



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO**

FACULTAD DE CIENCIAS

**ECONOFÍSICA DE LA DISTRIBUCIÓN DEL INGRESO EN
MÉXICO**

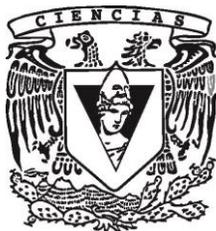
T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

FÍSICO

P R E S E N T A:

PÁVEL GUSTAVO SORIANO HERNÁNDEZ



**DIRECTOR DE TESIS:
DR. RICARDO LINO MANSILLA CORONA
2015**



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

PRESENTE

Todos los físicos son mentirosos.

*Atribuido a Johannes Stark en la carta remitida a F. P Bacon. En busca de
Klingsor. Jorge Dolpi.*

*A mis padres Carmen y Gustavo. Gracias por siempre haberme apoyado (y
seguir haciéndolo) para cumplir mis metas y sueños. Esto es por y para
ustedes.*

*A mi hermana Clementina, que siempre ha resultado ser un gran apoyo, muy
a su manera.*

*A todas las personas que me han brindado conocimiento a lo largo de mi vida,
cosa invaluable para mí.*

*A mis familiares y amigos que de alguna u otra manera siempre estuvieron
ahí.*

"Porque a cualquiera que tiene, se le dará y tendrá más, pero al que no tiene, aun lo que tiene le será quitado"

Versículo 12 del capítulo 13. Evangelio según San Mateo.

Quisiera agradecer:

Al Dr. Ricardo Mansilla Corona, por el apoyo, tiempo e invaluable conocimiento brindados para la realización, revisión y exposición de este trabajo.

Al Dr. Marcelo del Castillo Mussot, por su revisión y aportes, así como por la oportunidad de seguir extendiendo este trabajo hacia otros rumbos.

A mi padre, MTI Gustavo Soriano, por su apoyo en la manipulación de software.

Al Ing. Jorge Miranda Videgaray por su apoyo y acertados comentarios, que me motivaron a indagar más en temas de Econofísica y Economía.

Al Instituto de Física y la DGAPA de la UNAM, por el financiamiento brindado para la realización de este trabajo.

En general, a todas aquellas personas que de alguna manera, me apoyaron en la realización de este proyecto.

ECONOFÍSICA DE LA DISTRIBUCIÓN DEL INGRESO EN MÉXICO

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

ANTECEDENTES----- 8 - 29

- I. UN POCO DE ECONOMÍA
- II. SISTEMAS COMPLEJOS
- III. ¿ECONOMÍA + FÍSICA = ECONOFÍSICA?
 - a. Determinismo e imprevisibilidad
 - b. Termodinámica y mecánica estadística

DISTRIBUCIONES DE BOLTZMANN-GIBBS Y DE PARETO: BASE TEÓRICA Y EVIDENCIA EMPÍRICA----- 30 - 54

- I. DISTRIBUCIÓN DE BOLTZMANN-GIBBS DE LA ENERGÍA
- II. LEY LOCAL DE CONSERVACIÓN DEL DINERO
- III. MECÁNICA ESTADÍSTICA DE LA DISTRIBUCIÓN DEL DINERO
- IV. DISTRIBUCIÓN DE PARETO O LEY DE POTENCIAS
 - a. Distribuciones libres de escala
 - b. Midiendo leyes de potencias
 - c. Parámetros x_{min} y α para la demarcación de las diferentes zonas en la distribución
- V. MODELOS TEÓRICOS DE DISTRIBUCIÓN DE INGRESO
- VI. EVIDENCIA EMPÍRICA DE DISTRIBUCIONES DE INGRESO Y RIQUEZA

RESULTADOS----- 55 - 62

- I. AJUSTE DE LA DISTRIBUCIÓN DEL INGRESO EN MÉXICO
 - a. Estimación de los parámetros x_{min} y α para la demarcación entre la zona de “ingresos bajos” de la zona de “ingresos altos”
 - b. Gráficas de los datos de las ENIGH's del año 1992 al 2008

CONCLUSIONES----- 63 - 65

BIBLIOGRAFÍA

INTRODUCCIÓN

Los seres humanos se sorprenden con frecuencia al descubrir que los físicos están aplicando su especialidad a las finanzas y la economía. De hecho, muchos colegas que actualmente han centrado su atención en problemas de sociología, economía y finanzas aún comentan en ocasiones que estas áreas no caen dentro del dominio de la física. La historia, sin embargo, nos muestra lo contrario. Mientras que Aristóteles, Copérnico, Newton, Huygens, Pascal, Bernoulli y Halley son bien conocidos por sus estudios en fenomenología natural, también son recordados por importantes contribuciones que llevaron a gran comprensión y avances en economía, finanzas y en general las ciencias sociales.

El término econofísica fue acuñado a principios de la década de los noventa en una conferencia sobre Física y Finanzas celebrada en Calcuta por Eugene Stanley para englobar el trabajo que los físicos realizaban sobre diversos aspectos de la economía. En sus inicios, la atención se centró principalmente en el análisis de mercados financieros. Sin embargo, pronto emergió otra dirección más allegada a la economía que a las finanzas. Ésta estudia las distribuciones de probabilidad del dinero, riqueza e ingresos y la superpone con la ya añeja línea de investigación en economía que estudia la inequidad en una sociedad.

En este trabajo, se presenta a la econofísica como consecuencia inmediata de la relación interdisciplinaria que se ha estado manifestando desde hace ya algunos años entre ciencias y humanidades, en este caso particular, entre física y economía; se discute sobre su origen, importancia y ventajas en el panorama científico y económico modernos; se plantea uno de los modelos y pilares de la física estadística, la teoría cinética de colisiones en gases, en analogía a la transferencia de dinero entre agentes en un sistema económico. Con esto, se plantea la distribución resultante de este fenómeno natural, la distribución de Boltzmann-Gibbs, como alternativa a la ley de Gibrat en el caso de ingresos bajos y medios, para explicar la función de distribución de probabilidad que sigue este proceso económico en esta zona de la distribución, tomando en cuenta que el sistema económico sigue un principio de máxima entropía, y, a la vez, una analogía entre el principio de conservación de la energía con un principio conservativo local de

dinero, por primera vez planteados por dos reconocidos investigadores en econofísica: Dragulescu y Yakovenko [23] [24]. Por otro lado, se plantea también la ya conocida y frecuentemente encontrada, ley de Pareto para la zona de ingresos altos en la distribución que, en su forma más general (las leyes de potencias), han sido recientemente fundamentales en la teoría de los sistemas complejos para la detección de sistemas dinámicos, caóticos, auto-organizados y no lineales y cuyo origen es planteado desde diferentes perspectivas, tales como fenómenos críticos, redes complejas, auto-organización, entre otros.

Con la base teórica planteada y mediante el análisis de datos sobre ingresos publicados por el Instituto Nacional de Estadística y Geografía (INEGI) en su encuesta nacional de ingresos y gastos de los hogares (ENIGH) para diferentes años, se pretende comprobar que la distribución del ingreso en México puede ser modelada y caracterizada por los planteamientos y distribuciones anteriormente mencionados aún cuando se considere un ajuste inflacionario para los ingresos de cada año. Esto, mediante el uso de herramienta matemática, estadística y computacional, que facilitó la obtención de distintos parámetros característicos de las distribuciones planteadas, así como del ajuste para las diferentes distribuciones propuestas.

ANTECEDENTES

I. UN POCO DE ECONOMÍA

La economía, y en particular las finanzas, se han convertido en el transcurso de la historia, en un tema tan común para cualquier persona como el estado del tiempo. A diario se puede verificar esto, ya que en los periódicos de todo el mundo así como en otros medios de comunicación masiva se analizan las finanzas junto al clima y, con el mismo interés, el estado de las bolsas en el mundo, sus posibles amenazas y fluctuaciones. Incluso se pueden observar en internet páginas en las que se aseguran poder obtener ganancias millonarias a partir de unos cuantos dólares, lo cual es indicativo del tremendo interés que las personas tienen, en general, en el poder del dinero y en aprender a generarlo.

Incluso actualmente todos hemos oído hablar (o incluso desgraciadamente lo hemos vivido), gracias a la gran difusión que se le da a estos temas, de crisis económicas, inflación y desempleo; sabemos que los precios de los productos están muy relacionados con la oferta y la demanda de los mismos, hemos oído hablar de neoliberalismo, caídas de mercados, futuros, opciones, portafolios financieros, etc., etc., etc. Sin embargo, pocos saben de qué se trata la economía. De hecho, muy pocos saben además que muchas herramientas y perspectivas de la física teórica y del estudio de los sistemas complejos tienen aplicaciones en el estudio y descripción de sistemas económicos y financieros. Este es un tema del siguiente capítulo.

Por el momento, nos dedicaremos a tratar de describir a “grosso modo”, de qué trata la economía.

En términos generales, la economía estudia cómo las personas asignan e intercambian recursos y qué consecuencias tienen estas acciones sobre las decisiones y acciones de otras personas. A grandes rasgos, la economía se divide en las siguientes áreas:

1. **Microeconomía:** Es la rama de la economía en donde se estudian las decisiones de asignación e intercambio de recursos a nivel de agentes individuales y/o firmas. Por ejemplo, la determinación de precios de bienes de intercambio, la ubicación de negocios, las estrategias de competencia entre firmas, entre muchos otros.

2. **Macroeconomía:** Se refiere a la descripción agregada de las actividades económicas. Por ejemplo, la productividad y el consumo por sectores en una sociedad, en una región o en todo el país. En esta área caen los estudios sobre la inflación, recesión, producto interno bruto, empleo, etcétera.
3. **Finanzas:** Se relaciona con las decisiones de asignación de recursos en el tiempo bajo condiciones de riesgo (incertidumbre). En particular podemos mencionar la descripción de las actividades que se desarrollan en los mercados donde se compran y venden instrumentos financieros como acciones y bonos; instrumentos derivados como opciones, futuros y swaps (un swap es un contrato por el cual dos partes se comprometen a intercambiar una serie de cantidades de dinero en fechas futuras); o los mercados de divisas. Pero también abarca otras áreas, como las finanzas personales, donde las decisiones de asignación de bienes en el tiempo determinan, por ejemplo, los fondos de retiro, las inversiones familiares, etcétera.

De lo anterior es evidente que el campo de estudio de la economía es extremadamente amplio, y de profundas repercusiones en todos los ámbitos del quehacer humano. Esto hace realmente sorprendente el hecho de que el grueso de la economía se base en una hipótesis fundamental: “Las decisiones de los participantes en todo sistema económico se toman de manera *racional*” [3]. Específicamente, cada agente toma sus decisiones buscando maximizar su “felicidad” (utilidad) [4]. Hay que mencionar que esta hipótesis no hace referencia a que es lo que hace feliz a cada persona, sino que sólo afirma que los agentes buscan maximizar aquello que los haga felices, cualquier cosa que esto sea¹.

Evidentemente, esta hipótesis es sólo una aproximación al comportamiento real de las personas, pero suena plausible que en general, sí represente bastante bien el comportamiento ‘típico’ de los actores en la economía. A partir de esta hipótesis, por ejemplo, se puede predecir el efecto que tienen los impuestos sobre el precio y volumen de ventas de un producto, o que los mercados equilibran en un estado ‘óptimo’ para todos los participantes [5].

¹ Este es el denominado principio de máxima utilidad, pilar de la teoría económica tradicional.

En finanzas, donde se incorpora la variable temporal al proceso de decisión, además de la hipótesis de agentes racionales, se hace frecuentemente otra hipótesis: que los mercados son “eficientes” (Hipótesis de Mercado Eficiente o **HME**). Esto significa que “se supone que toda la información sobre un producto que pueda proveer la oportunidad de obtener una ganancia sin riesgo incentiva acciones que ‘inmediatamente’ modifican el precio del producto, cancelando esa oportunidad” [3], lo que significa que los precios cambian reflejando en cada instante toda la información disponible. De manera muy explícita: esta hipótesis significa que los precios son ‘procesos markovianos’, cuyos cambios son independientes de la historia pasada del agente económico. Muchos trabajos en literatura económica [29] [30] [31] usan un proceso estocástico para describir dinámicas de ingreso o riqueza individual y así derivar sus distribuciones de probabilidad. A esto se le podría llamar “aproximación de un solo cuerpo” debido a que las fluctuaciones de ingreso o riqueza son consideradas independientemente para cada agente económico [21].

Indudablemente, el alcance y éxito de los modelos económicos son extraordinarios. Sin embargo, es claro que todavía existen problemas por resolver, como es evidente a la vista de las frecuentes crisis económicas que nos preocupan y afectan a todos y de uno de los problemas que ha acompañado a la humanidad desde los inicios de la sociedad: la inequidad en la distribución de recursos naturales entre individuos.

Esto hace importante identificar y entender que es lo que ha fallado, o qué es necesario implementar en los modelos económicos para, idealmente, evitar estas crisis, o en su defecto, predecirlas y dar los pasos para resolverlas eficientemente, así como plantear soluciones al problema de la desigualdad en la repartición de recursos entre agentes en una sociedad.

Además, no sólo se ha fallado en lograr predecir y evitar las crisis financieras, también se ha fallado en la predicción del impacto que las crisis tienen tanto a escala local como a escala global. Esto es debido a que los modelos económicos frecuentemente no contemplan siquiera la existencia de los eventos que desatan las crisis. Ante esto, los economistas han reconocido que los supuestos sobre los que descansa la teoría económica podrían no ser del todo correctos. De

hecho, economistas tan reconocidos como Paul Krugman y Joseph Stiglitz, ambos premios Nobel de Economía (2008 y 2001, respectivamente) han manifestado su descontento con algunas de los pilares teóricos de la economía (para más detalle sobre este asunto se pueden consultar las Ref. 6 y 7).

De hecho, en mayor o en menor grado, todos los supuestos fundamentales de la economía han sido cuestionados. Por ejemplo, se ha puesto en duda la hipótesis de agentes racionales. Existe evidencia de que en ocasiones efectivamente sí se toman decisiones de forma *'irracional'*; decisiones más orientadas por la aversión al riesgo que por la búsqueda de máxima utilidad, y otras decisiones tomadas siguiendo un comportamiento gregario (por presión social y *herding o pastoreo, el acto de actuar en manada*) [3]. Como bien decía Keynes, “todas las caídas del mercado están sobrevaluadas por el pánico de los inversionistas” [11]. Esto puede observarse en la caricatura de la figura 1 en la que, en este escenario, los crashes se producen cuando los agentes en grupo comienzan a vender, derrumbando los precios. Identificar hasta qué grado se toman decisiones gregarias es importante para tratar de entender ciertos eventos no sólo en el mercado financiero [9], en el que también se han hecho análisis empíricos [10], sino también en el intercambio de bienes y servicios (transacciones de dinero, el pago de sueldos y salarios, entre otros) ya que podrían dar lugar a una *'irracionalidad colectiva'*, a pánicos y a grandes colapsos financieros y sociales [12] [3].



Figura 1. Caricatura clásica de Kal (1989), que ilustra, de manera satírica, el comportamiento gregario y la irracionalidad de agentes, en la sala de operaciones bursátiles. En palabras de Ricardo Mansilla en su libro *Una breve Introducción a la Econofísica*: “Los inversionistas son la especie más asustadiza del planeta”.

Otros posibles defectos en los fundamentos de la economía son, por un lado, el enfoque que del 'agente representativo', el cual ignora la diversidad en el mundo real y modela la economía como si el mundo estuviese poblado por agentes y firmas 'promedio'; en vez de contemplar que pueden haber diferentes intereses y capacidades en juego, y por lo tanto una diversidad de objetivos y estrategias actuando simultáneamente [9]. Por otro lado también se ha cuestionado la hipótesis de que los mercados son estables, eficientes [13], cuando parece evidente que el estado en que se encuentran frecuentemente, difícilmente podría identificarse como un estado de equilibrio [3].

II. SISTEMAS COMPLEJOS

Todo el mundo hemos relacionado la palabra complejidad con dificultad. Algunas personas le temen y otros hasta huyen de la misma, ya que en el argot tradicional, la palabra complejo suele tener un sentido incluso negativo. Tanto así que una de las definiciones del diccionario de la Real Academia de la lengua de Española define complejo como "complicado", y todos tenemos noción que complicar está relacionado con hacer más difícil.

Sin embargo, otra de las definiciones que da el diccionario, a manera de adjetivo es: "Que se compone de elementos diversos", y es esta la definición que se apega más a la concepción moderna (y científica) de este término. Hoy en día, se hace mucho hincapié en la importancia de la dinámica no-lineal y de los sistemas complejos como herramientas sólidas y fundamentales para la comprensión del mundo donde vivimos. En palabras de Octavio Miramontes:

"En la última década se ha producido, en prácticamente todos los campos del quehacer científico, una importante transformación conceptual y metodológica ligada íntimamente al estudio de los llamados fenómenos no-lineales, cuyo análisis se engloba, parcialmente, dentro de las llamadas ciencias de la complejidad o de los sistemas complejos. Como parte de esta nueva visión, se ha puesto en evidencia que diversas propiedades espacio-temporales de los sistemas complejos surgen espontáneamente a partir de interacciones de los elementos constituyentes, en escalas de tiempo y longitud considerablemente mayores que las escalas donde ocurren dichas interacciones. Estas propiedades, llamadas propiedades emergentes, han comenzado a ser estudiadas con una familia nueva de herramientas y de conceptos originados en la interacción interdisciplinaria de

varios campos de la ciencia, desde la física, la biología, la química, la economía, la sociología, etcétera” [2].

Posteriormente, Miramontes nos otorga una caracterización de un sistema complejo (aún no es posible hablar de una definición formal), algo similar a lo que podemos encontrar en un diccionario convencional. Él declara:

“Los sistemas complejos están formados por un conjunto grande de componentes individuales que interactúan entre sí y que pueden modificar sus estados internos como producto de tales interacciones. Tales sistemas pueden ser estructuralmente simples, aunque tal simplicidad no impide que exhiban comportamientos dinámicos diversos y no triviales. Los sistemas complejos pueden situarse en regímenes críticos caracterizados por la presencia de fluctuaciones espaciales y temporales en todas las escalas posibles. Esta situación de criticalidad puede alcanzarse de manera espontánea y sin la intervención de factores o fuerzas externas al sistema; se habla entonces de un proceso auto-organizado. El proceso de interacciones puede generar comportamientos colectivos y globales. Es decir, conductas que no están definidas en los elementos individuales, pero que emergen como un proceso colectivo y que no pueden ser reducidas ni explicadas tomando aisladamente los elementos constituyentes” [2].

Uno de los ejemplos más simples de un sistema complejo que se puede hallar en el mundo físico es un fluido. Los fluidos consisten en muchas moléculas “individuales” que a su vez interactúan entre ellas por medio de fuerzas electromagnéticas e interacciones cuánticas. Éstas frecuentemente producen comportamiento complejo, que puede estar muy organizado, a la manera de un tornado, o semi-caótico, como en un flujo altamente turbulento. Lo que se ve en realidad a menudo depende del tamaño del observador. Granjeros en Estados Unidos frecuentemente ven el fenómeno altamente estructurado como se puede apreciar en la figura 2. Sin embargo, una mosca atrapada en la estela del mismo tornado se sorprenderá sin duda alguna al saber que es parte de dicho flujo bien definido [15].



Figura 2. Un tornado es un ejemplo de fenómeno altamente organizado a gran escala (visible para un observador fuera del mismo), mientras que es aleatorio o azaroso a una escala local (experimentado así por alguien que se encuentre en medio del tornado).

El clima de la tierra, compuesto por la atmósfera, la biósfera, océanos, todos sujetos a procesos intra y extra terrestres, tales como gravedad, radiación solar y la generación de gases de efecto invernadero también forman ejemplos de sistemas complejos. Incluso con el poder computacional moderno somos incapaces de predecir el clima, únicamente podemos mencionar probabilidades sobre el mismo. Aun así, este sistema caótico contiene regularidades. Como el invierno viene después del verano, o la noche del día en patrones predecibles, esto también se refleja variaciones sistemáticas, estacionales y diarias del promedio de la temperatura [15].

La biología es otra gran fuente de sistemas complejos. El cuerpo humano consiste de numerosos órganos con numerosas funciones que interactúan entre sí, dependiendo de fuentes externas tales como alimentos, aire y agua, para poder operar en un bien regulado y viviente estado. Ejemplo de un órgano como sistema complejo es el cerebro, que consiste típicamente de alrededor de 10^{12} neuronas. A nivel celular, la replicación del ADN y la formación de proteínas son controlados por varios procesos bioquímicos simultáneos dentro del sistema celular.

Para terminar con los ejemplos, uno de los sistemas más complejos en nuestro mundo globalizado y entrelazado podría decirse que es la sociedad misma: la sociedad global de humanos que forman la economía con sus agentes, empleados, consumidores, bienes capitales tales como máquinas, fábricas, sistemas de transporte, fuentes naturales y sistemas financieros.

Muchos investigadores coinciden en que un sistema complejo es una “propuesta de organización de la realidad”, concebida como una “totalidad organizada” abierta, condicionada por una estructura e indescomponible [2]; y a esto podría agregársele que esta posibilidad de organización de formación de estructuras se da en diversas escalas. Sin embargo, definir las escalas correctas para hacer cualquier análisis no es sencillo. Por ejemplo, en biología podríamos definir una completa jerarquía de los niveles que van desde el nivel atómico, pasando por el nivel celular y hasta el estado humano. Podría pensarse que deberíamos empezar con cálculos de mecánica cuántica y terminar con alguna descripción del comportamiento humano. Esto requeriría más información de la que podríamos tener en el presente pero incluso si tuviéramos acceso a dicha información, estaría fuera del alcance de la habilidad de cualquiera.

Un punto clave para recordar es que cualquier descripción macroscópica de un sistema usa únicamente unas pocas variables para caracterizar y describir el sistema de forma global o en escalas de tiempo. El movimiento microscópico no es de nuestro interés. Por ejemplo un fluido puede ser descrito por la densidad local y campos de velocidades. Sin embargo, detrás se encuentran escondidos movimientos e interacciones de muchas moléculas que forman el sistema completo. De manera similar al observar los mercados financieros, uno puede escoger las variaciones en precios de los activos para caracterizar el sistema macroscópico. Sin embargo detrás de estas fluctuaciones de los precios está la economía global, manejada por los actos de numerosos individuos comprometidos con el comercio, juntos además con eventos externos tales como guerras, desastres naturales (terremotos, erupciones volcánicas, entre otros), etcétera [15].

Por otro lado, Germinal Cocho en el libro “Perspectivas en la teoría de sistemas”, nos presenta algunas contribuciones de diversos científicos importantes en el ámbito de la teoría de sistemas abiertos: desde Ilya Prigogine, premio Nobel de Química en 1975 por sus contribuciones a la termodinámica lejos del equilibrio, y en particular por sus investigaciones sobre estructuras disipativas, pasando por los planteamientos paralelos de Hermann Haken con respecto a lo que denominó sinérgica, en el que se estudian los cambios de fase fuera del equilibrio y la autoorganización en física, química y biología y sobre el inicio de las investigaciones de los

sistemas complejos en México (en particular la Facultad de Ciencias y el Instituto de Física de la UNAM) hasta finalmente llegar a las importantes aportaciones e investigaciones del famoso Instituto de Investigaciones en Ciencias de la Complejidad, de Santa Fe, Nuevo México, EEUU, en el que permanecen durante periodos de longitud variable, físicos, matemáticos, biólogos y científicos sociales, tratando de entender lo que se tiene de similar y de diferente, así como el planteamiento y solución de diversos problemas interdisciplinarios.

El Instituto de Investigaciones en Ciencias de la Complejidad de Santa Fe, Nuevo México, EEUU, creado en 1984, fue fundamental para el desarrollo de la teoría de los sistemas complejos y en particular, en su aplicación a la economía. Es probablemente la más famosa institución dedicada a la investigación de los sistemas complejos. Su fundador, George Cowan, es un distinguido químico, que compartió con anterioridad su tiempo entre director de investigaciones del Laboratorio Nacional de Los Álamos y la gerencia de un banco local. Por aquella época, los sistemas dinámicos caóticos, la geometría fractal, los autómatas celulares y otras teorías de moda se habían ganado el centro de la atención de una parte importante de la comunidad científica. Las computadoras permitieron explorar fenómenos y modelos de los cuales se tenía un conocimiento muy incompleto, dado lo limitado de los procedimientos de investigación. A manera de ejemplo, Poincaré había anunciado en sus trabajos que algunos sistemas poseían la propiedad de la dependencia sensitiva con respecto a las condiciones iniciales, sin embargo, la irrupción del concepto de *sistema caótico* tuvo que esperar a Edward Lorenz y su precursor trabajo en 1963 ('Deterministic Non-periodic Flow', Journal of Atmospheric Science, Vol. 20, 1963), en el cual mostró que en sus simulaciones computacionales de la dinámica atmosférica, si se cambiaban ligeramente las condiciones iniciales, el comportamiento futuro del sistema cambiaba drásticamente [11] (De igual forma los trabajos de Maurice Julia que estudió conjuntos fractales, así como B. Mandelbrot). Es importante mencionar que la definición de sistema caótico o de caos propiamente, no existe, ya que la definición de caos es básicamente la pregunta ¿qué hace a un sistema dinámico caótico en vez de no caótico? Para esto, Stephen Kellert (profesor emérito de ecología social y *Senior Research Scholar* de la Escuela de estudios forestales y ambientales de la Universidad de Yale) proporciona una definición de la teoría del caos adecuada y suficiente para

los propósitos de este trabajo. El define a la teoría del caos como: “el estudio cualitativo del comportamiento aperiódico inestable en sistemas dinámicos no lineales deterministas” [14]. Cabe mencionar que el mismo Kellert suele ser ambiguo en su definición, en cuanto a si el caos es sólo un comportamiento de modelos matemáticos o de sistemas del mundo real, sin embargo, en este trabajo lo manejaremos para ambos (en realidad las pruebas empíricas de esto son vastas).

En resumen: aunque aún no hay una definición estricta acordada de sistema complejo, probablemente el mejor modo de describirlo es diciendo que la complejidad es el comportamiento de colecciones de muchas unidades interactuando y que evolucionan en el tiempo. Dichas interacciones, que frecuentemente son no lineales, son responsables de fenómenos colectivos coherentes y de propiedades denominadas emergentes. Estas pueden ser descritas solamente de escalas mucho más grandes que la de unidades individuales, desde las que pueden no ser directamente deducidas. En este sentido, **el todo es más que la suma de sus componentes.**

En los anhelos de los fundadores del Instituto de Santa Fe estaba la creación de una institución dedicada al estudio de los sistemas complejos. Esto incluía desde el origen de la vida hasta los sistemas sociales. Cowan creyó que la economía estaba entre los sistemas complejos que demandaban una urgente investigación. Por esos años, la economía neoclásica, que es la ‘corriente principal’ en las doctrinas económicas actuales [11], había alcanzado ya un grado elevado de formalismo matemático. Esta tendencia, que tiene su origen en la citada obra (y pese a eso poco leída) *Eléments d’économie politique pure*, publicada en 1874 por el economista francés León Walras, había llevado a la construcción de un universo en el cual agentes económicos perfectamente racionales intercambiaban sus mercancías en unos mercados perfectamente competitivos que siempre tendían al equilibrio. A pesar de esto, la coincidencia entre teoría y práctica ha sido poco evidente [11]. Esto demostraba que había más que razones suficientes para intentar un nuevo enfoque de los problemas económicos.

Para esto, se organizaron tres conferencias sobre economía, con el único fin de encontrar algún nuevo paradigma que estuviera más acorde con la realidad. En la Ref. 11 se menciona de forma satírica, que cualquiera de las conferencias podría haberse descrito, en mayor o menor medida,

como una conversación de sordos entre profesionales de la economía y las finanzas por un lado, y la comunidad científica (físicos, matemáticos, biólogos y especialistas en ciencias de la computación) que conformaba el prestigioso Instituto de Santa Fe. Las tres conferencias pueden resumirse, a muy grandes rasgos, en la confrontación entre economistas que defendieron fervientemente la HME, aun cuando no explicaba fenómenos ocurrentes en la economía mundial (como la crisis de la deuda externa del Tercer Mundo) y la comunidad científica, sorprendida de la exuberancia de los modelos propuestos por su contraparte así como de la distancia entre la teoría económica y la realidad, que se había hecho de “artilugios” (tales como el concepto de atractor extraño, entre otros) para intentar explicar dichos fenómenos, y darles una causa y un principio. La visión de estos científicos del problema era completamente opuesta a la de los profesionales de la economía: “el centro de la argumentación de estos especialistas fue el carácter no-lineal de los fenómenos económicos debido fundamentalmente al *comportamiento adaptativo* de sus agentes, así como la posibilidad real de simular escenarios económicos complicados a partir de la potencia de cálculo alcanzada ya por las computadoras” [11].

Con esto quedaba demostrado que era necesario un nuevo enfoque, una perspectiva fresca de la economía y de las razones del porque su pilar más fuerte, la HME, no era del todo correcta. Los científicos estudiosos de los sistemas complejos alzaron la mano para su explicación, pero fue en la física (y en particular, en la física estadística) en donde se encontraron modelos “satisfactorios” para el entendimiento de los mercados, de la distribución de la riqueza, entre otros fenómenos económicos, así como en muchos conceptos y estudios de la ciencia de la complejidad, que apoyan y explican dichos fenómenos o bien, que son indicios de comportamiento complejo y caótico, tales como las leyes de potencias.

No cabe duda que el mercado financiero y en general los sistemas económicos, son ejemplos fuertes de sistemas complejos; sistemas que emerge como resultado de la actividad dinámica de mucha, mucha gente que participa simultáneamente en transacciones financieras, causando que los precios en los activos se muevan de arriba abajo en lo que parece ser, de lejos, formas aleatorias. Tratar con sistemas que tiene muchos grados de libertad, tales como los abarcados por

la actividad de la gente en un mercado financiero, o en transacciones económicas no es tarea fácil. Pero los estudiosos en complejidad y en física han aceptado este desafío.

III. ECONOMÍA + FÍSICA = ¿ECONOFÍSICA?

Tras haber discutido y planteado a muy grandes rasgos de lo que trata la economía, sus bases y algunos de sus puntos débiles, así como haber dado un panorama general de lo que son los sistemas complejos, su historia y cómo se presentan como una alternativa eficiente antes las debilidades de la economía, dispondremos a explicar y plantear algunos de los recursos de la física (ciencia fundamental en el estudio de los sistemas complejos) que se aplican a temas económicos y financieros.

Existen dos razones cruciales para que la fusión entre Física y Economía [11]. La primera, acorde a Rama Cont (destacado especialista en estos temas) [16], es el deterioro del mercado de trabajo académico para los físicos. Esto los ha llevado en un gran número a las instituciones financieras, las cuales los contratan con avidez debido a su sólida formación matemática y habilidad en el uso de las computadoras, deviniendo en 'quants' (analistas cuantitativos) de las mismas. El tipo de resultados que se espera de ellos allí es el diseño de nuevos y sofisticados productos financieros o el desarrollo de técnicas de análisis de grandes masas de datos provenientes de las series de tiempo de precios en los mercados. El éxito obtenido en estas tareas ha llevado a algunos de ellos a fundar sus propias firmas, ofreciendo servicios en el área de las finanzas [17].

El segundo motivo es de carácter más científico. La Física Estadística está involucrada con sistemas de un gran número de partículas. Ha desarrollado métodos que pueden ser utilizados para analizar el comportamiento de sistemas con un alto número de componentes a partir de una descripción (quizás incompleta, esquemática o estilizada) de sus componentes individuales. Algunos conceptos de esta rama de la Física ya habían sido utilizados con éxito en la comprensión de la evolución biológica, síntesis de proteínas y en el diseño de métodos de optimización entre otros, por lo que no es extraño que también sean utilizados con igual resultado en la economía y las finanzas.

La actividad de los físicos en estos campos ha dejado de ser episódica y una comunidad científica con características propias ha comenzado a emerger [11] [21]. Se han organizado ya varias conferencias internacionales sobre el tema, varias revistas especializadas han visto la luz y algunas prestigiosas revistas tradicionales han comenzado a publicar artículos sobre econofísica, por lo que existe un gran reconocimiento a esta nueva área interdisciplinaria.

El trabajo de los investigadores en esta nueva área bien podría ser considerado la extensión natural de los intereses de los físicos estadísticos. No obstante existen ciertos detractores de este punto de vista. Los mismos argumentan fundamentalmente la falta de equivalencia entre el diseño de un experimento físico con condiciones controladas de laboratorio y el estudio empírico de las series temporales que surgen de los mercados financieros. Estas últimas representan acontecimientos ocurridos en los mercados que difícilmente vuelvan a repetirse con toda exactitud. En otras palabras que no pueden hacerse experimentos en los mercados financieros, había cuenta de que solo se posee una realización de todas las posibles manifestaciones del fenómeno [11]. Sin embargo, como han señalado H. E. Stanley y R. N. Mantegna, esta característica es compartida por algunos campos de la Física, tales como la Astrofísica, Geofísica, y Física de la Atmósfera. Por lo tanto, existe la misma posibilidad de validar o rechazar una teoría en el campo de la econofísica que en los antes mencionados y mejor establecidos campos de la Física.

El interés de los físicos en economía en general, y sobre todo en tratar de entender y describir los mercados financieros, despegó con la disponibilidad de enormes cantidades de datos financieros en la década de los ochentas, tras la contratación de físicos y matemáticos en Wall Street para analizar el mercado.

Más tarde, en los años noventa, con el motivo de caracterizar los artículos de físicos en dicho campo, H. E. Stanley [18] denominó con el nombre de 'Econofísica' a esta área multidisciplinaria que intenta combinar física, economía, matemáticas y finanzas. Sin embargo, la conexión entre economía y física es muy vieja, y los caminos de ambas disciplinas se han cruzado en varias ocasiones [19]. Por ejemplo fue Daniel Bernoulli, el descubridor del principio de Bernoulli en hidrodinámica, quien introduce el concepto de "utilidad" para describir las preferencias de la gente.

De manera contrapuesta, a los economistas les gusta hacer notar que en el contexto de finanzas, Louis Bachelier resolvió el problema matemático del movimiento Browniano antes que Einstein. Específicamente, Bachelier en la defensa de su tesis de doctorado “La teoría de la especulación” y bajo la tutela de Henri Poincaré, uno de los más grandes matemáticos franceses de todos los tiempos, desarrolló un modelo de caminata aleatoria para describir la dinámica de los precios [11]. Si bien el trabajo de Bachelier parece haber pasado desapercibido hasta muchos años más tarde que resurgió el modelo de caminata aleatoria en relación con la hipótesis de mercados eficientes, esta línea de modelación desemboca en la fórmula de Black y Scholes, la cual permite asignar un precio, y por lo tanto abrir el mercado de las opciones. La contraparte física, el movimiento browniano, y su corroboración experimental, que también mereció un Premio Nobel, terminaron de disipar las dudas respecto a la naturaleza molecular de la materia [3].

De hecho, la física estadística es la que tradicionalmente busca ser el puente entre la fenomenología microscópica y la macroscópica. Es importante señalar que esta disciplina trasciende la suposición (a la postre errónea) de que la materia está formada por moléculas que a su vez están sujetas a las mismas leyes físicas que cualquier otro cuerpo. La descripción estadística de la naturaleza incorpora procesos estocásticos como el término de ruido de la ecuación de Langevin para describir movimiento browniano, que buscan representar el complejísimo y fundamentalmente impredecible efecto de las innumerables interacciones a la que cada partícula está sujeta [3]. En principio, este enfoque es capaz de extenderse más allá de los sistemas en equilibrio y puede abarcar la descripción de la cinética de sistemas caracterizados por tener elementos impredecibles, prácticamente indistinguibles al azar. Este camino culmina en el tema del que se habló en la sección anterior: los sistemas complejos. Es desde la perspectiva de la física que se ha podido avanzar en el entendimiento de este tipo de sistemas, en los que, como ya se mencionó, pequeñas perturbaciones pueden llevar a consecuencias enormes, y donde los estados que alcanza el sistema, emergen de fenómenos colectivos y de interacción entre sus componentes.

Por lo tanto, parece ser que la dinámica de los sistemas económicos surge de la actividad de agentes (en ocasiones un gran número de ellos) cuyas decisiones afectan las opciones y perspectivas de otros agentes, todos con incentivos y objetivos más o menos heterogéneos [3]. Sistemas de este tipo tienen los ingredientes necesarios y exhiben ciertas propiedades de los sistemas complejos, y por lo tanto, las herramientas de la física estadística, procesos estocásticos y dinámica no lineal pueden ser de mucha utilidad para su subsecuente análisis.

a. Determinismo e imprevisibilidad

La evolución temporal de sistemas físicos tales como líquidos, sólidos o incluso algunos gases pueden, en principio, modelarse usando mecánica newtoniana [15]. Esta teoría involucra ecuaciones deterministas y, como resultado, las trayectorias completas de todas las partículas o elementos del sistema, en principio pueden ser estimadas si son conocidos sus valores iniciales.

La dinámica de un sistema físico clásico con N partículas puede formularse en términos de las leyes de Newton del movimiento como:

$$p_j = m_j \frac{dx_j}{dt}; \frac{dp_j}{dt} = f_j \left(x_1, \dots, x_N, \frac{dx_1}{dt}, \dots, \frac{dx_N}{dt} \right)$$

$$\text{con } j = 1 \text{ hasta } N \quad (1)$$

Donde x_j es el vector de posición de la partícula j con masa m_j , dx_j/dt es su velocidad, p_j es su momento, y f_j es la fuerza ejercida en ella por todas las demás partículas. Este conjunto de 2N ecuaciones pueden, en principio, ser resueltas y las posiciones y los momento para las N partículas, estimados como función del tiempo t, dadas las condiciones iniciales, $p_j(t = t_0)$ y $x_j(t = t_0)$.

Las componentes de la posición y el momento forman un vector 6N-dimensional $\Gamma = (... q_i ... j ... p_i ...)$ que define un estado microscópico particular del sistema. Así, el sistema de N-partículas completo puede ser representado por un punto en un espacio fase 6N dimensional, abarcado por los ejes correspondientes a los 6N *grados de libertad*.

El problema fundamental de la mecánica estadística es hallar la relación entre el mundo microscópico descrito por Γ y el mundo macroscópico. Para funciones de fuerza simples tales como las lineales en las posiciones (e independientes de las velocidades), es posible hallar una solución de la ecuación (1). Si la fuerza es no lineal en las coordenadas o dependientes del tiempo (y tales fuerzas pueden ser frecuentes en sistemas sociales) entonces se deben de hacer uso de simulaciones en computadora para obtener una solución [15].

Esta aproximación determinista para obtener una solución ha sido desafiada de dos distintas maneras [15] [21]:

- La mecánica cuántica nos dice que no podemos conocer simultáneamente de forma precisa ambos, posición y momento, de una partícula. Sin embargo, aún podemos argumentar que algún carácter determinista es conservado como una propiedad de la función de onda que describe al sistema.
- Ahora también sabemos que sin conocimiento absolutamente preciso de las condiciones iniciales (algo que en general no es posible), la predictibilidad de las posiciones y los momentos durante un largo tiempo simplemente no es posible y el comportamiento se hace caótico.

El caos no se observa en sistemas simples donde las ecuaciones dinámicas gobernantes son lineales [2] [15]. Para dichos sistemas, el principio de superposición se sostiene y la suma de dos soluciones de las ecuaciones gobernantes también es una solución. La ruptura de la linealidad y por lo tanto también del principio de superposición es requerida para que el comportamiento de un sistema no lineal se vuelva caótico. Sin embargo la no linealidad por sí misma no es suficiente: un péndulo simple es gobernado por una ecuación dinámica no lineal y la solución basada en funciones elípticas no tiene aleatoriedad o irregularidades [15]. Los solitones son otro ejemplo de movimiento colectivo regular hallado en un sistema con acoplamientos no lineales. Éstos son estabilizados debido al balance entre no linealidad y efectos de dispersión. Pero mientras el número de grados de libertad aumenta, el potencial para caos determinista también lo hace. La

imprevisibilidad en dicho sistema surge de la susceptibilidad a las condiciones iniciales que pueden, en práctica, ser medidas únicamente de manera aproximada.

Una propiedad importante a mencionar de las ecuaciones de Newton en (1) es que son invariantes respecto a inversión del tiempo [15] [21]. Aun girando los momentos o velocidades de alrededor en un sistema mecánico, el sistema vuelve a trazar su camino y no hay manera de decidir la ruta verdadera o preferida. Dentro de la mecánica clásica no hay flecha del tiempo. Sin embargo uno de los resultados clave de la ciencia de la termodinámica es que, en un nivel macroscópico, dicha flecha no existe.

b. Termodinámica y mecánica estadística

Uno de los más grandes logros científicos que emergió de la actividad ingenieril durante la revolución industrial fue la termodinámica [8] [15] [21]. Ésta teoría provee un gran entendimiento de las relaciones entre energía, calor y trabajo y está entre las teorías mejor conocidas del mundo macroscópico.

Un sistema termodinámico, i. e., cualquier sistema macroscópico, puede caracterizarse con sólo unos cuantos parámetros medibles tales como, en el caso de un fluido, presión, volumen y temperatura. Un estado termodinámico (macroscópico) se especifica por un conjunto particular de valores de todos estos parámetros necesarios para describir al sistema. Si el estado termodinámico no cambia con el tiempo, se dice que el sistema está en equilibrio termodinámico [32]. Una vez que el sistema alcanza dicho estado, se quedará ahí y todas las propiedades macroscópicas no cambiarán. Esto implica que existe, dentro de las leyes termodinámicas, una 'flecha' de tiempo [15].

Así, la mecánica estadística surge de la pregunta: ¿Cómo podemos interpretar o explicar las leyes de la termodinámica en términos de mecánica clásica? Pareciera imposible debido a los dos completamente diferentes aspectos del tiempo en la termodinámica y en la mecánica clásica. Este problema fue uno de los que Ludwig Boltzmann abordó durante gran parte de su vida hasta finalmente suicidarse en el año 1906.

Consideremos un sistema de N partículas conservativo (conservativo de energía) dentro de un espacio fase $6N$ dimensional. El punto definido por el vector Γ se moverá alrededor en una hiper superficie de dimensión $6N - 1$ para el cual, la energía total E es constante. La trayectoria jamás se cruzará consigo misma, porque si lo hiciera, implicaría que el sistema en el punto de cruce no sabría hacia dónde moverse. Ya que las ecuaciones de Newton (ecuación 1) son únicas, siempre nos dirán cómo viajará el sistema. Acorde al teorema de Poincaré, si se empieza en un cierto punto y se dibuja una pequeña región arbitraria alrededor del punto, después de un tiempo suficientemente largo la trayectoria finalmente conducirá de nuevo a esa región del espacio fase [15].

La hipótesis ergódica establece que sobre periodos largos de tiempo, el tiempo dedicado por el sistema en cualquier región particular del espacio fase es proporcional al volumen de esa región. Esto implica que todas las regiones accesibles del espacio fase son igualmente probable sobre periodos suficientemente largos de tiempo [33]. Así, desde un punto de vista mecánico, el movimiento del sistema en el espacio fase es casi periódico. No tiene sentido hablar de que el sistema ‘tienda al equilibrio’. ¡El sistema nunca sabe si está en equilibrio o no! Esto aparenta ser diferente al concepto de un equilibrio termodinámico del cual un sistema no puede escapar, una vez que lo ha alcanzado; uno podría de hecho estar inclinado a decir que los dos puntos de vista son lógicamente diferentes [15].

Esta paradoja fue resuelta por Boltzmann y, posteriormente, formalizada por Gibbs, señalando que la mecánica es a lo microscópico y la termodinámica a lo macroscópico. El equilibrio termodinámico es una noción macroscópica y está definido introduciendo un pequeño número M , de variables macroscópicas como la temperatura, densidad, energía libre y entropía que tienen una tendencia a ser uniformes a través del sistema en consideración [34]. M es claramente mucho más pequeño que N , el número de entidades, tales como átomos, que forman el sistema completo.

Para establecer nuestra mecánica estadística introducimos la función densidad de probabilidad $p(\Gamma, t) = p(\dots q_i \dots, p_i \dots; t)$ tal que la probabilidad de que el sistema se encuentre en un pequeño elemento de volumen de espacio fase esté dada por la probabilidad ‘medida’:

$$dP = p(\Gamma; t)d\Gamma \equiv p(\dots q_i \dots, \dots p_i \dots)dq_1 \dots dq_{3N}dp_1 \dots dp_{3N}.$$

Aquí, q_i y p_i son las componentes de posición y momento de las N partículas, respectivamente [15]. Esta es una probabilidad *a priori* que encapsula nuestra confianza sobre el sistema, como se discutirá al final de esta sección. La distribución debe ser normalizada, i. e., $\int p(\Gamma, t)d\Gamma = 1$, en donde la integral se hace en todo el espacio fase.

Supongamos ahora que prescribimos los valores asociados con las variables macroscópicas. Éstas corresponderán a diferentes regiones del subyacente espacio Γ . En este sentido se observa que un conjunto de variables macroscópicas corresponde a una región particular o quizá regiones en el espacio fase asociado con las variables microscópicas. La mecánica estadística en equilibrio asume que existe una región abrumadoramente grande [15] [35]. Esta región se relaciona o identifica entonces con una región de equilibrio, como se muestra en la Fig. 3. Si la trayectoria se localiza dentro de una de las regiones más pequeñas, entonces el sistema no está en equilibrio.

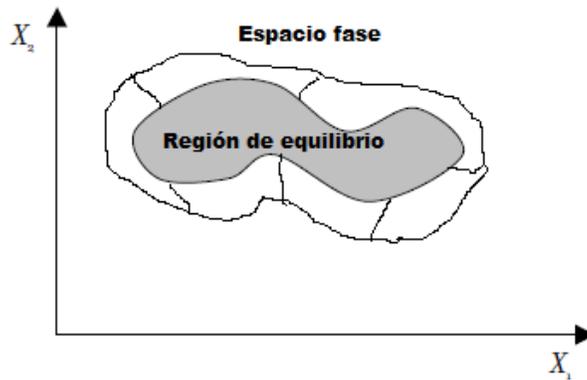


Figura 3. Esquema del espacio fase que muestra como una región de equilibrio puede coexistir con otras regiones de no-equilibrio.

Lo anterior puede quedar mejor ilustrado con el siguiente ejemplo. Imaginemos un globo de volumen $V = 1m^3$ que contiene moléculas de gas. Normalmente, todas las moléculas en el globo están distribuidas más o menos uniformemente a lo largo del globo. De la descripción de arriba,

podemos imaginar que existe la probabilidad de que todas las moléculas puedan hallarse en un pequeño elemento del espacio dentro del globo, digamos $\Delta V=1\text{cm}^3$. Acorde a la hipótesis de Poincaré, esto es ciertamente posible. Si dicho estado fuera altamente probable, entonces está claro que con todas las moléculas localizadas en una de las mitades del globo, este colapsaría. Sin embargo, la probabilidad de que esto ocurra es extremadamente pequeña. Típicamente, la probabilidad de que una molécula esté confinada en una región particular de volumen ΔV es alrededor de $\frac{\Delta V}{V} \sim \frac{10^{-6}\text{m}^3}{1\text{m}^3} = 10^{-6}$. Entonces la probabilidad de hallar todas las 10^{23} moléculas simultáneamente en esta región es $\sim(10^{-6})^{23}$, que es extremadamente pequeña.

Con esta “caricatura”, podemos ver que cuando el sistema está en el estado de equilibrio, casi siempre se quedará ahí. Sin embargo, en línea con el teorema de Poincaré, ciertas fluctuaciones ocasionalmente ocurren y reflejan la evolución del sistema a lo largo de otras regiones del espacio fase.

La entropía S de un *macroestado termodinámico* se define como [15] [34] [35]:

$$S = -k_B \int p(\Gamma, t) \ln p(\Gamma, t) d\Gamma, \quad (2)$$

Con la condición de normalización $\int \rho(\Gamma, t) d\Gamma = 1$ y la constante de Boltzmann $k_B = 1.381 \times 10^{-23} \text{JK}^{-1}$. En el caso de microestados discretos y contables r , en lugar de elementos de volumen $d\Gamma$ en el espacio fase, la entropía puede expresarse como:

$$S = -k_B \sum p_r \ln p_r, \quad (3)$$

Donde p_r es la probabilidad del microestado p_r . La condición de normalización es entonces $\sum p_r = 1$, donde la suma es sobre todos los microestados accesibles. Para un sistema aislado en equilibrio esto lleva a:

$$S = k_B \ln W \quad (4)$$

Donde W es el número de microestados consistentes con el macroestado, como se define por los valores de energía, número de partículas, y volumen del sistema. La ecuación (4) se observa en la lápida de Boltzmann y surge de asignar igual número de probabilidades a priori $p_r = 1/W$ para todos los microestados compatibles con las constricciones anteriores. Esto refleja que no hay razón a priori de que un microestado se prefiera sobre otro para el sistema aislado en equilibrio térmico.

Con todo lo anterior, ahora puede verse que la clave para la extensión de éste enfoque de física estadística a otros sistemas en áreas, tales como la economía, sociología, y biología, es ser capaz de especificar la probabilidad para la de ciertos estados microscópicos así como de hallar una cantidad conservada en determinado sistema [21]. Esto puede hacerse ya sea en la base de la preparación del sistema complejo o debido a una estimación empírica adecuada. La noción intuitiva de dicha probabilidad es clara en juegos con dados o el lanzamiento de monedas, bajo la suposición de que son justos e imparciales. Ésta probabilidad puede definirse empíricamente por la frecuencia relativa de un hecho particular cuando el juego es repetido muchas veces. Ésta aproximación denominada 'frecuentista' a la teoría de probabilidad no es muy útil para la caracterización de sistemas complejos tales como los que ocurren en finanzas, biología y sociología. En éstos, no es posible determinar frecuencias por repetición de experimentos en el sentido científico, ni tenemos tanta información acerca de posibles resultados. El camino a seguir es interpretar la probabilidad como un grado de convicción o confianza de que un evento ocurra. Tal confianza a priori es necesariamente subjetiva y puede depender de la experiencia del observador [15].

Ésta idea fue introducida originalmente por Thomas Bayes en el siglo XVIII como una aproximación que combinara juicios a priori e información científica en un modo natural y aplicado a cualquier proceso, si es o no repetible bajo condiciones constantes.

La generalización del método de física estadística a sistemas sociales, económicos entre otros requiere tratarse desde el sentido de Bayes [15]. Es decir, un sistema en un nivel microscópico puede caracterizarse por una función densidad de probabilidad $p(\Gamma, t = t_0)$ y la evolución de esta distribución en el tiempo puede representarse por un mapa de $p(\Gamma, t_0)$ sobre la distribución $p(\Gamma, t)$

en un momento posterior $t > t_0$. En otras palabras, la probabilidad total y por lo tanto nuestro grado de confianza que se concreta en nuestra elección de probabilidades iniciales a priori capturada en la distribución inicial $p(\Gamma, t_0)$ se conserva.

Es usual el caso de que para sistemas de muchas partículas, una completa función de distribución de probabilidad $p(\Gamma, t)$ que captura detalles de todos los grados de libertad no es requerida [15]. Una función reducida es suficiente para obtener todas las propiedades de nuestro interés. Por ejemplo, supongamos el vector de estado microscópico Γ que engloba algunas variables relevantes, \mathbf{x} y otras variables redundantes o irrelevantes, \mathbf{y} . La densidad de probabilidad $p(\Gamma; t)$ puede escribirse como $p(x, y; t)$ y la distribución requerida que envuelva sólo la variable relevante \mathbf{x} se obtiene integrando sobre las variables irrelevantes, \mathbf{y} . Así $p_r(x; t) = \int dy p(x, y; t)$. Si la función de distribución de probabilidad inicial se normaliza, la función de densidad reducida también se debe normalizar, i. e. $\int p_r(x, t) dx = 1$.

Promedios de funciones arbitrarias de x pueden obtenerse sumando los valores de la función relevante $f(x)$, ponderada usando la función densidad de probabilidad [15]. Así

$$\langle f(t) \rangle = \iint dx dy f(x) p(x, y; t) = \int dx f(x) p_r(x; t). \quad (5)$$

En esta expresión, hay grados de libertad irrelevantes que están escondidos en la función reducida $p_r(x; t)$. Para más detalle de propiedades de funciones de probabilidad se puede consultar la referencia 15, capítulo 3.

DISTRIBUCIONES DE BOLTZMANN-GIBBS Y DE PARETO: BASE TEÓRICA Y EVIDENCIA EMPÍRICA

I. DISTRIBUCIÓN DE BOLTZMANN-GIBBS DE LA ENERGÍA

La ley fundamente de equilibrio en mecánica estadística es la distribución de Boltzmann-Gibbs [21] [35]. Esta establece que la probabilidad $P(\varepsilon)$ de encontrar un sistema o subsistema físico en un estado con energía ε viene dada por la función exponencial:

$$P(\varepsilon) = ce^{-\varepsilon/T}. \quad (6)$$

Donde T es la temperatura y c es una constante de normalización. La constante de Boltzmann k_B ha sido normalizada a la unidad, por medio de la elección de las unidades de energía para medir la temperatura física T . Luego, el valor esperado de cualquier variable x puede obtenerse como:

$$\langle x \rangle = \frac{\sum_k x_k e^{-\varepsilon_k/T}}{\sum_k e^{-\varepsilon_k/T}}. \quad (7)$$

Donde la suma se toma sobre todos los estados del sistema. La temperatura es igual al promedio de la energía por partícula $T \sim \langle \varepsilon \rangle$, hasta un coeficiente numérico de orden 1.

La ecuación (7) puede derivarse de distintas maneras. Una forma sofisticada de hacerlo, propuesta por Boltzmann, usa el concepto de entropía descrito anteriormente. Consideremos N partículas con energía total E . Dividamos el eje de energía en pequeños intervalos (bins) de anchura $\Delta\varepsilon$ y contamos el número de partículas N_k teniendo las energías desde ε_k hasta $\varepsilon_k + \Delta\varepsilon$. El radio $\frac{N_k}{N} = P_k$ da la probabilidad para una partícula de tener la energía ε_k . Luego calculamos la multiplicidad W , que es el número de permutaciones de las partículas entre diferentes intervalos o bins de energía de manera que los números de ocupación de los intervalos no cambien. Ésta cantidad está dada por la fórmula combinatoria en términos de factoriales:

$$W = \frac{N!}{N_1! N_2! N_3! \dots} \quad (8)$$

De hecho, el logaritmo de esta cantidad se define como la entropía S , dada en la fórmula 4. En el límite de números muy grandes, la entropía por partícula puede escribirse de la siguiente fórmula, usando la aproximación de Stirling para factoriales:

$$\frac{S}{N} = - \sum_K \frac{N_k}{N} \ln \left(\frac{N_k}{N} \right) = - \sum_k P_k \ln P_k \quad (9)$$

Ahora se quiere encontrar qué distribución de partículas sobre diferentes estados de energía tienen la más alta entropía, i. e., la multiplicidad más grande, siempre que la energía total del sistema $E = \sum_k N_k \varepsilon_k$ tenga un valor fijo. La solución de este problema puede ser fácilmente hallada usando el método de multiplicadores lagrangianos, y se puede encontrar en cualquier libro física estadística; la respuesta es la distribución exponencial (6).

Éste mismo resultado puede derivarse también por el teorema ergódico descrita en la sección anterior, que establece que el sistema de muchos cuerpos ocupa todos los estados posibles de una energía total dada con igual probabilidad. Inmediatamente se sigue que la distribución de probabilidad de la energía de una partícula individual está dada también por la ecuación (6).

II. LEY LOCAL DE CONSERVACIÓN DEL DINERO

Las derivaciones planteadas en la sección anterior son muy generales y sólo usan características estadísticas del sistema y conservación de energía. Debido a esto, podría esperarse que la distribución exponencial de Boltzmann-Gibbs (6) pueda aplicarse a otros sistemas estadísticos con alguna cantidad conservada.

La economía es un enorme sistema estadístico con millones de agentes participantes, por lo que es un blanco prometedor para la aplicación de mecánica estadística. Pero, ¿existe alguna cantidad conservada en un sistema económico? Dragulescu y Yakovenko [21] [22] argumentaron que dicha cantidad conservada es el dinero m . En efecto, los agentes económicos ordinarios sólo pueden recibir y dar dinero de otros agentes. No se les permite, “manufacturar” dinero, por ejemplo, imprimir billetes. Considere una transacción económica entre agentes i y j . Cuando el agente i paga

dinero Δm al agente j por algunos bienes o servicios, los saldos monetarios de los agentes cambia de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} m_i &\rightarrow m'_i = m_i - \Delta m \\ m_j &\rightarrow m'_j = m_j + \Delta m \end{aligned} \quad (10)$$

La cantidad total de dinero de ambos agentes antes y después de la transacción permanece igual,

$$m_i + m_j = m'_i + m'_j \quad (11)$$

Esto es, hay una ley de conservación local para el dinero [15] [21] [22] [36]. La regla (10) para la transferencia de dinero es análoga a la transferencia de energía de una molécula a otra en colisiones moleculares en un gas, y la ecuación (11) es análoga a la conservación de la energía en dichas colisiones. Modelos conservativos de éste tipo también han sido estudiados en literatura² económica.

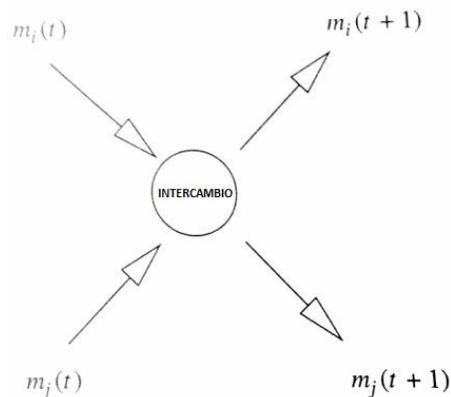


Figura 4. Agentes i y j redistribuyen su dinero en el mercado: $m_i(t)$ y $m_j(t)$, su respectivo dinero como función del tiempo t antes del intercambio, pasa a ser $m_i(t+1)$ y $m_j(t+1)$ después del intercambio.

Es importante enfatizar que en el modelo de Dragulescu y Yakovenko, la transferencia de dinero de un agente a otro representa los pagos por bienes y servicios en el mercado económico. Sin embargo, éste modelo sólo da seguimiento al flujo de dinero, y no a qué bienes y servicios se entregan a cambio [15] [21]. Una razón para esto es que muchos bienes, como alimentos y otros

² Ver por ejemplo Kiyotaki y Wright 1993 y Molico 1996.

suministros, y la mayoría de los servicios, como un corte de cabello o ir al cine, no son tangibles y desaparecen después de haberse consumido. Como no se conservan, y también porque son medidos en diferentes unidades físicas, los autores mencionan que no es muy práctico mantener seguimiento de ellos. En contraste, el dinero siempre se mide en la misma unidad (dentro de un país determinado con una moneda única) y se conserva en transacciones locales (11), por lo que es fácil seguir la pista del flujo de dinero. También es importante darse cuenta de que un incremento en la producción de un material no produce un incremento automático en la oferta de dinero. Sólo un banco central tiene el monopolio para cambiar la base monetaria M_b ³.

A diferencia de agentes económicos ordinarios, un banco central o gobierno central pueden inyectar dinero en la economía, para así cambiar la cantidad total de dinero en el sistema [21]. Éste proceso es análogo a una afluencia de energía en el sistema desde fuentes externas; por ejemplo, la tierra recibe energía del sol. Haciendo frente a estas situaciones, los físicos empezaron con una idealización de un sistema cerrado en equilibrio térmico y luego generalizaron a un sistema abierto sujeto a afluencia energética. Siempre y cuando la tasa de afluencia de dinero de fuentes centrales sea lenta comparada con procesos de relajación en la economía y no cause hiperinflación, el sistema está en equilibrio estadístico cuasi-estacionario con parámetros que cambian lentamente. Ésta situación es análoga a calentar una tetera en una estufa de gas lentamente, en donde la tetera tiene un bien definido, pero lento, incremento de temperatura en cualquier instante de tiempo. Un flujo de dinero también puede ser producido por transferencias internacionales a través de las fronteras de un país. Este proceso envuelve cuestiones complicadas de múltiples monedas en el mundo y sus tasas de intercambios⁴. Aquí se hizo uso de la idealización de una economía cerrada para un país con una sola moneda. Ésta idealización es común en la literatura económica y en la gran mayoría de los casos, es incorrecta o no alcanza para poder explicar algunos fenómenos económicos. Sin embargo, resulta ser un buen comienzo.

Otro problema importante con la conservación del dinero es la deuda. Ésta cuestión, así como la del crédito quedan fuera del alcance de este documento, pero se discuten con mayor detalle en la

³ McConnell y Brue, 1996.

⁴ McCauley, 2008.

sección II.D. Ref. 21, y plantea modelos más precisos de distribución de riqueza y dinero. Sin embargo, es importante mencionar que Dragulescu y Yakovenko consideran modelos simples, en donde la deuda no es permitida (idealización que también es común en literatura económica). Esto significa que los saldos monetarios de los agentes no pueden ser negativo, i. e., $m_i \geq 0$ para toda i . Las transacciones (10) pueden llevarse a cabo sólo cuando un agente tenga suficiente dinero para pagar el precio: $m_i \geq \Delta m$, de lo contrario la transacción no tiene lugar. Si un agente gasta todo su dinero, el saldo llega a cero $m_i = 0$, por lo que el agente no puede adquirir más bienes de otros agentes. Sin embargo, este agente aún puede recibir dinero de otros agentes por la entrega de bienes o servicios a éstos. En la vida real, el saldo monetario cayendo a cero no es del todo inusual para gente que subsiste de cheque en cheque [15] [21].

La ejecución de la ley de conservación local del dinero (11) es la clave para el funcionamiento exitoso del dinero [21] [36]. Si a los agentes se les permitiera “manufacturar” dinero, éstos estarían imprimiendo dinero y comprando todos los bienes por nada, lo que sería un desastre. El medio físico del dinero no es esencial aquí, mientras que la ley de conservación local del dinero se haga cumplir. Los días del estándar del oro se fueron hace mucho, por lo que el dinero hoy en día es ciertamente el dinero **fiduciario**⁵, declarado a ser así por el banco central. El dinero puede estar en la forma de papel moneda, pero hoy en día está más representado por dígitos en un cuentas bancarias computarizadas. La ley local de conservación del dinero (11) es consistente con los principios fundamentales de la contabilidad, ya sea en la forma de una sola entrada, o de dos. El concepto de “equilibrio” en economía se extiende, en el trabajo de Dragulescu y Yakovenko al equilibrio estadístico, que está caracterizado por una probabilidad estacionaria de distribución del dinero $P(m)$, contrario al equilibrio mecánico, donde las “fuerzas” de demanda y oferta se emparejan.

⁵ El dinero llamado fiduciario es el que se basa en la fe o confianza de la comunidad, i. e., que no se respalda por metales preciosos ni nada que sea una promesa de pago por parte de la entidad emisora

III. MECÁNICA ESTADÍSTICA DE LA DISTRIBUCIÓN DEL DINERO

Muchos artículos en literatura económica⁶ usan un proceso estocástico para describir la dinámica de riqueza individual o ingresos y la derivación de sus distribuciones de probabilidad. Esto podría denominarse como una aproximación de un solo cuerpo debido a que las fluctuaciones de ingresos y riqueza se consideran independientes para cada agente económico. Inspirados por la teoría cinética de Boltzmann de colisión de partículas en gases, los econofísicos introdujeron una alternativa de aproximación de dos cuerpos, donde los agentes realizan transacciones económicas en parejas y transfieren dinero de un agente a otro. Ésta aproximación fue, de hecho, promovida por el sociólogo John Angle en los años ochenta (1986,1992, 1993, 1996,2002). Sin embargo, su trabajo permaneció desconocido para los econofísicos hasta que Thomas Lux (2005) hizo desviar la atención de la comunidad hacia este modelo, siendo altamente citado en la literatura de econofísica a partir de entonces. Mientras tanto y de manera independiente, los físicos Isoplatov, Krapivsky y Redner (1998) introdujeron un modelo estadístico de transferencia de dinero por parejas entre agentes económicos, que es equivalente al modelo de Angle. Posteriormente aparecieron 3 artículos muy influyentes que generaron una onda expansiva de publicaciones consecuentes: Bouchaud y Mézard (2000), Chakraborti y Chakrabarti (2000) y Dragulescu y Yakovenko (2000). El modelo más sencillo es éste último y es el que se discute a continuación. Los estudios de transferencia de dinero y la distribución estadística del dinero resultante no tienen contraparte en la economía moderna, por lo que son los econofísicos los que inician esta dirección, aunque hay un antecedente relacionado a esto en la investigación de la teoría del dinero⁷.

Dragulescu y Yakovenko, después de haber reconocido el principio de conservación local del dinero, argumentan que la distribución estacionaria del dinero $P(m)$ debe estar dada por la función exponencial de Boltzmann-Gibbs análoga a la ecuación (6):

$$P(m) = ce^{-m/T_m} \quad (12)$$

⁶ Gibrat 1931, Kalecki 1945.

⁷ Kiyotaki y Wright, 1993.

Con c una constante de normalización y T_m la “temperatura monetaria” que es igual a la cantidad promedio de dinero por agente $T = \langle m \rangle = M/N$ en analogía con la temperatura física, donde M es el total de dinero y N es el número de agentes [21].

Para verificar ésta conjetura, Dragulescu y Yakovenko realizaron simulaciones computacionales basadas en agentes de transferencia de dinero entre éstos. Inicialmente, todos los agentes tenían la misma cantidad de dinero, \$1000 por decir. Luego, un par de agentes (i,j) era seleccionado aleatoriamente, la cantidad Δm era transferida de un agente a otro, y el proceso se repetía muchas veces [21]. Después de un periodo transitorio, la distribución del dinero convergía a la forma estacionaria de la figura I. Ésta distribución, como esperaban los autores, es bien ajustada por la función exponencial (12).

Los autores manejaron muchas reglas diferentes para Δm . En un modelo, la cantidad transferida fue ajustada a una constante $\Delta m = \$1$, lo que significa en el contexto económico que todos los agentes estuvieron vendiendo sus productos al mismo precio $\Delta m = \$1$. Animaciones computacionales de Chen y Yakovenko (2007) mostraron que la distribución inicial de dinero primero se ensancha a una curva simétrica gaussiana, característica para un proceso de difusión. Luego, la distribución empieza a apilarse alrededor del estado $m = 0$, que actúa como la frontera impenetrable por la condición impuesta $m \geq 0$. Como resultado, $P(m)$ se hace sesgada (asimétrica) y eventualmente alcanza la forma estacionaria exponencial de la figura I. La frontera en $m = 0$ es análoga a la energía del estado base en física estadística. Sin la condición de frontera, la distribución de probabilidad del dinero no alcanzaría un estado estacionario. Las mismas animaciones también mostraron como es que la entropía de la distribución del dinero, definida como $\frac{S}{N} = -\sum_k P(m_k) \ln P(m_k)$, crece desde el valor inicial $S=0$, donde todos los agentes tienen la misma cantidad de dinero⁸, hasta el valor máximo en el equilibrio estadístico [15] [21].

⁸ Bajo las reglas de mercado actual, una distribución en donde todos los agentes tengan la misma cantidad de dinero es altamente improbable.

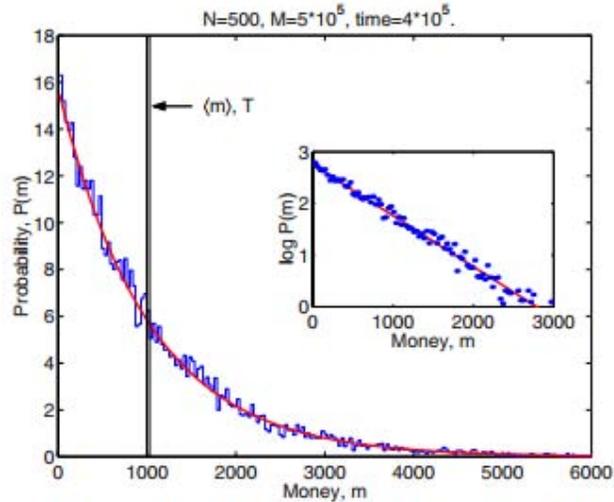


Figura I. Gráfica tomada del artículo de Dragulescu y Yakovenko (2000), obtenida a partir de una simulación basada en agentes. En el eje horizontal se coloca la cantidad de dinero m , y en el eje vertical la distribución inicial de dinero. El histograma y los puntos es la distribución de probabilidad estacionaria del dinero $P(m)$, y las curvas sólidas son el ajuste por medio de la distribución de Boltzmann-Gibbs (12).

Éste modelo con $\Delta m = 1$ a pesar de ser muy simple e instructivo, es de hecho nada realista, ya que todos los precios se toman como el mismo. En otro modelo considerado por los mismos autores consideran a Δm en cada transacción como una fracción aleatoria de la cantidad promedio de dinero por agente, esto es $\Delta m = \nu \left(\frac{M}{N}\right)$, donde ν es un número aleatorio uniformemente distribuido dado entre 0 y 1.

La distribución aleatoria para Δm es supuesta para representar la amplia variedad de precios para diferentes productos en la economía real. Refleja el hecho de que los agentes compran y consumen diferentes tipos de productos, algunos de ellos simples y baratos, algunos sofisticados y costosos. Es más, a distintos agentes les gusta consumir estos productos en diferentes cantidades, por lo que hay una variación en las cantidades pagadas Δm , aún cuando el precio unitario del mismo producto sea constante. La simulación computacional de este modelo produce exactamente la misma distribución estacionaria (12), como en el primer modelo planteado [21].

La distribución final es universal a pesar de las diferentes reglas para Δm . Los modelos de transferencia de dinero por parejas son atractivos por su simplicidad, pero representan un mercado

bastante primitivo. La economía moderna está dominada por grandes firmas, que consisten en muchos agentes, Por lo que Dragulescu y Yakovenko también estudiaron un modelo con empresas [15] [21]. Un agente a la vez es asignado para convertirse en una empresa o “firma”. La empresa toma prestado capital K de otro agente y lo regresa con interés hK , contrata L agentes y les paga salarios ω , fabrica Q artículos de algún producto, los vende a Q agentes a un precio p , y percibe ganancias $F = pQ - \omega L - hK$. Todos estos agentes son seleccionados aleatoriamente. Los parámetros del modelo están optimizados siguiendo un procedimiento de textos sobre economía. La curva de oferta y demanda agregada para el producto está dada por $p(Q) = v/Q^\eta$, con Q la cantidad que los consumidores comprarían a un precio p y η y v son algunos parámetros. La función de producción de la empresa tiene la forma tradicional Cobb-Douglas $Q(L, K) = L^\chi K^{1-\chi}$, donde χ es un parámetro. Luego, la ganancia de la empresa F se maximiza respecto a K y L . El resultado neto de la actividad de la empresa es una transferencia de dinero de muchos cuerpos, que también satisface la ley de conservación del dinero. Simulaciones computacionales de este modelo generan la misma distribución exponencial (12), independientemente de los parámetros del modelo.

Benoit Mandelbrot (1960) ya había dado la observación de que “había una gran tentación a considerar el intercambio de dinero que ocurría en interacciones económicas como análogo al intercambio de energía que ocurre en choques físicos entre moléculas en un gas”. Se percató de que este proceso debía ocurrir en la distribución exponencial, por analogía con la distribución barométrica de la densidad en la atmósfera. Sin embargo, descartó esta idea, debido a que ésta no produce la ley de potencias de Pareto, y procedió a estudiar las distribuciones de Lévy estables. Irónicamente, los datos económicos actuales (discutidos más adelante) si muestran la distribución exponencial para la mayoría de la población.

En este documento se discute éste modelo que, como ya se había dicho anteriormente, resulta el más sencillo. En el artículo de Yakovenko y Rosser (2009), así como en la referencia [36] se discuten modelos más elaborados, incluyendo, por ejemplo, modelos con deuda, modelos de

distribución de riqueza, etcétera. Sin embargo para los propósitos de este documento, el modelo planteado resulta ser suficiente.

IV. DISTRIBUCIÓN DE PARETO O LEY DE POTENCIAS

Muchas de las cosas que se miden en ciencia tienen una magnitud típica o “escala”, un valor típico alrededor del cual las mediciones individuales se centran. Por ejemplo, la estatura de los seres humanos. La mayoría de los adultos humanos están alrededor de los 180 cm de estatura. Existe alguna variación alrededor de ésta, que depende notablemente del género, pero jamás vemos personas que midan 10 cm de altura, o 500 cm. Ejemplos de este tipo de distribuciones son muchos y muy variados: la velocidad de vehículos que transitan por una autopista, el salario medio de los empleados de una empresa, la vida media de los habitantes de un país, entre muchos otros. Sin embargo, no todas las cosas que medimos se centran alrededor de un valor típico. Algunas varían alrededor de un rango dinámico enorme, algunas veces de varios órdenes de magnitud. Un ejemplo clásico de éste tipo de comportamiento es el tamaño de los pueblos y las ciudades. La población más grande de cualquier ciudad en los Estados Unidos es de 8 millones para Nueva York, hasta el censo realizado en el año 2000. El pueblo con la población más pequeña es más difícil de precisar, ya que depende de a qué se le llame pueblo. Sin embargo, el Libro Guinness de Records señala que el pueblo más pequeño de los Estados Unidos es Duffield, Virginia, con una población de 52 habitantes. Desde cualquier punto del que se quiera ver, el ratio de la población más grande entre la más chica es al menos de 150000. Claramente esto es bastante diferente de lo que observamos para las estaturas de las personas. . E incluso un patrón aún más llamativo se revela cuando observamos el histograma de los distintos tamaños poblacionales de las ciudades, mostrados en la figura 5.

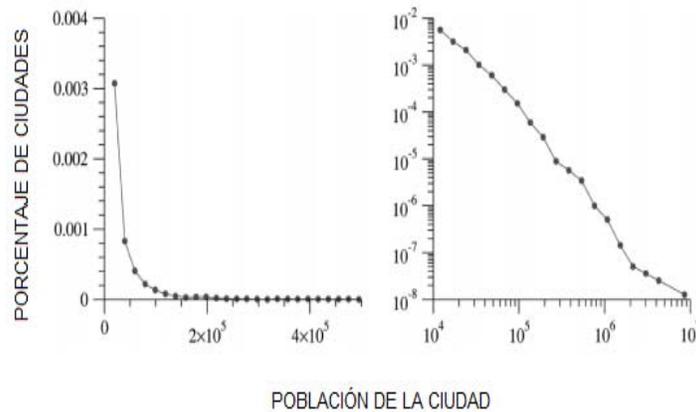


Figura II. A la izquierda se aprecia el histograma de las poblaciones de todas las ciudades de los Estados Unidos con población de 1000 o más. A la derecha se muestra otro histograma de los mismos datos, pero graficados en escala logarítmica. La línea recta aproximada de este último histograma implica que la distribución sigue una ley de potencias. Fuente: Artículo de Newman, Ref 20. Datos de censo en Estados Unidos del año 2000.

En el panel izquierdo de la figura, se muestra un histograma simple de la distribución de las poblaciones en las ciudades de Estados Unidos. El histograma está altamente sesgado a la derecha, lo cual significa que mientras el grueso de la distribución ocurre para bastantes ciudades pequeñas (la mayoría de las ciudades estadounidenses tienen bajo número de población), hay un pequeño número de ciudades con una población mucho más grande que el valor típico, lo cual produce la “cola” larga a la derecha del histograma. Lo que es verdaderamente sorprendente, por otro lado, es el panel derecho de la figura II, el cual muestra el histograma de la población de las ciudades nuevamente, pero esta vez graficado con logaritmos en los ejes horizontal y vertical. Ahora un notable patrón emerge: el histograma, cuando se grafica en esta forma, sigue muy de cerca una línea recta. Esta observación parece haber sido hecha en primer lugar por Auerbach, aunque frecuentemente se le atribuye a Zipf [20].

Hace más de un siglo, el economista **Vilfredo Pareto** (1848-1923) realizó extensos estudios en Europa y encontró que la distribución de la riqueza sigue una cola, similar a la del tamaño de las ciudades, para los sectores más ricos de la sociedad [37] de la forma de una distribución de probabilidad, conocida ahora como ley de Pareto [36]:

$$p(x) = Cx^{-\alpha} \quad (13)$$

Donde x es el valor observado y C es una constante de normalización. Claramente, esta densidad diverge en $x \rightarrow 0$ por lo que ésta ecuación no puede sostenerse para todos los valores $x \geq 0$, por lo que debe existir algún límite inferior para el comportamiento de ley de potencias. Denotaremos este límite como x_{min} . Y considerando $\alpha > 1$, se sigue inmediatamente y tras calcular la constante de normalización (La constante C en su mayoría no tiene interés: una vez que se fije α , la constante está determinada por el requerimiento de que la distribución $p(x)$ sume 1, i. e., que la función se normalice) que:

$$p(x) = \frac{\alpha - 1}{x_{min}} \left(\frac{x}{x_{min}} \right)^{-\alpha} \quad (14)$$

Distribuciones de la forma de (14) se dice que siguen una **ley de potencias**. La constante α se denomina parámetro de escalamiento o exponente de Pareto [20].

a. Distribuciones libres de escala

Una distribución de ley de potencias también se le denomina como una distribución libre de escala, debido a que es la única distribución que es la misma sin importar la escala desde la que se observe [20].

Supongamos que tenemos una distribución de probabilidad $p(x)$ para una cantidad x , y supongamos que, de algún modo, se deduce que ésta satisface la propiedad:

$$p(bx) = g(b)p(x) \quad (15)$$

para toda b . Esto es, si incrementamos la escala o unidades por los cuales se midió x por el factor de b , la forma de la distribución $p(x)$ no cambia, excepto por una constante multiplicativa [20]. Esta propiedad es, desde luego, no verdadera para la mayoría de las distribuciones. De hecho no es cierta para la distribución exponencial, y sólo es verdadera para un tipo de distribución, la ley de potencias.

Partiendo de la ecuación (15), y tomando $x = 1$, se tiene que $p(b) = g(b)p(1)$. Así, $g(b) = p(b)/p(1)$ y (14) se puede escribir como:

$$p(bx) = \frac{p(b)p(x)}{p(1)} \quad (16)$$

Ya que esta ecuación se supone cierta para cualquier b , se puede diferenciar ambos lados respecto a b , para obtener:

$$xp'(bx) = \frac{p'(b)p(x)}{p(1)} \quad (17)$$

Donde p' indica la derivada de p respecto a su argumento. Ahora, poniendo $b=1$ se obtiene:

$$x \frac{dp}{dx} = \frac{p'(1)}{p(1)} p(x) \quad (18)$$

Esta es una ecuación diferencial de primer orden simple, con solución:

$$\ln p(x) = \frac{p'(1)}{p(1)} \ln x + \text{constante} \quad (19)$$

Poniendo $x=1$ se halla que la constante es simplemente $\ln p(1)$, y luego sacando exponencial de ambos lados, obtenemos finalmente:

$$p(x) = p(1)x^{-\alpha} \quad (20)$$

Como ya se había advertido, la distribución de ley de potencias es la única función que satisface el criterio de libertad de escala (15) [20].

Este hecho es más que sólo curioso, ya que existen algunos sistemas que se hacen libres de escala para ciertos valores especiales de sus parámetros regentes. Al punto definido por dicho valor especial se le denomina una 'transición de fase continua' y el argumento dado arriba implica que en dicho punto las cantidades observables en el sistema deben adoptar una distribución de ley de potencias [20] [25]. Uno de los mecanismos físicos propuestos para explicar la ocurrencia de las leyes de potencias resultan ser los **fenómenos críticos** y el concepto asociado de **criticalidad auto-organizada**, en el que un factor de escala de un sistema diverge, ya sea porque se ha sintonizado el sistema en un punto crítico especial en su espacio de parámetros o debido a que el

sistema automáticamente llega por si mismos a ese punto debido a algún proceso dinámico. A este punto se le conoce como **punto crítico** o **transición de fase** [20] [25] (de manera más específica, una transición de fase continua). La divergencia puede dejar al sistema sin un factor de escala apropiado para establecer el tamaño de alguna cantidad medida y la cantidad debe de seguir una ley de potencias. Como fue propuesto por primera vez por Per Bak [38], es posible que algunos sistemas dinámicos en realidad se ordenasen ellos mismos para siempre alcanzar puntos críticos, sin importar sus condiciones iniciales. Otro de los mecanismos sugeridos para la explicación de la aparición de leyes de potencias es el de **redes libres de escala**. En éstas, algunos nodos están altamente conectados, es decir, poseen un gran número de enlaces a otros nodos, aunque el grado de conexión de casi todos los nodos es bastante bajo. Propuestas por Lázlo Barabási en 1999 tras realizar un mapeo de la web, establece que los nodos con gran cantidad de conexiones ("hubs") tienden a acumular rápidamente más enlaces, mientras que los que poseen pocos enlaces rara vez son el origen de nuevos enlaces. Los nuevos nodos según este algoritmo se dice que poseen una "preferencia" a ser enlazados con los nodos más solicitados. Este algoritmo se fundamenta en el concepto de "conexión preferencial" de los nuevos nodos que se incorporan a la red [40]. De manera empírica, se ha descubierto que redes de crimen organizado, redes de comercio internacional, redes de neuronas, entre muchas otras, siguen un comportamiento de redes libres de escala. Aunque, pese a mucha de la evidencia, la causa fundamental de este comportamiento aún no está bien definida.

b. Midiendo leyes de potencias

Identificar el comportamiento de las leyes de potencias en cualquier sistema (natural o hecho por el hombre) puede ser problemático. La estrategia común hace uso del resultado que ya fue mencionado: un histograma de cierta cantidad con una distribución del tipo del ley de potencias aparece como una línea recta cuando se grafica en escala logarítmica. Sin embargo, hacer únicamente un simple histograma, y graficarlo en escala logarítmica para ver si luce recta, es, en la mayoría de los casos, un pobre camino para proceder.

Otro, y en muchas formas superior, método de graficar los datos es calculando la *función de distribución acumulativa* (CDF por sus siglas en inglés). En vez de graficar un histograma simple de los datos, se hace una gráfica de la probabilidad $P(x)$ de que x tenga un valor mayor o igual a x :

$$P(x) = \int_0^{\infty} p(x') dx' \quad (21)$$

La gráfica que se obtiene al hacer esto ya no es una simple representación de la distribución de los datos⁹. No obstante, es muy útil. Si la distribución sigue una ley de potencias $p(x) = Cx^{-\alpha}$, entonces:

$$P(x) = \int_{x_{min}}^{\infty} x'^{-\alpha} dx' = \frac{\alpha - 1}{x_{min}} \left(\frac{x}{x_{min}} \right)^{-(\alpha-1)} \quad (22)$$

Así, la función de distribución acumulativa $P(x)$ también sigue una ley de potencias, pero con un exponente diferente $\alpha - 1$, que es 1 menos que el exponente original. Por lo que, si graficamos $P(x)$ en escala logarítmica, nuevamente tendremos una línea recta, pero con una pendiente menos profunda.

Es importante notar que no hay necesidad alguna de hacer una partición de los datos para calcular $P(x)$. Por definición, $P(x)$ está bien definida para todo valor de x y así poder ser graficada como una función normal perfecta sin hacer particiones. Esto evita todas las preguntas sobre qué tamaño deben de tener las particiones. Así mismo hace un mucho mejor uso de los datos: las particiones de los datos aglutinan todas las muestras dentro de un rango dado juntos en una misma partición y desecha cualquier información contenida en los valores individuales de las muestras dentro del rango. Las distribuciones acumulativas no desechan ninguna información, todo está en la gráfica.

c. **Parámetros x_{min} y α para la demarcación de las diferentes zonas en la distribución**

Para Pareto, y de hecho para la mayoría de los físicos, la existencia de leyes de potencias sugiere que algún fundamento dinámico esté involucrado. Pareto mismo propuso que las personas, en el

⁹ En el caso en que la función $p(x')$ sea una función exponencial, como en la ecuación (12), entonces $P(x)$ también es una función exponencial.

transcurso de sus vidas, podían moverse a través de la distribución en ambas direcciones (de menor a mayor riqueza o viceversa), y esta idea de que una distribución estática de hecho no implica una sociedad estática, ha formado la base para los estudios recientes por un número considerable de físicos.

Sin embargo, no todo lo que brilla es oro, y en la práctica se puede rara vez, o incluso nunca, estar seguro de que una cantidad observada está extraída de una distribución de ley de potencias. Lo más que se puede decir es que nuestras observaciones son consistentes con la hipótesis de que x está extraída de una distribución de la forma de la ecuación (14). De hecho, como muestra Clauset [25], detectar leyes de potencias en datos empíricos puede ser una tarea difícil. La mayoría de los estudios empíricos existentes explotan el hecho de que la distribución de ley de potencias sigue una línea recta en una gráfica con los ejes en escala logarítmica, con el exponente de la ley de potencias igual a la pendiente absoluta de la recta ajustada. La existencia del comportamiento de ley de potencias es frecuentemente visualizada en dicha gráfica, mientras el exponente es estimado usando regresión lineal, como ya se mencionó anteriormente. Sin embargo, dicha aproximación sufre de varios inconvenientes [25]. En primera, el estimado de la pendiente usando la regresión lineal puede ser muy sesgado. En segunda, la estadística estándar R^2 para la regresión lineal no puede ser tratada como una prueba de ajuste confiable para el comportamiento de ley de potencias. En tercera, incluso si métodos tradicionales tienen éxito en verificar que un modelo de ley de potencias es un buen ajuste a un conjunto de datos dado, es posible que algún modelo alternativo ajuste de mejor manera los datos. Por lo que un análisis empírico completo tendrá que ser requerido para conducir una comparación estadística de este modelo con algunas otras distribuciones candidatas. En algunos casos también podemos ser capaces de descartar algunas otras hipótesis en competencia.

Dado un conjunto de datos observados y una hipotética distribución con forma de ley de potencias de la que se extrajeron los datos, quisiéramos saber si nuestra hipótesis es plausible. Una aproximación estándar para responder este tipo de preguntas es mediante el uso de una prueba de bondad de ajuste, la cual genera un valor p que cuantifica la plausibilidad de la hipótesis. Dichas

pruebas están basadas en la medida de la “distancia” entre la distribución de datos empíricos y el modelo hipotético. Esta distancia es comparada con las mediciones de distancia para conjuntos de datos sintéticos comparables extraídos del mismo modelo, y el valor p está definido como la fracción de las distancias sintéticas que son más grandes que la distancia empírica. Si p es grande (cercano a 1), entonces la diferencia entre los datos empíricos y el modelo puede ser atribuida a sólo fluctuaciones estadísticas; si es pequeña, el modelo no es ajuste plausible para los datos. Incluso si nuestros datos son bien ajustados por una ley de potencias, aún es posible que alguna otra distribución, tal como una exponencial o una del tipo log-normal, podría dar un ajuste igual de bueno o mejor. Se puede eliminar esta posibilidad usando una prueba de bondad de ajuste, simplemente calculando un valor p para un ajuste a la distribución competente y compararlo con el valor p de la ley de potencias.

Existe una gran variedad de medidores para cuantificar la distancia entre dos distribuciones, por ejemplo, la utilizada por el mismo Clauset [25], quien mostró que la distribución de riqueza entre los estadounidenses más ricos en 2003, compilada por la revista *Forbes* en su “rich list” o lista anual de ricos en Estados Unidos, no es bien ajustada por el modelo de ley de potencias [27]. La idea fundamental detrás de este método es simple: se elige el valor de x_{min} (obtenida del conjunto de datos) que hace que la distribución de probabilidad de los datos medidos y la de mejor ajuste del modelo de ley de potencias sean lo más similares por encima del valor x_{min} . En general, si se escoge un x_{min} más grande que el valor real, se está reduciendo efectivamente el tamaño del conjunto de datos, lo que hará que las distribuciones de probabilidad resulten un ajuste más pobre debido a fluctuaciones estadísticas. Inversamente, si se elige un x_{min} más pequeño que el valor real, las distribuciones diferirán debido a la diferencia fundamental entre los datos y el modelo con el que se están describiendo. En medio yace el mejor estimado.

Para datos de tipo no-normales, el medidor de la distancia entre dos distribuciones más común es la estadística de Kolmogorov-Smirnov (KS), que es simplemente la distancia máxima entre las funciones de distribución acumulativa de los datos y el modelo ajustado:

$$D = \max_{x \geq x_{min}} |S(x) - P(x)| \quad (23)$$

Con $S(x)$ la CDF de los datos para las observaciones con valor al menos de x_{min} , y $P(x)$ es la CDF para el modelo de ley de potencias que mejor ajusta los datos en la región $x > x_{min}$. El valor de x_{min} estimada es el valor que minimiza D .

La estadística KS tiene una característica sutil: su distribución es conocida para conjuntos de datos verdaderamente extraídos desde cualquier distribución dada. Así mismo, Ogowang [26] también ha sometido a prueba el comportamiento de ley de potencias en los datos de Forbes sobre la riqueza de los multimillonarios del mundo desde el año 2000 y hasta el 2009. Él encontró que la prueba de bondad de ajuste KS, así como la prueba Anderson-Darling y la prueba χ^2 rechazan el comportamiento de ley de potencias para cada uno de los conjuntos de datos utilizados. Sin embargo, Ogowang, ha probado si toda la gama de observaciones en sus datos sigue el comportamiento antes mencionado, mientras que de hecho esto puede aplicarse sólo a un subconjunto de las enormes cantidades de observaciones. Una metodología más apropiada para detectar distribuciones de ley de potencias tendría que, por lo tanto, incluir un procedimiento para estimar un límite inferior de dicho comportamiento [27]. En este mismo sentido la prueba KS es recomendable para encontrar dicho límite, y éste límite resulta ser a partir del valor x_{min} mencionado anteriormente.

Ahora consideramos la estimación del parámetro de escalamiento α . Estimar α de manera correcta requiere un valor adecuado para el límite inferior x_{min} del comportamiento por ley de potencias en los datos. El método elegido para ajustar modelos parametrizados tales como distribuciones de ley de potencias a datos observados es el método de máxima verosimilitud [25], que posiblemente sea el que dé estimaciones adecuadas de dichos parámetros en el límite de muestras grandes [$n \rightarrow \infty$]. Asumiendo que nuestros datos siguen una ley de potencias a partir de $x \geq x_{min}$, se pueden derivar estimadores de máxima verosimilitud (MLE's por sus siglas en inglés) del parámetro de escalamiento para casos continuos y discretos. Detalles de su derivación se encuentran en la Referencia [25], apéndice B. Lo importante aquí es su uso.

El MLE para casos continuos es:

$$\alpha = 1 + n \left[\sum_{i=1}^n \ln \frac{x_i}{x_{min}} \right]^{-1} \quad (24)$$

Aquí, las cantidades $x_i, i = 1 \dots n$ son valores medidos de x y x_{min} es el valor mínimo de x (en situaciones prácticas, x_{min} usualmente resultará ser no el valor más pequeño de x , sino el más pequeño para el que el comportamiento de ley de potencias se mantiene).

Hay muchas, y muy variadas, distribuciones acumulativas que se miden en sistemas físicos, biológicos, tecnológicos y sociales de varios tipos y que siguen un comportamiento de ley de potencias al menos en alguna parte de su rango. La ubicuidad de este comportamiento en el mundo natural ha llevado a los científicos a preguntarse si hay un mecanismo único, simple, subyacente que relacione todos estos sistemas. Muchos candidatos para dichos mecanismos han sido propuestos, tales como “Criticalidad auto-organizada” y “tolerancia altamente optimizada”. Sin embargo, la sabiduría convencional es que hay de hecho muchos mecanismos para producir leyes de potencias y que cada uno es aplicable a diferentes casos. Ejemplos de distribuciones acumulativas se muestran en la figura III.

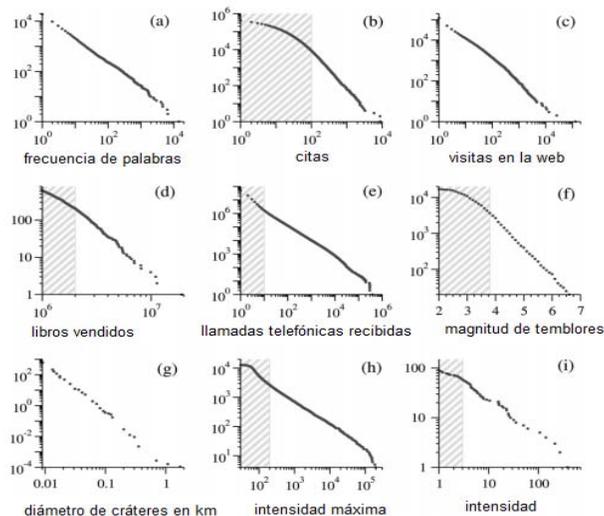


Figura III. Distribuciones acumulativas o gráficas de ‘rango/frecuencia’ de 9 cantidades que presuntamente siguen un comportamiento de ley de potencias. (a) Número de ocurrencias de palabras en la novela *Moby Dick* de Hermann Melville. (b) Número de citas de artículos científicos publicados desde el año 1981 hasta junio de 1997. (c) Número de visitas en la web por 60000 usuarios del servicio *America Online Internet* del día 1 de diciembre de 1997. (d) Número de copias de los

libros más vendidos en los Estados Unidos entre 1895 y 1965. (e) Número de llamadas recibidas de usuarios telefónicos de la compañía AT&T en los Estados Unidos para un solo día. (f) Magnitud de temblores en California entre enero de 1910 y mayo de 1992. La magnitud es proporcional al logaritmo de la máxima amplitud del terremoto, y por lo tanto la distribución obedece una ley de potencias aún cuando el eje horizontal es lineal. (g) Diámetro de cráteres lunares. El eje vertical se mide por kilómetro cuadrado. (h) Intensidad máxima de rayos gamma emitida por llamaradas solares, el conteo es por segundo, medido desde la órbita de la Tierra entre febrero de 1980 y noviembre de 1989.

V. MODELOS TEÓRICOS DE DISTRIBUCIÓN DE INGRESO

Con base en lo explicado para distintos modelos de distribución de dinero y riqueza, así como los diferentes comportamientos matemáticos que rigen su dinámica, se plantea ahora el modelaje de distribución de ingreso. El ingreso r_i es el influjo de dinero por unidad de tiempo a algún agente i . Si el balance monetario m_i es análogo a la energía, entonces el ingreso será análogo a la potencia, definida como el flujo de energía por unidad de tiempo²¹. Conceptualmente debería distinguirse entre las distribuciones de dinero y riqueza: mientras el dinero es regularmente transferido de un agente a otro en transacciones por pares, no es típico para los agentes intercambiar porciones de sus ingresos [21]. Sin embargo, transferencias indirectas de ingreso pueden ocurrir cuando un empleado es promovido y otro cesado o pierde su nivel mientras el presupuesto total es ajustado, o cuando una compañía obtiene un contrato mientras la otra lo pierde, etcétera. Una aproximación razonable, que tiene una larga tradición en la literatura económica, es tratar el ingreso individual r como un proceso estocástico y estudiar su distribución de probabilidad. En general, se puede estudiar un proceso markoviano generado por una matriz de transiciones $\begin{pmatrix} m_i(t+1) \\ m_j(t+1) \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} m_i(t) \\ m_j(t) \end{pmatrix}$ de un ingreso a otro, donde $m_i(t)$ es el ingreso del agente i al tiempo t y la matriz de colisiones M define el proceso de intercambio descrito en la Fig. 4. En el caso en el que el ingreso r cambia por una pequeña cantidad Δr sobre un periodo de tiempo Δt , el proceso markoviano puede ser tratado como **difusión de ingreso**, por lo que puede aplicarse la ecuación general de Fokker-Planck para describir la evolución temporal de la función de distribución de ingreso $P(r, t)$:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial r} \left[AP + \frac{\partial(BP)}{\partial r} \right], \quad A = -\frac{\langle \Delta r \rangle}{\Delta t}, \quad B = \frac{\langle (\Delta r)^2 \rangle}{2\Delta t} \quad (25)$$

Donde los coeficientes A y B son determinados por el primer y el segundo momentos de cambios de ingreso por unidad de tiempo. La solución estacionaria $\partial_t P = 0$ de la ecuación (ecuación de difusión de Fokker-Planck) obedece la siguiente ecuación con la solución general:

$$\frac{\partial(BP)}{\partial r} = -AP, \quad P(r) = \frac{c}{B(r)} \exp\left(-\int \frac{A(r')}{B(r')} dr'\right) \quad (26)$$

Para la parte baja de la distribución resulta razonable asumir que Δr es independiente de r , esto es, los cambios en el ingreso son independientes del ingreso mismo. Este proceso es denominado difusión aditiva [28]. En este caso, los coeficientes en la ecuación (ecuación de difusión de Fokker-Planck) son constantes A_0 y B_0 . Entonces la ecuación (ecuación anterior) da la distribución exponencial $P(r) \propto \exp(-r/T_r)$ con la temperatura de ingreso efectiva $T_r = B_0/A_0$ [21]. La coincidencia de este resultado con la distribución exponencial de Boltzmann-Gibbs (6) y (12) no es accidental. En efecto, en vez de considerar interacciones por pares entre partículas, se puede derivar la ecuación (6) considerando transferencias de energía entre una partícula y una gran reserva, siempre que el proceso de transferencia sea “aditivo” [21] y no involucre una discriminación de tipo demonio de Maxwell [28]. Aunque dinero e ingreso son conceptos diferentes, pueden tener distribuciones similares debido a que están gobernados por principios matemáticos similares. Está bien demostrado por distintos autores (Dragulescu y Yakovenko 2000; Slanina 2004; Cordier, Pareschi y Toscani 2005) que los modelos transferencia de dinero por pares pueden ser descritos con cierto límite por la ecuación de Fokker-Planck.

Por otro lado, para la parte alta o cola de la distribución de ingreso, es razonable esperar que $\Delta r \propto r$, i. e., los cambios en el ingreso son proporcionales al ingreso mismo [21]. Esto es conocido como el principio de proporcionalidad de Gibrat [29], y el proceso se denomina difusión multiplicativa [28]. En este caso, $A = ar$ y $B = br^2$ y la ecuación (26) da una distribución de ley de potencias $P(r) \propto 1/r^{\alpha+1}$ con $\alpha = 1 + a/b$.

Generalmente los ingresos de la clase baja provienen de sueldos o salarios, en donde un proceso aditivo es apropiado, mientras que en los ingresos de la clase alta vienen de bonos, inversiones,

ganancias de capital entre otros, calculados en porcentajes, en donde aplican procesos multiplicativos. Sin embargo, tanto procesos aditivos como multiplicativos pueden coexistir [21]. Si asumimos que ambos procesos no están correlacionados, tendremos $A = A_0 + ar$ y $B = B_0 + br^2 = b(r_0 + r^2)$, con $r_0^2 = B_0/b$. Por lo que, sustituyendo en (26), se obtiene la expresión [21],

$$P(r) = \frac{e^{-(r_0/T_r)\arctan(r/r_0)}}{[1 + (r/r_0)^2]^{1+a/2b}} \quad (27)$$

La distribución (27) interpola entre la ley exponencial para bajo r y la ley de potencias para alto r , debido a que cada proceso, aditivo o multiplicativo, domina en su límite correspondiente. El cruce entre los dos regímenes tiene lugar en $r = r_0$. Este modelo, obtenido por Yakovenko en 2009 tiene tres parámetros a medir: La temperatura $T_r = A_0/B_0$, el exponente de Pareto $\alpha = 1 + a/b$ y el cruce ingreso de la zona baja a la zona alta r_0 .

Para verificar empíricamente las hipótesis aditivas o multiplicativas, es necesario tener datos de movilidad de ingreso, i. e., los cambios en los ingresos Δr de la misma gente de un año a otro, sin embargo, esto no es usualmente accesible de manera pública, aunque la demarcación entre ambas zonas, ajustar las funciones correspondientes a cada una de éstas y encontrar sus parámetros característicos, es como primera aproximación, suficiente para un análisis de la distribución de ingreso.

VI. EVIDENCIA EMPÍRICA DE DISTRIBUCIONES DE INGRESO Y RIQUEZA

Tras haber planteado los modelos de distribución de dinero y riqueza siguiendo una distribución ya sea por Boltzmann-Gibbs o por ley de potencias y hablado de sus propiedades, así como haber discutido su matemática, se plantea ahora la evidencia empírica que se tiene de estas distribuciones en datos del Reino Unido.

Tras analizar los datos de distribución de ingreso personal compilados por el Internal Revenue Service (IRS) de retorno de impuestos en Estados Unidos para el periodo 1983-2001, Silva y Yakovenko [28] encontraron, después de haber analizado las funciones de distribución

acumulativas $C(r)$ (CDF's), con r el valor del ingreso, para cada año y graficadas en escala log-log, que las distribuciones siguen para la zona baja la función de probabilidad del tipo Boltzmann-Gibbs (alrededor de 97-98% de la población) con una temperatura monetaria anual T_r que oscilaba desde los \$19,000 dólares en el año 1983 hasta \$40,000 en el año 2001. También encontraron que dichas gráficas colapsan hacia una sola tras una normalización del ingreso (gráfica de $C(r)$ vs r/T_r , ingreso normalizado con la temperatura), lo que denotaría un equilibrio estadístico asociado al equilibrio térmico en física [21] debido a que la distribución exponencial de la clase baja es muy estable en el tiempo y uno de sus parámetros esenciales, la temperatura monetaria T_m , cambia poco y de manera lenta año tras año.

Por otro lado, para los puntos en la zona alta de la distribución, no existe un colapso hacia una sólo recta en escala log-log. Esta zona fue asociada con la distribución de Pareto [21], encontrando que el exponente de Pareto varía año con año, entre 1.4 a 1.8, concluyendo que no es universal. Los datos obtenidos por estos autores se presentan en la figura IV.

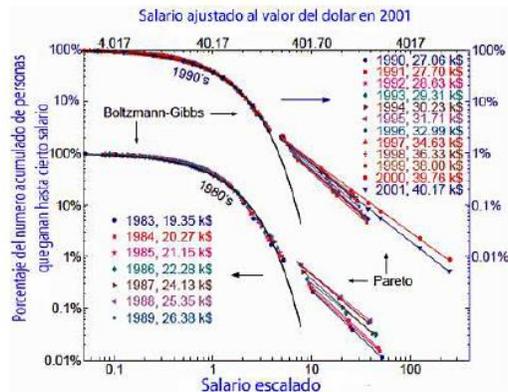


Figura IV. Porcentaje acumulativo de personas que ganan hasta cierto salario obtenido de su declaración de impuestos en Estados Unidos para diferentes años. El salario aparece en el eje x (borde inferior) de manera que el promedio queda en 1 mientras que en el mismo eje, pero en el borde superior, el salario aparece en miles de dólares ajustados al valor del dólar en 2001. Se aprecian diferentes curvas para los años ochenta y noventa. Silva y Yakovenko, Ref. 21.

Resultaría interesante comparar resultados teóricos para distribuciones de dinero y riqueza en varios otros modelos con datos empíricos. Desafortunadamente dichos datos empíricos son difíciles de hallar. A diferencia de los ingresos, la riqueza no es rutinariamente reportada por la

mayoría de los individuos a su gobierno. Sin embargo, en algunos países, cuando una persona muere, todos los bienes deben ser reportados por propósitos de impuestos de sucesión (impuesto que se le aplica a una persona que acaba de heredar dinero o propiedades). Por lo que, en principio, existen buenas estadísticas de distribución de riqueza sobre los fallecidos, que, por supuesto, es diferente de la distribución de riqueza sobre los vivos. Usando y ajustando procedimientos basados en la edad, género y otras características de los fallecidos, La agencia de impuestos o hacienda del Reino Unido (RU), Inland Revenue en inglés, reconstruyó la distribución de riqueza de toda la población del RU (Her Majesty Revenue and Customs, 2003). La figura V muestra los datos del RU para 1996 reproducidos por Dragulescu y Yakovenko (2001b). La figura muestra la probabilidad acumulativa $C(w) = \int_w^\infty P(w')dw'$ como una función de la riqueza personal neta w , que está compuesta de bienes (efectivo, valores, propiedades, artículos de hogar, etc.) y compromisos (hipotecas y otras deudas). Debido a que los datos estadísticos son usualmente reportados a intervalos no uniformes de w , es más prácticos graficar la distribución de probabilidad acumulativa $C(w)$ en lugar de su derivada, la densidad de probabilidad $P(w)$. Afortunadamente, cuando $P(w)$ es una exponencial o una función de ley de potencias, $C(w)$ también es una exponencial o una ley de potencias [20].

El panel principal en la figura V muestra una gráfica de $C(w)$ en escala logarítmica, donde la línea recta representa una dependencia de ley de potencias. La figura también muestra que la distribución sigue una ley de potencias $C(w) \propto 1/w^\alpha$ con exponente $\alpha = 1.9$ para la riqueza mayor a aproximadamente 100 $k\text{£}$.

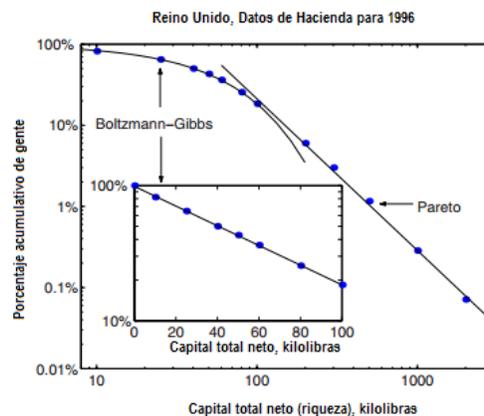


Figura V. Distribución de probabilidad acumulativa de la riqueza neta en el RU mostrado en escalas log-log (panel principal) y log-lineal (recuadro). Los puntos representan los datos del Inland Revenue (Hacienda), y las líneas sólidas están ajustadas por la exponencial (Boltzmann-Gibbs) y ley de potencias (Pareto). Dragulescu y Yakovenko, 2001b.

El recuadro en la figura V muestra los mismos datos en escala log-lineal, donde la línea recta representa una dependencia exponencial: Se observa que, por debajo las 100 kE , los datos son bien ajustados por la distribución exponencial $C(w) \propto \exp\left(-\frac{w}{T_w}\right)$ con la temperatura efectiva de riqueza $T_w = 60 kE$ (ésta corresponde a la riqueza media de 41 kE). La distribución de riqueza está caracterizada por la ley de potencias de Pareto en la cola superior, mientras que en la parte baja de la gráfica, correspondiente a la gran mayoría de la población (alrededor de 90%), la distribución está caracterizada por la ley exponencial de Boltzmann-Gibbs). Se podría especular que la distribución de riqueza en la parte baja está dominada por la distribución de dinero, debido a que la gente correspondiente no tienen otros bienes significativos (Levy y Levy, 2003), por lo que resulta en una distribución de Boltzmann-Gibbs. Por otro lado, la cola superior está de la distribución de riqueza está dominada por tasas de inversión (Levy y Levy, 2003), que implicaría una evolución temporal estocástica de riqueza, lo que sugiere la presencia de una cola de ley de potencias como un efecto de no-equilibrio que requiere constante crecimiento o inflación de la economía, pero que desaparece para un sistema cerrado con leyes conservativas, y que están bien definidas por el planteamiento descrito en la sección sobre distribución de Pareto.

RESULTADOS

I. AJUSTE DE LA DISTRIBUCIÓN DEL INGRESO EN MÉXICO

En México, el Instituto Nacional de Estadística y Geografía (INEGI) publica, de manera bienal (a partir del año 1992 y con la excepción del año 2005 que, acorde al INEGI, fue un levantamiento extraordinario), resultados sobre los ingresos y gastos de los hogares en su encuesta nacional de ingresos y gastos de los hogares [41] (ENIGH). Las bases de datos con las que se trabajó son archivos en formato DBF (data base file) que incluyen los ingresos mensuales y trimestrales de cada individuo encuestado. Así mismo, cada dato presenta varios folios. Uno de ellos es indicativo del hogar al que pertenecen los individuos, por lo que con esto se pudo determinar qué ingresos pertenecían a cada hogar mediante el acomodo por folio de los datos. Se encontraron hogares que dependían hasta de 9 ingresos individuales. La suma de dichos ingresos resultaba ser el ingreso mensual (o trimestral) por familia. Para el análisis de los datos realizado en este documento, se consideraron los **ingresos trimestrales familiares** para los años 1992, 1994, 1996, 1998, 2000, 2002, 2004, 2005, 2006 y 2008 considerando a su vez un **ajuste inflacionario ajustado al valor del peso mexicano en el año 2012** (el ajuste se multiplicó por cada dato de ingreso en las bases de datos de los años analizados). La cantidad total de datos para los ingresos individuales oscilaba, dependiendo el año, entre treinta y ciento diez mil, cifra que se vio reducida al considerar los ingresos trimestrales familiares (entre diez mil y treinta mil dependiendo del año). La manipulación de las bases de datos se realizó utilizando los softwares Microsoft Access 2010 y Microsoft Excel 2010.

a. Estimación de los parámetros x_{min} y α para la demarcación entre la zona de “ingresos bajos” de la zona de “ingresos altos”

Para determinar el valor de ingreso mínimo x_{min} a partir del cual existe comportamiento por ley de potencias, el exponente de Pareto α y un “test de bondad de ajuste”, se utilizó código de programación implementado en lenguaje Python por Joel Ornstein basado en la Ref. 25. Éste *script* implementa estimadores de máxima verosimilitud, tanto discretos como continuos, para el ajuste de

distribuciones de ley de potencias a series de datos empíricos mediante la estadística KS planteada en el inciso c de la sección leyes de potencias del capítulo IV. Posteriormente a la manipulación de las bases de datos para obtener los ingresos trimestrales familiares, los archivos fueron guardados en formato *.dat* para la aplicación del script mencionado anteriormente usando Python versión 5.7. Este mismo script calcula el exponente de Pareto utilizando la ecuación (24). Tanto el exponente, como el valor de ingreso mínimo, además del porcentaje de ingreso perteneciente a su porcentaje correspondiente de población y finalmente, un ajuste de mínimos cuadrados generalizados (R^2) obtenidos a partir de la prueba de bondad de ajuste para leyes de potencias en cada año son mostrados en la Tabla 1. A partir de estos datos, se obtuvo la demarcación de las diferentes zonas de ingreso: la zona de ingreso bajo, ajustada por la ecuación (12) y la zona de ingreso alto, ajustada por la ecuación (24) y cuyos parámetros fueron obtenidos a partir de las ecuaciones (23) para el valor de x_{min} y (18) para el exponente de Pareto α mediante las funciones de distribución acumulativas o CDF's.

ZONA DE INGRESO ALTO					
Año/Parámetro	α	x_min (\$)	Porcentaje de la población total	Porcentaje del ingreso total que se posee en esta zona	R^2
1992	2.653	79977.35	8.48	44.17	0.99
1994	2.999	81542.88	6.68	33.5	0.98
1996	3.43	124152	1.45	14.62	0.97
1998	3.029	57501.48	8.48	37.36	0.97
2000	3.122	86422.5	5.38	29.34	0.97
2002	3.701	143200.85	1.55	12.2	0.99
2004	3.274	115023	4.2	24.63	0.98
2005	3.118	72304.75	9.7	38.9	0.97
2006	3.325	107481.75	4.71	24.9	0.98
2008	3.062	84374.91	8.84	37.4	0.99

Tabla 1. Parámetros característicos de la zona de ingreso alto de la distribución obtenidos para la demarcación de la zona de ingresos bajos a partir de las ENIGH's. El valor de x_{min} resulta ser el primer valor a partir del cual empieza la zona de ingresos altos (esto es, comportamiento por ley de potencias) y, por ende, el valor en donde terminan los ingresos bajos. Se muestran también el porcentaje de la población total y su porcentaje del ingreso total que ésta posee, así como resultados de la prueba de mínimos cuadrados sobre el ajuste de la ecuación 22 obtenidos a partir de la prueba de bondad de ajuste del script de Python basado en la Ref. 25 para los diferentes años (1992-2008).

Es importante mencionar que el ajuste inflacionario¹⁰ para establecer el valor de la moneda al valor estandarizado del peso mexicano en el año 2012 se realizó multiplicando un factor de actualización calculado para cada año por el valor de cada ingreso familiar [39]. Éste factor se obtiene dividiendo una variable denominada índice nacional de precios al consumidor (INPC) reciente (en este caso, el INPC del año 2012) publicado actualmente por el Banco de México, entre el INPC para el año respectivo¹¹. Los valores de los distintos factores de actualización se muestran en la Tabla 2.

Año	Factor de Actualización
1992	6.29
1994	5.44
1996	2.8
1998	2.04
2000	1.67
2002	1.51
2004	1.38
2005	1.337
2006	1.285
2008	1.1627

Tabla 2. Factores de actualización del valor del peso ajustado al valor del mismo en el año 2012. Estos factores fueron multiplicados para sus respectivos años por el valor del ingreso trimestral familiar de los datos de las ENIGH's.

b. Gráficas de los datos de las ENIGH's del año 1992 al 2008

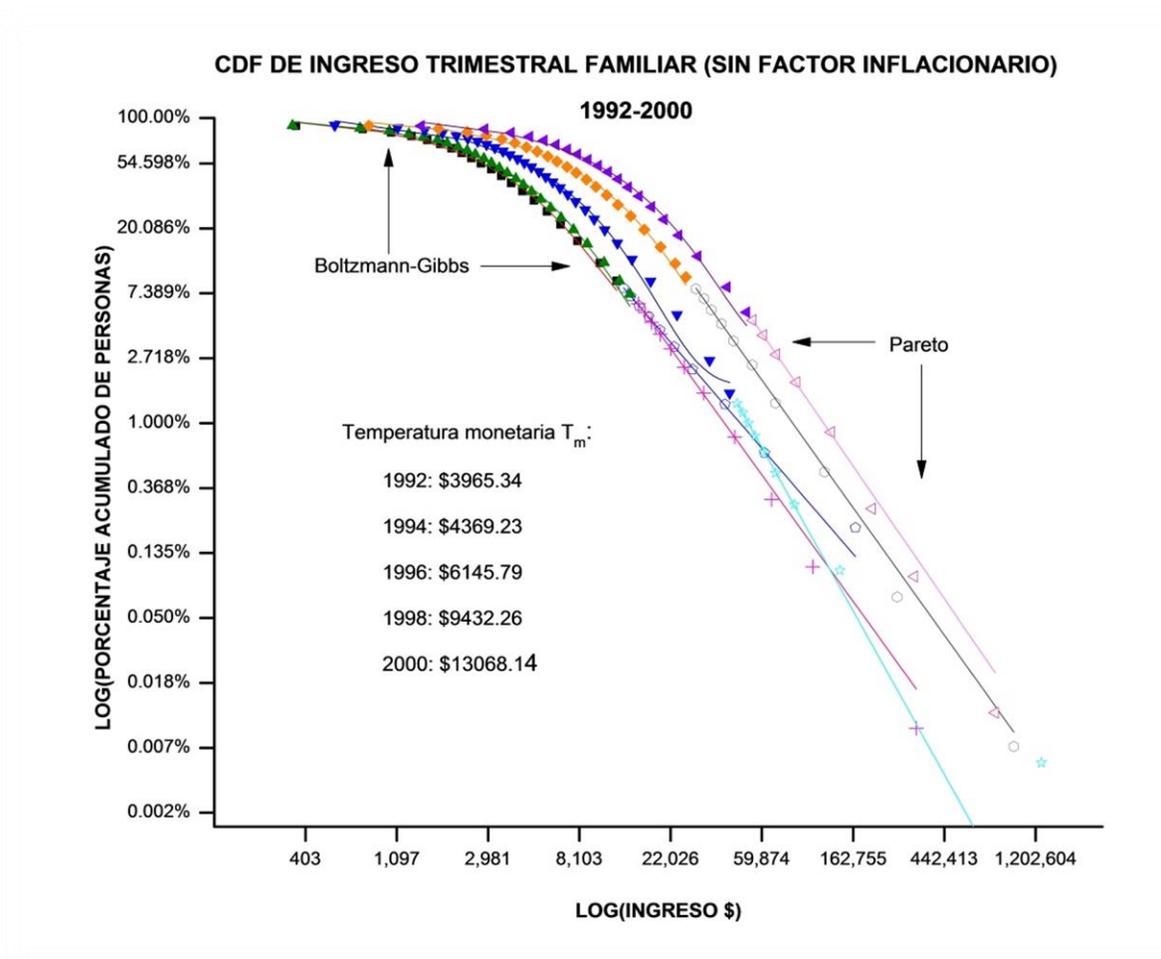
A continuación se muestran las gráficas de las funciones de distribución acumulativas (CDF's) con y sin ajuste inflacionario de todo el intervalo del ingreso familiar. Las gráficas incluyen el valor de la "Temperatura monetaria" T_m obtenida a partir de un ajuste de mínimos cuadrados usando la ecuación 12 aplicado a los datos correspondientes de la zona de ingresos bajos ($x < x_{min}$)

¹⁰ Se entiende por inflación, el crecimiento continuo y generalizado de los precios de los bienes y servicios que se expenden en una economía.

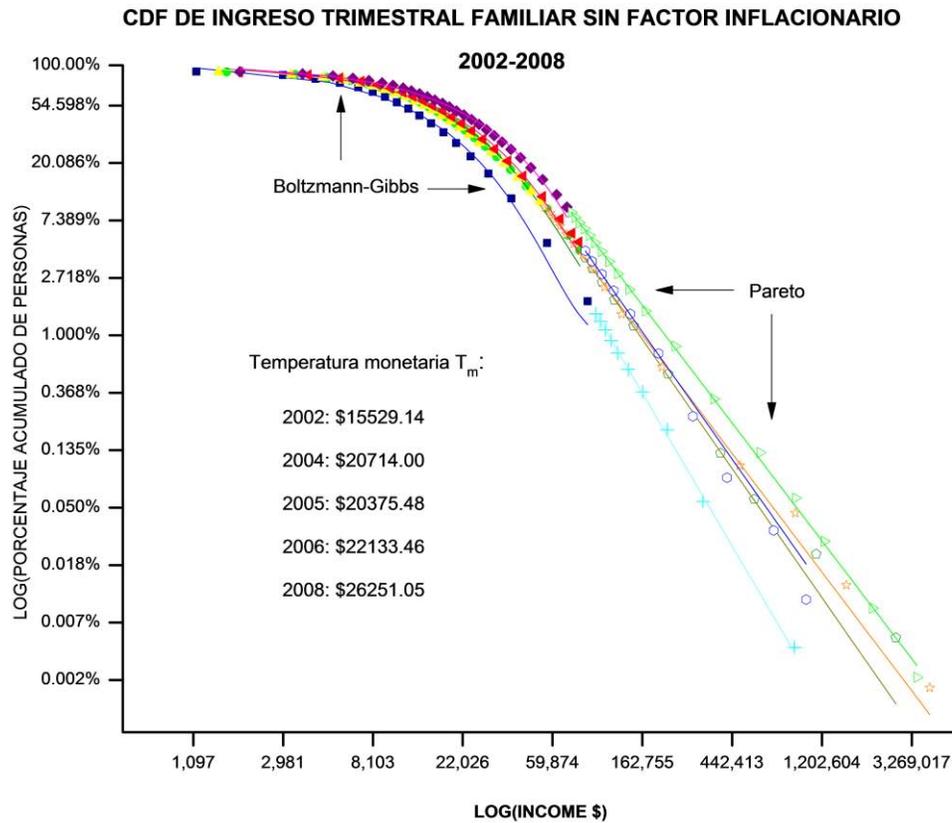
¹¹ El Índice Nacional de Precios al Consumidor (INPC) es un indicador económico que se emplea recurrentemente, cuya finalidad es medir a través del tiempo la variación de los precios de una canasta fija de bienes y servicios representativa del consumo de los hogares. Es el instrumento estadístico por medio del cual se mide el fenómeno económico que se conoce como inflación. Así, el INPC es a la inflación lo mismo que el termómetro es a la temperatura, el barómetro a la presión atmosférica o el velocímetro a la velocidad.

mediante el programa Origin versión 8.6. En ningún caso el ajuste por mínimos cuadrados dio un valor menor a $R^2 = 0.99$ y el promedio para todos los años de este mismo valor fue de $\langle R^2 \rangle = 0.995$.

a)



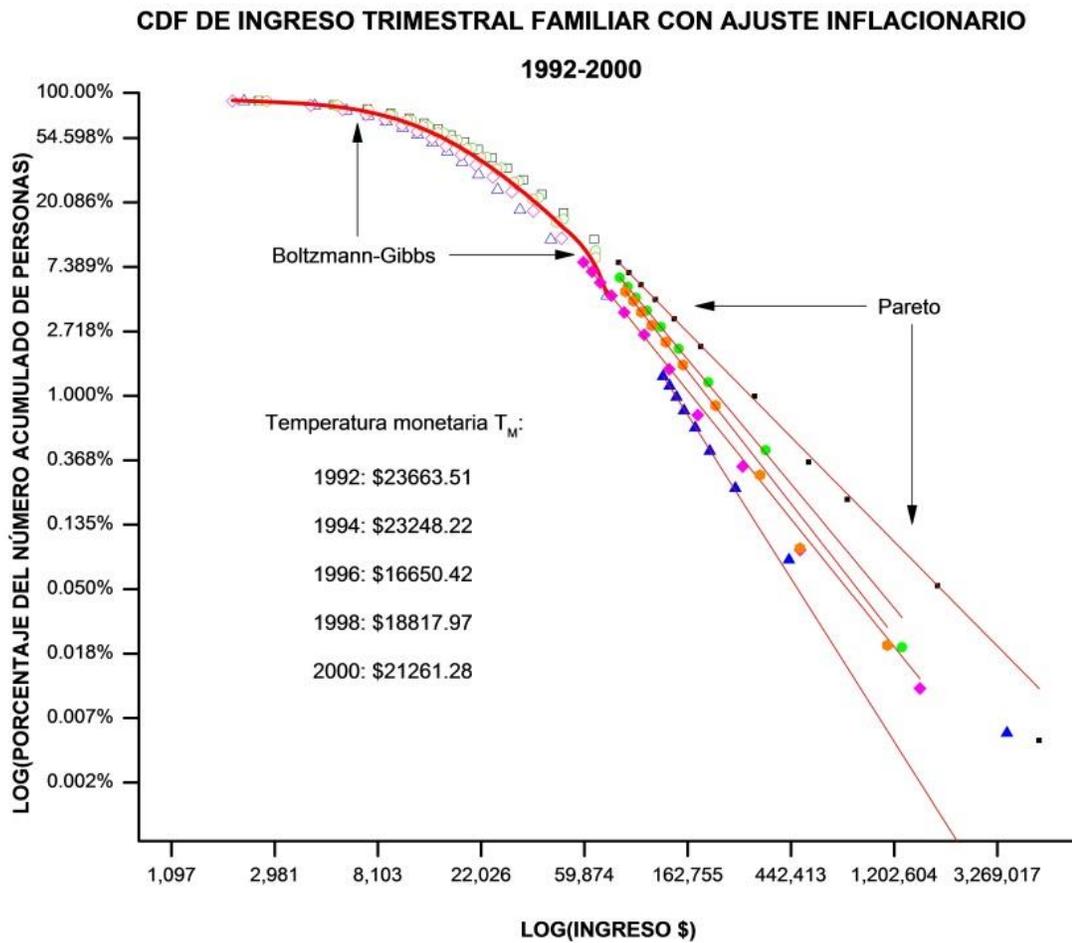
b)



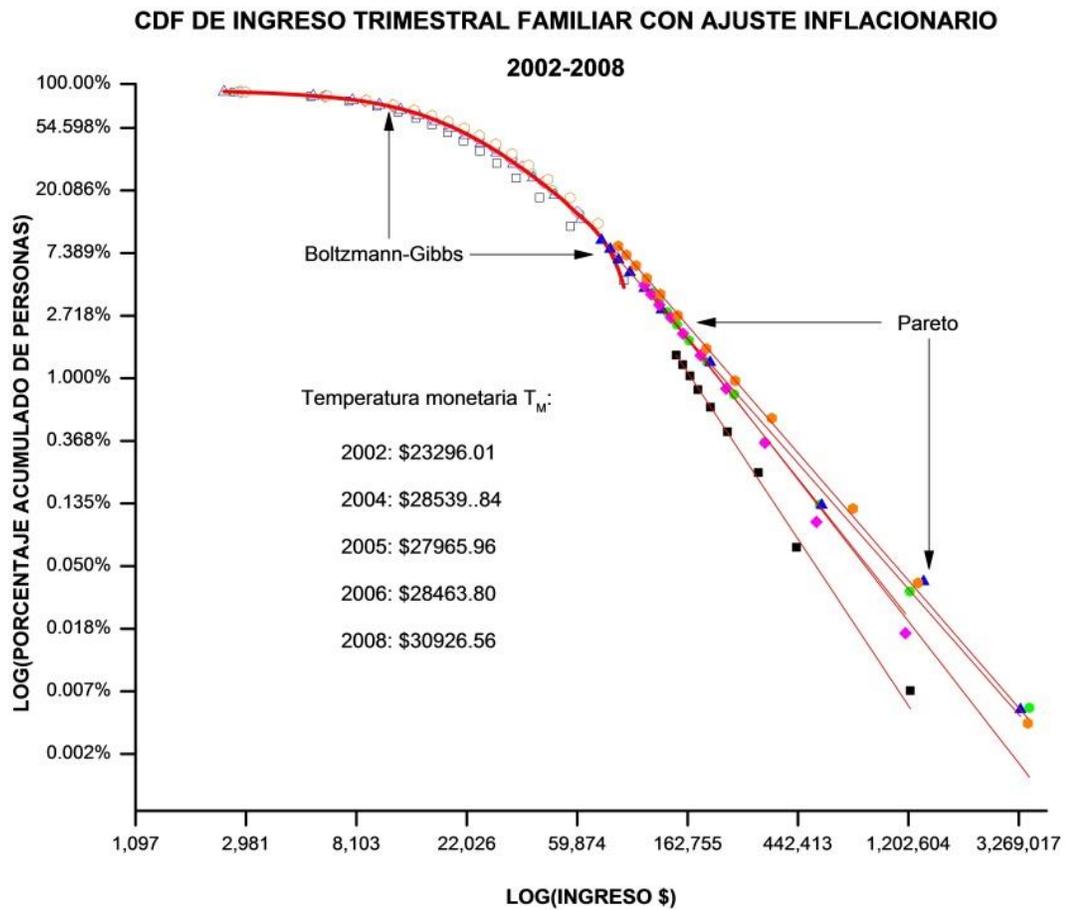
Gráfica I. Funciones de distribución acumulativa (CDF) del ingreso trimestral familiar para la década de los años noventa (inciso a) y la década de los años dos mil (inciso b), sin ajuste inflacionario obtenido a partir de los datos de las ENIGH's para cada año. Cada punto representa, para el eje x , el promedio de los ingresos trimestrales (los promedios se realizaron con aproximadamente 1000 datos para la zona de ingreso bajo y 100 datos para la zona de ingreso alto), mientras que para el eje y , su respectivo promedio de porcentaje acumulado de personas que tienen ese determinado ingreso. Las curvas continuas son los respectivos ajustes para cada serie de datos (exponencial de la ecuación 12 y por ley de potencias de la ecuación 22). La gráfica se realizó de esta manera por cuestiones estéticas. Para el respectivo análisis se consideró el total de los datos (entre diez y treinta mil datos dependiendo el año). Se muestran también las temperaturas monetarias de cada año. Se observa una clara demarcación del ingreso en dos clases.

A partir de ahora, se muestran las gráficas considerando los ajustes inflacionarios mencionados anteriormente y plasmados en la Tabla 2. El comportamiento gráfico es el mismo al de la Gráfica I, salvo que las curvas en la zona de ingreso bajo con el ajuste inflacionario, tienden a colapsar hacia una sola curva, plasmada como una curva continua roja gruesa, tanto en la década de los noventa como del dos mil.. Las gráficas también incluyen la temperatura monetaria T_m para los diferentes años analizados, valor que no cambió drásticamente año con año, salvo para la transición de 1994 a 1996 y 2002 a 2004.

a)



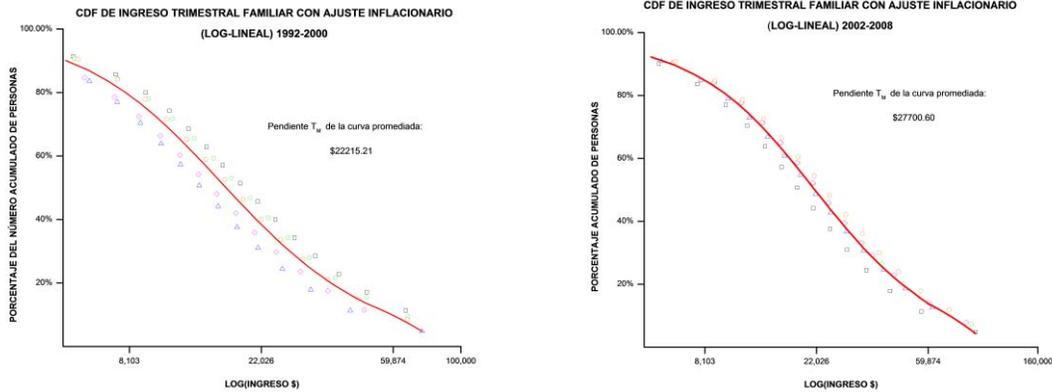
b)



Gráfica II. Funciones de distribución acumulativa (CDF) del ingreso trimestral familiar para la década de los noventa (inciso a) y dos mil (inciso b). La curva roja y gruesa de la zona de ingresos bajos es la curva hacia la que colapsan los datos de todos los años (caracterizados por los puntos transparentes), y las líneas rojas delgadas representan el ajuste para la zona de ingresos altos (puntos con relleno). Nuevamente se muestran las temperaturas monetarias para cada año y se observa la demarcación en dos regiones de todo el intervalo del ingreso.

Se encontró que las gráficas para la zona de ingreso bajo graficadas en $\ln(P(m))$ vs m tienden hacia una única línea recta para el 90-98% de los datos, confirmando así el comportamiento exponencial por la ecuación 12 para la zona baja de la distribución (ajuste $\langle R^2 \rangle = 0.995$). De las pendientes de estas líneas rectas se determinan las temperaturas monetarias T_m para cada año. Así mismo, de las gráficas en escala log-lineal se observa el colapso de todas las curvas de todos los años hacia una sola curva, lo que muestra que esta zona es muy estable, con un

comportamiento cuasi-estacionario ya que esencialmente no cambió en el rango de 16 años de datos de ingresos, salvo por el incremento gradual del parámetro T_m con el transcurso del tiempo y que se vio más brusco en las transiciones de los años 1994 a 1996 y 2002 a 2004.



Gráfica III. CDF's exclusivamente de las zonas de ingreso bajo (exponenciales) trimestral familiar para los años 1992-2000 (panel izquierdo) y 2002-2008 (panel derecho) graficados en escala log-lineal. Los puntos representan datos empíricos y la curva roja la función promedio hacia la que colapsan todos los datos, tras el ajuste inflacionario. Dentro se encuentra el valor de la pendiente, la temperatura monetaria T_m , para cada función promedio.

Por otro lado, para los ingresos $x \geq x_{min}$ graficado en escala log-log se observa que las gráficas son líneas rectas que no colapsan hacia una sola recta. Esto significa que la distribución cambia a ley de potencias en esta zona, con el exponente de Pareto α cambiante para cada año. Pese a haber utilizado el método de bondad de ajuste para el cálculo del exponente de Pareto en vez de determinarlo vía las pendientes de las rectas de las gráficas I y II, los valores obtenidos mediante éste último no varían drásticamente respecto a los obtenidos por el script de bondad de ajuste de la Ref. [25] (mediante la prueba de bondad de ajuste, se obtuvo $\langle R^2 \rangle = 0.979$). El parámetro α oscila entre 2.653 hasta 3.701, por lo que la ley de potencias no es universal para el ingreso alto. Debido a que la ley de potencias decae en el ingreso m (para el comportamiento de ley de potencias $x = m$) más lentamente que una función exponencial, la cola larga de la distribución contiene mucho más dinero (o ingreso) que la que se espera para la zona cuasi-estacionaria de la distribución.

CONCLUSIONES

Gracias a la base de datos de la ENIGH fue posible el manejo adecuado de los datos con el fin de saber qué familias dependía de cuales ingresos individuales. Con esto, fue posible obtener las funciones de distribución acumulativa (CDF) para cada año y por lo tanto verificar (después de ajuste por inflación) que la distribución del ingreso en México se caracteriza por dos clases dominantes: la clase de ingresos bajos, regida por la distribución de Boltzmann-Gibbs (promedio de correlación de 0,995) y la clase de ingresos altos regida por la distribución de Pareto (correlación media de 0,979), similar a la distribución del ingreso en otros países reportado por diferentes autores [8] [10] [11]. Así llegamos a la conclusión de que las distribuciones propuestas (Boltzmann-Gibbs de bajos ingresos y de Pareto de altos ingresos) son de carácter general para México, independientemente del año que se estudie. También se llega a la conclusión de que la parte inferior de la distribución es térmicamente estable o cuasi-estacionaria, con una temperatura monetaria media trimestral $\langle T_m \rangle = \$24,522.43$ de 1992 a 2008 (ajustada al valor del peso mexicano en 2012) debido a que las curvas colapsan hacia una sola en su correspondiente década y los cambios de temperatura son lentos y poco bruscos, excepto para las transiciones del año 1994 a 1996 y de 2002 a 2004, lo que significa una desestabilización para éstas zonas de las distribuciones en dichos años y que pueden ser explicadas por diferentes causas económicas, tales como la crisis que vivió el país en 1994.

Además, se concluye que los ingresos de la clase baja sólo dependen de salarios, preservados de forma local (principio de conservación de dinero) y que sus operaciones de intercambio pueden darse en interacciones entre pares de agentes (modelo cinético de transferencia de dinero) o entre los agentes y un gran depósito de dinero, lo que se refleja en su propia "estabilidad térmica", ya que, en principio, no tienen dependencia de variables muy complejas y cambiantes. Así, se refuerza la idea de una analogía entre sistemas estadísticos-termodinámicos (en particular la distribución de Boltzmann-Gibbs) con sistemas económicos, y como estos pueden ser modelados desde perspectivas cinéticas de intercambio aleatorio de dinero (o ingreso) por parejas de manera similar al intercambio de energía en choques moleculares en un gas ideal, considerando una

cantidad conservada (que en economía resulta ser el dinero), como alternativa a modelos de la economía neoclásica, mismos que utilizan procesos estocásticos para la descripción de dinámicas de ingreso o riqueza individual y con esto, derivar sus respectivas distribuciones de probabilidad (aproximaciones por un solo cuerpo). Sin embargo, el estudio realizado en este trabajo para la zona de ingreso alto de la distribución (a partir, en promedio, alrededor de \$ 95,000 pesos mexicanos de ingreso trimestral) concuerda con la descripción histórica de tales ingresos publicados en literatura económica. Además parece que los ingresos en esta zona dependen no sólo de salarios, sino además de algunos otros ingresos cuya estabilidad depende de muchos otros factores y que parecen regirse por la distribución de Pareto (correlación media de 0.979); estos ingresos pueden depender de inversiones, contribuciones en el mercado de valores, entre otros, que no siguen un principio de conservación local y cuya estabilidad es mucho menor que los salarios convencionales, apoyándose en variables económicas mucho más complicadas. Para el análisis de distribución de ley de potencias (distribución que rige esta zona de ingreso), se tiene que hacer uso de herramientas matemáticas más sofisticadas y novedosas explicaciones dadas por la teoría de los sistemas complejos, algunas de ellas ya planteadas aquí, como las transiciones de fase, y otras como la teoría de redes complejas. Sin embargo, para un análisis más profundo utilizando estas herramientas, se necesita más información que la que nos pueden brindar las ENIGH's, tales como un seguimiento preciso para cada año de cada uno de los agentes económicos encuestados. Sin embargo, lo valioso es confirmar que el comportamiento por ley de potencias se preserva en la zona de ingreso alto, como se ha publicado reiteradamente en la historia de la literatura económica, desde los trabajos del mismo Vilfredo Pareto. Así mismo, resulta valioso confirmar el comportamiento exponencial en la zona baja de la distribución en semejanza a economías de distintos países, y su explicación desde la perspectiva de la física estadística como alternativa al modelo estocástico planteado por el economista R. Gibrat en su ley de crecimiento proporcional. Ésta perspectiva (de la econofísica) resulta ser mucho más sencilla debido a que contiene pocos parámetros a medir, y que resultan ser concordantes con el modelo de gas ideal, rompiendo con hipótesis fundamentales de la teoría económica convencional, tales como la hipótesis de agentes racionales, ya que bajo la perspectiva de la teoría cinética, los agentes

interactúan de manera aleatoria buscando maximizar la entropía del sistema y no de manera racional, buscando maximizar su ganancia, como propone el principio de máxima utilidad. Sin embargo, recientemente se han publicado trabajos en donde relacionan este último principio con el principio de mínima acción en física, que hacen ver que la naturaleza tiene su propio principio de “ahorro”, por lo que se propone para posteriores trabajos el estudio de dicha relación.

La teoría cinética de gases ideales aplicada a interacciones entre agentes económicos, las transiciones de fase o las redes complejas, entre muchas otras teorías de ciencias duras y en particular de física y, de manera más actual, de los sistemas complejos, ofrecen explicaciones y herramientas alternativas a las propuestas por economistas o sociólogos, que si bien, han hecho grandes avances en la explicación de diferentes fenómenos de áreas sociales, también han demostrado quedarse cortos para la correcta modelación y formalización de otros tantos fenómenos, tales como la distribución del ingreso. Si bien, la econofísica no busca (ni buscará) reemplazar a la economía como rama del conocimientos dedicada a éste tipo de estudios, puede hacer grandes aportaciones que contribuyan en buena medida a la resolución de problemas que han afectado a la humanidad desde su origen, como la desigualdad social. Sin embargo, primeramente es necesario comprender las dinámicas complejas de dichos sistemas, dinámicas que dadas las herramientas convencionales, no han podido ser explicadas de manera suficiente, por lo que es en este sentido que áreas tan disímiles como las ciencias duras (física y sistemas complejos) deberán conjuntarse con las ciencias sociales (economía o sociología) para la mejor modelación de distintos fenómenos que nos atañen a todos.

AGRADECIMIENTOS

Agradezco el financiamiento parcial brindado por el Instituto de Física y la DGAPA de la UNAM, México en su proyecto No. IN105814.

BIBLIOGRAFÍA

1. Quezada Téllez A., “*Una visión crítica del modelo económico dominante desde la perspectiva de los sistemas complejos*”. Análisis Económico Núm. 63, vol. XXVI, 2011.
2. Ramírez S., Coordinador; Cocho G., Torres Alcaraz C., Torres Nafarrate J., Duval G., Miramontes P., Miramontes O., Gutiérrez Sánchez J. L., “*Perspectivas en la teoría de sistemas*”. Siglo veintiuno editores, S. A. de C. V., coedición con el Centro de Investigaciones Interdisciplinarias en Ciencias y Humanidades (CEIICH), UNAM. Primera edición, 1999.
3. Contreras A. M., Larralde H., “*Econofísica*”. Capítulo separado que integra el libro “Fronteras de la física en el Siglo XXI”, de Octavio Miramontes Y Karen Volke. México D.F., Coplt-arXives, 2013.
4. Landsburg S., “*The armchair Economist*”. The free press, 1993.
5. “*Price theory and applications*”, -----, 2nd ed. Dyrden press, 1992.
6. “*How did economists get it so wrong?*” The New York Times (Online), septiembre 2009.
7. “*Predicting economic crises with ‘econophysics’*”. Sciencedaily.com, Mayo 2010.
8. García-Colín L., “*De la máquina de vapor al cero absoluto (calor y entropía)*”. Fondo de cultura económica, 3ª edición, 2003.
9. Cont R., Bouchaud J. P., “*Herd Behaviour and aggregate fluctuations in financial markets*”. Macroeconomic Dynamics, volumen 4. Pp. 170-196. 2000.
10. Lillo F., Moro E., Vaglica G. y Mantegna R., “*Specialization of strategies and herding behavior of trading firms in a financial market*”. New Journal Physics, Volumen 10, p. 043019, 2008.
11. Ricardo Mansilla Corona, “*Una Breve Introducción a la Econofísica*”. Equipo Sirius, 2001.

12. Bouchaud J. P., "*Crises and collective socio-economic phenomena: cartoon models and challenges*". arXiv: 1209.0453v1, 2012.
13. Fama E., "The behavior of stock market prices". *Journal of Business*, vol. 38. Pp. 34-105. 1965.
14. <http://plato.stanford.edu/entries/chaos/#QualDefCha> consultada el día 08-10-2014
15. Richmond P., Mimkes J., Hutzler S., "*Econophysics and Physical Economics*". Oxford University Press, Primera edición, 2013.
16. R. Cont, "*Modeling economic randomness: statistical mechanics of market phenomena*", *Statistical Physics in the eve of the 21 century: the James B. McGuire Festschrift*. World Scientific, Singapore, 1999.
17. Bass A., "*The predictors*", T. Henry Holt and Co., 1999.
18. Mantegna R. N., Stanley H. E., "*An introduction to Econophysics: correlations and complexity in Finance*". Cambridge University Press, 2000.
19. Sharma B., Agrawal S., Sharma M., Bisen D., Sharma R. "*Econophysics: A brief review of historical development, present status and future trends*". ArXiv: 0810.5306, 2011.
20. Newman, M. E. J., "*Power laws, Pareto distributions and Zipf's law*". *Contemporary Physics*, 2007.
21. Yakovenko V. M., Rosser Jr. J. B., "*Colloquium: Statistical mechanics of Money, wealth, and income*". *Reviews of Modern Physics*, 2009.
22. Dragulescu A. A., Yakovenko V. M., "*Statistical Mechanics of Money*". *Eur. Phys. J. B.*, 2000.
23. Dragulescu A. A., Yakovenko V. M., "*Evidence for the exponential distribution of income in the USA*". *Eur. Phys. J. B.*, 2001a.
24. Dragulescu A. A., Yakovenko V. M., "*Exponential and power law probability distributions of wealth and income in the United Kingdom and the United States*". *Physica A* 299, 2001.
25. Clauset A., Shalizi C. R., Newman M. E. J., "*Power law distributions in empirical data*", *SIAM Review* 51, 2009.
26. Ogowang T., "Is the wealth of the world's billionaires Paretian?" *Physica A*, 2013.

27. Brzezinski M., "Do wealth distributions follow power laws? Evidence from 'rich lists'". *Physica A*, 2013.
28. Silva A. Chistian y Yakovenko, V. M., "*Temporal evolution of the 'thermal' and 'superthermal' income classes in the USA during 1983-2001*", *Europhysics Letters*, 69 (2), pp. 304-310, 2005.
29. Gibrat, R., "*Les Inégalités Economiques*", (Sirely Paris), 1931.
30. Kalecki, M., "*On the Gibrat Distribution*". *Econometrica* 13, 161-170, 1945.
31. Champernowne, D. G., "*A model of income distribution*". *Econom. J.* 63, 318-351, 1953.
32. García Colín L., "*Introducción a la termodinámica clásica*". Editorial Trillas. 4ª edición, 1990.
33. Ugalde E., "*De la mecánica estadística a la teoría ergódica*", *Revista Mexicana de Física*, 53 (2) 191-194, 2007.
34. Callen H. B., "*Thermodynamics*", John Wiley and sons Inc. 1976.
35. Reif F., "*Física Estadística*", Berkeley Physics course, volumen 5. Editorial Reverté, 1975.
36. Chakrabarti B. K., Chakraborti A., Chakravarty S. R. y Chatterjee A., "*Econophysics of Income and wealth distributions*", Cambridge University Press 2013.
37. V. Pareto, "*Cours d'Economie Politique*", Rouge, Lausanne, Switzerland, 1896.
38. P. Bak, C. Tang, K. Wiesenfeld, *Phys. Rev. Lett.* **59** 381 (1987).
39. <http://www.banxico.org.mx/politica-monetaria-e-inflacion/material-de-referencia/intermedio/inflacion/elaboracion-inpc-udis.html> consultada el día 04-06-2015.
40. Albert-László Barabási & Réka Albert "*Emergence of scaling in random networks*". *Science* 286: 509–512, 1999.
41. Encuesta Nacional de Ingresos y Gastos de los Hogares (ENIGH), 1992, 1994, 1996, 1998, 2000, 2002, 2004, 2005, 2006, 2008. Publicación bienal, Instituto Nacional de Estadística y Geografía (INEGI). Bases de datos y archivos PDF disponibles en <http://www.inegi.org.mx/est/contenidos/Proyectos/encuestas/hogares/regulares/enigh/>