n = 2p$.

$$\begin{aligned} g'(x) &= 0.25x^2 - 33.2x + 30171 \\ h'(x) &= 0.25x^2 - 13.65x - 8467.6, \end{aligned}$$

y las comparamos con las funciones correspondientes, resulta que $g'(x) \ll g(x)$ y $h'(x) \ll h(x)$ para $x \geq 494.54$ y $x \geq 0$, respectivamente, y con $c = 1$ en ambos casos.

Si comparamos las funciones $f(x)$, $g'(x)$ y $h'(x)$ a través del \ll , el resultado sigue respetando las desigualdades entre las funciones originales, *i.e.*, $g'(x) \ll f(x) \ll h'(x)$, no obstante los valores de x para los cuales se tienen esas desigualdades sí cambiaron. Para $x \geq 1167.81$ se tiene que $g'(x) \ll f(x)$ mientras que $g(x) \ll f(x)$ para $x \geq 1325.58$ y $c = 1$; para $x \geq 14125.08$ y $c = 1$, $f(x) \ll h'(x)$ mientras

¹⁶Este valor es para el caso $f(x) \ll h(x)$. La desigualdad $g(x) \ll f(x)$ se cumple para $x \geq 1325.58$ y $c = 1$.

¹⁷Como el único número que es de la forma $n = 2p$ múltiplo de seis es 6, decidimos no hacer la función $f'(x)$.

$f(x) \ll h(x)$ para $x \geq 4416.53$. Si bien las desigualdades se matuvieron, para que $h'(x)$ rebasara a $f(x)$ se requirió alejarse mucho más que $h(x)$, y $f(x)$ rebasó a $g'(x)$ antes que a $g(x)$.

Aunque ya hemos dado algunos argumentos para sustentar la tendencia de estar arriba que muestran las áreas de los triángulos de los $n = 2p$, hay algunos número de esta forma cuya área de su triángulo asociado no cumple con eso. Por ejemplo, para $n = 11456 = 2(5728)$, $A(T_n) = 31446720$ mientras que para los dos números anteriores a él, $A(T_{11454=2(5727)}) = 32701120$ y $A(T_{11452=2(5726)}) = 32621050$, claramente rebasan a $A(T_n)$ por más de 1000000.

Mediante funciones de aproximación veremos que, aunque la diferencia en áreas parece ser grande, los $n = 2p$ que no cumplen con que el área de su triángulo asociado sea mayor que las de los anteriores a éste, y están entre ése número y el $2p$ anterior, necesitan un “estímulo” pequeño para alcanzar, e incluso rebasar, a aquellos que sí lo hacen. Para ello vamos a obtener una nueva función de aproximación para los $n = 2p$ que no siguen la tendencia –cumplir lo mencionado antes–, y otra para los restantes que no se incluyen en la primer función. Estas funciones son

$$\begin{aligned} p(x) &= 0.25x^2 - 30.39x + 30416 \\ q(x) &= 0.25x^2 - 3.24x - 768.69 \end{aligned}$$

que al compararlas con el \ll se tiene que para $x \geq 1152.85$ y $c = 1$, $p(x) \ll q(x)$. Pero si cambiamos c por valores entre 1.1 y 1.02, esta desigualdad se invierte para $x \geq 0$ (figuras 2.10 hasta 2.11).

CAPÍTULO 2. CONJETURA BINARIA Y TRIÁNGULOS DE GOLDBACH

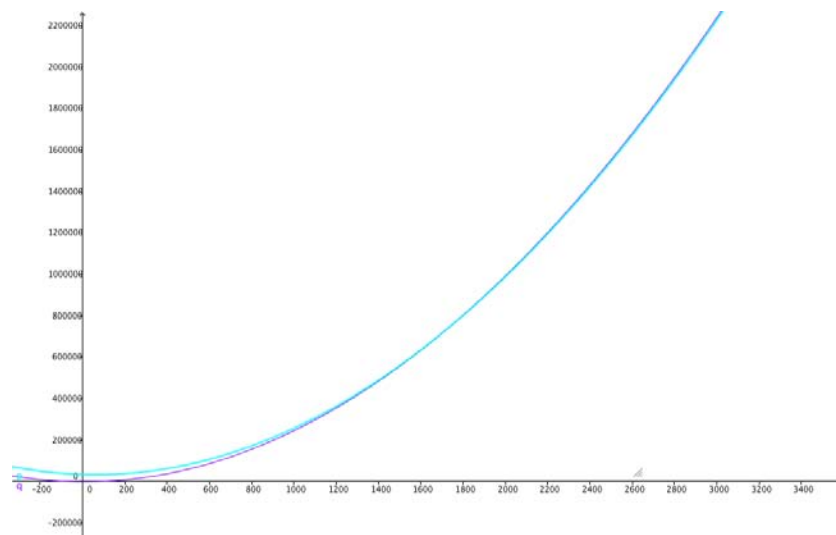


Figura 2.10: Gráfica de las funciones $p(x)$ en azul y $q(x)$ en morado. Escala 1 : 1000.

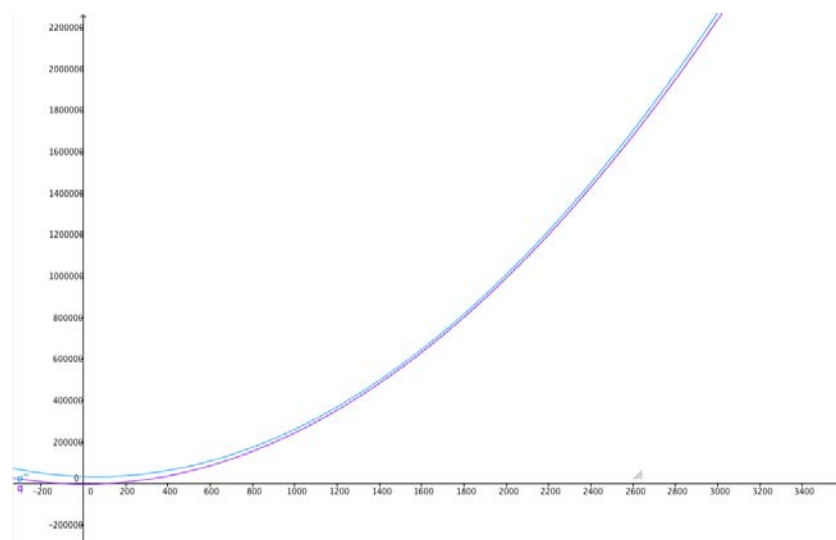


Figura 2.11: Gráfica de las funciones $p''(x) = \frac{51}{50} \cdot p(x)$ en azul y $q(x)$ en morado. Escala 1 : 1000.

A manera de resumen, podemos construir triángulos con las parejas de primos que suman el mismo número par n , y estos triángulos tienen propiedades interesantes como que su área siempre es un número par y nunca congruente con

2.2. TRIÁNGULOS DE GOLDBACH

2 módulo 6. Además, la imagen de la función área del triángulo $A(T_n)$ corresponde a una gráfica semejante a una parábola. También es de resaltar que los triángulos relacionados con los números de la forma $n = 2p$ (p primo) tienen áreas mayores que el resto de los triángulos.

Capítulo 3

Problema terciario de Goldbach y polígonos reticulares

3.1. Problema terciario y su gráfica

En esta sección nos dedicaremos a analizar el problema terciario de Goldbach y lo haremos a través de la función $GI(n)$ y su gráfica. Para este caso obtendremos funciones de aproximación para ésta, hechas con base en la función para el caso binario y con esto explicaremos el comportamiento de $GI(n)$.

En los capítulos anteriores ya dedicamos espacios al estudio de los número de Goldbach y a su visualización a través de lo que conocemos como *Cometa de Goldbach*. Nuestra aportación en esta parte fue la de representar a las parejas de primos en la retícula y dar lugar posteriormente al estudio de los triángulos que se forman con base en los puntos sobre la retícula.

En el capítulo presente sentimos que el paso natural es darle un lugar al estudio de las tercias que forman los impares asociados a la conjetura terciaria, aquella que nos enuncia lo siguiente:

Todo número n impar mayor o igual que siete puede escribirse como suma de tres números primos.

Al número de estas ternas de primos p_n , q_n y r_n , cuya suma es igual a n y que cumplen que $p_n \leq q_n \leq r_n$, se le conoce como número de Goldbach terciario de n , y lo denotaremos por $GI(n)$. Por ejemplo, $GI(33) = 9$, es decir, el 33 tiene 9 formas de ser representado como suma de tres primos, éstas son las siguientes:

$$\begin{array}{r}
 \hline
 2 + 2 + 29 \quad 3 + 7 + 23 \quad 5 + 3 + 23 \\
 3 + 11 + 19 \quad 7 + 7 + 19 \quad 3 + 13 + 17 \\
 5 + 11 + 17 \quad 7 + 13 + 13 \quad 11 + 11 + 11 \\
 \hline
 \end{array}$$

La conjetura de Goldbach ha sido muy estudiada en lo que corresponde a la función $G(n)$ –que es la parte binaria–, pero resulta que en la parte terciaria, aún hay mucho que decir. Contrariamente a lo conocido que es el *cometa* en la conjetura binaria, se tiene que la representación gráfica de la función $GI(n)$ es muy poco conocida, y con esto es precisamente con lo que queremos iniciar este capítulo.

Para obtener datos gráficos de la función $GI(n)$ fue necesario ampliar las capacidades del software que usamos. Cabe mencionar que hicimos búsquedas de las imágenes que nos dieran una idea de la gráfica requerida, pero no las encontramos. Por las razones señaladas podemos decir que lo presentado a continuación son aportaciones propias de la tesis.

Con toda objetividad tenemos que mencionar que esperábamos que la gráfica de las imágenes de la función $GI(n)$, vinculada con las ternas de primos, tuviera un

3.1. PROBLEMA TERCIARIO Y SU GRÁFICA

comportamiento no tan atractivo como el que mostró el *Cometa* en la binaria, pero el resultado fue sorprendente y totalmente diferente a lo mostrado por el *Cometa*. La gráfica de la función $GI(n)$ es la siguiente (figura 3.1).



Figura 3.1: Gráfica de la función $GI(n)$.

Se puede ver que existen dos grandes bifurcaciones –las cuales abordaremos más adelante–, y en comparación con el Cometa, el crecimiento del número de Goldbach de los impares es mucho más acelerado que el de los pares.

Antes de tratar de acercarnos a una explicación de porque se generan las bifurcaciones, veamos primero de qué manera se comportan las imágenes de la función $GI(n)$, y así podremos entender más sobre los números de Goldbach en su forma terciaria.

Como $n = p + q + r$, y dado que se tiene que considerar que esta terna de sumandos primos no tiene porque ser única, entonces en cada terna sucederá que al menos uno de los primos estará forzado a ser menor que $\frac{n}{3}$.¹

¹Por lo menos uno de los sumandos tiene que ser menos que $\frac{n}{3}$, porque de lo contrario si los tres son mayores, entonces la suma de los tres primos será mayor que n y esto no es posible.

Para nuestro estudio fijaremos a uno de los tres primos, supongamos que es p , entonces, como p es fijo se tendrá que los primos q y r están obligados a sumar un número par² $(n - p)$. Así, a partir de fijar un primo, ahora se puede usar como elemento base de nuestro análisis a la cantidad de parejas asociadas a cada número par $(n - p)$, es decir, podemos usar nuestros conocimientos de los números de Goldbach en la forma binaria. De la conjetura binaria sabemos que hay $G(n - p)$ formas de escribir a n impar como suma de tres primos, pero con la característica de que cada terna tendrá siempre al primo p . Además, al ser p un primo menor o igual que $\frac{n}{3}$, podemos hacer lo mismo para cada primo que cumpla con esta condición.

Lo anterior nos lleva a que

$$GI(n) \approx \sum_{\substack{p, \text{ primo,} \\ p \leq \frac{n}{3}}} G(n - p) \dots \dots (\diamond)$$

No obstante, el riesgo de repetir triadas es alto. Para visualizar esto desarrollaremos los ejemplos para los número 33, 31 y 29.

Ejemplo 3.1.1 (Caso del 33).

La tercera parte de 33 es 11, entonces sólo nos enfocaremos en los primos menores o iguales que 11, que son los que ocuparán el lugar del primer sumando de cada terna. Las ternas son estas

$$33 = 2 + 2 + 29$$

$$33 = 3 + 7 + 23 = 3 + 11 + 19 = 3 + 13 + 17$$

$$33 = 5 + 5 + 23 = 5 + 11 + 17$$

²Salvo cuando $p = 2$.

$$33 = 7 + 3 + 23 = 7 + 7 + 19 = 7 + 13 + 13$$

$$33 = 11 + 3 + 19 = 11 + 5 + 17 = 11 + 11 + 11,$$

por lo tanto $GI(33) = 9$ y, el número de ternas dadas por la cota construida (\diamond)³ es 12.

Ejemplo 3.1.2 (Caso del 31).

La tercera parte de 31 es 10.3, entonces tomaremos sólo a los primos menores o iguales que 10, así, las ternas son estas:

$$31 = 3 + 5 + 23 = 3 + 11 + 17$$

$$31 = 5 + 3 + 23 = 5 + 7 + 19 = 5 + 13 + 13$$

$$31 = 7 + 5 + 19 = 7 + 7 + 17 = 7 + 11 + 13$$

donde $GI(31) = 7$, y el número de ternas dadas por la cota (\diamond) es 8.

Ejemplo 3.1.3 (Caso del 29).

La tercera parte de 29 es 9.6, para los primos menores o iguales que 10:

$$29 = 3 + 3 + 23 = 3 + 7 + 19 = 3 + 13 + 13$$

$$29 = 5 + 5 + 19 = 5 + 7 + 17 = 5 + 11 + 13$$

$$29 = 7 + 3 + 19 = 7 + 5 + 17 = 7 + 11 + 11$$

donde $GI(33) = 7$, y el número de ternas dadas por la cota (\diamond) es 9.

Para los tres casos, consideraremos como triadas repetidas a aquellas en las que el primo que tomamos como base es mayor que alguno de los sumandos restantes de la triada. Además, en la medida que el primo p se acerca a $\frac{n}{3}$, aumenta la

³Las ternas marcadas con el mismo color –distinto de negro– son, salvo por el orden, iguales, por lo que, para obtener $GI(n)$ sólo cuenta una de cada color.

posibilidad de que alguna de las triadas donde p aparece se repita. Lo primero que podemos concluir es que más que una aproximación, lo que tenemos es una cota superior, *i.e.*,

$$GI(n) < \sum_{\substack{p, \text{ primo,} \\ p \leq \frac{n}{3}}} G(n-p) \dots \dots \dots (I)$$

De lo anterior proponemos que sumar números de Goldbach de la conjetura binaria es una vía para acercarnos al valor de $GI(n)$, y aunque lo que construimos fue una cota superior, para nuestro propósito, ya es de gran utilidad.

3.1.1. Una aproximación de $GI(n)$

En esta sección retomamos la función de Hardy-Littlewood para usarla –como en el caso binario– en el estudio de $GI(n)$. Para este caso de $GI(n)$ usaremos la cota de (I) que nos ayudará a entender su comportamiento.

En cuanto al crecimiento que muestra la gráfica de $GI(n)$, creemos que éste puede interpretarse partiendo de la suposición de que para cada n , se tendría que $G(n-p)$ es la misma para toda p , y lo denotaremos por $G(n')$. Como resultado de esto tendríamos que⁴

$$\sum_{\substack{p, \text{ primo,} \\ p \leq \frac{n}{3}}} G(n-p) \approx \pi\left(\frac{n}{3}\right) \cdot G(n') \dots \dots \dots (II)$$

⁴Usamos $\pi\left(\frac{n}{3}\right)$ porque la suma es hasta los primos menores o iguales que $\frac{n}{3}$.

Pero, ya se había dicho en el capítulo uno que $G(n)$ es creciente y como $\pi(n)$ también lo es, entonces $GI(n)$ es muy cercana a ser un producto de funciones crecientes.

Con base en la construcción de $GI(n)$ como producto de dos funciones, ahora construiremos una nueva cota para el número de Goldbach de los impares.

A partir de la expresión (II) vemos que $G(n')$ está de alguna manera reemplazando al término $G(n-p)$ de la expresión (I). Por otro lado, como $p \leq \frac{n}{3}$, entonces se tiene que $n-p \geq \frac{2n}{3}$, además como $G(n)$ es creciente, entonces $G(\frac{2n}{3}) \leq G(n-p)$ para $p \leq \frac{n}{3}$. De esto se sigue que

$$\sum_{\substack{p, \text{ primo,} \\ p \leq \frac{n}{3}}} G(n-p) \approx \pi\left(\frac{2n}{3}\right) \cdot G(n')$$

En cuanto a las funciones $\pi(n)$ y $G(n)$, sabemos que⁵

$$\pi(n) \approx \frac{n}{\log(n)}$$

y

$$G(n) \approx 2C_2 \frac{n}{(\log(n))^2} \prod_{p|n} \left(\frac{p-1}{p-2}\right)$$

Además, con base en el análisis que se hizo sobre el Cometa de Goldbach en el capítulo uno, sabemos que el factor $\prod_{p|n} \left(\frac{p-1}{p-2}\right)$ hace que la fórmula de Hardy-Littlewood sea menos estable, ya que ésta depende en gran parte de los primos que dividen a n . Recordemos también que la formación de sectores –en el cometa– se

⁵ $2C_2 \frac{n}{(\log(n))^2} \prod_{p|n} \left(\frac{p-1}{p-2}\right)$ es la aproximación de Hardy-Littlewood, la cual ya se había abordado en el capítulo uno.

debe a la aparición del número tres como factor primo; y en cuanto a las bandas que aparecen en cada sector, se debe a las combinaciones de los factores primos que las determinaban. Es por estos elementos por lo que en un intervalo el comportamiento de los números de Goldbach es tan variable. En la figura 3.2 se puede apreciar que la línea que oscila es la que nos determina el orden de aparición de los números de Goldbach para el caso binario.

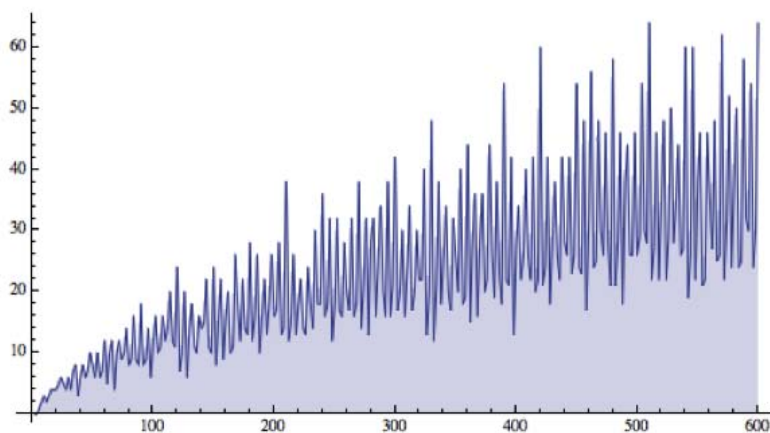


Figura 3.2: Cometa de Goldbach con marcas.

Ya hemos visto que la fórmula de Hardy-Littlewood

$$2C_2 \frac{n}{(\log(n))^2} \prod_{p|n} \left(\frac{p-1}{p-2} \right)$$

es de comportamiento inestable y por tanto es muy complicado realizar el cálculo completo de ella en un intervalo determinado. Entonces, en vez de trabajar con la fórmula completa sólo utilizaremos⁶ el factor $2C_2 \frac{n}{(\log(n))^2}$.

⁶Esta función vive en la banda inferior del Cometa de Goldbach. Véase Capítulo uno pags. 21-22.

3.1. PROBLEMA TERCIARIO Y SU GRÁFICA

De esta forma, al sustituir $\pi(\frac{n}{3})$ y $G(\frac{2n}{3})$ por sus respectivas aproximaciones tenemos que

$$\sum_{\substack{p, \text{ primo,} \\ p \leq \frac{n}{3}}} G(n-p) \approx 2C_2 \frac{n}{(\log(n))^2} \cdot \frac{\binom{n}{3}}{\log(\frac{n}{3})}$$

La figura 3.3 nos muestra los números de Goldbach para los primeros 100 impares (los puntos azules), así como a la función de aproximación que construimos para $GI(n)$.

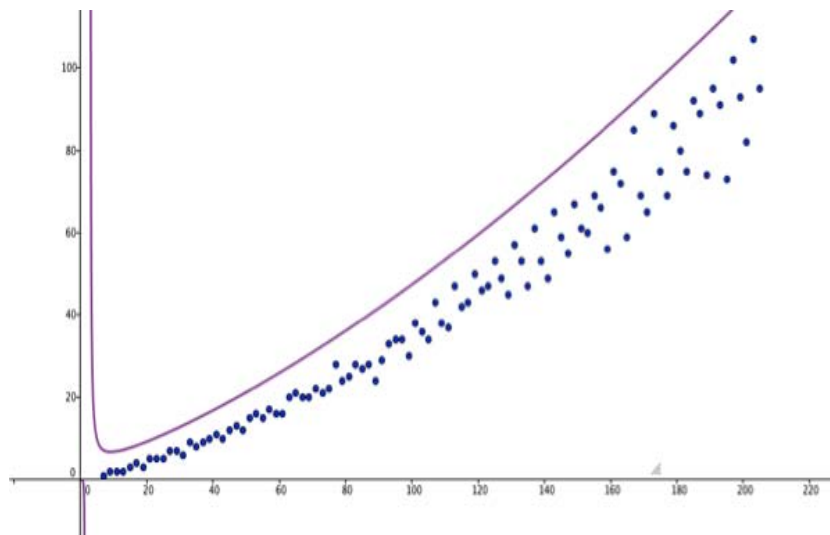


Figura 3.3: Gráfica de los números de Goldbach para los primeros 100 impares. En morado la función $2C_2 \frac{\binom{2n}{3}}{(\log(\frac{2n}{3}))^2} \cdot \frac{\binom{n}{3}}{\log(\frac{n}{3})}$.

Los datos empíricos nos indican que la función de aproximación que construimos es cercana a los puntos reales, pero esta función aún la podemos mejorar, y para hacerlo nos apoyaremos en la siguiente observación.

Observación 3.1.4.

Si alguna de las ternas de primos que suman n tiene como sumando al 2, entonces esa terna es de la forma $n = 2 + 2 + p$ y es única.

Demostración.

Supongamos que $n = 2 + p + q$ con p y $q \neq 2$, entonces $n - 2 = p + q$. Como n es impar, $n - 2$ también lo es. Además, como p y q son primos diferentes de dos, entonces ambos son impares y en consecuencia $p + q$ es par, y esto contradice la igualdad $n - 2 = p + q$. Además, la unicidad de la terna es clara a partir de la demostración. □

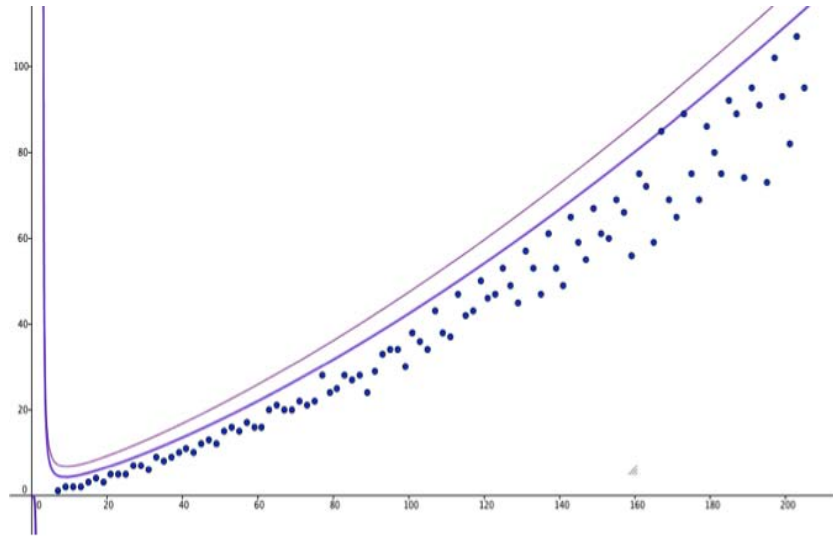


Figura 3.4: Gráfica de los números de Goldbach para los primeros 100 impares. En guinda la función $2C_2 \frac{\binom{2n}{\frac{2n}{3}}}{(\log(\frac{2n}{3}))^2} \cdot \frac{\binom{n}{\frac{n}{3}}}{\log(\frac{n}{3})}$ y en morado la función $2C_2 \frac{\binom{2n}{\frac{2n}{3}}}{(\log(\frac{2n}{3}))^2} \cdot \left(\frac{\binom{n}{\frac{n}{3}}}{\log(\frac{n}{3})} - 1 \right)$.

Por la observación anterior ahora sabemos que –en caso de existir⁷–, para cada n sólo podría haber una terna que tiene al dos como sumando. Entonces, si el dos

⁷Notemos que en los tres ejemplos que dimos anteriormente, sólo uno tenía al dos como factor primo dentro de sus ternas. De hecho, que la terna $n = 2 + 2 + p$ exista depende directamente de la primalidad de $n - 4$

3.1. PROBLEMA TERCIARIO Y SU GRÁFICA

está contando, sucederá que al obtener el número de primos menores que $\frac{n}{3}$, se le podrá restar uno a $\pi(\frac{n}{3})$. Así, la nueva cota será $2C_2 \frac{(\frac{2n}{3})}{(\log(\frac{2n}{3}))^2} \cdot \left(\frac{(\frac{n}{3})}{\log(\frac{n}{3})} - 1 \right)$. Véase la figura 3.4 para comparar las aproximaciones con los valores reales.

Ya presentamos una posible explicación del comportamiento creciente que nos muestra la función $GI(n)$, y exhibimos una cota superior para sus imágenes. Enseguida trataremos de explicar la bifurcación que se observa claramente en la figura 3.1.

Por auscultación a través del programa nos fue posible identificar a los $GI(n)$, pero diferenciando a que clase residual (módulo 6) pertenece cada n . En las figuras 3.5, 3.6 y 3.7 veremos las imágenes de $GI(n)$, pero en particular –marcado en azul– cuando los impares n dejan residuo 1, 3 y 5 al ser divididos por 6 respectivamente.

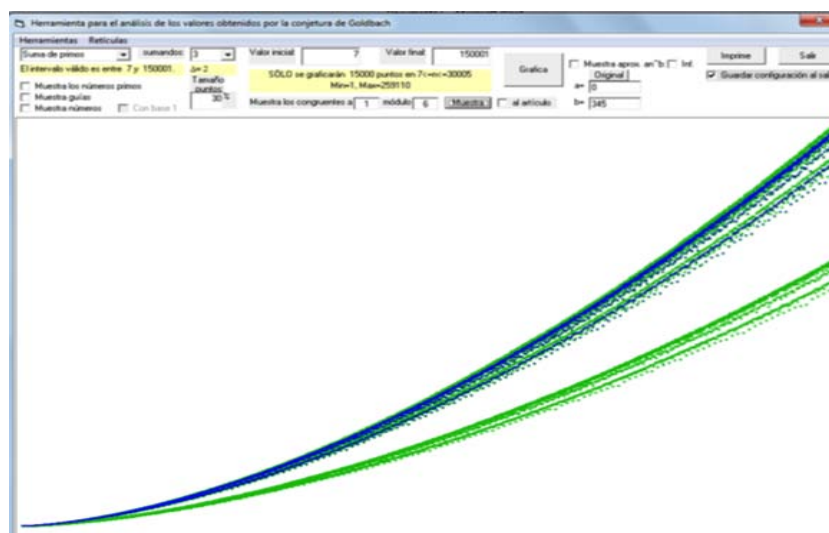


Figura 3.5: Gráfica de la función $GI(n)$. En azul los números n congruentes con 1 módulo 6.

CAPÍTULO 3. PROBLEMA TERCIARIO DE GOLDBACH Y POLÍGONOS RETICULARES

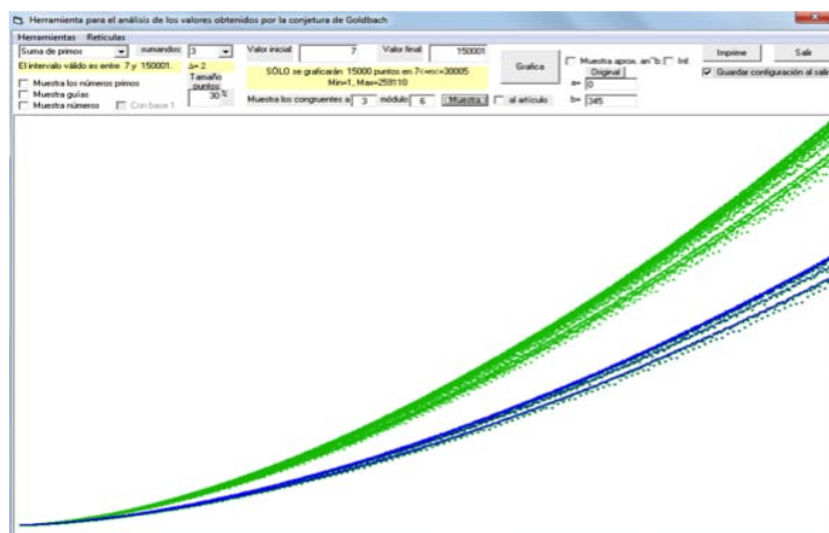


Figura 3.6: Gráfica de la función $GI(n)$. En azul los números n congruentes con 3 módulo 6.

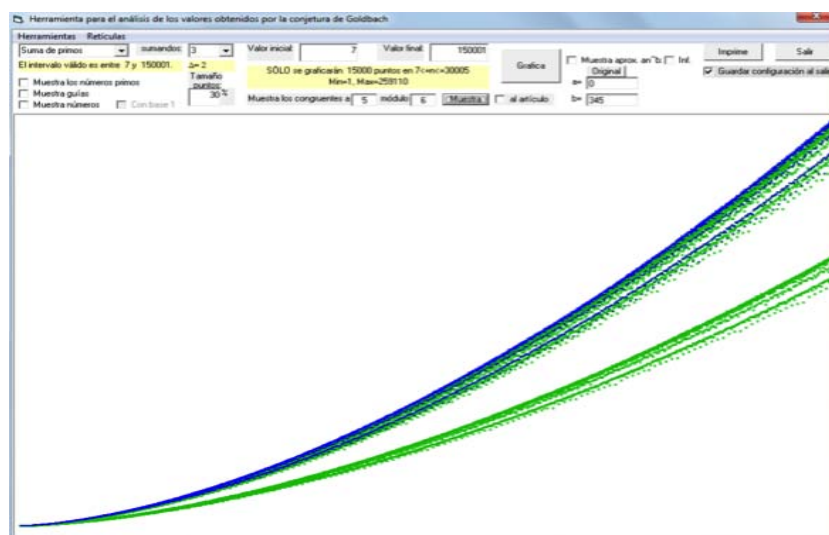


Figura 3.7: Gráfica de la función $GI(n)$. En azul los números n congruentes con 5 módulo 6.

Las gráficas nos sugieren que en la rama superior se alojan los impares que dejan residuo 1 y 5 cuando son divididos por 6; en la rama inferior los impares que son múltiplos de 3. A partir de esto ya tenemos idea de cómo parece que se reparten las

imágenes de la función $GI(n)$ para cada número impar. Pero también es necesario tratar de dar una justificación matemática de este comportamiento. Para hacerlo primero recurrimos a la construcción que proporcionamos para acercarnos a $GI(n)$, y además retomamos algunos elementos de la conjetura binaria.

Primero recordemos el hecho de que los primos p módulo 6 sólo pueden ser de la forma $6k + 1$ ó $6k + 5$, es decir, $p \equiv 1$ ó $5 \pmod{6}$ –salvo en los casos del 2 y 3–. Además, al ser n un número impar, se tiene que $n \equiv 1, 3$ ó $5 \pmod{6}$. Entonces, tomando como base a n y a p determinaremos $q + r$. Enseguida damos lugar a los siguientes casos.

Caso I

Si se tiene que $n \equiv 1 \pmod{6}$, entonces para cada caso de p se tiene que la suma de los otros dos primos queda obligada a ser de la forma siguiente

$$\text{Si } p \equiv 1 \pmod{6}, \text{ entonces } q + r \equiv 0 \pmod{6}$$

$$\text{Si } p \equiv 5 \pmod{6}, \text{ entonces } q + r \equiv 2 \pmod{6}$$

$$\text{Si } p = 3, \text{ entonces } q + r \equiv 4 \pmod{6}$$

Caso II

Para $n \equiv 3 \pmod{6}$ se tiene que

$$\text{Si } p \equiv 1 \pmod{6}, \text{ entonces } q + r \equiv 2 \pmod{6}$$

$$\text{Si } p \equiv 5 \pmod{6}, \text{ entonces } q + r \equiv 4 \pmod{6}$$

$$\text{Si } p = 3, \text{ entonces } q + r \equiv 0 \pmod{6}$$

Caso III

Para $n \equiv 5 \pmod{6}$ se tiene que

$$\text{Si } p \equiv 1 \pmod{6}, \text{ entonces } q + r \equiv 4 \pmod{6}$$

$$\text{Si } p \equiv 5 \pmod{6}, \text{ entonces } q + r \equiv 0 \pmod{6}$$

$$\text{Si } p = 3, \text{ entonces } q + r \equiv 2 \pmod{6}$$

Retomando el tipo de análisis que se hizo en el capítulo uno para el *Cometa de Goldbach*, podemos decir que los múltiplos de seis tienen casi el doble de parejas que aquellos que no los son. De manera que al juntar lo que sabemos del Cometa de Goldbach, con nuestro análisis anterior de los tres casos, se sigue que para los números congruentes con 1 ó 5 módulo 6, a casi la mitad de los primos menores o iguales a $\frac{n}{3}$ les corresponde un número par $-q + r$ que puede escribirse de muchas formas; mientras que cuando n es congruente con 3, el único caso en el que su par complementario tiene más formas de escribirse es cuando $p = 3$. Es por esto que los múltiplos de 3 están en el sector inferior de la gráfica y el resto de los impares en el sector superior.

Por otro lado, si hacemos un acercamiento sobre las dos clases marcadas en el sector superior en la gráfica nos daremos cuenta también de que, al igual que en el sector inferior del *Cometa de Goldbach* y las clases residuales que están representadas allí, una de ellas está un poco más arriba que la otra. Esto es, los congruentes con $5 \pmod 6$ tienen ligeramente más triadas que los congruentes con $1 \pmod 6$ (figura 3.8).

En el análisis del Cometa de Goldbach se dijo que si n es congruente con $2 \pmod 6$, entonces ambos primos que forman la suma deben ser de la forma $6k + 1$; y si n es congruente con $4 \pmod 6$ entonces esos primos tienen que ser de la forma $6k + 5$. Además, en el capítulo I (pág. 19) señalamos que los pares congruentes con $4 \pmod 6$ muestran que sus números de Goldbach tienden a ser mayores que los correspondientes a los pares congruentes con $2 \pmod 6$. Lo anterior podía deberse a que para una x dada parece haber más primos de la forma $6k + 5$ que de la forma $6k + 1$ menores o iguales a x (ver págs. 19 y 20).

${}^8\pi(x; a, 6) \sim \frac{\pi(x)}{2}$ donde a es tal que $(a, 6) = 1$

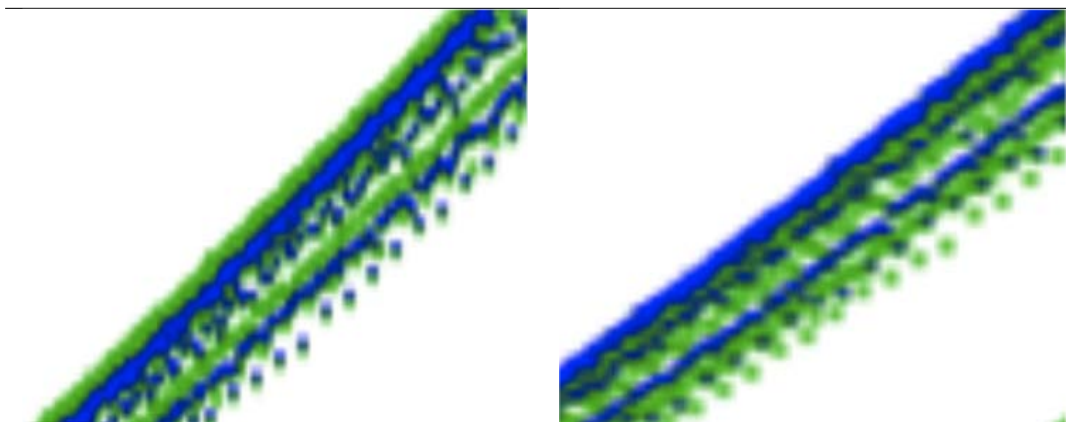


Figura 3.8: Acercamiento de la gráfica del problema terciario en el sector superior. A la izquierda las marcas azules indican a los números congruentes con 1 módulo 6, a la derecha a los congruentes con 5 bajo el mismo módulo.

De regreso al sector superior de la función $GI(n)$, vamos a suponer que para $x = \frac{n}{3}$ sí hay más primos p de la forma $6k + 5$ que de la forma⁹ $6k + 1$ menores o iguales a x , y lo hacemos con la finalidad de analizar si esto influye en lo observado en la figura 3.8. Para este fin tenemos que notar lo siguiente.

Si $n \equiv 5 \pmod{6}$ y como $p \equiv 5 \pmod{6}$ entonces tiene que pasar que $n - p = q + r \equiv 0 \pmod{6}$, es decir, cuando $n \equiv 5 \pmod{6}$, más de la mitad de los sumandos $G(n - p)$ —aquellos que corresponden a los primos p de la forma $6k + 5$ — en

$$\sum_{\substack{p, \text{ primo,} \\ p \leq \frac{n}{3}}} G(n - p)$$

dependen de que los primos q y r cumplan con $q + r \equiv 0 \pmod{6}$, y además sabemos que en esta relación debemos usar dos clases residuales, por lo tanto, estos $G(n - p)$

⁹Recordemos que $\pi(x; 1, 6) \sim \frac{\pi(x)}{2} \sim \pi(x; 5, 6)$

son más grandes que los correspondientes a los primos p de la forma $6k + 1$ –y el tres–.

Análogamente, cuando $n \equiv 1 \pmod{6}$, y como $p \equiv 5 \pmod{6}$, entonces tiene que pasar que $n - p = q + r \equiv 2 \pmod{6}$. Por lo tanto, más de la mitad de los sumandos $G(n - p)$ –aquellos que corresponden a los primos p de la forma $6k + 5$ – en

$$\sum_{\substack{p, \text{primo}, \\ p \leq \frac{n}{3}}} G(n - p)$$

dependen de que los primos q y r cumplan con $q + r \equiv 2 \pmod{6}$. Pero ya sabemos que en esta relación debemos usar sólo una clase residual, y sus números de Goldbach son incluso de los más pequeños, por lo tanto, estos sumandos $G(n - p)$ son más pequeños que los correspondientes a los primos p de la forma $6k + 1$ –y el tres–.

Por otro lado, si en lugar de ver qué sucede con la diferencia $(n - p)$ una vez que fijamos la forma de p , nos enfocamos en determinar en que casos se tendrá que esta diferencia es congruente con $4 \pmod{6}$ –por ser la clase cuyo número de Goldbach es más grande después de los correspondientes a $0 \pmod{6}$ – se tiene lo siguiente.

Si $n \equiv 1 \pmod{6}$ y $(n - p) \equiv 4 \pmod{6}$, entonces $p = 3$.

Si $n \equiv 5 \pmod{6}$ y $(n - p) \equiv 4 \pmod{6}$, se tiene que $p \equiv 1 \pmod{6}$,

lo cual es equivalente a la comparación que hicimos cuando determinamos los sectores de la función $GI(n)$.

Además, es posible aumentar en uno¹⁰ la diferencia entre los números de Goldbach de los $n \equiv 1 \pmod{6}$ y los $n \equiv 5 \pmod{6}$, y para ello tenemos la siguiente observación.

¹⁰Recordemos que la existencia de la triada $n = 2 + 2 + p$ depende de la primalidad de $n - 4$.

Observación 3.1.5.

Ningún impar congruente con 1 módulo 6 distinto de 7 puede ser escrito de la forma $n = 2 + 2 + p$ con p primo.

Demostración.

Supongamos que n es impar de la forma $n = 2 + 2 + p$. Recordemos que, salvo por el 3, los primos impares módulo 6 son de la forma $6k + 1$ ó $6k + 5$.

De esta manera,

Si $n = 2 + 2 + p$ y $p \equiv 1 \pmod{6}$, se tiene que $n \equiv 5 \pmod{6}$.

Si $n = 2 + 2 + p$ y $p \equiv 5 \pmod{6}$, se tiene que $n \equiv 3 \pmod{6}$.

Notemos también que para que n sea congruente con 1 módulo 6 y que además se pueda escribir de la forma $n = 2 + 2 + p$, p debe ser de la forma $6k + 3$, pero el único primo de esa forma es 3.

Por lo tanto, ningún impar congruente con 1 módulo 6 diferente de 7 puede escribirse de la forma $n = 2 + 2 + p$. \square

Ya tenemos una serie de datos que nos muestran que los números impares de la forma $6k + 5$ tienen un número de Goldbach ligeramente más grande que los $6k + 1$. Además ya contamos con un razonamiento matemático que les proporciona una base más consistente.

Hasta ahora, la información obtenida de la función $GI(n)$ del problema terciario parece indicar que ésta tiene elementos similares a los del Cometa de Goldbach. La gráfica de la función $GI(n)$ también se divide en dos sectores, y al igual que en el *cometa*, uno de ellos tiene dos clases residuales –el sector superior contiene las imágenes de los números congruentes con 1 y 5 módulo 6–. Además, el tres juega, nuevamente, un papel importante en la definición de los sectores en la gráfica de

la función $GI(n)$. En el Cometa, los múltiplos de tres están en el sector superior y en la función terciaria $GI(n)$ en el inferior, y en ambos casos éstos permanecen en un sólo sector y ninguna otra clase residual módulo 6 se mezcla con ellos.

3.1.2. Los primos p y $GI(p)$

Con todas estas ‘similitudes’¹¹ podemos preguntarnos qué es lo que sucede con los primos p y el lugar que ocupa su imagen en la función $GI(n)$. Como éstos son de la forma $6k + 1$ ó $6k + 5$, es claro que tienen que estar en el sector superior, pero, ¿será posible que también estén en la parte superior del mismo? La siguiente imagen muestra en rojo las imágenes de $GI(p)$ para p primo impar (figura 3.9).

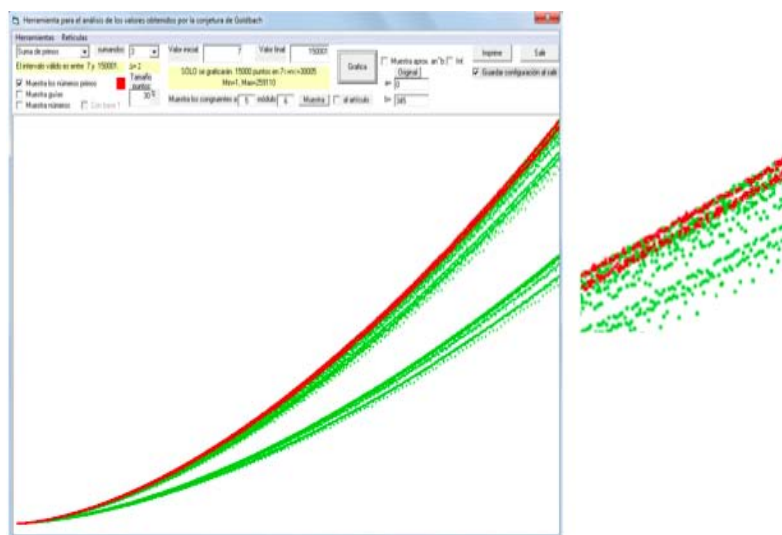


Figura 3.9: Gráfica de la función $GI(n)$. Las marcas en rojo indican las imágenes de los números primos.

Aunque el resultado puede ser un tanto predecible no deja de ser impresionante que se generan dos trayectorias con los valores de $GI(p)$, que además tienen cierto

¹¹Que bien podrían hacernos pensar que algunos elementos –ya mencionados– de la gráfica de $GI(n)$ es un tipo de reflexión respecto de la identidad del *Cometa de Goldbach*.

paralelismo. Esto da lugar al surgimiento de nuevas dudas, ¿por qué ocurre esto? y ¿qué influye para que estos números en particular estén aún más arriba que muchos otros que pertenecen a las mismas clases?

Nótese que hasta ahora sólo hemos trabajado con los sectores del Cometa de Goldbach y gracias a ellos sabemos qué imágenes de $GI(n)$ componen cada sector de la función del problema terciario, además, dimos una explicación al hecho de que el número de Goldbach de los impares congruentes con $5 \bmod 6$ tienda a ser un poco más grande que el de los congruentes con $1 \bmod 6$. Sin embargo, si usamos sólo los sectores –del Cometa– no podremos dar respuesta al problema de las imágenes de los primos en $GI(n)$, y es por esto que ahora nos apoyaremos en las bandas del Cometa.

Recordemos que llamamos bandas a las acumulaciones definidas en cada sector, las que se forman con base en la descomposición en factores primos –mayores que dos– de cada número par.

A partir de la fórmula de Hardy-Littlewood

$$2C_2 \frac{n}{(\log(n))^2} \prod_{p|n} \left(\frac{p-1}{p-2} \right),$$

con p corriendo sobre los primos impares que dividen a n , sabemos que no sólo el número de factores primos distintos importa, sino también el tamaño de estos, ya que mientras más grande sea p , el factor $\left(\frac{p-1}{p-2} \right)$ es más pequeño, y por tanto el número de Goldbach se ve reducido si los primos que lo factorizan son grandes. De las bandas que se muestran en la figura 3.10, nótese que todas ellas están compuestas por imágenes de números cuyos factores primos son pequeños, es más ninguno tiene más de un dígito.

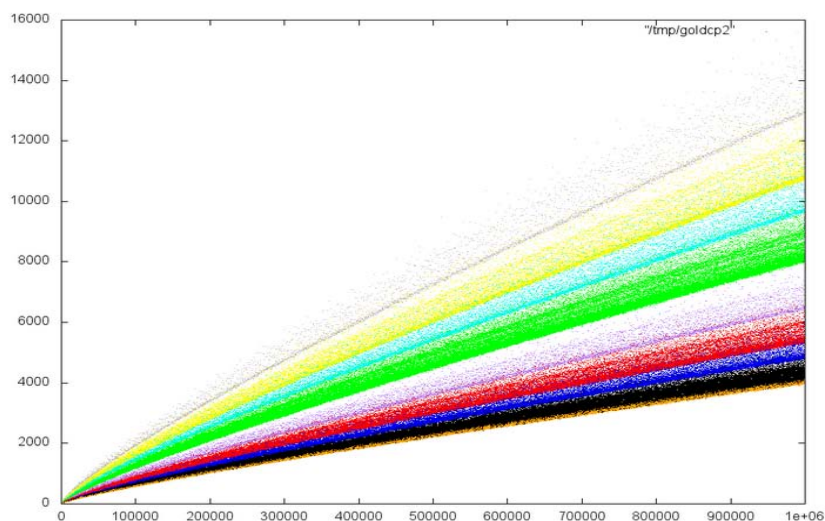


Figura 3.10: Esto es un ejemplo de algunos pares y primos que las forman: Verde: Múltiplos de 3. Rojo: Múltiplos de 5. Azul: Múltiplos de 7. Amarillo: Múltiplos de 3 y 5. Cyan: Múltiplos de 3 y 7. Magenta: Múltiplos de 5 y 7. Gris: Múltiplos de 3, 5 y 7. Naranja: Potencias de 2. Negro: $2p$ (Figura tomada de: <http://www.ltg.ed.ac.uk/~richard/goldbach.html>).

El análisis de $GI(p)$ con p primos lo haremos retomando lo que sabemos de las bandas formadas en el *cometa*. Así, veremos a $GI(p)$ a través de la suma de números de Goldbach correspondientes a los enteros pares. Esto es, ya habíamos dicho que una forma de aproximar al número de Goldbach $GI(n)$ para n en los impares es mediante la suma

$$\sum_{\substack{p, \text{ primo,} \\ p \leq \frac{n}{3}}} G(n - p)$$

la cual se construyó a partir de considerar a n como la suma de tres primos, *i.e.*, $n = p + q + r$, con la característica de que p primo varía en un rango menor o igual que $\frac{n}{3}$. Al hacer esto la suma¹² $q + r$ queda fija cada vez que asignamos un

¹²Que al mismo tiempo es igual a $(n - p)$.

valor específico para p . Notemos que para este caso la información que extraemos del Cometa de Goldbach la usaremos directamente al trabajar con la diferencia $(n - p)$.

Ahora, lo que queremos saber es en qué banda está $(n - p)$, y nos será más útil ver esta diferencia como producto de potencias de primos, *i.e.*, $(n - p) = 2^\alpha \cdot p_1^{\alpha_1} \cdots p_m^{\alpha_m}$. Es importante notar que $(n - p)$ es par cuando $p \neq 2$, por lo que la construcción que estamos dando sólo aplica para los primos p impares.

Con base en lo que sabemos sobre las bandas a partir de la fórmula de Hardy-Littlewood, aplicado a $(n - p) = 2^\alpha \cdot p_1^{\alpha_1} \cdots p_m^{\alpha_m}$, y considerando los datos arrojados por el Software, proponemos la conjetura siguiente.

Conjetura 3.1.6.

Si n y m son dos números impares distintos tales que¹³ $m < n$ pero $GI(n) < GI(m)$, y además cada uno de los términos $(n - p_i)$ y $(m - p_i)$ correspondientes a cada sumando de

$$GI(n) \approx \sum_{\substack{p_i, \text{primo}, \\ p_i \leq \frac{n}{3}}} G(n - p_i)$$

y

$$GI(m) \approx \sum_{\substack{p_i, \text{primo}, \\ p_i \leq \frac{m}{3}}} G(m - p_i),$$

respectivamente, tienen una factorización que podemos caracterizar así:

¹³Proponemos la siguiente igualdad porque queremos que n y m sean enteros cuya diferencia tienda a dos.

$$\{2^{\alpha_i} \cdot s_1^{\alpha_{1_i}} \cdots s_v^{\alpha_{u_i}} \mid \text{con } s_j < s_{j+1} \text{ y } \alpha_j \neq 0, \text{ para cada } 3 \leq p_i \leq \frac{n}{3}\}$$

y

$$\{2^{\alpha_i} \cdot t_1^{\beta_{1_i}} \cdots t_v^{\beta_{u_i}} \mid \text{con } t_j < t_{j+1} \text{ y } \beta_j \neq 0, \text{ para cada } 3 \leq p_i \leq \frac{m}{3}\}$$

respectivamente. Entonces, proponemos que para la mayoría de los t_{1_i} existe un s_{1_i} , tal que $t_{1_i} \leq s_{1_i}$.¹⁴

En caso de que para algunos $(n - p_i)$ y $(m - p_j)$, los factores s_{1_i} y t_{1_j} , respectivamente, fueran iguales, entonces se hace la comparación para s_{2_i} y t_{2_j} . Si ocurre lo mismo con s_{2_i} y t_{2_j} entonces continuamos con el siguiente primo de la factorización y así sucesivamente.

Para entender mejor lo que estamos planteando en la conjetura 3.1.6, construyamos algunos ejemplos. Como los números de Goldbach de los impares congruentes con 1 ó 5 son más grandes que los correspondientes a los múltiplos de 3, entonces sólo haremos comparaciones entre impares que estén en el mismo sector.

Ejemplo 3.1.7.

Sea $m = 53$ y $n = 55$. $GI(53) = 16$ y $GI(55) = 15$.

Los primos p impares menores que $\frac{53}{3}$ y $\frac{55}{3}$ son 17, 13, 11, 7, 5 y 3. Entonces, para cada uno de ellos tenemos los pares $m - p$ y $n - p$, y los escribiremos de la forma $n - p = 2^\alpha \cdot p_1^{\alpha_1} \cdots p_u^{\alpha_u}$.

¹⁴Notemos que si $(n - p_i)$ y $(m - p_i)$ están en el sector superior del Cometa, s_{1_i} y t_{1_i} son iguales a tres, por lo que s_{2_i} y t_{2_i} son los encargados de definir a partir de qué banda se encuentran los números de Goldbach de $(n - p_i)$ y $(m - p_i)$. Por otro lado, si $(n - p_i)$ y $(m - p_i)$ están en el sector inferior, s_{1_i} y t_{1_i} definen a partir de qué banda se encuentran sus números de Goldbach.

| Para $m = 53$ | Para $n = 55$ |
|------------------------------------|------------------------------------|
| $53 - 17 = 36 = 2^2 \cdot 3^2$ | $55 - 17 = 38 = 2 \cdot 19$ |
| $53 - 13 = 40 = 2^3 \cdot 5$ | $55 - 13 = 42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$ |
| $53 - 11 = 42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$ | $55 - 11 = 44 = 2^2 \cdot 11$ |
| $53 - 7 = 46 = 2 \cdot 23$ | $55 - 7 = 48 = 2^4 \cdot 3$ |
| $53 - 5 = 48 = 2^4 \cdot 3$ | $55 - 5 = 50 = 2 \cdot 5^2$ |
| $53 - 3 = 50 = 2 \cdot 5^2$ | $55 - 3 = 52 = 2^2 \cdot 13$ |

Si nos fijamos únicamente en los pares que no se repiten¹⁵, nos daremos cuenta que no todos los factores primos de los pares asociados al 53 son menores que los asociados al 55, puesto que 23 no es menor que 19, 13 u 11. Sin embargo, tenemos un 3 y un 5 como factores que hacen que el número de Goldbach crezca más que 11 y 13, compensando lo del 23.

Notemos que dos de los tres factores más pequeños de las factorizaciones de $(53 - p)$ que no se repiten –que están en color negro–, son más pequeños que los correspondientes de $(55 - p)$. Con esto, se cumple lo establecido en la conjetura.

Ejemplo 3.1.8.

Sea $m = 77$ y $n = 79$. $GI(77) = 28$ y $GI(79) = 24$.

Los primos p impares menores que $\frac{77}{3}$ y $\frac{79}{3}$ son 23, 19, 17, 13, 11, 7, 5 y 3.

¹⁵Los números marcados con colores iguales –salvo el negro– son los pares que coinciden en ambas listas.

| Para $m = 77$ | Para $n = 79$ |
|--------------------------------------|--------------------------------------|
| $77 - 23 = 54 = 2 \cdot 3^3$ | $79 - 23 = 56 = 2^3 \cdot 7$ |
| $77 - 19 = 58 = 2 \cdot 29$ | $79 - 19 = 60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$ |
| $77 - 17 = 60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$ | $79 - 17 = 62 = 2 \cdot 31$ |
| $77 - 13 = 64 = 2^6$ | $79 - 13 = 66 = 2 \cdot 3 \cdot 11$ |
| $77 - 11 = 66 = 2 \cdot 3 \cdot 11$ | $79 - 11 = 68 = 2^2 \cdot 17$ |
| $77 - 7 = 70 = 2 \cdot 5 \cdot 7$ | $79 - 7 = 72 = 2^3 \cdot 3^2$ |
| $53 - 5 = 72 = 2^3 \cdot 3^2$ | $79 - 5 = 74 = 2 \cdot 37$ |
| $77 - 3 = 74 = 2 \cdot 37$ | $79 - 3 = 76 = 2^2 \cdot 19$ |

Al factorizar los pares de cada lista y quitar los repetidos, podemos notar que, en el caso del 77, permaneció un par múltiplo de 3, uno de 5 y uno de 7, mientras que al factorizar los pares asociados al 79 se encontró que el primo más pequeño en todas las factorizaciones fue el 7, es decir, tres de los cuatro factores más pequeños de las factorizaciones de $(77 - p)$ que no se repiten –que están en color negro–, son más pequeños que los correspondientes con $(79 - p)$. Con esto, se cumple lo establecido en la conjetura.

La conjetura anterior trata de explicar porque algunos números impares tienen un número de Goldbach más grande que otros, incluso dimos unos ejemplos que son consistentes con el, pero aún no hemos dicho nada acerca de los primos que fue lo que nos motivó a utilizar las bandas y a desarrollar la conjetura 3.1.6. Desafortunadamente, para tratar de explicar el comportamiento que muestran los primos en la función $GI(n)$ no contamos con más que la gráfica, la Conjetura 3.1.6 y la teoría tras ella, por lo que sólo podemos lanzar esta otra conjetura.

Conjetura 3.1.9.

Si p es un número primo y, para cada p_i primo impar menor que $\frac{p}{3}$ se tiene que $p - p_i = 2^\alpha \cdot s_{1_i}^{\alpha_{1_i}} \cdots s_{u_i}^{\alpha_{u_i}}$, con $s_i < s_{i+1}$ y $\alpha_i \neq 0$, entonces la mayoría de los s_{1_i} son primos pequeños¹⁶.

Ejemplo 3.1.10.

Sea $n = 313$, n es un número primo. Los primos impares menores o iguales que $\frac{313}{3}$ son 103, 101, 97, 89, 83, 79, 73, 71, 67, 61, 53, 47, 43, 41, 37, 31, 29, 23, 19, 17, 13, 11, 7, 5, y 3. Así, los pares $p - p_i$ se factorizan de las siguientes formas

| | | |
|-----------------------------------------|------------------------------------|-----------------------------------|
| $313 - 3 = 2 \cdot 5 \cdot 31$ | $313 - 5 = 2^2 \cdot 7 \cdot 11$ | $313 - 7 = 2 \cdot 3^2 \cdot 17$ |
| $313 - 11 = 2 \cdot 151$ | $313 - 13 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2$ | $313 - 17 = 2^3 \cdot 37$ |
| $313 - 19 = 2 \cdot 3 \cdot 7^2$ | $313 - 23 = 2 \cdot 5 \cdot 29$ | $313 - 29 = 2^2 \cdot 71$ |
| $313 - 31 = 2 \cdot 3 \cdot 47$ | $313 - 37 = 2^2 \cdot 3 \cdot 23$ | $313 - 41 = 2^4 \cdot 17$ |
| $313 - 43 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$ | $313 - 47 = 2 \cdot 7 \cdot 19$ | $313 - 53 = 2^2 \cdot 5 \cdot 13$ |
| $313 - 61 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7$ | $313 - 67 = 2 \cdot 3 \cdot 41$ | $313 - 71 = 2 \cdot 3 \cdot 41$ |
| $313 - 73 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5$ | $313 - 79 = 2 \cdot 3^2 \cdot 13$ | $313 - 83 = 2 \cdot 3^2 \cdot 17$ |
| $313 - 89 = 2^5 \cdot 7$ | $313 - 97 = 2^3 \cdot 3^3$ | $313 - 101 = 2^2 \cdot 53$ |
| $313 - 103 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$ | | |

Notemos que de los 25 pares que escribimos como potencias de primos sólo para 4 de ellos $s_1 > 43$. En este caso se podría pensar que como este primo es pequeño entonces de manera natural tendrían que aparecer primos menores o iguales que 43 entre sus factores. Pero, ante esta observación consideramos adecuado construir otro ejemplo con un número mayor, éste es el 1201. Para este caso resultó que de las 76 diferencias $(1201 - p_i)$, sólo 15 de ellas no tienen factores primos menores

¹⁶De manera particular diremos que p es un primo pequeño si es menor o igual que 43. Véase pág. 27-28.

o iguales que 43. En ambos ejemplos obtenemos que aproximadamente una quinta parte son los que no tiene ese tipo de factores, por lo tanto, con base en la teoría expuesta en las secciones anteriores y los ejemplos, pensamos que la conjetura es viable.

Como ya se mencionó, la gráfica de los números de Goldbach de los impares muestra que las imágenes de la función $GI(p)$, para los primos, tienden a estar en la parte superior de ésta. Pero éste no es el único comportamiento notable de las imágenes de los primos en $GI(n)$, ya señalamos que ellos también generan dos trayectorias con un cierto ‘paralelismo’ (figura 3.11). Aunque no podemos dar una justificación plena de este comportamiento, sí trataremos de bosquejar una explicación.

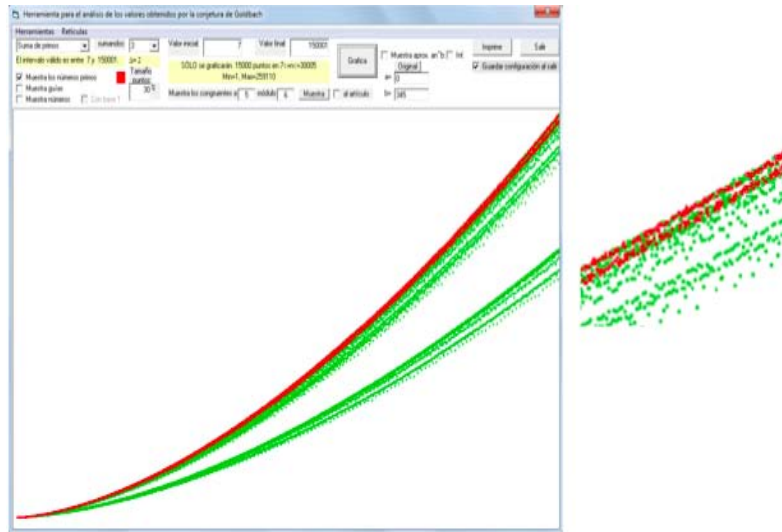


Figura 3.11: Gráfica de la función $GI(n)$. Las marcas en rojo indican las imágenes de los números primos.

Recordemos que módulo 6, los primos impares deben ser congruentes con 1 ó 5, salvo el 3. Además, ya habíamos notado que los números congruentes con 5 módulo 6 tienen un número de Goldbach $GI(n)$ ligeramente más grande que el

3.1. PROBLEMA TERCIARIO Y SU GRÁFICA

correspondiente a los congruentes con 1 módulo 6. Entonces, si identificamos a las imágenes de los primos p en $GI(n)$ con rojo, y si además queremos visualizar a éstas separadas por las clases residuales 1 y 5 módulo 6, entonces agregamos el color azul para diferenciarlas, ver figuras¹⁷ 3.12 y 3.13.

En resumen, las imágenes de los primos p que son congruentes con 1 módulo 6 están en la línea inferior, y los congruentes con 5 módulo 6 en la superior. Esto nos proporciona una idea de esta extraña forma de acomodo de las imágenes de los primos en la función $GI(n)$.

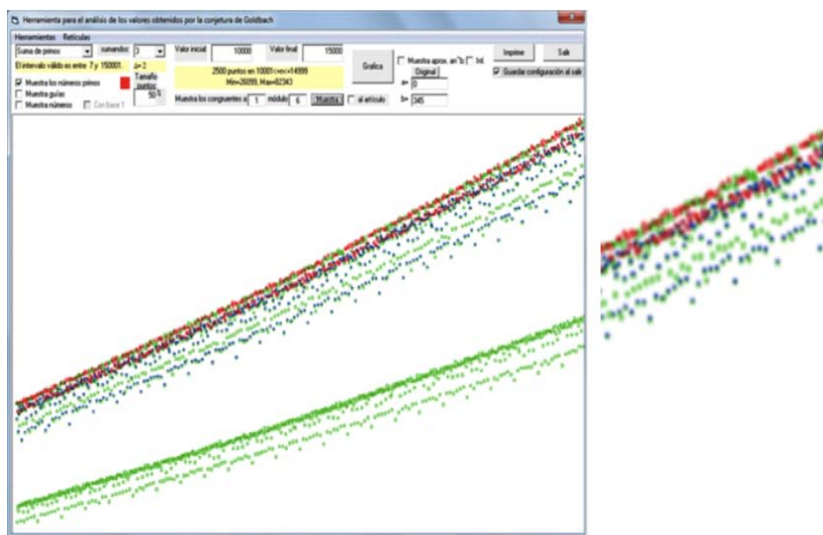


Figura 3.12: Gráfica del problema terciario para valores en el intervalo (10000,15000). En rojo se indican los números primos y en azul los congruentes con 1 módulo 6.

¹⁷En el apéndice de la sección pueden consultarse más imágenes sobre esto.

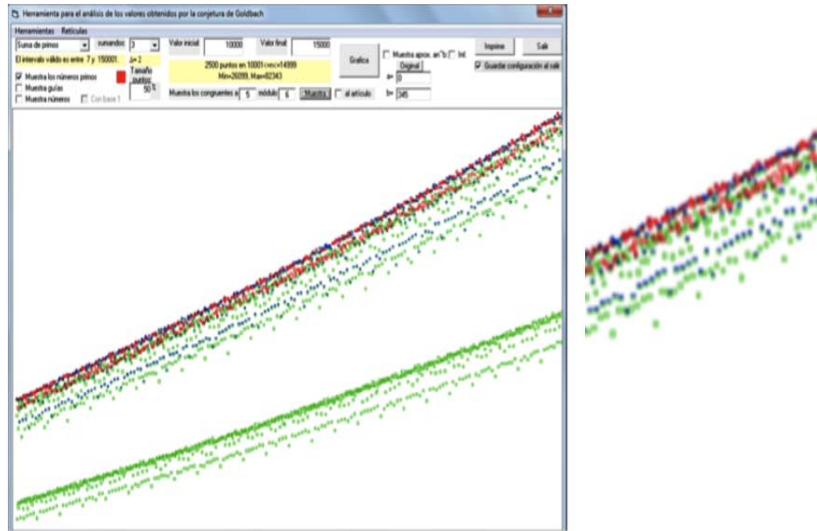


Figura 3.13: Gráfica del problema terciario para valores en el intervalo (10000,15000). En rojo se indican los números primos y en azul los congruentes con 5 módulo 6.

3.2. Polígonos de Goldbach

En esta sección representaremos las triadas de primos para cada impar, pero ahora es en el espacio, y enseguida consideramos las proyecciones sobre uno de los planos, ahora, con los nuevos puntos sobre un plano construiremos lo que serán los polígonos de Goldbach. Para hacer lo señalado nos apoyaremos en la envolvente convexa y a partir de esto estudiaremos algunas de sus características, como son el área, el número de puntos en la frontera y el número de puntos interiores.

En la sección 3.1 de este capítulo hemos exhibido del problema terciario de Goldbach, y además mostramos algunos aspectos del comportamiento que presenta la gráfica de $GI(n)$. Ahora, con base en lo analizado, consideramos que es momento de adentrarnos en otro de nuestros puntos de interés. Éste es el de llevar los datos del problema terciario a una retícula para obtener nueva información que

originalmente no se contemplaba en el estudio de las ternas de Goldbach. Ahora demos lugar a las definiciones que requerimos para adentrarnos en el objeto de nuestro estudio.

Recordemos que el problema terciario nos indica que para cada impar n mayor o igual que siete existe al menos una terna de primos p, q, r cuya suma es n . Por otro lado, si visualizamos esta terna como el punto en el espacio (p, q, r) , entonces –de manera semejante a la conjetura binaria–, se tiene que todas las triadas asociadas a n están en el plano $x + y + z = n$ y, como ocurría con las rectas, para cada impar n se tendrá que los respectivos planos también son paralelos (figura 3.14). Nótese que para cada n_i , su plano correspondiente $x + y + z = n_i$ siempre tiene el mismo vector normal $(1, 1, 1)$.

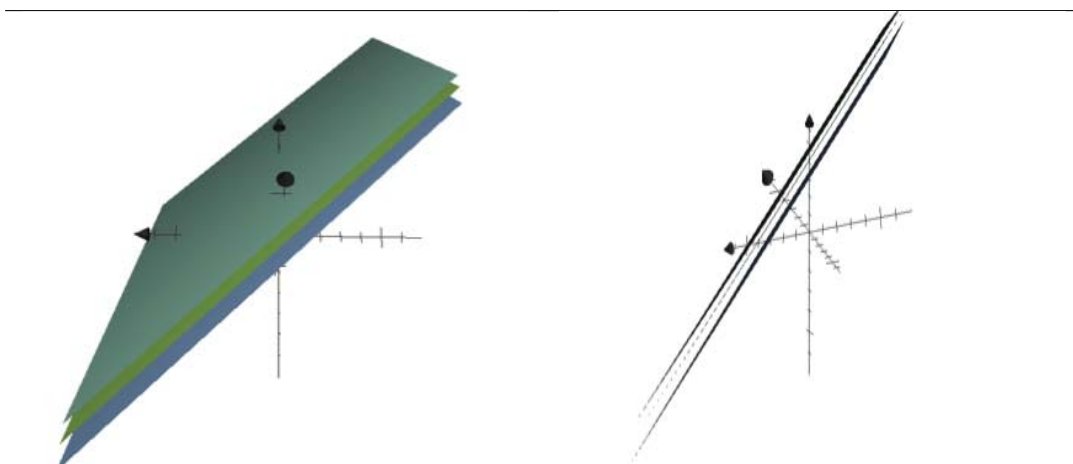


Figura 3.14: Planos $x + y + z = n$, para $n = 33, 35$ y 37 .

Además, como p, q y r son primos positivos que suman n , entonces ninguno puede excederlo y, por tanto, todos los puntos que están asociados a las triadas que generan a n están en una porción triangular del plano, cuyos vértices son $(n, 0, 0)$, $(0, n, 0)$ y $(0, 0, n)$. Véase figura 3.15.

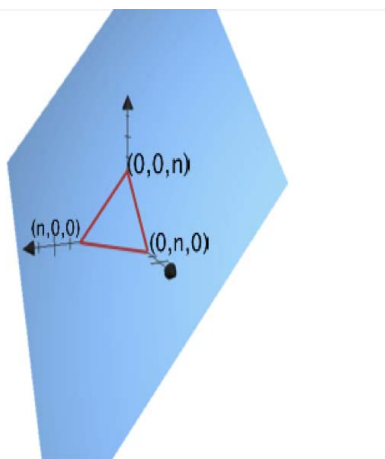


Figura 3.15: Plano $x + y + z = n$. En rojo el triángulo con vértices $(n, 0, 0)$, $(0, n, 0)$ y $(0, 0, n)$.

En las secciones que siguen haremos un análisis de las taidas de primos que representan a cada impar, pero vistas desde una retícula. Nuestro interés principal es estudiar el polígono que se forma con estos puntos y que a la vez está contenido en el plano $x + y + z = n$. Por otro lado, sabemos que es más complicado trabajar con los puntos directamente en un plano que tiene vector normal $(1, 1, 1)$, que en uno como el XZ . Es por esta razón¹⁸ por la que preferimos trasladar los puntos a un plano a través de una proyección.

Notemos que en el plano XZ sólo puede haber una pareja de la forma (p, p) por la condición de que $p \leq q \leq r$, y además las coordenadas de cada punto siguen siendo enteras.

Para entender mejor lo que presentamos veamos un ejemplo.

¹⁸Y otra de las razones es porque hemos estado trabajando la teoría de retículas en el plano.

Ejemplo 3.2.1.

Sea $n = 33$. Las triadas que lo suman son

$(2, 2, 29)$, $(3, 7, 23)$, $(3, 11, 19)$, $(3, 13, 17)$, $(5, 5, 23)$, $(5, 11, 17)$, $(7, 7, 19)$, $(7, 13, 13)$,
 $(11, 11, 11)$,

y al proyectarlas sobre XZ nos queda

$(2, 29)$, $(3, 23)$, $(3, 19)$, $(3, 17)$, $(5, 23)$, $(5, 17)$, $(7, 19)$, $(7, 13)$, $(11, 11)$

Si trazamos las rectas que pasan por los puntos que tienen la misma coordenada en x (izquierda) o z (derecha), la gráfica en el plano nos queda como se muestra en la figura 3.16.

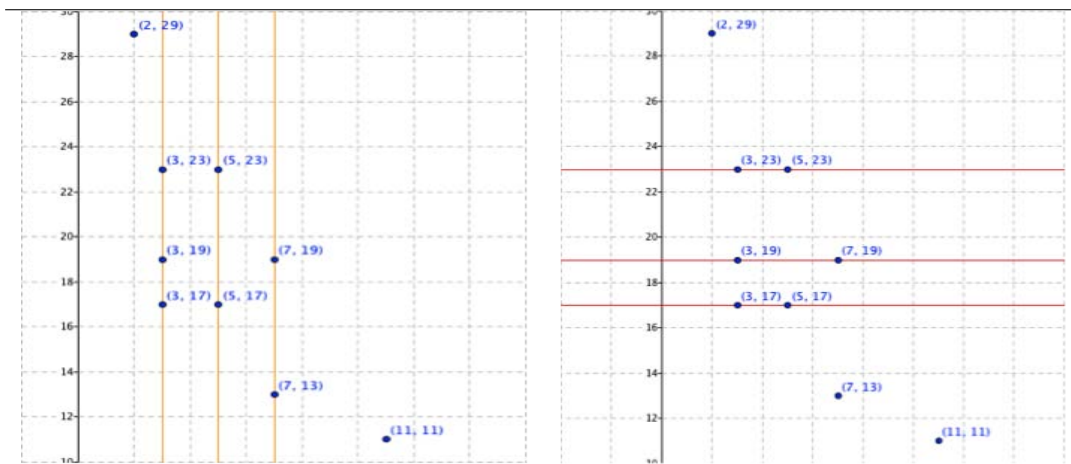


Figura 3.16: Proyección de las ternas asociadas a 33 en el plano XZ . A la izquierda las rectas $x = 3, 5$ y 7 . A la derecha las rectas $z = 23, 19$ y 17 .

Notemos que en los puntos marcados sobre las paralelas una coordenada es fija, las dos imágenes en 3.16 representan la construcción que dimos para $GI(n)$. Cada paralela nos muestra cuantas triadas diferentes se están añadiendo por cada primo

a $GI(n)$,¹⁹ que aparece en alguna coordenada x (izquierda) o z (derecha). Si en lugar de fijar x o z , fijáramos y , aún se seguirían formando rectas paralelas, sólo que ahora todas estarían inclinadas a 45 grados (figura 3.17).

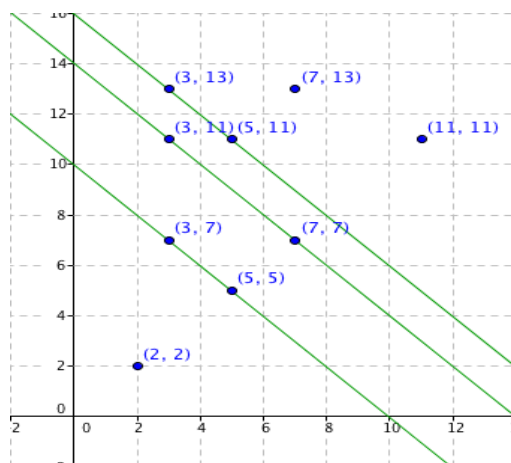


Figura 3.17: Proyección de las ternas asociadas a 33 en el plano XZ y las rectas $x + z = 20, 22$ y 26 .

Aunque ninguna de las rectas de las figuras anteriores corresponde realmente a las rectas que se forman en el plano $x + y + z = n$, las que verdaderamente sí están, son aquellas que se forman a partir de intersecar el plano $x + y + z = n$ con los planos $x = p$, $y = p$ o $z = p$. Todas las rectas tienen el mismo vector normal $(0, 1, -1)$, $(-1, 0, 1)$ ó $(1, -1, 0)$, respectivamente, por lo que aún en el espacio se ve que son paralelas.

¹⁹Cuyo rango de valores varía dependiendo de la variable a la que sea igual. En el caso que sea igual a x , tiene que ser menor o igual que $\frac{n}{3}$; si es igual a z , mayor o igual al mismo número y a lo más $n - 4$.

3.2.1. Polígono reticular y envolvente convexa

Dado que, por construcción, todos los puntos reticulares en el plano XZ asociados a un impar n , tal que $GI(n) \geq 3$, no pueden pertenecer a la misma recta, entonces es posible construir cualquier configuración que nos sea posible hacer o que podamos requerir. En el caso de este trabajo recurriremos a la construcción de un polígono reticular sin tener que requerir el uso del origen. Consideramos que ya no es necesario como sí lo fue en el caso binario ya que todos los puntos se encontraban en una recta y por lo tanto no podíamos formar el triángulo reticular si no era considerando al origen.

Dentro de la variedad de polígonos reticulares nosotros usaremos los convexos y para homogeneizar la construcción de cada uno de ellos decidimos usar la envolvente convexa para cada conjunto de puntos.

Primero necesitamos definir lo que es un punto externo dentro de un conjunto de puntos reticulares S . Decimos que G es un punto externo de S si existe una recta que pasa por G de manera que el resto de los puntos de S se encuentran en el mismo semiplano definido a partir de dicha recta. Si G no es externo decimos que es un punto interno (figura 3.18).

Una manera de definir la envolvente convexa de S es tomando dos puntos distintos de S , digamos A y B , y si el resto de los puntos de S quedan en el mismo semiplano definido a partir de dicha recta, entonces el segmento de recta \overline{AB} es uno de los lados de lo que llamaremos envolvente convexa. Así el conjunto de segmentos de rectas con estas características y que a la vez forman un polígono es lo que conoceremos como envolvente convexa (figura 3.19).

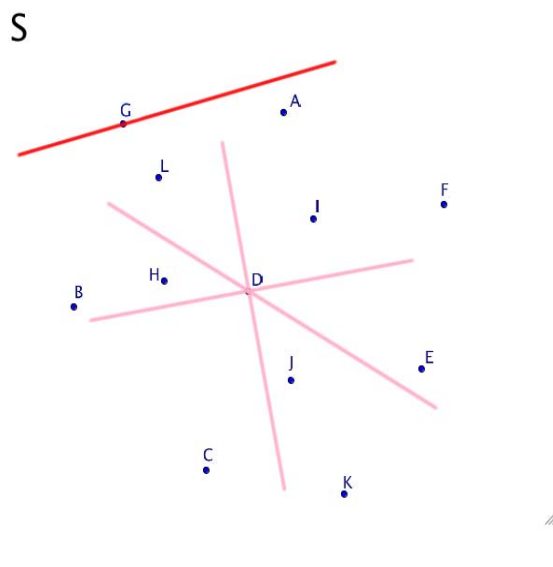


Figura 3.18: El punto G es externo ya que hay una recta que pasa por él y todos los puntos de $S - \{G\}$ están en el mismo semiplano. Por otro lado, D es un punto interno ya que no existe una recta que cumpla con que todos los puntos de $S - \{D\}$ estén en el mismo semiplano.

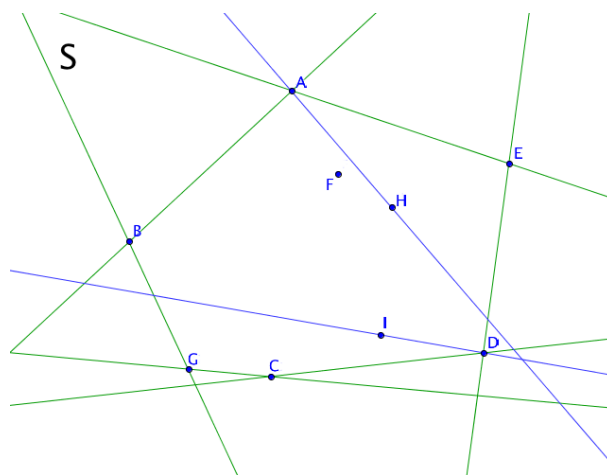


Figura 3.19: Las rectas en verde constituyen la envolvente de S . Las rectas en azul ejemplifican a aquellas que no forman parte de la envolvente.

Es muy importante mencionar que en la literatura matemática podemos encontrar más de una forma de definir a la envolvente convexa, para consultar más de estas definiciones vea [4] y [6].

Nótese que la definición que hemos dado intrínsecamente es un algoritmo que nos lleva a la posibilidad de construir la envolvente convexa. Además, este polígono convexo –o envolvente– es único²⁰ y el más pequeño, pues de no serlo, habría una envolvente convexa E que esté contenida dentro del polígono construido a partir del algoritmo, pero de ser así al menos uno de los vértices, que son a la vez los puntos externos, del primero, no estaría en E , y esto sería una contradicción, ya que por lo menos ese punto no estaría contenido en E y por lo tanto no es su envolvente convexa (figura 3.20).

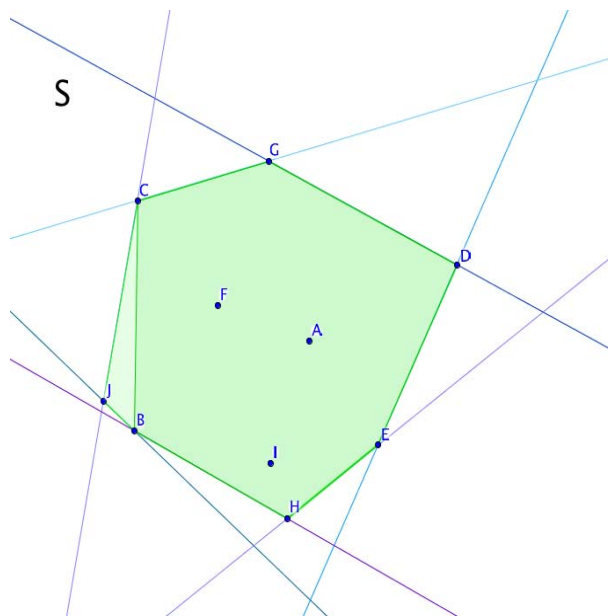


Figura 3.20: Cálculo de la envolvente convexa de S mediante el algoritmo dado.

Ahora ya tenemos todos los elementos necesarios para definir lo que son los polígonos reticulares que se derivan del problema terciario de Goldbach.

²⁰Es único porque cada lado de la envolvente está formado por dos puntos externos y como cada segmento es único entonces el polígono también lo es.

Definición 3.2.2.

Sea

$$R_n = \{(p, q, r) \in Z^3 \mid p, q, r \text{ son primos}, n = p + q + r, p \leq q \leq r\}$$

y

$$R'_n = \{(p, r) \in Z^2 \mid p, r \text{ son primos}, n - q = p + r, p \leq q \leq r\}$$

Definimos a lo que llamaremos **polígono de Goldbach** asociado a n , denotado por P_n , como la envolvente convexa de R'_n (figura 3.21).

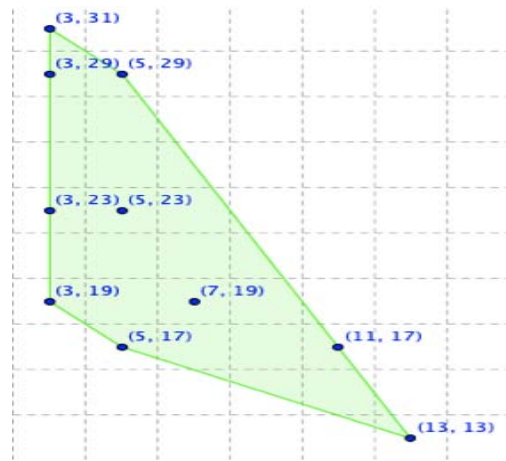


Figura 3.21: Polígono P_{39} .

Veamos otras propiedades de los puntos reticulares que nos serán útiles en esta sección, bajo la idea de que las usaremos para estudiar a los polígonos de Goldbach que definimos en el párrafo anterior.

Definición 3.2.3.

Decimos que un punto entero $A = (x, y)$ es visible si sucede que en el segmento de recta \overline{OA} ²¹ no tiene puntos enteros, diferentes de los extremos. Si en el segmento \overline{OA} se localiza más de un punto entero (además de los extremos), entonces diremos que A es un punto oculto (figura 3.22).

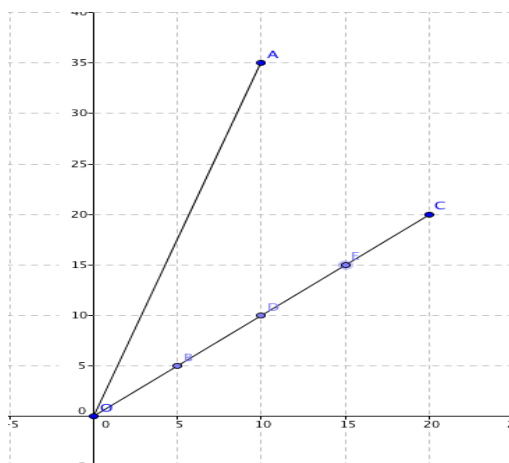


Figura 3.22: Punto visible (A) y punto oculto (C).

Proposición 3.2.4.

Sea $A = (x, y)$ un punto entero entonces A es visible si y sólo si el máximo común divisor de x y y es igual a uno.

Demostración.

Sea $A = (x, y)$ un punto visible tal que $\text{mcd}(x, y) = d$, y además $d \neq 1$. Entonces $d|x$ y $d|y$, es decir, $dk_1 = x$ y $dk_2 = y$, para k_1, k_2 enteros, entonces sucede que el punto (x, y) está oculto por (k_1, k_2) , y esto contradice la hipótesis, por lo tanto $d = 1 = \text{mcd}(x, y)$.

²¹Consideramos que $O = (0, 0)$.

Recíprocamente, sea $A = (x, y)$ un punto entero tal que $\text{mcd}(x, y) = 1$. Supongamos que A es un punto oculto, es decir, existe un punto entero $M = (m_1, m_2)$ localizado en el segmento \overline{OA} . Sean M' y A' las proyecciones de M y A , respectivamente, sobre el eje x (figura 3.22 (derecha)).

Entonces $\triangle OM'M \sim \triangle OA'A$, así

$$\frac{OM'}{OA'} = \frac{MM'}{AA'} \implies \frac{OM'}{MM'} = \frac{OA'}{AA'}$$

Como $OM' = |m_1|$, $MM' = |m_2|$, $OA' = |x|$ y $AA' = |y|$, entonces

$$\left| \frac{m_1}{m_2} \right| = \left| \frac{x}{y} \right|.$$

Nótese que $|m_1| < |x|$ y $|m_2| < |y|$ dado que $M \neq A$. De esta forma $\frac{x}{y}$ se puede simplificar a la fracción $\frac{m_1}{m_2}$, contradiciendo que x y y son primos relativos. \square

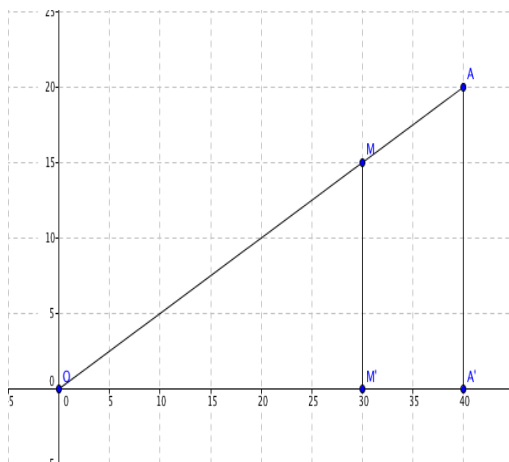


Figura 3.23: Representación gráfica de la proposición 3.2.4 .

Proposición 3.2.5.

Sean x y y dos números enteros y A el punto reticular $A = (x, y)$. Entonces $m + 1$ ($m \geq 1$) es el número de puntos enteros en el segmento \overline{OA} –incluyendo extremos– si y sólo si $m = \text{mcd}(x, y)$.

Demostración.

Supongamos que $m = 1$, entonces en el segmento \overline{OA} sólo hay dos puntos enteros, O y A . Por lo tanto A es visible y por la proposición 3.2.4 $\text{mcd}(x, y) = 1$.

Ahora, si $m > 1$, entonces en el segmento de recta \overline{OA} hay al menos un punto entero distinto de los extremos. Sea $B = (p, q)$ un punto visible en el segmento \overline{OA} , entonces $\text{mcd}(p, q) = 1$ y $(mp, mq) = (x, y)$, es decir, $(x, y) = m \cdot (p, q) = m$.

Recíprocamente, si $m = \text{mcd}(x, y)$ y $m = 1$, entonces x y y son primos relativos y por la proposición 3.2.4 $A = (x, y)$ es visible, y por tanto en el segmento \overline{OA} hay $m + 1 = 1 + 1 = 2$ puntos enteros.

Si $m > 1$, y como $m|x$ y $m|y$ entonces existen enteros k_1, k_2 tales que $mk_1 = x$ y $mk_2 = y$.

Sea $B = (k_1, k_2)$, y dado que $k_1 = \frac{x}{m}$ y $k_2 = \frac{y}{m}$, entonces $\text{mcd}(k_1, k_2) = 1$, y por lo tanto B es visible y A está oculto por B . Puesto que $mB = A$, entonces hay $m + 1$ puntos enteros en el segmento \overline{OA} . \square

Observación 3.2.6.

Si $P = (a, b)$ y $Q = (c, d)$ son dos puntos reticulares cualesquiera, el número de puntos enteros en el segmento \overline{PQ} es $m + 1$ donde $m = \text{mcd}(a - c, b - d)$.

A partir de estas propiedades y del Teorema de Pick podemos demostrar que el área de P_n es un número entero.

Proposición 3.2.7.

El área de cualquier polígono de Goldbach es un natural, es decir, $A(P_n)$ es un natural.

Demostración.

Sea $\{(p_1, r_1), (p_2, r_2), \dots, (p_m, r_m)\}$ el conjunto de vértices de P_n .

Por el Teorema de Pick²² basta probar que el número de puntos enteros en la frontera de P_n es par.

De la observación 3.2.6 se sigue que en cada arista de P_n , que es $\overline{(p_i, r_i)(p_{i+1}, r_{i+1})}$, hay $[mcd(p_i - p_{i+1}, r_i - r_{i+1}) - 1]$ puntos reticulares, sin contar los extremos, por lo que el número de puntos reticulares en la frontera de P_n es el número de puntos en cada arista sin extremos, más el número de vértices, es decir,

$$B = \sum_{i=1}^m (mcd(p_i - p_{i+1}, r_i - r_{i+1}) - 1) + m$$

$$B = \sum_{i=1}^m mcd(p_i - p_{i+1}, r_i - r_{i+1}),$$

donde $(p_m - p_{m+1}, r_m - r_{m+1}) = (p_m - p_1, r_m - r_1)$.

²²Recordemos que el Teorema de Pick nos dice que el área de un polígono reticular está dada por:

$$A(P) = \frac{B}{2} + I - 1,$$

donde B es el número de puntos reticulares en la frontera de P e I el número de puntos reticulares al interior de P .

Así, para ver que B es par, es suficiente demostrar que hay una cantidad par de $mcd(p_i - p_{i+1}, r_i - r_{i+1})$ impares.

Observemos que si $p_i, p_{i+1}, r_i, r_{i+1}$ son impares²³ entonces las diferencias $p_i - p_{i+1}$ y $r_i - r_{i+1}$ son pares, por lo que $mcd(p_i - p_{i+1}, r_i - r_{i+1})$ es par. Si pasara que $p_i = p_{i+1}$ entonces tendríamos la pareja $(0, r_i - r_{i+1})$, pero el máximo común divisor de esa pareja es $r_i - r_{i+1}$. Análogamente, si $r_i = r_{i+1}$, entonces el $mcd(p_i - p_{i+1}, 0) = p_i - p_{i+1}$, que es par salvo en el caso que $p_i = 2$ ó $p_{i+1} = 2$.

Así, para probar que $A(P_n)$ es entero, sólo es necesario analizar el caso en el que uno de sus vértices es de la forma $(2, r_j)$ para algún $j = 1, \dots, m$.

Entonces, si $p_j = 2$ se tiene que $mcd(2 - p_{j+1}, r_j - r_{j+1})$ y $mcd(p_{j-1} - 2, r_{j-1} - r_j)$ son números impares. Pero de la observación 3.1.4²⁴ se sigue que las únicas aristas que tienen un vértice de la forma $(2, r_j)$ son esas dos, y por tanto sólo hay dos diferencias cuyo máximo común divisor es impar. Por lo tanto B es par y en consecuencia $A(P_n)$ es un número natural. \square

Las sorpresas que nos han dado las representaciones aditivas de los enteros pares no se terminarán pronto, recordemos en primer lugar al Cometa de Goldbach; la franja de los ‘primos’ dentro del cometa y la gráfica de las áreas de los triángulos asociados a los números de Goldbach binarios. De la misma manera nos asombró ver como crecía de una forma casi perfectamente bifurcada la relación entre enteros impares y números de Goldbach para la representación terciaria con los primos,

²³Recordemos que al ser p_i y r_i las coordenadas en x y z de la terna $n = p_i + q_i + r_i$, respectivamente, sus rangos de valores son los intervalos $(2, \frac{n}{3})$ y $(\frac{n}{3}, n - 4)$. Nótese también que p_i es el único –entre p_i y r_i – que puede ser par.

²⁴Ésta nos dice que si alguna de las ternas de primos que suman n tiene al 2 como sumando, entonces esa terna es de la forma $n = 2 + 2 + p$ y es única.

sin embargo no seguiremos con las propiedades de la función $GI(n)$. En lo que resta del capítulo analizaremos un poco más a los puntos reticulares que forman los polígonos de Goldbach.

En este contexto exploraremos más a las áreas que generan las envolventes convexas. En primer lugar veamos la tabla de datos siguiente que nos indica la relación entre un número impar; la cantidad de sus representaciones como suma de tres primos;²⁵ el área de su envolvente convexa, y las dos columnas finales son la cantidad de puntos reticulares que se quedan dentro o sobre la frontera de la envolvente convexa. Los datos que se presentan en la gráfica son hasta el número 89, pero trabajamos hasta el 205.

| Número | $GI(n)$ | $A(P_n)$ | Frontera | Interior |
|--------|---------|----------|----------|----------|
| 7 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 9 | 2 | 0 | 0 | 0 |
| 11 | 2 | 0 | 0 | 0 |
| 13 | 2 | 0 | 0 | 0 |
| 15 | 3 | 3 | 3 | 0 |
| 17 | 4 | 6 | 4 | 0 |
| 19 | 3 | 2 | 3 | 0 |
| 21 | 5 | 10 | 4 | 1 |
| 23 | 5 | 8 | 4 | 1 |
| 25 | 5 | 16 | 5 | 1 |
| 27 | 7 | 29 | 5 | 2 |
| 29 | 7 | 22 | 6 | 1 |
| 31 | 6 | 24 | 5 | 1 |
| 33 | 9 | 49 | 6 | 3 |
| 35 | 8 | 47 | 5 | 3 |
| 37 | 9 | 60 | 6 | 3 |
| 39 | 10 | 72 | 8 | 2 |

²⁵Lo que conocemos como número de Goldbach para los impares, denotado por GI

3.2. POLÍGONOS DE GOLDBACH

| Número | $GI(n)$ | $A(P_n)$ | Frontera | Interior |
|--------|---------|----------|----------|----------|
| 41 | 11 | 84 | 6 | 5 |
| 43 | 10 | 84 | 6 | 4 |
| 45 | 12 | 106 | 7 | 5 |
| 47 | 13 | 89 | 7 | 6 |
| 49 | 12 | 124 | 7 | 5 |
| 51 | 15 | 150 | 8 | 7 |
| 53 | 16 | 144 | 8 | 8 |
| 55 | 15 | 188 | 7 | 8 |
| 57 | 17 | 186 | 9 | 8 |
| 59 | 16 | 164 | 8 | 8 |
| 61 | 16 | 204 | 7 | 9 |
| 63 | 20 | 252 | 7 | 13 |
| 65 | 21 | 266 | 7 | 14 |
| 67 | 20 | 228 | 9 | 11 |
| 69 | 20 | 290 | 13 | 7 |
| 71 | 22 | 290 | 6 | 16 |
| 73 | 21 | 276 | 12 | 9 |
| 75 | 22 | 340 | 10 | 12 |
| 77 | 28 | 389 | 7 | 21 |
| 79 | 24 | 358 | 11 | 13 |
| 81 | 25 | 432 | 11 | 14 |
| 83 | 28 | 395 | 7 | 21 |
| 85 | 27 | 444 | 10 | 17 |
| 87 | 28 | 525 | 9 | 19 |
| 89 | 24 | 522 | 9 | 15 |

La razón por la que sólo se trabajaron los datos hasta el 205 fue porque el cálculo de las áreas de las envolventes convexas se tuvo que hacer de manera individual, y en consecuencia pasaba algo semejante con los puntos internos y externos de la envolvente. Hacer el programa que automatice el cálculo de las áreas ya no fue posible para este trabajo de tesis, pero decidimos exponer aquí los datos hasta el

205 porque consideramos que sí tiene interés y parece que el comportamiento de éstos sí se cumplirá de la misma manera para número más grandes.

3.2.2. Puntos en la frontera

Recordemos que una consecuencia de los criterios para construir la envolvente convexa es que frecuentemente ciertos puntos reticulares asociados al número de Goldbach para impares, se tienen que quedar dentro de la envolvente, a pesar de que están cerca de alguno de los lados del polígono que se forma, es más, parece que proporcionalmente los frontera son mucho menos que los interiores. Enseguida mostramos la gráfica hasta el 205 (figura 3.24).

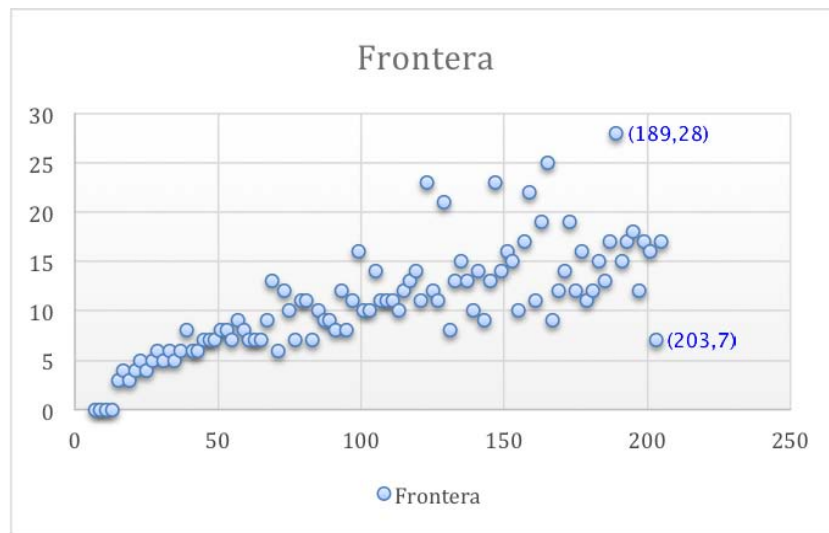


Figura 3.24: Gráfica de la relación n y número de puntos en la frontera de P_n .

La gráfica nos indica un comportamiento muy inestable, por ejemplo el número 203 tiene sólo siete puntos en la frontera y en el interior cien, mientras que el 189 tiene 28 en la frontera y 48 en el interior. En conclusión, parece difícil tratar de modelar un tipo de comportamiento con estos datos.

3.2.3. Puntos en el interior

Es de esperarse por lo antes mencionado, que los puntos interiores rebasen por mucho a los frontera, pero la primera sorpresa es que el comportamiento ascendente de la relación impares-interiores no se presenta de una manera tan inestable, veamos la figura siguiente (figura 3.25)

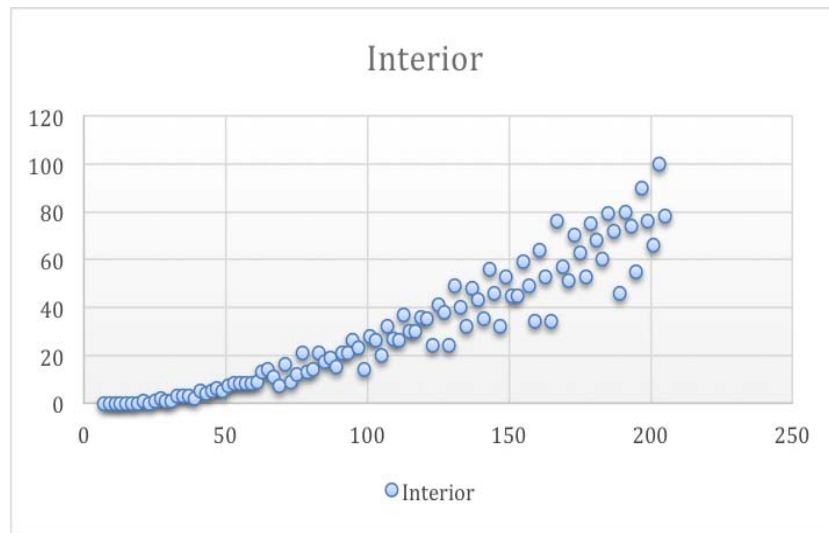


Figura 3.25: Gráfica de la relación n y número de puntos en el interior de P_n .

Claramente podemos apreciar que la configuración de los datos nos indica que se puede pensar en un comportamiento más predecible, aquí ya podríamos considerar la posibilidad de interpolar una función. Es importante recordar que la suma de las ordenadas en los puntos interiores y frontera nos da como resultado los números de Goldbach para la suma de tres primos, es decir, esta suma es igual a $GI(n)$, pero antes de seguir recordemos la gráfica de $GI(n)$ (figura 3.26).

Como vemos en la gráfica, el comportamiento es muy estable. Entonces, si las ordenadas de estos puntos son el resultado de la suma de las ordenadas de los mencionados puntos frontera e interiores de las envolventes, significa que

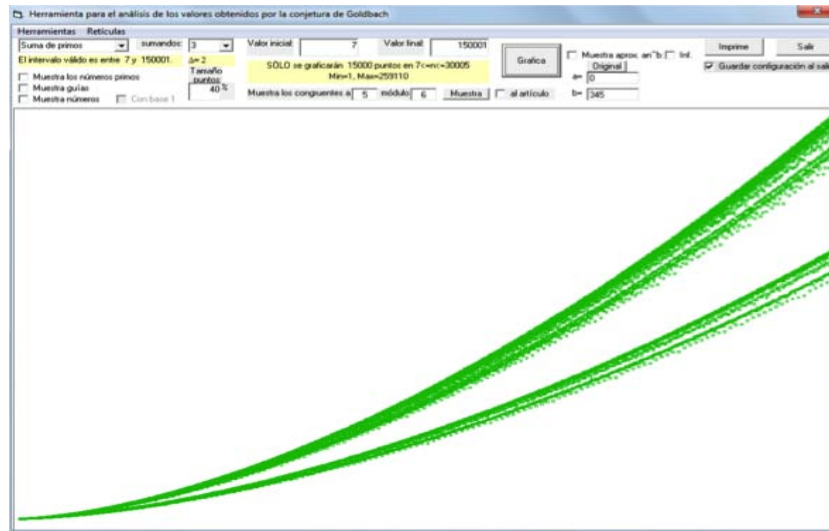


Figura 3.26: Gráfica de la función $GI(n)$.

posiblemente no existe un comportamiento tan inestable en los puntos frontera como los muestra su gráfica.

3.2.4. Áreas

Llegamos a la parte esperada en el contexto de lo que hemos llamado las sorpresas, y lo mencionamos de esta manera porque ahora presentamos la relación de los enteros impares y el área de su envolvente convexa. La gráfica que sigue nos ilustra el comportamiento de esta relación.

Se puede apreciar (figura 3.27) que es sorprendente la manera en la que se comportan los datos de las áreas, es decir, las gráficas de los puntos frontera parecen muy inestables; los correspondientes a interiores lo son menos, pero vemos que al llegar a las áreas hay una sorpresa. Como las áreas dependen directamente del equilibrio de los puntos interiores y frontera de la envolvente, entonces con mayor

razón pensamos que sí existe un tipo de arreglo más estructurado de los puntos frontera y los interiores.

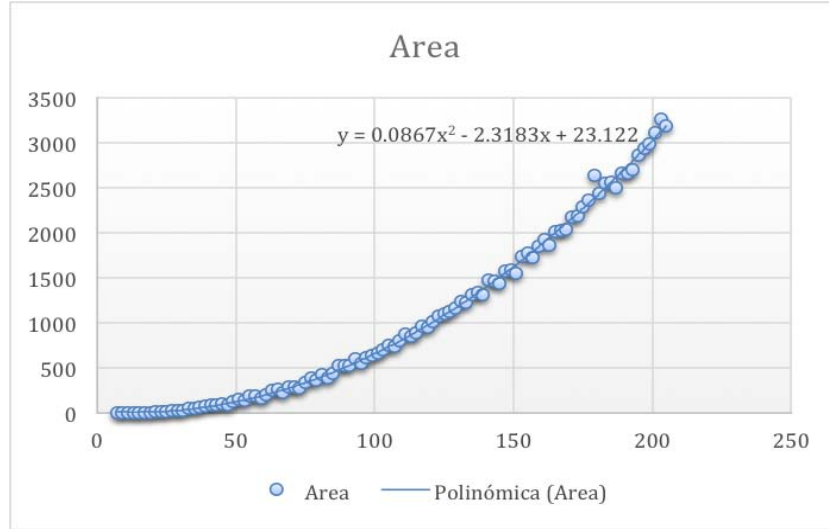


Figura 3.27: Gráfica de la función $A(P_n)$.

3.3. Análisis de las áreas

En esta sección analizaremos la función área $A(P_n)$ de los polígonos de Goldbach, para esto construiremos algunas cotas superiores a través de las áreas de triángulos rectángulos con medidas específicas para cada n impar, y cada triángulo contendrá al polígono correspondiente.

Ahora damos lugar al análisis de la gráfica de las áreas. Para ello recordemos que todos los puntos con los que construimos a los P_n están sobre rectas paralelas y como $n = p + q + r$, entonces en la medida que p crece, r disminuye. A partir de lo señalado ya es posible construir un triángulo que contiene a P_n . Si quisiéramos

construir ese triángulo que contenga a P_n , lo ideal sería que éste fuera rectángulo –y es por lo de las paralelas–, y así sólo habría que definir su base y altura.

Proponemos que la base de nuestro triángulo sea $\frac{n}{3} - 2$, y esto lo hacemos a partir de que las ternas (p, q, r) que suman n fueron construidas al tomar p de entre los primos menores o iguales a $\frac{n}{3}$, es decir, $2 \leq p \leq \frac{n}{3}$. De esta forma la base de los triángulos rectángulos será la diferencia entre el máximo y el mínimo de los valores posibles para p . De manera análoga, la altura será $\frac{2n}{3} - 4$ pues r alcanza su máximo cuando $n - 4$ es primo, *i.e.*, $p = 2$ y su máximo cuando $r = \frac{n}{3} = p$. Aunque los mínimos y máximos para p y r sólo se alcanzan cuando $n = 3p$ y $n - 4$ es primo. Para estandarizar el área de estos triángulos tomaremos como base y altura los valores mencionados aún cuando éstos no sean enteros. De esto se tiene la siguiente proposición.

Proposición 3.3.1.

Si T es un triángulo rectángulo cuyos vértices son: $M = (2, n - 4)$, $M' = (2, \frac{n}{3})$ y $M'' = (\frac{n}{3}, \frac{n}{3})$, entonces P_n está contenido en T . Es decir, el polígono de Goldbach asociado a cualquier impar n está contenido en el triángulo $MM'M''$

Demostración.

Supongamos que existe un punto $P = (p_i, r_i) \in P_n$ tal que $P \notin T$. Sea K el punto de intersección entre la recta $x = p_i$ y la hipotenusa de T , además L es el punto con coordenada $(p_i, \frac{n}{3})$, véase figura 3.28.

El triángulo $M''LK$ es semejante a T , entonces

$$\frac{M'M''}{LM''} = \frac{MM'}{KL}.$$

3.3.1. Una función para $A(P_n)$

Para terminar este capítulo construiremos funciones que acotan a los valores de $A(P_n)$ y lo haremos con base en la manera en que puede cambiar P_n . En primera instancia usaremos la cota implícita de la proposición anterior; luego reduciremos el máximo valor de p para modificar la base y altura de los triángulos rectángulos; finalmente usaremos métodos numéricos para mejorar las cotas anteriores.

Notemos que un triángulo T que cumple con las características de la proposición 3.3.1 tiene un área igual a $\frac{1}{2}(\frac{n}{3} - 2)(\frac{2n}{3} - 4) = \frac{1}{9}(n - 6)^2$, ya que su base es $(\frac{n}{3} - 2)$ y su altura es $(\frac{2n}{3} - 4)$. Entonces, como P_n está contenido en T , se sigue que $A(P_n) \leq A(T)$, es decir, $A(P_n) \leq \frac{1}{9}(n - 6)^2$, véase figura 3.29.

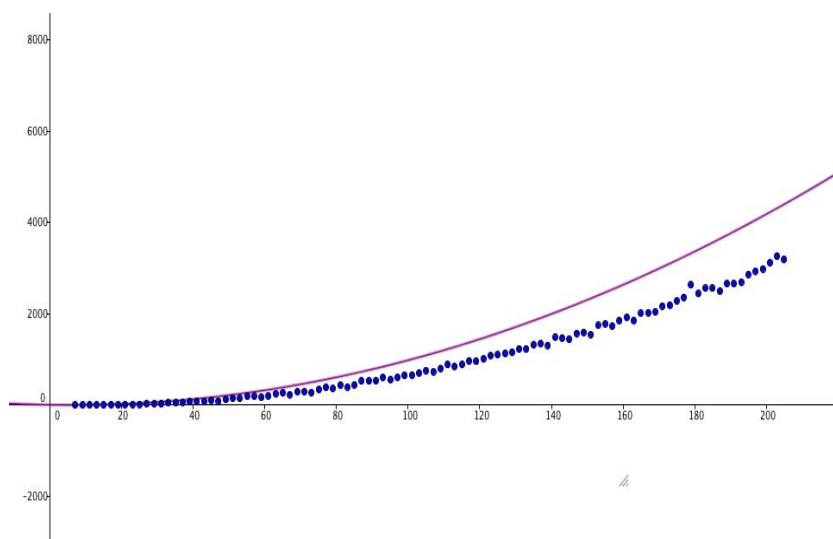


Figura 3.29: Gráfica de $A(P_n)$. En morado la función $\frac{1}{9}(n - 6)^2$.

Aunque parece que la cota que construimos a partir de las áreas de los triángulos rectángulos que contienen a P_n , tiene una buena aproximación, es natural querer mejorarla, y como mencionamos lo haremos reduciendo el máximo valor de p para modificar la base y altura de los rectángulos.

Veamos por qué P_n está estrictamente contenido en T . Si P_n fuera igual a T , entonces el punto $(2, \frac{n}{3}) \in P_n$, de lo que se sigue que $n = 2 + q + \frac{n}{3}$, por lo que $q = \frac{2n}{3} - 2$, pero de ser así se tendría que $q > r$, lo cual es una contradicción²⁷. Por lo tanto $P_n \subset T$. Así, lo que en realidad tenemos es que $A(P_n) < \frac{1}{9}(n-6)^2$.

Como esta cota se obtuvo a partir de que $2 \leq p \leq \frac{n}{3}$, entonces, si reducimos el intervalo, es decir, si en lugar de acotar a p superiormente por $\frac{n}{3}$ lo acotáramos por $\frac{n}{3.5} = \frac{2n}{7}$. Entonces, en primera instancia es posible que el triángulo rectángulo T con vértices $M = (2, n-4)$, $M' = (2, \frac{2n}{7})$ y $M'' = (\frac{2n}{7}, \frac{2n}{7})$ pueda no contener completamente a P_n . Pero, también es posible que el área excedente de T respecto a P_n compense la pérdida del área que se genera al reducir el intervalo para p .

Los datos empíricos muestran que el área de los triángulos definidos para $p \leq \frac{2n}{7}$ está por debajo de la cota original y aún así sigue siendo cota para el área de los P_n (figura 3.30).

Hasta ahora hemos acotado el área de los P_n mediante la construcción de triángulos, y aunque ambas cotas son buenas sí es posible mejorarlas mediante métodos numéricos, aún cuando tras ellos no hay un razonamiento matemático más allá del método mismo.

Lo que resultó realmente fascinante de emplear aproximaciones es que se pudo mejorar la cota dada por la función $\frac{1}{9}(n-6)^2$ después de cambiar solamente el escalar que multiplica a $(n-6)^2$, por supuesto, esto seguramente se debe a ciertas características intrínsecas de nuestros datos. En la figura 3.31 se muestran tres distintas cotas para $A(P_n)$.

²⁷Recordemos que para garantizar la unicidad de las ternas establecimos que los tres primos que suman n deben cumplir que $p \leq q \leq r$.

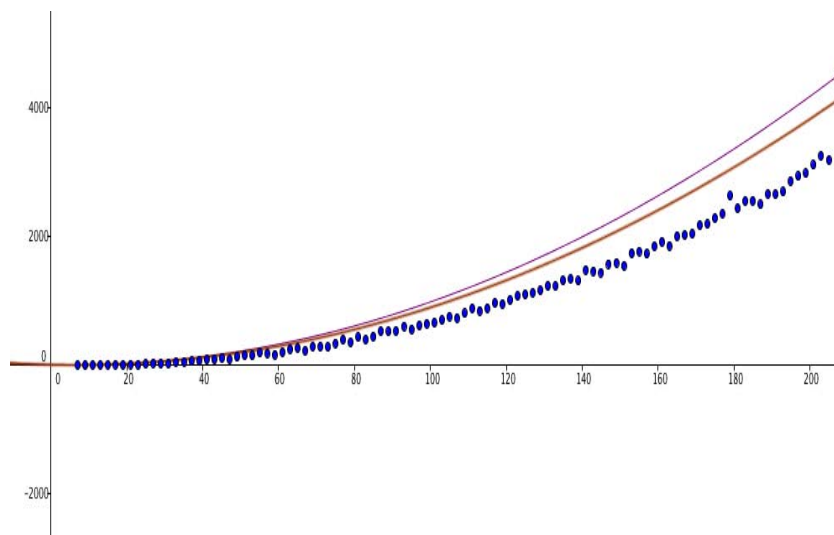


Figura 3.30: En marrón la función $k(n) = \frac{1}{49}(5n - 28)(n - 7)$, cota superior obtenida al reducir el intervalo de p . Salvo por el caso en que $n = 7$, $k(7) = 0$ al igual que $A(P_7)$, $A(P_n) < k(n)$. En morado la función $\frac{1}{9}(n - 6)^2$.

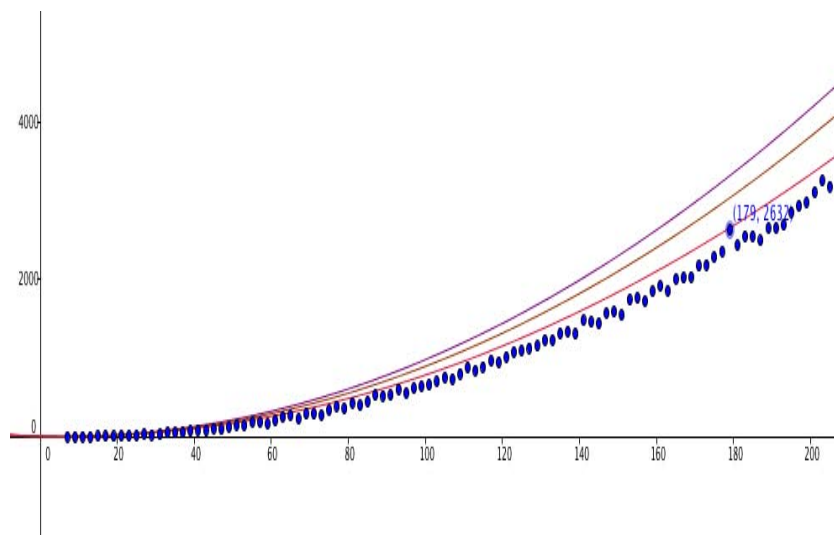


Figura 3.31: En morado la función $c(n) = \frac{1}{9}(n-6)^2$, en marrón la función $k(n) = \frac{1}{49}(5n-28)(n-7)$ y en rojo $k'(n) = \frac{4}{45}(n-6)^2$. Al evaluar todas las funciones en 179, la función con el menor error es $k'(n)$, pues $k'(179) = \frac{119716}{45} \approx 2660.35$, mientras que $c(179) = \frac{29929}{9} \approx 3325.44$ y $k(179) = \frac{149124}{49} \approx 3043.34$.

3.3. ANÁLISIS DE LAS ÁREAS

Recapitulando lo estudiado en este capítulo tenemos que la gráfica del problema terciario tiene un comportamiento “parecido” al del Cometa de Goldbach, en cuanto a la existencia de sectores y bandas, y esto mismo será de utilidad para explicar la parte terciaria. Por otro lado, mediante el uso de envolventes convexas construimos polígonos con estas tercias de primos, y mostramos que éstos también cumplen interesantes propiedades como que su área siempre es un número entero y que es posible acotar el área de todos los polígonos mediante una función cuadrática.

Conclusiones

Lo relevante de este trabajo es que se está proponiendo una forma alternativa –que además es visualizable– de utilizar la Conjetura de Goldbach, pero lo mejor es que, además de los interesantes resultados que obtuvimos, todo indica que aún puede extraerse más información y, la cual, seguramente, será tan sorprendente como lo que encontramos.

Por ejemplo, en el caso binario, se trataron triángulos reticulares, de los cuales se consiguieron resultados muy interesantes, como que el área de todos ellos es par y nunca congruente con dos módulo seis; también vimos el comportamiento de la función asociada al área de los triángulos que es bien comportada. Por otro lado está el lugar que ocupan los números $n = 2p$ en ella, lo cual es tan sorprendente como la gráfica de la función misma, o que la función área está acotada por una función cuadrática bastante simple aún cuando, por todo lo que implica, uno pensaría que debería ser algo más complicado.

Además de todo lo obtenido es importante notar que aún hay muchas cosas que hacer al respecto. Como muestra de ello está el hecho de que el área de los triángulos de los números 100 y 110 tienen la misma área, ¿será que hay más números con áreas iguales?, hasta el 17500 sólo tenemos este caso; también falta

ver que pasa con los números de la forma $n = 2^\alpha p^\beta$, ¿será que también están junto a los $n = 2p$ en la gráfica del área?

Ahora bien, en el caso terciario hubo más que decir, sobre todo porque no hay muchos trabajos que hablen de las peculiaridades de la misma. Por ejemplo, fue sorprendente ver que su gráfica es casi una reflexión sobre el origen del Cometa de Goldbach. Una vez en el plano, nos asombramos porque todos los polígonos tienen área entera y todos ellos están perfectamente acotados por un triángulo rectángulo, y ya ni hablar del comportamiento de sus áreas y la función tan simple de tienen por cota superior.

Al igual que en el caso binario, aún hay muchas cosas que decir sobre esto. Por ejemplo, sería interesante ver en donde están los primos, hacer un análisis sobre GI y los puntos en la frontera e interior de cada polígono y ver que más se puede decir al respecto. También nos encontramos con cuatro números que tienen la misma área, 41 y 43 y, 69 y 71, por lo que es válido preguntarse si habrá más números así y si también serán consecutivos.

Podemos ver que los problemas relacionados con la *Conjetura de Goldbach* aún nos tendrán muchos momentos gratos por descubrir.

Apéndice A

Capítulo 1

Bandas

Más bandas

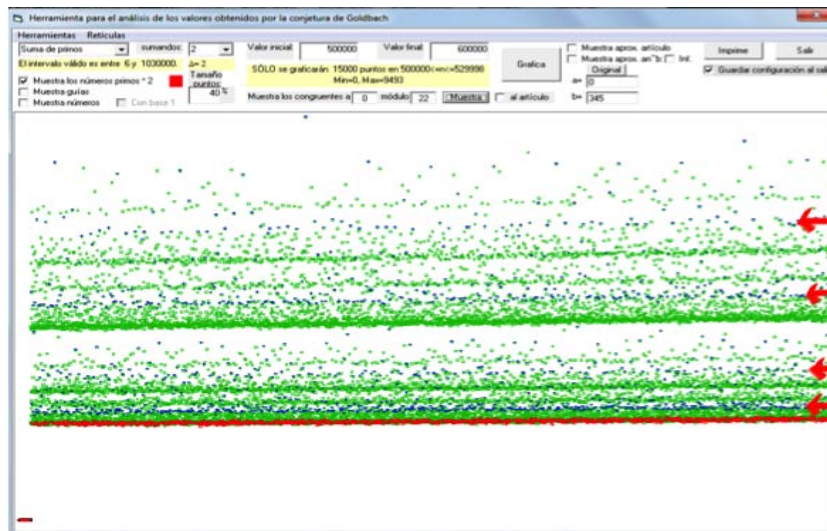


Figura 3.32: Cometa de Goldbach con n en el intervalo (50000, 60000). Las marcas azules indican a lo congruentes con 0 módulo 22.

Prueba del problema del acomodo de las bandas

Proposición 3.3.2.

Si $p_2 > p_1$ entonces $\frac{p_1-1}{p_1-2} > \frac{p_2-1}{p_2-2}$

Demostración.

Basta probar que $\frac{p_1-1}{p_1-2} - \frac{p_2-1}{p_2-2} > 0$

$$\frac{p_1-1}{p_1-2} - \frac{p_2-1}{p_2-2} = \frac{(p_1-1)(p_2-2) - (p_1-2)(p_2-1)}{(p_1-2)(p_2-2)}$$

$$\frac{p_1-1}{p_1-2} - \frac{p_2-1}{p_2-2} = \frac{p_1 p_2 - 2p_1 - p_2 + 2 - p_1 p_2 + p_1 + 2p_2 - 2}{(p_1-2)(p_2-2)}$$

$$\frac{p_1-1}{p_1-2} - \frac{p_2-1}{p_2-2} = \frac{p_2 - p_1}{(p_1-1)(p_2-2)}$$

Como $p_2 > p_1$, entonces $p_2 - p_1 > 0$.

Por lo tanto

$$\frac{p_1-1}{p_1-2} - \frac{p_2-1}{p_2-2} > 0$$

□

Apéndice B

Capítulo 2

Área de los triángulos de Goldbach

$A(T_n)$ es entero: Prueba alternativa.

Demostración.

A partir de la fórmula dada en el Capítulo 3 para determinar que el área de los polígonos P_n es entera se tiene que

$$B = \sum_{m=1}^3 mcd(p_i - p_{i+1}, q_i - q_{i+1})$$

donde $(p_1, r_1) = (0, 0)$, $(p_2, r_2) = (p_s, q_s)$ y $(p_3, r_3) = (p_r, q_r)$

De lo que se sigue que

$$B = mcd(p_s, q_s) + mcd(p_s - p_r, q_s - q_r) + mcd(p_r, q_r) \dots (1)$$

al ser p_s , p_r , q_s y q_r impares, en (1) los extremos son impares y el medio es par.

Además, como la suma par de impares es par, entonces B es par. Y por tanto $A(T_n)$ es entero. □

Tabla de áreas de los triángulos de Goldbach

| Número | p_r | p_s | $A(T_n)$ | $\equiv A(T_n) \pmod{6}$ |
|--------|-------|-------|----------|--------------------------|
| 6 | 3 | 3 | 0 | 0 |
| 8 | 5 | 5 | 0 | 0 |
| 10 | 7 | 5 | 10 | 4 |
| 12 | 7 | 7 | 0 | 0 |
| 14 | 11 | 7 | 28 | 4 |
| 16 | 13 | 11 | 16 | 4 |
| 18 | 13 | 11 | 18 | 0 |
| 20 | 17 | 13 | 40 | 4 |
| 22 | 19 | 11 | 88 | 4 |
| 24 | 19 | 13 | 72 | 0 |
| 26 | 23 | 13 | 130 | 4 |
| 28 | 23 | 17 | 84 | 0 |
| 30 | 23 | 17 | 90 | 0 |
| 32 | 29 | 19 | 160 | 4 |
| 34 | 31 | 17 | 238 | 4 |
| 36 | 31 | 19 | 216 | 0 |
| 38 | 31 | 19 | 228 | 0 |
| 40 | 37 | 23 | 280 | 4 |
| 42 | 37 | 23 | 294 | 0 |
| 44 | 41 | 31 | 220 | 4 |
| 46 | 43 | 23 | 460 | 4 |
| 48 | 43 | 29 | 336 | 0 |
| 50 | 47 | 31 | 400 | 4 |
| 52 | 47 | 29 | 468 | 0 |
| 54 | 47 | 31 | 432 | 0 |
| 56 | 53 | 37 | 448 | 4 |
| 58 | 53 | 29 | 696 | 0 |
| 60 | 53 | 31 | 660 | 0 |
| 62 | 59 | 31 | 868 | 4 |
| 64 | 61 | 41 | 640 | 4 |

| Número | p_r | p_s | $A(T_n)$ | $\equiv A(T_n) \pmod{6}$ |
|--------|-------|-------|----------|--------------------------|
| 66 | 61 | 37 | 792 | 0 |
| 68 | 61 | 37 | 816 | 0 |
| 70 | 67 | 41 | 910 | 4 |
| 72 | 67 | 41 | 936 | 0 |
| 74 | 71 | 37 | 1258 | 4 |
| 76 | 73 | 47 | 988 | 4 |
| 78 | 73 | 41 | 1248 | 0 |
| 80 | 73 | 43 | 1200 | 0 |
| 82 | 79 | 41 | 1558 | 4 |
| 84 | 79 | 43 | 1512 | 0 |
| 86 | 83 | 43 | 1720 | 4 |
| 88 | 83 | 47 | 1584 | 0 |
| 90 | 83 | 47 | 1620 | 0 |
| 92 | 89 | 61 | 1288 | 4 |
| 94 | 89 | 4 | 1974 | 0 |
| 96 | 89 | 53 | 1728 | 0 |
| 98 | 79 | 61 | 882 | 0 |
| 100 | 97 | 53 | 2200 | 4 |
| 102 | 97 | 59 | 1938 | 0 |
| 104 | 101 | 61 | 2080 | 4 |

Cuadro 3.1: Datos de los primeros 104 triángulos de Goldbach. Extremos, área y congruencia de área módulo seis.

Área de los T_{2p}

Tabla de salto de primos

| Salto | Todos los primos | Cong 1 mod 6 | Cong 5 mod 6 |
|-------|------------------|--------------|--------------|
| 2 | 3423 | 0 | 0 |
| 4 | 3396 | 0 | 0 |
| 6 | 5536 | 3042 | 3445 |
| 8 | 2259 | 0 | 0 |
| 10 | 2810 | 0 | 0 |
| 12 | 3072 | 2749 | 2752 |
| 14 | 1604 | 0 | 0 |
| 16 | 1093 | 0 | 0 |
| 18 | 1760 | 2216 | 2237 |
| 20 | 847 | 0 | 0 |
| 22 | 750 | 0 | 0 |
| 24 | 874 | 1765 | 1735 |
| 26 | 376 | 0 | 0 |
| 28 | 405 | 0 | 0 |
| 30 | 582 | 1555 | 1626 |
| 32 | 150 | 0 | 0 |
| 34 | 178 | 0 | 0 |
| 36 | 223 | 856 | 809 |
| 38 | 107 | 0 | 0 |
| 40 | 135 | 0 | 0 |
| 42 | 125 | 741 | 739 |
| 44 | 41 | 0 | 0 |
| 46 | 38 | 0 | 0 |
| 48 | 46 | 441 | 444 |
| 50 | 25 | 0 | 0 |

Cuadro 3.2: Salto de primos hasta el 50

Apéndice C

Capítulo 3

Los primos p y $GI(p)$

Gráficas complementarias

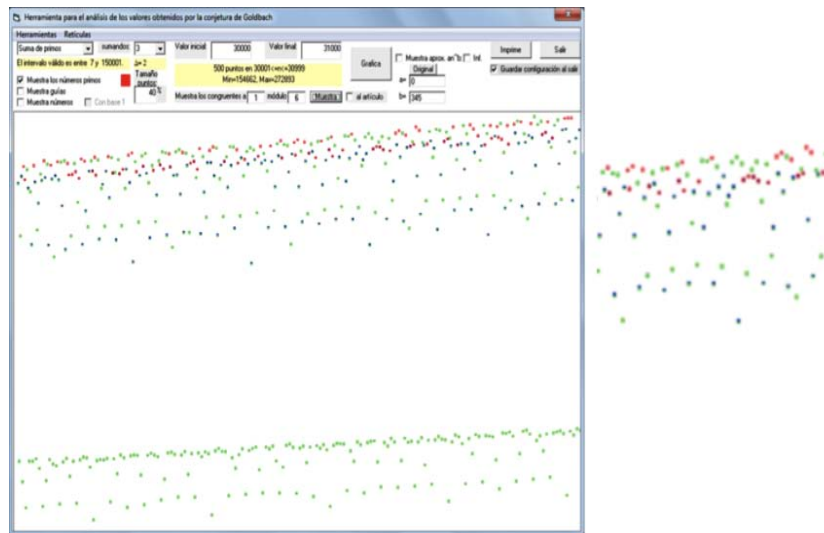


Figura 3.35: Gráfica del problema terciario para valores en el intervalo (30000,31000). En rojo se indican los números primos y en azul los congruentes con 1 módulo 6.

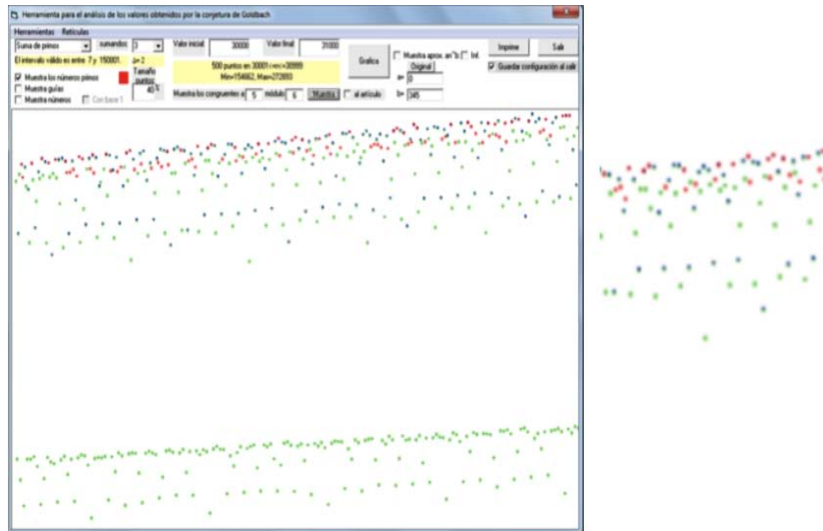


Figura 3.36: Gráfica del problema terciario para valores en el intervalo $(30000,31000)$. En rojo se indican los números primos y en azul los congruentes con 5 módulo 6.

Bibliografía

- [1] FLIEGEL, Henry F. y ROBERTSON, Douglas S.. 1989. “Goldbach’s Comet: The numbers related to Goldbach’s Conjecture”. *J. Recreational Mathematics* **21(1)**: 1-7.
- [2] GUY, Richard. 1994. *Unsolved Problems in Number Theory*. New York-Berlin-Heidelberg-Tokyo: Springer-Verlag.
- [3] LUCA, Florian. 2004. *Números primos y aplicaciones*. México: Sociedad Mexicana de Matemáticas.
- [4] O’ROURKE, Joseph. 1998. *Computational Geometry in C*. Cambridge-New York: Cambridge University Press.
- [5] ODLYZKO, Andrew, RUBINSTEIN, Michael y WOLF, Mark. 1999. “Jumping Champions”. *Experimental Mathematics* **8(2)**: 107-118.
- [6] PREPARATA, F.P y SHAMOS, M.I.. 1985. *Computational Geometry. An Introduction*. New York-Berlin-Heidelberg-Tokyo: Spriger-Verlag.
- [7] RAMÍREZ, José Luis. 2010. “El Teorema de Pick y Redes de Puntos”. *MATerial MATemàtics* **2010**: treball no. 5.

BIBLIOGRAFÍA

Véase <http://www.mat.uab.cat/matmat/PDFv2010/v2010n05.pdf>

- [8] STEWART, Ian. 2001. “Campeones de salto”. *Investigación y Ciencias* **293**: 86-87.
- [9] STOPPLE, Jeffrey. 2003. *A primer of Analytic Number Theory: from Pythagoras to Riemann*. New York: Cambridge University Press.
- [10] <http://www.ltg.ed.ac.uk/richard/goldbach.html>
- [11] <http://blogs.scientificamerican.com/roots-of-unity/goldbach-variations/>