Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

El Teorema de Brenner y Butler

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Matemático

PRESENTA:

Luis Armando Martínez González

TUTOR

Dr. Octavio Mendoza Hernández

Ciudad Universitaria, D.F. 2015

Agradecimientos

En primer lugar, quiero agradecer a mis padres: Alejandro y Rosalba por sus enseñanzas, consejos, su amor y su apoyo incondicional.

A mi familia, con quienes he tenido momentos inolvidables.

En forma especial, a mi asesor Octavio Mendoza, por su disponibiladad para enseñarme matemáticas, como redactarlas y tantas cosas en esta tesis.

A mis profesores de la licenciatura: Christof Geiss quien me introdujó al estudio del Álgebra y a Jorge Martínez, por haberme inculcado el gusto por la Topología.

Finalmente, doy gracias a mis compañeros por su gran compañía y solidaridad.

Introducción

Hace aproximadamente cincuenta y cinco años K. Morita presentó los primeros resultados importantes sobre las equivalencias entre las categorías de módulos sobre un par de anillos. Estos resultados, caracterizan una equivalencia entre un par de categorías de módulos a izquierda sobre dos anillos, los cuales están representados por los funtores covariantes inducidos por un par de funtores adjuntos sobre bimódulo, que es llamado un progenerador.

La teoría de inclinación surge como un método universal para la construcción de equivalencias entre dos subcategorías plenas de dos categorías de módulos finitamente generados sobre un álgebra de artin. Estas equivalencias fueron introducidas en el contexto de las categorías de módulos de álgebras de dimensión finita. La teoría de inclinación, ahora, se considera una herramienta esencial en el estudio de muchas áreas de las matemáticas, incluyendo teoría finita y algebraica de grupos, geometría algebraica no conmutativa y conmutativa, y la topología algebraica. En particular, Rickard muestra que los complejos inclinantes son el ingrediente necesario en el desarrollo de una teoría de Morita para las categorías derivadas. El objetivo de esta tesis es presentar los conceptos básicos de la teoría clásica de inclinación.

La historia de la teoría de inclinación se puede rastrear desde 1973 en un artículo de Bernstein, Gelfand y Ponomarev [BGP]. Dicho trabajo, fue motivado por Gabriel en [Ga] (1972), en el que prueba que el álgebra de caminos $K\triangle$ de un carcaj finito $\triangle$ sobre un campo K, admite sólo un número finito de clases de isomorfismo de módulos inescindibles precisamente cuando el carcaj subyacente de $\triangle$ es una unión disjunta de diagramas Dynkin de tipo $\mathbb{A}_n$ $\mathbb{D}_n$, $\mathbb{E}_6$, $\mathbb{E}_7$ o $\mathbb{E}_8$. En este caso, las clases de isomorfismo están en biyección con las raíces positivas de la correspondiente álgebra de Lie semisimple. La visión proporcionada por Bernstein, Gelfand y Ponomarev fue que estos módulos inescindibles se pueden construir de forma recursiva a partir de los módulos simples, a través de los funtores de reflexión, en la misma manera que las raíces positivas se construyen a partir de las raíces simples a través de la acción en las reflexiones simples del grupo de Weyl. Como consecuencia, se observó que el cambio de la orientación del álgebra no cambia en gran medida la categoría de módulos. En 1979 Auslander, Platzeck y Reiten en [APR] definieron los funtores de reflexión sin usar carcajes. Los módulos inclinantes que introdujeron se llaman ahora módulos APR-inclinantes y son todavía muy útiles en el estudio de las álgebras de artin.

El hito importante en el desarrollo de la teoría de la inclinación fue el artículo de Brenner y Butler, ver [BB] (1979). Fue aquí donde se introduce el concepto de un Λ-módulo inclinante T, y la equivalencia inducida por el funtor $\mathrm{Hom}_\Lambda(T, -)$ entre ciertas subcategorías de $\mathrm{mod}(\Lambda)$ y $\mathrm{mod}(\Gamma)$, para $\Gamma = \mathrm{End}_\Lambda(T)^{op}$.

El conjunto de axiomas de módulo inclinante fue simplificado, en [HR] por Happel y Ringel (1982), donde consideraron funtores adicionales como $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(T, -)$ para obtener una imagen mucho más completa. Esto último, se generalizó aún más por Miyashita (1986) (ver [Mi]) y Happel (1988) (ver [Ha]).

La tesis, que se presentan en el Capítulo 1. Comienza con definiciones y notación básica sobre anillos. La introducción del concepto de anillo opuesto es vital en esta escinde, ya que, como se discutirá a lo largo de la tesis, nos proporciona dos maneras de multiplicar, ya sea en anillos de endomorfismos, K-álgebras y K-módulos. También se discute la categoría de módulos $\mathrm{Mod}(R)$.

En el capítulo 2, se estudia la categoría de complejos en una categoría de módulos. Se introduce la noción de homología y de funtores derivados. Se demuestran los teoremas clásicos del álgebra homológica y hace su aparición el funtor $\mathrm{Ext}^{\mathrm{i}}(M, -)$. Se presenta la noción de dimensión proyectiva e inyectiva de un módulo, así como la relación que hay con los funtores derivados y sucesiones exactas que nos ayudan con el cálculo de dichas dimensiones.

En el capítulo 3, dirigimos nuestra atención a las álgebras de artin y a su categoría de módulos finitamente generados. El proceso de proyectivización, permite convertir los problemas que implican sólo un número finito de módulos, en un álgebra de artin, a problemas sobre módulos proyectivos en alguna otra álgebra de artin. Otra propiedad importante, de las álgebras de artin, es que hay una dualidad entre la categorías de módulos finitamente generados sobre un álgebra de artin y la categoría de módulos finitamente generados sobre su álgebra opuesta. Por otro lado, damos una introducción a las sucesiones que casi se escinden, que son un especial tipo de sucesiones exactas cortas de módulos y desempeñan un papel central en la teoría general de representaciones de álgebras de artin. Las sucesiones que casi se escinden se introducen a través de los conceptos duales de morfismos minimales a izquierda y derecha que casi se escinden. Estas nociones dan lugar no sólo a las sucesiones que casi se escinden, sino también al concepto básico de morfismo irreducible.

En el capítulo 4, introducimos la noción de módulo inclinante parcial y módulo inclinante, que son módulos muy parecidos a los progeneradores. En este capítulo, se prueban ciertas equivalencias que nos dicen cuándo un módulo inclinante parcial es un módulo inclinante; así como también, la relación que hay entre los módulos inclinantes y los pares de torsión. En este mismo capítulo, se establece el Teorema de Brenner y Butler que nos da dos equivalencias de categorías. Después vemos la importancia del Teorema de Brenner y Butler, con sus consecuencias importantes, entre las cuales está el Lema de conexión, que nos ayuda con el cálculo de sucesiones que casi se escinden. Por último, investigamos los módulos inclinantes que dividen y caracterizamos dichos módulos mediante el Teorema de Hoshino, además de ver todas sus propiedades.

En el capítulo 5, damos una breve introducción a los módulos n-inclinantes de dimensión proyectiva finita (Miyashita), con los cuales se inducen $n+1$ equivalencias de categorías, entre subcategorías de módulos de dos álgebras de artin. Para concluir, damos dos consecuencias del Teorema de inclinación (Miyashita).

Índice general

Capítulo 1

Nociones básicas

En este primer capítulo introducimos conceptos y terminología fundamentales para el estudio de esta tesis, como lo son la noción de categoría, funtor, álgebra y módulo. Cabe resaltar que dicha introducción, en algunos aspectos, es meramente recordatoria y que no pretende ser exhaustiva. Para complementar algunas de las nociones que usaremos libremente en la presente tesis (como por ejemplo, las nociones de suma directa de módulos y módulo artiniano) se recomienda [Wi].

1.1. Categorías

Definición 1.1.1. *Una categoría* $\mathcal{C}$ *se compone de una clase de objetos* $\mathrm{Obj}(\mathcal{C})$*, una clase de morfismos* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}$ *y una operación*

$$\circ : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}} \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}} \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}},$$

parcialmente definida tales que

C1)

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}} = \bigcup_{(A,B)\in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})^2} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B),$$

donde $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B)$ *es un conjunto para todo* $A,\ B \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$*.*

C2) $\forall\ A,\ B,\ C,\ D \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$*, se tiene que*

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C,D) \neq \emptyset \implies A = C \quad y \quad B = D.$$

C3) *La operación parcialmente definida* $\circ$ *en* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}} \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}$ *se restringe a una función*

$$\circ : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B, C) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, C)$$

$$(f, g) \mapsto f \circ g$$

y satisface las siguientes propiedades.

a) $\forall$ *f, g, h* $\in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}$ *se tiene que* $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$ *(es asociativa) siempre y cuando tengan sentido la composiciones.*

b) $\forall\ X \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ *existe* 1_{X} *en* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,X)$ *tal que, para toda* f *en* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ $f \circ 1_{\mathrm{A}} = f = 1_{\mathrm{B}} \circ f$.

Definición 1.1.2. *Sean* $\mathcal{C}$ *y* $\mathcal{C}'$ *categorías. Decimos que* $\mathcal{C}'$ *es una subcategoría de* $\mathcal{C}$ *si satisface las siguientes propiedades*

SC1) $\mathrm{Obj}(\mathcal{C}') \subseteq \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$.

SC2) $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(A, B) \subseteq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)\ \forall\ A,\ B$ *en* $\mathrm{Obj}(\mathcal{C}')$.

SC3) *La operación* $\circ_{\mathcal{C}'}$ *en* $\mathcal{C}'$ *se obtiene por restricción en* $\mathcal{C}'$ *de la operación* $\circ_{\mathcal{C}}$ *en* $\mathcal{C}$.

SC4) $\forall\ A$ *en* $\mathrm{Obj}(\mathcal{C}')$, *si* $1'_{\mathrm{A}}$ *y* 1_{A} *son las identidades en* $\mathcal{C}'$ *y* $\mathcal{C}$, *respectivamente, entonces* $1'_{\mathrm{A}} = 1_{\mathrm{A}}$.

Si además se satisface la siguiente condición

SC2') $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(A, B) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)\ \forall\ A,\ B$ *en* $\mathrm{Obj}(\mathcal{C}')$,

diremos que $\mathcal{C}'$ *es una subcategoría plena de* $\mathcal{C}$.

Sea $\mathcal{C}$ una categoría. Para cada $A, B \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$, denotaremos cada $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ como $f : A \to B$ o bien $A \xrightarrow{f} B$. Note que esta notación tiene sentido por la condición $C2)$ de la definición de categoría. Por otro lado, la composición de morfismos $g \circ f$ se suele escribir también como gf.

1.2. Objetos especiales y morfismos

Definición 1.2.1. *Sea $f : A \to B$ un morfismo en $\mathcal{C}$. Decimos que:*

a) f es un monomorfismo si $\forall\ g, h : X \to A$ $fg = fh$ implica $g = h$.

b) f es un epimorfismo si $\forall\ g, h : B \to X$ $gf = hf$ implica $g = h$.

c) f es un split-mono si existe $g : B \to A$ tal que $gf = 1_{\mathrm{A}}$.

d) f es un split-epi si existe $g : B \to A$ tal que $fg = 1_{\mathrm{B}}$.

e) f es un isomorfismo si f es un split-mono y un split-epi.

Si existe un isomorfismo g: $X \to Y$, decimos que X y Y son isomorfos y escribimos $X \cong Y$.

Para cada conjunto S, denotaremos por $|S|$ a la cardinalidad de dicho conjunto.

Definición 1.2.2. *Decimos que $C \in \mathcal{C}$ es un objeto cero si $\forall\ X$ en $\mathcal{C}$ se tiene que $|\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, C)| = 1 = |\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, X)|$.*

Note que el objeto cero, cuando existe, es único salvo isomorfismo. En tal caso, es usual denotar al objeto cero con el símbolo 0.

Definición 1.2.3. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría. Decimos que*

a) P es un objeto proyectivo en $\mathcal{C}$ si para cada epimorfismo f: $A \to B$ y cualquier morfismo g: $P \to B$ en $\mathcal{C}$ existe h: $P \to A$ tal que $fh = g$. Lo anterior se ilustra con el siguiente diagrama conmutativo.

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dashed, "\exists\, h"'] \arrow[d, "g"] \\ A \arrow[r, "f"'] & B. \end{tikzcd}$$

En tal caso, se dice que el morfismo g se factoriza a través del epimorfismo f.

b) I es un objeto inyectivo en $\mathcal{C}$ si para cada monomorfismo $f : A \to B$ y cualquier morfismo $g : A \to I$ en $\mathcal{C}$ existe $h : B \to I$ tal que $hf = g$. Lo anterior se ilustra con el siguiente diagrama conmutativo.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & B \arrow[dl, dashed, "\exists\, h"] \\ I. & \end{tikzcd}$$

En tal caso, se dice que el morfismo g se factoriza a tráves del monomorfismo f.

1.3. Funtores

Definición 1.3.1. *Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ categorías. Un funtor covariante F de $\mathcal{C}$ en $\mathcal{D}$ es una correspondencia, entre objetos y morfismos de la categoría $\mathcal{C}$, esto es,*

$$F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$$
$$(A \xrightarrow{f} B) \mapsto (F(A) \xrightarrow{F(f)} F(B))$$

que preserva la composición de morfismos y las identidades. Esto es,

F1) $F(gf) = F(g)F(f)$ $\forall$ *f, g en* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}$, *que se puedan componer;*

F2) $F(1_X) = 1_{F(X)}$ $\forall$ $X \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$.

Definición 1.3.2. *Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ categorías. Un funtor contravariante de $\mathcal{C}$ en $\mathcal{D}$ es una correspondencia*

$$F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$$
$$(A \xrightarrow{f} B) \mapsto (F(B) \xrightarrow{F(f)} F(A))$$

que invierte el orden de la composición de morfismos y preserva las identidades. Esto es,

CF1) $F(gf) = F(f)F(g)$ $\forall$ *f, g en* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}$, *que se puedan componer;*

CF2) $F(1_X) = 1_{F(X)}$ $\forall$ $X \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$.

Definición 1.3.3. *Sean $\mathcal{A} \xrightarrow{F} \mathcal{B} \xrightarrow{G} \mathcal{C}$ funtores. La composición $GF : \mathcal{A} \to \mathcal{C}$ se define por medio de las siguientes reglas $GF(A) = G(F(A))$ $\forall$ $A \in \mathrm{Obj}(\mathcal{A})$ y $GF(f) = G(F(f))$ $\forall$ $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}$.*

En general, para referirnos a un funtor covariante F, diremos simplemente que F es un funtor. En caso que F sea contravariante, lo diremos explícitamente.

Definición 1.3.4. *Sean $F, G : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ funtores. Una transformación natural $\eta : F \to G$ es una familia de morfismos $\eta = \{\eta_A : F(A) \to G(A)\}_{A \in \mathcal{A}}$ en $\mathcal{B}$ tal que $\forall\ f : X \to Y$ en $\mathcal{A}$ el siguiente diagrama en $\mathcal{B}$*

$$\begin{tikzcd}
F(X) \arrow[r, "\eta_X"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(X) \arrow[d, "G(f)"] \\
F(Y) \arrow[r, "\eta_Y"'] & G(Y)
\end{tikzcd}$$

es conmutativo, esto es, $G(f)\eta_X = \eta_Y F(f)$. Si η_X es un isomorfismo, para cada $X \in \mathcal{A}$, decimos que η es un equivalencia natural. En tal caso, se dice que η_X es un isomorfismo natural . Si existe una equivalencia natural $\eta : F \to G$, decimos que F y G son naturalmente equivalentes y escribiremos $F \simeq G$.

Definición 1.3.5. *Sea $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un funtor. Decimos que*

a) F es fiel (pleno) si la función inducida por F

$$F : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, D) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(C), F(D))$$

es inyectiva (suprayectiva) $\forall\ C,\ D$ en $\mathcal{C}$.

b) F es denso si $\forall\ D \in \mathcal{D}$ existe C en $\mathcal{C}$ tal que $F(C) \cong D$.

c) F es una equivalencia de categorías si existe un funtor $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ tal que $GF \simeq 1_{\mathcal{C}}$ y $FG \simeq 1_{\mathcal{D}}$.

1.4. Álgebras

Definición 1.4.1. *Sean G un conjunto no vacío y una operación binaria $\cdot : G \times G \to G$. Decimos que $(G, \cdot)$ es un monoide si la operación es asociativa y tiene una identidad. Esto es,*

a) $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)\ \forall\ x,\ y,\ z \in G$;

b) existe $e \in G$ *tal que* $e \cdot x = x \cdot e = x \ \forall \ x \in G$.

Definición 1.4.2. *Decimos que un monoide* $(G, \cdot)$ *es un grupo si todo elemento en* G *tiene un inverso, es decir,* $\forall \ x \in G$ *existe un* $y \in G$ *tal que*

$$x \cdot y = e = y \cdot x.$$

Además, si la operación es conmutativa. Esto es,

$$x \cdot y = y \cdot x, \quad \forall x, y \in G,$$

diremos que $(G, \cdot)$ *es un grupo abeliano.*

Se suele denotar $+$ a l operación binaria de un grupo abeliano y, como $(G, +)$ a un grupo abeliano.

Definición 1.4.3. *Sea* $(G, +)$ *un grupo abeliano. Decimos que* $H \subseteq G$ *es un subgrupo abeliano de* G *si* $H \neq \emptyset$ *y* $x - y \in H \ \forall \ x, y \in H$.

Definición 1.4.4. *Sean* $(G, +)$ *y* $(H, +)$ *grupos abelianos. Decimos que una función* $f : G \to H$ *es un morfismo de grupos abelianos si*

$$f(x + y) = f(x) + f(y) \quad \forall x, y \in G.$$

Definición 1.4.5. *Un tuplo* $(R, +, \cdot, 1_R)$ *es un anillo si* $(R, +)$ *es un grupo abeliano y* $(R, \cdot, 1_R)$ *es un monoide tales que*

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c, \ (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c \quad \forall a, b, c \in R.$$

Decimos que un anillo $(R, +, \cdot, 1_R)$ *es conmutativo si*

$$a \cdot b = b \cdot a \quad \forall a, b \in R.$$

El anillo $(R, +, \cdot, 1_R)$ usualmente se conoce como anillo asociativo con unidad, y estos anillos son los únicos que consideraremos en esta tesis. Por simplicidad, escribiremos R en lugar de la cuaterna anterior.

Definición 1.4.6. *Sean* R *y* S *anillos. Decimos que una función* $\alpha : R \to S$ *es un morfismo de anillos si satisface*

RM1) α *es un morfismo de grupos abelianos;*

RM2) $\alpha(a \cdot b) = \alpha(a) \cdot \alpha(b) \qquad \forall \ a, \ b \in R$;

RM3) $\alpha(1_{\mathrm{R}}) = 1_{\mathrm{S}}$.

Definición 1.4.7. *Sea* $(R, +, \cdot, 1_R)$ *un anillo. El anillo opuesto de* R *es la cuaterna* $(R, +, \cdot^{op}, 1_R)$ *donde*

$$r \cdot^{op} s := s \cdot r \quad \forall\, r, s \in R.$$

Denotaremos al anillo opuesto de R *por* R^{op}*.*

Por simplicidad, la multiplicación $x \cdot y$ en un anillo R, se suele escribir como xy. Para distinguir a un elemento $x \in R$ en el anillo opuesto R^{op}, se suele escribir x^{op}. Note que como grupos abelianos $R = R^{op}$, la diferencia estriba en los productos (que esencialmente son distintos). Por lo que R y R^{op} podrían ser distintos como anillos (a no ser que R sea un anillo conmutativo). Note que $\forall\, x, y \in R$, se tiene que $x^{op}y^{op} = (yx)^{op}$.

Definición 1.4.8. *Sean* R *un anillo e* $I \subseteq R$*. Decimos que* I *es un ideal izquierdo (derecho) de* R*, y escribimos* $I \trianglelefteq_l R$ $(I \trianglelefteq_r R)$*, si* I *es un subgrupo abeliano de* R *y* $\forall\, r \in R$ *y* $a \in I$ *se tiene que* $ra \in I$ $(ar \in I)$*. Decimos que* I *es un ideal de* R*, y escribimos* $I \trianglelefteq R$ *si es un ideal izquierdo y derecho de* R*.*

Definición 1.4.9. *El centro de un anillo* R *es*

$$\mathrm{C}(R) := \{r \in R \mid sr = rs \quad \forall\, s \in R\}.$$

Definición 1.4.10. *Sean* K *un anillo conmutativo y* R *un anillo. Una* K*-álgebra* (R, K, φ) *es una terna tal que*

$$\varphi : K \times R \to R, \quad (k, r) \mapsto k \cdot r,$$

es una función (acción izquierda de K *en* R*) que satisface los siguientes axiomas.*

A1) $k \cdot (r + s) = k \cdot r + k \cdot s \qquad \forall\, k \in K, \forall\, r,\, s \in R.$

A2) $(k + l) \cdot r = k \cdot r + l \cdot r \qquad \forall\, k,\, l \in K, \forall\, r \in R.$

A3) $(kl) \cdot r = k \cdot (l \cdot r) \qquad \forall\, k,\, l \in K, \forall\, r \in R.$

A4) $1_K \cdot r = r \qquad \forall\, r \in R.$

A5) $k \cdot (rs) = (k \cdot r)s = r(k \cdot s) \qquad \forall\, k \in K, \forall\, r,\, s \in R.$

1.5. Módulos

Definición 1.5.1. *Sea R un anillo. Decimos que una terna $(M, +, \alpha)$ es un R-módulo a izquierda si $(M, +)$ es un grupo abeliano y*

$$\alpha : R \times M \to M, \quad (r, m) \mapsto r \cdot m$$

es una función (acción a izquierda de R a M) que satisface los siguientes axiomas.

LM1) $(r + s) \cdot m = r \cdot m + s \cdot m \quad \forall\ r,s \in R, \forall\ m \in M.$

LM2) $r \cdot (m + n) = r \cdot m + r \cdot n \quad \forall\ r \in R,\ m,n \in M.$

LM3) $(rs) \cdot m = r \cdot (s \cdot m) \quad \forall\ r,s \in R, \forall\ m \in M.$

LM4) $1_R \cdot m = m \quad \forall\ m \in M.$

Frecuentemente se escribirá rm en lugar de $r \cdot m$.

Definición 1.5.2. *Sean M y N R-módulos a izquierda. Decimos que una función $\alpha : M \to N$ es un morfismo de R-módulos (a izquierda) si es R-lineal. Es decir, $\forall\ m,\ n \in M$ y $r \in R$ se tiene que*

$$\alpha(m + rn) = \alpha(m) + r\alpha(n).$$

Denotamos por $\mathrm{Mod}(R)$ a la categoría cuyos objetos son los R-módulos a izquierda, y los morfismos son los morfismos de R-módulos (a izquierda). En tal caso, la composición de morfismos es la composición usual de funciones.

Se escribirá ${}_RM$ para enfatizar que $M \in \mathrm{Mod}(R)$ si hay muchos anillos involucrados.

Definición 1.5.3. *Sea $M \in \mathrm{Mod}(R)$. Decimos que $N \subseteq M$ es un R-submódulo de M si $N \neq \emptyset$ y $\forall\ r \in R, \forall\ m, n \in N$ se tiene que $rm + n \in N$.*

Escribiremos $N \leq M$ si N es un R-submódulo de M.

Definición 1.5.4. *Sea R un anillo. Decimos que una tercia $(M, +, \alpha)$ es un R-módulo a derecha si $(M, +)$ es un grupo abeliano y*

$$\alpha : M \times R \to M, \quad (m, r) \mapsto m \cdot r$$

es una función (acción a derecha de R a M) que satisface los siguientes axiomas.

RM1) $m \cdot (r + s) = m \cdot r + m \cdot s \quad \forall\ r,s \in R, \forall\ m \in M.$

RM2) $(m + n) \cdot r = m \cdot r + n \cdot r \quad \forall\ r \in R,\ m,n \in M.$

RM3) $m \cdot (rs) = (m \cdot r) \cdot s \quad \forall\ r,s \in R, \forall\ m \in M.$

RM4) $m \cdot 1_R = m \quad \forall\ m \in M.$

Se escribirá M_R para enfatizar que M es un R-módulo a derecha. Notemos que todo R-módulo a derecha M_R, se puede ver como un R^{op}-módulo a izquierda definiendo la acción $r^{op} \cdot m = mr \quad \forall r \in R, \forall m \in M$. Por lo que $\mathrm{Mod}(R^{op})$ se puede ver como la categoría de R-módulos a derecha. A continuación definiremos algunos submódulos importantes.

Definición 1.5.5. *Sea $f : M \to N$ un morfismo en $\mathrm{Mod}(R)$. Tenemos las siguientes nociones.*

a) El Kernel (núcleo) del morfismo f es el morfismo

$$\mathrm{Ker}(M \xrightarrow{f} N) := \mathrm{Ker}(f) \xrightarrow{\mathrm{K}(f)} M,$$

donde $\mathrm{Ker}(f) := \{m \in M \mid f(m) = 0\}$ *y* $\mathrm{K}(f)$ *es la inclusión de* $\mathrm{Ker}(f)$ *en M.*

b) La imagen del morfismo f es el morfismo

$$\mathrm{Im}(M \xrightarrow{f} N) := M \xrightarrow{\mathrm{I}(f)} \mathrm{Im}(f),$$

donde $\mathrm{Im}(f) := \{f(m) \in M \mid m \in M\}$ *y* $\mathrm{I}(f)(m) := f(m)\ \forall\ m \in M.$

c) El Cokernel (co-núcleo) del morfismo f es el morfismo

$$\mathrm{Coker}(M \xrightarrow{f} N) := N \xrightarrow{\mathrm{C}(f)} \mathrm{Coker}(f),$$

donde $\mathrm{Coker}(f) := N/\mathrm{Im}(f)$ *y* $\mathrm{C}(f)(n) := f(n) + \mathrm{Im}(f)\ \forall\ n \in N.$

Veamos, a continuación la propiedad universal del Kernel.

Proposición 1.5.6. *Sea $f : M \to N$ en $\mathrm{Mod}(R)$. Entonces $\forall\ g : L \to M$ tal que $fg = 0$ $\exists!\ h : L \to \mathrm{Ker}(f)$ con $\mathrm{K}(f)h = g$.*

Lo anterior lo podemos expresar a través del siguiente diagrama conmutativo en $\mathrm{Mod}(R)$

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "\exists!\, h"'] & M \\ & \mathrm{Ker}(f) \arrow[u, "\mathrm{K}(f)"'] \end{tikzcd}$$

Demostración. Dado que $fg = 0$, tenemos que $\mathrm{Im}(g) \leq \mathrm{Ker}(f)$. Sea $h = i\mathrm{I}(g)$, donde $i : \mathrm{Im}(g) \to \mathrm{Ker}(f)$ es la inclusión. Es claro que $g = \mathrm{K}(f)h$. La unicidad se sigue del hecho que $\mathrm{K}(f)$ es un monomorfismo. □

Dualmente, se tiene la propiedad universal del Cokernel.

Proposición 1.5.7. *Sea* $f : M \to N$ *en* $\mathrm{Mod}(R)$. *Entonces* $\forall\ g : N \to L$ *tal que* $gf = 0$ $\exists!\ h : \mathrm{Coker}(f) \to L$ *con* $h\mathrm{C}(f) = g$.
Lo anterior lo podemos expresar a través del siguiente diagrama conmutativo en $\mathrm{Mod}(R)$

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "\mathrm{C}(f)"'] & L \\ & \mathrm{Coker}(f) \arrow[u, "\exists!\, h"'] \end{tikzcd}$$

Definición 1.5.8. *Sean* $M \in \mathrm{Mod}(R)$ *y* $N \leq M$. *Decimos que* N *es un submódulo maximal si* $N \neq M$ *y* $\forall\ L \leq M$, *con* $L \neq M$, *tal que* $N \leq L$ *se tiene que* $N = L$. *Denotamos por*

$$\mathcal{M}_M := \{N \in M \mid N \textit{ es un submodulo maximal}\}.$$

El radical de M *es el* R*-submódulo de* M

$$\mathrm{rad}(M) := \bigcap_{X \in \mathcal{M}_M} X.$$

Si $\mathcal{M}_M = \emptyset$, *se define* $\mathrm{rad}(M) = M$. *Por último, se define el top de* M *como el* R*-módulo cociente*

$$\mathrm{top}(M) := M/\mathrm{rad}(M).$$

Definición 1.5.9. *Sean* $M \in \mathrm{Mod}(R)$ *y* $\{M_i\}_{i\in I}$ *una familia de* R*-submódulos de* M. *La suma de la familia* $\{M_i\}_{i\in I}$ *es el* R*-submódulo de* M

$$\sum_{i\in I} M_i := \{\sum_{j\in J} m_j \mid J \subseteq I,\ |J| \textit{ es finito y } m_j \in M_j \textit{ para toda } j \in J\}.$$

Definición 1.5.10. *Sean M y $S \in \mathrm{Mod}(R)$. Decimos que S es simple si $S \neq 0$ y para todo $Z \leq S$ se tiene que $0 = Z$ o bien $Z = S$. Sea $\{S_i\}_{i\in I}$ la familia de todos los submódulos simples de M. El soclo de M es el R-submódulo de M*

$$\mathrm{soc}(M) := \sum_{i\in I} S_i.$$

Sea $\{M_i\}_{i\in I}$ una familia de objetos en $\mathrm{Mod}(R)$. Denotamos por

a) $\oplus_{i\in I} M_i$ a la suma directa de la familia $\{M_i\}_{i\in I}$. Si $M_i = M_j$ $\forall$ i, j $\in$ I, denotaremos a $\oplus_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}}\mathrm{M_i}$ por $M^{(I)}$;

b) $\prod_{i\in I} M_i$ al producto de la familia $\{M_i\}_{i\in I}$. Si $M_i = M_j$ $\forall$ i, j $\in$ I, denotaremos a $\prod_{i\in I} M_i$ por M^I.

En caso que $|I| = n$, con $n \in \mathbb{N}$, escribiremos M^n en lugar de $M^{(I)}$ y M^I.

Definición 1.5.11. *Sean M y $N \in \mathrm{Mod}(R)$. Decimos que*

a) M está generado por N si existe un epimorfismo $g : N^{(I)} \to M$. En tal caso, decimos que M es finitamente generado por N si $|I| = n$, $n \in \mathbb{N}$. Decimos que M está finitamente generado si está finitamente generado por ${}_RR$. Denotaremos por $\mathrm{gen}(N)$ a la subcategoría plena de $\mathrm{Mod}(R)$, cuyos objetos son todos los R-módulos finitamente generados por N.

b) M está cogenerado por N si existe un monomorfismo $f : M \to N^I$. En tal caso, decimos que M es finitamente cogenerado por N si $|I| = n$, $n \in \mathbb{N}$. Denotaremos por $\mathrm{cogen}(N)$ a la subcategoría plena de $\mathrm{Mod}(R)$ cuyos objetos son todos los R-módulos finitamente cogenerados por N.

Definición 1.5.12. *Decimos que $M \in \mathrm{Mod}(R)$ es inescindible si $M \neq 0$ y para cualquier descomposición de M en suma directa $M = M' \oplus M''$ se tiene que $M' = 0$ o bien $M'' = 0$.*

A continuación definiremos una lista de subcategorías de $\mathrm{Mod}(R)$ que utilizaremos en esta tesis.

Definición 1.5.13. *Denotaremos por*

a) $\mathrm{mod}(R)$ a la subcategoría plena de $\mathrm{Mod}(R)$, cuyos objetos son todos los R-módulos finitamente generados;

b) $\mathrm{add}(M)$ *a la subcategoría plena de* $\mathrm{mod}(R)$*, cuyos objetos son todos los* R*-módulos* N *para los cuales existe un* R*-módulo* L *tal que* $N \oplus L \cong M^n$ *para algún* $n \in \mathbb{N}$;

c) $\mathcal{P}(R)$ *a la subcategoría plena de* $\mathrm{mod}(R)$*, cuyos objetos son todos los* R*-módulos proyectivos finitamente generados*;

d) $\mathcal{I}(R)$ *a la subcategoría plena de* $\mathrm{mod}(R)$*, cuyos objetos son todos los* R*-módulos inyectivos finitamente generados.*

Definición 1.5.14. *a) Sea* $f : L \to M$ *en* $\mathrm{Mod}(R)$*. Decimos que* f *es minimal a izquierda si* $\forall\ h : M \to M$ *tal que* $hf = f$ *se tiene que* h *es un isomorfismo.*

b) Sea $g : M \to N$ *en* $\mathrm{Mod}(R)$*. Decimos que* g *es minimal a derecha si* $\forall$ $k : M \to M$ *tal que* $g = gk$ *se tiene que* k *es un isomorfismo.*

Definición 1.5.15. *Sea* $M \in \mathrm{Mod}(R)$*. Decimos que*

a) $\pi_0 : \mathrm{P}_0(M) \to M$ *es una cubierta proyectiva de M, si* π_0 *es un morfismo minimal a derecha y* $\mathrm{P}_0(M)$ *es un R-módulo proyectivo.*

b) $\iota_0 : M \to \mathrm{I}_0(M)$ *es una envolvente inyectiva de M, si* ι_0 *es un morfismo minimal a izquierda e* $\mathrm{I}_0(M)$ *es un R-módulo inyectivo.*

Es bien conocido que todo R-módulo tiene una envolvente inyectiva, pero no todo R-módulo tiene una cubierta proyectiva.

Definición 1.5.16. *Una sucesión de morfismos* $\{f_{i+1} : M_{i+1} \to M_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ *en* $\mathrm{Mod}(R)$

$$\cdots \to M_{i+2} \xrightarrow{f_{i+2}} M_{i+1} \xrightarrow{f_{i+1}} M_i \xrightarrow{f_i} M_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}} M_{i-1} \to \cdots$$

es llamada exacta en M_i *si* $\mathrm{Im}(f_{i+1}) = \mathrm{Ker}(f_i)$*. Decimos que la sucesión es exacta si es exacta en* M_i $\forall i \in \mathbb{Z}$*.*

En general, diremos que una sucesión exacta, es exacta corta si es de la forma

$$0 \to M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} N \to 0.$$

En caso contrario, pondremos explícitamente la forma de la sucesión exacta.

Definición 1.5.17. *Sea* $F : \mathrm{Mod}(R) \to \mathrm{Mod}(S)$ *un funtor* (*contravariante*). *Decimos que*

a) *F es exacto izquierdo si para toda sucesión exacta* $0 \to M \to N \to L \to 0$

$$0 \to F(M) \to F(N) \to F(L), \qquad (0 \to F(L) \to F(N) \to F(M))$$

es una sucesión exacta.

b) *F es exacto derecho si para toda sucesión exacta* $0 \to M \to N \to L \to 0$

$$F(M) \to F(N) \to F(L) \to 0, \qquad (0 \to F(L) \to F(N) \to F(M))$$

es una sucesión exacta.

c) *F es exacto si es exacto izquierdo y derecho.*

Definición 1.5.18. *Sea* $M \in \mathrm{Mod}(R)$. *Decimos que*

a) *una sucesión exacta* $0 \to M \to I_0 \to I_1$ *de R-módulos es una presentación inyectiva de M si I_0 y I_1 son R-módulos inyectivos.*

b) *una sucesión exacta* $P_1 \to P_0 \to M \to 0$ *es una presentación proyectiva de M si P_0 y P_1 son R-módulos proyectivos.*

Note que todo R-módulo M tiene una presentación inyectiva, ya que todo R-módulo tiene una envolvente inyectiva. Más aún, M tiene una presentación proyectiva, ya que todo R-módulo tiene un epimorfismo desde un R-módulo libre. Ahora, veamos una clase importante de presentaciones

Definición 1.5.19. *Sea* $M \in \mathrm{Mod}(R)$. *Decimos que*

a) $0 \to M \xrightarrow{\iota_0} \mathrm{I}_0(M) \xrightarrow{\iota_1} \mathrm{I}_1(M)$ *es una presentación inyectiva minimal de M si* $\iota_0 : M \to \mathrm{I}_0(M)$ *es la envolvente inyectiva de M e ι_1 es la composición del Cokernel de ι_0 y de la envolvente inyectiva* $\mathrm{Coker}(\iota_0) \to \mathrm{I}_1(M)$.

b) $\mathrm{P}_1(M) \xrightarrow{\pi_1} \mathrm{P}_0(M) \xrightarrow{\pi_0} M \to 0$ *es una presentación proyectiva minimal de M si* $\pi_0 : \mathrm{P}_0(M) \to M$ *es la cubierta proyectiva de M y π_1 es la composición del Kernel de π_0 y la cubierta proyectiva* $\mathrm{P}_1(M) \to \mathrm{Ker}(\pi_0)$.

Note que todo R-módulo M tiene una presentación inyectiva minimal, pero no necesariamente una presentación proyectiva minimal en $\mathrm{Mod}(R)$. Esto se debe a que todo R-módulo tiene una envolvente inyectiva pero no necesariamente una cubierta proyectiva.

Definición 1.5.20. *Sean R un anillo conmutativo y $\mathcal{C}$ una categoría. Decimos que $\mathcal{C}$ es una R-categoría si satisface*

PC1) $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) \in \mathrm{Mod}(R) \quad \forall\ X,\ Y$ *en* $\mathcal{C}$;

PC2) la composición en $\mathcal{C}$ es R-bilineal. Es decir, $(rf+g)h = r(fh)+gh$ y $f(rg+k) = r(fg)+fk$, $\forall\ r \in R$ y $\forall\ f,\ g,\ h,\ k \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}$, donde tengan sentido las composiciones anteriores.

Si $R = \mathbb{Z}$ decimos que $\mathcal{C}$ es una $\mathbb{Z}$-categoría o bien una categoría preaditiva.

Definición 1.5.21. *Decimos que $\mathcal{C}$ es una categoría aditiva si es preaditiva, tiene objeto cero y $\forall\ X,\ Y \in \mathcal{C}$ existe el coproducto $X \oplus Y \in \mathcal{C}$.*

Es claro que $\mathrm{Mod}(R)$ es una categoría aditiva, con objeto 0 el módulo trivial, donde la suma de morfismos está dada de la siguiente manera

$$(f+g)(x) := f(x)+g(x) \quad \forall f,g \in \mathrm{Hom_R}(M,N),\ \forall x \in M.$$

Definición 1.5.22. *Sea $T : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un funtor entre categorías preaditivas. Decimos que T es aditivo si $\forall\ X,\ Y \in \mathcal{C}$ el morfismo inducido por el funtor*

$$T : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(T(X),T(Y))$$

es un morfismo de grupos abelianos.

Definición 1.5.23. *Sean $M \in \mathrm{Mod}(R^{op})$, $N \in \mathrm{Mod}(R)$ y G un grupo abeliano. Decimos que*

a) una función $f : M \times N \to G$ es R-balanceada, si f es $\mathbb{Z}$-bilineal y

$$f(mr,n) = f(m,rn) \quad \forall r \in R, \forall m \in M, \forall n \in N.$$

b) (T,τ) es un producto tensorial de M y N, si T es un grupo abeliano, $\tau : M \times N \to T$ es una función R-balanceada y $\forall\ g : M \times N \to G$ función R-balanceada se factoriza de manera única a través de τ.

Note que por la propiedad universal, los productos tensoriales son únicos hasta isomorfismos. La siguiente proposición nos muestra que siempre existen los productos tensoriales.

Proposición 1.5.24. *Sean $M \in \mathrm{Mod}(R^{op})$ y $N \in \mathrm{Mod}(R)$. Entonces, existe un producto tensorial $(M \otimes_R N, \tau)$ de M y N.*

Demostración. Sea $F = \mathbb{Z}^{(M\times N)}$ el $\mathbb{Z}$-módulo libre sobre $M \times N$, con base $\{[m,n] \mid m \in M,\, n \in N\}$. Ahora, sea K el $\mathbb{Z}$-submódulo de F generado por los elementos de la forma

$$[m+m',n]-[m,n]-[m',n],\ [m,n+n']-[m,n]+[m,n'],$$

$$[rm,n]-[m,rn],$$

con $m,m' \in M$, $n,n' \in N$ y $r \in R$. Consideremos $M\otimes_R N := F/K$, definimos la función $\tau : M \times N \to M \otimes_R N$,

$$(m,n) \mapsto m\otimes n := [m,n]+K.$$

Notemos que τ es R-balanceada por la descripción de K. Ahora, sea $\beta : M \times N \to T$ una función R-balanceada, tenemos que $\exists\ \gamma : F \to T$ un morfismo de grupos abelianos tal que $\gamma[m,n] = \beta(m,n)$, con lo cual $\mathrm{Ker}(\beta) \leq K$, por la propiedad del Cokernel existe un único morfismo de grupos abelianos $\overline{\gamma} : M \otimes_R N \to T$ tal que $\beta = \overline{\gamma}\tau$. □

Para terminar esta sección mencionaremos dos lemas importantes respecto a sucesiones exactas en $\mathrm{Mod}(R)$. El primero es conocido como el Lema de la serpiente y el segundo como el Lema de los cinco.

Lema 1.5.25. *Consideremos el siguiente diagrama conmutativo con filas y columnas exactas en* $\mathrm{Mod}(R)$*.*

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{Ker}(f) \arrow[d, "\mathrm{K}(f)"'] & \mathrm{Ker}(g) \arrow[d, "\mathrm{K}(g)"] & \mathrm{Ker}(h) \arrow[d, "\mathrm{K}(h)"] & \\
 & M \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "f"'] & M' \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "g"] & M'' \arrow[r] \arrow[d, "h"] & 0 \\
0 \arrow[r] & N \arrow[r, "\varphi'"] \arrow[d, "\mathrm{C}(f)"'] & N' \arrow[r, "\psi'"] \arrow[d, "\mathrm{C}(g)"] & N'' \arrow[d, "\mathrm{C}(h)"] & \\
 & \mathrm{Coker}(f) & \mathrm{Coker}(g) & \mathrm{Coker}(h). &
\end{tikzcd}$$

Entonces, existen unos únicos morfismos

$$\mathrm{Ker}(f) \stackrel{\alpha_1}{\to} \mathrm{Ker}(g) \stackrel{\alpha_2}{\to} \mathrm{Ker}(h),$$

$$\mathrm{Coker}(f) \stackrel{\beta_1}{\to} \mathrm{Coker}(g) \stackrel{\beta_2}{\to} \mathrm{Coker}(h)$$

que hacen conmutar el diagrama anterior y existe un morfismo $\delta : \mathrm{Ker}(h) \to \mathrm{Coker}(f)$*, llamado morfismo de conexión, tal que la siguiente sucesión es exacta en* $\mathrm{Mod}(R)$*.*

$$\mathrm{Ker}(f) \xrightarrow{\alpha_1} \mathrm{Ker}(g) \xrightarrow{\alpha_2} \mathrm{Ker}(h) \xrightarrow{\delta} \mathrm{Coker}(f) \xrightarrow{\beta_1} \mathrm{Coker}(g) \xrightarrow{\beta_2} \mathrm{Coker}(h).$$

Más aún, si φ *es un monomorfismo,* α_1 *es un monomorfismo y si* ψ' *es un epimorfismo,* β_2 *es un epimorfismo.*

Demostración. Ver [Wi, 7.15]. □

Lema 1.5.26. *Consideremos el siguiente diagrama conmutativo con filas exactas en* $\mathrm{Mod}(R)$*.*

$$\begin{tikzcd} M_1 \arrow[r] \arrow[d, "f_1"'] & M_2 \arrow[r] \arrow[d, "f_2"'] & M_3 \arrow[r] \arrow[d, "f_3"'] & M_4 \arrow[r] \arrow[d, "f_4"] & M_5 \arrow[d, "f_5"] \\ N_1 \arrow[r] & N_2 \arrow[r] & N_3 \arrow[r] & N_4 \arrow[r] & N_5. \end{tikzcd}$$

a) Si f_1 *es un epimorfismo y* f_2*,* f_4 *son unos monomorfismos, entonces* f_3 *es un monomorfismo.*

b) Si f_5 *es un monomorfismo y* f_2*,* f_4 *son unos epimorfismos, entonces* f_3 *es un epimorfismo.*

Demostración. Ver [Wi, 7.18]. □

1.6. Bimódulos

Definición 1.6.1. *Sean* M *un grupo abeliano y* R*,* S *anillos. Decimos que* M *es un* R*-izquierdo* S*-derecho bimódulo, y escribimos* ${}_RM_S$*, si las siguientes condiciones se satisfacen*

a) ${}_RM \in \mathrm{Mod}(R)$*,* $M_S \in \mathrm{Mod}(S^{op})$*;*

b) $r(ms) = (rm)s \quad \forall\ r \in R, \forall\ s \in S, \forall\ m \in M.$

Ejemplo 1.6.2. Sean $M \in \mathrm{Mod}(R)$. Se tiene que $M \in \mathrm{Mod}(\mathrm{End_R}(M))$, vía la acción derecha

$$m \cdot f^{op} = f(m) \quad \forall f \in \mathrm{End_R}(M), \forall m \in M.$$

Más aún, M es un R-izquierdo $\mathrm{End_R}(M)$-derecho bimódulo. En efecto,

$$r(m \cdot f^{op}) = r(f(m)) = f(rm) = (rm) \cdot f^{op},$$

$\forall\ f \in \mathrm{End_R}(M)$, $\forall\ m \in M$, $\forall\ r \in R$.

Ejemplo 1.6.3. Sean R, S y T anillos. Dados ${}_RM_S$, ${}_RN_T$ y ${}_SL_T$ bimódulos, se tienen las siguientes estructuras de bimódulos

a) $\mathrm{Hom}_R({}_RM_S, {}_RN_T)$ es un S-izquierdo T-derecho bimódulo, vía la estructura

$$s \cdot f(m) := f(ms), \quad f \cdot t(m) := f(m)t$$

$\forall\ f \in \mathrm{Hom_R}(M, N)$, $\forall\ s \in S$, $\forall\ t \in T$ y $\forall\ m \in M$.

b) $\mathrm{Hom}_T({}_RN_T, {}_SL_T)$ es un S-izquierdo R-derecho bimódulo, vía la estructura

$$s \cdot f(n) := sf(n), \quad f \cdot r(n) := f(rn)$$

$\forall\ f \in \mathrm{Hom_T}(N, L)$, $\forall\ s \in S$, $\forall\ r \in R$ y $\forall\ n \in N$.

c) $M \otimes_S L$ es un R-izquierdo T-derecho bimódulo, vía la estructura

$$r \cdot (m \otimes l) := rm \otimes l, \quad (m \otimes l) \cdot t := m \otimes lt$$

$\forall\ r \in R$, $\forall\ t \in T$, $\forall\ l \in L$, y $\forall\ m \in M$.

Estas estructuras de bimódulos son las que usaremos a partir de ahora.

1.7. K-álgebras de caminos

Ahora daremos una técnica para construir K-álgebras determinadas por un carcaj (grafo orientado) finito Q y un campo K : la K-álgebra de caminos KQ.

Definición 1.7.1. *Un carcaj Q es una terna (Q_0, Q_1, d), donde Q_0 es el conjunto de vértices de Q, Q_1 es el conjunto de flechas de Q y $d : Q_1 \to Q_0 \times Q_0$ una función con $d(\alpha) = (o(\alpha), t(\alpha))$, donde $o(\alpha)$ es el origen de α y $t(\alpha)$ es el término de α. En tal caso, cada $\alpha \in Q_1$, se puede pensar como una flecha $o(\alpha) \xrightarrow{\alpha} t(\alpha)$.*
Decimos que Q es finito si $|Q_0 \cup Q_1| = n$, con $n \in \mathbb{N}$.

Definición 1.7.2. *Sea Q un carcaj finito. Se tienen los siguientes tipos de caminos en Q.*

a) Un camino de longitud $n \geq 1$ en el carcaj Q, es una sucesión ordenada de n flechas $p = \alpha_n \cdots \alpha_2\alpha_1$ con $o(\alpha_{i+1}) = t(\alpha_i)$ $\forall$ $1 \leq i \leq n-1$. Para un camino $p = \alpha_n \cdots \alpha_2\alpha_1$, de longitud n, definimos $o(p) = o(\alpha_1)$ y $t(p) = t(\alpha_n)$.

b) Los vértices $i \in Q_0$, se les asigna un camino trivial, conocidos como los caminos de longitud cero, se denotan por ϵ_i y $o(\epsilon_i) := i =: t(\epsilon_i)$.

c) Un camino no trivial p, se dice que es un ciclo dirigido si $o(p) = t(p)$.

Denotaremos por Q_n, $n \in \mathbb{N}$, al conjunto de todos los caminos en Q de longitud n.

Definición 1.7.3. *Sean Q un carcaj finito y K un campo. Denotamos por KQ al K-espacio vectorial cuya base es el conjunto $\cup_{n\in\mathbb{N}}Q_n$ de todos los caminos en Q. Para cada $n \in \mathbb{N}$, denotaremos por KQ_n al K-espacio vectorial cuya base es el conjunto Q_n.*

Note que $KQ = \oplus_{n\in\mathbb{N}}KQ_n$ como K-espacio vectorial.

Definición 1.7.4. *Sea Q un carcaj. La concatenación de caminos en Q es una función $Q_m \times Q_n \to KQ_{m+n}$, definida para cada m, $n \in \mathbb{N}$, como sigue. Para $\alpha = \alpha_n \cdots \alpha_2\alpha_1$ y $\beta = \beta_m \cdots \beta_2\beta_1$.*

$$\beta\alpha := \begin{cases} \beta_m \cdots \beta_2\beta_1\alpha_n \cdots \alpha_2\alpha_1 & si \quad \mathrm{t}(\alpha) = \mathrm{o}(\beta), \\ 0 & si \quad \mathrm{t}(\alpha) \neq \mathrm{o}(\beta). \end{cases}$$

La concatenación de caminos en Q, se extiende K-bilinealmente a un producto $KQ \times KQ \to KQ$ como sigue

$$(\sum_{i=1}^{m} b_i\beta_i, \sum_{j=1}^{n} a_j\alpha_j) \mapsto \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} b_ia_j\beta_i\alpha_j.$$

Dicho producto en KQ, se le conoce como el producto inducido por la concatenación de caminos.

Note que el producto en KQ, inducido por la concatenación de caminos, hace que KQ sea una K-álgebra. La K-álgebra KQ es llamada la álgebra de caminos de Q sobre K.

Ejemplo 1.7.5. Sean K un campo y Q el siguiente carcaj

$$\begin{tikzcd} & \circ^1 \arrow[dl, "\alpha"'] \arrow[dr, "\beta"] & \\ \circ^2 \arrow[dr, "\gamma"'] & & \circ^3 \arrow[dl, "\delta"] \\ & \circ^4. & \end{tikzcd}$$

Entonces $\{\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \epsilon_4, \alpha, \beta, \gamma, \delta, \gamma\alpha, \delta\beta\}$ es una K-base para KQ.

La siguiente proposición es inmediata de la definición de una álgebra de caminos.

Proposición 1.7.6. *Sean K un campo y Q un carcaj finito. Entonces KQ es una K-álgebra de dimensión finita si y sólo si Q no tiene ciclos dirigidos.*

Demostración. Ver [ARS, Proposición 1.1]. □

Definición 1.7.7. *Dado un carcaj Q, denotaremos por $\mathfrak{F}$ al ideal generado en KQ por Q_1.*

Definición 1.7.8. *Sean Q un carcaj finito y KQ la K-álgebra de caminos.*

a) Una relación en Q, de a a b, es una K-combinación lineal $\sum_{i=0}^{n} r_i\omega_i$, con $\omega_i \in Q_m$, $m \geq 2$, con $o(w_i) = a$ y $t(w_i) = b$ para toda i.

b) Un ideal I de KQ, se dice que es admisible si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\mathfrak{F}^n \leq I \leq \mathfrak{F}^2$ para algún $n \geq 2$. El par (Q, I), con I admisible, es llamado un carcaj con relaciones.

Ejemplo 1.7.9. Sean K un campo, Q el siguiente carcaj

$$\begin{tikzcd} & \circ^2 \arrow[dr, "\beta"] & \\ \circ^1 \arrow[ur, "\alpha"] & & \circ^3, \arrow[ll, "\gamma"] \end{tikzcd}$$

y $I = \mathfrak{F}^2$. Entonces $A = KQ/I$ tiene una K-base $\{\epsilon_1 + I, \epsilon_2 + I, \epsilon_3 + I, \alpha + I, \beta + I, \gamma + I\}$.
$A(\epsilon_1 + I)$ tiene una K-base $\{\epsilon_1 + I, \alpha + I\}$, $A(\epsilon_2 + I)$ tiene una K-base $\{\epsilon_2 + I, \beta + I\}$ y $A(\epsilon_3 + I)$ tiene una K-base $\{\epsilon_3 + I, \gamma + I\}$.

Ejemplo 1.7.10. Sean K un campo, Q el siguiente carcaj

$$\begin{tikzcd}
& \circ^{1} \arrow[dl, "\alpha"'] \arrow[dr, "\beta"] & \\
\circ^{2} \arrow[dr, "\gamma"'] & & \circ^{3} \arrow[dl, "\delta"] \\
& \circ^{4}, &
\end{tikzcd}$$

e I el ideal generado por $\gamma\alpha - \delta\beta$. Entonces $A = KQ/I$ tiene una K-base $\{\epsilon_1 + I, \epsilon_2 + I, \epsilon_3 + I, \epsilon_4 + I, \alpha + I, \beta + I, \gamma + I, \delta + I, \gamma\alpha + I\}$.
$A(\epsilon_1 + I)$ tiene una K-base $\{\epsilon_1 + I, \alpha + I, \beta + I, \gamma\alpha + I\}$, $A(\epsilon_2 + I)$ tiene una K base $\{\epsilon_2 + I, \gamma + I\}$, $A(\epsilon_3 + I)$ tiene una K-base $\{\epsilon_3 + I, \delta + I\}$ y $A(\epsilon_4 + I)$ tiene una K-base $\{\epsilon_4 + I\}$.

Definición 1.7.11. *Decimos que un álgebra A es básica si dada la descomposición $A = \oplus_{i=1}^{n} P_i$, con P_i A-módulos inescindibles proyectivos, se tiene que P_i no es isomorfo a P_j si $i \neq j$.*

El siguiente teorema nos muestra la importancia de las álgebras de caminos sobre carcajes con relaciones.

Teorema 1.7.12. *Sea A una K-álgebra de dimensión finita básica con K algebraicamente cerrado. Entonces existe un carcaj finito Q y un ideal admisible I de KQ tales que $A \cong KQ/I$.*

Demostración. Ver [ARS, Corolario 1.10]. $\square$

Definición 1.7.13. *Sean Q un carcaj finito y K un campo. Una representación D sobre* $\mathrm{mod}(K)$ *es una función $D : Q \to \mathrm{mod}(K)$ tal que*

a) $\forall\ i \in Q_0 \qquad D_i \in \mathrm{mod}(K)$;

b) $\forall\ \alpha \in Q_1,\ \alpha : i \to j \qquad D_\alpha : D_i \to D_j$ *es un morfismo en* $\mathrm{mod}(K)$.

Denotamos por $\mathrm{rep}_{\mathrm{K}}(Q)$ a la clase de todas las representaciones D sobre $\mathrm{mod}(K)$.

Definición 1.7.14. *Sean Q un carcaj finito y K un campo.*

a) *Una familia de morfismos* $f = \{f_i : D_i \to E_i\}_{i \in Q_0}$ *en* $\mathrm{mod}(K)$ *es un morfismo de representaciones* $f : D \to E$ *si* $\forall\ \alpha : i \to j \in Q_1$*, el siguiente diagrama*

$$\begin{tikzcd} D_i \arrow[r, "D_\alpha"] \arrow[d, "f_i"'] & D_j \arrow[d, "f_j"] \\ E_i \arrow[r, "E_\alpha"'] & E_j \end{tikzcd}$$

conmuta en $\mathrm{mod}(K)$.

b) *Sean* $f : D \to E$ *y* $g : E \to F$ *morfismos de representaciones. La familia* $gf := \{g_i f_i : D_i \to F_i\}$ *es llamada la composición de morfismos de representaciones.*

c) $\forall\ f, g : D \to E$ *morfismos de representaciones, tenemos*

- $f + g := \{f_i + g_i : D_i \to E_i\}_{i \in Q_0}$.
- $kf := \{kf_i : D_i \to E_i\}_{i \in Q_0} \qquad \forall\ k \in K$.

Se puede verificar, usando las definiciones anteriores, que $\mathrm{rep_K}(Q)$ es una K-categoría.

Definición 1.7.15. *Sean KQ una K-álgebra de caminos y* $D \in \mathrm{rep_K}(Q)$. *Entonces, tenemos los siguientes morfismos en* $\mathrm{mod}(K)$

a) *para un camino* $p = \alpha_n \cdots \alpha_2 \alpha_1$ *de longitud* $n \geq 2$*, definimos*

$$D_p := D_{\alpha_n} \cdots D_{\alpha_2} D_{\alpha_1},$$

$$D_{kp} := kD_p \quad \forall k \in K$$

b) *para una relación* $\omega = \sum_{i=0}^{n} k_i \omega_i$*, definimos*

$$D_\omega := \sum_{i=0}^{n} D_{k_i \omega_i}$$

Definición 1.7.16. *Sea KQ una K-álgebra de caminos y* $\omega = \sum_{i=0}^{n} k_i \omega_i$ *una relación. Decimos que una representación D cumple con la relación* ω *si* $D_\omega = 0$.

Definición 1.7.17. *Sea (Q, I) un carcaj con relaciones sobre un campo K. Las representaciones* $\mathrm{rep_K}(Q, I)$ *del carcaj con relaciones (Q, I) es la subcategoría plena de* $\mathrm{rep_K}(Q)$ *cuyos objetos son las representaciones D tales que $D_\omega = 0$ para cada relación $\omega \in I$.*

Ejemplo 1.7.18. Sean K un campo, Q el siguiente carcaj

$$\begin{tikzcd}
 & & \circ^3 \arrow[dr, "\delta"] & \\
\circ^1 \arrow[r, "\alpha"] & \circ^2 \arrow[ur, "\beta"] \arrow[dr, "\gamma"'] & & \circ^5 \\
 & & \circ^4 \arrow[ur, "\lambda"'] &
\end{tikzcd}$$

e $I =< \delta\beta - \lambda\gamma >$. La siguiente es una representación en $\mathrm{rep_K}(Q, I)$

$$\begin{tikzcd}
 & & K \arrow[dr, "1_K"] & \\
D = K \arrow[r, "1_K"] & K \arrow[ur, "1_K"] \arrow[dr, "1_K"'] & & K \\
 & & K, \arrow[ur, "1_K"'] &
\end{tikzcd}$$

pues $1_K 1_K - 1_K 1_K = 0$. Mientras la siguiente representación no está en $\mathrm{rep_K}(Q, I)$

$$\begin{tikzcd}
 & & K \arrow[dr, "1_K"] & \\
D' = K \arrow[r, "1_K"] & K \arrow[ur, "1_K"] \arrow[dr, "0"'] & & K \\
 & & 0, \arrow[ur, "0"'] &
\end{tikzcd}$$

pues $1_K 1_K - 0 = 1_K \neq 0$.

El siguiente teorema relaciona las categorías $\mathrm{mod}(KQ/I)$ y $\mathrm{rep_K}(Q)$.

Teorema 1.7.19. *Sean (Q, I) un carcaj con relaciones sobre K y $A = KQ/I$. Entonces* $\mathrm{mod}(A)$ *y* $\mathrm{rep_K}(Q, I)$ *son categorías equivalentes.*

Demostración. Ver [ARS, Proposición 1.7]. $\square$

Capítulo 2

Funtores derivados

En diversos entornos, suele suceder que una sucesión exacta corta a menudo induce (bajo ciertas construcciones) una "sucesión exacta larga". El concepto de funtores derivados explica y aclara muchas de estas construcciones. Supongamos que $F : \mathrm{Mod}(R) \to \mathrm{Mod}(S)$ es un funtor exacto derecho. Sea $\eta : 0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$ es una sucesión exacta corta en $\mathrm{Mod}(R)$. Aplicando F a dicha sucesión exacta se obtiene la sucesión exacta

$$F(A) \xrightarrow{F(f)} F(B) \xrightarrow{F(g)} F(C) \to 0.$$

Uno podría preguntarse cómo seguir esta sucesión, hacia la izquierda, para formar una sucesión exacta larga. En sentido estricto, esta cuestión está mal planteada, ya que siempre hay muchas maneras diferentes para hacer esto. Pero resulta que hay una forma canónica de hacerlo, dada por los funtores derivados a izquierda de F. Para cada entero $i \geq 1$, hay un funtor $L_iF : \mathrm{Mod}(R) \to \mathrm{Mod}(S)$, tal que da a lugar a la siguiente sucesión exacta larga

$$\cdots \to L_1F(A) \to L_1F(B) \to L_1F(C) \to F(A) \to F(B) \to F(C) \to 0$$

De esto vemos que F es un funtor exacto si y sólo si $\mathrm{L}_1F = 0$. Por lo que, en cierto sentido, el funtor derivado a izquierda de F mide "hasta qué punto" F está cerca de ser un funtor exacto. Si el objeto C en la sucesión η es proyectivo, entonces la sucesión se escinde. La aplicación de cualquier funtor aditivo a una sucesión que se escinde da como resultado una sucesión que se escinde, por lo que, en este caso $L_1F(C) = 0$.

2.1. Complejos

Definición 2.1.1. *Sea R un anillo. Un complejo $C_\bullet$ en $\mathrm{Mod}(R)$ es una sucesión*

$$C_\bullet : \cdots \to C_{n+1} \overset{d^C_{n+1}}{\to} C_n \overset{d^C_n}{\to} C_{n-1} \to \cdots$$

de morfismos en $\mathrm{Mod}(R)$ tal que $d^C_n d^C_{n+1} = 0 \ \forall \ n \in \mathbb{Z}$. Decimos que el complejo $C_\bullet$ es acíclico si dicho complejo es una sucesión exacta. Dualmente, un cocomplejo $C^\bullet$ es una sucesión

$$C^\bullet : \cdots \to C^{n-1} \overset{d^{n-1}_C}{\to} C^n \overset{d^n_C}{\to} C^{n+1} \to \cdots$$

de morfismos en $\mathrm{Mod}(R)$ tal que $d^n_C d^{n-1}_C = 0 \ \forall \ n \in \mathbb{Z}$. Decimos que el cocomplejo $C^\bullet$ es acíclico si dicho cocomplejo es una sucesión exacta.

Definición 2.1.2. *Sean $C_\bullet$ y $D_\bullet$ complejos en $\mathrm{Mod}(R)$. Una familia $\varphi := \{\varphi_i : C_i \to D_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ de morfismos en $\mathrm{Mod}(R)$, es un morfismo de complejos $\varphi : C_\bullet \to D_\bullet$, si $\forall \ n \in \mathbb{Z}$ el siguiente diagrama conmuta*

$$\begin{tikzcd} C_{n+1} \arrow[r, "d^C_{n+1}"] \arrow[d, "\varphi_{n+1}"'] & C_n \arrow[d, "\varphi_n"] \\ D_{n+1} \arrow[r, "d^D_{n+1}"'] & D_n. \end{tikzcd}$$

Sean $\varphi : C_\bullet \to D_\bullet$ y $\psi : D_\bullet \to E_\bullet$ morfismos de complejos. La composición de morfismos está dada por

$$\psi \circ \varphi := \{\psi_i \varphi_i : C_i \to E_i\}_{i\in\mathbb{Z}}.$$

De manera similar se definen los morfismos de cocomplejos $\varphi : C^\bullet \to D^\bullet$ y la composición de dichos morfismos.

Ya que los morfismos de complejos son definidos entero a entero, como morfismos de R-módulos, es fácil ver que los complejos forman una categoría aditiva. Denotaremos por $\mathrm{Com}_\bullet(R)$ a la categoría de complejos de R-módulos, donde $1_{C_\bullet}:=\{1_{C_i}\}_{i\in\mathbb{Z}}$ es la identidad y

$$\varphi + \psi := \{\varphi_i + \psi_i : C_i \to D_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$$

es la suma de morfismos. Dualmente, denotaremos por $\mathrm{Com}^{\bullet}(R)$ a la categoría de cocomplejos de R-módulos.
Sean $\varphi : C_\bullet \to D_\bullet$ un morfismo de complejos y $n \in \mathbb{Z}$. Dado que $d_n^C d_{n+1}^C = 0$ implica que $\mathrm{Im}(d_{n+1}^C) \leq \mathrm{Ker}(d_n^C)$, podemos definir el siguiente R-módulo

$$\mathrm{H_n}(C_\bullet) := \mathrm{Ker}(d_n^C)/\mathrm{Im}(d_{n+1}^C),$$

para cada $n \in \mathbb{Z}$. En tal caso $\mathrm{H_n}(C_\bullet)$ se conoce como el n-ésimo módulo de homología de $C_\bullet$. Ahora bien, como $\varphi : C_\bullet \to D_\bullet$ es un morfismo de complejos tenemos que

$$0 = \varphi_{n-1} d_n^C \mathrm{K}(d_n^C) = d_n^D \varphi_n \mathrm{K}(d_n^C),$$

donde $\mathrm{K}(d_n^C)$ denota el kernel del morfismo d_n^C. Por la propiedad universal del Kernel, existe un morfismo que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ker}(d_n^C) \arrow[r, "\mathrm{K}(d_n^C)"] \arrow[d, dashed, "\exists!\ \mathrm{K_n}(\varphi)"'] & C_n \arrow[r, "d_n^C"] \arrow[d, "\varphi_n"] & C_{n-1} \arrow[d, "\varphi_{n-1}"] \\
\mathrm{Ker}(d_n^D) \arrow[r, "\mathrm{K}(d_n^D)"'] & D_n \arrow[r, "d_n^D"'] & D_{n-1}.
\end{tikzcd} \tag{2.1.1}$$

Por el diagrama anterior, tenemos las siguientes igualdades

$$0 = \mathrm{I}(d_n^D)\mathrm{K}(d_n^D)\mathrm{K_n}(\varphi) = \mathrm{I}(d_n^D)\varphi_n \mathrm{K}(d_n^C),$$

donde $\mathrm{I}(d_n^D)$ es la factorización de d_n^D a través de su imagen. Por la propiedad universal del Cokernel, existe un morfismo que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ker}(d_n^C) \arrow[r, "\mathrm{K}(d_n^C)"] \arrow[d, "\mathrm{K_n}(\varphi)"'] & C_n \arrow[r, "\mathrm{I}(d_n^C)"] \arrow[d, "\varphi_n"] & \mathrm{Im}(d_n^C) \arrow[d, dashed, "\exists!\ \mathrm{I_n}(\varphi)"] \\
\mathrm{Ker}(d_n^D) \arrow[r, "\mathrm{Ker}(d_n^D)"'] & D_n \arrow[r, "\mathrm{I}(d_n^D)"'] & \mathrm{Im}(d_n^D).
\end{tikzcd} \tag{2.1.2}$$

Ahora tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
C_{n+1} \arrow[r, "\mathrm{I}(d_{n+1}^C)"] \arrow[d, "\varphi_{n+1}"'] & \mathrm{Im}(d_{n+1}^C) \arrow[r, "\alpha_n"] \arrow[d, "\mathrm{I_{n+1}}(\varphi)"'] & \mathrm{Ker}(d_n^C) \arrow[r, "\mathrm{K}(d_n^C)"] \arrow[d, "\mathrm{K_n}(\varphi)"] & C_n \arrow[d, "\varphi_n"] \\
D_{n+1} \arrow[r, "\mathrm{I}(d_{n+1}^D)"'] & \mathrm{Im}(d_{n+1}^D) \arrow[r, "\alpha'_n"'] & \mathrm{Ker}(d_n^D) \arrow[r, "\mathrm{K}(d_n^D)"'] & D_n,
\end{tikzcd}$$

donde α_n es la inclusión de $\mathrm{Im}(d_{n+1}^C)$ en $\mathrm{Ker}(d_n^C)$. Por lo tanto

$$\mathrm{K}(d_n^D)\mathrm{K_n}(\varphi)\alpha_n I(d_{n+1}^C) = \mathrm{K}(d_n^D)\alpha_n' \mathrm{I_{n+1}}(\varphi)\mathrm{I}(d_{n+1}^C),$$

ya que $\mathrm{K}(d_n^D)$ es un monomorfismo y $\mathrm{I}(d_{n+1}^C)$ es un epimorfismo. Así, tenemos que el cuadrado de en medio del diagrama anterior es conmutativo. Por lo que se obtiene el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Im}(d_{n+1}^C) \arrow[r, "\alpha_n"] \arrow[d, "\mathrm{I_{n+1}}(\varphi)"'] & \mathrm{Ker}(d_n^C) \arrow[r, "\mathrm{C}(\alpha_n)"] \arrow[d, "\mathrm{K_n}(\varphi)"] & \mathrm{H_n}(C_\bullet) \arrow[d, dashed, "\exists!\, \mathrm{H_n}(\varphi)"] \\
\mathrm{Im}(d_{n+1}^D) \arrow[r, "\alpha_n'"'] & \mathrm{Ker}(d_n^D) \arrow[r, "\mathrm{C}(\alpha_n')"'] & \mathrm{H_n}(D_\bullet)
\end{tikzcd} \tag{2.1.3}$$

Esto es, cada $\varphi : C_\bullet \to D_\bullet$ induce (para cada $n \in \mathbb{Z}$) un morfismo de R-módulos

$$\mathrm{H_n}(\varphi) : \mathrm{H_n}(C_\bullet) \to \mathrm{H_n}(D_\bullet),$$

donde $\mathrm{H_n}(x + \mathrm{Im}(d_{n+1}^C)) = \varphi_n(x) + \mathrm{Im}(d_{n+1}^D)\ \forall\ x \in \mathrm{Ker}(d_n^C)$.
Análogamente, para cada cocomplejo $C^\bullet$ y $n \in \mathbb{Z}$, se define el n-ésimo R-módulo de cohomología

$$\mathrm{H^n}(C^\bullet) := \mathrm{Ker}(d_C^n)/\mathrm{Im}(d_C^{n-1}).$$

Dado un morfismo $\varphi : C^\bullet \to D^\bullet$ de cocomplejos, se tiene el morfismo de R-módulos

$$\mathrm{H^n}(\varphi) : \mathrm{H^n}(C^\bullet) \to \mathrm{H^n}(D^\bullet),$$

donde $\mathrm{H^n}(x + \mathrm{Im}(d_C^{n-1})) = \varphi^n(x) + \mathrm{Im}(d_D^{n-1})\ \forall\ x \in \mathrm{Ker}(d_C^n)$.

Proposición 2.1.3. *Sean R un anillo y $n \in \mathbb{Z}$. La correspondencia* $\mathrm{H_n} : \mathrm{Com}_\bullet(R) \to \mathrm{Mod}(R)$ *dada por*

$$(C_\bullet \xrightarrow{\varphi} D_\bullet) \mapsto (\mathrm{H_n}(C_\bullet) \xrightarrow{\mathrm{H_n}(\varphi)} \mathrm{H_n}(D_\bullet))$$

es un funtor aditivo.

Demostración. Sean $\varphi, \phi : C_\bullet \to D_\bullet$, $\psi : D_\bullet \to E_\bullet$ y $n \in \mathbb{Z}$. Por las construcciones dadas en (2.1.1), (2.1.2) y (2.1.3), se tiene que $\mathrm{K_n}(1_{C_\bullet})$, $\mathrm{I}_{n+1}(1_{C_\bullet})$

y $\mathrm{H}_n(1_{C_\bullet})$ son claramente los morfismos identidad. Ahora bien, por la construcción de $\mathrm{K}_n(\varphi)$ tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ker}(d_n^C) \arrow[r, "\mathrm{K}(d_n^C)"] \arrow[d, "\mathrm{K_n}(\varphi)"'] & C_n \arrow[r, "d_n^C"] \arrow[d, "\varphi_n"] & C_{n-1} \arrow[d, "\varphi_{n-1}"] \\
\mathrm{Ker}(d_n') \arrow[r, "\mathrm{K}(d_n^D)"'] \arrow[d, "K_n(\psi)"'] & D_n \arrow[r, "d_n^D"'] \arrow[d, "\psi_n"] & D_{n-1} \arrow[d, "\psi_{n-1}"] \\
\mathrm{Ker}(d_n^E) \arrow[r, "\mathrm{K}(d_n^E)"'] & E_n \arrow[r, "d_n^E"'] & E_{n-1}.
\end{tikzcd}$$

Por la unicidad de $\mathrm{K}_n(\psi\varphi)$ tenemos que $\mathrm{K}_n(\psi\varphi)$=$\mathrm{K}_n(\psi)\mathrm{K}_n(\varphi)$. Análogamente $\mathrm{K}_n(\phi+\varphi)$=$\mathrm{K}_n(\phi)$+$\mathrm{K}_n(\varphi)$, $\mathrm{I}_{n+1}(\psi\varphi)$=$\mathrm{I}_{n+1}(\psi)\mathrm{I}_{n+1}(\varphi)$ y $\mathrm{I}_{n+1}(\phi+\varphi)$=$\mathrm{I}_{n+1}(\phi)$+$\mathrm{I}_{n+1}(\varphi)$. Por último tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Im}(d_{n+1}) \arrow[r, "\alpha_n"] \arrow[d, "\mathrm{I_{n+1}}(\varphi)"'] & \mathrm{Ker}(d_n) \arrow[r, "\mathrm{C}(\alpha_n)"] \arrow[d, "\mathrm{K_n}(\varphi)"] & \mathrm{H_n}(C_\bullet) \arrow[d, "\mathrm{H_n}(\varphi)"] \\
\mathrm{Im}(d'_{n+1}) \arrow[r, "\alpha'_n"'] \arrow[d, "\mathrm{I_{n+1}}(\psi)"'] & \mathrm{Ker}(d'_n) \arrow[r, "\mathrm{C}(\alpha'_n)"'] \arrow[d, "\mathrm{K_n}(\psi)"] & \mathrm{H_n}(D_\bullet) \arrow[d, "\mathrm{H_n}(\psi)"] \\
\mathrm{Im}(d''_{n+1}) \arrow[r, "\alpha''_n"'] & \mathrm{Ker}(d''_n) \arrow[r, "\mathrm{C}(\alpha''_n)"'] & \mathrm{H_n}(E_\bullet)
\end{tikzcd}$$

Así $\mathrm{H}_n(\psi)\mathrm{H}_n(\varphi)$=$\mathrm{H}_n(\psi\varphi)$ y análogamente $\mathrm{H}_n(\phi)$+$\mathrm{H}_n(\varphi)$=$\mathrm{H}_n(\phi+\varphi)$. Por lo tanto H_n es un funtor aditivo. □

El funtor $\mathrm{H_n} : \mathrm{Com}_\bullet(R) \to \mathrm{Mod}(R)$ es llamado el n-ésimo funtor de homología. Análogamente tenemos la siguiente proposición.

Proposición 2.1.4. *Sean R un anillo y $n \in \mathbb{Z}$. La correspondencia* $\mathrm{H^n} : \mathrm{Com}^\bullet(R) \to \mathrm{Mod}(R)$ *dada por*

$$(C^\bullet \xrightarrow{\varphi} D^\bullet) \mapsto (\mathrm{H^n}(C^\bullet) \xrightarrow{\mathrm{H^n}(\varphi)} \mathrm{H^n}(D^\bullet))$$

es un funtor aditivo.

El funtor $\mathrm{H^n} : \mathrm{Com}^\bullet(R) \to \mathrm{Mod}(R)$ es llamado el n-ésimo funtor de cohomología.

2.2. La sucesión exacta larga de homología

Lema 2.2.1. *Sean $C_\bullet \in \mathrm{Com}_\bullet(R)$ y $n \in \mathbb{Z}$. Entonces, existe un morfismo*

$$\lambda_n : \mathrm{Coker}(d_{n+1}^C) \to \mathrm{Ker}(d_{n-1}^C)$$

de R-módulos tal que $\mathrm{Ker}(\lambda_n) = \mathrm{H_n}(C_\bullet)$ *y* $\mathrm{Coker}(\lambda_n) = \mathrm{H_{n-1}}(C_\bullet)$.

Demostración. Ya que $d_n^C d_{n+1}^C = 0$, se tiene que $\mathrm{I}(d_n)d_{n+1} = 0$. Por la propiedad universal del Cokernel obtenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
C_{n+1} \arrow[r, "d_{n+1}^C"] & C_n \arrow[r, "\mathrm{C(d_{n+1}^C)}"] \arrow[d, "\mathrm{I}(d_n^C)"'] & \mathrm{Coker}(d_{n+1}^C) \arrow[dl, dashed, "\exists!\ \beta_n"] \\
& \mathrm{Im}(d_n^C) \arrow[r, "\alpha_{n-1}"'] & \mathrm{Ker}(d_{n-1}^C).
\end{tikzcd}$$

Sea $\lambda_n := \alpha_{n-1}\beta_n$. Por otro lado, tenemos el siguiente diagrama conmutativo.

$$\begin{tikzcd}
& & & 0 \arrow[d] & \\
& \mathrm{Im}(d_{n+1}^C) \arrow[r, equal] \arrow[d, "\alpha_n"'] & \mathrm{Im}(d_{n+1}^C) \arrow[r] \arrow[d, "\iota_{\mathrm{Im}(d_{n+1}^C)}"'] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Ker}(d_n^C) \arrow[r, "\mathrm{K}(d_n^C)"'] \arrow[d, "\mathrm{C}(\alpha_n)"'] & C_n \arrow[r, "\mathrm{I}(d_n^C)"'] \arrow[d, "\mathrm{C}(d_{n+1}^C)"'] & \mathrm{Im}(d_n^C) \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
& \mathrm{H_n(C_\bullet)} & \mathrm{Coker}(d_{n+1}^C) \arrow[r, "\beta_n"'] & \mathrm{Im}(d_n^C). &
\end{tikzcd} \tag{2.2.1}$$

Por el Lema de la serpiente, existe γ_n tal que la siguiente sucesión

$$0 \to \mathrm{H_n}(C_\bullet) \overset{\gamma_n}{\to} \mathrm{Coker}(d_{n+1}^C) \overset{\beta_n}{\to} \mathrm{Im}(d_n^C) \to 0$$

es exacta. Por lo tanto, como α_{n-1} es un monomorfismo, tenemos las siguientes igualdades $\mathrm{Ker}(\lambda_n)$=$\mathrm{Ker}(\beta_n)$=$\mathrm{H}_n(C_\bullet)$. Por construcción, tenemos que $\mathrm{Coker}(\alpha_{n-1})$=$\mathrm{H}_{n-1}(C_\bullet)$ y β_n es un epimorfismo. Por lo tanto, se tiene que $\mathrm{Coker}(\lambda_n)$=$\mathrm{Coker}(\alpha_{n-1})$=$\mathrm{H}_{n-1}(C_\bullet)$. □

Definición 2.2.2. *Decimos que una sucesión* $0 \to C_\bullet \overset{\varphi}{\to} D_\bullet \overset{\psi}{\to} E_\bullet \to 0$ *en* $\mathrm{Com}_\bullet(R)$ *es exacta si, para cada* $n \in \mathbb{Z}$, *la sucesión* $0 \to C_n \overset{\varphi_n}{\to} D_n \overset{\psi_n}{\to} E_n \to 0$ *es exacta en* $\mathrm{Mod}(R)$.

Teorema 2.2.3. *Sea* $0 \to C_\bullet \overset{\varphi}{\to} D_\bullet \overset{\psi}{\to} E_\bullet \to 0$ *una sucesión exacta en* $\mathrm{Com}_\bullet(R)$. *Entonces, para cada* $n \in \mathbb{Z}$, *existe* $\omega_n : \mathrm{H_n}(E_\bullet) \to \mathrm{H_{n-1}}(C_\bullet)$ *tal que la siguiente sucesión*

$$\cdots \overset{\omega_{n+1}}{\to} \mathrm{H_n}(C_\bullet) \overset{\mathrm{H_n}(\varphi)}{\to} \mathrm{H_n}(D_\bullet) \overset{\mathrm{H_n}(\psi)}{\to} \mathrm{H_n}(E_\bullet) \overset{\omega_n}{\to} \mathrm{H_{n-1}}(C_\bullet) \to \cdots$$

es exacta en $\mathrm{Mod}(R)$.

Demostración. Sea $n \in \mathbb{Z}$. Tenemos por la construcción en (2.1.1) y la propiedad universal del cokernel, el siguiente diagrama conmutativo con las dos filas centrales exactas.

$$\begin{tikzcd}
& \mathrm{Ker}(d_n^C) \arrow[r, "\mathrm{K_n}(\varphi)"] \arrow[d, "\mathrm{K}(d_n^C)"'] & \mathrm{Ker}(d_n^D) \arrow[r, "\mathrm{K_n}(\psi)"] \arrow[d, "\mathrm{K}(d_n^D)"] & \mathrm{Ker}(d_n^E) \arrow[d, "\mathrm{Ker}(d_n^E)"] & \\
0 \arrow[r] & C_n \arrow[r, "\varphi_n"] \arrow[d, "d_n^C"'] & D_n \arrow[r, "\psi_n"] \arrow[d, "d_n^D"] & E_n \arrow[r] \arrow[d, "d_n^E"] & 0 \\
0 \arrow[r] & C_{n-1} \arrow[r, "\varphi_{n-1}"'] \arrow[d, "\mathrm{C}(d_n^C)"'] & D_{n-1} \arrow[r, "\psi_{n-1}"'] \arrow[d, "\mathrm{C}(d_n^D)"] & E_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{C}(d_n^E)"] & 0 \\
& \mathrm{Coker}(d_n^C) \arrow[r, "\mathrm{C_n}(\varphi)"'] & \mathrm{Coker}(d_n^D) \arrow[r, "\mathrm{C_n}(\psi)"'] & \mathrm{Coker}(d_n''). &
\end{tikzcd} \tag{2.2.2}$$

Por el Lema de la serpiente, las siguientes sucesiones son exactas.

$$0 \to \mathrm{Ker}(d_n^C) \overset{\mathrm{K_n}(\varphi)}{\to} \mathrm{Ker}(d_n^D) \overset{\mathrm{K_n}(\psi)}{\to} \mathrm{Ker}(d_n^E),$$

$$\mathrm{Coker}(d_n^C) \overset{\mathrm{C_n}(\varphi)}{\to} \mathrm{Coker}(d_n^D) \overset{\mathrm{C_n}(\psi)}{\to} \mathrm{Coker}(d_n^E) \to 0.$$

Por el Lema 2.2.1 y el Lema de la serpiente, tenemos el siguiente diagrama con filas y columnas exactas.

$$\begin{tikzcd}
& \mathrm{H_n}(C_\bullet) \arrow[r, "\Phi_1"] \arrow[d, "\gamma_n"'] & \mathrm{H_n}(D_\bullet) \arrow[r, "\Phi_2"] \arrow[d, "\gamma_n'"] & \mathrm{H_n}(E_\bullet) \arrow[d, "\gamma_n''"] & \\
& \mathrm{Coker}(d_{n+1}^C) \arrow[r, "\mathrm{C_{n+1}}(\varphi)"] \arrow[d, "\lambda_n"'] & \mathrm{Coker}(d_{n+1}^D) \arrow[r, "\mathrm{C_{n+1}}(\psi)"] \arrow[d, "\lambda_n'"] & \mathrm{Coker}(d_{n+1}^E) \arrow[r] \arrow[d, "\lambda_n''"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Ker}(d_n^C) \arrow[r, "\mathrm{K_{n-1}}(\varphi)"'] \arrow[d, "\mathrm{C}(\lambda_n)"'] & \mathrm{Ker}(d_n^D) \arrow[r, "\mathrm{K_{n-1}}(\psi)"'] \arrow[d, "\mathrm{C}(\lambda_n')"] & \mathrm{Ker}(d_n^E) \arrow[d, "\mathrm{C}(\lambda_n'')"] & \\
& \mathrm{H_{n-1}}(C_\bullet) \arrow[r, "\Phi_3"'] & \mathrm{H_{n-1}}(D_\bullet) \arrow[r, "\Phi_4"'] & \mathrm{H_{n-1}}(E_\bullet). &
\end{tikzcd} \tag{2.2.3}$$

Es claro, por (2.1.3), que Φ_3 y Φ_4 son $\mathrm{H}_{n-1}(\varphi)$ y $\mathrm{H}_{n-1}(\psi)$, respectivamente. Ahora veamos que Φ_1=$\mathrm{H}_n(\varphi)$. En efecto,

$$\begin{aligned}
\gamma'_n\Phi_1\mathrm{C}(\alpha_n) &= C_{n+1}(\varphi)\gamma_n\mathrm{C}(\alpha_n) && (2.2.3)\\
&= C_{n+1}(\varphi)C(d^C_{n+1})\mathrm{K}(d_n) && (2.2.1)\\
&= C(d^D_{n+1})\varphi_n\mathrm{K}(d_n) && (2.2.2)\\
&= C(d^D_{n+1})\mathrm{K}(d^D_n)\mathrm{K_n}(\varphi) && (2.2.2)\\
&= \gamma'_n\mathrm{C}(\alpha'_n)\mathrm{K_n}(\varphi). && (2.2.1)
\end{aligned}$$

Luego, como γ'_n es un monomorfismo, $\Phi_1\mathrm{C}(\alpha_n)$=$\mathrm{C}(\alpha'_n)\mathrm{K_n}(\varphi)$. Más aún, por la construcción de $\mathrm{H}_n(\varphi)$, concluimos que $\mathrm{H}_n(\varphi)$=Φ_1. Análogamente se tiene que $\mathrm{H}_n(\psi)$=Φ_2, y entonces por el Lema de la serpiente, existe ω_n tal que la siguiente sucesión

$$\cdots \xrightarrow{\omega_{n+1}} \mathrm{H_n}(C_\bullet) \xrightarrow{\mathrm{H_n}(\varphi)} \mathrm{H_n}(D_\bullet) \xrightarrow{\mathrm{H_n}(\psi)} \mathrm{H_n}(E_\bullet) \xrightarrow{\omega_n} \mathrm{H_{n-1}}(C_\bullet) \to \cdots$$

es exacta en $\mathrm{Mod}(R)$. □

Análogamente, se puede probar el siguiente resultado para cohomologías.

Teorema 2.2.4. *Sean* $0 \to C^\bullet \xrightarrow{\varphi} D^\bullet \xrightarrow{\psi} E^\bullet \to 0$ *una sucesión exacta en* $\mathrm{Com}^\bullet(R)$. *Entonces, para cada* $n \in \mathbb{Z}$, *existe* $\omega^n : \mathrm{H^n}(E^\bullet) \to \mathrm{H^{n+1}}(C^\bullet)$ *tal que la siguiente sucesión*

$$\cdots \xrightarrow{\omega^n} \mathrm{H^n}(C^\bullet) \xrightarrow{\mathrm{H^n}(\varphi)} \mathrm{H^n}(D^\bullet) \xrightarrow{\mathrm{H^n}(\psi)} \mathrm{H^n}(E^\bullet) \xrightarrow{\omega^{n+1}} \mathrm{H^{n+1}}(C^\bullet) \to \cdots$$

es exacta en $\mathrm{Mod}(R)$.

2.3. Homotopías

Definición 2.3.1. *Sean* φ, $\psi : C_\bullet \to D_\bullet$ *en* $\mathrm{Com}_\bullet(R)$. *Decimos que* φ *y* ψ *son homotópicos en* $\mathrm{Com}_\bullet(R)$ *si existe una familia* $S = \{S_n : C_n \to D_{n+1}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ *de morfimos en* $\mathrm{Mod}(R)$, *llamada homotopía, tal que*

$$\varphi_n - \psi_n = d^D_{n+1}S_n + S_{n-1}d^C_n \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

En tal caso, se suele escribir $S : \varphi \sim \psi$ *o bien* $\varphi \sim \psi$.

Proposición 2.3.2. *Sean* φ, $\psi : C_\bullet \to D_\bullet$ *en* $\mathrm{Com}_\bullet(R)$ *tales que* $\varphi \sim \psi$. *Entonces*

$$\mathrm{H_n}(\varphi) = \mathrm{H_n}(\psi) \quad \forall\, n \in \mathbb{Z}.$$

Demostración. Sean $S = \{S_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ una homotopía entre φ y ψ y $n \in \mathbb{Z}$. Consideremos $x \in \mathrm{Ker}(d_n^C)$. Por definición, tenemos que

$$\psi_n(x) - \varphi_n(x) = d_{n+1}S_n^D(x) + S_{n+1}d_n^C(x) = d_{n+1}^D S_n(x),$$

con lo cual tenemos que $\mathrm{Im}(\psi_n - \varphi_n) \leq \mathrm{Im}(d_{n+1}^D)$. Entonces $\mathrm{H_n}(\psi_\mathrm{n} - \varphi_\mathrm{n}) = 0$, ya que el funtor $\mathrm{H_n}$ es aditivo, se concluye que $\mathrm{H_n}(\psi) = \mathrm{H_n}(\varphi)$. □

Definición 2.3.3. *Sea* $F : \mathrm{Mod}(R) \to \mathrm{Mod}(S)$ *un funtor aditivo. Se tiene la correspondencia* $\mathrm{Com}_\bullet F(-) : \mathrm{Com}_\bullet(R) \to \mathrm{Com}_\bullet(S)$

$$(C_\bullet \stackrel{\varphi}{\to} D_\bullet) \mapsto (\mathrm{Com}_\bullet F(C_\bullet) \stackrel{\mathrm{Com}_\bullet F(\varphi)}{\to} \mathrm{Com}_\bullet F(D_\bullet)),$$

donde

$$\mathrm{Com}_\bullet F(C_\bullet) : \quad \cdots \to F(C_{n+1}) \stackrel{F(d_{n+1}^C)}{\to} F(C_n) \stackrel{F(d_n^C)}{\to} F(C_{n-1}) \to \cdots$$

y $\mathrm{Com}_\bullet F(\varphi)_n = F(\varphi_n)$ $\forall\, n \in \mathbb{Z}$.

Note que $\mathrm{Com}_\bullet F(-) : \mathrm{Com}_\bullet(R) \to \mathrm{Com}_\bullet(S)$ es un funtor aditivo. Análogamente, se define el funtor aditivo $\mathrm{Com}^\bullet F(-) : \mathrm{Com}^\bullet(R) \to \mathrm{Com}^\bullet(S)$.

Definición 2.3.4. *Sea* $F : \mathrm{Mod}(R) \to \mathrm{Mod}(S)$ *un funtor aditivo contravariante. Se tiene la correspondencia* $\mathrm{Com}_\bullet F(-) : \mathrm{Com}_\bullet(R) \to \mathrm{Com}^\bullet(S)$

$$(C_\bullet \stackrel{\varphi}{\to} D_\bullet) \mapsto (\mathrm{Com}_\bullet F(D_\bullet) \stackrel{\mathrm{Com}_\bullet F(\varphi)}{\to} \mathrm{Com}_\bullet F(C^\bullet)),$$

donde

$$\mathrm{Com}_\bullet F(D_\bullet) : \quad \cdots \to F(D_{n-1}) \stackrel{F(d_n^C)}{\to} F(D_n) \stackrel{F(d_{n+1}^C)}{\to} F(D_{n+1}) \to \cdots$$

y $\mathrm{Com}_\bullet F(\varphi)_n = F(\varphi_n)$ $\forall\, n \in \mathbb{Z}$.

Lema 2.3.5. *Sean* $F : \mathrm{Mod}(R) \to \mathrm{Mod}(S)$ *un funtor aditivo y* φ, $\psi : C_\bullet \to D_\bullet$ *en* $\mathrm{Com}_\bullet(R)$ *tales que* $\varphi \sim \psi$. *Entonces,* $\mathrm{Com}_\bullet F(\varphi) \sim \mathrm{Com}_\bullet F(\psi)$.

Demostración. Sea $S = \{S_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ una homotopía entre φ y ψ. Por ser F aditivo, tenemos, para cada $n \in \mathbb{Z}$ las siguientes igualdades

$$\begin{aligned} F(\varphi_n) - F(\psi_n) &= F(\varphi_n - \psi_n) \\ &= F(d^D_{n+1}S_n + S_{n-1}d^C_n) \\ &= F(d^D_{n+1})F(S_n) + F(S_{n-1})F(d^C_n). \end{aligned}$$

Por lo tanto $\mathrm{Com}_\bullet F(S) = \{F(S_n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es una homotopía entre $\mathrm{Com}_\bullet F(\varphi)$ y $\mathrm{Com}_\bullet F(\psi)$. $\square$

Por el lema y la proposición anterior, se obtiene el siguiente corolario.

Corolario 2.3.6. *Sea* $F : \mathrm{Mod}(R) \to \mathrm{Mod}(S)$ *un funtor aditivo. Si* $\varphi \sim \psi$ *en* $\mathrm{Com}_\bullet(R)$*, entonces*

$$\mathrm{H_n}\mathrm{Com}_\bullet F(\varphi) = \mathrm{H_n}\mathrm{Com}_\bullet F(\psi) \quad \forall\, n \in \mathbb{Z}.$$

2.4. Resoluciones

Definición 2.4.1. *Sea* $M \in \mathrm{Mod}(R)$*. Una resolución proyectiva de* M *en* $\mathrm{Mod}(R)$ *es un complejo acíclico* $P_\bullet(M) \in \mathrm{Com}_\bullet(R)$ *tal que*

a) $P_i(M)$ *es un* R*-módulo proyectivo* $\forall\ i \geq 0$.

b) $P_{-1}(M) := M$.

c) $P_i(M) = 0\ \forall\ i \geq -2$.

Denotaremos por $\overline{P_\bullet}(M)$ *al complejo truncado asociado a la resolución proyectiva* $P_\bullet(M)$ *como sigue*

$$\overline{P_i}(M) := \begin{cases} P_i(M) & si \quad i \geq 0, \\ 0 & si \quad i < 0. \end{cases}$$

Definición 2.4.2. *Sea* $M \in \mathrm{Mod}(R)$*. Una co-resolución inyectiva de* M *en* $\mathrm{Mod}(R)$ *es un cocomplejo acíclico* $I^\bullet(M) \in \mathrm{Com}^\bullet(R)$ *tal que*

a) $I^i(M)$ *es un* R*-módulo inyectivo* $\forall\ i \geq 0$.

b) $I^{-1}(M) := M$.

c) $I^i(M) = 0 \ \forall \ i \geq -2$.

Denotaremos por $\overline{I^\bullet}(M)$ *al cocomplejo truncado asociado a la co-resolución inyectiva* $I^\bullet(M)$ *como sigue*

$$\overline{I^i}(M) := \begin{cases} I^i(M) & si \quad i \geq 0, \\ 0 & si \quad i < 0. \end{cases}$$

Sea $M \in \mathrm{Mod}(R)$. Es claro que M admite una resolución proyectiva y se debe a que, para todo R-módulo, siempre existe un epimorfismo $F_X \to X$, con F_X un R-módulo libre (en particular proyectivo). Por otro lado, dado que todo R-módulo X admite una envolvente inyectiva $X \to \mathrm{I}_0(X)$, se tiene que M tiene una co-resolución inyectiva.

Teorema 2.4.3. *Sean* $\alpha : M \to N$ *en* $\mathrm{Mod}(R)$, $P_\bullet(M)$ *y* $P_\bullet(N)$ *resoluciones proyectivas. Entonces existe* $\varphi : P_\bullet(M) \to P_\bullet(N)$ *en* $\mathrm{Com}_\bullet(R)$ *tal que* $\varphi_{-1} = \alpha$. *El morfismo inducido* $\overline{\varphi} : \overline{P_\bullet}(M) \to \overline{P_\bullet}(N)$ *se le llama levantamiento de* α. *Más aún dos levantamientos de* α *son homotópicos en* $\mathrm{Com}_\bullet(R)$.

Demostración. La demostración la haremos por inducción sobre la longitud del complejo $P_\bullet(M)$. En efecto, dado que $P_0(M)$ es un R-módulo proyectivo, tenemos el siguiente cuadrado conmutativo

$$\begin{tikzcd} P_0(M) \arrow[rr, "d_0^{P_\bullet(M)}"] \arrow[d, dashed, "\exists\, \varphi_0"'] & & M \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] & 0 \\ P_0(N) \arrow[rr, "d_0^{P_\bullet(N)}"'] & & N \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

Por hipótesis de inducción, la propiedad universal del Kernel y dado que $P_n(M)$ es un R-módulo proyectivo, tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} P_n(M) \arrow[r, "d_n^{P_\bullet(M)}"] \arrow[d, dashed, "\exists\, \varphi_n"'] \arrow[ddr, dashed, "\exists !\, \beta_n"] & P_{n-1}(M) \arrow[r, "d_{n-1}^{P_\bullet(M)}"] \arrow[d, "\varphi_{n-1}"] & P_{n-2}(M) \arrow[d, "\varphi_{n-2}"] \\ P_n(N) \arrow[dr, "\mathrm{I}(d_n^{P_\bullet(N)})"'] & P_{n-1}(N) \arrow[r, "d_{n-1}^{P_\bullet(N)}"] & P_{n-2}(N) \\ & \mathrm{Ker}(d_{n-1}^{P_\bullet(N)}) = \mathrm{Im}(d_n^{P_\bullet(N)}). \arrow[u, "\mathrm{K}(d_{n-1}^{P_\bullet(N)})"'] & \end{tikzcd}$$

Por inducción, existe $\varphi : P_\bullet(M) \to P_\bullet(N)$ en $\mathrm{Com}_\bullet(R)$ tal que $\varphi_{-1} = \alpha$. Ahora bien, sean $\overline{\varphi}$ y $\overline{\psi}$ dos levantamientos de α. Veamos que son homotópicos estos morfismos. En efecto, la construcción de la homotopía $S : \overline{\varphi} \sim \overline{\psi}$ la haremos por inducción. Sea $S_i = 0 \; \forall \; i \leq 0$, supongamos que existe S_{n-1} para $n \geq 1$, es decir, $\varphi_{n-1} - \psi_{n-1} = S_{n-2}d_{n-1}^{P_\bullet(M)} + d_n^{P_\bullet(N)}S_{n-1}$, y en tal caso tenemos las siguientes igualdades

$$\begin{aligned}
d_n^{Q_\bullet(N)}(\varphi_n - \psi_n - S_{n-1}d_n^{P_\bullet(M)}) &= d_n^{Q_\bullet(N)}\varphi_n - d_n^{Q_\bullet(N)}\psi_n - d_n^{Q_\bullet(N)}S_{n-1}d_n^{P_\bullet(M)} \\
&= \varphi_{n-1}d_n^{P_\bullet(M)} - \psi_{n-1}d_n^{P_\bullet(M)} - d_n^{Q_\bullet(N)}S_{n-1}d_n^{P_\bullet(M)} \\
&= (\varphi_{n-1} - \psi_{n-1} - d_n^{Q_\bullet(N)}S_{n-1})d_n^{P_\bullet(M)} \\
&= (S_{n-2}d_{n-1}^{P_\bullet(M)} + d_n^{P_\bullet(N)}S_{n-1} - d_n^{P_\bullet(N)}S_{n-1})d_n^{P_\bullet(M)} \\
&= S_{n-2}d_{n-1}^{P_\bullet(M)}d_n^{P_\bullet(M)} = 0.
\end{aligned}$$

Por ello $\mathrm{Im}(\varphi_n - \psi_n - S_{n-1}d_n^{P_\bullet(M)}) \leq \mathrm{Ker}(d_n^{Q_\bullet(N)})$, y como $P_n(M)$ es un R-módulo proyectivo, tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
 & P_n(M) \arrow[dl, dashed, "\exists\, S_n"'] \arrow[d, "\varphi_n - \psi_n - S_{n-1}d_n^{P_\bullet(M)}"] \\
P_{n+1}(N) \arrow[r, "\mathrm{I}(\mathrm{d}_n^{P_\bullet(N)})"'] & \mathrm{Im}(d_n^{P_\bullet(N)}) = \mathrm{Ker}(d_{n-1}^{P_\bullet(N)}).
\end{tikzcd}$$

Entonces $\varphi_n - \psi_n - S_{n-1}d_n^{P_\bullet(M)} = d_n^{P_\bullet(N)}S_n$ y por lo tanto $S : \varphi \sim \psi$. $\square$

Análogamente tenemos el siguiente teorema.

Teorema 2.4.4. *Sean $\alpha : M \to N$ en $\mathrm{Mod}(R)$, $I^\bullet(M)$ y $I^\bullet(N)$ co-resoluciones inyectivas. Entonces existe $\varphi : I^\bullet(M) \to I^\bullet(N)$ en $\mathrm{Com}^\bullet(R)$ tal que $\varphi^{-1} = \alpha$. El morfismo inducido $\overline{\varphi} : \overline{I^\bullet}(M) \to \overline{I^\bullet}(N)$ se le llama levantamiento de α. Más aún dos levantamientos de α son homotópicos.*

Definición 2.4.5. *Decimos que dos complejos $C_\bullet$ y $D_\bullet$ son homotópicamente equivalentes si existen morfismos $\varphi : C_\bullet \to D_\bullet$ y $\psi : D_\bullet \to C_\bullet$ tales que $\psi\varphi \sim 1_{C_\bullet}$ y $\varphi\psi \sim 1_{D_\bullet}$.*

Proposición 2.4.6. *Dos resoluciones proyectivas truncadas de M son homotópicamente equivalentes $\forall \; M \in \mathrm{Mod}(R)$.*

Demostración. Sean $P_\bullet(M)$ y $Q_\bullet(M)$ dos resoluciones proyectivas de M. Por el Teorema 2.4.3 existen levantamientos de la identidad $1_M : M \to M$, $\overline{\varphi} : \overline{P_\bullet}(M) \to \overline{Q_\bullet}(M)$ y $\overline{\psi} : \overline{Q_\bullet}(M) \to \overline{P_\bullet}(M)$, tales que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & P_{n+1}(M) \arrow[r, "d_{n+1}^{P_\bullet(M)}"] \arrow[d, "\varphi_{n+1}"] & P_n(M) \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_n"] & \cdots \arrow[r] & P_0(M) \arrow[r, "d_0^{P_\bullet(M)}"] \arrow[d, "\varphi_0"] & M \arrow[d, "1_M"] \\
\cdots \arrow[r] & Q_{n+1}(M) \arrow[r, "d_{n+1}^{Q_\bullet(M)}"] \arrow[d, "\psi_{n+1}"] & Q_n(M) \arrow[r] \arrow[d, "\psi_n"] & \cdots \arrow[r] & Q_0(M) \arrow[r, "d_0^{Q_\bullet(M)}"] \arrow[d, "\psi_0"] & M \arrow[d, "1_M"] \\
\cdots \arrow[r] & P_{n+1}(M) \arrow[r, "d_{n+1}^{P_\bullet(M)}"] & P_n(M) \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & P_0(M) \arrow[r, "d_0^{P_\bullet(M)}"] & M.
\end{tikzcd}$$

Por el diagrama anterior, la composición $\overline{\psi}\overline{\varphi} : \overline{P_\bullet}(M) \to \overline{P_\bullet}(M)$ es un levantamiento de 1_M, pero $1_{\overline{P_\bullet}}$ es claramente un levantamiento de 1_M. Entonces, por el Teorema 2.4.3, se tiene $\overline{\psi}\overline{\varphi} \sim 1_{\overline{P_\bullet}(M)}$. Análogamente $\overline{\varphi}\overline{\psi} \sim 1_{\overline{Q_\bullet}(M)}$. Por lo tanto $\overline{P_\bullet}(M)$ y $\overline{Q_\bullet}(M)$ son homotópicamente equivalentes. $\square$

Similarmente, tenemos la siguiente proposición.

Proposición 2.4.7. *Dos resoluciones inyectivas truncadas de M son homotópicamente equivalentes $\forall\ M \in \mathrm{Mod}(R)$.*

2.5. La categoría homotópica $\mathcal{K}_\bullet(R)$

Definición 2.5.1. *Sea $\mathcal{C}$ una R-categoría aditiva. Un ideal $I \trianglelefteq \mathcal{C}$ es una clase de morfismos $I = \{I(X,Y)\}_{(X,Y)\in\mathcal{C}^2}$ tal que*

a) *$I(X,Y)$ es un R-submódulo de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$.*

b) *Para toda sucesión $W \xrightarrow{h} X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ en $\mathcal{C}$, se tiene que, si $f \in I(X,Y)$ entonces $gf \in I(X,Z)$ y $fh \in I(W,Y)$.*

Proposición 2.5.2. *Sean $\mathcal{C}$ una R-categoría aditiva e $I \trianglelefteq \mathcal{C}$. Entonces, el cociente $\mathcal{C}/I$ es una R-categoría aditiva, donde*

a) $\mathrm{Obj}(\mathcal{C}/I) := Obj(\mathcal{C})$.

b) $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}/I}(X,Y) := \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)/I(X,Y)\ \forall\ X,\ Y \in \mathcal{C}$.

c) $(f+I(Y,Z))\circ_{\mathcal{C}/I}(g+I(X,Y)) := fg+I(X,Z) \quad \forall\, f: Y \to Z,\, g: X \to Y.$

Demostración. Basta ver que la composición esta bien definida para ver que $\mathcal{C}/I$ es una categoría. En efecto, sean $f_1, f_2 : X \to Y$, $g_1, g_2 : Y \to Z$ tales que $f_1 + I(X,Y) = f_2 + I(X,Y)$ y $g_1 + I(Y,Z) = g_2 + I(Y,Z)$. Entonces $f_1 - f_2 \in I(X,Y)$, y por definición $g_1(f_1 - f_2) \in I(X,Z)$. Análogamente $(g_1 - g_2)f_2 \in I(X,Z)$, con lo cual $g_1f_1 - g_2f_2 \in I(X,Z)$ porque $I(X,Z)$ es un submódulo de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Z)$. Así $g_1f_1 + I(X,Z) = g_2f_2 + I(X,Z)$ y por lo tanto la composición está bien definida. Usando ahora que $\mathcal{C}$ es aditiva, se sigue vía el funtor cociente $q : \mathcal{C} \to \mathcal{C}/I$, que $\mathcal{C}/I$ es aditiva. □

Veamos una propiedad que cumplen las categorías cociente.

Proposición 2.5.3. *Sean $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ R-categorías aditivas, $I \trianglelefteq \mathcal{C}$ y $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un funtor aditivo. Si $F(f) = 0\ \forall\ f \in I$, entonces existe un único funtor aditivo $\overline{F} : \mathcal{C}/I \to \mathcal{D}$ que hace conmutar el siguiente diagrama*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[rr, "F"] \arrow[dr, "q"'] & & \mathcal{D} \\ & \mathcal{C}/I, \arrow[ur, "\overline{F}"'] & \end{tikzcd}$$

donde $q(X) := X\ \forall\ X \in \mathcal{C}$ y $q(f) := f + I(X,Y)\ \forall\ f : X \to Y$.

Demostración. Veamos que la asignación $\overline{F} : \mathcal{C}/I \to \mathcal{D}$ dada por $\overline{F}(X) = F(X)\ \forall\ X \in \mathcal{C}/I$, $\overline{F}(f + I(X,Y)) = F(f)\ \forall\ f : X \to Y$ cumple con la proposición. En efecto, veamos que está bien definida. Sean $f + I(X,Y) = g + I(X,Y)$, con lo cual $f - g \in I(X,Y)$, por hipótesis $F(f-g) = 0$, consecuentemente $F(f) = F(g)$ ya que el funtor F es aditivo. Por lo tanto el funtor $\overline{F}$ está bien definido y claramente $F = \overline{F}q$.
Para finalizar, veamos la unicidad. Sea $Q : \mathcal{C}/I \to \mathcal{D}$ un funtor aditivo tal que $F = Qq$. Tenemos que $\overline{F}(X) = Q(X)\ \forall\ X \in \mathcal{C}/I$ y

$$Q(f + I(X,Y)) = Qq(f) = F(f)$$

$\forall\ f : X \to Y$. Con lo cual $\overline{F} = Q$. □

Para simplificar la notación, escribiremos F en lugar de $\overline{F}$ cuando sea claro el contexto.

Definición 2.5.4. *La clase de homotopía $\mathcal{H}$ en* $\mathrm{Com}_\bullet(R)$ *es*

$$\mathcal{H} := \{\mathcal{H}(X_\bullet, Y_\bullet)\}_{(X_\bullet, Y_\bullet)\in \mathrm{Com}_\bullet(R)^2},$$

donde $\mathcal{H}(X_\bullet, Y_\bullet) := \{f : X_\bullet \to Y_\bullet \mid f \sim 0\}$.

Lema 2.5.5. $\mathcal{H}$ *es un ideal en* $\mathrm{Com}_\bullet(R)$.

Demostración. Sean $W_\bullet, X_\bullet, Y_\bullet, Z_\bullet \in \mathrm{Com}_\bullet(R)$, $f, g \in \mathcal{H}(X_\bullet, Y_\bullet)$, $h : W_\bullet \to X_\bullet$, $j : Y_\bullet \to Z_\bullet$ y $r \in R$.
Veamos que $\mathcal{H}(X_\bullet, Y_\bullet)$ es un R-submódulo de $\mathrm{Com}_\bullet(X_\bullet, Y_\bullet)$. En efecto, por hipótesis existen homotopías $S : f \sim 0$, $S' : g \sim 0$, entonces

$$rf_n - g_n = d^Y_{n+1}(rS_n - S'_n) + (rS_{n-1} - S'_{n-1})d^X_n$$

$\forall\ n \in \mathbb{Z}$. Con lo cual $rf - g \in \mathcal{H}(X_\bullet, Y_\bullet)$. Concluimos que $\mathcal{H}(X_\bullet, Y_\bullet) \leq \mathrm{Com}_\bullet(X_\bullet, Y_\bullet)$.
Ahora veamos que $fh \in \mathcal{H}(W_\bullet, Y_\bullet)$. Por hipótesis $f_n = d^Y_{n+1}S_n + S_{n-1}d^X_n$, con lo cual

$$f_n h_n = d^Y_{n+1}S_n h_n + S_{n-1}d^X_n h_n = d^Y_{n+1}(S_n h_n) + (S_{n-1}h_{n-1})d^X_n$$

ya que $h \in \mathrm{Com}_\bullet(W_\bullet, X_\bullet)$, así $fh \in \mathcal{H}(W_\bullet, Y_\bullet)$.
Análogamente $jf \in \mathcal{H}(X_\bullet, Z_\bullet)$. Por lo tanto $\mathcal{H} \trianglelefteq \mathrm{Com}_\bullet(R)$. □

Definición 2.5.6. *La categoría homotópica de complejos de R-módulos es*

$$\mathcal{K}_\bullet(R) := \mathrm{Com}_\bullet(R)/\mathcal{H}$$

y $q : \mathrm{Com}_\bullet(R) \to \mathcal{K}_\bullet(R)$ *es el funtor canónico.*

Note que de la Proposición 2.3.2 se sigue que $\mathrm{H_n}(f) = 0\ \forall\ f \sim 0$, así que, por la Proposición 2.5.3, existe un único funtor $\overline{\mathrm{H}}_n : \mathcal{K}_\bullet(R) \to \mathrm{Mod}(R)$ tal que $\overline{\mathrm{H}}_n(f + I(X, Y)) = \mathrm{H_n}(f)\ \forall\ f : X \to Y$. Esto es, se tiene el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Com}_\bullet(R) \arrow[r, "\mathrm{H_n}"] \arrow[d, "q"'] & \mathrm{Mod}(R) \\ \mathcal{K}_\bullet(R). \arrow[ur, "\overline{\mathrm{H}}_n"'] & \end{tikzcd}$$

Por simplicidad se suele escribir $\mathrm{H_n}$ en lugar de $\overline{\mathrm{H}}_n$, el cual también se le conoce como el n-ésimo funtor de homología.
Análogamente, se define la categoría homotópica $\mathcal{K}^\bullet(R)$ de cocomplejos de R-módulos y el funtor de cohomología $\overline{\mathrm{H}}^n : \mathcal{K}^\bullet(R) \to \mathrm{Mod}(R)$ que hace conmutar el diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Com}^\bullet(R) \arrow[r, "\mathrm{H^n}"] \arrow[d, "q"'] & \mathrm{Mod}(R) \\ \mathcal{K}^\bullet(R), \arrow[ur, "\overline{\mathrm{H}}^n"'] & \end{tikzcd}$$

al cual por simplicidad escribimos $\mathrm{H^n}$ en lugar de $\overline{\mathrm{H}}^n$.

2.6. Funtores derivados

Sea $f : M \to N$ un morfismo en $\mathrm{Mod}(R)$. Por el Teorema 2.4.3 existe un morfismo $\varphi : P_\bullet(M) \to P_\bullet(N)$ en $\mathrm{Com}_\bullet(R)$ tal que $\varphi_{-1} = f$. Luego, consideramos el morfismo inducido $\overline{\varphi} : \overline{P_\bullet}(M) \to \overline{P_\bullet}(N)$ y el funtor cociente $q : \mathrm{Com}_\bullet(R) \to \mathcal{K}_\bullet(R)$, con lo cual la asignación

$$-_\bullet : \mathrm{Mod}(R) \to \mathcal{K}_\bullet(R)$$

$$(M \xrightarrow{f} N) \mapsto (\overline{P_\bullet}(M) \xrightarrow{q(\overline{\varphi})} \overline{P_\bullet}(N)),$$

es un funtor aditivo. Note que la asignación anterior está bien definida (hasta isomorfismos en $\mathcal{K}_\bullet(R)$), ya que dos resoluciones proyectivas truncadas son isomorfas en $\mathcal{K}_\bullet(R)$ (Proposición 2.4.6) y $q(\overline{\varphi})$ es único por el Teorema 2.4.3.
Análogamente, dado un morfismo $f : M \to N$ en $\mathrm{Mod}(R)$, por el Teorema 2.4.4 existe un morfismo $\psi : I^\bullet(M) \to I^\bullet(M)$ tal que $\psi^{-1} = f$. Luego, consideramos el morfismo inducido $\overline{\psi} : \overline{I^\bullet}(M) \to \overline{I^\bullet}(N)$ y el funtor cociente $q : \mathrm{Com}^\bullet(R) \to \mathcal{K}^\bullet(R)$, con lo cual la asignación

$$-^\bullet : \mathrm{Mod}(R) \to \mathcal{K}^\bullet(R)$$

$$(M \xrightarrow{f} N) \mapsto (\overline{I^\bullet}(M) \xrightarrow{q(\overline{\psi})} \overline{I^\bullet}(N)),$$

es un funtor aditivo. Note que la asignación anterior está bien definida (hasta isomorfismos en $\mathcal{K}^\bullet(R)$) ya que dos co-resoluciones inyectivas truncadas son isomorfas en $\mathcal{K}^\bullet(R)$ (Proposición 2.4.7) y $q(\overline{\varphi})$ es único por el Teorema 2.4.4.

Con los dos funtores anteriores, se pueden construir los funtores derivados de un funtor aditivo $F : \mathrm{Mod}(R) \to \mathrm{Mod}(S)$ como sigue. Note que $\mathrm{H_n Com_\bullet} F(f) = 0 \ \forall \ f \in \mathcal{H}(X_\bullet, Y_\bullet) \ \forall \ X_\bullet, Y_\bullet \in \mathrm{Com}_\bullet(R)$ por el Corolario 2.3.6. Por lo que $\mathrm{Com}_\bullet F$ induce un único funtor aditivo

$$\underline{\mathrm{Com}_\bullet} F : \mathcal{K}_\bullet(R) \to \mathcal{K}_\bullet(S)$$

que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Com}_\bullet(R) \arrow[r, "\mathrm{Com}_\bullet(F)"] \arrow[d, "q_R"'] & \mathrm{Com}_\bullet(S) \arrow[d, "q_S"] \\ \mathcal{K}_\bullet(R) \arrow[r, "\underline{\mathrm{Com}_\bullet} F"'] & \mathcal{K}_\bullet(S), \end{tikzcd}$$

donde q_R y q_S son, respectivamente, los funtores cocientes.
El n-ésimo funtor derivado a izquierda de F es

$$\mathrm{L_n} F : \mathrm{Mod}(R) \to \mathrm{Mod}(S)$$

$$\mathrm{L_n} F := \mathrm{H_n} \underline{\mathrm{Com}_\bullet} F(-_\bullet).$$

En el caso que $F : \mathrm{Mod}(R) \to \mathrm{Mod}(S)$ sea un funtor contravariante, tenemos que $\mathrm{Com}_\bullet F$ induce un único funtor aditivo

$$\overline{\mathrm{Com}_\bullet} : \mathcal{K}_\bullet(R) \to \mathcal{K}^\bullet(S)$$

que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Com}_\bullet(R) \arrow[r, "\mathrm{Com}_\bullet(F)"] \arrow[d, "q_R"'] & \mathrm{Com}^\bullet(S) \arrow[d, "q_S"] \\ \mathcal{K}_\bullet(R) \arrow[r, "\overline{\mathrm{Com}_\bullet} F"'] & \mathcal{K}_\bullet(S). \end{tikzcd}$$

El funtor n-ésimo funtor derivado a izquierda de F es

$$\mathrm{L^n} F : \mathrm{Mod}(R) \to \mathrm{Mod}(S)$$

$$\mathrm{L^n} F := \mathrm{H^n} \overline{\mathrm{Com}_\bullet} F(-_\bullet).$$

De manera dual, tenemos la construcción del n-ésimo funtor derivado a derecha de F.

Sea $F : \mathrm{Mod}(R) \to \mathrm{Mod}(S)$ un funtor aditivo. El n-ésimo funtor derivado a derecha de F es

$$\mathrm{R^n}F : \mathrm{Mod}(R) \to \mathrm{Mod}(S)$$

$$\mathrm{R^n}F := \mathrm{H^n}\overline{\mathrm{Com}}^{\bullet}F(-^{\bullet}).$$

En el caso que $F : \mathrm{Mod}(R) \to \mathrm{Mod}(S)$ sea un funtor contravariante. El n-ésimo funtor derivado a derecha de F es

$$\mathrm{R_n}F : \mathrm{Mod}(R) \to \mathrm{Mod}(S)$$

$$\mathrm{R_n}F := \mathrm{H_n}\underline{\mathrm{Com}}^{\bullet}F(-^{\bullet}).$$

Esta contrucción se puede generalizar a categorías abelianas con suficientes inyectivos y proyectivos, al lector interesado se recomienda [Ro].

Proposición 2.6.1. *Sea* $F : \mathrm{Mod}(R) \to \mathrm{Mod}(S)$ *un funtor* (*contravariante*) *aditivo exacto derecho* (*izquierdo*). *Entonces* $\mathrm{L}_0F \simeq F$ ($\mathrm{L}^0F \simeq F$).

Demostración. Sean $M \in \mathrm{Mod}(R)$ y $P_\bullet(M)$ una resolución proyectiva de M. Como F es exacto derecho, se tiene que la siguiente sucesión es exacta

$$F(P_1) \overset{F(d_1^{P_\bullet(M)})}{\to} F(P_0) \overset{F(d_0^{P_\bullet(M)})}{\to} F(M) \to 0.$$

Por el primer teorema de isomorfismo, tenemos el isomorfismo θ_M que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} F(P_0) \arrow[r, "F(d_0^{P_\bullet(M)})"] \arrow[d, "\pi"'] & F(M) \\ \mathrm{H}_0F(C) = \mathrm{L}_0F(M) \arrow[ur, "\sim", "\theta_M"'] & \end{tikzcd}$$

Dado que el isomorfismo θ_M es natural, concluimos que $\mathrm{L}^0F \simeq F$.
Por otro lado, si F es contravariante y exacto izquierdo, entonces la siguiente sucesión es exacta

$$0 \to F(M) \overset{F(d_0^{P_\bullet(M)})}{\to} F(P_0) \overset{F(f_0)}{\to} F(P_1).$$

Por lo que $F(M) \overset{F(d_0^{P_\bullet(M)})}{\to} \mathrm{Ker}(F(d_0^{P_\bullet(M)})) = \mathrm{L}^0F(M)$ es un isomorfismo natural. $\square$

De forma dual, tenemos la siguiente proposición.

Proposición 2.6.2. *Sea* $F : \mathrm{Mod}(R) \to \mathrm{Mod}(S)$ *un funtor (contravariante) aditivo y exacto izquierdo (derecho). Entonces* $\mathrm{R}^0 F \simeq F$ $(\mathrm{R}_0 F \simeq F)$.

Proposición 2.6.3. *Sea* $F : \mathrm{Mod}(R) \to \mathrm{Mod}(S)$ *un funtor aditivo y exacto. Entonces* $\mathrm{L_n} F(M) = 0 \ \forall \ n \in \mathbb{N}^+$ *y* $M \in \mathrm{Mod}(R)$.

Demostración. Sean $P_\bullet(M)$ una resolución proyectiva de M y $n \in \mathbb{N}^+$. Por ser F exacto, la siguiente sucesión es exacta $F(P_{n+1}(M)) \to F(P_n(M)) \to F(P_{n-1}(M))$ y por definición $\mathrm{L_n} F(M) = 0$. □

De forma dual, tenemos la siguiente proposición.

Proposición 2.6.4. *Sea* $F : \mathrm{Mod}(R) \to \mathrm{Mod}(S)$ *un funtor aditivo y exacto. Entonces* $\mathrm{R^n} F(M) = 0 \ \forall \ n \in \mathbb{N}^+$ *y* $M \in \mathrm{Mod}(R)$.

Proposición 2.6.5. *Sea* $F : \mathrm{Mod}(R) \to \mathrm{Mod}(S)$ *un funtor aditivo. Si* $P \in \mathrm{Mod}(R)$ *es proyectivo, entonces* $\mathrm{L_n} F(P) = 0 \ \forall \ n \in \mathbb{N}^+$.

Demostración. Claramente $\overline{P_\bullet}(P) : \cdots \to 0 \to P$ es una resolución proyectiva trunca de P. Por lo tanto $\mathrm{L_n} F(P) = 0 \ \forall \ n \in \mathbb{N}^+$. □

De forma dual, tenemos la siguiente proposición.

Proposición 2.6.6. *Sea* $F : \mathrm{Mod}(R) \to \mathrm{Mod}(S)$ *un funtor aditivo. Si* $I \in \mathrm{Mod}(R)$ *es inyectivo, entonces* $\mathrm{R^n} F(I) = 0 \ \forall \ n \in \mathbb{N}^+$.

2.7. Sucesiones exactas largas del funtor derivado

El siguiente lema es conocido por el Lema de la herradura.

Lema 2.7.1. *Toda sucesión exacta* $0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$, *en* $\mathrm{Mod}(R)$, *se extiende a un diagrama conmutativo con filas y columnas exactas*

$$\begin{tikzcd}
& 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & K \arrow[r] \arrow[d] & K' \arrow[r] \arrow[d] & K'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & P \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"'] & P' \arrow[r] \arrow[d, "\varphi'"'] & P'' \arrow[r] \arrow[d, "\varphi''"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f"'] \arrow[d] & B \arrow[r, "g"'] \arrow[d] & C \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
& 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd} \tag{2.6.1}$$

con P, P' *y* P'' R*-módulos proyectivos.*

Demostración. Existen $\varphi : P \to A$ y $\varphi'' : P'' \to C$ epimorfimos con P, P'' R-módulos proyectivos. Sean $P' = P \oplus P''$, $\iota : P \to P \oplus P''$ la inclusión canónica y $\pi : P \oplus P'' \to P''$ la proyección canónica. Usando que P'' es proyectivo, se tiene el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
& P'' \arrow[dl, "\exists\, \psi_2"'] \arrow[d, "\varphi''"] \\
B \arrow[r, "g"'] & C.
\end{tikzcd}$$

Sea $\varphi' = (\psi_1, \psi_2)$, donde $\psi_1 = f\varphi$ y ψ_2 es el morfismo anterior. Finalmente, por el lema de la serpiente, se obtiene el diagrama anterior. $\square$

Teorema 2.7.2. *Sean* $F : \mathrm{Mod}(R) \to \mathrm{Mod}(S)$ *un funtor aditivo y* $0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$ *una sucesión exacta en* $\mathrm{Mod}(R)$. *Entonces existen morfismos de conexión* $\Delta_n : \mathrm{L_n}F(C) \to \mathrm{L_{n-1}}F(A)$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^+$, *tales que la siguiente sucesión es exacta*

$$\cdots \xrightarrow{\Delta_{n+1}} \mathrm{L_n}F(A) \to \mathrm{L_n}F(B) \to \mathrm{L_n}F(C) \xrightarrow{\Delta_n} \mathrm{L_{n-1}}F(A) \to \cdots$$

Demostración. Por el lema anterior, tenemos el siguiente diagrama conmutativo con filas y columnas exactas

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & K \arrow[r] \arrow[d] & K' \arrow[r] \arrow[d] & K'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & P \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"'] & P' \arrow[r] \arrow[d, "\varphi'"'] & P'' \arrow[r] \arrow[d, "\varphi''"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f"'] \arrow[d] & B \arrow[r, "g"'] \arrow[d] & C \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0. &
\end{tikzcd}$$

Aplicando de nuevo el Lema de la herradura para la sucesión exacta $0 \to K \to K' \to K'' \to 0$, obtenemos el correspondiente diagrama conmutativo con filas y columnas exactas (donde además, en la segunda fila sus objetos son proyectivos). Repitiendo el procedimiento anterior, tenemos una sucesión exacta en $\mathrm{Com}_\bullet(R)$

$$0 \to P_\bullet(A) \to P_\bullet(B) \to P_\bullet(C) \to 0,$$

donde $P_\bullet(A)$, $P_\bullet(B)$ y $P_\bullet(C)$ son resoluciones proyectivas de A, B y C, respectivamente. Ahora bien, para cada $n \in \mathbb{N}$, la sucesión exacta

$$0 \to P_n \to P'_n \to P''_n \to 0$$

se escinde, y como el funtor F es aditivo, la sucesión

$$0 \to F(P_n) \to F(P'_n) \to F(P''_n) \to 0$$

se escinde. Por lo tanto

$$0 \to \mathrm{Com}_\bullet F(\overline{P}_\bullet(A)) \to \mathrm{Com}_\bullet F(\overline{P}_\bullet(B)) \to \mathrm{Com}_\bullet F(\overline{P}_\bullet(C)) \to 0$$

es exacta en $\mathrm{Com}_\bullet(R)$. Entonces, por el Teorema 2.2.3, tenemos la siguiente sucesión exacta larga

$$\cdots \overset{\Delta_{n+1}}{\to} \mathrm{L_n}F(A) \to \mathrm{L_n}F(B) \to \mathrm{L_n}F(C) \overset{\Delta_n}{\to} \mathrm{L_{n-1}}F(A) \to \cdots$$

$\square$

De forma dual tenemos el siguiente resultado.

Teorema 2.7.3. *Sean* $F : \mathrm{Mod}(R) \to \mathrm{Mod}(S)$ *un funtor aditivo y* $0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$ *una sucesión exacta en* $\mathrm{Mod}(R)$*. Entonces, existen morfismos de conexión* $\Delta^n : \mathrm{R^n}F(C) \to \mathrm{R^{n+1}}F(A)$ $\forall\ n \in \mathbb{N}^+$ *tales que la siguiente sucesión es exacta.*

$$\cdots \xrightarrow{\Delta^{n-1}} \mathrm{R^n}F(A) \to \mathrm{R^n}F(B) \to \mathrm{R^n}F(C) \xrightarrow{\Delta^n} \mathrm{R^{n+1}}F(A) \to \cdots$$

Definición 2.7.4. *Decimos que una sucesión de transformaciones naturales* $F \xrightarrow{\eta} G \xrightarrow{\tau} T$*, es exacta en proyectivos si* $\forall\ P \in \mathrm{Mod}(R)$ *proyectivo, se tiene que*

$$0 \to F(P) \xrightarrow{\eta_P} G(P) \xrightarrow{\tau_P} T(P) \to 0$$

es una sucesión exacta.

Teorema 2.7.5. *Sea* $F \xrightarrow{\eta} G \xrightarrow{\tau} T$ *una sucesión de transformaciones naturales, la cual es exacta en proyectivos. Entonces* $\forall\ M \in \mathrm{Mod(R)}$ *existe un morfismo* $\omega_n : \mathrm{L_n}T(M) \to \mathrm{L_{n-1}}F(M)$ *tal que la siguiente sucesión es exacta en* $\mathrm{Mod}(R)$

$$\cdots \mathrm{L_n}F(M) \to \mathrm{L_n}G(M) \to \mathrm{L_n}T(M) \xrightarrow{\omega_n} \mathrm{L_{n-1}}F(M) \to \cdots$$

$$\cdots \to \mathrm{L_1}T(M) \xrightarrow{\omega_1} \mathrm{L_0}F(M) \to \mathrm{L_0}G(M) \to \mathrm{L_0}T(M) \to 0$$

Demostración. Sea $P_\bullet(M)$ una resolución proyectiva de M, ya que η y τ son transformaciones naturales, tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\cdots \to & F(P_{n+1}) \arrow[r] \arrow[d, "\tau_{P_{n+1}}"] & F(P_n) \to \arrow[d, "\tau_{P_n}"] & \cdots \to & F(P_0) \arrow[r] \arrow[d, "\tau_{P_0}"] & 0 \\
\cdots \to & G(P_{n+1}) \arrow[r] \arrow[d, "\eta_{P_{n+1}}"] & G(P_n) \to \arrow[d, "\eta_{P_n}"] & \cdots \to & G(P_0) \arrow[r] \arrow[d, "\eta_{P_0}"] & 0 \\
\cdots \to & T(P_{n+1}) \arrow[r] & T(P_n) \to & \cdots \to & T(P_0) \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Puesto que la sucesión $F \xrightarrow{\eta} G \xrightarrow{\tau} T$ es exacta en proyectivos, tenemos que $\forall$ $n \in \mathbb{N}$

$$0 \to F(P_n) \xrightarrow{\tau_{P_n}} G(P_n) \xrightarrow{\eta_{P_n}} T(P_n) \to 0$$

es una sucesión exacta en $\mathrm{Mod}(R)$. Por lo tanto

$$0 \to F(\overline{P}_\bullet(M)) \xrightarrow{\tau} G(\overline{P}_\bullet(M)) \xrightarrow{\eta} T(\overline{P}_\bullet(M)) \to 0,$$

es una sucesión exacta en $\mathrm{Com}_\bullet(R)$, y por el Teorema 2.2.3, se obtiene la sucesión exacta requerida en el teorema. □

Como aplicación de estas dos sucesiones exactas largas, vamos a ver que los dos funtores derivados del funtor Hom son isomorfos.

Proposición 2.7.6. *Para todo M, $N \in \mathrm{Mod}(R)$, se tienen los siguientes isomorfismos*

$$\mathrm{Ext}^{\mathrm{n}}_{\mathrm{R}}(M,N) \cong \mathrm{ext}^{\mathrm{n}}_{\mathrm{R}}(M,N) \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Demostración. La prueba se hará por inducción. Por la Proposición 2.6.1 y Proposición 2.6.2 tenemos que

$$\mathrm{Ext}^{0}_{\mathrm{R}}(M,N) \cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{R}}(M,N) \cong \mathrm{ext}^{0}_{\mathrm{R}}(M,N).$$

Sea $0 \to N \to I \to S \to 0$ una sucesión exacta con I un R-módulo inyectivo. Luego se tiene la siguiente sucesión exacta en proyectivos

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{R}}(-,N) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{R}}(-,I) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{R}}(-,S),$$

Por otro lado, ya que el funtor $\mathrm{Hom}_{\mathrm{R}}(-,I)$ es exacto, por la Proposición 2.6.3, tenemos que $\mathrm{ext}^{\mathrm{n}}_{\mathrm{R}}(M,I) = 0 \;\forall\; n \in \mathbb{N}^+$. Luego, por la Proposición 2.6.6 $\mathrm{Ext}^{\mathrm{n}}_{\mathrm{R}}(M,I) = 0$, con lo cual tenemos el siguiente diagrama conmutativo por las sucesiones largas del funtor derivado, dadas en el Teoremas 2.7.3 y el Teorema 2.7.5 (para funtores contravariantes)

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathrm{R}}(M,I) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathrm{Hom}_{\mathrm{R}}(M,S) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathrm{Ext}^{1}_{\mathrm{R}}(M,N) \arrow[r] \arrow[d, "\Phi_1"'] & 0 \\
\mathrm{Hom}_{\mathrm{R}}(M,I) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathrm{R}}(M,S) \arrow[r] & \mathrm{ext}^{1}_{\mathrm{R}}(M,N) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Por el Lema de los cinco, Φ_1 es un isomorfismo.
Supongamos que $n \geq 1$ y $\mathrm{Ext}^{\mathrm{n}}_{\mathrm{R}}(M,N) \cong \mathrm{ext}^{\mathrm{n}}_{\mathrm{R}}(M,N) \;\forall\; M,\; N \in \mathrm{Mod}(R)$, de nuevo por las sucesiones largas del funtor derivado, dadas en el Teorema 2.7.3 y el Teorema 2.7.5 (para funtores contravariantes)

$$\begin{tikzcd}
0 = \mathrm{Ext}^{\mathrm{n}}_{\mathrm{R}}(M,I) \arrow[r] & \mathrm{Ext}^{\mathrm{n}}_{\mathrm{R}}(M,S) \arrow[r] \arrow[d, "\Phi_n"'] & \mathrm{Ext}^{\mathrm{n+1}}_{\mathrm{R}}(M,N) \arrow[r] \arrow[d, "\Phi_{n+1}"] & \mathrm{Ext}^{\mathrm{n+1}}_{\mathrm{R}}(M,I) = 0 \\
0 = \mathrm{ext}^{\mathrm{n}}_{\mathrm{R}}(M,I) \arrow[r] & \mathrm{ext}^{\mathrm{n}}_{\mathrm{R}}(M,S) \arrow[r] & \mathrm{ext}^{\mathrm{n+1}}_{\mathrm{R}}(M,N) \arrow[r] & \mathrm{ext}^{\mathrm{n+1}}_{\mathrm{R}}(M,I) = 0
\end{tikzcd}$$

Por hipótesis de inducción, Φ_n es un isomorfismo. Por lo tanto Φ_{n+1} es un isomorfismo por el Lema de los cinco. $\square$

2.8. Dimensiones homológicas en $\mathbf{Mod}(R)$

Definición 2.8.1. *Sea $M \in \mathrm{Mod}(R)$.*

a) *Sea $P_\bullet(M) : \cdots P_n(M) \to P_{n-1}(M) \to \cdots P_0(M) \to M \to 0$ una resolución proyectiva de M.*
Decimos que $P_\bullet(M)$ tiene longitud n, y escribimos $\ell(P_\bullet(M)) = n$, si n es el menor natural tal que $P_m(M) = 0\ \forall\ m \geq n+1$.
Decimos que $P_\bullet(M)$ tiene longitud infinita si $\forall\ n \in \mathbb{N}\ \exists\ m \geq n$ tal que $P_m \neq 0$.

b) *La dimensión proyectiva de M en R es*

$$\mathrm{pd}(M) := \min\{n \in \mathbb{N} \mid \exists\ P_\bullet(M) \textit{ con } \ell(P_\bullet(M)) = n\}.$$

Si M no tiene resoluciones proyectivas de longitud finita, diremos que M tiene dimensión proyectiva infinita y escribimos $\mathrm{pd}(M) = \infty$.

c) *La dimensión global de R es*

$$\mathrm{gl.dim}(R) := \max\{\mathrm{pd}(M) \mid M \in \mathrm{Mod}(R)\}.$$

d) *Sea $I^\bullet(M) : 0 \to M \to I^0(M) \to \cdots \to I^n(M) \to I^{n+1}(M) \to \cdots$ una co-resolución inyectiva de M.*
Decimos que $I^\bullet(M)$ tiene longitud n, y escribimos $\ell(I^\bullet(M)) = n$, si n es el menor natural tal que $I^m(M) = 0\ \forall\ m \geq n+1$.
Decimos que $I^\bullet(M)$ tiene longitud infinita si $\forall\ n \in \mathbb{N}\ \exists\ m \geq n$ tal que $I^m(M) \neq 0$.

e) *La dimensión inyectiva de M en R es*

$$\mathrm{id}(M) := \min\{n \in \mathbb{N} \mid \exists\ I^\bullet(M) \textit{ con } \ell(I^\bullet(M)) = n\}.$$

si M no tiene co-resoluciones inyectivas de longitud finita diremos que M tiene dimensión inyectiva infinita y escribimos $\mathrm{id}(M) = \infty$.

Es claro ver que $\mathrm{pd}(P)$=0 si y sólo si P es un R-módulo proyectivo. Analógamente $\mathrm{id}(I)$=0 si y sólo si I es un R-módulo inyectivo.

Definición 2.8.2. *Sean $M \in \mathrm{Mod}(R)$, $P_\bullet(M)$ una resolución proyectiva de M y $I^\bullet(M)$ una co-resolución inyectiva de M. Decimos que*

a) $\Omega^n(M) := \mathrm{Ker}(d_{n-1}^{P_\bullet(M)})$ *es la n-sizigia de M relativa a $P_\bullet(M)$.*

b) $\Omega^{-n}(M) := \mathrm{Coker}(d_{I^\bullet(M)}^{n-2})$ *es la n-cosizigia de M relativa a $I^\bullet(M)$.*

Proposición 2.8.3. *Sea $P \in \mathrm{Mod}(R)$. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes.*

a) P es proyectivo.

b) $\mathrm{Ext}_\mathrm{R}^\mathrm{i}(P,N) = 0 \quad \forall i \geq 1, \forall N \in \mathrm{Mod}(R)$.

c) $\mathrm{Ext}_\mathrm{R}^1(P,N) = 0 \quad \forall N \in \mathrm{Mod}(R)$.

Demostración. $a) \implies b)$. Se sigue de la Proposición 2.6.3.
$b) \implies c)$. Es clara.
$c) \implies a)$. Sea $0 \to L \to M \to N \to 0$ una sucesión exacta en $\mathrm{Mod}(R)$. Aplicando el funtor $\mathrm{Hom_R}(P,-)$ a la sucesión exacta anterior, obtenemos la siguiente sucesión exacta

$$0 \to \mathrm{Hom_R}(P,L) \to \mathrm{Hom_R}(P,M) \to \mathrm{Hom_R}(P,N) \to \mathrm{Ext}_\mathrm{R}^1(P,L) = 0$$

Por lo tanto P es proyectivo. □

De forma dual, tenemos la siguiente proposición.

Proposición 2.8.4. *Sea $I \in \mathrm{Mod}(R)$. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes.*

a) I es inyectivo.

b) $\mathrm{Ext}_\mathrm{R}^\mathrm{i}(M,I) = 0 \quad \forall i \geq 1, \forall M \in \mathrm{Mod}(R)$.

c) $\mathrm{Ext}_\mathrm{R}^1(M,I) = 0 \quad \forall M \in \mathrm{Mod}(R)$.

El siguiente resultado es conocido como el Lema del corrimiento

Lema 2.8.5. *Sean M, $N \in \mathrm{Mod}(R)$ y $n \geq 1$. Entonces,*

a) $\mathrm{Ext}_\mathrm{R}^{\mathrm{n+i}}(M,N) \cong \mathrm{Ext}_\mathrm{R}^\mathrm{i}(\Omega^n(M),N) \quad \forall P_\bullet(M)$ *resolución proyectiva de M* $\forall i \geq 1$.

b) $\mathrm{Ext}_{\mathrm{R}}^{\mathrm{n+i}}(M,N) \cong \mathrm{Ext}_{\mathrm{R}}^{\mathrm{i}}(M,\Omega^{-n}(N)) \quad \forall I^{\bullet}(N)$ *co-resolución inyectiva de* N $\forall i \geq 1$.

Demostración. Sólo probaremos *a*), puesto que *b*) es similar. Sean $i \geq 1$ y $P_{\bullet}(M) : \cdots \to P_n(M) \to \cdots \to P_0(M) \to M \to 0$ una resolución proyectiva de M. Entonces la sucesión exacta

$$0 \to \Omega^1(M) \to P_0(M) \to M \to 0$$

induce una sucesión exacta larga y por la Proposición 2.8.3

$$\cdots \to \mathrm{Ext}_{\mathrm{R}}^{\mathrm{n+i-1}}(P_0(M),N) = 0 \to \mathrm{Ext}_{\mathrm{R}}^{\mathrm{n+i-1}}(\Omega^1(M),N) \to \mathrm{Ext}_{\mathrm{R}}^{\mathrm{n+i}}(M,N) \to 0$$

Por lo cual $\mathrm{Ext}_{\mathrm{R}}^{\mathrm{n+i-1}}(\Omega^1(M),N) \cong \mathrm{Ext}_{\mathrm{R}}^{\mathrm{n+i}}(M,N)$. Ahora bien, consideremos la siguiente sucesión exacta $0 \to \Omega^2(M) \to P_1(M) \to \Omega^1(M) \to 0$, está induce otra sucesión exacta larga

$$\cdots \to 0 \to \mathrm{Ext}_{\mathrm{R}}^{\mathrm{n+i-2}}(\Omega^2(M),N) \to \mathrm{Ext}_{\mathrm{R}}^{\mathrm{n+i-1}}(\Omega^1(M),N) \to 0$$

Por lo cual $\mathrm{Ext}_{\mathrm{R}}^{\mathrm{n+i-1}}(\Omega^1(M),N) \cong \mathrm{Ext}_{\mathrm{R}}^{\mathrm{n+i-2}}(\Omega^2(M),N)$. Siguiendo el procedimiento anterior, obtenemos la siguiente cadena de isomorfismos

$$\begin{aligned}\mathrm{Ext}_{\mathrm{R}}^{\mathrm{n+i}}(M,N) \cong \mathrm{Ext}_{\mathrm{R}}^{\mathrm{n+i-1}}(\Omega^1(M),N) &\cong \mathrm{Ext}_{\mathrm{R}}^{\mathrm{n+i-2}}(\Omega^2(M),N)\\ &\cong \cdots \cong \mathrm{Ext}_{\mathrm{R}}^{\mathrm{i}}(\Omega^n(M),N).\end{aligned}$$

□

Ahora daremos una relación entre el funtor Ext y las dimensiones proyectivas e inyectivas.

Teorema 2.8.6. *Para* $M \in \mathrm{Mod}(R)$*, las siguientes condiciones son equivalentes.*

a) $\mathrm{pd}(M) \leq n$.

b) $\mathrm{Ext}_{\mathrm{R}}^{\mathrm{m}}(M,N) = 0 \quad \forall\ N \in \mathrm{Mod}(R)$ *y* $m \geq n+1$.

c) $\mathrm{Ext}_{\mathrm{R}}^{\mathrm{n+1}}(M,N) = 0 \qquad \forall\ N \in \mathrm{Mod}(R)$.

d) La n-ésima sizigia relativa $\Omega^n(M)$ *de* M *es un R-módulo proyectivo para cualquier resolución proyectiva* $P_{\bullet}(M)$ *de M.*

Demostración. a) $\Longrightarrow$ b) Por definición, existe una resolución proyectiva $P_\bullet(M) : \cdots 0 \to P_n(M) \to \cdots \to P_0(M) \to M \to 0$. Así $\mathrm{Hom_R}(P_m(M), N) = 0 \; \forall \; m \geq n+1$, y por lo tanto $\mathrm{Ext_R^m}(M, N) = 0 \; \forall \; m \geq n+1$.
b) $\Longrightarrow$ c) Es clara.
c) $\Longrightarrow$ d) Se sigue del Lema del corrimiento y la Proposición 2.8.3.
d) $\Longrightarrow$ a) Es claro. □

De forma dual tenemos el siguiente resultado.

Teorema 2.8.7. *Para* $N \in \mathrm{Mod}(R)$*, las siguientes condiciones son equivalentes.*

a) $\mathrm{id}(N) \leq n$.

b) $\mathrm{Ext_R^m}(M, N) = 0 \qquad \forall \; M \in \mathrm{Mod}(R)$ *y* $m \geq n+1$.

c) $\mathrm{Ext_R^{n+1}}(M, N) = 0 \qquad \forall \; M \in \mathrm{Mod}(R)$.

d) La n-ésima co-sizigia relativa $\Omega^{-n}(N)$ *de* N *es un* R*-módulo inyectivo para cualquier resolución inyectiva* $I^\bullet(N)$.

Ahora veremos cómo se comportan la dimensión proyectiva e inyectiva en sucesiones exactas

Proposición 2.8.8. *Para toda sucesión exacta* $0 \to L \to M \to N \to 0$ *en* $\mathrm{Mod}(R)$*, las siguientes desigualdades se cumplen.*

a) $\mathrm{pd}(N) \leq \max\{\mathrm{pd}(M), \mathrm{pd}(L) + 1\}$.

b) $\mathrm{pd}(M) \leq \max\{\mathrm{pd}(L), \mathrm{pd}(N)\}$.

c) $\mathrm{pd}(L) \leq \max\{\mathrm{pd}(M), \mathrm{pd}(N) - 1\}$.

Demostración. Sea $T \in \mathrm{Mod}(R)$. Aplicamos el funtor $\mathrm{Hom_R}(-, T)$ a la sucesión exacta anterior y tenemos la siguiente sucesión exacta larga

$$\mathrm{Ext_R^{n-1}}(L, T) \to \mathrm{Ext_R^n}(N, T) \to \mathrm{Ext_R^n}(M, T) \to \mathrm{Ext_R^n}(L, T) \to \mathrm{Ext_R^{n+1}}(N, T)$$

Si n-1=$\mathrm{máx}\{\mathrm{pd(M)}, \mathrm{pd(L)} + 1\}$, por el Teorema 2.8.3 $\mathrm{Ext_R^n}(M, T) = 0$ y $\mathrm{Ext_R^{n-1}}(L, T) = 0$ y así $\mathrm{Ext_R^n}(N, T) = 0$, con lo cual $\mathrm{pd}(N) \leq n-1$ por el Teorema 2.8.3.
Ahora bien, si n-1=$\mathrm{máx}\{\mathrm{pd(N)}, \mathrm{pd(L)}\}$, por el Teorema 2.8.3 $\mathrm{Ext_R^n}(M, T) = 0$ y de nuevo por el Teorema 2.8.3, $\mathrm{pd}(M) \leq n-1$.
Por último, si n-1=$\mathrm{máx}\{\mathrm{pd(M)}, \mathrm{pd(N)} - 1\}$, por el Teorema 2.8.3 tenemos que $\mathrm{Ext_R^n}(L, T) = 0$ y por lo tanto $\mathrm{pd}(L) \leq n-1$. □

De forma dual, tenemos la siguiente proposición.

Proposición 2.8.9. *Para toda sucesión exacta* $0 \to L \to M \to N \to 0$ *en* $\mathrm{Mod}(R)$*, las siguientes desigualdades se cumplen.*

a) $\mathrm{id}(N) \leq \max\{\mathrm{id}(M), \mathrm{id}(L) - 1\}$.

b) $\mathrm{id}(M) \leq \max\{\mathrm{id}(L), \mathrm{id}(N)\}$.

c) $\mathrm{id}(L) \leq \max\{\mathrm{id}(M), \mathrm{id}(N) + 1\}$.

Por último, veamos cómo se comporta la dimensiones proyectiva e inyectiva en sumas directas finitas.

Proposición 2.8.10. *Sea* $\{M_i\}_{i=1}^n$ *una familia finita de módulos en* $\mathrm{Mod}(R)$*. Entonces* $\mathrm{pd}(\oplus_{i=1}^n M_i) = \max\{\mathrm{pd}(M_i) \mid 1 \leq i \leq n\}$.

Demostración. La prueba se hará por inducción sobre n. Si $n = 1$ es claro. Supongamos que $n > 1$. Sea i tal que $\mathrm{pd}(M_j) \leq \mathrm{pd}(M_i)$ para toda $1 \leq j \leq n$. Entonces, tenemos la siguiente sucesión exacta

$$0 \to M_i \to \oplus_{j=1}^n M_j \to \oplus_{k=1,\, k\neq i}^n M_k \to 0$$

Luego, por hipótesis de inducción $\mathrm{pd}(\oplus_{k=1,\, k\neq i}^n M_k) \leq \mathrm{pd}(M_i)$. Por otro lado, de la Proposición 2.8.8 c), se sigue que $\mathrm{pd}(M_i) \leq \mathrm{pd}(\oplus_{j=0}^n M_j)$ y de la Proposición 2.8.8 b), concluimos que $\mathrm{pd}(\oplus_{j=0}^n M_j) \leq \mathrm{pd}(M_i)$. Por lo tanto $\mathrm{pd}(\oplus_{j=0}^n M_j) = \mathrm{pd}(M_i)$. □

De forma dual, tenemos la siguiente proposición.

Proposición 2.8.11. *Sea* $\{M_i\}_{i=1}^n$ *una familia finita de R-módulos. Entonces,* $\mathrm{id}(\oplus_{i=0}^n M_i) = \max\{\mathrm{id}(M_i) \mid 1 \leq i \leq n\}$.

Capítulo 3

Teoría de Auslander-Reiten

Una característica importante de la teoría de álgebras de artin, es que los anillos de endomorfismos de módulos finitamente generados son de nuevo álgebras de artin. En principio, esto le permite a uno traducir los problemas que involucran sólo a un número finito de módulos finitamente generados sobre un álgebra de artin a problemas sobre módulos proyectivos finitamente generados sobre alguna otra álgebra de artin. Este procedimiento, se le conoce como el proceso de proyectivización. Otra propiedad importante de las álgebras de artin es que hay una dualidad entre la categoría de módulos finitamente generados y la de módulos finitamente generados sobre el anillo opuesto.

Un tipo especial de sucesiones exactas de módulos, que desempeñan un papel central en la teoría representaciones de álgebras de artin en general, son las sucesiones que casi se escinden. Por ello, es necesario introducir las nociones de morfismos que casi se escinden a izquierda y a derecha. Estas nociones dan lugar no sólo a las sucesiones que casi se escinden, sino también a los morfismos irreducibles. Además de la teoría general, varios ejemplos y tipos especiales de sucesiones que casi se escinden se discuten.

En este capítulo no probaremos los resultados más importantes, pero a cambio señalaremos los tópicos que se necesitaran de estas áreas. El lector interesado puede ver todos los detalles requeridos en los libros [ASS] y [ARS].

3.1. Álgebras de artin

Definición 3.1.1. *Sea Λ una R-álgebra. Decimos que Λ es una R-álgebra de artin si, R es un anillo artiniano y ${}_R\Lambda \in \mathrm{mod}(R)$.*

Teorema 3.1.2. *Sean Λ es una R-álgebra de artin y $I := \mathrm{I}_0(\mathrm{top}(R))$ la envolvente inyectiva de $\mathrm{top}(R)$. Entonces, el funtor*

$$\mathrm{D}_\Lambda := \mathrm{Hom}_{\mathrm{R}}(-, I) : \mathrm{mod}(\Lambda) \to \mathrm{mod}(\Lambda^{op})$$

es una dualidad de categorías y $\mathrm{D}_{\Lambda^{op}} : \mathrm{mod}(\Lambda^{op}) \to \mathrm{mod}(\Lambda)$ es un casi-inverso, esto es, $\mathrm{D}_\Lambda \circ \mathrm{D}_{\Lambda^{op}} \simeq 1_{\mathrm{mod}(\Lambda^{op})}$ y $\mathrm{D}_{\Lambda^{op}} \circ D_\Lambda \simeq 1_{\mathrm{mod}(\Lambda)}$.

Demostración. Ver [ARS, Teorema 3.3]. □

Note que también $\mathrm{D}_{\Lambda^{op}} : \mathrm{mod}(\Lambda^{op}) \to \mathrm{mod}(\Lambda)$ es una dualidad.

Proposición 3.1.3. *Sea Λ una R-álgebra de artin. Entonces, los funtores D_Λ, $\mathrm{Hom}_\Lambda(-, \mathrm{D}_{\Lambda^{op}}(\Lambda)) : \mathrm{mod}(\Lambda) \to \mathrm{mod}(\Lambda^{op})$ son isomorfos.*

Demostración. En efecto, para cada $M \in \mathrm{mod}(\Lambda)$, tenemos los siguientes isomorfismos naturales.

$$\begin{aligned}
\mathrm{D}_\Lambda(M) &= \mathrm{Hom}_R(M, \mathrm{I}) \\
&\cong \mathrm{Hom}_R(\Lambda \otimes_\Lambda M, \mathrm{I}) && M \cong \Lambda \otimes_\Lambda M \\
&\cong \mathrm{Hom}_\Lambda(M, \mathrm{Hom}_R(\Lambda, I)) && \text{(Adjunción Hom-Tensor)} \\
&= \mathrm{Hom}_\Lambda(M, \mathrm{D}_{\Lambda^{op}}(\Lambda)).
\end{aligned}$$

□

Proposición 3.1.4. *Sea $M \in \mathrm{mod}(\Lambda)$. Entonces M tiene una presentación proyectiva e inyectiva minimal en $\mathrm{mod}(\Lambda)$.*

Demostración. Ver [ARS, Corolario 3.4]. □

Definición 3.1.5. *El funtor $\nu := \mathrm{D}_{\Lambda^{op}}\mathrm{Hom}_\Lambda(-, \Lambda) : \mathrm{mod}(\Lambda) \to \mathrm{mod}(\Lambda)$ es llamado el funtor de Nakayama .*

Teorema 3.1.6. *El funtor de Nakayama $\nu : \mathrm{mod}(\Lambda) \to \mathrm{mod}(\Lambda)$ se restinge a una equivalencia de categorías $\nu|_{\mathcal{P}(\Lambda)}: \mathcal{P}(\Lambda) \to \mathcal{I}(\Lambda)$ con casi-inversa $\nu' := \mathrm{Hom}_\Lambda(\mathrm{D}_{\Lambda^{\mathrm{op}}}(\Lambda), -)$.*

Demostración. Ver [ASS, Proposición III.2.10]. □

En lo que sigue, introduciremos el grupo de Grothendieck $\mathrm{K}_0(\Lambda)$ asociado a una R-álgebra de artin Λ.

Definición 3.1.7. *Denotamos por*

a) $\mathrm{F}(\mathrm{mod}(\Lambda))$ *al grupo abeliano libre generado por las iso-clases* $[M]$ *de equivalencias de módulos en* $\mathrm{mod}(\Lambda)$*, donde* $[M] := \{N \in \mathrm{mod}(\Lambda) \mid N \cong M\}$.

b) $\mathrm{R}(\mathrm{mod}(\Lambda))$ *al subgrupo de* $\mathrm{F}(\mathrm{mod}(\Lambda))$ *generado por las siguientes expresiones* $[N]+[L]-[M]$ *siempre que* $0 \to N \to M \to L \to 0$ *sea una sucesión exacta.*

c) El grupo de Grothendieck $\mathrm{K}_0(\Lambda) := \mathrm{F}(\mathrm{mod}(\Lambda))/\mathrm{R}(\mathrm{mod}(\Lambda))$.

Definición 3.1.8. *Sea* $M \in \mathrm{mod}(\Lambda)$ *con* Λ *una R-álgebra de artin.*

a) Una filtración $(finita)$ F *de* M *es una cadena finita* $F := \{F_i\}_{i=0}^{n}$ *tal que*

$$0 = F_n \leq \cdots \leq F_1 \leq F_0 = M.$$

Los factores de composición de F *son los cocientes*

$$F_i/F_{i+1}, \qquad 0 \leq i \leq n-1.$$

b) Decimos que una filtración F *de* M *es una serie generalizada de composición* (sgc) *si cada factor de composición es simple o cero. En caso que cada factor de composición sea simple, diremos que* F *es una serie de composición.*

c) Para cada módulo simple S *y* F *una sgc de* M*, la multiplicidad de* S *en* M*, respecto a* F*, es*

$$\mathrm{m}_{\mathrm{S}}^{\mathrm{F}}(M) := |\{i \in \mathbb{N} \mid F_i/F_{i+1} \simeq S\}|.$$

d) Para cada módulo simple S*, la multiciplidad de* S *en* M *es*

$$\mathrm{m}_{\mathrm{S}}(M) := \min\{\mathrm{m}_{\mathrm{S}}^{\mathrm{F}}(M) \mid F \text{ es sgc de } M\}.$$

El siguiente teorema es conocido como el Teorema de Jordan-Hölder y nos dice que la multiplicidad de los simples en M no depende de la serie generalizada de composición. El resultado proviene de la teoría de grupos, C. Jordan prueba en [Jo] que los factores de composición no dependen del orden en la serie de composición y Otto Hölder prueba en [Ho] que los factores de composición no dependen de la serie de composición. en 1889 en su artículo Zurückführung einer beliebigen algebraischen Gleichung auf eine Kette von Gleichungen. Después, modificado para R-módulos por Emil Artin en 1939.

Teorema 3.1.9. *Sean $M \in \mathrm{mod}(\Lambda)$ con Λ una R-álgebra de artin, F y G series generalizadas de composición de M . Entonces, para cada módulo simple S, tenemos que*

$$\mathrm{m}_{\mathrm{S}}^{\mathrm{F}}(M) = \mathrm{m}_{\mathrm{S}}^{\mathrm{G}}(M) = \mathrm{m}_{\mathrm{S}}(M).$$

Demostración. Ver [ARS, Teorema 1.2]. □

Definición 3.1.10. *Sean $M \in \mathrm{mod}(\Lambda)$ con Λ una R-álgebra de artin y una familia completa de simples $\{S_1, \cdots, S_n\}$ en $\mathrm{mod}(\Lambda)$. Llamamos vector dimensión $\underline{\dim}(M)$ de M, al vector renglón*

$$\underline{\dim}(M) = (\mathrm{m}_1(M), \mathrm{m}_2(M), \cdots, \mathrm{m}_{\mathrm{n}}(M)) \in \mathrm{Mat}_{\mathrm{n}\times 1}(\mathbb{Z}).$$

donde $\mathrm{m}_{\mathrm{i}}(M) := \mathrm{m}_{\mathrm{S_i}}(M)$.

Ahora veamos la conexión que exite entre el vector dimensión y el grupo de Grothendieck.

Lema 3.1.11. *Sean Λ una R-álgebra de artin y una sucesión exacta*

$$0 \to M_{n+1} \to M_n \to \cdots \to M_2 \to M_1 \to 0$$

en $\mathrm{mod}(\Lambda)$*. Entonces*

$$\sum_{i=1}^{n+1} (-1)^i \underline{\dim}(M_i) = 0.$$

Demostración. Ver [ASS, Lema 3.3]. □

Teorema 3.1.12. *El grupo $\mathrm{K}_0(\Lambda)$ es abeliano libre con base $\{\mathrm{S}_1, \mathrm{S}_2, \cdots, \mathrm{S}_{\mathrm{n}}\}$ y la aplicación $\underline{\dim} : \mathrm{K}_0(\Lambda) \to \mathbb{Z}^{\mathrm{n}}$ es un isomorfismo de grupos abelianos.*

Demostración. Ver [ARS, Teorema 1.7]. □

Del resultado anterior, tenemos que el número de Λ-módulos simples no isomorfos dos a dos coincide con $\mathrm{rkK}_0(\Lambda)$ el rango del grupo de Grothendieck $\mathrm{K}_0(\Lambda)$. En caso que $n = \mathrm{rkK}_0(\Lambda)$, consideraremos la familia completa $\{S_1, S_2, \cdots, S_n\}$ de Λ-módulos simples no isomorfos dos a dos. Para cada i, denotaremos por $\mathrm{P(i)}$ a la cubierta proyectiva de S_i, y por $\mathrm{I(i)}$ a la envolvente inyectiva de S_i.

Lema 3.1.13. *Sean Λ una R-álgebra de artin, $M \in \mathrm{mod}(\Lambda)$ y $\Gamma = \mathrm{End}_\Lambda(M)^{op}$. Si $n = \mathrm{rkK}_0(\Lambda)$, tenemos los siguientes isomorfismos $\forall\ 1 \leq i \leq n$.*

$$\mathrm{Hom}_\Lambda(\mathrm{P(i)}, M) \cong \mathrm{D}_\Gamma \mathrm{Hom}_\Lambda(M, \mathrm{I(i)}).$$

Demostración. Ver [ACPV, Lema 1.2]. □

El siguiente resultado es conocido como el proceso de proyectivización.

Teorema 3.1.14. *Sean $T \in \mathrm{mod}(\Lambda)$ y $\Gamma = \mathrm{End}_\Lambda(T)^{op}$. Entonces, el funtor evaluación $\mathrm{e_T} := \mathrm{Hom}_\Lambda(T, -) : \mathrm{mod}(\Lambda) \to \mathrm{mod}(\Gamma)$, satisface las siguientes propiedades.*

a) $\mathrm{e_T} : \mathrm{Hom}_\Lambda(T', M) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_\Lambda(\mathrm{e_T}(T'), \mathrm{e_T}(M))\ \forall\, T' \in \mathrm{add}(T), \forall\, M \in \mathrm{mod}(\Lambda)$.

b) $\mathrm{Hom}_\Lambda(\mathrm{T}, -) : \mathrm{add(T)} \to \mathcal{P}(\Gamma)$ *es una equivalencia de categorías.*

Demostración. Ver [ARS, Proposición 2.1]. □

Para finalizar esta sección, veamos unos lemas homológicos que nos ayudarán en el Capítulo 4. Para ello, diremos que un complejo (cocomplejo) $C_\bullet \in \mathrm{Com}_\bullet(\Lambda)$ (respectivamente $C^\bullet \in \mathrm{Com}^\bullet(\Lambda)$) es de Λ-módulos finitamente generados si $C_n \in \mathrm{mod}(\Lambda)$ (respectivamente $C^n \in \mathrm{mod}(\Lambda)$) $\forall\ n \in \mathbb{Z}$. Denotaremos por $\mathrm{com}_\bullet(\Lambda)$ a la subcategoría plena de $\mathrm{Com}_\bullet(\Lambda)$, cuyos objetos son los complejos de Λ-módulos finitamente generados. Análogamente, se introduce $\mathrm{com}^\bullet(\Lambda)$.

Lema 3.1.15. *Sea Λ una R-álgebra de artin. Entonces, tenemos los siguientes isomorfismos de R-módulos*

$$\mathrm{Ext}^{\mathrm{n}}_\Lambda(M, N) \cong \mathrm{Ext}^{\mathrm{n}}_{\Lambda^{\mathrm{op}}}(\mathrm{D}_\Lambda(N), \mathrm{D}_\Lambda(M)) \quad \forall M, N \in \mathrm{mod}(\Lambda), \forall n \in \mathbb{N}.$$

Demostración. Consideremos una resolución proyectiva de M en $\mathrm{mod}(\Lambda)$

$$P_\bullet(M) : \cdots \to P_{n+1}(M) \to P_n(M) \to \cdots P_1(M) \to P_0(M) \to M \to 0,$$

notamos que $\mathrm{com}_\bullet \mathrm{D}_\Lambda(P_\bullet)$ es una co-resolución inyectiva de $\mathrm{D}_\Lambda(M)$ y el siguiente isomorfismo de co-complejos, dado que D_Λ es una dualidad

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\
\mathrm{Hom}_\Lambda(M,N) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_{\Lambda^{\mathrm{op}}}(\mathrm{D}_\Lambda(N), \mathrm{D}_\Lambda(M)) \arrow[d] \\
\vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] \\
\mathrm{Hom}_\Lambda(M, P_n(M)) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_{\Lambda^{\mathrm{op}}}(\mathrm{D}_\Lambda(N), \mathrm{D}_\Lambda(P_n(M))) \arrow[d] \\
\mathrm{Hom}_\Lambda(M, P_{n+1}(M)) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_{\Lambda^{\mathrm{op}}}(\mathrm{D}_\Lambda(N), \mathrm{D}_\Lambda(P_{n+1}(M))) \arrow[d] \\
\vdots & \vdots
\end{tikzcd}$$

Por lo tanto, $\mathrm{Ext}^{\mathrm{n}}_\Lambda(M,N) \cong \mathrm{Ext}^{\mathrm{n}}_{\Lambda^{\mathrm{op}}}(\mathrm{D}_\Lambda(N), \mathrm{D}_\Lambda(M))$. □

Teorema 3.1.16. *Sean* Λ *una* R*-álgebra de artin,* $M \in \mathrm{mod}(\Lambda)$, $\Gamma = \mathrm{End}_\Lambda(M)^{op}$ *y* $X \in \mathrm{mod}(\Gamma)$. *Entonces, tenemos los siguientes isomorfismos funtoriales* $\forall\ i \in \mathbb{N}$

$$\mathrm{Tor}^\Gamma_{\mathrm{i}}(M, X) \cong \mathrm{D}_{\Lambda^{\mathrm{op}}}\mathrm{Ext}^{\mathrm{i}}_{\Gamma^{\mathrm{op}}}(M, \mathrm{D}_\Gamma(X)).$$

Demostración. Ver [CE, Proposición 5.3]. □

Para ver más fórmulas homológicas se sugiere [CE]. En todo lo que sigue, Λ es una R-álgebra de artin básica.

3.2. Sucesiones que casi se escinden

Definición 3.2.1. *Sea* $f : M \to N$ *en* $\mathrm{mod}(\Lambda)$. *Decimos que* *a) f casi se escinde a la izquierda si no es split-mono y $\forall\ h : M \to L$ que no sea un split-mono existe $j : N \to L$ tal que $jf = h$.*

b) f casi se escinde a la derecha si no es un split-epi y $\forall\ h : L \to N$ que no un sea split-epi existe $j : L \to M$ tal que $fj = h$.

Proposición 3.2.2. *Sean $f : M \to N$ y $g : L \to N$ morfismos minimales que casi se escinden a la derecha. Entonces, existe un isomorfismo h tal que $g = fh$.*

Demostración. Dado que f y g son morfismos que casi se escinden a derecha existen unos morfismos $h : L \to M$ y $k : M \to L$ tales que $g = fh$ y $f = gk$, así $f = fhk$ y $g = gkh$. Luego, como f y g son morfismos minimales a derecha tenemos que hk y kh son automorfismos. Por lo tanto h es un isomorfismo. □

De forma dual, se tiene la siguiente proposición.

Proposición 3.2.3. *Sean $f : M \to N$ y $g : M \to L$ morfismos minimales que casi se escinden a la izquierda. Entonces existe un isomorfismo k tal que $g = kf$.*

Lema 3.2.4. *Sea $P \in \mathrm{mod}(\Lambda)$ proyectivo inescindible. Entonces $f : M \to P$ es un morfismo minimal que casi se escinde a derecha si y sólo si f es un monomorfismo y $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{rad}(P)$.*

Demostración. Veamos que la inclusión $\iota : \mathrm{rad}(P) \to P$ es minimal que casi se escinde a derecha. En efecto, ι es un monomorfimo y así es minimal a derecha. Dado que, P es proyectivo inescindible $\mathrm{rad}(P)$ es el único submódulo maximal de P, con lo cual $\mathrm{rad}(P) \neq P$ y consecuentemente ι no es un split-epi, ya que no es un epimorfismo. Luego, sea $h : L \to P$ no split-epi, como P es proyectivo se tiene que h no es un epimorfismo, con ello $\mathrm{Im}(h) \leq \mathrm{rad}(P)$, por ello h se factoriza a traves ι. Con lo cual, concluimos que ι es minimal que casi se escinde a derecha.

Ahora bien, sea $f : M \to P$ minimal que casi se escinde a derecha, por la Proposición 3.2.2 existe un isomorfismo k tal que $f = \iota k$, así, f es un monomorfismo al ser composición de monomorfismos y $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(\iota) = \mathrm{rad}(P)$.

Recíprocamente, si f es un monomorfismo tal que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{rad}(P)$. Sólo basta ver que f casi se escinde a la derecha. En efecto, f no es un split-epi, ya que no es un epimorfismo y $f = \iota \mathrm{I}(f)$, con $\mathrm{I}(f)$ un isomorfismo, dado que f es un monomorfismo. Ahora, sea $g : N \to P$ no split-epi, ya que ι es un morfismo que casi se escinde a derecha, tenemos que existe un morfismo g' tal que

$$g = \iota g' = f\mathrm{I}(f)^{-1}g'.$$

□

De forma similar, tenemos el siguiente lema.

Lema 3.2.5. *Sea $I \in \mathrm{mod}(\Lambda)$ inyectivo inescindible. Entonces, $g : I \to M$ es minimal que casi se escinde a la izquierda si y sólo si g es un epimorfismo y $\mathrm{Ker}(g) = \mathrm{soc}(I)$.*

Definición 3.2.6. *Sea $f : M \to N$ en $\mathrm{mod}(\Lambda)$. Decimos que f es irreducible si no es split-mono, ni split-epi y para toda descomposición $f = gh$ se tiene que g es un split-epi o h es un split-mono.*

Teorema 3.2.7. *Sea $M \in \mathrm{mod}(\Lambda)$.*

a) $f : L \to M$ en $\mathrm{mod}(\Lambda)$ es irreducible si y sólo si $M \neq 0$ y existe $f' : L \to M'$ tal que $\begin{bmatrix} f \\ f' \end{bmatrix} : L \to M \oplus M'$ es minimal que casi se escinde a izquierda.

b) $g : M \to N$ es irreducible si y sólo $M \neq 0$ y existe $g' : M' \to N$ tal que $[g, g'] : M \oplus M' \to N$ es minimal que casi se escinde a derecha.

Demostración. Ver[ASS, Teorema IV.1.10]. □

Veamos una consecuencia de lo anterior. Sea P un Λ-módulo proyectivo inescindible, el morfismo $0 \neq f : M \to P$ es irreducible si y sólo si existe un Λ-módulo M' tal que $M \oplus M' \cong \mathrm{rad}(P)$ y f es la composición de las inclusiones $i : M \to \mathrm{rad}(P)$, $j : \mathrm{rad}(P) \to P$.
Por dualidad, si I es un Λ-módulo inyectivo inescindible, el morfismo $0 \neq g : I \to N$ es irreducible si y sólo si, existe un Λ-módulo N' tal que $N \oplus N' \cong I/\mathrm{soc}(I)$ y g es la composición de las proyecciones $p : I \to I/\mathrm{soc}(I)$, $q : I/\mathrm{soc}(I) \to N'$.

Definición 3.2.8. *Decimos que una sucesión exacta $0 \to L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \to 0$ es una sucesión que casi se escinde si f es minimal que casi se escinde a izquierda y g es minimal que casi se escinde a derecha.*

Veamos unas condiciones equivalentes a que una sucesión exacta sea una que casi se escinde.

Teorema 3.2.9. *Sea* $\eta : 0 \to L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \to 0$ *una sucesión exacta en* $\mathrm{mod}(\Lambda)$. *Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes.*

a) La sucesión η *casi se escinde.*

b) L *es inescindible y* g *casi se escinde a la derecha.*

c) N *es inescindible y* f *casi se escinde a la izquierda.*

d) f *es minimal y casi se escinde a la izquierda.*

e) g *es minimal y casi se escinde a la derecha.*

f) L, $N \in \mathrm{ind}(\Lambda)$ *y* f *y* g *son irreducibles.*

Demostración. Ver [ASS, Teorema IV.1.13]. □

Definición 3.2.10. *Sea* $f : M \to N \in \mathrm{mod}(\Lambda)$. *Decimos que*

a) f *se factoriza a través de un módulo proyectivo si* $f = gh$ *con* $h : M \to P$, $g : P \to N$ *y* P *un* Λ*-módulo proyectivo.*

b) f *se factoriza a través de un módulo inyectivo si* $f = st$ *con* $t : M \to I$, $s : I \to N$ *y* I *un* Λ*-módulo inyectivo.*

Lema 3.2.11. *Sea* $f : M \to N \in \mathrm{mod}(\Lambda)$. *Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes.*

a) f *se factoriza a través de un módulo proyectivo.*

b) Sea $g : P \to N$ *un epimorfismo con* P *un* Λ*-módulo proyectivo. Entonces existe* $h : M \to P$ *tal que* $f = gh$.

Demostración. Supongamos que f se factoriza a través de un módulo proyectivo. Consideremos $g : P \to N$ un epimorfismo con P un Λ-módulo proyectivo. Por hipótesis existen morfismos $j : M \to Q$ y $k : Q \to N$ con Q un Λ-módulo proyectivo tales que $kj = f$. Así pues, existe $l : Q \to P$ tal que $gl = k$. Sea $h = lj$, con lo cual $f = gh$.
Recíprocamente, existe un epimorfismo $p : \Lambda^n \to N$, con $n \in \mathbb{N}$. Por hipótesis existe $h : M \to P$ tal que $f = ph$. □

De manera dual, tenemos el siguiente lema.

Lema 3.2.12. *Sea $f : M \to N \in \mathrm{mod}(\Lambda)$. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes.*

a) f se factoriza a través de un módulo inyectivo.

b) Sea $g : M \to I$ un monomorfismo con I un Λ-módulo inyectivo. Entonces existe $h : I \to N$ tal que $f = hg$.

Definición 3.2.13. *Para M, $N \in \mathrm{mod}(\Lambda)$, tenemos los siguientes subconjuntos de $\mathrm{Hom}_\Lambda(M, N)$.*

a) $\mathcal{P}(M, N) := \{f : M \to N \mid f$ se factoriza a través de un módulo proyectivo$\}$.

$$\mathcal{P} := \{\mathcal{P}(M, N)\}_{M,N\in\mathrm{mod}(\Lambda)}.$$

b) $\mathcal{I}(M, N) := \{f : M \to N \mid f$ se factoriza a través de un módulo inyectivo$\}$.

$$\mathcal{I} := \{\mathcal{I}(M, N)\}_{M,N\in\mathrm{mod}(\Lambda)}.$$

Si $f : M \to N$ en $\mathrm{mod}(\Lambda)$ se factoriza a través de un proyectivo, se sigue del Lema 3.2.11, que dado un epimorfismo $p : P \to N$, $f \in \mathrm{Im}(M, p)$, con lo cual $\mathcal{P}(M, N) = \mathrm{Im}\mathrm{Hom}_\Lambda(M, p)$ y $\mathcal{P}$ cumple con la condición b) de la Definición 2.5.1, con lo cual $\mathcal{P}$ es un ideal en $\mathrm{mod}(\Lambda)$. Análogamente, $\mathcal{I}$ es un ideal en $\mathrm{mod}(\Lambda)$.

Definición 3.2.14. *Tenemos las siguientes categorías cociente de* $\mathrm{mod}(\Lambda)$.

a) $\underline{\mathrm{mod}}(\Lambda) := \mathrm{mod}(\Lambda)/\mathcal{P}$ es la categoría estable módulo proyectivos.

b) $\overline{\mathrm{mod}}(\Lambda) := \mathrm{mod}(\Lambda)/\mathcal{I}$ es la categoría estable módulo inyectivos.

Consideremos $M \in \mathrm{mod}(\Lambda)$ y $\mathrm{P}_1(M) \xrightarrow{\pi_1} \mathrm{P}_0(M) \xrightarrow{\pi_0} M \to 0$ una resolución proyectiva minimal de M. Se define la transpuesta como el siguiente Λ^{op}-módulo

$$\mathrm{Coker}(\mathrm{Hom}_\Lambda(\pi_1, \Lambda)) =: \mathrm{Tr}(M).$$

Por lo que se tiene la sucesión exacta en $\mathrm{mod}(\Lambda^{op})$.

$$0 \to \mathrm{Hom}_\Lambda(M, \Lambda) \to \mathrm{Hom}_\Lambda(\mathrm{P}_0(M), \Lambda) \to \mathrm{Hom}_\Lambda(\mathrm{P}_1(M), \Lambda) \to \mathrm{Tr}(M) \to 0.$$

Se puede probar que la transpuesta induce una dualidad

$$\mathrm{Tr} : \underline{\mathrm{mod}}(\Lambda) \to \underline{\mathrm{mod}}(\Lambda^{\mathrm{op}})$$

Ver [ASS, Proposición IV.2.2].

Definición 3.2.15. *Las composiciones* $\tau := \mathrm{D}_{\Lambda^{\mathrm{op}}}\mathrm{Tr}$ *y* $\tau^{-1} := \mathrm{Tr}\mathrm{D}_{\Lambda}$ *son llamadas translaciones de Auslander-Reiten .*

Note que las asignaciones anteriores no son necesariamente funtores en la categoría de módulos finitamente generados. En cambio,

$$\tau : \underline{\mathrm{mod}}(\Lambda) \to \overline{\mathrm{mod}}(\Lambda)$$

$$\tau^{-1} : \overline{\mathrm{mod}}(\Lambda) \to \underline{\mathrm{mod}}(\Lambda),$$

son equivalencias de categorías. Ver [ARS, Proposición 1.9]. Algunas propiedades de las translaciones de Auslander-Reiten se enumeran en la siguiente proposición.

Proposición 3.2.16. *Sean* $M, N \in \mathrm{ind}(\Lambda)$. *Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen.*

a) *M es proyectivo si y sólo si* $\tau(M) = 0$.

b) *M es inyectivo si y sólo si* $\tau^{-1}(M) = 0$.

c) *Si M no es proyectivo, entonces $\tau(M)$ es inescindible no inyectivo y* $\tau^{-1}\tau(M) \cong M$.

d) *Si M no es inyectivo, entonces $\tau^{-1}(M)$ es inescindible no proyectivo y* $\tau\tau^{-1}(M) \cong M$.

e) *Si M y N no son proyectivos, entonces $M \cong N$ si y sólo si* $\tau(M) \cong \tau(N)$.

f) *Si M y N no son inyectivos, entonces $M \cong N$ si y sólo si* $\tau^{-1}(M) \cong \tau^{-1}(N)$.

Demostración. Ver [ASS, Proposición IV.2.10]. □

Lema 3.2.17. *Sea* $\mathrm{P}_1(M) \xrightarrow{\pi_1} \mathrm{P}_0(M) \xrightarrow{\pi_0} M \to 0$ *una resolución proyectiva minimal de M. Entonces se tiene la siguiente sucesión exacta*

$$0 \to \tau(M) \to \nu(\mathrm{P}_1(M)) \to \nu(\mathrm{P}_0(M)) \to \nu(M) \to 0.$$

Demostración. Es clara de las definiciones de τ y ν. □

Corolario 3.2.18. *Sea* $M \in \mathrm{mod}(\Lambda)$. *Entonces,* $\mathrm{pd}(M) \leq 1$ *si y sólo si* $\mathrm{Hom}_{\Lambda}(\mathrm{D}_{\Lambda^{\mathrm{op}}}(\Lambda), \tau(M)) = 0$.

Demostración. Consideremos $\mathrm{P}_1(M) \xrightarrow{\pi_1} \mathrm{P}_0(M) \xrightarrow{\pi_0} M \to 0$ una resolución proyectiva minimal de M. Por el Teorema 3.1.6 y el Lema 3.2.17 tenemos el siguiente diagrama conmutativo con filas exactas

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \nu'(\tau(M)) \arrow[r] & \nu'(\nu(\mathrm{P}_1(M))) \arrow[r] \arrow[d] & \nu'(\nu(\mathrm{P}_0(M))) \arrow[d] & & \\
& & \mathrm{P}_1(M) \arrow[r] & \mathrm{P}_0(M) \arrow[r] & M \arrow[r] & 0,
\end{tikzcd}$$

donde los morfismos verticales son isomorfismos. Por lo anterior, se tiene que $\mathrm{pd}(M) \leq 1$ si sólo si $\mathrm{Hom}_\Lambda(\mathrm{D}_{\Lambda^{\mathrm{op}}}(\Lambda), \tau(M)) = 0$. □

De manera dual, tenemos el siguiente corolario.

Corolario 3.2.19. *Sea* $M \in \mathrm{mod}(\Lambda)$*. Entonces,* $\mathrm{id}(M) \leq 1$ *si y sólo si* $\mathrm{Hom}_\Lambda(\tau^{-1}(M), \Lambda) = 0$*.*

Los siguientes isomorfismos naturales son conocidos como las fórmulas de Auslander-Reiten.

Teorema 3.2.20. *Sean* M *y* $N \in \mathrm{mod}(\Lambda)$*. Entonces, se tienen los siguientes isomorfismos de* R*-módulos*

$$\mathrm{Ext}^1_\Lambda(M, N) \cong \mathrm{D_R}\underline{\mathrm{Hom}}_\Lambda(\tau^{-1}(N), M) \cong \mathrm{D_R}\overline{\mathrm{Hom}}_\Lambda(N, \tau(M)),$$

los cuales son funtoriales en ambas variables.

Demostración. Ver [ASS, Teorema IV.2.13]. □

Corolario 3.2.21. *Sea* $M \in \mathrm{mod}(\Lambda)$ *tal que* $\mathrm{pd}(M) \leq 1$*. Entonces,*

$$\mathrm{Ext}^1_\Lambda(M, N) \cong \mathrm{D_R}\mathrm{Hom}_\Lambda(N, \tau(M)).$$

Demostración. Veamos que $\mathcal{I}(N, \tau(M)) = 0$. En efecto, dado que $\mathrm{D}_{\Lambda^{op}}(\Lambda)$ es un cogenerador inyectivo, tenemos un monomorfismo $i : N \to \mathrm{D}_{\Lambda^{\mathrm{op}}}(\Lambda)^n$. Por el Lema 3.2.12 existe un morfismo $f : \mathrm{D}_{\Lambda^{\mathrm{op}}}(\Lambda)^n \to \tau(M)$ tal que

$$\mathrm{Hom}_\Lambda(f, \tau(M)) = \mathcal{P}(N, \tau(M)).$$

Por otro lado, $\mathrm{Hom}_\Lambda(\mathrm{D}_{\Lambda^{\mathrm{op}}}(\Lambda), \tau(M)) = 0$, con lo cual $f = 0$ y así

$$\mathcal{P}(N, \tau(M)) = \mathrm{Im}\mathrm{Hom}_\Lambda(i, \tau(M)) = 0.$$

Por las fórmulas de Auslander-Reiten, tenemos los siguientes isomorfismos naturales

$$\mathrm{Ext}^1_\Lambda(M,N) \cong \mathrm{D_R}\frac{\mathrm{Hom}_\Lambda(N,\tau(M))}{0} = \mathrm{D_R}\mathrm{Hom}_\Lambda(N,\tau(M)).$$

□

Por dualidad, tenemos el siguiente corolario.

Corolario 3.2.22. *Sea* $M \in \mathrm{mod}(\Lambda)$ *tal que* $\mathrm{id}(M) \leq 1$. *Entonces,*

$$\mathrm{Ext}^1_\Lambda(M,N) \cong \mathrm{D_R}\mathrm{Hom}_\Lambda(\tau^{-1}N,M).$$

El siguiente teorema nos dice que siempre existen las sucesiones que casi se escinden en módulos inescindibles.

Teorema 3.2.23. *Sea* $M \in \mathrm{ind}(\Lambda)$.

a) Si M *no es proyectivo, entonces existe una sucesión que casi se escinde*

$$0 \to \tau(M) \to E \to M \to 0.$$

b) Si M *no es inyectivo, entonces existe una sucesión que casi se escinde*

$$0 \to M \to E \to \tau^{-1}(M) \to 0.$$

Demostración. Ver [ASS, Teorema IV.3.1]. □

Corolario 3.2.24. *Sea* $M \in \mathrm{ind}(\Lambda)$

a) Si M *no es proyectivo, entonces existe un morfismo irreducible* $f : N \to M$ *si y sólo si existe un morfismo irreducible* $f' : \tau(M) \to N$.

b) Si M *no es inyectivo, entonces existe un morfismo irreducible* $g : M \to L$ *si y sólo si existe un morfismo irreducible* $g' : L \to \tau^{-1}(M)$.

Demostración. Ver [ASS, Proposición IV.3.8]. □

Corolario 3.2.25. *Sea* $S \in \mathrm{mod}(\Lambda)$ *simple. Si* S *es proyectivo, no inyectivo y* $f : S \to M$ *es irreducible, entonces* M *es proyectivo.*

Demostración. Por el Teorema 3.2.7, podemos asumir que $M \in \mathrm{ind}(\Lambda)$. Supongamos que M no es proyectivo. Por el Corolario 3.2.24, existe un morfismo irreducible $h : \tau(M) \to S$. Lo cual es una contradicción al Lema 3.2.4. □

De manera similar, tenemos el siguiente corolario.

Corolario 3.2.26. *Sea $S \in \mathrm{mod}(\Lambda)$ simple. Si S es inyectivo, no proyectivo y $g : N \to S$ es irreducible, entonces N es inyectivo.*

Proposición 3.2.27. *Sea $M \in \mathrm{ind}(\Lambda)$ proyectivo e inyectivo no simple, entonces la sucesión exacta*

$$0 \to \mathrm{rad}(M) \to \mathrm{rad}(M)/\mathrm{soc}(M) \oplus M \to M/\mathrm{soc}(M) \to 0$$

casi se escinde.

Demostración. Ver [ASS, Proposición IV.3.11]. □

Ahora veremos una las herramientas más útiles en el estudio de álgebras de Ártin.

Definición 3.2.28. *El carcaj de Auslander-Reiten $\Gamma(\mathrm{mod}(\Lambda))$ de $\mathrm{mod}(\Lambda)$ se define como sigue.*

a) Los vértices de $\Gamma(\mathrm{mod}(\Lambda))$ son las clases de isomorfismos $[M]$ de Λ-módulos inescindibles.

b) Para cada M, $N \in \mathrm{ind}(\Lambda)$, existe una flecha $[M] \to [N]$ si y sólo si existe un morfismo irreducible $f : M \to N$. Está flecha esta munida de un par de enteros positivos (a, b) llamados su valuación. Para más detalles sobre la valuación de una flecha, recomendamos al lector ver en [ARS] *capítulo* VII.

Definición 3.2.29. *Decimos que Λ es un álgebra de tipo de representación finita si tiene un número finito de clases de isomorfismos de módulos inescindibles.*

Uno de los hechos más importantes de las álgebras de representación finita, es que todo morfismo es la suma de composiciones de morfismos irreducibles.

Proposición 3.2.30. *Si* Λ *es un álgebra de representación finita. Entonces* $\Gamma(\mathrm{mod}(\Lambda))$ *no tiene flechas múltiples i.e. la valuación de todas las flechas es* $(1,1)$.

Demostración. Ver [ASS, Proposición IV.4.9]. □

El siguiente teorema es llamado el teorema de Auslander.

Teorema 3.2.31. *Si* $\Gamma(\mathrm{mod}(\Lambda))$ *admite una componente conexa y finita* Γ*, entonces* $\Gamma(\mathrm{mod}(\Lambda)) = \Gamma$.

Demostración. Ver [ASS, Teorema IV.5.4]. □

Para finalizar esta sección, veremos el carcaj de Auslander-Reiten de un álgebra con ayuda de toda la información que sabemos de los morfismos irreducibles a partir de las sucesiones que casi se escinden. Se sabe que los pozos del carcaj son los simples inyectivos y las fuentes son los proyectivos simples.

Ejemplo 3.2.32. Λ está dada por por el siguiente carcaj con relaciones

$$\circ^1 \xleftarrow{\alpha} \circ^2 \xleftarrow{\beta} \circ^3 \xleftarrow{\gamma} \circ^4$$

$\alpha\beta\gamma = 0$. Veamos todos los morfismos irreducibles que podamos obtener. Como P(3), P(4) y P(2) son proyectivos e inyectivos no simples, por la Proposición 3.2.27, tenemos las siguientes sucesiones exactas que casi se escinden

$$0 \to \mathrm{P}(1) \to \mathrm{P}(2) \to \mathrm{S}(2) \to 0,$$

$$0 \to \mathrm{P}(2) \to \mathrm{P}(3) \oplus \mathrm{P}(2)/\mathrm{S}(1) \to \mathrm{P}(3)/\mathrm{S}(1) \to 0,$$
$$0 \to \mathrm{rad}(\mathrm{P}(4)) \to \mathrm{P}(4) \oplus \mathrm{S}(3) \to \mathrm{I}(3) \to 0,$$

ya que

$$\begin{aligned} \mathrm{rad}(\mathrm{P}(2)) &= \mathrm{P}(1) & \qquad \mathrm{soc}(\mathrm{P}(2)) &= \mathrm{P}(1) \\ \mathrm{rad}(\mathrm{P}(3)) &= \mathrm{P}(2) & \qquad \mathrm{soc}(\mathrm{P}(3)) &= \mathrm{S}(1) \\ & & \qquad \mathrm{soc}(\mathrm{P}(4)) &= \mathrm{S}(2). \end{aligned}$$

Por último, tenemos la siguiente sucesión exacta que casi se escinde

$$0 \to \mathrm{S}(3) \to \mathrm{I}(3) \to \mathrm{S}(4) \to 0.$$

Dibujaremos el carcaj de Auslander-Reiten. A la izquierda los transladados de cada módulo inescindible y cada elemento lo denotaremos por su vector de dimensión que es único.

$$
\begin{tikzcd}
1000 \arrow[rr, dotted, no head] \arrow[dr] & & 0100 \arrow[rr, dotted, no head] \arrow[dr] & & 0010 \arrow[rr, dotted, no head] \arrow[dr] & & 0001 \\
& 1100 \arrow[ur] \arrow[rr, dotted, no head] \arrow[ddr] & & 0110 \arrow[ur] \arrow[rr, dotted, no head] \arrow[dr] & & 0011 \arrow[ur] & \\
& & & & 0111 \arrow[ur] & & \\
& & 1110 \arrow[uur] & & & &
\end{tikzcd}
$$

Capítulo 4

Teoría inclinante clásica

La teoría de la inclinación describe una manera de relacionar las categorías de módulos de dos álgebras utilizando los llamados módulos inclinantes y funtores inclinantes asociados. Aquí, la segunda es el álgebra de endomorfismos de un módulo inclinante con respecto a la primer álgebra. La teoría de inclinación fue motivada por la introducción de los funtores reflexivos por Bernstein, Gelfand y Ponomarev (1973). Dichos funtores se utilizaron para relacionar las representaciones de dos álgebras, las cuales fueron reformuladas por Auslander, Platzeck y Reiten (1979), y generalizados por Brenner y Butler (1980) que introdujeron los funtores inclinantes. Finalmente, Happel y Ringel (1982) simplificaron la teoría inclinante (clásica) dándole la forma en que se le conoce hoy en día.
A lo largo de este capítulo, denotaremos por Λ a una R-álgebra de artin, y por $\mathrm{mod}(\Lambda)$ a la categoría de los Λ-módulos a izquierda finitamente generados. Usaremos la notación introducida en los capítulos anteriores.
Para simplificar la notación escribiremos, en ocasiones,

$$ {}^{n}_{\Lambda}(M, N) := \mathrm{Ext}^{\mathrm{n}}_{\Lambda}(M, N). $$

Si $n = 0$, escribiremos ${}_{\Lambda}(M, N)$.
Análogamente, escribiremos, en ocasiones,

$$ {}^{\Gamma}_{n}(X, Y) := \mathrm{Tor}^{\Gamma}_{\mathrm{n}}(X, Y). $$

Si $n = 0$, escribiremos ${}^{\Gamma}(X, Y)$. Note que ${}_{\Lambda}(M, N) = \mathrm{Hom}_{\Lambda}(M, N)$ y ${}^{\Gamma}(X, Y) = X \oplus_{\Gamma} Y$.

4.1. Teoría de torsión en $\mathrm{mod}(\Lambda)$

Para iniciar, definiremos las categorías perpendiculares y Tor-ortogonales.

Definición 4.1.1. *Sean $\mathcal{X}$ una clase de Λ-módulos en* $\mathrm{mod}(\Lambda)$ *y $\mathcal{Y}$ una clase de Λ-módulos en* $\mathrm{mod}(\Lambda^{op})$. *Para cada $i \in \mathbb{N}$, se tienen las siguientes subcategorías plenas de* $\mathrm{mod}(\Lambda)$.

a) La i-ésima categoría perpendicular a derecha

$$\mathcal{X}^{\perp_i} := \{M \in \mathrm{mod}(\Lambda) \mid \mathrm{Ext}^{\mathrm{i}}_{\Lambda}(X, M) = 0 \ \forall \ X \in \mathcal{X}\}.$$

La categoría perpendicular a derecha $\mathcal{X}^{\perp} := \cap_{0<i}\mathcal{X}^{\perp_i}$.

b) La i-ésima categoría perpendicular a izquierda

$$^{\perp_i}\mathcal{X} := \{M \in \mathrm{mod}(\Lambda) \mid \mathrm{Ext}^{\mathrm{i}}_{\Lambda}(M, X) = 0 \ \forall \ X \in \mathcal{X}\}.$$

La categoría perpendicular a izquierda $^{\perp}\mathcal{X} := \cap^{\perp_i}_{0<i}\mathcal{X}$.

c) La i-ésima categoría Tor-ortogonal a derecha

$$\mathcal{Y}^{\top_i} := \{M \in \mathrm{mod}(\Lambda) \mid \mathrm{Tor}^{\Lambda}_{\mathrm{i}}(Y, M) = 0 \ \forall \ Y \in \mathcal{Y}\}.$$

La categoría Tor-ortogonal a derecha $\mathcal{Y}^{\top} := \cap_{0<i}\mathcal{Y}^{\top_i}$.

También, tenemos la siguiente subcategoría plena de $\mathrm{mod}(\Lambda^{op})$.

d) La i-ésima categoría Tor-ortogonal a izquierda

$$^{\top_i}\mathcal{X} := \{M \in \mathrm{mod}(\Lambda^{op}) \mid \mathrm{Tor}^{\Lambda}_{\mathrm{i}}(M, X) = 0 \ \forall \ X \in \mathcal{X}\}.$$

La categoría Tor-ortogonal a izquierda $^{\top}\mathcal{X} := \cap^{\top_i}_{0<i}\mathcal{X}$.

Definición 4.1.2. *Decimos que un par de subcategorías plenas $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ de* $\mathrm{mod}(\Lambda)$ *es un par de torsión en* $\mathrm{mod}(\Lambda)$*, si $\mathcal{T} = {}^{\perp_0}\mathcal{F}$ y $\mathcal{F} = \mathcal{T}^{\perp_0}$.*
Decimos que el par de torsión $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ se escinde si todo módulo inescindible pertenece a $\mathcal{T}$ o bien a $\mathcal{F}$.

Las subcategorías $\mathcal{T}$ y $\mathcal{F}$ son llamadas, respectivamente, la clase de torsión y la clase libre de torsión. Ahora veamos unas propiedades básicas de estas clases.

Proposición 4.1.3. *Sea* $(\mathcal{T},\mathcal{F})$ *un par de torsión en* $\mathrm{mod}(\Lambda)$*. Entonces, las clases* $\mathcal{T}$ *y* $\mathcal{F}$ *son cerradas por isomorfismos, sumas directas finitas y sumandos directos. En particular,* $\mathcal{T}$ *y* $\mathcal{F}$ *son subcategorías plenas y aditivas de* $\mathrm{mod}(\Lambda)$*.*

Demostración. Sólo probaremos el enunciado anterior para $\mathcal{T}$, ya que para $\mathcal{F}$ es análogo.
Sean $M \in \mathcal{T}$, $N \in \mathcal{F}$ y $f : M \to X$ un isomorfismo. Dado que $\mathrm{Hom}_\Lambda(-,N)$ es un funtor, tenemos que $\mathrm{Hom}_\Lambda(X,N) \overset{\mathrm{Hom}_\Lambda(f,N)}{\to} \mathrm{Hom}_\Lambda(M,N) = 0$ es un isomorfismo. Con lo cual $X \in {}^{\perp_0}\mathcal{F} = \mathcal{T}$.
Sea L un sumando directo de $M \in \mathcal{T}$. Luego, existe F tal que $L \oplus F \cong M$. En particular, para $N \in \mathcal{F}$,

$$0 = \mathrm{Hom}_\Lambda(M,N) = \mathrm{Hom}_\Lambda(L,N) \oplus \mathrm{Hom}_\Lambda(F,N);$$

y así $L \in {}^{\perp_0}\mathcal{F} = \mathcal{T}$.
Sean M, $T \in \mathcal{T}$. Aplicando $\mathrm{Hom}_\Lambda(-,N)$ a $M \oplus T$, con $N \in \mathcal{F}$, tenemos que

$$\mathrm{Hom}_\Lambda(M \oplus T,N) = \mathrm{Hom}_\Lambda(M,N) \oplus \mathrm{Hom}_\Lambda(T,N) = 0$$

Por lo tanto, $M \oplus T \in {}^{\perp_0}\mathcal{F} = \mathcal{T}$. □

Ahora veamos, a partir de un par de torsión, cómo construir otro par de torsión mediante la dualidad usual $\mathrm{D}_\Lambda : \mathrm{mod}(\Lambda) \to \mathrm{mod}(\Lambda^{op})$.

Ejemplo 4.1.4. Sea $(\mathcal{T},\mathcal{F})$ un par de torsión en $\mathrm{mod}(\Lambda)$. Entonces, el par $(\mathrm{D}_\Lambda(\mathcal{F}),\mathrm{D}_\Lambda(\mathcal{T}))$ es un par de torsión en $\mathrm{mod}(\Lambda^{\mathrm{op}})$.
En efecto, sean $F \in \mathcal{F}$ y $T \in \mathcal{T}$. Dado que, $\mathrm{D}_\Lambda : \mathrm{mod}(\Lambda) \to \mathrm{mod}(\Lambda^{op})$ es una dualidad, tenemos que

$$0 = \mathrm{Hom}_\Lambda(T,F) \cong \mathrm{Hom}_{\Lambda^{\mathrm{op}}}(\mathrm{D}_\Lambda(F),\mathrm{D}_\Lambda(T)).$$

Concluimos que, $\mathrm{D}_\Lambda(\mathcal{F}) = {}^{\perp_0}\mathrm{D}_\Lambda(\mathcal{T})$ y $\mathrm{D}_\Lambda(\mathcal{T}) = \mathrm{D}_\Lambda(\mathcal{F})^{\perp_0}$. Por lo tanto $(\mathrm{D}_\Lambda(\mathcal{F}),\mathrm{D}_\Lambda(\mathcal{T}))$ es un par de torsión en $\mathrm{mod}(\Lambda^{\mathrm{op}})$.

Definición 4.1.5. *Decimos que* $F : \mathrm{mod}(\Lambda) \to \mathrm{mod}(\Lambda)$ *es :*

a) un subfuntor del funtor identidad $1_{\mathrm{mod}(\Lambda)}$ *si* $F(M) \leq M \ \forall \ M \in \mathrm{mod}(\Lambda)$ *y* $\forall \ f : M \to N$ *el siguiente diagrama conmuta*

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] & N \\ F(M) \arrow[u, "i_M"] \arrow[r, "f|_{F(M)}"'] & F(N) \arrow[u, "i_N"'] \end{tikzcd},$$

donde i_M *y* i_N *son las respectivas inclusiones;*

b) *idempotente si* $F^2 = F$;

c) *radical si* F *es un subfuntor de* $1_{\mathrm{mod}(\Lambda)}$ *y* $F(M/F(M)) = 0 \; \forall \; M \in \mathrm{mod}(\Lambda)$.

Decimos que $F : \mathrm{mod}(\Lambda) \to \mathrm{mod}(\Lambda)$ *es un radical idempotente si* F *satisface las condiciones b) y c) anteriores.*

Las siguientes proposiciones caracterizan las clases de torsión y las clases libres de torsión.

Proposición 4.1.6. *Sea* $\mathcal{T}$ *una subcategoría plena de* $\mathrm{mod}(\Lambda)$. *Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes.*

a) *Existe una subcategoría* $\mathcal{F}$ *tal que* $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ *es un par de torsión en* $\mathrm{mod}(\Lambda)$.

b) $\mathcal{T}$ *es cerrada por cocientes y extensiones.*

c) *Existe un radical idempotente* $t : \mathrm{mod}(\Lambda) \to \mathrm{mod}(\Lambda)$ *idempotente radical tal que*
$$\mathcal{T} = \{M \in \mathrm{mod}(\Lambda) \mid t(M) = M\}.$$

Demostración. $a) \implies b)$. Supongamos que $\mathcal{T}$ es la clase de torsión de un par de torsión $(\mathcal{T},\mathcal{F})$. Consideremos una sucesión exacta $0 \to L \to M \to N \to 0$ en $\mathrm{mod}(\Lambda)$. Aplicando el funtor $\mathrm{Hom}_\Lambda(-, F)$, con $F \in \mathcal{F}$, a la sucesión exacta anterior, se obtiene la siguiente sucesión exacta

$$0 \to \mathrm{Hom}_\Lambda(N, F) \to \mathrm{Hom}_\Lambda(M, F) \to \mathrm{Hom}_\Lambda(L, F).$$

Ahora bien, si $M \in \mathcal{T}$ se tiene que $\mathrm{Hom}_\Lambda(N, F) = 0$. Por lo que $N \in {}^{\perp_0}\mathcal{F} = \mathcal{T}$, probándose que $\mathcal{T}$ es cerrada bajo cocientes. Supongamos ahora que L, $N \in \mathcal{T}$. Luego de la sucesión anterior, se concluye que $M \in {}^{\perp_0}\mathcal{F} = \mathcal{T}$; con lo cual $\mathcal{T}$ es cerrada bajo extensiones.
$b) \implies c)$. Sean $M \in \mathrm{mod}(\Lambda)$ y t la traza de $\mathcal{T}$. Es decir,

$$t(M) := \sum \{\mathrm{Im}(f) \mid f : T \to M \textit{ con } T \in \mathcal{T}\}.$$

Por hipótesis, $\mathcal{T}$ es cerrada bajo extensiones. Con lo cual $\mathcal{T}$ es cerrada bajo sumas directas finitas. Notamos que $t(M) \leq M$ y $M \in \mathrm{mod}(\Lambda)$. Por lo que existen $\{f_i : T_i \to M\}_{i=1}^n$ con $T_i \in \mathcal{T}$ tales que $t(M) = \sum_{i=1}^n \mathrm{Im}(f_i)$. Sean

$X := \oplus_{i=1}^{n}\mathrm{Im}(f_i)$ y $p : X \to t(M)$ el epimorfismo canónico. Dado que $\mathcal{T}$ es cerrada bajo sumas directas finitas y cocientes, tenemos que $t(M)$ es el mayor submódulo de M que está en $\mathcal{T}$, con lo cual $t(M) = M$ si y sólo si $M \in \mathcal{T}$.
Veamos que t es un radical idempotente. En efecto, sean $f : M \to N$ y $g : T \to M$, con $T \in \mathcal{T}$. Luego $f(\mathrm{Im}(g)) = \mathrm{Im}(fg)$, y así $f(t(M)) \leq t(N)$.
Sea $x \in t(M)$, con lo cual $x = \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i)$ y $f_i : T_i \to M$ con $T_i \in \mathcal{T}$. Sea $f_i = i\mathrm{I}(f_i)$ la factorización de f_i a través de la imagen. Entonces

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(x_i) = x = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{I}(f_i)(x_i)$$

por lo que $x \in t(t(M))$ y así $t^2(M) = t(M)$.
Sólo falta ver que t es radical. Supongamos que $t(M/t(M)) = M'/t(M)$ con

$$t(M) \leq M' \leq M.$$

Lo anterior induce una sucesión exacta

$$0 \to t(M) \to M' \to t(M/t(M)) \to 0,$$

dado que $t(M)$, $t(M/t(M)) \in \mathcal{T}$ y $\mathcal{T}$ es cerrada por extensiones, tenemos que $M' \in \mathcal{T}$. Con esto $M' = t(M)$ y por lo tanto $t(M/t(M)) = 0$.
$c) \implies a)$. Sean $\mathcal{F} := \{N \in \mathrm{mod}(\Lambda) \mid t(N) = 0\}$ y $M \in \mathrm{mod}(\Lambda)$ tal que $\mathrm{Hom}_\Lambda(M, N) = 0 \ \forall \ N \in \mathcal{F}$. Dado que t es un funtor radical, tenemos que $t(M/t(M)) = 0$. Por lo que $M/t(M) \in \mathcal{F}$, con lo cual la proyección natural $\pi : M \to M/t(M)$ es el morfismo cero. Concluimos que $M/t(M) = 0$ y así $M = t(M) \in \mathcal{T}$.
Recíprocamente, sea $N \in \mathrm{mod}(\Lambda)$ tal que $\mathrm{Hom}_\Lambda(M, N) = 0 \ \forall \ M \in \mathcal{T}$. Dado que $t(N) \in \mathcal{T}$, la inclusión $\iota : t(N) \to N$ es el morfismo cero, con lo cual $t(N) = 0$ y consecuentemente $N \in \mathcal{F}$. Por lo tanto $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ es un par de torsión en $\mathrm{mod}(\Lambda)$. □

Proposición 4.1.7. *Sea $\mathcal{F}$ una subcategoría plena de* $\mathrm{mod}(\Lambda)$*. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes.*

a) Existe una subcategoría $\mathcal{T}$ tal que $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ es un par de torsión.

b) $\mathcal{F}$ es cerrada por submódulos y extensiones.

c) Existe un radical idempotente $t : \mathrm{mod}(\Lambda) \to \mathrm{mod}(\Lambda)$ *tal que*

$$\mathcal{F} = \{M \in \mathrm{mod}(\Lambda) \mid t(M) = 0\}.$$

Demostración. Es análoga a la anterior. □

Definición 4.1.8. *Sea* $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ *un par de torsión en* $\mathrm{mod}(\Lambda)$*. Para cada* $M \in \mathrm{mod}(\Lambda)$*, a la sucesión exacta*

$$0 \to t(M) \to M \to M/t(M) \to 0,$$

donde t *es la traza de* $\mathcal{T}$*, se le conoce como la sucesión canónica de* M *en* $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$*. Note que, por la prueba de la Proposición 4.1.6, se tiene que* $t(M) \in \mathcal{T}$ *y* $M/t(M) \in \mathcal{F}$*.*

Veamos que la sucesión canónica es única en el siguiente sentido.

Corolario 4.1.9. *Sean* $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ *un par de torsión en* $\mathrm{mod}(\Lambda)$ *y*

$$0 \to M' \to M \to M'' \to 0$$

una sucesión exacta con $M' \in \mathcal{T}$ *y* $M'' \in \mathcal{F}$*. Entonces, la sucesión exacta anterior es isomorfa a la sucesión canónica de* M *en* $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$*.*

Demostración. Sea t la traza de $\mathcal{T}$. Como $t(M)$ es el mayor submódulo en M tal que $t(M) \in \mathcal{T}$, por la propiedad universal del Cokernel, el siguiente diagrama con filas y columnas exactas conmuta

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & \mathrm{Ker(f)} \arrow[d] & \\
 & M' \arrow[r] \arrow[d, "\iota"] & M \arrow[r] \arrow[d, equal] & M'' \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{t(M)} \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{M/t(M)} & \\
 & \mathrm{t(M)/M'} & 0. & &
\end{tikzcd}$$

Luego, por el Lema de la serpiente, se sigue que $\mathrm{Ker}(f) \cong t(M)/M'$. Usando ahora que $\mathcal{F}$ es cerrada bajo submódulos y $\mathcal{T}$ es cerrada por cocientes, concluimos que $\mathrm{Ker}(f) \in \mathcal{T} \cap \mathcal{F}$. Por lo tanto $\mathrm{Ker}(f) = 0$. Así f es un isomorfismo y $M' = t(M)$. □

Corolario 4.1.10. *Sean* $S \in \mathrm{mod}(\Lambda)$ *simple y* $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ *un par de torsión en* $\mathrm{mod}(\Lambda)$. *Entonces* S *es de torsión o* S *es libre de torsión.*

Demostración. Sea $0 \to t(S) \to S \to S/t(S) \to 0$ la sucesión canónica de S en $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$. Si $t(S) \neq 0$, se sigue que $t(S) = S$ y así $S \in \mathcal{T}$.
Supongamos que $t(S) = 0$. Entonces, $S/t(S) \cong S$, y como $\mathcal{F}$ es cerrada por isomorfismos, tenemos que $S \in \mathcal{F}$. □

Recordemos que τ y τ^{-1} denotan a las translaciones de Auslander-Reiten (Ver, Definición 3.2.15).

Proposición 4.1.11. *Sean* $M \in \mathrm{ind}(\Lambda)$ *y* $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ *un par de torsión en* $\mathrm{mod}(\Lambda)$. *Entonces se cumple lo siguiente.*

a) $M \in {}^{\perp_1}\mathcal{T}$ *si y sólo si* $\tau(M) \in \mathcal{F}$.

b) $M \in \mathcal{F}^{\perp_1}$ *si y sólo si* $\tau^{-1}(M) \in \mathcal{T}$.

Demostración. Sólo probaremos a) ya que b) es análoga. Supongamos que $\tau(M) \in \mathcal{F}$ y sea $X \in \mathcal{T}$. Por las fórmulas de Auslander-Reiten tenemos que

$$\mathrm{Ext}^1_\Lambda(M, X) \cong \mathrm{D_R}\overline{\mathrm{Hom}}_\Lambda(X, \tau(M)) = \mathrm{D_R}\frac{\mathrm{Hom}_\Lambda(X, \tau(M))}{\mathcal{I}(X, \tau(M))} = \mathrm{D_R}0 = 0.$$

Con lo cual, $M \in {}^{\perp_1}\mathcal{T}$.
Recíprocamente, sea $M \in {}^{\perp_1}T$. Supongamos que $\tau(M) \notin \mathcal{F}$. Luego, como $\mathcal{F}$ es una subcategoría aditiva de $\mathrm{mod}(\Lambda)$, tenemos que $\tau(M) \neq 0$; y así M no es proyectivo. Consideremos la sucesión que casi se escinde

$$0 \to \tau(M) \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} M \to 0,$$

y la sucesión canónica de $\tau(M)$ en $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$

$$0 \to t(\tau(M)) \xrightarrow{i} \tau(M) \xrightarrow{p} \tau(M)/t(\tau(M)) \to 0.$$

Como $\tau(M) \notin \mathcal{F}$, se tiene que p no es un monomorfismo, y así p no es un split-mono. Usando ahora que f casi se escinde a la izquierda, existe un morfismo $k : E \to \tau(M)/t(\tau(M))$ tal que $kf = p$. Luego, por el Lema de la serpiente, se obtiene el siguiente diagrama conmutativo con filas y columnas exactas

$$
\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & t(\tau(M)) \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "i"'] & \mathrm{F} \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "h"'] & \mathrm{M} \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & \tau(M) \arrow[r, "f"'] \arrow[d, "p"'] & \mathrm{E} \arrow[r, "g"'] \arrow[d, "k"'] & \mathrm{M} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \tau(M)/t(\tau(M)) \arrow[r, equal] \arrow[d] & \tau(M)/t(\tau(M)) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] & 0 \\
 & 0 & 0. & &
\end{tikzcd}
$$

Como $t(\tau(M)) \in \mathcal{T}$, tenemos que la primera fila, del diagrama anterior, se escinde, con lo cual existe $g'' : M \to F$ tal que $g'g'' = 1_M$. Por lo tanto $ghg'' = g'g'' = 1_M$, lo cual contradice que g no es un spli-epi. $\square$

Definición 4.1.12. *Sean $\mathcal{X} \subseteq \mathrm{mod}(\Lambda)$ una subcategoría plena y $M \in \mathrm{mod}(\Lambda)$. Decimos que:*

a) *$f : M \to X$ es una $\mathcal{X}$-preenvolvente de M si $X \in \mathcal{X}$ y $\forall\ g : M \to X'$ con $X' \in \mathcal{X}$ existe $h : X \to X'$ tal que $g = hf$. Decimos que $\mathcal{X}$ es una clase preenvolvente (covariantemente finita) si cada $N \in \mathrm{mod}(\Lambda)$ admite una $\mathcal{X}$-preenvolvente.*

b) *$t : X \to M$ es una $\mathcal{X}$-precubierta de M si $X \in \mathcal{X}$ y $\forall\ r : X' \to M$ con $X' \in \mathcal{X}$ existe $s : X' \to X$ tal que $r = ts$. Decimos que $\mathcal{X}$ es una clase precubriente (contravariantemente finita) si cada $N \in \mathrm{mod}(\Lambda)$ admite una $\mathcal{X}$-precubrierta.*

c) *$\mathcal{X}$ es funtorialmente finita si es covariantemente y contravariantemente finita.*

Proposición 4.1.13. *Sea $M \in \mathrm{mod}(\Lambda)$. Entonces $\mathrm{add}(M)$ es funtorialmente finita.*

Demostración. Veamos que cada $N \in \text{mod}(\Lambda)$ tiene una $\text{add}(M)$-precubierta. En efecto, consideremos el Γ-módulo $\text{Hom}_\Lambda(M, N)$, con $\Gamma = \text{End}_\Lambda(M)^{op}$ y $k \in \text{Hom}_\Lambda(M, N)$. Dado que $\text{Hom}_\Lambda(M, N) \in \text{mod}(\Gamma)$, tenemos un conjunto de generadores $\{g_1, g_2, \cdots, g_n\}$. Por lo que existe $h = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix} : M \to M^n$ tal que

$$k = g_1 h_1 + g_2 h_2 + \cdots g_n h_n.$$

Por lo tanto, el morfismo $\text{Hom}_\Lambda(M, g) : \text{Hom}_\Lambda(M, M^n) \to \text{Hom}_\Lambda(M, N)$ es un epimorfismo, con $g := [g_1, g_2, \cdots, g_n] : M^n \to N$.
Ahora bien, sean $M' \in \text{add}(M)$, $t : M' \to N$ y M'' tales que $M' \oplus M'' \cong M^r$. Por la propiedad universal del coproducto, existe $p = [p_1, p_2, \cdots, p_r] : M^r \to N$ tal que $t = p\mu_1$, donde $\mu_1 : M' \to M^r$ es la inclusión canónica. Por otro lado, puesto que $\text{Hom}_\Lambda(M, g)$ es un epimorfismo, existen $\{\lambda_i\}_{i=1}^n$ tales que $p_i = g\lambda_i$. Así pues, tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} M^r = M' \oplus M'' \arrow[d, "\lambda:=[\lambda_1,\cdots,\lambda_n]"'] \arrow[dr, "p"] & M' \arrow[l, "\mu_1"'] \arrow[d, "t"] \\ M^n \arrow[r, "g"'] & N. \end{tikzcd}$$

Con lo cual $t = g\lambda\mu_1$. Entonces g es una $\text{add}(M)$-precubierta y consecuentemente $\text{add}(M)$ es contravariantemente finita.
Analógamente, se prueba que $\text{add}(M)$ es covariantemente finita y por lo tanto funtorialmente finita. $\square$

Lema 4.1.14. *Sea $f : M' \to N$ una $\text{add}(M)$-precubierta. Entonces f es un epimorfismo si y sólo si $N \in \text{gen}(M)$.*

Demostración. Sea $p : M^n \to N$ un epimorfismo. Entonces, existe un morfismo $h : M^n \to M'$ tal que $p = fh$, con lo cual f es un epimorfismo.
La recíproca es clara. $\square$

Similarmente, tenemos el siguiente lema.

Lema 4.1.15. *Sea $f : N \to M'$ una $\text{add}(M)$-preenvolvente. Entonces f es un mononorfismo si y sólo si $N \in \text{cogen}(M)$.*

Lema 4.1.16. *Sean M, $N \in \text{mod}(\Lambda)$ y $\Gamma = \text{End}_\Lambda(M)^{op}$. Entonces* *a)* $N \in \mathrm{gen}(M)$ *si y sólo si el morfismo funtorial*

$$\epsilon_N : M \otimes_\Gamma \mathrm{Hom}_\Lambda(M, N) \to N, \qquad (m \otimes f \mapsto f(m)),$$

es un epimorfismo.

b) $N \in \mathrm{cogen}(M)$ *si y sólo si el morfismo funtorial*

$$\delta_N : N \to \mathrm{Hom}_{\Gamma^{op}}(\mathrm{Hom}_\Lambda(N, M), M), \qquad (n \mapsto (g \mapsto g(n))),$$

es un monomorfismo.

Demostración. Sólo probaremos a), ya que la prueba de b) es análoga.
Sea $f : M' \to N$ una $\mathrm{add}(M)$-precubierta. Note que por el Lema 4.1.14 f es un epimorfismo, y por lo tanto, tenemos la siguiente sucesión exacta

$$0 \to \mathrm{Ker}(f) \to M' \xrightarrow{f} N \to 0.$$

Aplicamos el funtor $\mathrm{Hom}_\Lambda(M, -)$ a la sucesión anterior, obteniendose la sucesión exacta

$$0 \to \mathrm{Hom}_\Lambda(M, \mathrm{Ker}(f)) \to \mathrm{Hom}_\Lambda(M, M') \xrightarrow{\mathrm{Hom}_\Lambda(M,f)} \mathrm{Hom}_\Lambda(M, N) \to 0,$$

ya que $f : M' \to N$ es una $\mathrm{add}(M)$-precubierta. Aplicando el funtor $M \otimes_\Gamma -$ a la sucesión anterior, obtenemos el siguiente diagrama conmutativo con filas exactas

$$\begin{tikzcd}
{}^{\Gamma}(M, {}_{\Lambda}(M, \mathrm{Ker}(f))) \arrow[r] \arrow[d, "\epsilon_L"'] & {}^{\Gamma}(M, {}_{\Lambda}(M, M')) \arrow[r] \arrow[d, "\epsilon_{M'}"'] & {}^{\Gamma}(M, {}_{\Lambda}(M, N))^{\Gamma} \arrow[r] \arrow[d, "\epsilon_N"'] & 0 \\
\mathrm{Ker}(f) \arrow[r] & M' \arrow[r] & N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Como $\epsilon_{M'}$ es el isomorfismo canónico, aplicando el Lema de la serpiente al diagrama anterior tenemos que ϵ_N es un epimorfismo.
Supongamos que ϵ_N es un epimorfismo. Dado que $\mathrm{Hom}_\Lambda(M, N) \in \mathrm{mod}(\Gamma)$ existe un epimorfismo $h : \Gamma^n \to \mathrm{Hom}_\Lambda(M, N)$, y consecuentemente, tenemos la siguiente composición de epimorfismos.

$$M^n \cong M \otimes_\Gamma \Gamma^n \xrightarrow{M \otimes h} M \otimes_\Gamma \mathrm{Hom}_\Lambda(M, N) \xrightarrow{\epsilon_N} N.$$

Por lo tanto $N \in \mathrm{gen}(M)$. $\square$

Proposición 4.1.17. *Sea* $M \in \mathrm{mod}(\Lambda)$*. Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen.*

a) $(\mathrm{gen}(M), M^{\perp_0})$ *es un par de torsión si* $M \in {}^{\perp_1}\mathrm{gen}(M)$*.*

b) $({}^{\perp_0}M, \mathrm{cogen}(M))$ *es un par de torsión en* $\mathrm{mod}(\Lambda)$ *si* $M \in \mathrm{cogen}(M)^{\perp_1}$*.*

Demostración. Supongamos que $M \in {}^{\perp_1}\mathrm{gen}(M)$. Veamos que $\mathrm{gen}(M)$ es cerrada por extensiones y cocientes. En efecto, sea $0 \to K \to N \to L \to 0$ una sucesión exacta en $\mathrm{mod}(\Lambda)$, con $L,\ K \in \mathrm{gen}(M)$. Aplicando el funtor $\mathrm{Hom}_\Lambda(M, -)$ a la sucesión anterior, por hipótesis, obtenemos la siguiente sucesión exacta de Γ-módulos, con $\Gamma = \mathrm{End}(M)^{op}$,

$$0 \to \mathrm{Hom}_\Lambda(M,K) \to \mathrm{Hom}_\Lambda(M,N) \to \mathrm{Hom}_\Lambda(M,L) \to 0.$$

Aplicando el funtor $M \otimes_\Gamma -$ a la sucesión exacta anterior, se tiene el siguiente diagrama conmutativo con filas exactas

$$\begin{tikzcd}
{}^{\Gamma}(M, {}_{\Lambda}(M,K)) \arrow[r] \arrow[d, "\epsilon_K"'] & {}^{\Gamma}(M, {}_{\Lambda}(M,N)) \arrow[r] \arrow[d, "\epsilon_N"'] & {}^{\Gamma}(M, {}_{\Lambda}(M,L)) \arrow[r] \arrow[d, "\epsilon_L"'] & 0 \\
K \arrow[r] & N \arrow[r] & L \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Por el Lema 4.1.16 ϵ_K y ϵ_L son epimorfismos y por el Lema de los cinco ϵ_N es un epimorfismo. Es claro que $\mathrm{gen}(M)$ es cerrada bajo cocientes. Luego, por la Proposición 4.1.6 $\mathrm{gen}(M)$ es una clase de torsión.
Basta ver que $M^{\perp_0} = \mathrm{gen}(M)^{\perp_0}$. En efecto, sean $M' \in \mathrm{gen}(M)$, $M'' \in M^{\perp_0}$ y $f : M' \to M''$. Entonces existe un epimorfismo $p : M^n \to M'$, por hipótesis $fp = 0$, dado que p es un epimorfismo tenemos que $f = 0$, con lo cual $M'' \in \mathrm{gen}(M)^{\perp_0}$. Por último, puesto que $M \in \mathrm{gen}(M)$, se tiene que $\mathrm{gen}(M)^{\perp_0} \subseteq M^{\perp_0}$ y por lo tanto $M^{\perp_0} = \mathrm{gen}(M)^{\perp_0}$. $\square$

Para finalizar esta sección daremos condiciones para que un par de torsión se escinda.

Proposición 4.1.18. *Sea* $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ *un par de torsión en* $\mathrm{mod}(\Lambda)$*. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes.*

a) El par de torsión $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ *se escinde.*

b) La sucesión canónica de M *en* $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ *se escinde* $\forall\ M \in \mathrm{mod}(\Lambda)$*.*

c) $\tau^{-1}(\mathcal{T}) \subseteq \mathcal{T}$.

d) $\tau(\mathcal{F}) \subseteq \mathcal{F}$.

e) $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(N, M) = 0 \quad \forall\, M \in \mathcal{T}, \forall\, N \in \mathcal{F}$.

Demostración. $a) \implies b)$. Sea $M \in \mathrm{mod}(\Lambda)$. Por hipótesis y el Teorema de Krull-Schmidt

$$M = M_1^{r_1} \oplus \cdots \oplus M_t^{r_t} \oplus M_{t+1}^{r_{t+1}} \oplus \cdots \oplus M_{t+s}^{r_{t+s}}$$

con $M_i \in \mathcal{T}$ $\forall$ $1 \leq i \leq t$ y $M_j \in \mathcal{F}$ $\forall$ $t \leq j \leq t+s$. Como $\mathcal{T}$ y $\mathcal{F}$ son cerradas bajo sumas directas finitas, tenemos que $X = M_1^{r_1} \oplus \cdots \oplus M_t^{r_t} \in \mathcal{T}$ y $Y = M_{t+1}^{r_{t+1}} \oplus \cdots \oplus M_{t+s}^{r_{t+s}} \in \mathcal{F}$. Así pues, la sucesión canónica de M en ($\mathcal{T}$,$\mathcal{F}$) se escinde, ya que (por el Corolario 4.1.9) ésta es isomorfa a $0 \to X \to X \oplus Y \to Y \to 0$ que se escinde.
$b) \implies c)$. Sea $M \in \mathcal{T}$ inescindible. Si M es inyectivo, se tiene que $\tau^{-1}(M) = 0$, con ello $\tau^{-1}(M) \in \mathcal{T}$. Si M no es inyectivo, tenemos la siguiente sucesión que casi se escinde $0 \to M \to E \to \tau^{-1}(M) \to 0$. La sucesión canónica de E en ($\mathcal{T}$,$\mathcal{F}$), induce el siguiente diagrama conmutativo con filas y columnas exactas

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Ker}(p) \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & M \arrow[r] \arrow[d, "i"'] & E \arrow[r] \arrow[d, equal] & \tau^{-1}(M) \arrow[r] \arrow[d, "\exists\, p"] & 0 \\
0 \arrow[r] & t(E) \arrow[r] \arrow[d] & E \arrow[r] \arrow[d] & E/t(E) \arrow[r] & 0 \\
 & t(E)/M \arrow[r] & 0. & &
\end{tikzcd}$$

Dado que $t(E) \in \mathcal{T}$, se tiene que $t(E)/M \in \mathcal{T}$, ya que $\mathcal{T}$ es cerrada por cocientes. Por el Lema de la serpiente $\mathrm{Ker}(p) \cong M/t(E)$. Entonces, por el Corolario 4.1.9 la sucesión exacta

$$0 \to \mathrm{Ker}(p) \to \tau^{-1}(M) \xrightarrow{p} E/t(E) \to 0,$$

es la sucesión canónica de $\tau^{-1}(M)$ en $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$. Por hipótesis, la sucesión anterior se escinde. Con lo cual $\tau^{-1}(M) \cong \mathrm{Ker}(p) \in \mathcal{T}$, ya que si fuera

$\tau^{-1}(M) \cong E/t(E)$ la sucesión que casi se escinde se escinde, lo cual es una contradicción.
c) $\implies$ *e*). Sean $M \in \mathcal{T}$ y $N \in \mathcal{F}$. Por hipótesis y las fórmulas de Auslander-Reiten, tenemos los siguientes isomorfismos de R-módulos

$$\mathrm{Ext}^1_\Lambda(N, M) \cong \mathrm{D_R}\frac{\mathrm{Hom}_\Lambda(\tau^{-1}(M), N)}{\mathcal{P}(\tau^{-1}(M), N)} = 0.$$

e) $\implies$ *a*). Sea $E \in \mathrm{ind}(\Lambda)$. Consideremos la sucesión canónica de E,

$$0 \to M \to E \to N \to 0$$

en $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$. Por hipótesis, la sucesión anterior se escinde. Por lo tanto $E \cong M \in \mathcal{T}$ o bien $E \cong N \in \mathcal{F}$.
Análogamente se prueban *b*) $\implies$ *d*) y *d*) $\implies$ *e*). □

4.2. Módulos inclinantes parciales

Definición 4.2.1. *Decimos que* $T \in \mathrm{mod}(\Lambda)$ *es inclinante parcial si satisface las siguientes condiciones.*

TM1) $\mathrm{pd}(T) \leq 1$.

TM2) $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(T, T) = 0$.

Ejemplo 4.2.2. Por el Teorema 2.8.6, todo Λ-módulo proyectivo es inclinante parcial.

Proposición 4.2.3. *Sea* $T \in \mathrm{mod}(\Lambda)$. *Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes.*

a) *T es inclinante parcial.*

b) $\mathrm{pd}(T) \leq 1$ *y* $\mathrm{gen}(T) \subseteq T^{\perp_1}$.

c) $(T^{\perp_1}, \mathrm{cogen}(\tau(T)))$ *es un par de torsión en* $\mathrm{mod}(\Lambda)$ *y* $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(T, T) = 0$.

Demostración. *a*) $\implies$ *b*). Sean T un Λ-módulo inclinante parcial y $M \in \mathrm{gen}(T)$. Por hipótesis, existe una sucesión exacta $0 \to N \to T^n \to M \to 0$.

Aplicando el funtor $\mathrm{Hom}_\Lambda(T,-)$ a la sucesión exacta anterior. Dado que $\mathrm{pd}(T) \leq 1$, por el Teorema 2.8.6, tenemos la siguiente sucesión exacta

$$\mathrm{Ext}^1_\Lambda(T,T^n) \to \mathrm{Ext}^1_\Lambda(T,M) \to 0.$$

Como $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(T,-)$ es un funtor aditivo, tenemos que $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(T,T^n)=0$, y por lo tanto $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(T,M)=0$.
b) $\implies$ *c)*. Aseguramos que $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(N,\tau(T))=0 \ \forall \ N \in \mathrm{cogen}(\tau(T))$.
En efecto, como $\mathrm{pd}(T) \leq 1$, por el Corolario 3.2.21 y por hipótesis, tenemos que

$$0 = \mathrm{D_R}\mathrm{Ext}^1_\Lambda(T,T) \cong \mathrm{Hom}_\Lambda(T,\tau(T)).$$

Así, dados $f : T \to N$ y un monomorfismo $j : N \to \tau(T)^n$, tenemos que $jf = 0$. Por lo tanto $\mathrm{Hom}_\Lambda(T,N)=0 \ \forall \ N \in \mathrm{cogen}(\tau(T))$. Sea $N \in \mathrm{cogen}(\tau(T))$, por las fórmulas de Auslander-Reiten, tenemos que

$$\mathrm{Ext}^1_\Lambda(N,\tau(T)) \cong \mathrm{D_R}\underline{\mathrm{Hom}}_\Lambda(T,N) = \mathrm{D_R}\frac{\mathrm{Hom}_\Lambda(T,N)}{\mathcal{P}(T,N)} = \mathrm{D_R}0 = 0.$$

Ahora bien, dado que $\tau(M) \in \mathrm{cogen}(\tau(M))^{\perp_1}$, de la Proposición 4.1.17, se tiene que $({}^{\perp_0}\tau(T), \mathrm{cogen}(\tau(T)))$ es un par de torsión en $\mathrm{mod}(\Lambda)$. Veamos ahora que ${}^{\perp_0}\tau(T) = T^{\perp_1}$. En efecto, dado que $\mathrm{pd}(T) \leq 1$, por el Corolario 3.2.21, tenemos que

$$\mathrm{D_R}\mathrm{Ext}^1_\Lambda(T,M) \cong \mathrm{Hom}_\Lambda(M,\tau(T)),$$

así $M \in T^{\perp_1}$ si y sólo si $\mathrm{Hom}_\Lambda(M,\tau(T))=0$.
c) $\implies$ *a)*. Sea $N \in \mathrm{mod}(\Lambda)$. Consideremos la siguiente sucesión exacta, dada por la envolvente inyectiva de N, $\iota_0 : N \to \mathrm{I}_0(N)$,

$$0 \to N \xrightarrow{\iota_0} \mathrm{I}_0(N) \to \Omega^{-1}(N) \to 0.$$

Aplicando el funtor $\mathrm{Hom}_\Lambda(T,-)$, a dicha sucesión, obtenemos la siguiente sucesión exacta

$$\mathrm{Ext}^1_\Lambda(T,\Omega^{-1}(N)) \to \mathrm{Ext}^2_\Lambda(T,N) \to \mathrm{Ext}^2_\Lambda(T,\mathrm{I}_0(N)).$$

Ahora bien, dado que $\mathrm{I}_0(N) \in T^{\perp_1}$ y $T^{\perp_1}$ es una clase de torsión, con lo cual es cerrada por cocientes, tenemos que $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(T,\Omega^{-1}(N))=0$. Luego, de la sucesión anterior, concluimos que $\mathrm{Ext}^2_\Lambda(T,N)=0$. Finalmente, por el Teorema 2.8.6 $\mathrm{pd}(T) \leq 1$; probándose que T es inclinante parcial. $\square$

Sea P un Λ-módulo proyectivo. Note que: si P es un generador, entonces $\mathrm{gen}(P) = P^{\perp_1}$. Por lo cual, no se da siempre la igualdad anterior. Veamos otro par de torsión asociado a un Λ-módulo inclinante parcial.

Proposición 4.2.4. *Sea* $T \in \mathrm{mod}(\Lambda)$ *inclinante parcial. Entonces, el par* $(\mathrm{gen}(T), T^{\perp_0})$ *es de torsión en* $\mathrm{mod}(\Lambda)$.

Demostración. Se sigue de la Proposición 4.2.3 b) que $T \in {}^{\perp_1}\mathrm{gen}(T)$, por la Proposición 4.1.17 $(\mathrm{gen}(T), T^{\perp_0})$ es un par de torsión en $\mathrm{mod}(\Lambda)$. □

Definición 4.2.5. *Sea* $M \in \mathrm{mod}(\Lambda)$. *El anulador de* M *en* Λ *es*

$$\mathrm{ann}(M) := \{a \in \Lambda \mid aM = 0\}.$$

Decimos que M *es fiel si* $\mathrm{ann}(M) = 0$. *Note que* $\mathrm{ann}(M) \trianglelefteq \Lambda$.

Lema 4.2.6. *Sea* $M \in \mathrm{mod}(\Lambda)$. *Entonces,* M *es fiel si y sólo si* $\mathrm{D}_\Lambda(M)$ *es fiel.*

Demostración. Supongamos que M es fiel. Sea $a \in \Lambda$ tal que

$$0 = \mathrm{D}_\Lambda(M)a = \mathrm{Hom}_{\mathrm{R}}(M, \mathrm{I}_0(\mathrm{top}(R)))a.$$

Dado que $\mathrm{I}_0(\mathrm{top}(R))$ es un cogenerador inyectivo en $\mathrm{mod}(R)$, tenemos un monomorfismo en $\mathrm{mod}(R)$

$$i = \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ \vdots \\ i_n \end{bmatrix} : M \to \mathrm{I}_0(\mathrm{top}(R))^n.$$

Luego,

$$i(m)a = \begin{bmatrix} i_1(am) \\ i_2(am) \\ \vdots \\ i_n(am) \end{bmatrix} = 0,$$

ya que por hipótesis, tenemos que $i_j(am) = 0 \ \forall\ 1 \leq j \leq n$ y $\forall\ m \in M$. Consecuentemente $aM = 0$, con lo cual $a = 0$.
Si $\mathrm{D}_\Lambda(M)$ es fiel, por lo anterior tenemos que $M \cong \mathrm{D}_{\Lambda^{\mathrm{op}}}\mathrm{D}_\Lambda(M)$ es fiel. □

Lema 4.2.7. *Para $M \in \mathrm{mod}(\Lambda)$, las siguientes condiciones son equivalentes.*

a) *M es fiel.*

b) ${}_{\Lambda}\Lambda \in \mathrm{cogen}(M)$.

c) $\mathrm{D}_{\Lambda^{\mathrm{op}}}(\Lambda_{\Lambda}) \in \mathrm{gen}(M)$.

Demostración. $a) \iff b)$. Supongamos que M es fiel. Sea $f : \Lambda \to M'$ una $\mathrm{add}(M)$-preenvolvente. Consideremos $x \in M$ y $g_x : \Lambda \to M$ tales que $x = g_x(1)$. Como g_x se factoriza a través f, tenemos que $f(a) = 0$ implica que $ax = g_x(a) = 0$; dado que x es arbitrario, concluimos que $aM = 0$, y así $a = 0$. Por lo tanto f es un monomorfismo, probándose que $\Lambda \in \mathrm{cogen}(M)$.

Recíprocamente, sean $h = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix} : \Lambda \to M^n$ un monomorfismo y $a \in \Lambda$ tales que $aM = 0$. Entonces $h(a) = \begin{bmatrix} h_1(a) \\ h_2(a) \\ \vdots \\ h_n(a) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ah_1(1) \\ ah_2(1) \\ \vdots \\ ah_n(1) \end{bmatrix} = 0$, y por lo tanto $a \in \mathrm{Ker}(h) = \{0\}$; probándose que M es fiel.

$b) \iff c)$. Se sigue de la equivalencia anterior y del Lema 4.2.6. □

La siguiente proposición nos da condiciones necesarias y suficientes para ver, cuando un módulo fiel es inclinante parcial.

Proposición 4.2.8. *Sea $T \in \mathrm{mod}(\Lambda)$ fiel. Entonces, T es inclinante parcial si y sólo si $\tau(T) \in T^{\perp_0}$.*

Demostración. Supongamos que T es inclinante parcial. Luego, por la Proposición 4.2.4 $(\mathrm{gen}(T), T^{\perp_0})$ es un par de torsión en $\mathrm{mod}(\Lambda)$ y, por la Proposición 4.2.3, $T \in {}^{\perp_1}\mathrm{gen}(T)$. Por lo tanto, de la Proposición 4.1.11, tenemos que $\tau(T) \in \mathcal{F}$.

Recíprocamente, asumimos ahora que $\tau(T) \in T^{\perp_0}$. Dado que T es fiel, por el Lema 4.2.7, existe un epimorfismo $p : T^n \to \mathrm{D}_{\Lambda^{\mathrm{op}}}(\Lambda)$. Aplicando el funtor $\mathrm{Hom}_{\Lambda}(-, \tau(T))$ a el morfismo p, obtenemos la siguiente sucesión exacta

$$0 \to \mathrm{Hom}_{\Lambda}(\mathrm{D}_{\Lambda^{\mathrm{op}}}(\Lambda), \tau(T)) \to \mathrm{Hom}_{\Lambda}(T^n, \tau(T)).$$

Como $\mathrm{Hom}_\Lambda(T^n, \tau(T)) = 0$, tenemos que $\mathrm{Hom}_\Lambda(\mathrm{D}_{\Lambda^{op}}(\Lambda), \tau(T)) = 0$. Luego, por el Corolario 3.2.18, concluimos que $\mathrm{pd}(T) \leq 1$ y, del Corolario 3.2.21, se obtiene el siguiente isomorfismo

$$\mathrm{Ext}^1_\Lambda(T, T) \cong \mathrm{D_R Hom}_\Lambda(T, \tau(T))) = 0.$$

Por lo tanto T es inclinante parcial. □

Veamos que la hipótesis "T es fiel", en la proposición anterior, es fundamental.

Ejemplo 4.2.9. Sea Λ el álgebra de caminos del siguiente carcaj

$$\circ^1 \xrightarrow{\alpha} \circ^2 \xrightarrow{\beta} \circ^3$$

con la relación $\beta\alpha = 0$.
Consideremos la siguiente sucesión exacta,

$$0 \to \mathrm{S}(2) \to \mathrm{P}(1) \to \mathrm{S}(1) \to 0.$$

Dado que $\mathrm{P}(1) = \mathrm{I}(3)$, $\mathrm{P}(1)$ no es simple y, del hecho que

$$\mathrm{rad}(\mathrm{P}(1)) = \mathrm{soc}(\mathrm{P}(1)) = \mathrm{S}(1),$$

por la Proposición 3.2.27, la sucesión exacta anterior casi se escinde. Con lo cual, tenemos que $\mathrm{S}(2) = \tau(\mathrm{S}(1))$ y así $\mathrm{S}(2) \in \mathrm{S}(1)^{\perp_0}$. Ahora bien la resolución proyectiva minimal de $\mathrm{S}(1)$ está dada por

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & P(3) \arrow[r] & P(2) \arrow[rr] \arrow[dr] & & P(1) \arrow[r] & S(1) \arrow[r] & 0 \\
& & & S(2) \arrow[ur] & & &
\end{tikzcd}$$

Por lo que $\mathrm{pd}(\mathrm{S}(1)) = 2$ y así $\mathrm{S}(1)$ no es inclinante parcial.

4.3. Módulos inclinantes

Definición 4.3.1. *Sea $T \in \mathrm{mod}(\Lambda)$ inclinante parcial. Decimos que T es inclinante si satisface la siguiente propiedad adicional.*

TM3) Existe una sucesión exacta $0 \to \Lambda \to T' \to T'' \to 0$,

con T', $T'' \in \operatorname{add}(T)$.

Por el Lema 4.2.7, si T es un Λ-módulo inclinante, entonces T es fiel, dado que por hipótesis $\Lambda \in \operatorname{cogen}(T)$.
El siguiente lema es conocido como el Lema de Bongartz y justifica el nombre de módulo inclinante parcial, al dar una forma de completarlo a un módulo inclinante.

Lema 4.3.2. *Sea* $T \in \operatorname{mod}(\Lambda)$ *inclinante parcial. Entonces, existe un* Λ-*módulo* E *tal que* $T \oplus E$ *es un* Λ-*módulo inclinante.*

Demostración. Sean $\Gamma = \operatorname{End}_\Lambda(T)^{op}$ y $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ un conjunto de generadores del Γ-módulo $\operatorname{Ext}^1_\Lambda(T, \Lambda)$. Podemos representar cada e_i con una sucesión exacta $0 \to \Lambda \to E_i \to T \to 0$. Dichas sucesiones exactas inducen el siguiente diagrama conmutativo con filas exactas

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \Lambda^n \arrow[r] \arrow[d, "\nabla"'] & \oplus_{i=1}^n E_i \arrow[r] \arrow[d] & T^n \arrow[r] \arrow[d, "1_{T^n}"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \Lambda \arrow[r] & E \arrow[r] & T^n \arrow[r] & 0, \end{tikzcd} \tag{4.3.1}$$

donde $\nabla : \Lambda^n \to \Lambda$ es la co-diagonal y la segunda fila se obtiene de la primera haciendo el push-out.
Denotaremos por e al elemento de $\operatorname{Ext}^1_\Lambda(T^n, \Lambda)$ representado en (4.3.1) y $\mu_i : T \to T^n$ la i-ésima inclusión canónica. Luego, aplicando el funtor $\operatorname{Hom}_\Lambda(T, -)$ a la segunda fila de (4.3.1), tenemos la siguiente sucesión exacta de Γ-módulos

$$\cdots \to \operatorname{Hom}_\Lambda(T, T^n) \overset{\Delta_0}{\to} \operatorname{Ext}^1_\Lambda(T, \Lambda) \to \operatorname{Ext}^1_\Lambda(T, E) \to \operatorname{Ext}^1_\Lambda(T, T^n) = 0. \quad (*)$$

Ahora, veamos que el morfismo de conexión Δ_0 es un epimorfismo. En efecto, sea $1 \leq i \leq n$ y consideremos el siguiente diagrama conmutativo con filas exactas

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \Lambda \arrow[r] \arrow[d, "\mu_i''"'] & E_i \arrow[r] \arrow[d, "\mu_i'"] & T \arrow[r] \arrow[d, "\mu_i"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \Lambda^n \arrow[r] \arrow[d, "\nabla"'] & \oplus_{i=1}^n E_i \arrow[r] \arrow[d] & T^n \arrow[r] \arrow[d, "1_{T^n}"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \Lambda \arrow[r] & E \arrow[r] & T^n \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Dado que $\nabla\mu_i''=1_\Lambda$, obtenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \Lambda \arrow[r] \arrow[d, "1_\Lambda"'] & E_i \arrow[r] \arrow[d] & T \arrow[r] \arrow[d, "\mu_i"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \Lambda \arrow[r] & E \arrow[r] & T^n \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

Con lo cual $\Delta_0(\mu_i) = e_i$ y con ello Δ_0 es un epimorfismo. Luego, tenemos que $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(T, E) = 0$ por (*). Por otro lado, aplicando los funtores $\mathrm{Hom}_\Lambda(-, T)$ y $\mathrm{Hom}_\Lambda(-, E)$ a la segunda fila de (4.3.1), tenemos las siguientes sucesiones exactas

$$0 = \mathrm{Ext}^1_\Lambda(T^n, T) \to \mathrm{Ext}^1_\Lambda(E, T) \to \mathrm{Ext}^1_\Lambda(\Lambda, T) = 0$$

$$0 = \mathrm{Ext}^1_\Lambda(T^n, E) \to \mathrm{Ext}^1_\Lambda(E, E) \to \mathrm{Ext}^1_\Lambda(\Lambda, E) = 0$$

Concluimos que $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(E\oplus T, E\oplus T) = 0$. Por la Proposición 2.8.8, aplicado a la segunda fila de (4.3.1), se sigue que $\mathrm{pd}(E) \leq 1$. Luego, por la Proposición 2.8.10, obtenemos que $\mathrm{pd}(E \oplus T) \leq 1$. Finalmente, de la segunda fila de (4.3.1), resulta que el Λ-módulo $T \oplus E$ satisface la condición TM3). Por lo tanto $T \oplus E$ es un Λ-módulo inclinante. $\square$

El Λ-módulo E, construido en la prueba anterior, es conocido como el complemento de Bongartz de T, y la segunda fila (4.3.1), es llamada la sucesión exacta de Bongartz .

Proposición 4.3.3. *Sea E un complemento de Bongartz de un módulo inclinante parcial T. Entonces $T^{\perp_1} = (T \oplus E)^{\perp_1}$*

Demostración. Sea $M \in (T \oplus E)^{\perp_1}$. Entonces, $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(T \oplus E, M) = 0$ y dado que el funtor $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(-, M)$ es aditivo, obtenemos que $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(T, M) = 0$.
Recíprocamente, sean $M \in T^{\perp_1}$ y $0 \to \Lambda \to E \to T^n \to 0$ la sucesión exacta de Bongartz de T. Aplicamos el funtor $\mathrm{Hom}_\Lambda(-, M)$ a la sucesión anterior y obtenemos la siguiente sucesión exacta

$$0 = \mathrm{Ext}^1_\Lambda(T^n, M) \to \mathrm{Ext}^1_\Lambda(E, M) \to \mathrm{Ext}^1_\Lambda(\Lambda, M) = 0.$$

Luego, $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(E, M) = 0$ y por lo tanto $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(E \oplus T, M) = 0$. $\square$

Ahora daremos una lista de condiciones equivalentes para que un Λ-módulo inclinante parcial sea inclinante.

Teorema 4.3.4. *Sea $T \in \mathrm{mod}(\Lambda)$ inclinante parcial. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes.*

a) *T es inclinante.*

b) $T^{\perp_1} \cap T^{\perp_0} = \{0\}$.

c) $\mathrm{gen}(T) = T^{\perp_1}$.

d) *Para toda $f : T' \to M$ $\mathrm{add}(T)-$precubierta, con $M \in T^{\perp_1}$, se tiene que f es un epimorfismo y $\mathrm{Ker}(f) \in T^{\perp_1}$.*

e) ${}^{\perp_1}(T^{\perp_1}) \cap T^{\perp_1} = \mathrm{add}(T)$.

f) *Si $T \oplus E$ es un Λ-módulo inclinante parcial, entonces $E \in \mathrm{add}(T)$.*

g) *Para todo P proyectivo inescindible, existe una sucesión exacta*

$$0 \to P \to T' \to T'' \to 0$$

con T', $T'' \in \mathrm{add}(T)$.

h) $T^{\perp_0} = \mathrm{cogen}(\tau(T))$.

Demostración. $c) \iff h)$. Se sigue de la Proposición 4.2.3 y la Proposición 4.2.4. Por lo tanto sólo probaremos las primeras equivalencias.
$a) \implies b)$. Sea $M \in T^{\perp_1} \cap T^{\perp_0}$. Por hipótesis, existe una sucesión exacta

$$0 \to \Lambda \to T' \to T'' \to 0,$$

con $T', T'' \in \mathrm{add}(T)$. Aplicando el funtor $\mathrm{Hom}_\Lambda(-, M)$ a la sucesión anterior, obtenemos la siguiente sucesión exacta

$$0 = \mathrm{Hom}_\Lambda(T', M) \to \mathrm{Hom}_\Lambda(\Lambda, M) \to \mathrm{Ext}^1_\Lambda(T'', M) = 0.$$

Por lo tanto $M = 0$.
$b) \implies c)$. Por la Proposición 4.2.3 b), tenemos que $\mathrm{gen}(T) \subseteq T^{\perp_1}$. Sean $M \in T^{\perp_1}$, $f : T' \to M$ una $\mathrm{add}(T)$-precubierta de M. Aseguramos que f es un epimorfismo. En efecto, sea $f = i\mathrm{I}(f)$ la factorización de f a través de su imagen. Consideremos la siguiente sucesión exacta

$$0 \to \mathrm{Im}(f) \xrightarrow{i} M \xrightarrow{p} \mathrm{Coker}(f) \to 0.$$

Notemos que $\mathrm{Im}(f) \in T^{\perp_1}$, ya que $T^{\perp_1}$ es una clase de torsión (ver Proposición 4.2.3 c)). Luego, aplicando el funtor $\mathrm{Hom}_\Lambda(T, -)$ a la sucesión exacta anterior, obtenemos la siguiente sucesión exacta

$${}_\Lambda(T, \mathrm{Im}(f)) \xrightarrow{{}_\Lambda(T,i)} {}_\Lambda(T, M) \to {}_\Lambda(T, \mathrm{Coker}(f)) \to {}^1_\Lambda(T, \mathrm{Im}(f)) = 0.$$

Veamos que $\mathrm{Coker}(f) \in T^{\perp_0}$. En efecto, sea $g : T \to M$. Dado que f es una $\mathrm{add}(T)$-precubierta, existe $h : T \to T'$ tal que $g = fh = i(\mathrm{I}(f)h)$, con lo cual se tiene que $\mathrm{Hom}_\Lambda(T, \mathrm{Coker}(f)) = 0$. Por otro lado, puesto que $T^{\perp_1}$ es una clase de torsión y $M \in T^{\perp_1}$, tenemos que $\mathrm{Coker}(f) \in T^{\perp_1}$. Luego, $\mathrm{Coker}(f) \in T^{\perp_1} \cap T^{\perp_0} = \{0\}$, y así, f es un epimorfismo. Por lo tanto $M \in \mathrm{gen}(T)$.
c) $\implies$ *d*). Sean $M \in T^{\perp_1}$ y $f : T' \to M$ una $\mathrm{add}(T)$-precubierta. Por el Lema 4.1.14 f es un epimorfismo, ya que por hipótesis $T^{\perp_1} = \mathrm{gen}(T)$. Luego, tenemos la siguiente sucesión exacta

$$0 \to \mathrm{Ker}(f) \to T' \to M \to 0.$$

Aplicando el funtor $\mathrm{Hom}_\Lambda(T, -)$ a la sucesión exacta anterior, obtenemos la siguiente sucesión exacta

$$\cdots \to \mathrm{Hom}_\Lambda(T, T') \to \mathrm{Hom}_\Lambda(T, M) \to \mathrm{Ext}^1_\Lambda(T, \mathrm{Ker}(f)) \to \mathrm{Ext}^1_\Lambda(T, T'),$$

dado que $\mathrm{Hom}_\Lambda(T, f)$ es un epimorfismo y $T' \in \mathrm{gen}(T) = T^{\perp_1}$; concluimos que $\mathrm{Ker}(f) \in T^{\perp_1}$.
d) $\implies$ *e*). Sea $N \in \mathrm{add}(T)$. Por hipótesis, existe $E \in \mathrm{mod}(\Lambda)$ tal que $N \oplus E = T^n$. Dado que el funtor $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(T^n, -)$ es aditivo, tenemos que

$$\mathrm{Ext}^1_\Lambda(N, M) \oplus \mathrm{Ext}^1_\Lambda(E, M) = \mathrm{Ext}^1_\Lambda(T^n, M) = 0 \qquad \forall M \in T^{\perp_1}.$$

Por lo que $N \in {}^{\perp_1}(T^{\perp_1})$. Ahora bien, es claro que $N \in T^{\perp_1}$, lo cual implica que $N \in {}^{\perp_1}(T^{\perp_1}) \cap T^{\perp_1}$.
Recíprocamente, sea $N \in {}^{\perp_1}(T^{\perp_1}) \cap T^{\perp_1}$. Por hipótesis, existe una sucesión exacta

$$0 \to L \to T' \to N \to 0,$$

con $L \in T^{\perp_1}$ y $T' \in \mathrm{add}(T)$. Por consiguiente, la sucesión anterior se escinde y por lo tanto $N \in \mathrm{add}(T)$.
e) $\implies$ *f*). Sean $E \in \mathrm{mod}(\Lambda)$ tal que $T \oplus E$ es un Λ-módulo inclinante parcial y E' un complemento de Bongartz de T. Por hipótesis y la Proposición 4.3.3, tenemos que

$$E' \in \mathrm{add}(T \oplus E') = {}^{\perp_1}((T \oplus E')^{\perp_1}) \cap (T \oplus E')^{\perp_1} = {}^{\perp_1}(T^{\perp_1}) \cap T^{\perp_1} = \mathrm{add}(T).$$

Con lo cual T es inclinante. Ahora, sea $X \in T^{\perp_1}$. Por d), existe una sucesión exacta $0 \to L \to T' \to X \to 0$, con $L \in T^{\perp_1}$ y $T' \in \mathrm{add}(T)$. Aplicando el funtor $\mathrm{Hom}_\Lambda(E,-)$ a la sucesión anterior, tenemos la siguiente sucesión exacta

$$\mathrm{Ext}^1_\Lambda(E,T') \to \mathrm{Ext}^1_\Lambda(E,X) \to \mathrm{Ext}^2_\Lambda(E,L).$$

Ahora bien, como $T \oplus E$ es un Λ-módulo inclinante parcial, se sigue que

$$\mathrm{Ext}^1_\Lambda(E,T') = 0 = \mathrm{Ext}^2_\Lambda(E,L);$$

y con ello $E \in {}^{\perp_1}(T^{\perp_1}) \cap T^{\perp_1} = \mathrm{add}(T)$.
$f) \implies g)$. Sea P un Λ-módulo proyectivo inescindible. Por el Lema de Borgantz, existe un Λ-módulo E tal que $T \oplus E$ es un Λ-módulo inclinante; y por definición, existe una sucesión exacta $0 \to \Lambda \to L' \to L'' \to 0$ con L', $L'' \in \mathrm{add}(T \oplus E) = \mathrm{add}(T)$, ya que por hipótesis $E \in \mathrm{add}(T)$. Dado que Λ es una álgebra de artin, existe un split-epi $p : \Lambda \to P$ que induce el siguiente diagrama de pushout conmutativo con renglones exactos

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \Lambda \arrow[r] \arrow[d, "p"'] & L' \arrow[r] \arrow[d, "h"'] & L'' \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & P \arrow[r] & F \arrow[r] & L'' \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Sólo basta ver que $F \in \mathrm{add}(T \oplus E)$. En efecto, como p es un epimorfismo, se sigue que h es un epimorfismo. Por lo tanto $F \in \mathrm{gen}(T \oplus E) = (T \oplus E)^{\perp_1}$, puesto que $T \oplus E$ es inclinante. Por otro lado, sea $M \in (T \oplus E)^{\perp_1}$. Aplicando el funtor $\mathrm{Hom}_\Lambda(-,M)$ a la sucesión exacta de la fila inferior del anterior diagrama anterior, tenemos la siguiente sucesión exacta

$$0 = \mathrm{Ext}^1_\Lambda(L'',M) \to \mathrm{Ext}^1_\Lambda(F,M) \to \mathrm{Ext}^1_\Lambda(P,M) = 0.$$

Por lo tanto $F \in {}^{\perp_1}((T \oplus E)^{\perp_1}) \cap (T \oplus E)^{\perp_1} = \mathrm{add}(T \oplus E) = \mathrm{add}(T)$.
$g) \implies a)$. Podemos asumir que Λ es una R-álgebra de artin básica. Por lo tanto, tenemos una familia completa de proyectivos inescindibles $\{P_1, P_2, \cdots, P_n\}$ tal que $\oplus_{i=0}^n P_i = \Lambda$. Ahora bien, para cada $1 \leq i \leq n$, existe una sucesión exacta

$$0 \to P_i \to T_i' \to T_i'' \to 0$$

con T_i', $T_i'' \in \mathrm{add}(T)$. Dichas sucesiones inducen la siguiente sucesión exacta

$$0 \to \Lambda = \oplus_{i=1}^n P_i \to T' = \oplus_{i=1}^n T_i' \to \oplus_{i=1}^n T_i'' = T'' \to 0,$$

donde T', $T'' \in \mathrm{add}(T)$. □

El teorema anterior muestra que: si T es un Λ-módulo inclinante, entonces $\mathrm{add}(T) = {}^{\perp_1}(T^{\perp_1}) \cap T^{\perp_1}$. La siguiente proposición muestra quien es $(T^{\perp_1})^{\perp_1}$.

Proposición 4.3.5. *Sea $T \in \mathrm{mod}(\Lambda)$ inclinante. Entonces $\mathcal{I}(\Lambda) = (T^{\perp_1})^{\perp_1}$.*

Demostración. Por el Teorema 2.8.7, se tiene que $\mathcal{I}(\Lambda) \subseteq (T^{\perp_1})^{\perp_1}$.
Recíprocamente, sea $X \in (T^{\perp_1})^{\perp_1}$. Entonces, la envolvente inyectiva de X $\iota_0 : X \to \mathrm{I}_0(X)$, induce una sucesión exacta

$$0 \to X \to \mathrm{I}_0(X) \to \Omega^{-1}(M) \to 0.$$

Dado que, $\mathrm{I}_0(X) \in T^{\perp_1}$ y $T^{\perp_1}$ es una clase de torsión, tenemos que $\Omega^{-1}(M) \in T^{\perp_1}$. Por lo que $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(\Omega^{-1}(M), X) = 0$, y consecuentemente, la sucesión anterior se escinde; probándose que X es inyectivo. $\square$

Veamos un ejemplo de un módulo inclinante parcial y fiel que no es inclinante.

Ejemplo 4.3.6. Sea Λ el álgebra de caminos del siguiente carcaj

$$\begin{tikzcd} & \circ^4 \arrow[d, "\gamma"] & \\ \circ^1 & \circ^2 \arrow[l, "\beta"'] & \circ^3 \arrow[l, "\alpha"'] \end{tikzcd}$$

con la relación $\beta\alpha = 0$. Sea $T = \mathrm{P}(4) \oplus \mathrm{P}(3)$. Veamos que el módulo T es fiel. En efecto, tenemos que $\mathrm{rad}(\mathrm{P}(2)) = \mathrm{P}(1)$ y $\mathrm{rad}(\mathrm{P}(4)) = \mathrm{P}(3)$, con lo cual T es fiel por el Lema 4.2.7. Dado que T es proyectivo, es incinante parcial. Por otro lado, $\Lambda = T \oplus \mathrm{P}(1) \oplus \mathrm{P}(2)$ es inclinante parcial. Entonces, por el Teorema 4.3.4 f) T no es inclinante.

En lo que sigue, veremos algunas aplicaciones del Teorema 4.3.4.

Corolario 4.3.7. *Sean $T \in \mathrm{mod}(\Lambda)$ inclinante y $M \in T^{\perp_1}$. Entonces, existe un complejo acíclico*

$$T_\bullet : \cdots \to T_1 \xrightarrow{f_1} T_0 \xrightarrow{f_0} M \to 0$$

con $T_i \in \mathrm{add}(T)$, $\mathrm{Im}(f_i) \in T^{\perp_1}$ y $f_i : T_i \to \mathrm{Im}(f_i)$ una $\mathrm{add}(T)$-precubierta para todo $i \in \mathbb{N}$.

Demostración. Por el Teorema 4.3.4 d), tenemos la siguiente sucesión exacta

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & T_2 \arrow[rr] \arrow[dr] & & T_1 \arrow[rr] \arrow[dr] & & T_0 \arrow[r, "f_0"] & M \arrow[r] & 0 \\
& & \mathrm{Ker}(f_1) \arrow[ur] & & \mathrm{Ker}(f_0), \arrow[ur] & & &
\end{tikzcd}$$

con $T_i \in \mathrm{add}(T)$ y $\mathrm{Ker}(f_i) \in T^{\perp_1} \quad \forall i \in \mathbb{N}$. □

Corolario 4.3.8. *Sean $T \in \mathrm{mod}(\Lambda)$ inclinante y $\Gamma = \mathrm{End}(T)^{op}$. Entonces $M \in T^{\perp_1}$ si y sólo si el morfismo funtorial $\epsilon_M : T \otimes_\Gamma \mathrm{Hom}_\Lambda(T, M) \to M$ es un isomorfismo.*

Demostración. Supongamos que $\epsilon_M : T \otimes_\Gamma \mathrm{Hom}_\Lambda(T, M) \to M$ es un isomorfismo. Entonces, por el Lema 4.1.16 y el Teorema 4.3.4 c) tenemos que $M \in \mathrm{gen}(T) = T^{\perp_1}$.
Recíprocamente, sea $M \in T^{\perp_1}$. Por el Teorema 4.3.4 d), existe una sucesión exacta $0 \to L \to T' \to M \to 0$, con $L \in T^{\perp_1}$ y $T' \in \mathrm{add}(T)$. Luego, aplicamos el funtor $\mathrm{Hom}_\Lambda(T, -)$, tenemos la siguiente sucesión exacta

$$0 \to \mathrm{Hom}_\Lambda(T, L) \to \mathrm{Hom}_\Lambda(T, T') \to \mathrm{Hom}_\Lambda(T, M) \to 0.$$

Aplicando el funtor $T \otimes_\Gamma -$ a la sucesión anterior, tenemos el siguiente diagrama conmutativo con filas exactas

$$\begin{tikzcd}
T \otimes_\Gamma \mathrm{Hom}_\Lambda(T, L) \arrow[r] \arrow[d, "\epsilon_L"] & T \otimes_\Gamma \mathrm{Hom}_\Lambda(T, T') \arrow[r] \arrow[d, "\epsilon_{T'}"] & T \otimes_\Gamma \mathrm{Hom}_\Lambda(T, M) \arrow[r] \arrow[d, "\epsilon_M"] & 0 \\
L \arrow[r] & T' \arrow[r] & M \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Como ϵ_L es un epimorfismo y $\epsilon_{T'}$ es un isomorfismo, por el Lema de los cinco, concluimos que ϵ_M es un isomorfismo. □

Para concluir esta sección, daremos un ejemplo de un módulo inclinante cuyo par de torsión no se escinde y otro donde sí.

Ejemplo 4.3.9. Sea Λ el álgebra de caminos dada por el siguiente carcaj

$$\begin{tikzcd}
 & & \circ^3 \arrow[dl, "\beta"'] & \\
 & \circ^1 & & \circ^5 \arrow[ul, "\alpha"'] \arrow[dl, "\gamma"] \\
 & & \circ^4 \arrow[ul, "\delta"] \arrow[dl, "\epsilon"] & \\
 & \circ^2 & &
\end{tikzcd}$$

con relaciones $\beta\alpha = \delta\gamma$, $\epsilon\gamma = 0$.
Sea $T := \mathrm{P}(1) \oplus \mathrm{P}(4) \oplus \mathrm{P}(4)/\mathrm{S}(2) \oplus \mathrm{P}(5) \oplus \mathrm{I}(4)$. Note que los correspondientes vectores dimensión son

$$\begin{aligned}
\underline{\dim}(\mathrm{P}(1)) &= 10000, & \underline{\dim}(\mathrm{P}(4)) &= 11010,\\
\underline{\dim}(\mathrm{P}(4)/\mathrm{S}(2)) &= 10010, & \underline{\dim}(\mathrm{P}(5)) &= 10111,\\
\underline{\dim}(\mathrm{I}(4)) &= 00011.
\end{aligned}$$

Veamos que T es inclinante. En efecto, dado que P(1), P(4), P(5) son proyectivos; y por otra escinde tenemos las siguientes resoluciones proyectivas

$$0 \to \mathrm{P}(2) \to \mathrm{P}(4) \to \mathrm{P}(4)/\mathrm{S}(2) \to 0.$$

$$0 \to \mathrm{P}(3) \to \mathrm{P}(5) \to \mathrm{I}(4) \to 0,$$

se sigue que $\mathrm{pd}(T) \leq 1$.
Por otro lado, $\mathrm{P}(1) \oplus \mathrm{P}(4) \oplus \mathrm{P}(5)$ es proyectivo y $\mathrm{I}(1) = \mathrm{P}(5)$. Luego, por el Corolario 3.2.21, tenemos los siguientes isomorfismos.

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ext}^1_\Lambda(T,T) &\cong \mathrm{Ext}^1_\Lambda(\mathrm{P}(4)/\mathrm{S}(2) \oplus \mathrm{I}(4), \mathrm{P}(1) \oplus \mathrm{P}(4) \oplus \mathrm{P}(5))\\
&\cong \mathrm{D_R}(\mathrm{Hom}_\Lambda(\mathrm{P}(1) \oplus \mathrm{P}(4) \oplus \mathrm{P}(5), \tau(\mathrm{P}(4)/\mathrm{S}(2) \oplus \mathrm{I}(4))))\\
&\cong \mathrm{D_R}(\mathrm{Hom}_\Lambda(\mathrm{P}(1) \oplus \mathrm{P}(4) \oplus \mathrm{P}(5), \mathrm{S}(2) \oplus \mathrm{S}(3))) = 0.
\end{aligned}$$

Con lo cual, T es inclinante por el Teorema 4.3.4 g). Ahora bien, por el Corolario 3.2.21 $T^{\perp_1} = {}^{\perp_0}\tau(T) = {}^{\perp_0}\mathrm{S}(2) \oplus \mathrm{S}(3)$. Dado que no hay caminos en el carcaj de Auslander-Reiten de los siguientes módulos inescindibles, que denotaremos por su vector dimensión

$$01010, 00010, 10111, 00111, 00101, 00001, 00001$$

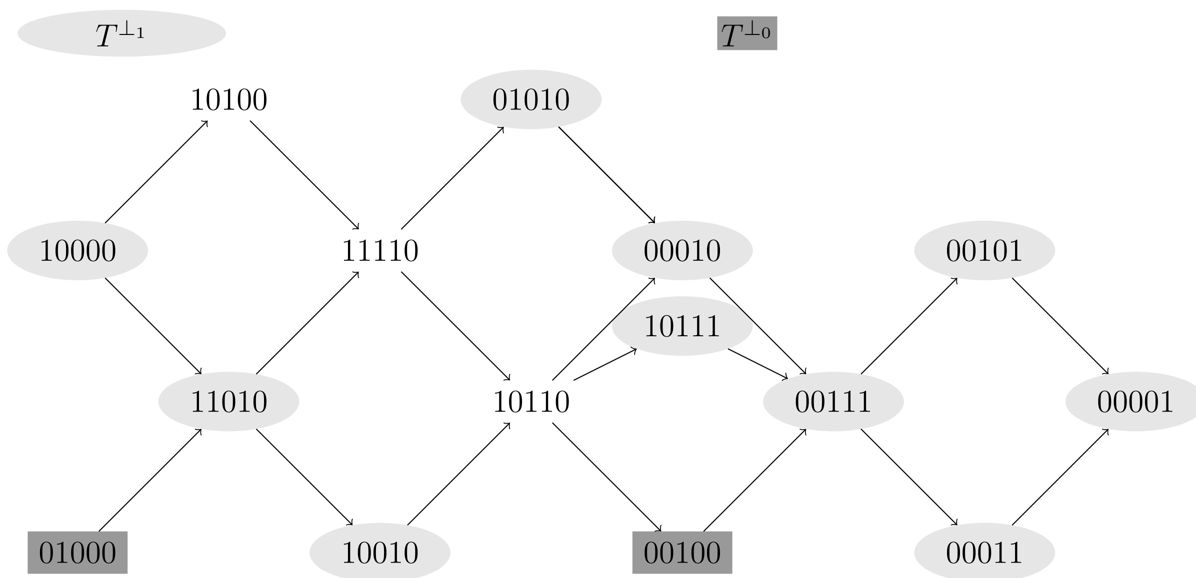
a S(2) y S(3), tenemos que los primeros se encuentran en $T^{\perp_1}$, y además $\mathrm{P}(1), \mathrm{P}(5), \mathrm{P}(4)/\mathrm{S}(2) \in T^{\perp_1}$, dado que son sumandos directos de T. Consideramos las siguientes sucesiones exactas, donde denotamos a los módulos inescindibles por su vector dimensión

$$0 \to 10010 \to 10110 \to 00100 \to 0,$$

$$0 \to 11010 \to 11110 \to 00100 \to 0,$$

$$0 \to 10000 \to 10100 \to 00100 \to 0,$$

con lo cual $10110, 11110, 10100 \notin T^{\perp_1}$ y $10110, 11110, 10100 \notin T^{\perp_0}$. Mientras que $\mathrm{S}(2), \mathrm{S}(3) \in T^{\perp_0}$, dado que T es inclinante. Esto se puede representar, mediante el siguiente carcaj de Auslander-Reiten, representando a cada Λ-módulo inescindible, por su vector de dimensión.



Lo cual muestra que el par de torsión no se escinde.

La siguiente clase de ejemplos, un poco más teórico, se le debe a Auslander, Platzeck y Reiten, y son los llamados APR-módulos inclinantes y se remontan a los orígenes de la teoría.

Ejemplo 4.3.10. Sean S(a) un Λ-módulo simple proyectivo no inyectivo y $T = \tau^{-1}(\mathrm{S(a)}) \oplus (\oplus_{b \neq a} P(b))$. Entonces T es inclinante.
En efecto, notamos que la sucesión que casi se escinde, que empieza desde S(a), es por el Corolario 3.2.25 de la forma

$$0 \to \mathrm{S(a)} \to P \to \tau^{-1}(\mathrm{S(a)}) \to 0,$$

con P proyectivo. Por lo tanto T cumple con las condiciones TM1) y TM3), porque ningún sumando de P es isomorfo a S(a). Dado que $\mathrm{pd}(T) \leq 1$ tenemos por el Corolario 3.2.21 que

$$\mathrm{Ext}^1_\Lambda(T,T) \cong \mathrm{D_R}(\mathrm{Hom}_\Lambda(T,\mathrm{S(a)})) = 0,$$

ya que $\tau(T) = \mathrm{S(a)}$; y por lo tanto, T es inclinante.
Por otro lado, sea M inescindible, entonces por el Corolaro 3.2.21 tenemos que $M \in T^{\perp_1}$ si y sólo si $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(T,M) \cong \mathrm{D_R}(\mathrm{Hom}_\Lambda(M,\mathrm{S(a)})) = 0$ y esto último es equivalente a que $M \neq \mathrm{S(a)}$. Mientras que $\mathrm{S(a)} = \tau(T) \in T^{\perp_0}$ por la Proposición 4.2.8. Por lo tanto el par de torsión $(T^{\perp_1}, T^{\perp_0})$ se escinde.

4.4. Progeneradores

Definición 4.4.1. *Un Λ-módulo $P \in \mathrm{mod}(\Lambda)$ se dice que es un progenerador si P es proyectivo y* $\mathrm{gen}(P) = \mathrm{mod}(\Lambda)$.

Proposición 4.4.2. *Si $P \in \mathrm{mod}(\Lambda)$ es un progenerador, entonces P es inclinante.*

Demostración. Por el Ejemplo 4.2.2 P es inclinante parcial, y por la Proposición 2.8.3, tenemos que $\mathrm{gen}(P) = \mathrm{mod}(\Lambda) = P^{\perp_1}$. Luego, por el Teorema 4.3.4 c), concluimos que P es inclinante. □

De la existencia de la sucesión exacta en TM3), se puede verificar que si un módulo inclinante es proyectivo entonces es un progenerador. A continuación daremos condiciones suficientes y necesarias en el álgebra Λ, para que los Λ-módulos inclinantes coincidan con los progeneradores.

Definición 4.4.3. *Sea R un anillo. La dimensión finitista pequeña de R se define como sigue*

$$\mathrm{fin.dim}(R) := \sup\{\mathrm{pd}(M) \mid \mathrm{pd}(M) < \infty \; M \in \mathrm{mod}(R)\}.$$

La conjetura finitista pequeña establecida por H. Bass en 1960, afirma que $\mathrm{fin.dim}(R)$ es un número finito, para cualquier anillo artiniano.

Teorema 4.4.4. *Las siguientes condiciones son equivalentes en* $\mathrm{mod}(\Lambda)$.

a) Todo módulo inclinante es un progenerador.

b) $\mathrm{fin.dim}(\Lambda) = 0$.

Demostración. $a) \implies b)$. Supongamos que $\mathrm{fin.dim}(\Lambda) \geq 1$. Luego, existe $M \in \mathrm{mod}(\Lambda)$, con $\mathrm{pd}(M)$=1. Sea

$$\mathrm{P}_\bullet(M) : 0 \to \mathrm{P}_1(M) \xrightarrow{\pi_1} \mathrm{P}_0(M) \xrightarrow{\pi_0} M \to 0$$

la resolución proyectiva minimal de M. Consideremos $\Gamma := \mathrm{End}_\Lambda(\mathrm{P}_1(M))^{op}$ y un conjunto de generadores $\{\pi_1, f_2, \cdots, f_n\}$ del Γ-módulo ${}_\Lambda(\mathrm{P}_1(M), \mathrm{P}_0(M))$. Luego,

$$f = [\pi_1, f_2, \cdots, f_n] : \mathrm{P}_1(M) \to \mathrm{P}_0(M)^n$$

es una $\mathrm{add}(\mathrm{P}_0(M))$-preenvolvente y un monomorfismo. Consideremos la sucesión exacta

$$\eta : 0 \to \mathrm{P}_1(M) \xrightarrow{f} \mathrm{P}_0(M)^n \to \mathrm{Coker}(f) \to 0.$$

Note que $\mathrm{Coker}(f) = \frac{\mathrm{P}_0(M) \oplus \mathrm{P}_0(M) \cdots \oplus \mathrm{P}_0(M)}{\mathrm{Im}(\pi_1) \oplus \mathrm{Im}(f_2) \oplus \cdots \oplus \mathrm{Im}(f_n)}$, con lo cual $\mathrm{Coker}(f) \cong M \oplus X$, y así $\mathrm{pd}(\mathrm{Coker}(f)) = 1$. Luego, aplicando el funtor $\mathrm{Hom}_\Lambda(-, \mathrm{P}_0(M))$ a η, tenemos la siguiente sucesión exacta

$${}_\Lambda(\mathrm{P}_0(M)^n, \mathrm{P}_0(M)) \xrightarrow{{}_\Lambda(f, \mathrm{P}_0(M))} {}_\Lambda(\mathrm{P}_1(M), \mathrm{P}_0(M)) \to {}^1_\Lambda(\mathrm{Coker}(f), \mathrm{P}_0(M)) \to 0.$$

Dado que f es una preenvolvente, se sigue que $\mathrm{Hom}_\Lambda(f, \mathrm{P}_0(M))$ es un epimorfismo, lo cual implica que $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(\mathrm{Coker}(f), \mathrm{P}_0(M)) = 0$. Por lo tanto, si aplicamos el funtor $\mathrm{Hom}_\Lambda(\mathrm{Coker}(f), -)$ a η, se tiene la siguiente sucesión exacta

$${}^1_\Lambda(\mathrm{Coker}(f), \mathrm{P}_0(M)^n) \to {}^1_\Lambda(\mathrm{Coker}(f), \mathrm{Coker}(f)) \to {}^2_\Lambda(\mathrm{Coker}(f), \mathrm{P}_1(M)) = 0,$$

ya que $\mathrm{pd}(\mathrm{Coker}(f)) = 1$. Así pues, $\mathrm{Coker}(f)$ es un Λ-módulo inclinante parcial, y por el Lema de Borgartz, existe un Λ-módulo F tal que $\mathrm{Coker}(f) \oplus F$ es un Λ-módulo inclinante de dimensión proyectiva 1.
$b) \implies a)$. Sea T un Λ-módulo inclinante. Por hipótesis $\mathrm{pd}(T)$=0, con lo cual T es proyectivo y por lo tanto T es un progenerador. □

Veamos una clase de anillos donde los módulos inclinantes y los progeneradores coincidan.

Definición 4.4.5. *Un álgebra Λ se dice que es auto-inyectiva (a izquierda) si el Λ-módulo regular es ${}_\Lambda\Lambda$ inyectivo.*

Teorema 4.4.6. *Sea Λ auto-inyectiva. Entonces, los únicos Λ-módulos inclinantes en* $\operatorname{mod}(\Lambda)$ *son los progeneradores.*

Demostración. Sea T un Λ-módulo inclinante. Luego, existe una sucesión exacta
$$0 \to \Lambda \to T' \to T'' \to 0,$$
con T', $T'' \in \operatorname{add}(T)$. Dado que ${}_\Lambda\Lambda$ es inyectivo, la sucesión se escinde, y por ello existe un epimorfismo $p : T^n \to \Lambda$. Entonces, por el Teorema 4.3.4 y el Teorema 2.8.6, tenemos que
$$\operatorname{gen}(T) = \operatorname{mod}(\Lambda) = T^{\perp_1}.$$
Por lo tanto T es un progenerador. $\square$

Veamos que fin.dim(Λ)=0 no implica que el álgebra Λ sea auto-inyectiva. Para ello, consideremos el siguiente ejemplo debido a I. Assem (ver [Ha, 2.14 (d)]).

Ejemplo 4.4.7. Sea Λ la siguiente álgebra de caminos dada por el siguiente carcaj
$$\begin{tikzcd}
\circ^1 \arrow[dr, "\alpha"] & & \circ^2 \arrow[dl, "\beta"'] \\
& \circ^3 \arrow[dl, "\gamma"] \arrow[dr, "\delta"'] & \\
\circ^4 \arrow[uu, "\epsilon"] & & \circ^5 \arrow[uu, "\zeta"']
\end{tikzcd}$$
con la relación $\mathcal{F}^2 = 0$.
Es claro que Λ no es auto-inyectiva, puesto que P(3) no es inyectivo. Veamos que todo inescindible no proyectivo tiene dimensión proyectiva infinita. En efecto, $\{\mathrm{S}(1), \mathrm{S}(2), \mathrm{S}(3), \mathrm{S}(4), \mathrm{S}(5), \mathrm{I}(3)\}$ es una lista completa de inescindibles no proyectivos. Ahora, calculemos la resolución proyectiva minimal de S(3).
$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & \mathrm{P}(3) \arrow[r] \arrow[dr] & \mathrm{P}(4) \oplus \mathrm{P}(5) \arrow[r] \arrow[dr] & \mathrm{P}(1) \oplus \mathrm{P}(2) \arrow[r] \arrow[dr] & \mathrm{P}(3) \arrow[r] & \mathrm{S}(3) \arrow[r] & 0, \\
& & \mathrm{S}(3) \arrow[u] & \mathrm{S}(4) \oplus \mathrm{S}(5) \arrow[u] & \mathrm{S}(1) \oplus \mathrm{S}(2) \arrow[u] & &
\end{tikzcd}$$

donde el renglón inferior son las sizigias de la resolución. Por lo que S(3) tiene dimensión proyectiva infinita.
Analogámente, $\mathrm{S}(1), \mathrm{S}(2), \mathrm{S}(4), \mathrm{S}(5)$ e $\mathrm{I}(3)$ tienen dimensión proyectiva infinita. Por lo tanto $\mathrm{fin.dim}(\Lambda) = 0$.

4.5. El Teorema de Brenner y Butler

Lema 4.5.1. *Sean $T \in \mathrm{mod}(\Lambda)$ inclinante, $\Gamma := \mathrm{End}_\Lambda(T)^{op}$, M, $N \in T^{\perp_1}$. Entonces, tenemos los siguientes isomorfismos naturales de R-módulos.*

a) $\mathrm{Hom}_\Lambda(M, N) \cong \mathrm{Hom}_\Gamma(\mathrm{Hom}_\Lambda(T, M), \mathrm{Hom}_\Lambda(T, N))$.

b) $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(M, N) \cong \mathrm{Ext}^1_\Gamma(\mathrm{Hom}_\Lambda(T, M), \mathrm{Hom}_\Lambda(T, N))$.

Demostración. a). Por el Corolario 4.3.7 tenemos un complejo acíclico

$$T_\bullet : \cdots \to T_2 \xrightarrow{f_2} T_1 \xrightarrow{f_1} T_0 \xrightarrow{f_0} M \to 0,$$

con $T_i \in \mathrm{add}(T)$ para toda $i \in \mathbb{N}$. Por la propiedad universal del Kernel, tenemos el siguiente diagrama conmutativo y exacto

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & {}_\Lambda(M,N) \arrow[r] \arrow[d, dashed] & {}_\Lambda(T_0,N) \arrow[r] \arrow[d] & {}_\Lambda(T_1,N) \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & {}_\Gamma({}_\Lambda(T,M), {}_\Lambda(T,N)) \arrow[r] & {}_\Gamma({}_\Lambda(T,T_0), {}_\Lambda(T,N)) \arrow[r] & {}_\Gamma({}_\Lambda(T,T_1), {}_\Lambda(T,N))
\end{tikzcd}$$

Por el Teorema 3.1.14, tenemos que los últimos dos morfismos verticales son isomorfismos, y por el lema de los 5, concluimos que

$$\mathrm{Hom}_\Lambda(M, N) \cong \mathrm{Hom}_\Gamma(\mathrm{Hom}_\Lambda(T, M), \mathrm{Hom}_\Lambda(T, N));$$

lo cual prueba a).
b). Por a) tenemos el siguiente isomorfismo en $\mathrm{com}^\bullet(\Lambda)$

$$\mathrm{com}_\bullet\mathrm{Hom}_\Lambda(T_\bullet, N) \cong \mathrm{com}_\bullet\mathrm{Hom}_\Gamma(\mathrm{com}_\bullet\mathrm{Hom}_\Lambda(T, T_\bullet), \mathrm{Hom}_\Lambda(T, N)).$$

Dado que, por el Teorema 3.1.14, $\mathrm{com}_\bullet\mathrm{Hom}_\Lambda(T, T_\bullet)$ es una resolución proyectiva de $\mathrm{Hom}_\Lambda(T, M)$, ya que f_0 es una $\mathrm{add}(T)$-precubierta, se sigue que

$$\mathrm{H}^1(\mathrm{Hom}_\Lambda(T_\bullet, N)) \cong \mathrm{Ext}^1_\Gamma(\mathrm{Hom}_\Lambda(T, M), \mathrm{Hom}_\Lambda(T, N)).$$

Por otro lado, consideremos la sucesión exacta

$$0 \to \mathrm{Im}(\mathrm{f}_1) \xrightarrow{i} T_0 \to M \to 0,$$

que induce la siguiente sucesión exacta

$$\mathrm{Hom}_\Lambda(T_0, N) \overset{\mathrm{Hom}_\Lambda(i,N)}{\to} \mathrm{Hom}_\Lambda(\mathrm{Im}(f_1), N) \to \mathrm{Ext}^1_\Lambda(M, N) \to 0.$$

Con lo cual $\mathrm{Coker}(\mathrm{Hom}_\Lambda(i, N)) = \mathrm{Ext}^1_\Lambda(M, N)$. Consideremos la factorización de $\mathrm{Hom}_\Lambda(f_1, N) = \iota \mathrm{I}(\mathrm{Hom}_\Lambda(f_1, N))$ a través de su imagen. Luego, $\mathrm{Hom}_\Lambda(f_2, N)\iota = 0$, dado que $\mathrm{I}(\mathrm{Hom}_\Lambda(f_1, N))$ es un epimorfismo. Por lo tanto, existe un único morfismo, por la propiedad universal del Cokernel $\alpha : \mathrm{Im}(\mathrm{Hom}_\Lambda(f_1, N)) \to \mathrm{Hom}_\Lambda(\mathrm{Im}(f_1), N)$, tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_\Lambda(T_0, N) \arrow[rr, "\mathrm{Hom}_\Lambda(f_1,N)"] \arrow[dr, "\mathrm{I}(\mathrm{Hom}_\Lambda(f_1,N))"] \arrow[dd, equal] & & \mathrm{Hom}_\Lambda(T_1, N) \\
& \mathrm{Im}\mathrm{Hom}_\Lambda(f_1, N) \arrow[ur, "\iota"] \arrow[dr, "\exists!\, \alpha"] & \\
\mathrm{Hom}_\Lambda(T_0, N) \arrow[rr, "\mathrm{Hom}_\Lambda(i,N)"'] & & \mathrm{Hom}_\Lambda(\mathrm{Im}(f_1), N). \arrow[uu, "\mathrm{Hom}_\Lambda(p,N)"']
\end{tikzcd}$$

Ya que α es un monomorfismo, porque ι es un monomorfismo y $\mathrm{I}(\mathrm{Hom}_\Lambda(f_1, N))$ es un epimorfismo, tenemos que

$$\mathrm{Im}\mathrm{Hom}_\Lambda(f_1, N) \cong \mathrm{Hom}_\Lambda(\mathrm{Im}(f_1), N).$$

Por lo tanto

$$\mathrm{H}^1\mathrm{com}_\bullet(T_\bullet, N) \cong \mathrm{Hom}_\Lambda(\mathrm{Im}(f_1), N)/\mathrm{Im}\mathrm{Hom}_\Lambda(f_1, N) = \mathrm{Coker}(\mathrm{Hom}_\Lambda(i, N)),$$

y así $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(\mathrm{M}, \mathrm{N}) \cong \mathrm{Ext}^1_\Gamma(\mathrm{Hom}_\Lambda(\mathrm{T}, \mathrm{M}), \mathrm{Hom}_\Lambda(\mathrm{T}, \mathrm{N}))$. □

Sea T un Λ-módulo inclinante. La observación crucial, en la teoría de inclinación, es que T es un Γ^{op}-módulo inclinante, con $\Gamma := \mathrm{End}(T)^{op}$, como lo muestra la siguiente proposición.

Proposición 4.5.2. *Sean T un Λ-módulo inclinante y $\Gamma := \mathrm{End}(T)^{op}$. Entonces T es un Γ^{op}-módulo inclinante.*

Demostración. Dado que T es inclinante, existe una sucesión exacta

$$0 \to \Lambda \to T' \to T'' \to 0,$$

con T', $T'' \in \operatorname{add}(T)$. Aplicando el funtor $\operatorname{Hom}_\Lambda(-,T)$ a la sucesión exacta anterior, tenemos la siguiente sucesión exacta

$$0 \to \operatorname{Hom}_\Lambda(T'',T) \to \operatorname{Hom}_\Lambda(T',T) \to \operatorname{Hom}_\Lambda(\Lambda,T) \cong T \to 0 = \operatorname{Ext}^1_\Lambda(T'',T).$$

Como $\operatorname{Hom}_\Lambda(T'',T)$, $\operatorname{Hom}_\Lambda(T',T) \in \mathcal{P}(\Gamma^{op})$, ya que los Γ^{op}-módulos anteriores son sumandos directos de copias de Γ^{op}, se sigue que $\operatorname{pd}({}_{\Gamma^{op}}T) \leq 1$.
Por otro lado, usando el Lema 3.1.15, la Proposición 3.1.3, y el Lema 4.5.1 b), tenemos los siguientes isomorfismos de R-módulos

$$\begin{aligned}\operatorname{Ext}^1_{\Gamma^{\mathrm{op}}}(T,T) &\cong \operatorname{Ext}^1_\Gamma(\mathrm{D}_\Lambda(T),\mathrm{D}_\Lambda(T))\\ &\cong \operatorname{Ext}^1_\Gamma(\operatorname{Hom}_\Lambda(T,\mathrm{D}_{\Lambda^{\mathrm{op}}}(\Lambda)),\operatorname{Hom}_\Lambda(T,\mathrm{D}_{\Lambda^{\mathrm{op}}}(\Lambda)))\\ &\cong \operatorname{Ext}^1_\Lambda(\mathrm{D}_{\Lambda^{\mathrm{op}}}(\Lambda),\mathrm{D}_{\Lambda^{\mathrm{op}}}(\Lambda)) = 0\end{aligned}$$

Por último, dado que $\operatorname{pd}({}_\Lambda T) \leq 1$, existe una sucesión exacta

$$0 \to Q \to P \to T \to 0$$

con P, Q Λ-módulos proyectivos, que induce una sucesión exacta

$$0 \to \Gamma^{op} = \operatorname{Hom}_\Lambda(T,T) \to \operatorname{Hom}_\Lambda(P,T) \to \operatorname{Hom}_\Lambda(Q,T) \to \operatorname{Ext}^1_\Lambda(T,T) = 0.$$

Puesto que, $\operatorname{Hom}_\Lambda(P,T)$, $\operatorname{Hom}_\Lambda(Q,T) \in \operatorname{add}({}_{\Gamma^{op}}T)$, concluimos que $T \in \operatorname{mod}(\Gamma^{op})$ es inclinante. □

Proposición 4.5.3. *Sean T un Λ-módulo inclinante y $\Gamma := \operatorname{End}(T)^{op}$. Entonces, las R-álgebras $\operatorname{End}_{\Gamma^{\mathrm{op}}}(T)$ y Λ son isomorfas.*

Demostración. Para cada $a \in \Lambda$, definimos

$$\phi_a : T \to T, \qquad t \mapsto at.$$

Note que $\phi_a \in \operatorname{End}_{\Gamma^{op}}(T)$. Consideremos

$$\varphi : \Lambda \to \operatorname{End}_{\Gamma^{\mathrm{op}}}(T), \qquad a \mapsto \phi_a.$$

Es fácil, ver que φ es un morfismo de R-álgebras.
Sea $a \in \Lambda$ tal que $\varphi(a) = 0$. Por definición $\varphi(a)(t) = at = 0\ \forall\, t \in T$. Entonces

$a = 0$, ya que T es fiel. Por otro lado, tenemos los siguientes isomorfismos de R-módulos

$$\begin{aligned}
\mathrm{End}_{\Gamma^{\mathrm{op}}}(T) &\cong \mathrm{End}_{\Gamma}(\mathrm{D}_{\Lambda}(T)) \\
&\cong \mathrm{End}_{\Gamma}(\mathrm{Hom}_{\Lambda}(T, \mathrm{D}_{\Lambda^{\mathrm{op}}}(\Lambda))) && \text{(Proposición 3.1.3)} \\
&\cong \mathrm{End}_{\Lambda}(\mathrm{D}_{\Lambda^{\mathrm{op}}}(\Lambda)) && \text{(Lema 4.5.1 a))} \\
&\cong \mathrm{End}_{\Lambda^{\mathrm{op}}}(\Lambda) \cong \Lambda.
\end{aligned}$$

Dado que $\mathrm{End}_{\Gamma^{op}}(T)$ y Λ son R-módulos de longitud finita, del morfismo inyectivo $\varphi : \Lambda \to \mathrm{End}_{\Gamma^{op}}(T)$ de R-álgebras y del isomorfismo de R-módulos $\mathrm{End}_{\Gamma^{op}}(T) \cong \Lambda$, concluimos finalmente que φ es un isomorfismo de R-álgebras. $\square$

Proposición 4.5.4. *Para un Λ-módulo inclinante T y $\Gamma := \mathrm{End}(T)^{op}$, las siguientes condiciones se satisfacen.*

a) $T_\Gamma^{\top_0} = {}^{\perp_0}\mathrm{D}_{\Gamma^{\mathrm{op}}}(T_\Gamma) = \mathrm{D}_{\Gamma^{\mathrm{op}}}(T_\Gamma^{\perp_0}) = \mathrm{D}_{\Gamma^{\mathrm{op}}}(\mathrm{cogen}(\tau(T)_\Gamma))$.

b) $T_\Gamma^{\top_1} = {}^{\perp_1}\mathrm{D}_{\Gamma^{\mathrm{op}}}(T_\Gamma) = \mathrm{D}_{\Gamma^{\mathrm{op}}}(T_\Gamma^{\perp_1}) = \mathrm{D}_{\Gamma^{\mathrm{op}}}(\mathrm{gen}(T_\Gamma))$.

c) $(T_\Gamma^{\top_0}, T_\Gamma^{\top_1})$ *es un par de torsión en* $\mathrm{mod}(\Gamma)$.

Demostración. a). La primera igualdad se da por el Teorema 3.1.16. Es fácil ver la igualdad ${}^{\perp_0}\mathrm{D}_{\Gamma^{\mathrm{op}}}(T_\Gamma) = \mathrm{D}_{\Gamma^{\mathrm{op}}}(T_\Gamma^{\perp_0})$, y la última igualdad, se sigue de la Proposición 4.5.2 y el Teorema 4.3.4 h).
b). Se tiene similarmente de a), usando el Teorema 4.3.4 c).
c). Se sigue del Teorema 4.3.4 y el Ejemplo 4.1.3. $\square$

Sean T un Λ-módulo inclinante y $\Gamma := \mathrm{End}_\Lambda(T)^{op}$. Para el siguiente lema, consideremos los isomorfismos naturales definidos para cada $Y \in \mathrm{mod}(\Gamma)$:

$$\delta_Y : Y \to \mathrm{Hom}_\Lambda(T, T \otimes_\Gamma Y),$$

dado por $(y \mapsto (t \mapsto t \otimes y))$; el isomorfismo evaluación

$$\gamma_Y : Y \to \mathrm{D}_{\Gamma^{\mathrm{op}}}\mathrm{D}_\Gamma(Y), \qquad \gamma_Y(y)(f) = f(y);$$

y el isomorfismo del Teorema 3.1.16

$$\eta_Y : T \otimes_\Gamma Y \to \mathrm{D}_{\Lambda^{\mathrm{op}}}\mathrm{Hom}_{\Gamma^{\mathrm{op}}}(T, \mathrm{D}_\Gamma(Y)), \qquad \eta_Y(t \otimes y)(f) = f(t)(y).$$

Si $M \in \mathrm{mod}(\Lambda^{op})$, tenemos el siguiente morfismo natural, por la Proposición 4.5.2 y la Proposición 4.5.3

$$\mu_M : T \otimes_{\Lambda^{op}} M \to \mathrm{D}_\Gamma \mathrm{Hom}_\Lambda(T, \mathrm{D}_{\Lambda^{\mathrm{op}}}(M)),$$

dado por $\eta_M(t \otimes m)(f) = f(t)(m)$, el cual es un isomorfismo por el Teorema 3.1.16.

Lema 4.5.5. *Usando la notación anterior, existe un isomorfismo natural* Φ, *tal que el siguiente diagrama de transformaciones naturales es conmutativo* $\forall\ Y \in \mathrm{mod}(\Gamma)$

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "\delta_Y"] \arrow[d, "\gamma_Y"'] & \mathrm{Hom}_\Lambda(T, T \otimes_\Gamma Y) \arrow[d, "\Phi_Y"] \\
\mathrm{D}_{\Gamma^{\mathrm{op}}}\mathrm{D}_\Gamma(Y) \arrow[r, "\mathrm{D}_{\Gamma^{\mathrm{op}}}(\epsilon_{\mathrm{D}_\Gamma(Y)})"'] & \mathrm{D}_{\Gamma^{\mathrm{op}}}(\mathrm{T} \otimes_{\Lambda^{\mathrm{op}}} \mathrm{Hom}_{\Gamma^{\mathrm{op}}}(T, \mathrm{D}_\Gamma(Y)).
\end{tikzcd}$$

En particular, δ_Y *es un isomorfismo si y sólo si* $\epsilon_{\mathrm{D}_\Gamma(Y)}$ *es un isomorfismo.*

Demostración. Sea $Y \in \mathrm{mod}(\Gamma)$. Consideremos los siguientes isomorfismos naturales

$${}_{\Lambda}(T,{}^{\Gamma}(T \otimes Y)) \xrightarrow{{}_{\Lambda}(T,\eta_Y)} {}_{\Lambda}(T, \mathrm{D}_{\Lambda^{\mathrm{op}}}({}_{\Gamma^{op}}(T, \mathrm{D}_\Gamma(Y))))$$

$${}_{\Lambda}(T, \mathrm{D}_{\Lambda^{\mathrm{op}}}({}_{\Gamma^{op}}(T, \mathrm{D}_\Gamma(Y)))) \xrightarrow{\gamma_Z} \mathrm{D}_{\Gamma^{\mathrm{op}}}\mathrm{D}_{\Gamma\Lambda}(T, \mathrm{D}_{\Lambda^{\mathrm{op}}}({}_{\Gamma^{\mathrm{op}}}(T, \mathrm{D}_\Gamma(Y))))$$

$$\mathrm{D}_{\Gamma^{\mathrm{op}}}\mathrm{D}_{\Gamma\Lambda}(T, \mathrm{D}_{\Lambda^{\mathrm{op}}}({}_{\Gamma^{\mathrm{op}}}(T, \mathrm{D}_\Gamma(Y)))) \xrightarrow{\mathrm{D}_{\Gamma^{\mathrm{op}}}(\mu_W)} \mathrm{D}_{\Gamma^{\mathrm{op}}}({}^{\Lambda^{op}}(T,{}_{\Gamma^{op}}(T, \mathrm{D}_\Gamma(Y))),$$

con $Z = \mathrm{Hom}_\Lambda(T, \mathrm{D}_{\Lambda^{\mathrm{op}}}\mathrm{Ext}^1_{\Gamma^{\mathrm{op}}}(T, \mathrm{D}_\Gamma(Y)))$ y $W = \mathrm{Hom}_{\Gamma^{\mathrm{op}}}(T, \mathrm{D}_\Gamma(Y))$. Definimos

$$\Phi_Y := \mathrm{D}_{\Gamma^{\mathrm{op}}}(\mu_W)\gamma_Z \mathrm{Hom}_\Lambda(T, \eta_Y).$$

Veamos que Φ_Y satisface las hipótesis del Lema. En efecto, sean $y \in Y$, $t \in T$ y $f \in \mathrm{Hom}_{\Gamma^{\mathrm{op}}}(T, \mathrm{D}_\Gamma(Y))$. Entonces,

$$\begin{aligned}
\mathrm{D}_{\Gamma^{\mathrm{op}}}(\epsilon_{\mathrm{D}_\Gamma(Y)})(\gamma_Y(y)(t \otimes f)) &= \gamma_Y(y)\epsilon_{\mathrm{D}_\Gamma(Y)}(t \otimes f) \\
&= \epsilon_{\mathrm{D}_\Gamma(Y)}(t \otimes f)(y) = f(t)(y).
\end{aligned}$$

Por otro lado, tenemos la siguientes igualdades

$$\begin{aligned}
\Phi_Y \delta_Y(y)(t \otimes f) &= \mathrm{D}_{\Gamma^{\mathrm{op}}}(\mu_W)\gamma_Z \mathrm{Hom}_\Lambda(T, \eta_Y)\delta_Y(y)(t \otimes f) \\
&= \gamma_Z \eta_Y \delta_Y(y)\mu_W(t \otimes f) \\
&= \mu_W(t \otimes f)\eta_Y \delta_Y(y) \\
&= \eta_Y \delta_Y(y)(t)(f) \\
&= \eta_Y(t \otimes y)(f) = f(t)(y).
\end{aligned}$$

□

Corolario 4.5.6. *Usando la notación anterior, se tiene que* $Y \in T_\Gamma^{\top_1}$ *si y sólo si* $\delta_Y : Y \to \mathrm{Hom}_\Lambda(T, T \otimes_\Gamma Y)$ *es un isomorfismo.*

Demostración. Dado que T es un Γ^{op}-módulo inclinante, tenemos las siguientes equivalencias

$$\begin{aligned}
Y \in T_\Gamma^{\top_1} &\iff \mathrm{D}_\Gamma(Y) \in T_\Gamma^{\perp_1}. && \text{(Proposición 4.5.4)} \\
&\iff \epsilon_{\mathrm{D}_\Gamma(Y)} \quad \text{es un isomorfismo.} && \text{(Corolario 4.3.8)} \\
&\iff \delta_Y \quad \text{es un isomorfismo.} && \text{(Lema 4.5.5)}
\end{aligned}$$

□

Ahora podemos probar el resultado principal de este capítulo, que establece una relación entre $\mathrm{mod}(\Lambda)$ y $\mathrm{mod}(\Gamma)$. Dicho resultado es conocido como el Teorema de Brenner y Butler.

Teorema 4.5.7. *Sea T un Λ-módulo inclinante y $\Gamma := \mathrm{End}_\Lambda(T)^{op}$. Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen.*

a) Los funtores $\mathrm{Hom}_\Lambda(T, -) : T^{\perp_1} \to T_\Gamma^{\top_1}$ *y* $T \otimes_\Gamma - : T_\Gamma^{\perp_1} \to T^{\perp_1}$ *son equivalencias casi-inversas.*

b) Los funtores $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(T, -) : T^{\perp_0} \to T_\Gamma^{\top_0}$ *y* $\mathrm{Tor}_1^\Gamma(T, -) : T_\Gamma^{\perp_0} \to T^{\perp_0}$ *son equivalencias casi-inversas.*

Demostración. a). Sea $M \in T^{\perp_1}$. Veamos que $\mathrm{Hom}_\Lambda(T, M) \in T_\Gamma^{\top_1}$. En efecto, por el Teorema 4.3.4 d) existe una sucesión exacta

$$0 \to L \to T' \to M \to 0$$

con $T' \in \operatorname{add}(T)$ y $L \in T^{\perp_1}$. Aplicando el funtor $\operatorname{Hom}_\Lambda(T, -)$ a la sucesión exacta anterior, obtenemos la siguiente sucesión exacta

$$0 \to \operatorname{Hom}_\Lambda(T, L) \to \operatorname{Hom}_\Lambda(T, T') \to \operatorname{Hom}_\Lambda(T, M) \to 0.$$

Luego, aplicamos el funtor $T \otimes_\Gamma -$ a la sucesión exacta anterior, tenemos el siguiente diagrama conmutativo con filas exactas, puesto que $\operatorname{Hom}_\Lambda(T, T') \in \mathcal{P}(\Gamma)$ y consecuentemente $\operatorname{Tor}_1^\Gamma(T, \operatorname{Hom}_\Lambda(T, T')) = 0$

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & {}^{\Gamma}_{1}(T, {}_{\Lambda}(T, M)) \arrow[r] & {}^{\Gamma}(T, {}_{\Lambda}(T, L)) \arrow[r] \arrow[d, "\epsilon_L"'] & {}^{\Gamma}(T, {}_{\Lambda}(T, T')) \arrow[d, "\epsilon_{T'}"'] \\
 & 0 \arrow[r] & L \arrow[r] & T'.
\end{tikzcd}$$

Por el Corolario 4.3.8, tenemos que ϵ_L, $\epsilon_{T'}$ son isomorfismos. Con lo cual $\operatorname{Tor}_1^\Gamma(T, \operatorname{Hom}_\Lambda(T, M)) \cong 0$, por el Lema de los cinco.
Recíprocamente, sea $Y \in T_\Gamma^{\top_1}$. Entonces, existe un epimorfismo $p : \Gamma^n \to Y$, que induce otro epimorfismo $q : T^n \cong T \otimes_\Gamma \Gamma^n \overset{T\otimes p}{\to} T \otimes_\Gamma Y$, y así, por el Teorema 4.3.4 c), se sigue que, $T \otimes_\Gamma Y \in \operatorname{gen}(T) = T^{\perp_1}$.
Por el Corolario 4.3.8 ϵ_M es un ismorfismo natural y del Lema 4.5.6, se tiene que, δ_Y es un isomorfismo funtorial. Concluimos que, $T^{\perp_1}$ y $T_\Gamma^{\top_1}$ son categorías equivalentes.
b). Sean $N \in T^{\perp_0}$ y $0 \to N \to I \to J \to 0$ una sucesión exacta, con $I \in \mathcal{I}(\Lambda)$. Dado que $I \in T^{\perp_1}$, se tiene que $J \in T^{\perp_1}$, ya que $T^{\perp_1}$ es una clase de torsión. Luego, aplicamos el funtor $\operatorname{Hom}_\Lambda(T, -)$ a la sucesión exacta anterior, obtenemos la siguiente sucesión exacta

$$0 \to \operatorname{Hom}_\Lambda(T, I) \to \operatorname{Hom}_\Lambda(T, J) \to \operatorname{Ext}_\Lambda^1(T, N) \to 0.$$

Aplicando el funtor $T \otimes_\Gamma -$ a la sucesión exacta anterior, se tiene el siguiente diagrama conmutativo con filas exactas, puesto que $J \in T^{\perp_1}$, y así, $\operatorname{Hom}_\Lambda(T, J) \in T_\Gamma^{\top_1}$ por a)

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & {}^{\Gamma}_{1}(T, {}^{1}_{\Lambda}(T, N)) \arrow[r] \arrow[d, "\exists!\ \epsilon'_N"'] & {}^{\Gamma}(T, {}_{\Lambda}(T, I)) \arrow[r] \arrow[d, "\epsilon_I"'] & {}^{\Gamma}(T, {}_{\Lambda}(T, J)) \arrow[r] \arrow[d, "\epsilon_J"'] & {}^{\Gamma}(T, {}^{1}_{\Lambda}(T, N)) \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & N \arrow[r] & I \arrow[r] & J \arrow[r] & 0, &
\end{tikzcd}$$

donde ϵ'_N esta dada por la propiedad universal del Kernel. Por el Corolario 4.3.8, ϵ_I, ϵ_J son isomorfismos. Luego se sigue, del Lema de los cinco, que ϵ'_N

es un isomorfismo y $T \otimes_\Gamma \mathrm{Ext}^1_\Lambda(T,N) \cong 0$, con esto $T \otimes_\Gamma \mathrm{Ext}^1_\Lambda(T,N) \cong N$ y $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(T,N) \in T_\Gamma^{\top_0}$.
Dualmente, sean $X \in T_\Gamma^{\top_0}$ y $0 \to Q \to P \to X \to 0$ una sucesión exacta con $P \in \mathcal{P}(\Gamma)$. Por la Proposición 4.5.4, $T_\Gamma^{\top_0}$ es una clase libre de torsión, y se sigue de la Proposición 4.1.7, que $Q \in T_\Gamma^{\top_1}$. Por otro lado, aplicando el funtor $T \otimes_\Gamma -$ a la sucesión exacta anterior, obtenemos la siguiente sucesión exacta

$$0 \to \mathrm{Tor}_1^\Gamma(T,X) \to T \otimes_\Gamma Q \to T \otimes_\Gamma P \to 0.$$

Por a), tenemos que $T \otimes_\Gamma Q \in T^{\perp_1}$. Aplicando el funtor $\mathrm{Hom}_\Lambda(T,-)$, por lo anterior, obtenemos el siguiente diagrama conmutativo con filas exactas

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[r] & Q \arrow[r] \arrow[d, "\delta_Q"] & P \arrow[r] \arrow[d, "\delta_P"'] & X \arrow[r] \arrow[d, "\delta'_X"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & {}_\Lambda(T, {}^{\Gamma}_{1}(T,X)) \arrow[r] & {}_\Lambda(T, {}^{\Gamma}(T,Q)) \arrow[r] & {}_\Lambda(T, {}^{\Gamma}(T,P)) \arrow[r] & {}^{1}_{\Lambda}(T, {}^{\Gamma}_{1}(T,P)), &
\end{tikzcd}$$

donde δ'_X esta dada por la propiedad universal del Cokernel. Por el Corolario 4.5.6, δ_Q, δ_P son isomorfismos. Finalmente, por el Lema de los cinco δ'_X es un isomorfismo y $\mathrm{Hom}_\Lambda(T, \mathrm{Tor}_1^\Gamma(T,X)) \cong 0$, con ello $\mathrm{Tor}^1_\Gamma(T,X) \in T^{\perp_0}$ y $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(T, \mathrm{Tor}_1^\Gamma(T,X)) \cong X$.
Por lo tanto, $T^{\perp_0}$ y $T_\Gamma^{\top_0}$ son categorías equivalentes. $\square$

Una consecuencia del Teorema de Brenner y Butler es la versión del Teorema de Morita para álgebras de artin.

Teorema 4.5.8. *Sean* $P \in \mathrm{mod}(\Lambda)$ *un progenerador y* $\Gamma = \mathrm{End}_\Lambda(P)^{op}$. *Entonces, el funtor* $\mathrm{Hom}_\Lambda(P,-) : \mathrm{mod}(\Lambda) \to \mathrm{mod}(\Gamma)$ *es una equivalencia de categorías con casi-inversa* $P \otimes_\Gamma - : \mathrm{mod}(\Gamma) \to \mathrm{mod}(\Lambda)$.

Demostración. Por la Proposición 4.4.2, P es un Λ-módulo inclinante; y dado que $\Lambda \in \mathrm{add}(P)$, se tiene que $P \cong \mathrm{Hom}_\Lambda(\Lambda, P) \in \mathcal{P}(\Gamma)$. Por el Teorema de Brenner y Butler, tenemos la siguiente equivalencia de categorías

$$\mathrm{Hom}_\Lambda(P,-) : P^{\perp_1} = \mathrm{mod}(\Lambda) \to P_\Gamma^{\top_1} = \mathrm{mod}(\Gamma).$$

$\square$

El siguiente corolario nos dice que la composición de funtores, que aparecen en el Teorema de Brenner y Butler, que no son cuasi-inversos se vuelve cero.

Corolario 4.5.9. *a) Sea T un Λ-módulo inclinante y $\Gamma := \mathrm{End}_\Lambda(T)^{op}$. Para $M \in \mathrm{mod}(\Lambda)$, las siguientes condiciones se satisfacen.*

i) $\mathrm{Tor}_1^\Gamma(T, \mathrm{Hom}_\Lambda(T, M)) = 0$.

ii) $T \otimes_\Gamma \mathrm{Ext}_\Lambda^1(T, M) = 0$.

iii) *La sucesión canónica de M en $(T^{\perp_1}, T^{\perp_0})$ está dada por*

$$0 \to T \otimes_\Gamma \mathrm{Hom}_\Lambda(T, M) \xrightarrow{\epsilon_M} M \to \mathrm{Tor}_1^\Gamma(T, \mathrm{Ext}_\Lambda^1(T, M)) \to 0.$$

b) Para $X \in \mathrm{mod}(\Gamma)$, las siguientes condiciones se satisfacen.

i) $\mathrm{Hom}_\Lambda(T, \mathrm{Tor}_\Gamma^1(T, X)) = 0$.

ii) $\mathrm{Ext}_\Lambda^1(T, T \otimes_\Gamma X) = 0$.

iii) *La sucesión canónica de X en $(T^{\top_0}, T^{\top_1})$ esta dada por*

$$0 \to \mathrm{Ext}_\Lambda^1(T, \mathrm{Tor}_\Gamma^1(T, X)) \to X \xrightarrow{\delta_X} \mathrm{Hom}_\Lambda(T, T \otimes_\Gamma X) \to 0.$$

Demostración. Sólo probaremos a), ya que la prueba de b) es análoga.
Sea

$$0 \to t(M) \to M \to M/t(M) \to 0,$$

la sucesión canónica de M en $(T^{\perp_1}, T^{\perp_0})$. Aplicamos el funtor $\mathrm{Hom}_\Lambda(T,\text{-})$ a la sucesión canónica, con ello tenemos las siguientes sucesiones exactas

$$0 \to \mathrm{Hom}_\Lambda(T, t(M)) \to \mathrm{Hom}_\Lambda(T, M) \to 0,$$

$$0 \to \mathrm{Ext}_\Lambda^1(T, M) \to \mathrm{Ext}_\Lambda^1(T, M/t(M)) \to 0.$$

Por el Teorema de Brenner y Butler tenemos los siguientes isomorfismos

$$\mathrm{Tor}_1^\Gamma(T, \mathrm{Hom}_\Lambda(T, M)) \cong \mathrm{Tor}_1^\Gamma(T, \mathrm{Hom}_\Lambda(T, t(M))) = 0,$$

$$T \otimes_\Gamma \mathrm{Ext}_\Lambda^1(T, M) \cong T \otimes_\Gamma \mathrm{Ext}_\Lambda^1(T, M/t(M)) = 0.$$

Sólo basta ver los siguientes isomorfismos $T \otimes_\Gamma \mathrm{Hom}_\Lambda(T, M) \cong t(M)$ y $M/t(M) \cong \mathrm{Tor}_1^\Gamma(T, \mathrm{Ext}_\Lambda^1(T, M))$. En efecto, por el teorema de Brenner y Butler a)

$$t(M) \cong T \otimes_\Gamma \mathrm{Hom}_\Lambda(T, t(M)) \cong T \otimes_\Gamma \mathrm{Hom}_\Lambda(T, M),$$

y por la escinde b)

$$M/t(M) \cong \mathrm{Tor}_1^\Gamma(T, \mathrm{Ext}_\Lambda^1(T, M/t(M))) \cong \mathrm{Tor}_1^\Gamma(T, \mathrm{Ext}_\Lambda^1(T, M)).$$

Por lo tanto, la proposición se sigue del Corolario 4.1.9. $\square$

El siguiente lema, que estableceremos sin prueba, nos ayudara a dar ejemplos de las equivalencias en K-álgebras de dimensión finita, con K un campo algebraicamente cerrado.

Lema 4.5.10. *Sea A una K-álgebra de dimensión finita, con K un campo algebraicamente cerrado, $T = T_1 \oplus T_2 \oplus \cdots \oplus T_n \in \mathrm{mod}(A)$ un A-módulo inclinante, con $T_i \in \mathrm{ind}(A)$ $\forall\ 1 \leq i \leq n$, $T_i \ncong T_j$ si $i \neq j$ y $\Gamma = \mathrm{End_A}(T)^{op}$. Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen.*

a) *Sean $p_j : T \to T_j$ la proyección canónica, $i_j : T_j \to T$ la inclusión canónica y $e_j := i_j p_j$ $\forall\ j \in \{1, 2, \cdots, n\}$. Entonces, $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ es un sistema completo de idempotentes ortogonales primitivos en Γ. Además $\Gamma e_i \cong$ $\mathrm{Hom_A}(T, T_i)$ $\forall\ j \in \{1, 2, \cdots, \mathrm{n}\}$.*

b) $\underline{\mathrm{dim}}(\mathrm{Hom_A}(T, M)) = [\mathrm{dim_k Hom_A}(T_1, M), \cdots, \mathrm{dim_k Hom_A}(T_n, M)]^t$ $\forall\ M \in T^{\perp_1}$.

c) $\underline{\mathrm{dim}}(\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{A}}(T, N)) = [\mathrm{dim_k Hom_A}(N, \tau(T_1)), \cdots, \mathrm{dim_k Hom_A}(N, \tau(T_n))]^t$ $\forall\ N \in T^{\perp_0}$.

Demostración. Ver [ASS, Lema 3.10]. □

Veamos algunos ejemplos usando el lema anterior (ver [ASS] y [ACPV]).

Ejemplo 4.5.11. Sean Λ el álgebra de caminos dada por el siguiente carcaj sin relaciones

$$\circ^1 \longleftarrow \circ^2 \longleftarrow \circ^3$$

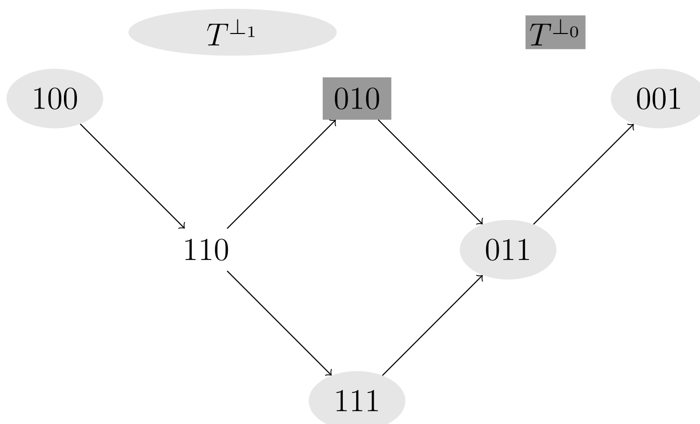
y $T := 100 \oplus 111 \oplus 001$. En esté ejemplo denotaremos representaremos a cada Λ-módulo inescindible por su vector dimensión, dado que es ùnico.
Veamos que T es un módulo inclinante. En efecto, ya que Λ es una álgebra de caminos con carcaj finito, se tiene que Λ es hereditaria y por lo tanto $\mathrm{pd}(T) \leq 1$.
Por otra escinde, ya que 100, 111 son módulos proyectivos y 111, 001 son módulos inyectivos, por el Corolario 3.2.21, tenemos los siguientes isomorfismos

$$\begin{aligned}\mathrm{Ext}^1_\Lambda(T, T) &\cong \mathrm{Ext}^1_\Lambda(001, 100)\\ &\cong \mathrm{D_R Hom_\Lambda}(100, \tau(001))\\ &\cong \mathrm{D_R Hom_\Lambda}(100, 010) = 0.\end{aligned}$$

Para finalizar, tenemos la siguiente sucesión exacta

$$0 \to \Lambda = 100 \oplus 110 \oplus 111 \to 100 \oplus (111)^2 \to 001 \to 0,$$

donde $100 \oplus (111)^2, 001 \in \mathrm{add(T)}$. Por lo tanto T es un módulo inclinante. Veamos la representación de su par de torsión $(T^{\perp_1}, T^{\perp_0})$ en el siguiente carcaj de Auslander-Reiten



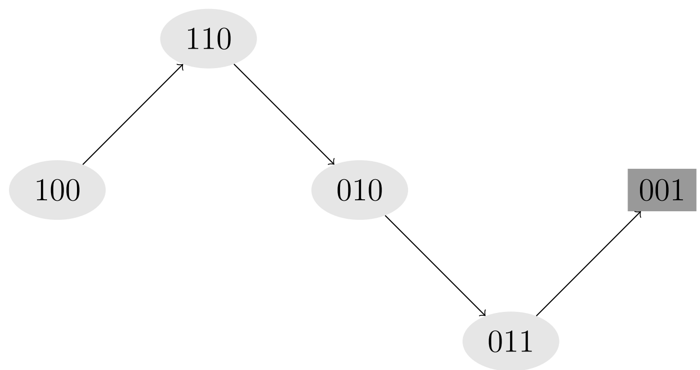
Por el Lema 4.5.10, tenemos las siguientes fórmulas de los vectores dimensión

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_\Lambda(\mathrm{T}, 100) &= 100, & \mathrm{Hom}_\Lambda(\mathrm{T}, 111) &= 110,\\
\mathrm{Hom}_\Lambda(\mathrm{T}, 001) &= 011, & \mathrm{Hom}_\Lambda(\mathrm{T}, 011) &= 010.\\
\mathrm{Ext}^1_\Lambda(\mathrm{T}, 010) &= 001, & &
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\Gamma = \mathrm{End}_\Lambda(T)^{op}$ es el álgebra de caminos dada por el carcaj

$$\circ^1 \xleftarrow{\ \alpha\ } \circ^2 \xleftarrow{\ \beta\ } \circ^3$$

con relación $\alpha\beta = 0$.
El par de torsión $(T_\Gamma^{\top_0}, T_\Gamma^{\top_1})$ esta representado en el siguiente carcaj de Auslander-Reiten



Ejemplo 4.5.12. Sean Λ el álgebra de caminos dada por el carcaj

$$\begin{tikzcd} & \circ^4 \arrow[d, "\gamma"] & \\ \circ^1 & \circ^2 \arrow[l, "\beta"'] & \circ^3 \arrow[l, "\alpha"'] \end{tikzcd}$$

con relación $\beta\alpha = 0$ y el Λ-módulo $T := 1101 \oplus 0101 \oplus 0111 \oplus 0001$. En esté ejemplo denotaremos representaremos a cada Λ-módulo inescindible por su vector dimensión.
Veamos que T es un módulo inclinante. En efecto, 1101 es un módulo proyectivo y además tenemos las siguientes resoluciones proyectivas

$$0 \to 1000 \to 1101 \to 0101 \to 0,$$

$$0 \to 1100 \to 1101 \oplus 0110 \to 0111 \to 0,$$

$$0 \to 1100 \to 1101 \to 0001 \to 0.$$

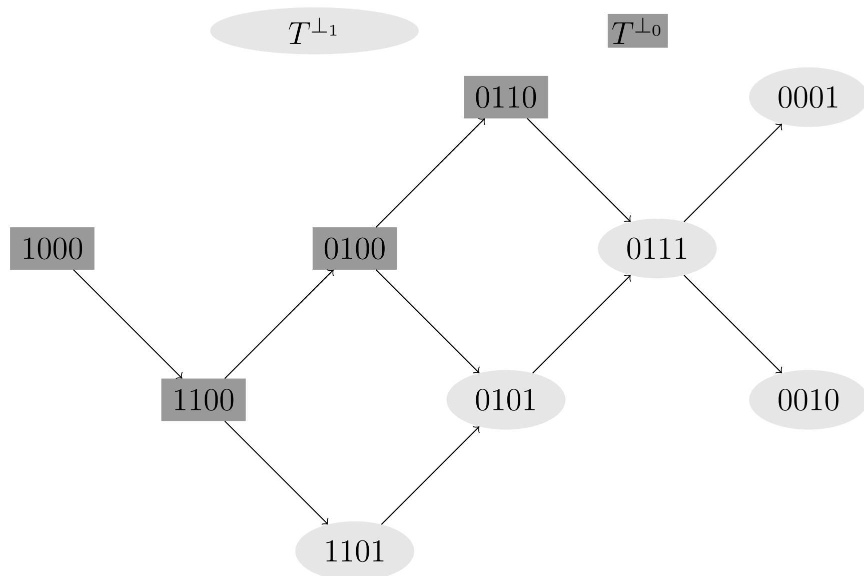
Por la Proposición 2.8.10 $\mathrm{pd}(T) = 1$.
Por otra escinde, dado que 1101 es un módulo proyectivo y 1101, 0111, 0001 son módulos inyectivos, del Corolario 3.2.21, tenemos los siguientes isomorfismos.

$$\begin{aligned} \mathrm{Ext}^1_\Lambda(\mathrm{T},\mathrm{T}) &\cong \mathrm{Ext}^1_\Lambda(0101 \oplus 0111 \oplus 0001, 0101) \\ &\cong \mathrm{D_R Hom}_\Lambda(0101, \tau(0101 \oplus 0111 \oplus 0001)) \\ &\cong \mathrm{D_R Hom}_\Lambda(0101, 1100 \oplus 0100 \oplus 0110) = 0 \end{aligned}$$

Para finalizar, tenemos la siguiente sucesión exacta

$$0 \to \Lambda = 1000 \oplus 1100 \oplus 0110 \oplus 1101 \to 0111 \oplus (1101)^3 \to (0001)^2 \oplus 0101 \to 0,$$

donde $0111 \oplus (1101)^3, (0001)^2 \oplus 0101 \in \mathrm{add(T)}$. Por lo tanto T es un módulo inclinante. Veamos la representación de su par de torsión $(T^{\perp_1}, T^{\perp_0})$ en el siguiente carcaj de Auslander-Reiten



Por el Lema 4.5.10, tenemos las siguientes fórmulas de los vectores dimensión

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_\Lambda(\mathrm{T}, 1101) &= 1000, & \mathrm{Hom}_\Lambda(\mathrm{T}, 0101) &= 1100,\\
\mathrm{Hom}_\Lambda(\mathrm{T}, 0111) &= 1110, & \mathrm{Hom}_\Lambda(\mathrm{T}, 0001) &= 1111,\\
\mathrm{Hom}_\Lambda(\mathrm{T}, 0010) &= 0010, & \mathrm{Ext}^1_\Lambda(\mathrm{T}, 1000) &= 0100,\\
\mathrm{Ext}^1_\Lambda(\mathrm{T}, 1100) &= 0111, & \mathrm{Ext}^1_\Lambda(\mathrm{T}, 0100) &= 0011.\\
\mathrm{Ext}^1_\Lambda(\mathrm{T}, 0110) &= 0001, & &
\end{aligned}
$$

Por lo tanto $\Gamma = \mathrm{End}_\Lambda(T)^{op}$ es el álgebra de caminos dada por el siguiente carcaj sin relaciones

$$\circ^1 \xleftarrow{\alpha} \circ^2 \xleftarrow{\beta} \circ^3 \xleftarrow{\gamma} \circ^4.$$

El par de torsión $(T_\Gamma^{\top_0}, T_\Gamma^{\top_1})$ está representado en el siguiente carcaj de Auslander-Reiten

$$\begin{tikzcd}
 & & & 1111 \arrow[dr] & & & \\
 & & 1110 \arrow[ur] \arrow[dr] & & \boxed{0111} \arrow[dr] & & \\
 & 1100 \arrow[ur] \arrow[dr] & & 0110 \arrow[ur] \arrow[dr] & & \boxed{0011} \arrow[dr] & \\
1000 \arrow[ur] & & \boxed{0100} \arrow[ur] & & 0010 \arrow[ur] & & \boxed{0011}
\end{tikzcd}$$

4.6. Consecuencias del teorema de Brenner y Butler

Lema 4.6.1. *Sean T un Λ-módulo inclinante,* $\Gamma := \mathrm{End}_\Lambda(T)^{op}$ *y* $M \in T^{\perp_1}$*. Entonces,* $\mathrm{pd}({}_\Gamma\mathrm{Hom}_\Lambda(T, M)) \leq \mathrm{pd}({}_\Lambda M)$*.*

Demostración. Si la dimensión proyectiva de M es infinita, no hay nada que probar.
Supongamos que $\mathrm{pd}(M) < \infty$. La prueba se hará por inducción sobre $n = \mathrm{pd}(M)$. Si $\mathrm{pd}(M)$=0, se tiene que, M es proyectivo. Dado que

$$M \in {}^{\perp_1}(T^{\perp_1}) \cap T^{\perp_1},$$

y por el Teorema 4.3.4 e), $M \in \mathrm{add}(T)$. Luego, por el Teorema 3.1.14 $\mathrm{Hom}_\Lambda(T, M)$ es un Γ-módulo proyectivo, con lo cual $\mathrm{pd}(\mathrm{Hom}_\Lambda(T, M)) = 0$. Por otro lado, por el Teorema 4.3.4 d), existe una sucesión exacta

$$0 \to L \to T' \to M \to 0 \qquad (*)$$

tal que $T' \in \mathrm{add}(T)$ y $L \in T^{\perp_1}$, que induce la siguiente sucesión exacta

$$0 \to \mathrm{Hom}_\Lambda(T, L) \to \mathrm{Hom}_\Lambda(T, T') \to \mathrm{Hom}_\Lambda(T, M) \to 0.$$

Sea pd(M)=1. Aplicando el funtor $\mathrm{Hom}_\Lambda(-,N)$, con $N \in T^{\perp_1}$, a la sucesión (*), tenemos la siguiente sucesión exacta

$$0 = \mathrm{Ext}^1_\Lambda(T',N) \to \mathrm{Ext}^1_\Lambda(L,N) \to \mathrm{Ext}^2_\Lambda(M,N) = 0.$$

Entonces $L \in {}^{\perp_1}(T^{\perp_1}) \cap T^{\perp_1}$ y por el Teorema 4.3.4 $L \in \mathrm{add}(T)$, con lo cual $\mathrm{Hom}_\Lambda(T,L)$ es un módulo proyectivo (ver Teorema 3.1.14) y así $\mathrm{pd}(\mathrm{Hom}_\Lambda(T,M)) \leq 1$.
Supongamos que $n \geq 2$. Como $\mathrm{pd}(T') \leq 1$, tenemos por la Proposición 2.8.8 que $\mathrm{pd}(L) \leq n-1$. Luego, por hipótesis de inducción $\mathrm{pd}(\mathrm{Hom}_\Lambda(T,L)) \leq n-1$, ya que $\mathrm{Hom}_\Lambda(T,T')$ es un Γ-módulo proyectivo. Ahora bien, de la Proposición 2.8.8, se sigue que

$$\mathrm{pd}(\mathrm{Hom}_\Lambda(T,M)) \leq \mathrm{pd}(\mathrm{Hom}_\Lambda(T,L)) + 1 \leq n.$$

□

Teorema 4.6.2. $|\mathrm{gl.dim}(\Lambda) - \mathrm{gl.dim}(\Gamma)| \leq 1$.

Demostración. Sean $X \in \mathrm{mod}(\Gamma)$ y $0 \to Z \to P \to X \to 0$ una sucesión exacta de con P un Γ-módulo proyectivo. Por la Proposición 4.5.4 $T_\Gamma^{\top_1}$ es una clase libre de torsión, y de la Proposición 4.1.7, se tiene que $Z \in T_\Gamma^{\top_1}$. Luego, por el Teorema de Brenner y Butler, existe $M \in T^{\perp_1}$ tal que $\mathrm{Hom}_\Lambda(T,M) \cong Z$, por el Lema 4.6.1 y la Proposición 2.8.8 tenemos las siguientes desigualdades

$$\mathrm{pd}(X) \leq \mathrm{pd}(Z) + 1 \leq \mathrm{pd}(M) + 1 \leq \mathrm{gl.dim}(\Lambda) + 1.$$

Con lo cual, $\mathrm{gl.dim}(\Gamma) \leq \mathrm{gl.dim}(\Lambda) + 1$. Por otro lado, por la Proposición 4.5.2, T es un Γ^{op}-módulo inclinante y por la Proposición 4.5.3 $\mathrm{End}_{\Gamma^{op}}(T) \cong \Lambda$. Por lo anterior, tenemos que $\mathrm{gl.dim}(\Lambda) \leq \mathrm{gl.dim}(\Gamma) + 1$ y por lo tanto $\mathrm{gl.dim}(\Lambda) \leq \mathrm{gl.dim}(\Gamma) + 1$. □

Otra aplicación, del teorema de Brenner y Butler y el lema de Bongartz, es dar condiciones necesarias y suficientes para determinar cuando un módulo inclinante parcial es inclinante.

Proposición 4.6.3. *La correspondencia*

$$\varphi : \mathrm{K}_0(\Lambda) \to \mathrm{K}_0(\Gamma)$$
$$[M] \mapsto [\mathrm{Hom}_\Lambda(T,M)] - [\mathrm{Ext}^1_\Lambda(T,M)],$$

es un isomorfismo de grupos abelianos.

Demostración. Veamos que φ está bien definida. En efecto, sea $0 \to L \to M \to N \to 0$ una sucesión exacta en $\mathrm{mod}(\Lambda)$. Dado que $\mathrm{pd}(T) \leq 1$, tenemos la siguiente sucesión exacta

$$0 \to {}_{\Lambda}(T, L) \to {}_{\Lambda}(T, M) \to {}_{\Lambda}(T, N) \to {}^{1}_{\Lambda}(T, L) \to {}^{1}_{\Lambda}(T, M) \to {}^{1}_{\Lambda}(T, N) \to 0.$$

Por el Lema 3.1.11, tenemos que

$$[{}_{\Lambda}(T, M)] - [{}^{1}_{\Lambda}(T, M)] = [{}_{\Lambda}(T, L)] + [{}_{\Lambda}(T, N)] - [{}^{1}_{\Lambda}(T, L)] - [{}^{1}_{\Lambda}(T, N)].$$

Por lo que, φ es un homomorfismo de grupos abelianos. Sea $S \in \mathrm{mod}(\Gamma)$ simple. Dado que $(T_{\Gamma}^{\top_0}, T_{\Gamma}^{\top_1})$ es un par de torsión, tenemos por el Corolario 4.1.10, que $S \in T_{\Gamma}^{\top_0}$ o bien $S \in T_{\Gamma}^{\top_1}$.
Si $S \in T_{\Gamma}^{\top_0}$, por el Teorema de Brenner y Butler, se sigue que

$$\mathrm{Ext}^1_{\Lambda}(T, \mathrm{Tor}^{\Gamma}_1(T, S)) \cong S$$

y por el Corolario 4.5.9 $\mathrm{Hom}_{\Lambda}(T, \mathrm{Tor}^{\Gamma}_1(T, S)) = 0$. Con lo cual

$$\varphi(-[\mathrm{Tor}^{1}_{\Gamma}(T, S)]) = [S].$$

Dualmente, si $S \in T_{\Gamma}^{\top_1}$, por el Teorema de Brenner y Butler, tenemos que $\mathrm{Hom}_{\Lambda}(T, T \otimes_{\Gamma} S) \cong S$ y por el Corolario 4.5.9 $\mathrm{Ext}^1_{\Lambda}(T, T \otimes_{\Gamma} S) = 0$. Consecuentemente

$$\varphi([T \otimes_{\Gamma} S]) = [S].$$

Por lo tanto, φ es un epimorfismo y así $\mathrm{rkK}_0(\Gamma) \leq \mathrm{rkK}_0(\Lambda)$. Por otro lado, por la Proposición 4.5.2, T es un Γ^{op}-módulo inclinante y por la Proposición 4.5.3 $\mathrm{End}_{\Gamma^{\mathrm{op}}}(T) \cong \Lambda$. Por lo anterior, $\mathrm{rkK}_0(\Lambda) \leq \mathrm{rkK}_0(\Gamma)$. Finalmente, $\mathrm{rkK}_0(\Lambda) = \mathrm{rkK}_0(\Gamma)$, lo cual implica que, φ es un isomorfismo. □

Teorema 4.6.4. *Sean X un Λ-módulo inclinante parcial y*

$$X \cong X_i^{r_1} \oplus X_2^{r_2} \oplus \cdots \oplus X_n^{r_n}$$

una descomposición en módulos inescindibles tales que $X_i \ncong X_j$ si $i \neq j$. Entonces, X es inclinante si y sólo si $n = \mathrm{rkK}_0(\Lambda)$.

Demostración. Supongamos que X es inclinante. Sea $\Gamma' = \mathrm{End}_{\Lambda}(X)$. Por el Teorema 3.1.14, $n = \mathrm{rkK}_0(\Gamma')$ y por la proposición 4.6.3 $n = \mathrm{rkK}_0(\Lambda)$.
Recíprocamente, por el Lema de Bongartz existe un Λ-módulo E tal que $X \oplus E$ es inclinante. Luego, por la parte anterior, el número de sumandos directos inescindibles no isomorfismos dos a dos de $X \oplus E$ es igual a $\mathrm{rkK}_0(\Lambda)$. Por hipótesis $n = rkK_0(\Lambda)$, con lo cual $E \in \mathrm{add}(X)$ y por lo tanto X es inclinante . □

Veamos la conexión entre las sucesiones que casi se escinden en $\mathrm{mod}(\Gamma)$.

Definición 4.6.5. *Sean T un Λ-módulo inclinante y $\Gamma := \mathrm{End}_\Lambda(T)^{op}$. Decimos que una sucesión $0 \to Y \to Z \to X \to 0$, que casi se escinde en $\mathrm{mod}(\Gamma)$, es una sucesión de conexión si $Y \in T_\Gamma^{\top_1}$ y $X \in T_\Gamma^{\top_0}$.*

La siguiente proposición muestra que hay un número finito de sucesiones de conexión en $\mathrm{mod}(\Gamma)$.

Proposición 4.6.6. *Sea $0 \to Y \to Z \to X \to 0$ una sucesión de conexión en $\mathrm{mod}(\Gamma)$. Entonces, existe $I \in \mathrm{ind}(\Lambda)$ inyectivo tal que*

$$Y \cong \mathrm{Hom}_\Lambda(T, I).$$

Demostración. Dado que $Y \in T_\Gamma^{\top_1}$, por el Teorema de Brenner y Butler, existe $I \in T^{\perp_1}$ tal que $Y \cong \mathrm{Hom}_\Lambda(T, I)$. Sea

$$\xi : 0 \to I \to J \to L \to 0$$

una sucesión exacta con J un Λ-módulo inyectivo. Dado que $J \in T^{\perp_1}$ y $T^{\perp_1}$ es una clase de torsión, se sigue que $L \in T^{\perp_1}$. Aplicando el funtor $\mathrm{Hom}_\Lambda(T, -)$ a la sucesión exacta ξ, se obtiene la siguiente sucesión exacta en $T_\Gamma^{\top_1}$

$$\eta : 0 \to Y \to \mathrm{Hom}_\Lambda(T, J) \to \mathrm{Hom}_\Lambda(T, L) \to 0.$$

Veamos que η se escinde. En efecto, ya que por hipótesis $\tau^{-1}(Y) \cong X \in T_\Gamma^{\top_0}$; por la Proposición 4.1.11, se tiene que $Y \in (T_\Gamma^{\top_1})^{\perp_1}$. Luego, por el Corolario 4.5.9, se sigue que $\mathrm{Hom}_\Lambda(T, L) \in T_\Gamma^{\top_1}$, con lo cual η se escinde. Por otro lado, por el Teorema de Brenner y Butler, se tiene que $T \otimes_\Gamma \eta$ es isomorfa a ξ, con lo cual ξ se escinde y se deduce que I es un Λ-módulo inyectivo. Finalmente, puesto que Y es inescindible y $T \otimes_\Gamma - : T_\Gamma^{\top_1} \to T^{\perp_1}$ es una equivalencia de categorías, concluimos que $T \otimes_\Gamma Y \cong I$ es inescindible. □

No todos los módulos inyectivos inescindibles están en correspondencia con las sucesiones de conexión. El siguiente teorema, conocido como el Lema de conexión, caracteriza los inyectivos inescindibles que lo hacen y determina el término en la derecha de la sucesión.

Teorema 4.6.7. *Sean T un Λ-módulo inclinante, $\Gamma := \mathrm{End}_\Lambda(T)^{op}$ y S un Λ-módulo simple. Entonces,*

$$\tau^{-1}(\mathrm{Hom}_\Lambda(T, \mathrm{I}_0(S))) \cong \mathrm{Ext}^1_\Lambda(T, \mathrm{P}_0(S)),$$

donde $\mathrm{I}_0(\mathrm{S})$ *es la envolvente inyectiva de* S *y* $\mathrm{P}_0(S)$ *es la cubierta proyectiva de* S*.*
En particular, $\mathrm{Hom}_\Lambda(T, \mathrm{I}_0(S)) \in \mathcal{I}(\Gamma)$ *si y sólo si* $\mathrm{P}_0(S) \in \mathrm{add}(T)$*.*

Demostración. Como $\mathrm{P}_0(S)$ es inescindible, por el Teorema 4.3.4 existe una sucesión exacta

$$\eta : 0 \to \mathrm{P}_0(S) \to T' \xrightarrow{f} T'' \to 0$$

con $T', T'' \in \mathrm{add}(T)$. Luego, aplicamos el funtor $\mathrm{Hom}_\Lambda(-, T)$ a η y obtenemos la siguiente sucesión exacta

$$0 \to \mathrm{Hom}_\Lambda(T'', T) \xrightarrow{\mathrm{Hom}_\Lambda(f,T)} \mathrm{Hom}_\Lambda(T', T) \to \mathrm{Hom}_\Lambda(\mathrm{P}_0(S), T) \to 0,$$

la cual induce la siguiente sucesión exacta

$$\begin{aligned} 0 \to {}_{\Gamma^{op}}({}_\Lambda(\mathrm{P}_0(S), T), \Gamma^{op}) \to {}_{\Gamma^{op}}({}_\Lambda(T', T), \Gamma^{op}) &\xrightarrow{\Gamma^{op}({}_\Lambda(f,T),\Gamma^{op})} {}_{\Gamma^{op}}({}_\Lambda(T'', T), \Gamma^{op}) \\ &\to \mathrm{TrHom}_\Lambda(\mathrm{P}_0(S), T) \to 0. \end{aligned}$$

Por otro lado, consideramos el isomorfismo funtorial

$$\mathrm{Hom}_\Lambda(T, T') \to \mathrm{Hom}_{\Gamma^{\mathrm{op}}}(\mathrm{Hom}_\Lambda(T', T), \mathrm{Hom}_\Lambda(T, T)),$$

dado por $(f \mapsto \mathrm{Hom}_\Lambda(f, T))$, cuando $T' = T$. Como el funtor $\mathrm{Hom}_\Lambda(-, T)$ es aditivo, tenemos que el morfismo anterior es un isomorfismo $\forall\ T' \in \mathrm{add}(T)$. Luego, aplicamos el funtor $\mathrm{Hom}_\Lambda(T, -)$ a η y obtenemos la siguiente sucesión exacta

$$0 \to {}_\Lambda(T, \mathrm{P}_0(S)) \to {}_\Lambda(T, T') \xrightarrow{\Lambda(T,f)} {}_\Lambda(T, T'') \to {}^1_\Lambda(T, \mathrm{P}_0(S)) \to 0.$$

De lo anterior, tenemos los siguientes isomorfismos de Γ-módulos.

$$\begin{aligned} \mathrm{Ext}^1_\Lambda(T, \mathrm{P}_0(S)) &\cong \mathrm{Coker}(\mathrm{Hom}_\Lambda(T, f)) \\ &\cong \mathrm{Coker}(\mathrm{Hom}_{\Gamma^{\mathrm{op}}}(\mathrm{Hom}_\Lambda(f, T), \Gamma^{op})) \\ &\cong \mathrm{TrHom}_\Lambda(\mathrm{P}_0(S), T). \end{aligned}$$

Por el Lema 3.1.13, tenemos que $\mathrm{Hom}_\Lambda(\mathrm{P}_0(S), T) \cong \mathrm{D}_\Gamma\mathrm{Hom}_\Lambda(T, \mathrm{I}_0(S))$ y por ende, los siguientes isomorfismos

$$\begin{aligned} \mathrm{Ext}^1_\Lambda(T, \mathrm{P}_0(S)) &\cong \mathrm{TrHom}_\Lambda(\mathrm{P}_0(S), T) \\ &\cong \mathrm{TrD}_\Gamma\mathrm{Hom}_\Lambda(T, \mathrm{I}_0(S)) \\ &\cong \tau^{-1}(\mathrm{Hom}_\Lambda(T, \mathrm{I}_0(S))). \end{aligned}$$

Finalmente, si $\mathrm{P}_0(S) \in \mathrm{add}(T)$, se sigue de lo anterior que

$$\tau^{-1}(\mathrm{Hom}_\Lambda(T, \mathrm{I}_0(S))) \cong \mathrm{Ext}^1_\Lambda(T, \mathrm{P}_0(S)) = 0$$

y por la Proposición 3.2.16 $\mathrm{Hom}_\Lambda(T, \mathrm{I}_0(S))$ es un Γ-módulo inyectivo. Recíprocamente, si $\mathrm{Hom}_\Lambda(T, \mathrm{I}_0(S))$ es un Γ-módulo inyectivo, por la Proposición 3.2.16, tenemos que $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(T, \mathrm{P}_0(S)) = 0$, con lo cual

$$\mathrm{P}_0(S) \in {}^{\perp_1}(T^{\perp_1}) \cap T^{\perp_1}.$$

Por el Teorema 4.3.4, concluimos que $\mathrm{P}_0(S) \in \mathrm{add}(T)$. □

Por último, veamos unas aplicaciones del Lema de conexión.

Corolario 4.6.8. *Sean T un Λ-módulo inclinante y $\Gamma := \mathrm{End}_\Lambda(T)^{op}$. Entonces, para cada $I \in T_\Gamma^{\top_1}$ inyectivo inescindible existe un Λ-módulo simple S tal que $I \cong \mathrm{Hom}_\Lambda(T, \mathrm{I}_0(S))$ y $\mathrm{P}_0(S) \in \mathrm{add}(T)$, donde $\mathrm{I}_0(\mathrm{S})$ es la envolvente inyectiva de S y $\mathrm{P}_0(S)$ es la cubierta proyectiva de S.*

Demostración. Sea $I \in T_\Gamma^{\top_1}$ inyectivo inescindible. Por el Teorema de Brenner y Butler, existe $M \in T^{\perp_1}$ tal que $\mathrm{Hom}_\Lambda(T, M) \cong I$. Consideramos $\iota_0 : M \to \mathrm{I}_0(M)$, la envolvente inyectiva de M. Esta induce, la siguiente sucesión exacta

$$\eta : 0 \to M \to \mathrm{I}_0(M) \to \Omega^{-1}(M) \to 0.$$

Luego, aplicamos el funtor $\mathrm{Hom}_\Lambda(T, -)$ a η y tenemos la siguiente sucesión exacta

$$0 \to I \to \mathrm{Hom}_\Lambda(T, \mathrm{I}_0(S)) \to \mathrm{Hom}_\Lambda(T, \Omega^{-1}(M)) \to 0.$$

Dado que I es inyectivo, tenemos que la sucesión anterior se escinde. Por lo tanto, usando equivalencia $\mathrm{Hom}_\Lambda(T, -) : T^{\perp_1} \to T_\Gamma^{\top_1}$ se sigue que η se escinde. Con lo que $M \cong \mathrm{I}_0(S)$ para algún Λ-módulo S simple. Por último, por el Lema de conexión $\mathrm{P}_0(S) \in \mathrm{add}(T)$. □

Corolario 4.6.9. *Sean T un Λ-módulo inclinante y $\Gamma := \mathrm{End}_\Lambda(T)^{op}$. Entonces, $X \in \mathrm{ind}(\Gamma)$ es inyectivo y proyectivo si y sólo si existe un Λ-módulo simple S tal que $X \cong \mathrm{Hom}_\Lambda(T, \mathrm{I}_0(S))$, $\mathrm{P}_0(S) \in \mathrm{add}(T)$ y $\mathrm{I}_0(S) \in \mathrm{add}(T)$.*

Demostración. Supongamos que X es Γ-modulo inyectivo y proyectivo inescindible. Por el Teorema 3.1.14, existe un sumando directo inescindible T' de T tal que $X \cong \mathrm{Hom}_\Lambda(T, T')$. Luego, por el Corolario 4.5.9, se tiene

que $X \in \mathcal{T}_\Gamma^{\top_1}$; por el Corolario 4.6.8, existe un Λ-módulo simple S tal que $T' \cong \mathrm{I}_0(S)$ y $\mathrm{P}_0(S) \in \mathrm{add}(T)$.
Recíprocamente, supongamos que $X \cong \mathrm{Hom}_\Lambda(T, \mathrm{I}_0(S))$, $\mathrm{P}_0(S) \in \mathrm{add}(T)$ y $\mathrm{I}_0(S) \in \mathrm{add}(T)$. Entonces, por el Lema de conexión, se deduce que X es un Γ-módulo inyectivo; y por el Teorema 3.1.14, se tiene que X es un Γ-módulo proyectivo inescindible. $\square$

Corolario 4.6.10. *Sean T un Λ-módulo inclinante, $\Gamma := \mathrm{End}_\Lambda(T)^{op}$ y S un Λ-módulo simple tal que $\mathrm{P}_0(S) \notin \mathrm{add}(T)$. Consideramos la sucesión de conexión en* $\mathrm{mod}(\Gamma)$

$$0 \to \mathrm{Hom}_\Lambda(T, \mathrm{I}_0(S)) \xrightarrow{f} Z \xrightarrow{g} \mathrm{Ext}^1_\Lambda(T, \mathrm{P}_0(S)) \to 0.$$

Entonces, la sucesión canónica de Z en $(\mathcal{T}_\Gamma^{\top_0}, \mathcal{T}_\Gamma^{\top_1})$ es

$$0 \to \mathrm{Ext}^1_\Lambda(T, \mathrm{rad}(\mathrm{P}_0(S))) \to Z \to \mathrm{Hom}_\Lambda(T, \mathrm{I}_0(S)/S) \to 0.$$

Demostración. Por el Corolario 4.1.10, se tiene que $S \in T^{\perp_1}$ o bien $S \in T^{\perp_0}$. Si $S \in T^{\perp_1}$, tenemos que la siguiente sucesión exacta está en $T^{\perp_1}$

$$0 \to S \xrightarrow{f_1} \mathrm{I}_0(S) \xrightarrow{g_1} \mathrm{I}_0(S)/S \to 0.$$

Notemos que g_1 no es un isomorfismo. Luego, aplicamos la equivalencia $\mathrm{Hom}_\Lambda(T, -) : T^{\perp_1} \to \mathcal{T}_\Gamma^{\top_1}$ a la sucesión exacta anterior, con lo cual obtenemos la siguiente sucesión exacta en $\mathcal{T}_\Gamma^{\top_1}$

$$0 \to \mathrm{Hom}_\Lambda(T, S) \xrightarrow{f'} \mathrm{Hom}_\Lambda(T, \mathrm{I}_0(S)) \xrightarrow{g'} \mathrm{Hom}_\Lambda(T, \mathrm{I}_0(S)/S) \to 0.$$

Puesto que g_1 no es un isomorfismo, se tiene que g' no es un split-mono. Por otro lado, consideramos la sucesión radical de $\mathrm{P}_0(S)$

$$0 \to \mathrm{rad}(\mathrm{P}_0(S)) \to \mathrm{P}_0(S) \to S \to 0.$$

Del Teorema de Brenner y Butler, se sigue que

$$\mathrm{P}_0(S) \cong T \otimes_\Gamma \mathrm{Ext}^1_\Lambda(T, \mathrm{P}_0(S)) \in T^{\perp_0}.$$

Aplicando el funtor $\mathrm{Hom}_\Lambda(T, -)$ a la sucesión radical de $\mathrm{P}_0(S)$, de lo anterior se tiene la siguiente sucesión exacta

$$0 \to \mathrm{Hom}_\Lambda(T, S) \xrightarrow{f''} \mathrm{Ext}^1_\Lambda(T, \mathrm{rad}(\mathrm{P}_0(S))) \xrightarrow{g''} \mathrm{Ext}^1_\Lambda(T, \mathrm{P}_0(S)) \to 0.$$

Aseguramos que la sucesión anterior no se escinde. En efecto, supongamos que la sucesión anterior se escinde. Entonces, existe un epimorfismo $p : \mathrm{Ext}^1_\Lambda(T, \mathrm{rad}(\mathrm{P}_0(S))) \to \mathrm{Hom}_\Lambda(T, S)$, lo cual es una contradicción, ya que por el Corolario 4.5.9 a), se tiene que $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(T, \mathrm{rad}(\mathrm{P}_0(S))) \in T_\Gamma^{\top_0}$ y $\mathrm{Hom}_\Lambda(T, S) \in T_\Gamma^{\top_1}$. Con ello g'' no es un split-epi. Dado que f casi se escinde a la izquierda y g casi se escinde a la derecha, tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Ker}(h) \arrow[r, "i"] \arrow[d] & {}_\Lambda(T,S) \arrow[d, "f''"] & \\
 & 0 \arrow[r] \arrow[d] & {}^1_\Lambda(T,\mathrm{rad}(\mathrm{P}_0(S))) \arrow[r, equal] \arrow[d, "\exists\, h"'] & {}^1_\Lambda(T,\mathrm{rad}(\mathrm{P}_0(S))) \arrow[r] \arrow[d, "g''"] & 0 \\
0 \arrow[r] & {}_\Lambda(T,\mathrm{I}_0(S)) \arrow[r, "f"] \arrow[d, equal] & Z \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\exists\, k"'] & {}^1_\Lambda(T,\mathrm{I}_0(S)) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & {}_\Lambda(T,\mathrm{I}_0(S)) \arrow[r, "g'"'] \arrow[d] & {}_\Lambda(T,\mathrm{I}_0(S)/S) \arrow[r] \arrow[d] & 0 & \\
 & 0 & 0. & &
\end{tikzcd}$$

Luego, por el Lema de la serpiente, obtenemos la siguiente sucesión exacta

$$0 \to \mathrm{Ker}(h) \to {}_\Lambda(T,S) \to {}_\Lambda(T,S) \to {}_\Lambda(T,\mathrm{I}_0(S)) \to {}_\Lambda(T,\mathrm{I}_0(S)/S) \to 0.$$

Ahora bien, por la Proposición 4.1.7, tenemos que $\mathrm{Ker}(h) \in T_\Gamma^{\top_0}$ y así concluimos que $\mathrm{Ker}(h)$=0. Como $kf = g'$, se deduce que k es un epimorfismo y por lo tanto la siguiente sucesión es exacta, puesto que las laterales en el diagrama anterior lo son

$$0 \to \mathrm{Ext}^1_\Lambda(T, \mathrm{rad}(\mathrm{P}_0(S))) \xrightarrow{h} Z \xrightarrow{k} \mathrm{Hom}_\Lambda(T, \mathrm{I}_0(S)/S) \to 0.$$

Si $S \in T^{\perp_0}$, la prueba es análoga. $\square$

4.7. Módulos inclinantes que dividen

Definición 4.7.1. *Sean T un Λ-módulo inclinante y $\Gamma := \mathrm{End}_\Lambda(T)^{op}$. Decimos que* *a) T separa si el par de torsión $(T^{\perp_1}, T^{\perp_0})$ se escinde.*

b) T divide si el par de torsión $(T_\Gamma^{\top_0}, T_\Gamma^{\top_1})$ se escinde.

Veamos la utilidad de los módulos inclinantes que dividen en la caracterización de las sucesiones que casi se escinden en $\mathrm{mod}(\Gamma)$.

Proposición 4.7.2. *Sean T un Λ-módulo inclinante que divide, $\Gamma := \mathrm{End}_\Lambda(T)^{op}$ y*

$$\eta : 0 \to \tau(M) \xrightarrow{f} L \xrightarrow{g} M \to 0$$

una sucesión que casi se escinde.

a) Si todos los términos de η están en $T^{\perp_1}$, entonces la sucesión exacta

$$0 \to \mathrm{Hom}_\Lambda(T, \tau(M)) \overset{\mathrm{Hom}_\Lambda(T,f)}{\to} \mathrm{Hom}_\Lambda(T, L) \overset{\mathrm{Hom}_\Lambda(T,g)}{\to} \mathrm{Hom}_\Lambda(T, M) \to 0$$

casi se escinde.

b) Si todos los términos de η están en $T^{\perp_0}$, entonces la sucesión exacta

$$0 \to \mathrm{Ext}^1_\Lambda(T, \tau(M)) \overset{\mathrm{Ext}^1_\Lambda(T,f)}{\to} \mathrm{Ext}^1_\Lambda(T, L) \overset{\mathrm{Ext}^1_\Lambda(T,g)}{\to} \mathrm{Ext}^1_\Lambda(T, M) \to 0$$

casi se escinde.

Demostración. Sólo probaremos a), ya que la prueba de b) es análoga.
Veamos que el morfismo $\mathrm{Hom}_\Lambda(T, f)$ es irreducible. En efecto, dado que $\mathrm{Hom}_\Lambda(T, -) : T^{\perp_1} \to T_\Gamma^{\top_1}$ es una equivalencia de categorías, se deduce que los Γ-módulos $\mathrm{Hom}_\Lambda(T, \tau(M))$, $\mathrm{Hom}_\Lambda(T, M)$ son inescidibles, $\mathrm{Hom}_\Lambda(T, f)$ no es un split-mono, ni split-epi.
Sean $h : \mathrm{Hom}_\Lambda(T, \tau(M)) \to Z$ y $k : Z \to \mathrm{Hom}_\Lambda(T, L)$, con Z inescindible, tal que $\mathrm{Hom}_\Lambda(T, f) = kh$. Notemos que $k \neq 0$, y puesto que $T_\Gamma^{\top_1}$ es una clase libre de torsión, del hecho que $\mathrm{Hom}_\Lambda(T, f) \neq 0$, concluimos que $Z \in T_\Gamma^{\top_1}$. Por el Teorema de Brenner y Butler, existen $E \in T^{\perp_1}$, $h' : \tau(M) \to E$ y $k' : E \to L$, tales que, $\mathrm{Hom}_\Lambda(T, E) \cong Z$, $\mathrm{Hom}_\Lambda(T, h') = h$ y $\mathrm{Hom}_\Lambda(T, k') = k$. Así pues, tenemos que $f = h'k'$, por lo que h' es un split-epi o k' es un split-mono, consecuentemente h es un split-epi o k es un split-mono.
Similarmente, $\mathrm{Hom}_\Lambda(T, g)$ es un morfismo irreducible. Luego, por el Teorema 3.2.9 la sucesión η casi se escinde. □

Proposición 4.7.3. *Sean T un Λ-módulo inclinante que divide, $\Gamma := \mathrm{End}_\Lambda(T)^{op}$ y Y un Γ-módulo inescindible no proyectivo. Consideramos la sucesión que casi se escinde*

$$\eta : 0 \to \tau(Y) \to Z \to Y \to 0.$$

Entonces, se cumple una de las siguientes afirmaciones

a) Todos los téminos de η pertenecen a $T_\Gamma^{\top_1}$;

b) Todos los téminos de η pertenecen a $T_\Gamma^{\top_0}$;

c) η es de la forma

$$0 \to {}_\Lambda(T, \mathrm{I}_0(S)) \to {}_\Lambda(T, \mathrm{I}_0(S)/S) \oplus {}^1_\Lambda(T, \mathrm{rad}(\mathrm{P}_0(S))) \to {}^1_\Lambda(T, \mathrm{rad}(\mathrm{P}_0(S))) \to 0,$$

para algún Λ-módulo simple S tal que su cubierta proyectiva $\mathrm{P}_0(S) \notin \mathrm{add}(T)$.

Demostración. Como el par de torsión $(T_\Gamma^{\top_0}, T_\Gamma^{\top_1})$ se escinde, tenemos que $Y \in T_\Gamma^{\top_1}$ o bien $Y \in T_\Gamma^{\top_0}$.
Supongamos que $Y \in T_\Gamma^{\top_1}$. Por la Proposición 4.1.18, se tiene que $\tau(Y) \in T_\Gamma^{\top_1}$; y dado que $T_\Gamma^{\top_1}$ es cerrada por extensiones, se sigue que $Z \in T_\Gamma^{\top_1}$.
Por otro lado, si $Y \in T_\Gamma^{\top_0}$ y $\tau(Y) \in T_\Gamma^{\top_0}$, del hecho que $T_\Gamma^{\top_0}$ es cerrada por extensiones, tenemos que $Z \in T_\Gamma^{\top_0}$.
Por último, supongamos que $Y \in T_\Gamma^{\top_0}$ y $\tau(Y) \in T_\Gamma^{\top_1}$. Por la Proposición 4.6.6 y el Teorema 4.6.7, η es de la forma

$$0 \to \mathrm{Hom}_\Lambda(T, \mathrm{I}_0(S)) \to Z \to \mathrm{Ext}^1_\Lambda(T, \mathrm{rad}(\mathrm{P}_0(S))) \to 0,$$

con S un Λ-módulo simple tal que su cubierta proyectiva $\mathrm{P}_0(S) \notin \mathrm{add}(T)$.
Por el Corolario 4.6.10 la sucesión canónica de Z en $(T_\Gamma^{\top_0}, T_\Gamma^{\top_1})$ es

$$0 \to \mathrm{Ext}^1_\Lambda(T, \mathrm{rad}(\mathrm{P}_0(S))) \to Z \to \mathrm{Hom}_\Lambda(T, \mathrm{I}_0(S)/S) \to 0.$$

La cual se escinde por la Proposición 4.1.18. □

Dualmente, tenemos la siguiente proposición.

Proposición 4.7.4. *Sean T un Λ-módulo inclinante que divide, $\Gamma := \mathrm{End}_\Lambda(T)^{op}$ y $X \in \mathrm{ind}(\Gamma)$ no inyectivo. Consideramos la sucesión que casi se escinde*

$$\xi : 0 \to X \to Z \to \tau^{-1}(X) \to 0.$$

Entonces, se cumple una de las siguientes afirmaciones *a) Todos los téminos de ξ pertenecen a $T_\Gamma^{\top_1}$.*

b) Todos los téminos de ξ pertenecen a $T_\Gamma^{\top_0}$.

c) ξ es de la forma

$$0 \to {}_\Lambda(T, \mathrm{I}_0(S)) \to \Lambda(T, \mathrm{I}_0(S)/S) \oplus^1_\Lambda(T, \mathrm{rad}(\mathrm{P}_0(S))) \to {}^1_\Lambda(T, \mathrm{rad}(\mathrm{P}_0(S))) \to 0,$$

para algún Λ-módulo simple S tal que su cubierta proyectiva $\mathrm{P}_0(S) \notin \mathrm{add}(T)$.

El Proceso de Proyectivización nos dice cuáles son los Γ-módulos proyectivos inescindibles. La siguiente proposición nos indica cuáles son los Γ-módulos inyectivos inescindibles.

Proposición 4.7.5. *Sean T un Λ-módulo inclinante que divide y $\Gamma := \mathrm{End}_\Lambda(T)^{op}$. Consideremos $\{T_1, \cdots, T_r, T_{r+1}, \cdots, T_{r+s}\}$ una lista completa de sumandos directos de T inescindibles no isomorfos dos a dos tal que T_i es un Λ-módulo proyectivo, $S_i = T_i/\mathrm{rad}(T_i)$ $\forall\ 1 \leq i \leq r$ y T_{r+j} no es un Λ-módulo proyectivo $\forall\ 1 \leq j \leq s$. Entonces*

$$\{{}_\Lambda(T, \mathrm{I}_0(S_1)), \cdots, {}_\Lambda(T, \mathrm{I}_0(S_r)), {}^1_\Lambda(T, \tau(T_{r+1})), \cdots, {}^1_\Lambda(T, \tau(T_{r+s}))\},$$

es una lista completa de Γ-módulos inyectivos inescindibles no isomorfos dos a dos.

Demostración. Si $s = 0$, por el Teorema 4.6.4, tenemos que $\{S_1, \cdots, S_r\}$ es una lista completa de Λ-módulos simples. Con lo cual

$$\{\mathrm{Hom}_\Lambda(T, \mathrm{I}_0(S_1)), \cdots, \mathrm{Hom}_\Lambda(T, \mathrm{I}_0(S_r))\}$$

es una lista completa de Γ-módulos inyectivos por la Proposición 4.6.3 y el Lema de conexión, ya que $\mathrm{P}_0(S_i) = T_i$.
Sea $s > 1$. Luego, tenemos que $\{\mathrm{Ext}^1_\Lambda(T, \tau(T_{r+1})), \cdots, \mathrm{Ext}^1_\Lambda(T, \tau(T_{r+s}))\}$ no son isomorfos dos a dos. Veamos que $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(T, \tau(T_{r+j}))$ es un Γ-módulo inyectivo $\forall\, 1 \leq j \leq s$. En efecto, supongamos que $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(T, \tau(T_{r+j}))$ no es inyectivo. Consideremos la sucesión que casi se escinde, que inicia en $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(T, \tau(T_{r+j}))$

$$\eta : 0 \to \mathrm{Ext}^1_\Lambda(T, \tau(T_{r+j})) \to Z \to \tau^{-1}(\mathrm{Ext}^1_\Lambda(T, \tau(T_{r+j}))) \to 0.$$

Del Corolario 4.5.9, se sigue que $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(T, \tau(T_{r+j})) \in T_\Gamma^{\top_0}$; por la Proposición 4.1.16, se tiene que $\tau^{-1}(\mathrm{Ext}^1_\Lambda(T, \tau(T_{r+j}))) \in T_\Gamma^{\top_0}$, dado que $T_\Gamma^{\top_0}$ es cerrada por extensiones, concluimos que $Z \in T_{\Gamma}^{\top_0}$. Aplicando la equivalencia $\mathrm{Tor}_1^{\Gamma}(T,-) : T_{\Gamma}^{\top_0} \to T^{\perp_0}$ a η, obtenemos la siguiente sucesión exacta

$$\xi : 0 \to \tau(T_{r+j}) \to L \to N \to 0.$$

Luego, por la Proposición 3.2.16, se tiene que $\tau^{-1}(\tau(T_{r+j})) \cong T_{r+j} \in T^{\perp_1}$; por la Proposición 4.1.11, tenemos que $\tau(T_{r+j}) \in {}^{\perp_1}(T^{\perp_0})$, y así, ξ se escinde y consecuentemente η se escinde, lo cual es una contradicción. El resultado se sigue ahora del Teorema 4.6.4. $\square$

Lema 4.7.6. *Sean T un Λ-módulo inclinante, $\Gamma := \mathrm{End}_{\Lambda}(T)^{op}$, $M \in T^{\perp_1}$ y $N \in T^{\perp_0}$. Entonces, tenemos los siguientes isomorfismos funtoriales*

$$\mathrm{Ext}_{\Lambda}^{\mathrm{i}}(M,N) \cong \mathrm{Ext}_{\Gamma}^{\mathrm{i}-1}(\mathrm{Hom}_{\Lambda}(T,M), \mathrm{Ext}_{\Lambda}^{1}(T,N)) \qquad \forall\, i \geq 1.$$

Demostración. Sea

$$\eta : 0 \to N \to I \to L \to 0$$

una sucesión exacta con I un Λ-módulo inyectivo. En particular, se sigue que $I \in T^{\perp_1}$, y dado que $T^{\perp_1}$ es cerrada por cocientes, concluimos que $L \in T^{\perp_1}$. Por el Teorema de Brenner y Butler, tenemos los siguientes isomorfismos funtoriales

$$\mathrm{Ext}_{\Gamma}^{\mathrm{i}}(\mathrm{Hom}_{\Lambda}(T,M), \mathrm{Hom}_{\Lambda}(T,I)) \cong \mathrm{Ext}_{\Lambda}^{\mathrm{i}}(M,I) = 0 \qquad \forall\, i > 1.$$

Por otro lado, aplicamos el funtor $\mathrm{Hom}_{\Lambda}(T,-)$ a η, obtenemos la siguiente sucesión exacta

$$0 \to \mathrm{Hom}_{\Lambda}(T,I) \to \mathrm{Hom}_{\Lambda}(T,L) \to \mathrm{Ext}_{\Lambda}^{1}(T,N) \to 0.$$

Aplicando el funtor $\mathrm{Hom}_{\Gamma}(\mathrm{Hom}_{\Lambda}(T,M),-)$ a la sucesión exacta anterior, se obtiene la siguiente sucesión exacta

$$0 \to {}_{\Gamma}({}_{\Lambda}(T,M), {}_{\Lambda}(T,I)) \to {}_{\Gamma}({}_{\Lambda}(T,M), {}_{\Lambda}(T,L)) \to {}_{\Gamma}({}_{\Lambda}(T,M), {}^{1}_{\Lambda}(T,N)) \to 0$$

Por el Lema 4.5.1 a) y la propiedad universal del Cokernel, tenemos el siguiente isomorfismo natural

$$\mathrm{Hom}_{\Gamma}(\mathrm{Hom}_{\Lambda}(T,M), \mathrm{Ext}_{\Lambda}^{1}(T,N)) \cong \mathrm{Ext}_{\Lambda}^{1}(T,N)$$

y las siguientes sucesiones exactas $\forall\, i \geq 1$,

$$0 \to {}^{i}_{\Gamma}({}_{\Lambda}(T,M), {}_{\Lambda}(T,L)) \to {}^{i+1}_{\Gamma}({}_{\Lambda}(T,M), {}^{1}_{\Lambda}(T,N)) \to 0.$$

Por lo tanto, se tienen los siguientes isomorfismos naturales

$$\begin{aligned}\mathrm{Ext}_{\Lambda}^{i+1}(M,N) \cong \mathrm{Ext}_{\Lambda}^{i}(M,L) &\cong \mathrm{Ext}_{\Gamma}^{i}(\mathrm{Hom}_{\Lambda}(T,M),\mathrm{Hom}_{\Lambda}(T,L))\\ &\cong \mathrm{Ext}_{\Gamma}^{i}(\mathrm{Hom}_{\Lambda}(T,M),\mathrm{Ext}_{\Lambda}^{1}(T,N)).\end{aligned}$$

$\square$

Para finalizar esta sección, el siguiente teorema debido a Hoshino nos da condiciones necesarias y suficientes para ver que un Λ-módulo inclinante T separa o divide.

Teorema 4.7.7. *Para T un Λ-módulo inclinante y $\Gamma := \mathrm{End}_{\Lambda}(T)^{op}$, las siguientes condiciones se satisfacen.*

a) T divide si y sólo si $\mathrm{id}(N) = 1\ \forall\ N \in T^{\perp_0} - \{0\}$.

b) T separa si y sólo si $\mathrm{pd}(X) = 1\ \forall\ X \in T_{\Gamma}^{\top_0} - \{0\}$.

Demostración. Probaremos sólo a), ya que la prueba de b) es análoga.
Supongamos que $\mathrm{id}(N)$=1 $\forall\ N \in T^{\perp_0} - \{0\}$. Por la Proposición 4.1.18, es suficiente probar que $\mathrm{Ext}_{\Gamma}^{1}(Y,X) = 0\ \forall\ X \in T_{\Gamma}^{\top_0}$ y $\forall\ Y \in T_{\Gamma}^{\top_1}$. En efecto, sean $X \in T_{\Gamma}^{\top_0}$ y $Y \in T_{\Gamma}^{\top_1}$. Por el Teorema de Brenner y Butler, tenemos que existen $M \in T^{\perp_1}$ y $N \in T^{\perp_0}$ tales que, $X \cong \mathrm{Ext}_{\Lambda}^{1}(T,N)$ y $Y \cong \mathrm{Hom}_{\Lambda}(T,M)$. Entonces, por el Lema 4.7.6, tenemos los siguientes isomorfismos funtoriales

$$\mathrm{Ext}_{\Gamma}^{1}(Y,X) \cong \mathrm{Ext}_{\Gamma}^{1}(\mathrm{Hom}_{\Lambda}(T,M),\mathrm{Ext}_{\Lambda}^{1}(T,N)) \cong \mathrm{Ext}_{\Lambda}^{2}(M,N) = 0.$$

Recíprocamente, si T divide. Sean $N \in T^{\perp_0} - \{0\}$ y

$$0 \to N \xrightarrow{g^0} I_0(N) \xrightarrow{g^1} I_1(N) \xrightarrow{g^2} I_2(N) \to \cdots,$$

una corresolución inyectiva de N, $L_0 = \mathrm{Im}(g^1)$ y $L_1 = \mathrm{Im}(g^2)$. Luego, por el Lema 4.7.6 y la Proposición 4.1.18, tenemos los siguientes isomorfismos funtoriales

$$\mathrm{Ext}_{\Lambda}^{1}(L_1,L_0) \cong \mathrm{Ext}_{\Lambda}^{2}(L_1,N) \cong \mathrm{Ext}_{\Lambda}^{1}(\mathrm{Hom}_{\Lambda}(T,L_1),\mathrm{Ext}_{\Lambda}^{1}(T,N)) = 0,$$

del isomorfismo anterior, concluimos que L_0 es inyectivo, con lo cual $\mathrm{id}(N) \leq 1$.
Finalmente, puesto que $\mathcal{I}(\Lambda) \subseteq T^{\perp_1}$ y $0 \neq N \in T^{\perp_0}$, se concluye que $\mathrm{pd}(N) = 1$. $\square$

Como consecuencia, tenemos una gran variedad de álgebras donde todos los Λ-módulos inclinantes dividen.

Corolario 4.7.8. *Sean Λ un álgebra hereditaria y T un Λ-módulo inclinante. Entonces, T es un Λ-módulo inclinante que divide.*

Demostración. Se sigue del Teorema 4.7.7 a). □

En el ápendice A, hay un ejemplo de una R-álgebra de artin que no es una K-álgebra de dimensión finita.

Capítulo 5

Teoría inclinante de Miyashita

En este capítulo expondremos una forma, dada por Y. Miyashita en [Mi], de generalizar los módulos inclinantes inclinantes clásicos. Además, probaremos el Teorema de inclinación que generaliza al Teorema de Brenner y Butler.
En este capítulo, Λ denotará una R-álgebra de artin y $\mathrm{mod}(\Lambda)$ a la categoría de Λ-módulos a izquierda finitamente generados.

5.1. Teorema de inclinación

Definición 5.1.1. *Decimos que* $T \in \mathrm{mod}(\Lambda)$ *es n-inclinante, si satisface las siguientes condiciones.*

NT1) $\mathrm{pd}(T) \leq n$.

NT2) $\mathrm{Ext}^{\mathrm{i}}_{\Lambda}(T, T) = 0 \quad \forall\ 1 \leq i \leq n$.

NT3) Existe una sucesión exacta

$$0 \to \Lambda \to T_0 \to T_1 \to \cdots \to T_n \to 0,$$

con $T_i \in \mathrm{add}(T) \quad \forall\ 0 \leq i \leq n$.

El siguiente lema será de utilidad en el resto del capítulo.

Lema 5.1.2. *Sean* $M \in \mathrm{mod}(\Lambda)$, $K \in \mathrm{mod}(\Lambda^{op})$ *y una sucesión exacta*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & N_r \arrow[r] & L_{r-1} \arrow[rr, "f_{r-1}"] \arrow[dr] & & L_{r-2} \arrow[r] & \cdots \arrow[rr] \arrow[dr] & & L_0 \arrow[r, "f_0"] & N_0 \arrow[r, "f_{-1}"] & 0, \\
& & & N_{r-1} \arrow[ur] & & & N_1 \arrow[ur] & & &
\end{tikzcd}$$

donde $N_i = \mathrm{Ker}(f_{i-1}) \quad \forall\ i \geq 0$.

a) Sea $L_j \in M^{\perp}\ \forall\ 0 \leq j \leq r-1$. *Entonces, se tienen los siguientes isomorfismos* $\forall\ k \geq 1$.

$$\mathrm{Ext}^{\mathrm{k}}_{\Lambda}(M, N_0) \cong \mathrm{Ext}^{\mathrm{k+1}}_{\Lambda}(M, N_1) \cong \cdots \cong \mathrm{Ext}^{\mathrm{k+r}}_{\Lambda}(M, N_r).$$

b) Sea $L_j \in {}^{\perp}M\ \forall\ 0 \leq j \leq r-1$. *Entonces, se tienen los siguientes isomorfismos* $\forall\ k \geq 1$.

$$\mathrm{Ext}^{\mathrm{k}}_{\Lambda}(N_r, M) \cong \mathrm{Ext}^{\mathrm{k+1}}_{\Lambda}(N_{r-1}, M) \cong \cdots \cong \mathrm{Ext}^{\mathrm{k+r}}_{\Lambda}(N_0, M).$$

c) Sea $L_j \in K^{\top}\ \forall\ 0 \leq j \leq r-1$. *Entonces, se tienen los siguientes isomorfismos* $\forall\ k \geq 1$.

$$\mathrm{Tor}^{\Lambda^{\mathrm{op}}}_{\mathrm{k+r}}(K, N_0) \cong \cdots \cong \mathrm{Tor}^{\Lambda^{\mathrm{op}}}_{\mathrm{k+1}}(K, N_{r-1}) \cong \mathrm{Tor}^{\Lambda^{\mathrm{op}}}_{\mathrm{k}}(K, N_r).$$

Demostración. La prueba es similar a la del Lema del corrimiento. □

Teorema 5.1.3. *Sean* T *un* Λ*-módulo* n*-inclinante y* $\Gamma := \mathrm{End}(T)^{op}$. *Entonces,* T *es un* Γ^{op}*-módulo* n*-inclinante y* $\Lambda \cong \mathrm{End}_{\Gamma^{\mathrm{op}}}(T)$ *como* Λ*-módulos y* R*-álgebras.*

Demostración. Por hipótesis, existe una sucesión exacta

$$0 \to \Lambda \to T_0 \overset{f_0}{\to} T_1 \overset{f_1}{\to} \cdots \overset{f_{n-1}}{\to} T_n \to 0. \tag{*}$$

Aplicando el funtor $\mathrm{Hom}_{\Lambda}(-, T)$ a la sucesión exacta anterior, tenemos la siguiente sucesión exacta

$$0 \to \mathrm{Hom}_{\Lambda}(T_n, T) \to \cdots \to \mathrm{Hom}_{\Lambda}(T_0, T) \to \mathrm{Hom}_{\Lambda}(\Lambda, T) \cong T \to 0,$$

pues $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(\mathrm{Im}(f_i),T) \cong \mathrm{Ext}^{\mathrm{n-i}}_\Lambda(T_n,T) = 0 \;\forall\; 0 \leq i \leq n-1$, por el Lema 5.1.2. Más aún, dado que $\mathrm{Hom}_\Lambda(T_i,T)$ son Γ^{op}-módulos proyectivos, tenemos que $\mathrm{pd}(T_\Gamma) \leq n$ y los siguientes isomorfismos por el Lema 5.1.2

$$\mathrm{Ext}^i_{\Gamma^{op}}(T,T) \cong \mathrm{Ext}^i_{\Gamma^{op}}(\mathrm{Hom}_\Lambda(T_i,T),T) = 0, \qquad \forall\; 0 \leq i \leq n.$$

Ahora bien, aplicando el funtor $\mathrm{Hom}_{\Gamma^{op}}(\mathrm{Hom}_\Lambda(-,T),T)$ a (*), tenemos el siguiente complejo que es exacto en los dos primeros términos

$$0 \to \mathrm{End}_{\Gamma^{\mathrm{op}}}(T) \to {}_{\Gamma^{op}}({}_\Lambda(T_0,T),T) \to {}_{\Gamma^{op}}({}_\Lambda(T_1,T),T) \to \cdots .$$

Consideremos los isomorfismos funtoriales de Λ-módulos

$$\alpha_i : T_i \to \mathrm{Hom}_{\Gamma^{\mathrm{op}}}(\mathrm{Hom}_\Lambda(T_i,T),T), \qquad (t_i \mapsto (f \mapsto f(t_i)),$$

$\forall\; f : T_i \to T$, $\forall\; t_i \in T_i$, $\forall\; 0 \leq i \leq n$. Luego, tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \Lambda \arrow[r] \arrow[d, "\exists!\,\alpha"'] & T_0 \arrow[r, "f_0"] \arrow[d, "\alpha_0"'] & T_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "\alpha_1"'] & \cdots \\
0 \arrow[r] & \mathrm{End}_{\Gamma^{\mathrm{op}}}(T) \arrow[r] & {}_{\Gamma^{op}}({}_\Lambda(T_0,T),T) \arrow[r] & {}_{\Gamma^{op}}({}_\Lambda(T_1,T),T) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Puesto que α_i es un isomorfismo $\forall\; 0 \leq i \leq n$, concluimos que la segunda fila del diagrama anterior es una sucesión exacta y $\alpha : \Lambda \to \mathrm{End}_{\Gamma^{\mathrm{op}}}(T)$ es un isomorfismo. Similarmente a la Proposición 4.5.3, se tiene que Λ y $\mathrm{End}_{\Gamma^{\mathrm{op}}}(T)$ son R-álgebras isomorfas.

Por último, como $\mathrm{pd}(T) \leq n$, existe una resolución proyectiva

$$P_\bullet(T) : 0 \to P_n(T) \overset{p_n}{\to} P_{n-1}(T) \overset{p_{n-1}}{\to} \cdots \to P_0(T) \overset{p_0}{\to} T \to 0.$$

Aplicando el funtor $\mathrm{Hom}_\Lambda(-,T)$ a la resolución proyectiva $P_\bullet(T)$, obtenemos la siguiente sucesión exacta de Γ^{op}-módulos

$$0 \to \Gamma^{op} \to \mathrm{Hom}_\Lambda(P_0(T),T) \to \cdots \to \mathrm{Hom}_\Lambda(P_n(T),T) \to 0,$$

ya que $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(\mathrm{Im}(p_j),T) \cong \mathrm{Ext}^{\mathrm{j+1}}_\Lambda(T,T) = 0 \;\forall\; 0 \leq j \leq n-1$, por el Lema 5.1.2. También, se tiene que $\mathrm{Hom}_\Lambda(P_r(T),T) \in \mathrm{add}(T_\Gamma) \;\forall\; 0 \leq r \leq n$. Por lo tanto T es un Γ^{op}-módulo n-inclinante. □

Lema 5.1.4. *Para un Λ-módulo n-inclinante T, las siguientes condiciones se satisfacen.*

a) $T^\perp \subseteq \mathrm{gen}(T)$.

b) *Para toda* $\mathrm{add}(T)$*-precubierta* $f : T' \to M$*, con* $M \in T^\perp$*, se tiene la sucesión exacta*

$$0 \to \mathrm{Ker}(f) \to T' \xrightarrow{f} M \to 0,$$

donde $\mathrm{Ker}(f) \in T^\perp$*.*

Demostración. *a*). Sean $M \in T^\perp$, $p : \Lambda^n \to M$ un epimorfismo y

$$0 \to \Lambda^n \xrightarrow{f_{-1}} T_0 \xrightarrow{f_0} T_1 \xrightarrow{f_1} \cdots \xrightarrow{f_{n-1}} T_n \to 0$$

una sucesión exacta, con $T_i \in \mathrm{add}(T)\ \forall\, 0 \leq i \leq n$. Por el Lema 5.1.2, tenemos que $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(\mathrm{Ker}(f_1), M) \cong \mathrm{Ext}^{\mathrm{n}}_\Lambda(T_n, M) = 0$. Por otro lado, consideramos el push-out de los morfismos f_{-1} y p

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \Lambda^n \arrow[r, "f_{-1}"] \arrow[d, "p"'] & T_0 \arrow[r] \arrow[d, "q"] & \mathrm{Ker}(f_1) \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & M \arrow[r] & F \arrow[r] & \mathrm{Ker}(f_1) \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Dado que p es un epimorfismo, q lo es. Con lo cual, $M \in \mathrm{gen}(T)$, ya que la sucesión exacta inferior del diagrama anterior se escinde.
b). Sea $f : T' \to M$ una $\mathrm{add}(T)$-precubierta, con $M \in T^\perp$. Por el Lema 4.1.14 y *a*), se tiene que f es un epimorfismo; con lo cual la siguiente sucesión es exacta

$$\eta : 0 \to \mathrm{Ker}(f) \to T' \xrightarrow{f} M \to 0.$$

Aplicando el funtor $\mathrm{Hom}_\Lambda(T, -)$ a η, obtenemos la siguiente sucesión exacta

$$\mathrm{Hom}_\Lambda(T, T') \xrightarrow{\mathrm{Hom}_\Lambda(T,f)} \mathrm{Hom}_\Lambda(T, M) \to \mathrm{Ext}^1_\Lambda(T, \mathrm{Ker}(f)) \to 0.$$

Así, $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(T, \mathrm{Ker}(f)) = 0$, puesto que $\mathrm{Hom}_\Lambda(T, f)$ es un epimorfismo. Por último, tenemos los siguientes isomorfismos, por el Lema 5.1.2 aplicado a η,

$$\mathrm{Ext}^{\mathrm{i}}_\Lambda(T, \mathrm{Ker}(f)) \cong \mathrm{Ext}^{\mathrm{i}-1}_\Lambda(T, M) = 0 \quad \forall i \geq 2.$$

Por lo tanto $\mathrm{Ker}(f) \in T^\perp$. □

Proposición 5.1.5. *Sean* T *un* Λ*-módulo* n*-inclinante y* $\Gamma := \mathrm{End}(T)^{op}$*. Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen.*

a) El morfismo canónico $\epsilon_M : T \otimes_\Gamma \mathrm{Hom}_\Lambda(T, M) \to M$ *es un isomorfismo* $\forall\, M \in T^\perp$.

b) $\mathrm{Hom}_\Lambda(T, M) \in T_\Gamma^{\top_1} \qquad \forall\, M \in T^\perp$.

c) $\mathrm{Hom}_\Lambda(T, M) \in T_\Gamma^{\top} \qquad \forall\, M \in T^\perp$.

Demostración. Sea $M \in T^\perp$.
a). Sea $f : T' \to M$ una add(T)-aproximación. Aplicando el funtor $\mathrm{Hom}_\Lambda(T, -)$, a la sucesión exacta (ver Lema 5.1.4 b))

$$0 \to \mathrm{Ker}(f) \to T' \to M \to 0,$$

obtenemos la siguiente sucesión exacta

$$0 \to {}_\Lambda(T, \mathrm{Ker}(f)) \to {}_\Lambda(T, T') \to {}_\Lambda(T, M) \to 0.$$

Luego, aplicamos el funtor $T \otimes_\Gamma -$ a la sucesión exacta enterior, tenemos el siguiente diagrama conmutativo con filas exactas

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & {}^{\Gamma}_{1}(T, {}_\Lambda(T, M)) \arrow[r] & {}^{\Gamma}(T, {}_\Lambda(T, \mathrm{Ker}(f))) \arrow[r] \arrow[d, "\epsilon_{\mathrm{Ker}(f)}"'] & {}^{\Gamma}(T, {}_\Lambda(T, T')) \arrow[r] \arrow[d, "\epsilon_{T'}"] & {}^{\Gamma}(T, {}_\Lambda(T, M)) \arrow[r] \arrow[d, "\epsilon_M"] & 0 \\
0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \mathrm{Ker}(f) \arrow[r] & T' \arrow[r] & M \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Por el Lema 4.1.16 y el Lema 5.1.4, se tiene que $\epsilon_{\mathrm{Ker}(f)}$ es un epimorfismo; y por el Lema de los cinco ϵ_M es un isomorfismo.
b). Por la propiedad universal del Kernel, el diagrama anterior, el inciso a), y el Lema de los cinco, tenemos que $\mathrm{Tor}_1^\Gamma(T, \mathrm{Hom}_\Lambda(T, M)) = 0$.
c). Sea $m \geq 1$. Consideremos una sucesión exacta (ver Lema 5.1.4 b))

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Ker}(f_{m-1}) \arrow[r] & T_{m-1} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & T_1 \arrow[rr] \arrow[dr, "f_1"'] & & T_0 \arrow[r, "f_0"] & M \arrow[r] & 0, \\
& & & & & \mathrm{Ker}(f_0) \arrow[ur] & & &
\end{tikzcd}$$

donde f_k es una add(T)-precubierta y $\mathrm{Ker}(f_k) \in {}^\perp T$ $\forall\ 0 \leq k \leq m-1$. Aplicando el funtor $\mathrm{Hom}_\Lambda(T, -)$ a la sucesión exacta anterior, obtenemos la siguiente sucesión exacta

$$0 \to {}_\Lambda(T, \mathrm{Ker}(f_{m-1})) \to {}_\Lambda(T, T_{m-1}) \to \cdots \to {}_\Lambda(T, T_0) \to {}_\Lambda(T, M) \to 0.$$

Puesto que $\mathrm{Hom}_\Lambda(T, T_k) \in T_\Gamma^\top$, por el Lema 5.1.2 y b), tenemos que

$$\mathrm{Tor}_{\mathrm{m}}^\Gamma(T, \mathrm{Hom}_\Lambda(T, M)) \cong \mathrm{Tor}_1^\Gamma(T, \mathrm{Hom}_\Lambda(T, \mathrm{Ker}(f_{m-1}))) = 0.$$

Por lo tanto, $\mathrm{Hom}_\Lambda(T, M) \in T_\Gamma^\top$. □

Definición 5.1.6. *Sean $\mathcal{X}$ una clase de módulos en* $\mathrm{mod}(\Lambda)$ *y $\mathcal{Y}$ una clase de módulos en* $\mathrm{mod}(\Lambda^{op})$. *Para cada $i \in \mathbb{N}$, se tienen las siguientes subcategorías plenas de* $\mathrm{mod}(\Lambda)$.

a) La i-ésima categoría especial perpendicular a derecha de $\mathcal{X}$

$$\mathrm{KE}^{\mathrm{i}}(\mathcal{X}) := \{M \in \mathrm{mod}(\Lambda) \mid \mathrm{Ext}_\Lambda^{\mathrm{k}}(X, M) = 0, \forall X \in \mathcal{X}, \forall k \in \mathbb{N}, i \neq k\}.$$

b) La i-ésima categoría especial ortogonal a derecha de $\mathcal{Y}$

$$\mathrm{KT}_{\mathrm{i}}(\mathcal{Y}) := \{M \in \mathrm{mod}(\Lambda) \mid \mathrm{Tor}_{\mathrm{k}}^\Lambda(Y, M) = 0, \forall Y \in \mathcal{Y}, \forall k \in \mathbb{N}, i \neq k\}.$$

Note que $\mathrm{KE}^0(\mathcal{X}) = \mathcal{X}^\perp$ y $\mathrm{KT}_0(\mathcal{Y}) = \mathcal{Y}^\top$. Veamos una aplicación del Teorema 3.1.16.

Lema 5.1.7. *Sea $M \in \mathrm{mod}(\Lambda^{op})$. Entonces*

$$\mathrm{D}_\Gamma(\mathrm{KT}_{\mathrm{m}}(M_\Lambda)) = \mathrm{KE}^{\mathrm{m}}({}_{\Lambda^{op}}M) \quad \forall\, m \in \mathbb{N}.$$

Proposición 5.1.8. *Sean T un Λ-módulo n-inclinante y $\Gamma := \mathrm{End}(T)^{op}$. Para $X \in T_\Gamma^\top$, las siguientes condiciones se satisfacen.*

a) El morfismo canónico $\delta_X : X \to \mathrm{Hom}_\Lambda(T, T \otimes_\Gamma X)$ es un isomorfismo.

b) $T \otimes_\Gamma X \in T^\perp$.

Demostración. Sea $X \in T_\Gamma^\top$. Por el Lema 5.1.7, tenemos que $\mathrm{D}_\Gamma(X) \in {}_{\Gamma^{op}}T^\perp$.
a). Por la Proposición 5.1.5 y el Teorema 5.1.3, tenemos que

$$\epsilon_{\mathrm{D}_\Gamma(X)} : T \otimes_{\Lambda^{op}} \mathrm{Hom}_{\Gamma^{op}}(T, \mathrm{D}_\Gamma(X)) \to \mathrm{D}_\Gamma(X)$$

es un isomorfismo. Luego, del Lema 4.5.5, concluimos que δ_X es un isomorfismo.
b). Por la proposición 5.1.5 tenemos que $\mathrm{Hom}_{\Gamma^{\mathrm{op}}}(T, \mathrm{D}_\Gamma(X)) \in T_{\Lambda^{op}}^\top$. Luego, por el Teorema 3.1.16 y el Lema 5.1.7, se tiene que

$$T \otimes_\Gamma X \cong \mathrm{D}_{\Lambda^{\mathrm{op}}}\mathrm{Hom}_{\Gamma^{\mathrm{op}}}(T, \mathrm{D}_\Gamma(X)) \in T^\perp.$$

□

La Proposición 5.1.5 y la Proposición 5.1.8, se pueden reformular en el siguiente teorema.

Teorema 5.1.9. *Sean T un Λ-módulo n-inclinante y $\Gamma := \mathrm{End}(T)^{op}$. Entonces, el funtor*

$$\mathrm{Hom}_{\Lambda}(T,-) : T^{\perp} \to T_{\Gamma}^{\top},$$

es una equivalencia de categorías con casi-inversa

$$T \otimes_{\Gamma} - : T_{\Gamma}^{\top} \to T^{\perp}.$$

Demostración. Es inmediata de las proposiciones 5.1.5 y 5.1.8. □

Proposición 5.1.10. *Sean T un Λ-módulo n-inclinante y $\Gamma := \mathrm{End}(T)^{op}$. Entonces, para toda $0 \leq m \leq n$, las siguientes condiciones se satisfacen.*

a) Existe un isomorfismo natural

$$\epsilon_M^m : \mathrm{Tor}_{\mathrm{m}}^{\Gamma}(T, \mathrm{Ext}_{\Lambda}^{\mathrm{m}}(T,M)) \to M \quad \forall M \in \mathrm{KE^m}(T).$$

b) $\mathrm{Ext}_{\Lambda}^{\mathrm{m}}(T,M) \in \mathrm{KT_m}(T_{\Gamma})$.

Demostración. Por el Teorema 5.1.9, podemos asumir que $m > 0$. Sea $M \in \mathrm{KE^m}(T)$. Consideremos la co-resolución inyectiva minimal de M

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M \arrow[r] & I^0 \arrow[r] & \cdots \arrow[rr] \arrow[dr] & & I^{m-1} \arrow[rr] \arrow[dr] & & I^m. \\
& & & & \Omega^{-(m-1)}(M) \arrow[ur] & & \Omega^{-m}(M) \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Por el Lema 5.1.2, tenemos los siguientes isomorfismos.

$$\mathrm{Ext}_{\Lambda}^1(T, \Omega^{-k}(M)) \cong \mathrm{Ext}_{\Lambda}^{1+\mathrm{k}}(T,M) = 0 \quad \forall\, 0 \leq k \leq m-2. \tag{1}$$

$$\mathrm{Ext}_{\Lambda}^1(T, \Omega^{-(m-1)}(M)) \cong \mathrm{Ext}_{\Lambda}^{\mathrm{m}}(T,M). \tag{2}$$

$$\mathrm{Ext}_{\Lambda}^{\mathrm{r}}(T, \Omega^{-m}(M)) \cong \mathrm{Ext}_{\Lambda}^{\mathrm{r+m}}(T,M) \quad \forall\, r \geq 0. \tag{3}$$

Por (3) tenemos que $\Omega^{-m}(M) \in T^{\perp}$; y por (1), obtenemos la siguiente sucesión exacta

$$0 \to {}_{\Lambda}(T, I^0) \to \cdots \to {}_{\Lambda}(T, \Omega^{-(m-1)}(M)) \to 0.$$

Luego, consideramos la siguiente sucesión exacta

$$0 \to \Omega^{-(m-1)}(M) \to I^{m-1} \to \Omega^{-m}(M) \to 0;$$

por (2), tenemos la siguiente sucesión exacta

$$0 \to {}_{\Lambda}(T, \Omega^{-(m-1)}(M)) \to {}_{\Lambda}(T, I^{m-1}) \to {}_{\Lambda}(T, \Omega^{-m}(M)) \to {}^{m}_{\Lambda}(T, M) \to 0.$$

Con lo cual existen dos casos para analizar: $m = 1$ y $m > 1$.
Si $m = 1$, tenemos la siguiente sucesión es exacta

$$0 \to {}_{\Lambda}(T, I^0) \to {}_{\Lambda}(T, \Omega^{-1}(M))) \to {}^{1}_{\Lambda}(T, M) \to 0.$$

Aplicando el funtor $T \otimes_{\Gamma} -$ a la sucesión exacta anterior, obtenemos el siguiente diagrama conmutativo con filas exactas

$$\begin{tikzcd}
{}^{\Gamma}_{1}(T, {}^{1}_{\Lambda}(T, M)) \arrow[r] & {}^{\Gamma}(T, {}_{\Lambda}(T, I^0)) \arrow[r] \arrow[d, "\epsilon_{I^0}"'] & {}^{\Gamma}(T, {}_{\Lambda}(T, \Omega^{-1}(M))) \arrow[r] \arrow[d, "\epsilon_{\Omega^{-1}(M)}"'] & {}^{\Gamma}(T, {}^{1}_{\Lambda}(T, M)) \arrow[r] & 0 \\
M \arrow[r] & I^0 \arrow[r] & \Omega^{-1}(M) \arrow[r] & 0,
\end{tikzcd}$$

donde ϵ_{I^0} y $\epsilon_{\Omega^{-1}(M)}$ son isomorfismos por el Teorema 5.1.9.
Sea $m > 1$. Consideremos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & {}_{\Lambda}(T, I^0) \arrow[r] \arrow[d] & {}_{\Lambda}(T, I^1) \arrow[r] \arrow[d, equal] & {}_{\Lambda}(T, \Omega^{-2}(M)) \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & {}_{\Lambda}(T, \Omega^{-1}(M)) \arrow[r] & {}_{\Lambda}(T, I^1) \arrow[r] & {}_{\Lambda}(T, \Omega^{-2}(M)) \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Dado que la fila inferior es exacta, la superior también. Aplicando el funtor $T \otimes_{\Gamma} -$ a la sucesión exacta superior, obtenemos por el Teorema 5.1.9 el siguiente diagrama conmutativo con filas exactas

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & {}^{\Gamma}_{1}(T, {}^{1}_{\Lambda}(T, \Omega^{-2}(M))) \arrow[r] \arrow[d, "f"] & {}^{\Gamma}(T, {}^{1}_{\Lambda}(T, I^0)) \arrow[r] \arrow[d, "\epsilon_{I^0}"'] & {}^{\Gamma}(T, {}^{1}_{\Lambda}(T, I^1)) \arrow[r] \arrow[d, "\epsilon_{I^1}"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & M \arrow[r] & I^0 \arrow[r] & I^1,
\end{tikzcd}$$

donde f es un isomorfismo, puesto que ϵ_{I^0} y ϵ_{I^1} lo son. Por otro lado, dado que la sucesión

$${}_{\Lambda}(T, I^{m-1}) \to {}_{\Lambda}(T, \Omega^{-m}(M)) \to {}^{m}_{\Lambda}(T, M) \to 0,$$

es exacta, tenemos el siguiente diagrama conmutativo con filas exactas

$$\begin{tikzcd}
{}^{\Gamma}(T, {}_{\Lambda}(T, I^{m-1})) \arrow[r] \arrow[d, "\epsilon_{I^{m-1}}"] & {}^{\Gamma}(T, {}_{\Lambda}(T, \Omega^{-m}(M))) \arrow[r] \arrow[d, "\epsilon_{\Omega^{-m}(M)}"] & {}^{\Gamma}(T, {}^{m}_{\Lambda}(T, M)) \arrow[r] & 0 \\
I^{m-1} \arrow[r] & \Omega^{-m}(M) \arrow[r] & 0. &
\end{tikzcd}$$

Con lo cual $T \otimes_{\Gamma} \mathrm{Ext}^{\mathrm{m}}_{\Lambda}(T, M) = 0$. Consideramos ahora el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & {}^{\Gamma}_{1}(T, {}^{1}_{\Lambda}(T, \Omega^{-2}(M))) \arrow[r] \arrow[d, "f"] & \cdots \arrow[r] & {}^{\Gamma}(T, {}_{\Lambda}(T, \Omega^{-m}(M))) \arrow[r] \arrow[d, "\epsilon_{\Omega^{-m}(M)}"] & {}^{\Gamma}(T, {}^{m}_{\Lambda}(T, M)) \\
0 \arrow[r] & M \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & \Omega^{-m}(M) \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Puesto que la sucesión inferior es exacta, la superior lo es. Luego, considerando la sucesión exacta

$$0 \to_{\Lambda} (T, I^0) \to \cdots \to_{\Lambda} (T, \Omega^{-(m-1)}(M)) \to^{m}_{\Lambda} (T, M) \to 0. \qquad (*)$$

Por el Lema 5.1.2, tenemos que

$$\mathrm{Tor}^{\Gamma}_{\mathrm{n}}(T, \mathrm{Ext}^{\mathrm{n}}_{\Lambda}(T, M)) \cong \mathrm{Tor}^{\Gamma}_{1}(T, \mathrm{Ext}^{1}_{\Lambda}(T, \Omega^{-2}(M))) \cong M.$$

b). Del diagrama conmutativo anterior y (*), se tiene que $T \otimes_{\Gamma} \mathrm{Ext}^{\mathrm{m}}_{\Lambda}(T, M) = 0$, y por el Lema 5.2.1

$$\mathrm{Tor}^{\Gamma}_{\mathrm{l}}(T, \mathrm{Ext}^{\mathrm{m}}_{\Lambda}(T, M)) \cong \mathrm{Tor}^{\Gamma}_{1}(T, \Omega^{m+1-l}(M)) = 0$$

$\forall\ 1 \leq l \leq m-1$. Por último

$$0 = \mathrm{Tor}^{\Gamma}_{\mathrm{i}}(T, \mathrm{Hom}_{\Lambda}(T, I^0)) \cong \mathrm{Tor}^{\Gamma}_{\mathrm{m+i}}(T, \mathrm{Ext}^{\mathrm{m}}_{\Lambda}(T, M)) \quad \forall\ i > 1.$$

Por lo tanto, $\mathrm{Ext}^{\mathrm{m}}_{\Lambda}(T, M) \in \mathrm{KT}_{\mathrm{m}}(T_{\Gamma})$. □

La siguiente proposición es una generalización de la Proposición 5.1.8.

Proposición 5.1.11. *Sean T un Λ-módulo n-inclinante y $\Gamma := \mathrm{End}(T)^{op}$. Entonces, para cada $0 \leq m \leq n$, las siguientes condiciones se satisfacen.*

a) Existe un isomorfismo natural

$$\delta^m_X : X \to \mathrm{Ext}^{\mathrm{m}}_{\Lambda}(T, \mathrm{Tor}^{\Gamma}_{\mathrm{m}}(T, X)) \quad \forall X \in \mathrm{KT}_{\mathrm{m}}(T_{\Gamma}).$$

b) $\mathrm{Tor}^{\Gamma}_{\mathrm{m}}(T,X)\in \mathrm{KE}^{\mathrm{m}}(T)$.

Las últimas dos proposiciones las podemos resumir en el siguiente resultado, que es conocido como el Teorema de inclinación.

Teorema 5.1.12. *Sean T un Λ-módulo n-inclinante y $\Gamma := \mathrm{End}(T)^{op}$. Entonces, para cada $0\le m\le n$, el funtor*

$$\mathrm{Ext}^{\mathrm{m}}_{\Lambda}(T,-):\mathrm{KE}^{\mathrm{m}}(T)\to \mathrm{KT}_{\mathrm{m}}(T_{\Gamma}),$$

es una equivalencia de categorías, con casi-inversa

$$\mathrm{Tor}^{\Gamma}_{\mathrm{m}}(T,-):\mathrm{KT}_{\mathrm{m}}(T_{\Gamma})\to \mathrm{KE}^{\mathrm{m}}(T).$$

Note que el Teorema de Brenner y Butler es el Teorema de inclinación, cuando T es un Λ-módulo 1-inclinante.
Para ver otras equivalencias de categorías relacionadas a módulos inclinante, se recomienda ver [As, 3,4], donde se da una equivalencia de categorías sobre la categoría proyectivamente estable de una K-álgebra de dimensión finita y en [Ha, pág 114] se da una equivalencia de categorías triánguladas entre la categoría derivada acotada de un álgebra y la categoría derivada acotada del álgebra de endomorfismos de un módulo n-tilting.

5.2. Consecuencias del Teorema de inclinación

Lema 5.2.1. *Sean T un Λ-módulo n-inclinante, $\Gamma := \mathrm{End}_{\Lambda}(T)^{op}$ y $I\in\mathcal{I}(\Lambda)$. Entonces,*

$$\mathrm{id}({}_{\Gamma}\mathrm{Hom}_{\Lambda}(T,I))\le n.$$

Demostración. Sea $X\in \mathrm{mod}(\Gamma)$. Consideremos la resolución proyectiva minimal de X

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \Omega^{n+1}(M) \arrow[r] & P_n \arrow[rr] \arrow[dr] & & \cdots \arrow[r] & P_0 \arrow[r] & X \arrow[r] & 0. \\ & & & \Omega^{n}(M) \arrow[ur] & & & & \end{tikzcd}$$

Por el Teorema 3.1.16, el Lema 5.1.2 y el Teorema 5.1.3, se sigue que

$$0\cong \mathrm{D}_{\Lambda^{\mathrm{op}}}\mathrm{Ext}^{\mathrm{n+1}}_{\Gamma^{\mathrm{op}}}(T,\mathrm{D}_{\Gamma}(X))\cong \mathrm{Tor}^{\Gamma}_{\mathrm{n+1}}(T,X)\cong \mathrm{Tor}^{\Gamma}_{1}(T,\Omega^{n}(M)).$$

Con lo cual, la siguiente sucesión es exacta

$$0 \to {}^{\Gamma}(T, \Omega^{n+1}(M)) \to {}^{\Gamma}(T, P_n) \to {}^{\Gamma}(T, \Omega^{n}(M)) \to 0.$$

Así, aplicamos el funtor $\mathrm{Hom}_{\Lambda}(-, I)$ a la sucesión exacta anterior, tenemos el siguiente diagrama conmutativo con filas exactas

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & {}_{\Lambda}({}^{\Gamma}(T, \Omega^n(M)), I) \arrow[r] \arrow[d, "\eta_{\Omega^n(M)}"] & {}_{\Lambda}({}^{\Gamma}(T, P_n), I) \arrow[r] \arrow[d, "\eta_{P_n}"] & {}_{\Lambda}({}^{\Gamma}(T, \Omega^{n+1}(M)), I) \arrow[r] \arrow[d, "\eta_{\Omega^{n+1}(M)}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & {}_{\Gamma}(\Omega^n(M), {}_{\Lambda}(T, I)) \arrow[r] & {}_{\Gamma}(P_n, {}_{\Lambda}(T, I)) \arrow[r] & {}_{\Gamma}(\Omega^{n+1}(M), {}_{\Lambda}(T, I)) \arrow[r] & 0,
\end{tikzcd}$$

donde η es la adjunción Hom-Tensor. Dado que la sucesión inferior es exacta, se sigue que $\mathrm{Ext}^{n+1}_{\Gamma}(X, \mathrm{Hom}_{\Lambda}(T, I)) = 0$; y por lo tanto del Teorema 2.8.7 concluimos que

$$\mathrm{id}({}_{\Gamma}\mathrm{Hom}_{\Lambda}(T, I)) \leq n.$$

□

Lema 5.2.2. *Sean T un Λ-módulo n-inclinante, $\Gamma := \mathrm{End}_{\Lambda}(T)^{op}$. Entonces, para cada $M \in T^{\perp}$, se tiene que*

$$\mathrm{id}({}_{\Gamma}\mathrm{Hom}_{\Lambda}(T, M)) \leq \mathrm{id}({}_{\Lambda}M) + n.$$

Demostración. Supongamos que $\mathrm{id}(M) = r < \infty$. Sea

$$0 \to M \to I^0 \to \cdots \to I^r \to 0,$$

una co-resolución inyectiva de M. Aplicando el funtor $\mathrm{Hom}_{\Lambda}(T, -)$ a la sucesión anterior, obtenemos la siguiente sucesión exacta, puesto que $M \in T^{\perp}$

$$0 \to {}_{\Lambda}(T, M) \to {}_{\Lambda}(T, I^0) \to \cdots \to {}_{\Lambda}(T, I^r) \to 0.$$

Por el Lema 5.2.1 y la Proposición 2.8.9, tenemos que

$$\mathrm{id}(\mathrm{Hom}_{\Lambda}(T, \Omega^{r-1})) \leq n + 1.$$

Repitiendo, el argumento anterior $r - 1$-veces, se tiene que

$$\mathrm{id}({}_{\Gamma}\mathrm{Hom}_{\Lambda}(T, M)) \leq \mathrm{id}({}_{\Lambda}M) + n.$$

□

El siguiente teorema es una generalización del Teorema 4.6.2 y se basa en el hecho que la dimensión global es el supremo de las dimensiones inyectivas de los módulos.

Teorema 5.2.3. $|\mathrm{gl.dim}(\Lambda) - \mathrm{gl.dim}(\Gamma)| \leq n.$

Demostración. Sea $X \in \mathrm{mod}(\Gamma)$. Consideremos la resolución proyectiva minimal

$$0 \to \Omega^n(X) \to P_{n-1} \to \cdots \to P_0 \to X \to 0.$$

Luego, por el Teorema 3.1.16, Lema 5.1.2 y el Teorema 5.1.3 se sigue que

$$0 = \mathrm{D}_{\Lambda^{\mathrm{op}}}\mathrm{Ext}^{\mathrm{n+i}}_{\Gamma^{\mathrm{op}}}(T, \mathrm{D}_\Gamma(X)) \cong \mathrm{Tor}^{\Gamma}_{\mathrm{n+i}}(T, X) \cong \mathrm{Tor}^{\Gamma}_{\mathrm{i}}(T, \Omega^n(X)) \quad \forall\, i > 0,$$

con lo cual $\Omega^n(X) \in T_\Gamma^{\top}$. Por el Teorema 5.1.9 existe $M_i \in T^{\perp}$, para cada $0 \leq i \leq n$, tales que la sucesión exacta anterior es isomorfa a

$$0 \to {}_\Lambda(T, M_n) \to {}_\Lambda(T, M_{n-1}) \to \cdots \to {}_\Lambda(T, M_0) \to X \to 0.$$

Por el Lema 5.2.2 y la Proposición 2.8.9, se tiene que

$$\mathrm{id}({}_\Lambda(T, \Omega^{n-1}(X))) \leq \mathrm{id}(\Omega^{n-1}(X)) + n \leq \mathrm{gl.dim}(\Lambda) + n.$$

Repitiendo, el argumento anterior $n-1$-veces, se tiene que

$$\mathrm{id}(X) \leq \mathrm{gl.dim}(\Lambda) + n.$$

Concluimos que $\mathrm{gl.dim}(\Gamma) \leq \mathrm{gl.dim}(\Lambda) + n$. Por otro lado, como T es un Γ^{op}-módulo n-inclinante y $\mathrm{End}_{\Gamma^{\mathrm{op}}}(T) \cong \Lambda$, se tiene que

$$\mathrm{gl.dim}(\Lambda) \leq \mathrm{gl.dim}(\Gamma) + n.$$

□

Para finalizar este capítulo, mostraremos un teorema ánalogo a la Proposición 4.6.3

Teorema 5.2.4. *La correspondencia*

$$\psi : \mathrm{K}_0(\Lambda) \to \mathrm{K}_0(\Gamma)$$

$$[M] \mapsto \sum_{i=0}^{n} (-1)^n [\mathrm{Ext}^{\mathrm{i}}_\Lambda(T, M)],$$

es un isomorfismo de grupos abelianos.

Demostración. Análogamente a la Proposición 4.6.3, se tiene que ψ es un morfismo de grupos abelianos. Ahora bien, para cada $X \in \mathrm{mod}(\Gamma)$, consideremos la resolución proyectiva minimal

$$0 \to \Omega^n(X) \to P_{n-1} \to \cdots \to P_0 \to X \to 0.$$

En la demostración del Teorema 5.2.3 se ve que $\Omega^n(X) \in T_\Gamma^\top$. Por otro lado, se tiene, por la definición del grupo de Grothendieck, que $[\Omega^k(X)] = [P_k] - [\Omega^{k+1}(X)]\ \forall\ 0 \leq k \leq n-1$; con lo cual

$$[X] = \sum_{i=0}^{n-1}[P_i] + (-1)^n[\Omega^n(X)].$$

Consecuentemente, $\mathrm{K}_0(\Gamma)$ está generado por $T_\Gamma^\top$. Ahora bien, sea $Y \in \mathrm{mod}(\Gamma)$. Por el Teorema de inclinación, existe $M \in T^\perp$ tal que $\mathrm{Hom}_\Lambda(T, M) \cong Y$. Por definición $\psi([M]) = [Y]$, con lo cual $\mathrm{rkK}_0(\Gamma) \leq \mathrm{rkK}_0(\Lambda)$. Dualmente, dado que T es un Γ^{op}-módulo n-inclinante y $\mathrm{End}_{\Gamma^{op}}(T) \cong \Lambda$, por el Teorema 5.1.3, se sigue que $\mathrm{rkK}_0(\Lambda) \leq \mathrm{rkK}_0(\Gamma)$. Por lo tanto ψ es un isomorfismo. $\square$

Para ver más aplicaciones se recomienda ver [AHK].

.

Apéndice A

Ejemplo de un álgebra de artin

En esté apéndice veremos una álgebra de artin que no es una K-álgebra de dimensión finita y después haremos unos comentarios, por ejemplo, sobre las representaciones sobre dicha álgebra.

Ejemplo A.0.1. Sean

$$Q := \bullet^1 \xrightarrow{\alpha} \bullet^2 \circlearrowleft \beta$$

$I :=< \beta^2 >$ y $\Lambda := \mathbb{Z}_4 Q/I$ el álgebra de caminos de Q sobre $\mathbb{Z}_4$ cociente el ideal I.
Sean ϵ_1, ϵ_2 los caminos de longitud cero asociados a los vértices respectivamente, con lo cual tenemos que P(1)= $\mathbb{Z}_4\epsilon_1 \oplus \mathbb{Z}_4\alpha \oplus \mathbb{Z}_4\beta\alpha$, P(2)= $\mathbb{Z}_4\epsilon_2 \oplus \mathbb{Z}_4\beta$.
Consideremos el morfismo

$$f : \mathrm{P}(2) \to \mathrm{P}(1)$$

$$(\epsilon_2 \mapsto \alpha, \beta \mapsto \beta\alpha),$$

dado que Coker(f)=P(2)/P(1), no es proyectivo, tenemos que la siguiente sucesión exacta no se escinde

$$0 \to \mathrm{P}(1) \xrightarrow{f} \mathrm{P}(2) \xrightarrow{g} \mathrm{P}(1)/\mathrm{P}(2) \to 0.$$

Luego, consideramos el siguiente morfismo

$$f' : \mathrm{P}(2) \to \mathrm{P}(1)$$

$$(\epsilon_2 \mapsto \beta\alpha, \beta \mapsto 0),$$

como $\mathrm{Im}(f)\neq\mathrm{Im}(f')$, concluimos que $\mathrm{Coker}(f)\ncong\mathrm{Coker}(f')$.
Por otro lado, consideramos un grupo de generadores $\{f, f', \cdots, g\}$ del Γ-módulo $\mathrm{Hom}_\Lambda(\mathrm{P}(2), \mathrm{P}(1))$, donde $\Gamma := \mathrm{End}_\Lambda(\mathrm{P}(2))^{op}$. Si

$$F := [f, f', \cdots, g_n] : \mathrm{P}(2) \to \mathrm{P}(1)^{\mathrm{n}},$$

tenemos por el Teorema 4.4.4 que $\mathrm{Coker}(F)$ es inclinante parcial y que $\{\mathrm{Coker}(f),\mathrm{Coker}(f')\} \subseteq \mathrm{add}(\mathrm{Coker}(F))$. Con lo cual, $\mathrm{Coker}(F)$ tiene al menos dos sumandos directos inescindibles nos isomorfos, por el Teorema 4.6.4 el número de sumandos inescindibles no isomorfos de $\mathrm{Coker}(F)$ es 2, con lo cual $\mathrm{Coker}(f)\oplus$ $\mathrm{Coker}(f')$ es inclinante, por el Teorema 4.6.4.

Notemos que en el ejemplo anterior, la representación de P(1) cambia del caso para una K-álgebra de dimensión finita

$$\mathrm{P}(1) := \begin{tikzcd} \bullet_{\mathbb{Z}_4} \arrow[r, "\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}"] & \bullet_{(\mathbb{Z}_4)^2} \arrow[loop right, "\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}"] \end{tikzcd}$$

puesto que

$$\mathrm{rad}(\mathrm{P}(1)) := \begin{tikzcd} \bullet_{\mathbb{Z}_2} \arrow[r, "\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}"] & \bullet_{(\mathbb{Z}_4)^2} \arrow[loop right, "\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}"] \end{tikzcd}$$

$$\mathrm{top}(\mathrm{P}(1)) := \begin{tikzcd} \bullet_{\mathbb{Z}_2} \arrow[r, "0"] & \bullet_0 \arrow[loop right, "0"] \end{tikzcd}.$$

Por último si K es un campo se tiene que KQ/I, es una álgebra Gorenstein y

$$\mathrm{P}(1) = \mathrm{I}(2) := \begin{tikzcd} \bullet_K \arrow[r, "\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}"] & \bullet_{K^2} \arrow[loop right, "\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}"] \end{tikzcd}$$

es un sumando directo de todo Λ-módulo inclinante.

Bibliografía

[ACPV] I. Assem, J. Cappa, M. Platzeck, M. Verdecchia, *Módulos Inclinantes y Álgebras inclinadas*. Notas de Álgebra y Análisis, 2006.

[AHK] L. Angeleri, H. Happel, H. Krause, *Handbook of Tilting Theory*. London Mathematical Society, Lecture Note Series 332. 2007.

[APR] M. Auslander, M. Platzeck, I. Reiten, *Coxeter Functors without diagrams* Trans. Amer. Math. Soc. 250, 1–46, 1979.

[ARS] M. Auslander, I. Reiten, S. Smalϕ, *Representation Theory of Artin Algebras*. Cambridge University Press, 1995.

[As] I. Assem, *Tilting Theory-an Introduction*. Topics in Algebra, Part 1: Rings and Representations of Algebras, Banach Center Publications. 26, 127-180, 1990.

[ASS] I. Assem, D. Simson, A. Skowronski, *Elements of the Representation Theory of Associative Algebras. Volume 1: Techniques of Representation Theory*. London Mathematical Society, Student Text 65, 2006.

[BGP] I. Bernstein, I. Gelfand, V. Ponomarev, *Coxeters functors, and Gabriels Theorem*. Uspehi Mat. Nauk 28, no. 2(170), 19–33, 1973.

[CE] H. Cartan, S. Eilenberg, *Homological Algebra*. Princeton University Press, 1956.

[Ga] P. Gabriel, *Unzerlegbare Darstellungen I*. Manuscripta Mathematica, Volume 6, Issue 1, pp 71-103, 1972.

[Ha] D. Happel, *Trianguled Categories in the Representation Theory of Finite Dimensional Algebras*. London Mathematical Society, Lecture Note Series 119, 1988.

[Ho] O. Hölder, *Zurückführung einer beliebigen algebraischen Gleichung auf eine Kette von Gleichungen*. Mathematische Annalen, Bd. 34, 1889.

[HR] D. Happel, C. Ringel, *Tilted Algebras*. Trans. Amer. Math. Soc. 274, no. 2, 399–443, 1982.

[HS] P. Hilton, U. Stammbach, *A Course in Homological Algebra*. 2d ed., Graduate Texts in Math,.4, Springer Verlag, Berling-Heidelberg-New York, 1997.

[Jo] C. Jordan, *Traité des substitutions et des équations algébriques*. Gauthier-Villars, Paris, 1870.

[Mi] Y. Miyashita, *Tilting Modules of Finite Projective Dimension*. Mathematische Zeitschrift, Volume 193, Issue 1, 113-146, 1986.

[Ro] J. Rotman, *An Introduction to Homological Algebra*. 2d ed., Universitext, Springer Verlag, Berling-Heidelberg-New York, 2009.

[Wi] R. Wisbauer, *Foundations of Module and Ring Theory*. Gordon and Breach Science Publishers, Reading, 1991.

Índice alfabético