UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

PARACOMPACIDAD Y ESPACIOS DE DOWKER

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
M A T E M Á T I C O

P R E S E N T A:

VÍCTOR HUGO YAÑEZ SALAZAR

DIRECTOR DE TESIS:
M. EN C. ALEJANDRO DARÍO ROJAS SÁNCHEZ

2015

Ciudad Universitaria, D. F.

1. Datos del alumno
Yañez
Salazar
Víctor Hugo
55 98 65 05
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Matemáticas
307528430

2. Datos del tutor
M. en C.
Alejandro Darío
Rojas
Sánchez

3. Datos del sinodal 1
Dr.
Ángel
Tamariz
Mascarúa

4. Datos del sinodal 2
Dr.
Javier
Páez
Cárdenas

5. Datos del sinodal 3
Dr.
Gerardo
Acosta
García

6. Datos del sinodal 4
Dra.
Gabriela
Campero
Arena

7. Datos del trabajo escrito
Paracompacidad y Espacios de Dowker
115 p
2015.

Índice general

Agradecimientos

Haber concluido la realización de este trabajo ha sido un proceso muy grande e importante para mí. Quisiera agradecer a las siguientes personas que han hecho todo esto posible.

Antes que nada quiero agradecer a mis sinodales, por haber revisado mi trabajo y por todas los valiosis comentarios con respecto al mismo. Muchas gracias por todo.

A mi querida abuela, María Rojas Francés. Mi primera maestra y una gran inspiración para todos los aspectos de mi vida.

Al mejor hermano del mundo, Agustín Fest, que siempre me ha apoyado en todo. Mi mejor amigo desde siempre y un gran modelo a seguir.

A mi querida tía, Imperio Shanks, quien me mostró que los sueños pueden volverse realidad. Jamás podré terminar de agradecerte todas tus enseñanzas, todo el cariño y todo el apoyo que me has dado.

A mi madre y a mis tíos, Tayde, Ángel y Daniel Salazar. Por enseñarme y cuidar tanto de mí.

A Javier Páez, que siempre me ha recibido con una gran sonrisa y un consejo. Por haberme transmitido este gusto y amor por las matemáticas. Por siempre haberme apoyado en este largo viaje.

A Gabriela Campero, por haberme enseñado tanto. Por todos esos grandes consejos y cariño. Por haberme dado la oportunidad de trabajar junto con ella. Por transmitirme este gran amor que siento por la Teoría de Conjuntos. Muchas gracias por todo.

A Alejandro Rojas, por todo su gran apoyo y consejo. Por haberme aceptado como tesista y haber sido paciente conmigo. Por todo lo que me ha enseñado y me sigue enseñando aún.

A Ángel Tamariz, por todo el apoyo y consejo. Por darme tantas oportunidades para mejorar como matemático. Por inspirarme a seguir aprendiendo.

A Manuel Zúñiga, mi gran amigo. Por todo su apoyo y amistad a lo largo de la carrera. Por nunca dejarme caer y por inspirarme a dar siempre lo mejor de mí. Tu compañía ha sido como la de un hermano para mí.

A mis queridos amigos, Cintia, Paco, Ximena, Lalo, Ademar y Montse. Por haber hecho de este viaje mi gran alegría. Por siempre dotarme de sonrisas y fortaleza hasta en los momentos más difíciles. Por siempre haberme apoyado y enseñado tanto. Los quiero mucho.

A mis ayudantes, Paty, Héctor, Eric, Andrés y Juan Carlos. Por haber sido pacientes conmigo y por haberme empapado de tantas enseñanzas.

A Francisco Moreno, por todo su apoyo y amistad todos estos años. Por entender mis locuras.

A Antonio Medrano, por todo lo que me ha enseñado a través del ejemplo. Por recordarme que la vida no es sólo la academia.

A Tyler Young, quien me inspiró con sólo una pequeña chispa. Por haber creído en mí.

Cada experiencia y cada momento que he logrado vivir con ustedes es el mejor tesoro que pude haber encontrado en mi vida.

Introducción

Dentro del área de la Topología General uno de los conceptos fundamentales es el de *espacio compacto*. Estos espacios poseen una característica increíblemente poderosa que nos permite deducir resultados de gran fuerza sobre su estructura. Es a partir de esta definición donde se empieza el estudio de condiciones más débiles de compacidad como lo son el concepto de *espacio numerablemente compacto*, *espacio pseudocompacto* y el objeto de estudio de este trabajo, los *espacios paracompactos*.

El objetivo de este trabajo es evolucionar el concepto de *espacio paracompacto* como una versión "local"del concepto de compacidad, partiendo de aquí veremos que estos espacios resultarán ser una versión más fuerte del concepto de *normalidad*, lo cual nos permite realizar una pequeña jerarquía sobre aquellas propiedades que extienden a ese concepto. Para poder seguir las ideas planteadas en este trabajo es recomendable que el lector tenga algunos conocimientos previos del área de *Topología General* y de *Teoría de Conjuntos*, en concreto este trabajo estará muy apegado a las notaciones, conceptos y resultados abordados en [Ca], [En], [Ta] y [Wi], para preservar la estructura y claridad de las ideas se intentará que, salvo por conceptos básicos y definiciones, este mismo trabajo proporcione las herramientas que estaremos necesitando en nuestras demostraciones.

Un detalle importante es la clara división en dos partes que hemos realizado en este trabajo y esto se debe a algunas diferencias tanto de dificultad de los conceptos como de ritmo en las demostraciones.

En la primera parte nosotros comenzaremos desarollando el concepto de *espacio paracompacto*, encontraremos varías caracterizaciones y estudiaremos propiedades básicas con respecto a su comportamiento. Para esto nos apegaremos un poco en las ideas planteadas tanto por R. Engelking [En] y S. Willard [Wi], pero agregamos una importante cantidad de ejemplos para no sólo reafirmar los conceptos, sino también refutar posibles equivalencias entre ellos. También, de ser posible, buscamos generalizar algunos conceptos expuestos en estos dos libros, así como realizar cada demostración con lujo de detalle y de la manera más formal posible.

Algunas observaciones importantes para el primer capítulo, son:

- En la sección 1.4 revisamos una caracterización adicional para los espacios paracompactos atribuida a Michael [Mi] que utiliza una versión más débil del concepto de *familia localmente finita*. Esto nos permitirá deducir de forma muy elemental el comportamiento de los espacios paracompactos con respecto a las funciones continuas, cerradas y suprayectivas.

- En la sección 1.5 hacemos una breve pausa para revisar un hermoso resultado de Lutzer

[Lu], completamente ajeno tanto a [En] y [Wi] que nos permite demostrar de forma muy elemental el comportamiento de propiedades que se heredan a cerrados dentro de los espacios *linealmente ordenados*. Este resultado será de gran importancia para nosotros durante el capítulo 3 pues nos permite *mejorar considerablemente* un resultado clásico de M. E. Rudin con respecto a los espacios linealmente ordenados.

Durante el segundo capítulo nosotros debilitaremos el concepto de paracompacidad para aterrizar en la *paracompacidad numerable*. En este capítulo revisaremos qué propiedades y herramientas podemos rescatar de las que ya habíamos desarollado, e intentaremos estudiar por qué muchas de éstas empiezan a fallar en esta versión más débil.

Algunas observaciones importantes para este segundo capítulo, son:

- Dedicamos una sección (2.2) en el segundo capítulo al estudio del concepto de *binormalidad*, el cual nos permite comenzar a estudiar si la paracompacidad numerable tiene también alguna relación íntima con el concepto de *normalidad*.

  En esta sección revisamos una primera caracterización muy clásica de estos espacios atribuida a Dowker [Do], que es producto de una propiedad muy fuerte sobre los espacios normales.

  En esta sección proponemos un nuevo y sencillo lema (2.9) que nos servirá como puente para poder realizar una *caracterización fundamental para los espacios binormales*, resultado que combina todas las caracterizaciones atribuídas a Michael [Mi], Morita [Mo1] y Mansfield [Ma]. Este resultado lo compararemos con las caracterizaciones que habíamos obtenido anteriormente para la paracompacidad, resaltando que puede ser engañoso querer generalizarlas de manera directa, también destacamos cuáles son las razones por las cuales no podemos generalizarlas de ese modo.

  También revisamos un teorema atribuído a Morita [Mo2] (teorema 2.12), que nos permite generalizar el comportamiento de la paracompacidad numerable con respecto a los subconjuntos F_σ en un espacio binormal.

- En la sección 2.15 introducimos un resultado de Henriksen e Isbell [He] que nos permite deducir de una manera muy elemental el comportamiento del producto de un espacio numerablemente paracompacto con un *espacio compacto*.

- Finalmente, en la sección 2.4 revisamos un resultado de Stone [St] con respecto al producto arbitrario de espacios métricos, que utiliza fuertemente la teoría de los espacios binormales. Las ideas clave para estos resultados se desarollan de manera paralela con las expuestas (como ejercicio) en Willard [Wi].

Durante la segunda parte intentaremos resolver una pregunta que planteamos al final del segundo capítulo: *¿existirá un espacio normal que no sea binormal?* Para esta última sección (y capítulo) nos apegaremos a las ideas planteadas por M. E. Rudin en dos de sus artículos que abordan estas preguntas, [Ru1] y [Ru2]. Hacemos la separación de esta sección esperando que el lector ya se encuentre completamente familiarizado con todos los conceptos, técnicas y resultados expuestos dentro de la primera sección así como de conocimientos intermedios del area de Teoría de Conjuntos (mismos que son expuestos en [Ca]). Esto será fundamental para poder seguir las ideas de este capítulo, que serán expuestas de una manera más directa pero sin descartar la formalidad, en concreto se espera que un estudio adecuado de la primera sección sirva como preparación adecuada para estudiar este último capítulo.

Algunas observaciones para el tercer y último capítulo son:

- En la sección 3.1 mejoramos un resultado de M. E. Rudin (teorema 3.7) publicado en [Ru2] que asegura que ningún espacio linealmente ordenado puede ser un espacio de Dowker. Haciendo uso del teorema de Lutzer [Lu] que introdujimos en la sección 1.4 deducimos que, de hecho, *ningún subespacio de un espacio linealmente ordenado* puede ser un espacio de Dowker.

- En la sección 3.2 introducimos el concepto de $\clubsuit$ de la manera original de Ostaszweski [Os], y nos proponemos a revisar la existencia de un espacio de Dowker que es consistente con los axiomas de Zermelo-Fraenkel con elección. Este ejemplo propuesto por Rudin en [Ru2] y que aquí denominamos $\mathcal{D}_1$ se desarolla de manera completa y formal. Salvo la definición del espacio e ideas muy generales sobre él mismo, proponemos y demostramos en este trabajo todas las técnicas, lemas auxiliares y algunas propiedades adicionales no abordadas por Rudin en el artículo original.

- En la tercera y última sección abordamos la construcción del espacio de Rudin realizada en [Ru1], el cual es un ejemplo de un espacio de Dowker bajo el sistema de Zermelo-Fraenkel con elección. Durante esta última sección abordamos la demostración de cada proposición con completa formalidad, mostramos explícitamente las partes donde se requiere el axioma de elección y realizamos algunos lemas adicionales y sencillos de Teoría de Conjuntos que aclararán y servirán de apoyo a lo largo de las demostraciones.

Esperamos que este trabajo no sólo invite al lector a interesarse por el estudio de los espacios paracompactos, sino que también pueda servir como una pequeña guía de consulta cuando necesite revisar algún resultado o propiedad de estos espacios. Sin nada más que agregar, invitamos al lector a iniciar este viaje con nosotros y visitar lo que son los espacios paracompactos.

Parte I

Paracompacidad

Capítulo 1

Espacios Paracompactos

1.1. Preliminares

Las nociones de metrizabilidad y de compacidad son fundamentales para la Topología General pues son las estructuras más comúnmente usadas en el Análisis Matemático, una de las áreas más importantes de las matemáticas.

Algunas preguntas naturales que suelen surgir son, ¿existirá una estructura más general que la de los espacios compactos?, de ser así ¿esta estructura seguirá siendo rica en propiedades? ¿cómo estará relacionada con los espacios métricos?

Ante estas preguntas Diudonné introdujo la noción de paracompacidad en 1944[1], pero lo que él no sabía es que su trabajo iba a mostrar conceptos que no sólo proporcionarían una respuesta afirmativa a estas preguntas, sino que además darían pie a la prueba de algunos resultados muy necesarios para el estudio de los espacios métricos.

Antes de realizar un estudio de los espacios paracompactos es necesario recordar algunas definiciones básicas. Recordemos que un espacio topológico es de *Hausdorff* o T_2 si para cualesquiera dos puntos distintos x y y existen abiertos ajenos U y V del espacio tales que $x \in U$ y $y \in V$. Una familia $\mathcal{F}$ es una *cubierta abierta* de un espacio topológico X, si es una familia de abiertos tal que $\bigcup \mathcal{F} = X$. Así mismo una *subcubierta* $\mathcal{G}$ de una cubierta $\mathcal{F}$ es una familia de abiertos $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ que cumple ser una cubierta del espacio X. Por último un espacio topológico es *compacto* si toda cubierta abierta tiene una subcubierta finita.

A partir de ahora trabajaremos bajo el contexto de los espacios *Hausdorff* a menos que se mencione lo contrario.

Definición 1.1. *Dadas dos cubiertas $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ de un espacio topológico X decimos que $\mathcal{U}$ refina a $\mathcal{V}$ si y sólo si para cada $U \in \mathcal{U}$ existe $V \in \mathcal{V}$ tal que $U \subseteq V$. Así mismo también decimos que $\mathcal{U}$ es un refinamiento de $\mathcal{V}$. Si $\mathcal{U}$ es un refinamiento de $\mathcal{V}$, escribimos $\mathcal{U} < \mathcal{V}$.*

Algunas observaciones inmediatas son que toda cubierta abierta es un refinamiento de sí misma y que, además, es posible enunciar el concepto de compacidad usando esta definición.

Proposición 1.2. *Un espacio topológico X es compacto si y sólo si toda cubierta abierta de X tiene un refinamiento finito.*

[1]Dieudonné, Jean (1944), "*Une généralisation des espaces compacts*", Journal de Mathématiques Pures et Appliquées

Demostración. Sean $\mathcal{U}$ una cubierta de X y $\mathcal{V} = \{V_1, \ldots, V_n\}$ un refinamiento finito de $\mathcal{U}$.

Consideremos a la familia

$$\mathcal{U}_{V_i} = \{Z \in \mathcal{U} \mid V_i \subseteq Z\}$$

Puesto que $\mathcal{V}$ refina a $\mathcal{U}$, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ tenemos que $\mathcal{U}_{v_i} \neq \emptyset$. Así, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ consideremos a $\widetilde{V_i} \in \mathcal{U}_{V_i}$. Entonces la familia $\widetilde{\mathcal{U}} = \{\widetilde{V_1}, \ldots, \widetilde{V_n}\}$ es refinada por $\mathcal{V}$ y por tanto

$$X = \bigcup \mathcal{V} = \bigcup \widetilde{\mathcal{U}}.$$

Exhibiendo que $\widetilde{\mathcal{U}}$ es una subcubierta finita de $\mathcal{U}$.

Ahora si X es un espacio compacto, cualquier subcubierta finita es en sí un refinamiento finito. □

Esta caracterización de compacidad da pie a investigar qué sucede al pedirle propiedades aún más específicas a los refinamientos de una cubierta. Además en topología es muy usual preguntarse por el caso *local* y el caso de los refinamientos no será la excepción.

Definición 1.3. *Sea X un espacio topológico. Decimos que una familia $\mathcal{F}$ de subconjuntos de X es localmente finita si para cada $x \in X$ existe una vecindad U de x tal que U sólo intersecta a un número finito de elementos de la familia $\mathcal{F}$.*

Con esta nueva definición en mano ya podemos preguntarnos qué pasa en el caso local en cuanto a las cubiertas y los refinamientos, esto es a lo que se le llama *paracompacidad.*

Definición 1.4. *Un espacio topológico es paracompacto si toda cubierta abierta tiene un refinamiento abierto localmente finito.*

Como toda buena definición que busca generalizar un concepto anterior, es necesario exhibir que en efecto caracteriza a una estructura nueva y que es una extensión natural del concepto que busca generalizar.

Proposición 1.5. *Todo espacio compacto es paracompacto.*

Demostración. Sea X un espacio compacto y sea $\mathcal{U}$ una cubierta abierta de X. Sea $\widetilde{\mathcal{U}} = \{U_1, \ldots, U_n\}$ una subcubierta finita de $\mathcal{U}$. Entonces $\widetilde{\mathcal{U}}$ refina a $\mathcal{U}$ y al ser una familia finita entonces claramente también es localmente finita. □

Proposición 1.6. *Todo espacio discreto es paracompacto.*

Demostración. Sea X un espacio discreto. Sea $\mathcal{U}$ una cubierta abierta de X y consideremos a la familia $\mathcal{V} = \{\{x\} \mid x \in X\}$. Claramente $\mathcal{V}$ es un refinamiento abierto de $\mathcal{U}$ localmente finito al ser una familia de unitarios. □

Ejemplo 1.7. *Cualquier conjunto infinito con la topología discreta es un ejemplo de un espacio paracompacto que no es compacto.*

Demostración. Dado que el conjunto es infinito, la cubierta abierta formada por todos los unitarios es una cubierta abierta sin subcubiertas finitas. La proposición anterior, por otra parte, nos asegura que es un espacio paracompacto. □

Proposición 1.8. *Sea X un espacio paracompacto, si todo subespacio abierto de X es paracompacto entonces X es hereditariamente paracompacto.*

Demostración. Sea A un subespacio de X y sea $\mathcal{U}$ una cubierta abierta de A, entonces para cada $U \in \mathcal{U}$, U es de la forma $V_U \cap A$ donde V es abierto en X.

Consideremos a la familia

$$\widetilde{\mathcal{V}} = \{W \mid W \cap A \in \mathcal{U},\ W \in \tau_X\}$$

Entonces $\bigcup \widetilde{\mathcal{V}}$ es un subespacio abierto de X y además $\widetilde{\mathcal{V}}$ es una cubierta abierta de $\bigcup \widetilde{\mathcal{V}}$. Como $\bigcup \widetilde{\mathcal{V}}$ es paracompacto tiene un refinamiento localmente finito $\mathcal{W}$. Sea $\mathcal{W}_A = \{Z \cap A \mid Z \in \mathcal{W}\}$, entonces $\mathcal{W}_A$ es un refinamiento localmente finito de $\mathcal{U}$. □

Ahora que ya empezamos a tomar un poco de confianza con el concepto de paracompacidad estudiando propiedades un tanto usuales (y casi hermanas de las mismas para espacios compactos) es natural querer buscar maneras de caracterizarlos para poder trabajar con ellos de una manera mucho más cómoda. Las caracterizaciones que a continuación estudiaremos nos ayudarán a encontrar la relación entre los espacios métricos y los paracompactos, así como encontrar las relaciones que tienen con respecto a los axiomas de numerabilidad.

Proposición 1.9. *Sea X un espacio topológico y $\mathcal{F}$ una familia localmente finita, entonces:*

$$cl_X(\bigcup \mathcal{F}) = \bigcup \{cl_X(U) \mid U \in \mathcal{F}\}$$

Demostración. Sabemos que para cada $U \in \mathcal{F}$ se cumple que

$$cl_X(U) \subseteq cl_X(\bigcup \mathcal{F})$$

y por tanto

$$\bigcup \{cl_X(U) \mid U \in \mathcal{F}\} \subseteq cl_X(\bigcup \mathcal{F}).$$

Ahora dado $x \in cl_X(\bigcup \mathcal{F})$ puesto que $\mathcal{F}$ es localmente finita existe una vecindad V_x de x tal que el conjunto $\mathcal{F}_x = \{U \in \mathcal{F} \mid V_x \cap U \neq \emptyset\}$ es finito. Por construcción tenemos que $V_x \cap \bigcup (\mathcal{F} \backslash \mathcal{F}_x) = \emptyset$ y por tanto $x \notin cl_X\left(\bigcup (\mathcal{F} \backslash \mathcal{F}_x)\right)$.

En consecuencia,

$$x \in cl_X(\bigcup_{U \in \mathcal{F}_x} U)$$

Pero como $\mathcal{F}_x$ es finito tenemos que

$$cl_X(\bigcup_{U \in \mathcal{F}_x} U) = \bigcup \{cl_X(U) \mid U \in \mathcal{F}_x\}$$

y por tanto

$$x \in \bigcup \{cl_X(U) \mid U \in \mathcal{F}\}.$$

□

Lema 1.10. *Sea X un espacio paracompacto y sean A y B subconjuntos cerrados de X. Si para cada $x \in B$ existen subconjuntos abiertos U_x y V_x tales que $A \subseteq U_x$, $x \in V_x$ y $U_x \cap V_x = \emptyset$ entonces existen dos subconjuntos abiertos U y V de X tales que $A \subseteq U$, $B \subseteq V$ y $U \cap V = \emptyset$.*

Demostración. Consideremos a la familia

$$\mathcal{F} = \{V_x \mid x \in B\} \cup \{X \backslash B\}$$

Entonces $\mathcal{F}$ es una cubierta abierta del espacio X y puesto que X es un espacio paracompacto tiene un refinamiento abierto localmente finito $\mathcal{G}$.

Sea $G = \{U \in \mathcal{G} \mid U \cap B \neq \emptyset\}$ entonces claramente $B \subseteq \bigcup \mathcal{G}$. Notemos además que para cada $U \in G$ tenemos que $cl_X(U) \cap A = \emptyset$ puesto que existe algún $x \in B$ tal que $U \subseteq V_x$, $A \subseteq U_x$ con $U_x \cap V_x = \emptyset$.

Así si definimos a los conjuntos $V = \bigcup \mathcal{G}$ y

$$U = X \backslash \bigcup \{cl_X(U) \mid U \in \mathcal{G}\}$$

entonces tenemos que $A \subseteq U$, $B \subseteq V$ y $U \cap V = \emptyset$. □

Este lema tan parecido a la noción de regularidad nos será útil no solo para establecerla, sino incluso para demostrar que de hecho son espacios normales.

Teorema 1.11. *Todo espacio paracompacto es normal.*

Demostración. Sea X un espacio paracompacto.

Primero verifiquemos regularidad. Sea B un subconjunto cerrado de X y $x \in X \backslash B$. Sea $A = \{x\}$, entonces A es cerrado. Así mismo como X es un espacio Hausdorff, para cada $z \in B$ existen abiertos U_z, V_z de X tales que $z \in U_z$, $x \in V_z$ y $U_z \cap V_z = \emptyset$. Así por el lema anterior existen U, V abiertos de X tales que $B \subseteq U$, $A \subseteq V$ y $U \cap V = \emptyset$. Por tanto, X es regular.

Para verificar normalidad basta aplicar el lema de nuevo, si A y B son cerrados ajenos en X entonces por regularidad, para cada $x \in B$ existen abiertos U_x, V_x tales que $x \in U_x$, $A \subseteq V_x$ y $U_x \cap V_x = \emptyset$ así por el lema anterior existen dos abiertos U y V tales que $B \subseteq U$, $A \subseteq V$ y $U \cap V = \emptyset$. Por tanto, X es normal. □

Más adelante veremos que el espacio linealmente ordenado, $[0, \omega_1)$, es un ejemplo de un espacio normal que no es paracompacto.

Con esto ya establecimos que para que un espacio sea paracompacto al menos tiene que ser un espacio normal, pero para poder dar ejemplos mucho más interesantes es conveniente que estudiemos una caracterización muy útil de los espacios paracompactos. La que presentamos a continuación utiliza una generalización del concepto de familia localmente finita.

1.2. Una Primera Caracterización

Definición 1.12. *Sea X un espacio topológico. Decimos que una familia $\mathcal{F}$ de subconjuntos de X es σ-localmente finita si y sólo si $\mathcal{F} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_n$ donde cada $\mathcal{F}_n$ es una familia localmente finita.*

Debe ser muy intuitivo que toda familia localmente finita es, en efecto, una familia σ-localmente finita, pero es importante notar que no toda familia σ-localmente finita es localmente finita:

Ejemplo 1.13. *Consideremos a $\mathbb{N}$ con la topología discreta.*

Para cada $i \in \mathbb{N}$ consideremos a la familia

$$\mathcal{F}_i = \{\{n\} \mid n > 0\} \cup \{\{0, \ldots, i\}\}.$$

Ahora para cada $z \in \mathbb{N}$ tenemos que la familia $\{U \in \mathcal{F}_i \mid z \in U\}$ tiene a lo más dos elementos y por tanto la familia $\mathcal{F} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{F}_i$ es σ-localmente finita.

Notemos que $\mathcal{F}$ no es localmente finita pues la familia $\mathcal{S} = \{\{0, \ldots, i\} \mid i \in \mathbb{N}\}$ es infinita y además para cada $U \in \mathcal{S}$ se tiene que $0 \in U$.

Ahora bien, no hay por que desanimarse pues de hecho sí podemos rescatar todo lo que hemos estudiado sobre familias localmente finitas, recordando que lo que más nos preocupa es el problema de los *refinamientos* de una cubierta.

Lema 1.14. *Toda cubierta abierta σ-localmente finita tiene un refinamiento localmente finito (pero que no necesariamente es abierto).*

Demostración. Sea X un espacio topológico y sea $\mathcal{V}$ una cubierta abierta σ-localmente finita del espacio X. Supongamos que $\mathcal{V} = \bigcup_{i=0}^{\infty} \mathcal{V}_i$ donde para cada $i \in \mathbb{N}$ la familia $\mathcal{V}_i$ es localmente finita.

Además consideremos que para cada $i \in \mathbb{N}$, $\mathcal{V}_i = \{V_s \mid s \in S_i\}$ y que

$$\forall i \in \mathbb{N}, \forall j \in \mathbb{N}\,(i \neq j \implies S_i \cap S_j = \emptyset)$$

Ahora para cada i consideremos al conjunto $W_i = \bigcup \mathcal{V}_i$, entonces cada W_i es abierto y además la familia $\widetilde{\mathcal{F}} = \{W_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ es una cubierta abierta de X.

También para cada i consideremos al conjunto

$$A_i = W_i \backslash \left(\bigcup_{j<i} W_j \right)$$

Notemos que la familia $\widetilde{\mathcal{G}} = \{A_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ es una familia localmente finita pues dado $x \in X$ existe un primer $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x \in W_{n_0}$ y para cada $k < n_0$ se cumple $x \notin W_k$. Así $x \in A_{n_0}$ y además por construcción $W_{n_0} \cap A_m = \emptyset$ para cada $m > n_0$, así W_{n_0} es una vecindad de x que intersecta sólo a un número finito de elementos de $\widetilde{\mathcal{G}}$.

Consideremos a la familia

$$\mathcal{F} = \left\{ A_n \cap V_s \mid n \in \mathbb{N}, s \in \bigcup_{i=0}^{n} S_i \right\}$$

Aseguramos que $\mathcal{F}$ es localmente finita pues dado $x_0 \in X$ y $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_0 \in W_{k_0}$ y $\forall k < k_0\,(x \notin W_k)$ entonces $x_0 \in A_{k_0}$ y $\forall l > k_0 (x_0 \notin A_l)$. Así W_{k_0} es una vecindad de x que sólo intersecta a los primeros k_0 elementos de $\widetilde{\mathcal{G}}$, pero por definición de cada A_i, esta vecindad de x_0 intersecta a lo más a la familia $\{W_0, \ldots, W_{k_0}\}$. Así como cada $\mathcal{V}_i$ es localmente finita existen vecindades $N_0, \ldots, N_{k_0}$ de x_0 tales que intersectan a un número finito de elementos de $\mathcal{V}_0, ...\mathcal{V}_{k_0}$ respectivamente, por tanto $U = \bigcap_{i=0}^{k_0} N_i \cap W_{k_0}$ es una vecindad de x_0 que sólo intersecta a un número finito de elementos de la familia $\mathcal{F}$.

Así $\mathcal{F}$ es un refinamiento localmente finito de $\mathcal{V}$. □

Lema 1.15. *Sea X un espacio topológico. Si $\mathcal{F} = \{A_i \mid i \in I\}$ es una familia localmente finita entonces $\overline{\mathcal{F}} = \{cl_X(A_i) \mid i \in I\}$ también es localmente finita.*

Demostración. Sea $x \in X$ y consideremos a U una vecindad de x tal que el conjunto $\{A_i \in \mathcal{F} \mid A_i \cap U \neq \emptyset\}$ es finito. Así sin perdida de generalidad:

$$\{A_i \in \mathcal{F} \mid A_i \cap U \neq \emptyset\} = \{A_{\alpha_1}, \ldots, A_{\alpha_n}\}$$

Notemos que si $\alpha \notin \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ entonces $A_\alpha \cap U = \emptyset$ y por tanto $cl_X(A_\alpha) \cap U = \emptyset$. De tal manera que

$$\forall \alpha \in I \setminus \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \, (cl_X(A_k) \cap U = \emptyset).$$

Así, $|\{A_i \in \mathcal{F} \mid cl_X(A_i) \cap U \neq \emptyset\}| < \aleph_o$ y por tanto $\overline{\mathcal{F}}$ es localmente finita. □

Ya por fin estamos preparados para dar una primera caracterización de los espacios paracompactos.

Teorema 1.16. *Sea X un espacio regular. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *X es paracompacto;*
2. *toda cubierta abierta de X tiene un refinamiento abierto σ-localmente finito;*
3. *toda cubierta abierta de X tiene un refinamiento localmente finito (no necesariamente abierto); y*
4. *toda cubierta abierta de X tiene un refinamiento cerrado localmente finito.*

Demostración. 1) $\implies$ 2) Sea $\mathcal{U}$ una cubierta abierta de X, como X es paracompacto existe un refinamiento abierto localmente finito $\mathcal{V}$ de $\mathcal{U}$. Así, $\mathcal{V}$ es un refinamiento abierto σ-localmente finito de $\mathcal{U}$.

2) $\implies$ 3) Ahora, sea $\mathcal{U}$ una cubierta abierta de X y $\mathcal{V}$ un refinamiento abierto σ-localmente finito de $\mathcal{U}$. Entonces por el Lema 1.14 $\mathcal{V}$ tiene un refinamiento localmente finito, y este a su vez es un refinamiento localmente finito de $\mathcal{U}$.

3) $\implies$ 4) Sea $\mathcal{U}$ una cubierta abierta de X, entonces para cada $x \in X$ consideremos a $U_x \in \mathcal{U}$ tal que $x \in U_x$. Por la regularidad de X existe un abierto V_x tal que

$$x \in V_x \subseteq cl_X V_x \subseteq U_x.$$

Así la familia $\mathcal{F} = \{V_x \mid x \in X\}$ es una cubierta de X y por 3) tiene un refinamiento localmente finito $\mathcal{G} = \{U_i \mid i \in I\}$ (no necesariamente abierto). Por el Lema 1.15, la familia

$\overline{\mathcal{G}} = \{cl_X(U_i) \mid i \in I\}$ es localmente finita y cerrada. Como para cada $i \in I$ existe $x \in X$ tal que $U_i \subseteq V_x$ entonces

$$\forall i \in I, \exists x \in X(cl_X\,(U_i) \subseteq cl_X\,(V_x) \subseteq U_x).$$

Por tanto $\overline{\mathcal{G}}$ es un refinamiento cerrado localmente finito de $\mathcal{U}$.

4) $\implies$ 1) Finalmente, sea $\mathcal{U}$ una cubierta abierta de X y sea $\mathcal{V}$ un refinamiento cerrado localmente finito de $\mathcal{U}$. Para cada $x \in X$ sea W_x una vecindad abierta de x que sólo intersecta a un número finito de elementos de $\mathcal{V}$. Consideremos a $\mathcal{F} = \{W_x \mid x \in X\}$, entonces $\mathcal{F}$ es una cubierta abierta de X y por 3) tiene un refinamiento cerrado localmente finito $\widetilde{\mathcal{F}}$.

Ahora, dado $V \in \mathcal{V}$ consideremos a

$$V^* = X \backslash \bigcup \left\{ A \in \widetilde{\mathcal{F}} \mid A \cap V = \emptyset \right\}$$

Notemos que para cada $V \in \mathcal{V}$ el conjunto V^* es abierto puesto que la familia

$$\left\{ A \in \widetilde{\mathcal{F}} \mid A \cap V = \emptyset \right\}$$

es una familia localmente finita de cerrados, y por la Proposición 1.9 su unión es un conjunto cerrado. Aseguramos que el conjunto $\mathcal{V}^* = \{V^* \mid V \in \mathcal{V}\}$ es cubierta de X.

Dado $x \in X$, como $\mathcal{V}$ es una cubierta de X existe $V_x \in \mathcal{V}$ tal que $x \in V_x$, ahora dado $A \in \widetilde{\mathcal{F}}$ notemos que si $A \cap V_x = \emptyset$ entonces $x \notin A$. Por tanto,

$$\forall A \in \widetilde{\mathcal{F}}\,(A \cap V_x = \emptyset \implies x \notin A)$$

y por tanto

$$x \in X \backslash \bigcup \left\{ A \in \widetilde{\mathcal{F}} \mid A \cap V_x = \emptyset \right\} = V_x^*$$

Así $\bigcup \mathcal{V}^* = X$. Ahora para cada $V \in \mathcal{V}$ consideremos a $U_V \in \mathcal{U}$ tal que $V \subseteq U_V$ y finalmente al conjunto $W_V = U_V \cap V^*$, entonces aseguramos que la familia $\mathcal{W} = \{W_V \mid V \in \mathcal{V}\}$ es un refinamiento abierto localmente finito de $\mathcal{U}$. Notemos que cada miembro es una intersección finita de abiertos y por tanto abierto. Observemos que por construcción

$$\forall V \in \mathcal{V}\,(W_V \subseteq U_V)\,.$$

Por último notemos que

$$\forall x \in X(x \in V_x^* \cap U_{V_x} \in \mathcal{W})$$

y por tanto es una cubierta abierta de X. Basta ahora con demostrar que es una familia localmente finita. Notemos que dado $A \in \widetilde{\mathcal{F}}$ tenemos que por definición de V_x^*,

$$\forall x \in X\,(V_x^* \cap A \neq \emptyset \iff V_x \cap A \neq \emptyset)\,.$$

Por tanto como la familia $\mathcal{V}$ es localmente finita existe una vecindad N_x que sólo intersecta a un número finito de elementos de $\mathcal{V}$ y por tanto de $\widetilde{\mathcal{F}}$, a su vez como $\widetilde{\mathcal{F}}$ es localmente finita podemos encontrar una vecindad M_x que sólo intersecta a un número finito de elementos de $\widetilde{\mathcal{F}}$. Así la vecindad $N_x \cap M_x$ de x intersecta a sólo un número finito de elementos de $\mathcal{W}$. Por tanto, $\mathcal{W}$ es un refinamiento abierto localmente finito de $\mathcal{U}$ y por tanto X es un espacio paracompacto. □

Esta primera caracterización que nos permite utilizar familias σ-localmente finitas va a ser de gran utilidad para demostrar algunos resultados extremadamente importantes de los espacios paracompactos y en especial nos permitirá por fin relacionarlos con los espacios métricos. Antes de abordar este problema de lleno, es importante que veamos un par de consecuencias inmediatas de este teorema.

Corolario 1.17. *Todo espacio Lindelöf regular es paracompacto.*

Demostración. Sea X un espacio Lindelöf y $\mathcal{U}$ una cubierta abierta de X. Como X es un espacio Lindelöf existe una subcubierta abierta numerable $\widetilde{\mathcal{U}}$ de $\mathcal{U}$. Supongamos que $\widetilde{\mathcal{U}} = \{U_i \mid i \in \mathbb{N}\}$, entonces como para cada i los unitarios $\{U_i\}$ son familias localmente finitas tenemos que $\widetilde{\mathcal{U}} = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \{U_i\}$ y es, por tanto, una familia σ-localmente finita. Como X es un espacio regular, por el teorema anterior X es un espacio paracompacto. □

Es importante notar que el regreso no necesariamente ocurre.

Ejemplo 1.18. *Consideremos al espacio ω_1 con la topología discreta, entonces es un espacio paracompacto al ser un espacio discreto pero no es un espacio Lindelöf, la familia de los unitarios es una cubierta abierta no numerable sin subcubiertas numerables.*

Ahora bien, este resultado también nos ayuda para deducir algo muy importante: tristemente la paracompacidad no es una propiedad *productiva*.

Ejemplo 1.19. *Consideremos a la recta de Sorgenfrey $\mathcal{L}_S$. Al ser un espacio regular y Lindelöf tenemos que es un espacio paracompacto por el Corolario 1.17. Recordemos, además, que el producto $\mathcal{L}_S \times \mathcal{L}_S$ no es un espacio normal y por tanto tampoco es paracompacto. Así el producto de espacios paracompactos no necesariamente es paracompacto.*

1.3. El Teorema de Stone

El ya tan prometido (y poderoso) resultado que veremos a continuación no sólo nos dará una gran cantidad de ejemplos de espacios paracompactos, también nos abrirá las puertas para observar que de hecho el producto de espacios paracompactos tiene problemas aún teniendo un factor que es métrico.

Teorema 1.20 (de Stone)**.** *En un espacio pseudométrico cualquier cubierta abierta tiene un refinamiento abierto localmente finito.*

Demostración. Sea (X, ρ) un espacio topológico con la topología inducida por la pseudométrica ρ. Sea $\mathcal{U}$ una cubierta abierta de X.

Para cada $U \in \mathcal{U}$ y para cada $n \in \omega$ definimos al siguiente conjunto,

$$U_n = \left\{ x \in U \mid \rho(x, X \backslash U) \geq \frac{1}{2^n} \right\}$$

Notemos que si $y \in U_n$ y $z \in X \backslash U_{n+1}$ entonces $\rho(y, X\backslash U) \geq \frac{1}{2^n}$ y $\rho(z, X\backslash U) < \frac{1}{2^{n+1}}$. Es decir, dado $a \in X\backslash U$ tenemos que: $\rho(y, a) \geq \frac{1}{2^n}$ y $\rho(z, a) < \frac{1}{2^{n+1}}$ y así por la desigualdad del triángulo tenemos que para cada $a \in u$

$$\frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^{n+1}} \leq \rho(y, a) - \rho(z, a) \leq \rho(y, z)$$

y así

$$\frac{1}{2^{n+1}} \leq \rho\left(U_n, X \backslash U_{n+1}\right).$$

Ahora consideremos a $(\mathcal{U}, \prec)$ donde la relación $\prec$ bien ordena al conjunto $\mathcal{U}$. Así para cada $U \in \mathcal{U}$ y para cada $n \in \omega$ consideremos al siguiente conjunto,

$$U_n^* = U_n \backslash \bigcup \left\{V_{n+1} \mid V \in \mathcal{U}, V \prec U\right\}.$$

Notemos que si $U \prec V$ entonces $V_n^* \subseteq X \backslash U_{n+1}$ y como $U_n^* \subseteq U_n$ entonces por la primera observación tenemos que

$$\frac{1}{2^{n+1}} \leq \rho\left(U_n^*, V_n^*\right).$$

De nueva cuenta para cada $U \in \mathcal{U}$ y para cada $n \in \omega$ definimos

$$U_n^{**} = \left\{x \in X \mid \rho\left(x, U_n^*\right) < \frac{1}{2^{n+3}}\right\}.$$

Entonces puesto que la topología es la inducida por la pseudométrica ρ, cada U_n^{**} es abierto. Además afirmamos que

$$\forall U \in \mathcal{U}, \forall V \in \mathcal{U}, \forall n \in \omega (U \neq V \implies \rho\left(U_n^{**}, V_n^{**}\right) \geq \frac{1}{2^{n+2}}).$$

Puesto que si $\rho\left(U_n^{**}, V_n^{**}\right) < \frac{1}{2^{n+2}}$ entonces existirían $x_o \in U_n^{**}$ y $y_o \in V_n^{**}$ tales que

$$\rho\left(x_o, y_o\right) < \frac{1}{2^{n+2}}.$$

Así, por las observaciones anteriores y la desigualdad del triángulo tenemos que:

$$\frac{1}{2^{n+1}} \leq \rho\left(U_n^*, V_n^*\right) \leq \rho\left(x_o, U_n^*\right) + \rho(x_o, y_o) + \rho\left(y_o, V_n^*\right) < \frac{1}{2^{n+1}}.$$

Lo cual es una contradicción.

Así si consideramos para cada $n \in \omega$ al conjunto $\mathcal{V}_n = \{U_n^{**} \mid U \in \mathcal{U}\}$ entonces cada $\mathcal{V}_n$ es una familia localmente finita pues si $x \in U_n^{**}$ por la observación anterior el mismo U_n^{**} es una vecindad de x que sólo intersecta a un miembro de la familia $\mathcal{V}_n$, él mismo. Por tanto la familia $\mathcal{V} = \bigcup_{n \in \omega} \mathcal{V}_n$ es σ-localmente finita.

Ahora, notemos que para cada $U \in \mathcal{U}$ y para cada $n \in \omega$ se cumple que

$$U_n^{**} \subseteq U.$$

Pues dado $x \in U_n^{**}$ por definición $\rho(x, U_n^*) < \frac{1}{2^{n+3}}$, de manera que para cada $z \in U_n^*$, dado que $\rho(z, X \backslash U) \geq \frac{1}{2^n}$, se sigue que

$$\frac{1}{2^{n+3}} < \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^{n+3}} \leq \rho\left(z, X \backslash U\right) - \rho(x, z) \leq \rho\left(x, X \backslash U\right).$$

Es decir, $0 < \rho\left(x, X \backslash U\right)$ y por tanto $x \in U$.

Por último, $\mathcal{V}$ es una cubierta abierta de X pues dado $x \in X$ existe un elemento $\prec$-mínimo de $\mathcal{U}$, $V(x)$ tal que $x \in V(x)$. Así mismo existe una $m \in \omega$ mínima tal que $x \in V(x)_m$ y por tanto $x \in V\left(x\right)_m^* \subseteq V(x)_m^{**}$.

Por tanto el espacio X es paracompacto. $\square$

Corolario 1.21. *Todo espacio metrizable es paracompacto*

Este resultado es bastante impresionante a primera vista pues los espacios métricos no compactos nos son muy familiares y además nos da una herramienta bastante útil para probar resultados en los espacios métricos, justo una de las razones más importantes por las cuales el estudio de los espacios paracompactos tomó una gran importancia dentro de la topología.

Ahora que tenemos este resultado, veremos un ejemplo importante que nos será muy útil mas adelante.

Ejemplo 1.22 (la línea de Michael)**.** *Definimos una topología sobre* $\mathbb{R}$ *como sigue: un conjunto* W *es abierto si y sólo si* $W = U \cup V$ *donde* U *es abierto en la topología usual de* $\mathbb{R}$ *y* $V \subseteq \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$. *A este espacio topológico lo denotamos por* $\mathbb{M}$. *Aseguramos que* $\mathbb{M}$ *(conocido como la línea de Michael) es paracompacto.*

Demostración. Primero notemos que todo abierto en la topología usual de $\mathbb{R}$ es abierto en $\mathbb{M}$, así $\mathbb{M}$ es un espacio Hausdorff.

Sea $\mathcal{U}$ una cubierta abierta de $\mathbb{M}$, entonces $\mathcal{U}$ también es una cubierta de $\mathbb{R}$. Ahora consideremos a la familia $A = \{int_{\mathbb{R}}(U) \mid U \in \mathcal{U}\}$, entonces es una cubierta abierta del subespacio abierto $\bigcup A$ de $\mathbb{R}$. Como $\bigcup A$ es metrizable entonces por el Teorema de Stone es un espacio paracompacto, así existe un refinamiento abierto localmente finito $\mathcal{F}$ de A. Notemos que como $\bigcup A$ es un subespacio abierto de $\mathbb{R}$, entonces cada miembro de la familia $\mathcal{F}$ es abierto en $\mathbb{R}$ y por tanto en $\mathbb{M}$.

Ahora consideremos al conjunto $R = (\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}) \backslash \bigcup \mathcal{F}$. Así la familia $\widetilde{\mathcal{F}} = \mathcal{F} \cup \{\{x\} \mid x \in R\}$ es un refinamiento abierto localmente finito de $\mathcal{U}$. □

Este ejemplo clásico fue utilizado por E. Michael para demostrar que (de hecho) no podemos asegurar que el producto de un espacio paracompacto con un espacio métrico tiene que ser paracompacto. Más adelante cuando veamos este ejemplo veremos que motivó uno de los problemas fundamentales de la teoría de los espacios paracompactos: ¿qué se necesita para que el producto de un espacio paracompacto con un espacio Hausdorff sea un espacio normal?

1.4. Una Segunda Caracterización

La segunda caracterización que presentaremos se enfoca en aquellas familias que preservan *cerradura,* esta caracterización clásica presentada por Michael es de gran utilidad para demostrar el comportamiento de los espacios paracompactos bajo funciones continuas. Para esto requerimos establecer un par de definiciones y de lemas.

Definición 1.23. *Sea* X *un espacio topológico. Una familia* $\mathcal{F}$ *de subconjuntos de* X *es discreta si para cada* $x \in X$ *existe una vecindad* U_x *de* x *que intersecta a lo más a un elemento de* $\mathcal{F}$. *Así mismo una familia* $\mathcal{F}$ *es* σ*-discreta si y sólo si* $\mathcal{F} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{F}_i$ *donde cada* $\mathcal{F}_i$ *es una familia discreta.*

Esta es una versión más fuerte de las familias localmente finitas, puesto que toda familia (σ-)discreta es (σ-)localmente finita. Una observación inmediata es que toda familia discreta de abiertos necesariamente es una familia de abiertos ajena por pares si consideramos a ellos mismos como las vecindades para los puntos en el espacio.

Definición 1.24. *Sea X un espacio topológico. Una familia $\mathcal{F} = \{U_s \mid s \in S\}$ de subconjuntos de X preserva cerradura si*

$$\forall S_o \in \mathcal{P}(S)\,[cl_X(\bigcup\{U_s \mid s \in S_o\}) = \bigcup\{cl_X(U_s) \mid s \in S_o\}].$$

Notemos que por la Proposición 1.9 toda familia localmente finita preserva cerradura pero no toda familia que preserva cerradura es localmente finita.

Ejemplo 1.25. *Consideremos a $\mathbb{N}$ con la topología discreta. La familia $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ preserva cerradura pero claramente no es localmente finita.*

Lema 1.26. *Sea X un espacio topológico tal que toda cubierta abierta de cardinalidad a lo más κ (con κ infinito) tiene un refinamiento cerrado que preserva cerradura, entonces:*

1. *Si $\mathcal{U} = \{U_s \mid s \in S\}$ con $|S| \leq \kappa$ es una cubierta abierta de X entonces tiene un refinamiento cerrado que preserva cerradura $\mathcal{F} = \{F_s \mid s \in S\}$ tal que $\forall s \in S\,(F_s \subseteq U_s)$.*

2. *X es normal.*

Demostración. 1) Sea $\mathcal{U} = \{U_s \mid s \in S\}$ con $|S| \leq \kappa$ una cubierta abierta de X y sea $\mathcal{U}'$ un refinamiento
cerrado que preserva cerradura de $\mathcal{U}$. Ahora para cada $s \in S$ consideremos al conjunto $A_s = \{A \in \mathcal{U}' \mid A \subseteq U_s\}$. Como $\mathcal{U}'$ preserva cerradura entonces

$$\forall s \in S\left(\bigcup A_s \text{ es cerrado y } \bigcup A_s \subseteq U_s\right).$$

Así si definimos para cada $s \in S$ al conjunto $F_s = \bigcup A_s$ entonces la familia $\mathcal{F} = \{F_s \mid s \in S\}$ es un refinamiento cerrado que preserva cerradura de $\mathcal{U}$.

2) Sean A y B cerrados ajenos de X. Entonces la familia $\mathcal{U} = \{X\backslash A, X\backslash B\}$ es una cubierta abierta de X. Por el inciso 1) existe una familia $R = \{F_1, F_2\}$ de cerrados que preserva cerradura y que refina $\mathcal{U}$. Sin perdida de generalidad supongamos que $F_1 \subseteq X\backslash A$ y que $F_2 \subseteq X\backslash B$. Así obtenemos que

$$A \subseteq X\backslash F_1, B \subseteq X\backslash F_2 \text{ y } (X\backslash F_1) \cap (X\backslash F_2) = X\backslash(F_1 \cup F_2) = \emptyset$$

Por tanto X es normal. □

Lema 1.27 (de Dowker). *Sea X un espacio normal. Si $\mathcal{U} = \{U_s \mid s \in S\}$ es una familia de abiertos ajenos por pares y $\{V_s \mid s \in S\}$ es una familia de subconjuntos de X tales que $\bigcup_{s\in S} V_s$ es cerrado y $\forall s \in S\,(V_s \subseteq U_s)$ entonces existe una familia discreta de abiertos $\{W_s \mid s \in S\}$ tal que*

$$\forall s \in S\,(V_s \subseteq W_s \subseteq U_s)$$

Demostración. Consideremos al conjunto $A \subseteq X$ de aquellos $x \in X$ tal que existe una vecindad abierta B_x que intersecta a un número finito de elementos de $\mathcal{U}$.

Notemos que A es abierto pues para cada $z \in A$ se tiene que $B_z \subseteq A$, además tenemos que $\bigcup_{s\in S} V_s \subseteq A$. Como X es normal y $\bigcup_{s\in S} V_s$ es cerrado entonces existe un abierto W tal que

$$\bigcup_{s\in S} V_s \subseteq W \subseteq cl_X(W) \subseteq A.$$

Ahora consideremos para cada $s \in S$ al conjunto $W_s = U_s \cap W$. Entonces claramente cada W_s es abierto al ser intersección de dos abiertos y además $V_s \subseteq W_s$. Consideremos a la familia $\mathcal{W}' = \{W_s \mid s \in S\}$.

Dado $x \in X$ si $x \in A$ entonces la vecindad B_x sólo intersecta a un elemento de $\mathcal{W}'$. Si $x \notin A$ entonces $x \notin cl_x(W)$, por tanto existe una vecindad V_x de x tal que $V_x \cap cl_x(W) = \emptyset$ y por tanto no intersecta a ningún elemento de $\mathcal{W}'$.

Así $\mathcal{W}'$ es una familia discreta de abiertos que cumple lo deseado. □

Ya estamos listos para estudiar nuestra segunda caracterización de espacios paracompactos.

Teorema 1.28 (de Michael)**.** *Sea X un espacio regular. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *X es paracompacto;*
2. *toda cubierta abierta de X tiene un refinamiento abierto que preserva cerradura;*
3. *toda cubierta abierta de X tiene un refinamiento (no necesariamente abierto) que preserva cerradura; y*
4. *toda cubierta abierta de X tiene un refinamiento cerrado que preserva cerradura.*

Demostración. Las implicaciones 1) $\implies$ 2) $\implies$ 3) son inmediatas.

3) $\implies$ 4) Sea $\mathcal{U}$ una cubierta abierta de X. Como X es regular entonces dado $x \in X$ y $V \in \mathcal{U}$ si $x \in V$ entonces existe un abierto U_x tal que

$$x \in U_x \subseteq cl_X(U_x) \subseteq V.$$

Así existe una cubierta abierta $\mathcal{V}$ de X tal que la familia

$$\overline{\mathcal{V}} = \{cl_X(V) \mid V \in \mathcal{V}\}$$

es un refinamiento de $\mathcal{U}$. Sea $\mathcal{F}$ un refinamiento que preserva cerradura de $\mathcal{V}$, entonces la familia

$$\overline{\mathcal{F}} = \{cl_X(F) \mid F \in \mathcal{F}\}$$

es un refinamiento cerrado que preserva cerradura de $\mathcal{U}$.

4) $\implies$ 1) Sea $\mathcal{U} = \{U_s \mid s \in S\}$ una cubierta abierta de X. Supongamos que $(\mathcal{U}, <_{\mathcal{U}})$ y $(S, <_S)$ son conjuntos bien ordenados tales que

$$\forall p, s \in S \left(p <_S s \iff U_p <_{\mathcal{U}} U_s\right).$$

Ahora para cada $k \in \mathbb{N}$ definiremos inductivamente familias $\{C_{s,k} \mid s \in S\}$ tales que:

1. $\{C_{s,k} \mid s \in S\}$ es una cubierta cerrada de X que preserva cerradura tal que $\forall s \in S\,(C_{s,k} \subseteq U_s)$
2. $\forall s, t \in S(t <_S s \implies C_{s,k+1} \cap C_{t,k} = \emptyset)$

Para $n = 1$ notemos que el Lema 1.26 (1) nos asegura la existencia de dicha cubierta. Supongamos que tenemos definidas a las familias para $i \in \{1, \ldots, n\}$. Construyamos $\{C_{s,n+1} \mid s \in S\}$:

Para cada $s \in S$ consideremos a los conjuntos

$$U_{s,n+1} = U_s \backslash \left(\bigcup_{t <_S s} C_{t,n} \right).$$

Entonces como la familia $\{C_{s,n} \mid s \in S\}$ preserva cerradura, para cada $s \in S$ el conjunto $U_{s,n+1}$ es abierto. Consideremos a la familia

$$\{U_{s,n+1} \mid s \in S\}.$$

Entonces esta familia es una cubierta de X pues dado $x \in X$ se cumple que el conjunto

$$\{U_s \in \mathcal{U} \mid x \in U_s\} \neq \emptyset$$

y por tanto tiene un elemento $<_{\mathcal{U}}$-mínimo U_{s_0}. Así

$$\forall t(t <_S s_0 \implies (x \notin U_t)).$$

Tenemos entonces que,

$$x \notin \bigcup_{t <_S s_0} C_{t,n} \text{ y por tanto } x \in U_{s_0,n+1}.$$

Ahora por el Lema 1.26 sea $\{C_{s,n+1} \mid s \in S\}$ un refinamiento cerrado que preserva cerradura de la cubierta $\{U_{s,n+1} \mid s \in S\}$ tal que

$$\forall s \in S\,(C_{s,n+1} \subseteq U_{s,n+1}).$$

Así por la construcción de la familia $\{U_{s,n+1} \mid s \in S\}$ tenemos que

$$\forall t(t <_S s \implies (C_{t,n+1} \cap C_{s,n} = \emptyset)). \tag{1.1}$$

Para cada $s \in S$ y para cada $i \in \mathbb{N}$ consideremos al conjunto

$$V_{s,i} = X \backslash \left(\bigcup_{t \neq s} C_{t,i} \right).$$

Consideremos a la familia $\{V_{s,i} \mid s \in S, i \in \mathbb{N}\}$. Notemos que para cada $s \in S$ y para cada $i \in \mathbb{N}$ el conjunto $V_{s,i}$ es abierto pues la familia $\{C_{t,i} \mid s \in S\}$ preserva cerradura. Además por definición tenemos que

$$\forall s \in S, \forall i \in \mathbb{N}\,(V_{s,i} \subseteq C_{s,i} \subseteq U_s).$$

Y además por construcción dado $i \in \mathbb{N}$,

$$s <_S t \left(V_{s,i} \cap V_{t,i} = \emptyset\right).$$

Ahora sea $x \in X$, entonces como la familia $\{C_{s,i} \mid s \in S\}$ es un refinamiento de la cubierta $\mathcal{U}$ entonces por el buen orden de S podemos definir $\alpha_i = mín\{s \in S \mid x \in C_{s,i}\}$. Así mismo sea $\alpha_k = mín\,\{\alpha_i \mid i \in \mathbb{N}\}$.

Así $x \in V_{\alpha_k,k+1}$ pues como $x \in C_{\alpha_k,k}$ entonces por construcción y por minimalidad de α_k tenemos que:

$$\forall \alpha(\alpha <_S \alpha_k \implies (x \notin C_{\alpha,k+1})).$$

Y así mismo por 1.1,

$$\forall \alpha(\alpha >_S \alpha_k \implies (x \notin C_{\alpha,k+1})).$$

Entonces la familia $\{V_{s,i} \mid s \in S, i \in \mathbb{N}\}$ es una cubierta abierta de X. Utilizando de nuevo el Lema 1.26 sea $\{D_{s,i} \mid s \in S, i \in \mathbb{N}\}$ un refinamiento cerrado que preserva cerradura de esta cubierta tal que

$$\forall s \in S, \forall i \in \mathbb{N}\left(D_{s,i} \subseteq V_{s,i}\right).$$

Por último para cada $i \in \mathbb{N}$ utilizando el Lema de Dowker consideremos una familia discreta de abiertos $\{W_{s,i} \mid s \in S\}$ tales que

$$\forall s \in S\left(D_{s,i} \subseteq W_{s,i} \subseteq V_{s,i}\right).$$

Entonces la familia $\{W_{s,i} \mid s \in S, i \in \mathbb{N}\}$ es un refinamiento abierto σ-discreto de $\mathcal{U}$ y por tanto σ-localmente finito. Usando así el Teorema 1.16 tenemos que X es paracompacto. □

En concreto, esta caracterización nos será muy útil para concluir un resultado que involucra a las imágenes bajo funciones continuas de los espacios paracompactos, para esto nos hará falta recordar un pequeño lema. También, por comodidad, denotaremos a la imagen inversa de un conjunto A bajo una función f como $f^{\leftarrow}[A]$.

Lema 1.29. *Sea X y Y dos espacios topológicos y $f : X \longrightarrow Y$ una función continua, cerrada y suprayectiva. Si X es un espacio normal entonces Y también lo es.*

Demostración. Consideremos dos cerrados ajenos A y B en Y. Por continuidad los conjuntos $f^{\leftarrow}[A]$ y $f^{\leftarrow}[B]$ son cerrados ajenos en X, por normalidad podemos encontrar dos abiertos ajenos U y V en X tales que $f^{\leftarrow}[A] \subseteq U$ y $f^{\leftarrow}[B] \subseteq V$. Puesto que la función f es cerrada los conjuntos $Y \backslash f[X \backslash U]$ y $Y \backslash f[X \backslash V]$ son abiertos y ajenos en Y. Ahora, como $f^{\leftarrow}[A] \subseteq U$ y f es una función suprayectiva tenemos que

$$f\left[f^{\leftarrow}[A]\right] \cap f[X \backslash U] = A \cap f[X \backslash U] = \emptyset$$

Así $A \subseteq Y \backslash f[X \backslash U]$ y análogamente $B \subseteq Y \backslash f[X \backslash V]$. Por tanto Y es un espacio normal. □

Corolario 1.30. *Sean X y Y dos espacios topológicos y $f : X \longrightarrow Y$ una función continua, cerrada y suprayectiva. Si X es un espacio paracompacto entonces Y también es paracompacto.*

Demostración. Puesto que la normalidad se preserva bajo funciones continuas y cerradas tenemos que Y es un espacio normal. Sea $\mathcal{U}$ una cubierta abierta de Y entonces la familia

$$\mathcal{V} = \{f^{\leftarrow}[U] \mid U \in \mathcal{U}\}$$

es una cubierta abierta de X. Por el teorema anterior y el Lema 1.26 existe una familia $\mathcal{W} = \{V_U \mid U \in \mathcal{U}\}$ refinamiento cerrado de $\mathcal{V}$ que preserva cerradura tal que

$$\forall U \in \mathcal{U}\,(V_U \subseteq f^{\leftarrow}[U])\,.$$

Así como f es una función continua y cerrada la familia $\mathcal{F} = \{f[V_U] \mid U \in \mathcal{U}\}$ es un refinamiento cerrado que preserva cerradura de $\mathcal{U}$. Así, Y es paracompacto. $\square$

Corolario 1.31. *Sea X un espacio paracompacto, si $\mathcal{U} = \{U_s \mid s \in S\}$ es una cubierta abierta de X entonces existe un refinamiento abierto (cerrado) localmente finito $\mathcal{V} = \{V_s \mid s \in S\}$ tal que $\forall s \in S\,(V_s \subseteq U_s)$.*

Demostración. Como X es un espacio paracompacto entonces por el Teorema de Michael y una construcción análoga a la realizada en el Lema 1.26 (usando que unión de abiertos es abierta de ser necesario) existe un refinamiento abierto (cerrado) localmente finito $\mathcal{V} = \{V_s \mid s \in S\}$ tal que $\forall s \in S\,(V_s \subseteq U_s)$. $\square$

Esta última caracterización reduce el problema de la paracompacidad a familias que preservan cerradura, una propiedad que (clásicamente) se ha presentado que poseen las familias localmente finitas (como indica la Proposición 1.9). Como hemos visto en las demostraciones previas al teorema de Michael, poder encontrar este tipo de familias reduce considerablemente la dificultad de estudiar a nuestro espacio.

El corolario que acabamos de ver nos indica particularmente que la paracompacidad es una propiedad topológica (como naturalmente se sospechaba) pero ya entrados en gastos es natural querer saber qué sucede con los subespacios de espacios paracompactos, su relación con respecto a las otras formas de compacidad y más aún: dado X paracompacto, ¿podemos al fin encontrar condiciones necesarias y suficientes sobre un espacio Y tal que $X \times Y$ sea un espacio paracompacto?

1.5. Normalidad Colectiva

Como vimos anteriormente todo espacio paracompacto es de hecho un espacio normal, en esta pequeña sección estudiaremos una familia de espacios intermedia entre los espacios paracompactos y los espacios normales: los espacios colectivamente normales.

Definición 1.32. *Un espacio topológico X es colectivamente normal si para cada familia $\{F_s \mid s \in S\}$ discreta de cerrados existe una familia $\{U_s \mid s \in S\}$ discreta de abiertos tales que*

$$\forall s \in S\,(F_s \subseteq U_s)$$

Una observación inmediata es que todo espacio colectivamente normal es un espacio normal pues si tomamos dos cerrados ajenos A y B, entonces la familia $\{A, B\}$ es discreta, por la normalidad colectiva los dos abiertos ajenos U y V tales que $A \subseteq U$ y $B \subseteq V$ son una familia discreta de abiertos como la buscada. Más adelante veremos que el regreso de esta afirmación no siempre es cierta.

Antes que nada será conveniente introducir una caracterización bastante sencilla para trabajar con más comodidad.

Teorema 1.33. *Un espacio topológico. X es un espacio colectivamente normal si y sólo si para cada familia $\{F_s \mid s \in S\}$ discreta de cerrados existe una familia $\{U_s \mid s \in S\}$ de abiertos ajenos por pares tales que*

$$\forall s \in S\,(F_s \subseteq U_s)$$

Demostración. Como una familia discreta de abiertos siempre es ajena por pares, basta con demostrar el recíproco de esta afirmación.

Primero veamos que X es un espacio normal: sean A y B dos cerrados ajenos de X, entonces la familia $\{A, B\}$ es discreta y por hipótesis existe una familia $\{U_A, U_B\}$ de abiertos ajenos tales que $A \subseteq U_A$ y $B \subseteq U_B$. Así X es un espacio normal.

Ahora sea $\mathcal{F} = \{F_s \mid s \in S\}$ una familia discreta de cerrados y $\{U_s \mid s \in S\}$ la familia de abiertos ajenos por pares tales que $\forall s \in S\,(F_s \subseteq U_s)$.

Como $\mathcal{F} = \{F_s \mid s \in S\}$ es una familia discreta entonces es localmente finita y así por la Proposición 1.9 el conjunto $G = \bigcup \mathcal{F}$ es cerrado, así mismo el conjunto $H = X \setminus \bigcup_{s \in S} U_s$ también es cerrado.

Como G y H son ajenos y X es un espacio normal existen dos abiertos ajenos U y V tales que $G \subseteq U$ y $H \subseteq V$. Consideremos a la familia $\{W_s \mid s \in S\}$ donde

$$\forall s \in S\,(W_s = U_s \cap U)$$

Aseguramos que es la familia discreta de abiertos buscada. Dado $s \in S$ tenemos que $F_s \subseteq U_s$ y como $\bigcup \mathcal{F} = G \subseteq U$ entonces tenemos que

$$F_s \subseteq U_s \cap U = W_s$$

Veamos que es discreta: sea $x \in X$, si $x \in H$ entonces V es una vecindad abierta de x que no intersecta a ningún elemento de la familia $\{W_s \mid s \in S\}$. De lo contrario si $x \notin H$ entonces existe $s_0 \in S$ tal que $x \in U_{s_0}$ y así $x \in W_{s_0}$, como la familia $\{W_s \mid s \in S\}$ es ajena por pares entonces W_{s_0} es una vecindad abierta de x que intersecta sólamente a un elemento de la misma familia. Así X es un espacio colectivamente normal. □

Proposición 1.34. *Todo espacio numerablemente compacto y paracompacto es compacto.*

Demostración. Recordemos que en un espacio numerablemente compacto toda familia localmente finita de abiertos es finita. Así en un espacio que cumpla estas dos condiciones se tiene que toda cubierta abierta tendrá un refinamiento finito. □

Utilizando esta nueva caracterización ya podemos ligar este concepto con el de espacio paracompacto.

Ejemplo 1.35. *El espacio linealmente ordenado* $[0, \omega_1)$ *es un ejemplo de un espacio numerablemente compacto no paracompacto. Más adelante también veremos que, de hecho, es un espacio hereditariamente colectivamente normal.*

Proposición 1.36. *Todo espacio paracompacto es colectivamente normal.*

Demostración. Sea X un espacio paracompacto y sea $\mathcal{F} = \{F_s \mid s \in S\}$ una familia discreta de cerrados en X. Para cada $x \in X$ sea U_x un abierto que a lo más intersecta a un elemento de $\mathcal{F}$. Consideremos a la cubierta abierta $\mathcal{U} = \{U_x \mid x \in X\}$, entonces como X es un espacio paracompacto usando el Corolario 1.31 existe un refinamiento abierto localmente finito $\mathcal{W} = \{W_s \mid s \in S\}$ de la cubierta $\mathcal{U}$. Ahora para cada $s \in S$ sea

$$V_s = X \setminus \bigcup \{cl_X(W) \mid W \in \mathcal{W},\, cl_X(W) \cap F_s = \emptyset\}$$

Así tenemos que para cada $s \in S$, $F_s \subseteq V_s$ y además por la Proposición 1.9 V_s es abierto en X. Ahora notemos que dado $W \in \mathcal{W}$ tenemos que $W \subseteq U_x$ para alguna $x \in X$, así $cl_X(W)$ intersecta a lo más a un elemento de $\mathcal{F}$ puesto que U_x intersecta a lo más a un elemento de $\mathcal{F}$ y por tanto a lo más a un elemento de la familia $\mathcal{V} = \{V_s \mid s \in S\}$, así la familia $\mathcal{V}$ es discreta y por tanto X es colectivamente normal. □

Ejemplo 1.37 (La construcción de Michael generalizada)**.** *Sea X un espacio topológico y $M \subseteq X$ un subespacio de X. Definimos una topología sobre X como sigue: un conjunto W es abierto si y sólo si $W = U \cup V$ donde U es abierto en la topología de X y $V \subseteq X \setminus M$. A este espacio topológico lo denotamos como X_M.*

Algunas observaciones son que el espacio X_M es Hausdorff al ser una topología más fina que la original. Así mismo notemos que para cada subconjunto U de $X \setminus M$, tenemos que U es abierto en la topología de X_M y así $X \setminus M$ es un subespacio abierto y discreto del espacio X_M.

Por último, cuando el espacio X son los números reales y el subespacio M es el conjunto de números irracionales entonces la construcción genera la línea de Michael (Ejemplo 1.22).

Lema 1.38. *Sea X un espacio topológico y $M \subseteq X$. Si para cualesquiera dos cerrados ajenos A y B del subespacio $M \subseteq X$ existen abiertos ajenos U y V en X tales que $A \subseteq U$ y $B \subseteq V$, entonces el espacio X_M es un espacio normal.*

Demostración. Antes que nada una observación importante es que si consideramos a M como subespacio de X_M entonces dado un abierto U de M existe un abierto de la forma $V \cup W$ donde V es abierto en X y $W \subseteq X \setminus M$ tal que

$$U = (V \cup W) \cap M.$$

Como $W \subseteq X \setminus M$ entonces $U = V \cap M$. Por tanto la topología que hereda M como subespacio de X_M es idéntica a la que hereda del espacio original X.

Sean A y B dos cerrados ajenos en X_M, entonces los conjuntos $A_1 = A \cap M$ y $B_1 = B \cap M$ son cerrados y ajenos en el subespacio M de X, así existen dos abiertos ajenos U y V de X tales que $A_1 \subseteq U$ y $B_1 \subseteq V$. Sean

$$\widetilde{U} = (U \setminus B) \cup (A \setminus M)$$

y

$$\widetilde{V} = (V\backslash A) \cup (B\backslash M)$$

Entonces $\tilde{U}$ y $\tilde{V}$ son dos abiertos ajenos tales que $A \subseteq \tilde{U}$ y $B \subseteq \tilde{V}$ y por tanto X_M es un espacio normal. □

Un comentario importante es que existen espacios compactos donde una construcción de Michael apropiada tendrá como producto un *espacio que no es normal*, esto nos dice que la paracompacidad no es suficiente para poder asegurar que la construcción de Michael seguirá siendo un espacio paracompacto. Un ejemplo de dicho espacio construido a partir de espacios de Fort (y que requiere una cantidad amplia de detalles) puede consultarse sin mayor problema en [En] *(2.3.36)*.

Ahora bien, si nosotros logramos tener una condición más fuerte que sólo la paracompacidad, podemos aún rescatar algo de provecho con respecto a la construcción de Michael.

Lema 1.39. *Si X es un espacio hereditariamente paracompacto entonces el espacio X_M es hereditariamente paracompacto.*

Demostración. Primero notemos que si A es un subespacio de X_M entonces es de la forma $Y_{M'}$ donde $Y \subseteq X$ y $M' = M \cap Y$, así basta probar que el espacio X_M es paracompacto.

Sea $\mathcal{U}$ una cubierta abierta de X_M, entonces $\mathcal{U}$ es de la forma $\{U_s \cup V_s \mid s \in S\}$ donde para cada $s \in S$ el conjunto U_s es abierto en X y V_s es un subconjunto de $X\backslash M$. Consideremos a la familia $\mathcal{U}' = \{U_s \mid s \in S\}$, tenemos que $\mathcal{U}'$ es una cubierta abierta del subespacio abierto $\bigcup \mathcal{U}'$ de X, al ser X un espacio hereditariamente paracompacto entonces la familia $\mathcal{U}'$ tiene un refinamiento abierto localmente finito $\mathcal{V} = \{W_s \mid s \in S\}$ donde para cada $s \in S$ el conjunto W_s es abierto en el espacio $\bigcup \mathcal{U}'$. Como el subespacio $\bigcup \mathcal{U}'$ es abierto en X_M entonces $\mathcal{V}$ es una familia de abiertos localmente finita de X_M.

Por último consideremos a la familia $\mathcal{F} = \mathcal{V} \cup \{\{x\} \mid x \in X\backslash M\}$, entonces $\mathcal{F}$ es una cubierta abierta localmente finita de X_M que refina a $\mathcal{U}$, así X_M es un espacio paracompacto. □

Una observación interesante es que la condición de que el espacio X_M sea hereditariamente paracompacto no es suficiente para que X también lo sea: si consideramos al espacio linealmente ordenado $[0, \omega_1)$ y consideramos a $M = \emptyset$ entonces la construcción de Michael genera al espacio ω_1 con la topología discreta. De esta manera el espacio $[0, \omega_1)_M$ es hereditariamente paracompacto, sin embargo por lo dicho en el Ejemplo 1.35 el espacio $[0, \omega_1)$ ni siquiera es paracompacto.

Con esto por fin podemos encontrar un espacio normal que no es colectivamente normal, y así, probar que en efecto es una generalización de estos mismos.

Ejemplo 1.40 (de Bing)**.** *Denotemos a $2^{\aleph_0}$ con la topología discreta como $\mathcal{C}$ y consideremos al espacio discreto de dos puntos, $\overline{2}$. Consideremos a $\mathcal{F}$ la familia de funciones de $\mathcal{C}$ a $\overline{2}$, entonces es una familia de funciones continuas tales que $|\mathcal{F}| = 2^{|\mathcal{C}|}$ y además separa puntos de cerrados. Así, por el teorema de la diagonal, tenemos que la función $f : \mathcal{C} \longrightarrow \prod_{f \in \mathcal{F}} \overline{2} = \mathcal{D}$ definida como $f(x) = (f_s(x))_{s \in \mathcal{F}}$ es un encaje y así $\mathcal{C}$ es homeomorfo a $f[\mathcal{C}]$.*

Por último consideremos a $M = f[\mathcal{C}]$ como subespacio de $\mathcal{D}$ y hagamos la construcción de Michael, $\mathcal{D}_M$.

Proposición 1.41. *El espacio $\mathcal{D}_M$ es normal.*

Demostración. Sean A y B dos cerrados ajenos en M y sea $C = f^{\leftarrow}[A]$, consideremos a χ_C la función característica de C. Sean $U = \pi^{\leftarrow}_{\chi_C}[\{1\}]$ y $V = \pi^{\leftarrow}_{\chi_C}[\{0\}]$, las imágenes inversas de la χ_C-ésima proyección.

Notemos primero que dado $x \in A$, puesto que la función f es suprayectiva en su imagen, existe $z_x \in C$ tal que $f(z_x) = x$; así

$$\pi_{\chi_C}(x) = \pi_{\chi_C} \circ f(z_x) = \chi_C(z_x) = 1$$

Por tanto $A \subseteq U$ y $B \subseteq V$. Puesto que $U \cap V = \emptyset$, por el Lema 1.38 el espacio $\mathcal{D}_M$ es normal. □

Proposición 1.42. *El espacio $\mathcal{D}_M$ no es colectivamente normal.*

Demostración. Supongamos que $\mathcal{D}_M$ es un espacio colectivamente normal.

Como f es un homeomorfismo tenemos que M es un subespacio discreto de $\mathcal{D}$ y por tanto de $\mathcal{D}_M$. Consideremos a la familia $\mathcal{V} = \{\{x\} \mid x \in M\}$, entonces $\mathcal{V}$ es una familia discreta de cerrados en $\mathcal{D}_M$ y por el Teorema 1.33 existe una familia $\mathcal{W} = \{W_x \mid x \in M\}$ de abiertos ajenos por pares tales que para cada $x \in M$ se cumple que $x \in W_x$. Por la construcción de Michael para cada $x \in M$ tenemos que $W_x = U_x \cup V_x$ donde U_x es un abierto de $\mathcal{D}$ y V_x es un subconjunto de $\mathcal{D} \backslash M$ y por tanto,

$$\forall x \in M \, (x \in U_x)$$

Así la familia $\mathcal{U} = \{U_x \mid x \in M\}$ es una familia de abiertos no vacíos y ajenos por pares que cumple $|\mathcal{U}| = |M| = \mathcal{C}$, contradiciendo el hecho de que en un producto de espacios separables toda familia de abiertos ajenos no vacíos tiene que ser numerable.

Por tanto $\mathcal{D}_M$ es un espacio normal que no es colectivamente normal. □

Para concluir esta pequeña sección revisaremos el comportamiento de los espacios colectivamente normales con respecto a sus subespacios y vamos a estudiar un ejemplo concreto: el de los espacios linealmente ordenados.

Proposición 1.43. *La normalidad colectiva es una propiedad que se hereda a subespacios cerrados.*

Demostración. Sea X un espacio colectivamente normal, $Y \subseteq X$ un subconjunto cerrado de X y
consideremos a $\mathcal{F} = \{F_s \mid s \in S\}$ una familia discreta de cerrados en Y. Notemos que $\mathcal{F}$ también es una familia de cerrados en X gracias a que Y es un subconjunto cerrado de X.

Veamos que $\mathcal{F}$ es una familia discreta en X, consideremos a $x \in X$. Si $x \in Y$ entonces como $\mathcal{F}$ es una familia discreta en Y existe un abierto V_x en X tal que $x \in V_x$ y el conjunto $V_x \cap Y$ intersecta a lo más a un elemento de la familia $\mathcal{F}$. Así, como la familia $\mathcal{F}$ está compuesta de cerrados de Y, entonces el abierto V_x en X sigue intersectando a lo más a un elemento de $\mathcal{F}$.

Por el contrario si $x \notin Y$ entonces el abierto $X \backslash Y$ en X es una vecindad abierta de x que no intersecta a ningún elemento de la familia $\mathcal{F}$, mostrando que $\mathcal{F}$ es una familia discreta de cerrados en X. Como X es un espacio colectivamente normal, entonces existe una familia discreta de abiertos de la forma $\mathcal{U} = \{U_s \mid s \in S\}$ tal que para cada $s \in S$ se tiene que $F_s \subseteq U_s$. Para concluir, consideremos a la familia

$$\mathcal{U}_Y = \{U_s \cap Y \mid s \in S\}$$

Entonces la familia $\mathcal{U}_Y$ es una familia discreta de abiertos en Y, pues si tenemos $x \in Y$ entonces una vecindad V_x de x que intersecta a lo más a un elemento de $\mathcal{U}$ intersectará a lo más a un elemento de $\mathcal{U}_Y$. Así Y es un espacio colectivamente normal. □

Ya armados de este resultado veremos lo que sucede en el caso de los espacios linealmente ordenados, pero primero necesitaremos un par de definiciones por comodidad para al final aterrizar en una observación de Lutzer (¡increíblemente ingeniosa!) que merece el título de teorema. Dentro de lo siguiente es importante recordar que un subconjunto U de un conjunto linealmente ordenado $\langle X, \leq_X \rangle$ es *convexo* si y sólo si para cada par de puntos $x, y \in U$ sucede que si $x \leq_X z \leq_X y$ entonces $z \in U$.

Definición 1.44. *Un espacio linealmente ordenado generalizado es una terna $\langle X, \tau_X, \leq_X \rangle$, donde $\langle X, \leq_X \rangle$ es un orden lineal y τ_X es una topología más fina que la inducida por el orden lineal $\leq_X$ en X, donde además cada punto tiene una base de vecindades de conjuntos convexos con respecto al orden lineal $\leq_X$.*

Una observación sencilla es que si $\langle X, \tau_X, \leq_X \rangle$ es un espacio linealmente ordenado generalizado y $Y \subseteq X$ entonces la terna $\langle Y, \tau_X \restriction_Y, \leq_X \restriction_Y \rangle$ es un espacio linealmente ordenado generalizado.

A estos espacios coloquialmente se les conoce como espacios GO*, por sus siglas en inglés:* g*eneralized* o*rdered spaces.*

Para empezar, probaremos el siguiente lema que nos dejará describir exactamente cómo se comporta la topología que tiene un espacio GO.

Lema 1.45. *Sea $\langle X, \tau_X, \leq_X \rangle$ un espacio* GO *y sea λ_X la topología de orden inducida por el orden $\leq_X$ en X. La familia*

$$\begin{aligned}\mathcal{G}_{\mathcal{O}} = \{(x, \rightarrow) \mid x \in X\} &\cup \{(\leftarrow, x) \mid x \in X\} \\ &\cup \{[x, \rightarrow) \mid [x, \rightarrow) \in \tau_X \setminus \lambda_X\} \cup \{(\leftarrow, x] \mid (\leftarrow, x] \in \tau_X \setminus \lambda_X\}\end{aligned}$$

es una subbase para la topología τ_X.

Demostración. Para probar este lema basta observar lo que sucede en aquellos abiertos que no están en la topología de orden λ_X. Sea $U \in \tau_X \setminus \lambda_X$, consideremos a la familia

$$\mathcal{U} = \{V \in \lambda_X \mid V \subseteq U\}.$$

Notemos entonces que $\bigcup \mathcal{U}$ es un subconjunto propio de U y por tanto podemos tomar $x \in U \setminus \bigcup \mathcal{U}$, ahora, como U es abierto en τ_x consideremos una vecindad abierta convexa N_x de x tal que $x \in N_x \subseteq U$. Observemos que no existen $y, z \in N_x$ tales que $y \leq_X x \leq_X z$ pues de lo contrario la vecindad abierta (y, z) es tal que

$$x \in (y, z) \subseteq N_x \subseteq U.$$

Y por tanto se cumpliría que $x \in \bigcup \mathcal{U}$, lo cual es una contradicción, así podemos concluir que x es un punto extremo del conjunto N_x. Si ocurre que $N_x = \{x\}$ entonces claramente los conjuntos $[x, \rightarrow)$ y $(\leftarrow, x]$ son abiertos en τ_X y además $x \in [x, \rightarrow) \cap (\leftarrow, x] \subseteq U$.

Supongamos entonces que N_x tiene más de un punto y que, sin perdida de generalidad, x es un extremo izquierdo de N_x. Así tenemos que $[x, \rightarrow) = N_x \cup (x, \rightarrow)$ y por tanto $[x, \rightarrow) \in \tau_X$, además también se cumple que dado $y \in N_x \backslash \{x\}$ tenemos que

$$x \in [x, \rightarrow) \cap (\leftarrow, y) \subseteq N_x \subseteq U.$$

Mostrando así que la familia $\mathcal{G}_{\mathcal{O}}$ constituye una subbase para la topología τ_X. $\square$

Teorema 1.46 (de Lutzer)**.** *Todo espacio* GO *está encajado como subespacio cerrado en algún espacio linealmente ordenado.*

Demostración. Sea $\langle X, \tau_X, \leq_X \rangle$ un espacio GO y sea λ_X la topología de orden inducida por el orden $\leq_X$ en X. Consideremos un subconjunto $X^\star$ de $X \times \mathbb{Z}$ construido de la siguiente manera:

$$X^\star = X \times \{0\} \cup \{\langle x, n \rangle \mid [x, \rightarrow) \in \tau_X \backslash \lambda_X,\ n > 0\} \cup \{\langle x, m \rangle \mid (\leftarrow, x] \in \tau_X \backslash \lambda_X,\ m < 0\}$$

Así dotemos a $X^\star$ con el orden lexicográfico $\leq_{X^\star}$ y considerémoslo como un espacio topológico linealmente ordenado. Aseguramos entonces que nuestro espacio original X es homeomorfo al subespacio $X \times \{0\}$ de $X^\star$.

Primero observemos que $X \times \{0\}$ es cerrado: consideremos un punto de la forma $\langle x, n \rangle \in X^\star \backslash (X \times \{0\})$ donde sin pérdida de generalidad $n > 0$, así notemos que la vecindad abierta $(\langle x, n-1 \rangle, \langle x, n+1 \rangle) = \langle x, n \rangle$ separa a este punto del conjunto $X \times \{0\}$, mostrando que es cerrado.

Ahora definamos la función natural $f : \langle X, \tau_X \rangle \to X^\star$ como $f(x) = \langle x, 0 \rangle$, claramente es una función biyectiva y por tanto sólo basta demostrar que es continua y abierta para que sea un homeomorfismo.

Para verificar continuidad basta confirmar que la imagen inversa de segmentos iniciales y finales sea un conjunto abierto puesto que éstos forman una subbase para la topología de orden; siendo así notemos que dado $\langle x, n \rangle \in X^\star$ un elemento $y \in X$ cumple que $f(y) \in (\leftarrow, \langle x, n \rangle)$ si y sólo si $y <_X x$ ó $y \leq_X x$ y $0 < n$, es decir, $y \in f^{\leftarrow}[(\leftarrow, \langle x, n \rangle)]$ si y sólo si $y \in (\leftarrow, x)$ o $y \in (\leftarrow, x]$ y $0 < n$. Por tanto

$$f^{\leftarrow}[(\leftarrow, \langle x, n \rangle)] = (\leftarrow, x) \quad \text{ó} \quad f^{\leftarrow}[(\leftarrow, \langle x, n \rangle)] = (\leftarrow, x]$$

que son abiertos en la topología τ_X. De manera análoga podemos comprobar que en efecto $f^{\leftarrow}[(\langle x, n \rangle, \rightarrow)]$ es abierto en la topología τ_X.

Para demostrar que la función es abierta es suficiente demostrar que los elementos de la subbase $\mathcal{G}_{\mathcal{O}}$ en efecto son conjuntos abiertos en $X \times \{0\}$. Notemos que dado $x \in X$ tenemos que

$$(\leftarrow, x) \times \{0\} = (X \times \{0\}) \cap (\leftarrow, \langle x, 0 \rangle) \quad \text{y} \quad (x, \rightarrow) \times \{0\} = (X \times \{0\}) \cap (\langle x, 0 \rangle, \rightarrow)\ .$$

Ahora consideremos a un $x \in X$ tal que $[x, \rightarrow) \in \tau_X \setminus \lambda_X$, entonces por definición tenemos que $\langle x, 1 \rangle \in X^\star$. Así podemos ver que $\langle y, 0 \rangle \in (X \times \{0\}) \cap (\leftarrow, \langle x, 1 \rangle)$ si y sólo si $y \in [x, \rightarrow)$, exhibiendo entonces que

$$[x, \rightarrow) \times \{0\} = (X \times \{0\}) \cap (\leftarrow, \langle x, 1 \rangle).$$

De manera análoga podemos comprobar que, de hecho,

$$(\leftarrow, x] \times \{0\} = (X \times \{0\}) \cap (\langle x, 1 \rangle, \rightarrow).$$

Y así la imagen de los elementos de la familia $\mathcal{G}_{\mathcal{O}}$ son abiertos en $X \times \{0\}$ y por tanto f es un homeomorfismo. □

Este resultado tan ingenioso muestra su verdadera fuerza cuando trabajamos con propiedades que se heredan a cerrados: si los espacios linealmente ordenados cumplen alguna propiedad que se hereda a cerrados entonces automáticamente *todo subespacio* la cumplirá. Un ejemplo es la normalidad: como todo espacio linealmente ordenado es un espacio normal entonces por el teorema de Lutzer *cualquier espacio linealmente ordenado es hereditariamente normal*.

Es importante observar que este resultado también tiene un significado profundo de fondo: los espacios *GO* resultan ser precisamente *subespacios de espacios linealmente ordenados*, de esta manera siempre podemos pensar sin distinciones en subespacios de linealmente ordenados o en espacios *GO*.

Lema 1.47. *Sea X un espacio linealmente ordenado. Para cualquier familia discreta $\mathcal{F} = \{\{x_s\} \mid s \in S\}$ de unitarios de X existe una familia discreta de abiertos $\mathcal{G} = \{U_s \mid s \in S\}$ tal que para cada $s \in S$ se tiene que $x_s \in U_s$.*

Demostración. Sea X un espacio linealmente ordenado y $\mathcal{F} = \{\{x_s\} \mid s \in \alpha\}$ una familia discreta de unitarios de X indizada con un ordinal α. Notemos que como la familia $\mathcal{F}$ es discreta, entonces para cada $s \in \alpha$ siempre podemos considerar una vecindad abierta N_s de x_s tal que dado $t \in \alpha$ con $t \neq s$ se cumple que $x_t \notin N_s$. Construyamos nuestra familia discreta de abiertos por inducción: como $x_0 \neq x_1$ y X es un espacio Hausdorff, podemos encontrar dos abiertos ajenos V_0 y V_1 tales que $x_0 \in V_0$ y $x_1 \in V_1$; así la familia $\{V_0, V_1\}$ es una familia discreta de abiertos tal que $x_0 \in V_0$ y $x_1 \in V_1$.

Supongamos que tenemos una familia discreta de abiertos $\{V_\delta \mid \delta < \gamma\}$ tal que para cada $\delta < \gamma$ se cumple que $x_\delta \in V_\delta$, notemos además que por lo anterior podemos asumir que para todo $\nu \in \alpha$ con $\nu \notin \beta$ se cumple que

$$x_\nu \notin \bigcup \{V_\delta \mid \delta < \gamma\}.$$

Por regularidad para cada $\delta < \gamma$ podemos considerar una vecindad abierta W_δ de x_δ tal que

$$x_\delta \in W_\delta \subseteq cl_X (W_\delta) \subseteq V_\delta.$$

Construyamos así a la familia $\mathcal{H} = \{W_\delta \mid \delta < \gamma\}$, notemos que también es una familia discreta: dado $x \in X$ una vecindad que intersecta a lo más a un miembro de la familia $\{V_\delta \mid \delta < \gamma\}$ intersectará a lo más a un miembro de la familia $\mathcal{H}$.

Como $x_\gamma \notin \bigcup \{V_\delta \mid \delta < \gamma\}$ entonces

$$x_\gamma \notin \bigcup_{\delta<\gamma} cl_X (W_\delta).$$

Pero como la familia $\mathcal{H}$ es discreta, usando la proposición 1.9 tenemos que

$$x_\gamma \notin cl_X \left(\bigcup \mathcal{H}\right).$$

Así $\{x_\gamma\}$ y $cl_X (\bigcup \mathcal{H})$ son cerrados ajenos en el espacio normal X, por tanto existen dos abiertos ajenos W_γ y U tales que $x_\gamma \in V_\gamma$ y $cl_X (\bigcup \mathcal{H}) \subseteq U$. Notemos ademas que usando que la familia $\mathcal{F}$ es discreta, podemos pedir que para cada $t \in \alpha$ tal que $t \neq \gamma$ se cumpla que $x_t \notin V_\gamma$. Consideremos a la familia

$$\mathcal{G}_\gamma = \mathcal{H} \cup \{W_\gamma\}.$$

Entonces la familia $\mathcal{G}_\gamma$ es discreta y se cumple que para cada $\delta \leq \gamma$ se tiene que $x_\delta \in W_\delta$. De esta manera concluimos el resultado por inducción hasta el ordinal α. □

Proposición 1.48. *Todo espacio linealmente ordenado es colectivamente normal.*

Demostración. Sea X un espacio linealmente ordenado y $\mathcal{F} = \{F_s \mid s \in S\}$ una familia discreta de cerrados de X. Para cada $s \in S$ definamos a

$$W_s = \bigcup \left\{ (x,y) \mid x, y \in F_s \text{ y } (x,y) \cap \bigcup_{t\neq s} F_t = \emptyset \right\}$$

Por definición, para todo $s \in S$ el conjunto W_s es abierto, aseguramos que la familia $\mathcal{G} = \{W_s \mid s \in S\}$ es discreta.

Sea $x \in X$ y N_x una vecindad abierta y convexa de x que sólo intersecta a algún F_s con $s \in S$. Supongamos que N_x intersecta a algún W_t con $t \neq s$, entonces necesariamente intersecta a un intervalo de la forma (a, b) con $a, b \in F_t$. Como $N_x \cap F_t = \emptyset$ y N_x es una vecindad convexa, entonces necesariamente $N_x \subseteq (a, b)$, pues de lo contrario existiría $c \in N_x \backslash (a, b)$ y por convexidad necesariamente $a \in N_x \cap F_t$ o $b \in N_x \cap F_t$, lo cual es una contradicción.

Así como $N_x \subseteq (a, b)$ entonces $(a, b) \cap F_s \neq \emptyset$ y por tanto $W_t \cap F_s \neq \emptyset$, lo cual contradice la definición del conjunto W_t; por tanto N_x sólo intersecta al conjunto W_s, concluyendo de esta manera que la familia $\mathcal{G}$ es discreta.

Ahora consideremos a la familia

$$\mathcal{H} = \left\{ \{x\} \mid x \in \bigcup_{s\in S} F_s \backslash W_s \right\}.$$

Veamos que también es una familia discreta: recordemos que como la familia $\mathcal{F}$ es discreta entonces por la proposición 1.9

$$cl_X \left(\bigcup \mathcal{F}\right) = \bigcup_{s\in S} cl_X (F_s).$$

Notemos que dado $x \in X$ si sucede que $x \in X \backslash cl_X\left(\bigcup \mathcal{F}\right)$ entonces éste mismo abierto es una vecindad que no intersecta a ningún miembro de la familia $\mathcal{H}$, por el contrario si $x \in \bigcup \mathcal{G}$ entonces necesariamente $x \in (a, b)$ donde $a, b \in F_s$ para alguna $s \in S$. Notemos entonces que $(a, b) \subseteq W_s$ y por tanto esta vecindad abierta de x tampoco intersecta a ningún elemento de la familia $\mathcal{H}$.

Supongamos entonces que $x \in F_s \backslash W_s$ para alguna $s \in S$, notemos que necesariamente x es un punto extremo de F_s: si existieran $a, b \in F_s$ tal que $a < x < b$ entonces por definición x no sería un elemento de $F_s \backslash W_s$. También notemos que si sólo existe un punto en $F_s \backslash W_s$ entonces automáticamente una vecindad de x que sólo intersecta a F_s nos basta para concluir, así, supongamos que tenemos al menos dos elementos en $F_s \backslash W_s$. Como la familia $\mathcal{G}$ es discreta, entonces existe una vecindad abierta y convexa N_x de x tal que a lo más intersecta a W_s.

Supongamos sin pérdida de generalidad que existe $y \in F_s \backslash W_s$ con $x < y$, notemos entonces que
$(x, y) \in W_s$ y por tanto $(x, y) \cap F_s \backslash W_s = \emptyset$. Consideremos entonces a la vecindad abierta $(\leftarrow, y) \cap N_x$, entonces $x \in (\leftarrow, y) \cap N_x$ y por construcción sólamente intersecta al unitario $\{x\}$ de la familia $\mathcal{H}$, concluimos así que la familia $\mathcal{H}$ también es discreta. Para más comodidad, índicemos a la familia $\mathcal{H}$ como $\mathcal{H} = \{x_t \mid t \in T\}$, entonces por el lema anterior podemos encontrar una familia discreta de abiertos $\{O_t \mid t \in T\}$ tal que para cada $t \in T$ se cumple que $x_t \in O_t$.

Para cada $s \in S$ consideremos al conjunto abierto

$$V_s = W_s \cup \bigcup \{O_t \mid x_t \in F_s \backslash W_s \text{ y } x_t \in O_t\}.$$

De esta manera aseguramos que la familia $\mathcal{N} = \{V_s \mid s \in S\}$ es la familia discreta de abiertos buscada. Notemos que por construcción para cada $s \in S$ tenemos que $F_s \subseteq V_s$.

Por último dado $x \in X$ usando que las familias $\mathcal{G}$ y $\mathcal{H}$ son discretas podemos encontrar dos vecindades abiertas N_x y M_x de x tal que cada una intersecta a lo más a un elemento de las familias $\mathcal{G}$ y $\mathcal{H}$ respectivamente. Así, la vecindad $N_x \cap M_x$ intersecta a lo más a un miembro de la familia $\mathcal{N}$, mostrando que es discreta.

Por tanto el espacio X es colectivamente normal. $\square$

Combinando este resultado con el teorema de Lutzer y la proposición 1.43 podemos deducir que de hecho,

Corolario 1.49. *Cualquier espacio* GO *es hereditariamente colectivamente normal.*

Recordando por fin a nuestro caballito de batalla, $[0, \omega_1)$, con esto podemos deducir que es un espacio hereditariamente colectivamente normal no paracompacto. Como hemos visto hasta ahora, hay una relación bastante íntima con respecto a la paracompacidad y la normalidad, el hecho de que este espacio no alcance a escalar hasta contar con paracompacidad es testigo de la fuerza que hay detrás de ella.

Más adelante veremos que aún podremos rescatar a este espacio debilitando la condición de la paracompacidad y que, de nueva cuenta, seguirá apareciendo como un ejemplo para descartar posibles equivalencias en nuestras definiciones.

1.6. Subespacios, Suma Libre y la Propiedad Lindelöf

Como vimos en el Corolario 1.17 todo espacio Lindelöf regular es un espacio paracompacto, en esta sección estudiaremos algunos resultados adicionales que relacionan a estas dos propiedades.

Lema 1.50. *Sea X un espacio Lindelöf. Si $\mathcal{F}$ es una familia localmente finita no vacía de subconjuntos de X entonces $\mathcal{F}$ es numerable.*

Demostración. Sea X un espacio Lindelöf y $\mathcal{F}$ una familia localmente finita de subconjuntos no vacíos de X. Entonces para cada $x \in X$ existe una vecindad abierta U_x de x tal que U_x intersecta sólo a un número finito de elementos de $\mathcal{F}$. Consideremos a la cubierta abierta

$$\mathcal{U} = \{U_x \mid x \in X\}$$

Entonces como X es un espacio Lindelöf tiene una subcubierta numerable de la forma

$$\mathcal{U}_N = \{U_n \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Así como cada elemento de la familia $\mathcal{F}$ intersecta sólo a un número finito de elementos de la cubierta $\mathcal{U}_N$ entonces $\mathcal{F}$ es una familia numerable. □

Ahora bien es importante resaltar que el regreso no siempre es cierto, para esto tenemos un ejemplo muy elemental.

Ejemplo 1.51. *Consideremos al espacio linealmente ordenado $[0, \omega_1)$, recordemos que como este espacio es numerablemente compacto entonces no puede contener subespacios cerrados de cardinalidad no numerable.*

Notemos entonces que si tenemos una familia localmente finita de conjuntos no vacíos $\mathcal{F} = \{F_s \mid s \in S\}$ entonces podemos construir una familia localmente finita de puntos $\mathcal{G} = \{\{x_s\} \mid s \in S\}$ tal que para cada $s \in S$ se cumple que $x_s \in F_s$, de este modo tenemos que $\bigcup \mathcal{G}$ constituye un subespacio cerrado de $[0, \omega_1)$ de cardinalidad S.

Utilizando la primera observación obtenemos que $|S| \leq \omega$ y por tanto toda familia localmente finita de $[0, \omega_1)$ tiene que ser numerable, pero en contraste del resultado anterior el espacio $[0, \omega_1)$ no es Lindelöf ya que, de serlo, el espacio resultaría ser compacto.

Algo interesante es que es posible agregar algunas propiedades adicionales que nos permiten deducir un recíproco, para esto necesitaremos enunciar un par de conceptos nuevos.

Definición 1.52. *Sea X un espacio topológico. Decimos que una familia es* celular *si es una familia de abiertos no vacíos y ajenos por pares. A un espacio Hausdorff en donde toda familia celular es a lo más numerable se le conoce como un espacio que satisface la* c.a.c, *o la condición de la anticadena contable.*

Proposición 1.53. *Sea X un espacio topológico que satisface la c.a.c. Si $\mathcal{F}$ es una familia de abiertos no vacíos localmente finita, entonces $\mathcal{F}$ es numerable.*

Demostración. Sea $\mathcal{F} = \{U_i \mid i \in \alpha\}$ una familia de abiertos no vacíos localmente finita y supongamos que no es numerable.

Notemos que sin perdida de generalidad podemos suponer que α es el ordinal no numerable ω_1, pues de no serlo podemos considerar a la familia

$$\mathcal{F}' = \{U_i \mid i \in \alpha \cap \omega_1\} \cup \bigcup_{\omega_1 \leq \delta < \alpha} U_\delta$$

que es localmente finita y de cardinalidad ω_1.

Construyamos una nueva familia de conjuntos de la siguiente manera: como el conjunto U_0 es no vacío, podemos encontrar un elemento $x_0 \in U_0$ y una vecindad abierta N_0 de x_0 que sólo intersecta a un número finito de elementos de $\mathcal{F}$.

De esta manera consideremos al conjunto de índices $I(0) \subseteq \omega_1$ de aquellos elementos de $\mathcal{F}$ que intersectan a N_0. Así para cualquier $\delta \in \omega_1 \backslash I(0)$ tenemos que $U_\delta \cap U_0 = \emptyset$.

Sea $\alpha \in \omega_1$, supongamos que hemos construido la familia celular $\{N_\beta \mid \beta \in \alpha\}$ y que para cada $\beta \in \alpha$ a los conjuntos de índices $I(\beta)$. Notemos que $\bigcup_{\beta \in \alpha} I(\beta)$ es un conjunto numerable, y por tanto $\omega_1 \backslash \bigcup_{\beta \in \alpha} I(\beta)$ es no vacío y tiene un primer elemento, γ.

Como U_γ es no vacío podemos encontrar un elemento $x_\gamma \in U_\gamma$ y una vecindad abierta N_γ de x_γ que sólo intersecta a un número finito de elementos de $\mathcal{F}$. Consideremos al conjunto de índices $I(\gamma) \subseteq \omega_1$ de aquellos elementos de $\mathcal{F}$ que intersectan a N_γ.

Por construcción tenemos que

$$(\bigcup_{\beta \in \alpha} N_\beta) \cap N_\gamma = \emptyset.$$

De esta manera concluimos la construcción de la familia celular de abiertos

$$\mathcal{G} = \{N_\beta \mid \beta \in \omega_1\}$$

por recursión hasta ω_1.

Por tanto, el espacio no cumple la *c.a.c.* □

Combinando los dos resultados anteriores obtenemos un muy bonito resultado con respecto a aquellos espacios paracompactos que satisfacen la *c.a.c.*

Corolario 1.54. *Todo espacio topológico paracompacto X que satisfaga la c.a.c. es un espacio Lindelöf.*

Demostración. Si toda familia localmente finita de abiertos es numerable, entonces toda cubierta abierta tiene un refinamiento numerable por ser un espacio paracompacto. Así de manera análoga a como caracterizamos a los compactos podemos conseguir una subcubierta numerable y por tanto nuestro espacio es de Lindelöf. □

Es importante notar la fuerza tan grande que tiene la hipótesis de tener un espacio con la *c.a.c*, pues muy fácilmente la podemos romper simplemente utilizando un espacio discreto de un tamaño apropiado. Una pregunta que siempre es interesante es observar el comportamiento de los subespacios que son *densos* y en el caso de los espacios paracompactos estos se portan de una manera increíblemente amigable con esta propiedad.

Teorema 1.55. *Sea X un espacio paracompacto. Si X contiene un subespacio Lindelöf denso entonces el espacio X es Lindelöf.*

Demostración. Sea $\mathcal{U} = \{U_s \mid s \in S\}$ una cubierta abierta de X y D un subespacio denso Lindelöf.

Como X es un espacio paracompacto, por normalidad y el Corolario 1.31 podemos considerar un refinamiento abierto localmente finito $\mathcal{F} = \{V_s \mid s \in S\}$ de $\mathcal{U}$. tal que para cada $s \in S$ se cumpla que

$$V_s \subseteq cl_X(V_s) \subseteq U_s.$$

Consideremos al conjunto

$$\mathcal{G} = \{D \cap V_s \mid s \in S\}.$$

Entonces por el Lema anterior el conjunto G es numerable y además como la familia $\mathcal{F}$ es cubierta de X tenemos que

$$D = \bigcup_{s \in S} D \cap V_s.$$

Entonces tenemos que

$$X = cl_X D = cl_X \left(\bigcup_{s \in S} D \cap V_s \right).$$

Pero como la familia $\mathcal{F}$ preserva cerradura

$$cl_X \left(\bigcup_{s \in S} D \cap V_s \right) = \bigcup_{s \in S} cl_X(D \cap V_s).$$

Donde

$$\bigcup_{s \in S} cl_X(D \cap V_s) \subseteq \bigcup_{s \in S} cl_X(V_s) \subseteq \bigcup_{s \in S} U_s.$$

De esta manera como la familia $\mathcal{G}$ es numerable entonces sin pérdida de generalidad podemos considerar que $\mathcal{G} = \{D \cap W_i \mid i \in \omega\}$ donde $\mathcal{H} = \{W_i \mid i \in \omega\}$ es un subconjunto numerable de de la familia $\mathcal{F}$. Así, por lo anterior, la familia $\mathcal{H}$ es una subcubierta abierta numerable de $\mathcal{U}$.

Por tanto X es un espacio Lindelöf. □

Corolario 1.56. *Todo espacio separable paracompacto es un espacio Lindelöf.*

Demostración. Si X es un espacio separable entonces contiene un subconjunto denso y numerable D. Así como D es un subespacio Lindelöf denso de X por el resultado anterior X es un espacio Lindelöf. □

Para concluir esta sección vamos a introducir dos propiedades sencillas pero importantes de los espacios paracompactos con respecto a los subconjuntos cerrados y la suma topológica.

Teorema 1.57. *Sea X un espacio paracompacto. Si M es un subespacio F_σ de X entonces M es paracompacto.*

Demostración. Sea M un subespacio F_σ de X. Supongamos que

$$M = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$$

donde para cada $i \in \mathbb{N}$ el subconjunto F_i es cerrado en X.

Consideremos una cubierta abierta $\mathcal{U} = \{U_s \mid s \in S\}$ para M y además que para cada $s \in S$ el conjunto U_s es de la forma

$$U_s = M \cap V_s$$

donde V_s es un abierto de X. Así tenemos que para cada $i \in \mathbb{N}$ la familia

$$\{V_s \mid s \in S\} \cup \{X \backslash F_i\}.$$

Es una cubierta abierta para el espacio X y por tanto tiene un refinamiento abierto localmente finito $\mathcal{R}_i$.

Para cada $i \in \mathbb{N}$ consideremos a la familia

$$\mathcal{V}_i = \{M \cap V \mid V \in \mathcal{R}_i \text{ y } V \cap F_i \neq \emptyset\}.$$

Finalmente la familia

$$\mathcal{V} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{V}_i.$$

Es una cubierta abierta para M que es σ-localmente finita y que refina a $\mathcal{U}$.

Por tanto M es un espacio paracompacto. □

Corolario 1.58. *La paracompacidad es una propiedad que se hereda a subconjuntos cerrados.*

Naturalmente como ha de sospecharse, esta es una propiedad que muy difícilmente se hereda a subconjuntos abiertos como veremos en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.59. *Consideremos al espacio linealmente ordenado $[0, \omega_1]$, entonces claramente es paracompacto al ser un espacio compacto. El subconjunto $[0, \omega_1)$ es un abierto denso de este espacio que no es paracompacto como vimos anteriormente. De manera similar, en el espacio compacto $[0, \omega_2]$ el subconjunto $[0, \omega_1)$ es un abierto regular que no es paracompacto.*

Teorema 1.60. *Si $X = \bigoplus_{s \in S} X_s$, entonces X es un espacio paracompacto si y sólo si cada sumando es paracompacto.*

Demostración. Recordemos que los abiertos en X son simplemente uniones de abiertos en los espacios X_s y que además estos espacios son ajenos por pares.

Si el espacio $X = \bigoplus_{s \in S} X_s$ es paracompacto entonces como para cada $s \in S$ el espacio X_s es un subespacio cerrado de X, por el resultado anterior para cada $s \in S$ se tiene que X_s es un espacio paracompacto.

Ahora, supongamos que para cada $s \in S$ el espacio X_s es paracompacto.

Sea $\mathcal{V} = \{V_s \mid s \in S\}$ una cubierta abierta para X, entonces para cada $s \in S$ consideremos a la familia $\mathcal{V}_s$ donde $\mathcal{V}_s$ es un refinamiento abierto localmente finito para la cubierta abierta

$$\{X_s \cap V_s \mid s \in S\}$$

del espacio X_s. Entonces la familia

$$\mathcal{U} = \bigcup_{s \in S} \mathcal{V}_s$$

es un refinamiento abierto localmente finito de $\mathcal{V}$. Notemos que la familia es localmente finita en el espacio X gracias a que los espacios X_s son ajenos por pares.

Así concluimos que X es un espacio paracompacto. $\square$

1.7. El Teorema de Tamano

Para concluir la temática de aquellas operaciones que pueden conservar la paracompacidad estudiaremos un último resultado fundamental que caracteriza a los espacios paracompactos en términos del producto con su compactación de Stone-Čech. Esta caracterización realizada por Tamano nos introducirá de una manera muy natural a una nueva clase de espacios: los espacios numerablemente paracompactos.

Recordemos que en el Ejemplo 1.22 hicimos la construcción de la línea de Michael definiendo una nueva topología sobre los números reales, este espacio es esencial para el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.61 (de Michael)**.** *Consideremos a la linea $\mathbb{M}$ de Michael y al espacio $\mathbb{P} = \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ con la topología que hereda de $\mathbb{R}$, entonces el espacio $\mathbb{P}$ es completamente metrizable y separable. Si definimos a $X = \mathbb{M} \times \mathbb{P}$, entonces X no es un espacio normal y por tanto tampoco es paracompacto.*

Demostración. Primero recordemos que el Teorema de Categoría de Baire nos asegura que todo espacio completamente metrizable es un espacio de Baire. Así podemos observar que el conjunto $\mathbb{P}$ no puede ser un conjunto F_σ en los números reales pues de serlo podríamos descomponer a $\mathbb{R}$ de la forma

$$\mathbb{R} = (\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i) \cup \{\{q\} \mid q \in \mathbb{Q}\}.$$

Donde para cada $n \in \mathbb{N}$ el conjunto F_n es cerrado y

$$(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i) = \mathbb{P}.$$

Así como para cada $n \in \mathbb{N}$ el conjunto F_n sólo tiene números racionales tenemos que $cl_{\mathbb{R}}\left(int_{\mathbb{R}}\left(F_n\right)\right) = \emptyset$. Así $\mathbb{R}$ sería la unión numerable de subconjuntos nunca densos contradiciendo que $\mathbb{R}$ es un conjunto de segunda categoria en sí mismo.

Por último notemos que $\mathbb{P}$ es un espacio separable al ser un subespacio de un espacio métrico separable, además como $\mathbb{Q}$ es un conjunto F_σ entonces $\mathbb{P}$ es un espacio completamente metrizable al ser un subespacio G_δ de $\mathbb{R}$.

Consideremos al espacio $X = \mathbb{M} \times \mathbb{P}$ y a los conjuntos ajenos

$$A = \{(x, y) \in X \mid x \in \mathbb{Q}\} \quad \text{y} \quad B = \{(x, x) \in X \mid x \in \mathbb{P}\}.$$

Aseguramos que A y B son dos subconjuntos cerrados y ajenos de X que no pueden ser separados por abiertos ajenos.

Primero, como $\mathbb{Q}$ es cerrado y discreto en $\mathbb{M}$ entonces $A = \mathbb{Q}\times\mathbb{P}$ y por tanto es cerrado al ser un producto de cerrados.

Ahora sea $(x_0, y_0) \in X\backslash B$, entonces tenemos que $x_0 \neq y_0$ y por tanto existen dos abiertos ajenos en $\mathbb{R}$ tales que $x \in U_0$ y $y \in V_0$.

Como U_0 es abierto en $\mathbb{R}$ entonces también es abierto en $\mathbb{M}$, además el conjunto $V_0 \cap \mathbb{P}$ es un abierto en $\mathbb{P}$ y por tanto tenemos que

$$(x_{0,}y_0) \in U_0 \times (V_0 \cap \mathbb{P}).$$

Como U y V son ajenos entonces también se cumple que

$$U_0 \times (V_0 \cap \mathbb{P}) \subseteq X\backslash B.$$

Así A y B son cerrados en X. Consideremos un abierto U en X tal que $A \subseteq U$, veamos que $cl_X(U) \cap B \neq \emptyset$.

Consideremos a $D = \{d_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ un conjunto denso y numerable de $\mathbb{P}$ y para cada $y \in \mathbb{P}$ sea $V_y \times W_y$ una vecindad básica abierta de (y, y) tal que

$$(y, y) \in V_y \times W_y \subseteq U. \tag{1.2}$$

En particular como W_y es un conjunto abierto no vacío entonces existe $i_y \in \mathbb{N}$ tal que $d_{i_y} \in W_y$ por la densidad del conjunto D.

De esta manera para cada $n \in \mathbb{N}$ sea

$$\mathbb{P}_n = \{y \in \mathbb{P} \mid i_y = n\}.$$

Y así hagamos a

$$E = \bigcup_{i=1}^{\infty} cl_{\mathbb{R}}(\mathbb{P}_i).$$

Entonces como $\mathbb{P}$ no es un conjunto F_σ tenemos que $E \neq \mathbb{P}$ y entonces existe $k \in \mathbb{N}$ y $q \in \mathbb{Q}$ tal que $q \in cl_{\mathbb{R}}(\mathbb{P}_k)$, notemos que además se cumple que $(q, d_k) \in B$.

Consideremos una vecindad abierta $V \times W$ para (q, d_k), entonces como $\mathbb{R}\backslash cl_{\mathbb{R}}(\mathbb{P}_k)$ es abierto en $\mathbb{R}$ y por tanto en $\mathbb{M}$ entonces $cl_{\mathbb{R}}(\mathbb{P}_k)$ es un conjunto cerrado de $\mathbb{M}$, así tenemos que $V \cap \mathbb{P}_k \neq \emptyset$ pues $q \in cl_{\mathbb{R}}(\mathbb{P}_k)$.

Sea $y \in V \cap \mathbb{P}_k$ entonces tenemos que $i_y = k$ y así $d_k \in W_y$, por tanto también se cumple que

$$(y, d_k) \in V_y \times W_y \quad \text{y} \quad (y, d_k) \in V \times W.$$

Y por 1.2 tenemos que

$$(y, d_k) \in U.$$

Así toda vecindad abierta del punto (q, d_k) intersecta a B, por tanto tenemos que $cl_X(U) \cap B \neq \emptyset$.

Así A y B no se pueden separar con abiertos ajenos y por tanto el espacio X no es normal. $\square$

Ahora bien con esto vemos que ni siquiera basta con pedir que Y sea un espacio *completamente metrizable y separable* para poder preservar la paracompacidad, un resultado bastante desalentador pero que al menos tendrá remedio si consideramos a aquellos espacios que son *compactos*. Ya por fin estamos listos para estudiar el Teorema de Tamano, pero antes necesitaremos un par de resultados que nos ayudaran en el camino.

Teorema 1.62. *Sean X y Y dos espacios topológicos y sea $f : X \to Y$ una función continua, suprayectiva y perfecta, es decir, cerrada y de fibras compactas. Si Y es un espacio paracompacto entonces X también es paracompacto.*

Demostración. Sea $\{U_s \mid s \in S\}$ una cubierta abierta de X. Para cada $y \in Y$ consideremos a $S(y) \subseteq S$ tal que $S(y)$ sea finito y además cumpla que

$$f^{\leftarrow}(y) \subseteq \bigcup_{s \in S(y)} U_s.$$

Ahora, puesto que f es una función cerrada entonces el conjunto

$$V_y = Y \backslash f\left[X \backslash \bigcup_{s \in S(y)} U_s\right].$$

Es abierto en Y y además por un argumento análogo al usado en el Lema 1.29 tenemos que $y \in V_y$ y que además se cumple que

$$f^{\leftarrow}(y) \subseteq f^{\leftarrow}[V_y] = X \backslash f^{\leftarrow}\left[f\left[X \backslash \bigcup_{s \in S(y)} U_s\right]\right] \subseteq X \backslash \left(X \backslash \bigcup_{s \in S(y)} U_s\right) = \bigcup_{s \in S(y)} U_s.$$

Consideremos a la familia $\mathcal{U} = \{V_y \mid y \in Y\}$, entonces $\mathcal{U}$ es una cubierta abierta del espacio Y y como Y es un espacio paracompacto tiene un refinamiento abierto localmente finito $\mathcal{V} = \{W_t \mid t \in T\}$, así la familia de imagenes inversas $\mathcal{F} = \{f^{\leftarrow}[W_t] \mid t \in T\}$ es una cubierta abierta para X.

Veamos que $\mathcal{F}$ es una familia localmente finita: sea $x \in X$, entonces existe una vecindad abierta $V_{f(x)}$ de $f(x)$ tal que sólo intersecta a un número finito de elementos de $\mathcal{V}$ y así, $f^{\leftarrow}\left[V_{f(x)}\right]$ es una vecindad abierta de x que intersecta sólo a un número finito de elementos de $\mathcal{F}$.

Finalmente si consideramos a la familia

$$\mathcal{G} = \{f^{\leftarrow}[W_t] \cap U_s \mid t \in T, s \in S(y_t)\}.$$

Entonces es localmente finita, pues para cada $t \in T$ el conjunto $S(y_t)$ es finito y por tanto una vecindad que intersectaba a un número finito de elementos de $\mathcal{F}$ seguirá intersectando a sólo un número finito de elementos de la nueva familia $\mathcal{G}$. □

Corolario 1.63. *Sean X y Y dos espacios topológicos. Si X es un espacio paracompacto y Y es un espacio compacto entonces el producto $X \times Y$ es paracompacto.*

Demostración. Como Y es un espacio compacto entonces la proyección π_X es una función perfecta y por el resultado anterior el espacio $X \times Y$ es paracompacto. $\square$

Con ayuda de este resultado ya podremos revisar el resultado de Tamano.

Teorema 1.64 (de Tamano)**.** *Sea X un espacio Tychonoff. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *X es paracompacto;*
2. *para toda compactación cX de X se tiene que el producto $X \times cX$ es un espacio normal;*
3. *el producto $X \times \beta X$ es normal; y*
4. *existe una compactación cX de X tal que el producto $X \times cX$ es un espacio normal.*

Demostración. 1) $\implies$ 2) Por el resultado anterior $X \times cX$ es un espacio paracompacto y por tanto normal.

2) $\implies$ 3) $\implies$ 4) Es inmediato.

4) $\implies$ 1) Sea $\{U_s \mid s \in S\}$ una cubierta abierta de X y para cada $s \in S$ consideremos un abierto V_s en cX tal que $U_s = V_s \cap X$.

Entonces el conjunto

$$Z = cX \setminus \bigcup_{s \in S} V_s$$

es compacto al ser un cerrado en un compacto y en particular sigue siendo compacto en el subespacio $cX \setminus X$ de cX.

Consideremos a la diagonal $\Delta \subseteq X \times X$ y al producto $X \times Z$, entonces por construcción tenemos que $\Delta \cap X \times Z = \emptyset$, aseguramos que ambos conjuntos son cerrados en el producto $X \times cX$. Claramente como Z es cerrado en cX entonces el producto $X \times Z$ es un cerrado de $X \times cX$.

Ahora sea $z \in (X \times cX) \setminus \Delta$, entonces $z = (a, b)$ donde $a \in X$ y $b \neq a$ con $b \in cX$.

Como $a \neq b$ existen dos abiertos ajenos U y V de cX tales que $a \in U$ y $b \in V$, así tenemos que $X \cap U$ es abierto en X y por tanto el conjunto $(U \cap X) \times V$ es un abierto de $X \times cX$ tal que:

$$z \in (U \cap X) \times V \subseteq (X \times cX) \setminus \Delta.$$

Así la diagonal Δ es cerrada en $X \times cX$.

Ahora como el espacio $X \times cX$ es normal, por el Lema de Urysohn existe una función continua,

$f : X \times cX \to [0, 1]$ tal que $f[\Delta] \subseteq \{0\}$ y $f[X \times Z] \subseteq \{1\}$.

Definamos $\rho : X \times X \to [0, 1]$ de la siguiente manera:

$$\rho(x, y) = \sup_{z \in cX} |f(x, z) - f(y, z)|.$$

Aseguramos que ρ es una pseudométrica para X:

Primero si tomamos una $x \in X$ tenemos que

$$\rho\left(x,x\right)=\sup_{z\in cX}\left|f\left(x,z\right)-f\left(x,z\right)\right|=0.$$

Ahora si consideramos a x,y y z en X entonces por definición:

$$\rho\left(x,y\right)=\sup_{z\in cX}\left|f\left(x,z\right)-f\left(y,z\right)\right|$$

es decir

$$\sup_{z\in cX}\left|f\left(y,z\right)-f\left(x,z\right)\right|=\rho\left(y,x\right).$$

Por último si consideramos a x,y y w en X entonces por definición

$$\rho\left(x,w\right)=\sup_{z\in cX}\left|f\left(x,z\right)-f\left(w,z\right)\right|.$$

Y por desigualdad del triángulo tenemos que para cada $z\in cX$ se cumple que

$$\left|f\left(x,z\right)-f\left(w,z\right)\right|\leq\left|f\left(x,z\right)-f\left(y,z\right)\right|+\left|f\left(y,z\right)-f\left(w,z\right)\right|.$$

Y así,

$$\sup_{z\in cX}\left|f\left(x,z\right)-f\left(w,z\right)\right|\leq\sup_{z\in cX}\left|f\left(x,z\right)-f\left(y,z\right)\right|+\sup_{z\in cX}\left|f\left(y,z\right)-f\left(w,z\right)\right|.$$

Por tanto podemos concluir que

$$\rho\left(x,w\right)\leq\rho\left(x,y\right)+\rho\left(y,w\right).$$

Así consideremos al espacio (X,τ_ρ) con la topología inducida por la pseudométrica ρ, aseguramos que es una topología más gruesa que la original.

Sea $x_0\in X$ y $\varepsilon>0$. Si $\varepsilon>1$ entonces $B\left(x_0,\varepsilon\right)=X\times X$. Supongamos que $0<\varepsilon<1$ y consideremos una partición de $[0,1]$ de la siguiente forma:

$$\mathbb{P}=\{[t_0,t_1),(t_1,t_2),\ldots,(t_{n-1},t_n]\}\text{ donde }\forall k\in\{1,\ldots,n\}\left(|t_{k-1}-t_k|<\frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Así la familia $\mathcal{F}=\{\pi_{X^{\cdot}}\circ f^{\leftarrow}[U]\cap X\mid U\in\mathbb{P}\}$ es una cubierta abierta para X. Identifiquemos a los elementos de la familia $\mathcal{F}$ como sigue:

- $A_0=f^{\leftarrow}\left\{[t_0,t_1)\right\}$
- $\forall k\in\{1,\ldots,n-2\}\left(A_k=f^{\leftarrow}\left\{(t_k,t_{k+1})\right\}\right)$
- $A_{n-1}=f^{\leftarrow}\left\{(t_{n-1},t_n]\right\}$

Y así

$$\mathcal{F}=\{A_i\cap X\mid i\in\{1,\ldots,n-1\}\}.$$

Ahora sea $S\subseteq\{1,\ldots,n-1\}$ tal que para cada $s\in S$ se cumpla que $x_0\in A_s\cap X$. Así para cada $s\in S$ consideremos abiertos básicos $G_s\times K_s$ tales que $x_0\in G_s$ y $G_s\times K_s\subseteq A_s$.

Entonces tenemos que

$$\{x_0\} \times cX \subseteq \bigcup_{s\in S} G_s \times K_s$$

y

$$x_0 \in \bigcap_{s\in S} G_s \subseteq B(x_0, \varepsilon).$$

Por tanto la topología τ_ρ es más gruesa que la original.

Ahora consideremos a la familia

$$\mathcal{U} = \left\{ B\left(x, \frac{1}{2}\right) \mid x \in X \right\}.$$

Entonces $\mathcal{U}$ es una cubierta abierta para (X, τ_ρ). Como este espacio tiene la topología inducida por la pseudométrica ρ entonces por el Teorema de Stone tiene un refinamiento abierto localmente finito,

$\mathcal{W} = \{W_t \mid t \in T\}$, notemos que la familia $\mathcal{W}$ sigue siendo un refinamiento abierto con respecto a la topología original de X.

Notemos que para cada $x \in X$ y $y \in B\left(x, \frac{1}{2}\right)$ tenemos:

$$f(x, y) = |f(x, y) - f(y, y)| \leq \rho(x, y) < \frac{1}{2}.$$

Así $f(x, y) \leq \frac{1}{2}$ cuando $y \in B\left(x, \frac{1}{2}\right)$. Ahora como para cada $z \in Z$ se cumple que $f(x, z) = 1$ entonces para cada $t \in T$ tenemos que $cl_X W_t \cap Z = \emptyset$ (donde la cerradura es con respecto a la topología original de X).

Ahora como

$$cl_X W_t \subseteq cl_X B\left(x, \frac{1}{2}\right).$$

Entonces el conjunto $cl_X W_t$ es compacto y por tanto existe $S(t) \subseteq S$ finito tal que

$$W_t \subseteq \bigcup_{s\in S(t)} U_s.$$

Por último consideremos a la familia

$$\mathcal{G} = \{W_t \cap U_s \mid t \in T, s \in S(t)\}.$$

Entonces es una cubierta abierta localmente finita, puesto que los conjuntos $S(t)$ son finitos y además es un refinamiento de la cubierta original $\{U_s \mid s \in S\}$, por tanto X es paracompacto. □

Capítulo 2

Espacios Numerablemente Paracompactos

2.1. Una Caracterización

Como vimos anteriormente no necesariamente el producto de espacios paracompactos sigue siendo un espacio paracompacto, pero gracias al resultado de Tamano podemos asegurar que al menos se preserva bajo el producto con sus compactaciones. Así mismo vimos que la línea dispersa era un ejemplo de un espacio paracompacto cuyo producto con un espacio separable tampoco llega a ser normal.

El estudio de este tipo de productos eventualmente aterrizó en los espacios numerablemente paracompactos al hacerse una pregunta que ya debería parecernos natural: ¿Si Y fuera un espacio métrico compacto y X un espacio normal, tendremos que el producto $X \times Y$ será normal?

Definición 2.1. *Un espacio X es numerablemente paracompacto si y sólo si toda cubierta abierta numerable tiene un refinamiento abierto localmente finito.*

Algunas observaciones sencillas son que todo espacio paracompacto y todo espacio numerablemente compacto es un espacio numerablemente paracompacto.

También es importante notar que estamos pidiendo refinamientos de cubiertas abiertas numerables, en vez de utilizar refinamientos abiertos numerables. Esto es porque aquellos espacios donde toda cubierta abierta tiene un refinamiento abierto localmente finito y numerable son precisamente los espacios de Lindelöf paracompactos.

Primero estudiaremos la caracterización más clásica para hacer el trabajo mucho mas comodo.

Teorema 2.2. *Sea X un espacio topológico. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *X es numerablemente paracompacto;*
2. *para toda cubierta abierta numerable $\{U_n \mid n \in \omega\}$ existe una cubierta abierta localmente finita*

   $\{V_n \mid n \in \omega\}$ tal que para cada $n \in \omega$ se cumple que $V_n \subseteq U_n$;

3. *para cada sucesión creciente $W_0 \subseteq W_1 \subseteq ...$ de abiertos de X tales que $\bigcup_{i=0}^{\infty} W_i = X$ existe una sucesión $\{F_n \mid n \in \omega\}$ de cerrados de X tales que para cada $n \in \omega$ se cumple que $F_n \subseteq W_n$ y $\bigcup_{i=0}^{\infty} int_X F_i = X$; y*

4. *para cada sucesión decreciente $F_0 \supseteq F_1 \supseteq ...$ de cerrados de X tales que $\bigcap_{i=0}^{\infty} F_i = \emptyset$ existe una sucesión $\{W_n \mid n \in \omega\}$ de abiertos de X tales que para cada $n \in \omega$ se cumple que $F_n \subseteq W_n$ y $\bigcap_{i=0}^{\infty} cl_X W_i = \emptyset$.*

Demostración. 1) $\Rightarrow$ 2) Sea $\mathcal{U} = \{U_n \mid n \in \omega\}$ una cubierta abierta numerable para X. Como X es numerablemente paracompacto $\mathcal{U}$ tiene un refinamiento abierto localmente finito $\mathcal{W}$.

Para cada $n \in \omega$ consideremos a la familia

$$W(n) = \{W \mid W \in \mathcal{W} \text{ y } W \subseteq U_n\}.$$

Entonces para cada $n \in \omega$ tenemos que el conjunto

$$V_n = \bigcup W(n)$$

es abierto y además $V_n \subseteq U_n$. Así tenemos que la familia

$$\mathcal{F} = \{V_n \mid n \in \omega\}$$

es un refinamiento abierto localmente finito de $\mathcal{U}$.

2) $\Rightarrow$ 3) Como la familia $\{W_i \mid i \in \omega\}$ es una cubierta abierta numerable existe un refinamiento abierto localmente finito $\mathcal{V} = \{V_i \mid i \in \omega\}$ tal que para cada $i \in \omega$ se tiene que $V_i \subseteq W_i$.

Para cada $i \in \omega$ consideremos a los conjuntos

$$F_i = X \setminus \bigcup_{j>i} V_j.$$

Entonces para cada $i \in \omega$ tenemos que F_i es un cerrado de X, además como $X = \bigcup \{V_i \mid i \in \omega\}$ podemos observar que:

$$F_i = X \setminus \bigcup_{j>i} V_j \subseteq \bigcup_{j \leq i} V_j \subseteq \bigcup_{j \leq i} W_j.$$

Ahora, como la familia $\{W_i \mid i \in \omega\}$ es creciente se cumple que:

$$\bigcup_{j \leq i} W_j \subseteq W_i.$$

Y por tanto para cada $i \in \omega$ se tiene que $F_i \subseteq W_i$.

Por otra parte, dado $x \in X$ como la familia $\mathcal{V}$ es localmente finita existe una vecindad abierta $V(x)$ de x tal que sólo intersecta a un número finito de elementos de $\mathcal{V}$. Consideremos a $s(x) \subseteq \omega$ los índices correspondientes a aquellos elementos que intersecta.

Finalmente sea

$$n_x = \max \{n \mid n \in s(x)\}.$$

Notemos que para cada $m \geq n_x$ se tiene que $V(x) \cap V_m = \emptyset$. Así el conjunto F_{n_x} es tal que $W(x) \subseteq F_{n_x}$ y por tanto

$$x \in int_X F_{n_x}.$$

Consecuentemente,

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} int_X F_i = X.$$

3) $\Leftrightarrow$ 4) Es inmediato.

3) $\Rightarrow$ 1) Sea $\mathcal{U} = \{U_n \mid n \in \omega\}$ una cubierta abierta numerable para X. Consideremos para cada $i \in \omega$ a los conjuntos

$$W_i = \bigcup_{j \leq i} U_j$$

entonces la familia $\{W_i \mid i \in \omega\}$ es creciente, numerable y además es cubierta para X.

Por hipótesis existe una familia $\{F_i \mid i \in \omega\}$ de cerrados de X tal que

$$X = \bigcup_{i=1}^{\infty} int_X F_i$$

y tal que para cada $i \in \omega$ se tiene que $F_i \subseteq W_i$.

Así para cada $i \in \omega$ los conjuntos

$$V_i = U_i \backslash \bigcup_{j<i} F_j$$

son abiertos en X y además para cada $i \in \omega$ tenemos que $V_i \subseteq U_i$.

Ahora, puesto que

$$\bigcup_{j<i} F_j \subseteq \bigcup_{j<i} W_j \subseteq \bigcup_{j<i} U_j$$

entonces,

$$U_i \backslash \bigcup_{j<i} U_j \subseteq (U_i \backslash \bigcup_{j<i} F_j) = V_i.$$

Así la familia $\mathcal{V} = \{V_i \mid i \in \omega\}$ es una cubierta abierta para X pues dado $x \in X$ si consideramos a

$$i(x) = \min \{n \in \omega \mid x \in U_n\}$$

entonces tenemos que

$$x \in U_{i(x)} \backslash \bigcup_{j<i(x)} U_j \subseteq V_i.$$

Ahora como la familia

$$\{int_X(F_i) \mid i \in \omega\}$$

es una cubierta abierta de X, entonces dado $x \in X$ existe una vecindad $int_X F_{i(x)}$ tal que para cada $j > i$ se tiene que

$$int_X F_{i(x)} \cap V_j = \emptyset$$

y por tanto la familia $\mathcal{V}$ es localmente finita.

Como $\mathcal{V}$ es un refinamiento abierto localmente finito de $\mathcal{U}$ entonces X es numerablemente paracompacto. $\square$

Una observación clave que podemos hacer es que dada una sucesión decreciente $F_1 \supseteq F_2 \supseteq$ ...de cerrados de X y una sucesión de abiertos $\mathcal{W} = \{W_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ tales que para cada $n \in \mathbb{N}$ se tenga que $F_n \subseteq W_n$ entonces podemos pedir que la sucesión de abiertos $\mathcal{W}$ sea también decreciente. Simplemente si consideramos a la familia

$$\widetilde{\mathcal{W}} = \left\{ \bigcap_{i=1}^{n} W_i \mid n \in \mathbb{N} \right\}$$

Entonces es una familia de abiertos decreciente por construcción y además para cada $n \in \mathbb{N}$ se cumple que

$$F_n \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} F_i \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} W_i$$

Así indistintamente podemos suponer que las sucesiones que se obtienen en las caracterizaciones 3 y 4 del Teorema 2.2 son *crecientes* y *decrecientes* respectivamente.

Corolario 2.3. *Sea X un espacio normal, entonces X es un espacio numerablemente paracompacto si y sólo si para cada sucesión decreciente $F_1 \supseteq F_2 \supseteq \ldots$ de conjuntos cerrados de X tales que $\bigcap_{i=1}^{\infty} F_i = \emptyset$ existe una sucesión $\{W_i \mid i \in \omega\}$ de abiertos de X tales que para cada $i \in \omega$ se tiene que $F_i \subseteq W_i$ y $\bigcap_{i=1}^{\infty} W_i = \emptyset$.*

Demostración. Primero si X es un espacio numerablemente paracompacto entonces obtenemos lo buscado con el resultado anterior.

Para la implicación de regreso consideremos a $\mathcal{F} = \{F_i \mid i \in \omega\}$ una sucesión decreciente de conjuntos cerrados tal que $\bigcap \mathcal{F} = \emptyset$, entonces por hipótesis existe una sucesión $\mathcal{W} = \{W_i \mid i \in \omega\}$ de abiertos de X tales que para $i \in \omega$ se tiene que $F_i \subseteq W_i$ y además $\bigcap \mathcal{W} = \emptyset$.

Entonces por normalidad para cada $i \in \omega$ existe un abierto V_i tal que

$$F_i \subseteq V_i \subseteq cl_X V_i \subseteq W_i$$

y además tal que $\bigcap_{i=1}^{\infty} cl_X V_i = \emptyset$.

Así X es numerablemente paracompacto por la proposición anterior. □

Habiendo establecido una buena caracterización podemos comenzar a estudiar algunas propiedades sencillas de los espacios numerablemente paracompactos. Arrancaremos como siempre estudiando el comportamiento en subespacios e intentaremos rescatar un poco de la herramienta que teníamos para los espacios paracompactos.

2.2. Espacios Binormales

Como vimos en el primer capítulo hay una relación muy íntima entre los espacios paracompactos y la normalidad. Para poder trabajar con más comodidad será conveniente establecer una pequeña definición.

Definición 2.4. *Un espacio X es un espacio binormal si y sólo si X es un espacio normal y numerablemente paracompacto.*

Más adelante vamos a hablar con más profundidad acerca de espacios normales que no sean binormales.

Teorema 2.5. *Sea X un espacio numerablemente paracompacto. Si M es un subespacio cerrado de X entonces M es numerablemente paracompacto.*

Demostración. Sea M un subespacio cerrado de X y sea $\mathcal{U} = \{U_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ una cubierta abierta numerable de M.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ consideremos un abierto V_n de X tal que $U_n = V_n \cap M$. Así la familia

$$\mathcal{G} = \{U_n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{X \backslash M\}$$

es una cubierta abierta numerable para X y por tanto tiene un refinamiento abierto localmente finito numerable $\mathcal{V} = \{V_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Ahora si consideramos a la familia

$$\mathcal{H} = \{V_n \cap M \mid n \in \mathbb{N} \text{ y } V_n \cap M \neq \emptyset\}$$

entonces $\mathcal{H}$ es una familia de abiertos en M y además para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$U_n \cap M \subseteq V_n \cap M.$$

Así $\mathcal{H}$ es un refinamiento abierto de $\mathcal{U}$.

Finalmente como $\mathcal{V}$ es una familia localmente finita entonces dado $x \in M$ existe una vecindad abierta N_x de x tal que sólo intersecta a un número finito de elementos de $\mathcal{V}$, así la vecindad abierta $N_x \cap M$ sólo intersecta a un número finito de elementos de $\mathcal{H}$. Por tanto $\mathcal{H}$ es localmente finita y por tanto M es numerablemente paracompacto. □

Aún habiendo obtenido este resultado tan natural es inevitable tener la sensación de que estamos perdiendo mucho al restringirnos a cubiertas numerables, en especial después de haber obtenido caracterizaciones y herramientas fuertes para la versión paracompacta. La realidad es que en el fondo nos está faltando una propiedad importante: la normalidad.

Lo interesante es que si estamos trabajando en el contexto de los espacios *binormales* podemos rescatar mucha de la herramienta que habíamos desarollado ya para los espacios paracompactos. En concreto podemos recuperar aquellas caracterizaciones que siempre nos hicieron la vida un poco más fácil para deducir resultados más fuertes.

Empezaremos primero con una propiedad muy importante y poderosa de los espacios normales, para esto necesitaremos una pequeña definición.

Definición 2.6. *Sea X un espacio topológico. Una familia $\mathcal{F}$ de subconjuntos de X es punto finita si para cada $x \in X$ se tiene que x pertenece a sólo un número finito de elementos de $\mathcal{F}$.*

Es importante notar que toda familia localmente finita es claramente punto finita: una vecindad abierta que sólo intersecta a un número finito de miembros de la familia es testigo de aquellos miembros a los que pertenece el punto.

Lema 2.7. *Un espacio topológico X es un espacio normal si y sólo si para cualquier cubierta abierta punto finita $\mathcal{U} = \{U_s \mid s \in S\}$ de X existe un refinamiento abierto $\mathcal{V} = \{V_s \mid s \in S\}$ de $\mathcal{U}$ tal que para cada $s \in S$ se cumple que $cl_X(V_s) \subseteq U_s$.*

Demostración. Sea $\mathcal{U} = \{U_s \mid s \in \alpha\}$ una cubierta abierta punto finita de X, para más comodidad supongamos que está indizada con un ordinal, α.

Construyamos la familia por inducción de la siguiente manera: sea

$$F_0 = X \backslash \bigcup_{0<\delta<\alpha} U_\delta.$$

Notemos que F_0 es cerrado y además $F_0 \subseteq U_0$. De esta manera por normalidad existe un abierto V_0 tal que

$$F_0 \subseteq V_0 \subseteq cl_X(V_0) \subseteq U_0.$$

Sea $\gamma \in \alpha$ y supongamos que hemos construido una familia $\{V_\delta \mid \delta \in \gamma\}$ tal que para cada $\delta \in \gamma$ se cumple que

$$F_\delta \subseteq V_\delta \subseteq cl_X(V_\delta) \subseteq U_\delta.$$

Consideremos al conjunto cerrado

$$F_\gamma = X \backslash \left(\bigcup_{\substack{\delta\in\alpha \\ \delta\neq\gamma}} U_\delta \right)$$

entonces por construcción tenemos que $V_\gamma \subseteq U_\gamma$ y por normalidad podemos considerar un abierto V_γ tal que

$$F_\gamma \subseteq V_\gamma \subseteq cl_X(V_\gamma) \subseteq U_\gamma.$$

Concluyendo por inducción la construcción de la familia $\mathcal{V} = \{V_s \mid s \in \alpha\}$. Veamos que $\mathcal{V}$ es una cubierta abierta para X.

Sea $x \in X$, como la cubierta $\mathcal{U}$ es punto finita entonces existe un subconjunto finito y no vacío $S(x)$ de α de la forma

$$S(x) = \{\beta_1, ..., \beta_n\}$$

tal que para cada $\delta \in \alpha \backslash S(x)$ se cumple que $x \notin U_\delta$.

Consideremos así a

$$\beta_x = \max\{\beta_1, ..., \beta_n\}.$$

Entonces por definición tenemos que para cada $\delta > \beta_x$ se cumple que $x \notin U_\delta$. Ahora, si existe $\delta < \beta_x$ tal que $x \in V_\delta$ entonces terminamos, supongamos entonces que para cada $\delta < \beta_x$ se tiene que $x \notin V_\delta$.

Por definición tendríamos entonces que para cada $\delta < \beta_x$ se tiene que $x \notin U_\delta$ y por tanto $x \in F_{\beta_x}$.

Concluimos así que la familia $\mathcal{V}$ es un refinamiento abierto de $\mathcal{U}$ que cumple lo buscado.

Para la implicación contraria, sean A y B dos cerrados ajenos en X y consideremos a la familia de abiertos

$$\mathcal{U} = \{X \backslash A, X \backslash B\}.$$

Como $\mathcal{U}$ es una cubierta abierta del espacio X, podemos encontrar un refinamiento abierto punto finito $\{U, V\}$ de $\mathcal{U}$ tal que

$$U \subseteq cl_X(U) \subseteq X \backslash A \quad \text{y} \quad V \subseteq cl_X(V) \subseteq X \backslash B\ .$$

Así podemos concluir que $X\backslash cl_X(U)$ y $X\backslash cl_X(V)$ son dos abiertos ajenos tales que $A \subseteq X\backslash cl_X(U)$ y $B \subseteq X\backslash cl_X(V)$.

Por tanto el espacio X es normal. □

Notemos que usando este pequeño lema podemos encontrar una primera caracterización para espacios binormales.

Proposición 2.8. *Sea X un espacio normal. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *X es un espacio numerablemente paracompacto;*
2. *toda cubierta abierta numerable tiene un refinamiento abierto punto finito;*
3. *para cualquier cubierta abierta numerable $\{U_i \mid i \in \omega\}$ de X existe un refinamiento abierto numerable $\{V_i \mid i \in \omega\}$ tal que para cada $i \in \omega$ se cumple que $cl_X(V_i) \subseteq U_i$; y*
4. *para cada sucesión decreciente $F_1 \supseteq F_2 \supseteq \ldots$ de conjuntos cerrados de X tales que $\bigcap_{i=1}^{\infty} F_i = \emptyset$ existe una sucesión $\{W_i \mid i \in \omega\}$ de abiertos de X tales que para cada $i \in \omega$ se tiene que $F_i \subseteq W_i$ y $\bigcap_{i=1}^{\infty} W_i = \emptyset$.*

Demostración. 1) ⇒ 2) Toda familia localmente finita es punto finita.

2) ⇒ 3) Como X es un espacio normal podemos encontrar dicho refinamiento usando el lema anterior.

3) ⇒ 4) Sea $\mathcal{F} = \{F_i \mid i \in \omega\}$ una sucesión decreciente de cerrados tal que $\bigcap \mathcal{F} = \emptyset$.

Consideremos a la familia

$$\mathcal{G} = \{X\backslash F_i \mid i \in \omega\}.$$

Entonces $\mathcal{G}$ es una cubierta abierta numerable para X y por hipótesis tiene un refinamiento abierto numerable $\{V_i \mid i \in \omega\}$ tal que para cada $i \in \omega$ se cumple que

$$V_i \subseteq cl_X(V_i) \subseteq X\backslash F_i.$$

De esta manera tenemos que la familia

$$\mathcal{H} = \{X\backslash cl_X(V_i) \mid i \in \omega\}$$

es una sucesión de abiertos tales que para cada $i \in \omega$ se cumple que

$$F_i \subseteq X\backslash cl_X(V_i).$$

Además, $\bigcap \mathcal{H} = \emptyset$ porque la familia $\{V_i \mid i \in \omega\}$ es una cubierta del espacio X.

4) ⇒ 1) Esto es el regreso del Corolario 2.3. □

Ahora bien, lo natural despues de empezar a tratar con respacios binormales es querer rescatar al *Teorema de Michael (1.28)*, a primera vista podemos observar que en ese resultado lo que más importa es poder encontrar refinamientos de familias de cardinalidad a lo más un cierto cardinal κ fijo. La pregunta ahora es: ¿podremos rescatar este teorema con sólo hacer algunos ajustes en las demostraciones? Y si no, ¿qué es lo que hay de fondo para no poder demostrar algo similar?

Para comenzar en esta labor el lema que presentamos a continuación nos será de gran ayuda para obtener una especie de *caracterización fundamental para los espacios binormales*, este resultado nos ayudará a encontrar un refinamiento punto finito para una cubierta numerable bajo ciertas condiciones. Morita demostró bajo las mismas hipótesis que existía un refinamiento del tipo *estrella* (que no hemos trabajado en este texto), la versión que presentamos a continuación tiene una conclusión distinta que es mucho más apegada a la forma en la que hemos trabajado.

Lema 2.9. *Sea X un espacio topológico y sea $\mathcal{U} = \{U_n \mid n \in \omega\}$ una cubierta abierta numerable de X. Si existe una cubierta cerrada $\mathcal{F} = \{F_n \mid n \in \omega\}$ de X tal que para cada $n \in \omega$ se cumple que $F_n \subseteq U_n$, entonces $\mathcal{U}$ tiene un refinamiento abierto punto finito.*

Demostración. Sea $\mathcal{U} = \{U_n \mid n \in \omega\}$ una cubierta abierta numerable de X. Consideremos a $\mathcal{F} = \{F_n \mid n \in \omega\}$ una cubierta cerrada de X tal que para cada $n \in \omega$ se cumple que $F_n \subseteq U_n$.

Para cada $n \in \omega$ consideremos a los siguientes conjuntos:

$$W_0 = U_0 \quad \text{y} \quad W_n = U_n \setminus \bigcup_{i<n} F_i \text{ si } n > 0.$$

Notemos que para cada $i \in \omega$ el conjunto W_i es abierto y además $W_i \subseteq U_i$. Consideremos de esta manera a la familia

$$\mathcal{W} = \{W_i \mid i \in \omega\}.$$

Veamos que $\mathcal{W}$ es una cubierta de X: sea $x \in X$ y supongamos que $x \notin U_0$. Como la familia $\mathcal{F}$ es una cubierta de X entonces existe una primer $i \in \omega$ tal que $x \in F_i$, por tanto para cada $j \in \omega$ tal que $j < i$ se tiene que

$$x \notin F_j$$

y por tanto $x \in W_i$, mostrando que $\mathcal{W}$ es una cubierta abierta de X.

Del mismo modo para cada $x \in X$ existe un primer $i(x) \in \omega$ tal que $x \in F_{i(x)}$ y por tanto para cada $j \in \omega$ con $j > i(x)$ tenemos que $x \notin W_j$ por construcción, mostrando que $\mathcal{W}$ es una familia punto finita. $\square$

Un resultado curioso es que podemos extender la fuerza de este lema un poco más, obteniendo una inocente caracterización para los espacios binormales.

Corolario 2.10. *Un espacio topológico X es binormal si y sólo si para cada cubierta abierta numerable*
$\mathcal{U} = \{U_n \mid n \in \omega\}$ de X existe una cubierta cerrada $\mathcal{F} = \{F_n \mid n \in \omega\}$ de X tal que para cada $n \in \omega$ se cumple que $F_n \subseteq U_n$.

Demostración. Si el espacio es binormal entonces dada una cubierta abierta numerable $\mathcal{U} = \{U_n \mid n \in \omega\}$ sabemos por la Proposición 2.8 que existe un refinamiento abierto numerable $\mathcal{V} = \{V_n \mid n \in \omega\}$ tal que para cada $n \in \omega$ se cumple que

$$V_n \subseteq cl_X(V_n) \subseteq U_n.$$

De esta manera, la cubierta cerrada

$$\overline{\mathcal{V}} = \{cl_X(V_n) \mid n \in \omega\}$$

cumple lo buscado.

Ahora supongamos que para cada cubierta abierta numerable $\mathcal{U} = \{U_n \mid n \in \omega\}$ de X existe una cubierta cerrada $\mathcal{F} = \{F_n \mid n \in \omega\}$ de X tal que para cada $n \in \omega$ se cumple que $F_n \subseteq U_n$, primero demostremos que el espacio X es normal.

Sean A y B dos cerrados ajenos en X y consideremos a la familia

$$\mathcal{U} = \{X \backslash A, X \backslash B\}.$$

Entonces es una cubierta abierta de X y por hipótesis existe una cubierta cerrada $\mathcal{V} = \{F_1, F_2\}$ de X tal que

$$F_1 \subseteq X \backslash A \quad \text{y} \quad F_2 \subseteq X \backslash B$$

Notemos que entonces F_1 y F_2 son cerrados ajenos y por tanto $X \backslash F_1$ y $X \backslash F_2$ son abiertos ajenos tales que $A \subseteq X \backslash F_1$ y $B \subseteq X \backslash F_2$, demostrando así que X es un espacio normal.

Por último, dada cualquier cubierta abierta numerable $\mathcal{U}$ de X se cumplen las hipótesis del Lema anterior y por tanto ésta tiene un refinamiento abierto punto finito, como el espacio X es normal entonces por la Proposición 2.8 el espacio X es numerablemente paracompacto.

Así el espacio X es binormal. □

Usando este lema, nos resultará sencillo demostrar la "gran caracterización" para los espacios binormales.

Teorema 2.11 (de Michael-Morita-Mansfield)**.** *Sea X un espacio normal. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *X es un espacio numerablemente paracompacto;*
2. *toda cubierta abierta numerable de X tiene un refinamiento cerrado localmente finito;*
3. *toda cubierta abierta numerable de X tiene un refinamiento cerrado que preserva cerradura;*
4. *toda cubierta abierta numerable de X tiene un refinamiento cerrado σ-discreto;*
5. *toda cubierta abierta numerable de X tiene un refinamiento cerrado σ-localmente finito; y*
6. *toda cubierta abierta numerable de X tiene un refinamiento cerrado que es una unión numerable de familias que preservan cerradura.*

Demostración. Para demostrar este teorema la única demostración que requiere gran trabajo es que la afirmación 6 ímplica 1 gracias a todo lo que hemos hecho hasta ahora. Primero hagamos las más sencillas.

1) $\Rightarrow$ 2) Sea $\mathcal{U} = \{U_n \mid n \in \omega\}$ una cubierta abierta numerable de X. Por la Proposición 2.8 existe un refinamiento abierto numerable $\mathcal{V} = \{V_i \mid i \in \omega\}$ tal que para cada $i \in \omega$ se cumple que

$$V_i \subseteq cl_X(V_i) \subseteq U_i.$$

Como la familia $\mathcal{V}$ es una cubierta abierta numerable para X entonces por el Teorema 2.2 tiene un refinamiento abierto localmente finito $\mathcal{W} = \{W_i \mid i \in \omega\}$ tal que para cada $i \in \omega$ se cumple que

$$W_i \subseteq V_i.$$

Así la familia

$$\overline{\mathcal{W}} = \{cl_X(W_i) \mid i \in \omega\}$$

Es un refinamiento cerrado localmente finito de $\mathcal{U}$.

2) $\Rightarrow$ 3) Toda familia localmente finita preserva cerradura.

3) $\Rightarrow$ 4) Sea $\mathcal{U} = \{U_n \mid n \in \omega\}$ una cubierta abierta numerable de X. Consideremos a $\mathcal{V} = \{Ws \mid s \in S\}$ un refinamiento cerrado que preserva cerradura de $\mathcal{U}$.

Para cada $n \in \omega$ consideremos al conjunto

$$V_n = \bigcup \{W \mid W \subseteq U_s \text{ y } W \in \mathcal{V}\}.$$

Entonces como la familia $\mathcal{V}$ preseva cerradura tenemos que para cada $n \in \omega$ el conjunto V_n es cerrado. Así obtenemos que la familia

$$\mathcal{G} = \{V_n \mid n \in \omega\}$$

es un refinamiento cerrado y numerable de $\mathcal{U}$ y por tanto σ-discreto.

4) $\Rightarrow$ 5) Cualquier familia discreta es localmente finita.

5) $\Rightarrow$ 6) Cualquier familia localmente finita preserva cerradura.

6) $\Rightarrow$ 1) Sea $\mathcal{U} = \{U_n \mid n \in \omega\}$ una cubierta abierta numerable de X y sea $\mathcal{F} = \bigcup_{i=0}^{\infty} \mathcal{F}_i$ un refinamiento cerrado donde para cada $i \in \omega$ la familia $\mathcal{F}_i$ preserva cerradura.

Para cada pareja $i, j \in \omega$ consideremos al conjunto

$$W_{i,j} = \bigcup \{F \in \mathcal{F}_j \mid F \subseteq U_i\}.$$

Como para cada $j \in \omega$ la familia $\mathcal{F}_j$ preserva cerradura entonces para toda $i \in \omega$ el conjunto $W_{i,j}$ es cerrado en X. Notemos además que por construcción dado $i \in \omega$ tenemos que para cada $j \in \omega$ se cumple que

$$W_{i,j} \subseteq U_i$$

Aseguramos que la familia $\mathcal{G} = \{W_{i,j} \mid i, j \in \omega\}$ es una cubierta del espacio X.

Dado $x \in X$ sabemos que existe $i \in \omega$ tal que $x \in \bigcup \mathcal{F}_i$, en particular existe una $F_x \in \mathcal{F}_i$ tal que $x \in F_x$. Como $\mathcal{F}$ es un refinamiento de $\mathcal{U}$ entonces existe una $j \in \omega$ tal que

$$x \in F_x \subseteq U_j.$$

Por tanto $x \in W_{i,j}$, mostrando así que la familia $\mathcal{G}$ es un refinamiento cerrado de la familia $\mathcal{U}$.

Como la familia $\mathcal{G}$ es numerable podemos re-indizarla de manera natural como

$$\mathcal{G} = \{C_i \mid i \in \omega\}.$$

Como $\mathcal{G}$ refina a $\mathcal{U}$ entonces para cada $i \in \omega$ podemos encontrar alguna $j(i) \in \omega$ fija tal que

$$C_i \subseteq U_{j(i)}.$$

Consideremos así a la siguiente subcubierta numerable de $\mathcal{U}$,

$$\mathcal{U}_G = \left\{ U_{j(i)} \mid C_j \subseteq V_{j(i)}, U_{j(i)} \in \mathcal{U} \right\}.$$

Por normalidad para cada $j \in \omega$ podemos encontrar un abierto O_j tal que

$$C_j \subseteq O_j \subseteq cl_X \left(O_j \right) \subseteq U_{j(i)}.$$

entonces la familia

$$\mathcal{O}_G = \{ cl_X(O_j) \mid j \in \omega \}$$

es una cubierta cerrada del espacio X tal que para cada $j \in \omega$ se tiene que

$$cl_X \left(O_j \right) \subseteq U_{j(i)}.$$

Así por el lema anterior la familia $\mathcal{U}_G$ tiene un refinamiento abierto punto finito $\mathcal{W}$ que es a su vez un refinamiento abierto punto finito de la cubierta original $\mathcal{U}$.

Como X es un espacio normal, por la Proposición 2.8 el espacio X es numerablemente paracompacto. □

Es importante tener un poco de cuidado con este resultado: si recordamos nuestra *primera caracterización para espacios paracompactos* (Teorema 1.16) es natural (¡y engañoso!) querer tener una caracterización lo más parecida que se pueda a ella. Concretamente en este teorema demostramos que es suficiente con poder encontrar refinamientos abiertos σ-localmente finitos para poder asegurar que un espacio regular es paracompacto.

Es justo aquí donde tenemos que tener cuidado: en esta caracterización "fundamental" de los espacios binormales no podemos sustituir las palabras "*refinamiento cerrado*" por "*refinamiento abierto*" de manera libre en las afirmaciones 4 y 5: cualquier cubierta abierta numerable es en sí una cubierta abierta σ-discreta y σ-localmente finita si la vemos como la unión de los unitarios de sus elementos. En caso de que pudieramos sustituir dicha afirmación en este teorema, entonces automáticamente tendríamos que *las nociones de espacio normal y espacio binormal son equivalentes.* ¿Esto será posible?

Ahora bien, recordemos que justo este detalle fue lo que nos resolvió un problema importante para los espacios paracompactos: la paracompacidad es una propiedad que se hereda a subespacios F_σ (Teorema 1.57). Pero por el comentario anterior, no sabemos si todo espacio donde cada cubierta abierta numerable tenga un refinamiento σ-localmente finito es numerablemente paracompacto. Lo interesante es que al menos sí podemos asegurar el regreso, y justamente es este regreso el que necesitamos para volver a estudiar el comportamiento de los subespacios F_σ.

Teorema 2.12 (de Morita)**.** *Sea X un espacio numerablemente paracompacto. Si $\mathcal{V}$ es una cubierta abierta σ-localmente finita de X entonces existe un refinamiento abierto localmente finito de $\mathcal{V}$.*

Demostración. Sea $\mathcal{V} = \bigcup_{i=o}^{\infty} \mathcal{V}_i$ una cubierta abierta σ-localmente finita de X donde para cada $n \in \mathbb{N}$ la familia $\mathcal{V}_n$ es localmente finita.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea

$$V_n = \bigcup \{ V \mid V \in \mathcal{V}_n \}.$$

Entonces para cada $n \in \mathbb{N}$ el conjunto V_n es abierto y además como $\mathcal{V}$ es una cubierta para X entonces la familia

$$\mathcal{W} = \{V_n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

es una cubierta abierta numerable para X y por tanto podemos considerar un refinamiento abierto localmente finito $\mathcal{W}_2$ de $\mathcal{W}$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ consideremos a

$$U_n = \bigcup \{U \in \mathcal{W}_2 \mid U \subseteq V_n\}.$$

Entonces por construcción U_n es abierto y además la familia

$$\mathcal{U} = \{U_n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

es una cubierta abierta para X. Notemos que dado $x \in X$ si tomamos una vecindad N_x que sólo intersecta a un número finito de elementos de $\mathcal{W}_2$, entonces ella misma intersecta sólo a un número finito de elementos de $\mathcal{U}$. Por tanto tenemos que $\mathcal{U}$ es un refinamiento abierto localmente finito y numerable de la familia $\mathcal{W}$.

Finalmente consideremos a la familia

$$\mathcal{H} = \{U_n \cap V \mid V \in \mathcal{V}_n,\ n \in \mathbb{N}\}.$$

Notemos que dado $x \in X$ como $\mathcal{U}$ es una cubierta del espacio existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x \in U_n$, pero por construcción tenemos que $U_n \subseteq V_n$ y por tanto existe $V \in \mathcal{V}_n$ tal que

$$x \in U_n \cap V.$$

Así $\mathcal{H}$ es una cubierta abierta para X y por construcción también refina a $\mathcal{V}$.

Para concluir dado $x \in X$ tenemos que existe una vecindad abierta N_x de x que sólo intersecta a un número finito de elementos de $\mathcal{U}$.

Así existe una $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que para cada $m > k_0$ se tiene que

$$N_x \cap U_m = \emptyset.$$

De esta manera para cada $n \leq k_o$ consideremos una vecindad abierta $M_n(x)$ tal que sólo intersecta a un número finito de elementos de $\mathcal{V}_n$, por lo que tendrémos que la vecindad abierta de x definida como

$$W_x = \bigcap_{i=0}^{k_0} M_i(x) \cap N_x$$

intersecta sólo a un número finito de elementos de $\mathcal{H}$.

Así $\mathcal{H}$ es un refinamiento abierto localmente finito de la cubierta $\mathcal{V}$. □

Corolario 2.13. *Sea X un espacio binormal. Si M es un subespacio F_σ de X entonces M es un espacio binormal.*

Demostración. Recordemos primero que la normalidad es una propiedad que se hereda a subespacios F_σ. De esta manera utilizando el teorema anterior y repitiendo la demostración del Teorema 1.57 comenzando con una cubierta numerable, concluimos este resultado. □

Corolario 2.14. *Si* $X = \bigoplus_{s\in S} X_s$*, entonces* X *es un espacio numerablemente paracompacto si y sólo si cada sumando es numerablemente paracompacto.*

Demostración. Usando que la paracompacidad numerable se hereda a subespacios cerrados como vimos al inicio de la sección, podemos realizar una demostración análoga a la del caso paracompacto (Teorema 1.60). □

2.3. El Teorema de Henriksen-Isbell

Siguiendo esta línea de pensamiento es natural preguntarse qué sucede cuando se trabaja con productos de espacios numerablemente paracompactos, en esta sección empezaremos a analizar qué podemos obtener al cambiar las propiedades de nuestros factores para al final aterrizar en otra caracterización de los espacios numerablemente paracomapctos en términos de productos.

Teorema 2.15 (de Henriksen-Isbell)**.** *Sean* X *y* Y *dos espacios topológicos y sea* $f : X \longrightarrow Y$ *una función perfecta. Entonces se cumple que* X *es un espacio numerablemente paracompacto si y sólo si* Y *es numerablemente paracompacto.*

Demostración. Supongamos que X es un espacio numerablemente paracompacto.

Sea $\mathcal{F} = \{F_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ una sucesión decreciente de subconjuntos cerrados de Y tales que $\bigcap \mathcal{F} = \emptyset$.

Consideremos a la familia

$$\mathcal{F}^{\leftarrow} = \{f^{\leftarrow}[F_i] \mid i \in \mathbb{N}\}.$$

Entonces la familia $\mathcal{F}^{\leftarrow}$ es una sucesión decreciente de cerrados tales que $\bigcap \mathcal{F}^{\leftarrow} = \emptyset$. Así por el Teorema 2.2 existe una sucesión decreciente $\{V_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ de abiertos de X tales que para cada $n \in \mathbb{N}$ se cumple que $f^{\leftarrow}[F_i] \subseteq V_i$ y tal que

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} cl_X(V_i) = \emptyset.$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$ consideremos al conjunto

$$G_n = Y \backslash f[X \backslash V_n].$$

Entonces como f es una función perfecta y por tanto cerrada, se tiene que para cada $n \in \mathbb{N}$ el conjunto G_n es abierto en Y.

Notemos que dado $n \in \mathbb{N}$ se cumple que

$$F_n \subseteq Y \backslash f[X \backslash V_n]$$

pues para cada $n \in \mathbb{N}$ tenemos que

$$f^{\leftarrow}[F_i] \subseteq V_i \quad \text{si y sólo si} \quad X \backslash V_i \subseteq X \backslash f^{\leftarrow}[F_i]\ .$$

Es decir,

$$f^{\leftarrow}[F_i] \subseteq V_i \quad \text{si y sólo si} \quad X \backslash V_i \subseteq f^{\leftarrow}[Y] \backslash f^{\leftarrow}[F_i] = f^{\leftarrow}[Y \backslash F_i] \; .$$

Como f es una función suprayectiva concluimos que

$$f^{\leftarrow}[F_i] \subseteq V_i \quad \text{si y sólo si} \quad f[X \backslash V_i] \subseteq Y \backslash F_i \; .$$

Notemos que para cada $n \in \mathbb{N}$ como $V_{n+1} \subseteq V_n$, tenemos que $X \backslash V_n \subseteq X \backslash V_{n+1}$ y por tanto

$$f[X \backslash V_n] \subseteq f[X \backslash V_{n+1}] \, .$$

De este modo sucede que

$$Y \backslash f[X \backslash V_{n+1}] \subseteq Y \backslash f[X \backslash V_n] \, .$$

Así tenemos que para cada $n \in \mathbb{N}$ se cumple que $G_{n+1} \subseteq G_n$.

Por último para demostrar que $\bigcap_{i=1}^{\infty} cl_Y(G_i) = \emptyset$ supongamos que existe $y \in \bigcap_{i=1}^{\infty} cl_Y(G_i)$. Entonces para cada $n \in \mathbb{N}$ como tenemos que

$$f^{\leftarrow}[\{y\}] \subseteq f^{\leftarrow}[Y \backslash f[X \backslash V_n]] = f^{\leftarrow}[G_n]$$

usando de nuevo que f es una función suprayectiva, se cumple que

$$f^{\leftarrow}[Y \backslash f[X \backslash V_n]] = X \backslash f^{\leftarrow}[f[X \backslash V_n]] = V_n.$$

Así si definimos a la familia

$$\mathcal{H} = \{ f^{\leftarrow}[\{y\}] \cap cl_X(V_n) \mid n \in \mathbb{N} \} \, .$$

Entonces $\mathcal{H}$ es una familia decreciente de compactos con intersección vacía, así existe $k_o \in \mathbb{N}$ tal que

$$f^{\leftarrow}[\{y\}] \cap cl_X(V_{k_0}) = \emptyset.$$

En particular tenemos que

$$f^{\leftarrow}[\{y\}] \subseteq int_X(X \backslash V_{k_0}) \, .$$

Así como f es una función perfecta existe una vecindad abierta V de y tal que

$$f^{\leftarrow}[V] \subseteq X \backslash V_{k_0}.$$

En particular como f es una función suprayectiva, tenemos que $V \subseteq f[X \backslash V_{k_0}]$ y por tanto

$$y \notin cl_Y(G_{k_0}) \, .$$

Lo cual es una contradicción. Así se cumple que

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} cl_Y(G_i) = \emptyset.$$

Por tanto el espacio Y es numerablemente paracompacto.

Para la otra implicación, supongamos que Y es numerablemente paracompacto.

Si $\mathcal{U} = \{U_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ es una cubierta abierta numerable para X, entonces para cada $y \in Y$ consideremos $S(y) \subseteq \mathbb{N}$ tal que $S(y)$ sea finito y además se cumpla que

$$f^{\leftarrow}[\{y\}] \subseteq \bigcup_{s \in S(y)} U_s.$$

Como f es una función cerrada, entonces para cada $y \in Y$ podemos encontrar una vecindad abierta V_y de y tal que

$$f^{\leftarrow}[\{y\}] \subseteq f^{\leftarrow}[V_y] \subseteq \bigcup_{s \in S(y)} U_s.$$

Así para cada $y \in Y$ consideremos al conjunto

$$U_y = \bigcup \left\{ V \subseteq Y \mid V \text{ es abierto y } V \subseteq \bigcup_{s \in S(y)} U_s \right\}.$$

Entonces si consideramos a la familia

$$\mathcal{V} = \{U_y \mid y \in Y\}$$

tenemos que $\mathcal{V}$ es una cubierta abierta numerable para Y y por tanto tiene un refinamiento abierto localmente finito $\mathcal{W} = \{W_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Notemos que tal como lo hicimos en el Teorema 1.62, si definimos a la familia

$$\mathcal{G} = \{f^{\leftarrow}[W_n] \cap U_m \mid n \in \mathbb{N} \wedge m \in \mathbb{N}\}.$$

Entonces $\mathcal{G}$ es un refinamiento abierto localmente finito de la cubierta original $\mathcal{U}$.

Así X es un espacio numerablemente paracompacto. $\square$

Corolario 2.16. *Si X es un espacio compacto y Y es un espacio numerablemente paracompacto entonces el producto $X \times Y$ es un espacio numerablemente paracompacto.*

Demostración. Como X es un espacio compacto entonces la proyección $\pi_Y : X \times Y \to Y$ es una función perfecta, así por el Teorema de Henriksen-Isbell se tiene que $X \times Y$ es un espacio numerablemente paracompacto. $\square$

Con esto ya podemos tomar el problema del producto de espacios normales y relacionarlo con el concepto de espacio numerablemente paracompacto.

Recordemos que I denota al espacio compacto $[0, 1]$ que se obtiene como subespacio de $\mathbb{R}$ con la topología euclidiana.

Teorema 2.17 (de Dowker)**.** *Sea X un espacio topológico. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *$X \times I$ es un espacio normal;*
2. *X es un espacio binormal; y*
3. *$X \times Y$ es un espacio normal cuando Y es un espacio métrico compacto.*

Demostración. 1) $\Rightarrow$ 2) Primero, si $X \times I$ es un espacio normal entonces X también lo es al ser homeomorfo al subespacio cerrado $X \times \{0\}$ de $X \times I$, veamos que es numerablemente paracompacto.

Sea $\mathcal{F} = \{F_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ una sucesión decreciente de conjuntos cerrados de X tales que $\bigcap \mathcal{F} = \emptyset$, así consideremos a la familia de abiertos

$$\mathcal{W} = \{W_i \mid W_i = X \backslash F_i,\ i \in \mathbb{N}\}.$$

Definamos al conjunto C como:

$$C = \bigcup_{i=1}^{\infty} W_i \times [0, \frac{1}{i})$$

entonces C es un abierto en $X \times I$ y por tanto su complemento $A = X \backslash C$ es cerrado. Ahora, si definimos $B = X \times \{0\}$, tenemos que $A \cap B = \emptyset$.

Como $X \times I$ es un espacio normal, existen dos abiertos ajenos U y V en $X \times I$ tales que $A \subseteq U$ y $B \subseteq V$. Notemos que en particular

$$cl_X U \cap V = \emptyset$$

y por tanto

$$cl_X U \cap B = \emptyset.$$

Ahora para cada $n \in \mathbb{N}$ consideremos a los conjuntos,

$$G_n = \left\{ x \in X \mid \left(x, \frac{1}{n} \right) \in U \right\}.$$

Veamos que para cada $n \in \mathbb{N}$ el conjunto G_n es abierto: dado $\left(x, \frac{1}{n}\right) \in U$, como U es abierto en $X \times I$ existen dos abiertos básicos U_X y V_I de X y de I respectivamente tal que

$$\left(x, \frac{1}{n} \right) \in U_X \times V_I.$$

Así, para cada $z \in U_X$ tenemos que

$$\left(z, \frac{1}{n} \right) \in U_X \times V_I$$

y por tanto $U_X \subseteq G_n$. Así G_n es abierto.

Notemos que $X\backslash G_n \subseteq W_n$, pues si $z \notin G_n$ entonces $\left(z, \frac{1}{n}\right) \in C$ y además

$$\left(z, \frac{1}{n}\right) \notin \bigcup_{i=n}^{\infty} W_i \times [0, \frac{1}{i})$$

así,

$$z \in \bigcup_{i=1}^{n-1} W_i \subseteq W_n$$

y por lo tanto $z \in W_n$. De este modo para cada $n \in \mathbb{N}$ tenemos que $F_n \subseteq G_n$.

Finalmente notemos que $\bigcap_{i=1}^{\infty} G_n = \emptyset$, pues dado $x \in X$ como

$$(x, 0) \subseteq B \subseteq V$$

entonces existe una vecindad abierta V_I del 0 tal que

$$\{x\} \times V_I \subseteq V$$

y así existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\left(x, \frac{1}{n}\right) \in V$ y por tanto $\left(x, \frac{1}{n}\right) \notin U$.

Con esto, podemos concluir que $\bigcap_{i=1}^{\infty} G_n = \emptyset$.

Así por la proposición anterior, X es un espacio binormal.

2) $\Rightarrow$ 3) Sean A y B dos cerrados ajenos en $X \times Y$ y consideremos a $\mathcal{U} = \{U_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ una base numerable para Y.

Para cada $x \in X$ sean

$$A_x = \{y \in Y \mid (x, y) \in A\}$$

y

$$B_x = \{y \in Y \mid (x, y) \in B\}.$$

Una primera observación es que el conjunto A_x satisface que

$$\{x\} \times A_x = (\{x\} \times Y) \cap A.$$

Usando entonces que el conjunto $(\{x\} \times Y) \cap A$ es cerrado en $X \times Y$ y que

$$cl_{X \times Y}(\{x\} \times A_x) = \{x\} \times cl_Y(A_x),$$

tenemos que el conjunto A_x tiene que ser un conjunto cerrado en Y.

Sea S el conjunto de todos los subconjuntos finitos de $\mathbb{N}$, entonces para cada $s \in S$ sean

$$W_s = \bigcup \{U_n \mid n \in s\}$$

y

$$V_s = \{x \in X \mid A_x \subseteq W_s\} \cap \{x \in X \mid B_x \subseteq Y \backslash W_s\}.$$

Aseguramos que para cada $s \in S$ el conjunto V_s es abierto en X.

Sea

$$x_o \in \{x \in X \mid A_x \subseteq W_s\}.$$

Entonces por definición $A_{x_0} \subseteq W_s$; ahora dado $y \in Y \backslash W_s$ notemos que $(x_o, y) \notin A$ pues de estarlo tendríamos que $y \in A_{x_0}$ lo cual es una contradicción a que $y \notin W_s$.

Así como A es un conjunto cerrado en $X \times Y$, para cada $y \in Y \backslash W_s$ existe una vecindad abierta de la forma $N_y \times M_y$ tal que

$$(x_0, y) \in N_y \times M_y \subseteq (X \times Y) \backslash A.$$

Entonces el conjunto

$$V = \{M_y \mid y \in Y \backslash W_s\}$$

es una cubierta abierta para el conjunto $Y \backslash W_s$.

Como $Y \backslash W_s$ es cerrado en Y y por tanto compacto, existe una subcubierta finita de la forma

$$\{M_{y_1}, \dots, M_{y_n}\}$$

para algunos $y_1, \dots, y_n \in Y$. Observemos así que

$$N = \bigcap_{i=1}^{n} N_{y_i}$$

es una vecindad abierta de x_0 y además

$$N \times (Y \backslash W_s) \subseteq (X \times Y) \backslash A.$$

Así para cada $x \in N$ tenemos que si $(x, y) \in A$ entonces por lo anterior tenemos que $y \notin Y \backslash W_s$ y por tanto $y \in W_s$, es decir tenemos que $A_x \subseteq W_s$ lo cual demuestra que el conjunto

$$\{x \in X \mid A_x \subseteq W_s\}$$

es abierto en X y de manera análoga el conjunto

$$\{x \in X \mid B_x \subseteq Y \backslash W_s\}$$

también es abierto en X.

Consideremos a la familia

$$\mathcal{F} = \{V_s \mid s \in S\}.$$

Aseguramos que $\mathcal{F}$ es una cubierta abierta para X. Tomemos entonces a $x \in X$.

Primero, en caso de que $A_x = \emptyset$, notemos que por definición se cumple que $W_\emptyset = \emptyset$ y por tanto

$$V_\emptyset = \{x \in X \mid A_x \subseteq \emptyset\} \cap \{x \in X \mid B_x \subseteq Y\}$$

de donde automáticamente se cumple que $A_x \subseteq \emptyset$ y por tanto $x \in V_\emptyset$.

Ahora, dado $x \in X$ y $y \in A_x$ podemos encontrar alguna $U(y) \in \mathcal{U}$ tal que $y \in U(y)$ y además, gracias a que Y es un espacio regular, se satisfaga que

$$y \in U(y) \subseteq cl_Y(U(y)) \subseteq Y \backslash B_x$$

y tenemos entonces que la familia

$$\mathcal{W}_x = \{U(y) \mid y \in A_x\}$$

es una cubierta abierta para el conjunto A_x.

Como el conjunto A_x es compacto al ser cerrado en Y, entonces $\mathcal{W}_x$ tiene una subcubierta finita, así existe $s \in S$ tal que $A_x \subseteq W_s$ y además $cl_Y(W_s) \cap B_x = \emptyset$ por lo anterior, por tanto tenemos que $x \in V_s$.

Ahora como X es un espacio binormal, la familia $\mathcal{F}$ tiene un refinamiento abierto localmente finito $\mathcal{G}$ por ser una cubierta abierta numerable de X. Para cada $s \in S$ consideremos a

$$O_s = \bigcup \{U \in \mathcal{G} \,|U \subseteq V_s\}.$$

Entonces la familia $\mathcal{H} = \{O_s \mid s \in S\}$ es una cubierta abierta localmente finita de X tal que para cada $s \in S$ se cumple que $O_s \subseteq V_s$.

Así por el Teorema 2.2, existe una cubierta abierta localmente finita y numerable $\mathcal{I} = \{D_s \mid s \in S\}$, tal que para cada $s \in S$ se cumple que $cl_X(D_s) \subseteq O_s$. Consideremos al conjunto

$$V = \bigcup_{s \in S} D_s \times W_s.$$

Entonces V es abierto en $X \times Y$ y además tenemos que:

$$cl_{X \times Y}(V) = \bigcup_{s \in S} (cl_X D_s \times cl_Y W_s) \subseteq \bigcup_{s \in S} V_s \times cl_Y W_s$$

y así

$$B \cap \bigcup_{s \in S} (V_s \times cl_Y W_s) = \emptyset$$

por construcción de V_s.

Para concluir notemos que $A \subseteq V$ ya que dado $(x, y) \in A$ tenemos que existe $s \in S$ tal que $x \in D_s$, usando las propiedades anteriores tenemos que

$$x \in D_s \subseteq cl_X(D_s) \subseteq O_s \subseteq V_s$$

y como $x \in V_s$ y $y \in A_x$, entonces por definición sucede que $y \in W_s$, lo cual demuestra que $(x, y) \in V$. Por tanto tenemos que $A \subseteq V$ y $B \subseteq (X \times Y) \setminus cl_{X \times Y}(V)$, mostrando que el espacio $X \times Y$ es normal.

3) $\Rightarrow$ 1) Es inmediato. $\square$

2.4. Un Segundo Teorema de Stone

El resultado anterior nos asegura que el producto de un espacio binormal con un espacio métrico compacto siempre es un espacio normal, pero es natural preguntarse si será posible modificar la restricción que tenemos de usar un espacio métrico compacto y aún así poder preservar algo de provecho para tener un buen resultado.

Tristemente, la normalidad siempre ha sido una de las propiedades más elusivas en cuanto a poder caracterizar qué condiciones se necesitan para preservarla al realizar un producto de espacio topológicos. El resultado que estudiaremos para cerrar este capítulo será una especie de generalización para nuestro resultado anterior, caracterizando por completo cuándo un producto *arbitrario* de espacios métricos resulta ser un espacio normal.

Primero será conveniente revisar un par de lemas, donde algunos de ellos no son más que observaciones casi inmediatas.

Lema 2.18. *X es un espacio numerablemente compacto si y sólo si no contiene un subespacio cerrado, discreto y numerable.*

Demostración. Supongamos que X es un espacio numerablemente compacto. Como la compacidad numerable es una propiedad que se hereda a cerrados, entonces cualquier subespacio cerrado discreto y numerable sería numerablemente compacto lo cual no es posible.

Ahora supongamos que X no es un espacio numerablemente compacto, consideremos a $\mathcal{U} = \{U_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ una cubierta abierta numerable para X sin subcubiertas finitas.

Sea $x_1 \in X$, entonces existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $x \in U_{n_1}$. Consideremos a

$$V_1 = \bigcup_{i=1}^{n_1} U_i.$$

Entonces como $\mathcal{U}$ no tiene subcubiertas finitas existe $x_2 \in X \backslash V_1$. Como $\mathcal{U}$ es una cubierta de X el conjunto

$$M_2 = \{n \in \mathbb{N} | x_2 \in U_n \text{ para alguna } U_n \in \mathcal{U}\}$$

es no vacío y por tanto tiene un primer elemento n_2.

Así sea

$$V_2 = (\bigcup_{i=1}^{n_2} U_i).$$

Supongamos que hemos definido $\{x_1, ..., x_k\}$, $\{V_1, ..., V_k\}$ y $\{n_1, ..., n_k\}$.

Como $\mathcal{U}$ no tiene subcubiertas finitas existe

$$x_{k+1} \in X \backslash \bigcup_{i=1}^{n_k} U_i.$$

Así como en el paso base sea n_k el mínimo de

$$M_{k+1} = \{n \in \mathbb{N} | x_{k+1} \in U_n \text{ para alguna } U_n \in \mathcal{U}\}$$

y sea

$$V_{k+1} = (\bigcup_{i=1}^{n_{k+1}} U_i).$$

Entonces de manera recursiva podemos definir a $N = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, aseguramos que es un subespacio cerrado y discreto de X.

Notemos que dado $x \in X$ existe una $k \in \mathbb{N}$ tal que $x \in U_n$. A su vez por construcción tenemos que

$$U_n \cap N = \{x_1, ..., x_m\}$$

para alguna $m \leq k$. Por tanto N es un conjunto sin puntos de acumulación y consecuentemente cerrado en X.

Observemos que por construcción de M, para cada $n \in \mathbb{N}$ se cumple que

$$x_{n+1} \in V_{n+1} \text{ pero } x_n \notin \bigcup_{i=1}^{n} V_n.$$

Primero notemos que $V_1 \cap N = \{x_1\}$. Ahora dado $x_{k+1} \in N$ y usando que X es un espacio Hausdorff, para cada $n \in \{1, ..., k\}$ existen abiertos ajenos U_n y V_n tales que $x_n \in U_n$ y $x_{k+1} \in V_n$.

Sea

$$C = \bigcap_{i=1}^{n} V_i.$$

Entonces $C \cap V_{k+1}$ es un abierto de X tal que

$$(C \cap V_{k+1}) \cap N = \{x_{k+1}\}.$$

Por tanto N es un subespacio cerrado, discreto y numerable de X. □

Lema 2.19. *Sea $X = \omega^\kappa$ donde κ es un ordinal no numerable.*
Si para cada $n \in \omega$ definimos a la familia

$$A_n = \{(x_k) \in X \mid si\ m \neq n\ entonces\ m = x_l\ a\ lo\ más\ para\ un\ l \in \kappa\}$$

entonces la familia $\{A_n \mid n \in \omega\}$ es una familia de cerrados ajenos por pares.

Demostración. Primero vamos a verificar que son ajenos: sea $n \in \omega$ y consideremos un punto $(x_k) \in A_n$. Por definición existe una función $f : \kappa \to \omega$ tal que para toda $k \in \kappa$ se tiene que $f(k) = x_k$.

Como κ es un ordinal no numerable entonces la función f no es inyectiva, así por definición de A_k si consideramos al conjunto

$$B_n = \{k \in \kappa \mid f(x_k) \neq n\}$$

entonces B_n es un conjunto numerable de κ y por tanto podemos concluir que el conjunto

$$C_n = \{k \in \kappa \mid f(x_k) = n\}$$

es no numerable. Así tenemos que una sucesión $(x_k) \in A_n$ toma el valor de n un número no numerable de veces.

Observemos que para cada $n, m \in \omega$ con $n \neq m$ y para cada sucesión $(x_k) \in A_n$ se cumple que

$$|\{k \in \kappa \mid x_k = n\}| > \omega$$

y

$$|\{k \in \kappa \mid x_k = m\}| \leq 1.$$

Por tanto $A_n \cap A_m = \emptyset$, mostrando que la familia $\{A_n \mid n \in \omega\}$ es de conjuntos ajenos por pares.

Veamos que son cerrados: sea $n \in \omega$ y consideremos un punto $(x_k) \in X \backslash A_n$. Por definición de A_n existen al menos $\alpha, \beta \in \kappa$ tal que

$$x_\alpha = x_\beta \quad \text{con} \quad x_\alpha \neq n \ .$$

Por tanto si consideramos a

$$U = \pi_\alpha^{\leftarrow}[\{x_\alpha\}] \cap \pi_\beta^{\leftarrow}[\{x_\alpha\}],$$

entonces U es una vecindad abierta de (x_k) tal que para cada $(y_k) \in U$ se cumple que

$$(y_k)_\alpha = (y_k)_\beta = x_\alpha.$$

Por tanto $U \subseteq X \backslash A_k$ y así A_n es cerrado en X.

Así concluimos que $\{A_n \mid n \in \omega\}$ es una familia de cerrados ajenos por pares de X. □

Lema 2.20. *Si X es un producto no numerable de un espacio discreto y numerable entonces X no es un espacio normal.*

Demostración. Como todo espacio discreto y numerable es homeomorfo a ω entonces supongamos sin pérdida de generalidad que $X = \prod_{\alpha \in \kappa} \omega$ donde κ es un ordinal no numerable.

Para cada $n \in \omega$ definamos a los conjuntos

$$A_n = \{(x_k) \in X \mid \text{si } m \neq n \text{ entonces } m = x_l \text{ a lo más para un } l \in \kappa\}.$$

Entonces por el lema anterior el conjunto $\{A_n \mid n \in \omega\}$ es una familia de cerrados ajenos por pares de X, en particular tenemos que A_1 y A_2 son cerrados y ajenos.

Supongamos que existen abiertos ajenos U y V de X tales que $A_1 \subseteq U$ y $A_2 \subseteq V$. Por recursión definamos una sucesión de puntos $\{(x_i) \mid i \in \omega\}$ en A_1 de la siguiente manera.

Primero sea x_0 la sucesión constante (1), como U es un conjunto abierto existe una vecindad abierta de (1) tal que

$$(1) \in \bigcap_{i \in n_0} \pi_{\alpha_i}^{\leftarrow}[\{1\}] \subseteq U$$

donde n_0 es un conjunto finito de índices en κ. Así definamos a x_1 como sigue:

$$(x_1)_i = \begin{cases} n \text{ si } i = \alpha_n \text{ con } n \in n_0 \\ 1 \text{ en otro caso} \end{cases}$$

Así tenemos que $(x_1) \in U$ y por tanto podemos encontrar una vecindad abierta de (x_1) tal que

$$(x_1) \in \bigcap_{i \in n_0} \pi_{\alpha_i}^{\leftarrow}\left[(x_1)_{\alpha_i}\right] \cap \bigcap_{i \in n_1} \pi_{\alpha_i}^{\leftarrow}\left[(x_1)_{\alpha_i}\right] \subseteq U$$

donde n_1 es un número finito de índices en κ.

Supongamos que tenemos definidos $\{(x_i) \mid i \leq k\}$ y $\{n_i \mid i \leq k\}$, consideremos a

$$(x_{n+1})_i = \begin{cases} m \text{ si } i = \alpha_m \text{ con } m \in \bigcup_{j \leq n} n_j \\ 1 \text{ en otro caso} \end{cases}$$

Entonces $(x_{n+1}) \in U$ y por tanto existe una vecindad abierta de (x_{n+1}) tal que

$$(x_{n+1}) \in \bigcap_{i \leq k} \left[\bigcap_{j \in n_i} \pi^{\leftarrow}_{\alpha_j} \left[(x_{n+1})_{\alpha_j} \right] \right] \cap \bigcap_{i \in n_{k+1}} \pi^{\leftarrow}_{\alpha_i} \left[(x_{n+1})_{\alpha_i} \right] \subseteq U$$

donde n_{k+1} es un número finito de íncides en κ.

Así hemos completando la construcción de $\{(x_i) \mid i \in \omega\}$ y adicionalmente de la familia de índices $\{n_i \mid i \in \omega\}$.

Ahora sea $(y) \in X$ el punto tal que

$$(y)_i = \begin{cases} n \text{ si } i = \alpha_n \text{ con } n \in \bigcup \{n_i \mid i \in \omega\} \\ 2 \text{ otro caso} \end{cases}$$

Entonces por construcción tenemos que $(y) \in A_2 \subseteq V$ y por tanto existe una vecindad abierta de (y) tal que

$$(y) \in \bigcap_{i=0}^{k} \pi^{\leftarrow}_{\beta_i} \left[(y)_{\beta_i} \right] \subseteq V.$$

Como el conjunto $\{\beta_0, ..., \beta_n\}$ es finito existe $m \in \bigcup \{n_i \mid i \in \omega\}$ tal que para cada $\alpha \geq \alpha_m$ se cumple que

$$\alpha \notin \{\beta_0, ..., \beta_n\}.$$

Así podemos encontrar una subfamilia n_k tal que

$$\{\alpha_i \mid i \in n_k\} \cap \{\beta_0, ..., \beta_n\} = \emptyset$$

Finalmente consideremos a un punto $(z) \in X$ tal que

$$(z)_i = \begin{cases} n \text{ si } i = \alpha_n \text{ con } n \in \bigcup_{j<k} n_j \\ 1 \text{ si } i = \alpha_m \text{ con } m \in n_k \\ 2 \text{ otro caso} \end{cases}$$

Entonces por construcción tenemos que

$$(z) \in \bigcap_{i<k} \left[\bigcap_{j \in n_i} \pi^{\leftarrow}_{\alpha_j} \left[(x_n)_{\alpha_j} \right] \right] \cap \bigcap_{i \in n_k} \pi^{\leftarrow}_{\alpha_i} \left[(x_n)_{\alpha_i} \right] \subseteq U$$

Y además

$$z \in \bigcap_{i=0}^{k} \pi^{\leftarrow}_{\beta_i} \left[(y)_{\beta_i} \right] \subseteq V.$$

Por tanto $z \in cl_X(V) \cap U$, lo cual contradice el hecho de que U y V son dos abiertos ajenos en X.

Por tanto X no es un espacio normal. □

Corolario 2.21. *Sea X un producto de espacios topológicos. Si X es un espacio normal entonces todos salvo un número numerable de factores son numerablemente compactos.*

Demostración. Recordemos primero que la normalidad es una propiedad que se hereda a subespacios cerrados.

Si X tiene un numero no numerable de factores que no son numerablemente compactos entonces por el Lema 2.18 cada uno tendría un subespacio cerrado, discreto y numerable. Así el producto de estos mismos sería un subespacio cerrado no normal de X por el Lema 2.20.

Por tanto X no es un espacio normal. □

Finalmente por fin podemos concluir con el resultado buscado.

Teorema 2.22 (de Stone)**.** *Sea X un producto de espacios métricos. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *X es un espacio paracompacto,*

2. *X es un espacio binormal; y*

3. *Todos salvo un número numerable de factores son compactos.*

Demostración. 1) $\implies$ 2) Como X es un espacio paracompacto, entonces X es un espacio binormal.

2) $\implies$ 3) Supongamos que X es un espacio binormal, entonces por el Corolario 2.21 todos salvo un número finito de factores son numerablemente compactos. Como las nociones de compacidad numerable y de compacidad son equivalentes en espacios métricos entonces todos salvo un número finito de factores son compactos.

3) $\implies$ 1) Supongamos que $X = \prod_{k \in \kappa} X_i$ donde para cada $k \in \kappa$ el espacio X_k es metrizable.

Por hipótesis y sin pérdida de generalidad podemos descomponer al espacio X en dos factores $Y = \prod_{i \in \omega} X_i$ y $Z = \prod_{i \in \kappa} X_i$ tales que X es homeomorfo al producto $Y \times Z$ y en donde Z es un producto de espacios compactos y por tanto compacto.

Finalmente como Y es un producto numerable de espacios métricos, entonces Y es un espacio metrizable y por el primer Teorema de Stone tenemos que Y es un espacio binormal al ser paracompacto.

Por el Teorema 2.17 el espacio $Y \times Z$ es un espacio normal y por tanto X mismo es un espacio normal. □

Naturalmente es bueno recordar que el Ejemplo 1.19 es testigo de que no podemos debilitar la hipótesis de que los espacios sean métricos.

Lo que hemos estudiando durante este capítulo ha tenido una relación muy íntima con los espacios normales. Durante nuestra discusión, definimos por espacio binormal a los espacios que son tanto numerablemente paracompacto como normales.

Es importante notar que muchos de nuestros resultados utilizan fuertemente la hipótesis de tener un espacio binormal, pero seguramente el lector se ha dado cuenta que hay algo más de fondo ya que *nunca* mencionamos un ejemplo de un espacio normal que no sea binormal.

En el año de 1949 Dowker introdujo la noción de los espacios numerablemente paracompactos, incluyendo además la caracterización que estudiamos durante este capítulo (Teorema

2.17). Fue en ese entonces donde surgió dicha pregunta: ¿existe un espacio normal X tal que el producto $X \times I$ no sea un espacio normal?, es decir *¿existe un espacio normal que no sea binormal?* A los espacios que cumplen estas condiciones se les nombró *espacios de Dowker*.

Por muchos años esta pregunta sólo tuvo respuestas con pruebas de consistencia. Fue hasta el año de 1970 cuando Mary Ellen Rudin pudo construir un ejemplo utilizando solamente los axiomas de Zermelo-Fraenkel con elección.

Ya que estamos tan metidos hasta este punto, intentaremos llegar hasta ese anhelado ejemplo de Rudin, pero pasando primero por los ejemplos de consistencia. Veremos que esta pregunta no es más que una puerta que nos conduce a una aventura mucho más densa y misteriosa que la que hemos tenido hasta ahora.

Parte II

Espacios de Dowker

Capítulo 3

Espacios de Dowker

3.1. Espacios no Dowker

Retomando lo visto en el capítulo anterior, recordemos que a un espacio numerablemente paracompacto y normal se le conoce como un espacio binormal y que a un espacio normal que no es binormal se le conoce como *espacio de Dowker*. Durante este capítulo veremos cómo construir diferentes tipos de espacios de Dowker utilizando algunas hipótesis adicionales a los axiomas de Zermelo-Fraenkel con elección y veremos cómo influyen al cambiar de fortaleza a estas nuevas hipótesis en las propiedades de nuestros espacios.

Al final intentaremos aterrizar en la estrella principal: el espacio de Rudin, un espacio de Dowker que podemos construir sólamente a partir de los axiomas de Zermelo-Fraenkel y utilizando el Axioma de Elección.

Antes que nada es necesario que nos familiaricemos de una manera un poco más íntima con la caracterización que vamos a utilizar para obtener estos espacios, para ello primero estudiaremos algunos espacios que no pueden ser espacios de Dowker.

Arrancaremos primero con una pequeña reformulación del Corolario 2.3 que servirá como nuestra definición a utilizar.

Definición 3.1. *Un espacio topológico X es un espacio de Dowker si y sólo si X es un espacio normal y existe una sucesión decreciente $F_1 \supseteq F_2 \supseteq \ldots$ de conjuntos cerrados de X tales que $\bigcap_{i=1}^{\infty} F_i = \emptyset$ y tal que para cada sucesión $\{W_i \mid i \in \omega\}$ de abiertos de X tales que para cada $i \in \omega$ se tenga que $F_i \subseteq W_i$, entonces $\bigcap_{i=1}^{\infty} W_i \neq \emptyset$.*

Recordemos que en el Capítulo 1 demostramos que todo espacio paracompacto es normal, por tanto ningún espacio pseudométrico, compacto, discreto o Lindelöf regular pueden ser espacios de Dowker. Recordemos que la noción de *espacio de Moore* está íntimamente ligada a los espacios métricos, en especial por la conjetura de que todo espacio normal de Moore es metrizable, hoy en día se ha concluido que esta conjetura es independiente de Zermelo-Fraenkel con elección, pero al menos como consuelo para nosotros aún podemos probar algo con respecto a aquellos espacios de Moore que son normales.

Recordemos también que un espacio topológico es perfecto si todo cerrado se puede expresar como la intersección númerable de abiertos, es decir, si todo conjunto cerrado es un conjunto G_δ. Adicionalmente a un espacio topológico normal y perfecto se le suele llamar espacio *perfectamente normal*.

Proposición 3.2. *Ningún espacio perfecto puede ser un espacio de Dowker.*

Demostración. Sea X un espacio perfectamente normal y consideremos una sucesión decreciente de conjuntos cerrados $\{F_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ tales que $\bigcap_{i=1}^{\infty} F_i = \emptyset$.

Como X es un espacio perfecto para cada $n \in \mathbb{N}$ existe una sucesión $\{D_{n_i} \mid i \in \mathbb{N}\}$ de conjuntos abiertos tales que

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} D_{n_i} = F_n.$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$ definamos a

$$U_n = \bigcap \{D_{k_i} \mid i \leq n \wedge k \leq n\}.$$

Entonces la familia

$$\mathcal{U} = \{U_n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

es una sucesión de conjuntos abiertos tales que para cada $n \in \mathbb{N}$ se cumple que $F_n \subseteq U_n$ y además

$$\bigcap \{U_n \mid n \in \mathbb{N}\} = \bigcap \{F_n \mid n \in \mathbb{N}\} = \emptyset.$$

Por tanto X no es un espacio de Dowker. □

Antes de poder utilizar este resultado con los espacios de Moore, primero recordemos un par de definiciones fundamentales para poder trabajar con ellos.

Definición 3.3. *Sea X un espacio topológico y sean $A \subseteq X$ y $\mathcal{U}$ una cubierta de X. La estrella de A con respecto a $\mathcal{U}$ se define como*

$$St(A,\mathcal{U}) = \bigcup \{U \in \mathcal{U} \mid A \cap U \neq \emptyset\}.$$

Dado $x \in X$ identificamos a la estrella de x con respecto a $\mathcal{U}$ como

$$St(x,\mathcal{U}) = St(\{x\},\mathcal{U})$$

Definición 3.4. *Sea X un espacio regular. Decimos que X es un espacio de Moore si existe una familia numerable $\{\mathcal{W}_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ de cubiertas abiertas de X tal que para cada $x \in X$ la familia*

$$\{St(x,\mathcal{W}_i) \mid i \in \mathbb{N}\}$$

*constituye una base de vecindades para el punto x. A una familia numerable de cubiertas abiertas con esta propiedad se le conoce como un **desarrollo** del espacio X.*

Proposición 3.5. *Todo espacio normal de Moore es un espacio perfectamente normal.*

Demostración. Sean X un espacio normal de Moore, A un subconjunto cerrado de X y $\mathcal{W} = \{\mathcal{W}_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ un desarrollo para el espacio X.

Aseguramos que

$$A = \bigcap_{i=0}^{\infty} St(A,\mathcal{W}_i).$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$ consideremos al conjunto

$$U_n = \{U \in \mathcal{W}_n \mid U \cap A \neq \emptyset\}.$$

Primero, dado $x \in A$ como $\mathcal{W}$ es una familia de cubiertas abiertas para X entonces para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$x \in \bigcup U_n$$

es decir,

$$x \in \bigcap_{i=0}^{\infty} St\,(A, \mathcal{W}_i).$$

Ahora sea $x \in X \backslash A$, como $\mathcal{W}$ es un desarrollo para X entonces existe una $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$St\,(x, \mathcal{W}_n) \subseteq X \backslash A$$

es decir,

$$\bigcup \{U \in \mathcal{W}_n \mid \{x\} \cap U \neq \emptyset\} \subseteq X \backslash A.$$

Por tanto $x \notin \bigcup U_n$, es decir,

$$x \in \bigcup_{i=0}^{\infty} X \backslash \bigcup U_n = X \backslash \bigcap_{i=0}^{\infty} St\,(A, \mathcal{W}_i).$$

En consecuencia

$$A = \bigcap_{i=0}^{\infty} St\,(A, \mathcal{W}_i).$$

Por tanto A es G_δ en X. Así X es un espacio perfectamente normal. □

Uniendo así la Proposición 3.2 y la Proposición 3.5 obtenemos que:

Corolario 3.6. *Ningún espacio normal de Moore puede ser un espacio de Dowker.*

Anteriormente abordamos con bastante insistencia a los espacios linealmente ordenados y logramos demostrar que cualquier subespacio de ellos (es decir, cualquier espacio GO) es un espacio *colectivamente normal (Proposición 1.48)*. Para concluir esta breve sección veremos que los espacios linealmente ordenados tampóco pueden ser espacios de Dowker, y no sólo eso: haciendo uso del Teorema de Lutzer (1.46) mejoraremos un poco este resultado.

Teorema 3.7. *Ningún espacio linealmente ordenado puede ser un espacio de Dowker.*

Demostración. Sea $\langle X, \leq \rangle$ un espacio linealmente ordenado y supongamos que es un espacio de Dowker. Así, existe una sucesión decreciente de conjuntos cerrados $\mathcal{F} = \{F_n \mid n \in \omega\}$ tal que $\bigcap \mathcal{F} = \emptyset$ y que además para cada sucesión de abiertos $\mathcal{W} = \{W_n \mid n \in \omega\}$ tal que si para cada $n \in \omega$ se cumple que $F_n \subseteq W_n$ entonces $\bigcap \mathcal{W} \neq \emptyset$.

Una observación importante es que la familia $\mathcal{F}$ está compuesta de conjuntos cerrados *no vacíos*, pues de existir alguna $n \in \omega$ tal que $F_n = \emptyset$ al elegir una sucesión de abiertos que contenga a cada cerrado de $\mathcal{F}$ simplemente podemos cubrir a F_n con el conjunto vacío y como consecuencia la intersección de esta familia de abiertos sería vacía.

Ahora, como para toda $n \in \omega$ el conjunto F_n es cerrado en X, dado $x \in X \backslash F_n$ podemos encontrar un intervalo abierto U_x tal que $x \in U_x \subseteq X \backslash F_n$. De esta manera para cada $n \in \omega$ podemos considerar a I_n como el conjunto de intervalos abiertos *maximales* que no intersectan al conjunto cerrado F_n.

Como la sucesión $\mathcal{F}$ es decreciente y por construcción de la familia $\{I_n \mid n \in \omega\}$ dado $J_n \in I_n$ podemos encontrar un intervalo $J_{n+1} \in I_{n+1}$ tal que

$$J_n \subseteq J_{n+1}.$$

De esta manera, dado $J_0 \in I_0$ fijo podemos definir inductivamente una sucesión de la forma $\{J_n \mid n \in \omega\}$ tal que para cada $n \in \omega$ se cumple que

$$J_n \subseteq J_{n+1} \quad \text{y} \quad J_n \in I_n \ .$$

Consideremos así a $\mathcal{S} = \{S_i \mid i \in I\}$ el conjunto de todas las sucesiones que cumplen lo anterior. Definamos una relación r sobre $\mathcal{S}$ de la siguiente manera: diremos que S_i está r-relacionado con S_j si y sólo si existe una $n \in \omega$ tal que para toda $k \geq n$ se cumple que

$$(S_i)_k = (S_j)_k \, .$$

Claramente esta relación es de equivalencia y por tanto podemos considerar al conjunto cociente S/r. De esta manera, construyamos una familia maximal $M \subseteq \mathcal{S}$ de miembros no equivalentes bajo la relación r usando una función de elección.

Ahora, como $\bigcap \mathcal{F} = \emptyset$ para cada $x \in X$ podemos considerar a

$$i_x = \min \{j \in \omega \mid x \notin F_j\} \, .$$

Lo que haremos a continuación es construir una familia de abiertos $\mathcal{W} = \{W_n \mid n \in \omega\}$ tal que para cada $n \in \omega$ se tenga que $F_n \subseteq W_n$ pero $\bigcap \mathcal{W} = \emptyset$, contradiciendo nuestra suposición.

Sea $x \in F_n$, entonces para cada $m \geq i_x$ existe algún $l\left(x\right)_m \in I_m$ tal que $x \in l\left(x\right)_m$, por maximalidad de la familia M existe alguna sucesión $J\left(x\right) \in M$ y alguna $k > i_x$ tal que para cada $s \geq k$ se cumple que

$$J\left(x\right)_s = l\left(x\right)_s \, .$$

Ahora consideremos al abierto $J\left(x\right)_{i_x}$, entonces existe una vecindad abierta U_x de x tal que

$$x \in U_x \subseteq J\left(x\right)_{i_x} \, .$$

Construyamos así al conjunto abierto

$$V_x = U_x \backslash \bigcup_{i=0}^{i_x - 1} cl_X \left(J\left(x\right)_i\right) .$$

Por construcción tenemos que $x \in V_x \subseteq J\left(x\right)_{i_x}$ y además para cada $n < i_x$ se cumple que

$$V_x \cap cl_X \left(J\left(x\right)_n\right) = \emptyset. \tag{3.1}$$

De esta manera consideremos al conjunto abierto

$$W_n = \bigcup \{V_x \mid x \in F_n\}.$$

Aseguramos que la familia $\mathcal{W} = \{W_n \mid n \in \omega\}$ construida de esta manera es tal que $\bigcap \mathcal{W} = \emptyset$.

Supongamos que existe $x \in \bigcap \mathcal{W}$ y consigamos de manera análoga a lo anterior una sucesión $J(x) \in M$ y alguna $k > i_x$ tal que para cada $s \geq k$ se cumpla que $J(x)_s = l_s$ y un intervalo abierto V_x tal que $x \in V_x \subseteq J(x)_{i_x}$ y además que para toda $n < i_x$ se cumpla que

$$V_x \cap cl_X (J(x)_n) = \emptyset.$$

Consideremos a $J(x)_k$, entonces por construcción tenemos que

$$J(x)_k \subseteq X \backslash F_k.$$

Como el conjunto $J(x)_k$ es un intervalo entonces su cerradura es de la forma

$$cl_X (J(x)_k) = J(x)_k \cup M_k$$

donde $|M_k| \leq 2$. Como la familia $\{X \backslash F_n \mid n \in \omega\}$ es una familia creciente de abiertos que cubre a X, existe alguna $n \geq k$ tal que

$$cl_X (J(x)_k) \subseteq X \backslash F_n.$$

Ahora, como $x \in \bigcap \mathcal{W}$ en particular se cumple que $x \in W_n$ y por tanto existe alguna $y \in F_n$ tal que $x \in V_y$. Además, como $y \in F_n$ necesariamente tenemos que $i_y > n$.

Ahora, por construcción de V_y (3.1) tenemos que

$$y \in V_y \subseteq J(y)_{i_y}.$$

De esta manera, como $x \in V_y$ y gracias a la maximalidad del intervalo $J(y)_{i_y}$ con respecto a la familia I_{i_y} podemos asegurar que

$$J(x)_{i_y} = J(y)_{i_y} = l(x)_{i_y}.$$

Sea $s > i_y$ y supongamos que $J(x)_s = J(y)_s$, notemos que por definición $J(x)_s \subseteq l(x)_{s+1}$. Por maximalidad de $l(x)_{s+1}$ en I_{s+1} tenemos que $l(x)_{s+1} = J(y)_{s+1}$, pues de lo contrario el intervalo $J(y)_{s+1}$ no sería maximal en el conjunto I_{s+1}. Así tenemos que $J(x)_{s+1} = J(y)_{s+1}$.

Por inducción concluimos que para cada $s \geq i_y$ se cumple que

$$J(x)_s = J(y)_s.$$

Ahora como $y \in F_n$ entonces $y \notin cl_X (J(x)_k)$, pero más aún: usando la construcción de V_y podemos asegurar que

$$V_y \cap cl_X (J(x)_k) = \emptyset.$$

Lo cual es una contradicción, pues $x \in J(x)_k$.

Así, X no puede ser un espacio de Dowker. $\square$

Corolario 3.8. *Cualquier espacio linealmente ordenado es numerablemente paracompacto.*

Demostración. Como todo espacio linealmente ordenado es un espacio normal, por el resultado anterior tenemos que necesariamente son espacios numerablemente paracompactos al no ser espacios de Dowker. □

Utilizando ahora el Teorema de Lutzer (1.46) podemos mejorar mucho más este resultado clásico de Mary Rudin.

Corolario 3.9. *Ningún espacio* GO *puede ser un espacio de Dowker.*

Demostración. Como la paracompacidad numerable es una propiedad que se hereda a cerrados, el Teorema de Lutzer nos asegura esto. □

3.2. Algunos Espacios de Dowker

La existencia de un espacio de Dowker fue una pregunta que no tuvo una solución directa por mucho tiempo, fue durante este periodo de tiempo cuando Ostaszewski hace uso de un principio combinatorio, consistente con *ZFE*, para la construcción de ciertos espacios topológicos. De este mismo modo se puede hacer un primer acercamiento (un tanto inocente) hacia los espacios de Dowker.

Primero empecemos con la definición del *Principio Combinatorio de Ostaszewski*, también conocido simplemente como ♣ o *trébol*.

Definición 3.10. *Se define a ♣ como el siguiente enunciado:*

Existe una sucesión $\{S(\alpha) \mid \alpha \in \omega_1$ y α es límite$\}$ tal que para cada ordinal límite α en ω_1 se cumple lo siguiente:

1. $S(\alpha) \subseteq \alpha$,
2. $S(\alpha)$ *tiene tipo de orden* ω,
3. *cada conjunto* $S(\alpha)$ *es cofinal a* α *(es decir,* $\sup(S(\alpha)) = \alpha$*); y*
4. *si* $S \subseteq \omega_1$ *con* $|S| \geq \omega_1$ *entonces existe algún ordinal límite* β *en* ω_1 *tal que* $S(\beta) \subseteq S$.

A una sucesión que cumple estas cuatro propiedades se le conoce como sucesión ♣.

Supongamos que existe una sucesión trébol $\{S(\alpha) \mid \alpha \in \omega_1$ y α es límite$\}$. Usando el *Axioma de Elección* para cada ordinal límite α en ω_1 consideremos una partición del conjunto $S(\alpha)$ de la forma

$$\left\{S(\alpha)_{ijk} \mid i, j, k \in \omega\right\} \tag{3.2}$$

tal que para cualesquiera dos ternas $u, v \in \omega^3$ tales que $u \neq v$ se cumpla que $S(\alpha)_u \cap S(\alpha)_v = \emptyset$ y además que para cada $u \in \omega^3$ se tenga que $|S(\alpha)_u| = \aleph_0$.

Ejemplo 3.11 (♣). *Consideremos al producto cartesiano $\omega_1 \times \omega$ y démosle una topología como sigue: diremos que un subconjunto U de $\omega_1 \times \omega$ es abierto si para cada elemento de U de la forma $(\alpha + j, n)$ donde α es un ordinal límite en ω_1 y $j, n \in \omega$ se cumple que para cada $i \leq n$ existe un subconjunto* cofinito *S_i del conjunto $S(\alpha)_{ijn}$ tal que*

$$\{(\beta, i) \mid \beta \in S_i\} \subseteq U$$

Claramente esta condición define una topología sobre $\omega_1 \times \omega$, y de ahora en adelante denotaremos a este espacio topológico como $\mathcal{D}_1$.

Veamos algunas propiedades del espacio $\mathcal{D}_1$.

Proposición 3.12. *El espacio $\mathcal{D}_1$ es un espacio T_1. Es decir, para cualquier $x \in \mathcal{D}_1$ se cumple que el conjunto $\{x\}$ es cerrado en $\mathcal{D}_1$.*

Demostración. Sea $(\alpha, n) \in \omega_1 \times \omega$ y consideremos a algún $(\beta, m) \in \omega_1 \times \omega$ con $(\alpha, n) \neq (\beta, m)$.

Si β no es de la forma $\gamma + k$ donde γ es un ordinal límite en ω_1 y $k \in \omega$ entonces por definición el conjunto $\{(\beta, m)\}$ es un abierto en $\mathcal{D}_1$ tal que $\{(\beta, m)\} \subseteq \mathcal{D}_1 \setminus \{(\alpha, n)\}$.

Supongamos que $\beta = \gamma + k$ donde γ es un ordinal límite en ω_1 y $k \in \omega$. Para cada $i \leq m$ consideremos al conjunto

$$S_i = S(\beta)_{ikm} \setminus \{\alpha\}.$$

Notemos entonces que S_i es cofinito a $S(\beta)_{ikm}$ y además para cada $i \leq m$ se cumple que

$$\{(\gamma, i) \mid \gamma \in S_i\} \subseteq \mathcal{D}_1 \setminus \{(\alpha, n)\}.$$

Como cualesquiera de estos dos casos se cumplen *para cualquier elemento* en $\mathcal{D}_1 \setminus \{(\alpha, n)\}$ podemos concluir que el conjunto $\mathcal{D}_1 \setminus \{(\alpha, n)\}$ es abierto en $\mathcal{D}_1$.

Así el espacio es T_1. □

Lema 3.13. *Si A es un subconjunto no numerable de $\mathcal{D}_1$ entonces existe algún ordinal $\alpha \in \omega_1$ y alguna $i \in \omega$ tal que*

$$\{(\gamma, n) \mid \gamma \geq \alpha, n \geq i\} \subseteq cl_{\mathcal{D}_1}(A).$$

Demostración. Como A es no numerable entonces el conjunto

$$\{n \in \omega \mid |A \cap (\omega_1 \times \{n\})| > \aleph_0\}$$

es no vacío, de esta manera podemos considerar a

$$i = \min \{n \in \omega \mid |A \cap (\omega_1 \times \{n\})| > \aleph_0\}.$$

Construyamos al conjunto

$$S = \{\beta \in \omega_1 \mid (\beta, i) \in A\}.$$

Notemos que por la definición de i tenemos que S es un subconjunto no numerable de ω_1 y por ♣ existe algún ordinal límite $\alpha \in \omega_1$ tal que $S(\alpha) \subseteq S$.

Sean $n \geq i$, $j \in \omega$ y consideremos a un conjunto abierto U tal que $(\alpha + j, n) \in U$. Por definición tenemos que para cada $k \leq n$ existe un subconjunto cofinito C_k de $S(\alpha)_{kjn}$ tal que

$$\{(\beta, k) \mid \beta \in C_k\} \subseteq U$$

y en particular se cumple que

$$\{(\beta, i) \mid \beta \in C_i\} \subseteq U \cap (S \times \{i\}) .$$

Por tanto tenemos que $U \cap (S \times \{i\}) \neq \emptyset$ y así

$$(\alpha + j, n) \in cl_{\mathcal{D}_1} (S \times \{i\}) .$$

Por tanto tenemos que

$$\{(\alpha + j, n) \mid n \geq i,\ j \in \omega\} \subseteq cl_{\mathcal{D}_1} (S \times \{i\}) .$$

Consideremos una numeración creciente e inyectiva de los ordinales límite en ω_1 que son mayores o iguales que α de la forma

$$\{\alpha_i \mid i \in \omega_1\} .$$

Notemos por ejemplo que $\alpha_0 = \alpha$ y que $\alpha_1 = \alpha + \omega$.

Si $n \in \omega$ y V es un abierto tal que $(\alpha_1, n) \in V$ entonces, como antes, existe en particular para cada $i \leq n$ un subconjunto cofinito C_i de $S(\alpha_1)_{i0n}$ tal que

$$\{(\beta, i) \mid \beta \in S_i\} \subseteq V.$$

Como $S(\alpha_1)$ es cofinal a α_1 en particular

$$S(\alpha_1) \cap (\alpha_0, \alpha_1) \neq \emptyset.$$

Por tanto existe algún ordinal de la forma $\alpha + k \in C_i$ tal que $(\alpha + k, i) \in V$ y así $V \cap (S \times \{i\}) \neq \emptyset$. Así tenemos que para cada $n \in \omega$ se cumple que

$$(\alpha_1, n) \in cl_{\mathcal{D}_1} (S \times \{i\}) .$$

Sea α_δ un ordinal límite en ω_1 y supongamos que para cada ordinal límite γ tal que $\alpha \leq \gamma < \alpha_\delta$ y para cada $n \geq i$ se cumple que

$$(\gamma, n) \in cl_{\mathcal{D}_1} (S \times \{i\}) .$$

Sea $m \geq i$ y W un abierto tal que $(\alpha_\delta, m) \in W$, entonces para cada $l \leq m$ existe un subconjunto cofinito C_l de $S(\alpha_\delta)_{k0n}$ tal que

$$\{(\beta, l) \mid \beta \in S_l\} \subseteq W.$$

Pero por hipótesis de inducción para cada $i \leq l$ se cumple que

$$\{(\beta, l) \mid \beta \in S_l\} \subseteq cl_{\mathcal{D}_1} (S \times \{i\}) .$$

Por lo tanto $W \cap cl_{\mathcal{D}_1}(S \times \{i\}) \neq \emptyset$ demostrando así que

$$(\alpha_\delta, m) \in cl_{\mathcal{D}_1}(S \times \{i\}).$$

Así podemos concluir que

$$\{(\gamma, n) \mid \gamma \geq \alpha, n \geq i\} \subseteq cl_{\mathcal{D}_1}(S \times \{i\}).$$

Por tanto,

$$\{(\gamma, n) \mid \gamma \geq \alpha, n \geq i\} \subseteq cl_{\mathcal{D}_1}(A).$$

□

Corolario 3.14. *El espacio $\mathcal{D}_1$ no puede contener dos cerrados ajenos no numerables.*

Demostración. El Lema anterior nos asegura que si tenemos dos cerrados no numerables A y B entonces existe algún ordinal límite $\alpha \in \omega_1$ y alguna $i \in \omega$ tal que

$$\{(\gamma, n) \mid \gamma \geq \alpha, n \geq i\} \subseteq A \cap B.$$

□

Corolario 3.15. *El espacio $\mathcal{D}_1$ es hereditariamente separable.*

Demostración. Primero notemos que el espacio $\mathcal{D}_1$ es separable: consideremos al subconjunto $(\omega + 1) \times \omega$, claramente es numerable. Notemos en particular que

$$S(\omega) \times \omega \subseteq (\omega + 1) \times \omega.$$

Usando un argumento inductivo completamente análogo al que utilizamos para demostrar el Lema 3.13 podemos ver que

$$cl_{\mathcal{D}_1}((\omega + 1) \times \omega) = \omega_1 \times \omega.$$

Sea A un subconjunto no numerable de $\mathcal{D}_1$, usando el Lema anterior sean

$$\begin{aligned} i &= \text{mín}\{n \in \omega \mid |A \cap (\omega_1 \times \{n\})| > \aleph_0\}, \text{ y} \\ \alpha_0 &= \text{mín}\{\alpha \in \omega_1 \mid S(\alpha) \subseteq \{\beta \in \omega_1 \mid (\beta, i) \in A\} \text{ y } \alpha \text{ es límite}\}. \end{aligned}$$

Consideremos entonces al conjunto

$$D_A = \left(\bigcup_{j \leq i} A \cap (\omega_1 \times \{j\})\right) \cup (S(\alpha_0) \times \{i\}).$$

Notemos que D_A es numerable y además $D_A \subseteq A$. Por construcción tenemos que

$$\{(\gamma, n) \mid \gamma \geq \alpha_0, n \geq i\} \subseteq cl_{\mathcal{D}_1}(D_A).$$

Así tenemos que

$$cl_A(D_A) = cl_{\mathcal{D}_1}(D_A) \cap A = A$$

pues $A \subseteq cl_{\mathcal{D}_1}(D_A)$ por construcción.

Por tanto A es un subespacio separable de $\mathcal{D}_1$. □

Usando este resultado nos resultará más sencillo demostrar que $\mathcal{D}_1$ es un espacio normal, para esto nos será de utilidad definir una clase muy especial de conjuntos en este espacio para poder reducir la carga de notación.

Definición 3.16. *Consideremos un punto $x \in \mathcal{D}_1$ de la forma $(\alpha + j, n)$ donde α es un ordínal límite en ω_1 y $j, n \in \omega$. Decimos que un conjunto $R(x)$ es una* rama *para x si para cada $i \leq n$ existe un subconjunto* cofinito *S_i del conjunto $S(\alpha)_{ijn}$ tal que $R(x) = \{(\beta, i) \mid \beta \in S_i\} \cup \{x\}$.*

Si x no es de la forma anterior entonces definimos su rama simplemente como $R(x) = \{x\}$ (es decir, sus ramas son triviales).

Una observación inmediata es que usando esta notación podemos decir que un subconjunto $U \subseteq \mathcal{D}_1$ es abierto en $\mathcal{D}_1$ si y sólo si para cada $x \in U$ existe una rama $R(x)$ tal que $x \in R(x) \subseteq U$.

Lema 3.17. *Para cualquier $x \in \mathcal{D}_1$ y cualquier rama $R(x)$ de x se cumple que $R(x)$ es un conjunto cerrado en $\mathcal{D}_1$.*

Demostración. Supongamos que $x = (\alpha + j, n)$ donde α es un ordínal límite en ω_1 y $j, n \in \omega$. Sea $R(x)$ una rama de x, notemos que

$$\pi_{\omega_1}[R(x) \setminus \{x\}] \subseteq S(\alpha) \subseteq \alpha. \tag{3.3}$$

Consideremos a $y \in \mathcal{D}_1 \setminus R(x)$ tal que $y = (\beta + k, m)$ para algún β límite en ω_1 y algunos $k, m \in \omega$.

Si $\beta < \alpha$ entonces como $\sup(S(\beta)) = \beta$ y $S(\alpha)$ tiene tipo de orden ω entonces el conjunto $S(\beta)$ es acotado en $S(\alpha)$. Así tenemos que

$$|S(\beta) \cap S(\alpha)| < \aleph_0.$$

Así el conjunto $S(\beta) \setminus S(\alpha)$ es cofinito en $S(\beta)$ y por tanto el conjunto

$$R(y) = \bigcup_{i \leq m} \{(\beta, i) \mid \beta \in S(\beta)_{ikm} \setminus S(\alpha)\} \cup \{y\}$$

constituye una rama de y tal que $R(y) \cap R(x) = \emptyset$.

Es decir para cada ordinal límite β con $\beta < \alpha$ y para cualesquiera $k, m \in \omega$ existe una rama de $(\beta + k, m)$ tal que

$$R((\beta + k, m)) \cap R(x) = \emptyset.$$

Supongamos que $\beta = \alpha$. Notemos que para construir una rama para y necesitamos escoger conjuntos cofinitos de la familia

$$S(\alpha)_y = \{S(\alpha)_{lkm} \mid l \leq m\}.$$

Por construcción de la partición de $S(\alpha)$, para cada $A \in S(\alpha)_y$ se cumple que $A \cap R(x) = \emptyset$, así existe una rama de y tal que $R(y) \cap R(x) = \emptyset$.

Para concluir, supongamos que $\beta > \alpha$. De una manera análoga al primer caso el conjunto $S(\alpha)$ es acotado en $S(\beta)$ y por tanto el conjunto $S(\beta) \setminus S(\alpha)$ es cofinito en $S(\beta)$. De manera análoga a nuestro primer caso podemos encontrar una rama de y tal que $R(y) \cap R(x) = \emptyset$.

Por tanto el conjunto $R(x)$ es cerrado en $\mathcal{D}_1$. $\square$

Corolario 3.18. *Para cualquier $x \in \mathcal{D}_1$ sin ramas triviales se cumple que*

$$cl_{\mathcal{D}_1}\left(R\left(x\right) \setminus \{x\}\right) = R\left(x\right).$$

Demostración. Sea $x \in \mathcal{D}_1$ sin ramas triviales, supongamos entonces que $x = (\alpha + j, n)$ donde α es un ordinal límite en ω_1 y $j, n \in \omega$. Sea $R\left(x\right)$ una rama de x.

Como cualesquiera dos conjuntos cofinitos de $S\left(\alpha\right)_{njn}$ tienen intersección no vacía, entonces por definición cualquier otra rama de x, $\widetilde{R}\left(x\right)$ cumple que

$$\left(R\left(x\right) \setminus \{x\}\right) \cap \widetilde{R}\left(x\right) \neq \emptyset.$$

Por tanto cualquier vecindad abierta de x intersecta a $R\left(x\right) \setminus \{x\}$. Así tenemos que

$$x \in cl_{\mathcal{D}_1}\left(R\left(x\right) \setminus \{x\}\right)$$

y por tanto se cumple que

$$R\left(x\right) \subseteq cl_{\mathcal{D}_1}\left(R\left(x\right) \setminus \{x\}\right).$$

Como $R\left(x\right)$ es un conjunto cerrado en $\mathcal{D}_1$ entonces podemos concluir que

$$cl_{\mathcal{D}_1}\left(R\left(x\right) \setminus \{x\}\right) = R\left(x\right).$$

□

Gracias a esto podemos hacer una observación importante: si tenemos un cerrado $A \in \mathcal{D}_1$ entonces se cumple que $x \in \mathcal{D}_1 \setminus A$ si y sólo si existe una rama $R\left(x\right)$ de x tal que $R\left(x\right) \cap A = \emptyset$.

Lema 3.19. *Si A y B son dos cerrados ajenos en $\mathcal{D}_1$ tal que para algún ordinal límite $\beta \in \omega_1$ se cumple que $A \subseteq (\beta \times \omega)$ entonces existen dos abiertos ajenos U y V tales que $A \subseteq U$, $(\beta + \omega) \times \omega = U \cup V$ y $(B \cap (\beta \times \omega)) \cup (((\beta + \omega) \setminus \beta) \times \omega) \subseteq V$.*

Demostración. Sean A, B y β como en las hipótesis. Primero observemos que los conjuntos $\beta \times \omega$ y $(\beta + \omega) \times \omega$ son ambos abiertos en $\mathcal{D}_1$ gracias a que β y $\beta + \omega$ son ordinales límite en ω_1.

Otra observación importante es que como $\beta \times \omega$ es abierto entonces dado $x \in \beta \times \omega$ siempre podemos considerar una rama $R\left(x\right)$ tal que $R\left(x\right) \subseteq \beta \times \omega$.

Como $(\beta + \omega) \times \omega$ es numerable consideremos un numeración inyectiva de sus elementos de la forma

$$(\beta + \omega) \times \omega = \{x_i \mid i \in \omega\}.$$

Si $x_0 \in (A \cap (\beta \times \omega))$ entonces como $x_0 \notin B$ podemos considerar una rama $R\left(x_0\right) \subseteq \beta \times \omega$ tal que $R\left(x_0\right) \cap B = \emptyset$. Definimos así a $U_0 = R\left(x_0\right)$ y $V_0 = \emptyset$.

Si por el contrario $x_0 \notin A$ entonces consideramos una rama $R\left(x_0\right) \subseteq (\beta + \omega) \times \omega$ tal que $R\left(x_0\right) \cap A = \emptyset$ y definimos así a $U_0 = \emptyset$ y $V_0 = R\left(x_0\right)$.

Supongamos que hemos construido dos conjuntos cerrados ajenos $U_n \subseteq \beta \times \omega$ y $V_n \subseteq (\beta + \omega) \times \omega$ tales que para cada $i \leq n$ existe una rama de x_i tal que

$$R\left(x_i\right) \subseteq U_n \quad \text{ó} \quad R\left(x_i\right) \subseteq V_n$$

y que cumplan $U_n \cap B = \emptyset$ y $V_n \cap A = \emptyset$.

Si $x_{n+1} \in (A \cap (\beta \times \omega))$ entonces consideremos una rama $R(x_{n+1}) \subseteq \beta \times \omega$ tal que $R(x_{n+1}) \cap V_n = \emptyset$ y definimos así a

$$U_{n+1} = U_n \cup R(x_{n+1}) \quad \text{y} \quad V_{n+1} = V_n.$$

Notemos que por el Lema 3.17 el conjunto U_{n+1} es cerrado.

Ahora, supongamos que $x_{n+1} \notin A$ y que $x_{n+1} \in U_n$. Consideremos una rama $R(x_{n+1}) \subseteq \beta \times \omega$ tal que $R(x_{n+1}) \cap V_n = \emptyset$ definimos a

$$U_{n+1} = U_n \cup R(x_{n+1}) \quad \text{y} \quad V_{n+1} = V_n.$$

Si $x_{n+1} \notin U_n$ entonces tomemos una rama $R(x_{n+1}) \subseteq (\beta + \omega) \times \omega$ tal que $R(x_{n+1}) \cap U_n = \emptyset$ y definamos

$$U_{n+1} = U_n \quad \text{y} \quad V_{n+1} = V_n \cup R(x_{n+1}).$$

Concluyendo esta inducción obtenemos al final dos familias crecientes de cerrados $\mathcal{U} = \{U_n \mid n \in \omega\}$ y $\mathcal{V} = \{V_n \mid n \in \omega\}$ tales que

$$(A \cap (\beta \times \omega)) \subseteq \bigcup \mathcal{U},$$
$$(B \cap (\beta \times \omega)) \cup (((\beta + \omega) \setminus \beta) \times \omega) \subseteq \bigcup \mathcal{V},$$

y además

$$(\beta + \omega) \times \omega = \bigcup_{n \in \omega} U_n \cup V_n.$$

Notemos que por construcción se cumple que

$$(\bigcup \mathcal{U}) \cap (\bigcup \mathcal{V}) = \emptyset.$$

Definamos así a

$$U = \bigcup \mathcal{U} \quad \text{y} \quad V = \bigcup \mathcal{V}.$$

Aseguramos que U y V son abiertos en $\mathcal{D}_1$.

Supongamos que $z \in U_n$ para alguna $n \in \omega$, entonces $z = x_k$ para alguna $k \in \omega$. Como $x_k \notin V$ entonces por construcción existe una rama $R(x_k)$ tal que

$$R(x_k) \subseteq U_{n+1}.$$

Es decir, para cada $z \in U$ existe una rama $R(z)$ tal que $R(z) \subseteq U$. Por tanto U y (de manera análoga) V son abiertos en $\mathcal{D}_1$. $\square$

Proposición 3.20. *En el espacio $\mathcal{D}_1$ para cualesquiera dos cerrados ajenos A y B existen dos abiertos ajenos U y V tales que $A \subseteq U$ y $B \subseteq V$. Como consecuencia $\mathcal{D}_1$ es un espacio Hausdorff y por tanto también un espacio normal.*

Demostración. Supongamos que A y B son dos cerrados ajenos en $\mathcal{D}_1$, entonces por el Corolario 3.14 alguno de los dos es un conjunto numerable. Supongamos sin pérdida de generalidad que A es numerable y que por tanto existe un ordinal límite $\beta \in \omega_1$ tal que $A \subseteq \beta \times \omega$.

Usando la proposición anterior consideremos dos abiertos ajenos U y V tales que $A \subseteq U$, $U \cup V = (\beta + \omega) \times \omega$ y

$$(B \cap (\beta \times \omega)) \cup ((\beta + \omega) \setminus \beta) \times \omega \subseteq V.$$

Consideremos así al conjunto

$$W = V \cup (\omega_1 \setminus (\beta + \omega) \times \omega).$$

Aseguramos que W es abierto. Consideremos entonces a algún

$$(\gamma, n) \in ((\omega_1 \setminus (\beta + \omega)) \times \omega)$$

donde $\gamma = \alpha + j$ para algún ordinal límite $\alpha \in \omega_1 \setminus (\beta + \omega)$ y $j \in \omega$.

Si $\alpha > \beta + \omega$ entonces como $\sup (S(\alpha)) = \alpha$ y el ordinal $\beta + \omega$ es acotado en α entonces el conjunto $S(\alpha) \setminus (\beta + \omega)$ es cofinito en $S(\alpha)$, por tanto podemos encontrar una rama de (γ, n) tal que

$$R((\gamma, n)) \subseteq (\omega_1 \setminus (\beta + \omega) \times \omega).$$

Supongamos entonces que $\alpha = \beta + \omega$, de manera análoga a la anterior tenemos que β es acotado en $\beta + \omega$ y por tanto $S(\beta + \omega) \setminus \beta$ es cofinito en $S(\beta + \omega)$, por construcción de V tenemos entonces que

$$(S(\beta + \omega) \setminus \beta) \times \omega \subseteq V.$$

Por tanto existe una rama de (γ, n) tal que

$$R((\gamma, n)) \subseteq W,$$

demostrando así que W es abierto. De esta manera tenemos que $A \subseteq U$, $B \subseteq W$ y $U \cap W = \emptyset$.

Utilizando que el espacio es T_1 y este resultado obtenemos que el espacio es *Hausdorff* y consecuentemente, normal. $\square$

Es importante recordar las técnicas de inducción que utilizamos en los dos resultados anteriores, ya que éstas se pueden utilizar siempre que estemos trabajando con abiertos *numerables* en el espacio $\mathcal{D}_1$ y con cerrados que no se intersecten en ese abierto. A continuación veremos algunas propiedades que resultan sencillas de verificar utilizando esta técnica, pero que además demuestran la importancia y la fuerza de la inducción en este espacio.

Proposición 3.21. *El espacio $\mathcal{D}_1$ es* cero-dimensional*, es decir, la familia de aquellos conjuntos abiertos y cerrados en $\mathcal{D}_1$ forma una base para la topología de $\mathcal{D}_1$.*

Demostración. Consideremos un abierto O en $\mathcal{D}_1$ y sea $x \in O$. Como O es abierto entonces existe una rama de x tal que

$$x \in R(x) \subseteq O.$$

Ahora, gracias al Lema 3.17 los conjuntos $R(x)$ y $\mathcal{D}_1 \backslash O$ son cerrados y ajenos, usando entonces el resultado anterior sean U y V dos abiertos ajenos en $\mathcal{D}_1$ tales que $R(x) \subseteq U$ y $\mathcal{D}_1 \backslash O \subseteq V$. Notemos en particular que por construcción tenemos que

$$x \in R(x) \subseteq U \subseteq \mathcal{D}_1 \backslash V \subseteq O.$$

Utilizando de nuevo el resultado anterior, consideremos dos abiertos ajenos S y T en $\mathcal{D}_1$ tales que
$\mathcal{D}_1 \backslash V \subseteq S$ y $\mathcal{D}_1 \backslash O \subseteq T$. Esto nos asegura que

$$U \subseteq \mathcal{D}_1 \backslash V \subseteq S \subseteq \mathcal{D}_1 \backslash T \subseteq O,$$

es decir, U y T son dos abiertos ajenos en $\mathcal{D}_1$ tales que

$$\mathcal{D}_1 = U \cup \mathcal{D}_1 \backslash U \subseteq U \cup T$$

lo cual nos asegura que U es un conjunto abierto y cerrado en $\mathcal{D}_1$. □

Proposición 3.22. *El espacio $\mathcal{D}_1$ es hereditariamente normal.*

Demostración. Sea M un subconjunto de $\mathcal{D}_1$ y consideremos a dos cerrados A y B de $\mathcal{D}_1$ tales que

$$(A \cap M) \cap (B \cap M) = \emptyset.$$

Primero, si existe un ordinal límite $\beta \in \omega_1$ tal que $M \subseteq \beta \times \omega$ entonces usando la misma técnica de inducción del Lema 3.19 y la Proposición 3.20 podemos encontrar dos abiertos ajenos U y V tales que $(A \cap M) \subseteq U$, $(B \cap M) \subseteq V$, $((\beta + \omega) \backslash \beta) \times \omega \subseteq V$ y que además cumplan que

$$U \cup V = (\beta + \omega) \times \omega.$$

De esta manera $U \cap M$ y $V \cap M$ son dos abiertos en la topología relativa de M que contienen a $A \cap M$ y a $B \cap M$ respectivamente.

Supongamos entonces que M es un subconjunto no acotado en $\mathcal{D}_1$. Notemos entonces que $A \cap M$ y $B \cap M$ no pueden ser conjuntos no acotados al mismo tiempo: de serlo tendríamos que A y B son cerrados no numerables y por el Lema 3.13 existiría algun ordinal $\alpha \in \omega_1$ y alguna $i \in \omega$ tal que

$$\{(\gamma, n) \mid \gamma \geq \alpha, n \geq i\} \subseteq A \cap B.$$

Pero como M es no acotado, necesariamente tendríamos que $(A \cap M) \cap (B \cap M) \neq \emptyset$, lo cual es una contradicción.

Supongamos entonces que existe un ordinal límite $\beta \in \omega_1$ tal que $A \cap M \subseteq \beta \times \omega$. Usando así nuestra técnica de inducción encontremos dos abiertos ajenos U y V tales que $(A \cap M) \subseteq U$, $(B \cap M) \cap (\beta \times \omega) \subseteq V$, $((\beta + \omega) \backslash \beta) \times \omega \subseteq V$ y que además cumplan que

$$U \cup V = (\beta + \omega) \times \omega.$$

Si ahora definimos al conjunto

$$W = V \cup (\omega_1 \backslash (\beta + \omega) \times \omega),$$

tenemos que U y W son dos abiertos ajenos en $\mathcal{D}_1$ tales que $(A \cap M) \subseteq U$ y $(B \cap M) \subseteq V$.

Por tanto los conjuntos $(U \cap M)$ y $(V \cap M)$ son dos abiertos en la topología relativa de M que contienen a $A \cap M$ y a $B \cap M$ respectivamente.

Por tanto el conjunto M hereda una topología que lo convierte en un espacio normal. □

Proposición 3.23. *El espacio $\mathcal{D}_1$ es de Dowker.*

Demostración. Para cada $n \in \omega$ consideremos al conjunto

$$D_n = \bigcup \{\omega_1 \times \{i\} \mid i > n\}.$$

Notemos que para cada $n \in \omega$ el conjunto D_n es cerrado: dado $(\alpha, k) \in \mathcal{D}_1 \setminus D_n$ tenemos que $k \leq n$ y $\alpha \in \omega_1$

Supongamos que $\alpha = \beta + m$ con β límite en ω_1 y $m \in \omega$, notemos así que para cada $s \leq k$ se cumple que

$$\{(\gamma, k) \mid \gamma \in S(\alpha)_{smk}\} \subseteq \mathcal{D}_1 \setminus D_n.$$

Por tanto existe una rama de (α, k) tal que

$$R((\alpha, k)) \subseteq \mathcal{D}_1 \setminus D_n,$$

demostrando que el conjunto $\mathcal{D}_1 \setminus D_n$ es abierto en $\mathcal{D}_1$.

Consideremos así a la familia decreciente de cerrados $\mathcal{F} = \{D_n \mid n \in \omega\}$ y para cada $n \in \omega$ sea U_n un abierto en $\mathcal{D}_1$ tal que $D_n \subseteq U_n$.

Dado que el conjunto U_n es abierto, entonces el conjunto $\mathcal{D}_1 \setminus U_n$ es un cerrado en $\mathcal{D}_1$ que es ajeno al cerrado no numerable D_n, así por el Lema 3.13 tenemos que $\mathcal{D}_1 \setminus U_n$ es un conjunto numerable. De esta manera (y gracias al *Axioma de Elección*) tenemos que el conjunto

$$\bigcup_{n \in \omega} X \setminus U_n = X \setminus \bigcap_{n \in \omega} U_n$$

es numerable y por tanto tenemos que $\bigcap_{n \in \omega} U_n \neq \emptyset$.

Así concluimos que $\mathcal{D}_1$ es un espacio de Dowker. $\square$

Veamos ahora algunas propiedades adicionales del espacio $\mathcal{D}_1$.

Lema 3.24. *En el espacio $\mathcal{D}_1$ cualquier familia discreta de cerrados es numerable y tiene a lo más un miembro con cardinalidad no numerable. Más aún: cualquier familia discreta de cerrados numerables es acotada.*

Demostración. Sea $\mathcal{F} = \{F_i \mid i \in I\}$ una familia discreta de cerrados en $\mathcal{D}_1$. Notemos que en particular es una familia de cerrados ajenos por pares, así, el Corolario 3.14 nos asegura que a lo más existe un único $i \in I$ tal que el conjunto F_i es no numerable.

Notemos entonces que el conjunto $G_i = \bigcup_{j \in I \setminus \{i\}} F_j$ es cerrado y ajeno a F_i, gracias al Corolario 3.14 podemos asegurar que el conjunto G_i es numerable y consecuentemente el conjunto I también.

Supongamos ahora que $\mathcal{F}$ es una familia discreta de cerrados *numerables* y que I es un conjunto no numerable, como la familia $\mathcal{F}$ está formada por conjuntos ajenos por pares tenemos que el conjunto $\bigcup \mathcal{F}$ es no numerable. Por tanto podemos considerar a

$$n_0 = \textit{mín}\left\{n \in \omega \mid \left|\bigcup \mathcal{F} \cap (\omega_1 \times \{n\})\right| > \aleph_0\right\}.$$

Construyamos así al conjunto

$$S = \left\{ \beta \in \omega_1 \mid (\beta, n_0) \in \bigcup \mathcal{F} \right\}.$$

Por construcción S es un subconjunto no numerable de ω_1 y por $\clubsuit$ existe algún ordinal límite $\alpha \in \omega_1$ tal que $S(\alpha) \subseteq S$.

Ahora, como el conjunto $S(\alpha)$ es numerable existe un subconjunto numerable $I_0 \subseteq I$ tal que

$$S(\alpha) \times \{n_0\} \subseteq \bigcup \{F_i \mid i \in I_0\}.$$

Recordando la construcción realizada en el Lema 3.13 podemos asegurar que

$$\{(\gamma, d) \mid \gamma \geq \alpha, n \geq n_0\} \subseteq cl_{\mathcal{D}_1}(S(\alpha) \times \{n_0\}).$$

Pero como el conjunto $\mathcal{F}$ es una familia discreta de cerrados en particular el conjunto $\bigcup \{F_i \mid i \in I_0\}$ es cerrado en $\mathcal{D}_1$ y por tanto se cumple que

$$\{(\gamma, d) \mid \gamma \geq \alpha, n \geq n_0\} \subseteq \bigcup \{F_i \mid i \in I_0\}$$

lo cual es una contradicción ya que el conjunto $\bigcup \{F_i \mid i \in I_0\}$ es numerable. Concluimos así que la familia $\mathcal{F}$ tiene que ser numerable.

Para concluir, supongamos que la familia $\mathcal{F}$ ya está indexada como $\mathcal{F} = \{F_i \mid i \in \omega\}$.

Como para cada $i \in I$ el conjunto F_i es numerable, entonces $\sup(\pi_{\omega_1}[F_i]) \in \omega_1$. Sin pérdida de generalidad supongamos que la familia $\mathcal{F}$ está indexada de tal manera que $i \leq j$ si y sólo si

$$\sup(\pi_{\omega_1}[F_i]) \leq \sup(\pi_{\omega_1}[F_j]).$$

Consideremos así una función $f : \omega \to \omega_1$ tal que para cada $i \in \omega$ se cumpla que

$$f(i) = \sup(\pi_{\omega_1}[F_i]),$$

Entonces como la cofinalidad de ω_1 es ω_1, la función f no es una función cofinal y por tanto es acotada. Así existe algún $\beta \in \omega_1$ tal que para cada $i \in \omega$ se cumple que $f(i) < \beta$.

Por tanto

$$\bigcup \mathcal{F} \subseteq (\beta \times \omega).$$

Mostrando que $\mathcal{F}$ es una familia acotada en $\mathcal{D}_1$. $\square$

Proposición 3.25. *El espacio $\mathcal{D}_1$ es colectivamente normal.*

Demostración. Sea $\mathcal{F} = \{F_i \mid i \in \omega\}$ una familia discreta de cerrados, supongamos sin pérdida de generalidad que F_0 es un conjunto cerrado no numerable en $\mathcal{D}_1$.

Como la subfamilia discreta $\mathcal{F} \setminus \{F_0\}$ es acotada existe un ordinal límite $\beta \in \omega_1$ tal que

$$\bigcup \mathcal{F} \setminus \{F_0\} \subseteq \beta \times \omega.$$

Haciendo un ligero ajuste a la técnica de inducción que usamos en el Corolario 3.19 construiremos una familia de abiertos ajenos por pares $\mathcal{U} = \{U_i \mid i \in \omega\}$ tal que para cada $i \in \omega$ se cumple que $F_i \subseteq U_i$.

Como el conjunto $(\beta+\omega)\times\omega$ es numerable consideremos una numeración inyectiva de sus elementos de la forma

$$(\beta+\omega)\times\omega=\{x_i \mid i\in\omega\}.$$

Si $x_0\in\beta\times\omega$ entonces consideremos una rama $R(x_0)$ que sólo intersecte al cerrado F_i para alguna $i\in I$. Definamos así a la familia de conjuntos:

$$U(0)_j=\begin{cases} R(x_0) \text{ si } j=i \\ \emptyset \text{ en otro caso}\end{cases}$$

Si $x_0\notin\beta\times\omega$ entonces en particular $x_0\notin\bigcup\mathcal{F}\setminus\{F_0\}$, como la familia $\mathcal{F}\setminus\{F_0\}$ es discreta entonces el conjunto $\bigcup\mathcal{F}\setminus\{F_0\}$ es cerrado en $\mathcal{D}_1$. Así podemos encontrar una rama $R(x_0)\subseteq(\beta+\omega)\times\omega$ tal que

$$R(x_0)\cap\bigcup\mathcal{F}\setminus\{F_0\}=\emptyset.$$

Definimos así a la familia de conjuntos

$$U(0)_j=\begin{cases} R(x_0) \text{ si } j=0 \\ \emptyset \text{ en otro caso}\end{cases}$$

Ahora, si $x_1\in\beta\times\omega$ tenemos que considerar algunos casos:

Si $x_1\in U(0)_i$ para alguna $i\in\omega$ entonces x_1 pertenece a una rama $R(x_0)$ que no intersecta al conjunto $\bigcup\mathcal{F}\setminus\{F_i\}$, como además el conjunto $\bigcup\left\{U(0)_j \mid j\in\omega\setminus\{i\}\right\}$ es cerrado pues todos salvo un número finito de ellos son vacíos, entonces podemos encontrar una rama $R(x_1)$ tal que

$$R(x_1)\cap\bigcup\mathcal{F}\setminus\{F_i\}=\emptyset$$

y

$$R(x_1)\cap\bigcup\left\{U(0)_j \mid j\in\omega\setminus\{i\}\right\}=\emptyset.$$

Definimos así para cada $j\in\omega$ al conjunto

$$U(1)_j=\begin{cases} R(x_1)\cup U(0)_i \text{ si } j=i \\ U(0)_j \text{ en otro caso}\end{cases}$$

Notemos que todos salvo un número finito de miembros de la familia $\left\{U(0)_j \mid j\in\omega\right\}$ son vacíos, así, si x_1 no pertenece al cerrado $\bigcup_{j\in\omega}U(0)_j$ entonces consideremos una rama $R(x_1)$ que intersecta sólamente a F_i para alguna $i\in\omega$, ajena a $\bigcup_{j\in\omega}U(0)_j$, y definimos para cada $j\in\omega$

$$U(1)_j=\begin{cases} R(x_1)\cup U(0)_i \text{ si } j=i \\ U(0)_j \text{ en otro caso}\end{cases}$$

En caso de que $R(x_1)\cap(\bigcup\mathcal{F})=\emptyset$ entonces definimos a

$$U(1)_j=\begin{cases} R(x_1)\cup U(0)_0 \text{ si } j=0 \\ U(0)_j \text{ en otro caso}\end{cases}$$

Si $x_i \notin \beta \times \omega$ tomamos una rama $R(x_1) \subseteq (\beta + \omega) \times \omega$ tal que

$$R(x_1) \cap \bigcup \mathcal{F} \setminus \{F_0\} = \emptyset,$$

y definimos

$$U(1)_j = \begin{cases} R(x_1) \cup U(0)_0 & \text{si } j = 0 \\ U(0)_j & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Supongamos que para cada $i \in \omega$ hemos definido una familia creciente de conjuntos $\mathcal{U}(n)_i = \{U(k)_i \mid k \leq n\}$ donde para cada $k \leq n$ el conjunto $U(k)_i$ es un conjunto cerrado al ser unión de ramas, que en la familia $\{U(n)_i \mid i \in \omega\}$ todos salvo un número finito de miembros sean vacíos y que además se cumplan las siguientes propiedades: para cualesquiera $i, j \in \omega$ se cumple que

$$(\bigcup \mathcal{U}(n)_i) \cap (\bigcup \mathcal{U}(n)_j) = \emptyset \text{ si } i \neq j$$

y

$$(\bigcup \mathcal{U}(n)_i) \cap F_j = \emptyset \text{ si } i \neq j$$

que además

$$\mathcal{U}(n)_0 \subseteq (\beta + \omega) \times \omega \quad \text{y} \quad \bigcup_{i>0} \mathcal{U}(n)_i \subseteq \beta \times \omega \ ,$$

y por último que para cada $i \leq n$ exista una rama $R(x_i)$ del punto x_i y una *única* $j \in \omega$ tal que

$$R(x_i) \subseteq U(n)_j \, .$$

Primero consideremos el caso en que $x_{n+1} \in \beta \times \omega$.

Si $x_{n+1} \in U(n)_i$ para alguna $i \in \omega$ usando que la familia $\{U(n)_i \mid i \in \omega\}$ consta de cerrados ajenos por pares podemos encontrar una rama $R(x_{n+1}) \subseteq \beta \times \omega$ tal que para cada $j \in \omega$ con $j \neq i$ se cumpla que

$$R(x_{n+1}) \cap U(n)_j = \emptyset$$

y así definimos a la familia de conjuntos

$$U(n+1)_j = \begin{cases} R(x_{n+1}) \cup U(n)_i & \text{si } j = i \\ U(n)_j & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Supongamos entonces que

$$x_{n+1} \notin \bigcup_{i \in \omega} U(n)_i \, .$$

Como la familia $\{U(n)_i \mid i \in \omega\}$ consta de conjuntos cerrados y además todos salvo un número finito son vacíos, entonces el conjunto $\bigcup_{i \in \omega} U(n)_i$ es cerrado en $\mathcal{D}_1$. Consideremos entonces una rama $R(x_{n+1}) \subseteq \beta \times \omega$ que sólo intersecte al conjunto F_i, que sea ajena a $\bigcup_{i \in \omega} U(n)_i$, y definamos a la familia

$$U(n+1)_j = \begin{cases} R(x_{n+1}) \cup U(n)_i & \text{si } j = i \\ U(n)_j & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Finalmente si $x_{n+1} \notin \beta \times \omega$ entonces consigamos una rama $R(x_{n+1}) \subseteq (\beta+\omega) \times \omega$ tal que

$$R(x_{n+1}) \cap \left(\bigcup_{i>0} U(n)_i \right)) = \emptyset$$

y definamos a la familia

$$U(n+1)_j = \begin{cases} R(x_{n+1}) \cup U(n)_0 & \text{si } j = 0 \\ U(n)_j & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Notemos entonces que las familias crecientes de conjuntos

$$\mathcal{U}(n+1)_i = \{U(k)_i \mid k \leq n+1\}$$

satisfacen las condiciones exigidas en la hipótesis de inducción, concluyendo la misma.

De esta manera para cada $i \in \omega$ definamos al conjunto

$$U_i = \bigcup_{k \in \omega} U(k)_i .$$

Notemos que por un argumento completamente análogo al usado en el Corolario 3.19 tenemos que la familia $\{U_i \mid i \in \omega\}$ consta de abiertos que son ajenos por pares y tales que

$$(\beta+\omega) \times \omega = \bigcup_{i \in \omega} U_i,$$

donde

$$((\beta+\omega) \setminus \beta) \times \omega \subseteq U_0$$

y que además para cada $i \in \omega$ con $i > 0$ se cumple que

$$F_i \subseteq U_i.$$

Notemos que

$$F_0 \subseteq U_0 \cup (\omega_1 \setminus (\beta+\omega) \times \omega) .$$

De esta manera concluimos lo buscado usando nuestra caracterización para espacios colectivamente normales (Teorema 1.33). □

Proposición 3.26. *El espacio $\mathcal{D}_1$ no es localmente compacto.*

Demostración. Consideremos al punto $(\omega+\omega, 0) \in \mathcal{D}_1$ y sea U un abierto en $\mathcal{D}_1$ tal que $(\omega+\omega, 0) \in U$. Como U es abierto en $\mathcal{D}_1$ entonces existe una rama $R((\omega+\omega, 0))$ de $(\omega+\omega, 0)$ tal que

$$R((\omega+\omega, 0)) \subseteq U.$$

Por definición para construir el conjunto $R((\omega+\omega, 0))$ necesitamos subconjuntos cofinitos de $S(\omega+\omega)_{000}$. Construyamos una vecindad abierta V del punto $(\omega+\omega, 0)$ como sigue: para cada punto

$$(\alpha, 0) \in R(\omega+\omega, 0) \setminus ((\omega \times \{0\}) \cup \{(\omega+\omega, 0)\}) ,$$

donde α es de la forma $\omega + k$ para algún natural $k \in \omega$. Escojamos un subconjunto cofinito A_k del respectivo conjunto $S(\omega)_{0k0}$ tal que el conjunto

$$\{(\beta, 0) \mid \beta \in A_k\} \cup \{(\omega + k, 0)\}$$

constituye una rama, $R((\omega + k, 0))$, para el punto $(\omega + k, 0)$ tal que $R((\omega + k, 0)) \subseteq U$.

Ahora, si tenemos un punto $(\alpha, 0) \in R(\omega + \omega, 0) \cap (\omega \times \{0\})$ entonces como $(\omega \times \{0\})$ es un subconjunto discreto de $\mathcal{D}_1$ este punto tiene ramas triviales.

Para simplificar la notación, supongamos sin pérdida de generalidad que existe $m \in \omega$ tal que para todo $k \geq m$ se cumple que

$$(\omega + k, 0) \in R(\omega + \omega, 0) \setminus (\omega \cup \{(\omega + \omega, 0)\}).$$

De esta manera el conjunto

$$V = R((\omega + \omega, 0)) \cup \{(\beta, 0) \mid \beta \in A_k, k \geq m\}$$

es un abierto en $\mathcal{D}_1$ tal que

$$(\omega + \omega, 0) \in V \subseteq U.$$

Ahora, como el espacio $\mathcal{D}_1$ es cero-dimensional podemos encontrar una vecindad abierta y cerrada W para el punto $(\omega + \omega, 0)$ tal que

$$(\omega + \omega, 0) \in W \subseteq V \subseteq U.$$

Como $W \subseteq V$ y en particular W es una vecindad abierta para $(\omega + \omega, 0)$ entonces W es un conjunto cuya construcción puede realizarse de una manera completamente análoga a la del conjunto V.

Así para simplificar la notación supongamos que $W = V$, es decir, que V es una vecindad abierta y cerrada para $(\omega + \omega, 0)$.

Como el conjunto A_k es cofinito en $S(\omega)_{0k0}$ entonces para cada $k \geq m$ consideremos un punto $x_k \in A_k$ y definamos al conjunto

$$B_k = A_k \setminus \{x_k\}.$$

Notemos que B_k sigue siendo cofinito en $S(\omega)_{0k0}$ y por tanto la familia

$$\{(\beta, 0) \mid \beta \in B_k\} \cup \{(\omega + k, 0)\}$$

también constituye una rama para el punto $(\omega + k, 0)$, de esta manera el conjunto

$$O = R((\omega + \omega, 0)) \cup \{(\beta, 0) \mid \beta \in B_k, k \geq m\}$$

es un abierto en $\mathcal{D}_1$ tal que

$$V \setminus O = \{(x_n, 0) \mid n \geq m, n \in \omega\}.$$

Para concluir, como el conjunto V es cerrado en $\mathcal{D}_1$ entonces el conjunto $U \setminus V$ es un conjunto abierto en $\mathcal{D}_1$. Definamos así a la familia

$$\mathcal{F} = O \cup (U \setminus V) \cup \{\{(x_n, 0)\} \mid n \geq m, n \in \omega\}.$$

Notemos que el conjunto $\{\{(x_n,0)\} \mid n \geq m, n \in \omega\}$ es, en realidad, un conjunto cerrado: si tenemos algún $z \in \mathcal{D}_1$ cuyas ramas son subconjuntos de $S(\omega)_{0k0}$ para alguna $k \in \omega$, entonces podemos construir una rama utilizando el conjunto B_k, que es cofinito en $S(\omega)_{0k0}$. Esto nos asegura que en efecto existe una rama $R(z)$ para z tal que

$$R(z) \cap \{\{(x_n,0)\} \mid n \geq m, n \in \omega\} = \emptyset.$$

Recapitulando entonces, la familia $\mathcal{F}$ constituye cubierta abierta para U en su topología relativa, pero no tiene subcubiertas finitas pues el subconjunto $\{x_n \mid n \in \omega\}$ es un conjunto cerrado, discreto y numerable en U.

De esta manera U no es un conjunto compacto y por tanto el punto $(\omega + \omega, 0)$ no posee ninguna vecindad abierta compacta, notemos que es suficiente observar esto: si existiera alguna vecindad compacta V para el punto $(\omega + \omega, 0)$, entonces gracias a que $\mathcal{D}_1$ es un espacio cero-dimensional podríamos obtener una vecindad abierta-y-cerrada W tal que

$$(\omega + \omega, 0) \subseteq W \subseteq V$$

pero esto implicaría que W es una vecindad abierta y compacta para el punto $(\omega + \omega, 0)$, lo cual es una contradicción.

Concluímos así que el espacio $\mathcal{D}_1$ no es localmente compacto. □

Para la siguiente proposición será necesario recordar una sencilla definición.

Definición 3.27. *Un espacio topológico X es* primero numerable *si y sólo si para cada $x \in X$ existe una base de vecindades* numerable*.*

Un resultado muy tradicional y bien sabido es que en un espacio topológico primero numerable X y para cada $F \subseteq X$ se cumple que $x \in cl_X(F)$ si y sólo si existe una sucesión $\{x_n \mid n \in \omega\} \subseteq F$ que converge a x, es decir, para cada vecindad V de x existe $N(V) \in \omega$ tal que $\{x_k \mid k \geq N(V)\} \subseteq V$.

Proposición 3.28. *El espacio $\mathcal{D}_1$ no es primero numerable.*

Demostración. Supongamos que $\mathcal{D}_1$ es un espacio primero numerable y consideremos de nuevo al punto $(\omega + \omega, 0) \in \mathcal{D}_1$. Gracias a la construcción realizada en el Lema 3.13 podemos observar que

$$(\omega + \omega, 0) \in cl_{\mathcal{D}_1}(S(\omega) \times \{0\})$$

y que por definición existe una sucesión

$$\{(x_n, 0) \mid n \in \omega\} \subseteq S(\omega) \times \{0\}$$

que converge a $(\omega + \omega, 0)$.

Ahora, como el conjunto $S(\omega + \omega) \backslash \omega$ es cofinito en $S(\omega + \omega)$ entonces el conjunto

$$R((\omega + \omega, 0)) = \{(\omega + \omega, 0)\} \cup \{(\omega + k, 0) \mid \omega + k \in (S(\omega + \omega)_{000} \backslash \omega)\}$$

constituye una rama para el punto $(\omega + \omega, 0)$.

Consideremos finalmente al conjunto

$$A = \{k \in \omega \mid (\omega + k, 0) \in (S(\omega + \omega)_{000} \backslash \omega)\}$$

y construyamos a

$$U = R((\omega+\omega,0)) \cup \{(\beta,0) \mid \beta \in S(\omega)_{0k0}, k \in A\}.$$

Notemos que, por construcción, U es un conjunto abierto en $\mathcal{D}_1$ tal que $(\omega+\omega,0) \in U$. Haciendo uso de la convergencia existe alguna $N \in \omega$ tal que $\{(x_m,0) \mid m \geq N\} \subseteq U$.

Recordemos primero que la familia $\{S(\omega)_{0k0} \mid k \in A\}$ está conformada por conjuntos ajenos por pares y que por la convergencia se cumple que

$$\{(x_k,0) \mid k \geq N\} \subseteq \{S(\omega)_{0k0} \mid k \in A\}$$

es decir, la familia $\{S(\omega)_{0k0} \mid k \in A\}$ induce una partición para la sucesión

$$\{(x_m,0) \mid m \geq N\}.$$

Supongamos primero que para cada $k \in A$ se cumple que el conjunto

$$\{(x_m,0) \mid m \geq N\} \cap S(\omega)_{0k0}$$

es finito. Definamos entonces para cada $k \in A$ al conjunto

$$B_k = S(\omega)_{0k0} \setminus \{(x_m,0) \mid m \geq N\}$$

y notemos que por suposición B_k es un conjunto cofinito en $S(\omega)_{0k0}$. Haciendo uso de esto podemos construir un conjunto abierto

$$V = R((\omega+\omega,0)) \cup \{(\beta,0) \mid \beta \in B_k, k \in A\}$$

tal que $V \cap \{(x_m,0) \mid m \geq N\} = \emptyset$, lo cual es una contradicción. De este modo existe $k \in A$ tal que el conjunto $\{(x_m,0) \mid m \geq N\} \cap S(\omega)_{0k0}$ es infinito.

Construyamos entonces al conjunto

$$\widetilde{R}((\omega+\omega,0)) = \{(\omega+\omega,0)\} \cup \{(\omega+l,0) \mid l \in A \setminus \{k\}\}$$

que también constituye una rama para $(\omega+\omega,0)$. Finalmente el conjunto

$$V = \widetilde{R}((\omega+\omega,0)) \cup \{(\beta,0) \mid \beta \in S(\omega)_{0l0}, l \in A \setminus \{k\}\}$$

constituye un abierto en $\mathcal{D}_1$ tal que $(\omega+\omega,0) \in V$ pero que para cada $M \in \omega$ se cumple que

$$\{(x_m,0) \mid m \geq M\} \not\subseteq V$$

ya que por construcción necesariamente se cumple que $\{(x_m,0) \mid m \geq N\} \cap S(\omega)_{0k0} \neq \emptyset$.

De este modo, el espacio $\mathcal{D}_1$ no es un ejemplo de un espacio primero numerable. $\square$

Es importante notar que estas últimas dos propiedades fallan en el espacio $\mathcal{D}_1$ debido a *la manera tan arbritraria con la que elegimos subconjuntos numerables de* ω_1. Es posible mejorar la fuerza de este ejemplo si lo vemos desde "otra" perspectiva: si suponemos la hipótesis del continuo podemos hacer una construcción alternativa de este mismo espacio que logra preservar todas las propiedades anteriores y que además logra convertirlo en un espacio localmente compacto y primero numerable.

Dicha construcción requiere el desarollo de técnicas similares a las que vimos anteriormente y cuyo desarrollo formal sería un ejercicio redundante con respecto al ejemplo anterior, la definición de este espacio y algunos detalles para su construcción pueden por supuesto consultarse en [Ru2].

3.3. El Espacio de Rudin

Para concluir nuestro viaje veremos la construcción de un espacio de Dowker en *ZFE*, una construcción que (como es de esperarse) requiere bastante cuidado para no perderse. Durante esta construcción denotaremos como $\mathbb{N}^+$ al conjunto de todos los números naturales mayores a cero y dado un ordinal α denotamos como $cf(\alpha)$ al mínimo ordinal que es cofinal en α, es decir, su *cofinalidad*.

Primero consideremos al conjunto de funciones

$$F = \left\{f : \mathbb{N}^+ \to \omega_\omega \mid \forall n \in \mathbb{N}^+ (f(n) \leq \omega_n)\right\}$$

y apoyándonos de él, definamos también a

$$\mathcal{D}_2 = \left\{f \in F \mid \exists i \in \mathbb{N}^+ \forall n \in \mathbb{N}^+ \left(\omega < cf\left(f(n)\right) < \omega_i\right)\right\}.$$

Recordemos, además, que para cada $n \in \omega$ el ordinal ω_n es regular. Por tanto la función $f : \mathbb{N}^+ \to \omega_\omega$ tal que para cada $i \in \mathbb{N}^+$ cumple que $f(i) = \omega_1$ es un elemento de $\mathcal{D}_2$, mostrando así que este es un conjunto *no trivial*. Es importante notar que por definición para cada $f \in \mathcal{D}_2$ y para cada $n \in \mathbb{N}^+$ la condición $\omega < cf(f(n))$ nos asegura que $f(n)$ no es un *ordinal sucesor*, este hecho lo utilizaremos bastante durante nuestra construcción.

Vamos a definir algunas relaciones de orden para los elementos de F como sigue: dadas $f, g \in F$ diremos que

$$f \prec g \text{ si y sólo si } \forall n \in N^+ \left(f(n) < g(n)\right)$$

ó

$$f \preceq g \text{ si y sólo si } \forall n \in N^+ \left(f(n) \leq g(n)\right)$$

y por último

$$f \prec_i g \text{ si y sólo si } \exists i \in N^+ (\forall n \geq i \left(f(n) < g(n)\right)).$$

Es importante notar que existen elementos de F que son incomparables bajo estas tres relaciones: aquellas funciones $f, g : \mathbb{N}^+ \to \omega_\omega$ definidas como

$$f(n) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad n \text{ es par} \\ 0 & \text{si} \quad n \text{ es impar} \end{cases}$$

y

$$g(n) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad n \text{ es par} \\ 1 & \text{si} \quad n \text{ es impar} \end{cases}$$

cumplen que $f, g \in F$ pero son claramente incomparables bajo estas tres relaciones, recordar este detalle *es importante* para no cometer errores más adelante.

Usando estas relaciones para cada pareja de elementos $f, g \in F$ definamos al conjunto

$$U_{f,g} = \{h \in \mathcal{D}_2 \mid f \prec h \preceq g\}$$

y consideremos así a la familia

$$\mathcal{U} = \{U_{f,g} \mid f, g \in F\}.$$

Proposición 3.29. *La familia $\mathcal{U}$ constituye una base para una topología Hausdorff sobre el conjunto $\mathcal{D}_2$.*

Demostración. Primero notemos que en F podemos encontrar a la función constante $0 : \mathbb{N}^+ \to \omega_\omega$ tal que para cada $n \in \mathbb{N}^+$ se cumple que $0(n) = 0$. De esta manera para cada $f \in \mathcal{D}_2$ se cumple que $f \in U_{0,f}$, demostrando así que $\bigcup \mathcal{U} = \mathcal{D}_2$.

Consideremos a U_{f_1,g_1},$U_{f_2,g_2} \in \mathcal{U}$ y supongamos que existe $h \in \mathcal{D}_2$ tal que $h \in U_{f_1,g_1} \cap U_{f_2,g_2}$. Definamos una función $f : \mathbb{N}^+ \to \omega_\omega$ tal que para cada $n \in \mathbb{N}^+$ se cumpla que

$$f(n) = máx\{f_1(n), f_2(n)\} + 1.$$

Como para cada $n \in \mathbb{N}^+$ el ordinal $h(n)$ no es sucesor entonces se cumple que $f \prec h$ y por tanto

$$h \in U_{f,h} \subseteq U_{f_1,g_1} \cap U_{f_2,g_2}.$$

Mostrando así que $\mathcal{U}$ constituye una base para una topología sobre $\mathcal{D}_2$.

Consideremos ahora a $h_1, h_2 \in \mathcal{D}_2$ tales que $h_1 \neq h_2$ y supongamos sin pérdida de generalidad que $h_1(i) < h_2(i)$ para alguna $i \in \mathbb{N}^+$, claramente esta condición nos asegura que $h_2 \notin U_{0,h_1}$.

Definamos entonces una función $f_i : \mathbb{N}^+ \to \omega_\omega$ tal que para cada $n \in \mathbb{N}^+$

$$f_i(n) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad n \neq i \\ h_1(i) & \text{si} \quad n = i \end{cases}$$

notemos entonces que $h_2 \in U_{f_i,h_2}$ y que además como $h_1(i) = f_i(i)$ entonces $h \notin U_{f_i,h_2}$.

Concluimos así que $\mathcal{D}_2$ con la topología generada por la familia $\mathcal{U}$ es un espacio topológico Hausdorff. Consecuentemente nos referiremos a este espacio como el *Espacio de Rudin*. □

Ya teniendo a nuestro candidato a ser espacio de Dowker, recordemos que necesitamos demostrar que es un espacio normal y además encontrar una sucesión decreciente $D_1 \supseteq D_2 \supseteq ...$ de conjuntos cerrados de $\mathcal{D}_2$ tales que $\bigcap_{i=1}^{\infty} D_i = \emptyset$ y tal que para cada sucesión $\{U_i \mid i \in \mathbb{N}^+\}$ de abiertos de $\mathcal{D}_2$ tales que para cada $i \in \mathbb{N}^+$ se tenga que $D_i \subseteq U_i$, entonces $\bigcap_{i=1}^{\infty} U_i \neq \emptyset$.

Para esto nos serán de gran ayuda dos familias de conjuntos: para cada $n \in \mathbb{N}^+$ consideremos al conjunto

$$D_n = \{f \in \mathcal{D}_2 \mid \exists i \geq n (f(i) = \omega_i)\}$$

y de manera similar para cada $n \in \mathbb{N}^+$ con $n > 1$ consideremos a

$$C_n = \{f \in \mathcal{D}_2 \mid \forall i < n (f(i) = \omega_i) \wedge \forall i \geq n (f(i) < \omega_i)\}.$$

Recordemos que si tenemos $f \in \mathcal{D}_2$, en particular

$$\omega < cf(f(1)) \leq f(1) \leq \omega_1$$

y por tanto $f(1) = \omega_1$, mostrando que en particular $D_1 = \mathcal{D}_2$.

Una observación sencilla e importante es que dada $n \in \mathbb{N}^+$ se cumple que $C_{n+1} \subseteq D_n$, además, notemos que la familia $\{D_n \mid n \in \mathbb{N}^+\}$ es decreciente con respecto a la contención, veamos ahora que de hecho es una familia de conjuntos cerrados con intersección vacía.

Lema 3.30. *Para cada $n \in \mathbb{N}^+$ el conjunto D_n es cerrado y además $\bigcap_{i=1}^{\infty} D_n = \emptyset$.*

Demostración. Sea $n \in \mathbb{N}^+$ y consideremos a $f \in \mathcal{D}_2 \backslash D_n$, notemos entonces que por definición para cada $i \geq n$ se cumple que $f(i) < \omega_i$. Ahora, si $g \prec f$ entonces para cada $i \geq n$ se cumple que $g(i) < \omega_i$ y por tanto

$$U_{0,f} \subseteq \mathcal{D}_2 \backslash D_n$$

mostrando que el conjunto D_n es cerrado en $\mathcal{D}_2$.

Por último consideremos alguna $f \in \mathcal{D}_2$, entonces por definición existe alguna $i \in \mathbb{N}^+$ tal que para cada $n \in \mathbb{N}^+$ se cumple que

$$\omega < cf(f(n)) < \omega_i$$

Notemos entonces que para toda $j \geq i$ se cumple que $f(j) < \omega_j$ puesto que $\omega_i < cf(\omega_j) = \omega_j$, mostrando así que $f \notin D_i$.

Concluimos así que $\bigcap_{i=1}^{\infty} D_i = \emptyset$. □

Ahora para lograr demostrar la segunda condición sobre las familias de abiertos, vamos a tener que realizar algunas construcciones muy particulares. Para esto será de gran conveniencia dividir el trabajo en varios lemas para no perdernos en el camino.

Lema 3.31. *Sea $\langle A, < \rangle$ un conjunto parcialmente ordenado donde existe $c \in A$ tal que $d < c$ para alguna $d \in A$. Entonces existe un subconjunto $C \subseteq A$ tal que C es un conjunto bien ordenado con respecto al orden que hereda de $\langle A, < \rangle$, c es el elemento mínimo de C y además C es* maximal *con respecto a estas propiedades.*

Demostración. Sea A un conjunto parcialmente ordenado que cumpla con las hipótesis y consideremos a la familia

$$\mathcal{F} = \{B \subseteq A \mid \langle B, <_{\restriction B} \rangle \text{ es un buen orden, } c = mín(B)\}$$

que además cumpla con la propiedad de que dados $B, D \in \mathcal{F}$ con $B \subsetneq D$ entonces $D \backslash B$ es un conjunto de cotas superiores para B.

Consideremos una cadena $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{F}$ en el conjunto $\mathcal{F}$, parcialmente ordenado con respecto a la contención, veremos entonces que el conjunto $\bigcup \mathcal{C}$ es una cota superior para $\mathcal{C}$.

Primero veamos que $\bigcup \mathcal{C}$ es bien ordenado: consideremos un subconjunto $B \subseteq \bigcup \mathcal{C}$ tal que $B \neq \emptyset$, entonces existe un elemento $b \in B \cap E$ para alguna $E \in \mathcal{C}$. Como E es un conjunto bien ordenado consideremos a

$$m = mín(B \cap E)$$

aseguramos entonces que $m = mín(B)$. Sea $x \in B$, entonces existe $F \in \mathcal{C}$ tal que $x \in F$ y como $\mathcal{C}$ es una cadena entonces se cumple que $E \subseteq F$ ó $F \subseteq E$, notemos además que en dado caso de que $F = E$ entonces automáticamente $m \leq x$.

Primero, si $F \subseteq E$ entonces claramente $B \cap F \subseteq B \cap E$ y por tanto se cumple que $m < x$. Si por el contrario sucede que $x \in F \backslash E$, por hipótesis para cada $z \in E$ se cumple que $z < x$ y en particular se cumple que $m < x$. En ambos casos se tiene que $m \leq x$, mostrando así que $m = mín(B)$.

De este modo tenemos que $\bigcup \mathcal{C} \in \mathcal{F}$ y además para cada $B \in \mathcal{C}$ se cumple que $B \subseteq \mathcal{C}$, por tanto el *Lema de Zorn* nos asegura que existe un elemento maximal en la familia $\mathcal{F}$ que cumple dichas propiedades que hemos mencionado. □

Lema 3.32. *Consideremos a alguna $n \in \mathbb{N}^+$ con $n > 1$ y U un conjunto abierto en $\mathcal{D}_2$ tal que*

$$\{h \in C_{n+1} \mid f \preceq_{n+1} h\} \subseteq U$$

para alguna $f \in C_{n+1}$. Entonces existe $g \in C_n$ tal que $\{h \in C_n \mid g \prec_n h\} \subseteq U$.

Demostración. Elijamos a $n \in \mathbb{N}^+$ con $n > 1$, U un abierto en $\mathcal{D}_2$ y $f \in C_{n+1}$ como en las hipótesis. Primero definamos una función $k : \mathbb{N}^+ \to \omega_\omega$ tal que para cada $n \in \mathbb{N}^+$

$$k(i) = \begin{cases} f(i) & \text{si} \quad i \neq n \\ 0 & \text{si} \quad i = n \end{cases}$$

notemos que $k \in C_n$. Supongamos que

$$\{h \in C_n \mid k \prec_n h\} \nsubseteq U.$$

En particular existe alguna $h \in C_n \backslash U$ tal que $k \prec_n h$. Usando el lema anterior y el hecho de que todo buen orden es isomorfo a un único ordinal, podemos encontrar un conjunto maximal bien ordenado $K \subseteq C_n \backslash U$ de la forma

$$K = \{K_\alpha \mid \alpha \in \lambda\}$$

tal que para cada $\alpha \in \lambda$ se cumpla que $k \prec_n k_\alpha$ y además

$$\forall \alpha, \beta \in \lambda \left(\alpha < \beta \text{ si y sólo si } k_\alpha \prec_n k_\beta\right).$$

Por definición sabemos que para cada $\alpha \in \lambda$ se cumple que $k_\alpha(n) \leq \omega_n$ y además la condición anterior y el orden $\prec_n$ nos aseguran que

$$\forall \alpha, \beta \in \lambda \left(\alpha < \beta \text{ si y sólo si } k_\alpha(n) < k_\beta(n)\right)$$

asegurándonos entonces que $\lambda \leq \omega_n$.

Definamos una nueva función $l : \mathbb{N}^+ \to \omega_\omega$ tal que para cada $n \in \mathbb{N}^+$

$$l(n) = \sup\{k_\alpha(n) \mid \alpha < \lambda\}.$$

Notemos así que $l \in F$. Ahora, si suponemos que $\lambda = \omega_n$ entonces

$$\sup\{k_\alpha(n) \mid \alpha < \omega_n\} = \omega_n$$

mostrando así que $l \in C_{n+1}$ y que además por construcción se cumple que $f \prec_{n+1} l$, exhibiendo que

$$l \in \{h \in C_{n+1} \mid f \preceq_{n+1} h\} \subseteq U.$$

Así por definición de la topología de $\mathcal{D}_2$ existe una función $h \in F$ tal que $U_{h,l} \subseteq U$. Ahora, por construcción de l sabemos que para cada $i \geq n$ existe algún $\alpha_i \in \omega_n$ tal que

$$k_{\alpha_i}(i) > h(i).$$

Consideremos entonces a

$$\alpha = \sup\{\alpha_i \mid i \geq n\}.$$

Puesto que α es el supremo de un conjunto *numerable* de ordinales en ω_n, entonces el hecho de que ω_n es un ordinal regular nos asegura que $\alpha \in \omega_n$.

De esta manera obtenemos que $h \prec k_\alpha \preceq l$, mostrando así que $k_\alpha \in U$, lo cual es una contradicción a la construcción de K y por tanto necesariamente $\lambda < \omega_n$.

Finalmente definamos una función $g : \mathbb{N}^+ \to \omega_\omega$ tal que para cada $i \in \mathbb{N}^+$

$$g(i) = \begin{cases} l(i) + \omega_1 & \text{si} \quad i \geq n \\ \omega_i & \text{si} \quad i < n \end{cases}$$

Entonces por construcción $g \in C_n$ y además si existe una función $h \in C_n \backslash U$ tal que $g <_n h$, entonces para cada $f \in K$ se cumple que $f <_n h$, contradiciendo la maximalidad de la familia K. Concluimos así que

$$\{h \in C_n \mid g <_n h\} \subseteq U.$$

$\square$

Corolario 3.33. *Sea U un conjunto abierto en $\mathcal{D}_2$, si $\{h \in C_{n+1} \mid f \prec_{n+1} h\} \subseteq U$ para alguna $n \in \mathbb{N}^+$ con $n > 1$ y alguna $f \in C_{n+1}$ entonces existe $g \in C_2$ tal que $\{h \in C_2 \mid g \prec h\} \subseteq U$.*

Demostración. Demostraremos esta afirmación por inducción sobre aquellas $n > 1$. Primero, si $n = 2$ entonces existe $f \in C_3$ tal que

$$\{h \in C_3 \mid f \prec_3 h\} \subseteq U$$

Usando el lema anterior existe $g \in C_2$ tal que

$$\{h \in C_2 \mid g \prec_2 h\} \subseteq U$$

en particular como

$$\{h \in C_2 \mid g \prec h\} \subseteq \{h \in C_2 \mid g \prec_2 h\}$$

entonces el resultado es valido para este caso.

Supongamos entonces que la afirmación es valida para alguna $k > 1$ y supongamos que U es un conjunto abierto tal que

$$\{h \in C_{k+1} \mid f \prec_{k+1} h\} \subseteq U$$

para alguna $f \in C_{k+1}$. Usando entonces el lema anterior existe una $g_k \in C_k$ tal que

$$\{h \in C_k \mid g_k \prec_k h\} \subseteq U$$

y así por hipótesis de inducción existe alguna $g \in C_2$ tal que

$$\{h \in C_2 \mid g \prec h\} \subseteq U.$$

$\square$

En particular si existe un conjunto abierto U_n tal que $D_n \subseteq U_n$ entonces como $C_{n+1} \subseteq D_n$ al tomar una función cualquiera $k_{n+1} \in C_{n+1}$ podemos utilizar este corolario para asegurar que existe una función $f_n \in C_2$ tal que

$$\{h \in C_2 \mid f_n \prec h\} \subseteq U_n.$$

Lema 3.34. *Consideremos una familia de abiertos $\{U_i \mid i \in \mathbb{N}^+\}$ tal que para cada $i \in \mathbb{N}^+$ se cumpla que $D_i \subseteq U_i$, entonces $\bigcap_{i=1}^{\infty} U_i \neq \emptyset$.*

Demostración. Usando el lema anterior y la observación para cada $i \in \mathbb{N}^+$ consideremos una función $f_i \in C_2$ tal que

$$\{h \in C_2 \mid f_i \prec h\} \subseteq U_i$$

Ahora como para cada $i \in \mathbb{N}^+$ se cumple que $f_i \in C_2$ entonces para toda $n \geq 2$ se cumple que $f_i(n) < \omega_n$. Como para cada $n \geq 2$ la familia $\{f_i(n) \mid i \in \mathbb{N}^+\}$ es numerable entonces se cumple que

$$\alpha_n = \sup\left\{f_i(n) \mid i \in \mathbb{N}^+\right\} \in \omega_n.$$

En particular como $cf(\alpha_n + \omega_1) = \omega_1$, entonces se cumple que

$$\alpha_n + \omega_1 < \omega_n.$$

Definamos entonces una función $g : \mathbb{N}^+ \to \omega_\omega$ tal que para cada $n \in \mathbb{N}^+$

$$g(n) = \begin{cases} \alpha_n + \omega_1 & \text{si} \quad n \geq 2 \\ \omega_1 & \text{si} \quad n = 1 \end{cases}$$

Por construcción tenemos que $g \in C_2$ y que además para toda $n > 1$ se cumple que $f_n \prec g$ y por tanto $g \in U_n$. Sabíamos por una observación anterior que $D_1 = \mathcal{D}_2$ y por tanto automáticamente $g \in U_1$.

De este modo

$$g \in \bigcap_{i=1}^{\infty} U_i$$

como se quería demostrar. □

Para concluir que el Espacio de Rudin es un ejemplo de un espacio de Dowker, es necesario demostrar que es un espacio normal. Para esto demostraremos algo un poco más fuerte: este espacio será un ejemplo de un espacio de Dowker *colectivamente normal*. Para esto será conveniente una notación para unas funciones muy particulares en este espacio.

Definición 3.35. *Dado un subconjunto $U \subseteq F$ definimos una función $t_U : \mathbb{N}^+ \to \omega_\omega$ tal que para cada $n \in \mathbb{N}^+$*

$$t_U(n) = \sup\{f(n) \mid f \in U\}.$$

Una observación es que si $V \subseteq U \subseteq F$ entonces se cumple que $t_V \preceq t_U$.

Para poder demostrar la normalidad colectiva de este espacio haremos uso del Teorema 1.33, es decir, para cada familia discreta de cerrados $\{F_s \mid s \in S\}$ en $\mathcal{D}_2$ encontraremos una familia de abiertos ajenos por pares $\{U_s \mid s \in S\}$ tal que para cada $s \in S$ se cumpla que $F_s \subseteq U_s$. Primero veamos que es suficiente con encontrar una familia *bastante particular* de cubiertas abiertas para nuestra familia de cerrados.

Lema 3.36. *Sea $\mathcal{F} = \{F_s \mid s \in S\}$ una familia discreta de cerrados de $\mathcal{D}_2$. Si existe una familia de conjuntos $\{\mathcal{U}_\alpha \mid \alpha \in \omega_1\}$ tal que para cada $\alpha \in \omega_1$ el conjunto $\mathcal{U}_\alpha$ es una familia de abiertos ajenos por pares que cubren al conjunto $\bigcup \mathcal{F}$ y tal que dados dos ordinales $\alpha, \beta \in \omega_1$ tales que $\beta < \alpha$ entonces para todo $V \in \mathcal{U}_\alpha$ exista un conjunto $U \in \mathcal{U}_\beta$ tal que $V \subseteq U$ y que cumpla que:*

1. *Si V intersecta al menos a dos miembros de $\mathcal{F}$ entonces $t_V \neq t_U$; ó*
2. *Si U intersecta a lo más a un miembro de $\mathcal{F}$ entonces $U = V$.*

Entonces la familia $\{\mathcal{U}_\alpha \mid \alpha \in \omega_1\}$ asegura que existe una familia $\{U_s \mid s \in S\}$ de abiertos ajenos por pares tales que para cada $s \in S$ se cumple que $F_s \subseteq U_s$.

Demostración. Sea $f \in \bigcup \mathcal{F}$, dado $\alpha \in \omega_1$ existe un único $U_\alpha \in \mathcal{U}_\alpha$ tal que $f \in U_\alpha$, notemos además que si $\beta < \alpha$ entonces por hipótesis se cumple que $U_\beta \subseteq U_\alpha$ para algún $U_\beta \in \mathcal{U}_\beta$ y en particular se cumple que $t_{U_\alpha} \preceq t_{U_\beta}$. Notemos que en caso de que U_α intersecte a más de dos miembros de $\mathcal{F}$ entonces existe $n \in \mathbb{N}^+$ tal que

$$t_{U_\alpha}(n) < t_{U_\beta}(n)$$

de este modo el conjunto

$$\left\{t_{U_\gamma}(n) \mid \beta < \gamma < \omega_1\right\} \subseteq \omega_n$$

define una sucesión decreciente en el conjunto bien ordenado ω_n, asegurándonos que es un conjunto finito. Por tanto podemos encontrar un ordinal numerable α_f tal que $\beta < \alpha_f$ y tal que el conjunto U_{α_f} intersecta a lo más a un miembro de la familia $\mathcal{F}$.

Notemos entonces que gracias a la propiedad 2 de nuestras hipótesis siempre que tengamos un ordinal $\beta \in \omega_1$ tal que $\alpha_f < \beta$ y a un conjunto $V \in \mathcal{U}_\beta$ que satisfaga $U_{\alpha_f} \subseteq V$ entonces se cumplirá que $U_{\alpha_f} = V$. Apoyándonos de esto definamos para cada $s \in S$ al conjunto

$$U_s = \bigcup_{f \in F_s} U_{\alpha_f}.$$

Veamos ahora que la familia $\{U_s \mid s \in S\}$ está formada por conjuntos ajenos, para esto es suficiente con ver que si tomamos a $f \in F_s$ y a $g \in F_t$ con $s \neq t$ entonces $U_{\alpha_f} \cap U_{\alpha_g} = \emptyset$.

Tomemos entonces a $f \in F_s$ y a $g \in F_t$ con $s \neq t$ y consideremos al ordinal $\alpha = \max\{\alpha_f, \alpha_g\}$, por definición de la familia $\mathcal{U}_\alpha$ y por construcción de los ordinales α_f y α_g tenemos que $f \in U_{\alpha_f} \in \mathcal{U}_\alpha$ y $g \in U_{\alpha_g} \in \mathcal{U}_\alpha$. Como la familia $\mathcal{U}_\alpha$ está formada de abiertos ajenos por pares entonces automáticamente obtenemos que $U_{\alpha_f} \cap U_{\alpha_g} = \emptyset$ como se quería mostrar.

Así la familia de abiertos ajenos por pares $\{U_s \mid s \in S\}$ satisface que para cada $s \in S$ se cumple que $F_s \subseteq U_s$, mostrando que nuestro espacio sería colectivamente normal gracias al Teorema 1.33. $\square$

Antes de discutir la construcción de estas familias, nos será muy útil revisar una propiedad sencilla para este espacio.

Proposición 3.37. *El Espacio de Rudin es un P-espacio, es decir, todos los subconjuntos G_δ son conjuntos abiertos.*

Demostración. Consideremos a una familia numerable de abiertos $\{U_n \mid n \in \omega\}$ en $\mathcal{D}_2$ tales que existe $f \in \bigcap_{n\in\omega} U_n$. Notemos que para cada $n \in \omega$ existe una función $g_n \in F$ tal que

$$f \in U_{g_n,f} \subseteq U_n.$$

Definamos entonces una función $g : \mathbb{N}^+ \to \omega_\omega$ tal que para cada $i \in \mathbb{N}^+$

$$g(i) = \sup\{g_n(i) \mid n \in \omega\}.$$

Observemos que el conjunto $\{g_n(i) \mid n \in \omega\}$ es a su vez numerable, asegurándonos en particular que

$$cf(g(i)) \leq \omega < cf(f(i)) \leq f(i)$$

y por tanto tenemos que $g \prec f$. Ahora, para cada $h \in \mathcal{D}_2$ tal que $g \prec h$ y para cada $n \in \omega$, se cumple que $g_n \prec h$ gracias a la construcción de g, mostrando que para cada $n \in \omega$ se cumple que

$$U_{g,f} \subseteq U_{g_n,f} \subseteq U_n$$

y por tanto

$$f \in U_{g,f} \subseteq \bigcap_{n\in\omega} U_n.$$

Mostrando que el conjunto $\bigcap_{n\in\omega} U_n$ es abierto en $\mathcal{D}_2$. □

Ahora sí, para poder encontrar una familia de cubiertas abiertas que cumplan todas las propiedades del Lema 3.36, haremos una construcción paso a paso por recursión hasta ω_1. Cada uno de los pasos de esta recursión requiere revisar algunos casos muy particulares, para no perdernos será conveniente ir revisando cada paso por separado para después poder completar la recursión de una manera más clara y sencilla.

Lema 3.38. *Sea $\mathcal{F} = \{F_s \mid s \in S\}$ una familia discreta de cerrados de $\mathcal{D}_2$ y δ un ordinal límite en ω_1 tales que para todo $\beta < \delta$ hemos definido una familia de conjuntos abiertos $\mathcal{U}_\beta$ que cubre a $\bigcup \mathcal{F}$ y tal que la familia $\{\mathcal{U}_\beta \mid \beta \in \delta\}$ satisface las hipótesis del Lema 3.36. Entonces podemos encontrar una familia de abiertos $\mathcal{U}_\delta$ que cubre a $\bigcup \mathcal{F}$ y tal que la familia extendida $\{\mathcal{U}_\beta \mid \beta \leq \delta\}$ sigue satisfaciendo las hipótesis del Lema 3.36.*

Demostración. Para cada $f \in \bigcup \mathcal{F}$ y para cada $\beta \in \delta$ nuestras hipótesis nos aseguran que existe un único conjunto $U_f(\beta) \in \mathcal{U}_\beta$ tal que $f \in U_f(\beta)$, definamos así para cada $f \in \bigcup \mathcal{F}$ al conjunto

$$U_f = \bigcap_{\beta<\delta} U_f(\beta)$$

y consideremos así a la familia

$$\mathcal{U}_\delta = \left\{U_f \mid f \in \bigcup \mathcal{F}\right\}.$$

Gracias a que δ es un ordinal numerable, la familia $\mathcal{U}_\delta$ está constituida por conjuntos G_δ y por tanto es una familia de abiertos ya que $\mathcal{D}_2$ es un P-espacio. Observemos también que si tenemos $f, g \in \bigcup \mathcal{F}$ tales que $f \neq g$, entonces dado un ordinal $\beta < \delta$ se cumple que $U_f \subseteq U_f(\beta)$ y $U_g \subseteq U_g(\beta)$. Así por hipótesis tenemos que

$$U_f \cap U_g \subseteq U_f(\beta) \cap U_g(\beta) = \emptyset$$

asegurandonos que la familia $\mathcal{U}_\delta$ es de abiertos ajenos por pares. Verifiquemos para concluir las últimas dos condiciones.

Sea $f \in \bigcup \mathcal{F}$, $\beta < \delta$ y supongamos que el conjunto $U_f(\beta)$ intersecta al menos a dos miembros de la familia $\mathcal{F}$, notemos que en particular se cumple que

$$U_f \subseteq U_f(\beta + 1) \subseteq U_f(\beta)$$

mostrando que $U_f(\beta + 1)$ intersecta al menos a dos miembros de la familia $\mathcal{F}$ y así por hipótesis se tiene que $t_{U_f(\beta+1)} \neq t_{U_f(\beta)}$, pero además ese hecho nos asegura también que

$$t_{U_f} \preceq t_{U_f(\beta+1)} \preceq t_{U_f(\beta)}$$

mostrando que necesariamente $t_{U_f} \neq t_{U_f(\beta)}$ como queríamos demostrar.

Ahora, si nuestro conjunto $U_f(\beta)$ intersecta sólo a un miembro de la familia $\mathcal{F}$, entonces por hipótesis para cada ordinal $\gamma \in \omega_1$ tal que $\gamma > \beta$ se cumple que $U_f(\beta) = U_f(\gamma)$, asegurándonos así que

$$U_f(\beta) \subseteq \bigcap_{\beta < \gamma < \delta} U_f(\beta).$$

Notemos ahora que por hipótesis para cada $\alpha < \beta$ se cumple que $U_f(\beta) \subseteq U_f(\alpha)$ y así tenemos que

$$U_f(\beta) \subseteq \left(\bigcap_{\gamma < \delta} U_f(\beta) \right) = U_f$$

satisfaciendo así la segunda condición. De esta manera concluimos que la familia extendida, $\{\mathcal{U}_\beta \mid \beta \leq \delta\}$, sigue satisfaciendo las propiedades el Lema 3.36. □

Para poder terminar el resultado por recursión necesitamos analizar el caso en el que δ sea un ordinal sucesor, en este caso en particular vamos a necesitar hacer un par de construcciones que pueden resultar densas, por esta razón iremos paso a paso y remarcando las ideas importantes para no perdernos. Empecemos entonces con un sencillo lema sobre una indización muy particular para conjuntos infinitos.

Lema 3.39. *Sea $n \in \omega$ y consideremos un conjunto A de cardinalidad ω_n. Entonces existe una numeración de los elementos de A de la forma $\{a_\lambda \mid \lambda \in \omega_n\}$ tal que para cada $\lambda \in \omega_n$ y $a \in A$ existe un ordinal $\gamma \in \omega_n$ tal que $\lambda < \gamma$ y $a_\gamma = a$.*

Demostración. Recordemos que gracias al *Axioma de Elección* podemos encontrar una partición de ω_n de la forma $\{P_i \mid i \in \omega_n\}$ tal que para cada $i \in \omega_n$ se cumple que $|A_i| = \omega_n$. Notemos en particular que el conjunto P_i no es acotado en ω_n. Usando este hecho para cada $i \in \omega_n$ consideremos una función biyectiva $f_i : P_i \to A$ y así para cada ordinal $\lambda \in \omega_n$ definamos

$$a_\lambda = f_i(\lambda) \text{ si y sólo si } \lambda \in P_i.$$

Veamos que esta numeración cumple lo buscado. Sean $\lambda \in \omega_n$ y $a \in A$, como $|\lambda| < \aleph_n = |\omega_n|$ entonces existe un ordinal $j \in \omega_n$ tal que

$$\lambda \subseteq \bigcup_{i \leq j} P_j.$$

Por tanto dado $\gamma > j$ se cumple que $\lambda \cap P_\gamma = \emptyset$, de este modo consideremos al ordinal $f_\gamma^{-1}(a) \in P_\gamma$ entonces por construcción se cumple que $\lambda < f_\gamma^{-1}(a)$ y además

$$a_{f_\gamma^{-1}(a)} = a$$

demostrando la afirmación. $\square$

Ya teniendo este resultado podemos atacar la construcción más importante para esta demostración, de nuevo, es recomendable que el lector preste mucha atención a los conceptos clave que iremos señalando a lo largo de la prueba. Como una notación conveniente vamos a definir unos conjuntos muy especiales.

Definición 3.40. *Dado un conjunto abierto U de $\mathcal{D}_2$ para cada $m \in \mathbb{N}^+$ definimos al conjunto*

$$U_m = \left\{h \in U \mid \forall i \in \mathbb{N}^+ \left(cf\left(h\left(i\right)\right) \leq \omega_m\right)\right\}.$$

Observemos que gracias a nuestra definición del espacio $\mathcal{D}_2$ se cumple en particular que

$$U = \bigcup_{m \in \mathbb{N}^+} U_m. \tag{3.4}$$

Lema 3.41. *Sea $\mathcal{F} = \{F_s \mid s \in S\}$ una familia discreta de cerrados de $\mathcal{D}_2$. Consideremos un ordinal sucesor $\delta \in \omega_1$ de la forma $\delta = \alpha + 1$ para algún $\alpha \in \omega_1$ tal que para todo $\beta < \delta$ existe una familia de conjuntos abiertos $\mathcal{U}_\beta$ que cubre a $\bigcup \mathcal{F}$ y tal que la familia $\{\mathcal{U}_\beta \mid \beta \in \delta\}$ satisface las hipótesis del Lema 3.36. Si existe un conjunto abierto $U \in \mathcal{U}_\alpha$ que intersecta al menos a dos miembros de $\mathcal{F}$ y que además para cada $n \in \mathbb{N}^+$ satisface que $cf\left(t_U\left(n\right)\right) > \omega$, entonces para cada $m \in \mathbb{N}^+$ existe una función $g \in F$ tal que $g \prec t_U$ y tal que el conjunto $\{h \in U_m \mid g \prec h\}$ intersecta a lo más a un miembro de $\mathcal{F}$.*

Demostración. Consideremos a $\mathcal{F}$, δ, $\{\mathcal{U}_\beta \mid \beta \in \delta\}$ y $U \in \mathcal{U}_\alpha$ como en las hipótesis y sea $m \in \mathbb{N}^+$. Realizaremos la demostración de este lema por contradicción: supongamos que para toda función $f \in F$ tal que $f < t_U$ el conjunto $\{h \in U_m \mid f \prec h\}$ intersecta al menos a dos miembros de la familia $\mathcal{F}$.

Para toda $i \in \mathbb{N}^+$ tal que $i \leq m$ definamos al conjunto

$$M_i = \left\{j \in \mathbb{N}^+ \mid cf\left(t_U\left(j\right)\right) = \omega_i\right\} \tag{3.5}$$

y también a

$$M = \{j \in \mathbb{N}^+ \mid cf\left(t_U\left(j\right) > \omega_m\right).$$

Notemos que gracias a nuestras hipótesis estos conjuntos conforman una partición

$$\{M_i \mid 1 \leq i \leq m\} \cup \{M\}$$

para el conjunto $\mathbb{N}^+$.

Consideremos al conjunto de funciones

$$R = \{r : (m+1)\setminus\{0\} \to \omega_m \mid \forall i \in (m+1)\setminus\{0\}\,(r(i) < \omega_i)\}. \tag{3.6}$$

Usando un poco de aritmética cardinal podemos deducir que

$$|R| = |\omega_m|^m = \omega_m.$$

Utilizando el *Axioma de Elección* junto con el lema anterior, consideremos una numeración de los elementos de R de la forma $\{r_\lambda \mid \lambda \in \omega_m\}$ tal que

$$\forall \lambda \in \omega_m, \forall r \in R, \exists \gamma \in \omega_m\,(\lambda < \gamma \wedge (r_\gamma = r)). \tag{3.7}$$

Ahora, si tenemos $i \leq m$ y $j \in M_i$ entonces por 3.5 sabemos que $cf\,(t_U(j)) = \omega_i$. Consideremos así una sucesión *creciente* de la forma $(s_j)_{\sigma\in\omega_i} \subseteq t_U(j)$ tal que

$$\sup\left\{(s_j)_\sigma \mid \sigma \in \omega_i\right\} = t_U(j) \tag{3.8}$$

en pocas palabras, un conjunto creciente y cofinal a $t_U(j)$.

- Por recursión sobre ω_m definiremos tres familias de funciones $\{f_\lambda \mid \lambda \in \omega_m\} \subseteq F$, $\{h_\lambda \mid \lambda \in \omega_m\} \subseteq U_m$ y $\{k_\lambda \mid \lambda \in \omega_m\} \subseteq U_m$ tales que para cada $\lambda \in \omega_m$ se cumple que $f_\lambda \prec h_\lambda$, $f_\lambda \prec k_\lambda$ y que además h_λ y k_λ pertenezcan a miembros distintos de $\mathcal{F}$.

  Para comenzar, definamos $f_0 : \mathbb{N}^+ \to \omega_\omega$ tal que para cada $j \in \mathbb{N}^+$

  $$f_0(j) = \begin{cases} s_{j,r_0(i)} & \text{si} \quad j \in M_i \text{ para } i \in \mathbb{N}^+ \text{ con } i \leq m \\ 0 & \text{si} \quad j \in M \end{cases}$$

  Por construcción se cumple que $f_0 \prec t_U$ y así por hipótesis existen dos funciones $h_0, k_0 \in U_m$ que pertenecen a distintos miembros de la familia $\mathcal{F}$ y que además $f_0 \prec h_0$ y $f_0 \prec k_0$.

  Supongamos que tenemos un ordinal $\lambda \in \omega_m$ tal que para cada $\gamma < \lambda$ hemos definido a las funciones $f_\gamma \in F$ y $h_\gamma, k_\gamma \in U_m$ tales que h_γ y k_γ pertenecen a distintos miembros de $\mathcal{F}$ y que además satisfacen que $f_\gamma \prec h_\gamma$ y $f_\gamma < k_\gamma$. Definimos entonces la función $f_\lambda : \mathbb{N}^+ \to \omega_\omega$ tal que para cada $j \in \mathbb{N}^+$

  $$f_\lambda(j) = \begin{cases} s_{j,r_\lambda(i)} & \text{si} \quad j \in M_i \text{ para } i \in \mathbb{N}^+ \text{ con } i \leq m \\ \sup\left\{h(j) \mid h \in \bigcup_{\gamma\in\lambda}\{h_\gamma, k_\gamma\}\right\} & \text{si} \quad j \in M \end{cases}$$

  Recordemos que por hipótesis de inducción para cada $\gamma < \lambda$ se cumple que $h_\gamma \in U_m$ y $k_\gamma \in U_m$, es decir, para cada $i \in \mathbb{N}^+$ se cumple que

  $$\text{máx}\,\{cf\,(h_\gamma(i)), cf\,(k_\gamma(i))\} \leq \omega_m.$$

  En particular para cada $j \in M$ como se cumple que $U_m \subseteq U$, entonces por definición de t_U tenemos

  $$\text{máx}\,\{h_\gamma(j), k_\gamma(j)\} \leq t_U(j).$$

Pero por definición de M sabemos que $cf\left(t_U\left(j\right)\right) > \omega_m$. Lo cual nos asegura que necesariamente se cumple

$$\max\left\{h_\gamma\left(j\right), k_\gamma\left(j\right)\right\} < t_U\left(j\right).$$

Con esto obtenemos que para cada $j \in M$ el conjunto $\left\{h\left(j\right) \mid h \in \bigcup_{\gamma\in\lambda}\left\{h_\gamma, k_\gamma\right\}\right\}$ está acotado por el ordinal ω_m y así se cumple que

$$\sup\left\{h\left(j\right) \mid h \in \bigcup_{\gamma\in\lambda}\left\{h_\gamma, k_\gamma\right\}\right\} \leq \omega_m$$

asegurandomos que para cada $j \in M$ se cumple que

$$f_\lambda\left(j\right) \leq \omega_m < t_U\left(j\right).$$

Ahora si $j \in M_i$ para alguna $i \in \mathbb{N}^+$ con $i \leq m$, entonces por la construcción que hicimos en 3.8 se cumple que

$$\left(s_j\right)_{r_\lambda(i)} < t_U\left(j\right).$$

Juntando esto obtenemos que $f_\lambda \prec t_U$ y así por hipótesis existen dos funciones $h_\lambda, k_\lambda \in U_m$ que pertenecen a distintos miembros de la familia $\mathcal{F}$ y que además satisfacen que $f_\lambda \prec h_\lambda$ y $f_\lambda \prec k_\lambda$.

De este modo concluimos nuestra recursión hasta el ordinal límite ω_m.

- Una observación importante es que nuestra construcción anterior nos asegura que para cada
  $j \in M$ se cumple que los conjuntos de ordinales $\left\{h_\lambda\left(j\right) \mid \lambda < \omega_m\right\}$ y $\left\{k_\lambda\left(j\right) \mid \lambda < \omega_m\right\}$ *son estrictamente crecientes* y acotados por ω_m. Esto nos asegura que

$$\sup\left\{h_\lambda\left(j\right) \mid \lambda < \omega_m\right\} = \omega_m \tag{3.9}$$

  y

$$\sup\left\{k_\lambda\left(j\right) \mid \lambda < \omega_m\right\} = \omega_m.$$

- Definamos ahora una función $g : \mathbb{N}^+ \to \omega_\omega$ tal que para cada $j \in \mathbb{N}^+$

$$g\left(j\right) = \begin{cases} t_U\left(j\right) & \text{si} \quad j \in \mathbb{N}^+\backslash M \\ \sup\left\{h_\lambda\left(j\right) \mid \lambda < \omega_m\right\} & \text{si} \quad j \in M \end{cases} \tag{3.10}$$

  Notemos primero que dada $j \in \mathbb{N}^+\backslash M$ se cumple por nuestra hipótesis general que

$$\omega < cf\left(t_U\left(j\right)\right) = cf\left(g\left(j\right)\right) \leq \omega_m$$

  y por otra parte si $j \in M$ entonces por la observación 3.9 se cumple que $cf\left(g\left(j\right)\right) = \omega_m$. Juntando estas dos partes obtenemos que en general para cada $j \in \mathbb{N}^+$ se cumple que

$$cf\left(g\left(j\right)\right) < \omega_{m+1}.$$

  Demostrando que $g \in \mathcal{D}_2$. Claramente, por construcción, también se cumple que $g \preceq t_U$.

- Como nuestra familia $\mathcal{F}$ es discreta entonces existe una función $f \in F$ tal que el conjunto $U_{f,g}$ *intersecta a lo más a un elemento de la familia* $\mathcal{F}$. Notemos en particular que como $f \prec g$ entonces nuestra observación anterior nos asegura que $f \prec t_U$.

- Recordemos que en 3.8 para toda $i \in \mathbb{N}^+$ tal que $i \leq m$ y cada $j \in M_i$ nuestra sucesión $(s_j)_{\sigma \in \omega_i}$ era cofinal a $t_U(j)$. Usando esto y nuestra observación anterior podemos encontrar un ordinal $\sigma_j \in \omega_i$ tal que

$$f(j) < (s_j)_{\sigma_j}.$$

Consideremos entonces al ordinal

$$\mu_i = \sup\{\sigma_j \mid j \in M_i\}.$$

En particular como el conjunto M_i es finito o numerable, se cumple que $\mu_i < \omega_i$.

- Definamos en el conjunto R (3.6) una función $r : (m+1)\setminus\{0\} \to \omega_m$ tal que para cada $i \in (m+1)\setminus\{0\}$ se tenga que $r(i) = \omega_i$. Gracias a nuestra observación anterior, esta construcción particular de r nos asegura que para cada $i \in \mathbb{N}^+$ tal que $i \leq m$ y cada $j \in M_i$ se cumple que

$$f(j) < (s_j)_{r(i)}.$$

Ahora, si tenemos $j \in M$, entonces por la elección de f hace dos pasos teníamos que $f \prec g$, lo cual ya nos asegura que $f(j) < g(j)$. Usando entonces la definición de g (3.10) podemos encontrar un ordinal $\sigma_j \in \omega_m$ tal que

$$f(j) < h_{\sigma_j}(m).$$

Consideremos así a

$$\sigma = \sup\{\sigma_j \mid j \in M\}$$

entonces por construcción tenemos que para cada ordinal $\gamma \in \omega_m$ tal que $\sigma < \gamma$ se cumple que

$$f(j) < \min\{h_\gamma(j), k_\gamma(j)\}.$$

Usando entonces la numeración de los elementos de R que hicimos en 3.7 podemos encontrar un ordinal $\gamma \in \omega_m$ tal que $\sigma < \gamma$ y tal que $r_\gamma = r$.

- Notemos ahora que gracias a nuestra construcción anterior, para toda $j \in M$ se cumple que

$$f(j) < h_\gamma(j) < g(j)$$

y que si $j \in M_i$ para alguna $i \in \mathbb{N}^+$ con $i \leq m$, entonces gracias a la construcción que hicimos en 3.6 se cumple que

$$f(j) < (s_j)_{r(i)} = (s_j)_{r_\gamma(i)} \leq t_U(j) = g(j).$$

Lo cual nos asegura que en realidad $h_\gamma \in U_{f,g}$. Notemos que a partir de nuestra observación 3.9 podemos hacer una construcción completamente análoga para deducir que $k_\gamma \in U_{f,g}$.

Por construcción las funciones h_γ y k_γ pertenecen a distintos miembros de la familia $\mathcal{F}$ y así, el conjunto $U_{f,g}$ intersecta al menos a dos miembros distintos de $\mathcal{F}$, lo cual es una contradicción a la elección de la función f. $\square$

Corolario 3.42. *Bajo las mismas hipótesis del lema anterior, podemos encontrar una función $f \in \mathcal{F}$ tal que $f \prec t_U$ y tal que el conjunto $\{h \in U \mid f \prec h\}$ intersecta lo más a un miembro de $\mathcal{F}$.*

Demostración. Consideremos a $\mathcal{F}$, δ, $\{\mathcal{U}_\beta \mid \beta \in \delta\}$ y $U \in \mathcal{U}_\alpha$ como en las hipótesis. Usando el lema anterior para cada $n \in \mathbb{N}^+$ consideremos a la función $g_n \in F$ tal que $g_n \prec t_U$ y tal que el conjunto $\{h \in U_m \mid g \prec h\}$ intersecta a lo más a un miembro de $\mathcal{F}$. Definamos una función $f : \mathbb{N}^+ \to \omega_\omega$ tal que para cada $i \in \mathbb{N}^+$

$$f(i) = \sup\left\{g_n(i) \mid n \in \mathbb{N}^+\right\}.$$

Una observación sencilla es que como el conjunto $\{g_n(i) \mid n \in \mathbb{N}^+\}$ es numerable, está contenido en $t_U(i)$ y además se cumple por hipótesis que $\omega < cf(t_U(i))$, entonces para cada $i \in \mathbb{N}^+$ se cumple que $f(i) < t_U(i)$, asegurándonos que $f \prec t_U$.

Supongamos ahora que tenemos dos funciones $h, k \in U \cap \bigcup \mathcal{F}$ tales que $f \prec h$ y $f \prec k$. Por la observación 3.4 existen $n, m \in \mathbb{N}^+$ tales que $h \in U_n$ y $k \in U_m$.

Gracias a la construcción de la familia de funciones $\{g_i \mid i \in \mathbb{N}^+\}$ tenemos que $g_{n+m} \prec h$, $g_{n+m} \prec k$ y además se cumple que $h, k \in U_{n+m}$, lo cual implica que

$$h, k \in \{h \in U_{n+m} \mid g_{n+m} \prec h\}$$

y por tanto nuestra lema anterior nos asegura que h y k pertenecen al mismo miembro de $\mathcal{F}$.

Así, el conjunto $\{h \in U \mid f \prec h\}$ intersecta a lo más a un miembro de la familia $\mathcal{F}$. $\square$

Ya teniendo estos resultados en nuestro repertorio, construyamos una familia que satisfaga lo especificado en el lema 3.36.

Proposición 3.43. *Sea $\mathcal{F} = \{F_s \mid s \in S\}$ una familia discreta de cerrados de $\mathcal{D}_2$. Entonces existe una familia de conjuntos $\{\mathcal{U}_\alpha \mid \alpha \in \omega_1\}$ tal que para cada $\alpha \in \omega_1$ el conjunto $\mathcal{U}_\alpha$ es una familia de abiertos ajenos por pares que cubren al conjunto $\bigcup \mathcal{F}$ y tal que dados dos ordinales $\alpha, \beta \in \omega_1$ tales que $\beta < \alpha$, entonces para todo $V \in \mathcal{U}_\alpha$ exista un conjunto $U \in \mathcal{U}_\beta$ tal que $V \subseteq U$ y que cumpla que:*

1. *Si V intersecta al menos a dos miembros de $\mathcal{F}$ entonces $t_V \neq t_U$; ó*

2. *Si U intersecta a lo más a un miembro de $\mathcal{F}$ entonces $U = V$.*

Demostración. Sea $\mathcal{F} = \{F_s \mid s \in S\}$ una familia discreta de cerrados de $\mathcal{D}_2$. Construiremos nuestra familia de conjuntos $\{\mathcal{U}_\alpha \mid \alpha \in \omega_1\}$ por recursión hasta ω_1. Para comenzar definamos $\mathcal{U}_0 = \{\mathcal{D}_2\}$ que por vacuidad cumple lo que queremos.

Supongamos ahora que hemos definido nuestra familia para todo ordinal β tal que $\beta < \delta$ para algún $\delta \in \omega_1$. Supongamos primero que δ es un ordinal sucesor de la forma $\alpha + 1$ para algún $\alpha \in \omega_1$.

Lo que haremos a continuación es obtener una *partición* de cada abierto $V \in \mathcal{U}_\alpha$ en una familia de abiertos ajenos por pares, D_V, que satisfagan lo buscado en esta proposición. De este modo consideremos $V \in \mathcal{U}_\alpha$.

- Si el conjunto V intersecta a lo más un término de $\mathcal{F}$ definamos $D_V = \{V\}$. Notemos que dado $\beta < \alpha + 1$ existe por hipótesis de inducción un conjunto $U \in \mathcal{U}_\beta$ tal que $V \subseteq U$, ya que
$V \in \mathcal{U}_\alpha$. Además si el conjunto U intersecta a lo más a un miembro de $\mathcal{F}$ entonces $U = V$ por hipótesis de inducción.

- Supongamos que el conjunto V intersecta al menos a dos miembros de $\mathcal{F}$ y que existe alguna $i \in \mathbb{N}^+$ tal que $cf\left(t_V(i)\right) \leq \omega$.

  Primero, si $cf\left(t_V(i)\right) < \omega$ entonces $t_V(i)$ es un ordinal sucesor de la forma $t_V(i) = \gamma+1$ para algún $\gamma \in \omega_\omega$. Notemos que por definición de nuestro espacio, para cada función $f \in V$ se cumple que $cf\left(f(i)\right) > \omega$. Recordando que por definición para cada $f \in V$ se cumple que $f(i) \leq t_V(i)$ entonces por lo anterior para cada $f \in V$ necesariamente se cumple que $f(i) < t_V(i)$, lo cual contradice que $t_V(i) = \sup\{f(i) \mid f \in V\}$. Así tenemos que $cf\left(t_V(i)\right) = \omega$.

  Consideremos entonces una sucesión estrictamente creciente $\{\lambda_n \mid n \in \mathbb{N}^+\} \subseteq t_V(i)$ tal que
$$\sup\left\{\lambda_n \mid n \in \mathbb{N}^+\right\} = t_V(i).$$

  Definamos así a los conjuntos
$$V_1 = \{f \in V \mid f(i) \leq \lambda_1\}$$
  y para toda $n \in \mathbb{N}^+$ con $n > 1$
$$V_n = \{f \in V \mid \lambda_{n-1} < f(i) \leq \lambda_n\}.$$

  Ahora podemos definir para cada $n \in \mathbb{N}^+$ una función $\overline{\lambda_n} : \mathbb{N}^+ \to \omega_\omega$ tal que para cada $j \in \mathbb{N}^+$
$$\overline{\lambda_n^+}(j) = \begin{cases} \omega_j & \text{si} \quad j \neq i \\ \lambda_n & \text{si} \quad j = i \end{cases}$$
  y
$$\overline{\lambda_n^-}(j) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad j \neq i \\ \lambda_n & \text{si} \quad j = i \end{cases}$$

  Notemos entonces que $V_1 = V \cap V_{0,\overline{\lambda_1^+}}$ y que para cada $n \in \mathbb{N}^+$ con $n > 1$ se cumple que
$$V_n = V \cap U_{\overline{\lambda_{n-1}^-},\overline{\lambda_n^+}}$$
  mostrando que el conjunto $D_V = \{V_n \mid n \in \mathbb{N}^+\}$ es una familia de abiertos tal que $\bigcup D_V = V$ y que, por construcción, está formada por conjuntos ajenos por pares.

  Para concluir este caso tomemos un ordinal $\beta < \alpha + 1$. Por hipótesis de inducción existe un conjunto $U \in \mathcal{U}_\beta$ tal que $\bigcup D_V \subseteq U$. Por construcción para cada $n \in \mathbb{N}^+$ se cumple que
$$t_{V_n}(i) \leq \lambda_n < t_V(i).$$

Como el conjunto $V \in \mathcal{U}_\alpha$ intersecta al menos a dos miembros de $\mathcal{F}$, entonces por hipótesis de inducción se cumple que $t_V \neq t_U$. Como se cumple que

$$t_{V_n} \preceq t_V \preceq t_U$$

entonces se cumple que $t_{V_n} \neq t_U$, como queríamos mostrar.

- Por último supongamos que el conjunto V intersecta al menos a dos miembros de $\mathcal{F}$ y que para cada $n \in \mathbb{N}^+$ se cumple que $cf\left(t_V(n)\right) > \omega$.

  En este caso estamos bajo las hipótesis del corolario anterior y por tanto existe una función $f \in F$ tal que $f \prec t_V$ y tal que el conjunto $\{h \in V \mid f \prec h\}$ intersecta a lo más a un miembro de $\mathcal{F}$. Para cada $M \subseteq \mathbb{N}^+$ definamos al conjunto

$$V_M = \left\{h \in V \mid \forall n \in M\left(h(n) \leq f(n)\right) \wedge \forall n \in \mathbb{N}^+ \backslash M\left(f(n) < h(n)\right)\right\}.$$

  Observemos que si existe algún $M \subseteq \mathbb{N}^+$ tal que $M \neq \emptyset$ y $t_{V_M} = t_V$, entonces dado $i \in M$ para cada $h \in V_M$ se cumple que $h(i) \leq f(i)$, lo cual contradice que $f \prec t_V$. Así si existe algún $M \subseteq \mathbb{N}^+$ tal que $t_{V_M} = t_V$ entonces debe cumplirse que $M = \emptyset$. Como $V_\emptyset = \{h \in V \mid f \prec h\}$ entonces $V_\emptyset$ intersecta a sólo un elemento de F.

  Para concluir consideremos un ordinal $\beta < \alpha$. Por hipótesis de inducción existe un conjunto $U \in \mathcal{U}_\beta$ tal que $\bigcup D_V \subseteq U$. Primero, como V intersecta al menos a dos miembros de $\mathcal{F}$, entonces basta demostrar que para cada $M \subseteq \mathbb{N}^+$ se cumple que $t_{V_M} \neq t_U$, lo cual podemos asegurar gracias a que

$$t_{V_\emptyset} \preceq t_V \preceq t_U$$

  y que si $M \in \mathcal{P}(M) \setminus \{\emptyset\}$ entonces

$$t_{V_M} \prec t_V \preceq t_U.$$

  Por hipótesis de inducción sabemos que $t_V \neq t_U$ y por tanto $t_{V_M} \neq t_U$.

  Si por el contrario $\beta = \alpha$, entonces dado $M \in \mathcal{P}(M) \setminus \{\emptyset\}$ por el argumento anterior se cumple que $t_{V_M} \neq t_U$. Pero si $M = \emptyset$ entonces el conjunto V intersecta al menos dos miembros de $\mathcal{F}$ mientras que $V_\emptyset$ intersecta a sólo un miembro de F, asegurándonos que se cumple lo buscado por vacuidad.

De este modo consideremos a la familia

$$\mathcal{U}_\delta = \{D_V \mid V \in \mathcal{U}_\alpha\}.$$

Entonces esta familia, por la construcción anterior, satisface lo buscado.

Si suponemos que hemos definido la familia para cada ordinal $\beta \in \omega$ tal que $\beta < \delta$ para algun ordinal límite $\delta \in \omega_1$ entonces el Lema 3.38 resuelve este caso.

De este modo podemos asegurar la existencia de la familia $\{\mathcal{U}_\alpha \mid \alpha \in \omega_1\}$ que cumple todo lo buscado. $\square$

Utilizando esto y 3.36 obtenemos que el espacio de Rudin es un ejemplo de un espacio de Dowker colectivamente normal cuya existencia sólo requiere los axiomas de Zermelo-Fraenkel con elección. Es interesante ver que ni siquiera la *normalidad colectiva* en un espacio nos asegura que tiene que ser numerablemente paracompacto.

Con esto hemos llegado por fin al final de nuestra aventura. Empezamos por estudiar a la paracompacidad como un paso "intermedio" que existe entre la normalidad y la normalidad colectiva, a estudiar una versión más débil que falla completamente en este aspecto.

Nuestro viaje en este último capítulo nos llevó a estudiar espacios construidos hasta el más mínimo detalle, pero esto no significa que no se haya realizado más progreso en esta area. Zoltán Balogh, Menachem Kojman y Saharon Shelah han logrado construir espacios de Dowker que poseen funciones cardinales más manejables a las de este espacio de Rudin, haciéndolos mucho más atractivos y ricos en propiedades. Tristemente una revisión exhaustiva de estos espacios excede (¡por mucho!) los alcances de este trabajo.

Otra cuestión importante es justo la implicación "inversa" de la pregunta principal de este capítulo: ¿existen espacios numerablemente paracompactos que no sean normales? la respuesta a esto es sí. Un espacio que cumple estas propiedades se conoce como espacio *anti-Dowker* y el estudio de éstos fue de gran importancia para el estudio de los espacios de Moore. Michael Wage logró en el año de 1977 realizar una construcción que transforma cualquier espacio perfectamente normal (pero no colectivamente normal) en un espacio anti-Dowker, fue entonces cuando se deduce la existencia de un espacio anti-Dowker usando un espacio con estas caracteristicas desarollado por Bing anteriormente. La solución a esta pregunta en concreto no es del todo sencilla, pero la construcción tan pronta de un ejemplo la hace contrastar bastante con respecto a la que estudiamos nosotros. Invitamos a aquellos lectores interesados en conocer más teoría sobre los espacios de Dowker a revisar las referencias incluidas al final de este escrito.

Esperamos que el lector haya disfrutado de acompañarnos en este gran viaje que hemos realizado y que hayamos logrado satisfacer sus curiosidades sobre lo que es la paracompacidad y lo que son los espacios de Dowker. Es aquí donde invitamos a nuestros compañeros de viaje en seguir interesándose por el estudio de este tipo de propiedades y que, en un futuro, nos invite también a seguirlo en algún viaje propio.

Bibliografía

[Ca] J. A. Amor Montaño, G. Campero Arena y F.E. Miranda Perea, *Teoría de conjuntos, Curso intermedio,* Segunda edición, Las Prensas de Ciencias, UNAM, 2014

[Do] C. H. Dowker, *On countably paracompact spaces*,Canad.J.Math.3, 1951, pp. 219-224

[En] R. Engelking, *General topology,* Sigma Series in Pure Mathematics, vol 6, Heldermann Verlag Berlin, 1989

[He] M. Henriksen y J.R. Isbell, *Some properties of compactifications,* Duke Math. J. Volume 25 No. 1, 1958, pp. 83-105.

[Lu] D. J. Lutzer, *On generalized ordered spaces,* Dissertationes Math. 89, 1971

[Ma] M. J. Mansfield, *On countably paracompact normal spaces*, Canad. J. Math. 9, 1957, pp. 443-449

[Mi] E. Michael, *Another note on paracompact spaces,* Proc. Amer. Math. Soc. vol. 8, 1957, pp. 822-828

[Mo1] K. Morita, *Paracompactness and product spaces*, Fund. Math. 50, 1962, pp. 223–236

[Mo2] K. Morita, *Products of normal spaces with metric spaces*, Math. Ann. 154, 1964, pp. 365-382

[Os] A. Ostaszewski, *On countably compact, perfectly normal spaces*, J. London Math. Soc. 14, 1976, pp. 505-516

[Ru1] M. E. Rudin, *A normal space X for which $X \times I$ is not normal,* Fund. Math. 73, 1971, pp. 179-186

[Ru2] M. E. Rudin, *Dowker spaces, en Handbook of set-theoretic topology,* K.Kunen y J.E Vaughan, eds., North-Holland, 1984, pp. 761-781.

[St] A. H. Stone, *Paracompactness and product spaces,* Bull. Amer. Math. Soc. Volume 54 No. 10, 1948, pp. 977-982.

[Ta] F. Casarrubias Segura y Á. Tamariz Mascarúa, *Elementos de topología de conjuntos*, México, 2011

[Wi] S. Willard, *General topology,* Dover Publications, Inc., 2004