



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA EN FILOSOFÍA
FACULTAD DE FILOSOFÍA Y LETRAS
INSTITUTO DE INVESTIGACIONES FILOSÓFICAS

TRADUCCIÓN DEL TEXTO DE GOTTLOB FREGE:
ESCRITOS PÓSTUMOS SOBRE LÓGICA Y
FILOSOFÍA DE LENGUAJE

TRADUCCIÓN PRECEDIDA DE UN ESTUDIO CRÍTICO
CON RÉPLICA ORAL
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN FILOSOFÍA

PRESENTA:
KURT KONRAD HEINZ WISCHIN KUTSCHERER

DR. ALEJANDRO TOMASINI BASSOLS
INSTITUTO DE INVESTIGACIONES FILOSÓFICAS

MÉXICO, D. F. MAYO DE 2015



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Para mi esposa Celia,
para mis hijos Gunther y Sabina.
Sin su amor solidario, nada.
Para mi incansable amigo Jorge Roaro.

Agradecimientos

La investigación que culminó en la elaboración de esta traducción precedida de un comentario crítico no hubiera sido posible sin el apoyo económico del Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología durante los períodos 2011-1 y 2011-2, y doy las gracias por el estipendio recibido.

Fue mi tutor y director de tesis, el Dr. Alejandro Tomasini Bassols quien sugirió originalmente que sería una contribución valiosa el hacer accesible el legado de Gottlob Frege sobre lógica y filosofía de lenguaje al lector en español, y fue él quien dirigió mi trabajo incansablemente durante todo el largo camino con valiosos consejos e innumerables sugerencias. Sin la revisión minuciosa de todos los detalles tanto del comentario crítico como de la propia traducción, este trabajo simplemente no hubiera podido llegar a buen término. No hay palabras que podrían pagar mi deuda con el Dr. Tomasini por este enorme esfuerzo suyo que me alentó incansablemente no sólo para seguir adelante con este trabajo, sino que me permitió crecer intelectual y filosóficamente, y profundizar sustancialmente en la comprensión del pensamiento de uno de los más importantes pensadores de los albores de la actualidad filosófica.

A los miembros del jurado, el Dr. Carlos Pereda Failache como revisor y sinodal, el Dr. Alejandro Herrera Ibáñez, el Dr. Guillermo Hurtado Pérez y el Dr. Ricardo Mena Gallardo en función de sinodales, les doy las gracias por la revisión del presente trabajo y sus atinadas sugerencias que me permitieron eliminar errores y omisiones de una versión anterior del trabajo.

Mi agradecimiento a la Universidad Nacional Autónoma de México, a su Facultad de Filosofía y Letras, al Instituto de Investigaciones Filosóficas, la Unidad de Posgrado y a todos sus colaboradores académicos y no académicos, en particular a la Lic. Ivette Sarmiento, a Norma Angélica Pimentel y a Jasmín Casado sin cuyo apoyo y responsable y eficiente labor mis esfuerzos tampoco hubieran dado frutos. Muchas gracias también a los maestros y compañeros de carrera que me enseñaron, me permitieron participar en el intercambio de ideas y me ayudaron a llegar a donde hoy me encuentro intelectualmente.

Ciudad Universitaria, México, D.F. en Mayo de 2015

Comentario Crítico

Kurt Wischin

En retrospectiva, Gottlob Frege podría ser considerado el primer filósofo analítico¹. También se dijo que fue Gottlob Frege quien sonó las campanas que marcan el inicio del giro lingüístico. Y, sin embargo, no fue la doctrina de Gottlob Frege la que se discutió durante los años en que se forjaron las convicciones centrales que hoy en día los filósofos analíticos comparten, ni tampoco fue su visión filosófica la que figura prominentemente en la discusión que se percibe como heredera de tal giro. La muy conocida antología de Richard Rorty², por ejemplo, no contiene ni un solo escrito de Frege y su nombre cae apenas unas cuantas veces en uno que otro comentario digresivo. Al poco tiempo de recibir sus primeros impulsos de él y de sus discusiones con Russell y Wittgenstein, Gottlob Frege no volvió a figurar en la discusión principal entre filósofos analíticos, filósofos de lenguaje y lógicos, sino hasta mucho después de asentadas las bases de esa orientación filosófica.

La explicación de este “olvido” quizá se encuentre precisamente en el legado que Frege dejó a la corriente filosófica que lo tiene quizá como su primer miembro. Y no únicamente su olvido quizá encuentre así su más plausible explicación, según veremos: también se comprenden en buena parte a partir de allí las dificultades que la filosofía analítica llegó a tener o todavía tiene para un manejo coherente del legado de Frege cuando en el último cuarto del siglo XX la discusión de éste se hizo más presente en la literatura anglosajona primero, y en otros idiomas después.

Ante este fondo histórico, el principal objeto de este comentario crítico es hacer comprensibles los múltiples “enigmas” que la doctrina de Frege presenta para el lector contemporáneo, en particular para el lector acostumbrado a pensar la filosofía a partir de lo que aquí vagamente quisiera llamar el ‘paradigma de la filosofía analítica’. La lectura casi natural de la obra de Frege, desde el punto de vista del filósofo analítico, que la mira desde la perspectiva del resultado final (por

¹ Hans Sluga dice esto literalmente en la página 2 de su libro. Luego, a la observación de Paul Natorp -haciendo eco también de otros neo-kantianos- de que la visión filosófica de Frege era notable para un *matemático* pero que su obra carece de alcance filosófico completo, Hans Sluga contesta: “Lo que ellos no vieron (ni pudieron ver) es que Frege se adelantó a la aparición de un nuevo tipo de filósofo - el filósofo como profesional, especialista y lógico. Es precisamente el tipo que llegó a su maduración en la tradición analítica.” (Sluga (1980, p. 61)).

² Rorty (1967)

lo que a los lectores de hoy concierne), se abandona para hacer, en su lugar, el intento de entenderla desde la situación histórica en que tiene su origen.

Nos distanciamos, en este sentido, de la motivación exegética de la obra *Frege: Logical Excavations* de Baker y Hacker que estos autores expresan así:

Tomaremos en serio la obra de Frege, no como una revelación, sino como argumento filosófico. Un matemático que se traslada al terreno de la filosofía seguramente debe ser juzgado con los mismos cánones de rigor que aplicarían a filósofos que surcan campos similares.³

Como expliqué, mi objetivo en el presente comentario es otro. Por este motivo paso por alto también la extensa y muy interesante controversia que la citada obra de Baker y Hacker provocó entre ellos y Michael Dummett⁴, al igual que en general la nutrida discusión de la filosofía de Frege de las últimas décadas que no se relaciona en un sentido más o menos estrecho con el tema que presentemente se discute. Esto además hubiera exigido entrar en detalles que se desvían excesivamente de una discusión motivada por una traducción selectiva del legado póstumo de Frege.

Frege, primer filósofo analítico

Dummett, quien probablemente fue el erudito que más contribuyó a sacar a Gottlob Frege del olvido, describe la visión que une a la filosofía analítica como la idea, “primeramente, de que una explicación filosófica del pensamiento puede obtenerse a través de una explicación filosófica del lenguaje, y, en segundo lugar, de que una explicación comprensiva puede obtenerse únicamente así”⁵. Dummett y probablemente la mayoría de los filósofos analíticos piensan que una explicación filosófica del lenguaje no puede darse sin una teoría de significado. Para ilustrar el punto, la misma obra de Dummett culmina en un ataque dirigido explícitamente a la postura de L. Wittgenstein acerca de la necesidad de prescindir de teorías en filosofía: “En particular para aquellos que aún se adhieren al axioma fundamental de la filosofía analítica es un asunto crucial decidir sobre un modelo

³ Baker/Hacker (1984, p. 18). Este libro tiene el objetivo explícito de desmitificar a Frege como héroe de una filosofía que se comprende a sí misma a manera de (súper)-ciencia, y como iniciador de una teoría semántica entendida como tarea indispensable de la filosofía (analítica). No cabe mucha duda que los autores ven en Michael Dummett el creador principal del mito que tratan de destruir. Como se verá, yo coincido con ellos en la convicción de que es un error suponer que Frege haya tenido la intención de crear una teoría semántica, pero creo al mismo tiempo que la comprensión de la obra de Frege requiere de un punto de vista preocupado menos con las proyecciones filosóficas contemporáneas y más con el ambiente filosófico en que esta obra surgió.

⁴ Cf. Dummett (1984), republicado con revisiones en Dummett (1991), Baker, Hacker (1987), así como Dummett (1988), republicado también en Dummett (1991) en una versión revisada.

⁵ Dummett (1993, p. 4).

correcto de significado y comprensión; y únicamente una investigación explícita de la forma correcta de una teoría de significado para un lenguaje puede decidir esta pregunta.”⁶ Independientemente de si el ataque a Wittgenstein es justificado o no, la pregunta de cuál era la postura de Frege acerca de posibles teorías semánticas nos tendrá que ocupar más adelante. Pero si suponemos que efectivamente hay una teoría del **significado** implícita en la doctrina de Frege, según sostiene al menos Dummett, entonces despierta curiosidad que en la literatura sobre Frege en inglés y en español, siguiendo un hábito cuyo origen parece ser una traducción de una selección de obras de Frege al inglés por Geach y Black⁷, se insista en negar que justamente esta palabra tenga aplicación en las doctrinas fregeanas sobre pensamiento y lenguaje. La palabra ‘significado’ está vetada en este contexto por muchos analistas, a pesar de que el propio Frege asigna a su equivalente en alemán un papel de primera importancia en el sistema de la ciencia cuyo fundamento trata de construir.⁸

Dejando a un lado momentáneamente la discusión sobre la postura de Frege acerca de las teorías semánticas, el mérito de la filosofía analítica es, desde luego, el haber rescatado a Frege del olvido casi completo y llevar su nombre a las aulas de los cursos de licenciatura en filosofía. Por ejemplo, una descripción somera y comprensible de muchos de los elementos que se dan por supuestos en la filosofía analítica de hoy y que son ideas originales de Frege se encuentran en el capítulo dedicado a Frege en Tomasini (2012).

Dejando atrás el interés histórico, algunos de los elementos más importantes de la doctrina de Frege fueron y son objeto de acaloradas discusiones en las filas de la filosofía analítica. La lista de los participantes es demasiado larga para empezar a mencionarlos aquí. Es de particular interés por su radicalidad una lectura de Frege relativamente reciente de Saul Kripke⁹, quien concluye sorprendentemente que se le debe adscribir a Frege una doctrina implícita de conocimiento directo, similar a la que propuso Russell. Revisar brevemente esta propuesta ofrece una oportunidad para arrojar alguna luz sobre el paradigma que gobierna mucha de la discusión de la doctrina de Frege en el marco de la filosofía analítica. Hay un segundo motivo para remitirnos aquí a Kripke: él defiende la traducción tradicional en la literatura de Frege de *Bedeutung* como *reference* (referencia) o

⁶ Dummett (1993, p. 166).

⁷ Frege (1952); lo justo es observar, sin embargo, que el propio Dummett se adhiere a esta tradición sólo intermitentemente y con titubeos. Véase más adelante los comentarios sobre la presente traducción.

⁸ Hay algunos autores que sugieren traducir ‘Sinn’ (‘sentido’) como ‘significado’, muy notablemente Bertrand Russell. También esta sugerencia se discutirá brevemente más adelante.

⁹ Kripke (2008).

mejor, según dice, como *referent* (referente) y se inclina también a traducir *Sinn* como *Meaning* (significado) en lugar de *Sense* (sentido), como es usual. Lo que motiva en gran medida este comentario es la convicción de que la traducción sugerida por Kripke fluye de una lectura de la lógica y filosofía de lenguaje de Frege que no permite apreciar los motivos filosóficos de Frege; trataré de señalar más adelante algunos de sus inconvenientes¹⁰.

Probablemente la obra más citada de Frege en la literatura crítica y exegética es la publicada en 1892 bajo el título “*Über Sinn und Bedeutung*”¹¹, en el cual el profesor de lógica originario de Wismar introduce un cambio de punto de vista importante respecto a la doctrina expuesta en sus obras anteriores más importantes, *Conceptografía*¹² y *Fundamentos de la Aritmética*¹³. El cambio consiste en el abandono del término ‘contenido juzgable’ y la introducción en su lugar de dos nuevos términos: el de *Sinn* o sentido, y el de *Bedeutung*, en español hasta hoy usualmente traducido como ‘referencia’¹⁴.

No hay todavía hoy en día acuerdo entre los filósofos analíticos sobre el papel exacto de la distinción entre ‘sentido’ y ‘referencia’ para el desarrollo de las doctrinas de Frege y su influencia en las teorías semánticas en general, como atestiguan las reflexiones exegéticas de Kripke que toman su punto de partida en las observaciones que Frege hace al respecto en “*Über Sinn und Bedeutung*”.¹⁵ La reacción entre filósofos de extracción analítica varía entre tomar la introducción de esta distinción como un error filosófico¹⁶ hasta verla como una corrección indispensable de confusiones incurridas en la *Conceptografía* de 1878 y que todavía viciaban las reflexiones de *Fundamentos de la Aritmética* de 1884¹⁷.

¹⁰ Kripke usa ‘referente’ y ‘referencia’ prácticamente como sinónimos, y también deja a veces ‘*Bedeutung*’ sin traducir cuando cita a Beany (1997), pero también en otras ocasiones; a veces usa ‘*meaning*’ cuando cita de la traducción al inglés de la obra póstuma de Frege de Long and White (Frege 1979).

¹¹ Frege (2008a).

¹² Frege (1998) Frege, Gottlob; *Begriffsschrift und andere Aufsätze*. Angelli I. (Ed.), 2a ed., Hildesheim, Zürich, New York. Georg Olms Verlag. En el presente comentario, ‘conceptografía’ en minúscula se refiere al lenguaje formal inventado por Frege y presentado en una primera versión en esta obra, y en una versión modificada en Frege (2009). A la obra se refiere como *Conceptografía* o por su título en alemán, *Begriffsschrift*. Traducción al español: Frege (1972a)

¹³ Frege (1988). Esta obra se menciona en el presente texto como *Fundamentos de la aritmética* o simplemente como *Fundamentos*.

¹⁴ Pero véase Angelelli (1988).

¹⁵ Frege (2000).

¹⁶ Grossmann (1995).

¹⁷ Por ejemplo Dummett, en (1995, p. 6): “Haber arribado a la distinción entre *Sinn* y *Bedeutung* era su primer reconocimiento de la diferencia entre el significado y la cosa significada: su reconocimiento de distinción *alguna* entre ellos.” Una defensa de la introducción de la noción

La exégesis de Kripke coincide en puntos importantes con la lectura de Dummett, en el sentido de que según ellos la distinción era necesaria para subsanar una falla importante de la doctrina de Frege, y en más cosas todavía, pero Kripke va más lejos que Dummett. Su propuesta de interpretación podría quizá resumirse así: Frege introduce la diferencia entre sentido y referencia para explicar cómo es posible que haya enunciados de identidad que no son triviales. La solución de Frege es que en el esquema 'A=B' (enunciado no trivial), los signos 'A' y 'B' expresan en cada caso sentidos diferentes, pero tienen la misma referencia. Del hecho de que, según Frege, se especifica la misma referencia por diferentes sentidos, Russell concluye que en la doctrina de éste "no hay camino de regreso de la referencia al sentido"¹⁸; La respuesta de Dummett y Kripke a esta objeción russelliana es que, puesto que para Frege no hay referencia a menos que sea dada a través de un sentido, "sí hay un camino de regreso", *i.e.* justamente a este sentido que nos dio la referencia en cuestión.¹⁹ La mayor parte del trabajo de Kripke en términos de extensión es una presentación de un aspecto particular de la distinción entre sentido y referencia al que también Frege dedica una buena parte de su artículo original: el aspecto del discurso directo e indirecto, donde de acuerdo con Frege las oraciones no tienen ni su referencia ni su sentido habituales (directos), sino referencias y sentidos indirectos²⁰. En todo caso, Kripke emerge de esta discusión explicitando lo que en su exégesis son las reglas de composición de Frege, a las que a veces se les llama vagamente los "principios de Frege": 1. el referente del todo es una función de los referentes de las partes; 2. al reemplazar un signo que tiene el mismo referente y respectivamente el mismo sentido, referente y sentido del todo permanecen sin cambio. Y finalmente, 3. el sentido del complejo está compuesto por los sentidos de sus componentes.²¹ Por consiguiente,

"semántica de sentido" contra objeciones de Russell y comentaristas más recientes se encuentra e.g. en Ezcurdia (2003).

¹⁸ Russell usa términos diferentes. La fuente de Kripke aquí es Russell (1905). Yo respeto en el presente párrafo la usanza terminológica de Kripke.

¹⁹ Dummett no contradice explícitamente a Russell, como lo hace Kripke. Que él crea en la posibilidad de un "camino de regreso" de la referencia al sentido es una lectura que Dejnožka (2010) hace de Dummett (1995). Este punto se verá más adelante en la discusión del "principio de contexto", que es el tema principal de este trabajo de Dummett.

²⁰ Kripke cita e.g. a Davidson (1984, e.g. p. 214) y deriva de esta situación un problema de jerarquías de sentidos indirectos que tendría por consecuencia la imposibilidad de aprender cualquier idioma, empezando por el nuestro propio. Dummett, en cambio, niega la existencia de tal problema de una jerarquía de sentidos indirectos.

²¹ La última observación no es extraída de "Sobre sentido y referencia", sino tomada de una explicación especulativa que Dummett propone para estos aspectos. (Dummett, 1973, p. 152). El propio Dummett pronto abandonó la idea de que el así llamado "principio de Frege" era determinante para una teoría de significado (hipotética) de Frege (Cf. e.g. Dummett (1995)). Una

dice Kripke, captar el sentido de una oración es captar los sentidos de sus partes. A diferencia de la Teoría de las Descripciones de Russell, como se ha observado, para Frege la referencia de un nombre particular nos es dada a través del sentido que este nombre tiene. Pero entonces, dice Kripke, tenemos que estar familiarizados con los sentidos de las partes, por “conocimiento introspectivo”²²: “... en un caso particular de escritura o habla vemos o escuchamos la oración entera, y *a fortiori* escuchamos o vemos cualquier parte... Lo que aquí escuchamos o vemos son casos particulares y gracias a ellos estamos conscientes de los tipos que a ellos corresponden. ... Es similar al conocimiento [directo] russelliano”.²³ Es esta la conclusión principal del trabajo exegético de Kripke: con un injerto de doctrina russelliana, la doctrina de Frege podría ser discutible con provecho en el marco de la filosofía analítica.

No es un objetivo del presente comentario disputar los méritos de la discusión sobre nociones de la filosofía analítica que toman su impulso en aspectos enigmáticos de la doctrina de Frege y en el deseo de hacer compatibles dichos aspectos con puntos de vistas contemporáneos. No obstante, discutir la doctrina de Frege únicamente en esos términos tiene límites severos para comprender el desarrollo de esta doctrina y el papel que el propio autor asignó a muchos de sus elementos para superar los problemas filosóficos con que él estaba luchando, no con los que aquí y ahora nosotros luchamos. Mientras que desde luego tiene sus méritos el intento de reconstruir la doctrina de Frege en términos del movimiento filosófico a cuyo nacimiento sus esfuerzos contribuyeron no poco, es claro que tal esfuerzo puede ser coronado con éxito sólo en un sentido limitado. El problema ineludible es que muchos elementos explícitos de la doctrina de Frege corresponden a supuestos que son completamente ajenos a una gran parte del paradigma a partir del cual un filósofo analítico empezaría su reconstrucción. Un erudito como Dummett, por ejemplo, generalmente da por supuesto que cuando

cita directa de Frege en este sentido se da en la presente colección de trabajos, en “Introducción a la lógica” y “Lógica en las matemáticas”. De la objeción de Tomasini (2012, p. 67 n.9) contra Kripke, de que Frege no explica cómo dos signos pueden *posiblemente* tener el mismo sentido, podría surgir la impresión de que Frege no distingue entre el signo y su sentido. Pero él claramente hace esta distinción: por ejemplo, una oración en voz activa y otra en voz pasiva son definitivamente diferentes signos, pero expresan el mismo pensamiento, es decir, el mismo sentido. En general, el sentido, a diferencia del signo, no es una entidad espacio-temporal, lo que obliga a distinguirlos aún en un lenguaje lógicamente ideal. Acerca de la tesis de “composicionalidad” que Kripke adscribe a Frege, véase también Baker/Hacker (1984, p. 19); estos autores mantienen que no hay ningún indicio de que Frege efectivamente mantiene semejante tesis hasta enero de 1914 en una carta a Jordain.

²² Cf. Yourgrau (2012, p. 1 s.) quien discute el artículo de Kripke favorablemente.

²³ Kripke (2008, p. 199).

Frege habla de *Sinn* a lo que realmente se refiere es a algo muy similar a lo que un filósofo analítico se refiere cuando habla de *meaning*, aunque a diferencia de Kripke rechaza identificar estos términos.²⁴ Si para entender a Frege es indispensable reconstruir su doctrina como referencial, se rompe la cadena explicativa que el propio Frege estaba construyendo: todo significado (*Bedeutung*), que no sea el de una oración, tiene que justificarse a partir de los significados (*Bedeutungen*) de las oraciones enteras, que son simples, primitivos y –como se verá en un momento– incapaces de definición; este significado (*Bedeutung*) de la oración entera es un valor de verdad: lo verdadero o lo falso –incapaz de definición por ser primitivo– y nos es dado en cada caso por el sentido del signo en cuestión, el pensamiento que el signo oracional expresa. Kripke, empero, rechaza esta noción fregeana.²⁵ Tal como Kripke presenta su exégesis sobre sentido y referencia en Frege podría suponerse que se trata de una presentación de esta doctrina en lenguaje contemporáneo que meramente la hace inteligible para nosotros. Es posible que

²⁴ En su traducción de ‘Sinn’ como ‘meaning’ (‘significado’) Kripke sigue la usanza de Russell en el apéndice A de *Principles of Mathematics*. Russell en este apéndice estaba interesado en una comparación de la doctrina de Frege con la suya, por lo que buscaba asimilar los términos al máximo. Además desconocía, desde luego, escritos como “Comentarios sobre sentido y significado” incluida en la presente traducción, que deja poca duda del uso notoriamente diferente que Frege hace de la palabra *Sinn*; no hay manera de explicar por qué Frege insiste en que nombres particulares siempre tienen un sentido (aunque pueden estar sin significado –en el uso fregeano de la palabra), si la expresión sentido tuviera que jugar el papel que Russell le asigna – lo que es, precisamente, la conclusión de Russell en el Apéndice (i.e. él rechaza la noción de Frege). Los motivos de Kripke y Tomasini, quien también le sigue en la traducción de ‘Sinn’ como ‘significado’, son menos evidentes. Kripke objeta contra la contención de Tyler Burge, de que “sentido” para Frege no es “significado” (meaning) en el sentido tradicional de la filosofía analítica: “Burge no se percató de la omisión extraña de Frege, si *Sinn* no es significado, de todo término técnico para la noción ordinaria de significado.” (Kripke 2008, p. 201). Kripke aquí parece dar por asentado que la doctrina de Frege es referencial, o debería leerse como una doctrina referencial.

²⁵ Kripke (2008, p. 189). Kripke arguye que sólo Dios “podría conocer el referente fregeano de cada oración” y parece insinuar que la doctrina de Frege, por consiguiente, “oblitara esta importante distinción entre Dios y sus criaturas”. No está claro si esta observación está pensada como refutación de lo que realmente es la doctrina central de Frege; si fuera ésta la intención, claramente no sirve. Para que una oración tenga significado basta con que tenga un valor de verdad; no es necesario que lo conozcamos. De lo contrario, no necesitaríamos el lenguaje de la ciencia, la conceptografía, la que Frege tan laboriosamente había elaborado, porque ya sabríamos todo lo que hay que saber. Por otra parte, en este lenguaje, todos los nombres propios de objetos no definibles son estipulados; por lo que no hay duda acerca de que tengan significado, si el proyecto de Frege tiene éxito. Kripke observa, ciertamente, que el intento de Frege no logra garantizar este significado a todos los nombres propios usados en *Leyes fundamentales de la aritmética*, ya que su argumento es circular (Cf. también Dummett, 1995, p. 18). Pero Frege claramente pensó, al menos hasta 1902, que su argumento sí funcionaba – y esta creencia era realmente una de las piedras angulares de su sistema. Construir el sistema de Frege sin estas piedras angulares es como querer jugar ajedrez sin tener rey ni reina.

Kripke así lo vea. Pero esta explicación de la doctrina se desvía de supuestos fundamentales de Frege en muchos aspectos importantes que Kripke no trata explícitamente en su trabajo.²⁶

Para visualizar mejor algunos de los supuestos tácitos que se echan por la borda en una exégesis con objetivos diferentes pero en este aspecto análogos a los de Kripke, la cual se propone presentar la doctrina en cuestión “en forma pura”, veremos a continuación algunos aspectos de la entrada sobre Frege y “su teorema” de la enciclopedia de Stanford, elaborada por Edward Zalta. En esta entrada, el autor prescinde *explícitamente* de muchos importantes aspectos de la lógica y filosofía de lenguaje de Frege para presentar en forma pura la esencia del “teorema de Frege”, el cual consiste en principio, de acuerdo al autor, en “derivar las proposiciones fundamentales de la aritmética de un único principio consistente”, el cual se conoce en la literatura como el *Principio de Hume* y que afirma que

Para cualesquiera conceptos F y G , el número de cosas F es igual al número de cosas G si y sólo si existe una correspondencia uno a uno entre cosas F y cosas G . [...] La obra [de Frege] nos enseña cómo probar, como teoremas, los axiomas de Dedekind/Peano para la teoría de los números a partir del principio de Hume en la lógica de segundo orden.²⁷

Frege, continúa Zalta, se basa para esta derivación, entre otros principios, en la ley básica V expuesta en *Grundgesetze*, que nos ocupará un poco más adelante. El propio Frege dudó de esta ley básica ya desde el momento de su redacción²⁸ y trató de modificarla en el Apéndice del tomo II de los *Grundgesetze*, después de que Russell le señalara que se podían deducir contradicciones en su sistema; es decir, él trató de conservar esta ley básica, aunque en forma modificada, en lugar de simplemente eliminarla, puesto que consideró que ésta o a una ley similar eran indispensables para la construcción del sistema. Pero, dice el artículo de Zalta, “las deducciones de proposiciones de la aritmética del principio de Hume no requieren la ley básica V de manera esencial”. De ahí que Zalta prescindiera de ella en su extracción del “teorema puro”. La lista de principios prescindibles, según Zalta, podría entonces resumirse así:

1. El *teorema puro* que se busca establecer no requiere la Ley Básica V de *Grundgesetze*.
2. No se hace uso de la notación de Frege para fórmulas complejas;

²⁶ Cf. también el punto de vista de Baker/Hacker (1984, p. 18): “Tenemos que intentar de ver al trabajo de Frege con una mirada fresca, de olvidar cómo sus ideas fueron explotadas en el siglo desde la publicación de *Begriffsschrift*. En particular tenemos que tener cuidado de proyectar a su obra nociones posteriores que, no obstante de quizá haber sido estimuladas por su comprensión de las cosas, aun así son inconsistentes con su pensamiento.”

²⁷ Cf. Frege (1988, § 63).

²⁸ Cf. Frege (2009, tomo I, p. VII y tomo II, p. 253).

3. No se incluyen nombres de funciones, ya que no se necesitan para la derivación del teorema;
4. No es necesario suponer, como lo hace Frege, que los conceptos son “funciones de objetos a valores de verdad”²⁹;
5. No es necesario suponer, como lo hace Frege, que una relación binaria “proyecta un par de objetos x y y (en este orden) a lo verdadero”;³⁰
6. “La afirmación ‘ $f(x) = y$ ’ juega un papel importante en los axiomas y definiciones de Frege, pero no necesitaremos afirmar aseveraciones de este tipo para la derivación del teorema de Frege.”³¹

En esta entrada a la *Enciclopedia* de Stanford se insiste una y otra vez que todos estos puntos aquí mencionados únicamente de manera enunciativa deben ser estudiados por su interés propio, pero que se puede llegar a comprender la importancia de la contribución de Frege para probar los axiomas de Dedekind y Peano como teoremas, omitiendo todos estos aspectos peculiares de la visión fregeana de la lógica.

Se pueden señalar adicionalmente dos aspectos que este artículo asume para la pretendida explicación en términos de lógica contemporánea del “teorema de Frege” y que el propio Frege con toda seguridad hubiera rechazado. En primer lugar se afirma que Frege “formula dos sistemas lógicos al intentar definir algunos conceptos básicos de las matemáticas y derivar determinadas leyes matemáticas de las leyes de la lógica”³². El autor del artículo ciertamente tiene el derecho de ver esto así, pero Frege jamás hubiera hablado de su conceptografía de 1878 y de la versión modificada de ella de 1889 como de **diferentes** sistemas lógicos; como se

²⁹ Una función cualquiera es, en este sentido, “una función de un valor a otro”, e.g. “ $2+x$ ” es la función de 1 a 3 para el argumento 1, suponiendo que los números cardinales y el operador ‘+’ ya estén apropiadamente definidos. En conceptos, la función es de cualquier objeto a uno de los dos valores de verdad. Por esto, como quedará claro más adelante, las extensiones de los conceptos en Frege no “cambian de volumen”; siempre abarcan cualquiera de todos los objetos, sólo que algunos, los que “caen bajo el concepto”, le dan el valor “lo verdadero” al pensamiento, es decir, al concepto complementado con un objeto como argumento, y los otros “lo falso”.

³⁰ Es decir, relaciones como ‘ $x = y$ ’, ‘ $x > y$ ’, etc., que también asignan un valor de verdad a la relación para objetos como argumentos.

³¹ Varios de estos aspectos se discuten en el artículo de Zalta después de presentar la doctrina de Frege “en puro”. Esta discusión se hace, sin embargo, siempre bajo el paradigma de la lógica contemporánea, plenamente desarrollada. Algunos de estos pasajes ilustran de manera impresionante que varios motivos de Frege quedan inexplicables bajo semejantes supuestos. El propio Frege, este resultado desfavorable no obstante, probablemente hubiera estado de acuerdo con el método de análisis empleado por Zalta que en este sentido es fiel a un paradigma filosófico que le tiene a Frege como su primer miembro, según señalamos al principio. Pero para nosotros se trata de hacer comprensible el sistema de Frege en **su** contexto histórico, no en el nuestro.

³² Zalta (2013, primer párrafo).

verá más adelante, la noción de “sistemas lógicos” le era ajena; lógica hay sólo una y lo más que se puede hacer es tratar de encontrar un lenguaje lógicamente ideal³³. Por otra parte, el artículo habla de dominios de objetos; los nombres propios y las variables denotan o adquieren un valor por los objetos de tales dominios; pero mientras hoy en día se habla con toda naturalidad, siguiendo la visión de Tarski, de dominios de objetos, Frege rechazó esta idea como supuesto para fundamentar las matemáticas y como principio lógico³⁴.

El objetivo aparente del ejercicio intelectual sugerido por Zalta que acabamos de esbozar es visualizar cómo Frege anticipó en los años de transición del siglo XIX al XX aspectos de la lógica contemporánea que posteriormente fueron propuestos en forma de lógica de modelos vigente en la actualidad con métodos muy diferentes. Nadie, seguramente no Zalta, pretende que este ejercicio podría permitir lograr una apreciación de la lógica ni de la filosofía de lenguaje de Frege³⁵, pero la enumeración de algunos de los aspectos explícitamente omitidos permite vislumbrar algunas diferencias importantes entre la visión de la lógica que dio origen a la doctrina de Frege y del marco explicativo que muy pronto se impuso históricamente como el credo de la filosofía analítica algo borroso pero que está implícito en la lectura de Frege que históricamente se impuso. Un objetivo del presente comentario es señalar algunos de los desequilibrios que esta lectura causa en la imagen que tenemos de la doctrina de Frege.

Según se verá con más claridad en la siguiente sección, las desviaciones que probablemente más dificultan una visión empática de la doctrina de Frege son en esta presentación pura del “teorema de Frege”, primero, prescindir de $f(x) = y'$, segundo, asumir la posibilidad de varios sistemas de lógica y, tercero, la suposición despreocupada de una pluralidad de dominios de objetos. Lo que $f(x) = y'$ señala es que un nombre de función complementado con un nombre propio, *i.e.*,

³³ En este aspecto hay plena coincidencia entre Frege y el joven Wittgenstein. Los signos de tal lenguaje, desde luego, son arbitrarios, pero no su uso en el sistema.

³⁴ Véase también la observación en una nota de pie anterior sobre extensiones de conceptos. Pero de manera más general, siguiendo a Kant, uno de los principios más fundamentales de la doctrina de Frege es la prioridad de juicios sobre conceptos. Tarski rechaza este principio. Véase la discusión más adelante. El menosprecio de esta diferencia quizá sea lo que más haya contribuido a la opinión de que Frege propone una teoría referencial y a la tentación de traducir ‘Bedeutung’ como ‘referencia’. Dice Sluga: “La visión filosófica de Tarski está en deuda con el reísmo de Kotarbinski, quien ve el mundo meramente como disposición de objetos. Este punto de vista filosófico, sin embargo, es totalmente ajeno a Frege.” (Sluga 1980, p. 181). Véase también la pieza “Lógica” en esta colección y el breve comentario introductorio.

³⁵ Dejando a un lado la cuestión de si Frege tenía o no una filosofía de lenguaje en el sentido sugerido por Dummett (Cf. Dummett, 1973), o en algún otro sentido.

un signo que denota un objeto, tiene significado³⁶. Esta es la explicación de “significado” (*Bedeutung, meaning*). ‘Objeto’ es un término que tiene que entenderse a la luz de esta idea fundamental de filosofía de lógica. Como se verá más adelante, el sentido de oraciones particulares de la forma ‘ $f(x) = y$ ’ es el que establece, eventualmente por medio de una estipulación, que tal expresión apropiadamente completada habla de exactamente un objeto o no y, por consiguiente, si es una expresión significativa o si sólo habla de cuestiones irrelevantes para la obtención de la verdad. Que sepamos de los objetos de los que hablan las expresiones gracias a una intuición o no, no es un punto decisivo para el sistema de Frege ni para su visión de la lógica en general. Lo que el lenguaje científico tiene que asegurar es que no haya nombres **complejos** sin significado. Más no puede hacer, de acuerdo con Frege.

El propio Frege dejó un concentrado de su doctrina en una pieza corta no publicada en vida que redactó en 1919 y que por motivos que el autor de estas líneas desconoce no fue incluida por Gottfried Gabriel en la presente selección del legado de Frege³⁷. Al final de este comentario se encuentra la traducción de esa pieza y que constituye un complemento a estas líneas que vale la pena tomar en cuenta. Frege también resumió en agosto de 1906 el resultado de su investigación en lógica como preámbulo para la pieza “Introducción a la lógica”, esta última contenida en la antología cuya traducción se comenta presentemente. De acuerdo con Frege, esto es lo que ha de quedar como fruto de sus esfuerzos:

Yo ¿qué podría considerar como el resultado de mi obra?

Está relacionado casi en su totalidad con la conceptografía. El concepto entendido como función; la relación como función de dos argumentos; la extensión de un concepto o la clase no es la cosa principal para mí; la insaturación tanto del concepto como de la función; el reconocimiento de la verdadera naturaleza de concepto y función.

Estrictamente debería haber mencionado primero la barra de juicio, la disociación de la fuerza asertórica del predicado...

El modo hipotético de la composición de oraciones...

La universalidad...

Sentido y significado...³⁸

³⁶ Cf. Frege (2009, § 32) “Todo nombre [formado legalmente de nuestros signos] de un valor de verdad *expresa* un sentido, un *pensamiento*. Ya que a través de nuestras estipulaciones queda determinado en cuales condiciones significa lo verdadero. [...] Ahora bien, los nombres simples o aún los nombres compuestos, de los cuales el nombre de un valor de verdad consiste, contribuyen a expresar el pensamiento, y esta contribución de cada uno es su *sentido*. Si un nombre es parte del nombre de un valor de verdad, entonces el sentido de aquel nombre es parte del pensamiento que éste expresa.”

³⁷ Frege (1979, “Apuntes para Ludwig Darmstaedter”, p. 253 a 257).

³⁸ Frege (1983, p. 200).

En resumen: el objetivo de esta exposición ha sido, hasta aquí, señalar plausiblemente que la filosofía analítica contemporánea, en realidad, acepta muy pocos de los elementos que Frege introduce para fundamentar su cuerpo doctrinal.³⁹ En lo que sigue se trata de presentar, de manera somera, un cuadro más completo de las intenciones filosóficas de Frege. No se puede comprender a Frege sin tomar en serio sus supuestos básicos, aunque sea de manera provisional: entre estos, muy probablemente el más importante es, según se verá, la suposición de que los valores de verdad son objetos lógicos. **Todo** el sistema de Frege está construido sobre esta suposición y se derrumba sin ella. Históricamente, hoy sabemos que tal como él formuló su programa fracasó, y el mismo se distanció de él en sus últimos años de vida. Según observa, *e.g.*, Kevin Klement⁴⁰, hacia el final de su vida Frege trató los objetos aritméticos en una forma similar a los objetos geométricos.

John McDowell sugirió que ‘uno de los beneficios de estudiar un gran filósofo de una edad ajena a la nuestra es que puede ayudarnos a darnos cuenta que no tenemos que nadar con la corriente de nuestro propio tiempo.’”⁴¹. Cora Diamond aplica esta sugerencia al estudio de Frege, y me parece una buena sugerencia para mis fines presentes. No es mi intención aquí someter la doctrina de Frege a una crítica desde puntos de vista extraños a su doctrina. La obra de Frege pertenece a una época lejana de la nuestra; no creo que tenga sentido discutirlo como si fuera un autor contemporáneo. En la medida en que se quiera o tenga que evaluar su doctrina, el lector queda invitado hacerlo bajo sus propios criterios y desde la perspectiva filosófica que él favorezca. Considero que el objetivo del presente comentario se cumple si el lector obtiene un atisbo de qué es lo que en mi opinión pensó Frege y, quizá, qué circunstancias motivaron el desarrollo de su doctrina.

La superación del naturalismo con principios *a priori*

La manera de explicar la gestación de los elementos que componen eso que actualmente se conoce como ‘filosofía analítica’ (hasta donde se puede hablar de tal cosa) tal como fueron ideados o descubiertos históricamente poco o poco por

³⁹ Baker y Hacker (1984, p. 29) observan: “La superestructura del pensamiento neo-fregeano es totalmente diferente de sus supuestas fundaciones fregeanas. ... Correspondientemente, nuestra primera tarea es excavar a través de los depósitos acumulados de un siglo de pensamiento para poner al descubierto la capa fundamental de la filosofía de Frege”; coincido con estos autores en que la lectura de Frege a la luz de las doctrinas actuales no permite apreciar correctamente su pensamiento, pero me parece muy estrecha la interpretación de la motivación filosófica de Frege que parece desprenderse de su libro. En particular no creo que todo ello encuentre su explicación en que Frege era “matemático a medias y filósofo a medias” (ídem, p. 16)

⁴⁰ Klement (2012). El autor argumenta, sin embargo, que este cambio, después del descubrimiento de la “paradoja de Russell”, no era un cambio tan radical para Frege como se supone generalmente.

⁴¹ McDowell (1998, p. 37-38), citado según Diamond (2002, p. 252).

diferentes pensadores, la ejemplifica el trabajo de Tomasini, citado en la sección anterior; o también, con más especialización, la enorme, muy variada y algo fluctuante obra de Dummett⁴² y, de hecho, la de casi todos los filósofos analíticos que han escrito sobre Frege. La lista es demasiado larga para siquiera empezar a mencionarlos con afán informativo. La variedad que estos autores introducen en sus comentarios obedece, las más de las veces, a cuestiones doctrinales de su propia convicción más que a Frege mismo, aproximadamente en el sentido insinuado por Baker & Hacker en el pasaje citado en la sección anterior; o, con algo de suerte, lo hacen como Dummett y demuestran, por ejemplo, que también Husserl, por más improbable que pudiera parecer a primera vista, hizo una contribución inicial a la gestación de la ahora poderosa corriente que es la filosofía analítica⁴³. Sin embargo, estos paseos por aspectos históricos sólo en raras ocasiones modifican el enfoque metodológico fundamental que en realidad inhibe una comprensión de estas doctrinas iniciales en sus propios términos y del contexto histórico cuya comprensión es esencial para un entendimiento más completo.

Si es correcta la impresión que intenté generar en la sección anterior, a saber, que semejante proceder deja grandes lagunas en la comprensión de la doctrina de Frege y lo obliga a uno a enajenar muchos de los términos de Frege de su contexto original, entonces esta situación hace prácticamente imposible el que se descubra y se entiendan las intenciones sistemáticas originales del profesor de Jena. En palabras de Sluga:

Desde sus primeros orígenes la tradición [analítica] estaba orientada hacia una explicación abstracta, formal de lenguaje y significado, y no hacia la comprensión de procesos históricos concretos. Frege mismo pensó que su tarea era el análisis de pensamientos atemporales objetivos. ... Aplicar esta doctrina al análisis de enunciados en textos filosóficos nos invita a la conclusión de que los pensamientos expresados en ellos son objetivos, atemporales e impersonales, sin importar cuán subjetivos, históricos y personales su redacción pueda ser. La tarea del intérprete se ve entonces en liberar el pensamiento de su vestimenta subjetiva e histórica haciéndolo accesible a la evaluación. El método de interpretación será el de la reconstrucción racional.⁴⁴

Muy pocos de los pensadores contemporáneos de Frege se dieron cuenta de la importancia de las innovaciones que éste había introducido para el análisis lógico. Como se verá en un momento más, él reunía puntos de vista de Leibniz y

⁴² Llama la atención que Kripke recurre en 2008 a un trabajo de Dummett de 1973 para encontrar una versión del “principio de Frege” acorde a su lectura, muy al principio de la labor exegética de Dummett. Esta lectura de Dummett sufrió muchas revisiones en años posteriores; un cambio importante para el presente comentario por ejemplo, se encuentra en Dummett (1995); Cf. también la discusión de esta última revisión en Dejnožka (2010).

⁴³ Cf. Dummett (1993).

⁴⁴ Sluga (1980, p. 2 s.).

de Kant para revolucionar y potenciar la lógica de Aristóteles (lo que implica, desde luego, que Frege encontró aspectos merecedores de crítica en la concepción de la lógica de ambos). A Ernst Schröder (1841-1902), por ejemplo, quien había trabajado en la aplicación de un lenguaje booleano en una *Álgebra de la Aritmética* (1890-1905) se le escapó totalmente la fundamental diferencia de enfoque entre el objetivo y alcance de los lenguajes ideados por Boole y de Frege. Husserl, a quien Frege, en opinión de muchos investigadores⁴⁵, había persuadido con su reseña crítica de la *Filosofía de la Aritmética* (1891) a abandonar su original psicologismo naturalista, lo trató de tipo raro y ningún otro de sus correspondientes en el mundo de las matemáticas y de la lógica reconoció la importancia de su labor, con muy pocas excepciones; una de ellas fue Ludwig Wittgenstein, quien tenía gran aprecio por su fuerza intelectual y lo estimó toda la vida, aún después de abandonar muchos de los principios que compartían la doctrina de Frege y algunos puntos de vista desarrollados en su *Tractatus Logico-Philosophicus*.⁴⁶

Otro de los pocos pensadores que claramente apreciaba la importancia de la labor de Frege era B. Russell. En el apéndice A de *Los Principios de las Matemáticas* podemos leer lo siguiente: "En lo que sigue intentaré exponer brevemente las teorías de Frege sobre los puntos más importantes y explicar mis razones para diferir donde difiero. Pero los puntos de desacuerdo son muy pocos y leves en comparación con aquellos de acuerdo."⁴⁷ Parece que al menos en este pasaje le interesaba a Russell describir a Frege como aliado y enfatizar las similitudes, pero no cabe duda de que hay más diferencias importantes entre los sistemas de ambos pensadores de los que Russell aquí señala; que había mayores problemas de comprensión mutua trasciende de la correspondencia entre los dos entre 1902 y 1912⁴⁸, y que hubo diferencias más fundamentales quizá sea posible adivinarlo también por el impacto devastador que para el programa de investigación compartido por Russell y Wittgenstein tuvo la conversación de este último con Frege en diciembre de 1912⁴⁹. Sea esto como sea, Russell quizá haya heredado a sus

⁴⁵ Gottfried Gabriel cita en Frege (1980, p. 31) a H. Pietersma, Lothar Eley, Dagfinn Follesdal, Günter Mortan, Andrew D. Osborn y Robert C. Solomon; también Dummett, Sluga, Baker & Hacker mencionan una relación entre Frege y Husserl en este sentido.

⁴⁶ Una donación del joven Wittgenstein le ayudó a Frege adquirir un inmueble en Bad Kleinen, Alemania, donde vivió hasta el fin de sus días.

⁴⁷ Russell (1937, p. 501).

⁴⁸ Cf.: Frege (1980, p. 59 - 100).

⁴⁹ Cf.: Milkov (2013). El autor del trabajo citado sugiere que Wittgenstein abandonó la colaboración con Russell, la cual estaba materializándose en la obra en progreso *Teoría de conocimiento* de éste, después de una entrevista con Frege, en la cual discutían este proyecto. Russell abandonó el proyecto a causa del criticismo expresado después por Wittgenstein; Milkov mantiene que también

seguidores una tendencia natural a suponer que el punto de vista de Frege era más cercano al de Russell, de lo que en realidad era.

Contrariamente a lo que a veces se supone más o menos tácitamente entre algunos filósofos analíticos y siguiendo las afirmaciones explícitas de Dummett respecto a que el realismo de Frege surgió como una respuesta al idealismo hegeliano⁵⁰, hay que buscar otro origen de la motivación filosófica de Frege. El hegelianismo perdió influencia en Alemania casi inmediatamente después de la muerte en 1831 de quien le dio vida y nombre y la reacción fue el surgimiento de un poderoso naturalismo que respondía a los impresionantes avances de las ciencias empíricas y que estaban en contradicción evidente con muchos de los principios defendidos por Schelling y Hegel.

Hans Sluga describe la transición del idealismo al naturalismo así:

El resultado era triple: primero el abandono de la filosofía idealista y del hegelianismo en particular; segundo, el rechazo del método especulativo, deductivo, *a priori* que los idealistas habían usado; y, tercero, en la medida en que la filosofía en general se identificaba con el idealismo y con el razonamiento deductivo *a priori*, un abandono de la filosofía en general. En el pensamiento de aquellos tiempos, el idealismo fue reemplazado por el materialismo, el razonamiento *a priori* por el empirismo, y la filosofía como actividad intelectual apartada por una ideología en la cual la filosofía se había fusionado con y desaparecido en las ciencias empíricas. La ideología que reemplazó al idealismo podría llamarse *naturalismo científico*.⁵¹

Pero si las contradicciones entre los reclamos idealistas y la evidencia empírica produjo un fin más bien abrupto de la popularidad del idealismo alemán, el movimiento naturalista, que en su propia percepción era la visión científica que trascendía todo tipo de filosofía, muy pronto también llegaría a los límites de su credibilidad. La respuesta a los problemas percibidos en la visión ingenuamente

la perspectiva de la investigación en lógica del propio Wittgenstein cambió dramáticamente a partir de la conversación con Frege.

⁵⁰ Hans Sluga cita la entrada bajo "Frege, Gottlob" en la *Encyclopedia of Philosophy* de P. Edwards, New York/London, 1967, Vol 4, p. 225, redactada por M. Dummett: "En una historia de filosofía Frege tendría que ser clasificado como miembro de la rebelión realista contra el idealismo hegeliano, una rebelión que ocurrió unas tres décadas antes en Alemania que en Bretaña." (Sluga, 1980, p. 8) Dummett insiste también en Dummett (1973, p. 684) en interpretar el anti-psicologismo de Frege como reacción al idealismo hegeliano: "...en todo caso, en los tiempos de Frege el tipo de idealismo que estaba prevalente en las escuelas filosóficas estaba infectado completamente por el psicologismo". Dummett sostiene en 1991a, p. 80 que él no atribuye realmente importancia al aspecto anti-hegeliano de Frege, (inexistente, según Sluga), sino mantiene como punto de vista principal que Frege sea realista. Es importante también la discusión en qué sentido Frege era un realista, y hay poca concordancia en este punto entre los comentaristas de Frege. El tema se toca con un poco más de detalle en lo que sigue.

⁵¹ Sluga (1980, p. 14).

empírica de la generación anterior se dio principalmente en forma de un “regreso a Kant” (Otto Liebmann), con el movimiento neo-kantiano. Una de las figuras centrales de este movimiento fue Hermann Lotze, maestro de Frege en Göttingen. La influencia de Lotze se encuentra no sólo en Frege, como se ejemplifica a continuación con la ayuda de algunas muestras, sino en todas las figuras importantes del neo-kantianismo. Estudiosos de Frege como Hans Sluga y Gottfried Gabriel mantienen que es imposible comprender al sistema de la ciencia a cuya construcción Frege invitaba sin tomar en cuenta esta influencia de Lotze⁵².

De manera muy general, mientras que su lucha contra el hegelianismo dominante en Cambridge y Oxford impulsó a Russell a desarrollar y proponer últimamente su filosofía del atomismo lógico, los filósofos que le enseñaban filosofía a Frege volvieron a abrazar no sólo un *a priorismo* “anti-empirista” neo-kantiano, sino que también aceptaron una forma de holismo explícitamente rechazado por Russell, como documenta el siguiente pasaje:

La familiaridad con lo más simple es presupuesto en la comprensión de lo más complejo, mientras que la lógica que yo quisiera combatir mantiene que, para conocer cualquier cosa a fondo se tienen que conocer todas sus relaciones y sus cualidades, de hecho, todas las proposiciones en las cuales esta cosa se menciona; y de esto se deduce, desde luego, que el mundo es una totalidad interdependiente. Es con base en este tipo de lógica que el monismo toma su desarrollo.⁵³

La fuerte identificación que Russell hace con los objetivos en la investigación lógica de Frege en el apéndice A de *Principles of Mathematics* al menos pasa por alto una motivación filosófica fundamental mucho más divergente de lo que a Russell le importaba mencionar en este pasaje. Irónicamente, si es correcta la observación de Gottfried Gabriel al respecto, se introdujo posteriormente un principio holista

⁵² Lotze es importante no sólo para entender la fuente de donde brotó la filosofía analítica, sino también para entender movimientos que le son radicalmente opuestos. Mientras Dummett reconoció en Husserl uno de los orígenes sorprendentes de la filosofía analítica (Dummett, 1993a), el alumno de éste, Martin Heidegger, recomendó la lectura de Lotze previo al estudio de su propia obra para apreciar a ésta propiamente. Complementa Gabriel: “...para una mejor comprensión de Frege deberíamos leer a Lotze al menos *después* de estudiar a Frege.” (Gabriel, 2002, p. 44). El propio Dummett en cambio, en el marco de una crítica bastante detallada de Lotze en Dummett (1991, p. 65ss, y p. 97ss.), cuestiona la importancia de Lotze para el desarrollo del pensamiento fregeano y considera que el filósofo anterior es “un productor de torrentes de palabras de escritura filosófica más bien imprecisa que contiene frecuentemente una buena idea que rara vez es expresada nítidamente o dando en el blanco.” (ibíd., p. 78).

⁵³ Russel (1972, p.59) citado según Gabriel (2002, p. 48 s.). De ahí podría haberse inspirado también Kripke en su exégesis. La filosofía de lógica de Frege, sin embargo, no es afín al atomismo lógico, como se verá en la siguiente sección. Cf. Sluga (1980, p. 137): “Frege rechaza totalmente la visión atomista del pensamiento”.

en la filosofía de atomismo lógico a través del principio contextual, un tema que nos tendrá que ocupar todavía más adelante.⁵⁴

Frege, en cambio, no tenía problemas con el holismo, una actitud que él había heredado principalmente de Lotze. Como se verá en la siguiente sección, él reunía en su propuesta elementos del pensamiento de Leibniz - la idea de un lenguaje perfecto y la reducción de las matemáticas a la lógica - elementos del pensamiento de Kant - la prioridad de juicios sobre conceptos- y de Lotze -el apriorismo neo-kantiano contra las tendencias naturalistas-psicologistas- que creía apropiados para empezar a remediar los problemas más urgentes en los que la vuelta ingenua al empirismo había dejado a la ciencia, sobre toda a las matemáticas. En palabras de Sluga:

El pensamiento de Frege fue concebido en oposición a esta forma de naturalismo científico y no a un hegelianismo o idealismo dominante como aseveró Dummett. [...] es por esto que elementos idealistas y racionalistas pueden encontrarse en los escritos de Frege.⁵⁵

Al principio, las matemáticas

Independientemente de estas observaciones sobre el ambiente filosófico general en que se encuentran las raíces intelectuales divergentes de Russell y Frege, este último dejó bastantes pistas acerca de sus objetivos científicos y cuáles eran los problemas filosóficos que, según él, necesitaban atención con más urgencia en el último cuarto del siglo XIX. Muchos de los misterios y aparentes incongruencias de su sistema desaparecen si uno atiende a lo que él dice, en lugar de limitarse a construir edificios hipotéticos de las teorías implícitas en su obra que él nunca menciona.

La explicación de su motivación inicial en sus apuntes para Ludwig Darmstaedter empieza así:

Yo partí de las matemáticas. En esta ciencia, la tarea más urgente me parecía consistir en una mejor fundamentación. Pronto me di cuenta que el número no es un montón, ni una serie de cosas, ni tampoco una propiedad de un montón, sino que la indicación numérica que se hace con base en un conteo contiene un enunciado de un concepto. (Platón, Hippias mayor)

En investigaciones de esta naturaleza la imperfección lógica del lenguaje estorbaba. Buscaba el remedio en mi *Conceptografía*. Así llegué de las matemáticas a la lógica.⁵⁶

¿Cuál era la situación en las matemáticas que parecía hacer tan urgente esta tarea? La pugna entre “naturalistas científicos”, neo-kantianos y pensadores que ventilaban todo tipo de posturas intermedias da un tono muy particular a lo que

⁵⁴ Cf. Gabriel ídem, p. 49).

⁵⁵ Sluga (1980, p. 14 s). Dummett concede que Sluga tiene aquí un punto en Dummett (1991, p. viii).

⁵⁶Frege (1979, p. 253; 1983, p. 273)

Frege casi medio siglo después llamó la búsqueda de “una mejor fundamentación” de las matemáticas. Sluga señala que las matemáticas tenían un papel doble en el pensamiento “pos-naturalista”. Por una parte, las matemáticas se emplearon en la solución de cada vez más problemas en las ciencias y tecnologías y así se fue diluyendo la convicción de que “las ciencias estaban basadas directamente en la experiencia y derivadas de ésta por simple inducción, i.e. abstracción y generalización”⁵⁷ como habían estado convencidos los naturalistas post-hegelianos. Pero también las propias matemáticas como ciencia tomaron un desarrollo vigoroso que generó un gran número de problemas que invitaba a la reflexión filosófica, como muestra el testimonio de grandes nombres que revolucionaron las matemáticas después de Gauss: Riemann, Bolyai, Lobachewski, Pasch e Hilbert en geometría; Dedekind y Cantor con reflexiones sobre números irracionales y el concepto de las funciones.

Estos desarrollos produjeron toda una generación de matemáticos-filósofos. Algunos de ellos trataron de conservar una interpretación estrictamente naturalista de la ciencia (entre ellos Helmholtz, Kronecker y el joven Husserl), mientras que otros (el propio Frege, Dedekind y Cantor) pensaron que los nuevos desarrollos en las matemáticas eran compatibles sólo con una filosofía anti-naturalista.⁵⁸

Antes de que Frege mostrara interés en cuestiones de aritmética y lógica, el tema de su tesis doctoral estaba relacionado con la fundamentación de la geometría y él argumentó que ésta se basa en la intuición, entendiendo esta expresión en un sentido kantiano o neo-kantiano⁵⁹. Sluga (y desde luego prácticamente todos los estudiosos de Frege están de acuerdo en esto, en particular Dummett⁶⁰) cita pasajes de textos publicados en vida de Frege y de su obra póstuma que dan testimonio de que Frege toda su vida mantuvo “un punto de vista kantiano del espacio y, por consiguiente una visión subjetiva de los objetos que lo ocupan. Frege jamás abandonó la concepción de geometría como *a priori* sintética.”⁶¹ Pero mientras que para Kant tanto la geometría como la aritmética se componen de juicios sintéticos *a priori* basados en intuiciones puras, Frege abandona en su trabajo de habilitación⁶² el punto de vista kantiano para mantener que “Las leyes de la aritmética son derivadas de un concepto, no de la intuición.

⁵⁷ Sluga (1980, p. 42).

⁵⁸ Sluga (1980, p. 43).

⁵⁹ *Über eine geometrische Darstellung der imaginären Gebilde in der Ebene*, Jena, 1873.

⁶⁰ Cf., e.g. Dummett (1991, p. X).

⁶¹ Sluga (1980, p. 45); es interesante, sin embargo, en este contexto el primero de los textos que iniciaron una nueva etapa en el desarrollo intelectual de Frege, 1891-1892 “El principio de la inercia” relativamente poco conocido, pero muy importante para entender la motivación de los otros tres textos más famosos de esta época. Se ampliará este comentario un poco más adelante.

⁶² *Rechnungsmethoden, die sich auf eine Erweiterung des Grössenbegriffes gründen*, Jena 1874.

‘No encontramos el concepto de magnitud en la intuición, sino que nosotros mismos lo creamos’⁶³, punto de vista que, como veremos, se convierte posteriormente en el resorte principal que impulsa el programa logicista de Frege durante una gran parte de su vida.

Frege entendía esta desviación, sin embargo, no tanto como un intento por refutar a Kant sino por perfeccionar su doctrina. Su objetivo principal era refutar el empirismo de los naturalistas “revelando de una vez por todas toda la verdad del apriorismo kantiano, de demostrar que la concepción de Kant sobre la naturaleza y los límites del entendimiento humano es esencialmente correcta y que la verdad es objetiva, no sólo una ilusión subjetiva psicológica.”⁶⁴ En sus esfuerzos por poner en orden los fundamentos de las matemáticas la inspiración directa para Frege provenía de Gauss, quien seguía a Kant en basar la geometría en intuiciones empíricas, pero quien declaraba que los números son un producto de la mente, de lo cual creía poder concluir que las verdades aritméticas son analíticas. Frege defendía en su trabajo de habilitación, inspirado en esta variación neo-kantiana, que las proposiciones de la aritmética son analíticas (en el sentido que este término tiene en Kant) y, además, que pueden derivarse enteramente de principios lógicos, aunque el propio Kant las había tenido por sintéticas *a priori*. Esta última aseveración se conoce generalmente como la tesis logicista, que proviene entonces de una fuente totalmente kantiana, en parte porque es una defensa de la aprioricidad de la aritmética en contra de las ideas naturalistas predominantes en su época y que Frege combatía en muchos de sus escritos, muy notablemente en la primera parte de *Fundamentos de la aritmética* de 1884. Por otra parte, porque surgió en oposición a un determinado aspecto de la doctrina de Kant, que Frege pensó que requería ser perfeccionado.

Estas ideas llevaron a Frege a estudiar la literatura lógica, entre otros las obras de Boole, Lotze y Trendelenburg. La lectura de este último muy probablemente le persuadió de que dedicara un esfuerzo importante para llevar a la práctica el proyecto olvidado de Leibniz de un “lenguaje ideal” de la lógica que le proporcionaría un instrumento para materializar su programa logicista. Fue Trendelenburg quien llamó a su simbolismo lógico *Begriffsschrift*.⁶⁵ Frege tomó de

⁶³ Sluga (1980, p. 47), cita de la habilitación de Frege de Angelleli (1967, p.51), citado según Sluga.

⁶⁴ Sluga (1980, p. 43 s.).

⁶⁵ Cf. Sluga (1980, p. 49); citando el ensayo de Trendelenburg, Friedrich Adolf; “Ueber Leibnizens Entwurf einer allgemeinen Charakteristik” en *Historische Beiträge zur Philosophie*; Vol. 3; 1867. Si Frege adoptó este nombre de Trendelenburg, en todo caso no estaba enteramente feliz con su elección: el nombre parece sugerir que el nuevo lenguaje simbólico está enfocado en denotar conceptos, cuando la unidad básica son los pensamientos; véase e.g. este pasaje de “Apuntes para Ludwig Darmstaedter”: “... yo no parto de los conceptos y compongo de ellos el pensamiento o el

Trendelenburg no sólo el nombre, sino muy probablemente también la idea de combinar el programa de Leibniz con la distinción kantiana de forma y contenido, superando, sin embargo, la defensa explícita del aristotelismo lógico de este.

Si su primera famosa obra sugiere una influencia de Trendelenburg, para el desarrollo de sus ideas sobre filosofía de la lógica más importante parece haber sido la enseñanza de Hermann Lotze, de quien tomó muy notablemente la importante distinción para la lógica y su programa anti-psicologista entre ideas en tanto que fenómenos psicológicos y sus contenidos, que son objetivos, pero que no pertenecen a la realidad externa por no ser entidades espacio-temporales. Otra noción que también es vital para la comprensión de la doctrina de Frege se encuentra ya en Lotze: lo objetivo o lo válido se aplica sólo a proposiciones enteras y sólo de manera indirecta a conceptos.

Razones para la relación necesaria de dos contenidos siempre tienen que tener la forma lógica de un *juicio*; no pueden pronunciarse en forma de conceptos aislados, puesto que ninguno de ellos contiene para sí una *afirmación*. Las leyes, por lo tanto, i.e. las oraciones que expresan una relación de diferentes elementos, las hemos ya usado anteriormente como ejemplos que permiten distinguir lo que quiere decir *valer* en contraste con *ser*; únicamente con media claridad puede transferirse esta expresión a conceptos individuales; de éstos sólo podría decirse que *significan* algo; pero significan algo gracias a que las oraciones son válidas *de* ellos...⁶⁶

Sluga nota que esta idea a fin de cuentas también tiene sus raíces en el pensamiento de Kant, quien argumentó que “los juicios no se forman a partir de componentes previamente dados, sino que poseen una unidad transcendental inicial a partir de la cual obtenemos los conceptos por medio del análisis.”⁶⁷ En *Fundamentos de la aritmética* esto se leerá: “únicamente en una oración las palabras realmente tienen significado. ... es suficiente si la oración tomada como un todo tiene un sentido; es esto lo que confiere a sus partes su sentido”⁶⁸, palabras que Wittgenstein repetirá después casi *verbatim* en la sección 3.3 del *Tractatus Logico-Philosophicus*.

Un esfuerzo para hacer explícita la interconexión entre las matemáticas y la lógica está presente también ya en Lotze y es así como probablemente él contribuyó a que Frege se embarcara en su programa logicista. Sluga comenta que Lotze mismo pensó que el logicismo era una verdad fundamental, pero que era

juicio, sino que obtengo las partes del pensamiento por medio de la descomposición del pensamiento. Esto es lo que distingue mi conceptografía de creaciones similares de Leibniz y de sus sucesores, aunque quizá el nombre elegido no haya sido muy afortunado.”

⁶⁶ Lotze (1843), p. 521.

⁶⁷ Sluga (1980, p. 55).

⁶⁸ Frege (1988, p. 70).

imposible llevar a cabo un programa que lo demostrara. Lograr eso es justamente lo que Frege se habría propuesto.⁶⁹

Pero los motivos de mayor profundidad filosófica, Frege los encontró directamente en Leibniz y en Kant, aunque de ambos tomó sólo algunos aspectos, ignorando todo lo demás. Así, de Leibniz él tomó casi únicamente la idea de crear un lenguaje ideal para representar las leyes de la lógica y de Kant aspectos de la lógica y de la filosofía de matemáticas. Casi ninguna otra faceta de los pensamientos de estos filósofos halla eco en la obra de Frege. Pero en Frege encontramos, tanto como en ellos, en primer lugar el interés mismo por “la lógica y por la fundamentación de las matemáticas porque le permiten a uno preguntar en forma precisa qué es lo que se puede conocer, valiéndose de la razón únicamente. Ninguno de los tres se ocupa de las condiciones empíricas y psicológicas de nuestras creencias lógicas y matemáticas⁷⁰, sino más bien de la cuestión de su justificación objetiva.”⁷¹ Esto hace que la visión de la lógica fregeana tenga una fuente esencialmente epistemológica⁷², que contrasta con la forma esencialmente semántica de entender la lógica que domina la filosofía analítica después de Tarski. Esta actitud diferente de fondo explica muchos de los malentendidos en los intentos exegéticos de filósofos analíticos que no toman en cuenta este antecedente. Si tengo razón en lo que afirmo, resultaría entonces que ver en Frege un primer proponente de teorías semánticas en el sentido de la tradición analítica es en buena medida una proyección del propio Dummett.⁷³

Para concluir esta sección es importante subrayar que, aunque inspirado en la concepción de la lógica de Kant, Frege le asignaba a la lógica un papel mucho más central en el desarrollo de su programa de fundamentación científica, en el siguiente sentido: para Kant, todas las verdades lógicas en el fondo son triviales y las ciencias formales no pueden estar fundamentadas sólo en la lógica, sino que necesitan el complemento de una intuición *a priori*. Para Kant, el entendimiento puro no puede producir objetos. “Únicamente la sensibilidad nos provee de los objetos que requerimos para poner a prueba la verdad de las ecuaciones aritméticas. Para Frege, la razón tiene sus propios objetos. Y, por consiguiente, las

⁶⁹ Cf. Sluga (1980, p. 57 s.).

⁷⁰ Una tendencia fuerte entre los filósofos, lógicos y matemáticos de tendencia naturalista a mediados del siglo XIX, según hemos observado.

⁷¹ Sluga (1980, p. 59).

⁷² Que la visión de lógica para Frege era esencialmente epistemológica, pero en todo caso no semántica, separa a Frege de la visión post-tarskiana de la lógica, pero, en algunas lecturas, marca, en combinación con su rechazo de toda teoría de correspondencia de la verdad, una diferencia también con Russell y con el joven Wittgenstein. Cf., e.g., Diamond (2002).

⁷³ Cf. la definición que Dummett da del objetivo de la filosofía analítica al principio de este escrito. Algo parecido se desprende también de la crítica que le hacen Baker y Hacker (1994).

leyes de la aritmética pueden ser confirmadas haciendo uso únicamente de la razón.”⁷⁴ El intento de demostrar que Kant estaba equivocado, le tomaría a Frege casi toda su vida adulta y era causa de la terrible desilusión a la que alude el epígrafe inicial del presente comentario⁷⁵.

La organización de la doctrina de Frege *La lógica de la primera Conceptografía y la creación del análisis*

Es imposible no percatarse de la insatisfacción de Frege al iniciar su trabajo y empezar a desarrollar su programa con la situación de incompreensión que manifestaban los matemáticos en relación con su propia disciplina. En *Los Fundamentos de la Aritmética*, Frege dedica medio libro a denunciar los intentos de muchos teóricos matemáticos, quienes en su mayoría hoy en día están olvidados. Casi toda la parte escrita en prosa del segundo tomo de *Las Leyes Fundamentales de la Aritmética*⁷⁶ es una crítica de las ideas de Cantor. En su curso de lógica de 1914, del cual Carnap dejó testimonio⁷⁷, Frege hace una extendida burla de las explicaciones de Dedekind, según se puede corroborar fácilmente en el escrito más extenso de la presente colección, “Lógica en las matemáticas”, que, según sugiere Gabriel, era una serie de notas que Frege preparó para este curso.

Una vez que Frege estuvo convencido de que lo que urgía era acabar con las incongruencias del empirismo-naturalismo y con las explicaciones psicologistas frecuentes en las matemáticas⁷⁸, y restablecer los principios formales *a priori* para dar un fundamento sólido a las matemáticas, se encontró con dos problemas eternos o casi eternos que ya habían sido señalados por sus predecesores. La importancia de Frege radica en que les dio un enfoque nuevo a la luz de su programa de investigación. A continuación veremos algunos aspectos relevantes en este respecto de su programa

⁷⁴ Sluga (1980, p. 53).

⁷⁵ Me refiero, desde luego, a la comunicación por parte de Bertrand Russell en diciembre de 1902, de que el sistema de Frege permitía la deducción de juicios paradójicos, cuando el 2º tomo de *Leyes fundamentales de la aritmética* estaba ya en la imprenta.

⁷⁶ Frege (2009); esta obra se menciona en el presente texto como *Leyes fundamentales de la aritmética*; *Leyes fundamentales* o por la primera palabra de su título en alemán, *Grundgesetze*.

⁷⁷ Frege, G.: *Vorlesungen über Begriffsschrift; Nach der Mitschrift von Rudolf Carnap. Unter Mitwirkung von Christopher von Bülow und Brigitte Uhlemann, mit Einleitung und Anmerkungen von Gottfried Gabriel*; Taylor & Francis Online.

⁷⁸ Había, desde luego, matemáticos que compartían esta preocupación de Frege, notablemente Cantor y Dedekind; Frege respetaba ambos, aunque pensó que sus intentos de fundamentar las matemáticas eran insuficientes y confusas.

Lo primero fue la observación de que el sistema milenario de lógica, ideado por Aristóteles, no servía para reglamentar la inferencia aritmética y, por consiguiente, este sistema no podía cumplir el propósito de Frege: crear un fundamento sólido para la aritmética. Aunque los filósofos modernos, empezando por Francis Bacon, ya habían criticado los silogismos como inservibles para fundamentar la ciencia, Frege no desechó por completo el análisis aristotélico y prefirió darle un nuevo giro. La oportunidad de tal giro provino de la sugerencia de Leibniz de crear un lenguaje ideal, al haber detectado, según creía, que el lenguaje natural era incapaz de representar los contenidos lógicos de los enunciados en forma pura. Lo que muy probablemente fue la contribución más duradera de Frege al desarrollo contemporáneo de las ciencias formales es una combinación de estos aspectos: la idea de prescindir del análisis lógico tradicional inspirado en la estructura gramatical del lenguaje, que analiza todos los pensamientos en términos de sujeto y predicado, para crear una herramienta analítica que toma sus elementos sólo de la lógica⁷⁹. Pero mientras Frege tomó de Leibniz la idea de un lenguaje de lógica pura, conservó de Kant la idea de que una consecuencia de la unidad necesaria de pensamiento es que los conceptos sean algo inacabado⁸⁰. Esta observación llevó a Frege a invertir otro elemento fundamental de la lógica aristotélica: para Frege los conceptos no son el resultado de abstracciones progresivas, sino que surgen de la descomposición de los pensamientos concretos: en una parte que garantiza la estructura del pensamiento y en otra parte que se presta a ser sustituida, de manera que hace el pensamiento verdadero para algunos reemplazos y falso para otros. En una carta a Anton Marty de 1882 Frege explica la relación entre contenido juzgable y concepto así:

Un concepto es insaturado por cuanto requiere que algo caiga bajo él; por consiguiente, no puede existir sólo por sí mismo. Que un individuo caiga bajo él es un contenido juzgable y aquí el concepto aparece como predicado y siempre es predicativo. En este caso, donde el sujeto es un individuo, la relación de sujeto a predicado no es una tercera cosa añadida a los dos, sino pertenece al contenido del predicado, que es lo que hace que el predicado sea insaturado. Ahora bien, yo **no creo que la formación de concepto puede preceder el juicio porque esto supondría la existencia independiente de conceptos**, sino que

⁷⁹ La teoría de conjuntos, que para el lector actual es normalmente un aspecto del análisis independiente de la lógica, para Frege resulta también del análisis lógico. Que esta relación es problemática en toda probabilidad es lo que causó el fracaso del programa logicista.

⁸⁰ Este punto es contencioso: yo aquí me inclino por la lectura de Hans Sluga y Gottfried Gabriel, de que el motivo fundamental de Frege era corregir la noción kantiana del carácter sintético a priori de los juicios en aritmética, y me parece probable, por ello, que su análisis en función y argumento es una formalización de nociones kantianas. Dummett (1981, *passim*) ha insistido en que Sluga ofrece poca evidencia para semejante lectura, aunque posteriormente Dummett (1995) parece ser más favorable a las sugerencias de Sluga, en un giro de posición que el propio Dummett considera radical e incompatible con algunos puntos de vista anteriores.

pienso en un concepto como habiendo surgido por medio de la **descomposición de un contenido juzgable**. Yo no creo que para cualquier contenido juzgable hay únicamente una manera en que puede analizarse o que alguna de estas maneras puede reivindicar preeminencia objetiva.⁸¹

En 1919 Frege presenta en sus apuntes para Darmstaedter el asunto de la prioridad de los juicios sobre los conceptos con el mismo énfasis, lo que evidencia que a pesar de su abandono del programa *logicista* nunca vaciló en su idea del análisis y de la prioridad de los juicios sobre los conceptos:

Lo particular de mi concepción de la lógica se caracteriza en primer lugar porque coloco en la punta el contenido de la palabra “verdadero”, y luego porque hago seguir inmediatamente el pensamiento como aquello que es lo que en realidad puede estar en cuestión en cuanto al ser verdadero. Es decir, yo no parto de los conceptos y compongo a partir de ellos el pensamiento o el juicio, sino que obtengo las partes del pensamiento por medio de la descomposición del pensamiento. Esto es lo que distingue mi conceptografía de creaciones similares de Leibniz y de sus sucesores, aunque quizá el nombre no haya sido seleccionado de manera muy afortunada⁸²

En principio, la utilidad de la idea de conceptografía fregeana no está en duda hoy en día, aunque su diseño en particular se considera generalmente poco práctico y, además, históricamente no siempre se tiene claridad sobre la diferencia fundamental entre ésta y el lenguaje simbólico de Boole, que precede al de Frege⁸³. Russell observó acerca de esto que el “simbolismo [de Frege], no obstante de ser desafortunadamente tan pesado que es muy difícil usarlo en la práctica, está basado en un análisis de consideraciones lógicas mucho más profundo que el de Peano y es filosóficamente muy superior a su competidor más conveniente.”⁸⁴ Algunos años más tarde, Wittgenstein observó que los simbolismos desarrollados por Frege y Russell no cumplen los requisitos de un lenguaje lógico ideal.⁸⁵ Pero lo que Russell deplora como pesadez del simbolismo fregeano al menos en algunos aspectos va en la dirección que Wittgenstein tiene en mente: que la función ‘ x^3 ’ para el argumento ‘2’, no obstante de significar siempre el número 8, se pueda escribir como **función** de segundo nivel ‘ $\varphi(2)$ ’, como **objeto** ‘ $\Phi(2)$ ’, respectivamente ‘ $2 \cap \varphi(\varepsilon)$ ’ y ‘ $2 \cap \xi$ ’, para poderse usar como argumento en una función de primer

⁸¹ Frege (1980, p.118); énfasis del autor. La última observación en el pasaje citado marca una diferencia importante entre el análisis de Frege y el punto de vista desarrollado por Wittgenstein posteriormente en el *Tractatus Logico-Philosophicus*.

⁸² Frege (1983, p. 273). Puesto que para Frege no hay un *último* análisis preeminente, es evidente que se tiene que tomar con mucha cautela el así llamado “principio de Frege” en que se apoya Kripke tan fuertemente para su exégesis.

⁸³ Cf. la crítica de Schröder, e.g. Sluga (1980, p. 91)

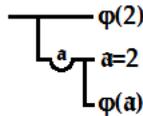
⁸⁴ Russell, Appendix A, p. 475.

⁸⁵ Wittgenstein, *Tractatus* 3.325.

nivel, contribuye, ciertamente, a lo pesado del lenguaje, pero gana en expresividad puramente simbólica⁸⁶. Quizá era esto lo que Kurt Gödel tenía en mente, cuando observaba, refiriéndose a *Principia Matemática*,

Es deplorable que la primera presentación comprensiva de una lógica matemática que va hasta las últimas consecuencias, y la derivación de las matemáticas de ella, sea tan importantemente carente de precisión formal en los fundamentos... que representa en este respecto un considerable retroceso en comparación con Frege. Lo que falta, sobre todo, es una exposición precisa de la sintaxis del formalismo.⁸⁷

Es un hecho histórico que el simbolismo ideado por Frege no se impuso y no hay espacio aquí para una discusión más amplia de las posibles razones. En vista de lo estorboso para el impresor que son las fórmulas matemáticas, que no es, sin embargo, ningún impedimento para imprimir libros de matemática, el argumento, que ocasionalmente se escucha, de que la tridimensionalidad de las fórmulas Fregeanas era el motivo de su falta de popularidad, no suena muy convincente. Más bien, nuevamente, el simbolismo de Frege sirve para expresar una filosofía de lógica muy diferente de la que finalmente se impuso, y en cierto sentido, no sólo las lógicas, sino también su manera de expresarla son inconmensurables. Daré un ejemplo:



Esta fórmula, que Frege usa como ejemplo en el § 22 de *Las Leyes Fundamentales* es un concepto de segundo nivel que expresa la propiedad exclusiva de ser el número dos. La barra vertical, que Frege llama 'barra condicional', señalan que la respectiva parte inferior de la fórmula es en este caso el nombre conceptual de un concepto subordinado al concepto expresado en la parte superior de la fórmula, así que esta anotación permite ver **a primera vista** la estructura del pensamiento – lo que es el objetivo para el cual fue diseñado principalmente la conceptografía. Como insinuado en el párrafo anterior, el uso de diferentes símbolos para entidades no saturadas, para expresar la saturación y para entidades saturadas y las reglas completamente definidas del uso correcto de estos símbolos señala el carácter lógico fundamentalmente diferente de éstas y anticipa, quizá, en parte la exigencia del *Tractatus* en este sentido. Se impuso históricamente en la filosofía analítica un simbolismo derivado del que crearon Boole, Peano y Russell y también se impuso la visión de la lógica asociada con ellos; *i.e.* alguna versión de

⁸⁶ Cf. Frege, *Grundgesetze*, § 35.

⁸⁷ Gödel (1989, p. 126).

una teoría referencial de verdad, algo que el propio Frege explícitamente rechaza⁸⁸. Unos y otros simbolismos tienen objetivos distintos y Frege tuvo que decir que el lenguaje de Boole era inservible para sus objetivos, algo que también Russell reconoce, como hemos observado.⁸⁹

Sluga resume las posturas generales en cuanto a la relación entre lenguaje, lógica y matemáticas de algunos de los actores principales que influyeron en la segunda parte del siglo XIX en la formación de las ideas sobre un lenguaje lógico ideal como sigue:

Mientras que Frege y Schröder creyeron ambos en la necesidad de la formalización, Lotze y Mauthner rechazaron ambos la idea. Mientras que Frege y Lotze afirmaron ambos la primacía de la lógica sobre las matemáticas y por ello la reducibilidad de las matemáticas a algo más fundamental, Schröder, en la tradición de Boole, mantiene que las matemáticas son más fundamentales que la lógica y Mauthner, siguiendo a Gruppe, separa las matemáticas totalmente de la lógica. Mientras que Frege y Mauthner mantienen ambos que la lógica está estrechamente relacionada con el lenguaje, Schröder concibe su notación lógica como una forma de cálculo y Lotze supone que la lógica trata de una comprensión conceptual que trasciende tanto el lenguaje como el cálculo matemático. El significado histórico de la concepción de Frege se define por el lugar que ocupa entre estas opciones alternativas.⁹⁰

En la siguiente sección veremos cómo la postura de Frege que acabamos de esbozar se traduce en un programa concreto.

Piedra angular: la demostración de los objetos lógicos

“Yo partí de las matemáticas. En esta ciencia, la tarea más urgente me parecía consistir en una mejor fundamentación” decía Frege⁹¹, ya que la situación en una ciencia, que debería ser la claridad misma regía la confusión total en cuanto a sus aspectos más básicos. No pocos creían que las explicaciones últimas de las

⁸⁸ Aquí cabe también la observación de que la concepción de lógica de Frege no es semántica, como suele ser la nuestra. No es, sin embargo, objetivo del presente escrito discutir las diferencias en este sentido entre las concepciones de lógica de Frege y, por ejemplo, de Russell.

⁸⁹ Cf. e.g. “Booles rechnende Logik und die Begriffsschrift”, probablemente de 1880/81 que Frege intentó **en vano** publicar en varias revistas de matemática, ciencias naturales y filosofía. Frege afirma que la conceptografía gobierna un dominio algo más amplio que el lenguaje de fórmulas de Boole y caracteriza la diferencia así: “Porque en Aristóteles, al igual que en Boole, la actividad lógica primitiva es la formación de conceptos por medio de abstracción, y juicio e inferencia se dan a través de una comparación inmediata y directa de los conceptos por medio de sus extensiones.” (Frege 1979, p. 15) Aristóteles y Boole, dice Frege, se ocupan principalmente de una teoría de la inferencia y aceptan los conceptos como antecedentemente existentes e independientes de los juicios. “En contraste con Boole, yo empiezo con juicios y sus contenidos y no con los conceptos.” (ídem, p. 16).

⁹⁰ Sluga (1980, p. 76).

⁹¹ Frege (1979, p. 253; 1983, p. 273); véase la cita anterior.

matemáticas tenían que tener un carácter empírico y que habrían de provenir de la psicología. Investigadores como Lotze, Cantor, Liebmann, Windelband, Trendelenburg y Frege creían que una fundamentación psicológica era imposible y apostaban a una restauración de principios *a priori* kantianos.⁹² Son varios los problemas que Frege detectaba en los intentos de una fundamentación naturalista de las matemáticas como trataré de hacer ver.

En general, Frege deploraba en *Fundamentos de la Aritmética* la ausencia de acuerdos entre los matemáticos sobre las cuestiones más simples de su ciencia, muy en especial el significado de los numerales.⁹³ De manera irreflexiva, los principios de las operaciones con números se dan por entendidos, se quejaba; y como los numerales son algo que aparentemente todo el mundo sabe usar, entonces no se investigan más. Las explicaciones que usualmente se daban eran que los números son objetos psicológicos internos o/y que los números son simplemente los mismos signos numéricos. “Los matemáticos dicen que los números son abstracciones de clases o conjuntos; pero ellos no producen una explicación coherente ni de lo que quieren decir con 'abstracción' ni con 'clase' o 'conjunto'.”⁹⁴ Frege explica que confusiones así gobiernan también la explicación de otras entidades de uso elemental en las matemáticas, como el signo de identidad, las variables y las funciones. En general, el origen del problema radica en la incomprensión de que los signos matemáticos y sus usos forman parte de un sistema.⁹⁵

El significado de un término matemático no es el complejo de ideas y asociaciones que podría estar relacionado con él en nuestras mentes. Su significado es su papel en la teoría matemática. De manera similar, el significado de enunciados matemáticos no consiste en los pensamientos que éstos podrían invocar en la mente, sino su lugar en el sistema matemático.⁹⁶

Frege trata de poner remedio a la confusión gobernante en las matemáticas empezando por aclarar cómo deberíamos comprender el elemento más básico, a saber, el número. En su opinión habría que reconocer, para empezar, que nuestra

⁹² Cf. Gabriel (2002, p. 40 ss.).

⁹³ Cf. Frege (1988, II-III).

⁹⁴ Sluga (1980, p. 97s.). Cf. también Frege, “Logische Mängel in der Mathematik” en Frege (1983, p. 171-181), un trabajo no publicado en vida, redactado probablemente entre 1898 y 1903.

⁹⁵ Cf. la pieza “Lógica en las matemáticas” contenida en la presente colección, p. [95, en alemán]; “Es sólo través del sistema que se puede alcanzar plena claridad y orden. Ninguna ciencia puede de igual modo dominar su materia y procesarla con semejante transparencia como las matemáticas, pero quizá tampoco ninguna ciencia puede perderse en una neblina tan densa como las matemáticas si prescinde de la construcción del sistema.”

⁹⁶ Sluga (1980, p. 100). El origen de esta noción, que vagamente parece anticipar la noción de significado desarrollada por Wittgenstein en *Investigaciones Filosóficas*, en Frege es de origen kantiano y limitado, por lo pronto, al ámbito del sistema de la ciencia matemática.

capacidad de contar requiere de una base que es anterior a las verdades empíricas. Frege explica en *Fundamentos de la Aritmética* que la inducción, que según su punto de vista era nuestro mecanismo para descubrir las leyes empíricas, depende de la aritmética, por lo que ésta no puede ser explicada a su vez por medio de la inducción, o en general por leyes naturales, como pretendían los naturalistas.⁹⁷ Por eso, Frege pensaba que las verdades aritméticas no sólo son *a priori*, como afirma Kant, sino que son verdades lógicas. “La aritmética trata de todo lo que es pensable y por consiguiente es, realmente, lógica.”⁹⁸. Frege argumenta en diferentes escritos⁹⁹ en contra de la noción de que las leyes de la aritmética sean de carácter inductivo, de que números sean propiedades de cosas externas, de que sean entidades mentales subjetivas o de que sean aglomeraciones de objetos físicos. Tampoco acepta que los números deberían identificarse con los signos de los números. Lo que los puntos de vista atacados tienen en común es que todos son diferentes formas de empirismo. Pero entonces ¿qué son los números?

Frege declara en *Fundamentos de la Aritmética* que los números pueden definirse como **extensiones** de conceptos. No pueden ser **conceptos** a causa del carácter predicativo de estos. Los números tienen que ser **objetos** y no predicados, porque los podemos identificar, *i.e.*, podemos decir del objeto *a* que es idéntico al objeto *b*¹⁰⁰. Los números como extensiones de conceptos son objetos, más precisamente, **objetos lógicos**. Pero el sistema de Kant excluye la posibilidad de objetos puramente lógicos; de acuerdo con él, los objetos nos son dados a través de los sentidos y no hay objetos sin sensibilidad. “De acuerdo al paradigma de la concepción kantiana, la *Begriffsschrift* se ocupó únicamente de juicios y conceptos ¿de dónde habrían de provenir objetos lógicos?”¹⁰¹

Los motivos que Frege tuvo para tomar la ruta que lo llevó a conferirle a su versión de logicismo las características particulares que tiene son muy diversos y hacen que se aleje no sólo de Leibniz y de Kant, sino también de otros compañeros de ruta, como Lotze o Trendelenburg. Lo que hace brotar en Frege la idea de comprender los números como extensiones de conceptos, y por ello como objetos lógicos, puede quizá verse por una parte en su original concepción de lógica, que asimila las ideas de varios de los neo-kantianos, más notablemente las de Lotze, y por otra parte en su lucha contra las explicaciones psicologistas de los conceptos matemáticos básicos que prevalecían en aquellos días. El propio Frege explicó el

⁹⁷ Cf. Frege (1988, p. 16-17; [25]) [la indicación de páginas se refiere aquí a la paginación original; el número entre corchetes señala la página en la edición indicada en la bibliografía.]

⁹⁸ Sluga (1980, p. 101).

⁹⁹ Cf., entre otros: Frege (1988, p. 22, 34, 39, 43); Frege (1990, p. 102-111)

¹⁰⁰ Cf. Frege (2008, p. 51s.).

¹⁰¹ Sluga (1980, p. 102).

razonamiento que lo lleva a la postulación de objetos lógicos en una de las piezas inconclusas incluidas en el presente trabajo bajo el título de “Lógica” y que fue redactada mientras Frege trabajaba en el segundo tomo de *Leyes Fundamentales de la Aritmética*, así como en “El Pensamiento”, de 1919 que pertenece a una serie de trabajos, también inconclusa, que Frege aparentemente quería subsumir bajo el título de *Investigaciones Lógicas*.¹⁰²

Frege estaba convencido de que Kant tenía razón en afirmar que no todo conocimiento es empírico y que en particular la geometría y la aritmética se basan en juicios *a priori*. Frege creía también que “la aritmética es necesaria para la justificación de la inducción científica. También es necesaria para la formulación de las leyes empíricas más abstractas. Probar que las verdades aritméticas son *a priori* por consiguiente es probar... que el conocimiento *a priori* es fundamental para el conocimiento empírico.”¹⁰³ Tanto Lotze como Frege pensaron que las leyes de la aritmética no dependen de intuiciones (en el sentido de Kant) como sucede con la geometría, sino que son leyes lógicas.

Lo anterior, sin embargo, no bastaría para refutar al psicologismo en las matemáticas. Aún en el caso de que los naturalistas llegaran a concederles la razón, desde el punto de vista de estos últimos “las leyes de la lógica son leyes empíricas muy generales del razonamiento humano”¹⁰⁴. Si esto se aceptaría, nada se ganaría desde el punto de vista de Frege, con demostrar la reducibilidad de la aritmética a la lógica. La clave era, entonces, erradicar lo que Frege llama, el psicologismo. En un pasaje persuasivo de “Lógica”, Frege describe cómo una epistemología puramente materialista se colapsa en un idealismo subjetivo y de éste, observa Sluga, ya Kant había demostrado su inviabilidad contra Hume: ninguna idea subjetiva podría existir sin sujeto y éste a su vez no podría ser una idea subjetiva. El siguiente paso de Frege es establecer que no todo lo mental es subjetivo; además de las ideas subjetivas, podemos hablar de los pensamientos y estos, aunque los captamos con la mente, son objetivos.

Este último punto ha provocado mucha disputa¹⁰⁵. Si existen pensamientos objetivos ¿cuál es su situación ontológica? Si se toma en serio el fondo de epistemología neo-kantiana y anti-empirista del cual fluye la doctrina de Frege, la

¹⁰² Las otras piezas de la serie son “La negación”, “Complejos de pensamientos” y la pieza inconclusa “Universalidad lógica” contenida en el presente trabajo.

¹⁰³ Sluga (1980, p. 103).

¹⁰⁴ Sluga (1980, p. 104).

¹⁰⁵ Por ejemplo, Dummett mantiene en sus escritos de los años 70 que Frege es un platonista, e.g. en Dummett (1978), pero adopta posteriormente una postura más diferenciada, e.g. en Dummett (1995). Véase también los comentarios sobre una sugerencia de Marco Ruffino sobre objetos lógicos, el supuesto platonismo de Frege y el “problema de Julio Cesar” un poco más adelante.

pregunta por la situación ontológica como separada del estado epistemológico no tiene sentido. Frege habla de los pensamientos como objetivos (y eternos), nunca como reales, término que reserva a entidades espacio-temporales, como, por ejemplo, el sujeto junto con sus ideas. Y que los pensamientos sean objetivos pero no reales (en el sentido que Frege da a 'real') "es esencial para el uso que Frege quiere dar a su hipótesis... de que el conocimiento de tales pensamientos no puede ser empírico. Sólo si él logra establecer este punto puede demostrar que la lógica, al tratar de pensamientos, es algo que no es empírico."¹⁰⁶ La pregunta de qué es para Frege un objeto, qué, en particular, es un objeto lógico, y la cuestión de los dominios que surgió con relación a los supuestos del "teorema de Frege"¹⁰⁷ en la explicación de la enciclopedia de Stanford se retomará después de las siguientes aclaraciones.

La visión de la lógica de Frege toma elementos de Leibniz y de Kant, pero su caracterización de las verdades lógicas difiere de las de ambos. Es en esta diferencia en donde pone su esperanza de poder probar la analiticidad de los juicios aritméticos. Para Leibniz las verdades lógicas lo son en todos los mundos posibles. Frege toma de Leibniz explícitamente la sugerencia de un lenguaje lógico ideal, pero nunca hace ni siquiera una mención de esta caracterización de la verdad lógica. Dada su fundamentación de la lógica en la verdad, cabe suponer que Frege pensó que los conceptos modales no son auténticamente lógicos.¹⁰⁸ Pero Frege tampoco identifica la verdad lógica con las verdades analíticas, como lo hace Kant, quien las convierte en enunciados sin contenido informativo alguno. Para Frege, la noción de analiticidad **presupone** la noción de verdad lógica y la verdad lógica, a su vez, depende de las leyes de la lógica (aplicadas a la noción no definible de la verdad). La lógica, para Frege, trata únicamente de las verdades más universales, independientes de la experiencia, como asevera una y otra vez. "Podemos entonces decir también: la lógica es la ciencia de las leyes más generales del ser verdadero."¹⁰⁹ Frege declara enfáticamente en sus *Fundamentos de la Aritmética* que para que haya verdades universales tiene que haber leyes estrictamente universales y primitivas, que no dependen a su vez de la experiencia.¹¹⁰

Frege, por cierto, no sólo rechazaba las explicaciones psicologizantes de la lógica, sino también el formalismo matemático. Él dudaba, por una parte, de que

¹⁰⁶ Sluga (1980, p. 105).

¹⁰⁷ Véase el pasaje arriba sobre la contribución de Zalta.

¹⁰⁸ Al menos esto sugiere Hans Sluga. Cf. Sluga (1980, p. 108).

¹⁰⁹ "Lógica", p. 96 del presente trabajo.

¹¹⁰ Cf. Frege (1988, p. 4, nota [p. 15]).

fuera posible demostrar que sistemas **puramente** formales¹¹¹ fueran consistentes y, por la otra, aunque ello fuera factible, el que un sistema fuera consistente no bastaría para demostrar que sus enunciados son verdaderos.¹¹² Para Frege no hay reglas especiales del pensar en las que se fundamenten las operaciones matemáticas; si se quiere fundamentar las matemáticas, entonces tiene que ser mediante la reducción de ellas a las reglas más universales, las de la lógica. “El pensar es esencialmente el mismo en todos lados: no es pensable que haya diferentes leyes del pensar dependiendo del objeto.”¹¹³ Tomar los signos matemáticos como signos no interpretados no establece, según Frege, que las matemáticas sean reglas más universales del pensar, ni tampoco que sean conocimiento auténtico de contenido, que es lo que **su** fundamentación de las matemáticas se propuso establecer.

Para Frege, entonces, las leyes de la lógica (y las de la aritmética, que son parte de ellas) tienen que ser universales para cumplir con esta demanda; todo juicio aritmético existencial tiene que ser explicable en términos de una ley universal. Y las leyes de la lógica, además, tienen que ser leyes de la verdad. En “El Pensamiento”, de 1919, Frege identifica el quehacer de la lógica con el reconocimiento de las leyes de la verdad.¹¹⁴ La noción de verdad Frege la toma como primitiva y simple.¹¹⁵ Esta noción se distingue drásticamente de la propuesta de Tarski de que la noción de verdad es definible en determinados lenguajes formales o formalizados. Frege, de hecho, no niega esta posibilidad, pero afirma que las nociones que se usan para tales definiciones, como ‘objeto’, ‘caer bajo’, ‘tener una propiedad’, ‘satisfacer un predicado’ son menos fundamentales que la noción de verdad. Para Frege, toda explicación lógica empieza con la verdad y este término no puede ser definido en términos de otros que son menos fundamentales.¹¹⁶

Al hablar de objetos en general y de objetos lógicos en particular, una de las exigencias de Frege a su lenguaje lógico es que todo nombre propio sea nombre propio exactamente de un objeto. Para eso él introduce los objetos y sus nombres uno por uno en su lenguaje lógico, quizá equívocamente llamado conceptografía.¹¹⁷

¹¹¹ **formales** en el sentido de Frege: obedeciendo a reglas lógicas especiales, separadas de las que son vigentes universalmente.

¹¹² Frege, “Über formale Theorien in der Arithmetik” en Frege (1990, p. 110).

¹¹³ Frege (1988, III [p. 5]).

¹¹⁴ Frege (1976, p. 30).

¹¹⁵ Cf. también la pieza “Lógica” en la presente colección, [p. 39 del original].

¹¹⁶ Cf. Sluga (1980, p. 113, s.). En particular, la verdad no puede ser definida como correspondencia entre oraciones y hechos, ya que tal correspondencia requiere a su vez la noción de verdad para su verificación. Cf. Frege (1976, p. 32) y “Lógica” en la presente colección, [p. 39 en el original].

¹¹⁷ Véase cita anterior de los apuntes para Darmstaedter (nota de pie 83).

Pero jamás introduce ningún nombre para ‘verdadero’: Frege cree que tal signo no tendría ninguna función en la conceptografía: “La palabra ‘verdadero’ tiene un sentido que nada contribuye al sentido de la oración completa en que ocurre como predicado”¹¹⁸. La razón de esto no es acaso la ausencia de significado o de sentido, sino que este predicado “se distingue de todos los demás predicados porque siempre es predicado también, tan pronto cualquier cosa es predicada.”¹¹⁹ No hay manera de describir la relación entre un pensamiento y la verdad, porque esta relación es inherente a nuestro lenguaje a través de juicios y afirmaciones. Si usamos en nuestro lenguaje natural ‘verdadero’ como predicado, esto sólo demuestra que éste es lógicamente imperfecto. En la conceptografía no hay signo que lo represente.¹²⁰ Pero puesto que el lenguaje lógicamente perfecto tiene que construirse a partir del - lógicamente imperfecto - lenguaje natural, construcción que Frege emprende en *Leyes Fundamentales de la Aritmética*, el concepto de verdad se usa explícitamente en las secciones dedicadas a la construcción de los objetos lógicos, los cuales posteriormente se usan en la conceptografía; en ésta, la verdad sólo está presente en los juicios de manera implícita.¹²¹

Se puede decir sin temor a equivocarse que pocos aspectos de la doctrina de Frege han sido más objeto de crítica¹²² por parte de los filósofos analíticos que su aseveración que las oraciones son nombres propios, cuyo significado es siempre un objeto: uno de dos únicos valores de verdad. Inclusive Gottfried Gabriel, quien se esfuerza por hacer la explicación histórica de Hans Sluga palpable para los filósofos analíticos apegados al canon de esta orientación filosófica, después de tratar los motivos neo-kantianos que llevan a Frege a enunciar este aspecto de su doctrina, apenas está dispuesto a concluir: “Vistos contra el trasfondo de la tradición de teorías de valores neo-kantianas, hasta la conexión problemática de Frege entre valores de verdad y *Bedeutung*, de que el *Bedeutung* de una oración es su valor de verdad, se vuelve más plausible.”¹²³ La falta de plausibilidad proviene posiblemente de la idea de que Frege, cuando habla de los valores de verdad como objetos, no puede excluir que tal aseveración confiera a “lo verdadero” y a “lo

¹¹⁸ [Aufzeichnungen für Darmstaedter].

¹¹⁹ “Lógica” en la presente colección, [p. 39 en el original]. Cf. Sluga (1980, p. 115).

¹²⁰ Cf. también “Apuntes para Ludwig Darmstaedter”, pieza traducida al final de este comentario. El pasaje en esta pieza que explica por qué “verdadero” no figura en un lenguaje lógicamente perfecto se lee como una anticipación a un argumento similar en el *Tractatus Logico-Philosophicus* de Wittgenstein.

¹²¹ Cf. Sluga (1980, p. 119).

¹²² Con la posible excepción de su aseveración de que “el concepto caballo no es un concepto”, la cual, sin embargo, también está relacionada con el motivo que Frege tiene para considerar los valores de verdad como el significado de las oraciones.

¹²³ Gabriel (2002, p. 48).

falso" un *status* de objetos reales, pero todo lo que Frege pretende es que lo verdadero y lo falso sean objetos lógicos; es decir, que sean objetivos, y que no sean predicados (insaturados), como se explica por lo que hasta aquí se ha dicho.

Frege es kantiano, neo-kantiano y lotzeano en cuanto a que para él los objetos son el producto de nuestra intuición (en un sentido kantiano), aunque abandona la postura de Kant al hablar de objetos **lógicos**, los cuales, de acuerdo con Kant, no podía haber. Una diferencia importante en este aspecto entre Kant, por una parte, y Lotze y Frege por la otra, es que para Kant la sensibilidad era necesaria para tener conocimiento de objetos, mientras que para ellos "el contenido de un juicio, *i.e.*, el pensamiento, es el objeto por excelencia. Pero los pensamientos no son espacio-temporales y, por consiguiente, no son dados a los sentidos."¹²⁴ Frege pensó que podía probar la objetividad de los objetos lógicos al explicitar las leyes lógicas y dar así contenido real a la ciencia de la lógica, a pesar de Kant. Así hallaría respuesta la pregunta: ¿qué son los números?, que los matemáticos no sabían contestar satisfactoriamente, a juicio de Frege. Como sabemos hoy, su plan se encontró con obstáculos insuperables. Frege, aun después de que Russell le señalara la posibilidad de deducir contradicciones¹²⁵ en su sistema, insiste en una misiva posterior a Russell en la necesidad de explicar objetos lógicos como "extensiones de conceptos, o más generalmente, como rangos de valor de funciones"¹²⁶, aunque acepta no haber superado las dificultades encontradas. Sin embargo, en el trabajo "Lógica en las Matemáticas", de 1914¹²⁷, Frege ya no hace alusión alguna al tema. En los últimos años de su vida él regresó a un punto de vista más compatible con el de Kant.

La noción que Frege tiene de objeto, inspirada en la epistemología kantiana o, más propiamente, neo-kantiana, explica mucha de la dificultad para entender lo que él dice sobre los nombres propios, el significado, el sentido, las oraciones y sobre la relación que todos ellos tienen con la más fundamental de todas las nociones, a saber, la de verdad. También evidencia porque es fatal querer prescindir de la noción ' $f(x) = y$ ', según sugiere Zalta, para presentar "en forma pura" el "teorema de Frege", según observamos en los párrafos iniciales de este comentario. Quedaría muy poco de la doctrina de Frege sin esta noción, pues el objeto fundamental es el pensamiento y su descomposición en argumento y concepto es lo que nos da los objetos de los cuales los pensamientos eventualmente

¹²⁴ Sluga (1980, p. 122).

¹²⁵ En una carta del 16 de junio de 1902, reimpressa en Frege (1980, p. 59). Frege creía –quizá equivocadamente– que las contradicciones eran una consecuencia de la ley básica V enunciado en Las leyes fundamentales de la aritmética y trataba de modificarla en un apéndice a esta obra.

¹²⁶ Carta del 28 de julio de 1902, en Frege (1980, p. 71).

¹²⁷ Véase la pieza principal de la presente traducción.

se componen. Los objetos de Frege en el análisis de Zalta resultan tan exóticos como en nuestra mente copernicana las trayectorias ptolomaicas de los planetas.¹²⁸

La obra en la que Frege se propone llevar a cabo su programa logicista con todo rigor es *Las Leyes Fundamentales de la Aritmética*. Ahí trata de probar “en acto” lo que en *Los Fundamentos de la Aritmética* sólo había anunciado como mera posibilidad: exhibir los números como objetos lógicos a partir de la noción de equinumerosidad de conceptos. Frege lo había intentado primero en un trabajo que no ha llegado a nosotros¹²⁹ y que desechó, según parece, precisamente por no haber encontrado la expresión precisa que establece la extensión de un concepto, o más generalmente, el rango de valor de una función, como objeto lógico reconocible¹³⁰.

La manera correcta de hablar de los objetos es por medio de nombres propios, otra noción que para Frege tiene un uso algo diferente del que hoy en día tomaríamos como habitual. Sluga (1980, p. 122) identifica los siguientes criterios en la doctrina de Frege para reconocer nombres propios:

- a) La expresión no empieza con un artículo indefinido (un artículo definido **puede** ser señal de un nombre propio);
- b) La expresión no contiene variables libres;
- c) La expresión no puede ocurrir apropiadamente como predicado en una oración (pero puede ser parte de un predicado);
- d) La expresión puede ocurrir a la izquierda y a la derecha de un signo de identidad y formar así una oración completa.

Las oraciones cumplen los criterios b) y c), lo que permite, de acuerdo con lo que acabamos de decir, que Frege los considere nombres propios. Pero el motivo de esta postura es, desde luego, la convicción ya mencionada de Frege, compartida con Lotze, de que los pensamientos son ideas objetivas y los objetos lógicos por

¹²⁸ Kripke en su análisis no identifica la noción de objetos de Frege con la de Russell, pero finalmente explica la noción de ‘sentido’ a través de lo que llama el ‘principio de Frege’, cuando la relación fundamental entre la oración y sus componentes también para el sentido es justamente la inversa. La noción de especies naturales que promueven Kripke y Putnam, por ejemplo, son totalmente incompatibles con el punto de vista de Frege acerca de objetos y nombres particulares.

¹²⁹ Cf. Frege (2009, p. VIII-X).

¹³⁰ Frege, al describir en este pasaje los cambios introducidos a la nueva conceptografía, deja poca duda que la separación de la vieja noción de contenido juzgable en las dos nociones que lo reemplazan, opera primero al nivel de la oración: “[el contenido juzgable] se me descompuso ahora en lo que llamo el pensamiento y en lo que llamo el valor de verdad. Esta es la consecuencia de la distinción entre sentido y significado de un signo” (Frege 2009, X). Signo de la unidad básica para Frege, el pensamiento y su valor de verdad. Los otros signos son el resultado del análisis.

excelencia; y las oraciones son la expresión de éstos. También los números son objetos (y no conceptos) y por consiguiente los signos para designarlos, nombres (propios)¹³¹.

El principio que le permite a Frege introducir formalmente en la conceptografía objetos lógicos (y sus nombres) es lo que él llama la 'ley fundamental V', la cual consiste en postular que si dos conceptos tienen rangos idénticos de valores, los objetos que caen bajo uno y bajo el otro son idénticos. Frege trata esta ley fundamental como un axioma: la da por verdadera (de lo contrario no sería un axioma). Pero desde el principio concede que podría no ser un axioma, aunque a la hora de redactar el libro confía en que sería imposible que alguien probara su falsedad¹³².

La construcción de los fundamentos de la aritmética en la conceptografía empieza propiamente en el tomo I de los *Grundgesetze* en el § 53. Todas las secciones anteriores están escritas realmente en una forma de metalenguaje, desde el punto de vista de la conceptografía, el cual consiste en parte de lenguaje natural y en parte de un lenguaje formal que usa símbolos parecidos (letras griegas en lugar de latinas) a la propia conceptografía.¹³³ Frege acepta que la explicación en lenguaje natural deja que desear en cuanto a precisión; en todo caso, insiste, el peso de las pruebas recae **exclusivamente** en el lenguaje simbólico diseñado por él.¹³⁴

Según observamos anteriormente, Frege estaba convencido, junto con Kant y con los neo-kantianos como Lotze, de que requerimos principios previos a la experiencia para poder tener experiencias y que nuestra capacidad de contar (algo, lo que sea) es parte de este principio anterior. Frege también creía, como Kant, en la unidad del pensamiento, la cual se refleja también en la estructura de la oración enunciativa. Ésta se compone de expresiones que determinan la estructura, que son esencialmente expresiones insaturadas o incompletas y que por sí solas no tienen

¹³¹ '5', '2+3', '-6+1', '2.5*2' son todos nombres propios del mismo número. '2+3 = 5' es una oración formada con estos nombres a partir de la relación (función dos veces insatisfecha) de identidad (siempre dando por asentada la definición de los signos usados).

¹³² Cf. Frege (2009, VII y epílogo, tomo II, p. 253).

¹³³ Es este hecho el que invita a Dummett a afirmar que los *Grundgesetze* realmente contienen una teoría semántica. Cf., e.g., Dummett (1991, p. 121s.), en donde el exégeta británico mantiene contra Baker y Hacker (1984) que la "parte I de *Grundgesetze* parece contener una teoría semántica para el lenguaje formal, claramente separada de la explicación de sus reglas de formación, axiomas y reglas de inferencia: esta teoría es formulada mediante la estipulación, cuáles referencias los símbolos primitivos deben tener, y estipulando, cómo la referencia de una expresión compleja es determinada de las referencias de sus constituyentes." Los problemas que tiene semejante lectura se discutirán más adelante en el contexto de la discusión de la doctrina de Frege como doctrina de referencia.

¹³⁴ Cf., e.g., *Grundgesetze*, p. 240, nota 1.

significado, precisamente por ser insaturadas. Y consisten, por otra parte, en expresiones que son completas, pero que no son capaces de determinar las estructuras. Nombres de conceptos son un ejemplo de las primeras¹³⁵, nombres propios de las segundas. Pero mientras en la conceptografía es fácil marcar el papel fundamentalmente distinto de nombres conceptuales y nombres propios, en el lenguaje natural no hay nada que los distinga a primera vista. Lo que lleva a Frege a decir, algo desesperadamente, que “aunque la ciudad de Berlín es una ciudad, **el** concepto de caballo no es un concepto”, sino un objeto lógico.

Lo anterior es cierto también de las oraciones que contienen expresiones numéricas. Y puesto que las expresiones numéricas son intercambiables sin cambiar la estructura de las oraciones y puesto que podemos reconocer un mismo número como idéntico consigo mismo (aunque sus signos tengan diferentes sentidos), resulta que son expresiones que no determinan la estructura de las expresiones, por lo que no son insaturadas. Si lo dicho en el párrafo anterior es correcto, entonces tienen que ser nombres propios que nombran objetos, pero no objetos de intuición pura¹³⁶, *pace* Kant, sino objetos ideales; los objetos ideales no pertenecen a la parte subjetiva de las ideas, sino a la parte objetiva: son objetos lógicos, no espaciales ni temporales y, en este sentido, no reales, pero sí objetivos.¹³⁷

Todo lo anterior es anunciado por Frege en forma programática en sus *Fundamentos de la Aritmética*, pero lo cierto es que su proyecto no se llevó a cabo. Donde lo pone en práctica, en cambio, es en las *Leyes Fundamentales de la Aritmética*, sólo que entre uno y otro libro hay un cambio importante en su doctrina, un cambio que lo obliga a desechar un primer intento de enunciar estas leyes, según ya se mencionó. Frege escribe en 1891 y 92 una serie de artículos en los cuales anuncia en qué consiste su nuevo punto de vista. El primero de estos trabajos es relativamente poco conocido, a pesar de que es el que más claramente explica un principio que enuncia en *Fundamentos* y que posteriormente no volverá a enunciar: el así llamado “principio contextual”. En una crítica de un libro de Ludwig Lange sobre la ley de inercia de Newton¹³⁸ y la suposición de espacio y tiempo absolutos,

¹³⁵ Por esto, si algo es nombre de un concepto, no puede tener significado. Un típico nombre propio en la conceptografía de 1893 sería ‘*a*’, un típico nombre de concepto ‘ $_f(x)$ ’, el cual lleva la marca de su insaturación (‘*x*’), y que, por consiguiente, no puede tratarse como -ni convertirse en- objeto en el sentido de Frege, no obstante de ser un nombre (conceptual).

¹³⁶ La **forma** de la intuición sensible. Cf. e.g. *Prolegómena para toda futura metafísica*, primera parte § 10.

¹³⁷ En este punto de vista casi hay coincidencia total entre Lotze y Frege, por lo que parece inverosímil asumir con Dummett que no habría influencia de Lotze en Frege, siendo el primero además maestro del segundo (Cf. Dummett, 1991a, Prefacio).

¹³⁸ 1886 Lange (1886).

Frege expone su punto de vista sobre la relación entre las teorías científicas y los conceptos que las constituyen.¹³⁹ Los términos en que Frege formula allí la relación entre una teoría y sus conceptos constitutivos se lee como una anticipación del punto de vista holista de Quine y viene dando los motivos de filosofía de lógica para sostener el principio contextual. A partir de estas explicaciones es claro también que se trata de un principio fundamental para toda la doctrina de Frege, aún si no lo vuelve a formular como en los *Fundamentos* (principio adoptado luego literalmente por Wittgenstein en el *Tractatus*).¹⁴⁰

La lógica de *Begriffsschrift* se construyó bajo la suposición de la prioridad de los juicios sobre los conceptos. El análisis de enunciados aritméticos de los *Fundamentos de la aritmética* procedió bajo el principio que se debiera preguntar por el significado de palabras únicamente en el contexto de la oración, y no en forma aislada. La importancia del ensayo “Sobre el principio de la inercia” consiste en que vuelve a formular estas doctrinas en forma de una reivindicación de la prioridad de toda teoría sobre sus conceptos constitutivos. Es a la luz de esta consideración que se deben entender las distinciones de función y rango de valor, concepto y objeto, pensamiento y valor de verdad, y sentido y referencia. Su justificación y significado no se encuentra en el contenido intuitivo que pueden portar, sino en que son indispensables para una teoría lógica adecuada. Los ensayos en donde Frege elabora estas distinciones debe ser entendido como dedicado a la búsqueda de lo que es previo lógica y sistemáticamente, de acuerdo a un método que es esbozado en el ensayo “Sobre el principio de inercia”¹⁴¹

El cambio de doctrina anunciado en 1891/92 es, como ya se dijo, el abandono de la noción de ‘contenido juzgable’ de las oraciones y su sustitución por dos nociones nuevas: las nociones de *Sinn* y *Bedeutung* de ellas. Puesto que tanto para Lotze como para Frege la unidad básica del conocimiento es el pensamiento, es la oración como expresión de esta unidad básica de donde se origina la nueva distinción, y su aplicación a entidades sub-oracionales parte de allí, i.e., del análisis lógico de las oraciones enteras. Es muy tentador invertir este orden si se quiere comprender la doctrina de Frege como teoría de la referencia, pero eso es algo que estaba muy lejos de la mente y de las intenciones de Frege. El sentido de la oración,

¹³⁹ El artículo se llama: “Über das Trägheitsgesetz”, publicado originalmente en “Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik.” 98 (1891), S. 145-161 y está contenido en Frege (1990). Los otros tres trabajos, más famosos, son “Función y concepto”, “sobre sentido y referencia [o significado]”, “sobre concepto y objeto”. El tenor del artículo es que Lange tiene razón en cuanto a su crítica de los supuestos de Newton, pero la diferencia entre la concepción de él y de Newton no es tan grande, como Lange supone.

¹⁴⁰ Cf. también Dummett (1995, p. 3-19). En términos generales, la explicación de lo que son *leyes*, “en la física, en las matemáticas y en la lógica”, lo vuelve a enunciar en un fragmento que probablemente era el último trabajo de su vida, incluido en la presente traducción bajo el título “Universalidad lógica” y que seguramente debía formar la cuarta parte de una serie de escritos que el propio Frege había intitulado *Investigaciones lógicas*.

¹⁴¹ Sluga (1980, p. 133).

muy brevemente, es justamente el pensamiento que expresa; esta es una de las claves para comprender la doctrina de Frege y un punto que tendremos que ver con algún detenimiento más adelante. El significado de la oración es su valor de verdad. Esta parte de la doctrina de Frege es la que más polémica ha causado; pero nuevamente: lo paradójico de esta idea se vuelve bastante menos paradójico si se toma en cuenta la noción que Frege tenía de la verdad como fundamento de todas las demás nociones epistemológicas.

La pregunta: “¿cómo nos pueden ser dados objetos lógicos (los números, por ejemplo) puesto que no podemos tener intuición de ellos?”¹⁴² Frege la contesta en los *Fundamentos* definiendo el número para el concepto F como la extensión del concepto ‘equinúmero al concepto F ’¹⁴³. Las funciones (los conceptos son casos especiales de funciones) no son entidades¹⁴⁴. “[S]u naturaleza es correlacionar argumentos con valores. Pero a través de la función se establece tal correlación, y la correlación puede ser considerada una entidad que tiene su propio criterio de identidad.”¹⁴⁵ Así como las funciones aritméticas correlacionan números con valores, los conceptos correlacionan objetos con valores de verdad. Lo importante que debe tomarse en cuenta aquí es que para Frege los conceptos son tan extensionales (y no, por ejemplo, intensionales) como sus extensiones. La diferencia no es que unos sean extensionales y los otros no, sino que los conceptos son incompletos o insaturados, mientras que sus extensiones están completas o saturadas. En otras palabras, ambos son caracterizados por ciertos objetos: los objetos que hacen verdaderos a los **conceptos**, respectivamente, los objetos de los cuales la **extensión** es el nombre de la verdad. Esta relación, es, para así decir, el meollo de la teoría fregeana, como él mismo lo dice

Hasta donde puedo ver, una discusión puede surgir únicamente acerca de mi ley básica de los rangos de valor (V), la cual quizá no haya sido formulada explícitamente por los lógicos, no obstante que se piensa de acuerdo a ella, e.g. cuando se habla de extensiones de conceptos. Yo la tengo por puramente lógica. **En todo caso se señala aquí el punto donde la decisión tiene que caer.**¹⁴⁶

Así como una extensión es una entidad saturada que corresponde a un concepto, ‘rango de valor’ designa más generalmente la entidad que corresponde a

¹⁴² Cf. Frege (1988, § 62, p. 73 [p. 71]). Es muy difícil evitar la impresión de que esta pregunta surge directamente teniendo en mente la discusión sobre la aritmética en los *Prolegomena* de Kant.

¹⁴³ Ídem, § 68, p. 79-80, [p. 76]).

¹⁴⁴ La gramática “superficial” nos obliga aquí una aparente contradicción, como también Frege observa una y otra vez. Pero, como ya hemos explicado más arriba, la confusión entre nombres conceptuales y nombres propios no puede ocurrir en el lenguaje simbólico, por lo que, para Frege, no hay ninguna contradicción real.

¹⁴⁵ Sluga (1980, p. 145).

¹⁴⁶ Frege (2009, VII); mi énfasis.

una función. Si dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ (o $\Phi(\xi)$) en el metalenguaje de las primeras secciones de los *Grundgesetze*) tienen los mismos valores para los mismos argumentos, entonces les corresponde el mismo rango de valores. Si escribimos dos diferentes funciones en los lados izquierdo y derecho de un signo de identidad, entonces no estamos diciendo que las funciones sean idénticas - cosa que es imposible dado su carácter predicativo - sino que más bien identificamos sus valores. En términos generales podemos decir entonces que el rango de valor de una función es idéntico al rango de valor de la otra función: esta es, en lenguaje natural, la ley básica V de las *Leyes Fundamentales de la Aritmética*, en símbolos:

$$\vdash (\xi f(\xi) = \alpha g(\alpha)) = (\neg \exists a f(a) \neq g(a))$$

con la cual Frege cree poder basar su demostración de los objetos lógicos en general y de los números como objetos lógicos en particular.¹⁴⁷

El principio enunciado primero en el lenguaje natural en los *Fundamentos de la Aritmética* y luego formulado en el metalenguaje de las primeras secciones de las *Leyes Fundamentales de la Aritmética* en primera instancia no genera en efecto un modo de identificar un objeto lógico particular mediante el nombre correspondiente. Donde Frege hace el intento de poner remedio a esta situación es en el § 10 del primer volumen de su *magnum opus*¹⁴⁸, según veremos en un momento más.

Insistimos: una función o un concepto no son saturados y requieren de un complemento a saber, un argumento. La marca del objeto es que es saturado o completo, y que puede ocupar el lugar de argumento en una función (o en un concepto). Un nombre de función es un signo que designa a lo primero, un nombre propio a lo segundo. Para no romper la conexión entre signo y verdad es vital asegurar que todo signo que se introduzca como nombre propio permita el reconocimiento de exactamente el objeto que nombra. Las dificultades para

¹⁴⁷ Frege anuncio esta ley básica de manera aparentemente inocua en el § 3 de *Grundgesetze*: “Yo uso las palabras: “la función $\Phi(\xi)$ tienen el mismo *rango de valor* que la función $\Psi(\xi)$ ” universalmente como sinónimas a las palabras “las funciones $\Phi(\xi)$ y $\Psi(\xi)$ tienen para el mismo argumento siempre el mismo valor.” [...] En funciones cuyo valor siempre es un valor de verdad, en lugar de ‘rango de valor de la función’ puede decirse, por consiguiente, ‘extensión del concepto’, y parece conveniente llamar **concepto**, plenamente, una función cuyo valor es siempre un valor de verdad.” Frege estipula en las siguientes secciones de *Grundgesetze* el aparato simbólico para expresar esta idea en conceptografía. En el § 10 se ocupa de la indeterminación (lo que Dummett (1995) y Ruffino (2002) llaman el problema de la permutación) que aqueja todavía esta sinonimia (véase la discusión en los siguientes párrafos), pero es hasta el § 20 que literalmente usa la expresión totalmente en signos de conceptografía). Es aquí evidente que Frege no distingue entre identidad y equivalencia, pues siempre se trata de que los signos designan uno y el mismo objeto.

¹⁴⁸ Me refiero, desde luego, a *Los fundamentos de la aritmética*.

cumplir esta exigencia se presentan de diferentes maneras. En los *Fundamentos* se conoce como el “problema de Julio Cesar”: Frege observa que la solución inspirada en la definición de Leibniz no permite decidir si “a un concepto acaso le corresponde el número ‘Julio Cesar’; y luego, como la pregunta de si Inglaterra es lo mismo que la dirección del eje de la Tierra. La función de semejantes preguntas aparentemente absurdas es, desde luego, no dejar duda de que las definiciones ofrecidas en ambos casos no logran su objetivo.¹⁴⁹

Cuando Frege empieza a poner en su lugar formalmente los primeros elementos para su sistema de las ciencias en las *Leyes Fundamentales de la Aritmética*, esta dificultad se le presenta de forma que la ley básica V no basta para reconocer un rango de valor como tal. Él da respuesta al problema en la § 10 de las *Leyes Fundamentales*. Para entonces ya se habían introducido en la (nueva) conceptografía como objetos únicamente valores de verdad y rangos de valor, así como nombres para las funciones ‘ $x=y$ ’ (relación de identidad), ‘ $_x$ ’ (función con un lugar de argumento) y ‘ $\neg x$ ’ (negación). El siguiente paso de Frege es reducir las demás funciones a ‘ $x=y$ ’ y responder a la pregunta: ¿cuáles son los valores que esta función puede tener, si uno de los argumentos es un rango de valor?¹⁵⁰ Para entender la pregunta y la reacción de Frege, algunas desviaciones son necesarias.¹⁵¹

Del ‘contenido juzgable’ a ‘sentido y significado’, y el principio contextual

El cambio en la doctrina de Frege entre 1884 y 1891 se refleja de manera importante en su tratamiento de las oraciones de identidad. No en balde en su ensayo sobre sentido y significado parte de una observación sobre la diferencia entre las oraciones “ $A = A$ ” vs. “ $A = B$ ”. Esto podría sugerir que la *Conceptografía* original y *Fundamentos* eran incapaces de explicar esta diferencia, por no haber distinguido

¹⁴⁹ Cf. Frege (1986, p. 67s. [p. 66s.] respectivamente p. 78 [p. 75]).

¹⁵⁰ Este punto Frege lo discute también en su carta a Russell del 28 de julio de 1902, citada más arriba. Russell había sugerido prohibir el uso de rangos de valor como argumento cuando el signo de este rango no significa un objeto real. Pero esta sugerencia, para Frege, carece de contenido: “Yo pienso que entonces usted tiene que prohibir ‘ $\epsilon\Phi(\epsilon)$ ’ totalmente. El nombre de una clase, pienso, que no carece de significado, significa un objeto. Al predicar algo de una pluralidad o de un conjunto, ésta se trata como un objeto. El nombre de una clase puede aparecer como sujeto de una oración particular y tiene entonces el carácter de un nombre propio.” (Frege 1980, p. 70). Lo que Russell entiende por ‘real’ como atributo de un objeto no halla comprensión en la respuesta de Frege.

¹⁵¹ Para una breve explicación de algunos otros signos de la conceptografía de Frege, véase el comentario sobre “Explicaciones sobre sentido y significado” más adelante.

entre *sentido* y *significado*.¹⁵² Pero ambas obras contienen, desde luego, explicaciones de esta diferencia que funcionan perfectamente. El cambio de doctrina en Frege obedece, más bien, a la necesidad de probar que la definición de 'número' ofrecida en los *Fundamentos* es una verdad lógica, algo que para nada era evidente allí.¹⁵³ Lo que Frege desea hacer ver es, a fin de cuenta, que los juicios aritméticos son analíticos en un sentido kantiano, y ello a pesar de Kant, para quien eran sintéticos. Para esto, lo que hay del lado izquierdo y del lado derecho de la ecuación, que expresan la igualdad de extensión de un concepto y una función bajo el dominio del cuantificador universal, tienen que tener el mismo contenido cognitivo, aunque analizable de manera diferente. Si Frege mantuviera la explicación de identidad establecida en la *Conceptografía* (1878) y en los *Fundamentos* (1884), esta identidad de contenido cognitivo no podría darse en un análisis que establece sentidos diferentes. Lo que se requiere es un nivel intermedio adicional, que permite representar un mismo contenido cognitivo mediante diferentes pensamientos, pero que tampoco sea todavía su valor de verdad. En la formulación del axioma V,

$$\vdash (\exists f(\varepsilon) = \alpha g(\alpha)) = (\exists a f(a) = g(a))$$

el pensamiento sobre rangos de valor es, después del análisis, el mismo pensamiento que trata de la satisfacción de funciones.

El relato anterior sigue esencialmente y en forma resumida el argumento de Hans Sluga¹⁵⁴. Dummett, hay que decirlo, no está de acuerdo¹⁵⁵. Es instructivo comparar la explicación de los motivos que, según Sluga, Frege tenía para introducir la distinción entre sentido y significado con la que Dummett ofrece unos 15 años después en un trabajo en el cual anuncia desde el principio que contiene

¹⁵² Dummett parece sugerir al menos ocasionalmente una lectura así. Cf., e.g., Dummett (1995, p. 5 s.).

¹⁵³ Cf. Sluga, (1980, p. 149 ss.).

¹⁵⁴ Cf. Sluga (1980, p. 149 ss.).

¹⁵⁵ Dummett ofrece una discusión detallada de los puntos de vista desarrollados por Sluga, por ejemplo, en Dummett (1981 y 1991a, *passim*). En estas obras, Dummett pone en duda muchos de los detalles que Sluga ofrece para ilustrar su punto de vista, que aquí hemos seguido de manera resumida. Gottfried Gabriel, editor de la selección cuya traducción aquí ofrecemos, piensa que a pesar de las fallas señaladas quizá atinadamente por Dummett, las observaciones y sugerencias de Sluga apuntan en la dirección correcta y son rescatables en su esencia. Cf. Gabriel (2002, todo el artículo, en particular p. 39). El argumento de Baker y Hacker (véase la nota de pie de página 110 arriba) difiere del de Sluga, pero Dummett los acusa también de no darse cuenta de la incompatibilidad de las doctrinas de Frege antes y después de 1891. Cf. Dummett, "An Unsuccessful Dig A review of G. P. Baker and P. M. S. Hacker, Frege: Logical Excavations" y "Second Thoughts. A revised version of a Reply to "Dummett's Dig", by Baker and Hacker" en Dummett (1991, p. 158 – 216).

varios cambios de puntos de vista.¹⁵⁶ Dummett parece mantener, en primera instancia, una postura que se propuso ya desde sus primeros comentarios exegeticos sobre Frege. Me refiero a que, según él, Frege estaba terriblemente confundido al no distinguir entre signo, significado y objeto y que finalmente despertó a la verdad y creó, a partir de 1891, una teoría lógica sensata, incomparable con la que había previamente construido, introduciendo la noción de *Sinn*, justamente en el papel que 'significado' tiene en la filosofía del lenguaje analítica estándar.

El tema principal del trabajo de Dummett, como lo dice su título, es el así llamado 'principio contextual', que ya hemos mencionado de paso en diversos momentos, y la pregunta crucial es: ¿qué sucede con este principio, una vez que una de las suposiciones principales en que se basaba desapareció? A partir de 1891 ya no hay en la doctrina de Frege nada como el "contenido juzgable" y en su lugar quedan "sentido" y "significado"¹⁵⁷. Este cambio importante, junto con el hecho de que Frege después del cambio no vuelve a mencionar el principio contextual, podría invitar, según Dummett, a suponer que Frege lo abandonó. Dummett trata de demostrar lo contrario. Él identifica el principio contextual en los *Fundamentos* con la posibilidad, enunciada por Frege en la sección 65, de dar con los números cardinales mediante la explicación del sentido de proposiciones de identidad numérica. Partiendo entonces de su análisis del papel que la distinción de sentido y significado juega en la doctrina de Frege, Dummett llega a la conclusión de que la explicación de expresiones conteniendo números cardinales ofrecida en los *Fundamentos* no puede dar más que signos que tienen el **sentido** de números cardinales, pero no los **objetos** (saturados) que Frege busca. Pasando por encima del hecho que para Lotze y para Frege el pensamiento es un objeto (de hecho, *el* objeto lógico paradigmático), una entidad objetiva, aunque espacio-temporalmente no real, Dummett afirma que es la ausencia de la distinción entre el significado del signo y el objeto lo que evita que Frege se percate de que tiene un problema ontológico. Con esta idea de fondo, Dummett procede a explicar que Frege resuelve su problema recurriendo al principio contextual, sin mencionar explícitamente nada que se le parezca, en la sección 10 de las *Leyes Fundamentales*.

Dummett ya no menciona a Sluga en sus reflexiones de 1995 sobre el principio contextual, pero parece coincidir ahora con su antiguo alumno en algunos de sus principales temas sobre cómo leer a Frege: Dummett parece aceptar ahora que la preocupación filosófica principal de Frege era demostrar la

¹⁵⁶ Dummett (1995, nota 1).

¹⁵⁷ Dummett prescinde en el trabajo referido de una traducción del término y lo deja en alemán: "Bedeutung".

posibilidad de objetos lógicos (contrariamente a la doctrina de Kant). También presenta ahora como una consecuencia natural de la doctrina general de Frege que las oraciones son nombres de los objetos fundamentales y que todo usuario del lenguaje tiene que conocer su significado, ya que no puede hacerse explícito. Dummett describe así el cambio profundo entre los *Fundamentos* y las *Leyes Fundamentales* en relación al principio contextual:

En *Grundlagen*, el principio contextual se presenta como proveyendo [los medio para justificar la existencia de objetos lógicos]; pero el objetivo permanece en la incertidumbre, ya que se deja sin aclarar si Frege pensó que tiene el derecho de tomar la noción de la extensión de un concepto como dada sin necesidad de ninguna justificación adicional. En *Grundgesetze*, esta ambigüedad queda resuelta. Todos los objetos matemáticos han de presentarse como rangos de valor; pero los rangos de valor no pueden tomarse como dados, sino requieren una justificación, la cual depende de una forma fuerte del principio de contexto.¹⁵⁸

Dummett aprovecha el argumento para rechazar (una vez más) la sugerencia de van Heijenoort y Hintikka en el sentido de que Frege habría negado la posibilidad de toda teoría semántica porque tomaba la lógica por un lenguaje y éste, como para Wittgenstein, como el medio universal. Pero aquí nuevamente el rechazo de Dummett es más reservado en comparación con ocasiones anteriores: él parece ahora conceder el punto principal de ambos comentaristas, a saber, que para Frege toda explicación semántica es interna al lenguaje; en pocas palabras: cualquier intento de explicación requiere algunas de las nociones que se tratan de explicar. Dummett de todos modos encuentra formas de refutar los argumentos específicos que ellos ofrecen. A pesar de que Frege emplea el alemán como metalenguaje para explicar los términos de la conceptografía y su significado, dice Dummett ahora, esta explicación no requiere de ningún conocimiento del lenguaje excepto los dos valores de verdad:

Su estrategia era fijar indirectamente los *Bedeutungen* de los términos del lenguaje formal, por medio de estipulaciones que determinan los valores de verdad de todas sus oraciones; ... si se excluyen estipulaciones directas, formuladas en algún lenguaje ya conocido, entonces no puede haber otro medio para llegar a conocer los *Bedeutungen* de los términos básicos de cualquier lenguaje. El principio de contexto seguía ocupando su lugar en el centro del pensar fregeano, con toda la fuerza que tenía en *Grundlagen*; distinguir entre *Sinn* y *Bedeutung* no había debilitado en lo más mínimo su fe en él.¹⁵⁹

Dummett, a pesar de que considera fallido el intento de Frege de asegurar un significado a todos los términos de la conceptografía a causa de la circularidad de su demostración, concluye su comentario sobre el principio contextual como el núcleo de la filosofía de Frege con una sorprendente admisión:

¹⁵⁸ Dummett (1995, p. 14).

¹⁵⁹ Dummett (1995, p. 16).

Se podría desechar la interpretación realista [de la filosofía de Frege] sin abandonar el principio contextual mismo, pero únicamente si se puede demostrar que este principio, tal como se entiende en la actualidad, es coherente; y esto permanece fuertemente dudoso. ... Me veo por lo tanto forzado a concluir sin avalar la característica central de la filosofía de Frege ni rechazarla; no puedo hacer más que decir con poca determinación que la resolución de este tópico es de primera importancia para la filosofía.¹⁶⁰

Es importante tener en cuenta que Frege pensó que no era posible establecer los fundamentos de la aritmética –ni de la ciencia en general- ofreciendo únicamente explicaciones en lenguaje natural. La construcción del sistema tiene que darse en un lenguaje simbólico que no permite imprecisiones, y el lugar donde empieza esta construcción en serio es *Las Leyes Fundamentales de la Aritmética*. Los comentarios en el lenguaje natural entre las demostraciones formales sólo sirven para la comodidad y la orientación del lector, pero son imprecisos por la naturaleza del lenguaje, en el cual se dan. Sólo las demostraciones en formuladas en conceptografía son decisivas.

De ahí la importancia del intento de Dummett de demostrar que el *principio contextual*, enunciado en lenguaje natural en *Los Fundamentos de la Aritmética*, sigue vigente en la construcción formal del sistema, aun después de que Frege haya abandonado la noción de ‘contenido juzgable’ por ‘la horizontal’, la cual en la nueva conceptografía es la marca de un concepto y señala que este concepto tiene siempre un sentido y que su valor es siempre un valor de verdad.¹⁶¹

Si es correcto que la motivación de Frege es fundamentalmente kantiana o neo-kantiana, según he mantenido –siguiendo en esto a Hans Sluga, Gottfried Gabriel y varios otros- lo que se llama el **principio contextual** es tan inherente a su método de análisis, que está entonces inevitablemente implícito en la formalización del sistema. La demostración de Dummett no es definitiva¹⁶² y queda pendiente una investigación y demostración más detallada para probar semejante hipótesis.

Comentario final

El argumento principal del presente comentario es que Frege no se puede comprender exclusivamente tratando de reconstruir su doctrina desde un punto de vista de filosofía analítica contemporánea. Considerando la lectura que

¹⁶⁰ Dummett (1995, p. 19). Esta interpretación de Dummett no ha quedado sin respuesta, como era de esperarse. Sólo menciono dos, a guisa de ejemplo: Ruffino (2002) que propone explicar la asignación de nombres a objetos lógicos en §10 de *Leyes fundamentales* sin recurso al principio de contexto. Y Dejnožka (2010), quien acusa a Dummett de promover una lectura de Frege que favorece su propia versión de intuicionismo matemático. No podemos ampliar estos comentarios por motivos de espacio y tiempo.

¹⁶¹ Introducción mencionada sin mayor explicación en Frege (2009, p. 9), desechando la noción introducida en su *Conceptografía* de 1879 en una breve nota de pie de página.

¹⁶² Cf. e.g. Dejnožka (2010).

actualmente parece dominar la discusión, sobre todo en español, me parece, efectivamente, más urgente señalar que es plausible sostener que Frege desarrolló sus convicciones filosóficas a partir de la discusión entre naturalistas y aprioristas que dominaba la escena intelectual de Alemania en sus años de formación. Él se forjó a partir de ahí una doctrina original que desembocó en una forma totalmente nueva de pensar. Una forma nueva de pensar, que –junto con las ideas originales de Russell y Moore- puede verse como un origen (la parte “continental” del origen) de la filosofía analítica.¹⁶³ A pesar de todas las diferencias doctrinales, Frege puede pasar como el primer filósofo analítico al menos en el sentido que Sluga apunta en su refutación de Hans Natorp: “... Frege se adelantó a la aparición de un nuevo tipo de filósofo - el filósofo como profesional, especialista y lógico. Es precisamente el tipo que llegó a su maduración en la tradición analítica.”¹⁶⁴

Frege era, en su origen, un pensador neo-kantiano y hasta sus últimos días justificó sus creencias en términos kantianos. Su preocupación principal era, como Dummett observó en el breve texto citado, justificar la postulación de objetos lógicos, *i.e.*, de objetos que no dependen de la intuición en un sentido kantiano. La relación entre los términos singulares y los objetos que designan depende del contexto mínimo en el cual los nombres propios pueden tener sentido, esto es, la oración y, por consiguiente, el pensamiento. Este sentido del nombre propio es lo que determina su significado. Pero lo que no hay que perder de vista es que la doctrina de Frege es primordialmente una doctrina sobre oraciones y pensamientos.

Si se lee a Frege bajo la suposición tácita de que lo que él propone es una teoría de la referencia (o que la doctrina tiene que ser de la referencia para que se le pueda dotar de algún sentido), lo que a su vez inspira la traducción, en mi opinión desafortunada, de ‘Bedeutung’ como ‘referencia’, entonces esta traducción a su vez parece validar la suposición original, como observa Hans Sluga¹⁶⁵. Pero Ernst Tugendhat ya había observado en 1970:

La reproducción en inglés del término de Frege ‘*Bedeutung*’ como ‘referencia’... es totalmente errónea, de la misma manera como las reproducciones anteriores ‘denotación’ y ‘nominatum’. ... Los traductores prefirieron privar al lector inglés de la sorpresa que todo lector alemán experimenta con esta palabra en la primera lectura de ‘*Über Sinn und Bedeutung*’. Ellos escogen anticipar una respuesta, y, haber hecho esto, es probablemente peor de que resulta ser la respuesta equivocada.¹⁶⁶

¹⁶³ Cf. Dummett (1993).

¹⁶⁴ Sluga (1980, p. 61); Cf. nota de pie de página 2.

¹⁶⁵ En un pasaje inmediatamente anterior a la cita de Tugendhat que sigue.

¹⁶⁶ Tugendhat, E. ‘The Meaning of “*Bedeutung*” en Frege, *Analysis*, vol. 30, 1970, p. 177, citado según Sluga (1980, p. 158).

El propio Hans Sluga, curiosamente diez años después de esta aseveración de Tugendhat, concluye que ‘referencia’ es un término demasiado habitual para cambiarlo. La discusión sobre cómo traducir ‘Bedeutung’ en Frege tiene una muy larga y variada historia que por motivos de espacio no detallaremos aquí.¹⁶⁷ Afortunadamente, al menos en cuanto a la filosofía en inglés, un poco más de otros treinta años después podemos decir con alguna confianza que hay conciencia amplia de que ‘reference’ es problemático y que es más apropiado usar ‘meaning’ o, más frecuentemente, dejar el término sin traducir, como muestra la mayoría de las publicaciones sobre el tema en inglés en los últimos veinte años, aunque, desde luego, hay otros eruditos que insisten en usar el término tradicional. Estudiosos como Gabriel, Schulte, Patzig, Sluga y varios otros señalaron la continuidad del pensamiento neo-kantiano en el proyecto intelectual de Frege. Desde los años 70 del siglo pasado está claro que interpretar ‘Sinn’ como cumpliendo en la obra de Frege el trabajo que ‘meaning’ tiene en inglés en lo que Dummett llama la doctrina estándar, y por consiguiente, ‘Bedeutung’ el de ‘reference’ es, cuando menos, una lectura desequilibrada de las intenciones de la doctrina fregeana. Este reconocimiento no ha penetrado todavía en la discusión sobre la filosofía de Frege en el mundo de habla hispana, aunque desde luego hay eruditos que nunca se creyeron las interpretaciones de Geach, Black y Kripke, como *e.g.*, el argentino Ignazio Angelelli, de la Universidad de Texas, quien siempre ha insistido en traducir ‘Bedeutung’ como ‘significado’, simplemente para ser congruente con la doctrina de Frege en alemán, o José Luis Roller, quien prefiere ya desde 1981 dejar el término sin traducir.¹⁶⁸

En opinión del autor de estas líneas no queda duda de que la traducción de ‘Bedeutung’ como ‘significado’ facilita la comprensión de Frege mucho más que su traducción como ‘referencia’. Es por este motivo que he optado por romper con una tradición literaria especializada bien establecida en español y traducir ‘Bedeutung’ con su equivalente natural en español: ‘significado’. Estoy convencido de que esta decisión hace posible algo que la traducción convencional dificulta: comprender la motivación filosófica que da lugar a la obra a la que Gottlob Frege dedicó el esfuerzo de prácticamente toda su vida intelectual. Mientras la discusión tradicional de la filosofía de Frege muestra principalmente lo inacabado y contradictorio de su construcción de sistema, este trabajo se esfuerza para mostrar

¹⁶⁷ Cf. el comentario de Michael Beany, en Frege (1997, p. 36-46), pero también Angelelli (2000). Una defensa de la traducción como ‘reference’ se encuentra en Bell (1980).

¹⁶⁸ Angelelli (2000), Roller (1981). El plan de Roller es reconstruir aspectos de la doctrina de Frege como teoría de modelos; esto puede tener su propio valor, pero no es en el sentido del presente comentario. Si y cómo se relaciona esta intención con su decisión de no traducir ‘Bedeutung’ no es algo que se analiza aquí.

cómo el filósofo de Wismar pensaba armar un sistema a partir de elementos que tomó de la filosofía de sus tiempos y que fue transformando de manera creativa, quizá genial, para convertirse de esta manera a sí mismo en el primer filósofo analítico.

Las piezas incluidas en la presente traducción¹⁶⁹

Al morir, Gottlob Frege le dejó sus trabajos no publicados, así como fragmentos de escritos y la correspondencia científica, a su hijo adoptivo, Alfred Frege. La mayor parte de este legado llegó finalmente (en 1943) a la biblioteca de la Universidad de Münster para protegerla de los bombardeos aliados y ello sin éxito, ya que la Universidad fue gravemente dañada en un bombardeo del 25 de marzo de 1945 y todo el legado de Frege se quemó. Afortunadamente, Heinrich Scholz, quien tenía los documentos originales en su poder y preparaba su publicación hasta que el inicio de la Segunda Guerra Mundial impidió la continuación del trabajo, había hecho copias mecanografiadas de la mayoría de los documentos. Lo que hoy se conoce como el legado de Frege está basado casi en su totalidad en estas copias producidas por Scholz y sus colaboradores.

[Diálogo con Pünjer sobre la existencia.]

Bernhard Pünjer (1850-1885) era un teólogo protestante, colega de Frege en Jena. Los editores del legado de Frege suponen que la primera parte de este fragmento es el protocolo de un diálogo que efectivamente se llevó a cabo entre 1880, año en que Pünjer empezó su profesorado en Jena, y 1883. Un tratamiento más formal pero más concentrado del tema de la existencia, desde el punto de vista lógico, se encuentra en *Los Fundamentos de la Aritmética*, § 53, por lo que este diálogo puede leerse como un complemento interesante para ese pasaje. Para Frege la existencia es un concepto de segundo orden o de segundo nivel, según su terminología más reciente, y la influencia de Kant o la concordancia con su punto de vista sobre el tema es bastante evidente. Un comentario más amplio sobre este diálogo y sobre el tema de la existencia en Frege se encuentra, por ejemplo, en Haaparanta (1986) y en "On Frege's Concept of Being"; Haaparanta, L.; en Knuutila, S. and Hintikka, J. (eds.): *The Logic of Being: Historical and Critical Studies*, D. Reidel, Dordrecht; 1985.

[17 Enunciados claves sobre la lógica] [1882]

Gottfried Gabriel comenta en la edición cuya traducción se presenta aquí sobre esta pieza (nota 1 y 3, p. 174 s.) que él deduce la fecha de elaboración indicada (que difiere de la de los editores del legado de Frege) por haberse encontrado junto con las notas del diálogo con Pünjer, y porque menciona, igual que en estos apuntes, el nombre 'Leo Sachse; además observa que a más tardar a partir de "Sobre sobre el Sentido y el Significado" (*Bedeutung*)" de 1892, Frege usa

¹⁶⁹ La siguiente información sobre las piezas incluidas en la presente selección es en gran parte un resumen de los comentarios y notas de los editores y colaboradores de Frege (1983) y de Frege (2001).

el término “designar” `de un modo diferente de cómo lo usa en este breve apunte: allí se dice que una expresión designa a su significado y expresa su sentido. Por lo que Frege diría, de acuerdo con esta distinción, que “la oración ‘Leo Sachse es un hombre’” es la expresión de un pensamiento sólo si ‘Leo Sachse’ expresa un sentido. Que ‘Leo Sachse’ además designe algo de acuerdo con Frege es sólo una *condición previa* para que el pensamiento sea verdadero o falso y un pensamiento que no es ni verdadero ni falso pertenece al reino de la poesía.

Dummett dedica todo un capítulo a este breve pasaje en *Frege and Other Philosophers*. Él nota un fuerte parecido entre estas notas y la introducción a *Logik* de Hermann Lotze y sugiere que esta pieza debe ser inclusive anterior a la concepción de la noción de “contenido”, tal como Frege la introduce en su *Conceptografía*, y que ya desde entonces Frege trató en estas notas de avanzar más allá de las nociones heredadas de Lotze. En este escrito, Dummett rechaza rotundamente que la influencia de Lotze en la formación de las ideas sobre lógica de Frege podría ser algo más que un punto de partida, muy contrariamente a la opinión de Hans Sluga. La conclusión final de Dummett sobre la filosofía de Lotze al menos en 1981 se cita en la nota de pie 52 arriba.

Explicaciones sobre sentido y significado

Los editores del legado de Frege comentan que este trabajo es la segunda parte de un legajo con el título “Lógica Schroederiana”, que existía en forma completa hasta la destrucción del legado de Frege. La primera parte era un borrador para el artículo sobre el álgebra de lógica de Schroeder¹⁷⁰.

Esta pieza expone en general una vez más los motivos que Frege tenía para considerar como fundamental para toda la lógica su distinción entre objetos saturados y la parte predicativa, insaturada de las oraciones. Así, por ejemplo, sobre la observación de Frege “Las palabras ‘todos’ y ‘algunos’ que acompañan al sujeto gramatical pertenecen, en cuanto al sentido, al predicado gramatical tal como se detecta cuando se hace la transición a la negación (no todos, nonnulli)” comenta Gabriel:

Frege se refiere a la siguiente situación: la negación de “Aristóteles es filósofo” es “Aristóteles no es filósofo”. La negación, en cambio de “todos los triángulos equiláteros son equiángulos” de ninguna manera es “todos los triángulos equiláteros no son equiángulos”. Aquí la negación puede formarse de la misma manera como en el primer ejemplo si se analiza la oración como enunciado de la *subordinación* de un concepto bajo otro concepto: “el concepto ‘triángulo equilátero’ está subordinado al concepto ‘triángulo equiángulo’. Cf. los comentarios detallados sobre este punto en *Sobre concepto y objeto*, p. 198.¹⁷¹

¹⁷⁰ “Kritische Beleuchtung einiger Punkte in E. Schröders Vorlesungen über die Algebra de Logik”; Archiv für system. Philosophie 1, 1895, p. 433-456; reimpresión en Frege (1976); Frege (1990).

¹⁷¹ Frege (2001, p. 176, nota 8). La referencia es a la publicación original en *Vierteljahresschrift für wissenschaftliche Philosophie XVI* (1892) pp. 192-205. Reimpresión en Frege (1990) y Frege (2008).

Esta pieza es interesante también porque aclara cómo la distinción entre sentido y significado, que sólo vale para nombres de objetos, puede ser extendida a nombres de conceptos. Los pormenores de esta distinción se aclaran en las primeras secciones de los *Grundgesetze*. Allí, sin embargo, tampoco explica la expresión

$$(\alpha^2 = 1) \overset{\alpha}{\underset{\text{X}}{\text{X}}} ((\alpha + 1)^2 = 2(\alpha + 1)).$$

usada en este fragmento para expresar en la conceptografía el pensamiento “bajo el concepto de *raíz cuadrada de 1* cae todo objeto que cae bajo el concepto de *todo lo que es menor en 1 que un número cuyo cuadrado es igual al doble de él, y viceversa*”. Los editores sugieren que tal explicación pudo haberse dado en la primera parte, ahora destruida, del legado.

El uso de los otros signos que aparecen en el párrafo referido, que Frege estipula en detalle en *Grundgesetze* y, con excepción del signo para rango de valor, también habían sido ya empleados en *Begriffsschrift*. Gabriel lo explica como sigue:

El signo de Frege para el cuantificador universal es una cavidad que interrumpe la barra horizontal. La variable ligada por el cuantificador universal está encima de la cavidad ... y se simboliza en Frege siempre con una letra alemana.

El *spiritus lenis* sobre la primera ε y la primera α en [estas] fórmulas es el signo de Frege para el operador de rango de valor. La variable ligada por el operador de rango de valor está debajo del *spiritus lenis* y se simboliza en Frege siempre mediante letras minúsculas de vocales griegas. ... Las extensiones de conceptos Frege los considera como rangos de valor de conceptos, de acuerdo con su concepción de que los conceptos son funciones (de una variable) cuyo valor es siempre un valor de verdad.¹⁷²

Lógica [1897]

Tanto Gottfried Gabriel como los editores del legado de Frege, sugieren que este trabajo es un primer intento de redactar un libro sobre la lógica. Frege volvió a intentarlo mucho después en una serie de publicaciones y un fragmento no publicado, a partir de 1919, que se encuentran resumidos en *Investigaciones Lógicas* (Frege 1976). En cuanto a la imposibilidad de definir ‘verdadero’ que Frege aquí defiende, los editores del legado de Frege observan que “en una fundamentación semántica de la lógica se hace uso de una “definición” de la verdad, a pesar de la afirmación de Frege. ... Frege, sin embargo, no hablaría aquí de una definición,

¹⁷² Frege (2001, p. 176, notas 12 y 13). En la introducción de Frege (1983) se encuentra una explicación breve del simbolismo básico de Frege, elaborada por H. Hermes, en términos de la concepción actual de la lógica.

puesto que el “esquema de definición” de Tarski no realiza ninguna descomposición ni ninguna composición del sentido de la palabra ‘verdadero’”.¹⁷³

Frege no tiene en su conceptografía ningún símbolo que exprese ‘verdadero’; tampoco en el lenguaje natural, piensa, es más que una expresión florida: “La forma de la oración afirmativa es entonces propiamente con lo que enunciamos la verdad, y ni siquiera requerimos de la palabra ‘verdadero’. Hasta podríamos decir: inclusive cuando usamos la expresión ‘es verdad que...’, lo que es realmente esencial es la forma de la oración afirmativa.”¹⁷⁴ Gabriel observa que, a pesar de que Frege mantiene una y otra vez que ‘verdadero’ no es un predicado, habla en esta pieza con toda naturalidad de ‘verdadero’ como predicado. Esto, sin embargo, no es ni una contradicción ni una retractación, sino simplemente una manera de hablar, algo que no se presenta donde cuenta, que es en la conceptografía.

Introducción a la lógica

Igual que el borrador anterior, este escrito es en parte una versión previa de los trabajos publicados a partir de 1919 con la aparente intención de componer una *Investigación Lógica*. Pero a diferencia de “Lógica”, “Introducción a la lógica” (y también “Breve panorama de mis doctrinas lógicas”, redactada igualmente en 1906 y que parcialmente coincide con este texto¹⁷⁵) fue redactada posteriormente a la correspondencia entre Russell y Frege de 1902 y después de que el autor conociera los comentarios críticos en el Apéndice A de *The Principles of Mathematics*. Este no es el lugar para una discusión detallada de estas cuestiones, pero vale la pena enfatizar que Frege se mantuvo en su punto de vista en muchos de los elementos principales de su doctrina, como por ejemplo la necesidad de separar la afirmación del predicado, y evidentemente no concordaba con la sugerencia de Russell de que esta separación sea un desliz de la lógica en dirección al psicologismo.¹⁷⁶ Ya no

¹⁷³ Véase también la objeción de Sluga arriba. Además, si van Heijenoort, Hintikka y los demás comentaristas de su escuela tienen razón en su postulación de una actitud de Frege hacia la lógica como medio universal, o también si la sugerencia de Dummett (1995) sobre el uso de un metalenguaje en *Grundgesetze* es correcta, Frege no podría reconocer la definición de Tarski tampoco por no ser, realmente, una definición de la verdad en un lenguaje objetivo.

¹⁷⁴ Wittgenstein está de acuerdo con Frege en el *Tractatus* en que no se puede predicar la verdad de una oración, pero rechaza que los valores de verdad sean objetos y el significado de las oraciones; Cf. *Tractatus* § 4.431. También rechaza como insignificante para la lógica el uso que Frege (y Russell) hacen del signo de afirmación; Cf. *Tractatus* § 442. En general, varios aspectos del desarrollo de la visión de la lógica de Frege a Wittgenstein se discuten, por ejemplo, en *From Frege to Wittgenstein, Perspectives on Early Analytic Philosophy*; Erich H. Reck, ed.; Oxford University Press, 2002.

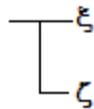
¹⁷⁵ Frege (1979, p. 213-218).

¹⁷⁶ Cf. Russell: “Si consideramos, digamos, ‘César murió’ parecería que lo que se asevera es el concepto proposicional ‘la muerte de Cesar’, no ‘la verdad de la muerte de Cesar’. ... hay una gran

hace mención, sin embargo, de la identidad de extensiones de conceptos y de cursos de valores (la ley básica V de *Grundgesetze*) de la cual Frege pensaba que era culpable de la posibilidad de la “paradoja de Russell” en su sistema.

Este escrito inconcluso aclara además, sin dejar mucha duda, que los nombres particulares fregeanos no son referenciales: en el análisis de la oración en nombre particular y predicado el primero **no** corresponden el objeto del cual se predica algo y al segundo el concepto bajo el cual cae, sino que ellos son las partes saturada e insaturada que por separado no son nada, pero que juntos forman un pensamiento, siendo el carácter insaturado del concepto lo que garantiza la unidad del pensamiento, en un sentido reminiscente de Kant, si se toma en cuenta que los neokantianos del siglo XIX no aceptaron la distinción kantiana entre *noumenon* y *phaenomenon*: “Pero no se puede decir que el objeto sea parte del pensamiento a la manera como el nombre propio es parte de la oración correspondiente. El Monte Blanco con sus masas de nieve y hielo no es parte del pensamiento de que el Monte Blanco tiene más de 4000m de altura, sino que sólo se puede decir que, considerados de un cierto modo que todavía tenemos que examinar, a los objetos les corresponde una parte del pensamiento (sentido y significado). A través del análisis de pensamientos singulares se obtienen los componentes del modo saturado e insaturado que ciertamente no se dan por separado; pero cada componente de una clase conforma un pensamiento en combinación con cada uno de la otra clase.”¹⁷⁷

En adición a los signos explicados en “Lógica”, Frege hace mención aquí también de la “barra condicional”, que es la principal responsable de la extensión extrañamente bidimensional del lenguaje simbólico de Frege, al cual muchas veces se culpa de que por poco funcional no se impuso. En *Grundgesetze* Frege explica que este signo



“ha de tener como valor lo falso, si el argumento ζ es lo verdadero y se designa como argumento ξ cualquier objeto, que no sea lo verdadero; en todos los demás casos, el valor de la función ha de ser lo

dificultad de evitar aquí elementos psicológicos...” (1937, p. 503 s. [478]). De la explicación estricta de la barra de juicio que Frege ofrece en *Grundgesetze* es evidente porque no piensa que podría ser un desliz psicologista: la barra del juicio meramente indica que la expresión que antecede significa “lo verdadero”, mientras que la misma expresión sin la barra del juicio significa cualquiera de los dos valores de verdad.

¹⁷⁷ Véase el texto más adelante.

verdadero.”¹⁷⁸ La barra condicional es entonces aproximadamente el distintivo de un conector lógico que en lógica actual marcaría la implicación material. Si Frege habla aquí de ‘argumento’, se refiere únicamente al objeto designado por ‘ξ’, respectivamente ‘ζ’, que completan el concepto señalado mediante la barra horizontal que los precede en cada caso.

Bajo el subtítulo “universalidad” se encuentra el siguiente comentario de Frege: “A través del análisis de pensamientos singulares se obtienen los componentes del modo saturado e insaturado que ciertamente no se dan por separado”. Semejantes observaciones se encuentran también en “Über die Grundlagen der Geometrie II” y en “Booles rechnende Logik und die Begriffsschrift”:

En lugar de juntar el juicio de una cosa aislada como sujeto y concepto, formado previamente como predicado, descomponemos inversamente el contenido juzgable y obtenemos así el concepto. Ciertamente, la expresión del contenido juzgable tiene que estar estructurado de antemano para que pueda descomponerse así. De esto puede concluirse que al menos las propiedades y relaciones que no son más analizables tienen que tener designaciones simples propias. De esto no sigue, sin embargo, que representaciones de estas propiedades y relaciones sean formadas por separado de las cosas, sino éstas surgen al mismo tiempo con el primer juicio por medio del cual son adjudicadas a cosas. Sus designaciones, por consiguiente, nunca se presentan aisladas en la conceptografía, sino siempre en combinación que expresan contenidos juzgables.¹⁷⁹

Gabriel interpreta estos pasajes como “rechazo de una interpretación desequilibrada de un posible ‘atomismo lógico’”. Frege, desde luego, no niega que el lenguaje esté compuesto de elementos constructivos, como se verá claramente en un pasaje de la siguiente pieza que a continuación se mencionan.

La lógica en las matemáticas

Se cree que esta pieza, la más extendida de toda esta colección, se redactó en preparación de un curso que Frege dio en 1914 en Jena; en este curso participó Rudolf Carnap y sus apuntes se publicaron bajo el título de *Lecciones sobre la Conceptografía (Vorlesungen über Begriffsschrift)*, en 1914 en Jena¹⁸⁰. En este texto, Frege nuevamente presenta una crítica extensa de los puntos de vista desarrollados por sus colegas matemáticos, en particular sus intentos infructuosos de definir el concepto de número. Pero también se ve como un intento por reformular sus

¹⁷⁸ *Grundgesetze*, § 12. Esta explicación de la conexión de los valores de verdad en una oración compuesta es vagamente análoga a la que Wittgenstein da de las tablas de verdad en el *Tractatus*, § 4.442. El uso de los signos, desde luego, es diferente. Las letras griegas aquí sólo pueden ser objetos, y los únicos objetos que Frege ha introducido a estas alturas son los valores de verdad.

¹⁷⁹ Frege 1983; p. 18 s.

¹⁸⁰ Véase nota de pie 66.

propias doctrinas sobre la lógica después del derrumbe de su programa logicista a causa del descubrimiento de Russell de que su sistema era inconsistente.

Lo que ahora encontramos son formulaciones cautelosas como “¿Hay acaso deducciones peculiares de las matemáticas que justamente por ello no se sometan a la lógica? Así, se puede señalar la inferencia de n a $n + 1$, la inducción de Bernoulli.” Gabriel observa que anteriormente (e.g. explícitamente en “Booles rechnende Logik und die Begriffsschrift”) Frege simplemente hubiera incluido la inducción de Bernoulli entre las leyes universales de la lógica, en concordancia con su tesis logicista.

Mientras Frege vio la lógica como el medio universal supremo o último, como ya observaron van Heijenoort, Hintikka y otros¹⁸¹, también defendió la relatividad de los axiomas *vis à vis* el sistema entero del que forman parte: “Entonces también depende del sistema si una verdad es un axioma; y es posible que una verdad sea un axioma en un sistema y no en otro” puesto que en otro puede demostrarse, con lo que deja de ser un axioma. Comenta Gabriel: “Parece entonces que Frege no comparte la concepción del axioma que se encuentra e.g. en *Aristóteles, Pascal y Husserl*. Según esta concepción clásica, un axioma se distingue de otras oraciones porque proporciona un grado máximo de comprensión directa en la ‘naturaleza de la cosa’ en cuestión, e.g., en la naturaleza de las relaciones espaciales.”¹⁸²

Como ya se hizo notar, en “Lógica en las Matemáticas” Frege habla explícitamente de los elementos que componen la oración y que corresponden de alguna manera a los elementos que componen los pensamientos:

El poder del lenguaje es maravilloso. Por medio de unos cuantos sonidos y combinaciones de sonidos es susceptible de expresar una enorme cantidad de pensamientos incluyendo pensamientos que nunca antes fueron captados y expresados por ningún hombre. ¿Qué es lo que hace posible ese poder? El que los pensamientos se construyan por medio de ladrillos de pensamiento. Y estos ladrillos corresponden a los grupos de sonidos a partir de los cuales se construye la oración que expresa el pensamiento, de modo que a la construcción de la oración a partir de las partes de oración corresponde la construcción del pensamiento a partir de las partes de pensamiento. Y se puede llamar a la parte de pensamiento el sentido de la correspondiente parte de oración, así como se considerará el pensamiento como el sentido de la oración.

Se podría pensar que en este pasaje se reivindica plenamente la lectura unilateral de lo que Kripke (en el pasaje comentado en la parte sobre Frege como primer

¹⁸¹ Cf. e.g. Hintikka (1986, p. 1) con referencia a: van Heijenoort, J.; “Logic as language and logic as calculus”, *Synthese*, vol. 17 (1967), pp. 324-30. Como se observó en el comentario precedente, Dummett (1995) al menos en cierto grado coincide con ellos, aunque sin admitirlo explícitamente.

¹⁸² Frege (2001, p. 181s., n. 4).

filósofo analítico) llama ‘el principio de Frege’. Pero hay que estar consciente de que Frege niega rotundamente que tales “ladrillos de pensamiento” sean independientes del pensamiento al que pertenecen. Lo que les da sentido a estos ladrillos es el pensamiento entero, como se ha venido insistiendo a lo largo de todo el comentario anterior. Según también se ha observado, esta noción, clave para entender la visión de la lógica de Frege, es lo que en su doctrina queda, para así decir, de la unidad del pensamiento en Kant, y no se mantiene en la filosofía analítica contemporánea

La fuerza dominante para la concepción de la lógica fregeana es la del principio contextual, que a su vez es consecuencia directa del análisis de todo pensamiento en un elemento saturado y una parte predicativa, necesitada de complemento, idea que plausiblemente parece inspirada en la formación kantiana o neo-kantiana de Frege¹⁸³. La idea dominante del principio contextual tiene la inesperada consecuencia, por ejemplo, de que Frege no pueda reconocer dominios de objetos anteriores al análisis lógico, lo que marca una diferencia enorme respecto a la visión de Russell, de qué es lo que el análisis lógico debe lograr. De ahí que muchas de las similitudes entre los sistemas de ambos pensadores sean más aparentes que reales. Sin referirse explícitamente al pasaje arriba citado, sino principalmente al § 10 de *Grundgesetze*, Dummett interpreta la situación así:

El principio contextual parece requerir que, al fijar la interpretación de un lenguaje formal, no debemos intentar especificar primero el dominio de los variables y estipular sólo después los *Bedeutungen* de los símbolos primitivos relativo a éste, sino que tenemos que lograr ambas tareas simultáneamente. Está muy lejos de ser claro que ello sea posible; y seguramente era la circularidad del procedimiento que invalidó la prueba de consistencia de Frege y produjo, de hecho, la inconsistencia del sistema.¹⁸⁴

Universalidad lógica

Se supone en general que este fragmento es la cuarta parte de una obra que Frege inició en 1919 con “El pensamiento” y cuya continuación fue interrumpida por la muerte del autor. Lo que Frege llama aquí ‘pensamientos complejos hipotéticos’ corresponde a lo que hoy en día se llama implicación material. Esta definición, sin embargo, no abarca todo el uso de la barra condicional en Frege, según observa Gabriel. La distinción que Frege hace aquí entre lenguaje auxiliar y lenguaje de exposición de cierta manera anticipa la distinción de Tarski entre metalenguaje y

¹⁸³ La **forma** del análisis en **función** y **argumento**, Frege la toma de las funciones en matemática, aunque le da un sentido totalmente nuevo. La idea de expresar la coherencia del pensamiento en términos de **saturación**, en cambio, parece ser inspirada en sus conocimientos de la química. Pero de la idea general, en cuanto principio contextual, es muy probablemente correcto asumir que esté inspirada en Kant.

¹⁸⁴ Dummett (1995, p. 18).

lenguaje objeto. Pero según se ha observado en los comentarios de Dummett sobre el uso de un metalenguaje en el § 10 de *Grundgesetze*, el uso que Frege hace del metalenguaje para la construcción de la conceptografía es muy distinto al de la concepción de Tarski.

Apéndice:

Ludwig Darmstaedter era químico e historiador de la ciencia, y los siguientes apuntes parecen ser uno de los resultados de las conversaciones entre él y Frege sobre la administración de su colección de documentos inéditos.¹⁸⁵

[Apuntes para Ludwig Darmstaedter]

[Julio de 1919]

Yo partí de las matemáticas. En esta ciencia, la tarea más urgente me parecía consistir en una mejor fundamentación. Pronto me di cuenta de que el número no es un montón ni una serie de cosas, ni tampoco una propiedad de un montón, sino que la indicación numérica que se hace con base en un conteo contiene un enunciado de un concepto. (Platón, *Hippias Mayor*)

En investigaciones de esta naturaleza la imperfección lógica del lenguaje estorbaba. Buscaba el remedio en mi *Conceptografía*. Así llegué de las matemáticas a la lógica. Lo particular de mi concepción de la lógica se caracteriza, en primer lugar, porque coloco en la punta el contenido de la palabra “verdadero”, y luego porque hago seguir inmediatamente el pensamiento como aquello que es lo que en realidad puede estar en cuestión en cuanto al ser verdadero. Es decir, yo no parto de los conceptos y compongo de ellos el pensamiento o el juicio, sino que obtengo las partes del pensamiento por medio de la descomposición del pensamiento. Esto es lo que distingue a mi conceptografía de creaciones similares de Leibniz y de sus sucesores, aunque quizá el nombre elegido no haya sido muy afortunado.

La verdad no es parte del pensamiento. Se puede captar un pensamiento sin por ello aceptar su verdad, *i.e.*, sin juzgar. Tanto la captación de un pensamiento como el juicio son actos de los que se reconoce que deben asignarse a la psicología. Pero ambos actos abarcan algo que no pertenece a la psicología, a saber, el pensamiento.

También pensamientos falsos deben ser reconocidos, desde luego no como verdaderos sino como indispensables para el conocimiento, puesto que el camino hacia la verdad pasa ocasionalmente por los pensamientos falsos y por las dudas. Las preguntas no serían posibles si en general ser verdadero pertenece a la esencia de su contenido.

La negación no es parte de acto del juzgar, sino que es un componente del pensamiento. La clasificación de los pensamientos (juicios) en afirmativos y

¹⁸⁵ Cf. Frege (1983, p. XXXIV).

negativos no tiene ninguna utilidad para la lógica y dudo que sea posible llevarla a cabo.¹⁸⁶

En la oración compleja, consistiendo de antecedente y consecuente, debería distinguirse entre dos casos principales. Puede suceder que tanto el antecedente como el consecuente tengan como sentido un pensamiento completo. Entonces se expresa adicionalmente el pensamiento de toda la oración compleja. Alguien que reconoce como verdadero a ésta no por ello reconoce la verdad ni del pensamiento del antecedente ni del consecuente. Otro caso es el que ni el antecedente ni el consecuente en sí mismos tengan por sentido un pensamiento, que toda la oración compleja, sin embargo, exprese un pensamiento, un pensamiento al que le corresponde universalidad. Entonces no tenemos una relación entre juicios o pensamientos, sino entre conceptos, a saber, la relación de subordinación. Aquí el antecedente y el consecuente son oraciones sólo en un sentido gramatical, pero no en un sentido lógico. Aquí el pensamiento hace su aparición primero como compuesto de partes, ninguna de las cuales es un pensamiento. El caso más simple de semejante composición es que una de las dos partes está necesitada de un complemento y que es complementada por la otra parte que está saturada, *i.e.*, no necesitada de complemento. El primero corresponde entonces a un concepto, el segundo a un objeto. (Subsunción de un objeto bajo un concepto). Pero objeto y concepto no son componentes de este pensamiento. Los componentes de este pensamiento señalan, sin embargo, de manera particular a este objeto y a este concepto. También una parte, doblemente necesitada de complemento, puede completarse por medio de dos partes saturadas. La primera de estas partes corresponde a una relación. - Un objeto está en una relación con un objeto. - En lo lógico, toda conexión de partes parece concretarse por medio de la complementación de algo necesitado de complemento. Nada entero puede consistir en lo lógico en partes saturadas únicamente. La separación nítida de lo que es necesitado de complemento y de lo saturado es muy importante. En las matemáticas, en el fondo, lo necesitado de complemento se conoce desde hace mucho. (+, :, $\sqrt{\quad}$, sin, =, >). Se habla aquí de funciones, pero se comprende su esencia casi siempre sólo de manera poco clara.

La universalidad puede ser negada. Así se obtiene lo que los lógicos llaman juicios existenciales y juicios particulares. Los pensamientos existenciales aquí referidos son los que en español se expresan con "hay". Después de esta expresión jamás sigue directamente un nombre propio en singular, así como tampoco sigue nunca una palabra con un artículo definido, sino siempre una palabra conceptual (*nomen appellativum*) sin artículo definido. En semejantes oraciones existenciales se

¹⁸⁶ Si un pensamiento es verdadero o no, en general, no es asunto de la lógica, sino una cuestión empírica.

enuncia algo de un concepto. Esto es un ejemplo de que un concepto se puede relacionar con un concepto de segundo nivel de un modo similar a como un objeto puede relacionarse con un concepto bajo el cual cae. Con estos pensamientos existenciales estrechamente relacionados están los pensamientos particulares, y en realidad pueden incluirse en éstos. Se puede decir también, sin embargo, que una oración particular expresa que un concepto tiene cierta relación con un concepto de segundo nivel. Únicamente quien haya captado nítidamente la diferencia entre lo necesitado de complemento y lo saturado puede captar nítidamente la diferencia entre conceptos de primer y de segundo nivel. Una parte saturada obtenida a través de la descomposición de un pensamiento puede ocasionalmente descomponerse de la misma manera en una parte necesitada de complemento y en una parte saturada. La oración: “La capital de Suecia se ubica en la desembocadura del Lago de Mälaren” puede descomponerse en una parte necesitada de complemento y en la parte saturada ‘la capital de Suecia’. Ésta puede volver a descomponerse en la parte necesitada de complemento, ‘la capital de’ y la parte saturada, ‘Suecia’. A esta descomposición de la oración corresponde una descomposición del pensamiento que ésta expresa. Las funciones del análisis corresponden a estas partes, necesitadas de complemento, de pensamientos parciales, pero sin serlos¹⁸⁷.

Se tiene que distinguir entre el sentido y el significado de un signo (palabra, expresión). Cuando un astrónomo enuncia algo de la Luna, la propia Luna no es parte del pensamiento expresado. La Luna misma es el significado de la expresión “la Luna”. Esta expresión tiene que tener entonces, además de su significado, un sentido, el cual puede ser componente de un pensamiento: la oración puede ser considerada como un retrato del pensamiento de manera que a la proporción de la parte respecto al todo en el pensamiento y a las partes de pensamientos corresponden en lo general en la misma proporción las oraciones y las partes de las oraciones. En el reino del significado la situación es diferente. No se puede decir que Suecia sea una parte de la capital de Suecia. El mismo objeto puede ser el significado de diferentes expresiones y alguna de estas expresiones puede tener un sentido que será diferente del sentido de otra de estas expresiones. La coincidencia en el reino del significado puede venir acompañada de una distinción en el reino de los sentidos. Así, es posible que una oración de la forma “ $A = B$ ” exprese un pensamiento que esté más lleno de contenido que un pálido ejemplo de la ley de identidad. Un reconocimiento puede ser mucho más valioso para el conocimiento que un caso particular de la ley de identidad.

También a la parte necesitada de complemento en un pensamiento o de una parte de un pensamiento corresponde algo en el reino del significado. Pero desde

¹⁸⁷ Frege amplía el ejemplo en los siguientes dos párrafos para iluminar mejor qué quiere decir.

luego que es equivocado llamar a esto un concepto, una relación, una función, a pesar de que difícilmente podemos evitar llamarlos así. La expresión “el concepto de Dios” se representa lingüísticamente como algo saturado. Entonces, su sentido no puede ser algo necesitado de complemento. Cuando usamos las palabras ‘concepto’, ‘relación’, ‘función’ (en el sentido del análisis), no le atinamos a lo que apuntamos. En este caso, propiamente hablando, debería evitarse también la expresión ‘el significado’ usando el artículo definido.

Pero no sólo una parte de la oración sino también una oración entera, cuyo sentido es un pensamiento, puede tener un significado. Todas las oraciones, que expresan un pensamiento verdadero tienen el mismo significado y todas las oraciones que expresan un pensamiento falso tienen el mismo significado (lo verdadero, y lo falso). Oraciones y partes de oraciones con diferente significado también tienen diferente sentido. Si se reemplaza en una oración o en una parte de oración un componente por un componente con otro significado, entonces la oración o la parte de oración así cambiada no forzosamente tiene un significado diferente del original, pero en cambio siempre tiene otro sentido. Si se reemplaza en una oración o en una parte de oración un componente por otro que tiene el mismo significado pero que no tiene el mismo sentido, la oración o parte de la oración modificada tienen el mismo significado que el original, pero no el mismo sentido. Todo esto vale para el discurso normal, no para el discurso indirecto.

Un pensamiento también puede ser el significado de una oración (discurso indirecto, subjuntivo). La oración entonces no expresa el pensamiento, sino que puede considerarse el nombre propio de éste. Cuando se reemplaza en un discurso indirecto, encerrado en el discurso normal, un componente por otro que tiene el mismo significado en el discurso normal, entonces el todo así modificado no forzosamente tiene el mismo significado que el original.

El milagro del número. El uso atributivo del numeral induce al error. En la aritmética aparece el numeral como nombre propio de un objeto de esta ciencia en singular, no con el artículo indefinido, saturado. Subsunción: “dos es un número primo”, no subordinación. No hay conexiones de valores como “cada dos”, “todos los doses”.

Hay, sin embargo, gran ausencia de claridad y falta de concordancia entre los matemáticos. El número: ¿es un objeto de investigación aritmética o es objeto de un juego? La aritmética: ¿es un juego o una ciencia? Uno quiere entender bajo ‘número’ una serie de objetos del mismo tipo, el otro una estructura espacial material producida por el acto de escribir; un tercero le niega toda espacialidad al número. Quizá los aritméticos sólo se imaginan a veces que entienden bajo ‘número’ lo que ellos afirman. Si no lo hacen, entonces asocian con oraciones textualmente iguales diferentes sentidos; y si creen de todos modos que trabajan en

una y la misma ciencia, entonces únicamente se lo imaginan. Una definición en la aritmética, que jamás se emplea en demostraciones, falla en su objetivo.

Casi en cualquier expresión técnica de la aritmética (“serie infinita”, “determinante”, “expresión”, “ecuación”) se presenta una y otra vez la misma pregunta: ¿es lo visible aquello de lo que se ocupa la aritmética? ¿O es lo visible tan sólo un signo de ésta, un medio auxiliar únicamente, no el objeto de la investigación? Lo que designa ¿es un número? y si no ¿entonces qué otra cosa? Mientras los aritméticos no concuerden en sus respuestas a estas preguntas y no mantengan siempre su forma de discurso en armonía con estas respuestas no habrá en realidad ninguna ciencia aritmética, a menos de que la ciencia sea un conjunto de formulaciones sin importar qué sentido tenga una formulación así o si siquiera tiene algún sentido en lo absoluto. Puesto que la indicación de número, basada en un conteo, contiene un enunciado de un concepto, la oración, en la cual se hace la indicación de número, tiene que tener en un lenguaje lógicamente perfecto dos partes, a saber, primero un signo del concepto sobre el cual se hace el enunciado de número y, segundo, un signo de un concepto de segundo nivel. Estos conceptos de segundo nivel forman una serie y existe una regla según la cual si uno de estos conceptos es conocido, se puede indicar el siguiente. Y, sin embargo, no tenemos en ellos los números de la aritmética, no tenemos objetos, sino conceptos. ¿Cómo puede llegarse por un camino libre de objeciones de aquellos conceptos a los números de la aritmética? - ¿Acaso hay siquiera números aritméticos? ¿Acaso los signos de números son partes dependientes de signos de conceptos de segundo nivel?

Bad Kleinen a 26 de Julio de 1919

Dr. Gottlob Frege, Profesor, anteriormente en Jena

*Carta de Bertrand Russell a Jean van Heijenoort
del 23 de noviembre de 1962*

Estimado Profesor van Heijenoort:

Yo estaría sumamente complacido si usted publicaría la correspondencia entre Frege y yo y le estoy agradecido por sugerirlo. Cuando pienso en actos de integridad y gracia, me doy cuenta que no hay nada que yo conozca que sea comparable a la dedicación de Frege a la verdad. El trabajo de su vida entera estaba a punto de llegar a su fin, mucho de su trabajo había sido ignorado en beneficio de hombres infinitamente menos capaces, su segundo volumen estaba a punto de ser publicado y al enterarse que su suposición fundamental era errónea, respondió con placer intelectual, suprimiendo claramente cualquier sentimiento de decepción personal. Era casi sobrehumano y una indicación reveladora de lo que los hombres son capaces si su dedicación es al trabajo creativo y al conocimiento y no a esfuerzos más comunes de dominar y ser conocidos.

Sinceramente
Bertrand Russell

**Gottlob Frege:
Escritos sobre la lógica y la filosofía del lenguaje**

(Schriften zur Logik und Sprachphilosophie)

De la obra póstuma
Edición: Gottfried Gabriel
Traducción:
Kurt Wischin

Cuando pienso en actos de integridad y gracia,
me doy cuenta que no hay nada que yo sepa
que sea comparable a la dedicación de Frege a
la verdad.

*B. Russell*¹⁸⁸

¹⁸⁸ Carta a van Heijenoort, publicada en Heijenoort (1967, p. 127). La carta entera, que es corta pero muy expresiva, es traducida al final de comentario crítico.

Contenido

Agradecimientos.....	3
Comentario Crítico	4
Escritos sobre la lógica y la filosofía del lenguaje.....	65
[Diálogo con Pünjer sobre la existencia.]	67
[I. El diálogo.]	67
[II. Epílogo de Frege.].....	75
[17 Enunciados claves sobre la lógica].....	84
[Comentarios sobre sentido y significado]	86
Lógica	94
Introducción a la lógica.....	123
La lógica en las matemáticas.....	136
Universalidad lógica	193
Referencias.....	198

[Diálogo con Pünjer sobre la existencia.]
[Antes de 1884]

[I. El diálogo.]

1. *Pünjer:* “Algo no tiene la característica de lo que vuela y, no obstante, pertenece al concepto ‘ave’”. ¿Es esto sinónimo de “entre lo que *es* está algo que no tiene la característica del volar y cae sin embargo bajo el concepto ‘ave’”?
2. *Frege:* ¿Qué significa *es*?
3. *Pünjer:* Que es algo de lo cual podemos tener experiencia.
4. *Frege:* ¿No es superfluo predicar de algo que podemos tener experiencia de ello?
5. *Pünjer:* No, puesto que a través de la transformación deliberada de representaciones derivadas de la experiencia tenemos la facultad de formar representaciones a las cuales no corresponde nada de lo cual podamos tener experiencia.
6. *Frege:* En la oración ‘*A* es algo de lo cual podemos tener experiencia’ el sujeto no lingüístico, el fáctico ¿es *A* o la representación de *A*?
7. *Pünjer:* *A*.
8. *Frege:* “El enunciado ‘De *A* no podemos tener experiencia’ es la negación del enunciado ‘De *A* podemos tener experiencia’”. ¿Es eso correcto?
9. *Pünjer:* Sí, si por ‘De *A* no podemos tener experiencia’ se entiende: la oración ‘De *A* podemos tener experiencia’ es falsa.
10. *Pünjer:* El enunciado ‘De *A* no podemos tener experiencia’ no es posible. La pregunta, por lo tanto, carece de sentido. Tampoco la negación de ser susceptible de experiencia tiene sentido.
11. *Frege:* Entonces me parece que es superfluo predicar de algo que se puede tener experiencia de ello.
12. *Pünjer:* ‘Hay hombres’ significa ‘al concepto hombre le corresponde algo de lo cual se puede tener experiencia’ o ‘algo de lo cual se puede tener experiencia cae bajo el concepto ‘hombre’’. ‘No hay centauros’ significa ‘a la representación de centauro o al concepto de centauro no le corresponde nada de lo cual se pueda tener experiencia’.
13. *Frege:* Aquí la negación pertenece a ‘corresponde’.
14. *Pünjer:* Sí. O nada de lo cual se puede tener experiencia cae bajo el concepto de centauro.
15. *Frege:* La atribución a una cosa de que se puede tener experiencia de ella no la determina de ninguna manera.
16. *Pünjer:* Así es. Esta es la diferencia entre este enunciado y los otros.

17. *Frege*: Me parece entonces, ahora como siempre, que es superfluo predicar de algo el ser susceptible de tener experiencia de ello, puesto que uno no se entera de nada nuevo sobre aquello de lo que es enunciado. Usted acaba de explicar 'hay' y por qué juicios así no son superfluos, pero no que el juicio 'De esto se puede tener experiencia' no sea superfluo.
18. *Pünjer*: 'De esto se puede tener experiencia' significa: "La representación del 'esto' no es una alucinación, no es algo generado meramente por mí, sino que la representación se forma en ocasión de una afección del yo por el esto."
19. *Frege*: ¿Distingue usted entonces dos modos de representación?
20. *Pünjer*: Si; hay dos modos de representación: uno que se forma solamente a partir del yo y otro que se forma con base en una afección del yo. Para distinguirlos digo: de los objetos de este último se puede tener experiencia; al primero no les corresponden objetos de los cuales se pueda tener experiencia.
21. *Frege*: Me parece entonces que el sujeto real, en su concepción, es la representación. ¿No admite usted que en todo enunciado material se asigna el sujeto a una clase y que es en virtud de ello que se le distingue de otras cosas que no caen dentro de esta clase?
22. *Pünjer*: Lo admito; pero el enunciado de existencia no es material. No lo admito si por 'material' se entiende 'no evidente de suyo', 'no conteniendo una ley meramente lógica'.
23. *Frege*: En las oraciones 'Hay hombres' y 'No hay centauros' también nos encontramos con una clasificación. No se clasifica, sin embargo, la cosa, que en uno de estos casos ni siquiera está presente y en el otro no se le incluye en una de dos clases, sino que se clasifican los conceptos 'hombre' y 'centauro' de modo que uno de ellos se incorpora a la clase de conceptos bajo la cual algo cae y el otro se excluye de esta clase. Es por esto que opino que, en estas oraciones, los conceptos son los sujetos reales. Cuando usted dice 'De esto se puede tener experiencia' en el sentido de 'esta que es mi representación no es algo meramente generado por mí', entonces usted está clasificando la representación. Usted la incluye en uno de los dos modos que acaba de distinguir. Es por eso que opino que aquí la representación es el sujeto real. También se puede expresar esto en estas palabras: la representación tiene la propiedad de que algo le corresponde.
24. *Pünjer*: Aquí será decisiva la cuestión de lo que es la negación. La negación es posible solamente después de una posición que la preceda. Así, si

decimos 'los centauros no existen', eso es posible sólo porque primero los pensamos fuera de nosotros. Tenemos el doble fundamento para negarles la existencia: 1. una contradicción lógica, 2. [una contradicción]¹⁸⁹ fuera del concepto o de la representación en la experiencia. Propiamente hablando, no es entonces la representación o el concepto el sujeto real.

25. *Frege*: Con esto usted solamente proporciona el fundamento en el que nos basamos para formar el juicio sobre la existencia. También un juicio como 'hay raíces cuadradas de 4' puede inferirse del concepto de raíz cuadrada de 4.

26. *Pünjer*: 'Hay raíces cuadradas de 4' no significa: 'lo que cae bajo el concepto de raíz cuadrada de 4 es algo de lo cual podemos tener experiencia', si se entiende por 'algo de lo cual se puede tener experiencia' algo independiente, que se da en sí mismo. Los números existen solamente en algo. De ahí que este juicio sea esencialmente distinto de 'hay hombres'. Jamás diría: '4 existe' ni tampoco: 'existe una raíz cuadrada de 4'. El 'hay' se usa aquí en un sentido diferente. Significa: el 4 tiene la propiedad de que puede surgir por medio de la multiplicación de un número consigo mismo; que se puede hallar un número que, multiplicado por sí mismo, produce 4. Sólo podemos formar este juicio si antes formamos la oración $2^2 = 4$ (o $(-2)^2 = 4$). Esto es en lo que hay coincidencia con los demás juicios existenciales como 'hay hombres'.

27. *Frege*: Se ha objetado¹⁹⁰ a mi ejemplo 'hay raíces cuadrados de 4' que éste sea un juicio existencial; ahora parece que no lo incluye entre éstos porque no quiere decir: 'una raíz cuadrada de 4 existe'.

28. *Pünjer*: 'Hay raíces cuadrados de 4' es un juicio existencial.

29. *Frege*: (ad 18) La oración 'La representación del esto es formada en ocasión de una afección del yo por el esto' es evidente de suyo si acaso se permite formar justificadamente su contenido, puesto que, mantengo, no se puede usar la expresión 'la representación del esto' antes del juicio 'algo corresponde a esta representación mía' o 'esta representación mía está formada en ocasión de una afección del yo' antes de haber formado este juicio. Sólo entonces puede llamarse 'esto' a lo que afectó, a lo que corresponde a mí representación.

¹⁸⁹ El pasaje entre corchetes es una inserción del editor alemán.

¹⁹⁰ El editor observa que la objeción mencionada por Frege no forma parte del protocolo conservado.

30. *Pünjer*: 'La representación del esto es formada en ocasión de una afección del yo por el esto' es solamente otra expresión para 'a esta representación mía le corresponde algo de lo cual se puede tener experiencia'.
31. *Frege*: Yo entiendo su comentario (20) así: cuando usted quiere decir: *B* es una representación que no está formada meramente a partir del yo sino con base en una afección del yo, entonces lo expresa así: 'del objeto de *B* se puede tener experiencia'. Ambas expresiones significan lo mismo. ¿Es así?
32. *Pünjer*: Yo diría, en lugar de '*B* es una representación que, etc.', 'la representación *B* es, etc.' dando por supuesto que *B* es una representación.
33. *Frege*: Admito que ni es evidente de suyo ni superfluo decir 'la representación *B* es formada no meramente a partir del yo, sin con base en una afección del yo', puesto que no toda representación es formada con base en una afección del yo; o esto podría ser al menos discutible. La negación de esto sería: 'la representación *B* no es formada con base en una afección del yo' si presuponemos que *B* es una representación. Esta negación tiene entonces un perfecto sentido y es por ello que no es ni superfluo ni evidente de suyo proferir la oración misma: 'la representación *B* es formada con base en una afección del yo' o la que, según usted, significa lo mismo: 'del objeto de *B* se puede tener experiencia'. Pero si estas dos expresiones significan lo mismo, entonces se puede reemplazar en el juicio "la negación de la oración 'la representación *B* es formada con base en una afección del yo' tiene un perfecto sentido", 'la representación *B* es formada con base en una afección del yo' por 'del objeto de *B* se puede tener experiencia' obteniendo así el juicio: "la negación de la oración 'del objeto de *B* se puede tener experiencia' tiene un perfecto sentido." Esto contradice su postura anterior.
34. *Pünjer*: No hay contradicción entre llamar admisible la negación del enunciado 'del objeto de la representación *B* se puede tener experiencia' y en cambio inadmisibles la negación del enunciado 'del objeto *B* se puede tener experiencia'.
35. *Frege*: Si le entiendo bien, la contradicción se resuelve como sigue: en la expresión 'el objeto de la representación', 'objeto' se usa en otro sentido que en 'del objeto *A* se puede tener experiencia'.
36. *Pünjer*: No. La palabra 'objeto' tiene el mismo significado pero 'objeto de la representación' denota algo diferente que 'el objeto'.
37. *Frege*: El añadido 'de la representación' ¿meramente produce una restricción?

38. *Pünjer*: 'Objeto' en sí denota un objeto, que no es objeto sólo de la representación sino de la experiencia. La oposición realmente debería expresarse como objeto de la representación vs. objeto de la experiencia.
-
39. *Pünjer*: (con relación a (26) y (27)): del número no se puede tener experiencia en el mismo sentido en que se puede tenerla de Pablo.
40. *Frege*: ¿Entonces usted distingue dos sentidos de la expresión 'ser susceptible de tener experiencia de ello'?
41. *Pünjer*: No. Del número se puede tener experiencia en el mismo sentido general. El concepto de ser susceptible de tener experiencia de ello es el mismo en ambos casos, es el mismo, ya sea que diga que se puede tener la experiencia de un número, de una cosa o de un color.
42. *Frege*: ¿Usted entiende por 'ser susceptible de tener experiencia de ello' no siempre algo de lo cual en sí mismo se puede tener experiencia?
43. *Pünjer*: 'Ser susceptible de tener experiencia de ello' también es aquello de lo cual no se puede tener experiencia de modo independiente como, por ejemplo, un color que sólo puede experimentarse junto con algo.
44. *Frege*: Usted dijo (26) que yo no diría '4 existe'. ¿Usa usted aquí 'existir' en el mismo sentido como 'algo de lo cual se puede tener experiencia'?
45. *Pünjer*: Sí. Retiro que no diría '4 existe', 'una raíz cuadrada de 4 existe.'
46. *Frege*: La diferencia entre los juicios, 'hay hombres' y 'hay raíces cuadradas de 4' no se encuentra en el 'hay' sino en lo diferente de los conceptos 'hombre' y 'raíz cuadrada de 4'. Con 'hombre' pensamos en algo autónomo, con 'raíz cuadrada de 4', no.
47. *Pünjer*: Estoy de acuerdo con esto.
48. *Frege*: ¿La oración 'De A se puede tener experiencia' es correcta si se entiende por A una representación?
49. *Pünjer*: Sí, de una representación se puede tener experiencia.
50. *Frege*: ¿Hay una representación de una representación?
51. *Pünjer*: Sí hay representaciones de representaciones.
52. *Frege*: Usted en una ocasión llamó a la representación una imagen fluctuante, una serie de intuiciones. ¿Cuáles son ahora las intuiciones de las cuales consiste la representación de la representación A?
53. *Pünjer*: Estas intuiciones son las actividades de la representación A.
54. *Frege*: ¿'Actividad del representar' significa lo mismo que 'representación'?
55. *Pünjer*: Sí.
56. *Frege*: Entonces nos equivocamos al distinguir la actividad de representar de la representación.
57. *Pünjer*: Sí.

58. *Frege:* De sus aseveraciones (18) y (30) se sigue que 'De esto se puede tener experiencia' significa lo mismo que 'a esta representación mía corresponde algo de lo cual se puede tener experiencia'. Aquí 'algo de lo cual se puede tener experiencia' se explica por medio de sí mismo.
59. *Pünjer:* Tampoco está pensado como explicación. Me mantengo en que la expresión 'la representación del este' siempre puede usarse.
60. *Frege:* ¿Tiene toda representación un objeto?
61. *Pünjer:* Sí. Cada representación tiene necesariamente un objeto. 'Objeto de la representación' es lo mismo que 'contenido de la representación'.
62. *Frege:* ¿El contenido de la representación A es lo mismo que A ?
63. *Pünjer:* No. La imagen de la representación es la imagen fluctuante. Para ser preciso se tiene que distinguir la imagen de la representación, de la representación. En la imagen de la representación no se toma en cuenta la actividad [del representar].
64. *Frege:* ¿El objeto de la representación es diferente de la imagen de la representación?
65. *Pünjer:* Sí.
66. *Frege:* Cuando usted ve un espejismo o tiene una alucinación ¿cuál es en este caso el objeto de la representación? (No hubo respuesta)
67. *Frege:* ¿Admite usted que la negación de la oración 'el objeto de B es susceptible de experiencia' tiene un sentido perfecto?
68. *Pünjer:* Sí.
69. *Frege:* ¿Admite usted que el objeto de la representación B puede ser llamado A ?
70. *Pünjer:* Sí.
71. *Frege:* Entonces usted admite que la negación de la oración ' A es susceptible de experiencia' tiene un sentido perfecto.
72. *Pünjer:* Sí. Pero en su pregunta (8) se entendió por A no un objeto de la representación, sino de la experiencia.
73. *Frege:* No dije de A ni que habría de ser objeto de la experiencia ni que habría de ser objeto de la representación, sino dejé esto totalmente indeterminado. Entendí por esto su respuesta (10) de un modo más general del que usted parece entenderlo ahora. Además era más sugestivo entender A como objeto de la representación puesto que en (6) usé la expresión 'representación de A '.
74. *Pünjer:* Pero se entendía allí por A explícitamente un objeto de la experiencia.

75. Frege: Esto no lo veo. Quizá avancemos así: ¿admite usted que hay objetos de representaciones que no surgieron por medio de una afección del yo?
76. Pünjer: Sí.
77. Frege: ¿Admite usted que no existen objetos de representaciones, que no hayan surgido por medio de una afección del yo?
78. Pünjer: Sí.
79. Frege: De esto se sigue que hay objetos de representaciones que no surgieron a través de afecciones del yo y que, entonces, no existen. Si usted usa ahora la palabra 'existir' en el mismo sentido que la expresión 'hay', entonces usted le ha asignado y al mismo tiempo retirado el mismo predicado al mismo sujeto. La conclusión es correcta ya que el concepto 'objetos de representaciones que no surgieron a través de una afección del yo' es justamente el mismo en ambas premisas y justamente el mismo que en la conclusión. ¿Admite usted esto?
80. Pünjer: Sí. Pero la palabra 'hay' se usa aquí de manera inapropiada.
81. Frege: Entonces ponga usted otra expresión que exprese el asunto mejor.
82. Pünjer: Esto no se puede hacer, ya que entonces ésta no diría lo que debería expresarse.
83. Frege: Tenemos aquí entonces, en su opinión, una contradicción fáctica en la que la razón se enreda necesariamente, puesto que no puede remediarse con una mera modificación del modo de expresión.
84. Pünjer: Antes de negar la existencia de cualquier cosa tenemos que representárnosla como existente para luego negar su existencia. Pero creo que de esta manera no podemos avanzar. ¿Cómo explica usted 'hay hombres'?
- (Lo que siguió se omitió porque resultó ser un círculo que nos llevó nuevamente a la pregunta)
85. Pünjer: ¿Cómo explica usted 'hay seres vivos'?
86. Frege: Lo explico así: la oración que A no cae bajo el concepto de 'ser vivo' es falsa, entiéndase por A lo que sea.
87. Pünjer: ¿Qué es lo que debería poder pensarse bajo A ?
88. Frege: El significado que le doy a A no está sometido a ninguna restricción en absoluto. Si tiene que enunciarse algo acerca de él, sólo puede ser algo que es evidente de suyo, como, por ejemplo, $A = A$.
89. Pünjer: El error consiste en que usted siempre piensa el A como un ente y simplemente presupone, entonces, el 'hay'.

90. *Frege*: Yo no imponga la restricción para *A* que sea un ente, a menos que se entienda por ser algo que es evidente de suyo, de modo que esto no impone ninguna restricción.
91. *Pünjer*: ¿Qué es 'evidente de suyo'?
92. *Frege*: Llamo evidente de suyo un enunciado que no hace determinación adicional de lo que es enunciado.
93. *Pünjer*: ¿Usted sólo acepta enunciados que se hacen sobre algo?
94. *Frege*: 'Hay enunciados que no se hacen sobre algo' significaría: 'hay juicios en que no se puede distinguir un sujeto de un predicado.'
95. *Pünjer*: ¿Qué entiende usted por algo de lo que algo puede enunciarse?
96. *Frege*: Lo que puede usarse como sujeto de un juicio.
-

[97.] *Frege*: 'Algunos hombres son alemanes' significa lo mismo que 'hay hombres alemanes'. De la oración 'Sachse es un hombre' sigue de la misma manera, 'hay hombres', como de las oraciones 'Sachse es un hombre', 'Sachse es un alemán' sigue 'algunos hombres son alemanes' o 'hay hombres alemanes'.

[98.] *Pünjer*: 'Algunos hombres son alemanes' no significa lo mismo que 'hay hombres alemanes'. Usted no puede deducir 'hay hombres' sólo de la oración 'Sachse es un hombre', sino requiere para esto además de la oración 'Sachse existe.'

[99.] *Frege*: A esto contestaría: si 'Sachse existe' quiere decir 'la palabra 'Sachse' no es un sonido vacío sino significa algo', entonces es acertado que la condición 'Sachse existe' tiene que estar satisfecha. Pero esto no es una nueva premisa sino la precondition evidente de suyo para todas nuestras palabras. Las reglas de la lógica presuponen siempre que las palabras usadas no sean vacías, que las oraciones sean expresiones de juicios, que no se esté jugando con palabras vacías. Tan pronto 'Sachse es un hombre' es un juicio real, la palabra 'Sachse' tiene que denotar algo y entonces no hago uso de una premisa adicional para concluir de ella 'hay hombres'. La premisa 'Sachse existe' sale sobrando si ha de significar algo diferente de esta precondition evidente de suyo en todo nuestro pensar. ¿Puede usted darme un ejemplo de una oración de la forma 'A es un B' que tiene sentido y es verdadera, [en el cual]¹⁹¹ A es el nombre de un particular, pero 'hay Bs' es falsa? 'Algunos hombres son alemanes' puede expresarse también así: "una parte de los hombres cae bajo el concepto de 'alemán'". Pero aquí debe entenderse por parte, una parte no nula,

¹⁹¹ El manuscrito tiene aquí un evidente error de ortografía.

una parte que contiene individuos. Si no fuera éste el caso, si no hubiese hombres que fuesen alemanes, entonces se diría: 'ningún hombre es alemán'; pero esto es el opuesto contradictorio de 'algunos hombres son alemanes'. De ahí que puede deducirse a la inversa 'hay hombres alemanes' de 'algunos hombres son alemanes'. 'Algunos hombres son alemanes' puede [...] también así...¹⁹²

[II. Epílogo de Frege.]

Formulación del objeto de disputa

Nosotros estábamos considerando las oraciones 'esta mesa existe' y 'hay mesas'. La duda era si en la palabra 'existe' de la primera oración se encuentra esencialmente el mismo contenido que en el 'hay' de la segunda.

Tampoco usted cuestionó, me parece, que también hubiera alguna diferencia en el predicado, que la diferencia no se encontrara meramente en la diferencia de los sujetos; usted mantuvo, sin embargo, que el significado es esencialmente el mismo. Ahora bien ¿puede usted indicarme en qué consiste, en su opinión, lo común, hasta donde llega éste y donde empieza la diferencia?

Tenemos que ponernos de acuerdo sobre cómo debería entenderse un juicio particular afirmativo conteniendo 'algunos'. Creo que en la lógica se entiende generalmente en un sentido que se hace explícito a través de las explicaciones adicionales 'quizás hasta todos, pero al menos uno', así que 'algunos hombres son negros' significaría 'algunos, quizá hasta todos pero al menos un hombre, son negros'.

Una vez que estamos de acuerdo sobre esto puede invertirse un juicio particular afirmativo como 'algunos hombres son negros' para obtener: 'algunos negros son hombres'. Que esto provoca en el primer momento resistencia tiene su motivo en que se agrega, en el pensamiento, instintivamente 'pero algunos negros no son hombres'. Este pensamiento colateral se excluye por la adición 'quizá también todos'.

Usted quería ahora que la expresión 'algunos hombres existen' sea interpretada como sinónima de 'algo que existe es hombre'. Esta expresión tiene el inconveniente de que en cuanto a su forma gramatical, en lugar del existir aparece el ser hombre como predicado. Pero fácticamente lo que se pretende enunciar es el existir. Ahora bien, podemos dar expresión a esto también en el lenguaje diciendo al revés: 'algunos hombres existen' en el sentido de 'algunos, quizá también todos,

¹⁹² Comentario del editor: "aquí se interrumpe el manuscrito."

pero al menos un hombre existe'. Esto es, entonces, sinónimo de '[unos] hombres existen'¹⁹³.

Ahora bien, mi entender de su punto de vista siempre fue que usted supone que la diferencia de significado entre la palabra 'existir' en las oraciones 'Leo Sachse existe' y en 'algunos hombres existen' es del mismo tipo que la diferencia de significado entre 'es un alemán' en las oraciones 'Leo Sachse es un alemán' y en 'algunos hombres son alemanes', de manera que 'existe' se relaciona con 'existen' en las primeras dos oraciones, como 'es un alemán' con 'son alemanes' en las últimas dos oraciones. Yo seleccioné a propósito los sujetos 'Leo Sachse' y 'algunos hombres' iguales para señalar en ambos casos que corresponden. Creo que se omite 'algunos' en la oración '[unos] hombres existen' sólo para evadir la objeción '¿no todos?'

Creo ahora reproducir correctamente su plan estratégico.

Usted ante todo quería que yo concediera que 'hay hombres' significa lo mismo que 'entre lo que es, algo es hombre' o 'una parte de lo que es, es hombre' o 'algo que es, es hombre'. En lugar de 'lo que es', usted usaba como sinónimas las expresiones 'de lo que se puede tener experiencia', 'existente' 'aquello cuya(s) representacione(s) surgieron a raíz de la excitación de una afección del yo'. Estas son, creo, modificaciones sin importancia. Quizá se agreguen o resten algunas dificultades secundarias. La dificultad principal, sin embargo, siempre es la misma y la representación general del plan de ataque también permanece la misma. Ahora usted tenía que persuadirme de hacer además la concesión de que la expresión ser (existir) se usa en el mismo sentido que en la oración 'Leo Sachse es' o 'existe'. Parecería entonces que el asunto estaba decidido en su sentido.

Ahora bien, puedo conceder que la expresión 'hay hombres' significa lo mismo que 'algún existente es hombre', pero sólo bajo la condición de que la palabra 'existir' contenga un enunciado evidente de suyo, es decir, que no tenga contenido propiamente hablando. Lo mismo vale para las otras expresiones que usted usa en lugar de 'existir'.

Pero si la oración 'Leo Sachse es' es evidente de suyo, entonces no puede haber en el 'es' el mismo contenido que en el 'hay' de la oración 'hay hombres', puesto que ésta no dice algo que sea evidente de suyo. Si usted expresa ahora la oración 'hay hombres' también como 'hombres existen' o 'entre lo que es algo es

¹⁹³ Nota de traductor: en alemán, a diferencia del español, el artículo indefinido no tiene plural. Simplemente se omite. Existe la tentación de traducir "los hombres existen", pero si Frege hubiera querido decir esto, hubiera podido usar el artículo definido y esto, además, no concuerda con el curso posterior del argumento. El alemán tiene aquí una ambigüedad, que influye en el argumento de Frege, que la sintaxis del español no admite.

hombre’, entonces el contenido del predicado de la oración no puede estar en el ‘existir’ o ‘lo que es’ etc. Y este es el $\pi\rho\omega\tau\omicron\nu\ \psi\epsilon\upsilon\delta\omicron\varsigma$, en el que usted forzosamente se vio arrastrado a juicios contradictorios como que el contenido del predicado en la oración ‘algunos hombres existen’ o ‘algo existente es hombre’ o ‘hombres existen’ está contenido en la palabra ‘existir’. Pero esto no es el caso, sino esta palabra únicamente contiene la forma del enunciado, igual que el enunciado ‘el cielo es azul’ contiene en la cópula ‘es’ únicamente la forma del predicado. ‘Existir’ tiene que interpretarse en esta oración como mera palabra de forma, de modo similar al pronombre neutro [tácito] en ‘está lloviendo’. Así como el lenguaje inventó, motivado por la carencia de un *sujeto* gramatical, el ‘lo’¹⁹⁴, de la misma manera inventó, motivado por la carencia de un *predicado* gramatical, el ‘existir’.

Que el contenido del predicado no se halla en la palabra ‘existir’ lo demuestro porque se puede decir en su lugar también ‘ser igual a sí mismo’. ‘Hay hombres’ significa lo mismo que ‘algunos hombres son iguales a sí mismos’ o ‘algo de lo que es igual a sí mismo es hombre’. De la oración ‘A es igual a sí mismo’ no se puede saber absolutamente nada nuevo sobre el A, ni tampoco de la oración ‘A existe’. Ninguna de estas dos oraciones puede ser negada. Se puede reemplazar A en ambas por lo que se desee, siempre serán correctas. No asignan A a una de dos clases, por ejemplo, para separarlas de un B que no pertenece a esta clase. Si se enuncia la oración ‘A es igual a sí mismo’ entonces esto no puede tener otro objetivo, que enunciar la ley lógica de identidad, pero no el de conocer mejor a A. De la misma manera, como podría aseverarse que en las oraciones ‘esta mesa existe’ y ‘mesas existen’, ‘existir’ significa lo mismo, puede también decirse que en las oraciones ‘esta mesa es idéntica a sí misma’ y ‘las mesas son idénticas a sí mismas’ el predicado ‘idéntica(s) a sí misma(s)’ tiene el mismo sentido. Sólo que tiene que reconocerse, entonces, que los juicios ‘esta mesa existe’ y ‘esta mesa es idéntica a sí misma’ son totalmente evidentes de suyo, es decir, no se predica con ellas un contenido, propiamente hablando, sobre estas mesas. Justamente como oraciones como ‘hombres existen’ se llaman juicios existenciales en la creencia de que el contenido del enunciado se halla en la palabra ‘existir’, podría llamarse también la oración ‘algunos hombres son iguales a sí mismos’ [un juicio de identidad]¹⁹⁵ y ‘hay hombres’ sería un juicio de identidad. En general, se podría intercambiar en todos lados ‘existir’ por ‘ser igual a sí mismo’ sin introducir

¹⁹⁴ Nota del traductor: En alemán, a diferencia del español, los pronombres personales nunca pueden omitirse, por lo que aun si no hay sujeto aparente, como en “está lloviendo” (no hay agente activo cuando llueve), en alemán el pronombre neutro correspondiente, tácito en español, tiene que añadirse, o sea, el tercer género: “el, ella, lo” (“er”, “sie”, “es” en alemán). El caso de la lengua rusa demuestra que la cópula efectivamente puede omitirse sin perjuicio para el predicado.

¹⁹⁵ nota de pie del editor: «En el manuscrito dice: “juicios de identidad”»

nuevos errores en cada demostración que intentara volver a encontrar el contenido del enunciado de la oración 'hay hombres' en el 'existir' de la oración 'unos hombres existen'. Yo me comprometo a ello.

Pero si el contenido del enunciado del juicio 'existen hombres' no reside en el 'existir', entonces ¿en dónde reside? Yo contesto: en la forma del juicio particular. Cada juicio particular es un juicio existencial que puede transformarse también a la forma del 'hay'. Por ejemplo 'Algunos cuerpos son ligeros' es lo mismo que 'hay cuerpos ligeros'. 'Algunas aves no pueden volar' es lo mismo que 'hay aves que no pueden volar' etc. Más difícil es transformar, a la inversa, un juicio con 'hay' en uno particular. La palabra 'algunos' no tiene sentido fuera del contexto; es una palabra formal como 'todos', 'cada', 'ningún', etc., que tiene que cumplir una función lógica en el contexto de la oración. Ésta consiste en que tiene que enlazar dos conceptos según determinada relación lógica. En la oración 'algunos hombres son negros' los conceptos "hombre" y "negro" son enlazados según esta relación. Así que se requieren siempre dos conceptos para formar un juicio particular. Es ciertamente fácil transformar ahora la oración 'hay peces voladores' en 'algunos peces pueden volar', porque se tienen dos conceptos "pez" y "capacidad voladora". Pero se pone más difícil cuando se quiere llevar la oración 'hay hombres' a la forma del juicio particular. Si se define hombre = ente vivo racional, entonces podría decirse: 'algunos entes vivos son racionales' y esto bajo la presuposición de que es correcta la definición equivalente a 'hay hombres'.

La aplicabilidad de este método presupone que el concepto puede descomponerse en dos características. Otra manera más [de aplicar este método]¹⁹⁶ está relacionada estrechamente con esto. Cuando se tiene que transformar, por ejemplo, 'hay negros', entonces puede decirse 'negro = negro que es hombre'¹⁹⁷ porque el concepto 'negro' está subordinado al concepto 'hombre'. Ahora tenemos nuevamente dos conceptos y podemos decir 'algunos hombres son negros' o 'algunos negros son hombres'. Pero esto es únicamente una información particular para el caso del concepto 'negro'. Para la oración 'hay abedules' tendríamos que seleccionar otro concepto superior, por ejemplo, 'árbol'. Si se quiere hacer esto de modo completamente general, tiene que buscarse un concepto que sea superior a todos los conceptos. Un concepto así, si así se le quiere llamar, al hacerse su extensión ilimitada ya no puede tener contenido alguno, puesto que todo contenido puede consistir sólo en cierta restricción de la extensión. Se podría seleccionar como tal concepto el de 'ser igual a sí mismo', diciendo que 'hay

¹⁹⁶ Nota del traductor.

¹⁹⁷ el manuscrito omite aquí las comillas. Nota del traductor: 'Neger' en alemán inequívocamente se refiere a un hombre.

hombres' es lo mismo que 'algunos hombres son iguales a sí mismos' o 'algo igual a sí mismo es hombre'.

El lenguaje resolvió esto de otro modo. Para la formación de un concepto sin contenido resultó excelentemente apropiada la cópula, esto es, la pura forma del enunciado sin contenido. En la oración 'el cielo es azul' el enunciado es 'es azul' pero el contenido del enunciado, propiamente hablando, está en la palabra 'azul'. Si omitimos esta, entonces nos quedamos con un enunciado sin contenido: 'el cielo es'. Así se forma un concepto impropio, 'ente', sin contenido, de extensión infinita. Se puede hablar ahora así: hombres = hombres, siendo¹⁹⁸; 'hay hombres' es lo mismo que 'algunos hombres son' o 'algo que es, es hombre'. El contenido propiamente hablando del enunciado no se halla en la expresión 'siendo' sino en la forma del juicio particular. La palabra 'siendo' es sólo una creación del lenguaje para salir del embarazo y poder aplicar la forma del juicio particular. Cuando los filósofos hablan del 'ser absoluto', ello no es otra cosa que una divinización de la cópula.

Pero es fácil darse cuenta de cómo sucedió esto. Se sentía que la oración 'hay un centro de masa de la tierra' no es evidente de suyo, de modo que el enunciado tendría un contenido. Es muy explicable también que se creyera que este contenido se halla en la palabra 'existir' cuando se usó la expresión 'existe un centro de masa de la tierra'. De este modo se inventó para la palabra 'existir' un contenido sin poder indicar, propiamente hablando, en qué consiste este.

Me propongo señalar ahora cómo Pünjer, a través del πρώτον ψεῦδος, de ver el contenido del enunciado 'hombres existen' en el 'existir', tenía que verse arrastrado a aseveraciones contradictorias. Yo pude convencerlo fácilmente que es imposible la negación de la oración 'De A se puede tener experiencia' en la que 'se puede tener experiencia' = ser = existir. Él tuvo que conceder igualmente que predicar de algo que se puede tener experiencia de ello no determina de ninguna manera aquello de lo que se predica. Pero él quería salvar, por otra parte, el contenido de la predicación de la susceptibilidad de experiencia. En la oración 'esta mesa es empírica', 'esta mesa existe' algo debería decirse, no obstante, no debería contener un enunciado superfluo y evidente de suyo. Esto tenía que arrastrarlo a la contradicción de interpretar la negación de la oración 'esta mesa es empírica' como no siendo ni superflua ni evidente de suyo. Él tenía que privar a la palabra 'de lo que se puede tener experiencia' de todo contenido sin vaciarla de contenido. El

¹⁹⁸ El alemán puede usar aquí el participio presente del verbo "ser", imposible en español. Normalmente este uso se circunscribe en español mediante una cláusula relativa ("hombre que es"). Se podría optar por "existir", sin embargo, Frege evita el término "existiert", equivalente en alemán, y además se hace más difícil ver cómo Frege llega del "existir" al "ser absoluto".

contenido del juicio ‘de esto se puede tener experiencia’, Pünjer lo quiso representar así: ‘La representación de el esto¹⁹⁹ no es una alucinación’ no es algo formado meramente a partir de mí, sino que la representación está formada en ocasión de la afección del yo por el esto’. Yo tuve que objetar a lo anterior que las expresiones ‘representación del esto’ y ‘afecciones del yo por el esto’ pueden formarse justificadamente sólo después de haber formado el juicio ‘algo corresponde a esta representación mía’. Si nada corresponde a mí representación, la expresión ‘representación del esto’ carece de sentido y, consecuentemente, toda la oración carece de sentido.²⁰⁰ Pünjer modificó entonces en primera instancia su explicación, sin admitir incorrección, dejándola en: ‘del objeto de la representación *B* se puede tener experiencia’ significa: ‘la representación *B* está formada con base en una afección del yo’. De lo que pude deducir ahora que la negación de la oración ‘del objeto de la representación *B* se puede tener experiencia’ tiene un perfecto sentido. Ahora bien, Pünjer había dicho anteriormente que la negación de la oración ‘de *A* se puede tener experiencia’ es imposible. Tenemos que restringir esto ahora algo y decir: si *A* es un objeto de la experiencia, entonces la negación de la oración ‘*A* es empírico’ es imposible; pero si *A* es un objeto de la representación, entonces la negación de la oración es posible. Vemos que este ejemplo confirma que es imposible conferir al predicado ‘se puede tener experiencia de ello’ un sentido que no sea evidente de suyo y sostener al mismo tiempo de manera general que la negación de que se pueda tener experiencia de ello carezca de sentido. Nos percatamos al mismo tiempo que el concepto de ser susceptible de experiencia sólo gana contenido gracias a que su extensión está restringida. De hecho todos los objetos son separados en dos clases: los objetos de la experiencia y aquellos de la representación. Estos últimos no caen en su totalidad bajo el concepto de lo ‘susceptible de tener una experiencia’. De lo anterior puede deducirse además que no todo concepto es subordinado al concepto de lo susceptible de tener una experiencia de algo, en particular no lo es el concepto ‘objeto de representación’. De lo que se sigue además que el concepto de lo susceptible de tener una experiencia de algo no es de manera general apropiado si se quiere transformar un juicio con ‘hay’ en la forma particular. Para justificar de modo general la expresión ‘objeto de la representación’, Pünjer tuvo que afirmar que toda representación tiene un objeto, que hay objetos de representaciones que no están formados con fundamento en una afección del yo. Si aplicamos a esto su definición de las oraciones conteniendo ‘hay’, entonces tiene que producirse una

¹⁹⁹ Frege usa aquí “esto” como nombre de objeto y no como demostrativo, por lo que en alemán se escribe con mayúscula; este efecto no puede reproducirse en español. Si Frege no quisiera enfatizar este uso particular, simplemente pudiera omitir el artículo definitivo (igual que en español).

²⁰⁰ El editor señala que Frege, en una época posterior a “Sobre sentido y significado”, habría dicho aquí “significado” en lugar de “sentido”.

contradicción. De hecho, de conformidad con esta definición, el juicio 'hay objetos de representaciones que no están formados con fundamento en una afección del yo' significa lo mismo que "entre lo susceptible de experiencia hay algo que cae bajo el concepto 'objeto de una representación que no está formada con base en una afección del yo'". Pero de conformidad con la explicación de Pünjer, los objetos de representaciones que no son formados con base en una afección del yo no son susceptibles de experiencia. Esto nos lleva a la oración 'Entre lo susceptible de tener experiencia de ello hay algo que no es susceptible de tener una experiencia de ello.

Se puede expresar esto también así: de las dos premisas

1. Hay objetos de representaciones que no son formados con fundamento en una afección del yo;
2. Los objetos de representaciones que no están formados con fundamento en una afección del yo no son susceptibles de tener una experiencia de ellos;

sigue la conclusión:

Hay objetos de representaciones que son objetos no susceptibles de experiencia. Esto es una contradicción tan pronto se permite que 'hay' expresa el mismo tipo de existencia que se supone está en la expresión 'susceptible de experiencia'.

En general puede establecerse lo siguiente:

Si se intenta conferir un contenido a la palabra 'ser' de modo que la oración 'A es' no sea superflua ni evidente de suyo, entonces uno se ve forzado a admitir que la negación de la oración 'A es' es posible en algunas circunstancias; esto quiere decir que hay sujetos cuyo ser tiene que ser negado. Pero entonces el concepto del ser ya no es apropiado de manera general para servir como explicación del 'hay' según la cual 'hay Bs' significa lo mismo que 'algún ente cae bajo el concepto B'; ya que si aplicamos esta explicación a la oración 'hay sujetos cuyo ser tiene que ser negado' se obtiene 'algún ente cae bajo del concepto del no ente' o 'algo que es, no es'. No hay manera de superar esto tan pronto se pretenda conferir contenido alguno al concepto del ente, sea éste el que sea. Es que si ha de ser correcta la explicación de que 'hay Bs' sea sinónimo de 'algún ente es B', es necesario que se entienda por 'ser' algo que sea totalmente evidente de suyo.

Por esta razón hay la misma contradicción también si se dice: 'A existe' significa 'la representación del A surgió con fundamento en una afección del yo'. Pero aquí se suman a ésta todavía otras dificultades, de las que mencionaré sólo algunas.

Cuando Leverrier se planteó la pregunta de si hay planetas más allá de la trayectoria de Urano, no se preguntó si su representación de un planeta más allá de la trayectoria de Urano surgió o podría surgir con fundamento en una afección del yo. Cuando se discute sobre si hay un dios, no se está discutiendo si nuestra representación de un dios surge o podría surgir con fundamento en una afección del yo. Muchos de quienes creen que hay un dios rechazarían que su representación de él haya surgido con fundamento en una afección inmediata de su yo por Dios, ya que sólo una afección inmediata puede estar en cuestión aquí. Pero esto es realmente secundario. El resultado es el siguiente:

Se puede decir que los significados de la palabra 'existir' en las oraciones 'Leo Sachse existe' y 'algunos hombres existen' no muestran mayor diferencia que [los de] 'ser un alemán' en las oraciones 'Leo Sachse es un alemán' y 'algunos hombres son alemanes'. Pero la oración 'algunos hombres existen' o 'algo existente es hombre' sólo significa lo mismo que 'hay hombres' si el concepto 'existente' es de orden superior al concepto 'hombre'. Si aquellos modos de expresión han de ser en general sinónimos, el concepto 'existente' tiene que ser de orden superior a todo concepto. Esto es posible solamente si la palabra 'existir' significa algo totalmente evidente de suyo, si no se enuncia entonces absolutamente nada en la oración 'Leo Sachse existe' y si en la oración 'algunos hombres existen' el contenido del predicado no se halla en la palabra 'existir'. La existencia expresada por la palabra 'hay' no se halla en la palabra 'existir' sino en la forma del juicio particular. 'Algunos hombres son alemanes' es un juicio existencial igual que 'algunos hombres existen'. Pero tan pronto se le confiere a la palabra 'existir' un contenido que se predica de algo particular, este contenido puede convertirse en la característica de un concepto bajo el cual cae el particular del cual se predica el existir. Si se separa, por ejemplo, todo en las dos clases,

1. Lo que está en mi mente, las representaciones, los sentimientos, etc.

y

2. Lo que está fuera de mí,

y se dice de lo segundo que existe, entonces puede interpretarse la existencia como característica del concepto 'centauro' a pesar de que no haya centauros. Yo no reconocería nada como un centauro que no estuviera fuera de mi mente; esto quiere decir a las meras representaciones, sentimientos en mí, no las llamaré 'centauro'.

La existencia expresada por medio de 'hay' no puede ser característica de ningún concepto cuya propiedad es, justamente porque es su propiedad. En la oración 'hay hombres' parece que se habla de individuos que caen bajo el concepto de 'hombre', mientras que se habla tan solo del concepto 'hombre'. El contenido de

la palabra 'existir' no puede tomarse realmente como característica de un concepto puesto que 'existir', tal como se usa en la oración 'hombres existen', no tiene contenido.

Se aprecia de esto cuán fácilmente nos seduce el lenguaje respecto a concepciones erróneas y cuál es el valor que ha de tener para la filosofía sustraerse del dominio del lenguaje. Si se hace el intento de construir un sistema de signos con fundamentos y con medios del todo diferentes, tal como lo he intentado con la invención de mí *Conceptografía*, uno se da de bruces, para así decirlo, con las analogías falaces del lenguaje.

[17 Enunciados claves sobre la lógica]**[1882]**

1. Los nexos que constituyen la esencia del pensar son típicamente diferentes de las asociaciones de representaciones.
2. La diferencia no meramente consiste en un pensamiento secundario que aporta la justificación de la concatenación.
3. En el pensar no se conectan, propiamente hablando, representaciones sino cosas, propiedades, conceptos, relaciones.
4. El pensamiento siempre contiene algo que se extiende más allá del caso particular, de manera que éste aparece en la conciencia como cayendo bajo algo general.
5. La expresión lingüística de lo particular del pensamiento es la cópula o la terminación personal del verbo.
6. Como marca externa del nexo pensante puede servir que en su caso la pregunta, de si es verdadero o no verdadero, tiene sentido. Asociaciones de representaciones no son ni verdaderas ni no verdaderas.
7. Qué sea lo verdadero lo tomo por no explicable.
8. La expresión en el lenguaje del pensamiento es la oración. Se habla en sentido figurado también de la verdad de una oración.
9. Una oración sólo puede ser verdadera o no verdadera si es la expresión de un pensamiento.
10. La oración 'Leo Sachse es un hombre' es la expresión de un pensamiento sólo si 'Leo Sachse' designa algo. Asimismo, la oración 'esta mesa es redonda' es la expresión de un pensamiento sólo si las palabras 'esta mesa' designan algo determinado para mí, si no son palabras vacías.
11. '2 por 2 es 4' continúa siendo verdad, inclusive si como consecuencia de un desarrollo darwiniano todos los hombres llegaran a sostener que 2 por 2 es 5. Toda verdad es eterna e independiente de si es pensada y de la constitución psicológica de quien la piense.
12. La lógica empieza sólo con la convicción de que hay una diferencia entre la verdad y la no verdad.
13. Se justifica un juicio ya sea mediante un regreso a verdades ya conocidas o sin el recurso a otros juicios. Sólo el primero de estos casos, el inferir, es objeto de la lógica.
14. Las doctrinas del concepto y del juicio sólo son preparativos para la doctrina de la inferencia.
15. El quehacer de la lógica es la formulación de las leyes de acuerdo con las cuales un juicio se justifica por medio de otros, independientemente de si estos mismos son verdaderos.

16. El seguir las leyes lógicas puede garantizar la verdad de un juicio sólo en la medida en que los juicios de los cuales se parte para la justificación sean verdaderos.
17. Las leyes de la lógica no pueden justificarse mediante investigaciones psicológicas.

[Comentarios sobre sentido y significado]

[1892 - 1895]

En un ensayo (“Sobre Sentido y Significado”) yo distingo entre sentido y significado en primer lugar sólo en relación con los nombres propios (o si se prefiere, respecto a los nombres particulares). La misma distinción puede hacerse también en relación con las palabras conceptuales. Ahora bien, sucede fácilmente que se produce una falta de claridad si se mezcla la clasificación de conceptos y objetos con la distinción entre sentido y significado, de manera que se dejan combinar sentido y concepto, por una parte, y significado y objeto, por la otra. Pero, tal como yo uso estas palabras, por regla general le corresponde a cada palabra conceptual o a cada nombre propio tanto un sentido como un significado. En poesía las palabras efectivamente tienen sólo un sentido pero en la ciencia, y sobre todo siempre que nos ocupemos de la cuestión de la verdad, no queremos conformarnos con el sentido sino que también queremos conectar los nombres propios y las palabras conceptuales con el significado; y si por un descuido no lo hacemos, entonces hay un error que fácilmente puede echar a perder nuestra reflexión. El significado de un nombre propio es el objeto que designa o nombra. Una palabra conceptual significa un concepto cuando la palabra es usada de un modo que es adecuado para la lógica. Para aclarar esto recuerdo una circunstancia que parece apoyar en mucho el punto de vista de los lógicos extensionales en contraposición a los intensionales, a saber, que sin menoscabo de la verdad las palabras conceptuales pueden representarse unas u otras en toda oración cuando les corresponde la misma extensión conceptual, por lo que entonces respecto a la inferencia y para las leyes lógicas los conceptos se comportan de un modo diferente sólo en la medida en que sus extensiones son diferentes. La relación lógica fundamental es la de un objeto que cae bajo un concepto: todas las relaciones entre conceptos son reducibles a ésta. Al caer un objeto bajo un concepto caerá bajo todos los conceptos que tienen la misma extensión, de lo cual se sigue lo anteriormente dicho. Así como nombres propios del mismo objeto pueden reemplazarse unos a otros sin afectar la verdad, así también pasa con las palabras conceptuales, cuando la extensión conceptual es la misma. Desde luego que con tales reemplazos el pensamiento será otro, pero éste es el sentido de la oración, no su significado.²⁰¹ Pero éste, o sea, el valor de verdad, permanece sin cambio. Así, se podría llegar a la idea de tomar la extensión del concepto por el significado de la palabra conceptual; pero con ello pasaríamos por alto que las extensiones de los conceptos son objetos y no conceptos (*Cfr.* mi ensayo “Función y Concepto”). De

²⁰¹ Nota de Frege: Cf. mi ensayo “Sobre sentido y significado.” [título traducido frecuentemente como “Sobre sentido y referencia”].

todas maneras, lo anterior encierra una pizca de verdad. Para que ésta se pueda apreciar en toda su pureza tengo que referirme a lo que digo en mi opúsculo sobre función y concepto. Un concepto es, pues, una función de un argumento cuyo valor es siempre un valor de verdad. Tomo prestada la palabra ‘función’ del análisis y la uso conservando lo esencial, con un significado algo más amplio, para lo cual la historia del análisis mismo sirve de guía. Un nombre de función comporta siempre lugares vacíos (por lo menos uno) para el argumento que en el análisis generalmente se indica con la letra ‘x’, la cual llena dichos lugares vacíos. Pero el argumento no debe tomarse como parte de la función y, por consiguiente, la letra ‘x’ tampoco debe tomarse como parte del nombre de la función, de modo que de alguna manera puede también hablarse en su caso de lugares vacíos en la medida en que aquello que lo completa realmente no es parte de él. En concordancia con ello, llamo a la función misma insaturada o que requiere ser completada, ya que su nombre todavía tiene que ser completado por medio de un signo de argumento para lograr un significado delimitado. Llamo a este ‘objeto’ y, en nuestro caso, valor de la función para el argumento que la completa o satura. En los casos que primero se nos presentan, el argumento mismo es un objeto; y es de casos así de los que queremos aquí ocuparnos primero. Tratándose del concepto, tenemos ahora el caso particular de que el valor es siempre un valor de verdad. Pues si completamos un nombre conceptual por medio de un nombre propio, obtenemos una oración cuyo sentido es un pensamiento; y a éste pertenece como significado un valor de verdad. Mientras reconozcamos a éste como el de lo verdadero (como lo verdadero) juzgaremos que el objeto que fue tomado como argumento cae bajo el concepto. Lo que en la función llamamos ‘insaturación’ lo podemos llamar en el concepto su ‘naturaleza predicativa’²⁰². Ésta se muestra también cuando se dice que el sujeto es un concepto. (‘Todos los triángulos equiláteros son equiángulos’; es decir: ‘Si algo es un triángulo equilátero, entonces es un triángulo equiángulo.’)

Ahora bien, esta esencia del concepto es un gran obstáculo para una expresión apropiada y para darnos a entender. Cuando deseo hablar de un concepto, el lenguaje me impone con una fuerza casi irresistible una expresión inapropiada, la cual oscurece el pensamiento – casi podríamos decir que lo falsifica. Cuando digo ‘el concepto *triángulo equilátero*’ debería asumirse, sobre la base de analogías lingüísticas, que con esto designo un concepto, así como sin duda nombro un planeta cuando digo ‘el planeta Neptuno’. Pero esto no es el caso, puesto que falta la naturaleza predicativa. De ahí que el significado de la expresión

²⁰² nota de Frege: las palabras ‘insaturado’ y ‘predicativo’ parecen ajustarse mejor al sentido que al significado; pero tiene que haber algo que les corresponde en el significado y no conozco palabras que se ajustarían mejor. Cf. la lógica de Wundt.

‘el concepto *triángulo equilátero*’ (si es que hay tal) sea un objeto. No podemos prescindir de las palabras ‘el concepto’ y otros similares, pero tenemos que tener presente siempre su inadecuación.²⁰³ Se sigue de lo dicho que objetos y conceptos son fundamentalmente diferentes y que no pueden representarse unos a otros. Esto vale también para las palabras o signos correspondientes. Realmente, los nombres propios no pueden usarse como los predicados. Cuando parece ser así, la observación cuidadosa muestra que, en cuanto al sentido, sólo son una parte del predicado: los conceptos no pueden estar en las mismas relaciones que los objetos. Pensarlos en ellas no sería falso, sino imposible. De ahí que las palabras ‘relación del sujeto con el predicado’ designan dos relaciones totalmente diferentes, dependiendo de si el sujeto es un objeto o si es él mismo un concepto. Lo más sano sería, por lo tanto, desterrar totalmente de la lógica las palabras ‘sujeto’ y ‘predicado’, ya que una y otra vez lo inducen a uno a confundir relaciones fundamentalmente distintas, la de un objeto que cae bajo un concepto y [la de] un concepto que se subordina a otro concepto. Las palabras ‘todos’ y ‘algunos’ que acompañan al sujeto gramatical pertenecen en cuanto al sentido al predicado gramatical, como se reconoce cuando se pasa a la negación (no todos, *nonnulli*). De esto claramente se sigue que el predicado es diferente en estos casos de lo que predicamos de un objeto, por lo que la relación de igualdad, que yo entiendo como coincidencia total, como identidad, es pensable sólo entre objetos, no entre conceptos. Cuando decimos “El significado de la palabra conceptual ‘sección cónica’ es la misma que la de la palabra conceptual ‘curva de segundo grado’” o ‘el concepto *sección cónica* coincide con el concepto *curva de segundo grado*’, entonces las palabras “el significado de la palabra conceptual ‘sección cónica’”, son el nombre de un objeto, no de un concepto, puesto que les falta la naturaleza predicativa, la insaturación, la posibilidad de que se use el artículo indefinido. Lo mismo vale para las palabras ‘el concepto *sección cónica*’. Pero si bien la relación de igualdad es pensable sólo entre objetos, también se da sin embargo una relación similar entre conceptos que he llamado, al darse entre conceptos, relación de segundo nivel, en tanto que llamo a aquella primera igualdad relación de primer nivel. Decimos de un objeto *a* que es igual a un objeto *b* (en el sentido de que coinciden plenamente) cuando *a* cae bajo todo concepto bajo el cual cae *b*, y a la inversa. Obtenemos algo que corresponde para los conceptos si dejamos que concepto y objeto intercambien papeles. Podríamos decir entonces que la relación recién pensada está presente entre el concepto Φ y el concepto *X* cuando todo objeto que cae bajo Φ cae también bajo *X* y viceversa. Sin embargo, no se pueden evitar las expresiones ‘el concepto Φ ’, ‘el concepto *X*’, por lo cual nuevamente se oscurece el sentido real. Agregaré por ello lo siguiente para los lectores a quienes no los asusta la *Conceptografía*: la

²⁰³ Nota de pie de Frege: “atenderé esta dificultad”

insaturación del concepto (de primer nivel) se representa en la *Conceptografía* del modo que su designación contiene al menos un lugar vacío para dar cabida a un nombre de un objeto que cae, o no cae, bajo el concepto. Este lugar o estos lugares tienen siempre que llenarse de alguna manera. Esto puede hacerse además de por medio de un nombre propio, también por medio de un signo que sólo indica un objeto. De ahí que en uno de los lados del signo de igualdad o de un [signo] similar no pueda nunca encontrarse únicamente la designación de un concepto, sino que siempre tendrá que designarse o señalarse además del concepto también un objeto. Inclusive si indicamos los conceptos meramente en forma esquemática a través de una letra de función, ello solamente puede hacerse señalando la insaturación a través de un lugar vacío junto a ellos como en $\Phi ()$ y $X ()$. En otras palabras: sólo estamos autorizados a usar las letras (Φ , X), las cuales deberían señalar o designar conceptos, como letras de función, esto es, de manera que acarreen consigo un lugar para el argumento (el hueco entre las paréntesis que le siguen). Así, no se debe escribir $\Phi = X$, porque las letras Φ y X así no se presentan como letras de función. Pero tampoco se debe escribir $\Phi () = X ()$, porque los lugares del argumento tienen que estar llenados. Pero si se llenan, no sólo se igualan entre sí las funciones (conceptos), sino que en cada lado del signo de igualdad habrá algo además de la letra de función que no pertenece a la función.

No²⁰⁴ se pueden reemplazar esas letras por otras que no sean usadas como letras de función: tiene siempre que haber un lugar de argumento para dar cabida a la 'a'. Se le podría ocurrir a alguien escribir simplemente $\Phi = X$. Esto puede parecer admisible mientras se indiquen esquemáticamente los conceptos; pero un modo de designar verdaderamente apropiado tiene que ajustarse a todos los casos. Veamos un ejemplo que ya di en mi trabajo sobre función y concepto.

La función $x^2 = 1$ tiene para todo argumento el mismo valor (de verdad) que la función $(x + 1)^2 = 2(x + 1)$; es decir, bajo el concepto de *raíz cuadrada de 1* cae todo objeto que cae bajo el concepto de *todo lo que es menor por 1 que un número cuyo cuadrado es igual a su doble*, y a la inversa. Nosotros expresaríamos este pensamiento del modo como lo expresamos más arriba:

$$(\alpha^2 = 1) \overset{\text{a}}{\asymp} ((\alpha + 1)^2 = 2(\alpha + 1)).$$

Aquí en verdad tenemos esa relación de segundo nivel que corresponde a la igualdad (la coincidencia total) de objetos sin que deba confundirse con ésta. Nosotros escribimos así: $\overset{\text{a}}{\asymp} (\alpha^2 = 1) = ((\alpha + 1)^2 = 2(\alpha + 1))$, de manera que expresamos esencialmente el mismo pensamiento, tomado como la universalidad de una

²⁰⁴ Nota de los editores: es posible que todo este párrafo haya sido tachado o puesto entre paréntesis por Frege.

ecuación entre valores de función. Tenemos aquí la misma relación de segundo nivel; tenemos también el signo de igualdad; pero éste por sí solo no basta para designar esta relación, sino que lo hace sólo en conexión con la designación de universalidad: tenemos en primer lugar una universalidad, no una ecuación. En $\dot{\epsilon}(\epsilon^2 = 1) = \dot{\alpha}((\alpha + 1)^2 = 2(\alpha + 1))$ tenemos efectivamente una igualdad, pero no entre conceptos (lo cual es imposible), sino entre objetos, a saber, entre extensiones de conceptos.

Nos hemos ahora dado cuenta de que la relación de igualdad entre objetos no se puede también pensar para conceptos, pero también aquí se da la relación correspondiente. Sin embargo, la expresión 'mismo', que se usa para designar aquella relación entre objetos, no puede realmente también servir para designar esta otra relación. No nos queda para este fin más que decir que 'el concepto ϕ es el mismo que el concepto X ', designando aquí, sin embargo, una relación entre objetos²⁰⁵ cuando pretendemos designar una relación entre conceptos. Tenemos el mismo caso cuando decimos 'el significado de la palabra conceptual A es la misma que la de la palabra conceptual B'. Tendría en efecto que desecharse la expresión 'el significado de la palabra conceptual A', puesto que el artículo definido que antecede a 'significado' indica un objeto y rechaza la naturaleza predicativa del concepto. Sería mejor decir 'lo que la palabra conceptual A significa', pues esta expresión puede usarse, en todo caso, al modo predicativo: 'Jesús es lo que la palabra conceptual 'hombre' significa' en el sentido de 'Jesús es un hombre'.

Si ahora fijamos la atención en todo lo anterior estaremos en posición de sostener que 'lo que dos palabras conceptuales significan es lo mismo si y sólo si las extensiones conceptuales pertinentes coinciden' sin que el uso impropio de la expresión 'lo mismo' nos haga caer en el error. Y con esto, creo, se hace una concesión importante a los lógicos extensionalistas. Éstos tienen razón cuando, al expresar su significado por la extensión del concepto sobre el contenido del concepto, dan a entender que consideran que el significado de las palabras es lo esencial para la lógica, no su sentido. Los lógicos intensionalistas se detienen con demasiada complacencia en el sentido, porque lo que ellos llaman intensión, si no es inclusive la representación, entonces es el sentido. Ellos no consideran que para la lógica no es importante cómo los pensamientos se originan en pensamientos independientemente del valor de verdad, que tiene que darse el paso del pensamiento al valor de verdad, y más en general, el paso del sentido a el significado, que las leyes de la lógica son en primer lugar leyes en el ámbito del significado y que designan el sentido sólo indirectamente. Si lo único que importa es la verdad – y la verdad es a lo que apunta la lógica – entonces hay que

²⁰⁵ Nota de pie de Frege: «estos objetos tienen los nombres "el concepto Φ " y "el concepto X ".»

preguntar también por los significados, por lo que se tienen que rechazar los nombres propios que no designan o nombran un objeto, a pesar de que podrían tener un sentido; se tienen que desechar las palabras conceptuales que no tienen significado. Pero estas no son, por ejemplo, las que incorporan algo contradictorio, puesto que un concepto bien puede ser vacío, sino las que tienen una delimitación borrosa. Para cada objeto tiene que estar determinado si cae bajo el concepto o no; una palabra conceptual que no satisface esta exigencia en cuanto a su significado carece de significado. Esto vale también *e. g.*, para la palabra ‘ $\mu\omega\lambda\nu$ ’ (Homero Od. X, 305), aunque se dan algunas marcas distintivas. No por ello tiene este pasaje que ser un sinsentido, al igual que otros en los que aparece el nombre ‘Nausikaa’, que probablemente no significa ni nombra nada. Pero funciona como si nombrara a una joven y de este modo se le confiere un sentido. En poesía basta con el sentido, el pensamiento aún sin significado, sin valor de verdad, pero no en ciencia.

Yo mostré en mis *Fundamentos* y en la conferencia sobre las teorías formales de la aritmética que para determinadas demostraciones no da lo mismo en absoluto el que una combinación de signos – *e. g.*, $\sqrt{-1}$ – tenga significado que el que no lo tenga²⁰⁶, sino que, al contrario, toda la fuerza de la demostración depende por completo de ello. Así, resulta que para la ciencia el significado es siempre lo esencial. De manera que cuando se le tiene que conceder a los lógicos intensionalistas que el concepto mismo es lo que es lo originario frente a la extensión, de todos modos no debe entenderse como el sentido de la palabra conceptual sino como su significado, y los lógicos extensionalistas se acercan más a la verdad por cuanto le confieren a la extensión la importancia de lo esencial que, inclusive si no es el concepto mismo, de todos modos está muy estrechamente relacionado con éste.

El Sr. Husserl censura la falta de claridad en Schröder cuando éste discute las palabras ‘sin sentido’, ‘con sentido único’ y ‘con sentido múltiple’, ‘sin significado’, ‘con significado único’, ‘con significado múltiple’ (pp. 48 ss. y 69), y de hecho sí hay aquí falta de claridad, pero tampoco Husserl hace suficientes distinciones. Como era de esperarse, el Sr. Schröder usa los fragmentos que expresan ‘sentido’ y ‘significado’²⁰⁷ de modo diferente de cómo yo lo hago, cosa que

²⁰⁶ [Nota de pie de Frege]: No había determinado aún el uso, adaptado ahora, de las palabras ‘sentido’ y ‘significado’, de modo que decía ocasionalmente ‘sentido’ donde ahora diría ‘significado’.

²⁰⁷ Frege se refiere a los sufijos, *e.g.*, en “un-sinnig” respectivamente “ein-deutig”, o sea, “sin sentido” o “unívoco” como Frege usa este término, o sea, esto último, la propiedad de tener exactamente un significado, sílaba que hace su apariencia en alemán también, entre otras, en la palabra “Be-deut-ung”. El uso de Schröder es más acorde a como se entienden estas palabras naturalmente en español.

ni mucho menos se le puede reprochar, dado que yo no había publicado nada cuando apareció su trabajo. En él, esta diferencia se relaciona con aquella otra entre nombres comunes y nombres propios y la falta de claridad surge de la incomprensión de la diferencia entre concepto y objeto. Según él, los nombres comunes pueden sin problemas ser ambiguos y lo son cuando diversos objetos caen bajo el concepto que les pertenece²⁰⁸. De acuerdo con esto, un nombre común podría también sin error no indicar nada, como 'cuadrado redondo'. Pero Schröder lo llama también 'sin sentido', con lo cual se vuelve incongruente con su propia manera de hablar; porque de acuerdo con esta, 'cuadrado redondo' tendría que ser unívoco y Husserl tiene razón cuando lo llama nombre común unívoco, ya que 'unívoco' y 'equivoco' corresponden a los 'sentido único' y 'sentido múltiple' de Schröder. Husserl dice (p. 250): "Evidentemente, se confunden aquí dos cuestiones muy distintas, a saber, 1) si a un nombre le corresponde un significado (un 'sentido') y 2) si a un nombre le corresponde o no un objeto existente". Esta distinción no basta. La palabra 'nombre común' induce a suponer que el nombre común se refiere esencialmente a objetos, como un nombre propio, salvo que mientras que éste menciona solamente uno en particular el otro puede en general aplicarse a varios. Pero eso es falso y por ello prefiero decir en lugar de 'nombre común' 'palabra conceptual'. El nombre propio tiene que tener al menos un sentido (tal como yo uso la palabra); de otro modo sería una secuencia vacía de sonidos y se le llamaría nombre sin justificación. Pero para el uso científico tiene que exigírsele que también tenga un significado; que designe o nombre un objeto. Así, el nombre propio designa un objeto a través del sentido y sólo a través de él.

También la palabra conceptual tiene que tener un sentido y para el uso científico un significado, pero el primero no consiste en un objeto ni en varios, sino que es un concepto. Respecto al concepto, sin embargo, puede preguntarse nuevamente si un objeto cae bajo él o si son varios o ninguno. Pero esto es algo que sólo concierne al concepto. Así que, lógicamente, una palabra conceptual puede ser absolutamente irrecusable aunque no haya un objeto al cual designe a través de su sentido y su significado (el propio concepto). Esta designación de un objeto es, como se ve, más bien mediada y no esencial, de modo que parece poco apropiado clasificar las palabras conceptuales dependiendo de si no cae ningún objeto bajo el concepto correspondiente o si cae uno o caen varios. La lógica tiene que exigir tanto del nombre propio como de la palabra conceptual que el paso de la palabra al sentido y del sentido al significado estén determinados sin que quepan dudas. De otro modo no estaría permitido en lo absoluto hablar de significados. Esto vale,

²⁰⁸ [nota de pie de Frege:] Si, como dice Husserl en la nota de pie de la p. 252, un nombre distributivo es uno "cuyo significado consiste en denotar uno cualquiera entre su multiplicidad" entonces una palabra conceptual (nombre común) en todo caso no es un nombre distributivo.

naturalmente, para todos los signos y combinaciones de signos que tienen el mismo objetivo que los nombres propios y las palabras conceptuales.

Lógica [1897]

Resumen por páginas

[Breve indicación del contenido de cada una de las páginas. Frege hizo esto sólo para las primeras 19 páginas del texto]

[96] La palabra 'verdadero' establece la meta. La lógica se ocupa de un modo particular del predicado 'verdad'. La palabra 'verdad' caracteriza la lógica.

[97] La verdad no se deja definir; no se puede decir: una representación es verdadera si concuerda con la realidad. La verdad es primitiva y simple. Se echa luz sobre este predicado nuestro mediante comparaciones. A éste siempre se le enuncia cuando se enuncia algo.

[98] Investigar el campo en el que el predicado 'verdad' es aplicable. No en la corporeidad. Las más de las veces se le aplica a oraciones, pero sólo a las afirmaciones. Pero no encaja con secuencias de sonidos. Traducción.

[99] [La lógica no tiene por qué ocuparse de pseudo-oraciones.]

[100] Al sentido de una oración se le llama pensamiento. El predicado 'verdad' se aplica a pensamientos. ¿Se aplica también a representaciones? Inclusive si se dice de una representación que es verdadera es propiamente hablando al pensamiento a lo que se adscribe este predicado.

[101] El pensamiento no es ninguna representación ni se compone de éstas. Pensamientos y representaciones son fundamentalmente diferentes. No es a través de la asociación de representaciones como podría surgir algo que fuera verdad.

El medio apropiado de expresión del pensamiento es la oración. Ésta, en cambio, es poco apropiada para reproducir representaciones. Imágenes y piezas de música en cambio son inapropiadas para expresar pensamientos. Comparación de los predicados 'verdad' y 'bello'. El segundo admite grados, el primero no.

[102] Lo bello es bello únicamente para quien lo encuentra como tal. No se puede discutir sobre el gusto. Lo que es verdad es verdadero en sí mismo; nada es bello en sí mismo. Un juicio de belleza objetivo se funda en una suposición de un hombre normal. Pero ¿qué es lo normal? Lo bello objetivo se funda siempre en lo bello subjetivo. Tampoco sirve sustituir el hombre normal con el hombre ideal.

[103] La obra de arte es una construcción de representación en nosotros. Cada quien tiene la suya propia. No hay contradicción entre juicios de belleza. Si alguien aseverara que algo es verdad sólo gracias a que nosotros lo

admitimos, el contenido de su afirmación entraría en contradicción con su acción misma de afirmarlo. En verdad, él no podría afirmar nada. Toda opinión sería entonces injustificada; no habría ninguna ciencia. No habría nada que fuera propiamente hablando verdadero. Su independencia respecto de nuestro reconocimiento está íntimamente vinculada con el sentido de la palabra 'verdad'.

- [104] Tampoco los pensamientos tienen que ser pensados por nosotros para que sean verdaderos. Las leyes de la naturaleza son descubiertas (no inventadas). Los pensamientos son independientes de nuestro pensar. El pensamiento no le pertenece a quien piensa como la representación al que se la representa, sino que únicamente confronta a los pensantes como él mismo. De otra manera, nunca dos hombres conectarían el mismo pensamiento con la misma oración. Una contradicción entre afirmaciones de diferentes hombres sería imposible. Toda discusión sobre la verdad sería vacua. Estaría faltando un espacio común de lucha.
- [105] En cuanto a la belleza, cada quien juzga su canción, de manera que cada quien juzgaría también sus pensamientos si éstos se relacionaran con las oraciones de un modo parecido a como se relacionan la estructura de intuición sonora y las vibraciones del aire. Si el pensamiento fuera algo mental, entonces su verdad podría consistir sólo en una relación con algo exterior y que dicha relación se diera sería un pensamiento por cuya verdad habría que preguntar. Noria. El pensamiento es algo impersonal. Algo escrito sobre la pared.
- [106] Objeción: una oración como 'tengo frío'. La palabra hablada frecuentemente requiere de un complemento. La palabra 'yo' no siempre designa al mismo hombre. La oración que contiene 'yo' se puede vaciar en un molde más apropiado. Diferencia con la interjección. Las palabras 'ahora' y 'aquí' son similares a 'yo'. En el juicio de gusto subjetivo es esencial quién lo enuncia.
- [107] Objeción: yo uso la palabra 'pensamiento' de manera inusual.
- [108.] Nota: el modo como lo usa Dedekind coincide con el mío.
- [109] El pensar no es la producción de pensamientos, sino su aprehensión.
- [110] El pensamiento no es algo espacial, algo material.
- [111] El pensamiento es algo real sólo en un sentido especial. También los pensamientos falsos son independientes del hablante.
- [112] El predicado 'verdad' siempre está presente en lo que es enunciado. En la oración afirmativa, la expresión de un pensamiento y el reconocimiento de su verdad suelen estar unidos. Esta conexión no es necesaria. No siempre se hace una afirmación por medio de una oración afirmativa. Aprehender el pensamiento frecuentemente antecede al reconocimiento de la verdad. Juzgar, afirmar. Una oración debería también extraerse a partir de la imaginación y del sentimiento.

- [113] [La oración,] como un todo de percepciones sonoras tiene esta capacidad. Onomatopeya. A través de su sentido, las palabras actúan también sobre la representación. Aunque la representación no debería confundirse con el sentido.
- [114] Las palabras por sí solas no determinan la representación. Representaciones con las mismas palabras son diferentes. Las palabras dan indicaciones para la imaginación. Recursos para el poeta. 'Perro' y 'can' pueden sustituirse mutuamente sin que el pensamiento cambie. Lo que los distingue tiene el valor de una interjección.
- [115] Criterio. Hay que distinguir entre pensamientos que expresamos y pensamientos que sólo tratamos de aprehender. Voces tristes, 'ay', 'lástima'. Casos dudosos debido a los cambios que sufre el lenguaje.

Introducción

El predicado verdadero, pensamiento, conclusiones para el tratamiento de la lógica.

Al abordar una ciencia se percibe la necesidad de obtener al menos de manera preliminar un atisbo de su esencia. Lo que se desea es ver una meta que se aspira a alcanzar, erigir un propósito que indique la dirección en que se desea avanzar. Para la lógica, la palabra 'verdadero' puede servir para indicar tal cosa, de manera similar a como 'bien' lo hace para la ética y 'bello' para la estética. Ciertamente, todas las ciencias tienen como objetivo la verdad, pero la lógica se ocupa de manera muy particular del predicado 'verdadero', a saber, de modo similar a como la física tiene que ver con los predicados 'pesado' y 'caliente' o la química con los predicados 'ácido' y 'alcalino' pero con la diferencia de que estas ciencias tienen que tomar en cuenta, además de las propiedades mencionadas, otras más y no se caracterizan en su esencia por ninguna de ellas de un modo tan completo como la lógica por la palabra 'verdadero'.

Al igual que a la ética, también a la lógica se le puede llamar una ciencia normativa. ¿Cómo tengo que pensar para alcanzar la meta, la verdad? La respuesta a esta pregunta es lo que esperamos de la lógica, pero no le exigimos que se ocupe de lo particular de cada campo del saber y de sus objetos, sino que le asignamos como tarea sólo que nos indique lo más general, lo que tiene validez para todos los campos del pensar. Las reglas para nuestro pensar y para tener algo como verdadero tenemos que pensarlas [como] determinadas por las leyes del ser verdadero. Mediante estas, las otras nos son dadas. Podemos entonces decir también: la lógica es la ciencia de las leyes más generales del ser verdadero. Quizá se opine que no es posible pensar nada totalmente determinado acerca de esto. Podría ser que la ineptitud del autor y del lenguaje tuvieran la culpa de ello, pero también se trata únicamente de marcar la meta en forma aproximada. Lo que falta todavía tiene que completarse por medio de la ejecución.

Ahora bien, sería en vano aclarar mediante una definición lo que ha de entenderse por 'verdadero'. Se podría querer decir: "'verdadera' es una representación si concuerda con la realidad", con lo cual nada se lograría, porque para aplicarla sería necesario determinar, al presentarse el caso, cuándo una representación concuerda con la realidad; en otras palabras: si es verdad que la representación concuerda con la realidad. Es decir, se tendría que presuponer precisamente lo que se define. Esto valdría igualmente para cualquier explicación

de la siguiente forma: 'A es verdadero, si tiene esta o aquella propiedad o tiene esta o aquella relación con esto o aquello'. De nuevo, siempre dependería en cada caso dado si es verdad que A tiene estas o aquellas propiedades, está en esta o aquella relación con esto o aquello. Parece evidente que la verdad es algo tan originario y simple que una reducción a algo aún más simple no es posible. Nos vemos limitados entonces a echar luz sobre lo particular de nuestro predicado comparándolo con otros. Para empezar, se distingue de todos los demás predicados porque siempre es predicado también tan pronto cualquier cosa es predicada.

Si afirmo que la suma de 2 y 3 es 5, entonces con ello afirmo que es verdad que 2 más 3 es 5. E igualmente afirmo que es verdad que mi representación de la catedral de Colonia concuerda con la realidad si afirmo que concuerda con la realidad. La forma de la oración afirmativa es entonces propiamente con lo que enunciamos la verdad, y ni siquiera requerimos de la palabra 'verdadero'. Hasta podríamos decir: inclusive cuando usamos la expresión 'es verdad que...', lo que es realmente esencial es la forma de la oración afirmativa.

Preguntemos ahora: ¿dónde se aplica el predicado 'verdadero'? Se trata de delimitar un área – fuera de la cual ni siquiera sería posible hablar de una aplicación. En todo caso, toda el área de lo corpóreo tiene que quedar excluida. Sólo en el caso de las obras de arte podría eventualmente plantearse alguna duda. Pero si en ellas se habla de verdad, entonces esta palabra se usa con un significado completamente distinto al que aquí se alude. En todo caso, la cosa se llamará verdadera sólo en tanto que obra de arte. Parecería que si estuviera formada por fuerzas ciegas de la naturaleza, entonces nuestro predicado no sería apropiado. Por la misma razón excluimos de la disquisición el modo de hablar de acuerdo con el cual se llama verdaderos a sentimientos o sensaciones, por ejemplo, en ocasión de una crítica de arte.

Las más de las veces nuestro predicado se adscribe a oraciones, pero las oraciones de deseo, de pregunta, de exhortación, de orden deberían ser excluidas y sólo las oraciones afirmativas habrán de tomarse en cuenta; aquellas oraciones a través de las cuales comunicamos hechos, establecemos leyes matemáticas o leyes de la naturaleza.

Es además claro que no es a la secuencia de sonidos, que es como se presenta una oración, sino a su sentido al que propiamente adscribimos la verdad; ya que, por un lado, la verdad persiste si traducimos una oración correctamente a otro idioma; por el otro es por lo menos pensable que la misma secuencia de sonidos tuviera en un idioma un sentido verdadero, en el otro un sentido falso.

Entendemos aquí por la palabra ‘oración’ la oración principal y las oraciones subordinadas que dependen de ella.

En los casos que únicamente conciernen a la lógica, el sentido de una oración afirmativa es o verdadero o falso y entonces lo llamamos propiamente un pensamiento. Hay, sin embargo, un tercer caso que por lo menos tiene que ser mencionado aquí.

La oración ‘La Escila tiene seis fauces’ no es verdadera, pero tampoco la oración ‘La Escila no tiene seis fauces’ es verdadera, ya que para ello sería necesario que el nombre propio ‘Escila’ designa algo. Quizá se opine que el nombre ‘Escila’ designara algo, a saber, una representación. Se plantea entonces la pregunta: ¿representación de quién? A menudo se habla como si una y la misma representación correspondiera a varios hombres, pero eso es falso, toda vez que ‘representación’ se usa aquí en sentido psicológico: cada uno tiene la suya. Pero una representación no tiene cabezas, por lo que no hay nada tampoco que le puedan cortar. De ahí que ‘Escila’ no designe ninguna representación. Podemos referirnos a los nombres que fallan en cuanto al objetivo que los nombres propios suelen tener, a saber, nombrar algo, nombres propios aparentes. Sin embargo, aun siendo la narración acerca de Tell un cuento, no historia, y el nombre ‘Tell’ es un nombre propio aparente, no se le puede negar todo sentido. Pero el sentido de la oración ‘Tell, con un disparo, le tiró a su hijo una manzana de la cabeza’ es tan poco verdadero como el de la oración ‘Tell no le tiró a su hijo, con un disparo, una manzana de la cabeza’. Pero tampoco digo que el sentido sea falso, sino que declaro que es poesía. Esto esclarece el sentido en el que uso la palabra ‘falso’, de la que propiamente hablando no puede darse más definición de lo que puede darse de ‘verdadero’.

Si la teoría del conocimiento del idealismo fuera acertada, entonces todas las ciencias naturales pertenecerían al reino de la poesía. Ciertamente se podría intentar reinterpretar todas las oraciones de manera que versaran sobre representaciones. Pero esto cambiaría por completo el sentido de éstas, se obtendría una ciencia totalmente distinta y esta nueva ciencia sería una rama de la psicología.

En lugar de ‘poesía’ podríamos también decir ‘pensamiento aparente’. Si el sentido de una oración afirmativa no es verdadero, entonces o es falso o es poesía, y esto último es en general el caso si lo que en él aparece es un nombre propio aparente.²⁰⁹ El arte de la poesía se ocupa, como también por ejemplo la pintura, de lo aparente. Las aseveraciones de la poesía no pueden ser tomadas en serio: sólo

²⁰⁹ [nota de Frege] Una excepción ocurre cuando el nombre propio aparente aparece en una oración indirecta que forma una parte de la oración.

son afirmaciones aparentes. Tampoco pueden los pensamientos tomarse en serio, como en la ciencia: son sólo pensamientos aparentes. Si el Don Carlos de Schiller se tomara como histórico, entonces este drama sería en gran medida falso. Pero una obra de poesía no pretende ser tomada en serio de esta manera; se trata de un juego. Asimismo, los nombres propios son aquí nombres propios aparentes, si bien coinciden con los nombres de personas históricas; no se les debería tomar en serio. Algo parecido sucede con una pintura histórica. En tanto que obra de arte ni siquiera pretende ilustrar el suceso real. Una gráfica que pretendiera representar con precisión fotográfica un momento histórico significativo no sería una obra de arte en el sentido más elevado de la palabra, sino que sería más bien equiparable a una ilustración anatómica en una obra científica.

La lógica no tiene por qué ocuparse de pensamientos ficticios, así como el físico que quiere investigar la tormenta tampoco hará caso de la tormenta en el escenario. Cuando en lo que sigue se hable de pensamientos, se deberá entender por ellos pensamientos propiamente hablando, aquellos que son o verdaderos o falsos.

Ahora bien, yo llamo pensamiento al sentido de una oración afirmativa. Pensamientos son, *e.g.*, las leyes de la naturaleza, las leyes matemáticas, hechos históricos; todos ellos hallan su expresión en oraciones afirmativas. Ahora puedo decir con más precisión: el predicado 'verdadero' se aplica a los pensamientos.

Se habla también, por cierto, de representaciones verdaderas. Por representación se entiende una imagen de la fantasía que no se compone, como la contemplación, de sensaciones actuales, sino de las huellas recuperadas de sensaciones o actividades pasadas. En sí misma, una representación, como cualquier otra imagen, no es verdadera, sino sólo en virtud de algo a lo que debería corresponder. Si se dice que una imagen pretende representar la Catedral de Colonia, entonces ciertamente puede preguntarse si esta intención se cumplió; si no se considera la intención de representar algo, entonces no se puede hablar de verdad alguna en relación con la imagen. De esto se desprende que no es de la representación en sí misma que se reconoce el predicado **verdad**, sino del pensamiento de que ella representa un determinado objeto. Y este pensamiento no es ninguna representación, así como tampoco está compuesto de representaciones de algún modo. Los pensamientos son fundamentalmente diferentes de las representaciones (en el sentido psicológico). La representación de una rosa roja es algo diferente del pensamiento de que la rosa es roja. Independientemente de cómo es que se desee asociar o fusionar representaciones, de todos modos siempre se obtendrán nuevamente representaciones, pero no algo que pudiera ser verdad. Esta diferencia se muestra también en el modo de comunicación. El medio de expresión propio del pensamiento es la oración. Pero ésta es poco apropiada para

representar una representación. Sólo necesito recordar cuán incompleta es toda descripción en comparación con una representación pictórica. En una situación algo más favorable se encuentra la representación auditiva; una onomatopeya puede ser aquí de ayuda; pero precisamente ésta no tiene nada que ver con la expresión de pensamiento y en una traducción este cuadro tonal fácilmente se pierde, mientras que el pensamiento tiene que preservarse, si ha de hablarse de una traducción en lo absoluto. Por otro lado, imágenes y piezas de música sin palabras son poco apropiadas para expresar pensamientos. Ciertamente se podría pensar toda una variedad de cosas por medio de dicha obra de arte, pero no hay en esto ninguna relación necesaria y no es de extrañar que alguien piense otra cosa.

Para ²¹⁰ iluminar mejor lo peculiar de nuestro predicado **verdadero** lo comparamos con el predicado **bello**. Para empezar, nos percatamos de que lo bello tiene grados, no así lo verdadero. Podemos encontrar dos objetos bellos, uno de los cuales es más bello que el otro. Si, en cambio, dos pensamientos son verdaderos, uno de ellos no es más verdadero que el otro. Además, se plantea la diferencia esencial de que lo verdadero es verdadero independientemente de que lo reconozcamos como tal, en tanto que lo bello es bello sólo para aquel que como tal lo encuentra. Lo que para uno es bello no necesariamente lo es para el otro. En lo que a gustos concierne no hay disputas. En cuanto a lo verdadero el error es posible, pero no en cuanto a lo bello. Es justamente porque lo tengo por bello que es bello para mí. Pero no porque tengo por verdadero a algo tiene que ser verdadero; y si no es verdadero en sí mismo, entonces tampoco lo es para mí. Nada es bello en sí mismo, sino sólo para un ser sensible; y éste está implícito en todo juicio de belleza. Ahora bien, desde luego que se emiten juicios que parecen reivindicar su objetividad. Ello se funda siempre, consciente o inconscientemente, en la suposición de un hombre normal, y cada quien opina espontáneamente estar tan cerca del hombre normal que cree poder hablar en nombre de éste. 'Esta rosa es bella' querría decir entonces: para un hombre normal, esta rosa es bella. Pero ¿qué es normal? Esto depende por completo del círculo de hombres que se tenga en cuenta. Si en un valle perdido en las montañas casi todos los hombres tienen bocios, entonces eso se tendrá por normal y a aquellos que carezcan de semejante adorno se les tendrá por feos. ¿Cómo habría que disuadir a un negro del interior de África de que las delgadas narices de los europeos son feas y que en cambio las anchas de los negros son bellas? ¿Y no puede un negro en cuanto negro ser normal justamente como un blanco en cuanto blanco? ¿No puede un niño ser tan normal como un adulto? Las representaciones generadas por medio de asociaciones tendrán una gran influencia en el juicio de belleza y dependen de lo que el hombre

²¹⁰ [Nota de los editores: los dos párrafos que siguen, Frege los había tachado, como permite saber una nota de Scholz y sus colaboradores en el manuscrito.]

haya previamente interiorizado. Pero esto es siempre diferente en diferentes personas. Pero aún si se lograra definir el individuo normal y con ello lo bello objetivo, de todos modos ello tendría siempre que suceder con base en lo bello subjetivo. Éste de ninguna manera quedaría eliminado, sino que se le reconocería como lo original. Si en lugar del hombre normal se quisiera poner el hombre ideal, no se podría cambiar la situación. Sin sensaciones y representaciones en ningún caso habría algo bello subjetivo y entonces tampoco algo bello objetivo. De ahí que mucho se haya hablado en favor del punto de vista de que propiamente hablando la obra de arte es una construcción de representaciones en nosotros y que la cosa exterior – la pintura, la escultura – no es más que un medio para, propiamente hablando, elaborar en nosotros dicha obra de arte. Cada quien que disfruta tiene entonces su propia obra de arte, de manera que no hay ninguna contradicción entre los diferentes juicios sobre la belleza. De ahí que: *de gustibus non disputatum!*

Si alguien quisiera disputar que lo verdadero es independiente de que lo reconozcamos, entonces esto estaría contradiciendo lo que está afirmando justamente con su aseveración; de manera similar a un cretense que dice que todos los cretenses mienten.

Porque si algo fuera verdadero sólo para quien piensa que es verdadero, entonces no habría contradicción entre las opiniones de diferentes personas. Quien es de esta opinión, si es consecuente, no debería contradecir a la opinión contraria, sino que debería respetar el principio: *non disputandum est*. Él no puede afirmar absolutamente nada en el sentido usual y si lo hiciera pro forma ello sólo tendría el valor de una interjección, es decir, de la expresión de un estado o proceso mental, que no podría estar en contradicción con el estado o proceso en otra persona. Y este sería entonces efectivamente el valor de su afirmación: que algo sería verdadero sólo gracias a nuestro asentimiento y sólo para nosotros. Si esta opinión fuera verdadera, entonces sería imposible mantener que la propia opinión tuviera justificación de más peso que la opuesta también para los otros. Una opinión que reclama algo así no tendría justificación. Pero la consecuencia sería que toda opinión en el sentido usual de la palabra carecería de justificación, es decir, también la opinión contra la cual luchamos; no habría ciencia, no habría error, ni corrección del error; no habría, propiamente hablando, nada verdadero en el sentido usual de la palabra. La independencia de nuestro asentimiento, que tanto enfatizamos aquí, está relacionada tan estrechamente con lo anterior que es imposible separarla. Si alguien se pusiera a defender, seria y honestamente, la opinión que aquí combatimos, sólo quedaría suponer que él asocia con la palabra ‘verdadero’ un sentido diferente.

Nosotros damos aún un paso más. Los pensamientos – *e.g.*, las leyes de la naturaleza – no sólo no requieren de nuestro asentimiento para ser verdaderos,

sino que ni siquiera es necesario que sean pensados por nosotros. Una ley natural no es inventada por nosotros, sino que más bien es descubierta. Y así como una isla desierta en el mar del ártico estuvo allí por mucho tiempo antes de que los hombres la vieran, así también las leyes de la naturaleza, como las de las matemáticas, son vigentes desde siempre y no sólo a partir de su descubrimiento. Extraemos de esto que los pensamientos, en caso de ser verdaderos, no sólo son independientes de nuestro reconocimiento, sino que son independientes en general de nuestro pensar. El pensamiento no le pertenece al pensante, como la representación a quien se la representa, sino que confronta a todos los que lo captan del mismo modo como es y tal como es. Jamás dos hombres relacionarían el mismo pensamiento con la misma oración, sino que cada uno tendría el suyo propio: y si ahora, *e.g.*, uno de ellos postulara $2 \cdot 2 = 4$ como verdadero en tanto que el otro lo negara, de manera que no hubiera ninguna contradicción, entonces lo que uno aseverara sería distinto de lo que el otro estaría rechazando. Una contradicción entre afirmaciones de diferentes hombres sería en general imposible, porque sólo se produce una contradicción si precisamente por un lado se afirma la verdad y por el otro la falsedad del mismo pensamiento. Una disputa sobre la verdad sería entonces en vano. Faltaría el campo mismo de batalla; cada pensamiento estaría encerrado en su mundo interior y una contradicción entre pensamientos de diferentes hombres sería parecida a una guerra entre nosotros y los habitantes de Marte. Que no se diga que uno puede comunicar su pensamiento al otro y que la lucha estallaría entonces en el mundo interior de éste. Ningún pensamiento podría ser comunicado de manera que transitara del mundo interior de uno al mundo interior del otro, sino que el pensamiento que se presentara en la mente del segundo a consecuencia de la transferencia ya sería diferente del pensamiento del primero; y un cambio muy pequeño puede invertir la verdad en falsedad. Si se quisiera ver el pensamiento como algo psicológico, como una representación eidética, pero sin adoptar por completo el punto de vista subjetivo, entonces quizá se tendría que aclarar la afirmación de que $2 + 3 = 5$ más o menos así: "Se ha observado que en muchos hombres se producen determinadas representaciones eidéticas que están vinculadas con la oración ' $2 + 3 = 5$ '. Nosotros llamamos una representación de esta especie el sentido de la oración ' $2 + 3 = 5$ '. Hasta donde se ha observado, estas representaciones eidéticas son siempre verdaderas, de manera que podríamos decir de manera preliminar: De acuerdo con las observaciones hasta ahora hechas, el sentido de la oración ' $2 + 3 = 5$ ' es verdadero." Pero es evidente que esta elucidación sería completamente errada. Tampoco se haría progreso alguno, ya que el sentido del enunciado: 'Se ha notado que en muchos hombres se producen determinadas representaciones eidéticas, etc.' sería tan sólo una representación eidética más y la cosa empezaría de nuevo. Una sopa que a uno le agrada a otro le parece horrible. Cada quien juzga entonces apropiadamente sus

propias sensaciones de gusto, las cuales son diferentes de las de los demás. Así sería también con el pensamiento si se relacionara con la oración de manera similar a como lo hacen las sensaciones de gusto con los estímulos químicos que los activan.

Si un pensamiento fuera algo interno, mental, como la representación, entonces su verdad sólo podría consistir en una relación con algo que no es interno, mental. De ahí que si quisiéramos saber si un pensamiento es verdadero, tendríamos que preguntarnos si esta relación se da; es decir, si el pensamiento de que esta relación se da, es verdadero. Y de esta manera estaríamos en la posición de un hombre en una noria. Él da un paso adelante y hacia arriba, pero el escalón que pisa siempre cede y el hombre regresa a su estado anterior.

El pensamiento es algo impersonal. Si vemos escrita en una pared la oración ' $2 + 3 = 5$ ', reconocemos el pensamiento entero expresado de esta manera y para la comprensión carece totalmente de importancia saber quién lo escribió.

Parecería que nuestra doctrina de que el pensamiento es independiente del sujeto pensante contradice a una oración como 'tengo frío', en la medida en que ésta puede ser verdadera para uno pero falsa para otro, de manera que ella misma no es verdadera. Esto se funda en que la oración expresa un pensamiento diferente en boca de uno que en boca de otro. Las meras palabras no portan aquí la totalidad del sentido, sino que todavía hay que considerar quién las pronuncia. Así, en muchos casos la palabra hablada requiere del complemento de gestos, muecas y de las circunstancias acompañantes. Así, la palabra 'yo' designa a diferentes personas en oraciones en bocas de diferentes personas. No es necesario que el pensamiento de que él tiene frío sea enunciado por el friolento mismo. Esto también lo puede enunciar otro, mientras designe a quien tiene frío por su nombre.

Así, pues, el pensamiento puede ser vestido con una oración que es más apropiada para su independencia del pensante. Y gracias a esta posibilidad se distingue del estado mental expresado por una interjección. Palabras como 'aquí' y 'ahora' siempre obtienen su sentido íntegro sólo a través de las circunstancias en que son usadas. Si se dice 'está lloviendo', entonces es necesario complementar el cuándo y el dónde. Escrita, dicha oración a menudo carece de un sentido completo, puesto que faltan las señas que indican por quien, dónde y cuándo es pronunciada. Para una oración que contiene un juicio subjetivo de gusto, como 'esta rosa es bella', es esencial para el sentido quién la enuncie, inclusive si la palabra 'yo' no aparece. Todas estas excepciones aparentes han de explicarse entonces diciendo que la misma oración no siempre expresa el mismo pensamiento, dado que las palabras requieren de un complemento para dar el sentido completo y porque este complemento puede ser diferente dependiendo de las circunstancias.

Mientras las representaciones (en el sentido psicológico de la palabra) se diluyen sin una delimitación determinada y sean proteicamente cambiantes, los pensamientos serán estables. Son en su esencia atemporales y aespaciales. Con el pensamiento de que $3 + 4 = 7$, con las leyes de la naturaleza, esto apenas requiere de una fundamentación. Si, por ejemplo, se descubriera que la ley de la gravitación a partir de cierto momento ya no es verdadera, entonces inferiríamos que en general no es verdadera y trataríamos de encontrar otra que se diferenciara de ella por esa condición que se cumple en un tiempo, pero que no se cumple en otro. Lo mismo en cuanto al lugar: si resultara que en la región de Sirio la ley de gravitación no vale, entonces buscaríamos otra ley que satisficiera la condición de que se cumple en nuestro sistema solar, mas no en la región de Sirio. Si se quiere argumentar mediante un ejemplo en contra de la atemporalidad de los pensamientos, digamos, 'el número de habitantes del Imperio Alemán asciende a 52,000,000', entonces yo contesto: esta oración ni siquiera es la expresión completa de un pensamiento, puesto que le falta la determinación temporal. Si esta se agrega, por ejemplo, al 1 de enero de 1897, a mediodía tiempo de Europa Central, entonces ese pensamiento es verdadero y entonces lo es siempre, o mejor, de manera atemporal, o es falso y entonces lo es absolutamente. Esto vale para cada uno de los hechos históricos: en caso de ser verdadero es verdadero entonces independientemente del tiempo en que se estableció el juicio. Tampoco habría de objetarse que una oración puede adquirir un sentido diferente con el correr del tiempo, porque lo cambiante aquí es el lenguaje, no el pensamiento. No es necesario que en cualquier otro idioma este cambio tenga lugar. Ciertamente, se habla de lo cambiante de los pensamientos de los hombres. Empero, no son los pensamientos los que son primero verdaderos y luego falsos, sino que a veces se les juzga como verdaderos y a veces como falsos.

¿Se objeta acaso que yo asocio con la palabra 'pensamiento' un sentido inusual, que normalmente se entiende por ello un acto de pensar que obviamente es un acto mental interno? Bueno, para empezar lo importante es que yo sea fiel al modo como lo uso; que coincida con el modo usual es de menor importancia. Ciertamente puede suceder que en ocasiones se entienda por la palabra 'pensamiento' un acto del pensar, pero en todo caso no es ello siempre así²¹¹ y dicho acto no puede ser verdadero.

²¹¹ [Nota de Frege] El Sr. Dedekind usa esta palabra de la manera como yo lo hago, en el enunciado 66 de su escrito *¿Qué son y para qué sirven los números?* Es que allí quiere probar que la totalidad de las cosas que pueden ser un objeto de su pensar es infinita. Sea s semejante objeto; entonces, el Sr. D. llama $\varphi(s)$ el pensamiento que s pueda ser un objeto de su pensar. Y este pensamiento $\varphi(s)$ puede ser ahora a su vez un objeto de su pensar. Según esto, $\varphi(\varphi(s))$ es el pensamiento de que el pensamiento que s pueda ser un objeto de su pensar pueda ser un objeto de su pensar. Se

Como en las demás ciencias, también en la lógica está permitido acuñar expresiones artificiales sin tomar en cuenta si las palabras son siempre usadas así en el lenguaje de la vida. Al fijar el significado no es importante en absoluto atinar con precisión al uso de lenguaje o de hacer justicia a su derivación, sino de amoldar la palabra lo mejor posible a la expresión de leyes. Pero mientras más reducido sea un grupo de expresiones artificiales susceptible de reproducir enteramente y con precisión el conjunto de leyes, más apropiado es.

Ahora bien, no podríamos interpretar el pensar como una producción de pensamientos. Tampoco es el pensamiento un acto de pensar, de manera que éste se comportara con relación al pensar como el salto con relación al saltar. Y esta interpretación concuerda con muchas formas de hablar. ¿Acaso no se dice que el mismo pensamiento fue captado por este y por aquel, que alguien pensó en varias ocasiones el mismo pensamiento? Pero si el pensamiento surgiera sólo por el pensar o si consistiera en el pensar, entonces el mismo pensamiento podría nacer,

desprende de ello lo que ha de significar ' $\varphi(\varphi(\varphi(s)))$ ', ' $\varphi(\varphi(\varphi(\varphi(s))))$ ' etc. Para la demostración esencial que la oración '*s* puede ser un objeto del pensar del Sr. Dedekind' represente siempre un pensamiento, tan pronto la letra '*s*' denota semejante pensamiento. Si existe ahora, según el Sr. D desea demostrar, una cantidad infinita de pensamientos *s* así, también debe haber una cantidad infinita de semejantes pensamientos $\varphi(s)$. Ahora seguramente no se cometerá una impropiedad contra el Sr. D. si se supone que él no pensó una cantidad infinita de pensamientos. Él tampoco puede suponer que otros hayan pensado anteriormente una cantidad infinita de pensamientos que podrían ser objetos de su pensamiento; porque entonces estaría suponiendo justamente lo que se tiene que demostrar. Ahora bien, si no se pensaron infinitamente muchos pensamientos, entonces tiene que haber entre estos infinitamente muchos pensamientos $\varphi(s)$ infinitamente muchos que no fueron pensados, de manera que el que se piensen no es esencial para el pensamiento. Y justamente es esto lo que estoy afirmando. Si sólo existieran pensamientos pensados, entonces el signo ' $\varphi(s)$ ' no siempre tendría significado; y, para asegurársela no sería suficiente que '*s*' significara algo que pudiera ser objeto del pensar del Sr. D., sino que para que pudiera serlo tendría que haberse pensado. Si esto no fuera el caso, entonces el signo ' $\varphi(s)$ ' para el *s* correspondiente no tendría significado. El sol (\odot) puede ser objeto del pensar del Sr. D.; por lo tanto, los primeros dos miembros, y quizá algunos de los siguientes, de la serie de signos ' \odot ', ' $\varphi(\odot)$ ', ' $\varphi(\varphi(\odot))$ ',... tendrían significado; pero al progresar en esta serie siempre se tendría que llegar finalmente a un miembro que no tiene significado, porque el pensamiento que debería designar no se habría pensado y, por consiguiente, no estaría presente. ' $\varphi(s)$ ' sería, entonces, similar a una serie de potencia que no converge para todo valor del argumento. El divergir de la serie correspondería a la pérdida de significado del signo ' $\varphi(s)$ '. Supongamos una serie de potencias que converge entre 0 y 4, pero que diverge para valores mayores que 4; supongamos además, que la serie tiene para el argumento 1 el valor 2, para el argumento 2 el valor 5; entonces la secuencia correspondiente de números de 1, 2, 5 se interrumpe con eso y no continua al infinito. Tampoco la secuencia ' \odot ', ' $\varphi(\odot)$ ', ' $\varphi(\varphi(\odot))$ ',... continuaría al infinito si sólo hubiera pensamientos pensados. Es decir, lo determinante de la demostración del Sr. D. descansa en el supuesto de que los pensamientos son independientes de nuestro pensar. Nos percatamos de la manera como esta forma de usar la palabra 'pensamiento' se presenta por sí solo de una manera completamente espontánea.

perecer y volver a nacer, lo cual es absurdo. Así como tampoco produzco el árbol porque lo veo y como no hago surgir el lápiz porque lo estoy agarrando, así tampoco estoy generando el pensamiento mediante el pensar. Y mucho menos lo segrega el cerebro como a la bilis el hígado.

Los símiles yacen en el fondo de las expresiones lingüísticas de la aprehensión de un pensamiento, de la percepción, de la intelección, del concebir, del reconocer, del *capere*, del *percipere*, del *comprehendere*, del *intelligere*; en general reproducen correctamente el estado de cosas. Lo captado, lo conceptuado ya está ahí y uno solamente se lo apropia. Asimismo, aquello a cuyo interior se mira o aquello que se extrae de una mezcla ya está allí y no nace a través de esta actividad. Desde luego que todos los símiles son también equívocos. Nosotros nos inclinamos a considerar lo que es independiente de nuestra vida mental como algo espacial, material y las palabras recién mencionadas permiten que así se muestre el pensamiento. Pero no se ve en esto el punto de comparación. Para ser real, lo que es independiente de nuestra vida mental, lo objetivo, no necesariamente ha de ser espacial, material. Si se quisiera pasar por alto esto, se caería fácilmente en una especie de mitología. Si se dijera: "las leyes de la gravitación, de la inercia, del paralelogramo causan que la tierra se mueve tal como se mueve", entonces podría parecer que dichas leyes de la naturaleza, por así decirlo, la agarran de la oreja y la exhortaran a corregir sus modales. Tal uso de las palabras 'actuar' y 'causar' sería engañoso. En cambio sí se puede decir que el sol y los planetas interactúan en concordancia con la ley de gravitación.

Ahora bien, si también independientemente de mi vida interna se da una similitud entre los cuerpos físicos y los pensamientos, de esto no se debe inferir que los pensamientos podrían desplazarse, olerse o degustarse como los cuerpos y entonces la objeción contra nuestra doctrina, apoyada en semejantes conclusiones, se desmoronaría debido a la incongruencia de estas. A pesar de que una ley de la naturaleza es por completo independiente de si pensamos en ella o no, de todos modos no emite ninguna onda de luz o de sonido que pudieran excitar nuestros nervios visuales o auditivos. Pero entonces ¿qué no veo que esta flor tiene cinco pétalos? Se puede decir esto, pero entonces la palabra 'ver' no está siendo usada en el sentido de mera percepción luminosa, sino que se alude a un pensamiento y a un juicio asociados con ella. Tampoco Newton descubrió la ley de gravitación por medio de sus más infalibles impresiones sensibles.

Si se quiere hablar de la realidad del pensamiento, ello puede hacerse sólo en el sentido de que el conocimiento que, *e.g.*, alguien tiene de una ley de la naturaleza, tenga un efecto sobre sus decisiones y éstas a su vez pueden entonces tener por consecuencia movimientos de masa. El conocimiento de una ley se entendería entonces como efecto de ésta a partir del conocimiento previamente

admitido, lo que es quizá posible de manera parecida a que ver una flor pueda entenderse como un efecto indirecto de la flor en la persona que la ve.

Los hombres pueden desentenderse del pensamiento y pueden apoderarse de él. Esto podría entenderse como una acción del hombre sobre el pensamiento, lo que pareciera ir en contra de la atemporalidad de este último. Pero no se produce ningún cambio esencial en el pensamiento, como tampoco parece irritarle a la Luna si se le presta atención o no. Si, de acuerdo con lo anterior también es quizá posible hablar de una acción del pensamiento sobre los hombres, de todos modos no es posible hablar de una acción del hombre sobre el pensamiento. Se podría argüir en favor de la variabilidad del pensamiento que no siempre es igualmente claro. Pero lo que se llama la claridad del pensamiento es propiamente una perfección de su apropiación, de la comprensión del pensamiento en nuestro sentido de la palabra, no una propiedad del pensamiento mismo.

Sería falso sostener que sólo los pensamientos verdaderos tienen un sustento independientemente de nuestra vida mental y que, al contrario, los falsos pertenecen, como las representaciones, a nuestra vida interna. Casi todo lo que hemos dicho del predicado **verdadero** vale también para el predicado **falso**. Estrictamente hablando, sólo es aplicable a los pensamientos. Aún si se predica este predicado formalmente de oraciones o de representaciones, en el fondo se está predicando de pensamientos. Lo que es falso es falso en sí e independientemente de lo que queramos afirmar. Una discusión sobre la falsedad siempre es simultáneamente una discusión sobre la verdad. Entonces aquello sobre cuya falsedad se disputa, tampoco pertenece a una mente particular.

Disociando el pensamiento de sus envolturas

En la oración afirmativa dos cosas suelen estar unidas íntimamente entre sí: el pensamiento expresado y la afirmación de su verdad. Y es por eso que a menudo las dos no se distinguen claramente. Pero también se puede expresar un pensamiento sin al mismo tiempo declararlo verdadero. Las más de las veces, un investigador que hace un descubrimiento científico empieza por captar sólo el pensamiento y luego se pregunta si habrá de reconocerlo como verdadero; y es sólo después de que la investigación resultó favorable a la hipótesis que se atreve a declararla verdadera. En la pregunta '¿es condensable el oxígeno?' y en la oración 'el oxígeno es condensable' tenemos expresado el mismo pensamiento, una vez asociado a una interrogación y en el otro caso con una afirmación.

Cuando reconocemos internamente un pensamiento como verdadero, entonces estamos juzgando; cuando manifestamos dicho reconocimiento, entonces estamos afirmando.

Podemos pensar sin juzgar.

Hemos visto que a menudo la secuencia de sonidos de una oración es insuficiente para dar expresión total a un pensamiento. Si queremos captar la esencia del pensamiento con completa nitidez, entonces no deberíamos pasar por alto que tampoco el caso inverso, en el que la oración hace más que expresar un pensamiento y afirmar su verdad, no es nada raro. En muchos casos se busca además que tenga efectos en las representaciones y sentimientos del oyente; y mientras más sea así más se acerca el lenguaje al lenguaje poético. Nosotros ciertamente hemos enfatizado que el lenguaje es poco apropiado para invocar en el oyente cualquier representación exactamente según uno desea. ¿Quién quisiera atreverse a hacer surgir en la mente de alguien la imagen de un Apolo por medio de palabras exactamente como se las genera sin dificultad la percepción de una obra de arte? Se dice, no obstante, que el poeta pinta. Y de hecho no puede negarse que la palabra escuchada interviene en la representación, aunque sea sólo porque ella misma entra como un todo en la consciencia como sensaciones auditivas. De ahí que la mera secuencia de sonidos, el tono de voz, la entonación, el ritmo sean percibidos con sentimientos de placer o de disgusto. Asociadas con estas sensaciones auditivas hay intuiciones auditivas similares y a su vez éstas invocan muchas otras. Éste es el terreno de la onomatopeya. Compárese con esto el verso homérico (Odisea IX 71):

τριχθὰ τε καὶ τετραχθὰ διέσχισεν ἰς ἀνέμοιο.

Este es todavía totalmente independiente del objetivo de las palabras de expresar pensamientos. Los sonidos actúan aquí sólo como estímulos sensoriales. Pero dado que sus secuencias deberían tener sentido, influyen en las representaciones también por otras vías. Si alguien oye con comprensión la palabra 'caballo', de seguro que pronto se le aparecerá en la mente la imagen de un caballo. Pero esta imagen no debe ser confundida con el sentido de la palabra 'caballo'; porque acerca del color del caballo, sobre su postura en reposo o movimiento, sobre el lado del cual es visto, y cosas similares no se da ninguna indicación en la palabra 'caballo'. Si por ejemplo, diferentes hombres pudieran proyectar sobre una pantalla las representaciones que les surgen con la palabra 'caballo', aparecerían imágenes bastante diferentes. Pero tampoco con el mismo hombre la palabra 'caballo' haría siempre aparecer las mismas representaciones. Mucho dependerá del contexto. Compárense, *e.g.*, las oraciones 'qué alegremente cabalga en su valiente caballo' y 'acabo de ver caer un caballo en el asfalto mojado'.

No es, pues, posible sostener que con la palabra 'caballo' se asocie siempre la misma representación. Desde luego que, en virtud de su sentido dicha palabra estimula las imágenes de una representación; pero ella por sí sola dista mucho de determinar dicha representación. En general se puede suponer sólo una coincidencia tosca entre las representaciones del hablante y las del oyente. Si diversos artistas de manera independiente ilustran la misma poesía, se desviarán entre sí considerablemente en la representación del mismo suceso. El poeta entonces realmente no pinta, sino sólo estimula el pintar y da indicaciones, dejando la elaboración al oyente. Y es gracias a estas indicaciones que es valioso para el poeta tener a su disposición diferentes palabras que pueden reemplazarse unas por otras sin cambiar el pensamiento, pero que pueden influir de diverso modo en la representación del oyente y sus sentimientos. Piénsese sólo, *e.g.*, en las palabras 'caminar', 'pasearse' y 'andar'. También en las conversaciones cotidianas se usan estos mecanismos para fines semejantes. Si comparamos las oraciones 'este perro aulló toda la noche' y 'este can aulló toda la noche', encontramos que el pensamiento es el mismo. No nos enteramos de más ni de menos mediante la primera oración que mediante la segunda. Pero en tanto que la palabra 'perro' es indiferente en cuanto al gusto y disgusto, la palabra 'can' decididamente tiene más relación con el disgusto y da con ello una indicación de imaginar el perro un tanto desaliñado. Ahora bien, aún si con esto se cometiera una gran injusticia, no por ello puede decirse que la segunda oración sea falsa. Quién la enuncia realmente expresa con ella un cierto menosprecio; pero éste no forma parte del pensamiento expresado. Lo que distingue la segunda oración de la primera tiene el valor de una interjección. Pudiera pensarse que uno se entera de más cosas mediante la segunda oración que por medio de la primera, a saber, que el hablante tiene una opinión desfavorable sobre el perro. En ese caso, estaría contenido en la palabra 'can' un pensamiento completo. Esto tiene que ser examinado.

Asumimos el caso de que nuestra primera oración es correcta y alguien enuncia la segunda sin sentir realmente la mala connotación que parece estar asociada con la palabra 'can'. Si la objeción fuera válida, entonces la segunda oración contendría dos pensamientos, uno de los cuales sería falso; él estaría entonces en suma afirmando algo falso, mientras que la primera oración sería correcta. No estamos de acuerdo con ello; más bien, el uso de la palabra 'can' no impediría que también la segunda oración fuera verdadera. O sea, hay que distinguir entre los pensamientos que se expresan y aquellos otros pensamientos que uno hace que se les tenga por verdaderos sin expresarlos. Si un comandante engaña a un enemigo acerca de su debilidad porque hace que su tropa se vista de diferente manera, de todas formas no miente; luego no expresa ningún pensamiento, a pesar de que su acción tiene la finalidad de hacer que se apropien

pensamientos. Dichas acciones pueden aparecer también en el hablar mismo, porque se le confiere a la voz un tono particular o porque se seleccionan palabras especiales. Si alguien con voz triste transmite una noticia verdadera sobre un fallecimiento sin realmente estar triste, de todos modos el pensamiento expresado es verdadero, inclusive si la voz triste se produce con el propósito de engañar. Se puede reemplazar este tono de la voz por medio de palabras como 'oh!', 'qué pena' sin cambiar el pensamiento. Naturalmente, las cosas son diferentes cuando las acciones están deliberadamente dirigidas a transmitir información. En el lenguaje, el uso generalizado sustituye acuerdos así. Pero dado lo moldeable del lenguaje esto puede hacer que surjan casos dudosos. Por el uso permanente de esa misma clase de casos lo que originalmente no tenía este objetivo puede finalmente llegar a ser un medio para la expresión del pensamiento. Un pensamiento que previamente sólo hubiera sido sugerido por una expresión puede posteriormente ser afirmado directamente por ella. Y mientras tanto diversas interpretaciones serían posibles. Pero alteraciones así en el lenguaje no cancelan las diferencias del caso. Para nosotros sólo es esencial que no a cada diferencia lingüística corresponda una diferencia en los pensamientos y que dispongamos de un recurso para decidir lo que forma parte del pensamiento y lo que no, cuando ocasionalmente la aplicación de éste aún sea difícil dada la naturaleza orgánica del lenguaje.

Aquí pertenece también la diferencia entre el modo activo y el modo pasivo de expresión. Las oraciones 'M le dio a N el documento A', 'el documento A le fue dado por M a N', 'N recibió de M el documento A' expresan exactamente el mismo pensamiento; a través de ninguna de estas oraciones se entera uno más o menos que por las otras. Es por lo tanto también imposible que una de ellas sea correcta y que al mismo tiempo las otras sean falsas. Lo que en ellas pueda ser verdadero o falso es exactamente lo mismo. No se podría decir, sin embargo, que dé completamente lo mismo cuál de estas oraciones se use. Como regla, consideraciones estilísticas y estéticas inclinarán la balanza en favor de alguna de ellas. Si alguien preguntara '¿por qué es llevado A en calidad de detenido?', la respuesta 'B ha sido asesinado por él' no sería natural, porque habría que poner atención en el innecesario salto de A a B. Aquello hacia lo que se orienta la atención, sobre lo que se pone énfasis, puede ser muy importante en otro respecto, pero no lo es para la lógica.

En la traducción de un idioma a otro a veces uno se ve obligado a alterar por completo la construcción gramatical. El pensamiento, no obstante, puede seguir siendo el mismo y tiene que serlo, si la traducción ha de ser correcta. Es imprescindible en cambio sacrificar a veces los matices que influyen en la imaginación y en el estado de ánimo.

También en las dos oraciones ‘Federico el Grande venció en Rossbach’ y ‘es verdad que Federico el Grande venció en Rossbach’ tenemos el mismo pensamiento con diferente forma lingüística, como ya se dijo anteriormente. Al asentir al pensamiento en la primera oración asentimos también en el mismo acto al pensamiento de la segunda, y viceversa. No se trata de dos diferentes actos de juzgar, sino sólo de uno.

(Se puede ver a partir de esto que las categorías gramaticales de sujeto y predicado no pueden ser importantes para la lógica.)

La distinción entre aquello que en una oración pertenece al pensamiento expresado y aquello que está meramente pegado a éste es de la mayor importancia para la lógica. La pureza de aquello que se investiga es significativa no sólo para el químico. ¿Cómo se podría conocer con seguridad si se llega a los mismos resultados por diferentes vías si la diferencia palpable pudiera fundarse en las impurezas de las sustancias utilizadas? Los primeros y más importantes descubrimientos en una ciencia son a menudo los reconocimientos. Por auto-evidente que nos parezca que se trata del mismo sol que ayer se puso y que hoy se levanta, por deleznable que nos resulte este descubrimiento, de todos modos ciertamente es uno de los más importantes y quizá efectivamente sea el fundamental en la astronomía. También era importante reconocer que el lucero de la tarde es el mismo que el lucero del alba, que el triple de cinco es lo mismo que el quintuplo de tres. Así, pues, tan importante es no diferenciar lo que es lo mismo que reconocer diferencias cuando no las tenemos ante los ojos. Es, pues, totalmente errado sostener que no se pueden trazar diferencias suficientemente finas. Simplemente es malo enfatizar diferencias allí donde no son dignas de consideración. Así, en la mecánica general uno se cuidará de hablar de la diferencia química de las sustancias y enunciar, por ejemplo, la ley de inercia por separado para cada elemento químico. Más bien se tendrá en cuenta sólo aquellas diferencias que son esenciales para la regularidad que lo tiene a uno ocupado en ese momento. Menos aún debería uno dejarse seducir por las impurezas adheridas a ver diferencias allí donde no las hay.

En lógica, todas las distinciones que se hagan desde puntos de vista exclusivamente psicológicos tienen que desecharse. Lo que se llama la profundización psicológica de la lógica no es otra cosa que falsificación psicológica.

Originalmente, en el hombre el pensar está mezclado con el representar y el sentir. La lógica tiene por tarea delimitar en forma pura lo lógico, pero no de manera que debamos pensar sin representarnos nada, dado que ello es claramente imposible, sino de tal manera que distingamos conscientemente lo lógico de lo que conlleva de representaciones y sentimientos. Una dificultad

consiste en que nosotros pensamos en algún lenguaje y que la gramática, que tiene para el lenguaje un significado parecido al que para el juicio tiene la lógica, revuelve lo psicológico con lo lógico. De otro modo todos los idiomas tendrían que tener la misma gramática. Se puede desde luego expresar el mismo pensamiento en diferentes lenguajes, pero los accesorios psicológicos, la vestimenta del pensamiento, a menudo será diferente. Se reconoce a partir de ello el valor del aprendizaje de lenguas extranjeras para la instrucción lógica. Dado que la vestimenta del pensamiento resulta ser diferente, aprendemos a distinguirla claramente del núcleo con el que parece fusionada en un lenguaje particular. Así, a través de la diferencia entre lenguajes se facilita la aprehensión de lo lógico. Pero no por ello se eliminan por completo las dificultades y nuestros libros de lógica siguen arrastrando diversas fallas, por ejemplo, sujeto y predicado, que realmente no pertenecen a la lógica. Por ello es útil también el conocimiento de un medio de expresión del pensamiento totalmente diferente, como el que tenemos en el lenguaje de fórmulas de la aritmética o en mi *Conceptografía*.

La primera y más importante tarea es presentar en forma pura los objetos de la investigación. Sólo así se es capaz de efectuar los reconocimientos que también en lógica probablemente sean los descubrimientos fundamentales. No olvidemos entonces que dos oraciones distintas pueden expresar el mismo pensamiento, que del contenido de la oración sólo nos incumbe lo que puede ser verdadero o falso.

Si la forma pasiva contuviera siquiera un remanente de pensamiento más que la forma activa, entonces sería pensable que este remanente fuera falso, en tanto que el pensamiento en la forma activa sería verdadero y entonces ya no se podría pasar sencillamente de la forma activa a la pasiva. De igual manera: si la forma activa contuviera aunque fuera un remanente de pensamiento más que la pasiva, entonces no podría transitarse confiadamente del pasivo al activo. Pero si ambas transiciones siempre son posibles sin menoscabo de la verdad, entonces ello es una confirmación de que lo que hay de verdadero en él, esto es, en el pensamiento, no es afectado por el cambio de forma. Estamos con ello sobre aviso de no concederle tanto peso a lo lingüístico, como sucede la mayoría de las veces con los lógicos, porque por ejemplo suponemos que cada pensamiento – o juicio, como usualmente se le llama – tiene un sujeto y un predicado, de manera que por medio del pensamiento quedan determinados lo que son su sujeto y su predicado, tal como por la oración quedan determinados también sin ambigüedad su sujeto y su predicado. Con ello uno sólo se enreda en dificultades de manera completamente gratuita y sólo refuerza, en una lucha infructuosa con ellas, la impresión de que la lógica propiamente hablando es una ciencia en el fondo superflua.

Nosotros evitaremos completamente las expresiones 'sujeto' y 'predicado', populares entre los lógicos, no sólo sobre todo porque por ellas se dificultan los reconocimientos, sino más bien porque encubren diferencias reales. En lugar de seguir ciegamente la gramática, el lógico debería ver su tarea más bien como liberándonos de las ataduras del lenguaje. Porque así como tenemos que reconocer que es el lenguaje lo que hace posible el pensar, al menos en sus formas superiores, así también tenemos que cuidarnos de volvernos dependientes del lenguaje; porque muchos errores del pensar se fundan en las imperfecciones lógicas del lenguaje. Pero si se entiende la tarea de la lógica como la descripción del pensar, tal como éste ocurre en la mente humana, entonces se le tiene que adscribir al lenguaje una gran importancia. Pero entonces se llama lógica a lo que propiamente es sólo una rama de la psicología, así como uno se imaginaría estar haciendo astronomía si desarrollara una teoría psicológica-física del mirar a través de un telescopio. Los objetos propios de la lógica caen en dicho caso fuera de su horizonte, así como los problemas de la astronomía del de aquel. Los tratamientos psicológicos de la lógica se fundan en el error de que el pensamiento (el juicio, como se suele decir) es, al igual que la representación, algo psicológico. Esto entonces conduce necesariamente a la teoría del conocimiento del idealismo; porque entonces también las partes que se distinguen en el pensamiento, como sujeto y predicado, tienen que formar parte de la psicología como el pensamiento mismo. Pero como todo conocimiento se materializa en juicios, todo puente con lo objetivo se cae. Y todo esfuerzo por alcanzarlo puede ser tan solo un intento por salir del pantano tirando de la propia coleta. Cuando mucho se puede intentar explicar cómo surge la apariencia de objetividad, cómo es que llegamos a suponer algo que no pertenece a nuestra mente, pero sin que esta suposición quede nunca justificada por ello. Este desembocar en el idealismo es de lo más notable en la psicología fisiológica, puesto que se contrapone de un modo tan marcado con su punto de partida realista. Se parte de fibras nerviosas, células ganglionares, se hacen suposiciones acerca de estimulaciones y sus transmisiones y se intenta acercar con ello la representación a la comprensión, porque espontáneamente se cree que los procesos en las células ganglionares y en las fibras nerviosas son más comprensibles que el representarse algo. Tal como debe ser en una ciencia natural sana, se supone de entrada como objetivas reales a las células ganglionares y a las fibras nerviosas. Esto será admisible en tanto que uno se restrinja a la representación. Pero no queda en esto: se pasa también al pensar y al juzgar y a partir de allí súbitamente el realismo inicial se convierte en un idealismo extremo, con lo cual la teoría misma corta la rama en la que está sentada. Ahora todo se disuelve en representaciones y con ello las explicaciones anteriores mismas se vuelven ilusorias. La anatomía y la fisiología se convierten en poesía. Toda la subestructura anatómico-fisiológica de las fibras nerviosas, las células

ganglionares, las excitaciones, los estímulos, la propagación de los estímulos se disuelve. ¿Y con qué nos quedamos? Con representaciones de fibras nerviosas, de intuiciones de células ganglionares, de excitaciones, etc. ¿Y qué es lo que en principio debería explicarse? ¡La representación! Ahora bien ¿se puede siquiera decir de dichas explicaciones que son válidas o verdaderas? Cuando uno se para junto a un río frecuentemente nota remolinos en el agua. Ahora bien ¿no sería absurdo reivindicar para semejante remolino que es válido o que es verdadero o, entonces también, falso? Y si ahora los átomos y moléculas en mi cerebro se pusieran a bailar mil veces más divertidos y descontrolados que los mosquitos en un hermoso atardecer de verano ¿no sería igualmente absurdo aseverar que este baile es válido o que es verdadero? Y, si ahora estas explicaciones fueran bailes ¿podría decirse que son verdaderas? Y por último ¿sería diferente si aquellas explicaciones fueran enredos de representaciones? Los fantasmas que pasan en forma continua, a manera de imágenes cambiantes, ante el enfermo de tifo ¿son verdaderos? Ni verdaderos ni falsos; más bien, son simplemente procesos como lo es un remolino en el agua. Y si debiera hablarse de un derecho, sólo puede ser el derecho de suceder tal como sucede. Un fantasma refuta a otro tanto como un remolino a otro.

Si se asocia la representación visual de una rosa con la representación de un perfume fino y además las representaciones auditivas de las palabras 'rosa' y 'huele', así como con las representaciones motoras de la enunciación de estas palabras, y si se acumulan tantas asociaciones como se quiera y si en eso consiste la construcción de representaciones artísticas ¿de qué sirve? ¿Se cree realmente que eso sería un pensamiento? Tanto como un autómatas sería un ser vivo, por artísticamente que quedara ensamblado. Algo sin vida ensamblado con algo sin vida produce una vez más algo sin vida. Una representación con otra representación da de nuevo una representación y todo lo artístico y la variedad de las asociaciones no pueden modificar esto. E inclusive si todo se aromatizara con sentimientos y emociones: ello no ayuda en nada. Jamás podría surgir así la ley de la gravitación; porque ésta es completamente independiente de todo lo que sucede en mi cerebro y de todo cambio y transformación de mis representaciones. ¡Pero la aprehensión de esta ley es de todos modos un proceso mental! ¡Sí! Pero un proceso que está en el límite de lo mental y que, por lo tanto, no podría ser totalmente comprendido desde el punto de vista puramente psicológico, porque entra de manera esencial en una consideración que ya no es propiamente hablando mental: el pensamiento; y quizá éste proceso sea el más misterioso de todos. Pero precisamente porque es de orden mental, no necesitamos ocuparnos de él en la lógica. Nos basta con que podamos aprehender pensamientos y que podamos

reconocerlos como verdaderos; cómo se dé esto es otra cuestión.²¹² También para el químico basta con que pueda ver, oler y gustar; y no es tarea suya investigar cómo sucede eso. No es de poca importancia para el éxito de una investigación científica que cuestiones, que puedan ser tratadas independientemente de otras no se mezclen con ellas y se enrede el asunto innecesariamente. Aquí fácilmente se cae en un estrabismo. De ahí que nosotros no nos ocupemos de cómo el pensar, el obtener una convicción, realmente ocurren; no nos incumbe cómo algo se vuelve verdadero, sino las leyes del ser verdadero. Éstas también pueden ser comprendidas como reglas para juzgar y a las cuales éste tiene que someterse si no quiere errar en cuanto a la verdad. Si se quiere llamarlas leyes del pensar o, mejor, leyes del juicio, entonces no debe olvidarse que se trata de leyes que prescriben a la manera de las leyes morales o de las leyes estatales cómo se debe actuar, pero no al modo como las leyes naturales determinan cómo tienen realmente lugar los procesos. El pensar real no siempre concuerda con las leyes de la lógica, como tampoco el actuar real con la ley moral. Es, pues, mejor evitar totalmente en lógica la expresión 'ley del pensar', porque siempre conlleva la tentación de hacer de las leyes lógicas leyes naturales. Como tales tendríamos que asignarlas a la psicología. Al igual que las leyes lógicas, también se podría entender las leyes geométricas y físicas como leyes del pensar o del juicio, esto es, como a las indicaciones que el juzgar en otra materia tiene que obedecer si quiere concordar con la verdad. La lógica es, pues, un lugar tan poco apropiado para emprender investigaciones psicológicas como la geometría o la física. Explicar el decurso del pensar y el juzgar es ciertamente una labor posible, pero no una lógica.

El lógico no tiene por qué preguntar cuál es el curso natural del pensar en la mente humana. Lo que es natural para uno puede ser no natural para otro. Esto lo pone de manifiesto la gran variedad de gramáticas. No hay acusación que el lógico tema menos que la de que sus designaciones no sean adecuadas para el pensar natural. Si se tiene que enseñarle a una cabeza no instruida los fundamentos básicos de las matemáticas con el mayor rigor lógico posible, entonces éste normalmente encuentra semejante proceder nada natural y justamente a causa de este rigor. Un docente comprensivo prescindiría por ello de mucho de este rigor y sólo poco a poco buscaría despertar la comprensión de su necesidad. También en la historia de las matemáticas encontramos que el máximo rigor es siempre lo último y por consiguiente es lo que yace más alejado de lo natural. La aspiración de representar el proceso natural del pensar es, pues, lo que más obviamente desorientaría a la lógica. Si el lógico quisiera hacer caso de la objeción de la falta de

²¹² Nota de pie de Frege: "Probablemente no se ha comprendido aún la dificultad de esta cuestión. Generalmente se satisface uno con pasar el pensar de contrabando por la puerta trasera en el representar, de modo que uno mismo no sabe cómo es que ha entrado."

naturalidad, correría el riesgo de caer en enredos sinfín acerca de aquello que es natural, cuestiones que no pueden resolverse y por consiguiente no pertenecen al campo de la lógica. Para ello se tendría que recurrir a la observación de los pueblos naturales.

Pero deberíamos prevenirnos al máximo de la opinión de que es tarea de la lógica investigar el pensar y juzgar reales en la medida en que éstos concuerden con las leyes de ser verdadero. Entonces siempre se tendrá en la mira una cosa y se mirará de reojo otra y luego nuevamente se fijará uno en esto y se mirará de reojo aquello y fácilmente se perderá totalmente de vista una determinada meta. Esto induciría a cuestionamientos carentes de claridad y a hacer imposible un éxito pleno.

Lo que a menudo se llama leyes de pensar, a saber, leyes que al menos normalmente rigen al juicio, nunca pueden ser más que leyes del tener por verdadero, pero no leyes del ser verdadero. Quién tiene algo por verdadero y los lógicos psicológicos tendrán por verdaderas por lo menos sus propias explicaciones – reconoce con ello algo que es verdadero. Pero entonces es probable que también haya leyes del ser verdadero y si las hay, entonces éstas tienen que ser la norma para el tener por verdadero. Y estas son las leyes lógicas propiamente hablando. En el Anexo N° 26 de 1897 de la *Allgemeine Zeitung*, en su ensayo “Antropología y Filosofía”, Th. Achelis escribe lo siguiente:

“Pero de seguro que ahora tenemos claridad respecto a que las normas generales válidas del pensar y del actuar no pueden ser obtenidas unilateralmente mediante una [abstracción meramente deductiva, sino mediante una determinación empírio-crítica de las leyes fundamentales objetivas, siempre válidas en la gran consciencia de los pueblos, de nuestra organización psicofísica.”]

No está claro del todo si se trata de leyes según las cuales se juzga o de leyes según las cuales se debería juzgar. Según parece, se trata de ambas cosas. A saber, leyes de acuerdo con las cuales se juzga son erigidas como norma concernientes a cómo debería juzgarse. Pero ¿para qué sería esto necesario? ¿El juicio por sí sólo tiene lugar de acuerdo con estas leyes! ¡No! ¡No es del todo así, en general sí, pero no siempre! Se trata entonces de leyes que tienen excepciones; pero las excepciones mismas serán de nuevo regidas por leyes. De ahí que dichas leyes tampoco sean completas. Ahora bien ¿cómo se justifica separar una parte del todo de las leyes y erigirlas en normas? Esto es como si alguien quisiera proponer las leyes de Kepler de los movimientos planetarios como normas y se tuviera desafortunadamente que admitir que los planetas en su pecaminosidad no las acatan con toda exactitud, sino que como párvulos traviosos se importunan unas a otras. Eso se tendría que amonestar entonces de la manera más severa.

Con este punto de vista uno tendría que cuidarse angustiosamente de no desviarse de la ruta del tropel en el que camina la muchedumbre. También hay que desconfiar de los grandes espíritus; porque si fueran normales serían mediocres.

Con la perspectiva psicológica de la lógica se elimina la diferencia entre las razones que justifican una convicción y las causas que realmente la generan. Una auténtica justificación no es, pues, posible; su lugar lo ocupará el relato de cómo se llegó a dicha convicción, de la cual se desprende que todo tuvo sus causas psicológicas. Esto puede suceder con una superstición de la misma manera que con un conocimiento científico.

Si se interpretan las leyes lógicas como leyes psicológicas, entonces es fácil que uno se pregunte si no son fluctuantes, como también la gramática de un lenguaje puede cambiar a lo largo del tiempo. Y esta posibilidad es propiamente hablando irrefutable si el carácter obligatorio de las leyes lógicas se deriva de manera similar al de las reglas gramaticales, si por lo mismo sólo son normas porque desviaciones de ellas se producen en raras ocasiones, si juzgar en concordancia con nuestras leyes lógicas es tan normal como caminar erguido. Ahora bien, así como es posible que para nuestros antepasados el caminar erguido no fuera normal, podría también haber en el pensar diversas cosas que en él eran normales pero que no lo son ahora y podría haber en el futuro algo que fuera normal que no lo es ahora. Así como la intuición lingüística en relación con diversas cuestiones gramaticales siempre es insegura mientras el lenguaje aún no esté del todo fosilizado, así se tendría que encontrar un estado similar en relación con las leyes lógicas en cada etapa de transición. Por ejemplo, hasta se podría titubear acerca de si es correcto juzgar que cada objeto es idéntico a sí mismo. Realmente, no se podría hablar entonces de leyes lógicas, sino sólo de reglas lógicas que indican lo que ha de considerarse como normal durante un cierto tiempo. Semejante regla no se enunciaría bajo una forma como 'todo objeto es idéntico a sí mismo', puesto que en ella no aparece la especie de seres para cuyos juicios debería valer, sino que se tendría que decir, por ejemplo: 'Para los hombres – con excepción quizá de algunos pueblos primitivos, para los cuales el asunto no ha sido todavía investigado – es normal ahora juzgar que cada objeto es idéntico a sí mismo.' Pero si se tiene leyes, inclusive si son psicológicas, entonces éstas tienen que ser, como hemos visto, siempre – o mejor aún, de manera atemporal – verdaderas, si es que son en lo absoluto verdaderas. Démonos cuenta de que si una ley ya no fuera válida a partir de cierto momento, entonces tendríamos que decir que en sí misma es falsa. Pero podríamos intentar detectar una condición que tuviera que añadirse. Supongamos que el juzgar humano operara durante algún tiempo de acuerdo con la ley de que cada objeto es idéntico a sí mismo, pero que después ya no; entonces la causa de ello pudiera ser, por ejemplo, una

modificación en el contenido de fósforo en la corteza cerebral y entonces por ejemplo tendríamos que decir 'si el contenido de fósforo en la corteza cerebral en el hombre en ningún punto es superior al 4%, entonces su juzgar siempre se llevará a cabo en concordancia con la ley según la cual cada objeto sea idéntico a sí mismo.'

Las leyes psicológicas que de esta manera nombran la composición química o la **naturaleza** anatómica del cerebro, al menos son pensables. En cambio con las leyes lógicas algo semejante sería absurdo; porque con ellas no se trata de que para tal o cual individuo pasen por verdaderas, sino de lo que es verdadero. El que un hombre tome por verdadero o por falso el pensamiento de que $2 \cdot 2 = 4$, puede depender de la composición química de su cerebro, pero que este pensamiento sea verdadero no puede depender de ello. Si es verdad que Julio Cesar fue asesinado por Brutus, entonces ello no puede depender de la naturaleza del cerebro del profesor Mommsen.

A veces uno se plantea la pregunta de si con el tiempo las leyes lógicas podrían cambiar. Las leyes del ser verdadero, como todos los pensamientos, si son en lo absoluto verdaderas, son verdaderas siempre. Pero tampoco podrían contener ninguna condición con la que cumplieran en ciertos momentos y no en otros, porque tratan del ser verdadero de los pensamientos, los cuales, si son verdaderos, son verdaderos atemporalmente. Así, si de la verdad de determinados pensamientos se sigue en un momento dado la verdad de un pensamiento, entonces tiene que seguirse siempre de ellos.

Resumamos brevemente lo que hemos obtenido en relación con los pensamientos (auténticos).

Los pensamientos, que no pertenecen, como las representaciones, a la mente individual (no son subjetivos,) sino que son independientes del pensar, se les presentan a todos de la misma manera (objetivamente); no son producidos por el pensar, sino sólo captados. En esto se parecen a los cuerpos físicos. Se distinguen de éstos porque no son espaciales y son esencialmente atemporales; quizá podría inclusive decirse que son [ir]reales, al menos en la medida en que nada afectaría propiamente su esencia real. Por su no-espacialidad se parecen a las representaciones.

De la naturaleza [no]mental de los pensamientos se sigue que todo tratamiento psicológico de la lógica está mal. La ciencia tiene más bien la tarea de purificar lo lógico de todo lo extraño, y por ende también de lo psicológico, y de liberar el pensar de las ataduras del lenguaje, puesto que pone de manifiesto sus imperfecciones lógicas. En la lógica de lo que se trata es de las leyes del ser verdadero, no de lo que se tiene por verdadero, no de la cuestión de cómo el

pensar ocurre en el hombre, sino de cómo tiene que ocurrir para no dejar escapar la verdad.

La Negación.

Un pensamiento propiamente hablando es o bien verdadero o bien falso. Si emitimos un juicio sobre él, entonces lo reconocemos o bien como verdadero o bien lo rechazamos como falso. Ahora bien, la última expresión puede inducir al error por cuanto el pensamiento rechazado debiera entonces quedar relegado al olvido tan rápido como fuera posible por ser enteramente inútil. Más bien, el conocimiento de que un pensamiento es falso puede ser tan valioso como el de que un pensamiento es verdadero. En efecto, no existe ninguna diferencia entre estos casos. Mientras tenga un pensamiento por falso, tendré otro pensamiento por verdadero y de éste nosotros decimos entonces que se contrapone al primero. En español nosotros, como regla general, hacemos ver que un pensamiento es falso insertando en el predicado la palabra 'no'. La afirmación yace como en los demás casos en la forma del indicativo y no está necesariamente ligada con la palabra 'no'. Mientras nos desentendemos de la afirmación, nos ocupamos de la negación. Es tan legítimo decir 'el pensamiento de que Pedro no llegó a Roma' como 'el pensamiento de que Pedro llegó a Roma'. Vemos entonces que afirmar y juzgar no son diferentes si afirmo que Pedro llegó a Roma que si afirmo que Pedro no llegó a Roma; el pensamiento es lo único que se contrapone. De esta manera hay para cada pensamiento uno contrario. Tenemos aquí una relación reversible: si el primer pensamiento se contrapone al segundo, entonces también el segundo se contrapone al primero. Mientras se declare que es falso el pensamiento de que Pedro no llegó a Roma, se afirma que Pedro llegó a Roma. Se podría indicar que se toma como falso mediante un segundo 'no' insertado: 'Pedro [no] no llegó a Roma' o 'no es verdadero que Pedro no llegó a Roma'. Y resulta de esto que la doble negación se anula. Lo contrario de lo contrario es lo original.

Si se trata de la verdad de un pensamiento, entonces titubeamos entre pensamientos que se contraponen y en un mismo acto reconocemos a uno como verdadero y al otro como falso. Tenemos relaciones parecidas a la contraposición también en otros casos, *e.g.*, de lo bello y lo feo, lo bueno y lo malo, lo agradable y lo desagradable, lo positivo y lo negativo en las matemáticas y la física. Pero nuestro caso se diferencia de estos en dos aspectos. Primero, no hay nada aquí que ocupe, como el cero o el estado no eléctrico, un punto medio neutral entre los contrarios mencionados. Desde luego que se puede decir que el cero se contrapone a sí mismo en cuanto a lo positivo y lo negativo; pero no hay ningún pensamiento que se contraponga a sí mismo. Esto vale hasta para la poesía. En segundo lugar, no hemos visto aquí dos clases de modo que los pensamientos que pertenecieran a

una de ellas tuvieran contrarios en la otra clase, así como hay una clase de números positivos y una de números negativos. Al menos yo no he encontrado todavía ninguna característica que pudiera emplearse para semejante clasificación en clases; porque el uso de la palabra 'no' en la expresión lingüística es tan sólo una marca totalmente externa, así como fluctuante. Tenemos también otros signos para la negación, como 'ningún' y en muchos casos el prefijo 'in', como, por ejemplo, en 'insuficiente'. Ahora bien, parecería poco apropiado querer colocar, entre los pensamientos contenidos en las oraciones 'este trabajo es malo', 'este trabajo es suficiente', 'este trabajo no es malo', 'este trabajo es insuficiente', los primeros dos en una de las clases y los dos últimos en la otra, dado que 'insuficiente' y 'malo' están muy cerca en cuanto a su sentido y es muy posible que en otro lenguaje la palabra 'insuficiente' fuera reproducida por otra en la que la negación fuera tan poco reconocible como en 'malo'. No es evidente desde qué punto de vista los primeros dos pensamientos pudieran estar más próximos entre sí que el primero con el cuarto. A esto se agrega todavía que las negaciones no sólo pueden encontrarse en el predicado de la oración principal sino también en otros lugares y que dichas negaciones no simplemente se anulan como, por ejemplo, en la oración 'no todos los trabajos son insuficientes', para lo cual no puede decirse 'todos los trabajos son suficientes'; o como en la oración 'quién no se ha aplicado no será premiado', en lugar de lo cual no puede decirse 'quién ha sido aplicado será premiado'. Compárese con esto todavía las oraciones 'quién ha sido premiado se ha aplicado', 'quién no se ha aplicado termina sin nada', 'quién fue flojo no será premiado', ' 2^4 no es diferente de 4^2 ' y ' 2^4 es igual a 4^2 ', y se verá que uno cae aquí en una selva espinosa de preguntas. Además, ni siquiera vale la pena querer penetrar en ella, realizar un gran esfuerzo para contestarla. Yo al menos no sé de ninguna ley lógica por medio de la cual se considerara una clasificación de los pensamientos en las clases de los afirmativos y los negativos. Por nuestra parte dejamos reposar, pues, este asunto hasta en cuanto se nos presente, *acaso, la necesidad de semejante clasificación*. Porque es previsible que con ello también se hará patente una característica que sería adecuada para dicho fin.

El prefijo 'in', por cierto, no siempre sirve para la negación. 'No bello' ['*unschön*'] apenas se distingue en su sentido de 'feo'. Tenemos aquí una contraposición a lo bello, pero no a la negación. De ahí que las oraciones 'esta casa no es fea [*unschön*]', 'esta casa es bella' no tengan el mismo sentido.

Conexión de pensamientos

Si unos miembros de un jurado responden afirmativamente a la pregunta: ¿encendió premeditadamente el acusado una pila de madera y causó

[premeditadamente] un incendio forestal?, entonces con su acto afirman simultáneamente los dos pensamientos:

- 1) el acusado encendió premeditadamente una pila de madera,
- 2) el acusado premeditadamente causó un incendio forestal.

Desde luego que tenemos en nuestra pregunta un pensamiento; luego se puede contestar mediante un juicio; pero este pensamiento se compone de dos pensamientos que también podrían juzgarse por separado, de manera que mediante la afirmación del pensamiento completo afirmo al mismo tiempo los pensamientos parciales. Ahora bien, podría parecer que esto realmente es indiferente y que el asunto no significa gran cosa; sin embargo, se pondrá de manifiesto que está relacionado estrechamente con leyes lógicas muy importantes. Al negar un pensamiento así compuesto esto resalta con más claridad aún. ¿Cuándo tendrían los jurados que negar la pregunta anteriormente mencionada? Obviamente, cuando den por falso tan sólo a uno de los dos pensamientos parciales; cuando, por ejemplo, opinen que el acusado ciertamente encendió premeditadamente la pila de madera, pero que el incendio forestal no fue una consecuencia intencional de ello.

Introducción a la lógica. [Agosto de 1906]

La separación de la fuerza afirmativa del predicado.

Se puede expresar un pensamiento sin afirmarlo. Sin embargo, los lenguajes carecen de una palabra o de un signo cuya única tarea sea la de afirmar. Así, también en las lógicas se confunde, según parece, predicar y juzgar. De manera que no se sabe bien si eso que los lógicos llaman juicio ha de ser un pensamiento con o sin el juicio de que es verdadero. En sentido literal debería pensarse que es **con** el juicio; pero el uso del lenguaje muchas veces es tal que propiamente hablando no acarrea consigo la decisión, el conocimiento de la verdad. *Yo uso la palabra 'pensamiento' más o menos como los lógicos usan 'juicio'*. Pensar es aprehender pensamientos. Una vez que se ha captado un pensamiento, se puede aceptarlo como verdadero (**juzgarlo**) y externar dicha aceptación (**afirmarlo**). Asimismo, la fuerza del juicio tiene que separarse de la **negación**. Cada pensamiento tiene en oposición a uno contrario, de manera que el rechazo de uno siempre coincide con la aceptación del otro. Se puede decir que juzgar es elegir entre opuestos. El rechazo de uno y la aceptación del otro es **un** acto. Para el rechazo no se requiere ni ningún nombre ni ningún signo particular. Se puede hablar de la negación antes de haber distinguido las partes en el pensamiento. La discusión de si la negación pertenece al todo o a la parte predicativa es tan infructuosa como la de si el abrigo envuelve al hombre ya vestido o si pertenece al conjunto de las demás piezas de la vestimenta. Dado que el abrigo cubre al hombre ya vestido se incluye a sí mismo de modo natural entre las demás piezas de vestimenta. El componente predicativo del pensamiento puede considerarse, hablando figurativamente, como la envoltura del componente que constituye el sujeto. Envolturas adicionales se unen por sí solas con las que ya se tiene.

Conexión Oracional Hipotética

Si se dice que en un juicio hipotético dos juicios quedan conectados, la palabra 'juicio' se usa de modo tal que no se incluye la aceptación de la verdad. Porque inclusive si también se enuncia la oración compuesta con fuerza afirmativa, de todos modos no por ello se asevera ni la verdad del pensamiento en la oración antecedente ni la del pensamiento en la oración consecuente. La aceptación de la verdad se extiende más bien a un pensamiento expresado en la oración compleja entera. Y en un examen más detallado se encontrará en muchos casos que el antecedente solo no expresa ningún pensamiento, ni tampoco el consecuente

(oraciones impropias). En estos casos, en la mayoría de las veces la relación que se da es la de subordinación de conceptos. No obstante, se confunden aquí dos cosas que yo, según parece, por primera vez he separado: la relación que designo mediante la barra de condición y la universalidad. La primera corresponde aproximadamente a lo que los lógicos quieren decir mediante 'relación entre juicios'. Porque el signo de relación (*la barra de condición*) enlaza oraciones unas con otras y en verdad oraciones genuinas, de manera que cada una de las dos expresa un pensamiento.

Si ahora dejamos de lado el mito y la poesía y tomamos en cuenta únicamente aquellos casos en los que está en juego la verdad en el sentido científico, entonces podríamos decir que *todo pensamiento es o verdadero o falso, tertium non datur*. Es un sinsentido hablar de casos en los que un pensamiento es verdadero y de otros en los que es falso. El mismo pensamiento no puede ser a veces verdadero y a veces falso, sino que en los casos en los que se tiene ante los ojos semejantes proferimientos, siempre se trata de pensamientos diferentes; y si se llegara a creer que lo que se tiene sea el mismo es porque el texto es el mismo y este texto será entonces una oración impropia. No siempre se distingue suficientemente entre el signo y lo que éste expresa.

Cuando se tienen dos pensamientos, sólo cuatro casos son posibles:

1. El primero es verdadero e igualmente el segundo;
2. El primero es verdadero, el segundo falso;
3. El primero es falso, el segundo verdadero;
4. Ambos son falsos.

Ahora bien, si el **tercero** de estos casos **no** se da, entonces existe la relación que designé mediante la *barra de condición*. La oración que expresa el primer pensamiento es el consecuente; la oración que expresa el segundo pensamiento, el antecedente. Han pasado ahora casi 28 años desde que enuncié esta explicación. Por aquel entonces yo creía que se necesitaba sólo un empujoncito y que pronto los demás sabrían más que yo. Y ahora que ha pasado más de un cuarto de siglo, la gran mayoría de los matemáticos no tiene ni idea del asunto y lo mismo seguramente vale inclusive para los lógicos. ¡Qué aburrición! ¡Cómo me recuerda este comportamiento de los doctos el de los bueyes frente a la puerta nueva: miran, mugen, tratan de entrar a empujones por un lado, pero pasar por ella podría ser peligroso! Admito gustosamente que a primera vista es extraño, pues si no fuera así hace mucho que la solución se hubiera encontrado. ¿Pero tiene uno que dejarse llevar por la primera impresión pasajera? ¿No se tiene tiempo en lo absoluto para reflexionar sobre ello? ¡No – a qué podría aspirarse con eso! Probablemente se eche

de menos una conexión interna entre pensamientos; no parece ser muy convincente que del pensamiento sólo tenga uno que tomar en cuenta si es verdadero o falso y para nada el contenido del pensamiento, propiamente hablando. Esto está relacionado con lo que descubrí acerca del **sentido y el significado**. Que trate alguien entonces de dar una explicación en la que el pensamiento mismo se aprecie mejor y se verá que o bien en el fondo lo que al pensamiento se agrega es totalmente superfluo y sólo se enreda la cuestión sin ningún provecho o que las oraciones (antecedente y consecuente) son oraciones ilegítimas, ninguna de las cuales expresa un pensamiento, de manera que en verdad no se han conectado pensamientos, que era lo que se quería, sino por ejemplo conceptos o relaciones. Ahora bien, ¿es la relación que yo designo mediante la barra de condición una relación que pueda valer entre pensamientos? ¡Propiamente hablando, no! Aquí sólo puede decirse que *el signo de esta relación* (justamente, la barra de condición) *conecta oraciones*. Posteriormente, esta explicación será complementada de modo que **también** se puedan conectar **nombres de objetos** mediante la barra de condición. Y esto entra menos todavía en la cabeza. El examen detallado de la universalidad primeramente tiene que hacerlo aceptable.

Universalidad

Aquí nos vemos obligados por primera vez a *descomponer un pensamiento en partes* de las cuales ninguno es un pensamiento. El caso más simple es el de la bipartición. Las partes no son iguales: una está insaturada, la otra saturada. Se tienen que tomar en cuenta aquí aquellos pensamientos que en la lógica convencional se designan como juicios **singulares**. En un juicio así se afirma algo de un objeto. La oración que expresa un pensamiento así se compone de un **nombre propio** – y éste corresponde a la parte **acabada** del pensamiento – y de una parte **predicativa**, que corresponde a la parte **insaturada** del pensamiento. Por otra parte, la singularidad no le corresponde propiamente hablando a un pensamiento en sí mismo, sino únicamente en cuanto a un modo del análisis posible. Es posible que el mismo pensamiento pueda aparecer como particular en relación con un análisis diferente (Cristo ganó algunos hombres para su doctrina). Los nombres propios designan objetos y es de objetos que trata un pensamiento singular. Pero no se puede decir que el objeto sea parte del pensamiento a la manera como el nombre propio es parte de la oración correspondiente. El Monte Blanco con sus masas de nieve y hielo no es parte del pensamiento de que el Monte Blanco tiene más de 4000m de altura, sino que sólo se puede decir que, considerados de un cierto modo que todavía tenemos que examinar, a los objetos les corresponde una parte del pensamiento (sentido y significado). A través del análisis de pensamientos singulares se obtienen los componentes del modo saturado e

insaturado que ciertamente no se dan por separado; pero cada componente de una clase conforma un pensamiento en combinación con cada uno de la otra clase. Ahora bien, si se mantiene fija la parte insaturada y se cambia la parte que es saturada, entonces ha de esperarse que los pensamientos así conformados sean en parte verdaderos y en parte falsos. Pero también puede suceder que todos ellos son verdaderos. Sea el componente insaturado el expresado, por ejemplo, en las palabras 'es igual a sí mismo'. Esta es entonces una característica peculiar de la parte insaturada. Obtenemos así un nuevo pensamiento (todo es igual a sí mismo) que, en comparación con los pensamientos singulares (dos es igual a sí mismo; la Luna es igual a sí misma), es general. La palabra 'todo', que aparece aquí en el lugar del nombre propio ('la Luna'), no es ella misma, sin embargo, un nombre propio, no designa ningún objeto, sino que sirve para conferir universalidad de contenido a la oración. A menudo en lógica uno se deja influir excesivamente por el lenguaje y la *Conceptografía* es también buena para facilitar el desprendimiento respecto de la forma lingüística. En lugar de decir 'la Luna es igual a sí misma' se puede decir también 'la Luna es igual a la Luna' sin alterar el pensamiento. A partir de esto se puede ver que no importa si un nombre propio aparece en uno o en varios lugares de la oración. Pero ahora es lingüísticamente imposible dejar que en el paso a lo general aparezca también la palabra 'todo' en dos lugares. La oración 'todo es igual a todo' no tendría el sentido deseado. Sería posible usar, acercándose a los usos matemáticos, una letra y decir, por ejemplo, '*a* es igual a *a*'. Esta letra ocupa entonces el lugar (o los lugares) de un nombre propio, pero no es ella misma ningún nombre propio, no tiene significado, sino que sólo sirve para conferir universalidad de contenido a la oración. Y este uso de las letras, por ser más sencillo y consecuente, es desde un punto de vista lógico preferible a los recursos que el lenguaje proporciona para estos fines.

Si un todo consiste en dos oraciones conectadas por medio de 'y', cada una de las cuales expresa un pensamiento, entonces también el sentido del todo tiene que comprenderse como un pensamiento, porque este sentido es o verdadero o falso; verdadero si cada una de las partes del pensamiento es verdadera y falso en cualquier otro caso -, o sea, cuando al menos una de las dos partes del pensamiento es falsa. Llamemos a este pensamiento del todo la conjunción de ambos pensamientos parciales. De manera que también la conjunción tiene su pensamiento opuesto, como cada pensamiento tiene su pensamiento opuesto. Ahora bien, es claro que lo que se opone a una conjunción es lo que se opone a un primer pensamiento y a un segundo pensamiento. Es eso lo que yo expreso mediante la barra de condición. La oración del primer pensamiento es una vez más el consecuente, el del segundo el antecedente. Pero la oración entera, la que expresa lo opuesto de una conjunción de lo contrario de un primer pensamiento y

de un segundo pensamiento, la podemos llamar la oración hipotética, cuyo consecuente es la expresión del primer pensamiento y cuyo antecedente es la expresión del segundo pensamiento. Llamemos al pensamiento de la oración hipotética el pensamiento hipotético, cuya consecuencia es el primer pensamiento y cuya condición es el segundo pensamiento. Ahora bien, si el mismo nombre propio aparece tanto en el consecuente como en el antecedente, entonces podemos considerar el pensamiento hipotético como un pensamiento singular en cuanto al análisis de la parte saturada que corresponde al nombre propio y el resto a la parte insaturada. Si ahora mantenemos fija la parte insaturada y cambiamos las partes saturadas, entonces puede suceder que siempre obtengamos un pensamiento verdadero, sea cual sea la parte saturada. En relación con esto, es una consideración o un supuesto general que no nos movemos en el ámbito del mito y la poesía, sino en el campo de la verdad (en sentido científico), de manera que cada nombre propio efectivamente logra su objetivo de designar un objeto, es decir, no es vacío. Dicho sea de paso, las partes saturadas del pensamiento, de las que aquí se habla, no son ellas mismas los objetos designados por los nombres propios, si bien tienen relación con éstos; y si no todo debiera caer en el campo de la poesía, entonces es esencial que dichos objetos se den. De otro modo no se puede en lo absoluto hablar de la verdad de los pensamientos. Supongamos, entonces, que en un caso dado obtenemos siempre un pensamiento verdadero porque, como ya vimos, mantenemos fija la parte insaturada en un pensamiento hipotético, el cual puede ser interpretado al mismo tiempo como pensamiento singular, sea cual sea la parte completa que usamos para la saturación. De esta manera nos vemos llevados a un pensamiento general y el pensamiento hipotético singular, del cual partimos, aparece como caso particular de éste. Ejemplo:

Primer pensamiento: que el cuadrado de 3 es mayor que 2.

Segundo pensamiento: que 3 es mayor que 2.

Opuesto del primer pensamiento: que el cuadrado de 3 no es mayor que 2.

Conjunción del opuesto del primer pensamiento y del segundo pensamiento: que el cuadrado de 3 no es mayor que 2 y que 3 es mayor que 2.

Opuesto de la conjunción del opuesto del primer pensamiento y del segundo pensamiento: que es falso que simultáneamente el cuadrado de 3 no es mayor que 2 y 3 mayor que 2.

Este es el pensamiento hipotético cuyo consecuente es el primer pensamiento y cuyo antecedente es el segundo pensamiento. La expresión en palabras: 'Si 3 es mayor que 2, entonces el cuadrado de 3 es mayor que 2' ciertamente tiene algo de extraño, y lo tiene quizá aún más la expresión que se

obtiene al sustituir '2' por '3': 'Si 2 es mayor que 2, entonces el cuadrado de 2 es mayor que 2'. Pero es un pensamiento verdadero que sea falso el que el cuadrado de 2 no sea al mismo tiempo mayor que 2 y 2 mayor que 2. Así, se puede poner en lugar de 3 el número que uno desee: siempre se obtendrá un pensamiento verdadero. ¿Pero cómo es si se toma un objeto que no es un número? Cada oración que se obtiene de '*a* es mayor que 2' y en la que se inserte un nombre propio de un objeto en lugar de '*a*' expresa un pensamiento y este pensamiento será siempre falso si el objeto no es un número. El asunto es diferente en el caso de la primera oración, porque la expresión que resulta de la expresión 'el cuadrado de *a*' al insertar en lugar de '*a*' el nombre propio de un objeto designa un objeto según el modo usual de hablar sólo si este objeto es un número. La culpa la tiene el carácter incompleto de la explicación usual de 'cuadrado'. Pero se puede superar esta carencia al determinar que por el cuadrado de un objeto se debería entender este mismo cuando no es un número y que 'el cuadrado de un número' tiene que ser entendido en el sentido de la aritmética. Se obtiene entonces siempre del esquema 'que el cuadrado de *a* es mayor que 2' una oración que expresa un pensamiento falso si se inserta en lugar de '*a*' el nombre propio de un objeto que no es un número. Una vez que esto haya quedado determinado, se puede insertar en la oración hipotética de nuestro ejemplo en lugar del signo numérico '3' el nombre propio de cualquier objeto y siempre se obtendrá una oración que exprese un pensamiento verdadero. De ahí que el pensamiento general al cual nos vemos llevados de esta manera también sea verdadero. Podemos enunciarlo de este modo: 'si algo es mayor que 2, entonces su cuadrado es mayor que 2'; o mejor: 'si *a* es mayor que 2, entonces el cuadrado de *a* es mayor que 2'. Aquí parecería que la redacción con 'si' puede ser la más conforme al lenguaje. Pero aquí ya no tenemos dos pensamientos conectados. Cuando reemplazamos la letra '*a*' con el nombre propio de un objeto, entonces obtenemos una oración cuyo pensamiento aparece como caso particular del pensamiento general y en semejante caso particular tenemos en el consecuente y en el antecedente dos pensamientos que están presentes además del pensamiento del todo. Podemos captarlos por separado. Pero la oración que expresa el pensamiento general ya no puede escindirse así sin convertir las partes en sinsentidos. Ya que la letra '*a*' debería conferirle universalidad al todo del contenido, pero no a las oraciones parciales. La parte '*a* es mayor que 2' ya no expresa un pensamiento, ni uno verdadero ni uno falso, porque '*a*' ni designaría como nombre propio un objeto ni le conferiría a esta parte universalidad de contenido; pues por cuanto esta parte no tiene ningún objetivo en lo absoluto, no contribuye en nada a ella, confiriéndole a esta parte un sentido. Lo mismo vale para la otra parte 'el cuadrado de *a* es mayor que 2'. Justamente porque la '*a*' de una de las partes apunta a la '*a*' de la otra parte no es posible separar las partes; porque entonces se suprimiría por completo aquello que '*a*'

habría contribuido al sentido del todo y con ello se habría perdido el objetivo de 'a'. Asimismo, tampoco sería posible descomponer en latín una estructura oracional, cuyas partes fueran introducidas con 'quot' y 'tot', sin hacerles perder el sentido a cada una de ellas. Llamo **Oración impropia** a algo que tiene la forma gramatical de una oración, pero que no es la expresión de un pensamiento, si bien puede ser una parte de una estructura oracional que expresa un pensamiento, lo que propiamente se designa como una oración. Así, pues, ya no se puede, como antaño, distinguir en la oración general antecedente y consecuente; porque la oración antecedente y la oración consecuente se convirtieron en oraciones impropias que ya no expresan pensamientos. Ahora se usa la expresión de manera como si en algunos casos el antecedente estuviera satisfecho y en otros no. De esta manera se da a entender que lo que se llama el antecedente no es ningún pensamiento; ya que un pensamiento – siempre excluyendo el mito y la poesía – es sólo o verdadero o falso. No puede suceder que el mismo pensamiento sea a veces verdadero y a veces falso. Se tiene entonces una oración impropia de la que se pueden obtener oraciones genuinas que expresan pensamientos en parte verdaderos y en parte falsos; pero justamente estos pensamientos son entonces diferentes. Letras que sirven, como en nuestro ejemplo 'a', para conferir a una oración universalidad de contenido, se distinguen esencialmente de los nombres propios por dichos fines. Yo digo: el nombre propio designa (o significa) un objeto; 'a' señala un objeto, no tiene significado, no designa ni significa. Palabras como 'algo' y 'ello' a menudo representan a las letras en el lenguaje usual; a veces la letra no parece estar representada en lo absoluto. El lenguaje resulta imperfecto a este respecto, como lo es en otros. Para la aprehensión de lo lógico, el uso de las letras es más ventajoso que el uso de lenguaje. Consideremos ahora las oraciones parciales impropias de nuestra oración general. Cada una de ellas contiene una letra. Si sustituimos ésta por el nombre propio de un objeto, entonces obtenemos una oración genuina, la cual parece ahora componerse de dicho nombre propio y de lo demás. Este 'demás' corresponde a las partes insaturadas del pensamiento y también es parte de la oración impropia. Así, cada una de las oraciones parciales impropias contiene, además de la letra, un componente que corresponde a la parte insaturada de un pensamiento. Estas partes insaturadas de los pensamientos ahora también son parte de nuestro pensamiento general; pero estas partes requieren de un aglutinante para adherirse unas con otras, así como tampoco dos partes de pensamiento completas no podrían adherirse una con otra sin aglutinante. Si expresamos el pensamiento general de nuestro ejemplo como sigue: 'si a es mayor que 2, entonces a es algo cuyo cuadrado es mayor que 2', entonces a ambas partes insaturadas de pensamiento que acabamos de mencionar les corresponden las palabras 'es algo cuyo cuadrado es mayor que 2' y 'es mayor que 2'. El 'es' aquí tiene siempre que tomarse sin la fuerza aseverativa. Al aglutinante corresponden

las palabras 'sí' y 'entonces', la letra 'a' y el lugar de las palabras, en tanto que 'es' se encuentra una vez al final, la segunda vez directamente después del 'entonces'²¹³.

Nosotros, sin embargo, sabemos que en verdad este modo particular de vinculación es ocasionado por la negación, la formación de un conducto, nuevamente la negación y la generalización (*sit venia verbo*).

Sentido y significado.

Los nombres propios deberían designar objetos y nosotros llamamos el objeto, designado por un nombre propio, su significado. Por otra parte, el nombre propio es un componente de una oración que expresa un pensamiento. ¿Qué tiene entonces que ver el objeto con el pensamiento? Que no es parte del pensamiento lo hemos visto en la oración 'el Monte Blanco mide más de 4000 m de altura'. ¿Es entonces el objeto necesario para que la oración exprese un pensamiento? Bueno, se dice que Ulises no es ninguna persona histórica y se quiere decir con esta contradictoria expresión que el nombre 'Ulises' no designa nada, que no tiene significado. Aceptado esto, no por ello se le niega a todas las oraciones de la *Odisea* en que aparece el nombre 'Ulises' todo contenido de pensamiento. Imaginemos ahora que nos convenciéramos de que el nombre 'Ulises' en la *Odisea*, contrariamente a lo que es hasta ahora nuestra convicción, designa de todos modos a un hombre. ¿Se expresarían por medio de las oraciones que contienen el nombre 'Ulises' otros pensamientos? Yo creo que no. Los pensamientos propiamente hablando seguirán siendo los mismos; simplemente se trasladarían del reino de la poesía al de la verdad. De acuerdo con esto, el objeto que un nombre propio designa parece carecer totalmente de importancia para el contenido de pensamiento de una oración que contiene al nombre propio. ¡Para el contenido de pensamiento! Por lo demás, ciertamente no nos da lo mismo el que nos movamos en el reino de la poesía o en el de la verdad. Pero de seguro que podemos extraer de lo anterior que tiene que estar asociado con el nombre propio algo más que sea distinto del objeto designado y que es esencial para el pensamiento de la oración en el que el nombre propio aparece. Yo lo llamo el sentido del nombre propio. Así como el nombre propio es parte de la oración, el sentido es parte del pensamiento.

Otras rutas conducen al mismo destino. A menudo un mismo objeto tiene diferentes nombres propios; pero éstos no son intercambiables sin excepción. Esto aclara por qué los nombres propios que tienen el mismo significado pueden tener diferente sentido. La oración 'El Monte Blanco tiene más de 4000 m de altura' no

²¹³ Nota de traductor: esta observación sintáctica acerca de las cláusulas principales y subordinadas en alemán no tiene correlato en español.

expresa el mismo pensamiento que 'La montaña más alta de Europa tiene más de 4000 m de altura', a pesar de que el nombre propio 'Monte Blanco' designa la misma montaña que la expresión 'la montaña más alta de Europa', la cual, de acuerdo con el modo de hablar aquí adoptado, también es un nombre propio. Las dos oraciones 'El lucero de la tarde es el mismo que el lucero de la tarde' y 'el lucero de la tarde es el mismo que el lucero de la mañana' sólo se distinguen por un nombre propio con el mismo significado. Pero expresan, no obstante, pensamientos diferentes. El sentido del nombre propio 'el lucero de la tarde', por lo tanto, tiene que ser diferente del sentido del nombre propio 'el lucero de la mañana'. Esto se obtiene así: hay algo asociado con un nombre propio que es diferente de su significado, que puede también ser diferente de los diferentes nombres propios que tienen el mismo significado, y que es esencial para el contenido de pensamiento de la oración que contiene al nombre propio. Una oración genuina en la que aparece un nombre propio expresa un pensamiento singular y en éste distinguimos una parte completada de una parte insaturada. La primera corresponde al nombre propio pero no es el significado, sino su sentido. También la parte insaturada del pensamiento la interpretamos como un sentido, a saber, de la parte de la oración presente además del nombre propio. Y es en la dirección de estas determinaciones que interpretamos el pensamiento mismo como sentido, a saber, de la oración. Así como el pensamiento es el sentido de la oración entera, una parte del pensamiento es el sentido de una parte de la oración. Es así como el pensamiento se asemeja al sentido de un nombre propio, pero siendo completamente diferente de su significado.

La cuestión ahora es si acaso no le corresponde también a la parte insaturada del pensamiento algo que tiene que ser visto como el sentido de la parte correspondiente de la oración, algo que sea como el significado de esta parte de la oración. Que el nombre propio tenga un significado es totalmente irrelevante para el mero contenido de pensamiento, pero desde otro punto de vista es de suma importancia, por lo menos mientras mantengamos una conducta científica. Ello depende de si nos encontramos en el reino de la poesía o en el de la verdad. Pero ahora resulta improbable que el nombre propio se conduzca de una manera tan distinta a como lo hace la parte restante de una oración singular de manera que sólo en su caso sea importante que haya un significado. Por lo demás, tenemos que asumir que algo tiene también que corresponder, en el ámbito del significado, a la otra parte de la oración que tiene como sentido la parte insaturada del pensamiento, si el todo del pensamiento ha de encontrarse en el reino de la verdad. De ahí que también en esta parte restante de la oración podrían aparecer nombres propios cuyos significados son importantes. Si en una oración aparecen varios nombres propios, entonces el pensamiento asociado se puede analizar de varias

maneras en la parte completa y en la parte insaturada. El sentido de cada uno de estos nombres propios puede contraponerse como parte concluida a la otra parte del pensamiento como parte insaturada. Desde luego que el lenguaje puede también expresar el mismo pensamiento de diverso modo, porque tan pronto hace de este nombre propio como de aquel el sujeto gramatical. Claro que se dice de estas diferentes formas de expresión que no son equivalentes. Eso es correcto. Pero se tiene que tomar en cuenta que el lenguaje no sólo expresa pensamientos, sino que también les confiere una iluminación o un colorido particular. Y éstos pueden ser diferentes, inclusive si son el mismo pensamiento. Es impensable que sólo con los nombres propios aparezcan significados y no con las otras partes de la oración por medio de las cuales se conectan. Cuando decimos 'Júpiter es más grande que Marte' ¿de qué estamos hablando? De los propios cuerpos celestes, de los significados de los nombres propios 'Júpiter' y 'Marte'. Nosotros decimos que mantienen una cierta relación entre sí y esto lo indicamos mediante las palabras 'es más grande que'. Esta relación se da entre los significados de los nombres propios, es decir, tiene ella misma que pertenecer al ámbito de los significados. De acuerdo con lo anterior, se tiene que reconocer que también la parte de la oración 'es más grande que Marte' tiene un significado, no [sólo] un sentido. Cuando analizamos una oración en un nombre propio y la parte restante, entonces esa parte restante tiene como sentido la parte insaturada del pensamiento. A su significado, sin embargo, la llamamos 'concepto'. En esto, dicho sea de paso, estamos cometiendo un error al que nos obliga el lenguaje. Porque al introducir la palabra 'concepto' concedemos la posibilidad de oraciones de la forma 'A es un concepto', en donde A es un nombre propio. Pero aquí hemos marcado como objeto justamente lo que se contrapone al objeto como algo completamente disímil. También el uso del artículo definido al principio de las palabras 'el significado de la parte restante de la oración' propiamente hablando es, por la misma razón, erróneo. Pero el lenguaje nos obliga a cometer dichas imprecisiones y no nos queda otra que estar siempre conscientes de ellas para no caer en el error y para que no se nos vuelva borrosa la frontera nítida entre objeto y concepto. Podemos, hablando figurativamente, llamar 'insaturado' al concepto o podemos también decir que tiene un carácter predicativo.

Ya vimos el caso de una oración compleja que se compone de una oración impropia consecuyente y de una oración impropia antecedente, donde estas oraciones impropias contenían una letra (por ejemplo 'a'). El resto en cada una de estas oraciones impropias corresponde a una parte insaturada del pensamiento y podríamos decir ahora que dicha parte del pensamiento es el sentido de la parte correspondiente de oración que llamamos el 'resto'. Ahora bien, dicha parte de la oración también tiene un significado y a ésta la llamamos 'concepto'. De manera

que tenemos un concepto que pertenece en tanto que significado al resto de la oración antecedente impropia y un concepto que pertenece en tanto que significado al resto de la oración consecuente impropia. Estos conceptos están ahora en una conexión particular (podemos decir también 'relación') y nosotros llamamos a ésta subordinación; y en particular decimos que el concepto de oración antecedente impropia está subordinado al concepto de oración consecuente impropia. Si interpretamos una oración singular como compuesta por un nombre propio y el resto, entonces le corresponde como significado al nombre propio un objeto, al resto un concepto y objeto y concepto aparecen aquí en una conexión o relación particular que llamamos 'subsunción'. El objeto se subsume al concepto. Es claro que la subsunción es enteramente diferente de la subordinación.

Hemos visto que las partes de las oraciones tienen un significado; ahora bien, ¿tiene también una oración entera un significado? Exigimos de cada nombre propio que aparece en una oración que tenga un significado cuando de lo que nos ocupamos es de la verdad, cuando nos conducimos científicamente. Por otra parte, sabemos que da lo mismo para el sentido de la oración, el pensamiento, el que las partes de oración tengan o no tengan significado; se sigue que tiene que haber algo más, diferente del pensamiento, que esté asociado con la oración, para lo cual es esencial que las partes de la oración tengan significado y a eso se le llamará el significado de la oración. Pero lo único para lo cual ello es esencial es aquello a lo que yo llamo el valor de verdad, a saber, el que el pensamiento sea verdadero o falso. Los pensamientos en mito y poesía no tienen que tener valor de verdad. Una oración que contuviera un nombre propio carente de significado no es ni verdadera ni falsa; el pensamiento que ésta exprese pertenece a la poesía. La oración no tiene entonces ningún significado. Tenemos dos valores de verdad: lo verdadero y lo falso. Si una oración tiene en lo absoluto significado, entonces ésta es o Lo Verdadero o Lo Falso. Si se puede analizar la oración en partes, cada una de las cuales tiene significado, entonces también la oración tiene significado. Lo Verdadero y Lo Falso son considerados como objetos, porque tanto la oración como su sentido – el pensamiento – tienen el carácter de lo que está completo, no el de lo insaturado. Si yo hubiera detectado, en lugar de lo verdadero y de lo falso, dos elementos químicos, la impresión entre los doctos hubiera sido mayor. Cuando decimos 'el pensamiento es verdadero' parecería que le atribuimos la verdad al pensamiento como ésta si fuera una propiedad. Tendríamos entonces el caso de la subsunción. El pensamiento se subsumiría en tanto que objeto al concepto de lo verdadero. Pero aquí el lenguaje nos engaña. No tenemos aquí la relación del objeto con la propiedad, sino más bien la del sentido de un signo con su significado. En el fondo, desde luego que la oración 'es verdad que 2 es un número primo' no dice más que la oración '2 es un número primo'. Si proferimos en el

primer caso un juicio, ello no se debe a la palabra 'verdad', sino a la fuerza aseverativa que la adjudicamos a la palabra 'es'. Pero esto lo podemos hacer del mismo modo en la segunda oración y entonces el actor en el escenario podría proferir el primero tanto como el segundo sólo que sin fuerza aseverativa.²¹⁴

Una oración genuina es un nombre propio; su significado es, cuando tiene una, un valor de verdad: Lo Verdadero o Lo Falso. Nosotros podemos analizar cualquier oración en una parte completa, que nuevamente es un nombre propio, y una parte insaturada, que significa un concepto. Podemos, asimismo, analizar también diversos nombres propios, cuyos significados no son valores de verdad, en una parte acabada, que una vez más sería un nombre propio, y una parte insaturada. Si ésta fuera significativa, entonces tendría que producir, si se le satura, un nombre propio significativo por medio de algún nombre propio significativo. Si este es el caso, entonces llamamos función a el significado de esta parte insaturada. Es necesario, sin embargo, señalar aquí una salvedad en cuanto a la imprecisión a que el lenguaje nos obliga, parecida a la anterior que hicimos al introducir la palabra 'concepto'. La parte insaturada de una oración, cuyo significado hemos llamado concepto, tiene que tener la propiedad de producir, si se le satura por medio de un nombre propio significativo, una oración genuina; es decir, le confiere

²¹⁴ [Nota de pie de Frege:] Observación sobre el uso de las letras en la aritmética (12.VIII.06): en la aritmética se usan las letras, generalmente sin ser explícitos sobre el modo, la finalidad y la justificación de este uso y, probablemente también, sin tener una misma claridad completa al respecto. El uso en álgebra para designar incógnitas (sea permitida aquí esta expresión en aras de la claridad, a pesar de que es factible elevar objeciones) no es del todo diferente del que es común en aritmética, como podría inclusive parecerlo. Muy a grandes rasgos, también en la aritmética las letras tienen el objetivo de conferir universalidad de contenido. Pero ¿a qué? La mayoría de las veces no es a una oración individual o a una oración compleja en el sentido de la gramática, sino a un grupo de oraciones principales a primera vista completamente independientes entre sí y cuya delimitación no siempre es fácil de reconocer. En realidad, la lógica tiene que exigir que estas oraciones aparentemente independientes se combinen en una oración compleja, pero si se quisiera cumplir esta exigencia a lo que en la mayoría de las veces llevaría sería a monstruos lingüísticos. En la *Conceptografía*, la barra de juicio tiene, además de la fuerza afirmativa, la capacidad de delimitar el alcance de la universalidad de las letras en latín. Empero, para poder restringir la universalidad y darle un alcance más pequeño empleo las letras alemanas y con éstas la cavidad tienen el efecto de restringir el alcance. También en la aritmética se presenta ocasionalmente un empleo de letras que corresponde aproximadamente al de las letras alemanas en mi *Conceptografía*, pero no he detectado indicios de que se esté consciente de que hay algo particular en este uso. Al leer esto, la mayoría de los matemáticos no captaría qué es lo que estoy dando a entender. Yo mismo no me di cuenta de esto sino hasta muy tarde. Nosotros dependemos en gran medida de los elementos auxiliares externos del pensar y seguramente se tenía primero que remplazar el lenguaje de la vida de al menos una cierta área con un mecanismo más fino antes de poder darnos cuenta de ciertas diferencias. Pero los iniciados en la mayoría de los casos han desdeñado hasta ahora hacer suyo este recurso.

al nombre propio un valor de verdad. Esta es la exigencia de la delimitación nítida de un concepto. Cada objeto tiene que caer bajo un concepto dado o no caer, *tertium no datur*. De lo anterior se sigue una exigencia similar para las funciones, mencionada previamente. Consideremos a manera de ejemplo la oración ' $3 - 2 > 0$ '. La analizamos en el nombre propio ' $3 - 2$ ' y el resto, ' > 0 '. Se puede decir que esta parte insaturada tiene como significado el concepto del número positivo. Este concepto tiene que estar nítidamente delimitado. Cada objeto tiene que caer o no caer bajo este concepto. Analicemos aún más el nombre propio ' $3 - 2$ ' en el nombre propio ' 2 ' y la parte insaturada ' $3 -$ '. Ahora bien, podemos también analizar la oración original ' $3 - 2 > 0$ ' en el nombre propio ' 2 ' y la parte insaturada ' $3 - > 0$ '. El significado de ésta es el concepto de algo que, sustraída de 3, da como resultado un resto positivo. También este concepto tiene que estar nítidamente delimitado. Si ahora se diera un nombre propio a con carácter significativo de modo tal que la parte insaturada ' $3 -$ ' no produjera si es saturada por él ningún nombre propio con carácter significativo, entonces tampoco la parte insaturada ' $3 - > 0$ ', saturada por a , culminaría en una oración genuina; o sea, no se podría decir si el objeto designado por a cae bajo el concepto que es el significado de ' $3 - > 0$ '. Se vuelve comprensible que las explicaciones usuales de los signos aritméticos sean insuficientes.

La lógica en las matemáticas. [Primavera de 1914]

Las matemáticas están más estrechamente relacionadas con la lógica que otras ciencias, puesto que casi toda la actividad de los matemáticos consiste en deducir. En ninguna otra ciencia ocupa el deducir semejante espacio, aunque también en otras ciencias ocasionalmente aparecen deducciones. Además del deducir, también forma parte de la actividad del matemático el definir. Este último carece totalmente de importancia en la mayoría de las ciencias y sólo tiene alguna importancia en la ciencia del derecho, dado que ésta en algún aspecto se acerca a las matemáticas, si bien su objeto de investigación es enteramente diferente. Ella extrae su material de la experiencia histórica y psicológica, por lo que esta última tiene que ocupar en ella un espacio considerable. Esto no tiene su contrapartida en las matemáticas.

Pero tanto deducir como definir están sujetos a leyes lógicas. De lo cual se sigue que la lógica tiene más importancia para las matemáticas que para otras ciencias.

Ahora bien, si se considera que la lógica es parte de la filosofía, se da aquí una relación particularmente estrecha entre las matemáticas y la filosofía, lo cual es corroborado por la historia de las ciencias. (Platón, Descartes, Leibniz, Newton, Kant).

¿Hay acaso deducciones peculiares de las matemáticas que justamente por ello no se sometan a la lógica? Así, se puede señalar la inferencia de n a $n + 1$, la inducción de Bernoulli. Pero también una forma de inferir propia de las matemáticas tiene que estar sujeta a leyes. Y estas leyes, si efectivamente no son lógicas, tienen que pertenecer a las matemáticas; se les podría añadir a los teoremas o axiomas de esta ciencia. La inducción de Bernoulli se basa, por ejemplo, en la ley que puede enunciarse como sigue:

si el número 1 tiene la propiedad Φ y si en general para cualquier número entero positivo n es válido que si tiene la propiedad Φ entonces $n + 1$ también tiene esta propiedad Φ , entonces todo número entero positivo tiene la propiedad Φ .

Si es factible probar esta ley, entonces se añade a los teoremas de las matemáticas, en caso contrario a los axiomas. Si se infiere en concordancia con la inducción de Bernoulli, entonces se aplican realmente estos teoremas o axiomas de las matemáticas; es decir, se adopta esta verdad como premisa de una deducción. Ejemplo: prueba de la oración ' $(a + b) + n = a + (b + n)$ '.

Así también se podrá reducir un modo de deducir peculiar de las matemáticas a una ley general, si no de la lógica al menos de las matemáticas. Y a

partir de esta ley se efectúan inferencias de acuerdo con las leyes generales de la lógica.

Observemos ahora con más precisión los procesos en matemáticas y para empezar en primera instancia el **deducir**.

Podemos distinguir dos clases de deducciones: deducciones a partir de dos premisas y deducciones a partir de una premisa.

El progreso en matemáticas se produce de manera que seleccionamos una o dos verdades previamente aceptadas como premisas de una deducción. La conclusión así obtenida es una nueva verdad de las matemáticas. Y ésta a su vez puede usarse sola o en combinación con otra verdad para efectuar otra deducción más. Sería posible llamar a cada verdad así obtenida un teorema. Usualmente, sin embargo, sólo se llama teorema a aquella verdad que no se ha obtenido por medio de una deducción, sino que ella misma es usada como premisa no de una sino de múltiples deducciones en la construcción de la ciencia. Es así como se forman cadenas de deducciones entre verdades y mientras más progresa la ciencia más se extienden las cadenas de deducciones y mientras más numerosas se hagan más crecerá la multiplicidad de los teoremas.

*Retroceso en las cadenas deductivas*²¹⁵

Sin embargo, se pueden también seguir estas cadenas deductivas en dirección inversa, preguntándonos respecto a cada teorema cuáles fueron las verdades de las cuales se obtuvo. Así como avanzar en las cadenas de deducción aumenta la multiplicidad de teoremas, así también retroceder hace que el círculo se reduzca más a cada paso. En tanto que las posibilidades de avanzar parecen no tener límite, ir hacia atrás tiene que llegar a un fin, llevando a verdades que no pueden ser extraídas de otras. Así, nos topamos con los axiomas, los postulados, quizá también con las definiciones. Pero esto se verá más adelante con más precisión. Si, partiendo de un teorema, continuamos las cadenas deductivas hacia atrás, hasta llegar a otros teoremas o axiomas, postulados o definiciones, entonces encontramos cadenas deductivas que, partiendo de teoremas, axiomas, postulados o definiciones conocidos, terminan en nuestro teorema.

Prueba

Todas estas cadenas deductivas conforman la *prueba* de nuestros teoremas. Podemos decir que la prueba, partiendo de verdades reconocidas, conduce por medio de cadenas deductivas al teorema. Pero también es posible que la prueba consista sólo en una única inferencia. En la mayoría de los casos la prueba pasará

²¹⁵ Nota del traductor: Los subtítulos en este fragmento corresponden a notas marginales en el manuscrito a manera de resumen generalmente del párrafo que aquí antecede

por verdades que no pueden pasar por teoremas sólo porque aparezcan en dicha prueba, aunque no se les use de otra manera. La prueba no debería únicamente persuadir acerca de la verdad de lo demostrado, sino que debería también poner al descubierto la relación lógica de las verdades unas con otras. Por eso ya Euclides demostró verdades que no parecen requerir de ninguna prueba, dado que son obvias.

Verdades primitivas

La ciencia tiene la necesidad de demostrar lo que se deja demostrar, de no descansar hasta toparse con algo que no es demostrable. Ella tiene que aspirar a estrechar el círculo de *verdades primitivas* no demostrables hasta donde se pueda, ya que todas las matemáticas están virtualmente presentes en éstas. Sólo se trata entonces de hacerlas brotar. La esencia de las matemáticas tiene que estar determinada por esta semilla; y no se podrá alcanzar claridad acerca de lo que las matemáticas realmente son sino hasta que hayamos reconocido estas verdades primitivas. Supongamos que se hubiera logrado encontrar estas verdades primitivas y que las matemáticas efectivamente se desarrollaran a partir de ellas, entonces éstas se representarían como un sistema de verdades conectadas entre sí por medio de deducciones lógicas.

El Sistema de las matemáticas

Esta idea de **sistema** es la que Euclides tenía en mente, pero que nunca alcanzó y ahora hasta parece como si estuviéramos más lejos que nunca de dicha meta. Vemos que los matemáticos trabajan una parte cada quien para sí mismo, pero estas partes no se juntan para conformar un sistema y hasta parece que la idea misma de sistema casi se perdió. Y, sin embargo, el esfuerzo por un sistema está justificado. La falta de relación que actualmente prevalece no puede seguir siendo satisfactoria. Sólo por medio de un sistema se puede generar un orden. Para construir un sistema requiere, sin embargo, que el avance se haga conscientemente a través de deducciones lógicas.

Quien deduce tiene que saber cuáles son sus premisas. No se puede permitir ninguna mezcolanza de premisas con leyes de deducción de lógica pura, puesto que esto nos haría perder la pureza lógica de la deducción y no podrían distinguirse con nitidez las premisas en una mezcla turbia. Pero si no se distinguen con nitidez las premisas, no se puede retroceder con certeza hasta las verdades primitivas y sin éstas el sistema no se construye. Por eso se rechazan expresiones como 'una leve reflexión muestra que' y 'cómo es fácil de ver'. Esta leve reflexión se tiene que enunciar de modo que se vea de qué deducciones se trata y qué premisas se usan en ella. En las matemáticas no hay por qué sentirse satisfecho

porque algo es obvio para convencerse de algo, sino que se tiene que aspirar a una visión clara del tejido de las deducciones que sirva de soporte a esta convicción. Sólo así se pueden encontrar las verdades primitivas, sólo así puede construirse un sistema.

Consideremos ahora más detenidamente los axiomas, los postulados y las definiciones:

Los axiomas

Los *axiomas*, como los teoremas, son verdades, pero tales que en nuestro sistema no se demuestran ni requieren de ninguna prueba. De ello se sigue que no hay axiomas falsos, que tampoco podemos reconocer como axioma ningún pensamiento de cuya verdad tengamos dudas, puesto que entonces o bien es falso y por ello no es ningún axioma o es verdadero, pero requiere de una prueba y entonces no es ningún axioma. No toda verdad que no requiere de prueba es un axioma, puesto que de todos modos podría ser demostrada en nuestro sistema. Si una verdad es un axioma, entonces también depende del sistema; y es posible que una verdad sea un axioma en un sistema y no en otro. Es en efecto pensable que haya una verdad A y una verdad B tales que cada una de ellas pudiera demostrarse a partir de la otra en conjunción con las verdades C, D, E, F, en tanto que las verdades C, D, E, F por sí solas no bastarían para demostrar A o para demostrar B. Ahora bien, si C, D, E, F son posibles como axiomas podemos elegir entre considerar A, C, D, E, F como axiomas y B como teorema o considerar B, C, D, E, F como axiomas y A como teorema. A partir de esto vemos que la posibilidad de un sistema no excluye forzosamente la posibilidad de otro y que quizá tengamos que optar entre diferentes sistemas. O sea, se podrá hablar propiamente de un axioma sólo con respecto a un sistema determinado.

Observación complementaria sobre oración y pensamiento

Se puede insertar aquí de paso un comentario en cuanto a las expresiones '**pensamiento**' y '**oración**'. Con la palabra '**oración**' designo un signo que por lo regular es compuesto independientemente de si las partes son sonidos o signos escritos. Naturalmente, estos signos tienen que tener un sentido. Aquí sólo quiero examinar signos por medio de los cuales enunciamos o afirmamos algo. Podemos traducir una oración a otro idioma. La oración en este otro idioma es diferente de la original, puesto que se compone de partes (sonidos) que son diferentes y que están relacionados de manera diferente; pero si la traducción es correcta, expresa el mismo sentido. Y el sentido es realmente lo que a nosotros nos importa. La oración tiene para nosotros un valor gracias al sentido que comprendemos y al que reconocemos también como siendo el mismo en la traducción. A este sentido lo llamo pensamiento. Lo que nosotros demostramos no es la oración, sino el pensamiento y da lo mismo qué idioma empleemos para ello. En matemáticas se

habla a menudo, no obstante, de demostraciones de un enunciado teórico, entendiendo por la palabra 'enunciado' lo que yo llamo 'pensamiento', o quizá no se distingue suficientemente entre la palabra o la expresión del signo y el pensamiento expresado. Pero es mejor trazar esta distinción en aras de la claridad. El pensamiento no es perceptible por los sentidos, pero en la oración le proporcionamos un representante audible o visible. Es por ello que no digo 'enunciado teórico' sino 'teorema', no 'oración fundamental' sino 'axioma' y entiendo por teoremas y axiomas pensamientos verdaderos. Con esto también se afirma, sin embargo, que el pensamiento no es algo subjetivo, ningún producto de nuestra actividad mental; porque el pensamiento que tenemos en el teorema de Pitágoras es el mismo para todos y su verdad es totalmente independiente de si es pensado por esta o aquella persona. El pensar no tiene que ser visto como la fuente del pensamiento, sino como su aprehensión.

Los postulados

Para empezar, los *postulados* parecen ser esencialmente diferentes de los axiomas. Encontramos en Euclides el postulado 'Se exige que de un punto cualquiera a cualquier otro punto se trace sólo una línea recta'.

Obviamente, esto tiene por objetivo las construcciones. Parecería que los postulados especifican las actividades más simples, por medio de las cuales se pueden efectuar todas las construcciones y exigen su posibilidad. Podría quizá pensarse en primer lugar que con esto nada se gana para las demostraciones, sino únicamente para la resolución de los problemas. Pero eso sería un error, puesto que ocasionalmente se necesita una línea auxiliar para la demostración, o también un punto auxiliar, un número auxiliar o un objeto auxiliar cualquiera. En la demostración de un teorema un objeto auxiliar es un objeto del cual en el teorema mismo no se dice nada, pero que en la prueba es usado de modo tal que ésta se derrumbaría si no hubiera dicho objeto. Y parecería que si no hubiera dicho objeto tendríamos que poder generarlo y entonces requerimos el postulado para asegurarnos sobre su posibilidad. Pero, en realidad ¿qué es esto de trazar una línea? En todo caso no es una línea en el sentido de la geometría lo que generamos cuando con el lápiz trazamos una raya. Y ¿cómo entonces habríamos de conectar de este modo un punto que se encuentre en Sirio con otro que esté en Rigel?²¹⁶ No puede ser a un acto externo así que se refiere nuestro postulado. Más bien a algo mental. Pero tampoco se trata aquí de una posibilidad subjetiva, psicológica, sino objetiva. En efecto, la verdad de un teorema que se da completamente independiente de nosotros no puede depender de nuestro acto. Entonces, cuando

²¹⁶ Sirio es la estrella más brillante en el cielo nocturno. Rigel es un sistema estelar en la constelación de Orión.

trazamos una línea recta, sólo podemos considerar el asunto del modo como meramente tomamos conciencia de lo que de todos modos sin nosotros también existe. El contenido esencial de nuestro postulado es entonces que para cualesquiera dos puntos hay una línea recta que los conecta. El postulado, por consiguiente, es una verdad tanto como el axioma y sólo tiene de particular el que en él se afirma que hay algo que tiene ciertas propiedades. De esto se sigue que en efecto no se tiene que distinguir entre axiomas y postulados. El postulado puede ser visto como una especie particular de axioma.

Definiciones. Elucidaciones

Llegamos así a las *definiciones*. Las definiciones propiamente hablando se distinguen de las *elucidaciones*. Cuando se empieza en la ciencia no se puede evitar usar las palabras de nuestro lenguaje. Pero la mayoría de las veces estas palabras no son muy apropiadas para fines científicos, porque no son suficientemente determinadas y fluctúan en su uso. La ciencia requiere de expresiones artificiales que tengan un significado completamente determinado y fijo; y para llegar a acuerdos respecto a estos significados y descartar posibles malentendidos se proporcionan elucidaciones. Desde luego que también para esto pueden usarse una vez más sólo palabras del lenguaje, las cuales quizá exhiban carencias similares a las que las elucidaciones deberían remediar. Parecería entonces que una vez más son indispensables nuevas elucidaciones. Teóricamente, nunca se llega así a un punto final; sin embargo, en la práctica logramos ponernos de acuerdo respecto a los significados de las palabras. Obviamente, se tiene siempre que poder contar con voluntad de comprensión, con que se adivinará la intención que se tiene en mente. Pero todo esto antecede a la construcción del sistema, no pertenece al sistema. En la construcción misma se tiene que presuponer que las palabras tienen significados determinados y conocidos. Podemos aquí dejar de lado las elucidaciones y abocarnos a la construcción del sistema que tenemos en mente.

Definiciones reales

Un mismo grupo de signos puede aquí ocurrir en repetidas ocasiones, trátase de sonidos o combinaciones de sonidos o de signos escritos, motivando así la introducción de un signo simple para este grupo por medio de la estipulación de que este signo simple representará siempre a ese grupo. Así como en general la oración es siempre un signo compuesto, así también el pensamiento que expresa es compuesto; y, por cierto, lo es de modo que las partes del pensamiento corresponden a las partes de la oración; de manera que en general también un grupo de signos que aparece en una oración tendrá un sentido que es parte del pensamiento. Si se introduce para dicho grupo de signos un signo simple, como acabamos de indicar, entonces dicha estipulación es una definición. El signo simple

recibe así un sentido, a saber, el mismo que tiene el grupo de signos. La definición no es en lo absoluto indispensable para el sistema. Se podría siempre conservar el grupo de signos. A través de la introducción de los signos simples no se añade ningún contenido, sino que sólo se hace a la expresión más simple, más manejable. Realmente, la definición sólo tiene que ver con signos. Llamaremos al signo simple el signo explicado y al grupo complejo de signos al que éste reemplaza la expresión explicativa. El signo explicado recibirá su sentido sólo a través de la expresión explicativa. Se compone de los sentidos de las partes de la expresión explicativa. La elucidación no construye el sentido de un signo a partir de componentes más simples, sino que lo trata como simple; protege de incomprendiones sólo en el caso de expresiones ambiguas.

Una vez que por medio de la definición se le dio un significado a un signo, éste lo tiene de ahí en adelante y la definición se convierte en una oración en la que se afirma una identidad. Desde luego que sólo contiene, propiamente hablando, una tautología, la cual no amplía nuestro conocimiento. Ésta contiene una verdad que es tan autoevidente que parece carente de contenido; y, sin embargo, en la construcción del sistema parecería que se le emplea como premisa. Digo que parece, puesto que lo que se presenta bajo la forma de una deducción no aporta ningún conocimiento nuevo, sino que en el fondo provoca únicamente un cambio de expresión el cual sería prescindible si no fuera porque la simplificación de la expresión la vuelve deseable. De hecho, no es permisible que una verdad se demuestre por medio de una definición sin la cual sería indemostrable. Realmente allí donde eso que se presenta como una definición hace posible la prueba de una verdad no tenemos ninguna definición pura, sino que tiene que haber algo oculto en ella que tendría que demostrarse como teorema o reconocerse como axioma. Desde luego que puede parecer como si una definición es lo que en primer lugar puede hacer posible una prueba. Se tiene que distinguir, sin embargo, entre una oración y el pensamiento expresado en ella. Si la expresión explicativa aparece en una oración y la sustituimos por el signo explicado, nada en lo absoluto cambia en el pensamiento. Obtenemos, desde luego, otra oración, pero no otro pensamiento. Si queremos demostrar este pensamiento, de modo que aparezca en la forma de la segunda oración, obviamente que necesitaremos para ello de la definición. Pero si efectivamente el pensamiento se puede demostrar, también se puede demostrar del modo como aparece en la forma de la primera oración y entonces no se necesita la definición. Si se toma la oración como eso que ha de ser demostrado, la definición puede ser esencial; pero no si se considera que es el pensamiento lo que tiene que ser demostrado.

Parece entonces que la definición en realidad es muy poco importante. De hecho, así consideradas las cosas, desde un punto de vista lógico la definición

parece ser completamente irrelevante y superflua. Ahora bien, desde luego que entiendo que se harán fuertes objeciones en contra de esto. Quizá se diga: en la definición se lleva a cabo un análisis lógico. Así como no nos da lo mismo analizar un cuerpo químicamente para ver de qué elementos se compone, tampoco puede darnos lo mismo realizar un análisis lógico en una construcción lógica para llegar a conocer sus partes componentes o si dejamos de analizarlo como si fuera simple, cuando de hecho es compuesto. No puede ser, en vista del considerable esfuerzo intelectual que se requiere para establecer una buena definición, que se quiera calificar la actividad de definir como algo carente por completo de importancia. Ciertamente, en esto hay algo de verdad, pero antes de tratarlo con más detalle quiero todavía enfatizar lo siguiente. De ninguna manera la insignificancia lógica es psicológica. Cuando consideramos nuestro trabajo intelectual tal como en realidad se desarrolla, encontramos que de ninguna manera un pensamiento está claramente presente en todas sus partes en nuestra conciencia. Cuando, por ejemplo, usamos la palabra 'integral' ¿estamos siempre conscientes de todo lo que pertenece al sentido de esta palabra? Creo que sólo en muy raros casos. La mayoría de las veces será sólo la palabra la que esté en nuestra conciencia, vinculada desde luego más o menos oscuramente con el conocimiento de que esta palabra es un signo que tiene un sentido y que también podemos recordar este sentido si eso es lo que queremos. Pero la mayoría de las veces nos conformamos con la conciencia de que podemos hacerlo. Ahora bien, si quisiéramos acordarnos de todo lo que pertenece al sentido de esta palabra no podríamos avanzar. Nuestra conciencia no es suficientemente amplia. A menudo necesitamos un signo con el cual asociamos un sentido sumamente compuesto. Este signo nos sirve, para así decirlo, como recipiente en el cual podemos llevar siempre este sentido con nosotros, a sabiendas de que podemos abrir el recipiente si llegáramos a necesitar de su contenido. De esta observación se sigue que de ningún modo el pensamiento, tal como yo entiendo esta palabra, coincide con el contenido de mi conciencia. De ahí que si, como si se tratara de un recipientes, necesitamos dichos signos para, por así decirlo, guardar en ellos un sentido complejo, entonces necesitamos también una definición para llenar con este sentido el recipiente, por medio de la cual podemos otra vez volver a sacar este sentido. Si lógicamente consideradas las definiciones son entonces completamente irrelevantes de todos modos tienen una gran importancia para el pensar tal como éste tiene realmente lugar en nosotros, los hombres.

Mencionamos un poco más arriba la objeción que se hizo desde el punto de vista de que por medio de una definición se efectúa un análisis lógico. De hecho puede suceder en el desarrollo de la ciencia que se use durante mucho tiempo una palabra, un signo, una expresión, durante el cual se considere que su sentido es

simple hasta que se le puede analizar en componentes lógicamente más simples. Se puede esperar reducir a través de dicho análisis el número de axiomas, puesto que quizá una verdad que contiene una parte compuesta quizá no pudiera ser demostrada mientras dicha parte siguiera sin ser analizada. Pero quizá sí sería posible lograrlo a partir de verdades en las que aparecen las partes obtenidas por medio del análisis. Parecería, de acuerdo con esto, que a través de una definición – en la medida en que ésta da lugar a un análisis – se vuelva posible una prueba que no lo sería sin este análisis; y parecería que esto entra en conflicto con lo dicho anteriormente, pues lo que parecía ser un axioma puede después del análisis parecer un teorema.

¿Cómo se juzga si es correcto un análisis lógico? Eso no se puede probar. Cuando mucho puede determinarse que el texto literal de las oraciones sea el mismo después del análisis que antes. Pero es cuestionable que el pensamiento también permanezca el mismo. Cuando creemos haber analizado lógicamente el sentido de una palabra o de un signo que desde hace mucho tiempo estaba en circulación, lo que entonces tenemos es una expresión compuesta, el sentido de cuyas partes es conocido. El sentido de esta expresión compuesta tiene que brotar del anterior. ¿Coincide éste ahora con el sentido de aquella palabra que desde hace mucho estaba en uso? Yo creo que esto se podría aseverar sólo cuando es de inmediato evidente. Con esto entonces lo que se tiene es un axioma. Esta coincidencia del sentido del signo que estaba en circulación desde hace mucho con la expresión compuesta recién formada, sin embargo, es lo que la definición debería haber dejado establecido.

Tenemos entonces que distinguir **dos casos totalmente** diferentes

1. Nosotros construimos un sentido a partir de sus componentes e introducimos un signo simple completamente nuevo para expresar este sentido. Se puede llamar esto ‘definición constructiva’; pero nosotros preferimos llamarla simplemente ‘definición’.

2. Desde hace mucho está en circulación un signo simple. Nosotros creemos que podemos analizar lógicamente su sentido y que obtenemos una expresión compuesta de la cual queremos decir que expresa el mismo sentido. Nosotros admitimos como componente de una expresión compuesta solamente algo que tiene ya un sentido reconocido. El sentido de esta expresión compuesta tiene que resultar de su composición. Que éste coincida con el sentido de aquel signo simple usado desde mucho antes no es cosa de una determinación arbitraria, sino que se puede reconocer sólo porque nos resulta evidente de modo inmediato. Se habla aquí también de definición. Se podría hablar, a diferencia del primer caso, de ‘definición analítica’. No obstante, es mejor evitar aquí por completo la palabra

‘definición’, porque lo que aquí se podría llamar definición en realidad se entiende como axioma. En este segundo caso no hay lugar para ninguna determinación arbitraria, porque el signo simple ya tiene un sentido. A un signo que todavía no tiene un sentido se le puede asignar uno arbitrariamente. Preferimos entonces quedarnos con nuestro modo de hablar original no contradictorio y llamaremos ‘definición’ sólo a una definición constructiva. Una definición es, de acuerdo con esto, una determinación arbitraria a través de la cual a un signo simple que antes no tenía sentido se le confiere uno. Naturalmente, este sentido tiene que ser expresado por medio de un signo compuesto cuyo sentido emerge de la composición.

Nos queda todavía por considerar la dificultad que nos plantea el análisis lógico cuando es cuestionable si éste análisis es correcto.

Supongamos que A es el signo simple (expresión) usado desde hace mucho y cuyo sentido intentamos analizar lógicamente formando una expresión compuesta como representación de este análisis. Puesto que no estamos seguros de que el análisis se haya logrado, no nos arriesgamos a presentar la expresión compuesta como reemplazante del signo simple A. Cuando queramos establecer una definición propiamente hablando, no habremos de seleccionar el signo A, el cual ya tiene un sentido, sino un signo completamente nuevo, por ejemplo B, al cual le daremos el sentido de la expresión compuesta en primer lugar por la definición. La pregunta es ahora si A y B tienen el mismo sentido. Podemos, sin embargo, evadir totalmente la respuesta a esta pregunta si rehacemos la estructura del sistema desde el inicio y sin hacer ya uso para nada del signo A, sino sólo del signo B. Nosotros habremos introducido arbitrariamente el signo B para esa expresión compuesta y le habremos conferido así un sentido. Esta es una definición en sentido propio, a saber, una definición constructiva.

Ahora bien, si efectivamente logramos construir el sistema de las matemáticas sin recurrir al signo A, podemos entonces estar tranquilos y no tendremos que contestar a la pregunta por el sentido del signo tal como, por ejemplo, tal vez se usaba anteriormente. Así el asunto funciona impecablemente. Por razones de orden práctico, sin embargo, sería recomendable usar el signo A en lugar del signo B. Pero entonces tenemos que tratarlo como si introdujéramos un signo completamente nuevo que no tenía sentido antes de la definición. Tenemos, pues, que explicar que el sentido con el que quizá antes de la nueva construcción del sistema se usaba este signo ya no habrá de ser tomado en cuenta y que el sentido de este signo tiene que desprenderse más bien exclusivamente de la definición constructiva que dimos. Nada de lo sucedido en matemáticas antes de la nueva construcción del sistema habrá de tomarse en cuenta lógicamente para esta nueva construcción. Todo desde los fundamentos se tiene que hacer de nuevo.

También lo que hayamos logrado de actividad analítica podrá verse sólo como algo preliminar que no hace su aparición en la nueva construcción misma del sistema.

Quizá quede todavía un punto oscuro. ¿Cómo es posible, puede preguntarse, que pueda ponerse en duda que un signo simple tiene el mismo sentido que una expresión compuesta, dado que el sentido del signo simple se conoce y el sentido de esta expresión se puede reconocer también a partir de su composición? En efecto: si es cierto que se aprehende claramente el sentido del signo simple en cuestión, entonces no puede dudarse de si coincide con el sentido de esta expresión. Si se cuestiona si el sentido de esta expresión puede conocerse claramente a partir de su composición, entonces la razón tiene que radicar en que el sentido del signo simple no fue comprendido claramente, sino que aparece sólo en contornos borrosos, como en medio de una neblina. El resultado del análisis lógico ha de ser entonces el de exponer claramente el sentido. Este es un trabajo sumamente útil, pero no pertenece a la construcción del sistema, sino que tiene que ser anterior a ella. Antes de iniciar la construcción se tiene que disponer de bloques bien elaborados de construcción, es decir, las palabras, los signos, las expresiones que se requiere usar tienen que tener un sentido claro en la medida en que en el sistema mismo no reciban un sentido a través de definiciones constructivas.

Nos quedamos entonces con nuestra opinión inicial de acuerdo con la cual *una definición es una determinación arbitraria* por medio de la cual se introduce un nuevo signo para una expresión compuesta cuyo sentido se conoce a partir de su composición. Ese signo que hasta ahora no tenía ningún sentido recibe el sentido de la expresión compuesta por medio de la definición.

Ahora bien, cuando hojeamos los escritos matemáticos nos encontramos con expresiones que parecen definiciones y se designan efectivamente como tales, pero sin serlo realmente. Dichas definiciones se pueden comparar a adornos de yeso en un edificio que se ven como si soportaran algo, cuando en realidad se les podría eliminar sin que la solidez del edificio sufriera el más mínimo daño. Estas definiciones se descubren porque no se usan, porque no se recurre a ellas en ninguna demostración. Pero si por medio de una definición se introducen palabras o signos que sí se usan en un teorema, entonces sólo pueden haber entrado a través de la aplicación de la definición o de la identidad que de inmediato se sigue de ella. Si no se ha efectuado ninguna aplicación así, entonces tuvo que haber habido un error. Desde luego que la aplicación puede haberse efectuado tácitamente. Por ello es tan importante para la comprensión clara de la situación que en cada deducción que se realice en una demostración las premisas sean conocidas, al igual que la regla de inferencia que rige a la deducción. Mientras las demostraciones se hagan al modo como casi siempre se hacen ahora, realmente no se podrá saber con

seguridad de qué se hace uso en la demostración, en qué se basa ésta y, por consiguiente, tampoco se puede saber si una definición es sólo una definición de yeso que sólo sirve como decoración y si se estableció sólo porque es usual o si tiene una justificación más profunda. Es por eso que es tan importante efectuar las demostraciones al modo como nosotros lo exigimos.

Se puede caracterizar otra clase de definiciones inadmisibles mediante una imagen algebraica. Supongamos que aparecen tres incógnitas x , y z , en tres ecuaciones. Entonces se les puede determinar por medio de estas ecuaciones. Para ser más precisos, se les determina sólo si una solución es posible. De igual modo, palabras como 'punto', 'recta', 'plano' pueden aparecer en diversas oraciones. Imaginemos que estas palabras no tienen todavía ningún sentido. Se nos pide ahora que encontremos un sentido para cada una de estas palabras de manera que dichas oraciones expresen pensamientos verdaderos. Pero ¿se da con eso una determinación unívoca? De seguro que en general no; y generalmente habrá de quedar incierto cuántas soluciones son posibles. Pero si se puede demostrar que sólo una solución es posible, entonces hay que señalarla asignando un sentido a todas y cada una de las palabras que hay que explicar por medio de una definición constructiva. Ahora bien, no se le puede dar a semejante sistema de oraciones, en las que aparecen varias de las expresiones que hay que explicar, el *status* de definición.

Un caso especial de lo anterior es el de un signo único, que aparece en una o más oraciones y el cual todavía no tiene un sentido. Supongamos que los demás componentes de las oraciones son conocidos. La cuestión ahora es: ¿qué sentido tenemos que asignarle al signo para que las oraciones sean significativas y, más aún, para que los pensamientos expresados sean verdaderos? El caso puede compararse con él de la letra x que aparece en una o más ecuaciones cuyos otros componentes son conocidos, por lo que la tarea es: ¿qué significado tenemos que asignarle a la letra x para que las ecuaciones expresen pensamientos verdaderos? Si se dan varias ecuaciones, en la mayoría de los casos la tarea no tendrá solución. Obviamente de esta manera no se determinará en general ningún número. Y algo parecido tenemos también en el caso en cuestión. Así, no porque se use un signo en una o más oraciones cuyos otros componentes son conocidos, ya se le asignó un sentido al signo en cuestión. En algebra se tiene todavía la ventaja de que se puede decir algo sobre la solubilidad y sobre el número de las soluciones posibles, lo que no se tiene en el caso general. Pero no puede ser que un signo sea ambiguo. Para un sistema de signos que debería tener un uso científico la univocidad es el requisito más importante, pues se tiene que saber de qué se habla y qué se predica, qué pensamiento se expresa.

Ahora bien, ha habido personas que se imaginaban que eran lógicos y opinaban que las **palabras conceptuales** (*nomina appellativa*) se distinguen de los nombres propios por ser ambiguas. La palabra 'hombre', por ejemplo, significa tanto Platón como Aristóteles o como Carlomagno. La palabra 'número' designa el 1 como designa el 2, etc. Nada más absurdo. Ciertamente, yo puedo en un caso designar con las palabras 'este hombre' a este hombre, en otro caso a aquel, pero en cada caso particular sólo quiero designar a uno solo. Las oraciones de nuestro lenguaje común dejan mucho por adivinar y adivinar correctamente es posible gracias al contexto. Las oraciones que profiero no siempre incorporan todo lo que se requiere; algunas cosas tienen que completarse con la ayuda de las circunstancias a partir de mis gestos o miradas. Pero un lenguaje concebido para el uso científico no puede dejar nada a las adivinanzas. Una palabra conceptual, en asociación con un pronombre demostrativo o un artículo definido, tiene a menudo de esta manera el valor lógico de un nombre propio en la medida en que sirve para designar un objeto determinado individual. Pero entonces la palabra conceptual por sí sola no es como un nombre propio, sino que se tiene que tomar el todo que consiste en la palabra conceptual, el pronombre demostrativo y el contexto. Realmente tenemos una palabra conceptual allí donde no hay un artículo definido o un pronombre demostrativo, ya sea sin artículo o con un artículo indeterminado, o cuando aparece unida a 'todos', 'ningún', 'algunos'. No debería pensarse que quiero predicar algo en particular cuando hablo de un jefe totalmente desconocido del interior de África y digo 'todos los hombres son mortales'. No predico nada ni de éste ni de aquel, sino que subordino el concepto de hombre al concepto de lo mortal. En la oración 'Catón es mortal' nos las habemos con una *subsunción*; en la oración, 'todos los hombres son mortales', con una *subordinación*. Se habla aquí de un concepto, no de una cosa particular. Tampoco tiene por qué pensarse que el sentido de la oración 'Catón es mortal' está contenido en el de la oración 'todos los hombres son mortales' de manera que profiriendo ésta se expresaría al mismo tiempo el contenido de pensamiento de aquella. El asunto es más bien así: con la oración 'todos los hombres son mortales' yo digo: 'si algo es un hombre, entonces es mortal'. Por medio de una inferencia que lleva de lo general a lo particular obtengo la oración: 'si Catón es un hombre, entonces Catón es mortal'. Ahora requerimos una segunda premisa, a saber, 'Catón es un hombre'. De estas dos premisas deduzco 'Catón es mortal'.

Así, pues, dado que se requieren deducciones y una segunda premisa, la oración 'todos los hombres son mortales' no incluye la expresión del pensamiento de que Catón es mortal; 'hombre', por lo tanto, no es una palabra que sea ambigua y que entre sus muchos significados también tenga el que nosotros designamos con el nombre propio 'Platón', sino que es una palabra conceptual que sirve para

designar un concepto. Y un concepto es totalmente diferente de un objeto particular. Cuando digo 'Platón es un hombre' de ningún modo le estoy dando un nuevo nombre a Platón, a saber, el nombre 'hombre', sino que digo que Platón cae bajo el **concepto hombre**. Pasa lo mismo con casos totalmente distintos, como cuando defino $2 + 1 = 3$ y cuando digo '2 + 1 es un número primo'. En el primer caso le confiero al signo '3', que es todavía un nombre vacío, un sentido y un significado, al decir que debería significar lo mismo que significa la unión de signos '2 + 1'. En el segundo caso subsumo el significado de '2 + 1' bajo el concepto de número primo. Con esto no le estoy dando un nuevo nombre. Así, pues, no porque subsuma diferentes objetos bajo un mismo concepto entonces la palabra conceptual se vuelve ambigua. Así, la palabra 'número primo' en las oraciones

'2 es un número primo'

'3 es un número primo'

'5 es un número primo'

no se vuelve ambigua porque 2, 3, 5 sean números diferentes, puesto que 'número primo' no es un nombre que se le dé a estos números.

El **concepto** es en su esencia predicativo. Cuando un nombre propio vacío aparece en una oración cuyas demás partes son conocidas de modo que la oración recibe un sentido cuando se le da un sentido a dicho nombre propio, entonces tenemos en esta oración, mientras el nombre propio siga siendo vacío, un enunciado posible, pero no un objeto del cual se predique algo. Así, ciertamente tenemos en la oración ' x es un número primo' un enunciado posible; pero mientras no se asigne ningún significado a la letra ' x ' careceremos del objeto del cual se predica algo. En lugar de ello, podemos también decir: tenemos un concepto pero todavía no un objeto que se subsuma bajo él. Si añadimos otra oración, a saber, ' x aumentado por 2 es un número divisible entre 4', entonces también aquí tenemos un concepto. Podemos incorporar estos dos conceptos a las notas características de un nuevo concepto en la medida en que consideramos como un todo las oraciones ' x es un número primo', ' x aumentado por 2 es un número divisible entre 4'. Bajo este concepto cae sólo un objeto, el número 2. Pero un concepto bajo el cual cae sólo un objeto siempre sigue siendo un concepto y no por ello la expresión del concepto se convierte en nombre propio.

Insistimos: a oraciones que contienen signos vacíos y cuyos demás componentes son conocidos no se les puede dar el *status* de definición, pero semejantes oraciones pueden servir de elucidación mientras permitan adivinar qué es lo que se intenta decir con los signos o palabras en cuestión.

He leído que se objeta a las definiciones verbales y que en cuanto tales realmente ya no deberían generarse. Se ha señalado, por ejemplo, una definición dada por mí, pero nunca se dijo qué cosa es una definición verbal. Desde luego que palabras o signos se usan en toda definición. Quizá una definición verbal debiera ser una que contiene en la expresión explicativa una palabra que es tan sólo una palabra, pero que no tiene un sentido. Esto ciertamente no debe suceder; pero del hecho de que un lector no asocie ningún sentido con la palabra no se sigue que el autor de la definición no haya asociado un sentido con la palabra. Que se insista en un sentido es totalmente legítimo, tanto más cuanto que algunos matemáticos sólo parecen demostrar oraciones sin preocuparse de si estas oraciones también tienen un sentido y cuál es éste.

Cuán poco valor se les confiere a menudo al sentido y a la definición nos lo hacen ver los matemáticos, quienes ofrecen explicaciones muy diferentes unas de otras acerca de lo que es el **número**. (Se trata aquí del número entero positivo). Weierstrass dice: 'El número es una serie de cosas iguales'. Otro dice que son números ciertas formaciones artificialmente generadas a través de la escritura, como 2, 3. Un tercero opina: cuando oigo que el reloj marca las tres, no veo en ello nada que sea el tres. Ello no puede entonces ser nada visible²¹⁷. Cuando veo tres rayas, no oigo nada de eso que en ello es el tres. No puede entonces ser nada audible. Un axioma no es visible, por lo que si se habla de tres axiomas, tres tampoco puede ser algo visible. De ninguna manera puede el número ser algo perceptible por los sentidos.

Es obvio que cada uno de ellos asocia con la palabra 'número' un sentido diferente. Las aritméticas de estos tres matemáticos tienen entonces que ser totalmente distintas entre sí. Un teorema de la primera tiene que tener un sentido totalmente distinto al de exactamente el mismo teorema para el otro. Esto es algo así como si entre los botánicos no hubiera acuerdo acerca de lo que quieren entender por 'planta', de modo que un botánico entendiera una estructura que se desarrolla orgánicamente, otro una cosa construida artificialmente por la mano del hombre y un tercero algo que ni siquiera es perceptible por los sentidos. Ello ciertamente no tendría como resultado una botánica homogénea.

Pero ¿por qué no habría de poder determinarse que el número debería ser una serie de cosas similares? Desde luego que hay objeciones contra esto. Se puede opinar, por ejemplo, que el sentido de la palabra 'serie' no está suficientemente determinado. ¿Tendría esto ahora que hacer pensar en un orden espacial o en uno temporal o quizá en uno espaciotemporal? Además no es claro qué ha de entenderse por 'similar'. ¿Son, por ejemplo, los tonos de una secuencia tonal

²¹⁷ El manuscrito dice: "audible", según indica el editor alemán.

similar en cuanto tonos o sólo si tienen la misma altura de tono? Supongamos, sin embargo, que se nos dieran las explicaciones requeridas para hacer desaparecer esta incertidumbre. Un tren es una serie de objetos similares que se desplazan mediante ruedas sobre rieles. Se podría opinar que la locomotora es algo de una clase diferente. Pero eso no acarrea ninguna diferencia esencial. Y entonces el número se aproxima a Berlín a toda velocidad! Supongamos que la ciencia se construye a partir de estos números. Sin duda tiene que ser totalmente distinta de la ciencia en la que se llama números a ciertas construcciones que se elaboran con un utensilio de escritura en una superficie para escribir. Inclusive si el texto es el mismo, el pensamiento expresado tiene que ser totalmente diferente. Ahora bien, es notable que las oraciones de estas ciencias fundamentalmente distintas, cada una de las cuales se llama 'aritmética', coincidan totalmente en su texto. Y es aún más notable que los investigadores en estas ciencias ni siquiera lleguen a ser conscientes de que sus ciencias son fundamentalmente distintas. Todos creen que están haciendo aritmética, y en verdad la misma aritmética, la misma doctrina de números, a pesar de que lo que uno llama 'número' no se asemeja en lo más mínimo a lo que el otro llama 'número'.

¿Cómo es esto posible? Casi debería pensarse que los matemáticos toman la formulación literal, la forma de la expresión, como lo esencial, y el pensamiento expresado como algo que carece por completo de importancia. Quizá se piense: 'Desde luego que el contenido de pensamiento de las oraciones no es asunto del matemático, sino del filósofo. Y obviamente todo lo filosófico es totalmente impreciso, incierto y en el fondo acientífico. Un matemático que se preocupe por su reputación científica no se ocupa de esto. Desde luego que hasta al mejor se le podría escapar en un momento de debilidad una definición o algo que se le parezca. Pero esto no tiene la menor importancia. Esto es como si se estornuda una vez. Realmente lo esencial es sólo que todos coinciden en las formulaciones y en las fórmulas. Todo matemático no contagiado de filosofía está satisfecho con esto.'

Pero entonces ¿es una ciencia eso que demuestra teoremas pero que no sabe qué es lo que demuestra? ¿Es, pues, efectivamente verdad que los matemáticos concuerdan en las formulaciones? ¿No acaso se redactan escritos matemáticos en diferentes idiomas, no se traducen de un idioma a otro? En ello se pierden las formulaciones. Tiene, sin embargo, que haber algo que no se pierda. Y ¿qué otra cosa podría ser eso si no el sentido? Así, el pensamiento, el sentido de una oración no puede ser completamente irrelevante. ¿Y acaso no tenemos en nuestro más profundo interior la intuición de que el contenido de pensamiento es lo principal, ya que es realmente lo único que importa?

Pero ¿cómo es que se trata esto como si fuera algo secundario? ¿Cómo puede uno imaginar que dos ciencias totalmente distintas tienen en realidad el

mismo contenido? ¿Sólo porque ambas se llaman aritmética, sólo porque ambas mencionan números, a pesar de que lo que una llama número es totalmente distinto de lo que la otra llama número? ¿O es que en realidad es la misma ciencia y que en el fondo la primera asocia el mismo sentido con la palabra 'número' que la segunda sólo que no logra captar correctamente dicho sentido? Quizá el sentido les parezca tan borroso como una niebla de modo que, cuando intentan atraparlo, no logran asirlo. Uno quizá falla en darle al blanco por el lado derecho en tanto que el otro falla en darle por el izquierdo; de ahí que no atrapen lo mismo, aunque eso sea lo que quieren. ¡Qué espesa ha de ser la niebla para que esto suceda! Pero esto tendría que hacerse manifiesto en las demostraciones. Efectivamente, eso es lo que debería pasar si las demostraciones se hicieran en forma lógicamente rigurosa en secuencias continuas de deducciones, pero precisamente eso es lo que falta. Si nunca se hace uso de una definición, es como si no existiera. Por más que no diera en el blanco al que se le debiera atinar, nadie se daría cuenta de ello. Quizá otro matemático fallaría por otro lado, pero como él tampoco haría uso de su definición, ésta prácticamente tampoco existe. Y así se comprende cómo definiciones, que parecerían estar obligadas a oponerse drásticamente entre sí, yacen pacíficamente unas junto a otras como animales en el paraíso. Es posible que así sea.

En realidad, debería uno sentir curiosidad por cómo es que se desarrolla la **multiplicación** de los números weierstrassianos. Junto a mi ventana está un librero; en el entrepaño superior de éste se encuentra una serie de objetos similares: un número. Hoy por la tarde, aproximadamente a las 5:15, llega el tren rápido de Berlín a la estación Saalbahn, también un número. Según una opinión ampliamente difundida se obtiene por medio de la multiplicación de un número por un número nuevamente un número. De acuerdo con esto, mediante una multiplicación de la serie de libros por la del tren rápido se debería una vez más obtener una serie de cosas similares. ¿Cómo hacemos esto aquí? Leí en un cuaderno de apuntes que contiene una clase de Weierstrass: 'De acuerdo con la definición surge la magnitud numérica por poner repetidamente elementos similares.' Según parece, siempre debería hacerse una aplicación de la definición. ¿Cómo reza entonces la definición? 'Podemos imaginar una serie de cosas similares cuando entendemos por cosas similares cosas que concuerdan en cuanto a un complejo de ciertas características. Es gracias a una serie así que nosotros entendemos el concepto de magnitud numérica.'

Aquí en lugar de número se habla de magnitud numérica, lo cual no es esencial. Para empezar, viene aquí una afirmación: 'Podemos imaginar una serie de cosas similares.' Eso es una verdad psicológica que en realidad aquí no nos concierne. Pero ¿se sigue de esta definición que la magnitud numérica brota de poner una y otra vez elementos similares? Sin duda el tren rápido, de acuerdo con

la definición, es una magnitud numérica, puesto que es una serie de cosas que coinciden en cuanto a un complejo de características. Ahora bien ¿surge el ferrocarril por poner una y otra vez carros de ferrocarril? ¿Tengo que poner una y otra vez el mismo carro? ¿Y cómo hago eso? ¿O tengo que poner un carro detrás de otro? Entonces yo lo expresaría mejor así: ‘un ferrocarril surge por poner un vagón tras otro.’ No creo que los empleados del ferrocarril estén enterados de este modo de surgir del ferrocarril. Yo podría poner en duda el que una magnitud numérica brote del poner una y otra vez cosas similares. A partir de una definición, sobre la génesis no puede saberse realmente nada.

En el cuaderno de apuntes se dice después: ‘Ahora bien, es posible considerar el concepto mismo de magnitud como una unidad y ponerlo repetidas veces, *e. g.*, *b, b, b...*’ ¡Maravilloso! ¡Se puede poner una y otra vez uno y el mismo concepto! De acuerdo con esto, *b* parece ser el signo del concepto de magnitud. ¿Pongo este concepto de magnitud una y otra vez por poner una y otra vez su signo? Parecería que aquí se produjo una equivocación. Al menos me parece a mí que no es el concepto de magnitud lo que habría de ponerse una y otra vez, sino una magnitud numérica particular. Sería entonces *b* lo que debería verse como el signo de esa magnitud numérica, *e. g.*, de aquel tren rápido. ¿Pero qué tiene que ver el que reescriba una y otra vez este signo con el poner una y otra vez el tren rápido? ¿O debería ser la magnitud numérica no el tren rápido mismo sino una representación que tengo de él? Esto trasladaría el asunto al ámbito psicológico y subjetivo, sin por ello aclarar el asunto. La magnitud numérica sería entonces una construcción mental y la aritmética una parte de la psicología. Pero entonces ¿cómo llegamos a la **multiplicación**? El cuaderno de apuntes continúa: ‘Ahora bien, hay una magnitud que contiene todas estas *b*. Cuando *b* aparece *a* veces, entonces designamos con $a \times b$ la suma que consiste de *a* sumandos de *b*.’

Aquí podría objetarse que de pronto el signo ‘*b*’ se convirtió en una palabra conceptual. Al principio era todavía el nombre propio de una magnitud numérica, *e. g.*, de un tren rápido; ahora, se habla de todas estas *b*. ¡Aclaremos esto por medio de un ejemplo! Ponemos, por ejemplo, al presidente Wilson de los Estados Unidos repetidas veces y obtenemos así una serie de presidentes Wilson y el nombre propio inicial se convierte ahora en un *nomen appellativum* y cada uno de los ejemplares obtenidos por la repetida colocación es un presidente Wilson. Obtuvimos entonces, por la colocación repetida del presidente Wilson, una serie de presidentes Wilson; y en esta serie aparece el presidente Wilson (ahora una vez más tenemos un nombre propio como pone de manifiesto el artículo definido) – es decir, en esta serie de presidentes Wilson aparece *el* presidente Wilson múltiples veces.

También aquí es así como tenemos que pensar el asunto. El tren rápido que hoy por la tarde llega de Berlín más o menos a las 5:15 lo designamos con b . b es una magnitud numérica. Ponemos esta magnitud numérica una y otra vez. Es así como obtenemos una serie de trenes rápidos b . Hay ahora una magnitud numérica que contiene todos estos trenes rápidos b . ¿Es ello realmente así? Éste una vez más será un tren; pero ¿dónde se detiene? El tren rápido b aparece en él en repetidas ocasiones. Si aparece a veces, entonces designamos la suma mediante $a \times b$, la cual se compone de a sumandos b veces. De esta suma hasta ahora no se había hablado. Probablemente sea la magnitud numérica que contiene todos estos trenes rápidos que se obtuvieron al irlos poniendo; y esta magnitud numérica será ella misma también un tren. ¿Sabemos ahora lo que es $a \times b$? También a es una magnitud numérica; y queríamos saber cómo multiplicamos el tren rápido con la hilera superior de libros de mi librero junto a la ventana. Llamemos entonces a esta fila de libros a . Pero ¿qué es lo que ha de entenderse ahora por a veces? ¡Una cosa endiabladamente difícil esta multiplicación! Pero como lo afirma el cuaderno de apuntes, obtenemos la misma magnitud poniendo a veces b que poniendo b veces a . Podemos, entonces, elegir. ¿Será quizá más conveniente poner la fila de libros a , b veces? Parecería igual de difícil. ¿Realmente se compone entonces la magnitud numérica que designamos con $a \times b$ de libros o de carros de ferrocarril? ¡Quién hubiera pensado que multiplicar era tan difícil! Y esto es algo que niños de nueve años deberían dominar. ¡Midamos la dificultad de poner repetidas veces un tren rápido! En verdad es conmovedor con qué habilidad – velocidad no es magia – se hace desaparecer aquí a las magnitudes numéricas y en su lugar se hace aparecer lo que usualmente se llama ‘número’.

No obstante, el número se introduce furtivamente aun de otra manera. Así, § 2 dice: ‘Dado que no importa la secuencia sino sólo el conjunto de los elementos,

$$a + b = b + a.’$$

Si una magnitud numérica fuera en realidad una serie de cosas similares, entonces la secuencia sería importante, ya que si alteraríamos la secuencia, alteraríamos la serie. ¿Y no es realmente esto que aquí se llama conjunto de elementos lo que llamamos el número de los elementos? Es decir, lo que importa no es la serie de cosas similares sino el número, de lo cual se desprende la diferencia entre una serie de cosas parecidas y un número.

Realmente es así como a escondidas se introduce aquí el número como conjunto, así también se introduce en otros lados como valor. Que en la ecuación

$$a + b = c$$

a , b y c deberían ser magnitudes numéricas es algo que vimos y luego dice: ‘si nos encontramos con las dos ecuaciones

$$a + b = c$$

$$a \cdot b = c$$

entonces el valor de c se determina en la adición y en la multiplicación si son dados los valores de a y b .’ Aquí se distinguen el valor de una magnitud numérica de la magnitud numérica misma. Y de seguro que este valor no es otra cosa que un número. Pero entonces, según Weierstrass, en la adición ¿realmente se determina un valor? Supongamos que tenemos un tren a y un tren b . Separamos uno tras otro los carros de b y se los enganchamos a a . Entonces obtenemos un tren c ; y Weierstrass dice que éste surgió por medio de la adición de b a a . Aquí lo único que sucedió fue que de una serie a y de una serie b se formó una nueva serie c ; pero no se puede descubrir ninguna determinación del valor de c . No se determinó el valor de c , sino que se formó c . Así, pues, vemos por todas partes un conflicto entre la definición que Weierstrass da y lo que por otra parte dice. Lo que Weierstrass aquí llama ‘valor’ no puede ser otra cosa que lo que normalmente se llama número.

Más adelante, en el cuaderno de apuntes, dice: ‘una magnitud numérica está determinada cuando se indica cuáles elementos contiene y qué tan repetidas veces lo hace.’

Bueno, en un tren con toda seguridad los vagones se tienen que ver como elementos. Así, pues, un tren está determinado cuando se indica qué vagones contiene y cuántas veces cada uno.

Uno de mis maestros de la universidad contó una vez que un inventor de un *perpetuum mobile* había exclamado: ‘Ya lo tengo. Sólo me falta el ganchito que siempre hace así’, haciendo con el índice un movimiento ilustrador. Este ‘¿cuántas veces?’ me parece ser como el ganchito que siempre hace así. ¿No se esconde allí realmente toda la dificultad? Si se tiene el ganchito, entonces se tiene un *perpetuum mobile*; y si se pueden explicar las palabras ‘cuántas veces’, entonces se puede también definir el número.

Aunque aquí hay algo que pasé por alto. Antes de esto se dijo que el concepto de magnitud numérica tenía que expandirse. ‘De aquí en adelante deberían formarse para ello magnitudes numéricas de diferentes unidades, en tanto que las magnitudes numéricas introducidas hasta ahora en el cálculo tienen todas su origen en **una** unidad.’

¿En serio? Antes se había dicho: ‘Cada uno de los elementos repetidos de la serie se llama unidad de la magnitud numérica.’

¿La **unidad**? ‘Cada uno de los elementos es una unidad’, esto puede pasar; pero, ‘cada elemento es **la** unidad’ es absurdo. Si la palabra ‘unidad’ hubiera de tener el mismo significado que ‘elemento’, entonces tendríamos unidades cuando tuviéramos elementos, pero no **la** unidad’. Desde luego que pueden subsumirse varias cosas bajo un concepto, lo que se hace por ejemplo cuando se llama a cada una de estas cosas una unidad; pero ciertamente no se le puede poner el mismo nombre propio a cada una de estas cosas. Y ‘la unidad’ es vista como un nombre propio, puesto que esta expresión sirve gracias a su forma lingüística para designar un objeto determinado único. Si entonces se llama a cada uno de varios objetos ‘la unidad’ se comete un error. Así se genera un centelleo curioso entre singular y plural. La magnitud numérica se compone de varios elementos pero sólo de una unidad, puesto que cada elemento es la unidad. ¿Cómo ha de pensarse esto? Bueno, tomemos como ejemplo un carro de ferrocarril, digamos el vagón de carga Nº 1061 perteneciente al distrito de la Dirección de Ferrocarriles Erfurt. Ponemos este vagón de carga repetidas veces y formamos a partir de ello un tren de carga. Este tren de carga se compone de varios elementos, a saber, los vagones de carga, pero de sólo una unidad, puesto que cada uno de estos vagones de carga es la unidad, a saber, el vagón de carga no. 1061, que en un principio nosotros usamos. Este vagón de carga se repite. Desde luego que yo todavía no he visto ningún tren de carga en el cual uno y el mismo carro de carga se repita pero, según Weierstrass, un tren así tiene que ser posible. Así es como es posible que una magnitud numérica o una serie de cosas similares se compongan de varios elementos, pero de sólo una unidad.

Pero regresemos ahora al teorema: ‘una magnitud numérica está determinada cuando están dados los elementos de los que se compone y las veces que los contiene.’

Hemos hecho nuestro máximo esfuerzo por distinguir entre elemento y unidad, pero una vez más todo se enreda. Un lego dirá: ‘en un tren lo que importa es el orden.’ ¡Totalmente falso! Sólo tenemos un único vagón que aparece repetidas veces. Y con esto no se puede hablar de un orden. Hay un orden sólo con cosas diferentes, pero no con un único elemento que aparece repetidas veces.

¿No era que Weierstrass decía: ‘Ahora deberíamos formar magnitudes numéricas de diferentes unidades’? ¡Entonces tiene que haber un orden! Nos perdemos así cada vez más en una impenetrable maleza.

Es evidente que Weierstrass siempre falló al apuntar a lo que quería y es por ello que él realmente se vio obligado a introducir el número de contrabando. Permanentemente cae en contradicciones con sus propias especificaciones. De acuerdo con su definición, si a es una magnitud numérica, entonces a veces no

tiene ningún sentido. Estrictamente hablando, el número es introducido disfrazado de conjunto o de valor o por medio de la paráfrasis 'cuántas veces'. Esto produce un centelleo curioso entre lo singular y lo plural y, en la misma medida, entre los nombres propios y las palabras conceptuales. Si a alguien que nunca ha reflexionado sobre esto, se le despertara de un sueño con la pregunta: '¿qué es el número?', probablemente saldría con una respuesta que no se alejaría mucho de la de Weierstrass. Y eso que ya se ha reflexionado bastante sobre esta cuestión.

¿Cómo es posible, se pregunta uno en casos así, que un matemático tan excelente pueda fallar tan rotundamente en este asunto? Si hubiera tan sólo reflexionado un poco sobre el tema habría tenido que haber alcanzado una mayor claridad. Pero es que no reflexionó sobre eso. Y ¿por qué no lo hizo? Evidentemente, porque pensaba que no era necesaria ninguna reflexión. Le faltaba el primer requisito: el reconocimiento de la ignorancia. Él no vio ninguna dificultad, a él todo le parecía claro y no se daba cuenta de que se estaba permanentemente engañando a sí mismo. Le faltaba el ideal del sistema de las matemáticas. No nos encontramos aquí con demostraciones, no se establecen axiomas, sino sólo aseveraciones que se contradicen unas con otras; y ahí en donde por primera vez algo parece deducirse de sus definiciones, la deducción es falaz. Si tan sólo hubiera hecho el esfuerzo por construir un sistema desde la base, él habría tenido que darse cuenta de lo inservible de su definición. Él tenía un atisbo de lo que es el número, pero uno muy poco claro; y a partir de eso mejoró y completó siempre lo que en realidad tenía que haberse deducido de su definición. De manera que él afirmaba que el orden no era importante, cuando es obvio que el orden es esencial a una serie. Así, él no se daba cuenta de que lo que él afirmaba no provenía de su definición, sino de su atisbo de lo que es el número.

A ello hay que añadir lo siguiente: en la escuela es necesario dejar de lado algo del rigor científico en todo su esplendor, dado que los alumnos ni siquiera tienen la madurez mental para sentir su indispensabilidad. Probablemente sea imposible tratar en tercer y cuarto años las conexiones entre los irracionales al modo como lo hace Euclides y quizá sea imposible hasta en el quinto año de colegio. Probablemente el asunto en general sea abordado de modo muy superficial. Por motivos didácticos se eliminan todos los extremos, se suavizan todas las dificultades de la lógica. Y al principio esto seguramente es necesario; pero no debería quedar en eso. La exactitud de las deducciones debería recuperarse posteriormente y despertar el sentido de su indispensabilidad y entonces satisfacerlo. Pero sucede demasiado fácilmente que los maestros, en su afán de facilitarle todo a los alumnos, se olvidan por completo de esta segunda parte de su misión. Las matemáticas pueden desarrollar por completo su valor formativo sólo si aspiran al máximo rigor lógico. Y si al principio se tiene que ceder

algo de éste, se le debería posteriormente recuperar. Es mejor dar un poco menos de material, pero a cambio insistir en el entrenamiento lógico fundamental. Pero esto es lo que constantemente falla. Después uno recuerda las materias tratadas en la escuela como algo que quedó superado desde hace mucho y respecto a lo cual reflexionar ya no corresponde a la dignidad de un docto. Así es que estos asuntos se contemplan casi exclusivamente desde puntos de vista didácticos y parecen como algo completamente subordinado sobre lo cual no vale la pena reflexionar.

¿Pero, vale preguntar, cómo es que alguien puede trabajar exitosamente en alguna ciencia si no tiene en lo absoluto claros los conceptos fundamentales de dicha ciencia? De hecho, el concepto del número entero positivo es fundamental para toda la parte aritmética de las matemáticas. Y una falta de claridad respecto a él tiene que extenderse al todo de la aritmética. Esto desde luego que es una carencia considerable y debería pensarse que seguramente habrá de impedir por completo el trabajo exitoso en dicha ciencia. Ningún teorema aritmético puede tener un sentido claro e impecable para quién carece de claridad acerca de lo que es un número. Esta cuestión no es ni aritmética ni lógica, sino psicológica. La estrechez de nuestra conciencia ni siquiera nos permite tener frente a ella con claridad uniforme en todas sus partes una estructura lógica muy compleja. ¿Quién, al usar *e. g.*, la palabra ‘integral’ en una prueba, tendrá siempre presente con toda claridad todo lo que pertenece al sentido de esta palabra? Y, sin embargo, se pueden hacer inferencias correctas a pesar de que una parte del sentido siempre quede en la oscuridad. Weierstrass tiene un atisbo correcto de lo que es un número y, guiado por este atisbo correcto siempre enmienda y completa lo que realmente tendría que seguirse de sus definiciones explícitas. Él se mueve en contradicciones y llega, no obstante, a pensamientos verdaderos, los cuales sin embargo se presentan a su conciencia sólo de modo desordenado. Sus oraciones expresan pensamientos verdaderos si se les entiende correctamente, pero si se les quisiera entender en concordancia con los lineamientos de sus propias definiciones se caería en el error.

Consideremos algunos detalles más de la doctrina weierstrassiana: (cita § 2) “[...] y se define por medio de la ecuación $c = a + b$.” ¿Qué es lo que aquí se define? Hasta ahí ni el signo de adición ni el signo de igualdad habían hecho su aparición. Una definición ciertamente no tiene la forma de una ecuación con varias incógnitas. ¿Cómo ha de entenderse el signo de igualdad? De acuerdo con el texto podría pensarse que ‘=’ y ‘+’ no deberían interpretarse como signos particulares que tienen cada uno un sentido propio, sino que es sólo el todo lo que debería decir que la serie c surgió del modo indicado de las series a y b . Esto en sí mismo sería perfectamente posible, sólo que no concuerda con el modo de uso aceptado,

dado que tanto '=' como '+' aparecen en otros contextos. Y el propio Weierstrass usa inmediatamente después la conexión de signos

$$'b + a = a + b'$$

y comenta al respecto que se trata de un ejemplo de la ley general de que dos cosas que no son idénticas pueden, por una determinada definición, ser iguales a sí mismas. No ha definido ahora el signo '=', pero sí la palabra 'igual' para magnitudes numéricas (cita § 1).

Así, pues, la palabra 'igual' no tiene el sentido de 'lo mismo que'. Si entendemos el signo '=' tal como se explica la palabra 'igual', entonces tenemos que esperar que lo que está a la izquierda del signo designe una serie de las mismas cosas y así también lo que está del lado derecho. Pero no sabemos todavía qué es lo que debería designar ' $a + b$ '. Cuando, como es lo usual, escribimos ' $5 = 3 + 2$ ', nosotros no designamos con '5' una serie, una magnitud numérica, como dice Weierstrass, ni tampoco con ' $3 + 2$ '. ¿Qué serie habría de ser esa? ¿De qué miembros podría componerse? Es claro que, de acuerdo con la explicación weierstrassiana, las magnitudes numéricas weierstrassianas pueden ser iguales unas con otras sin que coincidan en todos y cada uno de los aspectos. Por ejemplo, una podría componerse de vagones de ferrocarril, la otra de libros. Según esto, no se daría la magnitud numérica siguiente inmediata a una magnitud numérica dada, sino muchas, quizá infinitamente muchas, que seguramente serían iguales entre sí, pero que de todos modos serían diferentes unas de otras. Pero el uso en la aritmética ciertamente no coincide con esto. Lo que designamos con el signo de número no son magnitudes numéricas en el sentido de Weierstrass.

Surge ahora la pregunta de si en aritmética, de acuerdo con el modo de escribir y hablar en ella, los números que son iguales entre sí pueden de todos modos distinguirse unos de otros. La mayoría de los matemáticos estarán inclinados a contestar afirmativamente. Pero no siempre coincide lo que, sin querer faltar a la verdad, ellos externan como su opinión con lo que en el fondo es realmente su punto de vista. Ya vimos que Weierstrass, a quién tuvimos que reconocerle un atisbo de corrección, entra en contradicción con sus propias palabras.

Sobre el **signo de igualdad** la mayoría de los matemáticos no dicen probablemente nada, sino que más bien dan por conocido su sentido. Pero que a ellos mismos este sentido les resulte claro no es algo que simplemente pueda asumirse.

Realmente ¿qué hacemos cuando escribimos ' $3 + 2$ '? ¿Dejamos un ejercicio que debería solucionarse? Cuando indicamos ' $7 - 3$ ': ¿queríamos decir con ello

algo como: 'busca un número que añadido al 3 da 7'? Podría parecer que ello es así, si esta combinación de signos sólo apareciera así en forma aislada. Pero nosotros también escribimos ' $(3 + 2) + 4$ '. ¿Se debería añadir aquí a este ejercicio el número 4? No, sino al número que resulta como solución de este ejercicio. Lo que está antes del signo '+' normalmente designa un número. Asimismo, también lo que está a la derecha de '+' designa un número.

Por consiguiente, tendría que apreciarse que también en ' $4 + (3 + 2)$ ' [el] ' $(3 + 2)$ ', en tanto que signo, designa un número, a saber, en tanto que signo de aquel número que también se designa mediante el signo '5'. De ahí que tengamos en ' $3 + 2$ ' y ' 5 ' signos del mismo número. Y cuando escribimos ' $5 = 3 + 2$ ' entonces no sólo coinciden los significados de los signos a la izquierda y a la derecha del signo de igualdad con estas o aquellas propiedades o en este o aquel aspecto, sino que coinciden por completo y en todo aspecto. Lo designado a la izquierda es lo mismo que lo designado a la derecha.

Pero ¿acaso no son diferentes los dos signos? ¿Se ve a primera vista que son diferentes! Nos encontramos aquí con una enfermedad muy frecuente de los matemáticos que quisiera llamar "*morbus mathematicorum recens*". Su síntoma principal consiste en la incapacidad de distinguir entre el signo y lo designado. ¿Es realmente del todo imposible que se designe lo mismo con signos diferentes? ¿Puede la mera diferencia de signos ser razón suficiente para suponer también diferencia de lo designado? ¿A dónde llegaríamos si supusiéramos que $2 + 3$ es diferente de 5? A la pregunta: '¿qué número en la serie de los números enteros sigue inmediatamente al 4?', la respuesta sería: 'hay infinitamente muchos. Algunos de ellos son 5, $1 + 4$, $2 + 3$, $3 + 2$, $7 - 2$, $(3^2 - 2^2)$ '. No tendríamos una serie simple de números enteros, sino un caos. Los números enteros que siguen inmediatamente al 4 no sólo seguirían al 4, sino que también seguirían inmediatamente a 2^2 , $2 \cdot 2$. Estos números serían todos iguales unos a otros pero, no obstante, diferentes. Esto, sin embargo, no es aceptable. Por eso insistimos en que los signos ' $2 + 3$ ', ' $3 + 2$ ', ' $1 + 4$ ', ' 5 ' designan el mismo número. Sin embargo, se puede hacer valer contra lo anterior una objeción. ¿No es diferente, después de todo, el contenido de las oraciones ' $5 = 5$ ' y ' $5 = 2 + 3$ '? El primero es consecuencia inmediata del principio general de identidad; pero ¿lo es también el segundo?

Se podría decir: si designamos con el signo ' $2 + 3$ ' lo mismo [que con ' 5 '], entonces deberíamos saberlo en forma inmediata y no tendríamos primero que calcularlo. Es más fácil ver esto con números más grandes. No es inmediatamente evidente que $137 + 469 = 606$, sino que este conocimiento se alcanza sólo por medio de un cálculo. Desde luego que esto dice más que el enunciado ' $606 = 606$ '. Por medio de aquel se amplía nuestro conocimiento, por medio de éste no. El contenido de ambas proposiciones tiene entonces que ser diferente. ¿Acaso es

posible también designar lo mismo con dos nombres o signos diferentes sin saber que lo que se designa es lo mismo? Sí, ello es posible y sucede también en otros casos. Por ejemplo, se ha observado un pequeño planeta y se le impone una designación provisional. Después de observaciones prolongadas el cálculo da como resultado que ese mismo planeta ya se había observado antes y también que había recibido un nombre. Fácilmente entonces puede suceder que el mismo astrónomo haya usado ambos nombres sin saber que designan el mismo planeta. Así también al explorar un país desconocido puede suceder que dos exploradores que vieran desde dos lados diferentes una montaña le dieran nombres diferentes y que sólo después de la comparación de las mapas resultara que habían visto la misma montaña y la habían nombrado de manera diferente. Tenemos que admitir entonces que podemos nombrar el mismo objeto con diferentes nombres sin saber que es el mismo.

Por otra parte, no puede ignorarse que en la oración ' $5 = 2 + 3$ ' se expresa un pensamiento diferente del de la oración ' $5 = 5$ ', a pesar de que la diferencia consiste tan sólo en que ' $2 + 3$ ' está sustituido en la segunda por ' 5 ', designando ambas el mismo número. Es decir, los dos signos no son equivalentes respecto a la expresión del pensamiento, a pesar de lo cual designan exactamente el mismo número. Por eso yo digo: los signos ' 5 ' y ' $2 + 3$ ' ciertamente designan lo mismo, pero no expresan el mismo **sentido**. Asimismo, 'Copérnico' y 'el fundador del punto de vista heliocéntrico del sistema planetario' designan el mismo hombre, pero no tienen el mismo sentido, puesto que las oraciones 'Copérnico es Copérnico' y 'Copérnico es el fundador del punto de vista heliocéntrico del sistema planetario' no expresan el mismo pensamiento.

El poder del lenguaje es maravilloso. Por medio de unos cuantos sonidos y combinaciones de sonidos es factible expresar una enorme cantidad de pensamientos, incluyendo pensamientos que nunca antes fueron aprehendidos y expresados por ningún hombre. ¿Qué es lo que hace posible ese poder? El que los pensamientos se construyan por medio de ladrillos de pensamiento. Y estos ladrillos corresponden a los grupos de sonidos a partir de los cuales se construye la oración que expresa el pensamiento, de modo que a la construcción de la oración a partir de las partes de la oración corresponde la construcción del pensamiento a partir de las partes de pensamiento. Y se puede llamar a la parte de pensamiento el sentido de la parte correspondiente de la oración, así como se considerará el pensamiento como el sentido de la oración.

Consideremos ahora la oración 'el Etna es más grande que el Vesubio'. A las palabras 'el Etna' corresponderá una parte de pensamiento, a saber, el sentido de esas palabras. Pero ¿son la montaña misma con todas sus rocas y masas de lava parte del pensamiento? Evidentemente que no, puesto que el Etna se puede ver, en

tanto que el pensamiento de que el Etna es más alto que el Vesubio no puede verse. Pero ¿de qué es de lo que se enuncia algo? Evidentemente, de la montaña misma, el Etna. ¿Y de qué se habla en la oración 'Escila tiene 6 cabezas'? Esto falta aquí por completo, puesto que la palabra 'Escila' no designa nada. No obstante, se puede encontrar en la oración un pensamiento expresado y se puede atribuir también un sentido a la palabra 'Escila'. Este pensamiento, sin embargo, no pertenece al reino de la verdad y de la ciencia, sino al de la poesía o del mito. Aparte de este caso, el nombre propio tiene que designar algo y de lo que designa, de su significado, se habla en la oración en la que aparece. Pero también el nombre propio tiene que tener un sentido, que es entonces parte del pensamiento de la oración en la que el nombre propio aparezca. Vemos entonces la posibilidad de que dos signos designen lo mismo a pesar de lo cual, en lo que concierne al contenido de pensamiento de las oraciones en que ocurren, no sean intercambiables, dado que tienen sentidos diferentes. Pero el que no sean intercambiables quizá haya sido a veces la razón de que se ignore que designan el mismo número. Nosotros, no obstante, reconocemos ahora que esta razón no es válida e insistimos en que el signo de igualdad en la aritmética tiene que comprenderse como signo de identidad.

Podemos también extraer una confirmación del cuaderno de apuntes. El objetivo en éste es investigar de qué manera se tendría que extender el ámbito de los números para lograr que los ejercicios de sustracción siempre tuvieran solución. Se dice allí: "entonces también $(a - a)$ tiene que tener un significado y claro está tiene el significado de que, sumado a un número cualquiera, deja su valor sin modificar."

Aquí se distingue el valor de la magnitud numérica de ésta misma y claro está este valor debería ser el mismo tanto después de la adición de $(a - a)$ como antes de ella. Sin embargo, tenemos ahora que suponer que lo que Weierstrass llama el valor de una magnitud numérica en realidad es un número. O sea, el número sigue siendo el mismo. Es así como llegamos a entender que, según Weierstrass, magnitudes de número iguales tienen el mismo valor. Al pasar de las magnitudes numéricas weierstrassianas a sus valores pasamos al mismo tiempo de la igualdad weierstrassiana a la identidad. Ahora bien, si, como es probable, mediante 'valor de una magnitud numérica' Weierstrass quiere decir lo que usualmente se llama 'número', entonces se llega también aquí con estos números a la identidad.

El asunto es entonces el siguiente: en primer lugar, para Weierstrass la diferencia entre lo que él llama magnitud numérica y el número de la aritmética se vuelve borrosa. Sin embargo, no puede propiamente hablando evitar la introducción de este número disfrazado de valor de una magnitud numérica y

distinguir así entre la magnitud numérica y su valor, pero de paso resulta entonces que las magnitudes numéricas tienen el mismo valor cuando, según Weierstrass, son iguales entre sí. En la aritmética, si se percibe con claridad, el signo de igualdad no se coloca entre nombres de magnitudes numéricas, en el sentido weierstrassiano, sino entre nombres de lo que propiamente hablando son números que Weierstrass, si bien subrepticamente, llama 'valores de magnitudes numéricas'.

Así, pues, la interpretación del número como serie de objetos iguales, como manada, como cúmulo, como un todo compuesto de partes iguales, está estrechamente relacionada con la idea de que el signo de igualdad no sirve para designar la identidad. Tan pronto, sin embargo, cuando por medio de algún truco de prestidigitación lógica, efectivamente y como es inevitable se llega a los números de la aritmética entonces el signo de igualdad se transmuta en el acto en el signo de identidad. No es de extrañarse, pues, el que nos encontremos con una fluctuación continua de interpretaciones.

Algo similar encontramos con el **signo de adición**. Éste hizo su aparición por vez primera al explicar la adición. De acuerdo con esto se asume que $a + b$ debería designar la magnitud numérica que surgió al agregar a las unidades de a todas las unidades de b , una por una. El signo de adición entonces se encuentra aquí entre signos de magnitudes numéricas. Pero en la multiplicación se afirma: 'se designa con a las unidades de b y se forma

$$\begin{array}{c} b \text{ veces} \\ \underbrace{\hspace{1.5cm}} \\ a + a + a + \dots + a \dots' \end{array}$$

Aquí está un signo de adición entre signos de unidades; y por unidad se tiene que entender un miembro de una serie de cosas similares. De acuerdo con esto se tiene que suponer que Weierstrass desea también entender una cosa particular como una serie de cosas similares, como magnitud numérica, a saber cómo serie que se compone únicamente de un miembro. De acuerdo con lo anterior, en el sentido de Weierstrass también un frijol se considera como una magnitud numérica. Seleccionemos ahora un frijol y designémoslo mediante ' α '. Seleccionemos otro y designémoslo mediante ' β '. Si ponemos ahora el frijol β junto al frijol α , entonces obtenemos una nueva serie de cosas similares y sin duda Weierstrass la designará mediante ' $\alpha + \beta$ '. Si seleccionamos otro frijol y lo designamos mediante ' γ ' y lo colocamos junto a la magnitud numérica $\alpha + \beta$ consistiendo de los frijoles α y β , entonces por medio de adición obtenemos una nueva magnitud numérica que designamos, siguiendo a Weierstrass, mediante ' $(\alpha + \beta) + \gamma$ '. Podremos entonces,

según Weierstrass, acuñar por medio del signo de más los nombres de magnitudes numéricas a partir de los nombres de sus elementos o unidades. Pero, de acuerdo con esto, ¿qué podrá designar el signo ' $\alpha + \alpha$ '? Desde luego que podemos colocar el frijol β junto al frijol α y formar así una serie de cosas similares; pero ¿cómo hacemos para que el frijol α se coloque junto a sí mismo? El frijol tendrá que esforzarse para aparecer repetidas veces.

Consideremos una serie de objetos similares, en particular la de los planetas Júpiter, Saturno, Urano, Neptuno. Esta serie se designaría por ejemplo con:

$$\mathfrak{J} + \mathfrak{S} + \mathfrak{U} + \mathfrak{N}.$$

Llamemos esta magnitud numérica b . De acuerdo con esto, \mathfrak{J} es una unidad de b ; asimismo, \mathfrak{S} es una unidad de b ; también \mathfrak{U} es una unidad de b ; y finalmente también \mathfrak{N} es una unidad de b .

Afortunadamente, ninguna de estas unidades aparece repetidas veces. ¿Podríamos decir ahora:

'Si se designa con ' \mathfrak{J} ' las unidades de b y se forma

$$' \mathfrak{J} + \mathfrak{J} + \mathfrak{J} + \mathfrak{J} ' ?$$

¿Realmente designa esto lo mismo que

$$' \mathfrak{J} + \mathfrak{S} + \mathfrak{U} + \mathfrak{N} ' ?$$

No es admisible designar diferentes objetos con el mismo signo, puesto que la univocidad es la primera exigencia que tenemos que imponerle a los signos. Evidentemente, el signo de adición no se aplica aquí si se le quiere usar como usualmente se hace en la aritmética. Se escribe ' $1 + 1 + 1 + 1$ ', pero aquí el primer signo de uno significa lo mismo que el segundo, que el tercero y que el cuarto. No tenemos aquí cosas diferentes que formen una serie, un grupo, un cúmulo, sino que sólo hay el número uno. Por ello es claro que el signo de adición no puede corresponder a la palabra 'y' del lenguaje. Cuando nosotros decimos 'Schiller y Goethe son poetas' en realidad no vinculamos por medio de la palabra 'y' los nombres propios, sino las oraciones 'Schiller es un poeta' y 'Goethe es un poeta', las cuales se contrajeron. Pero es diferente con la oración 'Siemens y Halske construyeron las primeras grandes líneas de telégrafos'. Aquí no tenemos dos oraciones contraídas en una, sino que por medio de 'Siemens y Halske' se designa un objeto compuesto del cual se enuncia algo y la palabra 'y' ayuda a construir el signo de este objeto. Sólo este último modo de usar la 'y' es comparable al signo de adición. Pero esta comparación de inmediato da también como resultado que los casos 'Siemens y Halske' o 'luna y tierra' y ' $1 + 1$ ' sean totalmente distintos.

Vemos por doquier interpretaciones burdas, matemáticamente inservibles, en lucha con la única utilizable.

La interpretación del número como una serie de objetos similares, como grupo, como cúmulo, etc., está estrechamente relacionada con la interpretación del signo de igualdad de acuerdo con la cual éste designa sólo una coincidencia parcial y con la interpretación del signo de adición como si éste tuviera el mismo significado que 'y'. Y estas interpretaciones fracasan al primer intento serio de fundamentar con ellas una aritmética. Cuando se hace semejante intento siempre se ve uno obligado a introducir de contrabando algo que se contrapone a estas interpretaciones. Tenemos aquí ejemplos de cómo no deberían ser las definiciones. Es sólo porque se omite la construcción del sistema de la aritmética recurriendo a estas definiciones que puede uno engañarse respecto a su completa inutilidad. Y de esto extraemos el principio de que una definición tiene que dar buenos resultados en la construcción de un sistema científico.

Nos ocuparemos ahora más detalladamente de la **definición de los conceptos**. El caso más simple en el que aparece un concepto es el de una oración cuyo sujeto gramatical es un nombre propio. Podemos decir que aquí un objeto se subsume bajo un concepto, a saber, el objeto cuyo nombre propio es el sujeto gramatical. El resto, la parte predicativa de la oración denota un **concepto**. Por eso yo digo: así como la parte predicativa de la oración siempre exige un sujeto lingüístico y parece incompleto sin él, el concepto a su vez tiene carácter predicativo y está necesitado de un complemento. Debido a este carácter incompleto o a esta necesidad de ser completado, no podemos tener la parte predicativa sólo en uno de los lados de la ecuación definicional, sino que tenemos siempre que completar esta parte predicativa con algo que ocupe el lugar del sujeto gramatical. Usamos para esto, por ejemplo, la letra 'a'. Tenemos ahora al lado derecho y al lado izquierdo de la ecuación definicional una expresión que contiene la letra 'a' y nosotros queremos determinar de este modo que ambos lados de la ecuación tengan siempre el mismo sentido, sea cual sea el nombre propio significativo que se inserte en lugar de *a*. Empleamos esta letra para conferir universalidad a nuestra determinación.

El caso más simple en la definición de un concepto es el de un concepto que se combina con otro para formar un concepto nuevo de la siguiente manera: para empezar, podemos unir dos oraciones por medio de 'y' y podemos interpretar también esta oración compuesta, al igual que cada una de las oraciones parciales, como expresión de un pensamiento, y, en lo que se refiere a la oración compuesta, porque podemos afirmarla o negarla como un todo. Cuando la afirmamos,

afirmamos al mismo tiempo cada una de las oraciones parciales; cuando la negamos, dejamos indeterminado si la primera oración parcial es falsa o si lo es la segunda oración parcial o si ambas son falsas.

Consideremos ahora el caso '8 es un número cúbico y 8 es positivo'

En esta oración compuesta se enuncia algo acerca del número 8. Todo lo que aparte del signo numérico '8' se encuentra en la oración lo podemos considerar como signo de un concepto e introducir para ello por medio de una definición un nuevo signo, por ejemplo

$$\left[\begin{array}{l} a \text{ es un número cúbico} \\ y \\ a \text{ es positivo} \end{array} \right] = a \text{ es un número cúbico positivo}$$

Aquí aparece a la izquierda dos veces la letra 'a'. No hay nada que se contraponga a ello; pero del lado derecho, donde aparece la expresión explicada, 'a' puede aparecer sólo una vez. Ya que si *a* apareciera en diferentes lugares, sería posible llenar estos lugares con diferentes nombres propios y surgiría así una expresión que no habría sido explicada; pero la aparición de toda expresión sin sentido tiene que resultar imposible.

Tenemos aquí un concepto (el concepto de número cúbico positivo) compuesto de conceptos parciales (número cúbico y número positivo). Llamamos a éstos características de ese concepto compuesto.

El caso de un nombre propio que aparece como sujeto gramatical de una oración cuyo predicado designa un concepto es, lingüísticamente hablando, el más simple pero no el único posible. Siempre que un nombre propio aparezca en una oración afirmativa, podemos interpretar la parte restante de la oración como el signo de un concepto. El signo de un concepto requiere siempre ser complementado por un nombre propio o por un signo que represente un nombre propio, *e. g.*, una letra.

Sirva de ejemplo la definición del **número primo**. Determinamos

$$\left[\begin{array}{l} \text{Si } a \text{ es un múltiplo de un número} \\ \text{entero mayor que 1, entonces } a \text{ es} \\ \text{este número} \\ \\ \text{y} \\ \\ a \text{ es un número entero} \\ \\ \text{y} \\ \\ a \text{ es mayor que 1} \end{array} \right] = a \text{ es un número primo}$$

Aquí tenemos a la izquierda la expresión explicativa, a la derecha la explicada. Estamos diciendo con esto: sea cual sea el nombre propio significativo que se ponga en lugar de la letra 'a', la expresión que aparece a la derecha siempre tendrá el mismo sentido que la que aparece a la izquierda.

Tenemos que exigir de todo concepto una **delimitación nítida**. Esto significa: de todo objeto tiene que valer que o bien cae bajo el concepto o bien no cae bajo él. No se permite un tercer caso, ya sea de indecisión o de indeterminación.

De lo anterior resulta una exigencia respecto a los signos conceptuales. Cualquiera de ellos, al ser completado con un nombre propio, tiene siempre que dar lugar a una oración. Y esta oración tiene siempre que expresar un pensamiento que es o verdadero o falso. Si a través de una definición se introduce un nuevo signo conceptual, éste tiene que satisfacer esta exigencia. Esto se hace por sí solo cuando el lado explicativo de la ecuación definicional consiste en la construcción correcta de un signo conceptual, el cual es completado por medio de una letra que representa un nombre propio y que sirve para dotar con la necesaria universalidad a la ecuación definicional. Desde luego que la ecuación no puede estar de ninguna manera condicionada. La determinación de que la expresión explicada debería en general tener el mismo sentido que la expresión explicativa no puede estar sujeta a ninguna condición, porque entonces no se habría determinado nada para el caso en el que el requisito no se cumple. La expresión explicada no tiene entonces ningún sentido. Si insertamos una letra que indica el nombre de un objeto que no satisface el requerimiento, entonces no obtendremos en el lado explicado de la ecuación definicional ninguna oración que exprese un pensamiento que sea verdadero o falso sino una combinación de signos carentes de sentido.

Así, pues, en general las definiciones condicionadas tienen que rechazarse. En todo caso requerirían, si llegaran a usarse, de una justificación especial.

Pasamos ahora a las **definiciones de relaciones**. Si en una oración existen dos nombres propios, entonces puede interpretarse lo demás que aparece en la oración como signo de una relación como, *e. g.*, en

'3 es mayor que 2',

en donde los signos numéricos '3' y '2' deberían considerarse nombres propios. Cuando definimos una relación requerimos de dos signos indicativos que representen los nombres de objetos que tienen dicha relación entre sí. Cada una de estas letras sólo puede aparecer una vez en el lado explicado, por la misma razón que ya dimos cuando abordamos la cuestión de la definición de los conceptos. Tomemos como ejemplo la definición de la congruencia numérica.

$$\left[\begin{array}{l} (a - b) \text{ es un múltiplo de } 7 \\ y \\ a \text{ es un número entero} \\ y \\ b \text{ es un número entero} \end{array} \right] = a \text{ es congruente con } b \text{ en el módulo } 7.$$

Las letras a y b sirven para conferirle universalidad a la determinación. Con ello decimos que, independientemente de cuáles sean los nombres propios significativos que podamos fijar para ' a ' y ' b ', la expresión que está a la derecha debería tener siempre el mismo sentido que la que está a la izquierda. Así, por ejemplo, si en lugar de ' a ' ponemos '16' y en lugar de ' b ' ponemos '2', obtenemos:

$$\left[\begin{array}{l} (16 - 2) \text{ es un múltiplo de } 7 \\ y \\ 16 \text{ es un número entero} \\ y \\ 2 \text{ es un número entero} \end{array} \right] = 16 \text{ es congruente con } 2 \text{ en el módulo } 7.$$

Mientras las letras indicativas indeterminadas no queden sustituidas por nombres propios, el lado izquierdo no tendrá por sí solo ningún sentido, así como tampoco lo tendrá el lado derecho. Es necesario, sin embargo, que en el lado izquierdo se conozca todo excepto las letras de modo que siempre adquiera un sentido cuando insertemos nombres propios significativos en lugar de ' a ' y de ' b '. De esto sigue que el signo de sustracción tiene que ser explicado no sólo para

cuando se encuentre entre dos signos numéricos, ya que de lo contrario la oración ' $(a - b)$ es un múltiplo de 7' no siempre recibiría un sentido cuando insertáramos nombres propios significativos en lugar de ' a ' y de ' b '. Por consiguiente, la expresión

' a es congruente con b en el módulo 7'

no siempre recibiría un sentido.

La unión de signos ' $(16 - 2)$ ' es un nombre propio de un número. Conforme a eso, el signo ' $(a - b)$ ' representa un nombre propio. Nosotros obtenemos a partir de él un nombre propio si sustituimos ' a ' por un nombre propio, y lo mismo en el caso de ' b '. En la oración

' $(16 - 2)$ es un múltiplo de 7'

el signo ' $(16 - 2)$ ' también tiene un significado y lo que significa es precisamente el número 14. El signo ' $(16 - 2)$ ' también tiene un sentido, el cual es parte del sentido de esa oración y este sentido es con lo que el signo ' $(16 - 2)$ ' contribuye a la expresión del pensamiento. Podemos decir, por lo tanto, que el signo ' $(a - b)$ ' obtiene un sentido debido a que cada uno de las dos letras es reemplazada por un nombre propio significativo. En esto coincide el signo ' $(a - b)$ ' con

' $(a - b)$ es un múltiplo de 7'.

Al reemplazar nosotros aquí ' a ' por ' 16 ' y ' b ' por ' 2 ', obtenemos un sentido, a saber, el de la oración

' $(16 - 2)$ es un múltiplo de 7'

y este sentido es un pensamiento. También ' $(16 - 2)$ ' tiene un sentido, pero este no es ningún pensamiento, sino únicamente una parte de un pensamiento. En todo caso, los signos compuestos ' $(a - b)$ ' y

' $(a - b)$ es un múltiplo de 7'

coinciden en que contienen un sentido cuando las letras son reemplazadas por nombres propios significativos. El signo ' $(a - b)$ ' recibe por esto simultáneamente un significado. Cuando reemplazamos ' a ' por ' 16 ' y ' b ' por ' 2 ', dicha significado es el número 14. Puede preguntarse ahora si también la oración

' $(16 - 2)$ es un múltiplo de 7'

tiene no sólo un sentido, sino también un significado.

Empleemos para comparar la oración 'El Etna es más alto que el Vesubio'. Con esta oración asociamos un sentido, un pensamiento, lo entendemos, lo podemos traducir a otros idiomas. Tenemos en esta oración el nombre propio

'Etna', el cual hace una contribución al sentido de toda la oración, al pensamiento. Esta contribución que es una parte del pensamiento es el sentido de la palabra 'Etna'. Pero no decimos nada acerca de este sentido, sino de una montaña que no es parte del pensamiento. El idealista en teoría de conocimiento dirá: 'Esto es un error. El Etna es sólo tu representación.' Quienquiera que enuncie la oración 'El Etna es más alto que el Vesubio' la entiende en el sentido de que se enuncia en ella algo acerca de un objeto que es completamente independiente del hablante. El idealista puede entonces decir ahora que es un error que el nombre 'Etna' designe algo. El hablante se perdería entonces en el reino del mito y de la poesía, en tanto que cree moverse en el reino de la verdad. Pero el idealista no está justificado en invertir el pensamiento, como si el hablante quisiera designar con el nombre 'Etna' una de sus representaciones y reportar algo acerca de éstas. Con el nombre 'Etna' el hablante o designa con el nombre 'Etna' lo que quiere designar o no designa nada con dicho nombre, pues éste carecería de significado.

Lo esencial es entonces, primero, que el nombre 'Etna' tenga un **sentido**, pues de lo contrario tampoco la oración tendría un sentido, no expresaría ningún pensamiento; y, segundo, que el nombre 'Etna' tenga un significado, pues de lo contrario nos perderíamos en la poesía. Esto último de hecho es esencial sólo si queremos movernos en el reino de la ciencia. Para la poesía da lo mismo si los hombres que aparecen en ella son, como suele decirse, personajes históricos o no. Con más precisión se diría: 'si los nombres propios de personas que aparecen en la poesía tienen significado o no'.

Si únicamente nos importara el sentido de la oración 'El Etna es más alto que el Vesubio', entonces no tendríamos ninguna razón para sostener también que forzosamente el nombre propio 'Etna' tiene que tener un significado puesto que, para que la oración tuviera sentido, sería obligatorio exigir únicamente que el nombre propio 'Etna' tuviera un sentido y el significado no aportaría nada al pensamiento expresado. Si lo que nos importa es, pues, que el nombre propio 'Etna' designe algo, nos importará también el significado de la oración entera. Sin embargo, que el nombre 'Etna' designe algo siempre tendrá un valor para nosotros cuando y sólo cuando nos importe la verdad en un sentido científico. Nuestra oración tendrá entonces un significado cuando y sólo cuando el pensamiento que expresa sea verdadero o falso. El significado de una oración tiene que ser algo que permanezca intacto cuando una de sus partes sea sustituida por algo que tiene el mismo significado. Regresamos ahora a la oración '(16 - 2) es un múltiplo de 7'.

El signo '16-2' es el nombre propio de un número. '17 - 3' designa el mismo número, pero '17 - 3' no tiene el mismo sentido que '16 - 2'. Por consiguiente, el sentido de la oración '(17 - 3) es un múltiplo de 7' también es diferente del sentido de la oración '(16 - 2) es un múltiplo de 7'; y, asimismo, el sentido de la oración '16

es congruente 2 en el módulo 7' es diferente del sentido de la oración '17 es congruente 3 con el módulo 7'. Pero la oración '(17 - 3) es un múltiplo de 7' tiene que tener el mismo significado que la oración '(16 - 2) es un múltiplo de 7'. Pero eso que **no** cambia al reemplazar el signo '(16 - 2)' por el signo '(17 - 3)' que tiene el mismo significado es lo que yo llamo **valor de verdad**. Ambas oraciones son o verdaderas o falsas. En nuestro ejemplo, ambas son verdaderas, pero es fácil formar otro en el que ambas sean falsas. Sólo tenemos que poner el número 3 en lugar del número 7.

Así, pues, nosotros decimos que las oraciones tienen **el mismo significado** si ambas son verdaderas o si ambas son falsas. En cambio tienen **significado diferente** si una es verdadera y la otra falsa. Si una oración es verdadera, entonces digo que su significado es lo Verdadero. Si una oración es falsa, entonces digo que su significado es lo Falso. Si una oración no es ni verdadera ni falsa, entonces no tiene ningún significado. Pero puede tener de todos modos un sentido y entonces yo digo: ella pertenece al reino de la poesía.

Aquí, en aras de la brevedad, llamé a la oración verdadera o falsa, siendo más correcto decir que es el pensamiento expresado por la oración lo que es verdadero o falso.

Pero aquí parece surgir una divergencia. Cuando digo 'el pensamiento de que (16 - 2) es un múltiplo de 7 es verdadero', tomo **verdadero** como una propiedad del pensamiento, en tanto que obtuvimos anteriormente el resultado de que el pensamiento es el sentido y Lo Verdadero el significado de la oración. Ciertamente, la comprensión de la verdad como propiedad de oraciones o de pensamientos corresponde a la expresión lingüística. Cuando decimos: 'La oración '3 > 2' es verdadera', decimos, en concordancia con la forma lingüística de la oración, que algo tiene una cierta propiedad, esto es, la propiedad que designamos mediante la palabra 'verdadero'. Y cuando decimos: 'el pensamiento de que 3 > 2 es verdadero', ello vale por igual para el pensamiento. Pero el predicado **verdadero** es completamente diferente de los demás predicados, como por ejemplo verde, salado, racional, puesto que lo que queremos decir con la oración 'el pensamiento de que 3 > 2 es verdadero', lo podemos decir de manera más sencilla por medio de la oración '3 es mayor que 2'. Es decir, en realidad no necesitamos en lo absoluto la palabra 'verdadero'. Y reconocemos que este predicado realmente no agrega nada en absoluto al sentido. No necesitamos un predicado en particular para afirmar algo como verdadero, sino sólo la fuerza afirmativa con que emitimos la oración.

No siempre que emitimos una **oración afirmativa** lo hacemos con fuerza afirmativa. El actor en el escenario, el poeta que lee su obra, ambos frecuentemente emitirán oraciones afirmativas, pero se desprende de las circunstancias que no lo

hacen con fuerza afirmativa. Lo hacen sólo como si estuvieran haciendo afirmaciones. También en nuestra definición

$$\left[\begin{array}{l} (a - b) \text{ es un múltiplo de } 7 \\ \text{y} \\ a \text{ es un número entero} \\ \text{y} \\ b \text{ es un número entero} \end{array} \right] = a \text{ es congruente con } b \text{ en el módulo } 7.$$

no emitimos con fuerza afirmativa cada una de las partes como ' $(a - b)$ es un múltiplo de 7', ' a es un número entero', ' a es congruente con b en el módulo 7' ni siquiera cuando reemplazamos las letras ' a ' y ' b ' por nombres propios.

Podemos decir también

$$\left[\begin{array}{l} (16 - 3) \text{ es un múltiplo de } 7 \\ \text{y} \\ 16 \text{ es un número entero} \\ \text{y} \\ 3 \text{ es un número entero} \end{array} \right] = 16 \text{ es congruente con } 3 \text{ en el módulo } 7,$$

a pesar de que algunas de las oraciones parciales son falsas, puesto que sólo queremos presentar como teniendo el mismo sentido lo que aparece al lado derecho de la ecuación junto con lo que aparece al lado izquierdo, sin juzgar la verdad de las oraciones parciales.

Si alguien dice con fuerza afirmativa algo de lo cual sabe que es falso, entonces miente. No es así con un actor en el escenario que dice algo que es falso. No miente, porque la fuerza afirmativa está ausente. Y cuando el actor en el escenario dice 'es verdad que 3 es mayor que 2', entonces no lo afirma en mayor grado que cuando dice '3 es mayor que 2'. No importa entonces la palabra 'verdadero', sino sólo la fuerza afirmativa con que se emita la oración. El caso en el que decimos de una oración o de un pensamiento que es verdadero es por ello total y radicalmente diferente, por ejemplo, del caso en el que decimos del agua marina que es salada. En éste, más no en el otro, agregamos algo por medio del predicado.

Esta consideración confirma que el pensamiento se relaciona con su valor de verdad como el sentido con el significado de un signo al mostrar que la verdad no es una propiedad de las oraciones o de los pensamientos, como de acuerdo con el lenguaje podría suponerse.

Vimos que ' $(a - b)$ ' y ' $(a - b)$ es un múltiplo de 7' se comportan de manera parecida, ya que ambos reciben un **sentido** y un significado reemplazando ' a ' y ' b ' por nombres propios significativos. Una diferencia consiste en que el sentido que ' $(a - b)$ ' de esta manera recibe es solamente una parte de un pensamiento, en tanto que el sentido que ' $(a - b)$ es un múltiplo de 7' recibe de este modo es un pensamiento. Si para empezar reemplazamos sólo ' b ' por el nombre propio ' 2 ' de manera que obtenemos ' $a - 2$ ', entonces tenemos que ' $(a - 2)$ es un múltiplo de 7'. Lo que en esta segunda combinación de signos está presente, dejando de lado la letra ' a ', es el signo de un concepto. Y entonces podemos considerar que la oración ' $(16 - 2)$ es un múltiplo de 7' se compone del nombre propio ' 16 ' y del signo conceptual mencionado, de modo que enunciamos en ella el concepto del número 16. Tenemos aquí la subsunción de un objeto bajo un concepto.

En forma parecida, podemos considerar, dejando de lado la letra ' a ', que lo que está presente en ' $a - 2$ ' es un signo, de modo que ' $16 - 2$ ' aparece como compuesto por el nombre propio ' 16 ' y por dicho signo, el cual parece requerir un complemento del mismo modo que lo requiere el signo conceptual en cuestión. Así como el concepto requiere ser completado, lo designado también. Lo llamamos **función**. El signo conceptual, completado a través de un nombre propio, produce una oración. El signo de función, completado por un nombre propio, produce un nombre propio. En nuestro caso, el signo de función, completado por los nombres propios ' 2 ', ' 3 ', ' 4 ', produce en esta secuencia los nombres propios ' $2 - 2$ ', ' $3 - 2$ ', ' $4 - 2$ '.

A los objetos

$$2 - 2, 3 - 2, 4 - 2,$$

cuyos signos son estos nombres propios, los llamamos 'valores de nuestra función', por lo que tenemos:

$2 - 2$ es el valor de nuestra función para el argumento 2,

$3 - 2$ es el valor de nuestra función para el argumento 3,

$4 - 2$ es el valor de nuestra función para el argumento 4.

Pero también lo que se obtiene de

' $(a - 2)$ es un múltiplo de 7'

la cual al reemplazar 'a' por un nombre propio se le toma como nombre propio, puesto que obviamente designa un valor de verdad y una cosa así tiene que tomarse como un objeto. Así

$3 - 2$ es un múltiplo de 7^{218}

es lo falso,

$16 - 2$ es un múltiplo de 7

es lo verdadero. Existe entonces una amplia coincidencia en los casos en que hablamos de una función y los casos en que hablamos de un concepto; y parece ser adecuado tomar el concepto como función, a saber, como función cuyo valor es siempre un valor de verdad. Si tomamos el concepto como función, entonces lo falso es el valor de esta función para el argumento 3 y el valor de esta función es lo verdadero para el argumento 16. Lo que de otra manera aparece como sujeto lógico aparece aquí como argumento.

No es posible indicar mediante una definición lo que es una función, porque se trata de algo simple e inanalizable. Sólo es posible aproximarse a lo que se quiere decir e indicarlo mediante una asociación con algo conocido. El lugar de una definición lo tiene que ocupar una explicación la cual, sin embargo, tiene que contar con una comprensión bien intencionada.

A menudo parece haber falta de claridad respecto a lo que es una función. Se usa muchas veces la palabra 'variable'. Y de acuerdo con esto parece en primer lugar como si existieran dos clases de números: las constantes o números ordinarios, y las variables. Parecería que las primeras son designadas por los signos numéricos conocidos, las segundas por medio de las letras 'x', 'y', 'z'. Pero esto no encaja con el modo como se procede en análisis. Cuando tenemos la letra 'x' en conexión con otros signos, como en

'x - 2',

entonces el análisis exige la posibilidad de insertar en lugar de esta 'x' diferentes signos numéricos, como en

'3 - 2', '4 - 2', '5 - 2', etc.

Pero aquí no puede tratarse, propiamente hablando, de ninguna variación, puesto que si decimos que algo varía entonces tiene que poder reconocerse como lo mismo, eso que varía, en lo modificado. Cuando un gobernante envejece, se transforma, pero sólo podemos decir esto porque se le puede reconocer como el

²¹⁸ [Nota a pie de página del autor] Se entiende que estas oraciones se enuncian aquí sin fuerza afirmativa.

mismo, a pesar de los cambios. Pero cuando un gobernante muere y su sucesor sube al trono no puede decirse que uno se convirtió en el otro, puesto que el nuevo gobernante no es el mismo que el viejo. Este caso es comparable al de insertar por 'x' en 'x - a' '3', '4', '5', uno tras otro. No es que sea la misma cosa que, con el paso del tiempo, adquiere diferentes propiedades, sino que se trata de números totalmente distintos. Si ahora la letra 'x' designara un número variable, debería poder reconocerse a este último como el mismo número, aunque con diferentes propiedades. Pero el 4 no es el mismo número que el 3. No tenemos entonces absolutamente nada que pudiéramos designar con el nombre 'x'. Cuando éste significa el 3, no significa el 4, y cuando significa el 4, no significa el 3. Las letras sirven en la aritmética y en el análisis para conferir universalidad de contenido a las oraciones y ello es así aunque quede oculto, dado que gran parte de la demostración se desarrolla en palabras. Así, pues, se tiene que tomar en cuenta todo, no sólo lo que ocurre con las fórmulas aritméticas. Se estipula, por ejemplo: 'a designa esto y aquello, b designa esto y aquello' y se toma esto como punto de partida para una investigación. Pero en realidad tenemos aquí dos oraciones condicionales:

'si a es esto y aquello',

'si b es esto y aquello',

y éstas se tienen que llevar consigo o pensarse junto con cada una de las oraciones siguientes, entonces el todo recibe universalidad sólo gracias a estas letras indicativas. Sólo si la incógnita – como suele decirse – se designa con 'x', se tiene un caso algo diferente. Se solucionaría, *e.g.*, la ecuación

$$'x^2 - 4 = 0'.$$

Se obtienen las soluciones 2 o -2. Pero, de nuevo, también aquí se puede dotar a la ecuación y a su solución con la forma de una oración general: 'Si $x^2 - 4 = 0$, entonces $x = 2$ o $x = -2$ '. De paso, se puede hacer notar que la anotación ' $\pm \sqrt{4}$ ' tiene que ser totalmente rechazada. Aquí se sigue en forma irreflexiva al lenguaje. Propiamente hablando, la palabra 'o' tiene que estar entre oraciones: 'x es igual a 2 o x es igual a -2'. Pero luego se funden ambas oraciones en 'x es igual a más o menos 2' y por consiguiente se escribe ' $x = \pm \sqrt{4}$ '; pero ' $\pm \sqrt{4}$ ' no designa absolutamente nada, sino es un signo carente de significado. Ciertamente puede decirse

'2 es igual a $+\sqrt{4}$ o 2 es igual a $-\sqrt{4}$ ',

extendiéndose la fuerza afirmativa al todo, mientras que cada una de las oraciones parciales es enunciada sin fuerza afirmativa. Igualmente puede decirse

'-2 es igual a $+\sqrt{4}$ o -2 es igual a $-\sqrt{4}$ '

pero '2 es igual a $\pm \sqrt{4}$ ' no tiene ningún sentido.

Es conveniente tratar aquí el **concepto de la raíz cuadrada de 4**. Cuando pensamos que ' $2 \cdot 2 = 4$ ' surgió reemplazando en ' $\xi \cdot \xi = 4$ ' la letra ' ξ ' por el signo numérico 2, entonces aparece ' $2 \cdot 2 = 4$ ' como compuesto por el nombre '2' y un signo conceptual que en cuanto tal necesita ser completado y entonces ' $2 \cdot 2 = 4$ ' puede leerse así: '2 es una raíz cuadrada de 4'. De la misma manera, podemos leer ' $(-2) \cdot (-2) = 4$ ': '(-2) es una raíz cuadrada de 4'. Pero la ecuación ' $2 = \sqrt{4}$ ' no la podemos leer '2 es una raíz cuadrada de 4', puesto que no es admisible que el signo ' $\sqrt{4}$ ' sea ambiguo. La ambigüedad o la polisemia de los signos tienen que excluirse a toda costa. Si el signo ' $\sqrt{4}$ ' fuera ambiguo, no podría decirse si la oración ' $2 = \sqrt{4}$ ' es verdadera y por ello mismo no podría realmente llamarse oración a esta combinación de signos, puesto que sería indeterminado cuál es el pensamiento que expresa. Los signos tienen que explicarse de modo tal que queda determinado qué es lo que ' $\sqrt{4}$ ' significa, si el número 2 u otro. Nosotros nos familiarizaríamos con el signo de igualdad como signo de identidad. Y así es como tiene que tomarse en ' $2 = \sqrt{4}$ '. ' $\sqrt{4}$ ' denota un objeto y '2' denota un objeto. Podemos leer, entonces '2 es la raíz cuadrada positiva de 4'. Aquí al 'es' se le toma como signo de identidad, no meramente como cópula.

No se puede leer ' $2 = \sqrt{4}$ ' como '2 es una raíz cuadrada de 4', porque entonces 'es' sería aquí una cópula. Cuando juzgo '2 es una raíz cuadrada de 4' subsumo el objeto 2 bajo un concepto. Tenemos este caso siempre que el sujeto lingüístico sea un nombre propio, en tanto que el predicado se compone de 'es' y de un sustantivo asociado con el artículo indefinido. 'Es' entonces es siempre una cópula y el sujeto sintáctico en cuestión un *nomen appellativum*. Se subsume entonces un objeto bajo un concepto. La identidad es un caso completamente distinto. Y, no obstante, se escribe ocasionalmente un signo de igualdad donde de lo que se trata es de una subsunción. El signo ' $\sqrt{4}$ ' no es de ningún modo incompleto, sino que tiene la característica de un nombre propio. No puede entonces denotar ningún concepto y no se le puede representar en el lenguaje mediante un *nomen appellativum*, con o sin el artículo indefinido. Cuando lo que aparece del lado izquierdo del signo de igualdad es un nombre propio, lo que aparece del lado derecho también tiene que ser un nombre propio o convertirse en un nombre propio al sustituirse letras indicativas que aparecen en él por signos significativos.

Regresemos ahora a nuestra cuestión después de esta digresión. Las **letras** sirven en la aritmética para conferir universalidad de contenido a las oraciones cuando no representan el lugar de un número desconocido pero no para designar un número variable, puesto que no hay números variables. Todo cambio sucede en el tiempo. Pero las leyes de los números son atemporalmente eternas. El tiempo no aparece ni en la aritmética ni en el análisis. Es sólo en la aplicación de la aritmética

que puede entrar el tiempo. El número 3 siempre fue y siempre será un número primo. ¿Cómo habría de ser posible aquí un cambio? Se siente que no es apropiado hablar de un número variable, por lo que es preferible decir ‘magnitud variable’, como si con esto se ganara mucho. Ciertamente, una barra de hierro se hace más larga cuando se le calienta y más corta si se le enfría; ella cambia con el tiempo. Si se mide su longitud con un patrón milimétrico, da ya sea este ya sea aquel número. Si luego se dice ‘el número por el cual se expresa en milímetros en el momento t la longitud de esta barra’, entonces esta expresión contiene la letra ‘ t ’ indefinidamente indicativa. Se convierte en el nombre propio de un número cuando en lugar de ‘ t ’ se inserta el nombre de un momento temporal. Esto es muy parecido a lo que tenemos en la expresión ‘ $x - 2$ ’. También ésta se convierte en el nombre propio de un número cuando en lugar de ‘ x ’ insertamos el nombre de un número. En ambos casos tenemos una función que puede arrojar diferentes valores de función cuando se le satura con diferentes argumentos. La barra de hierro y el tiempo son en principio inesenciales para la aritmética, dado que ésta no se ocupa ni de guijarros ni de granos de pimienta ni de trenes de ferrocarril ni de hileras de libros ni de barras de hierro ni de instantes. Estas son cosas que pueden aparecer en las aplicaciones, pero que no pertenecen a la construcción sistemática de las matemáticas.

Cuando le echamos un vistazo a todo esto nos damos cuenta de que en la aritmética no hay lugar ni para números variables ni para magnitudes variables. O bien ‘magnitud’ no es más que una expresión sobria para números y entonces hay tantas magnitudes variables como números variables o ‘magnitud’ se entiende de manera tal que da derecho a hablar de magnitudes variables, pero entonces ya no pertenecen a la aritmética.

Si las letras ‘ x ’ y ‘ y ’ designan diferentes variables, tendría entonces que poder decirse qué es lo que las distingue, pero nadie puede hacer eso. Se tiene que tener presente siempre que estamos tratando de la aritmética pura, no de aplicaciones. Se nos podría ocurrir todavía la salida de no ver en las letras ‘ x ’ y ‘ y ’ nada como signos de variables sino como las variables mismas, pero con esto se peca contra la forma establecida de usar los signos. En el caso del signo de igualdad, por ejemplo, se supone siempre que el signo simple o compuesto del lado izquierdo de éste es o un nombre propio significativo o se convierte en uno mediante la sustitución de las letras indicativas que en él aparecen por signos designativos.

Es imposible, por lo tanto, explicar lo que es una función por medio de lo que se llama una variable. Más bien, cuando se quiere aclarar lo que es una variable se tropieza una y otra vez con lo que se llama función con lo cual uno se percata de que realmente la variable no es un objeto de la aritmética.

(Hemos visto que se puede tomar el concepto como un caso especial de función. Del concepto hemos exigido una delimitación nítida. En el caso más general de la función tenemos algo parecido.)

Todavía hay en muchos casos falta de claridad acerca de lo que es una función. En particular se confunde fácilmente la función con el valor de la función, como cuando se escribe

$$'fx = f',$$

donde se usan las letras en un lado para indicar una función y en el otro para indicar el valor de la función. Desde luego que existe una dificultad que es por la que es tan difícil apprehender correctamente la esencia de la función. Ésta radica en la expresión lingüística. Nosotros decimos 'la función' y 'el concepto', expresiones que son difíciles de evitar y que, sin embargo, no son apropiadas. El artículo definido convierte por la forma a estas expresiones en nombres propios en sentido lógico, como si hubieran de designar objetos y, sin embargo, eso es precisamente lo que no deberían hacer. Es exactamente la esencia del concepto y de la función, la índole insaturada, lo que queda oculto. El lenguaje nos fuerza a usar una expresión inapropiada. Es muy difícil evitar este defecto, pero se le puede hacer inocuo si se está permanentemente consciente de cuán inapropiado es. Entonces tampoco se confundirá el valor de la función con la función.

Ahora bien, se habla ocasionalmente de una función cuando lo que se tiene en mente son casos como $(1 + x)^2$. Aquí aparece ' $1 + x$ ' en lugar del argumento de la función cuadrática y parece como si la función $1 + x$ fuera el argumento de la función cuadrática. Pero ' $1 + x$ ' ni siquiera designa una función, sino que alude al valor de una función sólo que de modo indeterminado. Si [en ' $(1 + x)^2$ '] en lugar de ' x ' ponemos por ejemplo ' 3 ', entonces obtenemos $(1 + 3)^2$ y aquí el valor de la función $1 + \xi$ para el argumento 3 es el argumento de la función cuadrática. Pero este argumento es un objeto, un número. Tenemos aquí un caso de composición de una función a partir de dos funciones, en donde se toma el valor de la primera función para un argumento como argumento de la segunda función. Aquí se tiene que subrayar siempre la diferencia fundamental entre objeto y función. En el lugar que ocupa el nombre de un objeto, un nombre propio, no puede haber un nombre de función y viceversa: donde hay un nombre de función no puede haber un nombre propio.

También en el caso en el que la función tenga el mismo valor para cada argumento tendrá que distinguirse este valor de la función. Así, la función

$$1 + \xi - \xi$$

se distingue del número 1 mismo. No se puede en lo absoluto decir ' $1 + \xi - \xi = 1$ ' y el signo de igualdad es el signo de identidad, por lo que la función ' $1 + \xi - \xi$ ' es el número 1', puesto que cuando decimos 'la función ' $1 + \xi - \xi$ ' la letra ' ξ ' no es parte del signo de la función, debido a que el nombre propio ' $1 + 3 - 3$ ' se compone de un nombre de función y del nombre propio ' 3 ' y aquí ni siquiera aparece la letra ' ξ '. En la oración ' $1 + a - a = 1$ ', sin embargo, la letra a tiene la finalidad de conferir universalidad de contenido a la oración, en tanto que cuando digo 'la función ' $1 + \xi - \xi$ ', la letra ' ξ ' tiene la finalidad de marcar los lugares que deberían ocupar los nombres propios complementarios. Para formar el cociente diferencial de una función para el argumento 3 sustraemos el valor de la función para el argumento 3 del valor de la función para el argumento $(3 + k)$ y dividimos la diferencia entre k , etc. Para la función ' $1 + \xi - \xi$ ' esto se representa en la fórmula

$$\frac{[1 + (3 + k) - (3 + k)] - [1 + 3 - 3]^{219}}{k}$$

Pero en el nombre propio ' 1 ' no tenemos ningún lugar en el que pudiéramos insertar en una ocasión ' $3 + k$ ' y en otra ' 3 '. Es sólo con una función que puede procederse en concordancia con esta prescripción.

Si se quiere definir el número uno diciendo 'uno es una cosa' se comete un error, puesto que es por el artículo indefinido que tiene que tomarse 'una cosa' como palabra conceptual. Pero entonces la palabra 'es' es una cópula y pertenece al predicado. Tenemos entonces una subsunción del objeto uno bajo un concepto. Pero esto no es ninguna definición. Una definición es siempre una determinación de que un signo o una palabra nueva han de significar lo mismo que un signo compuesto ya conocido. Si usamos en esto la palabra 'es', entonces debe tomarse como signo de identidad, no como cópula. Así, si encontramos del lado izquierdo de este signo de identidad un nombre propio, entonces también tiene que haber uno del lado derecho; 'una cosa', sin embargo, es un *nomen appellativum*.

Así como las funciones de un argumento son fundamentalmente distintas de los objetos, así también las **funciones de dos argumentos** son fundamentalmente diferentes de las funciones de un argumento.

Si completamos el signo de una función de un argumento con un nombre propio obtenemos un nombre propio. Así, por ejemplo, obtenemos del signo de función ' $\xi - 2$ ' y del nombre propio ' 3 ' el nuevo nombre propio ' $3 - 2$ '. La letra ' ξ ' en ' $\xi - 2$ ' sólo tiene la finalidad de mantener despejada la posición para el signo de argumento complementario. De la misma manera, del signo conceptual ' $\xi > 0$ ', al

²¹⁹ [Nota de pie de los editores] Los corchetes se encuentran ya en el manuscrito.

completarlo con el nombre propio '1', obtenemos ' $1 > 0$ ' y éste es un nombre de lo verdadero.

Una función de dos argumentos está doblemente necesitada de ser completada. Tenemos en ' $\xi - \zeta$ ' un signo de una función de dos argumentos. Las letras ' ξ ' y ' ζ ' deberían mantener despejadas las posiciones para los signos de argumento. La diferencia de las letras ' ξ ' y ' ζ ' debería indicar que habría que insertar diferentes signos de argumento en las dos posiciones. Al insertar en la posición de argumento ζ el nombre propio '2' obtenemos con ' $\xi - 2$ ' un signo de función de una función de un argumento. Asimismo, del signo relacional ' $\xi > \zeta$ ' se da el signo conceptual ' $\xi > 0$ '. Así se producen mediante la saturación parcial de funciones de dos argumentos funciones de un argumento: de relaciones se producen conceptos. Esto, sin embargo, puede suceder también de otro modo, anulando las diferencias entre las posiciones de los argumentos. Cuando escribo ' $\xi - \xi$ ', indico mediante las letras '[' ξ '[' ambas posiciones en las cuales se ha de insertar el mismo nombre propio y obtengo así el nombre de una función de sólo un argumento. Si a esto lo llamo 'nombre de una función', ello tiene que entenderse *cum grano salis*. El nombre propio que obtenemos al completar esta función con un nombre propio, e.g., ' $3 - 3$ ', no contiene la letra ' ξ ', a pesar de que contiene dicho nombre de función. Esta ' ξ ' no es entonces un componente del nombre de la función, sino que sólo sirve para que pueda reconocerse cómo se conecta el signo de función con el nombre propio complementario. Por medio de esta ' ξ ' obtenemos una instrucción de uso para el nombre de función. También de un signo de relación podemos formar de manera semejante un signo de concepto anulando la diferencia entre las posiciones de argumento. Así obtenemos del signo de relación ' $\xi > \zeta$ ' el signo conceptual ' $\xi > \xi$ '.

Hemos visto que el valor de una función puede presentarse como argumento de una segunda función. Podemos llamar a la primera la función incluida y a la segunda la función incluyente. De manera que podemos formar un signo relacional a partir de los nombres de una función de dos argumentos y de un signo conceptual en que el concepto se convierte en la función incluyente. Sea, e.g., ' $\xi - \zeta$ ' el signo de una función de dos argumentos, ' ξ es un múltiplo de 7' el signo conceptual. Entonces ' $(\xi - \zeta)$ es un múltiplo de 7' es el nuevo signo relacional.

El concepto tiene que estar nítidamente delimitado, es decir, tiene que valer para todo objeto que cae o que no cae bajo el concepto. No puede haber indeterminación. Se sigue que algo equivalente vale para la relación, puesto que la relación se da a través de la saturación parcial de un concepto. Éste tiene que estar nítidamente delimitado. Y, obviamente, todo concepto que se produce a través de la saturación parcial de la relación tiene que estar nítidamente delimitado. En otras palabras, esto significa que cada objeto tiene que estar o no estar en la relación con

cada objeto. Un tercer caso tiene que quedar excluido. Si aplicamos esto a la relación '($\xi - \zeta$) es un múltiplo de 7', entonces resulta que a partir del signo compuesto ' $\xi - \zeta$ ' tiene siempre que brotar un nombre propio significativo cuando las letras ' ξ ' y ' ζ ' son reemplazados por nombres propios significativos; o sea, no sólo si se insertan signos de números. Se tiene también que explicar el signo de sustracción de manera que se produzca un significado por la conexión de signos sin que importe qué nombres propios significativos se ponen a la derecha y a la izquierda de él. Llegamos así a la condición general:

Todo signo de una función de un argumento tiene que explicarse de modo que siempre dé como resultado un significado, sea lo que sea que se tome como signo de argumento significativo para completarlo.

Todo signo de una función de dos argumentos tiene que explicarse de modo que dé como resultado un significado, sea cual sea el signo de argumento significativo por medio del cual se le completa.

Se podría estipular, por ejemplo, que el valor de la función $\xi - \zeta$ sea siempre lo falso si uno de los dos argumentos no es un número, sea lo que sea el otro argumento. Desde luego que lo que es un número tendría que estar determinado.

Asimismo, se puede estipular que el valor de la función $\xi > \zeta$ sea lo falso si uno de los dos argumentos no es un número real, sea lo que sea el otro.

Pero precisamente sobre esto han cambiado las opiniones. Originalmente, de los números sólo se conocían los enteros positivos; posteriormente llegaron las fracciones, los números negativos, los números irracionales y los números complejos. Fue así como, con el paso del tiempo, se fueron asociando con la palabra 'número' conceptos cada vez más amplios. Relacionado con ello está también el que el signo de adición haya cambiado su significado. Y lo mismo sucedió con otros signos del cálculo. Pero esto es un suceso que la lógica tiene que rechazar y que es tanto más peligroso cuanto menos se esté consciente de estas modificaciones. La historia de la ciencia entra así en conflicto con las exigencias de la lógica. Tiene siempre que distinguirse entre la historia y el sistema de la ciencia. En la historia tenemos desarrollo, en el sistema rigidez. El sistema puede ampliarse. Pero lo que está construido tiene que permanecer o todo el sistema tiene que descartarse para que se pueda construir uno nuevo. Es sólo en el sistema que la ciencia reviste una forma acabada. No se puede prescindir nunca del sistema. Es sólo a través del sistema que se puede alcanzar plena claridad y orden. Ninguna ciencia puede de igual modo dominar su materia y procesarla con semejante transparencia como las matemáticas, pero quizá tampoco ninguna ciencia puede perderse en una neblina tan densa como las matemáticas si prescinde de la construcción del sistema.

Puede suceder en el desarrollo de la ciencia que un sistema ya no sea suficiente, no de modo que se reconozca como parcialmente falso sino de modo que surja el deseo legítimo de poner muchos detalles bajo un punto de vista más incluyente, para obtener una mejor visión de conjunto y un modo de expresión más simple. Esto llevará entonces a introducir conceptos y relaciones más incluyentes, esto es, superiores. Podría suponerse entonces hacer lo que se llama ampliación conceptual. Esto, sin embargo, es una expresión inexacta, puesto que en el fondo no se modifica el concepto, sino que se le vincula con una palabra conceptual o con un signo de un concepto diferente que es superior al concepto anteriormente asociado con él. No es el sentido lo que cambia, como tampoco el signo, sino la asociación del signo con el sentido. Así, puede suceder que oraciones que antes de esta modificación significaban lo verdadero ahora signifiquen lo falso. Demostraciones anteriores pierden su fuerza. Todo empieza a tambalearse. Todas estas anomalías se evitan si en lugar de proveer expresiones o signos viejos con significados nuevos se introducen signos completamente nuevos para los conceptos recién introducidos. Pero esto casi nunca se hace, sino que se siguen usando los mismos signos. Si se tiene un sistema con definiciones útiles que están ahí no sólo de adorno sino que se les toma en serio, entonces se tiene un centinela para semejantes modificaciones. Esto significa entonces que o hay que introducir designaciones completamente nuevas para los conceptos, relaciones y funciones nuevos que vayan apareciendo o hay que abandonar el sistema para construir uno nuevo. De hecho hoy por hoy carecemos en la aritmética de un sistema. Ha habido sólo intentos incipientes de ello. Se establecen definiciones, pero a su autor no se le ocurre tomarlas en serio y sentirse comprometido con ellas. De manera que nos falta la barrera que impediría que, sin notarlo, asociáramos con un signo, con una palabra, un significado diferente.

Nosotros usamos el signo de adición en primer lugar sólo para el caso en que aparece entre signos de números enteros positivos y explicamos su modo de uso para este caso, reservándonos el derecho de completar esta explicación para otros casos; empero, este modo de definir por etapas es inadmisibile, ya que mientras el signo esté definido de modo incompleto se podrán construir con él signos que tienen que tomarse como signos conceptuales, pero que son inadmisibles como tales puesto que los conceptos designados no estarían nítidamente delimitados y entonces no se podrían reconocer como conceptos. Un signo conceptual así sería, por ejemplo, ' $3 + \xi = 5$ '. Se puede mostrar ahora que el 2 cae bajo este concepto, puesto que $3 + 2 = 5$, pero el que otros objetos caigan bajo el concepto es algo que tendría que quedar totalmente en suspenso en tanto el signo de adición se haya explicado en forma incompleta. Así, es probable que no sea posible construir el sistema sin ascender paso a paso de casos más simples a casos

más difíciles, en forma parecida a como sucedió en el desarrollo histórico, pero no necesitamos cometer aquí el error de usar a través de todas estas transformaciones el mismo signo '+'. Nosotros podemos, por ejemplo, si se trata de la adición de números enteros positivos, usar el signo '∩', pero explicándola completamente de modo que, sea lo que sea lo que se tome como argumento tanto ξ como ζ en la función $\xi \cap \zeta$, el valor de la función quede determinado. Podríamos, por ejemplo, establecer que el valor de esta función será lo falso si uno de los argumentos es algo distinto de un número entero positivo.

Se tienen que desechar entonces **las definiciones inacabadas** y lo que se llama la ampliación escalonada de un concepto. Una definición tiene que hacerse de un solo golpe, puesto que mientras un concepto no esté totalmente definido no estará nítidamente delimitado y no podrá reconocérsele.

¡Revisemos una vez más el camino hasta aquí recorrido!

La oración tiene un sentido y llamamos al sentido de una oración afirmativa el pensamiento. Una oración es enunciada con o sin fuerza afirmativa. Para la ciencia no basta que una oración sólo tenga un sentido; tiene también que tener un valor de verdad y a éste lo llamamos el 'significado' o el 'significado de la oración'. Si una oración sólo tiene un sentido pero no tiene significado, entonces pertenece a la poesía, no a la ciencia.

El lenguaje tiene la facultad de expresar un inmenso caudal de pensamientos con comparativamente pocos medios. Esto se vuelve posible gracias a que el pensamiento se compone de partes de pensamientos y estas partes de pensamientos corresponden a las partes de las oraciones a través de las cuales se expresan. El caso más simple es el de un pensamiento que se compone de una parte acabada y una parte insaturada. A esta la podemos llamar también la parte predicativa. Asimismo, cada una de estas partes tiene que tener un significado si la oración entera ha de tener un significado, un valor de verdad. A el significado de la parte acabada la llamamos **objeto**, a la de la parte que requiere un complemento, la parte insaturada o predicativa, la llamamos **concepto**. A la vinculación que se da entre el objeto y el concepto a través de la oración la podemos llamar **subsunción** del objeto bajo el concepto. Objeto y concepto son fundamentalmente diferentes. A la parte completa de la oración la llamamos **nombre propio** del objeto que designa. A la parte de la oración en necesidad de ser completada la llamamos **palabra conceptual** o **signo conceptual**. De los conceptos tenemos que exigir una delimitación nítida. Ambas partes de la oración, el nombre propio y la palabra conceptual, pueden a su vez ser compuestos. El nombre propio puede una vez más componerse de una parte acabada y una parte que requiere ser completada. El primero es de nuevo un nombre propio y designa a un objeto; al segundo lo

llamamos 'signo funcional'. El signo conceptual, completado con un nombre propio, da lugar a una oración cuyo significado es un valor de verdad. El signo funcional completado por un nombre propio produce un nombre propio cuyo significado es un objeto. Los ponemos a ambos bajo un punto de vista al reconocer el concepto como una función, es decir como una función cuyo valor es siempre un valor de verdad y al reconocer al valor de verdad como un objeto. El concepto es entonces una función cuyo valor es siempre un valor de verdad.

Ahora bien, el signo de función también puede ser compuesto, esto es, componerse de una parte acabada que, de nuevo, es un nombre propio, y una parte que ahora está doblemente necesitada de ser completada, el nombre o signo de una función de dos argumentos. A una función de dos argumentos cuyo valor es siempre un valor de verdad la llamamos 'relación'. A la exigencia de la delimitación nítida de los conceptos corresponde la exigencia más general de que el nombre de una función de un argumento, completada por medio de un nombre propio, tiene que resultar una vez más en un nombre propio que tendrá significado. Lo correspondiente vale también para las funciones de dos argumentos.

Veamos todavía más atrás. Nos percatamos de la necesidad de construir las matemáticas como un sistema de modo tal que no quede excluida la posibilidad de diferentes sistemas. Como fundamentos de un sistema resultan

1. los axiomas, y
2. las definiciones.

Los **axiomas** sirven en el sistema como premisas para las deducciones por medio de las cuales el sistema es construido, pero no se presentan como verdades deducidas. Puesto que deben ser premisas, tienen que ser verdaderos. Un axioma que no es verdadero es una contradicción. En la expresión de un axioma no es admisible nada desconocido.

Algo totalmente diferente son las **definiciones**. A través de ellas se pretende dotar de significado a un signo o a una palabra que hasta entonces no la tenía. La definición tiene entonces que contener un nuevo signo. Una vez que se le ha conferido a éste un significado a través de una definición, ésta se convierte en una oración independiente que puede usarse como premisa en las deducciones durante la construcción del sistema. ¿Cómo se procede en una deducción así?

Supongamos que tenemos una oración de la forma: 'Si A es válida, entonces B es válida'. Si añadimos ahora la oración ' A es válida', podemos deducir de estas dos premisas: ' B es válida'. Para que esta deducción sea posible ambas premisas tienen que ser verdaderas. Y por lo tanto los axiomas, si han de servir como

premisas, tienen también que ser verdaderos, puesto que de algo falso no se infiere nada. Pero, se podría quizá decir: ¿no pueden acaso extraerse conclusiones de una oración que posiblemente sea falsa para ver qué resulta si fuera verdad? Sí, en cierto sentido ello es posible. De las premisas

Si Γ es válida, entonces Δ es válida

Si Δ es válida, entonces E es válida

se puede inferir:

Si Γ es válida, entonces E es válida.

De esto y de la premisa adicional

Si E es válida, entonces Z es válida

se sigue a continuación:

Si Γ es válida, entonces Z es válida.

Y así pueden extraerse conclusiones adicionales sin saber si Γ es verdadera o falsa. Pero se tiene que tomar en cuenta la diferencia. En el ejemplo precedente, la premisa ' A es válida' desapareció totalmente de la conclusión. Aquí conservamos siempre la condición ' Γ es válida'. Podemos deshacernos de ella sólo después de que constatamos que es satisfecha. En este caso no puede ni siquiera considerarse a ' Γ es válida' como premisa, sino que como premisa tenemos:

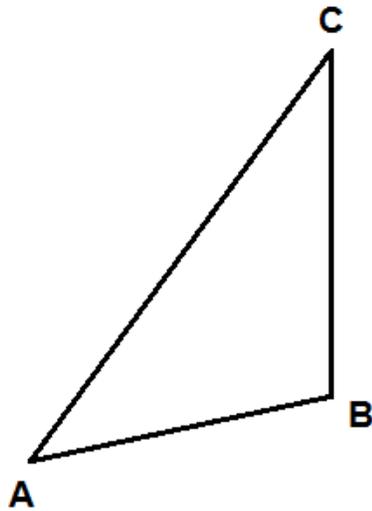
Si Γ es válida, entonces Δ es válida

es decir, algo de lo cual ' Γ es válida' es sólo una parte. Esta premisa tiene naturalmente que ser totalmente verdadera, pero esto es posible sin que se cumpla la condición, sin que Γ sea válida. Para ser exactos, no podemos entonces decir que lo que se hace es extraer conclusiones de un pensamiento falso o dudoso, puesto que éste no se hace presente independientemente como una premisa más, sino sólo como parte de una premisa que ciertamente tiene que ser verdadera, pero que puede ser también verdadera sin que esa parte del pensamiento que está contenida en ella a modo de condición tenga que ser verdadero.

Obtenemos conclusiones aparentes como esta de algo falso a través de la **prueba indirecta**.

A manera de ejemplo, demostremos que en un triángulo el lado mayor se opone al ángulo mayor.

Sea la demostración:



Si $\angle B > \angle A$,
entonces $AC > BC$.

Asumimos como conocido:

- I Si $BC > AC$,
entonces $\angle A > \angle B$
- II Si $BC = AC$,
entonces $\angle A = \angle B$.
- III Si no $AC > BC$, y
si no $BC > AC$,
entonces $BC = AC$.
- IV Si $\angle A = \angle B$,
entonces no $\angle B > \angle A$.
- V Si $\angle A > \angle B$,
entonces no $\angle B > \angle A$.

De II y III se sigue que:

Si AC no $> BC$ y si no $BC > AC$, entonces
 $\angle A = \angle B$.

De esto y de IV se sigue que:

Si no $AC > BC$ y si no $BC > AC$, entonces
no $\angle B > \angle A$.

De I y V se sigue que:

Si $BC > AC$, entonces no $\angle B > \angle A$.

De las dos últimas oraciones se sigue que:

Si AC no $> BC$, entonces no $\angle B > \angle A$.

De esto sigue por contraposición:

Si $\angle B > \angle A$, entonces $AC > BC$.

Para hacer más fácil la cuestión asumo que no se trata aquí de triángulos en general, sino de un triángulo determinado. Por $\angle A$ y $\angle B$ pueden entenderse números que resultan de la medición de los ángulos del triángulo a través de una unidad de ángulo determinada, *e.g.*, el ángulo recto. Asimismo, por AC y BC pueden entenderse números que resultan de la medición de los lados del triángulo a través de una unidad, *e.g.*, un metro. Los signos ' $\angle A$ ', ' $\angle B$ ', ' AC ' y ' BC ' también han de entenderse aquí como nombres propios de números.

Vemos que aquí no aparece como premisa que AC no es $> BC$, sino que la premisa III contiene esto como parte, esto es, como condición. Para ser exactos, no se puede decir que se dedujeron conclusiones a partir de un pensamiento falso (AC no es $> BC$). De ahí que tampoco pueda realmente decirse 'Supongamos que no AC

$> BC'$, porque esto daría la apariencia de que el que no $AC > BC$ sirve como premisa en las deducciones, en tanto que no es más que una condición.

A menudo todavía la peculiaridad de la prueba indirecta se sobrestima. En verdad, la diferencia entre una prueba directa y una indirecta no tiene en absoluto importancia.

Podemos también efectuar la demostración de la siguiente manera. Para esto asumimos como conocido lo siguiente:

- I' Si no $\angle A > \angle B$, entonces no $BC > AC$
- II' Si no $\angle A = \angle B$, entonces no $BC = AC$
- III' Si no $BC > AC$ y si no $BC = AC$, entonces $AC > BC$.
- IV' Si $\angle B > \angle A$, entonces no $\angle A = \angle B$
- V' Si $\angle B > \angle A$, entonces no $\angle A > \angle B$.

De V' y I' se sigue:

Si $\angle B > \angle A$, entonces no $BC > AC$.

De esto y de III' se sigue:

Si $\angle B > \angle A$ y si no $BC = AC$, entonces $AC > BC$.

De IV' y II' se sigue:

Si $\angle B > \angle A$, entonces no $BC = AC$

De las dos últimas oraciones se sigue:

Si $\angle B > \angle A$, entonces $AC > BC$.

En esta demostración nunca supusimos, ni siquiera hipotéticamente, que no $AC > BC$.

También en la investigación de los *Fundamentos de la Geometría* puede suceder que aparentemente se extraigan conclusiones a partir de algo falso o al menos dudoso. ¿No puede hacerse la pregunta: cómo sería el que el axioma de las paralelas no fuera válido? Aquí hay ahora dos posibilidades: o sólo no se hace ningún uso del axioma de las paralelas sino que uno se pregunta únicamente hasta dónde podría llegarse con otros axiomas, o se asume algo que precisamente contradice el axioma de las paralelas. Aquí sólo se puede considerar este caso. Tiene, sin embargo, que recordarse una y otra vez que aquello que es falso no puede ser un axioma, por lo menos si se usa la palabra 'axioma' en el sentido tradicional. ¿Cuál es entonces la situación? ¿Se puede reconocer el axioma de las paralelas como tal? ¿Intersecta siempre una recta que intersecta una de dos paralelas también la otra? En realidad, esta pregunta la puede contestar cada uno sólo para sí mismo. Sólo puedo decir: en tanto yo entienda las palabras 'recta', 'paralela' e 'intersectar' tal como las entiendo, tengo que hacer mío el axioma de las paralelas. Si alguien no lo hace suyo, tengo que presuponer que él entiende estas palabras de modo diferente. Su sentido está indisolublemente asociado con el

axioma de las paralelas. De acuerdo con esto, ningún pensamiento que contradiga el axioma de las paralelas puede fungir como premisa de una deducción. Pero un pensamiento hipotético verdadero, cuya condición estuviera en contradicción con el axioma de las paralelas, podría usarse como premisa. Entonces conservaríamos esta condición en todos los juicios que se nos presentaran en la cadena de deducciones. Si llegáramos así en algún momento a un juicio hipotético cuya consecuencia contradijera axiomas conocidos, entonces podríamos deducir que la condición que contradice el axioma de las paralelas es falsa; y así habríamos demostrado el axioma de las paralelas con la ayuda de otros axiomas. Pero entonces se le habría desprovisto de su rango de axioma, puesto que habría quedado demostrado. En realidad, habríamos efectuado una prueba indirecta.

Empero, si nunca nos topáramos con una contradicción, aunque siguiéramos efectuando nuestras deducciones sin cesar, nos parecería cada vez más aceptable la idea de que nuestro axioma es indemostrable aunque en realidad nunca hubiera sido demostrado.

Ahora bien, Hilbert en sus *Fundamentos de la Geometría* se ocupó de preguntas como la de si los axiomas no se contradicen y la de si son independientes unos de otros. En ello, sin embargo, se le modificó el sentido de la palabra 'axioma', puesto que si un axioma tiene que ser necesariamente verdadero, entonces es imposible que los axiomas se contradigan unos con otros. Por lo demás, no hay que desperdiciar ni una palabra sobre esto. No obstante, a pesar de ser obvio, parece que el Sr. Hilbert ni siquiera llega a darse cuenta de que, cuando trata de la ausencia de contradicción y de la independencia de los axiomas, dejó ya de hablar de axiomas en el sentido de Euclides. Se puede decir que la palabra 'axioma' resplandece con diferentes significados y que él no lo nota. Si uno fija la mirada en su enunciación de los axiomas, en verdad parece como si nos las viéramos con axiomas de carácter euclidiano, pero su enunciación es engañosa, porque todas las palabras son empleadas de un modo diferente al de Euclides. Así leemos en § 3. "*Explicación*. Los puntos de una recta mantienen entre sí ciertas relaciones, para cuya descripción nos sirve especialmente la palabra 'entre'". Y luego se especifican 4 axiomas sin los cuales esta aclaración no estaría completa.

II 1. Si A, B, C son puntos de una recta y B yace entre A y C , entonces B yace también entre C y A .

II 2. Si A y C son dos puntos de una recta, entonces siempre habrá entre ellos un punto B que yace entre A y al menos un punto D tal que C esté entre A y D .

II 3. Entre tres puntos cualesquiera de una recta hay siempre uno y sólo uno que se ubica entre los dos otros.

II 4. Cualesquiera cuatro puntos A, B, C, D de una recta pueden disponerse siempre de modo tal que B se ubica entre A y C , y también entre A y D , y además C entre A y D , y también entre B y D .

Estos axiomas, por consiguiente, deberían ser parte de una definición. De ahí que tendría que aparecer en estas oraciones un signo que no tuviera ningún significado, pero que lo recibiera a través de la totalidad de estas oraciones. Este signo parece ser aquí la palabra 'entre'. Pero una oración que busca expresar un axioma no puede contener ningún signo nuevo. Todo en él tiene que ser conocido. Mientras la palabra 'entre' no tenga todavía ningún sentido, la oración 'Si A, B, C son puntos de una recta y B se ubica entre A y C , entonces B se ubica también entre C y A ' no expresará tampoco ningún pensamiento.

No obstante, un axioma es siempre un pensamiento verdadero. Lo que no expresa ningún pensamiento tampoco puede expresar ningún axioma. Y sin embargo se tiene la impresión, al leer la primera de estas oraciones, de que pudiera ser un axioma. Pero esto se debe únicamente a que estamos acostumbrados a asociar un sentido con la palabra 'entre'. Pero si alguna vez decimos en lugar de

'B yace entre A y C'
'B pat A nam C',

entonces no asociamos ningún sentido con ello. En lugar del así llamado Axioma [II], tendríamos la oración

'Si B pat A nam C, entonces B pat C nam A'.

Nadie para quien las sílabas 'pat' y 'nam' son nuevas asociará un sentido con esta aparente oración. Lo mismo vale para los otros tres pseudo-axiomas.

Nos preguntamos ahora si por lo menos después, a través de la totalidad de estas pseudo-oraciones, se le confiere un sentido a una expresión de la forma

'B pat A nam C'

cuando por A, B, C se entienden los puntos de una recta. Creo que no. Quizá pueda adivinarse que lo que querría decirse sería algo como

'B yace entre A y C',

pero sólo adivinarse. ¿Acaso no podría tener este enigma varias soluciones?

Pero ¿tiene una definición que estar unívocamente determinada? ¿No es en lo absoluto deseable una cierta flexibilidad en ciertas circunstancias?

Por medio de $a^2 = 4$ no se define sin ambigüedad lo que a debe significar, pero ¿es ello dañino? Bueno, si se intenta que a sea un nombre propio cuyo significado quisiera determinarse, entonces es evidente que este objetivo no se

alcanza. En cambio se puede encontrar aquí la designación de un concepto bajo el cual caen los números 2 y -2. Entonces la ambigüedad es inocua, pero entonces no tenemos ninguna definición de un objeto.

Si ahora queremos comparar este caso con el de nuestros pseudo-axiomas, entonces tendremos que comparar la letra '*a*' con 'entre' o con 'pat-nam'. Tenemos que distinguir los signos designativos de los meramente indicativos. 'Entre' o 'pat-nam' designan algo tan poco como lo hace la letra '*a*' propiamente hablando. Tenemos aquí que abstenemos de hacer precisamente lo que usualmente hacemos, a saber, asociar un sentido con la palabra 'entre'. En este contexto tiene tan poco sentido como 'pat-nam'. Pero no está dicho que por el hecho de que un signo meramente indicativo no designe algo ni tenga tampoco un sentido entonces tampoco pueda hacer una contribución a la expresión de un pensamiento. Puede hacer esto último confiriendo universalidad a una oración o a un todo compuesto de oraciones.

Existe, sin embargo, una diferencia entre nuestros dos casos, puesto que '*a*' representa un nombre propio, y 'pat-nam' en cambio representa la designación de una relación con tres fundamentos. Así como llamemos a una función de un argumento cuyo valor es siempre un valor de verdad un concepto y como llamemos a una función de dos argumentos cuyo valor es siempre un valor de verdad una relación, así también podemos, dando el siguiente paso, llamar a una función de tres argumentos cuyo valor es siempre un valor de verdad una **relación de tres fundamentos**. El 'entre-y' o el 'pat-nam' no designan entonces ninguna relación así con tres fundamentos, pero aluden a ella, así como '*a*' indica un objeto. Pero de todos modos hay aquí una diferencia. En ' $a^2 = 4$ ' podríamos encontrar que un concepto es designado.

¿Qué correspondería a esto en nuestros pseudo-axiomas? Yo llamo a esto **concepto de segundo nivel**. Para ver con más claridad qué entiendo por eso, considérense las siguientes oraciones:

'Hay un número positivo'

'Hay una raíz cúbica de 1'

Reconocemos en esto algo común. Se enuncia algo, pero no acerca de un objeto sino de un concepto. En la primera oración el concepto es **número positivo**, en la segunda **raíz cúbica de 1**. Y se dice en ambos casos que el concepto no es vacío, sino que es satisfecho. Desde luego que en el fondo es erróneo decir 'el concepto **número positivo** es satisfecho', puesto que aparentemente convierto el concepto en un objeto, como lo permite constatar el artículo definido en 'el concepto'. Parece entonces como si 'el concepto **número positivo**' fuera un nombre

propio que designa un objeto y como si se dijera de este objeto que es satisfecho. De hecho, no tenemos aquí absolutamente ningún objeto. El lenguaje nos fuerza aquí a expresarnos en forma equívoca, si bien de hecho se gesta una analogía. Lo que nosotros designamos con 'un número positivo' está relacionado con lo que designamos mediante 'hay', análogamente a como un objeto (*e.g.*, la Tierra) está relacionado con un concepto (*e.g.*, planeta).

Yo distingo conceptos bajo los cuales caen objetos como conceptos de primer nivel de conceptos de segundo nivel dentro de los cuales caen, como digo, conceptos de primer nivel. Es obvio que yo entiendo todas estas expresiones sólo figurativamente, puesto que sería equívoco el que se les tomara literalmente. Se puede también reconocer conceptos de segundo nivel en los que caen relaciones. Si, por ejemplo, se dice:

'Sea en general respecto a A, B, C que $B = C$ si A se encuentra en la relación p con B y si A está en la relación p con C ,

entonces se designa aquí un concepto de segundo nivel en el cual caen relaciones y 'se encuentra en la relación p con ...' corresponde aquí al signo de argumento, es decir, a la designación de la relación que aparece como argumento. Si insertamos, por ejemplo, la relación de igualdad, entonces obtenemos

'Es válido en general respecto a A, B, C que $B = C$ si $A = B$ y si $A = C$ '.

Esto es verdadero, por lo que la relación de igualdad cae dentro de este concepto de segundo nivel.

Así como llamamos a una función de un argumento, cuyo valor es siempre un valor de verdad, un concepto, y así como llamamos a una función de dos argumentos, cuyo valor es siempre un valor de verdad, una relación, así también podemos introducir para una función de tres argumentos, cuyo valor es siempre un valor de verdad, una designación particular. Por el momento se puede llamar a semejante función una relación de tres fundamentos. De esta clase sería la que designan las palabras 'yace entre ... y ...' cuando estas palabras se entienden del modo como se entenderían en concordancia con el uso de lenguaje y se usaran en relación con puntos euclidianos en una recta euclidiana. Pero aquí, en nuestros pseudoaxiomas, no se usan como un signo designativo sino únicamente en su uso indicativo, en forma parecida a como se usan las letras en la aritmética. No designan aquí dicha relación de tres fundamentos, sino que sólo aluden a ella. Si para empezar aquí queremos entender las palabras 'punto' y 'recta' en el sentido euclidiano, de todos modos las palabras 'yace entre ... y ...' no pueden propiamente hablando considerarse como palabras que tengan un sentido sino sólo como representantes de un argumento, al modo como la letra ' a ' lo es en ' a^2 '. Pero la

función cuyo argumento se representa es un concepto de segundo nivel en el que sólo pueden caer relaciones de tres fundamentos.

Universalidad lógica

[No antes de 1923]

En esta revista publiqué un ensayo sobre pensamientos complejos en el que también hallaban un lugar los pensamientos complejos hipotéticos²²⁰. Esto hace pensar en buscar un puente entre éstos con lo que en física, en matemáticas y en lógica se llama una **ley**, puesto que frecuentemente enunciamos una ley bajo la forma de una oración compleja hipotética que se compone de una o varias oraciones antecedentes y una oración consecuente. Sin embargo, hay antes de eso un obstáculo todavía. Los pensamientos complejos hipotéticos que yo discuto no pertenecen a las leyes puesto que les falta la universalidad que distingue a las leyes de los hechos particulares, como las que estamos acostumbrados a encontrar habitualmente, por ejemplo, en la historia. En realidad, la diferencia entre leyes y hechos particulares es profunda y drástica. La diferencia fundamental entre la actividad científica en la física y en la historia se basa en ella. La primera se esfuerza para encontrar leyes en tanto que la historia desea confirmar oraciones particulares. Es cierto, desde luego, que también en historia se desea obtener una comprensión causal, para lo cual tiene que, suponer al menos que hay regularidad.

Por lo pronto, eso es suficiente para sugerir la necesidad de una investigación más detallada de la universalidad.

El valor de una ley para nuestro conocimiento se basa en que ella abarca a muchos, a decir verdad a infinitamente muchos hechos individuales como casos particulares. Nosotros sacamos provecho del conocimiento de una ley en la medida en que a través de lo que se sigue al pasar de lo general a lo particular se extrae una gran cantidad de conocimientos individuales, para lo cual sin embargo es todavía imprescindible un trabajo mental: la extracción de conclusiones. Quien sabe cómo se lleva a cabo dicha transición también comprende lo que es la universalidad, en el sentido de la palabra al que aquí se alude. Mediante inferencias de otra clase nosotros podemos derivar nuevas leyes a partir de leyes ya conocidas.

¿Qué es, pues, la esencia de la universalidad? Puesto que aquí nos ocupamos de leyes y que las leyes son pensamientos, el asunto en cuestión sólo puede atañer a la universalidad de los pensamientos. Toda ciencia procede por

²²⁰ Frege se refiere a *Gedankengefüge* ["pensamientos complejos"], la tercera parte de las *Investigaciones Lógicas*. Las otras dos son *El pensamiento* y *La negación*. El presente escrito muy probablemente estaba intentado como la cuarta parte de esta investigación. La pieza referida fue publicada en español en *Escritos lógico-semánticos*; Carlos R. Luis y Carlos Pereda, tr., 1974, bajo el título "Articulación de pensamientos". Allí se encuentra también una traducción de la pieza actual.

medio de una serie de pensamientos que son reconocidos como verdaderos; pero los pensamientos mismos rara vez son objetos de observación de los cuales algo se enuncie; en cuanto tales, aparecen más bien como objetos de percepción sensorial. Es cuando enunciamos algo acerca de éstos que manifestamos un pensamiento. Es así como usualmente aparecen los pensamientos en la ciencia. Es, pues, al enunciar la universalidad de los pensamientos que los convertimos en objetos de observación y los colocamos en el lugar que normalmente ocupan los objetos de percepción sensorial. Estos que normalmente son objetos de investigación, sobre todo en las ciencias naturales, se distinguen en los fundamentos de los pensamientos, pues los pensamientos no son perceptibles sensorialmente. Desde luego que signos que expresan pensamientos pueden ser auditivos o visuales, no así los pensamientos mismos. Las impresiones sensoriales pueden llevarnos al reconocimiento de la verdad de un pensamiento, pero también podemos concebir pensamientos sin reconocerlos como verdaderos. También los pensamientos falsos son pensamientos.

Si un pensamiento no es perceptible por los sentidos, tampoco se puede esperar que lo sea su generalización. No estoy en posición de mostrar un pensamiento como puede hacerlo un mineralogista que muestra un mineral mientras llama la atención sobre su peculiar brillo. Determinar la universalidad a través de una definición se antoja imposible.

Podría parecer que el lenguaje ofrece una salida pues, por una parte, las oraciones son perceptibles por medio de los sentidos y, por la otra, expresan pensamientos. En tanto que medio de expresión de pensamientos, el lenguaje tiene que asemejarse a lo pensado. Podemos así esperar poder usarlo como puente entre lo sensorial y lo no sensorial. Una vez que nos hayamos puesto de acuerdo respecto a lo lingüístico, pudiera ser que se nos hiciera más fácil expandir la compenetración respecto a los pensamientos que se dibujan en el lenguaje. Aquí no se trata de la comprensión usual del lenguaje, ni de la aprehensión de los pensamientos que éste expresa, sino del aprehender esa propiedad de los pensamientos que yo llamo 'universalidad lógica'. Obviamente, se tiene que contar con la buena voluntad del otro y esta expectativa puede ser decepcionada. Hay también que poner atención en el uso del lenguaje. No deberíamos pasar por alto el abismo que separa el campo de lo lingüístico del de lo concerniente a los pensamientos y por el cual se imponen ciertas restricciones a su convergencia.

¿En qué forma aparece, pues, la universalidad en el lenguaje? Para el mismo pensamiento general tenemos varias expresiones:

'Todos los hombres son mortales'

'Cada hombre es mortal'

‘Si hay algo que es un hombre, entonces ese algo es mortal’.

La diferencia entre esas expresiones no concierne al pensamiento mismo. Para nosotros es aconsejable que se aplique sólo un único modo de expresión para evitar que diferencias deleznable, por ejemplo en cuanto al color del pensamiento, aparezcan como diferencias de pensamiento. Las expresiones que contienen ‘todos’ y ‘cada’ no son adecuadas para ser aplicadas en todos los casos en los que hay universalidad, porque no toda ley se deja amoldar bajo esta forma. En la última de estas formas de expresión tenemos también la forma de la oración compleja hipotética, difícilmente prescindible, y las partes indeterminadas de oración indicadas por ‘algo’ y ‘ello’; y es en éstas que se encuentra propiamente hablando la expresión de universalidad. A partir de estas formas de expresión nos es fácil transitar a lo particular sustituyendo las partes de la oración que indican de un modo indefinido por otras que designan de modo definido:

‘Si Napoleón es un hombre, entonces Napoleón es mortal’.

Es por esta posibilidad de transitar de lo general a lo particular que las únicas expresiones de universalidad que nos son útiles son las que tienen partes de oración que indican de modo indeterminado; pero si nos restringiéramos a ‘algo’ y a ‘ello’ sólo podríamos lidiar con casos enteramente simples. Esto sugiere que adoptemos el modo como la aritmética selecciona letras para las partes de las oraciones que indican de modo indeterminado:

‘Si *a* es un hombre, entonces *a* es mortal’.

Las letras de la misma forma se apuntan mutuamente. En lugar de las letras de la forma de ‘*a*’ podríamos por igual elegir ‘*b*’ o ‘*c*’, pero es esencial, que tengan la misma forma. Ahora bien, para ser precisos, al proceder así rebasamos los límites del lenguaje, destinado al oído, y nos desplazamos hacia un lenguaje escrito o impreso, destinado a la vista. Una oración que un escritor redacta es por lo pronto una instrucción para la formación de una oración proferida en un lenguaje en el cual secuencias de sonidos sirven como signos para expresar un sentido. Surge así en primer lugar una conexión indirecta entre un signo escrito y el sentido expresado. Una vez que esta conexión quedó establecida, se puede entonces también considerar directamente la oración escrita o impresa como la expresión de un pensamiento, esto es, como una oración en el sentido estricto de la palabra. Se obtiene así un lenguaje diseñado para la vista, pero que también un sordo puede aprender en caso necesario. En él pueden insertarse letras individuales como partes de la oración que indican de un modo indeterminado. El lenguaje recién mencionado, que quiero llamar **lenguaje auxiliar**, debería servirnos como puente entre lo sensorial y lo no sensorial. Este lenguaje contiene dos **componentes** distintos: **las estructuras de palabras** y **las letras** individuales. Las primeras

corresponden a las palabras del lenguaje hablado que deberían indicar de un modo indeterminado. Este lenguaje auxiliar tiene que distinguirse del lenguaje en el que se desarrolla mi proceso de pensar. Éste es el idioma español usual escrito o impreso, mi **lenguaje de exposición**. Las oraciones del lenguaje auxiliar, en cambio, son objetos sobre las que debería versar mi lenguaje de exposición. De ahí que tenga que poder designarlas en mi lenguaje de exposición, así como en un manual de astronomía los planetas son designados por medio de nombres propios, 'Venus', 'Marte'. **En tanto que nombres propios de oraciones del lenguaje auxiliar uso a estas mismas, sólo que entrecomilladas**. De esto una vez más se sigue que las oraciones del lenguaje auxiliar no están asociadas con la fuerza afirmativa. 'Si *a* es un hombre, entonces *a* es mortal' es una oración del lenguaje auxiliar en la que se expresa un pensamiento general. Nosotros transitamos de lo general a lo particular sustituyendo letras de forma idéntica que indican de un modo indeterminado por nombres propios que están conformados del mismo modo. Es esencial a nuestro lenguaje auxiliar que nombres propios conformados del mismo modo designen el mismo objeto (hombres). Aquí los signos (nombres) vacíos no son en lo absoluto nombres propios²²¹. Al sustituir las letras de la forma '*a*', las cuales designan de modo indeterminado, por nombres propios de la forma que tiene 'Napoleón', obtenemos entonces:

'Si Napoleón es un hombre, entonces Napoleón es mortal'.

Sin embargo, no se puede ver esta oración como conclusión, porque la oración 'si *a* es un hombre, entonces *a* es mortal' no está ligada con fuerza afirmativa y el pensamiento que expresa no parece estar reconocido aquí como verdadero; **sólo un pensamiento que es reconocido como verdadero puede servir de premisa para una conclusión**. Esta oración puede convertirse en conclusión, sin embargo, si las dos oraciones de nuestro lenguaje auxiliar se liberan de las comillas, lo cual hace posible que se les presente con fuerza afirmativa.

La oración compleja '**si Napoleón es un hombre, entonces Napoleón es mortal**' expresa un pensamiento complejo hipotético que se compone de un antecedente y de un consecuente. El primero se expresa en la oración '**Napoleón es un hombre**', el segundo en la oración '**Napoleón es mortal**'. No obstante, en nuestra oración compleja no hay exactamente una oración con la estructura de '**Napoleón es un hombre**'²²² o de '**Napoleón es mortal**'. En esta desviación de lo

²²¹ [Nota a pie de página de Frege] Llamo a los nombres propios de nuestro lenguaje auxiliar *configurados idénticamente* si el escritor tiene la intención de que sean configurados idénticamente y del mismo tamaño cuando es posible reconocer esta intención aún si no se logra en todo rigor.

²²² [Nota a pie de página del traductor] El problema al que se refiere Frege existe exactamente en esta forma sólo en la sintaxis alemana; en alemán, cláusulas subordinadas introducidas (con un adverbio de condicional, como en el presente caso) tienen el verbo finito al final; la siguiente

lingüístico respecto de lo que es pensado se manifiesta en nuestro lenguaje auxiliar una carencia que habría que subsanar. Formularé ahora el pensamiento que expresé más arriba en nuestra oración compleja '**si Napoleón es un hombre, entonces Napoleón es mortal**' por medio de la oración '**si Napoleón es un hombre, entonces Napoleón es mortal**' que llamaré en lo que sigue la segunda oración. Debería procederse del mismo modo en casos parecidos. Transformaré así la oración '*si a es un hombre, a es mortal*' en '*si a es un hombre, entonces a es mortal*', oración que llamaré en lo que sigue la primera oración.²²³ En la primera oración distingo las dos letras individuales de la forma '*a*' de la parte restante.

cláusula principal empieza entonces con el verbo finito en lugar de, por ejemplo, el sujeto. Todo el resto de la pieza trata de hacer coincidir estrictamente la configuración de las oraciones parciales con las respectivas oraciones independientes; pero en español no hay ninguna diferencia entre las dos formas.

²²³ [Nota a pie de página de Frege] La primera oración no expresa, como lo hace la segunda, un pensamiento complejo puesto que ni '*a es un hombre*' ni '*a es mortal*' expresan un pensamiento. Propiamente hablando, nos las habemos aquí sólo con componentes de oraciones, no con oraciones.

Referencias

Nota: Todas las traducciones al español son del autor del comentario crítico, a menos que se diga explícitamente lo contrario

- Angelelli (2000) Angelelli, Ignazio; "The Mystery of Frege's Bedeutung"; Revista Patagónica de Filosofía, 2, 2, 2000, 79- 92
- Baker/Hacker (1984) Baker, G. P.; P. M. S. Hacker; Frege: Logical Excavations; Basil Blackwell; Oxford 1984
- Baker/Hacker (1987) Baker, G. P.; P. M. S. Hacker; 'A Reply to "Dummett's Dig"' en *Philosophical Quarterly*, Vol. 37, p. 86-99
- Bell (1980) Bell, David; "On the Translation of Frege's Bedeutung"; *Analysis* Vol. 40, N°. 4 (Oct. 1980), pp. 191-195
- Davidson (1984) Davidson, Donald; *Inquiries into Truth and Interpretation*; Clarendon; Oxford
- Dejnozka (2010) Dejnozka, Jan; "Dummett's Backward Road to Frege and to Intuitionism" en Randall E. Auxier and Lewis Edwin Hahn (Eds.) *The Philosophy of Michael Dummett*, La Salle, Ill. The Library of Living Philosophers, Open Court Publishing Company, a division of Carus Publishing Company. En línea:
http://www.members.tripod.com/~Jan_Dejnozka/dummettsbackwardroadtofrege.pdf
- Diamond (2002) Diamond, Cora; "Truth before Tarski: After Sluga, after Ricketts, after Geach, after Goldfarb, Hylton, Floyd, and Van Heijenoort" (p. 39-51) en *From Frege to Wittgenstein, Perspectives on Early Analytic Philosophy*; Erich H. Reck, ed.; Oxford University Press, 2002
- Dummett (1973) Dummett, Michael; *Frege: Philosophy of Language*. Harper & Row; New York
- Dummett (1978) Dummett, Michael; *Truth and other enigmas*. Harvard; Cambridge, Mass.
- Dummett (1981) Dummett, Michael; *The Interpretation of Frege's Philosophy*; Duckworth, London.
- Dummett (1984) Dummett, Michael; "An Unsuccessful Dig. A Review of G.P. Baker and P.M.S. Hacker, Frege: Logical Excavations" en *Philosophical Quarterly*, Vol. 34, p. 379-401.
- Dummett (1988) Dummett, Michael; 'Reply to "Dummett's Dig" by Baker and Hacker'; en *Philosophical Quarterly*, Vol. 38, p. 87-103
- Dummett (1991) Dummett, Michael; *Frege and Other Philosophers*; Clarendon, Oxford.
- Dummett (1993) Dummett, Michael; *Origins of Analytical Philosophy*. Cambridge, Mass., Harvard University Press
- Dummett (1995) Dummett, Michael "The Context Principle: Centre of Frege's Philosophy". Max I. y Stelzner W. (Eds.), *Logik und Mathematik. Frege-Kolloquium Jena 1993* (3-19). Berlin, New York: Walter de Gruyter
- Ezcurdia (2003) Ezcurdia, Maite; "Introducing Sense" en *Manuscrito - Rev. Ing. Fil.*; Campinas, v. 26, n. 2, pp. 279 - 312, jul-dez- 2003

- Frege (1892) Frege, Gottlob; "Sobre Sentido y Referencia"* en L. Valdés Villanueva (comp.) (2000) *La búsqueda del significado* Madrid: Tecnos, pp. 27-48.
- Frege (1891) "Función y concepto" en *Ensayos de semántica y filosofía de la lógica* Madrid: Tecnos, 1998, pp. 53-79.
- Frege (1952) Frege, Gottlob; *Translations from the Philosophical Writings of Gottlob Frege*; Max Black y Peter Geach tr.; Philosophical Library, New York
- Frege (1972) Gottlob Frege; "Sobre sentido y referencia" en *Escritos lógico-semánticos* (Trad. Carlos R. Luis y Carlos García Pereda), Madrid: Tecnos, 1972, pp. 31 – 52
- Frege (1972a) Frege, Gottlob; *Conceptografía. Los fundamentos de la aritmética. Otros estudios filosóficos*. Trad. Hugo Padilla; UNAM; IIF; México; 1972
- Frege (1976) Frege, Gottlob; *Logische Untersuchungen*; Günther Patzig ed.; Vandenhoeck; Göttingen; 2a ed.; 1a. ed. 1966. (a) "Der Gedanke"; (b) "Die Verneinung"; (c) "Gedankengefüge"; (d) "E. Schröders Vorlesungen über die Algebra de Logik"; (e) "über die Zahlen der Herrn H. Schubert
- Frege (1979) Frege, Gottlob; *Gottlob Frege, Posthumous Writings*; Hans Hermes, Friedrich Kambartel, Friedrich Kaulbach, ed., con Gottfried Gabriel, Walburga Rödding; Peter Long, Roger White, tr. con Raymond Hargreaves; Basil Blackwell; Oxford
- Frege (1980) Frege, Gottlob; *Gottlob Freges Briefwechsel mit D. Hilbert, E. Husserl, B. Russell, sowie ausgewählte Einzelbriefe Freges*; Gottfried Gabriel, Friedrich Kambatel, Christian Thiel, Ed.; Meiner; Hamburg
- Frege (1983) Frege, Gottlob; *Nachgelassene Schriften*. Unter Mitwirkung von Gottfried Gabriel und Walburga Rödding bearbeitet, eingeleitet und mit Anmerkungen versehen von Hans Hermes, Friedrich Kambartel und Friedrich Kaulbach (= Gottlob Frege. Nachgelassene Schriften und wissenschaftlicher Briefwechsel, Bd. 1), zweite, erweiterte Auflage; Meiner, Hamburg.
- Frege (1990) Frege, Gottlob; *Kleine Schriften*; Zweite Auflage Herausgegeben und mit Nachbemerkenngen zur Neuauflage versehen von Ignacio Angelelli; Olms; Hildesheim; Zürich; New York,
- Frege (1988) Frege, Gottlob; *Die Grundlagen der Arithmetik*. Hamburg: Meiner
- Frege (1997) Frege, Gottlob; *The Frege Reader*. Beany M. (Ed.). Malden, Oxford. Blackwell
- Frege (1998) Frege, Gottlob; *Begriffsschrift und andere Aufsätze*. Angelli I. (Ed.), 2a ed., Hildesheim, Zürich, New York. Georg Olms Verlag.
- Frege (2001) Frege, Gottlob; "Ausführungen über Sinn und Bedeutung". *Schriften zur Logik und Sprachphilosophie: aus dem Nachlass*. Gabriel G. (Ed.). Hamburg. Meiner.
- Frege (2008) Frege, Gottlob; *Funktion, Begriff, Bedeutung Fünf logische Studien*; 2a ed. Günther Patzig (Ed.), Göttingen, Vandenhoeck & Ruprecht
- Frege (2009) Frege, Gottlob; *Die Grundgesetze de Arithmetik I/II*. Hildesheim, Zürich, New York. OLMS

- Gabriel (2002) Gabriel, Gottfried; "Frege, Lotze, and the Continental Roots of Early Analytic Philosophy" (p. 39-51) en *From Frege to Wittgenstein, Perspectives on Early Analytic Philosophy*; Erich H. Reck, ed.; Oxford University Press, 2002
- Grossmann (1995) Grossmann, Reinhard; "Frege's Fundamental Philosophical Mistakes". Max I. y Stelzner W. (Eds.), *Logik und Mathematik. Frege-Kolloquium*
- Haaparanta (1985) Haaparanta, Leila; "On Frege's Concept of Being"; Haaparanta, L.; en Knuutila, S. and Hintikka, J. (eds.): *The Logic of Being: Historical and Critical Studies*, D. Reidel, Dordrecht; 1985.
- Haaparanta (1986) Haaparanta, Leila; "Frege on Existence" en *Frege synthesized. Essays on the Philosophical and Foundational Work of Gottlob Frege*; Leila Haaparanta and Jaakko Hintikka ed.; Reidel; Dordrecht, Boston, Lancaster, Tokyo; 1986.
- Heijenoort (1967) Heijenoort, Jan. van, *From Frege to Gödel; A Source Book in Mathematical Logic, 1879-1931*; Harvard University Press, Cambridge, Mass.
- Heijenoort (1986) Heijenoort, Jan. van, "Frege and Vagueness"; *Frege synthesized. Essays on the Philosophical and Foundational Work of Gottlob Frege*; Leila Haaparanta and Jaakko Hintikka ed.; Reidel; Dordrecht, Boston, Lancaster, Tokyo; 1986.
- Hintikka (1986) Hintikka, M. B. & Hintikka Jaakko; *Investigating Wittgenstein*; Oxford, New York. Basil Blackwell
- Klement (2012) Klement, Kevin C.; "Frege's Changing Conception of Number"; *THEORIA*, 2012, 78, 146-167
- Kripke (2008): Kripke, Saul A.; "Frege's Theory of Sense and Reference: Some Exegetical Notes"; *Theoria*, 2008, 74, 181-218. Reimpresión en: Saul A. Kripke; *Philosophical Troubles. Collected Papers, Volume I*; Oxford University Press; Oxford; 2011.
- Lotze (1843) Lotze, Hermann; *Logik*; Reimpresión según la 2a ed. de Meiner, Leipzig, 1912.
- McDowell (1998) McDowell, J.; *Mind, Value, and Reality*. Harvard University Press; Cambridge, Mass.
- Milkov (2013) Milkov, Nikolay; "The Joint Philosophical Program of Russell and Wittgenstein and Its Demise"; *Nordic Wittgenstein Review*; aún sin publicar; acceso por Internet: <http://philpapers.org/archive/MILTJP.1.pdf>
- Rolleri (1981) Rolleri, José Luis; "Una reconstrucción conjuntista de la semántica de Frege"; *Diánoia*, volumen XXVII, número 27, 1981
- Ruffino (2002) Ruffino, Marco; "Logical Objects in Frege's *Grundgesetze*, Section 10"; *From Frege to Wittgenstein, Perspectives on Early Analytic Philosophy*; Erich H. Reck, ed.; Oxford University Press, 2002
- Rorty (1967) Rorty, Richard (ed.); *The Linguistic Turn; Essays in Philosophical Method With Two Retrospective Essays*; The University of Chicago Press; Chicago; 1967, 1992
- Russell (1905) Russell, Bertrand; "On Denoting". *Mind* 14. En línea: http://www.philosophie.hu-berlin.de/institut/lehrebereiche/logik/lehre/russell_on_denoting.pdf
- Russell (1937) Russell, Bertrand; "Appendix A. The Logical and Arithmetical Doctrines of Frege". *The Principles of Mathematics*; 2a ed. London. Kimble & Bradford
- Sluga (1980) Sluga, Hans; *Gottlob Frege. The Arguments of the Philosophers*; Routledge, London y New York, 1980.

- Tomasini (2012) Tomasini Bassols, Alejandro; "Los albores de la Filosofía Analítica: Frege"; en *Filosofía Analítica: un panorama*, 2ª ed. (1ª ed. 2004), Plaza y Valdés, México, 2012.
- Yourgrau (2012) Yourgrau, Palle; "Kripke's Frege"; Thought Volumen 1, N°2 páginas 100–107, junio de 2012
- Zalta (2013) Zalta, Edward N.; "Frege's Theorem and Foundations for Arithmetic"; <http://plato.stanford.edu/entries/frege-logic/>; (1998, 2013)