



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Clasificación de grupos de automorfismos en
dominios k -conexos en la esfera de Riemann

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Matemático

PRESENTA:

Inti Cruz Diaz

TUTORA

María de los Ángeles Sandoval Romero



Ciudad Universitaria, D. F.



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Dedicatoria

*Para quienes hacer matemáticas
es hacer de humanismo.*

Agradecimientos

A mi madre primeramente, porque sin ella nada de esto hubiera sido posible. Gracias mama por estar conmigo siempre, por mantenerte ecuánime ante mis locuras, por mantenerme y por quererme mucho.

Al viejo también por presionar para que ya acabara (era necesario) y por las opiniones.

A mi carnal Ja-chi-min .. si se puede hermano hay que seguirle dando.

A mi familia entera, gracias a mi abuelo por enseñarme disfrutar la chamba y a mi abuelita por la comida caliente, sabe bien que no es cualquier cosa.

A mi camarada Pavel por esas primeras discusiones matemáticas, gracias por no dejarme tener la razón.

A Diana por meterme a la clínica y a Emanuel por sacarme, aunque olvidaste mis pantalones, gracias a los dos por acompañarme.

A mi psicóloga Ximena y mi psiquiatra Dr. Galvan, por mantenerme a flote estos últimos 16 meses. A Paloma porque me quiere y ser cable a tierra.

A Fernandez, Cesar, Carmen, Paco, Rolando, mis maestros, por enseñarme matemática y sobre todo por enseñarme a amarla.

A mi asesora Ángeles, gracias doc. por recibirme en su cubículo cuando estaba perdido y sin asesor, por la paciencia de trabajar conmigo, de corregir mis errores y por la confianza de ser su ayudante y mandarme a varias escuelas de matemática.

A Jawad y Paco por el apoyo para ir a Brasil, lamento no haber conseguido más.

A la facultad, la quiero y siento orgullo de haberme formado aquí, nunca me faltó nada en sus pasillos y aulas.

A la sociedad matemática mexicana, pues a travez de su proyecto mujeres en las matemáticas, me ah brindado apoyo económico para terminar esta tesis.

A mis sinodales Francisco, Oscar, Berlanga, Cesar por las recomendaciones y correcciones hechas al trabajo.

Y a quien me falta, sepa que mi memoria es corta pero mi gratitud muy grande, gracias por estar ahí.

Índice general

Introducción	I
1. Preliminares.	1
1.1. Análisis Complejo.	1
1.2. La fórmula integral de Cauchy.	3
1.3. Grupos topológicos y su geometría.	9
1.3.1. Matrices no singulares y su métrica.	10
1.3.2. Grupos discretos.	11
1.3.3. El Grupo de Möbius sobre \mathbb{R}^n	12
1.3.4. Transformaciones de Möbius complejas.	18
1.3.5. Grupos elementales	27
2. $\text{Aut}(\Omega)$ para dominios 1 y 2 conexos.	33
2.1. Conceptos introductorios.	34
2.2. Primeros grupos de automorfismos.	35
2.3. Caracterización de dominios simplemente conexos.	42
2.4. Descomposición de Iwasawa de $\text{Aut}(D)$	45
3. Equivalencia de regiones k-conexas, $k > 1$.	51
3.1. Presentación de resultados claves y definiciones.	51
3.1.1. Revisión de algunas ideas topológicas.	53
3.1.2. Funciones armónicas.	56
3.1.3. El problema de Dirichlet y su solución.	58
3.2. Representación de dominios k -conexos como anillos rasgados.	60
3.3. La estructura de grupo topológico de $\text{Aut}(\Omega)$	64

4. El teorema de clasificación de $M(\Omega)$.	69
4.1. Definiciones y presentación del Teorema	69
4.2. Resultados preliminares.	73
4.3. La prueba del teorema de clasificación.	75
4.3.1. Dominios simplemente conexos.	76
4.3.2. Dominios doblemente conexos.	78
4.3.3. Dominios k -conexos con $k \geq 3$	80

Introducción

En el programa de ingreso de 1872 a la Facultad Filosófica y al Senado de la *K. Friedrich-Alexanders-Universität* en Erlangen, Felix Klein [1] se pregunta por el problema fundamental que aborda la geometría. Asume el conocimiento de lo que es una variedad y sobre ello apunta:

"... Hay en el estudio de las variedades tantos tipos diferentes como en la geometría, y es válido, también como en la geometría, hacer resaltar las analogías y las diferencias de las investigaciones realizadas independientemente..."

Utiliza el concepto elemental de *grupo* de transformaciones espaciales, el cual entiende como un grupo de funciones biyectivas actuando en el espacio (variedad). Él nos dice y hace eco en nosotros, que *olvidemos la imagen sensible, matemáticamente inesencial* y consideremos una variedad en el espacio y un grupo actuando sobre ella, donde cualquier grupo tiene igual derecho, el problema general de la geometría surge naturalmente:

"...Sea dada una variedad y un grupo de transformaciones de ella; invéstiguense los objetos pertenecientes a la variedad desde el punto de vista de aquellas propiedades que permanecen invariantes bajo las transformaciones del grupo..."

Denominamos *grupo principal* a la totalidad del grupo actuando en la variedad. Ahora, uno puede decir que: *Las propiedades geométricas permanecen invariantes bajo las transformaciones del grupo principal*, o bien que :

"...Las propiedades geométricas están caracterizadas por su invariabilidad bajo las transformaciones del grupo principal..."

¿Acaso esto no es de lo más natural? al menos en los ejemplos más cercanos, hacer geometría es ubicarse en un espacio y sacar propiedades de sus elementos invariantes bajo ciertas transformaciones, es decir que no sean exclusivas del punto escogido. Por lo tanto el problema general de la geometría se puede plantear como:

... "Sea dada una variedad y un grupo de transformaciones de ella. Desarróllese la teoría de invariantes relativa al grupo..."

Buscar propiedades geométricas es buscar aquellos atributos de los objetos espaciales que son invariantes bajo las transformaciones de un grupo.

El problema inverso también resulta interesante.

... "Dada una variedad y una propiedad de los objetos espaciales, búsquese el grupo bajo el cual, está resulta invariante..."

Bien, eso es lo que nos propusimos estudiar.

Nos preguntamos son las transformaciones en dominios contenidos en la esfera de Riemann que preservan localmente los ángulos. Es decir, ¿Cuáles son las transformaciones conformes que tienen como dominio y contradominio conjuntos abiertos y conexos en la esfera de Riemann?

Para algunos dominios este estudio ya es bastante conocido, caso por ejemplo de la esfera de Riemann, \mathbb{C}_∞ , o el disco de Poincaré, D . Este último es interesante porque el grupo principal que conserva la conformidad coincide con el grupo de isometrías bajo la métrica hiperbólica.

Basados en los trabajos de diversos autores que citamos donde es correspondiente, logramos dar una caracterización de quienes son los grupos principales para dominios en la esfera de Riemann. Si no explícita, si bajo conjugaciones.

Nos seguimos preguntando ¿Qué otras propiedades geométricas se tienen bajo la acción de estos grupos principales?

Nuestro estudio comenzó con una lectura del capítulo doce del libro *Complex Analysis: The Geometric Viewpoint*, Steven G. Krantz [2]. Fue aquí donde encontramos nuestra primera definición de grupos de automorfismos, los primeros ejemplos y de donde surge la duda sobre la clasificación de estos grupos. Para continuar con nuestro proyecto nos apoyamos en el artículo *Conformal Automorphisms of Plane Domains*, A.F. Beardon [3], ahí él autor da un teorema de clasificación de grupos de automorfismos que resuelve nuestro problema. Restaba ahora trazar el camino desde los conocimientos que un estudiante de licenciatura posee, hasta llegar a exponer en el último capítulo todos los pormenores que la lectura de [3] presenta.

Incluimos en los preliminares una sección dedicada al estudio de grupos topológicos y la geometría de grupos discretos, el cual está inspirado en [4]. En el siguiente capítulo, calculamos explícitamente algunos grupos de automorfismos y derivamos de ellos un par de propiedades interesantes.

Para el capítulo tres hemos expuesto algunos teoremas técnicos que justifican las simplificaciones hechas al problema de clasificación. Aunque no probamos el teorema que utilizamos, decidimos incluir una versión equivalente para mostrar que en este tema existe una interlocución con otras áreas de la matemática.

El último capítulo está integrado por una explicación mas extensa de los artículos [3] y

On the number of $1 - 1$ directly conformal maps which a multiply-connected plane region of finite connectivity $p (> 2)$ admits onto itself, M. Heins [5], el cual hace referencia a un resultado probado por G. Julia en *Sur la representation conforme des aires multiplement connexes* [6], que junto con otro resultado citado por A. Beardon en [3], no son tratados. Nos limitamos simplemente a citar dichas referencias, y utilizar los resultados. De no ser así, la tesis se desviaría en gran medida de su objetivo.

Capítulo 1

Preliminares.

1.1. Análisis Complejo.

Serán útiles algunos resultados por demás conocidos de análisis complejo. Esta sección es un compilado de ellos y sirve como introducción al lenguaje utilizado en el resto del trabajo. Las definiciones y teoremas fueron tomadas de [7, p. 1-15], para mayores detalles recomendamos leer la referencia.

Sea $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ una función compleja y continuamente diferenciable (en el sentido del cálculo de varias variables) sobre un abierto U del plano complejo. Podemos escribir $f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$ con $u(x, y), v(x, y)$, funciones de valor real

Definición 1.1. *La función $f(x, y)$ es holomorfa en un punto $(x, y) \in U$, si satisface las ecuaciones de Cauchy-Riemann:*

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x, y).$$

La función f es holomorfa en U , si es holomorfa en todo punto $(x, y) \in U$.

Teorema 1.1 (Teorema de singularidades removibles de Riemann). *Sea \tilde{f} un mapeo holomorfo, en el disco perforado $\dot{D}(P, r) \equiv D \setminus \{P\}$. Si \tilde{f} es acotada, entonces \tilde{f} tiene una continuación analítica en todo el disco, $D(P, r)$, Es decir, existe una función holomorfa \bar{f} en $D(P, r)$ tal que $\bar{f}|_{\dot{D}(P, r)} = \tilde{f}$.*

Uno de los conceptos primordiales con los que estaremos trabajando es el de *dominio*, ya sea en la esfera de Riemann o bien en el plano complejo.

Definición 1.2 (Dominio). *Un dominio en el plano complejo \mathbb{C} o en la esfera de Riemann \mathbb{C}_∞ , es una región abierta y conexa.*

Teorema 1.2. Si f es una función holomorfa en un dominio U ,

$$\{z \in U : f(z) = 0\},$$

no tiene puntos de acumulación en U .

Teorema 1.3 (Desigualdad de Cauchy). Sea f una función holomorfa en un dominio U que contiene al disco cerrado $\bar{D}(P, R)$. La derivada de f satisface la siguiente desigualdad:

$$\left| \left(\frac{\partial^j}{\partial z^j} \right) f(P) \right| \leq \frac{j! \cdot M}{R^j}.$$

Donde M es el supremo de $|f|$ sobre el disco $\bar{D}(P, R)$.

Teorema 1.4 (Liouville). Si f es una función holomorfa y acotada definida en todo \mathbb{C} , f debe ser una función constante.

Teorema 1.5 (Principio del argumento). Sea f un mapeo holomorfo en un dominio U , y sea γ una curva topológicamente trivial, positiva orientada, cerrada y simple en U . Asuma que f no se anula en γ . Existen a lo más una cantidad finita k de ceros de f dentro de γ (considerando la multiplicidad) y:

$$k = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f'(\xi)}{f(\xi)} d\xi.$$

Teorema 1.6 (Teorema de Hurwitz). Sea U un dominio y $\{f_j\}_{j=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones holomorfas en U que convergen uniformemente en compactos, si ninguna de las f_j tiene ceros en U , f es idénticamente cero ó f no tiene ceros en U .

Teorema 1.7. Sea f una función holomorfa en un dominio U , si existe un punto $P \in U$ tal que

$$|f(P)| \geq |f(z)| \quad \forall z \in U$$

Entonces f es una función constante.

Teorema 1.8 (Lema de Schwarz). Si $f : D \rightarrow D$ es una función holomorfa tal que $f(0) = 0$, entonces:

$$|f(z)| \leq |z| \text{ y } |f'(0)| = 0.$$

Si $|f(z)| = |z|$ para alguna $z \in D \setminus \{0\}$ o bien $|f'(0)| = 1$, entonces f es una rotación, donde $f(z) = e^{i\lambda} \cdot z$ para algún $\lambda \in \mathbb{R}$.

Definición 1.3 (Familia normal). Una familia \mathfrak{S} de funciones en un dominio U , es llamada normal, si y sólo si, cualquier sucesión de elementos en \mathfrak{S} tiene una subsucesión que converge uniformemente en subconjuntos compactos de U .

Teorema 1.9 (Montel). Sea U un dominio en el plano complejo y \mathfrak{S} una familia de funciones holomorfas en U . Si existe una M positiva tal que :

$$|F(z)| \leq M$$

para toda $z \in U$ y toda F en \mathfrak{S} , entonces \mathfrak{S} es una familia normal.

Otro de los conceptos que está presente durante toda la tesis es la noción de *mapeo conforme*, los cuales se caracterizan por ser localmente equivalentes a una rotación seguida de una dilatación. Nosotros trabajaremos con la siguiente definición equivalente.

Definición 1.4 (Mapeo conforme). *Sea f función holomorfa en $U \subset \mathbb{C}$ abierto, escribimos $f = u + iv$ con u, v funciones de variable real. f es un mapeo conforme si y sólo si la matriz Jacobiana real en $P \in U$,*

$$J(P) = \begin{pmatrix} u_x(P) & u_y(P) \\ v_x(P) & v_y(P) \end{pmatrix},$$

es distinta de cero.

La definición anterior es equivalente a que la derivada compleja de f no se anule, o bien que f sea un mapeo holomorfo y biyectivo (en su imagen). Pasaremos una y otra vez entre estas definiciones según sea conveniente. Llamamos también mapeo biholomorfo a un mapeo conforme.

Decimos que f es conforme en Ω si y sólo si es conforme para todo $P \in \Omega$.

El siguiente teorema no puede ser anunciado sino como un clásico: el *Teorema del mapeo de Riemann*.

Teorema 1.10 (Teorema del mapeo Riemann). *Sea U un subdominio propio de \mathbb{C} , si U es homeomorfo al disco unitario, entonces es conformemente equivalente al disco unitario abierto.*

Teorema 1.11 (Caratheodory). *Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un conjunto simplemente conexo, cuya frontera es una curva de Jordan simple. Sea $\phi : \Omega \rightarrow D$ un mapeo conforme¹. Entonces ϕ se extiende a un homeomorfismo de $\bar{\Omega}$ en \bar{D} .*

Teorema 1.12 (Teorema de Cauchy). *Sea f una función analítica en una region Ω . Sea γ una curva cerrada contenida en G , homotópica a un punto en G , entonces:*

$$\int_{\gamma} f = 0.$$

1.2. La fórmula integral de Cauchy.

A partir de cualquier forma diferencial real, podemos crear una p -forma imaginaria al multiplicarla por i . Las formas diferenciales complejas son sumas de la forma $\omega_1 + i\omega_2$,

¹Que existe por Teorema del mapeo de Riemann

con ω_1, ω_2 formas reales. El producto cuña se extiende de forma natural y los operadores d y f se extienden de tal forma que conmutan con la multiplicación por i ,

$$d\omega = d\omega_1 + id\omega_2, \quad \int_X \omega = \int_X \omega_1 + i \int_X \omega_2.$$

El teorema de Stokes que es válido para formas diferenciales reales lo es para formas complejas pues se cumple para sus partes real e imaginaria. Podemos usar las herramientas de las formas diferenciales reales para probar un teorema fundamental en la teoría de variable compleja: *La fórmula integral de Cauchy*, esto lo hacemos con miras a una futura generalización del principio del argumento.

Probaremos varios lemas que dan lugar a la expresión que buscamos.

Lema 1.1. *Sea $z = x + iy$ la función coordenada compleja usual en \mathbb{C} , $dz = dx + idy$.*

Demostración. *$z = x + iy$ con x, y 1-formas reales, la afirmación se sigue de la definición de derivada exterior.*

Lema 1.2. *Sea $f(z)$ una función con valor complejo en un abierto U de \mathbb{C} . Probaremos que la 1-forma $f(z)dz$ es cerrada, si y sólo si, $f(z) = f(x, y)$ satisface la ecuación de Cauchy Riemann:*

$$\frac{\partial f}{\partial y} = i \frac{\partial f}{\partial x}.$$

Si $f(z)dz$ es cerrada, diremos que f es una función holomorfa en U ^{II}.

Demostración. *Supongamos que $f = f_1 + if_2$ entonces*

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial f_1}{\partial x} + i \frac{\partial f_2}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial f_1}{\partial y} + i \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{aligned}$$

Por otra parte $df = df_1 + idf_2$ y por tanto,

$$df = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} dx + \frac{\partial f_1}{\partial y} dy \right) + i \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} dx + \frac{\partial f_2}{\partial y} dy \right) = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

De la definición de derivada exterior,

$$d(fdz) = df \wedge dz = \left(\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \right) \wedge (dx + idy)$$

Supongamos que fdz es una 2-forma cerrada que opera en \mathbb{C}^2 (el plano tangente a \mathbb{C} es \mathbb{C}). Podemos aplicarla al vector (e_1, e_2) y,

^{II}Esta no es más que una equivalencia de lo que nosotros ya habíamos definido anteriormente como función holomorfa.

$$\begin{aligned}
0 &= d(fdz)(e_1, e_2) = (df \wedge dz)(e_1, e_2) \\
&= \left\{ \left(\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \right) \wedge (dx + idy) \right\} (e_1, e_2) \\
&= \left(\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \right)(e_1) \cdot ((dx + idy))(e_2) - \left(\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \right)(e_2) \cdot ((dx + idy))(e_1) \\
&= i \left(\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} dy \right)
\end{aligned}$$

que se traduce en la ecuación de Cauchy-Riemann.

Ahora supongamos que dicha ecuación es verdadera.

$$\begin{aligned}
d(fdz) &= df \wedge dz \\
&= \left(\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \right) \wedge (dx + idy) \\
&= \frac{\partial f}{\partial x} dx \wedge idy + \frac{\partial f}{\partial y} dy \wedge dx \\
&= \left(i \frac{\partial f}{\partial x} dx \right) \wedge dy + \frac{\partial f}{\partial y} dy \wedge dx \\
&= \frac{\partial f}{\partial y} dx \wedge dy + \frac{\partial f}{\partial y} dy \wedge dx \\
&= \frac{\partial f}{\partial y} dx \wedge dy - \frac{\partial f}{\partial y} dx \wedge dy = 0
\end{aligned}$$

Por tanto fdz es cerrada.

Nótese que la ecuación de Cauchy Riemann es equivalente a las siguientes ecuaciones reales ^{III}

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{\partial f_2}{\partial y} \text{ y } \frac{\partial f_1}{\partial y} = -\frac{\partial f_2}{\partial x}.$$

Lema 1.3. *El producto de dos funciones holomorfas f y g es una función holomorfa.*

^{III}Que son las que aparecen de forma usual en los textos de variable compleja y que hemos acogido para la definición de función holomorfa.

Demostración. Si f es función real y g posiblemente compleja,

$$\frac{\partial fg}{\partial x} = \frac{\partial f(g_1 + ig_2)}{\partial x} = f_x g_1 + f g_{1x} + i f_x g_2 + i f g_{2x} = \frac{\partial f}{\partial x} g + f \frac{\partial g}{\partial x}$$

Análogamente si f y g son funciones complejas,

$$\begin{aligned}\frac{\partial fg}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial x} g + \frac{\partial g}{\partial x} f. \\ \frac{\partial fg}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial y} g + \frac{\partial g}{\partial y} f.\end{aligned}$$

De donde:

$$\frac{\partial fg}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} g + \frac{\partial g}{\partial y} f = i \frac{\partial f}{\partial x} g + i \frac{\partial g}{\partial x} f = i \frac{\partial fg}{\partial x}.$$

Lema 1.4. La función coordenada compleja z , es holomorfa.

Demostración. Notemos simplemente que:

$$d(zdz) = dz \wedge dz = 0.$$

Dado que el producto de funciones holomorfas, la suma de ellas y la multiplicación por escalares es una función holomorfa, podemos concluir que los polinomios complejos son holomorfos.

Lema 1.5. Sea f holomorfa en γ_1 y γ_2 , dos curvas cerradas y homotópicas en U :

$$\oint_{\gamma_1} f(z)dz = \oint_{\gamma_2} f(z)dz.$$

Demostración. Desarrollando cada lado de la igualdad:

$$\begin{aligned}\oint_{\gamma_1} f(z)dz &= \int_{S^1} \gamma_1^* f dz. \\ \oint_{\gamma_2} f(z)dz &= \int_{S^1} \gamma_2^* f dz.\end{aligned}$$

Es un ejercicio clásico que al ser γ_1, γ_2 funciones homotópicas sobre S^1 , las integrales son iguales.

Lema 1.6. Si f es holomorfa en una región simplemente conexa U ,

$$\oint_{\gamma} f(z)dz = 0$$

para cualquier curva cerrada γ .

Demostración. Como U es simplemente conexa, cualquier curva cerrada γ es homotópicamente equivalente a un punto. Por el resultado anterior:

$$\oint_{\gamma} f(z)dz = \oint_C f(z)dz = \oint_I C^*(f(z)dz) = 0.$$

Lema 1.7. La función $f(z) = \frac{1}{z-a}$ es holomorfa en el plano perforado $\mathbb{C} \setminus \{a\}$.

Demostración. Para $a = 0$ consideramos la función $f(z)$ como función de x y y ,

$$f(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2} - i \frac{y}{x^2 + y^2}.$$

Calculando sus derivadas parciales respecto a x ,

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) &= i \left\{ \frac{1}{(x^2 + y^2)} - \frac{2x^2}{(x^2 + y^2)^2} + i \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} \right\} \\ &= -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} + i \left\{ \frac{1}{(x^2 + y^2)} - \frac{2x^2}{(x^2 + y^2)^2} \right\} \end{aligned}$$

y respecto a y ,

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} + i \left\{ \frac{1}{(x^2 + y^2)} - \frac{2x^2}{(x^2 + y^2)^2} \right\}$$

concluimos que se satisface la ecuación de Cauchy-Riemann, por lo tanto $f(z) = \frac{1}{z}$ es holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Componiendo con a f una translación, $f(z) = \frac{1}{z-a}$ también es holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \{a\}$.

Lema 1.8. Sea C_r un círculo de radio r en torno al punto $a \in \mathbb{C}$.

$$\int_{C_r} \frac{1}{z-a} dz = 2\pi i.$$

Demostración. La curva que define a C_r es homotópicamente equivalente a la de cualquier círculo, incluyendo al de radio 1. Hacemos el cálculo para $r = 1$, tomando $h(z) = z + a$.

$$h^*(f(z)dz) = (f \circ h) \det(h(z))dz = \frac{1}{z} dz.$$

De manera que basta integrar la función $\frac{1}{z}$ en el círculo unitario.

Sea $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow C_1$ definida como $\gamma(t) = \begin{matrix} z \\ (\cos(t), \sin(t)) \end{matrix}$,

$$\begin{aligned} \int_{C_1} \frac{1}{z} dz &= \int_{C_1} \frac{1}{x+iy} (dx + idy) \\ &= \int_{C_1} \frac{x}{(x^2 + y^2)} - i \frac{y}{(x^2 + y^2)} (dx + idy) \\ &= \int_{C_1} \frac{1}{(x^2 + y^2)} dx + \frac{y}{(x^2 + y^2)} dy \\ &+ i \left(\int_{C_1} \frac{1}{(x^2 + y^2)} dy - \frac{y}{(x^2 + y^2)} dx \right) \end{aligned}$$

Al calcular cada término se obtiene:

$$\begin{aligned} \int_{C_1} \left(\frac{1}{x+iy} dx + \frac{y}{(x^2+y^2)} dy \right) &= \int_0^{2\pi} \gamma^* \left(\frac{x}{(x^2+y^2)} dx + \frac{y}{(x^2+y^2)} dy \right) \\ &= \int_0^{2\pi} (-\cos(t)\sin(t)dt + \sin(t)\cos(t)dt) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Y

$$\begin{aligned} \int_{C_1} \left(\frac{1}{(x^2+y^2)} dy - \frac{y}{(x^2+y^2)} dx \right) &= \int_0^{2\pi} \gamma^* \left(\frac{x}{(x^2+y^2)} dy + \frac{y}{(x^2+y^2)} dx \right) \\ &= \int_0^{2\pi} (\cos(t)\cos(t)dt + \sin(t)\sin(t)dt) \\ &= 2\pi \end{aligned}$$

La prueba del lema es la unión de ambas igualdades.

Lema 1.9. Sea $f(z)$ una función holomorfa en U y C_r un círculo de radio r con centro en a , entonces:

$$\int_{C_r} \frac{f(a)}{z-a} dz = 2\pi i f(a)$$

Demostración. Sabemos que:

$$2\pi i f(a) = \int_{C_r} \frac{f(a)}{z-a} dz$$

Para cualquier r , $|f(z) - f(a)| < \epsilon_r$ y $\epsilon_r \rightarrow 0$ cuando $r \rightarrow 0$. Dado que la integral anterior no depende de r ,

$$\left| \int_{C_r} \frac{f(a)}{z-a} dz - \int_{C_r} \frac{f(z)}{z-a} dz \right| \leq \int_{C_r} \frac{|f(a) - f(z)|}{|z-a|} dz \leq C\epsilon_r$$

Donde $C = \int_{C_r} \frac{1}{|z-a|} dz$.

Cuando $r \rightarrow 0$ las desigualdades se conservan y con ello se corrobora la igualdad original.

Finalmente podemos probar la *fórmula integral de Cauchy*

Teorema 1.13 (Fórmula integral de Cauchy). Sean f una función holomorfa en U y γ una curva cerrada en U que no pasa a través de $a \in U$,

$$\frac{1}{2\pi} \oint_{\gamma} \frac{f(z)}{z-a} dz = W(\gamma, a) f(a).$$

Demostración. Sabemos que si γ es una curva cerrada, entonces.

$$\oint_{\gamma} \omega = W(\gamma, a) \int_{C_1} \omega.$$

Por lo que nuestro resultado se traduce en que:

$$\oint_{\gamma} \frac{f(z)}{z-a} dz = W(\gamma, a) \int_{C_r} \frac{f(z)}{z-a} dz = iW(\gamma, a)2\pi f(a).$$

Si fuese necesario, recomendamos lectura rápida de [8] en la sección de formas diferenciales, le recordamos que existe una versión traducida que edita la Facultad de Ciencias de la UNAM.

1.3. Grupos topológicos y su geometría.

En esta sección establecemos las definiciones y conceptos concernientes a grupos topológicos que son retomados en el último capítulo. Son importantes pues la clasificación de los grupos de automorfismos que estudiaremos, está dada en términos de propiedades topológicas y algebraicas; el concepto de grupo topológico relaciona ambas.

Para esta breve introducción nos hemos basado en [4, cap. I,II,III,IV,V], y tratado de presentar una versión digerida y orientada a nuestros fines, cualquier omisión claramente es nuestra responsabilidad.

Grupos topológicos.

Comenzamos con la siguiente definición:

Definición 1.5 (Grupo topológico). *Un grupo topológico G es un grupo, que visto como un conjunto, está dotado de una topología τ y donde ambas estructuras (algebraica y topológica) están relacionadas de la siguiente manera:*

- Para todo $x \in G$ el mapeo, $x \rightarrow x^{-1}$ (de G en G), es continuo con la topología τ .
- Y el mapeo $(x, y) \rightarrow xy$ (de $G \times G$ en G) es continuo respecto a la topología τ .

Dos grupos topológicos son *isomorfos* cuando existe una biyección entre ellos, que es al mismo tiempo un isomorfismo de grupos y un homeomorfismo. Es decir, son equivalentes como grupo y como espacio topológico.

Un grupo topológico G es *discreto* si la topología en G es la topología discreta.

Proposición 1.1. *Sea G un grupo topológico, para todo $y \in G$, el mapeo $x \rightarrow xy$ es un homeomorfismo de G en si mismo. Lo mismo es verdadero para el mapeo $x \rightarrow yx$.*

Demostración. *Notemos que para todo $y \in G$, el espacio $G \times \{y\}$ tiene una topología natural dada por $A \times \{y\}$, donde A es un abierto para G . El mapeo $x \rightarrow (x, y)$ es claramente un homeomorfismo de G en $G \times \{y\}$, así mismo $(x, y) \rightarrow xy$ es un mapeo continuo de $G \times \{y\}$ en G (pues lo es en todo $G \times G$). Por lo tanto la composición de ambas es un homeomorfismo.*

Corolario 1.1. *Sea G un grupo topológico y $x \in G$ tal que $\{x\}$ es abierto. Para toda $y \in G$, $\{y\}$ es un abierto y por tanto G es discreto.*

Dados un grupo topológico G y $a \in G$, podemos definir los siguientes operadores:

$$\begin{aligned}\phi(x) &= xax^{-1}. \\ \psi(x) &= xax^{-1}a^{-1} = [x; a].\end{aligned}$$

Usando inducción sobre n :

$$\phi^n(x) = \psi^n(x)a.$$

En ciertas circunstancias las iteradas $\psi^n(x)$ del *conmutador* convergen a la identidad y dada la última igualdad, $\phi^n(x)$ converge a su único punto fijo a .

Si el grupo en cuestión es discreto, $\phi^n(x) = a$ a partir de una n lo suficientemente grande. Sea G un grupo topológico y H un subgrupo normal de G denotado $H \triangleleft G$. G/H tiene la estructura usual del grupo cociente con la topología cociente.

Teorema 1.14. *Si $H \triangleleft G$, G/H con las estructuras usuales es un grupo topológico.*

1.3.1. Matrices no singulares y su métrica.

Una matriz con coeficientes complejos:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

induce una transformación de Möbius g :

$$g(z) = \frac{az + b}{dz + b},$$

si y sólo si A es una matriz no singular, es decir si su determinante, $\det(A) = ad - bc$ es distinto de cero, el grupo de matrices complejas no singulares es el *grupo general lineal* $GL(2, \mathbb{C})$. Aquellas cuyo determinante es igual a uno conforman el *grupo especial lineal*,

$SL(2, \mathbb{C})$.

La *traza* de una matriz A está definida por:

$$\text{tr}(A) = a + d.$$

La traza es invariante bajo conjugaciones y transposiciones, además de sacar escalares. Definimos la matriz Hermitiana transpuesta A^* de A como:

$$A^* = (\overline{A})^t = \begin{pmatrix} \overline{a} & \overline{c} \\ \overline{b} & \overline{d} \end{pmatrix}.$$

Dadas dos matrices

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix},$$

definimos entre ellas un producto escalar $[A, B]$ como:

$$[A, B] = \text{tr}(AB^*) = a\overline{\alpha} + b\overline{\beta} + c\overline{\gamma} + d\overline{\delta}.$$

Como cualquier producto escalar, $[x, y]$ induce la norma $[x, x]^{\frac{1}{2}}$ y la métrica $[x - y, x - y]^{\frac{1}{2}}$. En nuestro caso la norma $\|A\|$ está dada explícitamente:

$$\|A\| = [A, A]^{\frac{1}{2}} = (|a|^2 + |b|^2 + |c|^2 + |d|^2)^{\frac{1}{2}}.$$

1.3.2. Grupos discretos.

En esta sección nuestra atención estará puesta en los subgrupos del grupo topológico $GL(2, \mathbb{C})$. Recordamos que un subgrupo G de $GL(2, \mathbb{C})$ es discreto si y sólo si como subespacio topológico tiene la topología discreta. Se sigue que si $X, A_1, A_2 \dots$ están en G y $A_n \rightarrow X$ entonces $A_n = X$ para toda n lo suficientemente grande. No es necesario suponer que $X \in G$, basta que $X \in GL(2, \mathbb{C})$.

Regresando al caso de G subgrupo discreto,

$$A_n(A_{n+1})^{-1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} XX^{-1} = I$$

y por lo tanto $A_n = A_{n+1}$ para casi toda n .

Si deseamos probar que un cierto grupo G es discreto, basta ver que hay un punto en G que es aislado y en particular que la identidad lo es. Que es equivalente a que se verifique que:

$$\inf\{\|X - I\| : X \in G, X \neq I\} > 0,$$

i.e. que $\{I\}$ es un abierto en G .

En término de sucesiones, G es discreto si y sólo si para toda sucesión $\{A_n\} \subset G$, tal que $A_n \rightarrow I$, $A_n = I$ para casi todo n .

Al trabajar con $SL(2, \mathbb{C})$ obtenemos una formulación para la topología discreta en términos de la norma.

Lema 1.10. *El subgrupo $G \leq SL(2, \mathbb{C})$ es discreto si y sólo si, para cada entero positivo k , el conjunto:*

$$\{A \in G : \|A\| \leq k\}$$

es finito.

Este criterio muestra que un grupo discreto G en $SL(2, \mathbb{C})$ debe ser a lo más numerable. Y de hecho,

$$G = \cup_{n=1}^{\infty} G_n,$$

donde

$$G_n = \{A \in G : \|A\| \leq k\}.$$

Cualquier subgrupo de un grupo discreto, es discreto.

Si G es discreto, cualquier grupo conjugado de G , (i.e. BGB^{-1}) lo es también. Esto se debe a que $X \rightarrow BXB^{-1}$ es un homeomorfismo de $GL(2, \mathbb{C})$ en sí mismo.

1.3.3. El Grupo de Möbius sobre \mathbb{R}^n .

Más allá de las propiedades que son por demás conocidas de las transformaciones de Möbius, en este capítulo estudiaremos algunas que consideramos necesarias para exposiciones futuras.

La esfera con centro en a y radio r , $S(a, r)$ en \mathbb{R}^n está dada por:

$$S(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - a| = r\}$$

La reflexión en $S(a, r)$ es la función ϕ definida por:

$$\phi(x) = a + \left(\frac{r}{|x - a|} \right)^2 (x - a). \quad (1.1)$$

Si denotamos $x \rightarrow x^*$ con $x^* = \frac{x}{|x|^2}$ la fórmula general de 1.1 está dada por:

$$\phi(x) = a + r^2(x - a)^*$$

Falta definir esta reflexión ϕ en $x = a$. Para esto adjuntamos a \mathbb{R}^n un punto al que denotamos ∞ y formamos la unión:

$$\hat{\mathbb{R}}^n = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}.$$

A lo que denominamos el espacio \mathbb{R}^n extendido.

Naturalmente $|\phi(x)| \rightarrow +\infty$ cuando $x \rightarrow a$, por lo que definimos $\phi(a) = \infty$. Así, la reflexión ϕ actúa en $\hat{\mathbb{R}}^n$ y es una función biyectiva que tiene como únicos puntos fijos a

$S(a, r)$.

Definimos un plano, $P(a, t)$, con $t \in \mathbb{R}$, contenido en $\hat{\mathbb{R}}^n$ como un conjunto de la forma:

$$P(a, t) = \{x \in \mathbb{R}^n : (x \cdot a) = t\} \cup \{\infty\},$$

Donde $(x \cdot a)$ es el producto interior usual en \mathbb{R}^n . Por definición ∞ está en todos los planos $P(a, t)$.

Una reflexión ϕ en el plano $P(a, t)$ se define como:

$$\phi(x) = x + \lambda a,$$

donde el parámetro real λ es tal que $\frac{1}{2}(x + \phi(x))$ está en $P(a, t)$, dándonos una fórmula explícita para ϕ :

$$\phi(x) = x - 2[(x \cdot a) - t]a^*, \quad (1.2)$$

cuando $x \in \mathbb{R}^n$ y $\phi(\infty) = \infty$. Nuevamente, ϕ actúa sobre $\hat{\mathbb{R}}^n$, es un mapeo biyectivo y el conjunto de puntos fijos de la transformación es $P(a, t)$.

Con la métrica usual en \mathbb{R}^n las reflexiones son continuas, sin embargo no tenemos clara la noción de continuidad en ∞ y $\phi^{-1}(\infty)$. Debemos construir una métrica definida en todo $\hat{\mathbb{R}}^n$ y que haga a ϕ continua en todo el espacio extendido.

El espacio $\hat{\mathbb{R}}^n$ es inmerso de forma natural en $\hat{\mathbb{R}}^{n+1}$ mandando $x \rightarrow \tilde{x}$ donde:

$$x = (x_1, \dots, x_n), \quad \tilde{x} = (x_1, \dots, x_n, 0).$$

Por supuesto $\tilde{\infty} = \infty$. De esta forma $x \rightarrow \tilde{x}$ es un mapeo biyectivo de $\hat{\mathbb{R}}^n$ en el plano x_{n+1} contenido en $\hat{\mathbb{R}}^{n+1}$.

El plano $P(e_{n+1}, 0)$ puede ser mapeado de forma biyectiva en la esfera $S^n \equiv S(0, 1) \subset \hat{\mathbb{R}}^{n+1}$, al proyectar \tilde{x} desde e_{n+1} , y tomar como $\pi(x)$ al único punto aparte de e_{n+1} que interseca a la esfera.

El mapeo π es conocido como la *proyección estereográfica* de $\hat{\mathbb{R}}^n$ en S^n . Esta proyección no es única, podemos hacer esto mismo proyectando desde $a \in S^n$ al plano $P(a, 0)$, que es topológicamente, diferenciablemente y conformemente equivalente a $P(e_{n+1}, 0)$, éstas también son proyecciones estereográficas. Existe para π , una descripción analítica:

$$\phi(x) = \left(\frac{2x_1}{|x|^2 + 1}, \dots, \frac{2x_n}{|x|^2 + 1}, \frac{|x|^2 - 1}{|x|^2 + 1} \right) \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

donde por definición $\pi(\infty) = e_{n+1}$.

Como $x \rightarrow \pi(\tilde{x})$ es biyectiva, podemos transferir la métrica euclidiana de S^n a una métrica d en $\hat{\mathbb{R}}^n$, denominada *métrica cordal* y definida como:

$$d(x, y) = |\pi(\tilde{x}) - \pi(\tilde{y})|, \quad x, y \in \hat{\mathbb{R}}^n.$$

Una cuenta tediosa pero simple muestra que:

$$d(x, y) = \begin{cases} \frac{2|x-y|}{(1+|x|^2)^{\frac{1}{2}}(1+|y|^2)^{\frac{1}{2}}} & \text{si } x, y \neq \infty \\ \frac{2}{(1+|x|^2)^{\frac{1}{2}}} & \text{si } y = \infty \end{cases} \quad (1.3)$$

Esta fórmula muestra que la métrica d restringida a \mathbb{R}^n induce la misma topología que la métrica euclidiana. Y con ella, toda reflexión es continua.

Definición 1.6 (Transformaciones de Möbius). *Una transformación de Möbius que actúa en $\hat{\mathbb{R}}^n$ es la composición de una cantidad finita de reflexiones (en esferas o planos).*

Definición 1.7. *El grupo de transformaciones de Möbius actuando en $\hat{\mathbb{R}}^n$ es llamado grupo general de Möbius y es denotado por $GM(\hat{\mathbb{R}}^n)$.*

Teorema 1.15. *Toda reflexión es conforme e invierte la orientación.*

Definición 1.8. *El grupo de Möbius $M(\hat{\mathbb{R}}^n)$ actuando en $\hat{\mathbb{R}}^n$ es el subgrupo de $GM(\hat{\mathbb{R}}^n)$ que consiste en todas las transformaciones de Möbius que preservan la orientación.*

Sea σ una reflexión en la esfera $S(a, r)$, la siguiente es una fórmula bastante útil,

$$|\sigma(x) - \sigma(y)| = r^* ((y - a)^* - (x - a)^*). \quad (1.4)$$

Enunciamos a continuación algunas propiedades importantes para las cuales usaremos el término *esfera* para referirnos a una esfera de la forma $S(a, r)$ o bien a un plano.

Teorema 1.16. *Sea ϕ una transformación de Möbius y Σ una esfera. Entonces, $\phi(\Sigma)$ es también una esfera.*

La ecuación que define a una esfera Σ ($S(a, r)$ o $P(a, t)$) es:

$$|x|^2 - 2(x \cdot a) + |a|^2 - r^2 = 0,$$

ó

$$-2(x \cdot a) + 2t = 0,$$

que pueden ser descritas con la fórmula general,

$$a_0|x|^2 - 2(x \cdot a) + a_{n+1} = 0,$$

Donde $a = (a_1, \dots, a_n)$, $a_0 = 0, 1$ y $a_{n+1} = -r^2, 2t$.

Denominamos *vector coeficiente* de Σ a $(a_0, a_1, \dots, a_{n+1})$, el cual está únicamente determinado, excepto por un múltiplo escalar real distinto de cero. Más aun, en cualquier caso se verifica que,

$$|a|^2 = a_0 a_{n+1}.$$

Definición 1.9. *Sean Σ y Σ' dos esferas con vectores coeficientes (a_0, \dots, a_{n+1}) y (b_0, \dots, b_{n+1}) respectivamente. El producto inverso (Σ, Σ') de Σ y Σ' es:*

$$(\Sigma, \Sigma') = \frac{|2(a \cdot b) - a_0 b_{n+1} - a_{n+1} b_0|}{2(|a|^2 - a_0 a_{n+1})^{\frac{1}{2}} (|b|^2 - b_0 b_{n+1})^{\frac{1}{2}}} \quad (1.5)$$

Dos esferas Σ y Σ' son *ortogonales* si $(\Sigma, \Sigma') = 0$.

Teorema 1.17. *Para cualquier transformación de Möbius ϕ y cualesquiera esferas Σ y Σ' ,*

$$(\phi(\Sigma), \phi(\Sigma')) = (\Sigma, \Sigma').$$

Teorema 1.18. *Sean Σ una esfera, σ la reflexión en Σ y I el mapeo identidad. Si ϕ es cualquier transformación de Möbius que fija a todo punto $x \in \Sigma$, $\phi = I$ o $\phi = \sigma$.*

Corolario 1.2. *Cualesquiera dos reflexiones son conjugadas en $GM(\hat{\mathbb{R}}^n)$.*

Demostración. *Sean Σ_1, σ_1 y Σ_2, σ_2 dos esferas (planos) y sus respectivas reflexiones. Existe $\psi \in GM(\hat{\mathbb{R}}^n)$ tal que:*

$$\psi(\Sigma_1) = \Sigma_2.$$

$\psi\sigma_1\psi^{-1}$ fija a todos los puntos de Σ_2 y no es la identidad, el lema anterior nos asegura que:

$$\psi\sigma_1\psi^{-1} = \sigma_2.$$

Sea σ la reflexión en la esfera Σ , dos puntos x, y son inversos con respecto a Σ si y sólo si, $y = \sigma(x)$. Por supuesto $x = \sigma(y)$.

Teorema 1.19. *Sean x, y puntos inversos con respecto a una esfera Σ y sea ϕ una transformación de Möbius. $\phi(x)$ y $\phi(y)$ son puntos inversos con respecto a la esfera $\phi(\Sigma)$.*

Demostración. *Sea σ_1 la reflexión en la esfera $\phi(\Sigma)$, sabemos que es conjugada de σ y por tanto, $\phi^{-1}\sigma_1\phi = \sigma$, o de forma equivalente, $\sigma_1\phi = \phi\sigma$. Por lo tanto, para x, y inversos respecto a Σ :*

$$\sigma_1\phi(x) = \phi\sigma(x) = \phi(y).$$

Es decir que σ_1 mapea a $\phi(x)$ en $\phi(y)$ y por tanto son puntos inversos respecto a $\phi(\Sigma)$.

Definición 1.10 (Razón cruzada). *Dados cuatro distintos puntos $x, y, u, v \in \mathbb{R}^n$, definimos la razón cruzada de esos puntos como:*

$$[x, y, u, v] = \frac{d(x, u)d(y, v)}{d(x, y)d(u, v)}. \quad (1.6)$$

Usando la expresión obtenida en 1.3 para la métrica cordal, la anterior definición tiene la siguiente forma:

$$[x, y, u, v] = \frac{|x - u| \cdot |y - v|}{|x - y| \cdot |u - v|}.$$

Teorema 1.20. *Un mapeo $\phi : \hat{\mathbb{R}}^n \rightarrow \hat{\mathbb{R}}^n$ es una transformación de Möbius si y sólo si preserva la razón cruzada.*

La extensión de Poincaré.

Poincaré observó que cada transformación de Möbius ϕ actuando en $\hat{\mathbb{R}}^n$ tiene una extensión natural a una transformación de Möbius $\tilde{\phi}$ que actúa en $\hat{\mathbb{R}}^{n+1}$ y de esta forma $GM(\hat{\mathbb{R}}^n)$ puede ser estudiado como subgrupo de $GM(\hat{\mathbb{R}}^{n+1})$. Esta extensión depende de la inmersión $x \rightarrow \tilde{x}$, que ya hemos definido.

Para cada reflexión ϕ actuando en $\hat{\mathbb{R}}^n$ definimos una reflexión $\tilde{\phi}$ como sigue:

Si ϕ es la reflexión en $S(a, r)$, $a \in \mathbb{R}^n$, entonces $\tilde{\phi}$ es la reflexión en $S(\tilde{a}, r)$; si ϕ es la reflexión en $P(a, t)$, entonces $\tilde{\phi}$ es la reflexión en $P(\tilde{a}, t)$.

Si $x \in \mathbb{R}^n$ y $y = \phi(x)$ entonces de 1.1 y 1.2:

$$\tilde{\phi}(x_1, \dots, x_n, 0) = (y, \dots, y_n, 0) = \tilde{\phi}(x). \quad (1.7)$$

Y en ese sentido $\tilde{\phi}$ extiende a ϕ . De forma alternativa, podemos identificar a \mathbb{R}^n con $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ y escribir 1.7 como:

$$\tilde{\phi}(x, 0) = (\phi(x), 0).$$

Es fácil notar que $\tilde{\phi}$ deja invariante al plano x_{n+1} , y a cada uno de los semiespacios $x_{n+1} < 0$ y $x_{n+1} > 0$, para esto sólo observemos que la coordenada $(n+1)$ de $\tilde{\phi}(x)$ conserva el signo de la coordenada $n+1$ de x , que se deduce de las fórmulas generales 1.1 y 1.2.

Toda transformación de Möbius ϕ que actúa en $\hat{\mathbb{R}}^n$, es la composición de una cantidad finita de reflexiones ϕ_j , es decir $\phi = \phi_1 \cdots \phi_j$, por tanto, existe al menos una transformación de Möbius $\tilde{\phi} = \tilde{\phi}_1 \cdots \tilde{\phi}_j$, que extiende la acción de ϕ a $\hat{\mathbb{R}}^{n+1}$ en el sentido de 1.7 y que además preserva:

$$\mathbb{H}^{n+1} = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) : x_{n+1} > 0\}.$$

De hecho sólo puede existir una. Si ψ_1, ψ_2 son dos extensiones de la misma transformación ϕ , $\psi_2^{-1}\psi_1$, fija a los puntos en el plano $x_{n+1} = 0$ y por tanto, es la reflexión en dicho plano, o la identidad, como deja invariante a \mathbb{H}^{n+1} , sólo puede ser la identidad y por tanto $\psi_1 = \psi_2$.

Definición 1.11 (Extensión de Poincaré). *La extensión de Poincaré de ϕ en $GM(\hat{\mathbb{R}}^n)$ es la transformación $\tilde{\phi}$ en $GM(\hat{\mathbb{R}}^{n+1})$ definida anteriormente.*

Notemos que si $\phi = \phi_1 \cdots \phi_m$ y $\psi = \psi_1 \cdots \psi_n$ están en $GM(\hat{\mathbb{R}}^{n+1})$, la extensión de Poincaré de $\phi\psi$ está dada por:

$$\tilde{\phi}\psi = (\phi_1 \cdots \phi_m \psi_1 \cdots \psi_n) = \tilde{\phi}_1 \cdots \tilde{\phi}_m \tilde{\psi}_1 \cdots \tilde{\psi}_n = \tilde{\phi}\tilde{\psi}.$$

Centremos ahora nuestra atención en la acción de la extensión de Poincaré $\tilde{\phi}$ en \mathbb{H}^{n+1} . Si ϕ es una reflexión en la esfera $S(\tilde{a}, r)$ con $a \in \mathbb{R}^n$ sabemos que:

$$\frac{|\tilde{\phi}(x) - \tilde{\phi}(y)|}{|y - x|} = \frac{r^2}{|x - \tilde{a}||y - \tilde{a}|}.$$

Denotamos $[\tilde{\phi}(x)]_j$ a la coordenada j de $\tilde{\phi}(x)$, de la fórmula general de las reflexiones en la esfera:

$$[\tilde{\phi}(x)]_{n+1} = \frac{r^2 x_{n+1}}{|x - \tilde{a}|^2}$$

Usando las anteriores expresiones:

$$\begin{aligned} \frac{|\tilde{\phi}(x) - \tilde{\phi}(y)|^2}{[\tilde{\phi}(x)]_{n+1}[\tilde{\phi}(y)]_{n+1}} &= \frac{r^4 |y - x|^2}{|x - \tilde{a}|^2 |y - \tilde{a}|^2} \cdot \frac{|x - \tilde{a}|^2}{r^2 x_{n+1}} \cdot \frac{|y - \tilde{a}|^2}{r^2 y_{n+1}} \\ &= \frac{|x - y|^2}{x_{n+1} y_{n+1}}. \end{aligned}$$

Lo cual nos dice que la expresión

$$\frac{|x - y|^2}{x_{n+1} y_{n+1}}, \quad (1.8)$$

es invariante bajo reflexiones en la esfera. Sea ahora $\tilde{\phi}$ la reflexión en el plano $P(\tilde{a}, t)$ con $a \in \mathbb{R}^n$. $\tilde{\phi}$ es una isometría euclidiana y más aún:

$$[\tilde{\phi}(x)]_{n+1} = x_{n+1}$$

Lo cual nos dice que bajo esta reflexión 1.8 también es invariante. Concluimos entonces que es invariante bajo todas las extensiones de Poincaré.

Una consecuencia inmediata es que la extensión de Poincaré de cualquier $\phi \in GM(\hat{\mathbb{R}}^n)$ es una isometría en \mathbb{H}^{n+1} con la métrica riemanniana ρ dada por:

$$ds = \frac{|dx|}{x_{n+1}}.$$

\mathbb{H}^{n+1} con la métrica riemanniana ρ es nuestro primer modelo de espacio hiperbólico, a ρ se le denomina métrica hiperbólica.

Una de las representaciones usuales del espacio hiperbólico \mathbb{H}^{n+1} es el disco unitario B^{n+1} , un resultado útil e interesante es que $GM(\hat{\mathbb{R}}^n)$ es conjugado en $GM(\hat{\mathbb{R}}^{n+1})$ del subgrupo en $GM(\hat{\mathbb{R}}^{n+1})$ que deja invariante al disco B^{n+1} . Para este modelo es conocido que si $x \in B^{n+1}$:

$$\rho(x, 0) = \log \left(\frac{1 + |x|}{1 - |x|} \right).$$

Más propiedades interesantes pueden resultar de estudiar la extensión de Poincaré de $GM(\hat{\mathbb{R}}^n)$ como subgrupo de $GM(\hat{\mathbb{R}}^{n+1})$. Sin embargo concluimos nuestro estudio probando que $GM(\hat{\mathbb{R}}^n)$ tiene estructura de grupo topológico y comentando el caso de $\hat{\mathbb{R}}^2$.

La estructura Topológica de $GM(\hat{\mathbb{R}}^n)$.

Uno de los más importantes teoremas de distorsión para las transformaciones de Möbius nos dice que:

Teorema 1.21. *Sea ϕ una transformación de Möbius actuando en $\hat{\mathbb{R}}^n$ y sea ρ la métrica hiperbólica en \mathbb{H}^{n+1} . Entonces:*

$$\sup_{x,y \in \hat{\mathbb{R}}^n} \frac{d(\phi(x), \phi(y))}{d(x, y)} = \exp(\rho(e_{n+1}, \phi(e_{n+1}))). \quad (1.9)$$

Asumámoslo.

Con la métrica cordal el espacio $\hat{\mathbb{R}}^n$ es compacto y todo elemento en $GM(\hat{\mathbb{R}}^n)$ lo mapea en sí mismo, por lo que la métrica de la convergencia uniforme en $GM(\hat{\mathbb{R}}^n)$ definida como:

$$D(\phi, \psi) = \sup\{d(\phi(x), \psi(x)) : x \in (\hat{\mathbb{R}}^n)\}.$$

tiene sentido. Está es la métrica de la convergencia uniforme respecto a la métrica cordal.

Teorema 1.22. *$GM(\hat{\mathbb{R}}^n)$ es un grupo topológico con respecto a la métrica D .*

Demostración. *El teorema anterior nos dice que para cada $\phi \in GM(\hat{\mathbb{R}}^n)$, existe una constante positiva $c(\phi) = \exp \rho(e_{n+1}, \phi(e_{n+1}))$ tal que, para toda $x, y \in \hat{\mathbb{R}}^n$:*

$$d(\phi(x), \phi(y)) \leq c(\phi)d(x, y).$$

Claramente, para cualesquiera ϕ_1, ϕ_2 y ψ también se tiene que:

$$D(\phi_1\psi, \phi_2\psi) = \sup\{d(\phi_1\psi(x), \phi_2\psi(x)) : x \in (\hat{\mathbb{R}}^n)\}.$$

Si hacemos $y = \psi(x)$,

$$\sup\{d(\phi_1\psi(x), \phi_2\psi(x)) : x \in (\hat{\mathbb{R}}^n)\} = \sup\{d(\phi_1(y), \phi_2(y)) : y \in (\hat{\mathbb{R}}^n)\} = D(\phi_1, \phi_2).$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} D(\phi\psi, \phi_1\psi_1) &\leq D(\phi\psi, \phi_1\psi) + D(\phi_1\psi, \phi_1\psi_1) \\ &\leq D(\phi, \phi_1) + c(\phi_1)D(\psi, \psi_1). \end{aligned} \quad (1.10)$$

De esta forma, el mapeo $(\phi, \psi) \rightarrow \phi\psi$ es un mapeo continuo en cualquier punto (ϕ_1, ψ_1) . De manera similar el mapeo $\psi \rightarrow \psi^{-1}$ es continuo en ϕ ,

$$\begin{aligned} D(\phi^{-1}, \psi^{-1}) &= D(\phi^{-1}\psi, \psi^{-1}\psi) = D(\phi^{-1}\psi, I) = \\ &= D(\phi^{-1}\psi, \phi^{-1}\phi) \leq c(\phi^{-1})D(\psi, \phi). \end{aligned}$$

1.3.4. Transformaciones de Möbius complejas.

Las transformaciones de Möbius usualmente son representadas como mapeos de la forma:

$$g(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad (1.11)$$

Donde los coeficientes $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ y $ad - bc \neq 0$. La función g se define de manera pertinente en los puntos de conflicto de forma que actúa biyectivamente en $\hat{\mathbb{C}}^{\text{IV}}$. Se puede observar que g^{-1} es también de la forma 1.11.

Definición 1.12. *Definimos como \mathcal{M} a la clase de las funciones de Möbius de la forma 1.11.*

Claramente \mathcal{M} es un grupo de funciones y el siguiente teorema nos dice quién es explícitamente este grupo.

Teorema 1.23. $\mathcal{M} = M(\hat{\mathbb{R}}^2)$.

Demostración. *En el caso de dimensión 2, donde hemos identificado a $\hat{\mathbb{C}} (\cong \hat{\mathbb{R}}^2)$ con la esfera de Riemann, los reflexiones en esferas o planos, son transformaciones que no invierten la orientación y tienen la forma:*

$$z \rightarrow \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d} \quad ab - cd \neq 0.$$

Si componemos dos de estos mapeos, obtenemos uno que está contenido en \mathcal{M} , por lo tanto $M(\hat{\mathbb{R}}^2) \subset \mathcal{M}$.

Ahora supongamos que $g \in \mathcal{M}$ y tiene la forma de 1.11. Si $c = 0$ entonces g es bien una translación o una rotación compuesta por una expansión, digamos:

$$g(z) = \alpha + \frac{a}{b}(z - \alpha)$$

para alguna α . En cualquier caso son generadas por un número par de reflexiones y por tanto $g \in M(\hat{\mathbb{R}}^2)$.

Asumamos ahora que $c \neq 0$. El círculo isométrico Q_g de g es:

$$Q_g = \{z \in \mathbb{C} : |cz + d| = |ab - bc|^{\frac{1}{2}}\},$$

que es el círculo $S(\frac{-d}{c}, \frac{ad-bc}{c})$.

Sean $z, w \in Q_g$:

$$|g(z) - g(w)| = \left| \frac{(ad - bc)(z - w)}{(cz + d)(cw + d)} \right| = |z - w|.$$

Usando la fórmula 1.4 se puede corroborar que σ , la reflexión en el círculo isométrico de g , también cumple esta propiedad. Por lo tanto $\phi = g\sigma$ también la comparte.

La fórmula 1.1 para las reflexiones en una esfera nos dice que:

$$\sigma(z) = \frac{-d}{c} + \frac{|ad - bc|}{|c|^2} \frac{(z + \frac{d}{c})}{|z + \frac{d}{c}|^2}.$$

^{IV}En esta sección usamos $\hat{\mathbb{C}}$, para denotar el plano complejo extendido, pues es la notación clásica al exponer estos temas. Sin embargo, nosotros usamos \mathbb{C}_∞ cuando nos referimos más adelante a la esfera de Riemann, que en ese momento no distinguimos cualitativamente de $\hat{\mathbb{C}}$.

Y por lo tanto,

$$\begin{aligned}\phi(z) &= g(\sigma(z)) = \frac{a\sigma(z) + b}{c\sigma(z) + d} \\ &= \frac{a[c\sigma(z) + d] - (ad - dc)}{c[c\sigma(z) + d]} = \frac{a}{c} - \frac{u}{c|u|} \overline{(cz + d)}\end{aligned}\tag{1.12}$$

donde hemos denotado $u = ad - bc$.

Por lo tanto el mapeo $\phi(z) = \alpha\bar{z} + \beta$ con $|\alpha| = 1$ es obtenido como la composición de un número impar de reflexiones y $g \in \mathcal{M}$ por ser la composición de un número par de reflexiones.

Por lo tanto $\mathcal{M} = M(\hat{\mathbb{R}}^2)$.

Este teorema establece una caracterización de las transformaciones de Möbius con las que estaremos trabajando, en lo posterior usaremos una u otra según nos convenga.

Teorema 1.24. Sean z_1, z_2, z_3 y w_1, w_2, w_3 , puntos cualesquiera en $\hat{\mathbb{C}}$. Existe una única transformación de Möbius que mapea a z_1, z_2, z_3 en w_1, w_2, w_3 , respectivamente.

Un cuaternión es una matriz compleja de 2×2 de la forma:

$$q = \begin{pmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{pmatrix}.\tag{1.13}$$

El conjunto de los cuaterniones \mathcal{H} verifican:

- i) \mathcal{H} es un grupo abeliano con respecto a la adición;
- ii) Los cuaterniones distintos de cero forman un grupo no abeliano con respecto a la multiplicación;
- iii) \mathcal{H} es un espacio vectorial real de dimensión cuatro con base:

$$\begin{aligned}\mathbf{1} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \mathbf{i} &= \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \\ \mathbf{j} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} & \mathbf{k} &= \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

donde la suma y la multiplicación de cuaterniones obedecen a las reglas de suma y multiplicación de matrices.

Los cuaterniones contienen una copia de \mathbb{C} a través del mapeo:

$$x + iy \rightarrow x\mathbf{1} + y\mathbf{i}.$$

Un punto $(x, y, t) \in \mathbb{R}^3$ es representado con el cuaternión:

$$x + y\mathbf{i} + t\mathbf{j}. \quad (1.14)$$

Sea $g \in \mathcal{M}$, si el cuaternión 1.14 es de la forma $z + tj$, donde $z = x + iy$. La extensión de Poincaré de g es dada por:

$$g(z + tj) = \frac{(az + b)\overline{(cz + d)} + a\bar{c}t^2 + |ad - bc|tj}{|cz + d|^2 + |c|^2t^2}. \quad (1.15)$$

Una matriz es unitaria si:

$$AA^* = I.$$

Cualquier matriz unitaria cumple que:

$$1 = \det(A)\det(A^*) = |\det(A)|^2.$$

A la clase de matrices unitarias complejas con determinante uno las denotamos por $SU(2, \mathbb{C})$.

Teorema 1.25. *Sea A una matriz en $SL(2, \mathbb{C})$. Las siguientes proposiciones son equivalentes y caracterizan a los elementos de $SU(2, \mathbb{C})$.*

- i) A es unitaria;*
- ii) $\|A\|^2 = 2$;*
- iii) A es un cuaternión.*

Teorema 1.26. *Sea $A \in SU(2, \mathbb{C})$. El mapeo $X \rightarrow AXA^{-1}$ es una isometría del espacio de matrices en sí mismo.*

Cualquier matriz compleja de 2×2 en $GL(2, \mathbb{C})$ induce un mapeo g en \mathcal{M} a través de la fórmula $A \rightarrow g_A$, donde:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad g_A(z) = \frac{az + b}{cz + d}.$$

Denotamos por Φ al mapeo $A \rightarrow g_A$ que es una inmersión de $GL(2, \mathbb{C})$ en \mathcal{M} y decimos que A se proyecta en un representante g_A . Una cuenta sencilla nos muestra que:

$$g_A g_B = g_{AB},$$

con lo cual Φ es un morfismo de grupos.
 A es elemento del kernel K de Φ si y sólo si,

$$\frac{az + b}{cz + d} = z \quad \forall z \in \hat{\mathbb{C}}.$$

Utilizando $z = 1, 0, \infty$ obtenemos que :

$$K = \text{Ker } \Phi = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} : a \neq 0 \right\}.$$

Por tanto \mathcal{M} es isomorfo a $GL(2, \mathbb{C})/K$. Que en términos menos formales nos dice que g_A determina a la matriz A excepto por un múltiplo escalar distinto de cero.
 Por lo general estamos más interesados en la restricción de Φ a $SL(2, \mathbb{C})$, donde el kernel de esta restricción es:

$$K_0 = K \cap SL(2, \mathbb{C}) = \{I, -I\}.$$

De esta manera, cada función g en \mathcal{M} es la proyección de dos matrices digamos A y $-A$.
 Deducimos entonces que \mathcal{M} es isomorfo a $SL(2, \mathbb{C})/\{I, -I\}$.

Las funciones,

$$\frac{\text{tr}^2(A)}{\det(A)}, \quad \frac{\|A\|^2}{|\det(A)|}, \quad A \in GL(2, \mathbb{C}),$$

son invariantes bajo la transformación $A \rightarrow \lambda A$, $\lambda \neq 0$ e inducen las funciones en \mathcal{M} :

$$\text{traza}^2(g) = \frac{\text{tr}^2(A)}{\det(A)} \quad \text{y} \quad \frac{\|A\|^2}{|\det(A)|^{\frac{1}{2}}}.$$

Donde A es una de las matrices que se proyecta en g . A menudo abreviamos $\text{tr}^2(g)$ para referirnos a $\text{traza}^2(g)$ y usamos $|\text{traza}(g)|$ para la raíz positiva de $\text{tr}^2(g)$. Obsérvese que $\text{traza}^2(g)$ es invariante bajo cualquier conjugación.

Teorema 1.27. *Para cada $g \in \mathcal{M}$ tenemos que:*

$$\|g\|^2 = 2 \cosh \rho(j, gj).$$

Teorema 1.28. *Las siguientes proposiciones son equivalentes:*

- i) $A \in SU(2, \mathbb{C})$;
- ii) $g(j) = j$ (donde g es la extensión de Poincaré de $g_a \equiv g$);
- iii) $\|g\|^2 = 2$;
- iv) fgf^{-1} es una transformación lineal ortogonal, con $f(w) = (w - j)(w + j)^{-1}j$ y $w = z + tj$;
- v) g es una isometría en $\hat{\mathbb{C}}$ con la métrica cordal d .

Puntos fijos y clases conjugadas.

Sea X un conjunto arbitrario, una *permutación* de X es una función biyectiva de X en X . Los *puntos fijos* de una permutación g , son aquellos $x \in X$ tales que $g(x) = x$, decimos en este caso que g fija a x .

Definición 1.13. Sean G cualquier grupo de permutaciones de X y $x \in X$. Definimos G_x , el estabilizador de x (en G), como:

$$G_x = \{g \in G : g(x) = x\}.$$

Definición 1.14 (G -órbitas). Definimos la órbita (o G -órbita) $G(x)$ de x , como el subconjunto de X dado por:

$$G(x) = \{g(x) \in X : g \in G\}.$$

Teorema 1.29. Para todas $h, g \in G$ un grupo de permutaciones, $h(x) = g(x)$ si y sólo si $hG_x = gG_x$.

Demostración. Si $hG_x = gG_x$, siempre existen $l_1, l_2 \in G_x$, tales que $h(l_1) = g(l_2)$, por tanto $h(x) = h(l_1)(x) = g(l_2)(x) = g(x)$.

Supongamos ahora que $h(x) = g(x)$. Entonces, para todo $l \in G_x$, $l_1 \equiv g^{-1}hl$ es elemento de G_x . Pues,

$$l_1(x) = g^{-1}hl(x) = g^{-1}h(l(x)) = g^{-1}(h(x)) = g^{-1}(g(x)) = x.$$

Por tanto $hl = gl_1$ y $hG_x = gG_x$.

Esto permite definir una correspondencia biyectiva entre el conjunto de clases en G/G_x (definidas por $[h] \equiv hG_x$) y los elementos en la órbita $G(x)$ de x , dada por $[h] \rightarrow h(x)$. La siguiente definición no está amarrada a que G sea un grupo de permutaciones.

Definición 1.15 (Subgrupos conjugados). Dos subgrupos, G_0 y G_1 de G , son conjugados si y sólo si existe un $h \in G$ tal que $G_0 = hG_1h^{-1}$.

Como $g \in G$ fija a x si sólo si hgh^{-1} fija a $h(x)$, se tiene que:

$$G_{h(x)} = hG_xh^{-1}$$

De donde, si x y y están en la misma órbita (ie $y = h(x)$) sus estabilizadores son conjugados.

Por supuesto, grupos conjugados son isomorfos y desde el punto de la acción geométrica (sobre \mathbb{C}_∞) también son equivalentes. En principio estamos interesados en acciones de subgrupos de \mathcal{M} , de forma que establecemos nuestros resultados con mira a que se conserven bajo conjugaciones.

Definición 1.16. Definimos F_g , como el conjunto de puntos fijos de g .

Lema 1.11. Si $hg = gh$,

$$h(F_g) = F_g \quad y \quad g(F_h) = F_h.$$

Demostración. Sea $x \in F_h$,

$$h(g(x)) = g(h(x)) = g(x).$$

Por tanto $g(x) \in F_h$ y $g(F_h) \subseteq F_h$. Además $F_h = F_{h^{-1}}$ y $h^{-1}g^{-1} = g^{-1}h^{-1}$, por tanto sustituyendo g por g^{-1} , concluimos que $g^{-1}(F_h) \subseteq F_h$ lo que pasa si y sólo si $(F_h) \subseteq gF_h$ lo cual prueba la igualdad.

Retornamos al estudio de los subgrupos G de M actuando sobre \mathbb{C}_∞ .

Se sabe que una transformación de Möbius distinta de la identidad, fija uno ó dos puntos en $\hat{\mathbb{C}}$. Esto insinúa una posible clasificación de subgrupos de Möbius con respecto al número de puntos fijos. Dicha clasificación es invariante bajo conjugaciones.

Es conveniente introducir cierto tipo de transformaciones de Möbius normalizadas.

Sea $k \in \mathbb{C}$ distinta de cero, definimos:

$$m_k(z) = kz \quad (\text{si } k \neq 1)$$

y

$$m_1(z) = z + 1 :$$

a las cuales llamamos *formas estándar*.

Para toda k :

$$\text{tr}^2(m_k) = k + \frac{1}{k} + 2.$$

Si $g (\neq I)$ es cualquier transformación de Möbius, fija dos puntos $\alpha, \beta \in \mathbb{C}_\infty$ ó bien tiene un único punto fijo $\alpha \in \mathbb{C}_\infty$ (en este caso escogemos cualquier otro punto $\beta \in \mathbb{C}_\infty$ distinto de α). Sea h cualquier transformación de Möbius tal que:

$$h(\alpha) = \infty, \quad h(\beta) = 0, \quad h(g(\beta)) = 1 \quad \text{si } g(\beta) \neq \beta,$$

y notemos que $hgh^{-1}(\infty) = \infty$ y :

$$hgh^{-1}(0) = \begin{cases} 0 & \text{si } g(\beta) = \beta \\ 1 & \text{si } g(\beta) \neq \beta \end{cases} .$$

Si g fija a α y β , hgh^{-1} fija a 0 e ∞ , por lo que g debe ser una rotación y existe $k (\neq 1)$ tal que $hgh^{-1}(z) = m_k(z)$.

Si g sólo fija a α , hgh^{-1} fija ∞ y $hgh^{-1}(0) = 1$ por tanto $hgh^{-1} = m_1$.

En cualquier caso $g (\neq I)$ es conjugado de alguna forma estándar m_k . Esto ayuda a probar el siguiente teorema.

Teorema 1.30. Sean f y g transformaciones de Möbius distintas a la identidad. f y g son conjugadas si y sólo si $\text{tr}^2(f) = \text{tr}^2(g)$.

Usamos \sim para referirnos a la relación de equivalencia dada por la conjugación.

Demostración. De la fórmula para la tr^2 , se sabe que si $f \sim g$ entonces $tr^2(f) = tr^2(g)$. Supongamos que $tr^2(f) = tr^2(g)$, existen formas estándar tales que $f \sim m_p$ y $g \sim m_k$. Entonces:

$$tr^2(m_p) = tr^2(f) = tr^2(g) = tr^2(m_k)$$

Se ha calculado de forma explícita la traza de las formas estándar y de ello se deduce que $p = k$ ó $p = 1/k$. Que $m_p \sim m_{1/p}$ se cumple trivialmente si $k = 1$ y en general:

$$hm_ph^{-1} = m_{1/p} \quad \text{con } h(z) = \frac{1}{z};$$

de donde $m_p \sim m_k$ y por tanto $f \sim g$.

Ahora clasificaremos las transformaciones de Möbius en término de sus puntos fijos en $\hat{\mathbb{R}}^3$ y como es natural comenzamos estudiando los punto fijos de las transformaciones estándar.

La acción de m_k en $\hat{\mathbb{R}}^3$ está dada por:

$$m_k(z + tj) = kz + |k|tj \quad (k \neq 1);$$

$$m_1(z + tj) = z + 1 + tj,$$

Esto nos facilita calcular los puntos fijos de $m - k$, claramente:

- i) m_1 fija solamente a ∞ ;
- ii) si $|k| \neq 1$ entonces m_k fija solamente a $0, \infty$;
- iii) Si $|k| = 1$ pero $k \neq 1$ el conjunto de puntos fijos de m_k esta dado por:

$$\{tj : t \in \mathbb{R}\} \cup \{\infty\}.$$

La siguiente definición establece la clasificación de las transformaciones de Möbius respecto a la cantidad de puntos fijos en $\hat{\mathbb{R}}^3$ de cada una.

Definición 1.17. Sea $g (\neq I)$ una transformación de Möbius. Diremos que:

- i) g es parabólico si y sólo si g tiene un único punto fijo en \mathbb{C}_∞ (equivalentemente que $g \sim m_1$).
- ii) g es loxodrómico si y sólo si g tiene exactamente dos puntos fijos en $\hat{\mathbb{R}}^3$ (equivalentemente $g \sim m_k$ donde $|k| \neq 1$).

iii) g es elíptico si y sólo si g tiene una cantidad infinita de puntos fijos en $\hat{\mathbb{R}}^3$ (equivalentemente $g \sim m_k$ donde $|k| = 1$, $k \neq 1$).

Una consideración importante es la siguiente:

Definición 1.18. Supongamos que g es una transformación es loxodrómica. Decimos que g es hiperbólica si $g(D) = D$ para D un disco (o un semiplano) en \mathbb{C}_∞ . Y puramente loxodrómico en otro caso.

La transformación $g(z) = 2z$ es hiperbólica y $g(z) = -2z$ puramente loxodrómica. El siguiente teorema relaciona la traza con la clasificación antes dada.

Teorema 1.31. Sea $g (\neq I)$ cualquier transformación de Möbius entonces:

1. g es parabólico si y sólo si $tr^2(g) = 4$;
2. g es elíptico si y sólo si $tr^2(g) \in [0, 4)$;
3. g es hiperbólico si y sólo si $tr^2(g) \in (4, \infty)$;
4. g es estrictamente loxodrómico si y sólo si $tr^2(g) \in (-\infty, 0)$.

Para cualquier grupo el conmutador de g y h es:

$$[g, h] = ghg^{-1}h^{-1} = g(hg^{-1}h^{-1}).$$

Sean $A, B \in SL(2, \mathbb{C})$ que representan a g y h respectivamente, transformaciones de Möbius. Ellas están únicamente determinadas excepto por un factor ± 1 , de manera que

$$tr[g, h] = tr(ABA^{-1}B^{-1}),$$

está bien determinado independientemente de la elección de A y B .

Teorema 1.32. i) Dos transformaciones de Möbius g y h tienen un punto fijo en común en $\hat{\mathbb{C}}$ si y sólo si $tr[g, h] = 2$.

ii) Si g y h son dos transformaciones de Möbius distintas a la identidad que comparten un punto fijo en $\hat{\mathbb{C}}$, ocurre:

- a) $[g, h] = I$ y entonces $gh = hg$ y $F_g = F_h$; o bien
- b) $[g, h]$ es parabólico y entonces $gh \neq hg$ y $F_g \neq F_h$.

Teorema 1.33. Sean g y h transformaciones de Möbius distintas a la identidad. Las siguientes proposiciones son equivalentes:

- i) $gh = hg$

ii) $h(F_g) = F_g$, $g(F_h) = F_h$;

iii) $F_g = F_h$ ó g y h comparten un punto fijo en \mathbb{H}^3 y se cumple que $g^2 = h^2 = (gh)^2 = I$ y $F_g \cap F_h = \emptyset$.

Teorema 1.34. *Un subgrupo G de \mathcal{M} contiene sólo elementos elípticos (y la identidad), si y sólo si los elementos de G comparten un punto fijo en \mathbb{H}^3 .*

Si G es de orden finito es elíptico. Por lo tanto todos los elementos de un subgrupo finito de \mathcal{M} tienen un punto fijo común en \mathbb{H}^3 .

Sea g un elemento elíptico, si los puntos fijos de G en $\hat{\mathbb{C}}$ son α y β , los puntos fijos de g son los puntos del círculo Γ ortogonal a \mathbb{C} y que pasa a través de α y β , esto al considerar la conjugación que envía a g a alguna de las formas estándar.

Definición 1.19 (Eje). *Definimos el eje de una transformación elíptica g , como el semicírculo resultante de la intersección de Γ (el conjunto de puntos fijos de g) con \mathbb{H}^3 . Denotamos $A_g = \Gamma \cap \mathbb{H}^3$.*

La condición de que dos elementos elípticos g y h compartan un punto fijo en \mathbb{H}^3 , se traduce a que A_g y A_h se intersecan en \mathbb{H}^3 .

Teorema 1.35. *Sean h y g son dos elementos elípticos. Los puntos fijos de g y h en $\hat{\mathbb{C}}$ son cocíclicos. Si en adición $[g, h]$ es elíptico o la identidad, los ejes A_g y A_h son concurrentes en \mathbb{H}^3 .*

El siguiente teorema ayuda a entender las iteraciones de los elementos en \mathcal{M} .

Teorema 1.36. *i) Sea g un elemento parabólico con punto fijo α . Para todo $z \in \mathbb{C}_\infty$, $g^n(z) \rightarrow \alpha$. La convergencia de hecho es uniforme en compactos de $\mathbb{C}_\infty \setminus \{\alpha\}$.*

ii) *Sea g loxodrómico con puntos fijos α y β . Pueden ser nombrados de forma que $g^n(z) \rightarrow \alpha$ (si $z \neq \beta$). La convergencia es uniforme en compactos de $\mathbb{C}_\infty \setminus \{\beta\}$.*

iii) *Sea g un elemento elíptico con puntos fijos α y β . g deja invariante a todo círculo para el cual α y β son puntos inversos.*

1.3.5. Grupos elementales

En esta sección se describen los subgrupos de \mathcal{M} (transformaciones de Möbius) que poseen una estructura particularmente simple, los *grupos elementales*.

Definición 1.20. *Un subgrupo G de \mathcal{M} se dice que es elemental si y sólo si existe una G -órbita **finita** en \mathbb{R}^3 .*

Si existe un punto G invariante o G es finito, G es elemental. Si G es abeliano, G está compuesto de elementos estrictamente elípticos y por tanto es elemental, o bien, contiene algún elemento parabólico o loxodrómico, en este caso por el teorema 1.33 iii), G también es elemental. Por lo tanto, cualquier subgrupo abeliano de \mathcal{M} es elemental.

Con esta notación podemos clasificar a los grupos elementales en tres tipos:

Tipo 1: Si $n > 2$ o $\{x_1, \dots, x_n\}$ no están en \mathbb{C}_∞ .

Si los puntos x_j no están en $\hat{\mathbb{C}}$ entonces cada $g \in G$ tiene alguna potencia g^m que fija a todas las x_j , entonces g^m es elíptica, y por lo tanto g también lo es (o bien es la identidad). Si $n \geq 3$ y $\{x_1, \dots, x_n\}$ está contenido en \mathbb{C}_∞ , g^m es la identidad y g es un elemento elíptico.

Si G es del tipo 2 sólo contiene elementos elípticos y la identidad, por tanto existe un punto $x \in \mathbb{H}$ que es fijado por todo elemento de G , y al mapear \mathbb{H} en B^3 y x en 0, vemos entonces, que G es conjugado en $GM(\hat{\mathbb{R}}^3)$ del subgrupo $SO(3)$.

Tipo 2: $n = 1$ y $x_1 \in \mathbb{C}_\infty$.

En este caso G es conjugado en \mathcal{M} de un subgrupo donde todo elemento fija al ∞ y toma la forma $z \rightarrow az + b$. De donde G es conjugado del grupo de similitudes euclidianas en \mathbb{C}^V .

Tipo 3: $n = 2$ y $x_1, x_2 \in \mathbb{C}_\infty$

En este caso G es conjugado de un subgrupo de \mathcal{M} donde todos los elementos dejan invariante a $\{0, \infty\}$. Por lo tanto son de la forma,

$$z \rightarrow az^s \quad a \neq 0, s^2 = 1.$$

¿Pero esto está bien definido? Es decir, ¿Qué pasa si en lugar de tomar una $G(x)$ órbita finita, tomo otra órbita $G(y)$?. Ocurre que dada la forma particular de cada subgrupo, no es posible que convivan dentro de una mismo subgrupo órbitas de distintas cardinalidades. De hecho se tiene el siguiente corolario.

Corolario 1.3. *Si $G(x)$ y $G(y)$ son órbitas finitas, entonces:*

$$|G(x)| = |G(y)|.$$

Ahora nos proponemos a clasificar a todos los grupos elementales y discretos. Si G es un grupo elemental del tipo 1 podemos asumir que todo elemento de G fija a $j \in \mathbb{H}^3$, pues G sólo contiene elementos elípticos. Sabemos por el teorema 1.27 que $\|g\|^2 = 2$ para todo $g \in G$, por lo que G es necesariamente finito. Por tanto G es conjugado de un subgrupo finito de $SO(3)$ y alguno de los grupos de simetría de los sólidos regulares.

^VUna similitud es un mapeo de la forma $x \rightarrow r\phi(x) + x_0$ con ϕ una isometría euclidiana.

Definición 1.21 (Vértice). *Decimos que $v \in \mathbb{C}$ es un vértice, si v es un punto fijo de algún $g \in G$ distinto a la identidad. Denotamos como V al conjunto de vértices.*

Definimos como E al siguiente conjunto finito (de cardinalidad $|E|$):

$$E = \{(g, v) : g \in G, v \in V, g(v) = v\}$$

g es elíptico, tiene exactamente dos vértices (aquí nos referimos a puntos fijos en \mathbb{C} y no en \mathbb{H}^3) y,

$$|E| = 2(|G| - 1).$$

El estabilizador de un vértice v es G_v , por lo tanto:

$$|E| = \sum_{v \in V} (|G_v| - 1).$$

El conjunto V es particionado por G en órbitas disjuntas $V_1 \cdots V_s$ y como los estabilizadores de cada $v \in V_j$ tienen el mismo número de elementos, digamos n_j ,

$$|E| = \sum_{j=1}^s \sum_{v \in V_j} (|G_v| - 1) = \sum_{j=1}^s |V_j| (n_j - 1).$$

Cada órbita $G(v)$ está en correspondencia uno a uno con las clases de equivalencia en G/G_v , entonces para cada $v \in V_j$, $|V_j| = |G/G_v|$ y:

$$|V_j| = \frac{|G|}{|G_v|} = \frac{|G|}{n_j}.$$

Eliminando $|V_j|$ obtenemos

$$2 \left(1 - \frac{1}{|G|}\right) = \sum_{j=1}^s \left(1 - \frac{1}{n_j}\right).$$

Hemos excluido al grupo trivial por lo que $|G| \geq 2$ y

$$1 \leq 2 \left(1 - \frac{1}{|G|}\right) \leq 2$$

Por definición $n_j \neq 2$ y por lo tanto:

$$\frac{1}{2}s \leq \sum_{j=1}^s \left(1 - \frac{1}{n_j}\right) < s.$$

Estas desigualdades muestran que $s = 2$ o $s = 3$.

Cuando $s = 2$ sólo existen dos vértices y todos son fijados por elementos de G , bajo conjugación G es un grupo cíclico finito de rotaciones de \mathbb{C} .

Si $s = 3$ los únicos posibles grupos son aquellos que son conjugados de A_4 , S_4 y A_5 ^{VI}. Que corresponden a los grupos de simetría del tetraedro, el octaedro y el icosaedro respectivamente. Ahora trataremos de distinguir entre grupos elementales (discretos) del tipo 1 y del tipo 2.

^{VI}En la parte final estos son aquellos que forman precisamente los grupos del tipo (3a).

Teorema 1.37. *Sea g un elemento loxodrómico y supongamos que f y g tiene exactamente un punto fijo en común. Entonces $\langle g, h \rangle$ es no discreto.*

Supongamos que G es discreto y no es del tipo 1. Debe contener elementos parabólicos o loxodrómicos. Supongamos que G contiene un elemento parabólico g , que sin pérdida de generalidad fija a ∞ , todos los demás elementos deben fijar a ∞ pues es la única órbita finita (para todo x , $\{g^m(x) : m \in \mathbb{R}\}$ es de cardinalidad infinita). El teorema anterior nos asegura que g no contiene elementos loxodrómicos. Por lo tanto G es del tipo 2.

Si comenzamos ahora con $g \in G$ elemento loxodrómico que fija a 0 y a ∞ , nuevamente todo elemento de G los deja invariantes. Por lo tanto G no puede contener puntos parabólicos, de forma que G es del tipo 1 o del tipo 2.

Examinemos la estructura de los grupos discretos del tipo 2 con elementos hiperbólicos. G sólo contiene elementos parabólicos, la I y posiblemente algunos elementos elípticos.

Bajo alguna conjugación todo elemento de G fija a ∞ y por lo tanto es de la forma $z \rightarrow \alpha z + \beta$. Como este elemento sólo puede ser elíptico o parabólico, $|\alpha| = 1$ y por lo tanto G es conjugado de un grupo de isometrías euclidianas en \mathbb{C} .

Denominamos a α el multiplicador del mapeo $z \rightarrow \alpha z + \beta$ y en general, denotamos al multiplicador de g como α_g . Todo elemento parabólico fija un único punto, por tanto $\alpha_g = 1$ si y sólo si g es un elemento parabólico o la identidad.

El conjunto S de multiplicadores de $g \in G$ es un subgrupo multiplicativo del grupo $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ y el mapeo $\theta : G \rightarrow S$ definido como $\theta(g) = \alpha_g$ es un morfismo. El kernel de θ T , es el grupo de translaciones en G (recordemos que para esta $\alpha_g = 1$). Como G/T es isomorfo a $S = \theta(G)$, podemos describir a G dando una descripción explícita de S y T .

G contiene una translación, digamos $f(z) = z + \lambda$, y si $g(z) = \alpha z + \beta$ está en G ,

$$gfg^{-1} = z + \alpha\lambda.$$

Deducimos que G contiene a $z \rightarrow z + s\lambda$ para toda $s \in S$. Como G es discreto S no puede acumularse en \mathbb{C} pues induciría una sucesión convergente en G . Por lo tanto S es un subgrupo cíclico y finito de $\{|z| = 1\}$. Se puede deducir además que:

$$S = \{1, w, \dots, w^{q-1}\},$$

donde p sólo puede tomar los valores 1, 2, 3, 4 y 6.

Para describir a T , definimos Λ como el conjunto de las λ_1 tales que $z \rightarrow z + \lambda_1$ está en G .

Se demuestra que:

$$T = \{z \rightarrow z + n\lambda + m\mu\}$$

Donde λ es un elemento de $\Lambda \setminus \{0\}$ con módulo mínimo. Y μ elemento de módulo mínimo en $\Lambda \setminus \{n\lambda : n \in \mathbb{Z}\}$.

Ahora podemos describir a G . Seleccionamos a $g \in G$ con multiplicador w , el generador

de S . Los elementos g, g^2, \dots, g^{q-1} tienen multiplicadores w, w^2, \dots, w^{q-1} (con $w^q = 1$ y $5 \neq q \leq 6$). Por lo tanto G se descompone como:

$$G = T \cup Tg \cup \dots \cup Tg^{q-1}.$$

Esto nos muestra que todo elemento en G es de la forma:

$$z \rightarrow w^k z + n\lambda + m\mu,$$

donde k, m, n son enteros y $5 \neq k \leq 6$ es positivo.

Ahora supongamos que G es discreto y elemental con elementos loxodrómicos. Primeramente supongamos que todo elemento de G deja fijos al 0 y al ∞ , así que son de la forma:

$$g(z) = \alpha z, \quad \alpha \neq 0.$$

El mapeo $\theta : G \rightarrow \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$ definido como $\theta(g) = |\alpha_g|$ es un homomorfismo de G en el grupo multiplicativo de los enteros positivos. Además el kernel E de θ consiste en I y los elementos elípticos en G . E es discreto y por lo tanto es un grupo cíclico finito generado por $z \rightarrow wz$, donde $w^q = 1$.

La imagen de $\theta(G)$ es el conjunto $\{|\alpha_g| : g \in G\}$ que no se acumula en 1, de ser así existen elementos $g_n \in G$ distintos tales que:

$$\|g_n\|^2 = |\alpha|^2 + \frac{1}{|\alpha|^2} \rightarrow 2, \quad (g_n(z) = \alpha^2 z),$$

lo cual contradice que G sea discreto. Sea $\lambda > 1$ el real mayor que uno de módulo mínimo. Entonces:

$$\theta(G) = \{\lambda^n : n \in \mathbb{Z}\}.$$

sea $g(z) = \alpha z$, donde $|\alpha| = \lambda$; entonces G se descompone en:

$$G = \cup_{n \in \mathbb{Z}} E g^n.$$

Y cada elemento de G es de la forma:

$$z \rightarrow w^k \alpha^n z,$$

donde $n \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}$ y $0 \leq k \leq q$. Si $\lambda = 1$ el grupo es un grupo cíclico de tipo 1. En otro caso, G es infinito y no contiene elementos parabólicos.

Finalmente consideramos el caso general del grupo elemental, discreto y con elementos loxodrómicos. Supongamos que $\{0, \infty\}$ es G invariante, denotamos G_0 el subgrupo de G que fija a 0 e ∞ , del cual conocemos su forma.

Si G_0 es propio, G necesariamente contiene un elemento h tal que:

$$h(0) = \infty, \quad h(\infty) = 0.$$

Bajo alguna conjugación (dejando a 0 e ∞) podemos asumir que $h(1) = 1$, y por lo tanto $h(z) = \frac{1}{z}$. Si f en G intercambia a 0 e ∞ , $f \in G_0$ y es de índice 2 en g , de forma que los elementos en G son como en 1.3.5 o bien:

$$z \rightarrow w^k \alpha^n \frac{1}{z}.$$

Esto completa nuestra discusión sobre grupos elementales discretos.

Capítulo 2

$\text{Aut}(\Omega)$ para dominios 1 y 2 conexos.

En este capítulo introducimos el concepto de grupo de automorfismos para dominios en \mathbb{C}_∞ (la esfera de Riemann) y los calculamos para el disco, el anillo unitario y una franja simplemente conexa.

Posteriormente se da una caracterización de dominios simplemente conexos vía propiedades topológicas y algebraicas del grupo de automorfismos asociado.

Nota aclaratoria.

Saltaremos sin ningún reparo entre dominios contenidos en el plano complejo (\mathbb{C}) y en la esfera de Riemann (\mathbb{C}_∞), debemos notar que esto no genera ningún problema. Esto es posible gracias al teorema del mapeo de Riemann. Si $\Omega \subset \mathbb{C}_\infty$ propiamente, el dominio es el plano complejo o un conjunto contenido en un dominio simplemente conexo que no es el plano, por tanto es conformemente equivalente a un conjunto contenido en el disco unitario que da igual donde lo consideremos inmerso, pues la topología de \mathbb{C} considerado inmerso en la esfera de Riemann es equivalente a la del plano complejo.

Se entiende que un dominio es simplemente conexo si su grupo fundamental es trivial y no es simplemente conexo si es conexo y su grupo fundamental no es trivial, no es nuestra intención ahondar demasiado en cómo el grupo fundamental cuenta el número de hoyos de un dominio, sin embargo es bueno dejar claro desde el principio, que cuando hablemos de un dominio k -conexo, nos referimos a que el complemento del dominio, pensándolo contenido en la esfera de Riemann, tiene k componentes simplemente conexas. Así, un dominio 1 conexo es un dominio simplemente conexo y un 2 conexo es aquel que sólo tiene un hoyo en la región interna del dominio.

Todo esto está definido de manera muy poco formal pues para ello es necesaria la noción de la curva de Jordan, sin embargo nos parece que bastan estas nociones para seguir adelante en nuestra exposición.

2.1. Conceptos introductorios.

Un dominio Ω es una región abierta y conexa en \mathbb{C}_∞ .

Definición 2.1 (Automorfismos conformes). *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}_\infty$ un dominio. Definimos el conjunto de automorfismos conformes de Ω , $Aut(\Omega)$, como el conjunto de todas las transformaciones conformes que van de Ω en Ω .*

Teorema 2.1. *$Aut(\Omega)$ es un grupo bajo la composición de funciones:*

Demostración. *$Aut(\Omega)$ cumple todas las propiedades de un grupo;*

- *La composición de dos automorfismos de Ω es un automorfismo de Ω .*
- *Toda transformación conforme tiene inversa conforme, por lo tanto todo automorfismo de Ω tiene inverso en el conjunto.*
- *El mapeo identidad es el elemento neutro del conjunto.*
- *La operación composición es asociativa.*

De ahora en adelante nos referimos a $Aut(\Omega)$ como el grupo de automorfismos de Ω ^{VII}.

Para el desarrollo del capítulo es necesario el siguiente resultado, la herramienta empleada para su demostración sera desarrollada en el capítulo siguiente, lo enunciamos y dejamos pendiente su demostracion.

Teorema 2.2. *Si $\Omega \subset \mathbb{C}_\infty$ (o en \mathbb{C}) es un dominio, $Aut(\Omega)$ es un grupo topológico con la topología de la convergencia uniforme en la métrica cordal (o con la topología de la convergencia uniforme en compactos respecto a la métrica usual si se tiene que $\Omega \subset \mathbb{C}$).*

Decimos que dos dominios Ω_1, Ω_2 son conformemente equivalentes, si existe una función $f : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$, conforme y biyectiva.

Si dos dominios son conformemente equivalentes sus grupos de automorfismos son isomorfos como grupos topológicos.

Teorema 2.3. *Sean Ω_1, Ω_2 dos dominios equivalentes vía $f : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ función conforme, entonces:*

$$\begin{aligned} F : Aut(\Omega_2) &\rightarrow Aut(\Omega_2) \\ \phi &\rightarrow F(\phi) = f^{-1}\phi f \end{aligned}$$

es un isomorfismo de Grupos Topológicos.

La prueba de esto es en realidad una lectura del Lema 3.5 (ver más adelante).

^{VII}Para una lectura más amplia de los conceptos aquí expuestos, recomendamos al lector [2, cap. 12], que es de donde, en gran medida, hemos tomado estas líneas.

2.2. Primeros grupos de automorfismos.

Nos proponemos calcular explícitamente los grupos de Automorfismos del disco Unitario y el de los anillos, dado que la conjugación por transformaciones conformes preserva la estructura de grupo topológico, el calculo sera válido para la infinidad de dominios a los que son equivalentes.

Un criterio de convergencia que usaremos a menudo es;

Lema 2.1. *Sea $\mathfrak{F} = \{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una familia de funciones conformes en un dominio $G \subset \mathbb{C}_{\infty}$, tales que $\varphi_n \rightarrow \varphi$ puntualmente en G . $\varphi_n \rightarrow \varphi$ uniformemente en compactos.*

Demostración. *Como $\varphi_n \rightarrow \varphi$ puntualmente, \mathfrak{F} es una familia de funciones conformes localmente acotada, por el teorema de Montel \mathfrak{F} es una familia normal y contiene una subsucesión $\{\varphi_{n_j}\}_{j=1}^{\infty}$ que converge uniformemente a φ en compactos.*

Afirmamos que toda la familia \mathfrak{F} converge uniformemente en compactos. Supongamos que no.

Existe entonces un compacto $K \subset G$ y una subsucesión $\{\varphi_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ de \mathfrak{F} que no converge uniformemente en K . Es decir, existe $\epsilon > 0$ y una subsucesión de $\{\varphi_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, que para no complicar mas la notación nombramos de la misma manera, tal que:

$$\|\varphi_{n_k} - \varphi\| > \epsilon, \quad \forall n_k.$$

El teorema de Montel nos dice que $\{\varphi_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ es una familia normal y contiene una subsucesión que converge uniformemente en compactos, es decir que para el compacto K existe una k para la cual:

$$\|\varphi_{n_k} - \varphi\| < \epsilon$$

Esto es una contradicción.

Por lo tanto $\varphi_n \rightarrow \varphi$ uniformemente en compactos.

La siguiente proposición sera útil en resultados subsecuentes.

Proposición 2.1 (H. Cartan). *Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}_{\infty}$ un dominio acotado (por lo tanto contenido en \mathbb{C}), $p \in \Omega$ y $\phi : \Omega \rightarrow \Omega$ tal que $\phi(p) = p$. Si $\phi'(p) = 1$ entonces ϕ es la identidad.*

Demostración. *Sin pérdida de generalidad, $p = 0$, pues basta realizar una translación (que es una transformación conforme), que no afecta en nada la derivada de la función ϕ . Al expandir ϕ en series de potencias en torno a p , tenemos que:*

$$\phi(z) = z + P_k(z) + O(|z|^{k+1}).$$

Si $\phi(z)$ no es la identidad, en una vecindad de p , P_k es el primer monomio de grado k distinto de cero y de orden superior a uno en la serie de Taylor. Notemos que:

$$P_k(z) = \left(\frac{1}{k!} \frac{\partial^k}{\partial z^k} \phi(0) \right) z^k.$$

Definimos $\phi^j(z) = \phi \circ \dots \circ \phi$ j -veces, afirmamos que:

$$n \frac{\partial^k}{\partial z^k} \phi(0) = \frac{\partial^k}{\partial z^k} \phi^n(0)$$

Para $k = 1$, la afirmación es clara. Si la suponemos para $k - 1$, tenemos que para k :

$$n \frac{\partial^k}{\partial z^k} \phi(0) = n \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial^{k-1}}{\partial z^{k-1}} \right) \phi(0) = \frac{\partial}{\partial z} \left(n \frac{\partial^{k-1}}{\partial z^{k-1}} \right) \phi(0) = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial^{k-1}}{\partial z^{k-1}} \right) \phi^n(0) = \frac{\partial^k}{\partial z^k} \phi^n(0).$$

En resumen: $n \frac{\partial^k}{\partial z^k} \phi(0) = \frac{\partial^k}{\partial z^k} \phi^n(0)$ y retornando a la expresión de ϕ en serie de potencias de Taylor y usando la igualdad anterior podemos concluir que:

$$\begin{aligned} \phi^2(z) &= z + 2P_k(z) + O(|z|^{k+1}) \\ \phi^3(z) &= z + 3P_k(z) + O(|z|^{k+1}) \\ &\vdots \\ \phi^n(z) &= z + nP_k(z) + O(|z|^{k+1}) \end{aligned}$$

Escojamos discos $D(0, a) \subseteq \Omega \subseteq D(0, b)$. Para $0 \leq j \in \mathbb{Z}$ sabemos que $Dom(0, a) \subseteq Dom\phi^j(z) \subset D(0, b)$. Utilizando la desigualdad de Cauchy para nuestro índice k obtenemos que,

$$j \left| \frac{\partial^k}{\partial z^k} \phi(0) \right| = \left| \frac{\partial^k}{\partial z^k} \phi^j(0) \right| \leq \frac{b \cdot k!}{a^k}$$

Si $j \rightarrow \infty$ la desigualdad se conserva, lo que implica que :

$$\left| \frac{\partial^k}{\partial z^k} \phi(0) \right| = 0$$

que se traduce en,

$$P_k = 0$$

contradiciendo lo supuesto y por lo tanto $\phi(z) = z$.

En los próximos teoremas denotamos $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ al disco unitario, y $A = \{z \in \mathbb{C} : \frac{1}{2} < |z| < 1\}$ al anillo centrado en 0 con radio menor y mayor $\frac{1}{2}, 1$, respectivamente.

Lema 2.2. Sea $f : D \rightarrow D$ una función holomorfa tal que $f(0) = 0$. $f \in Aut(\Omega)$ si y sólo si, existe $w \in \mathbb{C}$ con $|w| = 1$ tal que $\forall z \in D$, $f(z) = wz$.

Demostración. Si $w \in \mathbb{C}$ con $|w| = 1$, $f(z) = wz$ es una función conforme del disco unitario en el disco unitario.

Si $f \in Aut(\Omega)$ tal que fija al cero (ie. $f(0) = 0$), $g = f^{-1} : D \rightarrow D \in Aut(\Omega)$ y también

fija al cero (ie. $g(0) = 0$), de forma que ambos mapeos tienen imagen contenida en D y por lo tanto $|f(z)| < 1$. Por el lema de Schwarz podemos decir que:

$$|f'(0)| \leq 1 \quad \text{y} \quad |g'(0)| \leq 1.$$

Y usando la regla de la cadena:

$$1 = (I)'(0) = (f \circ g)'(0) = f'(0)g'(0).$$

De esta última ecuación y de la cota de los módulos de las derivadas se sigue que $|f'(0)| = 1$ y $|g'(0)| = 1$.

La parte de la unicidad del lema de Schwarz nos dice que $f(z) = f'(0)z$. Para concluir simplemente tomamos $w = f'(0)$.

Definimos $\mathcal{A} = \left\{ \phi_a : \phi_a(z) = \frac{z-a}{1-\bar{a}z}, \text{ con } a \in \mathbb{C}, |a| < 1 \right\}$ subgrupo de las transformaciones de Möbius, que son automorfismos conformes del disco unitario.

Teorema 2.4 (Grupo de automorfismos del disco unitario). *Sea $f : D \rightarrow D$ función holomorfa, f es un automorfismo conforme de D , si y sólo si existen complejos a y ω con $|a| < 1$ y $|\omega| = 1$, tales que para toda $z \in D$,*

$$f(z) = \omega \cdot \phi_a(z)$$

Demostración. Que la función $f(z) = \omega \cdot \phi_a(z)$ es un mapeo conforme es claro pues es una rotación seguida de una transformación de Möbius.

Si f es un automorfismo conforme del disco unitario notaremos que se verifica la igualdad. Sea $b = f(0)$, considérese el siguiente mapeo conforme:

$$(\phi_b \circ f)(0) = \phi_b(f(0)) = \phi_b(b) = 0,$$

por el lema anterior existe $\omega \in \mathbb{C}$ con $|\omega| = 1$ tal que:

$$(\phi_b \circ f)(z) = \omega z \quad \forall z \in D.$$

No es difícil ver que $(\phi_b)^{-1} = \phi_{-b}$. Deducimos que:

$$\begin{aligned} f(z) &= (\phi_b)^{-1}(\omega z) = \phi_{-b}(\omega z) \\ &= \frac{\omega z + b}{1 + \bar{b}\omega z} = \omega \cdot \frac{z + b\omega^{-1}}{1 + \bar{b}\omega^{-1}z}. \end{aligned}$$

Donde hemos usado que $1 = \omega^{-1}\omega = \bar{\omega}\omega$ y $\bar{\omega} = \omega^{-1}$. Definimos $a = b \cdot \omega^{-1}$ y es así que,

$$f(z) = \omega \cdot \phi_a(z).$$

Tenemos ahora caracterizado $Aut(D)$.

El siguiente teorema brinda una representación de $Aut(A)$, donde

$$A = \{z \in \mathbb{C} : \frac{1}{2} < |z| < 2\}.$$

Teorema 2.5 (Grupo de automorfismos del anillo unitario). $Aut(A)$ es el grupo generado por las rotaciones $\zeta \rightarrow e^{i\lambda}$ y la inversión $\lambda : \zeta \rightarrow \frac{1}{\zeta}$.

La demostración se sigue a partir de varios lemas para los cuales denotamos por $A(p, r_1, r_2)$ al anillo con centro en p , radio menor r_1 y radio mayor r_2 .

Lema 2.3. Para todo anillo A existe un radio R tal que el anillo puede ser mapeado vía una transformación de Möbius en el anillo $A_R = \{z \in \mathbb{C} | 1 < |z| < R\}$.

Demostración. Sea $A(p, r_1, r_2)$, consideramos la siguiente transformación de Möbius:

$$\lambda : A(p, r_1, r_2) \rightarrow A(0, r_1, r_2) \text{ dada por } z \rightarrow z - p$$

Esto centra al anillo en el origen, ahora podemos aplicar a este nuevo disco la homotecia $\zeta(z) = \frac{z}{r_1}$, tomando $\lambda \circ \zeta$ obtenemos la transformación de Möbius buscada y donde $R = \frac{r_2}{r_1}$.

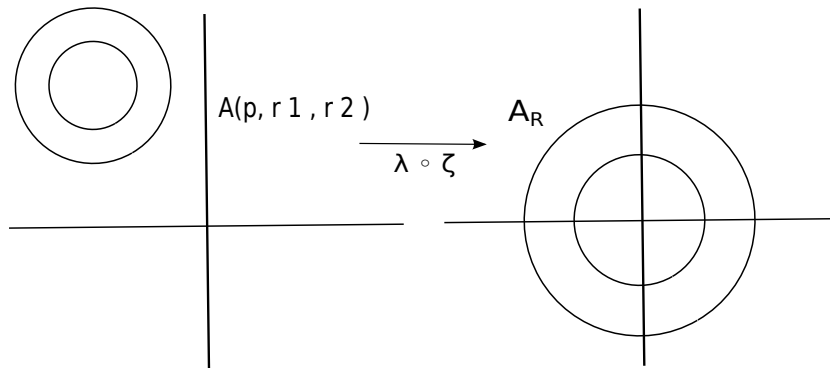


Figura 2.1: Representante canónico de un Anillo

Lema 2.4. La inversión $z \rightarrow \frac{R}{z}$ es un automorfismo de A_R .

Lema 2.5. Sea $f : A_R \rightarrow A_S$ un mapeo biholomorfo. $C \subset A_R$ es un círculo con centro en el origen. f mapea la región interior del círculo en la región interior o exterior determinada por $f(C)$.

Demostración. Demostraremos el lema usando reducción al absurdo.

Supongamos que existen x, y en la región interior de C , tales que $f(x), f(y)$ están en la región interior y exterior de $f(C)$ respectivamente.

Cualquier trayectoria que une a $f(x)$ con $f(y)$, interseca a $f(C)$ en algún punto, digamos $f(z)$. Como f es un mapeo biholomorfo, γ es una trayectoria que une a x y y si y sólo si $f(\gamma)$ (que va de $f(x)$ a $f(y)$) también lo es.

Por lo tanto, si $\gamma \subseteq A_R$ es una trayectoria que une a x con y , esta interseca a C en algún punto z , por lo tanto no está totalmente contenida en la región interior de C . Concluimos que esta región no es conexa por trayectorias, lo cual es falso (es un anillo).

Para todo x, y que estén en la región interior (exterior) determinada por C , $f(x), f(y)$ están en la misma región determinada por $f(C)$.

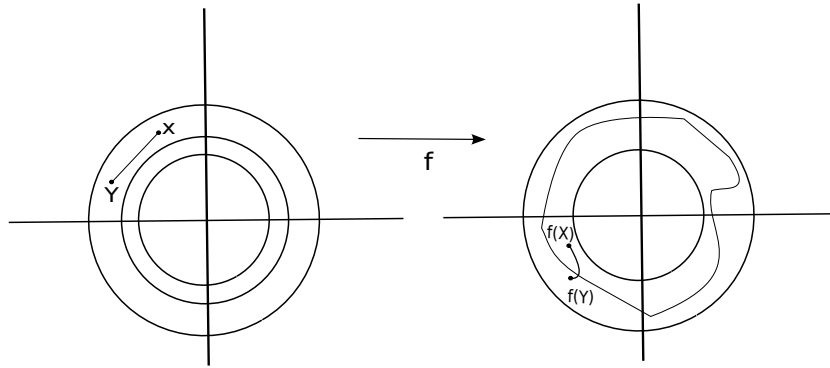


Figura 2.2: La transformación f mantiene las regiones.

Lema 2.6. Sea $f : A_R \rightarrow A_S$ un mapeo biholomorfo y $\{z_n\} \subset A_R$ una sucesión tal que $|z_n| \rightarrow 1$. $|f(z_n)| \rightarrow 1$ tal vez salvo por una inversión, es decir si $|f(z_n)|$ no converge a 1, $|\zeta \cdot f(z_n)| \rightarrow 1$ donde ζ es una inversión y de forma análoga si $|z_n| \rightarrow R$, $|f(z_n)| \rightarrow S$.

Demostración. Sea $\{z_n\} \subset A_R$ tal que $|z_n| \rightarrow 1$, supongamos que existe $f(v) \in A_S$ punto de acumulación de $\{f(z_n)\}$, debe haber una subsucesión $\{z_{n_k}\}$ de $\{z_n\}$ tal que $f(z_{n_k}) \rightarrow f(v)$. Por la bicontinuidad de f esto ocurre si y sólo si $|z_{n_k}| \rightarrow |v|$, contradiciendo el hecho de que $|z_n| \rightarrow 1$. Por lo tanto todo punto de acumulación de $\{f(z_n)\}$ está en la frontera de A_S .

Afirmamos que todos los puntos de acumulación de $\{f(z_n)\}$ deben tener la misma norma. De no ser así existen dos subsucesiones $\{z_{n_j}\}, \{z_{m_k}\}$ de $\{z_n\}$ tales que $|f(z_{n_j})| \rightarrow 1$ y $|f(z_{m_k})| \rightarrow S$, podemos suponer (escogiendo j y k suficientemente grandes) que $|f(z_{n_j})| < \frac{S+1}{2} < |f(z_{m_k})|$.

El círculo $C_{(0, \frac{1+S}{2})}$ divide en dos al anillo, en la región interior están contenidas las imágenes de $\{z_{n_j}\}$ y en la exterior las de $\{z_{m_k}\}$. La imagen inversa del círculo $f^{-1} \circ C$ describe una curva contenida en A_R en la cual podemos inscribir un círculo de radio $1 + \epsilon$; dado que las normas de z_n convergen a 1, existe una N tal que $\{z_{n_j}\}$ y $\{z_{m_k}\}$ están contenidas en ese círculo y por lo tanto en el interior de la curva $f^{-1} \circ C$, sin embargo sus imágenes van a parar a distintas componentes de la imagen de esta curva (que no es sino el círculo original) contradiciendo el lema anterior.

Finalmente nótese que $|f(z_n)| \in (1, S)$ (un intervalo acotado), por lo cual tiene un punto de acumulación, el cual podemos suponer de norma uno (si esto no fuese así basta componer con una inversión), afirmamos que $|f(z_n)| \rightarrow 1$. De no ser así para $\epsilon = 1 + \frac{S}{2}$ generamos una subsucesión $\{z_{n_k}\}$ de $\{z_n\}$ tal que $\{f(z_{n_k})\} \subseteq A(0, \epsilon, S)$ que por ser un conjunto acotado tiene un punto de acumulación, que sólo puede tener norma ϵ o S , dando como resultado dos puntos de acumulación con norma distinta, lo cual hemos probado no es posible. De esto se sigue el lema original.

Lema 2.7. La función $f : A_R \rightarrow A_S$ se extiende a el plano complejo perforado.

Demostración. Intentaremos extender la función f primero a un anillo de radio A_{R+C} con $C > 0$ una constante, de ahí, iterando el proceso podremos extender la función a todo el plano complejo menos el disco unitario. Posteriormente componiendo a f con una inversión, es posible extenderla, usando el mismo procedimiento a todo $\mathbb{C} \setminus 0$.

Sea p un punto sobre el círculo exterior de A_R y ρ_p una rotación en el origen tal que $\rho_p(p) = R$. Por el lema de reflexión de Schwarz existe un disco de radio C centrado en 1 en el cual es posible extender a $f\rho^{-1}$, por lo tanto existe un disco de radio C centrado en p en el cual es posible extender a f .

Como esta constante C nos sirve para todo $p \in A_R$, hemos extendido f a A_{R+C} .

Repitiendo ese proceso iterativamente podemos extender f a todo el plano complejo menos el disco unitario cerrado.

Sea $\theta(z) = \frac{R}{z}$ la inversión de A_R , la composición $f \cdot \theta^{-1}$ se puede extender nuevamente a todo el plano menos el disco unitario, es decir que f se extiende a todo el disco de radio R .

Al juntar ambas extensiones y por la unicidad en el lema de Schwarz, f se extiende analíticamente a todo $\mathbb{C} \setminus 0$.

Si denotamos $D_{x_0}(f)$ a la derivada compleja de f en x_0 , $D_x(f)$ es distinta de cero $\forall x \in A_R$ por ser f una función conforme. De esta manera la función $g(z) = \overline{f(\bar{z})}$ tiene

derivada compleja distinta de cero en $\overline{A_R} = A_{RY}$ por tanto es conforme en A_R . Esta función g es la que define a la extensión de Schwarz de f y debe ser conforme.

Lema 2.8. *f se extiende analíticamente a un automorfismo de $\mathbb{C} \setminus \{0\}$*

Demostración. Hemos probado que podemos extender a f conformemente en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, resta ver que su imagen está contenida en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Supongamos que existe $x_0 \neq 0$ tal que $f(x_0) = 0$, claramente x_0 no puede estar en el anillo A_R , por tanto existe un paso en nuestra iteración en la extensión de f donde aun no se asigna a ningún punto el valor 0 y en el siguiente paso esto debería suceder, sin embargo, por como se define la función f extendida en el siguiente paso (a manera del valor conjugado de la función valuada en el conjugado), para asignar el cero es necesario que previamente f haya tomado este valor. Que supusimos no era así.

Por tanto la función f extendida, tiene como imagen a $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ y es elemento de su grupo de automorfismos.

Por el teorema de singularidades de Riemann el 0 es una singularidad removible y f se convierte en un automorfismo de \mathbb{C} que deja fijo al cero, por lo tanto:

$$f(z) = \alpha z.$$

Esta caracterización se ha dado salvo la composición de f con una inversión, es por esto que concluimos que el grupo de automorfismos de A_R está generado por las rotaciones en el origen y la inversión.

Para acabar nuestra presentación de algunos grupos de automorfismos consideremos la región:

$$\Omega = \{x + iy : |y| < 1\}$$

Teorema 2.6. *Para la región Ω definida anteriormente:*

$$M(\Omega) = \{z \rightarrow z + t : t \in \mathbb{R}\} \cup \{z \rightarrow -z + t : t \in \mathbb{R}\} = \\ \{z \rightarrow z + t : t \in \mathbb{R}\} \cup \gamma \{z \rightarrow z + t : t \in \mathbb{R}\}$$

Demostración. Notemos que los dos discos que forman las componentes conexas de Ω^c son permutados por todo elemento de su grupo de automorfismos que es en realidad un subgrupo de $\mathcal{M}^{\text{VIII}}$. Consideremos $\phi \in \text{Aut}(\Omega)$, y $x, y \in \Omega^c$ pertenecientes a componentes distintas, si $\phi(x)$ y $\phi(y)$ estuviesen en la misma componente, existiría una trayectoria, entre $\phi(x)$ y $\phi(y)$, al componer alguna parametrización de dicha trayectoria con ϕ^{-1} , tendríamos que x, y también están conectados por un trayectoria acotada, lo cual es imposible. La intersección de la cerradura de ambos discos (pensando a $\Omega \subseteq \mathbb{C}_\infty$) es $\{\infty\}$ el cual es invariante bajo los elementos de $M(\Omega)$, pues de no serlo caería en el plano complejo y cualquiera que fuese su imagen traería problemas dada la continuidad de las transformaciones de Möbius.

^{VIII}Esto se vera más tarde.

Esto nos dice que para todo $\phi \in M(\Omega)$ $\phi(z) = az + b$. Claramente $a \in \mathbb{R}$, pues lo contrario implica una rotación lo cual no es posible. Así mismo $|a| = 1$, lo contrario induce una contracción (o expansión) en el eje complejo, que tampoco es posible. Inmediatamente:

$$M(\Omega) = \{z \rightarrow z + t : t \in \mathbb{R}\} \cup \{z \rightarrow -z + t : t \in \mathbb{R}\} = \\ \{z \rightarrow z + t : t \in \mathbb{R}\} \cup \gamma \{z \rightarrow z + t : t \in \mathbb{R}\},$$

donde γ es un elemento elíptico dado por $\gamma(z) = -z$.

2.3. Caracterización de dominios simplemente conexos.

Los grupos de automorfismos tienen una estructura topológica y algebraica interesante, a continuación mostramos como ciertas propiedades topológicas y algebraicas nos permiten caracterizar a dominios simplemente conexos en la esfera de Riemann.

El siguiente teorema y el teorema del mapeo de Riemann (que es lo que va de fondo), nos dan una relación entre la conexidad de un dominio y la compacidad del grupo de automorfismos asociado.

Teorema 2.7. *Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C} \subset \mathbb{C}_\infty$ un dominio acotado con frontera del tipo C^1 (i.e. la frontera es un conjunto finito de curvas, simples, cerradas y continuamente diferenciables). Si $Aut(\Omega)$ es no compacto entonces Ω es conformemente equivalente al disco unitario [2, p.263].*

Por el teorema del mapeo de Riemann basta probar que Ω es simplemente conexo (Ω no puede ser todo \mathbb{C} pues todas sus fronteras están acotadas). Demostraremos esto en varios pasos:

1) Existe una órbita no compacta.

Afirmamos que existen $p \in \Omega$ y elementos ϕ_j en $Aut(\Omega)$ tales que $\phi_j(p)$ se acumula en algún punto $q \in \delta\Omega$, ésta es la negación de la compacidad por sucesiones.

Si éste no fuera el caso, para cualquier sucesión $\psi_j \subseteq Aut(\Omega)$ y cualquier punto $p \in \Omega$, $\psi_j(p)$ se encuentra metido en un conjunto compacto fijo $L \subseteq \Omega$, donde L es la órbita de P bajo $Aut(\Omega)$.

Dado que Ω está acotado existe una constante $M > 0$ tal que $|\psi(\omega)| \leq M$ para todo $\omega \in \Omega$ y todo $\phi \in Aut(\Omega)$.

$Aut(\Omega)$ es una familia normal y para ψ_j hay entonces una sucesión convergente en compactos ψ_{j_k} y lo hace a una función holomorfa ψ_0 .

Cada una de las ψ_{j_k} es univaluada, por el teorema de Hurwitz la función ψ_0 también lo será.

Para todo $p \in \Omega$ se tenía que $\psi_{j_k}(P) \subseteq L \subset \Omega$ (L un compacto) y concluimos que ψ mapea Ω en Ω . Por lo cual ψ_0 es un automorfismo de Ω , pero esto diría que $Aut(\Omega)$ es compacto contradiciendo nuestra hipótesis.

Concluimos que existen automorfismos ϕ_j y puntos p y q que cumplen nuestra afirmación.

Definición 2.2 (Función de cima). *Decimos que $\eta : \bar{\Omega} \rightarrow \bar{\Omega}$ es una función de cima, con punto cima en q si:*

1. η es continua en $\bar{\Omega}$.
2. η es holomorfa en Ω .
3. $\eta(q) = 1$.
4. $|\eta(\zeta)| < 1$ para todo $\zeta \in \bar{\Omega} \setminus \{q\}$.

2) Existe una función de cima en el punto $q \in \delta\Omega$.

La función puede ser obtenida a través de mapear a Ω de forma canónica vía una función ψ en el anillo unitario con tantos hoyos como el grado de conexidad de Ω menos uno (la existencia de dichas funciones se estudia en capítulo siguiente).

Por el teorema de Carathéodory ψ puede ser extendida de forma continua y equivalente a la frontera de Ω . Sin pérdida de generalidad $q \in \delta\Omega$ y es mapeado bajo ψ en $1 \in \delta D$.

La función:

$$f(\xi) = \frac{1 + \xi}{2},$$

es una función de cima para el punto $1 \in \delta D$, de donde $\mu = f \circ \psi$ es la función de cima que buscamos para Ω en q .

- Sea $K \subseteq \Omega$ subconjunto compacto y ψ_j , p y q como en el primer punto, existe una subsucesión ψ_{j_k} de ψ_j tal que $\psi_{j_k} \rightarrow q$ uniformemente en K .

Sean ψ_j , p y q como en el paso inicial y μ la función de cima que encontramos anteriormente. Consideremos los mapeos:

$$g_j \equiv \mu \circ \psi_j$$

que son holomorfos por ser la composición de funciones holomorfas y acotados en módulo por 1 pues μ es acotada por 1.

El teorema de Montel nos dice que g_i tiene una subsucesión g_{i_k} que converge uniformemente en compactos a una función límite g_0 .

Claramente $|g_0(\zeta)| \leq 1$ para toda $\zeta \in \Omega$, sin embargo:

$$g_0(p) = \lim_{i \rightarrow -\infty} g_i(p) = \lim_{i \rightarrow -\infty} \mu(\phi_i(p)) = \mu(\lim_{i \rightarrow -\infty} \phi_i(p)) = \mu(q) = 1.$$

Por el principio del modulo máximo $g_0 \equiv 1$.

Pero la función de cima μ no es constante, la alternativa que queda es que ψ_{j_k} converja uniformemente en compactos a la función contante q (a lo menos puntualmente y por converger a una función continua la convergencia es uniforme en compactos). Que es lo que afirmamos originalmente.

- Existe un disco abierto D centrado en q , tal que $\Omega \cap D$ es simplemente conexo.

La observación principal es que si la intersección de dos discos es distinta del vacío, esta es una región simplemente conexa.

Al ser Ω de tipo C^1 su frontera es la unión finita curvas de Jordan, por lo tanto es k -conexo y Ω es equivalente aun k -dominio circular C_Ω (como se observa en el siguiente capítulo). Existe un disco lo suficientemente pequeño C_1 que interseca al dominio circular C_Ω en una región simplemente conexa, la imagen inversa de dicho círculo es también una región simplemente conexa donde se puede tomar el disco C que es una región simplemente conexa y que contiene a q .

- El dominio Ω es simplemente conexo

Supongamos que no. Entonces existe una curva cerrada $\gamma : [0, 1] \rightarrow \Omega$ que no puede ser deformada en Ω a un punto. Sin embargo la imagen de la curva γ es compacta, por lo tanto existe una k tal que $\phi_{j_k}(\gamma) \subseteq D \cap \Omega$.

No obstante $\phi_{j_k}(\gamma)$ es una curva cerrada que esta contenida en un conjunto simplemente conexo $D \cap \Omega$, así que $\phi_{j_k}(\gamma)$ puede ser deformada en una punto dentro de $D \cap \Omega$. Pero el mapeo ϕ_{j_k} es un automorfismo de Ω y la imagen de γ puede ser deformada en un punto. Esto es una contradicción.

Ω es simplemente conexo y por el Teorema de mapeo de Riemann también es conformemente equivalente al disco unitario.

Hasta este punto hemos realizado el análisis de una propiedad topología de $Aut(\Omega)$, pero podemos usando la prueba anterior decir algo más de Ω a partir de una propiedad algebraica de $Aut(\Omega)$.

Definición 2.3. Decimos que el grupo $Aut(D)$ actúa transitivamente en Ω si dados $p, q \in \Omega$ existe un $\phi \in \Omega$ tal que $\phi(p) = q$.

Uno puede preguntarse ¿Qué dominios tienen grupo transitivo de automorfismos? el siguiente teorema nos brinda una respuesta.

Teorema 2.8. *Si $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ es un dominio suave con grupo de automorfismos transitivo, Ω es conformemente equivalente al disco unitario.*

El teorema es consecuencia del siguiente par de lemas.

Lema 2.9. *Sea $p \in \partial\Omega$ punto cima y $z_0 \in \Omega$ un punto fijo. Supongamos que $\phi_j \in Aut(\Omega)$ satisface $\phi_j(z_0) \rightarrow p$ cuando $j \rightarrow \infty$. Si $K \subset \Omega$ es un compacto existe una subsucesión ϕ_{j_k} , tal que $\phi_{j_k} \rightarrow p$ (función constante p) uniformemente en K*

Sea f una función de cima en el punto p . Consideramos la familia $\{f \circ \phi_j\}$ de funciones holomorfas y acotadas uniformemente por 1, el teorema de Montel nos asegura que ésta es una familia normal y posee una subsucesión $\{f \circ \phi_{j_k}\}$ que converge en compactos a una función g , que dada la acotación uniforme cumple que $|g(z)| \leq 1$, sin embargo $f \circ \phi_{j_k}(z_0) \rightarrow 1$ y $g(z_0) = 1$, el principio del módulo máximo nos dice que $f \circ \phi_{j_k}$ converge uniformemente en compactos a la función constante 1, i.e. $g \equiv 1$. Pero f sólo toma el valor 1 en p , por lo tanto $\phi_{j_k} \rightarrow p$ uniformemente en compactos.

El último lema junto con el teorema del mapeo de Riemann nos dará la prueba del teorema principal.

Lema 2.10. *Si Ω tiene grupo de automorfismos transitivo Ω es simplemente conexo [9].*

Supongamos que Ω no fuese simplemente conexo. Existe un bucle (curva cerrada simple) $\lambda : [0, 1] \rightarrow \Omega$ que no puede ser continuamente deformado a un punto en Ω , la imagen Λ de dicho bucle es la imagen continua de un compacto y por tanto Λ también lo es. Sea $\{z_j\} \subseteq \Omega$ convergente a p . Dado que $Aut(\Omega)$ es transitivo, existe $\{\phi_j\} \subseteq Aut(\Omega)$ tal que $\phi_j(z_0) = z_j$, por el lema anterior existe una subsucesión ϕ_{j_k} que converge uniformemente a p en Λ .

Sea U una vecindad de p simplemente conexa (construida como en el teorema anterior), de la definición de convergencia uniforme existe una n tal que $\phi_{j_n}(\Lambda) \subset U \cap \Omega$ como ϕ_{j_n} es un homeomorfismo, en realidad Λ si puede ser deformada a un punto en Ω . Esto es una contradicción. Por tanto Ω es simplemente conexo.

2.4. Descomposición de Iwasawa de $Aut(D)$.

En la teoría de grupos de Lie existen importantes teoremas de estructura que nos sirven para comprender la acción del grupo $Aut(\Omega)$ sobre Ω , el teorema de descomposición de Iwasawa es uno de ellos.

En esta sección damos la descomposición de Iwasawa de $Aut(D)$.

Aunque parezca redundante creemos que es importante recordar que estamos considerando a D como un subconjunto de la esfera de Riemann, pues en cierto momento las transformaciones de Möbius deben actuar sobre el punto al infinito que existe sólo en \mathbb{C}_∞ . Los siguientes teoremas los asumimos por ser necesarios pero la prueba escapa de los alcances de esta tesis.

Teorema 2.9. *$Aut(D)$ es un grupo de Lie semisimple y conexo.*

Teorema 2.10 (Descomposición de Iwasawa). *Sea G un grupo de Lie, semisimple y conexo. Entonces podemos escribir:*

$$G = K \cdot A \cdot N,$$

donde, K, A y N , un grupos de Lie, respectivamente compacto, abeliano y nilpotente ^{IX} respectivamente [2, p. 268].

Buscamos descomponer $Aut(D)$ en subgrupos K, A y N , como los del Teorema 2.10. Definimos,

$$K = \{e^{(i\lambda)} | \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

K es un subgrupo compacto de $Aut(D)$ pues a toda sucesión $\{e^{(i\lambda_j)}\}_{j \in \mathbb{N}} = \{\cos(\theta_j) + i \sin(\theta_j)\}_{j \in \mathbb{N}}$ se le puede extraer una subsucesión convergente.

Denotamos por \mathbb{H} al hemiplano superior complejo.

Definimos $C : D \rightarrow \mathbb{H}$ como:

$$C(\zeta) = i \cdot \frac{1 - \zeta}{1 + \zeta} \quad \forall \zeta \in D.$$

Observe que:

$$\begin{aligned} \phi \in Aut(D) &\Leftrightarrow C \phi C^{-1} \in Aut(H). \\ \phi \in Aut(H) &\Leftrightarrow C^{-1} \phi C \in Aut(D). \end{aligned}$$

De esto, obtenemos (tal vez con un abuso de notación) que:

$$Aut(D) = C Aut(\mathbb{H}) C^{-1}.$$

Supongamos que hemos obtenido para $Aut(\mathbb{H})$ una descomposición de Iwasawa, es decir que $Aut(\mathbb{H}) = K' \cdot A' \cdot N'$. Entonces:

$$Aut(D) = C Aut(\mathbb{H}) C^{-1} = C(K' \cdot A' \cdot N')C^{-1} = (CK'C^{-1}) \cdot (CA'C^{-1}) \cdot (CN'C^{-1}).$$

Donde cada conjugado es compacto, abeliano o nilpotente según corresponda.

Basta encontrar la descomposición de Iwasawa de $Aut(\mathbb{H})$ para conocer alguna de $Aut(D)$.

^{IX}Decimos que un grupo es nilpotente si existe un entero k tal que todo conmutador de orden k es la identidad.

Lema 2.11. *Una transformación de Möbius:*

$$\varphi(\xi) = \frac{a\xi + b}{c\xi + d},$$

es un automorfismo de \mathbb{H} si y sólo si, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

Demostración. Sea $k = ad - bc, k \in \mathbb{R} \setminus 0$. Observamos que:

$$\varphi(\xi) = \left(\frac{(\sqrt{k})^{-1}}{(\sqrt{k})^{-1}} \right) \frac{a\xi + b}{c\xi + d} = \frac{\acute{a}\xi + \acute{b}}{\acute{c}\xi + \acute{d}} \quad \text{donde } \acute{a}\acute{d} - \acute{b}\acute{c} = 1$$

Y podemos suponer sin pérdida de generalidad que $k = ad - bc = 1$.

Notese que:

$$\varphi(i) = \frac{ai + b}{ci + d} = \frac{(ai + b)(-ci + d)}{c^2 + d^2}$$

Por lo que

$$Im(\varphi(i)) = \frac{da - bc}{c^2 + d^2} > 0.$$

De esta forma sabemos que $\varphi(i) \in \mathbb{H}$.

Si $z \in \mathbb{R}$, $\varphi(z) \in \hat{\mathbb{R}}$ y por lo tanto $\varphi(\hat{\mathbb{R}}) = \hat{\mathbb{R}}$.

Afirmamos que $\forall \xi \in \mathbb{H}$, $\varphi(\xi) \in H$. De no ser así, $\varphi(\xi) \in \mathbf{Int}(\mathbb{H}^c)$.

Como \mathbb{H} es simplemente conexo, existe una trayectoria γ que une a i con ξ , tal que γ esta totalmente contenida en \mathbb{H} , sin embargo $\varphi(\gamma)$ es una trayectoria entre $\varphi(i)$ y $\varphi(\xi)$, que están contenidas en distintos hemisferios de la esfera de Riemann, por tanto, existe $t \in [0, 1]$ tal que, $\varphi(\gamma(t)) \in \mathbb{R}$ y dado que $\hat{\mathbb{R}}$ es invariante bajo φ , $\gamma(t) \in \hat{\mathbb{R}}$. Lo cual no es posible dada la elección de γ .

Concluimos que $\varphi(z) \in \mathbb{H}$, es decir $\varphi(\mathbb{H}) \subseteq \mathbb{H}$.

De forma análoga se demuestra $\varphi(\mathbf{int}(\mathbb{H}^c)) \subseteq \mathbf{int}(\mathbb{H}^c)$.

Ninguna de las contenciones $\varphi(\mathbb{H}) \subset \mathbb{H}$ y $\varphi(\mathbf{int}(\mathbb{H}^c)) \subset \mathbf{int}(\mathbb{H}^c)$ es propia.

De lo contrario:

$$\mathbb{C}_\infty = \varphi(\mathbb{C}_\infty) = \varphi(\mathbb{H} \uplus \hat{\mathbb{R}} \uplus \mathbf{int}(\mathbb{H}^c)) \subset \varphi(\mathbb{H}) \uplus \varphi(\hat{\mathbb{R}}) \uplus \varphi(\mathbf{int}(\mathbb{H}^c)) \subsetneq \mathbb{C}_\infty.$$

Lo cual es absurdo. Por lo tanto $\varphi(\mathbb{H}) = \mathbb{H}$.

\Rightarrow) Dado que φ fija a \mathbb{H} , afirmamos que fija a su vez a $\hat{\mathbb{R}}$.

Sea $r \in \hat{\mathbb{R}}$, entonces $\varphi(r) \in \hat{\mathbb{R}}$. Suponiendo que no, $\varphi(r) \in \mathbf{int}(\mathbb{H}^c)$, como φ es una función abierta y continua, todo abierto $U \subseteq \mathbf{int}(\mathbb{H}^c)$ de $\varphi(r)$ tiene como preimagen a otro abierto, pero $U \cap \mathbb{H} = \emptyset$, lo que implica que $\varphi(U)$ es un abierto de r que no interseca a \mathbb{H} . Lo cual es falso.

Concluimos que $\varphi(\hat{\mathbb{R}}) \subseteq \hat{\mathbb{R}}$.

Como φ^{-1} tambien fija a \mathbb{H} , $\varphi^{-1}(\hat{\mathbb{R}}) \subseteq \hat{\mathbb{R}}$ de donde, $\hat{\mathbb{R}} = \varphi(\varphi^{-1}(\hat{\mathbb{R}})) \subseteq \varphi(\hat{\mathbb{R}})$.

Ambas contenciones implican que $\varphi(\hat{\mathbb{R}}) = \hat{\mathbb{R}}$.

Sea $\phi(\xi) = \frac{\bar{a}\xi + \bar{b}}{\bar{c}\xi + \bar{d}}$, si $\xi \in \mathbb{R}$:

$$\phi(\xi) = \frac{\bar{a}\xi + \bar{b}}{\bar{c}\xi + \bar{d}} = \overline{\left(\frac{a\xi + b}{c\xi + d}\right)} = \overline{\varphi(\xi)} = \varphi(\xi).$$

Como ambas son transformaciones de Möbius que coinciden en mas de tres puntos, $\varphi = \phi$. Podemos concluir que:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{b} \\ \bar{c} & \bar{d} \end{pmatrix}.$$

De esto $1 = ad - bc = \lambda^2 \overline{ad - bc} = \lambda^2$ por tanto $\lambda = 1$.

Esto nos dice que, o bien a, b, c, d son reales o puramente imaginarios.

No pueden ser puramente imaginarios pues:

$$\varphi(i) = \frac{ai + b}{ci + d} = \frac{(ai + b)(-\bar{c}i + \bar{d})}{|ci + d|^2}.$$

De esto:

$$\mathbf{Im}(\varphi(i)) = \frac{(-\bar{c}b + a\bar{d})}{|ci + d|^2} = -\frac{\bar{a}\bar{d} - \bar{c}\bar{b}}{|ci + d|^2} = -\frac{\overline{ad - bc}}{|ci + d|^2} = \frac{-1}{|ci + d|^2} < 0$$

Por lo tanto $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

Este último teorema sumado al hecho de que todo elemento del grupo $Aut(\mathbb{H})$ es una transformación de Möbius (puesto que es el conjugado por una transformación de Möbius de $Aut(D)$ un subgrupo de transformaciones de Möbius) nos caracteriza totalmente a los automorfismos de \mathbb{H} .

Deseamos descomponer:

$$\varphi(\xi) = \frac{a\xi + b}{c\xi + d} = k \cdot \alpha \cdot \nu(\xi)$$

con k, α, ν pertenecientes a subgrupos de Lie de $Aut(\mathbb{H})$, compacto, abeliano y nilpotente respectivamente. Recordemos que, sin pérdida de generalidad podemos suponer que $ad - bc = 1$.

Definimos:

$$\nu_\mu(\xi) = \xi + \mu \quad y \quad N' = \{\nu_\mu : \mu \in \mathbb{R}\}$$

N' es un grupo abeliano, y por tanto nilpotente.

$$\alpha_\lambda(\xi) = \lambda\xi \quad y \quad A' = \{\alpha_\lambda : \lambda \in \mathbb{R}^+\}$$

A' es un grupo abeliano.

Finalmente:

$$\tilde{k}(\xi) = \frac{\gamma\xi + \delta}{-\delta\xi + \gamma} \quad y \quad K' = \{\tilde{k} : \gamma, \delta \in \mathbb{R}\}.$$

Una cuenta mostrará el porque de K' y su compacidad.

$$\begin{aligned}
c^{-1}\tilde{k}c(\xi) &= c^{-1}\tilde{k}\left(i\left(\frac{1-\xi}{1+\xi}\right)\right) \\
&= c^{-1}\left(\frac{\gamma i(1-\xi) + \delta(1+\xi)}{-\delta i(1-\xi) + \gamma(1+\xi)}\right) \\
&= \frac{i(-\delta i(1-\xi) + \gamma(1+\xi)) - (\gamma i(1-\xi) + \delta(1+\xi))}{i(-\delta i(1-\xi) + \gamma(1+\xi)) + (\gamma i(1-\xi) + \delta(1+\xi))} \\
&= \frac{\delta(1-\xi) + \gamma i(1+\xi) - \gamma(1-\xi) - \delta(1+\xi)}{\delta(1-\xi) + \gamma i(1+\xi) + \gamma(1-\xi) + \delta(1+\xi)} \\
&= \frac{-2\delta\xi + 2i\gamma\xi}{2\delta + 2i\gamma\xi} = \frac{(-\delta + i\gamma)}{(\delta + i\gamma)}\xi \\
&= \frac{(\gamma + i\delta)}{(\gamma - i\delta)}\xi = \frac{z}{\bar{z}}\xi
\end{aligned}$$

Es decir que \tilde{K} , es conjugado del subgrupo K construido al inicio de esta sección, como uno es conjugado del otro, ambos son compactos.

Es una cuenta larga pero simple, mostrar que los coeficientes $\mu, \lambda, \delta, \gamma$, esta únicamente determinados y cumplen que:

$$\begin{aligned}
v(\zeta) &= \zeta + \frac{dc + ba}{a^2 + b^2}, \\
\alpha(\zeta) &= a^2 + c^2,
\end{aligned}$$

Y finalmente

$$k(\zeta) = \frac{(a^2d - abc)\zeta + (bc^2 - adc)}{(adc - bc^2)\zeta + (a^2d - abc)}.$$

Para el grupo nilpotente, N' , consideramos un elemento cualquiera ν_μ en el, estudiando su conjugado obtenemos que:

$$c\nu_\mu c^{-1}(\xi) = -\left(\frac{u-2i}{u+2i}\right) \cdot \left(\frac{\xi - \frac{u}{-u+2i}}{1 - \frac{u}{(-u+2i)}\xi}\right).$$

Que son una rotación por una transformación de Möbius.

Finalmente, sea $\alpha_\lambda \in \dot{A}$ calculando el conjugado nuevamente:

$$c\alpha_\lambda c^{-1}(\xi) = \frac{\xi - \frac{\lambda-1}{\lambda+1}}{1 - \xi\left(\frac{\lambda-1}{\lambda+1}\right)}$$

Una transformación de Möbius.

De esta forma hemos descompuesto a $Aut(D)$.

Capítulo 3

Equivalencia de regiones k -conexas, $k > 1$.

En el capítulo 2 se ha dicho que dos dominios Ω_1 y Ω_2 son *conformemente equivalentes* si existe entre ellos una transformación conforme y biyectiva y si dos dominios son conformemente equivalentes sus grupos de automorfismos también son equivalentes como grupos topológicos vía la conjugación por la transformación conforme entre ellos.

En el conjunto de todos los dominios contenidos en \mathbb{C}_∞ podemos definir una relación de equivalencia, donde Ω_1 está relacionado con Ω_2 si son conformemente equivalentes.

Dicha relación de equivalencia induce a través de la conjugación una partición en el conjunto de los grupos de automorfismos de dominios en la esfera de Riemann.

Nuestro objetivo en este capítulo es obtener representantes útiles para cada clase de equivalencia. Donde por útiles entendemos aquellos que nos permitan generar una clasificación (salvo conjugaciones) de los grupos de automorfismos de los dominios complejos y que además sean cualitativamente simples de estudiar.

3.1. Presentación de resultados claves y definiciones.

Comencemos formalizando un concepto importante para la exposición del capítulo^X.

Definición 3.1 (Regiones múltiplemente conexas). *Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}_\infty$ un dominio. Ω es finitamente conexo si su complemento $\mathbb{C}_\infty \setminus \Omega$ tiene una cantidad finita de componentes conexas. Decimos que es k -conexo ($k < \infty$) si $\mathbb{C}_\infty \setminus \Omega$ tiene k componentes conexas [2, p. 85].*

^XEsta sección es una lectura de [2, cap. 4] y [10] principalmente

Hasta el momento hemos definido solamente cuando dos dominios en el plano complejo son conformemente equivalentes, sin embargo ¿Cuándo son equivalentes dos dominios en la esfera de Riemann?

Una transformación conforme es aquella que localmente se ve como una rotación seguida de una homotecia en el plano complejo, esto es equivalente a que la diferencial de la transformación en cada punto sea distinta de cero, adoptaremos esto como definición.

Definición 3.2. Una función $f : \Omega_1 \subset \mathbb{C}_\infty \rightarrow \Omega_2 \subset \mathbb{C}_\infty$ es conforme, si y sólo si la diferencial df , es distinta de cero para cada punto en Ω_1 .

Sean $f : \Omega_1 \subset \mathbb{C}_\infty \rightarrow \Omega_2 \subset \mathbb{C}_\infty$ función conforme, $p \in \Omega_1$ y $f(p) \in \Omega_2$, para ambos puntos existe una representación en coordenadas locales de forma que la función f es conforme si y sólo si es conforme en su expresión local.

De esta forma dos dominios son conformemente equivalentes en la esfera de Riemann, si y sólo si son conformemente equivalentes en coordenadas locales independientemente del atlas que consideremos.

Como \mathbb{C}_∞ es una variedad que puede ser cubierta con un mínimo de dos cartas, si $\Omega \subsetneq \mathbb{C}_\infty$ y además es abierto, bajo cierta carta es mapeado en un abierto contenido en \mathbb{C} . Nosotros trabajaremos principalmente con las proyecciones estereográficas, de las cuales sólo se necesitan un par de ellas para generar un atlas conforme o analítico y donde cada una de las cartas mapea biyectivamente a la esfera menos un punto en el plano complejo.

Así las cosas, probar que dos dominios contenidos *propriadamente* en la esfera de Riemann son conformemente equivalentes, es probar que alguna de sus representaciones en el plano complejo lo son.

Para dominios doblemente conexos contenidos en el plano complejo se tiene un resultado bastante elegante.

Teorema 3.1. Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un dominio doblemente conexo tal que ninguna de las componentes conexas de su complemento es un punto. Entonces Ω es conformemente equivalente a un anillo.

¿Tenemos un resultado equivalente para dominios en la esfera de Riemann?

Si $\Omega \subset \mathbb{C}_\infty$ es un dominio 2-conexo donde ninguna componente conexa de su complemento es un punto, existe una carta coordenada ϕ tal que $\phi(\Omega)$ es conformemente equivalente a un anillo, por lo que de hecho Ω es equivalente a un anillo en la esfera de Riemann.

Hemos usado que la proyección estereográfica es una carta que mapea a la esfera menos un punto en el plano complejo que además preserva circunferencias, así, cuando hablamos del círculo unitario en la esfera de Riemann o un anillo en la esfera de Riemann, nos referimos a la preimagen del círculo o un anillo bajo la proyección estereográfica.

En esta sección, buscamos demostrar un resultado un poco más general, que sin ser el resultado que usaremos en la próxima sección es un paso preliminar de aquel y ayuda a entender algunos detalles del enunciados y la prueba.

El enunciado para dominios planos es.

Teorema 3.2 (Teorema de representación de regiones múltiplemente conexas por anillos menos arcos.). *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un dominio k -conexo, $k \geq 2$. Asumamos que ninguna componente de su complemento es un punto. Existe un holomorfismo biyectivo $\varphi : \Omega \rightarrow \mathcal{B}$ donde \mathcal{B} es un anillo $A = \{\zeta \in \mathbb{C} : c < |\zeta| < C\}$ con $k - 2$ arcos concéntricos removidos [2].*

Si $\Omega \subset \Omega_\infty$ es un dominio k -conexo con ninguna de las componentes conexas de su complemento un punto, localmente (en alguna carta) es un dominio en el plano complejo cuyo complemento tiene k -componentes conexas. Por lo que si el teorema es válido, la imagen de Ω bajo una carta es conformemente equivalente a un anillo en plano como el que describe el teorema, por lo tanto Ω es equivalente a un anillo en la esfera de Riemann con $k - 2$ arcos removidos.

Definición 3.3 (Dominio circular). $\Omega \subset \mathbb{C}_\infty$ es un dominio circular, si y sólo si el complemento de Ω tiene k componentes conexas todas ellas discos.

La caracterización que nosotros usaremos es en realidad la siguiente.

Teorema 3.3 (Teorema de representación de regiones múltiplemente conexas por dominios circulares.). *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un dominio k -conexo, $k \geq 2$, y asumamos que ninguna componente de su complemento es un punto. Existe una transformación conforme y biyectiva $\varphi : \Omega \rightarrow \mathcal{C}$ donde \mathcal{C} es un dominio circular [10].*

Nuestra prueba se realizará en varios pasos, antes recordaremos algunas ideas básicas sobre homología y sobre el periodo de las integrales. Dichos resultados son discutidos de forma más amplia en la bibliografía indicada, la demostración de estos resultados nos desvía de nuestro fin, además que algunos de ellos son geoméricamente intuitivos. En este capítulo trabajaremos sólo con dominios contenidos en la esfera de Riemann.

3.1.1. Revisión de algunas ideas topológicas.

Ciclos y periodos.

Sea ζ una curva contenida en \mathbb{C} y a un punto que no está en la curva. Se define el índice de ζ con respecto a a como:

$$n(\zeta, a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\zeta} \frac{dz}{z - a}.$$

El índice es siempre un entero e intuitivamente mide el número de veces que ζ se enrolla entorno a a , donde consideramos que la orientación de la curva es positiva al recorrerse en sentido contrario a las manecillas del reloj y negativa cuando lo hace en el sentido contrario.

Diremos que una curva cerrada ζ en un dominio Ω es *homóloga al cero* si el índice de la curva es cero con respecto a cualquier punto $a \in \Omega^c$. Consecuentemente un dominio Ω es simplemente conexo si toda curva cerrada en Ω es homóloga al cero.

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}_\infty$ un conjunto k -conexo. Denotamos por A_1, A_2, \dots, A_k a las componentes conexas del complemento de Ω , donde A_k es la componente que contiene a ∞ .

Lema 3.1. *Podemos encontrar ciclos ζ_j con $j = 1, \dots, k - 1$, tales que:*

- $n(\zeta_j, a) = 1$ para todo $a \in A_j$ y
- $n(\zeta_j, a) = 0$ para toda $a \in \Omega^c \setminus A_j$.

Demostración. *La componente A_1 es acotada y simplemente conexa (de no ser así tendría un "hoyo" en su interior, es decir otra componente conexa de Ω , lo cual no es posible). Por el teorema del mapeo de Riemann, existe φ mapeo conforme que manda a A_1 en D . Bajo la acción de φ , cada una de las componentes A_j va a dar a un conjunto cuya frontera es una curva cerrada y acotada que podemos suponer se encuentra en la región exterior a D (en caso contrario componemos a φ con una inversión). Como la frontera de $\varphi(A_j)$ es compacta para toda j al igual que $\partial\varphi(\Omega)$, obtenemos que ,*

$$r = \min\{|z| : z \in \cup_{j \neq 1} \partial\varphi(A_j)\} > 1.$$

Sea $1 < \alpha < r$, tomamos la curva definida por $\varphi^{-1}(C_{(0, \alpha)})$ obtenemos un primer ciclo de los deseados. Para obtener el resto aplicamos este proceso de forma iterada pero tomando en cuenta que ahora las componentes conexas no son seran los A_k sino el interior de los ciclos obtenido anteriormente.

Sea $\gamma \subset \Omega$ un ciclo y $a \in A_j$, el valor de $n(\gamma, a)$ es (por conectividad de A_j) independiente de la elección de $a \in A_j$, llamamos c_j a dicho valor constante.

El índice del ciclo:

$$\mu = \gamma - c_1\gamma_1 - c_2\gamma_2 \cdots c_{k-1}\gamma_{k-1},$$

es cero con respecto a cualquier $a \in \Omega^c$ ^{XI} de forma que μ es homóloga a cero.

Podemos decir que la curva γ es homóloga a una combinación lineal de $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{k-1}$. Es fácil verificar (usando la "linealidad" sobre las curvas) que los coeficientes que hacen de μ homóloga al cero están únicamente determinados.

Motivados por esto llamamos *base de homología* para Ω al conjunto

$$\{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{k-1}\}.$$

No necesariamente esta es la única base de homología, pero toda base de homología tiene exactamente $k - 1$ elementos (por construcción de la base tenemos un γ_j por cada componente conexa acotada de Ω^c). Hemos establecido que toda región con conexidad

^{XI}Dado que c_j es un entero la notación tiene sentido. Aquí $c_j\gamma_j$ significa c_j copias del ciclo γ_j .

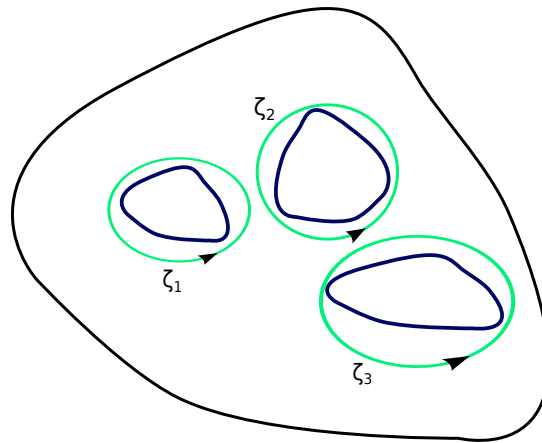


Figura 3.1: Ciclos para una base de homología

finita tiene una base de homología finita y viceversa.

La idea de la base de homología tiene una interpretación en términos de integrales de línea complejas.

Para cualquier función f holomorfa en Ω , se tiene que:

$$\oint_{\gamma} f(z)dz = c_1 \oint_{\gamma_1} f(z)dz + c_2 \oint_{\gamma_2} f(z)dz + \cdots + c_{k-1} \oint_{\gamma_{k-1}} f(z)dz$$

Ésta es la versión homológica del teorema de Cauchy. A los números,

$$P_j \equiv \oint_{\gamma_j} f(z)dz$$

se les llama *periodos* de la diferencial $f dz$.

Sabemos del estudio del teorema de Cauchy, que para ciertos dominios (un rectángulo por ejemplo) es posible definir una antiderivada para una función holomorfa f por medio de

$$F(z) = \int_{z_0}^z f(\xi)d\xi.$$

Aquí la integral está definida sobre cualquier curva continuamente diferenciable basada en el punto fijo z_0 . Inversamente, si f es una función holomorfa dada, en el rectángulo R y

F es una antiderivada de f bien definida y univaluada, entonces F y f es tan relacionadas por medio de la fórmula anterior.

Pondremos en contexto (de homología) las ideas elementales de los últimos párrafos al decir que dado un dominio Ω , para que f tenga una antiderivada bien definida y univaluada es una condición necesaria y suficiente que todo periodo sea nulo.

3.1.2. Funciones armónicas.

Definición 3.4. Una función real valuada $u : U \rightarrow \mathbb{R}$ en un conjunto abierto $U \subseteq \mathbb{C}$ es una función armónica si $f \in C^2(U)$ y ^{XII}

$$\Delta u \equiv 0.$$

Donde el operador Laplaciano está definido por

$$\Delta u = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) u.$$

Lema 3.2. Sea u es una función armónica en una región Ω , entonces:

$$f(z) = \frac{\partial u}{\partial x}(z) - i \frac{\partial u}{\partial y}(z), \quad (3.1)$$

define una función holomorfa en Ω .

Demostración. Reescribamos 3.1 como $f = u_x + 1(-u_y)$, como u es C^2 tiene sentido tomar las derivadas de parciales de orden 2 y dado que u es armónica $u_{xx} = -u_{yy}$, deducimos que:

$$(u_x)_x = -u_{yy} = (-u_y)_y \quad y \quad (u_x)_y = u_{xy} = u_{yx} = -(-u_y)_x,$$

cumpléndose así las ecuaciones de Cauchy-Riemann para la función f .

Es útil escribir ahora

$$\begin{aligned} f dz &= \left(\frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y} \right) (dx + dy) \\ &= \left(\frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy \right) + i \left(-\frac{\partial u}{\partial y} dx - \frac{\partial u}{\partial x} dy \right) \end{aligned}$$

^{XII}Recordemos que una función $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ es de clase C^k , si y sólo si sus derivadas parciales son de clase C^k .

La parte real de ésta última expresión es simplemente la diferencial real de u . En caso de que u tenga una función conjugada armónica^{XIII} v en Ω , tenemos que

$$dv = \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy \text{ y } du = -\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy,$$

pues se cumplen las ecuaciones de Cauchy-Riemann.

En general, aun en un anillo, no siempre existe para u alguna función v conjugada, bien definida y univaluada, es por eso que en lugar de escribir dv introducimos la notación:

$$*du = -\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy$$

Denominamos a $*du$ la *diferencial conjugada* de du . Sabemos que:

$$f dz = du + i *du.$$

Sea γ una curva homóloga al cero (por tanto el interior a la curva es simplemente conexo), por el teorema 1.13 sabemos que:

$$0 = \oint_{\gamma} f(z) dz = \oint_{\gamma} du + i \oint_{\gamma} *du$$

Denotamos $int \gamma$ a la región interior de la curva γ , que por cierto esta contenida en Ω , du es una forma exacta y utilizando el teorema de Stokes:

$$\int_{\gamma} du = \int_{int\gamma} d(du) = \int_{int\gamma} 0 = 0.$$

Por lo que la primera integral se anula, y el segundo término debe ser cero.

$$\oint_{\gamma} *du = 0 \tag{3.2}$$

o bien

$$\oint_{\gamma} -\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy = 0 \tag{3.3}$$

Deseamos dar una interpretación geométrica de (3.3).

Sea $\gamma(t) = z(t)$ una parametrización de nuestra curva cerrada γ . Si $\alpha(t) = arg(z'(t))$ es la dirección del vector tangente a γ en t , podemos escribir:

$$\begin{aligned} dx &= |dz| \cos \alpha \\ dy &= |dz| \sin \alpha. \end{aligned}$$

Supongamos que el vector normal a la curva apunta a la derecha del tangente. La dirección del vector normal estará dada por $\beta = \alpha - \pi/2$. $\cos \alpha = -\sin \beta$ y $\sin \alpha = \cos \beta$, por lo que la derivada direccional de u en la dirección normal esta dada por:

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \cos \beta \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \sin \beta \cdot \frac{\partial u}{\partial y},$$

^{XIII}Toda función real (*armónica*) v tal que $u + iv$ es holomorfa es llamada *conjugada armónica* de u

y a la cual denominamos *derivada normal*.

Tenemos entonces que:

$$\begin{aligned} *du &= -\frac{\partial u}{\partial y}dx + \frac{\partial u}{\partial x}dy \\ &= -\frac{\partial u}{\partial y}|dz|\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial x}|dz|\sin\alpha \\ &= \left(\cos\beta \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \sin\beta \cdot \frac{\partial u}{\partial y}\right)|z| \\ &= \left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)|z|. \end{aligned}$$

Podemos reescribir (3.2) como:

$$\oint_{\gamma} \left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)|z| = 0$$

para todos los ciclos γ que son homólogos al cero en Ω .

Esto nos permite plantear en un nuevo lenguaje algo que ya habíamos concluido en la sección pasada.

Si Ω es una región simplemente conexa todos los ciclos son homólogos al cero y por tanto $\oint_{\gamma}^* du = 0$ para todos los ciclos γ . Vía el teorema de Cauchy es posible definir una función conjugada armónica para u . Si en lugar de eso Ω es múltiplemente conexo, la función conjugada tiene periodos pues la base de homología no es trivial y:

$$\oint_{\gamma_j}^* du = \oint_{\gamma_j} \left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)|z|,$$

para cada elemento de una base de homología $\gamma_1, \dots, \gamma_{k-1}$.

3.1.3. El problema de Dirichlet y su solución.

Definición 3.5 (El Laplaciano). *El operador diferencial Laplaciano se define como:*

$$\Delta = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right).$$

Definición 3.6 (Función armónica). *Una función u en un dominio Ω se dice que es armónica, si*

$$\Delta u = 0.$$

Resulta de interés (al menos para nuestro fines inmediatos) resolver el siguiente problema de valores en la frontera.

Sea φ una función continua en $\partial\Omega$. Considere las condiciones para una función $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$.

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{en } \Omega, \\ u = \varphi & \text{en } \partial\Omega. \end{cases}$$

Al problema de encontrar una solución a estas ecuaciones con sus hipótesis en la frontera se le denomina un problema de Dirichlet.

Este no es el espacio para desarrollar una discusión sobre este tema que tiene vida propia, pues nos desviaría de nuestro objetivo, razón por la cual citamos solamente un par de resultados que serán de utilidad para hacer fluida la exposición posterior.

Definición 3.7. Sea Ω un dominio en \mathbb{C} y $P \in \partial\Omega$. Decimos que P tiene una barricada, si existe un punto $Q \in \Omega^c$ tal que el segmento \overline{PQ} sólo interseca a $\bar{\Omega}$ en P .

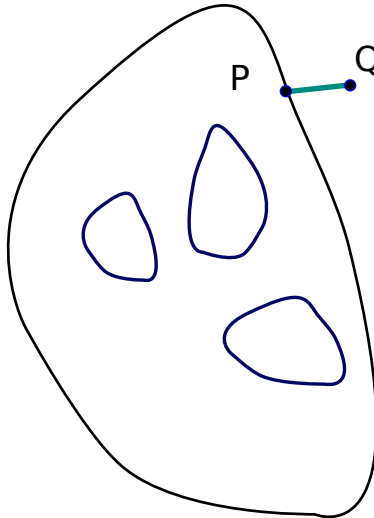


Figura 3.2: Barricada de un punto P

Teorema 3.4. Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un dominio. Asumamos que cada punto de $\partial\Omega$ tiene una barricada, entonces un problema de Dirichlet sobre Ω siempre tiene solución.

Lema 3.3. Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un dominio C^1 . Todo punto de $\partial\Omega$ tiene una barricada.

Corolario 3.1. Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un dominio C^1 . Todo problema de Dirichlet sobre Ω tiene solución.

Corolario 3.2. Sean u_1, u_2 funciones armónicas definidas en $\Omega \subset \mathbb{C}$, continuas en $\bar{\Omega}$, que coinciden en la frontera (ie $u_1|_{\partial\Omega} = u_2|_{\partial\Omega}$) entonces $u_1 = u_2$ en Ω .

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}_\infty$ un dominio suave (cuya frontera es la unión finita de curvas de Jordan simples) y $E \subseteq \partial\Omega$ un conjunto finito de arcos de la frontera de Ω , los cuales pueden ser en particular alguna componente conexa de la frontera. Considérese el siguiente problema de Dirichlet:

$$\phi u(z) = \begin{cases} 0 & \text{si } z \in \partial\Omega \setminus E \\ 1 & \text{si } z \in E \end{cases}$$

Definición 3.8 (Medida armónica). *Definimos $\phi : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ la medida armónica de E en $z \in \Omega$, como la solución del anterior problema de Dirichlet valuada en z .*

Este problema de Dirichlet no tiene una condición de frontera continua, la discusión de la existencia y unicidad de dicha medida armónica no es trivial, pero nuevamente este no es lugar para llevarla a cabo.

3.2. Representación de dominios k -conexos como anillos rasgados.

El teorema que buscas probar es:

Teorema 3.5 (Teorema de representación de regiones múltiplemente conexas por anillos rasgados.). *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un dominio k -conexo, $k \geq 2$. Asumamos que ninguna componente de su complemento es un punto. Existe un holomorfismo biyectivo $\varphi : \Omega \rightarrow \mathcal{B}$ donde \mathcal{B} es un anillo $A = \{\zeta \in \mathbb{C} : c < |\zeta| < C\}$ con $k - 2$ arcos concéntricos removidos [2].*

Probemos un resultado preliminar.

Teorema 3.6. *Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}_\infty$ un dominio k -conexo, Ω es conformemente equivalente a un dominio suave.*

Gracias a que dos proyecciones estereográficas desde dos puntos distintos forman un atlas conforme de \mathbb{C}_∞ , si Ω es k -conexo existe una manera de proyectarlo en una región k -conexa en \mathbb{C} , si ahí es conformemente equivalente a un dominio suave también lo será en la esfera de Riemann. Basta suponer entonces que $\Omega \subset \mathbb{C}$.

Demostración. *Sean A_1, A_2, \dots, A_k las componentes conexas del complemento de Ω , donde A_k es la componente no acotada y ninguna de las A_j es un punto, de lo contrario podemos suponer que el dominio Ω es el dominio original unión ese punto y si encontramos un dominio Ω_0 conformemente equivalente a este nuevo dominio, la imagen del punto agregado está únicamente determinado y quitando su imagen a Ω_0 , habremos obtenido un dominio suave equivalente al dominio original.*

A_k es una región simplemente conexa, por el teorema del mapeo de Riemann, existe φ un mapeo conforme que manda a A_k en el complemento del disco unitario, por lo que

Ω es llevado a una región k -conexa contenida en el disco unitario con frontera exterior un círculo y donde las imágenes de A_1, \dots, A_{k-1} son las componentes conexas acotadas de su complemento, denotamos a las imágenes de estos conjuntos distinguidos de la misma manera que sus preimágenes.

La frontera exterior de la nueva región Ω es el círculo unitario al que podemos parametrizar en dirección positiva. La frontera es por lo tanto una curva suave, cerrada, orientada positiva y simple, a la cual denominamos C_k .

Consideramos la región simplemente conexa definida como A_1^c , esta región es equivalente (vía un mapeo conforme) al exterior del círculo unitario, la imagen de C_k es otra vez una curva suave, cerrada, y simple a la que seguimos llamando C_k , que sin embargo no es necesariamente un círculo.

Como en el caso anterior la imagen de la curva frontera de A_1^c es el círculo unitario.

Podemos repetir este proceso de forma iterativa $k - 2$ veces más para el resto de las componentes conexas. Claramente el dominio obtenido al final es conformemente equivalente al original y todas las curvas fronteras son suaves, cerradas y simples.

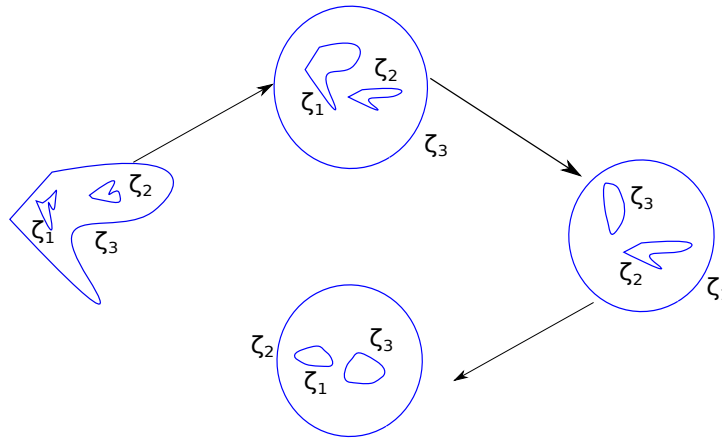


Figura 3.3: Transformación de un dominio arbitrario en un dominio suave.

El teorema basta ser probado entonces para dominios suaves.

Recordemos que C_k es el borde exterior con orientación positiva y el borde C_j con $j < k$ posee orientación negativa.

Para un borde C_j con $1 \leq j < k$, el índice con respecto a cualquier punto en la región interior a C_k es -1 y para cualquier punto exterior es 0 . Para C_k el índice vale 1 respecto a cualquier punto interior y 0 para la región exterior.

$C_1 + C_2 \cdots + C_k$ es la frontera de Ω .

Por otra parte, dado que $\partial\Omega$ está constituida por curvas analíticas, se puede considerar localmente como segmentos de un círculo y por tanto, cada punto en la frontera posee una barricada y el problema de Dirichlet en Ω siempre tiene solución.

Para cada $1 \leq j \leq k$ consideremos el problema de Dirichlet con condiciones de frontera 1 en C_j y 0 en los otros bordes. Denominamos w_j a dicha solución y $w_j(z)$ es la medida armónica de C_j en z con respecto a Ω .

El clásico teorema del máximo nos asegura que si u es una función real valuada y analítica en un dominio Ω , esta no puede alcanzar su máximo en Ω a menos que u sea una función constante. Un corolario inmediato es que si Ω está acotado y u es continua en $\partial\Omega$, claramente u alcanza su máximo en $\bar{\Omega}$ y coincide con el máximo de u en la frontera de Ω , un razonamiento análogo nos conduce a una afirmación dual para el mínimo.

Esto finalmente resulta en que $0 < w_j(z) < 1$ para todo $z \in \Omega$ y como

$$w_1 + w_2 \cdots + w_k \equiv 1$$

en la frontera de Ω

$$w_1 + w_2 \cdots + w_k \equiv 1 \quad \text{en } \bar{\Omega}.$$

Uno puede nuevamente mapear cada uno de los contornos de manera conforme en el círculo unitario y vía el lema de reflexión de Schwarz, la medida armónica w_j es extendida analíticamente a la frontera de Ω y podemos decir que w_j es armónica en $\bar{\Omega}$.

Claramente $C_1, C_2 \cdots, C_k$ es una base de homología para Ω . Y para cada j la diferencial de la conjugada armónica tiene periodo α_{jm} con respecto a C_m definido por:

$$\alpha_{jm} = \int_{C_m} \frac{\partial w_j}{\partial n} ds = \int_{C_m} *dw_j.$$

Lema 3.4. *No existe una combinación lineal,*

$$\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 \cdots + \lambda_{k-1} w_{k-1} \tag{3.4}$$

con coeficientes constantes reales λ_j , que posea una función conjugada armónica y univaluada, a menos que todos los λ_j sean iguales a cero.

Demostración. *Supongamos que 3.4 es la parte real de una función holomorfa f en Ω . Usando el argumento de reflexiones pasado, podemos suponer que f se extiende analíticamente a $\bar{\Omega}$. Claramente $\text{Re} f$ es igual a λ_j en C_j para $j < k$ y 0 en C_k , por lo tanto cada uno de los contornos es mapeado a un segmento de línea paralelo al eje imaginario.*

Si τ no pertenece a ninguno de los segmentos, la función $\text{Arg}(f(z) - \tau)$ es armónica y en cada contorno C_j posee una rama univaluada.

EL principio del argumento nos dice que f no toma el valor τ en Ω , pues existiría un punto en Ω donde la función $\text{Arg}(f(z) - \tau)$ no tiene sentido y no se puede afirmar que por lo tanto esta bien definida en Ω . Así que la imagen de Ω está contenida en la unión

de los segmentos de recta.

Por ser f una función holomorfa se puede concluir que su imagen es abierta, esto es una contradicción pues la unión de los segmentos de recta no contiene a ningún abierto.

La única manera que esto sea posible, es que la función f sea la constante cero y $\lambda_j = 0$ para toda j .

Consideremos ahora el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} \lambda_1 \alpha_{1,1} + \lambda_1 \alpha_{2,1} + \cdots + \lambda_{k-1} \alpha_{k-1,1} &= 0 \\ \lambda_1 \alpha_{1,2} + \lambda_1 \alpha_{2,2} + \cdots + \lambda_{k-1} \alpha_{k-1,2} &= 0 \\ \vdots & \\ \lambda_1 \alpha_{1,k-1} + \lambda_1 \alpha_{2,k-1} + \cdots + \lambda_{k-1} \alpha_{k-1,k-1} &= 0 \end{aligned}$$

Llamamos $u(z) = \sum_{j=1}^{k-1} \lambda_j w_j$ una función solución y el sistema de ecuaciones es equivalente a que:

$$\int_{C_m} {}^* du = 0 \quad \forall m \in \{1, 2, \dots, k-1\}.$$

Si el sistema de ecuaciones tiene una única solución y por tanto una única función solución u , esta debe ser la formada por coeficientes constantes cero. Del lema anterior u es la parte real de una función univaluada armónica. Por el contrario, si u es una función solución y posee una función conjugada univaluada armónica v , ${}^* du = dv$ y:

$$\int_{C_m} {}^* du = \int_{C_m} dv = 0.$$

Por el teorema anterior, nuevamente los coeficientes que generan a u están únicamente determinados y son todos ceros, por lo que el sistema tiene una única solución y es la trivial.

Afirmamos que efectivamente el sistema tiene una única solución.

Este resultado nos dice que el siguiente sistema no homogéneo tiene una única solución.

$$\begin{aligned} \lambda_1 \alpha_{1,1} + \lambda_1 \alpha_{2,1} + \cdots + \lambda_{k-1} \alpha_{k-1,1} &= 2\pi \\ \lambda_1 \alpha_{1,2} + \lambda_1 \alpha_{2,2} + \cdots + \lambda_{k-1} \alpha_{k-1,2} &= 0 \\ \vdots & \\ \lambda_1 \alpha_{1,k-1} + \lambda_1 \alpha_{2,k-1} + \cdots + \lambda_{k-1} \alpha_{k-1,k-1} &= 0 \end{aligned}$$

Notemos que

$$\alpha_{j,1} + \alpha_{j,2} + \cdots + \alpha_{j,k} = \int_{C_1 + C_2 + \cdots + C_k} \frac{\partial w_j}{\partial n} = 0$$

Pues $C_1 + C_2 + \cdots + C_k$ es una curva homóloga a cero. Desprendemos de esta última igualdad que:

$$\alpha_{j,1} + \alpha_{j,2} + \cdots + \alpha_{j,k-1} = -\alpha_{j,k}.$$

La ecuación:

$$\lambda_1\alpha_{1,k} + \lambda_2\alpha_{2,k} + \cdots + \lambda_k\alpha_{k-1,k} = -2\pi$$

es redundante en el sistema de ecuaciones.

Esto nos dice que existe una solución de forma tal que $\lambda_1w_1 + \lambda_2w_2 + \cdots + \lambda_{k-1}w_{k-1}$ tiene una conjugada armónica f multivaluada de periodo $\pm 2\pi$ en los ciclos C_1, C_k e igual a cero en el resto.

Con razonamientos como los utilizados previamente, obtenemos que $Re(f)$ es constante e igual a λ_j en C_j ($\lambda_k = 0$).

Consideramos una rama de la función $f(z)$ y definimos $F(z) = ef(z)$, que está bien definida y es holomorfa.

El siguiente teorema es la prueba final de nuestro resultado.

Teorema 3.7. *La función F es un mapeo biyectivo y holomorfo de Ω en B , el anillo $A = \{\zeta \in \mathbb{C} : c < |\zeta| < C\}$ con $k - 2$ arcos concéntricos removidos.*

Demostración. *$F(z)$ esta bien definida, es holomorfa y el dominio es claramente como se indica. Resta verificar que sea univaluada y biyectiva.*

Los contornos C_1, C_k corresponden a los contornos exteriores en interiores de anillo, mientras los contornos C_2, \cdots, C_{k-1} son a los arcos removidos del anillo. Aquí es pertinente pensar a cada arco como una curva cerrada donde ambos lados curvados han sido forzados a coincidir.

Hemos corroborado que si Ω es un dominio k -conexo en la esfera de Riemann, entonces es conformemente equivalente a un anillo con $k - 2$ arcos removidos contenido también en la esfera. Como mencionamos al inicio del capítulo, existe otra versión de este teorema donde el conjunto de representantes de estos dominios son los llamamos *dominios circulares* y son los que nos interesan pues en ellos se vale el siguiente teorema.

Teorema 3.8. *Sea Ω un dominio circular entonces, $Aut(\Omega)$ es subgrupo de las transformaciones de Möbius [10].*

De esta forma, nuestro problema de clasificación original se traduce en clasificar subgrupos de las transformaciones de Möbius, que en general resultan ser más accesibles que un grupo abstracto como $Aut(\Omega)$.

3.3. La estructura de grupo topológico de $Aut(\Omega)$.

El objetivo de esta sección es verificar que para cualquier dominio Ω en \mathbb{C}_∞ , el grupo de automorfismos de Ω tiene con la composición de funciones y la topología de la convergencia uniforme respecto a la métrica cordal, estructura de grupo topológico.

Enunciamos a continuación un par de resultados que son por demás conocidos en la literatura, pero resultan necesarios en la demostración que proponemos.

Hemos denotado por \mathcal{M} al grupo de las transformaciones de Möbius.

Teorema 3.9. *El grupo de transformaciones de Möbius \mathcal{M} con la topología de la convergencia uniforme en la métrica cordal es un grupo topológico.*

Teorema 3.10. *Sea $G \leq \mathcal{M}$. G es un grupo topológico.*

La topología de G esta dada por la métrica de la convergencia uniforme al igual que en \mathcal{M} , G como subconjunto de \mathcal{M} es también un espacio topológico y un subgrupo. Las funciones que hay que verificar que son continuas lo son sobre todo \mathcal{M} y en particular sobre G .

Si D es un dominio circular canónico, $\text{Aut}(D)$ es un subgrupo de las transformaciones de Möbius y por tanto un grupo topológico.

Sea H grupo topológico y G un grupo dotado de una topología (no así un grupo topológico) y una función biyectiva h^* que es homeomorfismo y morfismo de grupos al mismo tiempo. ¿Será cierto que G es un grupo topológico?. La afirmación es que sí.

Los próximos dos lemas técnicos serán de ayuda para exhibir la veracidad de esta última afirmación.

Lema 3.5. *Sean H y G grupos. Si denotamos por $l : G \rightarrow G$ a la función tal que $l(g) = g^{-1}$ para toda $g \in G$ y como l^* a la función con la misma regla de correspondencia sobre H , el siguiente diagrama conmuta*

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{l} & G \\ h^* \downarrow & & \downarrow h^* \\ H & \xrightarrow{l^*} & H \end{array}$$

cuando la función h^* es un homeomorfismo de grupos.

Demostración. *Sea $x \in G$ entonces $l^*(h^*(x)) = (h^*(x))^{-1}$, el inverso en H de $h^*(x)$. Por otra parte $h^*(l(x)) = h^*(x^{-1})$, como $h^*(x) \cdot h^*(x^{-1}) = h^*(xx^{-1}) = h^*(e_G) = e_H$, de la unicidad del inverso $(h^*(x))^{-1} = h^*(x^{-1})$ y por tanto el diagrama conmuta.*

Lema 3.6. *Si denotamos como $L : G \times G \rightarrow G$ a la función tal que $L((f, g)) = f \cdot g$ para toda $f, g \in G$ y L^* a la función con la misma regla de correspondencia sobre $H \times H$, entonces el siguiente diagrama conmuta*

$$\begin{array}{ccc} G \times G & \xrightarrow{L} & G \\ (h^*, h^*) \downarrow & & \downarrow (h^*, h^*) \\ H \times H & \xrightarrow{L^*} & H \end{array}$$

cuando la función h^* , es un homeomorfismo de grupos.

Demostración. Sea $(f, g) \in G \times G$ entonces

$$L^*((h^*(f), h^*(g))) = h^*(f) \cdot h^*(g) = h^*(fg) = h^*(L((f, g))),$$

por tanto el diagrama conmuta.

Si además de nuestras hipótesis pedimos que H sea un grupo topológico y que nuestra función h^* sea abierta y continua, dado que nuestros diagramas conmutan y h^* es invertible, las funciones l^* y L^* son funciones continuas y por tanto G hereda la estructura de grupo topológico.

El párrafo anterior nos da una estrategia para probar que $\text{Aut}(\Omega)$ es un grupo topológico. Basta exhibir una función biyectiva, continua y abierta, que respete la estructura de grupos entre $\text{Aut}(\Omega)$ y algún grupo topológico.

Por nuestros teoremas de representación canónica de dominios finitamente conexos, todo dominio k -conexo Ω es equivalente vía una transformación conforme h a D un dominio circular k -conexo ($h : \Omega \rightarrow D$), cuyo grupo de automorfismos es un grupo topológico, definimos $h^* : \text{Aut}(D) \rightarrow \text{Aut}(\Omega)$ dada por $h^*(g) = h^{-1}gh$.

Teorema 3.11. *La función h^* definida anteriormente es:*

i) *Un homeomorfismo de grupos (ie. $h^*(f \cdot g) = h^*(f) \cdot h^*(g)$)*

ii) *Una función continua y abierta.*

Demostración. Para probar i), sean $f, g \in \text{Aut}(\Omega)$, por definición:

$$h^*(f \cdot g) = h^{-1} \cdot (f \cdot g) \cdot h = h^{-1} \cdot (f \cdot h \cdot h^{-1} \cdot g) \cdot h = (h^{-1} \cdot f \cdot h) \cdot (h^{-1} \cdot g \cdot h) = h^*(f) \cdot h^*(g).$$

La biyectividad de la conjugación es clara.

Para el inciso ii) definimos $f^* = h^*(f)$ con $f \in \text{Aut}(D)$. Recordemos que:

$$B_{(\epsilon)}^{\Omega}(f^*) = \{g^* \in \text{Aut}(\Omega) : \|g^* - f^*\| < \epsilon\}$$

y

$$B_{(\epsilon)}^D(f) = \{g \in \text{Aut}(D) : \|g - f\| < \epsilon\}.$$

Donde $\|\cdot\|$ es la norma de la convergencia uniforme con la métrica cordal (denotada $|\cdot|$). Mostraremos que para toda $\epsilon > 0$ existe una $\delta > 0$ tal que para todo $g \in B_{(\delta)}^D(f)$, $h^*(g) \in B_{(\epsilon)}^{\Omega}(f^*)$.

Por el teorema de extensión de Caratheodory h se puede extender continuamente a la frontera de D , por lo tanto h como función extendida es continua en un cerrado y acotado con la métrica cordal, por lo tanto es continua en un compacto.

Sabemos que existe una $\delta > 0$ tal que si $x, y \in \Omega$ tales que $|x - y| < \delta$ entonces $|h(x) -$

$|h(y)| < \epsilon$.

Sea $g \in \text{Aut}(D)$ tal que $\|g - f\| < \delta$, para toda $w \in \Omega$

$$|g(w) - f(w)| < \delta.$$

Como $g(w), f(w) \in D$, para toda $w \in D$

$$|h(g(w)) - h(f(w))| < \epsilon.$$

Por otra parte h es una biyección entre Ω y D , por lo que para toda $w \in \Omega$ existe $z \in D$ tal que $w = h^{-1}(z)$. Por tanto para toda $z \in D$

$$|h(g(h^{-1}(z))) - h(f(h^{-1}(z)))| < \epsilon.$$

Es decir que

$$\|g^* - f^*\| < \epsilon.$$

Con esto se prueba que la función h^* es continua.

Si intercambiamos h por h^{-1} concluimos que h es abierta.

Corolario 3.3. $\text{Aut}(\Omega)$ es un grupo topológico para todo dominio contenido en \mathbb{C}_∞ .

Capítulo 4

El teorema de clasificación de $M(\Omega)$.

Al inicio de esta tesis nos hemos propuesto como objetivo dar una clasificación de los grupos de automorfismos de dominios contenidos en la esfera de Riemann. Este capítulo está dedicado a ese resultado.

Este capítulo está plenamente basado en el artículo [3], cualquier error en la redacción es responsabilidad nuestra y no del autor.

Desarrollamos una serie de definiciones y resultados que son necesarios para hacer clara la exposición del teorema de clasificación, lo enunciamos y la prueba se sigue a través de una serie de lemas y corolarios.

4.1. Definiciones y presentación del Teorema

Denotaremos como \mathcal{M} al grupo de transformaciones de Möbius actuando en \mathbb{C}_∞ . Para cualquier subdominio $\Omega \subseteq \mathbb{C}_\infty$ definimos como $M(\Omega)$ al subgrupo de transformaciones de Möbius contenidas en $\text{Aut}(\Omega)$.

Definición 4.1. *Un subgrupo uniparamétrico de \mathcal{M} (o de cualquier grupo de Lie), es un homeomorfismo Γ del grupo aditivo de \mathbb{R} en \mathcal{M} . Nos permitimos usar Γ para referirnos tanto al homeomorfismo como a su imagen, $\Gamma(\mathbb{R})$.*

Lema 4.1. *Γ es un subgrupo abeliano de \mathcal{M}*

Demostración. *Sean $a, b \in \Gamma$ con $\Gamma(\alpha) = a$ y $\Gamma(\beta) = b$, tenemos que:*

$$ab = \Gamma(\alpha)\Gamma(\beta) = \Gamma(\alpha + \beta) = \Gamma(\beta + \alpha) = \Gamma(\beta)\Gamma(\alpha) = ba.$$

Teorema 4.1. *Salvo por una conjugación en \mathcal{M} , los grupos uniparamétricos están dados por:*

- $\{z \rightarrow z + t : t \in \mathbb{R}\}$
- $\{z \rightarrow e^{wt}z : t \in \mathbb{R}\}$

Si Γ es un subgrupo uniparamétrico de \mathcal{M} , es abeliano y por lo tanto elemental. El siguiente lema identifica la cardinalidad de las órbitas de los grupos uniparamétricos.

Lema 4.2. *Sea $\Gamma \leq \mathcal{M}$ subgrupo uniparamétrico, toda órbita finita de Γ es de cardinalidad uno.*

Demostración. *Sea $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ una órbita finita de Γ . Supongamos que $n \geq 1$, definimos:*

$$t_i = \begin{cases} \inf\{t \in \mathbb{R}^+ : \Gamma(t)(x_0) = x_i\} & \text{si existe } t > 0 \text{ tal que } \Gamma(t)(x_0) = x_i \\ & \text{si toda } t \text{ tal que } \Gamma(t)(x_0) = x_1 \\ \sup\{t \in \mathbb{R}^- : \Gamma(t)(x_0) = x_i\} & \text{es menor que cero} \end{cases}$$

$\Gamma(t_i)(x_0) = x_i$ para toda $0 \leq i \leq n$ pues para cada i existe una sucesión de t_i^n tales que $t_i^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} t_i$ y $\Gamma(t_i^n)(x_0) = x_i$.

Γ es un homeomorfismo entre grupos topológicos y en particular es una aplicación continua, por lo tanto $\Gamma(t_i^n) \rightarrow \Gamma(t_i)$ uniformemente (que define a la topología en los grupos de automorfismos).

En particular $\Gamma(t_i^n)$ converge puntualmente para x_0 , donde se tiene que:

$$\Gamma(t_i^n)(x_0) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \Gamma(t_i)(x_0),$$

pero $\Gamma(t_i^n)(x_0) = x_i$ es una sucesión constante, por tanto $\Gamma(t_i)(x_0) = x_i$.

Podemos suponer que:

$$t_1 < t_2 \cdots t_{j-1} < t_0 < t_j < \cdots < t_n \text{ y } j < n.$$

Sabemos que para toda $t > 0$ existe j tal que $\Gamma(t)(x_0) = x_j$, si j fuese siempre igual a cero para toda $t > 0$, $\Gamma(t)(x_0) = x_0$ y para toda $t < 0$ $\Gamma(t)(x_0) = (\Gamma(-t))^{-1}(x_0) = x_0$. Por tanto $n = 0$, lo cual contradice nuestra hipótesis.

Sea ahora $t_0 < t_\epsilon < t_j$, tal que $\Gamma(t_\epsilon)(x_0) = x_i$ para alguna $i \neq 0$, de no poder encontrarla para toda $t \in (0, t_j)$, $\Gamma(t)(x_0) = x_0$ y por lo tanto $\Gamma(t_j)(x_0) = x_0$, lo cual es falso.

Sin embargo $t_\epsilon < t_i = \inf\{t \in \mathbb{R}^+ : \Gamma(t)(x_0) = x_i\}$ y $\Gamma(t_\epsilon)(x_0) = x_i$, contradicción.

Por tanto la órbita finita de Γ sólo puede contener a x_0 .

De la clasificación de los grupos elementales sabemos que Γ debe ser del tipo 2. Por lo tanto es conjugado de un grupo de similaridades euclidianas donde cada elemento es de la forma $az + b$.

Si $\{x_0\}$ es una órbita finita de Γ , x_0 es un punto fijo para todo $\Gamma(t) \in \Gamma$.

Ocurre alguna de las siguientes opciones para Γ grupo uniparamétrico:

1. Γ tiene sólo una órbita finita (y con ello, todo $g \in \Gamma$ tiene un único punto fijo).
2. Γ tiene dos órbitas finitas (y con ello, todo $g \in \Gamma$ tiene dos puntos fijos).

En caso de que Γ tenga más de dos órbitas finitas, Γ sería simplemente la identidad y la aplicación Γ constante, lo cual contradice que Γ sea uniparamétrico. Revisemos cada uno de los casos.

Caso 1. Γ tiene sólo una órbita finita (y con ello todo $g \in \Gamma$ tiene un único punto fijo).

Sabemos que Γ es conjugado de un grupo de isometrías del plano que deja fijo a sólo un punto, sin pérdida de generalidad ese punto es ∞ . Por lo tanto todo elemento $g(t)$ de Γ se ve como $g(t)(z) = z + b(t)$. Afirmamos que $b(t)$ es una función lineal. La función $b(t)$ es aditiva pues para todo $s, t \in \mathbb{R}$:

$$z + b(t + s) = g(t + s)(z) = g(t) \cdot g(s)(z) = z + b(t) + b(s),$$

para toda z . Por lo tanto, $b(t + s) = b(t) + b(s)$. Por inducción sobre n , $b(nt) = nb(t)$ y :

$$b(1) = b\left(\frac{n}{n}\right) = b\left(n \cdot \frac{1}{n}\right) = n \cdot b\left(\frac{1}{n}\right).$$

Despejando en la primera y última igualdad, $b\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} \cdot b(1)$.

Se sigue que $b\left(\frac{m}{n}\right) = m \cdot b\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{m}{n} \cdot b(1)$, se tiene que $b(t)$ y $t \cdot b(1)$ son funciones continuas que coinciden en un conjunto denso en \mathbb{R} , por lo tanto son iguales, es decir que $b(t) = t \cdot b(1)$ y $b(t)$ saca escalares.

Concluimos que $g(t)(z) = z + bt$ con $b \neq 0$. Tomando $h(z) = bz \in \mathcal{M}$:

$$h^{-1}g(t)h(z) = h^{-1}g(t)(bz) = h^{-1}(bz + bt) = \frac{1}{b}(bz + bt) = z + t.$$

Caso 2. Γ tiene dos órbitas finitas (y con ello todo $g \in \Gamma$ tiene dos puntos fijos).

Sin pérdida de generalidad (es decir salvo conjugaciones por transformaciones de Möbius) estos puntos son $\{0, \infty\}$. Por lo tanto todo elemento en Γ es una rotación de la forma $g(t)(z) = \alpha(t)z$.

Afirmamos que la función $\alpha(t)$, es tal que $\alpha(t + s) = \alpha(t)\alpha(s)$.

Para todo entero n :

$$\alpha(nt) = \alpha(t + t \cdots + t) = \alpha(t)^n$$

y

$$\alpha(1) = \alpha\left(\frac{n}{n}\right) = \alpha\left(\frac{1}{n}\right)^n,$$

por lo tanto $\alpha(\frac{1}{n}) = \alpha(1)^{\frac{1}{n}}$ y para todo n, m enteros:

$$\alpha\left(\frac{n}{m}\right) = \alpha(1)^{\frac{n}{m}}.$$

Sea w un número complejo tal que $\alpha(1) = e^w$
 $\alpha(\frac{m}{n}) = \alpha(1)^{\frac{m}{n}} = e^{w\frac{m}{n}}$ en un subconjunto denso de \mathbb{R} , por ser ambas continuas las funciones coinciden en todo \mathbb{R} , es decir que $\alpha(t) = e^{wt}$.

Estos grupos son imagen homeomorfa de \mathbb{R} excepto cuando w es puramente imaginario. Podemos pensar la aplicación Γ como una función de \mathbb{R} en \mathbb{C} y a la imagen de esta aplicación como una curva suave, donde en el primer caso se pinta una recta y en el otro una espiral exponencial o un círculo; esté último ocurre cuando w es puramente imaginario.

Todo subgrupo uniparamétrico de M es *elemental* y posee uno ó un par de puntos invariantes en \mathbb{C}_∞ .

Definición 4.2 (Grupo Kleiniano). *Un Grupo Kleiniano es un subgrupo discreto no elemental de \mathcal{M} .*

Con estas definiciones podemos citar el teorema principal del capítulo (y de la tesis) [3, p. 246].

Teorema 4.2 (Teorema de Representación de $M(\Omega)$). *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}_\infty$, se tiene que:*

1. Si Ω es simplemente conexo, $M(\Omega)$ es conjugado en \mathcal{M} de algunos de los siguientes grupos:
 - 1a) $M(\mathbb{C}_\infty)$;
 - 1b) $M(\mathbb{C})$;
 - 1c) $M(D)$;
 - 1d) Γ o $\Gamma \cup \gamma\Gamma$ donde Γ es un grupo uniparamétrico de \mathcal{M} y γ un elemento elíptico de orden 2;
 - 1e) Γ o $\Gamma \cup \gamma\Gamma$ donde Γ es un grupo cíclico y discreto, y γ es un elemento elíptico de orden 2;
 - 1f) Un grupo Kleiniano (no elemental).
2. Si Ω es doblemente conexo, $M(\Omega)$ es conjugado en \mathcal{M} de alguno de los siguientes grupos:
 - 2a) El subgrupo de Möbius que deja invariantes a $\{0, \infty\}$;
 - 2b) El grupo S^1 de todas las rotaciones en el origen;

- 2c) El grupo K generado por $z \rightarrow \frac{1}{z}$ (la inversión en el origen) y S^1 ;
- 2d) Un subgrupo finito de K .
3. Si Ω tiene conectividad de al menos 3, $M(D)$ es el conjugado en \mathcal{M} de alguno de los siguientes grupos:
- 3a) Un subgrupo finito de $SO(3, \mathbb{R})$;
- 3b) Un subgrupo finito y discreto de \mathcal{M} .

Si dos dominios Ω_1, Ω_2 son equivalentes vía $h : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ un mapeo conforme:

$$\text{Aut}(\Omega_2) = h\text{Aut}(\Omega_1)h^{-1}$$

y $h^* : \text{Aut}(\Omega_2) \rightarrow \text{Aut}(\Omega_1)$ definida como:

$$h^*(g) = hgh^{-1} \quad \forall g \in \text{Aut}(\Omega_1)$$

es un homeomorfismo de grupos topológicos y Ω_1 y Ω_2 son *equivalentes* como grupos topológicos.

No es necesariamente cierto que $M(\Omega_1)$ sea conjugado de $M(\Omega_2)$. Si Ω es de conectividad finita es equivalente a un dominio circular C_Ω , para el cual $M(C_\Omega) = \text{Aut}(C_\Omega)$ ^{XIV}. Usualmente $M(\Omega) \subset \text{Aut}(\Omega)$ y $M(\Omega)$ debería corresponder bajo la conjugación a un subgrupo de $M(C_\Omega)$.

Nuestro teorema de representación de regiones k -conexas y el teorema de clasificación de los subgrupos de Möbius de los grupos de automorfismos permite conocer cuales son todos los posibles grupos de automorfismos de dominios k -conexos que actúan en la esfera de Riemann, pues todo dominio k -conexo es conjugado de un dominio canónico circular, por lo tanto todo grupo de automorfismos es topológicamente equivalente al grupo de Möbius del dominio circular canónico correspondiente, que ya a sido considerado en nuestra lista.

4.2. Resultados preliminares.

Sean Ω_1, Ω_2 dos dominios equivalentes vía un mapeo conforme $h : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$, diremos que h es canónico, cuando Ω_2 sea un dominio canónico circular.

Sea h un mapeo canónico entre Ω y Θ . Todo automorfismo del dominio Θ es una transformación de Möbius, de forma que h define un isomorfismo θ entre $M(\Omega) \leq \text{Aut}(\Omega)$ y $\theta(M(\Omega)) \equiv M_h(\Omega) \leq M(\Theta)$, definido como:

$$\theta : g \rightarrow hgh^{-1}.$$

^{XIV}Si D es un dominio circular $\text{Aut}(D) = M(D)$.

Aún cuando $hg h^{-1}$ es una transformación que formalmente no está definida fuera de Θ , está puede ser extendida a una transformación de Möbius, a la que seguimos denotando $hg h^{-1}$.

A través de esta sección, a menos que se especifique lo contrario, reservamos la notación $\theta, h, M_h(\Omega)$ para los casos en que Ω tiene conectividad finita, y tanto h como Θ son canónicos.

Necesitaremos de los siguientes resultados topológicos.

Lema 4.3. *Sea Ω un dominio en la esfera de Riemann, entonces $M(\Omega)$ y $M_h(\Omega)$ son subconjuntos cerrados de M .*

Demostración. *Sea $\{g_n\} \subseteq M(\Omega)$ una sucesión convergente a $g \in M$, mostraremos que g sigue siendo un automorfismo de Ω .*

Supongamos g no es automorfismo de Ω , existe entonces $z \in \Omega$, tal que $g(z) \notin \Omega$. Tenemos que $g_n(z) \rightarrow g(z)$, de donde $g(y) \in \bar{\Omega}$, como $g(z) \in \Omega$ concluimos que $g(z) \in \partial\Omega$.

Como g es bicontinua, existe un disco Q centrado en $g(z)$ tal que,

$$g^{-1}(Q \cap (\mathbb{C}_\infty \setminus \bar{\Omega})) \subset \Omega$$

Esto no es posible, pues de ser así, existe $w \in g^{-1}(Q \cap \text{Ext } \Omega)$ tal que, $g(w) \in \text{Ext } \Omega$ y dada la convergencia de g_n a g , existe una n lo suficientemente grande tal que $g_n(w) \in \text{Ext } \Omega$, contradicción.

Por lo tanto $M(\Omega)$ es cerrado.

Sea $\{f_n\} \subset M_h(\Omega)$ convergiendo a algún elemento f de M y $g_n \in M(\Omega)$, los elementos correspondientes a f_n bajo la conjugación, $f_n = hg_n h^{-1}$, es una observación simple que $g_n \rightarrow g$ en $M(\Omega)$. $M(\Omega)$ cerrado, por tanto $f_n \rightarrow hgh^{-1}$, que es un elemento de $M_h(\Omega)$. Por tanto $M_h(\Omega)$ es cerrado.

Se puede argumentar también, que $M_h(\Omega)$ es cerrado, pues θ es un homeomorfismo de grupos topológicos, en particular es una función bicontinua. Dado que $M_h(\Omega)$, es la imagen de un cerrado en \mathcal{M} , su imagen es también un cerrado en \mathcal{M} .

Lema 4.4. *$M(\Omega)$ es discreto si y sólo si $M_h(\Omega)$ es discreto.*

Demostración. *Un subgrupo G de \mathcal{M} es discreto si y sólo las únicas sucesiones convergentes son las sucesiones constantes (para una n lo suficientemente grande).*

Supongamos que $M(\Omega)$ es discreto. Sea l_n sucesión en $M_h(\Omega)$ que converge a la identidad, entonces $\theta^{-1}(l_n)$ converge a la identidad en $M(\Omega)$, por lo tanto es una sucesión de constantes. Concluimos que l_n es una sucesión constante.

El regreso es análogo.

Lema 4.5. *$M(D)$ es elemental si y sólo si $M_h(\Omega)$ es elemental.*

Demostración. *Al ser θ un isomorfismo de grupos entre $M(\Omega)$ y $M_h(\Omega)$, la estructura de elementalidad se preserva.*

Brevemente, decimos que f , función analítica es una *función automorfa* en un subgrupo $\Gamma \leq \mathcal{M}^{\text{XV}}$, si y sólo si, para toda z en el dominio de definición de f y todo $\gamma \in \Gamma$ se cumple que:

$$f(\gamma z) = f(z).$$

El último lema de esta sección introduce el análisis en la discusión.

Definición 4.3. *Definimos la derivada Schwarziana para una función f como:*

$$S_f(z) = (f''/f')' + (f''/f')^2$$

y está sujeta a la siguiente regla de la cadena:

$$S_f g(z) = S_f(gz)[g'(z)]^2 + S_g(z),$$

Una observación importante es que esta derivada se anula en las transformaciones de Möbius.

Recordemos que el isomorfismo θ de $M(\Omega)$ en $M_h(\Omega)$ es dado por $g \rightarrow f$, donde $hg = fh$. Con estas observaciones podemos probar el siguiente lema:

Lema 4.6. *La diferencial $S_h(z)(dz)^2$ es una función automorfa en $M(\Omega)$. Para toda $g \in M(\Omega)$:*

$$S_h(gz)[g'(z)]^2 = S_h(z).$$

Análogamente $S_h^{-1}(z)(dz)^2$ es una función automorfa en $M_h(\Omega)$.

Demostración. *Sea $g \in M(\Omega)$, $S_g(z) = 0$ por ser g una transformación de Möbius. Llamamos $f \in M_h(\Omega)$ a la transformación de Möbius que corresponde a g vía el isomorfismo θ .*

El lema se sigue de las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} S_h(gz)[g'(z)]^2 &= S_h(gz)[g'(z)]^2 + S_g(z) = \\ S_{hg}(z) &= S_{fh}(z) = S_f(h(z))[h'(z)]^2 + S_h(z) = S_h(z). \end{aligned}$$

4.3. La prueba del teorema de clasificación.

La presente sección es la demostración del resultado principal de la tesis y está dividida en función de la conexidad del dominio.

^{XV}Usualmente se pide que el grupo Γ sea discontinuo, sin embargo el resultado en [11] que utilizamos, no lo requiere así

4.3.1. Dominios simplemente conexos.

Asumimos que Ω es simplemente conexo.

Si $\Omega = \mathbb{C}_\infty$, $M(\Omega) = M$.

Si Ω es la esfera perforada, $M(\Omega)$ debe ser conjugado de $M(\mathbb{C})$ pues Ω es la imagen bajo alguna rotación de la esfera sin el polo norte, que es como identificamos al plano complejo. Estos son los dos primeros casos de nuestra lista.

Para el resto de los casos, por el teorema del mapeo de Riemann existe un mapeo canónico $h : \Omega \rightarrow D$ y los cuatro casos pendientes corresponden a cuando $M(D)$ es (o no) elemental y discreto.

Caso 1. En el que $M(\Omega)$ no es elemental y discreto.

Por definición (de un grupo Kleiniano) este es el caso (1f).

Caso 2. En el cual $M(\Omega)$ no es elemental y no discreto.

Sabemos que $M_h(\Omega)$ no es elemental ni discreto y en adición este grupo admite a la función automorfa $S_{h^{-1}}(z)dz^2$. En [11] se muestra que estos grupos sólo admiten a las funciones automorfas triviales, por lo tanto $S_{h^{-1}}$ es cero y h es de Möbius. En este caso Ω debe ser un disco pues h manda discos en discos. Concluimos que $M(\Omega)$ es conjugado de $M(D)$.

Caso 3. En el cual $M(\Omega)$ es elemental y discreto.

Ya hemos clasificado a todos los grupos elementales discretos, resta decidir cuáles de esos pueden surgir como algún $M(\Omega)$.

Supongamos que $M(\Omega)$ es finito. $M(\Omega)$ es conjugado del subgrupo finito $M_h(D)$ que sabemos es cíclico. De forma que $M(\Omega)$ también es cíclico y por lo tanto en este caso es (1e).

Cualquier grupo finito y cíclico puede ocurrir, tomemos por ejemplo:

$$\Omega = \mathbb{C} \setminus \{r \exp(i\theta) : r \geq 1\},$$

el plano menos n distintos radios, uniformemente distribuidos.

Si $M(\Omega)$ es infinito debe contener elementos parabólicos o loxodrómicos pero no ambos.

Supongamos primero que $M(\Omega)$ contiene elementos parabólicos. Sin pérdida de generalidad podemos asumir que todos los elementos parabólicos fijan a ∞ , el cual necesariamente está en la frontera de Ω . Para convencerse note que para un punto $w \neq \infty$ en Ω , la órbita de este elemento no es acotada con la métrica euclidiana.

El subgrupo de elementos parabólicos en $M(\Omega)$ es cíclico de rango dos. En el último caso el subgrupo es generado por las translaciones:

$$z \rightarrow z\lambda, \quad z \rightarrow z\mu.$$

Unamos $w \in \Omega$ con cada una de sus imágenes $w + \lambda$ y $w + \mu$, por medio de dos curvas contenidas en Ω , recordemos que Ω es conexo. Consideremos todas las translaciones de esas curvas bajo las translaciones:

$$z \rightarrow z + n\lambda + m\mu \quad m, n \in \mathbb{Z}.$$

La imagen de las curvas bajo estas translaciones generan una especie de cuadrícula de todo el plano complejo, con lo cual cualquier círculo contenido en \mathbb{C} puede ser separado del infinito por medio de una curva contenida en Ω . Esto no es posible pues Ω es simplemente conexo y distinto de \mathbb{C} , tenemos una contradicción.

Los elementos parabólicos de $M(\Omega)$ forman un subgrupo cíclico. Al revisar la lista de posibles grupos elementales $M(\Omega)$ debe ser de la forma (1e). Los dos casos enunciados en (1e) se pueden dar. Considere por ejemplo Ω igual a:

$$\{z + iy : -2 < y < \sin(x)\}.$$

Tomemos el caso de elementos loxodróxicos, los cuales dejan invariante $\{0, \infty\}$. Aquí $M(\Omega)$ es (bajo alguna conjugación) generado por la unión de un grupo cíclico infinito:

$$\{z \rightarrow a^n z : n \in \mathbb{Z}\}, \quad |a| \neq 1,$$

un grupo (posiblemente finito) de rotaciones $\{z \rightarrow bz : |b| = 1\}$ y posiblemente un elemento $z \rightarrow \frac{c}{z}$ de orden 2. Si el grupo de rotaciones estuviera presente podríamos generar una curva que separa al 0 del infinito, lo cual no debe pasar. Por lo tanto obtenemos un grupo $M(\Omega)$ del tipo (1e).

Caso 4 $M(\Omega)$ elemental y no discreto.

Supongamos que $M(\Omega)$ contiene una sucesión de elementos parabólicos distintos $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ que convergen a I . Dado que $M(\Omega)$ es elemental todo ellos tiene el mismo punto fijo, que salvo una conjugación por un mapeo de Möbius podemos suponer es ∞ . Por lo tanto:

$$g_n(z) = z + t_n \quad t_n \rightarrow 0.$$

Escojamos una subsucesión de $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $\frac{t_n}{|t_n|}$ converja a w de módulo uno. Sea $r \in \mathbb{R}$ y m_n la parte entera de $\frac{r}{|t_n|}$, de forma que $r = m_n + r_n$ con $|r_n| < 1$. Entonces,

$$(g_n)^{m_n}(z) = z + m_n t_n$$

es elemento de $M(\Omega)$. Como $(g_n)^{m_n}(z) = z + m_n t_n$ y

$$m_n t_n = \frac{t_n}{|t_n|} m_n |t_n| = \frac{t_n}{|t_n|} (r - |t_n| r_n)$$

se tiene que

$$m_n t_n \rightarrow r w$$

y $(g_n)^{m_n} \rightarrow g$ con $g(z) = z + rw$.

$M(\Omega)$ es cerrado y por lo tanto $g \in M(\Omega)$ y $M(\Omega)$ debe contener al subgrupo uniparamétrico $\{z \rightarrow z + rw : r \in \mathbb{R}\}$.

Ω debe ser la unión de todas las líneas paralelas de la forma $\{z + rw : r \in \mathbb{R}\}$ con z elemento de Ω . Como Ω es conexo, Ω debe ser una banda, un semiplano o \mathbb{C} .

Hemos supuesto que $M(\Omega)$ es elemental, por tanto no puede ser un semi plano y al ser conformemente equivalente al disco unitario no puede ser \mathbb{C} . Por lo tanto Ω es equivalente a una banda y $M(\Omega)$ es del tipo (1d).

Emplearemos un argumento similar para cuando sólo existe una sucesión de elementos distintos no parabólicos (i.e. loxodrómicos o elípticos) $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ que convergen a I . Podemos suponer que todos ellos dejan invariante al conjunto $\{0, \infty\}$ y por ser una sucesión convergente, existe una n lo suficientemente grande a partir de la cual $g_n(z) = a_n z$ y $a_n \rightarrow 1$.

Sea $L_n = \log(a_n)$ de forma que $L_n \rightarrow 0$. Tomemos una subsucesión de $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $\frac{L_n}{|L_n|}$ converja a un elemento w con $|w| = 1$.

Sea $t \in \mathbb{R}$ y m_n la parte entera de $\frac{t}{|L_n|}$.

$$\frac{t_n}{|L_n|} = m_n + r_n \quad \text{y} \quad t \frac{L_n}{|L_n|} - r_n L_n = m_n L_n.$$

Por lo tanto:

$$e^{t \frac{L_n}{|L_n|}} e^{-r_n L_n} = e^{m_n L_n} = a^{m_n}$$

De donde $a^{m_n} \rightarrow e^{tw}$ y

$$(g_n)^{m_n}(z) \rightarrow e^{tw} z.$$

Nuevamente $(g_n)^{m_n}(z)$ es elemento de $M(\Omega)$ que es un conjunto cerrado y por lo tanto $z \rightarrow e^{tw} z$ también es elemento de $M(\Omega)$.

Deducimos que Ω debe ser la unión de semirayos desde el origen (si w es real), la unión de espirales exponenciales (si w es complejo pero no puramente imaginario) o la unión de círculos concéntricos (si w es puramente imaginario). El último caso no es posible pues implica que Ω sea un disco y $M(\Omega)$ no sería elemental.

Hemos completado la prueba para dominios simplemente conexos.

4.3.2. Dominios doblemente conexos.

Si ambas componentes conexas del complemento de Ω son puntos $M(\Omega)$ es del tipo (2a).

Si sólo una de las componentes conexas del complemento de Ω es un punto y la otra un disco, via una transformación de Möbius, Ω unión dicho punto puede ser mapeado sobre-yectivamente en el disco unitario con el punto mapeado en el origen. Los automorfismos deben dejar invariante al disco y al origen y por lo tanto $M(\Omega)$ es conjugado del grupo

de rotaciones.

Si Ω es acotado por dos círculos, existe una transformación de Möbius que lo mapea en un anillo. Por lo tanto $M(\Omega)$ del tipo (2c).

Faltan analizar los casos generales para cuando sólo una de las componentes conexas del complemento de Ω es un punto y cuando ninguna de ellas lo es. El primero de esos casos se obtiene análogamente al tratamiento del caso más general.

Sea Ω 2-conexo y no acotado por puntos. Supongamos que $M(\Omega)$ es infinito.

Sea h un mapeo canónico de Ω en un anillo A centrado en el origen y acotado por dos círculos de radio r, R . $M(\Omega)$ es infinito y también $M_h(\Omega)$. Sin embargo $M(A)$ consiste de todas las rotaciones junto con la involución $z \rightarrow \frac{a}{z}$ con $|a| = rR$. La composición de dos involuciones es una rotación y por lo tanto $M(\Omega)$ debe contener un número infinito de ellas.

Notemos que es válido el siguiente lema:

Lema 4.7. *Un grupo infinito de rotaciones (cada una representada por un complejo de modulo uno) es un grupo denso en el grupo de rotaciones.*

Demostración. Si el grupo contiene algún elemento α con argumento irracional, el subgrupo generado por él es denso en S^1 . Si por el contrario, todo elemento en el grupo tiene argumento racional, existe una sucesión de puntos con rango racional que converge a 0, tomando el subgrupo aditivo generado por ellos, podemos obtener un subgrupo denso en S^1 . □

$M_h(\Omega)$ es denso en el grupo de rotaciones y por lo tanto $M_h(\Omega)$ contiene a todas. Ahora podemos completar la prueba.

$M_h(\Omega)$ contiene un elemento de orden infinito (tomemos alguno que tenga argumento irracional). Para $z \in A$ la sucesión de iteraciones

$$f(z), f^2(z), \dots,$$

es densa en un subconjunto compacto de A (un círculo) y claramente no converge. Estas propiedades son transmitidas a $g = h^{-1}fh$ en $M(\Omega)$, por lo tanto g sólo puede ser un elemento elíptico, esto lo sabemos del estudio de las iteraciones de transformaciones de Möbius. Podemos suponer que g fija a 0 e ∞ y por lo tanto es una rotación de orden infinito. Concluimos que $M(\Omega)$ debe contener a todas las rotaciones y Ω es la unión de círculos concéntricos en el origen y por lo tanto un anillo. $M(\Omega)$ es del tipo (2c).

Cuando Ω es acotado por un punto, mapeamos a Ω unión el punto faltante en el disco unitario vía un mapeo canónico h de forma que el origen se corresponde con el punto exterior de Ω . Concluimos también que $M_h(\Omega)$ contiene una cantidad infinita de rotaciones y el resto de la prueba es análoga.

Finalmente supongamos que $M(\Omega)$ es finito. Tomando h un mapeo canónico de Ω en un anillo A , observamos que $M_h(\Omega)$ es un subgrupo finito de $M(A)$. Si $M_h(\Omega)$ contiene a la inversión f ésta conmuta a 0 e ∞ y tiene un punto fijo, sin pérdida de generalidad $g = h^{-1}fh$ también los conmuta y tiene un punto fijo y por lo tanto debe ser una inversión. Si f es una rotación sta sólo tiene dos puntos fijos, el 0 e ∞ , sin pérdida de generalidad $g = h^{-1}fh$ también los fija y es una rotación. Por lo tanto $M(\Omega)$ es de la forma (2d).

Para cuando Ω es acotado por un punto, mapeamos a Ω unión el punto faltante en el disco unitario vía un mapeo canónico h de forma que el origen se corresponde con el punto exterior de Ω . Aquí $M_h(\Omega)$ sólo contiene una cantidad finita de rotaciones y el resto del análisis es análogo.

4.3.3. Dominios k -conexos con $k \geq 3$.

En esta sección estudiamos los resultados del artículo *On the number of $1-1$ directly conformal maps which a multiply-connected plane region of finite connectivity $p > 2$ admits onto itself.* [5]

Gaston Julia demostró en [6], que dominios planos k conexos con $k \geq 3$ sólo admiten un número finito de automorfismos, de hecho afirma que este número no puede exceder a $k(k-1)(k-2)$. Para el resto de esta exposición supondremos a menos que se indique lo contrario, que $2 < k < \infty$.

En esta sección buscamos probar el siguiente teorema:

Teorema 4.3. *Para todo dominio Ω de conectividad $k > 2$, $Aut(\Omega)$ es isomorfo a algún subgrupo finito de \mathcal{M} .*

El teorema para dominios k -conexos con $k \geq 3$ que buscamos probar es un corolario directo de este primer resultado.

Todo dominio k -conexo es conformemente equivalente a un dominio circular y el grupo de automorfismos de dominios circulares es subgrupo de las transformaciones de Möbius. Como los grupos de automorfismos de dominios equivalentes son isomorfos, basta estudiar los grupos de automorfismos de dominios circulares.

En el resto de esta sección denominamos *región canónica perforada* a una región en el plano cuya frontera consiste en una cantidad finita de puntos.

El siguiente teorema reduce un tanto, aquellas regiones representativas.

Teorema 4.4. *Para todo dominio circular Ω k -conexo existe una región canónica perforada Ω^* , tal que:*

1. *Contiene a Ω como subregión, ie $\Omega \subset \Omega^*$.*
2. *Es invariante bajo cualquier elemento de $Aut(\Omega)$, es decir $Aut(\Omega) \leq Aut(\Omega^*)$.*

Demostración. Sea Ω una región canónica circular de conexidad $k > 2$ cuya frontera consiste de puntos o círculos. Las fronteras que consisten de un solo punto no se alteran. Sean $\beta_1, \beta_2 \cdots \beta_m$ ($1 \leq m \leq k$) los círculos frontera. Procedemos como sigue.

Supongamos que β_k es mapeado en sí mismo por medio de $g \in \text{Aut}(\Omega)$ distinta de la identidad. Como estamos trabajando con grupos finitos de \mathcal{M} , todos los elementos de $\text{Aut}(\Omega)$ son elípticos y en particular g es elíptico.

Bajo la conjugación por una transformación de Möbius h , podemos suponer que β_k es el círculo unitario, como g es elíptico y preserva al círculo unitario, es una rotación y deja fijo al origen, sea ζ_k el punto correspondiente al 0 que es fijado por g . No es difícil ver (usando la representación de β_k como el círculo unitario) que cualquier elemento de $\text{Aut}(\Omega)$ que fija a ζ_k también deja invariante a β . Al provenir de rotaciones (bajo la conjugación), los elementos de $\text{Aut}(\Omega)$ que fijan a β_k forman un grupo cíclico y para cualquiera de estas transformaciones (excepto I) ζ_k es el único punto fijo en esa componente conexa del complemento de Ω .

Si β_k no es fijado por ninguna transformación en $\text{Aut}(\Omega)$ excepto la identidad, la órbita de β_k está constituida por n círculos disjuntos, cada uno de ellos es algún β_j y donde n es el orden de $\text{Aut}(\Omega)$. Estos círculos son permutados por los automorfismos de Ω .

Para remplazar estas regiones por puntos sea $w_0 \in \beta_{k_0}$ un punto en alguno de estos círculos, consideremos:

$$\text{Aut}(\Omega)(w) = \{w_0, w_1 \cdots w_n\},$$

su $\text{Aut}(\Omega)$ -órbita.

Bajo este procedimiento Ω es sustituido por una región Ω^* , que contiene a Ω , y acotada por k puntos distintos. Claramente Ω^* es invariante bajo cualquier elemento de $\text{Aut}(\Omega)$.

Dado un entero k , un subgrupo finito G de \mathcal{M} se denomina admisible relativo a k , si existe una región perforada canónica Ω , k -conexa e invariante bajo la acción de cualquier elemento en G . Dado G , los enteros para los cuales G es admisible son enlistados en la siguiente tabla^{XVI}.

^{XVI}Esta tabla proviene del estudio de los subgrupos finitos de \mathcal{M} .

Si G es isomorfo a	Las k con G admisible están dadas por
Un grupo cíclico de orden n	$n \left[\frac{a}{n} + \frac{b}{n} \right]$ donde $a = 0, 1, 2$ $b = 0, 1, 2, \dots ; a + b > 0$
El grupo Diédrico de orden $2n$	$n \left[\frac{a}{n} + \frac{b}{2} + \frac{c}{1} \right]$ donde $a = 0, 1$ $b = 0, 1$ $c = 0, 1, 2, \dots ; a + b + c > 0$
El grupo del tetraedro	$12 \left[\frac{a}{3} + \frac{b}{2} + \frac{c}{1} \right]$ donde $a = 0, 1, 2$ $b = 0, 1$ $c = 0, 1, 2, \dots ; a + b + c > 0$
El grupo del octaedro	$24 \left[\frac{a}{4} + \frac{b}{3} + \frac{c}{2} + \frac{d}{1} \right]$ donde $a = 0, 1$ $b = 0, 1$ $c = 0, 1$ $d = 0, 1, 2, \dots ; a + b + c + d > 0$
El grupo del icosaedro	$60 \left[\frac{a}{5} + \frac{b}{3} + \frac{c}{2} + \frac{d}{1} \right]$ donde $a = 0, 1$ $b = 0, 1$ $c = 0, 1$ $d = 0, 1, 2, \dots ; a + b + c + d > 0$

Tabla 4.1: Subgrupos admisibles.

Esta lista es la prueba de nuestro teorema, pues para toda región circular Ω existe una región perforada canónica Ω^* tal que :

$$\text{Aut}(\Omega) \leq \text{Aut}(\Omega^*).$$

La tabla nos dice quienes son los posibles $\text{Aut}(\Omega^*)$ y de ellos $\text{Aut}(\Omega)$ es un subgrupo de

los enlistados. El caso (3a) corresponde a los grupos Diedrales y el (3b) al resto.

Un par de corolarios

Son consecuencia inmediata de nuestra clasificación los siguientes corolarios:

Corolario 4.1. *Sea Ω un dominio doblemente conexo. Ω está acotado por dos círculos, si y sólo si $M(\Omega)$ es infinito.*

Corolario 4.2. *Para cualquier dominio Ω de conectividad uno o dos, $Aut(\Omega) = M(\Omega)$, si y sólo si las componentes del complemento de Ω son discos. Esto es falso si Ω tiene conectividad de al menos tres.*

Cálculo de $N(k)$.

Sabemos que para todo dominio k conexo, $|Aut(\Omega)| \leq k(k-1)(k-2)$, por lo tanto tiene sentido definir:

$$N(k) = \max\{|Aut(\Omega)| : \Omega \text{ es } k\text{-conexo}\},$$

En vista de que todo dominio circular está contenido en una región canónica perforada, si deseamos saber quién es $N(k)$ basta considerar este último tipo de regiones.

Lema 4.8. *$N(k)$ es acotado inferiormente por $2k$.*

Demostración. *Consideremos a Ω la región perforada canónica y k -conexa:*

$$\Omega = \mathbb{C}_\infty \setminus \{e^{2\pi i \frac{k}{p}} : k = 1, 2 \dots p-1\}.$$

Su grupo de automorfismos está dado por:

$$Aut(\Omega) = \langle S : z \rightarrow \frac{1}{z}, T : z \rightarrow e^{2\pi i \frac{1}{p}} z \rangle$$

No es muy difícil ver que el orden de este grupo es $2p$.

En la tabla 4.1 hemos considerado a todos los subgrupos finitos de \mathcal{M} . Dado que $N(k) \geq 2k$, basta considerar aquellos subgrupos admisibles cuyos órdenes sean al menos $2k$ para obtener representantes de subgrupos admisibles de orden k que ayuden a determinar $N(k)$. Estos se pueden determinar con respecto a la tabla 4.1 y son dados a continuación:

k	Subgrupos admisibles relativos a k y de orden $\geq 2k$	orden del grupo
$\neq 4, 6, 8, 12, 20, 30$	Diedral	$2p$
4	Tetraedral	12
	Diedral	8
6	Tetraedral	12
	Octahedral	24
	Diedral	12
8	Octahedral	24
	Diedral	16
12	Octahedral	24
	Icosahedral	60
	Diedral	24
20	Icosahedral	60
	Diedral	40
30	Icosahedral	60
	Diedral	60

Tabla 4.2: Posibles grupos conjugados de $M(\Omega)$, Ω dominio k -conexo ($k \geq 3$).

La información de la tabla 4.2 se puede resumir en el siguiente teorema:

Teorema 4.5. *Si $k > 2$ es distinto a 4, 6, 8, 12, 20, $N(k) = 2k$. Y para el resto de los valores de k se tiene que:*

$$N(4) = 12, \quad N(6) = N(8) = 24, \quad N(12) = N(20) = 60.$$

Bibliografía

- [1] F. Klein. Consideraciones comparativas sobre nuevas investigaciones geométricas. *Mathesis*, 11(4):331–370, Noviembre 1995. Traducción por Carlos Prieto de Castro.
- [2] S. G. Krantz. *Geometric Function Theory: Explorations in Complex Analysis*. Birkhäuser, 2006.
- [3] A.F. Beardon. Conformal automorphisms of plane domains. *Journal of the London Mathematical Society*, pages 245–253, September 1984.
- [4] A.F. Beardon. *The Geometry of Discrete Groups*. Springer-Verlag New York Inc., 1983.
- [5] M. Heins. On the number of 1–1 directly conformal maps which a multiply-connected plane region of finite connectivity $p (> 2)$ admits onto itself. *Bulletin of The American Mathematical Society*, page 454.457, 1946.
- [6] G. Julia. sur la representation conforme des aires multiplement connexes. *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa*, pages 113–138, 1932.
- [7] S. G. Krantz. *Complex Analysis: The Geometric Viewpoint*. The Mathematical Association of America, 1990.
- [8] V. Guillemin and P. Alan. *Differential Topology*. Prentice-Hall, 1974.
- [9] S. G. Krantz. Characterization of smooth domains in \mathbb{C} by their biholomorphic self-maps. *The American Mathematical Monthly*, 90(8):555–557, 1983.
- [10] M. Tsuji. *Potential Theory in Modern Function Theory*. Maruzan CO., 1975.
- [11] M.I. Koop. Polynomial automorphic forms and non discontinuos groups. *Trans. Amer. Math. Soc.*, pages 505–520, 1996.
- [12] J. E. Marsden; M. J. Hoffman. *Basic Complex Analysis*. W.H. Freeman and Company, 1987.
- [13] F. Zaldívar. *Introducción a la teoría de grupos*. Sociedad Matemática Mexicana, 2009.

- [14] R. E. Greene and S. G. Krantz. *Function Theory of One Complex Variable*, volume 40. American Mathematical Society, 2006.
- [15] L. Ahlfors. *Complex Analysis*. McGraw-Hill Education, 1979.