UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

LA TOPOLOGÍA DEL AXIOMA DE MARTIN Y ALGUNAS VARIACIONES DE LA CONDICIÓN DE LA CADENA CONTABLE

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICO

P R E S E N T A:

MARÍA FERNANDA MÉNDEZ LEMUS

DIRECTOR DE TESIS:
DR. ROBERTO PICHARDO MENDOZA

2015

Ciudad Universitaria, D. F.

Datos del alumno	
Apellido paterno	Méndez
Apellido materno	Lemus
Nombre(s)	Ma. Fernanda
Tel éfono	0445566725697
Universidad Nacional Autónoma de México	Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias	Facultad de Ciencias
Carrera	Matemáticas
Número de cuenta	307703268

Datos del jurado	
1. Datos del tutor	1. Datos del tutor
Grado	Dr.
Nombres(s)	Roberto
Apellido paterno	Pichardo
Apellido materno	Mendoza
2. Datos del sinodal 1	2. Datos del sinodal 1
Grado	Dr.
Nombres(s)	Alejandro
Apellido paterno	Dorantes
Apellido materno	Aldama
3. Datos del sinodal 2	3. Datos del sinodal 2
Grado	Dr.
Nombres(s)	Iván
Apellido paterno	Martínez
Apellido materno	Ruiz
4. Datos del sinodal 3	4. Datos del sinodal 3
Grado	M. en C.
Nombres(s)	Manuel Alejandro
Apellido paterno	Lara
Apellido materno	Mary
5. Datos del sinodal 4	5. Datos del sinodal 4
Grado	M. en C.
Nombres(s)	Alejandro Darío
Apellido paterno	Rojas
Apellido materno	Sánchez
6. Datos del trabajo escrito	6. Datos del trabajo escrito
Título	La Topología del Axioma de Martin y algunas variaciones de la c.c.c.
Número de páginas	72
Año	2015

RESUMEN

En el año de 1971 R. Solovay y S. Tennenbaum publicaron una prueba de la consistencia de la Hipótesis de Suslin (SH). Tiempo después D. A. Martin logró encapsular un principio que hacía funcionar toda la prueba, es decir, D. A. Martin mostró que dicho principio implica que no hay líneas de Suslin. Este principio combinatorio es lo que se conocería después como *Axioma de Martin* (MA). Una vez que fue definido, resultó que varios de los problemas que habían sido resueltos utilizando utilizando la Hipótesis del Continuo se podían resolver utilizando sólo MA; también comenzó a aparecer en la solución de varios problemas de carácter topológico. Es por esto que adquirió gran relevacia no sólo en la Teoria de Conjuntos, sino en diversas áreas más como son la Topología y el Análisis.

El presente trabajo intenta exponer algunos de los elementos de topología que hay detrás del Axioma de Martin. Prueba de que esta relación es por demás estrecha es que MA cuenta con un enunciado equivalente en términos puramente topológicos. Esta equivalencia, así como muchas aplicaciones más del Axioma de Martin, pueden ser consultadas en textos como [2] y [5]. A pesar de esto, el espíritu de esta tesis está más encaminado a utilizar la topología como herramienta aplicada al Axioma de Martin.

El texto se encuentra dividido en cuatro capítulos. En el primero de ellos nos pondremos de acuerdo en notación y enunciaremos resultados que usaremos en capítulos posteriores, asumiendo que el lector se encuentra familiarizado con ellos. También se encuentran incluidas las pruebas de resultados cuya naturaleza es más compleja y son de suma relevancia en algún resultado posterior, por ejemplo el lema 1.24.

En el segundo capítulo se prueba que cualquier orden total numerable, denso en sí mismo y sin extremos, es isomorfo al conjunto de los números racionales con el orden usual, resultado que sirve como motivación y primer acercamiento a MA. Después se encuentran las definiciones necesarias para poder enunciar formalmente el Axioma de Martin. Con esto se abre paso a presentar algunas de las variaciones de la c.c.c., como son ω-ligado y ω-centrado (por mencionar algunas), además de que se expondrán algunas de las relaciones entre estas variaciones. Es aquí donde comienzan a aparecer resultados cuyo peso topológico

es notable, como son las proposiciones 2.17 y 2.18.

El tercer capítulo, como su nombre lo indica, son nuestras primeras aplicaciones del Axioma de Martin, es decir, veremos resultados que involucran MA como hipótesis. De esta manera el lector conocerá mejor la forma en la que puede ser empleado.

El cuarto y último capítulo está dedicado enteramente a un solo resultado, el Teorema de Bell. Este teorema afirma que $\mathfrak{p}$ es el primer cardinal donde el Axioma de Martin para ω-centrados falla (MAωC). Dicho capítulo está dividido en dos partes. La primera parte se enfoca en mostrar que si MAωC(κ) es verdadero, entonces $\kappa < \mathfrak{p}$, mientras que la segunda parte es probar que si $\kappa < \mathfrak{p}$, debe suceder que MAωC(κ) es cierto. Es esta segunda parte que se encuentra dividida en varias secciones, ya que la vía que seguiremos para esta prueba es puramente topológica. En dichas secciones encontraremos la manera de pasar de un orden parcial dado a un espacio topológico y también se mostrará cómo podemos *calcar* las propiedades de este orden en su correspondiente espacio y viceversa.

ÍNDICE

CAPÍTULO 1: PRELIMINARES 1

1.1 Teoría de Conjuntos 1

1.2 Topología 4

1.2.1 Un poco sobre la topología de 2^κ 4

1.3 Teoría de la Medida 6

CAPÍTULO 2: AXIOMA DE MARTIN 11

2.1 Enunciado del Axioma de Martin 16

2.2 Variaciones de la c.c.c. 20

2.3 (ZFC+CH) Un orden parcial ω-ligado que no tiene precalibre ω_1 26

2.4 (ZFC+ $\neg$SH) Un orden parcial c.c.c. que no tiene la propiedad K 30

CAPÍTULO 3: PRIMERAS APLICACIONES DE MA 36

CAPÍTULO 4: TEOREMA DE BELL 43

4.1 El número de pseudointersección 43

4.2 El Axioma de Martin para ω-centrados 53

4.3 Algunos lemas sobre órdenes parciales 56

4.4 Órdenes parciales y espacios topológicos 60

4.4.1 Prueba del Teorema de Bell 65

BIBILIOGRAFÍA 72

CAPÍTULO 1: PRELIMINARES

El objetivo de este capítulo es colectar todos aquellos resultados y definiciones que estaremos utilizando a lo largo del texto. También es el lugar donde se indicará la notación que emplearemos, para no dar lugar a confusiones.

En las secciones de Topología y Teoría de la Medida encontraremos resultados que serán herramienta para construcciones y pruebas del capítulo siguiente, por lo que sólo aparecerán las demostraciones que no rebasen el objetivo central de esta tesis y se incluyen referencias bibliográficas para que el lector encuentre, en caso de ser necesario, las pruebas que fueron omitidas.

1.1 Teoría de Conjuntos

La noción de orden parcial es algo que estaremos utilizando constantemente a lo largo de todo el texto, por lo que nuestros preliminares inician con esta definición.

Definición 1.1. Un orden parcial es un par $\langle \mathbb{P}, \leqslant \rangle$, donde $\mathbb{P}$ es un conjunto no vacío y $\leqslant$ es una relación binaria en $\mathbb{P}$ tal que

1. $p \leqslant p$ para cada $p \in \mathbb{P}$, o sea, $\leqslant$ es reflexiva.
2. Siempre que $p, q, r \in \mathbb{P}$ satisfagan que $p \leqslant q$ y $q \leqslant r$, se concluye que $p \leqslant r$, es decir, $\leqslant$ es transitiva.

En algunos otros textos esta noción de orden parcial puede encontrarse como pre-orden o casi-orden.

Diremos que un orden parcial $\langle \mathbb{P}, \leqslant \rangle$ es antisimétrico si para cualesquiera $p, q \in \mathbb{P}$ tales que $p \leqslant q$ y $q \leqslant p$ se concluye que $p = q$. Cada que en un orden antisimétrico ocurra que $p \leqslant q$ pero $p \neq q$ lo denotaremos como $p < q$.

Definición 1.2. Un orden parcial antisimétrico $\langle X, \leqslant_X \rangle$ es un orden lineal o un orden total si para cualesquiera $p, q \in X$ ocurre una de las siguientes $p = q$, $p < q$ o $q < p$. A esta última condicion le llamaremos tricotomía.

Definición 1.3. Sean $\langle X, \leqslant_X \rangle$ un orden total y $A \subseteq X$.

(a) a es un máximo (respectivamente, mínimo) para A si $a \in A$ y siempre que $b \in A$ se tiene que $b \leqslant a$ (respectivamente, $a \leqslant b$). Al máximo (respectivamente, mínimo) de A lo denotaremos como $\max A$ ($\min A$).

(b) $x \in X$ es una cota superior (respectivamente, cota inferior) de A en X, si para todo elemento $a \in A$ se satisface que $a \leqslant x$ (respectivamente, $x \leqslant a$). Para simplificar la notación, cuando estemos en la situación anterior, simplemente escribiremos $A \leqslant x$ (respectivamente, $x \leqslant A$).

    Si el conjunto de cotas superiores (respectivamente, inferiores) de A tiene mínimo (respectivamente, máximo), a éste se le llama supremo (respectivamente, ínfimo) de A y dicho elemento será denotado por $\sup A$ (respectivamente $\inf A$).

(c) Si X carece de máximo y mínimo, diremos que X no tiene extremos.

Definición 1.4. Sea $\langle X, \leqslant_X \rangle$ un orden total, diremos que X es denso en sí mismo si para cualesquiera $x, y \in X$ que satisfagan $x < y$, existe $z \in X$ tal que $x < z < y$.

Definición 1.5. Sea $\langle X, \leqslant_X \rangle$ un orden total. Decimos que $\langle X, \leqslant_X \rangle$ es completo si todo conjunto no vacío acotado superiormente tiene supremo.

Definición 1.6. Diremos que los órdenes totales $(X, \leqslant_X)$ y $(Y, \leqslant_Y)$ son isomorfos si existe una función biyectiva $f : X \to Y$ tal que

$$\forall x, y \in X (x \leqslant_X y \leftrightarrow f(x) \leqslant_Y f(y)).$$

Cabe mencionar que, en la bicondicional de la definición anterior, es suficiente pedir una implicación, ya que el regreso siempre se tiene debido a la tricotomía de los órdenes.

Definición 1.7. Sean A y B dos conjuntos y $f : A \to B$ una función. Si $C \subseteq A$, entonces la restricción de f a C, denotada por $f \restriction_C$, está definida como

$$f \restriction_C = \{(a, f(a)) : a \in C\}.$$

Definición 1.8. Sean f y g dos funciones, diremos que f y g son compatibles si $f \cup g$ es función.

A la imagen de una función f la denotaremos como $\operatorname{img} f$ y a su dominio como $\operatorname{dom} f$.

Proposición 1.9. *f y g son funciones compatibles si y sólo si para cada $x \in \operatorname{dom} f \cap \operatorname{dom} g$ se tiene que $f(x) = g(x)$.*

Demostración. f y g son compatibles si y sólo si $f \cup g$ es función y esto último equivale a que para cualesquiera $(x, y), (x, y') \in f \cup g$ pasa que $y = y'$. Como f y g son funciones, lo anterior sucede si y sólo si para cada $x \in \operatorname{dom} f \cap \operatorname{dom} g$, $f(x) = g(x)$. □

Proposición 1.10. *Sea F un conjunto de funciones tal que para cualesquiera $f, g \in F$ se tiene que f y g son compatibles. Entonces $\bigcup F$ es una función. Más aún,* $\operatorname{dom} \bigcup F = \bigcup\{\operatorname{dom} f : f \in F\}$ *y* $\operatorname{img} \bigcup F = \{\operatorname{img} f : f \in F\}$.

Demostración. Sea F como en el enunciado de la proposición. Se sigue directamente de la definición de compatibilidad que $\bigcup F$ es una función.

Si $x \in \operatorname{dom} \bigcup F$, entonces $x \in \operatorname{dom} f$ para alguna $f \in F$; por lo tanto $x \in \bigcup\{\operatorname{dom} f : f \in F\}$ y así $\operatorname{dom} \bigcup F \subseteq \bigcup\{\operatorname{dom} f : f \in F\}$. Ahora, notemos que para cada $f \in F$ se tiene que $\operatorname{dom} f \subseteq \operatorname{dom} \bigcup F$ y por lo tanto $\bigcup\{\operatorname{dom} f : f \in F\} \subseteq \operatorname{dom} \bigcup F$. De lo anterior se tiene la igualdad.

Con un razonamiento similar al del párrafo anterior se puede mostrar fácilmente la igualdad entre las imágenes. □

Definición 1.11. Sean κ un cardinal y S un conjunto. Denotaremos como $[S]^{<\kappa}$ a los subconjuntos de S cuya cardinalidad es menor a κ; como $[S]^{\leqslant\kappa}$ a los subconjuntos de S con cardinalidad a lo más κ; y como $[S]^{\kappa}$ a los subconjuntos de S con cardinalidad exactamente κ.

Definición 1.12. Sean I y J conjuntos. Definimos

$$\operatorname{Fn}(I, J) = \{p \subseteq (I \times J) : p \text{ es función y } \operatorname{dom} p \in [I]^{<\omega}\}.$$

Es decir, $\operatorname{Fn}(I, J)$ denota al conjunto de las funciones finitas contenidas en $I \times J$.

Definición 1.13. Una familia de conjuntos A forma un Δ-sistema si siempre que $a, b \in A$, distintos, sucede que $a \cap b = r$, con r fijo. A r se le llama raíz del Δ-sistema.

Lema 1.14. (*Lema del Δ-sistema*). *Sea $\{a_\alpha : \alpha \in \omega_1\}$ una colección de conjuntos, donde para cada $\alpha \in \omega_1$ se tiene que $|a_\alpha| < \omega$. Entonces existen r y $A \in [\omega_1]^{\omega_1}$ tales que A es un Δ-sistema con raíz r.*

La prueba con todo detalle de este lema se encuentra en [3, Lema 3.22].

Definición 1.15. Sean A y B conjuntos. Definimos la diferencia simétrica como:

$$A \triangle B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A).$$

Directamente de la definición se tiene que la diferencia simétrica es conmutativa y que para cualquier conjunto A sucede que $A \triangle A = \emptyset$.

A la cardinalidad de los números reales la denotaremos como $\mathfrak{c}$ y al conjunto de los números racionales como $\mathbb{Q}$. La hipótesis del continuo es la igualdad $\mathfrak{c} = \omega_1$ y será denotada por las siglas CH.

1.2 Topología

Si X es un espacio topológico, denotamos a la familia de todos los abiertos en X como τ_X y cada que $A \subseteq X$, $\overline{A}$ se usará para denotar a la cerradura de A en el correspondiente espacio topológico. A la familia de todos los abiertos no vacíos en X, es decir a $\tau_X \setminus \{\emptyset\}$, la estaremos denotando como τ_X^*.

Definición 1.16. Sean X un espacio topológico y $\mathcal{C} \subseteq \tau_X^*$. Diremos que $\mathcal{C}$ es una familia celular en X, si para cada dos elementos distintos A y B de $\mathcal{C}$, pasa que $A \cap B = \emptyset$.

Diremos que X tiene celularidad numerable si no posee una familia celular de cardinalidad estrictamente mayor a ω; esto lo escribimos como $c(X) \leqslant \omega$.

1.2.1 Un poco sobre la topología de 2^κ

Consideraremos a 2 como el espacio discreto con dos elementos: $\{0, 1\}$. Por lo tanto una base para este espacio es $\mathcal{B} = \{\{0\}, \{1\}\}$. Sea κ un cardinal infinito, denotaremos al producto topológico de κ copias de 2 como 2^κ. Podemos pensar a este espacio como el conjunto de funciones de κ en 2.

Recordemos que una subbase para la topología de 2^κ es $S = \{\pi_\delta^{-1}[B_\delta] : \delta \in \kappa \text{ y } B_\delta \in \mathcal{B}\}$, donde π_δ es la proyección en la δ-ésima coordenada, es decir, $\pi_\delta : 2^\kappa \to 2$ y $\pi_\delta(x) = x(\delta)$, para cualquier $x \in 2^\kappa$.

Dado un cardinal infinito κ y $p \in \mathrm{Fn}(\kappa, 2)$, sea $[p] := \{f \in 2^\kappa : p \subseteq f\}$. Se tiene el siguiente lema.

Lema 1.17. *Si κ es un cardinal infinito. Entonces $\{[p] : p \in \mathrm{Fn}(\kappa, 2)\}$ es una base para 2^κ.*

Demostración. Lo primero que tenemos que verificar es que, para cada $p \in \mathrm{Fn}(\kappa, 2)$, $[p]$ es abierto en 2^κ. Sea $q \in [p]$; observemos que esto implica que $q \restriction \operatorname{dom} p = p$. Si $\delta \in \operatorname{dom} p$, se sigue que $B_\delta = \{p(\delta)\}$ es abierto en 2, por lo que $A = \bigcap\{\pi_\delta^{-1}[B_\delta] : \delta \in \operatorname{dom} p\}$ es un abierto básico de 2^κ, ya que $\operatorname{dom} p \in [\kappa]^{<\omega}$, y además $q \in A \subseteq [p]$. Por lo tanto, $[p]$ es abierto en 2^κ. Además la familia $\{[p] : p \in \mathrm{Fn}(\kappa, 2)\} \cup \{\emptyset\}$ cumple con ser cerrada bajo intersecciones finitas; ya que, si $p, q \in \mathrm{Fn}(\kappa, 2)$ son compatibles, se tiene $[p] \cap [q] = \{x \in 2^\kappa : p \subseteq x \text{ y } q \subseteq x\} = \{x \in 2^\kappa : p \cup q \subseteq x\} = [p \cup q]$. Cuando p y q son incompatibles, $[p] \cap [q] = \emptyset$.

Ahora, como 2 es discreto, la colección $\{\pi_\alpha^{-1}(i) : \alpha < \kappa \ \wedge \ i \in 2\}$ es una sub-base para la topología de 2^κ. Por otro lado, para cualesquiera $\alpha < \kappa$ e $i \in 2$, sucede que $\pi_\alpha^{-1}(i) = [\{(\alpha, i)\}]$, es decir, $\{[p] : p \in \mathrm{Fn}(\kappa, 2)\}$ contiene una sub-base. Finalmente lo que tenemos es que $\{[p] : p \in \mathrm{Fn}(\kappa, 2)\}$ es una familia de abiertos en 2^κ que es cerrada bajo intersecciones finitas y contiene una sub-base, lo cual implica que dicha colección es una base para 2^κ. □

Lema 1.18. *Sea κ un cardinal tal que $\kappa > \mathfrak{c}$. Entonces el espacio producto 2^κ no es separable.*

Demostración. Sea $D \subseteq 2^\kappa$ numerable. Mostraremos que D no puede ser denso en 2^κ. Sea $\{f_n : n \in \omega\}$ una enumeración de los elementos de D y definamos, para cada $\alpha \in \kappa$, la función $g_\alpha : \omega \to 2$ dada por $g_\alpha(n) = f_n(\alpha)$. Entonces $\{g_\alpha : \alpha \in \kappa\}$ es un conjunto de κ funciones de ω en 2; como $\kappa > \mathfrak{c}$, debe haber muchas funciones repetidas, en particular existen $\alpha, \beta \in \kappa$, con $\alpha \neq \beta$, tales que $g_\alpha = g_\beta$, es decir, $f_n(\alpha) = f_n(\beta)$ para cada $n \in \omega$.

Sea $p = \{(\alpha, 0), (\beta, 1)\}$. Entonces $[p]$ es un abierto en 2^κ que satisface $[p] \cap D = \emptyset$. Por lo tanto D no es denso en 2^κ. □

1.3 Teoría de la Medida

En esta sección haremos mención de varios resultados de Teoría de la Medida que nos serán de gran ayuda para la construcción de un orden parcial en el capítulo siguiente. Sin embargo no probaremos la mayoría de ellos ya que esto queda fuera del tema de esta tesis pero incluiremos las referencias donde pueden ser consultados. Únicamente probaremos los resultados que tengan mayor relevancia en la sección 3.3.

En lo que resta del texto cuando hablemos de medida estaremos haciendo referencia a la medida de Lebesgue en la recta real, la cual denotaremos por μ. A los conjuntos Lebesgue medibles simplemente les llamaremos medibles.

Teorema 1.19. *La colección de los conjuntos medibles es una σ-álgebra; esto es, la diferencia de conjuntos medibles es medible y la union e intersección numerable de conjuntos medibles es medible.*

La demostración del resultado anterior puede ser consultada en [8, Theorem 10].

Lema 1.20. *Si A y B son conjuntos medibles tales que $A \cap B = \emptyset$, entonces*

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B).$$

La prueba de este lema se puede consultar en [7, Theorem 3.4]

Lema 1.21. *Si A y B son conjuntos medibles, con medida finita, entonces*

1. $\mu(A \setminus B) = \mu(A) - \mu(A \cap B)$.

2. $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B)$.

Demostración. Sean A y B dos conjuntos medibles.

1. Sucede que $A = (A \setminus B) \cup (A \cap B)$, de donde se sigue que $\mu(A) = \mu((A \setminus B) \cup (A \cap B))$. Ahora, como $(A \setminus B) \cap (A \cap B) = \emptyset$, por el lema previo, $\mu((A \setminus B) \cup (A \cap B)) = \mu(A \setminus B) + \mu(A \cap B)$. Despejando obtenemos que $\mu(A \setminus B) = \mu(A) - \mu(A \cap B)$.

2. Se tiene la siguiente igualdad $A \cup B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \cup (A \cap B)$, donde $(A \setminus B), (B \setminus A)$ y $(A \cap B)$ son ajenos por pares. Por lo tanto

$$\mu(A \cup B) = \mu((A \setminus B) \cup (B \setminus A) \cup (A \cap B)) = \mu(A \setminus B) + \mu(B \setminus A) + \mu(A \cap B)$$

y por el inciso anterior, esto se convierte en

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) - \mu(A \cap B) + \mu(B) - \mu(A \cap B) + \mu(A \cap B)$$

y finalmente

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B).$$

□

Lema 1.22. *Si $\{A_i : i \in \omega\}$ es una familia de conjuntos medibles, entonces*

$$\mu\left(\bigcup_{i \in \omega} A_i\right) \leqslant \sum_{i \in \omega} \mu(A_i).$$

La prueba de este lema puede ser consultada en [7, Theorem 3.2].

Lema 1.23. *Si $\{A_n : n \in \omega\}$ es una familia de conjuntos medibles tales que para cada $n \in \omega$ se tiene que $A_n \subseteq A_{n+1}$, entonces el conjunto $A = \bigcup_{n \in \omega} A_n$ es medible y $\mu(A) = \lim_{n \to \infty} \mu(A_n)$. Análogamente, si $\{A_n : n \in \omega\}$ es una familia de conjuntos medibles tales que para toda $n \in \omega$ sucede que $A_{n+1} \subseteq A_n$ y A_m tiene medida finita para alguna $m \in \omega$, entonces el conjunto $A = \bigcap_{n \in \omega} A_n$ es medible y $\mu(A) = \lim_{n \to \infty} \mu(A_n)$.*

La demostración de este resultado puede ser consultada en [7, Theorem 3.17].

El siguiente lema será de mucha utilidad y tiene gran relevancia en la sección 3.3, por lo cual consideramos pertinente incluir su demostración aquí.

Lema 1.24. *Si A es un subconjunto numerable de $[0, 1]$ y $r \in (0, 1)$, entonces existe $F \subseteq [0, 1] \setminus A$, compacto de tal modo que $\mu(F) = r$.*

Demostración. Sean $I = [0,1]$ y $\{x_n : n \in \omega\}$ una enumeración de A.

Consideramos una familia de intervalos abiertos $\{I_n : n \in \omega\}$ de manera que, para cada $n \in \omega$, se satisfaga que $x_n \in I_n$ y que $\mu(I_n) = \dfrac{1-r}{2^{n+1}}$. Definiendo $F_n = I \setminus \bigcup_{i=0}^{n} I_i$ para cada $n \in \omega$, tenemos que F_n es un conjunto cerrado dentro de un compacto, por lo que F_n es compacto. De este modo obtenemos una sucesión decreciente de compactos con $x_n \notin F_n$, para cada $n \in \omega$. Por otro lado, cada compacto F_n es medible por ser diferencia de conjuntos medibles y además, por el lema 1.21, $\mu(F_n) = 1 - \mu\left(I \cap \bigcup_{i=0}^{n} I_i\right)$. Como $\mu\left(I \cap \bigcup_{i=0}^{n} I_i\right) \leqslant \mu\left(\bigcup_{i=0}^{n} I_i\right)$, se sigue que $\mu(F_n) \geqslant 1 - \mu\left(\bigcup_{i=0}^{n} I_i\right)$, y por el lema 1.22, $1 - \mu\left(\bigcup_{i=0}^{n} I_i\right) \geqslant 1 - \sum_{i=0}^{n} \mu(I_i)$; y finalmente, $1 - \sum_{i=0}^{n} \mu(I_i) \geqslant 1 - \sum_{i \in \omega} \mu(I_i) \geqslant 1 - (1-r) = r$. Así, para toda $n \in \omega$ se cumple que $\mu(F_n) \geqslant r$.

Sea $F_\omega = \bigcap_{n\in\omega} F_n$. Entonces F_ω sigue siendo un conjunto cerrado dentro de un compacto, o sea que es compacto; F_ω es ajeno con $\{x_n : n \in \omega\}$ y, más aún, al ser intersección numerable de medibles, él mismo es medible. Se sigue de el lema 1.23 que

$$\mu(F_\omega) = \lim_{n\to\infty} \mu(F_n);$$

por lo descrito en el párrafo anterior, $r \leqslant \lim_{n\to\infty} \mu(F_n)$. Si $\lim_{n\to\infty} \mu(F_n) = r$, F_ω es el compacto que buscabamos y hemos terminado. Si no es así, es decir que $r < \lim_{n\to\infty} \mu(F_n)$, consideramos al conjunto $B = \{x \in [0,1] : \mu(F_\omega \cap [0,x]) < r\}$. Observemos que si $x \in [0,1]$ es tal que $x < r$, entonces $\mu(F_\omega \cap [0,x]) \leqslant \mu([0,x]) < r$, por lo que B es un conjunto acotado y no vacío, ergo, B tiene supremo. Sea $y = \sup B$. Entonces existe una sucesión monótona creciente $\{b_n : n \in \omega\} \subseteq B$, de manera que $\lim_{n\to\infty} b_n = y$. Por tanto

$$[0,y] = \bigcup_{n\in\omega} [0, b_n],$$

de donde

$$\mu(F_\omega \cap [0,y]) = \mu(F_\omega \cap \bigcup_{n\in\omega} [0,b_n]).$$

Gracias a que nuestra sucesión es monótona creciente, se tiene que, para toda $n \in \omega$,

$F_\omega \cap [0, b_n] \subseteq F_\omega \cap [0, b_{n+1}]$ y por el lema 1.23 (recuerde que $b_n \in B$)

$$\mu(F_\omega \cap [0, y]) = \lim_{n\to\infty} \mu(F_\omega \cap [0, b_n]) \leqslant r.$$

Ahora supongamos que $\mu(F_\omega \cap [0, y]) < r$. Si $y = 1$, entonces $\mu(F_\omega \cap [0, y]) = \mu(F_\omega) \geqslant r$, lo cual contradice nuestra suposición inicial, por lo que $y < 1$. Sea $0 < \epsilon$ tal que $\epsilon < 1 - y$ y $\epsilon < r - \mu(F_\omega \cap [0, y])$. Entonces

$$\mu(F_\omega \cap [0, y + \epsilon]) = \mu(F_\omega \cap [0, y]) + \mu(F_\omega \cap [y, y + \epsilon]) \leqslant \mu(F_\omega \cap [0, y]) + \epsilon < r.$$

Así, como $y + \epsilon \in B$, y no es el supremo de B, lo cual es un absurdo. Por lo tanto $F_\omega \cap [0, y]$ tiene medida exactamente r. Haciendo $F = F_\omega \cap [0, y]$ queda probado el lema. □

Ahora enunciaremos el Teorema de Densidad de Lebesgue, pero para ello necesitaremos unas definiciones previas.

Definición 1.25. Un conjunto medible $A \subseteq \mathbb{R}$ tiene densidad d en x si el siguiente límite existe y es igual a d.

$$\lim_{h\to 0} \frac{\mu(A \cap [x - h, x + h])}{2h}.$$

Al conjunto de puntos en $\mathbb{R}$ en los cuales A tiene densidad 1 lo denotaremos por $\phi(A)$.

Teorema 1.26 (Teorema de Densidad de Lebesgue)**.** *Para cualquier conjunto medible A se tiene que $\mu(A \bigtriangleup \phi(A)) = 0$.*

La prueba del teorema previo puede ser consultada en [7, Theorem 3.20].

Lema 1.27. *Si A es un conjunto de medida positiva, entonces existen números racionales r y s tales que $r < s$ y $\mu(A \cap [r, s]) > \frac{1}{2}(s - r)$.*

Demostración. Sea A un conjunto de medida positiva. Entonces $\phi(A) \neq \emptyset$, ya que si no lo fuera, por el Teorema de Densidad de Lebesgue tendríamos que $\mu(A \bigtriangleup \phi(A)) = \mu(A) = 0$, lo cual es una contradicción.

Sea $a \in \phi(A)$, se tiene

$$\lim_{h\to 0} \frac{\mu(A \cap [a - h, a + h])}{2h} = 1.$$

Sea $\epsilon = \dfrac{1}{2}$. De la definición de límite se sigue que existe $h > 0$ de tal modo que

$$\left| \frac{\mu(A \cap [a-h, a+h])}{2h} - 1 \right| < \frac{1}{2}$$

o equivalentemente

$$\mu(A \cap [a-h, a+h]) > h.$$

Sean $\{b_n : n \in \omega\}$, una sucesión de números racionales cuyo límite es $a - h$, y $\{c_n : n \in \omega\}$, una sucesión de números racionales cuyo límite es $a + h$, de tal modo que

$$a - h \leqslant b_{n+1} \leqslant b_n \leqslant c_n \leqslant c_{n+1} \leqslant a + h,$$

para cada $n \in \omega$. Entonces podemos hacer

$$[a-h, a+h] = \bigcup_{n\in\omega} [b_n, c_n].$$

Luego, $\mu(A \cap [a-h, a+h]) = \mu(A \cap \bigcup_{n\in\omega} [b_n, c_n])$.

Por las características de nuestras sucesiones sucede que $[b_n, c_n] \subseteq [b_{n+1}, c_{n+1}]$ para cualquier $n \in \omega$, y entonces, aplicando el lema 1.23, obtenemos que

$$\mu(A \cap [a-h, a+h]) = \lim_{n\to\infty} \mu(A \cap [b_n, c_n]).$$

Recordemos que $\{\mu(A \cap [b_n, c_n]) : n \in \omega\}$ es una sucesión de números reales monótona creciente y, por ende, su límite coincide con su supremo. Ahora, como $\mu(A \cap [a-h, a+h]) > h$, existe $m \in \omega$ de tal modo que $\mu(A \cap [b_m, c_m]) > h$. Pero $[b_m, c_m] \subseteq [a - h, a + h]$ y, por lo tanto, $c_m - b_m \leqslant 2h$, de donde $\dfrac{1}{2}(c_m - b_m) \leqslant h$. De lo anterior se concluye que $\mu(A \cap [b_m, c_m]) > \dfrac{1}{2}(c_m - b_m)$. $\square$

CAPÍTULO 2: AXIOMA DE MARTIN

Antes de entrar de lleno en el Axioma de Martin, es conveniente familiarizarno con algunas ideas que nos ayudarán a entender un poco mejor cómo trabaja dicho axioma. Haremos esto probando un conocido resultado sobre órdenes totales: cualquier orden total numerable, denso en sí mismo y sin extremos es isomorfo a $\mathbb{Q}$ con el orden usual.

Consideremos a $(X, <_X)$ un orden total numerable, denso en sí mismo y sin extremos.

La idea de la demostración es acercarnos mediante aproximaciones finitas al isomorfismo que buscamos. A dichas aproximaciones les llamaremos isomorfismos parciales. Con fines de simplificar la escritura convendremos en decir que una función p es un isomorfismo parcial si $\operatorname{dom} p$ es un subconjunto finito de X, $\operatorname{img} p$ es un subconjunto de $\mathbb{Q}$ y preserva el orden, es decir, siempre que $x, y \in \operatorname{dom} p$ satisfagan $x <_X y$, se tiene que $p(x) <_{\mathbb{Q}} p(y)$. En este sentido cada isomorfismo parcial es una aproximacion finita del isomorfismo entre X y $\mathbb{Q}$ que nos interesa. Ahora denotemos por $\mathbb{P}$ a la colección de todos los isomorfismos parciales.

Para $p, q \in \mathbb{P}$, diremos que p es una mejor aproximación que q, si p extiende como función a q, o sea que p copia todo lo que hace q y le agrega algo más. De esta manera, si p extiende a q, p nos da más información del isomorfismo que queremos de la que ya nos daba q. Cada que estemos en la situación anterior lo denotaremos como $p \leqslant q$, es decir, el símbolo $p \leqslant q$ significa que p extiende como función a q. Recordemos que nuestras funciones son subconjuntos de $X \times \mathbb{Q}$, por lo que decir que p extiende a q como función se traduce en que $q \subseteq p$.

De inicio podemos comenzar en el conjunto $\emptyset$ como una primera aproximación al isomorfismo y después extenderlo propiamente a un isomorfismo parcial no vacío, digamos p_0. Bajo la misma idea anterior podríamos extender propiamente a p_0 a un isomorfismo parcial más grande al cual podemos llamar p_1. De esta manera podemos continuar extendiendo tantas veces como sea necesario, es decir p_1 extenderlo a p_2 y luego p_2 extenderlo a p_3, y en general, extender p_n a p_{n+1}; así obtendríamos una sucesión de funciones como sigue:

$p_0 \geqslant p_1 \geqslant p_2 \ldots p_n \geqslant p_{n+1} \ldots$; fácilmente se puede verificar que si definimos $f = \bigcup_n p_n$, entonces f resulta ser una función y además un isomorfismo de orden entre $\operatorname{dom} f$ y $\operatorname{img} f$. Desafortunadamente, con el proceso anterior nada nos asegura que el dominio de f sea todo X ni que la imagen de f sean todos los racionales; es decir, puede suceder que al seleccionar nuestras extensiones haya algún elemento de X que no haya sido contemplado y que por lo tanto no forme parte del dominio de f; y de la misma manera puede ocurrir con la imagen de f, o sea que puede haber números racionales que no pertenezcan a la imagen de f. Una manera de darle solución a este problema en el dominio es pidiendo que para cada $x \in X$ y cada $p \in \mathbb{P}$, exista $q \in \mathbb{P}$ tal que $q \leqslant p$ y $x \in \operatorname{dom} q$, así nos aseguramos de que al final $\operatorname{dom} f = X$. De la misma manera podemos asegurarnos que $\operatorname{img} f = \mathbb{Q}$.

Ahora formalicemos el proceso descrito en el párrafo anterior. Para cada $x \in X$ definimos $D_x = \{p \in \mathbb{P} : x \in \operatorname{dom} p\}$. Lo que buscamos se reduce a que si $p \in \mathbb{P}$ y $x \in X$ entonces podamos encontrar un $q \in D_x$ tal que q extienda a p. Veamos que, en efecto, podemos conseguir lo anterior.

Sean $p \in \mathbb{P}$ y $x \in X$. Si $x \in \operatorname{dom} p$, hacemos $q = p$ y hemos terminado. Si $x \notin \operatorname{dom} p$, nos fijamos en los siguientes conjuntos:

$$A = \{y \in \operatorname{dom} p : y \leqslant_X x\}$$

$$B = \{y \in \operatorname{dom} p : x \leqslant_X y\}.$$

Caso 1. $A = \emptyset$. Si pasa lo anterior, entonces $B = \operatorname{dom} p$. Como $\operatorname{img} p$ es un subconjunto finito de $\mathbb{Q}$ entonces tiene mínimo, llamémosle a, como $\mathbb{Q}$ no tiene extremos podemos encontrar $a_0 \in \mathbb{Q}$ tal que $a_0 < a$ lo que implica que $a_0 \notin B$. Hacer $q = p \cup \{(x, a_0)\}$ es suficiente para obtener que $q \leqslant p$ y $q \in D_x$.

Caso 2. $B = \emptyset$. En este caso $A = \operatorname{dom} p$ y podemos definir a q de manera similar al caso anterior.

Caso 3. $A \neq \emptyset$ y $B \neq \emptyset$. Debido a que A es un subconjunto finito de X, entonces tiene máximo; sea $y_0 = \max(A)$. De igual manera B es finito, así que tiene mínimo; sea $y_1 = \min(B)$. Como $\mathbb{Q}$ es denso en sí mismo y preserva el orden, existe un $a_0 \in \mathbb{Q}$ tal que

$p(y_0) < a_0 < p(y_1)$. Definimos $q = p \cup \{(x, a_0)\}$. De esta manera q extiende a p y además $q \in D_x$.

Como también estamos interesados en que la imagen de nuestro isomorfismo sea igual a $\mathbb{Q}$, para cada $a \in \mathbb{Q}$ definimos $I_a = \{p \in \mathbb{P} : a \in \operatorname{img} p\}$ y con un razonamiento similar al de los párrafos anteriores se puede mostrar que para cada $p \in \mathbb{P}$ podemos encontrar a un $q \in I_a$ tal que $q \leqslant p$.

Como X y $\mathbb{Q}$ son numerables entonces $\{D_x : x \in X\} \cup \{I_a : a \in \mathbb{Q}\}$ es numerable. Sea $\{F_n : n \in \omega\}$ una numeración del conjunto anterior. Elegimos recursivamente $p_n \in F_n$ de tal manera que p_{n+1} extienda a p_n; por lo tanto, haciendo $f = \bigcup\{p_n : n \in \omega\}$ obtenemos una función. Por la proposición 1.10 sabemos que el dominio de la unión anterior será la unión de los dominios de las funciones p_n y que la imagen de f será la unión de las imágenes de las funciones p_n. Por la manera en la que fue definida la sucesión $\{p_n\}_{n\in\omega}$ y por la observación anterior tendremos que $\operatorname{dom} f = X$ y $\operatorname{img} f = \mathbb{Q}$.

Observemos que además de lo anterior f resulta ser un isomorfismo ya que cada p_n extiende al isomorfismo parcial anterior. Por lo tanto f es el isomorfismo buscado.

En la prueba anterior los conjuntos D_x e I_a rescatan muy bien las características del objeto que deseamos construir, o sea del isomorfismo. A los conjuntos que se comporten de esta manera les llamaremos densos. Notemos que la sucesión $\{p_n\}_{n\in\omega}$ es una especie de guía hacia el isomorfismo que buscabamos; esta guía es la idea de filtro.

Formalicemos lo escrito en el párrafo anterior dando las definiciones explícitas de los conceptos mencionados.

Definición 2.1. Sean $\langle \mathbb{P}, \leqslant \rangle$ un orden parcial y $D \subseteq \mathbb{P}$. D es denso en $\mathbb{P}$ si para cada $p \in \mathbb{P}$ existe $q \in D$ tal que $q \leqslant p$.

Tal como lo comentamos anteriormente, la sucesión decreciente $\{p_n\}_{n\in\omega}$ definida en la prueba anterior, funcionó como una guía a nuestro isomorfismo. Pero puede ocurrir que nuestra cantidad de densos sea demasiado grande, por ejemplo no numerable, y entonces una sucesión no sería lo suficientemente "buena" para asegurarnos que podemos escoger, al menos, un elemento que viva en cada denso. Por esta razón, se introduce el concepto de filtro, que rescata la escencia de las sucesiones, pero no sólo eso, sino que también resulta ser una generalización de ellas. Es por esto que sustituiremos a las sucesiones apoyándonos ahora en los filtros.

Definición 2.2. Sean $\langle \mathbb{P}, \leqslant \rangle$ un orden parcial y $G \subseteq \mathbb{P}$. G es un filtro en $\mathbb{P}$ si:

(a) para cualesquiera $p, q \in G$, existe $r \in G$ que satisface $r \leqslant q$ y $r \leqslant p$.

(b) cada que $p \in \mathbb{P}$ y $q \in G$, si $q \leqslant p$, se tiene que $p \in G$.

Si $\mathcal{D}$ es una familia de densos en $\mathbb{P}$ y sucede que $G \cap D \neq \emptyset$ para cada $D \in \mathcal{D}$, diremos que G es un filtro $\mathcal{D}$-genérico.

Con esta definición en nuestras manos ya podemos probar que las sucesiones decrecientes generan filtros.

Proposición 2.3. *Sean $\langle \mathbb{P}, \leqslant \rangle$ un orden parcial y $\{p_n; n \in \omega\}$ una sucesión decreciente en $\mathbb{P}$. Entonces $G = \{q \in \mathbb{P} : \exists n \in \omega (q \geqslant p_n)\}$ es un filtro en $\mathbb{P}$.*

Demostración. Sólo tenemos que verificar que G cumple con (a) y (b) de la definición anterior. Si $q, s \in G$, entonces existen $m, n \in \omega$ tales que $q \geqslant p_n$ y $s \geqslant p_m$. Sea $k = \max\{n, m\}$. Como nuestra sucesión es decreciente, $p_k \leqslant p_m$ y $p_k \leqslant p_n$, luego $p_k \leqslant q$ y $p_k \leqslant s$. La condición (b) se sigue inmediatamente de la definición de G. □

Como ejemplo de la proposición anterior, podemos extender la sucesión de nuestro ejemplo a un filtro. Con esto queda mostrado que, en efecto, los filtros generalizan a las sucesiones decrecientes.

A pesar de que hemos logrado generalizar a las sucesiones con el concepto de filtro, nuestros problemas no se han terminado aún, ya que el siguiente ejemplo muestra un orden parcial que tiene una familia no numerable de densos que no posee un filtro genérico.

Ejemplo 2.4. *Sea $\mathbb{P} = \{p \subseteq \omega \times \omega_1 : |p| < \omega$ y p es función$\}$ ordenado con la contención inversa, es decir, $p \leqslant q$ si y sólo si $q \subseteq p$.*

Definimos los siguientes densos en $\mathbb{P}$. Para cada $\alpha < \omega_1$, hagamos $D_\alpha = \{p \in \mathbb{P} : \alpha \in \operatorname{img} p\}$. Veamos que los conjuntos anteriores son densos en $\mathbb{P}$. Sean $p \in \mathbb{P}$ y $\alpha < \omega_1$. Como $|p| < \omega$, podemos encontrar $n \in \omega$ tal que $n \notin \operatorname{dom} p$; hacemos $q = p \cup \{(n, \alpha)\}$ y así q es una extensión de p y $q \in D_\alpha$. Por lo tanto D_α es denso para cada $\alpha < \omega_1$.

Sea G un filtro en $\mathbb{P}$. Debido a la definición de filtro, todas las funciones de G son compatibles y por la proposición 1.10, $g := \bigcup G$ es una función con $\operatorname{dom} g \subseteq \omega$ e $\operatorname{img} g \subseteq \omega_1$. Por otro lado, es bien sabido que no hay funciones suprayectivas de ω en ω_1; en particular no hay funciones suprayectivas que tengan por dominio a un subconjunto de ω y por imagen a ω_1. Por lo tanto existe $\alpha \in \omega_1$ tal que $\alpha \notin \operatorname{img} g$ y, haciendo uso de la proposición 1.10, esto implica que para cada $p \in G$ se cumple que $\alpha \notin \operatorname{img} p$, luego $G \cap D_\alpha = \emptyset$. Con lo anterior hemos mostrado que no existe ningún filtro en $\mathbb{P}$ que intersecte a todos los densos.

Aún después de esto, no está perdido todo, ya que el matemático estadounidense Donald A. Martin descubrió que añadiendo una hipótesis extra al orden parcial, regresan las esperanzas de que haya filtros genéricos para familias no numerables de densos. Lo cual motiva nuestras siguientes definiciones.

Definición 2.5. Sea $\langle \mathbb{P}, \leqslant \rangle$ un orden parcial. Dados $p, q \in \mathbb{P}$, si existe $r \in \mathbb{P}$ tal que $r \leqslant p$ y $r \leqslant q$, diremos que p y q son compatibles y lo denotaremos como $p \mid q$; en otro caso diremos que p y q son incompatibles y esto lo escribimos como $p \perp q$.

Sea $A \subseteq \mathbb{P}$. A es una anticadena en $\mathbb{P}$ si cada que $p, q \in A$ y $p \neq q$ se tiene que $p \perp q$.

Definición 2.6. Un orden parcial $\langle \mathbb{P}, \leqslant \rangle$ tiene la condición de la cadena contable, lo cual abreviamos como c.c.c., si toda anticadena en $\mathbb{P}$ es a lo más numerable.

Lo primero que hay que mostrar es que el orden definido en el ejemplo 2.4 efectivamente no cumple con ser c.c.c. y para esto veamos cómo funciona la compatibilidad en $\mathbb{P}$. Sean $p, q \in \mathbb{P}$. Si p y q son compatibles, entonces existe $r \in \mathbb{P}$ tal que $r \leqslant q$ y $r \leqslant p$, o equivalentemente $p \subseteq r$ y $q \subseteq r$, de este modo $p \cup q \subseteq r$, luego $p \cup q$ es función. Si ahora suponemos que $p \cup q$ es función, se verifica fácilmente que p y q son compatibles en $\mathbb{P}$. Por lo tanto p y q son compatibles en $\mathbb{P}$ si y sólo si son funciones compatibles, en el sentido de la definición 1.8. De lo anterior se sigue que el conjunto $\{\{(0, \alpha)\} : \alpha \in \omega_1\}$ es una anticadena en $\mathbb{P}$ de cardinalidad no numerable, o en otras palabras $\mathbb{P}$ no es c.c.c.

Ejemplo 2.7. *Cualquier orden total tiene la c.c.c.*

Sean $\langle \mathbb{P}, \leqslant \rangle$ un orden total y $A \subseteq \mathbb{P}$ tal que $|A| \geqslant 2$; se tiene que si $p, q \in A$ entonces son compatibles, ya que son comparables. Por lo tanto cualquier anticadena en $\mathbb{P}$ tiene a lo más un elemento, es decir, $\mathbb{P}$ tiene la c.c.c.

Ejemplo 2.8. *Sean X un conjunto no vacío y $\mathbb{P} = \mathcal{P}(X)\setminus\{\emptyset\}$; definimos el siguiente orden en $\mathbb{P}$, $p \leqslant q$ si $p \subseteq q$.*

Veamos qué sucede con la compatibilidad en $\mathbb{P}$. Sean $p, q \in \mathbb{P}$; si p y q son compatibles, existe $r \in \mathbb{P}$ tal que $r \subseteq p$ y $r \subseteq q$; luego $p \cap q \neq \emptyset$. Ahora, si es el caso que $p \cap q \neq \emptyset$, entonces $p \cap q$ es el testigo de la compatibilidad entre p y q, o dicho en otras palabras $p \cap q \in \mathbb{P}$, $p \cap q \subseteq p$ y $p \cap q \subseteq q$. Por lo anterior, $A \subseteq \mathbb{P}$ será una anticadena en $\mathbb{P}$ si sus elementos son ajenos por pares.

Ahora mostraremos que $\mathbb{P}$ tiene la c.c.c. si y sólo si $|X| \leqslant \omega$. Supongamos que $\mathbb{P}$ tiene la c.c.c.; haciendo $A = \{\{x\} : x \in X\}$, tenemos que A es una anticadena y por ende $|A| \leqslant \omega$, lo que nos lleva a que $|X| \leqslant \omega$. Si suponemos que $\mathbb{P}$ no tiene la c.c.c., entonces existe una anticadena $\mathcal{A}$ no numerable. Sea $f : \mathcal{A} \to \bigcup \mathcal{A}$ un función de elección. Entonces f es inyectiva, ya que si $a, b \in A$ satisfacen $a \neq b$, entonces $a \cap b = \emptyset$, así que $f(a) \neq f(b)$. Notemos que el conjunto $\operatorname{img} f$ es un conjunto no numerable y además $|\operatorname{img} f| \leqslant |X|$, por lo tanto $\omega < |X|$. Con la contrapositiva de lo anterior queda demostrada la afirmación.

Ejemplo 2.9. *Sea X un espacio topológico. Ordenamos a τ_X^* mediante la contención, es decir, $U \leqslant V$ siempre que $U \subseteq V$.*

De igual manera que con el ejemplo anterior, se puede probar fácilmente que $U \perp V$ si y sólo si $U \cap V = \emptyset$; por lo tanto las anticadenas en τ_X^* son familias celulares en X, lo que nos lleva a concluir que τ_X^* tiene la c.c.c. si y sólo si toda familia celular en X es, a lo más, numerable. Dicho de otra manera τ_X^* tiene la c.c.c. si y sólo si X tiene celularidad numerable.

De ahora en adelante, cada que hablemos de τ_X^* como orden parcial, nos estaremos refiriendo al orden definido en este ejemplo.

2.1 Enunciado del Axioma de Martin

Ahora estamos listos para enunciar el Axioma de Martin.

Sea κ un cardinal. Entonces $MA(\kappa)$ es el enunciado: Si $\langle \mathbb{P}, \leqslant \rangle$ es un orden parcial que tiene la c.c.c. y $\mathcal{D}$ es una familia de densos en $\mathbb{P}$, con $|\mathcal{D}| \leqslant \kappa$, entonces existe un filtro G en $\mathbb{P}$, tal que para cada $D \in \mathcal{D}$ se tiene $G \cap D \neq \emptyset$.

Algo que es inmediato de la definición de $MA(\kappa)$, es que si $\kappa < \kappa'$ y $MA(\kappa')$ es cierto, entonces $MA(\kappa)$ también es cierto.

Otra proposición que, si bien no es inmediata, pero también es cierta, es que $MA(\omega)$ es verdadero. Veamos por qué se tiene esto.

Si $\langle \mathbb{P}, \leqslant \rangle$ es un orden parcial y $\mathcal{D} = \{D_n : n \in \omega\}$ es una colección de densos en $\mathbb{P}$, entonces es posible construir un filtro G que intersecte a todos los densos. La manera de hacerlo es la siguiente. Sea p_0 un elemento de D_0. Como D_1 es denso, existe $p_1 \in D_1$ tal que $p_1 \leqslant p_0$. En general podemos extender p_n a p_{n+1}, donde para cada $n \in \omega$ se tenga que $p_n \in D_n$. De esta manera la sucesión $\{p_n : n \in \omega\}$ es decreciente y por la proposición 2.3, tal sucesión genera un filtro G. Además para cada $n \in \omega$ se tiene que $p_n \in G \cap D_n$.

Si regresamos al ejemplo con el que abrimos este capítulo, encontraremos cierta similitud con la prueba anterior, esto es porque utilizamos este principio para poder demostrar el resultado del ejemplo.

Otra observación interesante es que, para probar este resultado, no fue necesaria la condición de que nuestro orden parcial fuera c.c.c. Una pregunta natural que surge ante esto es si podemos eliminar la condición de ser c.c.c. de las hipótesis de $MA(\kappa)$. La respuesta a la pregunta anterior es que no y se lo debemos al ejemplo 2.4 ya que, como mostramos anteriormente, este orden no es c.c.c. y posee una familia de densos $\mathcal{D}$ de cardinalidad ω_1 para la cual no existe un filtro $\mathcal{D}$-genérico.

Ahora que hemos visto que $MA(\omega)$ es cierto y que no podemos quitar de las hipótesis la condición de ser c.c.c., otra pregunta que debería surgir naturalmente es ¿qué tan grande podemos hacer a κ para que $MA(\kappa)$ siga siendo cierto? La respuesta a esto es que basta con hacer $\kappa = \mathfrak{c}$ para obtener que $MA(\kappa)$ es falso. Lo que nos lleva al siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.10. *Sea* $\mathbb{P} = \{p \subseteq \omega \times 2 : |p| < \omega$ *y* p *es función*$\}$ *y ordenémoslo como sigue:* $p \leqslant q$ *si y sólo si* $q \subseteq p$.

Algo inmediato respecto a este orden parcial es que $\mathbb{P}$ es c.c.c. Esto es porque $|\mathbb{P}| = \omega$. La noción de compatibilidad queda expresada de la misma manera que en el ejemplo 2.4, o sea que p y q serán compatibles en $\mathbb{P}$ siempre que sean compatibles como funciones.

Definimos para cada $n \in \omega$ el conjunto $D_n = \{p \in \mathbb{P} : n \in \operatorname{dom} p\}$. Mostraremos que los conjuntos definidos anteriormente son densos en $\mathbb{P}$. Sean $p \in \mathbb{P}$ y $n \in \omega$,

Caso 1. $n \in \operatorname{dom} p$. En este caso ya se tiene que $p \in D_n$.

Caso 2. $n \notin \operatorname{dom} p$. Es suficiente hacer $q = p \cup \{(n, 0)\}$ para que q sea una extensión de p que viva en D_n.

Si $h : \omega \to 2$ es una función, definimos $E_h = \{p \in \mathbb{P} : \exists n \in \operatorname{dom} p \ (p(n) \neq h(n))\}$. Afirmamos que también estos conjuntos resultan ser densos. Sean $p \in \mathbb{P}$ y $n \in \omega$ tales que $n \notin \operatorname{dom} p$. De esta manera $q = p \cup \{(n, 1 - h(n))\}$ es un elemento que extiende a p y que cumple que $q \in E_h$, es decir, hemos probado que E_h es denso.

Si G es un filtro en $\mathbb{P}$, de nuevo como en el ejemplo 2.4, $g := \bigcup G$ resulta ser una función. Ahora supongamos que $G \cap D_n \neq \emptyset$, para cada $n \in \omega$. Entonces g es una función de ω en 2 y, por otro lado, $p \in G$ nos lleva a que $p \subseteq g$ o equivalentemente $g \restriction \operatorname{dom} p = p$. En particular, $G \cap E_g = \emptyset$. Por lo tanto no existe un filtro que intersecte a todos los densos que hemos definido.

Como $|\{D_n : n \in \omega\} \cup \{E_h : h \in 2^\omega\}| = \mathfrak{c}$, podemos concluir que $MA(\mathfrak{c})$ es falso.

El enunciado $MA(\kappa)$ está definido para cualquier cardinal, pero los últimos ejemplos nos dicen que los casos interesantes son cuando κ satisface $\kappa < \mathfrak{c}$. Por lo que el Axioma de Martin se enuncia de la siguiente manera.

El Axioma de Martin (MA) es la afirmación: $MA(\kappa)$ es cierto para todo $\kappa < \mathfrak{c}$.

Cabe mencionar que dentro de ZFC hay órdenes parciales que, independientemente de ser c.c.c., poseen filtros que intersectan a todos sus densos. Para un ejemplo de dichos órdenes necesitaremos la definición de *átomo*.

Definición 2.11. Sea $\langle \mathbb{P}, \leqslant \rangle$ un orden parcial y sea $a \in \mathbb{P}$. Entonces a es un átomo en $\mathbb{P}$ si cada que $p \leqslant a$ y $q \leqslant a$, se sigue que $p \mid q$.

Observe que, en particular, si $\mathbb{P}$ es un orden parcial que tiene mínimo, entonces dicho mínimo es un átomo de $\mathbb{P}$.

Como probaremos en la siguiente proposición, los órdenes que poseen átomos cuentan con filtros genéricos. Es decir, la conclusión de el Axioma de Martin también es válida para ellos, aunque estos no cumplan con todas las características que recita el axioma.

Proposición 2.12. *Para todo orden parcial $\langle \mathbb{P}, \leqslant \rangle$, con al menos un átomo, existe un filtro* *que intersecta a todos los subconjuntos densos de* $\mathbb{P}$*.*

Demostración. Sea a un átomo del orden parcial $\langle \mathbb{P}, \leqslant \rangle$. Definimos

$$X := \{p \in \mathbb{P} : (a \leqslant p) \vee (p \leqslant a)\}.$$

En otras palabras, X es el conjunto de todos los elementos de $\mathbb{P}$ que son comparables con a. Hagamos ahora

$$G := \{q \in \mathbb{P} : \exists p \in X (p \leqslant q)\}.$$

Probemos que G es un filtro en $\mathbb{P}$. Comencemos con $p, q \in G$ y veamos que existe $r \in G$ con $r \leqslant p$ y $r \leqslant q$. De la definición de G, se sigue que existen $p', q' \in X$ de modo que $p' \leqslant p$ y $q' \leqslant q$. Se tienen los siguientes casos:

Caso 1. $p' \leqslant a$ y $q' \leqslant a$. Entonces, por la definición de átomo, sucede que $p' \mid q'$. Si r es una extensión común de p' y q', se tiene que $r \leqslant p' \leqslant p$ y $r \leqslant q' \leqslant q$, es decir, r extiende a p y a q; además, también se cumple que $r \leqslant a$, por lo que $r \in G$.

Caso 2. $a \leqslant p'$ y $a \leqslant q'$. En este caso, a es una extensión común de p' y q', lo cual implica, por la transitividad del orden, que también lo es de p y q. Finalmente, observe que $a \in G$.

Caso 3. $p' \leqslant a \leqslant q'$. Notemos que también se tiene la desigualdad $p' \leqslant a \leqslant q$. O sea que $p' \leqslant p$ y $p' \leqslant q$. Por otro lado $p' \in X$, es decir, también se tiene que $p' \in G$.

Caso 4. $q' \leqslant a \leqslant p'$. Esta situación se resuelve del mismo modo que el caso anterior.

Con esto sólo falta verificar la condición (b) de la definición 2.2. Lo cual es fácil ya que, si $p \in G$ y $q \in \mathbb{P}$ son de tal forma que $p \leqslant q$; como $p \in G$, entonces existe $p' \in X$ de modo que $p' \leqslant p \leqslant q$, lo cual, por definición de G, inmediatamente implica que $q \in G$.

Sea D un subconjunto denso de $\mathbb{P}$. Entonces existe $d \in D$ de modo que $d \leqslant a$, es decir $d \in X \cap D$. Como $X \subseteq G$, se sigue que $G \cap D \neq \emptyset$. □

Nuestro resultado nos dice que las aplicaciones no triviales del Axioma de Martin emplearán órdenes parciales sin átomos.

Los antecedentes del Axioma de Martin datan del año 1971, año en el que R. Solovay y S. Tennenbaum publican en su artículo *Iterated Cohen extensions and Suslin's problem* una prueba de la consistencia de la Hipótesis de Suslin (SH). Al ver dicha prueba D. A. Martin, notó que el modelo construido por Solovay y Tennenbaum satisfacía MA (y, por ende, dicho modelo garantizaba que MA era consistente con ZFC) y que MA implica SH.

2.2 Variaciones de la c.c.c.

Respecto a las propiedades de órdenes parciales, hasta ahora, sólo hemos hablado de ser c.c.c. En esta sección introduciremos más propiedades con el fin de ver qué relaciones existen entre ellas y de qué manera se relacionan con la ya conocida Condición de la Cadena Contable.

Por otro lado, también podemos preguntarnos qué sucede cuando intercambiamos c.c.c. por cualquiera de estas propiedades nuevas en el enunciado del Axioma de Martin. Presentaremos algunos resultados en esta dirección en los capítulos siguientes.

Definición 2.13. Sea $\langle \mathbb{P}, \leqslant \rangle$ un orden parcial y $S \subseteq \mathbb{P}$.

1. S está ligado si cualesquiera dos elementos de S son compatibles.
2. S está centrado si para cada $F \in [S]^{<\omega}$, existe $p \in \mathbb{P}$ tal que $p \leqslant F$. Diremos que S está centrado y es maximal si cada que $S \subseteq S'$, donde S' es un conjunto centrado, se tiene que $S = S'$.
3. Si sucede que cada subconjunto no numerable de $\mathbb{P}$ contiene un subconjunto ligado no numerable, diremos que $\mathbb{P}$ tiene la propiedad K. Esta propiedad también es llamada *condición de Knaster*, en honor al matemático polaco Bronisław Knaster.

Observemos que todo conjunto centrado es un conjunto ligado, ya que en particular un conjunto de dos elementos es finito. También se tiene que estar centrado y estar ligado son propiedades hereditarias, es decir, si $A \subseteq S$ y S está centrado (respectivamente ligado), entonces cualquier subconjunto finito de A es también un subconjunto finito de S por lo que existe $p \in \mathbb{P}$ que cumple $p \leqslant A$. Por lo tanto A está centrado (respectivamente ligado).

Lema 2.14. *Si $\langle \mathbb{P}, \leqslant \rangle$ es un orden parcial con la propiedad K y $\{p_\alpha : \alpha \in A\} \subseteq \mathbb{P}$ donde $|A| > \omega$, entonces existe $B \in [A]^{\omega_1}$ de tal forma que $\{p_\alpha : \alpha \in B\}$ es un conjunto ligado.*

Demostración. Sea $\langle \mathbb{P}, \leqslant \rangle$ un orden parcial con la propiedad K y $C = \{p_\alpha : \alpha \in A\}$ un subconjunto de $\mathbb{P}$ tal que $|A| > \omega$ .Si el conjunto C resulta ser no numerable, entonces hemos terminado, pues $\mathbb{P}$ tiene la propiedad K. Si no es así, entonces existe $\alpha \in A$ de manera que p_α es un elemento que se repite una cantidad no numerable de veces en C y entonces $|\{\beta \in A : p_\beta = p_\alpha\}| > \omega$ .Si $D = \{\beta \in A : p_\beta = p_\alpha\}$, se sigue que $\{p_\alpha : \alpha \in D\}$ es un conjunto ligado. $\square$

De manera análoga al lema previo podemos mostrar el siguiente lema.

Lema 2.15. *Si $\langle \mathbb{P}, \leqslant \rangle$ es un orden parcial c.c.c. y $\{p_\alpha : \alpha \in A\} \subseteq \mathbb{P}$, donde $|A| > \omega$, entonces existen α,$\beta \in A$ distintos tales que $p_\alpha \mid p_\beta$*

Demostración. Sea $\langle \mathbb{P}, \leqslant \rangle$ un orden parcial c.c.c. y $C = \{p_\alpha : \alpha \in A\}$ un subconjunto de $\mathbb{P}$ tal que $|A| > \omega$ .Si el conjunto C resulta ser no numerable, entonces hemos terminado, pues $\mathbb{P}$ es c.c.c. y así C no puede ser anticadena. De no ser así, significa que existe $\alpha \in A$ de manera que p_α es un elemento que se repite una cantidad no numerable de veces en C. Haciendo $D = \{\beta \in A : p_\beta = p_\alpha\}$ se sigue que para cualesquiera β,$\gamma \in D$ sucede $p_\beta \mid p_\gamma$, lo cual prueba el lema. $\square$

Con lo anterior ya tenemos lo suficiente para poder definir nuevas propiedades sobre órdenes parciales.

Definición 2.16. Sean λ un cardinal y $\langle \mathbb{P}, \leqslant \rangle$ un orden parcial.

1. $\mathbb{P}$ es λ-ligado si $\mathbb{P}$ es la unión de, a lo más, λ conjuntos ligados.

2. $\mathbb{P}$ es λ-centrado si $\mathbb{P}$ es la unión de, a lo más, λ conjuntos centrados.

3. Diremos que λ es un precalibre para $\mathbb{P}$ si para cada $S \subseteq \mathbb{P}$ tal que $|S| = \lambda$, existe $Q \subseteq S$ centrado, con $|Q| = \lambda$.

De esta definición se sigue que si $\langle \mathbb{P}, \leqslant \rangle$ es un orden parcial numerable, entonces $\mathbb{P} := \{p_n\}_{n \in \omega}$ y claramente todo conjunto unipuntual está centrado, por lo tanto $\mathbb{P}$ es ω-centrado. Por la observación previa al lema 2.14 también se tiene que $\mathbb{P}$ es ω-ligado.

La relación que guardan las definiciones anteriores entre sí queda descrita en la figura 2.1. De aquí en adelante en los diagramas que aparezcan en este texto, $P \to Q$ significará que la condición Q es una consecuencia de P.

$$
\begin{tikzcd}
 & & \text{Precalibre } \omega_1 \arrow[dr] & & \\
\text{Numerable} \arrow[r] & \omega\text{-centrado} \arrow[ur] \arrow[dr] & & \text{Propiedad } K \arrow[r] & \text{c.c.c.} \\
 & & \omega\text{-ligado} \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}
$$

Figura 2.1: Relación entre algunas variaciones de la c.c.c.

La implicación de numerable a ω-centrado quedó mostrada en el párrafo anterior. Ahora mostraremos las restantes.

(a) ω-centrado $\to$ precalibre ω_1.

Sea $\langle \mathbb{P}, \leqslant \rangle$ un orden parcial ω-centrado. Entonces $\mathbb{P} = \bigcup\limits_{n\in\omega} C_n$, donde para cada $n \in \omega$, C_n es centrado. Consideremos $A \subseteq \mathbb{P}$ tal que $|A| = \omega_1$. Si suponemos que para cada $n \in \omega$ sucede que $|A \cap C_n| \leqslant \omega$ se tendría que $\omega_1 = |A| = |\bigcup\limits_{n\in\omega} A \cap C_n| \leqslant \omega$, lo cual es un absurdo, por lo tanto debe existir $n \in \omega$ que satisface $|C_n \cap A| = \omega_1$. Recordando que estar centrado es hereditario, se tiene que $C_n \cap A$ es un subconjunto no numerable de A que está centrado.

(b) ω-ligado $\to$ Propiedad K.

La demostración de esta implicación es completamente análoga a la anterior ya que estar ligado también es una propiedad hereditaria.

(c) Precalibre ω_1 $\to$ Propiedad K.

Sea $\langle \mathbb{P}, \leqslant \rangle$ un orden parcial tal que ω_1 es un precalibre para $\mathbb{P}$, y sea $A \subseteq \mathbb{P}$ no numerable. Luego A contiene un subconjunto centrado no numerable y como todo centrado está ligado, se sigue que $\mathbb{P}$ tiene la propiedad K.

(d) Propiedad $K \to$ c.c.c.

Sea $\langle \mathbb{P}, \leqslant \rangle$ un orden parcial que no es c.c.c. Entonces existe una anticadena A no numerable, de donde se sigue que los únicos subconjuntos centrados de A son los conjuntos unitarios. Por lo tanto A no posee subconjuntos centrados no numerables, es decir $\mathbb{P}$ no tiene la propiedad K. Por contrapositiva se obtiene el resultado.

El resto de la sección estará dedicado a analizar ejemplos dentro de ZFC que muestran que varias de las implicaciones listadas arriba no se regresan.

Para dar un ejemplo de un orden parcial ω-centrado que no sea numerable necesitaremos un resultado previo.

Proposición 2.17. *Sea X un espacio topológico que contiene un subconjunto denso D de cardinalidad λ, entonces el orden parcial τ_X^* es λ-centrado.*

Demostración. Sean X y $D = \{d_\alpha\}_{\alpha\in\lambda}$ como en las hipótesis. Para cada $\alpha \in \lambda$ definimos $d_\alpha^* = \{U \in \tau_X^* : d_\alpha \in U\}$. Si $F \in [d_\alpha^*]^{<\omega}$, entonces $\bigcap F \in \tau_X$, pero al menos $d_\alpha \in \bigcap F$, por lo tanto $\bigcap F \in \tau_X^*$ y además $\bigcap F \subseteq U$ para cada $U \in F$, luego $\bigcap F \leqslant F$. Con lo anterior hemos mostrado que d_α^* está centrado para toda $\alpha \in \lambda$. Ahora sólo resta notar que, como consecuencia de la densidad de D, se tiene que $\tau_X^* \subseteq \bigcup_{\alpha\in\lambda} d_\alpha^*$; la contención contraria se sigue de la definición de d_α^*. Por lo tanto $\tau_X^* = \bigcup_{\alpha\in\lambda} d_\alpha^*$ y así τ_X^* es λ-centrado. □

Un caso particular del lema anterior es que cuando X resulta ser separable entonces τ_X^* es un orden parcial ω-centrado, lo cual nos da nuestro primer contraejemplo.

Si denotamos por $\tau_\mathbb{R}$ a la topología usual de la recta real, ésta resulta ser separable, ya que los números racionales son un conjunto denso. Por lo tanto $\tau_\mathbb{R}^*$ es un orden parcial ω-centrado que no es numerable. Con este ejemplo mostramos que la primera implicación de la figura 2.1 no es reversible.

Ahora, si X es un espacio topológico y τ_X^* resulta ser λ-centrado, nos gustaría saber si esto es suficiente para concluir que X tiene un denso de cardinalidad λ. En la siguiente proposición veremos que se necesita un par de condiciones adicionales para poder afirmar la existencia de tal denso.

Proposición 2.18. *Sea X un espacio topológico compacto y Hausdorff tal que τ_X^* es λ-centrado. Entonces X tiene un subconjunto denso de cardinalidad λ.*

Demostración. Sea X un espacio topológico que satisfaga las hipótesis de la proposición. Entonces $\tau_X^* = \bigcup_{\alpha\in\lambda} C_\alpha$ donde cada C_α es un conjunto centrado. Por lo tanto si $F \in [C_\alpha]^{<\omega}$, existe $V \in \tau_X^*$ tal que $V \subseteq U$ para todo $U \in F$ y en particular $V \subseteq \bigcap F$, luego $\bigcap F \neq \emptyset$.

Ahora definimos para cada $\alpha \in \lambda$ el conjunto $\overline{C_\alpha} = \{\overline{U} : U \in C_\alpha\}$. Del párrafo anterior se sigue que $\overline{C_\alpha}$ es una familia de cerrados con la propiedad de la intersección finita, luego, por la compacidad de X, $\bigcap \overline{C_\alpha} \neq \emptyset$ para toda $\alpha \in \lambda$. Sea $d_\alpha \in \bigcap \overline{C_\alpha}$ para cada $\alpha \in \lambda$. Mostraremos que el conjunto $D = \{d_\alpha\}_{\alpha\in\lambda}$ es denso en X.

Recordemos que como X es compacto y Hausdorff, entonces también es un espacio normal. Sea $U \in \tau_X^*$. Por ser X un espacio regular, existe $W \in \tau_X^*$ tal que $\overline{W} \subseteq U$. Entonces existe $\delta \in \lambda$ tal que $W \in C_\delta$, por lo que $d_\delta \in \overline{W}$, así $U \cap D \neq \emptyset$. □

Ahora continuaremos con un ejemplo de un orden parcial c.c.c. que no es ω-centrado. Y como ya es costumbre, primero un resultado.

Lema 2.19. *Sea $\{X_i : i \in I\}$ una familia de espacios topológicos no vacíos tales que para cada $F \in [I]^{<\omega} \setminus \{\emptyset\}$ sucede que $\prod_{i\in F} X_i$ tiene celularidad numerable. Entonces $\prod_{i\in I} X_i$ tiene celularidad numerable.*

Demostración. Probaremos el resultado por contrapuesta.

Sean $X = \prod_{i\in I} X_i$ y $\mathcal{U} = \{U_\alpha : \alpha \in \omega_1\}$ una colección de abiertos no vacíos en X tales que $\alpha < \beta < \omega_1$ implica $U_\alpha \cap U_\beta = \emptyset$. Podemos suponer que los elementos de dicha colección son abiertos básicos. Ahora, para cada $\alpha \in \omega_1$, definimos $r_\alpha = \{i \in I : \pi_i[U_\alpha] \neq X_i\}$, donde π_i es la i-ésima proyección; como también hemos supuesto que $\mathcal{U}$ está formada por abiertos básicos, sucede que $|r_\alpha| < \omega$.

Considerando $\{r_\alpha : \alpha \in \omega_1\}$, por el lema del Δ-sistema (Lema 1.14), existen r y $A \in [\omega_1]^{\omega_1}$ de tal modo que $\{r_\alpha : \alpha \in A\}$ es unΔ -sistema de raíz r. Sean $\alpha,\beta \in A$ de manera que $\alpha < \beta$. Como U_α y U_β son básicos canónicos del producto, la igualdad $U_\alpha \cap U_\beta = \emptyset$ implica que existe $i \in I$ de tal modo que $\pi_i[U_\alpha] \cap \pi_i[U_\beta] = \emptyset$, lo que nos lleva a que $i \in r_\alpha \cap r_\beta$ y por lo tanto $r \neq \emptyset$.

Si $\pi_r : X \to \prod_{i \in r} X_i$ es tal que $\pi_r(x) = x \upharpoonright r$, es un argumento rutinario el mostrar que ésta resulta ser una función abierta y continua. Por lo tanto, haciendo $F = \{\pi_r[U_\alpha] : \alpha \in A\}$, obtenemos una familia de abiertos en $\prod_{i \in r} X_i$. Ahora mostraremos que dados $\alpha, \beta \in A$ con $\alpha \neq \beta$, existe $i \in r$ de tal modo que $\pi_i[U_\alpha] \cap \pi_i[U_\beta] = \emptyset$. Supongamos que esto no sucede. Entonces existen $\alpha, \beta \in A$ distintos, de tal manera que para toda $i \in r$ se satisface que $\pi_i[U_\alpha] \cap \pi_i[U_\beta] \neq \emptyset$. Teniendo lo anterior podemos fijar un punto $x_i \in \pi_i[U_\alpha] \cap \pi_i[U_\beta]$ para cada $i \in r$. De la misma manera es posible fijar un punto $x_i \in \pi_i[U_\alpha]$, si $i \in r_\alpha \setminus r$; y análogamente un punto $x_i \in \pi_i[U_\beta]$, si $i \in r_\beta \setminus r$; por último fijamos $x_i \in X_i$ cuando $i \in I \setminus (r_\alpha \cup r_\beta)$. Con el proceso anterior obtenemos una función $f \in \prod_{i \in I} X_i$ de tal modo que $f(i) = x_i$, para cada $i \in I$; de esta manera $f \in U_\alpha \cap U_\beta$, lo cual contradice que los elementos de la familia $\mathcal{U}$ sean ajenos por pares.

Por lo tanto, F es una familia celular no numerable en $\prod_{i \in r} X_i$. $\square$

Ahora, como consecuencia de los lemas previos tenemos lo siguiente.

Teorema 2.20. *Si $\kappa \geqslant \mathfrak{c}^+$ y $X = 2^\kappa$, entonces τ_X^* es un orden parcial c.c.c. que no es ω-centrado.*

Demostración. Como $\{0, 1\}$ con la topología discreta es un espacio compacto y Hausdorff, entonces 2^κ es compacto y Hausdorff. También es claro que para cualquier $F \in [\kappa]^{<\omega}$, el producto 2^F tiene celularidad numerable y por el lema anterior se concluye que 2^κ tiene celularidad numerable, es decir, τ_X^* es c.c.c. Por otro lado, como X no es separable (lema 1.18), por la proposición 2.18, τ_X^* no es ω-centrado. $\square$

Por último, también es posible construir, en ZFC, un orden parcial con precalibre ω_1 pero que no sea ω-ligado. Sin embargo esta construcción es larga y se sale del tema de esta tesis, pero puede ser consultada en [9, Example 3.11]. Además, dado que este orden no es ω-ligado, tampoco ha de suceder que sea ω-centrado.

A manera de resumen sobre lo que hemos hecho hasta ahora, tenemos la figura 2.2, en el cual $A \multimap B$ significa que B no es consecuencia de A. En el resto de los diagramas que presentemos aquí utilizaremos la misma simbolización.

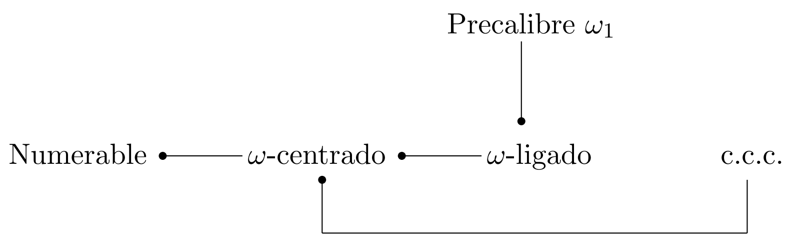

Figura 2.2: Implicaciones no reversibles en ZFC

Para obtener contraejemplos de algunas de las implicaciones faltantes que no son reversibles, se necesitan axiomas adicionales a los de la Teoría de Conjuntos. Es por esto que les hemos dedicado las secciones siguientes.

2.3 (ZFC+CH) Un orden parcial ω-ligado que no tiene precalibre ω_1

Para esta parte utilizaremos las mismas convenciones que fueron empleadas en la sección 1.3 de este texto.

Definimos a $\mathcal{M}$ como la colección de los subconjuntos del intervalo unitario que tienen medida positiva. Dados $A, B \in \mathcal{M}$, diremos que están relacionados, lo cual denotaremos como $A \sim B$, si $A \triangle B$ tiene medida cero. Notemos que la relación definida anteriormente es simétrica ya que $A \triangle A = \emptyset$ y el vacío tiene medida cero; reflexiva debido a la conmutatividad de la diferencia simétrica; y transitiva, ya que si tenemos $A \sim B$ y $B \sim C$, basta observar que sucede lo siguiente:

$$A \setminus C \subseteq (B \setminus C) \cup (A \setminus C) \text{ y } C \setminus A \subseteq (C \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Y que además $(B \setminus C) \cup (A \setminus C)$ y $(C \setminus B) \cup (B \setminus A)$ tienen medida cero, de donde podemos concluir que $A \sim C$. Por lo tanto esta relación resulta ser de equivalencia.

Ahora mostraremos un sencillo lema que nos habla sobre la relación anterior y nos será de utilidad en pruebas posteriores.

Lema 2.21. *Si $A \in \mathcal{M}$ y F es un conjunto de medida cero, entonces $A \sim (A \setminus F)$.*

Demostración. Sean A y F como en las hipótesis del lema. Se tienen las siguientes igualdades:

$$A \setminus (A \setminus F) = A \cap F \text{ y } (A \setminus F) \setminus A = \emptyset.$$

Como $A \cap F \subseteq F$ y F tiene medida cero, se sigue que $A \cap F$ tiene medida cero. Por lo tanto $A \triangle (A \setminus F)$ tiene medida cero, es decir $A \sim (A \setminus F)$. $\square$

Sea $\mathbb{M}$ el conjunto de las clases de equivalencia inducidas por la relación $\sim$ en $\mathcal{M}$. Definimos una relación de orden en $\mathbb{M}$ de la siguiente manera, dados $p, q \in \mathbb{M}$ entonces $p \leqslant q$ si y sólo si existe existen $A \in p$ y $B \in q$ de tal modo que $A \subseteq B$. Es claro que esta relación es reflexiva. Ahora mostremos que es transitiva. Para esto supongamos que $p \leqslant q$ y $q \leqslant r$, lo cual significa que existen $A \in p$ y $B \in q$ satisfaciendo que $A \subseteq B$; y que también existen $C \in q$ y $D \in r$ de tal manera que $C \subseteq D$. Como B y C viven en q, sucede que $B \sim C$, es decir, $B \triangle C$ tiene medida cero. Por otro lado como $A \subseteq B$, se sigue que $A \setminus C \subseteq B \setminus C \subseteq B \triangle C$, por lo que $A \setminus C$ tiene medida cero. Haciendo $F = A \setminus C$ y por el lema 2.21, obtenemos que $A \sim (A \setminus F)$, o sea que $A \setminus F \in p$. Además $A \setminus F \subseteq C$ y por hipótesis $C \subseteq D$, por lo tanto $A \setminus F \subseteq D$ o equivalentemente $p \leqslant r$.

De lo anterior tenemos que $\langle \mathbb{M}, \leqslant \rangle$ efectivamente es un orden parcial. Es importante observar que si $p \in \mathbb{M}$ y $A, B \in p$, entonces $\mu(A) = \mu(B)$.

Nuestro siguiente paso es mostrar que este orden es ω-ligado, y para esto nos ayudaremos del lema 1.27.

Sea $\{(r_n, s_n) : n \in \omega\}$ una enumeración del conjunto $\{(r, s) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} : r < s\}$, recordando que $\mathbb{Q}$ repesenta al conjunto de números racionales. Para cada $n \in \omega$ definimos

$$M_n = \{p \in \mathbb{M} : \exists A \in p(\mu(A \cap [r_n, s_n]) > \tfrac{1}{2}(s_n - r_n))\}.$$

Por el lema 1.27, se sigue que para cada conjunto de medida positiva A, podemos encontrar $n \in \omega$ de modo que $\mu(A \cap [r_n, s_n]) > \frac{1}{2}(s_n - r_n)$. Entonces $\mathbb{M} = \bigcup_{n \in \omega} M_n$.

Ahora resta mostrar que M_n es un conjunto que está ligado para toda $n \in \omega$. Sean $p, q \in M_n$. Entonces existen $A \in p$ y $B \in q$ tales que

$$\mu(A \cap [r_n, s_n]) > \tfrac{1}{2}(s_n - r_n) \text{ y } \mu(B \cap [r_n, s_n]) > \tfrac{1}{2}(s_n - r_n).$$

Hagamos $E_1 = A \cap [r_n, s_n]$ y $E_2 = B \cap [r_n, s_n]$. Si suponemos que $\mu(E_1 \cap E_2) = 0$, por el lema 1.20 tenemos que $\mu(E_1) + \mu(E_2) = \mu(E_1 \cup E_2)$, pero por un lado $(s_n - r_n) < \mu(E_1) + \mu(E_2)$ y por otro lado $\mu(E_1 \cup E_2) \leqslant (s_n - r_n)$, lo cual es un absurdo. Por lo tanto $E_1 \cap E_2$ es un conjunto de medida positiva. Sea a la clase de equivalencia de $E_1 \cap E_2$. Como $E_1 \cap E_2 \subseteq A$ y $E_1 \cap E_2 \subseteq B$, se sigue que $a \leqslant p$ y $a \leqslant q$, concluyendo así que M_n está ligado.

Hasta el momento hemos conseguido un orden parcial ω-ligado, pero para dar nuestro siguiente paso, que es mostrar que ω_1 no es un precalibre para este orden, necesitamos suponer la Hipótesis del Continuo y demostrar el resultado siguiente.

Lema 2.22. *Si $q \in \mathbb{M}$ y $F \in [q]^{<\omega} \setminus \{\emptyset\}$, entonces $\bigcap F \in q$.*

Demostración. Sea $F \in [q]^{<\omega} \setminus \emptyset$. La prueba será por inducción sobre la cardinalidad de F. Si $|F| = 1$, entonces $F = \{F_0\}$, luego $\bigcap F = F_0$. Claramente se sigue el resultado, con lo cual terminamos con el caso base. Ahora supongamos que si $|F| = n$, sucede que $\bigcap F \in q$; y mostraremos que el resultado también es válido cuando $|F| = n+1$. Asumamos que $|F| = n + 1$. Haciendo $F = \{F_i : i \leqslant n\}$, se tiene que $\{F_i : i \leqslant n-1\} \subseteq q$ y $|\{F_i : i \leqslant n-1\}| = n$. Luego, por nuestra hipótesis inductiva, $F' = \bigcap\{F_i : i \leqslant n-1\} \in q$. Ahora observemos que se tienen las siguientes igualdades

$$\bigcap F = F' \cap F_n = (F' \cup F_n) \setminus (F' \triangle F_n).$$

Como $F', F_n \in q$, se debe tener que $F' \sim F_n$, por lo que $\mu(F' \triangle F_n) = 0$. Entonces $\bigcap F$ tiene medida positiva. Por último veamos que $\bigcap F \in q$. Para esto consideremos F_i para alguna $i \leqslant n$. Como $\bigcap F \subseteq F_i$, entonces

$$\left(\bigcap F\right) \triangle F_i = F_i \setminus \bigcap F = \bigcup_{j \leqslant n} (F_i \setminus F_j),$$

pero para cada $j \leqslant n$ sucede que $F_i \sim F_j$, por lo que $F_i \setminus F_j$ tiene medida cero. Por lo tanto $\mu\left((\bigcap F) \triangle F_i\right) = 0$ y así $\bigcap F \in q$, con lo que queda probado el lema. □

Ahora sí estamos listos para definir el conjunto clave para nuestro contraejemplo. Es justo aquí donde haremos uso de CH, ya que esta hipótesis nos garantiza que podemos enumerar al intervalo unitario en tipo de orden ω_1, es decir, empleemos CH para hallar $\{x_\alpha : \alpha < \omega_1\}$, una enumeración de $[0,1]$.

Definimos para cada $\alpha < \omega_1$ el conjunto $S_\alpha = I \setminus \{x_\beta : \beta < \alpha\}$. Ahora construiremos una familia de compactos $\{F_\alpha : \alpha \in \omega_1\}$ de tal manera que satisfagan las condiciones siguientes:

(i) Para cada $\alpha < \omega_1$ se tiene que $F_\alpha \subseteq S_\alpha$.

(ii) Si $\alpha < \beta < \omega_1$, entonces F_α y F_β tienen diferente medida.

Para hacer lo descrito anteriormente, fijemos $\{z_\alpha : \alpha < \omega_1\}$, una enumeración del intervalo $(0,1)$, de tal modo que $z_\alpha \neq z_\beta$ siempre que $\alpha < \beta < \omega_1$. Por el lema 1.24, podemos encontrar un subconjunto compacto F_α contenido en S_α cuya medida sea exactamente z_α.

Lo hecho en el párrafo anterior nos lleva a que la familia de compactos $\{F_\alpha : \alpha \in \omega_1\}$ cumple con (i) y (ii). Denotemos por p_α a la clase de equivalencia de F_α, para toda $\alpha \in \omega_1$. Debido a que índices distintos nos llevan a compactos con medida distinta, la colección $\{p_\alpha : \alpha \in \omega_1\}$ resulta ser un conjunto no numerable. Por último veamos que no existe un subconjunto no numerable de $\{p_\alpha : \alpha \in \omega_1\}$ que resulte estar centrado. Sea$\Gamma \in [\omega_1]^{\omega_1}$ y supongamos que $\{p_\alpha : \alpha \in \Gamma\}$ es un conjunto centrado.

Afirmamos que $\{F_\alpha : \alpha \in \Gamma\}$ satisface la propiedad de la intersección finita. En efecto, para cada$\Sigma \in [\Gamma]^{<\omega}$ existe $q \in \mathbb{M}$ de tal manera que $q \leqslant \{p_\alpha : \alpha \in \Sigma\}$, es decir, para cada $\alpha \in \Sigma$, existen $D_\alpha \in q$ y $G_\alpha \in p_\alpha$ con $D_\alpha \subseteq G_\alpha$. Hagamos $D = \bigcap_{\alpha \in \Sigma} D_\alpha$. Entonces, por el lema 2.22, $D \in q$ y claramente $D \subseteq G_\alpha$ para toda $\alpha \in \Sigma$. Por otro lado, para cada $\alpha \in \Sigma$ sucede que $G_\alpha \sim F_\alpha$; luego $D \cap F_\alpha \neq \emptyset$, ya que de lo contrario $D \subseteq G_\alpha \setminus F_\alpha$ y $\mu(G_\alpha \setminus F_\alpha) = 0$, lo cual contradice que D tenga medida positiva. Ahora observemos que de lo anterior se sigue que, para cada $\alpha \in \Sigma$, $D \setminus F_\alpha \subseteq G_\alpha \setminus F_\alpha$, es decir, $\mu(D \setminus F_\alpha) = 0$. Entonces el conjunto $\bigcup_{\alpha \in \Sigma} (D \setminus F_\alpha)$ tiene medida cero y, por el lema 2.21, concluimos que D y $D \cap \bigcap_{\alpha \in \Sigma} F_\alpha$ tienen la misma medida. De este modo, $\bigcap\{F_\alpha : \alpha \in \Sigma\} \neq \emptyset$.

Ahora, la compacidad de I nos garantiza que $\bigcap\{F_\alpha : \alpha \in \Gamma\} \neq \emptyset$. Sin embargo, el hecho de que Γ sea cofinal en ω_1 implica que $\bigcap\{S_\alpha : \alpha \in \Gamma\} = \emptyset$, lo cual es absurdo. Esto nos permite concluir que $\{p_\alpha : \alpha \in \omega_1\}$ no posee algún subconjunto no numerable centrado.

Por lo tanto ω_1 no es un precalibre para $\mathbb{M}$.

2.4 (ZFC+ $\neg$SH) Un orden parcial c.c.c. que no tiene la propiedad K

Como se mencionó con anterioridad, haremos uso de axiomas adicionales a la Teoría de Conjuntos. En particular, en esta sección estaremos suponiendo la negación de la Hipótesis de Suslin. A continuación presentamos algunos conceptos y resultados que le darán contexto a dicho axioma y que ayudarán al lector a entenderlo.

Definición 2.23. Sea $(X, \leqslant)$ un orden total tal que $|X| \geqslant 2$. Para cada $a \in X$ definimos $(\leftarrow, a) = \{x \in X : x < a\}$ y $(a, \rightarrow) = \{x \in X : a < x\}$. Entonces el conjunto

$$S = \{(\leftarrow, a) : a \in X\} \cup \{(a, \rightarrow) : a \in X\}$$

es una subbase para alguna topología en X. A la topología generada por dicha subbase le llamaremos la topología inducida por el orden $\leqslant$.

De la definición anterior tenemos que, si $(X, \leqslant)$ es un orden total con al menos dos puntos, la colección $\mathcal{B} = \{\bigcap A : A \in ([S]^{<\omega} \setminus \{\emptyset\})\}$ es una base para la topología inducida por el orden $\leqslant$. Por lo tanto una base para esta topología está dada por

$$\mathcal{B} = \{(\leftarrow, a) : a \in X\} \cup \{(a, b) : a, b \in X\} \cup \{(b, \rightarrow) : b \in X\}.$$

Proposición 2.24. *Cualquier orden total sin extremos, denso en sí mismo, completo y separable es isomorfo a $\mathbb{R}$ con el orden usual.*

Demostración. Sea $\langle X, \leqslant_X \rangle$ un orden total como en las hipótesis. Por ser separable existe $D \subseteq X$ denso numerable; debe ser claro que D también es sin extremos (de lo contrario no podría ser denso en X). Veamos que D también cumple con ser denso en sí mismo. Sean $d_1, d_2 \in D$; como, en particular, éstos dos elementos viven en X y D es denso, debe existir $d \in D$ de manera que $d_1 < d < d_2$, y así D es denso en sí mismo.

Al inicio del capítulo 2 probamos que cualquier orden total, denso en sí mismo, sin extremos y numerable es isomorfo a $\mathbb{Q}$, por lo tanto existe $f : D \rightarrow \mathbb{Q}$ isomorfismo.

Ahora definimos $h : X \to \mathbb{R}$ como

$$h(x) := \sup\{f(d) : d \in D \wedge d \leqslant x\}.$$

La función h está bien definida por la completez de $\mathbb{R}$. Ahora veamos que es un isomorfismo entre X y $\mathbb{R}$. Primero mostraremos que $h \restriction_D = f$. Sea $x \in D$. Como f es isomorfismo, para cada $y \in D$ que satisface $y \leqslant_X x$, se tiene que $f(y) \leqslant f(x)$, entonces $f(x)$ es una cota superior del conjunto $\{f(d) : d \in D \wedge d \leqslant x\}$. Notemos que si s es una cota superior de $\{f(d) : d \in D \wedge d \leqslant x\}$, en particular, debe tenerse que $f(x) \leqslant s$. Por lo tanto

$$f(x) = \sup\{f(d) : d \in D \wedge d \leqslant x\},$$

es decir $f(x) = h(x)$.

Mostremos que h preserva el orden. Sean $x_1, x_2 \in X$ tales que $x_1 < x_2$. Dado que D es denso, existe $d_1 \in D$ de manera que $x_1 < d_1 < x_2$; de igual manera podemos encontrar $d_2 \in D$ tal que $x_1 < d_1 < d_2 < x_2$. Notemos que para cualquier $d \in D$ con $d \leqslant x_1$, sucede que $f(d) < f(d_1)$; luego, $h(x_1) \leqslant f(d_1)$. Análogamente, como $d_2 \in D$ y $d_2 < x_2$, se tiene que $f(d_2) \leqslant h(x_2)$. Por lo tanto, como f es isomorfismo de orden, tenemos que $f(d_1) < f(d_2)$ y así $h(x_1) < h(x_2)$. Con esto es suficiente para afirmar también que h es inyectiva.

Ahora probaremos que h es suprayectiva. Dado $r \in \mathbb{R}$, definimos

$$A = \{d \in D : f(d) \leqslant r\}.$$

Por la densidad de $\mathbb{Q}$, existen números racionales q_0 y q_1 de tal modo que

$$r - 1 < q_0 < r < q_1 < r + 1.$$

Como f es suprayectiva, existen $d_0, d_1 \in D$ tales que $f(d_0) = q_0$ y $f(d_1) = q_1$. De esta manera $d_0 \in A$ y entonces $A \neq \emptyset$. Por otro lado, dado $d \in A$, sucede que $f(d) \leqslant r < f(d_1)$, pero f es un isomorfismo de orden, así que $d < d_1$; luego d_1 es cota superior de A. Por hipótesis X es completo y por tanto el supremo del conjunto A existe; llamémosle a.

Afirmamos que $h(a) = r$. Para mostrar esto primero veamos que r es cota superior de $\{f(d) : d \in D \wedge d \leqslant a\}$. Supongamos lo contrario. Entonces existe $d \in D$ de tal modo que $d \leqslant a$ y $r < f(d)$. Por la densidad de $\mathbb{Q}$, podemos encontrar un racional q_0 de manera que $r < q_0 < f(d)$. Ahora, por la suprayectividad de f, existe $d_0 \in D$ tal que $f(d_0) = q_0$. En resumen se tiene que $r < f(d_0) < f(d)$, entonces $d_0 < d \leqslant a$ ya que f es un isomorfismo de orden. Como $a = \sup A$, se sigue que existe $d_1 \in D$ de tal suerte que $f(d_1) \leqslant r$ y $d_0 < d_1$. Usando que f es isomorfismo de orden, se deduce que $r < f(d_0) < f(d_1) \leqslant r$. Lo cual es una contradicción. Con esto concluimos que r es cota superior del conjunto deseado. Sólo resta probar que es la mínima. Sea t una cota superior de $\{f(d) : d \in D \wedge d \leqslant a\}$ y supongamos que $t < r$. Como $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$, existe $q \in \mathbb{Q}$ de modo que $t < q < r$ y como f es sobre, existe $d \in D$ de manera que $f(d) = q$, lo cual implica que $d \in A$ y $f(d) \leqslant t$, lo cual es un absurdo. Entonces $r \leqslant t$. Con esto podemos concluir que h es sobre y, finalmente, un isomorfismo. $\square$

Por la proposición anterior tenemos que el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$ se puede caracterizar como el único orden total sin extremos, denso en sí mismo, completo y separable. Una pregunta natural ante esto es si se puede reemplazar la separabilildad por alguna propiedad más débil.

Como corolario de la proposición 2.17, ser separable implica ser ω-centrado, y como ser ω-centrado implica tener celularidad numerable, podemos conluir que ser separable implica tener celularidad numerable; así que celularidad numerable es una propiedad más débil que separabilidad.

M. Suslin conjeturó que si reemplazamos separabilidad por celularidad numerable, entonces la proposición 2.24 sigue siendo cierta. En otras palabras, en el contexto de la proposición 2.24, celularidad numerable debe implicar separable. Naturalmente esta implicación es falsa para espacios topológicos arbitrarios ya que, por el teorema 2.20, tenemos que el producto $2^{\mathfrak{c}^+}$ es un ejemplo de un espacio con celularidad numerable que no es ω-centrado y aplicando la contrapositiva de la proposición 2.17 obtenemos que este espacio no es separable.

Definición 2.25. Un orden total $(X, \leqslant)$ sin extremos, denso en sí mismo y completo es una línea de Suslin si, equipado con la topología del orden, resulta ser un espacio topológico no separable con celularidad numerable.

Así, la Hipótesis de Suslin, abreviada como SH, es la afirmación

No existen líneas de Suslin.

En el teorema 3.4 de esta tesis se muestra que $MA(\omega_1)$ implica SH y como $MA(\omega_1)$ es consistente con ZFC, entonces ZFC+SH también lo es. Por otro lado, el principio combinatorio de Jensen, $\diamondsuit$, implica que existen líneas de Suslin, la prueba de esto puede ser consultada en [5, Theorem II.7.8]; y además ZFC+$\diamondsuit$ es consistente [3, Teorema 3.36]. Por lo tanto SH resulta ser independiente de ZFC.

Una vez que hemos dejado en claro qué afirma SH, podemos continuar con el objetivo principal de esta sección. Para ello, hablaremos un poco sobre el producto de órdenes parciales.

Definición 2.26. Sean $\langle \mathbb{P}, \leqslant_{\mathbb{P}} \rangle$ y $\langle \mathbb{S}, \leqslant_{\mathbb{S}} \rangle$ órdenes parciales. Definimos un orden parcial en el producto cartesiano $\mathbb{P} \times \mathbb{S}$ como sigue

$$(p_1, s_1) \leqslant (p_2, s_2) \text{ si y sólo si } p_1 \leqslant_{\mathbb{P}} p_2 \text{ y } s_1 \leqslant_{\mathbb{S}} s_2.$$

A este orden le llamaremos el producto directo de los órdenes parciales $(\mathbb{P}, \leqslant_{\mathbb{P}})$ y $(\mathbb{S}, \leqslant_{\mathbb{S}})$.

El siguiente resultado nos dice cuándo el producto directo conserva la c.c.c.

Lema 2.27. *Si $\langle \mathbb{P}, \leqslant_{\mathbb{P}} \rangle$ es un orden parcial con la propiedad K y $\langle \mathbb{S}, \leqslant_{\mathbb{S}} \rangle$ es un orden parcial c.c.c., entonces el producto directo entre $\mathbb{P}$ y $\mathbb{S}$ tiene la c.c.c.*

Demostración. Sean $\langle \mathbb{P}, \leqslant_{\mathbb{P}} \rangle$ y $\langle \mathbb{S}, \leqslant_{\mathbb{S}} \rangle$ como en las hipótesis; y sea $\{(p_\alpha, s_\alpha) : \alpha \in \omega_1\} \subseteq \mathbb{P} \times \mathbb{S}$ un subconjunto no numerable. Mostraremos que este conjunto no puede ser una anticadena.

Como $\mathbb{P}$ tiene la propiedad K, por el lema 2.14 existe $A \in [\omega_1]^{\omega_1}$ tal que el conjunto $\{p_\alpha : \alpha \in A\}$ está ligado. Ahora consideramos el conjunto $\{s_\alpha : \alpha \in A\}$. Por ser $\mathbb{S}$ c.c.c., se sigue del lema 2.15 que existen $\delta,\beta \in A$, distintos, de manera que $s_\delta \mid s_\beta$. De aquí es claro que $(p_\delta, s_\delta) \mid (p_\beta, s_\beta)$ y por lo tanto $\{(p_\alpha, s_\alpha) : \alpha \in \omega_1\}$ no es una anticadena. Así, $\mathbb{P} \times \mathbb{S}$ es c.c.c. $\square$

El siguiente teorema, en conjunción con el lema anterior, nos proporcionarán el ejemplo que estamos buscando.

Teorema 2.28. *Si $(X, \leqslant)$ es una línea de Suslin, entonces el producto topológico $X \times X$ no tiene celularidad numerable.*

Demostración. Sea $(X, \leqslant)$ una línea de Suslin. Definiremos recursivamente para cada $\alpha \in \omega_1$ a $a_\alpha, b_\alpha, c_\alpha \in X$ de manera que

(i) $a_\alpha < b_\alpha < c_\alpha$

(ii) Si $\xi < \alpha$, entonces $b_\xi \notin (a_\alpha, c_\alpha)$.

Para lo anterior, supongamos definidos a_ξ, b_ξ, c_ξ para $\xi < \alpha < \omega_1$. Como X no es separable, el conjunto $\{b_\xi : \xi < \alpha\}$ no es denso en X, por lo que existe un abierto de X no vacío U, de tal modo que $U \cap \{b_\xi : \xi < \alpha\} = \emptyset$. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que U es un abierto básico. Si U es de la forma (d, e), hacemos $a_\alpha = d$ y $c_\alpha = e$; si $U = (d, \rightarrow)$, como X no tiene extremos, podemos elegir a $c \in U$ que satisfaga $d < c$ y haciendo $a_\alpha = d$ y $c_\alpha = c$ obtenemos los puntos que satisfacen (i) y (ii); si $U = (\leftarrow, d)$, análogamente al caso anterior, podemos encontrar los puntos a_α y c_α que necesitamos. Por último, como X es denso en sí mismo y $a_\alpha < c_\alpha$, entonces existe $b_\alpha \in X$ con $a_\alpha < b_\alpha < c_\alpha$, y eligiendo a b_α de esta manera se satisface (i).

Ahora definimos para cada $\alpha \in \omega_1$ el conjunto $U_\alpha = (a_\alpha, b_\alpha) \times (b_\alpha, c_\alpha)$. Como X es denso en sí mismo, tenemos que $(a_\alpha, b_\alpha) \neq \emptyset$ y $(b_\alpha, c_\alpha) \neq \emptyset$, y como consecuencia de esto U_α es un abierto de $X \times X$ no vacío. Sea $\mathfrak{U} = \{U_\alpha : \alpha \in \omega_1\}$. Sean α y β de manera que $\alpha < \beta < \omega_1$. Entonces por (ii), $b_\alpha \leqslant a_\beta$ o $c_\beta \leqslant b_\alpha$; en el primer caso, $(a_\alpha, b_\alpha) \cap (a_\beta, b_\beta) = \emptyset$ y en el segundo, $(b_\beta, c_\beta) \cap (b_\alpha, c_\alpha) = \emptyset$. Así $U_\alpha \cap U_\beta = \emptyset$. Entonces $\mathfrak{U}$ es una familia no numerable de abiertos ajenos en $X \times X$. $\square$

Corolario 2.29. *$\neg SH$ implica que existe un orden parcial c.c.c. que no tiene la propiedad K.*

Demostración. Suponiendo la existencia de una línea de Suslin $(X, \leqslant)$, por el teorema anterior tenemos que si τ es la topología inducida por el orden $\leqslant$, entonces el producto directo $\tau^* \times \tau^*$ no es c.c.c. Por contrapositiva del lema 2.27 se tiene que τ^* no es c.c.c. o que τ^* no tiene la propiedad K, pero por definición τ^* es c.c.c., lo cual quiere decir que τ^* no tiene la propiedad K. □

Es importante mencionar que hay otras maneras de obtener órdenes parciales con estas características asumiendo sólo CH y pueden ser consultadas en [9, Theorem 3.15].

Con estos dos últimos ejemplos nos queda el siguiente diagrama, en el cual, cada que aparezca A junto o encima de alguna línea, querrá decir que la implicación falla en el sistema axiomático ZFC+A.

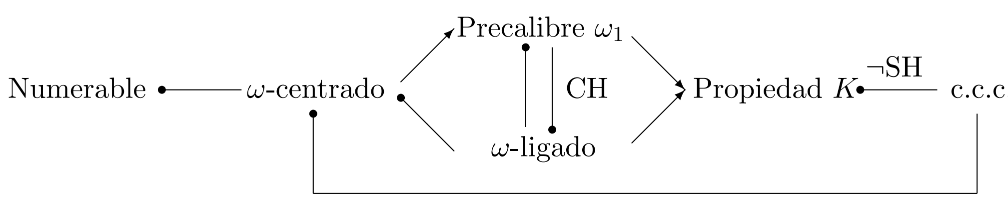

Figura 2.3:

CAPÍTULO 3: PRIMERAS APLICACIONES DE MA

En el capítulo anterior enunciamos el Axioma de Martin, sin embargo, hasta ahora no hemos mostrado ningún resultado que nos permita entender mejor cómo actúa. Es por esto que, en el presente capítulo, aparecen las primeras aplicaciones del Axioma de Martin. Algunas de estas aplicaciones se encuentran relacionadas con las variaciones de la c.c.c. que fueron definidas anteriormente y algunas otras serán de carácter topológico.

La siguiente definición, así como el lema posterior a ella, nos mostrarán que, dado un orden parcial $\mathbb{P}$, podemos aplicar el Axioma de Martin no sólo a $\mathbb{P}$, sino también a algunas *partes* de $\mathbb{P}$. Esto nos resultará conveniente para la prueba de la primera aplicación.

Definición 3.1. Sean $\langle \mathbb{P}, \leqslant \rangle$ un orden parcial y $s \in \mathbb{P}$. Entonces $s^{\downarrow}$ denota el orden parcial $\langle \mathbb{S}, \leqslant_s \rangle$, donde $\mathbb{S} = \{p \in \mathbb{P} : p \leqslant s\}$ y $\leqslant_s$ es la restricción de $\leqslant$ al conjunto $\mathbb{S}$.

Si $D \subseteq \mathbb{P}$, diremos que D es denso bajo s si y sólamente si $D \cap s^{\downarrow}$ es denso en $s^{\downarrow}$.

Lema 3.2. *Si $\langle \mathbb{P}, \leqslant \rangle$ es un orden parcial c.c.c. y $s \in \mathbb{P}$, entonces $s^{\downarrow}$ es c.c.c. Además, si $G \subseteq s^{\downarrow}$ es un filtro en $s^{\downarrow}$ y hacemos $G^* = \{p \in \mathbb{P} : \exists q \in G(q \leqslant p)\}$, entonces G^* es un filtro en $\mathbb{P}$ y $G^* \cap s^{\downarrow} = G$.*

Demostración. Sea $A \subseteq s^{\downarrow}$ una anticadena. Sean $p, q \in A$ de manera que existe $r \in \mathbb{P}$ satisfaciendo $r \leqslant p$ y $r \leqslant q$. Por definición de $s^{\downarrow}$ sucede que $p \leqslant s$ y $q \leqslant s$, luego, por la transitividad del orden, $r \leqslant s$, por lo que $r \in s^{\downarrow}$. Por lo anterior p y q son compatibles en $s^{\downarrow}$, pero pertenencen a una anticadena, entonces debe suceder que $p = q$. Con esto hemos mostrado que cualquier anticadena en $s^{\downarrow}$ es una anticadena en $\mathbb{P}$, lo que nos dice que cualquier anticadena en $s^{\downarrow}$ es a lo más numerable, es decir, es c.c.c.

Ahora veamos que G^* es filtro en $\mathbb{P}$. Para esto consideremos $p, q \in G^*$. Entonces existen r y t en G tales que $r \leqslant p$ y $t \leqslant q$. Como G es un filtro, existe $u \in G$ de tal manera que $u \leqslant p$ y $u \leqslant q$. Por otro lado, si $p \in \mathbb{P}$ y $q \in G^*$ son tales que $q \leqslant p$, entonces existe $r \in G$ de modo que $r \leqslant q \leqslant p$, por lo tanto $p \in G^*$. Así, G^* es filtro en $\mathbb{P}$.

Por último, es claro que $G \subseteq G^* \cap s^{\downarrow}$. Entonces sólo falta mostrar que $G^* \cap s^{\downarrow} \subseteq G$. Sea $p \in G^* \cap s^{\downarrow}$. Se sigue que existe $q \in G$ satisfaciendo $q \leqslant p$ y además $p \leqslant s$; como G es filtro en $s^{\downarrow}$, se sigue que $p \in G$. Por lo tanto, $G = G^* \cap s^{\downarrow}$. □

De aquí en adelante cada vez que un teorema emplee algún axioma adicional a ZFC, se pondrá entre paréntesis el axioma empleado.

Teorema 3.3 (MA(ω_1))**.** *Todo orden parcial c.c.c. tiene precalibre* ω_1*.*

Demostración. Sean $\langle \mathbb{P}, \leqslant \rangle$ un orden parcial c.c.c. y $A \in [\mathbb{P}]^{\omega_1}$. Sea $\{p_\alpha : \alpha \in \omega_1\}$ una enumeración de A. Definimos para cada $\alpha \in \omega_1$ el conjunto $D_\alpha = \{q \in \mathbb{P} : \exists \beta \geqslant \alpha (q \leqslant p_\beta)\}$. Observemos que si $\alpha < \beta < \omega_1$, entonces

1. $D_\beta \subseteq D_\alpha$. Para probar esto, consideremos $q \in D_\beta$; luego existe $\delta \in \omega_1$ tal que $\delta \geqslant \beta > \alpha$ y $q \leqslant p_\delta$. De donde se sigue que $q \in D_\alpha$.

2. Si $s \in \mathbb{P}$ y D_β es denso bajo s, entonces D_α también es denso bajo s. Sea $p \in s^{\downarrow}$. Como D_β es denso bajo s, existe $q \in D_\beta$ de manera que $q \leqslant p$; por el inciso anterior, $q \in D_\alpha$ y así, D_α es denso bajo s.

Afirmación. Existe $s \in \mathbb{P}$ tal que, para cada $\alpha \in \omega_1$, se tiene que D_α es denso bajo s.

Para mostrar lo anterior supongamos lo contrario. Entonces, en particular, para $\xi \in \omega_1$, existe $\gamma \in \omega_1$ tal que D_γ no es denso bajo p_ξ; si $\alpha_\xi \in \omega_1$, satisface $\alpha_\xi > \max\{\xi, \gamma\}$, se sigue de la observación 2 que D_{α_ξ} no es denso bajo p_ξ. Sea r_ξ el testigo que niega la densidad de D_{α_ξ} bajo p_ξ, es decir, $r_\xi \leqslant p_\xi$, pero ningún elemento de D_{α_ξ} está por debajo de r_ξ. Observemos que de esta manera obtenemos una sucesión $\{r_\xi : \xi \in \omega_1\}$ en $\mathbb{P}$.

Probemos ahora que si $\delta \in \omega_1 \setminus \alpha_\xi$, entonces $r_\xi \perp p_\delta$. Observemos que si sucediera lo contrario, es decir, que r_ξ fuese compatible con p_δ, existiría $t \in \mathbb{P}$ tal que $t \leqslant r_\xi$ y $t \leqslant p_\delta$. De este modo, $t \in D_\delta \subseteq D_{\alpha_\xi}$ (por la observación 1), lo cual contradice nuestra elección de r_ξ. Por otro lado, como $r_\delta \leqslant p_\delta$, entonces $r_\xi \perp r_\delta$, ya que si fueran compatibles esto nos llevaría a la compatibilidad ente r_ξ y p_δ, obteniendo de nuevo una contradicción. Por lo tanto, $r_\xi \perp r_\delta$ para cualquier $\delta \geqslant \alpha_\xi$.

Definimos $f : \omega_1 \to \omega_1$ recursivamente como sigue, para cada $\nu \in \omega_1$,

$$f(\nu) := \sup\{\alpha_{f(\mu)} : \mu < \nu\}.$$

Recordemos que, por la forma en que elegimos a α_ξ, se tiene siempre que $\xi < \alpha_\xi$; por lo tanto, si $\mu < \nu < \omega_1$, entonces $\alpha_{f(\mu)} \leqslant f(\nu) < \alpha_{f(\nu)}$. Esto implica que el conjunto $\{r_{f(\nu)} : \nu < \omega_1\}$ es una anticadena no numerable en $\mathbb{P}$. Pero esto es un absurdo ya que $\mathbb{P}$ satisface la c.c.c. Con esto queda demostrada la afirmación.

Sea $s \in \mathbb{P}$ tal que D_α es denso bajo s para cada $\alpha \in \omega_1$. Como $\mathbb{P}$ es c.c.c., por el lema previo se sigue que $s^\downarrow$ es c.c.c. y por MA(ω_1) existe un filtro G en $s^\downarrow$ de tal manera que, para toda $\alpha \in \omega_1$, sucede que $G \cap D_\alpha \neq \emptyset$. Extendiendo G a G^* como en el lema anterior, obtenemos un filtro en $\mathbb{P}$. Dado que G^* es centrado por ser filtro, sólo resta ver que G^* contiene una cantidad no numerable de elementos de A. Para esto es suficiente probar que el conjunto $B = \{\alpha \in \omega_1 : p_\alpha \in G^*\}$, es cofinal en ω_1.

Sea $\beta \in \omega_1$. Entonces existe $r \in G \cap D_\beta \subseteq G^* \cap D_\beta$, por lo que existe también $\eta \geqslant \beta$ con $r \leqslant p_\eta$; como G^* es filtro, se sigue que $p_\eta \in G^*$ y hemos terminado. $\square$

Como corolario del teorema anterior tenemos el siguiente resultado.

Teorema 3.4. *Suponiendo $MA(\omega_1)$ tenemos*

(i) SH

(ii) $\neg$CH

Demostración. Para probar (i), solamente hay que recordar que bajo $MA(\omega_1)$, por el teorema 3.3, ser c.c.c. y la propiedad K resultan ser equivalentes. Por otro lado, por el corolario 2.29, bajo $\neg$SH es posible encontrar un orden parcial c.c.c. que no tiene la propiedad K . Por lo tanto suponiendo $MA(\omega_1)$ no existen líneas de Suslin, es decir SH es verdadera.

Como consecuencia de el ejemplo 2.10 se tiene que si $MA(\kappa)$ es cierto, entonces $\kappa \neq \mathfrak{c}$. Entonces, en particular, $MA(\omega_1)$ implica $\neg$CH, y esto prueba (ii). $\square$

Teorema 3.5 (MA). *Todo orden parcial c.c.c. cuya cardinalidad sea menor a $\mathfrak{c}$ es ω-centrado.*

Demostración. Sea $\langle \mathbb{P}, \leqslant_{\mathbb{P}} \rangle$ un orden parcial c.c.c. tal que $|\mathbb{P}| = \kappa$, donde $\kappa < \mathfrak{c}$. Notemos que si $\kappa = \omega$, el resultado se cumple trivialmente, ya que $\mathbb{P} = \{p_n\}_{n \in \omega}$ y cada conjunto unitario es centrado. Por lo tanto supondremos que $\kappa \geqslant \omega_1$.

Definimos $C = \{X \in [\mathbb{P}]^{<\omega} : X \text{ es centrado}\}$. Denotemos por $\mathbb{P}'$ a la colección de todas las funciones f tales que $\operatorname{dom}(f) \in \omega$ y para cada $i \in \operatorname{dom} f$ se tiene que $f(i) \in C$. Ahora, ordenemos a $\mathbb{P}'$ de la siguiente manera: si $f, g \in \mathbb{P}'$, entonces $f \leqslant g$ siempre que

(i) $\operatorname{dom} g \subseteq \operatorname{dom} f$ y

(ii) para cada $i \in \operatorname{dom} g$ sucede que $g(i) \subseteq f(i)$.

De esta manera $\langle \mathbb{P}', \leqslant \rangle$ resulta ser un orden parcial. Afirmamos que $\mathbb{P}'$ es c.c.c. Para mostrar esto, consideremos la colección $\mathcal{A} = \{f_\alpha : \alpha \in \omega_1\} \in [\mathbb{P}']^{\omega_1}$ y veamos que no es una anticadena. Para cualesquiera $\alpha < \omega_1$ e $i \in \operatorname{dom}(f_\alpha)$, sea p_α^i una cota inferior de $f_\alpha(i)$.

Observe que la regla $\alpha \mapsto \operatorname{dom} f_\alpha$ es una función de ω_1 en ω, así que deben existir $n \in \omega$ y $\Gamma_0 \in [\omega_1]^{\omega_1}$ de manera que para cada $\alpha \in \Gamma_0$ se tiene que $\operatorname{dom} f_\alpha = n$. Ahora construiremos recursivamente una sucesión de conjuntos $\langle A_i : i \leqslant n \rangle$ que satisfaga lo siguiente:

(i) $A_{i+1} \in [A_i]^{\omega_1}$, siempre que $i + 1 \leqslant n$.

(ii) $\{p_\alpha^j : \alpha \in A_i \wedge j < i\}$ es un conjunto ligado, donde $i \leqslant n$.

Comencemos haciendo $A_0 = \Gamma_0$. Recordemos que por el teorema 3.3, $\mathbb{P}$ tiene precalibre ω_1 y como esto último implica tener la propiedad K, entonces $\mathbb{P}$ tiene la propiedad K. Por lo tanto, de acuerdo al lema 2.14, para la colección $\{p_\alpha^0 : \alpha \in A_0\}$ podemos encontrar $A_1 \in [A_0]^{\omega_1}$ de manera que $\{p_\alpha^0 : \alpha \in A_1\}$ es un conjunto ligado. Ahora supongamos que para algún $k \in n$ tenemos definido a $\{A_i : i \in k\}$. Entonces, aplicando de nuevo el lema 2.14 al conjunto $\{p_\alpha^k : \alpha \in A_k\}$, encontramos un conjunto $A_{k+1} \in [A_k]^{\omega_1}$ de manera que $\{p_\alpha^k : \alpha \in A_{k+1}\}$ es ligado; de este modo, A_{k+1} cumple con (i) y (ii). Así, la sucesión $\langle A_i : i \leqslant n \rangle$ cumple con lo deseado.

Si $\delta, \beta \in A_n$ son tales que $\delta \neq \beta$, mostraremos que f_δ y f_β son compatibles concluyendo así la prueba de que $\mathcal{A}$ no es una anticadena. Para lo anterior definimos la función $g : n \to C$

mediante $g(i) = f_\delta(i) \cup f_\beta(i)$, para cada $i \in n$. Afirmamos que $g \leqslant f_\delta, f_\beta$. Debido a que $\operatorname{dom} f_\delta = \operatorname{dom} f_\beta = \operatorname{dom} g$, sólo resta verificar que para cada $i \in \operatorname{dom} g$, $g(i)$ en efecto es un conjunto centrado. Notemos que si $i \in \operatorname{dom} g$, entonces existe $q \in \mathbb{P}$ de modo que $q \leqslant p^i_\delta$ y $q \leqslant p^i_\beta$ (como consecuencia de que el conjunto $\{p^i_\alpha : \alpha \in A_n\}$ es ligado), por lo que q es una cota inferior del conjunto $g(i)$.

Ahora que ya sabemos que $\mathbb{P}'$ es c.c.c., definamos, para cada $p \in \mathbb{P}$, el conjunto

$$D_p = \{f \in \mathbb{P}' : \exists i \in \operatorname{dom} f \ (p \in f(i))\}.$$

Veamos que D_p es denso en $\mathbb{P}'$. Dada $f \in \mathbb{P}'$, sea $n := \operatorname{dom}(f)$ y hagamos $g = f \cup \{(n, \{p\})\}$. De esta manera, $g \in \mathbb{P}'$ y $\operatorname{dom}(g) = n + 1$. Además, $g \in D_p$ y $g \leqslant f$.

Por lo anterior $\mathcal{D} = \{D_p : p \in \mathbb{P}\}$ es una colección de κ densos. Por $MA(\kappa)$, podemos encontrar un filtro G en $\mathbb{P}'$ que sea $\mathcal{D}$-genérico.

Finalmente, para toda $n \in \omega$, definimos el conjunto

$$P_n = \{p \in \mathbb{P} : \exists f \in G(n \in \operatorname{dom} f \wedge p \in f(n))\}.$$

Mostraremos que para toda $n \in \omega$ se tiene que P_n es un conjunto centrado. Sean $F \in [P_n]^{<\omega}$ y $\{p_i\}_{i=0}^k$ un enumeración de F. Entonces existe $\{f_i\}_{i=0}^k \subseteq G$ de manera que para cada $i \leqslant k$, sucede que $p_i \in f_i(n)$. Como los filtros son centrados, existe $g \in G$ tal que $g \leqslant \{f_i\}_{i=0}^k$. Entonces $f_i(n) \subseteq g(n)$ para toda $i \leqslant k$. Luego, $F \subseteq g(n)$ y, como $g(n)$ es un conjunto centrado, F tiene una cota inferior en $\mathbb{P}$.

Afirmamos que $\mathbb{P} = \bigcup_{n\in\omega} P_n$. Es claro que $\bigcup_{n\in\omega} P_n \subseteq \mathbb{P}$, así que sólo mostraremos la contención contraria. Sea $p \in \mathbb{P}$. Sabemos que G es $\mathcal{D}$-genérico y por lo tanto $G \cap D_p \neq \emptyset$. De lo anterior se tiene que existe $f \in G$ de manera que $p \in f(i)$ para alguna $i \in \operatorname{dom} f$, de donde se sique que $p \in P_i$, y esto concluye la prueba. $\square$

La siguiente definición será necesaria para deducir un corolario interesante del teorema 3.5.

Definición 3.6. Sean X un espacio topológico y $\mathcal{P} \subseteq \tau^*_X$. Diremos que $\mathcal{P}$ es una π-base para X si es un subconjunto denso en τ^*_X. O equivalentemente, si para todo abierto U de

X, existe $W \in \mathcal{P}$ tal que $W \subseteq U$.

Es inmediato de la definición anterior que toda base es una π-base, ya que todo abierto en un espacio topológico es unión de elementos de su base.

Siempre que se introduce una nueva definición es importante saber que no es equivalente a una definición que ya se tenía. Entonces, para asegurarnos que base y π-base no son equivalentes, tenemos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.7. *Consideremos a ω_1 equipado con la topología del orden. Afirmamos que la colección $\mathcal{U} := \{\{\alpha+1\} : \alpha < \omega_1\} \cup \{\{0\}\}$ es una π-base para esta topología que no es una base.*

Primero observemos que para todo $\alpha \in \omega$ el intervalo $(\alpha,\alpha+2) = \{\alpha+1\}$ es un abierto, de donde se sigue que todo elemento de $\mathcal{U}$ es un abierto.

Sea U un abierto básico no vacío de este espacio. Si $U := (\alpha, \rightarrow)$ para algún $\alpha \in \omega_1$, entonces $\{\alpha+1\} \subseteq U$; si, por el contrario, $U := (\leftarrow, \alpha)$, sucede que $\{0\} \subseteq U$. El último caso a considerar es cuando $U := (\alpha,\beta)$ con $\alpha < \beta < \omega_1$. En este caso, como U es no vacío, β no puede ser el sucesor inmediato de α, es decir, $\alpha+1 < \beta$; por tanto, $\{\alpha+1\} \subseteq U$.

De esta manera hemos mostrado que $\mathcal{U}$ resulta ser una π-base. Debe ser claro que no puede ser una base ya que no podemos atrapar a ningún ordinal límite con los elementos de $\mathcal{U}$.

Corolario 3.8 (MA)**.** *Todo espacio topológico compacto Hausdorff y con celularidad numerable, que tenga una π-base de cardinalidad menor a $\mathfrak{c}$ es separable.*

Demostración. Sea X un espacio topológico compacto, Hausdorff y con celularidad numerable. Supongamos que $\mathbb{P}$ es una π-base para X tal que $|\mathbb{P}| = \kappa$, con $\kappa < \mathfrak{c}$

El conjunto $\mathbb{P}$, ordenado con la contención, es un orden parcial. Si $U, V \in \mathbb{P}$ satisfacen $U \cap V \neq \emptyset$, entonces, como $\mathbb{P}$ es una π-base, existe $W \in \mathbb{P}$ de tal modo que $W \subseteq U \cap V$. Equivalentemente, si dos elementos del orden parcial $\mathbb{P}$ son incompatibles, entonces son ajenos. Notemos que $\mathbb{P}$ es c.c.c. porque toda anticadena en $\mathbb{P}$ es una familia celular y como X tiene celularidad numerable, se deduce que toda anticadena en $\mathbb{P}$ es numerable. Entonces, por el teorema previo, $\mathbb{P}$ es ω-centrado, es decir, $\mathbb{P} = \bigcup_{n\in\omega} C_n$, donde C_n es un conjunto centrado.

Definimos para cada $n \in \omega$ el conjunto

$$E_n = \{V \in \tau_X^* : \exists\, U \in C_n (U \subseteq V)\}.$$

Afirmamos que E_n es centrado en τ_X^*. Sea $F \in [E_n]^{<\omega}$. Entonces existe una función $f : F \to C_n$ tal que $f(V) \subseteq V$, para todo $V \in F$. Se sigue que $\mathrm{img}(f) \in [C_n]^{<\omega}$; luego, como C_n es centrado, existe $W \in \mathbb{P}$ de manera que $W \subseteq U$ para cada $U \in \mathrm{img}(f)$, es decir, $W \subseteq \bigcap \mathrm{img}(f)$. Observemos que $\mathrm{img}(f) \subseteq \bigcap F$, por lo que $W \subseteq \bigcap F$. Por lo tanto E_n es centrado.

Es claro que $\displaystyle\bigcup_{n\in\omega} E_n \subseteq \tau_X^*$. Ahora, si $V \in \tau_X^*$, como $\mathbb{P}$ es una π-base, existe $U \in \mathbb{P}$ de tal modo que $U \subseteq V$. Entonces $U \in C_n$ para alguna $n \in \omega$, y así, $V \in E_n$. Por lo tanto también se tiene que $\tau_X^* \subseteq \displaystyle\bigcup_{n\in\omega} E_n$, o sea, τ_X^* es ω-centrado.

Aplicando la proposición 2.18, obtenemos que X tiene un denso de cardinalidad ω, o en otras palabras, X es separable. $\square$

CAPÍTULO 4: TEOREMA DE BELL

En este último capítulo, nuestro objetivo principal será demostrar el Teorema de Bell. Este teorema relaciona una versión del Axioma de Martin con un invariante cardinal del continuo, a saber $\mathfrak{p}$. Como el camino hacia la prueba de este resultado resulta largo, lo hemos dividido en varias secciones, cuyo objetivo principal es recolectar toda la herramienta necesaria y suficiente para obtener la prueba de una manera más clara.

Bajo esta idea, lo primero que haremos será definir al cardinal $\mathfrak{p}$. Y como nuestro interés también es topológico, lo caracterizaremos de manera combinatoria y topológica.

4.1 El número de pseudointersección

Para iniciar es conveniente recordar que, dado un conjunto X, una sucesión en X es una función de ω en X.

Si $x : \omega \to X$, es costumbre denotar por x_n a $x(n)$, donde $n \in \omega$, y del mismo modo, $(x_n)_{n\in\omega}$ será usado para representar a la sucesión $x : \omega \to X$.

Sea x un elemento de un espacio topológico X. Diremos que $V \subseteq X$ es vecindad para x si existe $U \in \tau_X$ de modo que $x \in U \subseteq V$.

Definición 4.1. Dada una sucesión $(x_n)_{n\in\omega}$ en un espacio topológico X, diremos que ésta converge a un punto $x \in X$ si para cada vecindad V de x existe un número natural n (que depende de V) de tal forma que $x_m \in V$ siempre que $m \geqslant n$.

La definición anterior puede ser planteada en otros términos. Observemos que, si la sucesión $(x_n)_{n\in\omega}$ converge al punto x, entonces para cada vecindad V de x sucede que casi todos los términos de $(x_n)_{n\in\omega}$ están contenidos en V, es decir, $|\{x_n : n \in \omega\} \setminus V| < \omega$.

La situación descrita anteriormente resulta ser una relación de gran importancia en Teoría de Conjuntos, es por esto que conviene asignarle un símbolo particular.

Definición 4.2. Dados A, B, conjuntos, diremos que A está casi contenido en B, lo cual denotamos como $A \subseteq^* B$, siempre que $|A \setminus B| < \omega$.

De aquí se tiene que una sucesión converge a un punto x, si el conjunto formado por todos los términos de la sucesión resulta estar casi contenido en toda vecindad del punto x.

Un concepto que es de gran utilidad para verificar la convergencia de una sucesión en un punto es el de base local.

Definición 4.3. Sean X un espacio topológico y $x \in X$. Definimos

$$\tau_X(x) := \{U \in \tau_X : x \in U\}.$$

Diremos que una colección $\mathcal{B} \subseteq \tau_X(x)$ es una base local para x en X si para cada $V \in \tau_X(x)$ existe $B \in \mathcal{B}$ de tal forma que $B \subseteq V$.

De este modo, para determinar la convergencia de una sucesión a un punto x, basta verificar la definición de convergencia para una base local de x.

En el Análisis Matemático la convergencia de sucesiones es fundamental para determinar las propiedades topológicas de los espacios, pero el panorama cambia en Topología: existen espacios topológicos en los que las sucesiones no determinan la cerradura de sus subconjuntos como veremos en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4.4. *Denotemos por X al espacio que resulta de equipar al ordinal $\omega_1 + 1$ con la topología del orden y hagamos $A := \omega_1$. Demostremos que $A \subseteq X$ y $\omega_1 \in \overline{A}$, pero no existe sucesión en A que converja a ω_1.*

Sea $(\alpha_n)_{n\in\omega}$ una sucesión contenida en A y hagamos $\beta = \sup\{\alpha_n :\in \omega\}$. Como nuestra sucesión es un conjunto numerable de ordinales numerables, entonces β es un ordinal numerable, o sea que $\beta < \omega_1$. Así el abierto $(\beta,\omega_1]$ es una vecindad de ω_1 que esquiva por completo a la sucesión. Por lo tanto, no existen sucesiones convergentes a ω_1.

Supongamos ahora que X es un espacio topológico de Hausdorff, que $A \subseteq X$ y que $x \in \overline{A} \setminus A$. Afirmamos que si $\mathcal{B}$ es una base local para X en el punto x, entonces la familia $\mathcal{F} := \{A \cap B : B \in \mathcal{B}\}$ tiene la propiedad de la intersección finita (PIF). Para probar esto consideremos a F, un subconjunto finito y no vacío de $\mathcal{B}$. Notemos que $\bigcap F$ es una vecindad de x, por lo que $A \cap (\bigcap F) \neq \emptyset$. Mas aún, esta intersección es infinita porque X es Hausdorff (de hecho es suficiente que X sea T_1, pero a lo largo del capítulo sólo estaremos considerando espacios de Hausdorff). Por lo tanto la familia $\mathcal{F}$ no solo tiene la PIF sino que satisface una condición más fuerte. De manera más precisa, sucede que si $F \in [\mathcal{F}]^{<\omega} \setminus \{\emptyset\}$ entonces $\bigcap F$ es infinita. Esta propiedad será de gran relevancia en lo que resta del capítulo por lo que motiva la siguiente definición.

Definición 4.5. Sea $\mathcal{F} \subseteq [\omega]^{\omega}$. Diremos que $\mathcal{F}$ es una familia fuertemente centrada si para cada $F \in [\mathcal{F}]^{<\omega}$ no vacío, sucede que $|\bigcap F| = \omega$.

Como ya habíamos mencionado con anterioridad, las sucesiones no son suficientes para caracterizar la cerradura en cualquier espacio topológico. Aquellos espacios en los que la cerradura sí puede ser caracterizada de esta manera son llamados espacios de Fréchet-Urysohn. Más formalmente:

Definición 4.6. Un espacio X es de Fréchet-Urysohn si para cada $A \subseteq X$ y cada $x \in \overline{A}$ existe una sucesión en A que converge a x.

Los ejemplos más comunes de espacios que no son de Fréchet-Urysohn resultan ser espacios muy "grandes" o con topologías un poco "extrañas" así que una pregunta que surge de esto es si podemos equipar a ω con alguna topología Hausdorff τ de manera que el espacio (ω,τ) no sea de Fréchet-Urysohn. Con esta idea en mente, necesitaremos algunas condiciones para saber cuándo una topología en ω nos da un espacio de Fréchet-Urysohn. Dichas condiciones se veran reflejadas en el siguiente lema.

Lema 4.7. *Sea τ una topología Hausdorff para ω y suponga que $A \subseteq \omega$ y $x \in \overline{A} \setminus A$. Entonces, para cada base local $\mathcal{B}$ de x en (ω,τ), las condiciones siguientes son equivalentes.*

1. *Existe una sucesión en A que converge a x.*

2. *Existe $S \in [A]^{\omega}$ de tal modo que $S \subseteq^* B$, para cualquier $B \in \mathcal{B}$.*

Demostración. Sean τ, A, x y $\mathcal{B}$ como en las hipótesis.

Primero probemos $1 \to 2$. Sea $(x_n)_{n\in\omega}$ una sucesión en A que converge a x y hagamos $S := \{x_n : n \in \omega\}$. Note que si S fuese finito, entonces $X \setminus S$ sería un abierto en X que contiene a x y que no contiene términos de la sucesión, contradiciendo la convergencia de $(x_n)_{n\in\omega}$ a x. Luego, $|S| = \omega$.

Si $B \in \mathcal{B}$ entonces existe $n \in \omega$ de tal modo que cada vez que $m \geqslant n$ se tiene que $x_m \in B$. De este modo, $|S \setminus B| \leqslant n$ y por lo tanto, $S \subseteq^* B$.

Para probar $2 \to 1$, supongamos que $S \in [A]^\omega$ y es tal que, para cada $B \in \mathcal{B}$, sucede que $S \subseteq^* B$. Sea $f : \omega \to S$ una biyección y definamos, para cada $n \in \omega$, $x_n := f(n)$. Naturalmente, $(x_n)_{n\in\omega}$ es una sucesión en A. Afirmamos que dicha sucesión converge a x. Si $B \in \mathcal{B}$, entonces el conjunto $S' := \{n \in \omega : x_n \in (S \setminus B)\}$ está acotado superiormente en ω (por ser finito); luego S' tiene máximo. Sea $n = \max S'$. Entonces, para todo $m \geqslant n+1$ se tiene que $x_m \in B$. $\square$

La propiedad del inciso (2) del lema anterior merece un nombre ya que va a ser empleada varias veces en lo que resta del presente capítulo.

Definición 4.8. Sean $\mathcal{F} \subseteq [\omega]^\omega$ y $X \in [\omega]^\omega$. Decimos que X es una pseudointersección de $\mathcal{F}$ si para cada $F \in \mathcal{F}$ se tiene que $X \subseteq^* F$.

Se podría pensar que si $\mathcal{A}$ es una familia con pseudointersección, entonces $\bigcap \mathcal{A} \neq \emptyset$, lo cual es falso. Haciendo $\mathcal{A} = \{\omega \setminus n : n \in \omega\}$ tenemos una familia cuya pseudointersección es ω, pero $\bigcap \mathcal{A} = \emptyset$.

De este modo, el lema 4.7 dice que en un espacio de la forma (ω,τ), donde τ es Hausdorff y $x \in \overline{A} \setminus A$ para $A \subseteq \omega$, se tiene que si $\mathcal{B}$ una base local para x, entonces la existencia de una sucesión en A que converja a x equivale a que la familia $\{A \cap B : B \in \mathcal{B}\}$ tenga una pseudointersección.

Lema 4.9. *Si una familia $\mathcal{F} \subseteq [\omega]^\omega$ tiene pseudointersección, entonces es fuertemente centrada.*

Demostración. Sean $\mathcal{F}$ como en las hipótesis y X una pseudointersección para $\mathcal{F}$. Fijemos $F \in [\mathcal{F}]^{<\omega}$ con $F \neq \emptyset$ y notemos que:

$$X \setminus \bigcap F = \bigcup_{A\in F} (X \setminus A).$$

Como, para cada $A \in F$ sucede que $X \setminus A$ es finito y F es finito, se sigue que el lado derecho de la igualdad es un conjunto finito. Luego, $X \subseteq^* \bigcap F$. Dado que X es infinito, se sigue que $\omega \leqslant |\bigcap F|$. De esta manera queda probado que $\mathcal{F}$ es fuertemente centrada. $\square$

En vista del lema 4.9, una pregunta natural es si el recíproco de este último es cierto. Es decir, si toda familia fuertemente centrada tiene pseudointersección. La respuesta se encuentra en el siguiente resultado.

Lema 4.10. *Existe una familia fuertemente centrada que no tiene pseudointersección*

Demostración. Sea $\{B_\alpha : \alpha \in \mathfrak{c}\}$ una enumeración del conjunto $[\omega]^\omega$. Construiremos recursivamente una familia fuertemente centrada sin pseudointersección.

Supongamos que para $\alpha \in \mathfrak{c}$, se ha definido una sucesión $\{A_\beta : \beta \in \alpha\}$ tal que:

1. Para cada $\beta \in \alpha$, $A_\beta \subseteq [\omega]^\omega$ es fuertemente centrada y B_β no es pseudointersección para A_β.

2. Cada vez que $\gamma < \beta < \alpha$, sucede que $A_\gamma \subseteq A_\beta$.

Para encontrar A_α, hacemos $\check{A} = \bigcup_{\beta \in \alpha} A_\beta$ y consideramos los siguientes casos:

Caso 1. B_α no es pseudointersección de $\check{A}$.

En este caso hacemos $A_\alpha = \check{A}$ y de esta manera es claro que A_α cumple con lo requerido.

Caso 2. B_α es una pseudointersección de $\check{A}$.

Sea $\{b_n : n \in \omega\}$ una enumeración, sin repeticiones, de B_α. Definimos

$$B_\alpha^0 := \{b_{2n} : n \in \omega\} \quad \text{y} \quad B_\alpha^1 := \{b_{2n+1} : n \in \omega\}.$$

Ahora hagamos $A_\alpha = \check{A} \cup \{B_\alpha^0\}$. De aquí se sigue que $A_\alpha \subseteq [\omega]^\omega$ y que además cumple con la condición 2.

Veamos que A_α es fuertemente centrada. Sea $F \in [A_\alpha]^{<\omega}$ con $F \neq \emptyset$. Si $B_\alpha^0 \notin F$, entonces $F \subseteq \check{A}$. Por la condición 2, existe $\beta < \alpha$ de modo que $F \subseteq A_\beta$; como A_β, por hipótesis inductiva, es fuertemente centrada, se sigue que $|\bigcap F| = \omega$. Si sucede que $B_\alpha^0 \in F$, debido a que B_α es pseudointersección de $\check{A}$, entonces para cada $A \in F \setminus B_\alpha^0$ existe $n_A \in \omega$ de tal modo que $B_\alpha \setminus n_A \subseteq A$. Ahora, si tomamos $m = \max\{n_A : A \in F \setminus B_\alpha^0\}$, entonces $B \setminus m \subseteq \bigcap F$. De esta manera, como B es infinito, se tiene que $\bigcap F$ es infinita, lo cual muestra que A_α es fuertemente centrada.

Por último, B_α no puede ser pseudointersección de A_α porque, para cada $A \in A_\alpha$, $B_\alpha^1 \subseteq B_\alpha \setminus A$ y $|B_\alpha^1| = \omega$. Esto completa la recursión.

De esta manera, $\bigcup_{\alpha\in\mathfrak{c}} A_\alpha$ es una familia fuertemente centrada que no posee pseudointersección. $\square$

Definición 4.11. El número de pseudointersección, al cual denotamos con $\mathfrak{p}$, es la mínima cardinalidad de una familia fuertemente centrada que no posee alguna pseudointersección.

Es importante notar que, por definición, toda familia fuertemente centrada es un subconjunto de $[\omega]^\omega$, así que $\mathfrak{p} \leqslant \mathfrak{c}$.

Como mencionamos al inicio del capítulo, también podemos caracterizar a $\mathfrak{p}$ topológicamente. Para esto necesitamos definir el carácter de un espacio X.

Definición 4.12. Sean X un espacio topológico y $x \in X$. El carácter de x en X está definido por:

$$\min\{|\mathcal{B}| : \mathcal{B} \text{ es base local para } X \text{ en } x\},$$

y lo denotamos como $\chi(x, X)$.

Ahora definimos el carácter de X como

$$\chi(X) := \sup\{\chi(x, X) : x \in X\}.$$

El último resultado de esta sección es precisamente una caracterización topológica de $\mathfrak{p}$.

Lema 4.13. *Si $X = (\omega,\tau)$ es un espacio Hausdorffy $\chi(X) < \mathfrak{p}$, entonces X es de Fréchet-Urysohn.*

Demostración. Sean X como en las hipótesis y $A \subseteq X$ tal que $\overline{A} \setminus A \neq \emptyset$. Observemos que como A no es un conjunto cerrado, entonces A es infinito y, por lo tanto, $|A| = \omega$.

Fijemos $x \in \overline{A} \setminus A$ y $\mathcal{B}$, una base local para X en x, con $|\mathcal{B}| < \mathfrak{p}$. Entonces $\{B \cap A : B \in \mathcal{B}\}$ es fuertemente centrada. Por lo tanto existe S, pseudointersección para la familia $\{B \cap A : B \in \mathcal{B}\}$. Por lo anterior y el lema 4.7, existe una sucesión en A que converge a x. Así X es de Fréchet-Urysohn. $\square$

Proposición 4.14. *Existe una topología τ para ω de Hausdorff, con carácter $\mathfrak{p}$, pero que no es Fréchet-Urysohn.*

Demostración. Denotaremos mediante $\mathbb{N}$ al conjunto $\omega \setminus 1$.

Sea $\mathcal{A}_0 \subseteq [\mathbb{N}]^{\omega}$ una familia fuertemente centrada sin pseudointersección y con $|\mathcal{A}_0| = \mathfrak{p}$. Definimos

$$\mathcal{A}_1 := \mathcal{A}_0 \cup \{\omega \setminus n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Afirmación 1. La familia $\mathcal{A}_1$ es fuertemente centrada y $|\mathcal{A}_1| = \mathfrak{p}$.

Notemos que la familia $\{\omega \setminus n : n \in \mathbb{N}\}$ es cerrada bajo intersecciones finitas, por lo que basta con intersectar una cantidad finita de elementos de la familia $\mathcal{A}_0$ con un elemento de esta colección para probar que $\mathcal{A}_1$ es fuertemente centrada.

Sean $F \in [\mathcal{A}_0]^{<\omega} \setminus \{\emptyset\}$ y $n \in \mathbb{N}$. Entonces $\bigcap F$ es infinita, ya que $\mathcal{A}_0$ es fuertemente centrada; y, por otro lado, n es un conjunto finito, o sea que $\bigcap F \setminus n$ sigue siendo infinito. Por lo tanto la intersección $(\bigcap F) \cap (\omega \setminus n)$ es infinita.

Como $\mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{A}_1$, entonces $\mathfrak{p} \leqslant |\mathcal{A}_1|$. También se tiene que $|\mathcal{A}_1| \leqslant \mathfrak{p} + \omega = \mathfrak{p}$. Con las desigualdades anteriores obtenemos que $|\mathcal{A}_1| = \mathfrak{p}$.

Observemos que $\mathcal{A}_1$ tampoco tiene pseudointersección, ya que, de tenerla, ésta sería pseudointersección de $\mathcal{A}_0$.

Definimos ahora

$$\mathcal{A} := \left\{ \bigcap F : F \in [\mathcal{A}_1]^{<\omega} \setminus \{\emptyset\} \right\}.$$

Afirmación 2. $\mathcal{A}$ es fuertemente centrada, cerrada bajo intersecciones finitas y $|\mathcal{A}| = \mathfrak{p}$.

Sean $m \in \mathbb{N}$ y $\{F_i : i \leqslant m\} \subseteq [\mathcal{A}_1]^{<\omega} \setminus \{\emptyset\}$. Entonces se tiene lo siguiente

$$\bigcap_{i \leqslant m} \left(\bigcap F_i \right) = \bigcap \left(\bigcup_{i \leqslant m} F_i \right).$$

Observemos que $\bigcup_{i \leqslant m} F_i \in [\mathcal{A}_1]^{<\omega} \setminus \{\emptyset\}$ y, como $\mathcal{A}_1$ es fuertemente centrada, se sigue que $\bigcap_{i \leqslant m} \left(\bigcap F_i \right)$ es infinita. Luego, $\mathcal{A}$ es fuertemente centrada y cerrada bajo intersecciones finitas.

Es claro que $\mathcal{A}_1 \subseteq \mathcal{A}$ y entonces $\mathfrak{p} \leqslant |\mathcal{A}_1|$. Además la función de $[\mathcal{A}_1]^{<\omega} \setminus \{\emptyset\}$ en $\mathcal{A}$

dada por $F \mapsto \bigcap F$ es suprayectiva, lo que nos dice que $|\mathcal{A}| \leqslant |\mathcal{A}_1| = \mathfrak{p}$.

Debido a que $\mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{A}_1 \subseteq \mathcal{A}$, por el mismo argumento de la afirmación anterior, se sigue que $\mathcal{A}$ no posee pseudointersección.

Sea

$$\mathcal{B} := \{\{n\} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{\{0\} \cup A : A \in \mathcal{A}\}.$$

Afirmación 3. La colección $\mathcal{B}$ forma una base para alguna topología en ω.

Sean $B_0, B_1 \in \mathcal{B}$ y $x \in B_0 \cap B_1$.

Caso 1. Para algún $i \in 2$ se tiene que $|B_i| = 1$. Claramente, $x \in B_i \subseteq B_0 \cap B_1$.

Caso 2. $|B_0| = |B_1| = \omega$. En esta situación debe tenerse que, para cada $i \in 2$, existe $A_i \in \mathcal{A}$ de tal modo que $B_i = \{0\} \cup A_i$. Si $x = 0$, entonces, como $\mathcal{A}$ es cerrada bajo intersecciones finitas, se sigue que $A_3 := A_1 \cap A_2 \in \mathcal{A}$; por lo que $B_3 := \{0\} \cup A_3$ satisface que $x \in B_3 \subseteq B_0 \cap B_1$. Si $x \neq 0$, haciendo $B_3 := \{x\}$ obtenemos lo deseado.

Denotemos por τ a la topología generada por $\mathcal{B}$. Probaremos que $X = (\omega, \tau)$ es de Hausdorff.

Sean $x, y \in X$ distintos. Si $x = 0$. Haciendo $U = \{y\}$ y $V = \{0\} \cup (\omega \setminus (y+1))$, se tiene que U y V son abiertos ajenos que separan a x y y. Si es el caso que $x \neq 0 \neq y$, entonces $\{x\}$ y $\{y\}$ son abiertos ajenos que los separan.

Afirmamos también que el carácter de este espacio es $\mathfrak{p}$. Debe ser claro que, para cada $n \in \mathbb{N}$, la mínima cardinalidad de una base local es 1. Entonces el único punto a considerar es el cero, en cuyo caso se observa que $\chi(0, X) \leqslant \mathfrak{p}$.

Sea κ un cardinal con $\kappa < \mathfrak{p}$. Fijemos $\mathcal{C}$, una familia de κ abiertos en X, de tal modo que $0 \in \bigcap \mathcal{C}$. Sea $\{U_\alpha : \alpha < \kappa\}$ una enumeración de $\mathcal{C}$; entonces, debe tenerse que para cada $\alpha \in \kappa$ existe $A_\alpha \in \mathcal{A}$ de tal modo que $\{0\} \cup A_\alpha \subseteq U_\alpha$. Hagamos $\mathcal{C}' := \{A_\alpha : \alpha < \kappa\}$. Se sigue que $\mathcal{C}'$ es una familia fuertemente centrada (ya que $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{A}$) y además $|\mathcal{C}'| \leqslant \kappa$. Por lo tanto, existe C, pseudointersección de $\mathcal{C}'$. Como C no puede ser pseudointersección de $\mathcal{A}$, entonces existe $A \in \mathcal{A}$ de tal forma que $|C \setminus A| = \omega$. Luego, para cada $\alpha < \kappa$ se tiene que $|A_\alpha \setminus A| = \omega$, es decir, $\{\{0\} \cup A_\alpha : \alpha < \kappa\}$ no es base para 0 y, en consecuencia, $\mathcal{C}$ tampoco lo es. Por lo tanto $\chi(0, X) = \mathfrak{p}$.

Finalmente mostraremos que X no es de Fréchet-Urysohn. Para esto consideremos al conjunto $\mathbb{N}$ y observemos que cualquier vecindad del cero tiene intersección no vacía con $\mathbb{N}$, o sea, $0 \in \overline{\mathbb{N}} \setminus \mathbb{N}$. Como $\{\{0\} \cup A : A \in \mathcal{A}\}$ es una base local para 0 en X, por el lema 4.7 tenemos que la existencia de una sucesión en $\mathbb{N}$ que converge a 0 equivale a la existencia de $S \in [\mathbb{N}]^{\omega}$ de tal modo que $S \subseteq^* \{0\} \cup A$, para cada $A \in \mathcal{A}$, es decir, a que exista un subconjunto de $\mathbb{N}$ que sea pseudointersección de $\mathcal{A}$. De este modo, el que $\mathcal{A}$ carezca de pseudointersecciones nos garantiza que ninguna sucesión en $\mathbb{N}$ converge a cero. $\square$

Los resultados anteriores implican que $\mathfrak{p}$ es el mínimo carácter de una topología Hausdorff para ω que no es Fréchet-Urysohn.

Finalicemos esta sección probando un resultado que conecta al cardinal $\mathfrak{p}$ con las funciones de ω en ω y que será empleado en la demostración del teorema 4.31.

Denotemos por ω^{ω} a la colección de todas las funciones de ω en ω y definamos la relación binaria $\leqslant^*$ en ω^{ω} como sigue: para cualesquiera $f, g \in \omega^{\omega}$ diremos que $f \leqslant^* g$ siempre que exista $N \in \omega$ de tal modo que, para cada $m \geqslant N$, se satisface que $f(m) \leqslant g(m)$. Comúnmente se usa la frase "f domina a g" para referirse a la desigualdad $g \leqslant^* f$.

Es fácil probar que la relación $\leqslant^*$ es reflexiva y transitiva. De esta manera, $\langle \omega^{\omega}, \leqslant^* \rangle$ resulta un orden parcial.

Observación. En general, si Y es un conjunto y $h : Y \to \omega$ es una función biyectiva, entonces, cada vez que $\mathcal{C}$ sea una familia fuertemente centrada de subconjuntos de Y (esto es, para cada $F \in [\mathcal{C}]^{<\omega} \setminus \{\emptyset\}$, se tiene que $\bigcap F$ es infinito), se deduce que $\mathcal{C}' := \{h[C] : C \in \mathcal{C}\}$ es una familia fuertemente centrada de subconjuntos de ω. Además, si $\mathcal{C}'$ tiene pseudointersección P, entonces $h^{-1}[P] \subseteq^* C$ para cada $C \in \mathcal{C}$, es decir, $h^{-1}[P]$ es una pseudointersección para $\mathcal{C}$.

Proposición 4.15. *Si $X \subseteq \omega^{\omega}$ y $|X| < \mathfrak{p}$, entonces X es acotado en $\langle \omega^{\omega}, \leqslant^* \rangle$.*

Demostración. Sea X como en las hipótesis y denotemos con κ a la cardinalidad de X. Entonces $X = \{g_\alpha : \alpha \in \kappa\}$.

Para cada $\alpha \in \kappa$ definimos $f_\alpha : \omega \to \omega$ mediante

$$f_\alpha(n) = \sum_{i \leqslant n} g_\alpha(i).$$

De esta manera f_α es una función monótona creciente (es decir, $f_\alpha(n) \leqslant f_\alpha(n+1)$, para cada $n \in \omega$) y además f_α domina a g_α.

Definamos

$$\mathcal{A} := \{f_\alpha^\uparrow : \alpha \in \kappa\} \cup \{(\omega \setminus n) \times \omega : n \in \omega\},$$

donde $f_\alpha^\uparrow = \{(n,m) : m \geqslant f_\alpha(n)\}$ para cada $\alpha < \kappa$.

Afirmamos que $\mathcal{A}$ es fuertemente centrada. Para probar la afirmación consideremos a $F_0 \in [\kappa]^{<\omega}$ y $F_1 \in [\omega]^{<\omega}$. Sean m y k cotas superiores de F_1 y $\{f_\alpha(m) : \alpha \in F_0\}$ respectivamente. Entonces debe ser claro que $\{f_\alpha(m) : \alpha \in F_0\} \subseteq k+1$. Así pues, tenemos la siguiente contención:

$$\{m\} \times (\omega \setminus (k+1)) \subseteq \left(\bigcap_{i \in F_1} ((\omega \setminus i) \times \omega)\right) \cap \left(\bigcap_{\alpha \in F_0} f_\alpha^\uparrow\right);$$

esto prueba que la famila $\mathcal{A}$ es fuertemente centrada y como $|\mathcal{A}| < \mathfrak{p}$, la observación previa a este teorema garantiza que existe $B \subseteq \omega \times \omega$, una pseudointersección para $\mathcal{A}$ (note que $\omega \times \omega$ es equipotente a ω).

Observemos que, para cada $n \in \omega$, $B \subseteq^* (\omega \setminus n) \times \omega$ y como B es infinito, existen $j \in (\omega \setminus n)$ y $m \in \omega$ de tal modo que $(j,m) \in B$. Luego, podemos definir $\phi : \omega \to \omega$ como sigue

$$\phi(n) := \min\{j \geqslant n : (\{j\} \times \omega) \cap B \neq \emptyset\}.$$

Finalmente, probemos que si $g : \omega \to \omega$ está dada por

$$g(n) := \min\{k \in \omega : (\phi(n), k) \in B\},$$

entonces g domina a todos los elementos de X.

Sea $\alpha \in \kappa$. Como $B \setminus f_\alpha^\uparrow$ es un conjunto finito, existe $l \in \omega$ con $(B \setminus f_\alpha^\uparrow) \subseteq l \times l$. Sea $n \geqslant l$. Observemos que, por definición, $\phi(n) \geqslant n$ y que además $(\phi(n), g(n)) \in B \cap f_\alpha^\uparrow$. Por lo tanto

$$g_\alpha(n) \leqslant f_\alpha(n) \leqslant f_\alpha(\phi(n)) \leqslant g(n).$$

□

4.2 El Axioma de Martin para ω-centrados

En el capítulo 2 fueron definidas algunas variaciones de la c.c.c. y mencionamos que podiamos modificar MA intercambiando alguna de estas propiedades por la c.c.c. y así obtener otra versión del Axioma de Martin. Con esta idea en mente definiremos el Axioma de Martin para ω-centrados y desarrollaremos algunas de sus consecuencias.

Si κ es un cardinal infinito, entonces MAωC(κ) es la siguiente afirmación: "Para cualquier orden parcial ω-centrado $\mathbb{P}$ y cualquier familia $\mathcal{D}$ de a lo más κ subconjuntos densos de $\mathbb{P}$, existe un filtro en $\mathbb{P}$ que es $\mathcal{D}$-genérico". Denotaremos por MAωC al enunciado "MAωC(κ) es cierto para cualquier $\kappa < \mathfrak{c}$ ".

Teorema 4.16 (MAωC(κ))**.** *Sean $\mathcal{A}, \mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(\omega)$ tales que $|\mathcal{A}| \leqslant \kappa$ y $|\mathcal{C}| \leqslant \kappa$, con κ un cardinal infinito. Si para cualesquiera $F \in [\mathcal{C}]^{<\omega} \setminus \{\emptyset\}$ y $A \in \mathcal{A}$ sucede que $|A \cap \bigcap F| = \omega$, entonces existe P, pseudointersección de $\mathcal{C}$, que tiene intersección infinita con todo elemento de $\mathcal{A}$.*

Demostración. Sean $\mathcal{A}, \mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(\omega)$, dos familias que satisfagan las hipótesis del teorema. Definimos

$$\mathbb{P} = \{\langle b, F\rangle : b \in [\omega]^{<\omega} \wedge\ F \in [\mathcal{C}]^{<\omega}\},$$

y lo ordenamos como sigue, $\langle b_1, F_1\rangle \leqslant \langle b_2, F_2\rangle$ si y sólo si:

(i) $b_2 \subseteq b_1$, $F_2 \subseteq F_1$ y

(ii) para cada $C \in F_2$, sucede que $b_1 \setminus b_2 \subseteq C$.

La reflexividad de $\leqslant$ es fácil de verificar. Veamos que también es transitivo. Para esto, tomemos tres elementos de $\mathbb{P}$ relacionados de la siguiente manera:

$$\langle b_1, F_1\rangle \leqslant \langle b_2, F_2\rangle \leqslant \langle b_3, F_3\rangle .$$

Notemos que $b_3 \subseteq b_1$ y $F_3 \subseteq F_1$. Por otro lado, si $C \in F_3$ entonces se tiene que $b_1 \setminus b_2 \subseteq C$ (ya que $F_3 \subseteq F_2$) y $b_2 \setminus b_3 \subseteq C$. Luego $(b_1 \setminus b_2) \cup (b_2 \setminus b_3) \subseteq C$ y como $(b_1 \setminus b_2) \cup (b_2 \setminus b_3) = b_1 \setminus b_3$, hemos probado que $\langle b_1, F_1\rangle \leqslant \langle b_3, F_3\rangle$.

Nuestro siguiente paso es mostrar que $\mathbb{P}$ es ω-centrado. Para cada $b \in [\omega]^{<\omega}$ definimos

$$P_b = \{\langle b, F \rangle : F \in [\mathcal{C}]^{<\omega}\}.$$

Dado $b \in [\omega]^{<\omega}$, verifiquemos que P_b es un conjunto centrado. Sea $B \in [P_b]^{<\omega}$. Haciendo $F' = \bigcup\{F : \langle b, F \rangle \in B\}$, obtenemos que $F' \in [\mathcal{C}]^{<\omega}$, por ser una unión finita de conjuntos finitos. Así, $\langle b, F' \rangle \in \mathbb{P}$ y además, como $b \subseteq b$ y $b \setminus b = \emptyset$, se sigue que $\langle b, F' \rangle \leqslant B$. Lo cual muestra que P_b es centrado.

Es claro que $\mathbb{P} = \bigcup_{b \in [\omega]^{<\omega}} P_b$ y, debido a que $[\omega]^{<\omega}$ es un conjunto numerable, se tiene que $\mathbb{P}$ es ω-centrado.

Con el objetivo de encontrar un conjunto que se quede casi contenido en todo elemento de $\mathcal{C}$, definimos para cada $C \in \mathcal{C}$ la siguiente colección:

$$D_C = \{\langle b, F \rangle \in \mathbb{P} : C \in F\}.$$

Observe que si $\langle b, F \rangle \in \mathbb{P}$, entonces $\langle b, F \cup \{C\} \rangle \in D_C$ y además, $\langle b, F \cup \{C\} \rangle \leqslant \langle b, F \rangle$. En otras palabras, D_C es denso en $\mathbb{P}$.

Ahora, para garantizar que nuestra pseudointersección intersecte a todo elemento de $\mathcal{A}$ en una infinidad de puntos, definimos, para cada $A \in \mathcal{A}$ y para cada $n \in \omega$

$$D_A^n = \{\langle b, F \rangle \in \mathbb{P} : |b \cap A| > n\}.$$

Probemos, que para cada $A \in \mathcal{A}$ y toda $n \in \omega$, el conjunto D_A^n resulta ser denso en $\mathbb{P}$. Sea $\langle b, F \rangle \in \mathbb{P}$. Por hipótesis, $A \cap \bigcap F$ es un conjunto infinito, ergo, $(A \cap \bigcap F) \setminus b$ sigue siendo un conjunto infinito; en particular, existe $b_1 \in [(A \cap \bigcap F) \setminus b]^{n+1}$. De esta manera, haciendo $b_0 := b \cup b_1$, obtenemos que b_0 es un subconjunto finito de ω y además $\langle b_0, F \rangle \leqslant \langle b, F \rangle$, ya que $(b_0 \setminus b) = b_1 \subseteq \bigcap F$. Así D_A^n es denso.

Como $|\mathcal{C}| = \kappa$ y $|\mathcal{A} \times \omega| = \kappa \cdot \omega = \kappa$, entonces la colección

$$\mathcal{D} := \{D_c : c \in \mathcal{C}\} \cup \{D_A^n : (A, n) \in \mathcal{A} \times \omega\}$$

es una familia de a lo más κ subconjuntos densos. De este modo, existe G, un filtro $\mathcal{D}$-genérico.

Definimos

$$P := \bigcup\{b : \exists F(\langle b, F\rangle \in G)\}.$$

Ahora, probemos que la intersección de P con cualquier elemento de $\mathcal{A}$ es infinita. Esto es fácil, ya que, si $A \in \mathcal{A}$, $n \in \omega$ y $\langle b, F\rangle \in G \cap D_A^n$, se tiene que $|b \cap A| > n$. Dado que $b \subseteq P$, podemos concluir que $|P \cap A| = \omega$. Notemos que lo anterior nos garantiza que P es, en efecto, un conjunto infinito, por lo que sólo resta mostrar que está casi contenido en todo elemento de $\mathcal{C}$.

Sean $C \in \mathcal{C}$ y $\langle b, F\rangle \in G \cap D_C$. Probemos que $P \setminus C \subseteq b$. Si $x \in P \setminus C$, entonces existe $\langle b_0, F_0\rangle \in G$ tal que $x \in b_0$. Ya que G es filtro, existe $\langle b_1, F_1\rangle \in G$, extensión de $\langle b_0, F_0\rangle$ y $\langle b, F\rangle$. De aquí se sigue que $b_0 \subseteq b_1$. Luego, $(b_0 \setminus b) \subseteq (b_1 \setminus b) \subseteq C$ (pues $\langle b_1, F_1\rangle \leqslant \langle b, F\rangle$ y $C \in F$) y por lo tanto $x \in b$. De este modo P es pseudointersección de $\mathcal{C}$. □

Con una simple aplicación del teorema anterior podemos obtener el siguiente teorema que será la primera parte del resultado principal de este capítulo: el Teorema de M. G. Bell. Dicho teorema afirma que $\mathfrak{p}$ es el primer cardinal κ donde MAωC(κ) falla. La prueba original de este resultado puede ser consultada en [1].

Teorema 4.17. *Si κ es un cardinal infinito y MAωC(κ) es cierto, entonces $\kappa < \mathfrak{p}$.*

Demostración. Para demostrar el teorema supondremos verdadero a MAωC(κ) y probaremos que toda familia fuertemente centrada de tamaño κ tiene una pseudointersección.

Sea $\mathcal{C} \subseteq [\omega]^\omega$ una familia fuertemente centrada de tamaño κ. Hagamos $\mathcal{A} := \{\omega\}$. De esta forma, es claro que, para cualquier $F \in [\mathcal{C}]^{<\omega}$ se tiene que

$$\left|\bigcap F \cap \omega\right| = \left|\bigcap F\right| = \omega.$$

En otras palabras, $\mathcal{A}$ y $\mathcal{C}$ son dos familias que satisfacen las hipótesis del teorema anterior. Luego, $\mathcal{C}$ posee una pseudointersección. □

Los siguientes corolarios son consecuencia directa del teorema anterior.

Corolario 4.18. *$MA\omega C$ implica que $\mathfrak{p} = \mathfrak{c}$.*

Corolario 4.19. *$MA\omega C(\mathfrak{p})$ es falso.*

4.3 Algunos lemas sobre órdenes parciales

Como ya hemos mencionado en varias ocasiones con anterioridad, estamos en camino a probar el Teorema de Bell, y hasta ahora hemos avanzado en la primera mitad. Para la parte restante también necesitaremos varios resultados auxiliares, algunos de ellos incluso un poco técnicos, empleados en la demostración de dicho teorema. Para conveniencia del lector, reunimos la primera parte de ellos en esta sección.

Definición 4.20. Dados $\mathbb{P}$, un orden parcial, y $X \subseteq \mathbb{P}$, diremos que el conjunto $A \subseteq X$ es una anticadena maximal en X si

1. A es una anticadena en $\mathbb{P}$ y
2. siempre que $A \subseteq A' \subseteq X$ y A' es una anticadena en $\mathbb{P}$, se concluye que $A = A'$.

Lema 4.21. *Si $\mathbb{P}$ es un orden parcial y $X \subseteq \mathbb{P}$, entonces*

1. *existen anticadenas maximales en X;*
2. *si A es una anticadena en $\mathbb{P}$ que está contenida en X, entonces A es una anticadena maximal en X si y sólo si para cada $x \in X$ existe $a \in A$ de tal modo que $a \mid x$.*

Demostración. Comencemos probando el inciso 1. Denotemos por $\mathcal{A}$ a la colección de todas las anticadenas en $\mathbb{P}$ que están contenidas en X. Notemos que $\mathcal{A} \neq \emptyset$ ya que $\emptyset \in \mathcal{A}$. Fácilmente se puede verificar que la familia $\mathcal{A}$ es de carácter finito y, por el Lema de Tukey-Teichmüller (que es equivalente al Axioma de Elección [4, Teorema 8.8]), $\mathcal{A}$ debe tener un elemento maximal. Usando argumentos rutinarios se comprueba que este elemento maximal es, de hecho, una anticadena maximal en X.

Para el inciso 2 consideremos $A \subseteq X$, una anticadena en $\mathbb{P}$, y supongamos que es una anticadena maximal en X. Sea $x \in X$. Si $x \in A$, entonces trivialmente se da que $x \mid x$. Si $x \notin A$, supongamos que no existe $a \in A$ de tal modo que $x \mid a$. En otras palabras, para cada $a \in A$, sucedería que $x \perp a$, de donde tendríamos que $A \cup \{x\}$ es una anticadena y, además, $A \subseteq A \cup \{x\}$. Por definición de anticadena maximal se seguiría que $A = A \cup \{x\}$ y así, $x \in A$; lo cual es un absurdo. Por lo tanto, debe existir $a \in A$ de modo que $a \mid x$.

Conversamente, supongamos que para cada $x \in X$ existe $a \in A$ de tal forma que $a \mid x$. Sea $A' \subseteq X$, tal que $A \subseteq A'$. Si $x \in A' \setminus A$, por hipótesis, existe $a \in A$ de modo que $a \mid x$; entonces A' no puede ser anticadena. Luego, para cada A', anticadena en $\mathbb{P}$, si $A \subseteq A' \subseteq X$, se sigue que $A = A'$, y así A es una anticadena maximal en X. $\square$

Definición 4.22. Sean $\mathbb{P}$ un orden parcial y $D \subseteq \mathbb{P}$. Diremos que D es abierto en $\mathbb{P}$ si para cada $d \in D$ se tiene que $\{p \in \mathbb{P} : p \leqslant d\} \subseteq D$.

Para probar el siguiente resultado extenderemos la definición 3.1 a conjuntos. Si $\mathbb{P}$ es un orden parcial y $A \subseteq \mathbb{P}$, denotamos por $A^{\downarrow}$ al conjunto $\{p \in \mathbb{P} : \exists q \in A(p \leqslant q)\}$. Observe que $A^{\downarrow}$ es un subconjunto abierto de $\mathbb{P}$, para cualquier $A \subseteq \mathbb{P}$.

Lema 4.23. *Sea $\mathbb{P}$ un orden parcial. Si $\mathcal{D}$ es una familia de densos en $\mathbb{P}$, entonces existe una colección $\mathcal{E}$ de densos abiertos en $\mathbb{P}$ de tal modo que:*

1. $|\mathcal{E}| \leqslant |\mathcal{D}| \cdot \omega$*;*
2. *Para cada $E \in \mathcal{D} \cup \mathcal{E}$ existe $a(E)$, una anticadena maximal en E, de tal forma que*
   - *(i) si $E \in \mathcal{E}$, entonces $E = a(E)^{\downarrow}$ y*
   - *(ii) si $E \in \mathcal{D}$, se sigue que $a(E)^{\downarrow} \in \mathcal{E}$;*
3. *Para cualesquiera $E_0, E_1 \in \mathcal{E}$ existe $E_2 \in \mathcal{E}$ con $E_2 \subseteq E_0 \cap E_1$.*

Demostración. Denotemos por $\mathcal{U}$ a la colección de todos los subconjuntos abiertos y densos de $\mathbb{P}$.

Para cada D, subconjunto denso de $\mathbb{P}$, fijemos $e(D)$, una anticadena maximal en D. Ahora definamos las funciones $f : \mathcal{U} \times \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ y $g : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ mediante

$$f(D, E) = D \cap E \qquad \text{y} \qquad g(D) = e(D)^{\downarrow}$$

Afirmación. Si $D \in \mathcal{D}$ entonces $e(D)^{\downarrow} \in \mathcal{U}$.

Claramente, $e(D)^{\downarrow}$ es abierto en $\mathbb{P}$. Por otro lado, dado $p \in \mathbb{P}$, existe $d \in D$ de tal modo que $d \leqslant p$; como $e(D)$ es anticadena maximal en D, existe $d_1 \in e(D)$ de manera que d y d_1 son compatibles (lema 4.21). Sea r una extensión común de d y d_1; entonces $r \in e(D)^{\downarrow}$ y además $r \leqslant d \leqslant p$. O sea que $e(D)^{\downarrow}$ es denso.

De la afirmación anterior se sigue que $\mathcal{D}_0 := \{e(D)^{\downarrow} : D \in \mathcal{D}\} \subseteq \mathcal{U}$ y, por [3, Teorema 1.8], existe $\mathcal{E}_0 \subseteq \mathcal{U}$ tal que

(a) $|\mathcal{E}_0| \leqslant |\mathcal{D}_0.| \cdot \omega$,

(b) $f[\mathcal{E}_0 \times \mathcal{E}_0] \subseteq \mathcal{E}_0$ y $g[\mathcal{E}_0] \subseteq \mathcal{E}_0$.

Hagamos $\mathcal{E} := \{g(E) : E \in \mathcal{E}_0\}$ y notemos que, por (b), sucede que $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{E}_0$ y por tanto, $|\mathcal{E}| \leqslant |\mathcal{E}_0| \leqslant |\mathcal{D}| \cdot \omega$. Con esto, $\mathcal{E}$ satisface la condición (1) del lema.

Ahora, para cada $E \in \mathcal{E}$ fijemos $E_0 \in \mathcal{E}_0$ de manera que $E = g(E_0)$ y definamos $a(E) = e(E_0)$; de este modo, $E = g(E_0) = a(E)^{\downarrow}$. Verifiquemos que $a(E)$ es anticadena maximal en E. Primero, $e(E_0) \subseteq g(E_0) = E$, por lo que $a(E) \subseteq E$. Claramente $a(E)$ es anticadena en $\mathbb{P}$. Ahora, si $p \in E$, entonces existe $q \in a(E)$ tal que $p \leqslant q$ y por tanto, $p \mid q$. Por lo anterior y por el lema 4.21, se sigue que $a(E)$ es una anticadena maximal en E.

Además,

$$E = g(E_0) = e(E_0)^{\downarrow} = a(E)^{\downarrow},$$

con lo que probamos (2)-(i).

Si $D \in \mathcal{D} \setminus \mathcal{E}$, entonces $e(D)^{\downarrow} \in \mathcal{D}_0$, pero $\mathcal{D}_0 \subseteq \mathcal{E}_0$ y, por ende, $g(e(D)^{\downarrow}) \in \mathcal{E}$. Por esta razón, si hacemos $a(D) = e(e(D)^{\downarrow})$, se sigue que

$$a(D)^{\downarrow} = e(e(D)^{\downarrow})^{\downarrow} = g(e(D)^{\downarrow}) \in \mathcal{E},$$

y así $\mathcal{E}$ satisface la condición (2)-(ii).

Finalmente, si $E_0, E_1 \in \mathcal{E}$, como $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{E}_0$ y $\mathcal{E}_0$ satisface la propiedad (b) mencionada arriba, se sigue que $E_0 \cap E_1 \in \mathcal{E}_0$. Primero notemos que, por definición, $e(E_0 \cap E_1) \subseteq E_0 \cap E_1$. Luego, como $E_0 \cap E_1 \in \mathcal{E}_0 \subseteq \mathcal{U}$, se tiene que $g(E_0 \cap E_1) = e(E_0 \cap E_1)^{\downarrow} \subseteq E_0 \cap E_1$. $\square$

Como consecuencia del lema siguiente, el Axioma de Martin puede ser reformulado en términos de conjuntos ligados en lugar de filtros.

Lema 4.24. *Sean $\mathbb{P}$ un orden parcial y κ un cardinal infinito. Entonces los enunciados siguientes son equivalentes:*

1. *Para cualquier familia $\mathcal{D}$ de densos en $\mathbb{P}$: Si $|\mathcal{D}| \leqslant \kappa$, entonces existe un conjunto ligado $L \subseteq \mathbb{P}$ de tal modo que para cada $D \in \mathcal{D}$ se tiene que $L \cap D \neq \emptyset$.*

2. *Si $\mathcal{E}$ es una familia de densos en $\mathbb{P}$ con $|\mathcal{E}| \leqslant \kappa$, entonces $\mathbb{P}$ contiene un filtro $\mathcal{E}$-genérico.*

Demostración. La implicación 2→1 debe ser clara ya que, por definición, los filtros son conjuntos ligados. Por lo tanto nos concentraremos en la implicación restante.

Sean $\mathbb{P}$ un orden parcial, κ un cardinal infinito y $\mathcal{D}$ una familia de a lo más κ densos en $\mathbb{P}$. Supongamos que existe un conjunto ligado $L \subseteq \mathbb{P}$ que interseca a todo elemento de la colección $\mathcal{D}$. Por el lema anterior, para $\mathcal{D}$, existe $\mathcal{E}$ que satisface las condiciones 1, 2 y 3 del resultado previo.

Sea $\{E_\alpha : \alpha \in \kappa\}$ una enumeración, posiblemente con repeticiones, de $\mathcal{E}$. Entonces, por hipótesis, existe $L \subseteq \mathbb{P}$ ligado de forma que para toda $\alpha \in \kappa$ se tiene que $L \cap E_\alpha \neq \emptyset$.

Para cada $\alpha \in \kappa$ hagamos $A_\alpha = a(E_\alpha)$ (estamos usando la notación del lema anterior) y fijemos $q_\alpha \in L \cap E_\alpha$; como $E_\alpha = A_\alpha{}^\downarrow$, existe $p_\alpha \in A_\alpha$ de modo que $q_\alpha \leqslant p_\alpha$.

Afirmación. $L' := \{p_\alpha : \alpha \in \kappa\}$ es un conjunto ligado.

Sean $\alpha < \beta < \kappa$. Entonces $q_\alpha \leqslant p_\alpha$ y $q_\beta \leqslant p_\beta$. Como $\{q_\alpha, q_\beta\} \subseteq L$, existe $r \in \mathbb{P}$ una extensión común. Por transitividad r también es exensión común de p_α y p_β. Así, L' es un conjunto ligado.

Proponemos como filtro a $G := \{r \in \mathbb{P} : \exists \alpha \in \kappa(p_\alpha \leqslant r)\}$. Es claro que satisface la condición (b) de la definición 2.2. Sólo resta probar que cualesquiera dos elementos de G poseen una extensión común en G. Sean $r, s \in G$. De la definición de G se sigue que existen α,$\beta \in \kappa$ de manera que $r \geqslant p_\alpha$ y $s \geqslant p_\beta$. Por la condición 3 del lema anterior existe $\gamma \in \kappa$ de tal modo que $E_\gamma \subseteq E_\alpha \cap E_\beta$, es decir, $E_\gamma \subseteq A_\alpha{}^\downarrow \cap A_\beta{}^\downarrow$. Luego, para alguna $t \in A_\alpha$ sucede que $p_\gamma \leqslant t$. Si $t \neq p_\alpha$, se seguiría que $t \perp p_\alpha$ (por estar ambos en una anticadena), lo cual implicaría que $p_\gamma \perp p_\alpha$, pero esto es un absurdo ya que p_α y p_γ son elementos de un conjunto ligado. Por tanto $t = p_\alpha$. De igual manera, para algún $u \in A_\beta$ sucede que $p_\gamma \leqslant u$. Análogamente al caso anterior se puede probar que $u = p_\beta$. Así $p_\gamma \leqslant p_\alpha$ y $p_\gamma \leqslant p_\beta$. Por lo tanto G es filtro.

Veamos ahora que es $\mathcal{D}$-genérico. Si $D \in \mathcal{D}$ entonces $a(D)^\downarrow \in \mathcal{E}$ (condición (2)-(i) del lema 4.23) y, por ende, existe $\alpha \in \kappa$ tal que $a(D)^\downarrow = E_\alpha$. Finalmente recordemos que, como $p_\alpha \in A_\alpha \subseteq E_\alpha = a(D)^\downarrow$, existe $d \in D$ de tal modo que $p_\alpha \leqslant d$ y por lo tanto, $d \in D \cap G$.

□

4.4 Órdenes parciales y espacios topológicos

Es importante mencionar que en la mayoría de los textos donde se prueba el Teorema de Bell se hace de manera puramente combinatoria pero en esta tesis estamos más interesados en la Topología, así que presentaremos una demostración topológica. Es por esto que en esta sección se encuentran resultados que nos permitirán oscilar entre órdenes parciales y espacios topológicos.

Definición 4.25. Sean $\langle \mathbb{P}_1, \leqslant_1 \rangle$ y $\langle \mathbb{P}_2, \leqslant_2 \rangle$ órdenes parciales y $e : \mathbb{P}_1 \to \mathbb{P}_2$ una función. Diremos que e es un encaje denso si para cualesquiera $p, q \in \mathbb{P}_1$ se satisfacen las condiciones siguientes:

1. si $p \leqslant_1 q$ entonces $e(p) \leqslant_2 e(q)$ (e preserva el orden),
2. si $p \perp q$ entonces $e(p) \perp e(q)$ (e preserva incompatibilidad) y además
3. $e[\mathbb{P}_1]$ es un conjunto denso en $\mathbb{P}_2$.

Los encajes densos serán la vía que nos permitirá *movernos* de un orden parcial a un espacio topológico.

Llamaremos cero-dimensional a un espacio X cuya topología cuente con una sub-base cuyos elementos sean, simultáneamente, abiertos y cerrados.

Sea X un espacio topológico. En este párrafo y en los teoremas siguientes ordenaremos a τ_X^* mediante la contención. Ahora probaremos que si $\mathcal{U} \subseteq \tau_X^*$ es finita y no vacía, entonces $\mathcal{U}$ es centrada si y sólo si $\bigcap \mathcal{U} \neq \emptyset$. Supongamos que $\mathcal{U} \subseteq \tau_X^*$ es una familia finita, no vacía y centrada. Entonces existe $V \in \tau_X^*$ de manera que para todo $U \in \mathcal{U}$ se sigue que $V \subseteq U$, por lo que $\emptyset \neq V \subseteq \bigcap \mathcal{U}$. Por otro lado, si sólo suponemos que $\bigcap \mathcal{U} \neq \emptyset$, entonces $\bigcap \mathcal{U}$ es un abierto (ya que $\mathcal{U}$ es finita) no vacío, por tanto $\bigcap \mathcal{U} \in \tau_X^*$; además para toda $U \in \mathcal{U}$ se tiene que $\bigcap \mathcal{U} \subseteq U$, o sea, $\mathcal{U}$ es centrada.

El siguiente lema nos describe la manera en que podemos *encajar* a un orden parcial en un espacio topólogico.

Lema 4.26. *Para todo orden parcial no vacío $\langle \mathbb{P}, \leqslant \rangle$ existen, un espacio topológico cero-dimensional Hausdorff, $X_{\mathbb{P}}$ y $e : \mathbb{P} \to \tau_{X_{\mathbb{P}}}^*$, un encaje denso.*

Demostración. Denotemos por $X_{\mathbb{P}}$ a la colección de todos los subconjuntos centrados maximales de $\mathbb{P}$, es decir, $x \in X_{\mathbb{P}}$ si y sólo si x es un subconjunto centrado de $\mathbb{P}$ y para cualquier $p \in \mathbb{P} \setminus x$ se tiene que $x \cup \{p\}$ no es centrado. Además, para cada $p \in \mathbb{P}$ definimos $U_p := \{x \in X_{\mathbb{P}} : p \in x\}$.

Recordemos que el conjunto vacío siempre es un conjunto centrado, pero como existe $q \in \mathbb{P}$, entonces $\emptyset \cup \{q\}$ también es centrado, por lo cual $\emptyset \notin X_{\mathbb{P}}$. Luego, si $x \in X_{\mathbb{P}}$, existe $p \in x$ y, por ende, $x \in U_p$. En otras palabras, haciendo $S := \{U_p : p \in \mathbb{P}\}$, tenemos que $X_{\mathbb{P}} = \bigcup S$. Lo anterior nos garantiza que S es sub-base para alguna topología en $X_{\mathbb{P}}$, a la que denotaremos por $\tau_{X_{\mathbb{P}}}$.

Como consecuencia del Lema de Zorn-Kuratowski se tiene que para cada $p \in \mathbb{P}$ existe $x \in X_{\mathbb{P}}$ con $p \in x$, es decir, $x \in U_p$. De esta forma, para todo $p \in \mathbb{P}$, $U_p \neq \emptyset$.

Definimos $e : \mathbb{P} \to \tau_{X_{\mathbb{P}}}^*$ mediante $e(p) = U_p$. Verifiquemos que e es un encaje denso.

Sean $p, q \in \mathbb{P}$ de tal forma que $p \leqslant q$; necesitamos mostrar que $U_p \subseteq U_q$. Fijemos $x \in U_p$. Afirmamos que el conjunto $x' := x \cup \{q\}$ es centrado. Para verificar esta afirmación, tomemos F, un subconjunto finito de x', y dividamos esta prueba en casos.

Caso 1. $q \notin F$. Entonces $F \subseteq x$ y hemos terminado ya que x es centrado.

Caso 2. $q \in F$. En este caso, $F' := (F \setminus \{q\}) \cup \{p\} \in [x]^{<\omega}$ (recuerde que $x \in U_p$ implica que $p \in x$). Como x es centrado, existe $r \in \mathbb{P}$ de modo que $r \leqslant F'$. Por lo tanto, $r \leqslant p$ y, por otro lado, $p \leqslant q$; se sigue que $r \leqslant q$. De esta manera queda mostrado que r es cota inferior de F.

Como $x \subseteq x \cup \{q\}$ y x es maximal, entonces $x = x \cup \{q\}$. Por lo tanto $q \in x$, es decir, $x \in U_q$.

Afirmación . Si $C \subseteq \mathbb{P}$ no es centrado en $\mathbb{P}$, entonces $e[C]$ no es un subconjunto centrado de $\tau^*_{X_{\mathbb{P}}}$.

Hagamos la prueba por contrapuesta, es decir, supongamos que $C \subseteq \mathbb{P}$ es tal que $e[C]$ es un subconjunto centrado de τ^*_X. Entonces, si F es un subconjunto finito de C se sigue que $e[F]$ es un subconjunto finito de $e[C]$ y, por ende, existe $x \in \bigcap e[F]$; luego, $F \subseteq x$ y como x es centrado en $\mathbb{P}$, se deduce que F tiene una cota inferior en $\mathbb{P}$. Esto prueba que C es centrado en $\mathbb{P}$.

Note que si $p, q \in \mathbb{P}$, entonces p y q son compatibles si y sólo si $\{p, q\}$ es centrado. De este modo deducimos de la afirmacin anterior que e preserva incompatibilidad.

Para poder concluir que e es un encaje denso, sólo resta probar que la imagen de $\mathbb{P}$ bajo e es densa en $\tau^*_{X_{\mathbb{P}}}$. Para demostrar esto, consideremos un abierto no vacío U. Como S es sub-base para $\tau^*_{X_{\mathbb{P}}}$, se sigue que existe $F \in [\mathbb{P}]^{<\omega} \setminus \{\emptyset\}$ de modo que $\emptyset \neq \bigcap_{p \in F} U_p \subseteq U$. Entonces, $e[F]$ es un subconjunto centrado de $\tau^*_{X_{\mathbb{P}}}$ y, por la afirmación anterior, se sigue que F es centrado en $\mathbb{P}$. Si q es una cota inferior para F, entonces $e(q) \subseteq \bigcap_{p \in F} U_p = U$. Por lo tanto, $e[\mathbb{P}]$ es denso en $\tau^*_{X_{\mathbb{P}}}$.

Ahora mostraremos que $\tau^*_{X_{\mathbb{P}}}$ es una topología Hausdorff y cero-dimensional.

Observemos que si $x, y \in X_{\mathbb{P}}$ son tales que $x \neq y$, por la maximalidad de ambos elementos, existen $p \in (x \setminus y)$ y $q \in (y \setminus x)$. Si p y q fuesen compatibles, entonces los conjuntos $x \cup \{q\}$ y $y \cup \{p\}$ serían centrados, lo cual nos llevaría a que $q \in x$ y $p \in y$. Entonces $p \perp q$ y por lo tanto, $\{e(p), e(q)\}$ no es un subconjunto centrado de $\tau^*_{X_{\mathbb{P}}}$; de este modo, nuestra Afirmación nos garantiza que $U_p \cap U_q = \emptyset$. Además, $x \in U_p$ y $y \in U_q$, lo cual muestra que $X_{\mathbb{P}}$ es Hausdorff.

Si probamos que para cada $p \in \mathbb{P}$ se tiene que el conjunto U_p es cerrado también, esto implicaría que $\tau^*_{X_{\mathbb{P}}}$ tiene una sub-base constituida por conjuntos que son, a la vez, abiertos y cerrados. Con lo cual podremos concluir que $X_{\mathbb{P}}$ es cero-dimensional. Probemos esto.

Sean $p \in \mathbb{P}$ y $x \in X_{\mathbb{P}} \setminus U_p$, esto es, $p \notin x$. Entonces, como x es maximal, existe $F \in [x]^{<\omega}$ de modo que $F \cup \{p\}$ no es un subconjunto centrado de $\mathbb{P}$ y, por la Afirmación, esto implica que su imagen bajo e no es un subconjunto centrado de $\tau^*_{X_{\mathbb{P}}}$, es decir, $U_p \cap (\bigcap e[F]) = \emptyset$. Por último observemos que $\bigcap e[F]$ es una vecindad del punto x que es ajena con U_p. En otras palabras, $X_{\mathbb{P}} \setminus U_p$ es abierto y así, U_p es cerrado. $\square$

Los espacios topológicos compactos y de Hausdorff son abundantes en propiedades topológicas y por ello nos gustaría poder *encajar* a cualquier orden parcial en un espacio de este estilo. Pensando en esto, tenemos el siguiente resultado que se puede ver como una extensión del lema anterior.

Lema 4.27. *Si $\langle \mathbb{P}, \leqslant \rangle$ es un orden parcial no vacío, existen $K_{\mathbb{P}}$, un espacio topológico compacto y Hausdorff, e $i : \mathbb{P} \to \tau^*_{K_{\mathbb{P}}}$, un encaje denso.*

Demostración. Sea $\langle \mathbb{P}, \leqslant \rangle$ un orden parcial no vacío. Por el lema 4.26 existen $X_{\mathbb{P}}$, un espacio Hausdorff cero-dimensional, y $e : \mathbb{P} \to \tau^*_{X_{\mathbb{P}}}$, un encaje denso.

Veamos que $X_{\mathbb{P}}$ es un espacio completamente regular. Sean F un subconjunto cerrado de $X_{\mathbb{P}}$ y $x \in X \setminus F$. Notemos que, como X es cero-dimensional, existe B, un subconjunto abierto y cerrado de X, tal que $x \in B \subseteq X \setminus F$; de este modo, si $\chi_B : X \to \mathbb{R}$ es la función característica de B, entonces χ_B es continua, $\chi_B(x) = 1$ y $\chi_B[F] \subseteq \{1\}$.

De acuerdo con [6, Theorem 38.2], dado que $X_{\mathbb{P}}$ es completamente regular, existe una compactación Hausdorff, $K_{\mathbb{P}}$, de $X_{\mathbb{P}}$. Como $K_{\mathbb{P}}$ es compactación de $X_{\mathbb{P}}$, entonces existe un subconjunto denso de $K_{\mathbb{P}}$ que es homeomorfo a $X_{\mathbb{P}}$, por lo que supondremos que $X_{\mathbb{P}}$ es, de hecho, un subespacio de $K_{\mathbb{P}}$.

Dado un conjunto $E \subseteq K_{\mathbb{P}}$, denotaremos por $\overline{E}$ a la cerradura de E en $K_{\mathbb{P}}$, mientras que $\operatorname{int} E$ representará el interior de E en $K_{\mathbb{P}}$.

Comprobemos que si $p \in \mathbb{P}$, entonces $\operatorname{int}(\overline{e(p)}) \neq \emptyset$. En efecto, si $p \in \mathbb{P}$, se tiene que $e(p) \in \tau^*_{X_{\mathbb{P}}}$, de donde existe $V \in \tau^*_{K_{\mathbb{P}}}$ con $V \cap X_{\mathbb{P}} = e(p)$. Como $X_{\mathbb{P}}$ es denso en $K_{\mathbb{P}}$ y V es un abierto no vacío en $K_{\mathbb{P}}$, concluimos que $V \subseteq \overline{V} = \overline{e(p)}$. Por lo tanto, $\operatorname{int}(\overline{e(p)}) \neq \emptyset$.

Definamos $i : \mathbb{P} \to \tau^*_{K_{\mathbb{P}}}$ mediante $i(p) = \operatorname{int}(\overline{e(p)})$, para cada $p \in \mathbb{P}$. Probemos ahora que i es un encaje denso. Observemos que i preserva el orden ya que e preserva el orden y además el interior y la cerradura son operadores monótonos (respetan la contención). Sólo resta probar que es denso. Sea $U \in \tau^*_{K_{\mathbb{P}}}$. Como $K_{\mathbb{P}}$ es un espacio regular (pues es compacto y de Hausdorff), existe $V \in \tau^*_{K_{\mathbb{P}}}$ tal que $V \subseteq \overline{V} \subseteq U$. Por otro lado, $V \cap X_{\mathbb{P}} \in \tau^*_{X_{\mathbb{P}}}$, así que existe $p \in \mathbb{P}$ de tal forma que $e(p) \subseteq V \cap X_{\mathbb{P}}$. Luego, $\operatorname{int}(\overline{e(p)}) \subseteq \overline{e(p)} \subseteq \overline{V} \subseteq U$. $\square$

Ahora que ya sabemos asociar un espacio topológico a un orden parcial dado, sería conveniente *traducir* las propiedades de dicho orden parcial en propiedades topológicas y viceversa. Para ello tenemos los siguientes lemas.

Lema 4.28. *Sean $\mathbb{P}$, $K_{\mathbb{P}}$ e i como en el lema anterior. Si $\mathbb{P}$ es ω-centrado, entonces $K_{\mathbb{P}}$ es separable.*

Demostración. Sean $\mathbb{P}$ un orden parcial ω-centrado y $K_{\mathbb{P}}$ e i como en el lema anterior.

Como $\mathbb{P}$ es ω-centrado, entonces $\mathbb{P} = \bigcup_{n\in\omega} C_n$, donde C_n es un conjunto centrado para cada $n \in \omega$. Dado $n \in \omega$ definimos

$$B_n := \{U \in \tau^*_{K_{\mathbb{P}}} : \exists p \in C_n(i(p) \subseteq U)\}.$$

Afirmación 1. $\tau^*_{K_{\mathbb{P}}} = \bigcup_{n\in\omega} B_n$.

Sea $U \in \tau^*_{K_{\mathbb{P}}}$. Como i es un encaje denso, existe $p \in \mathbb{P}$ de tal forma que $i(p) \subseteq U$; sea $n \in \omega$ de modo que $p \in C_n$. Así, $U \in B_n$. Con esto obtenemos que $\tau^*_{K_{\mathbb{P}}} \subseteq \bigcup_{n\in\omega} B_n$. La contención contraria es clara.

Afirmación 2. B_n es un subconjunto centrado de $\tau^*_{K_{\mathbb{P}}}$, para cada $n \in \omega$.

Sea $n \in \omega$ y sea $F \in [B_n]^{<\omega}$. Entonces existe $F' \in [C_n]^{<\omega}$ de modo que para cada $U \in F$ existe $p \in F'$ que satisface $e(p) \subseteq U$. Como C_n es centrado, F' tiene cota inferior en $\mathbb{P}$, digamos q. Dado que e preserva el orden, se tiene que $e(q) \subseteq \bigcap F$. Por lo tanto B_n es centrado.

Con las afirmaciones anteriores queda probado que $\tau^*_{K_{\mathbb{P}}}$ es ω-centrado y por el lema 2.18 se sigue que $K_{\mathbb{P}}$ cuenta con un denso de cardinalidad ω, o en otras palabres, es separable.

□

En Topología, un espacio es de Baire si la intersección de cualquier familia numerable de densos abiertos resulta ser un conjunto denso. En particular, dichas intersecciones son no vacías, por esto tiene sentido introducir la siguiente definición.

Definición 4.29. Dado un cardinal κ, un espacio topológico X será llamado κ-Baire si toda familia de a lo más κ subconjuntos densos abiertos de X tiene intersección no vacía.

El resultado siguiente establece una conexión importante entre los espacios κ-Baire y la existencia de filtros genéricos para los órdenes que se pueden encajar densamente en su topología.

Lema 4.30. *Suponga que X es un espacio topológico κ-Baire, para algún cardinal κ, y que $\mathbb{P}$ es un orden parcial. Si $e : \mathbb{P} \to \tau_X^*$ es un encaje denso, entonces para cada familia $\mathcal{D}$ de a lo más κ subconjuntos densos de $\mathbb{P}$ existe un filtro $\mathcal{D}$-genérico en $\mathbb{P}$.*

Demostración. Sea $\{D_\alpha : \alpha \in \kappa\}$ una familia de densos en $\mathbb{P}$. Por el lema 4.24, sólo debemos probar que existe L, un subconjunto ligado de $\mathbb{P}$, tal que $L \cap D_\alpha \neq \emptyset$, para cada $\alpha < \kappa$.

Para toda $\alpha \in \kappa$ definimos

$$U_\alpha := \bigcup e[D_\alpha].$$

Así, U_α resulta abierto al ser unión de conjuntos abiertos. Probemos que U_α es denso en X. Sea $V \in \tau_X^*$. Como e es un encaje denso, existe $p \in \mathbb{P}$ de tal forma que $e(p) \subseteq V$; por otro lado, la densidad de D_α en $\mathbb{P}$ implica que existe $d \in D_\alpha$ de manera que $d \leqslant p$. Como e preserva el orden, se concluye que $e(d) \subseteq e(p) \subseteq V$. De esta manera, $V \cap U_\alpha \neq \emptyset$.

Entonces $\{U_\alpha : \alpha \in \kappa\}$ es una familia de abiertos densos en X y, por hipótesis, existe $x \in \bigcap_{\alpha<\kappa} U_\alpha$. Definamos

$$L := \{p \in \mathbb{P} : x \in e(p)\}$$

y observemos que si $\alpha < \kappa$, entonces $x \in U_\alpha$, así que existe $p \in D_\alpha$ de modo que $x \in e(p)$; luego, $p \in D_\alpha \cap L$.

Ahora mostremos que L es un conjunto ligado. Sean $p, q \in L$. Entonces $x \in e(p)$ y $x \in e(q)$, es decir, $e(p) \cap e(q) \neq \emptyset$; luego, $e(p)$ y $e(q)$ son compatibles en τ_X^* y como e preserva incompatibilidad, concluimos que p y q son compatibles. □

4.4.1 Prueba del Teorema de Bell

El resultado central de este capítulo es, esencialmente, un corolario de los resultados presentados en las dos secciones anteriores y del teorema siguiente.

Teorema 4.31. *Sea κ un cardinal. Si $\kappa < \mathfrak{p}$, entonces todo espacio compacto, de Hausdorff y separable es κ-Baire.*

Demostración. Sea κ como en las hipótesis del teorema y supongamos que Y es un espacio topológico compacto, de Hausdorff y separable. Fijemos $\{W_\alpha : \alpha < \kappa\}$, una familia de abiertos densos en Y.

Observemos que si Y tuviera un punto aislado y, entonces $y \in W_\alpha$ para cada $\alpha < \kappa$ y, tirivialmente, $\bigcap_{\alpha\in\kappa} W_\alpha \neq \emptyset$. Por lo tanto, asumiremos que Y no tiene puntos aislados.

Hagamos $W := \bigcup_{\alpha\in\kappa} W_\alpha$ y notemos que W es denso y abierto. Sea E_0 un subconjunto denso y numerable de Y. Entonces, haciendo $E := E_0 \cap W$ se sigue que E es denso en W. Luego, por la densidad de W, E es un denso numerable en Y que está contenido en W.

Sea $\phi : E \to \omega$ una biyección. Definimos $X := ((Y \setminus E) \times \{0\}) \cup \omega$ y $h : Y \to X$ como sigue

$$h(y) = \begin{cases} (y, 0), & y \in E \\ \phi(y), & y \notin E \end{cases}$$

De esta manera, h resulta ser una biyección. Así, es fácil probar que la colección $\tau_X := \{U \subseteq X : h^{-1}[U] \in \tau_Y\}$ es una topología para X. Más aún, si equipamos a X con esta topología, entonces h es un homeomorfismo.

Como la compacidad, ser de Hausdorff, carecer de puntos aislados y ser separable son propiedades topológicas, se sigue que X es compacto, Hausdorff, sin puntos aislados y separable. Definimos para cada $\alpha \in \kappa$ el conjunto $U_\alpha := h[W_\alpha]$. Por lo anterior, $\{U_\alpha : \alpha \in \kappa\}$ es una familia de abiertos densos en X. Notemos también que $h[E] = \omega$ es un subconjunto denso de X y además $\omega \subseteq \bigcup_{\alpha\in\kappa} U_\alpha$. El resto de la prueba consiste en demostrar que $\bigcap_{\alpha<\kappa} U_\alpha \neq \emptyset$ (lo cual, naturalmente implica que $\bigcap_{\alpha<\kappa} W_\alpha$ no es vacía).

Con la intención de simplificar nuestra notación, hagamos $S_\alpha := \omega \cap U_\alpha$, para cada $\alpha < \kappa$.

Afirmación 1. Para toda $\alpha < \kappa$ existe $\{G(n,\alpha) : n \in S_\alpha\} \subseteq \tau_X$ tal que:

1. $n \in S_\alpha$ implica que $n \in G(n,\alpha) \subseteq \overline{G(n,\alpha)} \subseteq U_\alpha$ y

2. si $m,n \in S_\alpha$ y $m < n$, entonces $\overline{G(n,\alpha)} \subseteq G(m,\alpha)$.

La prueba de esta afirmación será por recursión: supongamos que, para algún $k \in S_\alpha$, tenemos definida $\{G(i,\alpha) : i \in S_\alpha \cap k\}$ de tal modo que las condiciones dadas arriba se satisfacen. Sea $M := \{i \in S_\alpha \cap k : k \in G(i,\alpha)\}$.

Caso 1. $M = \emptyset$. Como U_α es abierto y X es regular (por ser compacto de Hausdorff), entonces existe $G(k,\alpha) \in \tau_X$ tal que $k \in G(k,\alpha) \subseteq \overline{G(k,\alpha)} \subseteq U_\alpha$.

Caso 2. $M \neq \emptyset$. Entonces M es un conjunto finito y, por ende, $\bigcap_{i \in M} G(i,\alpha)$ es un abierto no vacío que contiene a k. Por la regularidad de X, existe $G(k,\alpha) \in \tau_X$ de tal forma que

$$k \in G(k,\alpha) \subseteq \overline{G(k,\alpha)} \subseteq \bigcap_{i \in M} G(i,\alpha) \subseteq U_\alpha.$$

Esto completa la recursión.

Ahora, fijemos $n \in \omega$ y definamos $\mathcal{A}_n := \{\omega \cap G(n,\alpha) \cap U_\beta : n \in U_\alpha \ \wedge \ \alpha,\beta \in \kappa\}$.

Afirmación 2. $\mathcal{A}_n$ es una familia fuertemente centrada.

Sean $m \in \omega$ y $\{(\alpha_i, \beta_i) : i \leqslant m\} \subseteq \kappa \times \kappa$ tales que, para cada $i \leqslant m$, $n \in U_{\alpha_i}$. Entonces

$$\bigcap_{i \leqslant m} (\omega \cap G(n,\alpha_i) \cap U_{\beta_i}) = \omega \cap \left(\bigcap_{i \leqslant m} G(n,\alpha_i) \right) \cap \left(\bigcap_{i \leqslant m} U_{\beta_i} \right).$$

Llamemos $E = \bigcap_{i \leqslant m} G(n,\alpha_i)$ y $F = \bigcap_{i \leqslant m} U_{\beta_i}$. Sucede que E es un abierto no vacío (porque $n \in E$) y F es abierto denso. Luego $E \cap F$ es abierto no vacío y además infinito, ya que X es de Hausdorff y no tiene puntos aislados. De igual manera, gracias a la densidad de ω en X, se sigue que $\omega \cap E \cap F$ es no vacío e infinito, lo que prueba la afirmación.

Dado que $\kappa < \mathfrak{p}$, se sigue que existe $B_n \subseteq \omega$, una pseudointersección para la familia $\mathcal{A}_n$. Por otro lado, de la definición de pseudointersección se tiene que $|B_n| = \omega$, es decir, existe $e_n : \omega \to B_n$, una función biyectiva. De esta forma, $B_n := \{e_n(j) : j \in \omega\}$.

Ahora utilizaremos a la colección $\{e_n : n \in \omega\}$ para construir una familia de funciones de ω en ω.

Sea $\alpha \in \kappa$. Si $n \in \omega$, entonces hay dos posibilidades, $n \in S_\alpha$ o $n \notin S_\alpha$. En el primer caso tenemos que $H_0 := \omega \cap G(n,\alpha) \cap U_\alpha \in \mathcal{A}_n$ y, por ende, $B_n \subseteq^* H_0$, es decir, existe $m \in \omega$

de tal suerte que $e_n[\omega \setminus m] \subseteq H_0 \subseteq G(n,\alpha)$. En el segundo caso, dado que $\omega \subseteq \bigcup_{\alpha<\kappa} U_\alpha$, existe $\beta \in \kappa$ de tal forma que $n \in U_\beta$; de este modo, si $H_1 := \omega \cap G(n,\beta) \cap U_\alpha$, se sigue que $H_0 \in \mathcal{A}_n$ y así, $B_n \subseteq^* H_0$. Por lo tanto, $e_n[\omega \setminus l] \subseteq H_0 \subseteq U_\alpha$, para alguna $l \in \omega$.

también podemos encontrar $l \in \omega$ tal que $e_n[\omega \setminus l] \subseteq H_0 \subseteq U_\alpha$.

Empleemos las observaciones hechas en el párrafo anterior para definir $f_\alpha : \omega \to \omega$ del siguiente modo

$$f_\alpha(n) = \begin{cases} \min\{i \in \omega : e_n[\omega \setminus i] \subseteq G(n,\alpha)\}, & n \in S_\alpha \\ \min\{i \in \omega : e_n[\omega \setminus i] \subseteq U_\alpha\}, & n \notin S_\alpha. \end{cases}$$

De acuerdo a la proposición 4.15, existe $f \in \omega^\omega$ de tal forma que $f_\alpha \leqslant^* f$, para cualquier $\alpha < \kappa$, es decir, para cada $\alpha \in \kappa$ existe $N_\alpha \in \omega$ tal que

(i) si $n \in S_\alpha \setminus N_\alpha$, entonces $e_n[\omega \setminus f(n)] \subseteq G(n,\alpha) \subseteq U_\alpha$ y

(ii) cuando $n \in \omega \setminus (S_\alpha \cup N_\alpha)$, se deduce que $e_n[\omega \setminus f(n)] \subseteq U_\alpha$.

En resumen, para cualesquiera $\alpha < \kappa$ y $n \in \omega \setminus N_\alpha$ se tiene que $e_n[\omega \setminus f(n)] \subseteq U_\alpha$.

Ahora definiremos recursivamente $\langle a_k : k \in \omega\rangle$, una sucesión estrictamente creciente de números naturales, como sigue: $a_0 = 0$ y $a_{k+1} = \min(e_{a_k}[\omega \setminus f(a_k)] \setminus (a_k + 1))$, para cada $k \in \omega$.

Finalmente definimos $g : \kappa \to \omega$ mediante $g(\alpha) = a_{k+1}$, donde $k := \min\{i \in \omega : a_i \geqslant N_\alpha\}$.

Notemos que, como $a_k \geqslant N_\alpha$, esto implica que $g(\alpha) = a_{k+1} \in e_{a_k}[\omega \setminus f(a_k)] \subseteq U_\alpha$, es decir, siempre sucede que $g(\alpha) \in U_\alpha$ y, en particular, el conjunto $G(g(\alpha), \alpha)$ está definido.

Afirmación 3. La colección $\{G(g(\alpha), \alpha) : \alpha \in \kappa\}$ tiene la propiedad de la intersección finita.

Probemos, en primer lugar, que si $\alpha < \kappa$ y $k \in \omega$ satisfacen $g(\alpha) = a_{k+1}$, entonces $\{a_i : i \in \omega \setminus (k + 1)\} \subseteq G(g(\alpha), \alpha)$. Para ello, emplearemos inducción sobre i. Por la Afirmación 1, $a_{k+1} = g(\alpha) \in G(g(\alpha), \alpha)$. Supongamos ahora que $a_i \in G(g(\alpha), \alpha)$ para algún $i \in \omega \setminus (k + 1)$. Entonces $a_i \in U_\alpha$ y, por otro lado, las desigualdades $i \geqslant k + 1 > k$ implican que $a_i \geqslant a_{k+i} > a_k \geqslant N_\alpha$. En conjunción de (i) y el inciso 2 de la Afirmación 1 se obtiene que

$$a_{i+1} \in e_{a_i}[\omega \setminus f(a_i)] \subseteq G(a_i, \alpha) \subseteq G(a_{k+1}, \alpha) = G(g(\alpha), \alpha),$$

lo cual completa la inducción.

Sea $D \in [\kappa]^{<\omega} \setminus \emptyset$. Si hacemos $a := \max(\{k \in \omega : \exists \alpha \in D(g(\alpha) = a_{k+1})\})$, entonces, por lo probado en el párrafo anterior $a_{m+1} \in \bigcap_{\alpha \in D} G(g(\alpha), \alpha)$, así que la afirmación es cierta.

De lo anterior, debe ser claro que $\{\overline{G(g(\alpha), \alpha)} : \alpha \in \kappa\}$ también tiene la propiedad de la interseccion finita. Entonces, por la compacidad de X y la Afirmación 1, deducimos que

$$\emptyset \neq \bigcap_{\alpha \in \kappa} \overline{G(g(\alpha), \alpha)} \subseteq \bigcap_{\alpha \in \kappa} U_\alpha,$$

con lo cual queda probado el teorema. □

Finalmente, tenemos todo lo necesario para alcanzar la meta.

Teorema 4.32 (Bell)**.** *Si κ es un cardinal infinito tal que $\kappa < \mathfrak{p}$, entonces MAωC(κ) es cierto.*

Demostración. Sean κ, un cardinal como en las hipótesis, y $\mathbb{P}$, un orden parcial ω-centrado. Por el lema 4.28, $\mathbb{P}$ se encaja en un espacio topológico $K_{\mathbb{P}}$ que es compacto, de Hausdorff y separable. Luego, por el teorema 4.31 y dado que $\kappa < \mathfrak{p}$, $K_{\mathbb{P}}$ es un espacio κ-Baire. Finalmente, por el lema 4.30, para cualquier colección $\mathcal{D}$, de a lo más κ subconjuntos densos de $\mathbb{P}$, existe un filtro $\mathcal{D}$-genérico. Por lo tanto MAωC(κ) es verdadero. □

Observemos que de el corolario 4.19 y el teorema anterior se sigue que $\mathfrak{p}$ es el primer cardinal κ donde MAωC(κ) falla.

Por último, con todo lo que hemos construido, adicionalmente, podemos demostrar también el siguiente teorema. Este resultado fue tomado de [2] y la prueba se le atribuye a Szymański.

Teorema 4.33. *$\mathfrak{p}$ es un cardinal regular.*

Demostración. La prueba será por contradicción. Supongamos entonces que $\mathfrak{p}$ es singular y denotemos como λ a su cofinalidad. Sea $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\omega)$ una familia fuertemente centrada, sin pseudointersección y de cardinalidad $\mathfrak{p}$. Sea $\{a_\xi : \xi < \mathfrak{p}\}$ una enumeración de $\mathcal{F}$.

Fijemos, $f : \lambda \to \mathfrak{p}$, una función cofinal estrictamente creciente, tal que para toda $\alpha < \lambda$ se tiene que $f(\alpha) \geqslant \omega$. Note que, para cada $\alpha < \lambda$, la familia

$$\mathcal{A}_\alpha := \left\{ \bigcap_{\xi \in F} a_\xi : F \in [f(\alpha)]^{<\omega} \setminus \{\emptyset\} \right\}$$

es una familia fuertemente centrada de cardinalidad menor a $\mathfrak{p}$ que es cerrada bajo intersecciones finitas.

Ahora, el que f sea creciente nos garantiza que $\mathcal{A}_\alpha \subseteq \mathcal{A}_\beta$, siempre que $\alpha < \beta < \lambda$, y por esta razón, $\mathcal{A} := \bigcup_{\alpha<\lambda} \mathcal{A}_\alpha$ es una familia fuertemente centrada que es cerrada bajo intersecciones finitas. De hecho, $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$ y, por lo tanto, $\mathcal{A}$ no tiene pseudointersección. Más aún, $|\mathcal{A}| = \mathfrak{p}$.

Afirmación. Sea $\mathcal{C}$ una familia de subconjuntos de ω con $|\mathcal{C}| < \mathfrak{p}$. Si para cualesquiera $A \in \mathcal{A}$ y $F \in [\mathcal{C}]^{<\omega} \setminus \{\emptyset\}$ sucede que $A \cap \bigcap F$ es infinito, entonces existe B, una pseudointersección de $\mathcal{C}$, que intersecta en una infinidad de puntos a todo elemento de $\mathcal{A}$.

Supongamos que $\mathcal{C}$ cumple todo lo mencionado anteriormente. Ahora fijemos $\alpha \in \lambda$ y observemos que si F_0 y F_1 son subconjuntos finitos no vacíos de $\mathcal{A}_\alpha$ y $\mathcal{C}$, respectivamente, entonces $\bigcap F_0 \in \mathcal{A}_\alpha$ y, por hipótesis, $(\bigcap F_0) \cap \bigcap F_1$ es infinito. En otras palabras, $\mathcal{A}_\alpha \cup \mathcal{C}$ es una familia fuertemente centrada cuya cardinalidad es menor a $\mathfrak{p}$ y, por ende, posee una pseudointersección, digamos B_α. De este modo, siempre que F es un subconjunto finito no vacío de $\mathcal{C}$, se sigue que $B_\alpha \subseteq^* \bigcap F$ y, en particular, $|B_\alpha \cap \bigcap F| = \omega$.

Lo hecho en el párrafo anterior nos garantiza que las familias $\{B_\alpha : \alpha < \lambda\}$ y $\mathcal{C}$ satisfacen las hipótesis del teorema 4.16 (estamos tomando $\kappa = \max\{\lambda, |\mathcal{C}|\} < \mathfrak{p}$) y por lo tanto existe B, una pseudointersección de $\mathcal{C}$, de tal modo que $B \cap B_\xi$ es infinito para cualquier $\xi < \lambda$. De esta manera, si $A \in \mathcal{A}$, entonces existe $\alpha < \lambda$ con $A \in \mathcal{A}_\alpha$ y como $B_\alpha \subseteq^* A$, se deduce que $B \cap A$ es infinito. Esto completa la prueba de la Afirmación.

Ahora, con ayuda de la afirmación anterior, definiremos recursivamente $(C_\alpha : \alpha < \lambda)$, una λ-sucesión, de modo que lo siguiente se satisface para cualquier $\beta < \alpha$:

(i) Si $\beta < \gamma < \lambda$, entonces $C_\gamma \subseteq^* C_\beta$,

(ii) C_β es pseudointersección de $\mathcal{A}_\beta$ y

(iii) $|C_\beta \cap A| = \omega$ para cada $A \in \mathcal{A}$.

Sea $\alpha < \lambda$ y supongamos definido $(C_\beta : \beta < \alpha)$ de manera que se satisfacen las condiciones (i), (ii) y (iii). Definamos $\mathcal{C}_\alpha := \{C_\beta : \beta < \alpha\} \cup \mathcal{A}_\alpha$ y para obtener C_α emplearemos la afirmación de arriba aplicada a $\mathcal{C}_\alpha$. Entonces, lo primero que debemos notar es que $|\mathcal{C}_\alpha| < \mathfrak{p}$. Ahora, si $A \in \mathcal{A}$, $D \in [\mathcal{A}_\alpha]^{<\omega} \setminus \{\emptyset\}$ y $E \in [\alpha]^{<\omega} \setminus \{\emptyset\}$, se tiene que $\bigcap D \in \mathcal{A}_\alpha \subseteq \mathcal{A}$ y, por lo tanto, $H := A \cap \left(\bigcap D\right) \in \mathcal{A}$. Por otro lado, si $\gamma := \max(E)$, entonces de (i) se deduce que $C_\gamma \subseteq^* \bigcap_{\beta \in E} C_\beta$, y luego, por (iii), $C_\gamma \cap H$ es infinito. Entonces $\left(\bigcap_{\beta \in E} C_\beta\right) \cap H$ es infinito. Así, por la Afirmación, existe C_α, una pseudointersección de $\mathcal{C}_\alpha$ que tiene intersección infinita con todo elemento de $\mathcal{A}$. De este modo tenemos asegurado que C_α satisface (i), (ii) y (iii).

Probemos ahora que la familia $\{C_\alpha : \alpha < \lambda\}$ es fuertemente centrada. Esto es secillo ya que si $F \in [\lambda]^{<\omega}$ y, al igual que en el párrafo anterior, hacemos $\delta := \max(F)$, por la condición (i), se sigue que $C_\delta \subseteq^* \bigcap F$. Como C_δ es infinito, ha de suceder que $\bigcap F$ también lo es. Por otro lado, la familia $\{C_\alpha : \alpha < \lambda\}$ posee menos de $\mathfrak{p}$ elementos, por ello y lo argumentado anteriormente, existe C_λ una pseudointersección de dicha familia.

Por último, probaremos que C_λ es pseudointersección de $\mathcal{A}$. Si $A \in \mathcal{A}$, entonces existe $\alpha < \lambda$ de modo que $A \in \mathcal{A}_\alpha$; por (ii), C_α es pseudointersección de $\mathcal{A}_\alpha$, pero $C_\lambda \subseteq^* C_\alpha \subseteq^* A$. Por tanto $C_\lambda \subseteq^* A$. Lo cual es un absurdo, ya que, por construcción $\mathcal{A}$ carece de pseudointersecciones. Esta contradicción muestra que $\mathfrak{p}$ es regular.

$\square$

[1] M. G. Bell, *On the combinatorial principle* $P(\mathfrak{c})$, Fundamenta Mathematicae, 114(2), 149-157, 1981.

[2] D. H. Fremlin, *Consequences of Martin's Axiom*, Cambridge Tracts in Mathematics vol. 84, Cambridge University Press, London 1984.

[3] J. A. Gallardo Quiroz, *El principio combinatorio de Jensen.* Tesis de licenciatura, Facultad de Ciencias, Universidad Nacional Autónoma de México, 2014.

[4] F. Hernández Hernández, *Teoría de Conjuntos (una introducción)*, Aportaciones Matemáticas, Serie Textos 13, Sociedad Matemática Mexicana, 1998.

[5] K. Kunen, *Set theory. An introduction to independence proofs*, Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, vol. 102, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1980.

[6] J. R. Munkres, *Topology*, Prentice Hall, segunda edición, 2000.

[7] J. C. Oxtoby, *Measure and Category. A survey of the analogies between Topological and Measure Spaces.* Graduate texts in Mathematics vol. 2, Springer, 1970.

[8] H. L. Royden, *Real Analysis.* Macmillan, 1988.

[9] W. Weiss, *Versions of Martin's Axiom*, en Handbook of Set-Theoretic Topology, K. Kenneth y J.E. Vaughan (editores), North-Holland, 1984, pp. 827-886.